**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

*ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος*

Διπλωματική εργασία

# Πολυτροπικότητα και αναπαραστάσεις στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές της Α΄τάξης του Δημοτικού Σχολείου

**της**

**Καρμίρη Ευλαμπίας**

**Α.Ε.Μ. 0566**

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σταθοπούλου Χαρούλα, Καθηγήτρια Π.Τ.Ε.Α/Π.Θ.

Εξεταστές: Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε/Δ.Π.Θ.,

Γκανά Ελένη, Λέκτορας Π.Τ.Ε.Α/Π.Θ.

Φλώρινα, Ιούνιος 2018

# Πίνακας περιεχομένων


Περίληψη 4

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 6

Εισαγωγή 7

Α΄ Μέρος: Θεωρητική Επισκόπηση 9

Κεφάλαιο 1ο: Μαθηματικός λόγος και γλώσσα 9

1.1 Δυσκολίες μαθηματικών 9

1.2 Εννοιολογική προσέγγιση του όρου «γλώσσα» 13

1.4 Γλώσσα και μαθηματικά 17

1.5 Ο μαθηματικός λόγος (discourse) 19

Κεφάλαιο 2ο: Μαθηματικός γραμματισμός, πολυτροπικότητα και πολυγραμματισμοί 21

2.1 Ο εγγραμματισμός και τα μοντέλα εγγραμματισμού 21

2.2 Η έννοια της πολυτροπικότητας 23

_Toc517305241_Toc5173052422.3 Πολυγραμματισμοί και παιδαγωγική των πολυγραμματισμών 24

2.4 Μαθηματικός γραμματισμός 27

Κεφάλαιο 3ο: Σημειωτική και μαθηματικά 28

3.1 Το κείμενο και το μαθηματικό κείμενο 28

3.2 Η λειτουργία του πολυτροπικού κειμένου 32

3.3 Χαρακτηριστικά του πολυτροπικού λόγου 33

3.4 Πολυτροπικότητα κι επικοινωνία 35

3.5 Η επικοινωνία σε πολυτροπικά περιβάλλοντα 36

3.6 Επικοινωνία κι αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών 39

3.7 Σημειωτική, πολυτροπικότητα και εκπαίδευση 41

3.8 Οι συνεπαγωγές της θεωρίας της πολυτροπικότητας για τη διδασκαλία 43

3.9 Μαθηματική και σημειωτική δραστηριότητα 44

3.10 Η χρήση των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια 49

3.11 Πολυτροπικότητα και μαθηματικά 52

3.12 Η πολυτροπικότητα στην κατασκευή του μαθηματικού νοήματος 53

Κεφάλαιο 4ο: Αναπαραστάσεις και οπτικοποίηση 55

4.1 Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης του H. Gardner 55

4.2 Ενσώματη μάθηση 57

4.3 Οπτικός γραμματισμός 60

4.4 Οι αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά 61

4.5 Η διαδικασία της οπτικοποίησης στα μαθηματικά 63
4.6. Επίλυση μαθηματικού προβλήματος (ΕΜΠ) 65
4.7. Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος 67
Β΄ Μέρος: Η έρευνα 72
Κεφάλαιο 5ο: Το ερευνητικό σχέδιο 72
5.1 Τα ερευνητικά ερωτήματα 72
5.2 Μεθοδολογία – Το πλαίσιο της έρευνας 72
5.3 Η έρευνα 73
5.4 Δοκίμια έρευνας 75
5.5 Θεωρητικά στοιχεία του ερευνητικού σχεδίου 78
5.5.1 Οικοδόμηση φυσικών αριθμών 78
5.5.2 Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών 79
5.5.3 Λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κι αφαίρεσης 80
Κεφάλαιο 6ο: Αποτελέσματα 82
6.1 Α΄ Φάση της έρευνας 82
6.1.1 Αριθμητικές ασκήσεις 82
6.1.2 Λεκτικά προβλήματα 88
6.1.3 Αριθμητικές πράξεις και λεκτικά προβλήματα 90
6.2 Β΄ Φάση έρευνας 93
6.2.1 Τμήμα Α2 94
6.2 Τμήμα Α1 101
6.3.3 Οι συνεντεύξεις των μαθητών 114
Κεφάλαιο 7ο: Συμπεράσματα - Συζήτηση 116
Βιβλιογραφία ελληνόγλωσση 126
Βιβλιογραφία ξενόγλωσση 130
Παράρτημα
Συνεντεύξεις μαθητών 139

# Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να διερευνήσει τον ρόλο των πολυτροπικών κειμένων στο μάθημα των μαθηματικών και της συμβολής των αναπαραστάσεων στην κατανόηση και στην εκμάθηση των βασικών μαθηματικών εννοιών, των όρων, των σχέσεων και των συμβόλων μέσα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων..

Η συγκεκριμένη έρευνα εντάσσεται σε ένα σύνολο μελετών που εξετάζουν την αποτελεσματικότητα της ενσωμάτωσης των πολυτροπικών κειμένων ως προς την κατανόηση των μαθηματικών γνωστικών δεξιοτήτων από μικρούς μαθητές, και κυρίως με τη συμβολή των αναπαραστάσεων και των απεικονιστικών ασκήσεων. Απώτερη σκοποθεσία της εν λόγω μεταπτυχιακής εργασίας αποτελεί η αναμόρφωση της διδακτικής διαδικασίας στο μαθησιακό αντικείμενο των μαθηματικών, με την εφαρμογή μιας στρατηγικής διδασκαλίας που βασίζεται στην αξιοποίηση των δεξιοτήτων οπτικοποίησης και νοηματοδότησης των αναπαραστάσεων.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη, το θεωρητικό και το ερευνητικό, με επιμέρους κεφάλαια, ενότητες και υποενότητες. Στο πρώτο μέρος η προβληματική της έρευνας προσεγγίζεται σε θεωρητικό επίπεδο και αναφέρεται στους όρους «μαθηματική γλώσσα», «γραμματισμός», «πολυγραμματισμοί», «πολυτροπικότητα», «σημειωτική», «οπτικοποίηση», «αναπαράσταση», «επίλυση μαθηματικού προβλήματος». Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η έρευνα, περιγράφονται, ερμηνεύονται και αναλύονται τα αποτελέσματά της, αφού νωρίτερα τεκμηριώνεται το είδος της και προσδιορίζεται ο τρόπος υλοποίησης και διαμόρφωσής της.

Η έρευνα διενεργήθηκε σε ένα σύνολο 42 παιδιών της Α΄ Δημοτικού, ενός σχολείου της Δυτικής Θεσσαλονίκης και καταδείχθηκε ότι ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικός, καθώς οι περισσότεροι από τους μαθητές και τις μαθήτριες οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα, βοηθήθηκαν περισσότερο στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας απεικονιστικές και λεκτικές αναπαραστάσεις συγκριτικά με τη χρήση μόνο της συμβολικής αναπαράστασης στην επίλυσή τους.

**Λέξεις-Κλειδιά:**

Μαθηματικά,

Μαθηματική Γλώσσα,

Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων

Πολυτροπικότητα,

Αναπαράσταση,

Σημειωτική,

Εγγραμματισμός,

Πολυγραμματισμοί,

Οπτικοποίηση Λεκτικής Γλώσσας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε από την Ευλαμπία Καρμίρη κατά το ακαδημαϊκό έτος 2017-2018 στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Διδακτική των Μαθηματικών της Παιδαγωγικής Σχολής του Παιδαγωγικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες και την μεγάλη εκτίμησή μου στην καθηγήτριά μου και επιβλέπουσα κ. Χαρούλα Σταθοπούλου για την εμπιστοσύνη που επέδειξε προς το πρόσωπό μου για τη συμπαράσταση και την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, αλλά και κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές της τριμελούς επιτροπής τον κ. Χαράλαμπο Σακονίδη και την κ. Ελένη Γκανά όπως επίσης και όλους τους καθηγητές μου στα μαθήματα του μεταπτυχιακού κύκλου σπουδών για τις ποικίλες γνώσεις που μου πρόσφεραν, αλλά και που επιβεβαίωσαν με τον καλύτερο τρόπο την ορθότητα της επιλογής μου να έρθω σ' επαφή με τον γεμάτο ενδιαφέρον και εκπλήξεις κόσμο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

# Εισαγωγή

Στη σύγχρονη εποχή της κυριαρχίας των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, η εικόνα έχει αναδειχθεί στο κατεξοχήν μέσο ή εργαλείο, με το οποίο τα άτομα κατακτούν τη γνώση, δέχονται ερεθίσματα, ανταλλάσσουν πληροφορίες, ενημερώνονται, δημιουργούν διαπροσωπικές σχέσεις και συνθέτουν την αντίληψη του κοινωνικού, του πολιτισμικού και του επαγγελματικού γίγνεσθαι στο οποίο ζουν και δημιουργούν. Ένα από τα βασικά εφόδια που πρέπει να διαθέτει ο σύγχρονος άνθρωπος και ο πολίτης της σύγχρονης κοινωνίας είναι η ικανότητα να διαχειρίζεται, να επεξεργάζεται, να παράγει και να κατανοεί τις εικόνες που βλέπει γύρω του, οι οποίες είναι παντού. Παράλληλα, θα πρέπει να διακρίνεται για τη δεξιότητά του να νοηματοδοτεί τις εικόνες, τις αναπαραστάσεις, τις απεικονίσεις, τον προφορικό λόγο, τα γραπτά κείμενα, τις κιναισθητικές ενέργειες, τις χειρονομίες, τις κινήσεις του προσώπου, τον χειρισμό των αντικειμένων, τη στάση του σώματος κ.ά (Χοντολίδου, 1999).

Υπό αυτό το θεωρητικό πλαίσιο εισάγεται η πολυτροπικότητα ως έννοια που αφορά στην ανάδειξη της σημασίας των οπτικών μέσων, τα οποία συμβάλλουν στη δημιουργία και ανάπτυξη της επικοινωνίας, τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Η απόδοση νοήματος στα δεδομένα της επικοινωνίας που φέρει μια εικόνα ή μια αναπαράσταση, όπως αυτά προκύπτουν από εναλλακτικά οπτικά μέσα, οδηγεί στην επανερμηνεία, στην επανεξέταση και στην επαναπροσέγγιση των κειμένων, των συμβόλων και των εννοιών. Ουσιαστικά, η πολυτροπικότητα αναφέρεται σε μια διαδικασία αναζήτησης και υιοθέτησης διαφορετικών και ποικίλων τρόπων παραγωγής, αξιολόγησης και αξιοποίησης των παρεχόμενων πληροφοριών, από ποικίλες πηγές και όχι μόνο μέσω του γραπτού κειμένου (Παπαδοπούλου, 2005:1).

Τις τελευταίες δεκαετίες η πολυτροπικότητα εντάχθηκε στην εκπαίδευση και ενσωματώθηκε στα διδακτικά εγχειρίδια, με απώτερο στόχο να διευκολύνει την κατανόηση των μαθητών, να τους οδηγήσει στην κατάκτηση λειτουργικών γνώσεων και δεξιοτήτων, και να διευρύνει τις δυνατότητες της μάθησης των γνωστικών σχολικών αντικειμένων. Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά πολυτροπικά κείμενα στο σχολείο είναι το βιβλίο του μαθήματος των Μαθηματικών. Ακριβώς επειδή τα Μαθηματικά είναι ένα από τα μαθήματα που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές, και ιδίως εκείνους που βρίσκονται στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου, η οπτικοποίηση των εννοιών, των συμβόλων, των σχέσεων, των όρων και των πράξεων συμβάλλει στην κατανόησή τους και στη δημιουργία της θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στο γνωσιακό αντικείμενο. Για την επίτευξη της νοηματικής απόδοσης των οπτικών μέσων κάθε είδους είναι απαραίτητο ο μαθητής/ το άτομο, εκτός από γλωσσικά γραμματισμένος, να έχει κατακτήσει τον οπτικό γραμματισμό, δηλαδή να μπορεί ταυτόχρονα να διαβάζει κείμενα και εικόνες, δηλαδή κάθε είδους οπτικές αναπαραστάσεις.

Μέσω της πολυτροπικότητας ο οπτικός γραμματισμός των μαθητών αναδεικνύεται σε πρωτεύον στοιχείο της διδακτικής διαδικασίας, συνεπώς, τίθεται άμεσα ζήτημα απόκτησης της δεξιότητας ανάγνωσης των εικόνων και των αναπαραστάσεων. Στην περίπτωση των Μαθηματικών, τα πολυτροπικά κείμενα των εγχειριδίων αξιοποιούν προς όφελος της διδασκαλίας, της μάθησης και της κατανόησης των βασικών εννοιών, την έμφυτη τάση των παιδιών να αντιλαμβάνονται ευκολότερα και αμεσότερα τα οπτικά ερεθίσματα που λαμβάνουν. Ωστόσο, ο τρόπος της σημασιοδότησης και της ανάγνωσης των οπτικών αναπαραστάσεων, είναι δυνατό να γίνει αντικείμενο εκμάθησης και διδασκαλίας, προκειμένου τα παιδιά να υπερκεράσουν τις δυσκολίες του μαθήματος και να διευκολυνθούν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, των όρων, των σχέσεων και των συμβόλων.

Σημαίνων είναι ο ρόλος του δασκάλου και του εκπαιδευτικού στην αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς καλείται να οργανώσει μια στρατηγική τεχνικών παραγωγής, σημασιοδότησης και εννοιολογικοποίησης των νοημάτων που φέρουν. Η αξιοποίηση των πολυτροπικών κειμενικών περιβαλλόντων στο μάθημα των μαθηματικών, εκτός από το γεγονός ότι μπορεί να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση και την εκμάθηση των μαθηματικών όρων, δημιουργεί μια επικοινωνιακή πραγματικότητα, προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις της σύγχρονης εποχής, και προετοιμάζει τους πολυγραμματισμένους πολίτες του αύριο. Η παρούσα ερευνητική μελέτη στοχεύει να διερευνήσει σε ποιο βαθμό η χρήση λεκτικών, εικονικών και συμβολικών αναπαραστάσεων και απεικονίσεων συμβάλλουν στην υπερκέραση των δυσκολιών του μαθήματος των Μαθηματικών και βοηθούν στην κατάκτηση μαθηματικών εννοιών, συμβόλων και σχέσεων όπως αυτό φαίνεται μέσα από τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

# Α΄ Μέρος: Θεωρητική Επισκόπηση

## Κεφάλαιο 1ο: Μαθηματικός λόγος και γλώσσα

### 1.1 Δυσκολίες μαθηματικών

Οι δυσκολίες στο αντικείμενο των μαθηματικών δεν αποτελούν ένα ερευνητικό πεδίο, που έχει μελετηθεί διεξοδικά και σε βάθος. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην περίπτωση του εν λόγω μαθησιακού αντικειμένου, τα παιδιά εμφανίζουν πολύ συχνά δυσκολίες που σχετίζονται αποκλειστικά και μόνο με αυτό, χωρίς να δυσκολεύονται στα άλλα μαθήματα του σχολείου. Εξάλλου, είναι γενικά παραδεκτό ότι στην επάρκεια των μαθηματικών συμβάλλουν ποικίλοι παράγοντες, τόσο εξωγενείς όσο και ενδογενείς. Οι ιδιαιτερότητες που χαρακτηρίζουν το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών είναι κυρίως η ιεραρχική φύση του μαθήματος, οι τρόποι αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης και ο μαθηματικός κώδικας επικοινωνίας (Αγαλιώτης, 2000).

Συγκεκριμένα, η ιεραρχική φύση των μαθηματικών αναφέρεται στην αυστηρή δόμηση των εννοιών και δεξιοτήτων που εμπεριέχουν, οι οποίες στηρίζονται στις προηγούμενες γνώσεις. Η ύπαρξη «κενών» στο σύστημα των μαθηματικών γνώσεων απειλεί να καταστρέψει όλο το οικοδόμημα και δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση τους. Επίσης, ο κώδικας επικοινωνίας των μαθηματικών χρησιμοποιεί λέξεις και σύμβολα με ένα συγκεκριμένο και ιδιαίτερο τρόπο. Τα μαθηματικά σύμβολα χρησιμοποιούνται με μεγάλη προσοχή και ακρίβεια, αφού οποιαδήποτε μικρή διαφοροποίηση στη χρήση τους δημιουργεί διαφορετικό αποτέλεσμα. Τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας έρχονται σε επαφή με μαθηματικές έννοιες και αναπτύσσουν κάποιες μαθηματικές δεξιότητες επινοώντας πολλές φορές, δικά τους αυτοσχέδια σύμβολα αναπαράστασης αυτών των εννοιών. Κατά την είσοδό τους στο σχολείο, το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα δεν λαμβάνει συχνά υπόψη του τις πρότερες γνώσεις και ιδέες που έχουν τα παιδιά και επιχειρεί να τα μυήσει στη χρήση του τυπικού κώδικα μαθηματικών συμβόλων, αναιρώντας τις προηγούμενες γνώσεις που είχαν κατακτήσει. Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται μια αναντιστοιχία μεταξύ των προτέρων ιδεών που είχαν και των νέων, με τις οποίες έρχονται σε επαφή όταν εντάσσονται στη σχολική πραγματικότητα. Αυτή η ανισορροπία συχνά δημιουργεί προβλήματα κι έχει αρνητικά αποτελέσματα στη σχολική επίδοση των παιδιών.

Επιπρόσθετα, είναι γνωστό ότι η διαδικασία της μάθησης είναι μια δυναμική και ενεργητική διαδικασία, κατά την οποία, το ίδιο το άτομο κατασκευάζει τη γνώση του, που προκύπτει ως αποτέλεσμα της κοινωνικής αλληλεπίδρασης με άλλα άτομα και με το περιβάλλον του. Για τη δημιουργία αυτής της γνώσης, το άτομο χρησιμοποιεί ποικίλα μέσα αναπαράστασης που το βοηθούν να γνωρίσει και να κατανοήσει την πραγματικότητα, που βρίσκεται γύρω του. Έτσι, κατά τη διαδικασία της πραξιακής αναπαράστασης, οι μαθητές χρησιμοποιούν το αριθμητήριο και τα δάκτυλα για την εκτέλεση των πράξεων. Κατά τον εικονιστικό τρόπο αναπαράστασης σχεδιάζουν εφτά γραμμές και διαγράφουν τις τρεις, για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης «εφτά βγάζω τρία». Τέλος, ο συμβολικός τρόπος αναπαράστασης χρησιμοποιείται, όταν ο μαθητής εκτελεί πράξεις και βρίσκει τα αποτελέσματα με τη βοήθεια αριθμών και μαθηματικών συμβόλων (Αγαλιώτης, 2000).

Διευρύνοντας την ανωτέρω θέση για τις αναπαραστάσεις οι J. VanErp και L. Heshusius (1987: στο Αγαλιώτης, 2000) υποστήριξαν ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η εκμάθηση εκτέλεσης πράξεων, πρέπει να γίνονται μέσω του φυσικού χειρισμού και των διευθετήσεων χειραπτικού υλικού. Οι «υλικές πράξεις» πρέπει να συνοδεύονται, σε ένα δεύτερο στάδιο, από τις «αντιληπτικές πράξεις», κατά τις οποίες το παιδί επιχειρεί να οπτικοποιήσει και να φανταστεί τις πράξεις που έκανε προηγουμένως με τα αντικείμενα. Έτσι, στο στάδιο αυτό το παιδί εκτελεί τις πράξεις, όχι με τα χέρια όπως προηγουμένως, αλλά με τα μάτια. Μετά τις αντιληπτικές πράξεις ακολουθούν οι «λεκτικές πράξεις» (Αγαλιώτης, 2000). Στην περίπτωση αυτή, η αναπαράσταση της πράξης γίνεται με λέξεις, οι οποίες αποτελούν βασικά μέσα έκφρασης και επικοινωνίας και μέσω αυτών στηρίζεται με αποφασιστικό τρόπο η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Το τελευταίο στάδιο, είναι το συμβολικό κατά το οποίο χρησιμοποιούνται μαθηματικά σύμβολα και μαθηματικοί τύποι για την έκφραση των μαθηματικών ιδεών.

Συνοπτικά, τα βασικά στάδια αναπαράστασης της μαθηματικής σκέψης και γνώσης είναι τέσσερα: το πρακτικό, το αντιληπτικό, το λεκτικό και το συμβολικό. Γενικά, η μετάφραση και απόδοση των συμβόλων με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων κάθε μορφής, είτε αυτό γίνεται με τη χρήση υλικών, σχεδίων, εικόνων, γραπτών κειμένων, ενισχύει και ενδυναμώνει το αποτέλεσμα της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης, καθιστώντας το μάθημα περισσότερο ενδιαφέρον και κατανοητό για τους μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας (Αγαλιώτης, 2000).

Ένας σημαντικός παράγοντας που συμβάλλει στη δημιουργία δυσκολιών στη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση είναι εκείνος που σχετίζεται κυρίως με το λεξιλόγιο και με το περιεχόμενο της γλώσσας που χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία αυτή. Συγκεκριμένα, το μαθηματικό λεξιλόγιο, περιλαμβάνει τρεις κατηγορίες λέξεων. Εκείνες που θεωρούνται ειδικές και χρησιμοποιούνται κατεξοχήν στην επιστήμη των μαθηματικών και απαντώνται σπάνια στην καθημερινή ζωή και συνδιαλλαγή των ανθρώπων. Σε αυτή την κατηγορία λέξεων ανήκουν για παράδειγμα οι όροι «προσθετέος», «πολλαπλασιαστέος», «πηλίκο» κ.ά. Η εξοικείωση των μαθητών της πρώτης σχολικής ηλικίας με τους όρους αυτούς αποτελεί μια απαιτητική διαδικασία, της οποίας βασική σκοποθεσία είναι η σύνδεση του όρου με την έννοια. Συνεπώς, η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών θα πρέπει να είναι προσανατολισμένη προς αυτή την κατεύθυνση. Σε αντίθετη περίπτωση, είναι πολύ πιθανό τα παιδιά να δυσκολευτούν περαιτέρω στην κατανόηση των μαθηματικών από τη μια, και στη συνολική πορεία της εννοιολογικής και γλωσσικής τους ανάπτυξης από την άλλη.

Μια δεύτερη κατηγορία λέξεων είναι εκείνες που έχουν διαφορετικό νόημα στα μαθηματικά και στην καθημερινή επικοινωνία. Η τρίτη κατηγορία, περιλαμβάνει τις λέξεις που έχουν την ίδια σημασία στα μαθηματικά και στην καθημερινή γλώσσα, που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι. Τέτοιες λέξεις είναι για παράδειγμα το «προσθέτω», το «υπόλοιπο», ο «πολλαπλασιασμός», κ.ά. Ωστόσο, και στην περίπτωση αυτή, δεν λείπουν οι δυσκολίες, καθώς οι μικρότεροι μαθητές οδηγούνται σε λάθος εκτιμήσεις (Skemp, 1982: στο Αγαλιώτης, 2000).

Ως προς τις δυσκολίες που σχετίζονται με το περιεχόμενο των μαθηματικών θα πρέπει να αναφέρουμε πως το μεγαλύτερο πρόβλημα εντοπίζεται στη συνήθη αδυναμία των παιδιών να αποκωδικοποιήσουν το μαθηματικό κείμενο, εξαιτίας της πυκνότητας και της ακρίβειας των πληροφοριών που μεταφέρει. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ενώ επιλύονται με την αξιοποίηση της ίδιας αριθμητικής πράξης που διδάσκεται στην εκάστοτε ενότητα, εισάγουν περαιτέρω στοιχεία που μπορεί να αποπροσανατολίσουν τη σκέψη των μικρών μαθητών. Ο διαφορετικός βαθμός δυσκολίας για τους μαθητές έγκειται στη συντακτική τους δομή, στο νόημα που μεταφέρουν και στη σειρά με την οποία εμφανίζονται οπτικά οι αριθμοί (DeCorte & Verschaffel, 1991: στο Αγαλιώτης, 2000). Τέλος, σύγχυση στους μαθητές προκαλούν τα ίδια τα μαθηματικά σύμβολα και κυρίως, το γεγονός ότι η αξία και η σημασία τους διαφοροποιούνται ανάλογα με τη θέση τους μέσα σε έναν αριθμό. Για παράδειγμα, το ψηφίο «3» έχει διαφορετική αξία ή σημασία ανάλογα αν βρίσκεται στον αριθμό «300» ή στον αριθμό «43». Επίσης, το σύμβολο της πρόσθεσης (+) μπορεί να σημαίνει είτε «βάζω», είτε «μαζεύω», είτε «συγκεντρώνω», είτε «προσθέτω», κάτι που είναι δυνατό να μπερδεύει και να δυσκολεύει τους μαθητές.

Η μεγαλύτερη δυσκολία της γλώσσας των μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι είναι δύσκολη η μετάβαση των μαθητών από την οικεία τους ομιλούμενη γλώσσα σε εκείνη που είναι περισσότερο επίσημη και τυπική. Αυτό συνεπάγεται ότι τα παιδιά που παρακολουθούν μαθήματα μαθηματικών, προσπαθούν περισσότερο προκειμένου να αποκτήσουν επικοινωνιακές δεξιότητες στη γραπτή, την προφορική και τη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών (Pimm, 1994). Η γλώσσα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά μπορεί να διευκολύνει ή αντίθετα να αποτελέσει εμπόδιο για τη μάθηση κι αυτό μπορεί να συμβεί, όταν υπάρχει αναντιστοιχία με το γνωστικό και γλωσσικό επίπεδο των παιδιών.

Οι μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολίες στα μαθηματικά δεν ανήκουν σε μια ομοιόμορφη κατηγορία, αλλά εμφανίζουν μια μεγάλη ετερογένεια, που σχετίζεται με το είδος, τη φύση και την έκταση των δυσκολιών (Παντελιάδου, 2000). Υπάρχουν τα παιδιά που έχουν χαμηλές νοητικές δυνατότητες, που εκδηλώνουν ψυχοσυναισθηματικές διαταραχές, που δεν δύνανται να συνδέουν τη θεωρία με την πράξη, που δεν έχουν υιοθετήσει συγκεκριμένες και αποτελεσματικές μεθόδους μελέτης και εργασίας, που δεν έχουν κατασταλάξει σε συγκεκριμένο τρόπο σκέψης, λόγω των μη ευνοϊκών εκπαιδευτικών, πολιτισμικών και κοινωνικών συνθηκών, στις οποίες ζουν και αναπτύσσονται (Μπάρμπας, 2007). Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές που διαθέτουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, αφορούν στην κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής, για την επίλυση των προβλημάτων, και είναι πολύ πιθανό, αυτές να επιδεινώνονται με το πέρας του χρόνου (Πόρποδας, 2003).

Οι μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας επηρεάζονται αρνητικά από ποικίλους εξωγενείς και ενδογενείς παράγοντες, στην κατανόηση των αριθμών και των ποσοτήτων, στην οπτική και νοητική αντίληψη του χώρου, στην αναγνώριση των συμβόλων, στη μνημονική ικανότητα, στη μαθηματική στρατηγική σκέψης, στην ικανότητα διαχείρισης της γλώσσας, στην επικοινωνία και στη συνδιαλλαγή, στη μεταγνώση. Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι ότι ο κάθε μαθητής είναι ξεχωριστός και μοναδικός, και επηρεάζεται σε διαφορετικό βαθμό και διαφορετικό τρόπο (Lerner, 1993; Geary, 2004; Gelman & Butterworth, 2005).

Σύμφωνα με την Πολυχρονοπούλου (2003), μια πολύ συχνή δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών, αφορά στην κατανόηση και στην επεξεργασία των πληροφοριακών δεδομένων που λαμβάνουν, και κατ' επέκταση στην εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων και στη δόμηση νέων γνώσεων.

Η γλώσσα αποτελεί καταλυτικό παράγοντα στην κατανόηση και την επεξεργασία των δεδομένων που περιέχονται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Η δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων ενισχύεται από τη μορφή που συνήθως έχουν και η οποία είναι γραπτή. Τα μαθηματικά προβλήματα τα οποία συνήθως είναι σε γραπτή μορφή αποτελούν ένα "ειδικό είδος κειμένου", το οποίο χαρακτηρίζεται από λακωνικότητα, επιλεκτική χρήση μερών του λόγου, πυκνότητα των πληροφοριών και αυξημένων απαιτήσεων αποκωδικοποίηση λόγω της σημαντικότητας που μπορεί να έχει η κάθε λέξη στην ορθή κατανόηση του προβλήματος (Αγγελόπουλος, 2017).

Η Τζουριάδου (2005) διατύπωσε ότι κοινό στοιχείο των μαθητών που εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των μαθηματικών, ανεξαρτήτως αν διαθέτουν ή όχι επαρκείς νοητικές ικανότητες, αποτελεί η αδυναμία υιοθέτησης ή ανάπτυξης μιας αποτελεσματικής στρατηγικής σκέψης, μελέτης και εργασίας, στην οποία να συνδυάζεται η πράξη με τη θεωρία και να συντίθενται οι νέες με τις πρότερες γνώσεις. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, η Lerner (1993) πρότεινε την επισταμένη εξατομικευμένη εξάσκηση, μέσω της επανάληψης και του ελέγχου.

## 1.2 Εννοιολογική προσέγγιση του όρου «γλώσσα»

Η γλώσσα όπως αναφέρθηκε αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην κατανόηση την επεξεργασία και την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Γενικότερα με τον όρο «γλώσσα», αναφερόμαστε σε ένα πολυδιάστατο, πολυσύνθετο, πολύπλοκο, πολυεπίπεδο και πολύμορφο φαινόμενο που αφορά στο σύνολο των ανθρώπων και των τομέων της δράσης τους. Με τη γλώσσα το κάθε άτομο επικοινωνεί, συνδιαλέγεται, εκφράζει τα συναισθήματα, τις σκέψεις, τα βιώματα, τις αναρωτήσεις, τις επιδιώξεις, τις επιθυμίες και τους προβληματισμούς του, επεξεργάζεται τα ερεθίσματα που λαμβάνει και νοηματοδοτεί τον κόσμο στον οποίο ζει και αναπτύσσεται (Αθανασίου, 2001:15). Η γλώσσα, αποτελεί το μέσο επίτευξης των προσωπικών σκοπών και των επιμέρους στόχων του ατόμου στο κοινωνικό του περιβάλλον και είναι αναπόσπαστο μέρος του πολιτισμού και της κουλτούρας του (Lewis, 1993:51; Δραγώνα κ.ά., 2001:142). Σύμφωνα με τον Lewis (1993:51) η "γλώσσα είναι το βασικό συστατικό στοιχείο αντίληψης του εαυτού, της ολοκλήρωσης της σκέψης του, της προσωπικής του ανάπτυξης, της απόκτησης των γνώσεών του και της διεύρυνσης των πνευματικών και ιδεολογικών του οριζόντων".

Σύμφωνα με την εγκυκλοπαίδεια Μπριτάνικα, «*η γλώσσα, είναι ένα σύστημα από συμβατικά γραπτά ή ηχητικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται από τα άτομα σε ένα κοινό πολιτισμό, για να επικοινωνήσουν μεταξύ τους*» . Ο Humbolt διατύπωσε ότι «*η γλώσσα είναι το όργανο που μορφοποιεί τη σκέψη, εκφράζει και κατασκευάζει την εθνική ψυχή*» (Mounin, 1974: στο Χατζησαββίδης, 2011). Η υπόθεση Sapir-Whorf για τη γλώσσα αναφέρεται στο πώς διαμορφώνει το άτομο την εμπειρία του για τον κόσμο με τη βοήθεια της γλώσσας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Sapir (1958: στο Χατζησαββίδης, 2011) «*οι κόσμοι μέσα στους οποίους ζουν διαφορετικές κοινωνίες είναι διαφορετικοί κόσμοι και όχι ο ίδιος κόσμος με διαφορετικές ετικέτες*». Ο Γερμανός φιλόσοφος Ludwig Wittgenstein υποστηρίζει ότι «*τα όρια της γλώσσας μου σημαίνουν τα όρια του κόσμου μου*» (Wittgenstein, 1978:110 στο Χατζησαββίδης, 2011).

Ο Marsall McLuhan υποστήριξε ότι «ο καλύτερος τρόπος για να γνωρίσει κανείς έναν πολιτισμό είναι να μελετήσει τους τρόπους επικοινωνίας που αναπτύσσει» (Postman 1998:19 στο Βαλσαμίδου, Κυρίδης & Βαμβακίδου, 2011). Ο M.A.K Halliday (1985: στο Κατσαρού, 2011) όρισε τη γλώσσα ως «*κάτι που δεν μπορεί να αποκοπεί από το νόημά του και ως κατασκεύασμα των ανθρώπων, το οποίο αξιοποιούν ως μέσο για να ανταλλάσσουν νοήματα μεταξύ τους, έτσι ώστε να κατανοούν τον κόσμο, τον εαυτό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις*». Ο Halliday αναγνωρίζει την κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση της γλώσσας, η οποία «*εκλαμβάνεται ως εργαλείο αναπαράστασης της κοινωνικής πραγματικότητας. Η γλώσσα διαμορφώνεται από την κοινωνική πραγματικότητα, ενώ ταυτόχρονα τη διαμορφώνει*». (Λύκου, 2000: στο Κατσαρού, 2011).

## 1.3 Η γλώσσα των μαθηματικών

Οι λέξεις οι οποίες προέρχονται από τη "φυσική" γλώσσα και χρησιμοποιούνται από τη μαθηματική επιστήμη, έχουν συγκεκριμένη έννοια και ακριβή σημασία. Το μαθηματικό λεξιλόγιο περιλαμβάνει λέξεις που προέρχονται από τη φυσική γλώσσα, οι οποίες όμως προσλαμβάνουν διαφορετική έννοια, όταν χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα οι λέξεις «πίνακας», «πρώτος αριθμός», «ζημία» κ.ά., κι αυτό μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση και παρερμηνείες. Επίσης, το μαθηματικό κείμενο με την ιδιαίτερη δομή του, η οποία περιέχει συνδυασμό μαθηματικών εκφράσεων και συμβόλων, φαίνεται να δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία κατανόησης και σωστής χρήσης της γλώσσας των μαθηματικών, οδηγεί συχνά σε αποτυχία στο μάθημα και στην αρνητική αντίληψη των μαθητών γι' αυτό, καθ' όλη τη διάρκεια της πορείας τους στο σχολείο.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι κατά τα αρχαία χρόνια στα μαθηματικά δε χρησιμοποιούνταν συμβολική γλώσσα, αλλά απλές λέξεις μαζί με κάποια σχεδιαγράμματα. Οι μαθηματικοί συμβολισμοί προέρχονται κυρίως από τις συντομογραφίες λατινικών ή ελληνικών λέξεων και φράσεων (Cajori, 1978: στο Lemke, 2003). Η εισαγωγή συμβόλων στα μαθηματικά χρονολογείται πριν από 400 χρόνια περίπου, και αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι τα μαθηματικά δεν χαρακτηρίζονται από τη χρήση των ειδικών συμβόλων, αλλά κυρίως από τα νοήματα που κατασκευάζουν. Με τη σειρά τους αυτά, σχετίζονται με επιμέρους πράξεις, όπως είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, αλλά και με τις έννοιες της διαφοράς ή της ισότητας, όπως και με τις γεωμετρικές σχέσεις.

Επομένως, κεντρικής σημασίας στα μαθηματικά είναι περισσότερο το νόημα, και όχι τόσο η φόρμα, αυτό δηλαδή που προσδίδει μαθηματικό περιεχόμενο σε ένα κείμενο και το χαρακτηρίζει ως μαθηματικό κείμενο. Τα μαθηματικά προσαρμόστηκαν στις επικοινωνιακές ανάγκες, στα πρότυπα που το έκανε και η φυσική γλώσσα. Όπως αυτή επεκτάθηκε και εμπλουτίστηκε στη διάρκεια των χρόνων με τη χρήση χειρονομιών, εικόνων, αναπαραστάσεων και συμβόλων για την απόδοση των πολυπλοκότερων εννοιών, έτσι και στην περίπτωση της γλώσσας των μαθηματικών, προστέθηκαν σύμβολα, σημεία και αναπαραστάσεις, για να περιγράψουν όσα δεν ήταν δυνατό να περιγραφούν από τη μαθηματική γλώσσα από μόνη της. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της παραπάνω θέσης είναι τα κλάσματα. Η έννοια των κλασμάτων είναι δύσκολο να περιγραφεί και να κατανοηθεί μόνο με τη χρήση της φυσικής γραπτής ή προφορικής γλώσσας. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται τα σχετικά μαθηματικά σύμβολα, οι εικόνες και τα σχεδιαγράμματα, που βοηθούν στην καλύτερη και πληρέστερη αντίληψη αυτής της μαθηματικής έννοιας (Lemke, 2003).

Αν και κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, επικράτησε μια αντίληψη μεταξύ των ερευνητών ότι τα μαθηματικά αποτελούν από μόνα τους μια ιδιότυπη αλλά υπαρκτή γλώσσα επικοινωνίας, σήμερα εκλαμβάνονται περισσότερο ως μέσο επικοινωνίας, πηγή γνώσεων και επικοινωνιακή διαδικασία. Χαρακτηριστικό της μαθηματικής γλώσσας είναι ότι όσοι δραστηριοποιούνται σε αυτή, αναφέρονται στις έννοιες και στους όρους της με έναν τρόπο πολύ διαφορετικό από εκείνο που σκέφτονται και μιλούν στην καθημερινότητά τους (Pimm, 1994). Η γλώσσα των μαθηματικών αφορά εκείνη που χρησιμοποιείται από τους συμμετέχοντες και στο μάθημα των μαθηματικών, είτε πρόκειται για τα κείμενα των σχολικών εγχειριδίων είτε για τα προφορικά λεγόμενα και περιλαμβάνει συγκεκριμένες λέξεις οι οποίες ικανοποιούν μαθηματικούς σκοπούς. Η γλώσσα αυτή αναφέρεται στους μαθηματικούς συμβολισμούς, και προβλέπει τη δραστηριοποίηση των συμμετεχόντων σε κατανόηση, παραγωγή όπως και τη συζήτηση κειμένων, έντυπων ή προφορικών σχετικά με τα μαθηματικά και συζήτηση που αφορούν μαθηματικά. Τα μαθηματικά επεκτείνουν τις τυπολογικές πηγές της φυσικής γλώσσας για να μπορέσουν να αποκτήσουν τοπολογικό νόημα με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων (Lemke, 2003).

Τα μαθηματικά λοιπόν, προκειμένου να γίνουν κατανοητά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, θα πρέπει να χρησιμοποιούν περισσότερα από ένα σημειωτικά συστήματα, τα οποία να βασίζονται τόσο στη φυσική γλώσσα όσο και στις οπτικές και συμβολικές αναπαραστάσεις (Lemke, 2003). Τα σημειωτικά συστήματα είναι δομημένα με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε σημάδι ή σύμβολο που χρησιμοποιείται, να είναι άρρηκτα δεμένο με κάποιο άλλο του συστήματος, ώστε να μπορέσει τελικά να λειτουργήσει αποτελεσματικά στη δημιουργία νοήματος στην επικοινωνία (Lemke, 2003). Σε αυτό το σημείο όμως, εγείρονται ερωτήματα που σχετίζονται με τα είδη των νοητικών σχέσεων που είναι κατάλληλα να εμπλέκονται στο μαθηματικό νόημα, με το είδος, τη φύση και την ιδιαιτερότητα της γλώσσας των μαθηματικών (Lemke, 2003). Σύμφωνα με την Chapman (1993), τα μαθηματικά είναι ένα σημειωτικό σύστημα-πόρος, που σημασιοδοτεί το περιεχόμενο και άλλων γνωσιακών και μαθησιακών αντικειμένων, το οποίο συμπεριλαμβάνει τα βέβαια, τα πιθανά ή τα ενδεχόμενα μαθηματικά νοήματα.

Σύμφωνα με τον Lemke (2003:4) "*τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα που αποτελείται από σχετικές μεταξύ τους πρακτικές, δηλαδή είναι ένα σύστημα που υπαγορεύει στα άτομα πώς να πράττουν ή να κάνουν συγκεκριμένα πράγματα. Έτσι, όταν ένας μαθητής κάνει μαθηματικά, κάνει πράγματα, όπως να: υπολογίζει, συμβολίζει, αναλύει, γενικεύει κ.ά.*"

Η μαθηματική γνώση έχει αφηρημένο χαρακτήρα. Οι μαθηματικές έννοιες είναι ανθρώπινες επινοήσεις με στόχο τη νοητική οργάνωση της πραγματικότητας μέσα από μια διαδικασία αφαίρεσης και γενίκευσης χρησιμοποιώντας για τον σκοπό αυτό λέξεις και φράσεις της φυσικής γλώσσας. Από την παραπάνω παραδοχή καθίσταται σαφές ότι η γλώσσα έχει μεγάλη σημασία στην απόκτηση μαθηματικών ικανοτήτων και συμβάλλει στην ανάπτυξη του εποικοδομητικού προβληματισμού για τη σχέση των δύο γνωστικών αντικειμένων (Brown, 1997: στο Μαστρογιάννης & Μαλέτσκος, 2009). Η γλώσσα έχει σημαντική θέση στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς αποτελεί μέσο αναπαράστασης και επικοινωνίας, και επιπρόσθετα οργανώνει τη σκέψη και την έκφραση του ατόμου.

## 1.4 Γλώσσα και μαθηματικά

«Η μαθηματική εκπαίδευση ξεκινά μέσα από τη γλώσσα, αναπτύσσεται και σκοντάφτει λόγω της γλώσσας, και τα αποτελέσματά της συχνά αξιολογούνται μέσα από τη γλώσσα» (Durkin, 1991: στο Ξενοφώντος, 2014).

Σύμφωνα με την Τρέσσου (2007) η γλώσσα έχει σημαντική θέση στην κατανόηση των μαθηματικών καθώς οι έννοιες και τα νοήματα μεταφέρονται με τη βοήθεια της γραπτής ή προφορικής γλώσσας. Η γλώσσα των μαθηματικών αποτελεί μια λειτουργική παραλλαγή της γλώσσας (register) στην οποία καθημερινές λέξεις αποκτούν νέο περιεχόμενο ως μέρος ενός συνόλου αποκλειστικών νοημάτων και δομών που εκφράζουν αυτά τα νοήματα (Halliday, 1978). Μπορούμε να αναφερθούμε στον τύπο της γλώσσας των μαθηματικών (mathematics register) με την έννοια των νοημάτων που ανήκουν στη γλώσσα των μαθηματικών (η μαθηματική χρήση της φυσικής γλώσσας που δεν είναι μαθηματικά από μόνη της) και ό,τι μια γλώσσα πρέπει να εκφράζει εάν χρησιμοποιείται για μαθηματικούς σκοπούς (Pimm,1987: στο Setati, 2001). Η γλώσσα αυτή διαθέτει εκτός από συγκεκριμένο λεξιλόγιο και συγκεκριμένα συντακτικά, σημασιολογικά και πραγματολογικά χαρακτηριστικά τα οποία οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν και να εξοικειωθούν με τη χρήση τους. (Τρέσσου, 2007).

Ανάμεσα στη γλώσσα και τα μαθηματικά αναπτύσσεται μια ιδιαίτερα κρίσιμη και αμφίδρομη σχέση, καθώς η πρώτη συμβάλλει στην εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, ενώ παράλληλα τα μαθηματικά βοηθούν στη συνολική βελτίωση της έκφρασης και την ωριμότητα της σκέψης των μαθητών. Η γλώσσα είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο, τόσο για την επικοινωνία μέσα κι έξω από τη σχολική τάξη, όσο και για την κατασκευή και την εσωτερίκευση των μαθηματικών εννοιών.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε πως η γλώσσα αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, και συγκεκριμένα για τη διαχείριση και την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης κι επικοινωνίας, αποτελεί εργαλείο γνώσης και ένα μέσο επηρεασμού της συμπεριφοράς (Villa 1996: στο Τρέσσου, Μητακίδου 2007).

Ως προς το γνωσιακό αντικείμενο των μαθηματικών, τα παιδιά, κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων που σχετίζονται με την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, προσπαθούν αρχικά να κατανοήσουν και να αναλύσουν τη δεδομένη κατάσταση με τη βοήθεια ενός «εγωκεντρικού» λόγου (Τρέσσου, 2007). Στη συνέχεια, στην προσπάθειά τους να επικοινωνήσουν αυτά που σκέφτονται και συλλογίζονται, ο λόγος τους γίνεται περισσότερο «επικοινωνιακός», μετατρέπεται δηλαδή σε «κοινωνικοποιημένο» λόγο, καθώς επιζητούν τη συνεργασία είτε με τους συμμαθητές τους είτε με έναν ενήλικα, για παράδειγμα τον εκπαιδευτικό ή των γονέων. Στο επόμενο στάδιο ο κοινωνικοποιημένος λόγος μετατρέπεται σε εσωτερικευμένο, όσο το παιδί προσπαθεί να βρει τις πιθανές λύσεις, και αφού λάβει την απαραίτητη βοήθεια από κάποιον άλλο, μετά στρέφεται στον εαυτό του κι επιχειρεί να σκεφτεί και να εφαρμόσει ένα δικό του σχέδιο επίλυσης του προβλήματος.

Παρόλη τη σημαίνουσα θέση που κατέχει η γλώσσα των μαθηματικών στη νοητική ανάπτυξη των μαθητών, δεν παύει να αποτελεί την κυριότερη πηγή δυσκολίας για τους μαθητές αλλά και για τους εκπαιδευτικούς. Για την περιγραφή των μαθηματικών φαινομένων, εννοιών, όρων και σχέσεων, αξιοποιούνται οι μαθηματικές εκφράσεις, που άλλοτε αφορούν στη φυσική γλώσσα, άλλοτε αφορούν αυστηρά σε μαθηματικές πράξεις και σχέσεις, αλλά συνήθως αφορούν στον συνδυασμό των παραπάνω, με την ταυτόχρονη προσθήκη των συμβόλων και των αναπαραστάσεων (Μαστρογιάννης & Μαλέτσκος, 2009).

### 1.5 Ο μαθηματικός λόγος (discourse)

Σύμφωνα με τη Sfard (2008: στο Esquinca, 2012) η επικοινωνία που επιτυγχάνεται διαμέσου του μαθηματικού λόγου (discourse) είναι κεφαλαιώδους σημασίας για τη μαθηματική μάθηση. Αυτό που καθιστά ξεχωριστό τον μαθηματικό λόγο από τα μαθηματικά, είναι η διαμεσολάβηση τους με τη συμβολή της πολυτροπικότητας (Sfard, 2008 : Esquinca, 2012). *Αυτή βασίζεται τόσο στην συμβολική και την οπτική αναπαράσταση, όσο και στο μαθηματικό λεξιλόγιο, στην μαθηματική αφήγηση και την μαθηματική ρουτίνα που είναι χαρακτηριστικά του λόγου των μαθηματικών.* Ο μαθηματικός λόγος σύμφωνα με τον Halliday (1978: στο Esquinca 2012) είναι «*τύποι μηνύματος και τρόποι επιχειρήματος καθώς συνδυάζουν υφιστάμενα στοιχεία σε νέους συνδυασμούς*». Στη μαθηματική έκφραση τα νοήματα κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας μια σειρά από σημειωτικές πηγές νοηματοδότησης καθώς και περισσότερες από μια τροπικότητες (modality) (Schleppegrell, 2007, 2010, Solomon 2009 , Morgan 1998, Moschkovich 2010, Gutierez et al 2010: στο Esquinca, 2012).

Σύμφωνα με τους Halliday και Matthiessen (2004: στο Esquinca, 2012) η γλώσσα διαφέρει ανάλογα με τον τρόπο που χρησιμοποιείται. Η O' Halloran (2005: στο Esquinca, 2012) στις ερευνητικές της μελέτες και μετά από ανάλυση μαθηματικών γραπτών κειμένων, καταδεικνύει ότι τρία διαφορετικά σημειωτικά συστήματα τίθενται σε εφαρμογή για τη δημιουργία ενός μαθηματικού νοήματος, με τρόπο που η φυσική γλώσσα από μόνη της δεν μπορεί. Αυτά τα σημειωτικά συστήματα είναι α) ο μαθηματικός συμβολισμός, β) η οπτική αναπαράσταση και γ) η φυσική γλώσσα. Η O' Halloran (2005) χρησιμοποιεί το παράδειγμα του μαθηματικού προβλήματος, όπου το άτομο στην προσπάθειά του να επιλύσει ένα πρόβλημα, επιστρατεύει τους μαθηματικούς συμβολισμούς, οι οποίοι σχετίζονται με το πρόβλημα. Αυτή η προσπάθεια, συνδυάζεται συνήθως και για καλύτερα αποτελέσματα, με στατιστικά γραφήματα, γεωμετρικά διαγράμματα και άλλα είδη εικόνων, τα οποία μπορεί να είναι σχέδια είτε με το χέρι ή να δημιουργούνται με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με αυτά τα δύο σημειωτικά συστήματα, το συμβολικό και το οπτικό ή απεικονιστικό, τα μαθηματικά νοήματα εκτείνονται στον χώρο. Στις περιπτώσεις που η λειτουργικότητα των δύο αυτών συστημάτων αποδειχθεί ανεπαρκής για την επίτευξη των προκαθορισμένων σκοπών και για την αναγκαιότητα επίλυσης των προβλημάτων, έρχεται η φυσική γλώσσα για να ολοκληρώσει το μαθηματικό νόημα συνοδεύοντας τα σύμβολα και την οπτική αναπαράσταση. Με τη φυσική γλώσσα αίρονται οι πιθανές ασάφειες και αποσαφηνίζονται τα νοήματα με τέτοιο τρόπο, εκεί που η αξιοποίηση των άλλων δύο σημειωτικών συστημάτων δεν επαρκεί για την πραγμάτωση του τελικού στόχου (Esquinca, 2012).

Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές οικειοποιούνται τη χρήση του μαθηματικού λόγου με τη διαμεσολάβηση των γραπτών, οπτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων. Όταν συμμετέχουν στη μαθηματική διαδικασία με ενεργό τρόπο, προτείνοντας λύσεις και γενικεύσεις στα μαθηματικά προβλήματα μέσα στην τάξη, αλληλεπιδρούν τόσο με τους συμμαθητές τους, με τους οποίους συνεργάζονται όσο και με τον εκπαιδευτικό. *Με τον τρόπο αυτό, κατακτούν μαθηματικά νοήματα μέσα στο σχολικό περιβάλλον της τάξης, όπου νιώθουν πως μιλούν και χρησιμοποιούν μια κοινή γλώσσα και ένα κοινό κώδικα επικοινωνίας, δηλαδή τη γλώσσα των μαθηματικών, προκειμένου να εκφραστούν, να ανταλλάξουν ιδέες και απόψεις, και να επικοινωνήσουν (Esquinca, 2012).* Με άλλα λόγια, η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση συντελούνται με τη βοήθεια της προφορικής ή της γραπτής γλώσσας, που συνοδεύονται με τη χρήση οπτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων, προάγοντας την **πολυτροπικότητα** των νοημάτων.

Επομένως, η πολυτροπικότητα είναι βασικός παράγοντας στην οικειοποίηση του μαθηματικού λόγου (discourse) από τους μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας, σύμφωνα με τη μελέτη του Esquinca (2012). Ο παράγοντας αυτός είναι καθοριστικός για την ποιότητα της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης, που αφορά το σύνολο των μαθητών, ανεξαρτήτως μαθηματικής επάρκειας και νοητικού επιπέδου.

# Κεφάλαιο 2ο: Μαθηματικός γραμματισμός, πολυτροπικότητα και πολυγραμματισμοί

## 2.1 Ο εγγραμματισμός και τα μοντέλα εγγραμματισμού

Ο όρος εγγραμματισμός ή γραμματισμός ως γενική κατηγορία αναφέρεται στις γλωσσικές και μεταγλωσσικές δεξιότητες ενός ατόμου που είναι απαραίτητες για να μπορέσει να ανταποκριθεί και να διεκπεραιώσει διάφορες εκπαιδευτικές, επαγγελματικές και κοινωνικές ανάγκες στην καθημερινή ζωή του. Η έννοια του γραμματισμού θεωρείται σε πολύ μεγάλο βαθμό ευρύς, εξελισσόμενος και χωρίς συγκεκριμένα όρια.

Η έννοια του γραμματισμού σήμερα δεν αναφέρεται απλώς στον αλφαβητισμό, του οποίου τη στενή σημασία είχε πριν από αρκετές δεκαετίες, αλλά περιλαμβάνει μια ευρύτερη και δυναμική έννοια με κοινωνικά συμφραζόμενα, και έτσι εκλαμβάνεται ως ένα πολυδιάστατο φαινόμενο που συνδυάζει πολλαπλώς γνωστικές, κοινωνικές και πολιτισμικές πλευρές (Χατζησαββίδης, 2007). Ένα άτομο θεωρείται εγγράμματο στη σύγχρονη κοινωνία, όταν είναι σε θέση να αξιοποιεί στο έπακρο την κριτική του σκέψη, να αναπτύσσει συλλογιστικές τεκμηρίωσης και επιχειρηματολόγησης, να ανταπεξέρχεται στους ρόλους που αναλαμβάνει, να αξιοποιεί συνδυαστικά τις παρεχόμενες πρακτικές σε κοινωνικό, εκπαιδευτικό και επαγγελματικό επίπεδο, και να προσαρμόζεται σε διαφορετικές καταστάσεις και περιβάλλοντα, αξιοποιώντας τα διαθέσιμα δεδομένα. Το εγγράμματο άτομο δύναται να ερμηνεύει, να κατανοεί, να αντιλαμβάνεται, να κρίνει, να αξιολογεί, να συνθέτει και να παράγει λόγο και σκέψεις. Είναι ικανό να παραπέμπει στις ενδοκειμενικές, περικειμενικές και διακειμενικές διαστάσεις των κειμένων, να κατανοεί τα επιχειρούμενα εγχειρήματα, να ερμηνεύει και να εκτιμά τις κοινωνικές καταστάσεις που εκφράζουν και προβάλλουν τα γραπτά κείμενα (Ματσαγγούρας 2007: στο Κάββουρα-Σισσούρα 2011).

Η έννοια του γραμματισμού, ξεπερνά τα στενά όρια του γλωσσικού τύπου, τροποποιείται και επεκτείνεται σε άλλα πεδία και σε άλλους επιστημονικούς χώρους, ανάλογα πάντα με το μέσο με το οποίο πραγματώνεται ο εκάστοτε στόχος και με τον τρόπο με τον οποίο σημασιοδοτείται σημειωτικά και συμβολικά. Έτσι, ο γραμματισμός μπορεί να είναι μαθηματικός, τεχνολογικός, οπτικός κ.ά. Σύμφωνα με τους Παπούλια-Τζελέπη (2004) και συνεργάτες, ο γραμματισμός είναι πολυεπίπεδος και πολυδιάστατος και συνδέεται με την ύπαρξη ενός εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, όπου μπορούν να εφαρμόζονται ποικίλες κοινωνικές πρακτικές στο πλαίσιο των οποίων υλοποιούνται πρακτικές γραμματισμού. Αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό είναι ότι ο γραμματισμός είναι μια σύνθετη έννοια, που αποτελείται από πολλές επιμέρους και διακριτές δεξιότητες, οι οποίες στοχεύουν στην καλλιέργεια ορισμένων ικανοτήτων κάθε φορά, συμπλέκονται και αναμειγνύονται, και έτσι αναδεικνύουν τις διακριτές του όψεις (Baynham, 2002).

Υπάρχουν τρία μοντέλα γραμματισμού, τα οποία σχετίζονται με τον τρόπο που το άτομο αποκτά τις ικανότητες της γραφής και της ανάγνωσης, δηλαδή της γλώσσας. Το πρώτο, είναι το αυτόνομο μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο ο γραμματισμός αφορά αποκλειστικά στην κατάκτηση των δεξιοτήτων διαχείρισης της επίσημης γλώσσας του κράτους, όπως αυτή αποτυπώνεται μέσω του εκπαιδευτικού συστήματος. Σε αυτό το μοντέλο, τα παιδιά που ευνοούνται είναι μόνο όσα φοιτούν ή έχουν τη δυνατότητα να φοιτούν στις βαθμίδες της εκπαίδευσης του κράτους, όπου λαμβάνουν στατικές γνώσεις χωρίς κοινωνική διάσταση. (Baynham, 2002:228; Χατζησαββίδης, 2007:27-28). Το δεύτερο μοντέλο, είναι το ιδεολογικό, το οποίο εκλαμβάνει τον γραμματισμό από μια κοινωνική οπτική, και τοποθετεί στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος τον μαθητή και τα κοινωνικά, τα πολιτισμικά και τα μορφωτικά του χαρακτηριστικά. Δίνεται έμφαση στην προφορική και γραπτή έκφραση των προσωπικών απόψεων και θέσεων των παιδιών, στην προσπάθειά τους να πραγματώσουν τους κοινωνικούς στόχους που έχουν προκαθορίσει. Ο ιδεολογικός εγγραμματισμός, δεν συντελείται μόνο στο πλαίσιο του σχολείου, αλλά και έξω από αυτό. Όταν ο γραμματισμός των μαθητών είναι τέτοιος, που συμβάλλει στην ανεύρεση εργασίας, ονομάζεται λειτουργικός και όταν οι μαθητές, μαθαίνουν να εστιάζουν, να ερμηνεύουν και να εκτιμούν τους τρόπους και τους λόγους σύνταξης των κειμένων, ονομάζεται κριτικός (Παπαδοπούλου, 2001:8). Το ιδεολογικό μοντέλο, δεν είναι στατικό, αλλά εξελίσσεται σύμφωνα με τα νέα δεδομένα και τις συνθήκες που προκύπτουν κάθε φορά, και δεν αφορά μόνο στη διαχείριση των κειμενικών τύπων, αλλά στη διαχείριση των κοινωνικών και πολιτισμικών σημασιών, κειμένων, σημείων και συμβόλων (Hill, 2008: Hill & Nichols, 2013).

Επομένως εγγράμματο άτομο στην εποχή μας θεωρείται εκείνο το άτομο που μπορεί όχι μόνο να κατανοεί και να αντιμετωπίζει κριτικά διάφορα είδη κειμένων αλλά και να είναι σε θέση να παράγει και το ίδιο μια ποικιλία από αυτά τα κείμενα ανάλογα με τις καταστάσεις επικοινωνίας τις οποίες αντιμετωπίζει κάθε φορά. Σύμφωνα με την παιδαγωγική του γραμματισμού, η μάθηση θεωρείται αποτελεσματική όταν οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία αυτή.

## 2.2 Η έννοια της πολυτροπικότητας

Σύμφωνα με τη Χοντολίδου (1999), η έννοια της πολυτροπικότητα (multimodality) εισήχθηκε για πρώτη φορά από τους Kress και van Leeuwen, και αφορά την αμφισβήτηση της διαχρονικής παραδοχής του δυτικού κόσμου που θέλει τη γλώσσα ως κυρίαρχο τρόπο επικοινωνίας, ότι δηλαδή η γλώσσα αποτελεί την μόνη πηγή νοηματοδότησης και το μέσο έκφρασης των σκέψεων, των συναισθημάτων, των επιθυμιών, των αξιών, των βιωμάτων και των συμπεριφορών. Σύμφωνα με τη θέση αυτή, η γλώσσα ενός κειμένου αφορά σε συνδυασμούς γραπτού λόγου, εικόνων, οπτικοακουστικών στοιχείων, χειρονομιών, κινήσεων, πινάκων, διαγραμμάτων, σχεδίων κ.ά., και περιλαμβάνει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την αναγνώριση και την κατανόηση των τρόπων επίτευξης της μάθησης και κατάκτησης της γνώσης (Kress, 2011:208-209). Σύμφωνα με τους Kress και van Leeuwen (2010:97) στην επικοινωνία κάθε προϊόν λόγου, δηλαδή κάθε κείμενο είτε προφορικό είτε γραπτό, δεν είναι ποτέ μόνο γλωσσικό, αλλά συνεπικουρείται από ποικίλους μη γλωσσικούς τρόπους κατασκευής νοήματος , όπως είναι οι εικόνες, τα σχήματα, ο ήχος, η κίνηση, οι χειρονομίες κ.ά.

Οι τροπικότητες ενός κειμένου έγκειται στο ότι μπορεί να είναι ταυτόχρονα γραπτό, προφορικό, απεικονιστικό, αναπαραστατικό, δηλαδή πολυ-σημειωτικό, προκειμένου να μεταβιβάσει αποτελεσματικότερα νοήματα, σημασίες, σκέψεις, συναισθήματα, εμπειρίες και όχι απαραίτητα γλωσσικά μηνύματα (Baldry & Thibault, 2006:12). Από την ανωτέρω θέση καθίσταται σαφές ότι *δεν αρκεί ο γλωσσικός γραμματισμός, με τη κλασική έννοια της κατάκτησης των δεξιοτήτων ανάγνωσης και γραφής, για την κατανόηση των νοημάτων, αλλά ο πολυγραμματισμός, για την αναγνώριση όλων των ειδών των σημειωτικών πόρων* (Παπαδοπούλου, 2005:1-2). Ο συνδυασμός των σημειωτικών στοιχείων σε ένα κείμενο συνεπάγεται και την ταυτόχρονη προσέγγισή τους ως αναπόσπαστο σύνολο και όχι μεμονωμένα. Η σημασιοδότηση του περιεχομένου γίνεται με την συνεξέταση όλων των πολυτροπικών στοιχείων του κειμένου, τα οποία δεν συνυπάρχουν απλώς, αλλά συνεπιδρούν και αλληλοεπηρεάζονται (Kress & van Leeuwen, 2010:280).

## 2.3 Πολυγραμματισμοί και παιδαγωγική των πολυγραμματισμών

Η επιστημονική ομάδα, που εξειδικεύτηκε στη διδασκαλία του γραμματισμού και ονομάστηκε «New London Group» και συστάθηκε στο New London του New Hamphsire, εισήγαγε για πρώτη φορά το 1996 τον όρο «πολυγραμματισμοί» (multiliteracy). Ο όρος αυτός, κυρίως αναφερόταν στη διαφορετική μορφή που έχει αποκτήσει η σύγχρονη επικοινωνία, η οποία σχετίζεται και επηρεάζεται άμεσα από τις κοινωνικές και πολιτισμικές αλλαγές που συντελούνται σήμερα. Δύο βασικές αρχές κυριάρχησαν στη θεωρία του πολυγραμματισμού :

Α) η εκπαίδευση θεωρείται ότι παρέχει τη δυνατότητα για ανοδική κινητικότητα και αποτελεί πεδίο της υλοποίησης των αρχών της ισότητας και

Β) η διδασκαλία οικοδομεί πάνω στους πολιτισμικούς πόρους που φέρουν οι μαθητές στην τάξη, διαθέτει τα χαρακτηριστικά μιας πολιτισμικής δράσης, διαμορφώνει πρακτικές διδασκαλίας κατάλληλες για την κατασκευή ταυτοτήτων και κοινωνικών σχέσεων, αξιολογεί όλα τα μέσα και όλους τους τρόπους για την κατασκευή νοήματος (Kalantzis & Cope 2001: στο Κάββουρα – Σισσούρα 2011).

Με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΤΠΕ), η επικοινωνία και η νοηματοδότηση διαπλέκονται τόσο με τη γλώσσα όσο και με άλλους σημειωτικούς πόρους, όπως για παράδειγμα τους οπτικούς, τους ηχητικούς, τους χωρικούς κ.ά. Συνεπώς, η γλώσσα δεν φαίνεται να αποτελεί το μοναδικό μέσο επικοινωνίας ή να κατέχει τον πρωτεύοντα και κυρίαρχο τρόπο στην καθημερινή συνδιαλλαγή και στη σημασιοδότηση νοημάτων μεταξύ των ανθρώπων.

Υπάρχει άμεση σύνδεση των πολυγραμματισμών με την χρήση της πολυτροπικότητας σε γνωστικό επίπεδο, η οποία προωθεί την αξιοποίηση όλων των διανοητικών δυνατοτήτων πρόσληψης του ανθρώπινου νου και θέτει σε λειτουργία όλες τις αισθήσεις (Kress & vanLeeuwen 2001: στο Κάββουρα –Σισσούρα, 2011). Με τη βοήθεια των πολλαπλών μέσων αναπαράστασης προκαλείται το ενδιαφέρον του εκπαιδευόμενου και έτσι δημιουργούνται κίνητρα για συμμετοχή στη μάθηση. Με τον τρόπο αυτό, οι συνθήκες μάθησης είναι πιο ελκυστικές και αποτελεσματικές. Με τις πολυτροπικές αναπαραστάσεις, οι εικονιστικές πληροφορίες μετατρέπονται σε κειμενικές και αντιστρόφως, συσχετίζονται οι διαφορετικές πτυχές του υπό ανάλυση θέματος και ενεργοποιούνται περισσότερες από μια αισθήσεις για την πληρέστερη κατανόησή του.

Μια σημαντική θεωρία που υποστηρίζει τη χρήση πολυτροπικών και πολυμεσικών αναπαραστάσεων για την αποτελεσματικότερη μάθηση είναι η Θεωρία Γνωστικής Ευελιξίας (Cognitive Flexibility Theory : στο Κάββουρα - Σισσούρα, 2011), η οποία στοχεύει στη σύνθετη διάσταση της γνώσης και του πραγματικού κόσμου. Αποτελεί μια κονστρουκτιβιστική θεωρία μάθησης, σύμφωνα με την οποία το νόημα συγκροτείται μέσα από πηγές αναπαράστασης που μπορεί να είναι η γλώσσα, η χειρονομία, οι συμβολικές ή εικονικές αναπαραστάσεις (π.χ. πίνακας, σχεδιάγραμμα) κ.ά.

Στα κείμενα, όπου συλλειτουργούν η εικόνα, η κίνηση, ο ήχος και η γλώσσα, δημιουργείται μια πολυτροπικότητα, που έχει αλλάξει εντελώς το τοπίο της επικοινωνίας. Η ανάγκη για την αξιοποίηση, την ερμηνεία, την κατανόηση αλλά και τη δημιουργία τέτοιων κειμένων θεωρείται σήμερα επιτακτική, καθώς τα υποκείμενα μάθησης έρχονται σε επαφή με πολυτροπικά κείμενα από τα πρώτα χρόνια της ζωής τους.

Με άλλα λόγια, οι πολυγραμματισμοί αναφέρονται στην ποικιλία των τρόπων επικοινωνίας που αφορούν τόσο στην χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας και των πολυμέσων, όσο και στις ποικίλες μορφές κειμένων που δημιουργούνται για να εκφράσουν τις ανάγκες μιας πολύγλωσσης και πολυπολιτισμικής κοινωνίας. Σε ένα τέτοιο εκπαιδευτικό περιβάλλον, η γλώσσα και οι άλλοι σημειωτικοί τρόποι έκφρασης και επικοινωνίας, αποτελούν δυναμικές αναπαραστατικές πηγές, συνεχώς διαμορφούμενες από τους χρήστες τους, καθώς τις χρησιμοποιούν για να πετύχουν τους πολιτισμικούς τους στόχους (Cope & Kalantzis, 2000: στο Τροκάλλη, 2014)

Συνεπώς, στη σύγχρονη εποχή, που τα τεχνολογικά μέσα έχουν φέρει τον κόσμο κοντά, παρατηρείται πλουραλισμός στις γλώσσες, στις κουλτούρες, στις κοινωνικές πρακτικές, στους τρόπους επικοινωνίας και διαμοιρασμού των πληροφοριών. Αποτέλεσμα όλων αυτών, είναι η δημιουργία πολυμορφικών κειμένων, απαραίτητη προϋπόθεση της ύπαρξης των οποίων είναι η λειτουργικότητα. Η εισαγωγή της έννοιας της πολυμορφίας, συνδέεται σε πολύ μεγάλο βαθμό με την υπερκέραση των ορίων του γραμματισμού, πέραν δηλαδή της γλώσσας, σε επίπεδο κοινωνικό, επαγγελματικό, τεχνολογικό, πολιτισμικό, επιστημονικό, επικοινωνιακό κ.ά. Αυτό σημαίνει ότι με τη λειτουργική χρήση των πολυμορφικών κειμένων, εισάγεται και η έννοια του πολυγραμματισμού, ο οποίος επεκτείνει τη σημασία του εγγραμματισμού (Cope & Kalantzis, 2006). Στην πραγματικότητα, οι πολυγραμματισμοί, και συγκεκριμένα η εφαρμογή μιας παιδαγωγικής των πολυγραμματισμών στα σχολεία, αξιοποιεί τον γλωσσικό, τον κοινωνικό και τον τεχνολογικό πλουραλισμό της εποχής, όπως επίσης και τις προσωπικές εμπειρίες, γνώσεις και κουλτούρες του ανομοιογενούς μαθητικού πληθυσμού. Αυτό σημαίνει, ότι ο γραμματισμός επιτυγχάνεται μέσα από την αξιοποίηση της διαφορετικότητας των μαθητών και των ποικίλων ερεθισμάτων, δηλαδή μέσα από διαδικασίες αλληλεπίδρασης και επεξεργασίας όλων των πληροφορικών δεδομένων (Cope & Kalantzis, 2006, 2009). Άλλωστε, οι γραπτοί γλωσσικοί τρόποι νοήματος αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των οπτικών, ακουστικών και χωρικών τύπων νοήματος, και μέσα σε αυτόν τον κόσμο του νοήματος, απαιτείται ένας νέος πολυτροπικός γραμματισμός (Kalantzis & Cope, 1999:681-682). Με τη βοήθεια του πολυτροπικού γραμματισμού επιτυγχάνεται η κατασκευή των νοημάτων επικοινωνίας.

Σύμφωνα με τους Cope και Kalantzis (2000: στο Μανδάλου, 2015), η ιδέα των πολυγραμματισμών αφορά στην ικανότητα κατασκευής νοήματος σε διαφορετικά πολιτισμικά και κοινωνικά περιβάλλοντα, καθώς και στην ικανότητα αντίληψης όχι μόνο αλφαβητικών αλλά και πολυτροπικών αναπαραστάσεων. Οι πολυγραμματισμοί αναφέρονται τόσο στο πλήθος των κοινωνικών και πολιτισμικών αναγκών της σύγχρονης εποχής, αλλά και στη πολυδιάστατη γνώση και ικανότητα που αποκτά το άτομο μέσα από την εφαρμογή της διδακτικής του πολυγραμματισμού, προκειμένου να ανταποκριθεί αποτελεσματικά στις προκλήσεις της εποχής. Κρίσιμη για τη δημιουργία της γνώσης είναι η ατομική εμπειρία και σε αυτή έγκεινται οι διαφορές στην απόδοση νοημάτων. Κατά την προσωπική ενεργοποίηση της γνώσης, μορφοποιούνται πολλαπλοί και διαφορετικοί τρόποι συμμετοχής στη νοητική διαδικασία και για το λόγο αυτό γίνεται αναφορά στην πολυτροπική φύση της γνώσης. Από την άποψη αυτή η μαθηματική γνώση η οποία αποτελεί ένα δυνατό και σταθερό προϊόν της ανθρώπινης φαντασίας, και προέρχονται ως αποτέλεσμα της φυσικής εμπειρίας του ανθρώπου (Radford et al., 2008) μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολυτροπική, με την έννοια ότι συμβάλλουν πολλοί τρόποι για την κατάκτησή της.

## 2.4 Μαθηματικός γραμματισμός

Η εισαγωγή της έννοιας του γραμματισμού συγκεκριμένα για το μάθημα των μαθηματικών, συνεπάγεται την προσπάθεια εμπλουτισμού και επέκτασης των εκπαιδευτικών πρακτικών, με απώτερο σκοπό τον εφοδιασμό των μαθητών με γνωσιακά εργαλεία και μεθόδους πολλαπλής θεώρησης των μαθηματικών εννοιών, όρων, σχέσεων και συμβόλων, μέσω των οποίων θα αντιλαμβάνονται και θα κατανοούν την πραγματικότητα που τους περιβάλλει. Ο γραμματισμός στα μαθηματικά, αποτελεί μέρος του πολυδιάστατου φαινομένου του γραμματισμού, και αποδεικνύεται σημαίνουσας σημασίας για την πορεία της εξέλιξης των μαθητών, τόσο σε εκπαιδευτικό όσο και σε κοινωνικό και προσωπικό επίπεδο.

Συγκεκριμένα, ο μαθηματικός γραμματισμός αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά καθώς και να αναλύει και να ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Κατά συνέπεια ένα μαθηματικά εγγράμματο άτομο αντιλαμβάνεται ότι «*οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του φυσικού, κοινωνικού και πνευματικού κόσμου*» (Freudenthal 1983: στο Α.Π.Σ. 2011).

Παράλληλα, το άτομο αυτό διαθέτει την «*ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο και έξω μαθηματικού πλαισίου και καταστάσεων στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο*» (Niss, 1996, 2003: στο Α.Π.Σ. 2011) Μέσα από τα μαθηματικά το άτομο μαθαίνει να επικοινωνεί με τα άλλα άτομα της κοινωνικής ομάδας, στην οποία ανήκει, και να εκφράζει τις σκέψεις και τα επιχειρήματά του χρησιμοποιώντας πολλαπλές αναπαραστάσεις προκειμένου να γίνεται κατανοητό.

Σημαντική είναι επομένως η ανάπτυξη της ικανότητας έκφρασης και της δεξιότητας ανάλυσης και ερμηνείας των δεδομένων, που αναπαριστώνται με ποικίλους τρόπους στα μαθηματικά (σχεδιαγράμματα, πίνακες, μαθηματικό πρόβλημα κ.ά). Εξάλλου, κύριος σκοπός και του σημερινού προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά (Α.Π. 2003) είναι η καλλιέργεια του μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή η ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να εφαρμόζει τις μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε καθημερινές και πραγματικές καταστάσεις εκτός σχολείου. Τα μαθηματικά συμβάλλουν στη βελτίωση της νοητικής ικανότητας του παιδιού και το βοηθούν να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις και τα προβλήματα της καθημερινής ζωής, συμβάλλοντας ταυτόχρονα στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του αλλά και στην επιτυχή κοινωνική ένταξη του.

Ο μαθηματικός γραμματισμός δεν θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως έννοια που διαφέρει από εκείνη του γλωσσικού γραμματισμού, καθώς αμφότερες αναφέρονται στην κατάκτηση των απαραίτητων και ευρύτερων εκείνων γνώσεων, λέξεων και όρων, οι οποίες συμπεριλαμβάνονται σε ένα κείμενο, είτε γλωσσικό είτε μαθηματικό. Παράλληλα, προϋποθέτουν την ανάπτυξη του επαγωγικού τρόπου σκέψης για την κατανόηση, την αξιολόγηση, την ερμηνεία του περιεχομένου των κειμένων, όπως επίσης και τον σχεδιασμό συγκεκριμένων συλλογιστικών στρατηγικών για την επίλυση των προβλημάτων κάθε είδους (Israel & Duffy, 2014). Υπό αυτό το θεωρητικό πρίσμα, όταν ένας μαθητής/ άτομο είναι μαθηματικά εγγραμματισμένος, είναι σε θέση να προσεγγίσει ένα μαθηματικό κείμενο ως ένα «συμβατικό» γραπτό/ γλωσσικό κείμενο, δηλαδή ακολουθώντας τις ίδιες ικανότητες και δεξιότητες ανάγνωσης και κατανόησης.

# Κεφάλαιο 3ο: Σημειωτική και μαθηματικά

## 3.1 Το κείμενο και το μαθηματικό κείμενο

Στη σημερινή εποχή, η επιστήμη της γλωσσολογίας, οι θεωρίες της λογοτεχνίας αλλά και η εκπαιδευτική γλωσσολογία εκλαμβάνουν την έννοια του κειμένου ως μια σύνθετη ποικιλία κοινωνικών καταστάσεων ή συμβάντων. Συγκεκριμένα, κείμενα είναι τα γραπτά ή προφορικά κείμενα, οι αφίσες, τα video-clips, οι κινηματογραφικές ταινίες, τα σχολικά μαθήματα, οι πολιτικοί λόγοι, οι θεατρικές παραστάσεις ή τα θεατρικά δρώμενα κ.ά. (Χοντολίδου 1999: στο Μανδάλου, 2015). Κάθε κείμενο λοιπόν, είναι ένα πολλαπλό και πολυποίκιλο σύστημα τρόπων έκφρασης κι επικοινωνίας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι ο λόγος αναπτύσσεται παράλληλα με άλλους σημειωτικούς τρόπους και μέσα, τα οποία είναι αυτά τα στοιχεία που νοηματοδοτούν τη γλώσσα και σημασιοδοτούν τα νοήματα. Αυτοί οι τρόποι δεν εκλαμβάνονται ως δευτερεύοντες ή ως πιο σημαντικοί, καθώς όλοι μαζί αναπόσπαστα στοιχειοθετούν την πολυτροπικότητα του κειμένου, η οποία εξασφαλίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση του κειμένου, την επικοινωνία των νοημάτων του συντάκτη και την ικανοποίηση του αναγνώστη. Οι τρόποι, με τους οποίους τα διάφορα σημειωτικά μέσα και εργαλεία συντίθενται για την επίτευξη του τελικού αποτελέσματος της επικοινωνίας, είναι ακόμη προς διερεύνηση, καθώς η ανάλυση των πολυτροπικών κειμένων, η οποία είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία, δεν είναι τόσο αναπτυγμένη, όπως είναι η ανάλυση των μονοτροπικών κειμένων (Μανδάλου, 2015).

Σήμερα, στην εποχή της τεχνολογίας και της πληροφόρησης, η επικοινωνία χαρακτηρίζεται από πολυτροπικότητα, η οποία αντλεί τρόπους και μέσα από διάφορες πηγές είτε λεκτικές είτε μη–λεκτικές. Επομένως, το πλαίσιο αυτό, σαφώς επηρεάζει την καθημερινή διδακτική πρακτική που εφαρμόζεται στη σχολική αίθουσα, τόσο από το διδάσκοντα όσο κι από τους μαθητές. Δε θα μπορούσε να είναι ξεκομμένη από την απτή πραγματικότητα και καθημερινότητα, που βιώνουν και αντιμετωπίζουν οι συμμετέχοντες στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Το σχολείο ανταποκρινόμενο στις προκλήσεις της σύγχρονης εποχής οφείλει να διευρύνει τους ορίζοντές του, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη την πολυτροπικότητα της σύγχρονης επικοινωνίας, ώστε να προετοιμάσει τους μαθητές για να μπορούν να χειρίζονται αποτελεσματικά το πλήθος των πολυτροπικών κειμένων, που τους περιβάλλει διαρκώς σε όλες της εκφάνσεις της ζωής τους.

Η φύση των των μαθηματικών είναι πολυτροπική (Hammill,2010) και το μαθηματικό κείμενο είναι ένα πολυτροπικό κείμενο το οποίο περιλαμβάνει γραπτές ρηματικές και ονοματικές αναφορές σε μαθηματικές έννοιες, όρους, σχέσεις και αντικείμενα, μαθηματικά σύμβολα, πίνακες, διαγράμματα, γεωμετρικά σχήματα κ.ά. Στο μαθηματικό κείμενο μπορεί να διατυπώνεται ένα θεώρημα, ένας ορισμός, μια ιδιότητα, μια πρόταση, τα οποία μπορούν να εξηγούνται με τη χρήση πινάκων, διαγραμμάτων, σχημάτων και εικόνων. Παράλληλα, περιλαμβάνει διατυπώσεις μαθηματικών συλλογισμών, ιστορικές αφηγήσεις σχετικές με την πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών, παρουσιάσεις εφαρμογής, αποδείξεις προτάσεων, και επίδειξης τρόπων επίλυσης προβλημάτων και ασκήσεων. Σύμφωνα με τους Borasil και Siegel (1990), τα μαθηματικά κείμενα είναι άρθρα, σχολικά εγχειρίδια, σημειώσεις, ασκησιολόγια, φύλλα εργασίας, πραγματείες, ιστοσελίδες, βιογραφίες, εγχειρίδια μαθηματικών εφαρμογών στην καθημερινή ζωή, ή οτιδήποτε άλλο συμβάλλει στην εκμάθηση των μαθηματικών όρων, σχέσεων, συμβόλων και εννοιών.

Τα μαθηματικά κείμενα, στην εκπαιδευτική πραγματικότητα, διακρίνονται σε διδακτικά και μαθηματικά. Στην πρώτη κατηγορία, εντάσσονται τα κείμενα που αποσκοπούν στη διαμόρφωση του χαρακτήρα, της στάσης και της συμπεριφοράς του μαθητή ως αναγνώστη, ο οποίος θα το νοηματοδοτήσει σύμφωνα με τις βιωματικές του εμπειρίες και τις γνώσεις του. Στη δεύτερη, ανήκουν τα κείμενα που απλώς μεταφέρουν κάθε είδους πληροφορίες, σχετικές με την επιστήμη των μαθηματικών. Το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών αποτελεί μια κατηγορία από μόνο του, καθώς συνδυάζει και τις δύο παραπάνω διαστάσεις (Καφούση, 2009).

Βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών κειμένων είναι η ακρίβεια, η πυκνότητα και η συνοχή. Συγκεκριμένα, οι όροι, οι έννοιες, η σύνταξη των ορισμών και τα σύμβολα είναι ορισμένα με ακρίβεια και η σημασία τους είναι δομημένη με αυστηρό τρόπο. Παράλληλα, οι μαθηματικές ερμηνείες είναι σύντομες, περιεκτικές και εμπεριέχουν πολλές και ποικίλες πληροφορίες, που επιτρέπουν την εξαγωγή συγκεκριμένων συμπερασμάτων. Επιπρόσθετα, υπάρχει αυστηρή αλληλουχία και συνάφεια μεταξύ των ορισμών και των εννοιών, και γι’ αυτό είναι δυνατό να παρατίθενται πολλές πληροφορίες ταυτόχρονα. Σε αυτά ακριβώς τα χαρακτηριστικά, εντοπίζονται και οι βασικές δυσκολίες στην κατανόηση των μαθηματικών από πλευράς μαθητών και εκπαιδευτικών, για την υπερκέραση των οποίων έχουν γίνει στο παρελθόν πολλές προσπάθειες απλοποίησης (Osterholm, 2003). Ο Osterholm (2006) υποστηρίζει ότι για την ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων δεν απαιτούνται ειδικές ικανότητες, όπως υποστηρίζεται, όπως επίσης δεν θα πρέπει να συγκρίνεται με τα «συμβατικά» κείμενα, καθώς στη σύγκριση αυτή εστιάζονται όλα τα προβλήματα. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι το λεξιλόγιο και οι γλωσσικές δομές των μαθηματικών είναι εξειδικευμένα και σε πολλές περιπτώσεις άγνωστα στους μαθητές, και ιδίως σε εκείνους της πρώτης σχολικής ηλικίας. Συνεπώς, πρέπει να δίνονται περαιτέρω εξηγήσεις και περισσότερος χρόνος για την κατανόησή τους, και η προσέγγισή τους επιβάλλεται να διαφέρει από εκείνη των «απλών» κειμένων.

Τα μαθηματικά κείμενα διαφέρουν από τα «συμβατικά» στην ορολογία, στη χρήση των συμβόλων, στη σύνταξη των προτάσεων, στη χρήση των διαγραμμάτων, των πινάκων και των σχημάτων, στην παράθεση ορισμών και θεωρημάτων και στην αξιοποίηση των αποδείξεων. Συγκεκριμένα:

Α) Η μαθηματική ορολογία περιλαμβάνει λέξεις και όρους που είτε δεν απαντώνται στον καθημερινό επικοινωνιακό γραπτό ή προφορικό λόγο είτε χρησιμοποιούνται με διαφορετική σημασία (Kenney et al., 2005).

Β) Τα σύμβολα αποτελούν θεμελιώδες κομμάτι του μαθηματικού γίγνεσθαι και η εκμάθησή τους θεωρείται παραπάνω από απαραίτητη και επιβεβλημένη. Η εκμάθηση των μαθηματικών συμβόλων απαιτεί εννοιολογική, φωνολογική, αναπαραστατική, λεκτική και συμβολική εξοικείωση των μαθητών (Βοσνιάδου κ.ά., 2008).

Γ) Στα μαθηματικά κείμενα η σύνταξη των προτάσεων για την απόδοση των ορισμών και των εξηγήσεων γίνεται με δύο τρόπους, δηλαδή με τη χρήση της αντικειμενικής γλώσσας και της μεταγλώσσας. Η πρώτη περιλαμβάνει τη μαθηματική ορολογία και τα σύμβολα, και η δεύτερη διαπραγματεύεται σε φυσική γλώσσα τις έννοιες και τους όρους που περιγράφονται (MacGregor & Price, 1999).

Δ) Η χρήση διαγραμμάτων, πινάκων, εικόνων και σχημάτων στα μαθηματικά κείμενα κρίνεται επιβεβλημένη για την καλύτερη κατανόηση των νοημάτων και των μαθηματικών εννοιών. Πρόκειται για εξωτερικές αναπαραστάσεις, που αξιοποιούνται προς διευκόλυνση των μαθητών, οι οποίοι στη συνέχεια, αποκωδικοποιούν το βοηθητικό υλικό και οικειοποιούνται ευκολότερα το περιεχόμενο των επιμέρους ενοτήτων, μέσω της οπτικοποίησης των απεικονίσεων. Οι απεικονίσεις αυτές ενισχύουν σημαντικά την ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών (Duval, 1999; Fujita, 2004).

Ε) Το ανωτέρω βοηθητικό υλικό των αναπαραστάσεων και των απεικονίσεων, συνήθως συνοδεύουν τους μαθηματικούς ορισμούς και τα θεωρήματα, έτσι ώστε οι μαθητές να διευκολυνθούν και να διαμορφώσουν μια ολοκληρωμένη και πλήρη αντίληψη της εκάστοτε έννοιας. Φυσικά δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις όπου όταν η θεωρία των μαθηματικών δεν πλαισιώνεται από οπτικό υλικό τότε ο μαθητής οδηγείται σε μια στατική διαδικασία κατανόησης ή ακόμα και αποστήθισης της θεωρίας αυτής, προκειμένου να καταστεί λειτουργική από τον μαθητή (Ζαχαριάδης, 2004).

Στ) Σημαντικό μέρος των μαθηματικών εγχειριδίων αποτελούν οι αποδείξεις, δηλαδή οι μαθηματικοί συλλογισμοί και οι λογικές στρατηγικές που αναπτύσσονται με διαδοχικό τρόπο, προκειμένου να οδηγήσουν στην επίλυση των προβλημάτων και στην αλήθεια του ζητουμένου. Απαραίτητη προϋπόθεση για την αποδοχή των αποδείξεων αποτελεί από τη μια η αποτελεσματικότητά τους και από την άλλη η επαληθευσιμότητά τους (Yang & Lin, 2008).

### 3.2 Η λειτουργία του πολυτροπικού κειμένου

Στην εποχή της τεχνολογίας, της πολυπολιτισμικότητας και της παγκοσμιοποίησης, ως άρτιο κείμενο εκλαμβάνεται εκείνο που είναι «πολυ-λειτουργικό». Η σημαντικότητα και η πληρότητά του έγκειται στο γεγονός ότι επιτελεί συγχρόνως τρεις διαφορετικές λειτουργίες, α) την ιδεοποιητική (ideational), β) την διαπροσωπική (interpersonal) και γ) την κειμενική (textual) λειτουργία. Στην πρώτη, η οποία αναφέρεται και ως αναπαραστατική λειτουργία, η γλώσσα ή η εικόνα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή και την αναπαράσταση μιας κοινωνικής πραγματικότητας. Η δεύτερη σχετίζεται με τη διαπροσωπική διάσταση που έχει το κείμενο και αφορά στον τρόπο που το λεκτικό ή το απεικονιστικό κείμενο παραθέτει στάσεις, απόψεις και αντιλήψεις, έτσι ώστε να επηρεάσει τον ακροατή/ αναγνώστη/ δέκτη ή να διεπιδράσει μαζί του. Τέλος, η τρίτη σχετίζεται με την κειμενική διάσταση, η οποία αφορά στον τρόπο με τον οποίο τα γλωσσικά και αναπαραστατικά στοιχεία του κειμένου, λειτουργούν συνδυαστικά, προκειμένου να αποδώσουν το τελικό επικοινωνιακό αποτέλεσμα. Παράλληλα, η λειτουργία αυτή αναδεικνύει τις δυνατότητες που υπάρχουν για διαφορετικούς συσχετισμούς τρόπων, ώστε να προκύπτουν πολυτροπικά κείμενα.

Αναφορικά με την κειμενική λειτουργία της εικόνας, ενδιαφέρον παρουσιάζει η λεγόμενη «πληροφοριακή αξία» (information value) που έχει η αναπαράσταση, η οποία ορίζεται από την τοποθέτηση των στοιχείων στις διάφορες «ζώνες» της εικόνας. Οι ζώνες αυτές είναι τρεις, α) η ζώνη «αριστερά-δεξιά» (left-right), β) η ζώνη «πάνω-κάτω»(top-bottom) και γ) η ζώνη «κέντρο-περιθώριο» (center-margin) (Στάμου, Αλευριάδου, Ελευθερίου: στο Πουρκός & Κατσαρού, 2011).

Η πρώτη ζώνη αριστερά-δεξιά, ορίζει μια σχέση μεταξύ γνωστού και καινούριου. Ό,τι τοποθετείται αριστερά θεωρείται γνωστό και οικείο, σε αντίθεση με αυτό που βρίσκεται στα δεξιά, το οποίο είναι νέο και το γίνεται αντιληπτό μετά την οικειοποίηση και τη νοηματική κατάκτηση του στοιχείου που είναι στα αριστερά. Αυτό έχει να κάνει με τη δεξιόστροφη γραφή κι ανάγνωση, που επικρατεί στις δυτικές κοινωνίες. Για το λόγο αυτό, πολλές φορές στα διάφορα έντυπα ή ηλεκτρονικά μέσα το πληροφοριακό κείμενο βρίσκεται αριστερά ενώ οι διαφημίσεις είναι στα δεξιά.

Η δεύτερη ζώνη πάνω-κάτω, αφορά στη σχέση ιδανικού–πραγματικού (ideal-real). Αυτό που εικονίζεται στο επάνω μέρος αποτελεί κάτι το ιδεατό, δηλαδή το επιθυμητό και το ευκταίο, σε αντίθεση με αυτό που βρίσκεται χαμηλότερα στην εικόνα και είναι το πραγματικό, το ρεαλιστικό. Αυτό βρίσκει συχνά εφαρμογή στις διαφημίσεις, όπου το νέο και «καλύτερο» προϊόν τοποθετείται στο επάνω μέρος, ενώ στο κάτω μέρος υπάρχει το λεκτικό μήνυμα, συνοδευόμενο με κάποιες χρηστικές πληροφορίες.

Τέλος, σχετικά με την τρίτη ζώνη κέντρο–περιθώριο, τα αντικείμενα που είναι τοποθετημένα στο κέντρο της εικόνας παίζουν κυρίαρχο ρόλο στη δημιουργία του νοήματος, ενώ τα υπόλοιπα που υπάρχουν γύρω από αυτά είναι αυτά που τίθενται στο περιθώριο, δεν έχουν μεγάλη αξία για τη σημασία και εξαρτώνται άμεσα από τα κύρια σημεία του νοήματος (Στάμου, Αλευριάδου, Ελευθερίου: στο Πουρκός & Κατσαρού, 2011).

Ο Barthes (1988: στο Πουρκός, 2011) διακρίνει δύο κατηγορίες για τα πολυτροπικά κείμενα αναφορικά με τη σχέση κειμένου-εικόνας: Η πρώτη κατηγορία είναι της *αγκύρωσης*, όπου η εικόνα απλά αποδίδει αναπαραστατικά το κείμενο χωρίς κάποιο καινούριο στοιχείο, ενώ η δεύτερη κατηγορία είναι αυτή της *αναμετάδοσης*, όπου η εικόνα προεκτείνει το νόημα του γλωσσικού κειμένου.

### 3.3 Χαρακτηριστικά του πολυτροπικού λόγου

Οι Baldry & Thibault (2006:16-23) διακρίνουν τέσσερις τύπους διαμορφούμενου νοήματος, βάσει της ανάλυσης των σημειωτικών δεδομένων. Ο πρώτος είναι ο λογικός, ο δεύτερος είναι ο κειμενικός, ο τρίτος είναι ο βιωματικός και ο τέταρτος και τελευταίος είναι ο διαπροσωπικός. Για τον Χατζησαββίδη (2011:9-10), ο πολυτροπικός λόγος μπορεί να είναι ποικιλόμορφος, συμμετοχικός, συνδυαστικός, κοινωνικός, υπαινικτικός και συνθηματικός. Συγκεκριμένα:

1. Είναι συνθηματικός, δηλαδή το ενδιαφέρον εστιάζεται στη σαφήνεια και την περιεκτικότητα, ενώ θέτει στο περιθώριο την ανάλυση και την επανάληψη.

2. Είναι υπαινικτικός και συνθηματικός, καθώς συνήθως δεν αποτελείται από κυριολεξίες.

3. Είναι ποικιλόμορφος, καθώς με το συνδυασμό των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων, προϋποθέτει την ύπαρξη μιας ποικιλίας, η οποία συμβάλει στη δημιουργία και τη μετάδοση του τελικού μηνύματος από τον δημιουργό στον αναγνώστη, δηλαδή από τον πομπό στον δέκτη.

4. Είναι συνδυαστικός, επειδή συνδυάζει και συνθέτει τους σημειωτικούς πόρους μεταξύ τους, ο καθένας από τους οποίους έχει τη δική του αξία και όλοι μαζί συνθέτουν ένα πρωτότυπο νόημα, που είναι πολυτροπικό.

5. Είναι συμμετοχικός, καθώς απαιτεί τη συμμετοχή πολλών τρόπων έκφρασης κι επικοινωνίας (για παράδειγμα του προφορικού και του γραπτού λόγου, της εικόνας, της κίνησης, του ήχου, τις χειρονομίες κ.ά) με τρόπο τέτοιο, που όλοι θα έχουν ίσο μερίδιο στη συμμετοχή τους αυτή.

6. Κοινωνιοκεντρικός, γιατί, σύμφωνα με τους Kress & vanLeeuwen (2000: στο Χατζησαββίδης, 2011) «*ο λόγος είναι κοινωνικά κατασκευασμένη γνώση της πραγματικότητας*» (Χατζησαββίδης, 2011:9-10).

Ειδικότερα, οι Kalantzis και Cope (2012), αλλά και η ομάδα του New London Group (1996), αναφέρονται στη δημιουργία του νοήματος ως επικοινωνιακό και πολιτισμικό προϊόν, εισάγοντας την έννοια του Σχεδίου (Design), το οποίο εμπεριέχει τρεις υποκατηγορίες που το συνθέτουν. Μέσω του Σχεδίου περιγράφονται τα παράγωγα και η μορφή της διαδικασίας νοηματοδότησης στο εκπαιδευτικό περιβάλλον και σε παιδαγωγικό πλαίσιο. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δεν εισπράττουν άκριτα τις πληροφορίες που μεταβιβάζουν οι σημειωτικοί πόροι που ενυπάρχουν σε ένα κείμενο, αλλά τους συνθέτουν και τους διαχειρίζονται σύμφωνα με τις προθέσεις τους, τις ανάγκες τους, το επίπεδο του πολυγραμματισμού τους, προκειμένου να τα σημασιοδοτήσουν εκ νέου. Η σημασιοδότηση αυτή «σχεδιάζεται» από τους συμμετέχοντες στη διαδικασία, λαμβάνοντας υπόψη τους πολλαπλούς κοινωνικούς, εκπαιδευτικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. Συνεπώς, ο σχεδιασμός αυτός αναφέρεται στη δομή, τη μορφή και τη λειτουργία των επιμέρους νοημάτων, όπως επίσης και στον τρόπο που παρεμβαίνει το κάθε άτομο στη διαδικασία παραγωγής αυτών των νοημάτων (Cope & Kalantzis, 2000).

Το «Σχέδιο» αυτό, διαχωρίζεται σε τρία επιμέρους είδη «σχεδιασμών» του τρόπου παραγωγής σημασιών και νοημάτων. Το πρώτο, είναι το *σχεδιασμένο*, το δεύτερο είναι ο *σχεδιασμός* και το τρίτο είναι το *ανασχεδιασμένο*. Συγκεκριμένα, το *σχεδιασμένο* περιλαμβάνει όλους τους σημειωτικούς και μη πόρους, που διατίθενται κατά τη διαδικασία σημασιοδότησης. Ο *σχεδιασμός* αφορά στη διαδικασία, κατά την οποία διαμορφώνεται από τον δημιουργό το νόημα ή οι επιμέρους σημασίες, σε ένα πλαίσιο υφιστάμενων κοινωνικών και πολιτισμικών συνθηκών. Το *ανασχεδιασμένο*, αφορά στην τελική μορφή που αποκτά το δοσμένο προϊόν, το οποίο είναι στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα, όπως διαμορφώνεται από τον χρήστη/ πομπό ή δέκτη/ αναγνώστη, ο οποίος ουσιαστικά επιλέγει να μετατρέψει ένα πολιτισμικό βίωμα που προέρχεται από τη δική του εμπειρία, σε ένα επικοινωνιακό προϊόν. Αυτό συμβαίνει σε τέτοιο βαθμό που ο πολιτισμός και η ατομική δράση να είναι δύο αξεχώριστα στοιχεία και ο πολιτισμός να είναι συνεχής έκφραση της ατομικής δράσης (Cope & Kalantzis, 2000: στο Χατζησαββίδης, 2011). Ο ανασχεδιασμός αποτελεί το τελικό προϊόν της διαδικασίας του σχεδιασμού και νέο παράγωγο του σχεδιασμένου, καθώς οι χρήστες, δεν προβαίνουν σε κριτικές αξιολογήσεις, σε ερμηνείες ή εκτιμήσεις, αλλά διαχειρίζονται και επεξεργάζονται το δοσμένο υλικό, βάσει των προσωπικών εμπειριών τους, των μορφωτικών τους δυνατοτήτων και του επιπέδου του γραμματισμού τους και δημιουργούν κάτι καινούριο (Cope & Kalantzis, 2009c).

## 3.4 Πολυτροπικότητα κι επικοινωνία

Η γλώσσα, όπως προαναφέρθηκε, σύμφωνα με τους Kress και συνεργάτες (2001) αποτελεί έναν μόνο τρόπο από τους πολλούς που υπάρχουν για την έκφραση των σκέψεων, των συναισθημάτων, των εμπειριών, της συμπεριφοράς κ.ά. και για την επικοινωνία. Η απουσία της γλώσσας δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει επικοινωνία. Τις περισσότερες φορές, διαφορετικοί σημειωτικοί τρόποι συντίθενται μεταξύ τους για την εξασφάλιση του προσδοκώμενου τελικού αποτελέσματος.

