ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ–ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Δασκάλων

Διπλωματική εργασία

«Μελέτη, σχεδιασμός και ανάπτυξη προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στα ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών»

της

Γαλέρη Ιουλίας
Α.Ε.Μ.: 558

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Εξεταστές: Θωμαΐδης Ιωάννης
Τσακιρίδου Ελένη

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …/…/2018 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	……………………………
2. ΤΣΑΚΙΡΙΔΟΥ ΕΛΕΝΗ	……………………….	……………………………
3. ΘΩΜΑΪΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	………………………….	……………………………

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Η εκπόνησή της έγινε υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνου Νικολαντωνάκη, των μελών της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Ιωάννη Θωμαΐδη και Ελένης Τσακιρίδου, και είναι αποτέλεσμα συστηματικής προσπάθειας, έρευνας και μελέτης. Η υλοποίηση και η ολοκλήρωσή της, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την πολύ σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν ορισμένοι άνθρωποι, τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Αρχικά, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε με αισιοδοξία και αμεσότητα. Επίσης, στην καθηγήτρια κ. Τσακιρίδου Ελένη για τις γνώσεις που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων του μεταπτυχιακού προγράμματος και για το γεγονός ότι δέχτηκε να συμμετέχει στην τριμελή επιτροπή. Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή μου κ. Θωμαΐδη Ιωάννη για τον πολύτιμο χρόνο που πρόθυμα διέθεσε, την υπομονή του, την καθοδήγησή του και την άριστη συνεργασία σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου. Τις κόρες μου, για την υποστήριξή τους σε κάθε δυσκολία και κυρίως τον σύζυγό μου, ο οποίος υπήρξε αμέριστος συμπαραστάτης και πολύτιμος αρωγός σε όλη την προσπάθειά μου.

Τέλος αφιερώνω αυτή την εργασία στη μνήμη των γονέων μου που έφυγαν από τη ζωή κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους έχει γίνει ένα δημοφιλές αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια. Διάφορα επιχειρήματα έχουν διατυπωθεί για την υποστήριξη της ενσωμάτωσης αυτής και διάφοροι τρόποι έχουν προταθεί για την υλοποίησή της στη διδακτική πράξη. Παράλληλα, όμως, υπάρχουν και διάφορες ενστάσεις. Στα προγράμματα σπουδών του 2003 για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στη χώρα μας, καθώς και στα διδακτικά εγχειρίδια, η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών αποτελεί μια από τις καινοτομίες. Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η καταγραφή και ανάλυση των στοιχείων που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών μέσα στα Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. και στα βιβλία για τα Μαθηματικά Δημοτικού και Γυμνασίου. Από αυτήν αναδείχθηκε η ασυμβατότητα του υλικού που έχουν στη διάθεσή τους οι εκπαιδευτικοί και η έλλειψη της κατάρτισής τους σε ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στη συνέχεια, επιχειρείται η ανάπτυξη επιμορφωτικού προγράμματος για εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά, με στόχο την ενημέρωση και κινητοποίησή τους σε ζητήματα που σχετίζονται με την ενσωμάτωση της ιστορικής γνώσης στη σχολική τάξη. Παράλληλα, διατυπώνονται και προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις που καλύπτουν στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης με αφετηρία την Ιστορία των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία των Μαθηματικών, Ιστορία των Μαθηματικών, επιμορφωτικό πρόγραμμα, επιμόρφωση εκπαιδευτικών, διαθεματικότητα, ιστορικές αναφορές, διδακτικές παρεμβάσεις

Abstract

Implementing History of Mathematics in its teaching has become a popular research topic in recent years. Various arguments have been put forward to support this integration, and several ways have been suggested for its implementation in teaching. At the same time, however, there are several objections. In the 2003 curricula for compulsory education mathematics in Greece, as well as in textbooks, the integration of History of Mathematics is one of the innovations. The present research attempts to record and analyze the data related to the History of Mathematics within the Greek curricula and in the Primary and Secondary school's Mathematics textbooks. This revealed the incompatibility of the material available to teachers and their lack of training on integrating/ implementing History of Mathematics in teaching of Mathematics. Then, a training program for teachers who teach mathematics is being suggested, aiming at informing and motivating them on issues related to the integration of historical knowledge into the classroom. At the same time, proposals are made for teaching interventions that cover the objectives of Mathematical Education starting from the History of Mathematics.

Keywords: teaching of Mathematics, History of Mathematics, educational program, teacher education, cross-curricular teaching, historical reference, teaching interventions

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο λόγος επιλογής του συγκεκριμένου θέματος ήταν η παρακολούθηση του μαθήματος «Ιστορία και Επιστημολογία των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης» και η ενασχόλησή μου με την εκπόνηση ερευνητικής εργασίας σχετικά με τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα πλαίσια του Δ.Δ.Π.Μ.Σ. «Διδακτική των Μαθηματικών». Η άψογη οργάνωση και παρουσίαση του μαθήματος από τους διδάσκοντες (κ.κ. Ι. Θωμαΐδη και Κ. Νικολαντωνάκη), καθώς και οι νέες άκρως ενδιαφέρουσες πτυχές του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών, που αποκαλύφθηκαν για εμένα μέσα από το συγκεκριμένο μάθημα, αποτέλεσαν το ερέθισμα για περαιτέρω ενασχόλησή μου με το εν λόγω θέμα. Αυτό, επίσης, με βοήθησε να προσέξω περισσότερο και να αξιολογήσω καλύτερα τις ιστορικές αναφορές και τα ιστορικά σημειώματα μέσα στα διδακτικά πακέτα των Μαθηματικών, τα οποία συνδέονται με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) του 2003, και να προβληματιστώ σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησής τους στη διδακτική πράξη. Θα ήθελα, ακόμα, να επισημάνω ότι από την πολυετή εμπειρία μου στα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης διαπίστωσα πως το θέμα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι άγνωστο στη συντριπτική πλειονότητα των εκπαιδευτικών. Επίσης, ότι δεν έτυχε να το συναντήσω ως θέμα επιμόρφωσης στη διάρκεια της εκπαιδευτικής μου πορείας.

Η δυνατότητα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε και αποτελεί αντικείμενο πολυάριθμων ερευνών του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Από αυτές αναδείχθηκε η ανάγκη για επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, προκειμένου να είναι σε θέση να υιοθετούν μια ιστορική προσέγγιση μέσα στις σχολικές τάξεις των Μαθηματικών, αξιοποιώντας τις ιστορικές αναφορές των διδακτικών βιβλίων ή δημιουργώντας δικές τους διδακτικές παρεμβάσεις με στόχο την επίτευξη των καλύτερων αποτελεσμάτων προς όφελος των μαθητών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρούμε να εστιάσουμε στη μελέτη, τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών σε ζητήματα που αφορούν τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Στο **1ο κεφάλαιο** γίνεται αναδρομή στα σημαντικότερα σημεία που αφορούν την εξέλιξη της ιδέας για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και την ενσωμάτωσή της στη διδακτική πράξη, όπως αυτά παρουσιάζονται μέσα από τη βιβλιογραφία. Επίσης, γίνεται αναφορά στα βασικά επιχειρήματα, τις αντιρρήσεις και τους τρόπους που συνδέονται με τη διδακτική αξιοποίησή της. Μέσα από όλα όσα προαναφέρθηκαν προκύπτουν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία εξετάζονται στην παρούσα εργασία:

1) Είναι το υλικό που περιλαμβάνεται στα σχολικά εγχειρίδια κατάλληλο για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών;

2) Με ποιον τρόπο θα καταστεί δυνατή η ουσιαστική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς μέσα στη σχολική πραγματικότητα;

3) Είναι δυνατό να δημιουργηθούν διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες θα υλοποιούν βασικούς διδακτικούς στόχους με αφετηρία την Ιστορία των Μαθηματικών;

Στο **2ο κεφάλαιο** παρουσιάζεται το υλικό που είναι διαθέσιμο στους εκπαιδευτικούς. Αναλυτικότερα παρουσιάζονται στοιχεία που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, τα οποία δημοσιεύτηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Φ.Ε.Κ.303/τ. Β΄/2003). Επίσης, παρουσιάζονται ιστορικές αναφορές μέσα από τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών που εκδόθηκαν για το Δημοτικό το 2006 και για το Γυμνάσιο το 2007, καθώς και σχετικές οδηγίες μέσα από τα αντίστοιχα βιβλία για τους εκπαιδευτικούς. Επιπλέον εξετάζεται η συνάφεια αυτού του υλικού με τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών και με τα επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από προβληματισμούς για τις ιστορικές αναφορές που περιέχονται στα διδακτικά πακέτα.

Στο **3ο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά σε απόψεις και τάσεις σχετικά με τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών στην εφαρμογή των καινοτομιών (μια από αυτές είναι και η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών), οι οποίες εισάγονται από τα Προγράμματα Σπουδών και αναδεικνύουν την ανάγκη τους για επιμόρφωση. Επίσης, παρουσιάζεται μια πρόταση για ανάπτυξη ενός επιμορφωτικού προγράμματος, ενταγμένου σε ένα ευρύτερο πλαίσιο επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, μέσα από το οποίο μπορούν οι εκπαιδευτικοί να εφοδιαστούν με γνώσεις και ιδέες σε ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Επιπλέον δίνονται παραδείγματα διδακτικών δραστηριοτήτων στις οποίες αξιοποιείται υλικό από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Στο **4ο κεφάλαιο** περιλαμβάνεται μια ανασκόπηση των βασικών σημείων των τριών πρώτων κεφαλαίων, εστιάζοντας στα σημεία που τεκμηριώνουν τις απαντήσεις των ερευνητικών ερωτημάτων και διατυπώνοντας προτάσεις που θα προσφέρονταν για μελλοντική έρευνα, με κυρίαρχο θέμα την υλοποίηση ολόκληρου ή μέρους του προτεινόμενου επιμορφωτικού προγράμματος σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς κατά τις προπτυχιακές σπουδές τους ή και σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς κατά τη διάρκεια της επαγγελματικής τους κατάρτισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.Θεωρητικό πλαίσιο – Ερευνητικά ερωτήματα

1.1. Ιστορική εξέλιξη της ιδέας για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Η Ιστορία των Μαθηματικών και η σχέση της με τη Μαθηματική Εκπαίδευση ως γενική ιδέα είναι αρκετά παλιά. Η αξιοποίησή της στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι ένα θέμα που έκανε την εμφάνισή του στους μαθηματικούς κύκλους κατά τον 19ο αιώνα και ιδιαίτερα κατά το δεύτερο μισό του. Οι μεγάλες κοινωνικές, οικονομικές και επιστημονικές ανακατατάξεις, οι οποίες τότε έλαβαν χώρα, επέβαλαν αλλαγές και στα εκπαιδευτικά συστήματα αρχικά των αναπτυγμένων χωρών και κατ' επέκταση και των υπολοίπων. Μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον απόκτησε σταδιακά προτεραιότητα η προετοιμασία και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, ακολουθούμενες από τη διερεύνηση και τον προβληματισμό σχετικά με ζητήματα παιδαγωγικά και διδακτικά, υποβοηθώντας έτσι και την εμφάνιση των πρώτων σπερμάτων για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών σε διδακτικό επίπεδο. Μέσα από όσα αναφέρουν διαπρεπείς μαθηματικοί, καθηγητές Μαθηματικών, αλλά και διάφοροι φορείς (επιστημονικές ενώσεις, Υπουργεία Εκπαίδευσης) σημειώνονται διάφορες ιδέες αναφορικά με τη συσχέτιση των Μαθηματικών με την ιστορία τους. Παρακάτω θα παραθέσουμε, με χρονολογική σειρά, ένα απάνθισμα σχετικών απόψεων και κειμένων από το παρελθόν, που έχουν συλλεχθεί μέσα από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, προκειμένου να καταγράψουμε τα σημαντικότερα βήματα στη διαδρομή και εξέλιξη του συγκεκριμένου θέματος διεθνώς αλλά και στη χώρα μας ειδικότερα. Μέσω αυτών αναδεικνύεται η σχέση των Μαθηματικών και της ιστορίας τους και ενισχύεται η επιχειρηματολογία για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθησή τους. Για το ιστορικό πλαίσιο του ζητήματος της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, στο παρόν τμήμα της εργασίας μας, αντλήθηκαν στοιχεία κυρίως από τα έργα των Θωμαΐδη & Καστάνη (1987) και Fasanelli et al. (2000).

Α΄ μέρος - 19ος αι.

Στον πρόλογο του βιβλίου του "Mathematics in the time of Pharaohs" ο Richard J. Gillings (1982) κάνει αναφορά στον Βρετανό καθηγητή Thomas Cooper, ο οποίος ήδη από το 1811, στις εναρκτήριες διαλέξεις του στο Dickinson College στην Pennsylvania, τόνιζε στους φοιτητές του ότι η ιστορία μιας τέχνης ή μιας επιστήμης (όπως τα Μαθηματικά) είναι η πιο κατάλληλη παρουσίαση για τη μελέτη της, αφού μέσω αυτής μπορούμε:

- να κατανοήσουμε καλύτερα τη μέθοδο και τους τρόπους με τους οποίους πραγματοποιήθηκε η ανάπτυξη και η εξέλιξη της συγκεκριμένης τέχνης ή επιστήμης

- να γνωρίσουμε λάθη σημαντικών διανοιών των παλαιότερων χρόνων και να προβλέψουμε δικά μας λάθη
- να γνωρίσουμε και να εκτιμήσουμε τις προσωπικότητες που ευεργέτησαν το ανθρώπινο γένος με τις ανακαλύψεις τους (Gillings, 1982).

Το βιβλίο "The Philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view to the Theory and Practice of Calculation", που εκδόθηκε το 1817 από τον Σκωτσέζο J. Leslie, αποτελεί, σύμφωνα με τους Θωμαΐδη και Καστάνη (1987), ένα από τα πρώτα βιβλία, αν όχι το πρώτο, που η ιστορία διαποτίζει ολόκληρο το περιεχόμενό του. Στο συγκεκριμένο βιβλίο η ιστορία δεν είχε ρόλο εισαγωγικό ή συμπληρωματικό, αλλά μεθοδολογικό και χρησιμοποιήθηκε για να αναλυθεί η πορεία εμφάνισης της αριθμητικής γνώσης και να συγκριθούν διάφοροι τρόποι χειρισμού των αριθμητικών θεμάτων.

Ο μεγαλύτερος Νορβηγός μαθηματικός Niels Henrik Abel, σύμφωνα με τη Fasanelli (2000), σημείωνε στο περιθώριο ενός τετραδίου του, τη δεκαετία του 1820, ότι κατά τη γνώμη του η σημαντική πρόοδος κάποιου στα Μαθηματικά συνδέεται με τη μελέτη των αυθεντιών των Μαθηματικών.

Ο Γερμανός R. Baltzer δημοσίευσε, το 1853 στη Λειψία, το βιβλίο του "Die Element der Mathematic", το οποίο απευθυνόταν σε εκπαιδευτικούς και ήταν εφοδιασμένο με ιστορικές σημειώσεις, για την αξιοποίηση της ιστορίας σε διδακτικό επίπεδο.

Σταδιακά η Ιστορία των Μαθηματικών άρχισε να χρησιμοποιείται στη διδακτική τους τόσο με άμεση συμμετοχή στη δομή του διδακτικού λόγου, όσο και με ιστορικές αναφορές ενός κλάδου των Μαθηματικών ή ενός σχολικού μαθήματος, που περιλαμβάνονταν πλέον σε βιβλία διδακτικής των Μαθηματικών. Το θέμα αυτό αναπτύχθηκε με έμφαση στη Γερμανία και οδήγησε σε μια ιστοριογραφική δραστηριότητα για τα μαθήματα ή τους κλάδους των Μαθηματικών, που συμπεριλαμβάνονταν στη βιβλιογραφία της διδακτικής των Μαθηματικών και προορίζονταν αρχικά για το δάσκαλο και έμμεσα για το μάθημα και τον μαθητή.

Στις τέσσερις τελευταίες δεκαετίες του 19ου αιώνα επωάζεται η ιστορική μέθοδος διδασκαλίας των Μαθηματικών, ενώ το ενδιαφέρον και η δραστηριότητα για τη χρησιμοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών εντείνεται αργότερα, με το γύρισμα του αιώνα.

Το 1865, ο Augustus de Morgan στην εναρκτήρια ομιλία του με την ιδιότητα του πρώτου προέδρου της London Mathematical Society, αναφέρθηκε εκτενώς στη σημασία της Ιστορίας των Μαθηματικών για την κατανόησή τους αλλά και για την επίγνωση των δυσκολιών τους. Ειδικότερα, όπως από τη Fasanelli (2000) αναφέρεται, τόνισε ότι καμία τέχνη ή επιστήμη δεν μπορεί να είναι ελεύθερη παρά μόνο εάν μελετηθεί σε σχέση με τις προσωπικότητες του παρελθόντος και ότι οι μαθηματικοί μιλούν τόσο παράξενα για τα Μαθηματικά, επειδή δεν είναι γνώστες της ιστορίας του αντικειμένου τους. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να γνωρίζουν τη διαδρομή των ανακαλύψεων που έχουν γίνει στους διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών.

Το 1873 ο Eugenio Beltrami, καθηγητής Μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, σε ένα άρθρο του στην "Giornale di matematiche", εφημερίδα των Μαθηματικών της εποχής, έγραψε ότι είναι προτιμότερο οι φοιτητές να μάθουν να μελετούν, σε πρώιμο στάδιο, τα έργα των μεγάλων μαθηματικών, παρά να ασχολούνται με ατελείωτες και άκαρπες κολεγιακές ασκήσεις που δεν έχουν καμιά χρησιμότητα.

Το 1877 δημοσιεύτηκε από το Βέλγο P. Mansion, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Γάνδης (Ghent), ένα άρθρο με τίτλο "Note sur l' enseignament des Mathémathiques dans les colleges", στο οποίο έθιγε το ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Έξι χρόνια αργότερα, το 1883, από τον S. Günther, Γερμανό δάσκαλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσιάστηκε η πρώτη εμπεριστατωμένη εργασία για το ρόλο της ιστορίας στο μάθημα των Μαθηματικών.

Το 1890, ο J. W. L. Glaisher, πρόεδρος στο Πρώτο Τμήμα της British Association for the Advancement of Science, ανέφερε σε ομιλία του ότι κάθε πραγματεία, διατριβή ή βιβλίο ανώτατου επιπέδου είναι πάντα επιθυμητό να περιέχει αναφορές σε πρωτότυπα απομνημονεύματα μεγάλων μαθηματικών και να δίνει, αν είναι δυνατόν, και σύντομες ιστορικές αναφορές. Επίσης, ότι τα Μαθηματικά, περισσότερο από κάθε επιστήμη, χάνουν από κάθε προσπάθεια να αποσυνδεθούν από την ιστορία τους (Cajori, 1894; Fasanelli et al., 2000; Siu, 2000).

Το 1896, ο Florian Cajori, φημισμένος ιστορικός των Μαθηματικών, στο βιβλίο του "A History of Elementary Mathematics with Hints of Methods of Teaching", έγραψε ότι η εκπαίδευση ενός παιδιού πρέπει να συμφωνεί με τον τρόπο, τη μέθοδο και τη σειρά της εκπαίδευσης του ανθρώπινου γένους, αν αυτή εξεταστεί ιστορικά και ότι σύμφωνα με την άποψη αυτή η γνώση της ιστορίας μιας επιστήμης φαίνεται να αποτελεί μια αποτελεσματική βοήθεια στη διδασκαλία της επιστήμης. Ειδικότερα στην περίπτωση των Μαθηματικών η εμπειρία πολλών δασκάλων καταδεικνύει τη σημασία της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους (Cajori, 1896; Fasanelli et al., 2000).

Το 1897, ο Hermann Schubert, Γερμανός μαθηματικός, στο βιβλίο του "Mathematical Essays and Recreations", έγραψε ότι οι περισσότερες από τις μαθηματικές αλήθειες που γνωρίζουμε προέκυψαν από το διανοητικό μόχθο πολλών αιώνων. Για το λόγο αυτό, ένας μαθηματικός που θέλει να κατανοήσει πλήρως τη σύγχρονη έρευνα στον τομέα αυτό, θα πρέπει να σκεφτεί σε γρηγορότερο ρυθμό τις μαθηματικές εργασίες που προηγήθηκαν στη διάρκεια των αιώνων.

Β΄μέρος - 20ός αι.

Στις τελευταίες δεκαετίες του 19ου αιώνα υπό την επίδραση δύο κυρίως παραγόντων επιταχύνθηκαν οι εξελίξεις στην εκπαίδευση και στη διδακτική σκέψη, οι οποίες κορυφώθηκαν στις αρχές του 20ού αιώνα. Ο πρώτος παράγοντας ήταν η μηχανοποίηση της βιομηχανίας και η συγχώνευση των βιομηχανικών, τραπεζικών και εμπορικών δραστηριοτήτων, που είχαν ως συνέπειες τον μετασχηματισμό της παραγωγικής και οικονομικής βάσης καθώς και την ισχυρή ώθηση που δόθηκε στην εκπαίδευση λόγω της ανάγκης προσαρμογής των εργαζομένων στις νέες συνθήκες. Ο δεύτερος παράγοντας ήταν η αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας την οποία επεδίωκαν οι συσπειρώσεις μαθηματικών δασκάλων που τότε πρωτοεμφανίστηκαν.

Το 1907, ο Felix Klein, χρησιμοποίησε ευρέως την Ιστορία των Μαθηματικών σε διαλέξεις που έδωσε στα πλαίσια επιμόρφωσης δασκάλων των Μαθηματικών. Αυτές αποτέλεσαν και τη βάση για το περιεχόμενο του φημισμένου του βιβλίου "Elementary mathematics from an advanced standpoint", στο οποίο ο ίδιος αποτυπώνει όλη τη δυναμική της άποψής του για την Ιστορία των Μαθηματικών. Σε ένα απόσπασμα που οι Θωμαΐδης και Καστάνης (1987) παραθέτουν, ο F. Klein αναφέρει ότι:

- Η έλλειψη ιστορικής γνώσης αποτελεί ένα ουσιαστικό εμπόδιο για μια φυσική και αληθινά επιστημονική μέθοδο διδασκαλίας.
- Ο ίδιος εισήγαγε κάποιες ιστορικές παρατηρήσεις στις παρουσιάσεις του, ώστε οι επιμορφούμενοι εκπαιδευτικοί να αντιληφθούν πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, οι οποίες σχεδόν πάντα εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακριά ανάπτυξη παίρνουν αυστηρές μορφές τόσο οικείες στη συστηματική παρουσίαση.
- Η γνώση αυτή ελπίζει να έχει μια διαρκή και τελεσφόρα επίδραση πάνω στο χαρακτήρα και της δικής τους διδασκαλίας.

Στις ΗΠΑ ο David Smith (1860-1944), στις αρχές του 20ου αιώνα, αποτελεί τον κύριο εκφραστή της συνύπαρξης διδακτικής και Ιστορίας των Μαθηματικών, με έργο πλούσιο και στους δύο τομείς. Ο προσανατολισμός της δουλειάς του στην εκπαίδευση και στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών καθόριζε τη στάση του απέναντι στη σχέση ιστορίας και διδακτικής των Μαθηματικών.

Το 1919, από την αμερικανική Mathematical Association Committee, επισημαίνονται στην ετήσια αναφορά της τα παρακάτω:

- Η ιστορική διάσταση των Μαθηματικών δεν έχει βρει ακόμα την κατάλληλη θέση στη διδασκαλία τους στο σχολείο.
- Κάθε μαθητής και μαθήτρια οφείλει να γνωρίζει κάποια πράγματα σχετικά με την ανθρώπινη διάσταση του αντικειμένου που μελετά.
- Η Ιστορία των Μαθηματικών θα βοηθήσει στην διατύπωση του πλαισίου της σχολικής διδακτέας ύλης.
- Τα πορτραίτα μεγάλων μαθηματικών στις σχολικές τάξεις, οι αναφορές των καθηγητών σε αυτούς και οι εργασίες των μαθητών γι' αυτούς, μπορούν να εξηγήσουν την επίδραση που είχαν οι μαθηματικές ανακαλύψεις στην πρόοδο του ανθρώπινου πολιτισμού.

Το 1923, στο πόρισμα της εθνικής επιτροπής των ΗΠΑ για τις μαθηματικές απαιτήσεις, με σκοπό την αναδιοργάνωση των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, περιλαμβάνονται οι παρακάτω προτροπές προς τους δασκάλους:

- Να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της Ιστορίας των Μαθηματικών ώστε να γνωρίσουν ότι τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες νοητικές αλλά και τεχνικές ανάγκες.
- Να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματά τους για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των Μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης.
- Να χρησιμοποιούν ιστορικό και βιογραφικό υλικό, το οποίο θα κάνει τη διδασκαλία πιο ενδιαφέρουσα και με περισσότερη σημασία.

Το 1930, η Vera Sanford, στο βιβλίο της "A Short History of Mathematics", αναφέρεται στην άποψη του Augustus De Morgan, σχετικά με τα βιβλία της Αριθμητικής, που θεωρεί ότι οι καθηγητές των Μαθηματικών μέσα από τη μελέτη των έργων παλαιότερων μαθηματικών μπορούν να αναδείξουν ότι οι μαθητές τους αντιμετωπίζουν ακριβώς τις ίδιες δυσκολίες με εκείνες που αντιμετώπισαν και οι μεγάλες μαθηματικές διάνοιες και ότι κάποιες από τις δυσκολίες αυτές ήταν αρκετές για να σταματήσουν την εξέλιξη του έργου τους.
Ο Ρώσος Mark Yakovlevich Vygodskii, το 1931, εξηγεί για το βιβλίο του "Foundations of Infinitesimal Calculus" ότι:

- Η οπτική που υποκρύπτεται σε αυτό είναι ο αναγνώστης, κατά τη μελέτη της Ανάλυσης, να γίνει γνώστης των θεμελιωδών εννοιών της, στο στάδιο από το οποίο προήλθαν άμεσα από πρακτικά προβλήματα.
- Η αυστηρότητα της ανάλυσης είναι αρχικά δευτερεύουσας σημασίας (και θα ασχοληθεί με αυτήν αργότερα).
- Προσπαθεί να αντικαταστήσει σε αυτό, το φορμαλιστικό-λογικό σχήμα με ένα ιστορικό σχήμα, ή καλύτερα με ένα ιστορικό-λογικό σχήμα.
- Το ιστορικό υλικό δεν αποτελεί το κύριο αντικείμενο του βιβλίου, αλλά τη βάση για την παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών.

Το 1949 η έκδοση του βιβλίου "Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung" του Otto Toeplitz (1881-1940) αποτέλεσε μια ξεχωριστή συμβολή στην αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών για διδακτικούς λόγους, μέσα από μια προσπάθεια ιστορικής στήριξης του μαθηματικού περιεχομένου του απειροστικού λογισμού.
Στο δεύτερο μισό του 20ού αιώνα, και με πιο συστηματικό τρόπο από τα τέλη της δεκαετίας του 1960, ανοίγεται μια νέα προοπτική, καθώς εμφανίζεται αξιόλογη δραστηριότητα στο θέμα. Η ιδέα για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών άρχισε να εφαρμόζεται στην πράξη σε διάφορες εκδοχές και διαμορφώθηκε ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης,
Το βρετανικό Υπουργείο Εκπαίδευσης, το 1958, συμπεριέλαβε σε αναφορά του τα παρακάτω:

- Ο δάσκαλος που δεν γνωρίζει αρκετά πράγματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, έχει την τάση να διδάσκει τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων που δεν σχετίζονται ούτε με τα προβλήματα που τις δημιούργησαν ούτε με την περαιτέρω ανάπτυξη των Μαθηματικών.
- Η γνώση των διαφωνιών και των διχογνωμιών μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών μπορεί να παρακινήσει τον σκεπτικισμό και να προκαλέσει συζητήσεις μέσα στην τάξη, που μπορούν να οδηγήσουν σε εδραίωση της κατανόησης των μαθηματικών αληθειών.
- Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα που μπορεί να αποκτήσει ένας δάσκαλος από τη γνώση της ιστορίας είναι ότι εκτιμά την επιρροή των Μαθηματικών στις σύγχρονες συνήθειες.
- Τα Μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν αποτελεσματικά μόνο με φόντο την ιστορία τους.

Στην επανέκδοση του βιβλίου του Otto Toeplitz, με τίτλο "The Calculus. A Genetic

Approach" (έκδοση 2007), ο μαθηματικός D. Bressoud έγραψε έναν νέο πρόλογο. Αναφέρει εκεί μια επιστολή των σπουδαίων μαθηματικών L. Bers, M. Kline, G. Pólya και M. Schiffer, που δημοσίευσαν το 1962 στο περιοδικό "The American Mathematical Monthly". Με αυτήν καλούσαν τους μαθηματικούς να χρησιμοποιούν τη «γενετική μέθοδο», επισημαίνοντας ότι ο καλύτερος τρόπος για τη διανοητική ανάπτυξη του ατόμου είναι να επαναλάβει τη διαδρομή της διανοητικής ανάπτυξης του γένους του (Toeplitz 2007).

Η διεθνής ομάδα που οργανώθηκε το 1972, για τη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στην ιστορία και την παιδαγωγική των Μαθηματικών, στα πλαίσια του 2ου διεθνούς συνεδρίου διδακτικής των Μαθηματικών, οριοθέτησε τον τρόπο που μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι δυνατό:

- να αναδειχθούν τα Μαθηματικά όχι ως ένα έτοιμο κατασκεύασμα, αλλά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα με μέλλον.
- να κινητοποιηθούν οι μαθητές αντιλαμβανόμενοι τις ανθρώπινες πλευρές των Μαθηματικών.

Επεσήμανε, επίσης, ότι η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών θα πρέπει πάντα να περιλαμβάνεται στην εκπαίδευση των μαθηματικών δασκάλων με τρόπο που να τους βοηθά να κατανοούν τα Μαθηματικά και να τα εκτιμούν ως τμήμα της πολιτιστικής μας κληρονομιάς.

Γ΄ μέρος – Στη χώρα μας

Ανάλογες πρωτοβουλίες για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και το ρόλο της τόσο σε πανεπιστημιακό επίπεδο όσο και στις άλλες εκπαιδευτικές βαθμίδες υπήρξαν και στη χώρα μας. Σύμφωνα με όσα διαβάζουμε στους Θωμαΐδη και Καστάνη (1987) στην τριτοβάθμια εκπαίδευση δεν ιδρύθηκε έδρα της Ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά συνηθιζόταν κατά την εισαγωγή στο αντικείμενο διδασκαλίας να γίνεται από τον διδάσκοντα κάποια αναφορά στην ιστορική εξέλιξή του. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ένα περιορισμένο αλλά σταθερό ενδιαφέρον για το διδακτικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών άρχισε να εμφανίζεται, όταν οι πρωτοβουλίες του Felix Klein στη Γερμανία έγιναν γνωστές και στην Ελλάδα. Τότε μεταφράστηκε στην ελληνική γλώσσα το Γερμανικό Αναλυτικό Πρόγραμμα που περιλάμβανε μεθοδικές παρατηρήσεις με ιδιαίτερες αναφορές στην Ιστορία των Μαθηματικών. Έγιναν, επίσης, δημοσιεύσεις άρθρων σε περιοδικά της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.) καθώς και σε άλλα παιδαγωγικού περιεχομένου.

Ο Κ. Ν. Λαμπίρης δημοσίευσε το 1922 στο περιοδικό «Παιδαγωγός» ένα άρθρο του με τον τίτλο «Ιστορικαί παρεκβάσεις κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών», επιχειρώντας κατά κάποιο τρόπο να οριοθετήσει την εφαρμογή της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε αυτό ανάμεσα στα άλλα επισημαίνει ότι με τα λεγόμενά του δεν εννοεί πως πρέπει να μεταβληθεί το μάθημα των Μαθηματικών, αλλά μέσω των σύντομων ιστορικών παρεμβάσεων να συμπληρωθεί και να τελειοποιηθεί η μαθηματική μόρφωση των μαθητών, επιτυγχάνοντας:

α) να εννοήσουν οι μαθητές ότι η πρόοδος της επιστήμης ήταν βαθμιαία, συνεχής και αδιάλειπτη, χάρη στην εργασία των επίλεκτων πνευμάτων κάθε φυλής,

β) να εκτιμήσουν τη μεγάλη συμβολή των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στη θεμελίωση της Μαθηματικής επιστήμης,
γ) να προχωρήσουν βαθύτερα στο πνεύμα των διαφορετικών μεθόδων, με τις οποίες λύθηκαν κατά καιρούς κάποια θεμελιώδη ζητήματα και να εκτιμήσουν κατάλληλα, μέσα από τη σύγκριση των μεθόδων αυτών (όπου είναι δυνατόν), την αξία κάθε μεθόδου.

Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς κάνει σύσταση να αυξηθεί το ενδιαφέρον για την Ιστορία των Μαθηματικών και να βοηθηθούν μέσω διαλέξεων, πανεπιστημιακών μαθημάτων αλλά και με μονογραφίες να γνωρίσουν το έργο διάφορων μαθηματικών, κυρίως δε των αρχαίων Ελλήνων, αλλά και την εξέλιξη διάφορων μαθηματικών ζητημάτων.

Το 1926 ο τότε υποδιευθυντής του Διδασκαλείου Μέσης Εκπαίδευσης, Δημήτριος Μωραϊτίδης, δημοσίευσε στον Η΄ τόμο του Δελτίου της Ε.Μ.Ε. μια εργασία με τίτλο «Περί της διδασκαλίας της Άλγεβρας», στην οποία πρότεινε ως πρώτη αρχή ότι η ύλη θα πρέπει να διατάσσεται με τρόπο ώστε να ακολουθεί με συντομία την πορεία που το ανθρώπινο πνεύμα ακολούθησε για την ανακάλυψή της. Αυτό μας παραπέμπει σε πρόταση για εφαρμογή της λεγόμενης ιστορικο-γενετικής μεθόδου και για το λόγο αυτό θεωρεί ότι η γνώση της Ιστορίας των Μαθηματικών θα ήταν πολύ χρήσιμη.

Με την μεγάλη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1929 ενισχύθηκε ακόμα περισσότερο η αποδοχή της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Το 1931 για πρώτη φορά το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών περιλάμβανε, μετά την ολοκλήρωση της ύλης για την ΣΤ΄ τάξη, τη διδασκαλία μιας ενότητας με θέμα «Επισκόπισις των Μαθηματικών ιστορική και φιλοσοφική». Στη συνέχεια, υπήρξαν βέβαια κάποιοι προβληματισμοί αλλά και αναθεωρήσεις απόψεων για το διδακτικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών σχετικά με την αναγκαιότητα της, τη μορφή διδασκαλίας της, την οικονομία χρόνου. Οι αντιλήψεις αυτές δεν έπαψαν να υπάρχουν μέχρι και σήμερα, καθώς ο θετικός ρόλος της Ιστορίας αναγνωρίζεται, αλλά δεν υπάρχει μια πρόταση για μεθοδική και συστηματική αξιοποίησή της στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Το 1962 ο Ν. Μπάρκας, όντας υποδιευθυντής στο Διδασκαλείο Μέσης Εκπαίδευσης, έκανε πρόταση για οργάνωση μαθηματικών λεσχών στα σχολεία, αναφέροντας ότι αυτές θα μπορούν να περιλαμβάνουν στο πρόγραμμά τους θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών σχετικά με βιογραφίες, με ενδιαφέροντα ανέκδοτα, αλλά και με τη διαδρομή και ανάπτυξη ορισμένων κλάδων από τα νεότερα Μαθηματικά.

Την περίοδο 1978-82 η επιτροπή Παιδείας της Ε.Μ.Ε. με εισήγησή της για την εκπόνηση του σχεδίου προγράμματος στα Μαθηματικά, πρότεινε την καθιέρωση του θεσμού των ελεύθερων μαθημάτων. Στην συγκεκριμένη εισήγηση αναφέρεται ότι μέσω αυτών:

- είναι ανάγκη να δοθεί ιδιαίτερο βάρος σε θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών, καθώς επίσης και στις συνθήκες μέσα στις οποίες διαγράφηκε η πορεία τους.

- θα γίνει προσπάθεια να γνωρίσουν οι μαθητές το ερευνητικό πνεύμα και να μάθουν τις κύριες μεθόδους με τις οποίες οι μεγάλοι υπηρέτες της επιστήμης και της τεχνικής αντιμετώπισαν βασικά προβλήματα.

Το θετικό κλίμα απέναντι στην Ιστορία των Μαθηματικών και στη χρησιμότητά της διαφαίνεται και από την προσπάθεια ορισμένων συγγραφέων σχολικών βιβλίων στη χώρα μας να χρησιμοποιήσουν κάποια ιστορικά στοιχεία, το μεγαλύτερο μέρος των οποίων περιλαμβάνονταν σε βιβλία Γεωμετρίας και σχετίζονταν με τη συμβολή των Αρχαίων Ελλήνων. Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1980, όπως οι Θωμαΐδης και Καστάνης (1987) αναφέρουν, το ιστορικό αυτό υλικό είχε συνήθως τη μορφή: α) ιστορικής εισαγωγής σε κάποια διδακτική ενότητα, β) ιστορικών σχολίων σε ορισμένα σημεία της θεωρίας, γ) σύντομων υποσημειώσεων με βιογραφικά συνήθως στοιχεία, χρονολογίες ανακαλύψεων, και τα λοιπά. Ο ρόλος, όμως, των ιστορικών αναφορών, ανεξάρτητα από το περιεχόμενο και την έκτασή τους, ήταν κυρίως διακοσμητικός ή απλά πληροφοριακός και δεν είχε επίδραση στη δομή της υπόλοιπης μαθηματικής ύλης και στην κατανόηση του μαθήματος. Δεν έλειπαν βέβαια και οι περιπτώσεις ιστορικών αναφορών λανθασμένων ή παραπλανητικών.

Ο διδακτικός ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών και η επίδρασή της στη διδασκαλία τους, κατά τα νεότερα χρόνια στη χώρα μας, θα άξιζε ιδιαίτερα να τονιστεί σε σχέση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, η οποία, πέραν της σημαντικότατης προσφοράς της στις άλλες επιστήμες, αποτέλεσε το θεμέλιο για τους νεότερους κλάδους Γεωμετριών και συνέβαλε στη δημιουργική τους εξέλιξη. Η ενσωμάτωσή της στη διδακτική πράξη έχει αποτελέσει αντικείμενο ερευνών στον τομέα της διδακτικής, όπως: α) η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, εστιάζοντας στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Μπιζμπιάνος, 2011), β) ο ρόλος που διαδραματίζει η Ιστορία των Μαθηματικών στο πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών (Γαβριήλ, 2014).

1.2. Απόψεις για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη

Το θέμα της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση φαίνεται να δημιουργεί ολοένα και μεγαλύτερο προβληματισμό σε όσους ασχολούνται με τα Μαθηματικά και τη διδακτική τους προσέγγιση. Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα και μέσα από αυτές αναδεικνύεται σταδιακά ο σημαντικός ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθησή τους στο σχολικό περιβάλλον. Μελετώντας τους Γαγάτση, Ηλία και Μακρίδη (2002) συναντούμε μερικές από τις πιο βασικές απόψεις σημαντικών προσώπων, που προσπάθησαν να απαντήσουν σε ερωτήματα σχετικά με την αναγκαιότητα εισαγωγής της Ιστορίας των Μαθηματικών στο καθημερινό μάθημα των Μαθηματικών και τις παραθέτουμε παρακάτω:

1. Ο David Wheeler (1984), προσπαθεί να δώσει μια άποψη για τις σχέσεις της Ιστορίας με τη Μαθηματική Εκπαίδευση, επισημαίνοντας ότι αν θέλουμε να υποστηρίξουμε μια διδασκαλία των Μαθηματικών που δεν αγνοεί την Ιστορία τους θα πρέπει να ισχυροποιήσουμε τα επιχειρήματά μας, γιατί το εκπαιδευτικό σύστημα σε

όλες τις βαθμίδες του δύσκολα προσαρμόζει πολυσύνθετους σκοπούς και κατά κανόνα προσπαθεί να δώσει αυτά που συχνότερα ζητούνται από την κοινωνία. Τέλος, συμπεραίνει ότι είναι αναγκαία μια ιστορία για την ίδια τη Μαθηματική Εκπαίδευση πράγμα που δεν είναι καθόλου το ίδιο με μια Ιστορία των Μαθηματικών.

2. Η Lucia Grugnetti (1989) εξετάζει το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από μια διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, καταλήγοντας στον «ουμανιστικό» τρόπο με τον οποίο κατά κύριο λόγο αντιμετωπίζεται η Ιστορία, καθώς παρατηρεί ότι κατά τη διδασκαλία των επιστημονικών αντικειμένων δεν δίνεται έμφαση στην ιστορική άποψη. Η ίδια πιστεύει ότι μια ιστορική προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα σε έναν εκπαιδευόμενο να αντιληφθεί τα Μαθηματικά όχι ως ένα οικοδόμημα από αδιάψευστες και αμετάβλητες αλήθειες, αλλά ως μια διαρκή ανθρώπινη προσπάθεια για στοχασμό και πρόοδο. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα να κεντριστεί το ενδιαφέρον του, ακολουθώντας τη διαδρομή με τους δισταγμούς αλλά και τις προόδους του και όχι το αντικείμενο καθαυτό.

3. Ο Hans-Georg Steiner (1989) εξετάζει τις σχέσεις ανάμεσα στις Ιστορικο-επιστημολογικές μελέτες και την έρευνα στη Μαθηματική Εκπαίδευση, δίνοντας έμφαση σε τρία πεδία σχετικά με:

- τα Μαθηματικά, την ιστορική και σημερινή τους ανάπτυξη καθώς και τις σχέσεις τους με άλλες επιστήμες.
- την πολύπλοκη δομή της διδασκαλίας και της εκπαίδευσης στην κοινωνία μας και ειδικότερα στα σχολικά μαθηματικά.
- την κοινωνική και γνωστική ατομική ανάπτυξη του διδασκόμενου.

4. Ο Hans Niels Jahnke (1989) εξετάζει τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη συστηματική σκέψη, αναφέροντας ότι «η έννοια του συστήματος ή της συστηματικής σκέψης» δεν διαδραματίζει κανένα ρόλο στα υπάρχοντα προγράμματα της Γερμανίας. Εστιάζει στον προσανατολισμό των εγχειριδίων προς μια συστηματικοποίηση της ύλης μέσω της οποίας θεωρεί αμφίβολο εάν μπορεί να επιτευχθεί η αντίληψη της ύλης από τους σπουδαστές με την ίδια συστηματική έννοια. Αυτές οι σκέψεις μάς παραπέμπουν σε μια αντιστοιχία με τη σημερινή ελληνική πραγματικότητα, όπου τα αυστηρά χρονικά πλαίσια μέσα στα οποία είναι υποχρεωμένοι να δουλεύουν οι εκπαιδευτικοί συχνά τους οδηγούν στο να επιδίδονται σε έναν αγώνα για την κάλυψη της ύλης του σχολικού εγχειριδίου. Έτσι, αποφεύγουν να χρησιμοποιούν τις ιστορικές αναφορές, που βρίσκονται διάσπαρτες στην αρχή ή στο τέλος του μαθήματος, είτε γιατί τις θεωρούν ως άσκοπη δαπάνη του πολύτιμου διδακτικού χρόνου είτε γιατί δεν γνωρίζουν πώς να τις διαχειριστούν.

5. Ο Horst Struve (1989) εξετάζει τη διδασκαλία των μαθηματικών θεωριών σε σχέση με τη διερεύνηση της ιστορικής ανάπτυξής τους και αναδεικνύει τη σημασία της ιστορικής διαδρομής μιας έννοιας.

6. Η Martha Menghini (1989) αναδεικνύει μέσα από παρατηρήσεις της τη διδακτική χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και εστιάζει στον σημαντικό ρόλο που μπορεί αυτή να έχει για την αποσαφήνιση μιας μαθηματικής έννοιας καθώς και για την διεπιστημονικότητα.

7. Ο Paolo Boero (1989) ασχολείται με τα σημαντικά πεδία που υποδεικνύονται από την Ιστορία και τη λειτουργία τους στην απόκτηση των μαθηματικών εννοιών, αναφέροντας ότι είναι δυνατή η επεξεργασία και η ανάλυση καταστάσεων σχετικά με την εμφάνιση μαθηματικών τεχνικών και εννοιών στην Ιστορία.
8. Ο Francesco Speranza (1989) εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ της Ιστορίας, της Επιστημολογίας και της Διδακτικής. Για την Ιστορία και τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών επισημαίνει ότι:

- πρέπει να αποτελούν μέρος της εκπαίδευσης των διδασκόντων,
- μπορούν να υποδεικνύουν εναλλακτικές θεωρίες για ένα συγκεκριμένο θέμα,
- δίνουν μια ιστορική συναίσθηση στους μαθητές,
- δικαιολογούν την εισαγωγή των μαθηματικών οργάνων και των μεθοδολογιών,
- χρησιμεύουν για την προώθηση ενός «στοχασμού» για τις μαθηματικές θεωρίες και τις μαθηματικές μεθόδους.

9. Ο Rudolf Strasser (1989) εστιάζει στη σχολική γνώση και στις πηγές κοινωνικών αναγκών σε σχέση με τη νομιμοποίηση της μαθηματικής γνώσης που θα διδαχθεί. Παρουσιάζοντας την έννοια της Διδακτικής Μεταφοράς επιχειρεί να εξηγήσει και τους δυο παράγοντες της διδακτικότητας (την κοινωνική και την πολιτιστική αξία) μέσω τριών περιπτώσεων από μεταρρυθμίσεις προγραμμάτων στη Γερμανία.
Οι παραπάνω απόψεις διαμορφώνουν το ξεκίνημα μιας προσπάθειας για την αναζήτηση της χρησιμότητας της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Στα χρόνια που μεσολάβησαν η προσπάθεια για να αναδειχθούν τα οφέλη από τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει εντονότερη και έχει δημιουργήσει ένα ιδιαίτερα ενεργό ερευνητικό πεδίο. Γύρω από την κεντρική ιδέα για τη χρήση της ιστορίας ως παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών, προκειμένου να ασχοληθούν με ορισμένες μαθηματικές έννοιες, έχουν αναπτυχθεί διάφορες απόψεις σχετικά με τις δυσκολίες που παρουσιάζει η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, τους λόγους και τους τρόπους αξιοποίησή της, αλλά και την δυνατότητα των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά να ανταπεξέλθουν σε αυτόν το ρόλο.

1.3. Βασικά επιχειρήματα, αντιρρήσεις και τρόποι για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Οι πρώτες συζητήσεις για την επιστημολογική και φιλοσοφική προσέγγιση της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών ξεκίνησαν από την εφαρμογή του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» και της έννοιας του «ιστορικού παραλληλισμού» στη διδασκαλία των Μαθηματικών και οδήγησαν στην παραγωγή πολυάριθμων ερευνών και μελετών. Αυτές ανέδειξαν νέες θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις για το εν λόγω θέμα, του οποίου οι βασικές τάσεις συνδέονται με τα ονόματα των Jean Piaget, Hans Freudenthal και Guy Brousseau. Οι τρεις κυρίαρχες κατευθύνσεις (Θωμαΐδης, 2014), που συνοψίζουν επιγραμματικά το θεωρητικό πλαίσιο των εφαρμογών της Ιστορίας των Μαθηματικών στα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης είναι:

- Τα στάδια της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών αντιστοιχίζονται με τα στάδια της ατομικής γνωστικής ανάπτυξης, με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των διαδικασιών μάθησης (Piaget).
- Η διδακτική αξιοποίηση των συνθηκών ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών, με στόχο την «εκ νέου επινόησή» τους από τους μαθητές μέσω της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων (Freudenthal).
- Ο εντοπισμός γνώσεων – εμποδίων και η ανάλυση των συνθηκών της υπέρβασής τους, με στόχο τη δημιουργία ανάλογων διδακτικών καταστάσεων (Brousseau).

1.3.1. Επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών

Στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης περιγράφεται σήμερα ένας **μεγάλος αριθμός επιχειρημάτων υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών** στην καθημερινή διδακτική διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών.

Μια πρώτη ταξινόμηση των επιχειρημάτων αφορά τον σκοπό για τον οποίο αξιοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή οι χρήσεις της ιστορίας μπορεί να είναι:

Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο, που αναφέρεται σε ζητήματα τα οποία αφορούν στο εσωτερικό των Μαθηματικών (in-issues) και σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες, τις θεωρίες, τους κλάδους, τις μεθόδους, και λοιπά. Για παράδειγμα, η μάθηση σχετικά με τα σύνολα των αριθμών (N, Z, Q, R, C), τις μεταξύ τους σχέσεις, τον πληθικό αριθμό τους, και λοιπά, θεωρείται ότι είναι μια μελέτη των in-ζητημάτων των Μαθηματικών (Jankvist, 2009). Στην περίπτωση αυτή η ιστορική διάσταση εμφανίζεται ως βοήθημα- βοηθητικό μέσο, που αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Για τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο τα πιο χαρακτηριστικά επιχειρήματα είναι αυτά που απαντώνται στη βιβλιογραφία ως «εξελικτικά» (evolutionary), σύμφωνα με τα οποία η μάθηση των Μαθηματικών συνδέεται απόλυτα με την ιστορία τους. Στο πιο ξεκάθαρο από αυτά, το επιχείρημα της «ανακεφαλαίωσης», αναφέρεται ότι η οντογένεση (η ανάπτυξη, δηλαδή, ενός οργανισμού) αποτελεί μια σύντομη επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (της εξέλιξης, δηλαδή, του αντίστοιχου γένους-είδους). Μέσω αυτής της μεταφοράς υποστηρίχθηκε ότι η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους και επομένως η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να ακολουθεί την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία από αυτήν. Πρέπει δηλαδή το μυαλό και η σκέψη κάποιου, που μαθαίνει Μαθηματικά, να περάσει από τα στάδια εκείνα που τα Μαθηματικά πέρασαν κατά την πορεία της εξέλιξής τους και αυτό αφορά όχι μόνο τα Μαθηματικά στο σύνολό τους, αλλά και τις μαθηματικές έννοιες και θεωρίες. Πολλές φορές το επιχείρημα αυτό συνδέεται με τον «ιστορικό παραλληλισμό», ο οποίος σχετίζεται με την παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που παρουσιάστηκαν στην ιστορία, όπως αυτά εμφανίζονται μέσα στη σύγχρονη σχολική τάξη, επιχειρώντας τη συσχέτιση της ιστορικής γέννησης και εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας με τον τρόπο που αυτή προσλαμβάνεται από τους μαθητές (Farmaki & Paschos, 2007; Tzanakis & Kourkoulos, 2007; Thomaidis & Tzanakis 2007).

Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο συνδέεται, επίσης, με επιχειρήματα σύμφωνα με τα οποία η ιστορία μπορεί:

- Να αποτελέσει παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών και να εγείρει το ενδιαφέρον τους για μάθηση και μελέτη των Μαθηματικών (Farmaki & Paschos, 2007).
- Να δώσει στα Μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο, να τα κάνει ίσως λιγότερο «τρομακτικά» και να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και άνεση, διαπιστώνοντας ότι και οι σπουδαίοι μαθηματικοί του παρελθόντος αντιμετώπισαν τις ίδιες δυσκολίες και χρειάστηκαν χρόνο και προσπάθεια για τις ξεπεράσουν (Tzanakis & Thomaidis, 2000; Jankvist, 2009).
- Να προσφέρει μια διαφορετική άποψη και ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασης μιας μαθηματικής ενότητας (Jahnke, 2001; Kleiner, 2001). Μπορεί, επίσης, να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να δουν διαφορετικά κάποια μαθηματικά θέματα μέσα από τα μάτια και τις δυσκολίες των μαθητών τους (Jankvist, 2009).
- Να βοηθήσει στην ανίχνευση, την ταυτοποίηση και την υπερπήδηση των επιστημολογικών εμποδίων (Brousseau, 1997).

Η χρήση της ιστορίας ως στόχος αναφέρεται σε θέματα που αφορούν τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών, τα οποία μπορούμε να ονομάσουμε μετα-ζητήματα (meta-issues) (Τζανάκης, 2009; Jankvist, 2009). Στην περίπτωση αυτή η ιστορική διάσταση αφορά σε ζητήματα για τα ίδια τα Μαθηματικά (Τζανάκης, 2009). Με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως στόχου, η μάθηση της Ιστορίας των Μαθηματικών υπηρετεί τη μάθηση αυτής της ίδιας, σαν να ήταν δηλαδή ένα ανεξάρτητο επιστημονικό αντικείμενο.

Χρησιμοποιώντας την ιστορία ως στόχο, μπορούμε να δείξουμε στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά:

- υπάρχουν, αναπτύσσονται και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- δεν προέρχονται από το τίποτα, αλλά είναι ένα επιστημονικό πεδίο που εξελίσσεται και έχει στέρεες βάσεις (Philippou & Christou, 1998).
- εξελίσσονται με την ενεργό συμμετοχή των ανθρώπων (Gulikers & Blom, 2001; Thomaidis & Tzanakis, 2007).
- έχουν εξελιχθεί μέσα στο πέρασμα των αιώνων σε πολλές διαφορετικές κουλτούρες και σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς. Επίσης, δέχθηκαν αλλά και άσκησαν σημαντικές επιρροές μέσα στις κουλτούρες αυτές (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- εξελίσσονται καθοδηγούμενα και από εσωτερικές και από εξωτερικές δυνάμεις και ανάγκες (Jankvist, 2009).
- έχουν άμεση σχέση με άλλες επιστήμες (Τζανάκης, 2009).

Επιπλέον, η χρήση της ιστορίας ως στόχου συνδέεται με τη μάθηση θεμάτων σε σχέση με την ανάπτυξη και την εξέλιξη των Μαθηματικών και εξυπηρετεί τη μάθηση της ιστορίας τους ή επεξηγεί άλλα ιστορικά θέματα του επιστημονικού πεδίου των Μαθηματικών (Jankvist, 2009). O Jankvist (2009) σημειώνει κάποια παραδείγματα ερωτήσεων που υποδηλώνουν μια μελέτη τέτοιων μετα-ζητημάτων, τα οποία ο Niss (2001a) αναφέρει: Πώς τα Μαθηματικά εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου; Ποιες δυνάμεις και ποιοι μηχανισμοί μπορεί να είναι παρόντες κατά την εξέλιξη; Η κοινωνία και οι πολιτιστικές συνθήκες παίζουν ρόλο στην εξέλιξη αυτή; Αν ναι, πώς; Και τότε τα Μαθηματικά, εξαρτώνται από τον πολιτισμό και την κοινωνία, τον τόπο και το χρόνο; Είναι τα παλιά Μαθηματικά ξεπερασμένα Μαθηματικά; (Jankvist, 2009). Σύμφωνα με τον Jankvist (2009), η διάκριση μεταξύ των εσωτερικών ζητημάτων (in-issues) και των μετα-ζητημάτων (meta-issues) παρουσιάζει κάποιες ομοιότητες με τους όρους «εσωτερικά ζητήματα» (inner issues) και «εξωτερικά ζητήματα» (outer issues) καθώς και με τους όρους «γνώση των Μαθηματικών από μέσα» (knowledge of mathematics from the inside) και «γνώση των Μαθηματικών από έξω» (knowledge of mathematics from the outside), οι οποίοι αναφέρονται αντίστοιχα από τους Davis & Hersh (1982) και Niss (2001).

Σε μια άλλη κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων υπέρ της αξιοποίησης και της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδακτική πράξη αντλήθηκαν στοιχεία κατά βάση από τις εργασίες Tzanakis, Arcavi et al. (2000) και Τζανάκης (2009). Στην κατηγοριοποίηση αυτή με σκοπό να στηριχθεί, να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών περιλαμβάνονται οι παρακάτω κατηγορίες:

1. Η εκμάθηση των Μαθηματικών, που συνδέεται με:

α. Την ιστορική ανάπτυξη των Μαθηματικών σε αντιπαραβολή με το τελικό στιλβωμένο προϊόν, το οποίο γίνεται αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες αγνοείται συστηματικά το γεγονός ότι οι μαθηματικές ιδέες, όπως ο Freudenthal (1983) επεσήμανε, ποτέ δεν δημοσιεύτηκαν με τον τρόπο που ανακαλύφθηκαν. Αυτό δεν επιτρέπει στον διδασκόμενο να εκτιμήσει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών ανακαλύψεων και να αναπτύξει μέσα από αυτή μεταγνωστικές ικανότητες και δεξιότητες.

β. Την ιστορία ως πηγή πληροφοριών, καθώς είναι εύκολα προσβάσιμη και μας τροφοδοτεί με σωρεία προβλημάτων, παραδειγμάτων και καταστάσεων, προκειμένου να εμπλουτισθεί η διαδικασία της μάθησης και να κινητοποιηθούν διδάσκοντες και διδασκόμενοι.

γ. Την ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων: Μέσω αυτής μπορούν να αναδειχθούν συσχετίσεις και αλληλεπιδράσεις άλλων επιστημών με τα Μαθηματικά, οι οποίες σχετίζονται με την ανάπτυξη και την εξέλιξή τους, αλλά δεν αναφέρονται κατά τη διδασκαλία τους. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία σε μια εποχή που οι διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των επιστημών έχουν σχεδόν εξαφανιστεί.

δ. Την γενικότερη παιδευτική σημασία της ιστορίας: Η συμμετοχή σε εργασίες με ιστορικό προσανατολισμό δίνει στους διδασκόμενους τη δυνατότητα να αναπτύξουν γενικότερες δεξιότητες και ικανότητες (ανάγνωση και κατανόηση κειμένων, αναζήτηση και διερεύνηση πηγών, γραπτή και προφορική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης, ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, απόδοση κειμένου άλλης γλώσσας ή παλαιότερης εποχής στη σύγχρονη γλώσσα). Έτσι δεν ασχολούνται μόνο με το να «κάνουν Μαθηματικά», αλλά ασκούνται και στο να «μιλούν για τα Μαθηματικά».

Στη συγκεκριμένη κατηγορία είναι φανερό ότι το σύνολο των επιχειρημάτων αναφέρονται κυρίως στα εσωτερικά θέματα των Μαθηματικών, κατ' επέκταση στη χρήση της «ιστορίας ως εργαλείο», πλην του επιχειρήματος 1γ που μπορεί να υπηρετήσει και την «ιστορία ως εργαλείο» και την «ιστορία ως στόχο».

2. Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας, που συνδέεται με:

α. Το περιεχόμενο των Μαθηματικών: Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να κάνει περισσότερο αντιληπτή την εξελικτική πορεία της μαθηματικής γνώσης και να συμβάλει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών και αυτοβελτιωτικών ικανοτήτων και πρακτικών στους μαθητές, καθώς αυτοί διαπιστώνουν ότι οι ευρετικές διαδικασίες (εικασίες, αμφιβολίες, λάθη, ελλιπείς διατυπώσεις, αποδείξεις, αδιέξοδα) αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών.

β. Τη μορφή των Μαθηματικών: Η εξέλιξη των Μαθηματικών (ως προς το περιεχόμενο, το συμβολισμό, την ορολογία, τις υπολογιστικές μεθόδους, τους τρόπους έκφρασης, τις αναπαραστάσεις) μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή από τους διδασκόμενους μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών, η οποία επίσης μπορεί να βοηθήσει και στη γνωριμία με τα πλεονεκτήματα αλλά και τα μειονεκτήματα των σύγχρονων Μαθηματικών.

Τα προηγούμενα επιχειρήματα ανάλογα με την ερμηνεία τους μπορούν να ενταχθούν και στην «ιστορία ως εργαλείο» και την «ιστορία ως στόχο».

3. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών, που συνδέεται με:

α. Προσδιορισμό κινήτρων: Οι διδάσκοντες μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορούν να αναφερθούν στους τρόπους γέννησης και εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας, μεθόδου ή θεωρίας, πράγμα που εμπεριέχει και τα κίνητρα πίσω από την εισαγωγή της νέας γνώσης, τα προβλήματα που οδήγησαν σε αυτήν και τις προσπάθειες, επιτυχείς ή ανεπιτυχείς για την αντιμετώπισή τους.

β. Δυσκολίες και εμπόδια: Μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών ο εκπαιδευτικός μπορεί να γνωρίσει τις δυσκολίες και τα εμπόδια μιας μαθηματικής έννοιας ή μεθόδου και να χρησιμοποιήσει τη γνώση αυτή όταν ίδιες ή παρόμοιες δυσκολίες και εμπόδια επανεμφανιστούν στη σχολική τάξη. Επίσης, μπορεί να εκτιμήσει τα υπέρ και τα κατά στην παρουσίαση ενός θέματος σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης.

γ. Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας «κάνω Μαθηματικά»: Η μαθηματική παιδεία διδασκόντων και διδασκομένων εμπλουτίζεται, καθώς έρχονται σε επαφή με πρωτότυπες πηγές ή ασχολούνται με εργασίες που έχουν προσανατολισμό προς την ιστορία.

δ. Εμπλουτισμό διδακτικού ρεπερτορίου: Η μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, ερωτημάτων, εξηγήσεων, καταστάσεων, που οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αντλήσουν από την Ιστορία των Μαθηματικών εμπλουτίζει το διδακτικό τους ρεπερτόριο, προσφέροντας εναλλακτικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων ή στην παρουσίαση κάποιου θέματος και κινητοποιεί περισσότερο τους μαθητές.

ε. Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων αλλά εν τέλει «σωστών» Μαθηματικών: Η επαφή με πρωτογενείς ή και με δευτερογενείς πηγές ασκεί τους εκπαιδευτικούς στην αποκωδικοποίηση και κατανόηση «σωστών» εν τέλει Μαθηματικών που έχουν διατυπωθεί με διαφορετική από τη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, ευαισθητοποιώντας τους έτσι απέναντι στην ιδιοσυγκρασιακή γλώσσα που οι μαθητές τους χρησιμοποιούν.

Σε αυτήν την κατηγορία επιχειρημάτων τα επιχειρήματα 3γ και 3δ εμπίπτουν άλλοτε στην κατηγορία «ιστορία ως εργαλείο» και άλλοτε στην κατηγορία «ιστορία ως στόχος» ανάλογα με το τμήμα ή την ερμηνεία του επιχειρήματος.

4. Η συναισθηματικά θετική προδιάθεση προς τα Μαθηματικά που συνδέεται με:

α. Τη θεώρηση των Μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας: Η ιστορική διάσταση στην εκμάθηση των Μαθηματικών δίνει τη δυνατότητα να γίνει αντιληπτό ότι τα Μαθηματικά δεν είναι ένα τελειωμένο θεόσταλτο προϊόν, ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων αλλά μια ανθρώπινη δραστηριότητα και επινόηση. Επίσης, ότι η εξέλιξή τους επηρεάζεται από εξωγενείς και ενδογενείς παράγοντες και απαιτεί εξαιρετική διανοητική προσπάθεια.

β. Την επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας: Η γνωριμία με παραδείγματα, ιδέες και ερωτήματα που δεν αποτελούν οργανικό κομμάτι των σύγχρονων Μαθηματικών (συνετέλεσαν όμως στην υλοποίηση των απαραίτητων βημάτων για την ιστορική εξέλιξή τους προς τη σημερινή τους μορφή) ενθαρρύνουν τους διδασκόμενους να τολμούν τη διατύπωση των δικών τους ιδεών, ερωτημάτων, δραστηριοτήτων και να αναπτύξουν δημιουργικούς ή ακόμα και ιδιόρρυθμους τρόπους μαθηματικής σκέψης, όπως συνέβαινε και στο παρελθόν.

γ. Την αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων: Η Ιστορία των Μαθηματικών παρέχει στους διδασκόμενους τη δυνατότητα να αντιληφθούν τον δημιουργικό ρόλο του λάθους, της παρανόησης ή της αποτυχημένης προσπάθειας και τους ενθαρρύνει να προχωρήσουν στη δική τους περιπέτεια έρευνας και στη μαθηματική τους ωρίμανση, χωρίς να απογοητεύονται από την πιθανότητα αποτυχίας ή λάθους.

Και σε αυτή την κατηγορία έχουμε μια μίξη επιχειρημάτων που μπορούν να ενταχθούν και στην «ιστορία ως εργαλείο» και «στην ιστορία ως στόχος».

5. Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτιστικής ανθρώπινης προσπάθειας που συνδέεται με:

α. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους: Μέσα από την ιστορία μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι τα Μαθηματικά δεν εξελίσσονται μόνο για πρακτικούς και ωφελιμιστικούς λόγους προς εξυπηρέτηση της κοινωνίας αλλά και για καθαρά εσωτερικούς λόγους, αισθητικών αναζητήσεων (για παράδειγμα ενοποίησης εννοιών και γνωστικών τομέων, ταξινόμησης, λογικής πληρότητας, συμμετρίας,

κομψής έκφρασης και λοιπά), διανοητικής περιέργειας και πρόκλησης και καθαρής ευχαρίστησης.
β. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων: Συμπληρωματικά προς τα προαναφερθέντα, μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών είναι δυνατόν να διακρίνει κανείς την εξέλιξή τους λόγω διάφορων εξωγενών παραγόντων, οι οποίοι μπορεί να προέρχονται από άλλα επιστημονικά πεδία (για παράδειγμα Φυσική), από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας ή από το εκάστοτε πολιτιστικό πλαίσιο όπου υπήρχαν συγκεκριμένοι περιορισμοί και επιταγές.
γ. Τα Μαθηματικά ως μέρος της τοπικής και πολιτιστικής παράδοσης: Μέσα από την ιστορία διδάσκοντες και διδασκόμενοι μπορούν να αντιληφθούν ότι τα Μαθηματικά, αν και σήμερα συχνά θεωρούνται αποτέλεσμα του δυτικού πολιτισμού, εξελίχθηκαν ως αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών τάσεων και παραδόσεων που αναπτύχθηκαν και μπορεί ακόμα να υφίστανται σε κάποια μορφή. Αυτές οι πολιτισμικές διαστάσεις μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία προκειμένου να αναπτυχθεί ανοχή και σεβασμός προς τις διαφορετικές κουλτούρες που πιθανό να συνυπάρχουν μέσα σε μια τάξη, αλλά και για να αναδειχθεί ο τοπικός πολιτισμός και η τοπική κουλτούρα.
Σχεδόν όλα τα επιχειρήματα της κατηγορίας αυτής εντάσσονται στην κατηγορία «ιστορία ως στόχος», επιτρέπουν όμως με μια διαφορετική προσέγγιση την ένταξή τους στην κατηγορία «ιστορία ως εργαλείο».

1.3.2. Αντιρρήσεις για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Εκτός από τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, έχουν διατυπωθεί από τους εκπαιδευτικούς της πράξης και τους ερευνητές του χώρου της Διδακτικής αλλά και από τους ιστορικούς των Μαθηματικών **σοβαρές ενστάσεις για την αποτελεσματικότητα, τη σκοπιμότητα και το θεμιτό της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση**. Τα επιχειρήματα κατά της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία κατηγοριοποιούνται στις παρακάτω δύο κατηγορίες (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009):

α. Ενστάσεις επιστημολογικού – φιλοσοφικού χαρακτήρα.

Στις ενστάσεις αυτές έχουμε δύο υποκατηγορίες:

1. Σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών.

α. Αυτά δεν είναι Μαθηματικά: Για τη διδασκαλία της Ιστορίας των Μαθηματικών πρέπει πρώτα να διδαχθούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Η σειρά είναι: Πρώτα διδάσκει κανείς το θέμα από τα Μαθηματικά και κατόπιν την ιστορία του (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).
Αυτή η ένσταση παραπέμπει στην επιστημολογική θέση ότι τα Μαθηματικά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα στα οποία η επιστημονική κοινότητα οδηγείται, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι διαδικασίες που οδήγησαν σε αυτά (Τζανάκης, 2009).
β. Η πρόοδος στα Μαθηματικά συνίσταται στο να γίνονται τα δύσκολα προβλήματα ρουτίνα. Επομένως, δεν υπάρχει λόγος να ασχολείται κανείς με όσα έγιναν στο παρελθόν (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

γ. Αυτά που έγιναν στο παρελθόν μπορεί να ήταν περίπλοκα. Συνεπώς, υπάρχει πιθανότητα η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία να προκαλέσει στους μαθητές στρεβλώσεις και σύγχυση μάλλον, παρά να συμβάλει στην αποσαφήνιση εννοιών (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

Η συγκεκριμένη ένσταση, όπως και η προηγούμενη, υπονοούν ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση είναι στην ουσία η ενσωμάτωση της ιστορίας με όλη την περιπλοκότητα και όλες τις λεπτομέρειές της (Τζανάκης, 2009).

2. Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος.

α. Η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων είναι δύσκολος στόχος και δεν βοηθά: Η αξιοποίηση πρωτότυπων πηγών απαιτεί προσεχτικό σχεδιασμό αλλά και συνεχή έλεγχο σε όλα της τα στάδια (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Για το συγκεκριμένο θέμα βέβαια, υπάρχει σχετικά πλούσια βιβλιογραφία με μεθοδολογικές προσεγγίσεις και εφαρμογές σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών και για διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες (Τζανάκης, 2009).

