ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική εργασία

Διδασκαλία των Λογαρίθμων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με Ιστορική Προοπτική

(Λάππα Ελένη, Α.Ε.Μ.: 570)

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστές: Θωμαΐδης Ιωάννης, Δρ., Σχολικός Σύμβουλος

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής

Φλώρινα, Ιανουάριος 2018

Διπλωματική εργασία

Διδασκαλία των Λογαρίθμων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με Ιστορική Προοπτική

Λάππα Ελένη

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστές: Θωμαΐδης Ιωάννης, Δρ., Σχολικός Σύμβουλος

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής

Η παρούσα Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική των Μαθηματικών", του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Η πλήρης αναφορά στο κείμενο αυτό είναι:

Λάππα Ελένη. 2018. Διδασκαλία των Λογαρίθμων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με Ιστορική Προοπτική. (Επιβλέπων Κ. Νικολαντωνάκης). Διπλωματική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Διατμηματικό – Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», σελ. 142.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ - ΕΙΚΟΝΕΣ

Σελ.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά διδακτική παρέμβαση με στόχο την ανάπτυξη δομικής αντίληψης της έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης, στα πλαίσια του Προγράμματος Σπουδών του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε τμήμα 16 μαθητών της Β΄ Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2016-2017. Η Ιστορία των Μαθηματικών (ΙΜ) χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο με στόχο την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές και ως σκοπός για την προσέγγιση του εξελισσόμενου χαρακτήρα της Μαθηματικής επιστήμης. Οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες, συμμετείχαν στην παρουσίαση της εξέλιξης των λογαριθμικών εννοιών και εργάστηκαν σε ιστορικά κείμενα, αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού Geogebra. Το παραγόμενο μαθηματικό έργο αναλύθηκε ως προς τις τρεις διαστάσεις του μοντέλου του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας, σημειωτικής, εργαλειακής και λεκτικής. Αναδείχθηκε η θετική συμβολή της ΙΜ στην απόκτηση δομικής αντίληψης των εννοιών και στη δυνατότητα αλλαγής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά καθώς και η ανάγκη συστηματικότερης ενσωμάτωσής της στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα.

Λέξεις – Κλειδιά: Ιστορία των Μαθηματικών, Μαθηματικός Χώρος Εργασίας, Σημειωτική Εργαλειακή Συλλογιστική Γενέσεις, Geogebra, Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία

Abstract

This Thesis deals with a teaching intervention concerning the development of the structural understanding of the logarithmic concept and the logarithmic function under the framework of the Greek Educational Program. The intervention was applied to an upper school class of 16 pupils during the school year of 2016-2017. History of Mathematics (HM) has been used both as a tool for the understanding of mathematical concepts and as a goal for approaching the evolving nature of mathematical science. The students, divided into groups, participated in the presentation of logarithmic concept development and worked on historical texts, using the Geogebra software. The mathematical work was analyzed in terms of the three dimensions of the model of the Mathematical Working Space, i.e. semiotic, instrumental and discursive. The HM's positive contribution to acquiring a conceptual understanding and the ability of changing pupils' attitudes towards mathematics, as well as the need for more systematic incorporation of HM into the Greek Educational System have been demonstrated**.**

Keywords: History of Mathematics, Mathematical Working Space, Semiotic Instrumental Discursive geneses, Geogebra, Collaborative teaching model

Εισαγωγή

Η αφηρημένη φύση των μαθηματικών εννοιών αποτελεί κεντρική πηγή δυσκολιών για τους μαθητές, στην πορεία εννοιολογικής κατανόησης των Μαθηματικών. Οι μαθηματικές έννοιες γίνονται αντικείμενο διδακτικής διαπραγμάτευσης μέσω των αναπαραστάσεων τους, χωρίς να είναι δυνατό να γίνουν αντιληπτές από τις αισθήσεις (Sfard, 1991). Το ζητούμενο στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η πληρέστερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η οποία εστιάζεται στη γνώση όχι μόνο του ‘πως πρέπει να κάνω κάτι’ αλλά και του ‘γιατί πρέπει να το κάνω’ (Skemp, 1976).

Με άλλα λόγια σε κάθε προσπάθεια παρατήρησης της τροχιάς μάθησης μιας μαθηματικής έννοιας έρχεται κατ’ ανάγκη στο προσκήνιο ο διαχωρισμός της μαθηματικής γνώσης σε διαδικαστική και εννοιολογική αντίστοιχα. Η εκμάθηση και εκτέλεση αλγορίθμων ρουτίνας καθώς και οι συνήθεις χειρισμοί που ασκούνται σε μαθηματικά αντικείμενα αφορούν τη διαδικαστική γνώση, αναγκαία για την εκτέλεση ενός μαθηματικού έργου αλλά όχι ικανή για την απόκτηση μιας κατά το δυνατό ολοκληρωμένης νοητικής δομής που αφορά τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Σε ένα υψηλότερο επίπεδο η εννοιολογική γνώση καλείται να συμπληρώσει το κενό της απάντησης του ‘γιατί’. Η εννοιολογική γνώση δεν αποτελεί απομονωμένο τμήμα γνώσης αλλά περιλαμβάνει τις απαραίτητες συνδέσεις για την κατασκευή ενός δομημένου και ευέλικτου γνωστικού σχήματος (Gray & Tall, 1994).

Υπό το πρίσμα αυτό, η Sfard (1991) υποστηρίζει ότι η νοητική δομή που αφορά μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρωμένη όταν συνίσταται στην ανάπτυξη δύο ποιοτικά διαφορετικών και ταυτοχρόνως αλληλοσυμπληρούμενων αντιλήψεων της έννοιας αυτής: της λειτουργικής (operational) και της δομικής (structural). Η λειτουργική αντίληψη εκλαμβάνει την έννοια ως διαδικασία, δίνοντας σε αυτή δυναμικό χαρακτήρα και εκφράζεται με την εκτέλεση ενεργειών, ενώ η δομική θεωρεί την έννοια ως αντικείμενο και αποτελεί προϊόν διεργασιών εσωτερικού στοχασμού.

Η έννοια του λογαρίθμου θεωρείται σημαντική στη διδακτέα ύλη της Β/θμιας Εκπαίδευσης, εμπεριέχεται και σε άλλα γνωστικά πεδία όπως στη Χημεία, στη Φυσική, κλπ. και γενικότερα αποτελεί εργαλείο εξήγησης πολλών φαινομένων. Αναμφισβήτητα, στην Ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα υπάρχει εμφανής δυσκολία των μαθητών στην απόκτηση δομικής αντίληψης της έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης και κατεπέκταση δυσκολία στην αντιμετώπιση σχετικών θεμάτων ακόμα και σε δραστηριότητες διαδικαστικής φύσης (Παναγιώτου, 2014; Αεράκης, 2015). Επομένως, είναι αναγκαία η εύρεση τρόπων προσέγγισης και κατανόησης εκ μέρους των μαθητών των εννοιών αυτών και παράλληλα να ελαχιστοποιηθεί η ύπαρξη αρνητικής προδιάθεσης έναντι των Μαθηματικών η οποία συνήθως χαρακτηρίζει το κλίμα της σχολικής τάξης.

Στο 1^{ο} κεφάλαιο που ακολουθεί, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, συζητείται η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών (ΙΜ) στη διδασκαλία ως εργαλείου και ως σκοπού, καθώς και οι λόγοι για τους οποίους ενδείκνυται η χρησιμοποίηση της ΙΜ στη διδακτική πράξη (Tzanakis et al., 2000; Jankvist, 2009α; Tzanakis & Thomaidis, 2012). Επίσης αναφέρονται οι τρόποι με τους οποίους δύναται να συμπεριληφθεί η ΙΜ στη διδασκαλία αλλά και ενστάσεις που έχουν διατυπωθεί σε σχέση με την χρήση της. Τέλος, οι προηγούμενες θέσεις συνοψίζονται εστιάζοντας στην παρούσα διδακτική προσέγγιση στην οποία η ΙΜ αξιοποιήθηκε για την κατανόηση από τους μαθητές της μαθηματικής έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης και την απόπειρα προσέγγισης των Μαθηματικών από διαφορετική οπτική γωνία σε σχέση με αυτήν που παρουσιάζεται σε μία τυπική διδασκαλία στο Λύκειο.

Το 2^{ο} κεφάλαιο αφορά σε ιστορική αναδρομή στην έννοια του λογάριθμου, μέσω της οποίας αναδεικνύονται βασικά σημεία προς διδακτική αξιοποίηση, τα οποία συμπεριελήφθησαν στο σχεδιασμό της παρέμβασης. Συγκεκριμένα η παρέμβαση εστίασε στην αρχική αναγκαιότητα επινόησης της έννοιας και στην προσέγγιση του Napier, στην ετυμολογία της λέξης ‘λογάριθμος’ που προκύπτει από την αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, στην προέλευση των φυσικών λογαρίθμων και τη δυνατότητα ορισμού του λογαρίθμου οποιουδήποτε θετικού αριθμού, στον ορισμό του Euler και τέλος σε σύγχρονες εφαρμογές της έννοιας, οι οποίες σηματοδοτούν εξέλιξή της από υπολογιστικό σε θεωρητικό εργαλείο, και δικαιολογούν τη συμπερίληψή της ως διδακτικού αντικειμένου στο Πρόγραμμα Σπουδών.

Το μοντέλο του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (ΜΧΕ) αποτελεί εργαλείο ανάλυσης του παραγόμενου μαθηματικού έργου σε αλληλεπιδρώντα επίπεδα (Kuzniak et al., 2016α; Kuzniak et al., 2016β). Στο 3^{ο} κεφάλαιο συζητώνται η δομή του, ο τρόπος λειτουργίας του καθώς και οι δυνατότητες αλλά και προκλήσεις που το μοντέλο αντιμετωπίζει. Στο σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης χρησιμοποιήθηκε ώστε οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν καθώς και τα βήματα που ακολουθήθηκαν να υποστηρίζουν κατά το δυνατό τη δημιουργία κατάλληλου Χώρου Εργασίας για τους μαθητές με σκοπό την ανέλιξη από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο μέσω των τριών διαστάσεων του μοντέλου, σημειωτικής, εργαλειακής και λεκτικής. Η επιτυχής ανάπτυξη της εργασίας στα τρία επίπεδα που ορίζουν οι διαστάσεις αυτές, οριοθετεί την παραγωγή επαρκούς μαθηματικού έργου με την έννοια της απόκτησης δομικής αντίληψης των εννοιών. Το μοντέλο επίσης χρησιμοποιήθηκε στην παρατήρηση και ανάλυση της ροής της εργασίας στην τάξη, μέσω της παρακολούθησης της πορείας ανάπτυξης του προσωπικού Χώρου Εργασίας των μαθητών.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο (Μεθοδολογία έρευνας) περιγράφονται η χρησιμότητα της έρευνας, ο σκοπός της και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν καθώς και οι συμμετέχοντες στην έρευνα. Επίσης αναλύεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης και η δομή του κατάλληλου ΜΧΕ, μέσω της επιλογής των δραστηριοτήτων, τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν και οι διαδικασίες που ακολουθήθηκαν.

Στο 5^{ο} κεφάλαιο (Αποτελέσματα) συζητείται η υλοποίηση του κατάλληλου ΜΧΕ μέσω της ανάπτυξης των προσωπικών ΜΧΕ των ομάδων. Η εξέλιξη της εργασίας των ομάδων παρακολουθείται βήμα προς βήμα στην ανάλυση των αποτελεσμάτων των φύλλων εργασίας. Περιγράφεται η διάρθρωση της εργασίας και οι τυχόν δυσλειτουργίες οι οποίες προέκυψαν στις κατευθύνσεις της σημειωτικής, εργαλειακής και λεκτικής γένεσης. Επιπρόσθετα, επισημαίνονται κενά ανάμεσα στον ΧΕ της διδάσκουσας κατά τον σχεδιασμό της παρέμβασης και στους ΧΕ των ομάδων και οι τρόποι αξιοποίησής τους για τη βελτίωση του κατάλληλου ΜΧΕ. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των ερωτηματολογίων αντανακλά την λειτουργία του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών μετά την παρέμβαση.

Τέλος, στο 6^{ο} κεφάλαιο (Συμπεράσματα-Συζήτηση) συζητώνται τα αποτελέσματα της έρευνας και τεκμηριώνονται τα σχετικά συμπεράσματα καθώς και οι απαντήσεις που προέκυψαν για τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία

«*I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history*»

J. W. L. Glaisher (1848 – 1928)

Είναι σύνηθες στη μαθηματική εκπαίδευση, τα αντικείμενα του μαθηματικού κλάδου να παρουσιάζονται διδακτικά στην τελική τους ραφιναρισμένη μορφή μέσα από μια γραμμική τροχιά ανάπτυξης. Το ερώτημα όμως εναπόκειται στο αν ένας τέτοιος τρόπος διαπραγμάτευσης είναι κατάλληλος και κατά το δυνατό αποτελεσματικός για τη διδασκαλία των Μαθηματικών ή, αν μεταξύ άλλων, συντελεί στη δημιουργία αναπάντητων ερωτημάτων ως προς την αναγκαιότητα και το σκοπό ύπαρξης του κλάδου στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. Σύμφωνα με τους Tzanakis & Thomaidis (2000), η επιστήμη δεν εξαντλείται μόνο στα αποτελέσματά της καθώς η τροχιά ανάπτυξής της εμπεριέχει έτη προσπαθειών, αμφιβολιών, αναθεωρήσεων και διορθώσεων. Συγκεκριμένα για τα Μαθηματικά: «Το νόημα μιας έννοιας (θεωρήματος ή μεθόδου) δεν εξαντλείται στον σύγχρονο ορισμό ή τη μορφή της, αλλά προκύπτει από την πορεία ανάπτυξης της έννοιας στο παρελθόν και στο παρόν», (Sierpinska, 1991 στους Tzanakis & Thomaidis, 2000). Στην Ελληνική πραγματικότητα, η δαιδαλώδης αυτή πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού κλάδου συνήθως δεν αναδεικνύεται σε μία συμβατική τάξη Μαθηματικών, όπου ακολουθείται ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας βασιζόμενος στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Το ερώτημα λοιπόν είναι αν η ΙΜ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία ώστε να βοηθήσει στην κατανόηση εννοιών, μεθόδων, διαδικασιών. Γεγονός είναι ότι η συμπερίληψη της ΙΜ στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί μία απαιτητική δραστηριότητα, καθώς προϋποθέτει όχι μόνο γνωστική επάρκεια του μαθηματικού αντικειμένου αλλά και την ικανότητα μελέτης και μετάφρασης ιστορικών πηγών, διασταύρωσης ιστορικών γεγονότων, επιλογής και περιγραφής κατάλληλων κειμένων και πληροφοριών (Thomaidis & Tzanakis, 2009). Στη συζήτηση για τη χρησιμοποίηση της ΙΜ στη διδασκαλία των Μαθηματικών ως αρωγού, δύο είναι οι βασικές ιδέες που κυριαρχούν (Jankvist, 2009α). Η πρώτη θεωρεί την ιστορία ως εργαλείο (tool) και η δεύτερη ως σκοπό (goal). Με βάση τους δύο αυτούς άξονες, τα κυριότερα ερωτηματικά που εγείρονται αφορούν: α) τους λόγους (whys) για τους οποίους ενδείκνυται η χρησιμοποίηση της ΙΜ και β) τους τρόπους (hows) με τους οποίους η ΙΜ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία.

Η ιστορία ως εργαλείο

Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείου αφορά την εκ των "έσω μελέτη" των Μαθηματικών, δηλαδή τη μελέτη που έχει ως στόχο την κατανόηση εννοιών, αρχών, μεθόδων, διαδικασιών. Υπηρετώντας το σκοπό αυτό, η ιστορία μπορεί να λειτουργήσει βοηθητικά ως κινητήριος δύναμη, ώστε να δώσει κίνητρα στους μαθητές κατά τη διαδικασία της μάθησης των Μαθηματικών υποκινώντας την ανάπτυξη ενδιαφέροντος από μέρους τους, καθώς και να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ τυπικών και μη τυπικών μορφών των Μαθηματικών (Farmaki et al., 2004). Η ιστορική προσέγγιση των Μαθηματικών τα καθιστά περισσότερο προσηνή στους μαθητές, οι οποίοι μέσω της επαφής τους με την πορεία εξέλιξης του αντικειμένου αναγνωρίζουν δυσκολίες τις οποίες καλούνται να αντιμετωπίσουν οι ίδιοι, όπως ακριβώς έκαναν και επιφανείς μαθηματικοί του παρελθόντος. Αντιλαμβάνονται δε, πως η πορεία οικοδόμησης της γνώσης χαρακτηρίζεται από δοκιμές, λάθη και διορθώσεις, κατασκευές και ανακατασκευές απαιτώντας πολυετείς προσπάθειες ωσότου παγιωθεί στη σημερινή της μορφή. (Fauvel, 1991; Tzanakis & Thomaidis, 2000).

Η χρησιμοποίηση της ιστορίας ως εργαλείου υποστηρίζεται επίσης θεωρητικά, στη βάση της λεγόμενης γενετικής αρχής, η οποία πρεσβεύει ότι η οντογένεση ακολουθεί την φυλογένεση. Η οντογένεση αφορά την εξέλιξη ενός μόνο οργανισμού, από τη δημιουργία του έως και την ωρίμανσή του, ενώ η φυλογένεση αναφέρεται στην εξέλιξη ολόκληρου του είδους στο πέρασμα του χρόνου. Η εφαρμογή της αρχής αυτής στη μάθηση των Μαθηματικών μεταφράζεται στο ότι ο νους του ατόμου που μαθαίνει Μαθηματικά ακολουθεί τα ίδια περίπου στάδια, τα οποία ακολούθησαν οι μαθηματικές έννοιες κατά τη διάρκεια της εξέλιξής τους (Jankvist, 2009α). Από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, η θέση αυτή υιοθετήθηκε από μαθηματικούς και ερευνητές της διδακτικής, οι οποίοι υποστήριζαν την δυνατότητα απευθείας παραλληλισμού (historical parallelism), ανάμεσα στον τρόπο με τον οποίο αναπτύχθηκε η μαθηματική επιστήμη και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν Μαθηματικά (Thomaidis & Tzanakis, 2007). Η ιδέα της αυστηρής αντιστοιχίας παρόντος και παρελθόντος αμφισβητήθηκε από αρκετούς ερευνητές (Sierpinska, 1994; Arcavi, 2004 όπως αναφέρονται στους Thomaidis & Tzanakis, 2007), θεωρώντας ότι η πορεία μάθησης δεν εμπεριέχει ακριβώς την εφαρμογή της γενετικής αρχής στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά ότι τελικά είναι αποτέλεσμα ανάπτυξης κοινών μηχανισμών οι οποίοι λειτουργούν παρόμοια στη μάθηση του τότε και του τώρα.

Στο πλαίσιο της συζήτησης αυτής, υπάρχει η άποψη ότι η ΙΜ μπορεί επίσης να συνδράμει στην αναγνώριση καθώς και την αντιμετώπιση των επιστημολογικών εμποδίων, τα οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την ίδια τη φύση της συγκεκριμένης γνώσης και διαφαίνονται στη μελέτη της εξέλιξής της στο πέρασμα του χρόνου. Σύμφωνα με τον Brousseau (1997), τα επιστημολογικά εμπόδια δεν πρέπει και δεν είναι δυνατό να αποφεύγονται εξαιτίας του δομικού τους ρόλου στην κατασκευή της νέας γνώσης. Αν και έχει τεθεί υπό συζήτηση ο διαχωρισμός επιστημολογικών και διδακτικών εμποδίων (Artique, 1992), η μελέτη των Μαθηματικών μέσα από μία ιστορική προοπτική είναι δυνατό να καταλήξει σε βασικά συμπεράσματα σε σχέση με τη φύση της ίδιας της γνώσης που πρέπει να διδαχθεί καθώς και με νέους τρόπους προσέγγισης της γνώσης αυτής (Katz & Barton, 2007). Υπό αυτό το πρίσμα, η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό εργαλείο που συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών δίνοντας διαφορετική οπτική και τρόπους παρουσίασης (modes of presentation) των εννοιών και εφοδιάζοντας τους εμπλεκόμενους με τη γνώση μιας υποθετικής μαθησιακής τροχιάς (Helfgott, 2004; Kleiner, 2001).

Η ιστορία ως σκοπός

Σύμφωνα με τον Jankvist (2009α), η θέση που υποστηρίζει τη χρήση της ιστορίας ως σκοπού αφορά την "από έξω" μελέτη των Μαθηματικών (meta issues of Mathematics or outer issues), δηλ. την παρατήρηση της τροχιάς ανάπτυξης και εξέλιξής τους καθώς και των εσωτερικών και εξωτερικών παραγόντων που επηρέασαν την εξέλιξη αυτή. Οι απόψεις που σχετίζονται με τη χρησιμοποίηση της ιστορίας ως σκοπού, ναι μεν δεν εκλαμβάνουν την ΙΜ μόνο ως βοηθητικό εργαλείο, ταυτόχρονα όμως δε, δεν αφορούν στη μάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών αυτής καθεαυτής αλλά στην μελέτη της πορείας εξέλιξης των Μαθηματικών ως γνωστικού αντικειμένου. Μέσα από τη μελέτη αυτή προκύπτουν συμπεράσματα για την ύπαρξη των Μαθηματικών στο χώρο και το χρόνο (Tzanakis & Thomaidis, 2000), για τους λόγους που ώθησαν στην ανάπτυξη του επιστημονικού αυτού κλάδου (Charalambous et al., 2009), για την αλληλεπίδραση μεταξύ των Μαθηματικών και των πολιτισμικών περιβαλλόντων στα οποία αυτά αναπτύχθηκαν (Tzanakis & Thomaidis, 2000), καθώς και για το αν τα Μαθηματικά του παρελθόντος μπορούν να θεωρηθούν άχρηστα και απαρχαιωμένα (Jankvist, 2009β). Με αυτή την εστίαση, τα Μαθηματικά μελετώνται από ένα εξωτερικό επίπεδο, ένα επίπεδο μετα-προοπτικής (Αεράκης, 2015).

Οι δύο όψεις της χρήσης της ΙΜ οι οποίες προαναφέρθηκαν, δεν λειτουργούν πάντα ως ανεξάρτητοι άξονες αλλά είναι δυνατό να θεωρηθεί ότι αποτελούν τους δύο αλληλοσχετιζόμενους πόλους ενός εν δυνάμει εννοιολογικού διπόλου (Tzanakis & Thomaidis, 2012). Η άποψη αυτή βασίζεται στο ότι ναι μεν η χρήση της ιστορίας ως σκοπού δεν αφορά αυτή καθεαυτή τη διδασκαλία της, αλλά τη μελέτη εξωτερικών θεμάτων των Μαθηματικών, όπως προαναφέρθηκε, η μελέτη αυτή δε, μπορεί να φωτίσει πλευρές εσωτερικών θεμάτων που αφορούν τα Μαθηματικά. Αντίστροφα, η χρήση της ΙΜ ως εργαλείου για την κατανόηση συγκεκριμένων εσωτερικών θεμάτων μπορεί να επεκταθεί στη διαπραγμάτευση εξωτερικών θεμάτων τα οποία σχετίζονται με τα πρώτα.

Οι λόγοι χρησιμοποίησης της ΙΜ στη διδασκαλία

Οι Tzanakis et al. (2000), στη μελέτη που εκπονήθηκε για το ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), αναφέρουν 17 σημεία στα οποία λειτουργεί θετικά η χρήση της ΙΜ στη διδασκαλία και τα οποία αφορούν τις εξής πέντε βασικές περιοχές:

1. Μάθηση των Μαθηματικών.
2. Φύση των Μαθηματικών και της Μαθηματικής δραστηριότητας.
3. Διδακτικό υπόβαθρο (ρεπερτόριο) των διδασκόντων.
4. Συναισθηματική προδιάθεση απέναντι στα Μαθηματικά.
5. Αντιμετώπιση των Μαθηματικών ως πολιτισμικού προϊόντος.

Στην πρώτη βασική περιοχή, αναφέρεται μεταξύ άλλων η δυνατότητα της ιστορίας να κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών, να προωθεί την εμπλοκή τους στη μαθηματική δραστηριότητα, καθώς και να λειτουργεί ως γέφυρα που συνδέει Μαθηματικά με άλλα αντικείμενα. Μέσω της ιστορικής μελέτης καταρρίπτεται η εικόνα των «ραφιναρισμένων» Μαθηματικών και προσδίδεται η οπτική ότι το μαθηματικό οικοδόμημα είναι το αποτέλεσμα ανθρώπινης προσπάθειας με σκοπό την επίλυση προβλημάτων που προέκυπταν. Ταυτόχρονα, η ιστορία κατέχει γενικότερη εκπαιδευτική αξία καλλιεργώντας δεξιότητες που δεν σχετίζονται άμεσα με τα Μαθηματικά (Tzanakis & Thomaidis, 2012).

Στη δεύτερη βασική περιοχή, η αναφορά στη φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας διαρθρώνεται σε δύο άξονες που αφορούν τη μορφή και το περιεχόμενο. Όσον αφορά τη μορφή, σύμφωνα με τους Tzanakis et al. (2000), η χρήση πρωτογενών και δευτερογενών ιστορικών πηγών δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης παλαιότερων και σύγχρονων μορφών των Μαθηματικών, ως προς τις αντιλήψεις, τα σύμβολα, τις μεθόδους. Μέσα από αυτή τη σύγκριση έρχονται στο προσκήνιο οι έννοιες της σαφήνειας, της επάρκειας, της πληρότητας και ο τρόπος με τον οποίο αυτές εκφράζονται σε κάθε εποχή. Όσον αφορά το περιεχόμενο, η ιστορία μπορεί να ωθήσει σε έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, των θεωρημάτων, των αποδείξεων κλπ., ο οποίος εμπεριέχει την εκτίμηση της αποτυχίας και του λάθους ως κινητήριας δύναμης για την ανάπτυξη του επιστημονικού αυτού κλάδου. Τα Μαθηματικά, μέσα από μία εξωτερική οπτική, θεωρούνται ως ένα δυναμικά μεταβαλλόμενο σύστημα.

Όσον αφορά την τρίτη βασική περιοχή, η ενασχόληση με την ΙΜ εμπλουτίζει το διδακτικό ρεπερτόριο των διδασκόντων δίνοντάς τους τη δυνατότητα εναλλακτικών τρόπων προσέγγισης των μαθηματικών αντικειμένων στη διδακτική πράξη. Η

Μαθηματική δραστηριότητα αναγνωρίζεται ως δημιουργική δραστηριότητα που χαρακτηρίζεται από κίνητρα, δυναμική πορεία εξέλιξης και αποτελέσματα (Tzanakis et al., 2000). Ταυτόχρονα, οι διδάσκοντες αποκτούν γνώση πιθανών διδακτικών δυσκολιών και εμποδίων και καλλιεργούν την ικανότητά τους να δημιουργούν κίνητρα μάθησης, να αναγνωρίζουν και να δέχονται μη συμβατικούς τρόπους προσέγγισης των μαθηματικών θεμάτων, να επεξηγούν και να διαπραγματεύονται συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσουν την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (pedagogical content knowledge) που οφείλουν να κατέχουν (Ball et al., 2008). Η γνώση αυτή είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία δίνοντας τη δυνατότητα σύνδεσης της ακαδημαϊκής μορφής της επιστημονικής γνώσης και της γνώσης που αφορά τη διδακτική πρακτική. Συνίσταται στη γνώση των δυσκολιών που είναι πιθανό να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου, καθώς και στον αποτελεσματικό τρόπο παρουσίασης του αντικειμένου αυτού.

Στην τέταρτη βασική περιοχή, η χρησιμοποίηση της ΙΜ δύναται να επηρεάσει τη συναισθηματική προδιάθεση διδασκόντων και διδασκομένων απέναντι στα Μαθηματικά, αφού η γνώση των σταδίων εξέλιξης, των δυσκολιών που προέκυψαν κατά την ανάπτυξη και εξέλιξη των Μαθηματικών, των παρανοήσεων και λαθών που έγιναν και των προσπαθειών διόρθωσης των λαθών αυτών, προσδίδουν στα Μαθηματικά υπόσταση προϊόντος ανθρώπινης προσπάθειας. Οι συμμετέχοντες ενθαρρύνονται να αμφιβάλλουν, να θέτουν ερωτήματα και να ερευνούν. Με τον τρόπο αυτό, η ιστορία μπορεί να λειτουργήσει υποστηρικτικά απέναντι στα αισθήματα της αποθάρρυνσης, της αποτυχίας και του φόβου που συχνά εγείρονται και είναι εμφανή κατά την πορεία της διδακτικής πράξης.

Σχετικά με την πέμπτη βασική περιοχή, ένας από τους βασικότερους λόγους για τη χρησιμοποίηση της ΙΜ στη διδασκαλία ως σκοπού, αφορά την αντιμετώπιση της μαθηματικής επιστήμης ως πολιτισμικού προϊόντος που είναι αποτέλεσμα κοινής ανθρώπινης προσπάθειας. Μέσω της ιστορίας μπορούμε να διακρίνουμε τους εσωτερικούς και τους εξωτερικούς λόγους που επηρέασαν την εξέλιξη των Μαθηματικών (Tzanakis & Thomaidis, 2012) καθώς και τους τρόπους με τους οποίους η εξέλιξη αυτή επηρεάστηκε σε μεγάλο βαθμό από πολιτισμικούς και κοινωνικούς παράγοντες (Tzanakis et al., 2000). Μέσω της μελέτης της ΙΜ, διδάσκοντες και διδασκόμενοι γνωρίζουν την ανάπτυξη των Μαθηματικών μέσα σε διαφορετικές κουλτούρες και πολιτισμούς. Υπό το πρίσμα αυτό, η ΙΜ υπηρετεί το ρόλο της ως σκοπού. Η προσέγγιση αυτή ωστόσο, μπορεί επίσης να λειτουργήσει βοηθητικά στην κατανόηση από τους μαθητές συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, τις οποίες αντιμετωπίζουν μέσα σε διαφορετικά ιστορικά πλαίσια. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, στο δίπολο «εργαλείο-σκοπός» παρατηρείται μετατόπιση του κέντρου βάρους προς τον ρόλο της ιστορίας ως εργαλείου.

Ο Jankvist (2009) στοχεύοντας στη συστηματική κατηγοριοποίηση των λόγων και των τρόπων για τους οποίους και με τους οποίους αντίστοιχα, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η ΙΜ και ταυτόχρονα στην ανάλυση των μεταξύ τους συσχετίσεων, επισημαίνει ότι η ιστορία μπορεί να χρησιμεύσει ως πηγή ιδεών για την κατασκευή υλικού που υποβοηθά στο διδακτικό έργο, γεγονός το οποίο αποτελεί έναν επιπλέον λόγο για τη χρησιμοποίηση της ΙΜ στη διδασκαλία. Επιπρόσθετα, προτείνεται ότι η ΙΜ πρέπει να συμπεριληφθεί στη διδασκαλία καθώς αποτελεί μέρος του διδακτικού αντικειμένου (Heiede, 1992 στον Jankvist, 2009).

Στο ίδιο μήκος κύματος, ο Fried (2001), τάσσεται υπέρ της χρήσης της ΙΜ υποστηρίζοντας ότι η ιστορία μπορεί να έχει ενεργό ρόλο στη διδακτική πρακτική χωρίς να χρειάζεται ριζική αλλαγή στο φακό εστίασης του αντικειμένου. Η αλλαγή συνίσταται στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τις ανθρώπινες πηγές των μαθηματικών ιδεών. Υπό το πρίσμα αυτό, η ιστορία δεν στερεί από τους διδασκομένους τη γνώση της σύγχρονης μορφής του μαθηματικού κλάδου, αλλά εισάγει μία ανθρωπιστική μαθηματική εκπαίδευση που τους επιτρέπει να αντιληφθούν ότι το οικοδόμημα αυτό βρίσκεται σε μία, ναι μεν βέβαιη και συγκεκριμένη, αλλά όχι απαραίτητα μόνιμη κατάσταση. Συνοψίζει δε, τα επιχειρήματά του σε τρεις βασικούς άξονες:

- η ιστορία εξανθρωπίζει τα μαθηματικά,
- τα κάνει περισσότερο ενδιαφέροντα, κατανοητά και προσεγγίσιμα και
- δίνει τη δυνατότητα βαθύτερης μελέτης εννοιών, προβλημάτων και διαδικασιών επίλυσης προβλήματος.

Η Furinghetti (1997, 2004) θεωρεί την ΙΜ ως αποτελεσματικό μέσο στη διδασκαλία, χρησιμοποιούμενη όμως υπό κατάλληλες συνθήκες. Το κατάλληλο πλαίσιο, στο οποίο αναφέρεται, αφορά την επαρκή προετοιμασία των διδασκόντων και την απαραίτητη προϋπόθεση ότι οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν στην αξιοποίηση της ΙΜ κατά τη διδασκαλία τους. Περεταίρω, η ίδια διακρίνει δύο βασικούς άξονες ως προς την αξιοποίηση αυτή. Ο πρώτος σχετίζεται με την ανάδειξη της φύσης των Μαθηματικών ως κοινωνικοπολιτισμικής διαδικασίας, χρησιμοποιώντας την ιστορία ως μέσο με το οποίο τα Μαθηματικά αποκτούν ανθρώπινο χαρακτήρα. Ο δεύτερος αφορά την κατασκευή μαθηματικής γνώσης στην τάξη, δηλαδή τον πυρήνα των προβλημάτων που σχετίζονται με τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε αυτό το σημείο, η Furinghetti αναφέρεται στη χρησιμότητα της ιστορίας στην πορεία κατασκευής των μαθηματικών αντικειμένων και επικαλείται τις απόψεις των Gray & Tall (2001), σύμφωνα με τους οποίους, τα αντικείμενα μετατρέπονται από συγκεκριμένα σε πιο αφηρημένα νοητικά σχήματα μέσω της ανάπτυξης αφαιρετικής σκέψης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι υπήρξαν και υπάρχουν αμφιβολίες απέναντι στη χρήση της ΙΜ στη διδασκαλία. Επιγραμματικά, αυτές αφορούν την ορθολογική αξιοποίηση του διαθέσιμου διδακτικού χρόνου, την πιθανή δημιουργία σωβινιστικών τάσεων, το επαρκές ή μη υπόβαθρο των διδασκόντων, το αν η ιστορία πράγματι βοηθά ή δημιουργεί περισσότερες δυσκολίες, το αν τελικά έχει νόημα να ασχολούμαστε με το παρελθόν ή στην ουσία με αυτόν τον τρόπο η εστίαση της διδασκαλίας λοξοδρομεί από τα Μαθηματικά που είναι το καθεαυτό διδακτικό αντικείμενο (Tzanakis et al., 2000). Όπως όμως αναφέρει ο Siu (2000), αν και η ΙΜ δεν αποτελεί πανάκεια για όλα τα παιδαγωγικά προβλήματα που μπορεί να προκύψουν, μπορεί να κάνει το μαθητή να καταλάβει ότι τα Μαθηματικά είναι ένα αντικείμενο με νόημα και σημασία αλλά και τον διδάσκοντα να είναι λιγότερο δογματικός και περισσότερο υπομονετικός και ανθρώπινος.

«Η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών δεν δημιουργεί καλύτερους, αλλά ευγενέστερους μαθηματικούς· πλουτίζει τον νου τους, απαλύνει τις καρδιές τους και φέρνει στην επιφάνεια τον καλύτερο χαρακτήρα τους»

George Sarton (1884 - 1956)

Οι τρόποι χρησιμοποίησης της ΙΜ στη διδασκαλία

Στην ICMI μελέτη, οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ΙΜ στη διδασκαλία κατηγοριοποιούνται ως εξής:

- **Χρήση της ιστορίας με απευθείας αναφορά σε ιστορικές πληροφορίες**. Οι πληροφορίες αυτές μπορεί να συνίστανται σε μεμονωμένα ιστορικά στοιχεία ή σύντομα ιστορικά σημειώματα, ή και να έχουν μεγαλύτερη έκταση περιλαμβάνοντας στην περίπτωση αυτή είτε ολοκληρωμένες σειρές μαθημάτων, είτε μελέτη ιστορικών βιβλίων είτε και συνδυασμό τους. Η ιστορία στην περίπτωση αυτή λειτουργεί ως σκοπός, σύμφωνα με τον Jankvist (2009), αφού το κέντρο βάρους μετατοπίζεται στη μελέτη ιστορικών πηγών και όχι στη μάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων (Tzanakis et al., 2000).

- **Μάθηση μαθηματικών θεμάτων μέσω διδακτικής προσέγγισης βασιζόμενης στην ιστορία.** Σε αυτή την περίπτωση και στη βάση της γενετικής αρχής, η χρήση της ιστορίας ως βοηθητικού εργαλείου στη μαθησιακή διαδικασία, συνίσταται στην καθοδήγηση της πορείας μάθησης από τις απλές σε πιο περίπλοκες έννοιες, ή ακόμα και στην εξέλιξη της ίδιας της έννοιας από την απαρχή της μέχρι τη σημερινή της μορφή, με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που η εξέλιξη αυτή συνέβη στο πέρασμα του χρόνου. Έρχονται στο προσκήνιο οι ανάγκες που ώθησαν στην ανάπτυξη των εννοιών, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας. Μια τέτοιου είδους διδακτική προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί με διάφορους τρόπους, όπως έτοιμα ιστορικά πακέτα, αυθεντικά κείμενα, ή και βιβλία εμπνευσμένα από την ιστορία. Το υλικό που θα τεθεί υπό διαπραγμάτευση στην τάξη θα έχει μετασχηματιστεί ώστε να είναι κατάλληλο για διδασκαλία. Όπως αναφέρει ο Freudenthal (1991): «οι μαθητές ναι μεν πρέπει να επαναλάβουν την πορεία γνώσης που ακολούθησε το ανθρώπινο γένος, όχι όμως όπως ακριβώς αυτή συνέβη, αλλά όπως θα συνέβαινε αν οι άνθρωποι του τότε γνώριζαν λίγα περισσότερα από αυτά που γνωρίζουμε εμείς σήμερα».

- **Ανάπτυξη βαθύτερης γνώσης του ίδιου του μαθηματικού κλάδου καθώς και των κοινωνικών και πολιτισμικών πλαισίων μέσα στα οποία αυτός αναπτύχθηκε.** Η γνώση αυτή αφορά την “εσωτερική” και την “εξωτερική” φύση της μαθηματικής δραστηριότητας. Η εσωτερική φύση περιλαμβάνει σημαντικές δομές της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανάπτυξη και εξέλιξή της καθώς και τα γενικότερα εννοιολογικά πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύχθηκε ο κλάδος. Αφορά την πορεία εξέλιξης των Μαθηματικών μέσα από τις μεταβολές στο συμβολισμό, την ορολογία, τις μεθόδους, την αποδεικτική συλλογιστική, την αυστηρότητα διατύπωσης. Περιέχει επίσης το ρόλο που διαδραμάτισαν οι αντιφάσεις, τα παράδοξα, η διαίσθηση καθώς και τα κίνητρα που οδήγησαν στη γενίκευση, την αφαίρεση, τον φορμαλισμό. Η εξωτερική φύση αφορά τη θέση των Μαθηματικών στο πολιτισμικό και κοινωνικό γίγνεσθαι, τη σχέση τους με τη φιλοσοφία και την τέχνη, καθώς και τη σύνδεσή τους με άλλα επιστημονικά πεδία. Η ΙΜ υπηρετώντας το ρόλο της ως σκοπού, μπορεί να συνδράμει στην αναθεώρηση της άποψης ότι τα Μαθηματικά αποτελούν έναν φορμαλιστικό, απομονωμένο επιστημονικό κλάδο, καταδεικνύοντας τις εφαρμογές τους σε διάφορους τομείς της επιστημονικής δραστηριότητας καθώς και την αλληλεπίδρασή τους με το εκάστοτε κοινωνικό, ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο και υποστηρίζοντας, τέλος, την άποψη ότι τα Μαθηματικά αποτελούν κομμάτι της πολιτισμικής κληρονομιάς κάθε εθνότητας.

Όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ΙΜ στη διδασκαλία, ο Jankvist (2009) διακρίνει τις εξής τρεις προσεγγίσεις:

- **Διαφωτιστικές προσεγγίσεις**

Η διδασκαλία υποστηρίζεται από ιστορικές πληροφορίες, οι οποίες δρουν συμπληρωματικά στο περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος. Οι πληροφορίες αυτές μπορεί να έχουν τη μορφή σύντομου αποσπάσματος και να αφορούν γεγονότα, ονόματα ή ημερομηνίες, βιογραφίες ή γνωστά μαθηματικά προβλήματα, ιστορίες ή και ανέκδοτα. Είναι όμως δυνατό οι ιστορικές πληροφορίες που αφορούν ένα συγκεκριμένο διδακτικό κεφάλαιο, να δίνονται με μορφή ενότητας στην αρχή ή και στο τέλος του κεφαλαίου. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, οι πληροφορίες αυτές θα πρέπει να είναι μαθηματικά και ιστορικά ορθές και να υπηρετούν τους συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους της ενότητας στην οποία αναφέρονται (Thomaidis & Tzanakis, 2009).

Αν και οι προσεγγίσεις αυτού του είδους μπορούν να εφαρμοστούν στο πλαίσιο της χρήσης της ιστορίας ως σκοπού, για παράδειγμα διαφωτίζοντας την εξέλιξη και ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης, κυρίως σε μορφή ενότητας ως επιλόγου, είναι καταλληλότερες όταν η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο ώστε να συνεπικουρήσουν στην αποσαφήνιση “εσωτερικών” μαθηματικών θεμάτων. Όπως αναφέρει ο Jankvist (2009), μέσω του ρόλου τους να κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, αποτελούν το “αλατοπίπερο” της διδακτικής πράξης.

- **Διδακτικές Σειρές (Modules)**

Αποτελούν ενότητες (πακέτα) με ιστορικό περιεχόμενο προσαρμοσμένα για διδακτική χρήση. Ο όρος “modules” αναφέρεται από τους Katz & Michalowicz (2004) στο Jankvist (2009) ενώ οι Tzanakis et al. (2000) τα αποκαλούν “ιστορικά πακέτα”. Μπορεί να αποτελούνται από υλικό εστιασμένο σε ένα συγκεκριμένο θέμα του αναλυτικού προγράμματος, κατάλληλα προσαρμοσμένο για μικρής διάρκειας διδακτική παρέμβαση στην τάξη. Είναι όμως δυνατό να έχουν μεγαλύτερη έκταση, απαιτώντας περισσότερες διδακτικές ώρες, και να αποβλέπουν στη μελέτη ενός θέματος το οποίο δεν περιέχεται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Η χρήση της ΙΜ μέσω διδακτικών σειρών μπορεί να γίνει με ποικίλους τρόπους, όπως η μελέτη κειμένων ή και αυθεντικών πηγών ή ακόμα η εκπόνηση εργασιών ή και η ενασχόληση των μαθητών με φύλλα εργασίας. Τέλος, σε μεγαλύτερη κλίμακα, η προσέγγιση αυτή μπορεί να συνίσταται σε σειρές μαθημάτων ή σε μελέτη βιβλίων, ή και σε εκτεταμένες ερευνητικές εργασίες των μαθητών.

Τα ιστορικά πακέτα μπορούν να ανταποκριθούν σε καταστάσεις που έχουν στόχο τη γνωστική επάρκεια των μαθητών σε εσωτερικά μαθηματικά θέματα, όπως έννοιες, μεθόδους, διαδικασίες και επομένως μπορούν να υπηρετήσουν τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείου. Ταυτόχρονα όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν με σκοπό τη διαπραγμάτευση εξωτερικών θεμάτων (meta issues), είτε σε περιορισμένη κλίμακα με μικρή χρονική διάρκεια και στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος, είτε και σε ευρύτερη εισάγοντας νέα εσωτερικά ζητήματα που μπορεί να μην περιέχονται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό, δίνεται το έναυσμα για διαπραγμάτευση εξωτερικών θεμάτων που αφορούν την εξέλιξη των Μαθηματικών ως αποτέλεσμα ανθρώπινης προσπάθειας και που συχνά δεν περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα.

- **Προσεγγίσεις που βασίζονται στην ιστορία**

Στην περίπτωση αυτή, η χρήση της ιστορίας δεν είναι εμφανής αλλά βρίσκεται σε λανθάνουσα μορφή στον τρόπο και τη δομή παρουσίασης του μαθηματικού θέματος. Για παράδειγμα, η εφαρμογή της γενετικής αρχής στη διδασκαλία αποτελεί χαρακτηριστικό μιας τέτοιου είδους προσέγγισης. Ο Jankvist (2009) χρησιμοποιεί ως συγκεκριμένο παράδειγμα τη διδασκαλία των συνόλων των αριθμών, η οποία ξεκινά από το σύνολο των φυσικών, συνεχίζει στο σύνολο των θετικών ρητών, των αρνητικών ακεραίων, των υπόλοιπων πραγματικών και τέλος των μιγαδικών. Η χρήση της ΙΜ συνίσταται στη σειρά παρουσίασης των συνόλων, η οποία είναι αυτή με την οποία εξελίχθηκαν οι αριθμοί στην πορεία του χρόνου. Οι προσεγγίσεις αυτές διαπραγματεύονται κυρίως εσωτερικά θέματα των Μαθηματικών που αφορούν τη φύση της μαθηματικής γνώσης και άρα υπηρετούν το διδακτικό ρόλο της ιστορίας ως εργαλείου. Ωστόσο, η ιστορία μπορεί να λειτουργήσει και ως σκοπός εφόσον μελετώνται θέματα σχετιζόμενα με την ιστορική εξέλιξη των υπό διαπραγμάτευση εννοιών.

Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις του Jankvist που αφορούν εισαγωγή ιστορικών στοιχείων στη μαθησιακή διαδικασία, με σύντομη διάρκεια, φαίνεται ότι αντιστοιχίζονται στην πρώτη κατηγορία στην ICMI μελέτη, η οποία αφορά τη χρήση μεμονωμένων ιστορικών πληροφοριών σύντομης διάρκειας και μικρής έκτασης. Το δεύτερο τμήμα της κατηγορίας αυτής, που αναφέρεται σε παρεμβάσεις μεγαλύτερης έκτασης, φαίνεται ότι συνάδει με την προσέγγιση των διδακτικών σειρών του Jankvist, στην πιο εκτεταμένη της μορφή. Οι ιστορικά βασιζόμενες προσεγγίσεις αντιστοιχούν στη δεύτερη κατηγορία της ICMI μελέτης. Στην τρίτη κατηγορία της ICMI μελέτης, τα επιχειρήματα που αφορούν τους τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιείται η ΙΜ στη διδασκαλία δεν είναι με σαφήνεια διαχωρισμένα από εκείνα που αφορούν τους λόγους. Η προσέγγιση μέσω διδακτικών πακέτων δείχνει να είναι η καταλληλότερη να αντιπροσωπεύσει τη συγκεκριμένη κατηγορία (Jankvist, 2009).

Ο Fried (2008), αναλύοντας τους τρόπους με τους οποίους η ΙΜ μπορεί να υπεισέρθει στη διδακτική πράξη, απαντώντας σε διλήμματα και αντιρρήσεις των εκπαιδευτικών κυρίως ως προς την έλλειψη διδακτικού χρόνου, διακρίνει τις κάτωθι δύο στρατηγικές:

- την προσθήκη (addition strategy), όπου ιστορικά ανέκδοτα, σύντομες βιογραφίες, μεμονωμένα προβλήματα συμπεριλαμβάνονται στη διδασκαλία, προσθέτοντας έτσι στη δομή του αναλυτικού προγράμματος ιστορικά στοιχεία. Η στρατηγική αυτή αντιστοιχεί στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις του Jankvist,

- την προσαρμογή (accommodation strategy), όπου στην ουσία οι οδηγίες του αναλυτικού προγράμματος προσαρμόζονται στις ιστορικές συνθήκες ή και σε κάποιο ιστορικό μοντέλο που αφορούν το προς διδασκαλία θέμα. Αυτό είναι δυνατό να συμβεί χρησιμοποιώντας την ιστορία στη διαμόρφωση του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται τα προς διδασκαλία θέματα, ή ακόμα και στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διαπραγμάτευση των μαθηματικών θεμάτων στην τάξη. Η στρατηγική αυτή προσιδιάζει στην προσέγγιση των διδακτικών σειρών του Jankvist και εξοικονομεί, σύμφωνα με τον Fried, διδακτικό χρόνο επιτυγχάνοντας τη διδασκαλία του μαθηματικού θέματος και της ιστορίας ταυτόχρονα.

Η ΙΜ στην παρούσα διδακτική παρέμβαση

Η εστίαση της διδακτικής παρέμβασης επικεντρώνεται στη διδασκαλία των λογαρίθμων και της λογαριθμικής συνάρτησης. Εντάσσεται στα πλαίσια της προσέγγισης των διδακτικών σειρών του Jankvist, κάνοντας χρήση αρχείου παρουσίασης και φύλλων εργασίας. Αναλυτικότερα η χρήση της ΙΜ έχει διττό χαρακτήρα:

Αφενός από μακροσκοπική άποψη η Ιστορία ως σκοπός, μέσα από την παρουσίαση των βασικών σταθμών της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων, αναδεικνύει τον δυναμικό και εξελισσόμενο χαρακτήρα του περιεχομένου της Μαθηματικής Επιστήμης, τους δεσμούς της με τα κοινωνικά και πολιτισμικά περιβάλλοντα στα οποία αυτή αναπτύσσεται, καθώς και τη σύνδεσή της με άλλα επιστημονικά πεδία. Αφετέρου η χρήση της Ιστορίας, σε ρόλο εργαλείου λειτουργεί ως αρωγός στη προσπάθεια κατανόησης, από τους μαθητές, εσωτερικών μαθηματικών ζητημάτων τα οποία ανήκουν στην διδακτέα και εξεταστέα ύλη που καθορίζουν οι διδακτικές οδηγίες και στα, επίσης οριοθετημένα, χρονικά πλαίσια.

Οι μαθητές θα γνωρίσουν τα σημαντικότερα, με γνώμονα τη διδακτική αξιοποίηση, ιστορικά στοιχεία που αφορούν το λογάριθμο και τη λογαριθμική συνάρτηση, και θα εργαστούν σε, μεταφρασμένα στα ελληνικά, ιστορικά κείμενα του Leonard Euler από το βιβλίο του “*Introductio in analysin infinitorum*”(1748), τα οποία προτείνονται στο πρόγραμμα Historical Modules Project, (Mathematical Association of America, 2004). Οι ομάδες των μαθητών θα μελετήσουν τα κείμενα και θα τα επεξεργαστούν με τη βοήθεια ερωτήσεων που θα λειτουργήσουν καθοδηγητικά για την αποσαφήνιση των κειμένων.

Η χρησιμοποίηση της ΙΜ στη συγκεκριμένη παρέμβαση αναμένεται να αυξήσει το ενδιαφέρον και να ενδυναμώσει τα κίνητρα μάθησης των μαθητών, προσεγγίζοντας τη μαθηματική γνώση από μία μη τυπική σκοπιά. Σκοπός είναι η κατανόηση των υπό διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών και ταυτόχρονα η ανάδειξη της ανθρώπινης όψης της μαθηματικής επιστήμης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Λογάριθμοι – Ιστορική αναδρομή

Εισαγωγή

Είναι μακρά η πορεία της ιστορικής εξέλιξης των λογαριθμικών εννοιών και πολλά τα πρόσωπα που λιγότερο ή περισσότερο συνεισέφεραν στην πορεία αυτή. Σκοπός αυτής της ιστορικής αναφοράς είναι η ανάδειξη των σημείων εκείνων που θα αποδειχθούν χρήσιμα από διδακτική πλευρά, στο σχεδιασμό της διδακτικής μας παρέμβασης με θέμα τους λογαρίθμους και τη λογαριθμική συνάρτηση. Στην ιστορική αναδρομή που ακολουθεί σκιαγραφούνται οι λόγοι που οδήγησαν στην επινόηση της έννοιας του λογάριθμου, η θέση που κατέχει η έννοια αυτή στη σύγχρονη πραγματικότητα, καθώς και οι βασικοί σταθμοί και αντίστοιχα οι πρωταγωνιστές οι οποίοι καθόρισαν με τη συμβολή τους την ανάπτυξη της ιστορικής αυτής διαδρομής από το παρελθόν στο παρόν. Μέσα από τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των λογαριθμικών εννοιών, θα οδηγηθούμε στην επιλογή των βασικών ιστορικών σημείων που θα χρησιμοποιηθούν διδακτικά με σκοπό, αφενός την κατανόηση των λογαριθμικών εννοιών από τους μαθητές και αφετέρου την ανάδειξη του δυναμικού και πολυδιάστατου χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών που εξελίσσονται στην πάροδο του χρόνου σε συνάρτηση με το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται.

Το ιστορικό πλαίσιο και οι ρίζες της έννοιας του λογαρίθμου

Ο 16^{ος} και 17^{ος} αιώνας χαρακτηρίζονται από έντονη ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης σε όλους τους κλάδους. Είναι η εποχή που διαδραματίζονται σημαντικά γεγονότα όπως οι ανακαλύψεις νέων χωρών και ο γύρος του κόσμου από τον Μαγγελάνο. Οι εξελίξεις αυτές δημιουργούν ανάγκες χαρτογράφησης με συνέπεια την ανάπτυξη του τομέα της τοπογραφίας. Ο τομέας της ναυσιπλοΐας επίσης αναπτύσσεται ραγδαία με αποτέλεσμα την άνθηση του ναυτικού εμπορίου που συνέβαλλε στην αλματώδη αύξηση των οικονομικών συναλλαγών. Εξαιτίας των εξελίξεων αυτών κατέστη έντονη η ανάγκη εκπόνησης πολύπλοκων και χρονοβόρων αριθμητικών πράξεων, οι οποίες αφορούσαν υπολογισμούς τόκων, ασφαλίστρων, συναλλάγματος, κλπ.

Ραγδαίες αλλαγές συντελούνται επίσης στην αστρονομία, με πρωταγωνιστές τους Κοπέρνικο, Γαλιλαίο και Κέπλερ. Το 1543 δημοσιεύεται το έργο του Κοπέρνικου "*De revolutionibus orbium coelestium*" (Περί περιφορών των ουράνιων σωμάτων), το οποίο αποτελεί την αφετηρία για τη μετάβαση από το γεωκεντρικό στο ηλιοκεντρικό σύστημα. Γίνεται έντονη λοιπόν η ανάγκη ακριβών μετρήσεων για την κατάρτιση νέων αστρονομικών πινάκων και παράλληλα δημιουργείται πλήθος δεδομένων που απαιτούν επεξεργασία μέσω της διεκπεραίωσης περίπλοκων υπολογισμών.

Μέσα σε αυτό το ιστορικό πλαίσιο γίνεται εμφανής η αναγκαιότητα επινόησης τρόπων διευκόλυνσης των υπολογισμών, η οποία οδήγησε στην ανάδυση της έννοιας του λογαρίθμου. Περίπου έναν αιώνα αργότερα, ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός Pierre-Simon de Laplace θα δηλώσει: «Η επινόηση των λογαρίθμων, μειώνοντας τους κόπους, διπλασίασε τη ζωή των αστρονόμων».

Η επινόηση αυτή βασίστηκε σε μια απλή ιδέα: *η πράξη της πρόσθεσης είναι ευκολότερη από αυτήν του πολλαπλασιασμού και αντίστοιχα η αφαίρεση είναι ευκολότερη από τη διαίρεση*. Η ιδέα αυτή υπήρχε ήδη στη μέθοδο της προσθαφαίρεσης, η οποία χρησιμοποιούνταν από τους αστρονόμους ως η βασική μέθοδος απλοποίησης των πράξεων έως τα τέλη περίπου του $16^{ου}$ αιώνα. Η προσθαφαίρεση αφορά σε τριγωνομετρικούς τύπους, οι οποίοι δίνουν τη δυνατότητα αναγωγής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση ή αφαίρεση:

$$συνx \cdot συνy = \tfrac{1}{2}\,[συν(x + y) + συν(x - y)]$$

$$ημx \cdot ημy = \tfrac{1}{2}\,[συν(x - y) - συν(x + y)]$$

$$ημx \cdot συνy = \tfrac{1}{2}\,[ημ(x + y) + ημ(x - y)]$$

$$συνx \cdot ημy = \tfrac{1}{2}\,[ημ(x + y) - ημ(x - y)]$$

Οι αριθμοί που έπρεπε να πολλαπλασιαστούν, με απλή διαίρεση με δύναμη του 10 και τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων, μετατρέπονταν σε ημίτονα ή συνημίτονα συγκεκριμένων γωνιών. Το αποτέλεσμα του υπολογισμού του δεύτερου μέλους μιας εκ των παραπάνω ισοτήτων με εύκολο μετασχηματισμό, πολλαπλασιάζοντας με δύναμη του 10, αποτελούσε το ζητούμενο.

Η ιδέα της αναγωγής των πράξεων σε ευκολότερους υπολογισμούς, εκτός από τη μέθοδο της προσθαφαίρεσης, διαφαίνεται σε κατάλληλη αντιστοιχία μεταξύ γεωμετρικής και αριθμητικής προόδου. Το 1544, ο Γερμανός μαθηματικός Michael Stifel (1487-1567) στο βιβλίο του "*Arithmetica Integra*" παρατήρησε την απλοποίηση που μπορούμε να επιτύχουμε στις πράξεις μέσω της αντιστοιχίας μίας αριθμητικής με μία γεωμετρική πρόοδο. Ο Stifel θεώρησε τις προόδους:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**
1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**	**4096**	**…**

Σε μία εποχή, στην οποία η έννοια της δύναμης δεν είχε ακόμη αποσαφηνιστεί και το σύστημα του μαθηματικού συμβολισμού δεν είχε παγιωθεί στη σημερινή του μορφή, ο Stifel διατύπωσε "ρητορικά" τους εξής κανόνες:

- Αν πολλαπλασιαστούν 2 όροι της γεωμετρικής προόδου, π.χ. 32 x 128, το γινόμενό τους ισούται με 4096, το οποίο βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου (5 + 7 = 12). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε πρόσθεση.

- Όμοια, η διαίρεση δύο όρων της γεωμετρικής προόδου ουσιαστικά ανάγεται σε αφαίρεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου (4096:128=32, 12-7=5).

- Η ύψωση ενός όρου της γεωμετρικής προόδου σε εκθέτη μετασχηματίζεται σε πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου όρου της αριθμητικής προόδου με τον εκθέτη αυτόν (16^3=4096, $4 \cdot 3$=12).

- Τέλος, η εξαγωγή ρίζας ανάγεται σε διαίρεση ($\sqrt[4]{4096} = 8$, 12:4=3).

Στην ουσία οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι οι εκθέτες των δυνάμεων του 2 των όρων της γεωμετρικής. Σήμερα μπορεί να ειπωθεί ότι οι κανόνες του Stifel είναι εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων, ωστόσο οι εξελίξεις τις οποίες αναφέρουμε συμβαίνουν σε μία χρονική στιγμή όπου οι έννοιες της δύναμης, της βάσης και του εκθέτη δεν αποτελούν στοιχεία του επιστημολογικού πλαισίου της συγκεκριμένης γνώσης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι για να είναι εφικτή η αναγωγή του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση μέσω αντιστοιχίας των προόδων, πρέπει να ισχύουν οι εξής συνθήκες (Αεράκης, 2015):

- Για να είναι το γινόμενο δύο τυχαίων όρων μιας γεωμετρικής προόδου επίσης όρος της προόδου, θα πρέπει ο πρώτος όρος να είναι δύναμη του λόγου λ της προόδου.
- Για να είναι το άθροισμα δύο τυχαίων όρων μιας αριθμητικής προόδου επίσης όρος της προόδου, θα πρέπει ο πρώτος όρος να είναι πολλαπλάσιο της διαφοράς ω της προόδου.
- Η αναγωγή του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση μπορεί να επιτευχθεί όταν ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της διαφοράς ω, με τον εκθέτη του λόγου λ του πρώτου όρου της γεωμετρικής.

Αν επιλέξουμε ως πρώτο όρο της αριθμητικής το 0 και πρώτον της γεωμετρικής το 1 και οι τρεις συνθήκες που προαναφέρθηκαν ικανοποιούνται.

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Γάλλος γιατρός, νομικός και μαθηματικός Jacques Peletier (1517-1582), στο έργο του "*L' Arithmetique*" (1549), διετύπωσε κανόνα ανάλογο με τον πρώτο κανόνα του Stifel, βασιζόμενος στην αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου που δεν αποτελούνταν από δυνάμεις και εκθέτες ενός αριθμού. Συγκεκριμένα χρησιμοποίησε τις προόδους: 0, 1, 2, 3, 4, … και 3, 6, 12, 24, 48, … Ο Peletier ανήγαγε τον πολλαπλασιασμό δύο όρων της γεωμετρικής σε πρόσθεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής και στη συνέχεια σε πολλαπλασιασμό με σταθερό αριθμό (του πρώτου όρου της γεωμετρικής) του όρου της γεωμετρικής που αντιστοιχούσε στο άθροισμα των όρων της αριθμητικής (π.χ. $6 \cdot 24=144$, $1+3=4$ και $48 \cdot 3=144$) (Θωμαΐδης, 1987).

Με τις αντιστοιχίσεις που προαναφέρθηκαν το πρόβλημα απλοποίησης των πράξεων έχει λυθεί μόνο για ορισμένους "προνομιούχους" ακεραίους αριθμούς. Για να υπάρξει ουσιαστική αξιοποίηση των κανόνων του Stifel απαιτείται η κατασκευή γεωμετρικής προόδου τόσο "πυκνής" ώστε ανάμεσα στους όρους της να μπορούν να παρεμβληθούν οι αριθμοί που εμπλέκονται στους υπολογισμούς (ημίτονα, εφαπτόμενες κλπ.) και επιπλέον να είναι δυνατή η "ένα προς ένα" αντιστοίχησή της με μία αριθμητική πρόοδο (τους αντίστοιχους λογάριθμους). Αυτό απαιτεί υπολογιστική ικανότητα και μακροχρόνια ενασχόληση. Χρειάστηκε να περάσουν 70 χρόνια από τη διατύπωση των κανόνων του Stifel ώστε να υπάρξει πρακτική εφαρμογή τους με τη δημοσίευση των πρώτων λογαριθμικών πινάκων.

Εισαγωγή των Λογαρίθμων – Burgi και Napier

Πρωτοπόροι στην κατασκευή λογαριθμικών πινάκων ήταν ο Ελβετός ωρολογοποιός και κατασκευαστής αστρονομικών οργάνων Jost Burgi (1552-1632) και ο Σκώτος ευγενής John Napier (1550-1617).

Ο Burgi, διαθέτοντας εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητες δημοσίευσε τους πίνακές του το 1620 στην Πράγα. Υπολόγισε περίπου 23.000 όρους της γεωμετρικής προόδου που κατασκεύασε σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο: $\alpha_0 = 100.000.000$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu+\alpha_\nu/10.000$, $\nu = 0, 1, 2\ldots$ Σε αυτή τη γεωμετρική πρόοδο αντιστοίχισε την αριθμητική (β_ν) με $\beta_1 = 0$ και $\omega = 10$. (Θωμαΐδης, 1986). Αν και το σύστημα του Burgi προσεγγίζει ικανοποιητικά (διαιρώντας τους όρους της γεωμετρικής με το 10^8 και της αριθμητικής με το 10^5) το σημερινό σύστημα των φυσικών λογαρίθμων, δεν υπάρχει η έννοια της βάσης την εποχή κατασκευής του και φυσικά δεν αναφέρεται ο όρος λογάριθμος. Οι πίνακές του Burgi δημοσιεύτηκαν 6 χρόνια μετά τους πίνακες του Napier και δεν έτυχαν ευρείας διάδοσης.

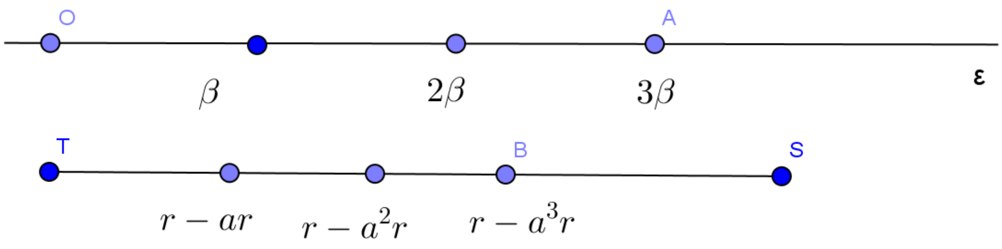
Ο John Napier ήταν ο 8ος Λόρδος του Merchistoun στο Εδιμβούργο της Σκωτίας. Ταγμένος προτεστάντης, ήταν γνωστός για τα θρησκευτικού περιεχομένου βιβλία του και ασχολήθηκε με την κατασκευή νέων ειδών όπλων στον αγώνα εναντίον των καθολικών. Εξαιρετικός μαθηματικός, με αξιόλογη δουλειά στη σφαιρική τριγωνομετρία, επινόησε μια πρωταρχική συσκευή υπολογισμού πράξεων και εισήγαγε την έννοια του λογάριθμου. Ο Victor Katz στην 3η έκδοση του βιβλίου του

“*Ιστορία των Μαθηματικών*” (2009) αναφέρει ότι κυρίως στον Napier οφείλουμε την εισαγωγή του σύγχρονου συμβολισμού για τα δεκαδικά κλάσματα και το διαχωρισμό των δεκαδικών ψηφίων με την υποδιαστολή.

Περί το 1594, άρχισε να ασχολείται με ιδιότητες των πράξεων, οι οποίες θα διευκόλυναν τους υπολογισμούς με τριγωνομετρικούς αριθμούς που χρησιμοποιούνταν στην αστρονομία έχοντας ταυτοχρόνως επαφή με τον Δανό αστρονόμο Tycho Brahe, γνώστη του τεχνάσματος της προσθαφαίρεσης. Μετά από 20 έτη δουλειάς, το 1614, ο Napier δημοσίευσε το έργο του, “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*” (Περιγραφή του Θαυμαστού Κανόνα των Λογαρίθμων) όπου περιέχονται επταψήφιοι λογαριθμικοί πίνακες, οδηγίες χρήσης και εφαρμογές. Το 1619, δύο χρόνια μετά το θάνατό του, εκδίδεται το “*Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*” (Κατασκευή του Θαυμαστού Κανόνα των Λογαρίθμων), στο οποίο ο Napier αναφέρει αναλυτικά τη μέθοδο κατασκευής των πινάκων του (Θωμαΐδης, 1987) και μεταξύ άλλων εξηγεί τους λόγους που τον ώθησαν στην κατασκευή των πινάκων του. Συγκεκριμένα αναφέρει: «Seeing there is nothing…that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplication, division, square and cubical extractions of great numbers, which besides the tedious expense of time are for the most part subject to many slippery errors, I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances», δηλ. σε μετάφραση « Βλέποντας ότι δεν υπάρχει τίποτα … τόσο προβληματικό στη μαθηματική πρακτική, ούτε κάτι τόσο δύσκολο στους υπολογισμούς, όπως ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, ο τετραγωνισμός και η εξαγωγή κυβικών ριζών μεγάλων αριθμών, τα οποία εκτός από ότι είναι χρονοβόρα, πολύ συχνά οδηγούν σε λάθη, άρχισα να σκέφτομαι με ποια βέβαιη και σταθερή τεχνική θα μπορούσα να υπερπηδήσω αυτά τα εμπόδια.»

Ο E. W Hobson, καθηγητής του τομέα καθαρών Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, σε διάλεξή του το 1914 με αφορμή την επέτειο των τριακοσίων χρόνων από την έκδοση του “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*”, αναφέρεται στους λογάριθμους ως μία από τις μεγαλύτερες επιστημονικές ανακαλύψεις που γνώρισε η ανθρωπότητα. Συνεχίζοντας προσθέτει ότι η σπουδαιότητα των λογαρίθμων ως εργαλείου απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών μπορεί να συγκριθεί μόνο με την επινόηση του δεκαδικού θεσιακού συστήματος αρίθμησης (Hobson, 1914). Στο ίδιο μήκος κύματος ο Florian Cajori, σε επανέκδοση του βιβλίου του 'Ιστορία των Μαθηματικών' του 1893, αναφέρει ότι: «Οι θαυμαστές δυνατότητες των σύγχρονων υπολογισμών οφείλονται σε τρεις ανακαλύψεις: τον Αραβικό συμβολισμό, τα δεκαδικά κλάσματα και τους λογαρίθμους» (Cajori, 1991: 187).

Ο νεωτερισμός του Napier έγκειται στο ότι προσεγγίζει αρχικά την έννοια του λογάριθμου όχι μέσω της αντιστοιχίας των προόδων αλλά βασιζόμενος στη συνεχή κίνηση σημείων. Το κινηματικό αυτό μοντέλο αποτελεί επινόηση σε μια εποχή που δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί οι κανόνες της ευθύγραμμης μεταβαλλόμενης κίνησης. Παράλληλα, ο Napier αντιπαραβάλλοντας τις σχετικές θέσεις δύο κινούμενων σημείων, αντιστοιχίζει την τιμή μιας μεταβλητής με την τιμή μιας άλλης παραπέμποντας στην έννοια της συνάρτησης, η οποία βέβαια στο έργο του Napier βρίσκεται σε λανθάνουσα μορφή (Hobson, 1914).



Εικόνα 1. Κινηματικό μοντέλο του Napier.

Όπως φαίνεται στην εικόνα 1 που περιγράφει το κινηματικό μοντέλο του Napier, το σημείο A κινείται προς τα δεξιά στην ευθεία (ε). Η ταχύτητά του είναι σταθερή, δηλαδή το A καλύπτει καθένα από τα διαστήματα [0, β], [β, 2β], [2β, 3β]… σε ίσους χρόνους, και ίση με το μήκος r του ευθυγράμμου τμήματος TS. Για τον Napier, τα ημίτονα αντιπροσωπεύουν μήκη χορδών σε κύκλους καθορισμένων ακτίνων. Για το λόγο αυτό θεωρεί το μήκος r ίσο με 10^7 μονάδες (μήκος συγκεκριμένης ακτίνας). Το σημείο B ξεκινά από το T ταυτόχρονα με το A και κινείται προς το S με αρχική ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του A. Η ταχύτητα όμως του B ελαττώνεται διαρκώς, και το μέτρο της είναι πάντοτε ανάλογο με την απόστασή του από το S. Τα διαστήματα $[0, r - ar]$, $[r - ar, r - a^2r]$, $[r - a^2r, r - a^3r]$, … καλύπτονται από το σημείο B στους ίδιους χρόνους. Προφανώς ο αριθμός α είναι μικρότερος της μονάδας και πολύ κοντά σε αυτήν, ώστε η γεωμετρική πρόοδος που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο (ar, a^2r, a^3r…) να είναι αρκετά πυκνή. Η απόσταση OA είναι ο λογάριθμος της απόστασης BS. Αν y = (OA) και x = (BS), τότε σύμφωνα με το συμβολισμό του Napier είναι Nlogx = y και βέβαια $\text{Nlog}10^7 = 0$. Είναι φανερό δε ότι το y αυξάνεται αριθμητικά, ενώ το x μειώνεται γεωμετρικά (Πίνακας 1). Ο Napier στο "*Constructio*" (σελ.19) αναφέρει ότι «ο λογάριθμος ενός δοθέντος ημιτόνου είναι ο αριθμός που αυξάνεται καθόλη τη διάρκεια αριθμητικά με την ίδια ταχύτητα με την οποία η ακτίνα άρχισε να ελαττώνεται γεωμετρικά, και στον ίδιο χρόνο στον οποίο η ακτίνα έχει ελαττωθεί στο δοθέντα αριθμό», (Katz, 2009).

Πίνακας 1. Αντιστοιχία προόδων στο κινηματικό μοντέλο του Napier.

y: Απόσταση του A από το O	**0**	**b**	**2b**	**3b**	**…**
x: Απόσταση του B από το S	r	a^1r	a^2r	a^3r	…

Όπως παρατήρησε ο Napier, εάν c : d = r : s, τότε Nlog c – Nlog d = Nlog r – Nlogs. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σημείο B, που κινείται γεωμετρικά, για τη διαδρομή από το c στο d είναι ο ίδιος με το χρόνο που χρειάζεται από το r στο s. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα, π.χ. εφόσον xy : x = y : 1, τότε Nlog(xy) – Nlog x = Nlog y – Nlog 1 δηλαδή, Nlog (xy) = Nlog x + Nlog y – Nlog 1.

Ο Napier για τη δημιουργία του λογαριθμικού πίνακα, κατασκεύασε την πυκνή γεωμετρική πρόοδο (α_ν), με πρώτο όρο (α_1) το 10^7 και λόγο $\lambda = 1\text{-}1/10^7 = 0{,}9999999$. Ουσιαστικά, ο κάθε όρος της προόδου προέρχεται από τον προηγούμενο αν αφαιρεθεί το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του, δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\lambda = \alpha_\nu(1\text{-}1/10^7) = \alpha_\nu - \alpha_\nu/10^7 \text{ και επομένως } \alpha_\nu = 10^7(1\text{-}1/10^7)^\nu$$

Στη γεωμετρική αυτή πρόοδο αντιστοίχησε την αριθμητική πρόοδο $\beta_\nu = \nu$ (Πίνακας 2).

Πίνακας 2. Πίνακας προόδων του Napier (Παναγιώτου, 2014).

Α.Π. β_ν=Nlogα	0	1	2	3	…	ν	…
Γ.Π. (α_ν)	10^7	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=$ 9999999,0000000	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2=$ 9999998,0000001	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3=$ 9999997,0000003	…	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	…

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, ο Napier υπολόγισε ότι ο εκατοστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ο 9.999.900,0004950. Αφού 10^7 ημ90º = 10^7 και 10^7 ημ1΄ = 2.909, τα ημίτονα του Napier ήταν ακέραιοι μεταξύ του 2.909 και 10.000.000. Αυτό σημαίνει ότι ο Napier έπρεπε να εκτελέσει έναν συντριπτικό όγκο υπολογισμών, υπολογίζοντας περίπου 81.000.000 όρους, για να φτάσει στον 2.909. Με ευφυείς μεθόδους παρεμβολής χρειάστηκε να υπολογίσει τελικά μόνο 1.600 βασικά σημεία (αναλυτικότερα βλέπε Θωμαΐδης, 1987).

Αν οι γενικοί όροι των προόδων στον πίνακα του Napier μετασχηματιστούν κατάλληλα, διαιρώντας με το 10^7, μεταφέροντας δηλαδή την υποδιαστολή 7 θέσεις αριστερά (Πίνακας 3), προκύπτει ότι το σύστημα του Napier ισοδυναμεί με ένα λογαριθμικό σύστημα βάσης 1/e (Θωμαΐδης, 1986; Burn, 2001). Θα ήταν το ίδιο αν λέγαμε ότι οι λογάριθμοι του Napier είναι οι αντίθετοι των φυσικών λογαρίθμων, πράγμα το οποίο βέβαια δεν υπήρχε καν στη σκέψη του κατασκευαστή τους.

Πίνακας 3. Παραλλαγή του συστήματος του Napier (Burn, 2001).

Α.Π.	0	$10^{-7}\cdot 1$	$10^{-7}\cdot 2$	…	$10^{-7}\cdot \nu$	…
Γ.Π.	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0=$ 1	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1=$ 0,9999999	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2=$ 0,9999998	…	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	…

Ο πίνακας του Napier (Hobson 1914, Εικόνα 2) αφορά λογαρίθμους ημιτόνων και αποτελείται από 7 στήλες:

- 1η: η τιμή της γωνίας,
- 2η: το ημίτονό της,
- 7η: η τιμή της συμπληρωματικής της γωνίας,
- 6η: το ημίτονο της συμπληρωματικής, δηλ. το συνημίτονο της γωνίας,
- 3η: ο λογάριθμος του ημιτόνου,
- 5η: ο λογάριθμος του συνημιτόνου,
- 4η: η διαφορά των τιμών της αντίστοιχης 3ης και 5ης στήλης, δηλ. ο λογάριθμος της εφαπτομένης.

Gr. 9

9 min	Sinus	Logarithmi	+ | − Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057328	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30 min Gr. 80

80

Εικόνα 2. Σελίδα του “*Descriptio*” (Hobson, 1914).

Ο όρος Λογάριθμος και λογαριθμικά συστήματα

Ο όρος λογάριθμος που προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις *Λόγος* και *Αριθμός* οφείλεται στον Napier, ο οποίος αρχικά χρησιμοποίησε τον όρο "τεχνητοί αριθμοί" (Θωμαΐδης, 1986). Στην κυριολεξία σημαίνει: ο αριθμός που μετράει τους λόγους. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ως παράδειγμα την αντιστοιχία των προόδων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … και 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … με τους όρους της γεωμετρικής προόδου σε συνεχή αναλογία, τότε χρειάζονται 6 λόγοι ώσπου να φτάσουμε στον 64 : 2/1, 4/2, 8/4, 16/8, 32/16, 64/32. Ο αριθμός 6 είναι ο λογάριθμος του 64 με βάση το 2 και με σημερινό συμβολισμό $\log_2 64=6$. Κατά τον Napier: «*Logarithmi dici possunt numerorum proportionalium comites aequidifferentes*» που σημαίνει ότι οι λογάριθμοι είναι αριθμοί με σταθερή διαφορά που έχουν αντιστοιχηθεί με αριθμούς σε συνεχή αναλογία (Burn, 2001).

Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Napier στο "*Constructio*", «Τίποτα δεν είναι τέλειο όταν γεννιέται» και από κοινού με τον Henry Briggs (1561-1631), Άγγλο μαθηματικό και καθηγητή στο κολέγιο Merton της Οξφόρδης, προσπάθησαν να βελτιώσουν το αρχικό έργο. Σε παράρτημα του "*Constructio*", ο Napier αναφέρεται σε ένα περισσότερο βολικό για τις πράξεις σύστημα λογαρίθμων όπου Nlog1=0. Είναι φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση η βασική ιδιότητα Nlog (xy) = Nlog x + Nlog y – Nlog 1 μετασχηματίζεται στη γνωστή σήμερα ιδιότητα Nlog (xy) = Nlog x + Nlog y. Ο ίδιος ο Napier αναφέρει ότι «Αν πολλαπλασιαστούν δύο αριθμοί με γνωστούς λογαρίθμους τότε το άθροισμα των λογαρίθμων τους θα είναι ο λογάριθμος του γινομένου». Στην ουσία στο νέο σύστημα ισχύουν οι γνωστές λογαριθμικές ιδιότητες.

Μετά τον θάνατο του Napier, το 1624, ο Briggs δημοσιεύει το "*Arithmetica Logarithmica, sive Logarithmorum Chiliades Triginta* – Λογαριθμική Αριθμητική ή Τριάντα Χιλιάδες Λογαρίθμων", στο οποίο περιέχονται οι δεκαδικοί λογάριθμοι των πρώτων 20 χιλιάδων φυσικών καθώς και των φυσικών από το 90.000 έως και το 100.000. Για την κατασκευή των πινάκων αυτών, ο Briggs εγκαταλείπει το κινηματικό μοντέλο του Napier και ορίζει τους λογαρίθμους ως «…αριθμούς που προσαρτώνται σε ανάλογους αριθμούς και διατηρούν ίσες διαφορές…» (Θωμαΐδης, 1987). Χρησιμοποιεί επιπλέον την παραδοχή ότι log10=1 και εκτελεί διαδοχικούς υπολογισμούς τετραγωνικών ριζών του 10 για τον προσδιορισμό των λογαρίθμων πρώτων αριθμών (Villarreal-Calderon, 2008). Η συμπλήρωση του πίνακα αυτού, ο οποίος περιείχε λογάριθμους με 30 δεκαδικά ψηφία, έγινε από τον Adrian Vlacq το 1628. Οι βελτιωμένοι αυτοί λογαριθμικοί πίνακες αποτέλεσαν τη βάση για την κατασκευή, όλων σχεδόν, των λογαριθμικών συστημάτων (Πίνακας 4) έως τον $20^{ο}$ αιώνα (Katz, 2009).

Πίνακας 4. Λογαριθμικά συστήματα του $17^{ου}$ αιώνα (Burn, 2001).

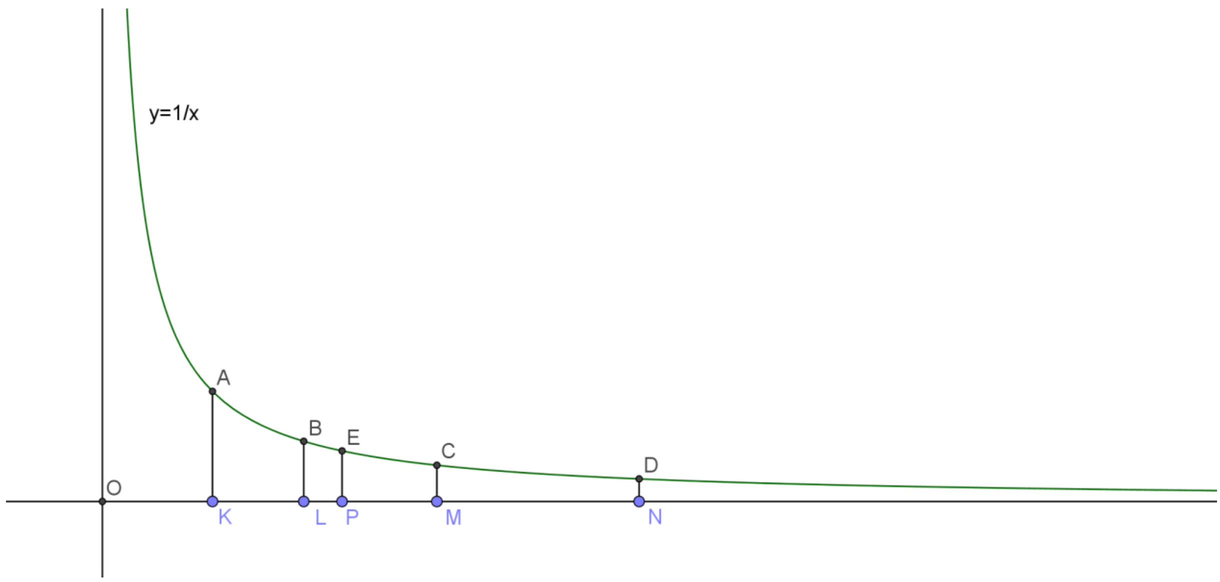
	Γεωμετρική πρόοδος	Αριθμητική πρόοδος
Napier, 1614	$10^7(1\text{-}10^{-7})^ν$	ν
Briggs, 1617	$10^ν$	ν
Speidell, 1619	$10^7(1\text{-}10^{-7})^ν$	$(10^8\text{-}ν) / 10^2$
Bürgi, 1620	$10^8(1+10^{-4})^ν$	10ν
Kepler, 1624	$10^5(1\text{-}10^{-5})^ν$	ν
Cavalieri, 1632	$10^ν$	10+ν
Caramuel, 1670	$10^ν$	10-ν

Φυσικοί Λογάριθμοι

Παρόλο το ότι ο αριθμός e εμφανίζεται, χωρίς όμως η παρουσία του στο δεδομένο ιστορικό πλαίσιο να γίνεται αισθητή, στα λογαριθμικά συστήματα των Burgi και Napier και ουσιαστικά στην ανεξάρτητη προσπάθεια και των δύο για την κατασκευή πυκνών γεωμετρικών προόδων, η έννοια των φυσικών λογαρίθμων θα έρθει στο προσκήνιο από μία άλλη οπτική γωνία, αυτή της μελέτης σχέσεων υπερβολικών εμβαδών και μηκών.

Το έτος 1647, ο Βέλγος Ιησουίτης Gregory of St-Vincent (1584-1667) έγραψε το σημαντικό έργο "*Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*" με σκοπό την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (Παναγιώτου, 2014). Στην πρόταση 130, στο έκτο βιβλίο του "*Opus Geometricum*" αναφέρει ότι

«Έστω Ox και Oy οι ασύμπτωτες της υπερβολής ABD. Διαιρέστε την Ox, ώστε OK, OL, OM, ON να είναι σε συνεχή αναλογία. Τότε, τα μικτόγραμμα σχήματα ABLK, BCML, CDNM έχουν ίσα εμβαδά». Αναδιατυπώνοντας, αν τα τμήματα OK, OL, OM, ON είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε τα εμβαδά (ABLK), (BCML), (CDNM) είναι ίσα (Εικόνα 3). Στην ουσία, ο Gregory of St-Vincent, χρησιμοποιώντας διαδικασία ανάλογη του σύγχρονου ορισμού του ολοκληρώματος, αποδεικνύει για πρώτη φορά τη λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής (Παναγιώτου, 2014), χωρίς παρόλα αυτά να αναφέρει τον όρο λογάριθμος στο έργο του.



Εικόνα 3. Υπερβολικά εμβαδά.

Τη σχέση των υπερβολικών εμβαδών με τους λογαρίθμους επισημαίνει ο μαθητής του Gregory of St-Vincent, Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667), στο βιβλίο του "*Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno propositi*", όπου επαναδιατυπώνει την βασική πρόταση ως εξής: «Αν η Οχ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα OK, OL, OM, ON να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο, και αντιστρόφως» (Burn, 2001). Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται η αντιστοιχία ανάμεσα στους όρους δύο προόδων, της αριθμητικής (ABLK), (ACMK), (ADNK) και της γεωμετρικής OK, OL, OM, ON (Πίνακας 5).

Πίνακας 5. Αντιστοιχία εμβαδών και μηκών.

0	ABLK	ACMK	ADNK
OK=1	OL	OM	ON

Γίνεται επομένως εμφανής η ύπαρξη ενός λογαριθμικού συστήματος, στο οποίο για πρώτη φορά οι λογάριθμοι αποκτούν φυσική σημασία καθώς εκφράζουν εμβαδά γεωμετρικών σχημάτων (Θωμαΐδης, 1986). Η βάση αυτού του λογαριθμικού συστήματος είναι η τετμημένη OP (Εικόνα 2), ώστε το αντίστοιχο εμβαδό AEPK να είναι ίσο με 1. Προκύπτει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίσος με OP=2,718281828459045… γνωστός σε μας με το σύμβολο e, το οποίο χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Euler το 1728. Ο Nicolas Mercator (1620-1687), για πρώτη φορά το 1668, ονομάζει τους λογάριθμους αυτούς "*logarithmus naturalis* – φυσικοί λογάριθμοι" και προσδιορίζει τον αριθμό 0,43429 ως παράγοντα ο οποίος με πολλαπλασιασμό μετατρέπει τους φυσικούς λογάριθμους σε δεκαδικούς (βάση το 10).

Θεωρητική συνέπεια της διαπίστωσης της λογαριθμικής ιδιότητας της υπερβολής ήταν ο ορισμός του λογαρίθμου κάθε θετικού αριθμού. Ταυτόχρονα, πρακτική συνέπεια ήταν η κατασκευή λογαριθμικών πινάκων, με υπολογισμούς των αντίστοιχων εμβαδών. Ο Νεύτωνας, το 1667, παρουσιάζει την εξίσωση της υπερβολής στη μορφή 1/(1+x) και την αναπτύσσει σε άπειρη σειρά $1-x+x^2-x^3$… Ολοκληρώνει υπολογίζοντας το εμβαδό κάτω από την υπερβολή χωρίς να αναφέρει τον όρο λογάριθμο. Αναφέρει όμως ότι τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή έχουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και κατασκευάζει λογαριθμικό πίνακα αφού υπολογίζει τις τιμές των εμβαδών με ακρίβεια 57 δεκαδικών ψηφίων (Θωμαΐδης, 1986; Παναγιώτου, 2014).

Leonard Euler και Λογάριθμοι

Ο σύγχρονος ορισμός του λογαρίθμου ως εκθέτη δύναμης οφείλεται στον εξέχοντα Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783). O Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας και ήταν μαθητής, του Johann Bernoulli, ενός από τους γνωστότερους Μαθηματικούς της εποχής. Ήταν από τους σημαντικότερους και παραγωγικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Το έργο του στα Μαθηματικά αποτελείται από 75 τόμους, συνολικά 45.000 σελίδες και 4.000 χειρόγραφα (αλληλογραφία με διάσημους μαθηματικούς). Η συμβολή του στα Μαθηματικά, τη Φυσική, την Αστρονομία θεωρείται από τις πλέον σημαντικότερες. Αν και προβλήματα που αντιμετώπιζε με την όρασή του τον κατέστησαν σχεδόν τυφλό, αυτό δεν στάθηκε εμπόδιο στη συνέχιση του έργου του. Κατείχε φωτογραφική μνήμη και έτσι με τη βοήθεια των γραφέων του, η παραγωγικότητά του αυξήθηκε. Χαρακτηριστικό είναι ότι κατά το έτος 1775 παρήγαγε, κατά μέσο όρο, μια μαθηματική μελέτη κάθε εβδομάδα.

Τον $18^{ο}$ αιώνα έχει γενικευτεί και αποσαφηνιστεί η έννοια της δύναμης. Σημαντικό ρόλο σε αυτό έχει διαδραματίσει η εξέλιξη του αλγεβρικού συμβολικού συστήματος. Ο Rene Descartes (1596-1650), στο έργο του "*La Geometrie*" για πρώτη φορά το 1637, κάνει συστηματική χρήση του γνωστού σε μας συμβολισμού των δυνάμεων, $α^x$ (εκτός από το $α^2$ το οποίο αναφέρεται ως $α \cdot α$). Η έννοια της συνάρτησης έστω και ταυτισμένη με τον αναλυτικό της τύπο, βρίσκεται στο προσκήνιο και οι πράξεις θεωρούνται ως αντιστοιχίες μεταξύ αριθμών και αντιμετωπίζονται ως γενικευμένα μαθηματικά αντικείμενα χωρίς να εξαρτώνται από συγκεκριμένες αριθμητικές σχέσεις.

