ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική Εκπαίδευση Β' Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

Μελέτη της Χωρικής Ικανότητας σε μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

της

Μιχαηλίδου Χριστίνα
Α.Ε.Μ. 575

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια
Εξεταστές: Μαρία Καλδρυμίδου, Καθηγήτρια
Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής

Φλώρινα, Ιούνιος 2018

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Διαγραμμάτων, Σχημάτων, Πινάκων

Διαγράμματα

Σχήματα

Πίνακες

Περίληψη

Στην εργασία αυτή διερευνώνται τα χωρικά χαρακτηριστικά 200 μαθητών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από Β' Γυμνασίου έως και Β'Λυκείου. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκε κατάλληλο δοκίμιο – δοκίμιο, το οποίο αναπτύσσεται σε τέσσερις άξονες: χωρικό προσανατολισμό, χωρικές σχέσεις, χωρικό μετασχηματισμό – περιστροφή και αντίληψη διαστάσεων, ενώ εκτείνεται σε συνολικά 11 διαστάσεις, προκειμένου να καλύψει όσο καλύτερα γίνεται την πολυπλοκότητα της έννοιας της χωρικής ικανότητας. Μελετήθηκαν τα χαρακτηριστικά των μαθητών ως προς τις διαστάσεις αυτές και βρέθηκε πως κάποιες από αυτές, όπως η καταμέτρηση κύβων, ο προσανατολισμός αμβλείας γωνίας και η περιστροφή, τους δυσκολεύουν περισσότερο. Η απόδοση των μαθητών σε όλες τις διαστάσεις βελτιώνεται με την αύξηση της ηλικίας, ενώ οι δυσκολίες στις περισσότερες διαστάσεις είναι κοινές σε όλες τις ηλικίες. Από τους αρχικούς άξονες και τις επιμέρους διαστάσεις του ερωτηματολογίου, οι μόνοι που παραμένουν ίδιοι κατά την ομαδοποίηση των μεταβλητών μέσω ανάλυσης σε κύριες συνιστώσες είναι η καταμέτρηση κύβων και η εν μέρει η σχετική θέση τμημάτων κύβων, υποδηλώνοντας πως οι περισσότερες διαστάσεις αλληλεπικαλύπτονται και δεν είναι ανεξάρτητες. Η ομαδοποίηση των μαθητών σε κατηγορίες χωρικών ικανοτήτων έδωσε μια ξεχωριστή κατηγορία ικανών σε όλες (ή σχεδόν σε όλες) τις χωρικές ικανότητες και άλλες ομάδες μαθητών που εμφάνισαν ικανότητες σε κάποιον ή κάποιους από τους άξονες. Τέλος, η διαχωριστική ανάλυση και η μελέτη της κατανομής των μέσων τιμών των σωστών απαντήσεων φώτισαν κάποιες από τις μεταβλητές ως ικανές για διαχωρισμό των ομάδων. Οι περισσότερες από αυτές αναφέρονται στους άξονες χωρικός προσανατολισμός και χωρικές σχέσεις.

Λέξεις κλειδιά: χωρική ικανότητα, τεστ χωρικής ικανότητας, χωρικός προσανατολισμός, χωρικές σχέσεις, μετασχηματισμός, περιστροφή, αντίληψη διαστάσεων

Abstract

The aim of this research is to investigate the spatial ability of 200 pupils of Secondary Education (aged 14-17). For this purpose an appropriate questionnaire was created which is developed in four axes: spatial orientation, spatial relations, spatial transformation - rotation and understanding localities. A total of 11 dimensions are used in an attempt to meet as closely as possible the complexity of the concept of spatial ability. It was found that some of the dimensions of spatial ability, such as cube counting, orientation of an obtuse angle and rotation seem more difficult to pupils. Student performance in all dimensions improves with age increase while difficulties in most dimensions are common to all ages. Of the original axes and individual dimensions of the questionnaire the only ones that remain the same when grouping of variables is applied by means of principal component analysis are counting cubes and partly relative cube position. The above outcome suggests that most of the other dimensions of the test overlap thus they are not independent. Grouping pupils into categories of spatial ability gave all the times a separate class with high spatial ability students and separate classes of students who have demonstrated competence in one or some of the axes. Finally, the application of discriminant analysis and the study of the distribution of mean of the correct answers showed that just few of the variables are capable of separating the groups. Most of them refer to axes of spatial orientation and spatial relationships.

Key words: spatial ability, spatial ability test, spatial orientation, spatial relations, transformations, rotation, understanding localities

Εισαγωγή

«Ο χώρος που μας περιβάλλει, φυσικός ή τεχνητός, αποτελεί μια από τις κυριότερες πηγές ανάπτυξης των περισσότερων εννοιών, ανάμεσά τους και των μαθηματικών εννοιών, γιατί ο άνθρωπος χρειάζεται να τον αντιληφθεί και να λειτουργήσει μέσα σ' αυτόν, να διακρίνει τις σχέσεις που συναντά και να τις αναπαραστήσει» (Τζεκάκη, 1996, σελ. 35).

Ο Freudenthal (1973) αναφέρει ότι η γεωμετρία είναι ένας χώρος στον οποίο το παιδί ζει, αναπνέει και κινείται και τον οποίο θα πρέπει να γνωρίσει, να εξερευνήσει και να κατακτήσει, προκειμένου να ζει, να αναπνέει και να κινείται καλύτερα σε αυτόν (στους Ryu, Chong & Song, 2007). Καθώς ο άνθρωπος ζει και λειτουργεί μέσα στο χώρο καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του, η γνώση και κατανόηση αυτού κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική και εκφράζεται τόσο σε σχέση με τις καθημερινές όσο και με υψηλού επιπέδου δραστηριότητες (Newcombe & Huttenlocher, 2000), ενώ η διάκριση των σχέσεων και η ικανότητα να τις αναπαραστήσει (Τζεκάκη, 1996) αποτελούν σημαντικό δείκτη της αντίληψης και λειτουργίας μέσα στο χώρο. Μέσα από ένα πλήθος εμπειριών και ανακαλύψεων στο χώρο, δομούνται, οργανώνονται και μορφοποιούνται πολλές και διαφορετικές, τόσο καθημερινές όσο και μαθηματικές ή άλλες επιστημονικές έννοιες (Γερμανός, 2002). Το άτομο, μέσα από ένα σύνολο γνωστικών διαδικασιών, οικοδομεί και χειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων μεταξύ τους καθώς των μετασχηματισμών αυτών (Κλιάπης, 2011).

Τα τελευταία χρόνια η ανάπτυξη των χωρικών και γεωμετρικών εννοιών αποκτά όλο και περισσότερη σημασία, αφού βοηθούν στη μοντελοποίηση, αναπαράσταση εικόνων και συνδέονται και με άλλες επιστήμες, όπως των υπολογιστών, της ιατρικής και της ρομποτικής. Ο Βουδρισλής (2016) τονίζει πως είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε ότι ο χωρικός γραμματισμός είναι εξίσου σημαντικός για τη ζωή ενός σύγχρονου ανθρώπου όσο και οι άλλες βασικές ικανότητες, όπως ο αριθμητικός γραμματισμός, η ανάγνωση, η γραφή και η λογική (Fielker, 1993).

Αρκετές μελέτες εξετάζουν τη σχέση μεταξύ των παραγόντων της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου και της επίδοσης στα μαθηματικά (Bishop, 1980; Presmeg, 1992), στις οποίες τονίζεται, μεταξύ άλλων ευρημάτων, η σημασία της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Bishop, 1980; Tartre, 1990; Gutiérrez, 1996). Η πίστη ότι η αντίληψη του χώρου συνδέεται άμεσα με τη γενικότερη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, ώθησε πολλά κράτη στην ενσωμάτωση αυτής στα προγράμματα σπουδών που αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών (Van der Walle, 2001). Έχει επισημανθεί η σημασία της χωρικής σκέψης τόσο στο παραδοσιακό και αναμενόμενο πεδίο της γεωμετρίας (Ramful, Lowrie και Logan

(2017) όσο και στους κλάδους STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), ενώ ταυτόχρονα έχει βρεθεί ότι αποτελεί παράγοντα επιτυχίας σε αυτούς τους τομείς (Uttal & Cohen, 2012; Wai, Lubinski & Benbow, 2009).

Η ικανότητα του ατόμου να διαχειρίζεται, να οργανώνει, να ερμηνεύει και να αναπαριστά αντικείμενα και σχέσεις στο χώρο, δυστυχώς, στη διεθνή βιβλιογραφία συναντάται με πληθώρα διαφορετικών όρων, ενώ δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που ο ίδιος όρος έχει άλλη σημασία σε μελέτες διαφορετικών ερευνητών. Δεν υπάρχει ένας ενιαίος ορισμός για αυτό που συνήθως περιγράφεται με τον όρο χωρική ικανότητα, με αποτέλεσμα αφενός να δημιουργείται μια σύγχυση σε όποιον επιχειρεί να ασχοληθεί με αυτή και αφετέρου να είναι δύσκολο να προσδιορισθεί με ακρίβεια το νόημα του όρου. Η Κολέζα (2009) σημειώνει πως ο Bishop (1980) είχε ήδη επισημάνει πριν τρεις δεκαετίες τις ασυνέπειες στην ορολογία και τη μεθοδολογία της έρευνας σχετικά με την χωρική ικανότητα, τονίζοντας πως δεν υπάρχουν σαφή αποδεικτικά στοιχεία για την έκταση των σχέσεων μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της μαθηματικής ικανότητας. Δυστυχώς, η εικόνα παραμένει η ίδια έως σήμερα.

Παρά τους διαφορετικούς ορισμούς για την ίδια την έννοια καθώς και τις διαστάσεις της, η έρευνα για την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας απασχολεί πλήθος επιστημόνων σε πολλές χώρες, που αναφέρονται είτε στον τομέα της ψυχολογίας είτε στον τομέα των μαθηματικών ή γενικότερα των φυσικών και θετικών επιστημών. Από την μεριά τους οι ψυχολόγοι πάντοτε αντιλαμβάνονταν την ικανότητα στο χώρο ως ένα κρίσιμο παράγοντα της ανθρώπινης ευφυΐας και τόνιζαν τη σημασία της ικανότητας δημιουργίας νοερών εικόνων.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα προηγούμενα σχεδιάστηκε η παρούσα μελέτη με απώτερο σκοπό να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά της χωρικής ικανότητας μαθητών ηλικίας 14-17 ετών. Σε ένα πρώτο στάδιο μελετήθηκαν διεξοδικά τα εργαλεία, που υπάρχουν ήδη για τέτοιου είδους μελέτες, και αφού έγινε μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών, δημιουργήθηκε το προτεινόμενο εργαλείο – δοκίμιο διερεύνησης χωρικών ικανοτήτων δομημένο σε τέσσερις άξονες. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο και η ανασκόπηση των ερευνών σχετικά με την χωρική ικανότητα. Η παρουσίαση γίνεται από το γενικό, που είναι ο χώρος, έως το ειδικό, που είναι η χωρική ικανότητα, η σημασία της λόγω της σύνδεσής της με τα μαθηματικά και η ανάγκη ενσωμάτωσης στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα που αφορούν την παρούσα έρευνα, ενώ επιχειρείται η εννοιολογική πλαισίωση μέσω της διατύπωσης των βασικών λειτουργικών ορισμών. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία (μέθοδος, δείγμα, εργαλεία, ερευνητική διαδικασία, διδακτική παρέμβαση, αξιοπιστία και εγκυρότητα, στατιστική μεθοδολογία) που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας και αναλύονται στατιστικά για καθένα από τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μία συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα, με απώτερο σκοπό να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Παρουσιάζονται οι σχέσεις των ευρημάτων της παρούσας μελέτης με αποτελέσματα άλλων ερευνών, οι περιορισμοί της έρευνας και γίνονται κάποιες προτάσεις για μελλοντικές έρευνες. Τέλος, αναφέρεται η βιβλιογραφία πάνω στην οποία βασίστηκε η παρούσα έρευνα, ενώ στο παράρτημα παρουσιάζεται το δοκίμιο που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας.

Κεφάλαιο 1ο

Θεωρητικό Πλαίσιο

"Spatial ability affects many fields and disciplines and is a predictor for success in many areas of life……While spatial ability research is as broad as it is deep, there is still much work to be done in this area." (Mohler, 2009)

1.1 Χώρος

Η ικανότητα αναπαραγωγής και μεταφοράς πληροφοριών που προέρχονται από τον περιβάλλοντα χώρο είναι ένα σημαντικό στοιχείο της ανθρώπινης πνευματικής ικανότητας. Σύμφωνα με την Κολέζα (2009, σελ. 273) η αντίληψη/αίσθηση του χώρου είναι η ικανότητα κάποιου να διαχειριστεί, να οργανώσει, να ερμηνεύσει και να αναπαραστήσει αντικείμενα και σχέσεις στον χώρο από τις απλές καθημερινές, όπως το δέσιμο ενός παπουτσιού ή το δίπλωμα μιας σελίδας, έως τον προσανατολισμό σε ένα κτίριο ή την ερμηνεία ενός χάρτη (Levine et al., 1999). Η δε διαδικασία κατανόησης προσανατολισμού στο χώρο είναι μακρόχρονη και ξεκινάει από την βρεφική ηλικία. Ο προσανατολισμός στο χώρο είναι η γνώση του πού βρισκόμαστε και πώς θα κινηθούμε στον κόσμο, κατανοώντας και χρησιμοποιώντας τη λειτουργία μεταξύ των διαφορετικών θέσεων στο χώρο, ειδικά σε σχέση με τη θέση που κατέχουμε εμείς.

Για τον Piaget (1973) οι χωρικές ιδιότητες δεν υπάρχουν a priori αλλά το παιδί κτίζει αργά τις χωρικές έννοιες μέσα από τις δράσεις του (κιναισθητική). Θεωρεί, ωστόσο, ότι τα παιδιά ακόμα και από τη βρεφική ανάπτυξή τους, έχουν χωρική αίσθηση. Μέσα από τις κινήσεις που κάνει με το ίδιο του το σώμα αντιλαμβάνεται και οικειοποιείται το χώρο, τα αντικείμενα που υπάρχουν γύρω του και διευκολύνεται να λειτουργήσει και να προσανατολιστεί μέσα σε αυτόν. Η ανάπτυξη αυτή μπορεί να επιτευχθεί από τη μικρή ακόμη ηλικία με την προϋπόθεση ότι έχει δοθεί ιδιαίτερη φροντίδα προς τον τομέα αυτό. Η πρώιμη ενασχόληση με το χώρο είναι δυνατόν να βοηθήσει τα παιδιά να οργανώσουν τις χωρικές τους ικανότητες σε πιο νεαρή ηλικία (Hazen & Durett, 1982). Αρχικά, τα παιδιά μπορούν να διακρίνουν διάφορες απλές σχέσεις, τοπολογικής φύσεως, μεταξύ των αντικειμένων. Διακρίνουν, επομένως, πρώτα τις ποιοτικές σχέσεις, όπως είναι οι ανοικτές και κλειστές γραμμές, ο διαχωρισμός και ο εγκλεισμός, τα σύνορα, η συνέχεια, η διαδοχή, οι γειτνιάσεις (τις λεγόμενες τοπολογικές σχέσεις), στη συνέχεια τις σχέσεις ευθυγράμμισης, παραλληλία και προοπτική (τις λεγόμενες προβολικές) και τελικά τις ευκλείδειες και μετρικές σχέσεις, όπως είναι οι αποστάσεις, τα μεγέθη, οι αναλογίες κ.λπ. (Τζεκάκη, 2007: σελ. 159-157). Το ανθρώπινο σώμα αποτελεί ένα πρώτο σύστημα αναφοράς για τον προσανατολισμό στο χώρο, καθώς τα αντικείμενα τοποθετούνται σε σχέση με αυτό (ανθρωποκεντρικό σύστημα αναφοράς). Για τον Piaget, η μετάβαση στη γεωμετρική σκέψη δεν είναι δυνατή σε ένα υποκείμενο που κατέχει μόνο στατικές εικόνες. Πρέπει να είναι σε θέση να κατασκευάσει και να μετασχηματίσει τα σχήματα του χώρου και να συλλάβει σε ένα σύστημα με συνοχή των χωρικών σχέσεων.

Η Τζεκάκη (1996) αναφέρει πως το παιδί αρχικά αναγνωρίζει τις σχέσεις των αντικειμένων με τον εαυτό του, σε ένα επόμενο επίπεδο τις σχέσεις των αντικειμένων μεταξύ τους, και τελικά τις σχέσεις του εαυτού του με τα αντικείμενα. Ο Piaget αναγνωρίζει τέσσερα στάδια ανάπτυξης του παιδιού: το αισθησιο-κινητικό στάδιο (0-2 έτη), το στάδιο της προ-λογικής νόησης (2-6 ετών), το στάδιο της συγκεκριμένης λογικής σκέψης (6-12 ετών) και τέλος, το στάδιο της λογικής σκέψης (12-τέλος εφηβείας). Κατά το τελευταίο στάδιο, που αποτελεί και το ηλικιακό φάσμα της παρούσας μελέτης, η σκέψη των παιδιών αρχίζει να παίρνει τη μορφή που χαρακτηρίζει τη σκέψη των ενηλίκων, οπότε και αναπτύσσεται η αντίληψη του χώρου. Οι Κάβουρας και άλλοι (2016) επισημαίνουν πως τότε όλα τα στοιχεία τόσο του χώρου που περιβάλλει τα παιδιά όσο και του καθολικού χώρου (με όλες τις διαστάσεις του) ερμηνεύονται μέσω της αντίληψης. Ο χώρος στο μυαλό του εφήβου παίρνει νέα διάσταση και από αισθησιοκινητικός και πρακτικός, γίνεται λογικός, ενιαίος και σαφής. Τα παιδιά είναι πια σε θέση να κατανοήσουν και να χειριστούν γενικές και αφηρημένες έννοιες και σχέσεις, ή ακόμα και μαθηματικές, οι οποίες μελετώνται καθαυτές, ως αφηρημένες και ανεξάρτητες.

Η Κολέζα (2009, σελ. 274) επισημαίνει πως η κατανόηση του χώρου, δηλαδή η ικανότητα για εννοιολογική οργάνωση και αναπαράσταση του χώρου, είναι από τις σημαντικότερες ικανότητες που αποκτά σταδιακά το άτομο, ως αποτέλεσμα ωρίμανσης, αλλά κυρίως ως προϊόν οργανωμένης εκπαίδευσης. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Βουδρισλή (2016), πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η χωρική σκέψη μπορεί και πρέπει να διδάσκεται σε όλα τα επίπεδα του εκπαιδευτικού συστήματος και ο χωρικός εγγραμματισμός πρέπει να εισαχθεί στην εκπαίδευση και στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Goodchild (2009), όπως αναφέρεται στο Βουδρισλή (2016)).

Η κατανόηση του χώρου, οι σχέσεις και ο οπτικός χειρισμός αντικειμένων στο χώρο αποτελούν σημαντικές συνιστώσες της γεωμετρικής και ευρείας μαθηματικής και επιστημονικής σκέψης (Michaelides, 2003), ενώ έχει βρεθεί πως οι χωρικές έννοιες συνδέονται μακροπρόθεσμα με τις υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά (Friedman, 1995). Η κατανόηση και η χρήση οδηγιών προσανατολισμού, η δημιουργία και η ανάγνωση χάρτη, η μοντελοποίηση πραγματικών ή νοερών καταστάσεων, που λαμβάνουν χώρα από την προσχολική ηλικία, συμβάλλουν στη δημιουργική μαθηματική σκέψη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα όσοι δεν λαμβάνουν σχετική εκπαίδευση από μικρή ηλικία να μειονεκτούν στις χωρικές έννοιες και να εμφανίζουν υστερήσεις στις μαθηματικές επιδόσεις στη συνέχεια (Levine et al., 1999). Ο χώρος έχει συνδεθεί (Sugiyama & Moore, 2005; Sussman & Gillman, 2007) αφενός με τη γνωστική ανάπτυξη του παιδιού μέσω της ανάπτυξης δεξιοτήτων και διαμόρφωσης πρακτικών και στάσεων και αφετέρου με την ανάπτυξη της λογικής σκέψης, την ωρίμανση, καθώς και την ανάπτυξη της φαντασίας και της δημιουργικότητας του παιδιού.

1.2. Χωρική Νοημοσύνη (Spatial Intelligence)

Οι σχετικές θεωρίες για τη φύση της νοημοσύνης ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες, τις μονοπαραγοντικές, σύμφωνα με τις οποίες η νοημοσύνη απαρτίζεται από ένα κυρίως κληρονομικό παράγοντα και τις πολυπαραγοντικές θεωρίες, που θεωρούν την νοημοσύνη ως αποτέλεσμα περισσότερων παραγόντων. Μέχρι τον 20ο αιώνα η διάγνωση των χαρισματικών παιδιών γινόταν με τη βοήθεια των Τεστ Νοημοσύνης. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δέχθηκε έντονες επικρίσεις σε σχέση με την αποτελεσματικότητά της, αφού αποδείχθηκε ότι η νοημοσύνη δεν είναι μονοδιάστατη έννοια, αλλά αποτελείται από ένα σύνολο διαφορετικών μορφών νοημοσύνης, των οποίων η καλλιέργεια και η ανάπτυξη επηρεάζεται, τόσο από προσωπικούς όσο και από περιβαλλοντικούς παράγοντες. Η νοημοσύνη δεν μεταβιβάζεται σε ένα άτομο αλλά, αν και προσδιορίζεται σε έναν άγνωστο προς το παρόν βαθμό από την κληρονομικότητα, ακολουθεί μακριά και ιδιόμορφη συχνά πορεία μέχρι την πλήρη διαμόρφωσή της. Ο αναπτυξιακός ψυχολόγος Gardner (1983) διέκρινε στη θεωρία του της πολλαπλής νοημοσύνης αρχικά επτά τομείς νοημοσύνης στον κάθε άνθρωπο, τη γλωσσική, τη μουσική, τη λογική-μαθηματική, τη χωρική, τη σωματική-κιναισθητική, τη διαπροσωπική και την ενδοπροσωπική. Αργότερα, ο ίδιος (Gardner, 1999) πρόσθεσε και μια ακόμη νοημοσύνη, τη νατουραλιστική, ενώ ισχυρίζεται ότι μπορεί να υπάρχουν μερικές ακόμα. Κάθε ένα από αυτά τα επτά είδη νοημοσύνης έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο ικανοτήτων που μπορεί να παρατηρηθεί και να μετρηθεί. Παρόλα αυτά, εξακολουθεί να παραμένει πρόβλημα αυτής της προσέγγισης η ανάπτυξη μεθόδων που να μπορούν να μετρήσουν αξιόπιστα και έγκυρα καθένα από τα είδη νοημοσύνης. Είναι προφανές πως όλοι διαθέτουν αυτές τις δεξιότητες. Η διαφορά έγκειται στο διαφορετικό βαθμό κατοχής και εξέλιξης της κάθε δεξιότητας και στον τρόπο με τον οποίο αυτές συνδυάζονται.

Σε σχέση με τη χωρική νοημοσύνη αυτή αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να προσλαμβάνει χωρικές και σχηματικές πληροφορίες με ακρίβεια και να δημιουργεί με αυτές νοητικές εικόνες, τις οποίες μετέπειτα μπορεί να τις εκφράζει με αρχιτεκτονικές κατασκευές και εικαστικές συνθέσεις. Είναι πιο ανεπτυγμένη σε όσους έχουν καλή οπτική μνήμη και ικανότητα να θυμούνται τις διαστάσεις και τα σχήματα των αντικειμένων. Ένα άτομο με υψηλή χωρική νοημοσύνη είναι ιδιαίτερα ικανό στο να φαντάζεται και να λύνει γρίφους, να διαβάζει χάρτες και διαγράμματα, έλκεται από τη ζωγραφική, τις κατασκευές, τις μηχανές και μαθαίνει καλύτερα με εικόνες.

Οι Κάβουρας et al. (2016) τονίζουν, εξάλλου, πως η λογική-μαθηματική νοημοσύνη σχετίζεται με τη χωρική σκέψη, καθώς αυτή αποτελεί μέρος του πολλαπλού αριθμητισμού (multiple numeracy) - της ικανότητας και της προθυμίας χρήσης μαθηματικών τρόπων σκέψης (λογική και χωρική σκέψη) και παρουσίασης (μαθηματικοί τύποι, μοντέλα, γραφήματα, διαγράμματα), που επιτρέπουν ένα άτομο να λειτουργήσει πλήρως σε μια σύγχρονη κοινωνία.

1.3. Χωρική Αίσθηση (Spatial Sense)

Η σημασία του χώρου και της χωρικής νοημοσύνης έχει ήδη τονισθεί, ενώ οι εμπειρίες που συντελούνται μέσα στο χώρο αποτελούν μια πρώτη πηγή εννοιών και ταυτόχρονα στηρίζουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και αποτελούν τη βάση ανάπτυξης του μαθηματικού συλλογισμού σε πολλά επίπεδα. Χαρακτηριστικό είναι πως αμιγώς αριθμητικές έννοιες, όπως τα κλάσματα και οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, παρουσιάζονται με την βοήθεια σχημάτων, ή κάνοντας χρήση της αριθμητικής ευθείας (Τζεκάκη, 2007, σελ. 148). Σύμφωνα με την ίδια, με τον όρο χωρική αίσθηση (spatial sense – spatial thinking) νοείται μια διαισθητική αντίληψη για το χώρο που μας περιβάλλει και τα αντικείμενα μέσα σ' αυτόν (Τζεκάκη 2007: σελ. 150). Η ανάπτυξη της στηρίζεται σε χωρικές εμπειρίες που εμπλέκουν τις σχέσεις των αντικειμένων με έννοιες, όπως η διεύθυνση και ο προσανατολισμός (κατεύθυνση). Η αίσθηση αυτή μπορεί να αναπτυχθεί στα παιδιά με την ανάπτυξη δραστηριοτήτων σε έναν χώρο και την εικονοποίηση αυτών.

1.4 Χωρική Σκέψη (Spatial Thinking)

Η χωρική σκέψη έχει ως αφετηρία αυτή τη διαισθητική αντίληψη του υποκειμένου για το χώρο που το περιβάλλει και τα αντικείμενα μέσα στο χώρο αυτό (χωρική αίσθηση). Η χωρική σκέψη συνδέεται με την εικονοποίηση ή την οπτικοποίηση ενός χώρου. Το NRC (2006) ορίζει τη χωρική σκέψη «ως μια συλλογή γνωστικών δεξιοτήτων και γνωστικών λειτουργιών που αποτελούνται από δηλωτικές και αντιληπτικές μορφές γνώσης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μετασχηματίσουν και να συνδυάσουν αυτή τη γνώση μέσα σε κάποια χωρικά πλαίσια». Αποτελείται από τρεις αλληλοενισχυόμενες συνιστώσες: την έννοια του χώρου, τα εργαλεία της απεικόνισής του και τις διαδικασίες κατανόησης και ανάλυσης. Όπως αναφέρουν οι Κάβουρας και άλλοι (2016) ως χωρική σκέψη ορίζεται η δυνατότητα απεικόνισης και ερμηνείας της θέσης, της απόστασης, της κατεύθυνσης, των σχέσεων, των αλλαγών και μετακινήσεων που σχετίζονται με το χώρο. Οι βασικές συνιστώσες της χωρικής αίσθησης, μέσα από τις οποίες το παιδί αναπτύσσει τη χωρική σκέψη και αντιλαμβάνεται τον κόσμο, είναι η οπτικοποίηση, ο προσανατολισμός και οι αναπαραστάσεις του χώρου (Clements & Sarama, 2007). Ο Βουδρισλής (2016) αναφέρει πως τα συστατικά στοιχεία της χωρικής σκέψης είναι ο χώρος, οι αναπαραστάσεις, ο συλλογισμός και οι μετασχηματισμοί. Οι Kurtulus και Uygan (2010) τονίζουν πως η χωρική σκέψη δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να σχεδιάσει σχήματα σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, να σχηματίσει νοερές εικόνες κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, να κατηγοριοποιήσει δεδομένα σε πίνακες και να ανακαλύψει τις σχέσεις μεταξύ σχημάτων.

Η χωρική σκέψη χρησιμοποιείται τόσο στην αναπαράσταση όσο και στο χειρισμό πληροφοριών κατά την επίλυση προβλημάτων (Clements & Battista, 1992). Είναι μια δυναμική διαδικασία που μας επιτρέπει να περιγράψουμε, να εξηγήσουμε και να προβλέψουμε τη δομή, τις λειτουργίες και τις σχέσεις των αντικειμένων στον πραγματικό και φανταστικό νοητό κόσμο (NRC, 2006: 33), ενώ ταυτόχρονα χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του χώρου ως μέσο επίλυσης προβλημάτων και διατύπωσης λύσεων. Καθώς το υποκείμενο αποκτά χωρικές εμπειρίες, που εμπλέκουν τις σχέσεις των αντικειμένων με έννοιες όπως η διεύθυνση, η τοποθέτηση, ο προσανατολισμός και οι μετασχηματισμοί (σχέσεις που δείχνουν θέσεις δύο ή τριών αντικειμένων), αναπτύσσει τη χωρική του σκέψη (Κλιάπης, 2011). Η χωρική σκέψη, σύμφωνα με τη Τζεκάκη (2007), διαχωρίζεται σε δύο διαστάσεις, τον προσανατολισμό και την αντίληψη των μετασχηματισμών. Η πρώτη διάσταση διακρίνει στο χώρο τη θέση ενός αντικειμένου αναφορικά με άλλα αντικείμενα και τις σχέσεις που χαρακτηρίζουν τις τοποθετήσεις αυτές, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να παρακολουθεί τις αλλαγές στη θέση ή τη διεύθυνση, να αντιλαμβάνεται μετακινήσεις ή στροφές ή ακόμα να κατανοεί άλλες μορφές μετασχηματισμών (δίπλωση, έκταση, στροφή, αλλαγή οπτικής γωνίας).

Σύμφωνα με τον Βουδρισλή (2016), οι ικανότητες που ορίζουν τη χωρική σκέψη, μαθαίνονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και μπορούν να υποστηριχθούν από εργαλεία και τεχνολογίες. Επίσης, συμπεριλαμβάνει μια εκτενή βιβλιογραφία ερευνών που αναφέρονται στη συμβολή της χρήσης των γεωγραφικών συστημάτων πληροφοριών στην επίλυση χωρικών προβλημάτων, στις δεξιότητες ανάγνωσης χάρτη, στη λήψη αποφάσεων και στην απόκτηση κριτικής χωρικής σκέψης, η οποία είναι ένας συνδυασμός της κριτικής και της χωρικής σκέψης, δηλαδή αξιολόγησης των διαδικασιών συλλογισμού που χρησιμοποιούν τις έννοιες του χώρου και των χωρικών αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με την (Τζεκάκη, 2007: σελ. 171), τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις έρευνες των τελευταίων χρόνων οδηγούν στις παρακάτω κατευθύνσεις για την υλοποίηση πιο αποτελεσματικών μαθησιακών δραστηριοτήτων: η χωρική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από την εξερεύνηση των παιδιών και τη δράση τους μέσα στο χώρο, σε μια μεγάλη ποικιλία εμπειρικών καταστάσεων και παιδαγωγικών δραστηριοτήτων με κατάλληλο υλικό. Η δράση αυτή εκτός από το (βιωμένο) μεσο-χώρο (τάξη), πρέπει να επεκτείνεται στο μικρο-χώρο και στο μακρο-χώρο.

Ως χωρική σκέψη η Yakimanskaya (1991, σελ.21 όπως αναφέρεται στην Παναούρα, 2007) περιγράφει το είδος της νοητικής δραστηριότητας που συμβάλλει στη δημιουργία χωρικών εικόνων και στο χειρισμό αυτών στα πλαίσια διάφορων πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων. Η Παναούρα (2007) συνοψίζει πως «η χωρική σκέψη είναι ζωτικής σημασίας και αποτελεί μια σημαντική πτυχή της ανθρώπινης νόησης, είναι μια έννοια η οποία έχει συγκεντρώσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον και έχει διερευνηθεί από ποικίλες οπτικές γωνίες. Αναγνωρίζεται εδώ και καιρό ως ένας παράγοντας που συνδέεται με την επιτυχία στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανολογία, την αρχιτεκτονική και άλλα πεδία γνώσης».

1.5 Χωρική Ικανότητα (Spatial Ability)

Χωρική ικανότητα είναι μία από τις δεξιότητες που έχει αναπτύξει ο άνθρωπος στη προσπάθεια του να επιτύχει την καλύτερη προσαρμογή στο περιβάλλον στο οποίο ζει και αναπτύσσεται. Από τότε που θεμελιώθηκε ως μια ξεχωριστή διάσταση των ικανοτήτων του ατόμου, μέσα από τις παραγοντικές αναλύσεις που χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1920, έχει απασχολήσει ιδιαίτερα την επιστημονική κοινότητα, αφού από τη φύση της αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα, με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή (Goldberg & Meredith, 1974, όπως αναφέρεται στους Kalogirou & Gagatsis (2011)). Οι Γαγάτσης & Καλογήρου (2013) αναφέρουν πως οι πρώτες μελέτες στον τομέα της χωρικής ικανότητας χρονολογούνται γύρω στη δεκαετία του '40 και τη δεκαετία του '50, στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας. Αντίστοιχες έρευνες στον τομέα της ψυχολογίας προηγήθηκαν μιας δεκαετίας. Οι αντιλήψεις των ερευνητών συγκρούονται όχι μόνο στην προσπάθεια αποσαφήνισης του όρου της χωρικής ικανότητας, αλλά και στον καθορισμό του αριθμού των χωρικών ικανοτήτων, στην ονομασία των επιμέρους διαστάσεων αυτής και στα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του κάθε παράγοντα. Ο τρόπος με τον οποίο έχουν ορισθεί όροι όπως «χωρική ικανότητα», «χωρική οπτικοποίηση», «χωρική αίσθηση», «χωρική σκέψη» καθώς και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων σε αντίστοιχες έρευνες είναι σχεδόν τόσοι όσος και ο αριθμός των μελετών που χρησιμοποιούν τους όρους αυτούς (Wheatley, 1998). Ο Carroll (1993), ωστόσο, θεωρεί πως ως ένα βαθμό αυτή η σύγχυση είναι μόνο φαινομενική, εξαιτίας της διαφορετικής ονομασίας των τεστ από τον κάθε ερευνητή ή της χρήσης ίδιου ονόματος από τα διάφορα τεστ.

Σύμφωνα με τους Lee & Bednarz (2012), χωρική ικανότητα είναι η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται και να θυμάται τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Ακολουθώντας τους ορισμούς του NRC (2006),η χωρική ικανότητα συνήθως ορίζεται ως χωρική αντίληψη, οπτική αναπαράσταση και προσανατολισμός στο χώρο και θεωρείται ως μια στενότερη έννοια από τη χωρική σκέψη, η οποία περιγράφηκε προηγουμένως. Προκειμένου τα άτομα να αντιληφθούν το χώρο, να κατανοήσουν αναπαραστάσεις και να διαχειριστούν (κριτική σκέψη) το χώρο, πρέπει να διαθέτουν τα απαιτούμενα προσόντα χωρικών ικανοτήτων. Είναι σημαντική για πληθώρα λειτουργιών, που εκτελεί καθημερινά ο άνθρωπος. από τις απλούστερες έως τις πιο σύνθετες. Οι Hegarty & Waller (2005), αναφέρουν ότι η χωρική ικανότητα είναι απαραίτητη σε ένα μεγάλο αριθμό καθημερινών δραστηριοτήτων, όπως η μετακίνηση των επίπλων σε ένα δωμάτιο, η ετοιμασία των αποσκευών και η μετακίνηση του ατόμου σε μια πόλη.

Μια από τις πρώτες προσπάθειες ορισμού της χωρικής ικανότητας συναντάται στην μελέτη των Piaget & Inhelder (1967, όπως αναφέρεται στον Yilmaz, H. B. (2017)), οι οποίοι αναφέρουν πως αποτελεί αιτιολόγηση της φύσης του χώρου και διακρίνουν δύο τύπους χωρικών ικανοτήτων, την αντιληπτική χωρική ικανότητα, όταν ένα παιδί αλληλεπιδρά με το περιβάλλον (η ικανότητα να αντιλαμβάνεται τις χωρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων) και την εννοιολογική χωρική ικανότητα (η ικανότητα να χτίζει και να χειρίζεται ένα πνευματικό μοντέλο του περιβάλλοντος). Οι Maccoby & Jacklin (1974) αποδίδουν δυο παράγοντες στην χωρική ικανότητα, τους αναλυτικούς, που περιέχουν πολύπλοκες διαδικασία και τους μη αναλυτικούς, που περιέχουν την περιστροφή ενός αντικειμένου. Ωστόσο, οι Gunzelman & Anderson (2004, όπως αναφέρεται στους Guillot et al, 2007) τονίζουν πως η νοητική περιστροφή απαιτεί γνωστική επεξεργασία και χωρική μετατροπή του νοητού αντικειμένου και γι' αυτό το λόγο μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην κατανόηση του χώρου και στην επίλυση προβλημάτων. Ο Shepard (1978) χρησιμοποιεί τον όρο της νοερής απεικόνισης για να περιγράψει τη χωρική ικανότητα, ενώ την ίδια περίοδο ο Lohman (1979) όρισε ως χωρική ικανότητα την ικανότητα παραγωγής, διατήρησης και χειρισμού αφηρημένων οπτικών εικόνων και επιμέρισε αυτή σε τρεις διαστάσεις, τη διάσταση σχηματισμού νοερής εικόνας, τη διάσταση χωρικού προσανατολισμού και τη διάσταση των χωρικών σχέσεων. Οι Lean και Clements (1981) ορίζουν την χωρική ικανότητα ως «την ικανότητα να σχηματοποιούν τις νοερές εικόνες και να χειρίζονται αυτές τις εικόνες στο μυαλό τους». Λίγο αργότερα οι Linn & Petersen (1985) την περιγράφουν ως το σύνολο των νοερών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για την αντίληψη, την αποθήκευση, την ανάκληση, τη διάταξη και τη δημιουργία σχετικών νοερών εικόνων. Κατά τους Clements και Battista (1992), η χωρική ικανότητα αποτελείται από ένα σύνολο γνωστικών διαδικασιών μέσω των οποίων κατασκευάζονται και τυγχάνουν επεξεργασίας νοητικές αναπαραστάσεις για χωρικά αντικείμενα. Ο Halpern (2000, όπως αναφέρεται στους Jones & Burnett (2008)) ορίζει την χωρική ικανότητα ως την ικανότητα νοερής περιστροφής δισδιάστατων ή τρισδιάστατων αντικειμένων στο χώρο ή της αντίληψης των χωρικών σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων. Ενώ, σύμφωνα με τον Olkun (2003), η χωρική ικανότητα είναι ο νοερός χειρισμός αντικειμένων και των μερών τους στο δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο.

Οι ερευνητές, επομένως, φαίνεται να συμφωνούν πως η χωρική ικανότητα δεν είναι μια συγκεκριμένη μεμονωμένη ικανότητα αλλά περιλαμβάνει μία ομάδα επιμέρους ικανοτήτων (Linn & Petersen, 1985), ενώ ο Eliot (1983, όπως αναφέρουν οι Strong & Smith (2002)), αναφέρει ότι για τη χωρική ικανότητα δόθηκαν πολλοί ορισμοί, οι οποίοι δυσκολεύουν πολύ την αποσαφήνιση του ακριβούς νοήματός της. Για την κατηγοριοποίηση, λοιπόν, της χωρικής ικανότητας σε υποκατηγορίες και για τον καθορισμό των παραγόντων που την αποτελούν, οι απόψεις των ερευνητών διαφοροποιούνται. Κάποιες από αυτές πρόκειται να παρουσιαστούν στη συνέχεια.

1.5.1. Παράγοντες Χωρικής Ικανότητας

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 50 ετών έχουν πραγματοποιηθεί πληθώρα ερευνών με στόχο τον καθορισμό της δομής της χωρικής ικανότητας. Οι απόψεις των ερευνητών ποικίλλουν σημαντικά και δυστυχώς δεν έχουν καταλήξει σε μια κοινά αποδεκτή δομή της χωρικής ικανότητας. Διαφέρουν δε σε τέτοιο βαθμό, ώστε μερικοί ακόμη και να υποστηρίζουν πως η αντίληψη των εννοιών του χώρου είναι μονοδιάστατη και δεν αποτελείται καν από επιμέρους παράγοντες

(Burton & Fogarty, 2003, όπως αναφέρεται στον Mohler, 2009). Οι Colom et al. (2002) εφάρμοζαν μια επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (confirmatory factor analysis), κατά την οποία διαπιστώθηκε η ύπαρξη ενός μοναδικού παράγοντα ο οποίος είναι ικανός να προβλέψει ικανοποιητικά όλους τους επιμέρους προτεινόμενους χωρικούς δείκτες και ως εκ τούτου δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των επιμέρους παραγόντων – δεικτών. Οι ψυχολόγοι αποδέχονται ότι η χωρική ικανότητα αποτελείται από διάφορους διακριτούς, αλλά αλληλένδετους παράγοντες, χωρίς ωστόσο να είναι ξεκάθαρες οι κατηγορίες (παράγοντες), αφού αφενός δεν υπάρχει μία συγκεκριμένη γενικά αποδεκτή κατηγοριοποίηση και αφετέρου εξαρτάται κάθε φορά από τα ερωτηματολόγια που συντάσσονται για κάθε έρευνα. Κοινό χαρακτηριστικό αρκετών ερευνών είναι η συμφωνία ύπαρξης δυο βασικών παραγόντων: α) της οπτικοποίησης του χώρου (spatial visualization) και β) του παράγοντα του προσανατολισμού (spatial orientation) των σχέσεων στο χώρο (στους McGee, 1979; Gilmartin & Patton, 1984, όπως αναφέρεται στην Καλογήρου (2013); Clements, & Sarama, 2007).