Ένα σύστημα αναπαράστασης ή τρόπος επικοινωνίας είναι ένα σημειωτικό σύστημα με κανόνες και κανονικότητες σύμφωνα με τους Kress και Van Leeuwen (2001). Αυτά τα σημειωτικά ή αναπαραστατικά συστήματα αναφέρονται και ως εναλλακτικοί τρόποι επικοινωνίας, όταν και εφόσον ενεργοποιούνται σε επικοινωνιακές καταστάσεις προκειμένου να εξυπηρετήσουν επικοινωνιακούς σκοπούς.

Ο τρόπος (Mode), σύμφωνα με την Jewitt (2009:21 στο Πουρκός, 2011) αφορά στους «*σημειωτικούς πόρους που διαμορφώνονται και νοηματοδοτούνται κατά τη διάρκεια των καθημερινών κοινωνικών αλληλεπιδράσεων των ανθρώπων*». Τόσο ο τρόπος (mode) όσο και το είδος της αλληλεπίδρασης μεταξύ των πόρων μεταβάλλονται και εξελίσσονται συνεχώς, λόγω των αλλαγών των κοινωνικών, πολιτισμικών και ιστορικών παραγόντων. Μετασχηματίζονται συνεχώς από τους χρήστες τους ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες και απαιτήσεις για επικοινωνία των σύγχρονων κοινοτήτων και κοινωνιών. Σημειωτικοί πόροι σύμφωνα με τον Van Leeuwen είναι «*οι δράσεις, τα υλικά και τα τεχνουργήματα που χρησιμοποιούμε για επικοινωνιακούς λόγους, είτε παράγονται φυσιολογικά η τεχνολογικά*» (Van Leeuwen, 2005:285 στο Πουρκός, 2011).

Η γλώσσα, άλλοτε παίζει κυρίαρχο ρόλο στην επικοινωνία και άλλοτε όχι. Για τον λόγο αυτό, είναι δυνατό να υφίστανται διακυμάνσεις στον βαθμό της σημαντικότητάς της, στη θέση που καταλαμβάνει στη διαδικασία της αλληλεπίδρασης, που λαμβάνει χώρα μεταξύ των ατόμων (Πουρκός, 2011).

### 3.5 Η επικοινωνία σε πολυτροπικά περιβάλλοντα

Η λεκτική επικοινωνία είναι ένας από τους κυριότερους τρόπους επικοινωνίας, ωστόσο, όπως έχει ήδη καταδειχθεί στο παρόν πόνημα, στη σύγχρονη εποχή δεν είναι ο μοναδικός. Συντίθεται, από ένα σύνολο συστημάτων ηχητικών ή οπτικών ερεθισμάτων, τα οποία λειτουργούν μέσα σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο ως σύμβολα, που φέρουν τα δικά τους νοήματα, και επιδρούν με ποικίλους τρόπους στη συμπεριφορά, στον χαρακτήρα και στην προσωπικότητα των χρηστών. (Γκότοβος, 1995: στο Μπίκος 2011).

Εκτός από τη λεκτική επικοινωνία, υπάρχουν και άλλες κατηγορίες επικοινωνίας οι οποίες είναι μη-λεκτικές. Αυτοί οι τρόποι επικοινωνίας συμβάλλουν σημαντικά στην ανταλλαγή σκέψεων, συναισθημάτων, εμπειριών, σε συνδυασμό με τον προφορικό και γραπτό λόγο, καθώς χρησιμεύουν ως τρόποι ή μέσα συντονισμού της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Γκότοβος 1995: στο Μπίκος 2011). Και σε αυτή τη μορφή επικοινωνίας, που είναι μη-λεκτική, αξιοποιούνται σύμβολα, που έχουν τη δική τους σημασία, η οποία εξαρτάται και εκπηγάζει από το δεδομένο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο που επικρατεί.

«*Η θεμελιώδης ικανότητα του ανθρώπου να συμπεριφέρεται και να επικοινωνεί με μη λεκτικό τρόπο καταδεικνύει ότι είναι προικισμένος με εκφραστικές και αντιληπτικές δεξιότητες οι οποίες τον καθιστούν ικανό να ξεπερνά τους περιορισμούς και τις αδυναμίες της γλώσσας και να συμμετέχει σε μια αρχέγονη, οικουμενική επικοινωνιακή διαδικασία με τον απαράμιλλο οικουμενικό κώδικα της μη-λεκτικής επικοινωνίας*» (Γκότοβος,1995: στο Μπίκος 2011). Για την κοινωνική επικοινωνία και αλληλεπίδραση, είναι σημαντική η ύπαρξη και των δύο κωδίκων, οι οποίοι είναι σε τέτοιο βαθμό συνυφασμένοι ώστε πολλές φορές αλλάζει η σημασία των λεκτικών συμβόλων, μέσα από τη λειτουργία των μη-λεκτικών (Archer et al. 1993: Βρεττός 1994). Ο λεκτικός κώδικας επικοινωνίας χρησιμοποιείται για να δηλώσει το περιεχόμενο αυτής της επικοινωνίας, ο μη-λεκτικός συντελεί στην κατά περίπτωση ερμηνεία αυτού του περιεχομένου (Archer et al. 1993: Βρεττός 1994).

Σύμφωνα με τους Kress & van Leeuwen, τα παραγλωσσικά στοιχεία αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της γλωσσικής πολυτροπικότητας, η οποία αφορά «*στη χρήση των διαφορετικών σημειωτικών τρόπων στο σχεδιασμό ενός σημειωτικού προϊόντος ή συμβάντος*» (2001:20 στο Πουρκός, 2011).

Η έννοια αυτή της πολυτροπικότητας βρίσκεται σε άμεση συνάφεια α) με την αρχή της πολλαπλότητας των αναπαραστατικών επικοινωνιακών τρόπων, β) με την αρχή του κοινωνικού, ιστορικού και πολιτισμικού πλαισιοθετημένου σημείου ή νοήματος, γ) με την αρχή του ενορχηστρωμένου νοήματος, δ) με την αρχή της επενέργειας, ε) με την αρχή της δυναμικής επίδρασης των σημειωτικών τρόπων στις ανθρώπινες δράσεις κι αλληλεπιδράσεις (Πουρκός, 2011). Συγκεκριμένα:

α) Σύμφωνα με την αρχή της πολλαπλότητας των αναπαραστατικών και επικοινωνιακών τρόπων, η γλώσσα δεν κατέχει το βασικό ρόλο στις αλληλεπιδράσεις του ατόμου με το φυσικό και κοινωνικό του περιβάλλον, αλλά όλοι οι σημειωτικοί τρόποι (modes) συμβάλλουν στην τελική διαμόρφωση του νοήματος. Αυτό επίσης σημαίνει ότι οι διαφορετικές γνώσεις και ιδέες μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω πολλαπλών σημειωτικών τρόπων ή μορφών αναπαράστασης.

β) Σύμφωνα με την αρχή του κοινωνικού, ιστορικού και πολιτισμικού πλαισιοθετημένου σημείου ή νοήματος, οι σημειωτικοί πόροι αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται, διαμορφώνονται ανάλογα με τον σκοπό που επιτελούν και τις ανάγκες επικοινωνίας των ανθρώπων που ικανοποιούν, με αποτέλεσμα να τροποποιούνται και να αναμορφώνονται κάθε φορά, όταν αυτό απαιτείται.

γ) Σύμφωνα με την αρχή του ενορχηστρωμένου νοήματος, οι σημειωτικοί τρόποι ενορχηστρώνονται από το ίδιο το άτομο που τους επιλέγει για να εκφραστεί και ο κάθε ένας από αυτούς αλληλεπιδρά και συσχετίζεται με τους υπόλοιπους τρόπους και όλοι είναι άρρηκτα δεμένοι μεταξύ τους, ώστε να προκύψει το τελικό επικοινωνιακό συμβάν.

δ) Σύμφωνα με την αρχή της επενέργειας (agency), το άτομο που δημιουργεί ή προσλαμβάνει ένα συγκεκριμένο επικοινωνιακό προϊόν, δεν λειτουργεί παθητικά, αλλά έχει ενεργητικό ρόλο, επιλέγοντας εκείνο τους κατάλληλους σημειωτικούς πόρους και τρόπους που θα χρησιμοποιήσει και θα συνδυάσει ανάλογα με την ανάγκη επικοινωνίας και το πλαίσιο στο οποίο αυτή θα πραγματοποιηθεί. Ακόμη όμως κι αν είναι ο τελικός αποδέκτης του νοήματος, θα το ερμηνεύσει με βάση τα δικά του ενδιαφέροντα και τους δικούς του σημειωτικούς πόρους που διαθέτει.

ε) Σύμφωνα με την αρχή της δυναμικής επίδρασης των σημειωτικών τρόπων στις ανθρώπινες δράσεις κι αλληλεπιδράσεις, η μετατόπιση του ενδιαφέροντος από τη γλώσσα σε άλλους σημειωτικούς τρόπους έκφρασης κι επικοινωνίας έχει σημαντικές επιπτώσεις σε τομείς όπως η εκπαίδευση και η επικοινωνία, και δημιουργεί ένα νέο τοπίο στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανθρώπων. Με την ύπαρξη και τη χρήση πολλών μορφών αναπαραστάσεων επηρεάζεται σημαντικά η επικοινωνιακή αλλά και η γνωστική και η μαθησιακή διαδικασία (Πουρκός, 2011).

### 3.6 Επικοινωνία κι αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών

Στη σχολική αίθουσα, η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό γλωσσική (λεκτική), αλλά σε πολλές περιπτώσεις είναι και μη-γλωσσική. Ο συνδυασμός λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας, θέτει τις προϋποθέσεις για μια πολυδιάστατη και πολυτροπική διαδικασία, η οποία συμβάλλει στην κατασκευή νοημάτων κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας τόσο από τον εκπαιδευτικό όσο και από τους μαθητές. Η ανάλυση της πολυτροπικής επικοινωνίας επεκτείνεται όχι μόνο στη γλώσσα, τις χειρονομίες (κινήσεις με τα χέρια, με το πρόσωπο), τις κινήσεις, αλλά και στην αλληλεπίδραση του ίδιου του ατόμου με τα αντικείμενα, είτε είναι χειραπτικά είτε είναι αυτά που σχετίζονται με την τεχνολογία. Εξάλλου, τα άτομα πολλές φορές συμμετέχουν ταυτόχρονα σε πολλαπλές και αντικρουόμενες δράσεις (Sicoli, 2015: στο Ginsberg, 2015).

Όπως αναφέρθηκε η μαθηματική επικοινωνία είναι κατά κύριο λόγο πολυτροπική επικοινωνία και σύμφωνα με την O' Halloran (2000) περιλαμβάνει γλώσσα, επίσημους όρους και διαγράμματα, που χρησιμοποιούνται μέσα στην τάξη. Οι διασημειωτικές σχέσεις μεταξύ της γλώσσας, των εικόνων και του μαθηματικού συμβολισμού στα μαθηματικά κείμενα και στο μάθημα των μαθηματικών, μέσα στη σχολική αίθουσα είναι δυναμικές και αναδεικνύουν την ισχύ των πολυτροπικών ερευνών, οι οποίες προσφέρουν μια διαφορετική προσέγγιση, σχετικά με τα ζητήματα της επικοινωνίας, της γνώσης και των διαδικασιών διδασκαλίας και μάθησης (O' Halloran, 2000 : στο Πουρκός, 2011)

Η φυσική γλώσσα είναι πολύ φτωχή στο να δίνει ακριβείς και χρήσιμες περιγραφές φυσικών φαινομένων, όπου ο βαθμός και η ποσοτική διαφοροποίηση θεωρούνται σημαντικά στοιχεία (Lemke, 2003). Έτσι τα μαθηματικά έρχονται να αναπαραστήσουν φαινόμενα με τρόπο που δεν μπορεί να πετύχει η ίδια η γλώσσα δια μέσου του «φυσικού» τρόπου.

Η ίδια η φύση της νόησης και της μάθησης των μαθηματικών είναι πολυτροπική, καθώς νοητικές, σωματικές και αντιληπτικές πηγές, αξιοποιούνται στο έπακρο όταν γίνεται η επεξεργασία των μαθηματικών ιδεών, νοημάτων, όρων, σχέσεων και συμβόλων.

Οι χειρονομίες, οι κινήσεις, τα παραγλωσσικά στοιχεία, οι αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, σχέδια κ.ά.) χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών, από το σύνολο των συμμετεχόντων στη διαδικασία. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη μη λεκτική γλώσσα για να μπορέσει να περιγράψει καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και να γίνει κατανοητός στους μαθητές. Το ίδιο και οι μαθητές, αξιοποιούν τη μη λεκτική γλώσσα, για να εξηγήσουν αυτό που θέλουν να πουν και αυτό που κατανοούν, όπως και για να επικοινωνήσουν μαθηματικά, τόσο με τον εκπαιδευτικό όσο και με τους συμμαθητές τους στο κοινωνικό πλαίσιο της σχολικής αίθουσας. Τα μη λεκτικά γλωσσικά στοιχεία, εκτός από κοινωνικό υπόβαθρο, έχουν και πολιτισμική διάσταση, καθώς, όπως υποστηρίζει ο Radford (2009:111), «*η σκέψη δεν εμφανίζεται απλά μόνο στο κεφάλι, αλλά επίσης, μέσα και διαμέσου μιας ιδιαίτερης σημειωτικής συνεργασίας λόγου, σώματος, χειρονομιών, συμβόλων και εργαλείων*».

Ο εκπαιδευόμενος, μαθαίνει θέτοντας σε έμπρακτη εφαρμογή τις ιδέες, τα νοήματα, τις έννοιες, τα σημεία, τα σύμβολα και τα γλωσσικά εργαλεία της εποχής του, του τόπου του και του πολιτισμού του, τα οποία έχει αποκομίσει μέσω της διαδικασίας της «εσωτερίκευσης» (interiorisation). Ο Radford υιοθετεί τον όρο από την κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση της μάθησης του Vygotsky (1978), σύμφωνα με την οποία η γνώση είναι κοινωνική κατασκευή που πραγματώνεται στο πολιτισμικό περιβάλλον. Η εσωτερίκευση είναι μια δυναμική και ενεργητική διαδικασία, κατά την οποία ο εκπαιδευόμενος μέσα από τη χρήση σημειωτικών και συμβολικών συστημάτων αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει την πραγματικότητα, αναθεωρεί, μετασχηματίζει, σχηματοποιεί όρους και έννοιες, κατασκευάζει νέες απόψεις, ιδέες και αντιλήψεις, νοηματοδοτεί υπό διαφορετικό οπτικό πρίσμα και μέσω εναλλακτικών διανοητικών δράσεων (Radford, 2000).

Οι ειδικοί νευρώνες που ενεργοποιούνται κατά τη διάρκεια της πολύπλοκης και πολύπλευρης διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας είναι πολυτροπικοί και πολυαισθητηριακοί ώστε το σύνολο των αισθήσεων να συνεργούν και να λειτουργούν ενισχυτικά στη δυνατότητα και την ικανότητα αντίληψης του περιβάλλοντα κόσμου. Παράλληλα οι εκδηλώσεις της μάθησης σχετίζονται με την πραγματική δημιουργία με ιδεατά/ νοερά αντικείμενα, όπως εργαλεία, λέξεις, ιδέες μεθόδους, ιστορίες, στοιχεία κ.ά., τα οποία αντανακλούν την εμπειρία που μοιράζεται. Γύρω από τη βιωματική αυτή εμπειρία, το κάθε άτομο, οργανώνει και βασίζει την ενεργητική και άμεση συμμετοχή του στο κοινωνικό πλαίσιο (Wenger, 2010:180).

## 3.7 Σημειωτική, πολυτροπικότητα και εκπαίδευση

Οι Bezemer και Kress (2008:171) διατύπωσαν ότι ο σημειωτικός τρόπος επικοινωνίας αποτελεί μια «*κοινωνική και πολιτισμική πηγή για τη δημιουργία ενός μηνύματος*» και ο Siegel (2006:68) υποστήριξε ότι *οι σημειωτικές θεωρίες δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την καλύτερη κατανόηση της πολυτροπικότητας*. Αυτή επιτυγχάνεται, καθώς επιτρέπουν στο άτομο να αντιλαμβάνεται και να κατανοεί τα κείμενα, όχι αποκλειστικά από τη λεκτική γλωσσική τους διάσταση, αλλά σε μεγάλο βαθμό από τους μη λεκτικούς γλωσσικούς τρόπους σημείωσης. Καταλυτικός είναι ο ρόλος των σημείων και της σημειωτικής γλώσσας, στη διδακτική διαδικασία και στην ανάπτυξη των επικοινωνιακών, και όχι μόνο, δεξιοτήτων των παιδιών. Σύμφωνα με τον Siegel (2006), τα παιδιά, και ιδίως τα μικρότερα  παιδιά, στους επικοινωνιακούς κώδικες που υιοθετούν ή αναπτύσσουν, πάντα χρησιμοποιούν ποικίλους, μη λεκτικούς, τρόπους έκφρασης, όπως χειρονομίες, εκφράσεις προσώπου, κινήσεις σώματος, δραματοποίηση, ζωγραφιές και κάθε τι άλλο, που μπορεί να επεκτείνει και να εμπλουτίσει τη «φυσική» γλώσσα.

Βασισμένος σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, ο Kress (2003:16) διατύπωσε ότι όπως «*ο κόσμος της επικοινωνίας δεν είναι στατικός κι ακίνητος, έτσι δεν θα πρέπει να είναι στατικές και ακίνητες και  οι παιδαγωγικές πρακτικές*». Με άλλα λόγια, εφόσον η καθημερινή επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων στη σύγχρονη κοινωνία είναι πολυδιάστατη και πολυσύνθετη, με την αξιοποίηση ποικίλων τρόπων λεκτικών και μη λεκτικών, το ίδιο παράδειγμα θα πρέπει να ακολουθηθεί και στον χώρο της σύγχρονης διδακτικής.  Σε αυτό το σημείο, επισημαίνεται η αναγκαιότητα να τεθούν στο περιθώριο τα ήδη υπερτονισμένα πλεονεκτήματα της «φυσικής» γλώσσας και να αναδειχτούν τα υποτιμημένα πλεονεκτήματα και οι δυνατότητες που παρέχουν στα άτομα τα άλλα σημειωτικά συστήματα, έτσι ώστε να γίνει πιο αποτελεσματική η διδασκαλία και να διευκολυνθεί η μάθηση.

Σύμφωνα με τον Radford (2006), τα άτομα επικοινωνούν μηνύματα μεταξύ τους και ανταλλάσσουν αντιλήψεις, απόψεις και ιδεολογίες για τα δεδομένα της πραγματικότητας, κωδικοποιώντας τις έννοιες, τους όρους και τα πράγματα, και χρησιμοποιώντας μια ιδιαίτερη συμβολική γλώσσα, που αποδίδει τα απτά αντικείμενα μέσω λεκτικών σχημάτων. Με τη σημειωτική θεωρητική προσέγγιση, διερευνώνται οι τρόποι που αναπτύσσουν οι άνθρωποι για να πραγματώσουν την επικοινωνιακή αυτή διαδικασία. Αυτή βασίζεται στην κατασκευή ενός αμοιβαία κατανοητού νοήματος, το οποίο επιτυγχάνεται μέσω της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Τα σύμβολα/ σημεία/ γνωστικά και ψυχολογικά εργαλεία, αποτελούν την πρωταρχική ύλη με την οποία τα άτομα σκέφτονται, αναλύουν και επεξεργάζονται τα δεδομένα της πραγματικότητας. Αποτελούν μέρος ενός συμβολικού συστήματος που έχει πολιτισμικές προεκτάσεις και καθορίζεται από τις κοινωνικές συνθήκες.

Ο Radford (2006) ερμηνεύει τη σημειωτική θεωρία του Peirce ως διαδικασία νοηματοδότησης των σημείων και των εργαλείων για την καλύτερη, αποτελεσματικότερη και ακριβέστερη κατανόηση και εξήγηση της εξωτερικής πραγματικότητας, στην οποία ζουν, συνδιαλέγονται και επικοινωνούν τα άτομα. Θεωρεί ότι ο επιστημονικός κλάδος της σημειωτικής μπορεί να συμβάλλει καθοριστικά στην εκπαίδευση και στην έρευνα, καθώς αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση του τρόπου με τον οποίο το άτομο μαθαίνει καθώς αναπαριστά τα απτά και τα πραγματικά, επικοινωνεί και ανταλλάσσει τις γνώσεις και τα μηνύματά του με τους ανθρώπους γύρω του.

Ο Radford (2006) προσέλαβε τη σημειωτική ως μέσο στην αναζήτηση και ως διέξοδο στην ανεύρεση νέων μεθόδων διδασκαλίας και εκμάθησης των Μαθηματικών. Με τον ίδιο τρόπο αντιλήφθηκαν και πολλοί ακόμη ερευνητές και θεωρητικοί τη συμβολή της σημειωτικής στην Εκπαίδευση των Μαθηματικών (Presmeg, 2006; Duval, 2006 κ.ά). Οι Roth και Lee (2004) υποστήριξαν ότι οι μαθηματικές έννοιες προσλαμβάνονται από τους ίδιους τους μαθητές, και κατασκευάζονται έτσι ώστε να αποτελούν απόρροια της συσχέτισης των αναπαραστάσεων και των μαθηματικών αντικειμένων, στα οποία αναφέρονται οι μαθηματικές έννοιες.

Από τις αρχές της δεκαετίας του 2000 παρατηρείται μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον για την πολυτροπικότητα στα σχολικά περιβάλλοντα και τη χρήση της στο πλαίσιο συγκεκριμένα της προσχολικής και πρώτης σχολικής εκπαίδευσης (Bearne & Kress 2001:στο Πουρκός 2011). Η πλειοψηφία των ερευνητικών μελετών αφορά στις στρατηγικές διδασκαλίας και μάθησης (Archer, 2008) και δεν είναι λίγες εκείνες που διερευνούν τη σχέση της πολυτροπικότητας με τη μαθηματική εκπαίδευση (O' Halloran, 2000), τη μουσική εκπαίδευση, την εκμάθηση της αγγλικής γλώσσας κ.ά. Η αύξηση του ερευνητικού ενδιαφέροντος, συνέπεσε με τη συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας ότι η διδακτική διαδικασία επιβάλλεται να καλύπτει τις σύγχρονες ανάγκες με την αξιοποίηση και την ενσωμάτωση όλων των μέσων και των μεθόδων που συμβάλλουν αποτελεσματικά σε αυτό.

Σημαίνουσα θέση στο σύγχρονο μαθησιακό και επικοινωνιακό πολυτροπικό περιβάλλον καταλαμβάνει οι αναπαραστάσεις ως μέρος της πολυτροπικής φύσης των μαθηματικών. Ήδη από τα μέσα του 20$^{ου}$ αιώνα, έγινε αντιληπτή η ανάγκη ένταξης των αναπαραστάσεων στη σχολική καθημερινότητα και στα διδακτικά εγχειρίδια, προκειμένου να διευκολυνθούν οι μαθητές, και ιδίως εκείνοι της πρώτης σχολικής ηλικίας, στη διαδικασία της μάθησης. Σύμφωνα με τον Bruner (1961: στο Ηλία, Χρυσάνθου & Φιλίππου, 2003) η μάθηση διέρχεται από τρία διαφορετικά στάδια, α) το χειριστικό (enactive), β) το εικονικό (iconic) και γ) το συμβολικό (symbolic), όπου οι απεικονίσεις ανάγονται σε πρωτεύοντα στοιχεία. Κατά κοινή παραδοχή, η εικονική αναπαράσταση είναι αυτή που μεσολαβεί ανάμεσα στο πρακτικό και το θεωρητικό στάδιο της μάθηση, δηλαδή διευκολύνει το πέρασμα του ατόμου/ μαθητή από το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης και γνώσης στο αφηρημένο.

Οι απεικονίσεις κάθε είδους, ταυτόχρονα με τις λεκτικές αναφορές της γλώσσας, καθιστούν αποτελεσματικότερη, ουσιαστικότερη και ευκολότερη τη διδακτική διαδικασία και μάθηση. Για τον λόγο αυτό, γίνονται εντατικές προσπάθειες τις τελευταίες δεκαετίες, για τη δημιουργία και τη χρήση πολυτροπικών κειμένων, όχι μόνο στο σχολικό περιβάλλον, αλλά και σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης καθημερινής δραστηριότητας.

## 3.8 Οι συνεπαγωγές της θεωρίας της πολυτροπικότητας για τη διδασκαλία

Όπως προαναφέρθηκε, η έννοια του «Σχεδίου» -ως διαδικασία και τελικό προϊόν- περιλαμβάνει τρία στοιχεία, το σχεδιασμένο, τον σχεδιασμό και το ανασχεδιασμένο, τα οποία αποτυπώνουν, όχι μόνο την οργάνωση του περιεχομένου του νοήματος, αλλά επίσης και τη διαδικασία διαμόρφωσης της δομής αυτής. Ως εκ τούτου η θεωρία της πολυτροπικότητας μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο σημασιοδότησης, αλλά παράλληλα να γίνει και η ίδια περιεχόμενο διδασκαλίας. Εξάλλου, η διδασκαλία είναι κατεξοχήν επικοινωνιακό γεγονός και κατά συνέπεια, είναι αναγκαία η χρήση ποικίλων τρόπων συνδιαλλαγής, ανταλλαγής απόψεων και κοινωνίας ιδεών, απόψεων, πεποιθήσεων, εμπειριών και συναισθημάτων, όπως είναι για παράδειγμα ο γραπτός και προφορικός λόγος, οι εικόνες, οι αναπαραστάσεις, ο ήχος, τα χειραπτικά και τα ηλεκτρονικά υλικά κ.ά (Κατσαρού, 2011).

Οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά σε μια πλούσια σε ερεθίσματα και τρόπους έκφρασης επικοινωνιακή διαδικασία, που εξάπτει το ενδιαφέρον τους και έχει ουσιαστικό νόημα για τους ίδιους. Με την αξιοποίηση των σημειωτικών πόρων, επιτυγχάνεται η πολυτροπικότητα, η οποία καθιστά πολυεπίπεδη τη διδακτική διαδικασία και ελκυστικά τα σχολικά εγχειρίδια. Παράλληλα, εκσυγχρονίζει τη διδασκαλία, διευκολύνει την ουσιαστική και λειτουργική μάθηση, συμβάλλει στην ομαλή ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στο σχολικό περιβάλλον και προάγει τη σε βάθος κατανόηση των μαθητών για τα θεωρούμενα ως δύσκολα γνωσιακά αντικείμενα. Μέσω της πολυτροπικότητας, οι βιωματικές εμπειρίες των μαθητών και των εκπαιδευτικών τίθενται στην υπηρεσία της εκπαίδευσης και συντελούν στην επίτευξη των προσδοκώμενων διδακτικών στόχων (Κατσαρού, 2011).

Ερευνητικά θεωρείται πολύ σημαντικό να αξιοποιούνται στο σχολικό περιβάλλον και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ποικίλα είδη κειμένων με πολυτροπική δομή, προκειμένου να αναπτυχθεί η φαντασία των μαθητών, να καλλιεργηθεί η δημιουργικότητα και η κριτική τους στάση, να δομηθεί ένα ολοκληρωμένο σύστημα συλλογιστικής και λειτουργικής σκέψη (Κατσαρού, 2011).

Ωστόσο, δεν μπορεί να είναι αρκετή μόνο η επαφή των μαθητών με τα πολυτροπικά κείμενα κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας, χωρίς την άμεση και ενεργητική εμπλοκή τους. Οι μαθητές, πρέπει να παρωθούνται ώστε να επεξεργάζονται τους σημειωτικούς πόρους των πολυτροπικών κειμένων και να μην περιορίζονται στη στείρα οικειοποίησή τους. Απώτερος στόχος της διαδικασίας αυτής είναι να καταφέρει ο κάθε μαθητής να δημιουργεί τα δικά του πολυτροπικά παράγωγα, τα οποία θα παρουσιάσει στο περιβάλλον της τάξης, θα θέσει υπό συζήτηση και περαιτέρω επεξεργασία και νοηματοδότηση από τους άλλους συμμετέχοντες.

## 3.9 Μαθηματική και σημειωτική δραστηριότητα

Πολλοί ερευνητές, κάνουν λόγο για δραστηριότητες, που προσανατολίζονται στη διατύπωση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, στη σκέψη και στον ευέλικτο συλλογισμό, στην επιχειρηματολογία και στην τεκμηρίωση, στην αναστοχαστική επικοινωνία και στη γενίκευση. Οι μαθητές αναπτύσσουν συνήθειες και ρουτίνες σκέψης, μια μαθηματική προδιάθεση και μαθηματική οπτική, που χαρακτηρίζεται από την τάση για αναζήτηση κανονικοτήτων, για την κατανόηση δομών και δημιουργία συνδέσεων, κατάλληλη χρήση πηγών και ανάπτυξη δυναμικών συλλογισμών και χαρακτηρίζει μια υψηλού επιπέδου σκέψη (Steinbring, 2005; Ben-Zvi and Arcavi, 2001; Serpinska Lerman, 1996; Schoenfeld, 1992; Resnick, 1987). Οι Sarama και Clements (2009) εξειδικεύοντας επί του θέματος, υποστηρίζουν ότι ανάμεσα στις πιο χαρακτηριστικές δράσεις που εξοικειώνουν τα παιδιά με τη μαθηματική επεξεργασία και στηρίζουν την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, οι χαρακτηριστικότερες είναι: η αναζήτηση κανονικοτήτων και κοινών δομών, η διαδικασία ανάλυσης και σύνθεσης, η αντίληψη των μονάδων, και η ανάπτυξη συνδέσεων.

Στο ίδιο πνεύμα οι Ball και οι συνεργάτες (Rand, 2002) περιγράφουν τις μαθηματικές πρακτικές ως μια τεχνογνωσία (know-how) που, πέρα από τη γνώση του συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου, αναφέρονται σε συγκεκριμένα πράγματα που κάνουν οι επιτυχημένοι γνώστες και χρήστες των μαθηματικών: δικαιολογούν, δηλώνουν, χρησιμοποιούν συμβολικές παραστάσεις με άνεση, κάνουν γενικεύσεις, κ.ά.

Ο Freudenthal (1983) κατανοεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα τρόπο δημιουργίας μοντέλων για την αντιμετώπιση και κατανόηση των πραγματικών καταστάσεων και ο Brousseau (1997) ως την αναζήτηση κατάλληλων απαντήσεων, που προκύπτουν από τις καταστάσεις-προβλήματα. Και οι δύο, επιδιώκουν να δημιουργήσουν αντίστοιχα πλαίσια και έργα, η διαπραγμάτευση των οποίων θα οδηγήσει στη προσέγγιση εννοιών. Για το Chevallard (2007) η δημιουργία μιας μαθηματικής «πραξεολογίας» (δηλαδή μαθηματικής πράξης και σκέψης) αποτελεί την αντιμετώπιση καταστάσεων που προέρχονται από ερωτήματα που «κάνουν νόημα» στο μαθηματικό σύμπαν των μαθητών.

Οι Noss, Healy και Hoyles (1997) υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά νοήματα προέρχονται από τις μαθηματικές συνδέσεις και αυτό είναι σημαντικό στη μαθηματική δραστηριότητα (κάτι που οι μαθητές δεν μαθαίνουν αλλά κάνουν). Ο Ernest (2006) θεωρεί τα μαθηματικά ως εκείνη την περιοχή της ανθρώπινης προσπάθειας και γνώσης, η οποία χρησιμοποιεί ένα ευρύ και μοναδικό φάσμα σημάτων, συμβόλων και δραστηριότητας. Η δραστηριότητα στα μαθηματικά στηρίζεται κι ενισχύεται από τα μαθηματικά σήματα και σύμβολα, άρα ο ίδιος αντιλαμβάνεται τη δράση και τη μάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασία συμβολοποίησης, οπτικοποίησης και αναπαράστασης. Αντίστοιχα ο Steinbring (2005) τα αντιμετωπίζει ως μια δυναμική σύνδεση καταστάσεων – σημάτων και εννοιών στο επιστημολογικό του τρίγωνο.

Για τον Radford (2006) και την προσέγγιση της εξαντικειμενίκευσης, η μάθηση των μαθηματικών ξεπερνάει την επίλυση προβλημάτων ή το «κάνω μαθηματικά», και αφορά περισσότερο στο «είμαι στα μαθηματικά» με τη συμβολοποίηση των μορφών στοχασμού για τον κόσμο σύμφωνα με συγκεκριμένες ιστορικά πολιτισμικές μορφές σκέψης, που διαφοροποιούνται από άλλες μορφές σκέψης. Για την προσέγγιση αυτή, η δράση ή η επίλυση ενός προβλήματος, χωρίς την εξήγηση ή τη μεταφορά σε γενικότερο πλαίσιο, αποτελεί μόνο μέρος της μαθηματικής ανάπτυξης.

Με όλα τα παραπάνω, γίνεται κατανοητό ότι πολλές μαθησιακές και διδακτικές προσεγγίσεις στηρίζονται πάνω στην ιδέα της «δραστηριότητας», αν και διαφοροποιούνται ως προς τον προσανατολισμό της. Είναι επίσης φανερό ότι ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα άτομα ή τα συστήματα τη φύση της μαθηματικής γνώσης επιδρά πάνω στον τρόπο που επίσης αντιλαμβάνονται τη μαθηματική δραστηριότητα και την ίδια τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η εργαλειακή αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών οδηγεί τη μαθηματική δραστηριότητα να γίνεται αντιληπτή ως απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών (που πιθανά ισχύει ακόμα σε κάποια εκπαιδευτικά συστήματα). Αντίστοιχα η κατανόηση τους ως κατασκευή οδηγεί στην αντίληψη της διαχείρισης μιας συγκεκριμένης κατάστασης για τη δημιουργία νοήματος, ενώ τέλος η άποψη ότι είναι ανακαλυπτική οδηγεί στην αναζήτηση/ανάδειξη κάποιου εσωτερικού κανόνα (χωρίς κατασκευή ή δημιουργία) (Stech, 2008). Κατά συνέπεια οι περισσότερες προσεγγίσεις αναγνωρίζουν τη σημασία της μαθηματικής δραστηριότητας, τα χαρακτηριστικά που της δίνουν όμως επηρεάζονται από πολλούς και διαφορετικούς παράγοντες.

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη συμβόλων και η εξοικείωση με αυτήν προϋποθέτει τη γνωριμία και την κατανόησή τους, αλλά και του τρόπου με τον οποίο δημιουργούνται και λειτουργούν. Λόγω αυτού του χαρακτήρα, η σημειωτική δραστηριότητα είναι σημαντική στη μαθηματική εκπαίδευση. Η προσέγγιση των μαθηματικών ιδεών στις μικρότερες ηλικίες είναι σημαντικό να γίνεται με πραξιακό και εικονιστικό τρόπο. Η οικοδόμηση της μαθηματικής έννοιας σύμφωνα με τον Vergnaud (1997: στο Τζεκάκη, 2010) επιτυγχάνεται καλύτερα όταν οι ιδέες, οι έννοιες και οι όροι παριστάνονται με πολλούς σημειωτικούς τρόπους και ποικίλα μέσα αναπαράστασης, συμβάλλοντας έτσι, στην εννοιολογική συγκρότηση και κατανόησή τους.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν το σύνολο των μέσων που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της ολοκληρωμένης παρουσίασης μιας κατάστασης ή μιας ιδέας. Περιλαμβάνουν λεκτικές, γραπτές ή προφορικές, και μη λεκτικές περιγραφές, γραπτά σύμβολα, εικόνες και σχήματα καθώς και χειραπτικό υλικό. Η παράσταση που χρησιμοποιείται για ένα αντικείμενο περιλαμβάνει τρία στοιχεία, α) το αντικείμενο, β) την αναπαράσταση του αντικειμένου και γ) το άτομο που την πραγματοποιεί (Τζεκάκη, 2010). Τα μαθηματικά αναφέρονται σε ιδεατά αντικείμενα και έχουν ανάγκη συμβολισμού, αναπαράστασης και απεικόνισης, προκειμένου να τα καταστήσουν κατανοητά. Η αντίληψη που σχηματίζεται για τις μαθηματικές έννοιες και τα μαθηματικά αντικείμενα, οδηγεί στη δημιουργία εσωτερικών αναπαραστάσεων. Όπως προαναφέρθηκε, κατά τον Bruner (1990: στο Τζεκάκη, 2010) υπάρχουν τρία είδη εσωτερικών αναπαραστάσεων, α) η πραξιακή, β) η εικονιστική και γ) η συμβολική.

Αναφορικά με τα παιδιά της πρώτης σχολικής ηλικίας και την επαφή τους με τα μαθηματικά, και συγκεκριμένα με τον τρόπο που κατανοούν τη μαθηματική έννοια της ποσότητας και των μεταβολών της, ο Hughes (1986: στο Τζεκάκη, 2010) διέκρινε τέσσερις ξεχωριστές κατηγορίες αναπαραστάσεων. Η πρώτη κατηγορία, περιλαμβάνει τις ιδιοσυγκρασιακές αναπαραστάσεις, οι οποίες, χωρίς να αποδίδουν τα αριθμητικά στοιχεία, περιέχουν μόνο εξωτερικές αναφορές και ιδίως ομοιότητες με το σχήμα που αναπαριστούν. Η δεύτερη κατηγορία, αφορά στις εικονογραφικές αναπαραστάσεις, οι οποίες περιέχουν αριθμητικά και μορφικά στοιχεία του σχήματος. Η τρίτη κατηγορία, σχετίζεται με τις εικονικές αναπαραστάσεις, που περιέχουν τα πρώτα αναπαραστατικά σημάδια και η τέταρτη κατηγορία αφορά στις συμβολικές αναπαραστάσεις, στις οποίες γίνεται η χρήση των συμβόλων. Οι έρευνες που σχετίζονται με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, στις περισσότερες περιπτώσεις, καταδεικνύουν ότι αυτό που παριστάνουν τα παιδιά, είναι το νόημα που έχουν εσωτερικεύσει και αντικατοπτρίζει τον τρόπο με τον οποίο το έχουν κατανοήσει.

Σύμφωνα με μια άλλη κατηγοριοποίηση οι αναπαραστάσεις των παιδιών της πρώτης σχολικής ηλικία, κατατάσσονται σε τρία επίπεδα (Goldin, 2002:στο Τζεκάκη, 2010). Βασικό κριτήριο του διαχωρισμού τους είναι το επίπεδο της εξέλιξης της σημειωτικής αναπαραστατικής τους δράσης. Στο πρώτο επίπεδο, η παράσταση και το αντικείμενο παρουσιάζουν όμοια χαρακτηριστικά ως προς την εξωτερική τους εικόνα, στο δεύτερο επίπεδο η παράσταση διαφοροποιείται από την εμφάνιση του αντικειμένου και αποδίδονται οι πρώτες σχέσεις και ιδιότητες του σχήματος. Τέλος, στο τρίτο και πιο εξελιγμένο επίπεδο, η παράσταση πλέον είναι ολοκληρωμένη και συστηματική.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν τα παιδιά, αντικατοπτρίζουν τα δομικά χαρακτηριστικά και συστατικά στοιχεία των εσωτερικών αναπαραστάσεών τους και πληροφορούν για την εννοιολογική κατανόηση που έχει επιτευχθεί. Επίσης, μέσα από σχετικές ερευνητικές μελέτες, εξήχθηκε μια σημαντική διαπίστωση, σύμφωνα με την οποία, ο ρόλος και η στάση του δασκάλου ή του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικής σημασίας. Συγκεκριμένα, η σημειωτική αντίληψη και δραστηριότητα των παιδιών, εξελίσσονται και βελτιώνονται με την ενθάρρυνση του εκπαιδευτικού και την ενασχόληση με κατάλληλες μαθηματικές δράσεις για τον σκοπό αυτό (Τζεκάκη, 2010).

Η γνώση των τυπικών συμβόλων και των αριθμών προϋποθέτει α) τη γνώση της μορφής του συμβόλου, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα μέρη από τα οποία αποτελείται το σύμβολο και να μπορούν να το αναπαριστούν γραπτώς και β) τη γνώση της λειτουργίας τους, που αφορά στο νόημα αυτών των αριθμητικών συμβόλων και τη χρήση τους τόσο στα μαθηματικά, όσο και στην καθημερινή ζωή (Baroody, 2004: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012).

Το βοηθητικό υλικό που αξιοποιείται στη σχολική τάξη και εμπλουτίζει τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών έμπρακτα ή απεικονιστικά, παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να σκεφτούν, να προβληματιστούν, να συζητήσουν και να δομήσουν τη μαθηματική τους συλλογιστική και να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη. Έτσι, σύμφωνα με τον Cobb (1987: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012), σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, η αισθησιοκινητική δραστηριότητα εξακολουθεί να θεωρείται πρωταρχική πηγή της μαθηματικής γνώσης. Όταν η μάθηση των σχολικών γνωστικών αντικειμένων γίνεται με αβίαστο και ευχάριστο τρόπο, βάσει των πρότερων γνώσεων και εμπειριών του μαθητή, δημιουργείται θετική στάση απέναντι σε αυτά. Το ίδιο ισχύει και συγκεκριμένα για το μάθημα των μαθηματικών, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του οι μαθητές είναι δυνατό να εμφανίσουν αυξημένη ικανότητα επίλυσης των προβλημάτων, μέσα από μια διαδικασία ενεργούς συμμετοχής και αλληλεπίδρασης μεταξύ όλων των συμμετεχόντων στη διαδικασία (Καφούση, Σκουμπουρδή, 2012).

## 3.10 Η χρήση των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, σημαίνοντα ρόλο στη μη λεκτική γλώσσα και επικοινωνία, τόσο στον χώρο της εκπαίδευσης όσο και σε όλους τους τομείς της κοινωνικής, πολιτισμικής και επαγγελματικής δραστηριότητας, καταλαμβάνουν οι αναπαραστάσεις κάθε είδους. Αυτές μπορεί να είναι εικόνες, πίνακες, ηχητικές παραστάσεις, φωτογραφίες, διαγράμματα κ.ά. και η χρήση τους εντάσσεται στο πλαίσιο επίτευξης της βασικής σκοποθεσίας, η οποία αφορά στην κατάκτηση του πολυγραμματισμού. Μέσα στο εκπαιδευτικό περιβάλλον όλων σχεδόν των βαθμίδων της εκπαίδευσης, και κυρίως της Πρωτοβάθμιας, όπου τις τελευταίες δεκαετίες ακολουθείται η πολιτική του εξεικονισμού των διδακτικών εγχειριδίων (Πλειός, 2005:214), οι μαθητές παρωθούνται να επικοινωνούν, να αλληλεπιδρούν, να συμμετέχουν ενεργητικά στην παραγωγή γνώσεων και νοημάτων, να διαχειρίζονται και να επεξεργάζονται όλες τις πληροφορίες και τα ερεθίσματα που λαμβάνουν από διάφορες πηγές, ανάμεσά τους και από τις αναπαραστάσεις (Μυλωνάκου-Κεκέ, 2005:561-567). Τα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια είναι προσανατολισμένα στην κατάκτηση του πολυγραμματισμού (γλωσσικού, μαθηματικού, οπτικού κ.ά.) όχι ως στατική διαδικασία, αλλά ως δυναμική επικοινωνιακή πρακτική (Πλειός, 2005:301). Τα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια συνοδεύονται από ένα πλήθος εικόνων, καθώς και από διάφορα πολυμέσα όπως ηχητικά και οπτικά dvd, εκπαιδευτικά λογισμικά και εφαρμογές σε διάφορες ιστοσελίδες κρατικής ή ιδιωτικής πρωτοβουλίας. Συνεπώς αποτελούν πολυτροπικά κείμενα, στα οποία οι αναπαραστάσεις και οι απεικονίσεις αξιοποιούνται σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Η λεγόμενη «εικονογράφηση» των σχολικών εγχειριδίων γίνεται με τη χρήση κατεξοχήν σταθερού οπτικού υλικού, ενώ πιο σπάνια χρησιμοποιείται και κινούμενο, μέσω των τεχνολογικών και των υπολογιστικών συστημάτων που είναι ενσωματωμένα στη διδακτική διαδικασία. Σταθερό είναι το οπτικό υλικό που αφορά σε φωτογραφίες, σε σκίτσα, σε σχέδια, σε διαγράμματα, σε πίνακες κ.ά., ενώ κινούμενο είναι το οπτικό υλικό που προβάλλεται με τη βοήθεια εποπτικών μέσων ή ηλεκτρονικού υπολογιστή (Γρόσδος, χ.χ.). Συγκεκριμένα,

Α) οι φωτογραφίες απεικονίζουν τοπία και σκηνές από το φυσικό και αστικό περιβάλλον των ανθρώπων, και από τις καθημερινές τους δραστηριότητες σε προσωπικές, κοινωνικές και επαγγελματικές περιστάσεις, επίσης αποτυπώνουν μορφές αντικειμένων, προσώπων, ενεργειών, και η χρήση τους αποσκοπεί στην απόδοση της πραγματικότητας, είτε αυτή είναι φυσική, είτε τεχνητή, είτε σκηνοθετημένη. Όπως και να έχει, οι φωτογραφίες που αξιοποιούνται στη διδακτική διαδικασία ή στα σχολικά εγχειρίδια είναι κατασκευές, που απευθύνονται στους μαθητές, και τους παρακινούν να αντιληφθούν, να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν το εικονογραφικό υλικό κατά βούληση και βάσει των προσωπικών τους βιωμάτων και γνώσεων (Γρόσδος, χ.χ.).

Β) Τα σκίτσα και τα σχέδια αφορούν σε πιο απλές απεικονίσεις, οι οποίες αποδίδονται με σχηματικό τρόπο, χωρίς λεπτομέρειες στα χαρακτηριστικά τους. Οι μορφές που αποτυπώνονται με σκίτσα ή σχέδια, είναι συνήθως απογυμνωμένες από πληροφορίες και παραπέμπουν μόνο κατά προσέγγιση στο απεικονισμένο αντικείμενο, πρόσωπο, κατάσταση κ.ά. Ως συνήθως, αυτού του είδους το οπτικό υλικό αξιοποιείται στη διδασκαλία για να παραπέμψουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο και να στρέψουν την προσοχή του μαθητή προς αυτό και μόνο αυτό. Με την επεξεργασία των σκίτσων και των σχεδίων, ο μαθητής περισσότερο αποδομεί τη μορφή και δεν εστιάζει στις οπτικές της ποιότητες (Γρόσδος, χ.χ.).

γ) Οι αναπαραστάσεις, που βρίσκονται σε άμεση συνάφεια με την προβληματική της παρούσας ερευνητικής μελέτης, αφορούν σε εκείνο το οπτικό υλικό, που μπορεί και επιβάλλεται να χρησιμοποιηθεί στο μάθημα των μαθηματικών και που συμβάλλει στην κατανόηση των μαθητών. Οι αναπαραστάσεις αφορούν συνήθως σε σχεδιαγράμματα, σε πίνακες, σε γραφικές παραστάσεις, σε σχήματα, σε συμβολικές εξισώσεις, σε αλγεβρικές σχέσεις κ.ά., και στην πραγματικότητα παρέχουν πληροφοριακά δεδομένα, κώδικες επικοινωνίας και οργάνωσης στρατηγικών σχεδίων επίλυσης προβλημάτων, σε σχηματοποιημένη μορφή. Παράλληλα, αποτελούν ένα είδος ιδιότυπης μορφοποίησης της πραγματικότητας των επιστημονικών εννοιών, έτσι ώστε να καθίστανται περισσότερο οικείες και κατανοητές, σε άτομα που δεν έχουν συνηθίσει να αντιλαμβάνονται τα πράγματα όταν αυτά είναι εκτός της απτής πραγματικότητάς τους. Αυτά τα είδη των εικόνων, προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών, κάνουν πιο κατανοητό το αντικείμενο της διδασκαλίας, συμβάλλουν στον εμπλουτισμό των πληροφοριών και απευθύνονται στις γνωστικές , νοητικές αλλά και συναισθηματικές λειτουργίες των μαθητών (Γρόσδος, χ.χ.).

Η χρήση των εικόνων κατά τη διδακτική διαδικασία των μαθησιακών σχολικών αντικειμένων, και συγκεκριμένα των αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών, σε ένα πολυτροπικό εκπαιδευτικό περιβάλλον είναι μια διαδικασία δυναμική και σε καμία περίπτωση στατική. Έχει καταδειχτεί ερευνητικά, ότι η αξιοποίηση του παρεχόμενου απεικονιστικού υλικού εμπλουτίζει τη διδακτέα ύλη με χρήσιμες πληροφορίες, διευκολύνει τη διαδικασία κατανόησης των επιστημονικών και εξειδικευμένων εννοιών, σχέσεων, όρων και συμβόλων, ενισχύει τη θετική στάση των μαθητών, τονώνει το ενδιαφέρον τους για το μάθημα, καλλιεργεί ένα εποικοδομητικό κλίμα εντός του περιβάλλοντος της σχολικής αίθουσας, κινητοποιεί τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν όλα τα ερεθίσματα που λαμβάνουν, να αναδεικνύουν και να εξωτερικεύουν τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του χαρακτήρα τους και της συμπεριφοράς τους, να κατακτούν τον πολυγραμματισμό, να οργανώνουν στρατηγικές σημασιοδότησης και αποκωδικοποίησης των οπτικών/ σημειωτικών πόρων που έχουν μπροστά τους (Κασβίκης, 2004:91-94; Πλειός, 2005:208-2013).

Πολλές ερευνητικές μελέτες, όπως είναι του Ματσαγγούρα (2006), αξιολογούν τη σημασία των εικόνων και των αναπαραστάσεων στα σχολικά διδακτικά εγχειρίδια γενικά, και κατ' επέκταση στην ελληνική διδακτική πραγματικότητα.