Μέσα στο ιστορικό αυτό πλαίσιο, το οποίο για τα Μαθηματικά καθορίζεται κυρίως από την αλματώδη ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, οι λογάριθμοι αποκτούν νέα υπόσταση. Ο Euler για πρώτη φορά το 1748 στο βιβλίο του "*Introductio in analysin infinitorum*" ορίζει τον λογάριθμο ως εκθέτη δύναμης και τη λογαριθμική συνάρτηση ως αντίστροφη της εκθετικής (Cajori, 1991). Οι ιδιότητες των λογαρίθμων που έχουν ήδη αναφερθεί μπορούν πια να χαρακτηριστούν ως εφαρμογές των ιδιοτήτων των δυνάμεων. Οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης ασχολούνται με θέματα που αφορούν τη διαφόριση και ολοκλήρωση λογαριθμικών παραστάσεων καθώς και την ύπαρξη λογαρίθμων αρνητικών και φανταστικών αριθμών, θέμα το οποίο αποτέλεσε αίτιο τριβής μεταξύ των Leibnitz, Johann Bernoulli, Euler και d' Alembert (Θωμαΐδης, 1986; Cajori, 1991). Ο συναρτησιακός χαρακτήρας του λογάριθμου είναι αυτός που τώρα πια βρίσκεται σε πρώτο πλάνο. Υπό το πρίσμα αυτό, η ενασχόληση με τους λογαρίθμους φέρνει στο προσκήνιο δυνατότητες εφαρμογών τους που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Εφαρμογές των Λογαρίθμων

Ένας από τους γνωστότερους Γάλλους μαθηματικούς, ο Legendre (1752-1833), για πρώτη φορά το 1797, στο βιβλίο του "*Essai sur la Theorie des Nombres*" διατυπώνει μια εικασία που προσδοκεί να απαντήσει σε ένα από τα πλέον φλέγοντα ζητήματα της μαθηματικής κοινότητας, την κατανομή των πρώτων αριθμών μέσα στο σύνολο των φυσικών. Υποστηρίζει λοιπόν ότι αν Π(x) είναι η συνάρτηση που εκφράζει το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x, τότε για μεγάλες τιμές του x, ισχύει ότι: $\Pi(x) \cong \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}$. Η αυστηρή αριθμοθεωρητική απόδειξη της εικασίας αυτής έγινε από τον Νορβηγό Atle Selberg το 1949, σχεδόν 200 χρόνια μετά την αρχική της διατύπωση (Θωμαΐδης, 1986).

Οι εφαρμογές όμως της λογαριθμικής συνάρτησης δεν περιορίζονται μόνο στο μαθηματικό πεδίο. Οι Γερμανοί E. Weber (1795-1878) και G. Fechner (1801-1881) εκτελώντας πειραματικές έρευνες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μία ακολουθία ερεθισμάτων (οπτικών, ακουστικών κ.λ.π) τα οποία είναι μετρήσιμα και αυξάνουν με γεωμετρική πρόοδο, δημιουργεί ακολουθία αισθημάτων-αντιδράσεων που αυξάνουν με αριθμητική πρόοδο. Η σχέση δύο μεγεθών που μεταβάλλονται το ένα αριθμητικά και το άλλο γεωμετρικά παραπέμπει σε λογαριθμική εξάρτηση. Πράγματι αν Ε το ερέθισμα και Α το αίσθημα που προκαλείται, τότε ο νόμος των Weber-Fechner διατυπώνεται ως εξής: Α=κlogE, όπου κ σταθερά που εξαρτάται από το είδος του ερεθίσματος και τον αποδέκτη αυτού (Θωμαΐδης, 1986).

Σύγχρονη εφαρμογή της λογαριθμικής συνάρτησης στην Πληροφορική αποτελεί ο ορισμός και η μέτρηση ποσότητας της πληροφορίας. Αν θεωρήσουμε μία πηγή που εκπέμπει μηνύματα με τη μορφή συμβόλων, I_A την ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει το σύμβολο A και P_A την πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου τότε $I_A = -\log_2 P_A$.

Επίσης αν t_0 είναι η ημιζωή, ή χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού στοιχείου και Q(t) η αδιάσπαστη ποσότητα του στοιχείου στο χρόνο t τότε $Q(t_0)=Q_0/2$ όπου Q_0 αρχική ποσότητα του στοιχείου. Ισχύει ότι $t_0 = -\ln 2/c$ όπου c σταθερά. Η σχέση αυτή βρίσκει εφαρμογή στη Βιολογία και την Αρχαιολογία για τον προσδιορισμό της ηλικίας αρχαιολογικών ευρημάτων μέσω της διάσπασης του ραδιοάνθρακα. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η μέτρηση συγκέντρωσης των ατόμων του άνθρακα στο δείγμα, η οποία προσδιορίζει την ηλικία του δείγματος από τη στιγμή του θανάτου ή από το χρονικό σημείο που σταματά η πρόσληψη διοξειδίου του άνθρακα μέσω της τροφής, φωτοσύνθεσης και αναπνοής.

Επίσης είναι δυνατό να αναφερθούν ποικίλες εφαρμογές της λογαριθμικής συνάρτησης σε διάφορους τομείς, όπως στη Φυσική. Κατά την ισόθερμη αντιστρεπτή μεταβολή, η μεταβολή της εντροπίας κατά την εκτόνωση ενός αερίου από την κατάσταση A στην κατάσταση B δίνεται από τη σχέση $\Delta S_{AB} = nR\ln(V_A/V_B)$, όπου n ο αριθμός γραμμομορίων του αερίου και R η παγκόσμια σταθερά των αερίων. Στη Χημεία το pH ορίζεται ως ο αρνητικός δεκαδικός λογάριθμος της συγκέντρωσης των ιόντων H_3O^+, δηλαδή $pH = -\log[H_3O^+]$. Στη σεισμολογία αν R το μέγεθος του σεισμού (κλίμακα Richter) και I η έντασή του, τότε $R=\log(I/I_o)$, όπου I_o σταθερά.

Οι εφαρμογές που προαναφέρθηκαν είναι ενδεικτικές και σίγουρα δεν καλύπτουν όλο το φάσμα των πεδίων στα οποία η λογαριθμική συνάρτηση βρίσκει εφαρμογή. Η αναφορά αυτή όμως, έστω και σε επιλεγμένα παραδείγματα, δίνει την εικόνα αφενός της ιδιαίτερης θέσης που κατέχει ο λογάριθμος ως μαθηματικό αντικείμενο για την εσωτερική λειτουργία και πληρότητα του μαθηματικού κλάδου και αφετέρου της σημαντικής συμβολής των λογαρίθμων στην εξέλιξη ποικίλλων άλλων επιστημονικών πεδίων.

Επίλογος - Παρατηρήσεις επί της διδακτικής παρέμβασης

Μέσα από την ιστορική αναδρομή της έννοιας του λογάριθμου, αναδείχθηκε η, με διαφορετικούς τρόπους, αδιαμφισβήτητη χρησιμότητά και σπουδαιότητά της, σε διαφορετικά ιστορικά πλαίσια. Αναδείχθηκαν επίσης οι προφανείς λόγοι για τους οποίους η διδασκαλία της θεωρείται απαραίτητη σε ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα. Κατά πόσο όμως αυτό γίνεται εμφανές σε μία τυπική διδασκαλία στο ελληνικό σχολείο του σήμερα, η οποία έχει τη δυνατότητα να απαντήσει σε καίρια ερωτήματα των μαθητών για τη θέση των Μαθηματικών στη σύγχρονη πραγματικότητα;

Στην κυρίως ύλη του σχολικού βιβλίου δεν γίνεται καμία αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του λογάριθμου. Ιστορική αναφορά για τις ρίζες της έννοιας αυτής γίνεται μετά το τέλος του κεφαλαίου σε ένα ενδιαφέρον και περιεκτικό ιστορικό σημείωμα του μαθηματικού, κ. Γιάννη Θωμαΐδη, η χρήση ή μη του οποίου όμως έγκειται στις προσωπικές επιλογές του εκπαιδευτικού, ο οποίος είναι αμφίβολο αν θα το χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία καθώς και με ποιους τρόπους θα το επιτύχει αυτό, εγκλωβισμένος σε ένα, ασφυκτικό χρονικά, αναλυτικό πρόγραμμα. Οι αναφορές δε, στο σχολικό βιβλίο οι οποίες αφορούν τις εφαρμογές του λογάριθμου ως μέσου επίλυσης προβλημάτων της σύγχρονης πραγματικότητας, πράγμα που καταδεικνύει και τη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλα επιστημονικά πεδία, εξαντλούνται σε λίγα παραδείγματα και ασκήσεις – προβλήματα τα οποία, πρέπει να σημειωθεί, προτείνονται προς επίλυση στις οδηγίες διαχείρισης της ύλης.

Ειδικά για τους λογαρίθμους, ο Fauvel (1995) αναφέρει ότι θα ήταν ίσως δελεαστικό για τον διδάσκοντα να παραβλέψει τον αρχικό ρόλο των λογαρίθμων ως υπολογιστικού εργαλείου και να προχωρήσει απευθείας στον ορισμό του λογαρίθμου που έδωσε τον 18^{ο} αιώνα ο Euler. Διαβλέπει όμως δύο βασικά σημεία που με αυτόν τον τρόπο διδακτικής παρουσίασης δεν διαφωτίζονται επαρκώς, ή καλύτερα απουσιάζουν εντελώς, με αποτέλεσμα την ελλιπή κατανόηση των μαθητών ως προς την έννοια του λογαρίθμου. Το ένα είναι η πλήρης έλλειψη αναφοράς στην αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, από την οποία πηγάζει και ο όρος "λογάριθμος". Το δεύτερο αφορά την εξέλιξη του λογάριθμου με την πάροδο του χρόνου από υπολογιστικό σε θεωρητικό εργαλείο, η οποία επίσης παραλείπεται εντελώς σε έναν φορμαλιστικό τρόπο διδακτικής παρουσίασης της έννοιας του λογάριθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Ο Γ. Θωμαΐδης, σε άρθρο του στο 4^{ο} τεύχος του "Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών" (1987) αναφέρει χαρακτηριστικά: «Ο μαθητής, ο οποίος προσεγγίζει τη λογαριθμική συνάρτηση μέσα από έναν τέτοιο (τυπικό) ορισμό, αγνοεί εντελώς, στο κρίσιμο στάδιο της πρώτης επαφής του με μια νέα έννοια, για ποιο λόγο ορίζεται η έννοια αυτή, ποια είναι η σχέση της με τον πραγματικό κόσμο» (Η υπογράμμιση ανήκει στον συγγραφέα).

Επομένως το σύνηθες ερώτημα των μαθητών προς τους διδάσκοντες στη Μέση Εκπαίδευση «Ποιος ο λόγος να τα μαθαίνουμε αυτά;» παραμένει αναπάντητο σε μία διδασκαλία η οποία ακολουθεί την τυπική και φορμαλιστική παρουσίαση της έννοιας του λογάριθμου και αναλίσκεται σε μεθοδολογία επίλυσης ασκήσεων. Αν και οι λογάριθμοι αποτελούν βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης, έρευνες καταδεικνύουν ότι ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του λογαρίθμου από τους μαθητές είναι περιορισμένος (Αεράκης, 2015; Vagliardo, 2006; Θωμαΐδης, 1987). Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι λογάριθμοι λειτουργούν ως δομικό στοιχείο στην ύλη της Γ΄ Λυκείου. Μικρός όμως αριθμός μαθητών της τελευταίας τάξης του Λυκείου έχει κατανοήσει την έννοια του λογάριθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης, πράγμα το οποίο πολλές φορές αποτελεί βασική αιτία συχνών παρανοήσεων και λαθών ακόμα και κατά την επίλυση ασκήσεων διαδικαστικού χαρακτήρα.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις αποτέλεσαν το έναυσμα για τον σχεδιασμό της παρούσας διδακτικής παρέμβασης, η οποία χρησιμοποιώντας την ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων, θα προσπαθήσει να ικανοποιήσει τα μαθησιακά ζητούμενα που αφορούν τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Θα αναδειχθεί η αναγκαιότητα επινόησης της έννοιας στο δεδομένο ιστορικό πλαίσιο, η αρχική προσέγγιση του Napier και η συναρτησιακή σχέση που σε λανθάνουσα μορφή βρίσκεται στην αντιστοιχία των προόδων, η ρίζα της ονομασίας λογάριθμος, η έννοια των φυσικών λογαρίθμων και η μετάβαση από τους λογαριθμικούς πίνακες συγκεκριμένων αριθμών, στον ορισμό του λογαρίθμου κάθε θετικού πραγματικού αριθμού. Τέλος, οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με ένα άλλο ιστορικό πλαίσιο και τον συναρτησιακό ορισμό του Euler, μελετώντας κείμενά του, και θα γνωρίσουν σύγχρονες εφαρμογές των λογαρίθμων σε ποικίλα επιστημονικά πεδία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μαθηματικός Χώρος Εργασίας

Περιγραφή του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας και Θεωρητική Πλαισίωση

Αντικείμενο μελέτης του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (ΜΧΕ), ως θεωρητικού μοντέλου, αποτελεί το ίδιο το μαθηματικό έργο και το πώς αυτό παράγεται μέσα στη μαθηματική τάξη. Το έργο αυτό θεωρείται ως ανθρώπινη, λογική δραστηριότητα, προσανατολισμένη σε ένα σκοπό, η οποία είναι αποτέλεσμα συνδυαστικής χρήσης μαθηματικών συμβόλων - σημείων, υλικών εργαλείων και κανόνων, οι οποίοι βασίζονται σε ορισμούς, θεωρήματα και ιδιότητες (Kuzniak et al., 2016α). Οι δύο πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας που τίθενται προς παρατήρηση και ανάλυση είναι από τη μια πλευρά η πορεία μάθησης που βιώνει ο μαθητής και από την άλλη ο τρόπος με τον οποίο η πορεία αυτή καθοδηγείται από τον διδάσκοντα. Το μοντέλο του ΜΧΕ εκλαμβάνει τη μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη ως ένα σύστημα που περικλείει ποικίλα στοιχεία επιστημολογικής και γνωστικής φύσης αλλά και διαφορετικές συνδέσεις με τις οποίες τα στοιχεία αυτά επικοινωνούν (Delgadillo & Vivier, 2016). Συνδυάζει σημειωτικές, εργαλειακές και λεκτικές προσεγγίσεις με επιστημολογικά και διδακτικά πλαίσια. Η λειτουργία του μοντέλου φαίνεται να πλαισιώνεται κατάλληλα, μεταξύ άλλων, από τη θεωρία της δραστηριότητας (activity theory) (Kuzniak et al., 2016β), καθώς το υποκείμενο με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων – μέσων δρα πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο ώστε να πραγματώσει το κίνητρο της δραστηριότητας (Engeström, 2001). Επιπλέον, σύμφωνα με την Artique (2016), το μοντέλο του ΜΧΕ περιέχει στοιχεία των θεωρητικών προσεγγίσεων των τριών πυλώνων της γαλλικής σχολής της διδακτικής των Μαθηματικών: της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων, των εννοιολογικών πεδίων και του διδακτικού μετασχηματισμού.

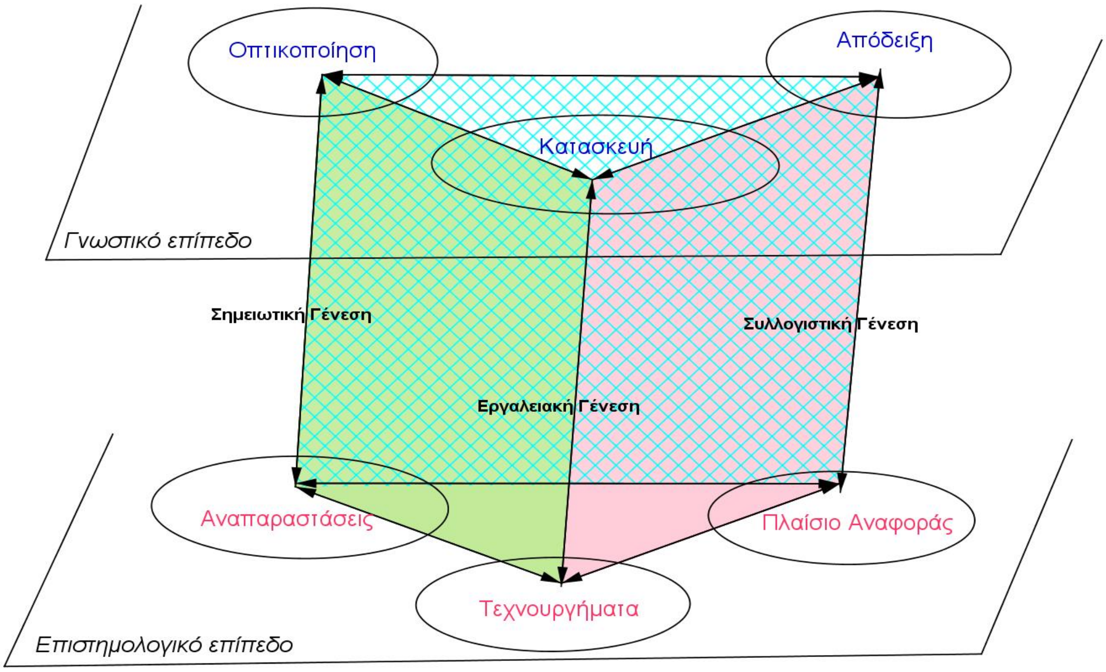
Το μοντέλο του ΜΧΕ δεν αποτελεί απλά προσπάθεια μέτρησης του βαθμού αλληλεπίδρασης μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης αλλά αντανακλά επιπλέον τις δημιουργικές και δυναμικές όψεις της μαθησιακής και διδακτικής εμπειρίας (Gómez-Chacón et al., 2016). Στόχος λοιπόν του μοντέλου είναι η ακριβής περιγραφή και ανάλυση της μαθηματικής δραστηριότητας σε όλες της τις διαστάσεις, με στόχο τη μελέτη της πορείας κατασκευής του νοήματος που επιτυγχάνεται γεφυρώνοντας το κενό μεταξύ επιστημολογικών και γνωστικών στοιχείων που συνιστούν τη μαθηματική γνώση (Kuzniak et al., 2016β). Αυτό σημαίνει όχι μόνο αναφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο και τα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά επιπλέον και στον τρόπο ανάπτυξης μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, καθώς και στο είδος των σημειωτικών προσεγγίσεων και των εργαλείων που χρησιμοποιεί ο μαθητής ώστε να αναπτύξει επαρκώς το μαθηματικό έργο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η διαφορά μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και εργαλείων δεν είναι, εκ των προτέρων, σαφώς προσδιορισμένη καθώς αυτή εξαρτάται από τις εκάστοτε συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι ένα μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο και αντίστροφα ένα μαθηματικό εργαλείο ως αντικείμενο σε μία συγκεκριμένη στιγμή και σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Kuzniak et al., 2016α).

Δομή του μοντέλου

Επιστημολογικό και Γνωστικό επίπεδο

Ο ΜΧΕ αποτελεί εξέλιξη της θεωρίας του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας (ΓΧΕ) που εισήχθη περίπου πριν από μία δεκαετία (Houdement & Kuzniak, 2006). Στόχος του μοντέλου είναι η οργάνωση ενός κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος στα πλαίσια της σχολικής τάξης, όπου ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να αυτενεργήσει με σκοπό την επίλυση προβλήματος. Ως δραστηριότητα, η επίλυση προβλήματος κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, καθώς οι μαθητές εμπλεκόμενοι σε τέτοιου είδους διαδικασίες, ενεργοποιούν γνώσεις και τεχνικές που αντλούν από έναν θεσμοθετημένο χώρο αναφοράς που καθορίζει το πλαίσιο εργασίας και αναπτύσσουν τις ικανότητές τους με στόχο την κατασκευή μαθηματικού νοήματος (Kuzniak et al., 2016β).

Ο ΜΧΕ διατηρεί τη βασική δόμηση του ΓΧΕ που συνίσταται σε δύο οριζόντια επίπεδα τα οποία επικοινωνούν μέσω δυναμικών συνδέσεων (γενέσεων) (Σχήμα 1). Πρόκειται για το επιστημολογικό (epistemological plane) και το γνωστικό επίπεδο (cognitive plane). Το επιστημολογικό επίπεδο περιέχει στοιχεία που αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο της υπό διδασκαλία γνώσης, ενώ το γνωστικό αφορά τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η σκέψη και περαιτέρω η πορεία μάθησης του ατόμου που μαθαίνει.



Εικόνα 4. Διάγραμμα του μοντέλου (Delgadillo & Vivier, 2016).

Τα περιεχόμενα-πλαίσια του επιστημολογικού επιπέδου είναι τα εξής:

- Το πλαίσιο των αναπαραστάσεων, σημείων ή συμβόλων, με την έννοια της τριαδικής υπόστασης του σημείου στη θεωρία του Peirce (Kralemann & Lattmann, 2013). Τα τρία στοιχεία που συνιστούν το σημείο είναι το ίδιο το σύμβολο - σημαίνον (representa men), το αντικείμενο - σημαινόμενο (object) και η ερμηνεία του σημείου (interpretant). Σύμφωνα με τον Peirce, σημείο είναι αυτό που για κάποιον αντιπροσωπεύει μία όψη του αντικειμένου - σημαινόμενου. Η ενεργοποίηση της λειτουργίας του προκαλεί τη δημιουργία ενός νέου νοητικού σημείου, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό ή και περισσότερο ανεπτυγμένο. Το πλαίσιο των αναπαραστάσεων στο μοντέλο του ΜΧΕ, περιέχει χειροπιαστά και συγκεκριμένα στοιχεία, όπως γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα ή μοντέλα και φωτογραφίες στην περίπτωση προβλημάτων που εμπεριέχουν μοντελοποίηση (Kuzniak et al., 2016β).

- Το πλαίσιο των τεχνουργημάτων, υλικών ή συμβολικών, που εμπλέκονται στη διδακτική πράξη. Η έννοια του τεχνουργήματος (artifact) αφορά οτιδήποτε έχει υποστεί επεξεργασία ανθρώπινης προέλευσης (Beguin & Rabardel, 2000). Σύμφωνα με τους Kuzniak et al. (2016β), στο μοντέλο του ΜΧΕ η έννοια του τεχνουργήματος έχει περιορισμένη εμβέλεια ώστε να μην δημιουργείται σύγχυση με άλλα στοιχεία του επιστημολογικού επιπέδου. Ως συνέπεια αυτού, εκτός από τα υλικά τεχνουργήματα, οι αλγόριθμοι είναι τα μόνα συμβολικά συστατικά που θεωρούνται ως τεχνουργήματα, τα οποία είτε έχουν υλική διάσταση, όπως οι λογαριθμικοί ή τριγωνομετρικοί πίνακες ή αποτελούν υπολογιστικές ή κατασκευαστικές τεχνικές των οποίων η εγκυρότητα είναι δεδομένη, για παράδειγμα η τεχνική της Ευκλείδειας διαίρεσης.
- Τέλος, το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς το οποίο περιλαμβάνει ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα και αξιώματα που αφορούν την υπό διδασκαλία γνώση. Τα συστατικά αυτά οργανώνονται με συστηματικό τρόπο ώστε να ευνοείται η ανάπτυξη παραγωγικού, αποδεικτικού συλλογισμού. Είναι κατάλληλα προσαρμοσμένα στα θέματα που καλούνται οι μαθητές να διαπραγματευτούν και απορρέουν από προτάσεις και αρχές ενός θεσμοθετημένου πλαισίου.

Τα περιεχόμενα των τριών πόλων του επιστημολογικού επιπέδου, δηλ. σημεία, τεχνουργήματα και στοιχεία του πλαισίου αναφοράς αποτελούν εργαλεία (tools). Επομένως, τα υλικά εργαλεία μπορεί να είναι σημειωτικής φύσεως, όπως διαγράμματα και σύμβολα, ή τεχνολογικά, όπως ο Η/Υ, ενώ τα θεωρητικά εργαλεία αφορούν αλγόριθμους, ιδιότητες, θεωρήματα. Η έννοια του εργαλείου κατέχει θέση ιδιαίτερης σημασίας στο μοντέλο του ΜΧΕ. Αποτελεί δυναμική οντότητα αφού εμπεριέχει δυνατότητες αξιοποίησής του από τον χρήστη με σκοπό την ολοκλήρωση του μαθηματικού έργου. Τα εργαλεία του επιστημολογικού επιπέδου βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα πλαίσια του γνωστικού επιπέδου, η οποία δημιουργείται μέσω της επέμβασης του ατόμου που τα χρησιμοποιεί. Η αντιστοιχία αυτή συχνά μας βοηθά να καθορίσουμε σε ποιον από τους τρεις πόλους του επιστημολογικού επιπέδου ανήκει το συγκεκριμένο εργαλείο (Kuzniak et al., 2016a).

Τα στοιχεία του επιστημολογικού επιπέδου δεν αποτελούν απλώς μία συνάθροιση αλλά οργανώνονται ως σύνολο σύμφωνα με προκαθορισμένους στόχους. Καθώς ο κύριος λόγος ύπαρξης του επιστημολογικού επιπέδου είναι η περιγραφή του γενικού θεωρητικού υπόβαθρου που αποτελεί την πυξίδα για την ανάπτυξη της μάθησης, το επίπεδο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως επιστημολογικό περιβάλλον (epistemological milieu) (Coutat & Richard 2011, όπως αναφέρεται στους Kuzniak et al., 2016β).

Πέρα όμως από τα επιστημολογικά στοιχεία που αφορούν το προς διδασκαλία αντικείμενο, η μαθηματική δραστηριότητα είναι πρωτίστως ανθρώπινη δραστηριότητα. Είναι σημαντικό λοιπόν να ξέρουμε το πώς ο ανθρώπινος παράγοντας επεμβαίνει και συμμετέχει σε αυτή, πώς κατανοεί, πώς δίνει νόημα στα αντικείμενα, πώς κάνει τις κατάλληλες γνωστικές συνδέσεις. Σε αυτό το σημείο γίνεται φανερή η ανάγκη ύπαρξης στο μοντέλο του ΜΧΕ, ενός δεύτερου επιπέδου του γνωστικού. Σε επικοινωνία με τα στοιχεία του επιστημολογικού επιπέδου, το γνωστικό επίπεδο περιέχει τις λειτουργίες της οπτικοποίησης, της κατασκευής και της απόδειξης.

- Η οπτικοποίηση με την ευρεία της έννοια, συνίσταται στη διαδικασία δόμησης της πληροφορίας, η οποία παρέχεται από διαγράμματα και σύμβολα. Αφορά στην αποκωδικοποίηση και ερμηνεία των συμβόλων και την κατασκευή εσωτερικών αναπαραστάσεων αντικειμένων και σχέσεων. Τα σύμβολα αυτά δεν είναι κατ' ανάγκη οπτικά, αλλά μπορεί να αποτελούν ακουστικές εικόνες σε λεκτικά πλαίσια. Η λειτουργία της οπτικοποίησης, όπως αυτή εννοείται στο μοντέλο του ΜΧΕ, καλείται από τους Kuzniak et al. (2016β), "πλήρης" (comprehensive visualization) και σύμφωνα με τους ίδιους, δεν πρέπει να συγχέεται με την απλή αντίληψη των αντικειμένων.
- Η λειτουργία της κατασκευής αναπτύσσεται με τη διαμεσολάβηση των διαθέσιμων εργαλείων και τεχνικών. Η κατασκευή, επίσης λογιζόμενη σε ευρεία

πλαίσια όπως και η οπτικοποίηση, δεν συνίσταται πάντα σε παραγωγή απτών έργων, όπως για παράδειγμα σχεδιαγραμμάτων. Αφορά επιπλέον, διαδικασίες παρατήρησης, εξερεύνησης και πειραματισμού, οι οποίες καθοδηγούνται από την επέμβαση του ατόμου στα εργαλεία – τεχνουργήματα.

- Τέλος, η συλλογιστική διαδικασία συνδέεται με την ανάπτυξη μη τυπικής επιχειρηματολογίας ή και με την κατασκευή τυπικής απόδειξης (Kuzniak & Richard, 2014), μέσω διαδικασιών επικύρωσης που απορρέουν από το πλαίσιο αναφοράς. Βασίζεται καθώς και οδηγεί σε θεωρητικές προτάσεις που είναι δυνατό να αποτελούν ορισμούς, υποθέσεις ή εικασίες.

Διαστάσεις και Γενέσεις του μοντέλου

Η πορεία ανάπτυξης εννοιολογικής γνώσης συνίσταται στην ιδέα μιας καθολικής γένεσης ανάμεσα στα επιστημολογικά στοιχεία και τις γνωστικές διαδικασίες, η οποία επιτυγχάνεται μέσω των προσωπικών ενεργειών του ατόμου (Miranda et al., 2016). Η έννοια της γένεσης δεν αφορά μόνο τη δημιουργία αλλά και την ανάπτυξη και τους μετασχηματισμούς των αλληλεπιδράσεων που αναπτύσσονται ανάμεσα στα στοιχεία των δύο οριζόντιων επιπέδων (Kuzniak et al., 2016α). Η ενασχόληση του υποκειμένου με την μαθηματική δραστηριότητα εμπεριέχει πάντα λειτουργίες ανάπτυξης και εξέλιξης. Αυτή η συνεχώς μεταβαλλόμενη πορεία αντιπροσωπεύεται στο μοντέλο από τον όρο γένεση ο οποίος δηλώνει ακριβώς τον εξελισσόμενο και δυναμικό χαρακτήρα της διαδικασίας παραγωγής του μαθηματικού έργου (Radford, 2016). Το μοντέλο του ΜΧΕ εμπεριέχει τρεις διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας και τις αντίστοιχες γενέσεις τους, που καθιστούν εφικτή την επικοινωνία ανάμεσα στα δύο παράλληλα επίπεδα, καταδεικνύοντας τον δυναμικό χαρακτήρα του μοντέλου (Σχήμα 1):

- Η Σημειωτική (semiotic) αποδίδει σε ένα αντικείμενο τις ιδιότητες που το μετατρέπουν σε δυναμικά λειτουργικό μαθηματικό αντικείμενο. Συνδέει τη δομή με τη λειτουργικότητα των μεταφερόμενων συμβόλων και ουσιαστικά αποτελεί διαδικασία αποκωδικοποίησης. Είναι διαδικασία ανάπτυξης εννοιολογικής δομής, βασιζόμενη στην αντίληψη των αισθήσεων. Η αντίστροφη πορεία, της κωδικοποίησης (instantiation), προκαλείται όταν ένα σύμβολο δημιουργείται ή συγκεκριμενοποιείται έχοντας ως βάση μια εννοιολογική δομή.

- Η Εργαλειακή (instrumental), μέσω της οποίας τα αντικείμενα - εργαλεία μετατρέπονται σε γνωστικά όργανα που βοηθούν στην επιτυχή ολοκλήρωση του μαθηματικού έργου. Η έννοια του γνωστικού οργάνου (instrument) εμπεριέχει δύο στοιχεία: α) το τεχνούργημα - εργαλείο υλικό ή συμβολικό και β) τα γνωστικά σχήματα χρήσης του που το καθιστούν ικανό για τη συμμετοχή του στη διεκπεραίωση του μαθηματικού έργου. Το εργαλείο μετατρέπεται σε γνωστικό όργανο όταν το υποκείμενο που το χρησιμοποιεί έχει αναπτύξει γνωστικά σχήματα που αφορούν τη χρήση του (Beguin & Rabardel, 2000). Στην ουσία αποτελεί την εξέλιξη της αρχικής μορφής του εργαλείου που προκύπτει όταν ο χρήστης - μαθητής δίνει σε αυτό γνωστική υπόσταση μέσω του προσωπικού τρόπου με τον οποίο το χρησιμοποιεί (Kuzniak et al., 2016α). Η έννοια του οργάνου επομένως, εμπεριέχει γνωστική αξία. Η εργαλειακή γένεση αποτελεί την πορεία ανάπτυξης των γνωστικών σχημάτων, τα οποία συνδέονται με την χρήση του τεχνουργήματος - εργαλείου. Η παρατήρηση της πορείας αυτής είναι δυνατό να βοηθήσει στην εξήγηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και ταυτόχρονα να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για τον επανασχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων (Mariotti, 2006).

Η Artigue (2002) συζητά δύο κατευθύνσεις στην τροχιά της εργαλειακής γένεσης, οι οποίες ενσωματώνονται στο μοντέλο του ΜΧΕ (Σχήμα 1). Η κατεύθυνση από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο καλείται εργαλειοποίηση (instrumentation). Απευθύνεται στον χρήστη, ο οποίος οδηγείται στην ανάπτυξη σχημάτων που αποκτούν τη μορφή τεχνικών και είναι κατάλληλες για την εκπλήρωση του συγκεκριμένου έργου. Ξεκινά από το τεχνούργημα και οδηγείται προς τις ενέργειες που προκαλούνται από αυτό. Η αντίστροφη πορεία (instrumentalization), δηλ. από το γνωστικό στο επιστημολογικό επίπεδο, απευθύνεται στο τεχνούργημα και αφορά τις στοχευμένες επιλογές του χρήστη ως προς την απόδοση δυνατοτήτων στο τεχνούργημα και τον τελικό μετασχηματισμό του για συγκεκριμένους σκοπούς.

- Η Συλλογιστική - με Λόγο διαδικασία (λεκτική - αποδεικτική) αφορά την ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού. Λειτουργεί σε αφαιρετικό - θεωρητικό επίπεδο πέρα από αισθητικές προσεγγίσεις και συγκεκριμένες αναπαραστάσεις, προσδίδοντας νόημα στις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων του μαθηματικού χώρου (Delgadillo & Vivier, 2016). Τα στοιχεία του θεωρητικού πλαισίου αναφοράς ενεργοποιούνται στη διαδικασία ανάπτυξης μαθηματικού συλλογισμού για την παραγωγή έγκυρης, λεκτικής απόδειξης. Όπως και οι προηγούμενες γενέσεις λειτουργεί αμφίδρομα. Από τη μία πλευρά προωθεί την αποδεικτική συλλογιστική διαδικασία ενεργοποιώντας στοιχεία του πλαισίου αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου στην από "κάτω προς τα πάνω" κατεύθυνση σύνδεσης με το γνωστικό επίπεδο. Σε αντίστροφη πορεία, από "πάνω προς τα κάτω", επικυρώνει την εγκυρότητα μιας λεκτικής απόδειξης σε συνδυασμό με στοιχεία του πλαισίου αναφοράς καθώς και ταυτοποιεί και αναγνωρίζει ιδιότητες ή ορισμούς που υπάρχουν στο πλαίσιο αναφοράς αλλά δεν είναι εμφανείς (Kuzniak et al., 2016β).

Πρέπει να σημειωθεί ότι οποιοσδήποτε Λόγος (discourse) που αναπτύσσεται χρησιμοποιώντας συνήθως τη φυσική γλώσσα, δεν συνδέεται αναγκαία με τη συλλογιστική γένεση. Για παράδειγμα, η περιγραφή, αναγνώριση ή χαρακτηρισμός ενός αντικειμένου μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο της σημειωτικής γένεσης που βασίζεται στο συγκεκριμένο σύστημα συμβόλων της φυσικής γλώσσας. Αντίστροφα, ένας συλλογισμός ο οποίος δεν είναι οργανωμένος με παραγωγικό τρόπο, όπως για παράδειγμα η κατασκευή ενός τυπικού ορισμού, είναι δυνατό να ανήκει στη διαδικασία της συλλογιστικής γένεσης. Ο διαχωρισμός του είδους των γενέσεων, ο οποίος δεν είναι πάντα εύκολο να επιτευχθεί, μπορεί να ερευνηθεί εστιάζοντας στα τρία κατακόρυφα επίπεδα (Σχήμα 1), που οι διαστάσεις με τις αντίστοιχες γενέσεις τους οριοθετούν. Τα επίπεδα αυτά σχετίζονται με διαφορετικές εκφάνσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως την εξερεύνηση - ανακάλυψη, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, την παρουσίαση και την επικοινωνία των θεμάτων.

Αλληλεπιδράσεις των Γενέσεων του μοντέλου

Το πρώτο κατακόρυφο επίπεδο που οριοθετείται από τη σημειωτική και εργαλειακή γένεση (Sem-Ins plane) είναι το πλαίσιο όπου αναπτύσσεται, μέσω διερεύνησης, η ικανότητα ανακάλυψης της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος (Σχήμα 1). Ο μετασχηματισμός του τεχνουργήματος σε γνωστικό όργανο μπορεί να ενθαρρύνει τη λειτουργία σημειωτικών συστημάτων που χρησιμοποιεί το άτομο στην πορεία της διαδικασίας ανάπτυξης νοήματος (Mariotti, 2006). Στην ουσία, τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη διεκπεραίωση του μαθηματικού έργου, ψηφιακά ή μη, μετατρέπονται σε λειτουργικά όργανα μέσω των ενεργειών του χρήστη με αντικείμενα αναπαραστάσεις, σημεία ή σύμβολα.

Σε αυτό το σημείο, ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην ανάπτυξη μαθηματικών εκπαιδευτικών λογισμικών, τα οποία παρέχουν νέες δυνατότητες οπτικοποίησης και περαιτέρω πειραματισμού με τα μαθηματικά αντικείμενα, προωθώντας τη δημιουργία ενός κονστρουκτιβιστικού περιβάλλοντος μάθησης (Healy & Kynigos, 2010; Kynigos, 2007). Τα ψηφιακά εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα σχηματισμού εικόνας της μαθηματικής έννοιας μέσω της εξερεύνησης γραφικών αναπαραστάσεων, για παράδειγμα συναρτήσεων, χωρίς την αναγκαιότητα τυπικής επικύρωσης.

Το δεύτερο κατακόρυφο επίπεδο οριοθετείται από την εργαλειακή και λεκτική γένεση (Ins-Dis plane). Αποτελεί το πλαίσιο αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων της μαθηματικής δραστηριότητας που αφορούν συνήθως τις διαδικασίες εξερεύνησης και πειραματισμού οι οποίες βασίζονται σε θεωρητικές προτάσεις. Το κέντρο βάρους της εργασίας στο επίπεδο αυτό μπορεί να μετατοπίζεται προς τη μία ή την άλλη γένεση. Συγκεκριμένα, αν τα συμπεράσματα που προκύπτουν συνίστανται σε πειραματική απόδειξη βασιζόμενη σε επαγωγικό συλλογισμό με τη χρήση εργαλείων, τότε στο επίπεδο των δύο γενέσεων το κέντρο βάρους βρίσκεται στην εργαλειακή. Από την άλλη πλευρά, ο γνήσια παραγωγικός συλλογισμός, ο οποίος δομείται σταδιακά βασιζόμενος σε ενέργειες που παρέχουν τα εργαλεία αναπτύσσεται στο κατακόρυφο επίπεδο εργαλειακής και συλλογιστικής γένεσης με μεγαλύτερο βάρος στη δεύτερη.

Ο τελευταίος τύπος αλληλεπίδρασης αφορά τον μαθηματικό συλλογισμό και την επικοινωνία των θεμάτων. Περιέχει τη θεωρητική επικύρωση των αποτελεσμάτων μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας. Οριοθετείται στον χώρο μεταξύ σημειωτικής και λεκτικής διάστασης (Sem-Dis plane). Η λειτουργία των δύο γενέσεων που αφορούν τις διαστάσεις αυτές δεν είναι πάντα ομοιόμορφα κατανεμημένη. Για παράδειγμα, η ανάπτυξη αποδεικτικής συλλογιστικής ενός γεωμετρικού θεωρήματος μέσα από μετασχηματισμούς και ανακατανομές γεωμετρικών σχημάτων, μπορεί να ενταχθεί στο επίπεδο σημειωτικής και συλλογιστικής γένεσης, με τη σημειωτική γένεση να κατέχει την προτεραιότητα. Αντίστροφα, η συλλογιστική γένεση κατέχει το μεγαλύτερο μέρος σε μία διαδικασία ανάπτυξης τυπικής γραπτής απόδειξης που βασίζεται σε συγκεκριμένα και σαφή θεωρήματα και ιδιότητες και η οποία παράγεται μέσω ευρετικής προσέγγισης (heuristic methods) χρησιμοποιώντας σημεία και σύμβολα.

Το μαθηματικό έργο που παράγεται στη μαθηματική τάξη θεωρείται πλήρες όταν αφενός υπάρχει μία "γνήσια σχέση" ανάμεσα στα επιστημολογικά και γνωστικά στοιχεία, τα οποία συνιστούν την προς μάθηση γνώση και όταν αφετέρου οι τρεις κατακόρυφες γενέσεις του μοντέλου οργανώνονται και αναπτύσσονται κατάλληλα (Kuzniak et al., 2016α). Η "γνήσια σχέση" ανάμεσα στα επιστημολογικά και γνωστικά στοιχεία συνίσταται στην ικανότητα των μαθητών να επιλέγουν τα κατάλληλα υλικά ή θεωρητικά εργαλεία (tools) και να τα αξιοποιούν με τον κατάλληλο τρόπο μετατρέποντάς τα σε γνωστικά μέσα (instruments) για την επίλυση του δοθέντος προβλήματος. Η κατάλληλη οργάνωση και ανάπτυξη των τριών κατακόρυφων γενέσεων του μοντέλου αφορά την ενεργοποίηση ποικίλων διαστάσεων της μαθηματικής εργασίας που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης γνώσης καθώς και με τα εργαλεία και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται.

Παράλληλοι Μαθηματικοί Χώροι

Στην πορεία ανάπτυξης του πλαισίου διδασκαλίας - μάθησης, υπό το πρίσμα του μοντέλου του ΜΧΕ, διακρίνονται τα εξής τρία επίπεδα:

Μαθηματικός Χώρος Αναφοράς

Ο Μαθηματικός Χώρος αναφοράς, ο οποίος ορίζεται από τις συνθήκες και τα μέσα του συγκεκριμένου «παραδείγματος» στο οποίο λειτουργεί. Το παράδειγμα θεσμοθετείται όταν μία κοινότητα ατόμων συμφωνεί να μορφοποιεί προβλήματα και να οργανώνει τις λύσεις τους, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εργαλεία και συγκεκριμένους τρόπους σκέψης (Delgadillo & Vivier, 2016). Πρόκειται για ένα σύνολο πεποιθήσεων, αξιών, τεχνικών και μεθόδων κοινά αποδεκτών που καθορίζει το είδος των προβλημάτων - έργων που τίθενται προς επίλυση, τις μεθόδους αξιολόγησης και επικύρωσης των διαδικασιών επίλυσης, καθώς και τους κώδικες επικοινωνίας των αποτελεσμάτων. Οι νόρμες που διέπουν τη λειτουργία του παραδείγματος δεν καθορίζονται με μοναδική βάση μαθηματικά κριτήρια αλλά οριοθετούνται βασιζόμενες σε ποικίλες πολιτικές, κοινωνικές και οικονομικές συνιστώσες οι οποίες επηρεάζουν τις αρχές και τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι επιταγές του αναλυτικού προγράμματος, τα συμπεράσματα των ερευνών της επιστημονικής κοινότητας της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και μελέτες φορέων που σχετίζονται με την εκπαιδευτική πολιτική, διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη θεσμοθέτηση του παραδείγματος πλαισιώνοντας τον χώρο αναφοράς και συνεισφέροντας στην απόδοση "καλώς ορισμένου" νοήματος στα μαθηματικά αντικείμενα. Με τον τρόπο αυτό, καθορίζεται ο προσανατολισμός της πορείας της μαθηματικής δραστηριότητας (Kuzniak et al., 2016β).

Κατάλληλος ΜΧΕ

Ο κατάλληλος - επαρκής ΜΧΕ, ο οποίος επιτρέπει την εφαρμογή των επιταγών του χώρου αναφοράς στη σχολική τάξη και αποτελεί το κατάλληλο περιβάλλον για την ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας. Επιτρέπει την εργασία που απαιτείται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων και έργων που τίθενται υπό διαπραγμάτευση, στα πλαίσια του εγκαθιδρυμένου παραδείγματος και οφείλει να είναι κατάλληλα σχεδιασμένος από τον διδάσκοντα ώστε τα επιμέρους συστατικά του να είναι οργανωμένα με στόχο τη μέγιστη αξιοποίησή τους. Ο χώρος αναφοράς αποτελεί αφετηρία και πηγή των κατευθυντήριων γραμμών για τον σχεδιασμό του κατάλληλου χώρου εργασίας, ο οποίος με τη σειρά του διαμορφώνει το πλαίσιο ανάπτυξης της προσωπικής εργασίας του μαθητή.

Προσωπικός Χώρος Εργασίας

Ο σχεδιασμός του κατάλληλου ΜΧΕ, με βάση τον χώρο αναφοράς, μέσω των επιλογών που αφορούν τους τρόπους παρουσίασης, τη χρησιμοποίηση των εργαλείων, την επιλογή των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, ανήκει στον προσωπικό χώρο εργασίας του διδάσκοντα και εξαρτάται από τους στόχους και τις προσδοκίες του. Οι ενέργειες όμως που θα κάνει ο μαθητής στο πλαίσιο του επαρκούς ΜΧΕ ώστε να ανταποκριθεί στα ερωτήματα και τα προβλήματα που τέθηκαν ανήκουν στον προσωπικό ΜΧΕ του μαθητή. Οι ενέργειες αυτές εξαρτώνται όπως είναι φυσικό από τις προσωπικές ικανότητες του μαθητή καθώς και τους τρόπους με τους οποίους ο ίδιος λειτουργεί στο πλαίσιο συγκεκριμένων διδακτικών συνθηκών. Το μοντέλο του ΜΧΕ μέσω της μελέτης των προσωπικών χώρων εργασίας του διδάσκοντα και του μαθητή, παρέχει τη δυνατότητα παρατήρησης των διαφοροποιήσεων ανάμεσα στις προσδοκίες του διδάσκοντα για τις πιθανές ενέργειες του μαθητή και σε αυτά που τελικά ο μαθητής αντιλαμβάνεται και πράττει. Τα συμπεράσματα της παρατήρησης αυτής λειτουργούν ανατροφοδοτικά για τον διδάσκοντα, ο οποίος αναδιοργανώνει τον κατάλληλο ΜΧΕ ο οποίος δεν λειτουργεί ως ένα στατικό πλαίσιο αλλά ως μία κατάσταση που συνεχώς αναπροσαρμόζεται, ανάλογα με τις συγκεκριμένες συνθήκες (Kuzniak & Richard, 2014). Αν θεωρήσουμε ότι ο κατάλληλος χώρος εργασίας είναι προϊόν διαπραγμάτευσης μεταξύ διδασκόντων και διδασκομένων, τα αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης αυτής υπακούουν στις επιταγές επιστημολογικού περιεχομένου που απορρέουν από τον χώρο αναφοράς (Kuzniak et al., 2016β).