Σε μια προσπάθεια διαχωρισμού των δυο κατηγοριών διαπιστώνεται ότι η χωρική οπτικοποίηση απαιτεί τη νοερή ανασύσταση ενός σχήματος μέσω χειρισμού ή νοερής περιστροφής των μερών του, ενώ ο χωρικός προσανατολισμός απαιτεί την αποδοχή του αντικειμένου ως σύνολο (Cakmak, Isiksal, & Koc, 2014). Η θέση δε του αντικειμένου ή του παρατηρητή είναι αυτή που διαφοροποιεί χωρικό προσανατολισμό και περιστροφή σύμφωνα με τους Xistouri & Pitta-Pantazi (2006).

Σύμφωνα με τους Linn & Petersen (1985) οι σχετικές έρευνες διαφέρουν τόσο ως προς την οπτική όσο και ως προς το στόχο. Σε κάποιες μελέτες η οπτική εντοπίζεται στη σύγκριση της χωρικής ικανότητας διαφορετικών πληθυσμών (ως προς φύλο, ηλικία, επίπεδο μαθηματικής ικανότητας), σε κάποιες άλλες στόχος είναι μέσω δοκιμίων με χωρικά έργα να προσδιοριστούν οι χωρικοί παράγοντες, ενώ σε άλλες σκοπός είναι είτε ο προσδιορισμός των διαδικασιών που, αν και χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση έργων χωρικής ικανότητας, ωστόσο εμφανίζουν διαφορετική απόδοση, είτε ο προσδιορισμός των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός έργου χωρικής ικανότητας ανάμεσα στους λύτες. Οι παραπάνω τέσσερις οπτικές φανερώνουν την πολυπλοκότητα αυτής της περιοχής.

Η προσπάθεια αναζήτησης των επιμέρους παραγόντων της χωρικής ικανότητας έδωσε ένα μεγάλο φάσμα από αυτές (Ekstrom, French, & Harman, 1976; Lohman, 1979; Carroll, 1993). Μεταξύ των πλέον σημαντικών είναι η οπτικοποίηση (αναδίπλωση χαρτιού ή η ανάπτυξη επιφανειών), οι χωρικές σχέσεις (ταχύτητα στο χειρισμό απλών οπτικών σχημάτων), οι νοερές περιστροφές (το υποκείμενο να φανταστεί πώς μια σειρά θα εμφανιζόταν από μια διαφορετική οπτική γωνία) και ο χωρικός προσανατολισμός. Ο Thurstone (1950, όπως αναφέρεται σε Jones & Tzekaki (2016)) αναγνώρισε τρεις πτυχές της χωρικής ικανότητας: τις χωρικές σχέσεις, την οπτικοποίηση και το χωρικό προσανατολισμό. Ο Carroll (1993) επισημαίνει πως η νοητική περιστροφή συχνά δεν αναγνωρίζεται ως ξεχωριστός παράγοντας. Ο McGee (1979) ορίζει πέντε στοιχεία των χωρικών δεξιοτήτων: χωρική αντίληψη, χωρική οπτικοποίηση, νοητικές περιστροφές, νοητικές σχέσεις και χωρικός προσανατολισμός. Αυτές αναφέρονται στην ικανότητα του ατόμου να απεικονίζει ένα σχήμα στο οποίο υπάρχει μετακίνηση μεταξύ των μερών του, να κατανοεί τις νοητικές μετακινήσεις σε τρεις διαστάσεις, να χειρίζεται τα αντικείμενα στη φαντασία του, να φαντάζεται την περιστροφή ενός απεικονιζόμενου αντικειμένου, να φαντάζεται το (ξε)δίπλωμα ενός στερεού, να φαντάζεται αλλαγές θέσης αντικειμένων στο χώρο και τέλος, να χειρίζεται ή να μετασχηματίζει μια εικόνα.

Οι Linn και Petersen (1985) χωρίζουν, όπως έχει ήδη αναφερθεί, την χωρική ικανότητα σε τρεις κατηγορίες, την αντίληψη του χώρου, την νοερή περιστροφή και την οπτικοποίηση. Η πρώτη κατηγορία, αναφέρεται στη χωρική σχέση με βάση τον προσανατολισμό του σώματος του ατόμου και κάνοντας χρήση κιναισθητικών διαδικασιών. Η δεύτερη κατηγορία είναι η νοερή διαδικασία μετακίνησης και αναδίπλωσης ενός αντικειμένου στο χώρο. Τέλος, η τρίτη κατηγορία της οπτικοποίησης, αναφέρεται σε έργα πολύπλοκου, αναλυτικού και σταδιακού χειρισμού των πληροφοριών που παρουσιάζονται στο χώρο. Τα υποκείμενα θα πρέπει να αναπαραστήσουν νοερά το αντικείμενο του χώρου και στη συνέχεια να το διπλώσουν νοερά, κρατώντας, όμως, σταθερή την αντίληψή τους για το πού βρίσκεται το κάθε χαρακτηριστικό του εκάστοτε αντικειμένου πριν και μετά την αναδίπλωση.

Ο Maier (1996) εξέτασε τη χωρική ικανότητα χωρίζοντάς την σε πέντε παράγοντες: χωρική αντίληψη, οπτικοποίηση, νοερή περιστροφή, χωρικές σχέσεις και χωρικός προσανατολισμός. Οι Bodner & Guay (1997) επισημαίνουν πως ο χωρικός προσανατολισμός έχει περιγραφεί ως το μέτρο της ικανότητας του ατόμου να μην επηρεάζεται από τις αλλαγές στον προσανατολισμό των οπτικών ερεθισμάτων, και άρα περιλαμβάνει μόνο μία νοητική περιστροφή του σχήματος. Οι Jones & Tzekaki (2016) συνόψισαν πως η έρευνα στον τομέα των χωρικών δυνατοτήτων υποδηλώνει χαμηλή ανάπτυξη δεξιοτήτων σχετικών με το χωρικό προσανατολισμό, τις χωρικές σχέσεις και τους μετασχηματισμούς, καθώς και την κατανόηση των διαστάσεων και των τοποθεσιών, δηλώνοντας με αυτό τον τρόπο τέσσερις παράγοντες χωρικής ικανότητας. Η κατηγοριοποίηση αυτή ακολουθείται και στην παρούσα μελέτη.

1.5.2 Τεστ Χωρικής Ικανότητας

Κατά καιρούς έχουν προταθεί πολλά δοκίμια για την διερεύνηση της χωρικής ικανότητας ή κάποιων επιμέρους συνιστωσών αυτής. Ωστόσο, δεν υπάρχει ένα ολοκληρωμένο τεστ που να την αξιολογεί στο σύνολο της. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές ανασκοπήσεις αυτών των μελετών. Στη συνέχεια πρόκειται να παρουσιαστούν τα πιο γνωστά και ευρέως χρησιμοποιούμενα από τα δοκίμια αυτά.

Διακρίνονται αρκετά τεστ που προσδιορίζουν το δισδιάστατο προσανατολισμό και τη νοητή περιστροφή αντικειμένων, όπως το τεστ «Περιστροφής Καρτών» (Card Rotation Test), οι «Κρυμμένες Φιγούρες και Κρυμμένα Μοτίβα» (Hidden Figures – Hidden Patterns), η δισδιάστατη χωρική οπτικοποίηση «Σύνθεση Σχημάτων» (Paper Form Board), ενώ υπάρχουν και πιο σύνθετα τεστ που εμπλέκουν περισσότερων των μια ικανοτήτων, όπως το τεστ «Αναπτύγματα Σχημάτων» (Surface Development) που αφορά στην τρισδιάστατη νοητή περιστροφή και σύνθεση επιφανειών. Όλα τα παραπάνω συμπεριλαμβάνονται στο ETS kit (Ekstrom 1976, όπως αναφέρεται στους Κάβουρας και συνεργάτες, 2016).

Η Sjolinder (1998) έκανε μια προσπάθεια ομαδοποίησης των χωρικών τεστς, που υπήρχαν εκείνη τη στιγμή, βασισμένη αποκλειστικά στην κατηγοριοποίηση των χωρικών ικανοτήτων βάσει της μελέτης των Linn and Petersen (1985). Ως τεστ της χωρικής αντίληψης (μέτρηση ικανότητας εύρεσης χωρικών σχέσεων βάσει του προσανατολισμού του σώματος του συμμετέχοντα) λαμβάνει το τεστ

Γραμμής και Πλαισίου (Rod and Frame Test των Witkin & Asch). Ένα άλλο γνωστό τεστ χωρικής αντίληψης είναι το τεστ «Επίπεδο Νερού» (Water Level) από το «Water Level Test (WLT)» των Piaget & Inhelder (1956, όπως αναφέρεται στους Γαγάτσης & Καλογήρου, 2013). Ως τεστ νοερής περιστροφής (ικανότητα των συμμετεχόντων να περιστρέψουν γρήγορα και με ακρίβεια μια δισδιάστατη ή τρισδιάστατη εικόνα) η Sjolinder (1998) θεωρεί το τεστ Περιστροφής Καρτών (Cards Rotations Test), το τεστ Γενικών Νοερών Περιστροφών (Generic Mental Rotations Test των Voyer, Voyer, και Bryden) και το τεστ Νοερών Περιστροφών (Mental Rotations Test των Vandenberg και Kuse). Τέλος, ως τεστ χωρικής οπτικοποίησης (αναλυτική σκέψη σε βήματα) θεωρεί το αναθεωρημένο τεστ της Μινεσότα (Revised Minnesota Paper Form Board Test – RMPFBT των Likert και Quasha), το τεστ Όμοιων Κύβων (Identical Blocks Test του Stafford, 1961), το τεστ Διπλώματος Χαρτιού (Paper Folding Test) και το τεστ Διαφορικής Ικανότητας (Differential Aptitude Test των Bennett, Seashore και Wesman).

Τα παραπάνω τεστ, όπως επισημαίνουν οι Hegarty et al. (2002), έχουν δημιουργηθεί κυρίως από επιστήμονες που ασχολούνται με την κοινωνική ψυχολογία, προκειμένου να μετρήσουν τη χωρική σκέψη και αυτό, προφανώς, έχει ως αποτέλεσμα να προσδιορίζουν τις χωρικές ικανότητες, υπό το στενό πρίσμα της ψυχολογίας και όχι υπό το ευρύ φάσμα της χωρικής σκέψης. Αξίζει να σημειωθεί πως τα περισσότερα από αυτά τα τεστ είναι πολλαπλής επιλογής ή σωστού λάθους και έτσι ο ερευνητής δεν επεμβαίνει στη διαδικασία συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Συνεπώς, τα τεστ αυτά είναι περισσότερο κατάλληλα για την κατηγοριοποίηση των χωρικών δεξιοτήτων ενός ατόμου και όχι για τον προσδιορισμό της χωρικής του σκέψης.

Ένα άλλο τεστ που έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές μελέτες, συμπεριλαμβανομένης της παρούσης, είναι το τεστ «Προσανατολισμός Αντικειμένων στο Χώρο» (Object Perspective) των Kozhevnikov και Hegarty (2001). Το τεστ στην παρούσα μελέτη έχει τροποποιηθεί και παρουσιάζεται στη συνέχεια σε διαφορετικό γεωγραφικό πλέον πλαίσιο. Ένα άλλο κλασσικό τεστ είναι αυτό της νοερής περιστροφής, γνωστό σαν Purdue Visualization of Rotation Test (PVROT), όπου απαιτείται η αναγνώριση του τρόπου περιστροφής δοθέντος σχήματος και στη συνέχεια εφαρμογή της ίδιας περιστροφής σε άλλο σχήμα. Ο εξεταζόμενος δεν πρέπει να σημειώσει τίποτα πάνω στα σχήματα, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι η περιστροφή έγινε νοερά.

Ο Goluccia & Louse (2004) έκαναν μια προσπάθεια ομαδοποίησης των τεστ αίσθησης προσανατολισμού στο χώρο σε τέσσερις κατηγορίες, όπως τεστ θέσεως, εύρεση πορείας, εκτίμηση απόστασης και τέλος, μελέτη και χρήση χάρτη.

Ο Olkun (2003) προτείνει πως για την αξιολόγηση των χωρικών σχέσεων ενδείκνυνται τα τεστ: MGMP, Spatial Visualization Test, Primary Mental Abilities Test, French Reference Kit, τα οποία αποτελούνται από απλά έργα, που περιλαμβάνουν δισδιάστατη νοερή περιστροφή, σύγκριση κύβων και τρισδιάστατη νοερή περιστροφή. Ενώ, ο ίδιος επισημαίνει πως για τον έλεγχο της χωρικής οπτικοποίησης απαιτούνται πιο δύσκολα έργα όπως δίπλωμα χαρτιού, ανάπτυξη επιφάνειας, δισδιάστατες και τρισδιάστατες μετατροπές (Purdue Spatial Visualization Test, Minnesota Paper Form Board, Differential Aptitude Test, French Reference Kit). Επίσης, προτείνει ένα τεστ Χωρικής Οπτικοποίησης (TSV) το οποίο αποτελείται από 29 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, που αφορούν στη δισδιάστατη γεωμετρία με ερωτήσεις στα χωρικά έργα, στα χωρικά-αριθμητικά έργα, στα έργα νοερής περιστροφής και στα έργα μέτρησης επιφάνειας. Πρόκειται για ένα συνδυασμό χωρικών ικανοτήτων και γεωμετρικών – μαθηματικών. Σε αυτές στηρίχθηκε και το τεστ που πρότειναν το 2014 οι Cakmak, Isiksal & Koc.

Ένα άλλο τεστ που με κάποια παραλλαγή έχει χρησιμοποιηθεί στην παρούσα μελέτη είναι το Revised Minnesota Paper Form Board Test (RMPFBT), το οποίο έχει σχεδιαστεί για την αξιολόγηση της χωρικής οπτικοποίησης και καθορίζει τις ικανότητες που απαιτούνται για την οπτικοποίηση και το χειρισμό αντικειμένων στο χώρο (στην περίπτωση της μελέτης θεωρείται ότι ανήκει στις χωρικές σχέσεις και συγκεκριμένα στο μετασχηματισμό στο επίπεδο: Ανάλυση). Χρησιμοποιεί γεωμετρικά σχήματα και ζητά από το μαθητή να επιλέξει ποιο από τα σχήματα αντιστοιχεί στο διαχωρισμένο σχήμα, εάν αυτό συναρμολογηθεί. Θεωρείται έγκυρος δείκτης των οπτικοχωρικών ικανοτήτων των μαθητών σε πεδία όπως η τέχνη, ο σχεδιασμός και η μηχανολογία. Ο μαθητής οφείλει να χειριστεί νοερά το πρόβλημα, αν και η Sjölinder (1998) δεν εξετάζει τη νοερή περιστροφή παρά την αντίθετη άποψη άλλων ερευνητών.

Από όλα τα παραπάνω, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως για την ανάπτυξη ενός τεστ διερεύνησης της χωρικής ικανότητας, θα πρέπει αρχικά να καταγραφούν όλες εκείνες οι δεξιότητες, οι οποίες απαρτίζουν τη χωρική ικανότητα που θέλει ο εκάστοτε ερευνητής να διερευνήσει. Να επιλέξει ποιούς από τους παραπάνω ορισμούς θα χρησιμοποιήσει, καταλήγοντας στο λειτουργικό ορισμό της δικής του μελέτης, και στη συνέχεια να αντλήσει από την βιβλιογραφία κάποιο από τα ήδη υπάρχοντα τεστ ή να το διαφοροποιήσει ή ακόμη και να προτείνει ένα νέο δικό του. Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιασθούν οι λειτουργικοί ορισμοί που εμπλέκονται στους άξονες της χωρικής ικανότητας της παρούσας μελέτης και στη συνέχεια πάνω σε αυτές θα δομηθεί το προτεινόμενο δοκίμιο διερεύνησης των χωρικών δεξιοτήτων.

1.5.3 Ομαδοποίηση

Έχει επισημανθεί πως ήδη από τις αρχές του 20ου αιώνα οι ψυχολόγοι διαπίστωσαν την ύπαρξη ενός ξεχωριστού παράγοντα νοημοσύνης πέρα από τους μέχρι τότε λεκτικούς και αριθμητικούς, του χωρικού, ο οποίος μάλιστα αποτελεί προγνώστη επιτυχίας σε αντικείμενα τύπου STEM. Πέρα από την αρχική επιβεβαίωση της ύπαρξης αυτού του χωρικού παράγοντα, στη συνέχεια το ενδιαφέρον στράφηκε προς τη διερεύνηση της δομής του, κάνοντας χρήση της παραγοντικής ανάλυσης (Cronbach, 1970 όπως αναφέρεται στην Jaeger, 2015), γεγονός που οδήγησε στο συμπέρασμα πως η χωρική ικανότητα αποτελείται από πλήθος επιμέρους συσχετιζόμενων μεταξύ τους υποπαραγόντων (Lohman, 1979, McGee, 1979), κάποιοι από τους οποίους περιγράφονται στην 1.5.1. παράγραφο. Ανάμεσα σε άλλα μελετήθηκε από αρκετούς ερευνητές και η ομαδοποίηση των υποπαραγόντων αυτών, καθώς και οι ομαδοποίηση του πληθυσμού που εξετάζεται ως προς τη χωρική του ικανότητα. Ενδεικτικές σχετικές μελέτες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

1.5.3.1 Ομαδοποίηση Παραγόντων Χωρικής Ικανότητας

Οι Hegarty και Waller (2005) παρέχουν μια εμπεριστατωμένη ανασκόπηση των προσπαθειών ομαδοποίησης των παραγόντων χωρικής ικανότητας ξεκινώντας από μελέτες που κάνουν χρήση της παραγοντικής ανάλυσης και προχωρώντας με πιο πρόσφατες γνωστικές αναλύσεις των τεστ που δημιουργήθηκαν από ψυχολόγους. Υποστηρίζουν ότι η επιτυχία σε χωρικά έργα επηρεάζεται έντονα από μη χωρικούς παράγοντες όπως οι στρατηγικές και η ικανότητα εκτέλεσης – επεξεργασίας εντολών. Η γνώση τέτοιων παραγόντων πρέπει να ενσωματωθεί στην έρευνα σχετικά με τη χωρική λειτουργία, ώστε να καταστεί δυνατή η πλήρης κατανόηση.

Οι Linn & Kyllonen (1981, όπως αναφέρεται στους Linn & Petersen (1985)), χρησιμοποιώντας παραγοντική ανάλυση έδειξαν ότι ο παράγοντας χωρικού προσανατολισμού θα μπορούσε να διαχωριστεί από παράγοντες τύπου Embedded Figures Test (EFT). Στην ίδια εργασία αναφέρεται πως οι Horn and Cattell (1966) διέκριναν την χωρική οπτικοποίηση, κάνοντας χρήση της παραγοντικής ανάλυσης με περιστροφή (oblique rotation). Οι Kozhevnikov & Hegarty (2001), συγκρίνοντας τα εναλλακτικά μοντέλα με μια παραγοντική ανάλυση επιβεβαιωτικού παράγοντα, διαπίστωσαν πως η ικανότητα νοητικής περιστροφής και χειρισμού ενός φανταστικού αντικειμένου (όπως μετράται με τα τεστ χωρικής οπτικοποιήσης και χωρικών σχέσεων) και η ικανότητα εκτίμησης εκ νέου του προσανατολισμού του ιδίου του σώματος σε νοερό επίπεδο (reorient the imagined self, όπως μετράται από τεστ προοπτικής και οπτικής γωνίας) είναι χωριστές χωρικές ικανότητες. Οι Hegarty & Waller (2005), ωστόσο, επισήμαναν πως αν και ανήκουν σε άλλο παράγοντα (στατιστικώς) οι συγκεκριμένες ικανότητες του προσανατολισμού και της νοερής περιστροφής εμφανίζουν υψηλές τιμές συντελεστή συσχέτισης, γεγονός που συνδέεται εν μέρει με την αδυναμία πλήθους μελετών να βρούνε ισχυρά αποδεικτικά στοιχεία διαχωρισιμότητας αυτών των παραμέτρων.

Η Παναούρα (2007) εφάρμοσε παραγοντική ανάλυση τόσο στα έργα του δοκιμίου που συνδέονται με τη χωρική ικανότητα όσο και σε αυτά που συνδέονται με τη γεωμετρική, με στόχο την ομαδοποίηση τους. Η χωρική ικανότητα φαίνεται να ομαδοποιείται σε τρεις παράγοντες, τους οποίους κατονόμασε νοητικής περιστροφής, χειρισμού νοητικών εικόνων και συντονισμού προοπτικής, οι οποίοι και ερμηνεύουν το 48% της διασποράς. Η ομαδοποίηση των αρκετών σε πλήθος γεωμετρικών έργων του δοκιμίου που, αρχικά, δόθηκε στους μαθητές οδήγησε σε 19 τελικά παράγοντες, οι οποίοι αποτέλεσαν, στη συνέχεια, τις μεταβλητές, που χρησιμοποιήθηκαν για τη διενέργεια επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, για τον καθορισμό της δομής της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται έργα με γεωμετρικά σχήματα. Για τα παιδιά μικρότερης ηλικίας (δημοτικού) ο σημαντικότερος χωρικός δείκτης πρόβλεψης της επίδοσης στα έργα γεωμετρίας είναι ο χειρισμός νοητικών εικόνων, ενώ στους μαθητές γυμνασίου η νοητική περιστροφή, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί με βάση τα ευρήματα ερευνών που αναφέρονται στη διαφοροποίηση της ικανότητας των ατόμων για νοητικές περιστροφές με την αύξηση της ηλικίας (Band & Kok, 2000, όπως αναφέρεται σε Παναούρα, 2007).

Οι Lee & Bednarz (2012) εφάρμοσαν την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, προκειμένου, αφενός, να εντοπίσουν τα επιμέρους συστατικά χωρικής σκέψης που εμπεριέχονται στις υπάρχουσες κατηγορίες του χωρικού τεστ STAT (συνδυασμός χωρικών και γεωγραφικών ικανοτήτων) και, αφετέρου, να επιβεβαιώσουν την εγκυρότητά του. Τα χωρικά συστατικά, που εντοπίστηκαν μέσω της ανάλυσης παραγόντων, εν μέρει συνέπεσαν με τις χωρικές έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη των ερωτημάτων, που συνθέτουν το STAT, και με τα συστατικά της χωρικής σκέψης, που άλλοι ερευνητές έχουν κατά καιρούς υποδείξει.

Τέλος, οι Γαγάτσης και Καλογήρου (2013) αναφέρουν μερικές από τις μελέτες που ασχολήθηκαν με τη δομή της χωρικής ικανότητας, όπως αυτή προέκυψε μέσα από μελέτες ανάλυσης παραγόντων (Paivio, 1971: McGee, 1979: Linn & Petersen, 1985: Lohman, 1993: Kimura, 1999: Burton & Fogarty, 2003: Colom, Contreras, Botella & Santacreu, 2002).

1.5.3.2 Ομαδοποίηση ως προς το επίπεδο Χωρικής Ικανότητας

Σύμφωνα με τον Wheatley (1998), «η χωρική ικανότητα βρίσκεται στην καρδιά της απόκτησης σημασίας και νοήματος στα μαθηματικά» (σ. 35, όπως αναφέρεται σε Παναούρα, 2007). Οι χωρικές δεξιότητες καθιστούν τους μαθητές ικανούς να ταξινομούν, να αναλύουν και να δομούν πληροφορίες. Οι Wheatley & Reynolds (1999) υποστηρίζουν ότι η ικανότητα κατασκευής και μετασχηματισμού νοερών εικόνων οδηγεί σε ευελιξία και βοηθά στη γεωμετρία, σε αριθμητικά πλαίσια και στην επίλυση προβλήματος. Υποστηρίζεται, επίσης, ότι τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική ικανότητα είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English & Warren, 1995). Ωστόσο, οι ικανότητες αυτές δεν είναι ιδιαίτερα βοηθητικές στην μετάφραση του προβλήματος σε διαγραμματική ή εικονική αναπαράσταση (Booth & Thomas, 1999). Μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής οπτικοποίησης και χαμηλό επίπεδο λεκτικής ικανότητας μετέφραζαν το πρόβλημα σε εικόνα καλύτερα από τους μαθητές με χαμηλό επίπεδο χωρικής οπτικοποίησης (Fennema & Tartre, 1985).

Σε ένα πιο ευρύ επίπεδο, οι Tai et al. (2003) διερεύνησαν κατά πόσο υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα λογικής σκέψης και στη χωρική ικανότητα. Στόχος ήταν να εξεταστεί πώς η χωρική ικανότητα επηρεάζει τη λογική σκέψη και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Τελικά, κατέληξαν πως οι υψηλών χωρικών ικανοτήτων μαθητές σημείωσαν υψηλότερες τιμές στην ικανότητα λογικής σκέψης. Στο ίδιο συμπέρασμα σε σχέση με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος κατέληξαν ένα χρόνο νωρίτερα οι Kozhevnikon, Hegarty & Mayer (2002). Οι ερευνητές έδειξαν πως άτομα με υψηλή χωρική ικανότητα οπτικοποίησης παρουσιάζουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος, διότι είναι πιο πιθανό να προβούν στην κατασκευή διαγραμμάτων, ή να κάνουν μια εικονική αναπαράσταση των χωρικών σχέσεων, που περιγράφονται στο δοθέν πρόβλημα. Παλαιότερες μελέτες είχαν καταλήξει πως οι μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής ικανότητας εμφάνισαν μεγαλύτερο εύρος στρατηγικών κατά την επίλυση προβλήματος, αν και τελικά τόσο αυτοί όσο και οι χαμηλού επιπέδου χωρικών ικανοτήτων μαθητές τείνουν να αλλάζουν στρατηγικές και να μην επιμένουν σε αυτές που επέλεξαν αρχικά (Kyllonen et. al, 1981, όπως αναφέρεται σε Mohler, 2009).

Οι Velez, Silver & Tremaine (2005) χώρισαν αρχικά το δείγμα τους σε δυο κατηγορίες, υψηλών χωρικών ικανοτήτων και χαμηλών χωρικών ικανοτήτων, στηριζόμενοι στα αποτελέσματά τους στο τεστ Δίπλωσης Χαρτιού (Paper Folding test). Από την μελέτη τους συμπέραναν ότι οι υψηλών χωρικών ικανοτήτων φοιτητές μπορούν να δημιουργήσουν σαφείς νοητικές εικόνες αντικειμένων που είναι σημαντικά πιο πολύπλοκες από τις αντίστοιχες που δημιουργούν οι χαμηλών χωρικών ικανοτήτων. Επιπλέον, οι πρώτοι είναι καλύτεροι στην κατανόηση των προβολών με περισσότερες «κρυμμένες» επιφάνειες.

Η Παναούρα (2007) κατέληξε στο συμπέρασμα πως μαθητές με υψηλές επιδόσεις σε δοθέν δοκίμιο γεωμετρίας ανήκουν ταυτόχρονα στην ομάδα μαθητών με υψηλό επίπεδο χωρικών ικανοτήτων (εξαίρεση αποτελούν οι μαθητές Δ’ Δημοτικού που μπορεί να έχουν και μέτριο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων). Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι το αντίθετο δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, δεδομένου ότι οι μαθητές με υψηλό επίπεδο χωρικής ικανότητας δεν έχουν κατ’ ανάγκη επιτύχει τις καλύτερες επιδόσεις στο δοκίμιο γεωμετρίας.

Οι Okamoto Y., Weckbacher l. & Hallowell D. (2014) εφάρμοσαν διάφορα από τα γνωστά τεστ χωρικής ικανότητας σε 114 μαθητές Λυκείου σε συνδυασμό με ένα τεστ γεωμετρίας, οι ερωτήσεις του οποίου προέρχονταν από εγκεκριμένη πηγή και συμβάδιζε με την ηλικία των μαθητών (το μαθησιακό επίπεδο). Από την μελέτη των αποτελεσμάτων των μαθητών στα τεστ χωρικής ικανότητας διέκριναν δυο κατηγορίες, αυτή των υψηλών και αυτή των χαμηλών χωρικών ικανοτήτων. Στο τεστ της γεωμετρίας οι διαφορές μεταξύ των δυο ομάδων ήταν σημαντικές με, προφανώς, υψηλότερες βαθμολογίες αυτές των υψηλών χωρικών ικανοτήτων μαθητών. Οι ίδιοι μαθητές ήταν και υψηλών ικανοτήτων στην άλγεβρα, ωστόσο το τεστ δεν ήταν στατιστικώς σημαντικό. Τόσο στο δισδιάστατο όσο και στον τρισδιάστατο χώρο οι μαθητές με υψηλές χωρικές ικανότητες υπερτερούσαν έναντι των χαμηλών, αλλά στον 3D οι διαφορές των δυο ομάδων δεν ήταν στατιστικώς σημαντικές.

1.5.4 Χωρική Ικανότητα και Μαθηματικά

Ήδη από το 1977 οι Fennema & Sherman είχαν αναφέρει πως η χωρική ικανότητα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ανθρώπινη σκέψη και συσχετίζεται θετικά με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και με την επίδοση στα μαθηματικά και τη γεωμετρία, μελετώντας κυρίως την παράμετρο της οπτικοποίησης. Η οπτικοποίηση στο χώρο συσχετίζεται με την επιτυχία στα μαθηματικά, ενώ ο προσανατολισμός στο χώρο συσχετίζεται στενά με την αίσθηση της κατεύθυνσης (McGee, 1979). Η χωρική ικανότητα συσχετίστηκε περισσότερο με την ικανότητα στη γεωμετρία παρά στην άλγεβρα. Παρ’ όλα αυτά, υπάρχει διάχυτη η πεποίθηση πως οι οπτικές προσεγγίσεις μπορούν να αποτελέσουν μία ισχυρή εισαγωγή για τις πολύπλοκες γενικεύσεις των μαθηματικών, παρέχοντας εμπειρικές και διαισθητικές αποδείξεις στο μαθητή

(Olkun & Knaupp, 1999). Οι τελευταίοι επισημαίνουν πως τα παιδιά μέσα από τη διδασκαλία κατανοούν και αναπαριστούν σχήματα τριών διαστάσεων, που προηγουμένως τα θεωρούσαν ως δισδιάστατα. Επομένως, η εμπειρία των μαθητών με τους κύβους (κατασκευή με κύβους, αναπαραστάσεις κύβων σε δισδιάστατα σχέδια και ερμηνεία) είναι πολύ βοηθητική για τη βελτίωση της επίδοσής τους στα χωρικά έργα και, ως επέκταση, της χωρικής ικανότητάς τους. Η αντίληψη πως τα μαθηματικά συνδέονται περισσότερο με έννοιες χωρικές και γεωμετρικές (Olkun & Knaupp, 1999) προκάλεσε αύξηση του ενδιαφέροντος προς τα οπτικά μοντέλα και τις αναπαραστάσεις.

Οι χωρικές ικανότητες μπορούν να διδαχθούν, ωστόσο, η διδασκαλία αυτή πρέπει να είναι μακροχρόνια, προκειμένου να είναι αποτελεσματική. Ένα ζήτημα που εξακολουθεί να απασχολεί την επιστημονική κοινότητα είναι η μέχρι σήμερα παραμελημένη περιοχή της αλληλεπίδρασης της οπτικοποίησης και της διδακτικής των μαθηματικών. Η αποτελεσματική παιδαγωγική, που μπορεί να ενισχύσει τη χρήση και τη δύναμη της οπτικοποίησης στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Woolner, 2004 αναφορά σε Presmeg, 2006), είναι ίσως ένα πολύ σημαντικό σύγχρονο ερευνητικό πρόβλημα, δεδομένου ότι λιγοστές μελέτες έχουν αντιμετωπίσει αυτό το θέμα. Παρόλα αυτά, η Presmeg (1991, αναφορά σε Presmeg, 2006) είχε ήδη αναφέρει από το 1991 στα αποτελέσματα της μελέτης της, την άποψη και μορφή που πρέπει να έχει μια σχολική τάξη, προκειμένου να διευκολυνθεί η μελέτη της οπτικοποίησης.

Πέρα από τους διαφορετικούς ορισμούς που μπορεί να έχουν δοθεί για τη χωρική ικανότητα, πλήθος ερευνών προσπάθησαν να βρουν τρόπους να τη συνδέσουν με τη δημιουργική και ανώτερης τάξης σκέψη τόσο στα μαθηματικά όσο και γενικά στην επιστήμη, καθώς και με τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά και τη γεωμετρία (βλέπε Kalogirou & Gagatsis, 2011 για μια εκτενή αναφορά στις μελέτες αυτές).

Οι χωρικές ικανότητες βρέθηκε ότι παρουσιάζουν βελτίωση με τη χρήση αληθινών μοντέλων και υπολογιστών (Ullman & Sorby, 1990; Miller, 1996), ενώ σε άλλη μελέτη κάτι τέτοιο δεν έγινε εμφανές (Zavotka, 1987; Sexton, 1992). Πιο πρόσφατα, διαπιστώθηκε βελτίωση των χωρικών ικανοτήτων στο χειρισμό αντικειμένων μέσω της χρήσης σχεδίων origami (Cakmak, Isiksal & Koc, 2014). Πλήθος μελετών καταλήγουν πως οι χωρικές ικανότητες παρουσιάζουν βελτίωση, εφόσον διδαχθούν στα παιδιά και εφαρμοσθεί κατάλληλη διδασκαλία. Επομένως δεν είναι κληρονομικές (Bishop, 1980; McGee, 1979; Olkun, 2003; Ullman & Sorby, 1990). Προφανώς, η μέθοδος της διδασκαλίας διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στο ποσοστό της βελτίωσης με πιο αποδοτικά τα βιωματικά, ενεργητικά (χρήση δραστηριοτήτων με αντικείμενα) και μέσω αλληλεπίδρασης μαθητών και δασκάλων περιβάλλοντα μάθησης (Dixon, 1997). Ο ίδιος διαπίστωσε πως οι ικανότητες περιστροφής και αντανάκλασης παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση με χρήση κατάλληλου προγράμματος στον υπολογιστή και μάλιστα σε πολύ μικρότερο χρόνο από μια συμβατική διδασκαλία.

Επομένως, τόσο οι προσεγγίσεις διδασκαλίας όσο και ο ίδιος ο εκπαιδευτικός αποτελούν σημαντικούς παράγοντες ανάπτυξης ή μη των χωρικών ικανοτήτων των μαθητών (Bishop, 1980), όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Mitchelmore (1980) ότι οι διαφορές στις προσεγγίσεις διδασκαλίας ευθύνονταν για τις διαφορές στην ικανότητα τρισδιάστατης σχεδίασης που βρήκε μεταξύ των μαθητών από Ινδία, Αμερική και Αγγλία (στο Bishop, 1980). Οι Fennema & Sherman (1977) επεσήμαναν, επίσης, τη διδασκαλία, όταν αναφέρθηκε πως οι διαφορές ανάμεσα στις χωρικές ικανότητες αγοριών και κοριτσιών, ενδεχομένως να οφείλονται στον αριθμό των «χωρικών» μαθημάτων που έχουν επιλέξει τα ίδια να παρακολουθήσουν. Τα αγόρια τείνουν να επιλέγουν περισσότερα μαθήματα στο σχολείο που σχετίζονται με το «χώρο» και αυτό θα μπορούσε να είχε ως αποτέλεσμα την υψηλότερη βαθμολογία τους στα χωρικά τεστ. Εξάλλου, οι Doyle, Voyer & Cherney (2012) διαπίστωσαν πως υπάρχει σχέση όχι μόνο με τα μαθήματα, που επιλέγει κάποιος, αλλά και με τις απλές καθημερινές πρακτικές που απαιτούν σε κάποιο βαθμό κάποια από τις χωρικές ικανότητες. Στη συνέχεια, συνέδεσαν τις πρακτικές αυτές στην παιδική ηλικία με τη χωρική απόδοση στην ενηλικίωση.

Η ικανότητα οπτικοποίησης στον τρισδιάστατο χώρο είναι άμεσα συνδεόμενη με την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζει τρισδιάστατα αντικείμενα και τις ιδιότητες τους, να αναπαριστούν και να συγκρίνουν 3D αντικείμενα βάσει των ιδιοτήτων τους και για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου των αντικειμένων αυτών. Ο Battista (2007) καταλήγει πως η ανάπτυξη της τρισδιάστατης αντίληψης των παιδιών είναι καθοριστική για τη γεωμετρία και άμεσα συνδεόμενη με την ικανότητα των εκπαιδευτικών να διδάξουν χωρικό συλλογισμό. Αντικείμενο μελέτης ήταν οι στρατηγικές που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί. Από την άλλη μεριά, οι Potari and Spiliotopoulou (2001) μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές παριστάνουν τα αναπτύγματα τρισδιάστατων αντικειμένων και πως αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των μερών του σχήματος, οι οποίες σύμφωνα με τον Mitchelmore (1980, στο Bishop (1980)), αποτελούν δεξιότητες πολύ σημαντικές και χρήσιμες στα μαθηματικά.

Επιπλέον, η μετάβαση από ένα τρισδιάστατο στερεό στη δισδιάστατη αναπαράστασή του κρίνεται από τους Stylianou et al. (1999) ιδιαίτερα σημαντική στα μαθηματικά και κυρίως στην κατανόηση των γεωμετρικών στερεών. Οι ίδιοι συμπέραναν πως η σκέψη των μαθητών για τα αναπτύγματα επηρεάζεται από την πολυπλοκότητα των γεωμετρικών στερεών, καθώς και ότι κάποια αναπτύγματα ενός δοσμένου στερεού μπορεί να θεωρούνται πιο δύσκολα. Η Mariotti (1989) υποθέτει ότι η κατασκευή του σωστού αναπτύγματος για ένα στερεό από τους μαθητές βασίζεται στο συνδυασμό μιας πολύπλοκης νοητικής αναπαράστασης του αντικειμένου με την ανάλυση των στοιχείων του (έδρες, κορυφές, ακμές) (αναφορά στους Stylianou et al., 1999).

Είναι γενικά αποδεκτό ότι η διδασκαλία και η μάθηση της τρισδιάστατης γεωμετρίας συνδέεται με τη χωρική και οπτική ικανότητα ενός ατόμου (Gutiérrez, 1996) και η ενσωμάτωση της οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου στη διδασκαλία της γεωμετρίας, ενδεχομένως να βελτιώσει τη μάθηση της (Christou et al., 2007).

Για αυτό το λόγο, τα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών διαφόρων χωρών τονίζουν τη σημασία ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης εννοιών του χώρου στη μαθηματική εκπαίδευση και συγκεκριμένα, εισηγούνται ότι η οπτικοποίηση των εννοιών στη δισδιάστατη και τρισδιάστατη γεωμετρία αποτελεί θεμελιώδη δεξιότητα την οποία πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές (NCTM, 2000). Η σημασία των χωρικών ικανοτήτων έχει επισημανθεί και σε άλλες επιστήμες, όπως η φυσική, η χημεία, η μηχανολογία, το σχέδιο (βλέπε Unal, 2005 για τις αντίστοιχες μελέτες όπως αναφέρεται στην Παναούρα, 2007).

Η χωρική ικανότητα έχει μεγάλη αξία σε επαγγέλματα τα οποία στηρίζονται στην ερμηνεία των πληροφοριών του περιβάλλοντα χώρου. Για παράδειγμα, για πολλά χρόνια τα τεστ για την αξιολόγηση των ικανοτήτων στο χώρο, χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς για να προβλέψουν την κλίση των υποψηφίων σε διάφορες κατηγορίες επαγγελμάτων, όπως η αεροπορία και η μηχανική (Olkun, 2003).

1.5.5 Χωρική Ικανότητα στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών

Το National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000) έχει από καιρό επιστήσει την προσοχή στην αναγκαιότητα ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου στη μαθηματική εκπαίδευση σε όλους τους τομείς του αναλυτικού προγράμματος. Εισηγείται, λοιπόν, την ανάπτυξη της θεμελιώδους δεξιότητας για τους μαθητές, της οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου στη δισδιάστατη και τρισδιάστατη γεωμετρία. Επιπλέον, για όλα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.5.3.2 σε σχέση με την ομαδοποίηση των μαθητών ως προς την χωρική ικανότητα, κρίνεται απαραίτητη η προσπάθεια ανάπτυξης της χωρικής ικανότητας ήδη από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Liedtke, 1995) μέσω ποικίλων δραστηριοτήτων και εξειδικευμένων προγραμμάτων. Τα Αναλυτικά προγράμματα πρέπει να περιέχουν δραστηριότητες χωρικής επίγνωσης για τη βελτίωση της χωρικής ικανότητας των μαθητών.

Στο ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στην Ελλάδα οι στόχοι που αφορούν σε διαδικασίες που σχετίζονται με τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, όπως ανάλυση και σύνθεση σχημάτων, περιστροφή, μεγέθυνση, σμίκρυνση, αλλαγή θέσης, είναι περιορισμένοι. Η εικόνα αυτή διαφοροποιείται λίγο με την εισαγωγή σε πιλοτικές σχολικές μονάδες Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας (μέχρι και Γ' Γυμνασίου) του πιλοτικού Αναλυτικού Προγράμματος του 2011. Ωστόσο, το πρόγραμμα δεν εφαρμόζεται πια.

Στο δημοτικό σχολείο, ήδη, από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού είχαν μπει δραστηριότητες με επικαλύψεις επιπέδων με σχήματα, ενώ οι περιστροφές, οι μετατοπίσεις και η συμμετρία ανήκουν στη θεματική περιοχή των μετασχηματισμών. Στην Τετάρτη εισάγονται τα ψηφιδωτά με τη χρήση μετασχηματισμών και στην Πέμπτη η ομοιοθεσία μέσω της μεγέθυνσης και τη σμίκρυνσης. Σε αυτές τις δυο τάξεις εκτελούν, επίσης, αναλύσεις και συγκρίσεις επιφανειών. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη σύνθεση και ανάλυση των σχημάτων σε μέρη καθ' όλη τη διάρκεια του δημοτικού.