Οι εικόνες ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των αναπαραστάσεων. Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε εξωτερικές και εσωτερικές. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι όλα αυτά τα είδη των εικόνων, των οποίων η χρήση αποσκοπεί στη μετάδοση ενός μηνύματος, μιας γνώσης ή μιας πληροφορίας. Από την άλλη, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι νοητικές αναπαραστάσεις, οι νοητικές εικόνες, οι οποίες κατασκευάζονται για τη δημιουργία ενός νοήματος. Το νόημα αυτό, είτε σχετίζεται με τα μαθηματικά, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είτε γενικώς με τον πραγματικό κόσμο που περιβάλλει τα άτομα, και καταδεικνύει την προσπάθεια που καταβάλλει ο κάθε άνθρωπος για να τον κατανοήσει. Ειδικότερα, η εξεικόνιση του μαθηματικού προβλήματος βοηθά στην κατανόησή του, στον σχεδιασμό και εκτέλεση της λύσης του, όπως και στον έλεγχο και στην επαληθευσιμότητα της ορθότητας της λύσης αυτής. Παράλληλα, η χρήση μιας μορφής αναπαράστασης αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της λεγόμενης μαθηματικοποίησης της προβληματικής κατάστασης που παρουσιάζεται στο δοσμένο πρόβλημα.

### 3.11 Πολυτροπικότητα και μαθηματικά

Οι μαθηματικοί ή οι καθηγητές μαθηματικών, αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά, ως μια λογική διεργασία, σχετική με αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι οι αριθμοί και οι σχέσεις μεταξύ τους, οι οποίες είναι πιθανό να βρίσκουν έμπρακτες εφαρμογές στην απτή πραγματικότητα και αντιστοιχίες στη κατανόηση του φυσικού κόσμου. Αντίθετα, οι μαθητές θεωρούν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο από τεχνικές αλγορίθμων, τους οποίους δυσκολεύονται να αντιληφθούν ως μέρος του κοινωνικού γίγνεσθαι που τους περιβάλλουν, συνεπώς, αδυνατούν να αντιληφθούν και να κατανοήσουν τα νοήματα που φέρουν και που αναπαριστούν (Ginsberg, 2014).

Τα μαθηματικά προκαλούν παρανοήσεις στους μαθητές, οι οποίες συνήθως οφείλονται στη τάση που έχουν οι ίδιοι να εστιάσουν στα μαθηματικά σύμβολα και όχι στο νόημά τους. Έτσι το πρόβλημα προκύπτει, λόγω της ανεπάρκειας, της αδυναμίας ή της ελλιπούς καθοδήγησης των μαθητών να σημασιοδοτούν τις μαθηματικές αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας. Παράλληλα, οι μαθητές συνήθως δεν διαθέτουν τη δεξιότητα ή τον γραμματισμό να αντιληφθούν την αφαιρετική φύση των μαθηματικών εννοιών, στις οποίες αναφέρονται τα μαθηματικά σύμβολα. Τα παιδιά μαθαίνουν καλά, ή ακόμα και αποστηθίζουν και απομνημονεύουν, τη σύνταξη του νοήματος χωρίς όμως να γνωρίζουν την πραγματική σημασία που κρύβει, η οποία εκφράζεται με τη δεδομένη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών. Ο σημαντικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ιδέα ότι η μαθηματική γλώσσα και το μαθηματικό νόημα αποτελούν τρόπους τους οποίους τα άτομα/ οι μαθητές χρησιμοποιούν για να αναπαραστήσουν και να επικοινωνήσουν έννοιες, νοήματα και καταστάσεις του πραγματικού κόσμου (Ginsberg, 2014).

Τα Common Core State Standards (2012: στο Ginsberg, 2014) εκλαμβάνουν την «κατανόηση» και την «επικοινωνία» ως δύο καταστάσεις, που είναι αδιαχώριστες μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, για να υπάρχει επικοινωνία επιβάλλεται να υπάρχει κατανόηση και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει κατανόηση δεν μπορεί να υπάρχει επικοινωνία. Η κατανόηση των μαθηματικών περιλαμβάνει πολλαπλούς τρόπους κι εργαλεία επικοινωνίας, όπως είναι η προφορική και γραπτή γλώσσα, οι χειρονομίες, η στάση και οι κινήσεις του σώματος, τα σύμβολα και οι αναπαραστάσεις. Συνεπώς, τόσο η κατανόηση όσο και η επικοινωνία, αποτελούν μια πολυτροπική και πολυσημειωτική δραστηριότητα (Sfard, 2012: στο Ginsberg 2014).

Η Ferrara (2013), όταν αναφέρεται στην πολυτροπική δραστηριότητα στο μάθημα των μαθηματικών, χρησιμοποιεί χαρακτηριστικά τη μεταφορική εικόνα των σύννεφων, τα οποία διαχέονται στον χώρο, που μπορεί να είναι είτε φυσικός είτε γνωστικός τόπος, όπου οι εμπειρίες του παρόντος ή του παρελθόντος χρόνου αντιληπτικές, κινητικές και φανταστικές (imaginery), έρχονται να γεμίσουν τα κενά που υπάρχουν ανάμεσα στο σώμα και το μυαλό (όπως τα σύννεφα αλλάζουν συνεχώς σχήμα και καλύπτουν το ένα το άλλο). Ουσιαστικό ρόλο, στη μαθηματική δράση και σκέψη παίζουν οι σωματικές, οι αντιληπτικές και οι φαντασιακές δραστηριότητες, με τις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν, κατανοούν και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσα σε ένα πλούσιο κοινωνικό περιβάλλον. Οι μαθητές ανταλλάσσουν μαθηματικές ιδέες μεταξύ τους χρησιμοποιώντας πολλαπλούς τρόπους έκφρασης και επικοινωνίας για τη δημιουργία νοημάτων, οι οποίοι σύμφωνα με τον Kress (2004, στο Ferrara 2013) ονομάζονται τρόποι αναπαράστασης (modes of representation). Η πολυτροπικότητα είναι αυτή που εμπλουτίζει την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση των μαθητών στην τάξη των μαθηματικών, δίνοντας την ευκαιρία για έκφραση μαθηματικών ιδεών μέσα σε ένα πλούσιο επικοινωνιακό περιβάλλον.

### 3.12 Η πολυτροπικότητα στην κατασκευή του μαθηματικού νοήματος

Παραδοσιακά και διαχρονικά, η διδασκαλία των μαθηματικών εστιάζει στην αυστηρή μαθηματική γλώσσα, με ευρεία χρήση τόσο των λεκτικών αναφορών όσο και των μη λεκτικών, και κυρίως των μαθηματικών συμβόλων, για να εισαχθούν οι μαθητές στον κόσμο των μαθηματικών, όπου συμπεριλαμβάνονται οι έννοιες, οι όροι, οι σχέσεις, τα νοήματα και τα σημεία. Αυτή η τακτική οδηγεί συχνά σε προβλήματα κατανόησης των μαθηματικών από την πλευρά των μαθητών και κατά συνέπεια, το γεγονός αυτό συμβάλλει αρνητικά στην προσπάθεια δόμησης και υιοθέτησης της μαθηματικής έκφρασης και της μαθηματικής γνώσης. Στον αντίποδα αυτής της τακτικής, εντοπίζεται η πολυτροπική χρήση της γλώσσας στη διδασκαλία των μαθηματικών και η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων..

Το πολυτροπικό μοντέλο της γλώσσας, όπως έχει προαναφερθεί και δειχθεί διεξοδικά, δεν περιορίζεται μόνο στη χρήση της συμβολικής μαθηματικής γλώσσας, αλλά διευρύνεται και περιλαμβάνει και άλλου τύπου σημειωτικά συστήματα, όπως είναι η «φυσική» γλώσσα και η εικονική γλώσσα (εικονικές αναπαραστάσεις, όπως είναι η εικόνα, το σχεδιάγραμμα, το γράφημα, ο πίνακας κ.ά.). Έχει προταθεί πως η χρήση διαφορετικών συστημάτων βοηθάει την ανάπτυξη της εννοιολογικής μάθησης και γνώσης (Solano-Flore, 2010: στο Joutsenlahti & Kulju, 2017). Σύμφωνα με τους Kalantzis και Cope (2012; στο Joutsenlahti & Kulju, 2017) η ποικιλία στη χρήση των τρόπων παρουσίασης του νοήματος παρέχει περισσότερες επιλογές για τη δημιουργία αυτού του νοήματος.

Αρκετές έρευνες (Joutsenlahti & Kulju, 2017), που ασχολήθηκαν με το θέμα της πολυτροπικότητας στα σχολικά μαθηματικά και έχουν καταδείξει τη σημασία που έχει η έκφραση του μαθηματικού νοήματος μέσα από ποικίλους τρόπους στην πολυπολιτισμική τάξη των μαθηματικών. Η Morgan (2001: στο Joutsenlahti & Kulju, 2017) υποστηρίζει πως η χρήση της γραπτής και προφορικής γλώσσας στα μαθηματικά προβλήματα ενισχύουν τη μαθηματική μάθηση, αναπτύσσουν τη μαθηματική κατανόηση, αλλάζουν τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά προς το καλύτερο και βοηθούν την εξέλιξη του εκπαιδευτικού.

# Κεφάλαιο 4ο: Αναπαραστάσεις και οπτικοποίηση

## 4.1 Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης του H. Gardner

Από τις αρχές του 20ου αιώνα έγιναν πολλές προσπάθειες να καθιερωθούν διάφοροι τύποι και είδη ευφυΐας και νοημοσύνης, οι οποίες εν τέλει άφησαν στο περιθώριο ως πεπερασμένη την αντίληψη ότι υπάρχει μόνο ένα είδος ευφυΐας διαφορετικών βαθμών. Σήμερα, αναγνωρίζεται ότι υπάρχουν διαφορετικοί τύποι ευφυΐας, οι οποίοι ποικίλουν ανάλογα με τους τύπους των ανθρώπων (Καραπέτσας, 1988: στο Παπανελοπούλου, 2002). Άλλωστε, η νοημοσύνη του ανθρώπου είναι μοναδική και πολυδιάστατη, και αυτό σημαίνει ότι όλη αυτή η ποικιλία, δεν είναι δυνατό να περιοριστεί σε έναν τύπο ευφυΐας. Ο τρόπος που σκέφτεται το κάθε άτομο είναι ξεχωριστός, καθώς ενεργοποιεί διαφορετικές συλλογιστικές και υιοθετεί διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Για παράδειγμα, είναι δυνατό κάποιος να σκέφτεται με λέξεις, με εικόνες, με ήχο, ενώ κάποιος άλλος μπορεί να σκέφτεται με κίνηση, μουσική κ.ά. Με άλλα λόγια η ανθρώπινη σκέψη είναι πολύπλευρη, πολυεπίπεδη και πολυδιάστατη, και διαφέρει λιγότερο ή περισσότερο από άτομο σε άτομο.

Οι έννοιες της πολυτροπικότητας και του πολυγραμματισμού στη διδακτική πράξη συνάδουν με τη θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης και με την παιδαγωγική μέθοδο που εκπηγάζει από τις θεωρητικές προσεγγίσεις του Gardner. Βάσει αυτής, στην διδακτική διαδικασία και στη διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί μια θεματική ως κίνητρο, «όχημα», για την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Στην πραγματικότητα ο εκπαιδευτικός λαμβάνει υπόψη και χρησιμοποιεί όλες τις επιμέρους γλώσσες που μιλούν τα παιδιά, όπως επίσης και τα μαθησιακά εργαλεία, με βασική σκοποθεσία την επίτευξη του μεγαλύτερου βαθμού κατανόησης των σχολικών γνωστικών αντικειμένων, νοηματοδότησης των ερεθισμάτων και οικειοποίησης των πληροφοριών που παρέχονται κατά τη διάρκεια της επίλυσης των προβλημάτων (Gardner, 1999).

Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης βρίσκεται σε άμεση συνάφεια με την πολυτροπική και μαθητοκεντρική διδακτική πράξη, που στοχεύει στην κατάκτηση του πολυγραμματισμού και στη διεύρυνση των οριζόντων και οπτικών, μέσω των οποίων τα παιδιά αντιλαμβάνονται, γνωρίζουν και κατανοούν τον πραγματικό κόσμο. Σύμφωνα με τον Gardner (1999), όπως ακριβώς υπάρχουν πολλοί και διάφοροι τρόποι και οδοί για την επίτευξη των στόχων, έτσι και η ανθρώπινη νοημοσύνη έχει πολλαπλούς τύπους, που ενδεχομένως ανταποκρίνονται στα χαρακτηριστικά κάθε ατόμου. Ο Gardner (1999) συνόψισε τα χαρακτηριστικά αυτά σε οκτώ κριτήρια, από τα οποία θα πρέπει να διέπεται κάθε νοημοσύνη, όπως την έχει ορίσει ο ίδιος. Συγκεκριμένα, ο Gardner (1999) αναγνωρίζει:

Α) τη γλωσσική/ λεκτική νοημοσύνη (Verbal Linguistic Intelligence), η οποία αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται αποτελεσματικά το γραπτό ή προφορικό λόγο, τη συζήτηση, το χιούμορ κ.ά. Το άτομο με ανεπτυγμένη τη γλωσσική/ λεκτική νοημοσύνη μαθαίνει καλύτερα μιλώντας, ακούγοντας και βλέποντας τις λέξεις, γράφοντας και διαβάζοντας, καθώς έχει ανεπτυγμένη τη λεκτική μνήμη.

Β) Τη λογική / μαθηματική νοημοσύνη (Logical/Mathematical Intelligence). Τα άτομα με λογική/ μαθηματική νοημοσύνη είναι ιδιαίτερα ικανά στη χρήση και την ανάλυση αριθμών, καθώς διαθέτουν ιδιαίτερες ικανότητες συλλογισμού κι επιστημονικής σκέψης.

Γ) Τη χωρική/ οπτική νοημοσύνη (Spatial Intelligence). Είναι η ικανότητα που έχει ένα άτομο να αντιλαμβάνεται τον χώρο που το περιβάλλει, και η δυνατότητα να σχηματίζει νοητικές εικόνες, όπως σχεδιαγράμματα και χάρτες. Έχει ανεπτυγμένη την οπτική/ χωρική μνήμη και αρέσκεται να μαθαίνει με τη χρήση εικόνων, χρωμάτων, σχεδίων και φωτογραφιών.

Δ) Τη μουσική/ ακουστική νοημοσύνη (Musical Intelligence). Το άτομο με ανεπτυγμένη ακουστική/ μουσική νοημοσύνη είναι ικανό στο να απολαμβάνει, να συνθέτει ακόμη και να εκτελεί μουσικά κομμάτια. Του αρέσει να μαθαίνει με τη βοήθεια του ρυθμού και της μουσικής, ενώ είναι ικανό στην εκμάθηση μουσικών οργάνων. Του αρέσει να επινοεί ήχους, μελωδίες και τραγούδια.

Ε) Την κιναισθητική/ σωματική νοημοσύνη (Bodily Intelligence). Η κιναισθητική/ σωματική νοημοσύνη κινητοποιεί το σώμα για την αναζήτηση λύσεων των προβλημάτων και κάνει το άτομο ικανό σε διάφορα αθλήματα, στο χορό, τις κατασκευές. Το άτομο αυτό μαθαίνει καλύτερα μέσα από την κίνηση και τη σωματική δραστηριότητα, καθώς διαθέτει ανεπτυγμένη σωματική μνήμη, δηλαδή θυμάται κάτι μέσω του σώματος (ενσώματη μάθηση)

Στ) Τη διαπροσωπική νοημοσύνη (Interpersonal intelligence). Αναφέρεται στην ικανότητα που διαθέτει ένα άτομο για να επικοινωνεί και να συνεργάζεται με τα άλλα άτομα. Οι μαθητές με διαπροσωπικές ικανότητες κατανοούν τις ανάγκες και τα συναισθήματα των συμμαθητών τους, μαθαίνουν καλύτερα όταν εργάζονται σε ομάδες και βοηθούν ο ένας τον άλλον.

Ζ) Την ενδοπροσωπική νοημοσύνη (Intrapersonal Intelligence). Σχετίζεται με τα συναισθήματα, τις επιθυμίες και τα κίνητρα του ίδιου του ατόμου. Η αυτογνωσία αναφέρεται σε αυτό τον τύπο νοημοσύνης. Οι μαθητές αυτοί γνωρίζουν τις δυνατότητες αλλά και τις αδυναμίες τους, και έχοντας εμπιστοσύνη στις δυνάμεις τους, εργάζονται ατομικά με τον δικό τους ρυθμό, ακολουθώντας τη δική τους έμπνευση και βασιζόμενοι στις προσωπικές εμπειρίες.

Η) Τη φυσιογνωστική/ οικολογική νοημοσύνη (Naturalistic Intelligence). Η φυσιοκρατική/ οικολογική ή νατουραλιστική νοημοσύνη έχει να κάνει με την ικανότητα του ανθρώπου να αντιλαμβάνεται και να διαχωρίζει τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου και να μπορεί να τα αξιολογεί ανάλογα. Ο Δαρβίνος υπήρξε ένα άτομο με υψηλό δείκτη νατουραλιστικής νοημοσύνης και αυτή η ικανότητα που είχε τον ώθησε να αναπτύξει τη θεωρία της εξέλιξης των ειδών.

Η πολλαπλή νοημοσύνη επηρεάζει τον τρόπο σκέψης και μάθησης. Όπως η σκέψη υποστηρίζεται από μια σειρά από τύπους της νοημοσύνης, έτσι και η μάθηση βασίζεται σε πολλαπλούς τρόπους κατανόησης.

## 4.2 Ενσώματη μάθηση

Το σώμα και το μυαλό συνεργάζονται και συνεργούν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας δημιουργίας και δόμησης της γνώσης. Συνεπώς, δεν είναι ορθό να εκλαμβάνονται ως ξεχωριστές και διαχωρισμένες προεκτάσεις της ανθρώπινης υπόστασης. Για την έκφραση των ιδεών, των σκέψεων, των εμπειριών και των συναισθημάτων, το άτομο χρησιμοποιεί ποικίλους μη λεκτικούς τρόπους και διάφορα εργαλεία, όταν δεν υπάρχουν οι κατάλληλες λέξεις ή όταν δεν είναι σε θέση να αξιοποιήσει τις λεκτικές αναφορές για να τις περιγράψει. Για τον λόγο αυτό, όταν η λεκτική γλώσσα δεν επαρκεί, το άτομο σχηματοποιεί αυτά που θέλει να πει με ενσώματες κινήσεις, σχήματα στον αέρα, χειρονομίες, μορφασμούς του προσώπου κ.ά. (Arzarello & Edwards, 2005).

Αν και για πολλές δεκαετίες επικρατούσε η αντίληψη ότι η χρήση του σχεδίου, των οπτικοποιημένων σημείων και της εργασίας με υλικά προορίζονταν για άτομα/ μαθητές χαμηλότερου νοητικού επιπέδου ή αφορούσε περισσότερο στην εκπαίδευση των ατόμων μικρότερων ηλικιών, σήμερα θεωρείται ξεπερασμένη. Ο Radford (2008) δεν ασπάζεται τη θέση αυτή και υποστηρίζει ότι η μείωση των χειρονομιών και ο περιορισμός της εκτεταμένης χρήσης των αναπαραστάσεων στο μάθημα των μαθηματικών δεν σχετίζονται με το χαμηλό νοητικό επίπεδο των μαθητών, αλλά με τον βαθμό της σημειωτικής τους ωρίμανσης. Μάλιστα, στο μάθημα των μαθηματικών, όπου έχει επικρατήσει σταδιακά η πολυτροπική προσέγγιση της μάθησης, είναι όχι μόνο σημαντικό, αλλά απαραίτητο, να περιλαμβάνει την επεξεργασία του συνόλου των σημειωτικών πόρων, των γνωσιακών, των αντιληπτικών και των φυσικών πηγών (Radford et al., 2009:91).

Το 2006 ο Duval υπογράμμισε ότι μόνο μέσω του συνδυασμού των σημειωτικών πόρων και συστημάτων, στα οποία περιλαμβάνονται οι αναπαραστάσεις και οι ενσώματες μη λεκτικές εκφράσεις, είναι δυνατό να καταστούν σαφείς οι μαθηματικοί ορισμοί και να γίνουν κατανοητές οι μαθηματικές σχέσεις. Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά επιβάλλεται να παρωθούν τους μαθητές τους στο να αξιοποιούν όλα τα διαθέσιμα σημειωτικά δεδομένα, όπως τις λέξεις, τα σύμβολα, τις εικόνες, τις αναπαραστάσεις, τα γραφήματα, τις χειρονομίες, τους πίνακες κ.ά., προκειμένου να αντικειμενοποιήσουν και να σημασιοδοτήσουν τις μαθηματικές γνώσεις (Radford et al., 2007). Δεν θα πρέπει λοιπόν να αγνοείται η μεγάλη αξία που έχουν οι οπτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Άλλωστε σύμφωνα με τον Thomas West (2004: στο Boaler et al., 2016) «*είναι μαζοχιστικό για έναν μαθηματικό να μη σχετίζεται με εικόνες*». Τη χρήση των εικόνων, των αναπαραστάσεων και των χειρονομιών, προστάζει και η σύγχρονη τεχνολογικά αναπτυσσόμενη εποχή, όπου κυριαρχούν τα οπτικά ερεθίσματα. Σε ένα τέτοιο τεχνολογικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον, η νέα γνώση του κόσμου βασίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στις εικόνες, οι οποίες είναι «πλούσιες σε νοήματα, σε περιεχόμενο και σε πληροφορίες» (West, 2004: στο Boaler et al., 2016 ).

Όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις μαθηματικές έννοιες και τις σχέσεις μέσω των οπτικοποιημένων νοημάτων, μαθαίνουν, αντιλαμβάνονται, κατανοούν και οικειοποιούνται το γνωσιακό αντικείμενο των μαθηματικών και υιοθετούν μια θετικότερη στάση απέναντι σε αυτό. Τότε μόνο τα μαθηματικά «αλλάζουν», καθίστανται «ανοιχτά» προς όλους, καλύπτουν τα επιμέρους ενδιαφέροντα των μαθητών ανεξαρτήτως εξωγενών και ενδογενών παραγόντων που τους διαφοροποιούν, και μετασχηματίζονται σε ένα από τα πιο ενδιαφέροντα μαθήματα για όλους τους μαθητές. Η οπτική δραστηριοποίηση του εγκεφάλου, οδηγεί στην βαθύτερη κατανόηση και στην αλλαγή της ψυχοσυναισθηματικής στάσης των μαθητών, η οποία συνδέεται άμεσα με τη σχολική τους επίδοση (Κασσωτάκης & Φλουρής, 2002).

Αναπόσπαστο μέρος της οπτικοποιημένης μη λεκτικής γλώσσας είναι, όπως προαναφέρθηκε οι ενσώματες κινήσεις, οι οποίες αναπαριστούν και απεικονίζουν σκέψεις, ιδέες, απόψεις, αντιλήψεις, συναισθήματα, εμπειρίες, πεποιθήσεις και συλλογισμούς των ατόμων/ μαθητών. Μέσω των ενσώματων κινήσεων, διευκολύνεται η κατάκτηση των αφηρημένων όρων και εννοιών, ιδίως του μαθήματος των μαθηματικών, καθώς οι μαθητές «βλέπουν» μπροστά τους πραγματικές, απτές και οικείες οπτικοποιήσεις με τα χέρια, το πρόσωπο, το σώμα κ.ά. (Nemirovsky & Ferrara, 2009). Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να επισημανθεί ότι οι οπτικοποιήσεις που πραγματοποιούνται με τις κινήσεις του σώματος και οδηγούν στην κατάκτηση των προσδοκώμενων γνώσεων, δεν είναι τυχαίες ή αυθόρμητες, αλλά στοχευμένες, οι οποίες αποσκοπούν σε κάτι συγκεκριμένο (Sabena, 2008). Στο μάθημα των μαθηματικών, οι ενσώματες αυτές κινήσεις και αναπαραστάσεις, αν και συνήθως συνδέονται με τη λεκτική γλώσσα, λειτουργούν ως ξεχωριστά στοιχεία της διδακτικής διαδικασίας, που συνοδεύονται από μη λεκτικές ενέργειες και από χειρισμό οργάνων, αντικειμένων ή εργαλείων (Sabena, 2008).

Πολλές ερευνητικές μελέτες, έχουν καταδείξει ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη ενσώματων αναπαραστάσεων και οπτικοποιημένων σκέψεων, που σχετίζονται με πραγματικές ενέργειες ή αντικείμενα που υπάρχουν στον χώρο, που βρίσκονται σε άμεση συνάφεια με τις λεκτικές αναφορές, τον λόγο και την ομιλία, που απεικονίζουν τις αφηρημένες έννοιες, ιδέες, ενέργειες ή αντικείμενα, και που δίνουν έμφαση στον λόγο και συντονίζουν την ομιλία. Συγκεκριμένα, ο McNeil το 1992, δημοσιοποίησε τα αποτελέσματα της έρευνάς του, η οποία βασίστηκε στις παραπάνω προσεγγίσεις, και βάσει αυτών πρότεινε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες ενσώματων αναπαραστάσεων. Η πρώτη αφορά στις δεικτικές, η δεύτερη στις εικονικές, η τρίτη στις μεταφορικές και η τέταρτη στις επαναλαμβανόμενες. Ωστόσο, σήμερα το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί σε δύο μεγάλες κατηγορίες, από τις οποίες η πρώτη περιλαμβάνει τις αναπαραστάσεις του σώματος ή αλλιώς λεξικές κινήσεις (Krauss et al., 1996) ή απεικονίσεις, δηλαδή τις εικονικές, τις δεικτικές και τις μεταφορικές, και η δεύτερη περιλαμβάνει τις ρυθμιστικές ή κινητικές (Krauss et al., 1996), δηλαδή τις ενσώματες οπτικοποιήσεις που δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο σημασιολογικό σκοπό και μηχανικά συνοδεύουν την ομιλία και τον λόγο.

Η χρήση των ενσώματων αναπαραστάσεων στο μάθημα των μαθηματικών, εκτός από επικοινωνιακούς και εκφραστικούς σκοπούς, εξυπηρετεί και τις ανάγκες ανάπτυξης και οργάνωσης συλλογιστικών επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και παραγωγής ιδεών και νοημάτων. Σύμφωνα με τους Chen και Herbst (2013), στα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα που φοιτούν μαθητές μικρότερων ηλικιών, η μαθηματική γνώση παράγεται μέσα από τις ενσώματες αυτές αναπαραστάσεις, καθώς παρέχουν στα παιδιά ένα ιδιαίτερο αίσθημα ασφάλειας, το οποίο συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και κυρίως στην εννοιολογικοποίηση της μαθηματικής λεκτικής ή συμβολικής γλώσσας. Τα παιδιά της πρώτης σχολικής ηλικίας, δεν διαθέτουν τη σημειωτική ωριμότητα ώστε να αναπαράγουν λεκτικά τη μαθηματική σκέψη, αφού νωρίτερα τη νοηματοδοτήσουν με την συλλογιστική τους. Για τον λόγο αυτό, στρέφονται στις ενσώματες αναπαραστάσεις για να προβούν σε αναφορές και σε κατανοήσεις (Kim et al., 2011).

## 4.3 Οπτικός γραμματισμός

Τα άτομο που διαθέτουν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται, να κατανοούν, να «διαβάζουν», να ερμηνεύουν, να επεξεργάζονται και να αναπαράγουν τα οπτικά ερεθίσματα που λαμβάνουν θεωρούνται οπτικά εγγράμματα. Αν και για πολλούς ερευνητικές, ο οπτικά εγγράμματος άνθρωπος λογικά θα πρέπει να έχει κατακτήσει και τον γλωσσικό γραμματισμό, τις τελευταίες δεκαετίες έχει επικρατήσει η άποψη ότι , ανεξάρτητα από το αν γνωρίζει να γράφει ή να διαβάζει, μπορεί να είναι ικανός και σε θέση να αξιοποιεί αποτελεσματικά τις εικόνες ή τις αναπαραστάσεις (Burmark, 2008:5). Το βέβαιο είναι ότι ο οπτικός γραμματισμός οδηγεί σταδιακά στην κατάκτηση του πολυγραμματισμού και στην εξοικείωση του ατόμου με τις συνεχείς εναλλαγές μεταξύ εικόνων, λέξεων, συμβόλων κ.ά.

Στη σύγχρονη εποχή των τεχνολογικών μέσων και των υπολογιστικών συστημάτων η εικόνα έχει αποκτήσει ανεπανάληπτη ισχύ και δυναμική, έχει εισβάλλει σε όλους τους τομείς της κοινωνικής, της πολιτισμικής και επαγγελματικής ζωής των ανθρώπων, και οι λειτουργίες της έχουν διευρυνθεί σε τόσο μεγάλο βαθμό, που είναι αδύνατο σε πολλές περιπτώσεις να ελεγχθεί. Ένα γραμματισμένο οπτικά άτομο, είναι ικανό τόσο να αξιοποιήσει δημιουργικά τα ερεθίσματα που λαμβάνει από τις αναρίθμητες εικόνες και αναπαραστάσεις, όσο και να ανθίσταται στην επίπλαστη πραγματικότητα που επιβάλλεται από εξωγενείς παράγοντες, με τη χρήση των εικόνων αυτών.

Το σημαντικότερο και αυτό που αφορά την παρούσα ερευνητική μελέτη, είναι ότι το άτομο αυτό δύναται να αντιλαμβάνεται, να κατανοεί και να ερμηνεύει τις εικόνες και τις αναπαραστάσεις, σύμφωνα πάντα με την κατάσταση και τις συνθήκες στις οποίες θα βρεθεί (Παπούλια-Τζελέπη, 2004:21).

Το ίδιο άτομο διαθέτει τη δεξιότητα να αναγνωρίζει το οπτικό λεξιλόγιο, τις βασικές έννοιες της οπτικής γλώσσας, τις οπτικές συμβάσεις που εμπεριέχουν τα κοινωνικά, και όχι μόνο, σύμβολα, να μετατρέπει τα ερεθίσματα σε εικόνες και τις εικόνες σε πληροφορίες. Είναι ικανό να προσεγγίζει με κριτική σκέψη και διάθεση τα μηνύματα των εικόνων, να οργανώνει στρατηγικά σχέδια ανάπτυξης συλλογισμών, ανάλυσης οπτικών αναπαραστάσεων, να διακρίνει τις διαφορές, τις ομοιότητες και τα αθέατα στοιχεία των αναπαραστάσεων, να ανασυνθέτει και να συσχετίζει τα μηνύματα και τα νοήματα που φέρουν οι απεικονίσεις, και το σημαντικότερο, να σημασιοδοτεί τα οπτικά και αναπαραστατικά δεδομένα, ανεξαρτήτως αφενός της περίστασης και των επικρατουσών συνθηκών, και αφετέρου της ποιότητας και του επίπεδου των λεκτικών και μη λεκτικών πληροφοριών (Avgerinou, 2009:29-30).

### 4.4 Οι αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά

Είναι γενικά παραδεδομένο ότι κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της ενεργητικής κατασκευής της γνώσης, το άτομο χρησιμοποιεί διάφορους τρόπους και μέσα ή εργαλεία αναπαράστασης της πραγματικότητας (Αγαλιώτης, 2000:47). Ο μαθητής, στο αρχικό πραξιακό στάδιο, αξιοποιεί κάθε διαθέσιμο πόρο, που είναι συνήθως απτός, όπως για παράδειγμα αντικείμενα, για να εκτελέσει τις μαθηματικές πράξεις που του ζητούνται. Στη συνέχεια, χρησιμοποιεί εικόνες, ζωγραφιές και γενικότερα απεικονιστικές αναπαραστάσεις, που σχετίζονται με την εκτέλεση των πράξεων. Στο τρίτο στάδιο, μεταβαίνει στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων και αριθμών για να κάνει συγκεκριμένες μαθηματικές πράξεις. Σε αυτό το σημείο, προκύπτουν και οι περισσότερες δυσκολίες των μαθητών και ιδιαιτέρως εκείνων, που αντιμετωπίζουν κάποια ειδική μαθησιακή δυσκολία. Σε κάθε ένα από τα τρία στάδια, οι αναπαραστάσεις και οι σημειωτικοί πόροι αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της διαδικασίας. Το μόνο που παρατηρείται είναι ότι όσο μεγαλώνει και ωριμάζει το παιδί/ ο μαθητής, τόσο λιγότερη ανάγκη έχει για την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και εννοιών μέσω της νοηματοδότησης των απεικονίσεων. Συνεπώς, όσο αλλάζει η ικανότητά του να εκφράζεται, το ίδιο αλλάζει και η στάση του απέναντι στην αναγκαιότητα των μαθηματικών αναπαραστάσεων. Ωστόσο, οι αναπαραστάσεις ποτέ δεν παύουν να θεωρούνται νοητικά σύμβολα ή εικόνες (signified and referenced concept), που αντιπροσωπεύουν ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο (signifier and referend material sign) (Τσακίρη, 2007).

Ειδικότερα, ο Kaput (1987: στο Τσακίρη, 2007) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα, που εξετάζει τον μετασχηματισμό της αναπαραστατικής διαδικασίας από μια δομή σε μια άλλη. Υπό αυτό το θεωρητικό πρίσμα, οι αναπαραστάσεις θεωρούνται αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής διδασκαλίας και της μάθησης. Βασικός στόχος της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, θα πρέπει να είναι η καλλιέργεια ή η κατάκτηση της ικανότητας του μαθητή να μεταφράζει, δηλαδή να σημασιοδοτεί τις αναπαραστάσεις, από το ένα σύστημα στο άλλο, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη ότι μια μαθηματική έννοια αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τις περιστάσεις και το σύστημα στο οποίο εντοπίζεται.

Δυσκολίες όμως μπορεί να προκύψουν κατά τη διαδικασία μετάφρασης και νοηματοδότησης της έννοιας από το ένα μέσο αναπαράστασης στο άλλο, όπως για παράδειγμα από το εικονιστικό στο συμβολικό. Οι εικόνες και οι αναπαραστάσεις κάθε είδους, λειτουργούν επικουρικά και υποστηρίζουν τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, όπως γενικότερα υποστηρίζουν και διευκολύνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και επικοινωνίας. Η ικανότητα να σχηματίζει κάποιος εικόνες (images) και αναπαραστάσεις μαθηματικών σχέσεων είναι αναγκαία για την επιτυχή επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Booth & Thomas, 2000: στο Τσακίρη, 2007).

Πολλές φορές, η εικόνα και η αναπαράσταση μπορεί να αποτελέσουν ανασταλτικό παράγοντα της διαδικασίας επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων. Αυτό συμβαίνει, όταν προκύπτουν παρερμηνείες, παρανοήσεις και παρεξηγήσεις, που οφείλονται στην αναντιστοιχία της εικόνας ή της αναπαράστασης με τις ερμηνευτικές και γνωστικές δεξιότητες και δυνατότητες των μαθητών, όταν η εικόνα επιδέχεται πολλαπλών ερμηνειών και όταν δεν έχει την κατάλληλη σύνθεση ή τη δομή η οποία να υποστηρίζει το λεκτικό περιεχόμενο του μαθηματικού προβλήματος. Τα προβλήματα και οι δυσκολίες προκύπτουν όταν αποτυγχάνει η διαδικασία της εξεικόνισης, η οποία εκλαμβάνεται ως η πράξη με την οποία το άτομο δημιουργεί μια ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα σε μια εσωτερική νοητική δομή και σε ένα ερέθισμα, το οποίο γίνεται νωρίτερα αντιληπτό με την ενεργοποίηση των αισθήσεων. Συνεπώς, η χρήση των αναπαραστάσεων δεν αποφέρει τα προσδοκώμενα αποτελέσματα στη διδασκαλία, όταν ο μαθητής δεν είναι σε θέση, για διάφορους εξωγενείς ή ενδογενείς παράγοντες, να διαχειριστεί τα δεδομένα. Έτσι, καθώς η σύνδεση αυτή είναι αμφίδρομη, οδηγούνται και οι δύο πλευρές σε αποτυχία (Zazkis et al., 1996: 441 στο Ηλία , Χρύσανθου, Φιλίππου, 2003).

### 4.5 Η διαδικασία της οπτικοποίησης στα μαθηματικά

Για την ενίσχυση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, οι έμπειροι μαθηματικοί αξιοποιούν διάφορες αναπαραστάσεις, όπως είναι ο οπτικές, οι απτικές και οι κινητικές. Οι αμερικάνικοι οργανισμοί για τα μαθηματικά, όπως το National Council for the Teaching of Mathematics (NCTM) και Mathematical Association of America (MAA), συνηγορούν στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών εννοιών, όρων, σχέσεων και συμβόλων. Ωστόσο, η πλειοψηφία των μαθητών εξακολουθούν να διδάσκονται τα μαθηματικά, σαν ένα μάθημα που βασίζεται αποκλειστικά στη χρήση των συμβόλων και των αριθμών, χωρίς να προβλέπεται η υιοθέτηση στρατηγικών εκμάθησης με την αξιοποίηση οπτικών αναπαραστάσεων, των οποίων η συμβολή στην διευκόλυνση της μάθησης έχει επισημανθεί στο σύνολο σχεδόν του παρόντος πονήματος.

Σύγχρονες επιστημονικές έρευνες έχουν καταδείξει στοιχεία για τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί ο εγκέφαλος, όταν το άτομο βρίσκεται σε διαδικασία μελέτης και μάθησης των μαθηματικών. Ο εγκέφαλος, ο οποίος αποτελείται από ένα δίκτυο νευρώνων από διαφορετικές περιοχές, όταν λειτουργεί υπό συνθήκες διαχείρισης γνώσης, ενεργοποιείται έτσι ώστε οι συγκεκριμένοι νευρώνες να αναπτύξουν ταυτόχρονη επικοινωνία μεταξύ τους, που είναι απαραιτήτως αμφίδρομη. Συγκεκριμένα στην περίπτωση των μαθηματικών, οι έρευνες δείχνουν ότι ο εγκέφαλος βρίσκεται σε μια οπτική διαδικασία, από την πρώτη ακόμα επαφή του με σκέψεις που βασίζονται σε αριθμητικά ή μαθηματικά σύμβολα. Κατά τη διάρκεια των μαθηματικών εργασιών ο άνθρωπος αναπτύσσει συλλογιστικές και στρατηγικές σκέψης, με την ενεργοποίηση δύο οπτικών μονοπατιών, που βοηθούν και υποστηρίζουν τη σκέψη. Η λειτουργία των δύο αυτών οπτικών οδών εντείνεται όταν υπάρχει στον χώρο κάποιο οπτικό ερέθισμα, δηλαδή ένα αντικείμενο, μια απεικόνιση, μια αναπαράσταση, μια ενσώματη κίνηση κ.ά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ύπαρξη της αναπαράστασης μιας ποσότητας, όπως είναι η αριθμογραμμή, η επίδραση της οποίας στη σκέψη των μικρών παιδιών και των μαθητών της πρώτης σχολικής ηλικίας είναι πολύ σημαντική (Boaler et al., 2016). Επίσης θετικά επιδρά και η χρήση των δακτύλων από τη μεριά των μαθητών. Συγκεκριμένα η αναπαράσταση των αριθμών και ο υπολογισμός των πράξεων με τα δάκτυλα προαναγγέλλει μια μελλοντική επιτυχία στα μαθηματικά περισσότερο από ότι τα σκορ στα τεστ των μαθημάτων (Boaler et al., 2016), καθώς συσχετίζεται με τον τρόπο που το κάθε άτομο αναπτύσσει και οργανώνει σχέδια συλλογισμού, εκμεταλλευόμενο και αξιοποιώντας όλα τα ερεθίσματα, τα μέσα και τους σημειωτικούς πόρους, που διατίθενται κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Οι νευροεπιστήμονες υποστηρίζουν πως τα δάκτυλα, εκλαμβάνονται ως ο σύνδεσμος ανάμεσα στα νούμερα και στη συμβολική τους αναπαράσταση και είναι μια εξωτερική υποστήριξη για την εκμάθηση του τρόπου επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων (Boaler et al., 2016).

### 4.6. Επίλυση μαθηματικού προβλήματος (ΕΜΠ)

Σημαντικό κεφάλαιο για την μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί η επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Γενικά πρόβλημα ονομάζεται μία κατάσταση κατά την οποία το άτομο δε γνωρίζει αρχικά τον τρόπο αντιμετώπισής της ώστε να οδηγηθεί στη λύση (Schonefeld,1985;1992: στο Τζεκάκη, 2007). Στην προσπάθειά του αυτή το άτομο/ ο μαθητής επιστρατεύεται τις γνώσεις που έχει κι αν αυτές δεν είναι αρκετές αναγκάζεται να τις διευρύνει, να τις επαναπροσδιορίσει ή να τις αναδομήσει, στοιχεία που μπορούν να οδηγήσουν στην κατασκευή και την ανάπτυξη μιας νέας γνώσης (Borasi, 1992: στο Τζεκάκη, 2007). Σύμφωνα με τον Polya (1967: στο Τζεκάκη, 2007) το μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί θεμελιακή μαθηματική δραστηριότητα καθώς είναι η αναζήτηση ενός τρόπου για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος το οποίο δεν είναι άμεσα γνωστό από τον λύτη.

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος αποτελεί πρωταρχικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης και ο ίδιος ο Polya (1985: στο Λουμάκου, 2010) θεωρεί την Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος (ΕΜΠ) τέχνη και δεξιότητα, που μπορεί να διδαχθεί με τη μίμηση και την άσκηση, και τη διακρίνει στα εξής τέσσερα στάδια:

Α) Κατανόηση του προβλήματος. Είναι η πρωταρχική και σημαντική διαδικασία, καθώς καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το αν ακολουθηθούν τα σωστά βήματα, που θα οδηγήσουν στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα. Αν τα ερωτήματα και τα ζητούμενα του προβλήματος δεν γίνουν κατανοητά από τον μαθητή, είναι πολύ πιθανό να μην είναι σωστή η τελική λύση που θα προτείνει. Συνεπώς, θα πρέπει να γίνει προσεκτική ανάγνωση του λεκτικού κειμένου για την εσωτερίκευση και τη νοηματοδότηση των στοιχείων και των δεδομένων, που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα

Β) Κατάστρωση σχεδίου επίλυσης του προβλήματος. Στο στάδιο αυτό, επιχειρείται να οργανωθεί ένα μαθηματικό μοντέλο και να σχεδιαστεί μια στρατηγική συλλογιστική, με βάση τα στοιχεία και τις μεταξύ τους σχέσεις .

Γ) Εκτέλεση ή εφαρμογή του σχεδίου. Στο στάδιο αυτό γίνεται η υλοποίηση του μαθηματικού μοντέλου και του στρατηγικού σχεδίου συλλογιστικής. Επίσης, εκτελούνται οι πράξεις που έχουν προβλεφθεί.

Δ) Αναδρομή ή έλεγχος του σχεδίου. Στο στάδιο αυτό γίνεται ο έλεγχος και η επαλήθευση, ερμηνεύεται και αξιολογείται το μαθηματικό αποτέλεσμα σχετικά με την αρχική κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα.

Βασική προϋπόθεση για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος είναι η κατανόησή του. Κατανόηση του προβλήματος σημαίνει εντοπισμός των δεδομένων, των ζητούμενων, των περιορισμών και γενικότερα των συνθηκών που το περιγράφουν (Τζεκάκη, 2007). Ειδικότερα, για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, κρίσιμο θεωρείται το στάδιο της κατανόησης του μαθηματικού προβλήματος, ώστε ο μαθητής να καταστεί σε θέση να είναι ικανός να προχωρήσει στην επεξεργασία και την επίλυσή του. Κατά τη διαδικασία της επεξεργασίας των πληροφορικών δεδομένων, συνήθως μπορεί να βοηθηθεί κάνοντας κάποιο σχήμα, σκίτσο, διάγραμμα, εικόνα ή πίνακα για να μπορέσει να οργανώσει ένα σχέδιο ή μια στρατηγική επίλυσης. Στη συνέχεια, και αφού εφαρμόσει το σχέδιο, θα ελέγξει πόσο αποτελεσματικό είναι ή αν είναι απαραίτητο να γίνει κάποια τροποποίηση ή αν είναι αναγκαίο να εργαστεί εκ νέου για την εύρεση εναλλακτικού τρόπου επίλυσης, που θα αποδειχθεί περισσότερο αποτελεσματικός (Κατσαρού, 2011).

Η χρήση αναπαραστάσεων στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (σχήματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, αριθμογραμμές κ.ά.) είναι σημαντικός παράγοντας που συντελεί στην επιτυχή μετάδοση μαθηματικών ιδεών από τον εκπαιδευτικό και την καλύτερη κατανόησή τους από τον μαθητή. Οι εικόνες αποτελούν βασικό εργαλείο της μαθηματικοποίησης, καθώς δημιουργούν τον ενδιάμεσο σταθμό μεταξύ της πραγματικότητας και της κατανόησης των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, που συνήθως εκλαμβάνονται από τους μαθητές ως στοιχεία που βρίσκονται έξω από το κοινωνικό και απτό γίγνεσθαι που τους περιβάλλει. Η χρήση των αναπαραστάσεων, σε συνδυασμό με τη χρήση απλής, κατανοητής και λειτουργικής γλώσσας στο μάθημα των μαθηματικών, βοηθάει τους μαθητές να ξεπεράσουν τις πιθανές δυσκολίες (Κατσαρού, 2011). Μέσα από τη συζήτηση, τον προφορικό και τον γραπτό λόγο, τη χρήση εικόνων κι αναπαραστάσεων, δύνανται οι μαθητές να εξοικειωθούν με τα μαθηματικά και να αναπτύξουν μια θετική στάση απέναντι σε αυτά χωρίς να νιώθουν φόβο, αρνητισμό, ακόμα και αποστροφή για το μάθημα αυτό.

### 4.7. Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Οι αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, αφορούν ένα ξεχωριστό και πολύ σημαντικό κεφάλαιο της διδασκαλίας του μαθήματος. Σύμφωνα με τον Duval (1999:στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) η πρόοδος στα μαθηματικά συνδέεται με την εξέλιξη διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων, έχοντας ως βάση τους γνωστικούς τρόπους της πρωταρχικής δυικότητας (primitive duality) των αισθητηρίων συστημάτων της λεκτικής γλώσσας και της μη λεκτικής, δηλαδή της εικόνας.

Σύμφωνα με τους Pape και Tchoshanov (2001: στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009), οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι μια νοητική αφαίρεση και μια διασύνδεση μεταξύ της οπτικοποίησης των εννοιών και της εξωτερικής αναπαράστασης. Έτσι, μια εσωτερική αναπαράσταση αποτελεί εσωτερίκευση (internalisation) μιας εξωτερικής αναπαράστασης. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι σύμφωνα με τους Lesh, Behr & Post (1987: στο Λουμάκου, 2010), «*οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών*». Με άλλα λόγια, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν την εξωτερικευμένη έκφραση του τρόπου, με τον οποίο οι μαθητές εκφράζουν τι έχουν κατανοήσει ως προς τις μαθηματικές έννοιες και τις διαδικασίες που διδάσκονται.

Μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών αναπαραστάσεων υπάρχει μια σχέση αλληλεπίδρασης, η οποία είναι βασικός παράγοντας της μάθησης των μαθηματικών. Εξάλλου, η εξωτερίκευση των νοητικών σχημάτων που χρησιμοποιούν οι μαθητές, είναι βασική απόδειξη του επιπέδου της εννοιολογικής κατανόησης που έχουν πετύχει. Πολλοί ερευνητές έχουν δώσει έμφαση στη λειτουργία των πολλαπλών αναπαραστάσεων ως εργαλείο για την εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών και για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων.

Συγκεκριμένα όπως ειπώθηκε προηγουμένως, στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, σύμφωνα με τον Polya (1954), σημαντικό είναι το στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, στο οποίο περιλαμβάνεται η ανάγνωση του προβλήματος και η κατασκευή της νοητικής αναπαράστασης, ώστε να μεταφραστεί το πρόβλημα, να συσχετιστούν τα δεδομένα και να υλοποιηθεί τελικά η αναπαράσταση με τη χρήση κάποιου σημειωτικού συστήματος. Οι ποικίλες αναπαραστάσεις και απεικονίσεις, μπορούν να αποτελέσουν ένα άριστο εργαλείο και μέσο για τη διευκόλυνση των μαθητών στην κατανόηση και την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων.

Οι Lesh et al. (1987:στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) διακρίνουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων, τα οποία σχετίζονται με τα μαθηματικά και την επίλυση των προβλημάτων :

Α) Πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής και του εξωτερικού κόσμου, όπου η γνώση οργανώνεται και ερμηνεύεται με βάση τα προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωπα τα άτομα.

Β) Διαχειρίσιμα υλικά, όπου σημασία έχουν οι σχέσεις και οι της καθημερινής χρήσης των υλικών αυτών.

Γ) Εικόνες ή διαγράμματα, που μπορούν να εσωτερικευθούν και να μετατραπούν σε νοητικές εικόνες από τους μαθητές.