β. Η ιστορία είναι δυνατό να οδηγήσει τελικά στην καλλιέργεια πολιτιστικού σωβινισμού και στενόμυαλου και παρωχημένου εθνικισμού (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Ο ανεπίτρεπτος ή μη ηθικός τρόπος που ενδεχομένως να χρησιμοποιηθεί η ιστορία δεν είναι λογικό να οδηγεί στην απόρριψη της διδακτικής αξιοποίησής της (Τζανάκης, 2009).

γ. Οι μαθητές, τουλάχιστον μέχρι το Γυμνάσιο, έχουν αποσπασματική αίσθηση του ιστορικού χρόνου (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Τζανάκης, 2009), καθώς αδυνατούν να συσχετίσουν τα Μαθηματικά με το ιστορικό τους πλαίσιο, λόγω έλλειψης ευρύτερης παιδείας στην ιστορική επιστήμη (Tzanakis, Arcavi et al., 2000). Για το λόγο αυτό η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη θα πρέπει να συμβαδίζει με το επίπεδο της γνωστικής ωριμότητας των μαθητών και με το ιστορικό τους υπόβαθρο (Τζανάκης, 2009).

β. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα.

Στις ενστάσεις αυτές έχουμε τρεις υποκατηγορίες:

1. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων

α. Δεν υπάρχει διαθέσιμος ο απαιτούμενος διδακτικός χρόνος (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Απαιτείται σχεδιασμός μαθηματικών ενοτήτων που μπορούν να διδαχθούν μέσω μιας ιστορικής προσέγγισης και ανάλογη προσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006). Εξάλλου, θα πρέπει να αποσαφηνιστεί ότι είναι ανέφικτη και μη αναγκαία μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην ιστορία για το σύνολο της διδακτέας ύλης (Τζανάκης, 2009).

β. Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009) και δεν διαθέτουν την ιστορική αλλά και τη διεπιστημονική γνώση που είναι απαραίτητη για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al., 2000). Για το λόγο αυτό η σχετική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών κρίνεται απαραίτητη (Τζανάκης, 2009).

γ. Δεν είμαι ιστορικός, άρα δεν μπορώ να ξέρω ότι παρουσιάζω το θέμα σωστά (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Συμπληρωματικά με το προηγούμενο επιχείρημα η έλλειψη της κατάλληλης επιμόρφωσης οδηγεί στην έλλειψη της απαραίτητης αυτοπεποίθησης στους εκπαιδευτικούς για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al. 2000).

δ. Δεν υπάρχει διαθέσιμο το κατάλληλο διδακτικό υλικό (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Τα τελευταία χρόνια βέβαια, έχει δημιουργηθεί από ερευνητές σχετικό βοηθητικό υλικό σε διάφορες μορφές (εκτενής βιβλιογραφία, βιβλία με πρωτότυπες πηγές, συλλογικοί τόμοι με λεπτομερείς περιγραφές συγκεκριμένων παραδειγμάτων ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, και λοιπά), το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδακτική πράξη από τους εκπαιδευτικούς (Τζανάκης, 2009).

2. Διαδικασίες αξιολόγησης.

α. Πώς μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε test ή εξετάσεις (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009); Δεν υπάρχει σαφής ή συνεπής τρόπος αξιολόγησης των στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών στα πλαίσια της αξιολόγησης των μαθητών. Για το λόγο αυτό αναμένεται ότι οι μαθητές δεν θα την εκτιμήσουν ούτε και θα δώσουν την απαραίτητη σημασία και προσοχή σε αυτήν (Tzanakis, Arcavi et al., 2000).

β. Υπάρχει πράγματι εμπειρική τεκμηρίωση ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των Μαθηματικών (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009); Τα τελευταία χρόνια γίνεται σοβαρή προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση, μέσα από εμπειρικές έρευνες και διδασκαλίες με στόχο την επαρκή τεκμηρίωση της αποτελεσματικότητας της ιστορικής διάστασης στη μαθηματική εκπαίδευση, πράγμα για το οποίο απαιτείται να διανυθεί ακόμη πολύς δρόμος (Τζανάκης 2009).

3. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκομένων.

α. Δεν αρέσει στους διδασκόμενους (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

β. Οι διδασκόμενοι το θεωρούν μάθημα Ιστορίας και δεν αγαπούν την Ιστορία (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

γ. Οι διδασκόμενοι το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα ίδια τα Μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

δ. Οι διδασκόμενοι δεν έχουν ικανοποιητική ευρύτερη παιδεία για να το εκτιμήσουν (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

Οι ενστάσεις που προαναφέρθηκαν δεν περιορίζονται στη μαθηματική εκπαίδευση. Μέσα από αυτές εκφράζονται ευρύτερα προβλήματα και δυσλειτουργίες στην εκπαίδευση (Τζανάκης, 2009). Συνεπώς, έμμεσα υπογραμμίζεται η ανάγκη για παρέμβαση στη διδασκαλία και της ιστορίας αλλά και για διαθεματική προσέγγιση σε μέρος, τουλάχιστον, της διδακτέας ύλης (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006; Τζανάκης, 2009).

Ο Jankvist (2009) αναφέρει, σχολιάζοντας τις παραπάνω ενστάσεις, ότι:

- οι Α.1.α και Α.1.β απλά απορρίπτουν την ενσωμάτωση της ιστορίας ως μη σημαντική για τη μαθηματική διδασκαλία.

- οι Α.2.β, Α.2.γ, Β.1.α, Β.1.β, Β.1.δ και Β.2.α απορρίπτουν τη χρήση της ιστορίας για άλλους λόγους αν και αναγνωρίζουν τη δυνατότητα ενσωμάτωσής της.
- οι Α.1.γ, Β.3.α, Β.3.β και Β.3.γ αντιτίθενται κατά κάποιο τρόπο στα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας που θέτουν ως στόχο την κινητοποίηση των μαθητών (Jankvist, 2009).

1.3.3. Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη

Σχετικά με τους **τρόπους με τους οποίους η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία και στην εκμάθηση των Μαθηματικών** διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις κύριες κατηγορίες (Jankvist, 2009), εστιάζοντας στη μεθοδολογία που υιοθετείται:

<u>1.Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (Illumination approaches).</u>

Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μέσα στην τάξη ή μέσω βιβλίων συμπληρώνεται από ιστορικό υλικό που ποικίλει ως προς το μέγεθος και το σκοπό χρήσης. Το υλικό μπορεί να είναι εισαγωγικά ή καταληκτικά κεφάλαια ιστορικού περιεχομένου, αποσπάσματα από πρωτότυπες πηγές και συζήτηση/διδασκαλία με βάση αυτά, ιστορικά σημειώματα και ανάπτυξη σχετικών δραστηριοτήτων, εμπλουτισμός διδακτικών ενοτήτων με αναφορά ή με επεξεργασία ιστορικά σημαντικών ερωτημάτων και προβλημάτων.

<u>2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (Modules approaches).</u>

Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για σχεδιασμό και ανάπτυξη διδακτικών ενοτήτων που μπορεί να διαφέρουν ως προς το σκοπό και ως προς το μέγεθος και είναι αφιερωμένες στην ιστορία και εφαρμογή ειδικών περιπτώσεων, συχνά με λεπτομερή μελέτη. Τέτοιες ενότητες μπορεί να είναι η διδασκαλία με φύλλα εργασίας ή με «ιστορικά πακέτα», σχετικές διαθεματικές εργασίες (projects) των μαθητών, πλήρης σειρά μαθημάτων με άξονα ένα συγκεκριμένο θέμα (με έμφαση στην ιστορική ή στην μαθηματική του διάσταση)

<u>3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία (History-based approaches).</u>

Στην κατηγορία αυτή έχουμε προσεγγίσεις βασισμένες στην εξέλιξη και στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η Ιστορία διαμορφώνει τη σειρά και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα θέματα και συχνά δεν εμφανίζεται ξεκάθαρα, αλλά ενσωματώνεται πλήρως στη διδασκαλία (για παράδειγμα η ιστορικο-γενετική προσέγγιση ενός θέματος ή μαθήματος)

Για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών αναφέρονται στη βιβλιογραφία **τρεις μορφές**, στις οποίες διαφέρει η έμφαση αναφορικά με την ιστορία, αλλά δεν αποκλείουν η μία την άλλη, και υπάρχει η δυνατότητα αυτές να εμφανιστούν συμπληρωματικά ή ακόμα και παράλληλα στα πλαίσια της ίδιας δραστηριότητας ή διδασκαλίας (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Τζανάκης, 2009; Jankvist, 2009).

<u>1. Η εκμάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών</u>. Ο όρος «ιστορικές πληροφορίες»

περιλαμβάνει: α. Ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες για διάφορα ιστορικά θέματα. β. Αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία ιστορίας Μαθηματικών πάνω σε συγκεκριμένα θέματα της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών. Στη μορφή αυτή έμφαση δίνεται περισσότερο στην άντληση πληροφοριών από την Ιστορία των Μαθηματικών και στη μεγαλύτερη εμβάθυνση για την κατανόηση της φύσης των Μαθηματικών παρά για την εκμάθηση των ίδιων των Μαθηματικών. Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως «ως στόχος» και δευτερευόντως «ως εργαλείο».

2. Η εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία τους. Στην ουσία αυτή είναι η γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των Μαθηματικών, όπου δίνεται μικρότερη έμφαση στη χρήση θεωριών, μεθόδων και εννοιών και μεγαλύτερη στον τρόπο που οι θεωρίες, οι μέθοδοι και οι έννοιες απαντούν σε συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήματα. Βασικές ιστορικές γνώσεις κρίνονται απαραίτητες, προκειμένου να είναι κανείς σε θέση να εντοπίσει τα κρίσιμα στάδια της ιστορικής εξέλιξης πάνω στα οποία θα οργανωθούν η διδασκαλία, το διδακτικό υλικό, οι δραστηριότητες. Ως παραδείγματα για μια προσέγγιση αυτού του είδους θα μπορούσαν να αναφερθούν η «γενετική προσέγγιση» (Toeplitz, 1963 και επανέκδοση 2007), η «καθοδηγούμενη επανανακάλυψη» (Freudenthal, 1991), ο σχεδιασμός διδακτικών καταστάσεων με βάση τον προσδιορισμό επιστημολογικών εμποδίων (Brousseau, 1997). Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως «ως εργαλείο», καθώς η συγκεκριμένη μορφή διδακτικής αξιοποίησής της εντάσσεται στην κατηγορία των προσεγγίσεων που είναι βασισμένες στην ιστορία.

3. Η καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους. Εδώ περιλαμβάνονται οι διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας στην οποία διακρίνονται δύο κατηγορίες χαρακτηριστικών, τα ενδογενή και τα εξωγενή. Για τη συγκεκριμένη μορφή η πιο κατάλληλη προσέγγιση θεωρείται αυτή που βασίζεται σε οριοθετημένες ενότητες, όπου η ιστορία εμφανίζεται κυρίως «ως στόχος», επιδιώκοντας να δώσει έμφαση:

- στα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως ο ρόλος των διάφορων εννοιολογικών πλαισίων, των αμφιβολιών, των παραδόξων, των αντιφάσεων, των ευρετικών μεθόδων αλλά και η εξελικτική φύση της μορφής και του περιεχομένου των Μαθηματικών σε σύγκριση με το σήμερα.
- στα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως η σχέση διάφορων όψεων των σημερινών Μαθηματικών με τις τέχνες και τη φιλοσοφία, η αμφίδρομη σχέση και η αλληλεπίδρασή τους με άλλες επιστήμες, οι επιδράσεις του κοινωνικο-πολιτιστικού πλαισίου στη διατύπωση και λύση προβλημάτων, οι σχέσεις και διαφοροποιήσεις σύγχρονων Μαθηματικών με αυτά άλλων παραδόσεων και πολιτισμών.

Πολύ συνοπτικά, σχετικά με τους τρόπους εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική τάξη, αναφέρουμε ότι έχουν καταγραφεί (Τζανάκης, 2009):

α. Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα.

- Ιστορικά «σημειώματα» και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθηματικά θέματα (historical snippets).
- Επιτόπια εμπειρία βάσει επισκέψεων σε μουσεία, αρχαιολογικούς, ιστορικούς και άλλους χώρους (outdoors experience).
- Ταινίες, videos και άλλα οπτικά μέσα, όπου παρουσιάζονται θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών (films and other visual means).

β. Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες.

- Ερευνητικά projects για τους διδασκόμενους βασισμένα σε ιστορικά κείμενα (research projects based on history texts).
- Η διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών (primary sources).
- «Φύλλα εργασίας», που συνοδεύονται ενδεχομένως από αποσπάσματα πρωτότυπων πηγών ή εμπνευσμένα από αυτές (worksheets).
- Πλήρη «Πακέτα Ιστορίας των Μαθηματικών» (historical packages.).

γ. Ευέλικτες εφαρμογές πιο «τοπικού» χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται.

- Η διδακτική αξιοποίηση λαθών, εναλλακτικών αντιλήψεων, αλλαγής της οπτικής, αναθεώρησης υποθέσεων και διαισθητικών ή/και (ημι)εμπειρικών επιχειρημάτων και λοιπά.
- Διδακτικό υλικό ή/και σχεδιασμός διδασκαλίας βασισμένων σε ιστορικά προβλήματα (historical problems), κάποια από τα οποία έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των Μαθηματικών και άλλα με ψυχαγωγικό απλά χαρακτήρα.

δ. Εφαρμογές πιο «πειραματικού» και εμπειρικού χαρακτήρα.

- Η επαφή και ενδεχόμενη χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων που διαδραμάτισαν ρόλο στην Ιστορία των Μαθηματικών (mechanical instruments).
- Μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα (experiential mathematical activities), όπως συζητήσεις ή ανταλλαγή επιχειρημάτων στην τάξη που έχουν ως πηγή έμπνευσης την ιστορία, σχετικά με ένα μαθηματικό ή μεταμαθηματικό ζήτημα, αντιμετώπιση και επίλυση ήδη γνωστών προβλημάτων με παλαιότερου τύπου (ίσως και παρωχημένου) συμβολισμού ή μεθόδου.
- Θεατροποίηση εμπνευσμένη από γεγονότα της ιστορικής διαδρομής των Μαθηματικών (plays).

ε. Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας.

Οι πολλαπλοί ρόλοι που η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να παίξει στη μαθηματική εκπαίδευση και οι οποίοι απεικονίζονται στα προαναφερθέντα επιχειρήματα και στους τρόπους υπέρ της ενσωμάτωσής της στη διδακτική πράξη, διαφέρουν ως προς τους επιδιωκόμενους στόχους αλλά και ως προς τα ωφέλη που προκύπτουν για τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους. Για τους διδάσκοντες, ιδιαίτερα, τα οφέλη τούς αφορούν όχι μόνον ως επαγγελματίες αλλά και ως εκπαιδευόμενους, τόσο κατά τη διάρκεια της βασικής πανεπιστημιακής εκπαίδευσής τους (pre service), όσο και στα πλαίσια μεταγενέστερης επιμόρφωσής τους εντός της υπηρεσίας (in service). Κυρίως, όμως, φαίνεται ότι απαιτούνται πηγές εύκολα προσβάσιμες και κατανοητές, οι οποίες θα είναι διαθέσιμες στους εκπαιδευτικούς αλλά και στους μαθητές. Επίσης, προκύπτει ανάγκη για συστηματική προετοιμασία των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, αλλά και στα πλαίσια της ενδοϋπηρεσιακής τους επιμόρφωσης (Tzanakis, Arcavi et al. 2000).

1.4. Επισημάνσεις και ερευνητικά ερωτήματα

Ένα γενικό ενδιαφέρον, διαρκώς αυξανόμενο, παρατηρείται τις τελευταίες δεκαετίες για την Ιστορία των Μαθηματικών. Παρατηρείται, επίσης, μια δραστηριοποίηση και ένας προβληματισμός σε διεθνές επίπεδο για τη διδακτική αξιοποίησή της και τη χρησιμοποίησή της ως ισχυρού μεθοδολογικού εργαλείου για την οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Έτσι, εμφανίζεται μια νέα, ενεργή περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης, με πολυάριθμες έρευνες και μελέτες, που έχουν δημοσιευτεί και έχουν αναδείξει νέες διαστάσεις του θέματος, με διοργάνωση συνεδρίων και έκδοση συλλογικών - θεματικών τόμων. Από όσα προαναφέρθηκαν διαπιστώνουμε ότι το νόμισμα έχει δύο όψεις, καθώς υπάρχει σοβαρή τεκμηρίωση επιχειρημάτων υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά κατά καιρούς έχουν διατυπωθεί και παραμένουν βάσιμες σημαντικές αντιρρήσεις. Η άποψη, όμως, για χρήση και ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών, προκειμένου να υπάρξει βελτίωση της διδακτικής προσέγγισης των Μαθηματικών, φαίνεται να κερδίζει έδαφος.

Στην ελληνική πραγματικότητα πέρα από το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών του 1931 δεν υπήρξε σε πρόγραμμα σπουδών, μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1990, άλλη αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η ένταξη ιστορικού υλικού στα διδακτικά βιβλία δεν προσδιοριζόταν από το αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά αποτελούσε πρωτοβουλία των συγγραφέων.

Η προσπάθεια για εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στο αναλυτικό σχολικό πρόγραμμα συνδέεται με την προηγούμενη μόλις δεκαετία και έγινε με τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του 2003, όπου επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση. Σε αυτά γίνεται λόγος για ζητήματα που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών στο πλαίσιο της διαθεματικότητας, των διδακτικών στόχων αλλά και των προδιαγραφών του απαιτούμενου διδακτικού υλικού για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (βιβλία μαθητών και εκπαιδευτικών), αναφέροντας την ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης, την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων, εννοιών και τη σύνδεσή τους με την εφαρμοσιμότητα και την πρακτική χρήση των Μαθηματικών διαχρονικά. Επίσης, μέσα από αυτά επιχειρείται η εισαγωγή μεθόδων ανακάλυψης και ολιστικής προσέγγισης της γνώσης από τους μαθητές με τη χρήση δραστηριοτήτων επίλυσης προβλήματος και διαθεματικών προσεγγίσεων καθώς και η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής. Έτσι, στα βιβλία για τους μαθητές τα ιστορικά σημειώματα, που στην πλειοψηφία τους έχουν ρόλο εισαγωγικό ή υποενότητας, ακολουθούν πλέον τη δομή του βιβλίου. Στα βιβλία των εκπαιδευτικών, προκειμένου να αξιοποιηθεί διδακτικά το ιστορικό υλικό, δίνονται ορισμένες ιστορικές πηγές και ηλεκτρονικές διευθύνσεις για επιπλέον πληροφορίες.

Εύλογα προκύπτουν ερωτήματα αφενός σχετικά με τη επιλογή και την ορθότητα των ιστορικών σημειωμάτων στις αντίστοιχες ενότητες και αφετέρου σχετικά με την πληρότητα και τη σαφήνεια των οδηγιών που δίνονται στα βιβλία των εκπαιδευτικών, ώστε να βοηθούν στην ορθή αξιοποίησή τους. Επιπλέον, θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί κατά πόσο ο εκπαιδευτικός που διδάσκει Μαθηματικά είναι σε θέση να διαχειριστεί και να αξιοποιήσει το ιστορικό υλικό με δική του πρωτοβουλία, καθόσον δεν είναι ιστορικός και δεν γνωρίζει την ιστορία καθαυτή. Γίνεται επομένως αντιληπτό ότι θα ήταν σημαντικό να διευκρινίζεται ποια κομμάτια ιστορίας πρέπει να διδαχθούν αλλά και με ποιον τρόπο θα μπορούσαν αυτά να αξιοποιηθούν στη διδακτική πράξη.

Λαμβάνοντας υπόψη όσα προαναφέρθηκαν, στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τα ακόλουθα **ερευνητικά ερωτήματα**:

1) Είναι το υλικό που περιλαμβάνεται στα σχολικά εγχειρίδια κατάλληλο για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών;
2) Με ποιον τρόπο θα καταστεί δυνατή η ουσιαστική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς μέσα στη σχολική πραγματικότητα;
3) Είναι δυνατό να δημιουργηθούν διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες θα υλοποιούν βασικούς διδακτικούς στόχους με αφετηρία την Ιστορία των Μαθηματικών;

1.5. Σκοπός και Μεθοδολογία της έρευνας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρούμε να εξετάσουμε το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από:

α) το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) / Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) που δημοσιεύτηκε το 2002/2003 από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (ΦΕΚ 303/ τ.Β΄/13-03-2003).

β) τα διδακτικά εγχειρίδια για την υποχρεωτική εκπαίδευση τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών, που εκδόθηκαν το 2006 για το Δημοτικό και το 2007 για το Γυμνάσιο.

Ειδικότερα, θα εστιάσουμε στην ανάγκη που αναδεικνύεται για επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, με έμφαση στη μελέτη, τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός αντίστοιχου επιμορφωτικού προγράμματος.

Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που προαναφέρθηκαν θα επιχειρήσουμε να διερευνηθούν μέσα από:

- Καταγραφή των διεθνών τάσεων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και της σχετικής εμπειρίας σε άλλα εκπαιδευτικά συστήματα.

- Ανάλυση των προγραμμάτων σπουδών, των διδακτικών βιβλίων και των οδηγιών διδασκαλίας για την υποχρεωτική εκπαίδευση στη χώρα μας.
- Διαμόρφωση ενός σχεδίου επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ενταγμένου μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της επιμορφωτικής πολιτικής στην ελληνική εκπαίδευση, με βασικούς άξονες τη θεωρητική κατάρτιση αλλά και την πρακτική εξάσκηση και εφαρμογή στις τάξεις των Μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2. Καταγραφή του υλικού που είναι διαθέσιμο στους εκπαιδευτικούς

2.1. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών – Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

Η διαρκής ρευστότητα που χαρακτηρίζει τις διάφορες και πολυποίκιλες κοινωνικές, οικονομικές, πολιτικές και πολιτισμικές συνθήκες της εποχής μας γίνεται ακόμα πιο έντονη κάτω από την επίδραση των ραγδαίων επιστημονικών και τεχνολογικών αλλαγών. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο θεωρείται αναγκαίο να δημιουργηθεί ένα ισχυρό σχολικό, παιδαγωγικό περιβάλλον με ενισχυμένες και αποτελεσματικές μαθησιακές και κοινωνικοποιητικές λειτουργίες. Προς την κατεύθυνση αυτή απαιτείται η προώθηση της εξασφάλισης ή και της δημιουργίας συνθηκών κάτω από τις οποίες οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύξουν ικανότητες και δεξιότητες, όπως η κριτική σκέψη, η θετική διάθεση για συνεργασία και αυτενέργεια, η δια βίου μάθηση. Οι γενικές συντεταγμένες του παραδοσιακού σχολείου με τον γνωσιοκεντρικό χαρακτήρα, την αποσπασματικότητα και την παθητική απόκτηση της γνώσης έρχονται σε αντίθεση με τις σύγχρονες προσεγγίσεις και αρχές της διδακτικής. Επομένως, μια διαρκής αναπροσαρμογή των Προγραμμάτων Σπουδών καθώς και της φιλοσοφίας τους θεωρείται επιβεβλημένη και απαραίτητη.
Για το σκοπό αυτό το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, στο πλαίσιο της ποιοτικής αναβάθμισης της εκπαίδευσης στη χώρα μας, επεξεργάσθηκε το 2001 τη σύνταξη του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), το οποίο ήρθε να συμπληρώσει και να εμπλουτίσει το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) του 1998, εισάγοντας και τη διαθεματική προσέγγιση. Η εφαρμογή του χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία και ολιστικότητα, καθώς αφορά όλες τις τάξεις και όλα τα μαθήματα της εννιάχρονης υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Δημοτικό και Γυμνάσιο). Η διαθεματική προσέγγιση μαζί με την προσπάθεια για ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών αποτελούν δύο από τις σημαντικότερες καινοτομίες που το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών εισάγει στην μαθηματική εκπαίδευση.

2.1.1. Στοιχεία για τη Διαθεματικότητα στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. των Μαθηματικών

Το Δ.Ε.Π.Π.Σ. εφαρμόζεται στη χώρα μας ήδη από το 2006 και μέσα από αυτό αναπροσαρμόζονται οι στόχοι και οι μέθοδοι διδασκαλίας. Ταυτόχρονα επιχειρείται η οργάνωση του περιεχομένου των διδασκόμενων αυτοτελών μαθημάτων, μέσα από τα συνακόλουθα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.), στη βάση μιας ισόρροπης οριζόντιας και κάθετης κατανομής της διδασκόμενης ύλης, προκειμένου να εξασφαλιστεί ταυτόχρονα η απαιτούμενη «εσωτερική συνοχή» και η «ενιαία οριζόντια ανάπτυξη των περιεχομένων». Έτσι, μέσα από τις κατάλληλες προεκτάσεις προωθείται η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων για τα διδασκόμενα θέματα και η σφαιρική ανάλυση βασικών εννοιών. Επίσης, προβάλλεται στη σχολική πράξη η παράμετρος της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης, διαδικασία που ενισχύει τη γενική παιδεία (Αλαχιώτης, 2002; Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, 2002).

Ο Σκούρας (2002) αναφέρει ότι στο πλαίσιο του σχολείου η γνώση θα πρέπει να είναι ενιαία, κατανοητή, σχετική και ενδιαφέρουσα για να δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να σκέφτονται και να πράττουν σχετικά με τις καταστάσεις της καθημερινότητας. Διαφορετικά παραμένει ανενεργό σώμα αποτελούμενο από αποσπασματικές και αδιάφορες πληροφορίες. Με τη διαθεματική προσέγγιση επιχειρείται αλλαγή στον χαρακτήρα του σχολείου (από γνωσιοκεντρικό σε μαθητοκεντρικό) και παράλληλα αλλαγή στον ρόλο του μαθητή (από παθητικός δέκτης σε ενεργό συμμέτοχο). Επομένως, για λόγους ψυχολογικούς και διδακτικούς αλλά και για την επιτυχία της διαθεματικής προσέγγισης η γνώση ως μάθηση θα πρέπει:

- να διδάσκεται σε ενιαία μορφή, για να προσφέρει ολιστικές εικόνες της πραγματικότητας.
- να συνδέεται με τις εμπειρίες, τα βιώματα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, έτσι ώστε να αποτελεί κίνητρο για μάθηση.
- να προσεγγίζεται με διερευνητικές μεθόδους, ώστε να εξασφαλίζεται η ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στην οικοδόμηση της γνώσης και να προσφέρεται για περαιτέρω συσχετίσεις και γενικεύσεις (Παναγάκος, 2002; Σκούρας, 2002)

Στη βιβλιογραφία συχνά απαντώνται οι όροι «διαθεματικότητα» και «διεπιστημονικότητα». Ο Ματσαγγούρας (2002) παραθέτει ορισμούς εργασίας για την διαθεματικότητα και την διεπιστημονικότητα, αναφέροντας ότι:

α) Η διαθεματικότητα αποτελεί έναν τρόπο οργάνωσης του Αναλυτικού Προγράμματος, ο οποίος καταργεί τα διακριτά μαθήματα ως πλαίσια επιλογής και οργάνωσης της σχολικής γνώσης. Η γνώση αντιμετωπίζεται ως ενιαία ολότητα, που προσεγγίζεται μέσα από τη (συλλογική συνήθως) διερεύνηση θεμάτων, ζητημάτων και προβληματικών καταστάσεων, που παρουσιάζουν ενδιαφέρον σύμφωνα με τα κριτήρια των μαθητών.

β) Η διεπιστημονικότητα αποτελεί τρόπο οργάνωσης του Αναλυτικού Προγράμματος, που επιχειρεί με ποικίλους τρόπους να συσχετίσει μεταξύ τους τα περιεχόμενα των διακριτών μαθημάτων, διατηρώντας παράλληλα τα διακριτά μαθήματα ως πλαίσια επιλογής και διάταξης της σχολικής γνώσης (Ματσαγγούρας, 2002).

Οι δύο αυτοί όροι κάποιες φορές ταυτίζονται, όταν η εξεταζόμενη έννοια προσεγγίζεται μέσα από τη συμβολή πολλών επιστημών και κάποιες φορές διαφοροποιούνται, όταν το εξεταζόμενο θέμα απαιτεί εκτός από επιστημονικές προσεγγίσεις και μη επιστημονικές (για παράδειγμα τη συμβολή της τέχνης). Έτσι, θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι η διαθεματικότητα επικαλύπτει τη διεπιστημονικότητα. Στην περίπτωση του νέου ενιαίου πλαισίου προγραμμάτων σπουδών, όπως ο Αλαχιώτης (2002) αναφέρει, ο όρος διαθεματικότητα υπερβαίνει σαφώς τη διεπιστημονικότητα και την υπερκαλύπτει και για το λόγο αυτό επιλέχθηκε το επίθετο «διαθεματικό» από το «διεπιστημονικό» για την τιτλοδότησή του.

Όλα τα Α.Π.Σ. της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης και κατά συνέπεια και αυτό των Μαθηματικών που εκπονήθηκαν με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ. στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στη διαθεματική προσέγγιση. Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο ΦΕΚ 303/τ.

Β΄/13-03-2003, η διαθεματική προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να διαμορφώνουν προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών που σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και με ζητήματα της καθημερινής ζωής, συγκροτώντας μια ολιστική αντίληψη της γνώσης, ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων. Επιπλέον, μέσα από μεθόδους ενεργητικής απόκτησης της γνώσης, που εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία κάθε γνωστικού αντικειμένου και εξειδικεύονται σε διαθεματικές δραστηριότητες, για τη διδασκαλία κάθε θεματικής ενότητας, δημιουργείται πρόσφορο έδαφος ώστε οι μαθητές να συνεργάζονται και να αναδεικνύουν δεξιότητές τους, τις οποίες μπορεί να κατέχουν, αλλά μέσα από ένα τυπικό μάθημα, που επικεντρώνεται αυστηρά σε ένα γνωστικό αντικείμενο, δεν δίνεται η δυνατότητα να αναδειχθούν (ΦΕΚ 303/ τ.Β΄/13-03-2003). Η αναγκαιότητα εισαγωγής της διαθεματικής προσέγγισης αναδεικνύεται και από τα συμπεράσματα της Μορφολογικής Ψυχολογίας και της Ψυχολογίας του Παιδιού, τα οποία αναφέρονται στην ολιστική λειτουργία της αντίληψης και στο ενιαίο και αδιαίρετο του ψυχικού βίου του μαθητή. Σύμφωνα με αυτά ο μαθητής αντιλαμβάνεται την ολότητα και όχι απομονωμένα χαρακτηριστικά (Κολιάδης, 2002).

Τα νέα διδακτικά πακέτα που εισάγονται στα σχολεία από το σχολικό έτος 2006 – 2007 καθιερώνουν, για πρώτη φορά στην υποχρεωτική εκπαίδευση, και την αξιοποίηση της μεθόδου παραγωγής σχεδίων εργασίας. Βάσει των προδιαγραφών που θέτει το πρόγραμμα σπουδών μέρος από τις ώρες που συνολικά (σε ετήσια βάση) προβλέπονται στο εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα ανά μάθημα, και σε ποσοστό που μπορεί να φτάνει στο 10% περίπου, είναι δυνατό να διατίθενται από τον διδάσκοντα, με τη στήριξη και των σχολικών βιβλίων, στην ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων/εργασιών σε μορφή μικρού προγράμματος/σχεδίου εργασίας (project). Ο ρόλος των σχεδίων αυτών είναι να λειτουργούν συμπληρωματικά στην κατανόηση των θεμελιωδών διαθεματικών εννοιών και να συμβάλλουν στην εμβάθυνση σε ιδιαιτέρως ενδιαφέροντα γνωστικά στοιχεία κάθε μαθήματος. Έτσι, στο πλαίσιο του ωρολογίου προγράμματος δημιουργείται η συνθήκη για δυναμικό σχεδιασμό και οργάνωση δραστηριοτήτων που προωθούν τη μάθηση μέσα από την έρευνα, τη μελέτη πεδίου και τη συνεργασία, καθώς υποβοηθείται η άσκηση των μαθητών στην υιοθέτηση κριτικής στάσης απέναντι στο προσφερόμενο εκπαιδευτικό και μαθησιακό υλικό, αλλά και στην ανάπτυξη πρωτοβουλιών σχετικά με την αναζήτηση πληροφοριών, την επιλογή και σύνθεσή τους και τελικά στην κατάκτηση των δεξιοτήτων της διερεύνησης, του «μαθαίνω πώς να μαθαίνω» (Καρατζιά-Σταυλιώτη, 2002).

Η οργάνωση διαθεματικών δραστηριοτήτων υποβοηθείται από τη διάχυση της διαθεματικότητας στο κείμενο των σχολικών εγχειριδίων, όπου αυτό είναι δυνατό, μέσα από θεμελιώδεις έννοιες διαφόρων επιστημών, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν βασικούς κρίκους για την οριζόντια διασύνδεση των μαθημάτων και τη συσχέτιση γνώσεων καθώς και εμπειριών από την καθημερινή ζωή. Αυτές οι έννοιες, που μπορεί να ονομαστούν «διαθεματικές», είναι κοινές σε πολλά γνωστικά αντικείμενα της ίδιας τάξης, καθώς και σε γνωστικά αντικείμενα διαφόρων τάξεων και συμβάλλουν στην προώθηση στάσεων και αξιών που συνδέονται άμεσα με τους βασικούς σκοπούς της σχολικής εκπαίδευσης (ΦΕΚ303/τ.Β΄/13-03-2003). Από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. των Μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης προτείνονται για τη διαθεματική προσέγγιση ως ενδεικτικές οι θεμελιώδεις έννοιες μεταβολή, αλληλεπίδραση, επικοινωνία, αναλογία, συμμετρία, σύστημα, έδρα, ταξινόμηση, πιθανότητα, πολιτισμός, καθώς και τα δίπολα άτομο/σύνολο, ομοιότητα/διαφορά, χώρος/χρόνος, ανάλυση/σύνθεση.

Εστιάζοντας στα Μαθηματικά, η διαθεματικότητα μπορεί να έχει θετική επίδραση (Παναγάκος, 2004):

α. Στην κατανόηση των Μαθηματικών.

Η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης αναδεικνύει τις διασυνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών κλάδων με αποτέλεσμα την καλύτερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών που προσεγγίζονται από διάφορες οπτικές γωνίες. Έτσι, τα Μαθηματικά αποκτούν νόημα και αξία, αφού η χρησιμότητα και η εφαρμογή τους γίνεται καλύτερα κατανοητή. Επιπλέον, διευκολύνουν και την κατανόηση θεμάτων και ενοτήτων από άλλους επιστημονικούς κλάδους. Επισημαίνεται, βέβαια, ότι οι διαθεματικές μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να είναι διακριτές και ότι θα πρέπει να αποφεύγονται οι υπεραπλουστεύσεις τους για χάρη της διαθεματικότητας, καθώς αυτό εγκυμονεί κινδύνους για αλλοίωση του νοήματός τους.

β. Στην αλλαγή στάσης για τα Μαθηματικά.

Η διαθεματική προσέγγιση συνεπικουρούμενη και από την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν σχέσεις αλληλοβοήθειας και αλληλοϋποστήριξης, να ξεπεράσουν ορισμένες από τις δυσκολίες που οφείλονται στην πληθώρα της ύλης και στις πρακτικές διδασκαλίας, να απαλλαγούν από την συναισθηματική ανασφάλεια και να αναπτύξουν θετική στάση για τα Μαθηματικά.

γ. Στη διευκόλυνση της χρήσης των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Η ανάδειξη των διασυνδέσεων των Μαθηματικών με τους άλλους επιστημονικούς κλάδους καταδεικνύει τη συνεισφορά, τη χρησιμότητα και την αναγκαιότητά τους για τις άλλες επιστήμες και τέχνες, πράγμα που αποτελεί και έναν από τους ειδικούς σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4008). Πέρα από τη σύνδεση, όμως, των Μαθηματικών με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα, απαραίτητη είναι και η σύνδεσή τους με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Έτσι, αποδεικνύεται στην πράξη η αναγκαιότητά τους, καθώς για μια απλή συναλλαγή ρουτίνας είναι απαραίτητες οι μαθηματικές γνώσεις. Προς την κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές η ανάπτυξη διαθεματικών σχεδίων εργασίας. Οι απαιτήσεις της διαθεματικής προσέγγισης και η δημιουργία διαθεματικών δραστηριοτήτων, που αναλύθηκαν με όσα προαναφέραμε, αναδεικνύουν, όπως στην επόμενη ενότητα θα επιχειρήσουμε να δείξουμε, την ανάγκη διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

2.1.2. Στοιχεία στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. και στο Α.Π.Σ. των Μαθηματικών που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών

Σύμφωνα με τα Α.Π.Σ. (ΦΕΚ 303/13-03-2003, τ. Β΄) η επίτευξη των γενικών στόχων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, όπως είναι φυσικό, αποτελεί αντικείμενο συνεχούς αναζήτησης και προβληματισμού. Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, το οποίο έδινε έμφαση στα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και στον τρόπο παρουσίασης τους, αμφισβητείται, καθώς υποβαθμίζεται έτσι η διαδικασία μέσω της οποίας φτάνουμε σε αυτά.

Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το τελικό προϊόν αλλά και τη δραστηριότητα μέσα από την οποία παράγεται το αποτέλεσμα αυτό. Με την έννοια αυτή τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων. Αποτελούν, επίσης, μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης των γνώσεων αυτών.

Επομένως, αν δεχτούμε ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αφορά μόνο την κατάκτηση γνώσεων και ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων, αλλά περιλαμβάνει και διαδικασίες μάθησης, τότε συμπεραίνουμε ότι οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης δεν εκφράζονται πλήρως με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών αλλά με όρους δραστηριοτήτων.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και η διατύπωσή τους επιτρέπει να εμπλέκονται, κατά το δυνατόν, οι μαθητές της τάξης στο σύνολό τους. Αυτό από την πλευρά των μαθητών σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν, να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους, ενώ από την πλευρά του εκπαιδευτικού σημαίνει υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλίας, αφού πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει πίσω από τη διατύπωση μιας δραστηριότητας τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και να τους προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της τάξης του (Καραγεώργος,1998; ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003).

Σχετικά με τη σωστή επιλογή δραστηριοτήτων επισημαίνεται πως αυτή πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003):

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια και μοναδική λύση.
- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί από τους μαθητές.
- Η επεξεργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει, όπου είναι δυνατό, σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (για παράδειγμα αριθμητικό – γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Χρησιμοποιώντας την επεξεργασία κατάλληλων δραστηριοτήτων ως μέσο για την επίτευξη των γενικών στόχων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν κατ' αναλογία, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα, εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας. Αυτοί είναι οι πραγματικοί στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, οι οποίοι δεν αφορούν απλά το μετρήσιμο αποτέλεσμα, αλλά την ίδια τη διαδικασία μάθησης. Για κάθε τάξη, επομένως, η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών πρέπει να βασίζεται στην συνύπαρξη ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς (Καραγεώργος,1998; ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003).

Μέσα στα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης παρουσιάζονται οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και κατ' επέκταση παρουσιάζεται ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική, καθώς σε αυτά περιλαμβάνονται για πρώτη ίσως φορά τόσο σημαντικές και ευρείας έκτασης αναφορές στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αναλυτικότερα αναφέρονται:

α) Σχετικά με τη **διδακτική μεθοδολογία** (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4037):

Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης, πράγμα που σημαίνει πως οι μαθητές θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα για πολλαπλή προσέγγιση μιας έννοιας. Αυτό μπορεί να γίνει εφικτό με διάφορους τρόπους:

- Μέσα από διάφορους τύπους αναπαραστάσεων (συμβολικά με γραφικές παραστάσεις, με πίνακες, με γεωμετρικά σχήματα)
- Διαθεματικά
- Με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών, η οποία είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας.

β) Στους ειδικούς σκοπούς του Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά του Δημοτικού (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 3987):

- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).

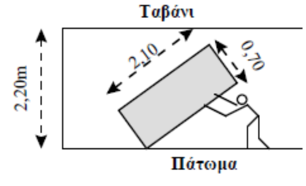
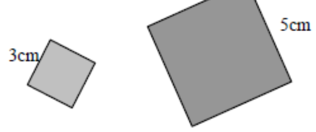
γ) Στους ειδικούς σκοπούς του Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4008):

- Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες.
- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
- Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.

δ) Στις **θεματικές ενότητες** και σε προτεινόμενες **ενδεικτικές δραστηριότητες** (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003) περιλαμβάνονται αναφορές που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών και μπορούν να αξιοποιηθούν ανάλογα από τους εκπαιδευτικούς. Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια σημεία που εντοπίσαμε και τα παρουσιάζουμε στους ακόλουθους πίνακες 1 και 2, ταξινομημένα ανά τάξη για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο αντίστοιχα.

Τάξη Γ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
3994	Μετρήσεις, Τα νομίσματα, Εισαγωγή στους δεκαδικούς αριθμούς	Οι τρόποι συναλλαγής πριν και μετά το «ευρώ», δυσκολίες που προέκυψαν και αντιμετώπισή τους (Γλώσσα, Μελέτη Περιβάλλοντος, Ιστορία).
3996	Γεωμετρία	Παιχνίδια με κομμάτια πάζλ (τάγκραμ), πλακόστρωτα, μωσαϊκά, πάζλ, επαναληπτικές κανονικότητες, γρίφους, μαγικά τετράγωνα.
Τάξη Δ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
3998	Αριθμοί και πράξεις, Υπολογισμοί (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών), Ιδιότητες πράξεων	Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν τον πολλαπλασιασμό των φυσικών με τον εξής τρόπο: π.χ. για να πολλαπλασιάσουν 11 φορές το 23 έβρισκαν το 2-πλάσιο, 4-πλάσιο, 8-πλάσιο του 23 δηλ. 1 φορά το 23 =23, 1 και 1 φορές το 23=46, 4 φορές το 23=92, 8 φορές το 23 =184 . Πρόσθεταν τους 23+46+184=253 διότι το άθροισμα 1+2+8=11. Να γίνει συζήτηση και αιτιολόγηση του τρόπου προτίμησης εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων και του σημερινού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού (Γλώσσα, Ιστορία).
4000	Γεωμετρία	Η συμμετρία στη φύση (π.χ. φύλλα δένδρων) και στις τέχνες (π.χ. πίνακες, κτίρια). Γεωμετρικά χρόνια (Αισθητική Αγωγή, Γλώσσα, Μελέτη Περιβάλλοντος, Ιστορία).
Τάξη Ε΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4003	Μετρήσεις	Οι μετρήσεις από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Μονάδες μέτρησης στην αρχαιότητα – πρακτικές μονάδες μέτρησης. Ιστορική προσέγγιση της καθιέρωσης του μέτρου (Ιστορία, Γλώσσα).

Πίνακας 1: Σημεία από το Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά του Δημοτικού που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών

Τάξη Α΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4010	Δυνάμεις Φυσικών αριθμών	«Συστήματα αρίθμησης (Ιστορική εξέλιξη - Μετάβαση από το ένα σύστημα αρίθμησης στο άλλο)» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Πληροφορική - Τεχνολογία).
4012	Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων	«Τα κλάσματα στη Μουσική και την Αρχιτεκτονική.» (Μαθηματικά, Ιστορία, Αισθητική Αγωγή).
4013	Μονάδες μέτρησης	«Οι μετρήσεις από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Αισθητική Αγωγή).
4014-4015	Λόγος δύο αριθμών Αναλογία	«Η αναλογία στη φύση και στην τέχνη (π.χ. χρυσή τομή)». (Μαθηματικά, Αισθητική Αγωγή, Ιστορία, Γεωγραφία κτλ.).
4016	Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί)	Δραστηριότητες που αναφέρονται σε μεγέθη τα οποία επιδέχονται αντίθεση (π.χ. θερμοκρασία, υψόμετρο, κέρδος - ζημιά κτλ.), με σκοπό να διαφανεί η ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών.
Τάξη Β΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4024	Πυθαγόρειο θεώρημα	«Προσπάθειες απόδειξης του Πυθαγόρειου θεωρήματος» (Ιστορία).
	Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	«Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας από τους Βαβυλώνιους μέχρι σήμερα» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Πληροφορική).
4025	Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί	«Ο ρόλος του αριθμού στην Ιστορία, την Τέχνη και την Επιστήμη». (Μαθηματικά, Αισθητική αγωγή, Ιστορία, Λογοτεχνία, Μουσική).
	Επίλυση προβλημάτων	Ανάδειξη της σπουδαιότητας του Πυθαγόρειου Θεωρήματος με δραστηριότητες που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών, όπως π.χ: − Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι;  

		Να κατασκευάσετε γεωμετρικά ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων. − Προβλήματα υπολογισμού περιμέτρων και εμβαδών πολυγώνων στα οποία απαιτείται η χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος.
4028	Εφαπτομένη οξείας γωνίας	«Υπολογισμός του ύψους των πυραμίδων» (Ιστορία).
4029	Κανονικά πολύγωνα	«Τα κανονικά πολύγωνα στην Φύση και στη Τέχνη» (Φυσική, Ιστορία, Αισθητική αγωγή).
4030	Σχετικές θέσεις επιπέδων και ευθειών - Ευθεία κάθετη σε επίπεδο - Απόσταση σημείου από επίπεδο - Απόσταση παραλλήλων επιπέδων.	«Ο Χώρος» (Μαθηματικά, Ιστορία, Φυσική, Βιολογία, Αισθητική Αγωγή, Χημεία).
4031	Σφαίρα και στοιχεία αυτής - Μέτρηση σφαίρας	«Γεωγραφικές συντεταγμένες» (Μαθηματικά, Γεωγραφία, Ιστορία).
Τάξη Γ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4031	Πράξεις με αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)	«Η έννοια της Απόδειξης» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γλώσσα, Λογοτεχνία).
4035	Ομοιότητα	«Η ομοιότητα στη Φύση και την Τέχνη» (Ιστορία, Αισθητική αγωγή, Φυσική, Βιολογία, Λογοτεχνία).

Πίνακας 2: Σημεία από το Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών

Επιπλέον, μέσα στο Α.Π.Σ. προτείνονται (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4004 & 4008):

1) **πρόσθετα διαθεματικά σχέδια εργασίας για το Δημοτικό** από τα οποία ενδεικτικά αναφέρουμε κάποια θέματα:

- Για την Ε΄ τάξη: Η συμμετρία στη ζωή μας.
- Για την ΣΤ΄ τάξη: Κατασκευή πυραμίδας. - Μοτίβα στη ζωή μας. - Το μέτρο στη ζωή μας.

2) **πρόσθετα διαθεματικά σχέδια εργασίας για το Γυμνάσιο** που αφορούν και τις τρεις τάξεις με τα παρακάτω ενδεικτικά θέματα:

- Η ομοιότητα στη Φύση και την Επιστήμη.
- Αστρονομικές παρατηρήσεις - Διαστημικά ταξίδια.
- Τεχνικά έργα.
- Η υιοθέτηση από την Αρχιτεκτονική, κατά τα διάφορα στάδια εξέλιξης της, συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων.
- Η αισθητοποίηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων.

Οι ενδεικτικές δραστηριότητες από τους πίνακες 1 και 2 παρουσιάζονται στο Α.Π.Σ. με πλάγια γράμματα, προτείνονται ως διαθεματικές και ανταποκρίνονται στις θεμελιώδεις διαθεματικές έννοιες (του συστήματος της αλληλεπίδρασης, της μεταβολής, της επικοινωνίας, της διάστασης, του χώρου και του χρόνου, και λοιπά), που αναφέρονται στο αντίστοιχο Δ.Ε.Π.Π.Σ. για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Επιπλέον, τα προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας αναφέρεται ότι μπορούν εναλλακτικά να συμπληρώσουν τις «ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες», που περιλαμβάνονται στο Α.Π.Σ., για τις οποίες προτείνεται να διατίθεται περίπου το 10% του διδακτικού χρόνου.

ε) Σχετικά με το **απαιτούμενο διδακτικό** υλικό (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4037):

Βιβλίο για τον μαθητή:

Επίσης, στα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να περιλαμβάνεται η καταγραφή των μεγάλων ιστορικών στιγμών που καθόρισαν διαδοχικά την πορεία των Μαθηματικών ώστε ο μαθητής να αποκτά γνώση της γένεσης των ιδεών τους, προϋπόθεση απαραίτητη για την κατάκτηση κάθε γνωστικού αντικειμένου. Παράλληλα πρέπει να δίνεται έμφαση στις σύγχρονες επιστημονικές κατακτήσεις, όπως επίσης και στις συνέπειες τους σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο.

στ) Σχετικά με τις **προδιαγραφές των διδακτικών βιβλίων για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου** (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4038):

Βιβλίο του μαθητή

-Τα ιστορικά σημειώματα δεν είναι απαραίτητο να εντάσσονται ξεχωριστά και στο τέλος κάθε ενότητας. Μπορεί (όπου αυτό κρίνεται) να παρουσιάζονται (με σύντομο τρόπο) και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου.

ζ) Επιπλέον, στις **συμπληρωματικές προδιαγραφές εκπαιδευτικού υλικού Γυμνασίου** (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003, σ. 184) αναφέρεται:

Η ανάπτυξη της ύλης του κεφαλαίου θα πρέπει να βασίζεται στο κείμενο, τις εικόνες, τα σχήματα, διαγράμματα και τους πίνακες που συνοδεύουν το κείμενο και σχετίζονται άμεσα με αυτό.

Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στη σύνδεση των Μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες. Οι εφαρμογές αποτελούν το πιο πρόσφορο έδαφος για την επίτευξη αυτού του στόχου, θα πρέπει όμως είτε να αναφέρονται στην πραγματική ζωή είτε να έχουν μια ιστορική διάσταση.

Είναι αναγκαία η ένθεση ιστορικών σημειωμάτων, τα οποία κρίνεται σκόπιμο να είναι ενταγμένα στο κυρίως κείμενο. Θα πρέπει, επίσης, να μην είναι γενικόλογα, να αφορούν συγκεκριμένες προτάσεις του εκάστοτε κεφαλαίου και να μην εξαντλούνται σε βιογραφικές λεπτομέρειες και σχετική ανεκδοτολογία.

Από όσα παραθέσαμε συνάγεται ότι στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003) περιλαμβάνονται οδηγίες και κατευθύνσεις, οι οποίες ενσωματώνουν τις νέες τάσεις που διεθνώς έχουν επικρατήσει σχετικά με τη διαθεματικότητα και τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Η διαθεματική προσέγγιση, που προτείνεται στο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών, προσφέρεται για μια σφαιρική, ενιαία και ολιστική αντιμετώπισή τους και επομένως για μια πιο

προσωπική, ουσιαστική μάθηση. Μέσα από δραστηριότητες και σχέδια εργασιών (projects) φιλοδοξεί να κάνει εφικτή μια νέα προσέγγιση των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές, καθώς επιδιώκεται να συνδέσουν τα Μαθηματικά με άλλα γνωστικά αντικείμενα καθώς και με καταστάσεις που προκύπτουν στην καθημερινή τους ζωή. Οι πολλαπλές αναφορές των Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και η μεγάλη εξάρτηση των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας από το ένα και μοναδικό διδακτικό βιβλίο καθιστούν εύλογο το επόμενο ερώτημα: Με ποιο τρόπο υλοποίησαν οι συγγραφείς των σχολικών βιβλίων τις προδιαγραφές των Δ.Ε.Π.Π.Σ-Α.Π.Σ.;
Το ζήτημα αυτό θα μας απασχολήσει στις επόμενες ενότητες, όπου καταγράφονται και εξετάζονται ιστορικές αναφορές από τα βιβλία των εκπαιδευτικών και των μαθητών.

2.2. Η Ιστορία των Μαθηματικών στα βιβλία για τους εκπαιδευτικούς

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν Μαθηματικά στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, αναλαμβάνοντας να εφαρμόσουν όσα ζητούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα, έχουν ως κύριο εργαλείο το βιβλίο του δασκάλου και του καθηγητή αντίστοιχα. Σε αυτά περιλαμβάνεται αναλυτική περιγραφή για τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός πρέπει να διδάξει την ύλη σε κάθε τάξη. Επίσης, περιλαμβάνονται οι διδακτικοί στόχοι κάθε ενότητας καθώς και τρόποι για την επίτευξή τους κατά τη διδασκαλία από τον εκπαιδευτικό. Στα νέα βιβλία Μαθηματικών για τον δάσκαλο και τον καθηγητή διακρίνεται μια προσπάθεια για να ενταχθεί στη διδασκαλία η διαθεματικότητα και η Ιστορία των Μαθηματικών.

2.2.1. Βιβλία Δασκάλου

Στα βιβλία για τους δασκάλους, οι οποίοι, βέβαια, ασχολούνται με μαθητές μικρότερης ηλικίας, περιέχονται ιστορικές αναφορές λιγότερες σε αριθμό και μικρότερες σε έκταση από αυτές των βιβλίων για τους εκπαιδευτικούς του Γυμνασίου. Στο εισαγωγικό μέρος των βιβλίων περιλαμβάνονται αναφορές στους ειδικούς σκοπούς του προγράμματος σπουδών για το Δημοτικό σχετικά με την ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης και την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών (βιβλία Β΄ τάξης, σ. 7 και Ε΄ τάξης, σ. 9). Επίσης, περιλαμβάνονται αναφορές στη διαθεματικότητα (βιβλίο Γ΄ τάξης, σ. 6) και τη διαθεματική προσέγγιση κάποιων ενοτήτων, καθώς και προτεινόμενες δραστηριότητες (βιβλίο Δ΄ τάξης, σ. 13 και 19) και σχέδια εργασίας που, όπως αναφέρεται στα βιβλία, μπορούν να στηρίξουν τους στόχους των μαθημάτων διαθεματικά.
Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια σημεία που συνδέονται με τα ιστορικά στοιχεία των βιβλίων δασκάλου για το Δημοτικό:
Α΄ τάξη (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης, & Πνευματικός, 2015), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 1, 2 αντίστοιχα).

- Ιστορικά στοιχεία για τον άβακα (σ. 98-99).
- Αναφορά στο τάγκραμ και την καταγωγή του (σ. 122).

Β΄ τάξη (Καργιωτάκης, Μαραγκού, Μπελίτσου, & Σοφού, 2015), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 3).

- Σχέδιο εργασίας για την ιστορία των ελληνικών κερμάτων από την αρχαιότητα ως σήμερα (σ. 62).

Γ΄ τάξη (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος, & Σπανακά, 2015β), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 4, 5, 6, 7, 8, 9 αντίστοιχα).

Στο συγκεκριμένο βιβλίο, όπως και στο αντίστοιχο βιβλίο μαθητή, η προσπάθεια για ένταξη στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών είναι περισσότερο συστηματική και ακολουθεί τη ροή των διδακτικών ενοτήτων.

- Ιστορικά στοιχεία για τον Πυθαγόρα και το Πυθαγόρειο θεώρημα (σ. 32-33).
- Αναφορά στο ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης (σ. 53).
- Ιστορικά στοιχεία για τον Ελληνικό πολλαπλασιασμό και τον Ευτόκιο (σ. 87-88).
- Ιστορικά στοιχεία για τους δεκαδικούς αριθμούς και τα δεκαδικά κλάσματα (σ. 102).
- Αναφορά στο αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης (σ. 113-114).
- Αναφορά στο τρίγωνο του Πασκάλ (σ. 133).

Δ΄ τάξη (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου, & Σαΐτης 2015), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 10, 11 αντίστοιχα).

- Αναφορά στον αρχαίο αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό (σ. 52).
- Σχέδιο εργασίας για την για τις μονάδες μέτρησης μήκους στην αρχαία Ελλάδα, το διεθνές σύστημα μονάδων μέτρησης και τη σημασία του (σ. 69).

Ε΄ τάξη (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, & Χρονοπούλου, 2015), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 12, 13, 14, 15, 16, 17 αντίστοιχα).

Στο βιβλίο αυτό συναντούμε κυρίως σχέδια εργασίας και κάποιες δραστηριότητες, όπου προτείνεται οι μαθητές να αναζητήσουν πληροφορίες από το διαδίκτυο. Οι δύο πρώτες καθώς και η τελευταία από τις αναφορές που παραθέτουμε συνδέονται με μικρά πληροφοριακά ένθετα, τα οποία περιλαμβάνονται στο βιβλίο του μαθητή και αφορούν την ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών, τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη μουσική και τον αριθμό π.

- Αναζήτηση πληροφοριών από τους μαθητές στο διαδίκτυο για την ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών (σ. 66) και για μαθηματικούς που έκαναν σημαντικές ανακαλύψεις στα Μαθηματικά (Έλληνες αλλά και ξένους), για την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, για τον αριθμό π, για αριθμητικά συστήματα (σ. 68).
- Σχέδιο εργασίας για τον Πυθαγόρα και τη σχέση των Μαθηματικών με τη μουσική (σ. 149).
- Σχέδιο εργασίας για τα αριθμητικά συστήματα στην ιστορία της ανθρωπότητας, τη σημασία των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών (σ. 157).
- Σχέδιο εργασίας για την γεωμετρία στην τέχνη (οι γωνίες, τα γεωμετρικά σχήματα και οι τεθλασμένες γραμμές) σε αντικείμενα καθημερινότητας από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα (σ. 164).

- Προτεινόμενες δραστηριότητες για την πρακτική χρήση των ιδιοτήτων των τριγώνων στην αρχαιότητα (για παράδειγμα Θαλής ο Μιλήσιος: υπολογισμός της απόστασης πλοίου από την ξηρά), (σ. 168).
- Σχέδιο εργασίας για τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς (σ. 191).

ΣΤ΄ τάξη (Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, 2015γ), (βλ. και παράρτημα Α, εικ. 18, 19, 20, 21 αντίστοιχα)

- Στην περιγραφή της δομής των βιβλίων περιλαμβάνεται εισαγωγική αναφορά για τα ιστορικά σημειώματα στο βιβλίο δασκάλου (σ. 13).
- Δραστηριότητα με προεκτάσεις «Η γέφυρα του Γκαρ (Gard)» (σ. 34).
- Δραστηριότητα με προεκτάσεις «Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία» (σ. 48).
- Δραστηριότητα με προεκτάσεις «Το Δήλιο πρόβλημα» και ιστορικό σημείωμα για το συγκεκριμένο άλυτο πρόβλημα της αρχαιότητας (σ. 54).

Όπως παρατηρούμε οι ιστορικές αναφορές που βρίσκουμε στα βιβλία δασκάλου είναι πολύ γενικές και δεν περιλαμβάνουν επαρκείς οδηγίες και κατευθύνσεις για να παρακινηθεί ο δάσκαλος να ασχοληθεί με θέματα που άπτονται της Ιστορίας των Μαθηματικών. Προς αυτή την κατεύθυνση φαίνεται να συνηγορεί και το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση δεν έχουν κανενός είδους επιμόρφωση ούτε καν ενημέρωση για ζητήματα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

2.2.2. Βιβλία εκπαιδευτικών Γυμνασίου

Στα βιβλία για τους εκπαιδευτικούς του Γυμνασίου περιλαμβάνονται στο εισαγωγικό μέρος αναφορές για τη διαθεματικότητα και τη χρησιμότητά της σε θεωρητικό επίπεδο. Ακόμα, περιλαμβάνονται παραπομπές σε δικτυακούς τόπους, προτεινόμενες δραστηριότητες και σχέδια εργασίας για την υποστήριξη της διαθεματικής προσέγγισης, καθώς και αναφορές σε ιστορικά στοιχεία. Οι οδηγίες όμως που δίνονται για την εφαρμογή στην τάξη είναι πολύ γενικές και τις περισσότερες φορές δεν βοηθούν τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι πρέπει να στηριχθούν στη δική τους κρίση και διάθεση για οποιαδήποτε διδακτική παρέμβαση με στόχο την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων.

Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια σημεία που συνδέονται με ιστορικές αναφορές, όπως τις συναντούμε στα βιβλία εκπαιδευτικού για το Γυμνάσιο:

Α΄ τάξη

Στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2015β) οι αναφορές στα ιστορικά σημειώματα είναι σχεδόν ανύπαρκτες και όσα σημεία εντοπίσαμε αποτελούν στην ουσία κάποιες νύξεις που σχετίζονται την Ιστορία των Μαθηματικών (βλ. και παράρτημα Β, εικ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 αντίστοιχα):

- Στις γενικές οδηγίες γίνεται αναφορά στα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου του μαθητή για τα οποία αναφέρεται ότι «η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες» (σ.31).

- Στις πρακτικές οδηγίες γίνεται αναφορά στην παρουσία των ιστορικών σημειωμάτων και αναδρομών «με σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης» (σ. 34).
- Στον ενδεικτικό προγραμματισμό της ύλης για την ενότητα Α.1.2 βρίσκουμε αναφορά σε ιστορικό σημείωμα από το βιβλίο μαθητή, το οποίο εστιάζει στην «κομψή» λύση ενός προβλήματος (σ. 36).
- Στους ενδεικτικούς στόχους για προτεινόμενο σχέδιο εργασίας αναφέρονται η παρακολούθηση της εξέλιξης των συμβόλων και των συστημάτων αρίθμησης και η σύγκριση των τρόπων αρίθμησης με αναφορά στο εκάστοτε ιστορικό, κοινωνικό, γεωγραφικό κ.λπ. πλαίσιο (σ. 38).
- Αναφορά σε προτεινόμενο παράδειγμα σχετικά με τη λειτουργία και χρησιμότητα του «Κόσκινου του Ερατοσθένη» για την εύρεση των πρώτων φυσικών αριθμών από το 1 έως το 100 (σ. 40).
- Στους ενδεικτικούς στόχους για προτεινόμενο σχέδιο εργασίας (ενότητα Α.3.5.) σχετικά με τα μέτρα και σταθμά αναφέρονται μεταξύ άλλων η διαχρονική καταγραφή τους σε διάφορους λαούς και εποχές και η ιστορική αναζήτηση των συνθηκών και του τρόπου επικράτησης του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών (σ. 50).
- Σε προτεινόμενη δραστηριότητα για το μέτρο της γωνίας αναφέρεται ότι «επειδή οι μοίρες παρουσιάζονται με τη μορφή συμμιγών αριθμών, πράγμα που δυσκολεύει τους μαθητές, καλό θα είναι να προκληθεί μια συζήτηση για το πώς προέκυψαν αυτές ιστορικά» (σ. 80).
- Αναφορά σε ιστορικό σημείωμα από το βιβλίο μαθητή σχετικά με τον Ευκλείδη και το «αίτημα» της μοναδικότητας της παραλλήλου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής, που συνδέθηκε με το όνομά του (σ. 85).
- Αναφορά σε ιστορικό σημείωμα από το βιβλίο μαθητή, το οποίο σκοπό έχει να γνωρίσουν οι μαθητές την ιστορική διαδρομή του θέματος της κατάταξης των τετράπλευρων, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα (σ. 101).

Στο σημείο αυτό αξίζει να εστιάσουμε στην περίπτωση για την «κομψή» λύση ενός προβλήματος, που αναφέρεται στον τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος των αριθμών από το 1 έως το 100. Σε αυτήν απλά παρατίθεται η λύση που βρήκε ο Gauss, εστιάζοντας στην ευφυΐα, ενώ θα μπορούσε να προτείνεται και η εμπλοκή των μαθητών, ώστε με πειραματισμό και προσπάθεια να βρουν μόνοι τους τρόπους υπολογισμού του παραπάνω αθροίσματος. Επίσης, στο προτεινόμενο σχέδιο εργασίας για την ενότητα Α.3.5. διαπιστώνουμε ότι αυτό δεν συνδέεται με τη χρήση κάποιου ιστορικού σημειώματος από το βιβλίο, αλλά προτείνει να εμπλακούν οι μαθητές από μόνοι τους στην αναζήτηση σχετικών ιστορικών γνώσεων.

Β΄ τάξη:

Στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, & Ρεκούμης, 2015β) οι αναφορές στα ιστορικά σημειώματα παρουσιάζονται κυρίως με παραπομπές σε χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο (για τον Διόφαντο, τον πάπυρο του Ρήντ, τον αριθμό π, και άλλα), από τις οποίες ο εκπαιδευτικός μπορεί να αντλήσει πληροφορίες και να σχεδιάσει τη διδασκαλία όπως αυτός κρίνει αναγκαίο. Αναφορές σε ιστορικά σημειώματα εντοπίζουμε (βλ. και παράρτημα Β, εικ. 10, 11, 12):

- Στα κριτήρια για την επιλογή του θέματος σε προτεινόμενο σχέδιο εργασίας σχετικά με την έννοια των ανάλογων μεγεθών στις θετικές και ανθρωπιστικές επιστήμες, όπου γίνεται αναφορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη (σ. 45).
- Στα σχόλια και τις διδακτικές προσεγγίσεις για την ενότητα 1.4., όπου γίνεται αναφορά στην ιστορική διάσταση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (σ. 61).
- Σε προτεινόμενη δραστηριότητα σχετικά με τη μέτρηση του κυκλικού τομέα, όπου γίνεται αναφορά στους υπολογισμούς του Ερατοσθένη του Κυρηναίου (σ. 87).

Σε καμία από τις περιπτώσεις όμως δεν αναφέρεται ο τρόπος με τον οποίο θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τα ιστορικά σημειώματα από το βιβλίο του μαθητή, πράγμα που μάλλον δεν θεωρείται αναγκαίο και αφήνεται στην κρίση του κάθε εκπαιδευτικού.

Γ΄ τάξη

Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου παρατηρείται πιο συντονισμένη προσπάθεια, ώστε το βιβλίο του εκπαιδευτικού να εναρμονιστεί με τις απαιτήσεις που τίθενται από τα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Στην εισαγωγή, όπου περιγράφεται η δομή του βιβλίου του μαθητή (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2015β, σ. 10-11) βρίσκουμε αναφορά σχετική με την παρουσία θεμάτων από την Ιστορία των Μαθηματικών και τα οφέλη από την αξιοποίησή της στη διδασκαλία (βλ. και παράρτημα Β, εικ. 13). Αξιοσημείωτο είναι ότι η συγκεκριμένη αναφορά τελειώνει με τη φράση: «Τα θέματα αυτά και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή δεν μπορούν να θεωρηθούν ολοκληρωμένες μελέτες και γι' αυτό υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον». Στην ουσία, δηλαδή, η χρήση της Ιστορίας τίθεται ως επιλογή του κάθε εκπαιδευτικού και όχι ως προαπαιτούμενο των καινοτομιών που παρουσιάζονται στα νέα αναλυτικά προγράμματα.

Στη συνέχεια οι ιστορικές αναφορές εντοπίζονται σε όλη την έκταση του βιβλίου (βλ. και παράρτημα Β, εικ. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23):

- Ο τετραγωνισμός του κύκλου (σ. 19).
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι Πυθαγόρειες τριάδες (σ.29-30).
- Η έννοια της «απόδειξης» (σ. 31-32)
- Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού (σ. 44-45).
- Η Χρυσή τομή (σ. 51-53).
- Από τα τυχερά παιχνίδια στη θεωρία των Πιθανοτήτων – Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες (σ. 73-74).
- Ο υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά (σ. 78).
- Η ισότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (σ. 80-82).
- Υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή - Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων (σ. 92-93)
- Οι Θεμελιωτές της Τριγω*νομετρίας (σ. 106)*

Οι αναφορές αυτές παρουσιάζονται με τους διακριτούς τίτλους «Ιστορικό σημείωμα», «Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών» ή «Σχέδιο διαθεματικής εργασίας» και συνδέονται συνήθως με αντίστοιχα ιστορικά σημειώματα, τα οποία κατά κύριο λόγο βρίσκονται στο τέλος κάποιων από τις ενότητες του σχολικού βιβλίου.
Στο σχέδιο διαθεματικής εργασίας για την έννοια της «απόδειξης» (σ. 31-32) προτείνεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση μέσα από ιστορική μελέτη, αλλά οι δραστηριότητες που προτείνονται για τις ομάδες δεν συνδέονται με υλικό από το βιβλίο του μαθητή και του εκπαιδευτικού. Όπως φαίνεται προτείνεται να εμπλέξει ο εκπαιδευτικός τους μαθητές με την αναζήτηση σχετικού ιστορικού υλικού, ωστόσο οι προτεινόμενες δραστηριότητες είναι ευρείες και θεωρητικές και δύσκολα θα οδηγήσουν στην κατανόηση της πολύ σημαντικής έννοιας της απόδειξης. Επιπλέον, αξίζει να επισημάνουμε ότι δεν είναι όλοι οι εκπαιδευτικοί ενημερωμένοι σχετικά με την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, αφού οι περισσότεροι δεν διδάχθηκαν σχετικά μαθήματα κατά τη διάρκεια των βασικών τους σπουδών, αλλά και σε προγράμματα επιμόρφωσης κατά τη διάρκεια της επαγγελματικής τους πορείας, γεγονός που αναδεικνύεται και από ερευνητικά ευρήματα (Μιόγλου, 2017). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να μην νιώθουν ικανοί ούτε και πρόθυμοι να επιλέξουν το κατάλληλο κομμάτι ιστορίας που θα βοηθήσει στην ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων και στην επίτευξη των επιθυμητών στόχων.
Γενικότερα, στο βιβλίο για τον εκπαιδευτικό οι ιστορικές αναφορές αναλύονται με περισσότερες λεπτομέρειες και είναι εμπλουτισμένες με περισσότερο υλικό σε σχέση με τα σημειώματα που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή. Παρατηρούμε όμως ότι στις περισσότερες αναφορές δεν περιλαμβάνονται σημαντικές διδακτικές κατευθύνσεις που θα βοηθούσαν τον διδάσκοντα να τις ενσωματώσει με επιτυχία στη τάξη. Για τον εκπαιδευτικό ένα τέτοιο εγχειρίδιο αποτελεί σημαντικότατο εργαλείο και θα έπρεπε, όπως προαναφέραμε, από αυτό να αντλεί τη μεγαλύτερη δυνατή βοήθεια. Οι απαιτήσεις, βέβαια, γίνονται ακόμα μεγαλύτερες όταν στη διδασκαλία εισάγονται καινούργια θέματα όπως είναι η διαθεματική προσέγγιση και η Ιστορία των Μαθηματικών. Επομένως μέσα από τις ιστορικές αναφορές θα έπρεπε να αποσαφηνίζεται:

- αν θα διδάσκονται ως ανεξάρτητες ενότητες.
- με ποιον τρόπο θα εμπλέκουν τους μαθητές, ώστε να ασχοληθούν με αυτές τις δραστηριότητες.
- κατά την ενσωμάτωσή τους στο μάθημα, σε ποιο σημείο του (στην αρχή, στο τέλος ή κατά τη διάρκεια) θα πρέπει να εισάγονται.
- αν από την ενασχόληση των μαθητών με τα ιστορικά σημειώματα θα μπορούσαν να προκύψουν επιπλέον δραστηριότητες και ποιες.
- κατά την ενασχόληση με αυτά, ποιος ο ρόλος του εκπαιδευτικού και του μαθητή.