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες σε πιο γενικευμένο επίπεδο. Η σπουδαιότητα της εμβάθυνσης σε θέματα χωρικά είναι εμφανής από το γεγονός ότι οι βασικές θεματικές περιοχές, γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά με το χώρο να αποτελεί μια από τις τρεις. Επιπρόσθετα, στα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής του χώρου αναφέρουν στις τροχιές έννοιες, όπως προσανατολισμός στο χώρο, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί και οπτικοποίηση. Στο πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών για το γυμνάσιο του 2011 αναφέρεται χαρακτηριστικά πως «η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη, που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρία, έχουν μεγάλη σημασία για τον άνθρωπο και αποκτούν στα προγράμματα σπουδών τα τελευταία χρόνια την ίδια σημασία με την αντίληψη των αριθμών και των νοερών πράξεων (Clements, & Battista, 1992)». Η επαφή των μαθητών με θέματα χωρικών ικανοτήτων σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης θα συμβάλλει θετικά στην καλλιέργεια τόσο μαθηματικών ικανοτήτων όσο και γεωμετρικών, αφού τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική ικανότητα είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English & Warren, 1995).

Σύμφωνα, εξάλλου, με τους Γαγάτση & Καλογήρου (2013) είναι φανερό ότι η εισαγωγή έργων χωρικής ικανότητας μπορεί να βελτιώσει την επίδοση των μαθητών στη γεωμετρία. Αυτή η βελτίωση φαίνεται να είναι διαφορετικού βαθμού στο δημοτικό και το γυμνάσιο. Αυτό συνεπάγεται ότι πιθανή εισαγωγή δραστηριοτήτων χωρικής ικανότητας στα Αναλυτικά Προγράμματα και στα σχολικά βιβλία για το δημοτικό και το γυμνάσιο πρέπει να γίνεται με διαφορετικό τρόπο.

1.6 Αναγκαιότητα νέας έρευνας

Από την μελέτη της βιβλιογραφίας διαπιστώθηκε ότι οι περισσότερες μελέτες της χωρικής ικανότητας περιορίζονται σε μικρότερες ηλικίες και λίγες καλύπτουν το ηλικιακό φάσμα της λογικής σκέψης κατά Piaget (12-18 ετών), κατά το οποίο η αντίληψη του χώρου αναπτύσσεται και το ένα μεγάλο μέρος των χωρικών ικανοτήτων δύναται να διερευνηθεί. Επιπλέον, οι περισσότερες από τις μελέτες περιορίζονται σε κάποιους από τους άξονες της χωρικής ικανότητας παραδείγματος χάριν οπτικοποίηση ή περιστροφή. Στην παρούσα μελέτη το ενδιαφέρον εστιάζεται σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου με στόχο να μελετηθούν τα χωρικά χαρακτηριστικά των μαθητών σε κάθε τάξη, καθώς και οι διαφορές μεταξύ τους.

Αξίζει να επισημανθεί ότι οι πολλοί και διαφορετικοί ορισμοί της χωρικής ικανότητας, που κατά καιρούς έχουν δοθεί από την επιστημονική κοινότητα, και οι διαφορετικοί παράγοντες, που την αποτελούν, δημιουργούν μια σύγχυση σε ένα νεο ερευνητή. Για τον λόγο αυτό, έπειτα από μια λεπτομερή μελέτη και καταγραφή των υπάρχοντων τεστ, προτείνεται ένα νέο δοκίμιο χωρικής ικανότητας, το οποίο ανταποκρίνεται στα χαρακτηριστικά και τις ανάγκες του δείγματος της μελέτης. Έτσι, γίνεται χρήση ενός ενιαίου ερωτηματολογίου με τέσσερις άξονες χωρικής ικανότητας και συνολικά έντεκα διαστάσεις αυτής, με στόχο να μελετηθεί όσο το δυνατόν εκτενέστερα αυτή η πολυδιάστατη έννοια.

Ένα άλλο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσας μελέτης είναι η εκ νέου ομαδοποιήσεις των μεταβλητών εισόδου, δηλαδή των διαστάσεων της χωρικής ικανότητας, μέσω στατιστικών μεθόδων και η διερεύνηση των διαφορών που βρέθηκαν σε σχέση με την ομαδοποίηση του προτεινόμενου δοκιμίου. Επιπλέον, γίνεται μια προσπάθεια να βρεθούν οι μεταβλητές με τη μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα, τόσο μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων όσο και με χρήση στατιστικής, με στόχο την μείωση της αρχικής διάστασης του προτεινόμενου δοκιμίου και ενσωμάτωση σε μελλοντικές εργασίες μόνο των απαραίτητων ερωτήσεων.

Το προτεινόμενο δοκίμιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όσο και στην τριτοβάθμια για τη διερεύνηση των χωρικών χαρακτηριστικών της ομάδας, η οποία το συμπληρώνει, ενώ μπορεί να αποτελέσει και πυρήνα για τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων, με στόχο την ενίσχυση της χωρικής ικανότητας, αφού έχει ήδη επισημανθεί πως βελτιώνεται με την εξάσκηση.

Κεφάλαιο 2ο

Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Spatial reasoning has always been a vital capacity for human action and thought, but has not always been identified or supported in schooling

(Whiteley, Sinclair & Davis, 2015, p. 3

όπως αναφέρεται στους Jones και Tzekaki, 2016)

Αν και κατά καιρούς έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί πληθώρα ορισμών για να περιγράψουν τη χωρική ικανότητα, δηλαδή την αντίληψη των εννοιών του χώρου, τόσο από ψυχολόγους όσο και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής παιδείας και της διδακτικής, δυστυχώς δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός (Πιττάλης. Μουσουλίδης και Χρήστου, 2006). Οι ίδιοι επισημαίνουν πως «υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί ορισμοί, όπως γνώση των εννοιών του χώρου, νοημοσύνη των εννοιών του χώρου, συλλογισμός και αντίληψη των εννοιών του χώρου (Lohman, 1988), ενώ οι Linn και Petersen (1985) ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως τη νοητική διεργασία που αντιλαμβάνεται, αποθηκεύει, ανακαλεί, δημιουργεί και επεξεργάζεται οπτικο-χωρικές εικόνες. Οι περισσότεροι, όμως, ερευνητές ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου μέσω παραγόντων που προκύπτουν από μελέτες ανάλυσης παραγόντων».

2.1 Σκοπός - Ερευνητικά Ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση των χωρικών ικανοτήτων που παρουσιάζουν οι μαθητές Β΄ Γυμνασίου – Β’ Λυκείου. Τα ερευνητικά ερωτήματα βάσει των οποίων σχεδιάστηκε η έρευνα είναι τα ακόλουθα:

1) Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητες των μαθητών;
    a. Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητές τους ως προς το χωρικό προσανατολισμό;
    b. Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητές τους ως προς τις χωρικές σχέσεις;
    c. Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητές τους ως προς τους χωρικούς μετασχηματισμούς και την περιστροφή;
    d. Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητές τους ως προς την κατανόηση των διαστάσεων και τοποθεσιών;
2) Πως ομαδοποιούνται οι μεταβλητές που περιγράφουν τη χωρική ικανότητα;
3) Πως ομαδοποιούνται οι μαθητές ως προς τις χωρικές τους ικανότητες;
4) Ποιες από τις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας και ποιες μεταβλητές από αυτές διαχωρίζουν τους μαθητές στις παραπάνω ομάδες;

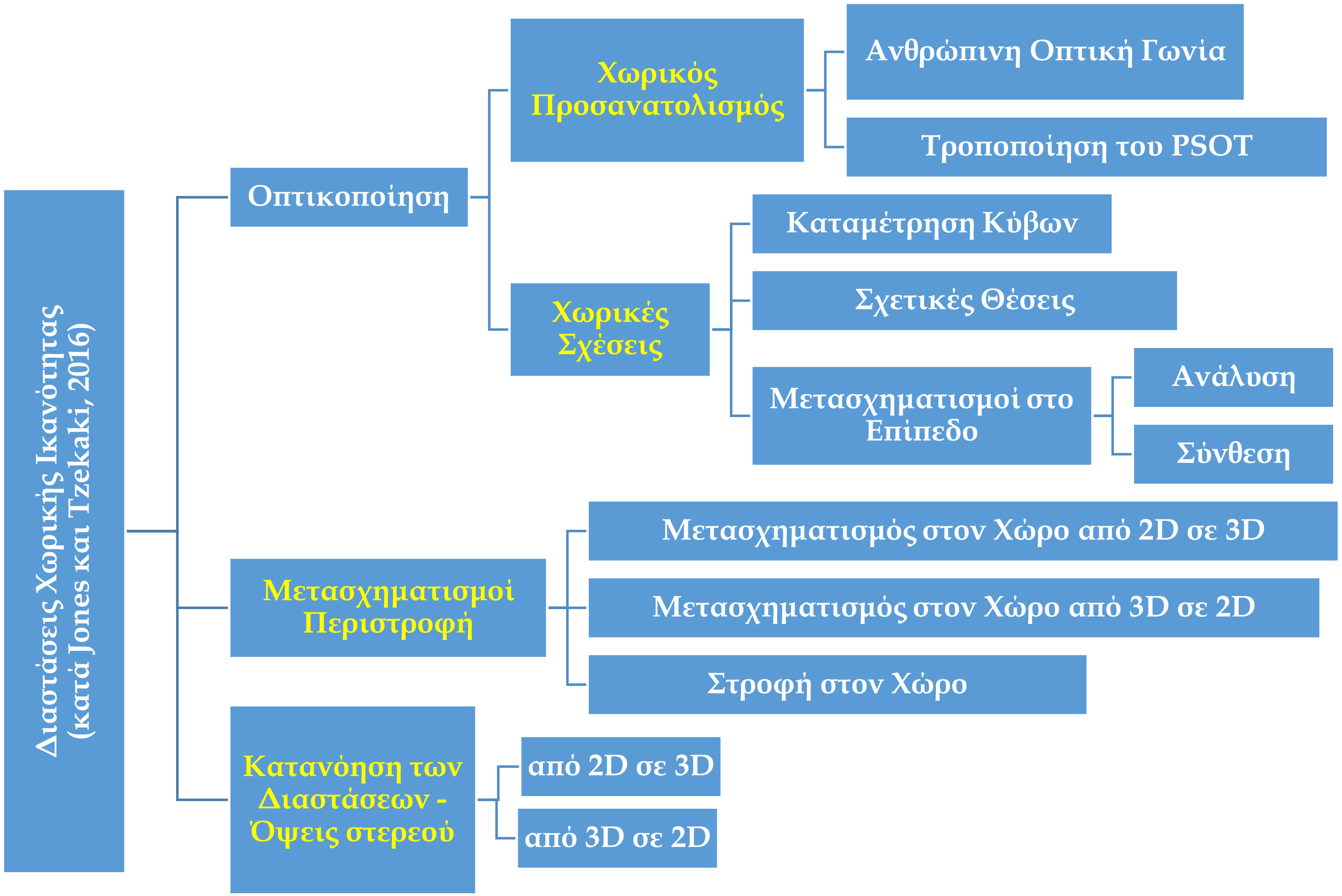
2.2 Εννοιολογικό Πλαίσιο – Λειτουργικοί Ορισμοι

Από τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα είναι σαφές πως είναι απαραίτητο να παρουσιαστεί το εννοιολογικό πλαίσιο και να δοθούν οι λειτουργικοί ορισμοί και οι επιμέρους διαστάσεις αυτών, όσον αφορά τις έννοιες χωρικός προσανατολισμός, χωρικές σχέσεις, χωρικοί μετασχηματισμοί – περιστροφή και τέλος, αντίληψη διαστάσεων –όψεις στερεού (Διάγραμμα 2.1). Οι ορισμοί αυτοί βασίστηκαν στην τρέχουσα βιβλιογραφία και παρουσιάζονται στη συνέχεια με τις σχετικές αναφορές.

Χωρικός προσανατολισμός Ο άνθρωπος καθημερινά κινείται μέσα στο χώρο και αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ένα σύνολο άλλοτε μικρών άλλοτε πιο περίπλοκων, αλλά πάντοτε σημαντικών αποφάσεων με μοναδικό στόχο την μετακίνηση από ένα σημείο σε ένα άλλο σταθμίζοντας κάθε φορά τις απαραίτητες συνθήκες, όπως ασφάλεια, αποτελεσματικότητα και επιθυμητό χρονικό πλαίσιο. Αρκετοί άνθρωποι παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην αντίληψη του χώρου. Συχνά χάνουν τον προσανατολισμό τους ή δίνουν λανθασμένες οδηγίες σε τρίτα πρόσωπα (Newcombe & Frick, 2010).

Απαραίτητα στοιχεία για την κίνηση είναι τα στάδια της αναγνώρισης και της αφομοίωσης πληροφοριών σε σχέση με τον περιβάλλοντα χώρο. Ο προσανατολισμός είναι συνδεόμενος με υπάρχουσες νοητικές εικόνες ή γνωστικούς χάρτες του κάθε ατόμου, ενώ οι προσανατολιστικές οδηγίες χώρου στηρίζονται στην επεξεργασία των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών θέσεων στο χώρο, σε σχέση με τη θέση του ατόμου στο χώρο αυτό (Clements, 2004). Ο προσανατολισμός δίνει στα παιδιά τη δυνατότητα να μαθηματικοποιήσουν τις εμπειρίες τους χρησιμοποιώντας ή δημιουργώντας απλούς χάρτες πλοήγησης και νοερές αναπαραστάσεις του χωρικού περιβάλλοντος τους.

Οι Hegarty και Waller (2004), αναφέρουν ότι ο όρος αυτός αφορά στην ικανότητα αλλαγής του εγωκεντρικού προσανατολισμού του ατόμου ανάλογα με το χώρο, κρατώντας σταθερές τις σχέσεις του χώρου και του αντικειμένου. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να περιγράψουμε τη θέση του ποτηριού στα δεξιά και του μαχαιριού στα αριστερά, όταν θεωρούμε τους εαυτούς μας σαν σημείο αναφοράς ή χρησιμοποιούμε τους όρους δεξιά στροφή ή αριστερά στροφή σε σχέση με μας. Σύμφωνα με τους Ramful, Lowrie και Logan (2017), η



Διάγραμμα 2.1. Διαστάσεις Χωρικής Ικανότητας κατά Jones και Tzekaki (2016).

ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στη νοητική περιστροφή και το χωρικό προσανατολισμό βρίσκεται στο αν γίνεται χρήση εγωκεντρικού σημείου αναφοράς ή αν χρησιμοποιείται κάποιο άλλο αντικείμενο ώς σημείο αναφοράς. Επιπλέον, οι Kozhevnikov and Hegarty (2001), καθώς και οι Hegarty and Waller (2004) υποστηρίζουν ότι η ικανότητα νοητικής περιστροφής και η δυνατότητα προσανατολισμού εκ νέου του φανταστικού εαυτού είναι ξεχωριστές χωρικές ικανότητες. Η δεύτερη αποτελεί τμήμα του χωρικού προσανατολισμού και ουσιαστικά αναφέρεται στην ικανότητα να φανταστεί κανείς πώς ένα αντικείμενο ή μια σκηνή φαίνεται από μια οπτική γωνία διαφορετική από αυτή του παρατηρητή.

Σε μια εργασία χωρικού προσανατολισμού, κάποιος πρέπει να τοποθετηθεί νοερά ή σωματικά στη θέση του αντικειμένου, για να καθορίσει τη νέα θέση που θα έχει το αντικείμενο ή το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού του αντικειμένου. Η ανάλυση γίνεται πάντα σε σχέση με τη θέση του παρατηρητή και, επομένως, γίνεται χρήση του σώματος του παρατηρητή ως σημείο αναφοράς. Τα έργα χωρικού προσανατολισμού δεν περιλαμβάνουν νοερή κίνηση ενός αντικειμένου, αλλά πρόβλεψη της θέσης του αντικειμένου μετά από κίνηση δική του (Baki, Kosa, & Guven, 2011). Αρκετά τεστ χωρικού προσανατολισμού έχουν προταθεί, όπως η ανάγνωση χαρτών στο Road Map Test of Reading Direction των Money, Alexander, & Walker (1965) και το Perspective Taking/Spatial Orientation Test (SOT) των Hegarty και Waller (2004), καθώς και Kozhevnikov και Hegarty (2001).

Όπως αναφέρεται στους Πετρίδου, Ηλία και Γαγάτσης (2014) ο χωρικός προσανατολισμός έχει συσχετιστεί με τις μαθηματικές ικανότητες τόσο σε παιδιά προσχολικής ηλικίας (Clements, Sarama και DiBiase, 2004) όσο και σε μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες (Geary, Saults, Liu και Hoard, 2000), όπου μάλιστα φαίνεται να υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο παραμέτρων. Οι Πετρίδου, Ηλία και Γαγάτσης (2014) βρήκαν πως τα μικρά παιδιά με πιο χαμηλή μαθηματική επίδοση δυσκολεύονται στη διεκπεραίωση των έργων προσανατολισμού και, επιπλέον, παράγουν εκτεταμένη χρήση δεικτικών χειρονομιών και προτιμούν να «πράττουν» παρά να «πουν», ενώ από την άλλη μεριά, παιδιά με υψηλή μαθηματική επίδοση χρησιμοποιούν δεικτικές και εικονικές χειρονομίες, με ευχέρεια στο λόγο. Θετικό είναι πως η ενασχόληση με κατάλληλα έργα βελτιώνει τον προσανατολισμό στο χώρο, αφού, σύμφωνα με τους Frick και Wang (2010), τα παιδιά που εξασκήθηκαν κατονόμαζαν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις θέσεις των αντικειμένων στο χώρο.

Οι Goluccia και Louse (2004), αναφέρουν πως ο προσανατολισμός στο χώρο προϋποθέτει πάντοτε ένα περιβάλλον, κίνηση και επεξεργασία πληροφοριών που προέρχονται από το χώρο. Οι διαφορές μεταξύ των φύλων δεν, σύμφωνα με τους Lawton και Morrin (1999), ξεκάθαρες, ωστόσο, οι Galea και Kimura (1993) ζήτησαν από άντρες και γυναίκες να σχεδιάσουν μια νέα διαδρομή σε ένα φανταστικό χάρτη πόλεως και παρατήρησαν πως οι άντρες έκαναν λιγότερα λάθη και χρειάστηκαν λιγότερες προσπάθειες από τις γυναίκες για να μάθουν τη νέα πορεία.

Συνοψίζοντας, με την έννοια χωρικός προσανατολισμός θα αναφέρεται η ικανότητα εντοπισμού μιας θέσης, καθώς και της πλοήγησης στο χώρο, δηλαδή η ικανότητα κατανόησης και ανταπόκρισης στις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών θέσεων στο χώρο αναφορικά με τη θέση του ατόμου - παρατηρητή. Περιλαμβάνει την κατανόηση και διαχείριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων θέσεων στο χώρο, έχοντας, αρχικά, ως σημείο αναφοράς τη συγκεκριμένη θέση ή και την κίνηση κάποιου μέσα σε αυτόν, κι αργότερα μια πιο αφαιρετική οπτική, που εκφράζεται με χάρτες, συντεταγμένες και κλίμακες (Sarama & Clements, 2009). Σύμφωνα με τους Newcombe και Huttenlocher (1992), θεωρείται ως η πρόβλεψη της θέσης που θα έχει ένα αντικείμενο υπό διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Χωρικές σχέσεις Η έννοια χωρικές σχέσεις, ή αλλιώς αντίληψη εννοιών του χώρου, έχει, επίσης, στη βιβλιογραφία πολλούς ορισμούς, που διαφέρουν εν μέρει ή περισσότερο μεταξύ τους. Με την έννοια αυτή έχει ορισθεί η ικανότητα προσδιορισμού των σχέσεων ανάμεσα σε διαφορετικά χωρικά διατεταγμένα ερεθίσματα και αποκρίσεις και κατανόηση της διάταξης των στοιχείων μέσα σε ένα μοντέλο οπτικής διέγερσης (Guilford & Lacy, 1947, όπως αναφέρεται στον Jaeger, 2015). Στον Lohman (1979) η διάσταση των χωρικών σχέσεων αναφέρεται ως η ικανότητα του ατόμου να περιστρέφει ένα τρισδιάστατο αντικείμενο νοερά. Ο Maier (1996) όρισε τις χωρικές σχέσεις ως την ικανότητα κατανόησης των χωροταξικών σχημάτων των αντικειμένων ή των τμημάτων τους και των αμοιβαίων τους σχέσεων, καθώς και την εύρεση των σχέσεων μεταξύ μοτίβων στις πλευρές ενός κύβου, που απεικονίζονται σε ένα πλέγμα. Μεταξύ των τεστ που θεώρησε πως ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία ήταν το Surface Development Test, το Cube Comparison Test των Ekstrom, French & Harman (1976). Ο McGee (1979) τις περιγράφει σαν την κατανόηση της διάταξης ή της θέσης τμημάτων ή στοιχείων σε ένα μοτίβο με οπτικά ερεθίσματα. Σύμφωνα με τους Linn & Petersen (1985), η χωρική αντίληψη περιλαμβάνει την ικανότητα εντοπισμού χωρικών σχέσεων, που αφορούν τη θέση, το μέγεθος, το σχήμα των αντικειμένων, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση και τον προσανατολισμό. Συνήθως, ορίζεται μέσω γρήγορων τεστ που περιλαμβάνουν περιστροφές ή αντικατοπτρισμούς (Lohman, 1988). Επιπλέον, ο Carroll (1993) ορίζει τις χωρικές σχέσεις ως ταχείς χειρισμούς με οποιονδήποτε τρόπο (μετασχηματισμό, περιστροφή ή κάτι άλλο) σχετικά απλών οπτικών μοτίβων. Ο Maier (1996) αναφέρεται σε αυτές ως η ικανότητα αναγνώρισης των σχέσεων μεταξύ τμημάτων στερεών, ενώ ο Osberg (1997) περιέγραψε τις χωρικές σχέσεις απλά ως κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων στο χώρο. Οι Colom et al. (2002) χρησιμοποιούν έναν παραπλήσιο ορισμό με τον Carroll (1993). Ο D'Oliveira (2004, στον Mohler, 2008) τις ορίζει ως η ικανότητα να επιλύει κάποιος απλά προβλήματα περιστροφής ή να αναγνωρίζει κατοπτρικές εκδοχές ενός σχεδίου. Πιο γενικά, ακόμα, οι Kleeman & Hutchinson (2005) τις ορίζουν ως η ικανότητα να αναγνωρίζει αντικείμενα, χωρικές αλληλεπιδράσεις, να μπορεί να φτιάξει χάρτες από περιγραφές, να συνδέει χάρτες και αντικείμενα.

Από το σύνολο των παραπάνω ορισμών είναι εφικτό να δει κανείς πόσο διαφορετικοί είναι μερικοί, ενώ σε γενικές γραμμές ο παράγοντας των χωρικών σχέσεων αντιστοιχεί στην ικανότητα να αντιλαμβάνεται κανείς ένα αντικείμενο από διαφορετικές θέσεις, όπως και τις σχέσεις στο χώρο μεταξύ αντικειμένων, εικόνων ή νοητικών εικόνων. Η έννοια χωρικές σχέσεις εμπεριέχει, αφενός την ικανότητα του ανθρώπου να αναγνωρίζει αντικείμενα και να κατανοεί χωρικές αλληλεπιδράσεις, και αφετέρου να αναλύει και να συνθέτει κομμάτια με στόχο τη δημιουργία μιας εικόνας στην οποία ενδέχεται να απαιτείται κίνηση μερών των αντικειμένων. Το παρόν δοκίμιο περιλαμβάνει τρεις επιμέρους διαστάσεις των χωρικών σχέσεων. Τη διάσταση της καταμέτρησης κύβων, τη διάσταση των σχετικών θέσεων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων εντός ενός κύβου και τέλος, τη διάσταση των μετασχηματισμών στο επίπεδο, που περιέχουν την ανάλυση και τη σύνθεση σχημάτων στο επίπεδο. Ανάλογες ερωτήσεις μπορούν να βρεθούν σε πλήθος βιβλίων κατάλληλων για προετοιμασία για τα τεστ χωρικής ικανότητας όπως το Mechanical and Spatial Aptitude από τις Εκδόσεις Learning Express Editors, Νέα Υόρκη.

Μετασχηματισμοί – Περιστροφή

Ο McGee (1979) όρισε ως μια από τις τέσσερις χωρικές ικανότητες οπτικοποίησης την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται την περιστροφή ενός απεικονιζόμενου αντικειμένου, το δίπλωμα ή ανάπτυγμα ενός στερεού, και τις σχετικές αλλαγές της θέσης των αντικειμένων στο χώρο. Η δεύτερη κατηγορία, των Linn & Petersen (1985) που αναφέρεται στη νοερή περιστροφή είναι η εσωτερική γνωστική διαδικασία μετακίνησης και αναδίπλωσης ενός αντικειμένου που υπάρχει στο χώρο, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στο χρόνο επίλυσης. Οι Kozhevnikov, Hegarty & Mayer (2002) ενσωματώνουν στην κατηγορία οπτικοποιήσης σύνθετων χωρικών μετασχηματισμών τη νοερή περιστροφή τρισδιάστατων αντικειμένων στο χώρο. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Michaelides (2003), ορίζει την περιστροφή ως ένα θεμελιώδη τρόπο μετασχηματισμού και συλλογισμού για το χώρο που περιλαμβάνει τη λογική της «περιστροφής» ενός αντικειμένου και το οπτικοποιεί από διαφορετικές προοπτικές. Ο Κλιάπης (2011) ορίζει τη χωρική αντίληψη των μετασχηματισμών ως «την ικανότητα του ατόμου να παρακολουθεί τις αλλαγές στη θέση ή τη διεύθυνση, να αντιλαμβάνεται μετακινήσεις ή στροφές ή ακόμα να κατανοεί άλλες μορφές μετασχηματισμών, όπως η δίπλωση, η έκταση, η συστροφή και να αναπαριστά νοερά ή να προβλέπει τις αλλαγές, που προκύπτουν από αυτούς τους μετασχηματισμούς, ή ακόμα να αντιλαμβάνεται πώς γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα, όταν αλλάζει η οπτική γωνία». Σύμφωνα με τον Βουδρισλή (2016) οι μετασχηματισμοί δύναται να περιλαμβάνουν την αλλαγή προοπτικής, αλλαγή προσανατολισμού, το μετασχηματισμό σχημάτων, την αλλαγή μεγέθους, την αλλαγή κλίμακας και την οριζόντια μετακίνηση ή ακόμα και την περιστροφή.

Ανάμεσα στα αποτελέσματα ερευνών για την περιστροφή είναι πως όσο πιο μεγάλη είναι η γωνία στην οποία καλείται το υποκείμενο να περιστρέψει νοερά το αντικείμενο, τόσο πιο μεγάλο χρονικό διάστημα χρειάζεται, ή ότι η νοερή περιστροφή των τρισδιάστατων αντικειμένων είναι πιο δύσκολη από τη νοερή περιστροφή των δισδιάστατων (Michaelides, 2003), ή ακόμη ότι η δυσκολία περιστροφής έγκειται αποκλειστικά στην πολυπλοκότητα του σχήματος.

Στην παρούσα εργασία η έννοια μετασχηματισμοί και περιστροφή αποτελείται από τρεις επιμέρους διαστάσεις: τον μετασχηματισμό στο χώρο από το δισδιάστατο στο τρισδιάστατο και αντιστρόφως (αναφέρεται στην ικανότητα να διπλώνει νοητικά ένα 2-διαστάσεων σχήμα (2D) σε ένα 3-διαστάσεων στερεό (3D) και να ξεδιπλώνει ένα 3-διαστάσεων στερεό στο 2-διαστάσεων ανάπτυγμά του, επομένως μετασχηματισμούς ανάμεσα στις διαστάσεις), και την στροφή.

Αντίληψη Διαστάσεων Η κατηγορία αντίληψη των διαστάσεων αναφέρεται στην ικανότητα νοερού συνδυασμού διαφορετικών όψεων (συνήθως κάτοψη, εμπρόσθια όψη και πλάγια όψη), προκειμένου να εντοπισθεί το στερεό σχήμα από το οποίο προέρχονται. Για την αποφυγή λαθών καλό είναι, αφενός να έχει κάποιος σημείο αναφοράς και τις τρεις όψεις, για να ξεκαθαρίσει, πως οι διαστάσεις είναι σωστές στο αντίστοιχο σχήμα, και αφετέρου να διερευνά τις επιλογές απαντήσεων για λάθη στις διαστάσεις, προκειμένου να αποκλείσει τις λανθασμένες επιλογές. Όπως είναι αναμενόμενο, ερωτήσεις τέτοιου τύπου είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για υποψήφιους αρχιτεκτονικών ή γραφιστικών σχολών.

Κεφάλαιο 3ο

Μεθοδολογία

This concern was consistent with the problem that it is very difficult to know what test scores mean…..It is not measures that are valid, but the scores that they yield and the interpretations that researchers make from them.

(Sechrest, 2005, όπως αναφέρεται στους Eliot & Czarnolewski, (2007).

3.1 Μέθοδος

Στην παρούσα εργασία εφαρμόσθηκε η ποσοτική μέθοδος. Δημιουργήθηκε κατάλληλο δοκίμιο, το περιεχόμενο των ερωτήσεων του οποίου σχεδιάστηκε με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο, που αναλύθηκε στο 1ο Κεφάλαιο, έτσι ώστε να καλυφθούν οι διαφορετικές κατηγορίες που έχουν κατά καιρούς προταθεί από την επιστημονική κοινότητα, και σε συμφωνία με το εννοιολογικό πλαίσιο, που αναπτύχθηκε στο 2ο κεφάλαιο. Οι ερωτήσεις προσαρμόστηκαν στην ηλικιακή κλίμακα των μαθητών στους οποίους απευθύνεται, αν και δύναται να χρησιμοποιηθεί και από μεγαλύτερες ηλικίες. Το τελικό δοκίμιο, που χρησιμοποιήθηκε, παρατίθεται στο Παράρτημα ακριβώς όπως δόθηκε στους μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνα, ενώ στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας ακολουθεί λεπτομερής παρουσίαση των διαστάσεων και των αξόνων του ερωτηματολογίου.

3.2 Δείγμα

Η έρευνα εφαρμόσθηκε τον Απρίλιο του 2017 σε δυο σχολικές μονάδες και συγκεκριμένα σε ένα Πειραματικό Γυμνάσιο και ένα Πειραματικό Λύκειο της Θεσσαλονίκης, και συγκεκριμένα σε δύο τμήματα για κάθε τάξη από Β' Γυμνασίου έως και Β' Λυκείου. Το αρχικό πλήθος των μαθητών ήταν 200 μαθητές. Από αυτούς οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και Β' Λυκείου έχουν επιλεγεί μετά από κλήρωση, ενώ οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου έχουν εισαχθεί με γραπτές εξετάσεις. Ο διαφορετικός τρόπος εισαγωγής συνδέεται άμεσα με διαφορετικό επίπεδο μαθηματικών ικανοτήτων, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τις βαθμολογίες των μαθητών σε μαθήματα STEM. Σε κάθε περίπτωση, όμως, ακόμη και οι μαθητές που έχουν εισαχθεί με κλήρωση, έχουν ελαφρώς καλύτερο μαθησιακό επίπεδο από τη μέση εικόνα ενός μαθητή σε ένα οποιοδήποτε Γυμνάσιο ή γενικό Λύκειο της Ελλάδος. Η συμπλήρωση του δοκιμίου, που δημιουργήθηκε για το σκοπό της μελέτης, έγινε σε κάθε τμήμα εντός μιας διδακτικής ώρας, παρουσία είτε της ερευνήτριας είτε των εκπαδευτικών της τάξης είτε φοιτητών του μαθηματικού. Στους μαθητές ζητήθηκε να συμπληρωθεί το δοκίμιο με σύνεση και όχι τυχαία και να απαντηθούν όλες οι ερωτήσεις του. Δεν δόθηκε καμία επιπλέον διευκρίνηση ή καθοδήγηση.

3.3 Το εργαλείο - δοκίμιο

Το δοκίμιο δημιουργήθηκε από μια συλλογή ερωτήσεων που υπάρχουν ήδη σε επιμέρους δοκίμια, ή από τροποποίηση αυτών με γνώμονα την περιγραφή της χωρικής ικανότητας, ακολουθώντας την κατηγοριοποίηση που προτείνουν οι Jones και Tzekaki (2016), οι οποίοι και συνοψίζουν τις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας σε τέσσερις επιμέρους κατηγορίες: το χωρικό προσανατολισμό, τις χωρικές σχέσεις, το μετασχηματισμό και την κατανόηση των διαστάσεων (Διάγραμμα 2.1). Το εργαλείο, λοιπόν, οργανώθηκε στη βάση του ερευνητικού ερωτήματος ένα, όπως προσδιορίζεται στο 2^{o} κεφάλαιο. Οι ερωτήσεις του δοκιμίου, που δημιουργήθηκε, είναι 12, ενώ δυο από αυτές αποτελούνται από επιμέρους υποερωτήματα (2 και 3 αντίστοιχα). Η πλειοψηφία των ερωτήσεων, εκτός από την χάραξη γωνίας για την εξέταση του χωρικού προσανατολισμού και την καταμέτρηση κύβων στις χωρικές σχέσεις, δόθηκε με τη «φιλική προς το χρήστη» μορφή των πολλαπλών επιλογών. Η διατύπωση των ερωτήσεων και το πλήθος των δυνατών απαντήσεων σε κάθε ερώτηση έγινε σε πλήρη αντιστοιχία με την αρχική πηγή των ερωτημάτων και μετά από προσεκτική εξέταση, με στόχο την εξασφάλιση της προσοχής και τη διατήρηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, έτσι ώστε να απαντήσουν με συνέπεια και σκέψη στο δοκίμιο. Η αρχική πιλοτική εφαρμογή του δοκιμίου, σε 78 μαθητές και των τεσσάρων τάξεων από τέσσερις σχολικές μονάδες, έδειξε πως οι μαθητές παρέμειναν προσηλωμένοι στο δοκίμιο και απάντησαν με σαφήνεια στα ερωτήματά του και δεν κατέφυγαν σε τυχαίες επιλογές. Έτσι, η ύπαρξη κατά πλειοψηφία ερωτημάτων με τη μορφή πολλαπλής επιλογής επέτρεψε σε κάθε μαθητή να προσπαθήσει να ολοκληρώσει το δοκίμιο. Τα αποτελέσματα (κατανομή σχετικών συχνοτήτων) για την περίπτωση των σχολείων που συμμετείχαν στην πιλοτική εφαρμογή δίδονται στην παράγραφο 3.4.

3.3.1 Χωρικός Προσανατολισμός

Στο παρόν δοκίμιο ενσωματώθηκαν δυο ερωτήσεις που αναφέρονται στον χωρικό προσανατολισμό. Η πρώτη ερώτηση αναφέρεται ως ανθρώπινη οπτική γωνία και η δεύτερη σαν μια τροποποίηση του PSOT. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη ερώτηση αναφέρεται στην εργασία των Ramful, Lowrie και Logan

(2017), αποτελεί την ερώτηση 1 του δοκιμίου (βλ. Παράρτημα) και θα αναφέρεται με τον όρο ανθρώπινη οπτική γωνία.

Η δεύτερη ερώτηση της διάστασης του χωρικού προσανατολισμού είναι μια τροποποίηση του τεστ προσανατολισμού SOT των Hegarty και Waller (2004). Το τεστ SOT αξιολογεί την ικανότητα του ερωτώμενου να φανταστεί διαφορετικές προοπτικές ή προσανατολισμούς στο επίπεδο από μια σειρά επτά αντικειμένων (ένα σπίτι, ένα σημάδι στάσης, ένα αυτοκίνητο, ένα λουλούδι, μια γάτα, ένα φανάρι και ένα δέντρο) σε μια σελίδα (Ερώτηση 2η και 3η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα). Αυτός ή αυτή πρέπει να φανταστεί ότι στέκεται σε ένα δεδομένο αντικείμενο (Θέση 1) και αντικρύζει ένα άλλο αντικείμενο (Θέση 2). Στη συνέχεια, καλείται να υποδείξει τη σχετική θέση ενός τρίτου αντικειμένου (Θέση 3). Για παράδειγμα, φανταστείτε ότι στέκεστε στο λουλούδι (Θέση 1) και βλέπετε το δέντρο (Θέση 2) και σας ζητείται να δείξετε τη γάτα (Θέση 3). Ο ερωτώμενος καλείται να εκπροσωπεί τις θέσεις 1, 2 και 3 σχετικά σε έναν κύκλο. Μια απάντηση λαμβάνει ως σωστή μια σωστή απάντηση, όταν έχει απόκλιση ±15° από την καταγεγραμμένη γωνία.

Στο προτεινόμενο δοκίμιο, το τεστ προσανατολισμού τροποποιήθηκε και το πλαίσιο αναφοράς ήταν πλέον ένας χάρτης του Αιγαίου, με στόχο να έχει μια άμεση φυσική ερμηνεία το πλαίσιο. Στο δοκίμιο ενσωματώθηκαν δύο επιμέρους ερωτήσεις (Ερώτηση 2α και 2β ερωτηματολογίου, βλ Παράρτημα). Σωστές λαμβάνονται οι απαντήσεις εκείνες που απέχουν ±10° από την πραγματική γωνία (50° και 115° αντίστοιχα και θα αναφέρονται στην εργασία με τον όρο προσανατολισμός οξείας και αμβλείας γωνίας αντίστοιχα).

3.3.2. Χωρικές σχέσεις

Η πρώτη διάσταση της καταμέτρησης κύβων είναι μια ερώτηση που αναφέρεται στο τρισδιάστατο χώρο, με στόχο την μέτρηση κύβων, που μπορεί κάποιος εύκολα να δει, καθώς και άλλους που δεν είναι ορατοί και χρειάζεται να υποθέσει κάποιος ότι υπάρχουν. Καλό είναι ερωτήσεις τέτοιου στυλ να της αντιμετωπίσει κάποιος χωρίζοντας το σχήμα σε επίπεδα και καταγράφοντας κάθε φορά το αποτέλεσμα μετακινούμενος προς το υψηλότερο επίπεδο. Τελικά, μένει μόνο να γίνει ένα άθροισμα των παραπάνω. Στην διάσταση αυτή αναφέρονται οι ακόλουθες δυο ερωτήσεις του δοκιμίου (ερώτηση 3η και 4η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα) οι οποίες προέρχονται από την ιστοσελίδα https://etc.usf.edu/clipart/galleries/614-cube-counting.

Στην πρώτη ερώτηση δίδεται η απεικόνιση 16 συμπαγών κύβων οι οποίοι στοιβάζονται φτάνοντας σε διαφορετικά, ενδεχομένως, ύψη. Η επιλογή του σχήματος έγινε με στόχο να εξετασθούν δυο ενδεχόμενα λάθη των μαθητών α)η αίσθηση πως ο κεντρικός κύβος αιωρείται, δηλαδή πως δεν στηρίζεται πουθενά και β)η αίσθηση πως στο πίσω μέρος οι κύβοι είναι περισσότεροι, δηλαδή 18. Αποτελεί μια τρισδιάστατη απεικόνιση σε μια δισδιάστατη επιφάνεια, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετασθεί η αντίληψη του βάθους, καθώς και η ταυτοποίηση και μέτρηση κύβων, εδρών και ακμών.

Στην επόμενη ερώτηση δίδονται 65 συμπαγείς και στοιβαζόμενοι κύβοι σε ύψη που αυξάνονται γραμμικά από 1 έως 5. Πέρα από τους παραπάνω λόγους επιλογής της ερώτησης το σχήμα εμφανίζει ένα μοτίβο – κανονικότητα, αφού κάθε σειρά υπολείπεται ενός κύβου. Άρα το συνολικό πλήθος των κύβων υπολογίζεται γρήγορα από το άθροισμα *7+2*6+3*5+4*4+5*3.* Ανάλογες ερωτήσεις μπορούν να βρεθούν σε πλήθος βιβλίων κατάλληλων για προετοιμασία για τα τεστ χωρικής ικανότητας, όπως το Mechanical and Spatial Aptitude από τις Εκδόσεις Learning Express Editors, Νέα Υόρκη.

Η επόμενη διάσταση των σχετικών θέσεων μετρά την ικανότητα του ατόμου να βλέπει σε μια τρισδιάστατη στοίβα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και να προσδιορίζει πόσα κομμάτια αγγίζουν τα αριθμημένα παραλληλεπίπεδα (Ερώτηση 5 ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα). Επιπλέον, εξετάζεται η ικανότητα του ατόμου να παρατηρεί και να εξάγει συμπεράσματα από πράγματα που δεν μπορεί να δει απόλυτα. Βοηθάει αρκετά η προσεκτική μελέτη του τρόπου με τον οποίο στοιβάζονται τα επιμέρους κομμάτια και η παρατήρηση πως μερικά από αυτά (εξαίρεση τα στερεά της τελευταίας γραμμής) έχουν το ίδιο μέγεθος και σχήμα.

Τέλος, η τρίτη διάσταση των χωρικών σχέσεων αναφέρεται στο μετασχηματισμό στο επίπεδο και αναλύεται σε δυο επιμέρους υποδιαστάσεις, την ανάλυση και τη σύνθεση. Η ερώτηση της ανάλυσης (ερώτηση 6η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα) προέρχεται από το Spatial Ability Test, το οποίο είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο στη διεύθυνση http://www.psychometric-success.com/aptitude-tests/spatial-ability-tests-combining-shapes.htm. Η ερώτηση αυτή αναφέρεται σε δισδιάστατα σχήματα τα οποία έχουν κοπεί σε επιμέρους κομμάτια. Στόχος είναι να βρεθεί ποια από τα κομμάτια, που δίδονται, αν συνδυαστούν φτιάχνουν το αρχικό δοθέν σχήμα. Σωστή απάντηση είναι η Β. Μια προσπάθεια ερμηνείας των λαθών είναι η ακόλουθη. Αν δοθεί η Α απάντηση εντοπίζεται λάθος στην αντίληψη της δυνατότητας σύνθεσης των επιμέρους σχημάτων και στην αντίληψη του μεγέθους τους, αφού τα σχήματα που δίδονται περιέχουν ήδη το αρχικό και τρία παραπάνω. Αν δοθεί η Γ απάντηση, τότε υπάρχει λάθος στην αντίληψη της δυνατότητας σύνθεσης των επιμέρους σχημάτων και στην αντίληψη του μεγέθους τους, αφού τα σχήματα, που δίδονται, περιέχουν, ήδη, το αρχικό και δύο παραπάνω, ενώ, αν δοθεί η Δ, τότε υπάρχει λάθος στην αντίληψη δυνατότητας σύνθεσης των επιμέρους σχημάτων.

