ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ – ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΑΠΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επίδοση και στρατηγικές μαθητών Στ΄ δημοτικού και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς: ο ρόλος του πλαισίου

Παπαχρήστος Γεώργιος

Α.Ε.Μ.: 709

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Θεσσαλονίκη, 2018

Στη Δήμητρα

και

στους γονείς μου.

Ευχαριστίες,

Στην καθηγήτρια του ΠΤΔΕ, του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, κα. Δεσλή Δέσποινα για τις βασικές συμβουλές, οδηγίες και την αμέριστη συμπαράστασή της στη μακρά πορεία και ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Στις διευθύνσεις και τους εκπαιδευτικούς των σχολείων της Θεσσαλονίκης που πραγματοποιήθηκε το ερευνητικό μέρος της εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η μελέτη της επίδοσης και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές Στ΄ τάξης και ενήλικες σε νοερούς υπολογισμούς που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών με τη χρήση πλαισίου. Για τον σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε έρευνα σε 41 μαθητές Στ΄ τάξης και 41 ενήλικες διαφόρων ηλικιών και μορφωτικοοικονομικών επιπέδων. Σχεδιάστηκαν δύο έργα, τα οποία ζητούσαν από τους συμμετέχοντες να πραγματοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης με κλάσματα (Έργο 1) και δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2), άλλοτε με πλαίσιο και άλλοτε χωρίς πλαίσιο. Από την επεξεργασία των δεδομένων που συλλέχθηκαν προέκυψαν ορισμένα σημαντικά ευρήματα. Πρώτον, οι ενήλικες παρουσίασαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τα παιδιά της Στ΄ τάξης. Δεύτερον, και οι δύο ηλικιακές ομάδες παρουσίασαν καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς συγκριτικά με τις δοκιμασίες με κλάσματα. Τρίτον, η παρουσία πλαισίου αλλά και το είδος της πράξης δεν έδειξε να επηρεάζει την επίδοση των δύο ηλικιακών ομάδων. Τέλος, οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο και από τις δύο ηλικιακές ομάδες είναι *οι μετατροπές* και *η νοερή εκτέλεση του αλγόριθμου*, με τους ενήλικες να παρουσιάζουν περισσότερες εννοιολογικές στρατηγικές. Όταν οι μαθητές της Στ΄ τάξης στις δοκιμασίες με πλαίσιο χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική με *τις μετατροπές*, τη στρατηγική με *τις ισοδύναμες εκφράσεις* και τη στρατηγική με *τις νοερές αναπαραστάσεις* παρουσίαζαν πολύ καλή επίδοση. Η χρήση του γραπτού αλγόριθμου νοερά δεν οδήγησε απαραίτητα τους συμμετέχοντες σε σωστούς νοερούς υπολογισμούς. Ωστόσο, παρατηρήθηκε έντονη προσκόλληση στο να βρουν τρόπο να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο ακόμη και μέσω εννοιολογικών στρατηγικών. Συνολικά, αναδεικνύεται η ενίσχυση των νοερών υπολογισμών σε κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς σε μια προσπάθεια απομάκρυνσης από τη χρήση των αλγόριθμων που, όπως φαίνεται και στην παρούσα εργασία οδηγούσε σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Λέξεις κλειδιά: νοεροί υπολογισμοί, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί, στρατηγικές, επίδοση, πλαίσιο, μαθητές Στ΄ δημοτικού, ενήλικες

Abstract

The aim of the present study was to examine the performance and the strategies of 6th grade students and adults in mental additions and subtractions with fractions and decimal numbers with and without context. For this purpose, 41 6th grade students and 41 adults of various ages and educational levels took part in the study. Two tasks were designed in which participants were asked to mentally calculate additions and subtractions with fractions (Task 1) and decimal numbers (Task 2). In half of the items, the operations were presented with the use of context and in the other half without it. The analysis of the results revealed very interesting findings. First, adults showed greater success than 6th grade students. Second, both age groups showed better performance in mental calculations with decimal numbers than with fractions. Third, the presence of the context and the type of the operation did not affect the performance of neither age group. Finally, the *conversions* and *the mental algorithm* strategies were the most frequently used, with adults applying mainly conceptual strategies. When 6th grade students used the strategies of conversions or the equivalent expressions or the mental representations in items presented with context, they tended to have very good performance. However, participants indeed persistently used the algorithm mentally which, in turn, did not necessarily lead to success in their calculations. Given these findings, this study addressed that mental calculations with fractions and decimal numbers need further support, probably by shifting the emphasis from algorithm procedures to more number-sense oriented ones.

Key words: mental calculation, fractions, decimal numbers, strategies, performance, context, 6th grade students, adults

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια αναπτύσσεται ολοένα και περισσότερο το ερευνητικό ενδιαφέρον, σε ελληνικό και διεθνές επίπεδο, για τους νοερούς υπολογισμούς στην πρωτοβάθμια, και όχι μόνο, εκπαίδευση. Οι νοεροί υπολογισμοί λογίζονται ως ένας πολύ σημαντικός παράγοντας και σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς η χρήση τους εμφανίζεται σε μεγάλο ποσοστό στην καθημερινή ζωή.

Γενικά, οι υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν με τρεις τρόπους: μέσω της αριθμομηχανής, με τον παραδοσιακό τρόπο, δηλαδή με χαρτί και μολύβι και νοερά. Κατά το παρελθόν, έχουν διατυπωθεί αρκετοί ορισμοί για τους νοερούς υπολογισμούς (Wandt & Brown, 1957; Trafton, 1978; Threlfall, 2002), με επικρατέστερο αυτόν του Reys (1984), ο οποίος θεωρεί τους νοερούς υπολογισμούς: *«ως μία διαδικασία υπολογισμού με ακρίβεια χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως μολύβι και χαρτί, αλλά νοερών στρατηγικών»* (σελ.548). Οι νοεροί υπολογισμοί είναι στενά συνδεδεμένοι με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς χωρίς όμως να ταυτίζονται, αν και πολλοί τους συγχέουν. Η σωστή διαχείριση των νοερών υπολογισμών βοηθάει το άτομο να αναπτύξει δημιουργική και ανεξάρτητη, από κανόνες, σκέψη, μιας και ανακαλύπτει έξυπνους τρόπους για τη διαχείριση των αριθμών σε ακριβείς υπολογισμούς.

Η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών θεωρείται ένα από τα βασικά αντικείμενα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τους Reys (1984) και Thompson (1999), οι νοεροί υπολογισμοί πρέπει να διδάσκονται και να δίνεται έμφαση σε αυτούς, διότι:

- Έχουν πρακτική εφαρμογή στην καθημερινότητα, ενδεχομένως περισσότερο και από τους τυπικούς αλγόριθμους.
- Βοηθούν το άτομο να κατανοήσει καλύτερα την αίσθηση του αριθμού, τις τυπικές μεθόδους υπολογισμού και να αποκτήσει την ικανότητα της εκτίμησης, στοιχείο που συνδέεται με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.
- Ασκείται η μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών μιας και παρουσιάζουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν/υπολόγισαν.

- Με τη χρήση τους, εξασκείται η ικανότητα αναπαράστασης, χρήσης αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη και ευελιξίας[1].

Οι νοεροί υπολογισμοί στους φυσικούς αριθμούς έχουν μελετηθεί κυρίως ως προς τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές και ενήλικες στις τέσσερις πράξεις, την ευελιξία που αναπτύσσεται, τον τρόπο διδασκαλίας τους αλλά και τη θέση τους σε αναλυτικά προγράμματα. Ενώ υπάρχουν πολλές έρευνες στους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς, οι έρευνες για νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς είναι αισθητά λιγότερες. Αυτό το στοιχείο έρχεται σε αντίθεση με την αξία της έννοιας του ρητού αριθμού, διότι η μάθηση και διδασκαλία των ρητών αποτέλεσε για σειρά ετών, και συνεχίζει να αποτελεί, εξέχον αντικείμενο μελέτης, εφόσον λογίζεται ως ιδιαίτερα σημαντική και πολύπλοκη στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και διδάσκεται από την αρχή του δημοτικού σχολείου. Οι ρητοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων και είναι ιδιαίτερα συνδεδεμένοι με την έννοια του κλάσματος. Επίσης, κατέχουν εξέχουσα θέση, διαχρονικά, στα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό, ωστόσο θεωρούνται παραδοσιακά ένα δύσκολο κομμάτι για τα παιδιά (Κολέζα, 2009).

Πολύ περιορισμένη είναι η έμφαση του ελληνικού Αναλυτικού Προγράμματος των Μαθηματικών του δημοτικού σχολείου στους νοερούς υπολογισμούς στους ρητούς αριθμούς, αφού μόλις το 2006 εισήχθησαν οι νοεροί υπολογισμοί στην ελληνική εκπαίδευση. Τα προγράμματα και τα βιβλία, μέχρι σήμερα, δεν παρουσιάζουν τους νοερούς υπολογισμούς με μια σύγχρονη και συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας, παρά μόνο παρουσιάζουν αποσπασματικά δραστηριότητες για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Κατά αυτό τον τρόπο, η σχέση των νοερών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων δεν είναι ξεκάθαρη και συγκεκριμένη. Ακόμη, στα βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου δεν υπάρχει κάποια αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς αλλά ούτε πραγματοποιείται κάποια επιμόρφωση στους μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας, για τη σπουδαιότητα της δεξιότητας (Λεμονίδης, 2016).

[1] Ο όρος ευελιξία συναντάται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο *flexibility* αλλά και με τον όρο *προσαρμοστικότητα*. Ουσιαστικά πρόκειται για την ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει ανάλογα τις με πράξεις που έχει να υπολογίσει και τους αριθμούς που έχει να διαχειριστεί (Verschaffel et al.,2009; Baroody, 2003).

Αντίθετα, σε πολλές χώρες όπως στην Ολλανδία με τη σχολή των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, την Αγγλία με το πρόγραμμα Numeracy και την Εθνική Στρατηγική Αριθμητισμού (National Numeracy Strategy), την Αυστραλία με το National Statement on Mathematics for Australian Schools (Australian Education Council, 1991) και την Αμερική με το πρόγραμμα Standards 2000 (National Council of Teaching Mathematics, USA) αλλά και το πιο πρόσφατο Common Core State Standrards 2010, δίνεται μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και τη σημασία τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Λεμονίδης, 2013). Μερικά κοινά χαρακτηριστικά των προγραμμάτων είναι:

- Η ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών πριν από τη διδασκαλία των τυπικών αλγορίθμων.
- Η αναγνώριση της αξίας των άτυπων στρατηγικών των παιδιών.
- Πραγματοποιείται ρητά η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, με τους εκπαιδευτικούς να λαμβάνουν την απαραίτητη καθοδήγηση για διδακτικές οδηγίες (van de Walle, 2007).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, βασικός σκοπός της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη της επίδοσης και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές Στ΄ τάξης και ενήλικες, σε νοερούς υπολογισμούς, που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, με τη χρήση πλαισίου. Συγκεκριμένα, το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά τον τρόπο με τον οποίο η ύπαρξη ή η απουσία πλαισίου επηρεάζει τους νοερούς υπολογισμούς παιδιών και ενηλίκων σε έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

- *Υπάρχουν διαφορές στην επίδοση και τις στρατηγικές μαθητών Στ΄ τάξης αλλά και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς;*

Αναμένεται να καταγραφούν διαφορές στις απαντήσεις των συμμετεχόντων ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα τους. Σε προηγούμενες έρευνες (Caney & Watson, 2003; Callinham & Watson, 2008; Lemonidis & Kaiafa, 2014; Carvalho & da Ponte, 2015) έχει διαπιστωθεί ότι οι μικρότεροι σε ηλικία μαθητές και οι ενήλικες χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό εννοιολογικές στρατηγικές, αντιλαμβανόμενοι καλύτερα την αίσθηση του αριθμού, σε αντίθεση με μεγαλύτερους σε ηλικία μαθητές, οι οποίοι προσπαθούν να εφαρμόζουν κανόνες από τους τυπικούς αλγόριθμους νοερά.

- *Διαφοροποιούνται οι νοεροί υπολογισμοί των παιδιών και των ενηλίκων ανάλογα με το αν αφορούν κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς;*

Από τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Thornton, 1985; Callingham & Watson, 2004; Carvalho & da Ponte, 2013) φαίνεται ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται καλύτερα σε ασκήσεις και προβλήματα με κλάσματα σε σχέση με δεκαδικούς. Αυτό το στοιχείο δικαιολογείται από τη δομή των παλαιότερων Αναλυτικών Προγραμμάτων διεθνώς, μιας και οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις γνωρίζουν τις έννοιες του μισού και του τετάρτου και πραγματοποιούν τους πρώτους υπολογισμούς, κυρίως με κλάσματα αλλά και τις διαδικαστικές στρατηγικές τις οποίες αποκτούν από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

- *Διαφοροποιούνται οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των συμμετεχόντων ανάλογα με το είδος της πράξης που εμπλέκεται, δηλαδή πρόσθεση ή αφαίρεση;*

Δεν υπάρχουν πολλά ευρήματα για το ποια πράξη από τις δύο μπορεί να ευνοεί τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Lemonidis και Kaimakami (2013), οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις σε προσθέσεις δύο ή και περισσότερων δεκαδικών αριθμών παρά σε αντίστοιχες αφαιρέσεις. Στην ίδια κατεύθυνση κινούνται και αρκετά λάθη που παρατηρήθηκαν στην έρευνα των Λεμονίδη και Καϊάφα (2014), όπου σε αφαιρέσεις κλασμάτων οι μαθητές εσφαλμένα εφαρμόζουν την τεχνική της διαίρεσης κλασμάτων, δηλαδή αντιστρέφουν το δεύτερο κλάσμα και μετά πολλαπλασιάζουν, στοιχείο που δείχνει ότι εφαρμόζουν κανόνες χωρίς να τους έχουν κατανοήσει ολιστικά.

- *Επηρεάζει ή όχι την επίδοση η ύπαρξη πλαισίου;*

Πολλές είναι οι περιπτώσεις όπου τα δεδομένα της εκφώνησης ενός προβλήματος δυσκολεύουν αρκετά τους λύτες για να φτάσουν στην ολοκλήρωση της απάντησής τους, ειδικά αν πρόκειται για λεκτικά προβλήματα (van de Walle, 2007). Παρ' όλα αυτά, για τα μικρά παιδιά, το συγκείμενο ενός προβλήματος, πολλές φορές, μπορεί να βοηθήσει πολύ, ιδίως αν η κατάσταση που παρουσιάζεται είναι οικεία, είτε από την καθημερινή ζωή είτε από τα σχολικά εγχειρίδια που διδάσκονται (Λεμονίδης, 2016). Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθεί, ότι ακόμη και αν πρόκειται για μια τυπική υπολογιστικού τύπου άσκηση, οι μαθητές αναζητούν την κατασκευή ενός πλαισίου, ώστε να αποκτήσει νόημα γι' αυτούς η εκάστοτε πράξη (Callingham, & Watson, 2008). Αντίθετα, πολλές φορές (Δεσλή, & Μυρόβαλη, 2014), η ύπαρξη πλαισίου στα προβλήματα επηρεάζει την επίδοση των μαθητών και τους δυσκολεύει σε ό,τι αφορά την αίσθηση του αριθμού, καθώς συνδυάζουν τα προβλήματα με πλαίσιο, κυρίως με αλγοριθμικές μεθόδους επίλυσης χωρίς να τα κατανοούν απόλυτα.

Προκειμένου να απαντηθούν τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα θα πραγματοποιηθεί έρευνα όπου θα μελετηθεί η επίδοση και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές Στ΄ τάξης και ενήλικες, σε νοερούς υπολογισμούς, που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, με τη χρήση πλαισίου.

I. Θεωρητικό Μέρος

Στο θεωρητικό μέρος που περιλαμβάνει τη βιβλιογραφική επισκόπηση θα αναλυθούν κάποια βασικά στοιχεία σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς, τους ρητούς αριθμούς αλλά και την επίλυση προβλήματος. Το μέρος αυτό χωρίζεται σε τρία κεφάλαια:

- Στο *πρώτο κεφάλαιο,* περιλαμβάνονται ο ορισμός των νοερών υπολογισμών, τα χαρακτηριστικά τους, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους, η σχέση τους με την εννοιολογική/διαδικαστική κατανόηση και η ευελιξία που αναπτύσσεται μέσω αυτών.
- Στο *δεύτερο κεφάλαιο*, αναλύονται ο ορισμός των ρητών αριθμών, οι διαφορές των ρητών με τους φυσικούς αριθμούς, οι δυσκολίες των μαθητών στους ρητούς αλλά και οι στρατηγικές που αναπτύσσονται στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς.
- Στο *τρίτο κεφάλαιο,* θα εξεταστούν η επίλυση προβλήματος, ο τρόπος λειτουργίας, ο ρόλος του πλαισίου στις δραστηριότητες αλλά και κατά πόσο το πλαίσιο επηρεάζει την αποτελεσματικότητα στις απαντήσεις.

1ο Κεφάλαιο: Νοεροί Υπολογισμοί

1.1 Τι είναι Νοεροί υπολογισμοί

Το άτομο όσο ζει πραγματοποιεί πάρα πολλούς υπολογισμούς και μάλιστα κάτω από διαφορετικές συνθήκες κάθε φορά, πράγμα που μπορεί να επηρεάζει και τον τρόπο που συλλογίζεται. Ανάλογα με το περιβάλλον, τα εργαλεία, την ανάγκη για ακριβές αποτέλεσμα και τον χρόνο που έχουν στη διάθεσή τους οι λύτες επιλέγουν την καταλληλότερη και συντομότερη μέθοδο για να κάνουν τους υπολογισμούς τους (Λεμονίδης, 2013; Lola, 2000). Συνολικά διακρίνονται τρεις τρόποι υπολογισμού:

- η χρήση μηχανικών μέσων (αριθμομηχανή, ηλεκτρονικός υπολογιστής),
- η χρήση μολυβιού και χαρτιού (τυπικοί γραπτοί αλγόριθμοι) και
- οι νοεροί υπολογισμοί (με το μυαλό).

Ο προσδιορισμός του όρου νοεροί υπολογισμοί και η αποσαφήνισή του έχει απασχολήσει έντονα τη διεθνή επιστημονική κοινότητα κατά το παρελθόν. Οι περισσότερες απόψεις σχετικά με τον ορισμό υποστηρίζουν ότι πρόκειται για μία διαδικασία, όπου το άτομο υπολογίζει με ακρίβεια το αποτέλεσμα χωρίς τη βοήθεια εξωτερικών μέσων όπως μολύβι και χαρτί (Maclellan, 2001; Reys, 1984; Reys, Reys, Nohda & Emori, 1995; Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2014; Sowder, 1990).

Η Anghileri (1999) περιγράφει τους νοερούς υπολογισμούς ως *«υπολογισμοί που γίνονται συνειδητά από τους ανθρώπους με νοερές στρατηγικές[2]»* (σελ.186). Οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται σκόπιμα από τους ανθρώπους, ώστε να επιλύουν γρήγορα και σωστά προβλήματα της καθημερινότητας. Εκτός όμως από τις νοερές στρατηγικές, οι Anghileri (1999) και Thompson (1999) αναφέρουν ότι υπάρχουν περιπτώσεις που οι λύτες, ανεξαρτήτως ηλικίας, χρειάζεται να κρατούν σύντομες γραπτές σημειώσεις, ώστε να υποστηρίζουν τη βραχύχρονη μνήμη τους.

Άλλο ένα στοιχείο που πρέπει να αποσαφηνιστεί είναι ότι πολλοί άνθρωποι συγχέουν τους νοερούς με τους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς. Πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούσαν, και κάποιοι θεωρούν ακόμα, ότι οι νοεροί και οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί ταυτίζονται (Λεμονίδης, 2013; van de Walle, 2007).

Σύμφωνα με τη Maclellan (2001), η διαδικασία της εκτίμησης είναι χρήσιμη στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων και περιλαμβάνει την κρίση της αξίας των αποτελεσμάτων από μία αριθμητική πράξη ή από μία μέτρηση μιας ποσότητας με βάση την εμπειρία και τις γνώσεις των ατόμων. Στον κατ’ εκτίμηση υπολογισμό μετατρέπονται οι αριθμοί σε κατά προσέγγιση αριθμούς και ο υπολογισμός γίνεται νοερά με το αποτέλεσμα να εκτιμάται προσεγγιστικά. Επίσης, η Maclellan (2001) υποστηρίζει ότι σε έναν υπολογισμό πρέπει να χειριστείς κατάλληλα τους αριθμούς, ώστε να πετύχεις την επιθυμητή απάντηση. Αν σε ένα πρόβλημα *νοερής αριθμητικής* στόχος είναι να βρεθεί ακριβές αποτέλεσμα, τότε απαιτείται νοερός υπολογισμός,

[2] Ως στρατηγική ονομάζεται η προσέγγιση που χρησιμοποιεί κάποιος σε απλά αριθμητικά προβλήματα πράξεων (Threlfall, 2002). Δεν αφορούν μόνο τη νοερή εκτέλεση των γραπτών αλγορίθμων, αλλά και την εύρεση αποτελέσματος με πολλές διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούμε με το μυαλό, κάποιες από τις οποίες δημιουργούνται και ανακαλύπτονται από τον λύτη.

ενώ, αν είναι να βρεθεί το αποτέλεσμα *προσεγγιστικά* ή αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι ως προς το μέγεθος, τότε απαιτείται εκτίμηση.

Σύμφωνα με τους Anghileri (1999), McIntosh (1990) και Reys (1984), ο νοερός υπολογισμός αποτελεί έναν *υπολογισμό που πραγματοποιείται νοερά για να βρεθεί με ακρίβεια ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Σε αυτού του είδους τον υπολογισμό χρησιμοποιούνται στρατηγικές, ήδη γνωστά αριθμητικά γεγονότα και πολλές από τις ιδιότητες των αριθμών.*

Σε ό,τι αφορά την απόδοση των νοερών υπολογισμών στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία επικρατούν κυρίως οι όροι: *mental calculation, mental computation, mental arithmetic (= νοερή αριθμητική)* και *mental maths (= νοερά μαθηματικά,* χρησιμοποιείται κυρίως στα αγγλόφωνα αναλυτικά προγράμματα Αγγλίας, Αμερικής και Αυστραλίας). Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι όροι calculation και computation στην ελληνική γλώσσα αφορούν την έννοια του υπολογισμού. Οι δύο όροι συνήθως δεν διαχωρίζονται, ωστόσο η μόνη διαφορά τους έγκειται στο ότι ο όρος computation αναφέρεται σε τυπική αλγοριθμική διαδικασία (Maclellan, 2001).

1.2 Χαρακτηριστικά των νοερών υπολογισμών

Τα παιδαγωγικά ρεύματα που έχουν αναπτυχθεί κατά το παρελθόν έχουν προσεγγίσει τους νοερούς υπολογισμούς από διαφορετικές πλευρές. Η συμπεριφοριστική (behavioral) οπτική υποστηρίζει ότι οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν σημαντική δεξιότητα που πρέπει να αναπτύξουν τα παιδιά από το δημοτικό σχολείο, διότι τους βοηθά να έχουν, στο μέλλον, μία ολοκληρωμένη θεώρηση σχετικά με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013). Η κατασκευαστική (constructivist) οπτική θεωρεί τον νοερό υπολογισμό ως βασικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης του ατόμου, μιας και αντιλαμβάνεται πώς να κατασκευάζει ή να ανακαλύπτει μια στρατηγική για την επίλυση ενός προβλήματος της καθημερινότητας (Resnick, 1989; Sowder, 1990).

Η νοερή διαχείριση των αριθμών, σχέσεων και πράξεων συμβάλλει κατά πολύ στην αίσθηση του αριθμού, στην επίλυση προβλήματος αλλά και σε γενικότερες γνωστικές λειτουργίες όπως η μεταγνώση (Λεμονίδης, 2013). Η καλή γνώση της λειτουργίας των αριθμών, δηλαδή η αίσθηση του αριθμού, είναι βασική προϋπόθεση για τους νοερούς υπολογισμούς. Οι άνθρωποι, οι οποίοι είναι καλοί στους νοερούς υπολογισμούς, ανακαλούν στη μνήμη τους ήδη γνωστά αριθμητικά γεγονότα και μπορούν να αντιλαμβάνονται τις πληροφορίες που παρουσιάζονται με μαθηματικούς όρους όπως πίνακες, γραφικές αναπαραστάσεις κ.α.

Η αίσθηση του αριθμού *(number sense)* θεωρείται μια πολύπλοκη διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει πολλές διαφορετικές συνιστώσες του αριθμού, τις πράξεις αλλά και τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των αριθμών (Λεμονίδης, 2013). Συνδέεται κυρίως με τη βαθύτερη κατανόηση, τις δεξιότητες και τις στάσεις για τον αριθμό και επεκτείνεται έξω τα όρια της αριθμητικής περιλαμβάνοντας και καθημερινές χρήσεις. Σύμφωνα με τους Mclntosh, Reys και Reys (1992), όταν κάποιος έχει ανεπτυγμένη την αίσθηση του αριθμού:

- Κατανοεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και τις ιδιότητές του.
- Αντιλαμβάνεται τη δομή του αριθμού και τις ιδιότητές του.
- Χειρίζεται επιτυχώς καθημερινές καταστάσεις που περιλαμβάνουν αριθμούς.
- Αναπτύσσει ευέλικτες και αποτελεσματικές στρατηγικές στην εύρεση του αποτελέσματος αριθμητικών προβλημάτων αξιοποιώντας νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις.

Η ανάλυση των αριθμών στην προσπάθεια εύρεσης κατάλληλης στρατηγικής για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών, όπως επίσης και η κρίση του αποτελέσματος, θεωρούνται μέρος της αίσθησης του αριθμού (Mclntosh et al., 1992). Επίσης, η αίσθηση του αριθμού περιλαμβάνει την ευχέρεια στην εκτίμηση και την κρίση των μεγεθών, την ικανότητα αναγνώρισης παράλογων αποτελεσμάτων, την ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς καθώς και την ικανότητα αναπαράστασης του ίδιου αριθμού με πολλαπλούς τρόπους. Η αίσθηση του αριθμού προσδιορίζεται διαφορετικά ανάλογα με την ηλικία και τις γνώσεις που διαθέτουν οι μαθητές στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης (Λεμονίδης, 2013).

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η αίσθηση του αριθμού συμβάλλει σημαντικά στην σωστή νοερή διαχείριση των αριθμών. Βέβαια, υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι μαθητές είναι ικανοί σε νοερούς υπολογισμούς, χωρίς, όμως, αυτή η επιτυχία να συνοδεύεται αποκλειστικά από κατανόηση και καλή αίσθηση του αριθμού (MacIntosh et al., 1992). Το στοιχείο αυτό ίσως να οφείλεται σε πολλή εξάσκηση, με συνέπεια τα παιδιά να χρησιμοποιούν μηχανικά μία στρατηγική με σωστό τρόπο. Για παράδειγμα, στη διαίρεση ½ : ¼ τα παιδιά μπορεί να μη συνειδητοποιούν ότι το ¼ χωράει δύο φορές στο ½ ή ότι η μισή ώρα έχει δύο τέταρτα (με την αναπαράσταση του ρολογιού) και απλά να εκτελούν νοερά την τεχνική της διαίρεσης κλασμάτων με την αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος και τον πολλαπλασιασμό.

1.3 Η σημασία και τα οφέλη των νοερών υπολογισμών

Η απόκτηση και η καλλιέργεια της ικανότητας του νοερού χειρισμού των αριθμών είναι ιδιαίτερα σημαντική για κάθε άτομο. Οι Reys (1984) και Thompson (1999) αναφέρουν ότι οι νοεροί υπολογισμοί πρέπει να αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της παρεχόμενης μαθηματικής εκπαίδευσης στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα. Τα οφέλη που προκύπτουν από τη διδασκαλία τους είναι πολλαπλά:

- ✓ Χρησιμοποιούνται περισσότερο στην καθημερινή ζωή από τους τυπικούς γραπτούς αλγορίθμους. Αναπτύσσονται αξιόλογοι μηχανισμοί που αφορούν στην επίλυση προβλημάτων, προωθείται η δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και οι μαθητές ανακαλύπτουν έξυπνους τρόπους για να χειρίζονται τους αριθμούς (Λεμονίδης, 2013).
- ✓ Η συμβολή τους σε άλλες μαθηματικές έννοιες: Αναπτύσσεται καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού. Οι Heirdsfield και Lamb (2005) τονίζουν ότι ο νοερός υπολογισμός συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών, των ιδιοτήτων τους και στην επινόηση στρατηγικών από τους μαθητές. Βοηθούν στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού. Αποτελούν βασική προϋπόθεση για να αναπτυχθούν οι ικανότητες των κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Λεμονίδης, 2013).
- ✓ Η συμβολή τους σε γνωστικές ικανότητες: Με τους νοερούς υπολογισμούς εξασκείται η ικανότητα αναπαράστασης και χρήσης αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη όπως και η ικανότητα της ευελιξίας[3] (Mclntosh et al., 1992).

[3] Η έννοια της ευελιξίας θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους της εργασίας.

- ✓ Ασκείται, τέλος και η μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών, όταν αυτοί παρουσιάζουν τους τρόπους με τους οποίους υπολόγισαν. Οι στρατηγικές που κατασκευάζουν τα παιδιά στους νοερούς υπολογισμούς δεν στηρίζονται σε τυπικούς κανόνες αλλά στην κατανόηση. Επειδή εξαρτώνται τόσο πολύ από έννοιες του δεκαδικού συστήματος και αναπτύσσονται κυρίως για την επίλυση προβλημάτων, τα παιδιά σπάνια εφαρμόζουν κάποια στρατηγική αν δεν την έχουν κατανοήσει πρώτα. Αντίθετα, παρατηρείται συχνά ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδοσιακούς αλγόριθμους χωρίς να μπορούν να δικαιολογήσουν την επιλογή τους (Caroll, 1999).

1.4 Οι διαφορές των νοερών υπολογισμών με τους τυπικούς αλγόριθμους

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στους νοερούς υπολογισμούς και στους γραπτούς αλγόριθμους τόσο ως προς την χρησιμότητά τους όσο και στις στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά καθώς εκτελούν τον αντίστοιχο υπολογισμό. Πολλοί ερευνητές (Plunkett, 1979; Thompson, 1999; Usiskin, 1998) προσπάθησαν να αναλύσουν τις παραπάνω διαφορές προκειμένου να αποσαφηνιστεί η αξία των νοερών υπολογισμών.

Οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινότητα των ανθρώπων και είναι πιο σύντομοι σε αντίθεση με τους τυπικούς αλγορίθμους που θεωρούνται άκαμπτοι, απαιτούν χρόνο και πολλές φορές γίνονται κουραστικοί. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου ο λύτης, ανάλογα με τους αριθμούς που έχει να διαχειριστεί και το είδος του προβλήματος που καλείται να επιλύσει, διαφοροποιεί τις στρατηγικές του. Από την άλλη πλευρά, στις συμβατικές πράξεις ακολουθεί μία συγκεκριμένη μέθοδο που του έχει «επιβληθεί» και, πολλές φορές, δεν την αντιλαμβάνεται όπως στην περίπτωση με τα κρατούμενα, τη μετατόπιση μιας θέσης στο δεύτερο ψηφίο του πολλαπλασιασμού κ.α. (van de Walle, 2007).

Οι αλγόριθμοι βασίζονται σε μεμονωμένα ψηφία και όχι σε ολόκληρους τους αριθμούς, όπως οι νοεροί υπολογισμοί, και λειτουργούν από τα δεξιά προς τα αριστερά παρά από τα αριστερά προς τα δεξιά, που λειτουργούν οι νοεροί υπολογισμοί (Λεμονίδης, 2013). Οι νοεροί υπολογισμοί μεταχειρίζονται τους αριθμούς ολιστικά, οι μαθητές κατανοούν την αξία θέσης ψηφίου και συνειδητοποιούν ότι για παράδειγμα 33+29, με τη στρατηγική του διαχωρισμού, σημαίνει (30+20)+(9+3). Αρχίζοντας από τα δεξιά με έναν ψηφιοκεντρικό προσανατολισμό, οι παραδοσιακές μέθοδοι κρύβουν το αποτέλεσμα μέχρι το τέλος[4]. Οι νοερές στρατηγικές προϋποθέτουν βαθιά κατανόηση, μπορούν να συσχετιστούν με κάποια αναπαράσταση όπως η αριθμογραμμή, ωστόσο έχουν περιορισμένη χρήση μιας και δεν εφαρμόζονται σε υπολογισμούς με σύνθετους πολυψήφιους αριθμούς (Plunkett, 1979).

Αυτό που δε μπορεί αμφισβητηθεί για τους τυπικούς αλγορίθμους είναι ότι αποτελούν μια σταθερή διαδικασία, η οποία δεν επιβαρύνει τη μνήμη και χρησιμοποιείται για όλους τους αριθμούς (μονοψήφιους ή πολυψήφιους, ακέραιους ή δεκαδικούς) και για κάθε είδους πρόβλημα. Παρέχουν μια γραπτή καταγραφή του υπολογισμού, επιτρέποντας σε εκπαιδευτικούς και μαθητές να εντοπίζουν οποιοδήποτε λάθος σε αυτούς (Λεμονίδης. 2013).