Τα θέματα αυτά πιθανόν να μην είναι και τόσο δύσκολο να αντιμετωπιστούν από έναν έμπειρο εκπαιδευτικό, αλλά η καταγραφή τους στο αντίστοιχο βιβλίο εξασφαλίζει την απαραίτητη συνοχή σχετικά με τον τρόπο που μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα στοιχεία αυτά. Αντί αυτού τα βιβλία στερούνται σημαντικών πηγών, οι οποίες θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες για τον εκπαιδευτικό, με αποτέλεσμα να μη συμβάλλουν σε μια πλήρη και επαρκή προσέγγιση. Μέσα σε αυτά βρίσκουμε κάποιες μικρές αναφορές σε ιστορικά στοιχεία καθώς και παραπομπές σε διάφορους συνδέσμους στο διαδίκτυο από όπου ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιλέξει με ποιο κομμάτι ιστορίας θα ασχοληθεί. Αυτό δεν αποδεικνύεται και τόσο χρήσιμο, αφού ο ίδιος ο εκπαιδευτικός δεν είναι κατάλληλα καταρτισμένος για να επιλέξει το πιο κατάλληλο κομμάτι από την ιστορία. Με τον τρόπο αυτόν καταλήγουμε για την ίδια διδακτική ενότητα να έχουμε εντελώς διαφορετικές προσεγγίσεις ανάλογα με την κρίση κάθε εκπαιδευτικού και έτσι δεν επιτυγχάνεται και ο κύριος σκοπός της ύπαρξης του βιβλίου για τον εκπαιδευτικό, ο οποίος είναι η συνοχή που επικαλείται το αναλυτικό πρόγραμμα.

Υπό το πρίσμα όσων προαναφέρθηκαν κρίνεται επιτακτική η ύπαρξη ενός βιβλίου που θα λειτουργεί ως οδηγός για κάθε εκπαιδευτικό και θα του παρέχει την υποστήριξη που χρειάζεται. Επιπλέον, καταδεικνύεται και η αναγκαιότητα για ενημέρωση, επιμόρφωση και κατάρτιση των εκπαιδευτικών σε θέματα σχετικά με την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων μέσα στην τάξη, τόσο στη διάρκεια των σπουδών τους όσο και κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους θητείας.

2.3. Η Ιστορία των Μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια

Τα σχολικά εγχειρίδια παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διδακτική διαδικασία. Αποτελούν το βασικότερο εργαλείο που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του προγράμματος σπουδών και την κύρια πηγή μάθησης για τις σχολικές τάξεις, στη χώρα μας αλλά και σε άλλες χώρες. Μέσα από αυτά παρουσιάζεται το περιεχόμενο του κάθε μαθήματος, αλλά ταυτόχρονα δίνεται η δυνατότητα να αποκαλυφθούν πτυχές του επιστημονικού χώρου που αναδεικνύουν την εξέλιξη της ανθρώπινης διανοητικής προσπάθειας στους αιώνες. Αυτή η διάσταση των Μαθηματικών δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση να αποδοθεί σε ένα βιβλίο και προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο στόχος η συνήθης πρακτική για τους συγγραφείς των σχολικών βιβλίων είναι να υιοθετηθούν κάποιες ιστορικές παρεμβάσεις.

Τα νέα βιβλία των Μαθηματικών διδάχθηκαν στις έξι τάξεις του Δημοτικού το σχολικό έτος 2006-2007. Ένα χρόνο μετά ακολούθησε η διδασκαλία των νέων αντίστοιχων βιβλίων στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Τα βιβλία αυτά αντικατέστησαν τα προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία είχαν ήδη συμπληρώσει εικοσαετή παρουσία στην εκπαίδευση. Τα νέα εγχειρίδια γράφτηκαν σύμφωνα με όσα προβλέπονται στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. - Α.Π.Σ., το οποίο στηρίχθηκε σε σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση (Καραγεώργος, 1998; Τζεκάκη, 2000; Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 2002). Όπως ήδη αναφέρθηκε στα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών αλλά και στα βιβλία του εκπαιδευτικού που συνοδεύουν τα νέα βιβλία του Δημοτικού και του Γυμνασίου υπάρχουν πολλές αναφορές για την ενεργητική προσέγγιση της γνώσης και για τον σημαντικό ρόλο των δραστηριοτήτων στην οικοδόμηση των νέων γνώσεων από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται ότι η ενεργητική προσέγγιση της γνώσης «έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να σκέπτονται, να χειρίζονται πολύπλοκες έννοιες, να ερευνούν και να φτάνουν οι ίδιοι στη γνώση, … , δηλαδή τελικά να μαθαίνουν το “πώς να μαθαίνουν”. Απαιτεί δηλαδή κυρίως τη δραστηριοποίηση του μαθητή.» (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ.3742).

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση, όπως αυτό εκφράζεται στα σχολικά βιβλία τα τελευταία χρόνια, διακρίνεται η επιλογή για αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Το ζήτημα αυτό έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενών ερευνητικών προσπαθειών (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Thomaidis & Tzanakis, 2009), ιδιαίτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ιστορικά στοιχεία που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια και τα οποία συνδέονται με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

Οι ομάδες που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή των σχολικών βιβλίων για τα Μαθηματικά του Δημοτικού και του Γυμνασίου, προσπαθώντας να εναρμονισθούν με τους όρους του διαγωνισμού συγγραφής και τις υποδείξεις του αναλυτικού προγράμματος, συμπεριέλαβαν σε αυτά έναν αξιόλογο αριθμό ιστορικών σημειωμάτων, σχολίων, εικόνων και άλλου υλικού. Σχετικά όμως με τη σημασία όλων αυτών στη διδακτική πράξη αναπτύσσεται ένα πλήθος από ερωτήματα για τους στόχους των συγγραφέων όταν επιλέγουν τις ιστορικές αναφορές, για τον τρόπο που υποτίθεται ότι ο εκπαιδευτικός θα τις χρησιμοποιήσει, για το όφελος που θα αποκομίσει ο μαθητής.

Για τους διάφορους τρόπους εισαγωγής της Ιστορίας των Μαθηματικών στο σχολικό πρόγραμμα, ο Fried (2001) αναφέρει ότι παρουσιάζονται γενικά με δύο ειδών βασικές στρατηγικές: τη στρατηγική προσθήκης και τη στρατηγική προσαρμογής.

Η στρατηγική προσθήκης περιλαμβάνει την εισαγωγή ιστορικών σημειωμάτων, σύντομων βιογραφιών ή την παράθεση μεμονωμένων ιστορικών προβλημάτων και απλά διευρύνει το πρόγραμμα σπουδών, χωρίς να προκαλεί αλλαγή σε αυτό. Μέσω της στρατηγικής αυτής ο στόχος είναι γίνουν τα Μαθηματικά περισσότερο ενδιαφέροντα, κατανοητά και προσιτά αλλά και να αναδειχθεί το ανθρώπινο πρόσωπό τους.

Η στρατηγική προσαρμογής χρησιμοποιεί την ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας ως οδηγό για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας της συγκεκριμένης έννοιας. Μια τέτοια στρατηγική στόχο έχει τον ιστορικό εμπλουτισμό των μαθηματικών εννοιών, καθώς αναδεικνύει τους προβληματισμούς που τις δημιούργησαν και τη σταδιακή (συνήθως μη γραμμική) εξέλιξή τους σε σχέση με τα σύγχρονά τους κοινωνικά και πολιτισμικά προβλήματα. Επιπλέον, αποσκοπεί στη διαμόρφωση ολοκληρωμένων αντιλήψεων γύρω από τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, υπερβαίνοντας, τον απλό στόχο της δημιουργίας θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και δίνοντας έμφαση συνήθως στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών κάτω από τη σημερινή, σύγχρονη μορφή τους (Fried, 2001; Κολέζα, 2006; Ταξίδης, 2014).

Επιπλέον, όπως οι Grugnetti & Rogers (2000) αναφέρουν, η Ιστορία των Μαθηματικών, μπορεί να παίξει διαφορετικούς ρόλους στη διδακτική πράξη. Μέσα από την Ιστορία, που την ορίζουν ως τη μελέτη της αλλαγής στον χρόνο, θεωρούν ότι αποκαλύπτονται οι πολιτισμικοί παράγοντες που επέδρασαν και πιθανόν ενεργοποίησαν τη δημιουργία νέων ιδεών, αλλά και οι πρακτικές εφαρμογές που τις υποστήριξαν. Επιπλέον, διαφαίνονται οι τρόποι με τους οποίους επηρέασαν οι ιδέες μιας ομάδας τη δουλειά άλλων ομάδων και ενός πολιτισμού άλλους. Μέσα από αυτές τις πτυχές μπορεί να εκτιμηθεί ο πλούτος των ιδεών, που αποτελούν μέρος των Μαθηματικών, η συμβολή άλλων πολιτισμών, καθώς και τα εσωτερικά και εξωτερικά κίνητρα για τις αιτίες και τους τρόπους που τα Μαθηματικά έχουν αναπτυχθεί σε διάφορες κοινωνίες. Ωστόσο προκύπτει ένας προβληματισμός σχετικά με το πώς οι διαστάσεις αυτές θα φτάσουν στους μαθητές, προκειμένου να αποκτήσουν μια εκτίμηση για τις εσωτερικές λειτουργίες και την αξία των Μαθηματικών. Τα σχολικά βιβλία αφενός και οι σχετικές ενέργειες των εκπαιδευτικών αφετέρου έχουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο προς την κατεύθυνση αυτή.

Για τον τρόπο με τον οποίο τα σχολικά βιβλία χειρίζονται το θέμα της χρήσης Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη, οι Siu & Tzanakis (2004) έχουν αναφερθεί στο γαστρονομικό ανάλογο σύμφωνα με το οποίο το ιστορικό υλικό στα σχολικά βιβλία μπορεί να λειτουργεί ως ορεκτικό, κυρίως γεύμα ή επιδόρπιο, εξυπηρετώντας αντίστοιχα την υποκίνηση, το κυρίως περιεχόμενο ή τον εμπλουτισμό του μαθήματος. Οι περισσότερες από τις ιστορικές παρεμβάσεις που περιλαμβάνονται στα ελληνικά σχολικά βιβλία έχουν κατά κύριο λόγο ως στόχο τον εμπλουτισμό του μαθήματος και την υποκίνηση, επιχειρώντας να συμβαδίσουν με τον κύριο στόχο που θέτουν τα αναλυτικά προγράμματα για την ένταξη της ιστορίας, ο οποίος είναι να τονώσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και την αγάπη τους για τα Μαθηματικά (Σπηλιωτοπούλου, Διακογιώργη, & Παπαντωνίου, 2009).

2.3.1 Βιβλία Μαθηματικών του Δημοτικού

Τα ιστορικά στοιχεία στα βιβλία Μαθηματικών του Δημοτικού εμφανίζονται σε μικρότερη έκταση. Εδώ θα εστιάσουμε κυρίως στα βιβλία της ΣΤ΄ και της Γ΄ τάξης, όπου βρίσκουμε τις περισσότερες ιστορικές αναφορές.

Στο **εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης** (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2015α) συναντούμε ιστορικά σημειώματα, στην αρχή των τεσσάρων από τις έξι θεματικές ενότητες που περιλαμβάνονται σε αυτό. Πιο συγκεκριμένα:

- Θεματική Ενότητα 1 (σ. 8): Αριθμοί και πράξεις (με αναφορές για Ινδούς, Άραβες, Ευρωπαίους, σύμβολα των αριθμών).
- Θεματική Ενότητα 2 (σ. 60): Εξισώσεις (με αναφορές για κατοίκους Μεσοποταμίας, προβλήματα σε πήλινες πλάκες).
- Θεματική Ενότητα 3 (σ. 74): Λόγοι – Αναλογίες (με αναφορές για αναλογίες, συμμετρία σε πρωτόγονες ζωγραφιές).
- Θεματική Ενότητα 6 (σ. 136): Γεωμετρία (με αναφορές για Αρχαία Ελλάδα, Θαλή, Πυθαγόρα, Ευκλείδη, Δημόκριτο), (βλ. και παράρτημα Γ, εικ. 1, 2, 3, 4 αντίστοιχα).

Τα συγκεκριμένα σημειώματα παρατίθενται σε χωριστή σελίδα, μέσα σε ολοσέλιδο χρωματιστό φόντο, αμέσως μετά την εισαγωγική σελίδα που περιλαμβάνει τα περιεχόμενα κάθε θεματικής ενότητας. Όπως παρουσιάζονται χωρίς λειτουργικό ρόλο, φαίνεται να έχουν ένα καθαρά πληροφοριακό ή και απλώς διακοσμητικό χαρακτήρα, παρά τις διαφορετικές ίσως προθέσεις των συγγραφέων, και συχνά περνούν απαρατήρητα ή στην καλύτερη περίπτωση τυγχάνουν μιας απλής ανάγνωσης. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για τα σημειώματα αυτά καμία αναφορά ή οδηγία δεν υπάρχει στο βιβλίο δασκάλου, ώστε οι εκπαιδευτικοί να τα προσέξουν και να παρακινηθούν για να τα αξιοποιήσουν διδακτικά.

Ενδεικτικά σημειώνουμε ότι για το ιστορικό σημείωμα στην ενότητα των εξισώσεων, το οποίο περιέχει και ένα ιστορικό πρόβλημα, ο Θωμαΐδης (2015) αναφέρει πως, πέρα από τις ασάφειες και παραλείψεις που εντοπίζονται σε αυτό, θα μπορούσε να αποτελέσει το έναυσμα για συγκρίσεις ανάμεσα στους παλαιότερους και σύγχρονους τρόπους επίλυσης, ώστε να αναδειχθούν η μεγάλη απελευθέρωση και ευελιξία που παρέχουν στη μαθηματική σκέψη τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης (είτε αυτά αφορούν τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων είτε τη μεθοδολογία και τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού), αλλά και η αξία της μαθηματικής γνώσης που καλούνται να κατακτήσουν οι μαθητές.

Επίσης, στο **α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της ΣΤ΄ τάξης** (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2015β), στα πλαίσια προτεινόμενων «δραστηριοτήτων με προεκτάσεις», συναντούμε τα παρακάτω:

- Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών, κεφάλαιο 7: «Η γέφυρα του Γκαρ (Gard)» (σ. 20).
- Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, κεφάλαιο 14: «Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία» (σ. 34).
- Δυνάμεις, κεφάλαιο 17: «Το Δήλιο πρόβλημα» (σ. 40), (βλ. και παράρτημα Γ, εικ. 5, 6, 7 αντίστοιχα).

Οι συγκεκριμένες δραστηριότητες, σύμφωνα με όσα η συγγραφική ομάδα αναφέρει στην περιγραφή της δομής των βιβλίων, μπορούν να αποτελέσουν αφορμή για διερεύνηση και περαιτέρω επέκταση της γνώσης, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος το θέμα που εξετάζουν και να προσεγγίσουν τη γνώση με βιωματικό τρόπο στα πλαίσια της πραγματικότητας που τους περιβάλλει (μέθοδος project). Με τον τρόπο αυτό η γνώση αποκτά νόημα και ενδιαφέρον, καθώς εξετάζεται διαθεματικά στο πλαίσιο της μελέτης αυθεντικών καταστάσεων (Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, 2015γ). Στις περιπτώσεις αυτές βλέπουμε ότι η λογική του βιβλίου βασίζεται περισσότερο στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, περιλαμβάνοντας κάποια ιστορικά στοιχεία ή και σχετική βιβλιογραφία στο βιβλίο του δασκάλου. Στην ουσία όμως το ιστορικό πλαίσιο αποδυναμώνεται, αφού οι ιστορικές αναφορές λειτουργούν ως βάση για προβλήματα και δραστηριότητες, που φαίνεται να ακολουθούν το πλαίσιο επίλυσης ή ενασχόλησης με οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα του βιβλίου.

Μια αξιόλογη και περισσότερο συστηματική προσπάθεια για εισαγωγή στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών, που αφορούν τόσο την Αριθμητική όσο και τη Γεωμετρία, γίνεται στο **σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Δημοτικού** (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος, & Σπανακά., 2015α). Η Ιστορία των Μαθηματικών είναι παρούσα σε όλη την έκταση του βιβλίου όχι μόνο με την τυπική μορφή των ιστορικών σημειωμάτων, αλλά κυρίως με ψήγματα ιστορικών στοιχείων που εμπλέκονται στη ροή του μαθήματος.

Από την αρχή του βιβλίου (σ. 6 – 7), η παρουσίαση των ηρώων συνδέεται με δύο εισαγωγικά ιστορικά σημειώματα, όπου περιλαμβάνονται βιογραφικά στοιχεία για δύο σπουδαίους μαθηματικούς της αρχαιότητας, τον Πυθαγόρα τον Σάμιο και την Υπατία την Αλεξανδρινή (βλ. και παράρτημα Γ, εικ. 8, 9 αντίστοιχα). Αυτοί δανείζουν και τα ονόματά τους σε δύο από τους ήρωες του βιβλίου, περνώντας έμμεσα και το μήνυμα ότι τα Μαθηματικά δεν αποτελούν κάτι απρόσιτο για το γυναικείο φύλο.
Ενδεικτικά αναφέρουμε παρακάτω:

- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση, κεφάλαιο 6: Πυθαγόρειος πίνακας - Πυθαγόρας – Πυθαγόρειοι (σ. 23).
- Αριθμοί μέχρι το 3.000, κεφάλαιο 14: ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης (σ. 43).
- Προς τον Πολλαπλασιασμό (ΙΙ), κεφάλαιο 29: ελληνικός πολλαπλασιασμός – Ευτόκιος (σ. 74).
- Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί, κεφάλαιο 35: δεκαδικοί αριθμοί - δεκαδικά κλάσματα - Simon Stevin (σ. 88).
- Αριθμοί μέχρι το 7.000, κεφάλαιο 40: αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης (σ. 98).
- Μοτίβα, κεφάλαιο 48: το τρίγωνο του Πασκάλ (σ. 117), (βλ. και παράρτημα Γ, εικ. 10, 11, 12, 13, 14, 15 αντίστοιχα).

Τα ιστορικά στοιχεία στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο, ενσωματωμένα με λειτουργικό τρόπο, μπορούν να αποτελέσουν ένα πρώτης τάξεως έναυσμα για σύνδεση των Μαθηματικών με προηγούμενες ιστορικές περιόδους αλλά και με διάφορους πολιτισμούς. Μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τρόπους με τους οποίους οι διαφορές στις ιστορικές περιόδους, τη γεωγραφική θέση, τον πολιτισμό και τις πεποιθήσεις επηρέασαν την πρόοδο στα Μαθηματικά (Fauvel & Van Maanen, 2000), να τα αντιληφθούν δηλαδή ως αποτέλεσμα εξέλιξης στο χώρο και το χρόνο. Ειδικότερα θα θέλαμε να επισημάνουμε τα οφέλη των μαθητών από τη γνωριμία τους με τον «ελληνικό πολλαπλασιασμό», ο οποίος φαίνεται να είναι ένας τρόπος υπολογισμού εύκολος και συμβατός με τη σκέψη των ανθρώπων. Μέσα από αυτόν δίνεται η δυνατότητα να αναπτύξουν οι μαθητές άτυπες μεθόδους υπολογισμών, αλλά και να κατανοήσουν καλύτερα τον τυπικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού (Λεμονίδης, & Νικολαντωνάκης, 2007), ο οποίος διδάσκεται στο μάθημα που ακολουθεί.
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι στις οδηγίες του ΥΠΠΕΘ (1523317/Δ1/16-09-2016, σ. 27 και 30) για το σχολικό έτος 2016-2017 με θέμα «Αναδιάρθρωση, εξορθολογισμός και διαχείριση της διδακτέας ύλης για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο» προτείνεται δυστυχώς να μην αξιοποιηθούν διδακτικά από το βιβλίο μαθητή:

- η εργασία για το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, με την παρατήρηση «Δεν εξυπηρετεί άμεσα τον διδακτικό στόχο της ενότητας».
- η εργασία για το αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης, με την παρατήρηση «Δεν εξυπηρετεί τους επιδιωκόμενους στόχους της ενότητας».

Αυτό, βέβαια, θα μπορούσε να πει κανείς ότι δεν είναι απολύτως δεσμευτικό, αλλά προϋποθέτει ενημέρωση των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδακτική αξιοποίηση της

Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε να μπορούν επιχειρηματολογήσουν περί του αντιθέτου και να επιλέξουν τις συγκεκριμένες εργασίες για ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων.
Στα βιβλία των υπόλοιπων τάξεων του Δημοτικού εμφανίζονται σποραδικά κάποια στοιχεία που συνδέονται με την ιστορία αλλά και την πολυπολιτισμικότητα των Μαθηματικών όπως άβακας, τάγκραμ, μαγικά τετράγωνα. Τα στοιχεία αυτά μπορούν, αν αξιοποιηθούν κατάλληλα, να στοχεύουν στην αποδοχή της ποικιλομορφίας, στο σεβασμό και την εκτίμηση της εργασίας των άλλων, στην αναγνώριση των διαφορετικών πλαισίων, αναγκών, και σκοπών, στη συνειδητοποίηση ότι κάθε κοινωνία έχει συνεισφέρει στην εξέλιξη των Μαθηματικών (Grugnetti & Rogers, 2000). Αντ' αυτού το πιθανότερο είναι να περάσουν τελείως απαρατήρητα, αφού δεν υπάρχουν κατάλληλες οδηγίες στα αντίστοιχα βιβλία δασκάλου ούτε όμως και κατάλληλη επιμόρφωση για τους εκπαιδευτικούς, ώστε να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να αξιοποιούν διδακτικά αυτήν την ιστορικο-πολιτισμική τους διάσταση.

2.3.2. Βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου

Σε ότι αφορά τα βιβλία Μαθηματικών και των τριών τάξεων του Γυμνασίου οι διδακτικές παρεμβάσεις που εντοπίστηκαν ως ιστορικές είναι συνολικά εξήντα πέντε (65). Από αυτές στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου περιέχονται 33 ιστορικές παρεμβάσεις, στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου 18 και στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου 14. Για αυτές προκύπτουν οι εξής κατηγορίες (Σπηλιωτοπούλου, Διακογιώργη, & Παπαντωνίου, 2009):

1) Είδος του κειμένου, όπου διακρίνονται: μαθηματικά επεξηγηματικά κείμενα, ιστορικές μεμονωμένες πληροφορίες (έκθεση ή πρόβλημα), περιγραφικές αναδρομές μαθηματικών διαδικασιών ή επιτευγμάτων προσώπων, συνδετικά αιτιολογικά κείμενα, βιογραφικά στοιχεία φιλοσόφων ή μαθηματικών.

2) Είδος της εικόνας, όπου διακρίνονται: εικόνες προσώπων (πορτρέτα, φωτογραφίες, προτομές, ζωγραφική απεικόνιση, πρόσωπο/α σε δράση), εικόνες αρχαιολογικών οντοτήτων (ιστορικών πηγών ή οργάνων που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορες εποχές), εικόνες αρχιτεκτονικών μνημείων, εικόνες αντικειμένων τέχνης, σχηματικές αναπαραστάσεις.

3) Διδακτική λειτουργία, όπου διακρίνονται: ιστορικές παρεμβάσεις**:** εισαγωγικές προετοιμασίας, εκτίμησης μεγεθών, ανάδειξης μαθηματικής σκέψης, δραστηριότητας, πλαισίου δραστηριότητας (πάνω στο οποίο τίθενται προβληματισμοί), πληροφοριακές, χωρίς λειτουργικό ρόλο.

4) Πολιτισμική αναφορά, όπου διακρίνονται ιστορικές παρεμβάσεις που μπορεί να προέρχονται από: την Ελλάδα, άλλους πολιτισμούς, γενικές.

5) Ρόλος εικόνας σε σχέση με το κείμενο, όπου διακρίνονται: εικόνες: διακοσμητικές, απεικονιστικές, επεξηγηματικές, συμπληρωματικές, νοηματοδοτικές, σχετιζόμενες απλά με το κείμενο, σχετιζόμενες με το νόημα, σχετιζόμενες με το ιστορικό πλαίσιο (στο οποίο οι έννοιες αρχικά αναπτύχθηκαν).

Από την καταγραφή ανά διάσταση, κατηγορία και βιβλίο των χαρακτηριστικών των ιστορικών αναφορών που περιλαμβάνονται στα βιβλία του Γυμνασίου προέκυψαν τα εξής στοιχεία (Σπηλιωτοπούλου, Διακογιώργη, & Παπαντωνίου, 2009):

- Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου δίνεται έμφαση στη χρήση των ιστορικών αναφορών ως βάση κυρίως για προβλήματα. Η πρακτική αυτή συναντάται σε μικρότερο βαθμό στις Α΄ και Β΄ τάξεις.
- Η χρήση μαθηματικών τύπων, ακόμα και στις εισαγωγικές σελίδες των κεφαλαίων δημιουργεί ένα μεγάλο ποσοστό για την κατηγορία μαθηματικού επεξηγηματικού κειμένου.
- Η χρήση πορτρέτων στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου φαίνεται να υιοθετείται σε μεγάλο βαθμό, ενώ πρόσωπα σε δράση είναι περισσότερο προσφιλής αναπαράσταση στο βιβλίο της Γ΄ τάξης.

Αναφορικά με τη διδακτική λειτουργία παρατηρείται:

- για την Α΄ τάξη ότι περιέχονται κυρίως αναφορές με πληροφορικό χαρακτήρα ή χωρίς λειτουργικό διδακτικό ρόλο (το ίδιο προκύπτει και για τη Β΄ τάξη).
- για την Β΄ και κυρίως για την Γ΄ τάξη ότι οι αναφορές έχουν ρόλο εισαγωγικό, προετοιμάζοντας για όσα πρόκειται να διδαχθούν.
- για την Γ΄ τάξη ότι η ιστορία χρησιμοποιείται ως βάση για μαθησιακές δραστηριότητες, πράγμα που υποστηρίζεται και από την παρουσία αρκετών προτάσεων για χρήση και άλλων ιστορικών παρεμβάσεων από τον εκπαιδευτικό στο αντίστοιχο βιβλίο εκπαιδευτικού.

Επίσης, διαπιστώνεται ότι οι περισσότερες ιστορικές αναφορές στα βιβλία της Α΄ και Γ΄ τάξης προέρχονται από τα Μαθηματικά της Αρχαίας Ελλάδας, ενώ στη Β΄ τάξη εμφανίζεται μια ίση κατανομή από ελληνικά μαθηματικά επιτεύγματα και επιτεύγματα άλλων πολιτισμών.

Επιπλέον, για τις εικόνες διαπιστώνεται ότι:

- στο βιβλίο της Α΄ τάξης, έχουν κυρίως ρόλο διακοσμητικό ή απεικονιστικό.
- στο βιβλίο της Β΄ τάξης έχουν ρόλο απεικονιστικό και σχετίζονται με νόημα με το κείμενο.
- στο βιβλίο της Γ΄ επεξηγούν το κείμενο, του αποδίδουν νόημα και παίζουν σε μεγαλύτερο ποσοστό το ρόλο δημιουργίας ιστορικού πλαισίου.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα από τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα βιβλία του Γυμνασίου:

Α΄ τάξη (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2015α)

- Το έξυπνο τέχνασμα του Gauss (σ. 17)
- Η ιστορία του μηδενός (σ. 19)
- Τα σύμβολα των αριθμών (σ. 23)
- Πυθαγόρειοι – ακολουθίες τρίγωνων αριθμών (σ. 24)
- Το κόσκινο του Ερατοσθένη (σ. 29)
- Ιστορία των κλασμάτων (σ. 52-53)
- Γεωμετρία (Ευκλείδεια - Υπερβολική - Ελλειπτική) (σ. 182)
- Τα τετράπλευρα κατά τον Ευκλείδη (σ. 228)

Β΄ τάξη (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, & Ρεκούμης 2015α)

- Η ηλικία του Διόφαντου (σ. 10)

- Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες (σ. 21)
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα (σ. 132)
- Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων – ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ (σ. 146)
- Τα κανονικά πολύγωνα στη φύση, στην τέχνη και στις επιστήμες (σ. 185)
- Εκτιμήσεις του π (σ. 189)

Γ΄ τάξη (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2015α)

- Το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal (σ. 51)
- Πυθαγόρειο θεώρημα και πυθαγόρειες τριάδες(σ. 52)
- Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού (σ. 98)
- Η χρυσή τομή (σ. 109)
- Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά (σ. 197)
- Υπολογισμός του ύψους της Πυραμίδας από το Θαλή (σ. 224)

2.3.3. Προβληματισμοί σχετικά με τις ιστορικές αναφορές στα βιβλία του Γυμνασίου.

Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στα Α.Π.Σ. η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών συνδέεται με την αναζήτηση και κατάκτηση της γνώσης, πράγμα που αποτελεί κεντρικό ζήτημα για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Αυτό σημαίνει ότι τα ιστορικά στοιχεία των διδακτικών βιβλίων θα πρέπει να βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών, που αποτελούν το αντικείμενο της διδασκαλίας, και όχι απλά να αποτελούν πηγή πληροφόρησης. Να λειτουργούν για τον μεν εκπαιδευτικό υποστηρικτικά, παρέχοντάς του ιδέες και υλικό για την οργάνωση της διδασκαλίας, για τους δε μαθητές ως κίνητρα για μάθηση. Επομένως οι ιστορικές αναφορές των διδακτικών βιβλίων θα πρέπει να είναι έγκυρες και να εξυπηρετούν τους στόχους της ενότητας στην οποία ενσωματώνονται (Θωμαΐδης, 2008).

Στην πρώτη έκδοση των βιβλίων του Γυμνασίου, που έγινε το 2007, υπήρχαν περιπτώσεις με ιστορικές αναφορές που είχαν αρκετά λάθη. Αυτές κατά ένα μεγάλο μέρος διορθώθηκαν σε επόμενες εκδόσεις. Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις ιστορικών αποσπασμάτων, τα οποία έχουν καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα, χωρίς όμως μαθηματικά ερεθίσματα, ή άλλων που δεν συνδέονται άμεσα με τη διδακτέα ενότητα ούτε κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς βρίσκονται σε λάθος θέση μέσα στο σχολικό βιβλίο. Τα προαναφερθέντα δείχνουν κάποια προχειρότητα όσον αφορά τη συγγραφή των ιστορικών σημειωμάτων και την παράθεσή τους στα σχολικά εγχειρίδια χωρίς κανένα επανέλεγχο, με κύριο στόχο όχι την απαίτηση για ουσιαστική αξιοποίησή τους στη διδασκαλία, αλλά την ικανοποίηση των σχετικών προϋποθέσεων που όριζε η προκήρυξη του διαγωνισμού συγγραφής των βιβλίων.

Εδώ θα εστιάσουμε κυρίως σε κάποιες **περιπτώσεις από το βιβλίο της Α΄ τάξης του Γυμνασίου**.

1η περίπτωση: Στη σελίδα 17 το ιστορικό σημείωμα για τον K. F. Gauss περιείχε ανακριβείς πληροφορίες που μετέτρεπαν την ιστορική αφήγηση σε μυθοπλασία (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 1α). Στη φράση «όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1789 στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις», που αναφέρεται στα παιδικά χρόνια του Gauss, με τη λέξη «χωριό» χαρακτηρίζεται το Braunschweig, ένα πολιτικό και πολιτιστικό κέντρο, έδρα δουκάτου, που κατά το τελευταίο τέταρτο του 18^{ου} αιώνα είχε περίπου 20.000 κατοίκους. Επιπλέον, ο Gauss, που είχε χαρακτηριστεί παιδί–θαύμα στα Μαθηματικά από τα 3 του χρόνια, πώς ήταν δυνατόν να αρχίσει να μαθαίνει τις αριθμητικές πράξεις το 1789 στην πρώτη τάξη του σχολείου, δηλαδή σε ηλικία 12 ετών, αφού στο σημείωμα αναφέρεται ως έτος γέννησής του το 1777. Σε νεότερες εκδόσεις διορθώθηκε το έτος που ο Gauss απεβίωσε (από 1850 σε 1855), το έτος φοίτησής του στην πρώτη δημοτικού (από 1789 σε 1784) και συμπληρώθηκε στην πρώτη σειρά του αθροίσματος ο όρος (49+52) που είχε παραληφθεί (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 1β).

Το σημαντικότερο είναι ότι σε αυτό το σημείωμα υποδηλώνεται η μαθηματική πρόοδος ως αποτέλεσμα των λίγων προικισμένων και όχι ως μια συλλογική προσπάθεια, στην οποία συνδυάζεται, στη σωστή στιγμή, αρμονικά η προσωπική ικανότητα με τα προηγούμενα επιτεύγματα της επιστημονικής κοινότητας. Αυτό αποτελεί μια διαστρεβλωμένη άποψη της ιστορίας, η οποία, από διδακτική σκοπιά, δεν αναμένεται να προσελκύσει μαθητές σε μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη, αλλά να τους αποθαρρύνει. Επομένως στην περίπτωση αυτή το ιστορικό υλικό του βιβλίου δεν συνάδει με το Α.Π.Σ. που αναφέρει ως στόχο την ενθάρρυνση των μαθητών στην αναζήτηση γνώσεων (Thomaidis & Tzanakis, 2009).

2^{η} περίπτωση: Σε διαφορετικά σημεία του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου περιλαμβάνονταν αντικρουόμενες πληροφορίες για τα βιογραφικά στοιχεία του Ευκλείδη, αφού δίνονταν τρεις διαφορετικές «εκτιμήσεις» για το χρονικό διάστημα που αυτός έζησε: στη σ. 26 Ευκλείδης (330 – 275 π.Χ.), στη σ. 147 Ευκλείδης (300 – 275 π.Χ.), στη σ. 182 Ευκλείδης (330 – 270 π.Χ.), (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 2α, 3α, 4α αντίστοιχα).

Αν κανείς ήθελε να υπολογίσει πόσα χρόνια έζησε ο Ευκλείδης, με έκπληξη θα διαπίστωνε από το αποτέλεσμα των αφαιρέσεων ότι έζησε 55, 25 και 60 χρόνια. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται ότι οι συγκεκριμένες αναφορές δημιουργούσαν ιστορική σύγχυση, καθώς οι συγγραφείς του βιβλίου δεν έλαβαν υπόψη την μοναδική έγκυρη ιστορική πηγή που αναφέρεται στο συγκεκριμένο ζήτημα και η οποία είναι ένα απόσπασμα από τα Σχόλια του Πρόκλου στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων. Σύμφωνα με την πηγή αυτή και χωρίς να υπάρχει δυνατότητα προσδιορισμού κάποιου ακριβέστερου χρονικού διαστήματος, η περίοδος ακμής του Ευκλείδη μπορεί να τοποθετηθεί λίγο πριν και λίγο μετά το 300 π.Χ. Οι αντικρουόμενες αυτές πληροφορίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν αφορμή για την ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων σχετικά με τον προσδιορισμό του χρονικού διαστήματος που έζησε ο Ευκλείδης (Θωμαΐδης, 2008).

Ο προβληματισμός αυτός θα μπορούσε ίσως εκ πρώτης όψεως να χαρακτηριστεί υπερβολικός και να θεωρηθεί πως η συγγραφική ομάδα δεν ήταν τελείως λάθος, αφού από τις ίδιες τις ιστορικές πηγές δεν προκύπτει με ακρίβεια κάποια ημερομηνία για την περίοδο ζωής αυτού του σημαντικού Έλληνα μαθηματικού. Επίσης, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι αντικρουόμενες πληροφορίες πιθανότατα δεν θα γίνονταν αντιληπτές, γιατί βρίσκονταν διάσπαρτες σε διαφορετικά κεφάλαια του σχολικού βιβλίου. Από μαθηματική και διδακτική σκοπιά, όμως, ένα τέτοιο λάθος αν εντοπιστεί από κάποιον παρατηρητικό μαθητή ή και γονέα, μπορεί να δημιουργήσει αμφιβολίες, γενικότερα, για την εγκυρότητα και την αξιοπιστία του βιβλίου. Σε μεταγενέστερες εκδόσεις (από το 2010 και μετά) του βιβλίου οι ημερομηνίες έχουν αφαιρεθεί και αντικαταστάθηκαν από τη φράση «άκμασε περίπου το 300 π.Χ» (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 2β, 3β, 4β αντίστοιχα).

3η περίπτωση: Στη σελίδα 29, υπήρχε ένα ένθετο ιστορικό σημείωμα, το οποίο περιλάμβανε μια συνοπτική αναφορά των βιογραφικών στοιχείων και των επιστημονικών επιτευγμάτων του Ερατοσθένη του Κυρηναίου (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 5α). Οι χρονολογίες που δίνονταν στο σημείωμα αυτό ήταν αντιφατικές, αφού αναφερόταν ότι ο Ερατοσθένης έζησε το διάστημα 276 – 197 π.Χ., ότι «από το 235 π.Χ. και επί 40 χρόνια διετέλεσε διευθυντής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας» και ότι απεβίωσε στα 82 του χρόνια. Αν κανείς ήθελε να επαληθεύσει τις πληροφορίες που περιλαμβάνονταν στο συγκεκριμένο απόσπασμα, θα διαπίστωνε με δύο αφαιρέσεις: πρώτον (276 - 197 = 79) ότι ο Ερατοσθένης έζησε 3 χρόνια λιγότερα από τα 82 που στο ίδιο σημείωμα παρακάτω αναφερόταν και δεύτερον (235 - 40 = 195) ότι εξακολουθούσε να διευθύνει το Μουσείο της Αλεξάνδρειας 2 χρόνια μετά το θάνατό του! Στο ίδιο ιστορικό σημείωμα έχουμε, επίσης, μια περίπτωση ανεξέλεγκτης χρήσης εικονογραφικού υλικού, καθώς χρησιμοποιείται μια εικόνα για τον Ερατοσθένη που δεν συμπίπτει με καμία από τις γνωστές εικόνες του, που υπάρχουν στη βιβλιογραφία ή στο διαδίκτυο και οι οποίες, βέβαια, είναι υποθετικές απεικονίσεις πολύ μεταγενέστερες. Το σημείωμα αυτό ενώ θα μπορούσε να συνδέεται με ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, που να εστιάζουν, για παράδειγμα, στο επίτευγμα της μέτρησης της περιφέρειας της γης, απλά περιορίζεται στην επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων και περισσότερο σύγχυση δημιουργεί παρά διαφωτίζει (Thomaidis & Tzanakis, 2009).

Σε μεταγενέστερες εκδόσεις του βιβλίου έχουν αφαιρεθεί από το ιστορικό σημείωμα οι χρονολογίες γέννησης και θανάτου του Ερατοσθένη, η ηλικία που είχε όταν έφυγε από τη ζωή, η ημερομηνία έναρξης της θητείας του στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, αλλά και η ιδιότητά του (από διευθυντής στο αρχικό σημείωμα, υπεύθυνος στο διορθωμένο). Η εικόνα όμως δεν έχει αλλάξει, ταυτίζοντας έτσι το πρόσωπο του Ερατοσθένη με κάποιο άλλο με το οποίο δεν έχει καμιά σχέση (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 5β).

4η περίπτωση: Στη σελίδα 79 υπήρχε προσωπογραφία της οποίας η λεζάντα ανέφερε ότι το εικονιζόμενο πρόσωπο ήταν ο Απολλώνιος ο Περγαίος (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 6α). Δεν χρειαζόταν ιδιαίτερη προσπάθεια για να παρατηρήσει κάποιος ότι στην προσωπογραφία αυτή δεν εικονιζόταν ο περίφημος συγγραφέας των Κωνικών, αλλά ο νεοπυθαγόρειος φιλόσοφος Απολλώνιος ο Τυανεύς (που έζησε τον 1ο αιώνα μ.Χ.)! Σε επόμενες εκδόσεις του βιβλίου η εικόνα έχει διορθωθεί και το εικονιζόμενο πρόσωπο ταυτίζεται πλέον με το αναφερόμενο στη λεζάντα (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 6β).

Η λανθασμένη αυτή αναφορά θα μπορούσε να γίνει αφορμή για σύγκριση του ιστορικού και φιλοσοφικού περιβάλλοντος της περιόδου που έζησε ο Απολλώνιος ο

Περγαίος, μέσα στο οποίο αναπτύχθηκαν μεγάλα έργα της ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, με αυτό της περιόδου που έζησε ο Απολλώνιος ο Τυανεύς, οπότε και εμφανίστηκαν τα μαθηματικά έργα των νεοπυθαγόρειων φιλοσόφων (Θωμαΐδης, 2008).

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ψηφιακό σχολείο, όπου είναι αναρτημένα τα διδακτικά πακέτα ανά τάξη (Α΄ Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου αντίστοιχα):
http://ebooks.edu.gr/new/class-main.php?classcode=DSGYM-A
http://ebooks.edu.gr/2013/classcoursespdf.php?classcode=DSGYM-B
http://ebooks.edu.gr/2013/class-main.php?classcode=DSGYM-C
βρίσκουμε και το ανανεωμένο βιβλίο αλλά και το παλιό, χωρίς κάποια επισήμανση για τη διαφοροποίηση που υπάρχει! Το διορθωμένο βιβλίο είναι εκείνο που βρίσκεται στα διδακτικά πακέτα σε μορφή PDF και όχι στα βιβλία που εμφανίζονται στην αρχική οθόνη (εμπλουτισμένα html, μη εμπλουτισμένα html), στα οποία οι μαθητές έχουν πιο άμεση πρόσβαση. Αυτό ισχύει για όλα τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου.

5η περίπτωση: Στις σελίδες 115 και 130 παρατίθενται δύο ιστορικά σημειώματα που αναφέρονται στην πρώιμη εξέλιξη των αρνητικών αριθμών (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 7, 8). Από το περιεχόμενό τους προκύπτει ότι τα σημειώματα αυτά δεν βοηθούν τους μαθητές που θα τα διαβάσουν να αποκτήσουν γνώση για τη γένεση των αρνητικών αριθμών ούτε συμβάλλουν στην κατανόησή τους. Επίσης, δεν παρέχουν στον διδάσκοντα ιδέες για τη διδακτική προσέγγισή τους. Χρειάζεται η θέλησή του να εμβαθύνει σε αυτά, προκειμένου οι μαθητές να έχουν μία σαφή εικόνα σχετικά με τον τρόπο που χρησιμοποιούσαν τους αρνητικούς οι Κινέζοι στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. – 220 μ.Χ.) ή τι εννοεί ο Διόφαντος λέγοντας «λείψις επί λείψιν ποιεί ύπαρξιν». Επομένως είναι πολύ πιθανό ο εκπαιδευτικός ή ο μαθητής που θα τα διαβάσει να τα προσπεράσει ή στην καλύτερη περίπτωση να αναζητήσει άλλες ιστορικές πηγές που θα καλύπτουν τα προαναφερθέντα ζητήματα (Θωμαΐδης, 2009).

6η περίπτωση: Στη σελίδα 166 (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 9) έχουμε ένα ιστορικό σημείωμα για τη μονάδα μέτρησης γωνιών και το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης. Σε αυτό επιχειρείται η σύνδεση μεταξύ μιας γεωμετρικής έννοιας και του συστήματος αρίθμησης που τη διέπει. Μια τέτοια πληροφορία θα ήταν χρήσιμη αν αποτελούσε την αφορμή για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων σχετικά με τα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί. Κάτι τέτοιο φαίνεται όμως πως δεν μπορεί να συμβαδίζει με την προσπάθεια εισαγωγής μιας γεωμετρικής έννοιας.

Παρόμοιες ιστορικές αναφορές συναντάμε και στο βιβλίο της Β΄ τάξης του Γυμνασίου, στο οποίο τα σημειώματα είναι περισσότερο μακροσκελή.

1η περίπτωση: Στο εισαγωγικό σημείωμα για το κεφάλαιο «Εξισώσεις - Ανισώσεις», σελίδα 10, περιλαμβάνεται ένα κείμενο για τη ζωή του Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου και στη συνέχεια η μετάφραση ενός επιγράμματος που υποτίθεται ότι έγραψαν οι μαθητές του πάνω στον τάφο του «κατά παραγγελία του» (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 10).

Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν ερωτήματα όπως: από ποια ιστορική πηγή συνάγονται όσα αναφέρονται σχετικά με το επιτύμβιο επίγραμμα και την προέλευσή του; Από πού προκύπτει η πληροφορία ότι ο Διόφαντος έδωσε ο ίδιος παραγγελία στους μαθητές του να συνθέσουν έναν γρίφο και να τον γράψουν πάνω στον τάφο του; Επιπλέον, στη φράση «Από τα 13 έργα που έγραψε …» φαίνεται ότι τα 13 κεφάλαια (βιβλία) από τα οποία αποτελείται ένα συγκεκριμένο έργο του Διόφαντου, τα «Αριθμητικά», συγχέονται με το συνολικό αριθμό των έργων του. Σύμφωνα με όσα περιλαμβάνει δήλωση του ίδιου του Διόφαντου, το έργο του «Αριθμητικά» ήταν χωρισμένο σε 13 κεφάλαια από τα οποία διασώθηκαν τα 6 στο ελληνικό πρωτότυπο και μεταφέρθηκαν μετά την πτώση του Βυζαντίου στη Δύση. Άλλα 4 κεφάλαια ανακαλύφθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1960 σε μια αραβική μετάφραση του $9^{ου}$ αιώνα μ.Χ. Μόνο ένα ακόμα έργο του Διόφαντου γνωρίζουμε με βεβαιότητα. Αυτό φέρει τον τίτλο «Περί πολυγώνων αριθμών» και μικρό μέρος του μόνον έχει διασωθεί στο ελληνικό πρωτότυπο. Επομένως προκύπτει εύλογα απορία σχετικά με την ύπαρξη των υπόλοιπων 11 «από τα 13 έργα που έγραψε» ο Διόφαντος (Θωμαΐδης, 2008). Το συγκεκριμένο ιστορικό σημείωμα εξακολουθεί να υπάρχει στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου, χωρίς να έχει γίνει καμιά αλλαγή.

$2^η$ περίπτωση: Στο τέλος της ενότητας για τις εξισώσεις α΄ βαθμού (σ. 21), μετά και από τις προτεινόμενες ασκήσεις, βρίσκουμε ένα ιστορικό σημείωμα (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 11) για τις εξισώσεις και τους συμβολισμούς τους μέσα στους αιώνες. Η σημασία του συγκεκριμένου ιστορικού σημειώματος φαίνεται να υποβαθμίζεται από τη θέση του και μόνο. Επιπλέον, σε αυτό αναφέρονται οι συμβολισμοί που χρησιμοποιήθηκαν όχι όμως και οι προβληματισμοί που οδήγησαν στο συμβολισμό μαθηματικών εννοιών. Έτσι δεν αναδεικνύεται ο προβληματισμός για τους λόγους χρήσης αυτών των συμβόλων ούτε και το σκεπτικό που μπορεί να κρύβεται πίσω από αυτούς.

$3^η$ περίπτωση: Στην σελίδα 132 (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 12) παρουσιάζονται στο τέλος της ενότητας στοιχεία για τη βιογραφία του Πυθαγόρα και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Με τον τρόπο που δίνεται το συγκεκριμένο ιστορικό σημείωμα αποτελεί μία ακόμα αναφορά που δεν κεντρίζει το ενδιαφέρον του μαθητή και δεν ταυτίζεται εντελώς με τη διδακτέα ενότητα, ενώ θα μπορούσε τοποθετημένο στην αρχή της ενότητας να δίνει μέρος της απόδειξης των αρχαίων σχετικά με το εν λόγω θεώρημα. Επιπλέον, θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για εποικοδομητικές συζητήσεις σχετικά με την έννοια της απόδειξης στα Μαθηματικά.

$4^η$ περίπτωση: Στη σελίδα 146 παρατίθεται (χωρίς να έχει ακόμη αλλαχθεί) ιστορικό σημείωμα με τον περίεργο τίτλο «Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ» (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 13). Το κείμενο και οι εικόνες που περιλαμβάνονται στο σημείωμα αυτό δεν έχουν καμία σχέση, όπως βέβαια και ο αστρολάβος, με το μηχανισμό των Αντικυθήρων, ο οποίος ακόμα και σήμερα έλκει το ενδιαφέρον των ερευνητών, καθώς αποτελεί ένα αινιγματικό αρχαιολογικό εύρημα (Θωμαΐδης, 2008). Ένα τέτοιο σημείωμα, στο τέλος της διδακτικής ενότητας, δε φαίνεται με ποιον τρόπο μπορεί να συνδέεται με τον ορισμό του ημίτονου και του συνημίτονου οξείας γωνίας τον οποίο πραγματεύεται η ενότητα που προηγείται. Η τοποθέτησή του στην αρχή της συγκεκριμένης ενότητας, θα μπορούσε να κεντρίσει περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών για τη χρησιμότητα αυτών των μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, μια πιο αναλυτική εικόνα ενός αστρολάβου θα μπορούσε ίσως να επιτρέψει στον εκπαιδευτικό να εμπλέξει τους μαθητές στον πειραματισμό και μέσα από αυτόν σε μια κατάσταση δοκιμών και εξαγωγής συμπερασμάτων.

5η περίπτωση: Στο τέλος της ενότητας για τα κανονικά πολύγωνα, στη σελίδα 185, βρίσκουμε ακόμα ένα ιστορικό κομμάτι (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 14), το οποίο αδικείται στη θέση που βρίσκεται, ενώ θα μπορούσε, ευρισκόμενο στην αρχή ή και ενσωματωμένο στην διδακτέα ενότητα, να αποτελεί μια πολύ αξιόλογη εισαγωγή για τα πολύγωνα, τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιήθηκαν μέσα στους αιώνες και τη σημασία τους για τις κοινωνίες μέσα από τις οποίες αναδείχθηκαν. Αντίθετα η ενότητα ασχολείται με τα κανονικά πολύγωνα και την κατασκευή τους και το σημείωμα δίνεται στο τέλος, παρουσιάζοντας απλά μερικά από τα ανθρώπινα επιτεύγματα που με τη χρήση των κανονικών πολυγώνων έχουν πραγματοποιηθεί.

6η περίπτωση: Στο τέλος της ενότητας για το μήκος του κύκλου, σελίδα 189, συναντούμε ένα ιστορικό σημείωμα (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 15), το οποίο επίσης φαίνεται ότι έχει καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα. Σε αυτό παρέχονται πολλές πληροφορίες σχετικά με τον υπερβατικό αριθμό π και τις προσεγγίσεις που προσπάθησαν να βρουν για αυτόν πολλοί επιστήμονες οι οποίοι ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό του στο πέρασμα των αιώνων και στο πλαίσιο διάφορων πολιτισμών. Όλη αυτή η παράθεση τιμών φαντάζει ανούσια, καθώς δεν αναδεικνύεται η διαδικασία και τα ερεθίσματα που οδήγησαν σε αυτές.

Πολλά από τα ιστορικά σημειώματα που εντοπίζουμε στα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου αποτελούν **βιογραφικές αναφορές** και περιλαμβάνουν βιογραφικά στοιχεία, προσωπογραφίες, επιτεύγματα μεγάλων μαθηματικών. Τα στοιχεία αυτά από μόνα τους δεν συμβάλλουν με κάποιο ουσιαστικό τρόπο στη διδασκαλία των Μαθηματικών (ενδεικτικά βλ. παράρτημα Δ, εικ. 16, 17, 18).

Στα ιστορικά βιογραφικά στοιχεία διακρίνονται διαστάσεις που αφορούν:

- προσωπικές πληροφορίες για το πρόσωπο/επιστήμονα, οι οποίες μπορεί να είναι χρονικοί/τοπικοί προσδιορισμοί, αναφορά σε γεγονότα και φιλοσοφία ζωής ή σε δράσεις επαγγελματικές και κοινωνικές.
- μαθηματικά επιτεύγματα, όπου περιλαμβάνονται ονομασίες συγγραφικών έργων, εισαγωγή ή τροποποίηση μαθηματικών όρων/συμβόλων, νοητικές επινοήσεις και συστηματοποίηση της μαθηματικής γνώσης, παρατηρήσεις/ υπολογισμοί/ πειραματισμοί των προσώπων, επινόηση και κατασκευή οργάνων ή και παρουσίαση στιγμών επινόησης, ρήσεις ή γρίφοι που χαρακτηρίζουν τα πρόσωπα.
- κοινωνικές πλευρές που αναφέρονται στη συνεισφορά του έργου στην επιστήμη, στη σχέση της μαθηματικής γνώσης με ομάδες επιστημόνων, στη σχέση με το έργο άλλων επιστημόνων, καθώς και με διάφορους κοινωνικούς παράγοντες, άλλες επιστήμες ή τέχνες.

- τον τρόπο που τα βιβλία φαίνεται να αξιοποιούν διδακτικά τα ιστορικά σημειώματα, οπότε τα βιογραφικά στοιχεία είτε συσχετίζονται με το περιεχόμενο είτε λειτουργούν ως πλαίσιο προβληματισμού προς τους μαθητές.

Στις βιογραφικές αναφορές γενικά περιλαμβάνονται κυρίως στοιχεία για τις χρονικές περιόδους και τους τόπους που γεννήθηκαν ή έζησαν οι αναφερόμενοι επιστήμονες. Στα βιβλία της Α΄ και της Γ΄ Γυμνασίου εμφανίζονται, επίσης, στοιχεία που αναφέρονται στις νοητικές επινοήσεις των προσώπων αλλά και στους τρόπους εμπλοκής τους με τους υπολογισμούς και τους πειραματισμούς με μαθηματικές έννοιες. Ακόμα, στα βιβλία της Α΄ και Β΄ τάξης, τα βιογραφικά στοιχεία περιλαμβάνουν συσχετίσεις των μαθηματικών επιτευγμάτων ενός επιστήμονα, με το έργο άλλων επιστημόνων. Στο βιβλίο της Γ΄ τάξης τα βιογραφικά σημειώματα αξιοποιούνται στην πλειοψηφία τους προκειμένου να τεθούν προβλήματα ή ασκήσεις για τους μαθητές. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της αναφοράς στον Θαλή τον Μιλήσιο (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 19), και στον υπολογισμό του ύψους της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της με τη βοήθεια της θεωρίας των ομοίων σχημάτων.

Από όσα προαναφέρθηκαν οι βιογραφικές αναφορές φαίνεται να προσφέρουν κυρίως προς την κατεύθυνση μιας «διαφωτιστικής προσέγγισης» κάποιων πτυχών της ιστορίας, χωρίς να περιλαμβάνουν υποδείξεις για ουσιαστική συνεισφορά τους στη διδασκαλία. Εξαίρεση αποτελούν αρκετές περιπτώσεις από το βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου, που λειτουργούν ως πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων και ασκήσεων. Γενικότερα, είναι λίγες οι περιπτώσεις βιογραφικών αναφορών που αναδεικνύουν τη διαδρομή της μαθηματικής σκέψης και τους παράγοντες που επέδρασαν (θετικά ή αρνητικά) στην εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης ή επιχειρούν τη σύνδεση του παρελθόντος με το παρόν, αξιοποιώντας ερωτήματα που θα μπορούσαν να προκαλέσουν τους μαθητές να σχολιάσουν αδυναμίες ή σημαντικές ιδέες ιστορικών προσώπων.

Συνοψίζοντας σχετικά με τις ιστορικές παρεμβάσεις στα βιβλία Μαθηματικών των τριών τάξεων του Γυμνασίου βλέπουμε ότι στην Α΄ τάξη περιέχονται ιστορικές αναφορές σε μεγαλύτερο βαθμό από τις άλλες δύο. Αυτές περιλαμβάνουν πλούσιες σε στοιχεία περιγραφές για ιστορικά επιτεύγματα και έχουν χαρακτήρα πληροφοριακό και δομημένο. Στη Β΄ τάξη οι παρεμβάσεις, υιοθετώντας τις περισσότερες φορές πιο αφηγηματικό ύφος, έχουν κατά κύριο λόγο ως στόχο να αποδώσουν μέσα από το ιστορικό πλαίσιο το νόημα των ενοτήτων που ακολουθούν και να εισάγουν τον μαθητή στο υλικό που θα μελετήσει σε αυτές. Στη Γ΄ τάξη το βιβλίο φαίνεται να στηρίζεται περισσότερο στις παρεμβάσεις του διδάσκοντα, και για το λόγο αυτό περιλαμβάνει και αρκετά ιστορικά στοιχεία στο βιβλίο του εκπαιδευτικού. Επίσης, σε αυτό οι ιστορικές αναφορές λειτουργούν συχνά ως βάση για προβλήματα και δραστηριότητες, που ακολουθούν τη λογική της ενασχόλησης με οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα του βιβλίου και με τον τρόπο αυτό αποδυναμώνουν το ιστορικό πλαίσιο (Σπηλιωτοπούλου, Διακογιώργη, & Παπαντωνίου, 2009).

Η ένταξη της ιστορίας στα διδακτικά εγχειρίδια φαίνεται ότι έχει αρχίσει να γίνεται με έναν τρόπο περισσότερο ενδιαφέροντα και συστηματικό από ότι παλαιότερα. Υπάρχουν όμως και πολλές περιπτώσεις που οι ιστορικές πληροφορίες δεν είναι έγκυρες αλλά και δεν εξυπηρετούν κάποιο διδακτικό στόχο. Το ιστορικό υλικό που εντοπίζουμε στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου χαρακτηρίζεται από την παροχή πολλών πληροφοριών και την πλούσια εικονογράφηση, αλλά και από την έλλειψη μεθοδολογικών υποδείξεων για την αξιοποίησή του στη διδασκαλία. Στα βιβλία για τον εκπαιδευτικό τονίζεται γενικά η θετική συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών, περιλαμβάνεται σχετική βιβλιογραφία, αλλά η διδακτική αξιοποίησή της επαφίεται σε ιδέες και πρωτοβουλίες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες (Θωμαΐδης, 2008; Thomaidis & Tzanakis 2009). Ωστόσο οι ιστορικές αναφορές, πέρα από τις αδυναμίες που έχουν επισημανθεί, παρουσιάζουν ενδιαφέρον και θα μπορούσαν να συμβάλλουν πιο ουσιαστικά στην επίτευξη των επιστημονικών διδακτικών στόχων, ώστε να έρθουν σε επαφή οι μαθητές με την ίδια την ιστορική μαθηματική πληροφορία και στη συνέχεια να οδηγηθούν στον προσδιορισμό και την αξιολόγηση του πλαισίου, των συνθηκών και των προσωπικών χαρακτηριστικών που επέτρεψαν την ανάπτυξη και εξέλιξη συγκεκριμένων ιδεών. Το ζητούμενο λοιπόν είναι να αναζητηθούν τρόποι για να ασχοληθούν οι μαθητές με τις ιστορικές αναφορές των βιβλίων και να εμπλακούν με την ουσία της μαθηματικής σκέψης, με τα εργαλεία της, με τις διαδρομές της, γνωρίζοντας, μέσα από αυτή την περιπέτεια, τη δύναμη της ανθρώπινης σκέψης και τη γοητεία της μαθηματικής αναζήτησης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζουν προτάσεις (Θωμαΐδης, 2008; Thomaidis & Tzanakis 2009) για τη διαθεματική αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων με βάση τα εγχειρίδια των Μαθηματικών της χώρας μας, κάτι που συναντάμε και στην καινοτόμα διδακτική πρόταση του Jankvist (2010) που αφορά τα εγχειρίδια των Μαθηματικών της Δανίας.

Η εισαγωγή μιας ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών, βασισμένη στο ενδιαφέρον, την πρωτοβουλία και τις ιδέες των διδασκόντων, απαιτεί επιπλέον διδακτικό χρόνο. Πρόκειται για μια απαιτητική δραστηριότητα, που προϋποθέτει, όχι μόνο την ύπαρξη μαθηματικών γνώσεων αλλά και την ικανότητα για προσέγγιση, ανάγνωση και ερμηνεία ιστορικών πηγών καθώς και τη διασταύρωση γεγονότων. Αυτό είναι ένα ζήτημα που δημιουργεί επιπρόσθετες δυσκολίες για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι πέρα από την υποχρέωση για κάλυψη της διδακτέας ύλης έχουν να αντιμετωπίσουν και τις καινοτομίες του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, όπως η ομαδο-συνεργατική διδασκαλία βασισμένη στη χρήση δραστηριοτήτων και η διαθεματική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης. Είναι, επομένως, ολοφάνερο ότι προς την κατεύθυνση αυτή κρίνεται απαραίτητη η πρόσθετη υποστήριξη με τη μορφή αναλυτικών οδηγιών. Την ανάγκη αυτή, όπως συνάγεται από όλα τα παραπάνω, δεν καλύπτει το υλικό που υπάρχει στα διδακτικά βιβλία, τα οποία δεν αποτελούν τον πιο έγκυρο και κατάλληλο οδηγό. Ως εκ τούτου, δεν δίνεται κάποιο ουσιαστικό κίνητρο στους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά, ώστε να αναλάβουν πρωτοβουλίες για τη διδακτική αξιοποίηση του ιστορικού υλικού των σχολικών βιβλίων (Θωμαΐδης, 2008; Thomaidis & Tzanakis 2009).

Από όσα σε αυτό το κεφάλαιο αναλύθηκαν προκύπτει ότι οι αποσπασματικές αναφορές ιστορικού περιεχομένου που περιλαμβάνονται στα διδακτικά εγχειρίδια μαθητών και εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, στις περισσότερες των περιπτώσεων, δεν συμβάλλουν στην προώθηση της ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών και στη συντριπτική τους πλειοψηφία δεν συνάδουν με τις προδιαγραφές που τίθενται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. Οι υπερβολικές ίσως απαιτήσεις (διαθεματική προσέγγιση, ανάπτυξη δραστηριοτήτων και σχεδίων εργασίας, Ιστορία των Μαθηματικών) του Προγράμματος Σπουδών σε συνάρτηση με τα στενά χρονικά περιθώρια έδωσαν ένα μεγάλο φορτίο στις ομάδες συγγραφής των διδακτικών πακέτων και δεν βοήθησαν προς την κατεύθυνση της ορθής αξιολόγησης και επιλογής των ιστορικών αναφορών. Μια άλλη πολύ σημαντική επισήμανση είναι ότι από την πλευρά των εκπαιδευτικών η έλλειψη σχετικής κατάρτισης στη διάρκεια των βασικών σπουδών τους αλλά και στα προγράμματα επιμόρφωσης, σε συνδυασμό με την πληθώρα της ύλης, που έχουν να διαχειριστούν, οδηγεί στο περιθώριο της διδακτικής διαδικασίας την αξιοποίηση του προσφερόμενου ιστορικού υλικού. Η ασυμβατότητα και οι δυσκολίες ενισχύονται περισσότερο από τις εκάστοτε οδηγίες, που στην προσπάθεια για αναδιάρθρωση και εξορθολογισμό της ύλης, πολλές φορές αναιρούν όσα στο Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. αναφέρονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3. Ανάπτυξη ενός σχεδίου επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στο ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε να διατυπώσουμε μια ολοκληρωμένη πρόταση επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, βασιζόμενοι στην ανάλυση των δεδομένων που πραγματοποιήσαμε στα δύο κεφάλαια που προηγήθηκαν.

Μέσα στη σχολική πραγματικότητα οι εκπαιδευτικοί βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα περίπλοκο σύμπλεγμα καταστάσεων που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν σε συνθήκες τάξης. Το έργο τους γίνεται ακόμα δυσκολότερο όταν έρχονται αντιμέτωποι με συνθήκες ή και απαιτήσεις με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι, καθώς είναι αυτοί που, μέσα στο πλαίσιο του Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. και με όχημα τα διδακτικά εγχειρίδια, καλούνται να υλοποιήσουν καινοτομίες σε τομείς, όπως η διαθεματική προσέγγιση, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, η εκπόνηση σχεδίων εργασίας και η Ιστορία των Μαθηματικών, έννοιες που για πρώτη φορά εισάγονται στα σχολικά συγγράμματα. Αυτό συνεπάγεται τη δυνατότητα για απόρριψη της ασφάλειας που παρέχει το γνωστό και καθιερωμένο για πολλά χρόνια μοντέλο εκπαίδευσης.

Για να εισαχθούν με επιτυχημένο τρόπο στην εκπαίδευση οι σύγχρονες απόψεις για τη διδακτική των Μαθηματικών, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η στροφή προς τον εκπαιδευτικό, ο οποίος έχει επωμιστεί ένα πολύ δύσκολο ρόλο: να κατανοήσει από τη μια τι σημαίνουν οι σύγχρονες απόψεις για τα Μαθηματικά και να υλοποιήσει από την άλλη τις απόψεις αυτές σε επίπεδο καθημερινής σχολικής πραγματικότητας (Φερεντίνος, 2001). Επομένως, πρώτος και αναγκαίος όρος είναι η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στο νέο τρόπο αντιμετώπισης των Μαθηματικών.

Οι Borko et al. (1992) επεσήμαναν ότι η «γνώση για τη διδασκαλία» περιλαμβάνει δύο συνιστώσες τις «γνώσεις αντικειμένου» και τις «παιδαγωγικές γνώσεις». Υπάρχει όμως και μια τρίτη συνιστώσα, η οποία εμφανίζεται στην πράξη. Αυτή αποτελείται από τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους, που επιδρούν, όπως ευρέως αναγνωρίζεται, στη διαμόρφωση της εκπαιδευτικής πρακτικής (Leder, Pehkonen & Törner, 2002; Thompson, 1992). Ο Cooney (1999) σημειώνει ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί φτάνουν στις πανεπιστημιακές σπουδές τους με προσωπικές απόψεις σχετικά με το τι είναι διδασκαλία. Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η άποψή τους για τη διδασκαλία των Μαθηματικών συνδέεται περισσότερο ή λιγότερο με τον τρόπο που οι ίδιοι βίωσαν τα Μαθηματικά. Συνέπεια αυτού είναι ότι οι μαθησιακές τους εμπειρίες συχνά έρχονται σε αντίθεση με τις τρέχουσες μεταρρυθμιστικές προσπάθειες στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Κατά παρόμοιο τρόπο, ο Skott (2001) διαπίστωσε ότι ο αρχάριος δάσκαλος με τον οποίο ασχολήθηκε στην έρευνά του αναφέρθηκε ειδικά σε εμπειρίες από τη δική του δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για την αντιμετώπιση αυτής της κατάστασης, τα εκπαιδευτικά προγράμματα που απευθύνονται σε εκπαιδευτικούς θα πρέπει να τους εμπλέκουν σε απαιτητικές καταστάσεις που βοηθούν στην επεξεργασία των προσωπικών πεποιθήσεών τους σχετικά με τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Μια από τις προτάσεις (Thompson, 1992) είναι η εισαγωγή μαθημάτων σχετικών με την Ιστορία των Μαθηματικών.

3.1. Απόψεις και τάσεις σχετικά με την εφαρμογή των καινοτομιών των Προγραμμάτων Σπουδών από τους εκπαιδευτικούς.