Η εξάσκηση σε αυτές τις ερωτήσεις συντελεί στην άμεση εύρεση τμημάτων που είναι πολύ μεγάλα ή πολύ μικρά σε σχέση με το αρχικό σχήμα, καθώς και στην εύρεση σχημάτων με το ίδιο μήκος πλευρών. Μέσω της πρακτικής γίνεται πιο γρήγορη και σχεδόν αυτόματη η ταυτοποίηση ομοιοτήτων, ή αντίθετα σημαντικών διαφορών που αποκλείουν ένα συνδυασμό. Το τεστ αυτό μοιάζει με το γνωστό Paper Form Board, όπου κάθε αντικείμενο δίδεται σε συνδυασμό με πέντε κομμάτια του, κάποια εκ των οποίων ή και όλα απαιτούνται, για να το ξανασυνθέσεις (Ekstrom, R. B., Dermen, D., & Harman, H. H., 1976, σελ. 173). Αποτελεί σύμφωνα με τους ερευνητές μια ερώτηση οπτικοποίησης (visualization), δηλαδή μελετά την ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται αντικείμενα και να τα μετασχηματίζει σε άλλες μορφές.

Η ερώτηση της σύνθεσης (ερώτηση 7η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα) προέρχεται από το βιβλίο Mechanical and Spatial Aptitude και συγκεκριμένα από το κομμάτι Matching Pieces and Parts pp. 108-117. Πιο συγκεκριμένα, αν και υπάρχουν διαφορετικά στυλ τέτοιας μορφής ερωτήσεων σε ερωτηματολόγια χωρικής ικανότητας, ωστόσο ο στόχος είναι πάντα να οπτικοποιηθεί το σύνολο της εικόνας από τα τμήματα από τα οποία αποτελείται. Απαιτούνται ικανότητες νοητικής περιστροφής, αλλαγής θέσεως και τοποθέτησης των επιμέρους σχημάτων μαζί, ενώ επιπλέον κάποια σχήματα πιθανό να έχουν διαφοροποιηθεί ελάχιστα ως προς τις διαστάσεις τους. Σωστή απάντηση είναι η Δ, ενώ, στη συνέχεια, δίδεται μια ερμηνεία των λαθών. Αν δοθεί η Α, τότε παρατηρείται λάθος στην αντίληψη του μεγέθους και των ιδιοτήτων των σχημάτων (μεγαλύτερος κυκλικός τομέας, μεγαλύτερα τραπέζια και μικρότερο τρίγωνο μη ορθογώνιο) και απουσία ενός σχήματος (ενός τριγώνου). Αν δοθεί η Β, τότε υπάρχει λάθος στην αντίληψη του μεγέθους των τμημάτων (μεγαλύτερος κυκλικός τομέας) και των ιδιοτήτων των τμημάτων (τα αρχικά τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή, ενώ εδώ μόνο ισοσκελή), ενώ αν δοθεί η Γ, τότε το λάθος εντοπίζεται στην αντίληψη των ιδιοτήτων των τμημάτων (τα αρχικά τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή ενώ εδώ μόνο ισοσκελή).

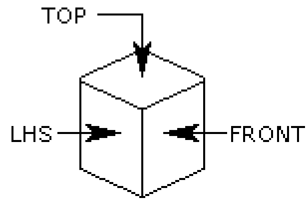
3.3.3 Μετασχηματισμοί - Περιστροφή

Οι ερωτήσεις των μετασχηματισμού από 2D σε 3D και αντίστροφα προέρχονται από το βιβλίο Mechanical and Spatial Aptitude και συγκεκριμένα από το κομμάτι Understanding Patterns pp. 127-138. Σε ερωτήσεις τύπου από 2D σε 3D (ερώτηση 8η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα) βοηθάει ο αποκλεισμός στερεών που εμφανίζουν εμφανή διαφορά σε ένα τμήμα του δοθέντος αναπτύγματος, όπως περιγράφεται στην ερμηνεία των λαθών της επόμενης ερώτησης. Σε ερωτήσεις της αντίστροφης διαδικασίας (ερώτηση 9η) το πρόβλημα μπορεί πάντα να μειωθεί στην απλή εξέταση της σχέσης μεταξύ των τριών στοιχείων – σχημάτων που βρίσκονται στις έδρες του στερεού – κύβου, προσπαθώντας να εντοπιστεί και να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ τους στα αναπτύγματα που δίδονται.

Στην 8η ερώτηση, σωστή απάντηση είναι η Α, ενώ, αν δοθεί η Β, τότε υπάρχει λάθος στην αντίληψη του σχήματος της παράπλευρης επιφάνειας, που δημιουργείται. Δεν υπάρχει αυτή η κλίση στη μπροστινή επιφάνεια, η οποία οφείλεται σε διαφορετικό σχήμα στην πλάγια όψη. Αν δοθεί η Γ, τότε το λάθος βρίσκεται στην αντίληψη του μεγέθους του πρίσματος - διαστάσεων, μικρότερο του μήκους της εμπρόσθιας όψης, ενώ, αν δοθεί η Δ, το λάθος εντοπίζεται στην αντίληψη του μεγέθους των πρίσματος – διαστάσεων, μεγαλύτερο του μήκους της πλάγιας όψης.

Στην 9η ερώτηση, σωστή απάντηση είναι η Γ, ενώ, αν δοθεί η Α, τότε το μισοφέγγαρο φαίνεται να περιέχει το ρόμβο, το οποίο δεν ισχύει στον κύβο που δίνεται. Αν δοθεί η Β, τότε το τρίγωνο έρχεται σε επαφή με το μισοφέγγαρο και όχι με το ευθύγραμμο τμήμα, όπως στον κύβο, που δίνεται, ενώ, αν δοθεί η Δ, τότε το μισοφέγγαρο φαίνεται να περιέχει το «ποτήρι» που σχηματίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα και το τρίγωνο το οποίο δεν ισχύει στον κύβο που δίνεται.

Στο http://www.psychometric-success.com/aptitude-tests/spatial-ability-tests-cubes.htm αναφέρεται πως η καλύτερη στρατηγική για αυτό το είδος ερώτησης είναι να θεωρηθεί η μια έδρα του κύβου σαν πρόσοψη και οι υπόλοιπες σε σχέση με αυτήν, όπως στο διπλανό σχήμα.



Η θεώρηση αυτή, προφανώς, είναι αυθαίρετη, δεδομένου πως οποιαδήποτε έδρα του κύβου από τις τρεις, που φαίνονται, μπορεί να θεωρηθεί ως μπροστινή. Ωστόσο, η σκέψη του προβλήματος με αυτόν τον τρόπο καθιστά πολύ πιο εύκολο να «δει» ο εξεταζόμενος τη σχέση μεταξύ των σχημάτων στις έδρες του κύβου. Στη συνέχεια, μπορεί να δει το μπροστινό μέρος του κύβου, να εντοπίσει το μοτίβο του, να το χρησιμοποιήσει, για να προσδιορίσει την κορυφή και να εξαλείψει έτσι τυχόν επιλογές που δεν ταιριάζουν, ενώ ταυτόχρονα κάνει χρήση του μοτίβου, για να εντοπίσει την άλλη έδρα που ακουμπά στην μπροστινή (σε αυτό το παράδειγμα LHS) και να διαγράψει ενδεχόμενες επιλογές που δεν ταιριάζουν.

Η τρίτη διάσταση της κατηγορίας αναφέρεται στη στροφή (ερώτηση 10^{η} ερωτηματολογίου βλ. Παράρτημα). Η ερώτηση αυτή προέρχεται από το βιβλίο Mechanical and Spatial Aptitude και συγκεκριμένα από το κομμάτι Rotated Blocks pp. 99-108. Ερωτήσεις τέτοιου τύπου απαιτούν την ικανότητα νοητικής περιστροφής ενός τρισδιάστατου αντικειμένου και τον οραματισμό πως θα δείχνει από μια νέα οπτική γωνία. Από τη στιγμή που κάθε έδρα του κύβου, που δίδεται, έχει άλλο μοτίβο, μερικές φορές είναι ευκολότερο και πιο γρήγορο να εντοπιστούν οι λανθασμένες απαντήσεις, εστιάζοντας στις σχετικές θέσεις αυτών των μοτίβων μεταξύ τους. Η ερώτηση που μένει δίνει την κατεύθυνση περιστροφής του αρχικού κύβου. Πρέπει να δοθεί προσοχή σε ενδεχόμενα μοτίβα που δίδονται στις απαντήσεις με καθρεπτισμό των αρχικών, τα οποία είναι δυνατόν να προκαλέσουν σύγχυση, καθώς και στη θέση των μοτίβων σε σχέση με τα γειτονικά τους. Στη συνέχεια, η σωστή απάντηση μοιάζει πλέον προφανής. Σωστή απάντηση εδώ είναι η Γ, ενώ, αν δοθεί η Α, τότε το μισοφέγγαρο στην αρχική είναι «παράλληλο» με μια ακμή, ενώ εδώ με μια κορυφή. Αν δοθεί η Β, τότε η άκρη του μισοφέγγαρου «εφάπτεται» σε μια κορυφή, ενώ, αν δοθεί η Δ, τότε το μισοφέγγαρο περιέχει στο «άνοιγμα» του το τετράγωνο, ενώ εδώ είναι στο «πίσω» μέρος του.

3.3.4 Αντίληψη Διαστάσεων

Στην ερώτηση εύρεσης στερεού από τις όψεις του, σωστή απάντηση (ερώτηση 11η ερωτηματολογίου, βλ. Παράρτημα) είναι η Γ, ενώ, προσπαθώντας να δοθεί ερμηνεία στις λανθασμένες απαντήσεις, παρατηρείται πως, αν δοθεί η Α, τότε δεν υπάρχει κατανόηση της πλάγιας όψης (εδώ παραλληλόγραμμο σε αντίθεση με το ορθό που είναι τρίγωνο). Αν δοθεί η Β, τότε δεν υπάρχει κατανόηση της εμπρόσθιας όψης (εδώ δυο τρίγωνα σε δυο διαφορετικά ημιεπίπεδα, ενώ στην πραγματικότητα είναι ένα τρίγωνο σε ένα επίπεδο),ενώ, τέλος, αν δοθεί η Δ, τότε δεν υπάρχει κατανόηση της κάτοψης (στην κώλουρη πυραμίδα δεν ενώνονται οι ακμές στην κορυφή σε αντίθεση με την πραγματική). Στην ερώτηση εύρεσης λανθασμένης όψης δοθέντος στερεού (ερώτηση 12η) σωστή απάντηση είναι η Α, ενώ, αν δοθεί η Β, τότε δεν υπάρχει αντίληψη της κάτοψης, αν δοθεί η Γ, τότε δεν υπάρχει αντίληψη της πλάγιας, ενώ, αν δοθεί η Δ, τότε δεν υπάρχει αντίληψη της εμπρόσθιας.

3.4 Ερευνητική Διαδικασία

Μετά τη μελέτη της βιβλιογραφίας δημιουργήθηκε το κατάλληλο δοκίμιο για το αντικείμενο της παρούσας έρευνας. Αρχικά, εξετάσθηκε μέσω μιας πιλοτικής εφαρμογής σε 78 μαθητές από τέσσερα σχολεία, δυο στη Θεσσαλονίκη και δυο στη Χαλκιδική, εκ των οποίων το ένα ήταν Γυμνάσιο. Η πιλοτική εφαρμογή έγινε το Μάρτιο του 2017 και μετά από τη μελέτη των ευρημάτων της, πραγματοποιήθηκε η κυρίως έρευνα στα σχολεία, την Άνοιξη του σχολικού έτους 2016-2017, την εβδομάδα μετά το Πάσχα (24/04 – 28/04/2017). Ο χρόνος αυτός θεωρήθηκε κατάλληλος, γιατί τα σχολεία όλο το προηγούμενο διάστημα ήταν επιβαρυμένα με πολλές δραστηριότητες και ήταν δύσκολο να βρεθεί κοινός χρόνος. Η επιλογή του χρόνου διεξαγωγής της έρευνας έγινε σε συμφωνία, αρχικά, με τους διευθυντές των σχολείων, οι οποίοι έδωσαν και την απαραίτητη συναίνεση, και στη συνέχεια σε άμεση συμφωνία με τους καθηγητές που θα «παραχωρούσαν» την ώρα διδασκαλίας τους. Έγινε μια προσπάθεια τα ερωτηματολόγια να δοθούν την ίδια διδακτική ώρα σε όλα τα τμήματα, προκειμένου να μην συζητηθεί το αντικείμενό τους από τους μαθητές και τους προετοιμάσει. Για το σκοπό αυτό τα ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν σε κάθε τμήμα με παρόντες τους καθηγητές τους και με την ευγενική βοήθεια δυο φοιτητών του Μαθηματικού που εκείνο το διάστημα έκαναν πρακτική στο σχολείο. Η διεξαγωγή της έρευνας υλοποιήθηκε με τη μέθοδο του δοκίμιο. Η μόνη οδηγία που δόθηκε στους καθηγητές και στους φοιτητές είναι πως δεν έχουν την δυνανότητα να απαντήσουν σε ερωτήσεις – απορίες των μαθητών, παρά μόνο σε ερωτήσεις σε σχέση με τη διαδικασία. Τόσο οι εκπαιδευτικοί, που βοήθησαν στη διεξαγωγή της έρευνας, όσο και οι μαθητές ενημερώθηκαν για τον εθελοντικό χαρακτήρα της συμμετοχής τους, για το σκοπό του ερωτηματολογίου και φυσικά για την τήρηση της ανωνυμίας τους. Βεβαιώθηκε η εμπιστευτικότητα της διαδικασίας και επισημάνθηκε ότι οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου δεν θα επηρεάσουν τη σχολική επίδοση των μαθητών . Οι μαθητές συμπλήρωσαν το δοκίμιο με μεγάλο ενδιαφέρον, αφού το αντιμετώπισαν σαν ένα παιχνίδι ή τεστ νοημοσύνης. Ολοκληρώνοντας, ζήτησαν, αν είναι δυνατό, να κάνουν και άλλα τέτοια θέματα στους ομίλους των μαθηματικών, που υπάρχουν στα δύο σχολεία. Ο χρόνος συμπλήρωσης είχε οριστεί σε μια διδακτική ώρα και ήταν επαρκής, γεγονός που διαπιστώθηκε κατά την συμπλήρωσή του,τόσο στα σχολεία της έρευνας όσο και στα τέσσερα σχολεία της πιλοτικής εφαρμογής.

3.5. Αποτελέσματα Πιλοτικής Εφαρμογής του Δοκιμίου

Άξονας Χωρικός Προσανατολισμός: Το 82% των μαθητών έδωσαν τη σωστή απάντηση, ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζει το 14% των μαθητών που απάντησε λανθασμένα στη συμμετρική εικόνα της ορθής απάντησης ως προς τον κατακόρυφο άξονα (ουσιαστικά δεν έλαβε καθόλου υπόψη του τη θέση της Ελένης, δηλαδή την οπτική γωνία). Ενδιαφέρον παρουσιάζει πως στην $1^{η}$ ερώτηση (προσανατολισμός οξείας γωνίας) υπάρχουν μαθητές που αδυνατούν να κατανοήσουν πως πρόκειται για οξεία γωνία. Γενικά το εύρος των απαντήσεων είναι μεγαλύτερο στην $1^{η}$ ερώτηση από τη $2^{η}$ (προσανατολισμός αμβλείας γωνίας). Στην αμβλεία γωνία τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μεν μικρότερο εύρος, σημειώνεται, ωστόσο, επικρατούσα τιμή στις 138^{o} έναντι 115^{o} που είναι η σωστή απάντηση (Πίνακας 2.1).

Πίνακας 2.1. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα χωρικός προσανατολισμός και στις τρεις του διαστάσεις άξονα.

Χωρικός Προσανατολισμός		Χωρικός Προσανατολισμός / Τροποποίηση του PSOT			
Ανθρώπινη Οπτική Γωνία		Οξεία Γωνία		Αμβλεία Γωνία	
Απάντηση	Ποσοστό (%)	Γωνία	Ποσοστό (%)	Γωνία	Ποσοστό (%)
a	**82,1**	19^o -39^o	6,6	94^o -104^o	3,2
b	14,1	**40^o -60^o**	**65,6**	**105^o -125^o**	**42,9**
D	2,6	61^o -81^o	18,0	126^o -146^o	50,8
d	1,3	82^o -102^o	4,9	147^o -167^o	3,2
		103^o -123^o	4,9		

Άξονας Χωρικές Σχέσεις: Το ουσιαστικό λάθος στην ερώτηση της καταμέτρησης κύβων είναι ότι οι μαθητές μετράνε μόνο όσους κύβους είναι ορατοί, είναι δηλαδή σαν να θεωρούν πως κάποιοι κύβοι απλά «αιωρούνται» (λανθασμένη απάντηση 13 αντί για 16 και 25 αντί για 65), σαν να μην έχουν αίσθηση της προοπτικής και του βάθους (Πίνακας 2.2.α).

Πίνακας 2.2.α. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα χωρικές σχέσεις και στη διάσταση καταμέτρησης κύβων.

Χωρικές Σχέσεις			
Καταμέτρηση Κύβων 16		Καταμέτρηση Κύβων 65	
Πλήθος Κύβων	Ποσοστό (%)	Πλήθος Κύβων	Ποσοστό (%)
13	32,1	25	50,0
15	9,0	33	1,3
16	**25,6**	35	1,3
17	3,8	37	1,3
18	15,4	40	3,8
19	3,8	42	1,3
20	5,1	43	1,3
21	2,6	45	1,3
22	1,3	47	2,6
27	1,3	49	1,3
		50	1,3
		52	1,3
		60	1,3
		64	1,3
		65	**25,6**
		66	1,3
		76	1,3
		81	1,3

Στον ίδιο άξονα των χωρικών σχέσεων αλλά στη διάσταση σχετική θέση τα σωστά αποτελέσματα είναι πιο ανεβασμένα (περίπου 73%, 56% και 58%, Πίνακας 2.2.β). Το πρώτο ερώτημα έχει υψηλότερο ποσοστό ορθών απαντήσεων. Είναι πιθανόν αυτό να οφείλεταιστο γεγονός ότι το παραλληλεπίπεδο του ερωτήματος βρίσκεται στη βάση του σχήματος και κατά συνέπεια δεν ακουμπά με άλλα από κάτω του. Στην κατηγορία μετασχηματισμός στο επίπεδο, τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων είναι πιο υψηλά στην ανάλυση του σχήματος σε επιμέρους σχήματα (76,1%) από τη σύνθεση επιμέρους σχημάτων σε ένα σχήμα (63,2%) (Πίνακας 2.2.γ). Οι λανθασμένες απαντήσεις στη σύνθεση συγκεντρώνονται στο b, όπου το πρόβλημα του σχήματος είναι αφενός η αλλαγή στο μέγεθος (το ημικύκλιο είναι μεγαλύτερο), και αφετέρου η μορφή του τριγώνου, αφού τα τρίγωνα δεν είναι ορθογώνια και ισοσκελή, όπως τα αρχικά.

Πίνακας 2.2.β. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα χωρικές σχέσεις και στη διάσταση σχετική θέση.

Χωρικές Σχέσεις					
Σχετική Θέση 1		Σχετική Θέση 2		Σχετική Θέση 3	
Απάντηση	Ποσοστό (%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)
a	9,1	A	6,4	a	3,9
b	**72,7**	B	12,8	b	7,9
c	9,1	**C**	**56,4**	c	17,1
d	2,6	D	23,1	**d**	**57,9**
e	6,5	E	1,3	e	13,2

Πίνακας 2.2.γ. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα χωρικές σχέσεις και στη διάσταση μετασχηματισμός στο επίπεδο.

Χωρικές Σχέσεις Μετασχηματισμός Στο επίπεδο			
Ανάλυση		Σύνθεση	
Απάντηση	Ποσοστό(%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)
A	10,4	a	5,9
B	**76,1**	b	22,1
C	7,5	c	8,8
D	6,0	**d**	**63,2**

Άξονας Μετασχηματισμοί – Περιστροφή: Στην ερώτηση του μετασχηματισμού στο χώρο και την εύρεση του στερεού που αντιστοιχεί σε δοθέν ανάπτυγμα (Πίνακας 2.3), το 63% των απαντήσεων είναι σωστές, ενώ ενδεχομένως ένα μέρος των λανθασμένων απαντήσεων (πάνω από το 29%) να οφείλεται στη στροφή του σχήματος στις απαντήσεις c και d. Η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή το πέρασμα από τον τρισδιάστατο χώρο στον δισδιάστατο, χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά επιτυχίας (92,1% των απαντήσεων). Στη στροφή στο χώρο τα αποτελέσματα είναι πιο απογοητευτικά, αφού μόλις το 48,6% των απαντήσεων είναι σωστές.

Πίνακας 2.3. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα μετασχηματισμοί - περιστροφή και στις τρεις διαστάσεις του άξονα.

Μετασχηματισμοί – Περιστροφή					
Μετασχηματισμοί στο Χώρο					
από 2D σε 3D		από 3D σε 2D		Στροφή	
Απάντηση	Ποσοστό (%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)
a	**63,0**	a	1,3	a	24,3
b	8,2	b	2,6	b	15,7
c	15,1	**c**	**92,1**	**c**	**48,6**
d	13,7	d	3,9	d	11,4

Άξονας Κατανόηση Διαστάσεων: Στην ερώτηση της κατανόησης διαστάσεων και το πέρασμα από τις τρεις διαφορετικές όψεις στο αντίστοιχο στερεό, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (27,4%) συγκεντρώνονται στο δεύτερο σχήμα της διπλής πυραμίδας. Επομένως, οι μαθητές φαίνεται να μην αντιλαμβάνονται την πλάγια και εμπρόσθια τομή, η οποία στο b σχήμα θα είχε ένα ακόμα τρίγωνο συμμετρικό στο κάτω μέρος. Σε σχέση με την κατανόηση των διαστάσεων και των όψεων του στερεού (κάτοψη, πλάγια και εμπρόσθια), οι μαθητές φαίνεται να περνάνε πιο εύκολα από το δισδιάστατο στο τρισδιάστατο χώρο παρά το αντίθετο (ορθές απαντήσεις 63% και 50% αντίστοιχα). Οι λανθασμένες απαντήσεις είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένες στη δεύτερη περίπτωση (Πίνακας 2.4).

Πίνακας 2.4. Αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής στον άξονα κατανόηση διαστάσεων και στις δυο διαστάσεις του άξονα.

Κατανόηση Διαστάσεων			
Πέρασμα από 2D σε 3D		Πέρασμα από 3D σε 2D	
Απάντηση	Ποσοστό (%)	Απάντηση	Ποσοστό (%)
a	5,5	**a**	**50,0**
b	27,4	b	18,4
c	**63,0**	c	17,1
d	4,1	d	14,5

3.6. Αξιοπιστία – Εγκυρότητα διαδικασίας, δείγματος και εργαλείων

Η εγκυρότητα και η αξιοπιστία μιας ποσοτικής έρευνας είναι παράμετροι που συχνά αμφισβητούνται. Ωστόσο, είναι απαραίτητο, προκειμένου τα αποτελέσματα των ερευνητικών μελετών να θεωρούνται έγκυρα και η ερμηνεία τους ασφαλής, να κάνουν χρήση εργαλείων ελεγμένων τόσο ως προς την αξιοπιστία τους όσο και ως προς την εγκυρότητά τους. Στις επιστημονικές έρευνες ποσοτικού τύπου στενά συνυφασμένη με την αξιοπιστία μιας μέτρησης είναι η έννοια της συνέπειας, οριζόμενη με τη σειρά της μέσω της επαναληπτικότητας και της αναπαραγωγισιμότητας μιας σειράς μετρήσεων που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, στη συνοχή και στην ομοιογένεια ενός εργαλείου μέτρησης, καθώς και στο βαθμό που είναι απαλλαγμένο από το τυχαίο σφάλμα. (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Σύμφωνα με τους Ουζούνη και Νακάκη (2011), η υψηλή αξιοπιστία ενός εργαλείου μέτρησης συνδέεται με την ελαχιστοποίηση του τυχαίου σφάλματος, με τη συνέπεια και τη σταθερότητα, που εμφανίζει, ώστε η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων να είναι μικρή, αν επαναληφθεί η μέτρηση κάτω από όμοιες ή σχεδόν όμοιες συνθήκες. Η εγκυρότητα, από την άλλη, αφορά στην εκτίμηση, του κατά πόσο ένα εργαλείο μέτρησης μετράει αυτό το οποίο υποστηρίζει ότι σκοπεύει να μετρήσει. Υπάρχουν διάφορες μορφές ελέγχου της εγκυρότητας, όπως περιεχομένου και εννοιολογικής κατασκευής.

Σχετικά με την αξιοπιστία του προτεινόμενου δοκιμίου θεωρήθηκε απαραίτητο να γίνει έλεγχος αυτής βάσει επαναληπτικών μετρήσεων. Ο Drost (2011) επισημαίνει ότι η χρονική απόσταση από τη μία μέτρηση στην άλλη (test-retest) δεν θα πρέπει να είναι μεγάλη. Επιπλέον, επικρατεί η άποψη ότι, όταν μετράται η επαναληπτική αξιοπιστία (test-retest), τα άτομα που συμμετέχουν σ' αυτή εξοικειώνονται με το περιεχόμενο του δοκιμίου και δίνουν τις ίδιες απαντήσεις με την αρχική μέτρηση, λόγω επίδρασης του φαινομένου πράξης (practice effect/ memory effect). Στις παραπάνω προϋποθέσεις, αν ληφθεί, επιπλέον, υπόψη ο περιορισμός του μεγέθους (πλήθος μαθητών) στις δυο σχολικές μονάδες, που εφαρμόσθηκε η μελέτη, δημιουργείται ο προβληματισμός ότι, ενδεχομένως, η διάσπαση του δείγματος σε δυο για έλεγχο της αξιοπιστίας να έθετε την έρευνα σε κίνδυνο με πιθανή διαρροή των θεμάτων του δοκιμίου.

Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να ληφθεί η απόφαση της διεξαγωγής της πιλοτικής εφαρμογής του δοκιμίου σε άλλες σχολικές μονάδες. Η πιλοτική εφαρμογή είναι απαραίτητη για τη συλλογή των απαραίτητων δεδομένων για τη πραγματοποίηση του ελέγχου της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας του ερωτηματολογίου και, μάλιστα, θεωρείται ακρογωνιαίος λίθος ενός καλού ερευνητικού σχεδιασμού (Hazzi & Maldaon, 2015). Για το σκοπό αυτό επιλέχθηκαν τέσσερις σχολικές μονάδες, ένα γυμνάσιο και τρία γενικά λύκεια.

Το δοκίμιο συμπληρώθηκε στην πιλοτική του εφαρμογή από 78 μαθητές (23 μαθητές Β' Γυμνασίου, 6 μαθητές Γ' Γυμνασίου, 22 μαθητές Α' Λυκείου και 27 μαθητές Β' Λυκείου). Από τη συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων της πιλοτικής εφαρμογής και της εφαρμογής στα δυο πειραματικά σχολεία, διαπιστώθηκε η σταθερότητα και η συνοχή του δοκιμίου. Σαφώς, και οι δυο διαφορετικές εφαρμογές εμφανίζουν διαφορές, οι οποίες συνδέονται, ενδεχομένως, με το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών και τις μαθηματικές τους ικανότητες, αφού οι μισοί από τους μαθητές των πειραματικών εισήχθησαν στις συγκεκριμένες σχολικές μονάδες με εξετάσεις. Ωστόσο, υπάρχει μια σταθερότητα στις κατανομές των σωστών απαντήσεων και στα λάθη των μαθητών, που ενισχύουν την αξιοπιστία του ερωτηματολογίου.

Αναφορικά με την αξιοπιστία εσωτερικής συνοχής ή συνάφειας, αυτή αποτελεί ένα δείκτη που φανερώνει κατά πόσο διαφορετικές προτάσεις (items) μετρούν την ίδια έννοια (μεταβλητή). Η αξιοπιστία εσωτερικής συνοχής τόσο σε μια υποκλίμακα, όσο και σε ολόκληρη κλίμακα εκτιμάται με το συντελεστή Cronbach's alpha, που δείχνει την ομοιογένεια μιας κλίμακας. Για να θεωρείται αποδεκτή η τιμή του Cronbach's alpha θα πρέπει να είναι >0.7 (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Ο συντελεστής αυτός, τόσο στο σύνολο του προτεινόμενου δοκιμίου, όσο και σε επιμέρους κατηγορίες, εμφάνισε χαμηλές τιμές, ενδεχομένως, εξαιτίας του γεγονότος ότι κάθε μεταβλητή μετράει μια διαφορετική διάσταση της χωρικής ικανότητας και οι διακυμάνσεις των λανθασμένων απαντήσεων περιπλέκουν το πρόβλημα. Η εκτίμηση του συντελεστή στις τροποποιημένες διχοτομικές μεταβλητές ανά ερώτηση, οι οποίες απλά καταγράφουν σωστές και λανθασμένες απαντήσεις, έδωσε τιμή 0,64, αρκετά υψηλή σε σχέση με τις προηγούμενες. Ωστόσο, εκτός του ορίου του 0.7. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο εξαιτίας της πολυπλοκότητας της έννοιας της χωρικής ικανότητας, των πολλών παραγόντων, που την χαρακτηρίζουν, και της αλληλοεπικάλυψης μερικών ικανοτήτων μεταξύ τους. Από την μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, έχει βρεθεί πως, αν ενσωματωθούν περισσότερα ερωτήματα σε κάθε διάσταση, τότε ο δείκτης αυτός πιθανότατα θα αυξηθεί σημαντικά.

Η εγκυρότητα του περιεχομένου εξασφαλίστηκε με τη σύνδεση του δοκιμίου και των ερευνητικών ερωτημάτων, που εξετάζει, όπως είναι εμφανές στις προηγούμενες παραγράφους. Η οργάνωση του δοκιμίου σε τέσσερις άξονες σε αντιστοιχία με τα τέσσερα υποερωτήματα του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, καθώς και η σύνδεση του περιεχομένου των ερωτήσεων με τους ορισμούς των εννοιών διασφαλίζει την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής (Διάγραμμα 1). Το εάν μια κλίμακα μέτρησης ή ένα προτεινόμενο δοκίμιο μετράει στην πραγματικότητα αυτό για το οποίο έχει δημιουργηθεί, μπορεί να εκτιμηθεί και με τη χρήση στατιστικών μεθόδων της Ανάλυσης Παραγόντων, οι οποίες βασίζονται στην ανάλυση των συσχετίσεων μεταξύ των ερωτημάτων, ώστε να διαπιστωθεί εάν τα ερωτήματα που ανήκουν στην ίδια διάσταση αποτελούν έναν κοινό παράγοντα (Sherman et al., 2011). Στην παρούσα μελέτη εφαρμόσθηκε η ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, προκειμένου να εντοπισθούν κοινές ομάδες μεταβλητών και μάλιστα αποτελεί και το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο έδειξε πως κάποιες από τις μεταβλητές, όντως, εμφανίζουν σταθερότητα και ομαδοποιούνται στην ίδια κύρια συνιστώσα, ενώ κάποιες άλλες παρουσιάζουν επιπλέον ομαδοποιήσεις. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

3.7 Στατιστική Μεθοδολογία

There are lies, damned lies and statistics
Mark Twain

3.7.1 Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες – Principal Component Analysis (PCA)

Η ανάλυση κύριων συνιστωσών αποτελεί την απλούστερη και πλέον διαδεδομένη μέθοδο ανάλυσης πολυμεταβλητών (Multivariate Analysis) δεδομένων. Στόχος είναι η ανάλυση της δομής ενός συνόλου δεδομένων (στο οποίο μετρήθηκαν ποσοτικές μεταβλητές συσχετισμένες μεταξύ τους), ώστε να αναπαρασταθούν με λιγότερες ασυσχέτιστες μεταξύ τους μεταβλητές (άρα ερμηνεύουν διαφορετικές πλευρές του φαινομένου). Οι νέες μεταβλητές ονομάζονται «κύριες συνιστώσες» και είναι συνθετικές μεταβλητές, που ερμηνεύονται με βάση τα κοινά στοιχεία των αρχικών μεταβλητών, που συμμετέχουν στην δημιουργία τους. Είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η μέθοδος και σε μεταβλητές διάταξης (ιδιαίτερα όταν έχουμε μετρήσει «αρκετές» τιμές κάθε μεταβλητή), ώστε να δοθεί μια εικόνα των δεδομένων και της δομής τους, παρόλο που η βασική προϋπόθεση της μεθόδου είναι η ανάλυση ποσοτικών μεταβλητών.

Η ανάλυση πραγματοποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε, η πρώτη συνιστώσα να εξηγεί τη μέγιστη δυνατή διακύμανση, που αναπτύσσεται μεταξύ των αρχικών μεταβλητών, η δεύτερη, μη συσχετιζόμενη με την πρώτη, να εξηγεί ένα σημαντικό μέρος αυτής αλλά πάντα μικρότερο της πρώτης κ.ο.κ. Κατά την εφαρμογή και μελέτη των στατιστικών αποτελεσμάτων, που προκύπτουν από την μέθοδο, σημαντικά στοιχεία είναι τα ακόλουθα. Οι συσχετίσεις r_{ij} μεταξύ των αρχικών μεταβλητών και των κύριων συνιστωσών ονομάζονται φορτία των συνιστωσών (loadings) και απεικονίζουν πόσο σημαντική είναι η κάθε μια από της αρχικές μεταβλητές στη δημιουργία των συνιστωσών. Τιμές κοντά στο ±1,00 (ισχυρή θετική ή αρνητική συσχέτιση) δηλώνουν εξαιρετικά ισχυρή σχέση, ενώ κοντά στο 0 ασήμαντη.

Ένα, επιπλέον, σημαντικό στάδιο είναι η επιλογή του βέλτιστου αριθμού κύριων συνιστωσών. Ένα από αυτά είναι το ποσοστό της αρχικής διακύμανσης, που αθροιστικά αποτυπώνουν οι κύριες συνιστώσες. Τέλος, ένα σημαντικό στοιχείο είναι η επιλογή εφαρμογής της μεθόδου με ή χωρίς περιστροφή των αξόνων, η οποία ενισχύει σημαντικά την ποιότητα αντιπροσώπευσης και ερμηνείας των εξαγόμενων παραγόντων. Στόχος της περιστροφής είναι κάποιες από τις μεταβλητές να συσχετιστούν ισχυρά με κάποιους παράγοντες και καθόλου με κάποιους άλλους. Με αυτόν τον τρόπο ισχυροποιείται η ερμηνεία επεξήγησης ή μη από τους συγκεκριμένους παράγοντες. Η περιστροφή των παραγόντων δεν επηρεάζει την καλή προσαρμογή του παραγοντικού μοντέλου για λύση. Δηλαδή το εξηγούμενο ποσοστό της ολικής διακύμανσης δεν μεταβάλλεται. Ωστόσο, το ποσοστό της διακύμανσης, που εξηγείται από κάθε παράγοντα, μεταβάλλεται, γιατί η περιστροφή ανακατανέμει την εξηγούμενη διακύμανση στους εξατομικευμένους παράγοντες. Έτσι, διαφορετικές μέθοδοι περιστροφής μπορεί να οδηγήσουν σε αναγνώριση διαφορετικών παραγόντων. Οι συνηθέστερα επιλεγόμενες τεχνικές περιστροφής των αξόνων είναι οι η περιστροφή μέγιστης διακύμανσης (varimax rotation), η περιστροφή μέγιστης τέταρτης δύναμης (quartimax rotation), η περιστροφή μέγιστης ισοδυναμίας (equamax rotation) και η περιστροφή ισόρροπης μεγιστοποίησης (promax rotation).

Παραπάνω λεπτομερής αλγεβρική περιγραφή των παραμέτρων και εξισώσεων της ανάλυσης κύριων συνιστωσών δεν κρίνεται σκόπιμη στην παρούσα μελέτη. Η ανάλυση αυτή χρησιμοποιείται, κυρίως, από τους ερευνητές των κοινωνικών επιστημών, σε προβλήματα όπου σημαντικές μεταβλητές δεν μπορούν να μετρηθούν ή να παρατηρηθούν απευθείας. Μέσω της ανάλυσης στόχος είναι η εύρεση συνδέσεων μεταξύ των μη παρατηρούμενων μεταβλητών (παράγοντες ή συνιστώσες), με τις αρχικές μεταβλητές που παρατηρούμε και για τις οποίες υπάρχουν μετρήσεις. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται και μια ομαδοποίηση των αρχικών μεταβλητών σε κοινές συνιστώσες με τέτοιο τρόπο, ώστε η σύνθεση των νέων ολιγάριθμων μεταβλητών, να διατηρούν ένα μέγιστο πληροφόρησης των αρχικών. Περισσότερα στοιχεία σχετικά με τη μέθοδο της ανάλυσης σε κύριες συνιστώσες δίδονται στους Richman (1986) , Jolliffe (1990) και Πετρίδης (2015).

3.7.2 Ανάλυση κατά Συστάδες σε δύο βήματα – Two Step Cluster Analysis (TSCA)

Η TSCA αναπτύχθηκε από τους Chiu et al. (2001) και σχεδιάστηκε, προκείμενου να χειρίζεται μεγάλο όγκο δεδομένων. Όπως υποδηλώνεται από το όνομα της μεθόδου, αποτελείται από δυο στάδια, το στάδιο της προ-ομαδοποίησης (pre-clustering) και το στάδιο της ομαδοποίησης (clustering). Το πρώτο στάδιο αναφέρεται σε μια σειριακή προσέγγιση ομαδοποίησης, ώστε να ταξινομηθούν προκαταρκτικά τα δεδομένα σε ένα μεγάλο αριθμό αρχικών συστάδων. Σκοπός του πρώτου σταδίου της TSCA είναι ο υπολογισμός και τελικά η δημιουργία ενός νέου πίνακα δεδομένων με λιγότερες περιπτώσεις, ο οποίος και θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο στάδιο. Το δέντρο ομαδοποίησης (CF) αποτελεί έναν αποτελεσματικό τρόπο αναπαράστασης των δεδομένων, αφού από τη μια χρησιμοποιεί λιγότερο χώρο, αποθηκεύοντας λιγότερα δεδομένα από το αρχικό σύνολο των πυκνών παρατηρήσεων, και από την άλλη είναι επαρκές για τον υπολογισμό μέτρων και αποστάσεων που είναι απαραίτητα στον αλγόριθμο της ομαδοποίησης. Θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί και ως ένας τρόπος μείωσης της αρχικής διάστασης του προβλήματος (Chiu et al., 2001).

Στο δεύτερο στάδιο, το οποίο χαρακτηρίζεται ως «στάδιο ομαδοποίησης», οι αρχικές συστάδες λαμβάνονται ως δεδομένα εισόδου και τελικά συγκεντρώνονται, για να δημιουργηθεί ο επιθυμητός και τελικός αριθμός των συστάδων. Από τη στιγμή που ο αριθμός των συστάδων στο δεύτερο στάδιο είναι μικρότερος από το αρχικό σύνολο των παρατηρήσεων του πρώτου σταδίου, είναι εφικτή και επαρκής, πλέον, η εφαρμογή παραδοσιακών μεθόδων ανάλυσης κατά συστάδες. Στο στάδιο αυτό, η TSCA κάνει χρήση μιας κλασικής συσσωρευτικής ιεραρχικής μεθόδου.

Ο αλγόριθμος ξεκινά με το καθορισμό μιας αρχικής συστάδας για κάθε μια από τις υπο-συστάδες, που δημιουργήθηκαν στο πρώτο βήμα της TSCA. Στη συνέχεια, όλες αυτές οι συστάδες συγκρίνονται και επιλέγεται το ζευγάρι εκείνο με την μικρότερη απόσταση ανάμεσα τους, το οποίο και τελικά συγχωνεύεται σε μια νέα συστάδα. Μετά τη συνένωση γίνεται πάλι σύγκριση των αποστάσεων στο καινούργιο σύνολο των συστάδων, βρίσκεται το κοντινότερο ζεύγος και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται, έως ότου όλες οι συστάδες να έχουν ενωθεί σε μια (Chiu et al., 2001).

Το μέτρο της απόστασης που χρησιμοποιείται κάθε φορά εξαρτάται από τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στη μελέτη. Εάν όλες οι μεταβλητές είναι ποσοτικές, τότε γίνεται χρήση της ευκλείδειας απόστασης, δηλαδή οι περιπτώσεις κατατάσσονται σε μια συστάδα, με την οποία έχουν την μικρότερη ευκλείδεια απόσταση. Η απόσταση ανάμεσα σε δυο συστάδες ορίζεται ως η ευκλείδεια απόσταση των κέντρων των δυο συστάδων, ενώ το κέντρο μιας συστάδας καθορίζεται ως το διάνυσμα των μέσων τιμών των μεταβλητών. Αν, όμως, έστω και μια μεταβλητή είναι ποιοτική, τότε εφαρμόζεται η λογαριθμική πιθανοφάνεια (log-likelihood), μια απόσταση που βασίζεται στην πιθανότητα (Chan, 2005a).