Παρ' όλα αυτά έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές κάνουν πολλά λάθη, όταν εκτελούν τους γραπτούς αλγορίθμους (Λεμονίδης, 2013). Τα λάθη αυτά εμφανίζονται συχνά και ίσως δικαιολογούνται από την προσκόλληση των παιδιών στην απομνημόνευση των βημάτων του αλγορίθμου, χωρίς να αποκτούν την αίσθηση του αριθμού. Οι Kamii και Dominick (1997) υποστηρίζουν ότι οι αλγόριθμοι εγκυμονούν κινδύνους όπως η περιορισμένη ανάπτυξη της αίσθησης αριθμού στα παιδιά και η εγκατάλειψη της δικής τους σκέψης. Αντίθετα, τα λάθη είναι λιγότερα όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν δικές τους στρατηγικές τις οποίες μπορούν να παρακολουθήσουν καλύτερα.

1.5 Η θέση των νοερών υπολογισμών στα αναλυτικά προγράμματα

Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί πολλές αλλαγές στη δομή και το περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης σε χώρες της Ευρώπης, της Αμερικής και της Ωκεανίας. Η αριθμητική και οι γραπτοί αλγόριθμοι συνεχίζουν να καλύπτουν μεγάλο μέρος της διδασκόμενης ύλης, ωστόσο αποτελεί κοινή κατεύθυνση η παραγωγή *«μαθηματικά εγγράμματων πολιτών»* που να εφαρμόζουν τις γνώσεις που έλαβαν για να επιλύουν προβλήματα της

[4] Ο αλγόριθμος της διαίρεσης αποτελεί εξαίρεση.

καθημερινότητας (Λεμονίδης, 2013). Πλέον δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα και προτεραιότητα στους νοερούς υπολογισμούς και προτείνεται μια δομική προσέγγιση στη διδασκαλία των στρατηγικών τους.

1.5.1 Οι νοεροί υπολογισμοί στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα

Παρά την έμφαση που δίνεται διεθνώς στους νοερούς υπολογισμούς, στην Ελλάδα εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στο Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003), όπου αναφέρεται ποια είναι η χρήση τους αλλά και ποια οφέλη προκύπτουν από τη διδασκαλία τους. Τα σχολικά βιβλία που διδάσκονται σήμερα (από το 2006) δεν παρουσιάζουν κάποια συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας για τους νοερούς υπολογισμούς, με συνέπεια οι εκπαιδευτικοί να αναπτύσσουν συντηρητικές απόψεις, επιφυλάξεις και άγχος, καθώς δεν έχουν επιμορφωθεί για ένα τόσο κομβικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 2009; Λεμονίδης, 2013; Λεμονίδης, 2016). Το στοιχείο αυτό οξύνεται ακόμη περισσότερο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, εκεί όπου κυριαρχεί η φορμαλιστική προσέγγιση της γνώσης με στείρες τυπολογικές εφαρμογές και ασκήσεις.

Στα βιβλία του δημοτικού εμφανίζονται αρκετές δραστηριότητες με νοερούς υπολογισμούς. Παρακάτω θα παρουσιαστούν ενδεικτικά μερικά χαρακτηριστικά σημεία από διδακτικές οδηγίες, μαθησιακούς στόχους και δραστηριότητες που προτείνονται στα σχολικά εγχειρίδια:

- Παράδειγμα από την Α΄ τάξη:

«*Η ικανότητα των μαθητών στο να υπολογίζουν νοερά για μας είναι στόχος τον οποίο επιδιώκουμε με μια μακρόχρονη και μεθοδική διαδικασία μάθησης. Στην αρχή οι μαθητές για να εκτελέσουν πράξεις σε πολλές περιπτώσεις έχουν την ανάγκη να αναπαραστήσουν τους αριθμούς με αντικείμενα (αισθητοποίηση των αριθμών). Η διδασκαλία μας στοχεύει να οδηγήσει προοδευτικά τους μαθητές από τις διαδικασίες υπολογισμού με αντικείμενα προς διαδικασίες πιο αφηρημένες, οι οποίες εκτελούνται νοερά*» (ΟΕΔΒ, 2006, «Βιβλίο του δασκάλου για τα Μαθηματικά της Α΄ Δημοτικού» σελ.11). Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η δραστηριότητα που ακολουθεί, η οποία προέρχεται από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ τάξης (βλ. εικόνα 1), και σχετίζεται με την υπέρβαση δεκάδας και την πρόσθεση μονοψήφιων αριθμών.

Υπολογίζω και συμπληρώνω το αποτέλεσμα.

8 + 3 = ...	7 + 4 = ...	9 + 7 = ...
9 + 6 = ...	8 + 4 = ...	3 + 9 = ...
2 + 9 = ...	8 + 5 = ...	8 + 8 = ...

Εικόνα 1: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Α΄ τάξη

Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Α΄ τάξης, τεύχος γ΄, κεφ. 42, σελ. 29

Προκειμένου να γίνει η πρόσθεση με υπέρβαση της δεκάδας, οι μαθητές καθοδηγούνται, ώστε να χρησιμοποιούν ως βάση τη δεκάδα. Ο νοερός αυτός τρόπος υπολογισμού είναι πολύ σημαντικός και χρησιμοποιείται συχνά στην πρόσθεση. Με τον ίδιο τρόπο εξάλλου υπολογίζονται και τα αθροίσματα διψήφιων αριθμών με μονοψήφιο, οπότε έχουμε υπέρβαση του 20, του 30 κ.λπ.

Οι προσθέσεις με τις οποίες φτάνουμε στο 10 θεωρούνται γνωστές και τις έχουν εμπεδώσει τα παιδιά. Οι προσθέσεις της μορφής 10 + ν θεωρούνται επίσης εύκολες διότι υπάρχει και το λεκτικό κομμάτι που διευκολύνει. Η δυσκολία για τους μαθητές έγκειται στο γεγονός ότι πρέπει να χειριστούν ταυτόχρονα και τις τρεις πράξεις που απαιτούνται στην πρόσθεση με τη μέθοδο της υπέρβασης της δεκάδας. Πρέπει, δηλαδή, να συνειδητοποιήσουν ότι συμπληρώνουν τον μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς της πρόσθεσης, ώστε να φτάνουν στον αριθμό 10 και κατόπιν να προσθέτουν τα υπόλοιπα. Όταν έχουν, για παράδειγμα, να υπολογίσουν το 9 + 6, συμπληρώνουν το μεγάλο αριθμό μέχρι να γίνει 10 (9 + 1 = 10) και κατόπιν προσθέτουν το υπόλοιπο του μικρού αριθμού (6 – 1 = 5) στο 10, ώστε 10 + 5 = 15.

Οι μαθητές υπολογίζουν νοερά, ανακαλώντας στη μνήμη τους ήδη γνωστά αριθμητικά γεγονότα και μπορούν να φέρουν στο νου τους το αριθμητήριο ή τις βάσεις. Είναι σημαντικό τα παιδιά μετά από κάθε υπολογισμό να εξηγούν τα βήματα τα οποία ακολούθησαν.

- Παράδειγμα από την Β΄ τάξη:

Εικόνα 2: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Β΄ τάξη
Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Β΄ τάξης, τεύχος β΄, κεφ. 23, σελ. 21

Οι μαθητές στο παράδειγμα της εικόνας 2 καλούνται να υπολογίσουν τα διαστήματα που θα περπατήσει το σαλιγκάρι μέχρι να φτάσει στο φύλλο και όχι στη ρίζα του λουλουδιού. Για να ολοκληρώσουν τη δραστηριότητα επιτυχημένα οφείλουν να προσθέσουν διαδοχικά διψήφιους αριθμούς (συγκεκριμένα, πέντε φορές το 15). Ο εκπαιδευτικός, σύμφωνα με τις διδακτικές παρατηρήσεις του βιβλίου του δασκάλου, προτρέπει να παιδιά να μην εκτελέσουν κάθετη πρόσθεση αλλά να υπολογίσουν νοερά το αποτέλεσμα. Η δυσκολία έγκειται στις διαδοχικές προσθέσεις του 15. Ωστόσο, τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν πολλούς τρόπους, με τους πιο συχνούς να είναι:

- ✓ Με το διπλάσιο του 15: 15+15=30, 30+30=60, 60+10+5=75 εκατοστά.
- ✓ Με ανάλυση του 15=10+5, οπότε προσθέτουν 10+10+10+10+10= 50 και στη συνέχεια 5+5+5+5+5= 25, 50 + 25= 75 εκατοστά.
- ✓ Με επιμερισμό: 5 x (10+5)= (5 x 10) + (5 x 5)= 50 + 25= 75 εκατοστά.

- Παράδειγμα από τη Γ΄ τάξη:

«Δίνουμε μεγάλη σημασία στους νοερούς υπολογισμούς διότι χρησιμοποιούνται περισσότερο από ότι οι γραπτοί υπολογισμοί, δημιουργούν καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του αριθμού, η νοερή εργασία αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων και βοηθούν στην κατανόηση και στην ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού.

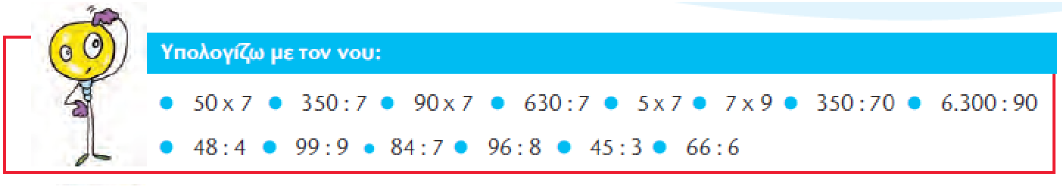
Οι νοεροί υπολογισμοί αναφέρονται συνήθως στις τέσσερις πράξεις αλλά και στους αριθμούς και τους κανόνες του συστήματος αρίθμησης. Ο δάσκαλος κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισαν το αποτέλεσμα. Το να εξηγεί ο μαθητής τον τρόπο με τον *οποίο υπολογίζει είναι μια πολύ χρήσιμη διανοητική ενέργεια (μεταγνωστική διαδικασία). Επίσης, ο δάσκαλος δίνει τη δυνατότητα να εκφραστούν, να συζητηθούν και να καταγραφούν όλοι οι δυνατοί τρόποι υπολογισμού μιας πράξης».* (ΟΕΔΒ, 2006, «Βιβλίο του δασκάλου για τα Μαθηματικά της Γ΄ Δημοτικού», σελ.10). Στη δραστηριότητα που ακολουθεί (βλ. εικόνα 3) εμπλέκεται η πράξη του πολλαπλασιασμού με τη χρήση νοερού υπολογισμού.

Εικόνα 3: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Γ΄ τάξη
Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Γ΄ τάξης, τεύχος α΄, κεφ. 12, σελ. 32.

Οι μαθητές γνωρίζουν ήδη την προπαίδεια και γενικά έχουν ασκηθεί σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις χωρίς να έχουν διδαχθεί τον γραπτό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Στόχος του προβλήματος είναι η εφαρμογή της προπαίδειας για την αντιμετώπιση καταστάσεων της καθημερινότητας που απαιτούνται πράξεις πολλαπλασιασμού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν την εκφώνηση του προβλήματος, να τη συνδέσουν με τον πολλαπλασιασμό και να ανακαλέσουν στη μνήμη τους το ήδη γνωστό αριθμητικό γεγονός: 4 x 8 = 32.

- Παράδειγμα από τη Δ΄ τάξη:

Στην Δ΄ Δημοτικού τίθεται ως στόχος η εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων με το μυαλό και η ανάπτυξη στρατηγικών νοερών υπολογισμών (Δ.Ε.Π.Π.Σ, 2003), ενώ, ταυτόχρονα, προτείνεται οι δάσκαλοι να ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάζουν αυτοσχέδιες υπολογιστικές τεχνικές. Στη δραστηριότητα της εικόνας 4 που ακολουθεί οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν νοερά πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις διψήφιων ή τριψήφιων αριθμών με μονοψήφιους αριθμούς με τις πράξεις αυτές να είναι ήδη γνωστές από την προπαίδεια.



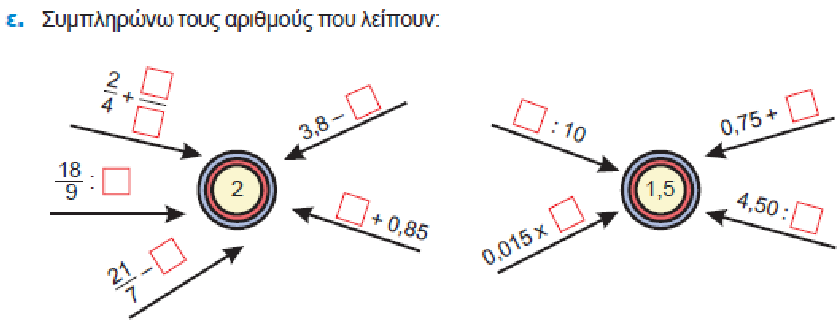
Εικόνα 4: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Δ΄ τάξη
Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Δ΄ τάξης, τεύχος α΄, κεφ. 11, σελ. 29

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν τα αποτελέσματα χωρίς να εκτελέσουν κάθετους αλγόριθμους. Στηριζόμενοι στα ήδη γνωστά γινόμενα της προπαίδειας, στο γεγονός ότι η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού αλλά και στον κανόνα με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ενός αριθμού με το 10, 100, 1000, πρέπει να κατασκευάσουν τις δικές τους στρατηγικές και να οργανώσουν τη σκέψη τους. Ορισμένες από τις αναμενόμενες ενέργειες των μαθητών σε κάποια παραδείγματα είναι:

- ✓ 50 x 7, να σκεφτούν από την προπαίδεια ότι εφόσον 5 x7= 35 άρα και 50 x 7= 350 (ίσως σκεφτούν τον κανόνα σχετικά με τον πολλαπλασιασμό με το 10).
- ✓ 350 : 7, να ανακαλέσουν από τη μνήμη τους το ήδη γνωστό αριθμητικό γεγονός 35:7=5, συνεπώς 350:7= 50
- ✓ 6.300 : 90, από την προπαίδεια 63 : 9 = 7 και στηριζόμενοι στη διαίρεση με το 10, προκύπτει ως αποτέλεσμα το 70.

- Παράδειγμα από την Ε΄ τάξη:

Στις μεγαλύτερες τάξεις οι αντίστοιχες δραστηριότητες αναφέρονται κυρίως σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Στην Ε΄ δημοτικού τίθεται ως στόχος η διαχείριση αριθμών με νοερούς υπολογισμούς, προτείνεται να χρησιμοποιείται η εκτίμηση, η οποία διαφοροποιείται από τη στρογγυλοποίηση ως στρατηγική νοερών υπολογισμών (Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου, 2011). Ακόμη προτείνεται η σύνδεση των νοερών υπολογισμών και των προσεγγιστικών εκτιμήσεων με τη χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων (Δ.Ε.Π.Π.Σ, 2003). Στη δραστηριότητα της εικόνας 5 που ακολουθεί οι μαθητές εμπλέκονται σε νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα και στις τέσσερις πράξεις με βαθύτερο στόχο την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού.



Εικόνα 5: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Ε΄ τάξη.
Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Ε΄ τάξης, τεύχος β΄, 3ο επαναληπτικό, σελ. 23

Σημαντική δεξιότητα που πρέπει να διαθέτουν οι μαθητές για να ανταποκριθούν είναι η εννοιολογική κατανόηση και η ευελιξία ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών. Ακόμη, αναγκαία θεωρείται η ανάκληση της προπαίδειας στη μνήμη, η αξία θέσης ψηφίου αλλά και οι κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με το 10, το 100 και το 1000. Αναλυτικά, μερικές πιθανές στρατηγικές σκέψης των παιδιών στα παραπάνω παραδείγματα είναι:

- ✓ *21/7 - …= 2,* 21/7 = 3 διότι κάθε κλάσμα αποτελεί μία διαίρεση, οπότε 3-1=2.
- ✓ *3,8 - … = 2,* 3,8 – 0,8 = 3 , 3-1 = 2 άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 1,8.
- ✓ … : 10= 1,5 εφόσον η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού: 1,5 x 10= 15.
- ✓ *4,50 : … = 1,5* , ο ζητούμενος αριθμός είναι το 3 διότι 1,5 + 1,5 + 1,5 = 4,50.

- Παράδειγμα από την Στ΄ τάξη:

Στο βιβλίο του δασκάλου δεν αναφέρεται ειδικά κάποιος διδακτικός στόχος σχετικά με την εξάσκηση των μαθητών σε νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς ή ρητούς αριθμούς. Παρ' όλα αυτά, στα σχολικά βιβλία υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες που εμπλέκουν τους μαθητές σε νοερούς υπολογισμούς και σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, κατά κύριο λόγο. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί (βλ. εικόνα 6) οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν τους υπολογισμούς νοερά, εφαρμόζοντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού των δεκαδικών αριθμών με το 10, 100, 1000 και το 0,1, 0,01, 0,001.

Συμπληρώστε τις ισότητες:

9,75 · .... = 97,5	8,75 · 1.000 = ...	978,87 · 0,1 = ...
4,75 · 100 = ...	0,97 · 10=	965,89 · .... = 9,6589
6,97 ·...................... = 6.970	8,7 · .... = 0,87	678,5 · 0,001 = ...

Εικόνα 6: Ενδεικτική δραστηριότητα νοερών υπολογισμών από την Στ΄ τάξη
Πηγή: Τετράδιο Εργασιών Στ΄ τάξης, τεύχος α΄, κεφ. 6, σελ. 17

Η βασική δυσκολία που παρουσιάζεται για τους μαθητές στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι, όταν πολλαπλασιάζουν έναν αριθμό με το 0,1 , 0,01 και 0,001, ο αριθμός μικραίνει αντί να μεγαλώνει όπως συμβαίνει με το 10,100,1000.

Το 2011 συντάχθηκε το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών το οποίο όμως δεν έχει τεθεί ακόμη σε ισχύ. Ένα από τα βασικά γνωρίσματα του προγράμματος είναι η σημαντική αλλαγή στην οργάνωση και παρουσίαση του περιεχομένου με την εισαγωγή της νέας έννοιας *«της τροχιάς μάθησης»*. Στις τροχιές μάθησης *(learning trajectories)* περιγράφεται αφενός μια υποθετική πορεία ανάπτυξης της κατανόησης και της μάθησης του παιδιού σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους αλλά και αφετέρου, προτείνονται διδακτικά έργα (και με αξιοποίηση των ΤΠΕ) που σχεδιάστηκαν για να προκαλέσουν αυτή την ανάπτυξη (Clements & Sarama, 2009). Στο Ν.Α.Π. (2011), υπάρχουν διδακτικοί στόχοι για την ανάπτυξη στρατηγικών σε νοερούς υπολογισμούς αλλά και διδακτικές οδηγίες για το πώς μπορούν να αξιοποιηθούν σε σχέση με τους τυπικούς αλγόριθμους. Σύμφωνα με τις οδηγίες, η επικοινωνία εκπαιδευτικού μαθητών αποτελεί σημαντικό παράγοντα, ώστε να αναπτυχθεί μαθηματικός συλλογισμός, επιχειρηματολογία και μεταγνωστικές δεξιότητες.

Φαίνεται ότι το ισχύον πρόγραμμα σπουδών (ΔΕΠΠΣ 2003) δεν επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να έχει μία συνολική εικόνα της εξέλιξης των εννοιών ανά τάξη, παρά προσφέρει την εικόνα της διαπραγμάτευσης αυτών των εννοιών μόνο για την τάξη στην οποία ο/η εκπαιδευτικός διδάσκει (Λεμονίδης, 2016). Στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στους νοερούς υπολογισμούς και κατέχουν σπουδαία θέση στα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκονται σε όλες τις τάξεις. Οι τροχιές μάθησης έχουν ως στόχο να φέρουν συνοχή στο πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, και να παρέχουν μια διαμήκη επισκόπηση για το πώς η μαθηματική κατανόηση των παιδιών, μέσω των νοερών υπολογισμών, αναπτύσσεται από το νηπιαγωγείο μέχρι τη Στ΄ τάξη (Λεμονίδης, 2016).

1.5.2 Οι νοεροί υπολογισμοί στα αναλυτικά προγράμματα άλλων χωρών

Διεθνώς υπάρχουν πολλά αναλυτικά προγράμματα που δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

Στην Αγγλία με το πρόγραμμα National Numeracy Strategy το 1999 άλλαξε η προσέγγιση για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των στρατηγικών που τους συνοδεύουν. Οι αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στηρίχθηκαν στο χαμηλό επίπεδο μαθηματικού εγγραμματισμού που παρουσίασαν οι Άγγλοι πολίτες (έκθεση της ομάδας εργασίας του Sir Claus Moser's, 1999). Σύμφωνα με τις αλλαγές, οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου είναι καλό να εμπλέκονται σε νοερούς υπολογισμούς και, έτσι, αναγνωρίζεται η χρήση και η αξία των άτυπων στρατηγικών. Η έμφαση στο νοερό υπολογισμό δεν σημαίνει ότι οι γραπτοί αλγόριθμοι εγκαταλείπονται στις πρώτες τάξεις, αντίθετα είναι πολύ σημαντικό να υπάρχει μια ισορροπία ανάμεσα στις νοερές και τις τυπικές στρατηγικές διότι αλληλοεξαρτώνται (Λεμονίδης, 2013; van de Walle, 2007).

Στην Αμερική τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει δύο νέες προσπάθειες για τη βελτίωση της παρεχόμενης μαθηματικής εκπαίδευσης με το Standards (2000) και το Common Core States Standards (2010). Το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών των Μαθηματικών (NCTM, 2000) αναφέρει ότι πρέπει να δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στους νοερούς και κατ' εκτίμηση υπολογισμούς από ό,τι στους παραδοσιακούς τυπικούς αλγορίθμους. Οι αλλαγές αυτές ενισχύονται από αποτελέσματα πολλών ερευνών που υποστηρίζουν ότι παιδιά που έχουν εμπλακεί σε νοερούς υπολογισμούς και έχουν κατασκευάσει δικές τους στρατηγικές ανταποκρίνονται επαρκώς στην επίλυση προβλημάτων και αναπτύσσουν καλή αίσθηση του αριθμού (Davis, 1990; van Lehn, 1986).

Άλλα παραδείγματα τέτοιων προγραμμάτων από τον διεθνή χώρο, τα οποία συμπεριλαμβάνουν και αναδεικνύουν τους νοερούς υπολογισμούς είναι: στην Ολλανδία το Dutch Specimen of a National Program for Primary Mathematics (Treffers & De Moor, 1990) και στην Αυστραλία το National Statement on Mathematics for Australian Schools (Australian Education Council, 1991).

Το ινστιτούτο Freudenthal στην Ολλανδία (Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Freudenthal Institute, Holland) έχει επηρεάσει έντονα τη μαθηματική εκπαίδευση καθώς προωθούν τη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των μελλοντικών πολιτών. Σύμφωνα με αυτή τη θέση, η εισαγωγή των νοερών υπολογισμών στη διδασκαλία των μαθηματικών θεωρείται απαραίτητη, κυρίως στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Έτσι, δίνεται έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς στις μικρές τάξεις ως προέκταση των άτυπων στρατηγικών, τις οποίες μεταφέρουν οι μαθητές στο σχολείο από την καθημερινή ζωή τους. Οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι δεν παρουσιάζονται στο σχολείο μέχρι την τρίτη τάξη (Treffers & De Moor, 1990).

1.6 Η εννοιολογική κατανόηση και οι διαδικαστικές δεξιότητες στους νοερούς υπολογισμούς

Όλοι όσοι ασχολούνται με τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών δέχονται ότι οι μαθητές θα πρέπει να κατανοούν τις διαδικασίες που ακολουθούν. Ο *εποικοδομισμός (constructivism)* είναι μια θεωρία σχετική με το πώς μαθαίνουν τα παιδιά και υποστηρίζει ότι τα παιδιά θα πρέπει να συμμετέχουν ενεργά στην ανάπτυξη της δικής τους κατανόησης. Ο Skemp (1976) διαχώρισε δύο τύπους κατανόησης που αναπτύσσει το άτομο κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών:

- Την *εννοιολογική κατανόηση (relational understanding):* βασίζεται στην κατανόηση των εννοιών και στην αλληλοσύνδεσή τους. Συνίσταται σε λογικές σχέσεις δομημένες εσωτερικά και συνδεδεμένες με ήδη υπάρχουσες ιδέες.
- Την *εργαλειακή ή διαδικαστική κατανόηση (instrumental understanding):* όπου το άτομο ακολουθεί μηχανικά μία αλγοριθμική διαδικασία χωρίς να διαθέτει απαραίτητα την κατάλληλη νοητική δομή.

Οι Mclntosh, Reys και Reys (1992), με βάση τους δύο αυτούς τύπους κατανόησης, διαχώρισαν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στους νοερούς υπολογισμούς σε:

- *Διαδικαστικές/εργαλειακές ή βασισμένες στον αλγόριθμο:* όπου οι μαθητές ακολουθούν άκριτα τυπικούς κανόνες και τεχνικές μέσω αποστήθισης, χωρίς να κατανοούν αυτό που κάνουν.
- *Εννοιολογικές ή βασισμένες στην αίσθηση του αριθμού στρατηγικές:* όπου οι μαθητές δείχνουν να αντιλαμβάνονται τις στρατηγικές που εφαρμόζουν και διαχειρίζονται τους αριθμούς ολιστικά.

Οι Hiebert και Wearne (1996) θεωρούν την κατανόηση ως την εσωτερική κατασκευή των σχέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών. Υποστηρίζουν ότι οι μαθητές που διαθέτουν κατανόηση μπορούν να αποκτήσουν και να αφομοιώσουν ευκολότερα μαθηματικές διαδικασίες είτε τις ανακαλύπτουν οι ίδιοι, είτε τις υιοθετούν μετά από αλληλεπίδραση με τους εκπαιδευτικούς. Οι ήδη υπάρχουσες νοητικές δομές στη μνήμη των μαθητών, τους βοηθούν να αποδίδουν νόημα στις καινούριες πληροφορίες και να τις ταξινομούν ευκολότερα. Όσα παιδιά διαθέτουν εννοιολογική κατανόηση διαθέτουν καλύτερη αίσθηση του αριθμού, μπορούν να προσαρμοστούν σε νέες καταστάσεις, θυμούνται καλύτερα μαθηματικές διαδικασίες και λειτουργούν πιο ευέλικτα.

Ο νοερός υπολογισμός είναι σημαντικό να γίνει κατανοητός από τους μαθητές σε όλη του την έκταση χωρίς να εμμένει η διδασκαλία σε ένα μόνο απλουστευτικό και αποκλειστικό σύνολο κανόνων που πρέπει να ανακληθεί από τη μνήμη. Το ίδιο ισχύει και για τις στρατηγικές που πρέπει να τις κατανοούν οι μαθητές ως διασύνδεση αλληλοσχετιζόμενων μαθηματικών γνώσεων και όχι να τις αντιλαμβάνονται ως ξεχωριστές μονάδες διαδικαστικής γνώσης (Mclellan, 2001).

Η ύπαρξη λαθών ενισχύει την άποψη ερευνητών (π.χ. Thompson, 1999; Mclellan, 2001) ότι η εμμονή σε κανόνες και αλγορίθμους (άρα διαδικαστικές δεξιότητες) δεν συνεπάγεται εννοιολογική κατανόηση.

Οι Carvalho και da Ponte (2012, 2013) πραγματοποίησαν ένα πείραμα διδασκαλίας διάρκειας τριών μηνών σε μία τάξη Α΄ Γυμνασίου με 20 μαθητές προσπαθώντας να καταγράψουν τις διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθούσαν οι μαθητές τόσο κατά τη διάρκεια του πειράματος διδασκαλίας όσο και μετά από αυτό. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με παρατήρηση μέσα από τη διδακτική διαδικασία αλλά και με βιντεοσκοπήσεις. Στις δραστηριότητες που καλούνταν να διαχειριστούν οι μαθητές, οι οποίες περιείχαν ρητούς αριθμούς με διαφορετικές αναπαραστάσεις (κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς, ποσοστά) και περιλάμβαναν και τις τέσσερις βασικές πράξεις, έπρεπε να σκεφθούν νοερά. Τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν ότι στην αρχή τα παιδιά εφάρμοζαν κυρίως εργαλειακές στρατηγικές, κατά τη διάρκεια του πειράματος, όμως, και όσο εξελισσόταν η διδακτική παρέμβαση, χρησιμοποιούσαν όλο και περισσότερο εννοιολογικές στρατηγικές, όντας σαφώς επηρεασμένοι από την εξειδικευμένη διδασκαλία που παρακολουθούσαν.

Σε επόμενη μελέτη τους οι ίδιοι ερευνητές (Carvalho & da Ponte, 2015) εντόπισαν *εννοιολογικά* αλλά και *εργαλειακά λάθη* μαθητών σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Υποστηρίζουν ότι η πηγή των εννοιολογικών λαθών είναι η έλλειψη νοητικών αναπαραστάσεων καθώς και η έλλειψη κατανόησης των πολλαπλασιαστικών δομών ειδικά με τους ρητούς αριθμούς. Αντίθετα, τα εργαλειακά λάθη θεωρούν ότι οφείλονται σε λανθασμένους υπολογισμούς μιας αλγοριθμικής στρατηγικής βασισμένη σε κανόνες που ακολουθήθηκε μηχανικά.

Οι Λεμονίδης και Καϊάφα (2014) σε έρευνά τους με μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού εξέτασαν κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν τις πράξεις που εκτελούν με ρητούς αριθμούς και κατά πόσο μπορούν να εκτελούν τις πράξεις αυτές με διάφορες στρατηγικές. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν σε δύο έργα που αφορούσαν την εκτέλεση νοερών υπολογισμών με παραπάνω από έναν τρόπο λύσης, ενώ τα παιδιά είχαν επιλεχθεί από τους δασκάλους τους για τις καλές επιδόσεις τους στο γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε στρατηγικές κανόνων για την εκτέλεση νοερών πράξεων προσπαθώντας να εφαρμόσουν τυπικούς αλγόριθμους των πράξεων. Εννοιολογικές στρατηγικές, όπως η χρήση νοερών αναπαραστάσεων ή η αναφορά στο μισό εμφανίστηκαν σε πολύ μικρότερο βαθμό. Τα περισσότερα λάθη που παρατηρήθηκαν οφείλονταν αφενός στην αδυναμία των παιδιών να εφαρμόσουν κάποιον τυπικό κανόνα που έχουν διδαχθεί και δεν κατανοούν το νόημα και τη λειτουργία του και, αφετέρου, στο γεγονός ότι δεν έχουν αναπτύξει εννοιολογική γνώση και κατανόηση του ρητού αριθμού.

Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με την έρευνα των Caney και Watson (2003) που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές στην Αυστραλία (από τρίτη δημοτικού μέχρι τρίτη γυμνασίου), με τα αποτελέσματα να δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούν στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς εργαλειακές στρατηγικές, ενώ σε πράξεις με κλάσματα και ποσοστά εφαρμόζουν εννοιολογικές στρατηγικές.

1.7 Η ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς

Οι νοεροί υπολογισμοί διαθέτουν ένα ευρύ φάσμα στρατηγικών, σε αντίθεση με τους παραδοσιακούς αλγορίθμους. Για να επιλέξουν οι λύτες την κατάλληλη στρατηγική ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που τίθεται προς επίλυση, πρέπει να αναπτύξουν ιδιαίτερα την ευελιξία τους. Κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών πρέπει να αλληλεπιδρά η προϋπάρχουσα με τη νέα γνώση και να προάγεται η ευελιξία (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009).

Στους νοερούς υπολογισμούς ως *ευελιξία (flexibility)* θεωρείται η ικανότητα κάποιου να λύνει προβλήματα με ποικίλους τρόπους, να χρησιμοποιεί γνωστές πληροφορίες για να λύσει άγνωστα προβλήματα και η ικανότητα να προσδιορίζει την πιο αποτελεσματική μέθοδο και να τη χρησιμοποιήσει όποτε χρειαστεί (NCTM, 2010). Η διαθεσιμότητα μιας ποικιλίας στρατηγικών αποτελεί σημαντικό στοιχείο για να είναι κάποιος ευέλικτος (Verschaffel et al., 2007) καθώς και η άμεση εφαρμογή τους σε προβλήματα. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η γνώση πολλών στρατηγικών είναι απαραίτητη, ωστόσο δεν εξασφαλίζει ότι το άτομο θα είναι ευέλικτο (Verschaffel et al., 2007).