Έρευνες με αντικείμενο τις απόψεις των ίδιων των εκπαιδευτικών, για όλα αυτά που καλούνται να διαχειριστούν, έγιναν στη χώρα μας σε εκπαιδευτικούς που δίδασκαν σε Γυμνάσια και χρησιμοποίησαν τα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών που διδάχθηκαν και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου για πρώτη φορά κατά το σχολικό έτος 2007-2008 (Γκίνης & Πιτέρη, 2008; Δημητριάδου, Θωμαΐδης, Οικονόμου & Σταφυλίδου, 2009). Με αυτές επιχειρήθηκε διερεύνηση ζητημάτων που αφορούν στις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με:

- τον βαθμό στον οποίο επιχειρήθηκε να εφαρμοστούν οι τις καινοτομίες που εισάγουν τα νέα Α.Π.Σ.,
- τα νέα βιβλία και την υλοποίηση της διδακτικής μεθοδολογίας που αυτά προτείνουν
- τις ανάγκες επιμόρφωσης που δημιουργούνται με αφορμή τη διδασκαλία των νέων βιβλίων

Τα στοιχεία που προέκυψαν καταδεικνύουν ότι με την εφαρμογή των Δ.Ε.Π.Π.Σ., των αντίστοιχων Α.Π.Σ. και με την εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων έγινε μια φιλόδοξη απόπειρα για να ξεπεραστούν οι καθιερωμένες αντιλήψεις στο χώρο της ελληνικής εκπαίδευσης. Βασικές καινοτομίες όπως αυτές της «ενεργητικής μάθησης» και της «διαθεματικότητας» μπήκαν με στόχο να ανατρέψουν τις παραδοσιακές αντιλήψεις που συνδέονται με τον διακριτό χαρακτήρα και την ιεραρχική διάρθρωση των γνωστικών αντικειμένων αλλά και με τις πρακτικές που ενίσχυαν τη δασκαλοκεντρική προσέγγιση στη διδασκαλία και μάθηση. Κάποιες βασικές προϋποθέσεις όμως για την υλοποίηση των καινοτομιών στο χώρο της διδακτικής πράξης φαίνεται πως δεν εξασφαλίστηκαν από τους συντάκτες των νέων προγραμμάτων. Ενδεικτικά θα μπορούσε να αναφερθεί ο μεγάλος όγκος της διδακτέας ύλης, ο οποίος αποτελεί εμπόδιο στην εισαγωγή ριζικών καινοτομιών (όπως η μαθητοκεντρική διδασκαλία), που συνδέονται με τον πειραματισμό, την πρωτοβουλία, την ανακάλυψη της γνώσης, και λοιπά, διαδικασίες που απαιτούν βέβαια αρκετό χρόνο (Ε.Μ.Ε., 2003).

Η θετική στάση υπέρ των καινοτομιών φάνηκε να μην εκδηλώνεται με αλλαγή στη διδακτική συμπεριφορά της μεγάλης πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών και παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο. Σχετικά με τη χρήση των δραστηριοτήτων και από τους τρόπους διαχείρισής τους, προέκυψε ότι ένα μικρό ποσοστό εκπαιδευτικών αποδέχεται και τελικά εφαρμόζει το ενεργητικό μοντέλο διδασκαλίας, ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό τις διδάσκει παραδοσιακά και ακυρώνει το ρόλο τους στη διαδικασία της ενεργητικής μάθησης ή ακόμα και τις αγνοεί. Φαίνεται επομένως ότι η δραστηριότητα, για την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, δεν αποτελεί πρόβλημα μέσα από την επίλυση του οποίου οι μαθητές θα ανακαλύψουν σταδιακά και θα

οικοδομήσουν τη νέα γνώση, αλλά αφορμή για την παρουσίαση της νέας γνώσης από τον εκπαιδευτικό.
Το δοκιμασμένο μοντέλο της διδασκαλίας διακριτών μαθημάτων διαπιστώθηκε ότι δεν παραμερίζεται εύκολα από τους εκπαιδευτικούς, καθώς δυσκολεύονται να περάσουν σε μια διαφορετική φιλοσοφία ολιστικής προσέγγισης της γνώσης (προϋπόθεση για τη διαθεματικότητα, τη δεύτερη βασική καινοτομία των Α.Π.Σ.), η οποία δεν φαίνεται να κέρδισε το ενδιαφέρον και την αποδοχή της πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Ακόμα και σε περιπτώσεις ενασχόλησής τους με διαθεματικές εργασίες, η προσέγγιση των θεμάτων αυτών, φαίνεται ότι γίνεται από την πλευρά τους με έναν τρόπο μάλλον ερασιτεχνικό, έξω από το πνεύμα της εφαρμογής τους με βάση όσα το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και τα νέα Α.Π.Σ. περιλαμβάνουν. Το πρόβλημα ίσως βρίσκεται στη σύνδεση της διαθεματικότητας με το πλαίσιο ενός διδακτικού βιβλίου (όπου επιχειρείται η σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινότητα μέσα από την παρουσίαση σχετικών θεμάτων που διατρέχουν την ύλη με τη μορφή παραδειγμάτων) και στην έλλειψη διάχυσής της προκειμένου να δημιουργηθούν συσχετίσεις ανάμεσα στα διάφορα διδακτικά αντικείμενα.
Τελικά διαπιστώθηκε ότι η αποδοχή των καινοτομιών, όπως η ένταξη δραστηριοτήτων και διαθεματικών εργασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, δεν ήταν αυτή που ίσως θα περίμεναν οι συντάκτες των Α.Π.Σ. Ο πειραματισμός με τη χρήση δραστηριοτήτων εντοπίζεται σε ένα σχετικά περιορισμένο ποσοστό των εκπαιδευτικών, ενώ εκδηλώνεται σχεδόν πλήρης αδιαφορία για τις διαθεματικές εργασίες.
Σύμφωνα με πολλούς εκπαιδευτικούς η έκταση της ύλης καθώς και η δυνατότητα ολοκλήρωσής της αποτελούν ένα σημαντικό εμπόδιο όχι τόσο για την εφαρμογή καινοτομιών αλλά κυρίως για τη μαθησιακή διαδικασία, αφού τις συνδέουν με το υψηλό επίπεδο δυσκολίας των νέων βιβλίων. Από την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών ακολουθείται πιστά η σειρά των κεφαλαίων και ενοτήτων του σχολικού βιβλίου και εφαρμόζεται το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας. Έτσι προκύπτει από την πλευρά των περισσότερων μαθητών μεγάλη δυσκολία να κατανοήσουν τη διδακτέα ύλη και από την πλευρά των εκπαιδευτικών ανάγκη για μεγαλύτερο αριθμό διδακτικών ωρών από τις προβλεπόμενες, πράγμα που οδηγεί σε αδυναμία ολοκλήρωσης της διδασκαλίας των τελευταίων κεφαλαίων. Αντίθετα, σε περιπτώσεις που εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς το μοντέλο διδασκαλίας που προωθεί τη ενεργητική μάθηση με χρήση δραστηριοτήτων, φαίνεται να επιτυγχάνεται η ολοκλήρωση της ύλης με κατάλληλο προγραμματισμό, υιοθέτηση συγκεκριμένων στόχων και επιλογή ενοτήτων. Από όσα προαναφέρθηκαν εκτιμάται ότι κι αν ακόμη ικανοποιηθεί το αίτημα για μείωση της ύλης, που είναι πιθανό να βοηθήσει στην επίτευξη της ολοκλήρωσής της, δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θα στραφούν στην υιοθέτηση νέων μεθόδων διδασκαλίας. Επιπλέον, προκύπτει ένας προβληματισμός σχετικά με το πόσο εφικτό είναι στις παρούσες συνθήκες να ενσωματωθεί η ιστορία σε πραγματικές συνθήκες μάθησης μέσα στη σχολική τάξη ή απλά αποτελεί ουτοπία στα πλαίσια του Α.Π.Σ για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς.

Η καθολική και συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών θα έπρεπε να προβλέπεται ως προϋπόθεση για την εισαγωγή των καινοτομιών, καθώς η έλλειψή της θα μπορούσε να αποτελέσει έναν βασικό λόγο για την απροθυμία εισαγωγής καινοτομιών στη διδασκαλία από την πλευρά των εκπαιδευτικών. Το περιεχόμενο των νέων βιβλίων, επομένως, δεν μπορεί από μόνο του να στηρίξει την επιθυμητή στροφή προς ενεργητικές μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Απαιτείται, επιπλέον, μια προσεκτικά σχεδιασμένη επιμορφωτική πολιτική που θα έχει ως στόχο την αλλαγή στις αντιλήψεις και στάσεις των εκπαιδευτικών.

Μια πιο πρόσφατη έρευνα (Μιόγλου, 2017), η οποία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του παρόντος Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, με βασικό στόχο τη διερεύνηση των πεποιθήσεων των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού, έδωσε τα παρακάτω στοιχεία:

Η ύπαρξη ιστορικού υλικού δεν έχει εντοπιστεί στα βιβλία των Μαθηματικών, από ένα σημαντικό ποσοστό εκπαιδευτικών, πράγμα που πιθανόν συνδέεται με την μη ξεκάθαρη παρουσίαση του πρακτικού λόγου και της χρηστικής αξίας που έχει το ιστορικό υλικό στα βιβλία του μαθητή. Οπότε δεν δίνεται η σωστή κατεύθυνση προς τους εκπαιδευτικούς για τη χρήση της ιστορικής γνώσης στη διδασκαλία των Μαθηματικών και φαίνεται ότι αφήνεται στη διακριτική τους ευχέρεια το αν θα διαθέσουν προσωπικό χρόνο για να αναζητήσουν πληροφορίες προκειμένου να σχεδιάσουν κατάλληλες δραστηριότητες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα ιστορικά στοιχεία να αγνοούνται ή να γίνονται μόνο απλές αναφορές σε αυτά, καθώς ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων, ή ακόμα και η παρουσίαση κάποιων ιστορικών στοιχείων με τρόπο που να γίνονται κατανοητά από μαθητές δημοτικού (και να μην τους προκαλούν σύγχυση ή να μην τους φαίνονται βαρετά) είναι μία διαδικασία που απαιτεί αρκετό προσωπικό χρόνο, ειδικά όταν γίνεται από κάποιον δάσκαλο μεμονωμένα.

Επιπλέον, αναδεικνύεται ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό των δασκάλων διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους μάθημα σχετικό με την Ιστορία των Μαθηματικών. Αυτό είναι ένα στοιχείο που, σε συνδυασμό με το ελλιπές παρεχόμενο υλικό, έχει ως αποτέλεσμα, οι δάσκαλοι να μη δείχνουν προθυμία για αναφορά σε ιστορικά στοιχεία (αφού θεωρούν ότι δεν μπορούν να τα διδάξουν σωστά και δεν έχουν την απαραίτητη αυτοπεποίθηση να το κάνουν). Επίσης, δεν δείχνουν να είναι σίγουροι για το κατά πόσο η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της διδασκαλίας, οπότε δεν έχουν κίνητρα για να επιχειρήσουν κάτι σχετικό. Ακόμα και περιπτώσεις όπως η μέθοδος του ελληνικού πολλαπλασιασμού, διδάσκεται στην Γ' Δημοτικού απλά και μόνον γιατί αποτελεί κομμάτι της ύλης, χωρίς να δίνεται καμία σημασία στην ιστορική της διάσταση.

Οι δάσκαλοι φαίνεται να δείχνουν ενδιαφέρον σε μεγάλο ποσοστό για τα Μαθηματικά αλλά και για την Ιστορία. Φαίνεται όμως να αναγνωρίζουν και την ανάγκη για επιπλέον επιμόρφωση σχετικά με τη χρήση του ιστορικού υλικού που περιλαμβάνεται στα σχολικά βιβλία, υποδεικνύοντας ότι οι εκπαιδευτικοί από τη μεριά τους έχουν ενδιαφέρον και διάθεση, αλλά δεν προχωρούν σε χρήση της

Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, κυρίως λόγω έλλειψης αυτοπεποίθησης και ουσιαστικής επιμόρφωσης, και δευτερευόντως λόγω έλλειψης διδακτικού χρόνου. Επιπλέον, ότι θα ήταν πρόθυμοι να αφιερώσουν χρόνο στη χρήση της, εάν τους προσφερόταν έτοιμο το απαραίτητο υλικό. Το στοιχείο αυτό φανερώνει, ότι ενώ οι δάσκαλοι έχουν τη διάθεση και τη θέληση να αφιερώσουν χρόνο στην ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών, δεν έχουν είτε το χρόνο είτε τις απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται ώστε να προετοιμάσουν το κατάλληλο υλικό.

Από όσα προαναφέρθηκαν προκύπτει ότι <u>πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην κατάρτιση των δασκάλων πάνω στην Ιστορία των Μαθηματικών</u>, τόσο στη φάση της βασικής πανεπιστημιακής τους εκπαίδευσης όσο και σε μεταγενέστερη επιμόρφωσή τους, ώστε να κατανοήσουν τη σημασία της αξιοποίησής της στη Μαθηματική Εκπαίδευση, και να αποκτήσουν τις απαραίτητες γνώσεις για να νιώθουν πιο σίγουροι όταν κάνουν αναφορές σε θέματα μαθηματικής ιστορίας.

3.2. Προς ένα Πρόγραμμα Επιμόρφωσης

Η Ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι ένα νέο θέμα στα προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών (Schubring et al., 2000). Ο τρόπος με τον οποίο η ιστορία έχει χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό ήταν ποικίλος και οδήγησε σε διαφορετικά αποτελέσματα. Σε ορισμένες περιπτώσεις (Heiede, 1996), η παρουσία της ιστορίας απλά αποτελούνταν από την παράδοση ενός μαθήματος για την Ιστορία των Μαθηματικών με στόχο να δοθεί ένα ιστορικό υπόβαθρο στη γνώση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά, πράγμα που πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν, όπως ο Freudenthal (1981) για παράδειγμα. Σε άλλες περιπτώσεις (Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi, 1982, 1987; Swetz, 1995), χρησιμοποιήθηκαν πακέτα ιστορικών υλικών επικεντρωμένα σε μαθηματικές έννοιες που ήταν δύσκολο να διδαχθούν, προκειμένου οι εκπαιδευτικοί να εμβαθύνουν τον παιδαγωγικό προβληματισμό τους σχετικά με τις έννοιες αυτές. Μερικές μελέτες (Hsieh, C.-J. & Hsieh, F.-J., 2000; Hsieh, 2000; Philippou & Christou, 1998, 1998a,), έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στη σχέση ανάμεσα στην ιστορία και στις πεποιθήσεις και στάσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα Μαθηματικά, ενώ άλλες (Furinghetti, 2007) προσπάθησαν να εστιάσουν στο θέμα του σχεδιασμού στρατηγικών για προγράμματα εκπαίδευσης με στόχο να προωθήσουν ένα συνειδητό ύφος διδασκαλίας από την πλευρά των εκπαιδευτικών. Το γενικό συμπέρασμα από τους σχεδιαστές των μαθημάτων στα οποία χρησιμοποιήθηκε η ιστορία είναι ότι η προετοιμασία των εκπαιδευτικών μπορεί να έχει οφέλη από την ιστορική γνώση. Λίγες μελέτες (Fraser & Koop, 1978, Stander, 1991), κάνουν λόγο για μη σημαντική διαφορά στην προετοιμασία των εκπαιδευτικών μετά τη χρήση ιστορικών υλικών. Τα διαφορετικά συμπεράσματα των ερευνητών, όπως η Furinghetti (2007) αναφέρει, δεν πρέπει να αποδίδονται στο ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, αλλά στον τρόπο που ασχολήθηκαν με αυτήν κατά τη διάρκεια των προγραμμάτων εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα αυτών των εκπαιδευτικών προγραμμάτων δεν είναι άσχετα με τη μέθοδο, καθώς η Ιστορία των Μαθηματικών, που περιλαμβάνεται σε αυτά, μπορεί να έχει μια διαφορετική επιρροή στην εκπαίδευση όσων διδάσκουν ανάλογα με τη μέθοδο που έχει χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή της σε κάθε πρόγραμμα.

3.2.1. Η δική μας πρόταση

Τα επιχειρήματα που συνηγορούν για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη ισχύουν, με ορισμένες προσαρμογές στο διαφορετικό πλαίσιο, και για την περίπτωση της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα συνοψίζει ο Thomas (2002), λέγοντας πως είναι σχεδόν αδύνατο κανείς να ασχοληθεί με μαθηματικά δεδομένα, αν κατά κάποιο τρόπο δεν κατανοήσει γιατί αυτά είναι όπως είναι. Ένας άλλος λόγος που αναφέρεται στη βιβλιογραφία για τη χρήση της ιστορίας στην εκπαίδευση όσων διδάσκουν Μαθηματικά είναι το γεγονός ότι η ιστορία προωθεί την «<u>πολιτισμική κατανόηση»</u>. Όπως ο Jahnke et al. (2000) το θέτει μέσα από την ενσωμάτωση της ιστορίας καλούμαστε να τοποθετήσουμε την ανάπτυξη των Μαθηματικών στο επιστημονικό, τεχνολογικό και κοινωνικό πλαίσιο ενός τόπου σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, αλλά και να εξετάσουμε τη διδασκαλία τους μέσα από διαφορετικές προοπτικές που ξεφεύγουν από τα καθιερωμένα και αυστηρά καθορισμένα όρια του θέματος.

Ένας άλλος όρος που, επίσης, αναφέρεται είναι η «<u>αντικατάσταση»</u>, καθώς με την ενσωμάτωση της ιστορίας αντικαθίσταται το συνηθισμένο με κάτι διαφορετικό. Αυτή η διαδικασία επιτρέπει στα Μαθηματικά να θεωρούνται όχι απλά ένα σύνολο γνώσεων ή τεχνικών αλλά μια ζωντανή πνευματική δραστηριότητα. Η πολιτισμική κατανόηση και η αντικατάσταση που προωθούνται από την ιστορία συνδέονται με την ανάγκη εξανθρωπισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης που συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Bidwell, 1993, Brown, 1996). Η διάσταση αυτή περιγράφεται από τον Tymoczko (1994) λέγοντας ότι η εισαγωγή των μαθητών στην ανθρωπιστική προοπτική των Μαθηματικών είναι η εισαγωγή τους σε μια ανθρώπινη περιπέτεια, στην οποία οι άνθρωποι πραγματικά συμμετείχαν, δηλαδή στην ιστορία.

Ο εμπλουτισμός της προοπτικής των Μαθηματικών που παρέχεται από την πολιτισμική κατανόηση και την αντικατάσταση έχει πραγματικά μεγάλη σημασία. Εξίσου όμως σημαντική είναι και μια τρίτη πτυχή, ο «<u>αναπροσανατολισμός»</u>, που συνδέεται στενά με την παρακίνηση των εκπαιδευτικών να βιώσουν ξανά την κατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων. Σύμφωνα με τους Jahnke et al. (2000) με την ενσωμάτωση της ιστορίας στα Μαθηματικά αμφισβητούνται οι αντιλήψεις κάποιου, μετατρέποντας το γνωστό (αυτό που είναι ή θα έπρεπε να είναι οικείο) σε κάτι άγνωστο. Η Ιστορία των Μαθηματικών επιφυλάσσει εκπλήξεις, αφού προσφέρει ένα «ξένο και άγνωστο τοπίο» (Furinghetti 2007), όπου μπορεί να περιηγηθεί κανείς. Επιπλέον, διευκολύνει την υιοθέτηση μιας διαφορετικής οπτικής που επιτρέπει να έρθουν στο φως στοιχεία που σε άλλη περίπτωση θα μπορούσαν να περάσουν απαρατήρητα. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο κάποιος αντιλαμβάνεται καλύτερα τα θεμέλια πάνω στα οποία χτίστηκαν οι μαθηματικές έννοιες κατά τη διάρκεια των αιώνων. Μέσα από τον αναπροσανατολισμό, οι εκπαιδευόμενοι που συμμετέχουν στη διαδικασία (στην περίπτωση μας οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί) αναγκάζονται να βρουν τη δική τους πορεία προς την οικειοποίηση του νοήματος των μαθηματικών αντικειμένων, πράγμα που αφορά δύο κατευθύνσεις: το νόημα των μαθηματικών αντικειμένων και το νόημα των αντικειμένων που πρέπει να διδαχθούν.

Η πρότασή μας έρχεται να εστιάσει στον τομέα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και στην έλλειψη σχετικών προτάσεων πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, που κατ' εξοχήν αναδεικνύεται από την έρευνα σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση. Η εν λόγω πρόταση στηρίζεται αφενός στο υλικό των σχολικών βιβλίων, από το οποίο επιλέξαμε δραστηριότητες και τις εμπλουτίσαμε, και αφετέρου στην αξιοποίηση αντίστοιχης εμπειρίας από άλλα εκπαιδευτικά συστήματα, όπως για παράδειγμα της Δανίας και της Ιταλίας. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα που θα απευθύνεται σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια και στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σε αυτό η Ιστορία των Μαθηματικών θα έχει το ρόλο του μεσολαβητή της γνώσης για τη διδασκαλία, προκειμένου να προβληματιστούν οι συμμετέχοντες σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες μέσα από ιστορικές στιγμές που αφορούν την κατασκευή τους. Με τη διαδικασία αυτή προσδοκούμε αφενός να παρακαμφθούν εμπόδια όπως η έλλειψη αυτοπεποίθησης (από την πλευρά των εκπαιδευτικών), διδακτικού χρόνου, κατάλληλων πόρων και αφετέρου να προκύψει μια ιδιοποίηση του νοήματος για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών που να εξουδετερώνει την παθητική αναπαραγωγή του στυλ των Μαθηματικών που οι διδάσκοντες βίωσαν ως διδασκόμενοι.

Το συγκεκριμένο πρόγραμμα θα μπορούσε να υλοποιηθεί κατά τη διάρκεια ενός διδακτικού έτους, κατά το πρότυπο της επιμόρφωσης στις Νέες Τεχνολογίες, με δια ζώσης αλλά και εξ αποστάσεως συναντήσεις. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να το παρακολουθήσουν παράλληλα με τα διδακτικά τους καθήκοντα, για να έχουν τη δυνατότητα να συνδέσουν με την καθημερινή διδακτική πράξη τα δεδομένα του επιμορφωτικού προγράμματος, τα οποία αξίζει να μην παραμένουν μόνο σε θεωρητικό επίπεδο. Αυτό αναμένεται να κεντρίσει και το ενδιαφέρον των μάχιμων εκπαιδευτικών, αφού πρόκειται για μια διαδικασία μέσω της οποίας θα ασχοληθούν με θέματα που έχουν αντίκρισμα στην πράξη, είναι εφαρμόσιμα σε πραγματικές συνθήκες και θα τους δώσουν ιδέες και γνώσεις που μπορούν να τις αξιοποιήσουν μέσα στην τάξη.

Ως φορείς υλοποίησης θα μπορούσαν να οριστούν τα Περιφερειακά Επιμορφωτικά Κέντρα αλλά και τμήματα πανεπιστημίων, ιδιαίτερα, όσα έχουν ήδη εμπειρία από την οργάνωση και υλοποίηση σχετικών Μεταπτυχιακών Προγραμμάτων Σπουδών. Στην παρούσα συγκυρία μάλιστα, που το Υπουργείο Παιδείας έχει εξαγγείλει την πρόθεσή του για δημιουργία ενός προγράμματος επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, θα ήταν ευχής έργο να περιληφθεί στην θεματολογία του και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, καθώς το 2018 με την αριθμ. 6338/Δ2/16-01-2018 Απόφαση του Υπουργού Παιδείας Έρευνας και Θρησκευμάτων ανακηρύχτηκε ως «Έτος Μαθηματικών», ορίζοντας ως στόχους:

- Να προβληθεί και να αναδειχθεί η σημασία των μαθηματικών και ο ρόλος τους στη δημιουργία και την ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.
- Να ενισχυθεί το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, την ιστορία και τη διδασκαλία τους.

3.2.2. Τα στάδια ανάπτυξης του προγράμματος

Το πρόγραμμα επιμόρφωσης που προτείνουμε θα μπορούσε ενδεικτικά να περιλαμβάνει εννέα στάδια:

- Ανάλυση του Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση.
- Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και των ιστορικών αναφορών, που περιέχονται σε αυτά.
- Γνωριμία με προτεινόμενη βασική βιβλιογραφία σχετικά με διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- Επιλογή από τους επιμορφούμενους ενός κλάδου των Μαθηματικών και αξιοποίηση της ιστορίας για γνωριμία με την εξέλιξή του.
- Περιήγηση και μελέτη πάνω σε προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις που εκπονήθηκαν ή και υλοποιήθηκαν με στόχο την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- Σχεδιασμός και υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων (από τους επιμορφούμενους).
- Συζήτηση των ομάδων και ανταλλαγή/ αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με το σχεδιασμό και την υλοποίηση διδακτικών προτάσεων.
- Δημιουργία ψηφιακής πλατφόρμας.
- Αξιολόγηση του προγράμματος από τους συμμετέχοντες (επιμορφωτές και επιμορφούμενους) και προτάσεις για πιθανές βελτιώσεις του.

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην επιμέρους ανάλυσή των σταδίων που συνοπτικά αναφέραμε παραπάνω:

Α. Ανάλυση του Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση.

Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα οι συμμετέχοντες θα έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν εκτενέστερα το περιεχόμενο του Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. και να εξοικειωθούν με αυτό καθώς και με τις μεθοδολογίες που προτείνονται από τις κατευθυντήριες γραμμές του Υπουργείου Παιδείας. Επίσης, θα μπορέσουν να εστιάσουν στα σημεία που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών και τα οποία, όπως προαναφέραμε (ενότητα 2.1.2.), εντοπίζονται στη διδακτική μεθοδολογία, στους ειδικούς σκοπούς των Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, σε επιμέρους θεματικές ενότητες (για τις οποίες προτείνονται ενδεικτικές δραστηριότητες), αλλά και σε πρόσθετα προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας για αξιοποίησή τους στη διδακτική πράξη. Επιπλέον, θα έχουν την ευκαιρία να προσδιορίσουν τη συνέχεια μέσα από τα διαφορετικά σχολικά επίπεδα.
Προς την κατεύθυνση αυτή θα μπορούσε να βοηθήσει το υλικό που περιλαμβάνεται

στο δεύτερο κεφάλαιο (ενότητα 2.1.2.) της παρούσας εργασίας, όπου γίνεται εκτενής αναφορά σε στοιχεία που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών μέσα από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση, στο οποίο παρουσιάζονται οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και κατ' επέκταση παρουσιάζεται ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική.

Β. Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και των ιστορικών αναφορών, που περιέχονται σε αυτά.

Με τη βοήθεια και την καθοδήγηση των επιμορφωτών οι συμμετέχοντες θα μπορέσουν να αναλύσουν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στη χώρα μας για την υλοποίηση των επίσημων κατευθυντήριων γραμμών του Υπουργείο Παιδείας, έχοντας ως σημείο αναφοράς το απαιτούμενο διδακτικό υλικό και τις προδιαγραφές για τα βιβλία των μαθητών και των εκπαιδευτικών, όπως τίθενται μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003) για τα Μαθηματικά Δημοτικού και Γυμνασίου.

Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι στη φάση αυτή πολύ σημαντική είναι η συνεργασία των εκπαιδευτικών από την Πρωτοβάθμια και τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση για να εντοπιστούν οι ιστορικές αναφορές, να γίνει σύγκριση του τρόπου που αυτές παρουσιάζονται στα αντίστοιχα σχολικά βιβλία της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας και να αναδειχθεί η συνέχεια μέσα από τα διάφορα σχολικά επίπεδα.

Από το δεύτερο κεφάλαιο (ενότητα 2.3.) της παρούσας εργασίας, όπου ασχοληθήκαμε με τις ιστορικές αναφορές στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, μπορεί να αντληθεί πληθώρα υλικού για να μελετηθούν αναφορές με ελλιπή ή λανθασμένα ιστορικά στοιχεία, αναφορές χωρίς μαθηματικά ερεθίσματα και άλλες περιπτώσεις.

Μέσα από τη διαδικασία αυτή στόχος είναι να υιοθετηθεί από τους εκπαιδευτικούς μια κριτική στάση απέναντι στα ιστορικά στοιχεία είτε πρόκειται για αυτά που περιλαμβάνονται στα βιβλία του σχολείου είτε για κάποια που οι ίδιοι θα αναζητήσουν για να τα εντάξουν στη διδασκαλία τους.

Ο Heiede (1996) επισημαίνει σχετικά ότι η Ιστορία των Μαθηματικών υπάρχει κίνδυνος να αποδοθεί εσφαλμένα. Είναι πολύ δύσκολο να διατηρηθεί πλήρως η ιστορική ορθότητα κατά την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη, γιατί όσοι διδάσκουν Μαθηματικά δεν είναι επαγγελματίες ιστορικοί των Μαθηματικών και πρέπει να στηριχτούν σε δευτερογενείς ή και τριτογενείς πηγές. Έτσι μέσα από πολύχρωμα αλλά αναληθή ιστορικά ανέκδοτα αναπαράγονται ιστορικές αναφορές με λανθασμένα στοιχεία ή με αναχρονισμούς. Προσοχή χρειάζεται, επίσης, στα βιογραφικά στοιχεία και στις πληροφορίες για το έργο μεγάλων μαθηματικών που πολλές φορές διανθίζονται με ελκυστικές αλλά αναληθείς λεπτομέρειες. Για το λόγο αυτό, πρέπει οι εκπαιδευτικοί πραγματικά να επαγρυπνούν απέναντι στην αδικαιολόγητη αποδοχή λανθασμένων ή ψευδών στοιχείων. Πρέπει όμως, επίσης, να γίνει κατανοητό πως δεν μπορεί κανείς να είναι σίγουρος ότι μπορεί να προφυλαχτεί εντελώς από αυτό το ενδεχόμενο. Σε αυτή την κριτική στάση θα πρέπει να μυηθούν και οι μαθητές, καθώς τα Μαθηματικά είναι ένα αντικείμενο το οποίο δίνει αυτή τη δυνατότητα για αμφισβήτηση και έρευνα.

Γ. Γνωριμία με προτεινόμενη βασική βιβλιογραφία σχετικά με διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Μέσα από την πλούσια βιβλιογραφία που έχει αναπτυχθεί σχετικά με το θέμα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών επιλέξαμε ενδεικτικά και προτείνουμε την παρακάτω ως βασική, παίρνοντας και στοιχεία από την ερευνητική εργασία «Προσεγγίζοντας τα Μαθηματικά μέσα από … τη μηχανή του Χρόνου» (Γαλέρη & Γκάτζιου, 2016), που εκπονήσαμε κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική των Μαθηματικών». Παραθέτουμε παρακάτω το υλικό που εντοπίσαμε, με μια συνοπτική αναφορά στο περιεχόμενό του (σκοποί/στόχοι, μεθοδολογικές προσεγγίσεις) και το κατατάσσουμε σε συλλογικούς τόμους, θεωρητικά άρθρα, έρευνες και διδακτικές προτάσεις που δημοσιεύθηκαν σε επιστημονικά περιοδικά, πρακτικά συνεδρίων και λοιπά, κατά χρονολογική σειρά έκδοσης, από τις παλαιότερες προς τις νεότερες εργασίες, για να υπάρχει ενημέρωση των συμμετεχόντων σχετικά με την διαδρομή και την εξέλιξη επί του συγκεκριμένου θέματος.

<u>Συλλογικοί τόμοι</u>:

- <u>Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000) (Eds.), *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.</u> Συλλογικός τόμος που εκδόθηκε στη σειρά μελετών της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση και θεωρείται μέχρι σήμερα το σημαντικότερο έργο, στο οποίο καταγράφονται όλες οι εξελίξεις για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- <u>Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, & Κ. Τζανάκης (2006) (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.</u> Συλλογικός τόμος στον οποίο περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στη διήμερη συνάντηση με θέμα «Ιστορία των Μαθηματικών, της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι διδακτικές τους προεκτάσεις». Στόχος της συνάντησης ήταν να φέρει σε επαφή τους Έλληνες ερευνητές που ασχολούνται με την Ιστορία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα με τους τομείς όπου αυτή συναντά και επηρεάζει το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης.
- <u>ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. (Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών) (2009). *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.</u> Συλλογικός τόμος με επιστημονικά άρθρα από μια σειρά διαλέξεων και Ημερίδας με θέμα τη Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία που διοργανώθηκαν από την ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ., με στόχο τη σύνδεση θεωρίας και πράξης στο σχολικό περιβάλλον και την προώθηση καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων και πειραματισμών.
- <u>Επιστήμες Αγωγής (2014) *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση,* Θεματικό Τεύχος Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης.</u> Αφιέρωμα του περιοδικού *Επιστήμες της Αγωγής,* με εργασίες Ελλήνων αλλά και ξένων ερευνητών, έχοντας ως στόχο την ενημέρωση

της ευρύτερης ελληνικής Παιδαγωγικής Κοινότητας για το σύγχρονο αυτό πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αλλά και ελπίζοντας ότι τόσο τα ίδια τα κείμενα όσο και η αναφερόμενη σε αυτά βιβλιογραφία θα αποτελέσουν κίνητρο και οδηγό για τους αναγνώστες να προβληματιστούν και ενδεχομένως να ασχοληθούν ερευνητικά και διδακτικά με τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας και Επιστημολογίας των Μαθηματικών.

Θεωρητικά άρθρα:

- Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄*, 16, 61– 92. Θεωρητικό άρθρο στο οποίο επιχειρείται η ανάλυση του ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών και των τρόπων αξιοποίησής της στη διδακτική θεωρία και πράξη των σχολικών μαθηματικών σε σχέση με την ελληνική πραγματικότητα, μέσα από μια διαχρονική προσέγγιση του θέματος για την εμφάνιση και την εξέλιξή του.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding – Objectifying the subjective. In J. da Ponte and J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 1 (pp. 139–156). Lisbon: University of Lisbon. Θεωρητικό άρθρο στο οποίο αναπτύσσονται σκέψεις για τη σχέση μεταξύ μαθηματικών και πολιτισμού μέσα από δύο μικρές μελέτες περίπτωσης και η παρουσίαση ενός μοντέλου για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών που στοχεύει στη διασύνδεση της σύγχρονης με τη διαχρονική κουλτούρα της διδασκαλίας.
- Otte, M. & Seeger, F. (1994). The human subject in mathematics education and the history of mathematics. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 351–365). Dordrecht: Kluwer. Θεωρητικό άρθρο στο οποίο γίνεται προσπάθεια να διερευνηθεί μέσα από μια εξελικτική ή ιστορική θεώρηση η «αντικειμενικότητα του υποκειμενικού». Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό ως προσπάθεια να σκιαγραφηθεί ένα αδρό πλαίσιο για τη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία πρέπει να λάβει υπόψη το γεγονός ότι δεν υπάρχει γνώση χωρίς μετα-γνώση κι αυτή μπορεί να αναπτυχθεί μέσω των ιστορικών σπουδών. Έτσι η υποκειμενική εμπειρία της «πολυφωνίας», που οδηγεί στη συσχέτιση του γενικού με το ειδικό, απαιτεί συλλογικές διαδικασίες μέσα στη μαθηματική τάξη, οι οποίες πρέπει να καλλιεργηθούν από τη μαθηματική εκπαίδευση ως κλάδο.
- Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391–408. Θεωρητικό άρθρο που επιχειρεί να καταδείξει τη δυσκολία του συνδυασμού της Ιστορίας των Μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, ξεκινώντας από τη διερεύνηση των επιχειρημάτων για τη σημασία της στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Συνεχίζοντας εξετάζεται το δίλημμα που προκύπτει σε κάθε ιστορική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης εξαιτίας της αναπόφευκτης αφοσίωσης στη διδασκαλία των μοντέρνων μαθηματικών και των μοντέρνων μαθηματικών

τεχνικών και προτείνονται δύο πιθανές λύσεις του διλήμματος. Καταλήγοντας αναφέρεται ότι η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών είναι μια προσπάθεια να αντιληφθούμε καλύτερα αυτή την πλευρά της ανθρώπινης δημιουργικότητας και ότι η κριτική αντιμετώπιση της προσπάθειας εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση δεν θα έπρεπε να ερμηνευθεί ως αντίπαλος της προσπάθειας αυτής.

- Gulikers I., & Blom K. (2001). ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics* 47 (2), 223–258. Θεωρητικό άρθρο που καταγράφει την προσπάθεια διερεύνησης και ανασκόπησης της υπάρχουσας βιβλιογραφίας σχετικά με τη χρήση και την αξία της ιστορίας της γεωμετρίας στη μαθηματική εκπαίδευση και κατηγοριοποίησής της ανάλογα με το περιεχόμενο, τους στόχους και τον τρόπο εργασίας που προτείνεται.
- Nooney, K. (2002). A Critical Question: Why *Can’t* Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *The Mathematics Educator*, 12(1), 1–6. Θεωρητικό άρθρο που επιχειρεί να αντικρούσει τα επιχειρήματα του Fried θέτοντας ερωτήσεις που πρέπει να απαντηθούν για να συμπληρωθούν αυτά. Συγκεκριμένα αμφισβητούνται οι ισχυρισμοί του ότι οι δάσκαλοι των μαθηματικών είναι αναπόφευκτα αφοσιωμένοι στα λεγόμενα μοντέρνα μαθηματικά και ότι ο ιστορικός είναι δεσμευμένος να περιορίζει την έρευνά του στην κατανόηση των ιδιαιτεροτήτων της σκέψης των ιστορικών των μαθηματικών.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631–654). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates. Θεωρητικό άρθρο για τη θεώρηση της ιστορίας όχι μόνο ως παράθυρου που μας επιτρέπει να γνωρίσουμε καλύτερα τη φύση των μαθηματικών αλλά ως μέσου μεταμόρφωσης της ίδιας της διδασκαλίας, αφού η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μια προσπάθεια διερεύνησης των ιστορικών εννοιολογικών εξελίξεων, ώστε να εμβαθύνουμε την κατανόησή μας για τη μαθηματική σκέψη και να ενισχύσουμε τις εννοιολογικές κατακτήσεις των μαθητών.
- Grattan–Guinness, I. (2005). History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. In G. van Brummelen & M. Kinyon (Eds.), *Mathematics and the Historian’s Craft* (pp. 7–21). New York: Springer. Θεωρητικό άρθρο με το οποίο τίθεται το εννοιολογικό δίπολο: «Ιστορία – Κληρονομιά», με σκοπό να δοθεί ερμηνεία σε μαθηματικές δραστηριότητες και τα προϊόντα τους και να αποσαφηνιστούν οι υπάρχουσες συγκρούσεις και εντάσεις στην προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης από έναν μαθηματικό και από έναν ιστορικό. Δίνονται διάφορα παραδείγματα με αντιπαράθεση των γενικών χαρακτηριστικών των δύο εννοιών, οι οποίες διαφαίνεται ότι αλληλοσυμπληρώνονται και είναι απαραίτητες για την κατανόηση των

μαθηματικών ως μιας ανθρώπινης πολιτιστικής προσπάθειας και πνευματικής δραστηριότητας.

- Βερυκάκη, Κ. & Καστάνης, Ν. (2006). Εννοιολογικές αλλαγές: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 213–232). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη. Θεωρητικό άρθρο σχετικά τις εννοιολογικές αλλαγές στα μαθηματικά με έναν ιστορικο-επιστημολογικό προσανατολισμό και με προδιάθεση την ανάπτυξη του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, εστιάζοντας στο παράδειγμα της διερεύνησης των εννοιολογικών αλλαγών της έννοιας του αριθμού.
- Κολέζα, Ε. (2006). Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπ*αίδευση (σσ. 27–46). Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ. Θεωρητικό άρθρο σχετικά με τα επιχειρήματα για τη χρήση και την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά μαθηματικά, καθώς και τους τρόπους προσέγγισής της, οι οποίοι πρέπει να συνυπάρξουν στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών.
- Jankvist, U. Th. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. Θεωρητικό άρθρο που προτείνει έναν τρόπο οργάνωσης και δόμησης της συζήτησης για τους λόγους και τους τρόπους χρήσης της ιστορίας στη διδασκαλία και εκμάθησή των Μαθηματικών, καθώς επίσης και τους συσχετισμούς μεταξύ των επιχειρημάτων για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και των προσεγγίσεων για την υλοποίηση στην πράξη.
- Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. In Bh. Sriraman (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (pp.247–294). Charlotte, NC: Information Age Publishing. Θεωρητικό άρθρο στο οποίο επιχειρείται η σύνδεση των εννοιολογικών «διπόλων», «ιστορία ως στόχος» - «ιστορία ως εργαλείο» και «ιστορία» - «κληρονομιά», ώστε να δοθεί μια πιο λεπτομερής και βαθιά κατάταξη των επιχειρημάτων και των μεθοδολογικών σχημάτων για την εισαγωγή της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, η οποία θα εξυπηρετούσε ως ένα κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο.
- Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education. Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, T. Hausberger (Eds) *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. IREM de Montpellier (pp.135–179). Θεωρητικό άρθρο για την καταγραφή των πρόσφατων εξελίξεων που αφορούν στην έρευνα για τις σχέσεις μεταξύ της Ιστορίας και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Σε αυτό, επίσης, διατυπώνονται βασικά ζητήματα του θέματος και δίνεται μια σύντομη

ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη του εν λόγω πεδίου, εστιάζοντας στις κύριες δραστηριότητες (πλαίσιο και αποτελέσματα) και παρέχοντας μια κατατοπιστική βιβλιογραφική επισκόπηση του έργου που έχει γίνει σε αυτόν τον τομέα από το 2000.

Έρευνες:

- Ζορμπαλά, Κ. & Τζανάκης, Κ. (2003). Η έννοια του επιπέδου στη γεωμετρία: Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης ενσωματωμένα σε σύγχρονες αντιλήψεις. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* (σσ. 265–284). Ρέθυμνο: Π. Τ. Δ. Ε. Έρευνα σε απόφοιτους πανεπιστημιακών τμημάτων (μη μαθηματικούς) σχετικά με την έννοια του επιπέδου, διερεύνηση για την ύπαρξη και τα χαρακτηριστικά κάποιας μορφής «ιστορικού παραλληλισμού» και ανάδειξη προβλημάτων κατανόησης μιας απλής γεωμετρικής έννοιας εξαιτίας παγιωμένων μαθηματικών αντιλήψεων.
- Θωμαΐδης, Γ. & Τζανάκης, Κ. (2006). Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 253–272). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη. Έρευνα σε μαθητές της Α΄ Λυκείου με χρήση πρωτότυπων ιστορικών κειμένων σχετικά με την έννοια της απόδειξης στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και ανάλυση των συζητήσεων που προκλήθηκαν μέσα στην τάξη για τη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης και για το ρόλο των ιστορικών κειμένων στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Διδακτικές προτάσεις:

- Thomaidis, Y. (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 37–43. Άρθρο που περιγράφει την προσπάθεια συσχετισμού της ιστορίας των μαθηματικών της αρχαίας Ελλάδας με τη διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας μέσα από μια διδακτική παρέμβαση στο θέμα της τριχοτόμησης της γωνίας. Μέσα από τη συγκεκριμένη προσέγγιση φάνηκε να κινητοποιήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών, αναγνωρίζοντας ότι τα μαθηματικά είναι μια νοητική διεργασία σε συνεχή εξέλιξη και ότι τα θεωρήματα και οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, αντί να είναι το αντικείμενο μιας ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης, μπορούν να αποτελέσουν έναυσμα για συζήτηση και συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες.
- Μπιζμπιάνος, Μ. (2011). Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η περίπτωση της Γεωμετρίας. Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. Διπλωματική εργασία μέσα από την οποία επιχειρείται η καταγραφή των σπουδαιότερων σημείων της συζήτησης για τη χρησιμότητα της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, εστιάζοντας στη Γεωμετρία. Παρουσίαση μιας διδακτικής πρότασης για την ενσωμάτωση της ιστορίας της Γεωμετρίας που αφορά στην ανάδειξη της διαχρονικότητας του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και στην αλλαγή του πλαισίου χρήσης του μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Οι επιμορφούμενοι στη συνέχεια μπορούν να προχωρήσουν σε αναζήτηση και άλλων σχετικών εργασιών για περαιτέρω ενημέρωση και μελέτη.

Δ. Επιλογή από τους επιμορφούμενους ενός κλάδου των Μαθηματικών και αξιοποίηση της ιστορίας για γνωριμία με την εξέλιξή του.

Στη φάση αυτή οι συμμετέχοντες μπορούν ανά ομάδες να επιλέξουν ένα θέμα ή κλάδο από τα Μαθηματικά και να ακολουθήσουν την εξέλιξή του μέσα από την ιστορία αλλά και μέσα από τα προγράμματα σπουδών στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης. Παρακάτω ενδεικτικά θα αναφερθούμε στο πέρασμα από την Αριθμητική στις απαρχές της Άλγεβρας και στην ιστορική εξέλιξη της επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Οι συγκεκριμένες αναφορές αποτελούν θέματα σημαντικά για τη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά συνδέονται και με το πέρασμα των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Αποτελούν επομένως και ένα πεδίο που ευνοεί τη συνεργασία των εκπαιδευτικών από την Πρωτοβάθμια και τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

<u>Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα</u> είναι για τους μαθητές μια δύσκολη διαδικασία, αφού συναντούν πολλές διαφορές από τις γνώσεις που ήδη έχουν αποκτήσει με την Αριθμητική. Στην ουσία εισάγονται σε ένα καινούργιο χώρο που χρησιμοποιεί το δικό του σύστημα γραφής και διαφορετικό τρόπο σκέψης. Φαίνεται ωστόσο πως οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους δεν τους βοηθούν να χειριστούν τα γράμματα όπως τους αριθμούς και να κάνουν πράξεις με αυτά, αλλά και να κατανοήσουν τη χρήση (και την ουσία) των συμβόλων που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην Άλγεβρα.

Ιδιαίτερα έντονες είναι οι δυσκολίες στην κατανόηση βασικών εννοιών όπως η μεταβλητή, της οποίας οι διαφορετικές χρήσεις στη διδασκαλία (όπου δε διαχωρίζονται και δεν επεξηγούνται κάθε φορά) δημιουργούν στους μαθητές διαφορετικές αντιλήψεις και συγκεχυμένα συμπλέγματα, που για πολύ καιρό παραμένουν ρευστά, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται αντιφάσεις και συγχύσεις ως προς τη χρήση της (Δεμίρη et al., 1994). Επιπλέον, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στο σχηματισμό ακόμα και μιας απλής εξίσωσης που προκύπτει σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα (Kieran, 1992).

Μια άλλη δυσκολία προκύπτει από την παρουσία των συμβόλων, τα οποία αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο στην Αριθμητική από ότι στην Άλγεβρα. Το σύμβολο της ισότητας, για παράδειγμα, εμφανίζεται στην Άλγεβρα με σημασία που δεν είναι συμβατή με τη σημασία του στην Αριθμητική, αφού οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να το ερμηνεύουν όχι μόνο ως ένα σύμβολο που δίνει ένα αποτέλεσμα αλλά ως ταυτότητα, ως μια σχέση ισοδυναμίας ή ως ένα σύμβολο προσδιορισμού ή ορισμού για κάτι που βρίσκεται στα αριστερά του (Cortes et al., 1990).

Ένας ακόμα λόγος για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβαση τους στο Γυμνάσιο είναι η διαφορά στη μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος στην Άλγεβρα από την Αριθμητική. Στην Αριθμητική δε χρειάζεται να δικαιολογήσουν τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν για την επίλυση ενός προβλήματος κυρίως γιατί εργάζονται βασιζόμενοι περισσότερο στη διαίσθησή τους και με στόχο να δοθεί μια γρήγορη και τελική αριθμητική απάντηση. Αντίθετα, η επίλυση ενός προβλήματος στην Άλγεβρα (όπου περιλαμβάνεται και η δημιουργία μιας εξίσωσης) απαιτεί έναν αλγοριθμικό τρόπο σκέψης από τους μαθητές, με κανόνες ανεξάρτητους από τα δεδομένα και τις σχέσεις που υπάρχουν στο πρόβλημα, όπως συμβαίνει κατά την αναπαράσταση με εξισώσεις προβλημάτων που δίνονται με λόγια (Λεμονίδης, 1996).

Είναι σημαντικό λοιπόν οι επιμορφούμενοι να δουν ότι σε ανάλογες περιπτώσεις (όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης εννοιών, συνδεόμενες με τη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα) η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να δώσει διεξόδους και ιδέες σχετικά με τους στόχους και τους σκοπούς που τίθενται για την παρουσίαση της διδασκαλίας στη σχολική τάξη, αλλά και να αποτελέσει οδηγό για την οργάνωση της διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα με:

- Πληροφορίες για την ιστορική εξέλιξη της έννοιας και τις δυσκολίες μέχρι τον καθορισμό της.
- Υποστήριξη και βοήθεια στην οργάνωση μιας διδασκαλίας που θα είναι κοντά στις δυνατότητες των μαθητών, θα τους εμπλέκει ενεργά, θα προκαλεί το ενδιαφέρον τους και θα τους επιτρέπει να δημιουργούν και να εκφράζουν τις δικές τους σκέψεις και ιδέες.
- Ανάδειξη των εμποδίων που είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές και ικανότητα για πρόβλεψη. Επομένως και δυνατότητα για αντιμετώπιση αυτού που στη γλώσσα των μαθητών εκφράζεται με φράσεις όπως «δεν καταλαβαίνω», «είναι δύσκολα», «έχω άγχος», «είναι μπερδεμένα» και λοιπά.
- Βοήθεια και έμπνευση για την ανάπτυξη ενός κατάλληλου διδακτικού πλαισίου, για παράδειγμα μιας δραστηριότητας η οποία όχι μόνο θα προκαλέσει και θα κινητοποιήσει ευχάριστα όλους τους μαθητές, αλλά ίσως πετύχει και μια σημαντική ανατροπή ως προς την αρνητική στάση κάποιων μαθητών για τα Μαθηματικά.

Επίσης, είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό ότι ο διδακτικός σχεδιασμός δεν πρέπει να περιορίζεται απλώς στην ενσωμάτωση ιστορικών σημειωμάτων ή στην παρουσίαση της λύσης ιστορικών προβλημάτων, αλλά στη χρήση δραστηριοτήτων μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών που αναδεικνύουν τις αρχαίες μαθηματικές πρακτικές που οδήγησαν από την Αριθμητική στις απαρχές της Άλγεβρας με στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών.

Συνυπολογίζοντας ότι η αλγεβρική σκέψη δεν είναι κάτι το φυσικό αλλά ένας τρόπος σκέψης που έχει εκλεπτυνθεί ξανά και ξανά στο πέρασμα του χρόνου (Radford, 2011), γίνεται κατανοητό ότι η επίλυση προβλημάτων είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που οδηγεί τους μαθητές στην κατανόηση των γενικεύσεων της αριθμητικής και στη μελέτη των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στο σημείο αυτό ενδεικτικά παραθέτουμε <u>στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη των μεθόδων επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων καθώς είναι ένα θέμα που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας για τους συμμετέχοντες στην επιμόρφωση</u>.

Στους **Βαβυλώνιους**, περί το 2000 π.Χ., αποδίδεται η πρώτη ολοκληρωμένη μαθηματική σκέψη. Η αρχαιολογική έρευνα έχει αναδείξει μέχρι σήμερα 400 περίπου πήλινες πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο. Οι 100 από τις οποίες περιέχουν ποικιλία από αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα με υπολογισμούς και λύσεις που είναι καθαρά πρακτικού χαρακτήρα Σε αυτές διατυπώνεται αναλυτικά κάθε φορά η εκφώνηση του προβλήματος, η λύση καθώς και, βήμα προς βήμα, οι οδηγίες που πρέπει να ακολουθηθούν για να λυθεί, χωρίς βέβαια να αιτιολογείται η διαδικασία και χωρίς να εξηγείται το πέρασμα από το ένα βήμα στο επόμενο. Γενικά τα προβλήματα που περιλαμβάνονται στις μαθηματικές πλάκες αφορούν θέματα της καθημερινής ζωής και είχαν ως σκοπό να εξυπηρετήσουν πρακτικά θέματα και ανάγκες της οικονομίας, όπως για παράδειγμα υπολογισμός παραγωγής συγκεκριμένου έργου σε συνάρτηση με τον χρόνο και το ανθρώπινο δυναμικό. Με βάση τη σημερινή ορολογία και τον συμβολισμό, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η λύση των Βαβυλωνιακών προβλημάτων οδηγεί στη λύση εξισώσεων και συστημάτων πρώτου και δευτέρου βαθμού ειδικών μορφών, καθώς και στη λύση εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού, συγκεκριμένων όμως κατηγοριών. Ωστόσο, στα μαθηματικά κείμενα των Βαβυλωνίων, που είναι σήμερα γνωστά, δεν υπάρχει θεωρητική προσέγγιση κανενός προβλήματος, δεν υπάρχουν θεωρητικές προτάσεις που να αποδεικνύονται με λογικές διαδικασίες, ώστε να μπορούν να χαρακτηριστούν θεωρήματα. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη τους είναι ότι οι Βαβυλώνιοι είχαν στοιχειώδεις γνώσεις από την Αριθμητική, την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Δεν γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς, ούτε γενικούς τύπους τους οποίους μπορούσαν να εφαρμόσουν κατά τη λύση προβλημάτων (Εξαρχάκος, 1997, 2002).

Σχεδόν παράλληλα χρονικά, τα πρώτα σημάδια μαθηματικής σκέψης εμφανίζονται και στους **Κινέζους**. Ένα από τα πιο σημαντικά μαθηματικά έργα τους είναι το βιβλίο «Nine Chapters on the Mathematical Art», το οποίο είχε εκπαιδευτικό σκοπό. Σε αυτό περιλαμβάνονταν εκατοντάδες προβλήματα, που είχαν πρακτική εφαρμογή σε θέματα όπως το εμπόριο, η φορολογία και η μηχανική, ενώ ασχολούνταν -μεταξύ άλλων- με τομείς όπως επίλυση εξισώσεων, υπολογισμός ιδιοτήτων γεωμετρικών σχημάτων (π.χ εμβαδά, όγκοι), καθώς και γεωμετρικές κατασκευές, υπολογισμός τετραγωνικής και κυβικής ρίζας, προσέγγιση του π. Όλα τα μαθηματικά όμως ήταν και πάλι πρακτικά και αριθμητικά, χωρίς να εμφανίζεται κάποια αλγεβρική μέθοδος.

Από τους πρώτους λαούς, επίσης, όπου έγινε απαραίτητη η ανάπτυξη μιας μαθηματικής σκέψης, ήταν οι **Αιγύπτιοι**, για τους οποίους έχουν βρεθεί πάπυροι με μαθηματικό περιεχόμενο, όπως ο «πάπυρος Rhind» και ο «πάπυρος της Μόσχας», από τους οποίους αντλούνται όλες οι πληροφορίες για τα μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν. Όλα τα αριθμητικά προβλήματα έχουν σχέση με πρακτικά ζητήματα της καθημερινής ζωής και για όλα δίνεται μια λύση. Μέσα από τη μελέτη αυτών των προβλημάτων και των λύσεών τους, γίνεται αντιληπτό ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν αναπτύξει μια αξιόλογη μαθηματική παιδεία, η οποία όμως ήταν μόνο σε πρακτικό επίπεδο και είχε ως αποκλειστικό σκοπό την εξυπηρέτηση αναγκών της καθημερινής ζωής, της οικονομίας, της γεωργίας, της μηχανικής και της διοίκησης. Σε αυτούς τους τομείς ανήκουν, σχεδόν στο σύνολό τους, τα προβλήματα που υπάρχουν στους διάφορους παπύρους. Σε κανέναν πάπυρο, τουλάχιστον από αυτούς που είναι μέχρι σήμερα γνωστοί, δεν υπάρχει η έννοια της απόδειξης, ούτε κάποια γενική πρόταση, ένα θεώρημα, το οποίο να έχει γενική ισχύ και να εφαρμόζεται γενικά σε όλη την υπόλοιπη θεωρία. Γενικά τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων ήταν προϊόντα παρατήρησης και εμπειρίας, ένα άθροισμα από εμπειρικά συμπεράσματα, στοιχειώδεις κανόνες και τεχνικές, που έδιναν απαντήσεις στα προβλήματα που αντιμετωπίζονταν σε συγκεκριμένες καταστάσεις και ανάγκες (Εξαρχάκος, 1997, 2002).

Η μεγάλη άνθιση των Μαθηματικών έγινε με τους **Έλληνες** μαθηματικούς τον 3ο αι. π.Χ., οι οποίοι έχοντας απορροφήσει τη βάση των Μαθηματικών των Βαβυλώνιων, από τον 4ο αι. π.Χ. άρχισαν να εξελίσσουν την πρότερη γνώση και να εμπλουτίζουν τα Μαθηματικά με έννοιες και μεθόδους, που αποτελούν αντικείμενο μελέτης μέχρι και σήμερα. Ξεκινώντας από την αστρονομία κατάφεραν να συνδέσουν και να αναπτύξουν τα μαθηματικά σε σχέση και με άλλες επιστήμες, όπως η φυσική και η φιλοσοφία. Ανάμεσα στην πλειάδα των μαθηματικών της αρχαίας Ελλάδας, ξεχωρίζει ο Ευκλείδης, ο οποίος έγινε γνωστός κυρίως για το γεωμετρικό του έργο, αλλά, παρόλο που η έννοια της Άλγεβρας δεν θα εμφανιστεί μέχρι τον Μεσαίωνα, πολλές «αλγεβρικές» έννοιες κάνουν την εμφάνισή τους στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Πιο συγκεκριμένα από τον Ευκλείδη χρησιμοποιήθηκαν γεωμετρικές κατασκευές για τη λύση πρωτοβάθμιων γραμμικών εξισώσεων και έγινε αναγωγή δευτεροβάθμιων εξισώσεων σε ισοδύναμες των εμβαδών, προχωρώντας σε λύση με γνωστά θεωρήματα, πράγμα που έγινε ο βασικός τρόπος επίλυσης προβλημάτων. Η εξέλιξη των Ελλήνων μαθηματικών δεν σταμάτησε, αλλά η εμφάνιση της Άλγεβρας, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, καθυστέρησε. Τον 3ο αι. μ.Χ. από τον **Διόφαντο** παρουσιάστηκε για πρώτη φορά, στο έργο του «Αριθμητικά», μια μη γεωμετρική άλγεβρα στην οποία απουσίαζαν οι γενικές μέθοδοι, αλλά δίνονταν λύσεις για 130 προβλήματα μέσα από διάφορες «έξυπνες» μεθόδους και με την χρήση συμβολισμών. Ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιούσε γράμματα, αλλά συντομογραφίες και μια δική του ορολογία. Μέσα από τα προβλήματα που διατύπωσε, ασχολήθηκε κυρίως με τις εξισώσεις και με αυτόν ξεκίνησε μια πρώτη μορφή Άλγεβρας.

Η εξέλιξη των αλγεβρικών μεθόδων μετά τον Διόφαντο παρουσιάζει μια στασιμότητα, μέχρι τον 9ο αι. μ.Χ., οπότε από τους **Άραβες** εμφανίστηκε μια μορφή Άλγεβρας δομημένης στα πρώτα στάδια, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα. Άλλωστε η ίδια η λέξη (al-jabr: μεταφορά από το ένα μέρος στο άλλο) προέρχεται από την αραβική γλώσσα και από τον μαθηματικό Al-Khwārizmī, ο οποίος αντιμετώπισε την Άλγεβρα ως ξεχωριστό κλάδο και εισήγαγε έννοιες που μέχρι τότε ήταν άγνωστες (όπως η μεταφορά ενός όρου στο άλλο μέλος της σχέσης). Δεν χρησιμοποίησε βέβαια τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, ούτε και τις εξισώσεις όπως τις ξέρουμε, αλλά τα έγραφε όλα με λέξεις.

Η περίοδος της Αναγέννησης στην **Ευρώπη** έφερε και άνθιση στα Μαθηματικά, τα οποία αρχικά οι μαθηματικοί της εποχής τα συνέδεαν με τα πιο πρόσφατα για την εποχή τους αραβικά Μαθηματικά. Σύντομα όμως στράφηκαν προς τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, τα οποία τα μελέτησαν και ανέπτυξαν περισσότερο. Πρωτοπόροι σε αυτή τη διαδικασία ήταν οι **Ιταλοί**, γύρω στον 14ο αι. μ.Χ., με κορυφαίο τον Fibonacci, οι οποίοι εισήγαγαν και τον συμβολισμό στην Άλγεβρα, αν

και χρειάστηκαν επιπλέον άλλοι τρεις αιώνες μέχρι να καθιερωθεί η συμβολική γραφή στην Άλγεβρα. Κατά την περίοδο αυτή μελετήθηκαν εξισώσεις έως και πέμπτου βαθμού και δόθηκαν κανόνες επίλυσης και για αριθμητικά προβλήματα.
Στους επόμενους αιώνες συνεχίστηκε η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και των μαθηματικών αντικειμένων καθώς και των μεθόδων επίλυσης που γίνονταν ολοένα και πιο αφηρημένοι. Αυτός που έδωσε νόημα στην Άλγεβρα, όπως τη χρησιμοποιούμε σήμερα, ήταν ο **Francois Viete** (1540-1603), ο οποίος ήταν ο πρώτος που υποκατέστησε τις γεωμετρικές κατασκευές στις μαθηματικές του αποδείξεις με αλγεβρικές διαδικασίες. Από εκεί και έπειτα η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων οδηγήθηκε σε πλήρη ανάπτυξη μέχρι που έφτασε στις αλγεβρικές μεθόδους που σήμερα γνωρίζουμε.
Από όσα προαναφέρθηκαν, γίνεται κατανοητό ότι η Άλγεβρα δεν εμφανίστηκε ως καθαρά συμβολική γραφή, όπως σήμερα τη γνωρίζουμε, αλλά εξελίχθηκε σταδιακά. Από τους ιστορικούς των Μαθηματικών είναι γενικά αποδεκτή η άποψη ότι τα στάδια ανάπτυξης της συμβολικής της γραφής ήταν:

- Το **ρητορικό** στάδιο της Άλγεβρας. Αυτό αναφέρεται στην περίοδο πριν από τον Διόφαντο (250 μ.Χ. περίπου), κατά την οποία χρησιμοποιείται η καθομιλουμένη γλώσσα για τη λύση των προβλημάτων ενώ δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα για την αναπαράσταση των άγνωστων ποσοτήτων.
- Το στάδιο της **συγκοπτόμενης** Άλγεβρας. Αυτό εκτείνεται στην περίοδο από τον Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16ου αι. μ.Χ. και χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για τις άγνωστες ποσότητες. Ο Διόφαντος είναι αυτός που για πρώτη φορά εισάγει χρήση γραμμάτων ή συμβολισμών για τις άγνωστες ποσότητες. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου τα γράμματα χρησιμοποιούνται μόνο για την αναπαράσταση των άγνωστων ποσοτήτων και οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται μόνο να ανακαλύψουν τις τιμές που παίρνουν τα γράμματα και όχι να εκφράσουν με αυτά τη γενικότητα. «Γενικές λύσεις» που να χρησιμοποιούν γράμματα δεν υπάρχουν. Μόνο οι μέθοδοι επίλυσης μπορούν να θεωρηθούν ως «γενικές» με την έννοια ότι αυτές μπορούν να εφαρμοστούν σε μια γενική ομάδα εξισώσεων.
- Το στάδιο της **συμβολικής** Άλγεβρας. Αυτό καθορίζεται από τον Francois Viete (στα 1600 μ.Χ. περίπου), ο οποίος εισάγει τη χρήση των γραμμάτων και για τις δεδομένες ποσότητες. Αυτή η ανακάλυψη που για τα σημερινά δεδομένα θα μπορούσε να θεωρηθεί απλή, ήταν καθοριστική για την αλλαγή που ακολούθησε στη μορφή της Άλγεβρας. Με τη χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση των δεδομένων ποσοτήτων εισάγεται μια νέα αριθμητική έννοια στα Μαθηματικά, η έννοια του αλγεβρικού αριθμού ή του συμβολικού αριθμού. Μιλάμε πλέον για αριθμούς που δεν έχουν ειδικό μέγεθος και ειδική διάταξη, καθώς κάθε γράμμα αναπαριστά ταυτόχρονα κάθε έναν και όλους τους αριθμούς σε ένα δεδομένο σύνολο και μπορεί να οριστεί μια διάταξη όπου αυτό απαιτείται. Γίνεται επομένως αντιληπτή η αλλαγή που συνέβη στο γλωσσικό σύστημα της Άλγεβρας με την εισαγωγή μιας νέας έννοιας, η οποία έφερε μια

ριζική αλλαγή στη σημασία που αποδίδονταν στον άγνωστο κατά την προηγούμενη περίοδο.

Μέσα από την ιστορική πορεία των μαθηματικών μεθόδων, παρατηρείται μια εξέλιξη αργή και μη γραμμική που ξεκινώντας από τους εμπειρικούς τρόπους επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων οδήγησε σε πιο γενικές μεθόδους και τυποποίηση των μέσων αναπαράστασής τους. Αρχικά οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν άτυπες μεθόδους επίλυσης, οι οποίες μπορούσαν να εφαρμοστούν μόνο στο αντίστοιχο κάθε φορά πρόβλημα αλλά δεν μπορούσαν να γενικευτούν σε άλλα παρόμοια προβλήματα. Αυτό είχε ως συνέπεια ο ίδιος τύπος προβλήματος, αλλά με διαφορετικές ποσότητες να πρέπει να λύνεται από την αρχή ξανά και ξανά. Αργότερα, όταν οι μαθηματικές απαιτήσεις άρχισαν να εξελίσσονται, οι άνθρωποι ασχολήθηκαν με πιο πολύπλοκα προβλήματα. Έτσι προέκυψε και η διείσδυση της αλγεβρικής μεθόδου στην επίλυσή τους, η οποία άρχισε με τη χρήση των εννοιών του αγνώστου και της εξίσωσης και την έκφραση των ζητούμενων αριθμών με υποτυπώδεις συντομογραφικές αναπαραστάσεις. Οι πρώτες υποτυπώδεις αυτές αλγεβρικές μέθοδοι συνέβαλαν κυρίως στην επίλυση μερικών δύσκολων γεωμετρικών αλλά και πιο αφηρημένων αριθμητικών προβλημάτων, τα οποία με την αριθμητική μέθοδο μόνο δεν μπορούσαν να λυθούν επαρκώς.

Η έκφραση γενικών λύσεων στη μορφή συμβολικών τύπων έγινε δυνατή με την κορύφωση της εξέλιξης της αλγεβρικής μεθόδου, οπότε ξεκίνησε και η χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος, ανοίγοντας έτσι τον δρόμο για την ανάπτυξη διαδικασιών απόδειξης και διερεύνησης σε αριθμητικά ζητήματα, τα οποία δεν ήταν εφικτό να εκφραστούν πλήρως με την αριθμητική μέθοδο.

Γίνεται αντιληπτό πως η ισχύς της Άλγεβρας προκύπτει από το γεγονός ότι παρέχει τη δυνατότητα να χειριζόμαστε και να αναπαριστούμε με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια τις μαθηματικές ιδέες και να αναπτύσσουμε αποτελεσματικές διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων. Στην αριθμητική μέθοδο το βάρος δίνεται στις πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν, ώστε να βρεθεί η λύση στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου προβλήματος ενώ με την αλγεβρική μέθοδο η παραγωγή διαδικασιών και σχέσεων εκφράζεται με απλούς γενικούς τύπους που έχουν εφαρμογή και σε άλλα παρόμοια προβλήματα. Παρατηρείται επομένως μια υπεροχή στον μαθηματικό τρόπο σκέψης, όπου το άτομο αντιλαμβάνεται τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων και επομένως η κατανόηση της επίλυσης ενός προβλήματος φτάνει σε βάθος και δεν μένει μόνο σε υπολογισμό πράξεων.

Ε. Περιήγηση και μελέτη πάνω σε προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις που εκπονήθηκαν ή και υλοποιήθηκαν με στόχο τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Πέρα από την πλούσια βιβλιογραφία που έχει παραχθεί από την έρευνα υπάρχει και πληθώρα ερευνητικών αλλά και διπλωματικών εργασιών, οι οποίες έχουν εκπονηθεί στα πλαίσια προγραμμάτων μεταπτυχιακών σπουδών με στόχο τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η περιήγηση και η μελέτη πάνω στις

προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις εμπλουτίζουν τις ιδέες των επιμορφούμενων και συμβάλλουν στην ενδυνάμωση της αυτοπεποίθησής τους, προκειμένου και οι ίδιοι να εμπλακούν στην παραγωγή σχετικών διδακτικών προτάσεων.
Το διαδίκτυο στην περίπτωση αυτή μπορεί να βοηθήσει, καθώς αποτελεί μια πλούσια πηγή και σε αυτό υπάρχει πολύ υλικό. Αρχικά είναι πιθανό να αισθανθεί κανείς χαμένος, αφού με μια πρώτη ματιά είναι δύσκολο να διακρίνει και να ξεχωρίσει τι είναι καλής ποιότητας. Σιγά σιγά όμως το τοπίο ξεκαθαρίζει με τον καθορισμό του τι «έχει νόημα» και με την απόκτηση σχετικής εμπειρίας στη χρήση των πόρων.
Ενδεικτικά θα αναφερθούμε παρακάτω σε προτάσεις και σε προσπάθειες που έγιναν για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία της Γεωμετρίας, οι οποίες θα μπορούσαν να είναι και ένα πρώτο πεδίο περιήγησης για τους συμμετέχοντες. Από την παγκόσμια βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουμε πολλές τέτοιες προτάσεις και αναφορές σε προσπάθειες που έγιναν προς την κατεύθυνση αυτή. Οι Gulikers και Blom (2001) επιχείρησαν μια ταξινόμησή τους, καταλήγοντας σε οκτώ κατηγορίες, όπως φαίνεται παρακάτω:

1. Γεωμετρικοί υπολογισμοί.
2. Γεωμετρικές κατασκευές.
3. Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων, δισδιάστατων και τρισδιάστατων.
4. Οπτική (Vision) Γεωμετρία.
5. Ιστορία της Γεωμετρίας.
6. Γεωμετρικοί τόποι
7. Επιχειρηματολογία και αποδείξεις.
8. Γεωμετρία και Φυσική.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε παραδείγματα από κάθε κατηγορία ξεχωριστά, αντλώντας τα περισσότερα στοιχεία από την εργασία των Gulikers, Blom (2001).