3.7.3 Διαχωριστική Ανάλυση (Discriminant Analysis - DA)

Η DA είναι μια στατιστική μεθοδολογία η οποία έχει εφαρμοσθεί ευρέως σε διάφορους τομείς των κοινωνικών και πολιτικών επιστημών (Klecka, 1990). Οι αντικειμενικοί σκοποί της DA σύμφωνα με τον Fernandez (2002) είναι η εξέταση των διαφορών που παρατηρούνται ανάμεσα σε ήδη υπάρχουσες ομάδες, ο αποτελεσματικός διαχωρισμός των ομάδων, η εύρεση των πιο σημαντικών διαχωριστικών μεταβλητών, η εφαρμογή στατιστικών τεστ ελέγχου υποθέσεων σε σχέση με τις διαφορές ανάμεσα στις αναμενόμενες ομαδοποιήσεις, και τέλος, η ταξινόμηση νέων παρατηρήσεων στις ήδη υπάρχουσες ομάδες. Επομένως, εξετάζει τις διαφορές ανάμεσα σε δυο ή περισσότερες ομάδες (εξαρτημένες μεταβλητές) και επιλέγει εκείνες τις μεταβλητές (ανεξάρτητες μεταβλητές) με τη μεγαλύτερη συνεισφορά στο διαχωρισμό των παραπάνω ομάδων που έχουν οριστεί εκ των προτέρων (Wilks, 1995). Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι η ύπαρξη δυο ή περισσότερων ομάδων οι οποίες παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά σε αρκετές ποσοτικές μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση, η DA έχει τη δυνατότητα να παράγει τα μέσα για την κατάταξη οποιαδήποτε παρατήρησης σε κάποια από τις παραπάνω ομάδες, στην οποία προσαρμόζεται καλύτερα (Klecka, 1990; Chan, 2005b). Αυτό επιτυγχάνεται με τη σύνθεση ειδικών εξισώσεων, που απαρτίζονται από τις μεταβλητές εκείνες που είναι οι πλέον επεξηγηματικές με την προσδοκία να είναι ικανές να διακρίνουν στο μέγιστο δυνατόν συγκεκριμένες ομάδες στοιχείων (Πετρίδης, 2015).

Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι, ενώ η διαχωριστική ανάλυση μοιάζει με την ανάλυση κατά συστάδες, παρουσιάζει, ωστόσο, και σημαντικές διαφορές. Η πρώτη και ποιο σημαντική είναι ότι στη διαχωριστική ανάλυση οι ομάδες είναι γνωστές, ενώ στην ανάλυση κατά συστάδες δεν είναι. Για το λόγο αυτό, ο στόχος είναι διαφορετικός. Στη διαχωριστική ανάλυση κύριος στόχος είναι η κατασκευή ενός κανόνα που θα βοηθήσει να ληφθούν αποφάσεις στο μέλλον, ενώ στην ανάλυση κατά συστάδες ο κύριος στόχος είναι η δημιουργία ομοειδών ομάδων με κύριο στόχο την κατανόηση των ήδη υπαρχόντων στοιχείων και τη μείωση της διασποράς στις επιμέρους ομάδες (Wilks, 1995). Σχετίζεται, όμως, και με την ανάλυση κύριων συνιστωσών (PCA), διότι αμφότερες επιδιώκουν να συνθέσουν γραμμικούς συνδυασμούς των μεταβλητών, προκειμένου να εξηγούν κατά τον καλύτερο τρόπο τη συμπεριφορά των στοιχείων. Διαφοροποιούνται στο ότι η DA μεγιστοποιεί τη διαφορά μεταξύ των τιμών στις κατηγορίες της εξαρτημένης μεταβλητής, ενώ η PCA μεγιστοποιεί τη διακύμανση σε όλες τις μεταβλητές, που συνθέτουν τη συνιστώσα (Πετρίδης, 2015).

Προκειμένου να βρεθεί πόσο απαραίτητη είναι μια μεταβλητή σε σχέση με τις υπόλοιπες, είναι απαραίτητο να υπολογισθούν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές, οι οποίοι προσδιορίζουν ποιες μεταβλητές συνεισφέρουν περισσότερο στον καθορισμό των σκορ διαχωρισμού (discriminant scores) σε κάθε συνάρτηση, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτόχρονη συνεισφορά όλων των υπόλοιπων μεταβλητών. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μελέτη του σχετικού μεγέθους των κανονικοποιημένων συντελεστών, αγνοώντας το πρόσημο (απόλυτες τιμές). Έτσι, σύμφωνα, με τον Πετρίδη (2015), αν το ενδιαφέρον της έρευνας στρέφεται στην απόδοση ειδικών ονομάτων (τυπολογία) στις διακριτικές εξισώσεις, κάτι παρόμοιο, δηλαδή, όπως στην παραγοντική ανάλυση, τότε επιλέγονται προς ερμηνεία τα παραγοντικά φορτία. Αν το ενδιαφέρον στρέφεται στη σημαντικότητα (ποιότητα) της συμμετοχής κάθε μεταβλητής στη διαχωριστική συνάρτηση, τότε επιλέγονται οι συντελεστές.

Ο πίνακας δομής (structure matrix) βοηθάει στον προσδιορισμό των ομοιοτήτων ανάμεσα σε μια συγκεκριμένη μεταβλητή και μια διαχωριστική συνάρτηση. Ο πίνακας δίνει τους συντελεστές συσχέτισης κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής με τις διαχωριστικές συναρτήσεις και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της σημαντικότητας κάθε μεταβλητής για την κατασκευή της διαχωριστικής συνάρτησης. Αυτές οι συσχετίσεις (product - moment correlations) δεν επηρεάζονται από τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Τιμές πλησίον του ±1 υποδηλώνουν ότι η συνάρτηση «μεταφέρει» σχεδόν πανομοιότυπη πληροφορία με την μεταβλητή, ενώ, όταν οι τιμές είναι κοντά στο μηδέν, οι δυο παραπάνω έχουν ελάχιστες ομοιότητες (Klecka, 1990).

Οι εξισώσεις ταξινόμησης σύμφωνα με τον Πετρίδη (2015) μπορούν χρησιμοποιηθούν, επίσης, για τον άμεσο υπολογισμό νέων τιμών από την εισαγωγή νέων παρατηρήσεων. Αν υπάρχουν 4 ομάδες, τότε για κάθε παρατήρηση υπολογίζονται 4 διαφορετικές τιμές. Εδώ ισχύει ο κανόνας που δηλώνει ότι μια παρατήρηση ανήκει σε εκείνη την ομάδα στην οποία παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή. Η ταξινόμηση των παρατηρήσεων προσδιορίζεται, επίσης, και με την απόσταση Mahalanobis. Εφαρμόζοντας αντίστροφα τον προηγούμενο κανόνα, κάθε παρατήρηση ταξινομείται σε εκείνη την ομάδα στην οποία παρουσιάζει την ελάχιστη απόσταση.

Ο καλύτερος τρόπος για να βρεθεί πόσο έγκυρα λειτουργεί η εξίσωση ταξινόμησης είναι η εκτίμηση της διασταυρωτής πινακοποίησης (cross tabulation) της εξίσωσης. Σύμφωνα με αυτήν, ένα μέρος του δείγματος χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της εξίσωσης ταξινόμησης και του πίνακα πιθανοτήτων ταξινόμησης, ενώ το υπόλοιπο χρησιμοποιείται ως είσοδος νέων παρατηρήσεων, οι οποίες δίνουν ποσοτική πληροφόρηση για την εγκυρότητα του μοντέλου και του πίνακα ταξινόμησης.

Όλες οι στατιστικές αναλύσεις που εφαρμόσθηκαν στην παρούσα εργασία έγιναν με χρήση του στατιστικού προγράμματος SPSS 23, ενώ κάποια από τα διαγράμματα έγιναν με χρήση του Excel.

Κεφάλαιο 4ο

Αποτελέσματα

«.....χωρίς τη ρητή προσοχή στη χωρική παιδεία, δεν μπορεί η παιδεία να ανταποκριθεί στις ευθύνες της για τον εξοπλισμό της επόμενης γενιάς μαθητών σε ό,τι αφορά τον προσωπικό και εργασιακό τους βίο στον 21ο αιώνα»

Learning to Think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum

National Research Council ΗΠΑ (NRC 2006)

4.1 Κατανομή σχετικών συχνοτήτων κάθε μεταβλητής

Στο πρώτο στάδιο της στατιστικής επεξεργασίας των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή του ερωτηματολογίου μελέτης της χωρικής ικανότητας στους μαθητές του 2ου Πειραματικού Γυμνασίου και του 1ου Πειραματικού Λυκείου Θεσσαλονίκης, έγινε μελέτη της κατανομής των σχετικών συχνοτήτων των απαντήσεων των μαθητών που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις διαστάσεις του ερωτηματολογίου.

4.1.1.α. Άξονας: Χωρικός Προσανατολισμός (Οπτικοποίηση)

Διάσταση: Ανθρώπινη Οπτική Γωνία

Σχετικά με την πρώτη ερώτηση της αντίληψης της ανθρώπινης οπτικής γωνίας, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι ιδιαίτερα υψηλά, αφού το 93% των μαθητών των δυο σχολείων δίνουν την ορθή απάντηση (α). Πιο αναλυτικά, οι σχετικές συχνότητες των απαντήσεων παρουσιάζονται ανά τμήμα και τάξη στον Πίνακα 4.1, όπου διαπιστώνεται ακόμη πως σε τρία από τα έξι τμήματα όλοι οι μαθητές απαντούν σωστά. Οι έντεκα από τους 14 μαθητές των δυο σχολείων που δίνουν λάθος απάντηση ανήκουν στην τάξη της Β΄ Γυμνασίου, επομένως, είναι οι μικρότεροι σε ηλικία. Επιπλέον, οι 12 από τους 14 μαθητές που απαντούν λανθασμένα δίνουν ως απάντηση την β, που σημαίνει πως δεν τοποθετούν καθόλου τον εαυτό τους στη θέση που ορίζεται στο δοθέν σχήμα, αλλά απαντούν βάσει την δική τους οπτική γωνίας σε σχέση με την εικόνα που δίδεται.

Πίνακας 4.1. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 1η ερώτηση: άξονας χωρικός προσανατολισμός και διάσταση ανθρώπινης οπτικής γωνίας.

	Χωρικός Προσανατολισμός - Ανθρώπινη Οπτική Γωνία							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
A	**84,6**	**69,6**	**95,7**	**100,0**	**100,0**	**96,4**	**95,2**	**100,0**
B	15,4	26,1	4,3	0,0	0,0	0,0	4,8	0,0
C	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0
D	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0

4.1.1.β.1 Άξονας: Χωρικός Προσανατολισμός (Οπτικοποίηση)

Διάσταση: Τροποποίηση του PSOT - Προσανατολισμός Οξείας Γωνίας

Στη δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου ζητείται ο προσανατολισμός του μαθητή ανάμεσα σε συγκεκριμένες θέσεις πάνω σε ένα χάρτη. Πρέπει να φανταστεί πως βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θέση στο χάρτη και συγκεκριμένα σε ένα νησί (θέση 1), κοιτώντας προς ένα άλλο νησί (θέση 2). Στη συνέχεια, ζητείται να καθορίσει τη θέση ενός τρίτου νησιού (θέση 3), πάντα σε σχέση με τα προηγούμενα δυο. Δυο ερωτήσεις αναφέρονται σε αυτόν τον άξονα, στη μια το αποτέλεσμα είναι μια οξεία γωνία και στη δεύτερη μια αμβλεία.

Σε σχέση με τα ευρήματα για τον προσανατολισμό της οξείας γωνίας (Πίνακας 4.2), σωστή γωνία είναι των 50^{o}, αλλά λαμβάνεται ως ορθή απάντηση οποιαδήποτε με απόκλιση $\pm 10^{o}$, άρα στο εύρος 40^{o}-60^{o}. Οι σχετικές συχνότητες παρουσιάζονται σε ίσου πλάτους κλάσεις (που κατανέμονται γύρω από την κλάση των ορθών απαντήσεων). Το ποσοστό των ορθών απαντήσεων είναι 67% στο σύνολο των μαθητών, ενώ ανά τμήμα τα ανάλογα ποσοστά κυμαίνονται σε ένα εύρος από 42,9%-81%. Το πιο χαμηλό ποσοστό ορθών απαντήσεων αντιστοιχεί και εδώ σε μαθητές του ενός τμήματος της Β΄ Γυμνασίου (Β2), ενώ το υψηλότερο ποσοστό σε ένα τμήμα της Β' Λυκείου (Β1).

Πίνακας 4.2. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 2η ερώτηση: άξονας χωρικός προσανατολισμός και τροποποίηση του PSOT – προσανατολισμός οξείας γωνίας.

	Χωρικός Προσανατολισμός - Τροποποίηση του PSOT - Οξεία Γωνία							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
< 19^{o}	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,7
19^{o} -39^{o}	7,7	14,3	13,0	4,0	18,5	25,0	19,0	22,2
40^{o} -60^{o}	**69,2**	**42,9**	**69,6**	**76,0**	**66,7**	**71,4**	**81,0**	**59,3**
61^{o} -81^{o}	7,7	19,0	8,7	20,0	14,8	3,6	0,0	14,8
82^{o} -102^{o}	11,5	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
145^{o} -165^{o}	3,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
208^{o} -228^{o}	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
229^{o} -249^{o}	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
271^{o} -291^{o}	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
292^{o} -312^{o}	0,0	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
312^{o} -332^{o}	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

4.1.1.β.2 Άξονας: Χωρικός Προσανατολισμός (Οπτικοποίηση)

Διάσταση: Τροποποίηση του PSOT - Προσανατολισμός Αμβλείας Γωνίας

Σε σχέση με τα ευρήματα για τον προσανατολισμό της αμβλείας γωνίας (σχήμα 4.3), σωστή γωνία είναι των 115^{o} (ορθή απάντηση στο εύρος 105^{o}-125^{o}). Το ποσοστό των ορθών απαντήσεων είναι 34.5% στο σύνολο των μαθητών, ενώ ανά τμήμα τα ανάλογα ποσοστά κυμαίνονται σε ένα εύρος από 20%-50%, σαφώς χαμηλότερο από το ανάλογο της οξείας γωνίας. Το πιο χαμηλό ποσοστό ορθών απαντήσεων αντιστοιχεί και εδώ σε μαθητές του ενός τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου (Γ2-20%), ενώ με εξαίρεση το ένα τμήμα της Β' Γυμνασίου (42,9% ορθές απαντήσεις) το σύνολο των μαθητών του Γυμνασίου φαίνεται να δυσκολεύτηκε να σημειώσει τη σωστή αμβλεία γωνία. Το υψηλότερο ποσοστό παρατηρείται σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου (Α2-50%). Αξίζει να αναφερθεί πως η συγκεκριμένη ερώτηση προσανατολισμού αμβλείας γωνίας ανήκει στις ερωτήσεις εκείνες του ερωτηματολογίου με το μεγαλύτερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων από τους μαθητές.

Πίνακας 4.3. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για τη 2η ερώτηση: άξονας χωρικός προσανατολισμός και τροποποίηση του PSOT – προσανατολισμός αμβλείας γωνίας.

	Χωρικός Προσανατολισμός / Τροποποίηση του PSOT / Αμβλεία Γωνία							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
21^o -41^o	3,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
63^o -83^o	0,0	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
84^o -104^o	7,7	14,3	0,0	4,0	0,0	7,1	4,8	0,0
105^o -125^o	**23,1**	**42,9**	**26,1**	**20,0**	**42,3**	**50,0**	**33,3**	**40,7**
126^o -146^o	53,8	28,6	56,5	64,0	50,0	35,7	61,9	51,9
147^o -167^o	7,7	0,0	17,4	12,0	7,7	3,6	0,0	3,7
210^o -230^o	3,8	9,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,7
231^o -251^o	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0

4.1.2.α. Άξονας: Χωρικές Σχέσεις (οπτικοποίηση)

Διάσταση: Καταμέτρηση Κύβων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στην ερώτηση του άξονα χωρικές σχέσεις και στη διάσταση της καταμέτρησης κύβων.

Πίνακας 4.4. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 3η ερώτηση: άξονας χωρικές σχέσεις, διάσταση καταμέτρηση κύβων. Πλήθος κύβων: 16.

	Χωρικές Σχέσεις / Καταμέτρηση κύβων/ Πλήθος: 16							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
13	34,6	21,7	4,3	0,0	11,1	28,6	42,9	42,3
14	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	0,0	13,0	4,3	16,0	0,0	3,6	9,5	7,7
16	**42,3**	**30,4**	**30,4**	**60,0**	**51,9**	**39,3**	**38,1**	**26,9**
17	0,0	0,0	0,0	4,0	11,1	3,6	4,8	0,0
18	7,7	4,3	4,3	8,0	7,4	3,6	0,0	11,5
19	0,0	8,7	30,4	12,0	14,8	7,1	0,0	11,5
20	15,4	8,7	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8	0,0
21	0,0	4,3	26,1	0,0	3,7	10,7	0,0	0,0
22	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
24	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0

Δόθηκαν δυο επιμέρους σχήματα στους μαθητές, ένα με 16 κύβους (Πίνακας 4.4) και ένα με 65 (Πίνακας 4.5). Και οι δυο ερωτήσεις ανήκουν στις ερωτήσεις με σχετικά υψηλά ποσοστά λανθασμένων ερωτήσεων.

Πίνακας 4.5. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 3η ερώτηση: άξονας χωρικές σχέσεις, διάσταση καταμέτρηση κύβων. Πλήθος κύβων: 65.

	Χωρικές Σχέσεις / Καταμέτρηση κύβων/ Πλήθος: 65							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
25	44,0	13,0	0,0	0,0	7,7	3,6	28,6	23,1
26	4,0	8,7	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	0,0
28	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
31	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
35	0,0	4,3	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
37	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8
39	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
42	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	3,8
43	4,0	17,4	0,0	4,0	15,4	10,7	4,8	7,7
44	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	3,8
45	0,0	8,7	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
46	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8	3,8
48	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
49	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	4,8	3,8
50	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	3,6	0,0	0,0
52	4,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
53	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
55	4,0	0,0	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	0,0
57	0,0	4,3	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	0,0
59	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
61	0,0	0,0	0,0	8,0	0,0	0,0	0,0	0,0
63	0,0	0,0	4,3	4,0	0,0	0,0	0,0	3,8
64	8,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8	3,8
65	**24,0**	**21,7**	**91,3**	**48,0**	**53,8**	**75,0**	**38,1**	**23,1**
66	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	14,3	3,8
67	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
68	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7
70	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	0,0
73	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
75	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8
82	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8
84	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	0,0
85	0,0	0,0	0,0	4,0	3,8	0,0	0,0	0,0
90	0,0	8,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Πιο συγκεκριμένα οι 120 (60%) και οι 107 (53.5%) από τους μαθητές απάντησαν λάθος στην ερώτηση με τους 16 και 65 κύβους αντίστοιχα. Το βασικό λάθος των μαθητών φαίνεται να είναι ότι θεωρούν τους κύβους να «αιωρούνται», δηλαδή, δεν μετρούν όσους κύβους είναι απαραίτητοι μεν για την κατασκευή του σχήματος, δεν είναι όμως φανεροί. Ακριβώς αυτή η λάθος θεώρηση των μαθητών δίνει και τις περισσότερες λάθος απαντήσεις (46/120 και 29/107). Τα χαμηλότερα ποσοστά ορθής απάντησης για το σχήμα με τους 16 κύβους, παρατηρούνται στους μαθητές του Β2 του Λυκείου, ενώ χαμηλά είναι, επίσης, τα ποσοστά στα Β2 και Γ1 του Γυμνασίου (Πίνακας 4.4). Οι μαθητές του Γ2 του Γυμνασίου παρουσίασαν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις στην καταμέτρηση των 16 κύβων (60%). Τα χαμηλά ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τα τμήματα Β2 του Γυμνασίου και Β2 του Λυκείου διατηρούνται και στην ερώτηση με τους 65 κύβους, ενώ η εικόνα αλλάζει σημαντικά για την περίπτωση του τμήματος Γ1 του Γυμνασίου, όπου οι μαθητές απαντούν σωστά σε ένα ποσοστό πάνω από το 91% (Πίνακας 4.5). Υψηλά είναι τα ποσοστά (75%) και για τους μαθητές του Α2 του Λυκείου.

4.1.2.β. Άξονας: Χωρικές Σχέσεις

Διάσταση: Σχετική Θέση – επαφές τμημάτων κύβου

Η επόμενη ερώτηση αναφέρεται και αυτή στον άξονα χωρικές σχέσεις, εξετάζοντας, όμως, τη σχετική θέση ενός σχήματος. Η ερώτηση αποτελείται από τρία επιμέρους ερωτήματα. Τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων, στο σύνολο των μαθητών, κυμαίνονται από 68.5% για τη δεύτερη σχετική θέση, ενώ έως 85.5% για την πρώτη. Τα καλύτερα αποτελέσματα για την πρώτη σχετική θέση, ενδεχομένως, να οφείλονται και στο γεγονός ότι στη θέση αυτή το παραλληλεπίπεδο δεν έχει άλλα στερεά σχήματα από κάτω από αυτό, παρά μόνο από πάνω και επομένως είναι πιο εύκολα αντιληπτό με πόσα άλλα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ακουμπά.

Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες ανά τάξη. Για τη σχετική θέση 1, η Α’ Λυκείου έδωσε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις, ενώ τις λιγότερες τις συναντάμε στους μαθητές του Β2 τμήματος. Για τη σχετική θέση 2, το τμήμα Γ1 έδωσε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις, ενώ οι λιγότερες και σε αυτήν την περίπτωση αναφέρονται στους μαθητές του Β2 τμήματος. Τέλος, για τη σχετική θέση 3 στο Α2 Λυκείου σημειώθηκε το μεγαλύτερο ποσοστό ορθών απαντήσεων, ενώ τις λιγότερες τις συναντάμε στους μαθητές του Β2 τμήματος του Λυκείου.

Πίνακας 4.6. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 4η ερώτηση: άξονας χωρικές σχέσεις, διάσταση σχετική θέση.

		Χωρικές Σχέσεις / Σχετική Θέση							
		Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
Σχετική Θέση 1	A	3,8	8,7	4,3	8,0	3,7	0,0	0,0	7,4
	B	**88,5**	**65,2**	**87,0**	**84,0**	**92,6**	**92,9**	**90,5**	**81,5**
	C	0,0	21,7	8,7	0,0	3,7	3,6	9,5	3,7
	D	0,0	0,0	0,0	4,0	0,0	3,6	0,0	3,7
	E	7,7	4,3	0,0	4,0	0,0	0,0	0,0	3,7
Σχετική Θέση 2	A	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0
	B	3,8	8,7	0,0	20,0	11,1	0,0	0,0	7,4
	C	**69,2**	**56,5**	**78,3**	**72,0**	**70,4**	**71,4**	**66,7**	**63,0**
	D	15,4	26,1	21,7	8,0	14,8	17,9	28,6	29,6
	E	11,5	8,7	0,0	0,0	3,7	7,1	4,8	0,0
Σχετική Θέση 3	A	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,7
	B	3,8	0,0	0,0	0,0	7,4	0,0	0,0	3,7
	C	3,8	8,7	0,0	20,0	3,7	0,0	0,0	0,0
	D	**84,6**	**78,3**	**82,6**	**80,0**	**74,1**	**85,7**	**81,0**	**70,4**
	E	7,7	8,7	17,4	0,0	14,8	14,3	19,0	22,2

4.1.2.γ.1 Άξονας: Χωρικές Σχέσεις

Διάσταση: Μετασχηματισμός στο επίπεδο - Ανάλυση

Συνεχίζοντας στο ίδιο άξονα των χωρικών σχέσεων, η επόμενη ερώτηση αναφέρεται στην ανάλυση σχήματος στο επίπεδο σε επιμέρους τμήματά του. Η ερώτηση αυτή δεν φαίνεται να δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές, αφού απαντούν σωστά πάνω από το 91% από αυτούς. Αποτελεί μια από τις ερωτήσεις με το μικρότερο ποσοστό λαθών. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές (Πίνακας 4.7) απαντούν σωστά σε ποσοστά που κυμαίνονται από 90,5%-96.4%, με μόνη εξαίρεση και εδώ το τμήμα Β2 του Γυμνασίου, που απαντά σε ποσοστό μόλις 73.9%. Το 8.7% των μαθητών αυτού του τμήματος φαίνεται να μην έχει αντίληψη του μεγέθους του σχήματος (απάντηση c), ενώ το 17.4% αδυνατεί να δίνει την συνολική εικόνα από τα επιμέρους σχήματα (απάντηση d, τετράγωνο στη θέση του σωστού τριγώνου).

Πίνακας 4.7. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 5η ερώτηση: άξονας χωρικές σχέσεις, διάσταση ανάλυση, μετασχηματισμός στο επίπεδο.

	Χωρικές Σχέσεις / Μετασχηματισμός στο Επίπεδο/ Ανάλυση							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7	3,6	4,8	7,4
b	**92,3**	**73,9**	**95,5**	**96,0**	**92,3**	**96,4**	**90,5**	**92,6**
c	7,7	8,7	4,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
d	0,0	17,4	0,0	4,0	0,0	0,0	4,8	0,0

4.1.2.γ.2 Άξονας: Χωρικές Σχέσεις

Διάσταση: Μετασχηματισμός στο επίπεδο - Σύνθεση

Η επόμενη ερώτηση αποτελεί την τελευταία της κατηγορίας των χωρικών σχέσεων και αναφέρεται στη σύνθεση σχήματος στο επίπεδο σε επιμέρους τμήματά του. Στην ερώτηση αυτή απαντούν σωστά το 80% περίπου των μαθητών, με τα λάθη να κατανέμονται σε λάθη αντίληψης μεγέθους σχήματος κατά 11.3% (οι κυκλικοί τομείς δεν είναι ίδιοι), ενώ σε μικρότερο ποσοστό (8.7%) είναι αντίληψη χαρακτηριστικών σχήματος, αφού δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται πως τα μικρά τρίγωνα δεν είναι σωστά στην απάντηση, που δίνουν, αφού δεν είναι ορθογώνια, όπως είναι στην πραγματικότητα. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές (Πίνακας 4.8) απαντούν σωστά σε ποσοστά που κυμαίνονται από 65,4%-92.3%, με τις χαμηλότερες συχνότητες να εντοπίζονται στα τμήματα Β1 Γυμνασίου και Β2 Λυκείου, ενώ οι μέγιστες σημειώνονται στα τμήματα Γ1 Γυμνασίου και Α1 Λυκείου. Το ενδιαφέρον είναι πως τρία από τα τέσσερα τμήματα του Γυμνασίου σημειώνει τα περισσότερα λάθη του στην αντίληψη μεγέθους σχήματος (απάντηση b), ενώ δυο από τα τέσσερα τμήματα του Λυκείου στην αντίληψη χαρακτηριστικών σχήματος (απάντηση c).

Πίνακας 4.8. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 6η ερώτηση: άξονας χωρικές σχέσεις, διάσταση σύνθεση, μετασχηματισμός στο επίπεδο.

	Χωρικές Σχέσεις / Μετασχηματισμός στο Επίπεδο/ Σύνθεση							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
b	26,9	15,0	4,3	12,5	3,8	7,4	9,5	11,1
c	7,7	5,0	4,3	4,2	3,8	7,4	14,3	22,2
d	**65,4**	**80,0**	**91,3**	**83,3**	**92,3**	**85,2**	**76,2**	**66,7**

4.1.3.α. Άξονας: Μετασχηματισμοί - Περιστροφή

Διάσταση: Μετασχηματισμός στο χώρο από 2D σε 3D

Η επόμενη ερώτηση των μετασχηματισμών αναφέρεται στην εύρεση του τρισδιάστατου σχήματος που αντιστοιχεί σε δοθέν ανάπτυγμα στο επίπεδο. Οι μαθητές απαντούν σωστά σε ποσοστό 84%. Πιο αναλυτικά (Πίνακας 4.9), ανά τμήμα οι μαθητές απαντούν σωστά σε ποσοστά που κυμαίνονται από 70,4% (τμήμα Β2 Λυκείου), έως και απόλυτο 100% (μαθητές Α2 Λυκείου). Τα περισσότερα λάθη συγκεντρώνονται στην απάντηση β, όπου οι μαθητές φαίνεται να μην αντιλαμβάνονται το δισδιάστατο ανάπτυγμα του στερεού, αφού δεν εντοπίζουν την πλάγια όψη του.

Πίνακας 4.9. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 7η ερώτηση: άξονας μετασχηματισμός περιστροφή, διάσταση μετασχηματισμός στον χώρο από 2D σε 3D.

Μετασχηματισμοί - Περιστροφή/ Μετασχηματισμός στο Χώρο/ από 2D σε 3D								
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	**73,1**	**78,3**	**91,3**	**80,0**	**96,3**	**100,0**	**80,0**	**70,4**
b	11,5	8,7	4,3	4,0	3,7	0,0	20,0	11,1
c	11,5	8,7	0,0	8,0	0,0	0,0	0,0	7,4
d	3,8	4,3	4,3	8,0	0,0	0,0	0,0	11,1

4.1.3.β. Άξονας: Μετασχηματισμοί - Περιστροφή

Διάσταση: Μετασχηματισμός στο χώρο από 3D σε 2D

Η επόμενη ερώτηση των μετασχηματισμών στο χώρο απαντήθηκε σωστά από τους περισσότερους μαθητές (93,5%). Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.10, υπάρχουν δυο τμήματα όπου όλοι οι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση (Γ2 Γυμνασίου και Β2 Λυκείου). Γενικά, τα ποσοστά σωστής απάντησης κυμαίνονται από 85.2%-100%, γεγονός που αντιστοιχεί σε τέσσερις το πολύ μαθητές ανά τμήμα με λάθος απάντηση. Η ερώτηση αυτή αποτελεί μια από τις ερωτήσεις με το μικρότερο ποσοστό λαθών.

Πίνακας 4.10. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 8η ερώτηση: άξονας μετασχηματισμός περιστροφή, διάσταση μετασχηματισμός στον χώρο από 3D σε 2D.

Μετασχηματισμοί - Περιστροφή/ Μετασχηματισμός στο Χώρο/ από 3D σε 2D								
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	3,8	0,0	0,0	0,0	3,7	3,6	0,0	3,7
b	0,0	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	3,7
c	**88,5**	**95,7**	**95,7**	**100,0**	**88,9**	**96,4**	**100,0**	**85,2**
d	7,7	4,3	0,0	0,0	7,4	0,0	0,0	7,4

4.1.3.γ. Άξονας: Μετασχηματισμοί - Περιστροφή

Διάσταση: Στροφή στον χώρο

Η επόμενη ερώτηση αναφέρεται στη διάσταση της στροφής στο χώρο, όπου το 69% των μαθητών έδωσαν τη σωστή απάντηση. Τα λάθη κατανέμονται σε όλες τις άλλες απαντήσεις, με λίγο περισσότερες στην απάντηση α, όπου ο μαθητής φαίνεται να παρουσιάζει αδυναμία να αντιληφθεί τη στροφή, αφού, για να έρθει το φεγγάρι πάνω, έχει γίνει μια στροφή 90^{o} σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά), κάτι που θα σήμαινε πως το εξάγωνο δεν θα ήταν ορατό στο σχήμα, και το σχήμα με το τετράγωνο και τη διαγώνιο θα έπρεπε και αυτό να δίνεται με συμμετρία ως προς τον κάθετο άξονα. Είναι εφικτό να απαντήσει κάποιος σωστά, παρατηρώντας πως στις τρεις λανθασμένες απαντήσεις το φεγγάρι με το πεντάγωνο έχουν άλλη σχετική θέση από την αρχική (εκεί το φεγγάρι είναι παράλληλο σε μια πλευρά του πενταγώνου και όχι σε σχέση με μια νοητή ευθεία που περνάει από μια κορυφή). Πιο αναλυτικά, διαπιστώνεται μεγάλο εύρος των ποσοστών των σωστών απαντήσεων, από μόλις 42,3% στο Β1 του Γυμνασίου έως 96,3% στο Α1 του Λυκείου (Πίνακας 4.11). Θα λέγαμε πως είναι η ερώτηση με τη μεγαλύτερη διακύμανση του ποσοστού των ορθών απαντήσεων στα 8 τμήματα. Οι μαθητές του Γυμνασίου δίνουν τη σωστή απάντηση στην ερώτηση σε μικρότερο ποσοστό 60,2% σε σχέση με τους μαθητές Λυκείου (77,6%).

Πίνακας 4.11. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 10η ερώτηση: άξονας μετασχηματισμός περιστροφή, διάστασης στροφή στον χώρο.

	Μετασχηματισμοί - Περιστροφή/ Στροφή							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	30,8	26,1	8,7	16,0	0,0	10,7	4,8	14,8
b	15,4	8,7	0,0	16,0	3,7	7,1	9,5	7,4
c	**42,3**	**43,5**	**87,0**	**68,0**	**96,3**	**78,6**	**76,2**	**59,3**
d	11,5	21,7	4,3	0,0	0,0	3,6	9,5	18,5

4.1.4.α. Άξονας: Κατανόηση των Διαστάσεων – Όψεις των στερεών

Διάσταση: Από τον 2D στον 3D

Στον επόμενο άξονα της κατανόησης των διαστάσεων οι μαθητές απαντούν σωστά σε ποσοστό 77%. Το 20% των λανθασμένων απαντήσεων εντοπίζεται στην αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν την εμπρόσθια όψη του στερεού, αφού συγχέουν μια απλή πυραμίδα με μια διπλή πυραμίδα, συμμετρική ως προς το νοητό οριζόντιο επίπεδο, που θα είχε εμπρόσθια όψη ένα ακόμη δεύτερο συμμετρικό ως προς το οριζόντιο επίπεδο τρίγωνο.

Πίνακας 4.12. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 11η ερώτηση: άξονας κατανόηση των διαστάσεων – όψεις στερεών, διάστασης από τον 2D στον 3D.

	Κατανόηση των Διαστάσεων - Όψεις των στερεών/ από τον 2D στον 3D							
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	11,5	4,3	4,3	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0
b	23,1	34,8	8,7	28,0	7,4	14,3	15,0	25,9
c	**65,4**	**56,5**	**87,0**	**68,0**	**92,6**	**85,7**	**85,0**	**74,1**
d	0,0	4,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Πιο αναλυτικά ανά τμήμα (Πίνακας 4.12), τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων κυμαίνονται από 56,5% (Β2 Γυμνασίου) έως 92,6% (Α1 Λυκείου). Η ερώτηση αυτή, σαφώς, δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές Γυμνασίου (σωστά απαντούν το 69% περίπου σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό του 84,3% των μαθητών Λυκείου).

4.1.4.β. Άξονας: Κατανόηση των Διαστάσεων – Όψεις των στερεών

Διάσταση: Από τον 3D στον 2D

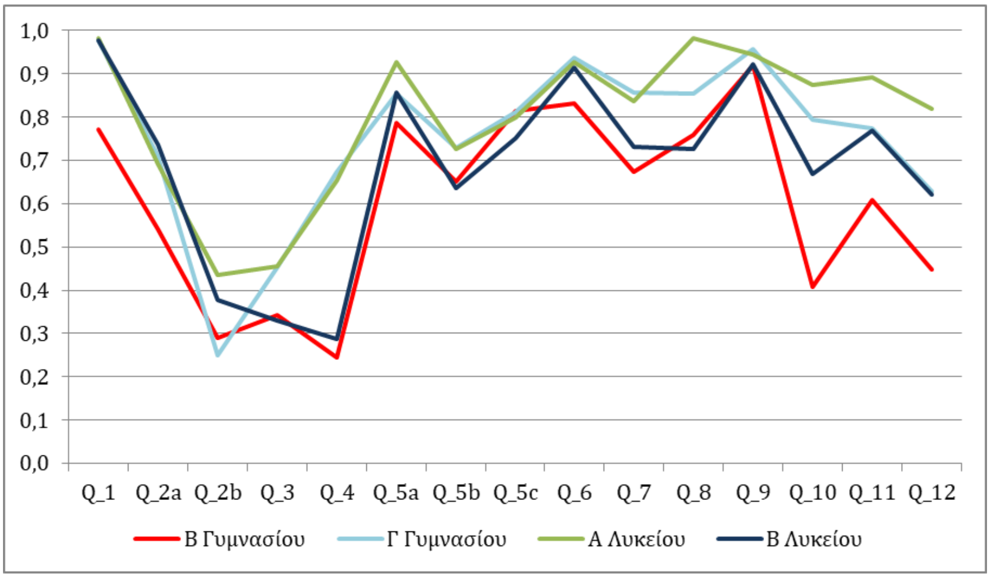
Στον επόμενο άξονα της κατανόησης των διαστάσεων και το πέρασμα από τον τρισδιάστατο στο δισδιάστατο, οι μαθητές απαντούν σωστά σε ποσοστό 63,6%. Το μεγαλύτερο ποσοστό λαθών συγκεντρώνεται στις απαντήσεις γ και δ, δηλαδή στην κατανόηση της πλάγιας και εμπρόσθιας όψης. Στην κατανομή των αντίστοιχων συχνοτήτων ανά τμήμα (Πίνακας 4.13) είναι εμφανές πως οι μαθητές του Γυμνασίου δυσκολεύονται περισσότερο να δώσουν σωστή απάντηση από τους μαθητές Λυκείου (54% και 72,5% αντίστοιχα). Στους μαθητές του Γυμνασίου, το πιο σύνηθες λάθος είναι η απάντηση γ, που αναφέρεται στην πλάγια όψη, ενώ στους μαθητές του λυκείου η απάντηση δ, η οποία και σχετίζεται με την αντίληψη της εμπρόσθιας όψης.

Πίνακας 4.13. Σχετικές συχνότητες (%) ανά τάξη και τμήμα των απαντήσεων για την 12η ερώτηση: άξονας κατανόηση των διαστάσεων – όψεις στερεών, διάστασης από τον 2D στον 3D.

Κατανόηση των Διαστάσεων - Όψεις των στερεών/ από τον 3D στον 2D								
	Β1 Γυμ.	Β2 Γυμ.	Γ1 Γυμ.	Γ2 Γυμ.	Α1 Λυκ.	Α2 Λυκ.	Β1 Λυκ.	Β2 Λυκ.
a	**46,2**	**45,5**	**73,9**	**52,0**	**81,5**	**85,2**	**61,9**	**59,3**
b	15,4	4,5	4,3	12,0	3,7	3,7	9,5	11,1
c	11,5	31,8	17,4	20,0	11,1	3,7	9,5	14,8
d	26,9	18,2	4,3	16,0	3,7	7,4	19,0	14,8

4.1.5. Ο ρόλος της ηλικίας

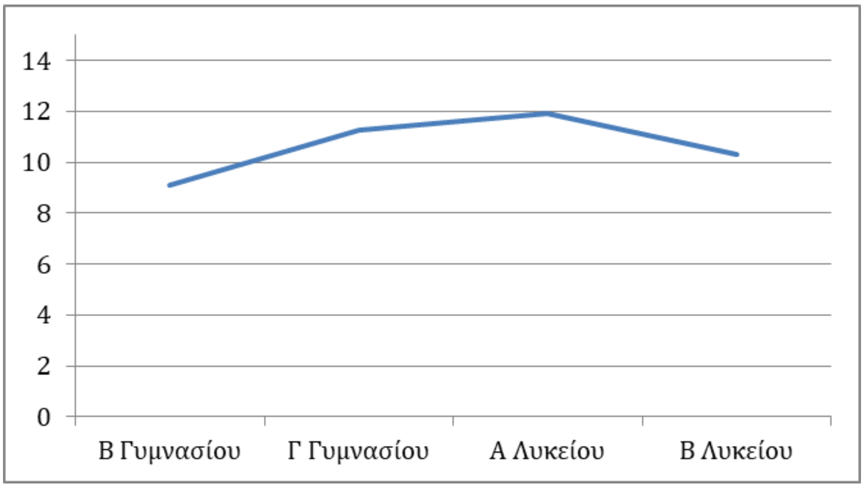
Σε γενικές γραμμές η χωρική ικανότητα βελτιώνεται με την άυξηση της ηλικίας. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται η κατανομή των μέσων τιμών των απαντήσεων σε κάθε έρωτηση. Δίδονται οι μέσες τιμές των μεταβλητών που καταγράφουν με 0, αν η απάντηση είναι λανθασμένη, και 1, αν η απάντηση είναι ορθή. Επομένως, όσο πιο κοντά στο ένα είναι η μέση τιμή, τόσο περισσότερες θα είναι οι σωστές απαντήσεις. Από την παρατήρηση του διαγράμματος γίνεται εμφανές πως στις περισσότερες ερωτήσεις οι μαθητές της Α' Λυκείου παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα από τους μαθητές του Γυμνασίου. Οι χαμηλότερες επιδόσεις σημειώνονται στους μαθητές της Β’ Γυμνασίου, ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζει η εικόνα των απαντήσεων των μαθητών της Β’ Λυκείου. Με εξαίρεση τις ερωτήσεις από τον άξονα του χωρικού προσανατολισμού, σε όλες τις άλλες ερωτήσεις η Β’ Λυκείου φαίνεται να δυσκολεύεται περισσότερο από την Α,’ και σε μερικές περιπτώσεις και από αρκετούς μαθητές Γυμνασίου. Μια λογική εξήγηση είναι ο τρόπος εισαγωγής στα Πειραματικά και οι χαμηλότερες επιδόσεις σε γενικές γραμμές αυτής της τάξης.



Σχήμα 4.1. Κατανομή των μέσων τιμών των απαντήσεων ανά ερώτηση και ανά τάξη.

Κάποιες από τις ερωτήσεις φαίνεται ότι διαχωρίζουν καλύτερα την απόδοση ανά τάξη (μεγαλύτερες διαφορές στις μέσες τιμές). Η 1^{η} ερώτηση του χωρικού προσανατολισμού ανθρώπινης γωνίας διαχωρίζει τους μαθητές της Β’ Γυμνασίου από τις άλλες τρεις τάξεις. Η 3^{η} και κυρίως η 4^{η} ερώτηση της καταμέτρησης κύβων δημιουργεί δυο επιμέρους ομάδες, την Β’ Γυμνασίου μαζί με την Β’ Λυκείου και την Γ’ Γυμνασίου μαζί με την Α’ Λυκείου. Η 7^{η} και η 8^{η} ερώτηση της σύνθεσης και του μετασχηματισμού στο χώρο από το ανάπτυγμα στο στερεό, επίσης, διαχωρίζουν τις δυο τελευταίες τάξεις από τις άλλες δυο. Η ερώτησης της στροφής (10^{η}) διαχωρίζει όλες τις τάξεις μεταξύ τους, ενώ οι ερωτήσεις της αντίληψεις διαστάσεων διαχωρίζουν τις τάξεις Β’ Γυμνασίου, Α’ και Β’ Λυκείου. Η Γ’ Γυμνασίου σε αυτές τις δυο ερωτήσεις έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με την Β’ Λυκείου.