Στη διεθνή βιβλιογραφία ο όρος ευελιξία συναντάται και ως *προσαρμοστικότητα (adaptivity)* γι’ αυτό και οι δύο όροι ταυτίζονται από πολλούς μελετητές. Προσαρμοστικότητα είναι «*η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί την καταλληλότερη στρατηγική που γνωρίζει, με γνώμονα τη γρήγορη και σωστή απάντηση*» (Λεμονίδης, 2013, σελ. 57). Οι μαθητές θα πρέπει να είναι ώριμοι, δηλαδή να έχουν αποθηκεύσει στη μνήμη τους αρκετά αριθμητικά γεγονότα και να είναι ικανοί να τα ανακαλούν στη βραχύχρονη μνήμη τους και να υπολογίζουν με αυτά.

Κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά που μπορούν να αποδοθούν σε έναν ευέλικτο λύτη νοερών υπολογισμών είναι:

- ✓ Οι γνώσεις πολλαπλών διαδικασιών/στρατηγικών για να ανταποκρίνεται επαρκώς (Heirdsfield, 2001; Verschaffel et al., 2007).
- ✓ Να μην περιορίζεται και να μπορεί να χρησιμοποιεί όλες τις δυνατές στρατηγικές με ευχέρεια (Threfall, 2002).
- ✓ Η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής από τις διαθέσιμες επιλογές, ώστε να βελτιώνεται η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητα στην επίλυση προβλήματος (Heirdsfield, 2001; Threlfall, 2002; Verschaffel et al., 2009).
- ✓ Η ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ στρατηγικών και να τις εναλλάσσει (Λεμονίδης, 2013).

- ✓ Να μπορεί να εφευρίσκει ή να καινοτομεί δημιουργώντας νέες διαδικασίες (Threfall, 2002).

Συνοψίζοντας, τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον και η βαρύτητα που δίνεται στους νοερούς υπολογισμούς στη μαθηματική εκπαίδευση διεθνώς μεγαλώνει. Οι νοεροί υπολογισμοί είναι πολύ χρήσιμοι και σημαντικοί για οποιοδήποτε άτομο στην καθημερινή ζωή του, ορισμένες φορές, περισσότερο και από τους τυπικούς αλγόριθμους. Βέβαια, για να είναι κάποιος ικανός σε νοερούς υπολογισμούς πρέπει να έχει πολύ καλή αίσθηση των αριθμών, ανεπτυγμένη εννοιολογική κατανόηση και να είναι ιδιαίτερα ευέλικτος. Τα αναλυτικά προγράμματα και οι σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας οφείλουν να προσαρμοστούν στα νέα δεδομένα που προκύπτουν. Δεν είναι εύκολο να δρομολογηθούν ριζικές αλλαγές, όμως πρέπει να αναπτυχθούν παιδαγωγικές πρακτικές που θα εμπλουτίζουν το νοητικό υπόβαθρο του παιδιού που δεν αρκεί να διαθέτει μόνο ένα ευρύ φάσμα στρατηγικών αλλά και να ξέρει να τις εφαρμόζει ανάλογα με τις συνθήκες που παρουσιάζονται. Τα στοιχεία γίνονται πιο πολύπλοκα, ειδικά αν εμπλακούν και οι ρητοί αριθμοί, που οι μαθητές δείχνουν να τους «φοβούνται» ίσως λόγω των διαφορών τους από τους φυσικούς αριθμούς (Heirdsfield, 2001).

2ο Κεφάλαιο: Ρητοί Αριθμοί

2. Οι ρητοί αριθμοί και οι διαφορές τους από τους φυσικούς αριθμούς

Η έννοια του ρητού αριθμού είναι ιδιαίτερα συνδεδεμένη με την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, ως *ρητοί αριθμοί* ορίζονται το σύνολο των αριθμών Q: ={x:x=α/β όπου α, β∈Z και β≠0}, είναι δηλαδή όλοι οι αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή κλάσματος α/β, με α και β ακεραίους αριθμούς και β≠0 (van de Walle, 2007).

Αυτοί οι νέοι αριθμοί παρουσιάζουν για τους μαθητές ομοιότητες αλλά και διαφορές από τους φυσικούς αριθμούς που ήδη γνωρίζουν. Οι διαφορές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως προς:

1. *Τον συμβολισμό*

Κάθε φυσικός αριθμός αναπαρίσταται με ένα και μοναδικό σύμβολο. *«Οι ακέραιοι αριθμοί εκφράζουν τον πληθάριθμο μιας ποσότητας με έναν αριθμό που συγκροτείται από μονάδες»* (Λεμονίδης, 2016, σελ. 14). Αντίθετα, οι ρητοί αριθμοί έχουν πιο σύνθετο συμβολισμό, διότι εκφράζουν μια σχέση αριθμών σε μορφή πηλίκου (van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015).

2. *Τη διαφορετική μαθηματική φύση των ρητών και φυσικών αριθμών*

Οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί και, συνεπώς, ο κάθε ένας έχει έναν και μοναδικό επόμενο ή προηγούμενο. Μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν υπάρχει κανένας φυσικός αριθμός. Αντίθετα, οι ρητοί αριθμοί εμπεριέχουν την έννοια της συνέχειας και της απειρίας, δηλαδή είναι πυκνοί. Επομένως, κανένας ρητός δεν έχει έναν μοναδικό διαδοχικό, όπως γίνεται με τους φυσικούς ακέραιους αριθμούς, και μεταξύ δύο φυσικών, αλλά και ρητών αριθμών, βρίσκονται άπειροι ρητοί αριθμοί (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2007; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Στους ρητούς αριθμούς η μονάδα μπορεί να διαιρείται επ' άπειρον και να δημιουργούνται νέοι αριθμοί από αυτή τη διαίρεση. Μία άλλη ιδιότητα που διαθέτουν οι ρητοί αριθμοί και δεν έχουν οι φυσικοί, είναι ότι κάθε ρητός αριθμός, διάφορος του μηδενός, έχει ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (π.χ. το αντίστροφο του 2/3 είναι το 3/2).

3. Το αφηρημένο των διαδικασιών των πράξεων των ρητών αριθμών

Στους φυσικούς αριθμούς ο πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο αριθμών δίνει πάντοτε έναν αριθμό που είναι μεγαλύτερος από τους δύο όρους των πράξεων. Μπορούμε να πούμε χαρακτηριστικά ότι ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει», ενώ η διαίρεση δίνει ένα αποτέλεσμα μικρότερο από τους δύο όρους της πράξης, δηλαδή, «μικραίνει». Από την άλλη πλευρά, στους ρητούς αριθμούς, ο πολλαπλασιασμός δεν δίνει πάντοτε ένα αποτέλεσμα μεγαλύτερο, δηλαδή δεν «μεγαλώνει» πάντοτε, καθώς και η διαίρεση δεν «μικραίνει» πάντοτε (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

4. Τις διάφορες αναπαραστατικές μορφές

Ενώ κάθε φυσικός αριθμός αναπαρίσταται με ένα και μοναδικό σύμβολο, κάθε ρητός αριθμός είναι ένα σύνολο κλασμάτων με το ίδιο μέτρο, π.χ. 3/4 = 6/8 = 9/12 = …, και κάθε κλάσμα είναι μια από τις διαφορετικές αλλά ισοδύναμες μεταξύ τους παραστάσεις ενός ρητού αριθμού. Ένας ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρίσταται με πολλές σημειολογικές αναπαραστάσεις, δηλαδή κλάσμα, δεκαδικό και ποσοστό, π.χ. 0,75= 3/4 =75% (Κολέζα, 2009, Λεμονίδης, 2016).

2.1 Δυσκολίες – Παρανοήσεις – Εμπόδια στους δεκαδικούς αριθμούς

Από τη δεκαετία του ΄80 έγιναν πολλές προσπάθειες καταγραφής των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στους δεκαδικούς αριθμούς. Φάνηκε ότι οι δυσκολίες αυτές προέρχονται από τον ιδιαίτερο τρόπο γραφής τους, αλλά και από την ανεπαρκή διδασκαλία και τα λανθασμένα αναπαραστατικά μοντέλα που είτε υπάρχουν στα βιβλία είτε εφαρμόζονται από τους εκπαιδευτικούς (Steinle & Stacey, 2004).

Οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την αίσθηση *(sense)* των δεκαδικών αριθμών, τη γενική δηλαδή κατανόηση των αριθμών και των πράξεων και την ικανότητα να χειρίζονται καταστάσεις της καθημερινής ζωής που περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς (Sengul & Gulbagci, 2012). Οι μαθητές δείχνουν να δυσκολεύονται στην κατανόηση του δεκαδικούς συστήματος και της αξίας θέσης των δεκαδικών ψηφίων, δε μπορούν να αναγνωρίσουν εύκολα την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που διαθέτουν για την επίλυση προβλημάτων με δεκαδικούς αριθμούς αλλά και να κρίνουν το αποτέλεσμα.

Οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στράφηκαν στη διερεύνηση και κατηγοριοποίηση των παρανοήσεων, καθώς οι παρανοήσεις αποτελούν ισχυρό μηχανισμό για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (An & Wu, 2012).

2.1.1 Σύνδεση με ακεραίους

Οι παρανοήσεις, όπως έχουν καταγραφεί και ταξινομηθεί (Lai & Murray, 2015; Steinle & Stacey, 2004), έχουν να κάνουν κυρίως με τη σύνδεση των δεκαδικών με τους ακεραίους αριθμούς. Σύμφωνα με τους Χρήστου (2015) και Christou και Vosniadou (2012), η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επιδρά αρνητικά στον τρόπο κατανόησης των ρητών αριθμών. Ουσιαστικά, οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005).

Ο Χρήστου (2015) εξέτασε μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης σε πράξεις με φυσικούς και ρητούς αριθμούς που απαιτούσαν τη συμπλήρωση του αποτελέσματος, την επιλογή της κατάλληλης πράξης ή τη συμπλήρωση κενών όταν δινόταν το αποτέλεσμα της πράξης, όπως για παράδειγμα 6×_=11, 2:_=5, 6_0.2<6 κ.α. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού προκαλεί σημαντικές παρανοήσεις στην πλειοψηφία των μαθητών, ηλικίας 10-12 ετών, σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Στην περίπτωση των αριθμητικών πράξεων ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν, τα παιδιά αποκτούν διαισθητικές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων, που παίρνουν τη μορφή κανόνων, όπως ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει. Ακόμη, βρέθηκε ότι οι μαθητές σκέφτονται κατά προτεραιότητα με τους φυσικούς αριθμούς για τους αριθμούς που λείπουν. Στα δύο πρώτα μέρη του ερωτηματολογίου οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις αυτές ήταν σημαντικά υψηλότερες από τις επιδόσεις τους στα έργα τα οποία τις παραβίαζαν. Οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα που εμπλέκονταν φυσικοί αριθμοί ήταν σημαντικά καλύτερες απ’ ό,τι στα έργα όπου οι αριθμοί που εμπλέκονταν ήταν ρητοί.

Στη σύνδεση των δεκαδικών με τους ακεραίους αριθμούς, η πιο συνηθισμένη παρανόηση είναι να θεωρούν τον μακρύτερο αριθμό, τον αριθμό δηλαδή με τα περισσότερα ψηφία, ως τον μεγαλύτερο. Είναι μια γενίκευση του κανόνα των ακεραίων, σύμφωνα με την οποία όπως ο αριθμός 63 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 8 αντίστοιχα και ο αριθμός 0,63 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 0,8 (Lai & Murray, 2015; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Steinle & Stacey, 2004). Αυτό έχει ως συνέπεια στην πρόσθεση 0.63+0,8 οι μαθητές να προσθέτουν το 8 με το 3 και να προκύπτει 0,71.

Στην ίδια κατηγορία ανήκει και η παρανόηση με το μηδέν. Όπως στους ακεραίους έτσι θεωρούν και για τους δεκαδικούς, ότι το μηδέν μπροστά από το δεκαδικό τμήμα του δεκαδικού αριθμού δεν υπολογίζεται, με αποτέλεσμα να το παραβλέπουν και αντιλαμβάνονται το 3,4 ως ίσο με το 3,04. Δεν κατανοούν, δηλαδή, τη θεσιακή αξία των ψηφίων και παραβλέπουν ότι το μηδέν κρατάει τη θέση των δέκατων, στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Στην περίπτωση δε που το μηδέν βρίσκεται στην τελευταία θέση του δεκαδικού τμήματος, θεωρούν ότι αυξάνει την αξία του αριθμού και εκλαμβάνουν το 0,30 ως μεγαλύτερο από το 0,3. Αυτή η κρίση βασίζεται στην επιτυχημένη στρατηγική για ακεραίους, όπου τα μηδενικά συμβάλλουν τόσο στο μήκος όσο και στο μέγεθος ενός αριθμού (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Χρήστου, 2015).

Πολλοί μαθητές συγχέουν τα δέκατα με τις δεκάδες, τα εκατοστά με τις εκατοντάδες κ.ο.κ., όπως τα γνωρίζουν από τους ακεραίους. Θεωρούν δηλαδή, ότι το δεκαδικό τμήμα είναι ακέραιοι αριθμοί γραμμένοι σε αντίστροφη σειρά. Τέλος, μια ακόμα παρανόηση, που προέρχεται ενδεχομένως από τους ακεραίους, είναι η λεγόμενη υπερχείλιση στα δεξιά. Όπως στους ακεραίους, το 120 είναι 12 δεκάδες, οι μαθητές, ηλικίας 10-12 ετών, θεωρούν ότι και το 0,12 είναι 12 δέκατα (Moskal & Magone, 2000).

2.2 Αισθήματα και παράγοντες δυσκολίας στα κλάσματα

Η έννοια των κλασμάτων είναι από τις πιο βασικές στα μαθηματικά, όμως είναι και ανάμεσα στις πιο δύσκολες για τους μαθητές όλων των βαθμίδων. Στην πραγματικότητα τα κλάσματα δεν είναι δύσκολα μόνο για τους μαθητές αλλά και πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι είναι από τα πιο δύσκολα θέματα στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Λεμονίδης, 2016). Η Κολέζα (2009) και ο van de Walle (2007) υποστήριξαν ότι οι πράξεις με κλάσματα προκαλούν μεγάλη σύγχυση, άγχος και φόβο τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και τους μαθητές.

Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά τα παιδιά στην κατανόηση των κλασμάτων. Οι βασικότεροι λόγοι είναι:

- Ο τρόπος και η σειρά με την οποία παρουσιάζεται αρχικά το περιεχόμενο των κλασμάτων στους μαθητές στα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία. Συγκεκριμένα, οι μαθητές εκτίθενται αρχικά σε περιορισμένη ποικιλία κλασμάτων (συνήθως μόνο δεύτερα και τέταρτα). Ο Διαφέρμος (1998) και η Κολέζα (2009) αναφέρουν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων στις μεσαίες τάξεις του δημοτικού είναι ιδιαίτερα κομβικό σημείο, όπου πολλοί μαθητές αρχίζουν να έχουν σοβαρές δυσκολίες με τα μαθηματικά. Μία πιθανή εξήγηση για αυτό το φαινόμενο, είναι ότι στα πρώτα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης, βρίσκονται στο επίκεντρο οι ακέραιοι αριθμοί και, έτσι, οι μαθητές δεν προετοιμάζονται ομαλά για τη μετάβαση στα κλάσματα και στην έννοια των πραγματικών αριθμών.

  Οι προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών με τους φυσικούς αριθμούς επηρεάζουν αρνητικά τους μαθητές που τείνουν να χειρίζονται τους όρους του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς και όχι ως μια ενιαία ολότητα. Έτσι, λανθασμένα θεωρούνται μεγαλύτερα τα κλάσματα που έχουν μεγαλύτερους όρους π.χ. 1/12 > 1/2, 5/9 > 2/3 κ.ο.κ. Οι μαθητές, τελειώνοντας το δημοτικό σχολείο, στο σύμβολο α/β συνήθως επικεντρώνονται στην προσθετική παρά στην πολλαπλασιαστική έκφραση της σχέσης μεταξύ των α και β (Lamon, 1999; Moskal & Magone, 2000; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

  Ο Λεμονίδης (2016), σε ό,τι αφορά το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα ΔΕΠΠΣ 2003, τονίζει ότι παρατηρείται μη εξελικτική παρουσίαση των κλασματικών εννοιών. Αναλυτικότερα, ενώ τα κλάσματα εισάγονται στην Γ΄ δημοτικού, στη Δ΄ υπάρχουν ελάχιστα παρεμφερή κεφάλαια, και αυτά με περιεχόμενο τα δεκαδικά κλάσματα. Είναι επόμενο, λοιπόν, να δημιουργείται ένα κενό και μια ασυνέχεια στη διδασκαλία των κλασμάτων και να δημιουργείται συσσώρευση εννοιών στην Ε΄ τάξη (ισοδυναμία, σύγκριση, πράξεις κλασμάτων και επίλυση προβλημάτων).

- Οι διδακτικές επιλογές εντός σχολικών τάξεων αλλά και το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται. Όπως φαίνεται από τις έρευνες των Baturo (2004) και Misquitta (2011), τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και πολλά διδακτικά υλικά παρουσιάζουν τα κλάσματα μόνο σαν μέρη μιας πίτας ή ενός κύκλου, μια πρακτική που τονίζει μόνο τη σχέση μέρους-όλου. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται αρχικά το περιεχόμενο των κλασμάτων στους μαθητές προβάλλει μια περιορισμένη ποικιλία κλασμάτων (συνήθως δεύτερα και τέταρτα σε διαμερίσεις γεωμετρικών σχημάτων). Είναι σημαντικό η έννοια των κλασμάτων να παρουσιάζεται σε διαφορετικά σημειολογικά συστήματα αναπαράστασης (μοντέλα εμβαδού, μοντέλα συνόλου και μοντέλα μήκους ή αριθμογραμμής) ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εννοιολογική κατανόηση και ευελιξία. Με αυτό τον τρόπο, τα παιδιά θα αντιλαμβάνονται ότι η έννοια του κλάσματος δε δηλώνει μόνο μέρος του όλου μιας ποσότητας, αλλά περιλαμβάνει πέντε επιμέρους ερμηνείες: μέρος-όλο, μέτρηση/αριθμογραμμή, λόγος, πηλίκο και τελεστής (van de Walle, 2007).

Σε όλα αυτά τα εμπόδια και τις δυσκολίες που έχουν αναφερθεί ως τώρα, το πιο σημαντικό είναι ότι οι συνθήκες δεν δίνουν πολλά περιθώρια στον μαθητή να αποκτήσει την απαραίτητη εννοιολογική κατανόηση, με συνέπεια, ακόμη και στις πιο απλές πράξεις, να εφαρμόζονται οι τυπικές διαδικασίες, ενώ θα μπορούσαν να εκτελεστούν νοερά. Τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα, όπως 1/2-1/4 , 3/4 + ½, 1 : ¼ και πολλά άλλα, περιέχουν την έννοια του μισού ή των τετάρτων, έννοιες με τις οποίες τα παιδιά είναι εξοικειωμένα από την καθημερινή τους ζωή, μέσα από τις συναλλαγές με ευρώ, την ώρα, τα κιλά, το βάρος κ.ο.κ. Η ευελιξία είναι ένα σπουδαίο εργαλείο που πρέπει να κατέχουν οι μαθητές ιδιαίτερα σε υπολογισμούς που εμπλέκονται ρητοί αριθμοί και όχι να στηρίζονται στην απομνημόνευση όπως παρατηρείται (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

2.3 Εμπόδια κατανόησης για τους ενήλικες

Εκτός από τους μαθητές υπάρχουν πολλά παραδείγματα και από ενήλικες που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Σύμφωνα με το National of Educational Progress (NAEP) του 2004, λιγότεροι από το 30% των δεκαοχτάχρονων μπορούσαν να χρησιμοποιούν ισοδύναμα τις αναπαραστάσεις δεκαδικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών όπως 0,029 = 29/1000 (Kloosterman, 2010).

Υπάρχει ακόμη ένα μικρός αριθμός ερευνών που μελετούν τη *γνώση περιεχομένου (content knowledge)* και *την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (pedagogical content knowledge)* εν ενεργεία εκπαιδευτικών για τους ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα, οι Lemonidis, Tsakiridou και Meliopoulou (2017) διερεύνησαν τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς 70 εν ενεργεία Ελλήνων δασκάλων με προϋπηρεσία κατά μέσο όρο τα 6,8 χρόνια. Οι εκπαιδευτικοί έδειξαν να έχουν πολύ καλές επιδόσεις σε απλές πράξεις με κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς και ποσοστά. Αντίθετα, όταν τους δόθηκαν δραστηριότητες που απαιτούσαν εννοιολογική κατανόηση των ρητών αριθμών, όπως «*βρείτε τρία κλάσματα που είναι μεταξύ του 7/8 και του 1*» ή «*γράψτε τρεις δεκαδικούς αριθμούς μεταξύ του 3,1 και του 3,11*», περίπου το 50% και το 70%, αντίστοιχα, του δείγματος έδειξε να ανταποκρίνεται.

2.4 Στρατηγικές νοερών υπολογισμών με κλάσματα και δεκαδικούς

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, οι έρευνες που μελετούν νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς είναι σημαντικά λιγότερες σε σχέση με αυτές για τους φυσικούς. Στη συγκεκριμένη περιοχή, οι περισσότεροι μελετητές (Caney & Watson, 2003; Callingham & Watson, 2008; Carvalho & da Ponte, 2013; Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014; Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014; Χρήστου, 2015) εξετάζουν τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές από το δημοτικό μέχρι και το λύκειο σε νοερούς υπολογισμούς και των τεσσάρων πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς αλλά και κλάσματα.

Η βασική διαπίστωση όλων των ερευνητών είναι ότι τα παιδιά εφαρμόζουν στρατηγικές από τους φυσικούς αριθμούς μιας και είναι ιδιαίτερα επηρεασμένοι από αυτούς και τους χρησιμοποιούν από την πρώτη σχολική ηλικία. Συνεπώς, η ταξινόμηση των στρατηγικών στους ρητούς αριθμούς ακολουθεί αυτή των φυσικών αριθμών, σύμφωνα και με τη μελέτη των MacIntosh et al. (1994). Άλλη μία κατηγοριοποίηση που παρατηρείται με κριτήριο την εννοιολογική κατανόηση των παιδιών ή την εφαρμογή τυπικών κανόνων χωρίς να τους κατανοούν είναι ο διαχωρισμός των στρατηγικών σε *εννοιολογικές (conceptual)* και *εργαλειακές (instrumental)*, αντίστοιχα.

Οι Reys et al. (1995) ερεύνησαν τις επιδόσεις μαθητών τάξεων Γ’ και Στ΄ Δημοτικού καθώς και Β΄ Γυμνασίου στην Ιαπωνία σε νοερούς υπολογισμούς καθώς και ποιους τύπους υπολογισμών προτιμούν να κάνουν νοερά και ποιους με χαρτί και μολύβι αλλά και αριθμομηχανή. Παρατήρησαν ότι οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου χρησιμοποιούν αρκετά τη στρατηγική με την αλλαγή αναπαράστασης από μια μορφή του ρητού αριθμού σε άλλη (μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό ή το αντίστροφο). Η τεχνική παρατηρήθηκε τόσο σε πράξεις πρόσθεσης όσο και αφαίρεσης σε δοκίμια αξιολόγησης που χορηγήθηκαν όπως: ½ + ¾ = 0,5+0,75= 1,25. Παρόμοιες απαντήσεις έλαβαν στις συνεντεύξεις που διενήργησαν οι Caney και Watson (2003) σε μαθητές από Γ΄ δημοτικού μέχρι Γ΄ γυμνασίου στην Αυστραλία όπως και οι Λεμονίδης και Καϊάφα (2014) οι οποίοι εξέτασαν κατά πόσο οι μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης στην Ελλάδα κατανοούν τις πράξεις που εκτελούν με ρητούς αριθμούς και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν. Παρατηρήθηκε ότι πολλά παιδιά μετέτρεπαν τον δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα και μετά έκαναν πράξεις με κλάσματα: 4/10 - 0,1 = 4/10 – 1/10= 3/10, ενώ ελάχιστοι από αυτούς απλοποίησαν τα κλάσματα: 8/10 - 0,2= 4/5 – 1/5= 3/5.

Η αλλαγή αναπαραστατικού σχήματος του ρητού αριθμού παρατηρήθηκε και σε πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών από μαθητές πέμπτης Δημοτικού στην Αυστραλία (Caney & Watson, 2003) όπως και από μαθητές πέμπτης και έκτης Δημοτικού στην Ελλάδα (Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014). Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα:

½ x ½ = 0,5 x 0,5 = 0,25 , 1/2 : ¼ = 0,50 : 0,25= 2

Οι ερευνητές τονίζουν ότι η παραπάνω στρατηγική συνδέεται με υψηλό επίπεδο αίσθησης του αριθμού *(number-sense strategy)*, άρα και εννοιολογική κατανόηση.

Η χρήση ισοδύναμων κλασμάτων, χωρίς τη μετατροπή τους σε ομώνυμα, και στη συνέχεια η πραγματοποίηση της πράξης αποτελεί μια ακόμα εννοιολογική στρατηγική. Στις απαντήσεις που έλαβαν οι Caney και Watson (2003) για την πράξη ¾ - ½, μαθητές τετάρτης δημοτικού αναγνώρισαν το ½ ως ισοδύναμο με το 2/4 και στη συνέχεια ολοκλήρωσαν την αφαίρεση.

Άλλη μία στρατηγική που συνεπάγεται καλή αίσθηση του αριθμού είναι η νοερή ή σχηματική αναπαράσταση των αριθμών *(mental picture)*. Η αναπαράσταση μπορεί να είναι κάποιο γεωμετρικό σχήμα (κύκλος) ή αντικείμενα από τον πραγματικό κόσμο (ρολόι, πίτσες, τούρτες, κ.α.) ανάλογα με το τι είναι πιο οικείο για τον κάθε μαθητή. Ενδεικτικά μερικές περιπτώσεις:

- ¾ - ½, τα παιδιά δημιούργησαν μια νοερή εικόνα, δηλαδή ένα ρολόι, το χώρισαν σε τέταρτα, και από τα τρία τέταρτα του ρολογιού αφαίρεσαν το μισό και έμεινε ένα τέταρτο (Caney & Watson, 2003). Στην έρευνα των Λεμονίδη και Καϊάφα (2014), για την πράξη 1 – ¼ ένα μικρό ποσοστό μαθητών ηλικίας 11 ετών σκέφτηκε έναν κύκλο ή μία τούρτα που είναι χωρισμένη σε τέταρτα και αφαίρεσε το ένα από αυτά, οπότε περίσσεψαν 3/4.
- ½ : ¼, τα παιδιά της Στ΄ δημοτικού σκέφτηκαν ότι στη μισή ώρα (30 λεπτά) *χωράνε δύο τέταρτα* (δύο 15λεπτα) σχηματίζοντας ένα απλό ρολόι (Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014).

Οι Carvalho και da Ponte (2013) στην έρευνά τους διαπίστωσαν ότι μαθητές ηλικίας 11 ετών εφαρμόζουν σε μεγάλο βαθμό τη στρατηγική της ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού. Η τεχνική παρατηρείται κυρίως σε προσθέσεις και αφαιρέσεις με στόχο το παιδί να χρησιμοποιήσει *ως βάση τη μονάδα* για να συνεχίσει το συλλογισμό του, δηλαδή: ¾ + 0,5 = (1/4 + 2/4) + ½ = ¼ + 1 = 5/4 ή 0,5+ 0,75 = 0,5+ 0,5+ 0,25 = 1 + 0,25 = 1,25.

Μια παρόμοια τεχνική που καταγράφηκε από τους Caney και Watson (2003) σε έργα πρόσθεσης δεκαδικών αριθμών είναι η στρατηγική *αντιστάθμισης (compensation)*. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται πρώτα στρογγυλοποίηση ενός από τους δυο δεκαδικούς αριθμούς (ή και των δυο) στον πλησιέστερο ακέραιο, ακολουθεί η εύρεση του αποτελέσματος και στο τέλος γίνεται η αφαίρεση του μέρους που προστέθηκε για τη στρογγυλοποίηση. Για παράδειγμα, στην πράξη 3,8 +2,5 στρογγυλοποιείται το 3,8 στον πλησιέστερο ακέραιο δηλαδή το 4, εκτελείται η πράξη με τον ακέραιο 4+2,5= 6,5 και, στη συνέχεια, αφαιρείται από το αποτέλεσμα το 0,2, που ήταν η διαφορά του δεύτερου προσθετέου για να ολοκληρωθεί η στρογγυλοποίηση, οπότε 6,5 – 0,2= 6,3.

Οι Callingham και Watson (2008) επισημαίνουν ότι οι μαθητές επηρεάζονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και μεταφέρουν στρατηγικές από τους νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών σε αντίστοιχα παραδείγματα με δεκαδικούς. Είναι χαρακτηριστικό ότι στη μελέτη τους υπήρχαν μαθητές Στ΄ τάξης που χρησιμοποίησαν στρατηγικές *διαχωρισμού,* σύμφωνα με την αξία θέσης ψηφίου, και *απαρίθμησης,* αν και καλούνταν να απαντήσουν σε νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς. Αναλυτικά μερικά παραδείγματα:

- Με τη στρατηγική του διαχωρισμού: 5,5 – 3,6: 4-3= 1 και 1,5-0,6= 0,9, οπότε συνολικά 1,9.
- Με απαρίθμηση: 2,1 + 0,6: 2,2, 2,3…. ως το τελικό αποτέλεσμα 2,7.

Επιπλέον, είναι συχνή η χρήση *σημείων αναφοράς*, όπως το μισό και το ένα τέταρτο. Έτσι, σε περιπτώσεις πολλαπλασιασμού τα παιδιά στηρίζονται σε επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή σε επαναλαμβανόμενους πολλαπλασιασμούς. Για την πράξη 8 x ¼ , πολλαπλασιάζουν το ¼ 4 φορές βρίσκοντας ένα, και μετά πολλαπλασιάζουν ξανά με το 4 βρίσκοντας αποτέλεσμα 2 (Caney & Watson, 2003).

Σε αρκετές περιπτώσεις οι μαθητές προκειμένου να απαντήσουν γρήγορα στις δραστηριότητες που τους δίνονται, χρησιμοποιούν ήδη γνωστά αριθμητικά γεγονότα *(number facts)* που αφορούν και τις τέσσερις πράξεις. Αναλυτικότερα:

- δυο μισά σχηματίζουν μια μονάδα ½ + ½ = 1 (Carvalho & da Ponte, 2013)
- το 1/10 του 50 είναι το 5 εφόσον το 1/10 του 100 είναι το 10 (Caney & Watson, 2003)

Οι περισσότεροι μελετητές (Caney & Watson, 2003; Callingham & Watson, 2008; Carvalho & da Ponte, 2013; Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014; Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014; Χρήστου, 2015) διαπιστώνουν ότι μαθητές δημοτικού, ακόμη και γυμνασίου, σε δραστηριότητες που αφορούν νοερούς υπολογισμούς, ακολουθούν νοερά την τυπική διαδικασία του εκάστοτε αλγορίθμου, ανάλογα με την πράξη, πολλές φορές μάλιστα ανεπιτυχώς. Αυτό έχει ως συνέπεια τα ποσοστά επιτυχίας να περιορίζονται και οι απαντήσεις να χαρακτηρίζονται εργαλειακές, καθώς οι μαθητές δε μπορούν να ξεφύγουν από τους τυπικούς κανόνες και τη διαδικαστική κατανόηση.

Το φαινόμενο αυτό καταγράφεται κυρίως σε πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Τα παιδιά σε πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης εκτελούν νοερά τους αλγόριθμους ακολουθώντας τη διαδικασία της κάθετης πράξης (π.χ. 3,5 + 2,7 = 6,2). Μία παραλλαγή της τεχνικής αυτής είναι η μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς και στη συνέχεια η νοερή εκτέλεση των αλγόριθμων. Για παράδειγμα: 0,21+0,68, 21+68= 89, οπότε προκύπτει 0,89 (Caney & Watson, 2003). Αντίστοιχη στρατηγική συναντάται και στον πολλαπλασιασμό δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό, για παράδειγμα, στην πράξη 0,8 x 0,6 γίνεται τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών σε κάθετη διάταξη και πραγματοποιείται πολλαπλασιασμός (8 x 6 = 48 και έχω δυο δεκαδικά ψηφία άρα 0,48) (Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014).

Σε πολλαπλασιασμούς ή διαιρέσεις δεκαδικών αριθμών με το 10, το 100 ή το 1000 ή πολλαπλάσια αυτών, οι μαθητές εφαρμόζουν τον κανόνα με τη μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα δεξιά ή τα αριστερά. Ανάλογα με το αν πρόκειται για πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, η υποδιαστολή μετακινείται τόσες θέσεις όσα και τα μηδενικά του αριθμού που εμπλέκεται στην πράξη, είτε πρόκειται για τους 10, 100, 1000 είτε για κάποιο πολλαπλάσιό τους (Caney & Watson, 2003).

Στον πίνακα 1 που ακολουθεί γίνεται η αναλυτική παρουσίαση των στρατηγικών σε πρόσθεση και αφαίρεση.