Η εργασία που απαιτείται για την ολοκλήρωση ενός μαθηματικού θέματος στη σχολική τάξη, συχνά προϋποθέτει μετάβαση του πεδίου εργασίας σε διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που πηγάζει από τον χώρο της Γεωμετρίας είναι δυνατό να εμπλέκει μετρήσεις και μεγέθη, χαρακτηριστικά στοιχεία του χώρου της Άλγεβρας. Η παρατήρηση της ροής εργασίας ανάμεσα στους μαθηματικούς τομείς είναι βασική και ουσιώδης στη μελέτη της ανάπτυξης του μαθηματικού έργου που παράγεται στη διδακτική τάξη. Το μοντέλο του ΜΧΕ επιτρέπει τη μελέτη της επικοινωνίας και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μαθηματικών πεδίων. Υπό το πρίσμα αυτό συζητούμε για $\text{ΜΧΕ}_{\text{άλγεβρας}}$, $\text{ΜΧΕ}_{\text{γεωμετρίας}}$, $\text{ΜΧΕ}_{\text{ανάλυσης}}$, κ.λ.π. Ειδικά για την σχολική τάξη, αυξάνοντας τον βαθμό εστίασης στο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ΜΧΕ που αναπτύσσονται γύρω από ένα συγκεκριμένο θεώρημα ή έννοια, όπως $\text{ΜΧΕ}_{\text{αναλογιών}}$ ή $\text{ΜΧΕ}_{\text{συνέχειας}}$ κ.ά. (Kuzniak et al., 2016β).

ΜΧΕ στο παρόν και στο μέλλον

Το μοντέλο του ΜΧΕ χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την ανάλυση διεργασιών στα πλαίσια γνωστών διδακτικών καταστάσεων, μπορεί όμως επιπλέον να υποστηρίξει την εξερεύνηση και τον πειραματισμό που αφορούν καινοτόμες διαδικασίες οι οποίες χρήζουν περαιτέρω έρευνας. Επιπρόσθετα, με τη βοήθεια του μοντέλου, η μελέτη των πιθανών χασμάτων ανάμεσα στον χώρο αναφοράς, τον κατάλληλο χώρο εργασίας και τους προσωπικούς χώρους διδασκόντων και διδασκομένων, μπορεί να οδηγήσει σε χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιολόγηση επιλογών και ενεργειών που επηρεάζουν το διδακτικό έργο. Την τελευταία δεκαετία, πολλοί ερευνητές σε διάφορες χώρες βασίστηκαν στο μοντέλο του ΜΧΕ ώστε να αναπτύξουν τις έρευνές τους στη διδακτική των Μαθηματικών, εστιάζοντας σε διαφορετικά θέματα και έχοντας ποικίλα ερευνητικά ενδιαφέροντα. Αυτό υποδεικνύει ότι η ιδέα του ΜΧΕ εξελίσσεται σε χρήσιμο ερευνητικό εργαλείο (Artique, 2016). Παρόλα αυτά, αν και το μοντέλο προσφέρει πλεονεκτήματα και δυνατότητες στο χώρο της έρευνας της διδακτικής, αντιμετωπίζει και κάποιες προκλήσεις. Σύμφωνα με την Artigue (2016), η συμπερίληψη διαφορετικών θεωρητικών δομών σε ένα μοντέλο είναι ένα ριψοκίνδυνο εγχείρημα, αφού οι δομές αυτές μέσα από μία τέτοια διαδικασία, χάνουν στοιχεία του θεωρητικού τους υπόβαθρου στο οποίο βασίζεται η δυναμική τους. Επιπλέον, ο ΜΧΕ αποτελεί δυναμική οντότητα και η εξέλιξη και ανάπτυξή του δεν συνίστανται μόνο στη μελέτη επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, αλλά επίσης στη διερεύνηση της λειτουργίας, σε βάθος χρόνου, του διπόλου διδασκαλίας - μάθησης μέσα από μαθηματικές δραστηριότητες που έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά και διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Ο Radford (2016), διακρίνει δύο βασικές πηγές δυσκολιών στο μοντέλο. Αφενός ισχυρίζεται ότι αν και η παράθεση επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη καινοτομία, εμπεριέχει δυσκολίες αφού δεν υπάρχει μόνο μία επιστημολογική και αντίστοιχα γνωστική θεωρία αλλά περισσότερες οι οποίες μάλιστα εμπεριέχουν ποικίλες διακλαδώσεις. Αφετέρου, επιχειρηματολογεί ότι μέσω της μελέτης προσωπικών χώρων εργασίας, η οποία εμπεριέχει την έννοια της ατομικότητας, το μοντέλο εκλαμβάνει τους διδασκόμενους ως συνάθροιση ατόμων και όχι ως κοινωνική δομή μέσα στην οποία κατασκευάζεται η γνώση ως αποτέλεσμα συλλογικής αλληλεπίδρασης. Όπως ο ίδιος αναφέρει, ίσως θα ήταν προτιμότερη η μελέτη, στα πλαίσια του μοντέλου, ενός συλλογικού ΜΧΕ στη θέση του προσωπικού χώρου εργασίας.

Ο ΜΧΕ ως μοντέλο μελέτης του παραγόμενου μαθηματικού έργου, αποτελεί ένα πολλά υποσχόμενο δυναμικό εργαλείο, με ποικίλες εφαρμογές και λειτουργίες. Είναι αναμενόμενο ότι ο πολυδιάστατος χαρακτήρας του μοντέλου, θεμελιωμένος σε συνδυασμό θεωρητικών προσεγγίσεων, εμπεριέχει σημεία που εγείρουν αμφιβολίες και ερωτήματα. Επομένως, το ίδιο το μοντέλο του ΜΧΕ αποτελεί πεδίο μελέτης το οποίο παραμένει ανοιχτό προς περαιτέρω διερεύνηση. Στην παρούσα εργασία το μοντέλο του ΜΧΕ χρησιμοποιήθηκε για το σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης και την ανάλυση του παραγόμενου μαθηματικού έργου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Μεθοδολογία Έρευνας

Χρησιμότητα της έρευνας

Η έννοια του λογαρίθμου αποτελεί βασικό στοιχείο της διδακτέας ύλης στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα. Διδάσκεται στα πλαίσια του μαθήματος της Άλγεβρας στην Β΄ Λυκείου και θεωρείται απαραίτητη γνώση για την ύλη της Γ΄ Λυκείου. Η εκθετική διαδικασία αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα του ορισμού του λογαρίθμου όπως αυτός περιέχεται στο σχολικό βιβλίο. Η εκπαιδευτική πραγματικότητα καταδεικνύει την ύπαρξη δυσκολίας των μαθητών να κατασκευάσουν σφαιρικό νοητικό σχήμα για την συγκεκριμένη έννοια, το οποίο να ενσωματώνει την εκθετική διαδικασία στο μαθηματικό αντικείμενο που αποτελεί αριθμό και καλείται λογάριθμος (Θωμαΐδης, 1986; Vagliardo, 2006; Παναγιώτου, 2014; Αεράκης, 2015). Η αδυναμία απόκτησης δομικής αντίληψης της έννοιας επιφέρει δυσκολία στους μαθητές στην αντιμετώπιση θεμάτων που αφορούν την έννοια του λογαρίθμου, πολλές φορές ακόμα και σε δραστηριότητες διαδικαστικής φύσης.

Ταυτόχρονα με την έννοια του λογαρίθμου οι μαθητές καλούνται να διαπραγματευτούν και την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης. Όπως περιγράφεται στο περιεχόμενο της εργασίας αυτής, η έννοια της συνάρτησης αποτελεί θεμέλιο λίθο του μαθηματικού οικοδομήματος και οι ρίζες της ταυτίζονται με τις απαρχές της μαθηματικής επιστήμης (Sfard, 1991; Sierpinska, 1992; Hitt, 1998; Artique, 1999; Gagatsis et al., 2006). Στον τομέα διδασκαλίας της συνάρτησης, η σχολική εκπαιδευτική πραγματικότητα καταδεικνύει ανεπάρκεια των μαθητών όσον αφορά τη δομική αντίληψη της έννοιας με αποτέλεσμα η προσπάθεια αποτελεσματικής διδασκαλίας της λογαριθμικής συνάρτησης να χρειάζεται να αντιμετωπίσει δύο ανοιχτά μέτωπα: Αφενός τη δυσκολία που εμπεριέχεται στην κατανόηση της έννοιας του λογαρίθμου και αφετέρου την αντίστοιχη η οποία είναι συνυφασμένη με την έννοια της συνάρτησης.

Η διδακτική παρέμβαση η οποία περιγράφεται στην παρούσα διπλωματική εργασία αποτέλεσε προσπάθεια διδακτικής προσέγγισης των εννοιών αυτών. Ταυτόχρονα είχε ως φιλοδοξία την προτροπή των μαθητών προς αμφισβήτηση της εικόνας των Μαθηματικών ως 'σκληρού' και απόλυτα φορμαλιστικού δύσκαμπτου αντικειμένου αποκαλύπτοντάς τους, κατά ένα μικρό μέρος, ένα περισσότερο προσεγγίσιμο και ανθρώπινο πρόσωπο της μαθηματικής επιστήμης στο πλαίσιο που αυτό ήταν δυνατό σε πραγματικές συνθήκες της ελληνικής σχολικής πραγματικότητας.

Η ΙΜ χρησιμοποιήθηκε ως αρωγός στην παρούσα προσπάθεια σε δύο διαφορετικούς άξονες: Αφενός στην προσπάθεια κατανόησης από τους μαθητές της μαθηματικής έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης και αφετέρου στην απόπειρα προσέγγισης των Μαθηματικών από διαφορετική οπτική γωνία σε σχέση με αυτήν που παρουσιάζεται σε μία τυπική διδασκαλία στο Λύκειο.

Η παρούσα εργασία συμβάλλει επίσης στην περαιτέρω εμπειρική έρευνα που αφορά την εφαρμογή του θεωρητικού μοντέλου του ΜΧΕ, ο οποίος αποτελεί επέκταση του ΓΧΕ και σε άλλα πεδία των Μαθηματικών εκτός της Γεωμετρίας. Χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο σχεδιασμού και ανάλυσης του μαθηματικού έργου σε αλληλεπιδρώντα επίπεδα. Συγκεκριμένα οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν καθώς και τα στάδια που ακολουθήθηκαν κατά την πορεία της παρέμβασης στόχευαν στη δημιουργία κατάλληλου Χώρου Εργασίας για τους μαθητές με σκοπό την ανέλιξη από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο μέσω των τριών διαστάσεων του μοντέλου. Το μοντέλο επίσης χρησιμοποιήθηκε στην παρατήρηση και ανάλυση της ροής της εργασίας στην τάξη.

Με στόχο την κατασκευή δομημένου μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές, έγινε προσπάθεια αξιοποίησης συνδυασμού διδακτικών στοιχείων. Εκτός της χρησιμοποίησης της ΙΜ, η ομαδοσυνεργατική οργάνωση της τάξης ευνόησε την ανταλλαγή απόψεων, την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Παράλληλα, το ψηφιακό περιβάλλον του μαθηματικού εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra έδωσε την ευκαιρία ενεργειών πειραματισμού και διερεύνησης και ανάπτυξης της εργαλειακής διάστασης της εργασίας στην προσπάθεια κατανόησης της λογαριθμικής συνάρτησης ως αντίστροφης της εκθετικής και των ιδιοτήτων της.

Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Η έννοια του λογάριθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης, στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα, διδάσκεται για πρώτη φορά στη Β΄ Λυκείου ως ύλη του τελευταίου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι το σχολικό βιβλίο αποτελεί το μόνο προτεινόμενο εγχειρίδιο προς μελέτη από το Πρόγραμμα Σπουδών στην Ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. Η διδακτική, τυπική παρουσίαση του σχολικού βιβλίου, όσον αφορά τους λογαρίθμους, ακολουθεί την σειρά ορισμός – θεωρήματα και αποδείξεις – ασκήσεις, βασιζόμενη στον ορισμό του λογαρίθμου του Euler. Συγκεκριμένα, ο Euler ορίζει τον λογάριθμο ενός αριθμού ως τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψωθεί δοθείσα βάση ώστε να εξαχθεί ο αριθμός αυτός. Η παρουσίαση της λογαριθμικής συνάρτησης ως αντίστροφης της εκθετικής, αναφέρεται στο πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, στη μονοτονία και στην ‘1-1’ ιδιότητά της ως συνέπεια της μονοτονίας. Σύμφωνα με τους στόχους του προγράμματος σπουδών, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας αυτής, οι μαθητές καλούνται να γνωρίζουν τον ορισμό του λογάριθμου, τις βασικές ιδιότητες και τις σχετικές αποδείξεις, να εφαρμόζουν τις ιδιότητες κατά την επίλυση ασκήσεων οι οποίες στο σχολικό βιβλίο ως επί το πλείστον έχουν μετασχηματιστικό χαρακτήρα (Kieran, 1996), καθώς και να επιλύουν σχετικά απλές λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις. Η παρέμβαση αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης που καθορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας. Αποτελεί επομένως προσπάθεια επίτευξης των στόχων που θέτουν οι οδηγίες διδασκαλίας του Υπουργείου και οι οποίες έχουν ήδη αναφερθεί, μέσα στα επιτρεπόμενα χρονικά πλαίσια. Με γνώμονα την κάλυψη των προηγούμενων στόχων, η παρέμβαση εστιάζει στην προσπάθεια ανάπτυξης δομικής αντίληψης από τους μαθητές, των εννοιών του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης ως μαθηματικών οντοτήτων των οποίων ο διττός χαρακτήρας, συνίσταται στη λειτουργία τους ως αντικειμένων και διαδικασιών ταυτόχρονα. Η επιδίωξη της παρέμβασης ήταν η ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο αντικείμενο λογάριθμος και η κατανόηση της λογαριθμικής συνάρτησης ως διαδικασίας συμμεταβολής, αντίστροφης της εκθετικής. Υπό αυτό το πρίσμα, σχεδιάστηκαν και δομήθηκαν οι ερωτήσεις των φύλλων εργασίας, ώστε η ικανότητα επίλυσης των ασκήσεων (εξισώσεων και ανισώσεων) από τους μαθητές να προκύπτει ως αποτέλεσμα της εννοιολογικής κατανόησης των ιδιοτήτων του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Στο πλαίσιο των προαναφερθέντων στόχων της διδακτικής παρέμβασης, η διατριβή αυτή αποτέλεσε προσπάθεια για την απάντηση των εξής ερευνητικών ερωτημάτων:

- Πώς επιδρά η χρήση της ΙΜ ως εργαλείου στη δομική αντίληψη από τους μαθητές των εννοιών του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης σε συνθήκες σχολικής τάξης στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα;
- Εκτός της χρήσης της ΙΜ ως εργαλείου, μπορεί παράλληλα να αναδειχθεί ο ρόλος της ΙΜ ως σκοπού ώστε οι μαθητές να προσεγγίσουν, έστω και σε ελάχιστο βαθμό, τα Μαθηματικά ως εξελισσόμενο πολιτισμικό προϊόν;
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας για την ανάλυση του παραγόμενου στην τάξη μαθηματικού έργου και τη διερεύνηση των προηγούμενων ερωτημάτων;

Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση διεξήχθη κατά το εκπαιδευτικό έτος 2016 – 2017, και συγκεκριμένα στο διάστημα από 6 έως 29 Μαρτίου 2017, στη διάρκεια 10 διδακτικών ωρών. Οι 16 μαθητές που συμμετείχαν, ανήκαν στο 1^{ο} τμήμα Γενικής Παιδείας της Β΄ Λυκείου του 10^{ου} Γενικού Λυκείου Θεσσαλονίκης. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης ήταν χωρισμένοι σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Η παρέμβαση αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης που καθορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας.

Σχεδιασμός της Διδακτικής Παρέμβασης

Στην παρέμβαση αυτής, εκτός της συμβολής της ΙΜ, έγινε προσπάθεια αξιοποίησης των δυνατοτήτων που παρέχουν: α) η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας και β) η χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra, με στόχο την ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος μάθησης που προωθεί την εννοιολογική κατανόηση έναντι της στείρας απομνημόνευσης διαδικασιών επίλυσης ασκήσεων, όπως σύντομα περιγράφεται αμέσως παρακάτω.

α) Η ομαδοσυνεργατική οργάνωση της τάξης ευνοεί τον καταιγισμό ιδεών, τη διατύπωση υποθέσεων, την παρουσίαση επιχειρημάτων, τον έλεγχο συμπερασμάτων και τη λήψη κοινών αποφάσεων από τους μαθητές, οι οποίοι ανταλλάσουν απόψεις, επιχειρηματολογούν και αποφασίζουν. Η μέθοδος της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας παρέχει την ευκαιρία προβολής των προσωπικών δυνατοτήτων του κάθε μαθητή, οι οποίες δεν είναι εύκολο να αναδειχθούν μέσα από τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας και αναδεικνύει τη γνώση ως καρπό δημιουργικής συνεργασίας. Η ομαδική εργασία επιτρέπει τον έλεγχο από την ομάδα, ενθαρρύνει την αλληλοβοήθεια μεταξύ των μελών της ομάδας και δημιουργεί ένα ευχάριστο και υποστηρικτικό κλίμα με αποτέλεσμα την δραστηριοποίηση των κινήτρων μάθησης. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία παρέχει πρόσφορο πεδίο για τη δυνατότητα ανάπτυξης μαθησιακών ικανοτήτων, όπως η ανάλυση, η σύνθεση, η δημιουργικότητα κ.λπ. Παράλληλα, καλλιεργούνται βασικές κοινωνικές δεξιότητες, όπως η συνεργασία, ο σεβασμός στη διαφορετική άποψη και η επιλογή του διαλόγου ως μέσου αντιμετώπισης διαφωνιών. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία μεταθέτει την ευθύνη και την πρωτοβουλία της μάθησης από τον δάσκαλο στον μαθητή (Νημά & Καψάλης, 2002).

β) Τα ψηφιακά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα δίνουν έμφαση στην ενεργή συμμετοχή του μαθητή, τη δομή, οργάνωση, αλληλουχία της πληροφορίας και τη σύνδεσή της με τις πρότερες γνώσεις, τη δυνατότητα χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων της υπό μάθηση έννοιας και τέλος διευκολύνουν τη δημιουργία αυθεντικών καταστάσεων μάθησης μέσα από την επίλυση προβλημάτων προωθώντας μεταγνωστικές ικανότητες (Ertmer & Newby, 2013). Δίνουν δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού και μπορούν να αξιοποιηθούν κατάλληλα στη διδακτική πρακτική σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επικοινωνίας (Chronaki, 2000; Ματσαγγούρας, 1987). Η παιδαγωγική αξία των υπολογιστικών εργαλείων καθορίζεται μέσα από τη χρήση τους και στο πλαίσιο συγκεκριμένων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Υπό αυτό το πρίσμα, παρέχεται η δυνατότητα ριζικής αλλαγής στην κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης και ανάπτυξης διαφορετικών ρόλων για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, που διαφέρουν ριζικά από το παραδοσιακό σχήμα του ‘πομπού-δέκτη’ (Kynigos, 2007). Στο ίδιο μήκος κύματος οι Balacheff και Kaput (1996), (στο Chronaki, 2000), τονίζουν ότι η επιστημολογικής φύσης επίδραση της τεχνολογίας στη μάθηση είναι βαθύτερη απ’ ότι κανείς θα περίμενε. Η επίδραση αυτή αφορά την ‘πραγμοποίηση’ (reification) μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων. Το λογισμικό Geogebra που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα παρέμβαση διαθέτει τα θετικά χαρακτηριστικά ενός εκπαιδευτικού περιβάλλοντος τα οποία προαναφέρθηκαν. Παράλληλα θεωρήθηκε κατάλληλο για την διαπραγμάτευση της έννοιας της συνάρτησης εφόσον παρέχει τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται στη μαθηματική δραστηριότητα και παράλληλα ταυτόχρονης εποπτείας των εναλλακτικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης (τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών). Επιπλέον, ο χειρισμός του από τους μαθητές θεωρείται εύκολος και σχετικά απλός. Αυτοί ήταν και οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε το συγκεκριμένο λογισμικό.

Σχεδιασμός κατάλληλου ΜΧΕ

1º και 2º φύλλο εργασίας - Λογάριθμος

Το 1º φύλλο εργασίας περιείχε κείμενο του Leonard Euler (1748), με τον ορισμό του λογαρίθμου ως εκθέτη δύναμης και το συμβολισμό του, στοιχεία που θα εμπλουτίσουν το πλαίσιο αναφοράς. Οι ομάδες αρχικά αναμένονταν να απαντήσουν σε πέντε ερωτήσεις, οι οποίες σκοπό είχαν αφενός την κατανόηση του ορισμού και του συμβολισμού (1η και 2η ερώτηση) και αφετέρου την επανάληψη σε βασικά στοιχεία της έννοιας της συνάρτησης (3η, 4η και 5η ερώτηση), όπως το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών. Οι τελευταίες τέθηκαν ώστε να έρθει στην επιφάνεια η εικόνα που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για την έννοια της συνάρτησης, καθώς οι ομάδες θα έπρεπε να διαπραγματευτούν βασικά στοιχεία της έννοιας για τις απαντήσεις των ερωτημάτων. Τα συμπεράσματα από την εργασία των ομάδων στις ερωτήσεις αυτές χρησίμευσαν στον καταλληλότερο σχεδιασμό του 3ου φύλλου εργασίας. Η κατανόηση του ορισμού και του συμβολισμού έγκειται στην αποσαφήνιση της εκθετικής και λογαριθμικής σχέσης μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτόν και την εφαρμογή του ορισμού στη διαπραγμάτευση δραστηριοτήτων των οποίων ο τρόπος επίλυσης απορρέει από αυτόν.

Στη συνέχεια, η λειτουργική αντίληψη της έννοιας του λογαρίθμου θα εκφραστεί μέσω της εφαρμογής της διαδικασίας της ύψωσης σε εκθέτη που εμπεριέχεται στον ορισμό, την οποία θα χρησιμοποιήσουν οι ομάδες κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων (ερώτηση 6). Μετά τους χειρισμούς και τις ενέργειες που θα εκτελέσουν οι μαθητές, αναμένεται να εσωτερικοποιηθεί η διαδικασία και πιθανώς να γίνει ένα πρώτο βήμα για την αναγνώριση του συμβόλου $\log_a\beta$ ως αυτόνομου μαθηματικού αντικειμένου – αριθμού. Η πορεία εργασίας των ομάδων στο υποερώτημα 6ν ($\alpha^{\log_a u} =$;) και στην ερώτηση 7 (Να λυθεί η εξίσωση $5^x = 112$) αναμένεται να παρουσιάσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς το βαθμό που οι ομάδες θα χειριστούν το λογάριθμο ως αντικείμενο - αριθμό. Τέλος, η ερώτηση 8 του 1ου φύλλου εργασίας, εκτός από την εφαρμογή του ορισμού, στοχεύει επιπρόσθετα στην προετοιμασία των μαθητών για την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων.

Το 2ο φύλλο εργασίας ως συνέχεια του 1ου, μέσω κειμένου του Euler, διαπραγματεύεται τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων καθώς και τις αποδείξεις τους. Στο κείμενο τονίζεται επίσης ο βασικός λόγος χρησιμότητας των ιδιοτήτων αυτών. Οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν και να εφαρμόσουν τις ιδιότητες στην επίλυση ασκήσεων. Αναμένεται δε, να προχωρήσουν ακόμα περισσότερο στην εσωτερικοποίηση της έννοιας του λογάριθμου μέσω της χρήσης του ορισμού στην κατασκευή των αποδείξεων των ιδιοτήτων και της απαιτούμενης δικαιολόγησης, από τις ομάδες, των απαντήσεων στις ερωτήσεις που τίθενται.

Τα κείμενα του Euler που περιέχονται στο φύλλο εργασίας απαιτούν ερμηνεία από τους μαθητές, οι οποίοι είναι συνηθισμένοι σε περισσότερο τυπικές μορφές έκφρασης των ορισμών των μαθηματικών εννοιών. Αυτό υποδηλώνει ότι ο σχεδόν “ρητορικός” χαρακτήρας του κειμένου ενέχει δυναμικό χαρακτήρα, ο οποίος θα αξιοποιηθεί ανάλογα με τους χειρισμούς των ομάδων. Η διαδικασία ύψωσης σε εκθέτη είναι το βασικό στοιχείο του πλαισίου των τεχνουργημάτων του επιστημολογικού επιπέδου. Η εργασία των ομάδων θα εξελιχθεί στον ΜΧΕ της Άλγεβρας και αναμένεται να διαρθρωθεί στα τρία κατακόρυφα επίπεδά του. Η διάρθρωση αυτή θα επιτευχθεί με ερμηνεία του κειμένου, αποκωδικοποίηση των συμβόλων και δόμηση της πληροφορίας που αυτά παρέχουν, χρησιμοποίηση της διαδικασίας ύψωσης σε εκθέτη σε διαδικασίες πειραματισμού για την επίλυση των δραστηριοτήτων, και ταυτόχρονα με ανάπτυξη ατομικής, μη τυπικής επιχειρηματολογίας η οποία θα βασίζεται στον ορισμό του κειμένου και θα αναπτύσσεται σε σημεία που απαιτούν δικαιολόγηση των ενεργειών και των χειρισμών των συμβόλων και διαδικασιών που προτείνονται από τους μαθητές στις ομάδες. Η μετάβαση από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο συνίσταται στην ικανότητα χειρισμού της έννοιας του λογάριθμου ως αντικειμένου – αριθμού στατικής δομής εκ μέρους των μαθητών. Η συζήτηση στην ολομέλεια και επισημοποίηση των αποτελεσμάτων αναμένεται να ευνοήσει την εργασία κυρίως στα σημειωτικό – λεκτικό και εργαλειακό – λεκτικό κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ.

3ο φύλλο εργασίας - Λογαριθμική Συνάρτηση

Το θεωρητικό υπόβαθρο των μαθητών, που αφορά τις συναρτήσεις, έως και την Β΄ Λυκείου όπου καλούνται να διαπραγματευτούν την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης, εμπεριέχει τα εξής στάδια:

Στην Β΄ Γυμνασίου γνώρισαν έναν όχι με ιδιαίτερα αυστηρό τρόπο διατυπωμένο ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοιχίας, ασχολήθηκαν με πίνακες τιμών, με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, τους τύπους των αντίστοιχων συναρτήσεων και τις γραφικές αναπαραστάσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι στη διδακτέα ύλη της Β΄ Γυμνασίου, στο βιβλίο μαθητή, υπάρχουν δραστηριότητες που αφορούν τους πίνακες τιμών και τύπους, άλλες που αφορούν τύπους και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και λιγότερες οι οποίες αφορούν συνδυασμό όλων των προηγούμενων. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των πολλαπλών αναπαραστάσεων της συνάρτησης στο ψηφιακό περιβάλλον των μικροπειραμάτων που εμπεριέχονται στο εμπλουτισμένο βιβλίο μαθητή αν και εφόσον βέβαια αυτά χρησιμοποιηθούν από τον διδάσκοντα στα πλαίσια του μαθήματος.

Στην Γ΄ Γυμνασίου γίνεται αναφορά στην τετραγωνική συνάρτηση όπου εξετάζονται οι μορφές της γραφικής παράστασης και τα ακρότατα με εμπειρικό τρόπο μέσω του σχεδιασμού γραφικών παραστάσεων και μετατοπίσεων τους με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού, χωρίς βέβαια αναφορά στη μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου. Το βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου δεν περιέχει μικροπειράματα και επομένως δεν προωθείται, τουλάχιστον με αυτόν τον τρόπο, η χρήση υπολογιστικού περιβάλλοντος.

Στο 6ο κεφάλαιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, η έννοια της συνάρτησης μελετάται με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Δίνεται ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης ως διαδικασίας, συζητούνται οι έννοιες της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών, ο συναρτησιακός συμβολισμός, η γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης και τέλος γίνεται λόγος για τη γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης $y=\alpha x+\beta$ και για το ρόλο των α και β σε αυτή. Στο 7ο κεφάλαιο οι μαθητές διαπραγματεύονται την τετραγωνική συνάρτηση $y=\alpha x^2$ και διερευνούν μονοτονία, ακρότατα και συμμετρίες μέσω της γραφικής παράστασης για θετικές και αρνητικές τιμές του α. Επιπλέον διερευνούν τη γραφική παράσταση της $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου και μέσω μετατοπίσεων της $y=\alpha x^2$.

Στο 2ο κεφάλαιο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου δίνονται οι ορισμοί μονοτονίας και ακροτάτων καθώς και της άρτιας και περιττής συνάρτησης. Τέλος αναφέρονται οι κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις καμπύλης.

Ο χαρακτήρας της ύλης του Λυκείου, στην οποία εμπλέκεται και η αποδεικτική διαδικασία, είναι περισσότερο αφαιρετικός και αξιωματικός απ' ότι αυτού στο Γυμνάσιο. Το εξελικτικό άλμα που απαιτείται να γίνει στην τροχιά ανάπτυξης μιας έννοιας από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, στη συγκεκριμένη περίπτωση της έννοιας της συνάρτησης, απαιτεί αφενός σταθερά θεμέλια που μόνο η εννοιολογική κατανόηση παρέχει, και αφετέρου ένα κατάλληλα δομημένο κονστρουκτιβιστικό περιβάλλον μάθησης.

Η διαπραγμάτευση του 1ου φύλλου εργασίας από τις ομάδες, έφερε στο προσκήνιο "σκοτεινά σημεία" όσον αφορά την εικόνα της έννοιας της συνάρτησης την οποία οι μαθητές έχουν ήδη σχηματίσει στις προηγούμενες τάξεις στη Β/θμια εκπαίδευση. Ο όρος "εικόνα έννοιας" (concept image) αναφέρεται στο σύνολο της γνωστικής δομής που αφορά τη συγκεκριμένη έννοια, την οποία σχηματίζει το άτομο κατά την ανάπτυξη της μαθησιακής του πορείας (Tall & Vinner, 1981). Τα σημεία αυτά αφορούσαν τις έννοιες εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς και την έννοια της συμμεταβολής ως ουσιώδους περιεχομένου του ορισμού της συνάρτησης. Το γεγονός αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Στο ίδιο μήκος κύματος, οι Lagrange & Psycharis (2014) εξετάζοντας τις ενέργειες των μαθητών στη διαπραγμάτευση μαθηματικών δραστηριοτήτων που αφορούν τις συναρτήσεις, διακρίνουν τρία κομβικά σημεία – δυσκολίες που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην πορεία κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Το πρώτο αφορά την έννοια της συναρτησιακής εξάρτησης ως συμμεταβολής μεγεθών. Το δεύτερο, την κατανόηση του ρόλου της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής και το τρίτο την κατανόηση και τον χειρισμό του συναρτησιακού συμβολισμού. Οι Minh & Lagrange (2016), αναφέρουν ότι ειδικά η διδακτική αντιμετώπιση που αφορά τα δύο πρώτα σημεία, όπου εστιάζεται και το ενδιαφέρον της παρούσας έρευνας, στρέφεται προς δραστηριότητες οι οποίες διαπραγματεύονται τη συναρτησιακή εξάρτηση σε ποικίλες αναπαραστάσεις ή μοντέλα. Οι ίδιοι προτείνουν τη χρήση της τεχνολογίας, ιδιαίτερα λογισμικών που επιτρέπουν δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων, για τη δημιουργία ενός ανακαλυπτικού περιβάλλοντος μάθησης με στόχο την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης. Η Kieran (2007), περιγράφει προγράμματα σπουδών με τέτοιου είδους στόχευση, ως προσανατολισμένα στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων και στο χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (π.χ. Gagatsis et al., 2006; Artique, 1999; Hitt 1998; Sierpinska, 1992; Sfard, 1991; Biza & Zachariades, 2010), η έννοια της συνάρτησης είναι από τις βασικότερες και πλέον σύνθετες έννοιες των Μαθηματικών, την οποία οι μαθητές καλούνται να διαπραγματευτούν. Οι Gagatsis et al. (2006), αναφέρουν ότι οι ρίζες της έννοιας βρίσκονται στην απαρχή της Μαθηματικής Επιστήμης. Σημειώνουν όμως επίσης ότι ενέχει δυσκολία η διδακτική μεταφορά της έννοιας αυτής, αφού αυτό απαιτεί την εμπλοκή τριών διαφορετικών παραγόντων. Ο πρώτος έχει να κάνει με την επιστημολογική διάσταση της έννοιας σε διαφορετικά ιστορικά πλαίσια, ο δεύτερος με τις πεποιθήσεις των διδασκόντων για την έννοια της συνάρτησης και ο τρίτος αφορά τη διδακτική διάσταση η οποία εμπεριέχει τις αντιλήψεις των μαθητών και τους περιορισμούς που θέτει το εκπαιδευτικό σύστημα. Ο Hitt (1998), αναφέρει πως η ύπαρξη ποικίλων αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης αποτελεί πηγή δυσκολιών για τη διδακτική της διαπραγμάτευση. Η Artigue (1999), διακρίνει τέσσερις βασικές πηγές δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας: α) αυτές που σχετίζονται με το τι είναι η συνάρτηση, β) αυτές που προέρχονται από το χάσμα μεταξύ της αντίληψης της έννοιας ως διαδικασίας και ως αντικειμένου, γ) εκείνες που αφορούν την αλλαγή από τον αλγεβρικό στον συναρτησιακό τρόπο σκέψης και δ) εκείνες που αφορούν τον χειρισμό της συνάρτησης σε διαφορετικά σημειωτικά πρωτόκολλα (semiotic registers). Ο Duval (2006), διακρίνει τέσσερα είδη σημειωτικών πρωτοκόλλων: τα γεωμετρικά σχήματα, τη φυσική γλώσσα, τα συστήματα συμβολισμού και τις γραφικές αναπαραστάσεις. Οι Gagatsis et al. (2006), υποστηρίζουν ότι ο βαθμός δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εναλλαγή των σημειωτικών πρωτοκόλλων δεν είναι ίδιος προς την μία και την αντίστροφη κατεύθυνση. Οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στη μετάβαση από το γράφημα στον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης παρά στην αντίστροφη πορεία από τον τύπο στο γράφημα. Αυτό ίσως οφείλεται στη μη ισότιμη εργασία στα διαφορετικά πρωτόκολλα κατά τη διδασκαλία όπου συνήθως προτιμάται η εργασία στην Άλγεβρα (Minh & Lagrange, 2016). Οι ερευνητικές παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν και η μελέτη των απαντήσεων των ομάδων στο $1^{ο}$ φύλλο εργασίας, λειτούργησαν καθοδηγητικά στο σχεδιασμό του $3^{ου}$ φύλλου εργασίας που αφορούσε βασικά στοιχεία μίας τόσο σημαντικής μαθηματικής οντότητας όπως είναι η συνάρτηση.

Το $3^{ο}$ φύλλο εργασίας περιείχε δύο φάσεις. Στην πρώτη, τον πυρήνα της εργασίας αποτέλεσε κείμενο σε αγγλική και ελληνική μετάφραση, το οποίο περιείχε τον ορισμό της συνάρτησης του Leonard Euler από το βιβλίο του "*Introductio in analysin infinitorum*" (1748), ως αναλυτικής έκφρασης σχηματιζόμενης από τη μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές. Επίσης ο Euler αναφέρεται στη μοναδικότητα της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε τιμή της ανεξάρτητης και δηλώνει έμμεσα την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης, εναλλάσσοντας ουσιαστικά τις θέσεις εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Όπως δηλώνει η Sfard (1991), ο ορισμός αυτός οριοθετεί τη συνάρτηση ως διαδικασία και αποτέλεσμα μαζί.

Το κείμενο ακολουθούν ερωτήσεις που τέθηκαν με γνώμονα τους στόχους της παρέμβασης που αφορούν τη λογαριθμική εξάρτηση. Η εργασία ξεκίνησε με έναυσμα εφαρμογή του λογαρίθμου σε πεδίο εκτός των Μαθηματικών, στο χώρο της σεισμολογίας. Στους μαθητές δόθηκε η έκφραση που συνδέει το μέγεθος ενός σεισμού R, με την έντασή του I, στην εκθετική της μορφή (με την ένταση I ως εξαρτημένη μεταβλητή). Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν αν η έκφραση αυτή αποτελεί συνάρτηση σύμφωνα με τα λεγόμενα του Euler και να καθορίσουν ποιά είναι η εξαρτημένη και ποιά η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η επόμενη ερώτηση του $3^{ου}$ φύλλου εργασίας περιείχε τρεις υποερωτήσεις:

- Στην πρώτη, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για το είδος της μεταβολής που ακολουθεί η ένταση του σεισμού όταν το μέγεθος αυξάνεται με αριθμητική πρόοδο. Με την ερώτηση αυτή, επανέρχεται στο προσκήνιο η σχέση δύο μεγεθών εκ των οποίων το ένα ακολουθεί αριθμητική και το άλλο γεωμετρική μεταβολή και αναμένεται να δημιουργηθεί στους μαθητές η προσδοκία ύπαρξης λογαριθμικής σχέσης.
- Στη δεύτερη, λύνοντας την δοθείσα έκφραση ως προς το μέγεθος R του σεισμού εναλλάσσοντας δηλαδή τη θέση των μεταβλητών (εξαρτημένη – ανεξάρτητη), οι μαθητές βρίσκουν αλγεβρικά τη λογαριθμική μορφή της δοσμένης έκφρασης.
- Στην τρίτη υποερώτηση, οι μαθητές καθοδηγούνται να αποσαφηνίσουν τη σχέση των δύο εκφράσεων σύμφωνα με το κείμενο του Euler (λογαριθμική συνάρτηση ως αντίστροφη της εκθετικής) καθώς και τον χαρακτήρα των μεταβλητών σε κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις (εξαρτημένη – ανεξάρτητη).

Η πρώτη φάση αυτού του φύλλου εργασίας (κείμενο και ερωτήσεις 1 και 2) σχεδιάστηκε με στόχο τη διαπραγμάτευση των μαθητών με την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης ως συμμεταβολής μεγεθών καθώς και με τις έννοιες της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής και την εναλλαγή του ρόλου τους στην αντίστροφη εκθετική συνάρτηση. Ο ορισμός της συνάρτησης του Euler αποτελεί το βασικό στοιχείο του πλαισίου αναφοράς. Η διαδικασία της λογαρίθμισης, θεωρούμενη πια ως γνωστή, τυπική τεχνική, μπορεί να θεωρηθεί τεχνούργημα στο δεδομένο πλαίσιο εργασίας. Η εργασία στην πρώτη αυτή φάση διαρθρώνεται ανάμεσα στον ΜΧΕ της Άλγεβρας με επίλυση τύπων, χρησιμοποίηση αλγεβρικού συμβολισμού, εκτέλεση πράξεων και στον ΜΧΕ των συναρτήσεων με την εμπλοκή των εννοιών της συνάρτησης, της αντίστροφης συνάρτησης και των μεταβλητών. Η εξέλιξη της εργασίας αναμένεται να αναπτυχθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ περιλαμβάνοντας διαδικασίες εξερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των θεμάτων.

Η δεύτερη φάση του φύλλου εργασίας χαρακτηρίζεται από την εμπλοκή του μαθηματικού λογισμικού Geogebra και τη μελέτη της συμπεριφοράς της λογαριθμικής συνάρτησης. Στο σημείο αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να εισάγουν στο λογισμικό σημείο με συντεταγμένες (I, R) (όπου το I_0 είναι σταθερό έχοντας συγκεκριμένη τιμή). Η τιμή του R μεταβλήθηκε από τους ίδιους τους μαθητές με τη βοήθεια δρομέα. Οι συντεταγμένες του σημείου μεταφέρθηκαν και στο λογιστικό φύλλο το οποίο στην ουσία αποτελεί πίνακα τιμών. Με τη μετακίνηση του δρομέα, το σημείο διαγράφει τμήμα της λογαριθμικής καμπύλης και ταυτόχρονα ενημερώνεται ο πίνακας τιμών με τις τιμές εξαρτημένης (μέγεθος) και ανεξάρτητης (έντασης) μεταβλητής. Σε αντίστροφη πορεία, από το γράφημα στον τύπο, ζητήθηκε από τους μαθητές, παρατηρώντας τη θέση του R ως εξαρτημένης μεταβλητής στο διατεταγμένο ζεύγος των συντεταγμένων, να συνδέσουν τη γραφική παράσταση που βλέπουν στο λογισμικό με τον αντίστοιχο τύπο της λογαριθμικής συνάρτησης που βρήκαν αλγεβρικά στην πρώτη φάση.

Η πρώτη ερώτηση της φάσης αυτής αποτελεί συνέχεια και επέκταση της δουλειάς που έγινε στην προηγούμενη φάση, υπακούοντας στους στόχους που τέθηκαν και έχουν ήδη αναφερθεί. Στο σημείο αυτό εμπλέκονται επιπρόσθετα ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης, η οποία δεν δόθηκε εκ προοιμίου αλλά στην ουσία κατασκευάστηκε από τους μαθητές με τη βοήθεια του λογισμικού, ως αποτέλεσμα της κίνησης ενός σημείου με κατάλληλες συντεταγμένες. Η ερμηνεία του κειμένου ώστε να αποσαφηνιστεί ο ορισμός της συνάρτησης, η εστίαση στην εμφάνιση της συμμεταβολής δύο μεγεθών με αλγεβρικό και γραφικό τρόπο σε πρόβλημα που αφορά τον τομέα της σεισμολογίας ο οποίος δεν εντάσσεται σε αυτό καθεαυτό τον μαθηματικό κλάδο, η εναλλαγή του ρόλου των μεταβλητών και αντίστοιχα των τύπων των αντίστροφων συναρτήσεων, καθώς και η μετάβαση από το γράφημα στον τύπο της συνάρτησης είχαν ως στόχο την πληρέστερη κατασκευή διάφανου μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές της έννοιας της λογαριθμικής συνάρτησης και της σχέσης της με την αντίστοιχη εκθετική, σε σύνδεση με τα στοιχεία που δόθηκαν στους μαθητές για την ιστορική εξέλιξη του λογάριθμου.

Στη συνέχεια της δεύτερης φάσης, οι μαθητές εξετάζουν τη λογαριθμική συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της μεταβάλλοντας τις τιμές της βάσης και παρατηρώντας τον πίνακα τιμών, αυξάνοντας οι ίδιοι την τετμημένη σημείου που ανήκει στο γράφημα με στόχο να συμπεράνουν την αλλαγή της μονοτονίας ανάλογα με τις τιμές της βάσης. Σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεράσματα, θα ακολουθούσε η σύγκριση τιμών δύο αριθμών όταν είναι γνωστή η σχέση των λογαρίθμων τους για τις διάφορες τιμές της βάσης. Μέσω του λογισμικού, αναμενόταν να βρεθεί από τους μαθητές το σημείο τομής του γραφήματος με τον οριζόντιο άξονα συντεταγμένων και να αιτιολογηθεί αλγεβρικά μέσω του ορισμού του λογάριθμου η τιμή της τετμημένης του σημείου αυτού. Επεκτείνοντας την προηγούμενη διαδικασία έπρεπε να βρεθεί γραφικά η λύση λογαριθμικής εξίσωσης ως σημείο τομής του γραφήματος με οριζόντια ευθεία και να αποφανθούν οι ομάδες για την μοναδικότητα του σημείου και επομένως της λύσης, για την οποιαδήποτε θέση της οριζόντιας ευθείας εξηγώντας το συμπέρασμα τους γραφικά και αλγεβρικά. Τέλος, οι μαθητές έπρεπε να εισάγουν στο λογισμικό τη λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e, την αντίστοιχη εκθετική και την ευθεία y=x. Με χρήση των δυνατοτήτων του λογισμικού έπρεπε να αποφανθούν για τη συμμετρία των δύο γραφημάτων ως προς την ευθεία, να δικαιολογήσουν τα ευρήματα με αναφορά στη μετάθεση των συντεταγμένων (εναλλαγή εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής) των αντίστοιχων συμμετρικών σημείων των δύο γραφημάτων και να γενικεύσουν τα προηγούμενα συμπεράσματα για τις γραφικές παραστάσεις δύο οποιονδήποτε αντίστροφων συναρτήσεων.