Αυτό όμως που έχει ενδιαφέρον είναι ότι σε όλες τις τάξεις οι μαθητές παρουσίασαν ίδια μοτίβα απόδοσης, με την έννοια ότι η απόδοσή τους σε κάποιες ερωτήσεις ήταν σαφώς καλύτερη από κάποιες άλλες. Οι γραμμές που δίνουν την κύμανση των μέσων τιμών για τις τέσσερις τάξεις είναι σχεδόν παράλληλες, τονίζοντας πως οι μαθητές ανεξάρτητα επιπέδου δυσκολεύτηκαν στις ίδιες ερωτήσεις, γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι η χωρική ικανότητα δεν είναι μονοδιάστατη έννοια αλλά μάλλον πολυπαραγοντική.



Σχήμα 4.2. Κατανομή των μέσων τιμών του πλήθους των σωστών απαντήσεων ανά τάξη.

Από την κατανομή των μέσων τιμών του πλήθους των σωστών απαντήσεων ανά τάξη (σχήμα 4.2), διαπιστώνεται πως όσο η τάξη και η ηλικιακή ομάδα μεγαλώνουν τόσο αυξάνεται και το πλήθος των σωστών απαντήσεων που δίνουν οι μαθητές, με εξαίρεση και πάλι τη Β' Λυκείου η οποία σημειώνει μικρότερη μέση τιμή από τη Γ΄ Γυμνασίου.

4.2 Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες (Principal Component Analysis)

Στο επόμενο στάδιο της παρούσας μελέτης εφαρμόσθηκε η ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, προκειμένου αφενός να μειωθεί η αρχική διάσταση του προβλήματος (αντικαθιστώντας τις μεταβλητές – ερωτήσεις του δοκιμίου με τις νέες ασυσχέτιστες συνιστώσες), αφετέρου για τη μελέτη της ομαδοποίησης αυτών των ερωτήσεων σε νέες συνιστώσες (που μπορεί να φωτίζει άλλες ομαδοποιήσεις από αυτές που αρχικά προτείνονται ή να επισημάνει την σταθερότητα των ήδη προτεινόμενων) και τέλος, για χρήση των νέων ασυσχέτιστων μεταβλητών στο επόμενο στάδιο της μελέτης (δηλαδή την ανάλυση κατά συστάδες με στόχο την ομαδοποίηση αυτή τη φορά των μαθητών).

Οι αρχικές μεταβλητές μετασχηματίστηκαν από μεταβλητές με αλφαβητικές τιμές (a, b, c και d) σε αριθμητικές (1, 2, 3 και 4), προκειμένου να είναι δυνατή η εισαγωγή τους στο στατιστικό πακέτο. Επιπλέον, προστέθηκαν δυο νέες μεταβλητές οι οποίες καταγράφουν για κάθε μαθητή το σύνολο (άθροισμα) των σωστών και αντίστοιχα λανθασμένων απαντήσεων. Προφανώς, το άθροισμα των δυο τελευταίων μεταβλητών σε κάθε περίπτωση είναι 15 (όσο και το πλήθος των ερωτήσεων), ενώ η μία μεταβλητή είναι συμπλήρωμα της άλλης (αν το άθροισμα των σωστών είναι παραδείγματος χάριν 10, τότε οι λανθασμένες απαντήσεις θα είναι 15-10 = 5 σε πλήθος).

Εφαρμόσθηκαν διάφοροι τρόποι της ανάλυσης τόσο χωρίς περιστροφή όσο και με διαφορετικές μεθόδους περιστροφής. Η περιστροφή χρησιμοποιείται, ώστε τα αποτελέσματα της εφαρμογής να έχουν την καλύτερη δυνατή ερμηνεία, δεδομένου ότι στόχος είναι οι επιβαρύνσεις (φορτίσεις, loadings) κάποιων παραγόντων να είναι μεγάλες, σε απόλυτη κλίμακα μόνο για κάποιες μεταβλητές, έτσι ώστε, εξετάζοντας ποιες μεταβλητές παρουσιάζουν σημαντικές συσχετίσεις με κάποιους παράγοντες, να δοθεί κατάλληλη ερμηνεία. Ανάμεσα στις μεθόδους περιστροφής είναι η varimax, η οποία ελαχιστοποιεί τον αριθμό μεταβλητών που έχουν μεγάλες επιβαρύνσεις για κάθε παράγοντα, η quartimax, η οποία ελαχιστοποιεί τον αριθμό παραγόντων που εξηγούν μία μεταβλητή, η equimax, η οποία αποτελεί συνδυασμό των δυο προηγούμενων, η direct oblimin rotation και η promax οι οποίες αποδίδουν συσχετισμένους παράγοντες.

Από το σύνολο των έξι εφαρμογών έγινε μελέτη της ομαδοποίησης των αρχικών μεταβλητών σε κάθε συνιστώσα. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.14, στις περισσότερες αναλύσεις οι ομαδοποιήσεις γίνονται με παρόμοιο τρόπο.

Για την ακρίβεια, οι αρχικές μεταβλητές ομαδοποιούνται στο σύνολο των διαφορετικών εφαρμογών της ανάλυσης στις κύριες συνιστώσες με τον τρόπο που παρουσιάζεται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 4.15. Από το σύνολο των εφαρμογών επιλέχθηκε η περιστροφή μέγιστης διακύμανσης (varimax rotation), η οποία και θα αναλυθεί περαιτέρω. Η περιστροφή αυτή ελαχιστοποιεί τον αριθμό των μεταβλητών που διατηρούν υψηλά παραγοντικά φορτία (loadings) σε κάθε παράγοντα, ενώ ταυτόχρονα μεγιστοποιεί τη διακύμανση των τετραγώνων των παραγοντικών φορτίων. Απλοποιείται με αυτόν τον τρόπο αρκετά η απόδοση ερμηνείας των συνιστωσών. Τα παραγοντικά φορτία και το υπόβαθρο των γνώσεων μας προς τις υπό μελέτη μεταβλητές χρησιμοποιούνται, συνήθως, για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Γενικώς, το παραγοντικό φορτίο μιας μεταβλητής σε ένα παράγοντα θεωρείται υψηλό, όταν έχει τιμή >|0,600| στις θετικές επιστήμες και >|0,25-,30| ή και >|0,400| στις θεωρητικές (Πετρίδης, 2015).

Πίνακας 4.14. Κατανομή των αρχικών μεταβλητών στις κύριες συνιστώσες: α) χωρίς περιστροφή, β) με περιστροφή Quartimax (Kaiser Normalization), γ) με περιστροφή Varimax (Kaiser Normalization), δ) με περιστροφή Equamax (Kaiser Normalization), ε) με περιστροφή Oblimin (Kaiser Normalization) και στ) με περιστροφή Promax (Kaiser Normalization).

α) Principal Component Analysis χωρίς Περιστροφή	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.2
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.3
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.3
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.5
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.5
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.6
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.6
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.6

β) Principal Component Analysis με περιστροφή Quartimax (Kaiser Normalization)	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.3
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.3
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.4
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.5
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.5
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.7
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.7

γ) Principal Component Analysis με περιστροφή Varimax (Kaiser Normalization)	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.3

Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.3
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.4
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.5
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.5
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.7
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.7
δ) Principal Component Analysis με περιστροφή Equamax (Kaiser Normalization)	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.2
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.3
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.3
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.4
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.4
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.5
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.5
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.7
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.7
ε) Principal Component Analysis με περιστροφή Oblimin (Kaiser Normalization)	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.3
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.3
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.4
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.5
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.5
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.6
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.6
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.7
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.7
στ) Principal Component Analysis με περιστροφή Promax (Kaiser Normalization)	
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Κ.Σ.1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	Κ.Σ.1
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Κ.Σ.2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	Κ.Σ.3

Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	Κ.Σ.3
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	Κ.Σ.4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	Κ.Σ.4
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	Κ.Σ.5
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	Κ.Σ.5
Στροφή στο χώρο	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	Κ.Σ.6
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	Κ.Σ.7
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	Κ.Σ.7

Πίνακας 4.15. Ομαδοποίηση των μεταβλητών στις κύριες συνιστώσες.

Κατανομή των αρχικών μεταβλητών στις κύριες συνιστώσες
Κ.Σ.1: 1) Πλήθος Σωστών Απαντήσεων, 2) Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων, 3) Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D, 4) Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D
Κ.Σ.2: 1) Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16), 2) Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)
Κ. Σ.3: 1) Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία, 2) Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση
Κ.Σ.4: 1) Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση, 2) Στροφή στο χώρο
Κ.Σ.5: 1) Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία, 2) Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D
Κ.Σ.6: 1) Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3, 2) Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D
Κ.Σ.7: 1) Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία, 2) Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1,

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.16 το ποσοστό της διακύμανσης που ερμηνεύεται από τις 7 κύριες συνιστώσες, που προέκυψαν, είναι σχεδόν 66%. Στον πίνακα αυτό δίδεται η ιδιοτιμή κάθε συνιστώσας, καθώς και το αντίστοιχο ποσοστό της διακύμανσης που ερμηνεύει. Η πρώτη κύρια συνιστώσα ερμηνεύει το μεγαλύτερο ποσοστό της διακύμανσης (17,9%), ενώ οι υπόλοιπες έξι ερμηνεύουν από 6,8-9% της συνολικής διασποράς.

Ο πίνακας Rotated Component Matrix (Πίνακας 4.17) περιέχει τις επιβαρύνσεις (loadings) των παραγόντων μετά την περιστροφή. Από τον πίνακα αυτό μπορούν να «ερμηνευθούν» οι παράγοντες, ενώ το πρόσημο των φορτίσεων είναι ενδεικτικό της συνεισφοράς κάθε μεταβλητής κάθε μιας από τις αντίστοιχες συνιστώσες. Στην πρώτη κύρια συνιστώσα σημαντικά βάρη παρουσιάζουν το πλήθος λανθασμένων και σωστών απαντήσεων (-), οι όψεις στερεού - τομές από 2D σε 3D (-) και ο μετασχηματισμός στο χώρο από 2D σε 3D. Στη δεύτερη συνιστώσα μεγάλες τιμές των φορτίσεων εμφανίζουν οι σχετικές θέσεις των παραλληλογράμμων (2 και 3) και οι όψεις στερεού - τομές από 3D σε 2D (-). Η τρίτη κύρια συνιστώσα συνδέεται με τον άξονα χωρικές σχέσεις και συγκεκριμένα τη σχετική θέση παραλληλογράμμων (1) και την οπτικοποίηση σε σχέση με τον προσανατολισμό οξείας γωνίας, ενώ η τέταρτη με την καταμέτρηση κύβων (16 και 65, χωρικές σχέσεις). Στην πέμπτη συνιστώσα

Πίνακας 4.16. Ποσοστό της διακύμανσης (%) που επιμερίζεται σε κάθε συνιστώσα με την τεχνική της μέγιστης διακύμανσης.

Συνιστώσα	**Ιδιοτιμή**	**Ποσοστό Διακύμανσης (%)**	**Αθροιστική Διακύμανση (%)**
1	3,035	17,852	17,852
2	1,536	9,034	26,886
3	1,457	8,570	35,456
4	1,420	8,350	43,806
5	1,405	8,262	52,068
6	1,180	6,938	59,007
7	1,158	6,810	**65,817**

Πίνακας 4.17. Πίνακας συντελεστών εκ περιστροφής (Component Matrix).

	Κ. Σ. 1	**Κ. Σ. 2**	**Κ. Σ. 3**	**Κ. Σ. 4**	**Κ. Σ. 5**	**Κ. Σ. 6**	**Κ. Σ. 7**
Πλήθος Λανθασμένων Απαντήσεων	**0,88**	-0,12	0,15	-0,24	0,19	-0,01	0,04
Πλήθος Σωστών Απαντήσεων	**-0,88**	0,12	-0,15	0,24	-0,19	0,01	-0,04
Όψεις Στερεού - Τομές από 2D σε 3D	**-0,64**	0,18	0,24	-0,06	-0,05	0,06	0,18
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D	**0,60**	0,17	-0,02	0,03	-0,05	-0,02	-0,11
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	0,05	**0,77**	-0,03	-0,01	0,02	0,13	0,09
Όψεις Στερεού - Τομές από 3D σε 2D	0,34	**-0,61**	0,07	0,01	0,11	0,14	0,09
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	0,48	**0,48**	0,39	0,10	0,05	-0,13	0,18
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	-0,02	0,00	**0,81**	-0,04	-0,05	0,05	-0,01
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	0,10	-0,14	**0,51**	-0,12	0,47	-0,21	0,13
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (16)	0,03	-0,13	-0,05	**0,85**	-0,09	-0,04	0,14
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	-0,34	0,18	-0,02	**0,71**	0,08	0,03	-0,15
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	0,04	-0,23	-0,23	0,03	**0,76**	-0,05	0,00
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	0,15	0,23	0,18	-0,03	**0,69**	0,12	-0,05
Στροφή στο χώρο	-0,15	0,08	-0,07	0,01	0,03	**0,85**	-0,03
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	-0,43	0,18	-0,23	0,13	0,04	**-0,47**	-0,26
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	-0,05	-0,03	0,16	0,10	-0,07	0,13	**0,75**
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	0,13	-0,21	0,32	0,14	-0,14	0,30	**-0,61**

υψηλές συσχετίσεις εμφανίζουν ο μετασχηματισμός στο επίπεδο ως προς την ανάλυση, καθώς και η οπτικοποίηση σε σχέση με τη διάσταση της ανθρώπινης οπτικής γωνίας. Η έκτη συνιστώσα συνδέεται με τη στροφή στο χώρο και το μετασχηματισμό στο επίπεδο ως προς τη σύνθεση (-), ενώ, τέλος, η έβδομη με την οπτικοποίηση σε σχέση με τον προσανατολισμό αμβλείας γωνίας και το μετασχηματισμό στο χώρο από 3D σε 2D (-).

Πιο αναλυτικά, η πρώτη κύρια συνιστώσα συνδέεται με το πλήθος των σωστών (ή συμπληρωματικά λανθασμένων ερωτήσεων), ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίθετο πρόσημο των φορτίσεων των δυο μεταβλητών όψεις στερεού (-) και μετασχηματισμός στο χώρο (+). Από την μελέτη της κατανομής των συχνοτήτων αυτών των δυο μεταβλητών (Πίνακας 4.18), διαπιστώνεται πως 132 (περίπου το 67%) από τους μαθητές απαντούν σωστά και στις δυο ερωτήσεις (c για τις όψεις και a για τον μετασχηματισμό στον χώρο), ενώ 54 (27,3%) από αυτούς κάνουν λάθος σε μια από τις ερωτήσεις. Το ποσοστό αυτό είναι ιδιαίτερα υψηλό και εκεί ενδεχομένως οφείλεται το αντίθετο πρόσημο των συντελεστών.

Πίνακας 4.18. Κατανομή συχνοτήτων των μεταβλητών όψεις στερεού - τομές από 2D σε 3D και μετασχηματισμός στο χώρο από 2D σε 3D (1η συνιστώσα).

		μετασχηματισμός στο χώρο από 2D σε 3D			
		a	b	c	d
όψεις στερεού - τομές από 2D σε 3D	a	1,0%	0,5%	1,0%	0,5%
	b	16,2%	2,0%	0,5%	1,0%
	c	**66,7%**	5,1%	2,5%	2,5%
	d	0,0%	0,0%	0,5%	0,0%

Πίνακας 4.19. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις - μεταβλητές όψεις στερεού - τομές από 3D σε 2D και Χωρικές Σχέσεις σχετικές θέσεις 2 και 3 (2η συνιστώσα).

		όψεις στερεού - τομές από 3D σε 2D	
		Λάθος	Σωστό
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Λάθος	16,0%	15,5%
	Σωστό	21,0%	**47,5%**
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	Λάθος	10,5%	10,0%
	Σωστό	26,5%	**53,0%**

Στη δεύτερη συνιστώσα οι μεταβλητές των σχετικών θέσεων έχουν ίδιο πρόσημο (+) φορτίσεων, ενώ αντίθετη είναι η συμπεριφορά των όψεων στερεού (-). Όπως γίνεται φανερό από τους πίνακες 4.19 και 4.20, όπου παρουσιάζεται η σχετική συχνότητα (%) των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων ανά μεταβλητή σε σχέση με μια άλλη από την τριάδα, αυτό, ενδεχομένως, να οφείλεται στο γεγονός ότι σημαντικό ποσοστό των μαθητών που απαντά σωστά στις ερωτήσεις αντίληψης χώρου, δίνει λάθος απάντηση (21% και 26,.5%) στο πέρασμα από τον 3D τον 2D χώρο στις όψεις στερεού (Πίνακας 4.19). Τα αντίστοιχα ποσοστά είναι πιο χαμηλά, όταν συγκρίνονται οι δυο ομόσημες σε τιμές φορτίσεων μεταβλητές της αντίληψης σχετικής θέσης στο χώρο (Πίνακας 4.20).

Στην τρίτη συνιστώσα οι δυο μεταβλητές, που εμφανίζουν υψηλές τιμές φορτίσεων, έχουν σωστές ταυτόχρονα απαντήσεις σε ένα ποσοστό 60%, ενώ το 25% απαντά σωστά στην Χωρικές Σχέσεις και λανθασμένα στον προσανατολισμό (Πίνακας 4.21).

Πίνακας 4.20. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις - μεταβλητές Χωρικές Σχέσεις σχετικές θέσεις 2 και 3.

		Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_3	
		Λάθος	Σωστό
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	Λάθος	13,5%	18,0%
	Σωστό	7,0%	**61,5%**

Πίνακας 4.21. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις - μεταβλητές Χωρικές Σχέσεις σχετική θέση 1 και προσανατολισμός οξείας γωνίας (3η συνιστώσα).

		Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	
		Λάθος	Σωστό
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	a	2,5%	2,0%
	b	25,5%	**60,0%**
	c	3,0%	3,0%
	d	1,0%	0,5%
	e	1,0%	1,5%

Η τέταρτη συνιστώσα αναφέρεται αποκλειστικά στη διάσταση της καταμέτρησης κύβων (Πίνακας 4.22) όπου διαπιστώνεται πως το ποσοστό των μαθητών που απάντησε σωστά και στις δυο ερωτήσεις είναι ιδιαίτερα χαμηλό μόλις 24%.

Πίνακας 4.22. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις μεταβλητές της καταμέτρησης κύβων (4η συνιστώσα).

		Καταμέτρηση Κύβων_65	
		Λάθος	Σωστό
Καταμέτρηση Κύβων_16	Λάθος	37,5%	22,5%
	Σωστό	16,0%	**24,0%**

Στην πέμπτη συνιστώσα το πρόσημο των φορτίσεων των δυο μεταβλητών είναι ίδιο και το ποσοστό των μαθητών που απαντάνε σωστά και στις 2 ερωτήσεις είναι ιδιαίτερα υψηλό (86.9%, Πίνακας 4.23).

Πίνακας 4.23. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις μεταβλητές της καταμέτρησης οπτικής γωνίας και της ανάλυσης στο μετασχηματισμό στο επίπεδο (5η συνιστώσα).

		Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία		
		A	b	c
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	a	2,5%	0,5%	0,0%
	b	**86,9%**	3,5%	1,0%
	C	2,0%	0,5%	0,0%
	D	1,5%	1,5%	0,0%

Η έκτη συνιστώσα συνδέεται με δυο μεταβλητές οι οποίες έχουν αντίθετη συνεισφορά (αντίθετα πρόσημα), ενώ το ποσοστό των μαθητών που απαντά σωστά και στις δυο ερωτήσεις είναι σχετικά χαμηλό (56.7%, Πίνακας 4.24), με μεγαλύτερο το ποσοστό των μαθητών (12.4%), που, ενώ βρίσκει τη σωστή απάντηση (d) στην ερώτηση της σύνθεσης, δίνει λανθασμένη απάντηση στη στροφή.

Πίνακας 4.24. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις μεταβλητές της στροφής στο χώρο και της σύνθεσης στο μετασχηματισμό στο επίπεδο (6η συνιστώσα).

		Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση			
		A	B	C	d
Στροφή στο χώρο	A	0%	1,5%	0,5%	12,4%
	B	0%	1,0%	1,0%	6,2%
	C	0%	5,2%	7,2%	**56,7%**
	D	0%	3,6%	0,0%	4,6%

Πίνακας 4.25. Κατανομή λανθασμένων και σωστών απαντήσεων στις μεταβλητές της οπτικοποίησης αμβλείας γωνίας και του μετασχηματισμού στο χώρο από 3D σε 2D (7η συνιστώσα).

		Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός αμβλεία γωνία	
		Λάθος	Σωστό
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	a	1,5%	0,5%
	b	1,0%	0,0%
	c	61,0%	**32,5%**
	d	2,0%	1,5%

Η τελευταία συνιστώσα χαρακτηρίζεται από την οπτικοποίηση αμβλείας γωνίας και το μετασχηματισμό στο χώρο από 3D σε 2D με αντίθετα πρόσημα. Είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικό πως στην ερώτηση του μετασχηματισμού απαντούν σωστά το 93.5% των μαθητών, ενώ σε αυτή της οπτικοποίησης μόλις το 32.5% (Πίνακας 4.25).

Ολοκληρώνοντας την εφαρμογή της ανάλυσης σε κύριες συνιστώσες και μετά από τη μελέτη των ομαδοποιήσεων παραπάνω, προέκυψε ο προβληματισμός κατά πόσο οι δυο νέες μεταβλητές, που δημιουργήθηκαν, αυτές του πλήθους των σωστών και αντίστοιχα λανθασμένων ερωτήσεων, επηρέασαν το μοντέλο της PCA που προέκυψε. Εφαρμόσθηκε, λοιπόν, η μέθοδος με το σύνολο των περιστροφών των αξόνων και μη, χωρίς να ληφθούν υπόψη αυτές οι δυο μεταβλητές, παρά μόνο οι 15 μεταβλητές του ερωτηματολογίου. Διαπιστώθηκε πως οι μεταβλητές του δοκιμίου και σε αυτή την περίπτωση ομαδοποιούνται με παρόμοιο τρόπο, γεγονός που ενισχύει την αξιοπιστία της μεθόδου.

4.3 Ανάλυση κατά συστάδες σε δύο βήματα (Two – step cluster analysis)

Βασικός στόχος της ανάλυσης κατά συστάδες είναι να διαιρέσει μια μεγάλη ομάδα δεδομένων (παρατηρήσεις) σε μικρότερες υποομάδες (συστάδες), ώστε οι παρατηρήσεις μέσα σε κάθε συστάδα να είναι, όσο γίνεται, πιο ομοιογενείς, ενώ οι παρατηρήσεις διαφορετικών συστάδων να διαφέρουν, όσο γίνεται περισσότερο (Chan, 2005a; Wilks, 1995). Η ανάλυση αυτή περιλαμβάνει διάφορες τεχνικές, όπως την ιεραρχική, τη μη ιεραρχική, την ασαφή (fuzzy), τη k-means, την expectation-maximization (EM), καθώς και την ανάλυση σε δυο βήματα (two-step).

Η μέθοδος της ανάλυσης κατά συστάδες (Cluster Analysis) χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό ομάδων μαθητών με τα ίδια χαρακτηριστικά ως προς τη χωρική ικανότητα, που παρουσιάζουν. Εφαρμόσθηκε όχι στο αρχικό σύνολο των μεταβλητών, αλλά στις ασυσχέτιστες κύριες συνιστώσες, που προέκυψαν στο προηγούμενο στάδιο της μελέτης (παράγραφος 4.2). Επιλέχθηκε η ανάλυση κατά συστάδες σε δυο βήματα (Two-Step Cluster Analysis), λόγω του γεγονότος πως οι ευρέως χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι ομαδοποίησης, k-means και συσσωρευτικοί (agglomerative) ιεραρχικοί, παρουσιάζουν σύμφωνα με τον Bacher (2000) διάφορα προβλήματα, ενώ αντίθετα η TSCA επιλύει αρκετά από αυτά, όπως την ικανότητα να δουλεύει ταυτόχρονα με ποσοτικές και ποιοτικές μεταβλητές, να κάνει χρήση μεγάλου όγκου δεδομένων, να προσδιορίζει αυτόματα το βέλτιστο αριθμό συστάδων και να έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει ακόμα και μεταβλητές που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Από την αρχική εφαρμογή της ανάλυσης κατά συστάδες δημιουργήθηκαν 2 συστάδες, οι οποίες φαίνεται να ομαδοποιούν τους μαθητές σε δυο κατηγορίες, αυτούς με σχετικά υψηλή χωρική ικανότητα και αυτούς με σχετικά χαμηλή. Το πλήθος των μαθητών που αντιστοιχεί στην πρώτη κατηγορία είναι 113, ενώ αυτό της δεύτερης είναι 71. Δεκαέξι μαθητές δεν εντάσσονται σε καμία κατηγορία, λόγω ύπαρξης ελλειπουσών τιμών στις απαντήσεις τους. Στη συνέχεια έγιναν και άλλες εφαρμογές της μεθόδου, προκειμένου να εντοπισθούν και περισσότερες ομάδες μαθητών με κοινά χωρικά χαρακτηριστικά. Στον Πίνακα 4.26 δίδονται οι συχνότητες κάθε συστάδας για κάθε μια από τις αναλύσεις που εφαρμόσθηκαν. Στην περίπτωση της εξαγωγής τριών συστάδων παρατηρείται μια συστάδα με μεγάλο πλήθος (104 μαθητές ανήκουν σε αυτή) και δυο άλλες μικρότερες με πλήθος μαθητών περίπου στο 1/3 της προαναφερθείσας. Το ίδιο παρατηρείται και στην περίπτωση εξαγωγής 4 και 5 συστάδων. Μια συγκεντρώνει το μεγαλύτερο πλήθος μαθητών, πάνω από 100, και οι άλλες κατανέμουν σχεδόν το ίδιο αριθμό, περίπου 80 στις υπόλοιπες συστάδες σχεδόν ομοιόμορφα. Το παραπάνω οδήγησε στην προσπάθεια εύρεσης της σχέσης που διέπει αυτές τις συστάδες των διαφορετικών εφαρμογών, και για το σκοπό αυτό υπολογίσθηκαν οι κατανομές συχνοτήτων των αναλύσεων με 3, 4 και 5 συστάδες σε σχέση με τη βασική των 2 συστάδων (Πίνακας 4.27). Παρατηρείται πως στην περίπτωση της ανάλυσης των 3 συστάδων, η τρίτη συστάδα αντιστοιχεί στη συστάδα 2 από τη βασική ανάλυση και το ίδιο παρατηρείται και στην 4^{η} συστάδα της ανάλυσης των 4 και την 5^{η} της ανάλυσης των 5. Παρατηρείται, επομένως, μια σταθερή συγκέντρωση σε μια συστάδα των μαθητών αυτών ανεξαρτήτως ποιας ανάλυσης εφαρμόζεται (αξιοπιστία της μεθόδου, απομονώνει τους μαθητές με τα ίδια χαρακτηριστικά). Οι υπόλοιποι μαθητές κατανέμονται στη συνέχεια στις συστάδες που απομένουν σε κάθε ανάλυση.

Πίνακας 4.26. Κατανομή συχνοτήτων ανά συστάδα σε κάθε μια από τις εφαρμογές της ανάλυσης κατά συστάδες για πλήθος συστάδων 2, 3, 4 και 5.

Πλήθος Συστάδων	**2 συστάδες**		**3 συστάδες**			**4 συστάδες**				**5 συστάδες**				
Αριθμός Συστάδας	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
Συχνότητα	71	113	44	36	104	20	27	35	102	8	27	12	35	102

Προκειμένου να διερευνηθεί περαιτέρω το προηγούμενο συμπέρασμα, υπολογίσθηκαν οι συντελεστές συσχέτισης ανάμεσα στις κατανομές στις συστάδες των διαφορετικών αναλύσεων, που εφαρμόσθηκαν (Πίνακας 4.28) Εύκολα διαπιστώνεται πως σε όλες τις περιπτώσεις οι συντελεστές συσχέτισης είναι ιδιαίτερα υψηλοί και είναι όλοι στατιστικώς σημαντικοί σε στάθμη σημαντικότητας 0,01. Πιο ασθενής είναι η σχέση ανάμεσα στην κατανομή συχνοτήτων των εφαρμογών με 2 και 5 συστάδες (0,784), ενώ πιο ισχυρή συσχέτιση εντοπίζεται στο ζευγάρι των αναλύσεων με 3 και 4 συστάδες (0,947). Οι υψηλοί συντελεστές συσχέτισης επιβεβαιώνουν την αξιοπιστία της μεθόδου.

Πίνακας 4.27. Κατανομή συχνοτήτων των συστάδων από τις αναλύσεις για 3, 4 και 5 συστάδες σε σχέση με την κατανομή της ανάλυσης με 2 συστάδες.

		Συστάδα 1	**Συστάδα 2**
3 συστάδες	1	43	1
	2	28	8
	3	0	104
4 συστάδες	1	20	0
	2	24	3
	3	27	8
	4	0	102
5 συστάδες	1	8	0
	2	24	3
	3	12	0
	4	27	8
	5	0	102

Πίνακας 4.28. Συντελεστές συσχέτισης (σ.σ.) κατά Peasron της κατανομής στις συστάδες των αναλύσεων σε 2, 3. 4 και 5 συστάδες αντίστοιχα.

	2 συστάδες	3 συστάδες	4 συστάδες	5 συστάδες
2 συστάδες		,884**	,825**	,784**
3 συστάδες			,947**	,918**
4 συστάδες				,927**

**. Σημαντικοί συντελεστές συσχέτισης σε στάθμη 0.01

Για να ξεκαθαριστεί ποια από τις τρεις αναλύσεις θα είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο στάδιο της μελέτης, ένα επιπλέον στοιχείο ήταν η διακριτική ικανότητα των συστάδων σε σχέση με τη χωρική ικανότητα των μαθητών. Για το λόγο αυτό έγινε η κατανομή του πλήθους των σωστών απαντήσεων, που δόθηκαν από το σύνολο των 15 του ερωτηματολογίου της έρευνας (Πίνακας 4.29). Διαπιστώνεται πως σε κάθε περίπτωση η συστάδα 2, 3, 4 και 5 των αναλύσεων 2, 3, 4 και 5 αντιστοιχεί στους μαθητές που δώσανε τις περισσότερες σε πλήθος σωστές απαντήσεις (από 9/15 και πάνω). Στη συνέχεια, υπάρχει πάντα μια συστάδα που αντιστοιχεί στους μαθητές με λιγότερες χωρικές ικανότητες (συστάδα 1 για τις αναλύσεις σε 2 και 3 συστάδες, ενώ για τις αναλύσεις σε 4 και 5 δεν είναι τόσο ευδιάκριτος ο διαχωρισμός).

Πίνακας 4.29. Κατανομή του πλήθους των σωστών απαντήσεων στις 15 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου για κάθε συστάδα σε κάθε μια από τις αναλύσεις (2, 3, 4 και 5 συστάδες), που εφαρμόσθηκαν.

Αριθμός Συστάδων	**Πλήθος Σωστών Απαντήσεων**											
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	2	3	6	9	16	14	10	7	3	1	0	0
2	0	0	0	0	0	6	10	16	26	30	21	4
1	1	2	4	6	10	12	3	4	1	1	0	0
2	1	1	2	3	6	3	8	5	4	3	0	0
3	0	0	0	0	0	5	9	14	24	27	21	4
1	0	2	1	1	4	6	1	3	1	1	0	0
2	1	0	3	5	7	6	3	2	0	0	0	0
3	1	1	2	3	5	3	8	5	4	3	0	0
4	0	0	0	0	0	5	8	13	24	27	21	4
1	0	0	1	1	1	3	1	1	0	0	0	0
2	1	0	3	5	7	6	3	2	0	0	0	0
3	0	2	0	0	3	3	0	2	1	1	0	0
4	1	1	2	3	5	3	8	5	4	3	0	0
5	0	0	0	0	0	5	8	13	24	27	21	4

Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο (διακριτική ικανότητα της χωρικής ικανότητας των μαθητών ανά συστάδα), μελετήθηκαν οι μέσες τιμές των σκορ των κυρίων συνιστωσών σε κάθε συστάδα (Πίνακας 4.30), καθώς και τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των μέσων τιμών (Σχήμα 4.3). Στην περίπτωση της εφαρμογής της μεθόδου με εξαγωγή δυο συστάδων διαπιστώνεται ένας σαφής διαχωρισμός σε σχέση με τις μέσες τιμές των σκορ των κυρίων συνιστωσών. Η δεύτερη συστάδα έχει αρνητικές μέσες τιμές των σκορ σε όλες τις κύριες συνιστώσες, με μόνη εξαίρεση τη τέταρτη, ενώ το αντίθετο παρατηρείται για την πρώτη συστάδα. Οι τιμές των σκορ για τις δυο συστάδες διαφέρουν κυρίως στην Κ.Σ.1, Κ.Σ.4 και Κ.Σ.5, που αναφέρονται στο πλήθος σωστών και λανθασμένων απαντήσεων, όψεις στερεού από 2D σε 3D, μετασχηματισμός στο χώρο: από 2D σε 3D, καταμέτρηση κύβων, μετασχηματισμός στο επίπεδο: ανάλυση και οπτική γωνία (Σχήμα 4.3). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της $5^{ης}$ κύριας συνιστώσας, που, αν και φαίνεται να διαχωρίζει τις δυο συστάδες, ωστόσο, αναφέρεται σε δυο ερωτήσεις με υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων, αφού πάνω από το 91% των μαθητών απαντούν σωστά σε αυτές. Επομένως, θα ήταν αναμενόμενο να μην είναι τόσο σημαντικές στο διαχωρισμό των ομάδων των μαθητών.

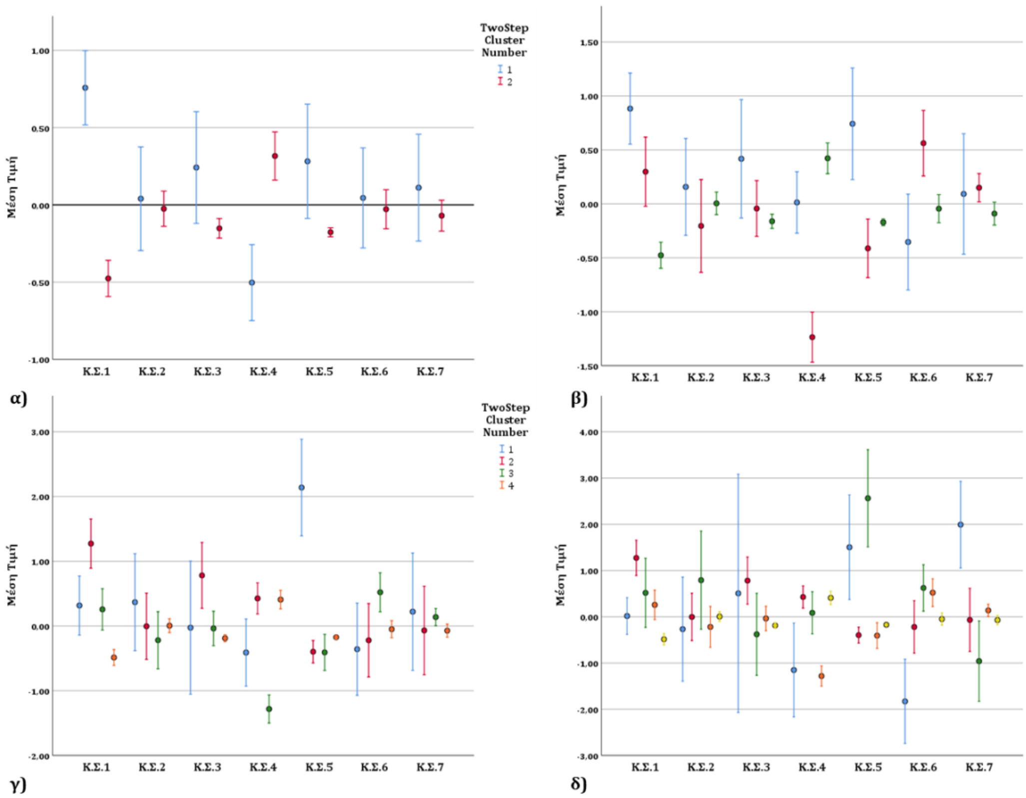
Πίνακας 4.30. Μέσες τιμές των σκορ των κυρίων συνιστωσών σε κάθε συστάδα για κάθε μια από τις αναλύσεις (2, 3, 4 και 5 συστάδες) που εφαρμόσθηκαν.

	1	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Κ.Σ. 1	0,76	-0,48	0,88	0,30	-0,48	0,32	1,27	0,26	-0,49	0,02	1,27	0,52	0,26	-0,49
Κ.Σ. 2	0,04	-0,03	0,16	-0,20	0,00	0,37	0,00	-0,22	0,00	-0,27	0,00	0,79	-0,22	0,00
Κ.Σ. 3	0,24	-0,15	0,42	-0,04	-0,16	-0,03	0,78	-0,04	-0,19	0,51	0,78	-0,38	-0,04	-0,19
Κ.Σ. 4	-0,50	0,32	0,01	-1,24	0,42	-0,41	0,43	-1,28	0,41	-1,15	0,43	0,08	-1,28	0,41
Κ.Σ. 5	0,28	-0,18	0,74	-0,41	-0,17	2,14	-0,40	-0,41	-0,17	1,50	-0,40	2,56	-0,41	-0,17
Κ.Σ. 6	0,04	-0,03	-0,35	0,56	-0,04	-0,36	-0,22	0,52	-0,05	-1,83	-0,22	0,62	0,52	-0,05
Κ.Σ. 7	0,11	-0,07	0,09	0,15	-0,09	0,22	-0,07	0,14	-0,07	1,99	-0,07	-0,96	0,14	-0,07

Στην περίπτωση της εξαγωγής τριών συστάδων παρατηρείται η ίδια εικόνα στην τρίτη συστάδα, που περιλαμβάνει 104 από τους 113 μαθητές της 2^{ης} συστάδας της προηγούμενης ανάλυσης, με μόνη διαφορά τη θετική τιμή στη Κ.Σ.2 (πριν ήταν αρνητική), που περιλαμβάνει τις χωρικές σχέσεις και τις όψεις στερεού από 3D σε 2D. Οι αρνητικές τιμές στην Κ.Σ.2, τώρα παρατηρούνται στη 2^{η} συστάδα της ανάλυσης, στην οποία επιπλέον οι μέσες τιμές στην Κ.Σ.5 (μετασχηματισμός στο επίπεδο – ανάλυση και οπτική γωνία) είναι οι μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή αρνητικές τιμές. Τέλος, οι μαθητές της 1^{ης} συστάδας δίνουν τις μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή αρνητικές των σκορ της Κ.Σ.6. Οι μέσες τιμές των Κ.Σ.1 και Κ.Σ.4 φαίνεται πως εμφανίζουν διαφορετική συμπεριφορά για κάθε συστάδα μαθητών, ενώ στις άλλες Κ.Σ. οι μέσες τιμές σημειώνουν αλληλοεπικάλυψη. Ωστόσο, σημειώνονται διαφορές όχι στο σύνολο των τριών συστάδων, αλλά ανά δυο, όπως, παραδείγματος χάριν, στις μέσες τιμές της Κ.Σ. 6, που διαχωρίζουν την 1^{η} από τη 2^{η} συστάδα και την 2^{η} από την 3^{η} ή την Κ.Σ.5, όπου οι μέσες τιμές της 1^{ης} και της 2^{ης} συστάδας έχουν διαφορές.

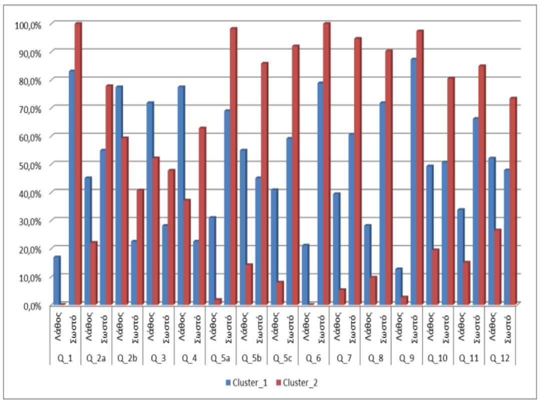
Σε όλες τις αναλύσεις (2, 3, 4 και 5 συστάδες), οι μέσες τιμές των σκορ στη συστάδα των πιο ικανών χωρικά μαθητών (2, 3, 4 και 5 αντίστοιχα) έχουν ίδιες τιμές περίπου. Οι υπόλοιπες συστάδες διαχωρίζονται κάθε φορά σε σχέση με διαφορετικό συνδυασμό κυρίων συνιστωσών. Για την ανάλυση με τις 3 συστάδες, η ομάδα των ικανών χωρικά μαθητών (τρίτη) διαχωρίζεται από τις υπόλοιπες δυο, κυρίως σε σχέση με την Κ.Σ.1. Οι μεγαλύτερες διαφορές στις μέσες τιμές, ανάμεσα στην $1^{η}$ και $2^{η}$ συστάδα, διαπιστώνονται στην Κ.Σ.1, Κ.Σ.4, Κ.Σ.5 και κυρίως Κ.Σ.6.

Για την ανάλυση με τις 4 συστάδες, η ομάδα των πιο ικανών (τέταρτη) διαχωρίζεται και εδώ σε σχέση κυρίως με την Κ.Σ.1. Επιπλέον, οι δυο πρώτες συστάδες εμφανίζουν διαφορετικές μέσες τιμές, κυρίως στις Κ.Σ.1, Κ.Σ.4 και Κ.Σ.5 συνιστώσες, ενώ η $2^{η}$ και $3^{η}$ συστάδα σε όλες, εκτός από την Κ.Σ.2 και Κ.Σ.7. Οι $1^{η}$ και $3^{η}$ συστάδα εμφανίζουν διαφορετικά διαστήματα μέσων τιμών στις Κ.Σ.4, Κ.Σ.5 και Κ.Σ.6. Η εικόνα γίνεται όλο και πιο πολύπλοκη για την ανάλυση σε 5 συστάδες, ωστόσο η Κ.Σ.1 διατηρεί την ικανότητα του διαχωρισμού των ικανών χωρικά μαθητών, ενώ οι Κ.Σ.4, Κ.Σ.5, Κ.Σ.6 και Κ.Σ.7 εμφανίζουν ξένα διαστήματα μέσων τιμών (με μηδενική τομή) σε τουλάχιστον δυο συστάδες μαθητών.