	Στρατηγική	Περιγραφή	Παραδείγματα	
			Πρόσθεση	Αφαίρεση
1.	Στρατηγική διαχωρισμού	Από δεξιά προς τα αριστερά	3,8+2,5: 0,8+0,5 = 1,3, 3+2= 5, 5 +1,3= 6,3	4,3-2,4: 1,3-0,4= 0,9 3-2=1, 1+0,9=1,9
		Από αριστερά προς τα δεξιά	3,8+2,5: 3+2=5, 0,8+0,5= 1,3 5+1,3= 6,3	4,3-2,4: 3-2= 1, 1,3-0,4= 0,9, 1+0,9=1,9
2.	Στρατηγική συσσώρευσης	Από δεξιά στα αριστερά	3,8+2,5: 3,8+0,5= 4,3 4,3+2= 6,3	4,3-2,4: 4,3-0,4= 3,9, 3,9-2=1,9
		Από αριστερά στα δεξιά	3,8+2,5: 3,8+2= 5,8 5,8+0,5= 6,3	4,3-2,4: 4,3-2= 2,3 2,3-0,4=1,9
3.	Πέρασμα στη δεκάδα		3,8+2,5: 3,8+0,2= 4 4+2,3=6,3	4,3-2,4: 4,3-0,3=4 4-2= 2, 2-0,1=1,9

4.	Μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης		3,8+2,5: 3+2=5 5+0,8=5,8 5,8+0,5=6,3	4,3-2,4: 4-2=2 2+0,3=2,3 2,3-0,4=1,9
5.	Ολιστικές στρατηγικές	Αντιστάθμιση	3,8+2,5: 4+2,5=6,5 6,5-0,2=6,3	4,3-2,4: 4,3-3=1,3 1,3+0,6=1,9
		Εξισορρόπηση	3,8+2,5: 4+2,3= 6,3	4,3-2,4: 4,9-3=1,9
6.	Αρίθμηση	Με μονάδες Με δεκάδες ή άλλους αριθμούς	3,8+2,5: 3,8, 3,9, 4…….6,3 3,8+2,5: 3,8+1= 4,8 4,8+1=5,8 5,8+0,5=6,3	4,3-2,4: 4,3, 4,2, 4,1 …..1,9 4,3-1= 3,3 3,3-1= 2,3 2,3-0,4= 1,9
7.	Νοερή εκτέλεση του τυπικού αλγορίθμου	Εξηγείται η ευθυγράμμιση των δεκαδικών ψηφίων και το κρατύμενο		
8.	Αλλαγή αναπαράστασης	Από κλάσματα σε δεκαδικούς	½+1/4: 0,5+0,25= 0,75 ή ¾	¾-1/2: 0,75-0,5= 0,25 ή ¼
9.	Χρήση ισοδύναμων	Παράγεται από ισοδύναμα	¾+1/2: ¾+ 2/4= 5/4	¾-1/2: ¾-2/4= ¼
10.	Χρήση μιας νοερής εικόνας/ αναπαράστασης *(mental picture)*		½+1/4: Σκέφτονται ένα ρολόι, η μισή ώρα έχει δύο τέταρτα. Προκύπτει ¾.	¾- ½: Σκέφτονται ένα ρολόι, η μισή ώρα έχει δύο τέταρτα. Προκύπτει ¼ .

Πίνακας 1: Στρατηγικές πρόσθεσης/αφαίρεσης σε δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα (Caney & Watson, 2003, σελ. 6)

Στον πίνακα 2 που ακολουθεί γίνεται η αναλυτική παρουσίαση των στρατηγικών σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση για νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς.

	Στρατηγική	Περιγραφή	Παράδειγμα
1.	Αλλαγή πράξης	Από διαίρεση σε πολλαπλασιασμό	4:0,8, αλλαγή σε πολλαπλασιασμό 0,8 x 5= 4
2.	Αλλαγή αναπαράστασης	Από κλάσματα σε δεκαδικούς	½:1/4: γίνεται 0,50:0,25=2
		Από δεκαδικούς σε κλάσματα	0,5x 0,5: γίνεται ½ x ½ = ¼ , δηλαδή 0,25.
3.	Χρήση γνωστών γεγονότων	Παράγεται από ένα γνωστό γεγονός	Το 1/10 του 85: χρησιμοποιείται το 1/10 του 80 που είναι το 8 και του 90 που είναι το 9. Συνεπώς προκύπτει το 8,5.
4.	Επαναλαμβανόμενη Πρόσθεση/ πολλαπλασιασμός	Επαναλαμβανόμενος διπλασιασμός	4 x 3/4: πολλαπλασιάζεται πρώτα το ¾ δύο φορές και μετά άλλες δύο.
		Επαναλαμβανόμενη διχοτόμηση	1/4 x 80: διαιρείται το 80 στο μισό, προκύπτει 40, και μετά πάλι στο μισό και προκύπτει 20.
5.	Απομνημόνευση κανόνων		2,3 x 100= 230 Εφαρμόζεται ο κανόνας «μετακινώ την υποδιαστολή δεξιά».
6.	Χρήση νοερών μορφών του γραπτού αλγορίθμου		1/3: 3/2: Εφαρμόζεται νοερά η τεχνική της διαίρεσης 1/3 x 2/3= 2/9
7.	Χρήση μιας νοερής εικόνας		1:1/2 = 2 Τα παιδιά σκέφτονται ένα ρολόι. 1 ώρα έχει 2 μισάωρα.

Πίνακας 2: Στρατηγικές πολλαπλασιασμού/διαίρεσης σε δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα από τους Caney & Watson (2003, σελ.6).

Συνοψίζοντας, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα ιδιαίτερο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών διότι διαφέρουν σημαντικά από τους φυσικούς αριθμούς με τους οποίους τα παιδιά είναι εξοικειωμένα από μικρή ηλικία. Οι διαφορές αυτές, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις πράξεις με ρητούς αριθμούς και ο εσφαλμένος τρόπος διδασκαλίας των ρητών αριθμών επηρεάζουν σημαντικά τις επιδόσεις των παιδιών που δείχνουν να δυσκολεύονται αρκετά. Τα ευρήματα ελληνικών και διεθνών ερευνών αναδεικνύουν ότι οι μαθητές ηλικίας 8-15 ετών διαθέτουν ένα ευρύ φάσμα στρατηγικών για να ανταποκρίνονται σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς, ωστόσο επειδή είναι επηρεασμένοι από τις προϋπάρχουσες εμπειρίες τους με φυσικούς αριθμούς, μεταφέρουν αρκετές στρατηγικές από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς. Εξαιτίας των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με τους ρητούς αριθμούς δείχνουν να χρησιμοποιούν κυρίως εργαλειακές στρατηγικές και λιγότερο εννοιολογικές που στηρίζονται στην αίσθηση του αριθμού. Άλλο ένα σημείο της μαθηματικής εκπαίδευσης που παρουσιάζει δυσκολίες και αβεβαιότητα στην πλειοψηφία των παιδιών αποτελεί η επίλυση προβλήματος, ιδιαίτερα όταν αυτή συνδυάζεται με νοερούς υπολογισμούς στους ρητούς αριθμούς.

Στο ερευνητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας μεγαλύτερο βάρος θα δοθεί σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς σε πλαισιωμένες και μη δραστηριότητες πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθεί η επίλυση προβλήματος, ο τρόπος λειτουργίας, ο ρόλος του πλαισίου στις δραστηριότητες αλλά και κατά πόσο επηρεάζει την αποτελεσματικότητα στις απαντήσεις που δίνουν τα παιδιά.

3ο Κεφάλαιο: Επίλυση προβλήματος

3.1 Η λειτουργία της επίλυσης προβλήματος

Οι νέες τάσεις που κυριαρχούν στη διδακτική των μαθηματικών και τα νέα αναλυτικά προγράμματα δίνουν έμφαση στο ρόλο της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, η οποία αποτελεί βασικό μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα αποτελεί στόχο στη διδασκαλία των μαθηματικών ήδη από το δημοτικό σχολείο και αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής και κριτικής σκέψης που διαθέτουν (Κολέζα, 2009).

Στα παλαιότερα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια που τα υλοποιούσαν, συνήθως υπήρχαν αναφορές σε στερεοτυπικά προβλήματα. Τέτοια προβλήματα υπήρχαν στα βιβλία των μαθητών στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας και λειτουργούσαν ως μέσο εφαρμογής και εμπέδωσης της διδακτέας ύλης που είχε διδαχθεί στο τέλος κάθε ενότητας του σχολικού βιβλίου (van de Walle, 2007).

Σύμφωνα με τους Hibert et al. (1996, στο van de Walle, 2007), ως πρόβλημα ορίζεται μία δραστηριότητα που εγείρει ανοιχτές ερωτήσεις, προκαλώντας νοητικά κάποιον ο οποίος δεν διαθέτει προδιαγεγραμμένες ή απομνημονευμένες μεθόδους, διαδικασίες και αλγόριθμους που να επιτρέπουν την επίλυσή της. Κατά το NCTM (2000), η επίλυση προβλημάτων οδηγεί στην εννοιολογική κατανόηση, ενισχύει την αίσθηση του αριθμού και δημιουργεί θετικές στάσεις και πεποιθήσεις στα παιδιά καθώς αντιλαμβάνονται και εφαρμόζουν στην πράξη τις μαθηματικές γνώσεις που διδάσκονται.

Ο Polya, ωστόσο, ήταν από τους πρώτους ερευνητές που μελέτησε την επίλυση μαθηματικού προβλήματος θεωρώντας την μια πολύπλοκη διαδικασία (1945, στο van de Walle, 2007). Σύμφωνα με τον ίδιο, η επίλυση προβλημάτων απαιτεί περισσότερες δεξιότητες από την απλή μεταφορά τιμών σε αλγορίθμους και γι' αυτό προσπάθησε να σκιαγραφήσει την πορεία που ακολουθούν οι λύτες με τα ακόλουθα στάδια:

1. *Γλωσσική κατανόηση του προβλήματος*

Πρόκειται για τη συνειδητοποίηση της προβληματικής κατάστασης και την εξοικείωση του μαθητή με το πλαίσιο/συγκείμενο του προβλήματος[5]. Ουσιαστικά, ο μαθητής χρειάζεται αρχικά να κατανοήσει καλά το πρόβλημα, ώστε να αντιληφθεί τις σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα, αν υπάρχουν περιττές ή ελλιπείς πληροφορίες, με τελικό σκοπό να διαπιστώσει τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα. Είναι σημαντικό ο τελικός στόχος να είναι ξεκάθαρος για τον λύτη διότι, αν δεν κατανοήσει σωστά το πρόβλημα, τότε υπάρχουν πολλές πιθανότητες να απαντήσει λανθασμένα.

2. *Κατάστρωση του σχεδίου επίλυσης*

Είναι το σημαντικότερο στάδιο και πολλές φορές απαιτεί πολύ χρόνο. Απαιτείται από τον μαθητή να συνδέσει αλληλοσχετιζόμενες γνώσεις, να κωδικοποιήσει τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του και να προσαρμόσει, ίσως, μια γνωστή διαδικασία σε νέες συνθήκες. Τα παιδιά, συνήθως, εφαρμόζουν στρατηγικές και προσεγγίσεις, ανάλογα με τις εμπειρίες και τις ικανότητες που έχουν ήδη αναπτύξει, για να καταλήξουν σε ένα αποτελεσματικό σχέδιο. Η εκάστοτε στρατηγική λειτουργεί καλύτερα και ευκολότερα, όσο το σενάριο του προβλήματος έχει σχέση με ήδη γνωστές καταστάσεις για τον μαθητή και τα γεγονότα έχουν φυσιολογική σειρά. Σε αντίθετη περίπτωση, υπάρχει αύξηση των λαθών και του χρόνου επίλυσης (Hibert et al., 1996, στο van de Walle, 2007).

Επίσης, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών που διαμορφώνει την ερμηνεία και την κατανόηση των πληροφοριών του προβλήματος είτε διευκολύνοντας, είτε θέτοντας περιορισμούς. Σε αρκετές περιπτώσεις, αν οι μαθητές διαθέτουν ελλιπείς ή εσφαλμένες προϋπάρχουσες γνώσεις (*εννοιολογικά εμπόδια*), δυσκολεύονται να μεταφέρουν μια έννοια στο σενάριο ενός προβλήματος (Schoenfeld, 1992).

3. *Εφαρμογή του σχεδίου λύσης*

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές εκτελούν το σχέδιο λύσης που έχουν σκεφθεί. Το στάδιο της εκτέλεσης θεωρείται το περισσότερο προσδιορισμένο από τα τέσσερα: οι μαθητές εκτελούν τις διαδικασίες που προβλέπονται από το σχέδιο που έχει επινοηθεί και ελέγχουν κάθε βήμα της στρατηγικής που εφαρμόζουν για να αποφύγουν πιθανά λάθη.

[5] Ο ρόλος του πλαισίου θα αναλυθεί διεξοδικά στην επόμενη υποενότητα.

4. *Αναδρομική διερεύνηση*

Το τέταρτο στάδιο περιλαμβάνει την ανασκόπηση της λύσης από το μαθητή ελέγχοντας αν έχει απαντηθεί το αρχικό ερώτημα ή αν μπορεί να γενικευθεί η μέθοδος λύσης και σε άλλα σχετικά προβλήματα. Το στάδιο αυτό είναι πολύ σημαντικό, ωστόσο, συχνά, παραλείπεται τόσο από μαθητές όσο και εκπαιδευτικούς. Έτσι, δεν αξιοποιείται η εμπειρία που προέκυψε από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και οι μαθητές δεν αναπτύσσουν τις μεταγνωστικές δεξιότητές τους.

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί ένα σπουδαίο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών και έχει πολλά οφέλη για τους μαθητές ιδιαίτερα αν συμπεριλαμβάνονται στα προβλήματα και νοεροί υπολογισμοί. Αρκετοί ερευνητές (π.χ., Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014; Δεσλή & Λιόλιου, 2017) προσπάθησαν να εξετάσουν τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της επίλυσης προβλημάτων και κατά πόσο οι δύο έννοιες αλληλοεξαρτώνται.

3.2 Ο ρόλος του πλαισίου σε νοερούς υπολογισμούς

Τα μαθηματικά προβλήματα με σενάριο λειτουργούν ως κινητήριο μέσο για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, τη σύνδεσή τους και την ενασχόληση των παιδιών με μαθηματικά που έχουν νόημα (van de Walle, 2007). Συγκεκριμένα, αποτελούν δραστηριότητες, οι οποίες εξοικειώνουν τους μαθητές με διάφορες μαθηματικές έννοιες μέσω ενός ρεαλιστικού ή μη πλαισίου (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Το πλαίσιο που αναπτύσσεται κατά την εκφώνηση ενός προβλήματος μελετάται από τους μαθητές πριν φτάσουν στην επίλυση, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς τη λειτουργία του και γι’ αυτό αποτελεί εξέχον αντικείμενο μελέτης σε συνάρτηση με τους νοερούς και προσσεγιστικούς υπολογισμούς (Κολέζα, 2009).

Οι Δεσλή και Μυρόβαλη (2014) επιχείρησαν να καταγράψουν τα επίπεδα της αίσθησης του αριθμού καθώς και τις στρατηγικές μαθητών Ε΄ και Στ΄ δημοτικού κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων. Τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν σε δραστηριότητες με και χωρίς πλαίσιο, που περιείχαν προσεγγιστικούς υπολογισμούς με φυσικούς και ρητούς αριθμούς, και αφορούσαν τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, δηλαδή το σχετικό μέγεθος αριθμών, τις διάφορες αναπαραστάσεις αριθμών και πράξεων, τη λογικότητα στις εκτιμήσεις και την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Για παράδειγμα, μία μη πλαισιωμένη δραστηριότητα που αφορούσε τη λογικότητα των εκτιμήσεων ήταν *«Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις πόσο περίπου κάνει 980+812+176;»*, ενώ ένα πρόβλημα πολλαπλών αναπαραστάσεων αριθμών και πράξεων με πλαίσιο ήταν: *«Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη 24 x 25 με το κομπιουτεράκι αυτό;»*

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης επηρεάστηκαν σημαντικά από την ύπαρξη ή όχι πλαισίου. Στις δραστηριότητες χωρίς πλαίσιο τα παιδιά της Ε΄ τάξης έδειξαν να έχουν καλύτερες επιδόσεις. Αντίθετα, για τους μαθητές της Στ΄ τάξης οι επιδόσεις ήταν παρόμοιες στα έργα με και χωρίς πλαίσιο. Άλλο ένα σημαντικό στοιχείο που αναδεικνύεται από τα αποτελέσματα της έρευνας είναι η διαφοροποίηση των στρατηγικών που εφαρμόζουν τα παιδιά ανάλογα με την ύπαρξη πλαισίου ή όχι. Στις δραστηριότητες με πλαίσιο οι μαθητές και των δύο τάξεων χρησιμοποίησαν εργαλειακές στρατηγικές και λιγότερο εννοιολογικές στρατηγικές που στηρίζονται στην αίσθηση του αριθμού σε σχέση με τις δραστηριότητες χωρίς πλαίσιο.

Η μελέτη των Δεσλή και Μυρόβαλη (2014) αφορούσε ουσιαστικά τον ρόλο του πλαισίου σε κατά προσέγγιση υπολογισμούς αναδεικνύοντας ότι η ύπαρξη ή όχι πλαισίου διαφοροποιεί τόσο τις επιδόσεις όσο και τις στρατηγικές των μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης. Στην ίδια κατεύθυνση κινήθηκαν και οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) που μελέτησαν το ρόλο του πλαισίου σε νοερούς υπολογισμούς. Παρατήρησαν ότι τα παιδιά στα έργα με πλαίσιο εφάρμοσαν κυρίως εργαλειακές στρατηγικές και λιγότερο εννοιολογικές. Βέβαια, τα παιδιά που απάντησαν σε πλαισιωμένα και μη προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με φυσικούς αριθμούς, φοιτούσαν στη Γ΄ και Δ΄ τάξη και μπορούσαν να επιλέξουν είτε να εκτελέσουν γραπτούς αλγόριθμους είτε νοερούς υπολογισμούς. Τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ηλικιακών ομάδων δεν διαφοροποιήθηκαν σημαντικά από την ύπαρξη πλαισίου, ενώ δεν επηρεάστηκαν και οι επιλογές των παιδιών μεταξύ γραπτού αλγόριθμου ή νοερού υπολογισμού. Σε όλες τις δραστηριότητες, ανεξάρτητα από το αν υπήρχε ή δεν υπήρχε πλαίσιο, τα παιδιά έδειξαν να στηρίζονται σε τυπικούς κανόνες, διαδικασίες ή στη νοερή εφαρμογή των τυπικών αλγόριθμων με τις εναλλακτικές στρατηγικές να απουσιάζουν σε μεγάλο βαθμό.

Ένα σημαντικό εύρος ερευνών που μελετά τη συγκεκριμένη περιοχή έχει ασχοληθεί και με τα λεκτικά προβλήματα *(word problems)*, τη λειτουργία τους, τα οφέλη τους και σε ποιο βαθμό επηρεάζουν ή όχι τις επιδόσεις των μαθητών. Στη βιβλιογραφία ο όρος λεκτικά προβλήματα προσδιορίζει προβλήματα που παρουσιάζουν της πληροφορίες τους μέσω ενός σεναρίου ή εκφώνησης και όχι καθαρά μαθηματικές πράξεις που πρέπει να υπολογιστεί το αποτέλεσμα (van de Walle, 2007).

Τα λεκτικά προβλήματα συχνά συνδέονται με την επίλυση προβλημάτων στο σχολείο, ωστόσο, αυτή η αντίληψη είναι αρκετά περιορισμένη, μιας και σε πολλά σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν λεκτικά προβλήματα που δεν δημιουργούν προβληματικές καταστάσεις για τους μαθητές. Για παράδειγμα, όταν ζητείται από τα παιδιά να λύσουν ένα λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης και ο αλγόριθμος της αφαίρεσης δίνεται είτε στο σχολικό βιβλίο είτε στον πίνακα της τάξης, τα παιδιά αφαιρούν τους αντίστοιχους αριθμούς και υπολογίζουν τη σωστή απάντηση επειδή γνωρίζουν την αλγοριθμική διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν χωρίς να κατανοούν απαραίτητα τις εμπλεκόμενες έννοιες ή ποσότητες του προβλήματος. Συνεπώς, ένα τέτοιο λεκτικό πρόβλημα λογίζεται ως άσκηση για τα παιδιά που την εκτελούν χωρίς να έχουν ιδιαίτερα οφέλη ή ευκαιρίες για να εφαρμόσουν διαφορετικές στρατηγικές λύσης (Marcus & Fey, 2003).

Οι Elia, van den Heuvel-Panhuizen και Kolovou (2009) θέλησαν να διαπιστώσουν σε ποιο βαθμό συνδέονται οι στρατηγικές, που εφαρμόζουν μαθητές τετάρτης δημοτικού στην Ολλανδία, και η ευελιξία τους με τις επιδόσεις που έχουν σε μη τυποποιημένα λεκτικά προβλήματα *(non-routine problems)*. Οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές με πολύ υψηλές επιδόσεις στο αντικείμενο των μαθηματικών και ιδιαίτερη κλίση σε αυτό. Τα προβλήματα αναφέρονταν σε φυσικούς αριθμούς και απαιτούσαν από τα παιδιά να εφαρμόσουν είτε νοερούς είτε τυπικούς κάθετους υπολογισμούς. Δύο από τα προβλήματα που δόθηκαν ήταν:

«Η Αγγέλα είναι 15 χρονών τώρα και ο Γιάννης 3. Σε πόσα χρόνια θα έχει η Αγγέλα τα διπλάσια χρόνια του Γιάννη;»

«Ο Λίαμ έχει χαρτονομίσματα των 5 και 10 ευρώ. Συνολικά έχει 18 χαρτονομίσματα. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 150 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ έχει ο Λίαμ;»

Αυτό που φάνηκε στα αποτελέσματα της έρευνας είναι ότι τα παιδιά δυσκολεύτηκαν αρκετά να λύσουν τα προβλήματα, αφού μόλις το 20% περίπου ανταποκρίθηκε και στα τρία προβλήματα. Επίσης, οι περισσότερες στρατηγικές που εφαρμόστηκαν ήταν εργαλειακές, γεγονός που εξηγείται από το ότι τα παιδιά δεν ήταν εξοικειωμένα με παρόμοιες προβληματικές καταστάσεις, ενώ φάνηκε αδυναμία ακόμη και στην καταγραφή των δεδομένων κάθε προβλήματος με οργανωμένο τρόπο. Τα παιδιά έδειξαν ότι δε μπορούν να υποστηρίξουν επαρκώς τη σκέψη τους και έδειξαν να μην είναι ευέλικτοι, διότι τα προβλήματα ήταν απαιτητικά και η πλειοψηφία των παιδιών εφάρμοσε τη μέθοδο *της δοκιμής και πλάνης* που αποτελεί παραδοσιακά μια «σταθερή» και ασφαλή μέθοδο που μπορεί να δοκιμαστεί σε κάθε είδους καθημερινό πρόβλημα.

Όπως υποστηρίζει ο Schoenfield (1992), η ικανότητα της ανάγνωσης είναι σημαντική στην αποκωδικοποίηση της εκφώνησης ενός λεκτικού προβλήματος, έτσι ώστε οι μαθητές να κατανοούν τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Στη συνέχεια, οι μαθητές στηριζόμενοι στις μαθηματικές τους γνώσεις και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, προχωρούν στη λύση και δατυπώνουν τη μαθηματική απάντηση. Πολλές φορές όμως, οι μαθητές προσπαθούν απευθείας να μεταφράσουν τις προτάσεις κλειδιά σε υπολογισμούς, με τις πιθανότητες λάθους να αυξάνονται (Schoenfeld, 1992).

Εκτός από την κατανόηση του πλαισίου σημαντικό στοιχείο αποτελεί και η αναγνώριση τη δομής του προβλήματος. Οι Riley και Greeno (1988) όρισαν ως εννοιολογικά σχήματα τις νοητικές αναπαραστάσεις των πληροφοριών του σεναρίου του προβλήματος. Τα σχήματα δηλαδή, περιλαμβάνουν πληροφορίες για το πλαίσιο του προβλήματος, οι οποίες σχετίζονται με τις διαδικασίες επίλυσης (Jonassen, 2003). Για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων οι μαθητές πρέπει να εφαρμόσουν εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος, καθώς φαίνεται ότι οι μαθητές που κατανοούν εννοιολογικά τη δομή ενός προβλήματος είναι και πιο αποτελεσματικοί στις απαντήσεις τους.

Μία ακόμη έρευνα που σχετίζεται με τη βελτίωση των επιδόσεων μαθητών τετάρτης και έκτης δημοτικού σε λεκτικά προβλήματα είναι η μελέτη των Pongsakdi, Laine, Veermans και Hannula-Sormunen (2016). Συγκεκριμένα, πρόκειται για μία διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε σε διάστημα ενός μήνα και περιείχε τόσο αρχική (pre-test) όσο και τελική αξιολόγηση (post-test) σε ένα τυπικό λεκτικό πρόβλημα (routine word problem), τρία μη τυποποιημένα λεκτικά προβλήματα (non-routine problems) και ένα πρόβλημα εφαρμογής (application problem). Με την αρχική αξιολόγηση διαπιστώθηκαν οι δυσκολίες των παιδιών όπως η βιαστική αποκωδικοποίηση δεδομένων στο πλαίσιο των προβλημάτων σε υπολογιστικές πράξεις, η διστακτικότητα για την εφαρμογή εννοιολογικών στρατηγικών σε μη οικείες καταστάσεις και η αδυναμία μεταφοράς της γνώσης σε καθημερινά προβλήματα. Στη συνέχεια, οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες τυχαία: την ομάδα ελέγχου που διδάχθηκε την επίλυση λεκτικών προβλημάτων με τον παραδοσιακό τρόπο και την ομάδα πειραματισμού που διδάχθηκε την επίλυση λεκτικών προβλημάτων από ειδικά καταρτισμένους εκπαιδευτικούς μέσω ενός καινοτόμου προγράμματος διδασκαλίας (Word Problem Enrichment Program, WPE) που φέρνει τα παιδιά πιο κοντά σε πρωτότυπα λεκτικά προβλήματα ή προβλήματα μοντελοποίησης που σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο. Με την τελική αξιολόγηση οι ερευνητές θέλησαν να διαπιστώσουν αν διαφοροποιήθηκαν οι επιδόσεις της ομάδας πειραματισμού με την ομάδα ελέγχου, κάτι που πράγματι συνέβη σε μεγάλο βαθμό. Οι ερευνητές παρατήρησαν ότι τα παιδιά, τόσο της τετάρτης όσο και της έκτης τάξης στην ομάδα πειραματισμού, που ενεπλάκησαν περισσότερο σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις, αφενός έδειξαν μεγαλύτερη ευελιξία στη χρήση στρατηγικών και αφετέρου έδειξαν να έχουν πιο συγκροτημένη σκέψη στη διαχείριση του εκάστοτε πλαισίου και, φυσικά, στην τελική λύση για την εύρεση των ζητούμενων σε σχέση με την ομάδα ελέγχου.

Συνοψίζοντας, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι έρευνες σχετικά με τον ρόλο του πλαισίου σε νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα είναι περιορισμένες. Αξίζει να μελετηθούν οι επιδόσεις και οι στρατηγικές μαθητών και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και αν αυτές διαφοροποιούνται από το αν οι υπολογισμοί αφορούν κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς, με το είδος της πράξης που εμπλέκεται, δηλαδή πρόσθεση ή αφαίρεση και αν επηρεάζονται ή όχι από την ύπαρξη πλαισίου. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας που επιχειρεί να εξετάσει αυτό τον προβληματισμό και τα παραπάνω ερωτήματα.

II. Ερευνητικό Μέρος

4ο Κεφάλαιο: Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Σκοπός – Ερευνητικά ερωτήματα

Βασικός σκοπός της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη της επίδοσης και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές Στ΄ Τάξης αλλά και ενήλικες, σε νοερούς υπολογισμούς, που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, με τη χρήση πλαισίου. Συγκεκριμένα, το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά τον τρόπο με τον οποίο η ύπαρξη ή η απουσία πλαισίου επηρεάζει τους νοερούς υπολογισμούς παιδιών και ενηλίκων σε έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

- Υπάρχουν διαφορές στην επίδοση και τις στρατηγικές μαθητών Στ΄ τάξης αλλά και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς;
- Διαφοροποιούνται οι νοεροί υπολογισμοί των παιδιών και των ενηλίκων ανάλογα με το αν εμπλέκονται κλάσματα ή δεκαδικοί αριθμοί;
- Διαφοροποιούνται οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των συμμετεχόντων ανάλογα με το είδος της πράξης που εμπλέκεται, δηλαδή πρόσθεση ή αφαίρεση;
- Επηρεάζει ή όχι την επίδοση η ύπαρξη πλαισίου;

4.2 Το δείγμα της έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 82 συμμετέχοντες εκ των οποίων το 45,1% ήταν αρσενικού και το 54,9% ήταν θηλυκού φύλου.

Το δείγμα της έρευνας περιείχε δύο ηλικιακές ομάδες με την πρώτη να αποτελείται από 41 μαθητές/ -τριες Στ΄ δημοτικού ηλικίας από 11 χρονών και ενός μήνα έως 12 χρονών και 2 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 11 χρόνια και 9 μήνες. Από τα παιδιά, το 43,9% ήταν αγόρια και το 56,1% κορίτσια. Όλοι/ -ες οι μαθητές/ -

τριες φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της πόλης της Θεσσαλονίκης και προέρχονταν από διάφορα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα.

Οι υπόλοιποι 41 συμμετέχοντες ήταν ενήλικες ηλικίας, από 21 έως και 54 χρονών, με μέσο όρο ηλικίας τα 31 χρόνια και 7 μήνες. Από τους ενήλικες συμμετέχοντες το 46,3% ήταν άντρες, ενώ το 53,7% γυναίκες. Ήταν όλοι κάτοικοι Θεσσαλονίκης, προέρχονταν από διάφορα κοινωνικοοικονομικά στρώματα και το επίπεδο της εκπαίδευσής τους ποικίλει από αποφοίτους γυμνασίου μέχρι και κατόχους διδακτορικού διπλώματος. Αναλυτικά τα στοιχεία σχετικά με το επίπεδο σπουδών φαίνονται στον πίνακα 4.1 που ακολουθεί.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η βολική δειγματοληψία.

Πίνακας 4.1: Επίπεδο εκπαίδευσης των ενηλίκων συμμετεχόντων

	Ποσοστό
Απόφοιτοι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης	4,9%
Απόφοιτοι μεταδευτεροβάθμιων δομών εκπαίδευσης ΙΕΚ ή ΟΑΕΔ	26,8%
Απόφοιτοι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης	48,8%
Κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος	14,6%
Κάτοχοι διδακτορικού διπλώματος	4,9%
Σύνολο	100%

4.3 Σχεδιασμός της έρευνας – Εργαλείο έρευνας

Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα ήταν η δομημένη συνέντευξη. Το περιεχόμενο και οι διαδικασίες στις «συνεντεύξεις» είχαν οργανωθεί εκ των προτέρων και ο ερευνητής είχε περιθώρια ελευθερίας με τη διατύπωση επιπλέον ερωτήσεων για να αντιληφθεί και να καταγράψει το είδος της στρατηγικής που χρησιμοποιούσαν κάθε φορά οι μαθητές ή οι ενήλικες.

Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, σχεδιάστηκαν δύο έργα που περιείχαν δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης με ρητούς αριθμούς και απαιτούσαν νοερούς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, το πρώτο έργο (Έργο 1) αφορούσε 8 δοκιμασίες (4 προσθέσεις και 4 αφαιρέσεις) με κλάσματα, ενώ το δεύτερο έργο (Έργο

2) περιλάμβανε 8 δοκιμασίες (4 προσθέσεις και 4 αφαιρέσεις) με δεκαδικούς αριθμούς. Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να εκτελέσουν νοερά τις πράξεις στις δοκιμασίες που τους δίνονταν χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους μολύβι και χαρτί και, κατόπιν, καλούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν.

Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο έργα αφορούσαν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο όπως γνήσια και μεικτά κλάσματα (π.χ. 1-1/4 και 1-0,25 στο Έργο 1 και στο Έργο 2, αντίστοιχα ή 20 ½ + 10 ¼ και 20,5 – 10,25 στο Έργο 1 και στο Έργο 2, αντίστοιχα). Με τον τρόπο αυτό, το επίπεδο γνωστικής απαίτησης ανάμεσα στα δύο έργα αναφορικά με το μαθηματικό περιεχόμενο των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν διατηρούνταν σταθερό και περιορίστηκε η πιθανότητα να ευνοηθεί η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς.