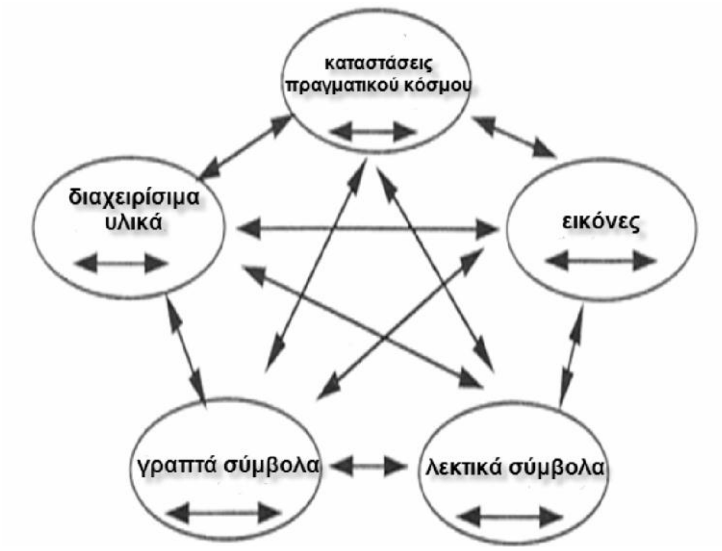
Δ) Προφορικά σύμβολα της καθημερινής αλλά και της τεχνικής γλώσσας των μαθηματικών.

Ε) Γραπτά σύμβολα της καθημερινής και της μαθηματικής γλώσσας.

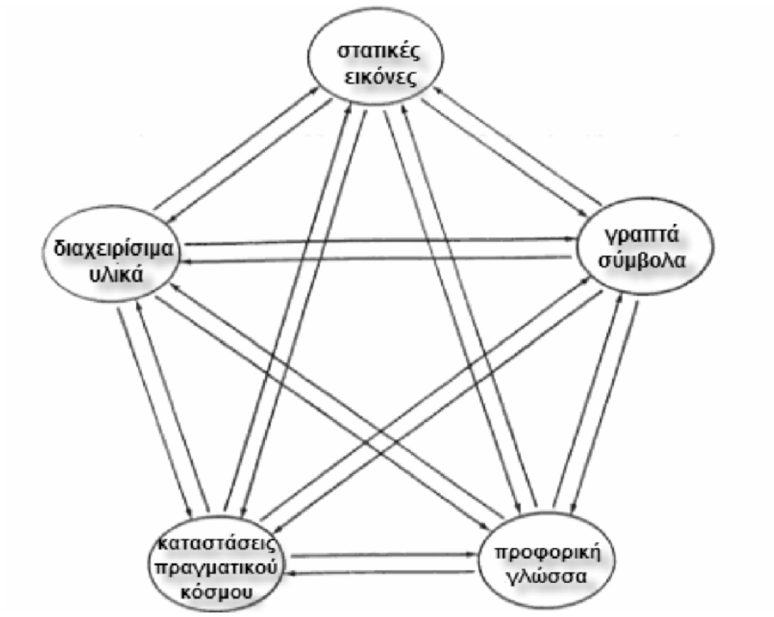
Επομένως, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που εντάσσονται στην εκπαίδευση των μαθηματικών βελτιώνουν τη δυνατότητα επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (Borba & Confrey, 1993: στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009), η οποία είναι ένας πολύ σημαντικός στόχος της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών στο περιβάλλον της σχολικής αίθουσας.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι αλληλεπιδράσεις, τόσο μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης (βέλη που συνδέουν τους διαφορετικούς τρόπους) όσο και στα εσωτερικά στοιχεία του αναπαραστατικού μέσου (βέλη εσωτερικά).

α)




β)




Σχήμα 1 α) Μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh, 1979).
β) Αλληλεπιδραστικό μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων
(Lesh, Post & Behr, 1987: στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009: 260)

Εξάλλου η σημασία των αναπαραστάσεων στην ΕΜΠ τονίζεται και από τους Mayer και Hegarty (1996: στο Λουμάκου, 2010), οι οποίοι περιγράφουν τα στάδια της επίλυσης ως εξής:

Α) Στο πρώτο στάδιο γίνεται η μετάφραση και νοηματοδότηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων. Δηλαδή, ο μαθητής εννοιολογικοποιεί τα στοιχεία του προβλήματος, τα σημασιοδοτεί και τα μετατρέπει σε νοητικές αναπαραστάσεις.

Β) Στο δεύτερο στάδιο, αφού έχει ολοκληρωθεί ο μετασχηματισμός των δεδομένων σε νοητικές αναπαραστάσεις, συνδυάζονται και διαμορφώνουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για τη φύση του προβλήματος.

Γ) Στο τρίτο στάδιο, ακολουθεί ο σχεδιασμός, κατά τη διάρκεια του οποίου επινοείται ένα σχέδιο επίλυσης, βάσει των δεδομένων στοιχείων. Το σχέδιο αυτό αξιοποιεί τα δεδομένα ως εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως για παράδειγμα κάποια σύμβολα, σχεδιαγράμματα, γραφήματα, τα οποία περιλαμβάνονται στο σχέδιο λύσης.

Δ) Στο τελευταίο στάδιο, εφαρμόζεται και εκτελείται το σχέδιο της επίλυσης και προκύπτουν οι αριθμητικές πράξεις, που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα, είτε σωστό είτε λανθασμένο.

Ο Duval (2006: στο Λουμάκου, 2010), αναφέρεται στη συμβολή της αναπαράστασης κατά τη διαδικασία της ΕΜΠ, η οποία συντελείται σε τρεις φάσεις:

Α) Στην πρώτη φάση, γίνεται η εκφώνηση του προβλήματος, κατά τη διάρκεια της οποίας χρησιμοποιείται μια λεκτική γλώσσα, με αρκετά διαφοροποιημένο λεξιλόγιο από εκείνο της καθημερινής γλώσσας. Αυτό σημαίνει ότι, εκτός από το «συμβατικό» λεξιλόγιο, χρησιμοποιούνται λέξεις και εκφράσεις, που αφορούν σε μαθηματικούς όρους και έννοιες. Γίνεται χρήση δηλαδή, ενός συνδυασμού δύο αναπαραστάσεων της «φυσικής» και της μαθηματικής γλώσσας.

Β) Στη δεύτερη φάση, γίνεται η μετάφραση και κατανόηση του προβλήματος, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να αντιληφθούν το νόημα και να προβούν στη διαμόρφωση της αναπαράστασης, που θα τους βοηθήσει να περάσουν στην επόμενη φάση, που είναι εκείνη της επίλυσης.

Γ) Στην τελευταία φάση, γίνεται η συμβολική επεξεργασία της λύσης, όπου, όπως γίνεται φανερό, είναι απαραίτητη η συμβολική αναπαράσταση των πράξεων για να υπάρξει ένα αποτέλεσμα, που θα δώσει την τελική απάντηση.

Ο Javnier (1987: στο Λουμάκου, 2010), αναφέρει ότι η ιδανική μέθοδος για τη μάθηση των μαθηματικών θα ήταν η χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου. Συγκεκριμένα για την ΕΜΠ θεωρεί ότι είναι σημαντική η ικανότητα μετάφρασης ή νοηματοδότησης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο. Όμως το πέρασμα αυτό δε θεωρείται αυτονόητο, ούτε είναι μια εύκολη διαδικασία για τους μαθητές, καθώς έχει αποδειχθεί ερευνητικά ότι αποτελεί μια από τις βασικές δυσκολίες που συναντούν στην ΕΜΠ.

Σύμφωνα με τον Πόρποδα (1991, στο Λουμάκου, 2010), οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αφορούν στην αναπαράσταση των πληροφοριών, οι οποίες προσλαμβάνονται από κάθε άτομο, στο μνημονικό του σύστημα, με τέτοιο τρόπο που να είναι δυνατή η συγκράτησή τους, η διαχείριση και η επεξεργασία τους. Οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζει το κάθε άτομο για την εκάστοτε μαθηματική έννοια είναι διαφορετικές και δηλώνουν την προσωπική διάσταση του τρόπου κατάκτησης της έννοιας αυτής. Σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, διαπιστώνεται ότι όσο πολυγραμματισμένο και ώριμο είναι ένα άτομο, τόσο πιο πλούσιες είναι οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζει για κάθε μαθηματική έννοια. Παράλληλα, όταν μια μαθηματική έννοια είναι πλήρως κατανοητή στο άτομο/ μαθητή, τόσο πιο πολλές είναι οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζει, οι οποίες συμβάλλουν θετικά στην περαιτέρω κατανόηση και στην κατάκτηση της πλήρους γνώσης.

Στο σημείο αυτό συνοψίζοντας μπορούμε να αναφέρουμε πως η μαθηματική διδασκαλία και μάθηση είναι μια διαδικασία που χαρακτηρίζεται από την πολυτροπικότητα και τη χρήση αναπαραστάσεων. Οι αναπαραστάσεις αυτές (οι οποίες αποτελούν σημαντικό κομμάτι της πολυτροπικής προσέγγισης της μάθησης των μαθηματικών) που μπορεί να είναι λεκτικές, εικονικές ή συμβολικές επιδρούν στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Στο ερευνητικό μέρος της εργασίας θα επιχειρήσουμε να καταδείξουμε πώς και πόσο οι ίδιες διευκολύνουν ή όχι την προσπάθεια των μαθητών της Α΄ τάξης Δημοτικού στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Η έρευνα βασίζεται στην πολυτροπική προσέγγιση της μάθησης των μαθηματικών η οποία θεωρεί πως όταν εργαζόμαστε με μαθηματικές ιδέες είναι πολύ σημαντικό να παρατηρούμε "την έκταση των γνωστικών, φυσικών και αντιληπτικών πηγών" που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι και τον τρόπο που αυτές αλληλοσχετίζονται (Radford et al, 2009: στο Ευαγγέλου, 2017). Η ίδια προσέγγιση υποστηρίζει την άποψη του Duval (2006) ότι για να γίνουν κατανοητές οι μαθηματικές ιδιότητες και οι σχέσεις που υπάρχουν σε μια μαθηματική έννοια απαιτείται ο συνδυασμός και συντονισμός πολλαπλών σημειωτικών συστημάτων. Αυτό σημαίνει πως οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλαπλά σημειωτικά συστήματα (λέξεις, μαθηματικά σύμβολα, γραφήματα κ.ά.) καθώς και χειραπτικά υλικά για να μπορέσουν να αντικειμενοποιήσουν τη μαθηματική γνώση (Radford, Bardini & Sabena, 2007: στο Ευαγγέλου, 2017). Η έρευνα βασιζόμενη στις παραπάνω απόψεις καλείται να εξετάσει α) με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό επιδρούν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές της Α΄τάξης Δημοτικού και β) αν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν μπορούν να αποτελέσουν ενδείξεις του επιπέδου της γνώσης που έχει κατακτηθεί από τους μαθητές.

# Β΄ Μέρος: Η έρευνα

## Κεφάλαιο 5ο: Το ερευνητικό σχέδιο

### 5.1 Τα ερευνητικά ερωτήματα

Η ερευνητική προσπάθεια του παρόντος πονήματος, εστιάζει στον τρόπο και τον βαθμό που συμβάλλουν η πολυτροπικότητα και οι αναπαραστάσεις (λεκτικές, εικονικές, συμβολικές) ως έκφραση της πολυτροπικότητας, στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές και μαθήτριες της Α΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Ακόμη η αποτελεσματική χρήση και αξιοποίηση των λεκτικών, εικονικών και συμβολικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές, εκφράζει τον βαθμό κατανόησης των σχετικών μαθηματικών εννοιών, που συλλαμβάνουν, διαχειρίζονται και επεξεργάζονται. Σε αντίθετη περίπτωση, αναδεικνύεται η αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και επισημαίνονται οι πιθανές παρανοήσεις που προκαλούνται από τους ίδιους. Στην προσπάθεια αυτή θέτουμε τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Οι μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων;
- Ποιες αναπαραστάσεις χρησιμοποιούν;
- Ποιες αναπαραστάσεις τους διευκολύνουν και ποιες τους δυσκολεύουν στο στάδιο της αξιοποίησής τους;
- Με ποια είδη αναπαραστάσεων είναι εξοικειωμένοι περισσότερο;
- Μπορούν να μεταφράζουν μια μαθηματική έννοια, τεχνική κλπ από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο;
- Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν δηλώνουν το βαθμό εννοιολογικής κατανόησης από την πλευρά των μαθητών;

### 5.2 Μεθοδολογία – Το πλαίσιο της έρευνας

Το βολικό δείγμα της έρευνας αποτελείται από 42 μαθητές και μαθήτριες της Α΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου στην περιοχή της Δυτικής Θεσσαλονίκης, κατά το σχολικό έτος 2016-2017 τους μήνες Απρίλιο και Μάιο. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί και να ληφθεί υπόψη ότι υπάρχει ένα αγόρι που είναι δίγλωσσο, με μητρική γλώσσα την αλβανική, το οποίο διαθέτει ένα ικανοποιητικό επίπεδο γνώσης της ελληνικής γλώσσας. Η Α΄ τάξη του συγκεκριμένου Δημοτικού σχολείου αποτελείται από δύο τμήματα, με 21 μαθητές το καθένα. Και στα δύο τμήματα υπάρχει ένας μαθητής και η ειδική παιδαγωγός για την παράλληλη στήριξη μέσα στην τάξη. Ο ένας μαθητής φοιτά στο $A_1$ και ο άλλος στο $A_2$. Το πρώτο τμήμα στο οποίο δίδασκε η ερευνήτρια, έχει 13 αγόρια και 8 κορίτσια, ενώ το δεύτερο τμήμα έχει 12 αγόρια και 9 κορίτσια. Το μάθημα των μαθηματικών διδάσκεται καθημερινά, μια διδακτική ώρα, πέντε ημέρες την εβδομάδα. Οι ασκήσεις δόθηκαν κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής του μαθήματος των μαθηματικών.

Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας, δόθηκαν σε όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες των δύο τμημάτων ασκησιολόγια που περιελάμβαναν: α) 10 ασκήσεις πρόσθεσης και 10 ασκήσεις αφαίρεσης, οι οποίες θα επιλύονταν με τη χρήση της συμβολικής γραφής των αριθμών και των συμβόλων των πράξεων, όπως επίσης και με τη βοήθεια του χειραπτικού υλικού, που ήταν ένα αριθμητήριο, δηλαδή ένας οριζόντιος άβακας, β) 4 λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης, όπου θα έπρεπε να επιλυθούν με τη χρήση αριθμητικών συμβόλων και μόνο με τις ανάλογες πράξεις, γ) τα 4 ίδια λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης, τα οποία αφού θα επιλύονταν βάσει των προσωπικών στρατηγικών σχεδίων συλλογισμού στη συνέχεια της διαδικασίας θα έπρεπε οι ίδιοι μαθητές να αναπαραστήσουν με σύμβολα τη λύση που σχεδίασαν και επίσης να παρουσιάσουν λεκτικά και μη λεκτικά, δηλαδή με τη χρήση συμβόλων, το αποτέλεσμα που βρήκαν.

## 5.3 Η έρευνα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση της έρευνας, αρχικά τα παιδιά κλήθηκαν να λύσουν ασκήσεις προσθαφαίρεσης με τη χρήση της συμβολικής και της πραξιακής αναπαράστασης (χειραπτικό υλικό - αριθμητήριο). Κατόπιν, τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν τα προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης, με τη βοήθεια της συμβολικής γλώσσας των μαθηματικών, δηλαδή με αριθμούς και σύμβολα πράξεων. Στη δεύτερη φάση της έρευνας, η οποία έγινε στις αρχές Μαΐου, μετά από περίπου δύο εβδομάδες από την πρώτη φάση, δόθηκαν στα παιδιά τα ίδια προβλήματα, με την ίδια λεκτική γλώσσα, αλλά αυτή τη φορά, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τη «φυσική» γλώσσα, μαζί με την απεικονιστική και τη συμβολική, στην προσπάθειά τους να τα επιλύσουν. Στη φάση αυτή θα χρησιμοποιούσαν για τους υπολογισμούς τους και τα δάκτυλα αν το ήθελαν. Σε δεύτερο χρόνο αφού επεξεργαστήκαμε τα δεδομένα από τις ασκήσεις, κάποιοι μαθητές, επιλεκτικά, κλήθηκαν να δώσουν συνέντευξη στην ερευνήτρια, για να γίνουν διευκρινίσεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν στην επίλυση των ασκήσεων και των μαθηματικών προβλημάτων.

Όπως ήταν αναμενόμενο, κατά τη δεύτερη φάση της προσπάθειας των μαθητών, οι δυσκολίες που θα συναντούσαν θα ήταν περισσότερες, καθώς απαιτήθηκε η χρήση πολλαπλών τύπων αναπαραστάσεων για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Στο σημείο αυτό εγείρεται το ερώτημα, αν και κατά πόσο βοηθά στο μαθηματικό έργο των μικρών παιδιών, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων ή αντιθέτως, δυσχεραίνει το έργο τους η μετάφραση του ενός συστήματος αναπαράστασης σε ένα άλλο κατά τη διάρκεια της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων. Είναι πιο εύκολη η επίλυση μαθηματικών ασκήσεων και προβλημάτων με τη χρήση μόνο της συμβολικής αναπαράστασης ή συμβαίνει το αντίθετο ;

Οι ασκήσεις προσθαφαίρεσης, που συμπεριλήφθηκαν στο ασκησιολόγιο της έρευνας, αφορούσαν σε προσθέσεις μέσα στη δεκάδα, με δύο μονοψήφιους προσθετέους, όπου όμως έλειπε ο δεύτερος, ενώ δίδονταν το άθροισμα της πρόσθεσης. Όσον αφορά στις ασκήσεις αφαίρεσης, οι πέντε πρώτες αφορούσαν σε αφαιρέσεις, που γίνονταν μέσα στη δεκάδα, και σκοπός των ασκήσεων ήταν να αναζητηθεί και να ανευρεθεί το τελικό αποτέλεσμα της πράξης. Στις άλλες πέντε αφαιρέσεις, ο μειωτέος ξεπερνούσε τη δεκάδα και ήταν της μορφής (10+χ)-χ ή (20+χ)-χ, και αναζητούνταν το αποτέλεσμα της πράξης.

Τα μαθηματικά προβλήματα του δοκιμίου της έρευνας, καλύπτουν και τις τέσσερις βασικές κατηγορίες των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Συγκεκριμένα, τα τρία (πρώτο, δεύτερο και τρίτο) από τα τέσσερα προβλήματα που κλήθηκαν να λύσουν τα παιδιά, καλύπτουν τις τρεις βασικές κατηγορίες προβλημάτων προσθαφαίρεσης, σύμφωνα με την ταξινόμηση του Greeno και των συνεργατών του (στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012), οι οποίες είναι: α) η κατηγορία αλλαγής (change), β) η κατηγορία συνδυασμού (combine) και γ) η κατηγορία σύγκρισης (compare). Το τέταρτο και τελευταίο μαθηματικό πρόβλημα, ανήκει σε μια τέταρτη κατηγορία, αυτή της εξισορρόπησης (equalize), σύμφωνα με τους Carpenter και Moser (1982: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012). Αυτή η κατηγορία προβλημάτων αποτελεί συνδυασμό δύο κατηγοριών: της αλλαγής και της σύγκρισης.

## 5.4 Δοκίμια έρευνας

Οι ασκήσεις και τα αριθμητικά προβλήματα που δόθηκαν στα παιδιά είναι τα εξής :

**Α΄ΦΑΣΗ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

*1) Λύνω τις ασκήσεις , αν θέλω χρησιμοποιώ το αριθμητήριό μου :*

*7 + … = 10     10 – 4 =*

*6 + … = 10     12 – 8 =*

*4 + … = 10     9 – 1 =*

*3 + … = 6     6 – 3 =*

*5 + … = 8     8 – 4 =*

*4 + … = 8     15 – 5 =*

*7 + … = 9     17 – 7 =*

*5 + … = 10     21 – 1 =*

*8 + … = 8     26 – 6 =*

*10 + … = 14     18 – 8 =*

*Απαντώ :*

*Χρησιμοποίησα το αριθμητήριό μου ; Κυκλώνω το σωστό :*

*ΝΑΙ     ΟΧΙ*

*Δυσκολεύομαι χωρίς το αριθμητήριο ; Κυκλώνω το σωστό :*

*NAI OXI*

*2) Λύνω τα προβλήματα :*

*Α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια. Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δυο μαζί ;*

*Β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;*

*Γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα περισσότερα αυτοκόλλητα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;*

*Δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ στον κουμπαρά της και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;*

**Β΄ΦΑΣΗ**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

*Λύνω τα προβλήματα :*

*α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί ;*

*Σχεδιάζω το πρόβλημα :*

*Λύνω το πρόβλημα :*

*Απαντώ :*

*β)  Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;*

*Σχεδιάζω το πρόβλημα :*

*Λύνω το πρόβλημα :*

*Απαντώ :*

*γ)  Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;*

*Σχεδιάζω το πρόβλημα :*

*Λύνω το πρόβλημα :*

*Απαντώ :*

*δ )  Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;*

*Σχεδιάζω το πρόβλημα :*

*Λύνω το πρόβλημα :*

*Απαντώ :*

## 5.5 Θεωρητικά στοιχεία του ερευνητικού σχεδίου

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος που σκέφτονται τα παιδιά και αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση, θα παρουσιαστούν παρακάτω, κάποια θεωρητικά στοιχεία για την οικοδόμηση των φυσικών αριθμών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

### *5.5.1 Οικοδόμηση φυσικών αριθμών*

Σύμφωνα με τους ερευνητές, η ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών βασίζεται κατά κύριο λόγο στην ικανότητα του ατόμου για αρίθμηση. Η κατασκευή του αριθμού δεν είναι κάτι απλό κι αυτονόητο για τα μικρά παιδιά, αλλά αποτελεί μια χρονοβόρα διαδικασία, η οποία διέρχεται πρώτα από το χειροπιαστό/ χειρωνακτικό στάδιο, έπειτα μεταφέρεται στο εικονικό στάδιο και στη συνέχεια επιτυγχάνεται η δόμηση του αριθμού, ως αφηρημένη έννοια που εδράζει στη σκέψη του παιδιού χωρίς αντικείμενα.

Ειδικότερα ο Steffe και οι συνεργάτες του (1983, 1988: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012), μελέτησαν την κατασκευή της έννοιας του αριθμού μέσα από την αρίθμηση και κατέληξαν σε ένα μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει πέντε τύπους αριθμήσιμων μονάδων, που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην προσπάθειά τους να βρουν τον πληθικό αριθμό ενός συνόλου. Αυτές είναι οι εξής: α) οι αντιληπτικές αριθμήσιμες μονάδες (perceptual), β) οι αναπαραστατικές (figural), γ) οι κινητικές (motor), δ) οι λεκτικές (verbal), και ε) οι αφηρημένες (abstract).

Στο πρώτο στάδιο των αντιληπτικών αριθμήσιμων μονάδων, τα παιδιά μετρούν τα αντικείμενα που βλέπουν, χωρίς όμως να μπορούν να αριθμήσουν τα αντικείμενα δύο συλλογών, ενώνοντας τες σε μια, αλλά αριθμούν ξεχωριστά τα αντικείμενα της κάθε συλλογής ξεκινώντας από τον αριθμό «1».

Όταν οι μαθητές θα μπορέσουν να ενώσουν τα αντικείμενα των δύο συλλογών σε μια και να βρουν τον πληθικό αριθμό, ο οποίος αντιπροσωπεύει την ένωση των δύο συνόλων, τότε θα έχουν σχηματίσει αναπαραστατικές αριθμήσιμες μονάδες, χρησιμοποιώντας συνήθως τα δάχτυλά τους, σηκώνοντάς τα διαδοχικά καθώς μετρούν. Ξεκινούν λοιπόν, από την αρχή την αρίθμηση της πρώτης συλλογής και μετά συνεχίζουν με τα αντικείμενα της δεύτερης συλλογής μέχρι να τα μετρήσουν όλα. Η αρίθμηση αυτή με τις αντιληπτικές ή τις αναπαραστατικές αριθμήσιμες μονάδες γίνεται με τη συνοδεία αυθόρμητων κινήσεων των δαχτύλων, τα οποία χρησιμοποιούν τα παιδιά κι έχουν μεγάλη σημασία στη διαδικασία αυτή. Τότε είναι που κατασκευάζουν τις κινητικές αριθμήσιμες μονάδες, για να διευκολυνθούν στην εύρεση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο συνόλων. Στην περίπτωση αυτή, δεν επηρεάζονται από την άμεση χρήση των αντικειμένων, καθώς τα δάχτυλα και οι ενσώματες κινήσεις που κάνουν, τα βοηθούν να κατακτήσουν την έννοια του αριθμού και των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στη συνέχεια, οι λεκτικές αριθμήσιμες μονάδες είναι η κατάκτηση που τους επιτρέπει να αποδεσμευθούν από τις αισθησιοκινητικές δραστηριότητες των αντιληπτικών και κινητικών αριθμήσιμων μονάδων που χρησιμοποιούσαν. Μετρούν γρήγορα κι αυθόρμητα, βλέποντας μόνο τα αντικείμενα ή επαναφέροντάς τα στη μνήμη τους. Το τελευταίο στάδιο είναι αυτό των αφηρημένων αριθμήσιμων μονάδων όπως προαναφέρθηκε. Στην περίπτωση αυτή, τα παιδιά δεν μετρούν το πρώτο σύνολο ξανά από την αρχή δηλαδή από τον αριθμό «1», αλλά ξεκινούν από τον πληθικό αριθμό του πρώτου συνόλου, μετρώντας στη συνέχεια τόσους αριθμούς επάνω, όσα είναι τα αντικείμενα του δεύτερου συνόλου. Δεν χρειάζεται οι μαθητές να αριθμήσουν τα αντικείμενα του πρώτου συνόλου από την αρχή, αλλά αφού γνωρίζουν ότι είναι, για παράδειγμα 6, ξεκινούν την αρίθμηση από το 6, έχοντας κατακτήσει το νόημα του συγκεκριμένου αριθμού ως ένα σύνολο έξι μονάδων. Στο στάδιο αυτό παρουσιάζεται και η λεγόμενη διπλή αρίθμηση (double counting) από το παιδί, κατά την οποία αποκτά πλέον την ικανότητα να αντιστοιχίζει αριθμολέξεις σε αριθμολέξεις, χωρίς τη χρήση ορατών ή ιδεατών αντικειμένων.

Το παραπάνω μοντέλο του Steffe και των συνεργατών του επιτρέπει την ερμηνεία των στρατηγικών που χρησιμοποιούν τα παιδιά στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων πρόσθεσης κι αφαίρεσης κατά την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία.

### *5.5.2 Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών*

Τα παιδιά που βρίσκονται στο στάδιο των αντιληπτικών ή αναπαραστατικών αριθμήσιμων μονάδων δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν προβλήματα πρόσθεσης με ελλείποντα προσθετέο (Steffe et al., 1982: στο Καφούση και Σκουμπουρδή, 2012). Όταν έχουν κατακτήσει και το στάδιο των αφηρημένων αριθμήσιμων μονάδων, τότε τα παιδιά είναι σε θέση να διαχειριστούν τα προβλήματα αφαίρεσης, και συνήθως αριθμούν αντίστροφα για να βρουν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, όταν ο αφαιρετέος είναι μικρός αριθμός. Όταν ο αφαιρετέος είναι μεγάλος αριθμός, τότε βρίσκουν το αποτέλεσμα με πρόσθεση ξεκινώντας από τον αφαιρετέο για να καταλήξουν στον μειωτέο. Με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουν τον ελλείποντα προσθετέο σε μια πράξη πρόσθεσης. Σύμφωνα με τη Fuson (2004: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012), η διδασκαλία της αφαίρεσης πρέπει να επιτρέπει στα παιδιά τη χρήση της παραπάνω στρατηγικής.

Είναι πολύ σημαντικό, οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα, μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, να αναπτύσσουν στρατηγικές σκέψης για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης κι αφαίρεσης, κι όχι να δίνεται έμφαση μόνο στην απομνημόνευση των βασικών αθροισμάτων ή διαφορών, όπως είναι τα διπλά αθροίσματα και τα αθροίσματα που κάνουν το «10». Ο συνδυασμός στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση βασικών αθροισμάτων θα βοηθήσει αποτελεσματικά τους μαθητές στην προσπάθειά τους αυτή.

Κάποια παραδείγματα προς αυτή την κατεύθυνση, είναι η χρήση του πλαισίου του «10» το οποίο είναι ένα ορθογώνιο με 10 θέσεις, 5 θέσεις στη μια στήλη και 5 στην άλλη. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να υπολογίζουν αθροίσματα με βάση το 10 (υπέρβαση ή υπερπήδηση της δεκάδας) ή να σχηματίζουν αριθμούς με βάση το 5. Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται στην Ολλανδία, είναι η χρήση της αριθμητικής ράβδου, που περιλαμβάνει δύο οριζόντιες ράβδους με 10 χάντρες δύο χρωμάτων η καθεμία και επιτρέπει στο παιδί να κάνει προσθέσεις και αφαιρέσεις μέχρι το 20 (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012).

### 5.5.3 Λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κι αφαίρεσης

Η σημασιολογική δομή ενός προβλήματος, επηρεάζει τον βαθμό δυσκολίας που εμφανίζει το ίδιο, σχετικά με την ικανότητα επίλυσής του, από την πλευρά των μαθητών. Ο Greeno και οι συνεργάτες του (στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012) ταξινόμησαν τα προβλήματα σε τρεις βασικές κατηγορίες, ανάλογα με τις διαφορετικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των αναφερόμενων ποσοτήτων του προβλήματος:

Α) Προβλήματα αλλαγής (change), όπου ένα γεγονός επιφέρει αλλαγή στην αρχική κατάσταση και οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων είναι δυναμικές. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει το παρακάτω πρόβλημα: *Η Μαρία έχει 5 κούκλες. Η Κατερίνα της δίνει 2 κούκλες ακόμη. Πόσες κούκλες έχει τώρα η Μαρίας ;*

Β) Προβλήματα συνδυασμού (combine), τα οποία έχουν να κάνουν με καταστάσεις που είναι στατικές και οι ποσότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα συνδυασμού είναι το εξής: *Ο Γιάννης έχει 7 αυτοκόλλητα. Ο Κώστας έχει 3 αυτοκόλλητα . Πόσα αυτοκόλλητα έχουν και οι δύο μαζί ;*

Γ) Προβλήματα σύγκρισης (compare), όπου μια ποσότητα συγκρίνεται με μια άλλη. Πρόβλημα σύγκρισης είναι το παρακάτω: *Η Ιωάννα έχει 4 μολύβια. Η Μαρίνα έχει 3 μολύβια περισσότερα από την Ιωάννα. Πόσα μολύβια έχει η Μαρίνα ;*

Αν σε κάθε κατηγορία συμπεριληφθεί το είδος της άγνωστης ποσότητας (αρχική, τελική, διαφορά, υποσύνολο, ποσότητα αλλαγής ή σύγκρισης) και της μεταβολής των ποσοτήτων (αύξηση, ελάττωση, λιγότερο, περισσότερο), προκύπτουν 14 τύποι προβλημάτων πρόσθεσης κι αφαίρεσης (6 προβλήματα αλλαγής, 2 συνδυασμού και 6 σύγκρισης) (Verschaffel & de Corte, 1997: στο Σκαφούση & Σκουμπουρδή , 2012). Έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά λύνουν πιο εύκολα τα προβλήματα συνδυασμού ή αλλαγής, σε σχέση με τα προβλήματα σύγκρισης. Δυσκολίες συναντούν στη επίλυση προβλημάτων, που είναι άγνωστη η αρχική ποσότητα (Vergnaud, 1982: στο Καφούση & Σκουμπουρδή , 2012).

Σημαντικό είναι τα μαθηματικά προβλήματα να αναφέρονται σε οικεία θέματα των παιδιών, ώστε να τους προκαλούν το ενδιαφέρον, να μπορούν να ανακαλούν τις πρότερες γνώσεις τους και για την επίλυσή τους, να μπορούν να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Οι Ainsworth, Wood και Bibby (1997: στο Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003), υποστηρίζουν ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες, και να προάγουν τη βαθύτερη κατανόηση. Επιπλέον, η χρήση μιας δεύτερης αναπαράστασης ενισχύει τη μετάφραση μιας άλλης, που χρησιμοποιείται, και η οποία μπορεί να είναι δυσνόητη ή λιγότερο γνώριμη για τους μαθητές (Gagatsis & Michaelidou, 2002: στο Θεοδούλου και Γαγάτσης, 2003).

Εξάλλου, οι Lesh και συνεργάτες (1987: στο Δεληγιάννη κ.ά., 2008), υποστηρίζουν ότι η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει τρία βασικά στοιχεία: α) την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή αναπαριστάται με μια ποικιλία διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, β) την ικανότητα χειρισμού της έννοιας μέσα σε αυτά τα συστήματα αναπαράστασης και γ) την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας αυτής από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

# Κεφάλαιο 6ο: Αποτελέσματα

## 6.1 Α΄ Φάση της έρευνας

### *6.1.1 Αριθμητικές ασκήσεις*

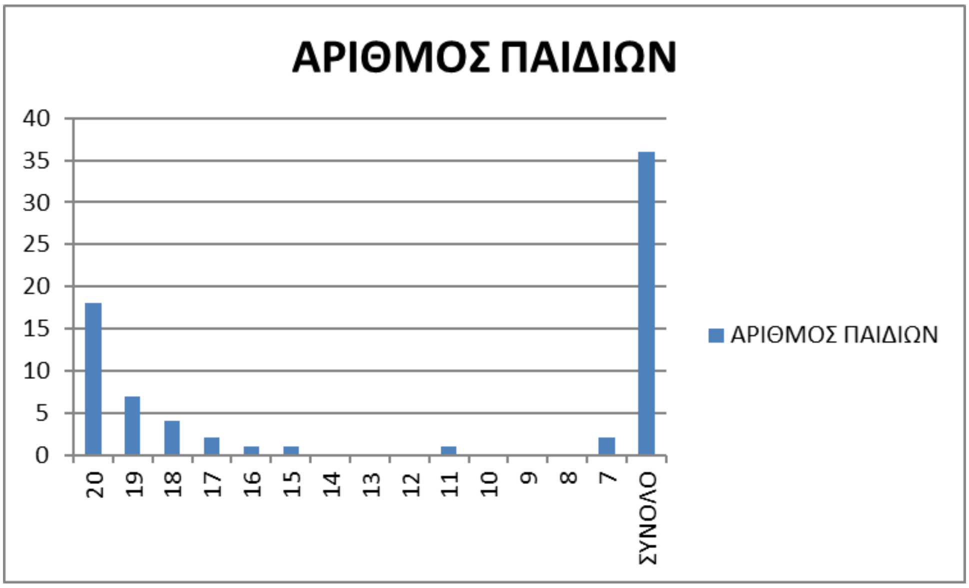
Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συμμετείχαν στην επίλυση των αριθμητικών και των λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης ή αφαίρεσης, ήταν 36 από ένα σύνολο 42, επειδή κάποια απουσίαζαν τη συγκεκριμένη ημέρα και δεν έλαβαν μέρος στη διεξαγωγή της πρώτης φάσης της έρευνας. Ως εκ τούτου, στην πρώτη φάση θα αναφερθούμε στα 36 παιδιά και στα αποτελέσματα των ασκήσεων στα οποία κατέληξαν. Τα 18 από τα 36 παιδιά, έλυσαν σωστά όλες τις αριθμητικές ασκήσεις, χωρίς κανένα λάθος, ποσοστό 50%, και άλλα 7 παιδιά έκαναν μόνο ένα λάθος σε αυτές. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε 25/36 παιδιά που δεν έκαναν κανένα ή έκαναν μόνο ένα λάθος, δηλαδή συνολικό ποσοστό 69,44 %. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι τα περισσότερα από τα παιδιά αυτά με κανένα ή ένα λάθος δεν χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουν χειραπτικό υλικό (αριθμητήριο) και δήλωσαν ότι μπορούν να υπολογίσουν χωρίς δυσκολία τα αποτελέσματα. Όμως τα παιδιά που είχαν από 18 και κάτω επιτυχίες σε ένα σύνολο 20 ασκήσεων, δηλαδή είχαν 2 λάθη και περισσότερα, δήλωσαν πως χρησιμοποίησαν το αριθμητήριο και ότι δυσκολεύονται στον υπολογισμό των αριθμητικών αποτελεσμάτων χωρίς τη χρήση του. Για αυτά τα παιδιά φαίνεται πως είναι απαραίτητη η χρήση χειραπτικού υλικού και ότι ακόμα βρίσκονται στο στάδιο της πραξιακής αναπαράστασης. Συγκεκριμένα 2 από αυτά τα παιδιά είχαν 18/20 επιτυχίες, 1 παιδί 17/20, 1 παιδί 16/20, 1 παιδί 11/20 και 2 παιδιά 7/20 τα οποία είχαν αντίστοιχα το ένα 13/20 άλυτες ασκήσεις και το δεύτερο 13/20 λανθασμένα αποτελέσματα σε αυτές.

Στην επίλυση αριθμητικών ασκήσεων σε ένα σύνολο 36 παιδιών και 20 ασκήσεων (10 προσθέσεις και 10 αφαιρέσεις) οι επιτυχίες ήταν ως εξής:

| ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ | ΠΟΣΟΣΤΟ % |
|---|---|---|
| 20 | 18 | 50 |
| 19 | 7 | 19,44 |
| 18 | 4 | 11,11 |
| 17 | 2 | 5,55 |

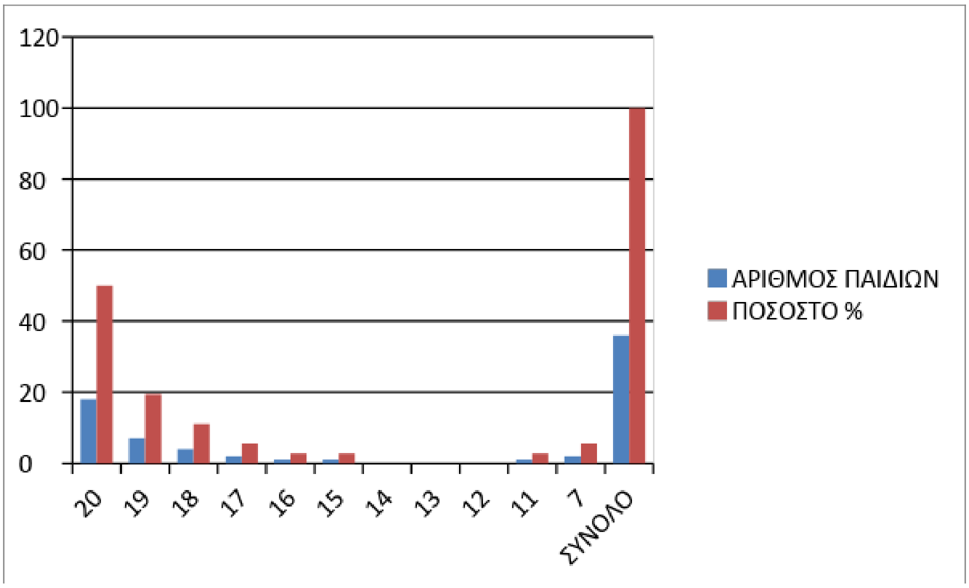
| | | |
|---|---|---|
| 16 | 1 | 2,77 |
| 15 | 1 | 2,77 |
| 14 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 2,77 |
| 7 | 2 | 5,55 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 36 | 100 |

Οι παρακάτω πίνακες αποτυπώνουν τις επιτυχίες που είχαν τα παιδιά στη διαδικασία επίλυσης αριθμητικών ασκήσεων:




(Πίνακας 1. – Αριθμός μαθητών σε σχέση με τις επιτυχίες που συγκέντρωσαν στις αριθμητικές ασκήσεις πρόσθεσης κι αφαίρεσης)

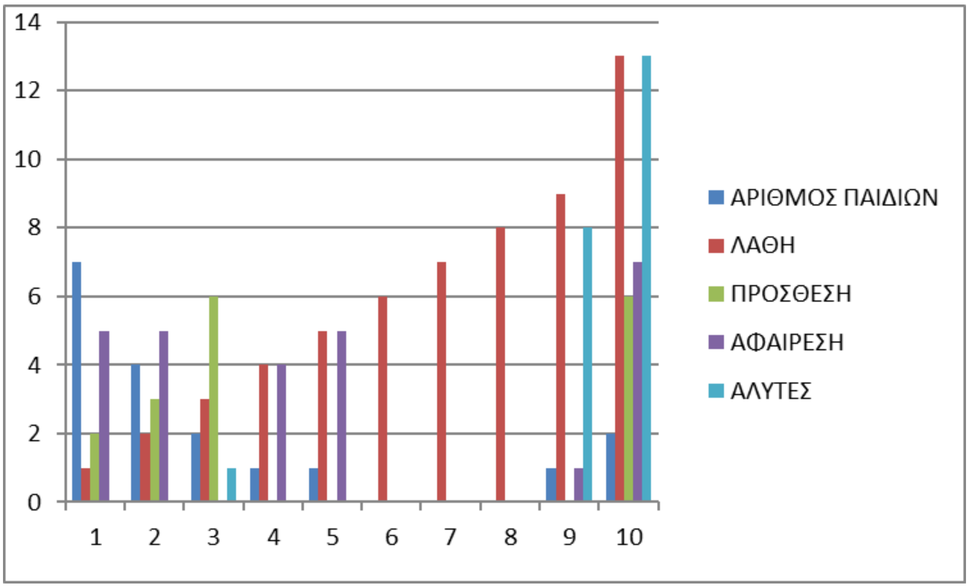
Ο παρακάτω πίνακας είναι ενδεικτικός του ποσοστού των μαθητών ανά κατηγορία επιτυχιών:




(Πίνακας 2. - Ποσοστά μαθητών κι επιτυχίες στις ασκήσεις)

Οι 18 μαθητές από τους 36, είχαν 20/20 επιτυχίες στις αριθμητικές ασκήσεις, ποσοστό ίσο με το 50%. Στη συνέχεια 7 μαθητές, συγκέντρωσαν 19/20 επιτυχίες, ποσοστό 19,44% και 4 μαθητές 18/20, ποσοστό 11,11%. Δύο μαθητές είχαν 17/20 σωστές ασκήσεις, ποσοστό 5,55%, 1 μαθητής 16/20 ποσοστό 2,77%, 1 μαθητής 15/20, ένας 11/20 και τέλος 2 μαθητές, ποσοστό 5,55%, από 7 επιτυχίες στις 20 ασκήσεις.

Ο παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας καταδεικνύει τον αριθμό των μαθητών σε σχέση με τον αριθμό των λαθών, καθώς και σε ποιο σημείο έγιναν αυτά, δηλαδή αν έγιναν στις προσθέσεις ή τις αφαιρέσεις, και επιπλέον δείχνουν εάν υπήρξαν ασκήσεις που έμειναν άλυτες.

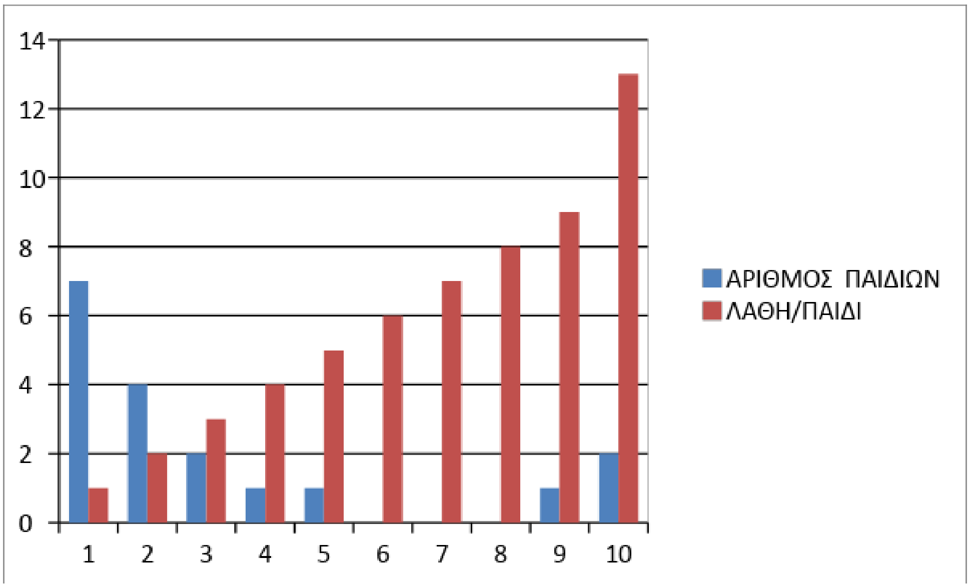



(Πίνακας 3. – Λάθη των μαθητών και άλυτες ασκήσεις)

Αναλυτικά, ύστερα από παρατήρηση των δεδομένων του παραπάνω πίνακα, διαπιστώνεται ότι 7 παιδιά έκαναν από 1 λάθος, 4 παιδιά από 2 λάθη, 2 παιδιά από 3 λάθη και ένα παιδί αντίστοιχα από 4, 5 και 9 λάθη. Τέλος, 2 παιδιά είχαν τις λιγότερες επιτυχίες στις αριθμητικές ασκήσεις, καθώς έκαναν από 13 λάθη το καθένα. Στα λάθη, συγκαταλέγονται και οι ασκήσεις που έμειναν άλυτες.

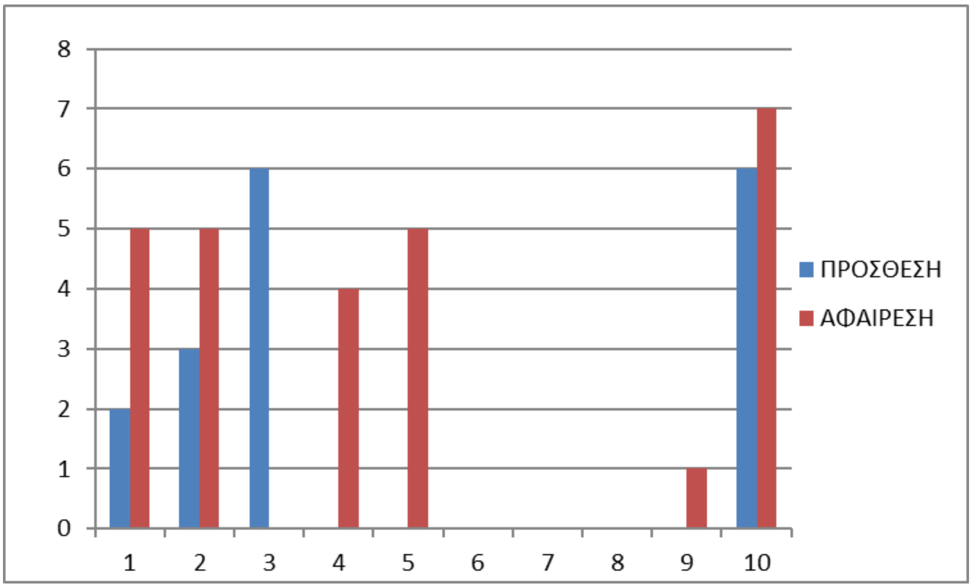
Σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα, όπου φαίνονται πόσοι μαθητές έκαναν από 1,2,3 κλπ. λάθη, παρατηρείται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών είχαν από 1 ή από 2 λάθη ο καθένας. Όσο αυξανόταν ο αριθμός των λαθών μειωνόταν ο αριθμός των μαθητών μέχρι και τα 4 λάθη, όπου ο αριθμός συνέχισε μετά να είναι πια σταθερός (ένα παιδί κάθε φορά από 4, 5, 9 λάθη αντίστοιχα). Μόνο στην τελευταία κατηγορία, δηλαδή στα 13 λάθη, εκεί παρατηρείται μια αύξηση στον αριθμό των παιδιών στα δεξιά του πίνακα. Πιθανόν αυτά τα δύο παιδιά να έχουν κάποιες μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, που μπορεί να μην είναι γνωστές ή να μην επισημάνθηκαν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας, καθώς αντίστοιχα έχει αφήσει άλυτες 13 από τις 20 αριθμητικές ασκήσεις ο πρώτος μαθητής, ενώ ο δεύτερος μαθητής έχει 13 λάθη σε αυτές.

Σε γενικές γραμμές, μπορεί να διατυπωθεί ότι καθώς αυξανόταν τα λάθη, ο αριθμός των μαθητών μειωνόταν, κι αυτό σημαίνει πως όλο και λιγότερα παιδιά έκαναν περισσότερα λάθη. Εξάλλου, το ποσοστό επιτυχίας ήταν 50% των παιδιών χωρίς κανένα λάθος στις αριθμητικές ασκήσεις.




Πίνακας 4. – Αριθμός παιδιών και λάθη στις αριθμητικές ασκήσεις)

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει πως κατανεμήθηκαν τα λάθη στις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις, και όπως φαίνεται, τα λάθη στις αφαιρέσεις είναι τα περισσότερα. Αυτό σημαίνει, ότι η αφαίρεση δυσκολεύει τους μαθητές στην εύρεση του αποτελέσματος περισσότερο από την πρόσθεση. Σε κάθε περίπτωση, παρατηρείται ότι υπάρχουν λάθη στην αφαίρεση, εκτός από την περίπτωση των 3 λαθών ανά μαθητή (όπου οι μαθητές είναι 2) και συνολικά έχουν γίνει μόλις 6 λάθη στις προσθέσεις. Στην πρώτη, δεύτερη και τελευταία κατηγορία, υπάρχουν λάθη τόσο στις προσθέσεις όσο και στις αφαιρέσεις, ενώ στην τέταρτη, πέμπτη και ένατη κατηγορία τα λάθη εντοπίζονται μόνο στις αφαιρέσεις.