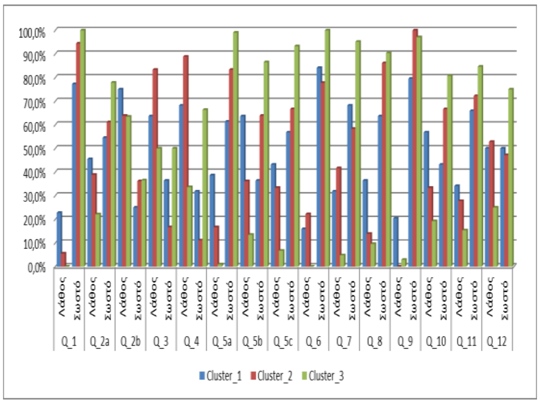


Σχήμα 4.3. Τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των μέσων τιμών των σκορ των κύριων συνιστωσών, όπως προέκυψαν μέσω ανάλυσης παλινδρόμησης (regression) για κάθε μια από τις διαφορετικές περιπτώσεις ανάλυσης κατά συστάδες με: α) 2 συστάδες, β) 3 συστάδες, γ) 4 συστάδες και δ) 5 συστάδες.

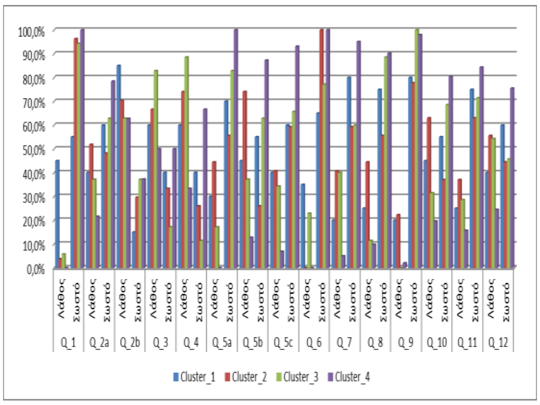
Τέλος, δίδονται τα διαγράμματα της κατανομής σχετικών συχνοτήτων των σωστών και λανθασμένων ερωτήσεων (σχήμα 4.4) ανά ερώτηση, για κάθε συστάδα και για κάθε ανάλυση. Τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαιώνονται και από την παραπάνω κατανομή. Η πολυπλοκότητα της ερμηνείας για την περίπτωση 4 και 5 συστάδων, σε συνδυασμό με τα παραπάνω εξαγόμενα, οδήγησε στην επιλογή για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση μόνο των αναλύσεων των 2 και 3 συστάδων. Στο τελευταίο βήμα, όπως και στην περίπτωση της PCA, έγινε εκ νέου εφαρμογή της μεθόδου της TSCA, χωρίς όμως να γίνει χρήση των δυο μεταβλητών αθροίσματος των σωστών και λανθασμένων ερωτήσεων. Η εφαρμογή της TSCA έγινε στις νέες συνιστώσες της PCA και διαπιστώθηκε πως τα αθροίσματα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων συμβάλλουν σημαντικά στην καλύτερη ερμηνεία των αποτελεσμάτων, αφού αν εφαρμοστούν οι αναλύσεις χωρίς αυτές, στην περίπτωση της ανάλυσης κατά συστάδες, είναι λίγο πιο μπερδεμένες οι ομάδες των μαθητών. Ωστόσο, οι κύριες συνιστώσες, που φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά ως προς τις μέσες τιμές τους, εμφανίζουν αρκετές ομοιότητες, αφού είναι και εδώ οι Κ.Σ.4 και Κ.Σ.5, που εμπεριέχουν τις ίδιες αρχικές μεταβλητές με μόνη επιπλέον τον προσανατολισμό οξείας γωνίας.



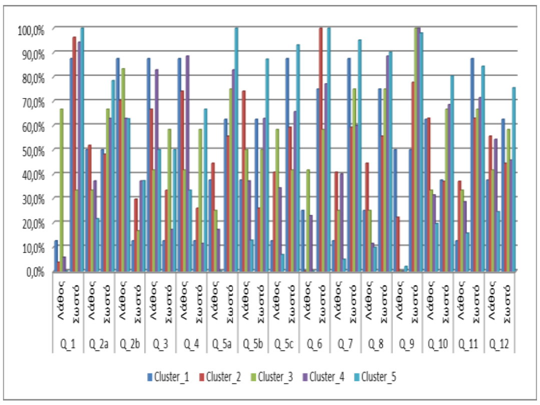
α)



β)



γ)



δ)

Σχήμα 4.4. Σχετικές συχνότητες των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων ανά συστάδα και ερώτηση. Ανάλυση με α) 2 συστάδες, β) 3 συστάδες, γ) 4 συστάδες και δ) 5 συστάδες.

Συνοψίζοντας, από την εφαρμογή της ανάλυσης κατά συστάδες, δημιουργήθηκαν από δυο έως 5 ομάδες μαθητών διαχωρισμένοι ως προς την χωρική τους ικανότητα. Από την μελέτη όλων των προηγούμενων, προκύπτουν τα ακόλουθα, που απαντούν στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας μελέτης. Σε κάθε περίπτωση μια από τις συστάδες αναφέρεται στους μαθητές με υψηλότερη χωρική ικανότητα. Στην περίπτωση των δυο συστάδων η ερμηνεία είναι απλή, αφού στη μια συστάδα (2η) συγκεντρώνονται μαθητές που υπερτερούν σε όλες τις διαστάσεις των χωρικών ικανοτήτων και στην άλλη οι υπόλοιποι. Στις τρεις συστάδες πάλι εντοπίζεται μια ομάδα (3η) με τις υψηλότερες χωρικές ικανότητες, με εξαίρεση τη διάσταση του μετασχηματισμού στο χώρο από 3D σε 2D, που είναι καλύτεροι οι μαθητές της 2ης ομάδας. Η ομάδα αυτή (2η) χαρακτηρίζεται από μαθητές μέτριας χωρικής ικανότητας ως προς τον άξονα του χωρικού προσανατολισμού, ως προς τις σχετικές θέσεις, ως προς τον άξονα μετασχηματισμού – περιστροφής (εξαίρεση από 3D σε 2D που είναι υψηλή), ως προς τις όψεις από 2D σε 3D, ενώ είναι χαμηλής ικανότητας ως προς την καταμέτρηση κύβων, την ανάλυση και τη σύνθεση και τις όψεις από 3D σε 2D. Το συμπλήρωμα αυτών των χαρακτηριστικών δίνει την εικόνα της τελευταίας ομάδας (1η), που γενικά στις 10 από τις 15 ερωτήσεις είναι χαμηλής σχετικά ικανότητας. Στην περίπτωση της δημιουργίας τεσσάρων ομάδων, η 4η ομάδα περιλαμβάνει τους καλύτερους, σε χωρική ικανότητα, μαθητές με βέλτιστες αποδόσεις σε όλες τις ερωτήσεις, με μόνη εξαίρεση την 9η του μετασχηματισμού από 2D σε 3D. Η 3η ομάδα χαρακτηρίζεται από καλές αποδόσεις στις ερωτήσεις προσανατολισμού PSOT, τις σχετικές θέσεις και τον άξονα μετασχηματισμού – περιστροφής. Η επόμενη ομάδα (1η) χαρακτηρίζεται από μαθητές ικανούς σχετικά ως προς την καταμέτρηση κύβων, τη σύνθεση και τις όψεις, ενώ η τελευταία (2η) έχει καλές ικανότητες ως προς τους άξονες προσανατολισμού ανθρώπινης γωνίας και ανάλυσης από τον μετασχηματισμό στο επίπεδο. Στην τελευταία περίπτωση των πέντε ομάδων, πάλι μια, η 5η, περιλαμβάνει τους μαθητές με πολύ καλή χωρική ικανότητα σε όλους σχεδόν τους άξονες, με εξαίρεση την καταμέτρηση των 16 κύβων, όπως, επιπλέον, και σε αυτή την περίπτωση το μετασχηματισμό στο χώρο από 3D σε 2D και τις όψεις από 2D σε 3D. Η επόμενη ομάδα των μαθητών (4η) έχει μέτριες ικανότητες ως προς τους άξονες του προσανατολισμού, των χωρικών σχέσεων αναφορικά με τη σχετική θέση και την ανάλυση, το μετασχηματισμό – περιστροφή και τις όψεις από 2D σε 3D. Η τρίτη ομάδα χαρακτηρίζεται από χαμηλή σχετικά ικανότητα στις 7 από τις 15 μεταβλητές, ωστόσο έχει άριστη εικόνα στο μετασχηματισμό από τον 3D στον 2D και παρουσιάζει την καλύτερη εικόνα σε σχέση με τις υπόλοιπες ομάδες στην καταμέτρηση κύβων (πλήθους 16). Η τέταρτη ομάδα (2η) αποδίδει πολύ χαμηλά στις 8 από τις 15 ερωτήσεις, με εξαίρεση τις ερωτήσεις ανθρώπινης γωνίας και ανάλυσης, ενώ, τέλος, η 1η ομάδα συμπεριλαμβάνει εκείνους τους μαθητές με υψηλή απόδοση στις όψεις και κυρίως σε αυτή από τον 2D στον 3D και, επίσης, αρκετά καλή απόδοση στο μετασχηματισμό της σύνθεσης στο επίπεδο.

4.4 Διαχωριστική Ανάλυση (Discriminant Analysis)

Στο συγκεκριμένο στάδιο της μελέτης γίνεται εφαρμογή της μεθόδου της Διαχωριστικής Ανάλυσης (DA), έτσι ώστε να βρεθούν οι πιο σημαντικές μεταβλητές του προτεινόμενου δοκιμίου, οι οποίες είναι ικανές να αναπαράγουν τις συστάδες των μαθητών ανά επίπεδο χωρικής ικανότητας, που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενο στάδιο (4.2 Ανάλυση κατά Συστάδες). Για να επιτευχθεί αυτό, μελετώνται ο πίνακας των κανονικοποιημένων συντελεστών, που δείχνει ποια μεταβλητή συνεισφέρει περισσότερο στη διαχωριστική ικανότητα κάθε συνάρτησης και ο πίνακας δομής, που δίνει τους συντελεστές συσχέτισης κάθε μεταβλητής σε κάθε συνάρτηση.

Η μέθοδος εφαρμόσθηκε αρκετές φορές με διαφορετικές μεταβλητές εισόδου και με στόχο την πρόγνωση από τις μεταβλητές στην ομαδοποίηση στις 2, 3, 4 και 5 συστάδες αντίστοιχα. Οι μεταβλητές εισόδου ήταν στις τέσσερις από τις εφαρμογές, οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου για τις τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις συστάδων και στις άλλες τέσσερις οι δίτιμες μεταβλητές, που αντιστοιχούν στο αν ο μαθητής απάντησε σωστά ή λάθος σε κάθε μια από τις ερωτήσεις και σε αυτή την περίπτωση για τις τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις συστάδων.

Πίνακας 4.31. Οι πιο σημαντικές μεταβλητές για τις διαχωριστικές συναρτήσεις και το πλήθος των περιπτώσεων εφαρμογής της μεθόδου, που φαίνονται ως οι σημαντικότερες.

Μεταβλητές	**Φορές που εμφανίζονται ως οι πιο σημαντικές στις διαχωριστικές συναρτήσεις**
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	4
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	7
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	2
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	2
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	1
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Σύνθεση	2
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	2

Σε όλες τις οχτώ περιπτώσεις η προγνωστική ικανότητα των διαχωριστικών συναρτήσεων ήταν ιδιαίτερα υψηλή από 78,8% - 91,3%. Στη συνέχεια, από την μελέτη των κανονικοποιημένων συντελεστών στις οχτώ διαφορετικές περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου, διαπιστώθηκε πως από τις δεκαπέντε μεταβλητές, που εισήχθησαν στο μοντέλο της διαχωριστικής ανάλυσης, κάποιες φαίνεται να είναι σταθερά πιο σημαντικές (Πίνακας 4.31). Μεταβλητές που, όπως διαπιστώθηκε στην παράγραφο 4.1 εμφανίζουν μικρά ποσοστά λαθών, παραδείγματος χάριν, την οπτική γωνία, ωστόσο, έχουν υψηλή διαχωριστική ικανότητα.

Μελετώντας, επιπλέον, τον πίνακα δομής, δηλαδή τους συντελεστές συσχέτισης κάθε μεταβλητής σε κάθε διαχωριστική συνάρτηση (Πίνακας 4.32), διαπιστώθηκε ότι, και σε αυτήν την περίπτωση,οι μισές από τις αρχικές μεταβλητές εμφανίζουν συχνότερα τους μεγαλύτερους κατά απόλυτη τιμή συντελεστές συσχέτισης, γεγονός που τονίζει πόσο σημαντικές είναι για τον διαχωρισμό των ομάδων. Η μεταβλητή της αντίληψης χώρου και συγκεκριμένα της καταμέτρησης των 65 κύβων φαίνεται η πλέον σημαντική, αφού εφτά στις είκοσι φορές εμφανίζει το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή συντελεστή συσχέτισης. Σημαντικές, επίσης, είναι η οπτική γωνία και η σχετικές θέσεις 1 και 2.

Πίνακας 4.32. Οι μεταβλητές με τους μεγαλύτερους κατά απόλυτη τιμή συντελεστές συσχέτισης με τις αντίστοιχες διαχωριστικές συναρτήσεις από τους πίνακες δομής και το πλήθος των περιπτώσεων εφαρμογής της μεθόδου, που φαίνονται ως οι σημαντικότερες.

Μεταβλητές	**Φορές που εμφανίζουν τον μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή συντελεστή συσχέτισης σε μια από τις διαχωριστικές συναρτήσεις**
Οπτικοποίηση: α) οπτική γωνία	4
Οπτικοποίηση: α) προσανατολισμός οξεία γωνία	1
Χωρικές Σχέσεις α) Καταμέτρηση Κύβων (65)	7
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_1	3
Χωρικές Σχέσεις β) Σχετική Θέση_2	3
Μετασχηματισμός στο επίπεδο: Ανάλυση	1
Μετασχηματισμός στο χώρο: από 3D σε 2D	1

Για να εξεταστεί η διαχωριστική ικανότητα των μεταβλητών αυτών, εισήχθησαν μόνο αυτές στη διαχωριστική ανάλυση και διαπιστώθηκε πως και στις δέκα εφαρμογές το ποσοστό ορθής κατάταξης δεν μειώθηκε ιδιαίτερα, αφού έπεσε από 71,7% (πέντε συστάδες πρόγνωση από τις πιο σημαντικές δίτιμες μεταβλητές) έως 90,2% (δύο συστάδες πρόγνωση από τις πιο σημαντικές δίτιμες μεταβλητές). Το παραπάνω συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, αφού είναι δυνατό να γίνει πρόγνωση των χωρικών ικανοτήτων, που παρουσιάζουν οι μαθητές, απαντώντας σε λίγες ερωτήσεις. Αποφεύγονται έτσι τα εκτενή και συχνά κουραστικά ερωτηματολόγια – δοκίμια.

Τα συμπεράσματα και η συζήτηση σχετικά με την παρούσα μελέτη πρόκειται να παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί πως η χρήση τόσων στατιστικών μεθόδων, που παρέχονται πια στα περισσότερα στατιστικά πακέτα, δεν θα πρέπει να γίνεται απερίσκεπτα, καθώς δεν αποτελεί απλά ένα μαύρο κουτί που βγάζει αποτελέσματα. Αντίθετα, απαιτείται κριτική σκέψη, ώστε οι σχέσεις που κάθε μοντέλο προτείνει να αποκτήσουν νόημα και να δοθεί η απαραίτητη φυσική ερμηνεία.

Κεφάλαιο 5ο

Συμπεράσματα – Συζήτηση

“The role of visual imagery in mathematical problem solving remains an active question in educational research”
(Stylianou, 2001, p. 232 όπως αναφέρεται στην Presmeg, 2006).

Παρά το έντονο ενδιαφέρον που επιδεικνύουν, τόσο οι ψυχολόγοι όσο και οι ερευνητικές της διδακτικής των μαθηματικών και οι δάσκαλοι, για το θέμα της χωρικής ικανότητας, εντούτοις υπάρχουν μερικά σημαντικά ερωτήματα, για να απαντηθούν. Η διάσταση απόψεων σε σχέση με τα επιμέρους χαρακτηριστικά αυτής της πολύπλευρης έννοιας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτή αναπτύσσεται κατά την περίοδο της εφηβείας, είναι σύμφωνα με τους Ramful, Lowrie & Logan (2017) θέματα με ιδιαίτερο και ανοιχτό, ακόμα, ερευνητικό ενδιαφέρον, δεδομένου πως μέχρι σήμερα έχει δοθεί περισσότερη προσοχή είτε στα πρώτα χρόνια της σχολικής φοίτησης (Davis, 2015, Sinclair & Bruce, 2014) είτε σε επίπεδο προπτυχιακών φοιτητών (Hegarty & Waller, 2005). Πλήθος μελετών, που έχουν γίνει στην Ελλάδα, σε σχέση με τη χωρική ικανότητα αφορούν κυρίως στην προσχολική ηλικία και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Το ενδιαφέρον της παρούσας μελέτης εστιάζεται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και στις ηλικίες 13-17 (Β' Γυμνασίου έως και Β' Λυκείου), όπου οι μαθητές βρίσκονται στο στάδιο της λογικής σκέψης κατά Piaget (12-18 ετών), κατά το οποίο τόσο η αντίληψη του χώρου αναπτύσσεται όσο και δύναται να ερμηνευθούν όλα τα στοιχεία του χώρου που τους περιβάλλει. Σύμφωνα με τους Γαγάτση & Καλογήρου (2003) οι μαθητές βρίσκονται στο λειτουργικό στάδιο ανάπτυξης και, επομένως, μπορούν να χειριστούν αντικείμενα, να μετασχηματίσουν αναπαραστάσεις, να συντονίσουν ταυτόχρονα περισσότερες από μία διαστάσεις και να αποκτήσουν διαφορετική προοπτική. Η επιλογή της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας έγινε, αφενός, λόγω εγγύτητας (έρευνα στη σχολική μονάδα εργασίας), και αφετέρου, λόγω περιορισμένων σχετικά μελετών. Ένας, ακόμη, λόγος της επιλογής της εν λόγω ηλικιακής ομάδας ήταν ότι σε αυτό το διάστημα αποκτώνται οι περισσότερες χωρικές ικανότητες και είναι εφικτή η διερεύνηση τόσο νοερών χειρισμών όσο και πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών και τέλος, ότι βελτιώνεται η ικανότητα σύνθεσης και γενίκευσης – αφαιρετικής επαγωγικής σκέψης.

Ο σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν, κυρίως, διερευνητικός και διαγνωστικός ως προς του είδους τις χωρικές ικανότητες, που κατέχουν οι μαθητές στο φάσμα από 13-17 ετών στα συγκεκριμένα σχολεία. Για το λόγο αυτό δόθηκε σημασία στα αποτελέσματα και όχι στο χρόνο συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Ο χρόνος είναι, ωστόσο, σημαντικός παράγοντας για αυτό και το δοκίμιο σχεδιάστηκε, έτσι ώστε να μπορεί να συμπληρωθεί εντός μιας διδακτικής ώρας, που είναι και ο συνηθισμένος χρόνος των γραπτών δοκιμασιών των μαθητών, και άρα είναι εξοικειωμένοι με αυτά τα χρονικά πλαίσια. Το προηγούμενο βρίσκεται σε συμφωνία και με τους Ramful, Lowrie & Logan (2017). Επιπλέον, έγινε μια προσπάθεια να μην γίνει χρήση τεστ από ένα αποκλειστικά υπάρχον δοκίμιο, το οποίο ενδεχομένως να έχει και την τάση να κάνει χρήση ενός μόνο έργου με διαβαθμίσεις ως προς την πολυπλοκότητα του. Οι Ramful, Lowrie & Logan (2017) επισημαίνουν, σχετικά με αυτό, πως το γνωστό τεστ των Ekstrom et al. (1976) έχει συγκεκριμένο περιεχόμενο, εξετάζοντας την οπτικοποίηση από μια σκοπιά, χωρίς να γνωρίζει πως θα αντιδρούσε ο εξεταζόμενος σε ένα άλλο σενάριο – πλαίσιο οπτικοποίησης. Έχοντας, ήδη, τονίσει στο θεωρητικό υπόβαθρο πόσο πολυδιάστατη και πολύπλοκη είναι η χωρική ικανότητα, έγινε διεξοδική μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας σε σχέση με τα υπάρχοντα τεστ και προσπάθεια ενσωμάτωσης στο προτεινόμενο δοκίμιο ένα εύρος διαφορετικών έργων διαβαθμισμένης δυσκολίας (προκειμένου να εξετασθεί η ύπαρξη διαφορών ανάμεσα στους μαθητές Γυμνασίου – Λυκείου), όπου ο εξεταζόμενος θα χρειαστεί να εφαρμόσει ίδιες ή διαφορετικές στρατηγικές. Στόχος του δοκιμίου είναι να μετρήσει τέσσερις διαστάσεις της χωρικής ικανότητα: το χωρικό προσανατολισμό, τις χωρικές σχέσεις, τους χωρικούς μετασχηματισμούς και την περιστροφή και τέλος, την κατανόηση των διαστάσεων και τις όψεις στερεού. Ο σχεδιασμός του δοκιμίου έγινε λαμβάνοντας, επιπλέον, υπόψη τις αναπαραστάσεις με τις οποίες οι μαθητές έρχονται σε επαφή κατά τα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής τους.

Χωρικός Προσανατολισμός Στη δεύτερη από τις ερωτήσεις του δοκιμίου στην κατηγορία χωρικού προσανατολισμού, διαπιστώθηκε πως τα ποσοστά των μαθητών που βρίσκουν τη σωστή αμβλεία γωνία είναι σχεδόν τα μισά σε σχέση με τα αντίστοιχα της οξείας γωνίας. Οι Shepard και Cooper (1982, όπως αναφέρεται στην Καλογήρου, 2014) αναφέρουν ότι όσο πιο μεγάλη είναι η γωνία στην οποία καλείται το υποκείμενο να περιστρέψει νοερά το αντικείμενο, τόσο πιο μεγάλο χρονικό διάστημα χρειάζεται, επισημαίνοντας ίσως την ενδεχόμενη δυσκολία που εμφανίζουν οι μαθητές με την αύξηση της γωνίας (αν και το συμπέρασμα των ερευνητών αναφέρεται στην ικανότητα περιστροφής και όχι χωρικού προσανατολισμού). Στην παρούσα μελέτη, ωστόσο, δεν λήφθηκε υπόψη ο χρόνος ολοκλήρωσης κάθε ερώτησης, γεγονός που αποτελεί ένα μελλοντικό σχέδιο επέκτασής της, προκειμένου να αποκαλυφθούν περισσότερα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ικανότητας χωρικού προσανατολισμού των μαθητών. Οι Zancada-Menendez et al. (2016) βρήκαν μεταξύ άλλων πως η απόδοση στα έργα χωρικού προσανατολισμού μειώνεται όσο αυξάνεται η ηλικία, ωστόσο, αναφέρονται σε ηλικιακές ομάδες μεγαλύτερες των 18 ετών και επισημαίνουν πως όλες οι ηλικιακές ομάδες είχαν περισσότερα σφάλματα σε στοιχεία που περιελάμβαναν αλλαγή προοπτικής μεγαλύτερες από 90^o. Το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων και για τις δυο περιπτώσεις (οξεία και αμβλεία γωνία) είναι υψηλότερο στους μαθητές Γυμνασίου, υποδηλώνοντας μια βελτίωση του προσανατολισμού με την αύξηση της ηλικίας, το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με την μελέτη των Xistouri, & Pitta-Pantazi (2006).

Χωρικές Σχέσεις – Καταμέτρηση Κύβων Η δυσκολία των μαθητών στην καταμέτρηση των κύβων, με ποσοστά επιτυχίας 40% και 46,5% στα δυο ερωτήματα, έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές, με σημαντικότερη τη δυσκολία των μαθητών να φανταστούν και να μετρήσουν τους «κρυμμένους» κύβους. Ο Hirstein (1981, όπως αναφέρεται στους Olkun % Knaupp, 1999) επισημαίνει πως λιγότεροι από το 40% των μαθητών ηλικίας 17 ετών έλυσαν με επιτυχία τέτοια θέματα. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Ben-Chaim, Lappan & Houand (1985) λιγότεροι από το 50% των μαθητών μέσης βαθμίδας κατάφεραν να βρουν τη σωστή απάντηση και το απέδωσαν στη δυσκολία νοερής οπτικοποίησης ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, στο οποίο δίδεται μόνο η δισδιάστατη απεικόνισή του. Ο Battista (2004, όπως αναφέρεται στους Kim et al. (2017) θεώρησε πως το λάθος των μαθητών οφείλεται στο ότι βλέπουν την εικόνα και την αντιλαμβάνονται σαν ένα δισδιάστατο έργο απλά και μόνο, γιατί απεικονίζεται στο χαρτί.

Οι Ben-Chaim, Lappan & Houand (1985) επισήμαναν πως υπάρχει μια βελτίωση με την πάροδο του χρόνου, αφού βρήκαν πως τα ποσοστά σωστής καταμέτρησης κυμαίνονται από 25%, σε μαθητές 5^{ης} τάξης, έως 50% στους μαθητές της 8^{ης} τάξης. Η βελτίωσης της ικανότητας καταμέτρησης στα έργα με τους κύβους (οικοδόμηση μίας κατασκευής με κύβους, αναπαραστάσεις κύβων σε δισδιάστατα σχέδια και η ερμηνεία τέτοιων σχεδίων) είναι πολύ βοηθητική για τη βελτίωση της επίδοσής τους στα χωρικά έργα και ως επέκταση της χωρικής ικανότητάς τους (Olkun & Knaupp, 1999). Στην παρούσα μελέτη βρέθηκε μια βελτίωση από την Β’ Γυμνασίου έως στην Α’ Λυκείου, ωστόσο, τα ποσοστά ορθής απάντησης παρουσιάζουν μείωση για τους μαθητές της Β’ Λυκείου, το οποίο ενδεχομένως να συνδέεται και με τον τρόπο εισαγωγής των μαθητών στα Πειραματικά σχολεία (Β’ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου με κλήρωση, οι μαθητές των άλλων δυο τάξεων έχουν εισαχθεί με εξετάσεις).

Οι Battista and Clements (1996) έδωσαν μια ερμηνεία των λαθών μέσω της αδυναμίας των μαθητών να δομήσουν χωρικά ένα στερεό. Ένας μαθητής με επαρκή ικανότητα δόμησης του χώρου έχει την ικανότητα να κατασκευάσει στήλες και επίπεδα μέσω μοναδιαίων κύβων, ενώ, όταν δεν τα καταφέρνει, αυτό οφείλεται στο γεγονός πως δεν μπορεί να συντονίσει και να συμπεριλάβει άλλες όψεις του στερεού. Μια άλλη δυσκολία είναι η πίστη πως το στερεό αποτελείται μόνο από προσόψεις, έχοντας δηλαδή την μορφή ενός άδειου κουτιού, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνουν υπόψη τους το εσωτερικό του, ενώ, επιπλέον, μερικές φορές αγνοούσαν τους κοινούς κύβους σε έδρες που ήταν σε επαφή. Οι Olkun & Knaupp (1999) και Olkun (2003) συμπέραναν πως οι μαθητές καταλαβαίνουν πιο εύκολα τη δομή ενός στερεού, όταν έρθουν σε επαφή με ένα φυσικό τρισδιάστατο πρίσμα. Στην αντίθετη περίπτωση, που έχουν τη δισδιάστατη απεικόνιση του, αδυνατούν να αντιληφθούν την τρισδιάστατη μορφή του στερεού (Pittalis & Christou, 2013, όπως αναφέρεται στους Tekin-Sitrava & Isiksal-Bostan, 2014).

Χωρικές Σχέσεις – Σχετική Θέση Το γεγονός, που έχει επισημανθεί προηγουμένως, πως οι μαθητές αγνοούν τους κύβους με έδρες σε επαφή, είναι φανερό και στην επόμενη ερώτηση της σχετικής θέσης. Στην περίπτωση των σχετικών θέσεων η πιο απλή ερώτηση, που εξετάζει μόνο εφαπτόμενα στερεά με κατεύθυνση πάνω, αριστερά και δεξιά, έχει το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (λείπει η κατεύθυνση «κάτω», αφού εφάπτεται στο επίπεδο), ενώ αυτή που δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές είναι η δεύτερη. Το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται στην αίσθηση του μαθητή ότι αρκεί ένα στερεό να έχει κοινή κορυφή με ένα άλλο στερεό, για να ακουμπά το ένα στο άλλο (απάντηση δ: 5 έναντι της σωστής γ: 4). Ένας άλλος λόγος, για τον οποίο οι μαθητές ενδεχομένως να υπολογίζουν παραπάνω επαφές από τις πραγματικές, είναι, όπως αναφέρθηκε και στους Battista and Clements (1996), η διπλή καταμέτρηση των κύβων, όταν εμφανίζονταν σε κοινή ακμή παρακείμενων εδρών του πρίσματος. Δεν φαίνεται, λοιπόν, να μπορούσαν να συντονίσουν τις κάθετες όψεις του πρίσματος από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Με τον όρο συντονισμός όψεων, οι Battista & Clements (1996) αναφέρονται στη δυνατότητα να αναγνωρίζει κάποιος πως τοποθετούνται τα στερεά στη σωστή θέση σε σχέση το ένα με το άλλο. Επομένως, θα πρέπει να μπορεί να αντιληφθεί τις σχετικές χωρικές τους σχέσεις και την αλληλεξάρτησή τους. Προφανώς, βασικό είναι να αναγνωρίσει κάποιος πως παρακείμενες έδρες αντιστοιχούν στον ίδιο κύβο ή να συμπεριλαμβάνει δύο ή περισσότερες όψεις ενός στερεού, για να εντοπίζει σχέσεις μεταξύ τους.

Χωρικές Σχέσεις – Μετασχηματισμοί στο Επίπεδο – Ανάλυση & Σύνθεση Σε σχέση με τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στην ερώτηση της σύνθεσης. Το 72% των μαθητών απαντούν σωστά και στις δύο ερωτήσεις, ενώ το ποσοστό των μαθητών, που απαντούν σωστά στην $6^{η}$ και λανθασμένα στην $7^{η}$, είναι τριπλάσιο από το αντίστοιχο $7^{ης}$ - $6^{ης}$. Οι μαθητές φαίνεται πως έχουν επιτύχει τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος κατά την οποία, σύμφωνα με τον Duval (1995, όπως αναφέρεται στην Παναούρα, 2007), το σχήμα θεωρείται ευρετικό εργαλείο, συνεπώς, είναι δυνατή η ανάλυση ή διάσπαση του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα και η αναδιοργάνωσή του ή τέλος, η αλλαγή του προσανατολισμού του. Η ευκολία με την οποία διαχειρίζονται οι μαθητές την ερώτηση 6 πιθανόν να συνδέεται με το γεγονός πως οι καθηγητές τους στο Γυμνάσιο ακολουθούν εν μέρει τις οδηγίες του πιλοτικού προγράμματος, στο οποίο η σύνθεση και η αποσύνθεση σχήματος χρησιμοποιείται συχνά για την εμβάθυνση σε θέματα εμβαδόν επίπεδου σχήματος. Ωστόσο, αυτό πρέπει να διερευνηθεί περαιτέρω με συνεντεύξεις μαθητών και καθηγητών. Οι διαδικασίες της αναδιοργάνωσης και της ανασύνθεσης προωθούν τη φαντασία και την ικανότητα λογικής σκέψης μέσω της παρατήρησης και της ανάλυσης (Clements & Battista, 1992). Σύμφωνα με τους Carpenter et al. (αναφορά στην Kordaki, 2003), οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της ισότητας εμβαδών, όταν αυτά αναπαριστώνται με διαφορετικά σχήματα, ενώ η ικανότητά τους ως προς τη διατήρηση του εμβαδού ποικίλει ανάλογα με το σχήμα. Όταν αντιμετωπίζουν βασικά σχήματα, όπως τετράγωνα και ορθογώνια, δεν αντιμετωπίζουν τόσο μεγάλες δυσκολίες, όσο, όταν έχουν να διαχειριστούν τρίγωνα και ακανόνιστα σχήματα. Στην προκειμένη, τα σχήματα της ερώτησης της ανάλυσης είναι απλά και για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμη η διερεύνηση της χωρικής αυτής ικανότητας των μαθητών με χρήση και πιο πολύπλοκων σχημάτων.

Μετασχηματισμοί στο Χώρο – Αλλαγή διαστάσεων Σε σχέση με τους μετασχηματισμούς στο χώρο και το πέρασμα από το δισδιάστατο στον τρισδιάστατο χώρο και το αντίστροφο, το πρώτο φαίνεται να θεωρείται από τους μαθητές πιο δύσκολο από το δεύτερο (ποσοστά επιτυχίας 84% και 93,5%). Αυτό πιθανόν να οφείλεται και στην απλότητα του δεύτερου σχήματος. Γι' αυτό καλό είναι να διερευνηθεί περαιτέρω με πιο πολύπλοκα στον χειρισμό τρισδιάστατα σχήματα, αφού σύμφωνα με τον Cohen (2003), η πολυπλοκότητα του ίδιου του γεωμετρικού στερεού, επηρεάζει το συλλογισμό των μαθητών σε σχέση με τα αναπτύγματα. Η ερώτηση 9, τελικά, επιλύεται μόνο με την παρατήρηση της θέσης και του προσανατολισμού των εικόνων, που υπάρχουν πάνω στις έδρες του κύβου, όπου τότε, όπως υποστηρίζει ο Fischbein (1993, όπως αναφέρεται στην Παναούρα (2007)), κατά τη διαδικασία κατασκευής αναπτυγμάτων, όπου εικόνες, ορισμοί και σημασίες συνυπάρχουν, οι πολύπλοκες νοητικές δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα αποτελούν ευκαιρία για εξάσκηση των μαθητών στο χειρισμό σχηματικών εννοιών στο γεωμετρικό συλλογισμό. Τα παιδιά, επομένως, πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύουν τα δισδιάστατα σχέδια των τρισδιάστατων αντικειμένων και να κατασκευάζουν τρισδιάστατα αντικείμενα από ένα σχέδιο (Moses, 1990, όπως αναφέρεται σε Γαγάτση & Καλογήρου, 2013).

Η διδασκαλία μπορεί να συμβάλλει καθοριστικά σε αυτό, αφού οι Olkun και Knaupp (1999), αναφέρουν ότι τα παιδιά μέσα από τη διδασκαλία κατανοούν και αναπαριστούν σχήματα τριών διαστάσεων, που προηγουμένως τα θεωρούσαν ως δισδιάστατα. Ως εκ τούτου, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διδάξουν στα παιδιά τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις και τον τρόπο να κινούνται μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων, ενώ η χρήση της τεχνολογίας έχει, ήδη, τονισθεί σε πλήθος ερευνών πως βοηθάει σημαντικά στην ουσιαστική κατανόηση. Ωστόσο, προτείνεται η εμβάθυνση μέσω διεξαγωγής ποιοτικής έρευνας (συνεντεύξεις μαθητών) σχετικά με τα αναπτύγματα γεωμετρικών στερεών, η οποία θα μπορούσε να συμβάλει στη συλλογή χρήσιμων δεδομένων για τον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα αυτά και για τις νοητικές διεργασίες που ενεργοποιούν κατά την ενασχόλησή τους με αναπτύγματα.

Μετασχηματισμοί στο Χώρο – Περιστροφή Σε σχέση με τη νοερή περιστροφή αντικειμένων, διαπιστώθηκε πως οι μαθητές της παρούσας μελέτης παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία στην περιστροφή στον τρισδιάστατο χώρο (ερώτηση 10η: στροφή στο χώρο, ποσοστά σωστής απάντησης: 69%) σε σχέση με το δισδιάστατο χώρο (ερώτηση 7η: σύνθεση, ποσοστά σωστής απάντησης: 80%). Το παραπάνω βρίσκεται σε συμφωνία με τα ευρήματα άλλων ερευνητών, οι οποίοι ισχυρίζονται ότι η νοερή περιστροφή των τρισδιάστατων αντικειμένων είναι πιο δύσκολη από τη νοερή περιστροφή των δισδιάστατων (Michaelides, 2003). Σύμφωνα με τους Linn & Petersen (1985), η οπτικοποίηση του χώρου περιλαμβάνει τη νοερή περιστροφή των αντικειμένων. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό και έχοντας κατά νου πως στην παρούσα μελέτη ο μετασχηματισμός στο επίπεδο αποτελεί τμήμα των χωρικών σχέσεων και, επομένως, της οπτικοποίησης, το παραπάνω συμπέρασμα ισχυροποιείται, αφού μέσα στην περιστροφή στο επίπεδο ανήκει και η ερώτηση της ανάλυσης (ερώτηση 6η με ποσοστά σωστής απάντησης: 93,5%).

Σε σχέση με τη στροφή στο χώρο (ερώτηση 10) διαπιστώθηκε πως οι μαθητές της Β’ Γυμνασίου παρουσιάζουν σαφώς μεγαλύτερες δυσκολίες από τους μαθητές της Γ’ Γυμνασίου (μέσος όρος: 42,9& έναντι 77,5%), ενώ αυτή η δυσκολία φαίνεται να «επανέρχεται» στους μαθητές της Β’ Λυκείου. Το πρώτο βρίσκεται σε συμφωνία με το συμπέρασμα των Ευσταθίου & Παναούρα (2017), αύξηση της ικανότητας νοερής περιστροφής στους μαθητές κατά την περίοδο του γυμνασιακού κύκλου, οι οποίοι και προχώρησαν σε μια ερμηνεία εκτιμώντας πως οι ενδοσχολικές αλλά και εξωσχολικές δραστηριότητες των μαθητών, περιλαμβάνουν εμπειρίες που φαίνεται ότι βοηθούν στην ανάπτυξη της ικανότητας αυτής. Η μείωση κατά τη Β’ Λυκείου, ενδεχομένως, να οφείλεται στο γεγονός πως οι μαθητές στα μαθηματικά δεν έχουν καμία επαφή με σχήματα στον τρισδιάστατο χώρο και αν και διδάσκονται ευκλείδεια γεωμετρία τα δυο πρώτα χρόνια του Λυκείου, ωστόσο τίποτα στον αναλυτικό πρόγραμμα αυτής δεν σχετίζεται με περιστροφή. Ακόμη και η διδασκαλία της στερεομετρίας στη Β΄ Λυκείου, αν και είναι εντός της διδακτέας ύλης, ωστόσο σπάνια διδάσκεται λόγω περιορισμού χρόνου.

Κατανόηση των Διαστάσεων – Όψεις στερεού Οι Wu, Ma και Chen (2006, όπως αναφέρεται σε Jones & Tzekaki, 2016) διερεύνησαν σπουδαστές διαφόρων τάξεων και διαπίστωσαν ότι οι μαθητές μεγαλύτερης τάξης είχαν «καλύτερες» αναπαραστάσεις για τα τρισδιάστατα σχήματα, κάτι που βρίσκεται εν μέρει σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης. Οι μαθητές της Α' Λυκείου παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων, ενώ στους μαθητές της Β΄ Λυκείου το ποσοστό είναι ελαφρώς μειωμένο, σε κάθε περίπτωση, όμως, είναι μεγαλύτερο από τους μαθητές του Γυμνασίου. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στη διδασκαλία της στερεομετρίας στην Γ΄ Γυμνασίου, που ενισχύει τις πρότερες γνώσεις των μαθητών της Α' Λυκείου, αλλά καθώς δεν ενισχύεται με διδασκαλία στην Α' Λυκείου αρχίζει να ατονεί κατά την Β΄ Λυκείου. Η βελτίωση, όσο αυξάνει η ηλικία, μπορεί, επίσης, να οφείλεται στη γενική γνωστική ανάπτυξη και μάθηση. Ωστόσο, τα έργα που περιλαμβάνουν γεωμετρικά στερεά στηρίζονται σύμφωνα με τους Jirotková & Littler (2002, όπως αναφέρεται στην Παναούρα, 2007), κυρίως, στην οπτική αντίληψη και την ανάκληση γνωστών ήδη γεωμετρικών εικόνων. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι διαδικασίες που ενεργοποιούνται από τους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με έργα με σχήματα τριών διαστάσεων είναι διαφορετικές από τις διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση χωρικών έργων.

Ομαδοποιήσεις Μεταβλητών- Διαστάσεων χωρικής ικανότητας Η ομαδοποίηση των έργων της καταμέτρησης κύβων σε μια συνιστώσα αποκλειστικά είναι ενδεικτική όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως. Με εξαίρεση αυτή, σε γενικές γραμμές, καμία από τις προτεινόμενες κατηγορίες του δοκιμίου, που δημιουργήθηκε, δεν ομαδοποιούνται μαζί. Οι Lee & Bednarz (2012) καταλήγουν στον ίδιο προβληματισμό, επιχειρώντας, επιπλέον, να δώσουν κάποιες ερμηνείες. Από τη μια πιστεύουν πως αρκετές από τις ερωτήσεις του δοκιμίου τους (χρησιμοποίησαν το τεστ STAT) δεν ανήκουν αποκλειστικά σε μια κατηγορία χωρικής ικανότητας, αλλά, προφανώς, σχετίζονται με άλλες. Από την άλλη, κάποια από τα χωρικά έργα συχνά λύνονται χωρίς να γίνει χρήση χωρικών στρατηγικών.