Προκειμένου να εξεταστεί αν η ύπαρξη πλαισίου επηρεάζει τους νοερούς υπολογισμούς με κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, οι συμμετέχοντες τυχαία, από τις δύο ηλικιακές ομάδες, κατανεμήθηκαν ισάριθμα σε δύο ομάδες (Α και Β). Στην ομάδα Α, το Έργο 1 παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες με πλαίσιο, ως προβλήματα που απαιτούσαν πρόσθεση ή αφαίρεση, ενώ το Έργο 2 παρουσιάστηκε χωρίς πλαίσιο, ως ασκήσεις που αναφέρονταν σε προσθέσεις και αφαιρέσεις. Στην ομάδα Β, το Έργο 1 παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες χωρίς πλαίσιο, ενώ το Έργο 2 με πλαίσιο (Πίνακας 4.2). Όλα τα προβλήματα με πλαίσιο αφορούσαν οικείες καταστάσεις της καθημερινής ζωής των παιδιών και των ενηλίκων. Το πλαίσιο ήταν κοινό και στα δύο έργα, προσπαθώντας να ταιριάζει στη χρήση των δεκαδικών και των κλασματικών αριθμών.

Οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις ήταν ισάριθμα κατανεμημένες στα δύο έργα (4 προσθέσεις και 4 αφαιρέσεις σε κάθε έργο). Στις περιπτώσεις όπου οι δοκιμασίες παρουσιάζονταν με πλαίσιο, οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις ισάριθμα ήταν αλλαγής ή συνδυασμού (Πίνακες 4.3 και 4.4). Οι δοκιμασίες των δύο έργων παρουσιάζονται αναλυτικά στους πίνακες 4.3 και 4.4.

Για να αποφευχθούν φαινόμενα κόπωσης αλλά και να περιοριστούν λάθη κούρασης στις τελευταίες δοκιμασίες, δημιουργήθηκαν δύο σειρές παρουσίασης των έργων: στη σειρά παρουσίασης Α, οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 1 και μετά στο Έργο 2, ενώ στη σειρά παρουσίασης Β οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 2 και έπειτα στο Έργο 1. Επίσης, με την υιοθέτηση διαφορετικής σειράς παρουσίασης των έργων οι συμμετέχοντες δεν θα μπορούσαν εύκολα να συσχετίσουν τα αριθμητικά δεδομένα του Έργου 1 με αυτά του Έργου 2.

<u>Πίνακας 4.2:</u> Οι ομάδες στις οποίες χωρίστηκε το δείγμα αναφορικά με τη χρήση πλαισίου

	Ομάδα Α	Ομάδα Β
Έργο 1	Με πλαίσιο	Χωρίς πλαίσιο
Έργο 2	Χωρίς πλαίσιο	Με πλαίσιο

<u>Πίνακας 4.3:</u> Έργο 1 – Κλασματικοί Αριθμοί

	Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**	**Είδος πράξης**
1.	Η Μαρία αγόρασε μία σοκολάτα από το περίπτερο μόλις σχόλασε από το σχολείο. Η φίλη της, η Ελένη, της ζήτησε ένα μικρό κομματάκι για να δοκιμάσει. Αν το κομμάτι που έφαγε η Ελένη είναι το $\frac{1}{4}$ της σοκολάτας, τι μέρος της σοκολάτας έχει απομείνει στη Μαρία;	$1 - \frac{1}{4}$	Αφαίρεση αλλαγής
2.	Ο Αποστόλης κάθε πρωί που πηγαίνει σχολείο κάνει μία στάση στον φούρνο της γειτονιάς του για να αγοράσει ένα κουλούρι. Η απόσταση από το σπίτι του μέχρι τον φούρνο είναι $\frac{1}{2}$ του χιλιομέτρου και από τον φούρνο μέχρι το σχολείο $\frac{3}{4}$ του χιλιομέτρου. Πόση απόσταση διανύει από το σπίτι του μέχρι το σχολείο καθημερινά;	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	Πρόσθεση συνδυασμού
3.	Η μαμά του Πέτρου αγόρασε $\frac{3}{4}$ του κιλού	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$	Αφαίρεση αλλαγής

	φέτα. Το απόγευμα έβαλε το $\frac{1}{2}$ του κιλού φέτα στην τυρόπιτα που έφτιαξε. Πόση φέτα περίσσεψε;		
4.	Για τα ψώνια του Σαββάτου ο Δημήτρης μαζί με τη μητέρα του πλήρωσαν 20 $\frac{1}{2}$ ευρώ στο σούπερ μάρκετ και 10 $\frac{1}{4}$ ευρώ στο κρεοπωλείο. Πόσα χρήματα ξόδεψαν συνολικά;	$20\frac{1}{2} + 10\frac{1}{4}$	Πρόσθεση συνδυασμού
5.	Η Σοφία πήρε από τον μπαμπά της 3 $\frac{1}{2}$ ευρώ για χαρτζιλίκι. Η γιαγιά της της έδωσε άλλα 2 $\frac{1}{2}$ ευρώ. Πόσα χρήματα είχε συνολικά η Σοφία;	$3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$	Πρόσθεση αλλαγής
6.	Ο Γιώργος και ο Τάσος είναι αδέλφια και έχουν ένα κτήμα με ελαιόδεντρα στην Καλαμάτα. Φέτος παρήγαγαν συνολικά 4 τόνους λαδιού, όμως αποφάσισαν να χωρίσουν την παραγωγή. Αν ο Γιώργος έχει 1 $\frac{1}{2}$ τόνο λάδι, τι ποσότητα λαδιού θα πάρει ο Τάσος;	$4 – 1\frac{1}{2}$	Αφαίρεση συνδυασμού
7.	Ο Κυριάκος αγόρασε ένα ολόκληρο κέικ σοκολάτας. Η Έφη αγόρασε και αυτή ένα ίδιο ολόκληρο κέικ σοκολάτας. Δίνει το $\frac{1}{4}$ του δικού της κέικ στον Κυριάκο. Τι ποσότητα κέικ έχει τώρα ο Κυριάκος;	$1 + \frac{1}{4}$	Πρόσθεση αλλαγής
8.	Ο κύριος Ωραιόπουλος είναι ιδιοκτήτης δύο φούρνων. Συνολικά για τους δύο φούρνους	$20\frac{1}{2} - 10\frac{1}{4}$	Αφαίρεση συνδυασμού

	χρειάζεται 20 $\frac{1}{2}$ τόνους αλεύρι. Αν για τον ένα φούρνο χρειάζεται 10 $\frac{1}{4}$ τόνους αλεύρι, πόσους τόνους χρειάζεται για τον άλλο φούρνο;		

<u>Πίνακας 4.4:</u> Έργο 2 – Δεκαδικοί Αριθμοί

	Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**	**Είδος πράξης**
1.	Η μητέρα της Μαργαρίτας αγόρασε 1 μέτρο ύφασμα. Χρησιμοποίησε 0,25 μέτρα του υφάσματος για να ράψει ένα κασκόλ. Πόσα μέτρα υφάσματος έχουν περισσέψει;	1 - 0,25	Αφαίρεση αλλαγής
2.	Ο Αποστόλης κάθε πρωί που πηγαίνει σχολείο κάνει μία στάση στον φούρνο της γειτονιάς του για να αγοράσει ένα κουλούρι. Η απόσταση από το σπίτι του μέχρι τον φούρνο είναι 0,5 χιλιόμετρα και από τον φούρνο μέχρι το σχολείο 0,75 χιλιόμετρα. Πόση απόσταση διανύει από το σπίτι του μέχρι το σχολείο καθημερινά;	0,5 + 0,75	Πρόσθεση συνδυασμού
3.	Η μαμά του Πέτρου αγόρασε 0,75 κιλά φέτα. Το απόγευμα έβαλε τα 0,5 κιλά φέτα στην τυρόπιτα που έφτιαξε. Πόση φέτα περίσσεψε;	0,75 – 0,5	Αφαίρεση αλλαγής
4.	Για τα ψώνια του Σαββάτου ο Δημήτρης μαζί με τη μητέρα του πλήρωσαν 20,5 ευρώ στο σούπερ μάρκετ και 10,25 ευρώ στο κρεοπωλείο. Πόσα χρήματα ξόδεψαν συνολικά;	20,5 + 10,25	Πρόσθεση συνδυασμού
5.	Η Σοφία πήρε από τον μπαμπά της 3,5 ευρώ για χαρτζιλίκι. Η γιαγιά της της έδωσε άλλα 2,5 ευρώ. Πόσα χρήματα είχε συνολικά η	3,5 + 2,5	Πρόσθεση αλλαγής

	Σοφία;		
6.	Ο Γιώργος και ο Τάσος είναι αδέλφια και έχουν ένα κτήμα με ελαιόδεντρα στην Καλαμάτα. Φέτος παρήγαγαν συνολικά 4 τόνους λαδιού, όμως αποφάσισαν να χωρίσουν την παραγωγή. Αν ο Γιώργος έχει 1,5 τόνο λάδι, τι ποσότητα λαδιού θα πάρει ο Τάσος;	4 – 1,5	Αφαίρεση συνδυασμού
7.	Ο Κυριάκος έχει μια συσκευασία πορτοκαλάδας του ενός λίτρου και η αδερφή του, η Ιωάννα, του δίνει μία ακόμη συσκευασία των 0,25 λίτρων. Πόσα λίτρα πορτοκαλάδας έχει τώρα ο Κυριάκος;	1 + 0,25	Πρόσθεση αλλαγής
8.	Ο κύριος Ωραιόπουλος είναι ιδιοκτήτης δύο φούρνων. Συνολικά για τους δύο φούρνους χρειάζεται 20,5 τόνους αλεύρι. Αν για τον ένα φούρνο χρειάζεται 10,25 τόνους αλεύρι, πόσους τόνους χρειάζεται για τον άλλο φούρνο;	20,5 - 10,25	Αφαίρεση συνδυασμού

4.4 Διαδικασία

Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε έναν χώρο όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να συγκεντρωθούν και να εκφραστούν ελεύθερα. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και εθελοντική χωρίς να συνδέεται με την αξιολόγηση των μαθητών στα σχολικά μαθήματα ή το μάθημα των μαθηματικών.

Ο ερευνητής είχε αρχικά μία τυπική γνωριμία με τον κάθε συμμετέχοντα (όνομα, ημερομηνία γέννησης, επίπεδο σπουδών στους ενήλικες). Στη συνέχεια οι δοκιμασίες παρουσιάζονταν στους συμμετέχοντες σε καρτέλες με λευκό χαρτί, κάθε μία σε ξεχωριστή καρτέλα. Οι συμμετέχοντες δεν είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι και έπρεπε να υπολογίσουν νοερά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις που τους παρουσιάζονταν. Μετά την παρουσίαση κάθε καρτέλας, ο ερευνητής έθετε ερωτήσεις στους συμμετέχοντες σχετικά με τον τρόπο σκέψης τους και τη διαδικασία που ακολούθησαν για να καταλήξουν στην τελική απάντηση. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων καταγράφονταν σε ειδικό πρωτόκολλο που σχεδιάστηκε για τους σκοπούς της έρευνας (βλ. παράρτημα).

Όλη η διαδικασία διήρκησε περίπου 15΄-20΄ για κάθε συμμετέχοντα.

5ο Κεφάλαιο: Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας θα παρουσιαστούν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο το οποίο αποτελείται από πέντε ενότητες. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζεται η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα, φύλο, σειρά παρουσίασης (Α και Β) και ομάδα (Α και Β). Στη δεύτερη ενότητα εξετάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στα έργα (Έργο 1 για κλάσματα και Έργο 2 για δεκαδικούς αριθμούς). Στην τρίτη και τέταρτη ενότητα περιγράφονται, αντίστοιχα, οι επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων στις δοκιμασίες με και χωρίς πλαίσιο καθώς και σε αυτές που αφορούν στην πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Τέλος, στην πέμπτη ενότητα αναλύονται οι στρατηγικές των συμμετεχόντων, η συχνότητα χρήσης τους ανά ηλικιακή ομάδα. Ακόμη ελέγχονται οι συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση στρατηγικών και την επίδοση των συμμετεχόντων.

Για τη στατιστική ανάλυση των απαντήσεων χρησιμοποιήθηκε το IBM SPSS Statistics 23.0. Η κωδικοποίηση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τον εξής τρόπο:

- με τιμή 1 αν πρόκειται για την ομάδα Α και με τιμή 2 αν πρόκειται για την ομάδα Β,
- με τιμή 0 για κάθε λανθασμένη απάντηση και με την τιμή 1 για κάθε σωστή απάντηση,
- με τιμή 1 αν ο συμμετέχοντας ήταν αρσενικού φύλου και με τιμή 2 αν ήταν θηλυκού φύλου,
- ως προς το επίπεδο σπουδών των ενηλίκων, με τιμή 1 αν ήταν απόφοιτοι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με τιμή 2 αν ήταν απόφοιτοι μεταδευτεροβάθμιων δομών εκπαίδευσης όπως ΙΕΚ ή ΟΑΕΔ, με τιμή 3 αν ήταν απόφοιτοι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, με τιμή 4 αν ήταν κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος και με τιμή 5 αν ήταν κάτοχοι διδακτορικού διπλώματος,
- καταγραφόταν αναλυτικά η ημερομηνία γέννησης κάθε συμμετέχοντα σε μήνες, ανεξάρτητα από το αν ήταν παιδί ή ενήλικας.

5.1 Γενική επίδοση

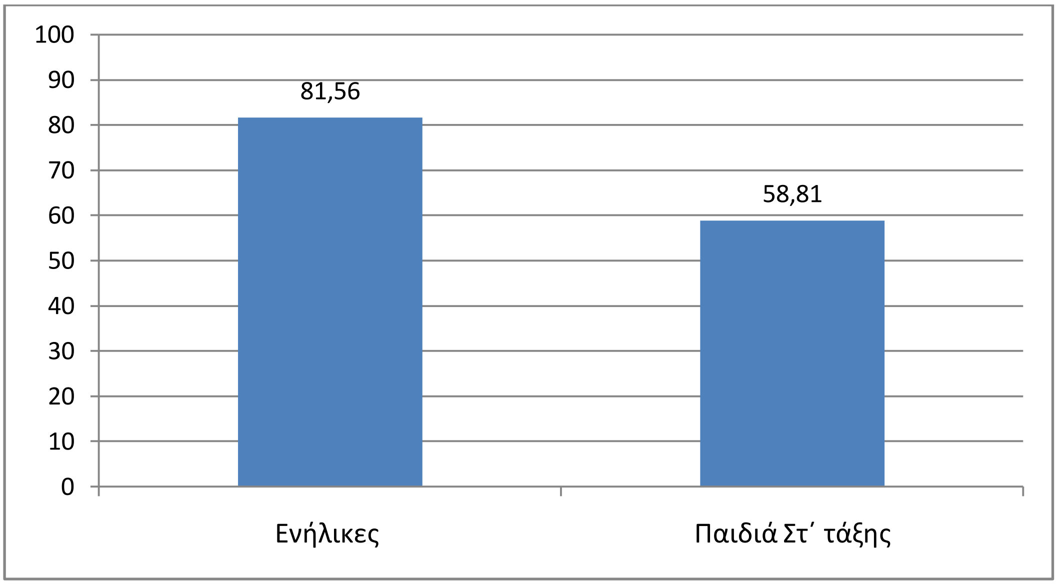
Ο μέσος όρος της γενική επίδοσης του δείγματος είναι 11,23 (70,19%).

5.1.1 Επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα

Προκειμένου να εξεταστεί αν διαφοροποιείται η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή τους ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοσή τους ($t= -4{,}140$, $df= 80$, $p< .01$). Συγκεκριμένα, οι ενήλικες είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση (81,56%) από τους μαθητές της Στ΄ τάξης (58,81%). Το Σχήμα 5.1 που ακολουθεί περιγράφει τα στοιχεία αυτά.

Σχήμα 5.1

Επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα



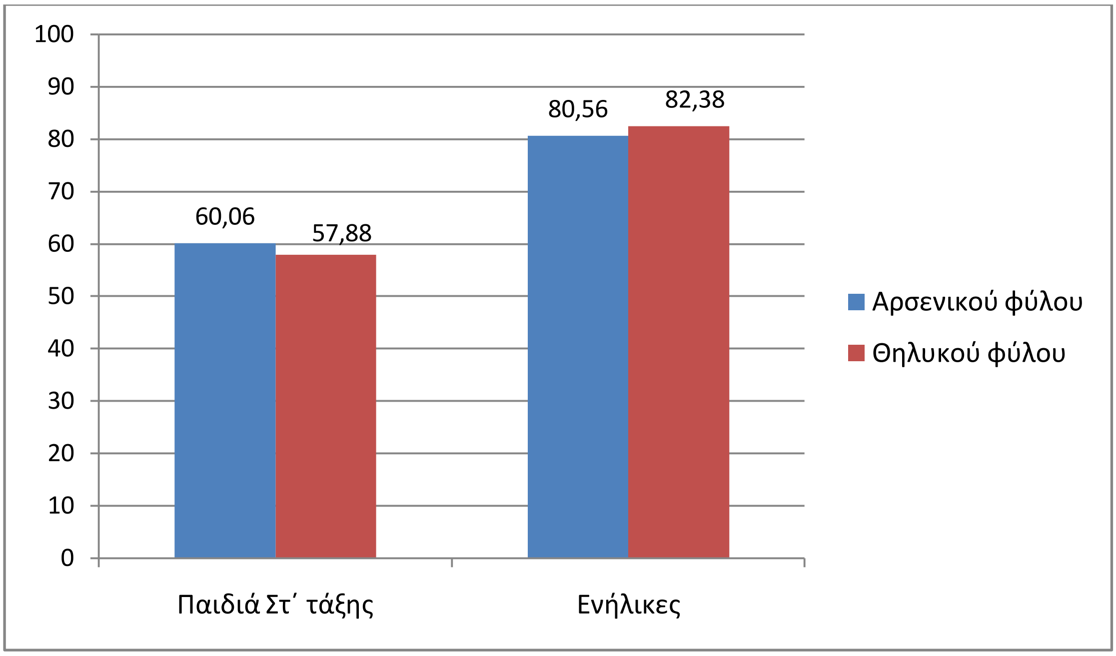
5.1.2 Επίδοση ως προς το φύλο

Για να εξεταστεί αν η επίδοση στο σύνολο των έργων διαφέρει ως προς το φύλο, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($t= ,123$, $df= 80$, $p= .902$), δηλαδή τόσο οι συμμετέχοντες όσο και οι συμμετέχουσες παρουσίασαν παρόμοια ποσοστά επίδοσης

(70,63% και 69,88%, αντίστοιχα). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Το φύλο δεν βρέθηκε να επηρεάζει στατιστικά σημαντικά ούτε τους μαθητές της Στ΄ τάξης (t= ,244, df= 39, p= .808) ούτε τους ενήλικες (t= -,269, df= 39, p= .789). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2.

Σχήμα 5.2

Επίδοση ως προς το φύλο στις δύο ηλικιακές ομάδες



5.1.3 Επίδοση ως προς τη σειρά παρουσίασης

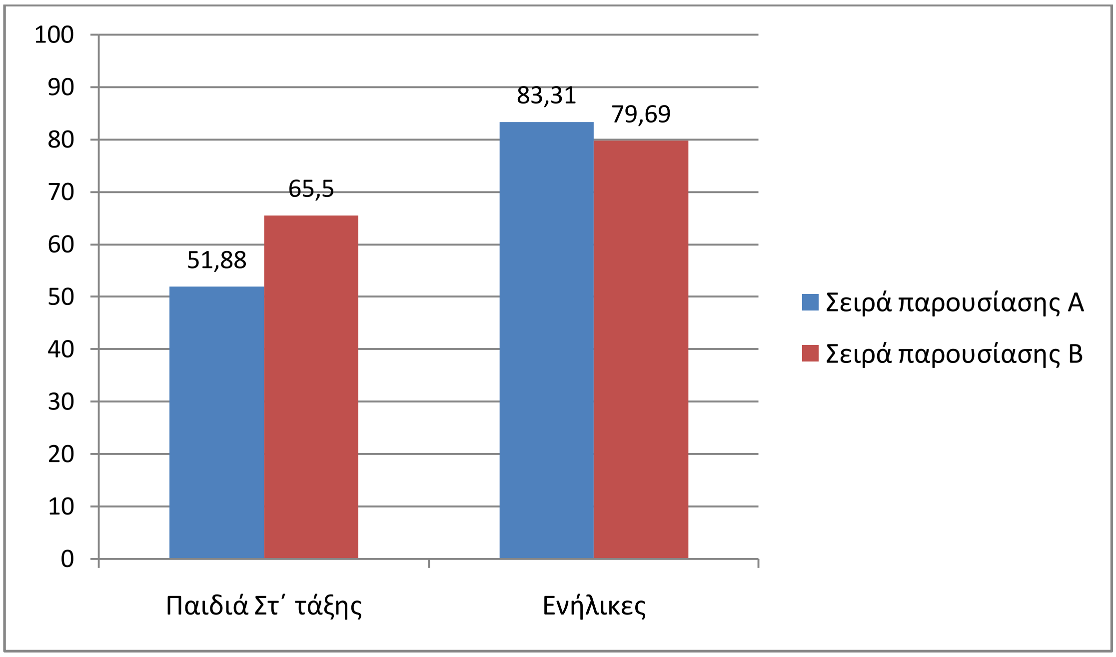
Προκειμένου να διερευνηθεί αν η επίδοση του δείγματος διαφέρει ως προς τη σειρά παρουσίασης που δόθηκαν τα έργα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (t= -,734, df= 80, p= .465), δηλαδή οι συμμετέχοντες που κλήθηκαν να απαντήσουν τόσο στα έργα με τη σειρά παρουσίασης Α[6] όσο και στα έργα με τη σειρά παρουσίασης Β [7] σημείωσαν παρόμοια ποσοστά επίδοσης (68% και 72,44%, αντίστοιχα). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Η σειρά παρουσίασης των δύο έργων δεν βρέθηκε να

[6] Οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 1 και μετά στο Έργο 2.
[7] Οι συμμετέχοντες απαντούσαν πρώτα στο Έργο 2 και έπειτα στο Έργο 1.

επηρεάζει στατιστικά σημαντικά ούτε τους μαθητές της Στ΄ τάξης (t= -1,576, df= 39, p= .123) ούτε τους ενήλικες (t= ,549, df= 39, p= .586). Συνολικά τα παραπάνω δεδομένα φαίνονται στο Σχήμα 5.3 που ακολουθεί.

Σχήμα 5.3

Επίδοση ως προς τη σειρά παρουσίασης των έργων στις δύο ηλικιακές ομάδες



5.1.4 Επίδοση ανά ομάδα

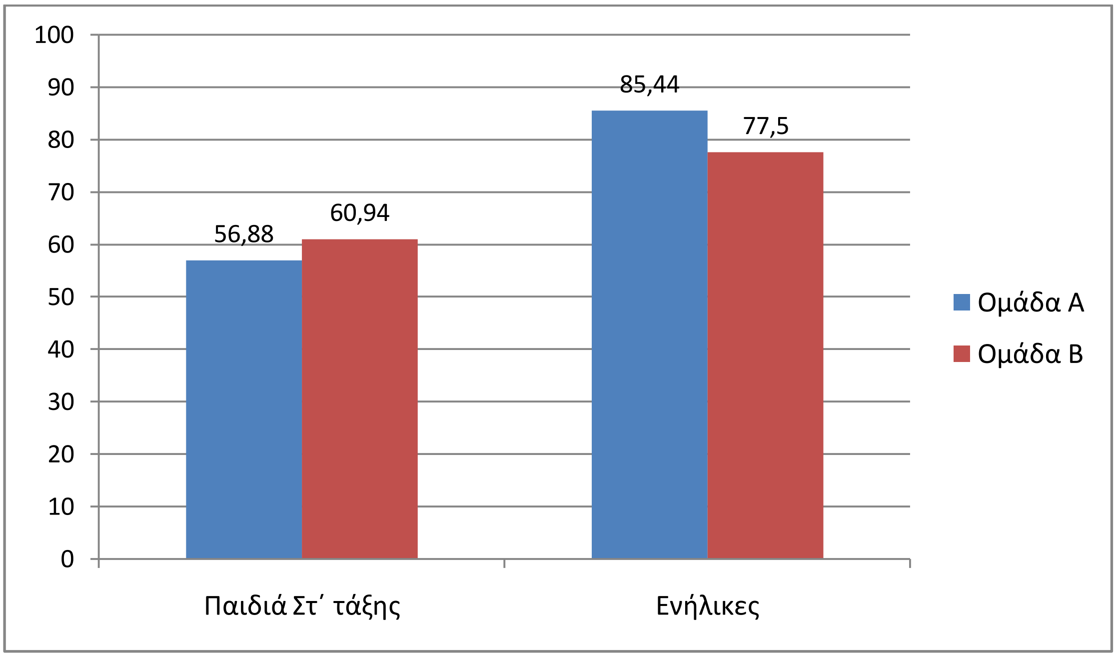
Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση του δείγματος στο σύνολο των έργων επηρεάζεται από την ομάδα στην οποία οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν τυχαία, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων γίνεται εμφανές πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση του δείγματος ανά ομάδα (t= ,316, df= 80, p= .753). Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες που ανήκουν στην ομάδα Α[8] και οι συμμετέχοντες που ανήκουν στην ομάδα Β [9] σημείωσαν παρόμοια ποσοστά επίδοσης (71,13% και 69,25%, αντίστοιχα). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Οι ομάδες που τυχαία

[8] Το Έργο 1 παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες με πλαίσιο, ως προβλήματα, ενώ το Έργο 2 παρουσιάστηκε χωρίς πλαίσιο, ως ασκήσεις.
[9] Το Έργο 1 παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες χωρίς πλαίσιο, ενώ το Έργο 2 με πλαίσιο.

κατανεμήθηκαν οι συμμετέχοντες δεν βρέθηκαν να επηρεάζουν στατιστικά σημαντικά ούτε τους μαθητές της Στ΄ τάξης ($t= -,461$, $df= 39$, $p= .647$) ούτε τους ενήλικες ($t= 1,210$, $df= 39$, $p= .233$). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.4.

Σχήμα 5.4

Επίδοση ως προς την ομάδα παρουσίασης στις δύο ηλικιακές ομάδες

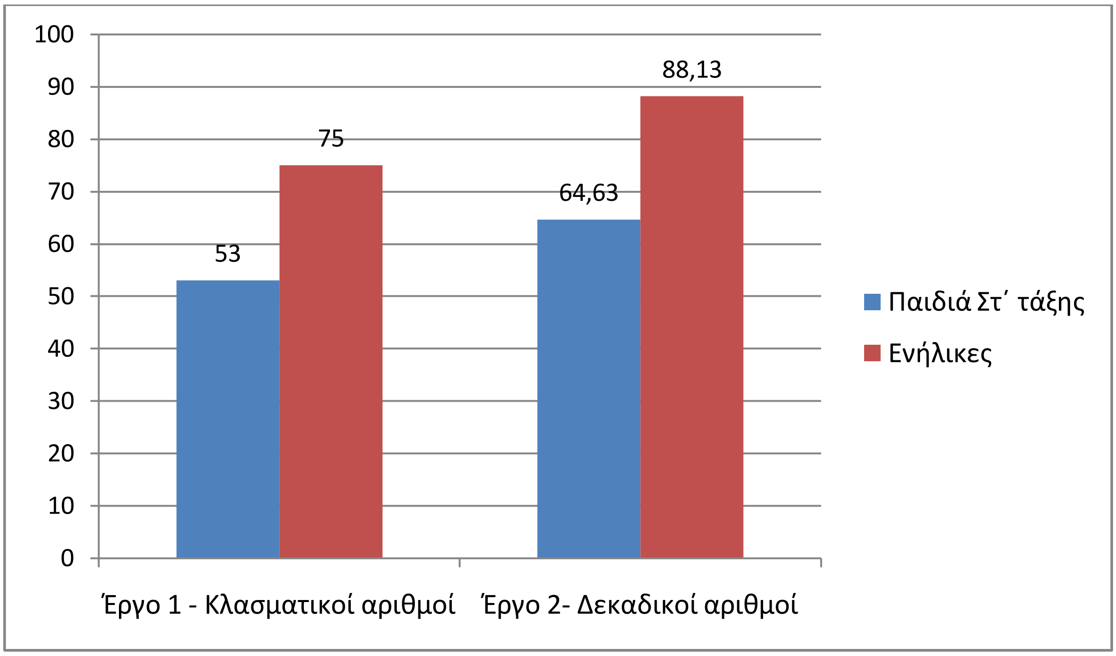


5.2 Επίδοση στα έργα

Για να διαπιστωθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων επηρεάζεται από το έργο, δηλαδή αν τα πηγαίνουν καλύτερα οι συμμετέχοντες στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς (Έργο 1) ή σε αυτές με δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2), πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοσή τους ως προς το έργο ($t= -4,157$, $df= 81$, $p< .001$). Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2, 76,38%) σε σχέση με τις δοκιμασίες που αφορούσαν κλασματικούς αριθμούς (Έργο 1, 64%). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Το είδος του έργου βρέθηκε να επηρεάζει στατιστικά σημαντικά τους μαθητές της Στ΄ τάξης ($t= -2,399$, $df= 40$, $p< .05$) και τους ενήλικες (t= -3,726, df= 40, p< .01). Και για τις δύο ηλικιακές ομάδες, οι δοκιμασίες του Έργου 2 που αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς (64,63% και 88,13% για τα παιδιά της Στ΄ τάξης και τους ενήλικες, αντίστοιχα) φάνηκαν να είναι στατιστικά σημαντικά ευκολότερες από τις δοκιμασίες του Έργου 1 που αφορούσαν κλασματικούς αριθμούς (53% και 75% για τα παιδιά της Στ΄ τάξης και τους ενήλικες, αντίστοιχα). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.5 που ακολουθεί.

Σχήμα 5.5

Επίδοση στα έργα ως προς την ηλικιακή ομάδα

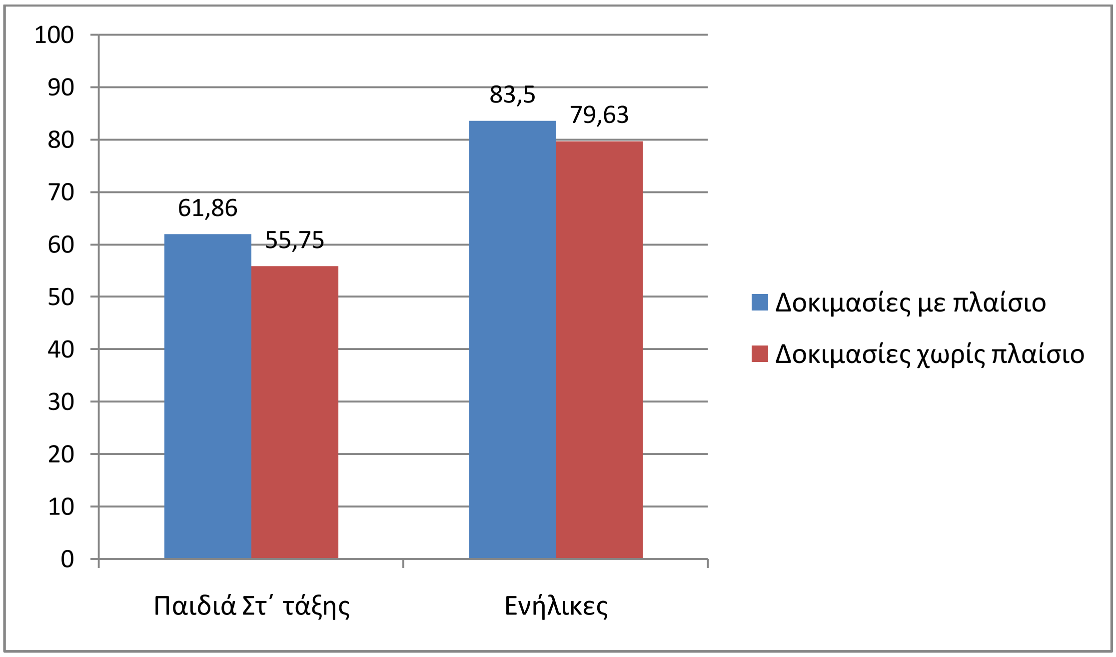


5.3 Επίδοση ανάλογα με την ύπαρξη ή την απουσία πλαισίου

Με σκοπό να διερευνηθεί αν η παρουσία του πλαισίου στις δοκιμασίες που καλούνταν να απαντήσουν οι συμμετέχοντες επηρεάζει τη συνολική επίδοσή τους, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φαίνεται πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με πλαίσιο και σε αυτές χωρίς πλαίσιο (t= 1,561, df= 81, p= .123). Αναλυτικότερα, το ποσοστό επίδοσης των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με πλαίσιο (72,68%) ήταν παρόμοιο με το ποσοστό επίδοσης στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (67,68%). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Η ύπαρξη πλαισίου δεν έδειξε να επηρεάζει στατιστικά σημαντικά κάποια από τις δύο ηλικιακές ομάδες, είτε τα παιδιά ($t= 1,202$, $df= 40$, $p= .237$) είτε τους ενήλικες ($t= 0,982$, $df= 40$, $p= .332$). Τα παραπάνω δεδομένα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.6.