Γεωμετρικοί υπολογισμοί

- Το 1977 με αφορμή το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παρουσιάστηκε από τον Swetz (στο άρθρο του «The “piling up of squares” in ancient China», *Mathematics Teacher, 70(1)*, σ. 72–79) η τεχνική της τοποθέτησης στο επίπεδο διαδοχικών τετραγώνων με ίσες ή διαφορετικές διαστάσεις, η οποία κάνει χρήση μιας διαισθητικής προσέγγισης για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Swetz, αυτή η τεχνική ήταν γνωστή στους αρχαίους Βαβυλώνιους και στους αρχαίους Έλληνες, αλλά εξελίχθηκε σε πολύ υψηλό επίπεδο στην αρχαία Κίνα.
- Το 1987 το κείμενο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» χρησιμοποιήθηκε, από μια ομάδα Γάλλων ερευνητών του Πανεπιστημίου Paris VII I.R.E.M., ως κείμενο πειραματικής διδασκαλίας σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου. Στη διδασκαλία αυτή, το έργο του Αρχιμήδη λειτούργησε σαν μέσο για να γνωρίσουν οι μαθητές μέσα από την ιστορία ένα συναρπαστικό μαθηματικό πρόβλημα. Επίσης, τους δόθηκε η δυνατότητα να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές γνώσεις που διέθεταν, για να αναπτύξουν οι ίδιοι τεχνικές επίλυσης του προβλήματος (Θωμαΐδης 2000).

- Το 1989 ο Mac Kinnon, αντλώντας έμπνευση από το έργο του Αρχιμήδη σχετικά με τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας μιας σφαίρας (όπως ανέφερε στο άρθρο του «What do you do about $4\pi r^2$?», The Mathematical Gazette*, 73(464)*, σ. 107–110), σχεδίασε μια διδακτική πρόταση για τον υπολογισμό της, δουλεύοντας με προβολές τμημάτων της επιφάνειας της Γης σε ένα χάρτη.
- Ο Corris περιέγραψε το 1990 (στο άρθρο του «Experimental pi», *Mathematics in School, 19(1)*, σ. 18–21) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να κάνουν τις δικές τους προσεγγίσεις του π, βοηθούμενοι από κατασκευές και υπολογιστικές ασκήσεις εμπνευσμένες από το έργο του Αρχιμήδη.
- Ο Θωμαΐδης το 1990 περιέγραψε μια διδακτική παρέμβαση πάνω στο θεώρημα του Πτολεμαίου (2ος αιώνας μ. Χ.) και στον ρόλο του για την κατασκευή του πίνακα χορδών (που ισοδυναμεί με ένα σημερινό τριγωνομετρικό πίνακα ημιτόνων). Το θεώρημα και ο πίνακας χορδών που περιέχονται στο έργο του Πτολεμαίου «Αλμαγέστη» (το οποίο αποτέλεσε τη «Βίβλο» των αστρονόμων, των γεωγράφων και εξερευνητών του 16ου αι.) είχαν σημαντική συμβολή στην επίλυση διάφορων προβλημάτων μέτρησης στην αρχαία αστρονομία. Στο άρθρο αναφέρεται, επιπλέον, ότι μέσω του θεωρήματος του Πτολεμαίου οι μαθητές διαπίστωσαν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, ενώ διαπιστώθηκε ότι θεωρήματα και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου μπορούν να αποτελέσουν κίνητρο για ουσιαστική συζήτηση και για συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες αντί να παραμένουν αντικείμενα ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης (Θωμαΐδης 1990).
- Ο Führer το 1991 (στο άρθρο του «Historical stories in the mathematics classroom», *For the Learning of Mathematics, 11(2)*, σ. 24–31) χρησιμοποίησε τον τρόπο του Ερατοσθένη για τον υπολογισμό της περιφέρειας της Γης, προκειμένου και οι μαθητές του να τον χρησιμοποιήσουν για να υπολογίσουν το μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας, ακολουθώντας τις ιδέες της «καθοδηγούμενης επανα-ανακάλυψης». Επίσης, ο Führer συνδύασε το έργο του Αρχιμήδη, του Viète και του Descartes για να παρουσιάσει στους μαθητές του την έννοια της προσέγγισης.
- Ο Ofir, σχετικά με τους τρόπους προσέγγισης του π, το 1991 (στο άρθρο του «Historical happenings in the mathematical classroom», *For the Learning of Mathematics, 11(2)*, σ. 21–23) αναφέρθηκε σε μια μέθοδο από τον Εβραίο Maimonides, η οποία χρονολογείται από το 12^{ο} αιώνα, σημειώνοντας επιπλέον ότι οι πηγές που χρησιμοποιούνται μπορούν να προέρχονται από τη χώρα προέλευσης των μαθητών, για να τους κινητοποιήσουν περισσότερο.
- Ο Mac Kinnon το 1992 (στο άρθρο του «Homage to Babylonia?», *The Mathematical Gazette 76(475)*, σ. 158–178) αναφέρθηκε στον τρόπο με τον οποίο η πινακίδα Plimpton 322 αλλά και άλλες Βαβυλωνιακές πινακίδες μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για να αναδειχθούν οι πολλές και διαφορετικές χρήσεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

- Οι Makowski και Strong το 1996 (στο άρθρο τους «Sizing up earth: A universal method for applying Eratosthenes’ earth measurement», *Journal of Geography, 95(4)*, σ. 174–179) αναφέρθηκαν σε μια πειραματική δραστηριότητα που πραγματοποίησαν στο Πανεπιστήμιο της Βορείου Αλαμπάμα για τη μέτρηση της γης, στηριζόμενοι στο έργο του Ερατοσθένη. Αναφέρθηκαν, επίσης, σε εκτεταμένες εξηγήσεις για τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο του Ερατοσθένη στην τάξη για τον υπολογισμό του μεγέθους της γης χρησιμοποιώντας σκιές και απλά μαθηματικά.
- Ο Burns το 1997 (στο άρθρο του «The Babylonian clay tablet», *Mathematics Teaching, 158*, σ. 44–45) αναφέρθηκε σε μια ομαδική δουλειά που έκανε με τους μαθητές του πάνω σε μια παλαιά Βαβυλωνιακή πλάκα (την Πινακίδα Plimpton 322), για την οποία κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα: «Περί τίνος πρόκειται;». Περιέγραψε την εμπειρία του ως πολύ θετική, αφού οι περισσότεροι μαθητές εργάστηκαν πολύ σοβαρά και κατάφεραν να παρουσιάσουν έξυπνες δικές τους απαντήσεις. Αποκαλύφθηκαν, ωστόσο, και μερικές αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις, αφού κάποιοι μαθητές ερμήνευσαν πολύ σωστά το αριθμητικό νόημα της πινακίδας χωρίς να έχουν συνειδητοποιήσει τι ακριβώς είχαν καταφέρει, ενώ κάποιοι άλλοι χρησιμοποίησαν άλλες πηγές (κυρίως βιβλία) για να μάθουν για το νόημα των αριθμών και να δώσουν τη «σωστή» απάντηση, χωρίς φυσικά να αποκομίσουν κάποιο μαθηματικό όφελος από τη διαδικασία αυτή.
- Η Eagle το 1998 (όπως ανέφερε στο άρθρο της «A typical slice», *Mathematics in School, 27(4)*, σ. 37-39), δουλεύοντας με τους μαθητές της πάνω στον υπολογισμό του όγκου των γεωμετρικών στερεών, περιέγραψε τα βήματα με τα οποία τους καθοδήγησε μέσα από το έργο του Αρχιμήδη, ώστε να επαληθεύσουν τον γνωστό τύπο του όγκου της σφαίρας ($V = 4/3\ \pi r^3$) και ταυτόχρονα να μυηθούν στις διαδικασίες του ολοκληρωτικού λογισμού.
- Ο Μιχαηλίδης το 2009 δημοσίευσε μια εργασία στην οποία πρότεινε τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για την εκτέλεση επίπονων και απαιτητικών αριθμητικών υπολογισμών, με στόχο να δημιουργηθεί «εργαστηριακό περιβάλλον» μέσα στο οποίο οι μαθητές μπορούν με καθοδήγηση να ανακαλύψουν τα Μαθηματικά αντί να τα διδαχθούν από έδρας. Στις προτεινόμενες δραστηριότητες χρησιμοποιήθηκε ως πύλη εισόδου η ιστορία, ώστε μέσα από αυτές οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με την ιστορία των μεγάλων μαθηματικών ανακαλύψεων και να βιώσουν ενεργά ένα μέρος της (Μιχαηλίδης 2009).

Γεωμετρικές κατασκευές

- Ο Θωμαΐδης το 1990 περιέγραψε μια διδακτική παρέμβαση σχετικά με το θέμα της τριχοτόμησης της γωνίας, που κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών του, καθώς αναγνώρισαν τα Μαθηματικά ως μια νοητική διεργασία σε συνεχή εξέλιξη και όχι ως μια οριστική και αφηρημένη θεωρία. Επιπλέον, διαπιστώθηκε για μια ακόμα φορά ότι θεωρήματα και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, από αντικείμενα ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης, μπορούν να αποτελέσουν κίνητρο για ουσιαστική συζήτηση και για συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες (Θωμαΐδης 1990).

- Ο Ransom (στα άρθρα του «Astrolabes, cross staffs and dials», *Mathematics in School, 22(4)*, σ. 2–8 και «Navigation and surveying: teaching through the use of old instruments», *Histoire et Epistémologie dans l' Education Mathématique,* IREM de Montpellier, σ. 227–239) το 1993 και το 1995 έδωσε μια περιγραφή σχετικά με τη χρήση παλαιών οργάνων εξερεύνησης και ναυσιπλοΐας μέσα στην τάξη. Ξεκινώντας από μια εκτενή αναφορά στα όργανα αυτά από ιστορική και μαθηματική άποψη, ώθησε τους μαθητές του να κατασκευάσουν και οι ίδιοι κάποια από αυτά. Έτσι μέσα από την εμπλοκή τους στη διαδικασία αυτή είχαν την ευκαιρία να γνωρίσουν πολλές πρακτικές χρήσεις της Γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή και να συνδέσουν την πρακτική Γεωμετρία με τη θεωρητική Γεωμετρία.
- Ο Hischer το 1994 (στο άρθρο του «Geschichte der Mathematik als didaktisher Aspect (2). Lösung klassischer Probleme. Ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe», *Mathematik in der Schule, 32(5)*, σ. 279–291) πρότεινε τη χρήση διαβήτη τριχοτόμησης (trisectrix) και περιέγραψε τον απλό τρόπο με τον οποίο μέσω της χρήσης του οργάνου αυτού είναι δυνατό να λυθούν γραφικά τα προβλήματα της τριχοτόμησης γωνιών, προτείνοντας τη διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος για τις μεγαλύτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.
- Ο Hogendijk το 1996 (στο άρθρο του «Een workshop over Iraanse mozaïken», *Nieuwe Wiskrat, 16(2)*, σ. 38–42) περιέγραψε την κατασκευή ενός κανονικού πενταγώνου από ένα παλαιό περσικό χειρόγραφο, το οποίο χρονολογείται από το Μεσαίωνα. Οι μαθητές μπορούσαν να ελέγξουν οι ίδιοι τη μέθοδο κατασκευής του ακολουθώντας την περιγραφή της από το μεταφρασμένο κείμενο. Επίσης, διατύπωσε την άποψη ότι οι κατασκευές διάφορων σχημάτων, που περιγράφονται σε παλιά περσικά χειρόγραφα σκοπό τη δημιουργία μωσαϊκών, επιτρέπουν στους μαθητές να ασχοληθούν με ένα ευρύ φάσμα γεωμετρικών κατασκευών.
- Οι Taimina και Henderson το 2005 περιέγραψαν με ποιον τρόπο η ιστορία της Γεωμετρίας χρησιμοποιείται για την αποσαφήνιση συνηθισμένων προβληματικών καταστάσεων που αντιμετωπίζουν οι προπτυχιακοί φοιτητές τους. Με έναυσμα το ερώτημα «Πώς μπορώ να σχεδιάσω μια ευθεία γραμμή;» χρησιμοποιήσαν, για το σκοπό αυτό, διάφορες συσκευές εξηγώντας ταυτόχρονα και το μαθηματικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατασκευή των συσκευών αυτών (Taimina, Henderson 2005).

Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων

- Η Lumpkin το 1978 (στο άρθρο της «A mathematics club project from Omar Khayyam», *Mathematics Teacher 71(9)*, σ. 740–744) παρουσίασε τη μέθοδο του Khayyam για την επίλυση κυβικών εξισώσεων, που χρησιμοποιεί πολύ γνωστές ιδιότητες κωνικών τομών και χρονολογείται από τον 11ο αιώνα. Η Lumpkin υποστήριξε ότι μέσα από την εργασία τους οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν καλύτερη εικόνα για τη γεωμετρική φύση των κωνικών τομών, αφού η μέθοδος του Khayyam χρησιμοποιεί γεωμετρικές μεθόδους για την επίλυση κυβικών εξισώσεων.

Οπτική Γεωμετρία

- Οι Proia και Menghini το 1984 (στο άρθρο τους «Conic sections in the sky and on earth», *Educational Studies in Mathematics, 15*, σ. 191–210) περιέγραψαν ότι μέσα από ένα ερώτημα, που έθεσαν σε μαθητές μεγάλων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σχετικά με το σχήμα της έλλειψης, που εμφανίζεται στην αρχιτεκτονική μόνο κατά την περίοδο του μπαρόκ, προέκυψε ένα σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο ήταν η πεποίθηση που δημιουργήθηκε σε διδάσκοντες και μαθητές ότι δεν πρέπει να απορρίπτεται η συνεισφορά άλλων επιστημονικών κλάδων στην εξέλιξη της επιστήμης των Μαθηματικών.
- Οι Bartolini-Bussi και Marioti το 1999 (στο άρθρο τους «Semiotic Meditation: from history to the mathematics classroom», *For the Learning of Mathematics, 13(3)*, σ. 27–35) διαπραγματεύθηκαν το ερώτημα σχετικά με το εάν έχουν ωοειδές σχήμα (egg shaped) τα συγκεκριμένα τμήματα που προκύπτουν από την τομή ενός ορθού κώνου και ενός ορθού κυλίνδρου. Οι μαθητές τους προσπάθησαν να αντλήσουν επιχειρήματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, προκειμένου να βοηθήσουν στην εναρμόνιση των μορφολογικών και εννοιολογικών πτυχών του προβλήματος.

Ιστορία της Γεωμετρίας

- Η Lumpkin το 1978 (σύμφωνα με το άρθρο της «A mathematics club project from Omar Khayyam», *Mathematics Teacher 71(9)*, σ. 740–744) παρουσίασε στους μαθητές της, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, την πρόοδο και τη συνέχεια των Μαθηματικών μέσα από την ιστορία τους, χρησιμοποιώντας σύγχρονη Αναλυτική Γεωμετρία για να αναλύσει τις αρχαίες ελληνικές και τις αραβικές μεθόδους για την επίλυση κυβικών εξισώσεων, με τη χρήση κωνικών τομών. Ο στόχος της, καθαρά μαθηματικός, ήταν να αποκτήσουν οι μαθητές της μεγαλύτερη μαθηματική αντίληψη. Επίσης, γνωρίζοντας τη δυναμική της μαθηματικής ανάπτυξης, είχαν την ευκαιρία να αναθεωρήσουν την άποψή τους για τη στατική φύση των Μαθηματικών και να τα εκτιμήσουν ως δημιούργημα της ανθρώπινης πνευματικής δραστηριότητας.
- Οι Baptist και Diener το 1988 (στο άρθρο τους «Historische Aufgaben im Mathematikunterricht», *Die realschule, 96(6)*, σ. 231–234) υποστήριξαν ότι τα προβλήματα από την ιστορία των Μαθηματικών προσφέρουν στους μαθητές μια καλή ευκαιρία να αλλάξουν την άποψή τους για την επίλυση των προβλημάτων, αφού μπορούν να γνωρίσουν πλήθος τρόπων από διαφορετικές χρονικές περιόδους με τους οποίους λύνονταν προβλήματα. Παρουσίασαν μάλιστα ως παράδειγμα το «πρόβλημα των δύο πύργων» (two

tower problem) καθώς και τις τέσσερις διαφορετικές λύσεις του από τον Leonardo of Pisa (Leonardo Pisano ή Fibonacci).

- Ο Rickey το 1992 (στο άρθρο του «How Columbus encountered America», *Mathematics Magazine, 65(4)*, σ 219–225) περιέγραψε τη μαθηματική γνώση στην οποία ο Κολόμβος στηρίχθηκε για το ταξίδι του προς την Αμερική. Ανέφερε στους μαθητές του το έργο του Ερατοσθένη για τη μέτρηση της ακτίνας της γης και τους πρότεινε να συζητήσουν τις συνέπειες των λαθών στις μετρήσεις γενικότερα, αλλά και περαιτέρω έρευνα στο θέμα αυτό.

Γεωμετρικοί τόποι

- Van Maanen το 1992 (στο άρθρο του «Teaching geometry to 11 year old “medieval lawyers”», *The Mathematical Gazette, 76(475)*, σ. 37–45) περιέγραψε την ανάπτυξη μιας εργασίας σχετικά με το μοίρασμα προσχωσιγενών εδαφών, στην οποία οι μαθητές εργάστηκαν πάνω σε ένα νομικό έγγραφο του Bartolus of Saxoferrato από το 1355. Ο Bartolus σε αυτό πρότεινε ένα καθαρά μαθηματικό κριτήριο για την ιδιοκτησία της νέων εδαφών, να ανήκουν δηλαδή στον ιδιοκτήτη της πλησιέστερης παλιάς γης, πράγμα που παραπέμπει στις ιδιότητες των μεσοκάθετων ευθειών. Η εργασία αυτή ήταν, επίσης, και ένας τρόπος για να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να συνεργαστούν, να διαπιστώσουν τη σημασία που έχουν τα Μαθηματικά για την κοινωνία και να ανακαλύψουν κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.

Επιχειρηματολογία και αποδείξεις

- Οι Horak και Horak το 1981 (στο άρθρο τους «Geometrical proofs of algebraic identities», *Mathematics Teacher, 74(3)*, σ. 212–216) περιέγραψαν με ποιον τρόπο οι αρχαίοι Έλληνες χειρίστηκαν γεωμετρικά σχήματα, για να πραγματοποιήσουν αλγεβρικές πράξεις και να αποδείξουν αλγεβρικές ταυτότητες. Ο τρόπος αυτός κατά τη γνώμη τους μπορεί να χρησιμοποιείται στις αίθουσες διδασκαλίας, για να εμπλουτίσουν οι μαθητές τις γνώσεις τους και να μεγιστοποιήσουν την κατανόηση των Μαθηματικών.
- Ο Arsac το 1987 (στο άρθρο του «L' origine de la démonstration: essai d' épistémologie didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques, 8(3)*, σ. 267–309) ασχολήθηκε με την ιστορική προέλευση των μαθηματικών αποδείξεων, που ξεκίνησαν από την αρχαία Ελλάδα περίπου τον 5ο αι. π.Χ., και διαπραγματεύτηκε το ερώτημα σχετικά με το αν η εμφάνιση των μαθηματικών αποδείξεων συνδέεται με κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα μέσα στα Μαθηματικά ή είναι συνέπεια της γενικότερης μεθόδου της αρχαίας ελληνικής σκέψης.
- Ο Deakin το 1990 (στο άρθρο του «From Pappus to today, the history of a proof», *The Mathematical Gazette, 74(467)*, σ. 6–11) περιέγραψε την ιστορία των αποδείξεων του θεωρήματος για την ισότητα των προσκείμενων στη βάση γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου, ξεκινώντας από την απόδειξη του Ευκλείδη

(όπως υπάρχει στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του) και καταλήγοντας σε σύγχρονες αποδείξεις.

- Ο Artmann το 1991 (στο άρθρο του «Quadratische Probleme in Euklids “Elementem” und ihre Behandlung im Mathematikunterricht», *Didaktik der Mathematik, 19(2)*, σ. 94–110) εστίασε στις γεωμετρικές μεθόδους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες και οι Βαβυλώνιοι, υποστηρίζοντας ότι, αν και διαφορετικές, στην πραγματικότητα είναι ισομορφικές. Πρότεινε μάλιστα τριών ειδών διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις στο συγκεκριμένο θέμα, και έδωσε πλούσιο υποστηρικτικό υλικό.
- Ο Brodkey το 1996 (στο άρθρο του «Starting a Euclid club», *Mathematics Teacher, 89(5)*, σ. 386–388) περιέγραψε την ιδέα που είχε να δημιουργήσει μια ομάδα ανάγνωσης του 1ου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη, με την ισότιμη συμμετοχή περίπου 20 ατόμων (μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και καθηγητές Μαθηματικών). Κάθε μέλος της ομάδας μελετούσε μια πρόταση από το 1ο Βιβλίο των Στοιχείων, την παρουσίαζε σε όλους και στη συνέχεια ακολουθούσε συζήτηση. Κατά την άποψη του Brodkey, τα οφέλη για τους μαθητές ήταν πολλαπλά, καθώς εμβάθυναν στην κατανόηση της Γεωμετρίας, βελτίωσαν τις ικανότητες τους σε θέματα προφορικής επικοινωνίας και συζήτησης, εκτέθηκαν στην κατανόηση λογικών επιχειρημάτων και ένιωσαν την ευχαρίστηση της ανάγνωσης και επεξεργασίας μιας πρωτότυπης πηγής.
- Οι Laubenbacher και Pengelley το 1996 περιέγραψαν μια παρόμοια προσπάθεια με φοιτητές που διάβασαν και επεξεργάστηκαν πηγές από το πρωτότυπο κείμενο, χωρίς τη μεσολάβηση καμιάς σύγχρονης ερμηνείας τους. Η ευχαρίστηση που παρατήρησαν στους φοιτητές ήταν μεγάλη, ειδικά όταν αυτοί διάβαζαν το πρωτότυπο κείμενο που αφορούσε μια νέα μαθηματική ανακάλυψη (Laubenbacher, Pengelley 1996).
- Οι Θωμαΐδης και Τζανάκης το 2006 περιέγραψαν τον τρόπο που χρησιμοποίησαν αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα για να μυήσουν τους μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη. Η εκπαιδευτική αυτή παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε 10 διδακτικά δίωρα, δίνοντας στους μαθητές πρωτότυπα κείμενα (κυρίως από τα Στοιχεία του Ευκλείδη και από τα σχόλια του Πρόκλου), με τη μορφή φύλλων εργασίας και καλώντας τους να απαντήσουν σε ερωτήματα που τους έθεταν. Πέρα από τα προβλήματα ανάγνωσης και ερμηνείας των πρωτότυπων αρχαιοελληνικών κειμένων, οι ερευνητές διαπίστωσαν τη βελτίωση της κριτικής σκέψης των μαθητών (Θωμαΐδης, Τζανάκης 2006).

Γεωμετρία και Φυσική

- Οι Tzanakis και Thomaidis το 1998 (στο άρθρο «Presuppositions of a constructive role of the history of mathematics in understanding and teaching mathematics», *Luminy “Reader”*) ασχολήθηκαν με τη σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής, αναφέροντας και συγκεκριμένα παραδείγματα.

- Ο Tzanakis το 1999 (στο άρθρο του «Unfolding interrelations between mathematics and physics, in a presentation motivated by history: two examples», *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(1)*, σ. 103–118) έδωσε δύο παραδείγματα γενετικής προσέγγισης, που αποκαλύπτουν συσχετίσεις μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής: πρώτον, ότι ο νόμος της βαρύτητας που διατυπώθηκε από τον Νεύτωνα προέρχεται από το νόμο του Kepler και δεύτερον, ότι η θεμελίωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι μια εφαρμογή της Άλγεβρας πινάκων.

ΣΤ. Σχεδιασμός και υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων

Στη φάση αυτή οι επιμορφούμενοι θα αναλάβουν, με την υποστήριξη και των επιμορφωτών, να σχεδιάσουν διδακτικές παρεμβάσεις (συμβατές με την ηλικιακή ομάδα στην οποία διδάσκουν) και να τις εφαρμόσουν στην πράξη (μέσα στις σχολικές τάξεις των Μαθηματικών) για να διαπιστώσουν οι ίδιοι το εφικτό της διαδικασίας αφενός, και τα οφέλη από την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφετέρου.

Ο Smestad (2015), αναφερόμενος στην επιλογή (ή και τη δημιουργία) των πηγών και των πόρων γενικότερα, παραθέτει μια σειρά από κριτήρια, υπογραμμίζοντας ότι δεν είναι απαραίτητο όλοι οι πόροι να ταιριάζουν σε κάθε κριτήριο και σημειώνοντας πως οι πόροι πρέπει:

- Να περιλαμβάνουν σημαντικά μαθηματικά (τα οποία να σχετίζονται με το πρόγραμμα σπουδών).
- Να περιλαμβάνουν δραστηριότητες, εργασίες, προβλήματα, κάτι για τους μαθητές να «κάνουν».
- Να κινητοποιούν τη φαντασία και να εμπνέουν τους μαθητές να κάνουν μαθηματικά.
- Να έχουν αφήγηση μιας ιστορίας.
- Να έχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις (εικόνες, κείμενο, ήχο, βίντεο, διαδραστικότητα).
- Να παρουσιάζουν τα μαθηματικά ως ανθρώπινη προσπάθεια (για παράδειγμα να δίνουν μια πολιτιστική πτυχή).
- Να είναι εφικτοί σε ένα «εύλογο χρονικό διάστημα».
- Να αποτελούν έναυσμα για δημιουργία συζήτησης μεταξύ των μαθητών.
- Να χαρακτηρίζονται από εγκυρότητα και ακρίβεια.

Ζ. Συζήτηση των ομάδων και ανταλλαγή αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με το σχεδιασμό και την υλοποίηση διδακτικών προτάσεων.

Στο κομμάτι αυτό είναι πολύ σημαντική και πάλι η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών προκειμένου να γίνει κατανοητό πώς αντιμετωπίζονται ποικίλα μαθηματικά θέματα από τους εκπαιδευτικούς στην Πρωτοβάθμια και πώς στη Δευτεροβάθμια. Μια ιδιαίτερα σημαντική πτυχή θα αποτελούσε η κατάθεση εμπειριών από τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και την εφαρμογή τους στην τάξη. Μέσα από τη συζήτηση, την ανταλλαγή απόψεων, την επιχειρηματολογία, τις εικασίες, τις δοκιμές (για επιβεβαίωση τω αποτελεσμάτων) μπορούν να αναδειχθούν πραγματικά ενδιαφέροντα στοιχεία. Αυτά σχετίζονται με τυχόν δυσκολίες και εμπόδια που προέκυψαν (ή είναι πιθανό να προκύψουν) για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς κατά την υλοποίηση της διδασκαλίας στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης, αλλά και οι λόγοι στους οποίους μπορεί να οφείλονται. Επίσης, θα μπορούσαν να αναδειχθούν τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν για να παρακαμφθούν συγκεκριμένες δυσκολίες, σημεία στα οποία χρειάστηκε να γίνει διαφοροποίηση από τον αρχικό σχεδιασμό της διδασκαλίας, η αποδοχή ή όχι από τους μαθητές και οι αντιδράσεις τους.

Η. Δημιουργία ψηφιακής πλατφόρμας

Στο πλαίσιο του επιμορφωτικού προγράμματος μπορεί να δημιουργηθεί μια ψηφιακή πλατφόρμα (κατά το πρότυπο της επιμόρφωσης στις νέες τεχνολογίες), για ανάρτηση διδακτικών προτάσεων και ανταλλαγή καλών πρακτικών ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς, που θα συμμετέχουν στην επιμόρφωση, αλλά και για χρήση από την εκπαιδευτική κοινότητα γενικότερα.

Σε αυτήν οι εκπαιδευτικοί θα μπορούν να αναρτούν διδακτικές προτάσεις, οι οποίες θα έχουν εκπονηθεί κατά τη διάρκεια του προγράμματος αλλά και να βρίσκουν άλλες που έχουν εκπονηθεί στα πλαίσια της επιμόρφωσης ή στα πλαίσια προγραμμάτων μεταπτυχιακών σπουδών στον τομέα της διδακτικής των Μαθηματικών. Αυτές μπορούν να περιλαμβάνουν ολοκληρωμένα διδακτικά σενάρια, καθώς και το απαραίτητο διδακτικό υλικό (πρωτότυπες πηγές, φύλλα εργασίας, και λοιπά) για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών σε συγκεκριμένες διδακτικές ενότητες. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί θα έχουν το πλεονέκτημα της πρόσβασης σε υλικά και πόρους υψηλής ποιότητας, που θα μπορούσαν να συνοδεύονται με σχόλια τόσο από τους ιστορικούς των Μαθηματικών όσο και από τους εκπαιδευτικούς που τα χρησιμοποίησαν με τους μαθητές στην τάξη (συμπεριλαμβάνοντας και πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήθηκαν αλλά και για τα αποτελέσματα). Αυτό θα μπορούσε να διευκολύνει τους εκπαιδευτικούς και να ενισχύσει την αυτοπεποίθησή τους σχετικά με το εφικτό της διαδικασίας, αλλά και για τα οφέλη από την ενσωμάτωση της ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Στο σημείο αυτό θα κρίναμε χρήσιμο να αναφερθούμε αναλυτικότερα στο <u>Διαδίκτυο</u> και στη χρήση του ως <u>πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας</u> σχετικά με την εφαρμογή της ιστορίας στην τάξη των Μαθηματικών.

Το Διαδίκτυο αποτελεί πλέον αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και μπορεί να βοηθήσει στην ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη τόσο ως μέσο επικοινωνίας όσο και ως πηγή πληροφοριών. Για τη χρήση του ως μέσο επικοινωνίας, οι Tzanakis, Arcavi et al. (2000) αναφέρουν ένα παράδειγμα σχετικό με επιμόρφωση διορισμένων καθηγητών Μαθηματικών, σε θέματα ιστορίας των αρνητικών αριθμών, που οργάνωσε ο Zehavi το 1999 στο Ισραήλ σε συνεργασία με το Weizmann Institute. Η επιμόρφωση αυτή ξεκίνησε με μια δια ζώσης συνάντηση των συμμετεχόντων, οι οποίοι στη συνέχεια εργάστηκαν εξ αποστάσεως από το χώρο τους, μελετώντας το επιμορφωτικό υλικό, σε μορφή. υπερκειμένων (hypertexts), ανάλογα με τα ενδιαφέροντα και το διαθέσιμο χρόνο τους. Στη συνέχεια κατέγραφαν τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις που περιλαμβάνονταν στο υλικό, λάμβαναν σχόλια από τους επιμορφωτές και μετά από κάποιες μέρες οι πλήρεις απαντήσεις των ερωτήσεων αναρτιούνταν από τους διαχειριστές της ιστοσελίδας και σε αυτές είχαν πρόσβαση όλοι οι επιμορφούμενοι. Σε όλη τη διάρκεια του σεμιναρίου ένα forum ήταν διαθέσιμο για να έχουν τη δυνατότητα οι συμμετέχοντες να συζητούν διάφορα θέματα σχετικά με το εκπαιδευτικό υλικό, να ανταλλάσσουν απόψεις και να κοινοποιούν πρακτικές και θέσεις που προέκυπταν από τη χρήση του υλικού στη σχολική τάξη. Από τη συγκεκριμένη πρακτική του επιμορφωτικού αυτού προγράμματος καταγράφτηκε ένα σημαντικό πλεονέκτημα, που ήταν η δυνατότητα για πολλαπλές ανανεώσεις του εκπαιδευτικού υλικού σε όλη τη διάρκειά του, αλλά και το ξεχωριστό ενδιαφέρον που έδειξαν οι επιμορφωτές προς τις εκπαιδευτικές ανάγκες των επιμορφούμενων σε ατομικό επίπεδο.

Για τη χρήση του ως πηγή πληροφοριών, είναι πλέον ευρύτατα γνωστό ότι ο Παγκόσμιος Ιστός αποτελεί στις ημέρες μας την κεντρική πηγή άντλησης γνώσεων και πληροφοριών. Επίσης, ότι έχει φέρει επανάσταση σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους, καθώς μέσω αυτού έχουν μετατραπεί σε κινούμενα γραφικά, ήχο και βίντεο, οι στατικές παρουσιάσεις γνώσεων και πληροφοριών που δίνονταν σε ένα βιβλίο ή στον πίνακα μιας τάξης. Η σειριακή μορφή ενός τυπωμένου βιβλίου ανατρέπεται από τα υπερκείμενα, οι συνδέσμους (links) και τις επιθυμίες του αναγνώστη. Ένα θέμα, βέβαια, είναι η εγκυρότητα και η αξιοπιστία του διαδικτύου, οι οποίες τίθενται συχνά υπό αμφισβήτηση, αφού οποιοσδήποτε από οποιοδήποτε μέρος του κόσμου μπορεί να αναρτήσει και να δημοσιεύσει οτιδήποτε, σε αντίθεση με τους σοβαρούς εκδοτικούς οίκους που έχουν τον πλήρη και τον επιστημονικό έλεγχο για τα βιβλία που εκδίδουν. Ένα επιπλέον μειονέκτημά του είναι η σύντομη, πολλές φορές, ζωή κάποιων ιστοσελίδων, είτε γιατί καταργούνται από τους διαχειριστές τους είτε γιατί αλλάζουν ηλεκτρονική διεύθυνση (URL) στον Παγκόσμιο Ιστό (Van Brummelen 2000).

Σε γενικές γραμμές, σύμφωνα με την Barrow-Green (2000), υπάρχουν δώδεκα κατηγορίες ιστοσελίδων που μπορούν να ενταχθούν στις διαδικτυακές πηγές πληροφόρησης για την Ιστορία των Μαθηματικών:

1. Ιστοσελίδες γενικής ιστορίας των Μαθηματικών (General History of Mathematics Sites). Αυτές είναι ιστότοποι που χαρακτηρίζονται ως πύλες, αφού στις αρχικές σελίδες τους συχνά περιλαμβάνουν ένα σχετικά μεγάλο κατάλογο για τον τύπο των πληροφοριών που περιέχονται σε άλλες σελίδες του ιστότοπου.
2. Πηγές πληροφοριών από τον Παγκόσμιο Ιστό (Web Resources). Πολλοί ιστότοποι περιέχουν σελίδες αφιερωμένες σε συνδέσμους που κατευθύνουν σε άλλες σχετικές σελίδες, παρόλο που δεν παρέχουν ενδείξεις σχετικά με το είδος και τον τύπο των πληροφοριών που δημοσιεύουν.
3. Βιογραφίες (Biography). Στο διαδίκτυο υπάρχει άφθονο υλικό που αναφέρεται στη ζωή μεγάλων μαθηματικών και προσφέρει ένα ευρύ φάσμα από βιογραφικό υλικό και από πληροφορίες, διαθέτοντας και αρκετούς συνδέσμους για σύνδεση και με άλλες

σχετικές ιστοσελίδες.
4. Περιφερειακά Μαθηματικά (Regional Mathematics). Υπάρχουν πολλές τοποθεσίες που αναφέρονται στα Μαθηματικά που δημιουργήθηκαν από αρχαίους κυρίως λαούς και πολιτισμούς. Επίσης, αρκετές ιστοσελίδες γενικής ιστορίας των Μαθηματικών και πληροφορίες για τα «Περιφερειακά Μαθηματικά». Ο όρος αναφέρεται στις διάσπαρτες μαθηματικές παραδόσεις παλαιότερων εποχών που αναπτύχθηκαν απομονωμένα, σε αντίθεση με τα σύγχρονα Μαθηματικά που είναι διεθνή, ομογενοποιημένα και κατανοούνται παντού με τον ίδιο τρόπο.
5. Διαδικτυακά εκθέματα (Web Exhibits). Πρόκειται για ιστότοπους που περιλαμβάνουν εκθέματα από συσκευές, μηχανικά εργαλεία και λοιπά, τα οποία με τη βοήθεια ενισχυμένων προγραμμάτων περιήγησης και κατάλληλων λογισμικών παρουσιάζονται με πολύ εντυπωσιακό τρόπο, δίνοντας πολλές φορές στους διαδικτυακούς επισκέπτες την αίσθηση της φυσικής παρουσίας (σαν να επισκέπτονται ένα πραγματικό μουσείο).
6. Ηλεκτρονικά βιβλία (Books on-line). Τα ηλεκτρονικά κείμενα διατίθενται σε δύο μορφές: ακριβή αντίγραφα των πρωτότυπων κειμένων (τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα αν το κείμενο είναι δύσκολο να αποδοθεί) και αντίγραφα κειμένων που έχουν μεταφραστεί ή/και σχολιαστεί προκειμένου να αυξηθεί ο βαθμός προσβασιμότητας για τον αναγνώστη.
7. Παρουσιάσεις μαθητών (Student Presentations). Οι παρουσιάσεις των μαθητών (ή των σπουδαστών) τα τελευταία χρόνια γίνονται πλέον όλο και περισσότερες και συχνότερες, καθώς τους δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιούν το διαδίκτυο για την άντληση πληροφοριών σχετικών με τις εργασίες τους, αλλά και για την παρουσίαση του έργου τους. Ένα σημαντικό, επίσης, πλεονέκτημα της παρουσίασης στο διαδίκτυο είναι ότι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μοιραστούν τους καρπούς των εργασιών τους με άλλους, αλλά και να λάβουν ανατροφοδότηση.
8. Βιβλιογραφία (Bibliography). Αυτοί οι ιστότοποι περιέχουν καταλόγους δημοσιευμένων βιβλίων ή/και επιστημονικών άρθρων που σχετίζονται με την ιστορία των Μαθηματικών και τη χρήση της στην εκπαίδευση.
9. Επιστημονικές Κοινότητες (Societies). Οι περισσότεροι επιστημονικοί κλάδοι έχουν επιστημονικές εταιρείες και κοινότητες που ενισχύουν τη διάδοσή τους και την υλοποίηση των στόχων τους. Πολλές μαθηματικές εταιρείες σε όλο τον κόσμο προσφέρουν υλικό από την Ιστορία των Μαθηματικών και προωθούν ενεργά τη χρήση της σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης.
10. Ιστορία των Υπολογισμών (History of Computing). Αρκετοί ιστότοποι παρέχουν πληροφορίες για υπολογιστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν από αρχαίους λαούς και αρχαίους πολιτισμούς, αλλά και από παλαιότερους μαθηματικούς.
11. Εκπαίδευση (Education). Μερικές από τις πιο ενδιαφέρουσες τοποθεσίες δημιουργήθηκαν κυρίως από εκπαιδευτικούς με ενδιαφέρον για την Ιστορία των Μαθηματικών και την εκπαιδευτική αξιοποίηση των υπολογιστών, για την υποστήριξη της διδασκαλίας.
12. Διάφοροι άλλοι ιστότοποι (Miscellaneous). Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται διάφορες άλλες τοποθεσίες που δεν εμπίπτουν σε καμιά από τις προηγούμενες

κατηγορίες, αλλά η θεματολογία τους παρουσιάζει χρησιμότητα και ενδιαφέρον (όπως για παράδειγμα η χρήση των μαθηματικών συμβόλων ή των μαθηματικών λέξεων).

Θ. Αξιολόγηση του προγράμματος από τους συμμετέχοντες και προτάσεις για πιθανές βελτιώσεις.

Με την ολοκλήρωση του προγράμματος οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν αλλά και οι επιμορφωτές θα έχουν την ευκαιρία μέσα από τη συμπλήρωση ερωτηματολογίου να αποτυπώσουν τις απόψεις τους από τη συμμετοχή τους στη διαδικασία της επιμόρφωσης. Ακόμα, να καταγράψουν τις προτάσεις τους για βελτίωση του προγράμματος καθώς και τις εμπειρίες τους από τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και την εφαρμογή τους στην τάξη. Από όλο αυτό το υλικό είναι δυνατό να αναδειχθεί πληθώρα στοιχείων για περαιτέρω έρευνα που συνδέονται με διάφορες παραμέτρους. Ενδεικτικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την τυχόν αλλαγή στις πεποιθήσεις και στη στάση των εκπαιδευτικών μέσα από την υλοποίηση των διδακτικών τους προτάσεων, παραμέτρους που προέκυψαν στην πράξη ενώ δεν είχαν προβλεφθεί, την ενεργοποίηση και τη συμμετοχή των μαθητών και άλλα.

3.2.3. Προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε **να παραθέσουμε ενδεικτικά κάποιες διδακτικές προτάσεις** ανάλογες με αυτές που οι συμμετέχοντες στην επιμόρφωση θα μπορούσαν να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν κατά τη διάρκεια του εν λόγω προγράμματος. Η πρόκληση για τη δημιουργία αυτών των διδακτικών προτάσεων προέκυψε από το γεγονός ότι η έρευνα για την Ιστορία των Μαθηματικών στην εκπαίδευση τείνει να έχει κατά νου τους μεγαλύτερους μαθητές και διαπιστώνουμε ότι παρατηρείται έλλειμμα τόσο στην έρευνα όσο και στους πόρους σχετικά με τον τρόπο που μπορεί να συμπεριλάβει κανείς μια ιστορική προοπτική όταν διδάσκει σε μαθητές μικρότερων ηλικιών, όπως οι μαθητές του Δημοτικού. Το σκεπτικό μας για τη σύνταξή τους ήταν να απευθύνονται σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, εστιάζοντας αφενός στο εφικτό του εγχειρήματος στις μικρότερες ηλικίες και αφετέρου στο κρίσιμο ζήτημα της μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Αξίζει να επισημάνουμε, επίσης, ότι **πέρα από τους επιμέρους διδακτικούς στόχους**, όπως αυτοί αναφέρονται στο αναλυτικό πρόγραμμα και στα βιβλία των εκπαιδευτικών, **θα θέλαμε να εστιάσουμε**:

- κυρίως στη στάση των παιδιών, προκειμένου να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους.
- στη διαπίστωση από τους μαθητές ότι τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης (τόσο με τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων όσο και με τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού) παρέχουν μεγάλη ευελιξία και απελευθέρωση στη μαθηματική σκέψη.
- στη δυνατότητα να αντιληφθούν τα παιδιά το ιστορικό, κοινωνικό και γεωγραφικό πλαίσιο μέσα στο οποίο γεννήθηκαν και εξελίχθηκαν κάποια

μαθηματικά επιτεύγματα και να πληροφορηθούν για τις προσπάθειες που κατέβαλαν αυτοί που πρώτοι διατύπωσαν μια ιδέα.

Α. Η πρώτη πρότασή μας για διδακτική παρέμβαση απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ τάξης και αφορά στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού.

Η εμπειρία μας από τα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης αναδεικνύει την έλλειψη της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Σκεφτήκαμε λοιπόν ότι θα βοηθούσε, προς την κατεύθυνση της ενημέρωσης των εκπαιδευτικών, αλλά και της ενεργοποίησής τους, να προτείνουμε να ασχοληθούν με συγκεκριμένα άρθρα από την προτεινόμενη βιβλιογραφία, προκειμένου να ενημερωθούν μέσω αυτής και να προβληματιστούν σχετικά με τρόπους αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσε ένας/μία εκπαιδευτικός που διδάσκει στην **Γ΄ τάξη** Δημοτικού να αναλάβει να ασχοληθεί με το άρθρο:

Βερυκάκη, Κ. & Καστάνης, Ν. (2006). Εννοιολογικές αλλαγές: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση* (σσ. 213–232). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Το εν λόγω άρθρο ασχολείται, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με τις εννοιολογικές αλλαγές στα μαθηματικά, εστιάζοντας στο παράδειγμα της διερεύνησης των εννοιολογικών αλλαγών της έννοιας του αριθμού. Ειδικότερα μέσα στο άρθρο προσδιορίζεται η έννοια του όρου εννοιολογική αλλαγή και ο τρόπος με τον οποίο αυτός χρησιμοποιείται στο χώρο της διδακτικής ανάλυσης, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στις δύο κύριες όψεις των εννοιολογικών αλλαγών: α) πώς οι νέες επιστημονικές γνώσεις προσλαμβάνονται από τους μαθητές – διάκριση ειδών μάθησης και β) πώς γίνεται η αντικατάσταση των επιστημονικών θεωριών – ανάλυση επιστημονικών αλλαγών. Επίσης, επισημαίνεται ότι με την ανάδειξη των εννοιολογικών αλλαγών μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών παρέχονται σημαντικές πληροφορίες για τα ιστορικά γεγονότα, για τα προβλήματα και κυρίως για τις ανάγκες, τις συνθήκες και τα αίτια που τα δημιούργησαν. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός μπορούν να αντιληφθούν τη φύση των Μαθηματικών, τα οποία δεν προκύπτουν ως προϊόντα παρατήρησης, όπως οι Φυσικές Επιστήμες, αλλά κατασκευάζονται για να επιλυθούν συγκεκριμένα προβλήματα και να ξεπεραστούν συγκεκριμένα εμπόδια. Ακόμα, επισημαίνεται ότι με τη χρήση τέτοιων ιστορικών παραδειγμάτων τα Μαθηματικά γίνονται πιο ευχάριστα για τους μαθητές και λειτουργούν ως κίνητρο για την πραγματοποίηση των δικών τους εννοιολογικών αλλαγών, γνωρίζοντας τις αντίστοιχες εννοιολογικές αλλαγές που έχουν συμβεί στην ιστορία.

Επιπλέον, γίνεται αναφορά στον τρόπο που αναδύθηκε η ιδέα των εννοιολογικών αλλαγών μέσα στις επιστήμες και χρησιμοποιείται ως παράδειγμα εννοιολογικής αλλαγής στην Ιστορία των Μαθηματικών η διερεύνηση της έννοιας του αριθμού, που έχει τον πιο κεντρικό και πιο σημαντικό ρόλο στα Μαθηματικά. Έτσι, σκιαγραφώντας αυτές τις εννοιολογικές αλλαγές αναφέρεται ότι από την 4η χιλιετία π.Χ. εμφανίζονται αναπαραστάσεις αριθμών και υπολογιστικών διαδικασιών με τις πρώτες προσπάθειες γραφής, η οποία εμφανίστηκε ως αποτέλεσμα της ανάγκης για καταγραφή αριθμητικών δεδομένων. Στη συνέχεια περνάμε στον 4ο και 5ο αιώνα π.Χ. οπότε και έγινε η πρώτη υπέρβαση μέσα από τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, καθώς ο αριθμός συνυφάνθηκε με την ισότητα και αναπτύχθηκε ο θεωρητικός τρόπος σκέψης, προκαλώντας την «πρώτη μαθηματική επανάσταση». Αργότερα με τις επιδράσεις που προκλήθηκαν από διάφορες φάσεις των ιστορικών εξελίξεων και με την πρόοδο της μαθηματικής επιστήμης μέχρι το τέλος του 16ου αι. μ.Χ. «ο αριθμός από συλλογή μονάδων έγινε το αποτέλεσμα μέτρησης» και ως τα μέσα του 19ου αι. μ.Χ. διαμορφώθηκε «εννοιολογικά ως ένα εκπεφρασμένο στοιχείο ενός συστήματος αριθμητικών πράξεων».

Με αφορμή το περιεχόμενο του προαναφερθέντος άρθρου, θα προτείναμε στον/στην συγκεκριμένο/η εκπαιδευτικό η εργασία 3 (σελ. 43), στο κεφάλαιο 14 της 3^{ης} ενότητας του βιβλίου των Μαθηματικών της Γ΄ Δημοτικού, όπου παρουσιάζεται το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, να χρησιμοποιηθεί ως έναυσμα για να γίνει αναφορά στους παλαιότερους τρόπους γραφής των αριθμών (βλ. παράρτημα Γ, εικ. 11).
Οι μαθητές μπορούν, με την κατάλληλη καθοδήγηση, να παρατηρήσουν ότι στο συγκεκριμένο σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιούνταν γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Μπορούν, επίσης, να παρατηρήσουν ότι εκτός από τα σύμβολα των αριθμών 1, 10, 100, 1000, υπάρχουν και σύμβολα για τους αριθμούς 5, 50, 500. Μετά από συζήτηση και προσπάθειες γραφής τετραψήφιων αριθμών μπορούν να συμπεράνουν ότι αυτό γινόταν για να αποφεύγεται η μεγάλη επανάληψη των συμβόλων. Τα παιδιά μπορούν, ακόμα, να αναζητήσουν (σε συνεργασία και με τον/την εκπαιδευτικό της Πληροφορικής) πληροφορίες στο διαδίκτυο για παλαιότερους τρόπους γραφής των αριθμών και να οδηγηθούν μέσω αυτών στη διαπίστωση ότι τα αριθμητικά σύμβολα, τα οποία χρησιμοποιούμε και μαθαίνουμε να γράφουμε από την Α΄ Δημοτικού για να γράφουμε τους αριθμούς και να κάνουμε τις πράξεις, κρύβουν μέσα τους μια ιστορία χιλιάδων αιώνων. Επιπλέον, ότι όλοι οι αρχαίοι λαοί, Μάγιας, Ινδοί, Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι, Έλληνες, Ρωμαίοι είχαν τα δικά τους συστήματα αρίθμησης, χρησιμοποίησαν σύμβολα για να απεικονίσουν αριθμούς και να λύσουν τα καθημερινά προβλήματα υπολογισμών και ότι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα προέρχονται από τους Άραβες οι οποίοι τους εξέλιξαν, αφού τους πήραν από τους Ινδούς.
Μπορούμε, ακόμα, σε συνδυασμό και με το κεφάλαιο 40 της 7ης ενότητας του βιβλίου των Μαθηματικών της Γ΄ Δημοτικού, όπου παρουσιάζεται το αρχαιοελληνικό σύστημα γραφής των αριθμών (βλ. παράρτημα Γ, εικ. 14) να προτείνουμε να χωριστούν τα παιδιά σε ομάδες και, σε μια διαθεματική προσέγγιση με το μάθημα της Ιστορίας, να δημιουργήσουν δικούς τους διαλόγους και να παραστήσουν τους καταγραφείς στα λιμάνια των αρχαίων λαών της Μεσογείου, οι οποίοι θα πρέπει να καταγράφουν τα φορτία (κρασί, λάδι, σιτηρά) που θα φορτώνονταν στα πλοία της εποχής, χρησιμοποιώντας το αρχαιοελληνικό και το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουν να συγκρίνουν αυτά τα συστήματα γραφής των

αριθμών και να διαπιστώσουν και τα μειονεκτήματα που αυτά παρουσιάζουν σε σχέση με το αραβικό σύστημα που εμείς χρησιμοποιούμε (πολλά σύμβολα, απουσία μηδενός).

Με την προσέγγιση αυτή θεωρούμε ότι μέσα από απλές δραστηριότητες μπορεί αφενός να υπάρξει κινητοποίηση του/της εκπαιδευτικού προς την κατεύθυνση της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, αφετέρου δε οι μαθητές μπορούν να εισαχθούν στην κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών με έναν απλό αλλά ενδιαφέροντα και ελκυστικό τρόπο, που προσθέτει λίγο «αλατοπίπερο» (Jankvist, 2009) στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε επιπλέον να υπογραμμίσουμε ότι όσες φορές προσπαθήσαμε να συνδέσουμε τα Μαθηματικά με κάποιες ιστορικές αναφορές σχετικά με την εξέλιξή τους ή με τους τρόπους που αυτά χρησιμοποιήθηκαν από διάφορους λαούς, οι μαθητές μας, αν και παιδιά Δημοτικού, έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος με τη Φαίδρα, μαθήτριά μας της Γ΄ Δημοτικού, που σημειώνουμε παρακάτω:

- Κυρία, εμένα πολύ μ' αρέσουν τα Μαθηματικά έτσι!
- Δηλαδή, πώς έτσι Φαίδρα;
- Να, έτσι με ιστορίες!

Τα επιθυμητά αποτελέσματα σε αυτό το ηλικιακό επίπεδο έχουν να κάνουν κυρίως με τη στάση των παιδιών, καθώς θέλουμε να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους. Φυσικά, υπάρχουν εμπόδια τόσο από την πλευρά της εύρεσης πόρων όσο και από την πλευρά των εκπαιδευτικών με το σκεπτικό ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα πάρει χρόνο από τα ίδια τα Μαθηματικά. Επιπλέον, ποτέ δεν θα μπορέσουμε να αποδείξουμε πέραν πάσης αμφιβολίας ότι η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τα παιδιά έχει θετικά αποτελέσματα, καθώς αυτή θα αποτελεί πάντα ένα από τα πολλά στοιχεία που ένας δάσκαλος χρησιμοποιεί ταυτόχρονα για να προσελκύσει τους μαθητές του. Για τον δάσκαλο, ωστόσο, τέτοια αποδεικτικά στοιχεία δεν είναι απαραίτητα, αφού είναι αρκετό να βλέπει απλά τους μαθητές να κινητοποιούνται και να συμμετέχουν.

Β. Η δεύτερη διδακτική μας πρόταση απευθύνεται σε μαθητές της **ΣΤ΄ τάξης** (ή της Α΄ Γυμνασίου, πιθανόν με κάποιες τροποποιήσεις) και αφορά το κεφάλαιο με τις εξισώσεις.

Όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.1., στο εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης και πιο συγκεκριμένα στην αρχή της θεματικής ενότητας που αφορά τις εξισώσεις, συναντούμε ένα ιστορικό σημείωμα με αναφορές για τους κατοίκους Μεσοποταμίας και για προβλήματα σε πήλινες πλάκες (βλ. παράρτημα Γ, εικ. 2). Σε αυτό περιλαμβάνεται το παρακάτω πρόβλημα:

> Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας; (σελ. 60).

Στη διατύπωση του προβλήματος είναι φανερό ότι δεν περιλαμβάνεται ένα κρίσιμο δεδομένο. Δεν αναφέρεται πουθενά ποιο ήταν το τελικό βάρος της πέτρας όταν αυτή ζυγίστηκε μετά από τις διαδοχικές προσθαφαιρέσεις. Η απουσία αυτού του στοιχείου θα οδηγήσει σε αδιέξοδο κάθε προσπάθεια επίλυσης από τους μαθητές.

Από τον Θωμαΐδη (2015) αναφέρεται ότι το εν λόγω πρόβλημα, όπως εμφανίζεται στην πρωτότυπη Βαβυλωνιακή πινακίδα (κωδικός αριθμός YBC 4652), δίνει το τελικό βάρος (1 ma-na), αλλά και την απάντηση για το αρχικό βάρος της πέτρας (1, 9 $\frac{1}{2}$ gin και 2 $\frac{1}{2}$ se), χωρίς κανενός είδους αναφορά για τον τρόπο επίλυσης. Αυτό υποδηλώνει ότι το πρόβλημα, το οποίο εμφανίζεται σε μία πινακίδα που χρονολογείται την περίοδο 1800-1600 π.Χ. (και όχι την προϊστορική 8η χιλιετία π.Χ., όπως αφήνει να εννοηθεί το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου), δεν είχε κάποιο πρακτικό περιεχόμενο, αλλά αποτελούσε, κατά πάσα πιθανότητα, κάποια άσκηση των σχολών εκπαίδευσης των Βαβυλώνιων γραφέων. Το ma-na ήταν μια μονάδα μέτρησης του εξηκονταδικού συστήματος, που υποδιαιρούνταν σε 60 gin και κάθε gin σε 180 se.

Δηλαδή: 1 ma-na =60 gin=10800 se

➢ Αν επιχειρούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα με χρήση άγνωστου και εξίσωσης (μια μορφή επίλυσης που σε καμιά περίπτωση, βέβαια, δεν θα μπορούσε να δοθεί από τους Βαβυλώνιους) θα ακολουθούσαμε την παρακάτω διαδρομή:

Βρήκα μια πέτρα	Έστω χ το βάρος της πέτρας
Αφαίρεσα το ένα έβδομο	$x-\frac{1}{7}x=\frac{6}{7}x$
Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο	$\frac{6}{7}x+\frac{1}{11}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{12}{11}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{72}{77}x$
Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο	$\frac{72}{77}x-\frac{1}{13}\cdot\frac{72}{77}x=\frac{12}{13}\cdot\frac{72}{77}x=\frac{864}{1001}x$
$\frac{864}{1001}x=1ma-na\Rightarrow x=\frac{1001}{864}ma-na$	

Αν στη συνέχεια εκφράσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τις υποδιαιρέσεις της βασικής μονάδας ma-na, θα διαπιστώσουμε ότι αυτό συμπίπτει ακριβώς με την απάντηση που δίνεται στην πρωτότυπη Βαβυλωνιακή πινακίδα.

$$\begin{aligned}\frac{1001}{864}ma-na&=\frac{1001}{864}\cdot 10800se=12512\frac{1}{2}se\\&=10800se+1620se+90se+2\frac{1}{2}se\\&=1ma-na+9\frac{1}{2}gin+2\frac{1}{2}se\end{aligned}$$

Επιπλέον, από το αποτέλεσμα διευκρινίζεται και η ασάφεια που υπάρχει στη διατύπωση του προβλήματος, καθώς επιβεβαιώνεται ότι η πρόσθεση του ενός ενδεκάτου και η αφαίρεση του ενός δέκατου τρίτου αναφέρονται κάθε φορά στο υπόλοιπο του βάρους της πέτρας και όχι στο αρχικό.

➢ <u>Ένας άλλος αριθμητικός τρόπος επίλυσης</u> που χρησιμοποιεί το λογισμό των κοινών κλασμάτων θα μπορούσε να είναι ο παρακάτω:

$$1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$
$$\frac{6}{7}+\frac{1}{11}\times\frac{6}{7}=\frac{12}{11}\times\frac{6}{7}=\frac{72}{77}$$
$$\frac{72}{77}-\frac{1}{13}\times\frac{72}{77}=\frac{12}{13}\times\frac{72}{77}=\frac{864}{1001}$$

Συνεχίζοντας με αναγωγή στη μονάδα, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι αφού τα $\frac{864}{1001}$ της πέτρας ζυγίζουν 1 ma-na τότε το $\frac{1}{1001}$ της πέτρας θα ζυγίζει $\frac{1}{864}$ του $\mathrm{ma-na}$. Επομένως ολόκληρη η πέτρα (με χρήση των υποδιαιρέσεων της βασικής μονάδας ma-na, όπως και παραπάνω) θα ζυγίζει:

$$\frac{1001}{864}ma-na=1ma-na+9\frac{1}{2}gin+2\frac{1}{2}se$$

<u>Χρησιμοποιώντας μια πιο συμπαγή αλγεβρική μορφή έχουμε έναν διαφορετικό τρόπο επίλυσης</u> του αυτού του προβλήματος που μπορεί να εκφραστεί με μια μοναδική εξίσωση, στην οποία καταλήγουμε ακολουθώντας την παρακάτω διαδρομή:

Βρήκα μια πέτρα	Έστω χ το βάρος της πέτρας
Αφαίρεσα το ένα έβδομο	$x-\frac{1}{7}x$
Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο	$+\frac{1}{11}\left(x-\frac{1}{7}x\right)$
Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο	$-\frac{1}{13}\left[x-\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}\left(x-\frac{1}{7}x\right)\right]$
$x-\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}\left(x-\frac{1}{7}x\right)-\frac{1}{13}\left[x-\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}\left(x-\frac{1}{7}x\right)\right]=1$	

Η συγκεκριμένη εξίσωση παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον από διδακτικής πλευράς, σίγουρα όμως δεν μπορεί να αξιοποιηθεί για τους μαθητές του Δημοτικού. Η αλγεβρική αυτή λύση αποτελεί μια αναδιατύπωση της προηγούμενης αριθμητικής λύσης, χρησιμοποιώντας τον άγνωστο και τα ισχυρά εργαλεία της αναλυτικής μεθόδου.

➢ <u>Μια ακόμα λύση</u>, η οποία θα μπορούσε να δοθεί και με τα μέσα που διέθεταν οι Βαβυλώνιοι γραφείς, στηρίζεται στη χρήση βοηθητικών μονάδων και ακολουθεί μια αναδρομική πορεία επίλυσης. Η μέθοδος αυτή ακολουθεί τη <u>ρητορική μορφή</u>, η οποία αποτελούσε και το βασικό όργανο έκφρασης για τους Βαβυλώνιους γραφείς του 17ου αιώνα π.Χ.
Ακολουθώντας ανάλογη μέθοδο, μια πρώτη βοηθητική μονάδα (την ονομάζουμε Α), που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το μέρος της πέτρας που μένει μετά από την αφαίρεση του ενός εβδόμου της και την πρόσθεση του ενός ενδέκατου από

το υπόλοιπό της. Επομένως το τελευταίο κομμάτι της εκφώνησης αποδίδεται με την αφαίρεση από τη μονάδα Α του ενός δέκατου τρίτου της. Άρα τα δώδεκα δέκατα τρίτα που μένουν από την Α ζυγίζουν (σύμφωνα με το πρόβλημα) 1 ma-na. Με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι το ένα δέκατο τρίτο της Α ζυγίζει ένα δωδέκατο του ma-na. Η μονάδα Α, δηλαδή, ζυγίζει δεκατρία δωδέκατα του ma-na, πράγμα που σημαίνει πως χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις υποδιαιρέσεις του ma-na καταλήγουμε στην ισότητα: Α = 65 gin = 11700 se.
Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια δεύτερη βοηθητική μονάδα (την ονομάζουμε Β), που θα αντιπροσωπεύει το υπόλοιπο κομμάτι της πέτρας μετά την αφαίρεση του ενός εβδόμου της. Συνεπώς, το τρίτο μέρος της εκφώνησης μπορεί να αποδοθεί με την πρόσθεση στη μονάδα Β του ενός ενδεκάτου της, άρα στη δημιουργία της μονάδας Α, που όπως είδαμε παραπάνω ζυγίζει 11700 se. Τα δώδεκα ενδέκατα της μονάδας Β, δηλαδή, ζυγίζουν 11700 se, άρα το ένα ενδέκατο ζυγίζει 975 se και η μονάδα Β είναι ίση με 10725 se. Η πέτρα, επομένως, αφού αφαιρεθεί το ένα έβδομό της (τα έξι έβδομά της δηλαδή) ζυγίζει 10725 se, το ένα έβδομό της θα ζυγίζει 1785,5 se και ολόκληρη η πέτρα 12512,5 se, τιμή που, όπως είδαμε και παραπάνω, συμπίπτει με την απάντηση που δίνεται στην πινακίδα.
Συγκρίνοντας τις λύσεις που έχουν προαναφερθεί διαπιστώνουμε πόσο μεγάλη ευελιξία και απελευθέρωση παρέχουν στη μαθηματική σκέψη τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης τόσο με τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων όσο και με τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού.

Με έναυσμα όσα παραπάνω αναφέρθηκαν για το συγκεκριμένο πρόβλημα και τους διάφορους τρόπους επίλυσης, σκεφτήκαμε ότι αυτό θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά σε μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού κατά τη διδασκαλία της ενότητας που αφορά τις εξισώσεις. Ξεκινώντας από τις ιστορικές αναφορές του εν λόγω ιστορικού σημειώματος και σε συνεργασία με τον/την εκπαιδευτικό της πληροφορικής, οι μαθητές αναζητούν στο διαδίκτυο πληροφορίες για τους Βαβυλώνιους, την περιοχή που έζησαν, τον πολιτισμό που δημιούργησαν και την ανάπτυξη των Μαθηματικών. Μέσα από την ενασχόληση με αυτό το υλικό εστιάζουμε στις Βαβυλωνιακές πινακίδες και όσα αυτές μας μεταφέρουν από εκείνη τη μακρινή εποχή, ώστε τα παιδιά να κινητοποιηθούν περισσότερο και να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον τους. Έτσι, με μια τροποποίηση του προβλήματος προκειμένου αυτό να παρουσιαστεί σε μια πιο απλή εκδοχή (ανάλογη με την ηλικία των μαθητών στους οποίους απευθύνεται) και χρησιμοποιώντας σύγχρονη μονάδα βάρους (με την οποία είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές), το πρόβλημα μπορεί να έχει τη διατύπωση που ακολουθεί:

> Βρήκα μια πέτρα και χωρίς να τη ζυγίσω αφαίρεσα το ένα έβδομο. Μετά τη ζύγισα και το βάρος της ήταν πέντε κιλά. Πόσο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;

Ακολουθώντας το σκεπτικό των προηγούμενων τρόπων επίλυσης, προσαρμοσμένο στις δυνατότητες των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού, μπορούμε να παροτρύνουμε τα παιδιά να ασχοληθούν με τις παρακάτω λύσεις του προβλήματος:

- Α΄ τρόπος επίλυσης (με χρήση αγνώστου και εξίσωσης):

Βρήκα μια πέτρα	Έστω χ το βάρος της πέτρας
Αφαίρεσα το ένα έβδομο	$x - \frac{1}{7}x$
Μετά τη ζύγισα και είχε βάρος 5 κιλά	$x - \frac{1}{7}x = 5$

Συνεχίζοντας με την επίλυση της εξίσωσης, έχουμε:

$$\chi - \frac{1}{7}\chi = 5$$
$$\frac{7}{7}\chi - \frac{1}{7}\chi = 5$$
$$\frac{6}{7}\chi = 5 \; \kappa\alpha\iota \; 6\chi = 35$$

Επομένως: $\chi = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ κιλά ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας

- Β΄ τρόπος επίλυσης (με χρήση βοηθητικής μονάδας – ρητορική μορφή):

Ονομάζουμε Α το τελικό βάρος της πέτρας. Αυτό προέκυψε από την αφαίρεση του ενός εβδόμου από το αρχικό της βάρος. Άρα: το Α είναι ίσο με τα 6/7 του αρχικού βάρους. Από το πρόβλημα γνωρίζουμε ότι το τελικό βάρος της πέτρας ήταν 5 κιλά. Επομένως το Α ζυγίζει 5 κιλά. Χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα στοιχεία έχουμε τα 6/7 του αρχικού βάρους να ζυγίζουν 5 κιλά. Με μια αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε πως το 1/7 του βάρους της πέτρας είναι ίσο με 5/6 του κιλού και εύκολα υπολογίζουμε ότι τα 7/7 (ολόκληρη η πέτρα) είχε αρχικό βάρος 5και 5/6 κιλά.
Οι μαθητές, για την υλοποίηση την εν λόγω παρέμβασης, θα εργαστούν σε ομάδες, ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα Ε, ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1).

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση εξυπηρετεί δύο πολύ σημαντικά και κρίσιμα ζητήματα: αυτό της μετάβασης των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, αλλά και του περάσματος από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Παρά τις όποιες επιφυλάξεις μπορεί να διατυπωθούν σχετικά με την πληθώρα της ύλης, την έλλειψη χρόνου και πόρων, αξίζει να επενδύσουμε μέσω της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών γιατί τα οφέλη είναι μακροπρόθεσμα, αφού οι μαθητές κινητοποιούνται, αποκτώντας μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, αλλά τίθενται και κάποια σπέρματα προβληματισμού για τη συλλογιστική και τη χρησιμότητα της άλγεβρας. Επίσης, μέσα από τη συζήτηση των ομάδων σχετικά με τη σύγκριση των τρόπων επίλυσης, μπορεί να αναδειχθεί η μεγάλη απελευθέρωση και ευελιξία που τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης παρέχουν στη μαθηματική σκέψη (είτε αυτά αφορούν τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων είτε τη μεθοδολογία και τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού).

Γ. Η τρίτη πρότασή μας απευθύνεται σε μαθητές της **Α΄ Γυμνασίου** και αφορά τα βιογραφικά στοιχεία για τον Gauss.

Στο βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου είδαμε ότι περιλαμβάνεται ένα ιστορικό σημείωμα με βιογραφικά στοιχεία για τον Carl Friedrich Gauss (βλ. παράρτημα Δ, εικ. 1β), το οποίο ήδη σχολιάστηκε στην παρούσα εργασία (ενότητα 2.3.3.). Με αφορμή το συγκεκριμένο ιστορικό σημείωμα θα μπορούσαμε να προτείνουμε να ασχοληθούν οι μαθητές με το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών» της Margaret Tent, που κυκλοφορεί μεταφρασμένο στην ελληνική γλώσσα από τις εκδόσεις «Τραυλός», συνδέοντας έτσι τα Μαθηματικά με τη Λογοτεχνία.