Στη δεύτερη φάση, η εργασία εναλλάσσεται όπως και προηγουμένως στους χώρους της Άλγεβρας και των Συναρτήσεων. Τα στοιχεία του επιστημολογικού επιπέδου που συνιστούν το πλαίσιο αναφοράς, αφορούν τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης, την έννοια της μονοτονίας, τη σχετική θέση των γραφημάτων των αντίστροφων συναρτήσεων. Οι μαθητές θα εργαστούν σε αντικείμενα – εργαλεία του επιστημολογικού επιπέδου, όπως γραφικές αναπαραστάσεις, πίνακες τιμών, αλγεβρικά σύμβολα και σχέσεις. Ο ορισμός του λογαρίθμου και το εκπαιδευτικό λογισμικό παρέχουν τα κατάλληλα τεχνουργήματα για την ανάπτυξη της εργαλειακής διάστασης της εργασίας. Η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας αποτελεί απαραίτητο στοιχείο στη ροή της εργασίας. Μέσω του σχεδιασμού αυτού, αναμένεται ενεργοποίηση και των τριών διαστάσεων του ΜΧΕ.

Ερευνητικά εργαλεία

Στην παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν: 1) βιντεοπροβολέας για την παρουσίαση αρχείου Powerpoint (.ppt), 2) τέσσερις Η/Υ εφοδιασμένοι με το εκπαιδευτικό λογισμικό Geogebra, 3) ένα εισαγωγικό φύλλο εργασίας και ακόμη τρία φύλλα εργασίας που περιέχουν τα απαραίτητα στοιχεία της διδακτέας σχολικής ύλης, 4) δύο ερωτηματολόγια, χρήσιμα στην αξιολόγηση της παρέμβασης και 5) τέσσερα κινητά τηλέφωνα Samsung Galaxy A5 για τη μαγνητοφώνηση των ομάδων των μαθητών. Το αρχείο .ppt περιείχε τα κυριότερα κατά την κρίση μας, ως προς τη διδακτική αξιοποίηση, σημεία της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων, καθώς και εφαρμογές τους. Το εισαγωγικό φύλλο εργασίας, όπως αυτό σχεδιάστηκε, δημιούργησε ερωτήματα στους μαθητές σχετικά με την αναγκαιότητα εκτέλεσης πολύπλοκων και χρονοβόρων υπολογισμών καθώς και για τους τρόπους με τους οποίους αντιμετωπίζονταν αυτοί οι υπολογισμοί στην εποχή επινόησης των λογαρίθμων ($16^{ος}$ αιώνας). Επιπρόσθετα, στο εισαγωγικό φύλλο εργασίας, οι μαθητές εφάρμοσαν την αντιστοιχία προόδων για να φέρουν σε πέρας τους δύσκολους υπολογισμούς που τέθηκαν στην αρχή του φύλλου. Τα $1^{ο}$, $2^{ο}$ και $3^{ο}$ φύλλα εργασίας περιείχαν σε αγγλική και ελληνική μετάφραση, κείμενα του Leonard Euler από το βιβλίο του "*Introductio in analysin infinitorum*" (1748), τα οποία προτείνονται στο πρόγραμμα Historical Modules Project, (Mathematical Association of America, 2004). Οι προτεινόμενες, από το πρόγραμμα, ερωτήσεις που αντιστοιχούσαν σε κάθε κείμενο τροποποιήθηκαν και προστέθηκαν νέες ώστε να καλύπτονται οι απαιτήσεις του Ελληνικού Προγράμματος Σπουδών σχετικές με τις δεξιότητες που οφείλουν να αποκτήσουν οι μαθητές μετά τη διδασκαλία της ενότητας αυτής, χωρίς όμως αυτό να είναι αποτέλεσμα επιτυχούς εφαρμογής συγκεκριμένης μεθοδολογίας, αλλά αποτέλεσμα απόκτησης δομικής κατανόησης των λογαριθμικών εννοιών. Τα ερωτηματολόγια, χρησιμοποιήθηκαν ώστε να εκφραστούν οι προσωπικές απόψεις των μαθητών και να αναδειχθεί η δυνατότητα των μαθητών εφαρμογής στην επίλυση ασκήσεων όσων διδάχθηκαν.

Η αξιολόγηση της παρέμβασης έγινε μέσω των απαντήσεων των ομάδων στα φύλλα εργασίας, των ατομικών απαντήσεων στα ερωτηματολόγια και της παρατήρησης και ανάλυσης των απομαγνητοφωνημένων συζητήσεων των ομάδων και της ολομέλειας. Το μοντέλο του ΜΧΕ λειτούργησε ως βοηθητικό εργαλείο στην επιλογή των δραστηριοτήτων και στο σχεδιασμό της παρέμβασης ώστε οι πτυχές της γνώσης να διαρθρώνονται κατάλληλα στις διαστάσεις του μοντέλου. Το παραγόμενο στην τάξη έργο συζητήθηκε επίσης με βάση το μοντέλο ως προς τα επιστημολογικά και τα γνωστικά στοιχεία που αφορούσαν τη συγκεκριμένη εργασία.

Διαδικασίες – Ροή της Παρέμβασης

Με βάση το θεματικό περιεχόμενο, η διδακτική παρέμβαση περιλαμβάνει τις κάτωθι τρεις φάσεις:

1η Φάση Διδακτικής Παρέμβασης

Στις δύο πρώτες διδακτικές ώρες της παρέμβασης, οι οποίες ήταν συνεχόμενες στο ωρολόγιο πρόγραμμα, διανεμήθηκε στις ομάδες των μαθητών το εισαγωγικό φύλλο εργασίας (Παράρτημα Α) και τους ζητήθηκε να ασχοληθούν για 10 λεπτά της ώρας με το Α΄ μέρος του, το οποίο περιελάμβανε τον υπολογισμό δύσκολων και χρονοβόρων πράξεων (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, δύναμης, εξαγωγής ρίζας). Οι αναμενόμενες αποτυχημένες προσπάθειες των ομάδων, δημιούργησαν ερωτήματα στους μαθητές όπως π.χ. για τους λόγους που οδηγούν στην ανάγκη διεξαγωγής τέτοιου είδους πράξεων. Αμέσως μετά, μέσω του αρχείου .ppt, παρουσιάστηκε το ιστορικό πλαίσιο της εποχής της επινόησης των λογαρίθμων, παρέχοντας απαντήσεις στα ερωτήματα των μαθητών. Μετά την παρουσίαση της αντιστοιχίας αριθμητικής – γεωμετρικής προόδου, οι ομάδες ασχολήθηκαν με το Β΄ μέρος του εισαγωγικού φύλλου στο οποίο μέσω της προηγούμενης αντιστοιχίας οι μαθητές ολοκλήρωσαν με ευκολία τις πράξεις που είχαν αρχικά ζητηθεί. Η παρουσίαση συνεχίστηκε με αναφορά στον Napier και περιγραφή του κινηματικού μοντέλου με τη συμμετοχή των μαθητών μέσω ερωτο-απαντήσεων.

Την 3η ώρα της παρέμβασης συζητήθηκε το σύστημα προόδων του Napier και οι βελτιώσεις του, παρουσιάστηκαν εν συντομία λογαριθμικά συστήματα του 17ου αιώνα και έγινε ιδιαίτερη μνεία στην ετυμολογία της λέξης λογάριθμος με πρακτικές εφαρμογές από τους μαθητές.

Την 4η διδακτική ώρα, οι ομάδες γνώρισαν μέσω του αρχείου .ppt την έννοια του φυσικού λογάριθμου παρουσιάζοντας την αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου που εμφανίζεται στα υπερβολικά εμβαδά. Τονίστηκε η αιτία χρησιμοποίησης του όρου φυσικός λογάριθμος, η παρουσία του αριθμού e στο σύστημα των φυσικών λογαρίθμων, όπως και η παρουσία του σε λανθάνουσα μορφή στο σύστημα του Napier. Τέλος, μέσω ερωτήσεων της διδάσκουσας προς τις ομάδες, οι μαθητές κατέληξαν στο συμπέρασμα της δυνατότητας ορισμού του λογαρίθμου κάθε θετικού αριθμού.

2η Φάση Διδακτικής Παρέμβασης

Κατά την 5η και την 6η διδακτική ώρα (συνεχόμενες στο ωρολόγιο πρόγραμμα), υπήρξε αλλαγή στο ιστορικό πλαίσιο με σύντομη βιογραφική αναφορά στον Leonard Euler. Στις ομάδες δόθηκε το 1ο φύλλο εργασίας (Παράρτημα Β) στο οποίο εργάστηκαν. Μετά το τέλος της εργασίας τους, οι απαντήσεις των ερωτήσεων συζητήθηκαν στην ολομέλεια, κυρίως με τη συμμετοχή των ομάδων και μικρή παρέμβαση της διδάσκουσας. Οι μαθητές κατέθεσαν τις απόψεις τους για τη διαφορετική, φαινομενικά τουλάχιστον, φύση των προσεγγίσεων του Napier και του Euler αλλά και για την ύπαρξη συναρτησιακής σχέσης και στα δύο πλαίσια. Τέλος με την καθοδήγηση της διδάσκουσας, οι ομάδες κατέληξαν σε συμπεράσματα για την ύπαρξη αρνητικών λογάριθμων.

Την 7η διδακτική ώρα, οι ομάδες μελέτησαν το 2ο φύλλο εργασίας (Παράρτημα Γ). Ακολούθησε συζήτηση στην ολομέλεια με συμμετοχή της διδάσκουσας επί των απαντήσεων των μαθητών.

Η 8η διδακτική ώρα ξεκίνησε με προτάσεις των μαθητών, μετά από σχετική ερώτηση της διδάσκουσας, για τις εφαρμογές των λογαρίθμων στη σύγχρονη πραγματικότητα, οι οποίες τους ήταν γνωστές από την διδακτέα ύλη άλλων μαθημάτων (Φυσικής, Χημείας). Ακολούθησε η παρουσίαση του αρχείου .ppt, η οποία ολοκληρώθηκε με αναφορά και συζήτηση για περεταίρω εφαρμογές των λογαρίθμων και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Αναδείχθηκε από τις ίδιες τις ομάδες, ο δυναμικός χαρακτήρας της έννοιας του λογαρίθμου μέσα από την μετατροπή της χρήσης του από υπολογιστικό εργαλείο σε μέσο εξήγησης ποικίλλων φαινομένων.

3η Φάση Διδακτικής Παρέμβασης

Κατά την 9η και την 10η διδακτική ώρα (συνεχόμενες στο ωρολόγιο πρόγραμμα), οι ομάδες εργάστηκαν στο 3ο φύλλο εργασίας (Παράρτημα Δ) με άξονα την έννοια της συνάρτησης, αρχικά στον ορισμό του Euler, μέσω εφαρμογής των λογαρίθμων στη σεισμολογία και σε συνέχεια αυτού με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra. Οι απαντήσεις στο φύλλο εργασίας συζητήθηκαν από τις ομάδες στην ολομέλεια με παρέμβαση της διδάσκουσας όπου αυτό κρινόταν απαραίτητο.

Η εργασία κάθε ομάδας, καθώς επίσης και οι συζητήσεις στην ολομέλεια κατά την παρουσίαση και μετά την ολοκλήρωση της διαπραγμάτευσης των ερωτήσεων σε κάθε φύλλο εργασίας, μαγνητοφωνούνταν καθόλη τη διάρκεια της παρέμβασης για περεταίρω ανάλυση.

Ερωτηματολόγια

Μία εβδομάδα μετά το τέλος της παρέμβασης, δόθηκαν στους μαθητές δύο ερωτηματολόγια (Παραρτήματα Ε και Ζ), τα οποία απαντήθηκαν ατομικά και ανώνυμα σε μία διδακτική ώρα το καθένα και σε δύο διαφορετικές ημέρες (6 και 7 Απριλίου 2017). Το 1^{ο} ερωτηματολόγιο σχεδιάστηκε ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να εκφράσουν τις προσωπικές τους απόψεις: 1) για τη χρήση της ιστορίας στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, 2) για τις αιτίες επινόησης των λογαρίθμων και τους λόγους της σύγχρονης αναγκαιότητας χρησιμοποίησής τους, και 3) για τον δυναμικά εξελισσόμενο χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών.

Το 2^{ο} ερωτηματολόγιο επικεντρώθηκε σε ερωτήσεις ελέγχου των γνώσεων που αποκόμισαν οι μαθητές για τον λογάριθμο και τη λογαριθμική συνάρτηση και αποτελούν ζητούμενα της διδακτέας ύλης, καθώς και σε ερωτήσεις που αφορούν, κατά την άποψή μας, βασικά ιστορικά στοιχεία για την κατανόηση της έννοιας, όπως η αντιστοιχία των προόδων και η ετυμολογία των όρων λογάριθμος και φυσικός λογάριθμος.

Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές χωρίς προειδοποίηση, μία εβδομάδα μετά το τέλος της παρέμβασης, και όχι αμέσως, ώστε να φανεί κατά πόσο η γνώση που κατακτήθηκε από τους μαθητές (αφορά το 2^{ο} ερωτηματολόγιο) αποτελούσε σταθερή και μόνιμη νοητική δομή, διαθέσιμη σε περίπτωση ανάκλησής της για εφαρμογή σε απαντήσεις ερωτημάτων και επίλυση ασκήσεων. Η ανωνυμία των απαντήσεων των ερωτηματολογίων από τους μαθητές διασφάλισε τη μη ύπαρξη φόβου και άγχους εκ μέρους τους για τυχόν σύνδεση των απαντήσεών τους με τη σχολική τους βαθμολογική αξιολόγηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Αποτελέσματα

Υλοποίηση του κατάλληλου ΜΧΕ

Ανάλυση των αποτελεσμάτων για το 1ο Φύλλο Εργασίας

Οι απαντήσεις των ομάδων στα φύλλα εργασίας και η ροή της εργασίας μέσα στην τάξη υπέδειξαν αρχική δυσκολία των ομάδων στην κατανόηση του κειμένου όπως ήταν αναμενόμενο. Συγκεκριμένα στην ερώτηση 1 που αφορούσε τον ορισμό του λογάριθμου ως συναρτησιακή έκφραση οι ομάδες χρησιμοποίησαν αρχικά στην απάντησή τους τα ακριβή λόγια του κειμένου και μάλιστα της πρότασης στην οποία η λέξη λογάριθμος είχε γραφεί με κεφαλαία, ‘η τιμή του z ως συνάρτηση του y’ χωρίς να αναφέρουν την εκθετική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές, γεγονός που σημαίνει ότι αρχικά δεν μπόρεσαν να αποσαφηνίσουν τον ορισμό. Όπως φάνηκε από τις συζητήσεις στις ομάδες, («μπορεί αυτό να είναι ορισμός;») πιθανώς παρασύρθηκαν από την ύπαρξη νοητής νόρμας που ‘απαιτεί’ τη διατύπωση ενός σύντομου, τυπικού ορισμού, ο οποίος στη σχολική ύλη κυρίως του Λυκείου είναι συνήθως απόλυτα οριοθετημένος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του λογαρίθμου ο ορισμός του σχολικού βιβλίου, ο οποίος δεν περιλαμβάνει εμφανή αναφορά στην έννοια της συνάρτησης, δίνεται σε μαθηματική γλώσσα πλαισιωμένος σε τονισμένο περίγραμμα, πράγμα το οποίο διευκολύνει τη “μηχανιστική” αντίληψη της έννοιας. Η ρητορική διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων σε αρκετά μεγάλο μέρος του κειμένου, όπως θα φανεί παρακάτω, αποτέλεσε πρόκληση για τους μαθητές, στερώντας τη “διευκόλυνση” αυτοματοποιημένης, με την έννοια της απολύτως διαδικαστικής, αντίληψης της έννοιας.

Η 1η , 2η, και 3η ομάδα μετά την αρχική, αυτοματοποιημένη προσέγγιση του ορισμού, ασχολήθηκαν περεταίρω με τη διερεύνηση της ερώτησης που τέθηκε από μέλη των ομάδων για τη σχέση των y και z και εστίασαν στην ισότητα $\alpha^z = y$. Η 2η ομάδα κατά την εργασία στην ερώτηση 1 χρησιμοποίησε αρχικά συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών ώστε να δομήσει νοητικά τον ορισμό του λογαρίθμου. Η εναλλαγή μεταξύ Άλγεβρας και Αριθμητικής την βοήθησε στην ανάπτυξη της σημειωτικής διάστασης της εργασίας της. Αν και στη συνέχεια η ομάδα εστίασε στην επεξεργασία του αλγεβρικού συμβολισμού, η χρήση συγκεκριμένων τιμών καταδεικνύει πιθανώς την ενδεχόμενη δυσκολία στον χειρισμό του 'αφηρημένου' αλγεβρικού συμβολισμού και κυρίως των μεταβλητών, σταθερών, γενικευμένων σταθερών από τους μαθητές, παρόλο ότι για τη Β΄ Λυκείου ο ορθός χειρισμός των μεταβλητών θεωρείται δεδομένος. Η 3η ομάδα δούλεψε τον αλγεβρικό συμβολισμό αλλάζοντας τις ονομασίες των μεταβλητών του κειμένου. Συγκεκριμένα μαθητής διατύπωσε στην ομάδα του την ερώτηση: «Για να είναι ο κ λογάριθμος του λ τότε πρέπει ο λ να είναι $α^κ$ ή ανάποδα;». Προφανώς μετέβαλε τις ονομασίες των μεταβλητών ώστε να ξεκαθαρίσει καλύτερα το τοπίο. Η 1η και 4η ομάδα επικεντρώθηκαν στην συζήτηση επί του αλγεβρικού συμβολισμού με την χρήση των μεταβλητών, καταλήγοντας στην λεκτική διατύπωση ότι «αν ο αριθμός υψώνεται σε ένα εκθέτη και δίνει αποτέλεσμα, ο εκθέτης είναι ο λογάριθμος του αποτελέσματος». Η αρχική απάντηση «η τιμή του z ως συνάρτηση του y καλείται λογάριθμος του y» που δόθηκε από τις ομάδες, υπέστη επεξεργασία και από τις τρεις ομάδες και εμπλουτίστηκε μετά από ερωτήσεις των μαθητών στις ομάδες όπως: «Τι σχέση έχει ο y με τον z;», «Τι τιμές παίρνει ο α;» «Γιατί ο y πρέπει να είναι θετικός;». Στην πορεία απάντησης των ερωτήσεων, χρησιμοποιήθηκε η γνωστή στους μαθητές διαδικασία ύψωσης σε εκθέτη και οι ιδιότητές της σε ρόλο τεχνουργήματος, στην προσπάθεια δόμησης του ορισμού. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ερώτηση του Αλέξη, μαθητή της 2ης ομάδας στην ομάδα του: «Αν ξέρω τον z και εννοείται και τον α, τότε βρίσκω τον y. Αν ξέρω τον y τότε τι σημαίνει μπορώ να βρω τον z; Τι πράξη εννοεί;». Η απάντηση του Χρίστου ήταν η εξής: «Τότε λες ότι ο z είναι ο λογάριθμος του y. Μήπως είναι πράξη ή αντιστοιχία;». Αλέξης: «Ο λογάριθμος μετράει τους λόγους. Είναι αριθμός. Είναι και τα δύο;». Αν και η τελευταία ερώτηση παρέμεινε αναπάντητη από τα μέλη της ομάδας, ο προηγούμενος διάλογος καταδεικνύει δημιουργική επεξεργασία της έννοιας στην πορεία δομικής κατανόησης. Ταυτόχρονα, η εμπλοκή της ετυμολογίας της λέξης λογάριθμος, στοιχείο της παρουσίασης της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων, υποδεικνύει την χρησιμότητα της Ιστορίας ως εργαλείου στην προσπάθεια κατασκευής μαθηματικού νοήματος.

Και οι τρεις ομάδες δόμησαν τον ορισμό συμπεριλαμβάνοντας την εκθετική διαδικασία. Η 4η ομάδα δεν κατόρθωσε σε αυτή τη φάση να ολοκληρώσει τον ορισμό καθώς αρκέστηκε στη λεκτική διατύπωση του κειμένου, «η τιμή του z ως συνάρτηση του y καλείται λογάριθμος του y» και δεν επεξεργάστηκε τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών με αποτέλεσμα να μην δομήσει σωστά την πληροφορία που παρείχαν τα σύμβολα. Σε αυτή την αρχική φάση της εργασίας η ομάδα έδειξε απροθυμία στην ανταλλαγή απόψεων με αποτέλεσμα η ομαδοσυνεργατική να μην αποδώσει τα μέγιστα οφέλη. Η σημειωτική, εργαλειακή και συλλογιστική διάσταση της εργασίας της ομάδας δεν αναπτύχθηκαν επαρκώς σε αυτό το σημείο.

Η απάντηση της ερώτησης 2 ήταν εμφανής στο κείμενο και δόθηκε από όλες τις ομάδες. Η συζήτηση στην ολομέλεια γύρω από την ερώτηση αυτή καθοδηγήθηκε στην ύπαρξη λογαρίθμων με βάσεις μικρότερες της μονάδας.

Οι ερωτήσεις 3, 4 και 5 αφορούσαν την έννοια της συνάρτησης και αποδείχθηκαν δύσκολες για τους μαθητές. Οι ομάδες (ακόμα και η 4η που αρχικά παρουσίασε δυσχέρεια στον τομέα συνεργασίας μεταξύ των μελών της), έφεραν στο προσκήνιο με συμπληρώσεις των μελών τους, τον ορισμό της συνάρτησης που διδάχθηκαν στην Α΄ Λυκείου, ‘μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β αλλά δεν μπορούσαν να εντοπίσουν την εφαρμογή του στα λεγόμενα του Euler και συγκεκριμένα στην έκφραση του κειμένου ‘η τιμή του z θεωρούμενη ως συνάρτηση του y’ όπου εστίασαν την προσοχή τους, παρόλο ότι στην εργασία στην ερώτηση 1 είχε συζητηθεί στις ομάδες η σχέση του y με τον z, στα πλαίσια του ορισμού, αν $\alpha^z = y$ τότε $z = \log y$. Αυτό υποδεικνύει ότι οι μαθητές δεν έχουν νοητικά συνδέσει την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της συμμεταβολής. Όπως ήταν φυσικό οι ομάδες δυσκολεύτηκαν να βρουν σύνολα τιμών και πεδία ορισμού των συναρτήσεων γιατί δεν μπορούσαν να διαχωρίσουν τις έννοιες εξαρτημένης-ανεξάρτητης μεταβλητής στις ισότητες του κειμένου και βέβαια την εναλλαγή τους από την εκθετική στη λογαριθμική μορφή. Οι μαθητές έθεσαν ερωτήσεις στις ομάδες τους όπως «πως ξεχωρίζω ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή» και δόθηκαν χαρακτηριστικές απαντήσεις όπως «εγώ ας πούμε, όταν βλέπω $f(x) = x+1$ ξέρω ότι η ανεξάρτητη είναι το x» και συνεχίζοντας ο ίδιος μαθητής προσθέτει: «δεν βλέπω κάτι τέτοιο στο κείμενο και έχω μπερδευτεί». Η απάντηση αυτή υποδεικνύει την ύπαρξη μηχανιστικής αντίληψης του συναρτησιακού συμβολισμού και περεταίρω βασικών κενών στην εικόνα της έννοιας της συνάρτησης που έχουν σχηματίσει οι μαθητές στην μέχρι στιγμής, εκπαιδευτική τους πορεία. Η εργασία δεν αναπτύχθηκε στον άξονα της σημειωτικής διάστασης γιατί τα σύμβολα δεν μπορούσαν να μεταφραστούν με συναρτησιακούς όρους. Η συλλογιστική ανάπτυξη της εργασίας επίσης δεν εξελίχθηκε επαρκώς αφού το πλαίσιο αναφοράς του Χώρου Εργασίας των ομάδων δεν περιείχε τα στοιχεία εκείνα που αφορούν την έννοια της συνάρτησης και που ήταν απαραίτητα για να αναπτυχθεί η εργασία στον άξονα της συλλογιστικής γένεσης, αν και τα στοιχεία αυτά (εξαρτημένη – ανεξάρτητη μεταβλητή, η συνάρτηση ως συμμεταβολή, κατανόηση του συναρτησιακού συμβολισμού) θεωρούνται δεδομένα στην Β΄ Λυκείου σύμφωνα με την ανάπτυξη του Προγράμματος Σπουδών.

Οι υποερωτήσεις 6i - iv απαντήθηκαν με επιτυχία από όλες τις ομάδες. Αξιοσημείωτο είναι ότι η $1^η$ και $4^η$ ομάδα έδωσαν την απάντηση στην 6i χρησιμοποιώντας τον ορισμό του κειμένου και επαληθεύοντας μέσω της αντιστοιχίας αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λογάριθμος είναι ο αριθμός των λόγων που εμφανίζονται στην αντιστοιχία. Κατά πάσα πιθανότητα, οι ομάδες διευκολύνθηκαν στο να οδηγηθούν στη χρήση της αντιστοιχίας εξαιτίας του ότι το παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων αφορούσε γεωμετρική πρόοδο με βάση το 2. Αυτό όμως δεν αναιρεί το γεγονός ότι η χρήση της ιστορικής προσέγγισης της έννοιας του λογάριθμου ταυτόχρονα με τον σύγχρονο ορισμό, από τις ομάδες, αντανακλά τη χρησιμότητα της Ιστορίας σε μία περισσότερο ολιστική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών γεγονός που ευνοεί την ανάπτυξη δομικής αντίληψης, στην περίπτωσή μας, της έννοιας του λογαρίθμου.

Ειδικά η $4^η$ ομάδα που εμφάνισε προβλήματα στην ανάπτυξη της εργασίας της στην ερώτηση 1, με αποτέλεσμα να μην έχει διάφανη εικόνα του ορισμού, επωφελήθηκε από τα ιστορικά στοιχεία για την απάντηση στην ερώτηση 6i όπως προαναφέρθηκε. Στις ερωτήσεις 6ii, 6iii, 6iv η ίδια ομάδα επανήλθε στην ερμηνεία του κειμένου και στη μελέτη των σχέσεων που περιέχονταν σε αυτό. Με εφαρμογή των τιμών των ερωτημάτων στις μεταβλητές του κειμένου, πράγμα που φαίνεται στα λεγόμενα των μελών της ομάδας, «το α είναι 4 το y είναι 2, άρα το 4 εις τη κάτι πρέπει να κάνει 2» ή «το α είναι το ίδιο και το y είναι α, άρα α εις τη κάτι είναι α … το 1 είναι ο λογάριθμος» ανέπτυξε τη σημειωτική διάσταση της εργασίας της με χειρισμό των συμβόλων του κειμένου, κατανοώντας τη σχέση των μεταβλητών του κειμένου μέσω της εφαρμογής τους στην επίλυση των ερωτημάτων, κατορθώνοντας με τον τρόπο αυτό να δομήσει τον ορισμό, πράγμα που δεν είχε καταφέρει στην ερώτηση 1.

Στα ίδια πλαίσια κινήθηκε και η εργασία των υπόλοιπων ομάδων, χωρίς όμως τόσο εκτενή αντιστοίχιση των αριθμητικών τιμών στις μεταβλητές του κειμένου, αφού οι ομάδες δεν χρειάστηκε να επιμείνουν σε αυτό έχοντας πληρέστερη εικόνα του ορισμού όταν ξεκίνησαν τη διαπραγμάτευση των ερωτημάτων 6i – iv. Η διαδικασία ύψωσης σε εκθέτη με τις ιδιότητές της, γνωστή στους μαθητές τεχνική, χρησιμοποιήθηκε από τις ομάδες για τις δοκιμές που χρειάστηκαν στην προσπάθεια απάντησης των ερωτημάτων αναπτύσσοντας την εργαλειακή διάσταση της εργασίας. Χαρακτηριστικά για το ερώτημα 6ii στην 1η ομάδα ειπώθηκε: «Ψάχνουμε τον αριθμό που αν το 4 υψωθεί σε αυτόν να κάνει 2. Το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο…δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από το 1», «θα είναι η ρίζα του… πρέπει να υψωθεί σε κλάσμα … στο ½ ».

Η υποερώτηση 6v αποδείχθηκε αυξημένης δυσκολίας για όλες τις ομάδες. Η 1η και 3η ομάδα αρχικά πειραματίστηκαν με χρήση του ορισμού του Euler και εφαρμογή συγκεκριμένων ‘βολικών’ αριθμητικών τιμών στις μεταβλητές: Χαρακτηριστικός διάλογος στην 1η ομάδα:

- Νικολέτα: Αν ήταν $2^{\log_2 8}$ τότε θα είχαμε 2^3 δηλαδή 8. Άρα η απάντηση είναι το x;

- Ηλιάνα: Να δοκιμάσουμε και με άλλες τιμές.

- Βασιλική: (Μετά την επόμενη δοκιμή) Ok. Πάλι ισχύει. Μπορούμε να γενικεύσουμε; Ή πρέπει να πούμε και κάτι άλλο;

Στη συνέχεια η ομάδα έψαξε να βρει τρόπο επικύρωσης του αποτελέσματος. Χρησιμοποίησαν το συμβολισμό του κειμένου για την αυτοσχέδια απόδειξή τους και συμφώνησαν στην απάντηση: «$\alpha^{\log y} = \alpha^z = y$». Ο ορισμός του λογαρίθμου λειτούργησε ως εργαλείο στην ανάπτυξη της εργαλειακής διάστασης της εργασίας στην ομάδα στην πορεία πειραματισμού για την εύρεση της σωστής απάντησης και ταυτόχρονα ως στοιχείου του πλαισίου αναφοράς στην τροχιά της συλλογιστικής γένεσης για την προσπάθεια επικύρωσης του αποτελέσματος.

Η $3^η$ ομάδα αρκέστηκε στις δοκιμές με συγκεκριμένες τιμές ώστε να δώσει την απάντηση χωρίς να αναπτύξει τη συλλογιστική διάσταση της εργασίας. Είναι αξιοσημείωτη όμως η αντίληψη της έννοιας του λογαρίθμου που έχει διαμορφώσει ο Γιάννης, μαθητής της ομάδας, ο οποίος πρότεινε στην ομάδα: «Το αποτέλεσμα είναι u» και συνέχισε δικαιολογώντας την άποψή του στην ομάδα του: «γιατί ο λογάριθμος είναι εκθέτης… Δηλαδή εδώ το α υψώνεται στον εκθέτη που δίνει το u … άρα το αποτέλεσμα είναι u». Τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας ζήτησαν εξηγήσεις και ο Γιάννης απάντησε χρησιμοποιώντας τον ορισμό: «ο $\log_a u$ ας πούμε ότι είναι x … άρα $α^x$ κάνει u … και εδώ έχω $α^x$ άρα u». Η αρχική αυτοματοποιημένη απάντηση του Γιάννη υποδηλώνει ένα περισσότερο αφαιρετικό επίπεδο σκέψης, το οποίο επιτρέπει την στιγμιαία αντίδραση που φαίνεται στην αρχική του απάντηση, χωρίς να χρειαστούν δοκιμές με συγκεκριμένες τιμές και αναφορά στην εκθετική διαδικασία. Η τελευταία χρησιμοποιήθηκε από τον μαθητή στις εξηγήσεις που ο ίδιος έδωσε στην ομάδα του και η οποία φαίνεται ότι έχει ενσωματωθεί στην έννοια του λογάριθμου στην αντίληψη που ανέπτυξε ο συγκεκριμένος μαθητής.

Η $2^η$ και $4^η$ ομάδα προχώρησαν την εργασία τους στην ερώτηση 6ν αφού ζήτησαν την επέμβαση της διδάσκουσας. Απάντηση δεν τους δόθηκε, προτάθηκε όμως να θεωρήσουν τον εκθέτη ως αριθμό και να εφαρμόσουν τον ορισμό του κειμένου στην παράσταση που έπρεπε να διαπραγματευτούν. Χειριζόμενοι τα σύμβολα και χρησιμοποιώντας τον ορισμό, οι μαθητές ανέπτυξαν την εργασία τους και έφτασαν τελικά στη σωστή απάντηση: «αν $\log_α u = x$ τότε $α^x = u$ και αυτό που έχουμε είναι $α^x$ άρα u».

Η $7^η$ ερώτηση αρχικά αποτέλεσε έκπληξη για τις ομάδες προφανώς γιατί ήταν το πρώτο ερώτημα που αντιμετώπιζαν στο οποίο ζητούνταν ο εκθέτης. Σύντομα είδαν ότι το x δεν μπορεί να είναι ακέραιος αλλά δεν μπορούσαν να συνδέσουν αυτόματα τον εκθέτη με τον λογάριθμο του 112. Παρά τις αλλεπάλληλες εφαρμογές του ορισμού οι οποίες προηγήθηκαν, η αντίληψη του λογαρίθμου ως αριθμού, εκθέτη δεν φάνηκε να έχει εδραιωθεί στο νοητικό σχήμα που έχουν κατασκευάσει οι μαθητές, ώστε να απαντήσουν στην ερώτηση άμεσα. Η $1^η$ και $2^η$ ομάδα απάντησαν στην ερώτηση ανατρέχοντας ξανά στο κείμενο και στον ορισμό του λογαρίθμου. Η απάντηση $x = \log_5 112$ παρόλο ότι προέκυψε μετά από την εφαρμογή του ορισμού, έτυχε της δυσπιστίας των ομάδων ως προς την ορθότητά της, γεγονός που φάνηκε στις μαγνητοφωνημένες συζητήσεις: «μπορεί να είναι αυτή η απάντηση;» Η αντιστοίχιση του συμβολισμού $\log_5 112$ σε μαθηματική οντότητα – αριθμό φαίνεται ότι ακόμα δεν έχει εσωτερικοποιηθεί στο νοητικό σχήμα των μαθητών. Αν και η εργασία έδειξε να αναπτύσσεται ικανοποιητικά ως προς την εργαλειακή διάσταση της με την ορθή χρήση του ορισμού, η σημειωτική διάσταση με την αναγνώριση του συμβόλου $\log_5 112$ ως αριθμητική τιμή του αγνώστου, δεν λειτούργησε επαρκώς. Η 4η ομάδα έδωσε τη σωστή απάντηση ακολουθώντας τον ορισμό και χωρίς αμφιβολίες για την ορθότητά της. Η 3η ομάδα απάντησε άμεσα χωρίς αναλυτική χρήση του ορισμού, αλλά με αναφορά στην αριθμητική υπόσταση του λογάριθμου ως εκθέτη. Χαρακτηριστικό είναι ότι συντονιστής της συζήτησης στην ομάδα ήταν ο Γιάννης, μαθητής ο οποίος αναφέρθηκε προηγουμένως.

Η 8η ερώτηση που αφορούσε την ‘1-1’ ιδιότητα της λογαριθμικής αντιστοιχίας, απαντήθηκε με άνεση από όλες τις ομάδες ως φυσικό επακόλουθο του ορισμού. Η χρήση του ορισμού αντιμετωπίστηκε ως οικεία διαδικασία στην πορεία ανάπτυξης επιχειρηματολογίας των μαθητών στις ομάδες: «αν η βάση είναι α και ο logμ είναι ω τότε $\alpha^{\omega} = \mu$ και … $\alpha^{\psi} = \nu$ αλλά $\omega = \psi$ …άρα $\mu = \nu$». Είναι αξιοσημείωτο όμως ότι δεν συζητήθηκε στις ομάδες απευθείας η ύπαρξη ίδιων βάσεων, ίδιων εκθετών, επομένως ίδιων αποτελεσμάτων παρά μόνο έμμεσα μέσω του ορισμού.

Το πρώτο μέρος της συζήτησης στην ολομέλεια, που ακολούθησε μετά το τέλος της εργασίας των ομάδων στο 1ο φύλλο, αφορούσε τις ερωτήσεις 1 – 5 και αρχικά εστίασε στον ορισμό του λογαρίθμου του Euler ο οποίος συζητήθηκε λεπτομερώς από τις ομάδες με αναφορά στους ρόλους των μεταβλητών του κειμένου (εκθέτης, βάση, αποτέλεσμα) και συγκεκριμένα παραδείγματα. Οι ομάδες ανέτρεξαν στην αντιστοιχία των προόδων στο εισαγωγικό φύλλο εργασίας, αποφάνθηκαν ότι χρειάζονται 6 λόγοι σε συνεχή αναλογία έως το 64 και εφάρμοσαν τον ορισμό του Euler επαληθεύοντας ότι $\log_2 64 = 6$. Με την καθοδήγηση της διδάσκουσας η συζήτηση επικεντρώθηκε στην ύπαρξη της συμμεταβολής των μεταβλητών y και z στο κείμενο και τη συναρτησιακή μορφή των σχέσεων. Οι ομάδες ανέπτυξαν τη σημειωτική διάσταση της εργασίας χρησιμοποιώντας τον γνωστό τους συναρτησιακό συμβολισμό σε συνδυασμό με τις μεταβλητές του κειμένου για την εκθετική συνάρτηση, $f(z) = a^z$, και αντίστοιχα για την λογαριθμική, $g(y) = \log y$. Διαπραγματεύτηκαν μέσω του κειμένου τη σύνδεση των προηγούμενων σχέσεων υποστηρίζοντας ότι f(z) = y και g(y) = z και συμφώνησαν στους εναλλασσόμενους ρόλους των μεταβλητών. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν αν εμφανίζεται συναρτησιακή εξάρτηση στην προσέγγιση του Napier βλέποντας εκ νέου το κινηματικό μοντέλο στο αρχείο .ppt. Οι ομάδες συμφώνησαν στην ύπαρξη συμμεταβολής μεγεθών στην προσέγγιση του Euler καθώς και του Napier. Στη συνέχεια οι μαθητές αποφάνθηκαν για τα σύνολα ορισμού και τιμών εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης αφού εξέτασαν τις δυνατές τιμές εκθέτη και αποτελέσματος στην εκθετική διαδικασία και μετά τον διαχωρισμό των εναλλασσόμενων ρόλων των μεταβλητών στην εκθετική και την αντίστροφη λογαριθμική εξάρτηση. Το πρώτο μέρος της συζήτησης στην ολομέλεια λειτούργησε εποικοδομητικά για τους μαθητές στους άξονες της συλλογιστικής και σημειωτικής γένεσης για τον προσδιορισμό της συσχέτισης των όρων συνάρτησης, αντιστοιχίας, συμμεταβολής εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Η ταυτόχρονη αναφορά στο μοντέλο του Napier, στην αντιστοιχία των προόδων και στον ορισμό του Euler ώθησε τους μαθητές να προσεγγίσουν σφαιρικά την έννοια του λογαρίθμου και συνάμα να διαπραγματευτούν την έννοια της συναρτησιακής εξάρτησης σε κάθε περίπτωση. Η εργασία των ομάδων στις πέντε πρώτες ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, λειτούργησε ανατροφοδοτικά για την προετοιμασία του 3ου φύλλου εργασίας το οποίο αφορά την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης.

Το δεύτερο μέρος της συζήτησης στην ολομέλεια συντονίστηκε κατά το μεγαλύτερο μέρος της από τις ίδιες τις ομάδες. Καθοδήγηση της διδάσκουσας υπήρξε στην αρχή της συζήτησης ως προς την ύπαρξη αρνητικών λογάριθμων. Στη συνέχεια οι μαθητές περιέγραψαν τον τρόπο της εργασίας τους στα ερωτήματα 6, 7 και 8 ο οποίος έχει ήδη αναφερθεί ταυτόχρονα όμως η επιχειρηματολογία τους, αφού είχε προηγηθεί το πρώτο μέρος της συζήτησης, στράφηκε με μεγαλύτερη ευκολία στην φύση του λογαρίθμου ως εκθέτη – αριθμού. Η απάντηση $x = \log_5 112$ στην ερώτηση 7 έγινε εύκολα αποδεκτή από τις ομάδες οι οποίες συμφώνησαν ότι «αφού ψάχνουμε τον εκθέτη ψάχνουμε για λογάριθμο». Το ίδιο φάνηκε να συμβαίνει και στο υποερώτημα 6ν για το οποίο η πρόταση της 3ης ομάδας «το α υψώνεται στον εκθέτη εκείνο στον οποίο όταν υψωθεί το α δίνει αποτέλεσμα u … άρα η απάντηση είναι u» βρήκε σύμφωνες και τις υπόλοιπες ομάδες.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων για το 2ο Φύλλο Εργασίας

Το 2ο φύλλο εργασίας διαπραγματεύεται τις ιδιότητες των λογαρίθμων που πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές και τη χρησιμότητά τους κυρίως στην απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων και στην επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων. Πριν την έναρξη της εργασίας των ομάδων, με σκοπό τη δημιουργία κατάλληλου κλίματος στην τάξη, συζητήθηκε ο ορισμός και συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα, καθώς και περιπτώσεις των ερωτημάτων 6ν και 7 του 1ου φύλλου τα οποία αποτέλεσαν για τους μαθητές δύσκολα σημεία του φύλλου αυτού. Οι μαθητές αντιμετώπισαν τα ερωτήματα με σχετική ευκολία, βασιζόμενοι περισσότερο στην έννοια του λογαρίθμου ως εκθέτη και όχι σε αναλυτική αναφορά στον ορισμό. Η δουλειά που έγινε στο 1ο φύλλο ήταν καθοριστική για την πορεία της εργασίας στο δεύτερο φύλλο ως προς την ερμηνεία του κειμένου από τις ομάδες και την ευκολία στον χειρισμό του ορισμού και της ίδιας της έννοιας του λογαρίθμου.

Συγκεκριμένα, στις ερωτήσεις 9 και 10 οι ομάδες δεν δυσκολεύτηκαν να αποσαφηνίσουν το κείμενο ως προς τους κανόνες του γινομένου, του πηλίκου και της δύναμης. Αρχικά ανέλυσαν τις ισότητες του κειμένου με βάση τον ορισμό και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων: «Αφού logy = z, το α αν υψώνεται στο z δίνει y, άρα $\alpha^z = y$ … $y^2 = (\alpha^z)^2$, $y^2 = \alpha^{2z}$ … το 2z είναι ο εκθέτης του α άρα ο λογάριθμος του y^2. Δηλαδή το $\log y^2$ είναι $2 \cdot \log y$». Όπως φαίνεται η εκθετική διαδικασία που εμπλέκεται στον ορισμό χρησιμοποιείται ως τυπική, γνωστή διαδικασία και ταυτόχρονα η θέση του λογαρίθμου ως εκθέτη της βάσης αντιμετωπίζεται με άνεση από τους μαθητές. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε για τη στήριξη του συλλογισμού του Euler στον κανόνα του γινομένου. Συγκεκριμένα, η εργασία εξελίχθηκε στην τροχιά της συλλογιστικής γένεσης, με αφετηρία τον ορισμό, λογιζόμενου πια ως στοιχείου του πλαισίου αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου, και μέσω της ανάπτυξης τυπικής επιχειρηματολογίας κατέληξε στην κατασκευή απόδειξης των ιδιοτήτων των λογαρίθμων. Η σημειωτική διάσταση της εργασίας αναπτύχθηκε χωρίς να εμφανιστεί πρόβλημα στον χειρισμό των συμβόλων και την ερμηνεία των σχέσεων του κειμένου.

Όλες οι ομάδες ανέπτυξαν την επιχειρηματολογία τους στις απαντήσεις τους στην ερώτηση 11, η οποία αφορούσε τις αποδείξεις των κανόνων του πηλίκου και της δύναμης με το ίδιο σκεπτικό που υποστήριξαν τον κανόνα του γινομένου. Με τον κανόνα της δύναμης οι ομάδες είχαν ήδη ασχοληθεί ξεκινώντας τη μελέτη του κειμένου. Όπως περιγράφηκε προηγουμένως και όπως κατέδειξε η απομαγνητοφώνηση των συζητήσεων στις ομάδες, τα βήματα που ακολουθήθηκαν κατά την αποδεικτική διαδικασία δικαιολογούνταν μέσω ευέλικτων χειρισμών του ορισμού, οι οποίοι υποδεικνύουν την ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο μαθηματικό αντικείμενο – λογάριθμο. Χαρακτηριστικά η Νικολέτα, μαθήτρια της 1^{ης} ομάδας αναφέρει: «αν ξέρω τον λογάριθμο δύο αριθμών τότε ξέρω τον λογάριθμο του πηλίκου τους… γιατί αν ξέρω ότι ο λογάριθμος του y είναι ίσος με z τότε το $α^z$ κάνει y και με τον ίδιο τρόπο $α^x$ κάνει v. Αν τα διαιρέσω, το αποτέλεσμα είναι $α^{z-x}$… δηλαδή το z-x είναι ο εκθέτης του α, άρα ο λογάριθμος του πηλίκου».

Η 1^η και 2^η ομάδα διέκριναν στους κανόνες του Euler την αντιστοιχία των πράξεων (πολλαπλασιασμός σε πρόσθεση, διαίρεση σε αφαίρεση) η οποία είχε συζητηθεί στο εισαγωγικό φύλλο εργασίας μέσω της αντιστοιχίας αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Ανέτρεξαν στο εισαγωγικό φύλλο και εφάρμοσαν τον συμβολισμό και τους κανόνες του Euler για τον υπολογισμό των πράξεων που δόθηκαν αρχικά στο εισαγωγικό φύλλο.