Έτσι, διαπιστώνεται πως τα έργα της ομάδας μετασχηματισμοί στο χώρο – περιστροφή δεν ομαδοποιούνται κατά την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες σε ένα παράγοντα αλλά σε τρεις επιμέρους. Το πέρασμα από το δισδιάστατο χώρο στον τρισδιάστατο ομαδοποιείται με το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων, η αντίστροφη αλλαγή διαστάσεων με τον προσανατολισμό αμβλείας γωνίας (με αντίθετους συντελεστές) και η περιστροφή με τη σύνθεση από το μετασχηματισμό στο επίπεδο (πάλι με αντίθετους συντελεστές). Το παραπάνω αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με την έρευνα του Cohen (2003), ο οποίος θεωρεί πως οι διαδικασίες, που ενεργοποιούνται κατά την αντιμετώπιση έργων με αναπτύγματα, θα είναι παρόμοιες με αυτές που ενεργοποιούνται για την αντιμετώπιση έργων που αφορούν νοητικές περιστροφές ή δίπλωση σχημάτων. Η Παναούρα (2007), ωστόσο, υποστήριξε ότι μόνο στην περίπτωση των μαθητών γυμνασίου οι χωρικές ικανότητες νοητικής περιστροφής και χειρισμού νοητικών εικόνων ομαδοποιούνται με το χειρισμό αναπτυγμάτων. Είναι πιθανόν, η ηλικία του δείγματος να παίζει ρόλο και οι μικρότεροι μαθητές να στηρίζονται στην οπτική αντίληψη ή σύγκριση ενός αναπτύγματος με ήδη υπάρχουσες πρωτοτυπικές μορφές. Επιπλέον, η Παναούρα (2007) με την ολοκλήρωση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης, που εφάρμοσε στο σύνολο των μαθητών, επισήμανε ότι η γεωμετρική ικανότητα των μαθητών, σε ό,τι αφορά το χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων, αποτελεί ένα μείγμα ικανοτήτων για χειρισμό χωρικών έργων με τρισδιάστατα σχήματα, δισδιάστατα σχήματα και αναπτύγματα στερεών. Επομένως, η βελτίωση αυτών των επιμέρους ικανοτήτων ενισχύει τη γεωμετρική ικανότητα.

Επιπλέον, η ομαδοποίηση του αναπτύγματος (μετασχηματισμοί στο χώρο από 2D σε 3D) αντιστοιχεί στην πρώτη κύρια συνιστώσα μαζί με την κατανομή σωστών και λανθασμένων ερωτήσεων και τέλος, μαζί και με τις όψεις στερεού από 2D σε 3D. Η ικανότητα μετάβασης από το δισδιάστατο στον τρισδιάστατο χώρο, ανεξαρτήτου διάστασης χωρικής ικανότητας στην οποία αναφέρεται, είναι η πλέον σημαντική και υπεύθυνη για το μεγαλύτερο ποσοστό της διασποράς. Επομένως, πρέπει να αποτελεί σίγουρα παράγοντα σε μια μελέτη χωρικών ικανοτήτων. Το αντίστροφο πέρασμα, από τον τρισδιάστατο στο δισδιάστατο χώρο, δεν ομαδοποιείται σε μια συνιστώσα και αυτό, ενδεχομένως, να οφείλεται στο γεγονός πως η ερώτηση 9 του μετασχηματισμού στο χώρο από 3D σε 2D καταλήγει, τελικά, να είναι ερώτηση σχετικών θέσεων και περιστροφής των εικόνων, που τα αναπτύγματα περιέχουν. Η ενσωμάτωση σχημάτων, που θα εξετάσουν ακριβώς αυτή την μετάβαση, κρίνεται σημαντική σε μια μελλοντική επέκταση της μελέτης.

Επιπλέον, σε σχέση με την έβδομη κύρια συνιστώσα, η οποία ομαδοποιεί τον προσανατολισμό αμβλείας γωνίας με τον μετασχηματισμό στο χώρο από τον τρισδιάστατο στο δισδιάστατο, βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Γαγάτσης & Καλογήρου (2013), οι οποίοι κατέληξαν πως τα έργα του δοκιμίου τους P (Perspectives) και CC (Cube Comparison) ομαδοποιούνται μαζί τόσο στους μαθητές Δημοτικού όσο και στου Γυμνασίου. Τα έργα αυτά είναι παραπλήσια με τα αντίστοιχα του παρόντος δοκιμίου. Μόνη διαφορά είναι πως στους μαθητές του Γυμνασίου στην ίδια ομαδοποίηση μπαίνουν και έργα PF (Paper Folding). Η ομαδοποίηση οφείλεται στην άμεση σχέση που έχουν με την προοπτική του ατόμου, αφού όλα τα έργα απαιτούν οι μαθητές να λειτουργήσουν ως εξωτερικοί παρατηρητές, διατηρώντας τον προσανατολισμό τους, όταν το αντικείμενο ή σχήμα αλλάζει θέση και περιστρέφεται νοερά. Τα έργα απαιτούν χωρικούς μετασχηματισμούς του αντικειμένου, χωρίς όμως να αλλάζει το εγωκεντρικό πλαίσιο αναφοράς του ατόμου, αλλά να αλλάζει η προοπτική του ατόμου (Γαγάτσης & Καλογήρου, 2013).

Ομαδοποίηση Μαθητών ως προς τη χωρική τους ικανότητα Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης σε κύριες συνιστώσες, της ανάλυσης κατά συστάδες και τη διαχωριστική ανάλυση, διαπιστώθηκε πως όλες οι μεταβλητές - ερωτήσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στις αναλύσεις, με εξαίρεση τις μεταβλητές που αναφέρονται στη δεύτερη κύρια συνιστώσα και πιο συγκεκριμένα την τρίτη σχετική θέση ως προς τις χωρικές θέσεις και την κατανόηση διαστάσεων – όψεις στερεού (το πέρασμα από τον τρισδιάστατο χώρο στο δισδιάστατο). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως οι μεταβλητές από τους άξονες μετασχηματισμός στο χώρο – περιστροφή και κατανόηση διαστάσεων – όψεις δεν έχουν υψηλή διαχωριστική ικανότητα για την αναπαραγωγή των συστάδων, ωστόσο σε σχέση με τις ίδιες τις συστάδες είναι σημαντικές για την επιμέρους διάκριση των συστάδων μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει πως μέσω των διαχωριστικών συναρτήσεων μπορεί να επιτευχθεί ορθή κατάταξη (σε υψηλό ποσοστό) στις ομάδες των μαθητών βάσει της χωρικής τους ικανότητά, κάνοντας χρήση μόνο στοιχείων χωρικού προσανατολισμού και χωρικών σχέσεων. Από εκεί και έπειτα οι ίδιες οι ομάδες «μεταφέρουν» πληροφορία που αναφέρεται και στις άλλες δυο διαστάσεις του προτεινόμενου δοκιμίου.

Σε σχέση με την ομαδοποίηση των μαθητών ανάλογα με τις χωρικές τους ικανότητες, εκεί διαπιστώνεται πως οι μαθητές διαχωρίζονται ως προς επιμέρους διαστάσεις των αξόνων και όχι συνολικά με ένα άξονα πάντα. Χαρακτηριστικό είναι πως πάντα υπάρχει μια ομάδα που έχει τις καλύτερες αποδόσεις σχεδόν σε όλες τις ικανότητες. Εξαίρεση αποτελεί η ικανότητα του μετασχηματισμού στο χώρο από τρισδιάστατα στα δισδιάστατα, η οποία για κάποιο λόγο σε όλες τις αναλύσεις 3,4 και 5 ομάδων βγαίνει εκτός της κατηγορίας των υψηλής χωρικής ικανότητας μαθητών. Παρατηρώντας τα χαρακτηριστικά κάθε μιας από τις επιμέρους συστάδες στις 4 διαφορετικές αναλύσεις, διαπιστώνεται ότι κατά την ομαδοποίηση των μαθητών κάποιες από τις ικανότητες ομαδοποιούνται, επίσης, μαζί. Έτσι, για την περίπτωση της δημιουργίας τριών κλάσεων ομαδοποιούνται μαζί α) οι ικανότητες προσανατολισμού, β) η καταμέτρηση κύβων, γ) οι σχετικές θέσεις από τον άξονα των χωρικών σχέσεων, δ) η ανάλυση με τη σύνθεση, ε) οι ικανότητες μετασχηματισμού στο χώρο. Μοιάζει, λοιπόν, να ομαδοποιούνται ακολουθώντας το προτεινόμενο μοντέλο. Στην περίπτωση των αναλύσεων που δίνουν τέσσερις και πέντε κλάσεις, κάποιες από τις παραπάνω ομάδες διασπώνται, ενώ εμφανίζεται και μια ακόμη αυτή της ανθρώπινης γωνίας με την ανάλυση. Η τελευταία ομάδα, εξάλλου, έχει αποτελέσει και μια από τις συνιστώσες ($5^η$) από την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες. Το ίδιο συμβαίνει και για την καταμέτρηση κύβων, που και εδώ αποκαλύπτεται σαν μια ομάδα, που καθορίζει χαρακτηριστικά των μαθητών, και επίσης είχε βρεθεί και σαν επιμέρους κύρια συνιστώσα.

Ο ρόλος της ηλικίας Οι Borella et al. (2014) αναφέρουν πως, παρά τον καθοριστικό ρόλο των χωρικών ικανοτήτων στην καθημερινή ζωή, λίγες μελέτες έχουν ερευνήσει την επίδραση της ηλικίας σε αυτή, όπως, επίσης, και τις διαφορές ανάμεσα στις επιμέρους διαστάσεις της χωρικής ικανότητας σε σχέση με την ηλικία. Στην παρούσα μελέτη διαπιστώθηκε πως στους μαθητές με το υψηλότερο επίπεδο χωρικών ικανοτήτων, οι τελευταίες αυξάνονται, όσο ανεβαίνει η σχολική τάξη με εξαίρεση τη Β΄ Λυκείου. Ο λόγος έχει να κάνει με τον τρόπο εισαγωγής των μαθητών στο Πειραματικό την τελευταία πενταετία και την μίξη μαθητών «δυο ταχυτήτων», μαθητές με εξετάσεις, όπως αυτοί της Γ’ Γυμνασίου και της Α’ Λυκείου, και μαθητές με κλήρωση (Β’ Γυμνασίου και Β’ Λυκείου). Η Παναούρα (2007) παρατήρησε, επίσης, το φαινόμενο της ανάπτυξης των χωρικών ικανοτήτων με την αύξηση της ηλικίας και τη μετακίνηση των μαθητών σε υψηλότερα επίπεδα χωρικών ικανοτήτων. Το ίδιο τονίζουν και οι Lee & Bednarz (2012), επισημαίνοντας πως η μέση βαθμολογία των μαθητών Λυκείου (high school) ξεπέρασε την αντίστοιχη των μαθητών Γυμνασίου (junior high school), ενώ αντίστοιχη ήταν και η εικόνα της σύγκρισης μαθητών Λυκείου με φοιτητές (αύξουσα πορεία βαθμολογιών). Οι ίδιοι, επιπλέον, βρήκαν πως κάποιες από τις ερωτήσεις είχαν μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα από κάποιες άλλες, κάτι το οποίο δείχνει πως κάποιες ικανότητες είναι πιο δύσκολες για τους μαθητές – φοιτητές. Συμπέρασμα στο οποίο έχει καταλήξει και η παρούσα μελέτη.

Περιορισμοί της έρευνας-Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες Στην παρούσα μελέτη για τη διερεύνηση των χωρικών ικανοτήτων έγινε χρήση ενός δοκιμίου, το οποίο δημιουργήθηκε για αυτό το σκοπό. Το δοκίμιο, που προτείνεται σε αυτή την εργασία, μπορεί να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς και στους ερευνητές ένα άμεσο και γρήγορο τρόπο διερεύνησης της πολυδιάστατης χωρικής ικανότητας. Επιπλέον, μπορεί να αποτελέσει αφορμή για ενσωμάτωση στη διδασκαλία ανάλογων δραστηριοτήτων που μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων. Ο χαμηλός δείκτης αξιοπιστίας φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε κατηγορία συμπεριλαμβάνονται λίγα έργα (1-2 σε κάθε διάσταση). Δεδομένου ότι ο δείκτης Cronbach's Alpha επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τον αριθμό των έργων, προτείνεται εμπλουτισμός του δοκιμίου με περισσότερα έργα ανά διάσταση, για να ενισχυθεί η αξιοπιστία του. Επιπλέον, σχετικά με το δοκίμιο,καθώς οι περισσότερες ερωτήσεις είναι κλειστού τύπου (οι 13 στις 15), επομένως, δεν μπορεί να διερευνηθεί εις βάθος ο τρόπος σκέψης, οι στρατηγικές των μαθητών και οι νοητικές διεργασίες που ενεργοποιούνται κατά την ενασχόλησή τους με χωρικά έργα. Προτείνεται σε ένα μελλοντικό στάδιο να εμπλουτιστεί η μελέτη με συνεντεύξεις μαθητών, προκειμένου να μελετηθεί εκτενέστερα ο συλλογισμός τους. Η ανάπτυξη συνδυαστικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων θα οδηγήσει σε πιο επαρκή και αποτελεσματική μελέτη των στρατηγικών τους. Σε ένα επόμενο στάδιο της μελέτης, στόχος είναι αναλυθούν, αφενός τα λάθη των μαθητών που ανήκουν στις κατηγορίες με χαμηλές χωρικές ικανότητες, και αφετέρου να μελετηθούν οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές που ανήκουν στην κατηγορία των υψηλών χωρικών ικανοτήτων, με στόχο να εξαχθεί η γνώση των δεύτερων για να βοηθηθούν οι πρώτοι. Όλα αυτά, όμως, θα έχουν νόημα, αν επεκταθεί η μελέτη και σε άλλα σχολεία δεδομένου των «ειδικών» συνθηκών που επικρατούν στα Πειραματικά σχολεία κυρίως ως προς τον τρόπο εισαγωγής των μαθητών και την αξιολόγηση των καθηγητών τους. Ένας άλλος περιορισμός της μελέτης ήταν πως το δοκίμιο συμπληρώθηκε κατά τη διάρκεια μια διδακτικής ώρας, χωρίς, όμως, να υπάρχει δυνατότητα καταγραφής των επιμέρους χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές ανά ερώτηση. Ο χρόνος απόκρισης τα τελευταία χρόνια εισάγεται σαν μεταβλητή στις μελέτες για αυτό και προτείνεται το τεστ να γίνεται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπου είναι άμεση δυνατή η λεπτομερής καταγραφή του χρόνου, που χρειάσθηκε ο κάθε μαθητής για κάθε απάντηση (Pellegrino, Alderton, & Shute, 1984).

Ενδεικτικές διδακτικές προτάσεις για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων των μαθητών Η αδυναμία των μαθητών στην ερώτηση της καταμέτρησης κύβων, η δυσκολία που παρουσιάζουν με τα αναπτύγματα και τις μεταβάσεις από το δισδιάστατο στον τρισδιάστατο χώρο και αντίστροφα, μπορεί να ξεπερασθεί εν μέρει με χρήση της τεχνολογίας. Η τεχνολογία μέσω των αποτελεσματικών περιβαλλόντων μάθησης και των πολλαπλών λειτουργιών της, όπως το drag and drop (μεταφορά και απόθεση), δοκιμές, περιστροφή σχημάτων, δίνει στους μαθητές χώρο να αναπτύξουν τις ικανότητες συλλογισμού σχετικά με την οπτικοποίηση και το χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων (Arzarello, Bairral, & Dane, 2014). Οι Olkun & Knaupp (1999) αναφέρουν πως η οικοδόμηση μιας κατασκευής με κύβους είναι καθοριστική για τη βελτίωση της χωρικής ικανότητας.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Arzarello, F., Bairral, M. A., & Danè, C. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching mathematics and its applications,* 33(1), 39-51.

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualization skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology, 42(2)*, 291-310.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 258-292.

Ben- Chaim, D., Lappan, G. & Houand, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and affecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 389- 409.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.

Bodner, G. M., & Guay, R. B. (1997). The Purdue visualization of rotations test. *The Chemical Educator*, *2*(4), 1-17.

Booth, R., & Thomas, M. (1999). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. Journal of Mathematical Behavior, 18(2), 169-190.

Borella, E., Meneghetti, C., Ronconi, L., & De Beni, R. (2014). Spatial abilities across the adult life span. *Developmental psychology*, *50*(2), 384.

Cakmak, S., Isiksal, M., & Koc, Y. (2014). Investigating effect of origami-based instruction on elementary students' spatial skills and perceptions. *The Journal of Educational Research*, 107(1), 59-68.

Carroll, J. (1993). *Human cognitive abilities: a survey of factor analytic studies.* Cambridge: Cambridge University Press.

Chan, Y. H. (2005a). Biostatistics 304. Cluster analysis. *Singapore Med J*, 46(4), 153-159.

Chan, Y. H. (2005b). Biostatistics 303. Discriminant analysis. *Singapore medical journal*, *46*(2), 54.

Chiu, T., Fang, D., Chen, J., Wang, Y., & Jeris, C. (2001). A robust and scalable clustering algorithm for mixed type attributes in large database environment. In *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining* (pp. 263-268). ACM.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education,* 7-72. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Στο D. Grouws (Επιμ.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 420- 464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. Στο F. Lester (Επιμ.), *Handbook of research on teaching and learning mathematics* (2 ed., pp. 461-555). Greenwich CT: Information Age Publishing.

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A. M. (Eds.). (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education.* Routledge.

Cohen, N. (2003). Curved Solids Nets. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 229-236.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed.). London: Routledge.

Colom, R., Contreras, M. J., Botella, J., & Santacreu, J. (2002). Vehicles of spatial ability. *Personality and Individual Differences*, *32*(5), 903-912.

Committee on Support for Thinking Spatially. 2006. *Learning to Think Spatially. Washington,* D.C.: The National Academies Press.

Dixon, J. K. (1997). Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. *School Science and Mathematics,* 97(7), 352-358

Doyle, R. A., Voyer, D., & Cherney, I. D. (2012). The relation between childhood spatial activities and spatial abilities in adulthood. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *33*(2), 112-120.

Drost, E. A. (2011). Validity and reliability in social science research. *Education Research and perspectives,* 38(1), 105.

Ekstrom, R. B., Dermen, D., & Harman, H. H. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests* (Vol. 102). Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Eliot, J., & Czarnolewski, M. Y. (2007). Development of an everyday spatial behavioral questionnaire. *The Journal of general psychology*, *134*(3), 361-381.

English, L. D., & Warren, E. A. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: implications for initial instruction. Focus on Learning Problems in Mathematics, 17(4), 1-19.

Fennema, E., & Tartre, L. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 184-206.

Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spa- tial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, 14, 51-71.

Fielker, D. (1993). *Starting from Your Head: Mental Geometry*(Vol. 1). Nelson Thornes.

Frick, A., & Wang, S. (2010). Round and round she goes: Effects of hands-on training on mental rotation in 13-to 16-month-olds. In Poster presented at the *XVIIth Biennial International Conference on Infant Studies, Baltimore*.

Friedman, L., (1995). The space factor in Mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research,* (65 (1):22-50

Galea, L. A., & Kimura, D. (1993). Sex differences in route-learning. *Personality and individual differences, 14*(1), 53-65.

Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The theory of multiple intelligences.* New York: Basic Books.

Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century.* New York: BasicBooks.

Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F., & Hoard, M. K. (2000). Sex Differences in Spatial Cognition, Computational Fluency, and Arithmetical Reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology,* 77, 337-353.

Goluccia, E. & Louse, G. (2004). Gender differences in spatial orientation: A review. *Journal of environmental psychology, 24(3)*, 329-340.

Goodchild, M. (2009). *Challenges, in spatial analysis.* In S. Fotheringham, P. Rogerson (eds.), Spatial Analysis. London-New York: Sage, 465-480.

Gutiérrez, A. (1996). Vizualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig and A. Guttierez (Eds.) *Proceedings of the 20th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Guillot, A., Champely, S., Batier, C., Thiriet, P. & Collet, C. (2007). Relationship between spatial abilities, mental rotation and functional anatomy learning. *Advances in Health Sciences Education,* 12, pp.491-507.

Hazen, N. L., & Durrett, M. E. (1982). Relationship of security of attachment to exploration and cognitive mapping abilities in 2-year-olds. *Developmental psychology*, *18*(5), 751.

Hazzi, O. & Maldaon, I. (2015). A pilot study: vital Methodological issues. *Verslas:Teorija ir praktika/business:Theory and Practice*, 16(1), pp. 53-62.

Hegarty, M., Richardson, A., Montello, D., Lovelace, K., & Subiah, I. (2002). Development of a self report measure of environmental spatial ability. *Intelligence,* 30, pp. 425-447.

Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-takin99g spatial abilities. *Intelligence*, 32, 175-191.

Hegarty, M. & Waller, D. (2005). *Individual differences in spatial abilities*. In P. Shah & A. Miyake (Eds). The Cambridge handbook of visuospatial thinking. New York, NY: Cambdridge University Press.

Jaeger, A. J. (2015). *What Does the Punched Holes Task Measure?* (Doctoral dissertation of Philosophy in Psychology submitted in the Graduate College of the University of Illinois at Chicago

Jolliffe I.T. (1990). Principal Component Analysis: A Beginner's Guide- I. Introduction and application. *Weather*, 45, 375–382.

Jones, S., & Burnett, G. (2008). Spatial ability and learning to program. *Human Technology: An Interdisciplinary Journal on Humans in ICT Environments*. Volume 4 (1), May 2008, 47–61

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). SensePublishers, Rotterdam.

Kalogirou, P. & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. A*cta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, 11, 27-39.

Kim, E. M., Haberstroh, J., Peters, S., Howell, H., & Oláh, L. N. (2017*). A learning progression for geometric measurement in one, two, and three dimensions* (Research Report No. RR-17-55). Princeton, NJ: Educational Testing Service. https://doi.org/10.1002/ets2.12189

Kleeman, G., & Hutchinson, N. (2005). Maps in classrooms. *Globe, The*, (57), 1.

Kordaki, M. (2003), The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics,* 52, 177-209.

Kozhevnikov, M., & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory & Cognition*, 29, 745-756

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., and Mayer R.E. (2002), Revising the visualizer/verbalizer dimenension: Evidence for two types of visualizers, *Cognition and Instruction*, 20, 47-77.

Kurtulus, A., & Uygan, C. (2010). The effects of Google Sketchup based geometry activities and projects on spatial visualization ability of student mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 384-389.

Lawton, C.A. & Morrin, K.A. (1999). Gender differences in pointing accuracy in computer simulated 3D mazes. *Sex Roles, 40,* (1-2)*,* 73–92.

Lee, J., & Bednarz, R. (2012). Components of spatial thinking: Evidence from a spatial thinking ability test. *Journal of Geography*, *111*(1), 15-26.

Levine, S., C., Huttenlocher, J., Taylor, A., & Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial skill. *Development Psychology*, 35(4): 940-949.

Liedtke, W. (1995). Developing spatial abilities in the early grades. *Teaching Children Mathematics*, 2 (1), 12-18.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.

Lohman, D.F. (1979), Spatial ability: *A review and reanalysis of the correlational literature, (Tech. Rep No 8)*, Stanford C.A: Stanford University, Aptitude Research Project, School of Education.

Maccoby, E. E. & Jacklin, C. N. (1974). *The psychology of sex differences.* Stanford, CA: Stanford University Press.

Maier P. H., (1996) Developments in Mathematics Education in Germany. Selected Papers from the *Annual Conference on Didactics of Mathematics,* Regensburg, 1996. 69-81

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological bulletin*, *86*(5), 889.

Michealides, M. P. (2003). Age and Gender differences in performance on a spatial rotation test. Poster presented at the *AERA Annual Meeting of American Education Research Association*, Chicago, IL

Miller, C. L. (1996). A historical review of applied and theoretical spatial visualization publications in engineering graphics. *The Engineering Design Graphics Journal*, 60(3), 12–33.

Mohler, J. L. (2009). A review of spatial ability research. *Engineering Design Graphics Journal*, *72*(2). 19-30.

Money, J., Alexander, D., & Walker, H. T. (1965). *Road-Map Test of Direction Sense.* Johns Hopkins University.

Moses, B. (1990). Developing spatial thinking in the middle grades: Designing a space station. *The Arithmetic Teacher*, *37*(6), 59.

Newcombe, N. S., & Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education, 4(3),* 102-111.

Newcombe, N., & Huttenlocher, J. (1992). Children's early ability to solve perspective-taking problems. *Developmental Psychology, 28,* 635-643.

Newcombe, N. S., & Huttenlocher, J. (2000). *Making Space: The Development of Spatial Representation and Reasoning.* Massachusetts: MIT Press.

National Research Council. (2006). *Learning to think spatially: GIS as a support system in K-12 education.* Washington, DC: National Academic Press.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: NCTM.

Okamoto Y., Weckbacher l. & Hallowell D. (2014). How is spatial reasoning related to mathematical thinking and how important is early exposure to spatial activities? In *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vancouver, BC: PME*.

Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, *3*(1), 1-10.

Olkun, S., & Knaupp, J. E. (1999). Children‘s understanding of rectangular solids made of small cubes. Paper presented at the *Annual Meeting of the Southwest Education Research Association*, San Antonio, TX.

Osberg, K. M. (1997). Spatial Cognition in the Virtual Environment, *Technical R-97- 18.* Seattle: HIT Lab.

Pellegrino, J. W., Alderton, D. L., & Shute, V. J. (1984). Understanding spatial ability. *Educational Psychologist*, *19*(4), 239-253.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

Ramful, A., Lowrie, T., & Logan, T. (2017). Measurement of spatial ability: Construction and validation of the spatial reasoning instrument for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment,* 35(7), 709-727. DOI: 10.1177/0734282916659207.

Richman, M. B. (1986). Rotation of principal components*. International Journal of Climatology*, 6(3), 293-335.

Ryu, H., Chong, Y., & Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for PME.* Vol. 4, 137-144.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Sexton, T. J. (1992). Effect on spatial visualization: introducing basic engineering graphics concepts using CAD technology. *Engineering Design Graphics Journal,* 56(3), 36–43.

Sherman, E., Brooks, B., Iverson, G., Slick, D. & Strauss, E. (2011). Reliability and Validity in Neuropsychology. In The *Little Black Book of Neuropsychology:A Syndrome-Based Approach*. Springer Science+Business Media.

Sjölinder, M. (1998). Spatial cognition and environmental descriptions. *Exploring navigation: towards a framework for design and evaluation of navigation in electronic spaces*, 46-58.

Strong, S., & Smith, R. (2001). Spatial visualization: Fundamentals and trends in engineering graphics. *Journal of industrial technology*, *18*(1), 1-6.

Stylianou, D. A., Leikin, R., & Silver, E. A. (1999). Exploring Students' Solution Strategies in Solving a Spatial Visualization Problem Involving Nets. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the *23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 241-248). Haifa: PME.

Sugiyama, T., & Moore, G. T. (2005). Content and construct validity of the early childhood physical environment rating scale (ECPERS). In Proceedings of the 36th Annual Conference of the Environmental Design Research Association (pp. 32-43). Environmental Design Research Association.

Sussman, C. & Gillman, A. (2007). Building early childhood facilities: What states can do to create supply and promote quality. *Preschool Policy Brief, 14.* USA: National Institute for Early Education Research.

Tai, D. W. S., Yu, C. H., Lai, L. C., & Lin, S. J. (2003). World Transactions on Engineering and Technology Education *UICEE*, 2(2), 251- 268.

Tekin-Sitrava R, Isiksal-Bostan M. (2014). An investigation into the performance, solution strategies and difficulties in middle school students' calculation of the volume of a rectangular prism. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 1-27.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(3), 216-229.

Ullman, K. M. & Sorby, S. A. (1990). Enhancing the visualization skills of engineering students through computer modelling. *Computer Applications in Engineering Education,* 3(4), 251–257.

Uttal, D., & Cohen, C. (2012). Spatial Thinking and STEM Education: When, Why, and How? In B. Ross (Ed.), *Psychology of learning and motivation* (Vol. 57, pp. 147-181). Oxford, UK: Academic Press. http://groups.psych.northwestern.edu/uttal/vittae/documents/UttalandCohen.pdf Προσπελάστηκε 25/5/2018.

Van der Walle, J.A. (2001). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία.* Αθήνα: Τυπωθήτω- Γιώργος Δαρδανός.

Velez, M. C., Silver, D., & Tremaine, M. (2005, October). Understanding visualization through spatial ability differences. In *Visualization, 2005. VIS 05. IEEE* (pp. 511-518). IEEE.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology,* 101, 817–835.

Wheatley, G. H. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 20(2/3), 65-77.

Wheatley, G. H., & Reynolds, A. M. (1999). " Image maker": developing spatial sense. *Teaching children mathematics*, *5*(6), 374.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. *In 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 425-432).

Yilmaz, H. B. (2017). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *1*(2), 83-96.

Zancada-Menendez, C., Sampedro-Piquero, P., Lopez, L., & McNamara, T. P. (2016). Age and gender differences in spatial perspective taking. *Aging clinical and experimental research*, *28*(2), 289-296.

Zavotka, S. L. (1987). Three-dimensional computer animated graphics: a tool for spatial skill instruction. *Educational Communication and Technological Journal*, 35(3), 133–144

Ελληνική

Βουδρισλής, Ν. (2016). *Η συμβολή της διδασκαλίας της γεωγραφίας και της κοινωνικής και πολιτικής αγωγής στην προσέγγιση της οικουμενικής εκπαίδευσης για την παγκόσμια ιδιότητα του πολίτη* (Doctoral dissertation, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ). Σχολή Παιδαγωγική. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Γαγάτσης, Α., & Καλογήρου, Π. (2013). *Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και της αντίληψης γεωμετρικού σχήματος.* Ερευνητικό Πρόγραμμα Πανεπιστημίου Κύπρου, Λευκωσία, Κύπρος.

Γερμανός, Δ. (2002). *Οι τοίχοι της γνώσης*. Αθήνα: Gutenberg

Ευσταθίου Μ. & Παναούρα Ρ., 2017. Η επίδραση του φύλου και της ηλικίας στην ανάπτυξη της ικανότητας νοητικής περιστροφής: Διδακτικές προεκτάσεις στα μαθηματικά. *7ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.), Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές πρακτικές,* ΕΚΠΑ, Αθήνα.

Κάβουρας, Μ., Δάρρα, Α., Κονταξάκη, Σ., Τομαή, Ε., 2016. *Επιστήμη Γεωγραφικής Πληροφορίας - Αρχές και Τεχνολογίες*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: http://hdl.handle.net/11419/6392. Προσπελάστηκε 28/5/2018.

Καλογήρου, Π. Γ., (2014). *Η χωρική αντίληψη και η εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών ηλικίας 10-13 ετών.* Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Κλιάπης, Π. (2011). *Η δημιουργία τεχνολογικά εμπλουτισμένου μαθησιακού περιβάλλοντος με υπέρβαση του σχολικού χώρου και εφαρμογή σε νέα διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών*. Διδακτορική Διατριβή, Σχολή Παιδαγωγική, Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ).

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα, εκδόσεις Τόπος.

Ουζούνη, Χ., & Νακάκης, Κ. (2011). Η αξιοπιστία και η Εγκυρότητα των εργαλείων Μέτρησης σε Ποσοτικές μελέτες. *Νοσηλευτική*, 50(2), 231-239.

Παναούρα-Μάκη, Γ. (2007). *Οι γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στο τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης: συγκρίνοντας τη γεωμετρική σκέψη μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης, Διδακτορική διατριβή στη Μαθηματική Παιδεία,* Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Πετρίδης, Δ., 2015. *Ανάλυση πολυμεταβλητών τεχνικών*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: http://hdl.handle.net/11419/2126. Προσπελάστηκε 22/5/2018

Πετρίδου Α., Ηλία Ι. και Γαγάτσης Α., (2014). Ικανότητες παιδιών προσχολικής ηλικίας με διαφορετικές μαθηματικές επιδόσεις στον χωρικό προσανατολισμό. *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ,* 14-16 Μαρτίου 2014, Φλώρινα.

Πιττάλης, Μ., Μουσουλίδης, Κ. & Χρίστου Χ. (2006). Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως παράγοντα πρόβλεψης της γεωμετρικής ικανότητας. Έννοιες του Χώρου και Γεωμετρική Ικανότητα. *9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου.* Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Τζεκάκη, Μ. (1996). *Μαθηματικές Δραστηριότητες για την Προσχολική Ηλικία.* Αθήνα: Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα: Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Αθήνα: Gutenberg.

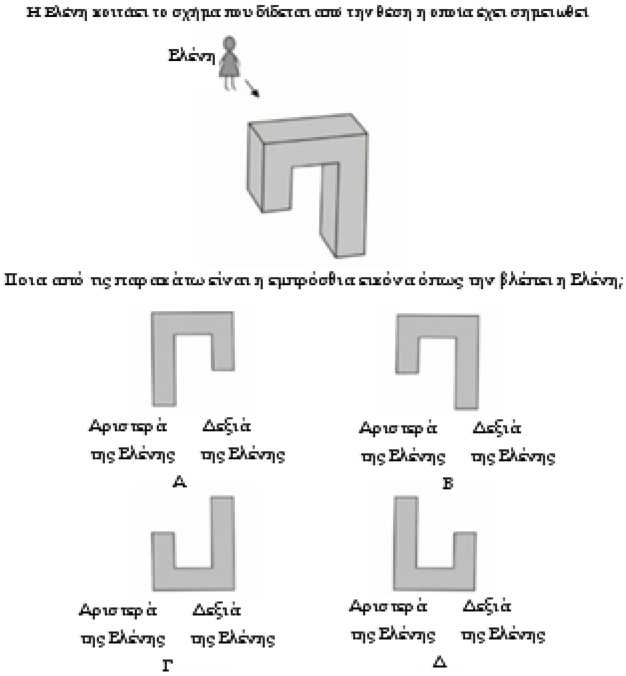
Παράρτημα

Το δοκίμιο χωρικής ικανότητας

Παρακαλώ να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Σημειώστε με ένα Χ αυτές που πιθανόν δεν καταλάβατε ή σας δυσκόλεψαν, αλλά προσπαθήστε, ωστόσο, να δώσετε και σε αυτές μια απάντηση. Παρακαλώ πολύ μην απαντάτε τυχαία αλλά προσπαθήστε να βρείτε την σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση.
ΕΥΧΑΡΙΣΤΏ ΠΟΛΥ ΓΙΑ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΣΑΣ.

Τάξη:

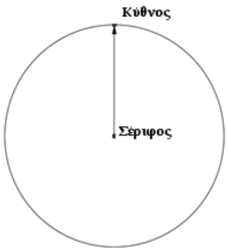
Ερώτηση 1η: Στο σχήμα που ακολουθεί κυκλώστε τη σωστή απάντηση:



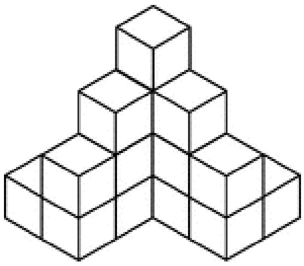
Ερώτηση 2η: Με γνώμονα τον παρακάτω χάρτη απαντήστε στα ακόλουθα δυο ερωτήματα:

Α) Φαντάσου πως είσαι στο υψηλότερο σημείο της Φολεγάνδρου κοιτάζοντας την Ίο. Δείξε προς την Πάρο και τοποθέτησε την στον ακόλουθο κύκλο σχεδιάζοντας το διάνυσμα.

Β) Φαντάσου πως είσαι στο υψηλότερο σημείο της Σερίφου κοιτάζοντας την Κύθνο. Δείξε προς την Αμοργό και τοποθέτησε την στον ακόλουθο κύκλο σχεδιάζοντας το διάνυσμα.

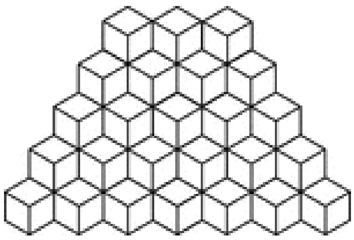


Ερώτηση 3η: Πόσοι είναι οι κύβοι στο επόμενο σχήμα;



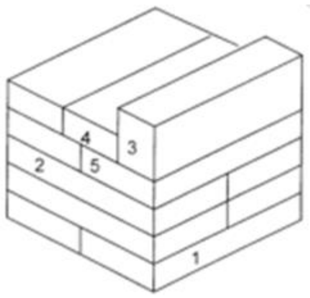
Απάντηση:

Ερώτηση 4η: Πόσοι είναι οι κύβοι στο επόμενο σχήμα;



Απάντηση:

Ερώτηση 5η: Στο παρακάτω σχήμα:



Α) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον αριθμό 1 ακουμπά άλλα ………… ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

α. 2 β. 3 γ. 4 δ. 5 ε. 6

Β): Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον αριθμό 2 ακουμπά άλλα ………… ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

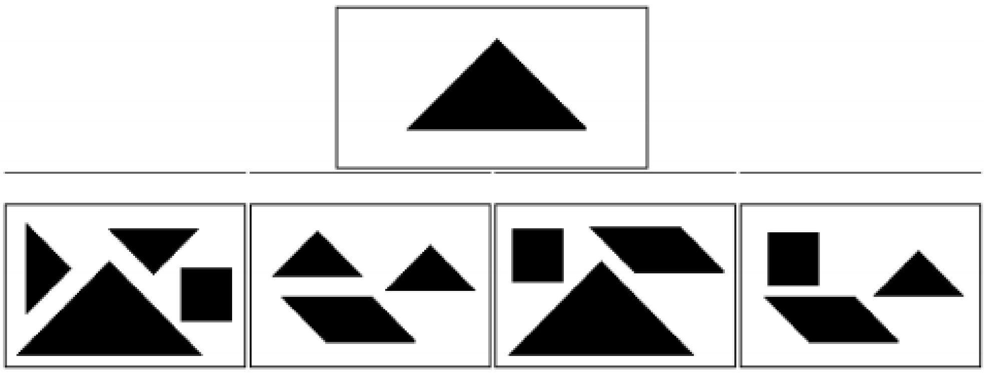
α. 2　　　β. 3　　　γ. 4　　　δ. 5　　　ε. 6

Γ): Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον αριθμό 5 ακουμπά άλλα ………… ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

α. 2　　　β. 3　　　γ. 4　　　δ. 5　　　ε. 6

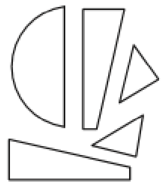
Κυκλώστε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτημα.

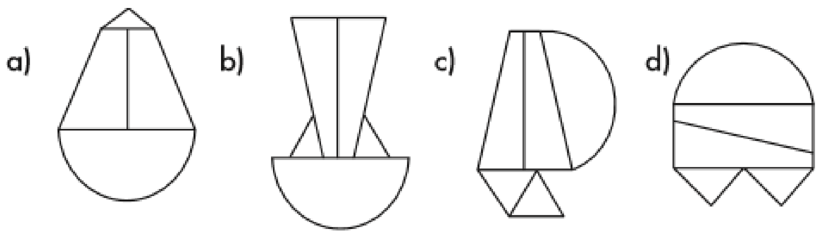
Ερώτηση 6η: Ποιοι από τους παρακάτω συνδυασμούς σχημάτων φτιάχνουν το αρχικό τρίγωνο; Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.



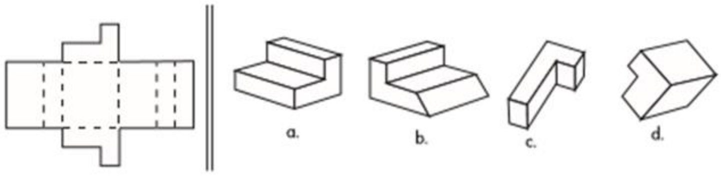
A　　　B　　　C　　　D

Ερώτηση 7η: Ποιο από τα σχήματα που ακολουθούν κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τους παρακάτω συνδυασμούς σχημάτων; Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

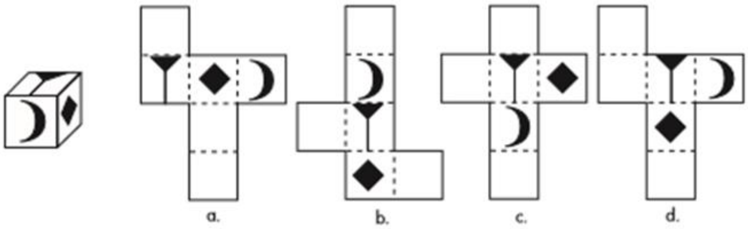




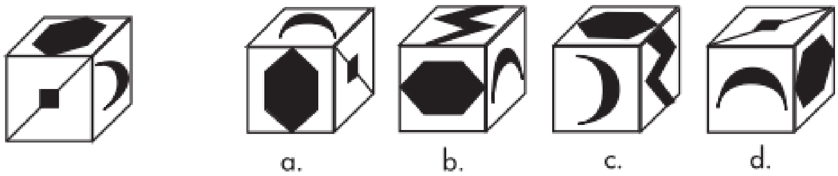
Ερώτηση 8η: Ποιο από τα στερεά σχήματα που ακολουθούν αντιστοιχεί στο αριστερό ανάπτυγμα; Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.



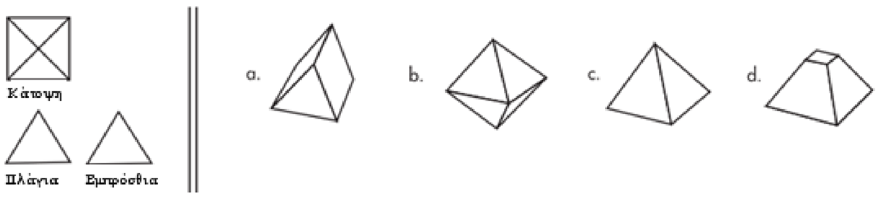
Ερώτηση 9η: Ποιο από τα αναπτύγματα που ακολουθούν αντιστοιχεί στον κύβο που δίδεται αριστερά; Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.



Ερώτηση 10η: Ποιος από τους κύβους που δίδονται δεξιά αποτελεί στροφή του κύβου που δίδεται στα αριστερά. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.



Ερώτηση 11η: Ποιο από τα στερεά που δίδεται δεξιά έχει τις αντίστοιχες όψεις (κάτοψη, πλάγια, εμπρόσθια) που δίδονται αριστερά; Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.



Ερώτηση 12η: Στα αριστερά δίνεται ένα τρισδιάστατο αντικείμενο και δεξιά δίδονται τέσσερις προβολές του σχήματος στο επίπεδο. Από αυτές τις τέσσερις επιλογές, τρεις είναι οι σωστές δισδιάστατες προβολές που αντιστοιχούν σε μια εμπρόσθια όψη, μια πλάγια όψη και μια κάτοψη. Η μια είναι λάθος. Κυκλώστε την προβολή εκείνη που δεν προκύπτει από το αριστερό σχήμα.