Οι πληροφορίες για τη ζωή του Carl Friedrich Gauss προέρχονται κυρίως μέσα από διάσπαρτες εξιστορήσεις αρκετές από τις οποίες περιβάλλονται από το μανδύα του μύθου. Ίσως όχι άδικα, αφού πρόκειται για μια από τις μεγαλύτερες προσωπικότητες στο μαθηματικό χώρο. Ιδιαίτερα, τα επιτεύγματα της παιδικής του ηλικίας, τον χαρακτήρισαν ως παιδί θαύμα. Η Margaret B. W. Tent, μέσα από το συναρπαστικό μαθηματικό μυθιστόρημά της προσεγγίζει τουλάχιστον κατά φαντασία, μια αληθινή βιογραφία του Γκάους αναδεικνύοντας λεπτομέρειες της ζωής του που είναι συναρπαστικές. Το βιβλίο θα μπορούσε να ταυτίζεται με μια αληθινή αυτοβιογραφία, την οποία ο Γκάους δεν είχε ποτέ την ευκαιρία να γράψει, καθώς είναι ιστορικά τεκμηριωμένο, ευχάριστο, προσιτό σε όλους και μεταδίδει με μοναδικό τρόπο τη γοητεία των Μαθηματικών.

<u>Οι βιογραφίες προσωπικοτήτων που έχουν διαπρέψει στο χώρο των Μαθηματικών μπορούν να δώσουν στους μαθητές, πέρα από την αναφορά στα επιτεύγματά τους, πολλές χρήσιμες πληροφορίες μέσα από την περιγραφή των βιογραφικών τους στοιχείων. Μπορούν έτσι τα παιδιά να αντιληφθούν τα γεγονότα μέσα στο ιστορικό, κοινωνικό και γεωγραφικό πλαίσιο στο οποίο εξελίσσονται. Να καταλάβουν ποιες ήταν οι πολιτικές και κοινωνικές συνθήκες της εποχής, να συγκρίνουν τις καταστάσεις με το σήμερα, να πληροφορηθούν για τις προσπάθειες που κατέβαλαν αυτοί που πρώτοι διατύπωσαν μια ιδέα. Με τον τρόπο αυτό ίσως γίνει δυνατό να συνειδητοποιήσουν το μέγεθος και την αξία του κάθε επιτεύγματος</u>.

Οι μαθητές, αξιοποιώντας το βιβλίο, μπορούν να χωριστούν σε ομάδες και να εστιάσουν μέσα από τις ενότητές σε διαφορετικές περιόδους της ζωής του Gauss. Μπορούν έτσι να γνωρίσουν:

- τον τόπο που γεννήθηκε και μεγάλωσε,
- τα μέρη, όπου σπούδασε,
- το κοινωνικό, οικονομικό, πολιτισμικό πλαίσιο, στο οποίο έζησε
- τις προσωπικότητες που έπαιξαν σπουδαίο ρόλο και επηρέασαν άμεσα ή έμμεσα τη ζωή του από τη μικρή ηλικία μέχρι τα γεράματά του,
- τη συμβολή του στην εξέλιξη των Μαθηματικών.

Το βιβλίο μπορεί επομένως να αποτελέσει μια πολύ καλή αφορμή για ένα ενδιαφέρον ταξίδι στα Μαθηματικά αλλά και με προεκτάσεις στη Φυσική και στην Αστρονομία.

Οι μαθητές στη συνέχεια μπορούν να οργανώσουν παρουσιάσεις που θα αφορούν τις περιόδους της ζωής του Gauss (με τις οποίες ασχολήθηκαν στην ομάδα τους), με αναφορές στους τόπους και τα πρόσωπα και με συγκρίσεις που συνδέουν τα στοιχεία αυτά με το σήμερα. Ακόμα, μπορούν τα παιδιά να γράψουν δικά τους κείμενα και διαλόγους για να παρουσιάσουν μέσα από δραματοποίηση τη ζωή και τα επιτεύγματα αυτής της σπουδαίας προσωπικότητας.
Με τον τρόπο αυτό αξιοποιείται ένα ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου, προκειμένου να αναπτυχθούν κίνητρα μάθησης. Η διαφορά στην προσέγγιση αυτή είναι ότι, σε αντίθεση με το ιστορικό σημείωμα, η μαθηματική πρόοδος δεν υποδηλώνεται ως αποτέλεσμα των λίγων προικισμένων αλλά ως μια συλλογική προσπάθεια, στην οποία συνδυάζεται, τη σωστή στιγμή, αρμονικά η προσωπική ικανότητα με τα προηγούμενα επιτεύγματα της επιστημονικής κοινότητας. Έτσι, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με ιστορικά στοιχεία που αναμένεται να τους προσελκύσουν σε μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη, να τους κινητοποιήσουν και να τους ενθαρρύνουν στην αναζήτηση γνώσεων.

Ανάλογες διδακτικές παρεμβάσεις θα μπορούσαν, βέβαια, να σχεδιαστούν με αφορμή διάφορες ιστορικές αναφορές που περιλαμβάνονται στα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών, όπως ο αριθμός π, οι αρνητικοί αριθμοί, το θεώρημα του Θαλή και άλλα. Επισημαίνοντας, πάντα, ότι αυτές δεν αφορούν την ύλη των Μαθηματικών σε όλη της την έκταση αλλά γίνονται επιλεκτικά και στοχευμένα, προκειμένου να επιτευχθούν τα καλύτερα αποτελέσματα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων.

Ακολουθώντας τον Schubring et al. (2000) μπορούμε να συνοψίσουμε τους στόχους που αφορούν τη συμπερίληψη μιας ιστορικής συνιστώσας στην εκπαίδευση αλλά και στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, όπως διατυπώθηκαν και αναπτύχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες. Αυτοί αναφέρονται σε τέσσερις βασικές λειτουργίες:

- Να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν το παρελθόν των Μαθηματικών (άμεση διδασκαλία της Ιστορίας των Μαθηματικών).
- Να ενισχυθεί για τους εκπαιδευτικούς η κατανόηση των Μαθηματικών που πρόκειται να διδάξουν (μεθοδολογική και επιστημολογική λειτουργία).
- Να εξοπλιστούν οι εκπαιδευτικοί με μεθόδους και τεχνικές ενσωμάτωσης ιστορικών υλικών στη διδασκαλία τους (χρήση της ιστορίας στην τάξη).
- Να αντιληφθούν οι εκπαιδευτικοί την εξέλιξη του επαγγέλματός τους και των προγραμμάτων σπουδών (ιστορία της διδασκαλίας των Μαθηματικών).

Επιπλέον, αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι συμπεριλαμβάνοντας την Ιστορία των Μαθηματικών στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών διευρύνεται η γνώση τους για τη διδασκαλία μαθηματικών θεμάτων που συνδέονται με το εκάστοτε τρέχον πρόγραμμα σπουδών, αλλά παράλληλα ενισχύεται και η προετοιμασία τους για την αποδοχή και διαχείριση μελλοντικών αλλαγών στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Smestad, Jankvist, & Clark, 2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Συμπεράσματα – Προτάσεις

Από τα στοιχεία που παραθέσαμε στο **πρώτο κεφάλαιο**, προκύπτει ότι η ιδέα για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση αποτελεί ένα ζήτημα, που ήδη από το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, απασχολεί με συστηματικό τρόπο μαθηματικούς, ιστορικούς των Μαθηματικών και εκπαιδευτικούς. Η αξιοποίησή της στη διδασκαλία των Μαθηματικών, από τη δεκαετία του 1960 και μετά, αποτέλεσε ένα δημοφιλές αντικείμενο έρευνας για τη διδακτική τους, που οδήγησε στην παραγωγή πολλών δημοσιεύσεων σε επιστημονικά περιοδικά, σε πρακτικά συνεδρίων, σε πτυχιακές και διδακτορικές εργασίες, αναδεικνύοντας έτσι νέες θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις για το εφικτό της ενσωμάτωσης αυτής, για τα πλεονεκτήματα με τα οποία θα μπορούσε να συνεισφέρει στη διδασκαλία, αλλά και για τυχόν ενστάσεις. Σημαντικός σταθμός για την εδραίωση του ερευνητικού κλάδου που μελετά τη σύνδεση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία και μάθησή τους ήταν η ίδρυση το 1972 της Διεθνούς Ομάδας «International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics», περισσότερο γνωστής ως «HPM group», για τη μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Ανάλογες πρωτοβουλίες για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και το ρόλο της υπήρξαν και στη χώρα μας, κάτω από την επίδραση των εξελίξεων σε άλλες χώρες.

Με κυρίαρχη ιδέα τη χρήση της ιστορίας ως μέσο για να κινητοποιηθούν οι μαθητές, προκειμένου να ασχοληθούν με ορισμένες μαθηματικές έννοιες και να επιτευχθούν ποικίλοι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, αναπτύχθηκαν διάφορες απόψεις σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, τους λόγους και τους τρόπους αξιοποίησής της, αλλά και τη δυνατότητα των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά να ανταπεξέλθουν στο ρόλο αυτό.

Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αξιοποιηθεί είτε ως εργαλείο, παρέχοντας βοηθητικά μέσα στην καθημερινή διδακτική διαδικασία του μαθήματος των Μαθηματικών, είτε ως στόχος, δίνοντας έμφαση στην ανάπτυξη και εξέλιξη των Μαθηματικών ως ανεξάρτητο επιστημονικό αντικείμενο. Η ιστορική προσέγγιση συνεισφέρει στη διδασκαλία με διάφορους τρόπους: στο επίπεδο της εισαγωγής νέων μαθηματικών εννοιών, στην ανάδειξη της εσωτερικής δομής των Μαθηματικών, στην αποκάλυψη των παραγόντων, κοινωνικών και πολιτισμικών, που επηρέασαν ιστορικά την εξέλιξη και διαμόρφωση των μαθηματικών αντικειμένων, στη δημιουργία κινήτρων και θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Έτσι, τα Μαθηματικά αποκτούν μια διάσταση πιο ανθρώπινη, καθώς η εκμάθησή τους δεν περιορίζεται μόνο στη γνώση των διάφορων θεωριών και συμβόλων και στη συσσώρευση τελικών γνώσεων. Οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τα λάθη, τις αμφιβολίες και τις εικασίες ως μέρος της μαθηματικής δημιουργίας, ώστε να μην απογοητεύονται από αυτά. Μπορούν, επίσης, να αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της σύγχρονης μορφής των Μαθηματικών σε σχέση με παλαιότερες μορφές τους. Ακόμα, η ιστορική διάσταση προσφέρει στους μαθητές πολλές ευκαιρίες να γνωρίσουν τους αρχαίους πολιτισμούς και μέσα από αυτούς ποικίλες κοινωνικές δομές, τους ενθαρρύνει να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τον τρόπο που τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο διάφορων πολιτισμών μέσα στην πορεία του χρόνου, αποκαλύπτει τις συσχετίσεις μεταξύ των Μαθηματικών και των άλλων επιστημονικών περιοχών, βοηθώντας παράλληλα και στην ανάπτυξη ερευνητικών δεξιοτήτων. Από την πλευρά των εκπαιδευτικών η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στον εμπλουτισμό του διδακτικού τους ρεπερτορίου με εναλλακτικούς τρόπους για προσέγγιση και διδασκαλία ενός θέματος, στην εύρεση τρόπων για κινητοποίηση των μαθητών τους, στην πρόβλεψη και ερμηνεία των λαθών που οι μαθητές κάνουν, στον εντοπισμό τυχόν δυσκολιών και εμποδίων που μπορεί να εμφανιστούν στην τάξη, καθώς και των τρόπων με τους οποίους μπορούν αυτά να ξεπεραστούν, αλλά και στην ανακάλυψη και επιλογή αποτελεσματικών στρατηγικών διδασκαλίας, ειδικά όσον αφορά τη χρήση των μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα του μαθηματικού υλικού. Μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών, τέλος, μπορεί να γίνει κατανοητό, ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής πολιτιστικής παράδοσης (παρόλο που σήμερα θεωρούνται συχνά αποτέλεσμα του δυτικού πολιτισμού) και ότι η εξέλιξή τους συνδέεται τόσο με εσωτερικούς λόγους, διανοητικής περιέργειας και καθαρής ευχαρίστησης όσο και με πρακτικούς λόγους, εξυπηρέτησης συγκεκριμένων αναγκών (κάτω από την επίδραση συγκεκριμένων κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων).

Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας καταγράφηκε ότι για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία διατυπώθηκαν και ορισμένες αντιρρήσεις. Αυτές μπορεί να είναι φιλοσοφικού χαρακτήρα, που υποστηρίζουν πως η ιστορία δεν είναι Μαθηματικά και πως δεν υπάρχει λόγος να ασχολείται κανείς με τα περίπλοκα πράγματα που μπορεί να έγιναν στο παρελθόν. Αυτά μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση στους μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν, κυρίως σε μικρότερες ηλικίες, καλή αίσθηση του παρελθόντος, και αν η χρήση της ιστορίας δεν γίνει σωστά, μπορεί να οδηγήσει μέχρι και στην καλλιέργεια πολιτισμικού σωβινισμού. Επίσης, υπάρχουν και αντιρρήσεις καθαρά πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα, που υποστηρίζουν ότι ο χρόνος στα προγράμματα σπουδών συνήθως είναι ήδη περιορισμένος, ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση για να διαχειριστούν με αυτοπεποίθηση το εν λόγω θέμα, ότι το διαθέσιμο υλικό είναι ελάχιστο και ότι δεν υπάρχει εμπειρική τεκμηρίωση για το κατά πόσο η ιστορική διάσταση μπορεί να βελτιώσει τη διδασκαλία στο μάθημα των Μαθηματικών. Όλα αυτά δεν δημιουργούν ξεκάθαρα κίνητρα για να ωθήσουν τους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν περισσότερο, αλλά και για τους ίδιους τους μαθητές η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να θεωρείται εξίσου βαρετό μάθημα με τα Μαθηματικά και με την Ιστορία. Επιπλέον, είναι δύσκολο αυτή να ενσωματωθεί στις διαδικασίες αξιολόγησης, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει κίνητρο για τους μαθητές να ασχοληθούν, αφού δεν έχουν και το κατάλληλο υπόβαθρο για να την εκτιμήσουν.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, μπορεί να γίνει με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικού υλικού, είτε με τη μορφή συνοδευτικών σημειωμάτων είτε με τη μορφή αυτοτελών μαθημάτων. Μπορεί, επίσης, να γίνει με τη χρήση κάποιας διδακτικής προσέγγισης είτε εμπνεόμενης από την ιστορία είτε για την καλλιέργεια βαθύτερης συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' αυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους. Η εφαρμογή στη μαθηματική τάξη μπορεί να γίνει μέσω άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα, κάνοντας χρήση ιστορικών σημειωμάτων, με επισκέψεις σε μουσεία, με προβολή ταινιών, με λεπτομερώς δομημένες ερευνητικές δραστηριότητες, με τη χρήση του διαδικτύου ως πηγή πληροφόρησης, καθώς και με δραστηριότητες πιο εμπειρικές, όπως η χρήση κάποιων εργαλείων, οι θεατρικές αναπαραστάσεις ιστορικών συζητήσεων και αντιπαραθέσεων.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** ασχοληθήκαμε με την καταγραφή και την ανάλυση του υλικού που συνδέεται με την Ιστορία των Μαθηματικών και είναι διαθέσιμο στους εκπαιδευτικούς μέσα από τα Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. και τα βιβλία μαθητών και εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αναλυτικότερα, στα προγράμματα σπουδών του 2003 η διαθεματικότητα, η οποία δημιουργεί ένα νέο πλαίσιο για την Ιστορία των Μαθηματικών, φαίνεται να έχει κυρίαρχο ρόλο. Με τη διαθεματικότητα επιχειρείται το περιεχόμενο των διδασκόμενων διακριτών μαθημάτων να δομείται στη βάση μιας ισόρροπης οριζόντιας και κάθετης κατανομής της διδασκόμενης ύλης. Έτσι, προωθείται η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων που διδάσκονται σε μια τάξη και η ομαλή ροή της γνώσης από ενότητα σε ενότητα και από τάξη σε τάξη. Η διαθεματική προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συγκροτήσει ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, μια ολιστική προσέγγιση της γνώσης, μέσω της οποίας μπορεί να διαμορφώνει προσωπική άποψη αφενός για θέματα των επιστημών, τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους και αφετέρου για ζητήματα της καθημερινής ζωής. Ειδικότερα σχετικά με τα Μαθηματικά η διαθεματικότητα συμβάλλει στην κατανόησή τους, στην αλλαγή στάσης απέναντι σε αυτά και στη διευκόλυνση της χρήσης τους στην καθημερινή ζωή. Μέσα από τις απαιτήσεις της διαθεματικής προσέγγισης και τη δημιουργία διαθεματικών δραστηριοτήτων αναδεικνύεται και η ανάγκη για αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.

Επιπλέον, σύμφωνα με τα Α.Π.Σ., αμφισβητείται το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας και οι σύγχρονες αντιλήψεις θεωρούν πλέον τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το τελικό προϊόν, αλλά και τη δραστηριότητα που οδηγεί σε αυτό. Για την εφαρμογή του νέου αυτού μοντέλου κρίθηκε απαραίτητο να εισαχθούν νέοι τρόποι διδασκαλίας που εστιάζουν στη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται το προσδοκώμενο αποτέλεσμα. Το μοντέλο του διαχωρισμού και της κατάτμησης της γνώσης σε ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα χωρίς εσωτερική συνοχή έρχεται σε αντίθεση με τις σύγχρονες αρχές και προσεγγίσεις της διδακτικής. Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά τα Μαθηματικά η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που συνδέονται με τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στους μαθητές πρέπει να δίνεται η δυνατότητα για πολλαπλή προσέγγιση μιας έννοιας

μέσα από διάφορους τύπους αναπαραστάσεων, διαθεματικά ή με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών.
Μέσα από την ανάλυση των Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης **καταγράφηκαν σημεία που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών**, τα οποία εντοπίζονται στη διδακτική μεθοδολογία, στους ειδικούς σκοπούς των αναλυτικών προγραμμάτων, σε επιμέρους θεματικές ενότητες (για τις οποίες προτείνονται ενδεικτικές δραστηριότητες), σε πρόσθετα προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας για αξιοποίησή τους στη διδακτική πράξη, αλλά και στις προδιαγραφές για το απαιτούμενο διδακτικό υλικό που αφορά τα βιβλία για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς. Δίνεται λοιπόν έμφαση στην καταγραφή των μεγάλων ιστορικών στιγμών, ώστε ο μαθητής να αποκτά γνώση της γένεσης των ιδεών που καθόρισαν διαδοχικά την πορεία των Μαθηματικών, και στα ιστορικά σημειώματα, τα οποία είναι δυνατόν να εντάσσονται στο τέλος της ενότητας αλλά και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου, καθώς το σημαντικό είναι ο τρόπος που θα επιτευχθεί η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία μιας ενότητας και όχι η θέση τους. Οι πολλαπλές αναφορές των Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. στην Ιστορία των Μαθηματικών και η σύνδεση των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας με το αντίστοιχο διδακτικό εγχειρίδιο για κάθε τάξη, οδήγησαν στην **εξέταση του τρόπου με τον οποίο υλοποιήθηκαν οι προδιαγραφές των αναλυτικών προγραμμάτων μέσα στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών για εκπαιδευτικούς και μαθητές**.
Στα <u>βιβλία Μαθηματικών για εκπαιδευτικούς του Δημοτικού και του Γυμνασίου</u> διακρίνεται μια προσπάθεια για να ενταχθεί στη διδασκαλία η διαθεματικότητα και η Ιστορία των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα στα βιβλία για τους δασκάλους, που ασχολούνται με μαθητές μικρότερης ηλικίας, περιέχονται ιστορικές αναφορές λιγότερες σε αριθμό και μικρότερες σε έκταση σε σχέση με τα βιβλία για τους καθηγητές. Αυτές εντοπίζονται στο εισαγωγικό μέρος των βιβλίων και σχετίζονται με τους ειδικούς σκοπούς του προγράμματος σπουδών για το Δημοτικό, την ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης και την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών. Επίσης, υπάρχουν αναφορές στη διαθεματικότητα και στη διαθεματική προσέγγιση κάποιων ενοτήτων, καθώς και προτεινόμενες δραστηριότητες και σχέδια εργασίας που, όπως αναφέρεται στα βιβλία, μπορούν να στηρίξουν τους στόχους των μαθημάτων διαθεματικά. Από την ανάλυση των στοιχείων αυτών προέκυψε ότι οι ιστορικές αναφορές που βρίσκουμε στα βιβλία δασκάλου είναι πολύ γενικές και δεν περιλαμβάνουν επαρκείς οδηγίες και κατευθύνσεις, ώστε να παρακινηθεί ο δάσκαλος να ασχοληθεί με θέματα που άπτονται της Ιστορίας των Μαθηματικών. Προς αυτή την κατεύθυνση φαίνεται να συνηγορεί και το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση δεν έχουν κανενός είδους επιμόρφωση ούτε καν ενημέρωση για ζητήματα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.
Αναφορές για τη διαθεματικότητα και τη χρησιμότητά της σε θεωρητικό επίπεδο περιλαμβάνονται στο εισαγωγικό μέρος και των βιβλίων για τους εκπαιδευτικούς του Γυμνασίου. Επίσης, προτείνονται παραπομπές σε δικτυακούς τόπους, δραστηριότητες και σχέδια εργασίας για την υποστήριξη της διαθεματικής

προσέγγισης, καθώς και αναφορές σε ιστορικά στοιχεία. Οι οδηγίες όμως που δίνονται για την εφαρμογή στην τάξη είναι πολύ γενικές και τις περισσότερες φορές δεν βοηθούν τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι πρέπει να στηριχθούν στη δική τους κρίση και διάθεση για να αναζητήσουν πληροφορίες και υλικό για οποιαδήποτε διδακτική παρέμβαση με στόχο την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι οδηγίες να μη συμβάλλουν σε μια πλήρη και επαρκή προσέγγιση. Σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα απουσιάζουν σημαντικές διδακτικές κατευθύνσεις, ώστε να βοηθηθεί ο εκπαιδευτικός να τα ενσωματώσει στην τάξη με επιτυχία. Επιπλέον, παρουσιάζονται αρκετές ελλείψεις, αφού δεν αποσαφηνίζεται κατά πόσο θα μπορούσαν να διδαχθούν ως ανεξάρτητες ενότητες και με ποιον τρόπο οι μαθητές θα μπορούσαν να εμπλακούν ώστε να ασχοληθούν με αυτές τις δραστηριότητες. Ενώ στην περίπτωση που ενσωματώνονται στο μάθημα, δεν αποσαφηνίζεται πότε πρέπει να γίνεται η εισαγωγή τους και ποιος ο ρόλος του εκπαιδευτικού και του μαθητή κατά την ενασχόλησή τους με αυτά, πράγματα που θα εξασφάλιζαν την απαραίτητη συνοχή (την οποία επικαλείται το αναλυτικό πρόγραμμα) σχετικά με τον τρόπο που μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ιστορικές αναφορές.

Υπό το πρίσμα όσων προαναφέρθηκαν κρίνεται επιτακτική η ύπαρξη ενός βιβλίου που θα λειτουργεί ως οδηγός για κάθε εκπαιδευτικό και θα του παρέχει την υποστήριξη που χρειάζεται. Επιπλέον, καταδεικνύεται και η αναγκαιότητα για ενημέρωση, επιμόρφωση και κατάρτιση των εκπαιδευτικών σε θέματα σχετικά με την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων μέσα στην τάξη, τόσο στη διάρκεια των σπουδών τους όσο και κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους θητείας.

Στα <u>σχολικά βιβλία των Μαθηματικών για τους μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου</u> συμπεριλήφθηκε ένας αξιόλογος αριθμός από ιστορικά σημειώματα, σχόλια, εικόνες και άλλο υλικό, καθώς οι ομάδες που ασχολήθηκαν με την συγγραφή τους προσπάθησαν να εναρμονισθούν με τους όρους του διαγωνισμού συγγραφής και τις υποδείξεις του αναλυτικού προγράμματος. Σχετικά όμως με τη σημασία όλων αυτών στη διδακτική πράξη αναπτύσσεται ένα πλήθος από ερωτήματα για τους στόχους των συγγραφέων όταν επιλέγουν τις ιστορικές αναφορές, για τον τρόπο που υποτίθεται ότι ο εκπαιδευτικός θα τις χρησιμοποιήσει, για το όφελος που θα αποκομίσει ο μαθητής.

Στα βιβλία για τους μαθητές του Δημοτικού, τα οποία χρησιμοποιούνται από το 2006, υπάρχει ανομοιογένεια στη σημασία που δίνεται στην ιστορική διάσταση Μαθηματικών. Σε κάποια εγχειρίδια δεν παρέχεται καθόλου ιστορικό υλικό, σε κάποια ελάχιστο και σε κάποια ικανοποιητικό. Εστιάσαμε κυρίως στα βιβλία με τις περισσότερες ιστορικές αναφορές που αφορούν την ΣΤ΄ και την Γ΄ τάξη. Στο βιβλίο μαθητή και στα τετράδια εργασιών της ΣΤ΄ τάξης συναντάμε ιστορικά σημειώματα και άλλα στοιχεία στο πλαίσιο προτεινόμενων δραστηριοτήτων. Στο βιβλίο της Γ΄ Δημοτικού συναντάμε μια περισσότερο συστηματική και αξιόλογη προσπάθεια για εισαγωγή στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών, καθώς αυτά βρίσκονται σε όλη την έκταση του βιβλίου, όχι μόνο με την τυπική μορφή των ιστορικών σημειωμάτων, αλλά κυρίως με ψήγματα ιστορικών στοιχείων που εμπλέκονται στη ροή του μαθήματος. Στα βιβλία των υπόλοιπων τάξεων του Δημοτικού εμφανίζονται σποραδικά κάποια στοιχεία που συνδέονται με την ιστορία αλλά και την πολυπολιτισμικότητα των Μαθηματικών, όπως άβακας, τάγκραμ, μαγικά τετράγωνα. Γενικότερα, οι ιστορικές αναφορές στα βιβλία του Δημοτικού παρουσιάζονται χωρίς λειτουργικό ρόλο, φαίνεται να έχουν ένα καθαρά πληροφοριακό ή και απλώς διακοσμητικό χαρακτήρα (εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα για τις «εξισώσεις» της ΣΤ' Δημοτικού), και σπάνια έχουν στόχο να βοηθήσουν στην κατανόηση του κεφαλαίου («ελληνικός πολλαπλασιασμός» της Γ' Δημοτικού). Έτσι, τα στοιχεία αυτά περνούν απαρατήρητα ή στην καλύτερη περίπτωση τυγχάνουν μιας απλής ανάγνωσης, αφού και στα βιβλία δασκάλου οι οδηγίες είναι ανύπαρκτες ή ελλιπείς, αλλά και οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση ώστε να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να αξιοποιούν διδακτικά την ιστορικο-πολιτισμική τους διάσταση.

Τα βιβλία για τους μαθητές του Γυμνασίου, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά το 2007-2008, περιλαμβάνουν αρκετές ιστορικές αναφορές. Όπως δείχνουν τα στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση που κάναμε, βρέθηκαν περιπτώσεις με αναφορές που είχαν αρκετά ιστορικά λάθη, τα οποία κατά ένα μεγάλο μέρος διορθώθηκαν σε επόμενες εκδόσεις των βιβλίων. Επίσης, εντοπίστηκαν περιπτώσεις ιστορικών αποσπασμάτων, που έχουν καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα χωρίς όμως μαθηματικά ερεθίσματα (τα οποία δεν ενεργοποιούν τους μαθητές) και άλλα που έχουν τοποθετηθεί σε λάθος θέση ή δεν συνδέονται άμεσα με την διδακτέα ενότητα (τα οποία δεν κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά τους αφήνουν αδιάφορους). Αυτό δείχνει κάποια προχειρότητα όσον αφορά τη συγγραφή των ιστορικών σημειωμάτων και την παράθεσή τους στα σχολικά εγχειρίδια χωρίς κανένα επανέλεγχο, με κύριο στόχο την ικανοποίηση των σχετικών προϋποθέσεων που όριζε η προκήρυξη του διαγωνισμού συγγραφής των βιβλίων και όχι την απαίτηση για ουσιαστική αξιοποίησή τους στη διδασκαλία. Σύμφωνα όμως με όσα αναφέρονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών **η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών συνδέεται με την αναζήτηση και κατάκτηση της γνώσης**. Αυτό αποτελεί κεντρικό ζήτημα για τη διδασκαλία και τη μάθηση και σημαίνει ότι τα ιστορικά στοιχεία των διδακτικών βιβλίων θα πρέπει να βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών, που αποτελούν το αντικείμενο της διδασκαλίας, και όχι απλά να αποτελούν πηγή πληροφόρησης. Οι αποσπασματικές αναφορές ιστορικού περιεχομένου, διάσπαρτες μέσα στα ήδη υπερφορτωμένα με ύλη σχολικά βιβλία, το πιθανότερο είναι να μην λειτουργήσουν ως κίνητρα για μάθηση και να δυσκολέψουν την προσπάθεια των μαθητών για να εντοπίσουν και να κατανοήσουν τα ουσιώδη. Από την άλλη πλευρά δεν μπορούν λειτουργήσουν υποστηρικτικά για τον εκπαιδευτικό, παρέχοντάς του ιδέες και υλικό για την οργάνωση της διδασκαλίας, αφού άλλοτε δεν είναι έγκυρες και άλλοτε δεν εξυπηρετούν τους στόχους της ενότητας στην οποία ενσωματώνονται.

Ολοκληρώνοντας λοιπόν την καταγραφή και ανάλυση του υλικού που συνδέεται με την Ιστορία των Μαθηματικών και είναι διαθέσιμο στους εκπαιδευτικούς, αλλά και **απαντώντας** παράλληλα **στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα: «Είναι το υλικό που περιλαμβάνεται στα σχολικά εγχειρίδια κατάλληλο για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών;»**, συμπεραίνουμε ότι η ένταξη της ιστορίας στα διδακτικά εγχειρίδια φαίνεται πως έχει αρχίσει να γίνεται με έναν τρόπο περισσότερο ενδιαφέροντα και συστηματικό από ό,τι παλαιότερα. Υπάρχουν όμως και πολλές περιπτώσεις που οι ιστορικές πληροφορίες δεν εξυπηρετούν κάποιο διδακτικό στόχο και δεν είναι έγκυρες. Το ιστορικό υλικό που εντοπίζουμε στα βιβλία Μαθηματικών συχνά χαρακτηρίζεται από την παροχή πολλών πληροφοριών και την πλούσια εικονογράφηση, αλλά και από την έλλειψη μεθοδολογικών υποδείξεων για την αξιοποίησή του στη διδασκαλία. Στα βιβλία για τον εκπαιδευτικό τονίζεται γενικά η θετική συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών, περιλαμβάνεται σχετική βιβλιογραφία, αλλά η διδακτική αξιοποίησή της επαφίεται στη διάθεση, τις ιδέες και τις πρωτοβουλίες των διδασκόντων. Οι υπερβολικές ίσως απαιτήσεις (διαθεματική προσέγγιση, ανάπτυξη δραστηριοτήτων και σχεδίων εργασίας, Ιστορία των Μαθηματικών) του Προγράμματος Σπουδών σε συνάρτηση με τα στενά χρονικά περιθώρια έδωσαν ένα μεγάλο φορτίο στις ομάδες συγγραφής των διδακτικών πακέτων και δεν βοήθησαν προς την κατεύθυνση της ορθής αξιολόγησης και επιλογής των ιστορικών αναφορών. <u>Η μη στοχευμένη χρήση ιστορικών στοιχείων στα διδακτικά εγχειρίδια μαθητών και εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, στις περισσότερες των περιπτώσεων, δεν συμβάλλει στην προώθηση της ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, καθώς στη συντριπτική τους πλειοψηφία τα στοιχεία αυτά δεν συνάδουν με τις προδιαγραφές που τίθενται από τα Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ.</u> Μια άλλη πολύ σημαντική επισήμανση είναι ότι η έλλειψη σχετικής κατάρτισης για τους εκπαιδευτικούς στη διάρκεια των βασικών σπουδών τους αλλά και στα προγράμματα επιμόρφωσης, σε συνδυασμό με την πληθώρα της ύλης που έχουν να διαχειριστούν, οδηγεί στο περιθώριο της διδακτικής διαδικασίας την αξιοποίηση του προσφερόμενου ιστορικού υλικού. Η ασυμβατότητα και οι δυσκολίες ενισχύονται περισσότερο από τις εκάστοτε οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας, που στην προσπάθεια για αναδιάρθρωση και εξορθολογισμό της ύλης, πολλές φορές αναιρούν όσα στο Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. αναφέρονται.

Από όσα προαναφέραμε συνάγεται ότι η εισαγωγή μιας ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών, βασισμένη στο ενδιαφέρον, την πρωτοβουλία και τις ιδέες των διδασκόντων, απαιτεί επιπλέον διδακτικό χρόνο. Πρόκειται για μια απαιτητική δραστηριότητα, που προϋποθέτει, όχι μόνο την ύπαρξη μαθηματικών γνώσεων αλλά και την ικανότητα για προσέγγιση, ανάγνωση και ερμηνεία ιστορικών πηγών καθώς και τη διασταύρωση γεγονότων. Αυτό είναι ένα ζήτημα που δημιουργεί επιπρόσθετες δυσκολίες και απαιτήσεις για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι πέρα από την υποχρέωση για κάλυψη της διδακτέας ύλης έχουν να αντιμετωπίσουν και τις καινοτομίες του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, όπως η ομαδο-συνεργατική διδασκαλία βασισμένη στη χρήση δραστηριοτήτων και η διαθεματική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης. Είναι, επομένως, ολοφάνερο ότι προς την κατεύθυνση αυτή κρίνεται απαραίτητη η πρόσθετη υποστήριξη με τη μορφή αναλυτικών οδηγιών. Η ανάγκη αυτή, όπως αναδεικνύεται από όλα τα παραπάνω, δεν καλύπτεται από το υλικό που υπάρχει στα διδακτικά βιβλία, τα οποία δεν αποτελούν τον πιο έγκυρο και κατάλληλο οδηγό. Ως εκ τούτου, απουσιάζει κάποιο ουσιαστικό κίνητρο για τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά, ώστε να αναλάβουν πρωτοβουλίες για τη διδακτική αξιοποίηση του ιστορικού υλικού των σχολικών βιβλίων.

Από τα στοιχεία που παρουσιάσαμε στο **τρίτο κεφάλαιο** φαίνεται η ανάγκη για στροφή προς τον εκπαιδευτικό, που καλείται να κατανοήσει τις σύγχρονες απόψεις για τα Μαθηματικά και να τις υλοποιήσει μέσα στη σχολική τάξη, μεταφέροντας τις δικές του πεποιθήσεις για τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους, πέρα από την γνώση του αντικειμένου και την παιδαγωγική γνώση.
Ερευνητικά στοιχεία που μελετήσαμε έδειξαν ότι οι καινοτομίες των αναλυτικών προγραμμάτων δεν έγιναν αποδεκτές στη σχολική πραγματικότητα. Η χρήση δραστηριοτήτων αντιμετωπίζεται από εκπαιδευτικούς που δίδασκαν στο Γυμνάσιο με τρόπο μάλλον παραδοσιακό, καθώς είτε αγνοούνται οι δραστηριότητες και η θεωρία διδάσκεται κατευθείαν είτε λύνονται στον πίνακα από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, που φαίνεται να υιοθετούν μια δασκαλοκεντρική προσέγγιση. Η δεύτερη βασική καινοτομία, η διαθεματικότητα φαίνεται να μην κεντρίζει το ενδιαφέρον και την αποδοχή της μεγάλης πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Αναδείχθηκε η δυσκολία των καθηγητών να περάσουν σε μια άλλη φιλοσοφία ολιστικής προσέγγισης, εγκαταλείποντας την μακροχρόνια εφαρμογή του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών. Σύμφωνα με πολλούς εκπαιδευτικούς, η έκταση της ύλης καθώς και η δυνατότητα ολοκλήρωσής της, αναδεικνύονται σε σημαντικό εμπόδιο όχι μόνο για την εφαρμογή των καινοτομιών αλλά και για τη μαθησιακή διαδικασία, καθώς τις συνδέουν με το υψηλό επίπεδο δυσκολίας των νέων βιβλίων. Έτσι, παρατηρούμε ότι η θετική στάση που καταγράφεται υπέρ των καινοτομιών παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο, καθώς δεν εκδηλώνεται με αλλαγή διδακτικής συμπεριφοράς από τη μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών.
Σχετικά με τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού φαίνεται ότι δεν δίνεται η σωστή κατεύθυνση προς τους εκπαιδευτικούς για τη χρήση της ιστορικής γνώσης και αφήνεται στη διακριτική τους ευχέρεια το αν θα διαθέσουν προσωπικό χρόνο για να αναζητήσουν πληροφορίες, προκειμένου να σχεδιάσουν κατάλληλες δραστηριότητες. Επιπλέον, αναδεικνύεται ότι στο μεγαλύτερο ποσοστό των δασκάλων απουσιάζει η κατάρτιση σχετικά με την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, πράγμα που, σε συνδυασμό με το ελλιπές παρεχόμενο υλικό, τους οδηγεί σε απροθυμία για αναφορά σε ιστορικά στοιχεία, αφού θεωρούν ότι δεν έχουν τις απαραίτητες γνώσεις ούτε και την αυτοπεποίθηση για να το κάνουν. Επίσης, δεν δείχνουν σίγουροι για τα οφέλη που η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να προσφέρει στη διδασκαλία, οπότε δεν έχουν κίνητρα για να επιχειρήσουν κάτι σχετικό. Σε μεγάλο ποσοστό οι δάσκαλοι φαίνεται να αναγνωρίζουν την ανάγκη για επιπλέον επιμόρφωση σχετικά με τη χρήση του ιστορικού υλικού που περιλαμβάνεται στα σχολικά βιβλία, υποδεικνύοντας παράλληλα πως δεν τους λείπει το ενδιαφέρον και η διάθεση, αλλά κυρίως η αυτοπεποίθηση και η ουσιαστική επιμόρφωση, και

δευτερευόντως ο διδακτικός χρόνος. Επιπλέον, ότι θα ήταν πρόθυμοι να αφιερώσουν χρόνο στη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, εάν τους προσφερόταν έτοιμο το απαραίτητο υλικό, γιατί ενώ έχουν τη διάθεση και τη θέληση να αφιερώσουν χρόνο στην ενσωμάτωσή της, τους λείπει είτε ο χρόνος είτε οι απαραίτητες γνώσεις για την προετοιμασία του κατάλληλου υλικού.

Από όσα προαναφέρθηκαν προκύπτει ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών πάνω στην Ιστορία των Μαθηματικών, τόσο στη φάση της βασικής πανεπιστημιακής τους εκπαίδευσης όσο και σε μεταγενέστερη επιμόρφωσή τους, ώστε να κατανοήσουν τη σημασία της αξιοποίησής της στη Μαθηματική Εκπαίδευση και να αποκτήσουν τις απαραίτητες γνώσεις για να νιώθουν πιο σίγουροι όταν κάνουν αναφορές σε θέματα μαθηματικής ιστορίας.

Επιχειρώντας **να απαντήσουμε στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: «Με ποιον τρόπο θα καταστεί δυνατή η ουσιαστική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς μέσα στη σχολική πραγματικότητα;»**, διαπιστώνουμε πως η έλλειψη της επιμόρφωσης σε ζητήματα που σχετίζονται με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη είναι κομβικής σημασίας για την απελευθέρωση της δυναμικής των εκπαιδευτικών προς την κατεύθυνση της υιοθέτησης νέων τρόπων διδασκαλίας και την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων, πράγμα που δεν αποτελεί, βέβαια, νέο θέμα για τα προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών. Τα επιχειρήματα που συνηγορούν για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη ισχύουν, με ορισμένες προσαρμογές στο διαφορετικό πλαίσιο, και για την περίπτωση της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών, καθώς μέσω αυτής προωθούνται η «πολιτισμική κατανόηση», η «αντικατάσταση» και ο «αναπροσανατολισμός». Οι όροι αυτοί συνδέονται με την ανάγκη εξανθρωπισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης και με την καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο χτίστηκαν οι μαθηματικές έννοιες στη διάρκεια των αιώνων. Η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών απαιτεί συστηματική ενημέρωση και γνώση των εξελίξεων που συνδέονται με την ιστορική αλλά και τη διδακτική έρευνα. Τα προγράμματα σπουδών στη βασική εκπαίδευση αλλά και στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά θα πρέπει κάποτε να ενσωματώσουν τις σημαντικές εξελίξεις, που υπάρχουν στα ζητήματα αυτά κατά τις τελευταίες δεκαετίες. Επομένως μόνο με ένα κατάλληλο πρόγραμμα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο 3ο κεφάλαιο, θα μπορέσουμε να έχουμε τα κατάλληλα αποτελέσματα για ουσιαστική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην καθημερινή διδακτική πράξη.

Η πρότασή μας αυτή έρχεται να εστιάσει στον τομέα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και στην έλλειψη σχετικών προτάσεων πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, που κατ' εξοχήν αναδεικνύεται από την έρευνα σχετικά με τη Μαθηματική Εκπαίδευση, αξιοποιώντας το υλικό των σχολικών βιβλίων (με επιλογή και εμπλουτισμό δραστηριοτήτων) και την αντίστοιχη εμπειρία άλλων εκπαιδευτικών συστημάτων. Με τη διαδικασία αυτή προσδοκούμε αφενός να παρακαμφθούν εμπόδια όπως η έλλειψη αυτοπεποίθησης (από την πλευρά των εκπαιδευτικών), διδακτικού χρόνου, κατάλληλων πόρων και αφετέρου να προκύψει μια ιδιοποίηση του νοήματος για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών που να εξουδετερώνει την παθητική αναπαραγωγή του στυλ των Μαθηματικών που οι διδάσκοντες βίωσαν ως διδασκόμενοι. Επίσης, αναμένουμε να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μάχιμων εκπαιδευτικών, στους οποίους απευθύνεται, αφού πρόκειται για μια διαδικασία μέσω της οποίας θα ασχοληθούν με θέματα που έχουν αντίκρισμα στην πράξη, είναι εφαρμόσιμα σε πραγματικές συνθήκες και θα τους δώσουν ιδέες και γνώσεις που μπορούν να τις αξιοποιήσουν μέσα στην τάξη.

Επιγραμματικά αναφέρουμε παρακάτω τα στάδια που ήδη αναπτύξαμε και τα οποία ενδεικτικά θα μπορούσαν να περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα αυτό:

- Ανάλυση του Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση.
- Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και των ιστορικών αναφορών, που περιέχονται σε αυτά.
- Γνωριμία με προτεινόμενη βασική βιβλιογραφία σχετικά με διδακτική αξιοποίηση της ΙτΜ (η οποία θα δείχνει και την εξέλιξη του θέματος).
- Επιλογή από τους επιμορφούμενους ενός κλάδου των Μαθηματικών και αξιοποίηση της ιστορίας για γνωριμία με την εξέλιξή του.
- Περιήγηση και μελέτη πάνω σε προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις που εκπονήθηκαν ή και υλοποιήθηκαν με στόχο τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- Σχεδιασμός διδακτικών παρεμβάσεων από τους επιμορφούμενους (συμβατών με την ηλικιακή ομάδα που διδάσκουν) και εφαρμογή στην πράξη (μέσα στις σχολικές τάξεις) για να διαπιστωθούν από τους ίδιους το εφικτό της διαδικασίας αφενός, και τα οφέλη από την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφετέρου.
- Συζήτηση των ομάδων και ανταλλαγή/ αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με το σχεδιασμό και την υλοποίηση διδακτικών προτάσεων.
- Δημιουργία ψηφιακής πλατφόρμας (κατά το πρότυπο της επιμόρφωσης στις νέες τεχνολογίες) για ανάρτηση διδακτικών προτάσεων και ανταλλαγή καλών πρακτικών.
- Αξιολόγηση του προγράμματος από τους συμμετέχοντες (επιμορφωτές και επιμορφούμενους) και προτάσεις για πιθανές βελτιώσεις του.

Από τα στοιχεία που έχουμε παραθέσει στην ανάπτυξη του επιμορφωτικού προγράμματος θα μπορούσαμε να τεκμηριώσουμε μια **απάντηση και για το τρίτο ερευνητικό ερώτημα: «Είναι δυνατό να δημιουργηθούν διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες θα υλοποιούν βασικούς διδακτικούς στόχους με αφετηρία την Ιστορία των Μαθηματικών;».** Οι ιστορικές αναφορές που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία, πέρα από τις αδυναμίες που έχουν επισημανθεί, παρουσιάζουν ενδιαφέρον και θα μπορούσαν να συμβάλλουν πιο ουσιαστικά στην επίτευξη των επιστημονικών διδακτικών στόχων, ώστε να έρθουν σε επαφή οι μαθητές με την ίδια την ιστορική μαθηματική δραστηριότητα και στη συνέχεια να οδηγηθούν στον προσδιορισμό και την αξιολόγηση του πλαισίου, των συνθηκών και των προσωπικών χαρακτηριστικών που επέτρεψαν την ανάπτυξη και εξέλιξη συγκεκριμένων ιδεών. Το ζητούμενο λοιπόν είναι να αναζητηθούν τρόποι για να ασχοληθούν οι μαθητές με τις ιστορικές αναφορές των βιβλίων και να εμπλακούν με την ουσία της μαθηματικής σκέψης, με τα εργαλεία της, με τις διαδρομές της, γνωρίζοντας, μέσα από αυτή την περιπέτεια, τη δύναμη της ανθρώπινης σκέψης και τη γοητεία της μαθηματικής αναζήτησης.

Όπως φάνηκε από τις **προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις**, τις οποίες συμπεριλάβαμε στην **ενότητα 3.2.3.,** <u>είναι δυνατό να δημιουργηθούν διδακτικές δραστηριότητες, οι οποίες θα υλοποιούν βασικούς διδακτικούς στόχους με αφετηρία την Ιστορία των Μαθηματικών.</u> Η πρόκληση για τη δημιουργία τους προέκυψε από το γεγονός ότι η έρευνα για την Ιστορία των Μαθηματικών στην εκπαίδευση τείνει να έχει κατά νου τους μεγαλύτερους μαθητές και διαπιστώνεται έλλειμμα τόσο στην έρευνα όσο και στους πόρους σχετικά με τον τρόπο που μπορεί να συμπεριλάβει κανείς μια ιστορική προοπτική όταν διδάσκει σε μαθητές μικρότερων ηλικιών, όπως οι μαθητές του Δημοτικού. Θα θέλαμε να επισημάνουμε, επίσης, ότι το σκεπτικό μας για την σύνταξή τους ήταν να απευθύνονται σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, εστιάζοντας αφενός στο εφικτό του εγχειρήματος στις μικρότερες ηλικίες και αφετέρου στο κρίσιμο ζήτημα της μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

<u>Η πρώτη πρότασή μας για διδακτική παρέμβαση</u> απευθύνεται σε μαθητές της **Γ΄ Δημοτικού** και αφορά στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού. Με την προτεινόμενη προσέγγιση θεωρούμε ότι μέσα από απλές δραστηριότητες μπορεί αφενός να υπάρξει κινητοποίηση του/της εκπαιδευτικού προς την κατεύθυνση της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, αφετέρου δε οι μαθητές μπορούν να εισαχθούν στην κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών με έναν απλό αλλά ενδιαφέροντα και ελκυστικό τρόπο, που προσθέτει λίγο «αλατοπίπερο» (Jankvist, 2009) στη διδασκαλία των Μαθηματικών, κρατώντας ως καλύτερη απόδειξη για την επιτυχία του εγχειρήματος την κινητοποίηση και τη συμμετοχή των μικρών μαθητών.

<u>Η δεύτερη διδακτική μας πρόταση</u> απευθύνεται σε μαθητές της **ΣΤ΄ τάξης** (ή της Α΄ Γυμνασίου, πιθανόν με κάποιες τροποποιήσεις), αφορά το κεφάλαιο με τις εξισώσεις και εξυπηρετεί δύο πολύ σημαντικά και κρίσιμα ζητήματα: αυτό της μετάβασης των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, αλλά και του περάσματος από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Παρά τις όποιες επιφυλάξεις μπορεί να διατυπωθούν σχετικά με την πληθώρα της ύλης, την έλλειψη χρόνου και πόρων, αξίζει να επενδύσουμε μέσω της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών γιατί τα οφέλη είναι μακροπρόθεσμα, αφού οι μαθητές κινητοποιούνται, αποκτώντας μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, αλλά τίθενται και κάποια σπέρματα προβληματισμού για τη συλλογιστική και τη χρησιμότητα της άλγεβρας. Επίσης, η προτεινόμενη συζήτηση των μαθητικών ομάδων σχετικά με τη σύγκριση των τρόπων επίλυσης, μπορεί να αναδείξει τη μεγάλη απελευθέρωση και ευελιξία που τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης παρέχουν στη μαθηματική σκέψη (είτε αυτά

αφορούν τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων είτε τη μεθοδολογία και τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού).

Η τρίτη πρότασή μας απευθύνεται σε μαθητές της **Α΄ Γυμνασίου** και αφορά τα βιογραφικά στοιχεία για τον Gauss. Με αυτήν αξιοποιείται ένα ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών, προκειμένου να αναπτυχθούν κίνητρα μάθησης. Η διαφορά στην προσέγγιση αυτή είναι ότι, σε αντίθεση με το ιστορικό σημείωμα, η μαθηματική πρόοδος δεν υποδηλώνεται ως αποτέλεσμα των λίγων προικισμένων αλλά ως μια συλλογική προσπάθεια, στην οποία συνδυάζεται, τη σωστή στιγμή, αρμονικά η προσωπική ικανότητα με τα προηγούμενα επιτεύγματα της επιστημονικής κοινότητας. Οι μαθητές έρχονται έτσι σε επαφή με ιστορικά στοιχεία που αναμένεται να τους προσελκύσουν σε μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη, να τους κινητοποιήσουν και να τους ενθαρρύνουν στην αναζήτηση γνώσεων.

Όπως ήδη έχουμε επισημάνει ανάλογες διδακτικές παρεμβάσεις θα μπορούσαν να σχεδιαστούν με αφορμή διάφορες ιστορικές αναφορές που περιλαμβάνονται στα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών, υπογραμμίζοντας, ότι αυτές δεν αφορούν την ύλη των Μαθηματικών σε όλη της την έκταση, αλλά γίνονται επιλεκτικά και στοχευμένα, προκειμένου να επιτευχθούν τα καλύτερα αποτελέσματα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων.

Ολοκληρώνοντας κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε κάποιες **προτάσεις για μελλοντική έρευνα**:

- Υλοποίηση ολόκληρου ή μέρους του επιμορφωτικού προγράμματος σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς κατά τις προπτυχιακές σπουδές ή στη διάρκεια της επαγγελματικής τους κατάρτισης.
- Υλοποίηση των προτεινόμενων διδακτικών παρεμβάσεων στην τάξη.
- Διερεύνηση προτάσεων για βελτιώσεις ή αλλαγές στα βιβλία των μαθητών και των εκπαιδευτικών, ώστε να κινητοποιηθούν προς την κατεύθυνση της ενσωμάτωσης της ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών.
- Καταγραφή απόψεων από τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο επιμορφωτικό πρόγραμμα καθώς και προτάσεων για βελτίωση του προγράμματος.
- Καταγραφή εμπειριών από τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και την εφαρμογή τους στην τάξη.
- Διερεύνηση τυχόν αλλαγής στις πεποιθήσεις και στη στάση των εκπαιδευτικών σχετικά με την ανάληψη πρωτοβουλιών και την υιοθέτηση νέων τρόπων διδασκαλίας μετά την επιμορφωτική παρέμβαση.
- Διερεύνηση τυχόν αλλαγής στη στάση των μαθητών σχετικά με την κινητοποίηση και την ενεργή εμπλοκή τους κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω της ιστορικής προοπτικής.

Κλείνοντας θα θέλαμε να επισημάνουμε, συμπλέοντας με τον Heiede (1996), ότι η Ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι ένα κουτί με μπογιές με το οποίο μπορεί κανείς να κάνει την εικόνα των Μαθηματικών περισσότερο ελκυστική, για να κερδίσει το ενδιαφέρον των διδασκομένων στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Η ιστορία αποτελεί ένα κομμάτι της ίδιας της εικόνας και αν είναι ένα τόσο σημαντικό κομμάτι, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των Μαθηματικών. Αν μπορεί να διευρύνει τους ορίζοντες (ίσως όχι μόνο τους μαθηματικούς) των διδασκομένων, αν μπορεί να τους κάνει να προβληματιστούν, τότε θα πρέπει να συμπεριληφθεί στη διδασκαλία, ακόμα κι αν δεν είμαστε σίγουροι για τις λεπτομέρειες. Επιπλέον, πέρα από τον Heiede που αναφέρθηκε παραπάνω, μαζί με τον Radford, την Furinghetti και τον Katz (2007) αξίζει να επισημάνουμε ότι η αλληλεπίδραση, η διάδραση, η επαφή, η σύνδεση με το παρελθόν των πολιτισμών συμβάλλει όχι μόνο στην εμβάθυνση της κατανόησης των Μαθηματικών, αλλά και στην ανάπτυξή μας ως ολοκληρωμένων ανθρώπων. Αυτό, με τη σειρά του, συμβάλλει στην ικανότητά μας να αποκτούμε γνώσεις, να αναλαμβάνουμε διδακτικές πρωτοβουλίες και ως εκπαιδευτικοί να υιοθετούμε ένα ενεργό στυλ στη διδασκαλία μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 3(1): 30-37.

Arcavi, A., Bruckheimer, M, & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2): 18-23.

Barrow-Green, J. (2000). Web historical resources for the mathematics Teacher. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 362–370. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 86: 461-464.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23: 194-222.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Brown, S. I. (1996). Towards humanistic mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Part 2: pp. 1289-1321. Dordrecht: Kluwer.

Cajori, F. (1894). *A History of Mathematics.* New York: MacMillan and Co.

Cajori, F. (1896). *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching*. New York: MacMillan and Co.

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38: 163-187.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, Vol II, pp. 27-34. Mexico: International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1982). *"The Mathematical Experience".* Boston: Houghton Mifflin Company. English translation of title: Introduction to the book: Mathematics and the World. Davis & Hersh (1982)

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities. Educational Studies in Mathematics, *66:* 83–106.

Fasanelli, F. et al. (2000).The political context. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 1–38. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fraser, B. J., & Koop, A. J. (1978). Teachers' opinion about some teaching materials involving history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 9: 147-151.

Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? *For the Learning of Mathematics*, 2(1): 30-33.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Boston/Lancaster: Dordrecht.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4): 391–408.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2): 131-143.

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of Pharaohs*. New York: Dover Publications.

Grugnetti, L, & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, p. 39-62. Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). "A Historical Angle", a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. Educational Studies in Mathematics, *47:* 223–258.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the teacher. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematical Historical research and integration with teaching,* pp. 231-243. Washington, DC: MAA.

Hsieh, E-J. (2000). Teachers' teaching beliefs and their knowledge about the history of negative numbers. In W.-S. Horng & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of HPM 2000 conference*, Vol. I, pp. 88-97.

Hsieh, C.-J., & Hsieh, F.-J. (2000). What are teachers' view of mathematics? - An investigation of how they evaluate formulas in mathematics. In W.-S. Horng & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of HPM 2000 conference*, Vol. 1, pp. 98-111.

Jahnke, H. N. (2001). "Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view". *Educational Studies in Mathematics,* 48: 175–197.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Dynnikov, C, Furinghetti, et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.)*, History in mathematics education - The I.C.M.I. Study*, pp. 291-328. Boston, MA: Kluwer

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3): 235–261.

Jankvist U. T. (2010). An empirical study of using history as a "goal". Educational Studies in Mathematics, 22: 1315-1321.

Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of the School algebra. In D. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 390-419. New York.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics,* 48: 137-174.

Laubenbacher, R., & Pengelley, D. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources. In R. Calinger (Ed), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, pp. 257–260. Washington, DC: MAA.

Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer.

Niss, M. (2001). University mathematics based on problem-oriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, pp. 153–165. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (2001a). Indledning. In M. Niss (Ed.), *Matematikken og verden*, Fremads debatbøger— Videnskab til debat. Copenhagen: Forfatterne og Forlaget A/S.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics.

Educational Studies in Mathematics, 35: 189–206.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998a). Beliefs, teacher education and history of mathematics. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME 22*, Vol. 4, pp. 1-9.

Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. (2007). Introduction The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2): 107-110.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in Mathematics Education,* pp. 303-322. Heidelberg: Springer – Verlag.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-I., El Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., et al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education - The ICMI study,* pp. 91-142. Boston, MA: Kluwer.

Siu, M. K. (2000). "The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom". In Victor J. Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective,* pp. 3–9. The Mathematical Association of America.

Siu, M. K. (2006). "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?" In F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (eds), P*roceedings HPM 2004 & ESU 4*: 268 – 277. Greece: University of Crete.

Siu, M.K., & Tzanakis, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching – Appetizer? Main course? Or dessert?. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3 (1-2), v-x.

Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The role of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4: 3-28.

Smestad, B. (2015). Uses of history of mathematics in school (pupils aged 6–13). In S. J. Cho (Ed.) P*roceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges,* pp. 601-603. New York: Springer.

Smestad, B., Jankvist, U. T., & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Stud Math Educ*, 19(3-4): 169-183.

Stander, D. (1991). The use of the history of mathematics in teaching. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching. The state of the art,* pp. 241-246. New York: Falmer.

Swetz, F. J. (1995). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical point context. *Educational Studies in Mathematics*, 29: 73-88.

Taimina, D., & Henderson, D. (2005). How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry. In A. Shell-Gellasch, D. Jardine (eds) *From Calculus to Computers: Using Recent History in the Teaching of Mathematics*, pp. 57–73. Washington D. C: Mathematical Association of America.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics,* 66: 165 – 183.

Thomaidis, Y., &. Tzanakis, C (2009). The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (eds) *Proceedings of the 6th CERME*, p. 2801-2810. Institut National De Recherche Pédagogique, France: ISBN 978-2-7342-1190-7.

Thomas, R. S. D. (2002). Mathematics and narrative. *The Mathematical Intelligencer*, 24(3): 43-46.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching,* pp. 127-146. New York: Macmillan.

Toeplitz, O. (2007). *The Calculus. A Genetic Approach*. Chicago: The University of Chicago Press.

Tymoczko, T. (1994). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. In D. F. Robitaille, D. H. Wheeler, & C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th international congress on mathematical education,* pp. 327-339.

Tzanakis, C., Arcavi, A. et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 201 – 240. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., & Kourkoulos, M. (2007). May history and physics provide a useful aid for introducing basic statistical concepts? Some epistemological remarks and classroom observations. In F. Furinghetti, S. Kaijer, & C. Tzanakis (Eds), *Proceedings HPM 2004 & ESU 2004*, pp. 284–295. Uppsala: Uppsala Universitet.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics,* 20(1): 44–55.

Van Brummelen, G. (2000). Teachers, learners and the World Wide Web. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 358–362. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Αλαχιώτης, Σ. (2002). Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών θεμάτων*, 7: 7-18, Αθήνα, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2015α). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2015β). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Βιβλίο εκπαιδευτικού. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης Α. (2015). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2015α). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2015β). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Βιβλίο εκπαιδευτικού. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης Κ. (2015α). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης Κ. (2015β). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Βιβλίο εκπαιδευτικού. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Γαβριήλ, Α. (2014). Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην αντιμετώπιση του. *Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών*. Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., & Μακρίδης, Γρ. (2002). Σχέσεις ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και στη Διδακτική των Μαθηματικών. *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σ. 269-283. Κομοτηνή: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Γαλέρη, Ι., & Γκάτζιου, Α. (2016). Προσεγγίζοντας τα Μαθηματικά μέσα από… τη μηχανή του Χρόνου. *Ερευνητική Εργασία, Δ.Δ.Π.Μ.Σ. «Διδακτική των Μαθηματικών»*. Θεσσαλονίκη.

Γκίνης, Δ., & Πιτέρη, Σ. (2008). Εκπαιδευτική έρευνα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου με τα νέα βιβλία – Στάσεις και απόψεις των εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 25ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σ.

575-692. Ε.Μ.Ε.

Δεμίρη, Ε., Μαρκέτος, Α., & Μπάρμπας, Γ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α' γυμνασίου για τη μεταβλητή. *Διάσταση*, 63-70, Εκδόσεις Ε.Μ .Ε Κεντρικής Μακεδονίας.

Δημητριάδου, Ε., Θωμαΐδης, Ι, Οικονόμου, Π. & Σταφυλίδου Σ. (2009). Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία μαθηματικών στο Γυμνάσιο. *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*,.σ. 345–354. Ε.Μ.Ε.

Ε.Μ.Ε Παράρτημα Κέρκυρας (2003). Σχετικά με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου. Ανακτήθηκε 06-05-2017 από http://www.edra.gr/pdf/2003-04-09-EMEkerkyra.pdf

Εξαρχάκος, Θ. (1997). *Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*. Αθήνα.

Εξαρχάκος, Θ. (2002). Μαθηματικά στους Αρχαίους Πολιτισμούς: Επίπεδα ανάπτυξης και αλληλεπιδράσεις. *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σ. 1-34. Κομοτηνή: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Θωμαΐδης, Γ. (1990). Ιστορικές Παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ'*, 7(25): 27–41.

Θωμαΐδης, Γ. (2000). Εξερευνώντας την ιστορία του αριθμού π (από το $3\frac{1}{7}$ του Αρχιμήδη στα 200.000.000 δεκαδικά ψηφία του Y. Kanada). *Διάσταση*, 1–2: 17–38.

Θωμαΐδης Γ., (2008). Στιγμιότυπα και εικόνες από τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα νέα βιβλία του Γυμνασίου. Στο Μ. Κούρκουλος & Κ. Τζανάκης (Επιμ.) *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σ. 395-406. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε.

Θωμαΐδης Γ., (2009). Η ιστορία των μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (Επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* σ. 193–219. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού μαθήματος με θέμα «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους» Στο Κ. Κούρκουλος, & Κ. Τζανάκης (Επιμ.). *Επιστήμες Αγωγής, Θεματικό Τεύχος 2014*, σ. 16-37. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε.

Θωμαΐδης, Γ. (2015). Ιστορικά και διδακτικά σχόλια για ένα Βαβυλωνιακό πρόβλημα με αφορμή τη διαδικτυακή συζήτηση στο www.mathematica.gr. Εκθέτης Φύλλα

Μαθηματικής Παιδείας, 15. Ανακτήθηκε 06-05-2017 από http://www.nsmavrogiannis.gr/Ekthetis/ekthetis015.pdf

Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄*, 16: 61-92.

Θωμαΐδης, Γ., & Τζανάκης, Κ. (2006). Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση, σ. 253–270. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ., (2015). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Καραγεώργος, Δ. (1998). Το ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών, τα προγράμματα σπουδών, τα διδακτικά βιβλία και το συνοδευτικό διδακτικό υλικό για τα μαθηματικά της γενικής εκπαίδευσης. *Πρακτικά του 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σ. 229-250. Χίος: Ε.Μ.Ε.

Καρατζιά - Σταυλιώτη, Ε. (2002). Η διαθεματικότητα στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών: Παραδείγματα από την ευρωπαϊκή εμπειρία και πρακτική. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 52-65.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., & Σοφού, Β. (2015). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2015α). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού*. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2015β). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού*. Τετράδιο εργασιών, α΄ τεύχος. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2015γ). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κολέζα, Ε. (2006). Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση*, σ. 27-46. Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Κολιάδης, Ε. (2002). *Γνωστική ψυχολογία, γνωστική νευροεπιστήμη και εκπαιδευτική πράξη: Μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών*. Αθήνα: Ιδιωτική Έκδοση

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ'*, 13/45: 61–70.

Λεμονίδης, Χ., & Νικολαντωνάκης, Κ. (2007). Ελληνικός πολλαπλασιασμός: Ένας άγνωστος ιστορικός αλγόριθμος κατάλληλος για τη διδασκαλία. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 151: 169-178.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2015). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού: Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2015α). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού: Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2015β). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού: Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόπος οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*. 7: 19-36.

Μιόγλου, Κ. (2017). Πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού. *Διπλωματική Εργασία Δ.Δ.Π.Μ.Σ. Διδακτική των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Μιχαηλίδης, Τ. (2009). Το λάπτοπ του Αρχιμήδη. Στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (Επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* σ. 269 – 298. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Μπιζμπιάνος, Μ. (2011). Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών. Η περίπτωση της Γεωμετρίας. *Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών.* Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2003). Συμπληρωματικές προδιαγραφές εκπαιδευτικού υλικού Γυμνασίου. ΥΠΕΠΘ, Παράρτημα, τόμος Γ΄, τεύχος β΄, Μάιος 2003.

Παναγάκος, Ι. (2002). Η σπουδαιότητα της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης και η προοπτική στο Δημοτικό Σχολείο. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 72-79.

Παναγάκος, Ι. (2004). Η διαθεματική προσέγγιση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. *Πρακτικά του 21ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σ. 192-201. Τρίκαλα: Ε.Μ.Ε.

Σκούρας, Α. (2002). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 101–110.

Σπηλιωτοπούλου, Β., Διακογιώργη, Κ., & Παπαντωνίου, Β. (2009). Χαρακτηριστικά Ιστορικών Στοιχείων στα Βιβλία Μαθηματικών Γυμνασίου. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επιμ.) *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, σ. 393-402. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Ταξίδης, Χ. (2014) Η συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και κατανόηση μαθηματικών εννοιών: Μια διδακτική πρόταση για τη θεσιακή αξία του αριθμού. Στο Μ. Ματθαιουδάκη & Χ. Ταξίδης (Επιμ.), *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Πρότυπων Πειραματικών Σχολείων Α/θμιας και Β/θμιας Εκπαίδευσης*, σ. 103-116. Θεσσαλονίκη.

Τζανάκης Κ., (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (Επιμ.) *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* σ. 17-39. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Τζεκάκη, Μ. (2000) (Επιμ.). *Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*. ΥΠΕΠΘ-ΚΕΕ.

ΥΠΠΕΘ (2016). *Αναδιάρθρωση, εξορθολογισμός και διαχείριση της διδακτέας ύλης για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο*. 1523317/Δ1/16-09-2016.

ΦΕΚ 303, τ. Β΄, 13-03-2003, τόμος Α΄. *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για την Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Αθήνα: Υ.Π.Ε.Π.Θ.

Φερεντίνος, Σ. (2001) Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 5: 7-21. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Μ. (2002). Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 80–100.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΔΑΣΚΑΛΟΥ

Α΄ Δημοτικού

Ιστορικά στοιχεία για τον άβακα. Η λέξη «άβακας» προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη «άβαξ». Οι άβακες ήταν οι μηχανές υπολογισμού των αριθμητικών πράξεων από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων. Οι άβακες που χρησιμοποιούνταν στην αρχαία Ελλάδα ήταν επίπεδοι, χρησιμοποιούνταν δηλαδή στο έδαφος, και αποτελούνταν από μάρμαρο επάνω στο οποίο ήταν χαραγμένες γραμμές και γράμματα για την αρίθμηση. Οι υπολογισμοί γίνονταν με χάντρες ή πέτρες. Στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο των Αθηνών φιλοξενείται ένας από τους παλαιότερους άβακες, «Ο Άβαξ της Σαλαμίνος», που χρονολογείται από τον 5ο ή τον 6ο π.Χ. αιώνα. Οι άβακες αποτελούν τους προγόνους των σημερινών μηχανών υπολογισμού. Μέχρι και τον 17ο αιώνα σχεδόν σε όλο τον κόσμο οι άβακες αποτελούσαν το βασικό μέσο με το οποίο γίνονταν οι υπολογισμοί. Ακόμη και σήμερα υπάρχουν χώρες, όπως η Κίνα, στις οποίες ένα είδος άβακα με χάντρες χρησιμοποιείται ευρύτατα για τους υπολογισμούς.

Εικόνα 1, σελ. 98-99.

Σελίδα 38- β΄ τεύχος

1. *Παιχνίδι: Το τάγκραμ*

Κάνουμε λόγο για το παιχνίδι τάγκραμ, το οποίο ίσως είναι γνωστό σε αρκετούς μαθητές. Αναφέρουμε ότι προέρχεται από την Κίνα και συζητάμε μαζί τους για τον κινέζικο πολιτισμό.

Με τα κομμάτια του τάγκραμ που κατασκεύασαν οι μαθητές τούς καλούμε να σχηματίσουν τις εικόνες που παρουσιάζονται στο βιβλίο. Θα σχηματίσουν πρώτα το «πουλί» και μετά το άλλο σχήμα.

Στο κανονικό παιχνίδι του τάγκραμ που κυκλοφορεί στο εμπόριο τα σχήματα που προτείνονται είναι συμπαγή, χωρίς τις εσωτερικές γραμμές που έχουμε εμείς. Αυτό το κάνουμε διότι στην πρώτη επαφή των παιδιών με το τάγκραμ είναι δύσκολος ο σχηματισμός συμπαγών σχημάτων.