Σχήμα 5.6

Επίδοση ως προς την παρουσία πλαισίου και την ηλικιακή ομάδα



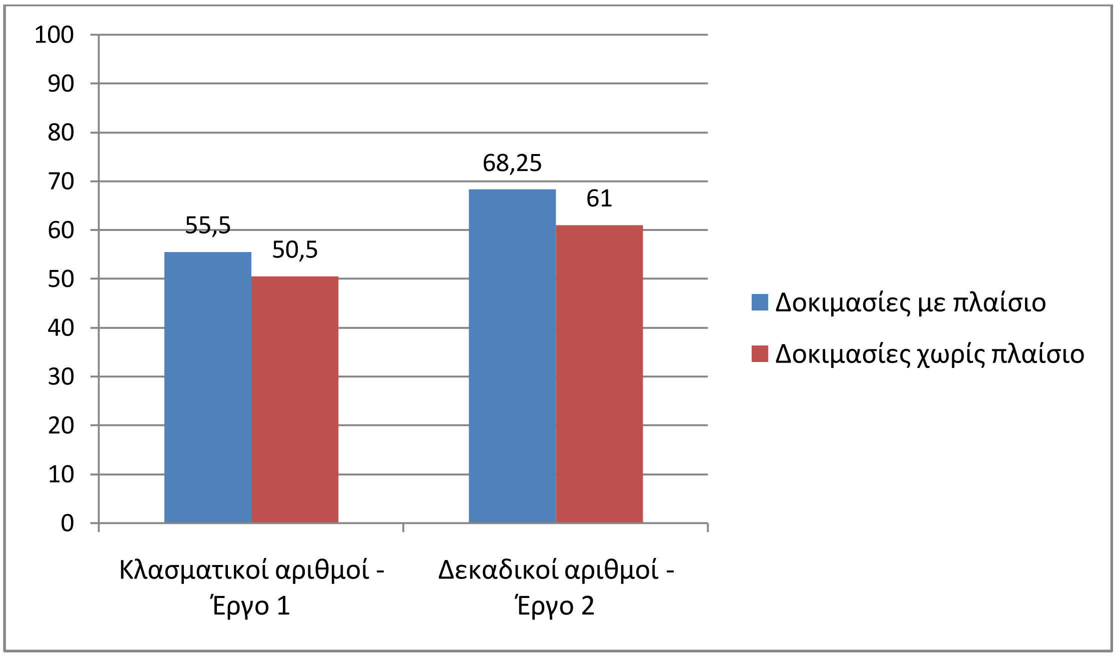
5.3.1 Η επίδοση στις δοκιμασίες με πλαίσιο στο Έργο 1 και Έργο 2

Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων ξεχωριστά στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς (Έργο 1) και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2) επηρεάζεται από την ύπαρξη πλαισίου ή όχι, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Όταν η επίδραση πλαισίου εξετάστηκε ξεχωριστά για κάθε έργο, βρέθηκε ότι δεν επηρεάζει ούτε στο Έργο 1 ($t= ,651$, $df= 81$, $p= .517$) ούτε στο Έργο 2 ($t= -,017$, $df= 81$, $p= .987$). Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες είχαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς που παρουσιάστηκαν με πλαίσιο (69,25%) και σε αυτές χωρίς πλαίσιο (58,75%). Παρόμοια, στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς η επίδοση των συμμετεχόντων δεν διαφοροποιήθηκε από το αν αυτές παρουσιάστηκαν με ή χωρίς πλαίσιο (76,25% και 76,5%, αντίστοιχα).

Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Η ύπαρξη πλαισίου δεν βρέθηκε να επηρεάζει στατιστικά σημαντικά τους μαθητές της Στ΄ τάξης ούτε στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς ($t= ,245$, $df= 40$, $p= .808$) ούτε στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς ($t= ,326$, $df= 40$, $p= .746$). Παρόμοια, ούτε οι ενήλικες επηρεάστηκαν από την ύπαρξη πλαισίου στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς ($t= ,631$, $df= 40$, $p= .532$ και $t= -,278$, $df= 40$, $p= .782$, αντίστοιχα). Όλα τα στοιχεία παρουσιάζονται αναλυτικά στα σχήματα 5.7 και 5.8 παρακάτω.

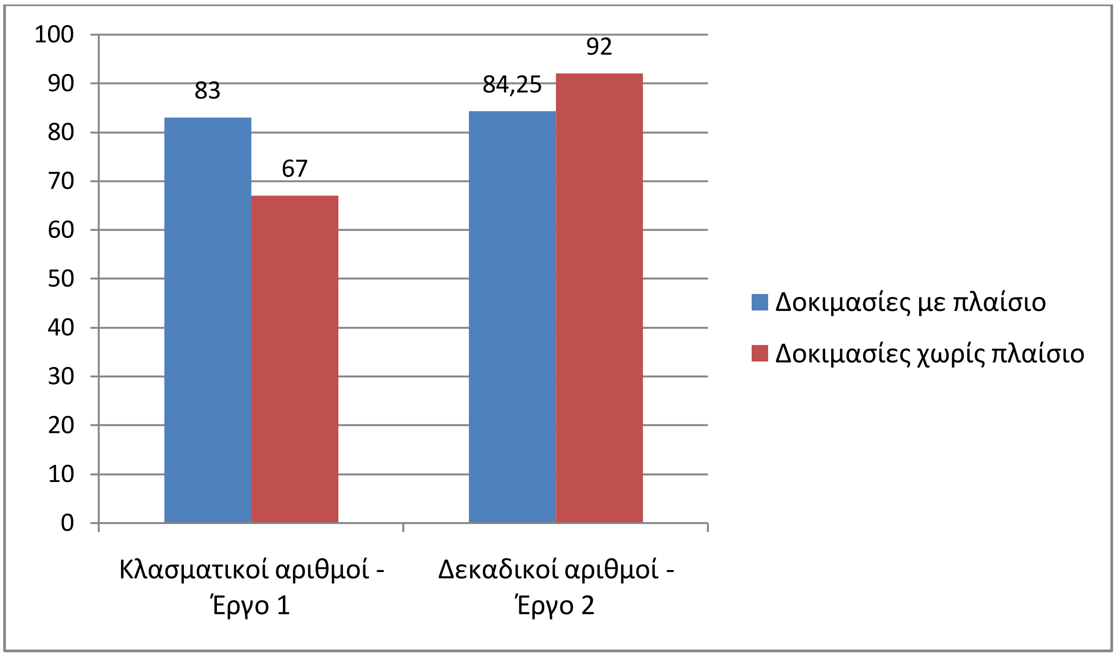
Σχήμα 5.7

Η επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης ως προς την ύπαρξη πλαισίου και το είδος έργου



Σχήμα 5.8

Η επίδοση των ενηλίκων ως προς την ύπαρξη πλαισίου και το είδος έργου

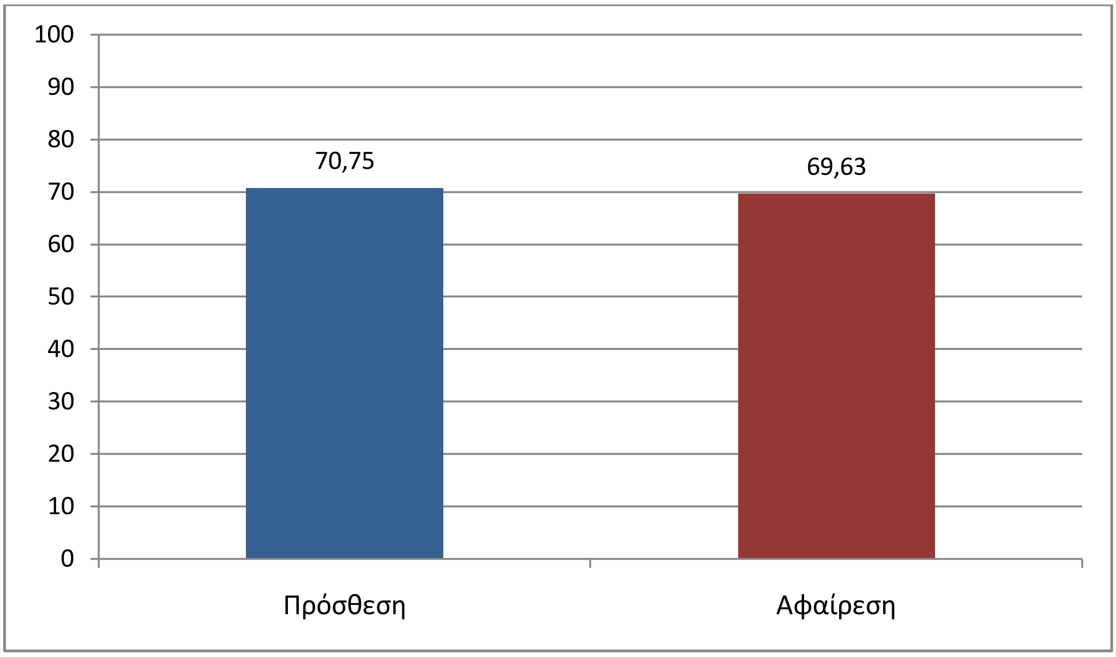


5.4 Επίδοση ως προς το είδος της αριθμητικής πράξης

Προκειμένου να ελεγχθεί αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση του δείγματος συνολικά στις δοκιμασίες πρόσθεσης και σε αυτές της αφαίρεσης, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Η αριθμητική πράξη δεν επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επιτυχία στους νοερούς υπολογισμούς ($t= ,533$, $df= 81$, $p= .596$), με τα ποσοστά επιτυχίας σε πρόσθεση και αφαίρεση να είναι παρόμοια (70,75% και 69,63%, αντίστοιχα). Στη συνέχεια, ο ίδιος έλεγχος πραγματοποιήθηκε και για κάθε έργο ξεχωριστά ώστε να ελεγχθεί αν ευνοείται κάποια από τις δύο πράξεις. Από τα αποτελέσματα δεν βρέθηκε κάποια από τις πράξεις να ευνοείται είτε στα κλάσματα (Έργο 1, $t= 1,043$, $df= 81$, $p= .300$) είτε στους δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2, $t= -,435$, $df= 81$, $p= .664$). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.9 και 5.10.

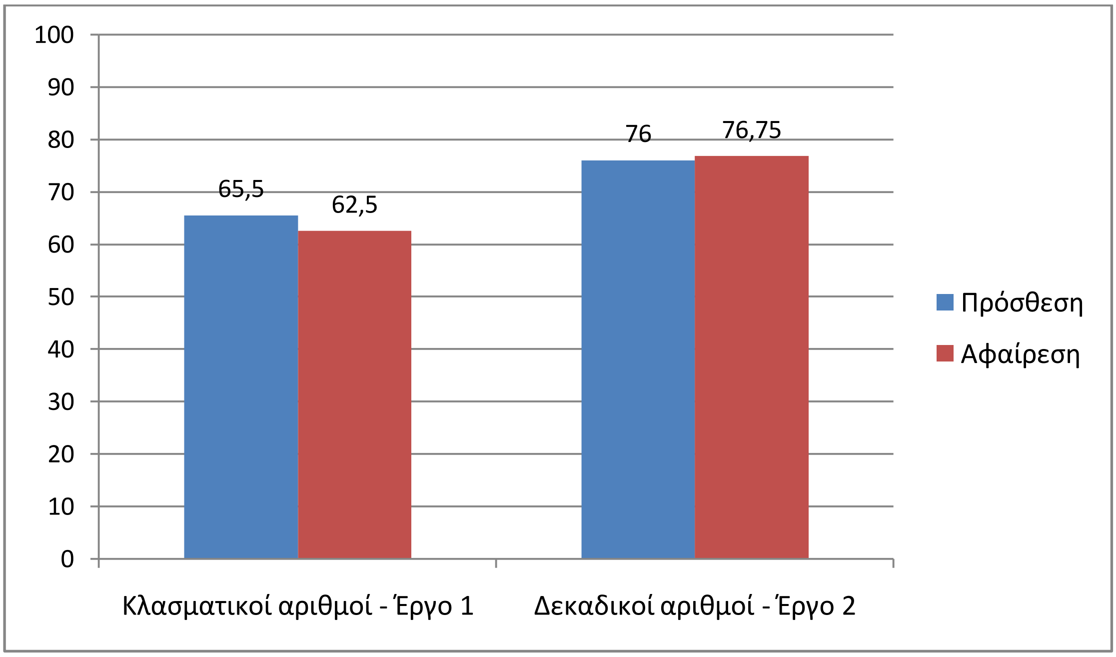
Σχήμα 5.9

Συνολική επίδοση ως προς το είδος της πράξης



Σχήμα 5.10

Συνολική επίδοση ως προς το είδος της πράξης στα δύο έργα

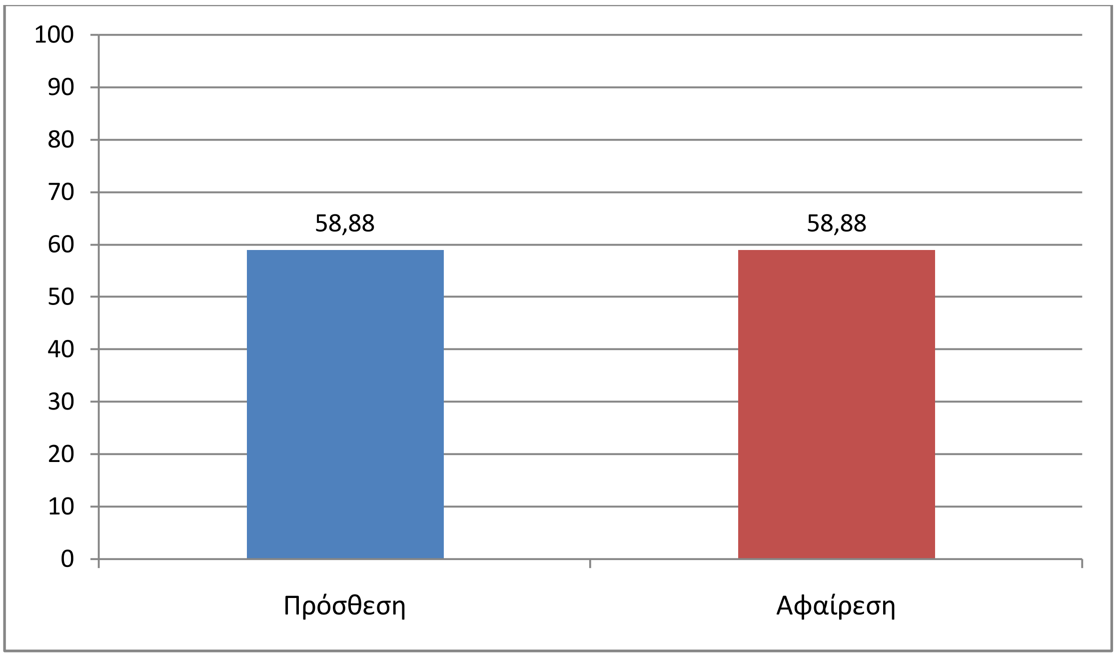


5.4.1 Επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης ως προς το είδος της πράξης

Με σκοπό να διερευνηθεί αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη συνολική επίδοση των μαθητών της Στ΄ τάξης στις δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Η αριθμητική πράξη δεν επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επιτυχία των παιδιών στους νοερούς υπολογισμούς (t= ,000, df= 40, p= 1.000), με το ποσοστό επιτυχίας σε πρόσθεση και αφαίρεση να είναι το ίδιο (58,88%). Η ίδια διαδικασία πραγματοποιήθηκε και για κάθε έργο ξεχωριστά ώστε να ελεγχθεί αν ευνοείται κάποια από τις δύο πράξεις στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς. Δεν βρέθηκε κάποια από τις πράξεις να ευνοείται είτε στα κλάσματα (Έργο 1, t= ,573, df= 40, p= .570) είτε στους δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2, t= - ,681, df= 40, p= .499). Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.11 και 5.12.

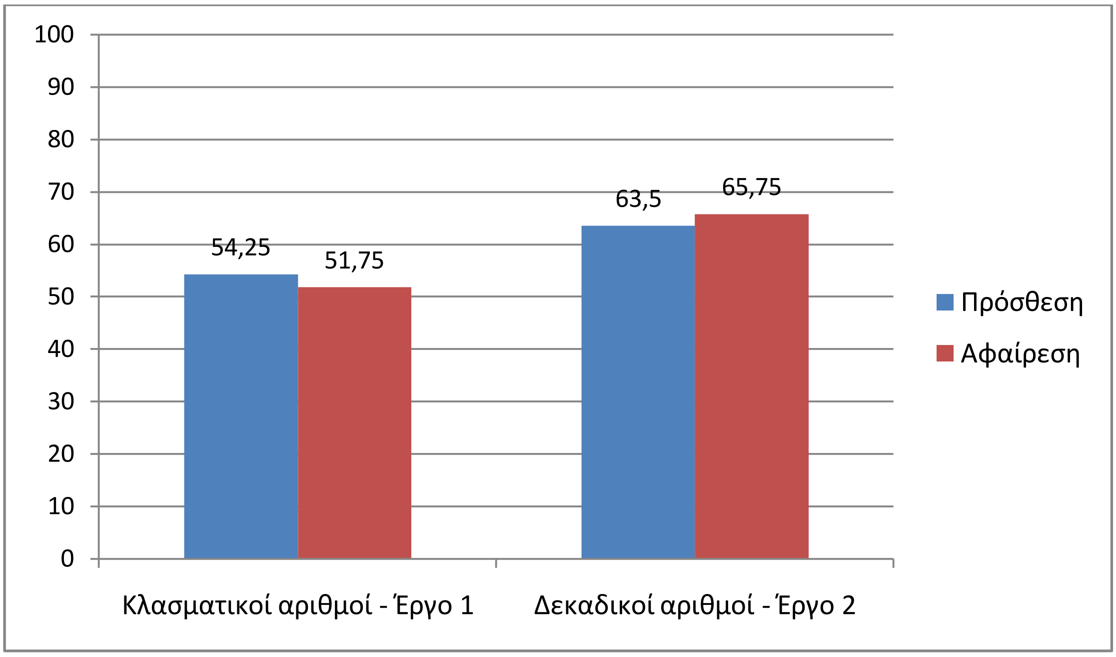
Σχήμα 5.11

Επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης ως προς το είδος της πράξης



Σχήμα 5.12

Επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης ως το είδος της πράξης στα δύο έργα

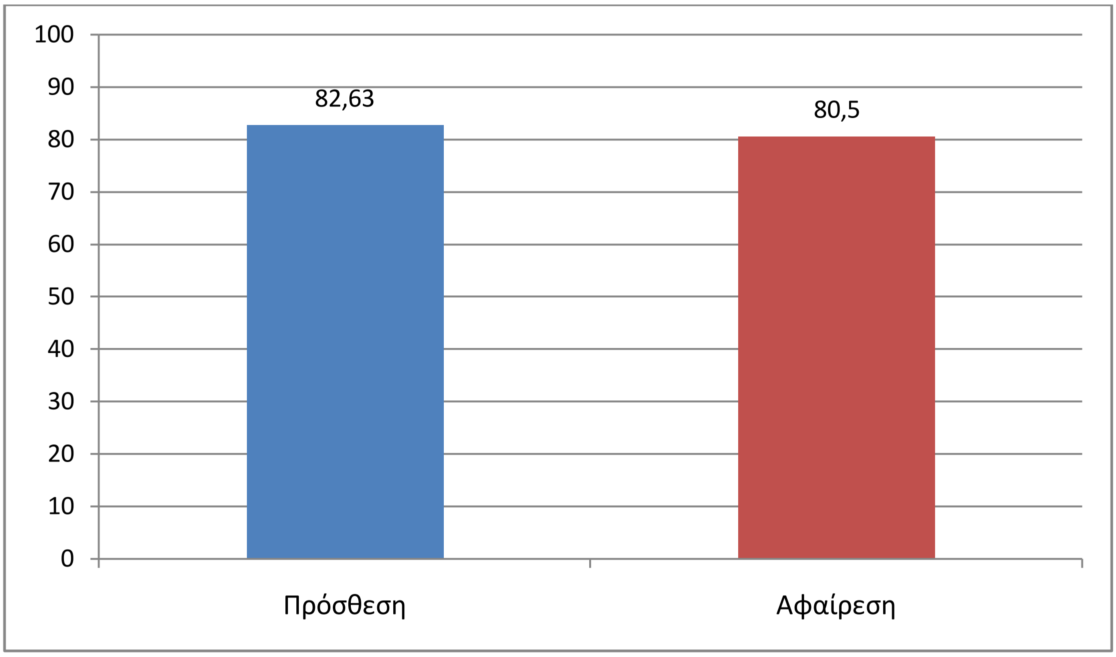


5.4.2 Επίδοση των ενηλίκων ως προς το είδος της πράξης

Προκειμένου να ελεγχθεί αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη συνολική επίδοση των ενηλίκων στις δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Τα ποσοστά επιτυχίας των ενηλίκων στις δοκιμασίες πρόσθεσης (82,63%) ήταν παρόμοια με αυτά στις δοκιμασίες αφαίρεσης (80,5%) (t= ,980, df= 40, p= .333). Κατόπιν, ο ίδιος έλεγχος πραγματοποιήθηκε και για κάθε έργο ξεχωριστά, ώστε να ελεγχθεί αν οι ενήλικες σημειώνουν καλύτερο ποσοστό επιτυχίας σε κάποια από τις δύο πράξεις στις δοκιμασίες με κλάσματα και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το είδος της πράξης δεν επηρεάζει την επίδοση των ενηλίκων ούτε στα κλάσματα (Έργο 1, t= ,902, df= 40, p= .372) ούτε στους δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2, t= ,274, df= 40, p= .785). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.13 και 5.14 που ακολουθούν.

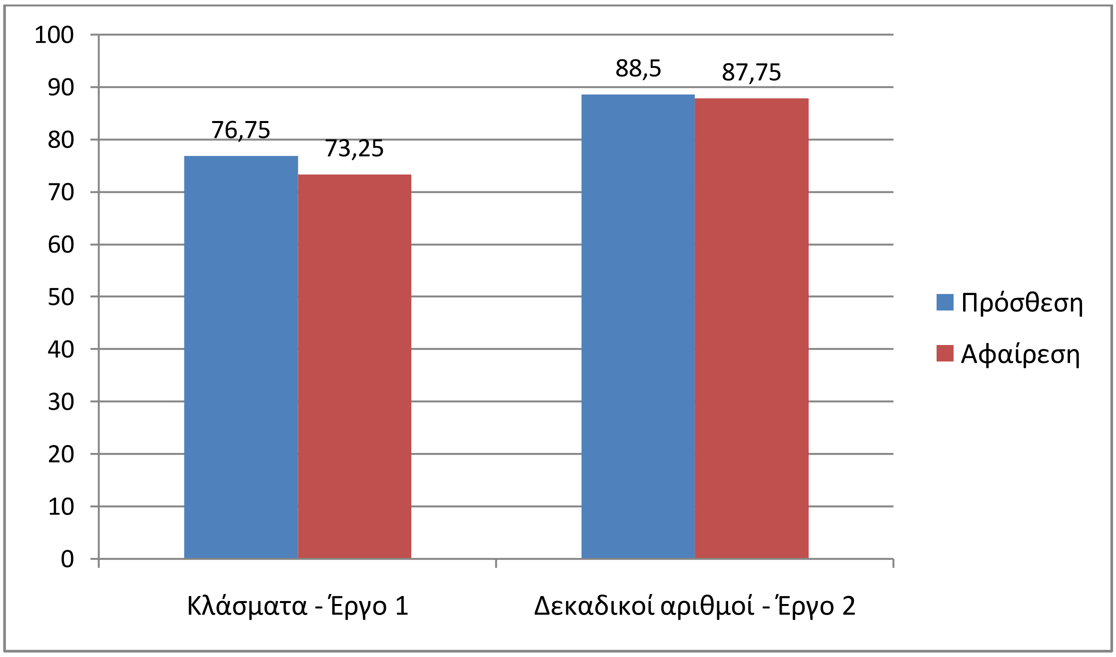
Σχήμα 5.13

Επίδοση των ενηλίκων ως προς το είδος της πράξης



Σχήμα 5.14

Επίδοση των ενηλίκων ως προς το είδος της πράξης στα δύο έργα

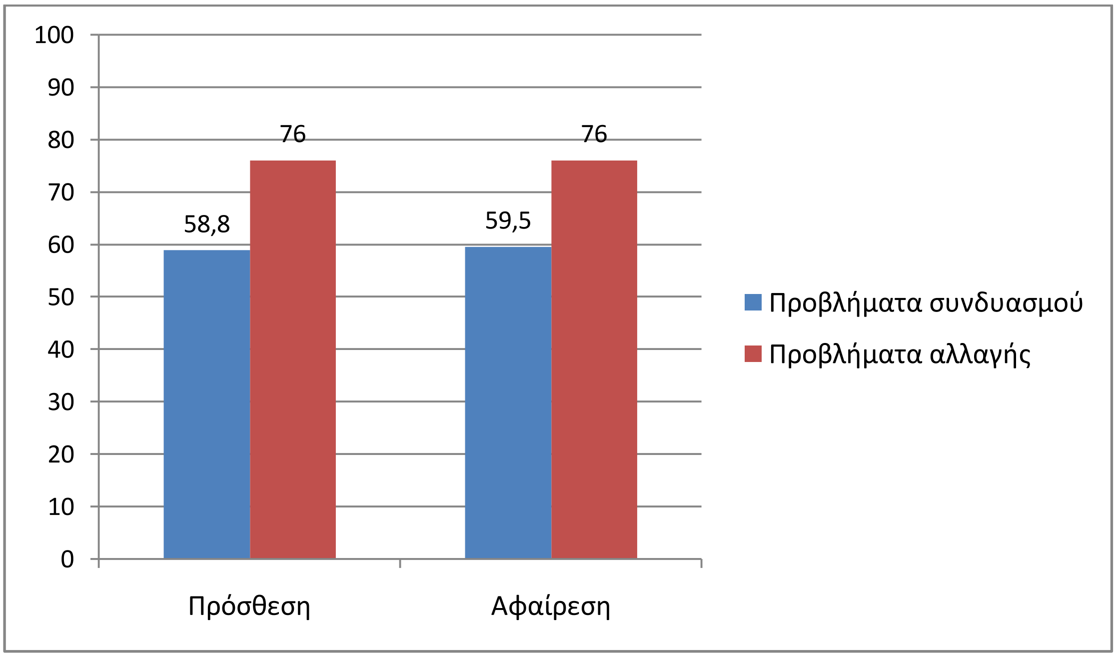


5.4.3 Επίδοση ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος (συνδυασμού ή αλλαγής) στο Έργο 1(κλασματικοί αριθμοί)

Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση του δείγματος στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς (Έργο 1) επηρεάζεται από τον τύπο του προβλήματος (συνδυασμού ή αλλαγής), πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Από τη στατιστική ανάλυση βρέθηκε ότι στο Έργο 1 (κλασματικοί αριθμοί) παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση ανάμεσα στις δοκιμασίες που αφορούν πρόσθεση συνδυασμού και σε αυτές που αφορούν πρόσθεση αλλαγής ($t= -3{,}528$, $df= 41$, $p< .01$). Αντίστοιχα, στατιστικά σημαντικές διαφορές παρατηρήθηκαν και στην επίδοση στις δοκιμασίες με αφαίρεση συνδυασμού και αφαίρεση αλλαγής ($t= -3{,}322$, $df= 41$, $p< .01$). Συνολικά στα προβλήματα τύπου αλλαγής, τόσο στην πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση, παρατηρήθηκε να αποδίδουν καλύτερα οι συμμετέχοντες από ό,τι στα προβλήματα συνδυασμού. Το Σχήμα 5.15 απεικονίζει τα στοιχεία αυτά.

Σχήμα 5.15

Συνολική επίδοση στα κλάσματα (Έργο 1) ως προς το είδος της πράξης και τον τύπο του προβλήματος

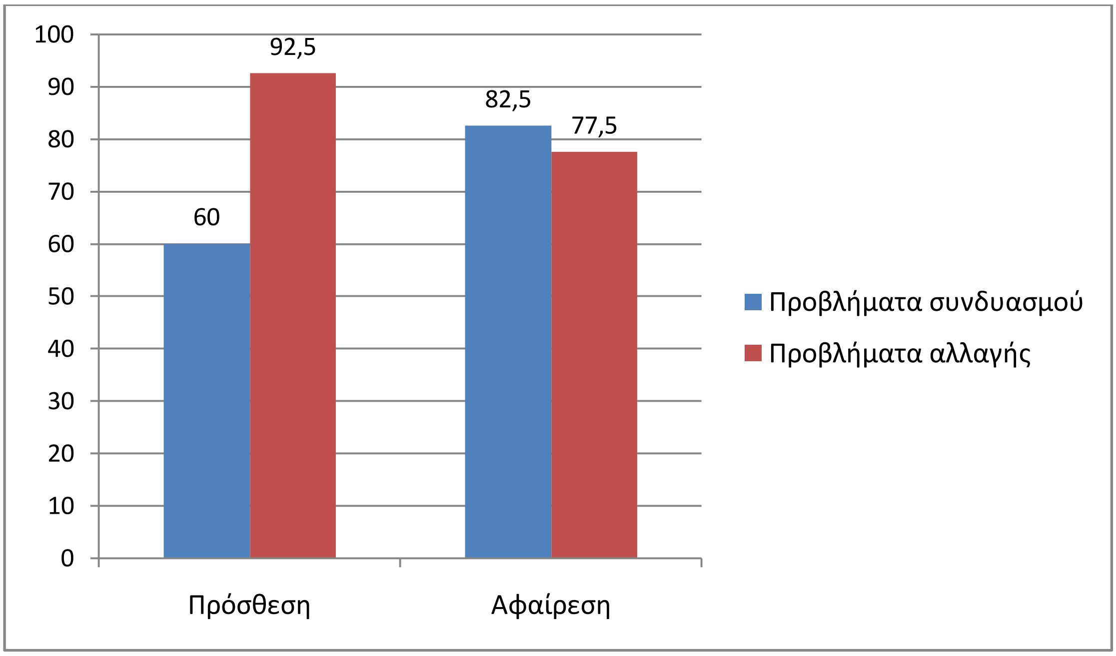


5.4.4 Επίδοση ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος (συνδυασμού ή αλλαγής) στο Έργο 2 (δεκαδικοί αριθμοί)

Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση του δείγματος στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2) επηρεάζεται από τον τύπο του προβλήματος (συνδυασμού ή αλλαγής), πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Από τη στατιστική ανάλυση βρέθηκε ότι στο Έργο 2 (δεκαδικοί αριθμοί) παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση ανάμεσα στις δοκιμασίες που αφορούν πρόσθεση συνδυασμού και σε αυτές που αφορούν πρόσθεση αλλαγής ($t= -4,604$, $df= 39$, $p< .01$). Δηλαδή, στους δεκαδικούς αριθμούς οι συμμετέχοντες σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις σε προβλήματα πρόσθεσης τύπου αλλαγής από ό,τι σε προβλήματα πρόσθεσης τύπου συνδυασμού. Αντίθετα, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση στις δοκιμασίες με αφαίρεση συνδυασμού και αφαίρεση αλλαγής ($t= 1,160$, $df= 39$, $p< .253$). Ουσιαστικά, ο τύπος προβλήματος δεν επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων σε προβλήματα αφαίρεσης στους δεκαδικούς αριθμούς. Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στο σχήμα 5.16.

Σχήμα 5.16

Συνολική επίδοση στους δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2) ως προς το είδος της πράξης και τον τύπο του προβλήματος



5.5 Στρατηγικές των συμμετεχόντων

5.5.1 Ανάλυση στρατηγικών

Από όλους τους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από το αν οι απαντήσεις τους ήταν σωστές ή λανθασμένες ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Οι απαντήσεις τους αυτές έδειχναν τις στρατηγικές που ακολούθησαν και ταξινομήθηκαν στις παρακάτω έξι κατηγορίες:

1. «Δεν ξέρω». Οι απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία προήλθαν από συμμετέχοντες που απάντησαν ότι δεν ξέρουν πώς υπολόγισαν το αποτέλεσμα του νοερού υπολογισμού ή ότι απλά έτσι το βρήκαν.

2. «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητές και παρονομαστές». Όσοι εφάρμοσαν τη συγκεκριμένη στρατηγική για να φτάσουν στο εκάστοτε αποτέλεσμα έκαναν πράξεις ξεχωριστά για τους αριθμητές και τους παρονομαστές (π.χ., ½ + ¾ = 4/6, 20 ½ + 20 ¼ = 30 2/6).

3. «Γραπτός αλγόριθμος». Η στρατηγική αυτή παρουσιάστηκε από συμμετέχοντες που εφάρμοσαν νοερά τον τυπικό γραπτό αλγόριθμο. Όταν αιτιολογούσαν τις απαντήσεις τους, απαντούσαν πως έκαναν τη γραπτή πράξη στο μυαλό τους όπως θα την έκαναν με χαρτί και μολύβι.