Οι ερωτήσεις 12a, και 12b απαντήθηκαν με επιτυχία, παρόλο που σύμφωνα με τη διδακτική εμπειρία της διδάσκουσας καθώς και συναδέλφων εκπαιδευτικών η χρήση της εσφαλμένης ισότητας log(μ+ν)= logμ+ logν, αποτελεί σύνηθες λάθος των μαθητών και μάλιστα όπως δήλωσε στην ομάδα του ο Τάσος, μαθητής της 3^{ης} ομάδας, με πολύ καλή βαθμολογική σχολική επίδοση: «Εμένα θα μου φαινόταν ότι ισχύει … (log(μ+ν)= logμ+ logν) σαν επιμεριστική ιδιότητα …όμως το log(μ+ν) είναι ένας αριθμός». Ο έλεγχος της ισχύος της ισότητας έγινε μέσω του ορισμού, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων αφού οι ομάδες αντιμετώπιζαν με ευκολία τη διαδικασία τυπικής απόδειξης. Χαρακτηριστική όμως ήταν η παρατήρηση της Ελένης, μαθήτριας της 4^{ης} ομάδας στην οποία διαφαίνεται η ιδέα της ‘1-1’ λογαριθμικής αντιστοιχίας που συζητήθηκε στην ερώτηση 8 του 1^{ου} φύλλου εργασίας: «Ξέρουμε ότι log(μ·ν)= logμ+ logν. Δεν ισχύει πάντα ότι μ·ν = μ+ν …, άρα αφού είναι διαφορετικοί αριθμοί θα έχουν διαφορετικούς λογάριθμους».

Οι ερωτήσεις 13 και 14 απαντήθηκαν από τις ομάδες με επιτυχή εφαρμογή των κανόνων των λογαρίθμων οι οποίοι λειτούργησαν ως βασικό μέσο για την ανάπτυξη της εργαλειακής διάστασης της εργασίας με αποτέλεσμα την κατασκευή ορθής επίλυσης των ασκήσεων 14 και 15. Η ερώτηση 15 απαίτησε εκτενέστερη διαπραγμάτευση στις ομάδες αφενός ως προς τους περιορισμούς που θα τεθούν και αφετέρου ως προς την εμφάνιση λογαρίθμου στο $2^{ο}$ μέλος της ισότητας. Η $1^{η}$, $2^{η}$ και $4^{η}$ ομάδα χρησιμοποίησαν την εκθετική διαδικασία με εκθέτες πραγματικούς αριθμούς ώστε να επικυρώσουν ότι το αποτέλεσμα ύψωσης σε εκθέτη δεν μπορεί παρά να είναι θετικός αριθμός. Η $3^{η}$ ομάδα έκανε άμεση αναφορά στο πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης υποστηρίζοντας ότι «το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί άρα ό,τι βρίσκεται σε λογάριθμο πρέπει να είναι θετικό». Το πρόβλημα εμφάνισης λογαρίθμου στο $2^{ο}$ μέλος της ισότητας αντιμετωπίστηκε αρχικά από την $1^{η}$ και $4^{η}$ ομάδα ως εξίσωση για την αναζήτηση του αγνώστου: « $\log z = 2$, πρέπει να βρούμε τον z». Η $2^{η}$ και $3^{η}$ ομάδα ανέπτυξαν το σκεπτικό τους με κέντρο την ιδέα του λογαρίθμου ως εκθέτη: «θα το γράψουμε λογάριθμο της βάσης στο τετράγωνο αφού στην ουσία ο εκθέτης πρέπει να είναι το 2». Αξίζει να σημειωθεί ότι στην ερώτηση 6iv του $1^{ου}$ φύλλου η οποία διαπραγματεύτηκε το ίδιο θέμα ($\log_{\alpha}\alpha^{x}=;$) η εργασία των ομάδων αναπτύχθηκε με αναλυτική χρήση του ορισμού χωρίς αναφορά στην έννοια του λογαρίθμου ως εκθέτη.

Οι παρατηρήσεις που καταγράφηκαν και γενικότερα η εξελισσόμενη ανάπτυξη της εργασίας από το $1^{ο}$ στο $2^{ο}$ φύλλο, φαίνεται να υποδεικνύουν δυναμική πορεία εσωτερικοποίησης του ορισμού και ενσωμάτωσης της εκθετικής διαδικασίας στο αντικείμενο – λογάριθμο. Περεταίρω θα μπορούσε να ειπωθεί ότι παρόλη την αρχική δυσκολία που αντιμετώπισαν οι ομάδες με την ερμηνεία των κειμένων, οι μαγνητοφωνημένες συνομιλίες, τα φύλλα εργασίας και οι συζητήσεις στην ολομέλεια κατέδειξαν την ύπαρξη επαρκούς επικοινωνίας των στοιχείων επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου, μέσω της ανάπτυξης των τριών διαστάσεων του μοντέλου. Ταυτόχρονα η ομαδοσυνεργατική οργάνωση του μαθήματος, προώθησε την ανάπτυξη συλλογιστικής επιχειρηματολογίας και δημιούργησε κατάλληλο κλίμα για ενεργή συμμετοχή ακόμη και μαθητών που σε τυπικές συνθήκες τάξης προσπαθούσαν να μένουν απαρατήρητοι.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων για το 3ο Φύλλο Εργασίας

Στο 3ο φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές απόσπασμα κειμένου του Euler, το οποίο περιέχει τον ορισμό της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης και αναφορά στην έννοια της αντίστροφης, χωρίς σαφή διατύπωση του όρου 'αντίστροφη συνάρτηση'. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε στους μαθητές συναρτησιακή έκφραση στο πλαίσιο πραγματικού προβλήματος στο πεδίο της σεισμολογίας. Στην 1η ερώτηση οι ομάδες κλήθηκαν να απαντήσουν αν η έκφραση αυτή αποτελούσε συνάρτηση σύμφωνα με τον ορισμό του Euler και να καθορίσουν σε αυτήν την εξαρτημένη και ανεξάρτητη (μεταβαλλόμενη) μεταβλητή. Οι ομάδες συζήτησαν διεξοδικά τον ορισμό του Euler στο κείμενο.

Η 1η και 2η ομάδα αναζήτησαν συγκεκριμένα παραδείγματα και δημιούργησαν συναρτησιακές εκφράσεις οι οποίες είτε ήταν απόρροια συγκεκριμένης εφαρμογής σε άλλο γνωστικό πεδίο, π.χ. ποιο είναι το διάστημα που διανύει ένα κινητό σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, είτε δόθηκαν από τους μαθητές με τη γνωστή μορφή του τύπου της συνάρτησης, π.χ. $y=z+1$. Ταυτόχρονα εστίασαν στη μοναδικότητα της τιμής του y που προκύπτει για κάθε τιμή του z αδυνατώντας όμως να βρουν έκφραση η οποία να μην συμφωνεί με τον ορισμό του κειμένου ως προς τη μοναδικότητα της τιμής της συνάρτησης. Οι ομάδες διατήρησαν στους πειραματισμούς τους τον συναρτησιακό συμβολισμό του κειμένου αφού πρώτα τον ανέλυσαν. Η συζήτηση επικεντρώθηκε στον ρόλο των μεταβλητών (μεταβαλλόμενης και εξαρτώμενης) και σταθερών στις εκφράσεις που παρουσιάστηκαν. Στη συνέχεια διαπραγματεύτηκαν τη σχέση μεγέθους και έντασης σεισμού που δόθηκε στο φύλλο εργασίας, χωρίς να έχουν πρόβλημα στην αναγνώριση μεταβαλλόμενης και εξαρτώμενης ποσότητας και στον χαρακτηρισμό της έκφρασης ως συνάρτησης μιας μεταβλητής. Χαρακτηριστικά ειπώθηκε: «δίνω τιμές στο μέγεθος και βρίσκω τις αντίστοιχες εντάσεις ... η ένταση είναι εξαρτώμενη από το μέγεθος που μεταβάλλεται. Η ένταση είναι το y και το μέγεθος είναι το z». Η 3η και 4η ομάδα ασχολήθηκαν απευθείας με την συναρτησιακή έκφραση που δόθηκε εκφράζοντας ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το γεγονός ότι διαπραγματεύονταν μέσω των Μαθηματικών μία πραγματική κατάσταση με μεγέθη που συνδέονταν με σεισμική δραστηριότητα. Χαρακτηριστικό το σχόλιο της Ελένης μαθήτριας της 4ης ομάδας που είπε: «Δεν το περίμενα ότι τα Μαθηματικά θα μετρούσαν και το μέγεθος της καταστροφής …». Η 3η ομάδα διαχώρισε σταθερές και μεταβλητές στην δοθείσα σχέση και αντιστοίχισε τα I, R στον γνωστό συμβολισμό y και x των μεταβλητών στις συναρτησιακές σχέσεις. Αντιπαρέβαλλε τον ορισμό του Euler με τον ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοιχίας, ο οποίος αποτελεί τμήμα της διδακτέας ύλης της Α΄ Λυκείου. Στην ομάδα ειπώθηκε: «Κάθε x αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y. Εδώ το x είναι το z. Όταν λέει ότι για οποιαδήποτε τιμή του z καθορίζεται μία μόνο τιμή για τη συνάρτηση, εννοεί ότι κάθε x αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y που είναι η τιμή της συνάρτησης». Αμέσως μετά το ενδιαφέρον μετατέθηκε στις μεταβλητές της δοθείσας σχέσης όπου αντιστοιχήθηκε το I στο y και το R στο z. Η ομάδα συμφώνησε ότι για κάθε τιμή του R προκύπτει μοναδική τιμή για το I. Η 4^{η} ομάδα, αν και απάντησε σωστά στο φύλλο εργασίας, όπως φάνηκε στην μαγνητοφώνηση δεν ανέπτυξε επαρκώς τη συλλογιστική της επιχειρηματολογία με βάση το κείμενο καθώς αντιμετώπισε την ερώτηση επιπόλαια χωρίς εμβάθυνση στη μελέτη του κειμένου. Όπως χαρακτηριστικά είπε μαθητής της ομάδας: «Δεν ξέρω τι ακριβώς σημαίνει ‘αναλυτική έκφραση’… μήπως ο τύπος; Λέω να απαντήσουμε θετικά». Η συλλογιστική της ομάδας δεν αναπτύχθηκε περεταίρω καθώς δεν συζητήθηκε η σχέση συμμεταβολής των μεταβλητών και ο ρόλος της καθεμιάς στη δοθείσα έκφραση. Δεν έγινε αντιστοίχιση των μεταβλητών της έκφρασης σε αυτές του κειμένου, δεν δόθηκαν παραδείγματα και δεν συζητήθηκε η μοναδικότητα της τιμής που προκύπτει για την συνάρτηση που σημαίνει μοναδικότητα της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε τιμή της ανεξάρτητης όπως προτείνεται στο κείμενο. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα μπορούσε να ειπωθεί πως η εργασία της ομάδας δεν αναπτύχθηκε επαρκώς στους άξονες της σημειωτικής και συλλογιστικής διάστασης. Μετά την διαπραγμάτευση που προηγήθηκε στις ομάδες, τα μέλη των ομάδων κατέληξαν ότι η δοθείσα σχέση έντασης και μεγέθους σεισμού συμφωνούσε με τον ορισμό του Euler για την συνάρτηση. Ο Γιάννης στην 3^{η} ομάδα είπε: «είναι (η σχέση έντασης – μεγέθους) έκφραση που σχηματίζεται από την μεταβλητή R και σταθερές ... είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η ένταση όταν μεταβάλλεται το μέγεθος». Ο Τάσος πρόσθεσε: «Η τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή του I που είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Το R είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, η ‘μεταβλητή ποσότητα’».

Στο υποερώτημα a της ερώτησης 2 οι ομάδες επανήρθαν στην έννοια της συμμεταβολής δύο μεγεθών εκ των οποίων το ένα ακολουθεί αριθμητική και το άλλο γεωμετρική πρόοδο. Εύκολα διαπίστωσαν ότι η μεταβολή με αριθμητική πρόοδο της μεταβλητής R επιφέρει γεωμετρική μεταβολή της έντασης I. Η αριθμητική πρόοδος με ακέραιες τιμές που προτάθηκε για τον εκθέτη βοήθησε τις ομάδες ώστε να γίνει εμφανής η γεωμετρική μεταβολή της έντασης του σεισμού. Ο Δημήτρης στην 2η ομάδα είπε: «κάθε αύξηση κατά 1 στο μέγεθος, προκαλεί αύξηση επί 10 στην ένταση». Οι ομάδες 1 και 3 επανέφεραν στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων στη διαπραγμάτευση της ερώτησης. Συζήτησαν την αντιστοιχία δύο μεγεθών τα οποία ακολουθούν γεωμετρική και αριθμητική πρόοδο αναφέροντας το κινηματικό μοντέλο του Napier και τους λογαριθμικούς πίνακες οι οποίοι αποτελούσαν αντιστοιχίες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Κατά τη διαπραγμάτευση στην ομάδα 3 ειπώθηκε: «Όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται γεωμετρικά μαζί με κάποιο άλλο που μεταβάλλεται αριθμητικά, υπάρχει λογαριθμική σχέση μεταξύ τους».

Στο υποερώτημα b της 2ης ερώτησης οι ομάδες 1, 2 και 3 συμφώνησαν ότι η αλλαγή των ρόλων των μεταβλητών από εξαρτημένη σε ανεξάρτητη και αντίστροφα, σημαίνει επίλυση της δοθείσας σχέσης ως προς R. Η εμφάνιση του λογαρίθμου ήταν αναμενόμενη από τις ομάδες 1 και 3 όπως φάνηκε στη διαπραγμάτευση του υποερωτήματος a. Στην 1η ομάδα, η Ηλιάνα πριν την επίλυση του τύπου, ανέφερε: «Το R μεταβάλλεται αριθμητικά και η ένταση γεωμετρικά. Το R πρέπει να είναι λογάριθμος της έντασης» και υπενθύμισε στην ομάδα ότι οι όροι της αριθμητικής προόδου ήταν λογάριθμοι των αντίστοιχων της γεωμετρικής. Η επίλυση του τύπου δεν αποτέλεσε πρόβλημα για τις ομάδες αυτές. Οι ομάδες 1 και 2, στο τελευταίο βήμα επίλυσης του τύπου, αντιμετώπισαν τον άγνωστο R ως εκθέτη άρα απευθείας ως λογάριθμο. Η 3η ομάδα αναφέρθηκε στον ορισμό του λογαρίθμου χρησιμοποιώντας τον ως επιβεβαίωση –επαλήθευση της λύσης. Η 4η ομάδα συνάντησε μεγαλύτερη δυσκολία στο υποερώτημα b και συγκεκριμένα στην εναλλαγή των θέσεων εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής. Η ελλιπής διαπραγμάτευση της 1ης ερώτησης δεν ευνόησε την ανάπτυξη της σημειωτικής και συλλογιστικής διάστασης της εργασίας καθώς στο σημείο αυτό τα σύμβολα δεν επεξηγήθηκαν επαρκώς και η εργασία δεν εξελίχθηκε ικανοποιητικά στον άξονα της συλλογιστικής διάστασης. Ο ρόλος του κειμένου ως γνωστικού εργαλείου παρέμεινε αδρανής καθώς οι γνωστικές δυνατότητες του κειμένου δεν αξιοποιήθηκαν επαρκώς. Η διδάσκουσα καθοδήγησε την ομάδα να επιστρέψει στη μελέτη του κειμένου. Εντόπισαν την αντιστοιχία στα σύμβολα y, f(z) και f(x) και επιχειρηματολόγησαν για την ύπαρξη μεταβλητών και σταθερών στην έκφραση της ερώτησης 1, καθώς και για το ποια μεταβλητή προκαλεί αλλαγή στις τιμές της άλλης. Έλυσαν τη δοθείσα σχέση ως προς R αναφέροντας ότι «ο άγνωστος είναι εκθέτης άρα λογάριθμος».

Ο όρος «αντίστροφη συνάρτηση» που αναφερόταν στο υποερώτημα c, προβλημάτισε τις ομάδες καθώς δεν ήταν προφανής στο κείμενο. Ο προβληματισμός αυτός οδήγησε σε συνεργασία και ανταλλαγή απόψεων. Οι ομάδες συμφώνησαν ότι αντιστροφή των μεταβλητών σημαίνει εύρεση νέας έκφρασης η οποία διατηρεί τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης που αναφέρονται στο κείμενο. Η ομάδα 1 επανήλθε στο υποερώτημα b εστιάζοντας στην αρχική εκθετική έκφραση και στην τελική λογαριθμική. Συμφώνησαν ότι πρόκειται για δύο διαφορετικές συναρτήσεις στις οποίες οι μεταβλητές εναλλάσσουν ρόλους (εξαρτημένη-ανεξάρτητη). Η Βασιλική ανέφερε: «η αντιστροφή των μεταβλητών δίνει την αντίστροφη συνάρτηση». Οι υπόλοιπες τρεις ομάδες επικεντρώθηκαν στο κείμενο και συγκεκριμένα στην έκφραση «…με τον ίδιο τρόπο το z θα είναι συνάρτηση του y». Αποφάνθηκαν ότι «αν λύσω τον τύπο της συνάρτησης ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκω την αντίστροφη συνάρτηση». Ο Τάσος στην 3η ομάδα έγραψε στο φύλλο εργασίας: «αν $z \rightarrow y$ τότε $y \rightarrow z$».

Στην συζήτηση που ακολούθησε στην ολομέλεια μετά την επεξεργασία της ερώτησης 2 του φύλλου εργασίας δόθηκε από τη διδάσκουσα η έκφραση $y=z^2$ και ζητήθηκε από τις ομάδες να αποφασίσουν αν πρόκειται για συνάρτηση μιας μεταβλητής σύμφωνα με τον ορισμό του κειμένου, καθώς και να βρουν τον τύπο της αντίστροφης. Οι ομάδες απάντησαν εύκολα ως προς το 1ο σκέλος. Για το 2ο, μετά από αλγεβρική επίλυση και δοκιμές με συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στη θέση των μεταβλητών, αποφάσισαν ότι δεν ήταν δυνατό να βρεθεί έκφραση στην οποία το z να ορίζεται μονοσήμαντα επομένως δεν ήταν δυνατή η εύρεση αντίστροφης συνάρτησης. Ο Παναγιώτης, μαθητής της 1ης ομάδας, ανέφερε: «Αν για κάθε τιμή του z βρίσκω μία μόνο τιμή του y δεν σημαίνει απαραίτητα ότι για κάθε τιμή του y θα βρίσκω μία μόνο τιμή του z». Οι ομάδες επανήρθαν στη φράση του κειμένου «αν το y είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του z, τότε το z θα είναι συνάρτηση του y». Ανέπτυξαν την επιχειρηματολογία τους βασιζόμενοι στο παράδειγμα $y=z^2$ και κατέληξαν ότι ο ισχυρισμός του κειμένου δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις. Από τη διδάσκουσα έγινε επισημοποίηση του συμπεράσματος με αναφορά στην ‘1-1’ ιδιότητα των συναρτήσεων ως αναγκαία προϋπόθεση για την ύπαρξη αντίστροφης.

Στην πρώτη φάση του 3^{ου} φύλλου εργασίας ο ορισμός της συνάρτησης καθώς και το σχόλιο του συγγραφέα για την αντίστροφη, χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία – τεχνουργήματα για την κατασκευή της εικόνας της έννοιας της συνάρτησης και ταυτόχρονα ενσωματώθηκαν στο πλαίσιο αναφοράς του χώρου εργασίας, δίνοντας το έναυσμα ανάπτυξης επιχειρηματολογίας για το τι είδους έκφραση αποτελεί συνάρτηση και για το αν είναι πάντα εφικτή η εύρεση της αντίστροφης. Ταυτόχρονα ο χειρισμός και ερμηνεία του συναρτησιακού συμβολισμού, των σχέσεων των μεταβλητών και σταθερών του κειμένου οριοθέτησε την ανάπτυξη της σημειωτικής διάστασης της εργασίας. Οι ομάδες πειραματίστηκαν με σταθερές, μεταβλητές, αλγεβρικές εκφράσεις και με την εναλλαγή των μεταβλητών σε ρόλους εξαρτημένης – ανεξάρτητης. Παράλληλα, η αντιστοιχία αριθμητικής – γεωμετρικής μεταβολής, βασικό στοιχείο της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων, χρησιμοποιήθηκε στην ανάπτυξη συλλογισμού κατά τη διαπραγμάτευση των ερωτήσεων. Η εκθετική διαδικασία ενσωματωμένη στην έννοια του λογαρίθμου χρησιμοποιήθηκε ως τεχνούργημα στην εύρεση – κατασκευή της αντίστροφης συνάρτησης. Το κείμενο αναδείχθηκε σε γνωστικό εργαλείο, οι δυνατότητες του οποίου αξιοποιήθηκαν από τις ομάδες, όχι μόνο μέσω μελέτης και ανάλυσής του αλλά ακόμα και μέσω κριτικής και ελέγχου σε πληροφορίες που αυτό παρείχε. Η εργασία στην 1^{η} φάση του 3^{ου} φύλλου, περιλαμβανομένης και της συζήτησης στην ολομέλεια, αναπτύχθηκε κατά το μεγαλύτερο μέρος της στους τρεις άξονες (σημειωτικό, εργαλειακό και συλλογιστικό) του Μαθηματικού Χώρου συνδυάζοντας στοιχεία του Χώρου των Συναρτήσεων και της Άλγεβρας.

Στην δεύτερη φάση του 3^{ου} φύλλου εργασίας οι ομάδες δούλεψαν στο ψηφιακό περιβάλλον του μαθηματικού λογισμικού Geogebra. Η διατύπωση της ερώτησης 3 ωθούσε τις ομάδες στη μετάβαση από τη γραφική παράσταση στον τύπο της συνάρτησης μέσω της αντιστοίχισης των διατεταγμένων ζευγών (I, R) στην ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Κατά την διαπραγμάτευση από τις ομάδες της 3^{ης} ερώτησης, εμφανίστηκε δυσκολία στην μετάβαση από το γράφημα στον τύπο. Έχοντας την απαραίτητη εξοικείωση με το λογισμικό, οι ομάδες δεν δυσκολεύτηκαν στο «τεχνικό μέρος» της ερώτησης (εισαγωγή του σημείου, σχεδιασμός της καμπύλης). Δυσκολία αντιμετώπισαν στην αναγνώριση της εμφανιζόμενης καμπύλης ως τμήματος της λογαριθμικής παρόλο που στα προηγούμενα ερωτήματα είχαν επιλύσει τη δοθείσα σχέση έντασης – μεγέθους σεισμού ως προς R εμφανίζοντας λογαριθμική εξάρτηση. Δυσκολία φάνηκε να εντοπίζεται κυρίως στην αντιστοίχιση ανεξάρτητης – εξαρτημένης μεταβλητής στο διατεταγμένο ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου Α και περαιτέρω στη μετάβαση στην κατάλληλη συναρτησιακή έκφραση.

Όπως ειπώθηκε από τον Παναγιώτη στην $1^η$ ομάδα: «Δεν καταλαβαίνω ποια είναι η συνάρτηση που έχει αυτή τη γραφική παράσταση». Η Βασιλική πρόσθεσε: «Αν ξέρουμε εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή και το πώς συνδέονται, ξέρουμε τον τύπο». Η ομάδα επανήλθε στο κείμενο και στον ορισμό. Η Ηλιάνα ανέφερε: «η έκφραση λυμένη ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή είναι ο τύπος της συνάρτησης». Η παρατήρηση αυτή υποδεικνύει εν δυνάμει δυσκολία στην αντιστοίχιση της λεκτικής διατύπωσης του ορισμού στο κείμενο ο οποίος περιγράφει τη συνάρτηση ως αναλυτική έκφραση και της διατύπωσης της ερώτησης του φύλλου εργασίας που αναφέρεται στον τύπο της συνάρτησης. Η δυσκολία αυτή, στο συγκεκριμένο σημείο, δύναται να θεωρηθεί ως εμπόδιο στην ανάπτυξη της σημειωτικής διάστασης της εργασίας που αφορά την επεξεργασία των λεκτικών σχημάτων, η λειτουργία των οποίων κατά τη μαθησιακή διαδικασία συχνά απαιτεί προσεχτικούς χειρισμούς. Η ομάδα μετά την παρατήρηση της Ηλιάνας επέστρεψε στο υποερώτημα 2c του φύλλου εργασίας και στις εκφράσεις της έντασης (Ι) και του μεγέθους (R). Η συζήτηση επικεντρώθηκε στο διατεταγμένο ζεύγος (I, R) το οποίο αντιστοιχήθηκε στον γνωστό, στην ομάδα, συμβολισμό τετμημένης – τεταγμένης (x, y) με αποτέλεσμα την επιλογή του σωστού τύπου.

Η $4^η$ ομάδα, μετά την αρχική δυσκολία που αντιμετώπισε, χρησιμοποίησε παράδειγμα γραμμικής συνάρτησης ($y=x+1$) και μάλιστα με χρήση του συνήθους συμβολισμού x, y. Σχεδίασαν τη γραφική παράσταση στο λογισμικό και βρίσκοντας συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης κατέληξαν ότι οι συντεταγμένες είναι της μορφής (x, x+1) με συγκεκριμένες θέσεις ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Η συλλογιστική αυτή πορεία τους βοήθησε να καταλήξουν στο ότι η εμφανισθείσα καμπύλη είναι τμήμα της γραφικής παράστασης συνάρτησης της οποίας ο τύπος είναι η έκφραση που συνδέει το R με το I όπου το R είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και το I η ανεξάρτητη. Στο σημείο αυτό εύκολα ανέτρεξαν στην έκφραση $R=\log(I/I_o)$ η οποία είχε βρεθεί σε προηγούμενο ερώτημα. Όπως περιγράφηκε, η ομάδα αξιοποίησε τις δυνατότητες του λογισμικού για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης και την εύρεση των συντεταγμένων και ερμήνευσε τον συμβολισμό των συντεταγμένων με αποτέλεσμα την ανάπτυξη συλλογισμού που συνέδεε τη δοσμένη γραφική παράσταση με τις συντεταγμένες των σημείων της να αντιστοιχούν στους ρόλους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Με τον τρόπο αυτό η ομάδα κατόρθωσε να αρθρώσει την εργασία της στις τρεις κατευθύνσεις του μοντέλου του ΜΧΕ, την σημειωτική, την εργαλειακή και τη συλλογιστική καταλήγοντας στην επιλογή του σωστού τύπου.

Η 2η και η 3η ομάδα επικεντρώθηκαν στον έλεγχο των συντεταγμένων του σημείου Α και στο είδος της καμπύλης. Συζητώντας πρότερες γνώσεις για την γραφική παράσταση, αντιστοίχισαν την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή στην τετμημένη και στην τεταγμένη του σημείου. Δεν μπόρεσαν όμως άμεσα να βρουν τον τύπο που αντιστοιχούσε στην καμπύλη, αδυνατώντας να καθορίσουν την τιμή της συνάρτησης ως τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Στο σημείο αυτό, ο ορισμός της συνάρτησης του κειμένου δεν χρησιμοποιήθηκε επαρκώς στη συλλογιστική πορεία της εργασίας ώστε με τη βοήθεια του λογισμικού ως βασικού παράγοντα ανάπτυξης της εργαλειακής διάστασης της εργασίας, να οδηγηθούν οι ομάδες στην 'ανακάλυψη' του τύπου. Οι ομάδες επανήλθαν στο κείμενο και συζήτησαν τον ορισμό καταλήγοντας στον σωστό τύπο, συμπεραίνοντας ότι: «ψάχνουμε την έκφραση όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το R και η ανεξάρτητη το I».

Οι ερωτήσεις 4, 5, 6 και 7 είχαν ως στόχο τη γνώση βασικών ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης. Για να μπορέσουν οι ομάδες να αντιμετωπίσουν τις ερωτήσεις, μετατόπιζαν συνεχώς την εστίασή τους και στις τρεις αναπαραστάσεις της συνάρτησης δηλαδή της γραφικής παράστασης, του πίνακα τιμών και της αναλυτικής έκφρασης. Το λογισμικό Geogebra παρείχε τη δυνατότητα εποπτείας και των τριών αναπαραστάσεων ταυτόχρονα. Στη φάση αυτή ταυτόχρονα με την διαπραγμάτευση των ερωτήσεων εντός των ομάδων, αναπτύχθηκε επικοινωνία και μεταξύ των ομάδων.

Στην ερώτηση 4 οι ομάδες αποφάνθηκαν για την μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση μεγαλύτερη της μονάδας. Ο δρομέας για τις τιμές της βάσης χρησιμοποιήθηκε για τον πειραματισμό με γραφικές αναπαραστάσεις διαφόρων λογαριθμικών συναρτήσεων, με βάσεις μεγαλύτερες του 1. Η γραφική παράσταση και ο πίνακας τιμών λειτούργησαν ως εργαλεία στο επίπεδο σημειωτικής – εργαλειακής γένεσης για την διερεύνηση της μονοτονίας. Παρατηρώντας το σημείο να κινείται στην γραφική παράσταση και ταυτόχρονα τη μεταβολή των συντεταγμένων του στον πίνακα τιμών, οι ομάδες δεν δυσκολεύτηκαν να αποφανθούν για τη μονοτονία της συνάρτησης. Η επικοινωνία των αποτελεσμάτων στις ομάδες αναπτύχθηκε με όρους του χώρου των συναρτήσεων όπου η έννοια της συμμεταβολής καθώς και η αντιστοίχιση συντεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης σε ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, εμφανίστηκαν στη συλλογιστική διαδικασία. Όπως χαρακτηριστικά ειπώθηκε: «Οι τεταγμένες είναι τα y … οι λογάριθμοι. Η αύξηση στις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής προκαλεί αύξηση των τιμών της εξαρτημένης. Αυτό φαίνεται στο γράφημα και στον πίνακα τιμών … βέβαια και μεγαλύτερες τιμές των y σημαίνει επίσης μεγαλύτερες τιμές των x». Το υποερώτημα 4b μετατόπισε την εργασία των ομάδων στον αλγεβρικό χώρο. Ο ορισμός του Euler χρησιμοποιήθηκε για την αλγεβρική επικύρωση των γραφικών αποτελεσμάτων. Η ανάπτυξη της συλλογιστικής πορείας στις ομάδες για την δικαιολόγηση των αποτελεσμάτων βασίστηκε στις ιδιότητες της ύψωσης σε εκθέτη ($a^x > a^y \leftrightarrow x > y$ με $a > 1$) είτε χρησιμοποιώντας την εκθετική διαδικασία και τις ιδιότητές της αναλυτικά (αν $\kappa < \lambda$ τότε $\log\kappa < \log\lambda$ γιατί αν $\log\kappa = x$ και $\log\lambda = y$, αφού $\kappa < \lambda$, θα είναι $a^x < a^y$ άρα $x < y$), είτε με άμεση αναφορά στον λογάριθμο ως εκθέτη. Συγκεκριμένα ο Παναγιώτης στην $1^η$ ομάδα είπε: «αν $b>c$ τότε $\log b > \log c$ γιατί μεγαλύτερη δύναμη σημαίνει μεγαλύτερο εκθέτη αν η βάση είναι ίδια και μεγαλύτερη της μονάδας».

Με παρόμοιο τρόπο εξελίχθηκε η πορεία εργασίας των ομάδων και στην ερώτηση 5. Μέσω του γραφήματος και του πίνακα τιμών οι ομάδες μετακίνησαν το σημείο πάνω στο γράφημα παρατηρώντας ότι όταν οι τετμημένες πλησίαζαν το 0 οι αντίστοιχες τεταγμένες, λογάριθμοι, μειώνονταν και μετέφρασαν την μεταβολή αυτή σε όρους εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι αριθμός που πλησιάζει στο 0, οι λογάριθμοι γίνονται αρνητικοί και μειώνονται … απεριόριστα». Στο υποερώτημα 5b οι ομάδες εργάστηκαν αφενός γραφικά αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού, και αφετέρου αλγεβρικά αξιοποιώντας τον ορισμό του λογαρίθμου. Στην πρώτη περίπτωση λειτούργησαν εποπτικά μεγεθύνοντας συνεχώς το τμήμα της γραφικής παράστασης για το οποίο η ανεξάρτητη μεταβλητή προσέγγιζε το 0, καταλήγοντας ότι το γράφημα δεν θα τμήσει τον κατακόρυφο άξονα «όσο κοντά κι αν πλησιάσει το x στο 0». Η εργασία των ομάδων εστίασε περαιτέρω στο τι σημαίνει για τις τιμές των μεταβλητών της συνάρτησης το σημείο τομής του γραφήματος με τον άξονα y΄y. Κατέληξαν ότι: «πρέπει να υπάρχει τιμή του y για την οποία το x να είναι 0». Οι ομάδες δικαιολόγησαν ότι αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει αντλώντας στοιχεία από το πλαίσιο αναφοράς. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησαν τις γνώσεις τους για το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης και ταυτόχρονα τον ορισμό του λογαρίθμου: «δεν υπάρχει εκθέτης σε οποιαδήποτε βάση που να δίνει 0».

Όμοια εργάστηκαν οι ομάδες στην ερώτηση 7 όπου ζητούνταν οι συντεταγμένες του σημείου τομής του γραφήματος με τον οριζόντιο άξονα και η αλγεβρική δικαιολόγηση των ευρημάτων. Όπως περιγράφηκε προηγουμένως, το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου το οποίο εμπλουτίστηκε μέσω της διαπραγμάτευσης των προηγούμενων φύλλων εργασίας καθώς και οι δυνατότητες του λογισμικού ως τεχνουργήματος, αξιοποιήθηκαν για την ανάπτυξη της εργασίας στο κατακόρυφο επίπεδο του μαθηματικού χώρου το οποίο οριοθετείται από την εργαλειακή και τη συλλογιστική γένεση.

Η μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση μικρότερη της μονάδας δεν προβλημάτισε ιδιαίτερα τις ομάδες στην ερώτηση 6, καθώς αποτελούσε συνέχεια της εργασίας που αφορούσε στη μονοτονία της συνάρτησης με βάση μεγαλύτερη του 1. Το ενδιαφέρον των ομάδων στράφηκε στο υποερώτημα 6b το οποίο εστίαζε στην επίλυση λογαριθμικής ανίσωσης. Οι ομάδες απάντησαν σωστά στο υποερώτημα χρησιμοποιώντας διαφορετικές αιτιολογήσεις. Η 1η και 4η ομάδα βασίστηκαν στο γράφημα και την μονοτονία. Χρησιμοποίησαν την μονοτονία ώστε να δικαιολογήσουν ότι «αφού $y_1<y_2$ και η συνάρτηση είναι φθίνουσα τότε $x_1>x_2$». Θεώρησαν σημεία (x, y) στη γραφική παράσταση και επικύρωσαν την αλλαγή στη σχέση διάταξης ανάμεσα στις τετμημένες και τις τεταγμένες. Η 2η ομάδα χρησιμοποίησε τον ορισμό και την εκθετική διαδικασία ώστε να δικαιολογήσει την απάντησή της. Η 3η ομάδα επικύρωσε τα συμπεράσματά της χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα.

Η ερώτηση 8 δεν δυσκόλεψε τις ομάδες ως προς την αλγεβρική επίλυση της δοθείσας εξίσωσης. Ο ορισμός του λογαρίθμου χρησιμοποιήθηκε με ‘αυτοματοποιημένο’ τρόπο από τις ομάδες ως βέβαιο δεδομένο, χωρίς να χρειαστούν περαιτέρω επεξηγήσεις. Η γραφική επίλυση της εξίσωσης αποτέλεσε πρόβλημα και για τις τέσσερις ομάδες. Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές, στην έως τότε σχολική τους πορεία, δεν είχαν εργαστεί επαρκώς στην επίλυση εξισώσεων μέσω γραφημάτων. Επομένως αρχικά δυσκολεύονταν να αναγάγουν την λύση της εξίσωσης στην τομή δύο γραμμών εκ των οποίων η μία ήταν η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης.

Οι ομάδες 1 και 2, ως συνέπεια της μορφής της εξίσωσης, συμπέραναν ότι στη γραφική επίλυση θα πρέπει να εμπλέκεται η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης. Προχώρησαν τον συλλογισμό τους υποστηρίζοντας ότι: «Πρέπει να βρεθεί συγκεκριμένο σημείο της γραφικής παράστασης όπου η τεταγμένη του να είναι ίση με 5 αφού logx = 5. Έχω το y και ψάχνω το αντίστοιχο x». Για α σταθερό, θεώρησαν σημείο πάνω στο γράφημα της συνάρτησης το οποίο έσυραν παρακολουθώντας τις μεταβολές των συντεταγμένων του. Όταν η τεταγμένη του σημείου έγινε ίση με 5 απάντησαν ως λύση της άσκησης την αντίστοιχη τιμή της τετμημένης. Εργαζόμενοι εποπτικά με το γράφημα και ταυτόχρονα λαμβάνοντας υπόψη την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης, οι μαθητές αποφάνθηκαν ότι η λύση είναι μοναδική, γεγονός που ισχύει για οποιαδήποτε τιμή της βάσης. Η ομάδα 3 προχώρησε λίγο περισσότερο το συλλογισμό της θεωρώντας ότι: «Ψάχνουμε κάποιο από τα άπειρα σημεία που βρίσκονται στη γραφική αναπαράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης. Αυτό που χαρακτηρίζει το σημείο είναι ότι το y του θα είναι 5». Η ομάδα αμέσως μετά ασχολήθηκε με τη θέση των σημείων των οποίων η τεταγμένη είναι ίση με 5. Εισήγαγαν την y = 5 στην μπάρα εισαγωγής του λογισμικού, και έλεγξαν τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ήδη υπάρχουσας γραφικής παράστασης και της οριζόντιας ευθείας. Αποφάσισαν ότι η τετμημένη του σημείου ήταν η ζητούμενη τιμή του x. Η ομάδα 4 ακολούθησε την προηγούμενη διαδικασία αφού πρώτα όμως καθοδηγήθηκε από την διδάσκουσα για την γραφική επίλυση της εξίσωσης.

Για την απάντηση του υποερωτήματος 8b οι ομάδες χρησιμοποίησαν τις δυνατότητες του λογισμικού και τον ορισμό. Αφενός κατέληξαν ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε κ πραγματικό αριθμό αφού οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία θα τμήσει τη γραφική παράσταση σε ένα μόνο σημείο. Παράλληλα δικαιολόγησαν την ύπαρξη λύσης για κάθε κ πραγματικό υποστηρίζοντας ότι το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης είναι το R. Επομένως η εξίσωση έχει λύση για όλες τις τιμές του κ.

Η χρήση του λογισμικού προώθησε την ανάπτυξη της συλλογιστικής διαδικασίας η οποία ήταν πολυδιάστατη καθώς χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικοί συλλογισμοί για την υποστήριξη και επιβεβαίωση των ισχυρισμών. Οι ομάδες ανέλυσαν σχέσεις και εξαρτήσεις μεταξύ στοιχείων των γραφημάτων, αντιστοίχισαν εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή σε συντεταγμένες σημείων και χρησιμοποίησαν δεδομένα του εμπλουτισμένου χώρου αναφοράς όπως τον ορισμό του λογαρίθμου και το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποίησαν για την υποστήριξη των προτάσεων τους. Στοιχεία των χώρων των συναρτήσεων και της άλγεβρας χρησιμοποιήθηκαν κατά την εξέλιξη της εργασίας στους άξονες της σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής διάστασης.

Στην ερώτηση 9 οι ομάδες με τη χρήση του λογισμικού αποφάνθηκαν για την συμμετρία των γραφημάτων των αντίστροφων συναρτήσεων ως προς τη ευθεία y = x. Για την εξήγηση του γεγονότος αυτού χρησιμοποίησαν την αντιστροφή των ρόλων των μεταβλητών στις αντίστροφες συναρτήσεις. Όπως ειπώθηκε στην 3η ομάδα: «αυτό (η συμμετρία), σημαίνει σημεία του γραφήματος της συνάρτησης που έχουν σχέση με τα αντίστοιχα της αντίστροφης … αλλά οι τετμημένες των σημείων της πρώτης είναι τεταγμένες των σημείων της δεύτερης και όμοια για τις τεταγμένες της συνάρτησης και τις τετμημένες της αντίστροφης … επόμενο είναι αφού στις αντίστροφες συναρτήσεις αντιστρέφονται οι μεταβλητές».

Προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών μετά την παρέμβαση

Ανάλυση των απαντήσεων στο 1ο Ερωτηματολόγιο

Το 1ο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Ε) περιείχε επτά ερωτήσεις και στόχευε κυρίως στην ανάδειξη των απόψεων των μαθητών για τον συγκερασμό διδακτικών στοιχείων που περιέχονταν στην παρούσα διδακτική παρέμβαση, τα οποία δεν χρησιμοποιούνται συνήθως σε μια τυπική διδασκαλία στα πλαίσια της σχολικής τάξης και ειδικότερα για τη χρήση της ΙΜ στην διδασκαλία, καθώς και για τη φύση των Μαθηματικών ως πολιτισμικού προϊόντος.

Συγκεκριμένα στην ερώτηση 1, *«Ποια η άποψή σας για τη χρησιμοποίηση στη διδασκαλία των ιστορικών στοιχείων και κειμένων; Πιστεύετε ότι ήταν βαρετή, ενδιαφέρουσα, ωφέλιμη, αποτελεσματική, δύσκολη ως προς την κατανόηση, αδιάφορη; Απαντήστε με όσους χαρακτηρισμούς θέλετε (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και δικούς σας) και δικαιολογείστε τους»,* η πλειοψηφία των μαθητών (14 από τους 16) σε γενικές γραμμές τέθηκαν θετικά υπέρ της χρήσης της Ιστορίας. Χρησιμοποίησαν χαρακτηρισμούς όπως 'ενδιαφέρουσα', 'διαφορετική και ενδιαφέρουσα', 'ωφέλιμη αλλά λίγο δύσκολη', 'βοηθητική και λίγο κουραστική'. Διαχώρισαν στις απαντήσεις τους την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων, την οποία χαρακτήρισαν κυρίως ως 'ενδιαφέρουσα' και 'χρήσιμη', από τη διαπραγμάτευση των κειμένων η οποία χαρακτηρίστηκε κυρίως ως 'ωφέλιμη αλλά δύσκολη' ή ακόμη 'ενδιαφέρουσα αλλά κουραστική'. Οι 8 από τους 14 μαθητές έκριναν επίσης την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων ως 'πυκνή'. Οι μαθητές δικαιολόγησαν τους θετικούς χαρακτηρισμούς στις απαντήσεις τους υποστηρίζοντας κυρίως ότι θεώρησαν ωφέλιμο και ενδιαφέρον στη διδασκαλία των Μαθηματικών να γνωρίζει ο μαθητής την γένεση των εννοιών και την πορεία τους στο χρόνο. Όπως χαρακτηριστικά δικαιολόγησε την απάντησή της η Ελένη: «Είναι ενδιαφέρον να βλέπεις κάτι από τις ρίζες του, αν και ήταν πολλά αυτά που είδαμε». Ο Τάσος στην απάντησή του ανέφερε: «Μου άρεσε που είδα το πώς χρησιμοποιούνταν οι λογάριθμοι παλιότερα και τώρα. Συνήθως δεν ξέρω γιατί υπάρχουν αυτά που μαθαίνω και που χρησιμοποιούνται, κυρίως στα Μαθηματικά». Ο Παναγιώτης: «Ήταν ενδιαφέρον να βλέπεις διαφορετικούς ορισμούς για την ίδια έννοια. Νόμιζα πως ό,τι μαθαίνουμε στα Μαθηματικά ήταν και θα είναι πάντα ίδιο». Η Ηλιάνα επικέντρωσε την απάντησή της στη διαπραγμάτευση του ιστορικού κειμένου: «Μου άρεσε η παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων. Τα κείμενα μου φάνηκαν στην αρχή δύσκολα. Ο τρόπος έκφρασης στο κείμενο μου φάνηκε ανοργάνωτος και πρωτόγονος. Έχω συνηθίσει τις εκφράσεις που χρησιμοποιούν τα βιβλία των Μαθηματικών που μου φαίνονται περισσότερο οργανωμένες». Και οι 16 μαθητές υποστήριξαν ότι αρχικά τους φάνηκε δύσκολη η επεξεργασία των ιστορικών κειμένων. Χαρακτηριστικά ο Γιώργος έγραψε: «Μου φαινόταν ότι το κείμενο ήταν γραμμένο σε διαφορετική γλώσσα και έπρεπε να το μεταφράσουμε. Ήταν κουραστικό αλλά νομίζω ότι με ωφέλησε». Οι 4 από αυτούς επέμειναν στην ύπαρξη δυσκολίας που αντιμετώπισαν σε όλη τη διάρκεια επεξεργασίας των κειμένων αλλά θεώρησαν ενδιαφέροντα τα ιστορικά στοιχεία που παρουσιάστηκαν. Οι 2 από τους 4, επικεντρώθηκαν στις απαντήσεις τους στην 1η ερώτηση, μόνο στον χαρακτηρισμό 'δύσκολη ως προς την κατανόηση' χωρίς να χαρακτηρίσουν ως ενδιαφέρουσα την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων. Ο Άλκης, ένας εκ των δύο τόνισε: «Δεν πιστεύω ότι με ωφέλησε η χρήση των ιστορικών στοιχείων. Περισσότερο με δυσκόλεψε. Θα προτιμούσα να μάθαινα μόνο έναν ορισμό και μερικές ασκήσεις. Θα ήταν πιο απλό και γρήγορο». Ο Γιούργκεν απάντησε στην ερώτηση: «Τα Μαθηματικά πάντα με δυσκόλευαν. Από τα ιστορικά στοιχεία πήρα κάποιες γνώσεις αλλά δεν με διευκόλυναν. Επιπλέον δυσκολεύτηκα πολύ με τα κείμενα. Θα προτιμούσα να μάθω μόνο τα απαραίτητα από τον καθηγητή».