Διαθεματικότητα

Μελέτη Περιβάλλοντος: Πολιτισμός άλλων χωρών.

Εικόνα 2, σελ. 122.

Β΄ Δημοτικού

Σχέδιο εργασίας: Η ιστορία των ελληνικών κερμάτων από την αρχαιότητα ως σήμερα.

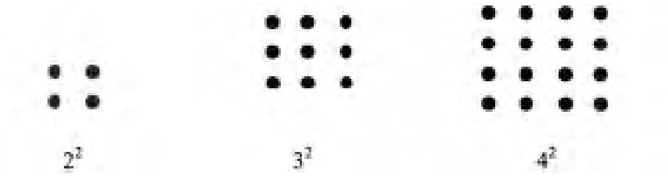
Εικόνα 3, σελ. 62.

Ιστορικά στοιχεία για τον Πυθαγόρα

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος έζησε τον 6ο αι. π.Χ. Λεγόταν ότι ήταν ο άνθρωπος που έβλεπε παντού αριθμούς. Γεννήθηκε στη Σάμο και μαθήτευσε κοντά σε μεγάλους σοφούς της αρχαιότητας. Ταξίδεψε στην Ασία και την Αίγυπτο όπου μελέτησε την αιγυπτιακή φιλοσοφία, τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική. Ίδρυσε μια σχολή, τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι μελετούσαν την φιλοσοφία, τα μαθηματικά και τις επιστήμες. Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους και πίστευαν ότι καθετί είναι αριθμός. Διέκριναν διάφορα είδη αριθμών όπως:

Οι **άρτιοι** (ζυγοί) αριθμοί οι οποίοι μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ίσα μέρη : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

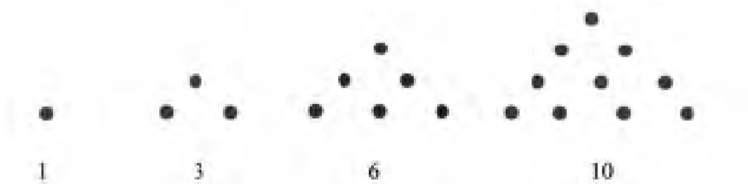
Οι **περιττοί** (μονοί) αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ίσα μέρη : 1,



3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Οι **τετραγωνικοί αριθμοί**

Διαβάζουμε 2^2=4 «δύο στο τετράγωνο» ισούται με τέσσερα: 3^2 = 9 «τρία στο τετράγωνο»



ισούται με εννέα: 4^2 = 16 «τέσσερα στο τετράγωνο» ισούται με δεκαέξι.

Για τους τριγωνικούς αριθμούς χρησιμοποιούσαν τα ακόλουθα γεωμετρικά σχήματα

Οι Πυθαγόρειοι επίσης γνώριζαν να υπολογίζουν τον αριθμητικό μέσο δύο αριθμών.

Για παράδειγμα ο **αριθμητικός μέσος** του 12 και του 14 είναι $\frac{12+14}{2} = \frac{26}{2} = 13$

Το περίφημο θεώρημα του Πυθαγόρα

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών

Διαθεματικότητα: Ιστορία: Ο Πυθαγόρας

Εικόνα 4, σελ. 32-33.

5. Εδώ παρουσιάζεται το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, όπου χρησιμοποιούνται γράμματα του αλφάβητου ως αριθμητικά σύμβολα. Παρατηρούμε ότι, εκτός από τα σύμβολα των μονάδων (1, 10, 100, 1000), υπάρχουν και σύμβολα για τους αριθμούς (5, 50, 500). Αυτό έγινε, για να αποφεύγεται η μεγάλη επανάληψη συμβόλων. Το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης προχωρεί και πέρα από το Μ (1000). Ωστόσο, σε σχέση με τα αραβικά ψηφία που χρησιμοποιούμε και εμείς, παρουσιάζει βασικά μειονεκτήματα όπως: έχει πολλά σύμβολα, επαναλαμβάνει συχνά το ίδιο σύμβολο και δεν υπάρχει το μηδέν.

Διαθεματικότητα: Ιστορία: Ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης

Εικόνα 5, σελ. 53.

Ιστορικά στοιχεία για τον Ελληνικό πολλαπλασιασμό.

Ο Ευτόκιος από την πόλη Ασκαλών στη Μέση Ανατολή, έζησε τον 6ο αιώνα μ.Χ. και έγραψε πολλά βιβλία με σχόλια σε μαθηματικά κείμενα του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου του Περγαίου (σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών της Ελληνιστικής περιόδου), οι οποίοι έζησαν αρκετούς αιώνες πριν απ' αυτόν. Στο βιβλίο *Περί κύκλου Μετρήσεως* ο Αρχιμήδης προσεγγίζει για πρώτη φορά στην παγκόσμια ιστορία με επιστημονικό -γεωμετρικό και αριθμητικό- τρόπο την τιμή του αριθμού **π** του οποίου η τιμή που χρησιμοποιούμε σήμερα είναι 3,14. Στα Σχόλιά του πάνω στο βιβλίο αυτό ο Ευτόκιος επεξηγεί και παρουσιάζει αναλυτικά (με χρήση του αλφαβητικού αριθμητικού συστήματος των Ελλήνων) τον ελληνικό πολλαπλασιασμό.

Εικόνα 6, σελ. 87-88.

Ιστορικά στοιχεία για τους δεκαδικούς

Μπορούμε να πούμε στους μαθητές μερικά ιστορικά στοιχεία σχετικά με την εμφάνιση των δεκαδικών αριθμών.

Τα κλάσματα ήταν ήδη γνωστά από την αρχαιότητα. Τα χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι τη δεύτερη χιλιετία π.Χ. Στην Ευρώπη οι μαθηματικοί τα χρησμοποιούσαν επί αιώνες σε αντίθεση με τους δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίοι ανακαλύφθηκαν σχετικά πρόσφατα. Ο μαθηματικός **Al Kashi** (πέθανε το 1429 μ Χ.) ήταν ο πρώτος που παρουσίασε τη θεωρία των δεκαδικών κλασμάτων και θεμελίωσε ότι οι πράξεις μπορεί να πραγματοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο, όπως και των ακεραίων. Έπρεπε να περιμένουμε μέχρι τον 16ο αι μ.Χ., οπότε ο Φλαμανδός μαθηματικός **Simon Stevin** (1548 – 1620) εισήγαγε τη γραφή των δεκαδικών αριθμών με τον εξής τρόπο: το 5,237 το έγραφε 5 0 2 1 3 2 7 3.

Επισήμανε επίσης ότι αυτός ο αριθμός είναι ισοδύναμος με το

$5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1.000}$ ή $\frac{5.237}{1.000}$.

Διαθεματικότητα: Ιστορία των Μαθηματικών.

Εικόνα 7, σελ. 102.

1. Στη δραστηριότητα αυτή παρουσιάζεται το αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης. Δεν πρόκειται για ένα αριθμητικό σύστημα θέσης όπως το σημερινό, δηλαδή δεν αλλάζει η αξία των ψηφίων του αριθμού ανάλογα με τη θέση τους στον αριθμό. Επίσης στο αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης δεν υπάρχει η έννοια του μηδενός. Οι αριθμοί που παρουσιάζουμε στο αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης φτάνουν μέχρι το 7.000. Τα σύμβολα που ίσως παρουσιάζουν δυσκολία είναι το 90 (κόππα) και το 900 (σαμπί). Στόχος δεν είναι οι μαθητές να απομνημονεύσουν αυτό το αριθμητικό σύστημα, αλλά να πειραματιστούν και να το δοκιμάσουν, μετατρέποντας αριθμούς από το ένα σύστημα στο άλλο.

Οι μαθητές μπορούν, αν θέλουν, να κάνουν σύγκριση με το λατινικό (ρωμαϊκό) σύστημα που έχουν διδαχτεί σε προηγούμενη ενότητα.

Διαθεματικότητα: Ιστορία: Αριθμοί στην Αρχαία Ελλάδα.

Εικόνα 8, σελ. 113-114.

3. Το τρίγωνο του Πασκάλ

Το τρίγωνο του Πασκάλ ανήκει σε εκείνη την ομάδα αντικειμένων που ονομάζονται αριθμητικά τρίγωνα. Το τρίγωνο που εξετάζουμε πήρε το όνομά του από το Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 – 1662 μ.Χ.), ο οποίος το χρησιμοποίησε σε προβλήματα συνδυαστικής και πιθανοτήτων.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Από την τρίτη γραμμή και κάτω κάθε αριθμός, εκτός από τις μονάδες, βρίσκεται, όταν προσθέσουμε τους δύο αριθμούς της προηγούμενης γραμμής οι οποίοι είναι πιο κοντά του. Π.χ. στην 3η γραμμή 2 = 1 + 1, στην 4η γραμμή είναι 3 = 1 + 2, στην 5η γραμμή είναι 4 = 1 +3, 6 =3 +3 κτλ.

Ζητούμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν την εξέλιξη των αριθμών στο τρίγωνο και να συμπληρώσουν την έκτη σειρά. Καλό είναι η τάξη να δουλέψει σε ομάδες. Αν οι μαθητές το βρουν, μπορούμε να ζητήσουμε να δημιουργήσουν και επόμενες σειρές, έβδομη, όγδοη κτλ.

Εικόνα 9, σελ. 133.

Δ΄ Δημοτικού

Προτεινόμενες δραστηριότητες:

- Σύνδεση με το μάθημα της **Γλώσσας** και της **Ιστορίας**:
  Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν τον πολλαπλασιασμό των φυσικών με τον εξής τρόπο: Για να πολλαπλασιάσουν, π.χ., 11 φορές το 23 έβρισκαν το διπλάσιο, τετραπλάσιο, οχταπλάσιο του 23.

Δηλ. 1 φορά το 23 =23
2 φορές το 23=46
4 φορές το 23=92
8 φορές το 23 =184 .

Πρόσθεταν τους 23+46+184=253 διότι το άθροισμα 1+2+8=11. Συζητάμε και εξηγούμε πώς λειτουργεί ο αλγόριθμος του Αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού (επιμεριστική ιδιότητα, ανάλυση του 11 σε δυνάμεις του 2). 11x23 = (1+2+8)x23.

Εικόνα 10, σελ. 52.

- **Σχέδιο εργασίας:** Τα παιδιά αναζητούν πληροφορίες για τις μονάδες μέτρησης μήκους στην αρχαία Ελλάδα (π.χ. το στάδιο). Μαθαίνουν για το διεθνές σύστημα μονάδων μέτρησης (S.I.) και συζητούν για τη σημασία του.

Εικόνα 11, σελ. 69.

Ε΄ Δημοτικού

Οι πληροφορίες που δίνονται για την ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών εντάσσονται σε μια γενικότερη ανάγκη πληροφόρησης στην ιστορία των μαθηματικών και τους πρωτεργάτες σε ανακαλύψεις και εφαρμογές στα μαθηματικά.
Δίνουμε την ευκαιρία στα παιδιά να ψάξουν στο διαδίκτυο και σε άλλες πηγές σε ανάλογα θέματα.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

- Στο διαδίκτυο: βρίσκουν πληροφορίες για μαθηματικούς που έκαναν σημαντικές ανακαλύψεις στα μαθηματικά, Έλληνες αλλά και ξένους, για την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, για τον αριθμό φ, για αριθμητικά συστήματα (δεκαδικό, εξηνταδικό κ.ά.).
- Κάνουν σχέδιο εργασίας για έναν από τους συγκεκριμένους τομείς που τους ενδιαφέρει και ψάχνουν στο διαδίκτυο.

Εικόνα 12, σελ. 66 και 68.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

Σχέδιο εργασίας με θέμα «Τα μαθηματικά και η μουσική». Τα παιδιά βρίσκουν πληροφορίες για τον Πυθαγόρα και τη σχέση των μαθηματικών με τη μουσική (δεύτερα, τέταρτα, όγδοα κτλ.).

Εικόνα 13, σελ. 149.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

Σχέδιο εργασίας: Τα παιδιά βρίσκουν πληροφορίες για τα αριθμητικά συστήματα στην ιστορία της ανθρωπότητας. (Το δεκαδικό και πώς ανακαλύφτηκε, το εξηνταδικό κτλ.). Ανακαλύπτουν τη σημασία των κλασμάτων στις μετρήσεις κατά την αρχαιότητα. Επίσης συζητάμε για το πότε ανακαλύφθηκαν οι δεκαδικοί αριθμοί και γιατί στην καθημερινή ζωή οι υπολογισμοί (αριθμομηχανή τσέπης κτλ.) δε γίνονται με κλάσματα αλλά με δεκαδικούς αριθμούς.

Εικόνα 14, σελ. 157.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

Σχέδιο εργασίας «Η γεωμετρία στην τέχνη: οι γωνίες, τα γεωμετρικά σχήματα και οι τεθλασμένες γραμμές σε αντικείμενα καθημερινότητας από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα».

Εικόνα 15, σελ. 164.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

Πρακτική χρήση των ιδιοτήτων των τριγώνων στην αρχαιότητα (π.χ., Θαλής ο Μιλήσιος: υπολογισμός της απόστασης πλοίου από την ξηρά).

Εικόνα 16, σελ. 168.

11. Προτεινόμενες δραστηριότητες που μπορούν να υποστηρίξουν τους στόχους του μαθήματος διαθεματικά

Σχέδιο εργασίας: «Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί».

Εικόνα 17, σελ. 191.

ΣΤ΄ Δημοτικού

- **Ιστορικά σημειώματα:** Σε ορισμένες δραστηριότητες με προεκτάσεις χρειάζεται να δοθούν ιστορικά στοιχεία και πληροφορίες στο δάσκαλο, ώστε να έχει πλήρη εικόνα του θέματος το οποίο πραγματεύεται η δραστηριότητα. Αυτή η επιπλέον πληροφορία δίνεται στο «ιστορικό σημείωμα» και όπου απαιτείται παρατίθεται η σχετική βιβλιογραφία.

Εικόνα 18, σελ. 13

Διαθεματική δραστηριότητα: *«Η γέφυρα του Γκαρ (Gard)»*

Για την επεξεργασία αυτής της δραστηριότητας καλό είναι τα παιδιά να χωριστούν σε ομάδες. Η εκτέλεση προτείνεται να γίνει σε 3 φάσεις. Στην πρώτη φάση οι ομάδες αντλούν τις πληροφορίες που χρειάζονται από το κείμενο (στο κείμενο υπάρχει ένα πλήθος πληροφοριών και αριθμών που δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουν), τις οποίες στη συνέχεια καταγράφουν και επεξεργάζονται. Στη δεύτερη φάση οι ομάδες προχωρούν στην ανακοίνωση των πορισμάτων τους, τα συγκρίνουν με τα αποτελέσματα των άλλων ομάδων και συζητούν για τις φυσικές παραμέτρους του έργου. Στην τελευταία φάση γίνεται συζήτηση γύρω από τις οικονομικές και κοινωνικές παραμέτρους του έργου καθώς και επέκταση – σύνδεση με άλλες γνωστικές περιοχές. Ακολουθεί ανοιχτή συζήτηση στην τάξη ανάμεσα σε όλα τα παιδιά αναφορικά με τα θέματα που προσφέρονται ή άλλα που μπορούν να βρουν τα παιδιά. Οι ομάδες προσπαθούν να ερμηνεύσουν την ανάγκη κατασκευής ενός τόσο δαπανηρού έργου και να το συγκρίνουν με αντίστοιχα σύγχρονα έργα (π.χ. η εκτροπή του Αχελώου). Μέσα στο πλαίσιο του χρόνου μπορούν να επεκταθούν περαιτέρω, να ανατρέξουν στην «Ιστοσελίδα υποστήριξης του βιβλίου» ή σε άλλες πηγές, να επιχειρήσουν ιστορικές αναδρομές, ακόμη και να παρουσιάσουν μία μικρή έρευνα – μελέτη του θέματος αργότερα.

Λύσεις:

- Ύψος 22 + 20 + 7 = 49 μ. Η κλίση (υπολογίζεται με διαίρεση) 12 : 50 = 0,24 μ. ανά χμ.
- Παροχή 430 • 60 • 60 • 24 = 37.152.000 λίτρα 37.152.000 : 150 = 247.680 άνθρωποι.
- Αναγνωρίζοντας την ιστορική σημασία του έργου, η Ε.Ε. το αποτύπωσε στο χαρτονόμισμα των 5 € και η ΟΥΝΕΣΚΟ το συμπεριέλαβε στον κατάλογο «Παγκόσμιας Πολιτιστικής Κληρονομιάς» το 1985.

Εικόνα 19, σελ. 34.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία»*

Η κρυπτογραφία είναι μία επιστήμη που βασίζεται στα μαθηματικά για την κωδικοποίηση και την αποκωδικοποίηση των δεδομένων. Οι μέθοδοι κρυπτογράφησης καθιστούν τα «ευαίσθητα» προσωπικά δεδομένα προσβάσιμα μόνο από όσους είναι κατάλληλα εξουσιοδοτημένοι. Εξασφαλίζεται έτσι το απόρρητο στις ψηφιακές επικοινωνίες αλλά και στην αποθήκευση πολύτιμων πληροφοριών.

Από το αρχικό κείμενο του μηνύματος με την κρυπτογράφηση (εφαρμογή κωδικοποίησης) προκύπτει ένα ακατάληπτο μήνυμα που ονομάζεται κρυπτογράφημα. Αποκρυπτογράφηση είναι η ανάκτηση του απλού κειμένου από το κρυπτογράφημα με την εφαρμογή της αντίστροφης κωδικοποίησης. Η κρυπτογραφημένη επικοινωνία είναι αποτελεσματική, όταν μόνο τα άτομα που συμμετέχουν σε αυτή μπορούν να ανακτήσουν το περιεχόμενο του αρχικού μηνύματος.

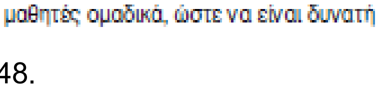
Η δραστηριότητα που αφορά την κωδικοποίηση και την κρυπτογραφία θα συνδέσει τα μαθηματικά με περιοχές που εξάπτουν τη φαντασία των παιδιών (μυστικές επικοινωνίες, κατασκοπία και επικοινωνία των στρατηγών με τους επιτελείς τους).

Βασικό στοιχείο της δραστηριότητας που πρέπει να επισημανθεί στους μαθητές (και θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο μάθημα) είναι η χρήση γινομένων από πρώτους αριθμούς που θα μας δώσουν την κωδικοποίηση. Για παράδειγμα, 2 · 2 = 4 μας δίνει την κωδικοποίηση (4Α) με την οποία η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ γίνεται ΠΕΜΛΠΕΨΝΞΕ, δηλαδή μετακινούνται τα γράμματα κατά 4 θέσεις αριστερά (η επάνω σειρά είναι η αρχική και η κάτω σειρά είναι αυτή που προέκυψε μετά την εφαρμογή της κωδικοποίησης) όπως φαίνεται και στον πιο κάτω πίνακα.

Το σχέδιο που απεικονίζεται δίπλα δείχνει τι σημαίνει κρυπτογραφία.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Α	Β	Γ	Δ

Κείμενο → κωδικοποίηση = κρυπτογράφημα → αντίστροφη κωδικοποίηση → κείμενο.



Η δραστηριότητα προτείνεται να αντιμετωπιστεί από τους μαθητές ομαδικά, ώστε να είναι δυνατή η ανταλλαγή ιδεών και κωδικοποιημένων ονομάτων.

Εικόνα 20, σελ. 48.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Το Δήλιο πρόβλημα»*

Πρόκειται για μία πρώτη εισαγωγή των παιδιών σε ένα από τα διάσημα άλυτα μαθηματικά προβλήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Ο κύβος πλευράς 4 εκατοστών έχει όγκο 4 • 4 • 4 = 64 κυβικά εκατοστά. Διπλασιάζοντας την πλευρά ο όγκος οχταπλασιάζεται (8 • 8 • 8 = 512 κυβικά εκατοστά). Για να διπλασιαστεί ο αρχικός κύβος, να γίνει δηλαδή 128 κ. εκ., πρέπει να βρεθεί ένας αριθμός ο οποίος, αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, να μας δώσει 128. Η αδυναμία της επίλυσης βρίσκεται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό που αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, θα μας δώσει το 128 (π.χ. το 5,05 στην τρίτη δίνει 128,787625).

Εξηγούμε ότι το πρόβλημα είναι άλυτο και αναφέρουμε και άλλα άλυτα προβλήματα.

Ιστορικό σημείωμα

Ένα από τα περίφημα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών της αρχαίας Ελλάδας αφορά την κατασκευή ενός κύβου με όγκο διπλάσιο από τον όγκο ενός δοσμένου κύβου. Αν και το πρόβλημα είναι πολύ παλαιότερο, οφείλει την ονομασία του σε μία επιδημία που έπληξε τη Δήλο περίπου το 430 π.Χ. Το μαντείο έδωσε χρησμό στους Δήλιους ότι η επιδημία θα σταματούσε μόνο αν κατασκεύαζαν έναν κυβικό βωμό, διπλάσιο σε μέγεθος από αυτόν που υπήρχε. Οι Δήλιοι ζήτησαν τη βοήθεια ακόμη και του Πλάτωνα για να λύσουν το πρόβλημα. Η αδυναμία των αρχαίων να το επιλύσουν οφείλεται στο γεγονός ότι το πρόβλημα δεν λύνεται με κανόνα και διαβήτη, γεγονός που έγινε πλήρως κατανοητό τον 19ο αιώνα.

Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε, περίπου το έτος 460 π.Χ., ότι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων μεταξύ ενός ευθύγραμμου τμήματος και του διπλάσιού του, δηλαδή να βρεθούν χ, ψ τέτοια, ώστε να ισχύει: $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\psi} = \frac{\psi}{2\alpha}$ από την οποία προκύπτει $\chi^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή ένας κύβος διπλάσιος ενός δοσμένου κύβου.

Αφού η λύση με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη, όλες οι λύσεις που προτάθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες οδηγούσαν σε καμπύλες και επιφάνειες βαθμού μεγαλύτερου από το 2.

Εικόνα 21, σελ. 54.

Παράρτημα Β

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Α΄ Γυμνασίου

10. Σε ορισμένες ενότητες υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες.

Εικόνα 1, σελ. 31.

Σε ορισμένες ενότητες της ύλης του διδακτικού βιβλίου περιλαμβάνονται, **δραστηριότητες για το σπίτι**, που είναι προαιρετικές και αφορούν τους μαθητές εκείνους που θα δείξουν λίγο περισσότερο ενδιαφέρον για εμβάθυνση στα διαπραγματευόμενα θέματα. Επιπλέον, υπάρχουν και πέντε **Σχέδια Εργασίας**, για συλλογική διερευνητική δουλειά των μαθητών, με διαθεματικό περιεχόμενο. Τέλος, στο διδακτικό βιβλίο, περιέχονται αρκετά **ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**, με σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Στη συνέχεια του παρόντος, παρατίθενται:

Εικόνα 2, σελ. 34.

<u>Το προτεινόμενο ιστορικό σημείωμα:</u> δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε αφενός στη νίκη της ευφυΐας ενάντια στην επίμοχθη μηχανική εργασία και αφετέρου ως υπόδειγμα αυτού που οι μαθηματικοί ονομάζουν “κομψή” λύση ενός προβλήματος. Με αφορμή αυτή την ιστορία μπορείτε να υπογραμμίσετε ότι στα μαθηματικά (και όχι μόνο) εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο φθάνουμε στην απάντηση και όχι αυτή η ίδια η απάντηση.

Εικόνα 3, σελ. 36.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:</u>

(α) <u>Ενδεικτικοί στόχοι:</u>

- Η παρακολούθηση της εξέλιξης των συμβόλων και των συστημάτων αρίθμησης.
- Η σύγκριση των τρόπων αρίθμησης και η αναφορά στο εκάστοτε ιστορικό, κοινωνικό, γεωγραφικό κλπ πλαίσιο

Εικόνα 4, σελ. 38.

<u>Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα έχουν σκοπό:</u> να παρουσιάσουν, το $1^{ο}$, την αναγκαιότητα χρήσης του ΕΚΠ στα καθημερινά προβλήματα με την εύρεση και καταγραφή των κοινών πολλαπλασίων δύο αριθμών, το $2^{ο}$, τον τρόπο εύρεσης του ΕΚΠ και του ΜΚΔ με τη μέθοδο της ανάλυσής τους σε γινόμενα πρώτων παραγόντων, το $3^{ο}$, την έννοια της διαιρετότητας και το $4^{ο}$, τη λειτουργία και χρησιμότητα του «Κόσκινου του Ερατοσθένη» για την εύρεση των πρώτων φυσικών αριθμών από το 1 έως το 100 (Ακολουθεί ιστορική αναδρομή σχετική με τον Ερατοσθένη).

Εικόνα 5, σελ. 40.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:

- Η διαχρονική καταγραφή των «μέτρων και σταθμών» σε διάφορους λαούς και εποχές.
- Η διερεύνηση των λόγων επιλογής των διαφόρων «μέτρων και σταθμών».
- Η ιστορική αναζήτηση των συνθηκών και του τρόπου επικράτησης του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.
- Η διερεύνηση του ρόλου της επιστήμης στην τελική επιλογή του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.

Εικόνα 6, σελ. 50.

Β.1.5. Μέτρηση, σύκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το μέτρο της γωνίας εξαρτάται μόνο από το άνοιγμά της και όχι από το μήκος των πλευρών της.
Με αφορμή την παραπάνω συζήτηση θίγεται και το θέμα της μοναδικότητας του μέτρου, ως βασικού κριτηρίου για την ισότητα μεταξύ δύο γωνιών. Αναφέρεται το μοιρογνωμόνιο, ως όργανο μέτρησης γωνιών και η μονάδα μέτρησης η μοίρα και οι υποδιαιρέσεις της. Επειδή οι μοίρες παρουσιάζονται με τη μορφή συμμιγών αριθμών, πράγμα που δυσκολεύει τους μαθητές, καλό θα είναι να προκληθεί μια συζήτηση για το πώς προέκυψαν αυτές ιστορικά. Για το λόγο αυτό παρατίθεται ιστορικό σημείωμα που αφορά στα εξηνταδικά συστήματα αρίθμησης.

Εικόνα 7, σελ. 80.

Με αφορμή το θέμα αυτό μπαίνει, εύλογα, το αίτημα της μοναδικότητας της παραλλήλου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής. Στο ιστορικό σημείωμα που παρατίθεται, γίνεται αναφορά στον Ευκλείδη και στο «αίτημα» που συνδέθηκε με το όνομά του. Είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίσουν οι μαθητές από την ηλικία αυτή τα θέματα αυτού του είδους, που έχουν και φιλοσοφική χροιά, πέραν της επιστημολογικής και πολιτιςμικής.

Εικόνα 8, σελ. 85.

Το ιστορικό σημείωμα έχει τον σκοπό να «δουν» οι μαθητές την ιστορική διαδρομή, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, του ιδίου θέματος, δηλαδή την κατάταξη των τετραπλεύρων.

Εικόνα 9, σελ. 101.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: **«Η έννοια των ανάλογων μεγεθών στις θετικές και ανθρωπιστικές επιστήμες»**

Κριτήρια επιλογής του θέματος

Α. Η αναλογία ποσών εμφανίζεται σε μεγάλο εύρος προβλημάτων της ζωής μας. Η έννοια της μεταβολής ενός μεγέθους που εξαρτάται από ένα άλλο, παρουσιάζεται στην απλούστερή της μορφή σε ανάλογα ποσά.

Β. Η αλληλεπίδραση μεγεθών δίνεται, ως ειδική περίπτωση, από το σταθερό τους λόγο. Οι λόγοι και αναλογίες ομοειδών μεγεθών παρουσιάζονται ιστορικά ως η μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον αφηρημένο μαθηματικό λογισμό (βλ. Στοιχεία του Ευκλείδη).

Γ. Αρκετές βασικές έννοιες των φυσικών επιστημών ακολουθούν τη γραμμικότητα, όπως π.χ. στην κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Είναι σημαντικό να παρουσιαστεί η ισοδυναμία του σταθερού λόγου, της αναλογίας, του τύπου της γραμμικής συνάρτησης και της αναπαράστασης της σχέσης δύο μεγεθών με μία ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Δ. Η γεωμετρική ερμηνεία των ποσών με σταθερή αναλογία εμφανίζεται γεωμετρικά στην ομοιότητα και εντοπίζεται στις εφαρμογές σε σμικρύνσεις και μεγεθύνσεις σχημάτων.

Ε. Η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης έχει ως κλίση το σταθερό λόγο. Δίνεται έτσι η αφορμή για μελέτη πραγματικών προβλημάτων με κλίσεις ευθειών (π.χ. σχεδιασμός ανηφορικών δρόμων ή αλυσίδων παραγωγής σε εργοστάσια με αυτοματισμούς).

ΣΤ. Οι συχνές επισημάνσεις της αναλογίας σε εκφάνσεις της κοινωνικής, πολιτικής και επαγγελματικής ζωής με κύριο σκοπό να τονιστεί η αποδοτικότητα των ατόμων στους τομείς αυτούς.

Εικόνα 10, σελ. 45.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει την ευκαιρία να γνωρίσουν οι μαθητές τη στενή συσχέτιση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία. Για το λόγο αυτό, προτείνεται ο διδάσκων να επιμείνει καταρχάς στη γεωμετρική «ανακάλυψη» και κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (με τη βοήθεια του παζλ της § 1.4 ή αν υπάρχει η δυνατότητα με τη βοήθεια κάποιας διαδραστικής δραστηριότητας στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου). Στη συνέχεια να ενθαρρύνει τους μαθητές του να μετατρέψουν τη σχέση των εμβαδών σε αλγεβρική σχέση μεταξύ των πλευρών.
- Η ιστορική διάσταση του Πυθαγόρειου θεωρήματος θεωρείται, επίσης, πολύ ενδιαφέρουσα και προτείνεται να ανατεθεί ως δραστηριότητα σε ομάδες μαθητών η εύρεση στοιχείων στο διαδίκτυο για τις προσπάθειες των Αιγυπτίων.
- Η εισαγωγή του Πυθαγόρειου θεωρήματος, μετά την έννοια του εμβαδού, δίνει τη δυνατότητα της ανάπτυξης του θεωρήματος μέσα στο σωστό μαθηματικό του πλαίσιο. Ωστόσο, θα πρέπει να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα με ρητούς αριθμούς, αφού θα χρησιμοποιηθεί αργότερα (Μέρος Α′ – Κεφάλαιο 2ο) για να εισάγουμε τους άρρητους αριθμούς.

Εικόνα 11, σελ.61.

Δραστηριότητα 2

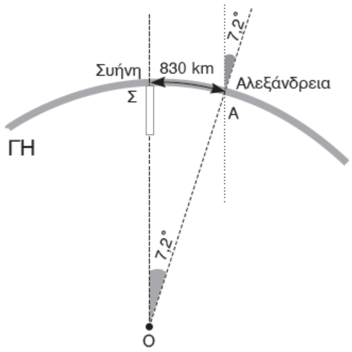
«Οι υπολογισμοί του Ερατοσθένη»

Περίπου το 250 π.Χ. ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, διάσημος μαθηματικός και διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, ασχολήθηκε με τον υπολογισμό της διαμέτρου της Γης.

Παρατήρησε ότι κατά το θερινό ηλιοστάσιο (21 Ιουνίου) το είδωλο του Ήλιου καθρεπτιζόταν στο κέντρο ενός πηγαδιού στη Συήνη (πόλη της Αιγύπτου κοντά στην Ασουάν), δηλαδή ήταν σε κατακόρυφη θέση στο σημείο αυτό.

Μετά από ένα χρόνο, την ίδια ημέρα, ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι οι ακτίνες του ήλιου στην Αλεξάνδρεια σχημάτιζαν γωνία με την προηγούμενη κατακόρυφη θέση του, την οποία υπολόγισε ότι ήταν 7,2°.

Η Αλεξάνδρεια απέχει από τη Συήνη περίπου 830 Km (5.000 στάδια).



Να υπολογίσετε την περιφέρεια της Γης και κατόπιν τη διάμετρό της.

Εικόνα 12, σελ. 87.

Γ΄ Γυμνασίου

Σε ορισμένες ενότητες παρουσιάζονται **θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών** στα οποία επιχειρείται να δοθεί η περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και η παρουσίαση των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν προκειμένου να λυθεί. Τα θέματα αυτά μαζί με τα συνοδευτικά ερωτήματα έχουν ως στόχο να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η ιστορία των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

α) Προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

β) Αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες.

γ) Συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξής τους.

Τα θέματα αυτά, καθώς και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή δεν μπορούν να θεωρηθούν ολοκληρωμένες μελέτες και γι' αυτό υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Εικόνα 13, σελ. 10-11.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Ο «τετραγωνισμός του κύκλου» είναι ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Στα τέλη του 5ου αιώνα π. Χ. ήταν πολύ δημοφιλές ζήτημα στην Αθήνα, αφού ήταν συνώνυμο του «ακατόρθωτου». Το πρόβλημα έγκειται στην κατασκευή με κανόνα και διαβήτη της πλευράς ενός τετραγώνου που το εμβαδόν του να είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου γνωστής ακτίνας. Η κατασκευή αυτή, όπως αποδείχθηκε, μόλις το 1882 μ.Χ., είναι αδύνατη με κανόνα και διαβήτη. Σ' αυτό βοήθησαν αλγεβρικές έννοιες που ήταν άγνωστες στους αρχαίους Έλληνες. Όπως σημειώνει ο Dirk Struik στη Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών: *«Παλαιότεροι και σύγχρονοι μαθηματικοί έχουν επισημάνει τη σύνδεση αυτών των αρχαίων ελληνικών(άλυτων) προβλημάτων και της σύγχρονης θεωρίας των εξισώσεων, σχετικά με θέματα που αναφέρονται σε ρητές αναλύσεις, σε αλγεβρικούς αριθμούς και στη θεωρία ομάδων».*
Αν x η πλευρά του τετραγώνου και r η ακτίνα του κύκλου, τότε $x^2 = \pi r^2$, $x = \sqrt{\pi r^2}$, $x = r\sqrt{\pi}$.
Ο Lindemann απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός* αλλά υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν μπορεί να είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Επομένως ότι είναι αδύνατη η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους π.

* Όταν ένας αριθμός είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, ονομάζεται αλγεβρικός αριθμός. Π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός αριθμός, αφού είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2=0$ και κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Ενώ ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ που είναι ρίζα της αλγεβρικής εξίσωσης $x^3 - 2 = 0$, δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Η περίπτωση αυτή σχετίζεται μ' ένα ακόμα από τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, το «Διπλασιασμό του κύβου», το αποκαλούμενο Δήλιο πρόβλημα (εύρεση της πλευράς ενός κύβου με όγκο διπλάσιο από τον όγκο δοσμένου κύβου).

Εικόνα 14, σελ. 19.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Πυθαγόρειο θεώρημα και Πυθαγόρειες τριάδες

Ο Πρόκλος (5ος αιώνας μ.Χ.) στο έργο του «Σχόλιο στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» αναφέρει δυο μεθόδους εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων στην αρχαία Ελλάδα.
Η πρώτη μέθοδος αποδίδεται στους Πυθαγόρειους οι οποίοι σχημάτιζαν τριάδες από τους αριθμούς της μορφής $\frac{\mu^2+1}{2}$, $\frac{\mu^2-1}{2}$, μ, όπου μ περιττός μ = 3, 5, 7,...

(Οι Πυθαγόρειοι και οι αρχαίοι Έλληνες δε θεωρούσαν την μονάδα ως αριθμό). Κατά τους L. Bunt κ.τ.λ οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν στους τύπους αυτούς από την ενασχόληση με τους παραστατικούς τετράγωνους αριθμούς).
Η δεύτερη μέθοδος αποδίδεται στον Πλάτωνα ο οποίος έδωσε ως λύση τους αριθμούς της μορφής $\frac{\mu^2}{4}+1$, $\frac{\mu^2}{4}-1$, μ, όπου μ άρτιος (μ = 4, 6, 8,...)

Οι τύποι των Πυθαγορείων και του Πλάτωνα είναι αμοιβαία συμπληρωματικοί.
Με το θέμα των Πυθαγόρειων τριάδων ασχολήθηκε και ο **Ευκλείδης**, ο οποίος μάλιστα στο λήμμα 1 της πρότασης 28 του Χ βιβλίου των Στοιχείων του δίνει μια μέθοδο εύρεσης δυο τετράγωνων αριθμών των οποίων το άθροισμα είναι τετράγωνος αριθμός (δηλαδή Πυθαγόρειες τριάδες) με γεωμετρική κατασκευή και με την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί είναι και οι δυο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί.
Το πρόβλημα της κατασκευής Πυθαγόρειων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς λύθηκε οριστικά από τον **Διόφαντο** ο οποίος στηριζόμενος σε μια ταυτότητα, η οποία ήταν γνωστή και στον Ευκλείδη, ανακάλυψε ότι οι αριθμοί της μορφής $\lambda^2 + \mu^2$, $\lambda^2 - \mu^2$, $2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα. Η λύση περιέχεται στο Βιβλίο του Αριθμητικά, ένα έργο το οποίο πιθανότητα γράφτηκε τον 3ο μ.Χ. αιώνα και αναφέρεται σε προβλήματα των οποίων οι λύσεις είναι ακέραιοι ή γενικότερα ρητοί αριθμοί.
Το πρόβλημα των πυθαγόρειων τριάδων, παρόλο που θυμίζει το Πυθαγόρειο θεώρημα για ορθογώνια τρίγωνα στην ουσία είναι ένα αλγεβρικό πρόβλημα, αφού σχετίζεται με την εύρεση των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $z^2 = x^2 + y^2$.
Όταν λύθηκε το πρόβλημα των Πυθαγόρειων τριάδων πολλά συναφή προβλήματα κίνησαν το ενδιαφέρον των μεταγενέστερων μαθηματικών. Ένας από αυτούς ο Pierre de Fermat (1601-1665), στο περιθώριο του αντιτύπου των Αριθμητικών του Διόφαντου που διέθετε και πλάι στον ισχυρισμό του ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί x, y, z, n με n>2 ώστε $x^n + y^n = z^n$, έγραψε: *«Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να το χωρέσει».*
Αν διέθετε ή όχι μιαν απόδειξη, δεν θα το μάθουμε ποτέ. Η αναζήτηση όμως για περισσότερα από 350 χρόνια της απόδειξης της πρότασης αυτής, γνωστής ως **το τελευταίο θεώρημα του Fermat**, που «υπήρχε και χάθηκε», συνεισέφερε πολλά στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Η απόδειξη δόθηκε τελικά το 1995 από τον Andrew Wiles.
Επισήμανση
Κατά την πραγμάτευση του θέματος αυτού η τάξη μπορεί να χωριστεί σε ομάδες και καθεμιά από αυτές να ασχοληθεί με μια μόνο περίπτωση .

Εικόνα 15, σελ. 29-30.

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Η έννοια της «απόδειξης»

Απόδειξη σημαίνει εξήγηση, διασάφηση, τεκμηρίωση, ορθός συλλογισμός. Είναι η επιβεβαίωση της αλήθειας κατά τρόπο αναμφισβήτητο και χαρακτηρίζεται ως απτή, χειροπιαστή, τεκμηριωμένη, αδιάσειστη, πειστική, αδιαφιλονίκητη κ.ά. Σημαίνει ακόμα αποδεικτική μέθοδο (μαρτυρική, πειραματική, απόδειξη δια της εις άτοπον απαγωγής κ.τ.λ.). Στην απόδειξη φτάνει κανείς από τις προκείμενες προτάσεις (υποθέσεις) στο συμπέρασμα με επιχειρήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην προκύψει κανένα κενό τόσο στη σύνδεση υποθέσεων και συμπεράσματος, όσο και στη διαδοχή των επιχειρημάτων.

Τον 4ο αιώνα π.Χ ο Αριστοτέλης, μελετώντας τους συλλογισμούς, που ήταν ήδη γνωστοί από τα Μαθηματικά, έγραφε: *«....δεῖ τόν λέγοντα μή φάναι μόνον, ἀλλά καί τήν αἰτίαν αὐτοῦ λέγειν καί μή τίθεσθαι μηδέν, μήδ' ἀξιοῦν ἀξίωμα ἄλογον, ἀλλ' ἤ ἐπαγωγήν ἤ ἀπόδειξιν φέρειν»* (Αριστοτέλης, Φυσικά Θ2, 252α22). Δηλαδή *«...πρέπει όποιος λέει κάτι, να μην περιορίζεται σε ισχυρισμούς, αλλά να αναφέρεται και στην αιτία των όσων ισχυρίζεται και να μην αυθαιρετεί ούτε να αξιώνει να γίνει αποδεκτό κανένα παράλογο αξίωμα ή ισχυρισμός, αλλά να προσκομίζει απόδειξη των όσων υποστηρίζει.»*

Στο απόσπασμα αυτό περιγράφεται με σαφήνεια η ιδιαίτερη αποδεικτική μέθοδος κατάκτησης της γνώσης, την οποία αποδέχονταν αλλά και καλλιεργούσαν, οι φιλόσοφοι στον αρχαίο ελληνικό χώρο. Στους προελληνικούς πολιτισμούς της Ανατολικής Μεσογείου (Βαβυλώνιοι–Αιγύπτιοι), η γνώση δε στηριζόταν στην απόδειξη, αλλά απέρρεε από την αυθεντία του ιερατείου, που κατείχε την εξουσία. Είχε επομένως χαρακτήρα **αποκαλυπτικό**. Αυτή ήταν η μορφή της γνώσης που ταίριαζε περισσότερο στις δεσποτικές και θεοκρατικές εκείνες κοινωνίες. Ομως, ο Ελληνικός πολιτισμός, εκφραστής ιστορικών ανατροπών και ανακατατάξεων, από τον 6ο π.Χ. αιώνα καθιέρωσε διαφορετική στάση απέναντι στη γνώση με την ανάπτυξη της φιλοσοφίας και το πέρασμα από το μύθο στο λόγο. Απέκρουσε τη στήριξή της γνώσης στην αυθεντία και επιζήτησε τη στήριξη της στην λογική που αναδείχθηκε μέσα από την προβολή του ατόμου. Έτσι, η γνώση έπαψε να αποτελεί πειθαναγκασμό για τον μελετητή, ο οποίος με δική του πλέον ευθύνη, αφού πεισθεί, την αποδέχεται. Η πνευματική αυτή διεργασία, που ιστορικά πρωτοεμφανίζεται στην περιοχή των Ελληνικών Μαθηματικών, πήρε το όνομα «απόδειξη» και «αποδεικτικός συλλογισμός» και θεωρείται η αρχή της επιστημονικής σκέψης. Η δημόσια κριτική συζήτηση των απόψεων στο πλαίσιο της πόλης, γνώρισμα της δημοκρατίας, απαιτούσε επιχειρήματα για την υποστήριξή τους καθώς η δημόσια αποδοχή ή η κριτική των ιδεών αποτελούσαν μέρος της διαδικασίας νομιμοποίησή τους.

Η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των Μαθηματικών αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο (624-547 π.Χ.), ο οποίος απέδειξε ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη. Από τότε η απόδειξη έβαλε στέρεα θεμέλια στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξή τους. Η απόδειξη συνέβαλε ακόμη στη δημιουργία, όχι μόνο νέων μαθηματικών θεωριών, αλλά και νέων κλάδων στα Μαθηματικά, των οποίων η θεωρητική θεμελίωση καθόρισε την ιστορία της ανθρωπότητας.

«Η έννοια της απόδειξης» θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα για την οργάνωση και ανάπτυξη ενός σχεδίου εργασίας. Σκοπός της εργασίας αυτής θα είναι η διερεύνηση του ρόλου της απόδειξης στην καθημερινή ζωή, στον πολιτικό λόγο, στο μάθημα της Γλώσσας, της Ιστορίας, των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών.

Ενδεικτικές επισημάνσεις

Η μαθηματική απόδειξη θα γίνει καλύτερα αντιληπτή μέσα από την ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Η διαφορά των υπολογιστικών-προσεγγιστικών Μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν οι λαοί της Μεσοποταμίας σε σχέση με τα αποδεικτικά Μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων να αποτελέσει την κύρια ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Το θέμα θα ολοκληρωθεί με τη χρησιμότητα της απόδειξης στην καθημερινή συλλογιστική και πρακτική (π.χ. απόδειξη της ενοχής – αθωότητας στο δικαστήριο, κ.τ.λ.).

Προτεινόμενες δραστηριότητες

Οι μαθητές προτείνεται να χωριστούν σε **3 ομάδες**.

Η πρώτη ομάδα θα ασχοληθεί με την ιστορική εξέλιξη της απόδειξης στα Μαθηματικά. Θα διερευνήσει τα υπολογιστικά προσεγγιστικά Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων από τα οποία απουσιάζει η απόδειξη (προβλήματα που περιέχονται στον πάπυρο του Ριντ (Rhind) και τις βαβυλωνιακές πινακίδες), καθώς και τις απαρχές της μαθηματικής απόδειξης από τους αρχαίους Έλληνες (Θαλής, Πυθαγόρας, Ευκλείδης κ.ά.). Τη διαφοροποίηση αυτή πρέπει να τη συνδέσει με την οργάνωση και τη δομή των κοινωνιών τους (μαζική κοινωνία, δεσποτισμός και θεοκρατία σε αντιδιαστολή με την προβολή της αξίας της προσωπικότητας και τη δημοκρατία).

Η δεύτερη ομάδα θα ασχοληθεί με τη έννοια και τη χρήση της απόδειξης:

Στο μάθημα της <u>Γλώσσας</u>: Να ζητηθεί η χρήση της απόδειξης για την αιτιολόγηση μιας άποψης, την υποστήριξη μιας θέσης, τη διευκρίνιση-επεξήγηση ενός θέματος, την προβολή επιχειρημάτων, την ανάπτυξη συλλογισμών κ.τ.λ. εκ μέρους του πομπού ενός μηνύματος. Να ζητηθεί να ασκήσουν οι μαθητές κριτική στην πειθώ ενός άλλου κειμένου ως δέκτες ενός μηνύματος. Μπορεί να τους ζητηθεί ακόμα να γράψουν μια παράγραφο με αιτιολόγηση ενός θέματος που έχει επιλεγεί από τους ίδιους.

Στην <u>Ιστορία</u>: Να χρησιμοποιηθεί για την ανάδειξη γεγονότων μέσα από τη χρήση πηγών και ιστορικών μαρτυριών και την τεκμηρίωση ιστορικών κρίσεων.

Στην <u>Αρχαιολογία</u>: Χρησιμεύει στη χρονολογική κατάταξη ευρημάτων, στη διατύπωση πορισμάτων, επιστημονικών υποθέσεων κ.ά.

Στην <u>καθημερινή ζωή</u> (στις εμπορικές συναλλαγές, στο δικαστήριο, στη διαφήμιση κ.τ.λ.).

Η τρίτη ομάδα θα εντοπίσει τα είδη των αποδείξεων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά (ευθεία – άμεση απόδειξη, απαγωγή στο άτοπο, κ.τ.λ.), όπως τα έμαθαν μέσα από τα σχολικά τους βιβλία και θα τα συνδέσει με τις αντίστοιχες μορφές απόδειξης που χρησιμοποιούμε στη γλώσσα. Ακόμα μπορεί να τους ζητηθεί να βρουν και άλλα είδη αποδείξεων, π.χ. παραστατικές αποδείξεις δηλαδή αποδείξεις δίχως λόγια.

Εικόνα 16, σελ. 31-32.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού

Το θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών αφορά τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων δευτέρου βαθμού από τους Βαβυλώνιους. Οι βαβυλωνιακές πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο, που έχουν μεταφραστεί, περιέχουν προβλήματα της καθημερινής ζωής. Προβλήματα θεωρητικού περιεχομένου δεν υπάρχουν στα βαβυλωνιακά μαθηματικά. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο βιβλίο του μαθητή είναι το δεύτερο από τα είκοσι τέσσερα προβλήματα που περιέχονται στην πήλινη βαβυλωνιακή πλάκα με τον κωδικό αριθμό 13901 και η οποία βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο. Από το πρόβλημα αυτό αλλά και από άλλα προβλήματα αναλόγου περιεχομένου, διαπιστώνουμε ότι τους Βαβυλωνίους δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αφού πρόσθεταν επιφάνεια με μήκος, αλλά η ίδια η ποσότητα όπως αυτή εκφράζεται από τους συγκεκριμένους αριθμούς. Οι Βαβυλώνιοι την εποχή της πρώτης βαβυλωνιακής δυναστείας (1830 – 1530 π.Χ.) αν και δεν γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς, κατείχαν με πρακτικό τρόπο την τεχνική επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Με βάση τη σημερινή ορολογία και το σύγχρονο συμβολισμό ορισμένα από τα προβλήματα που έχουν βρεθεί γραμμένα στις διάφορες πλάκες οδηγούν στη λύση δευτεροβαθμίων εξισώσεων της μορφής

$$x^2 + \beta x = \gamma, \qquad x^2 - \beta x = \gamma, \qquad \alpha x^2 + \beta x = \gamma$$

Η βαβυλωνιακή μέθοδος επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού μοιάζει με τον τρόπο που λύνουμε σήμερα μια δευτεροβάθμια εξίσωση (συμπλήρωση τετραγώνου). Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος που αναφέρεται στο σφηνοειδές κείμενο περιορίζεται στην απαρίθμηση των βημάτων που πρέπει να γίνουν για την επίλυση του προβλήματος χωρίς καμία διακαιολόγηση και αποτελούν ένα είδος «συνταγής». Σε κάθε βήμα δίνεται και το αντίστοιχο εξαγόμενο.

Με σύγχρονο συμβολισμό, αν εφαρμόσουμε τα βήματα των Βαβυλωνίων για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 - \beta x = \gamma$, θα οδηγηθούμε στον τύπο $\frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$ (στα βαβυλωνιακά κείμενα δεν υπάρχει πουθενά καταγεγραμμένος ένας τέτοιος τύπος).

1ο βήμα: Πάρε το $\frac{\beta}{2}$

2ο βήμα: Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του $\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{\beta^2}{4}$

3ο βήμα: Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το σταθερό αριθμό γ $\left(\frac{\beta^2}{4} + \gamma\right)$ και υπολόγισε την τετραγωνική του ρίζα (Οι Βαβυλώνιοι έβρισκαν τις τετραγωνικές ρίζες είτε από πίνακες τετραγώνων αριθμών είτε προσεγγιστικά).

4ο βήμα: Για να βρεις το ζητούμενο πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το $\frac{\beta}{2}$

$$\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$$

Π.χ. για τη λύση της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{3}{4}$ οι αριθμοί που προέκυπταν σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα ήταν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, $= 1$, $\sqrt{1} = 1$ και επομένως η τιμή του x είναι $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Για την εξίσωση $x^2 + \beta x = \gamma$ ακολουθούσαν τα ίδια βήματα με τη διαφορά ότι στο 4ο βήμα αφαιρούσαν το $\frac{\beta}{2}$. Έτσι κατέληγαν στον τύπο $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} - \frac{\beta}{2} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$

(Οι Βαβυλώνιοι καθώς και όλοι οι αρχαίοι λαοί δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις οποίες ο συντελεστής του x^2 δεν ήταν 1. Για παράδειγμα, για να λύσουν την εξίσωση $7x^2 + 6x = 1$, η οποία αναγράφεται σε μια άλλη πλάκα, πολλαπλασίαζαν και τα δύο μέλη της με το 7, οπότε η εξίσωση έπαιρνε την μορφή $(7x)^2 + 6\cdot(7x) = 7$. Τότε θεωρούσαν νέο άγνωστο τον $y = 7x$ και λύνοντας την εξίσωση $y^2 + 6y = 7$ έβρισκαν $y = 1$, οπότε η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x = \frac{1}{7}$.

Δεν την έλυναν διαιρώντας και τα δυο μέλη της με το 7, γιατί τότε θα είχαν τα κλάσματα $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{7}$ των οποίων η εξηνταδική τους παράσταση είναι αριθμός μη τερματιζόμενος. (Οι Βαβυλώνιοι ως γνωστόν χρησιμοποιούσαν εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης).

Σημείωση: *Είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν τις εξισώσεις 2ου και 3ου βαθμού γεωμετρικά όχι μόνο βρίσκοντας τις ρίζες τους αλλά και κατασκευάζοντάς τες.*

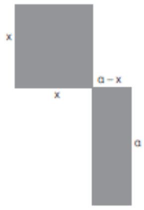
Εικόνα 17, σελ. 44-45.

Η Χρυσή τομή

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι αριθμοί μπορούν να εξηγήσουν την δομή του σύμπαντος, αφού *«οι αριθμοί είναι η ουσία των όντων»* και ότι οι αναλογίες κυριαρχούν και διέπουν την εκ του χάους δημιουργία της μορφής του κόσμου. Η πίστη αυτή τους οδήγησε στη μελέτη των αναλογιών που εμφανίζονται στη φύση. Μια από τις μελέτες αφορούσε τις παλλόμενες χορδές οι οποίες όταν έχουν αναλογία μήκους 1/2, 2/3, 3/4...., παράγουν *«αρμονικές συγχορδίες»*, δηλαδή ζεύγη από νότες που ακούγονται ευχάριστα. Από τη μελέτη των αριθμών και των ιδιοτήτων τους θεμελιώθηκε η Αριθμητική ή όπως λέγεται σήμερα Θεωρία αριθμών. Οι *μεσότητες* δηλαδή οι *αναλογίες* που χρησιμοποιήθηκαν από τους Πυθαγόρειους στα Μαθηματικά και τη Μουσική, ήταν συνολικά δέκα. Η ανακάλυψη των τριων πρώτων αποδίδεται στον ίδιο τον Πυθαγόρα (αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος). Άλλες τρεις πιστεύεται ότι ανακάλυψαν οι μαθητές του, Αρχύτας και Ίππασσος ή όπως άλλοι πιστεύουν ο Εύδοξος, μαθητής του Αρχύτα, κορυφαίος μαθηματικός στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Οι άλλες τέσσερις προστέθηκαν από τους Πυθαγόρειους Μυονείδη και Ευφράνωρα.
Η δέκατη αναλογία είναι σήμερα γνωστή με το όνομα **χρυσή τομή**, που της έδωσε ο Kepler (1571-1630) και σχετίζεται με το πρόβλημα της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.
«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΤ = x και ΤΒ = λ – x, ώστε ο λόγος του ΑΒ προς το μεγαλύτερο μέρος ΑΤ να είναι ίσος με το λόγο του ΑΤ προς το μικρότερο τμήμα». Η θετική ρίζα της εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ είναι η $x = \lambda\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ από την οποία προκύπτει ο λόγος των τμημάτων ΑΒ και ΑΤ, $\frac{\lambda}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}61803... = \varphi$

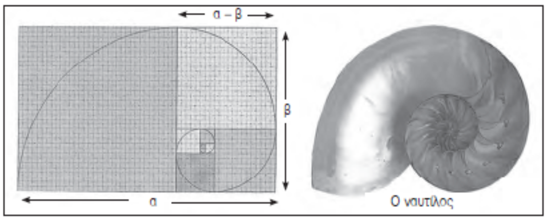
Ο λόγος αυτός είναι ίσος και με το λόγο της διαγωνίου προς την πλευρά κανονικού πενταγώνου. Οι διαγώνιοι ενός κανονικού πενταγώνου σχηματίζουν ένα αστεροειδές πεντάγωνο, την πεντάλφα, που ήταν διακριτικό γνώρισμα της Πυθαγόρειας Σχολής.

Σ' αυτό ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \varphi$, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \varphi$.
Έχει παρατηρηθεί ότι η τήρηση του λόγου φ στις αναλογίες καλλιτεχνικών κατασκευών δημιουργεί την αίσθηση της αρμονίας. Το πλήθος των σκαλιών στο άνω και κάτω διάζωμα του θεάτρου της Επιδαύρου, έχει κατασκευαστεί (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) σύμφωνα με το λόγο φ.
Στο ΙΙ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη περιέχεται το πρόβλημα της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αλλά διατυπώνεται ως εξής: *«Να χωριστεί ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα α σε δύο μέρη ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα α και το α – x, να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το x»*.



Το όνομα όμως και τη φήμη του ο αριθμός φ τα οφείλει στις αριθμητικές του ιδιότητες (αν στο φ προσθέσεις το 1, προκύπτει το τετράγωνό του, δηλαδή $\varphi^2 = \varphi + 1$ και αν από τον φ αφαιρέσεις το 1 προκύπτει ο αντίστροφός του, δηλαδή $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$) αλλά κυρίως στο γεγονός ότι φαίνεται να ενυπάρχει συχνά στη φύση, στο σύμπαν και στα ανθρώπινα δημιουργήματα, κυρίως τα καλλιτεχνικά έργα. Η sectio aurea (*χρυσή τομή*) ή proportio divine (*θεία αναλογία*) έγινε διάσημη το Μεσαίωνα κυρίως με το έργο του μαθηματικού Λούκα Πιατσόλι, που εικονογραφήθηκε με 60

Στο έργο αυτό ο Πιατσόλι ασχολείται με το πλατωνικό δωδεκάεδρο οι έδρες του οποίου, ως γνωστόν, είναι κανονικά πεντάγωνα.
Ο φ, παρουσιάζει και γεωμετρικά σημαντικές ιδιότητες. Πιο σημαντική από όλες είναι το *«χρυσό ορθογώνιο»*. Ένα ορθογώνιο λέγεται χρυσό αν ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς του α προς την μικρότερη πλευρά του β ισούται με φ. Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές β, α – β τότε προκύπτει ένα ακόμη *«χρυσό ορθογώνιο»*. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία, θα παραγάγουμε διαρκώς μικρότερα χρυσά ορθογώνια το ένα μέσα στο άλλο. Αν σε καθένα από αυτά σχεδιάσουμε ένα τεταρτημόριο του κύκλου, θα προκύψει μια λογαριθμική σπείρα η οποία και αυτή εμφανίζεται συχνά στη φύση στο κέλυφος των μαλακίων, όπως ο ναυτίλος.



Ο ναυτίλος

Ο ντα Βίντσι, όπως λέγεται, σχεδίασε με βάση το χρυσό ορθογώνιο και τη χρυσή αναλογία τα αριστουργήματά του: Μόνα Λίζα, Ευαγγελισμός, Άγιος Ιερώνυμος κ.α. Η αναλογία της χρυσής τομής θα συναρπάσει και το διάσημο Γάλλο αρχιτέκτονα του 20ου αιώνα Λε Κορμπιζιέ, που διατύπωσε το modylor (κλίμακα αναλογιών του ανθρώπινου σώματος, όπου ο ομφαλός διαιρεί το ιδανικό ανθρώπινο σώμα σε λόγο της χρυσής τομής) και ο οποίος σχεδίασε πολλά κτίρια με βάση το χρυσό λόγο.
Ο λόγος της χρυσής τομής συμβολίστηκε με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία.
Η δέκατη αναλογία είναι η αρχή του σχηματισμού της προσθετικής ακολουθίας Fibonacci (1180-1250 μ.Χ.) στην οποία κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144...

Στην ακολουθία αυτή οι λόγοι δύο τυχαίων διαδοχικών όρων της μετά τον πέμπτο, προσεγγίζουν το λόγο της χρυσής τομής 1,618 133 98875...,

$$\frac{8}{5} = 1{,}6, \quad \frac{21}{13} = 1{,}615, \quad \frac{55}{34} = 1{,}617, \quad \frac{89}{55} = 1{,}618...$$

Τους αριθμούς Φιμπονάτσι τους συναντάμε συχνά στη φύση από τον τρόπο πολλαπλασιασμού των ζευγών των κουνελιών (Πόσα ζεύγη από κουνέλια μπορεί να γεννηθούν σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι, αν κάθε ζευγάρι γεννάει κάθε μήνα από ένα νέο ζευγάρι, που το δεύτερο μήνα γίνεται παραγωγικό; Απ: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...) πάνω στην οποία δούλεψε ο Ιταλός μαθηματικός τον 13ο αιώνα, μέχρι τη διάταξη των φύλλων στους μίσχους των φυτών, τους σπόρους στον ύπερο του ηλιοτροπίου, των φολίδων στο κουκουνάρι, τους έλικες των θαλασσινών οστράκων και τις σειρές που ασχηματίζουν τα πέταλα των λουλουδιών.
Στο πέρασμα των αιώνων βρέθηκαν παραδείγματα εφαρμογής της χρυσής τομής σχεδόν παντού, όχι μόνο στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική αλλά και στα σύγχρονα αριστουργήματα της τέχνης. Για παράδειγμα, ο Παρθενώνας, εφόσον προστεθεί σε αυτόν το κατεστραμμένο αέτωμά του, σχηματίζει χρυσό ορθογώνιο. Αν και στο αριστούργημα αυτό της τέχνης ενσωματώνονται πολλοί κανόνες γεωμετρικής ισορροπίας, είναι αμφίβολο αν οι αρχιτέκτονες του 5ου αιώνα π.Χ. γνώριζαν τις κατοπινές «χρυσές αναλογίες».

Πολλά απ' όσα αποδίδονται στο φ και κυρίως ο χαρακτηρισμός του ως «χρυσή αναλογία» στερούνται επιστημονικού υποβάθρου. Οι (υποτιθέμενες) εφαρμογές του κυρίως στην τέχνη, την αισθητική και την αρχιτεκτονική, έχουν γίνει αντικείμενο πολλών συζητήσεων και σχολίων, καθώς σ' ένα μεγάλο μέρος από αυτές τις εφαρμογές υπεισέρχεται η υποκειμενική κρίση του μελετητή. Ο χρυσός λόγος εμφανίζεται όμως τόσο συχνά σε έργα τέχνης, ώστε να αποκλείεται η σύμπτωση.

Εικόνα 18, σελ. 51-53.

Ιστορικό σημείωμα
ΘΕΜΑ: Από τα τυχερά παιχνίδια στη Θεωρία των Πιθανοτήτων

Αν και τα τυχερά παιχνίδια ήταν διαδεδομένα σ' όλο τον αρχαίο κόσμο και η τύχη από την αρχαιότητα απασχολούσε τους ανθρώπους, μέχρι την εποχή της Αναγέννησης δεν είχαν καταγραφεί προσπάθειες ώστε ν' ανιχνευτούν οι «νόμοι» της. Αρκετοί παίκτες όμως, είχαν παρατηρήσει πως όταν έριχναν πολλές φορές ένα ζάρι, κάθε έδρα του εμφανιζόταν περίπου στο 1/6 των συνολικών ρίψεων. Ένα από τα πρώτα βιβλία για τις πιθανότητες «Για το παίξιμο των ζαριών» γράφηκε από τον Τζιρόλαμο Καρντάνο (1501-1576) που ήταν μανιώδης παίκτης τυχερών παιχνιδιών. Όσοι όμως παίζουν τυχερά παιχνίδια, βρίσκουν συνήθως πρακτικούς τρόπους για να εκτιμούν την πιθανότητα ορισμένων καταστάσεων κι έτσι να αποφασίζουν πώς πρέπει να παίξουν και πόσα χρήματα θα στοιχηματίσουν. Αν δεν ακολουθούν μια μέθοδο, θα χάσουν γρήγορα τα χρήματά τους.

Το αρχικό πρόβλημα που στάθηκε η αφετηρία για να διατυπωθεί η θεωρία των πιθανοτήτων τέθηκε το1654 στον Πασκάλ, από έναν επαγγελματία παίκτη τυχερών παιχνιδιών, τον Ιππότη ντε Μερέ (Chevalier de Méré, 1610-1685). Ο παίκτης θεωρούσε ότι η πιθανότητα να φέρει μια φορά τουλάχιστο έξι, όταν ρίχνει τέσσερις φορές ένα ζάρι, ήταν ίδια με την πιθανότητα να φέρει μια φορά τουλάχιστον εξάρες ρίχνοντας δύο ζάρια είκοσι τέσσερις φορές. Η εμπειρία όμως δεν επιβεβαίωνε αυτή την υπόθεση και, όπως αποδείχθηκε αργότερα, είχε άδικο. Έτσι απευθύνθηκε στον Πασκάλ, στον οποίο έθεσε το ερώτημα αν έπρεπε ή όχι να στοιχηματίζει στο συγκεκριμένο παιχνίδι με τα ζάρια. Ο Πασκάλ ανέπτυξε πάνω στο θέμα αυτό, καθώς και σε άλλα σχετικά ζητήματα, αλληλογραφία με τον Φερμά. (Η δραστηριότητα που ανέπτυσσαν οι μαθηματικοί σε μια περίοδο όπου δεν υπήρχαν επιστημονικά περιοδικά, οδήγησε στη δημιουργία επιστημονικών κύκλων στα πλαίσια των οποίων διεξάγονταν συζητήσεις καθώς και σε συνεχή αλληλογραφία). Ο Πασκάλ και ο Φερμά ανέπτυξαν ορισμένες μαθηματικές τεχνικές με τις οποίες μπορούμε να κρίνουμε πόσο πιθανή είναι η εμφάνιση ορισμένων συνδυασμών στα ζάρια. Με τον τρόπο αυτό έθεσαν τα θεμέλια της θεωρίας των πιθανοτήτων, την οποία μάλιστα ονόμασαν «Γεωμετρία της Τύχης». Για την απαρίθμηση των πιθανών περιπτώσεων στα διάφορα προβλήματα ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο.

Η προσπάθεια του Ολλανδού Χόυχενς (Chr. Huygens 1629-1662) να δώσει τις δικές του απαντήσεις στην αλληλογραφία Πασκάλ-Φερμά, είχε ως αποτέλεσμα να εκδοθεί η πρώτη πραγματεία για τις πιθανότητες με τον τίτλο «Συλλογισμοί για τυχερά παιχνίδια». Τα επόμενα βήματα έγιναν από τους ντε Βιτ και Χάλλεϋ οι οποίοι κατασκεύασαν αναλογιστικούς συνταξιοδοτικούς πίνακες (1671, 1693).

Η βαθμιαία ανάπτυξη του ενδιαφέροντος σχετικά με τις πιθανότητες οφείλεται πρωταρχικά στην εξάπλωση των ασφαλίσεων καθώς από το τέλος του 17ου αιώνα είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν τη θεωρία των πιθανοτήτων στις ασφάλειες των καραβιών, στη συλλογή εσόδων του κράτους κ.τ.λ. Τα ερωτήματα όμως γύρω από αυτές προέκυψαν από τα τυχερά παιχνίδια. Η θεωρία των πιθανοτήτων εξετάζει ένα μεγάλο αριθμό συμβάντων τα οποία μεμονωμένα έχουν τυχαίο χαρακτήρα, αλλά στο σύνολό τους είναι προβλέψιμα.

Τον 18ο αιώνα η θεωρία των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο με τις εργασίες των Bernoulli, De Moivre, και Gauss (κανονική κατανομή Gauss) που αποδείχθηκε ανεκτίμητη για την επιστήμη. Το 1812 ο Laplace εισήγαγε νέες ιδέες και μαθηματικές τεχνικές στο βιβλίο του «Théorie Analytique des probabilités.». Ο Laplace δεν περιορίστηκε στην μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών, αλλά εφάρμοσε τα συμπεράσματά του σε πολλά επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα.

Κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών αναπτύχθηκαν στηριζόμενοι στη θεωρία των πιθανοτήτων, όπως η θεωρία των Σφαλμάτων, η Στατιστική Μηχανική, και τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά. Στον 20ο αιώνα η Θεωρία των Πιθανοτήτων σημείωσε αλματώδη πρόοδο με τις εργασίες των Chebyshev, Markov, von Mises, Kolmogorov κ.ά. Οι εφαρμογές της αναφέρονται σ' ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών, τη Φυσική, τη Χημεία, τη Γενετική, την Ψυχολογία, την Οικονομία, τη Μετεωρολογία, τις Τηλεπικοινωνίες, κ.ά.

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Το τρίγωνο του Πασκάλ, όπως είδαμε, μας δίνει έναν πρακτικό κανόνα υπολογισμού των συντελεστών των όρων του αναπτύγματος του διωνύμου $(α + β)^ν$. Οι συντελεστές αυτοί παίζουν σημαντικό ρόλο σε προβλήματα **Συνδυαστικής** και **Πιθανοτήτων**.

						1					
1η γραμμή					1		1				
2η γραμμή				1		2		1			
3η γραμμή			1		3		3		1		
4η γραμμή		1		4		6		4		1	
5η γραμμή	1		5		10		10		5		1

Για παράδειγμα σε τρεις διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων (αποτελεσμάτων) είναι το άθροισμα των συντελεστών του αναπτύγματος $(α + β)^3$ δηλαδή $1 + 3 + 3 + 1 = 8$, ενώ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων ώστε να έχω 2 φορές Κ είναι ο συντελεστής 3 του $α^3β^{3-2}$ ή $α^3β^1$ της τρίτης γραμμής του τριγώνου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ.