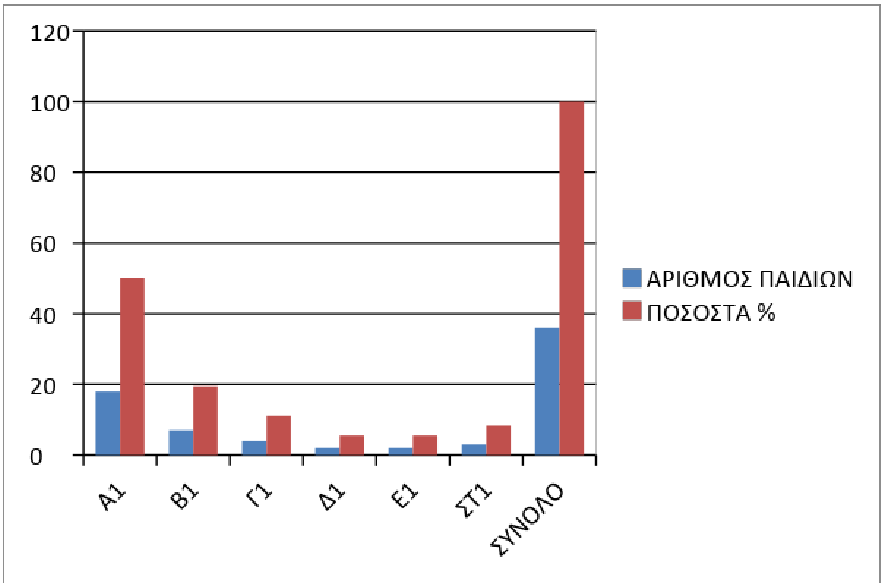



(Πίνακας 5. - Λάθη στην πρόσθεση και την αφαίρεση)

Οι επιτυχίες στις αριθμητικές ασκήσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης σε έξι κατηγορίες, είναι οι εξής :

| |
|---|
| Α1 κατηγορία, με επιτυχία 20/20 (κανένα λάθος) |
| Β1 κατηγορία, με επιτυχία 19/20 (1 λάθος) |
| Γ1 κατηγορία, με επιτυχία 18/20 (2 λάθη) |
| Δ1 κατηγορία, με επιτυχία 17/20 (3 λάθη) |
| Ε1, με επιτυχία 16/20 και 15/20 (4 ή 5 λάθη) και |
| Στ1, με επιτυχία 11/20 και κάτω (9 λάθη και πάνω) |

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ποσοστά των παιδιών σε σχέση με τις επιτυχίες που είχαν πετύχει στις έξι αυτές κατηγορίες (Α1, Β1, Γ1, Δ1, Ε1, Στ1), που προαναφέρθηκαν. Οι επιτυχίες αυτές στις αριθμητικές ασκήσεις ομαδοποιήθηκαν σε έξι κατηγορίες για να μπορεί να υπάρχει αντιστοίχιση με τις έξι κατηγορίες των επιτυχιών που σημειώθηκαν από τους ίδιους μαθητές στα 4 προβλήματα προσθαφαιρέσεων, που έλυσαν στη συνέχεια με τη χρήση του λεκτικού κώδικα αναπαράστασης και του συμβολικού κι αριθμητικού κώδικα.




(Πίνακας 6 . – Κατηγορίες επιτυχιών και ποσοστά στις αριθμητικές ασκήσεις)

Αναλυτικά:

| |
|---|
| Στην Α1 κατηγορία 18 παιδιά, ποσοστό 50% |
| Στην Β1 κατηγορία 7 παιδιά , ποσοστό 19,44% |
| Στη Γ1 κατηγορία 4 παιδιά, ποσοστό 11,11% |
| Στη Δ1 κατηγορία 2 παιδιά, ποσοστό 5,55% |
| Στην Ε1 κατηγορία 2 παιδιά, ποσοστό 5,55% |
| Στη Στ1 κατηγορία 3 παιδιά, ποσοστό 8,33% |

### *6.1.2 Λεκτικά προβλήματα*

Οι μαθητές στη συνέχεια, έλυσαν 4 προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης χωρίς τη βοήθεια κάποιου χειραπτικού υλικού, αλλά μόνο με τη χρήση των δακτύλων τους και τα χρήση των νοερών υπολογισμών. Τα αποτελέσματα ταξινομήθηκαν σε 6 κατηγορίες σύμφωνα με τις επιτυχίες που συγκέντρωσαν. Αναλυτικότερα, οι 6 κατηγορίες είναι οι εξής :

Κατηγορία Α: Λύθηκαν όλα τα προβλήματα με τις σωστές πράξεις

Κατηγορία Β: Απαντήθηκαν όλα τα προβλήματα σωστά. Τα δύο πρώτα περιλαμβάνουν τις πράξεις και το σωστό αποτέλεσμα. Δεν έχουν γίνει όμως οι ανάλογες πράξεις στο τρίτο πρόβλημα (πρόβλημα σύγκρισης) και στο τέταρτο και τελευταίο πρόβλημα (πρόβλημα εξισορρόπησης), όπου δόθηκαν μόνο τα σωστά αποτελέσματα.

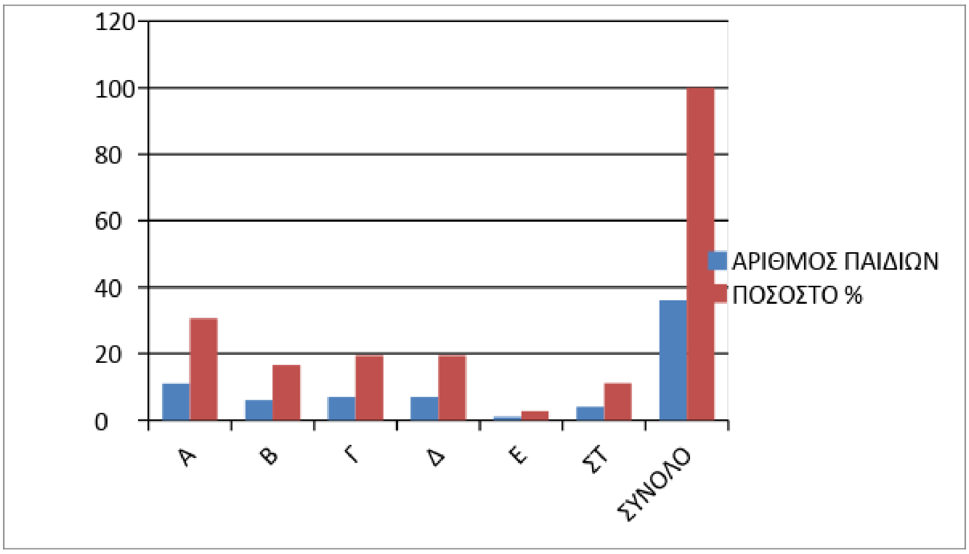
Κατηγορία Γ: Λύθηκαν σωστά τρία από τα τέσσερα προβλήματα. Το πρώτο, το δεύτερο και το τέταρτο πρόβλημα αλλά μόνο το τρίτο πρόβλημα δε λύθηκε σωστά (πρόβλημα σύγκρισης).

Κατηγορία Δ: Λύθηκαν σωστά τα δύο πρώτα προβλήματα από τα τέσσερα και είναι λανθασμένα τα άλλα δύο, δηλαδή το τρίτο και το τέταρτο από αυτά.

Κατηγορία Ε: Ένα πρόβλημα είναι σωστό (το πρώτο από τα τέσσερα) και είναι λανθασμένα τα άλλα τρία, δηλαδή το δεύτερο, το τρίτο και το τέταρτο.

Κατηγορία Στ: Δε λύθηκε κανένα πρόβλημα από τα τέσσερα .

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των παιδιών και το αντίστοιχο ποσοστό που συγκέντρωσαν στις 6 κατηγορίες επιτυχιών στα 4 προβλήματα προσθαφαίρεσης.




(Πίνακας 7 – Ποσοστό παιδιών στις 6 κατηγορίες επιτυχιών στα προβλήματα)

Αναλυτικά:

11 παιδιά με όλα τα προβλήματα σωστά (πράξεις και αποτελέσματα), ποσοστό 30,55% (κατηγορία Α).

6 παιδιά με όλα τα προβλήματα σωστά αλλά χωρίς τις πράξεις στο τρίτο και τέταρτο πρόβλημα, ποσοστό 16,66% (κατηγορία Β).

7 παιδιά με τρία προβλήματα σωστά και λάθος στο τρίτο πρόβλημα, ποσοστό 19,44% (κατηγορία Γ).

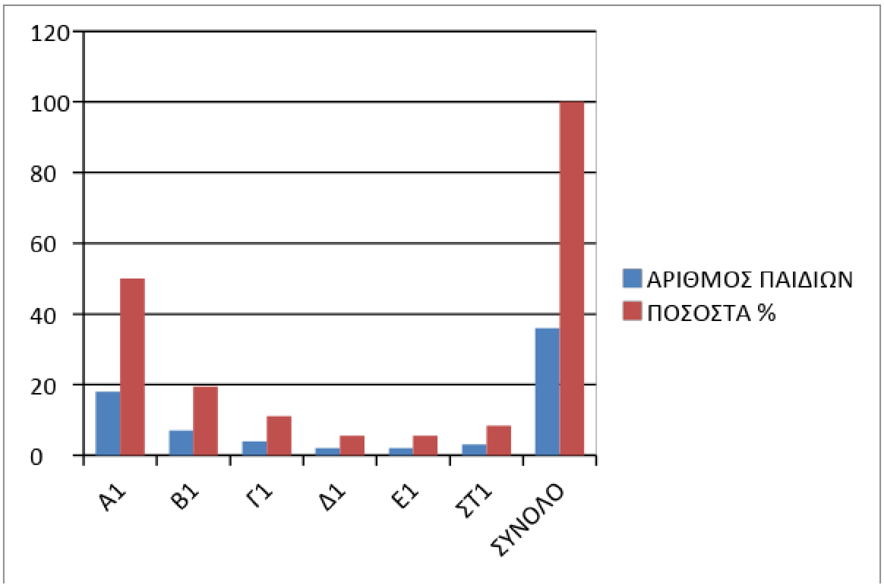
7 παιδιά με δύο σωστά προβλήματα και δύο λανθασμένα (το τρίτο και τέταρτο πρόβλημα), ποσοστό 19,44% (κατηγορία Δ)

1 παιδί που έλυσε σωστά ένα πρόβλημα (το πρώτο) και έχει τρία λανθασμένα, ποσοστό 2,77% (κατηγορία Ε)

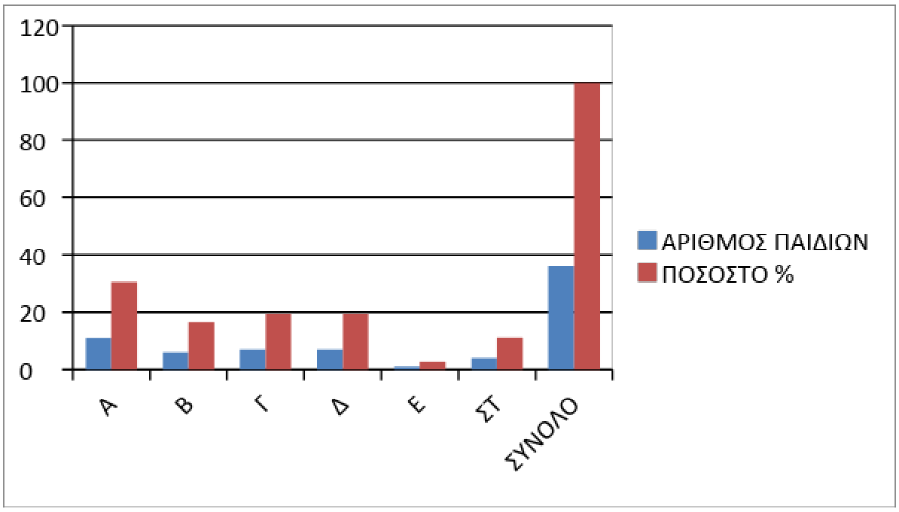
4 παιδιά δεν έλυσαν κανένα πρόβλημα, ποσοστό 11,11% (κατηγορία Στ).

### *6.1.3 Αριθμητικές πράξεις και λεκτικά προβλήματα*

Οι παρακάτω πίνακες αποδίδουν με τρόπο συγκριτικό, τις διαφορές που εντοπίζονται μεταξύ των επιτυχιών στις αριθμητικές πράξεις και στα λεκτικά προβλήματα. Αρχικά, παρατηρείται ότι η πρώτη κατηγορία, η Α1 στις ασκήσεις και η αντίστοιχη Α στα λεκτικά προβλήματα, παρουσιάζουν μια διαφορά της τάξης των 7/36 παιδιών υπέρ της Α1 κατηγορίας, δηλαδή της τάξης του 19,44% περισσότερα παιδιά είχαν 100% επιτυχία στις αριθμητικές ασκήσεις σε σχέση με τα λεκτικά προβλήματα.




(Πίνακας 6 – Κατηγορίες επιτυχιών στις αριθμητικές πράξεις)




(Πίνακας 7 – Ποσοστό παιδιών στις 6 κατηγορίες επιτυχιών στα προβλήματα)

Στη δεύτερη κατηγορία (Β1 και Β) των δύο πινάκων, καταγράφεται μια αντιστοιχία στα ποσοστά των παιδιών δείχνοντας ότι ο ίδιος περίπου αριθμός έχει είτε από ένα λάθος στις αριθμητικές ασκήσεις είτε από ένα λάθος στα αριθμητικά προβλήματα. Οι διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών αρχίζουν να φαίνονται σύμφωνα με τους δύο παραπάνω πίνακες, στην τρίτη και τέταρτη κατηγορία (Γ1 και Γ, Δ1 και Δ) . Συγκεκριμένα στα αριθμητικά προβλήματα στις δύο προαναφερθείσες κατηγορίες παρατηρείται μια αύξηση στο ποσοστό των παιδιών σε σχέση με τη δεύτερη κατηγορία επιτυχιών, ενώ αντίθετα στις αντίστοιχες κατηγορίες των αριθμητικών ασκήσεων υπάρχει μείωση των ποσοστών. Καθώς δηλαδή αυξάνεται ο αριθμός των λαθών στα προβλήματα αυξάνεται και το ποσοστό των παιδιών που τα έχει κάνει. Αυτό το γεγονός φανερώνει τις δυσκολίες των παιδιών να αντιληφθούν πλήρως το νόημα των αριθμητικών προβλημάτων, τα οποία περιλαμβάνουν τη μαθηματική γλώσσα σε συνδυασμό με τη συμβολική και την καθημερινή χρήση της, ώστε να μπορέσουν να αποκωδικοποιήσουν και στη συνέχεια να κωδικοποιήσουν με μαθηματικές έννοιες και μαθηματικά σύμβολα το πρόβλημα, που τους δίνεται. Ειδικότερα στο τρίτο πρόβλημα, που είναι πρόβλημα σύγκρισης, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν για την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας «περισσότερο» είναι ιδιαίτερα έκδηλες. Ενδεικτικό είναι το ποσοστό 14/33 από τα 36 παιδιά που έλυσαν το 3$^{ο}$ πρόβλημα (πρόβλημα σύγκρισης), δηλαδή της τάξεως του 42,42%, προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα προσθέτοντας τα δύο υπό σύγκριση ποσά, των οποίων τη διαφορά θα έπρεπε να βρουν, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθη, αφού η πράξη που επέλεξαν για την επίλυση του προβλήματος δεν ήταν η σωστή. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τα αποτελέσματα ερευνών (Carpenter, Hiebert & Moser, 1981: στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012) που καταδεικνύουν ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν συνήθως ευκολότερα τα προβλήματα συνδυασμού ή αλλαγής, σε σύγκριση με τα προβλήματα σύγκρισης. Πολλές φορές τα παιδιά στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, δεν αποκωδικοποιούν σωστά τις έννοιες και τις σχέσεις των εννοιών που αυτό περιλαμβάνει, και απλώς εκτελούν την πιο πρόσφατη πράξη που έχουν μάθει ή αυτή που είναι η πιο εύκολη (π.χ. η πρόσθεση). Άλλες φορές πάλι μπορεί να στηριχθούν σε μια λέξη-κλειδί που έχουν μάθει πως συνδέεται με μια συγκεκριμένη πράξη (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012) και καταφεύγουν στη χρήση της. Για παράδειγμα, συνδέουν, όπως στην περίπτωση του τρίτου προβλήματος, τη λέξη «περισσότερο» με την πράξη της πρόσθεσης, με αποτέλεσμα να προβαίνουν λανθασμένα στην πρόσθεση των αριθμητικών δεδομένων.

## 6.2 Β΄ Φάση έρευνας

Στη δεύτερη φάση της έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε μετά από ένα χρονικό διάστημα περίπου δεκαπέντε ημερών, δόθηκαν στα παιδιά τα ίδια μαθηματικά προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης που είχαν λύσει στην πρώτη φάση της έρευνας, κατά την οποία είχαν χρησιμοποιήσει μόνο τον συμβολικό κώδικα αναπαράστασης. Στη δεύτερη φάση, οι ίδιοι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν τα ίδια λεκτικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης: α) κάποιο σχέδιο που θα έφτιαχναν, β) τα αριθμητικά σύμβολα και γ) τη λεκτική αναπαράσταση στην τελική απάντηση της λύσης του προβλήματος. Αυτό που είχαν να κάνουν σε αυτή την περίπτωση, ήταν να επιλύσουν το κάθε πρόβλημα αρχικά φτιάχνοντας κάποιο σχέδιο, στη συνέχεια έπρεπε να το λύσουν με πράξεις που περιλαμβάνουν σύμβολα πράξεων (πρόσθεσης ή αφαίρεσης) και αριθμούς και στο τέλος, θα έπρεπε να δώσουν μια γραπτή απάντηση σχετικά με το αποτέλεσμα που βρήκαν. Έπρεπε λοιπόν να χρησιμοποιήσουν διαδοχικά τρία συστήματα αναπαραστάσεων, το εικονικό (σχέδιο), το συμβολικό (αριθμοί και σύμβολα πράξεων και ισότητας) και το λεκτικό (να αποδώσουν με γραπτό λόγο το αποτέλεσμα της πράξης που βρήκαν). Τα τρία συστήματα αναπαράστασης είναι συνδεδεμένα με την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος και η σωστή χρήση τους υποδηλώνει το επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης που έχουν πετύχει οι μαθητές.

Στην αρχή, όταν δόθηκαν οι ασκήσεις στα παιδιά, ρωτήσανε με ποιον τρόπο να σχεδιάσουν τα δεδομένα του προβλήματος. Η ερευνήτρια τους έδωσε να καταλάβουν ότι έχουν την απόλυτη ελευθερία να χρησιμοποιήσουν όποιο τρόπο, εργαλείο ή μέσο επιθυμούν για τον σχεδιασμό αυτό. Ωστόσο, η ελευθερία αυτή, αρχικά, αντί να τους διευκολύνει τους δυσκόλεψε στο να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος με κάποιο σχέδιο. Σταδιακά, ο κάθε μαθητής ανακάλυψε έναν δικό του, προσωπικό, τρόπο για τον σχεδιασμό και προχώρησε στην πορεία της επίλυσης του προβλήματος.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας συμμετείχαν συνολικά 41 παιδιά και από τα δύο τμήματα της πρώτης τάξης. Στο πρώτο τμήμα δεν υπήρξε καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό για τον τρόπο σχεδιασμού των προβλημάτων, ενώ στο δεύτερο τμήμα η εκπαιδευτικός παρενέβη και υπέδειξε έναν συγκεκριμένο τρόπο αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος και των μεταξύ τους σχέσεων. Υπήρξε δηλαδή μια διαφοροποίηση στις οδηγίες που δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς των δύο τμημάτων, προκειμένου οι μαθητές να οργανώσουν τις σκέψεις τους και να ολοκληρώσουν τον σχεδιασμό των δεδομένων του προβλήματος.

Η εκπαιδευτικός στο πρώτο τμήμα και ερευνήτρια, δεν υπέδειξε κάποιο συγκεκριμένο τρόπο εικονιστικής αναπαράστασης για την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων και όλα τα παιδιά ενήργησαν χωρίς περαιτέρω βοήθεια και παρέμβαση. Οι οδηγίες που δόθηκαν ήταν γενικές και κάθε παιδί χρησιμοποίησε όποιο σχέδιο ήθελε και θεωρούσε το ίδιο πως ήταν σωστό. Αντίθετα στο δεύτερο τμήμα υπήρξαν συγκεκριμένες οδηγίες για τον σχεδιασμό των προβλημάτων, και αυτό έγινε φανερό από την ομοιομορφία στον εικονογραφικό κώδικα αναπαράστασης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, χωρίς να εντοπίζονται ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις μεταξύ τους.

### *6.2.1 Τμήμα Α2*

Α΄ Πρόβλημα

Συγκεκριμένα, στο πρώτο βήμα επίλυσης, όπου θα πρέπει να γίνει ο σχεδιασμός των δεδομένων του πρώτου προβλήματος, 16 από τους 20 μαθητές του τμήματος Α2 χρησιμοποίησαν τον ίδιο τρόπο αναπαράστασης: Στο πρώτο πρόβλημα (πρόβλημα συνδυασμού), στην πρόσθεση 6 και 5 μολυβιών, σχεδίασαν τον αντίστοιχο αριθμό σχημάτων, τα οποία έμοιαζαν με μολύβια, συνδέοντας τα δύο υποσύνολα με το σύμβολο της πρόσθεσης (+), έβαλαν στη συνέχεια το σύμβολο της ισότητας (=) και κατόπιν, ως αποτέλεσμα, σχεδίασαν 11 ίδια σχήματα, που παρίσταναν το σύνολο των 11 μολυβιών. Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης που υιοθέτησαν και εφάρμοσαν οι μαθητές, είναι σύμφωνα με τον Hughes (1986: στο Τζεκάκη, 2010) εικονογραφικός, καθώς παριστάνει τα αριθμητικά δεδομένα με τη χρήση άλλων μορφικών στοιχείων του προβλήματος. Στο δεύτερο βήμα (συμβολική αναπαράσταση), έγραψαν την αντίστοιχη πράξη με σύμβολα (6+5 = 11) και στην απάντηση (λεκτική αναπαράσταση) έγραψαν πως έχουν μαζί 11 μολύβια. Τα υπόλοιπα 4 παιδιά, από τα 20 του ίδιου τμήματος, διαφοροποιήθηκαν ως εξής: Τα 2 από αυτά σχεδίασαν 6 και 5 σκίτσα, τα οποία θύμιζαν μολυβάκια, έβαλαν το σύμβολο της ισότητας (=) και έγραψαν με αριθμό το «11» χωρίς να σχεδιάσουν το σύνολο των 11 σχημάτων, που θα παρέπεμπε στον συνολικό αριθμό των μολυβιών (άθροισμα). Στην περίπτωση αυτή, ακολουθήθηκε ο συνδυασμός του εικονιστικού και του συμβολικού κώδικα αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος. Τα άλλα 2 παιδιά, σχεδίασαν μόνο το πρώτο μέρος της πρόσθεσης, χωρίς να βάλουν το σύμβολο του ίσον (=) και χωρίς να σχεδιάσουν το σύνολο των ποσοτήτων που βρήκαν ως αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Δύο παιδιά από τα 20 δεν έδωσαν με λεκτική αναπαράσταση το αποτέλεσμα της πρόσθεσης που έκαναν, ενώ τα 4 από τα 20 απάντησαν με τη χρήση της αριθμολέξης «έντεκα» αντί του συμβόλου «11» γράφοντας ότι «*και οι δύο μαζί έχουν έντεκα μολύβια*».

Συγκεντρωτικά:

**Α΄ πρόβλημα**

**Εικονική Αναπαράσταση :**

**20/20 παιδιά**

**Αριθμητική αναπαράσταση :**

**20/20 παιδιά**

**Λεκτική αναπαράσταση :**

**18/20 παιδιά**, 2/20 χωρίς λεκτική αναπαράσταση

Β΄ Πρόβλημα

Με παρόμοιο τρόπο έγινε η εικονιστική αναπαράσταση και των άλλων τριών προβλημάτων. Το δεύτερο πρόβλημα (πρόβλημα αλλαγής), αυτό με τις καραμέλες, σχεδιάστηκε από τα 17 στο σύνολο των 20 παιδιών με σχήματα που έμοιαζαν με το σχήμα της καραμέλας, βάζοντας 10 καραμέλες στη σειρά, έπειτα το σύμβολο της αφαίρεσης (-) και 4 καραμέλες που αφαιρούμε, το ίσον (=) και τέλος, σχεδίασαν τις καραμέλες που έμειναν. Τρία από τα είκοσι παιδιά χρησιμοποίησαν τον ίδιο τρόπο αναπαράστασης του προβλήματος, δηλαδή το σχέδιο της καραμέλας, με τη διαφορά πως το ένα από αυτά στο σχεδιασμό δεν σχεδίασε μετά το ίσον (=) το αποτέλεσμα της πράξης. Το δεύτερο από αυτά, σχεδίασε μόνο την αρχική ποσότητα (10 καραμέλες) και ίσως από έλλειψη χώρου, δεν σχεδίασε κάτι άλλο, ενώ το τρίτο παιδί σχεδίασε 4 καραμέλες σαν αποτέλεσμα της πράξης 10-4 αντί για 6, παρόλο που στη συμβολική της μορφή η πράξη της αφαίρεσης ήταν σωστή (10-4=6). Όλα τα παιδιά έδωσαν λεκτική απάντηση στο πρόβλημα αυτό. (Έξι από τα 20 απάντησαν χρησιμοποιώντας την αριθμολέξη «έξι» αντί του συμβόλου του αριθμού «6»).

Συγκεντρωτικά:

**Β΄ πρόβλημα**

**Εικονική Αναπαράσταση :**

**18/20** , 2/20 ελλιπής αναπαράσταση

**Αριθμητική αναπαράσταση :**

**20/20**

**Λεκτική αναπαράσταση :**

**20/20**

Γ΄ Πρόβλημα

Στο τρίτο πρόβλημα (πρόβλημα σύγκρισης), τα αυτοκόλλητα σχεδιάστηκαν με το σχήμα του ορθογωνίου από τα 18 στο σύνολο των 20 παιδιών. Το ένα από τα 20, χρησιμοποίησε κυκλάκια για την εικονιστική αναπαράσταση των ποσοτήτων και ένα άλλο παιδί έκανε συνδυασμό των δύο σχημάτων. Το ένα από τα είκοσι παιδιά δεν έγραψε το αποτέλεσμα των πράξεων, ενώ απάντησε ότι «*ο Γιάννης έχει τέσσερα αυτοκόλλητα*» χωρίς να αναφέρει τη λέξη «*περισσότερα*». Ένας άλλος μαθητής, αν και σχεδίασε μόνο 12 ορθογώνια σχήματα, υποδηλώνοντας την αρχική ποσότητα, χωρίς να σχεδιάσει κάτι άλλο, έγραψε την πράξη 12-8=4 αν και αυτή δεν προέκυπτε από την εικονιστική αναπαράσταση που επέλεξε. Ο ίδιος μαθητής, δεν έγραψε την απάντηση που βρήκε στο πρόβλημα, δεν προέβη δηλαδή σε λεκτική αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος. Ένας άλλος μαθητής σχεδίασε 12 ορθογώνια (12 αυτοκόλλητα), στη συνέχεια σημείωσε το σύμβολο της αφαίρεσης (-) και σχεδίασε τα 8 ορθογώνια, τα οποία αφαίρεσε. Στο αποτέλεσμα όμως, μετά το σύμβολο της ισότητας (=), σχεδίασε 5 κυκλάκια αντί για 4, που θα ήταν η σωστή απάντηση του προβλήματος. Στη συμβολική αναπαράσταση έγραψε σωστά 12-8=4 αλλά δεν ανέφερε τον αριθμό που βρήκε στη λεκτική απάντηση του προβλήματος, αλλά ούτε και τη λέξη «*περισσότερα*», που θα έπρεπε να αναφερθεί. Πέντε στα 20 παιδιά χρησιμοποιούν στις απαντήσεις τους την αριθμολέξη «τέσσερα» αντί του συμβόλου (4) του συγκεκριμένου αριθμού. Δύο στα 20 παιδιά δεν αναφέρουν καθόλου τη λέξη «*περισσότερα*» στις λεκτικές απαντήσεις που δίνουν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Συγκεντρωτικά:

**Γ΄ πρόβλημα**

**Εικονική Αναπαράσταση :**

**19/20**, 1/20 ελλιπής

**Αριθμητική αναπαράσταση:**

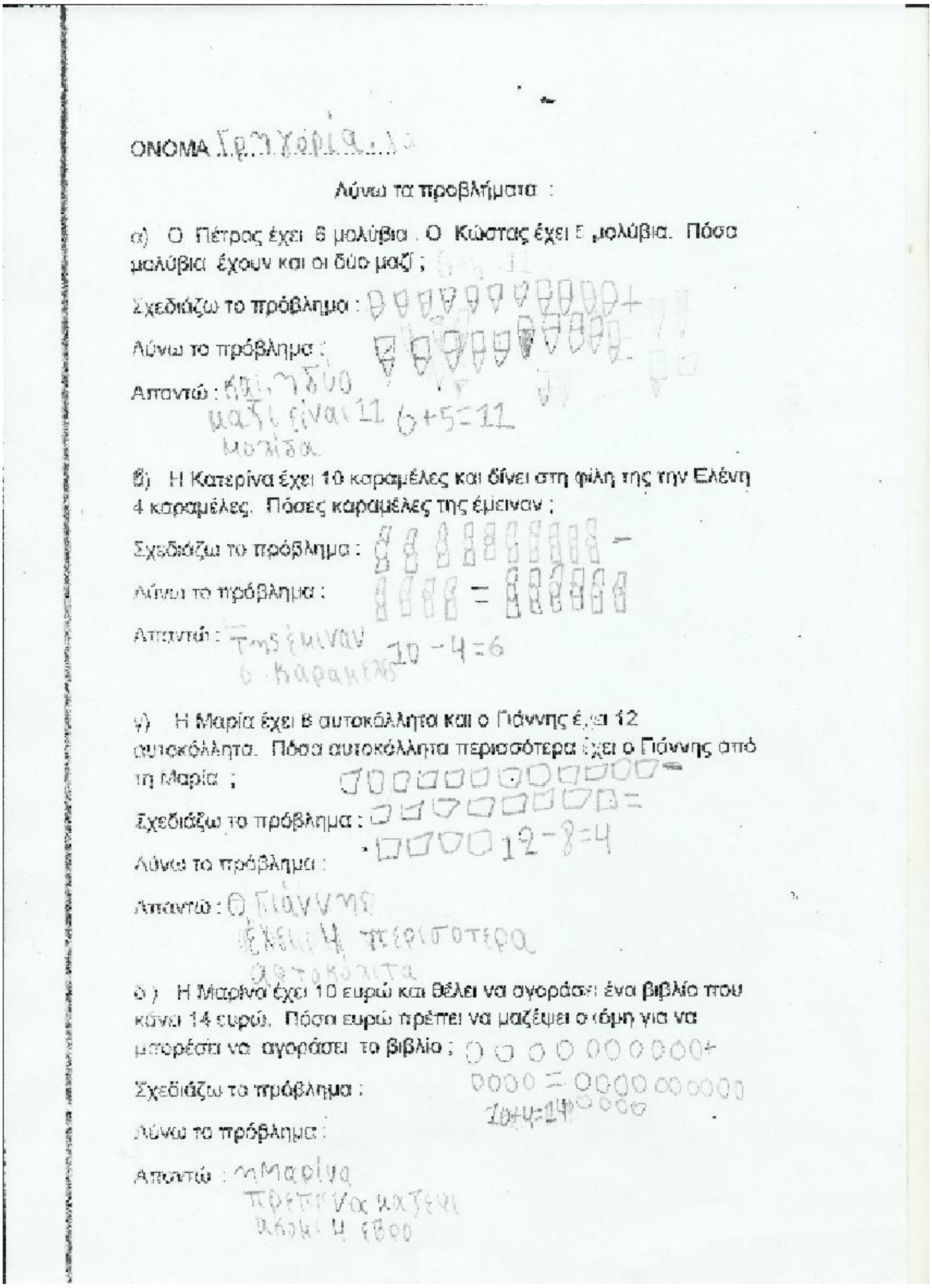
**20/20**

**Λεκτική αναπαράσταση:**

**17/20**, 2/20 ελλιπής, 1/20 χωρίς λεκτική αναπαράσταση

Δ΄ Πρόβλημα

Στο τέταρτο πρόβλημα (πρόβλημα εξισορρόπησης), όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν το σχήμα του κύκλου (κυκλάκια) για να αναπαραστήσουν εικονιστικά τα ευρώ. Το σχήμα αυτό παραπέμπει στο σχήμα που έχουν τα κέρματα του ευρώ με τα οποία είναι περισσότερο εξοικειωμένα τα μικρά παιδιά. Στα 5 από το σύνολο των 20 παιδιών, λείπει το σύμβολο της ισότητας από την εικονιστική αναπαράσταση που χρησιμοποιούν για να σχεδιάσουν τα δεδομένα του προβλήματος και τις μεταξύ τους σχέσεις. Ένα από αυτά έχει σχεδιάσει 10 κυκλικά σχήματα και άλλα 14 από κάτω γράφοντας τον αριθμό «1» μέσα σε κάθε ένα από αυτά. Όμως λείπει η σχέση που συνδέει αυτά τα σχήματα και απλώς γράφει 10χ4=14, αντί να χρησιμοποιήσει σωστά το σύμβολο της πρόσθεσης (+) . Επίσης δεν δίνει μια απάντηση για το αποτέλεσμα που βρήκε. Προφανώς, εδώ δεν υπάρχει ούτε εννοιολογική αλλά ούτε και αλγοριθμική κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος. Ένας άλλος σχεδίασε 14 κυκλικά σχήματα για να αναπαραστήσει τα 14 ευρώ, χωρίς να γράψει την πράξη που πρέπει να κάνει, δίνοντας μόνο τη σωστή απάντηση, η οποία όμως δεν προκύπτει από τη σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Ένας άλλος μαθητής προτιμά να λύσει το πρόβλημα με τη χρήση της εικονικής αναπαράστασης μαζί με τα σύμβολα της πρόσθεσης και της ισότητας (+,=), δίνοντας στο τέλος λεκτική απάντηση για το αποτέλεσμα που βρήκε. Μια μαθήτρια γράφει λάθος αποτέλεσμα στη συμβολική αναπαράσταση της πράξης (10+4=10). Η ίδια λύνει σωστά το πρόβλημα με εικονική αναπαράσταση και απαντά λεκτικά σωστά χρησιμοποιώντας στην απάντηση αριθμολέξη κι όχι το αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο. Να σημειωθεί πως σε αυτό το πρόβλημα όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν την πράξη της πρόσθεσης βάζοντας το άγνωστο ποσό ως συμπλήρωμα της πρόσθεσης, δηλαδή 10+χ=14. Πέντε από τα είκοσι παιδιά χρησιμοποίησαν στις λεκτικές απαντήσεις τους την αριθμολέξη «τέσσερα» αντί του αντίστοιχου συμβόλου του αριθμού (4). Να σημειωθεί ότι 4 στα 20 παιδιά σχεδίασαν τα 14 ευρώ με τα 10 κυκλάκια σε μια σειρά και τα υπόλοιπα 4 κυκλάκια, που αντιπροσωπεύουν τις μονάδες, τα σχεδίασαν στην αμέσως επόμενη σειρά, γεγονός που δείχνει ότι έχουν κατανοήσει την έννοια του δεκαδικού συστήματος βάζοντας μαζί σε μια σειρά τις δέκα μονάδες που φτιάχνουν μια δεκάδα και τις μονάδες σε μια άλλη σειρά από κάτω. Ο τρόπος της αναπαράστασης αποδεικνύει την κατανόηση από την πλευρά των μαθητών της δομής του δεκαδικού συστήματος, που αποτελείται από δέκα μονάδες οι οποίες είναι ίσες με μια δεκάδα και τις απλές μονάδες, οι οποίες μαζί συνθέτουν έναν διψήφιο αριθμό.



ΟΝΟΜΑ Σπ..Χαρία....

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί ; 6+5=11

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : και η δυο μαζι ειναι 11 μολιβα 6+5=11

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : της εμιναν 6 καραμελες 10-4=6

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 12-8=4

Απαντώ : Ο Γιάννης εχει 4 περισοτερα αυτοκολιτα

δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα : 10+4=14

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : η Μαρίνα πρεπει να μαζεψει ακομι 4 εβρο

Γραπτό Μ1 μαθήτριας με τη γραφή του αριθμού 14 ως 10 αντικείμενα και στην κάτω σειρά άλλα 4 που είναι οι μονάδες (στο τέταρτο πρόβλημα στην εικονιστική αναπαράσταση). Παρατηρούμε τη χρήση και των τριών συστημάτων αναπαράστασης στην επίλυση των προβλημάτων.

Συγκεντρωτικά:

**Δ΄ πρόβλημα**

**Εικονική αναπαράσταση** :

**18/20**, 2/20 ελλιπής

**Αριθμητική αναπαράσταση:**

**18/20**, 1/20 λάθος στη χρήση του συμβόλου της πρόσθεσης, 1/20 χωρίς αριθμητική αναπαράσταση

**Λεκτική αναπαράσταση:**

**18/20**, 1/20 ελλιπής, 1/20 χωρίς αναπαράσταση

Στο τέταρτο και τελευταίο πρόβλημα, παρουσιάζεται το χαμηλότερο ποσοστό, συγκριτικά με τα άλλα τρία προβλήματα, ως προς τους τρεις κώδικες αναπαράστασης. Το τρίτο πρόβλημα, έχει χαμηλότερο ποσοστό στη λεκτική αναπαράσταση και πρέπει να σημειωθεί πως ένα παιδί το οποίο είναι δίγλωσσο με μητρική γλώσσα την αλβανική, δεν έδωσε λεκτικές απαντήσεις στα τρία από τα τέσσερα προβλήματα.

## 6.2 Τμήμα Α1

Α΄ πρόβλημα

Ένας μαθητής δεν έκανε εικονική αναπαράσταση του προβλήματος, ενώ το έλυσε με αριθμητική πράξη κι έδωσε σωστή λεκτική απάντηση. Μια μαθήτρια, ενώ βρήκε σωστά το αριθμητικό αποτέλεσμα και έδωσε σωστή λεκτική απάντηση, δεν αναπαριστά σωστά με σχήματα το πρόβλημα, με αποτέλεσμα να μην παραπέμπει η εικονιστική αναπαράσταση στην αντίστοιχη αριθμητική πράξη. Το κορίτσι εμφανίζει την τάση να σχεδιάζει ένα αντικείμενο περισσότερο από ότι χρειάζεται και εμφανίζει κάποιες δυσκολίες στο μάθημα των μαθηματικών. (Αργεί να υπολογίσει τα αποτελέσματα των πράξεων, κάνει λάθη στους υπολογισμούς των πράξεων). Ένας άλλος μαθητής σχεδιάζει ελλιπώς το πρώτο πρόβλημα. Ένας μαθητής με μαθησιακές δυσκολίες, με τη βοήθεια της ερευνήτριας έδειξε να κατανοεί και να μπορεί να σχεδιάσει τα δεδομένα του προβλήματος. Έτσι, αφού μέτρησε τα σχήματα που σχεδίασε, βρήκε το αποτέλεσμα της πράξης στο πρώτο πρόβλημα, δίνοντας σε αυτό και λεκτική απάντηση. Ένας άλλος μαθητής, δεν έλυσε το πρόβλημα με αριθμητική πράξη, αλλά το σχεδίασε και έγραψε τον αριθμό «11», χωρίς τη σχετική πράξη και δίνοντας τη σωστή λεκτική απάντηση. Τέσσερις μαθητές δεν έδωσαν λεκτική απάντηση στο πρόβλημα και οι δύο από αυτούς είχαν ελλιπή εικονιστική αναπαράσταση του προβλήματος. Μια μαθήτρια, ενώ είχε σωστή αριθμητική πράξη και λεκτική απάντηση, αναπαριστά μόνο 6 αντικείμενα, σημειώνοντας 6 γραμμές, που αποδίδει την αρχική ποσότητα (6 μολύβια), χωρίς να αναπαριστά τα υπόλοιπα 5 μολύβια που αναφέρονται. Ένας μαθητής δεν αναπαριστά εικονικά το πρόβλημα παρά μόνο χρησιμοποιεί αριθμούς, σύμβολα και λέξεις. Άλλα παιδιά σχεδίασαν τα μολύβια με κυκλάκια, άλλα με γραμμές, ενώ τρία από αυτά, χρησιμοποίησαν διαφορετικό τρόπο αναπαράστασης. Σε γενικές γραμμές, το πρώτο πρόβλημα (πρόβλημα συνδυασμού όπου κάνουμε πρόσθεση) φάνηκε να μην δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές, αφού μόνο τα 6 από τα 21 παιδιά, είτε δεν προέβησαν σε απεικονιστική αναπαράσταση ή λεκτική απάντηση ή δεν σημείωσαν την αριθμητική πράξη, βρίσκοντας όμως σωστό το τελικό αποτέλεσμα, με τον ένα τρόπο ή με τον άλλο.

Συγκεντρωτικά:

**Α΄ Πρόβλημα**

**Εικονιστική αναπαράσταση:**

**16/21**, 1/21 χωρίς εικονική αναπαράσταση, 3/21 με ελλιπή αναπαράσταση και 1/21 λάθος

**Αριθμητική αναπαράσταση:**

**20/21** σωστά (ένας μαθητής δεν έγραψε την πράξη)

**Λεκτική αναπαράσταση:**

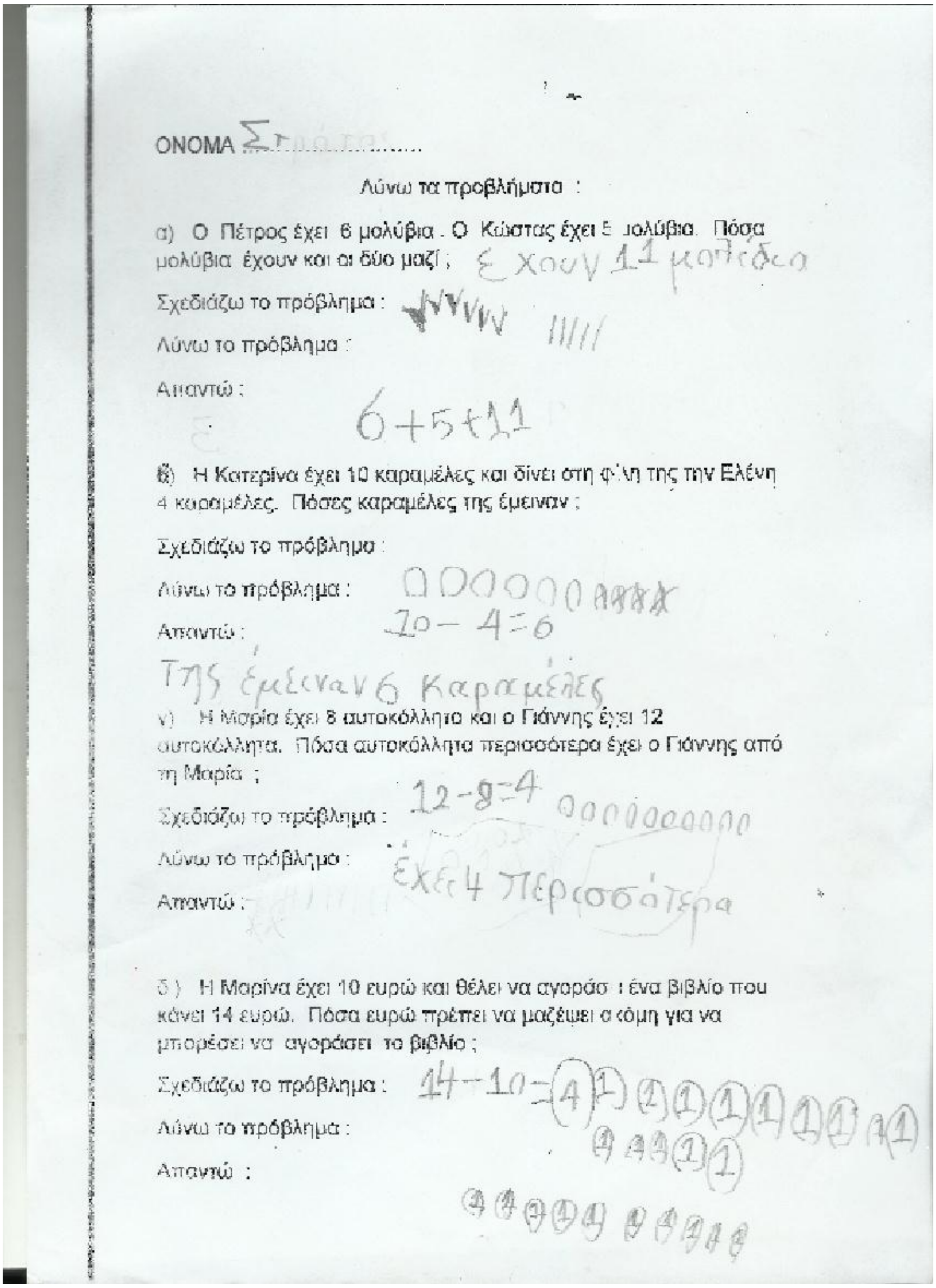
**17/21**

Β΄ πρόβλημα

Στο δεύτερο πρόβλημα, 15 παιδιά βρήκαν σωστό αποτέλεσμα και τα 11 από αυτά σχεδίασαν σωστά την αντίστοιχη πράξη της αφαίρεσης, είτε διαγράφοντας αυτά που αφαιρούνται είτε βάζοντάς τα σε κύκλο για να δείξουν ότι τα εξαιρούν από την υπόλοιπη ποσότητα που απομένει. Φαίνεται λοιπόν, πως η εικονιστική απεικόνιση βοήθησε στην κατανόηση του προβλήματος και τους οδήγησε στη σωστή πράξη και στην εύρεση του σωστού αποτελέσματος της πράξης (10-4=6).

Στο πρόβλημα αυτό, ένα παιδί σχεδίασε 10 καραμέλες και δίπλα άλλες 4 σαν να πρόκειται για πρόσθεση, και όχι για αφαίρεση, ενώ στην πράξη έκανε αφαίρεση, που ήταν και η σωστή πράξη. Στην περίπτωση αυτή όμως, αν και το σχέδιο δεν υποδηλώνει τη σωστή σχέση μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος, η συμβολική πράξη είναι σωστή. Διαφαίνεται να υπάρχει αδυναμία σωστής εικονιστικής αναπαράστασης ενώ αντίθετα υπάρχει ορθότητα στην συμβολική αναπαράσταση. Ένας άλλος μαθητής έδειξε να συγχέει το σύμβολο της πρόσθεσης (+) με το σύμβολο της αφαίρεσης (-) κάνοντας αφαίρεση με το σύμβολο της πρόσθεσης.

Τα περισσότερα από τα παιδιά που έκαναν λάθος, είχαν είτε ελλιπή εικονιστική αναπαράσταση ή λανθασμένο τρόπο στην αναπαράσταση που χρησιμοποίησαν. Το μόνο βέβαιο είναι ότι δεν ήταν σε θέση να συνδέσουν τον τρόπο που έγινε η εικονιστική αναπαράσταση με την πράξη που επέλεξαν για να λύσουν το πρόβλημα.


ΟΝΟΜΑ Στ......

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί ; Έχουν 11 μολύβια

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ :

6+5+11

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : 10 - 4=6

Της έμειναν 6 Καραμέλες

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα : 12-8=4

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : Έχει 4 Περισσότερα

δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα : 14-10=4

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ :

Γραπτό Μ2 μαθητή, όπου φαίνεται στην εικονιστική αναπαράσταση του δεύτερου προβλήματος πως πρόκειται για αφαίρεση όπου διαγράφονται τα αντικείμενα που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολό τους. Μόνο στο τέταρτο πρόβλημα δεν έχουμε πλήρη αναπαράσταση (απουσιάζει η λεκτική απάντηση).

Συγκεντρωτικά:

**Β΄ Πρόβλημα:**

**Εικονιστική αναπαράσταση**

**11/21** σωστά , 1/21 χωρίς εικονική αναπαράσταση, 3/21 με λάθη, 6/21 με ελλείψεις

**Αριθμητική αναπαράσταση**

**15/21**, 1/21 χωρίς αριθμητική αναπαράσταση, 5/21 με λάθη

**Λεκτική αναπαράσταση**

**15/21 σωστά**

Στο πρόβλημα αυτό το οποίο είναι πρόβλημα αλλαγής όπου γίνεται αφαίρεση, όπως καταδεικνύεται από τα αποτελέσματα, σημειώθηκαν λιγότερες επιτυχίες σχετικά με το πρώτο πρόβλημα. Το είδος του προβλήματος (αλλαγής) και το είδος της πράξης (αφαίρεση) φαίνεται ότι ανεβάζουν τον βαθμό δυσκολίας για τα παιδιά.