Στην ερώτηση 2, *«Σε ποια σημεία νομίζετε ότι διαφέρει η διδασκαλία αυτή από μια τυπική διδασκαλία, όπου ο καθηγητής σας θα παρουσίαζε τις έννοιες ακολουθώντας τη σειρά του βιβλίου (Ορισμός, ιδιότητες, αποδείξεις, ασκήσεις);»* οι μαθητές τόνισαν στις απαντήσεις τους, ως χαρακτηριστικά μη τυπικής διδασκαλίας, την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων, την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, τη χρήση του λογισμικού και των φύλλων εργασίας και εξέφρασαν την προσωπική τους άποψη, συνολικά για την διδακτική παρέμβαση. Οι 9 από τους 16 εξέφρασαν θετική άποψη χωρίς να αναφερθούν σε αρνητικά σημεία. Χαρακτηριστικά η Νικολέτα απάντησε: «Δεν είναι αυτό που κάνουμε συνήθως μέσα στην τάξη. Όλα ήταν διαφορετικά. Δεν δουλεύαμε ατομικά αλλά μαζί με άλλους. Ότι κάναμε, το κάναμε μόνοι μας, χωρίς τον καθηγητή. Δεν χρειάστηκε να ανοίξουμε το βιβλίο. Ο τρόπος που έγινε το μάθημα ήταν διαδραστικός και αυτό μου άρεσε». Η Ηλιάνα δήλωσε: «Ήταν πολύ χρήσιμο που δουλέψαμε μόνοι μας τη θεωρία μέσα από τα ιστορικά κείμενα. Δεν διαβάσαμε τις αποδείξεις αλλά τις κατασκευάσαμε». Ο Δημήτρης είπε: «Κάποια πράγματα όπως τα ιστορικά κείμενα με δυσκόλεψαν στην αρχή. Αλλά μου άρεσε που έγιναν ταυτόχρονα πράγματα που δεν γίνονται συνήθως. Δουλέψαμε σε ομάδες, χρησιμοποιήσαμε τον υπολογιστή, είδαμε τον λογάριθμο από την αρχή μέχρι το σήμερα». Οι 5 από τους υπόλοιπους μαθητές, ναι μεν εξέφρασαν θετική άποψη αλλά και ενστάσεις που αφορούσαν κυρίως το θέμα του χρόνου, της μη διάθεσης για προσωπική συμμετοχή στη διαδικασία, της προτίμησης για ατομική και όχι συνεργατική εργασία και της δυσκολίας διαπραγμάτευσης των ιστορικών κειμένων.

Ο Γιώργος δήλωσε: «Το μάθημα μου φάνηκε περισσότερο ενδιαφέρον με τον τρόπο που έγινε αλλά και περισσότερο χρονοβόρο». Ο Αλέξης απάντησε: «Δεν είχα πάντα διάθεση να συμμετέχω αλλά ήμουν αναγκασμένος να το κάνω. Γι αυτό μερικές φορές θα προτιμούσα μία τυπική διδασκαλία». Η Ελένη ανέφερε: «Μου άρεσε που κάναμε κάτι διαφορετικό και δεν ακολουθήσαμε τη συνηθισμένη ρουτίνα. Θα προτιμούσα όμως κάποιες φορές να δουλεύω ατομικά γιατί στην ομάδα είχαμε προβλήματα συνεργασίας». Δύο μαθητές εξέφρασαν την άποψη ότι θα προτιμούσαν μία τυπική διδασκαλία, παρόλο που αναγνώρισαν στην συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση συνδυασμό στοιχείων τα οποία δεν χρησιμοποιούνται συνήθως. Χαρακτηριστικά ο Άλκης είπε: «Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας είχε πολλά στοιχεία που συνήθως δεν χρησιμοποιούμε. Δεν είμαι όμως συνηθισμένος σε τέτοιου είδους διδασκαλίες και ένιωθα έξω από τα νερά μου. Μια τυπική διδασκαλία θα μου φαινόταν πιο εύκολη και ξεκούραστη».

Η ερώτηση 3, *«Ποια ήταν η αρχική αναγκαιότητα που οδήγησε στην επινόηση των λογαρίθμων τον 16ο αιώνα; Κατά την άποψή σας, γιατί διδάσκονται οι λογάριθμοι σήμερα, τον 21ο αιώνα; Αναφέρετε εφαρμογές τους.»* στόχευε στην ανάκληση από τους μαθητές των ιστορικών στοιχείων που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και αφορούσαν την αιτιολόγηση ύπαρξης της έννοιας των λογαρίθμων στο χθες και το σήμερα. Ως προς το πρώτο μέρος της ερώτησης, και οι 16 μαθητές ανέφεραν τη διευκόλυνση που πρόσφεραν οι λογάριθμοι στην εκτέλεση δύσκολων υπολογισμών. Προφανώς η διαπραγμάτευση από τις ομάδες του εισαγωγικού φύλλου εργασίας, το οποίο αφενός είχε οδηγήσει τους μαθητές σε κατάσταση προβληματισμού απέναντι στην εκτέλεση δύσκολων και χρονοβόρων υπολογισμών και αφετέρου παρείχε τη λύση του προβλήματος αυτού μέσω της χρησιμοποίησης των λογαρίθμων, αποδείχθηκε ικανή για την εμπέδωση από τους μαθητές της αρχικής αναγκαιότητας χρήσης των λογαρίθμων. Η Ηλιάνα ανέφερε: «Ήταν απαραίτητοι οι υπολογισμοί με πολυψήφιους αριθμούς σε τομείς όπως η αστρονομία, η οικονομία και το εμπόριο». Η Βασιλική έγραψε: «Οι λογάριθμοι επινοήθηκαν σε μια εποχή που συνέβαιναν μεγάλες αλλαγές. Έπρεπε να δημιουργηθούν νέοι χάρτες, να υπολογιστούν αποστάσεις με ακρίβεια, να γίνουν οικονομικές συναλλαγές. Αναγκαστικά έπρεπε να γίνουν πράξεις με μεγάλους αριθμούς». Οι απαντήσεις, ως προς το δεύτερο μέρος της ερώτησης για τις εφαρμογές των λογαρίθμων στη σύγχρονη πραγματικότητα, διαφοροποιούνταν εν μέρει. Η Νικολέτα έγραψε: «Πλέον η χρήση των λογαρίθμων δεν είναι περιορισμένη μόνο στα Μαθηματικά αλλά και σε άλλους κλάδους όπως η Χημεία και η Φυσική». Ο Δημήτρης: «Χρησιμοποιούνται στην Ψυχολογία, στη Φυσική στην Πληροφορική, Στο ίδιο μήκος κύματος, σύγχρονες εφαρμογές των λογαρίθμων αναφέρθηκαν στις απαντήσεις των 10 από τους 16 μαθητές. Οι υπόλοιποι 6 ανέφεραν ενδεικτικά: «Δεν θυμάμαι», «Τους διδασκόμαστε γιατί είναι στην ύλη μας», «Μας χρειάζονται για τις εξετάσεις στη Γ΄ Λυκείου», «Μπορούν και σήμερα να χρησιμοποιηθούν στην απλοποίηση των πράξεων».

Στην ερώτηση 4, *«Νομίζετε ότι τα μαθηματικά είναι ένα στατικό, τυποποιημένο, αιώνια αμετάβλητο και αδιαπραγμάτευτο κατασκεύασμα ή όχι, και γιατί; Θεωρείτε ότι οι πεποιθήσεις σας για τα μαθηματικά έχουν αλλάξει έστω και λίγο μετά την παρέμβαση αυτή; Αν ναι, τι είναι αυτό που άλλαξε;»* οι 8 από τους 16 μαθητές συμφώνησαν ως προς τη μεταβλητότητα της μαθηματικής επιστήμης στο πέρασμα του χρόνου, τοποθετώντας την άποψη αυτή στο γενικό πλαίσιο της ιδέας της ανθρώπινης εξέλιξης, θεωρώντας ότι η άποψή τους δεν επηρεάστηκε από τη συγκεκριμένη παρέμβαση. Χαρακτηριστικά η Βασιλική ανέφερε: «Οι άνθρωποι ερευνούν σε όλους τους τομείς και ανακαλύπτουν καινούρια πράγματα. Αυτό πιστεύω συμβαίνει και με τα Μαθηματικά, εξελίσσονται. Δεν νομίζω ότι η παρέμβαση άλλαξε την άποψή μου σε αυτό. Συνήθως όμως στο σχολείο δεν βλέπουμε την εξέλιξη και δεν τη συζητάμε καν. Με αυτό που κάναμε στην τάξη έχω συγκεκριμένο παράδειγμα της εξέλιξης αυτής». Ο Παναγιώτης έγραψε: «Δεν θα μπορούσαν τα Μαθηματικά να παραμένουν ίδια αφού όλα αλλάζουν, αν και δεν το είχα σκεφτεί μέχρι τώρα. Δεν μπορώ να πω ότι η παρέμβαση άλλαξε τις πεποιθήσεις μου». Πέντε από τους μαθητές έδωσαν απαντήσεις εστιάζοντας στο πλαίσιο της σχολικής τάξης θεωρώντας σημαντική την επίδραση της παρέμβασης στον τρόπο σκέψης τους. Ο Γιάννης σημείωσε: «Νομίζω ότι το μάθημα των Μαθηματικών στο σχολείο ασχολείται με συγκεκριμένες έννοιες που παρουσιάζονται με μία συγκεκριμένη μορφή. Δεν προβληματίστηκα ποτέ αν η μορφή αυτή προϋπήρχε ή αν εξελίχθηκε από άλλες αρχικές μορφές. Αν και στην παρέμβαση ασχοληθήκαμε με συγκεκριμένες έννοιες, νομίζω ότι πήρα μία ιδέα της εξέλιξης και της αλλαγής των εννοιών». Η Νικολέτα απάντησε: «Έτσι κι αλλιώς μου φαινόταν λογικό τα Μαθηματικά να εξελίσσονται όπως όλες οι επιστήμες. Τώρα όμως είδα ότι αυτό γίνεται με ανθρώπινη παρέμβαση και προσπάθεια. Άρα τα Μαθηματικά είναι ένα αντικείμενο που μπορείς να το αγγίξεις». Ένας μαθητής δεν απάντησε στην ερώτηση ενώ οι δύο μαθητές θεώρησαν ότι η παρέμβαση δεν επηρέασε τις πεποιθήσεις τους για τη φύση των Μαθηματικών αλλά όπως δήλωσαν «τουλάχιστον το μάθημα ήταν πιο ευχάριστο».

Στην 5^{η} ερώτηση, *«Κατά τη γνώμη σας, η εξέλιξη των μαθηματικών συνδέεται ή όχι με το κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο αυτά αναπτύσσονται; Με ποιο τρόπο συνέβαλλε η παρέμβαση αυτή στην απάντησή σας;»* 2 από τους 16 μαθητές δεν απάντησαν. Οι υπόλοιποι συμφώνησαν ότι η εξέλιξη των Μαθηματικών επηρεάζεται από το κοινωνικό περιβάλλον. Οι 10 από αυτούς, αναφέρθηκαν άμεσα στη διδακτική παρέμβαση και την περίπτωση των λογαρίθμων. Χαρακτηριστικά ο Δημήτρης έγραψε: «Όπως είδαμε και στην περίπτωση των λογαρίθμων, οι ανάγκες των ανθρώπων δημιουργούν εξελίξεις σε όλους τους τομείς της καθημερινότητας, έτσι και στα Μαθηματικά. Οι κοινωνικές ανάγκες προκαλούν εξέλιξη των επιστημών». Ο Γιώργος ανέφερε: «Οι λογάριθμοι επινοήθηκαν τον 16^{ο} αιώνα γιατί τότε οι ανάγκες της κοινωνίας ήταν τέτοιες που έπρεπε να γίνονται δύσκολοι υπολογισμοί. Στη σύγχρονη εποχή δεν υπάρχει η ανάγκη αυτή αλλά οι λογάριθμοι καλύπτουν άλλου είδους κοινωνικές ανάγκες. Σίγουρα τα Μαθηματικά εξαρτώνται από το κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται». Οι 4 από τους μαθητές συμφώνησαν στην σύνδεση των Μαθηματικών με το κοινωνικό γίγνεσθαι χωρίς αναφορά στη διδακτική παρέμβαση και τους λογάριθμους. Ο Κώστας απάντησε: «Οι επιστήμες αναπτύσσονται γρηγορότερα όταν οι κοινωνίες ευημερούν. Και ταυτόχρονα η ανάπτυξη των επιστημών βοηθάει στην ευημερία των κοινωνιών. Άρα τα Μαθηματικά επηρεάζονται και επηρεάζουν το κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται».

Η άποψη των μαθητών για την εργασία σε ομάδες, η οποία εφαρμόστηκε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, συζητήθηκε στην ερώτηση 6, *«Θεωρείτε ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας λειτούργησε θετικά για εσάς στην πορεία του μαθήματος ή όχι και γιατί;»*. Στην πλειοψηφία τους (12 από τους 16) οι μαθητές εκφράστηκαν θετικά για την ομαδοσυνεργατική μέθοδο στα πλαίσια της παρούσας παρέμβασης, θεωρώντας τον ρόλο της ομάδας υποστηρικτικό απέναντι σε νέες συνθήκες διδασκαλίας, υπό την έλλειψη παρουσίας καθηγητή και βιβλίου. Ο Χρήστος ανέφερε: «Με βοήθησε η συνεργασία με τους συμμαθητές μου κυρίως σε φάσεις που δυσκολευόμουν στα φύλλα εργασίας. Ακούγονταν όλες οι απόψεις και καταλήγαμε σε κοινή απόφαση». Ο Παναγιώτης έγραψε: «Το μάθημα σε ομάδες μου άρεσε γιατί μου ήταν πιο εύκολο να συζητήσω με την ομάδα μου ό,τι δεν καταλάβαινα. Αυτά που κάναμε στην τάξη είχαν πολλά καινούρια στοιχεία και δεν θα τα κατάφερνα τόσο καλά χωρίς τη συνεργασία της ομάδας». Ο Τάσος σημείωσε: «Ήταν νομίζω πιο αποτελεσματικός τρόπος από την απλή διδασκαλία στο να κατανοήσουμε καλύτερα αυτά που μαθαίναμε, αφού λειτουργούσαμε μόνοι μας χωρίς τη βοήθεια της καθηγήτριας. Με βοήθησε πολύ σε σημεία που με δυσκόλευαν όπως να καταλάβω τα κείμενα. Στην ομάδα υποστηρίζαμε ο ένας τον άλλο.». Και τέλος η Βασιλική: «Ο τρόπος που κάναμε το μάθημα στην αρχή με άγχωνε. Χωρίς συγκεκριμένη ύλη στο βιβλίο δεν ήξερα αν θα μπορούσα να μάθω όσα έπρεπε για τις εξετάσεις. Η ομάδα με έκανε να συμμετέχω περισσότερο και να νιώθω υπεύθυνη. Και βέβαια ήταν πιο ευχάριστο». Ο Άλκης ανήκε στην πλευρά των διαφωνούντων: «Η χημεία στην ομάδα δεν ήταν καλή. Μάλλον περισσότερο ανταγωνιστική. Δεν ήμουν προετοιμασμένος για κάτι τέτοιο». Η Ελένη, μέλος της ίδιας ομάδας, δήλωσε: «Νομίζω ότι στην ομάδα δεν ήμασταν έτοιμοι να λειτουργήσουμε ομαδικά. Δεν ένιωθα άνετα να εκφραστώ. Αν ήμουν σε άλλη ομάδα ίσως ήταν καλύτερα». Στο ίδιο μήκος κύματος κινήθηκαν και οι άλλοι 2 μαθητές.

Η πλειοψηφία των μαθητών θεώρησε τη χρήση του λογισμικού θετική για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και τη μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης. Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 7, *«Πιστεύετε ότι η χρήση του λογισμικού Geogebra σας διευκόλυνε στην κατανόηση των εννοιών; Τι θεωρείτε θετικό στη χρήση του και τι όχι;».* Οι 13 από τους 16 μαθητές απάντησαν στην ερώτηση με θετικά σχόλια, τονίζοντας μεταξύ άλλων, στις απαντήσεις τους την δυνατότητα ελέγχου που είχαν οι ίδιοι, στη μεταβολή των διαφορετικών αντικειμένων που εμφανίζονταν στην οθόνη του υπολογιστή, καθώς και τις δυνατότητες που παρείχε το λογισμικό στον χειρισμό των αντικειμένων, που σε τυπικές συνθήκες τάξης, δεν θα ήταν εφικτές. Ο Γιώργος σημείωσε: «Με βοήθησε να καταλάβω τις ιδιότητες της συνάρτησης αφού έβλεπα μπροστά μου τις αλλαγές που συνέβαιναν ανάλογα με τις κινήσεις που κάναμε. Όταν σκέφτομαι τη μονοτονία θυμάμαι την εικόνα του σημείου που κινείται». Ο Κώστας: «Κάναμε πράγματα που δεν θα μπορούσαν να γίνουν στον πίνακα. Σχηματίσαμε τη γραφική παράσταση από συντεταγμένες σημείων. Κινούσαμε το σημείο και βλέπαμε την αλλαγή στις συντεταγμένες. Κινούσαμε τον δρομέα και βλέπαμε την αλλαγή στη γραφική παράσταση. Όλα τα είχαμε ζωντανά μπροστά μας». Ο Χρήστος ανέφερε στην απάντησή του: «Μου άρεσε που εμείς χειριζόμασταν τα πράγματα και δεν παρακολουθούσαμε απλά να τα παρουσιάζει ο καθηγητής όπως γίνεται συνήθως». Και τέλος η Νικολέτα: «Από το κείμενο που είδαμε για τη συνάρτηση κατάλαβα ότι η συνάρτηση είναι ένας τύπος. Το Geogebra με βοήθησε να καταλάβω ότι η συνάρτηση δεν είναι μόνο αυτό. Από τον τύπο, πήγαμε στη γραφική παράσταση και τα ζευγάρια τιμών στον πίνακα τιμών». Οι υπόλοιποι 3 μαθητές απάντησαν με μεγαλύτερο σκεπτικισμό απέναντι στη χρήση του λογισμικού. Όπως φάνηκε στις απαντήσεις τους, ο προβληματισμός τους εστιάζεται περισσότερο σε προβλήματα συνεργασίας. Χαρακτηριστικά η Ελένη έγραψε: «Δεν νομίζω ότι με βοήθησε πολύ αν και σε ένα βαθμό, κατάλαβα κάποια πράγματα καλύτερα. Αν οι συνθήκες στην ομάδα ήταν άλλες μάλλον θα είχα ωφεληθεί περισσότερο».

Ανάλυση των απαντήσεων στο 2ο Ερωτηματολόγιο

Οι ερωτήσεις του 2ου ερωτηματολογίου επικεντρώνονται σε βασικές γνώσεις και δεξιότητες που αφορούν τους λογαρίθμους και αναμένεται να κατέχουν οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας της αντίστοιχης ενότητας του μαθήματος της Άλγεβρας. Βασικές γνώσεις και δεξιότητες θεωρήθηκαν αφενός εκείνες οι οποίες απαιτούνται από το Πρόγραμμα Σπουδών, όπως γνώση του ορισμού και των ιδιοτήτων, ικανότητα επίλυσης λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων, και αφετέρου, ως απόρροια της παρούσας διδακτικής παρέμβασης η οποία βασίστηκε στη χρήση της ΙΜ, οι γνώσεις ιστορικών στοιχείων που συμβάλλουν στην απόκτηση δομικής αντίληψης της έννοιας.

Η ερώτηση 1, εγκυκλοπαιδικού περιεχομένου, *«Ποια είναι τα δύο πρόσωπα που καθόρισαν αντίστοιχα την αρχική και την τελική μορφή της έννοιας του λογάριθμου;»*, απαντήθηκε κατά το ήμισυ από όλους τους μαθητές. Συγκεκριμένα, ο Euler αναφέρθηκε στις απαντήσεις όλων των μαθητών ενώ το όνομα του Napier αναφέρθηκε από τους 9 εκ των 16 μαθητών, καθώς οι 7 απάντησαν «δεν θυμάμαι». Οι 2 από τους τελευταίους, παρόλο το ότι δεν θυμήθηκαν το όνομά του Napier ανέφεραν λιγοστά στοιχεία του σύντομου βιογραφικού σημειώματος, που παρουσιάστηκε στη διάρκεια της παρέμβασης, όπως η καταγωγή του και τα ενδιαφέροντά του. Θεωρείται αναμενόμενο οι μαθητές να θυμούνται τον Euler καθώς τα κείμενα του αποτέλεσαν πρόσφατη πηγή μελέτης για τις ομάδες, ενώ ο Napier είχε αναφερθεί στα αρχικά στάδια της παρέμβασης και το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε μία εβδομάδα μετά το τέλος της.

Ο λογαριθμική σχέση που εμφανίζεται ανάμεσα σε δύο μεγέθη εκ των οποίων το ένα ακολουθεί γεωμετρική και το άλλο αριθμητική πρόοδο, συζητήθηκε στις ομάδες σε αρκετά σημεία της παρέμβασης, όπως στο πρόβλημα διευκόλυνσης των πράξεων μέσω της αντιστοιχίας αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, στην αντιστοιχία υπερβολικών εμβαδών και μηκών, στη σχέση μεταξύ μεγέθους και έντασης σεισμού στο τελευταίο φύλλο εργασίας και αλλού. Ως εκ τούτου, οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν στην 2η ερώτηση *«Τι είδους σχέση συνδέει δύο μεγέθη όταν το ένα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο και το άλλο αριθμητική;»*. Μόνο 2 από τους μαθητές δεν απάντησαν στην ερώτηση.

Οι απαντήσεις των μαθητών και τα παραδείγματα υπολογισμών που δόθηκαν στην 3η ερώτηση, *«Εξηγήστε μέσω παραδείγματος, πώς η αντιστοιχία ανάμεσα σε μια γεωμετρική και μια αριθμητική πρόοδο διευκολύνει την εκτέλεση των πράξεων»*, βασίστηκαν κυρίως (8 από τους 16), στην αντιστοιχία αριθμητικής προόδου με διαφορά 1 και 1ο όρο 0 και γεωμετρικής με λόγο 2 και 1ο όρο 1, η οποία είχε αρχικά συζητηθεί στην παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων και σε επόμενο στάδιο, εφαρμόστηκε για τη διευκόλυνση των υπολογισμών στο εισαγωγικό φύλλο εργασίας. Από τους υπόλοιπους μαθητές οι 3 χρησιμοποίησαν γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αριθμό 3 και οι 2 με λόγο τον αριθμό 5. Οι μαθητές έκαναν αναγωγές πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων σε προσθέσεις και αφαιρέσεις. Ένας μαθητής δεν απάντησε ενώ ο Γιώργος ανέφερε στην απάντησή του ως παράδειγμα την διευκόλυνση των πράξεων που παρέχει ο υπολογισμός του pH, για τη συγκέντρωση των ιόντων H_3O, λέγοντας ότι «είναι ευκολότερο να κάνεις πράξεις με τους θετικούς εκθέτες που εμφανίζονται, π.χ. 3 και 7, χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων, και όχι με τις αντίστοιχες δυνάμεις 10^{-3} και 10^{-7}». Ο Δημήτρης έγραψε: «Αν έχω το 10.000 που το αντιστοιχώ στο 4 και το 100.000 που το αντιστοιχώ στο 5, το γινόμενό τους θα αντιστοιχηθεί στο 9.» Οι δύο απαντήσεις που προαναφέρθηκαν και αφορούν την κατανόηση της έννοιας του λογαρίθμου ως εκθέτη μέσω της αντιστοιχίας προόδων, παρουσιάζουν ενδιαφέρον ως προς τον βαθμό πρωτοτυπίας της σκέψης των μαθητών.

Στην ερώτηση 4, *«Σε ποιον οφείλεται ο όρος "λογάριθμος" και πως προέκυψε;»*, οι 8 από τους 16 μαθητές ανέφεραν τον Napier και οι 3 τον Euler. Οι υπόλοιποι δήλωσαν ότι δεν θυμούνται σε ποιον οφείλεται ο όρος. Οι 14 από τους 16 απάντησαν ότι ο όρος λογάριθμος προέκυψε από την αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και αφορά τον αριθμό των λόγων. Οι 10 από αυτούς εξήγησαν με σαφήνεια την προέλευση του όρου. Χαρακτηριστικά η Σύλβια έγραψε: «Στην αντιστοιχία των προόδων είναι 2/1=4/2=8/4=16/8. Χρειάζονται 6 λόγοι μέχρι τον 16, γι' αυτό $\log_2 16=4$». Δύο μαθητές απάντησαν πως δεν θυμούνται.

Ο ορισμός του λογαρίθμου του Euler, ο οποίος εμπεριέχεται στην διδακτέα ύλη, ζητήθηκε στην $5^η$ ερώτηση, *«Δώστε τον ορισμό του λογαρίθμου του Euler»*. Τέσσερις από τους μαθητές απάντησαν χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του ιστορικού κειμένου που διαπραγματεύτηκαν στο $1^ο$ φύλλο εργασίας (αν $a^z = y$ τότε $z = \log y$) αναφέροντας το a ως βάση του λογαρίθμου. Έξι μαθητές απάντησαν χρησιμοποιώντας τις ίδιες μεταβλητές αναφέροντας επιπλέον ότι «το a ονομάζεται βάση του λογάριθμου και είναι μεγαλύτερο της μονάδας». Οι ίδιοι οριοθέτησαν και τις τιμές των μεταβλητών αναφέροντας «αν $a^z = y$ τότε ο εκθέτης z είναι ο logy όπου το y μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές ενώ το z οποιαδήποτε τιμή στο R». Δύο μαθητές απάντησαν γράφοντας σωστά την ισοδυναμία, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες λογαριθμικές βάσεις, το 10 και το e αντίστοιχα. Τέσσερις μαθητές αναφέρθηκαν στις απαντήσεις τους στην έννοια της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ο Δημήτρης έγραψε: «Έστω $α^y = x$ τότε το x είναι συνάρτηση του y. Όμοια μπορούμε να πούμε ότι το y είναι συνάρτηση του x. Ονομάζουμε τη συνάρτηση αυτή λογαριθμική συνάρτηση και τον y λογάριθμο του x».

Η ερώτηση 6 αφορούσε συμπλήρωση ισοτήτων ενδεικτικών για την κατανόηση υπολογιστικής λειτουργίας του λογαρίθμου: *«Συμπληρώστε τις ισότητες:*

1.$\log_3 9=$ *2.*$\log_{27} 3=$ *3.*$\log_3 1/9 =$ *4.*$\log_α α=$ *5.*$\log_α α^x =$

6.$\log(a\cdot b)=$ *7.*$\log(a/b)=$ *8.*$\log a^k=$ ». Τα υποερωτήματα 1, 4, 6 και 7 απαντήθηκαν σωστά από όλους τους μαθητές. Το υποερώτημα 2 από 13 μαθητές ενώ το υποερώτημα 3 από 11 μαθητές. Τα 5 και 8 απαντήθηκαν σωστά από 10 και 12 μαθητές αντίστοιχα. Οι λανθασμένες απαντήσεις οφείλονταν είτε σε κενά στις ιδιότητες της εκθετικής διαδικασίας είτε σε λανθασμένη εφαρμογή του ορισμού του λογαρίθμου η οποία υποδεικνύει έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης. Για παράδειγμα όπως χαρακτηριστικά απάντησε μαθητής: $\log_{27} 3= 3$ γιατί $3^3=27$ ή σε απάντηση άλλου μαθητή: $\log_3 1/9$ = αδύνατη γιατί $(-3)^2=1/9$. Όμοια: $\log_\alpha \alpha^x=1$ γιατί $\alpha^1=\alpha$. Το υποερώτημα 5 ή δεν απαντήθηκε ή δόθηκαν λανθασμένες απαντήσεις α, 1, α^x.

Η ερώτηση 7 ζητούσε απόδειξη λογαριθμικής ιδιότητας: *«Αποδείξτε ότι log(a b)=loga + logb»*. Αν και το ερωτηματολόγιο δόθηκε στους μαθητές μία εβδομάδα περίπου μετά το πέρας της παρέμβασης, οι 13 μαθητές απάντησαν σωστά σύμφωνα με την αποδεικτική διαδικασία η οποία είχε συζητηθεί στο 2ο φύλλο εργασίας. Οι 7 θεώρησαν βάση το 10 ενώ οι υπόλοιποι ως βάσεις θεώρησαν μεταβλητές α, x κ.λπ. Η επιτυχής διαπραγμάτευση της ερώτησης από τους μαθητές μπορεί να θεωρηθεί αναμενόμενη καθώς η εργασία των ομάδων σε αντίστοιχες ερωτήσεις του 2ου φύλλου εργασίας είχε καταδείξει τη σχετική ευκολία των ομάδων στην κατασκευή τυπικής απόδειξης.

Η ερώτηση 8 *«Δείξτε ότι: 3log2 + log5 – log4 = 1 (Η βάση θεωρείται το 10)»*, απαντήθηκε πλήρως από 11 μαθητές. Οι υπόλοιποι είτε δυσκολεύτηκαν στην εφαρμογή της ιδιότητας $\log a^k = k\log a$ (3 μαθητές), εφαρμόζοντας όμως σωστά τις υπόλοιπες βασικές ιδιότητες, είτε (2 μαθητές) έκαναν λάθος στην προτεραιότητα των πράξεων στην παράσταση ($3\log 2 + \log 5 = 3\log(2\cdot 5)$).

Στην 9η ερώτηση, *«Αν loga5 < loga3, τι συμπεραίνετε για τον a;»* τρεις μαθητές απάντησαν λανθασμένα, χωρίς να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους, και δύο δεν απάντησαν. Οι υπόλοιποι απάντησαν σωστά. Από τους τελευταίους οι 7 δικαιολόγησαν την απάντησή τους στηριζόμενοι στο είδος της μονοτονίας της λογαριθμικής συνάρτησης με α < 1 και οι 4 δεν έδωσαν δικαιολόγηση.

Επίλυση απλής λογαριθμικής εξίσωσης ζητήθηκε στην ερώτηση 10, *« Να λύσετε την εξίσωση: log(x+1) + log(x-1)=log2»*. Δύο μαθητές δεν απάντησαν. Επίσης 2 μαθητές δεν έφτασαν στη σωστή λύση γιατί χρησιμοποίησαν λανθασμένα την αλγεβρική ταυτότητα $(x-1)^2$ αντί της x^2-1^2. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ίδιοι έθεσαν σωστά τους περιορισμούς και προχώρησαν σωστά στη διαδικασία. Τρεις μαθητές δεν έθεσαν περιορισμούς κατά την επίλυση της εξίσωσης, ενώ 2 μαθητές δεν έλαβαν υπόψη τους περιορισμούς στην επιλογή της δεκτής λύσης. Οι υπόλοιποι 7 μαθητές ανέπτυξαν σωστά τη διαδικασία επίλυσης και ελέγχου των περιορισμών, καταλήγοντας στη σωστή λύση.

Η ερώτηση 11, *«Γιατί οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e καλούνται φυσικοί;»* δεν απαντήθηκε με ικανοποιητική επιτυχία από τους μαθητές. Επτά από τους μαθητές απάντησαν ότι δεν θυμούνται. Τέσσερις μαθητές έδωσαν παρεμφερείς απαντήσεις οι οποίες καταδεικνύουν ότι η εικόνα που έχουν σχηματίσει για την προέλευση του όρου δεν είναι ξεκάθαρη. Χαρακτηριστικά ένας από αυτούς έγραψε: «Υπάρχει σχέση μεταξύ αυτών των λογαρίθμων και εμβαδών στο επίπεδο». Δύο μαθητές ανέφεραν ότι «οι φυσικοί λογάριθμοι αφορούν σχέση εμβαδών και ευθυγράμμων τμημάτων κάτω από μία γραφική παράσταση». Οι απαντήσεις των υπόλοιπων 3 μαθητών ήταν πιο ολοκληρωμένες και ξεκάθαρες. Ενδεικτικά ο Δημήτρης έγραψε: «Αν έχουμε τη γραφική παράσταση της 1/x και χωρίσουμε τον άξονα x΄x σε τμήματα που αυξάνονται με αριθμητική πρόοδο τότε τα εμβαδά που σχηματίζονται ανάμεσα στη γραφική παράσταση και τον x΄x αυξάνονται με γεωμετρική πρόοδο. Τα μήκη είναι οι λογάριθμοι των εμβαδών. Οι λογάριθμοι αυτοί έχουν βάση το e και λέγονται φυσικοί γιατί έχουν σχέση με φυσικά μεγέθη». Η αναφορά στους φυσικούς λογαρίθμους έγινε στο $1^{ο}$ μέρος της παρέμβασης που αφορούσε την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων ενώ το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε μία εβδομάδα μετά το τέλος της παρέμβασης. Όπως αναφέρθηκε και στην ερώτηση 1 το χρονικό αυτό διάστημα (περίπου 40 ημέρες), φάνηκε πως ήταν αρκετό ώστε να μην συγκρατήσουν οι μαθητές στοιχεία τα οποία δεν επανήρθαν στο προσκήνιο σε μεταγενέστερες φάσεις της παρέμβασης και προφανώς δεν εμπεδώθηκαν επαρκώς.

Η ερώτηση 12, *«Ισχύει η ισότητα log(a+b)=loga + logb; Δικαιολογήστε την απάντησή σας»*, είχε τεθεί και στο $2^{ο}$ φύλλο εργασίας. Δύο μαθητές απάντησαν πως ισχύει χωρίς δικαιολόγηση. Ένας μαθητής δεν απάντησε. Τέσσερις μαθητές έδωσαν αρνητική απάντηση υποστηρίζοντας πως «είναι $\log(a\cdot b)=\log a + \log b$ άρα δεν ισχύει $\log(a+b)=\log a + \log b$». Οι υπόλοιποι 9 μαθητές απάντησαν σωστά δικαιολογώντας τις απαντήσεις τους μέσω του ορισμού και των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Συμπεράσματα - Συζήτηση

Η παρούσα διδακτική προσέγγιση, αποτέλεσε διδακτική σειρά (Jankvist, 2009), η οποία ολοκληρώθηκε σε 10 διδακτικές ώρες. Η χρησιμοποίηση της ΙΜ στην παρούσα παρέμβαση έγκειται αφενός στην παρουσίαση - συζήτηση με τους μαθητές ιστορικών στοιχείων που αφορούν την έννοια του λογαρίθμου και θεωρήθηκαν σημαντικά ως προς την εν δυνάμει συμβολή τους στην κατανόηση της έννοιας, και αφετέρου στη μελέτη από τους ίδιους τους μαθητές ιστορικών κειμένων που αναφέρονται στους λογαρίθμους και την έννοια της συνάρτησης. Κατά την παρουσίαση τονίστηκε ιδιαίτερα η αρχική αναγκαιότητα επινόησης των λογαρίθμων και συζητήθηκε το ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο το οποίο δημιούργησε την αναγκαιότητα αυτή. Παρουσιάστηκε η αρχή της προσθαφαίρεσης και η εμφάνισή της στην αντιστοιχία αριθμητικής – γεωμετρικής προόδου η οποία εξετάστηκε και στο κινηματικό μοντέλο του Napier. Ο λογάριθμος ορίστηκε ως 'ο αριθμός των λόγων' σε συνεχή αναλογία οριοθετημένος σε ένα ιστορικό πλαίσιο όπου η έννοια της δύναμης δεν είχε ακόμη αποσαφηνιστεί. Στη συνέχεια συζητήθηκε ο τρόπος κατασκευής των προόδων από τον Napier και οι φυσικοί λογάριθμοι μέσω των υπερβολικών εμβαδών ενώ αναδείχθηκε η δυνατότητα εύρεσης του λογαρίθμου κάθε θετικού αριθμού. Η ιστορική αναδρομή ολοκληρώθηκε με αναφορά στον Euler, χωρίς να συζητηθεί ο σύγχρονος ορισμός του λογαρίθμου, ο οποίος ήταν το επίκεντρο στα φύλλα εργασίας που θα ακολουθούσαν, και στη συνέχεια με παρουσίαση και συζήτηση εφαρμογών του λογαρίθμου σε διάφορα πεδία. Κατά τη διάρκεια της παρουσίασης, οι μαθητές δούλεψαν σε φύλλο εργασίας το οποίο εστίαζε στην αναγωγή πράξεων σε απλούστερες με τη χρησιμοποίηση της αντιστοιχίας των προόδων. Όπως κατέδειξαν οι απαντήσεις στα ερωτηματολόγια, 1,5 μήνα μετά την έναρξη της παρέμβασης, η αρχική αναγκαιότητα επινόησης των λογαρίθμων ήταν γνωστή σε όλους τους μαθητές. Επίσης η ετυμολογία της λέξης 'λογάριθμος', ήρθε στο προσκήνιο κατά τη μετέπειτα διαπραγμάτευση των ιστορικών κειμένων από τις ομάδες υποβοηθώντας την προσπάθεια ανάπτυξης της αντίληψης του λογαρίθμου ως αντικειμένου - αριθμού. Όπως φάνηκε κατά τη μελέτη του ΧΕ των ομάδων, η αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και η ετυμολογία της λέξης 'λογάριθμος' χρησιμοποιήθηκαν ταυτόχρονα με τον σύγχρονο ορισμό των κειμένων, κατά την προσπάθεια εύρεσης απαντήσεων στα ερωτήματα των φύλλων εργασίας. Η χρησιμοποίηση των στοιχείων της ιστορικής αναδρομής ώθησε τη λειτουργία του ορισμού ως εργαλείου για τη διαπραγμάτευση των ερωτήσεων καθώς και την ερμηνεία του συμβολισμού, αναπτύσσοντας την εργασία κατά την εργαλειακή και σημειωτική διάσταση υποβοηθώντας την ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο αντικείμενο – λογάριθμο. Παρόλο ότι η διαδικασία αυτή δεν συνέβη με όλες τις ομάδες των μαθητών, δεν αναιρείται το γεγονός ότι η χρήση της ιστορικής προσέγγισης της έννοιας του λογάριθμου ταυτόχρονα με τον σύγχρονο ορισμό, αντανακλά τη χρησιμότητα της Ιστορίας σε μία περισσότερο ολιστική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών γεγονός που ευνοεί την ανάπτυξη δομικής αντίληψης της έννοιας. Η ενασχόληση με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας κινητοποίησε το ενδιαφέρον τους, ενεργοποιώντας τα κίνητρά τους. Μέσω της παρουσίασης των ιστορικών στοιχείων απαντήθηκαν ερωτήματα των μαθητών για τους λόγους ύπαρξης και τη χρησιμότητα της έννοιας, τα οποία είναι πιθανό ότι δεν θα αναδεικνύονταν σε μια τυπική διδασκαλία.

Παρόλα αυτά, όπως φάνηκε στα ερωτηματολόγια, οι 6 από τους 16 μαθητές δεν κατανόησαν τη χρησιμότητα των λογαρίθμων στη σύγχρονη εποχή άρα και την αναγκαιότητα διδασκαλίας τους. Επίσης η προέλευση των φυσικών λογαρίθμων αποτέλεσε γνώση η οποία δεν αφομοιώθηκε επαρκώς από τους μαθητές. Πιθανώς, το γεγονός αυτό να οφείλεται κυρίως στην πυκνότητα των στοιχείων που συζητήθηκαν σε σχετικά μικρά χρονικά πλαίσια. Πιθανή επέκταση του διδακτικού χρόνου, θα έδινε τη δυνατότητα περαιτέρω δραστηριοποίησης και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών (π.χ. μέσω φύλλου εργασίας) με σκοπό την αποτελεσματικότερη επεξεργασία των πληροφοριών.

Ο δεύτερος πόλος χρήσης της ΙΜ στη διδακτική παρέμβαση αφορούσε τη μελέτη ιστορικών κειμένων. Οι μαθητές ανέπτυξαν ένα είδος διαλεκτικής σχέσης με τα κείμενα αν και συνάντησαν δυσκολίες κατά τη διαπραγμάτευσή τους. Αρχικά δεν μπόρεσαν να αποσαφηνίσουν με ευκολία τον ορισμό του λογαρίθμου στο κείμενο. Πιθανώς όντας συνηθισμένοι σε ορισμούς του σχολικού βιβλίου, σε φορμαλιστική μαθηματική γλώσσα, αντέδρασαν μηχανιστικά αναφέροντας ως ορισμό τα ακριβή λόγια της πρότασης η οποία περιείχε τη λέξη ‘λογάριθμος’ με κεφαλαία γράμματα, χωρίς να δώσουν επεξηγήσεις για τις μεταβλητές και την εκθετική σχέση που τις συνδέει. Η ρητορική διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων σε αρκετά μεγάλο μέρος του κειμένου, όπως φάνηκε στις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις, αποτέλεσε πρόκληση για τους μαθητές, στερώντας τη “διευκόλυνση” αυτοματοποιημένης, με την έννοια της απολύτως διαδικαστικής, αντίληψης της έννοιας. Η κατανόηση του ορισμού με την ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας και η περαιτέρω αντίληψη του λογαρίθμου ως αριθμού απαίτησε λεπτομερή επεξεργασία του κειμένου από τους μαθητές. Οι ομάδες δούλεψαν με τα σύμβολα και τις σχέσεις τους. Εξέτασαν τις δυνατές τιμές που μπορούσαν να πάρουν οι μεταβλητές, συζήτησαν παραδείγματα δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές και σε κάποιες περιπτώσεις αλλάζοντας τον συμβολισμό του κειμένου στις γενικευμένες μεταβλητές, και τελικά επεξεργάστηκαν τη σχέση ισοδυναμίας η οποία περιέχονταν στον ορισμό με συγκεκριμένες και με γενικευμένες μεταβλητές. Η εργασία δεν αναπτύχθηκε ομοιότροπα σε όλες τις ομάδες. Σε κάποιες περιπτώσεις το βάρος της εργασίας μετατοπίστηκε προς τη σημειωτική διάσταση και την επεξεργασία των συμβόλων, σε άλλες προς την εργαλειακή διάσταση με τον ορισμό της δύναμης και τις ιδιότητές να χρησιμοποιούνται ως τεχνουργήματα. Η διαφοροποίηση αυτή υπήρξε και ανάμεσα στις ομάδες κατά την επεξεργασία των ίδιων θεμάτων, καθώς και στις ίδιες τις ομάδες κατά την διαπραγμάτευση διαφορετικών ερωτήσεων. Όπως προαναφέρθηκε υπήρξαν ομάδες οι οποίες μεταξύ των άλλων, χρησιμοποίησαν για την προσέγγιση της έννοιας την αντιστοιχία προόδων και την ετυμολογία της λέξης ‘λογάριθμος’ από τον Napier. Σε κάθε περίπτωση απαιτήθηκε επικοινωνία των θεμάτων από τους μαθητές εντός των ομάδων στα πλαίσια της ανάπτυξης της συλλογιστικής διάστασης της εργασίας. Στο σημείο αυτό η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία απέδωσε τα μέγιστα οφέλη. Υπήρξε ομάδα η οποία σε πρώτη φάση δεν κατόρθωσε να αναπτύξει ικανοποιητικά την εργασία της στους άξονες της σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής διάστασης, στερούμενη το κατάλληλο, εντός της ομάδας, κλίμα συνεργασίας που θα επέτρεπε την ανάπτυξη της εργασίας στα τρία κατακόρυφα επίπεδα που οι διαστάσεις οριοθετούν.

Κατά την πορεία της επεξεργασίας των ερωτήσεων στα φύλλα εργασίας, υπήρξαν περιπτώσεις όπου οι ομάδες έδειξαν να αντιμετωπίζουν τον λογάριθμο ως εκθέτη χωρίς να χρειάζεται να αναφέρονται άμεσα στην εκθετική διαδικασία. Παράλληλα στις περιπτώσεις που η εκθετική διαδικασία έπρεπε να εφαρμοστεί, όπως η κατασκευή αποδεικτικής διαδικασίας για τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων, η εφαρμογή του ορισμού γινόταν με ευκολία και άνετους χειρισμούς. Τελικά ο ορισμός εμπλούτισε το πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου του ΧΕ των ομάδων και περαιτέρω χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο στην προσπάθεια εύρεσης απάντησης των ερωτημάτων που ακολουθούσαν στα επόμενα φύλλα εργασίας αλλά και στα ερωτηματολόγια τα οποία όπως αναφέρθηκε, συμπληρώθηκαν σε μετέπειτα χρονική στιγμή. Παρόλα αυτά υπήρξαν περιπτώσεις που ενώ ο ορισμός του λογαρίθμου χρησιμοποιήθηκε ορθά, ωθώντας την ανάπτυξη της εργασίας ως προς την εργαλειακή της διάσταση, η σημειωτική διάσταση δεν λειτούργησε επαρκώς. Χαρακτηριστική περίπτωση ήταν η δυσκολία των μαθητών να δεχτούν τον $\log_5 112$ ως ζητούμενη λύση εξίσωσης παρόλο που η λύση ήταν απόρροια του ορισμού, γεγονός που υποδεικνύει δυσκολία στην εσωτερικοποίηση του συμβολισμού στην έννοια του λογαρίθμου ως μαθηματικού αντικειμένου. Παράλληλα όμως, πρέπει να σημειωθεί ότι μεταγενέστερα στις απαντήσεις των ερωτηματολογίων, οι μαθητές απέφυγαν λάθη τα οποία θεωρούνται συνήθη στη διδακτική πρακτική όπως η λανθασμένη ισότητα $\log(a+b)=\log a+\log b$, η οποία υποδεικνύει λανθασμένη αντίληψη του log ως τελεστή και άρα δυσλειτουργία στη δομική αντίληψη της έννοιας.