4. «Μετατροπές». Η στρατηγική αυτή περιλαμβάνει διάφορα είδη μετατροπών των αρχικών αριθμών για τους οποίους ζητήθηκαν οι νοεροί υπολογισμοί είτε αφορούσαν κλάσματα είτε δεκαδικούς αριθμούς. Περιέχει τις υποκατηγορίες **4.1 «Μετατροπές των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς»** και **4.2 «Μετατροπές των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, μετατροπές των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς και πράξεις με φυσικούς αριθμούς»**. Αναλυτικά, οι υποκατηγορίες είναι:

4.1.1 «Διαχωρισμός». Η στρατηγική αυτή αναφέρεται στον διαχωρισμό των αριθμών σε ακέραιο και δεκαδικό μέρος και στη συνέχεια, στον υπολογισμό ξεχωριστά των δύο μερών από αριστερά προς τα δεξιά (π.χ., 20 ½ + 10 ¼ = 20,5+10,25: 20+10=30, 0,5+0,25=0,75, 30+0,75= 30,75 ή 30 3/4).

4.1.2 «Συσσώρευση». Τη στρατηγική της συσσώρευσης χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες που ξεκίνησαν με έναν αριθμό και εκτέλεσαν την πράξη διαχωρίζοντας τον άλλο αριθμό σε ακέραιο και δεκαδικό μέρος (π.χ., 20 ½ + 10 ¼ = 20,5+10,25: 20,5+0,25= 20,75, 20,75+10=30,75 ή 30 3/4)

4.1.3 «Πέρασμα στη δεκάδα». Οι συμμετέχοντες σχημάτιζαν σε έναν από τους δύο αριθμούς το συμπλήρωμα του 10, ώστε να γίνει ευκολότερος ο υπολογισμός (π.χ., ½ + ¾ = 0,5+0,75: 0,5+0,5=1, 1+0,25=1,25).

4.1.4 «Νοερή εικόνα αλγόριθμου». Στη συγκεκριμένη στρατηγική οι συμμετέχοντες, αφού μετέτρεπαν τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς, εκτελούσαν νοερά τον γραπτό αλγόριθμο.

4.2.1 «Διαχωρισμός». Υπάρχει διαχωρισμός των αριθμών σε ακέραιο και δεκαδικό μέρος και στη συνέχεια, στον υπολογισμό ξεχωριστά των δύο μερών από αριστερά προς τα δεξιά (π.χ., 20 ½ + 10 ¼ = 20,5+10,25: 20+10=30, 50+25=75, οπότε 30,75 ή 30 3/4).

4.2.2 «Συσσώρευση». Όσοι εφάρμοσαν τη στρατηγική της συσσώρευσης ξεκίνησαν με έναν αριθμό και εκτέλεσαν την πράξη διαχωρίζοντας τον άλλο αριθμό σε ακέραιο και δεκαδικό μέρος (π.χ., 4-1 ½ = 4-1,5: 40-5=35, 35-10=25 δηλαδή 2,5).

4.2.3 «Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης». (π.χ., ½ + ¾ = 0,5+0,75: 50+50=100, 100+25=125, δηλαδή 1,25). Τη στρατηγική *«αλλαγή πράξης»* χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες που άλλαξαν την πράξη που είχε στην αρχή ο υπολογισμός εργαζόμενοι με την αντίθετη πράξη (π.χ., 1-1/4= 1-0,25= 100-25: 25+75=100, οπότε 0,75).

4.2.4 «Νοερή εικόνα αλγόριθμου». Όσοι εφάρμοσαν τη συγκεκριμένη στρατηγική, αφού μετέτρεπαν τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και τους δεκαδικούς αριθμούς σε φυσικούς αριθμούς, εκτελούσαν νοερά τον γραπτό αλγόριθμο.

5. «Νοερές αναπαραστάσεις». Στη στρατηγική αυτή οι λύτες διάλεξαν να στηριχτούν σε δικές τους αναπαραστάσεις που νοηματοδοτούσαν τους αριθμούς του υπολογισμού. Πρόκειται για μια εννοιολογική στρατηγική (π.χ., 1-1/4: «σκέφτομαι να έχω μία τούρτα την οποία χωρίζω σε 4 μέρη, αν πάρεις εσύ το ένα μένουν 3 κομμάτια από τα 4, άρα ¾»).

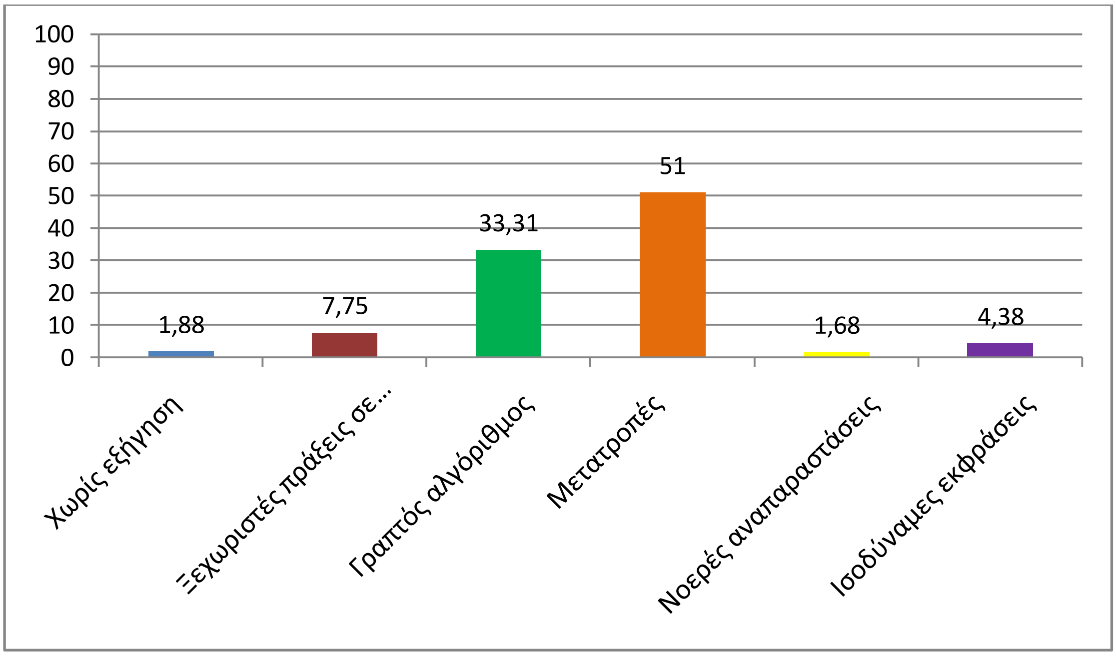
6. «Ισοδύναμες εκφράσεις». Οι συμμετέχοντες με τη στρατηγική αυτή αντικαθιστούσαν κάποιους αριθμούς με άλλους ισοδύναμους για να διευκολυνθούν στον υπολογισμό τους (π.χ., ¾ - ½: το ½= 2/4, άρα ¾ - 2/4= 1/4).

5.5.2 Συχνότητα χρήσης στρατηγικών για όλους τους συμμετέχοντες

Η ανάλυση των στρατηγικών των συμμετεχόντων έδειξε πως η στρατηγική που χρησιμοποιείται περισσότερο από τους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από την ηλικία τους, είναι η στρατηγική 4 (51%) που αφορά τις μετατροπές των αριθμών από κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και από κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και φυσικούς αριθμούς. Επίσης, χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό και η στρατηγική 3 (33,3%) που αφορά τη νοερή εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου. Στο Σχήμα 5.17 που ακολουθεί φαίνονται αναλυτικά όλα τα παραπάνω στοιχεία.

Σχήμα 5.17

Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών όλων των συμμετεχόντων



Στον Πίνακα 5.1 που ακολουθεί φαίνεται η συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 σε ό,τι αφορά τις μετατροπές. Οι συμμετέχοντες εφάρμοσαν κυρίως τη στρατηγική της νοερής εικόνας του αλγόριθμου και του διαχωρισμού.

Πίνακας 5.1 Συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4

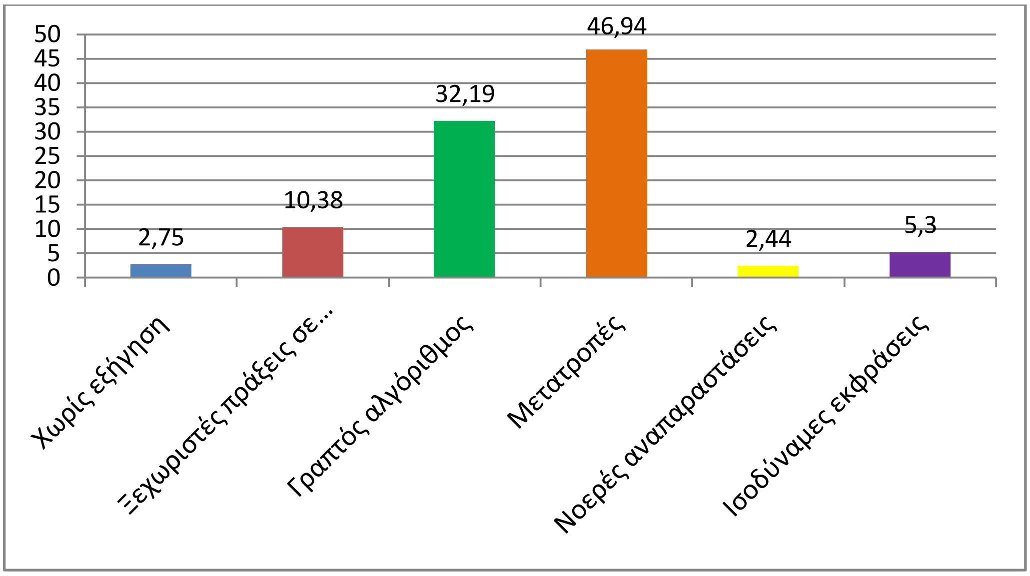
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	11,5%
4.1.1 Διαχωρισμός	3,69%
4.1.2 Συσσώρευση	2,75%
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	0,56%
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	4,5%
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	39,57%
4.2.1 Διαχωρισμός	14,56%
4.2.2 Συσσώρευση	4,5%
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	4,13%
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	16,38%

5.5.2.1 Συχνότητα χρήσης στρατηγικών για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Περίπου οι μισοί μαθητές της Στ΄ τάξης χρησιμοποίησαν τη στρατηγική 4 (46,94%) με τις μετατροπές, ενώ ένας στους τρεις (32,19%) τη στρατηγική 3 με τη νοερή χρήση του τυπικού αλγόριθμου. Αναλυτικά, τα στοιχεία φαίνονται στο Σχήμα 5.18 που ακολουθεί.

Σχήμα 5.18

Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών των παιδιών της Στ΄ τάξης



Στον Πίνακα 5.2 που ακολουθεί φαίνεται η συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 σε ό,τι αφορά τις μετατροπές. Τα περισσότερα παιδιά εφάρμοσαν τη στρατηγική του διαχωρισμού και τη νοερή εικόνα του αλγόριθμου.

Πίνακας 5.2 Συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 από παιδιά της Στ΄ τάξης

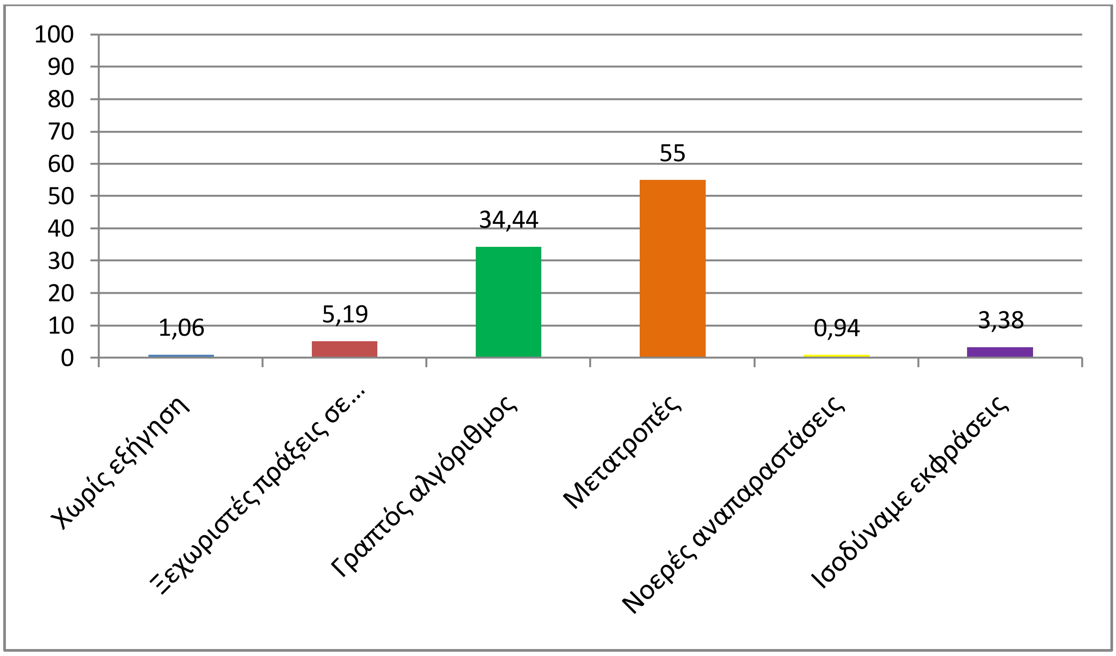
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	8,25%
4.1.1 Διαχωρισμός	2,31%
4.1.2 Συσσώρευση	1,5%
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	0,63%
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	3,81%
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	38,69%
4.2.1 Διαχωρισμός	15,06%
4.2.2 Συσσώρευση	3,94%
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	2,75%
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	16,94%

5.5.2.2 Συχνότητα χρήσης στρατηγικών για τους ενήλικες

Παρόμοια στοιχεία παρατηρήθηκαν και στους ενήλικες που σε μεγάλο βαθμό εφάρμοσαν τη στρατηγική 4 (55%) με τις μετατροπές και τη στρατηγική 3 (34,44%) με τη νοερή χρήση του τυπικού αλγόριθμου. Αναλυτικά, τα στοιχεία φαίνονται στο Σχήμα 5.19 που ακολουθεί.

Σχήμα 5.19

Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ενηλίκων



Στον Πίνακα 5.3 που ακολουθεί φαίνεται η συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 σε ό,τι αφορά τις μετατροπές. Οι ενήλικες, όπως και οι μαθητές της Στ΄ τάξης, εφαρμόζουν κυρίως τις στρατηγικές της νοερής εικόνας του αλγόριθμου και του διαχωρισμού.

Πίνακας 5.3 Συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 από ενήλικες

4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	14,62%
4.1.1 Διαχωρισμός	5%
4.1.2 Συσσώρευση	3,96%
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	0,47%
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	5,19%
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	40,38%
4.2.1 Διαχωρισμός	14%
4.2.2 Συσσώρευση	5%
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	5,5%
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	15,88%

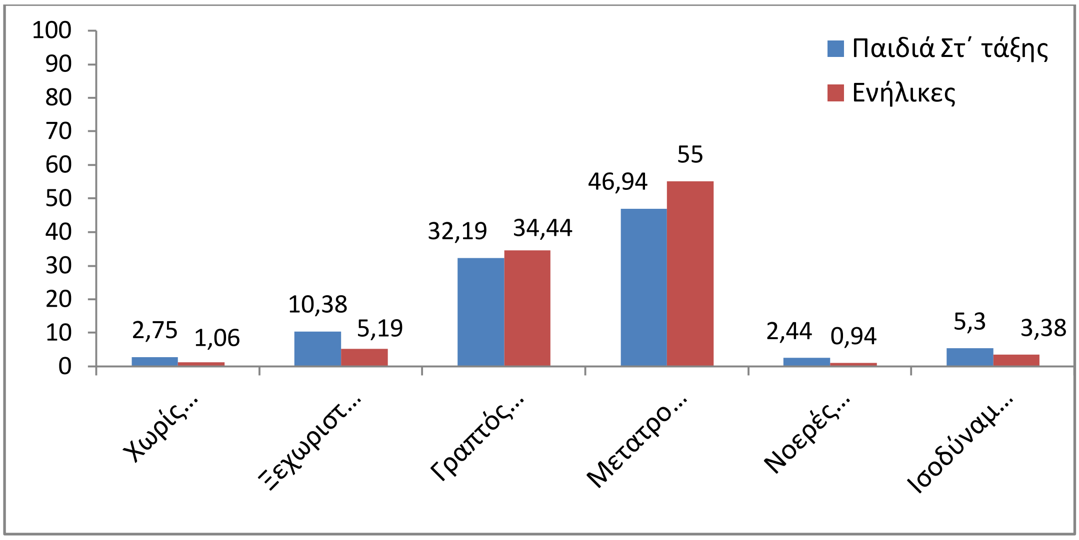
5.5.3 Συχνότητα χρήσης κάθε μιας στρατηγικής ως προς την ηλικιακή ομάδα

Για να διαπιστωθεί αν η συχνότητα χρήσης κάθε στρατηγικής διαφέρει στις δύο ηλικιακές ομάδες πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Σε όλες τις στρατηγικές παρόμοια ήταν η χρήση από τις δύο ηλικιακές ομάδες εκτός από τη στρατηγική 4.1 *«Μετατροπές των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς»* ($t= -2,543$, $df= 80$, $p< .05$) και κάποιες υποκατηγορίες της, (στρατηγική 4.1.1 *«Διαχωρισμός»*, $t= -2,014$, $df=80$, $p< .05$ και στρατηγική 4.1.2 *«Συσσώρευση»*, $t= -2,835$, $df=80$, $p< .01$). Το ίδιο παρατηρήθηκε και στη στρατηγική *4.2.3 «Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης»* [10]. Οι ενήλικες φάνηκε να τις χρησιμοποιούν στατιστικά σημαντικά περισσότερο από τα παιδιά της Στ΄ τάξης ($t= -2,502$, $df=80$, $p< .05$). Οι ενήλικες παρουσίασαν γενικά περισσότερο εναλλακτικές στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με τους μαθητές της Στ΄ τάξης. Στο σχήμα 5.20 φαίνονται αναλυτικά τα στοιχεία.

[10] Ανήκει στη στρατηγική 4.2 «Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς».

Σχήμα 5.20

Χρήση κάθε μιας στρατηγικής ως προς την ηλικιακή ομάδα



Στον Πίνακα 5.4 που ακολουθεί φαίνεται συγκεντρωτικά η συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 σε ό,τι αφορά τις μετατροπές τόσο για τους ενήλικες όσο και για τα παιδιά της Στ΄ τάξης.

Πίνακας 5.4

Συχνότητα χρήσης των υποκατηγοριών της στρατηγικής 4 ως προς την ηλικιακή ομάδα

Στρατηγική	Παιδιά Στ΄ τάξης	Ενήλικες
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	8,25%	14,62%
4.1.1 Διαχωρισμός	2,31%	5%
4.1.2 Συσσώρευση	1,5%	3,96%
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	0,63%	0,47%
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	3,81%	5,19%
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	38,69%	40,38%
4.2.1 Διαχωρισμός	15,06%	14%
4.2.2 Συσσώρευση	3,94%	5%
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	2,75%	5,5%
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	16,94%	15,88%

5.5.4 Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Προκειμένου να εξεταστεί αν η χρήση κάθε μίας στρατηγικής οδηγούσε τα παιδιά της Στ΄ τάξης σε επιτυχία πραγματοποιήθηκαν συσχετίσεις. Η ανάλυση έδειξε ότι:

- Υπάρχει στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 1 *«Δεν ξέρω»* και την επίδοση των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r= -,601, p< .01), στο σύνολο των δοκιμασιών με κλάσματα (Pearson's r= -,446, p< .01), στο σύνολο των δοκιμασιών με δεκαδικούς αριθμούς (Pearson's r= -,624, p< .01), στις δοκιμασίες πρόσθεσης (Pearson's r= -,490, p< .01), στις δοκιμασίες αφαίρεσης (Pearson's r= -,628, p< .01), στα προβλήματα τύπου συνδυασμού (Pearson's r= -,528, p< .01) και στα προβλήματα τύπου αλλαγής (Pearson's r= -,643, p< .01).
- Στη στρατηγική 2 *«Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»* βρέθηκε υψηλά αρνητική συσχέτιση στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r= -,648, p< .01), αλλά και στις επιμέρους συγκρίσεις. Δηλαδή, όσο πιο πολύ χρησιμοποιούν τις στρατηγική 2 τόσο χειρότερη επίδοση έχουν οι μαθητές της Στ΄ τάξης.
- Η χρήση της στρατηγικής 3 *«Γραπτός αλγόριθμος»* και της στρατηγικής 5 *«Νοερές αναπαραστάσεις»* δεν έδειξε να επηρεάζει τη συνολική επίδοση των παιδιών (Pearson's r= ,035, p= .829 και r= ,210, p= .187, αντίστοιχα).
- Αντίθετα, στη στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* και τη στρατηγική 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»*, παρατηρείται σε ορισμένους τομείς θετική και υψηλά θετική συσχέτιση. Συγκεκριμένα, βρέθηκε θετική συσχέτιση ανάμεσα στη στρατηγική 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* και στη συνολική επίδοση των παιδιών (Pearson's r= ,417, p< .01). Όσο πιο πολύ χρησιμοποιούν τη στρατηγική 6 τόσο πιο καλή επίδοση έχουν στις δοκιμασίες. Επιπλέον, θετική συσχέτιση των στρατηγικών 4 και 6 βρέθηκε με την επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες του Έργου 1 (με κλάσματα) (Pearson's r= ,325, p< .05 και Pearson's r= ,454, p< .01, αντίστοιχα). Δηλαδή, όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν τις στρατηγικές 4 και 6 τόσο πιο πολύ έτειναν να εκτελούν σωστά νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα.

- Επίσης, βρέθηκε θετική συσχέτιση της στρατηγικής 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* με την επίδοση των μαθητών σε δοκιμασίες πρόσθεσης (Pearson's r= ,480, p< .01), σε προβλήματα τύπου συνδυασμού (Pearson's r= ,428, p< .01) και σε προβλήματα τύπου αλλαγής (Pearson's r= ,368, p< .05).
- Για τη στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* βρέθηκε θετική συσχέτιση στις δοκιμασίες αφαίρεσης (Pearson's r= ,386, p< .05) και στα προβλήματα τύπου αλλαγής (Pearson's r= ,328, p< .05).

Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.5.

Πίνακας 5.5

Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Στρατηγική	**Συνολική επίδοση**	**Έργο 1-Κλάσματα**	**Έργο 2-Δεκαδικοί αριθμοί**	**Δοκιμασίες πρόσθεσης**	**Δοκιμασίες αφαίρεσης**	**Προβλήματα τύπου συνδυασμού**	**Προβλήματα τύπου αλλαγής**
1 «Δεν ξέρω»	-,601**	-,446**	-,624**	-,490**	-,628**	-,528**	-,643**
2 «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»	-,648**	-,729**	-,385**	-,630**	-,583**	-,555**	-,711**
3 «Γραπτός αλγόριθμος»	,035	,024	,038	,111	,040	,014	,058
4 «Μετατροπές»	,302	,325*	,197	,170	,386*	,261	,328*
5 «Νοερές αναπαραστά-σεις»	,210	,171	,200	,224	,170	,143	,277
6 «Ισοδύναμες εκφράσεις»	,417**	,454**	,265	,480**	,306	,428**	,368*

* *στατιστική σημαντικότητα στο p< .05* ** *στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.4.1 Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* έχει αρκετές υποκατηγορίες και πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις, ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στις υποκατηγορίες της στρατηγικής αυτής και την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης. Συγκεκριμένα, φαίνεται να υπάρχει θετική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 4.1 *«Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς»* και τη συνολική επίδοση των μαθητών (Pearson's r= ,379, p< .05) την επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 1 (με κλάσματα) και του Έργου 2 (με δεκαδικούς αριθμούς) (Pearson's r= ,340, p< .05 και r= ,326, p< .05, αντίστοιχα) αλλά και την επίδοση στις δοκιμασίες με την πράξη της αφαίρεσης (Pearson's r= ,401, p< .01). Επίσης, βρέθηκε θετική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 4.1.1 *«Διαχωρισμός»* με τη συνολική επίδοση των παιδιών (Pearson's r= ,353, p< .05), την επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 2 (με δεκαδικούς αριθμούς) (Pearson's r= ,322, p< .05) καθώς και με την επίδοση στις δοκιμασίες αφαίρεσης (Pearson's r= ,370, p< .05). Με τη χρήση της στρατηγικής 4.2.3 *«Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης»* φαίνεται ότι οι μαθητές παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 2 (με δεκαδικούς αριθμούς) (Pearson's r= ,325, p< .05) Τα στοιχεία παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.6.

5.5.5 Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τους ενήλικες

Για να εξεταστεί αν η χρήση κάθε μίας στρατηγικής οδηγούσε τους ενήλικες σε επιτυχία πραγματοποιήθηκαν συσχετίσεις. Η ανάλυση φανέρωσε ότι:

- Η χρήση των στρατηγικών 1 *«Δεν ξέρω»* και 2 *«Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»* παρουσιάζει αρνητική συσχέτιση με την επίδοση των ενηλίκων σε όλους τους τομείς. Ουσιαστικά, οι ενήλικες όσο πιο πολύ χρησιμοποιούν τις στρατηγικές 1 και 2 τόσο χειρότερη επίδοση έχουν.
- Η επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών δεν επηρεάστηκε από τη χρήση ούτε της στρατηγικής 3 *«Γραπτός αλγόριθμος»* (Pearson's r= ,051, p= .752), ούτε της στρατηγικής 5 *«Νοερές αναπαραστάσεις»* (Pearson's r=

,065, p= .685) και ούτε της στρατηγικής 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* (Pearson's r= -,120, p= .454).

- Αντίθετα, στη στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* βρέθηκε να υπάρχει συσχέτιση σε ορισμένες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, παρατηρείται θετική συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής 4 και την επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r= ,428, p< .01), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (με κλάσματα) (Pearson's r= ,489, p< .01), στις δοκιμασίες πρόσθεσης (Pearson's r= ,374, p< .05), στις δοκιμασίες αφαίρεσης (Pearson's r= ,437, p< .01) και στα προβλήματα τύπου συνδυασμού (Pearson's r= ,539, p< .01).

Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.7.

Πίνακας 5.6

Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Στρατηγική	**Συνολική επίδοση**	**Έργο 1- Κλάσματα**	**Έργο 2- Δεκαδικοί αριθμοί**	**Δοκιμασίες πρόσθεσης**	**Δοκιμασίες αφαίρεσης**
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	,379*	,340*	,326*	,303	,401**
4.1.1 Διαχωρισμός	,353*	,301	,322*	,287	,370*
4.1.2 Συσσώρευση	,271	,215	,265	,285	,223
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	,210	,183	,186	,186	,205
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,198	,205	,138	,115	,250
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	,134	,186	,039	,020	,223
4.2.1 Διαχωρισμός	,066	,113	-,006	,043	,079
4.2.2 Συσσώρευση	,146	,177	,072	,045	,221
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	,273	,167	,325*	,265	,246
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	-,067	,029	-,160	-,203	,068

** στατιστική σημαντικότητα στο p< .05   ** στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

Πίνακας 5.7

Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τους ενήλικες

Στρατηγική	Συνολική επίδοση	Έργο 1-Κλάσματα	Έργο 2-Δεκαδικοί αριθμοί	Δοκιμασίες πρόσθεσης	Δοκιμασίες αφαίρεσης	Προβλήματα τύπου συνδυασμού	Προβλήματα τύπου αλλαγής
1 «Δεν ξέρω»	-,428**	-,457**	-,278	-,358*	-,450**	-,397*	-,420**
2 «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρανομαστή»	-,669**	-,740**	-,397*	-,678**	-,607**	-,682**	-,575**
3 «Γραπτός αλγόριθμος»	,051	,008	,100	,083	,021	-,060	,191
4 «Μετατροπές»	,428**	,489**	,233	,374*	,437**	,539**	,234
5 «Νοερές αναπαραστά-σεις»	,065	,107	-,011	,013	,102	,109	,000
6 «Ισοδύναμες εκφράσεις»	-,120	-,052	-,187	-,026	-,187	-,173	-,038

* *στατιστική σημαντικότητα στο p< .05* ** *στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.5.1 Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τους ενήλικες

Η ανάλυση συνεχίστηκε και για τη στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* που έχει ταξινομηθεί σε πολλές υποκατηγορίες. Συγκεκριμένα, βρέθηκε θετική συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής 4.2 *«Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς»* και την επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r= ,326, p< .05), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) (Pearson's r= ,375, p< .05) και στις δοκιμασίες αφαίρεσης (Pearson's r= ,329, p< .05). Επίσης, βρέθηκε ότι με τη χρήση της στρατηγικής 4.2.3 *«Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης»* οι ενήλικες παρουσιάζουν υψηλά ποσοστά επίδοσης στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r=

,504, p< .01), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) και Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) (Pearson's r= ,442, p< .01 και r= ,465, p< .01, αντίστοιχα) και στις δοκιμασίες τόσο με την πράξη της πρόσθεσης όσο και της αφαίρεσης (Pearson's r= ,527, p< .01 και r= ,444, p< .01, αντίστοιχα). Τα στοιχεία παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.8.

Πίνακας 5.8

Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τους ενήλικες

Στρατηγική	**Συνολική επίδοση**	**Έργο 1- Κλάσματα**	**Έργο 2- Δεκαδικοί αριθμοί**	**Δοκιμασίες πρόσθεσης**	**Δοκιμασίες αφαίρεσης**
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	,258	,290	,147	,220	,268
4.1.1 Διαχωρισμός	,187	,300	-,022	,134	,214
4.1.2 Συσσώρευση	,018	-,046	,104	-,040	,063
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	,249	,257	,175	,250	,228
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,152	,132	,143	,176	,121
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	,326*	,375*	,173	,288	,329*
4.2.1 Διαχωρισμός	,054	,122	-,056	,079	,029
4.2.2 Συσσώρευση	,109	,094	,103	,054	,145
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	,504**	,442**	,465**	,527**	,444**
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,185	,245	,052	,110	,231

** στατιστική σημαντικότητα στο p< .05   ** στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.6 Στρατηγικές και ο ρόλος του πλαισίου

5.5.6.1 Συσχετίσεις στρατηγικών στις δοκιμασίες με πλαίσιο για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Προκειμένου να διαπιστωθεί αν η χρήση κάθε μίας στρατηγικής οδηγούσε τα παιδιά της Στ΄ τάξης σε επιτυχία στις δοκιμασίες με πλαίσιο αλλά και χωρίς, είτε στο σύνολο των έργων είτε ξεχωριστά σε αυτά, πραγματοποιήθηκαν συσχετίσεις. Από την ανάλυση προέκυψαν τα εξής:

- Υπάρχει στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 1 *«Δεν ξέρω»* και την επίδοση των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών με πλαίσιο (Pearson's r= -,494, p< .01), στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,546, p< .01) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,329, p< .05).
- Στη χρήση της στρατηγικής 2 *«Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»* βρέθηκε στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση στο σύνολο των δοκιμασιών με πλαίσιο (Pearson's r= -,397, p< .05), στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,711, p< .01), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= -,413, p< .01) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,374, p< .05).
- Η στρατηγική 3 *«Γραπτός αλγόριθμος»* δεν βρέθηκε να επηρεάζει την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης σε κάποια από τις εξεταζόμενες περιοχές.
- Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση στη χρήση των στρατηγικών 4 *«Μετατροπές»* και 5 *«Νοερές αναπαραστάσεις»* στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= ,379, p< .05 και r= ,411, p< .01, αντίστοιχα) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,337, p< .05 και r= ,458, p< .01, αντίστοιχα).
- Επίσης, βρέθηκε θετική συσχέτιση της στρατηγικής 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* με την επίδοση των μαθητών στο σύνολο των δοκιμασιών με πλαίσιο (Pearson's r= ,430, p< .01), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,538, p< .01) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) με πλαίσιο (Pearson's r= ,429, p< .01).

Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.9.

Πίνακας 5.9

Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης ως προς την παρουσία πλαισίου

Στρατηγική	Δοκιμασίες με πλαίσιο	Δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο	Δοκιμασίες κλασμάτων με πλαίσιο	Δοκιμασίες κλασμάτων χωρίς πλαίσιο	Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών με πλαίσιο	Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών χωρίς πλαίσιο
1 «Δεν ξέρω»	-,494**	-,546**	-,253	-,169	-,151	-,329*
2 «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»	-,397*	-,711**	-,413**	-,278	,073	-,374*
3 «Γραπτός αλγόριθμος»	-,046	,098	-,142	,167	,096	-,069
4 «Μετατροπές»	,222	,299	,379*	-,075	-,178	,337*
5 «Νοερές αναπαραστά-σεις»	,111	,246	,411**	-,254	-,293	,458**
6 «Ισοδύναμες εκφράσεις»	,430**	,300	-,102	,538**	,429**	-,237

* *στατιστική σημαντικότητα στο p< .05* ** *στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.6.2 Συσχετίσεις της στρατηγικής 4 στις δοκιμασίες με πλαίσιο για τα παιδιά της Στ΄ τάξης

Η στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* έχει αρκετές υποκατηγορίες και πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις, ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στις υποκατηγορίες της στρατηγικής αυτής και την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης τόσο στο σύνολο των δοκιμασιών όσο και σε κάθε έργο ξεχωριστά σε ό,τι αφορά το πλαίσιο.