Γ΄ Πρόβλημα

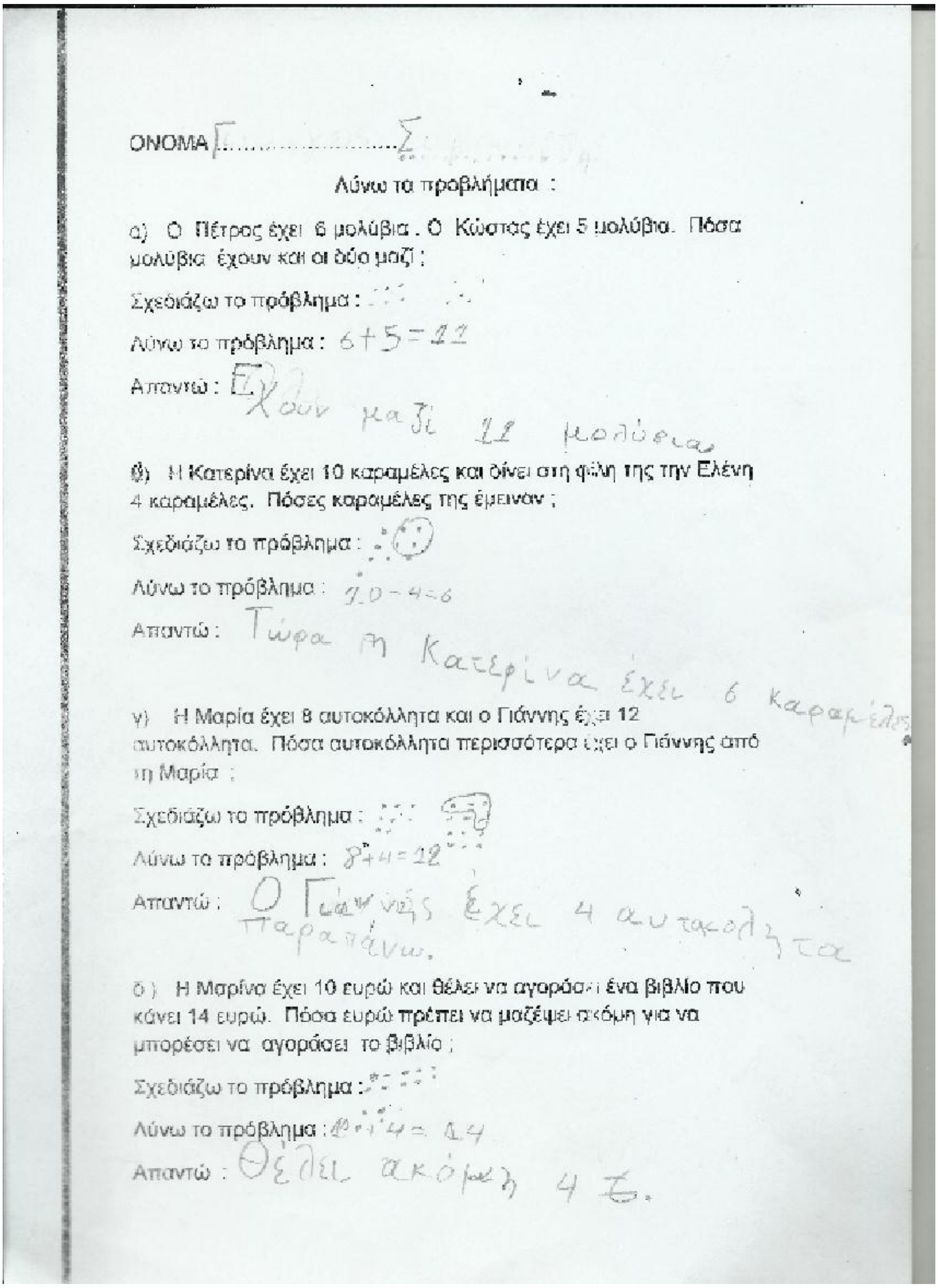
Το τρίτο πρόβλημα είναι πρόβλημα σύγκρισης, όπου, είτε προστίθεται στον μικρότερο αριθμό το συμπλήρωμα, ώστε να εξαχθεί ο μεγαλύτερος αριθμός, είτε γίνεται αφαίρεση των δύο όρων, προκειμένου να βρεθεί η διαφορά τους και να γίνει με αυτό τον τρόπο η σύγκριση των δύο όρων του προβλήματος.

Τα 8 από τα 21 παιδιά, σχεδίασαν το πρόβλημα σαν να πρόκειται για πρόσθεση των δύο όρων του προβλήματος. Έτσι, έκαναν και την αντίστοιχη πράξη, δηλαδή έκαναν πρόσθεση των δύο όρων και όχι αφαίρεση όπως θα έπρεπε. Σε αυτό το σημείο υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στο σχεδιασμό και την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, αν και στο τέλος είναι λανθασμένη. Παρατηρείται δηλαδή, ότι τα παιδιά εκφράζουν τη σκέψη τους μέσα από την εικονική αναπαράσταση και στη συνέχεια προβαίνουν στη σχετική αριθμητική πράξη, όπου μετατρέπουν τον τρόπο σκέψης σε αριθμούς και σε μαθηματικά σύμβολα. Η εικονιστική αναπαράσταση παραπέμπει στην αριθμητική πράξη για την τελική εύρεση του αποτελέσματος, το οποίο στη συνέχεια θα πρέπει να εκφραστεί με τη γραπτή γλώσσα, που θα περιέχει συνδυασμό λέξεων και αριθμών ή αριθμολέξεων.

Δύο μαθητές σχεδίασαν 12 τελείτσες για να αναπαραστήσουν τα 12 αυτοκόλλητα και κύκλωσαν τις 4 από αυτές, για να δηλώσουν ότι το 12 έχει 4 περισσότερες τελείτσες από το 8, το οποίο το έχουν σχεδιάσει δίπλα από τις 12 τελείτσες. Με τον τρόπο αυτό, θέλουν να αναπαραστήσουν εικονιστικά πόσα περισσότερα είναι τα 12 αυτοκόλλητα από τα 8. Ο τρόπος αυτός επίλυσης του προβλήματος καταδεικνύει εννοιολογική κατανόηση από πλευράς των παιδιών, τα οποία δύνανται και αναπαριστούν, αλλά ταυτόχρονα και επιλύουν σωστά ένα πρόβλημα σύγκρισης, το οποίο ανήκει σε μια δύσκολη κατηγορία προβλημάτων για παιδιά της πρώτης σχολικής ηλικίας.

Δύο άλλα παιδιά γράφουν το 12 ως 21, κάνοντας προφανώς αντιμετάθεση των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Παράλληλα, 9 παιδιά χρησιμοποιούν στη λεκτική απάντηση τη λέξη «*περισσότερο*» ή τη λέξη «*παραπάνω*» για τη σύγκριση που κάνουν μεταξύ των δύο όρων «12» και «8». Για παράδειγμα γράφουν ότι «*ο Γιάννης έχει 4 αυτοκόλλητα παραπάνω ή περισσότερα από τη Μαρία*».

Τα 4 από τα 21 παιδιά, έχουν αποδώσει ελλιπώς την οπτική αναπαράσταση του προβλήματος, ενώ τα 9 από το σύνολο των 21 παιδιών έχουν κάνει σωστή εικονική αναπαράσταση. Όσα παιδιά έκαναν την εικονιστική αναπαράσταση με ορθό τρόπο, έκαναν σωστά και την πράξη, βρίσκοντας έτσι σωστό αποτέλεσμα και δίνοντας όπως είναι φυσικό, τη σωστή λεκτική απάντηση. Αντίστοιχα, όσα εμφάνισαν ελλείψεις ή λάθη στην αναπαράσταση αυτή, οδηγήθηκαν σε λάθος αριθμητικά, αλλά και λεκτικά αποτελέσματα .



ΟΝΟΜΑ Γ.......................Σ

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 6+5=11

Απαντώ : Έχουν μαζί 11 μολύβια

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10-4=6

Απαντώ : Τώρα η Κατερίνα έχει 6 καραμέλες

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 8+4=12

Απαντώ : Ο Γιάννης έχει 4 αυτοκόλλητα παραπάνω.

δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10+4=14

Απαντώ : Θέλει ακόμη 4 €.

Γραπτό Μ3 μαθητή όπου κυκλώνει τις τελίτσες για να δείξει με τον τρόπο αυτό πόσα περισσότερα είναι τα 12 από τα 8 (τρίτο πρόβλημα) . Παρατηρούμε επίσης την ύπαρξη και των τριών συστημάτων αναπαράστασης στα προβλήματα.

Συγκεντρωτικά:

**Γ΄ Πρόβλημα**

**Εικονιστική αναπαράσταση:**

**9/21** σωστή, 4/21 ελλιπής, 8/21 λάθος

**I) Αριθμητική αναπαράσταση:**

**13/21** σωστή

Α) με πρόσθεση 9/21

Β) Με αφαίρεση 4/21

**II) Αριθμητική αναπαράσταση:**

8/21 λάθος

Α) με πρόσθεση 7/21

Β) με αφαίρεση 1/21

**Λεκτική αναπαράσταση:**

**14/21** σωστή, 1 ελλιπής, 6 χωρίς καθόλου αναπαράσταση

3 από τις σωστές απαντήσεις δεν συμφωνούσαν με το αριθμητικό αποτέλεσμα ούτε με την εικονιστική αναπαράσταση.

Δ΄ πρόβλημα

Στο τέταρτο και τελευταίο πρόβλημα, το οποίο είναι πρόβλημα εξισορρόπησης, τα 11 από τα 21 παιδιά βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα. Τα 10 από αυτά, αναπαριστούν εικονιστικά τα δεδομένα του προβλήματος με τέτοιο τρόπο που παραπέμπει ορθά στην αριθμητική πράξη, στην οποία κατέληξαν για την επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, σχεδίασαν 10 μικρούς κύκλους, που αναπαριστούν τα ευρώ, και έβαλαν δίπλα άλλα 4 για να γίνουν όλα μαζί 14, όσο δηλαδή είναι το τελικό ποσό.

Κατά συνέπεια, η πράξη που έκαναν ήταν η πρόσθεση του αριθμού 4 στον αριθμό 10, και γι’ αυτό κατέληξαν στο άθροισμα «14». Έλυσαν δηλαδή το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα του αριθμού με πρόσθεση, και όχι κάνοντας αφαίρεση των δύο όρων του προβλήματος. Επομένως, διαπιστώνεται ότι η εικονιστική αναπαράσταση που επέλεξαν, τους βοήθησε στην κατανόηση του προβλήματος και κατέστησε σαφές ότι υπάρχει εννοιολογική κατανόηση από πλευράς μαθητών. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές είναι σε θέση να προχωρήσουν στην σωστή επίλυση του προβλήματος και να δώσουν τη σωστή λεκτική απάντηση σε αυτό.

Συγκεντρωτικά:

**Δ΄ Πρόβλημα**

**Εικονιστική αναπαράσταση:**

**11/21** σωστά, 5/21 με λάθος, 2/21 χωρίς εικονική αναπαράσταση και 3/21 ελλιπείς.

**Ι) Αριθμητική αναπαράσταση:**

**17/21** σωστά

Α) Με πρόσθεση 11/21

Β) Με αφαίρεση 6/21

**ΙΙ) Αριθμητική αναπαράσταση**:

3/21 λάθος

Α) Με πρόσθεση 2/21

Β) Με αφαίρεση 1/21

1/21 χωρίς αριθμητική αναπαράσταση

**Λεκτική αναπαράσταση:**

**9/21** σωστά, 2/21 ελλιπείς, 10/21 χωρίς

Στο πρόβλημα αυτό υπερέχει η αριθμητική αναπαράσταση 17/21 έναντι της εικονιστικής 11/21 και της λεκτικής που είναι μόλις 9/21.

Τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας παρατηρούνται στο πρώτο πρόβλημα με καλύτερα αποτελέσματα και στους τρεις κώδικες αναπαράστασης (εικονικό ή εικονιστικό, αριθμητικό, λεκτικό).

Τα λιγότερα ποσοστά επιτυχίας καταγράφονται στο τρίτο πρόβλημα, το οποίο είναι πρόβλημα σύγκρισης, όπου είναι πολύ χαμηλή η επίδοση στην εικονιστική αναπαράσταση, μόλις 9 στις 21. Το γεγονός αυτό, καταδεικνύει ότι το θέμα της μαθηματικής σύγκρισης δεν γίνεται εύκολα κατανοητό από τους μαθητές, ώστε να μπορέσουν να το αναπαραστήσουν σχηματικά. Ωστόσο, τα ποσοστά επιτυχίας στην αριθμητική και τη λεκτική αναπαράσταση είναι λίγο υψηλότερα σε σχέση με την ευχέρεια των μαθητών στην εικονιστική αναπαράσταση, γεγονός που καθιστά σαφές ότι το πρόβλημα αυτό ήταν πιο εύκολο να επιλυθεί με αριθμητική πράξη και να δοθεί η αντίστοιχη λεκτική απάντηση, παρά να αποδοθεί αναπαραστατικά και απεικονιστικά.

Σε γενικές γραμμές, η εικονιστική αναπαράσταση στα προβλήματα αυτά, υπολείπεται συγκριτικά με τους άλλους δύο κώδικες αναπαράστασης που αξιοποιούνται στην επίλυση των προβλημάτων. Όμως, όσα παιδιά απέδωσαν τα δεδομένα του προβλήματος με σωστές εικονιστικές αναπαραστάσεις, έλυσαν σωστά και την πράξη, όπως επίσης έδωσαν στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, σωστές λεκτικές απαντήσεις στο πρόβλημα. Αντίθετα, η λανθασμένη εικονιστική αναπαράσταση οδήγησε σε λανθασμένο τρόπο επίλυσης του προβλήματος, τόσο αριθμητικά όσο και λεκτικά. Το φαινόμενο αυτό, ίσως αποτελεί μια ένδειξη του βαθμού κατανόησης του προβλήματος από την πλευρά των μαθητών, ώστε να μπορέσουν να το αποδώσουν με αριθμητικά σύμβολα και πράξεις, και να καταλήξουν, εν τέλει, σε σωστά λεκτικά αποτελέσματα.

Και στα τέσσερα προβλήματα, η αριθμητική αναπαράσταση υπερέχει σε ποσοστά επιτυχίας, με μια σαφή προτίμηση των μαθητών στην πράξη της πρόσθεσης, η οποία φαίνεται να είναι ευκολότερη για τους μαθητές και να κάνουν τα λιγότερα λάθη σε σχέση με την πράξη της αφαίρεσης.

Μερικές φορές, προκλήθηκε σύγχυση, σχετικά με τα σύμβολα της πρόσθεσης και εκείνο της αφαίρεσης, ενώ κάποιοι μαθητές έγραψαν αντί για «12», «21», καθώς προέβησαν σε αντιμετάθεση των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Κάποιοι άλλοι έκαναν πρόσθεση, αντί της σωστής πράξης κατά περίπτωση, που ήταν η αφαίρεση.

Από το γεγονός αυτό καταδεικνύεται ότι η πιο προσφιλής και εύκολη πράξη είναι για παιδιά της πρώτης σχολικής ηλικίας η πρόσθεση. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί πως όλα τα προβλήματα λύθηκαν από τους μαθητές και δεν άφησαν κάποιο από τα τέσσερα προβλήματα χωρίς προσπάθεια επίλυσης, όπως συνέβη με τα αριθμητικά προβλήματα στην πρώτη φάση της έρευνας, όπου 4 παιδιά δεν έλυσαν κανένα από τα προβλήματα.

Συνολικά 25 παιδιά από τα 41, έλυσαν και τα τέσσερα προβλήματα στη δεύτερη φάση σωστά , σε ποσοστό 60,97% (κατηγορία 1).

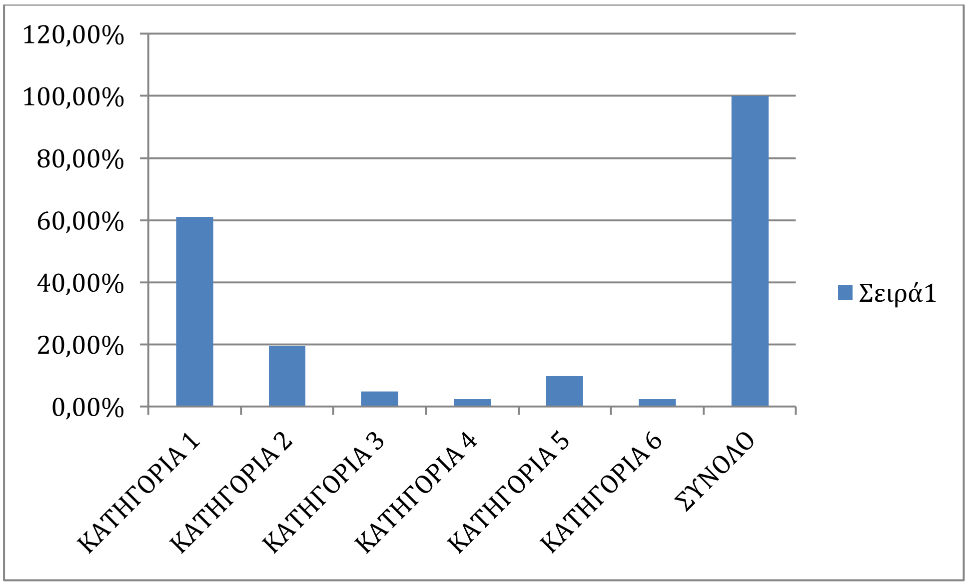
8/41 έκαναν 1 λάθος (στην αριθμητική πράξη), σε ποσοστό 19,51% (κατηγορία 2).

2 παιδιά δεν έκαναν μια πράξη, κατέληξαν όμως στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα και στη σωστή εικονική αναπαράσταση 4,87% (κατηγορία 3).

1 παιδί δεν σημείωσε 2 πράξεις, κατέληξε όμως στο σωστό αποτέλεσμα και στις σωστές αναπαραστάσεις 2,43% (κατηγορία 4).

4/41 έκαναν 2 λάθη, σε ποσοστό 9,75% (κατηγορία 5).

1/41 έκανε 3 λάθη, σε ποσοστό 2,43% (κατηγορία 6).




(Πίνακας 8 – Ποσοστά επιτυχιών ανά κατηγορία )

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, τα ποσοστά των παιδιών ανά κατηγορία επιτυχιών στα προβλήματα της δεύτερης φάσης, όπου χρησιμοποιούνται τρεις κώδικες αναπαράστασης για την επίλυσή τους, ακολουθεί φθίνουσα πορεία, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των λαθών, εκτός από την 5η κατηγορία με τα 2 λάθη, όπου υπάρχει προς στιγμή μια αύξηση του ποσοστού σε σχέση με την 4η κατηγορία. Υπάρχει δηλαδή μια αντιστοιχία με τον πίνακα που παριστάνει τις επιτυχίες στις αριθμητικές ασκήσεις και αντίθετα μια αναντιστοιχία με τις επιτυχίες στα αριθμητικά προβλήματα.

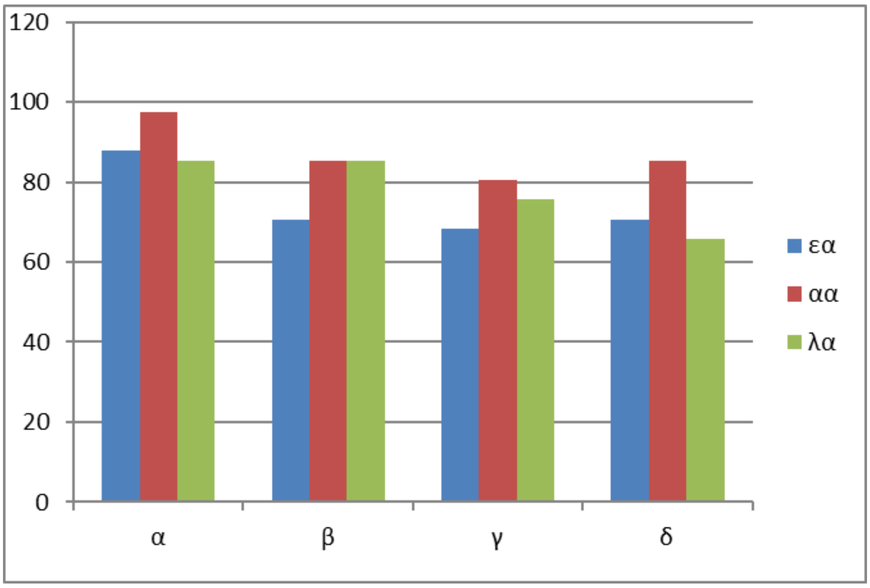
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, συμπεραίνεται ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν τους τρεις κώδικες αναπαράστασης των λεκτικών προβλημάτων με σχετική επιτυχία. Μάλιστα, φαίνεται να σημείωσαν παρόμοια επιτυχία με τις αριθμητικές ασκήσεις όπου οι επιτυχίες εκεί ήταν σημαντικότερες από τα λεκτικά προβλήματα κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης της έρευνας.

Σε σχέση με κάθε πρόβλημα χωριστά οι επιτυχίες των μαθητών και για τα δύο τμήματα σε ένα σύνολο 41 παιδιών ήταν οι εξής :

| | Β΄ φάση της έρευνας |
|---|---|
| **Α΄ πρόβλημα** | |
| Εικονιστική αναπαράσταση (εα) 36/41 ή 87,80% | |
| Αριθμητική αναπαράσταση (αα) 40/41 ή ποσοστό 97,56 | |
| Λεκτική αναπαράσταση (λα) 35/41 ή 85,36 % | |
| **Β΄ πρόβλημα** | |
| Εικονιστική αναπαράσταση 29/41 ή 70,73 % | |
| Αριθμητική αναπαράσταση 35/41 ή 85,36 % | |
| Λεκτική αναπαράσταση 35/41 ή 85,36 % | |
| **Γ΄ πρόβλημα** | |
| Εικονιστική αναπαράσταση 28/41 ή 68,29 % | |
| Αριθμητική αναπαράσταση 33/41 ή 80,48 % | |
| Λεκτική αναπαράσταση 31/41 ή 75,60 % | |
| **Δ΄ πρόβλημα** | |
| Εικονιστική αναπαράσταση 29/41 ή 70,73 % | |
| Αριθμητική αναπαράσταση 35/41 ή 85,36 % | |

| |
|---|
| Λεκτική αναπαράσταση 27/41 ή 65,85 % |

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τα ποσοστά των επιτυχιών ανά πρόβλημα και ανά κατηγορία αναπαράστασης:




(Πίνακας 9 – Επιτυχίες στα 4 προβλήματα και 3 κώδικες αναπαράστασης σε ποσοστά % )

Συνολικά οι επιτυχίες που σημειώθηκαν στη δεύτερη φάση της έρευνας με τη χρήση και των τριών διαφορετικών κωδίκων αναπαράστασης για την επίλυση των προβλημάτων, δεν αναιρεί τη διαπίστωση πως η αριθμητική αναπαράσταση υπερτερεί τις περισσότερες φορές έναντι των άλλων μορφών αναπαράστασης, σημειώνοντας μεγαλύτερο ποσοστό στο πρώτο πρόβλημα σε σχέση με τα άλλα τρία. Στη συνέχεια, ακολουθεί μια μικρή φθίνουσα πορεία και επανακάμπτει στο τελευταίο πρόβλημα. Το χαμηλότερο ποσοστό εμφανίζεται στο τρίτο πρόβλημα, το οποίο παρουσιάζει τις περισσότερες δυσκολίες, όπως έχει επισημανθεί και προηγουμένως λόγω της φύσης του.

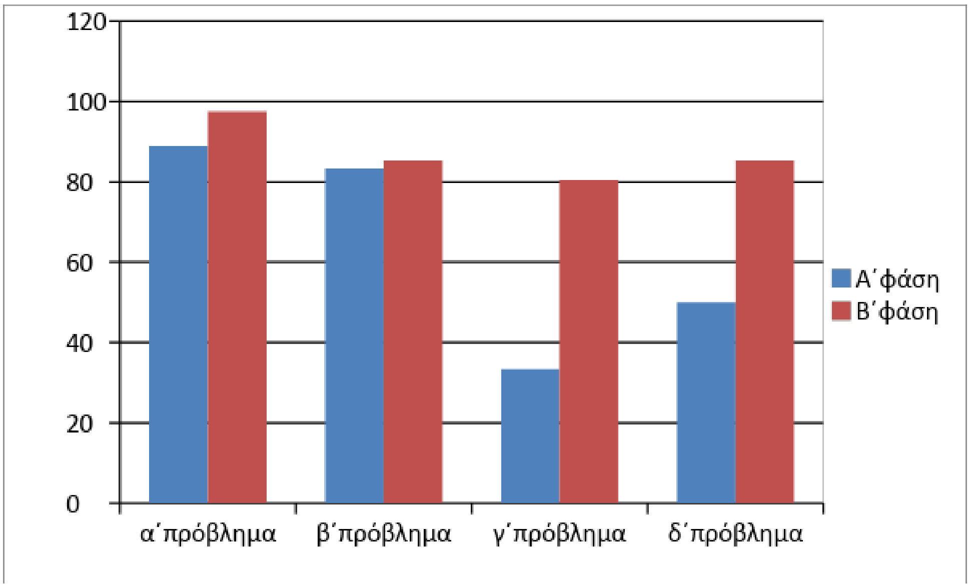
Η εικονιστική αναπαράσταση παρουσιάζει μια αντίστοιχη πορεία με την αριθμητική, αλλά πάντα με χαμηλότερα νούμερα σε σχέση με αυτή. Οι περισσότερες επιτυχίες στην εικονιστική αναπαράσταση εμφανίζονται στο πρώτο πρόβλημα και οι λιγότερες στο τρίτο πρόβλημα.

Η λεκτική αναπαράσταση παρουσιάζει μια σταθερότητα στο πρώτο και δεύτερο πρόβλημα και στη συνέχεια ακολουθεί φθίνουσα πορεία με λιγότερες επιτυχίες στο τέταρτο πρόβλημα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των επιτυχιών αυτών στην αριθμητική αναπαράσταση με τα αποτελέσματα των επιτυχιών των παιδιών αυτών στα ίδια λεκτικά προβλήματα που έλυσαν στην πρώτη φάση της έρευνας με τη βοήθεια μόνο του αριθμητικού κώδικα αναπαράστασης, καταδεικνύονται τα εξής:

| Α΄ φάση της έρευνας | Β΄φάση της έρευνας |
|---|---|
| Λεκτικά προβλήματα | Προβλήματα με 3 κώδικες αναπαράστασης |
| Α΄ πρόβλημα | Α΄ πρόβλημα (αριθμητική αναπαράσταση) |
| 32/36 ποσοστό 88,88% | 40/41 ή ποσοστό 97,56 |
| Β΄ πρόβλημα | Β΄ πρόβλημα (αριθμητική αναπαράσταση) |
| 30/36 ποσοστό 83,33 % | 35/41 ή 85,36 % |
| Γ΄ πρόβλημα | Γ΄ πρόβλημα (αριθμητική αναπαράσταση) |
| 12/36 ποσοστό 33,33 % | 33/41 ή 80,48 % |
| Δ΄ πρόβλημα | Δ΄ πρόβλημα (αριθμητική αναπαράσταση) |
| 18/36 ποσοστό 50 % | 35/41 ή 85,36 % |

Το σχετικό γράφημα δείχνει τις σημαντικές διαφορές που σημειώθηκαν μεταξύ των δύο φάσεων της έρευνας αναφορικά με τα αποτελέσματα των επιτυχιών στη χρήση του αριθμητικού κώδικα για την επίλυση των τεσσάρων προβλημάτων:




(Πίνακας 10 – Ποσοστά επιτυχιών στα 4 προβλήματα με τη χρήση αριθμητικής αναπαράστασης στην α΄και β΄φάση της έρευνας)

Οι διαφορές είναι ιδιαίτερα σημαντικές στο τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα, το οποίο φαίνεται να προβλημάτισε τα περισσότερα παιδιά κατά την πρώτη φάση, ενώ στη δεύτερη φάση τα αποτελέσματα είναι θεαματικά καλύτερα. Υπάρχει μια αύξηση των επιτυχιών της τάξης του 47% και 35% για το τρίτο και τέταρτο πρόβλημα αντίστοιχα στη δεύτερη φάση της έρευνας, συγκριτικά πάντα με την πρώτη φάση.

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι υπήρξε μια σχετική καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό για την εικονιστική αναπαράσταση των μαθηματικών προβλημάτων στους μαθητές του ενός τμήματος, γεγονός που, σαφώς, επηρέασε τα ποσοστά επιτυχίας τους. Ανεξάρτητα από αυτό, παρατηρήθηκε μια μεγάλη βελτίωση ως προς τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών αναφορικά με την αριθμητική αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος. Παρόμοια βελτίωση παρατηρήθηκε στην επίλυση μέσω της εικονιστικής αναπαράστασης που προηγήθηκε, και επηρέασε αρκετά την απόδοση των παιδιών, είτε θετικά είτε αρνητικά ως προς την επίλυση των προβλημάτων.

### 6.3.3 Οι συνεντεύξεις των μαθητών

Σε δεύτερο χρόνο πήραμε συνεντεύξεις από κάποιους μαθητές με το σκεπτικό να ζητήσουμε διευκρινίσεις για το μαθηματικό τους έργο στην προσπάθεια επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων που τους δόθηκαν. Τους δείχναμε το γραπτό τους το οποίο είχε το όνομά τους και τους κάναμε κάποιες διευκρινιστικές ερωτήσεις. Όταν ρωτήθηκαν σχετικά με τις αριθμητικές πράξεις οι περισσότεροι απάντησαν πως τους δυσκολεύει πιο πολύ η πράξη της αφαίρεσης από εκείνη της πρόσθεσης. Αυτοί που είχαν λιγότερες επιτυχίες από τους άλλους μαθητές δήλωσαν πως χωρίς το αριθμητήριο δεν θα τους ήταν εύκολο να εκτελέσουν τις πράξεις και κυρίως την αφαίρεση.

Στα αριθμητικά προβλήματα δήλωσαν ότι τα πιο δύσκολα ήταν το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα. Στην προσπάθειά τους για επίλυση κάποιοι σκέφτηκαν και υπολόγισαν με τα δάχτυλα όπως είπαν. Σε κάποιες περιπτώσεις ειδικά για τα δύο αυτά προβλήματα δήλωσαν πως δεν κατάλαβαν τι έλεγε το πρόβλημα και για το λόγο αυτό δεν το σχρδίασαν ή δεν το έλυσαν σωστά.

Σχετικά με την επίλυση των προβλημάτων στη δεύτερη φάση της έρευνας οι μαθητές ρωτήθηκαν αν ήταν εύκολο να σχεδιάσουν το πρόβλημα. Οι περισσότεροι από αυτούς είπαν πως ήταν αρκετά εύκολος ο σχεδιασμός και μάλιστα τους βοήθησε όπως είπαν στον υπολογισμό του αποτελέσματος. Ένας μαθητής που σχεδίασε τα δύο προβλήματα χωρίς να κάνει τις πράξεις όταν ρωτήθηκε για το γεγονός αυτό είπε πως νόμιζε πως έπρεπε απλά να γράψει το αποτέλεσμα της πράξης δηλαδή να γράψει τον αριθμό που υπολόγισε κάνοντας την πράξη με νοερούς υπολογισμούς.

Οι μαθητές που δεν απάντησαν κυρίως στα δύο τελευταία προβλήματα που όπως φάνηκε ήταν τα δυσκολότερα, είπαν πως δεν ήξεραν τι έπρεπε να γράψουν ή δεν είχαν καταλάβει τι έπρεπε να γράψουν στις απαντήσεις. Μία μαθήτρια ανέφερε πως δεν έδωσε τις απαντήσεις γιατί δεν πρόλαβε ενώ στην εικονική αναπαράσταση είχε ζωγραφίσει ένα αντικείμενο παραπάνω. Καθώς τα μέτρησε κατάλαβε το λάθος της και είπε πως έκανε λάθος γιατί δεν τα είχε μετρήσει σωστά όταν τα σχεδίαζε. Μία άλλη μαθήτρια ενώ έγραψε τη σωστή πράξη βρήκε λάθος αποτέλεσμα και όταν ρωτήθηκε είπε πως δεν μέτρησε σωστά αυτά που είχε σχεδιάσει γιατί είχε μπερδευτεί όπως δήλωσε η ίδια. Μία άλλη μαθήτρια δεν απάντησε στο τρίτο πρόβλημα γιατί δεν πρόσεξε ότι έπρεπε να δώσει μια απάντηση σε αυτό που βρήκε . Η ίδια δεν ήξερε τι έπρεπε να σχεδιάσει στο τέταρτο πρόβλημα όπως είπε, το οποίο δεν έλυσε με πράξη αλλά ούτε έδωσε απάντηση αφού δεν το παρατήρησε ότι έπρεπε να απαντήσει.

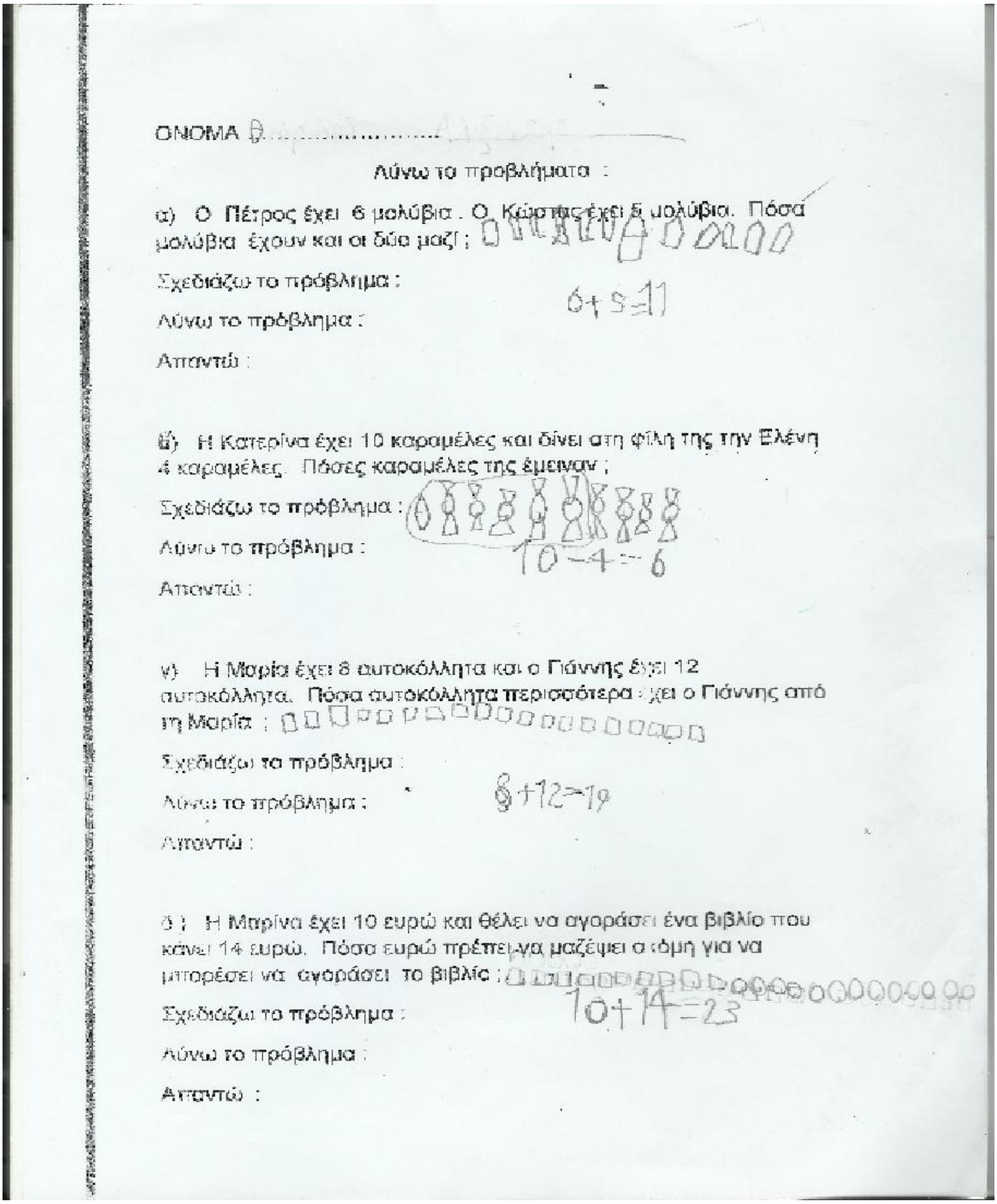
Στην εικονική αναπαράσταση της αφαίρεσης στο δεύτερο πρόβλημα ,δύο μαθητές εξήγησαν πως σχεδίασαν 10 καραμέλες και διέγραψαν τις 4 αφού αυτές της έδωσαν σε κάποιον άλλον. Ένας άλλος μαθητής σχεδίασε 10 καραμέλες με τελίτσες και κύκλωσε τις 4 για να δείξει όπως είπε πως έμειναν 6. Ο ίδιος μαθητής ο οποίος έλυσε όλα τα προβλήματα σωστά και με τους τρεις κώδικες, στο τρίτο πρόβλημα αυτό της σύγκρισης εξήγησε πως σχεδίασε με τελείες τα αυτοκόλλητα που αναφέρει το πρόβλημα και είπε πως από τη μια έχουμε 8 και από την άλλη 12 και κύκλωσε τις 4 τελείες από τις 12 για να δείξει ότι περισσότερα είναι του Γιάννη που έχει τα 12 . Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποίησε και οι διευκρινίσεις που έδωσε δηλώνουν πως μπορεί να χρησιμοποιεί και τους τρεις κώδικες με επιτυχία για την επίλυση των προβλημάτων ενώ συγχρόνως αποδεικνύεται πως είναι ικανός στη μετάφραση από τον ένα κώδικα στον άλλο των δεδομένων και των ζητούμενων των προβλημάτων έχοντας επιτύχει υψηλή εννοιολογική κατανόηση στην επίλυσή τους

## Κεφάλαιο 7ο Συμπεράσματα - Συζήτηση

Τα μαθηματικά αντικείμενα όπως είδαμε αποτελούν ιδεατές οντότητες, που αποδίδονται με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστατικών μέσων, τα οποία μπορεί να αποτελούνται από λεκτικές περιγραφές, γραπτά σύμβολα, σχηματικά μοντέλα ή εικόνες και ακόμη μοντέλα πραγματικών καταστάσεων (Lesh, 1981; Goldin, 1998: στο Τζεκάκη, 2007). Όλα αυτά τα μέσα που αξιοποιούνται στο μάθημα των μαθηματικών, ονομάζονται *εξωτερικές αναπαραστάσεις* (external representations) και προσδίδουν το απαραίτητο νοητικό υπόβαθρο στα μαθηματικά αντικείμενα, ώστε να γίνουν κατανοητά. Ανάλογα με το νόημα και το περιεχόμενο που δίνουν τα παιδιά στα εξωτερικά αυτά αναπαραστατικά μέσα (λέξεις, σύμβολα, σχήματα κ.ά.), δύνανται στη συνέχεια να προσεγγίσουν περισσότερα και να κατανοήσουν εννοιολογικά τα μαθηματικά. Μέσω αυτής της νοηματοδότησης και της επεξεργασίας των εξωτερικών αναπαραστάσεων, δεδομένων και ερεθισμάτων, οι μαθητές δημιουργούν τις *εσωτερικές αναπαραστάσεις* (internal representations), βάσει των προσωπικών τους χαρακτηριστικών, επιθυμιών και βιωματικών εμπειριών.

Οι εσωτερικές και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις δεν πρέπει να ερμηνεύονται και να μελετώνται ξεχωριστά. Υπάρχει πάντα μεταξύ τους μια σχέση αλληλεπίδρασης και αλληλεξάρτησης, και όσο πιο οργανωμένο και σταθερό είναι το εξωτερικό σύστημα αναπαράστασης, τόσο πιο συνεκτικό και καλά δομημένο είναι το εσωτερικό σύστημα αναπαράστασης στο παιδί (Goldin, 1998: αναφορά στο Τζεκάκη, 2007). Η σχέση αυτή λειτουργεί και αντίστροφα, και αποκαλύπτει τη δομή του εσωτερικού συστήματος των αναπαραστάσεων του κάθε παιδιού. Προβάλλει δηλαδή, την εικόνα της εννοιολογικής κατανόησης, που έχει επιτευχθεί από την πλευρά του παιδιού.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην πρώτη σχολική ηλικία είναι συνήθως εικονογραφικές ή εικονικές, σύμφωνα και την ταξινόμηση του Hughes (1996: αναφορά στο Καφούση & Σκουμπουρδή, 2012) στην προσπάθειά τους να παραστήσουν αριθμητικές ποσότητες και μαθηματικές πράξεις με αυτές. Οι εικονογραφικές ζωγραφιές ή αναπαραστάσεις, εμπεριέχουν στοιχεία, τόσο από την εμφάνιση των αντικειμένων που παριστάνουν, όσο και την πληθικότητά τους. Χαρακτηριστικό αυτού, είναι το παράδειγμα από την παρούσα έρευνα, όπου οι μαθητές σχεδιάζουν στο χαρτί και οπτικοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος. Έτσι λοιπόν, στα σκίτσα των παιδιών αποδίδονται εικονιστικά τα μολυβάκια, οι καραμέλες, τα αυτοκόλλητα και τα ευρώ, με τα αντίστοιχα σχήματα των αντικειμένων αυτών, που μοιάζουν με τα ίδια τα αντικείμενα, ενώ δίνουν συγχρόνως και τον πληθικό αριθμό τους.



ΟΝΟΜΑ ....................

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια. Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 6+5=11

Απαντώ :

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10-4=6

Απαντώ :

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 8+12=19

Απαντώ :

δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο;

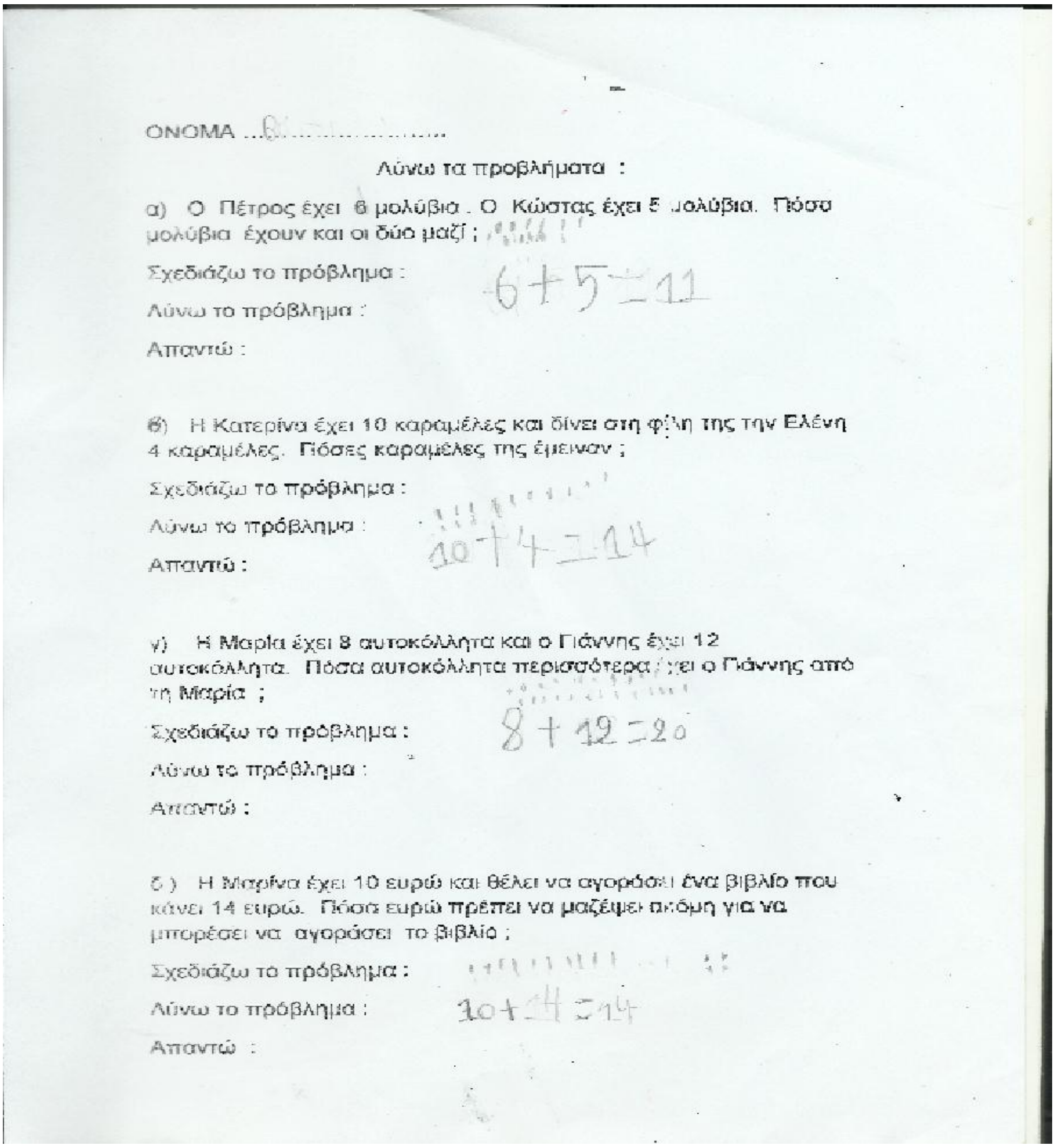
Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10+14=23

Απαντώ :

Γραπτό Μ4 μαθητή, όπου αναπαριστά τα αντικείμενα που αναφέρονται στο πρόβλημα με τη βοήθεια της εικονογραφικής αναπαράστασης (υπάρχει ομοιότητα με το σχήμα των αντικειμένων και η πληθικότητα των αντικειμένων). Στο δεύτερο πρόβλημα βλέπουμε ότι έχει κυκλώσει τις 6 καραμέλες που έμειναν. Παρατηρούμε την απουσία του λεκτικού κώδικα και στα 4 προβλήματα.

Κάποια παιδιά χρησιμοποιούν εικονικές αναπαραστάσεις, οπτικοποιώντας τα αντικείμενα με ασυνεχή σημάδια, όπως είναι οι τελίτσες ή οι γραμμές ή τα κυκλικά σχήματα.



ΟΝΟΜΑ ..Β...................

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 6+5=11

Απαντώ :

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10+4=14

Απαντώ :

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα : 8+12=20

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ :

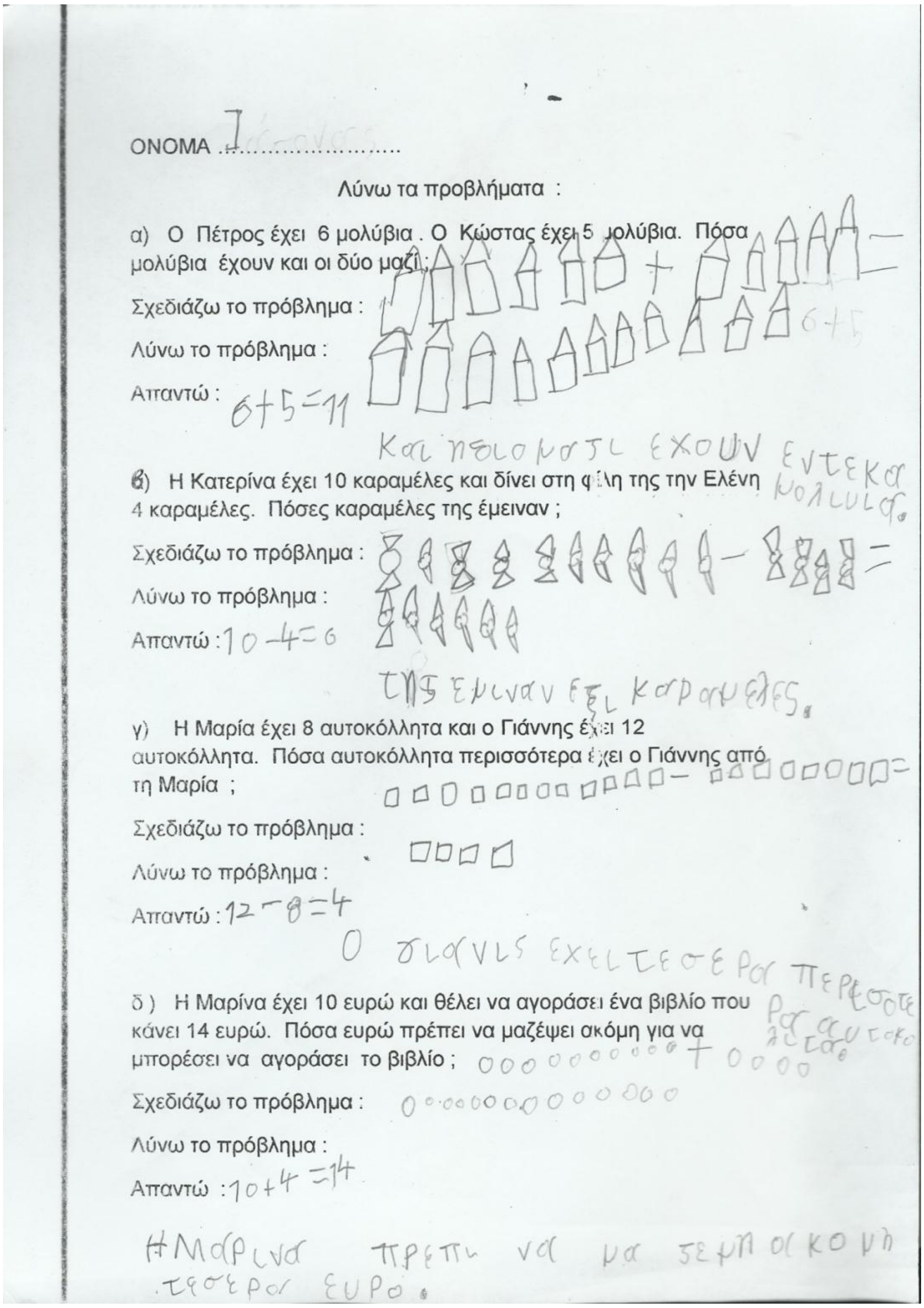
δ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα : 10+4=14

Απαντώ :

Γραπτό Μ5 μαθητή όπου βλέπουμε να χρησιμοποιεί το εικονικό είδος αναπαράστασης (τελίτσες για την αναπαράσταση των αντικειμένων). Σε κάποιες περιπτώσεις, παρατηρήθηκε συνδυασμός εικονογραφικής και συμβολικής αναπαράστασης, όπου χρησιμοποιήθηκαν σχέδια, ταυτόχρονα με μαθηματικά σύμβολα όπως το « + », το « - » και το « = ». Παρατηρούμε πως απουσιάζει ο λεκτικός τρόπος αναπαράστασης του αποτελέσματος που βρήκε.