Η έννοια της συνάρτησης ήρθε στο προσκήνιο στο 1^o κείμενο του Euler με το οποίο ασχολήθηκαν οι ομάδες. Το κείμενο περιείχε τον ορισμό του λογαρίθμου ως συναρτησιακή σχέση εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών και όχι μόνο με τη μορφή μαθηματικής ισοδυναμίας, όπως το σχολικό βιβλίο. Οι μαθητές συζήτησαν τον ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοιχίας, τον οποίο διδάχθηκαν στην Α΄ Λυκείου αλλά δεν μπορούσαν να συνδέσουν τον γνωστό ορισμό της συνάρτησης με το κείμενο παρόλο ότι ήδη είχαν συζητήσει διεξοδικά τον λογάριθμο ως στοιχείο της εκθετικής διαδικασίας. Το γεγονός αυτό υπέδειξε ότι οι μαθητές αδυνατούσαν να συνδέσουν την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της συμμεταβολής. Οι συζητήσεις στις ομάδες επίσης υπέδειξαν δυσκολία στην αναγνώριση εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής καθώς και στην αναγνώριση του συναρτησιακού συμβολισμού ο οποίος δεν μπορούσε να γίνει αντιληπτός αφού στο κείμενο δεν εμφανιζόταν με τα γνωστά στους μαθητές σύμβολα. Επομένως η εργασία των ομάδων στις συναρτήσεις, αρχικά δεν αναπτύχθηκε όπως αναμενόταν κατά τον σχεδιασμό των αντίστοιχων ερωτημάτων - δραστηριοτήτων. Το ‘χάσμα’ που εντοπίστηκε σε αυτό το σημείο ανάμεσα στον προσωπικό ΧΕ της διδάσκουσας και αυτόν των ομάδων, λειτούργησε ανατροφοδοτικά στον σχεδιασμό του 3^{ου} φύλλου εργασίας που αφορούσε τη λογαριθμική συνάρτηση.

Στο 3^{ο} φύλλο εργασίας οι ομάδες αρχικά επεξεργάστηκαν τον ορισμό της συνάρτησης του κειμένου ως αναλυτικής έκφρασης σε εφαρμογή του σε ρεαλιστικό πρόβλημα, γεγονός το οποίο υποκίνησε το ενδιαφέρον τους, και πειραματίστηκαν με σταθερές, μεταβλητές, αλγεβρικές εκφράσεις και με την εναλλαγή των μεταβλητών σε ρόλους εξαρτημένης – ανεξάρτητης. Η παρατήρηση της πορείας εργασίας των ομάδων ανέδειξε δυσκολίες στην κατάκτηση δομικής αντίληψης της έννοιας της συνάρτησης, οι οποίες εστιάζονται στην έννοια της συμμεταβολής, στους ρόλους εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής και στον χειρισμό του συναρτησιακού συμβολισμού, σημεία τα οποία έχουν ήδη καταγραφεί στη βιβλιογραφία (Lagrange & Psycharis, 2014; Minh & Lagrange, 2016). Οι μαθητές ερμήνευσαν και χειρίστηκαν τον συναρτησιακό συμβολισμό του κειμένου και εξέτασαν σχέσεις μεταβλητών και σταθερών. Εργαζόμενοι αλγεβρικά και μεταβάλλοντας τις θέσεις των μεταβλητών από εξαρτημένη σε ανεξάρτητη, οδηγήθηκαν από την εκθετική στη λογαριθμική μορφή, δηλαδή στην αντίστροφη συνάρτηση. Η σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές οι οποίες μεταβάλλονται ακολουθώντας αριθμητική και γεωμετρική μεταβολή αντίστοιχα, στοιχείο το οποίο τονίστηκε κατά την ιστορική αναδρομή, χρησιμοποιήθηκε από τις ομάδες και προηγήθηκε της αλγεβρικής επίλυσης της εκθετικής μορφής. Οι γνωστικές δυνατότητες του κειμένου αξιοποιήθηκαν από τις ομάδες, όχι μόνο μέσω μελέτης και ανάλυσής του αλλά ακόμα και μέσω κριτικής σε πληροφορίες που αυτό παρείχε όπως οι προϋποθέσεις ύπαρξης αντίστροφης συνάρτησης.

Σε συνδυασμό με το ιστορικό κείμενο, η συμβολή του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra ήταν θετική στην πορεία διαπραγμάτευσης της έννοιας της συνάρτησης ως αντίστροφης συμμεταβολής και περαιτέρω των ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης. Το λογισμικό χρησιμοποιήθηκε ως τεχνούργημα – εργαλείο στον άξονα της εργαλειακής γένεσης με αποτέλεσμα την κατασκευή όχι μόνο απτών έργων, π.χ.

γραφημάτων, αλλά και την προώθηση διαδικασιών παρατήρησης, εξερεύνησης και πειραματισμού. Μέσω των διαδικασιών αυτών αναπτύχθηκαν συλλογισμοί και επιχειρήματα με αποτέλεσμα η εργασία στις περισσότερες περιπτώσεις να διαρθρώνεται στα πλαίσια της επικοινωνίας σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής διάστασης. Οι ομάδες εργάστηκαν ταυτόχρονα στον τύπο, το γράφημα και τον πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας παράλληλα, ως εργαλείο, τον ορισμό του λογαρίθμου στην ανάπτυξη της συλλογιστική τους. Επίσης η χρήση του λογισμικού παρείχε τη δυνατότητα μετάβασης από τον τύπο στο γράφημα και αντίστροφα. Η μετάβαση από τη γραφική παράσταση στον τύπο της λογαριθμικής συνάρτησης, δυσκόλεψε τις ομάδες. Συγκεκριμένα, από τις ομάδες ζητήθηκε η αντιστοίχιση της καμπύλης που διέγραφε το σημείο $A(10^R, R)$, η οποία είχε σχεδιαστεί στο λογισμικό, στον λογαριθμικό τύπο, ο οποίος ήδη είχε βρεθεί αλγεβρικά μέσω εναλλαγής των μεταβλητών στην εκθετική συνάρτηση. Η δυσκολία φάνηκε να εντοπίζεται κυρίως στην αντιστοίχιση ανεξάρτητης – εξαρτημένης μεταβλητής στο διατεταγμένο ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου Α, γεγονός το οποίο δυσκόλεψε τη μετάβαση από το γράφημα στην κατάλληλη συναρτησιακή έκφραση. Οι ερωτήσεις του 3^{ου} φύλλου ήταν σχεδιασμένες ώστε οι ομάδες να εργάζονται αλγεβρικά και γραφικά καθόλη τη διάρκεια διαπραγμάτευσής του, αναπτύσσοντας την εργασία τους ανάμεσα στους χώρους της Άλγεβρας με επίλυση τύπων, χειρισμό μεταβλητών κλπ και των Συναρτήσεων καθώς ασχολήθηκαν με τα βασικά χαρακτηριστικά της έννοιας της συνάρτησης.

Συμπερασματικά, οι μαθητές μετέφρασαν τον συμβολισμό, εφάρμοσαν τους ορισμούς και τις ιδιότητες των κειμένων σε συγκεκριμένα και γενικευμένα παραδείγματα και επιπλέον κατασκεύασαν αποδεικτική – συλλογιστική διαδικασία βασιζόμενοι στην ανάπτυξη συλλογισμού των κειμένων. Η προσπάθεια, από τις ομάδες των μαθητών, εύρεσης απαντήσεων στις ερωτήσεις που ακολουθούσαν τα κείμενα, απαίτησε ερμηνεία των κειμένων και επικοινωνία των θεμάτων από τους μαθητές. Ως εκ τούτου, τα ιστορικά κείμενα λειτούργησαν ως γνωστικά εργαλεία στην πορεία δομικής κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του λογαρίθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης, καθώς χρησιμοποιήθηκαν ως μοχλοί ανάπτυξης της εργασίας στους άξονες της σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής διάστασης. Οι απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις και οι απαντήσεις των ερωτηματολογίων κατέδειξαν ικανοποιητικό βαθμό ενσωμάτωσης της εκθετικής διαδικασίας στο μαθηματικό αντικείμενο – λογάριθμο καθώς και προσέγγιση της έννοιας της λογαριθμικής συνάρτησης ως αντίστροφης συμμεταβολής.

Μέσω των κειμένων, οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν τις έννοιες στην πηγή τους. Αυτό σημαίνει μελέτη των εννοιών σε γλώσσα διαφορετική, περισσότερο αυθεντική και λιγότερο 'ραφιναρισμένη' από αυτήν στην οποία είναι συνηθισμένοι στα σχολικά εγχειρίδια, γεγονός, που όπως φάνηκε από τις απαντήσεις των ερωτηματολογίων, αποτέλεσε πρόκληση για τους μαθητές οι οποίοι 'αναγκάστηκαν' σε ανάληψη πρωτοβουλιών στην προσπάθεια απάντησης των ερωτήσεων. Για παράδειγμα, ο ορισμός του λογαρίθμου, ο οποίος δίνεται στο κείμενο και εμπερικλείει την έννοια της συνάρτησης, αποτέλεσε θέμα προς διαπραγμάτευση από τις ομάδες και όχι προϊόν στείρας απομνημόνευσης, όπως συχνά συμβαίνει με τον ορισμό του λογαρίθμου στο σχολικό βιβλίο. Επιπρόσθετα, η εξαρχής αναφορά στην έννοια της συνάρτησης, προβλημάτισε τις ομάδες και έφερε στο προσκήνιο βασικές γνωστικές ελλείψεις που αφορούν την έννοια. Είναι γεγονός πως οι απαντήσεις των ερωτηματολογίων κατέδειξαν ότι οι μαθητές θεώρησαν δύσκολη την επεξεργασία των κειμένων. Όπως φάνηκε κατά τη ροή της εργασίας στη διάρκεια της παρέμβασης και στις απομαγνητοφωνημένες συνομιλίες, η οργάνωση της τάξης σε ομάδες ήταν καθοριστική στην πορεία διαπραγμάτευσης των μαθητών με τα ιστορικά κείμενα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων ο χώρος της ομάδας λειτούργησε υποστηρικτικά για τους μαθητές κατά την αντιμετώπιση των δυσκολιών που προέκυπταν ενδυναμώνοντας την επιμονή τους στην προσπάθεια. Υπήρξαν ωστόσο και λιγοστές περιπτώσεις, στις οποίες το μη ευνοϊκό κλίμα στην ομάδα είχε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα, τη μη επιτυχή αντιμετώπιση των δυσκολιών της ανάλυσης του ιστορικού κειμένου και άρα τη μη επαρκή ανάπτυξη της εργασίας στους άξονες της σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής διάστασης. Παράλληλα, με τη χρήση του ιστορικού κειμένου, το ψηφιακό λογισμικό λειτούργησε επικουρικά στην κατανόηση της έννοιας της λογαριθμικής συνάρτησης και των ιδιοτήτων της και η συμβολή του θεωρήθηκε θετική από τους μαθητές.

Εν κατακλείδι, σε απάντηση του 1^{ου} Ερευνητικού Ερωτήματος, αν και η έρευνα αυτή αποτελεί μελέτη περίπτωσης, χωρίς δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η ΙΜ δύναται να λειτουργήσει ως αρωγός στη διδασκαλία των λογαρίθμων στη Β/θμια Εκπαίδευση στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα. Τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας συνάδουν με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Παναγιώτου, 2014; Αεράκης, 2015) για το συγκεκριμένο θέμα, αν και η παρούσα έρευνα διαφοροποιείται από τις προηγούμενες ως προς τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν, τους επιμέρους στόχους, τη δομή και τη χρονική έκταση. Παρόλα αυτά, η επιλογή του τρόπου με τον οποίο δύναται να χρησιμοποιηθεί η ΙΜ ως εργαλείο στη διδασκαλία, απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή ώστε κατά πρώτο λόγο οι μαθητές να νιώθουν ικανοί να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις που εμφανίζονται σε μια τέτοιου είδους διδασκαλία και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται οι γνωστικές απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος σε συγκεκριμένα χρονικά πλαίσια που αυτό καθορίζει. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και η χρήση του ψηφιακού λογισμικού συνέβαλλαν θετικά προς αυτή την κατεύθυνση. Προφανώς υπάρχει ανάγκη περαιτέρω εμπειρικής έρευνας ως προς τους τρόπους, τα συγκεκριμένα εργαλεία και τις ιδιαίτερες συνθήκες που μπορούν να συνδράμουν στη βέλτιστη αξιοποίηση της ΙΜ στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα.

Το $2^{ο}$ Ερευνητικό Ερώτημα της παρούσας εργασίας, εστιάζει στη χρήση της ΙΜ ως σκοπού με στόχο την προσέγγιση των Μαθηματικών από τους μαθητές ως εξελισσόμενου πολιτισμικού προϊόντος. Οι απαντήσεις στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο κατέδειξαν, όπως ήδη προαναφέρθηκε, ότι έγινε προφανής για τους μαθητές η αρχική αναγκαιότητα ύπαρξης των λογαρίθμων. Η μετέπειτα εξέλιξή τους με εφαρμογές τους σε άλλα πεδία εκτός των Μαθηματικών, και οι λόγοι που καθιστούν αναγκαία τη διδασκαλία τους στη σύγχρονη εποχή δεν εμπεδώθηκαν από όλους τους μαθητές. Επίσης οι μαθητές φάνηκαν θετικοί στην άποψη ότι τα Μαθηματικά συνδέονται με το γενικότερο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσονται, προφανώς επηρεαζόμενοι από τη διδακτική παρέμβαση και το παράδειγμα των λογαρίθμων. Ως εκ τούτου μπορεί να θεωρηθεί ότι η ΙΜ συνέβαλλε, τουλάχιστον για τη συγκεκριμένη περίπτωση της έννοιας του λογαρίθμου, στην προσέγγιση από τους μαθητές, των Μαθηματικών όχι ως συνονθυλεύματος, αδικαιολογήτου ύπαρξης, εννοιών, αποδείξεων και ασκήσεων αλλά ως προϊόντος κοινωνικής αναγκαιότητας. Παρόλα αυτά είναι φυσικό η χρήση της ΙΜ μεμονωμένα σε ένα συγκεκριμένο θέμα, στην περίπτωση αυτή στους λογάριθμους, να μην είναι αρκετή για μία συνολική και συνειδητή αναθεώρηση της εικόνας που έχουν αναπτύξει οι μαθητές για τα Μαθηματικά και στην προσέγγιση αυτών υπό διαφορετικό πρίσμα. Οι απαντήσεις μέρους των μαθητών, οι οποίες αφορούσαν τις πεποιθήσεις τους ως προς την προσέγγιση των Μαθηματικών από μακροσκοπική σκοπιά ως εξελισσόμενου πολιτισμικού προϊόντος, υποδεικνύουν αμφιβολία στο κατά πόσο η παρέμβαση επηρέασε τις απόψεις τους για τα Μαθηματικά. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται λογικό καθώς η συγκεκριμένη παρέμβαση αποτέλεσε μεμονωμένη περίπτωση. Η χρήση της ΙΜ στη διδασκαλία του Λυκείου, με σύντομο ή περισσότερο εκτεταμένο τρόπο δεν αποτελεί, συνήθη πρακτική του Ελληνικού Σχολείου. Η εμπλοκή της ΙΜ όχι μόνο σε μεμονωμένες περιπτώσεις, όπως έγινε στην παρούσα παρέμβαση, αλλά με πιο συστηματικό τρόπο, θα μπορούσε ίσως να επηρεάσει θετικά τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη φύση των Μαθηματικών. Η αλήθεια είναι πως, αν και η επίδραση της ΙΜ στη διδασκαλία έχει συζητηθεί αρκετά (π.χ. Θωμαΐδης, 1987; Thomaidis & Tzanakis, 2009; Tzanakis & Thomaidis, 2012), η χρήση της ΙΜ στο Λύκειο στην Ελληνική Εκπαιδευτική πραγματικότητα είναι σχεδόν ανύπαρκτη, καθώς δεν υποστηρίζεται επίσημα από το Πρόγραμμα Σπουδών. Επομένως η εφαρμογή της Ιστορίας στη διδακτική πράξη έγκειται στην προσωπική διάθεση του εκάστοτε εκπαιδευτικού, ο οποίος καλείται να ερευνήσει και να επιλέξει τρόπους, υλικά και μεθόδους, χωρίς εξωτερική καθοδήγηση, ώστε σε στενά χρονικά πλαίσια να επιτύχει, κατά το δυνατό βέλτιστα, μαθησιακά αποτελέσματα. Θα είχε ενδιαφέρον περαιτέρω εμπειρική έρευνα για τη συστηματική συμπερίληψη της ΙΜ στη διδασκαλία του Λυκείου, εξετάζοντας τους τρόπους χρησιμοποίησής της σε συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα και υπό τις συγκεκριμένες συνθήκες του Ελληνικού σχολείου. Οι μέθοδοι και τα αποτελέσματα τέτοιων ερευνών θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν σε πραγματικές συνθήκες με κατάλληλη προετοιμασία των διδασκόντων στα πλαίσια ενός σχεδιασμένου προγράμματος Επαγγελματικής Ανάπτυξης των Εκπαιδευτικών.

Το μοντέλο του ΜΧΕ αποτελεί εξέλιξη της θεωρίας του ΓΧΕ. Στόχος του μοντέλου είναι η οργάνωση ενός κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος όπου ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να αυτενεργήσει παράγοντας μαθηματικό έργο το οποίο διαρθρώνεται σε τρεις διαστάσεις (σημειωτική, εργαλειακή, συλλογιστική). Ο ΜΧΕ διατηρεί τη βασική δόμηση του ΓΧΕ που συνίσταται σε δύο οριζόντια επίπεδα (επιστημολογικό και γνωστικό) τα οποία επικοινωνούν μέσω δυναμικών συνδέσεων στους άξονες των διαστάσεων οι οποίες προαναφέρθηκαν. Το επιστημολογικό επίπεδο περιέχει στοιχεία που αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο της γνώσης, ενώ το γνωστικό περιέχει στοιχεία που χαρακτηρίζουν τη δομή των νοητικών σχημάτων του ατόμου που μαθαίνει.

Όπως ήδη συζητήθηκε, η έρευνα επικεντρώθηκε στο μαθηματικό έργο που παράχθηκε στην τάξη, μελετώντας την ανάπτυξη της εργασίας στους τρεις άξονες της σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής γένεσης. Το μοντέλο του ΜΧΕ στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε σε θέματα που αφορούσαν τον Χώρο της Άλγεβρας και των Συναρτήσεων. Η χρησιμοποίησή του παρείχε τη δυνατότητα συστηματικής παρατήρησης της μαθηματικής δραστηριότητας, αναλύοντας την εργασία σε διαφορετικά επίπεδα. Συγκεκριμένα, με βάση το μοντέλο, μελετήθηκε ο σχεδιασμός του κατάλληλου ΜΧΕ για την εξέλιξη της εργασίας των μαθητών και την ανέλιξή της από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο. Η επιλογή και ο σχεδιασμός των διδακτικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρέμβαση (ιστορικών στοιχείων, κειμένων, ερωτήσεων) έγινε με γνώμονα την δημιουργία ευνοϊκού διδακτικού περιβάλλοντος για την ανάπτυξη της εργασίας των μαθητών στους τρεις άξονες του μοντέλου (Kuzniak et al., 2016 α,β). Αναλυτικότερα το υλικό της παρέμβασης επιλέχθηκε ώστε να εμπερικλείει δυνατότητες γνωστικού εργαλείου και να επιτρέπει την ενεργητική επέμβαση των μαθητών και τον χειρισμό του. Η επαρκής διάρθρωση της εργασίας κατά τις κατευθύνσεις των τριών διαστάσεων του μοντέλου αποτέλεσε το βασικό ζητούμενο της παρέμβασης, καθώς με αυτόν τον τρόπο η επικοινωνία των στοιχείων επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου ισοδυναμεί με την ανάπτυξη δομικής αντίληψης των εννοιών. Παράλληλα ο Προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών συζητήθηκε σε επίπεδο ομάδων. Η ανάλυση της εργασίας των ομάδων έγινε μέσω παρατήρησης της ανάπτυξης, ή και των δυσκολιών ανάπτυξης, της εργασίας στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του μοντέλου, επιτυγχάνοντας έτσι τη λεπτομερή εξέταση της πορείας της μαθησιακής διαδικασίας. Όπως ήδη περιγράφηκε, μέσω του μοντέλου εντοπίστηκαν σημεία που αρχικά εμφάνισαν δυσκολίες στην ανέλιξη της εργασίας των ομάδων από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο. Παράλληλα το μοντέλο παρείχε τη δυνατότητα ανάδειξης των 'κενών' ανάμεσα στον προσωπικό ΧΕ της διδάσκουσας και στους ΧΕ των ομάδων, επιτρέποντας την 'επικοινωνία' των χώρων αυτών, καθώς και τον εντοπισμό ελλείψεων στο πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου των ΧΕ των ομάδων γεγονός που παρατηρήθηκε στην εργασία στην έννοια της συνάρτησης.

Επομένως το μοντέλο του ΜΧΕ χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα παρέμβαση ως εργαλείο σχεδιασμού, παρατήρησης και ανάλυσης του μαθηματικού έργου, παρέχοντας τη δυνατότητα λεπτομερούς μελέτης των επιμέρους συστατικών της μαθησιακής διαδικασίας. Με τον τρόπο αυτό, παρείχε τη δυνατότητα εντοπισμού των δυσκολιών που παρουσιάστηκαν και των αιτιών εμφάνισής τους, με αποτέλεσμα την επιλογή κατάλληλων εργαλείων για την αντιμετώπισή τους. Συμπερασματικά, το μοντέλο του ΜΧΕ χρησιμοποιήθηκε για την, κατά το δυνατό σφαιρική, προσέγγιση της πορείας της μαθησιακής διαδικασίας σε αλληλεπιδρώντα επίπεδα.

Βιβλιογραφία

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 109-132.

Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level. *Colección Digital Eudoxus*, (7).

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.doi: 10.1177/0022487108324554

Beguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems*, 12(1), 173-190.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218-229.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer.

Burn, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and logarithms. *Historia Mathematica*, 28/01: 1-17.

Cajori, F. (1909). *A history of mathematics*. London: The Macmillan Company, Macmillan & Co., Ltd.

Charalambous, C. Y., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: Insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 161.

Chronaki, A. (2000). Computers in Classrooms. *Routledge International Companion to Education*, 558.

Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739-754.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103-131.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of education and work*, 14(1), 133-156.

Ertmer, P., & Newby, T. (2013). Behaviorism, cognitivism, constructivism: Comparing critical features from an instructional design perspective. *Performance Improvement Quarterly, 26*, 43-71.

Farmaki, V., Klaudatos, N., & Paschos, T. (2004). Integrating the history of Mathematics in educational praxis: An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 505-512). Bergen, Norway: PM.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 11(2), 3-6.

Fauvel, J. (1995). Revisiting the History of Logarithms. In Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B., and Katz V. (Eds), *Learn from the Masters* (pp.39-48). Mathematical Association of America, USA.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.

Fried, M. N. (2008). "History of Mathematics in Mathematics Education: a Saussurean Perspective. *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 5: No. 2, Article 3.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the learning of mathematics*, 17(1), 55-61.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 1-20.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Esp).

Gómez-Chacón, I. M., Albaladejo, I. M. R., & López, M. D. M. G. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, 48(6), 909-924.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63-76.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 147-164.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.

Hobson, E. W. (1914). John Napier and the Invention of Logarithms, 1614: A Lecture by EW Hobson. Cambridge: at the University Press.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 11, pp. 175-193).

Jankvist, U. T. (2009α). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009β). History of modern applied mathematics in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *29*(1), 8-13.

Katz, V. J. (1995). Napier's Logarithms Adapted for Today's Classroom. In Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B., and Katz V. (Eds), *Learn from the Masters* (pp. 49-56). Mathematical Association of America, USA.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics*. Boston, USA: Pearson Education, Inc.

Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 185-201.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. *In Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education*: selected lectures (pp. 271-290).

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulation. In F.K. Lester (2007) (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching.* Information Age Publishing, 707-762.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 137-174.

Kralemann, B., & Lattmann, C. (2013). Models as icons: modeling models in the semiotic framework of Peirce's theory of signs. *Synthese*, 1-24.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work: Viewpoints and perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4), 5-39.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016α). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016β). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Kynigos, C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education-International Journal*, 6, 335-358.

Kynigos, C., & Argyris, M. (2004). Teacher beliefs and practices formed during an innovation with computer- based exploratory mathematics in the classroom. *Teachers and teaching*, 10(3), 247-273.

Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B., & Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics. *In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1332-1338).

Lagrange, J. B., & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 255-286.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. *In Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 378-385).

Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48(6), 793-807.

Miranda, V. C., Pluvinage, F., & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM*, 48(6), 809-826.

Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48(6), 925-933.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: *Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.

Siu M.K. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. *Paleontological Society Papers*, *6*, 3-10.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2009). The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education. *Dins: Working group*, *15*, 139-151.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 44-55.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*, 247-295.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., de Carvalho J. P., Rodriguez M., & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics education* (pp. 201-240). Springer Netherlands.

Vagliardo, J. (2006). Substantive knowledge and mindful use of logarithms: A conceptual analysis for mathematics educators. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 28(3), 90.

Villarreal-Calderon, R. (2008). Chopping logs: A look at the history and uses of logarithms. *The Mathematics Enthusiast*, 5/08: 337-344.

Αεράκης, Α. (2015). Αξιοποίηση της ιστορίας στη διδακτική των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση – Η περίπτωση του λογάριθμου, (επιβλέπων Σ.

Παπασταυρίδης) Διπλωματική, Πανεπιστήμιο Αθηνών & Κύπρου, Αθήνα, 2015.

Θωμαΐδης, Ι. (1986). Προέλευση και Εφαρμογές της Θεωρίας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών – Το παράδειγμα των λογάριθμων. *Ευκλείδης Γ*, 13/86: 1-30.

Θωμαΐδης, Ι. (1987). Ανάδυση και εξέλιξη των λογαριθμικών εννοιών. *Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών*, 4/87: 1-71.

Νημά, Ε., & Καψάλης, Α. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

Παναγιώτου, Ε. (2014). Η Ιστορία των Λογαρίθμων και οι Παιδαγωγικές της Διαστάσεις. *Επιστήμες Αγωγής*, Θεματικό Τεύχος: 92-113.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η Ομάδα:

1.

2.

3.

4.

ΘΕΜΑ: Δοκιμές με πράξεις.

Α Μέρος

(Πριν την παρουσίαση)

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η : Προσπαθήστε να κάνετε τις πράξεις:

Α) $8.388.608 \cdot 1.048.576=$

Β) $8.796.093.022.208 / 33.554.432=$

Γ) $8.388.608^2 =$

Δ) $\sqrt{1.073.741.824} =$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^{η} :

Θεωρείτε ότι η εκτέλεση των προηγούμενων πράξεων με τους γνωστούς τρόπους υπολογισμού είναι επίπονη και χρονοβόρα;

ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Β Μέρος

(Μετά την 5^{η} διαφάνεια)

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^{η} :

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**….**
1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**	**4096**	**….**

Στην γνωστή μας πια αντιστοιχία, όπως είδαμε ο πολλαπλασιασμός ανάγεται σε πρόσθεση : 32x128=4096 (5+7=12)

Σε τι πράξη ανάγεται:

a. Η διαίρεση, π.χ. 4096 : 128 = 32

b. Η ύψωση σε δύναμη, π.χ. 16^3 = 4096

c. Η εξαγωγή ρίζας, π.χ. $\sqrt[3]{4096}$ =16

ΕΡΩΤΗΣΗ $4^{η}$: Ποιες αριθμητικές ιδιότητες, γνωστές σε μας σήμερα, καθιστούν δυνατές τις αναγωγές αυτές;

ΕΡΩΤΗΣΗ $5^{η}$:

Χρησιμοποιώντας το νέο εργαλείο (αντιστοιχία), δοκιμάστε να βρείτε τα αποτελέσματα των δύσκολων πράξεων που δόθηκαν αρχικά, ξέροντας ότι:

8.388.608 =2^{23}

32.768=2^{15}

8.796.093.022.208=2^{43}

1.048.576=2^{20}

1.073.741.824 =2^{30}

33.554.432 = 2^{25}

262.144 =2^{18}

70.368.744.664 = 2^{46}

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η :

Θεωρείτε σημαντική τη διαφορά στη διευκόλυνση των πράξεων;

ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - 1^{Ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η ομάδα:

1.

2.

3.

4.

ΘΕΜΑ: Συνομιλία με τον Leonard Euler

Το κείμενο που ακολουθεί προέρχεται από το βιβλίο "***Introductio in analysin infinitorum***" (Leonard Euler, 1748)

Κείμενο 1. Just as, given a number a, for any value of z, we can find the value of y [= a^z], so, in turn, given a positive value for y, we would like to give a value for z, such that $a^z = y$. This value of z, insofar as it is viewed as a function of y, it is called the LOGARITHM of y. The discussion about logarithms supposes that there is some fixed constant to be substituted for a, and this number is the *base* for the logarithm. Having assumed this base, we say the logarithm of y is the exponent in the power a^z such that $a^z = y$. It has been customary to designate the logarithm of y by the symbol log y. If $a^z = y$, then $z = \log y$. From this we understand that the base of the logarithms, although it depends on our choice, still it should be a number greater than 1. Furthermore, it is only of positive numbers that we can represent the logarithm with a real number.

Κείμενο 1. Μετάφραση. Όπως αν δοθεί ένας αριθμός a, για κάθε τιμή του z μπορούμε να βρούμε την τιμή του $y(=a^z)$, έτσι αντίστροφα αν δοθεί ένας θετικός y θα μπορούσαμε να βρούμε τον z έτσι ώστε $α^z = y$. Αυτή η τιμή του z θεωρούμενη ως συνάρτηση του y καλείται ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ του y. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη σταθερά για την τιμή του α και αυτός ο αριθμός καλείται βάση του λογάριθμου. Ξέροντας τη βάση λέμε ότι ο λογάριθμος του y είναι ο εκθέτης στη δύναμη $α^z$ έτσι ώστε $α^z = y$. Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε το λογάριθμο του y με το σύμβολο logy. Αν $α^z = y$, τότε $z = \log y$. Από αυτά καταλαβαίνουμε ότι αν και η βάση των λογαρίθμων εξαρτάται από την επιλογή μας, θα πρέπει να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 1. Επιπλέον μόνο οι λογάριθμοι θετικών αριθμών είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ερωτήσεις:

1. Ποιος είναι ο ορισμός του λογαρίθμου που δίνει ο Euler;

2. Τι είναι το "*a*" και ποιες οι ιδιότητές του;

3. Ο Euler αναφέρει ότι η τιμή του z, τον οποίο αποκαλεί λογάριθμο, μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση του y. Τι δηλώνει η τελευταία πρόταση της παραγράφου για το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης;

4. Ποιο νομίζετε ότι είναι το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης και γιατί;

5. Ποια η σχέση ανάμεσα στα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης με ίδιες βάσεις;

6. Σύμφωνα με όσα διαβάσατε προηγουμένως να υπολογίσετε:

i) $\log_2 4=$ ii) $\log_4 2=$ iii) $\log_\alpha \alpha=$

iv) $\log_\alpha \alpha^x=$ v) $a^{\log_a u}=$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $5^x=112$.

8. Αν $\log\mu = \log\nu$ εξηγείστε σύμφωνα με τα λεγόμενα του Euler γιατί $\mu = \nu$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ - 2Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η ομάδα:

1.

2.

3.

4.

ΘΕΜΑ: Συνομιλία με τον Leonard Euler

Το κείμενο που ακολουθεί προέρχεται από το βιβλίο "***Introductio in analysin infinitorum***" (Leonard Euler, 1748)

Κείμενο 3. In like manner if log y = z, then log y^2 = 2z, log y^3 = 3z, etc., and in general log y^n = nz or log y^n = n log y, since z = log y. If follows that the logarithm of any power of y is equal to the product of the exponent and the logarithm of y. For example log√y = ½(z) = ½(log y), log1/√y = log y–1/2 = –½(log y), and so forth. It follows that if we know the logarithms of any number, we can find the logarithms of any power of that number. If we already know the logarithms of two numbers, for example log y = z and log v = x, since y = az and v = ax, it follows that log vy = x + y = log v + log y. Hence, the logarithm of the product of two numbers is equal to the sum of the logarithms of the factors. In like manner log (y/v) = z – x = log y – log v, that is, the logarithm of a quotient is equal to the logarithm of the numerator diminished by the logarithm of the denominator. These rules can be used to find the logarithms of many numbers from a knowledge of the logarithms of a few.

Κείμενο 3. Μετάφραση

Αν log y = z, τότε log y^2 = 2z, log y^3 = 3z, κλπ., και γενικά log y^n = nz ή log y^n = n log y, αφού z = log y. Επομένως ο λογάριθμος οποιασδήποτε δύναμης του y είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη επί το λογάριθμο του y. Για παράδειγμα log√y = ½(z)

= ½(log y) και log1/√y = log $y^{-1/2}$ = –½(log y). Άρα αν γνωρίζουμε το λογάριθμο ενός αριθμού μπορούμε να βρούμε τους λογάριθμους οποιασδήποτε δύναμης του αριθμού αυτού. Αν ξέρουμε τους λογάριθμους δύο αριθμών, για παράδειγμα log y = z και logv= x, αφού y = a^z και v = a^x, τότε log vy = x + z = log v + log y. Έτσι ο λογάριθμος του γινομένου δύο αριθμών είναι ίσος με το άθροισμα των λογαρίθμων των αριθμών αυτών. Όμοια log (y/v) = z – x = log y – log v, δηλαδή ο λογάριθμος του πηλίκου είναι ίσος με το λογάριθμο του αριθμητή μειωμένο κατά το λογάριθμο του παρονομαστή. Αυτοί οι κανόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να βρούμε λογαρίθμους πολλών αριθμών γνωρίζοντας λογαρίθμους λίγων (αριθμών).

Ερωτήσεις:

9. Στην παράγραφο αυτή ο Euler αναφέρει τρεις βασικές ιδιότητες (κανόνες) των λογαρίθμων. Τους κανόνες του γινομένου, του πηλίκου, και της δύναμης. Ποιοι είναι αυτοί;

10. Ο Euler εξηγεί τον κανόνα του γινομένου. Ποιο είναι το σκεπτικό του;

11. Δώστε αντίστοιχες εξηγήσεις για τους κανόνες του πηλίκου και της δύναμης.

12. Σύμφωνα με ότι ξέρετε για τους λογάριθμους εξετάστε αν ισχύουν:

a. $\log(\mu+\nu) = \log\mu + \log\nu$

b. $\log(\mu \cdot \nu) = \log\mu \cdot \log\nu$

13. Εξηγήστε την τελευταία πρόταση του κειμένου δίνοντας παραδείγματα.

14. Να δείξετε ότι $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$.

15. Θυμηθείτε ότι αν $\log a = \log b$, τότε $a = b$. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Euler προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 + 1) - \log x = 2$. Υπάρχουν περιορισμοί για τις τιμές του x;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ - 3^{Ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η ομάδα:

1.

2.

3.

4.

ΘΕΜΑ: Από το παρελθόν στο παρόν - Euler και Geogebra

Κείμενο 4. Leonard Euler in his book "*Introductio in analysin infinitorum*" (1748) describes "a function of a variable quantity ...[as] an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities." He further states that "a single-valued function is one for which, no matter what value is assigned to the variable z , a single value of the function is determined." Euler also wrote: "If y is any kind of function of z, then likewise z will be a function of y." Note: Euler uses z instead of x as the independent variable.

Κείμενο 4. Μετάφραση

Ο Leonard Euler στο βιβλίο του "Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση – *Introductio in analysin infinitorum*" (1748), περιγράφει τη 'συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ως αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητες'. Λέει επίσης ότι 'συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι αυτή για την οποία οποιαδήποτε τιμή πάρει η μεταβλητή z, μία και μόνο μία τιμή καθορίζεται για τη συνάρτηση'. Και προσθέτει: 'Αν το y είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του z, τότε με τον ίδιο τρόπο το z θα είναι συνάρτηση του y'. Παρατήρηση: Ο Euler χρησιμοποιεί το z αντί για το x που χρησιμοποιούμε συνήθως ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Ερωτήσεις:

Το μέγεθος R ενός σεισμού στην κλίμακα Richter και η έντασή του I συνδέονται με την εξής σχέση: $I=I_0 \cdot 10^R$ (1), όπου $I_0 > 0$ συγκεκριμένη σταθερά.

1. Συμφωνεί η έκφραση αυτή με τον ορισμό της συνάρτησης που δίνει ο Euler; Στην περίπτωση αυτή, ποια είναι, η μεταβαλλόμενη ποσότητα (z) και ποια η εξαρτώμενη ποσότητα (y) που αναφέρει ο Euler στον ορισμό του;

2. **a.** Έστω $I_0 = 1$. Αν το R ακολουθεί αριθμητική αύξηση (π.χ. R=0,1,2,3,4,5,6,7…), τι είδους μεταβολή ακολουθεί το I;

b. Αν θεωρήσω ως εξαρτημένη μεταβλητή εκείνη που μεταβάλλεται αριθμητικά (R) και ανεξάρτητη εκείνη που μεταβάλλεται γεωμετρικά (I) βρείτε την έκφραση (συνάρτηση) που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη.

c. Ο Euler στο κείμενο 4 αναφέρει επίσης την «αντίστροφη συνάρτηση». Τι παρατηρείτε για την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή της αντίστροφης; Ποια είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης; Γράψτε τους τύπους των δύο αντίστροφων συναρτήσεων στο παράδειγμά μας.

3. Στο λογισμικό Geogebra θεωρείστε δρομέα R για τις τιμές του R από -50 έως 50 με βήμα 0,001 και εισάγετε σημείο $A(I, R)=(10^R, R)$. Από το μενού «προβολή» κάντε εισαγωγή του υπολογιστικού φύλλου, και με δεξί κλικ στο σημείο Α περάστε τις συντεταγμένες του στο λογιστικό φύλλο και δώστε του ενεργό ίχνος. Μετακινώντας τον δρομέα παρατηρείστε την καμπύλη που διαγράφει το Α και δώστε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η καμπύλη αυτή αποτελεί τμήμα της γραφικής παράστασής της.

4. Χρήσιμος τύπος: (Τύπος αλλαγής βάσης $\log_{\beta} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \beta}$)

Σε νέο παράθυρο του λογισμικού εισάγετε τη συνάρτηση $\log_a x$ = ln(x)/ln(a) με δρομέα για το a και τιμές θετικές (a>0).

Για a >1 πάρτε σημείο Α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, από το μενού «προβολή» κάντε εισαγωγή του υπολογιστικού φύλλου, και με δεξί κλικ στο σημείο Α περάστε τις συντεταγμένες του στο λογιστικό φύλλο.

Σύρτε το έτσι ώστε να αυξάνεται η τετμημένη του.

a. Οι τιμές της τεταγμένης του αυξάνονται ή μειώνονται;

b. Πως δικαιολογείτε την απάντησή σας σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου του Euler;

c. Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης;

5. Πάρτε σημείο Β στη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης, περάστε τις συντεταγμένες του στο λογιστικό φύλλο και μετακινήστε το ώστε η τετμημένη να πλησιάζει στο 0.

a. Πως μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης;

b. Θα τμήσει η γραφική παράσταση τον άξονα y΄y; Εξηγείστε την απάντησή σας.

6. Μετακινήστε τον δρομέα έτσι ώστε $a<1$.

a. Ποια είναι η μονοτονία της συνάρτησης σε αυτή η την περίπτωση;

b. Αν $\log_a\theta < \log_a\mu$ και $a<1$, τι συμπεραίνετε για τη σχέση των θ και μ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Για $a>1$ ή $a<1$, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα x΄x. Δικαιολογήστε την απάντησή σας και με τη βοήθεια του ορισμού του Euler.

8. Λύστε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $\log_a x=5$.

a. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή;

b. Η εξίσωση $\log_a x=κ$ έχει λύση για οποιοδήποτε αριθμό κ; Μπορείτε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με δύο τρόπους;

9. Σε νέο παράθυρο του Geogebra εισάγετε: 1) την $f(x) = \ln(x)$, 2) την αντίστροφή της εκθετική συνάρτηση και 3) την ευθεία $y=x$. Πάρτε τυχαίο σημείο Α στην γραφική παράσταση της λογαριθμικής και βρείτε με τη βοήθεια του λογισμικού το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία $y=x$. Που βρίσκεται το Β;

a. Αν γενικεύσουμε, οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς ……………………

b. Λαμβάνοντας υπόψη πως αν το σημείο Α(α, β) είναι συμμετρικό του Β ως προς την $y=x$ τότε οι συντεταγμένες του Β είναι (β, α), πως εξηγείτε την απάντησή σας στο προηγούμενο υποερώτημα;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε – 1^{Ο} ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Η γνώμη μου (1)

1. Ποια η άποψή σας για τη χρησιμοποίηση στη διδασκαλία των ιστορικών στοιχείων και κειμένων; Πιστεύετε ότι ήταν βαρετή, ενδιαφέρουσα, ωφέλιμη, αποτελεσματική, δύσκολη ως προς την κατανόηση, αδιάφορη; Απαντήστε με όσους χαρακτηρισμούς θέλετε (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και δικούς σας) και δικαιολογείστε τους.

2. Σε ποια σημεία νομίζετε ότι διαφέρει η διδασκαλία αυτή από μια τυπική διδασκαλία, όπου ο καθηγητής σας θα παρουσίαζε τις έννοιες ακολουθώντας τη σειρά του βιβλίου (Ορισμός, ιδιότητες, αποδείξεις, ασκήσεις);

3. Ποια ήταν η αρχική αναγκαιότητα που οδήγησε στην επινόηση των λογαρίθμων τον $16^{ο}$ αιώνα;

Κατά την άποψή σας, γιατί διδάσκονται οι λογάριθμοι σήμερα, τον $21^{ο}$ αιώνα; Αναφέρετε εφαρμογές τους.

4. Νομίζετε ότι τα μαθηματικά είναι ένα στατικό, τυποποιημένο, αιώνια αμετάβλητο και αδιαπραγμάτευτο κατασκεύασμα ή όχι, και γιατί; Θεωρείτε ότι οι πεποιθήσεις σας για τα μαθηματικά έχουν αλλάξει έστω και λίγο μετά την παρέμβαση αυτή; Αν ναι, τι είναι αυτό που άλλαξε;

5. Κατά τη γνώμη σας, η εξέλιξη των μαθηματικών συνδέεται ή όχι με το κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο αυτά αναπτύσσονται; Με ποιο τρόπο συνέβαλλε η παρέμβαση αυτή στην απάντησή σας;

6. Θεωρείτε ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας λειτούργησε θετικά για εσάς στην πορεία του μαθήματος ή όχι και γιατί;

7. Πιστεύετε ότι η χρήση του λογισμικού Geogebra σας διευκόλυνε στην κατανόηση των εννοιών; Τι θεωρείτε θετικό στη χρήση του και τι όχι;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ – 2^{Ο} ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Η γνώμη μου (2)

1. Ποια είναι τα δύο πρόσωπα που καθόρισαν αντίστοιχα την αρχική και την τελική μορφή της έννοιας του λογάριθμου;

2. Τι είδους σχέση συνδέει δύο μεγέθη όταν το ένα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο και το άλλο αριθμητική;

3. Εξηγήστε μέσω παραδείγματος, πώς η αντιστοιχία ανάμεσα σε μια γεωμετρική και μια αριθμητική πρόοδο διευκολύνει την εκτέλεση των πράξεων.

4. Σε ποιον οφείλεται ο όρος “λογάριθμος” και πως προέκυψε;

5. Δώστε τον ορισμό του λογαρίθμου του Euler.

6. Συμπληρώστε τις ισότητες:

$\log_3 9=$ $\log_{27} 3=$ $\log_3 \frac{1}{9}=$ $\log_\alpha \alpha=$ $\log_\alpha \alpha^x =$

$\log(a \cdot b)=$ $\log(a/b)=$ $\log a^k =$

7. Αποδείξτε ότι $\log(a \cdot b)=\log a + \log b$.

8. Δείξτε ότι: $3\log 2 + \log 5 – \log 4 = 1$ (Η βάση θεωρείται το 10).

9. Αν $\log_a 5 < \log_a 3$, τι συμπεραίνετε για τον a;

10. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x+1) + \log(x-1)=\log 2$

11. Γιατί οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e καλούνται φυσικοί;

12. Ισχύει η ισότητα $\log(a+b)=\log a + \log b$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.