Συγκεκριμένα, φαίνεται να υπάρχει θετική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 4.1 *«Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς»* και την επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,427, p< .01) Επίσης, βρέθηκε θετική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 4.1.1 *«Διαχωρισμός»* με την επίδοση στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,407, p< .01). Η χρήση της στρατηγικής 4.1.2 *«Συσσώρευση»* φαίνεται να ευνοεί στατιστικά σημαντικά την επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= ,347, p< .05) αλλά και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,345, p< .05).

Από την άλλη πλευρά, βρέθηκε στατιστικά σημαντική θετική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 4.2 *«Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς»* μόνο στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= ,326, p< .05) και σε καμία άλλη εξεταζόμενη περιοχή. Επιπλέον, η χρήση της στρατηγικής 4.2.2 *«Συσσώρευση»* φάνηκε να ευνοεί την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= ,402, p< .01) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,408 p< .01), αλλά όχι και την επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) με πλαίσιο (Pearson's r= -,342, p< .05). Η χρήση της στρατηγικής 4.2.3 *«Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης»* παρουσίασε στατιστικά θετική συσχέτιση με την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= ,312, p< .05) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,375, p< .05). Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.10 που ακολουθεί.

Πίνακας 5.10

Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τα παιδιά της Στ΄ τάξης ως προς την παρουσία πλαισίου

Στρατηγική	**Δοκιμασίες με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών χωρίς πλαίσιο**
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	,220	,427**	,217	,104	-,030	,284
4.1.1 Διαχωρισμός	,195	,407**	,131	,155	,031	,218
4.1.2 Συσσώρευση	,239	,232	,347*	-,147	-,135	,345*
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	,108	,248	,174	-,003	-,077	,224
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,086	,249	,057	,138	,014	,093
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	,134	,101	,326*	-,154	-,198	,235
4.2.1 Διαχωρισμός	,113	,007	,131	-,025	-,034	,030
4.2.2 Συσσώρευση	,039	,205	,402**	-,240	-,342*	,408**
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	,217	,254	,312*	-,158	-,119	,375*
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,003	-,113	,039	-,012	-,033	-,090

** στατιστική σημαντικότητα στο p< .05 ** στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.6.3 Συσχετίσεις στρατηγικών στις δοκιμασίες με πλαίσιο για τους ενήλικες

Προκειμένου να εξεταστεί αν η χρήση κάθε μίας στρατηγικής οδηγούσε τους ενήλικες σε καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με πλαίσιο αλλά και χωρίς, είτε στο σύνολο των έργων είτε ξεχωριστά σε αυτά, πραγματοποιήθηκαν συσχετίσεις. Από την ανάλυση προέκυψαν τα εξής:

- Υπάρχει στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση στη χρήση της στρατηγικής 1 *«Δεν ξέρω»* και την επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,454, p< .01).
- Στη χρήση της στρατηγικής 2 *«Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»* βρέθηκε στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,816, p< .01), στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο (Pearson's r= -,386, p< .05) και στις δοκιμασίες του Έργου 2 (δεκαδικοί αριθμοί) χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= -,382, p< .05).
- Η χρήση της στρατηγικής 4 *«Μετατροπές»* επηρεάζει θετικά την επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,471, p< .01).
- Για τις υπόλοιπες στρατηγικές δεν βρέθηκε κάποια άλλη συσχέτιση στις εξεταζόμενες περιοχές.

Όλα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.11.

Πίνακας 5.11

Συσχέτιση χρήσης στρατηγικών και επίδοσης για τους ενήλικες ως προς την παρουσία πλαισίου

Στρατηγική	**Δοκιμασίες με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών χωρίς πλαίσιο**
1 «Δεν ξέρω»	-,266	-,454**	-,182	-,112	,043	-,155
2 «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»	-,297	-,816**	-,386*	-,078	,228	-,382*
3 «Γραπτός αλγόριθμος»	,021	,063	-,025	,034	.036	,006
4 «Μετατροπές»	,248	,471**	,307	-,006	-,174	,264
5 «Νοερές αναπαραστά-σεις»	-,003	,108	,100	-,039	-,100	,092
6 «Ισοδύναμες εκφράσεις»	-,201	-,014	-,176	,162	,070	-,144

** στατιστική σημαντικότητα στο p< .05* *** στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

5.5.6.4 Συσχετίσεις της στρατηγικής 4 στις δοκιμασίες με πλαίσιο για τους ενήλικες

Η ανάλυση συνεχίστηκε και για τη στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* που έχει ταξινομηθεί σε πολλές υποκατηγορίες. Συγκεκριμένα, βρέθηκε θετική συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής 4.2 *«Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς»* και την επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,407, p< .01). Για τη στρατηγική 4.2.1 *«Διαχωρισμός»* παρατηρήθηκε θετική συσχέτιση με την επίδοση των ενηλίκων στις δοκιμασίες του Έργου 1 (κλάσματα) με πλαίσιο

(Pearson's r= ,312, p< .05). Τέλος, βρέθηκε ότι με τη χρήση της στρατηγικής 4.2.3 *«Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης»* οι ενήλικες παρουσιάζουν υψηλά ποσοστά επίδοσης στο σύνολο των δοκιμασιών με πλαίσιο (Pearson's r= ,453, p< .01) και στο σύνολο των δοκιμασιών χωρίς πλαίσιο (Pearson's r= ,411, p< .01). Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον πίνακα 5.12.

Πίνακας 5.12

Συσχέτιση χρήσης της στρατηγικής 4 και επίδοσης για τους ενήλικες ως προς την παρουσία πλαισίου

Στρατηγική	**Δοκιμασίες με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες κλασμάτων χωρίς πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών με πλαίσιο**	**Δοκιμασίες δεκαδικών αριθμών χωρίς πλαίσιο**
4.1 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς	,228	,213	,163	,018	-,043	,102
4.1.1 Διαχωρισμός	,097	,215	,254	-,077	-,199	,184
4.1.2 Συσσώρευση	,187	-,139	-,040	,013	,135	-,088
4.1.3 Πέρασμα στη δεκάδα	,201	,223	,160	-,001	-,054	,124
4.1.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,102	,155	,001	,090	,051	,009
4.2 Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς	,134	,407**	,249	-,020	-,176	,241
4.2.1 Διαχωρισμός	,010	,079	,312*	-,267	-,301	,268
4.2.2 Συσσώρευση	-,104	,269	,153	-,107	-,203	,238
4.2.3 Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης	,453**	,411**	,054	,245	,177	,019
4.2.4 Νοερή εικόνα αλγόριθμου	,035	,268	,005	,165	,013	,009

** στατιστική σημαντικότητα στο p< .05   ** στατιστική σημαντικότητα στο p< .01*

6ο Κεφάλαιο: Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η μελέτη της επίδοσης και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές Στ΄ τάξης και ενήλικες, σε νοερούς υπολογισμούς που αφορούν την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών με τη χρήση πλαισίου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα πιο σημαντικά ευρήματα που προέκυψαν από την έρευνα και την ανάλυση των δεδομένων.

Η γενική επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης και των ενηλίκων στην εκτέλεση των νοερών υπολογισμών υπήρξε αρκετά ικανοποιητική, ξεπερνώντας το 70% των σωστών απαντήσεων. Το αποτέλεσμα αυτό φανερώνει ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων έδειξε να είναι ικανή ως έναν βαθμό να εκτελεί νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, όμως δεν μπόρεσαν να ξεπεραστούν πλήρως τα εμπόδια που παρουσιάστηκαν. Βέβαια, η γενική επίδοση των δύο ηλικιακών ομάδων διαφέρει σημαντικά, μιας και οι ενήλικες είχαν καλύτερη επίδοση (81,56%) από τους μαθητές της Στ΄ τάξης (58,81%). Η διαφοροποίηση αυτή ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες ενδεχομένως εξηγείται από το ότι οι ενήλικες είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με καταστάσεις νοερών υπολογισμών από εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής, αντιλαμβάνονται καλύτερα τις ισοδύναμες αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και έχουν καλύτερη αίσθηση του αριθμού.

Οι στρατηγικές που εφαρμόστηκαν περισσότερο από τις δύο ηλικιακές ομάδες ήταν η στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* (47% και 55% για τα παιδιά της Στ΄ τάξης και τους ενήλικες, αντίστοιχα), που αφορά τις μετατροπές των αριθμών από κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και από κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και φυσικούς αριθμούς, καθώς και η στρατηγική 3 που αφορά τη νοερή εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου (32% και 34% για τα παιδιά της Στ΄ τάξης και τους ενήλικες, αντίστοιχα). Οι ενήλικες παρουσίασαν περισσότερο εναλλακτικές στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με τους μαθητές της Στ΄ τάξης. Γενικά, παρόμοια ήταν η χρήση των στρατηγικών από τις δύο ηλικιακές ομάδες. Διαφοροποιήθηκαν, ωστόσο, μόνο στη χρήση της στρατηγικής 4.1 *«Μετατροπές των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς»*, και των υποκατηγοριών της (στρατηγική 4.1.1 *«Διαχωρισμός»*, στρατηγική 4.1.2 *«Συσσώρευση»* και στρατηγική 4.2.3 *«Πέρασμα στη δεκάδα και αλλαγή πράξης)*[11]*)*, όπου οι ενήλικες φάνηκε να τις χρησιμοποιούν περισσότερο από τα παιδιά, δείχνοντας ότι διαθέτουν καλύτερα την αίσθηση του αριθμού.

Συχνή ήταν η χρήση από την πλευρά των παιδιών της στρατηγικής *«Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή»,* στοιχείο που αναδεικνύει ότι αδυνατούν να αντιληφθούν την αναπαράσταση και τη νοηματοδότηση των κλασματικών αριθμών. Τα παιδιά ενδεχομένως είναι περισσότερο απομακρυσμένα από τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς, καθώς διδάσκονται, μέσω του υπάρχοντος αναλυτικού προγράμματος και των σχολικών εγχειριδίων, κυρίως διαδικαστικές στρατηγικές και κανόνες που δεν κατανοούν και προσπαθούν να τις εφαρμόσουν αναποτελεσματικά (Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014). Είναι γνωστή άλλωστε η επιρροή της διδασκαλίας των γραπτών πράξεων στις αυθόρμητες νοερές στρατηγικές των μαθητών (Heirdsfield & Lamb, 2005; Reys et al., 2014).

Η χρήση του γραπτού αλγόριθμου νοερά δεν συσχετίστηκε ούτε θετικά ούτε αρνητικά με την επίδοση, δηλαδή δεν οδήγησε απαραίτητα σε σωστούς νοερούς υπολογισμούς ούτε τους ενήλικες ούτε τα παιδιά της Στ΄ τάξης. Αντίθετα, άλλες στρατηγικές οδηγούσαν σε υψηλότερα ποσοστά επίδοσης, όπως η στρατηγική 4 *«Μετατροπές»* (για όλους τους συμμετέχοντες) αλλά και η στρατηγική 6 *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* (μόνο για τα παιδιά της Στ΄ τάξης). Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν τον γραπτό αλγόριθμο ακόμα και στις μετατροπές και ουσιαστικά πρόκειται για μία προσκόλληση και εμμονή στο να βρουν τρόπο να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο. Από όσους κάνουν μετατροπές στους υπολογισμούς τους, περίπου το 45% των παιδιών της Στ΄ τάξης και το 38% των ενηλίκων τελικώς οδηγούνται στην εφαρμογή του αλγόριθμου νοερά (είτε με μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, είτε με μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς).

Η ύπαρξη λαθών στους νοερούς υπολογισμούς ενισχύει την άποψη αρκετών ερευνητών (π.χ., Thompson, 1999; Mclellan, 2001) που υποστηρίζουν ότι ένας υπολογισμός με τη νοερή αναπαράσταση του τυπικού αλγόριθμου δεν συνεπάγεται εννοιολογική κατανόηση αλλά ούτε και καλύτερη επίδοση. Βέβαια, το ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν συχνά τη στρατηγική των μετατροπών αναδεικνύει τη χρήση και την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με προηγούμενα

[11] Ανήκει στη στρατηγική 4.2 «Μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς».

ερευνητικά δεδομένα (Δεσλή & Λιόλιου, 2017; Λεμονίδης, 2013; Heirdsfield & Lamb, 2005).

Η αποτελεσματικότητα στους νοερούς υπολογισμούς επηρεάζεται από το είδος τον αριθμών που εμπλέκονται σε αυτούς. Συγκεκριμένα, τόσο οι ενήλικες όσο και οι μαθητές της Στ΄ τάξης παρουσίασαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς (76%) σε σχέση με τις δοκιμασίες με κλάσματα (64%). Οι Callingham και Watson (2004) όταν εξέτασαν μαθητές τρίτης δημοτικού ως τρίτης γυμνασίου στην Αυστραλία για να διαπιστώσουν τι είδους λάθη κάνουν οι μαθητές σε νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς, κλάσματα και ποσοστά δεν παρατήρησαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στην επίδοση των παιδιών. Παρατηρήθηκε μόνο μία ευχέρεια διαχείρισης των δεκαδικών αριθμών, χωρίς οι μεταγνωστικές δεξιότητές τους να είναι απόλυτα σταθερές. Στην παρούσα μελέτη, οι συμμετέχοντες φάνηκαν εξοικειωμένοι με τις αναπαραστάσεις και τη δομή των δεκαδικών αριθμών εφαρμόζοντας εννοιολογικές στρατηγικές, ίσως επειδή οι δεκαδικοί αριθμοί εμπλέκονται σε ρεαλιστικές καταστάσεις της καθημερινότητας και των παιδιών και των ενηλίκων (όπως τα ευρώ, το βάρος κ.α), σε αντίθεση με τους υπολογισμούς με κλάσματα όπου προσπαθούσαν να εφαρμόσουν τυπικούς κανόνες χωρίς να κατανοούν τη χρήση τους και τις ποσότητες των αριθμών. Όταν οι δύο ηλικιακές ομάδες εφάρμοζαν τη στρατηγική *«Μετατροπές»* και τη στρατηγική *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* στις δοκιμασίες με κλάσματα, έτειναν να εκτελούν σωστά τους νοερούς υπολογισμούς, αφού χειρίζονταν ολιστικά τους αριθμούς και μεταφέρονταν εύκολα από μία αναπαράσταση των ρητών αριθμών σε άλλη ισοδύναμη.

Η αποτελεσματικότητα στους νοερούς υπολογισμούς δεν φάνηκε να επηρεάζεται από το είδος των αριθμητικών πράξεων. Οι δύο ηλικιακές ομάδες παρουσίασαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας σε δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης είτε αφορούσαν κλάσματα είτε δεκαδικούς αριθμούς. Το γεγονός ότι το είδος της πράξης δεν επηρεάζει τους ενήλικες και τα παιδιά της Στ΄ τάξης σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς έρχεται σε αντίθεση με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Δεσλή & Λιόλιου, 2017) όπου σε νοερές πράξεις πρόσθεσης με φυσικούς αριθμούς χωρίς πλαίσιο, μαθητές Γ΄ και Δ΄ τάξης παρουσίασαν καλύτερη επίδοση συγκριτικά με δοκιμασίες αφαίρεσης. Οι Lemonidis και Kaimakami (2013) προκειμένου να εξετάσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης, διαπίστωσαν ότι οι πράξεις πρόσθεσης σε πλαισιωμένα προβλήματα ήταν πιο εύκολες συγκριτικά με τις αφαιρέσεις, τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις. Σε ό,τι αφορά τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά, στις δοκιμασίες πρόσθεσης φάνηκε ότι η στρατηγική *«Ισοδύναμες εκφράσεις»* συνεπάγεται υψηλά ποσοστά επιτυχίας, ενώ στις δοκιμασίες αφαίρεσης παρατηρήθηκε ότι όσο εφαρμόζουν τη στρατηγική *«Μετατροπές»* και, συγκεκριμένα, τη στρατηγική *του διαχωρισμού* τείνουν να απαντούν σωστά. Στην ίδια κατεύθυνση κινούνταν και οι στρατηγικές των ενηλίκων, όπου με τη στρατηγική *των μετατροπών* και, συγκεκριμένα, *με το πέρασμα στη δεκάδα και την αλλαγή πράξης*, τόσο σε δοκιμασίες πρόσθεσης όσο και αφαίρεσης, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν υψηλά.

Συνολικά, στους κλασματικούς αριθμούς στα προβλήματα τύπου αλλαγής, τόσο στην πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση, παρατηρήθηκε να αποδίδουν καλύτερα οι συμμετέχοντες από ό,τι στα προβλήματα συνδυασμού. Από την άλλη πλευρά, στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς οι συμμετέχοντες είχαν καλύτερη επίδοση σε προβλήματα πρόσθεσης τύπου αλλαγής σε σχέση με προβλήματα πρόσθεσης τύπου συνδυασμού. Αντίθετα, ο τύπος προβλήματος δεν επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων σε προβλήματα αφαίρεσης στους δεκαδικούς αριθμούς με τα ποσοστά επιτυχίας να είναι παρόμοια. Αυτή η διαφοροποίηση ίσως οφείλεται στο ότι οι συμμετέχοντες έχουν συναντήσει παρόμοια προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς για τα ευρώ, το βάρος, το μήκος, είτε στο σχολείο είτε στην καθημερινότητά τους.

Αξίζει να αναφερθεί ότι, όταν οι μαθητές της Στ΄ τάξης χρησιμοποιούσαν σε προβλήματα τύπου αλλαγής, είτε τη στρατηγική με *τις μετατροπές* είτε τη στρατηγική με *τις ισοδύναμες εκφράσεις*, παρουσίαζαν πολύ καλή επίδοση. Στα προβλήματα τύπου συνδυασμού, οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούσαν *ισοδύναμες εκφράσεις* για να εκτελέσουν τον νοερό υπολογισμό, κατάφερναν να απαντούν σωστά, ενώ οι ενήλικες με τη στρατηγική *των μετατροπών*.

Η παρουσία πλαισίου δεν επηρέασε τη γενική επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης και των ενηλίκων στους νοερούς υπολογισμούς που κλήθηκαν να εκτελέσουν, αλλά ούτε και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες με κλασματικούς αριθμούς και στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς. Τα συγκεκριμένα ευρήματα διαφοροποιούνται από παρόμοιες μελέτες που έχουν γίνει (π.χ., Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014) όπου διαπιστώθηκε ότι η παρουσία πλαισίου επηρεάζει τις στρατηγικές μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης, αφού σε προβλήματα με πλαίσιο εφαρμόζουν κυρίως εργαλειακές και λιγότερο εννοιολογικές και βασισμένες στην αίσθηση του αριθμού σε σχέση με τις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο. Οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) εξέτασαν τις επιδόσεις και τις στρατηγικές παιδιών Γ΄ και Δ΄ τάξης σε νοερούς γραπτούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα παιδιά στους νοερούς υπολογισμούς τους έδειξαν να μην επηρεάζονται σημαντικά από την παρουσία πλαισίου.

Στην παρούσα εργασία η παρουσία πλαισίου δεν θέτει εμπόδια στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών αλλά ούτε και ευνοεί ή βοηθάει ώστε τα παιδιά να ερμηνεύσουν μία υπολογιστική πράξη από το συγκείμενο ενός προβλήματος της καθημερινής ζωής και των σχολικών εγχειριδίων. Βέβαια, τα παιδιά της Στ΄ τάξης έδειξαν να επηρεάζονται περισσότερο από την παρουσία του πλαισίου, μιας και οι στρατηγικές των νοερών αναπαραστάσεων και των ισοδύναμων εκφράσεων οδηγούσαν σε επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς με πλαίσιο. Αντίθετα, δεν βρέθηκε κάποια στρατηγική να ευνοείται ιδιαίτερα στις δοκιμασίες με πλαίσιο για τους ενήλικες. Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθεί, ότι, ακόμη και αν επρόκειτο για μια δοκιμασία χωρίς πλαίσιο, οι μαθητές, κυρίως, αναζητούσαν την κατασκευή ενός πλαισίου, ώστε να αποκτήσει νόημα γι' αυτούς η εκάστοτε πράξη ή αντικαθιστούσαν τα υπάρχοντα δεδομένα με άλλα ισοδύναμα για να διευκολυνθούν στον υπολογισμό τους (π.χ., στη δοκιμασία 1-1/4 υπήρξε μαθητής που είπε: *«έχω μία σοκολάτα χωρισμένη σε τέσσερα ίσα μέρη, αν μου πάρεις το ένα κομμάτι θα μείνουν τρία κομμάτια σοκολάτας από τα τέσσερα που είχα στην αρχή, άρα 3/4»*). Το στοιχείο αυτό έρχεται να συμφωνήσει με τα ευρήματα των Lemonidis και Kaiafa (2013, σελ.7) όπου μαθητές Ε΄ τάξης χρησιμοποίησαν παρόμοιες νοητικές αναπαραστάσεις για να ερμηνεύσουν την ίδια πράξη (1-1/4: «*είχαμε μία ολόκληρη πίτσα και τη χωρίσαμε σε τέσσερα ίσα κομμάτια και πήραμε το ένα κομμάτι και μείνανε τρία κομμάτια, δηλαδή τα 3/4»*) ή τη διαίρεση ½: ¼ *(«Σε μισή ώρα χωρούν δύο τέταρτα κοιτώντας το ρολόι»*).

Συμπερασματικά, τόσο από την υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και από την παρούσα μελέτη είναι σημαντικό οι νοερές στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά να είναι κατανοητές και να διακρίνονται από ευελιξία βασισμένες στην αίσθηση του αριθμού (Λεμονίδης, 2013). Με τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών οι μαθητές καλούνται να συνειδητοποιήσουν τι σημαίνουν οι αριθμοί και ότι πρέπει να είναι ευέλικτοι στα διάφορα αναπαραστατικά μοντέλα των ρητών αριθμών στα προβλήματα που θα συναντούν στην καθημερινότητά τους (Maclellan, 2001). Φυσικά για να πραγματοποιηθούν τα παραπάνω απαιτείται εισαγωγή και οργανωμένη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών σε ένα ευέλικτο και αποτελεσματικό αναλυτικό πρόγραμμα που στοχεύει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Λεμονίδης, 2016).

Για την υλοποίηση της παρούσας μελέτης συμμετείχαν 41 ενήλικες και 41 μαθητές/-τριες Στ΄ τάξης. Θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον αν μπορούσε να αυξηθεί το δείγμα και να ληφθεί από σχολεία διαφόρων περιοχών της χώρας ώστε να καλυφθούν και άλλες διαφορετικές κοινωνικοοικονομικές ομάδες. Ακόμη, θα μπορούσαν να εξεταστούν οι συμμετέχοντες και σε δοκιμασίες με ποσοστά ώστε να γίνει μία ολοκληρωμένη σύγκριση όλων των αναπαραστατικών μορφών των ρητών αριθμών. Το ίδιο ισχύει και για τις πράξεις που εμπλέκονται, αφού η εισαγωγή νοερών υπολογισμών με πολλαπλασιασμό και διαίρεση θα αναδείκνυαν πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία σχετικά με την επιρροή του πλαισίου και σε αυτές τις πράξεις.

Αν και έχουν γίνει αρκετές έρευνες για τους νοερούς υπολογισμούς στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με φυσικούς και ρητούς αριθμούς, παρατηρείται έλλειψη στη βιβλιογραφία σχετικά με το ρόλο του πλαισίου. Περαιτέρω έρευνα αναμφισβήτητα θα πρόσφερε περισσότερα στοιχεία για τον ρόλο του πλαισίου σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα, θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρων ο σχεδιασμός κατάλληλων πλαισιωμένων προβλημάτων από την πλευρά των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών πρόσθεσης και αφαίρεσης σε κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, ώστε να αναλυθούν τα σημεία κλειδιά που επικεντρώνουν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Θα ήταν πολύ χρήσιμο να πραγματοποιηθεί μια σειρά από διδασκαλίες (ή διδακτική παρέμβαση), με εστίαση στους νοερούς υπολογισμούς στους ρητούς αριθμούς, με σκοπό οι μαθητές να κατανοήσουν τις διαδικαστικές στρατηγικές που διδάσκονται, αλλά και να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού, και στη συνέχεια να γίνει μια σύγκριση ως προς το είδος της στρατηγικής που χρησιμοποιούν οι μαθητές πριν και μετά την παρέμβαση.

Ανακεφαλαιώνοντας, η παρούσα έρευνα προσπάθησε να αναδείξει τις στρατηγικές μαθητών Στ΄ δημοτικού και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς και κατά πόσο αυτές επηρεάζονται από την ύπαρξη πλαισιωμένων προβλημάτων. Παρόμοιες έρευνες στον συγκεκριμένο τομέα της διδακτικής των μαθηματικών μπορούν να συμβάλλουν στην αποτελεσματική αντιμετώπιση των παρανοήσεων των παιδιών και την οργανωμένη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στη μαθηματική εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Βοσνιάδου, Στ. (2004). *Γνωσιακή Ψυχολογία, ψυχολογικές μελέτες και δοκίμια,* Αθήνα: Gutenberg.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών & Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών*.

Δεσλή, Δ., & Λιόλιου, Α. (2017). Νοεροί και γραπτοί υπολογισμοί κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. *Πρακτικά εργασιών 3ου Διεθνούς Συνεδρίου για την προώθηση της εκπαιδευτικής καινοτομίας* (σελ. 274-284). Λάρισα: Επιστημονική Ένωση για την Προώθηση της Εκπαιδευτικής Καινοτομίας.

Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2014). Η αίσθηση του αριθμού σε παιδιά Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και οι στρατηγικές τους κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων. *Πρακτικά 31ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* (σελ. 280-289). Βέροια: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Διαφέρμος, Β. (1998). Εννοιολογικές μορφές του ρητού αριθμού, ανάπτυξη, αιτιολόγηση και λειτουργία αυτών ως αυτόνομων διδακτικών μοντέλων. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 3,* 3-43.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών* (στ΄ έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών αριθμών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ., & Καϊάφα, Ι. (2014). Κατανόηση και ευελιξία των μαθητών Ε' και Στ' τάξης στους υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 379-396). Φλώρινα.

Λεμονίδης, Χ., & Λυγούρας, Γ. (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Ευκλείδης Γ΄, 68*, 20–24.

Νέο Σχολείο– Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, (2011). Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση- δημοτικό. *Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), «*Βιβλίο του δασκάλου για τα μαθηματικά της Α΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), «*Βιβλίο του δασκάλου για τα μαθηματικά της Β΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Βιβλίο του δασκάλου για τα μαθηματικά της Γ΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Βιβλίο του δασκάλου για τα μαθηματικά της Δ΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Βιβλίο του δασκάλου για τα μαθηματικά της Ε΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Α΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Β΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Γ΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Δ΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Ε΄ Δημοτικού»*.

Ο.Ε.Δ.Β. (2006), *«Τετράδιο εργασιών μαθητή για τα μαθηματικά της Στ΄ Δημοτικού»*.

Χρήστου, Κ. Π. (2015). Τρόποι επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε πράξεις, μέγεθος και διάταξη των ρητών αριθμών. *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ελλήνων Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 688-697). Θεσσαλονίκη.

Ξενόγλωσση

An, S., & Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(3), 717-753.

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary school* (pp. 184–194). Buckingham: Open University Press.

Australian Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools.* Melbourne: Curriculum Corporation.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: the integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceedings of the 28th PME Conference* (Vol.2, pp. 95-102), Bergen University College, Bergen.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials models for addition and substraction up to 100 in Dutch second graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (4), 294-323.

Beishuizen, M., van Putten, C. M., & van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7,* 87-106.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2, From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 26* (4), 281- 300.

Callingham, R., & Watson, J. M. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69–86. http://doi.org/10.1007/BF03217396

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *Australian Assocation for Research in Education. AARE 2003. Conference papers: International Education Research Conference* (pp. 270-292). Auckland, New Zealand.

Carroll, W. M. (1999). Invented computational procedures of students in a Standards-based curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 111–121. http://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00024-3

Carvalho, R., & da Ponte, J. P. (2013). Students' mental computation strategies with rational numbers represented as fractions. In B., Ubuz, C., Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society for Research in Mathematics Eduaction* (pp.283-292). Ankara, Turkey.

Carvalho, R., & da Ponte, J. P. (2015). Student strategies and errors in mental computation with rational numbers in open number sentences. In K. Krainer, & N. Vondrov (Eds.), *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 245–251). Prague, Czech Republic.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1-27.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach.* New York & London: Routledge.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21-29.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41,* 605-618.

Heirdsfield, A., & Lamb, J. (2005). Mental computation: The benefits of informed teacher instruction. In P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice* (*Proceedings* of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 419-426). Melbourne: MERGA.

Johanssen, D. H. (2003). Designing research based-instructions for story problem. *Educational Psychology Review, 15*(3), 267-296.

Kamii, C. K., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior, 16,* 51-61.

Kloosterman, P. (2010). Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. *Journal for Research in Mathematics Education, 41* (1), 20-51.

Lai, M. Y., & Murray, S. (2014). What do error patterns tell us about Hong Kong Chinese and Australian students' understanding of decimal numbers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Στο https://scholar.google.gr/citations?user=_WIlrPQAAAAJ&hl=el&oi=sra όπως προσπελάσθηκε στις 30/10/2017.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lemonidis, Ch., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Menon: Journal of Educational Research.* 1st Thematic issue, 61–74.

Lemonidis, Ch., & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research*. 2b, 86-98.

Lemonidis, Ch.,Tsakiridou, H. & Meliopoulou, I. (2017). In-service teachers' content and pedagogical content knowledge in mental calculations with rational numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*. doi:10.1007/s10763-017-9822-6.

Lola, M. (2000). Developing mental math three tactics that will help kids learn to "Think Math." *ProQuest Education Journals, 12*(3), 19-28.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*, 145-154.

Marcus, R. & Fey, J.T. (2003). Selecting quality tasks for problem based teaching. In H.L.Shoen & R.I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* (pp. 55-67). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: developing number sense. In S. Willis (Ed.), *Being Numerate: What Counts*? (pp. 24-43). Hawthorn, Victoria: ACER (Australian Council for Educational Research).

Mclntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8. Ανακτήθηκε από http://flm-journal.org/Articles/94F594EF72C03412F1760031075F2.pd

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research and Practise, 26(2),* 109-119.

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics, 43,* 313–335.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Ni, Y. J., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), 2-5.

Pongsakdi, N., Laine, T., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2016). Improving word problem performance in elementary school students by enriching word problems used in mathematics teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *21*(2), 23–44.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162-169.

Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547–557. http://doi.org/10.1086/461383

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2014). *Helping children learn mathematics* (Ninth Edit). John Wiley & Sons, Inc.

Reys, R., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(4), 304–326. http://doi.org/10.2307/749477

Schoenfeld, A. H (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Sengul, S., & Gulbagci, H. (2012). An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 2289-2293.

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(7), 18–20.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Steinle, V., & Stacey, K. (2003a). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 259 – 266). Honolulu: PME.

Steinle, V. & Stacey, K. (2004). A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol.2, pp. 541–548). Townsville: MERGA.

Thompson I. (1999) Mental calculation strategies for addition and subtraction. *Mathematics in School*, *28* (5), 24-27.

Thompson, I. (1999b). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Buckingham: Open University Press.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 29–47. http://doi.org/10.1023/A:1020572803437

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental arithmetic: Important components of computation. In M. Suydam, & R. E. Reys (eds.), *Developing computational skills* (pp. 196-213). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά για δημοτικό και γυμνάσιο - Μια αναπτυξιακή διαδικασία* (Έκτη Έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Επίκεντρο.

van Dooren, W., Lehtinen, E., Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *28*, 181-209.

Verschaffel., L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, *24*(2), 16-27.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359. http://doi.org/10.1007/BF03174765

Zhou, A., Peverly, S.T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: A cross-cultural study of American and Chinese mathematics teachers. *Contemporary Educational Psychology*, *31*, 438-457.

Ηλεκτρονικές διευθύνσεις:

Common Core State Standards Initiative, www.corestandards.org

Freudenthal Institute, http://www.fi.uu.nl/en/welcome.html, Holland

National Council of Teaching Mathematics, http://www.nctm.org/standards, U.S.A.

Department of Education and Skills, The Standards Site, http://www.standards.dfes.gov.uk/numeracy, U.K.

Παράρτημα

Πρωτόκολλο καταγραφής απαντήσεων των συμμετεχόντων

Α/Α: Όνομα: Ημερομηνία γέννησης:

Τάξη: Σειρά παρουσίασης: Ομάδα:

Έργο 1 **Πώς το σκέφτηκες;**

1. **1-1/4**
2. **½ + ¾**
3. **¾- ½**
4. **20 ½ + 10 ¼**
5. **3 ½ + 2 ½**
6. **4 – 1 ½**
7. **1 + ¼**
8. **20 ½ - 10 ¼**

Έργο 2 **Πώς το σκέφτηκες;**

1. **1 – 0,25**
2. **0 ,5 – 0,75**
3. **0,75 – 0,5**
4. **20,5 + 10,25**

5. 3,5 + 2,5

6. 4 – 1,5

7. 1+ 0,25

8. 20,5 -10,25