Γενικά προκειμένου να υπολογίσουμε το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων στις ν ρίψεις ενός νομίσματος αρκεί να αθροίσουμε τους συντελεστές της αντίστοιχης γραμμής στο τρίγωνο του Πασκάλ. Μπορούμε όμως να βρούμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων χωρίς να εκτελέσουμε τις προσθέσεις, καθώς το άθροισμα των αριθμών της ν-οστής γραμμής του τριγώνου του Πασκάλ είναι ίσο με τη ν-οστή δύναμη του 2. Πράγματι αν στα διώνυμα $(α + β)^0$, $(α + β)^1$, $(α + β)^2$, $(α + β)^3$, $(α + β)^4$, ... και στα αναπτύγματά τους 1, $α + β$, $(α^2 + 2αβ + β^2)$, ... θέσουμε όπου $α = β = 1$, τότε έχουμε τις ισότητες που παρουσιάζονται στον πίνακα στο βιβλίο του μαθητή. Έτσι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα διαδοχικά τρεις φορές, είναι $2^3 = 8$ όσο είναι το άθροισμα των συντελεστών του αναπτύγματος $(α + β)^3$. Αν γνωρίζουμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες.

Εικόνα 19, σελ. 73-74.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από την στεριά.

Για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Θαλής προκειμένου να υπολογίσει την απόσταση ενός πλοίου από την στεριά, υπάρχουν διάφορες υποθέσεις. Πολλοί ιστορικοί όπως ο Tannery «La géométrie grecque» (Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος Ι, σελ 172, Κ.Ε.Ε.Ε) και ο Loria «Ιστορία των Μαθηματικών» τόμος Ι, σελ 40, εκδόσεις Ε.Μ.Ε, τάσσονται υπέρ της άποψης ότι ο Θαλής έκανε χρήση της απλούστατης κατασκευής με τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα που περιγράφεται στο βιβλίο του μαθητή.

Την κατασκευή αυτή την χρησιμοποιούσαν πολλούς αιώνες αργότερα και οι Ρωμαίοι αγρονόμοι και την περιγράφει ο Marcus Junius Nipsus στο έργο του Fluminis Varatio.

Βλέπε ακόμη και Τσιμπουράκης Δ.: Η γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα, Αθήνα 1985, σελ. 40-41.

Εικόνα 20, σελ. 78.

Η ισότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Ένα από τα βασικά αντικείμενα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων διαφόρων σχημάτων οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες, αν αυτά "μετακινηθούν" στο επίπεδό τους. Η απόδειξη των ιδιοτήτων ενός συγκεκριμένου σχήματος στις περισσότερες περιπτώσεις ανάγεται στην απόδειξη ότι κάποια άλλα σχήματα είναι "ίσα" μεταξύ τους. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται απ'αυτές είναι ίσα. Δυο γεωμετρικά σχήματα ονομάζονται ίσα, όταν είναι δυνατόν το ένα κατάλληλα μετακινούμενο να εφαρμόσει πάνω στο άλλο. Προκειμένου όμως να κατοχυρωθεί μια ιδιότητα των σχημάτων, πρέπει να αποδειχθεί ότι ισχύει ανεξάρτητα από τη τοποθέτηση του σχήματος στο επίπεδο, πράγμα το οποίο εξασφαλίζεται από την αξιωματική αρχή: «Οι ιδιότητες των σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτες, αν αυτά μετακινηθούν στο επίπεδο» ή ισοδύναμα: «Τα ίσα σχήματα διατηρούν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο».

Την έννοια της ισότητας ο Ευκλείδης την όρισε αξιωματικά, όπως άλλωστε συμβαίνει και σε όλες τις σύγχρονες αξιωματικές προσεγγίσεις της Γεωμετρίας. Ειδικά, όμως, για ν' αποδείξει το πρώτο του θεώρημα, την πρόταση Ι.4 (Π – Γ – Π), χρησιμοποίησε τη μέθοδο της «υπέρθεσης» (επίθεσης), δηλαδή την μετατόπιση και σύμπτωση των τριγώνων υποθέτοντας ότι κατά την μετακίνησή τους αυτά παραμένουν αμετάβλητα, πράγμα το οποίο δεν είχε αναφέρει.

Φαίνεται όμως ότι ο Ευκλείδης, γενικά, δεν αποδέχεται τη μέθοδο της υπέρθεσης, γιατί στα «Στοιχεία» τη χρησιμοποιεί μόνο δυο φορές για την απόδειξη των προτάσεων Ι.4 (Π – Γ – Π) και Ι.8 (Π – Π – Π). Αν την αποδεχόταν, θα μπορούσε εύκολα να αποδείξει το 4ο αίτημα, περί της ισότητας των ορθών γωνιών, με υπέρθεση. Όπως σημειώνει ο L.Bunt στο βιβλίο του, Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών «*...Για ν' αποδείξει ο Ευκλείδης την πρόταση Ι.4, κινεί το ένα τρίγωνο και το φέρνει σε μιαν άλλη θέση. Πού βασίζεται για να εκτελέσει μια τέτοια κίνηση; Αυτή η δυνατότητα δεν πηγάζει από τις κοινές έννοιες ούτε από τα αιτήματα ούτε και από τις προηγούμενες προτάσεις, για τον απλούστατο λόγο ότι ή έννοια "κίνηση" δεν αναφέρεται σ' αυτές. Την έννοια της κίνησης την έχουμε αποχτήσει από την εμπειρία μας, κατά την επαφή μας με τον αισθητό κόσμο. Ωστόσο, αν θέλαμε να την εφαρμόσουμε στα Μαθηματικά, θα το κατορθώναμε, αλλά μόνο εφόσον προηγουμένως σχηματίζαμε ένα αξιωματικό πλαίσιο πάνω στο οποίο θα τη βασίζαμε. Ο Ευκλείδης παράλειψε να το κάνει. Είχε αντιληφτεί άραγε ότι υπήρχε ένα τέτοιο κενό; ...Σίγουρα το είχε αντιληφτεί. Έδωσε αυτήν την απόδειξη, γιατί άλλη διέξοδο δεν εύρισκε...*».

Για να καλυφθεί το αξιωματικό αυτό κενό, ο Hilbert στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, όταν επικράτησε μια γενική τάση για αυστηρότητα στα μαθηματικά, στο έργο του «*Τα θεμέλια της Γεωμετρίας*» έθεσε τα αξιώματα «σύμπτωσης» και «συμφωνίας». Η «*συμφωνία*» (congruence) αντιστοιχεί στην «ισότητα» με την ευρεία έννοια του όρου, καθώς δεν περιορίζεται στην «ταυτότητα» δηλαδή την ταύτιση. Η ομάδα των αξιωμάτων αυτών κατοχυρώνει τη μεταφορά των ευθυγράμμων τμημάτων και των γωνιών και την ισότητα των τριγώνων με τρόπο που παραπέμπει στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Ο Hilbert όρισε τη συμφωνία των τριγώνων ως εξής: *Δύο τρίγωνα θα λέγονται σύμφωνα ή ίσα, αν οι κορυφές τους μπορούν να αντιστοιχιστούν έτσι ώστε οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι σύμφωνες.*

Στη συνέχεια έθεσε ως αξίωμα το 1ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων (Π – Γ – Π) από το οποίο προκύπτουν με απόδειξη τα άλλα δύο κριτήρια.

Η ισότητα ορίζεται ενιαία για όλα τα πεπερασμένα σχήματα, τρίγωνα, πολύγωνα, και γενικά σχήματα που φράσσουν μέρος του χώρου και αποκτά αποδεικτική ισχύ μετά τη διατύπωση των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων. Επιπλέον αρκεί η διαπραγμάτευση της στο επίπεδο για να ισχύει και στο χώρο. Ως έννοια εμπίπτει στο πλαίσιο ισότητα-ομοιότητα-εμβαδόν. Με τις έννοιες αυτές γίνεται η ταξινόμηση και η σύγκριση των σχημάτων.

Επειδή κάθε μετατόπιση ενός σχήματος είναι το αποτέλεσμα μιας κίνησης από μια αρχική σε μια τελική θέση, η μετατόπιση των σχημάτων συνδέεται άμεσα με τις γεωμετρικές κατασκευές, καθώς ο διαβήτης διατηρεί την ισότητα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων. Επομένως, η μετατόπιση μπορεί να υλοποιηθεί ως διαδικασία και μάλιστα κατασκευαστική. Τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων αρκούν για να κατασκευαστεί το τρίγωνο. Γι' αυτό σε πολλά βιβλία Γεωμετρίας που είναι γραμμένα με βάση την αξιωματική θεμελίωσή της, τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων προκύπτουν από τις γεωμετρικές τους κατασκευές.

Για τις έννοιες όμως "*τοποθέτηση*", "*μετακίνηση*", "*επίθεση*" *και* "*ταύτιση*", που χρησιμοποιούνται στην Ευκλείδεια γεωμετρία, έχουμε **μόνο** διαισθητική (εποπτική) αντίληψη. Η αυστηρή-θεωρητική κατοχύρωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επιτυγχάνεται αποτελεσματικά με τη βοήθεια της *αλγεβροποίησής* της. Η λύση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους στηρίζεται στην κατασκευή **μοντέλων της γεωμετρίας**, όπως για παράδειγμα σ' αυτό της **Αναλυτικής γεωμετρίας**. Με την Αναλυτική Γεωμετρία τα γεωμετρικά προβλήματα ανάγονται σε αλγεβρικά και αντιμετωπίζονται με τη χρήση των αλγορίθμων που προσφέρει η καλά οργανωμένη αλγεβρική γνώση.

Εφόσον η εφαρμογή δύο σχημάτων πιστοποιεί την ισότητά τους, στη σύγχρονη μαθηματική σκέψη τουλάχιστον μετά τον Klein απαιτείται για τη διαπίστωσή της, η χρήση μετασχηματισμών. Μ' άλλα λόγια, για να αποδειχθούν δύο πεπερασμένα σχήματα ίσα, εξετάζεται αν υπάρχει κάποιος επιτρεπτός μετασχηματισμός ο οποίος να μεταφέρει, το ένα σχήμα πάνω στο άλλο. Το 1872, ο Felix Klein έδωσε στο Πανεπιστήμιο του *Earlagen* με την ευκαιρία της εκλογής του, μια διάλεξη που σήμερα είναι γνωστή ως το *Πρόγραμμα Earlagen*. Η κεντρική ιδέα του προγράμματος ήταν ότι η γεωμετρία είναι θεωρία ομάδων. Οι ομάδες σχηματίζονται από τους μετασχηματισμούς που αφήνουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες αμετάβλητες. Αν ως ομάδα μετασχηματισμών ληφθεί η ανάκλαση (συμμετρία), η στροφή, η παράλληλη μεταφορά και οι συνθέσεις τους που δεν αλλάζουν το μήκος και τη γωνία, που είναι οι βασικές ιδιότητες στην Ευκλείδεια γεωμετρία, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η Ευκλείδεια. Επιπλέον οι μετασχηματισμοί μπορούν να εφοδιαστούν με αλγεβρική δομή, οπότε το σύνολο που τους περιέχει γίνεται ομάδα. Με τον τρόπο αυτό η Γεωμετρία και η Άλγεβρα συνδέονται άμεσα και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιούμε εργαλεία της Άλγεβρας, όπως οι ομάδες, για τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων. Άρα η διαδικασία της ισότητας αποδίδεται στο αλγεβρικό μοντέλο μέσω των απεικονίσεων (μετασχηματισμών) και η ισότητα συνδέεται με τις ισομετρίες.

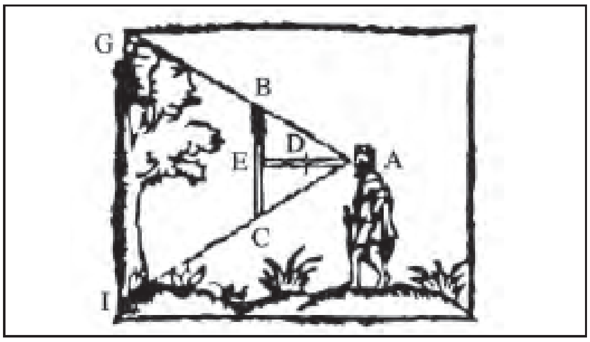
Εικόνα 21, σελ. 80-82.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας από το Θαλή

Σύμφωνα με το Διογένη το Λαέρτιο όταν το μήκος της σκιάς της ράβδου γίνει ίσο με το ύψος της, τότε και το ύψος ΑΒ της πυραμίδας είναι ίσο με το μήκος ΑΑ΄ της σκιάς της πυραμίδας. Ο Θαλής υπολόγισε το μήκος της σκιάς της πυραμίδας ΑΑ΄, αφού μέτρησε το μήκος ΔΑ΄ της σκιάς της που ήταν ορατό και σε αυτό πρόσθεσε το ΑΔ, δηλαδή το μισό της πλευράς της τετραγωνικής της βάσης.

Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων

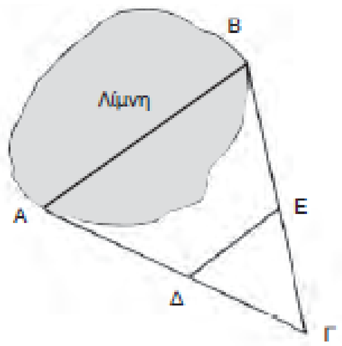
Το θέμα από την ιστορία των μαθηματικών θα μπορούσε να είναι η αφορμή για να ασχοληθούν οι μαθητές με τον υπολογισμό της απόστασης απρόσιτων σημείων.



Υπολογισμός του ύψους ενός δέντρου από δύο ξύλα. Γκραβούρα από βιβλίο του 1629

- Ένας τρόπος υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων είναι αυτός που πιστεύεται ότι χρησιμοποίησε ο Θαλής για να υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας με τη χρήση ομοίων ορθογωνίων τριγώνων.
  Εφαρμογές του τρόπου αυτού αποτελούν το παράδειγμα 1 και η άσκηση 4 που περιέχονται στο βιβλίο του μαθητή.
  Τον τρόπο αυτό χρησιμοποιούσαν κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα για τον υπολογισμό της απόστασης απρόσιτων αποστάσεων π.χ. το ύψος ενός πύργου, την απόσταση ενός πλοίου από το λιμάνι κ.τ.λ. με τη βοήθεια δύο κάθετων ξύλων γνωστού μήκους (άσκηση 6, βιβλίο μαθητή).

- Έναν άλλο τρόπο υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων περιγράφει στο έργο του «Περί διόπτρας» ο αρχαίος Έλληνας μηχανικός και μαθηματικός **Ήρων ο Αλεξανδρεύς** (1ος π.Χ.-1ος μ.Χ). Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πλάτους μιας λίμνης ή ενός λόφου. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Γ και μετράμε τις αποστάσεις ΑΓ και ΓΒ. Στη συνέχεια βρίσκουμε σημεία Δ και Ε, ώστε π.χ. ΓΔ=1/10 ΓΑ και ΓΕ=1/10ΓΒ (ή όποιο άλλος μέρος τους είναι βολικό). Μετράμε την απόσταση ΔΕ, οπότε ΑΒ=10ΔΕ (Τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΓΑΒ είναι όμοια ως ομοιόθετα με κέντρο Γ και λόγο 1/10).



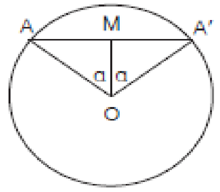
Σε ομάδες μαθητών μπορεί να ανατεθεί να υπολογίσουν με τη βοήθεια ενός ραβδιού το ύψος ενός ψηλού κτιρίου, ενός δέντρου, ενός καμπαναριού κ.τ.λ. μετρώντας την σκιά τους. Στην προσπάθειά τους αυτή οι μαθητές έχουν πολλά να μάθουν καθώς θα

Εικόνα 22, σελ. 92-93.

Ιστορικό σημείωμα
Οι θεμελιωτές της Τριγωνομετρίας

Ποιος είναι ο ιδρυτής του κλάδου αυτού των μαθηματικών δεν γνωρίζουμε ακριβώς. Σίγουρα όμως η τριγωνομετρία προέκυψε από την προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών και των δορυφόρων τους, να υπολογιστεί το ημερολόγιο και να εφαρμοστεί στη ναυσιπλοΐα και τη γεωγραφία.
Η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με θεμελιωτές τον Ίππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.
Ο **Ίππαρχος** (2ος αιών π.Χ) από την Νίκαια της Βιθυνίας είναι ο πρώτος για τον οποίο έχουμε τεκμηριωμένες αποδείξεις ότι έκανε συστηματική χρήση της τριγωνομετρίας. Ο Ίππαρχος, μέγας αστρονόμος της αρχαιότητος, έζησε στη Ρόδο και την Αλεξάνδρεια και έγραψε μια πραγματεία από δώδεκα βιβλία περί των ευθειών γραμμών(δηλαδή χορδών) σε έναν κύκλο. Συνέταξε και έναν «Πίνακα χορδών», κάτι ανάλογο με τους γνωστούς μας πίνακες των ημιτόνων. Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του αναφέρεται στη σφαιρική τριγωνομετρία, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τα τρίγωνα που σχηματίζονται στον ουράνιο θόλο.
Όπως σημειώνει ο Heth «*Οι αρχαίοι έλληνες δε χρησιμοποιούσαν τους όρους ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη, αλλά χρησιμοποιούσαν τις χορδές που αντιστοιχούν σε τόξα ενός κύκλου.*

Αν $AM \perp OM$, τότε $ημα = \dfrac{AM}{AO}$ και $AM = \dfrac{AA'}{2}$ ή το μισό της χορδής που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 2α, που συμβολίζεται σύντομα $^1/_2$ (χορδής 2α), δηλαδή, το ημα είναι ισοδύναμο με $^1/_2$ (χορδής 2α) (ημίτονο = ήμισυ + τόνος = μισή χορδή). Το συνα που είναι ημ(90° – α) είναι συνεπώς ισοδύναμο με ½ [χορδής (180° – 2α)]» (Th. Heath , τόμος ΙΙ, σελ 316)



Το έργο του Ιππάρχου συνέχισε ο **Μενέλαος** (1ος αιών μ. Χ) με το πόνημά του την «Σφαιρική» που αποτελείται από τρία βιβλία. Στο τρίτο βιβλίο περιέχει θεωρήματα που αναφέρονται στην επίπεδη και τη σφαιρική τριγωνομετρία. Στο βιβλίο αυτό ο Μενέλαος εισήγαγε για πρώτη φορά τη χρήση των σφαιρικών τριγώνων και απέδειξε τις ιδιότητες και τις περιπτώσεις ισότητάς τους. Ο Μενέλαος προσπάθησε στο βιβλίο αυτό να αντιστοιχίσει τις προτάσεις των σφαιρικών τριγώνων με αυτές που περιέχονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και οι οποίες αναφέρονται στα επίπεδα τρίγωνα.
Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της ολοκληρώθηκε με το έργο του **Κλαύδιου Πτολεμαίου** (108-160 μ.Χ) που έζησε στην Αλεξάνδρεια και του οποίου το σύγγραμμα είναι η «(Μεγίστη) Μαθηματική Σύνταξις» γνωστό μάλιστα και ως Αλμαγέστη, από την αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη», γραμμένο γύρω στο 150 μ.Χ. Ο Πτολεμαίος, ο οποίος βασίστηκε πολύ στον Ίππαρχο, πρώτος υπολόγισε τις τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των τριών γωνιών και των τριών πλευρών ενός τριγώνου. Στο έργο του περιέχεται και ένας πίνακας για τις χορδές του κύκλου, οι οποίες αντιστοιχούν σε γωνίες που αυξάνουν κατά μισή μοίρα. Δηλαδή ο πίνακας αυτός περιέχει το ανάλογο ενός πίνακα ημιτόνων για τη χορδή $2Rημ\frac{α}{2}$.

Η τριγωνομετρία του Πτολεμαίου είναι διαφορετική από τη σύγχρονη, εφόσον δε συναντάμε τις συνηθισμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αλλά μόνο τις χορδές των θεωρούμενων τόξων.
Το ημίτονο το εισήγαγαν οι Ινδοί, οι οποίοι συνέταξαν και τους πρώτους πίνακες ημιτόνων. Η ρίζα της λέξης ημίτονο (sine, sinus στα λατινικά) προέρχεται από την ινδική λέξη με την οποία απέδωσε τον όρο μισή χορδή ο Ινδός μαθηματικός Αριαμπάτα. Η ινδική αυτή λέξη συντομεύτηκε αργότερα από τους Άραβες. Ο Γκεράντο της Κρεμόνας όταν μετέφρασε το 1150 μ.Χ για πρώτη φορά στα λατινικά από τα αραβικά τη Μεγίστη, μετέτρεψε την αραβική λέξη σε sinus. Οι Ινδοί εισήγαγαν ακόμα και το συνημίτονο. Τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς τους εισήγαγαν οι Άραβες.
Στη Δύση η μελέτη της τριγωνομετρίας άρχισε από τον 15ο αιώνα από τους Regiomontanns (1436-1475) και Rheticus (1514-1575). Η ανάπτυξή της όμως υπήρξε τόσο ραγδαία ώστε στα μέσα του ίδιου αιώνα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αναπτύχθηκαν συστηματικά οι μέθοδοι επίλυσης των τριγώνων.
Με την τριγωνομετρία λύθηκαν και λύνονται προβλήματα μηχανικής, αρχιτεκτονικής, γεφυροποιίας, οδοποιίας, ναυσιπλοΐας κ.τ.λ.

Εικόνα 23, σελ. 106.

Παράρτημα Γ

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΣΤ΄ Δημοτικού - Βιβλίο μαθητή

Αριθμοί και πράξεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς και τις πράξεις με αριθμούς.

Θα ξεκινήσουμε από τα αριθμητικά σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούμε από την Α΄ Δημοτικού για να φτιάξουμε τους αριθμούς και να κάνουμε υπολογισμούς.

Ξέρετε πως οι Ινδοί τα χρησιμοποιούσαν από το 350 π.Χ.;

Γνωρίζετε ακόμα ότι τα δίδαξαν αργότερα οι Άραβες στους Ευρωπαίους και για τον λόγο αυτό ονομάστηκαν «αραβικοί αριθμοί»;

Τα σύμβολα που γνωρίζουμε δεν τελειοποιήθηκαν σε κάποιον ορισμένο χρόνο ή τόπο αλλά εξελίχτηκαν με συνεχή ανάπτυξη και πιθανότατα τελειοποιήθηκαν τους τελευταίους αιώνες.

Στο σκίτσο που ακολουθεί βλέπετε την εξέλιξη των συμβόλων από το 800 μετά Χριστόν έως σήμερα.

Εικόνα 1. Θεματική Ενότητα 1: Αριθμοί και πράξεις, σελ. 8.

Εξισώσεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δε γνωρίζουμε.

Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους.

Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα.

Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;

Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το όποιο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.

Εικόνα 2. Θεματική Ενότητα 2: Εξισώσεις, σελ. 60.

Λόγοι - Αναλογίες

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους λόγους και τις αναλογίες.

Ανάμεσα στις πρώτες μαθηματικές ιδέες των προϊστορικών ανθρώπων είναι οι αναλογίες και η συμμετρία. Οι πρωτόγονες ζωγραφιές στα σπήλαια μαρτυρούν την ύπαρξη αυτών των ιδεών. Οι ζωγραφιές αυτές έχουν σχεδιαστεί από επιδέξιους τεχνίτες οι οποίοι στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν το περιβάλλον απόδωσαν εικόνες ζώων, κυνηγών, γεωμετρικών σχημάτων κ.ά. σε μεγέθη όχι τυχαία αλλά σε αναλογία με την πραγματικότητα.

Όπως τότε, έτσι και σήμερα η μελέτη του περιβάλλοντος έδωσε στον άνθρωπο τα ερεθίσματα ώστε να συστηματοποιήσει τις σκέψεις του και να τις μετατρέψει σε γνώση. Η γνώση αυτή αποτελεί το εργαλείο που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να ερμηνεύει το περιβάλλον του, αλλά ταυτόχρονα είναι και η βάση που του επιτρέπει να επιδρά σε αυτό.

Εικόνα 3. Θεματική Ενότητα 3: Λόγοι – Αναλογίες, σελ. 74.

Γεωμετρία

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τη Γεωμετρία.

Η Γεωμετρία σε πρωτόγονη και εντελώς πρακτική μορφή φαίνεται πως προέκυψε στην αρχαία εποχή από την ανάγκη των ανθρώπων να οροθετήσουν την περιουσία τους.

Ο Ηρόδοτος, για παράδειγμα, (5ος αιώνας π.Χ.) αναφέρει πως στην αρχαία Αίγυπτο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου ο βασιλιάς έστελνε τους «μετρητές» οι οποίοι όριζαν ξανά τα σύνορα των χωραφιών των Αιγυπτίων αγροτών που είχαν χαθεί με τις πλημμύρες. Από την ανάγκη αυτή, κατά μια εκδοχή, ξεπήδησαν οι πρώτες πρακτικές γνώσεις της Γεωμετρίας.

Παρόμοιες γνώσεις φαίνεται πως είχαν και άλλοι αρχαίοι πολιτισμοί. Από αρχαίες πινακίδες των Χαλδαίων μαθαίνουμε ότι γνώριζαν να ορίζουν όρια και να τα προσδιορίζουν στις αγοραπωλησίες οικοπέδων.

Όλες όμως αυτές οι γνώσεις φαίνεται πως είχαν πρακτικό χαρακτήρα και ήταν περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη.

Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε ως επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα. Οι πρώτοι Έλληνες σοφοί που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.) και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580-490 π.Χ.). Ο Θαλής γνώριζε τη σφαιρικότητα της γης, προέβλεπε τις εκλείψεις και χώριζε το έτος σε 365 ημέρες. Ο Πυθαγόρας θεωρούσε σαν τελειότερο γεωμετρικό σχήμα τον κύκλο και τελειότερο στερεό τη σφαίρα.

Αργότερα, άλλοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και ο Δημόκριτος μελέτησαν τα σχήματα με τις ιδιότητές τους και σταδιακά διαμόρφωσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας με τη μορφή που τη γνωρίζουμε σήμερα.

Εικόνα 4. Θεματική Ενότητα 6: Γεωμετρία, σελ. 136.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Η γέφυρα του Γκαρ (Gard)»*

Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν, στη Γαλατία (σημερινή Γαλλία) οι Ρωμαίοι κατασκεύασαν ένα σπουδαίο έργο. Πρόκειται για ένα κανάλι που έφερνε νερό στο υδραγωγείο της πόλης Νιμ από απόσταση 50 χιλιομέτρων χρησιμοποιώντας μόνο τη φυσική ροή του νερού που, λόγω της βαρύτητας, αναγκάζεται να κυλά από ένα ψηλό σημείο προς ένα χαμηλότερο (όπως συμβαίνει στα ποτάμια). Για να περνά το πόσιμο νερό τα φυσικά εμπόδια, χρειάστηκε να κατασκευαστούν γέφυρες και σήραγγες. Η πιο σπουδαία γέφυρα είναι αυτή του ποταμού Γκαρ. Αποτελείται από 3 επίπεδα τα οποία στηρίζονται σε αψίδες. Το κάτω επίπεδο έχει 6 αψίδες, οι οποίες έχουν ύψος 22 μ. Το μεσαίο επίπεδο έχει 11 αψίδες με ύψος 20 μ. Το ψηλότερο επίπεδο έχει 35 αψίδες, η καθεμία από τις οποίες έχει ύψος 7 μ. και πλάτος 3,06 μ. Η κατασκευή όλου του έργου διήρκεσε 10 χρόνια και το κόστος του ήταν όσο οι μισθοί 5.000 στρατιωτών για την ίδια χρονική περίοδο.

Στο υδραγωγείο της πόλης, που τροφοδοτούσε τις δημόσιες βρύσες, τα λουτρά και τις κατοικίες των ευγενών, διοχετεύονταν από το κανάλι 430 λίτρα νερού το δευτερόλεπτο.

α) Υπολογίστε το συνολικό ύψος της γέφυρας.

β) Γνωρίζοντας ότι η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην πηγή και το υδραγωγείο της Νιμ είναι 12 μέτρα (και ότι η διαφορά αυτή μοιράζεται στα 50 χιλιόμετρα του καναλιού), να βρείτε την **κλίση** ανά χιλιόμετρο (δηλαδή πόσο «χαμηλώνει» το κανάλι σε κάθε χιλιόμετρο) ώστε να μπορεί να κυλά το νερό.

γ) Αν οι ανάγκες του ατόμου σε νερό ήταν 50 λίτρα το 24ωρο, να υπολογίσετε πόσοι άνθρωποι θα μπορούσαν να ζήσουν στη Νιμ εκείνη την εποχή.

Φωτογραφία: Alison Scott

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Γιατί απεικονίζεται η γέφυρα του Γκαρ στο χαρτονόμισμα των 5 €;
- Γιατί η UNESCO συμπεριέλαβε αυτή τη γέφυρα στον κατάλογο «Παγκόσμιας Πολιτιστικής Κληρονομιάς» το 1985;
- Το νερό στην αρχαία εποχή και σήμερα ως παράγοντας ευημερίας.
- Το κόστος του έργου με σημερινές τιμές.

20

Εικόνα 5. Η γέφυρα του Γκαρ (Gard), σελ. 20.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία»*

Ο Ιούλιος Καίσαρας επινόησε έναν απλό κρυπτογραφικό κώδικα προκειμένου να επικοινωνεί με τους στραγηγούς του με μηνύματα που δεν θα ήταν δυνατόν να τα διαβάσουν οι εχθροί του. Ο κώδικας βασιζόταν στην αντικατάσταση κάθε γράμματος του αλφαβήτου με κάποιο άλλο, όχι όμως επιλεγμένο τυχαία αλλά με βάση έναν μυστικό αριθμό. Πολλοί σύγχρονοι κρυπτογραφικοί κώδικες είναι βασισμένοι σε έναν ή σε γινόμενο από πρώτους αριθμούς. Η τεχνική της κωδικοποίησης είναι απλή. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Κοιτάξτε στον ακόλουθο πίνακα το ελληνικό αλφάβητο. Στην πράσινη γραμμή εμφανίζεται όπως το γνωρίζουμε και το χρησιμοποιούμε. Στην καφετιά γραμμή μετατοπίσαμε τα γράμματα κατά 3 θέσεις προς τα δεξιά. Έτσι το Α έγινε Χ, το Β έγινε Ψ κ.λπ. (Αυτή είναι η κωδκοποίηση 3Δ, δηλαδή 3 θέσεις δεξιά).

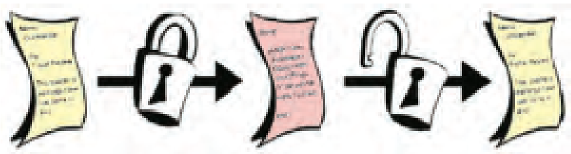
Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Χ	Ψ	Ω	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ

Με την κωδικοποίηση (3Δ), αντί να γράψουμε Α, γράφουμε Χ, αντί του Β γράφουμε Ψ κ.λπ. Για παράδειγμα, η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ θα γίνει ΙΧΕΔΙΧΠΖΗΧ.

Με το γινόμενο ποιων πρώτων αριθμών η κωδικοποίηση της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ γίνεται ΠΕΜΛΠΕΨΝΞΕ;

Δημιουργήστε μια δική σας κωδικοποίηση πολλαπλασιάζοντας πρώτους αριθμούς μεταξύ τους και γράψτε τα ονόματά σας κωδικοποιημένα. Μετά ανταλλάξτε τα ονόματά σας με τα ονόματα κάποιας άλλης ομάδας και προσπαθήστε να βρείτε την κωδικοποίηση.

Μπορείτε να εξηγήσετε τι δείχνει το σχέδιο;



Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

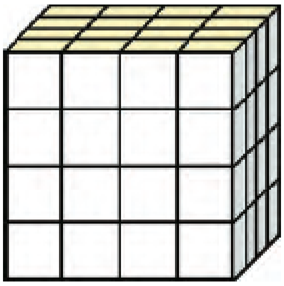
- Ποιες ανάγκες έκαναν τους ανθρώπους να επινοήσουν την κρυπτογραφία;
- Χρησιμοποιείται η κρυπτογραφία σήμερα;
- Εφαρμόζεται η κρυπτογραφία στους αριθμούς;

Εικόνα 6. Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία, σελ. 34.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Το δήλιο πρόβλημα»*

Το έτος 430 π.Χ. οι κάτοικοι της Δήλου υπέφεραν από μεγάλο λοιμό (αρρώστια). Για να γλιτώσουν από τον λοιμό απευθύνθηκαν για χρησμό στο μαντείο του Απόλλωνα. Σύμφωνα με τον χρησμό ο λοιμός θα αντιμετωπιζόταν αν οι πολίτες διπλασίαζαν έναν από τους κυβικούς βωμούς, χωρίς να χαλάσουν την κυβική μορφή του. Τα μοναδικά όργανα που είχαν για να λύσουν το πρόβλημα ήταν ο χάρακας και ο διαβήτης.

Ας εξετάσουμε και εμείς έναν κύβο σαν εκείνον τον βωμό.



Παρατηρήστε τον κύβο του παρακάτω σχήματος (που έχει 4 μικρούς κύβους σε κάθε πλευρά), υπολογίστε το πλήθος των μικρών κύβων και γράψτε το σαν δύναμη ....

....

Θέλουμε να διπλασιάσουμε τον κύβο. Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά, πόσο θα γίνει το νέο σύνολο των μικρών κύβων;

....

Πόσες φορές μεγαλύτερος έγινε τώρα ο κύβος;

....

Όμως ο χρησμός του μαντείου δεν εννοούσε διπλασιασμό της πλευράς, αλλά του όγκου (της ποσότητας των μικρών κύβων που ο βωμός περιέχει). Νομίζετε πως είναι δυνατόν να τον διπλασιάσουμε; (Συζητήστε το στην ομάδα σας).

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

Γιατί το μαντείο έδωσε τέτοιο χρησμό στους κατοίκους της Δήλου;

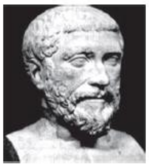
Τι μπορούμε να συμπεράνουμε, με βάση τον χρησμό, για τις μαθηματικές γνώσεις των ανθρώπων του μαντείου;

40

Εικόνα 7. Το δήλιο πρόβλημα, σελ. 40.

Γ΄ Δημοτικού
Βιβλίο μαθητή

Οι ήρωες του βιβλίου



Πυθαγόρας ο Σάμιος (περίπου 600 π.Χ.)

Ο Πυθαγόρας ήταν ένας σπουδαίος μαθηματικός της αρχαιότητας που γεννήθηκε στη Σάμο. Ίδρυσε μια σχολή, τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι μελετούσαν τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά και τις επιστήμες. Είχε δάσκαλους μεγάλους σοφούς της αρχαιότητας και ταξίδεψε στην Ασία και την Αίγυπτο όπου μελέτησε την αιγυπτιακή φιλοσοφία, τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική.
Ο Πυθαγόρας έμεινε γνωστός ως ο άνθρωπος που έβλεπε παντού αριθμούς.

Ο Πυθαγόρας

Εικόνα 8, σελ. 6.

Οι ήρωες του βιβλίου

Υπατία η Αλεξανδρινή (370-415 μ.Χ.)

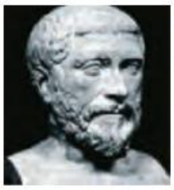
Η Υπατία ήταν η πρώτη γυναίκα μαθηματικός στην Ιστορία και γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια.
Ήταν κόρη του φιλόσοφου Θέωνα, διευθυντή του Πανεπιστημίου της Αλεξάνδρειας. Γι' αυτό τον λόγο είχε την τύχη να αποκτήσει μια σπάνια μόρφωση σε μια εποχή που η θέση της γυναίκας στην κοινωνία ήταν πολύ διαφορετική από ό,τι σήμερα. Συνέχισε τις σπουδές της στην Αθήνα και στη Ρώμη εντυπωσιάζοντας όσους τη συναναστρέφονταν με το πνεύμα, τη σεμνότητα, την ομορφιά και την ευγλωττία της. Επιστρέφοντας στην Αλεξάνδρεια πολύ σύντομα αναδείχθηκε σε μεγάλη δασκάλα της φιλοσοφίας και των μαθηματικών.

Η Υπατία

Εικόνα 9, σελ. 7.

Ο Πυθαγόρειος πίνακας

4



Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος έζησε περίπου τον 6ο αιώνα π.Χ. Λέγεται ότι ήταν ο άνθρωπος που έβλεπε παντού αριθμούς. Ταξίδεψε στην Ασία και την Αίγυπτο όπου μελέτησε την αιγυπτιακή φιλοσοφία, τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική. Ίδρυσε μια σχολή, τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι μελετούσαν τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Εικόνα 10. Ο Πυθαγόρειος πίνακας, σελ. 23.

Το ρωμαϊκό σύστημα γραφής αριθμών.

5

Οι θεμελιώδεις μονάδες του ρωμαϊκού συστήματος γραφής των αριθμών είναι οι εξής:

I	V	X	L	C	D	M
(1)	(5)	(10)	(50)	(100)	(500)	(1000)

π.χ. τους αριθμούς 1.617 και 1.755 τους γράφουμε ως εξής:

M D C C L V 1.000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 5 = 1.755

M D C X V I I 1.000 + 500 + 100 + 10 + 5 + 1 + 1 = 1.617

Γράφω σύμφωνα με τον παραπάνω τρόπο
το έτος που γεννήθηκα και το έτος που έχουμε τώρα:

. . . .

. . . .

Εικόνα 11. Το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, σελ. 43.

Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός

1

- **Κόβουμε σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα ορθογώνιο με 24x35 τετραγωνάκια.**
- **Υπολογίζουμε πόσα είναι όλα τα τετραγωνάκια στο ορθογώνιο που κόψαμε.**

Για να υπολογίσουμε πόσα είναι τα 24x35 τετραγωνάκια, μπορούμε να χαράξουμε στο τετραγωνισμένο χαρτί τον παρακάτω πίνακα.

	30	5
20	20 x 30 = ...	20 x 5 = ...
4	4 x 30 = ...	4 x 5 = ...

- Συμπλήρωσε τα γινόμενα μέσα στα πλαίσια του διπλανού σχήματος.
- Υπολόγισε το γινόμενο 24 x 35.

Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Ο Ευτόκιος από την πόλη Ασκαλών στη Μέση Ανατολή, έζησε γύρω στον 5ο αιώνα μ.Χ. και έγραψε πολλά βιβλία με σχόλια σε μαθηματικά κείμενα του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου του Περγαίου (σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών), οι οποίοι έζησαν αρκετούς αιώνες πριν απ' αυτόν. Ο Ευτόκιος στα σχόλια ενός βιβλίου του Αρχιμήδη εξηγεί και παρουσιάζει (γράφοντας τους αριθμούς με γράμματα όπως τους έγραφαν οι Αρχαίοι Έλληνες) τον **ελληνικό πολλαπλασιασμό.**

Εικόνα 12. Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός, σελ. 74.

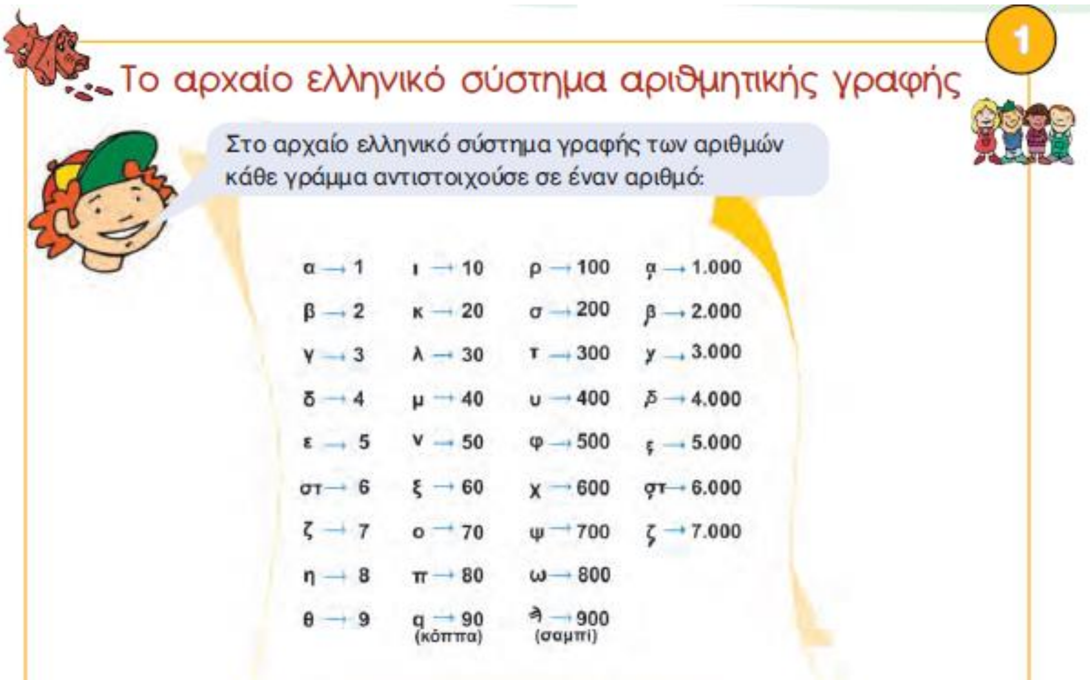
35 Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί

Οι δεκαδικοί αριθμοί

1

Τα κλάσματα ήταν ήδη γνωστά από την αρχαιότητα. Τα χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι τη δεύτερη χιλιετηρίδα π.Χ. Αντίθετα, οι δεκαδικοί αριθμοί ανακαλύφθηκαν σχετικά πρόσφατα, τον $16^{ο}$ αιώνα, από τον Φλαμανδό μαθηματικό Simon Stevin (1548 - 1620), ο οποίος εισήγαγε τη γραφή των δεκαδικών αριθμών.

Εικόνα 13. Οι δεκαδικοί αριθμοί, σελ. 88.

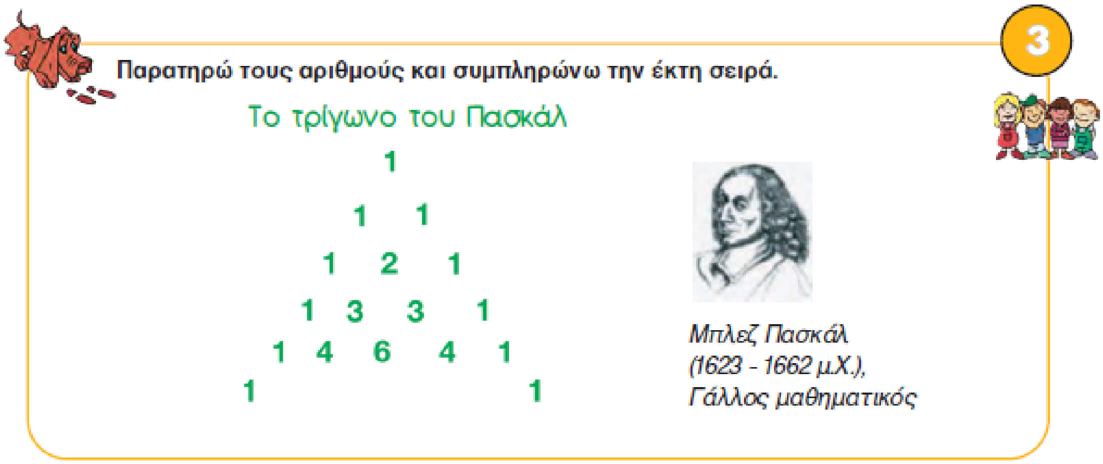


Το αρχαίο ελληνικό σύστημα αριθμητικής γραφής

Στο αρχαίο ελληνικό σύστημα γραφής των αριθμών κάθε γράμμα αντιστοιχούσε σε έναν αριθμό:

α → 1	ι → 10	ρ → 100	͵α → 1.000
β → 2	κ → 20	σ → 200	͵β → 2.000
γ → 3	λ → 30	τ → 300	͵γ → 3.000
δ → 4	μ → 40	υ → 400	͵δ → 4.000
ε → 5	ν → 50	φ → 500	͵ε → 5.000
στ → 6	ξ → 60	χ → 600	͵στ → 6.000
ζ → 7	ο → 70	ψ → 700	͵ζ → 7.000
η → 8	π → 80	ω → 800	
θ → 9	ϙ → 90 (κόππα)	ϡ → 900 (σαμπί)	

Εικόνα 14. Το αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης, σελ. 98.



Παρατηρώ τους αριθμούς και συμπληρώνω την έκτη σειρά.

Το τρίγωνο του Πασκάλ

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 1

Μπλεζ Πασκάλ (1623 - 1662 μ.Χ.), Γάλλος μαθηματικός

Εικόνα 15. Το τρίγωνο του Πασκάλ, σελ. 117.

Παράρτημα Δ

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α΄ Γυμνασίου - Βιβλίο μαθητή

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο Γκάους (Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1850) όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1789, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα: 1+2+3+....+98+99+100, πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(48+53)+(50+51)=$$
$$=\underbrace{101+101+101+\ldots+101+101+101}_{50\text{ φορές}}=101\cdot 50=5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3 + ...+ 998 + 999 + 1000 και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;

Εικόνα 1α. Ιστορικό σημείωμα για τον K. F. Gauss, σελ. 17 (αρχικό).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

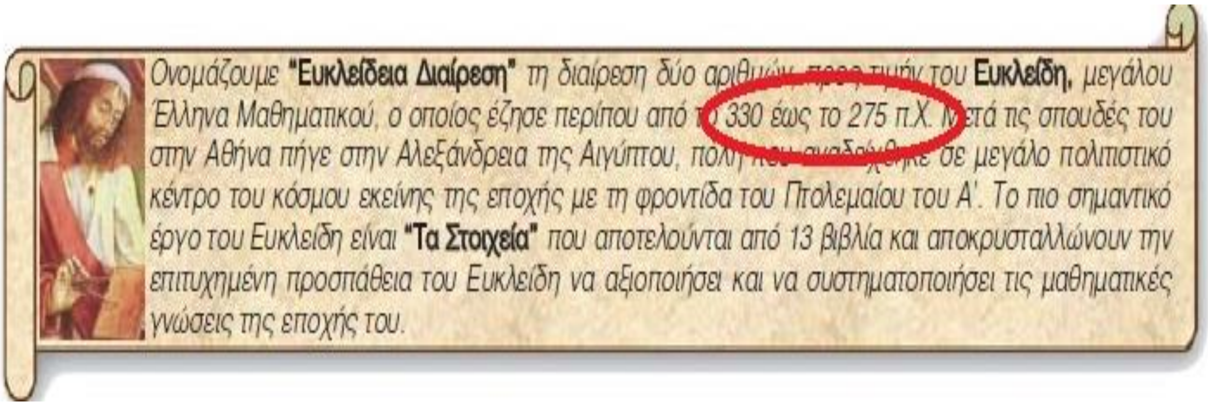
Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο **Γκάους** *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1784, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα: 1+2+3+....+98+99+100, πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(48+53)+(49+52)+(50+51)=$$
$$=\underbrace{101+101+101+\ldots+101+101+101}_{50\text{ φορές}}=101\cdot 50=5.050$$

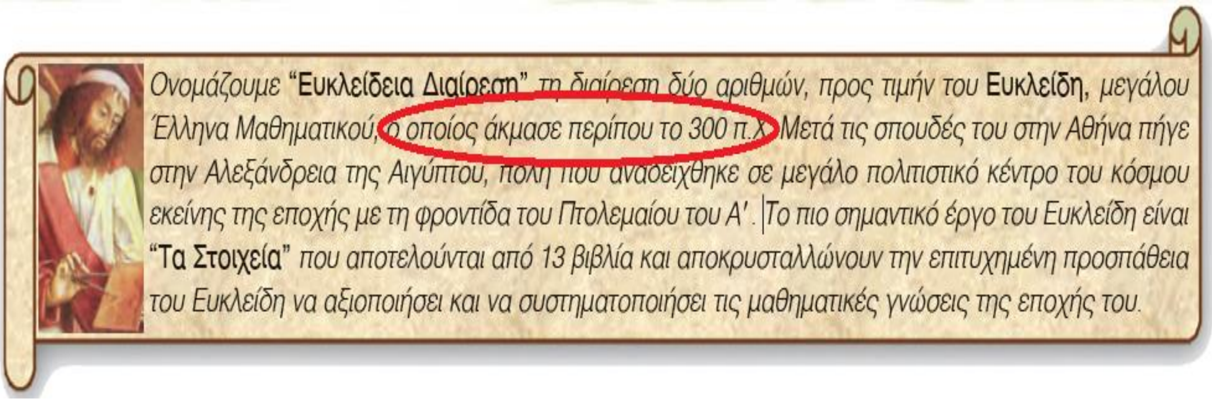
Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 και να μετρήσεις τον χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;

Εικόνα 1β. Ιστορικό σημείωμα για τον K. F. Gauss, σελ. 17 (διορθωμένο).

Βιογραφικά στοιχεία για τον Ευκλείδη.

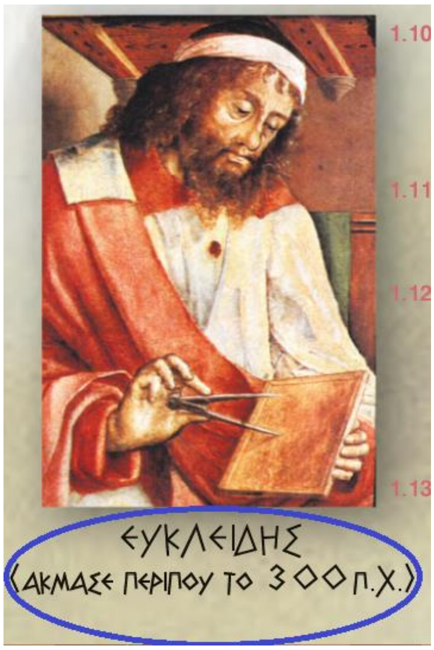

Ονομάζουμε **"Ευκλείδεια Διαίρεση"** τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του **Ευκλείδη,** μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος έζησε περίπου από το 330 έως το 275 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι **"Τα Στοιχεία"** που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.

Εικόνα 2α, σελ. 26 (αρχική).


Ονομάζουμε **"Ευκλείδεια Διαίρεση"** τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του **Ευκλείδη**, μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος άκμασε περίπου το 300 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι **"Τα Στοιχεία"** που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.

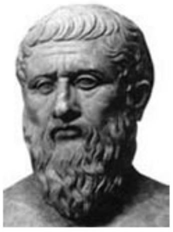
Εικόνα 2β, σελ. 26 (διορθωμένη).

Εικόνα 3α, σελ. 147 (αρχική).



Εικόνα 3β, σελ. 147 (διορθωμένη).

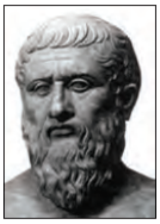
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



*Ο **Πλάτωνας** έγραψε στην είσοδο της **Ακαδημίας** το ρητό: «**ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ**», δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "**Στοιχεία**" (13 βιβλία) του **Ευκλείδη** (330 - 270 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός **Jean Dieudonne**, έγραψε για τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ότι: "Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη".*

Εικόνα 4α, σελ. 182 (αρχική).

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



*Ο **Πλάτωνας** έγραψε στην είσοδο της **Ακαδημίας** το ρητό: "Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω", δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "**Στοιχεία**" (13 βιβλία) του **Ευκλείδη** (άκμασε περίπου το 300 π.Χ.) που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός **Jean Dieudonné**, έγραψε για τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ότι: "Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη".*

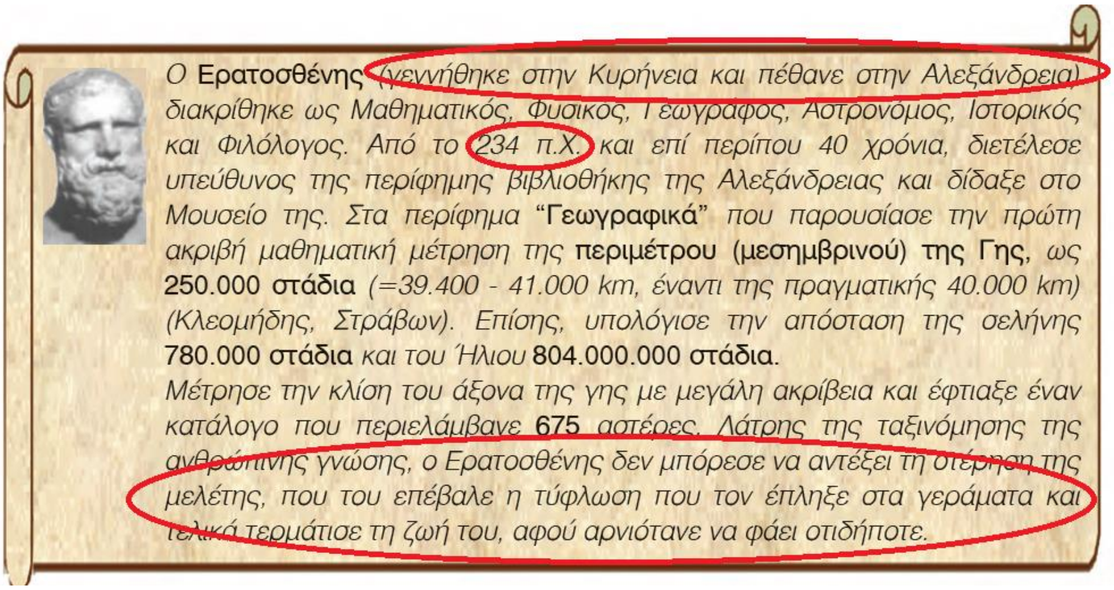
Εικόνα 4β, σελ. 182 (διορθωμένη).

*Ο **Ερατοσθένης** (Κυρήνεια Λιβύης 276 π.Χ. - Αλεξάνδρεια 197 π.Χ.) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 235 π.Χ. και επί 40 χρόνια, διετέλεσε διευθυντής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της.*

*Στα περίφημα **"Γεωγραφικά"** που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, ως **250.000 στάδια** (=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης **780.000 στάδια** και του Ήλιου **804.000.000 στάδια**.*

*Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε ένα κατάλογο που περιελάμβανε **675** αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η γεροντική τύφλωση και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, σε ηλικία 82 ετών, με απεργία πείνας.*

Εικόνα 5α. Ιστορικό σημείωμα για τον Ερατοσθένη, σελ. 29 (αρχικό).

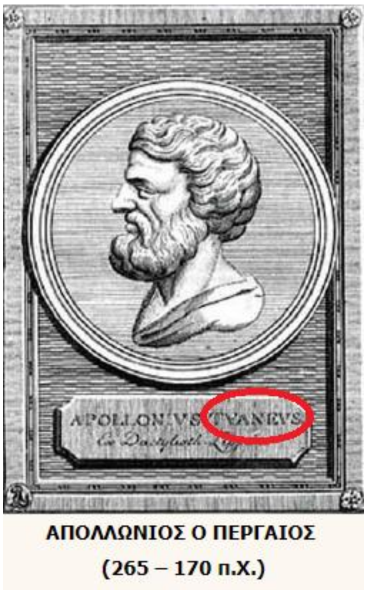


Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια**.

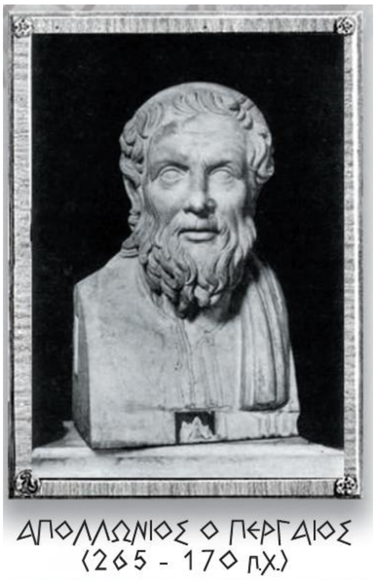
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιότανε να φάει οτιδήποτε.*

Εικόνα 5β. Ιστορικό σημείωμα για τον Ερατοσθένη, σελ. 29 (διορθωμένο).

Σελ.79



Εικόνα 6α, σελ. 79 (αρχική).



Εικόνα 6β, σελ. 79 (διορθωμένη).

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσαγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).
Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός **Διόφαντος**, *που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.*

Εικόνα 7, σελ. 115.

Ο Διόφαντος πρώτος εισάγει την έννοια «ΛΕΙΨΙΣ» (αρνητικός) διατυπώνοντας τους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έκφραση:
«ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΛΕΙΨΙΝ ΠΟΙΕΙ ΥΠΑΡΞΙΝ, ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΥΠΑΡΞΙΝ ΠΟΙΕΙ ΛΕΙΨΙΝ»

Εικόνα 8, σελ. 130.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η μοίρα ανήκει σε **εξηνταδικό** *σύστημα αρίθμησης (με βάση το* 60*). Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το* 2100 π.Χ. *Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το* 5 *και το* 12*). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση* 60 *καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός* 60 *επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.*

Εικόνα 9, σελ. 166.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

1.1 Η έννοια της μεταβλητής. Αλγεβρικές παραστάσεις

1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

*Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου έλληνα μαθηματικού **Διόφαντου**, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).*

*Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα «**Αριθμητικά**» (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται «**Διοφαντικές εξισώσεις**».*

Όταν πέθανε οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

«ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ

- **Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.**
- **ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.**
- **ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.**
- **ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ**
- **ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.**
- **ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».**

Εικόνα 10. Ιστορικό σημείωμα για τον Διόφαντο, σελ. 10

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.

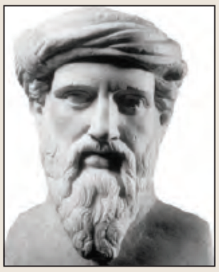
Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.

- *Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).*
- *Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:*
  - *Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «12^0 p 5^1 ισούται με 20^0», δηλαδή $12x^0 + 5x^1 = 20x^0$ ή πιο απλά $12 + 5x = 20$.*
  - *Επίσης, ο Γάλλος François Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12aq 5a aeq. 23».*
  - *Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».*
- *Ο Γάλλος René Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.*

Εικόνα 11, σελ. 21.

132 Μέρος Β' - 1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.

*Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον **Πυθαγόρα το Σάμιο** (585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε. Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για τον λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως "θεώρημα της εκατόμβης".*

Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.

Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.

Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

Εικόνα 12, σελ. 132.

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο τον 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαιρέσεων.

Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά τον μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60°.

βλ

Εικόνα 13, σελ. 146.

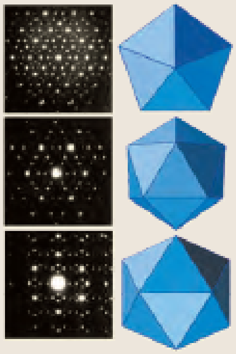
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού.

Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για τον λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.



Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ού αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.

Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

Εικόνα 14, σελ. 185.

Μέρος Β' - 3.3. Μήκος κύκλου 189

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \ldots$

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο π θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο π είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε, $\pi \approx 3{,}16049\ldots$

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του π. Το σύνδυσαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.

Εκτιμήσεις του π

Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρουν προσεγγίσεις του π με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \le \pi \le 3\frac{10}{70}$

$3{,}14085\ldots \le \pi \le 3{,}142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}$ $(=3{,}1416\ldots)$

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3{,}1415926 \le \pi \le 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707*

CDC 6600 *(1967): 500.000*

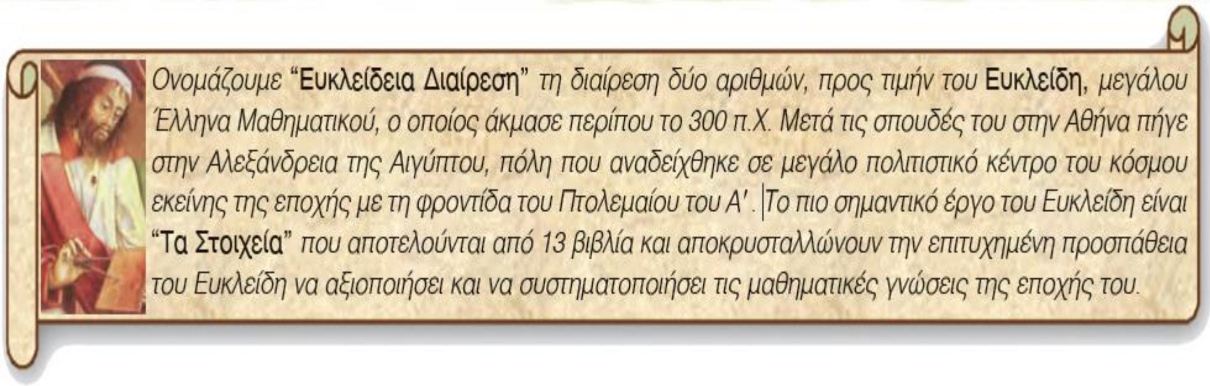
JOLIANN DASE *(1824 - 1861): 200*

ENIAC *(Η/Υ)(1949): 2037*

Ιαπωνική Ομάδα *(1993): 16.777.216* $(=2^{24})$.

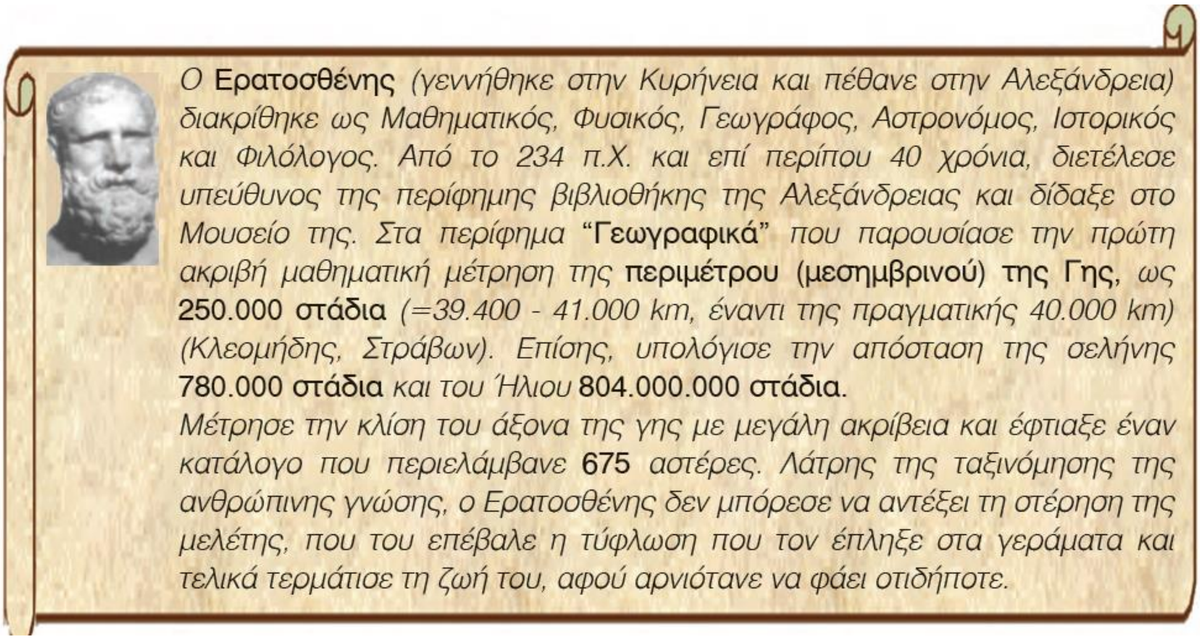
Εικόνα 15, σελ. 189.

Βιογραφικές αναφορές



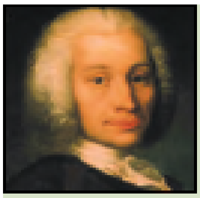
Ονομάζουμε **“Ευκλείδεια Διαίρεση”** *τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του* **Ευκλείδη**, *μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος άκμασε περίπου το 300 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι* **“Τα Στοιχεία”** *που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.*

Εικόνα 16, Α΄ Γυμνασίου, σελ. 26.



Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **“Γεωγραφικά”** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια.**
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιότανε να φάει οτιδήποτε.*

Εικόνα 17, Α΄ Γυμνασίου, σελ. 29.



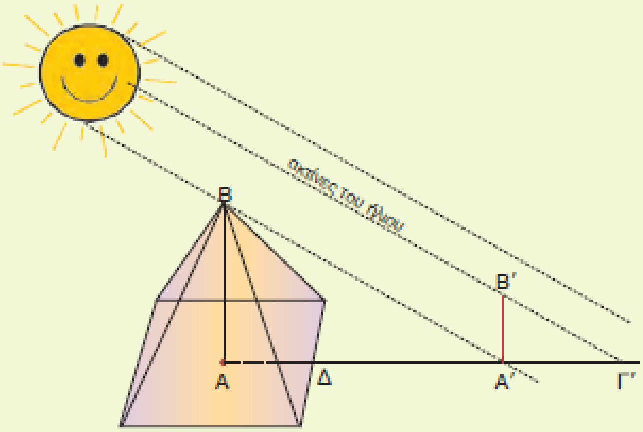
*Ο **Anders Celsius**, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας.*
Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.
Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθηση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.
Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.
Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Εικόνα 18, Β΄ Γυμνασίου, σελ. 22.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.

Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με τον λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

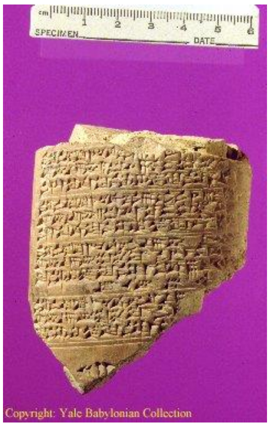
Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ′;

224

Εικόνα 19, Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 224

Παράρτημα Ε

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1
ΛΟΓΑΡΙΑΖΟΥΜΕ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΣ ΤΟΥΣ … ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΥΣ



Στο κείμενο της σελίδας 60 του βιβλίου μας, διαβάσαμε για ένα πρόβλημα που γράφτηκε πριν από πολλά χρόνια και βρέθηκε χαραγμένο πάνω σε μια πήλινη Βαβυλωνιακή πινακίδα. Διαβάστε παρακάτω ένα παρόμοιο:

Βρήκα μια πέτρα και χωρίς να τη ζυγίσω αφαίρεσα το ένα έβδομο. Μετά τη ζύγισα και το βάρος της ήταν πέντε κιλά. Πόσο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;

Δραστηριότητα 1η:

α) Χρησιμοποιείστε μια μεταβλητή για να συμβολίσετε το αρχικό βάρος της πέτρας που πρέπει να βρεθεί.

……

β) Μπορείτε με τη βοήθεια της μεταβλητής που επιλέξατε και με τα στοιχεία που γνωρίζετε να σχηματίσετε μια ισότητα που να απεικονίζει όσα λέει το πρόβλημα;

……

γ) Σχεδιάστε παρακάτω μια ζυγαριά. Από τα μέρη της ισότητας ποιο θα τοποθετούσατε σε κάθε δίσκο, ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά;

δ) Σημειώστε στον παρακάτω πίνακα τις σχέσεις που αποδίδουν όσα αναφέρονται στο πρόβλημα.

Βρήκα μια πέτρα (Είχε κάποιο βάρος. Το γνωρίζουμε;).	
Αφαίρεσα το ένα έβδομο.	
Μετά τη ζύγισα και είχε βάρος 5 κιλά.	

Μπορείτε να λύσετε την εξίσωση;

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 2η</u>:

Οι Βαβυλώνιοι, πολλά χρόνια πριν από τη γέννηση του Χριστού, δεν θα μπορούσαν να δώσουν μια λύση με αυτή τη μορφή, αφού δε χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τα σύμβολα που εμείς χρησιμοποιούμε σήμερα, αλλά την καθημερινή γλώσσα με την οποία προσπαθούσαν να αποδώσουν τους συλλογισμούς τους και να φτάσουν στη λύση. Ας ακολουθήσουμε λοιπόν ένα συλλογισμό που θα μπορούσε να δοθεί και με τα μέσα που διέθεταν οι Βαβυλώνιοι.

α) Αν ονομάσουμε Α το τελικό βάρος της πέτρας και με τα στοιχεία που μας δίνει το πρόβλημα, μπορείτε να γράψετε με μια πρόταση ποιο μέρος του αρχικού βάρους της είναι ίσο το Α;.

……………………………………………………………………………………………………

β) Γνωρίζετε πόσα κιλά ζυγίζει αυτό το μέρος που ονομάσαμε Α; (Γράψτε το με μια πρόταση)

……………………………………………………………………………………………………

γ) Μπορείτε, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τις δύο προηγούμενες ερωτήσεις, να διατυπώσετε μια πρόταση που να δείχνει πόσο είναι και πόσο ζυγίζει το μέρος της πέτρας που έμεινε;

……………………………………………………………………………………………………

δ) Με βάση την τελευταία πρόταση που γράψατε μπορείτε να υπολογίσετε το αρχικό βάρος της πέτρας;

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

<u>Συζήτηση στην ομάδα</u>:

- Συγκρίνουμε τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε το αρχικό βάρος της πέτρας. Σημειώνουμε ομοιότητες και διαφορές.
- Σε ποιο τρόπο επίλυσης αποτυπώνονται πιο ξεκάθαρα, συνοπτικά και κωδικοποιημένα οι μαθηματικές σχέσεις;
- Μας βοηθούν τα σύγχρονα Μαθηματικά, ώστε να έχουμε περισσότερες επιλογές και να αποδίδουμε με σαφήνεια και ακρίβεια τους υπολογισμούς μας;