ΟΝΟΜΑ ......................

Λύνω τα προβλήματα :

α) Ο Πέτρος έχει 6 μολύβια . Ο Κώστας έχει 5 μολύβια. Πόσα μολύβια έχουν και οι δύο μαζί;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : 6+5=11

β) Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει στη φίλη της την Ελένη 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έμειναν ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : 10-4=6

γ) Η Μαρία έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Γιάννης έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα περισσότερα έχει ο Γιάννης από τη Μαρία ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : 12-8=4

δ ) Η Μαρίνα έχει 10 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα βιβλίο που κάνει 14 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μαζέψει ακόμη για να μπορέσει να αγοράσει το βιβλίο ;

Σχεδιάζω το πρόβλημα :

Λύνω το πρόβλημα :

Απαντώ : 10+4=14

Γραπτό Μ6 μαθητή όπου υπάρχει ο εικονογραφικός και ο συμβολικός τρόπος αναπαράστασης των αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Παρατηρούμε επίσης πως υπάρχουν και οι τρεις κώδικες αναπαράστασης όπως επίσης ότι στις λεκτικές απαντήσεις δε χρησιμοποείται ο αριθμός του αποτελέσματος που βρέθηκε αλλά η αντίστοιχη αριθμολέξη (χρήση μόνο λέξεων).

Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να επικοινωνήσουν τη μαθηματική τους σκέψη και για να μοιράζονται μαθηματικά νοήματα, τα οποία πληροφορούν για το επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης που έχουν πετύχει οι μαθητές σε κάθε περίπτωση. Με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις τους, εξωτερικεύουν τις ιδέες και τα νοήματα που έχουν οικειοποιηθεί, τα οποία άλλοτε μπορεί να είναι σωστά κι άλλοτε λανθασμένα. Αναπαριστούν τη μαθηματική τους σκέψη με συμβολικό τρόπο (αριθμούς και σύμβολα), κάνοντας τις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος. Τέλος, χρησιμοποιούν λέξεις για να εκφράσουν το αποτέλεσμα της προσπάθειάς τους, για να εκφραστούν στα μαθηματικά και για να καταφέρουν να αποδώσουν νόημα, το οποίο θα είναι κατανοητό από τους συνομηλίκους και τον εκπαιδευτικό στο σχολικό περιβάλλον της τάξης.

Σε έρευνες που έχουν γίνει, τα παιδιά δείχνουν να καταφέρνουν να απεικονίσουν με εικονογραφικές ή εικονικές αναπαραστάσεις ένα προς ένα τα αντικείμενα που τους δίδονται, αποτυπώνοντας και οπτικοποιώντας ευκολότερα μια κατάσταση κυρίως στατική, ενώ αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία να παραστήσουν τις αλλαγές που εμφανίζουν οι πράξεις (Edwards, 1998; Hughes, 1999: στο Τζεκάκη, 2007). Για το λόγο αυτό, παρατηρείται μεγαλύτερη δυσκολία στην εικονογραφική απόδοση του τρίτου και τέταρτου προβλήματος της έρευνας.

Όπως καταδείχθηκε στην παρούσα έρευνα, η μεγαλύτερη δυσκολία εντοπίστηκε στο τρίτο πρόβλημα, όταν δηλαδή οι μαθητές κλήθηκαν να το επιλύσουν μόνο με αριθμητική πράξη, κατά την πρώτη φάση της έρευνας. Δυσκολίες επίσης παρουσιάστηκαν και στη δεύτερη φάση της έρευνας, αλλά με μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με την πρώτη. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι όσα παιδιά βρήκαν έναν αποτελεσματικό εικονιστικό τρόπο αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος, βοηθήθηκαν στην επίλυσή του και στην εύρεση του σωστού αποτελέσματος. Η εικονιστική αναπαράσταση βοήθησε τα παιδιά και σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας, σε σχέση με την προσπάθεια που έκαναν να επιλύσουν τα ίδια προβλήματα στην πρώτη φάση μόνο με αριθμούς και σύμβολα. Αντίθετα, όσα παιδιά δεν χρησιμοποίησαν έναν αποδοτικό τρόπο εικονικής αναπαράστασης δεν μπόρεσαν να οδηγηθούν σε σωστά αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό, είναι ενδεικτικό της χαμηλής εννοιολογικής κατανόησης που υπάρχει στα παιδιά που σημείωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, κυρίως στο τρίτο πρόβλημα. Εξάλλου, είναι σύνηθες τα παιδιά να αναπαριστούν στα σχέδια και τις ζωγραφιές τους στοιχεία και σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων, τα οποία έχουν αντιληφθεί και έχουν κατανοήσει. Από τα παραπάνω, καθίσταται σαφές ότι η εικονιστική αναπαράσταση επηρεάζει την αριθμητική και τη λεκτική λύση του προβλήματος.

Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας σημειώθηκαν στο πρώτο τμήμα της πρώτης τάξης, όπου κάθε μαθητής επέλεξε αυθόρμητα και εντελώς ελεύθερα τον τρόπο που θα αναπαριστούσε σχηματικά τα δεδομένα του προβλήματος. Το δεύτερο τμήμα, που είχε την καθοδήγηση και τη βοήθεια της εκπαιδευτικού, παρουσίασε τα λιγότερα λάθη στα προβλήματα κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας.

Συχνά οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, αρχικά προβαίνουν σε παρανοήσεις και δεν κατανοούν το πρόβλημα που διερευνούν. Έτσι, προχωρώντας στη διαδικασία της επίλυσης, δεν καταφέρνουν να συνδέσουν τα στοιχεία του προβλήματος και να βρουν μια λύση. Αυτή η αδυναμία οφείλεται στο γεγονός ότι δυσκολεύονται ή αδυνατούν να εντοπίσουν τις δράσεις ή τα μαθηματικά στοιχεία που είναι απαραίτητα για τη λύση του, τα οποία φυσικά διατίθενται στην εκφώνησή τους (Τζεκάκη, 2010). Έτσι, οδηγούνται σε παρερμηνείες και κάνουν αναπόφευκτα λάθη. Παράλληλα, δυσκολεύονται να εκφράσουν τις ιδέες τους λεκτικά ή με άλλα μέσα, δεν μπορούν να τις συγκρίνουν μεταξύ τους και να τις συνδέσουν με αντικείμενα κι αναπαραστάσεις (Diezmann, Watters & Lyn, 2001: στο Τζεκάκη, 2010). Τα παιδιά που σημείωσαν τις λιγότερες επιτυχίες στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που τους δόθηκαν είναι πολύ πιθανόν να μην κατανόησαν αυτά τα προβλήματα ενώ συγχρόνως φάνηκε η αδυναμία τους να εκφραστούν με εικονικό, συμβολικό ή λεκτικό τρόπο αποτυγχάνοντας να συνδέσουν τα αντικείμενα με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις.

Ερευνητές μελέτησαν τα σχέδια των μικρών παιδιών στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν τα δεδομένα προβλήματος που έπρεπε να επιλύσουν και υποστήριξαν ότι οι αναπαραστάσεις αυτές είναι σημαντικές για να μπορέσει το παιδί να συνδέσει το συγκεκριμένο πρόβλημα με την πιο αφηρημένη μαθηματική του λύση (Woleck, 2001: στο Τζεκάκη, 2007). Τα στοιχεία που εμφανίζουν τα σχέδια των μαθητών, σχετίζονται στενά με τη συλλογιστική ικανότητα των μαθητών (Smith, 2005: στο Τζεκάκη, 2007). Μέσα από την εικονιστική αναπαράσταση, γίνεται κατανοητός ο τρόπος σκέψης του παιδιού. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί ο μαθητής, αφορούν στη λεγόμενη «σπονδυλοποίηση», κατά την οποία συσχετίζονται οι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης μιας έννοιας και υπόκεινται σε «αναπαραστατική αναπεριγραφή» (Karmiloff-Smith, 1998: αναφορά στο Παντσίδης, 2006). Τότε, οι άδηλες πληροφορίες γίνονται έκδηλες γνώσεις, οι οποίες γίνονται σταδιακά «συμμεριζόμενες σημασίες» (taken as shared), δηλαδή νοήματα που γίνονται αντιληπτά από όλους (Τζεκάκη, 2010). Αντίθετα, όταν υπάρχει αδυναμία μεταφοράς μιας έννοιας από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, τότε συμβαίνει η λεγόμενη «στεγανοποίηση», όπου ο μαθητής αδυνατεί να αναπαραστήσει τα δεδομένα του προβλήματος στην προκειμένη περίπτωση και οδηγείται σε λανθασμένα αποτελέσματα. Δεν υπάρχει δηλαδή επιτυχημένη «μετάφραση αναπαραστάσεων» (Παντσίδης, 2006) από τη μια μορφή στην άλλη.

Επομένως, ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικός και αυτό γίνεται φανερό από τα αποτελέσματα της έρευνας, η οποία αναφέρεται στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Τα περισσότερα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα βοηθήθηκαν από τη χρήση των τριών μορφών αναπαραστάσεων, σε σχέση με τη χρήση μόνο της συμβολικής αναπαράστασης στην επίλυση των δοσμένων προβλημάτων. Φάνηκε ότι τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν κυρίως τα παιδιά της πρώτης τάξης του δημοτικού σχολείου είναι εικονογραφικές ή εικονικές, τις οποίες χρησιμοποιούν, με κάποιες μικρές δυσκολίες, παράλληλα με τις συμβολικές και τις λεκτικές αναπαραστάσεις, στην απόδοση των πράξεων και των λεκτικών απαντήσεων. Η πιο διαδεδομένη και προσφιλής πράξη των παιδιών είναι σίγουρα η πράξη της πρόσθεσης την οποία κάποιες φορές τη χρησιμοποιούν στη θέση της αφαίρεσης, την οποία φαίνεται να μην την προτιμούν, καθώς τους δυσκολεύει περισσότερο.

Ο αριθμητικός κώδικας φαίνεται να μην είναι τόσο δύσκολος στη χρήση του όταν πρόκειται για απλές αριθμητικές πράξεις και κυρίως για προσθέσεις. Κάποιοι μαθητές όπως είδαμε βοηθήθηκαν από τη χρήση του αριθμητηρίου στον υπολογισμό των πράξεων στην πρώτη φάση της έρευνας και δήλωσαν πως τους είναι απαραίτητο εργαλείο για τους υπολογισμούς τους. Αυτοί οι μαθητές βρίσκονται προφανώς στο χειραπτικό στάδιο των αναπαραστάσεων και τους είναι απαραίτητη η χρήση παγματικών αντικειμένων για την επίλυση μαθηματικών πράξεων

Στα λεκτικά προβλήματα, η αναπαράσταση μόνο με αριθμούς και σύμβολα δυσκόλεψε τα παιδιά σε ένα μεγάλο ποσοστό στο τρίτο και τέταρτο πρόβλημα στην πρώτη φάση της έρευνας, κυρίως λόγω της φύσης αυτών των προβλημάτων (προβλήματα σύγκρισης και εξισορρόπησης). Στη δεύτερη φάση όμως, η χρήση του συμβολικού κώδικα σε συνδυασμό με τους άλλους δύο κώδικες αναπαράστασης, δείχνει να σημειώνει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στην επίλυση των προβλημάτων, υποβοηθούμενος από τους υπόλοιπους κώδικες. Φάνηκε ακόμη πως χρησιμοποιούν ικανοποιητικά και τα τρία είδη αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και ότι μπορούν να μεταφράσουν τα δεδομένα του προβλήματος από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο σε ικανοποιητικό βαθμό. Αντίθετα ο συνδυασμός λεκτικής αναπαράστασης με τη συμβολική δεν έδωσε αρκετές επιτυχίες ακόμη κι αν χρησιμοποίησαν για τους υπολογισμούς των πράξεων τα δάχτυλά τους, τακτική που αποτελεί ενσώματη αναπαράσταση.

Όπως διαφαίνεται από τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας η εικονική αναπαράσταση ενίσχυσε τον ρόλο των δύο άλλων αναπαραστάσεων και βελτίωσε αισθητά τις επιτυχίες των μαθητών. Η εικόνα διαμεσολαβεί ανάμεσα στο αφηρημένο και το συγκεκριμένο, μετατρέποντας το πρώτο σε στοιχείο που είναι πιο προσιτό και πιο οικείο για τους μαθητές ώστε να είναι ικανοί να το διαχειριστούν με μεγαλύτερη ευκολία.

Η πολυτροπική προσέγγιση της μάθησης και συγκεκριμένα η πολυτροπική φύση των μαθηματικών βρίσκει εφαρμογή στην έρευνα αυτή όπου όπως καταλαβαίνουμε από τα αποτελέσματα οι μικροί μαθητές διευκολύνθηκαν αρκετά από τη χρήση τριών διαφορετικών αναπαραστάσεων κι όχι μόνο από τη γλώσσα, τους αριθμούς και τα σύμβολα των μαθηματικών που είναι ο πιο συνήθης τρόπος αναπαράστασης. Η γλώσσα των μαθηματικών προβλημάτων φάνηκε να δημιουργεί προβλήματα κατανόησης στους μικρούς μαθητές κι αυτό φάνηκε από τη δυσκολία που συνάντησαν στην επίλυσή τους κατά την πρώτη φάση της έρευνας. Η αδυναμία αυτή ξεπεράστηκε με τη μετάφραση των νοημάτων του προβλήματος με τη βοήθεια των σχεδίων που επινόησαν και χρησιμοποίησαν οι μικροί μαθητές, γεγονός που συνέβαλε στην προσπάθειά τους για την ορθότερη κατανόηση ώστε να επιτύχουν την επίλυση του προβλήματος. Εκφράστηκαν με πολλαπλές αναπαραστάσεις, με πολλούς τρόπους που παραπέμπουν στην πολυτροπική φύση των μαθηματικών, χρησιμοποώντας επιπροσθέτως το αριθμητήριο στην πρώτη φάση και τα δάχτυλά τους στη δεύτερη φάση της έρευνας για την εύρεση των αποτελεσμάτων στα προβλήματα..

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των παιδιών υποδηλώνουν το βαθμό κατανόησης και την ποιότητα των γνώσεων που έχουν κατακτήσει. Αποτελούν ένα ιδιότυπο είδος «καθρέφτη» της σκέψης και των μαθηματικών ιδεών τους, και θα πρέπει να αναλύονται και να ερευνώνται με τη δέουσα προσοχή.

Φυσικά, μια μικρή έρευνα, όπως αυτή που διεξήχθη στο πλαίσιο του παρόντος πονήματος, δεν είναι σε θέση να εξάγει γενικά συμπεράσματα και θα ήταν καλό, να ενταχθεί στο σύνολο των ανάλογων ερευνών που θα πραγματοποιηθούν στο μέλλον, για να εξαχθούν ασφαλέστερα συμπεράσματα, μεγαλύτερης εμβέλειας. Ωστόσο τέτοιου είδους έρευνες έχουν σημαντικό ενδιαφέρον και θα επιτρέψουν την εξέλιξη των γνώσεων σχετικά με την πολυτροπικότητα και τις αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Συγχρόνως καταδεικνύουν αναμφίβολα την εξέχουσα θέση που κατέχουν οι αναπαραστάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών όλων των ηλικιών και όλων των εκπαιδευτικών βαθμίδων.

Εξάλλου ας μην ξεχνάμε πως σύμφωνα με τον Duval (2006 :107) οι μαθηματικές έννοιες (οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, τα γεωμετρικά σχήματα, κ.λπ.) ως μαθηματικά αντικείμενα είναι προσιτά μόνο έμμεσα "μέσω της χρήσης σημείων και σημειωτικών αναπαραστάσεων" (στο Πατσιομίτου και Εμβαλωτής, 2009).

## Βιβλιογραφία ελληνόγλωσση

Αγαλιώτης, Ι. (2000). Μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Αιτιολογία, αξιολόγηση, αντιμετώπιση. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Αγγελόπουλος, Σ. (2017). Διδασκαλία γνωστικού σχήματος προβλημάτων αφαίρεσης σε μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες : η σημασία των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Σχολή Κοινωνικών, ανθρωπιστικών επιστημών και τεχνών, Θεσσαλονίκη

Αθανασίου, Λ. (2001), Γλώσσα - Γλωσσική Επικοινωνία και Διδασκαλία στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακές εκδόσεις

ΥΠΕΠΘ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Δημοτικού Γυμνασίου, τ. Α', ΦΕΚ. 303/130303

Βαλσαμίδου, Κυρίδης & Βαμβακίδου, 2011

Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., & Σκοπελίτη, Ε. (2008). Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία. *Νόησις*, 3, (1), 137-180

Βρεττός, Γ. (1994). *Η εικόνα στο αναλυτικό πρόγραμμα και στο σχολικό εγχειρίδιο της ιστορίας*. Θεσσαλονίκη: Art of Text

Baynham, M. (2002). *Πρακτικές γραμματισμού*. Αθήνα: Μεταίχμιο

Γρόσδος, Σ. (χ.χ.). *Μαθηματικός γραμματισμός και Οπτικός γραμματισμός: χρειάζονται τα παιδιά εικόνες για να λύσουν μαθηματικά προβλήματα;*. Ανακτήθηκε στις 10/01/2017 από https://stavgros.files.wordpress.com/2011/07/30.pdf

Γρόσδος, Σ. (2008). *Οπτικός γραμματισμός και πολυτροπικότητα. Ο ρόλος των εικόνων στη γλωσσική διδασκαλία στο Βιβλίο Γλώσσας της Β΄ Δημοτικού* (Μεταπτυχιακή εργασία). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Δραγώνα, Θ., Σκούρτου, Ε. & Φραγκουδάκη, Α. (2001), *Εκπαίδευση: Πολιτισμικές Διαφορές και Κοινωνικές Ανισότητες*. Πάτρα

Ηλία, Ι., Χρυσάνθου, Α. & Φιλίππου, Γ. (2003). *Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*. Ανακτήθηκε στις 10/01/2018 από: http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/ilia.pdf

Κάββουρα-Σισσούρα, Θ. (2011). Πολυτροπικότητα και ιστορική σκέψη. Στο Μ. Πουρκός & Ε. Κατσαρού, *Βίωμα, Μεταφορά και Πολυτροπικότητα*, Θεσσαλονίκη: Νησίδες, 626-635

Κασβίκης, Κ. (2004). Αρχαιολογικές αφηγήσεις και εκπαίδευση. Θεσσαλονίκη: Τμήμα Ιστορίας Αρχαιολογίας, Φιλοσοφική Σχολή Α.Π.Θ. (αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή)

Κασσωτάκης, Μ., Φλουρής, Γ., (2002). Μάθηση και διδασκαλία, τ. Α, Μάθηση. Αθήνα: Γρηγόρης

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ. & Τάτσης, Κ. (2009). Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού, Ευκλείδης Γ΄, Τεύχ.71, 42-62

Καφούση, Σ.- Σκουμπουρδή, Χ. (2012). Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών. Αριθμοί και χώρος. Εκδόσεις Πατάκη

Κοντάκος, Α. - Πολεμικός, Ν. (2000). Η μη λεκτική επικοινωνία στο Νηπιαγωγείο. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Kress, G. & Van Leeuwen, T. (2010). Η ανάγνωση των εικόνων. Η γραμματική του οπτικού σχεδιασμού. Αθήνα: Επίκεντρο

Μαρκοβίτης, Μ. & Τζουριάδου, Μ. (1991). Μαθησιακές Δυσκολίες, Θεωρία και πράξη. Θεσσαλονίκη: Προμηθεύς

Α. Μαστρογιάννης & Α. Μαλέτσκος (2009) «Η Μαθηματική Γλώσσα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου». Ανακτήθηκε στις 08/01/2018 από: http://ipeir.pde.sch.gr/educonf/2/09ThetikesEpistimes/mastroyiannis-maletskos/mastroyiannis-maletskos.pdf

Ματσαγγούρας, Η. (2006). Η Σχολική Τάξη. Αθήνα: Γρηγόρη

Ματσαγγούρας, Η. (2006).“Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική Αξιολόγηση Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας”. Συγκριτική και διεθνής εκπαιδευτική επιθεώρηση, 7, 60-92

Ματσαγγούρας, Η. (2007) Θεωρία και πράξη της Διδασκαλίας, τ. Β', Αθήνα: Γρηγόρης

Μπάρμπας, Γ. (2007). Σχολείο και μάθηση. Μια αποκλίνουσα σχέση. Θεσσαλονίκη: Προμηθεύς

Μπίκος, Κ.Γ. (2011). Κοινωνικές σχέσεις και αλληλεπίδραση στη σχολική τάξη, Αθήνα: Ζυγός

Μυλωνάκου-Κεκέ, Η. (2005). “Ταξιδεύοντας μέσα στην εικόνα”, στο Ο. Κωνσταντινίδου-Σέμογλου (επιμ.). Εικόνα και Παιδί, 557-568. Θεσσαλονίκη: cannot not design publications

Ξενοφώντος, Κ. (2014) Γλώσσα, Κουλτούρα και Μετανάστες μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών στο Διαπολιτισμική Εκπαίδευση : προκλήσεις, παιδαγωγικές θεωρήσεις και εισηγήσεις στο Χ. Χατζησωτηρίου και Κ. Ξενοφώντος, Καβάλα :Σαϊτα 219-242

Παντελιάδου, Σ. ( 2000). Μαθησιακές Δυσκολίες και Εκπαιδευτική Πράξη: Τι και γιατί. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Παντσίδης, Χ. (2006). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Παπαϊωάννου, Α. (2014). Η Αναπαραστασιακή ικανότητα των υποψήφιων δασκάλων-Αναπαραστώντας προβλήματα κλασμάτων, Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Σπουδών, Πάτρα

Παπανελοπούλου, Ε. (2002). Πολλαπλοί τύποι νοημοσύνης: Θεωρία-Εφαρμογή και προοπτικές στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου, Τμήμα Ειδικής Αγωγής

Παπαδοπούλου, Μ. (2005). Τα πολυτροπικά κείμενα ως μέσον προσέγγισης της γραφής από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Ερευνώντας τον κόσμο του Παιδιού, 6, σελ. 120-130

Παπούλια – Τζελέπη, Π. (2004). Γραμματισμός ή γραμματισμοί: η πρόκληση του 21ου αιώνα. Στο Π. Παπούλια – Τζελέπη & Ε. Τάφα (Επιμ.), Γλώσσα και γραμματισμός στη νέα χιλιετία. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Πατσιομίτου, Σ. & Εμβαλωτής, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία, *Θέματα στην Εκπαίδευση*, Τεύχ. 2, (3), 247-272

Πολυχρονοπούλου, Σ. (2003). Παιδιά και έφηβοι με ειδικές ανάγκες και δυνατότητες. Τόμος Α΄(Κεφ. 10). Αθήνα: Αυτοέκδοση

Πόρποδας, Κ. (2003). Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου «Διαγνωστική αξιολόγηση και αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο (Ανάγνωση, Ορθογραφία, Δυσλεξία, Μαθηματικά)». Έκδοση στο πλαίσιο υλοποίησης του Έργου ΕΠΕΑΕΚ 2000-2006 του ΥΠΕΠΘ (Μέτρο1.1., Ενέργεια1.1.3, Κατηγορία πράξεων Α) με θέμα «Επιμόρφωση και Εξειδίκευση Εκπαιδευτικών και Στελεχών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης για μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες», Πάτρα

Πουρκός, Μ.Α. & Κατσαρού, Ε. (2011). Βίωμα, μεταφορά και πολυτροπικότητα. Εφαρμογές στην επικοινωνία, την εκπαίδευση, τη μάθηση και τη γνώση, Αθήνα: Νησίδες

Πλειός, Γ. (2005). Πολιτισμός της εικόνας και εκπαίδευση. Ο ρόλος της εικονικής ιδεολογίας. Αθήνα: Πολύτροπον

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg

Τζεκάκη, Μ., Μπάρμπας, Γ., Καλκάνης, Γ. (2008). Προσαρμογές Αναλυτικών Προγραμμάτων για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες στο δημοτικό σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. «Αναλυτικά Προγράμματα Μαθησιακών Δυσκολιών Ενημέρωση - Ευαισθητοποίηση». ΥΠΕΠΘ-ΠΙ

Τζεκάκη Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Θεσσαλονίκη, ΖΥΓΟΣ

Μητακίδου, Σ. & Τρέσσου, Ε. (2007). Να σου πω εγώ πώς θα μάθουν γράμματα, Αθήνα: Καλειδοσκόπιο

Τροκάλλη, Α. (2014). Η διδασκαλία της πολυτροπικότητας στο εκπαιδευτικό λογισμικό για το μάθημα της Γλώσσας στην υποχρεωτική εκπαίδευση, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*, Παπαγεωργίου, Ν. (επιμ.), Αθήνα: Μεταίχμιο

Χατζησαββίδης, Σ. (2011). Η πολυτροπικότητα στη σύγχρονη εγγράμματη κοινωνία ως προϊόν μεταφοράς του βιώματος: προς μια νέα μορφή λόγου. Στο Μ. Πουρκός & Ε. Κατσαρού (Επιμ.), Βίωμα, μεταφορά και πολυτροπικότητα: εφαρμογές στην επικοινωνία, την εκπαίδευση, τη μάθηση και τη γνώση. Νησίδες: Θεσσαλονίκη, σελ. 103-113

Χατζησαββίδης, Σ. (2007). «Ο γλωσσικός γραμματισμός και η παιδαγωγική του γραμματισμού: θεωρητικές συνιστώσες και δεδομένα από τη διδακτική πράξη». Στο Πρακτικά (ηλεκτρονική μορφή) του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΟΜΕΡ. «Η γλώσσα ως μέσο και ως αντικείμενο μάθησης στην προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία». 1-3 Ιουνίου 2007. Πάτρα

Χοντολίδου, Ε. (1999). «Εισαγωγή στην έννοια της πολυτροπικότητας». Γλωσσικός Υπολογιστής, τόμος 1

Vygotsky, L. (1978). «Νους στην Κοινωνία», Αθήνα,: Gutenberg

Vygotsky, L.S. (1978). Σκέψη και Γλώσσα, Αθήνα: Γνώση

## Βιβλιογραφία ξενόγλωσση

Arzarello, F. & Edwards, L. (2005). Gestures and the construction of mathematical meaning (research forum 2). In H.L. Chick & Vincent, J.L. (eds), *Proccedings of thw*

*29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 122-145, Melbourne: Australia University of Melbourne

Avgerinou, M. D. (2009). Re-Viewing Visual Literacy in the “Bain d’ Images” Era. TechTrends, Vol. 53, (No 2), pp. 28-34

Baldino, T., & Cabral, T. (2011). The productivity of students’ schoolwork. Journal for Critical Education Policy Studies, 9(2), 70–84

Baldry, A. & Thibault P. J. (2006). Multimodal Transcription and Text Analysis. London: Equinox

Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students’ construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, *45*, 35–65

Bezemer, J. & Kress, G. (2008). Writing in Multimodal Texts, Written Communication, 25, (2), 166-195

Boaler, J., Chen, L., Williams, C. & Cordero, M. (2016).Seeing as understanding The importance of visual Maths for our Brain and Learning, Department of Mathematics Education, Stanford Cognitive and Systems Neuroscience Lab, Stanford University, USA

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer

Burmark, L. (2008). Visual Literacy: What You Get Is What You See. In N. Frey & D. Fisher (Eds.), Teaching Visual Literacy: using comic books, graphic novels, anime, cartoons, and more to develop comprehension and thinking skills. Corwin Press: Californi

Chapman, L. (1993). Διδακτική της Τέχνης. Αθήνα: Νεφέλη

Chen, C. and Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse and diagrams in students’ geometrical reasoning. Educational Studies in Mathematics, 83(2), 285-307

Chevallard Y (2007) Readjusting Didactics to a Changing Epistemology, European Educational Research Journal, 6(2): 131- 134

Swanson, H. L., Cooney, J.B. & McNamara, J.K. (2004). Learning disabilities and memory. Στο B.Y.L. Wong (ed.) Learning about learning disabilities (3rd ed.) (σελ. 41-92). San Diego, CA: Elsevier

Cope, B., and M. Kalantzis. 1999. Teaching and learning in the new world of literacy: A professional development program and classroom research project: Participants' resource book. Melbourne: Faculty of Education, Language and Community Services, RMIT University

Cope, B. & Kalantzis, M. (2000). Designs for social futures. In B. Cope & M. Kalantzis (Eds), Multiliteracies. Literacy learning and the design of social features. New York: Routledge

Cope, B. & Kalantzis, M. (Eds) (2000). Multiliteracies: Literacy Learning and the Design of Social Futures. London & New York: Routledge

Cope, B. & Kalantzis, M. (2000). Introduction. Multiliteracies: The Begginings of an Idea. In B. Cope & M. Kalantzis (Eds), Multiliteracies: Literacy learning and the design of social futures. London & New York: Routledge, pp. 3-8.

Cope, B. & Kalantzis, M. (2006). New Learning: Elements of a Science of Education. Cambridge: Forthcoming, Cambridge University Press

Cope, B. & Kalantzis, M. (2009a). New media, new learning. In D. R. Cole and D. L. Pullen (eds), Multiliteracies in motion: Current theory and practice (Chapter 5). London: Routledge

Cope, B. & Kalantzis, M. (2009). Multiliteracies: New literacies, new learning. Pedagogies: An International Journal, 4(3), 164–195

Duval, R. (1999). Represantation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, *Basic Issues for learning*

Duval, P. (2006). A Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 1-2

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number, *Educational Studies in Mathematics,* (61), 67-101

Esquinca, A. 2011. Bilingual college writers' collaborative writing of word problems. Linguistics and Education, 22, (2), 150-167

Ferrara F. (2013) How Multimodality works in Mathematical Activity : Young children graphing motion

Freudenthal, H.: 1983, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Fujita, T., Jones, K. & Yamamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry, Paper presented to Topic Study Group 10 (TSG10) at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10). Copenhagen, Denmark; 4--11 July 2004

Gardner, H. (1999). Intelligence Reframed. Multiple Intelligences for the 21st Century. New York : Basic Books

Geary, D.C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. Ανακτήθηκε στις 15/01/2018 από: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.413.1307&rep=rep1&type=pdf

Gelman, R. & Butterworth, B., (2005). Number and language: How are they related? Trends in Cognitive Sciences, 9, 6-10

Ginsburg, H. P. (2014). My entirely plausible fantasy: Early mathematics education in the age of the touch screen computer. Journal of Mathematics Education at Teachers College, 5(1), 9-17

Ginsburg, H. P., Labrecque, R., Carpenter, K, & Pagar, D. (2015). New possibilities for early mathematics education: Cognitive guidelines for designing high-quality software to promote young children's meaningful mathematics learning. In A. Dowker & R. C. Kadosh (Eds.), Oxford handbook of mathematical cognition. Oxford, England: Oxford University Press

Hammill, L. (2010). The interplay of Text, symbols and Graphics in Mathematics Education

Hill, S. & Nichols S. (2013). Early literacy: towards a semiotic approach. In B Spodek & O Saracho (eds), Handbook of research on the education of young children, (p. 147-156). London: Routledge

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2017). Multimodal Languaging as a Pedagogical Model – A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics, *Education Sciences*, Vol.7, (9). Ανακτήθηκε στις 07/01/2018 από: file:///C:/Users/ANNA/Downloads/education-07-00009.pdf

Kalantzis, M. & Cope, B. (2012). Literacies. N.Y.: Cambridge University Press

Kenney, K. (2005). Representation theory. In K. Smith, S. Moriarty, G. Barbatsis, K. Kenney (eds), Handbook of visual communication. Theory, methods, and media. USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. & Valero, P. (2005). Meaning in Mathematics Education, New York: IEEE Computer Society Press

Israel, S.E. & Duffy, G.G. (2014). Handbook of research on reading comprehension, Routledge

Kim, M., Roth, W.M. & Thom, J. (2011). Children's gestures and the embodied Knowledge of geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 207-238

Krauss, R.M., Chen, Y. & Chawla, P. (1996). Nonverbal behavior and nonverbal communication. What do conversational hand gestures tell us? In Zanna, M. (ed), *Advances in experimental social psychology*, Tampa: Academic Press, 389-450,

Kress, G., Jewitt, C., Ogborn, J. & Tsatsarelis, C. (2001). *Multimodal teaching and learning. The rhetorics of the science classroom*. London: Continuum

Kress, G. (2011). Discourse Analysis and Education: A Multimodal Social Semiotic Approach. In R. Rogers (Ed.), An Introduction to Critical Discourse Analysis in Education. New York: Routledge

Kress, G., & Van Leeuwen, T. (2001). Multimodal discourse: The modes and media of contemporary communication. London: Arnold

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*, Cambridge: Cambridge University Press

Lemke, J.L. (2003). Mathematics in the middle Measure, picture, gesture, sign and word. Ανακτήθηκε στις 05/01/2018 από: http://academic.brooklyn.cuny.edu/education/jlemke/papers/myrdene.htm

Lerner, J.W. (1993). Learning Disabilities: Theories, Diagnosis and Teaching Strategies, Pennsylvania: Houghton Mifflin

Lewis, M. (1993), The Lexical Approach. The State of ELT and a Way Forward. London: Language Teaching Publications

Llewllyn A. (2013). Progress – is it worth it? A discussion of productions of progress in mathematics education στο Proceedings of the second Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester

MacGregor, M. & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 449-497

McNamara, D.S., Boonthum, C., Levinstein, I.B. & Millis, K. (2007). Evaluating self explanations in iSTART: Comparing word-based and LSA algorithms. *Handbook of latent semantic analysis*, 227-241

McNeil, D. (1992). *Hand and mind. What gestures reveal about thought*, Chicago: The University of Chicago Press

Mendick H. (2011). Mathematics / Education and progress, στο Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester, Britain

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition, *Educational Studies in Mathematics*, 70, 159-174

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic, *Educational Studies in Mathematics*, July, Vol. 33, (2), 203–233

O’ Halloran, K.L. (2000). Classroom Discourse in Mathematics: A Multisemiotic Analysis. Linguistics and Education, Vol.10, (3), 359-388

Osterholm, M. (2003). Learninf mathematics by reading. A study of students interacting with a text.

Pais, A. (2011). Mathematics education and the political: An ideology critique of an educational research field. Aalborg Universitet. Institut for Læring og Filosofi

Pais, A & Valero, P 2012, 'Researching research: mathematics education in the Political' *Educational Studies in Mathematics*, vol 80, no. 1-2, pp. 9-24

Pimm, D. (1994) 'Mathematics classroom language: form, function and force', in Biehler, R., Scholz, R., Straber, R. & Winkelmann, B. (eds), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 159-169

Popkewitz, T. S. (2009). Curriculum study, curriculum history, and curriculum theory: The reason of reason. Journal of Curriculum Studies, 41(3), 301–319

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236). Rotterdam: Sense

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics. *For the learning of mathematics*, 17, 26-33

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268

Radford, L. (2006). *Communication, apprentissage et formation du* je commimautaire. *In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.),* 20th Italian national conference lnconlri con la Matematica, *November 3-5, 2006*

Radford, L. (2008). *Culture and cognition: Towards an anthropology of mathematical thinking. In L. English (Ed.),* Handbook of International Research in Mathematics Education 2nd Ed. New York: Routledge, Taylor and Francis

Radford, L., Bardini, C, & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, *507-530*

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words, *Educational Studies in Mathematics*, 70, 91-95

Radford, L., Miranda, I. & Guzmán, J. (2008). Relative motion, graphs and the heteroglossic transformatiion of meanings: A semiotic analysis. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), Proceedings of the Joint 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 30th North American Chapter, vol. 4, pp. 161-168

RAND (2002). Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education, Arlington, VA: Education & Science and Technology Policy Institute, October

Resnick, L.B. (1987). The 1987 Presidential Address: Learning in School and out, *Educational Researcher*, Vol.16, (9), December, 13-20, 54

Roth, W.M. & Lee, Y.U. (2004). Science education as/for participation in the community. *Science education*, Vol.88, (2), 263-291

Sabena, C. (2008). On the semiotics of gestures. In Radford, L., Schubring, G. & Seeger, F. (eds), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture*, 19-38, Rotterdam: Sense

Sarama, J. & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research, learning trajectories for young children*, New York: Routledge

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solvning, metacognition, and sense making in Mathematics. In Grouws, D. (ed), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan, 1992

Setati, M. (2001). Researching mathematics education and language in multilingual South Africa. *The Mathematics Educator, 12*(2).

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of mathematics Education. In Bishop, A.J. (ed), *International Handbook of Mathematics Education,* Dordrecht: Kluwer

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating human development, thw growth of discourses, and mathematizing,* Cambridge

Siegel, M. (2006). Rereading the signs: Multimodal transformations in the field of literacy education. Language Arts, 84(1), 65-76

Stech, S. (2008). School Mathematics As A Developmental Activity, 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Charles University, Prague, July 2006, Vol.1, pp.35-48, *Mathematics Education Library,* Vol.45

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective, Mathematics Education Library, vol. 38, Springer, Berlin, New York

The New London Group (1996). A Pedagogy of Multiliteracies: Designing Social Futures. Harvard Educational Review, Vol.66, No.1, Spring. pp. 60-92

Wenger E. (2010) Communities of Practice and Social Learning Systems: the Career of a Concept. In: Blackmore C. (eds) Social Learning Systems and Communities of Practice. Springer, London

Wolfgram, M. (2014). Gesture and the Communication of the Mathematical Ontologies in Classrooms, *Journal of Linguistic Anthropology,* Vol.24, 216-237

Yang, K.L. & Lin, F.L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics,* Vol.97, (1), 59-76

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συνεντεύξεις των μαθητών

1) Η συνέντευξη του Γ.   Δ. :

- Γ.  θα σου κάνω κάποιες ερωτήσεις για τις ασκήσεις που κάναμε. Θυμάσαι ; (Του δείχνω το γραπτό του).
- Ναι , κυρία.
- Θέλω να μου πεις τι σχεδίασες στο πρώτο πρόβλημα.
- Σχεδίασα 11 μπιλάκια για τα μολύβια.
- Γιατί έντεκα;
- Γιατί 5+5=10 και ένα παραπάνω κάνει 11, αφού είναι 5+6
- Τι είναι το 11 που έγραψες ;
- Είναι η απάντηση. Αλλά δεν έγραψα τη λύση που είναι 6+5= 11
- Γιατί δεν έγραψες τη λύση;
- Γιατί την ήξερα.
- Πάμε τώρα στο δεύτερο πρόβλημα. Τι σχεδίασες εδώ;
- Σχεδίασα 6 στρόγγυλες καραμέλες γιατί 10-4=6.
- Έγραψες τη λύση; (Φαίνεται να είναι σβησμένη η πράξη 10-4=6)
- Όχι.  Το έγραψα και το έσβησα γιατί νόμιζα ότι δεν είναι αυτό η λύση.
- Γιατί;
- Νόμιζα ότι έπρεπε να γράψω κατευθείαν 6, δηλαδή πόσο κάνει.
- Είναι σωστή η απάντηση;
- Ναι, κυρία, είναι σωστή.
- Στο τρίτο πρόβλημα, τι ζωγράφισες;
- Ζωγράφισα 8 αυτοκόλλητα και 12 αυτοκόλλητα.  Αυτά που περισσεύουν τα κύκλωσα για να ξέρουμε ότι περισσεύουν.
- Τι έγραψες;
- Έγραψα 8+4=12 γιατί 8+2=10 και 10+2=12.
- Είναι σωστή η απάντηση που έγραψες;
- Ναι.
- Πάμε τώρα στο τέταρτο πρόβλημα.  Τι σχεδίασες εδώ;
- Σχεδίασα 10 ευρώ και 4,  μας κάνουν 14.
- Τι έγραψες ;
- Έγραψα 10 και 4 ίσον 14.
- Είναι σωστό ;
- Ναι.
- Το έγραψες και στην απάντηση;
- Ναι.

2) Η συνέντευξη του Στ . :

- Τι σχεδίασες στο πρώτο πρόβλημα;
- Σχεδίασα 6 μολύβια και 5 μολύβια.
- Πόσο μας κάνουν;
- 11.
- Τι έγραψες στην πράξη;
- Έγραψα και αντί για ίσον γιατί μπερδεύτηκα.
- Τι απάντησες;
- Απάντησα ότι έχουν 11 μολύβια.
- Είναι σωστό;
- Ναι.
- Στο δεύτερο πρόβλημα τι σχεδίασες ;
- Σχεδίασα 10 καραμέλες και έσβησα τις 4 για να μείνουν 6 και της έδωσε στην Ελένη.
- Της έμειναν 6. Σωστά;
- Ναι.
- Στο τρίτο πρόβλημα τι σχεδίασες;
- Σχεδίασα 10 αυτοκόλλητα. (Ενώ θα έπρεπε να σχεδιάσει 12)
- Γιατί 10 και όχι 12 όπως λέει στο πρόβλημα;
- Μπερδεύτηκα με τις καραμέλες. (Οι καραμέλες στο προηγούμενο πρόβλημα ήταν 10).
- Πάμε τώρα στο τελευταίο πρόβλημα.
- Ναι.
- Βλέπω ότι ζωγράφισες 14 ευρώ και μετά και άλλα πόσα;
- 10 ευρώ. (Τα μετράει)
- Γιατί;
- Για να αγοράσει το βιβλίο.
- Πόσο κάνει το βιβλίο;
- Κάνει 14 ευρώ.
- Τι έγραψες μετά;
- Έγραψα 14 βγάζω 10 ίσον 4. (14-10=4)
- τι είναι το 4;
- Είναι 2 και 2.
- Γιατί δεν απάντησες στο τέλος;
- Ξέχασα. Δεν το είδα.
- Τι έπρεπε να απαντήσουμε;
- Έπρεπε να πάρει 14.
- Τι 14;
- Δεν ξέρω.

3) Η συνέντευξη του Κ .

- Διάβασε το πρόβλημα Κωνσταντίνε. (Το διαβάζει)

- τι σχεδίασες;
- 5 μολύβια και 6 μολύβια.
- Με αριθμούς;
- Εγραψα 5 και 6 μας κάνουν 11. Τι απάντησες;
- Όλα τα μολύβια είναι 11.
- Ωραία. Στο δεύτερο πρόβλημα τώρα. Τι σχεδίασες εδώ;
- 10 καραμέλες κι έσβησα 4 γιατί της έδωσε στη φίλη της.
- Τι έγραψες μετά;
- 10 βγάζω 4 ίσον 6.
- Είναι σωστό;
- Ναι, είναι.
- Πάμε τώρα στο τρίτο πρόβλημα.
- Αυτό μου φάνηκε δύσκολο.
- Γιατί ;
- Δεν ήξερα  πώς να το λύσω. Ήταν δύσκολο.
- Τι σχεδίασες;
- Σχεδίασα 8 και 12 αυτοκόλλητα.
- τι έγραψες;
- Έγραψα 8 και 12 ίσον 20. Είναι σωστό;
- Κυρία , είναι λάθος.
- Γιατί ;
- Γιατί 8 και 4 μας κάνουν 12.
- Ήταν δύσκολο…
- Στο τελευταίο πρόβλημα τι σχεδίασες;
- Σχεδίασα 10 και 4 ευρώ. Είναι ευρώ.
- Τι έγραψες;
- Εγραψα 10+4=14
- Τι λείπει από την απάντηση που έγραψες; (Διαβάζει την απάντηση)
- Πρέπει να γράψω Η Μαρίνα θέλει 4 ευρώ για να το αγοράσει. (Λείπει η λέξη ¨θέλει¨ από το γραπτό του και το επισημαίνει).
- Ωραία.

4) Η συνέντευξη του Γ . Σ.

- Γ ., θα μου πεις τι σχεδίασες στο πρώτο πρόβλημα (Βλέπει το γραπτό του).
- Σχεδίασα 6 και 5 βουλίτσες που είναι τα μολύβια.
- Πώς το έγραψες με αριθμούς;
- Έγραψα 6+5=11.
- Είναι σωστό
- Ναι.
- Μετά τι απάντησες;

- Απάντησα ότι έχουν 11 μολύβια.
- Τώρα πάμε στο άλλο πρόβλημα (Διαβάζει με μεγάλη ευχέρεια το πρόβλημα). Τι μας λέει το πρόβλημα;
- Η Κατερίνα έχει 10 καραμέλες και δίνει τις 4.
- Τι σχεδίασες;
- Έχω κάνει 10 βουλίτσες, κύκλωσα τις 4 κι έμειναν έξω 6.
- Τι είναι αυτές οι έξι:
- Οι καραμέλες που έμειναν στην Κατερίνα.
- Τι έγραψες με τους αριθμούς;
- Έγραψα 10 πλην 4 ίσον 6.
- Τι απάντησες;
- Τώρα έχει 6 καραμέλες.
- Ωραία. Να δούμε τώρα το τρίτο πρόβλημα. (Διαβάζει πάλι το πρόβλημα).
- Τι σχεδίασες εδώ;
- Σχεδίασα , κυρία, 8 βουλίτσες από τη μια και 12 βουλίτσες.
- Τι είναι αυτές οι βουλίτσες;
- Οι βουλίτσες παριστάνουν τα αυτοκόλλητα. Έχω κυκλώσει τις 4 από τις 12 και οι άλλες είναι 8.
- Για να δείξεις τι ;
- Ότι περισσότερες έχει ο Γιάννης.
- Πόσες περισσότερες έχει;
- 4 αυτοκόλλητα έχει ο Γιάννης και τα κύκλωσα για να φαίνονται.
- Τι έγραψες με αριθμό;
- 8 και 4 μας κάνουν 12.
- Γιατί;
- 8 έχει η Μαρία και 4 γιατί ο Γιάννης έχει 4 περισσότερα από τη Μαρία.
- Το 12 τι είναι;
- Ο αριθμός του Γιάννη, δηλαδή πόσα αυτοκόλλητα έχει ο Γιάννης.
- Τι απαντάμε;
- Ο Γιάννης έχει 4 παραπάνω.
- Σωστό;
- Ναι, κυρία.
- Τώρα το τέταρτο πρόβλημα. (Διαβάζει)
- Τι σχεδίασες;
- 10 βουλίτσες και άλλες 4 που μας κάνουν 14.
- Τι παριστάνουν οι βουλίτσες;
- οι βουλίτσες παριστάνουν τα λεφτά της.
- Πώς το έγραψες;
- 10 και 4 ίσον 14. Γιατί;
- Θέλει άλλα 4. Είχε 10 ευρώ και 4 ίσον 14.
- Πόσα της λείπουν;

- 4 ευρώ.  Θέλει ακόμη 4 ευρώ.
- Ωραία.

5) Η συνέντευξη του Σ . :

- Τι σχεδίασες Σ .;
- Σχεδίασα 5 μολύβια και άλλα 6.
- Πώς το έγραψες μετά;
- 6 και 5 μας κάνουν 11.
- Είναι σωστό;
- Ναι.
- Τι απάντησες ;
- Έχουν 11 μολύβια.
- Στο άλλο πρόβλημα τώρα. Τι σχεδίασες;
- Μία καραμέλα συν 2 (Δεν φαίνονται καλά).  Σχεδίασα 10 καραμέλες.  Έβαλα σε ένα κουτάκι 4 καραμέλες.
- Γιατί
- Γιατί της έδωσε στην Ελένη.
- Τι έγραψες;
- Έγραψα 10 της έδωσε 4 μας έμειναν 6.
- Γιατί δεν απάντησες;
- Δεν πρόλαβα κυρία.
- Στο τρίτο πρόβλημα.  (Το διαβάζω εγώ για να το ακούσει).  Τι σχεδίασες εδώ;
- Από 12 αυτοκόλλητα και έκανα 7 και μετά έβαλα 8 και 4 ίσον 12.
- Με αριθμούς.
- Ναι.
- Υπολόγισα θα κάνει 12.
- Τι απαντάμε;
- Δεν ξέρω.
- Ο Γιάννης έχει περισσότερα ;
- Ναι.
- Πόσα έχει;
- Έχει 12.
- Η Μαρία πόσα έχει;
- Έχει 8.
- Ο Γιάννης έχει περισσότερα από τη Μαρία. Σωστά.
- Ναι, κυρία.
- Πόσα περισσότερα έχει;
- Από 12.
- Προχωράμε στο άλλο πρόβλημα. Τι έγραψες; (Δεν το έχει σχεδιάσει).
- 10 και 14 ίσον 23 (10+14=23)
- Γιατί το έγραψες;

- Είχα 10 ευρώ και την έλειπαν άλλα 14 και εγώ είπα κάνει 23.
- Δεν το σχεδίασες;
- Όχι. Γιατί ο Γιώργος δε με άφησε.
- Τι θα απαντούσαμε;
- Συν 14 θα βάζαμε τόσα και τόσα… Δεν ξέρω κυρία τι θα απαντούσαμε…
- Εντάξει. Τελειώσαμε μπορείς να βγεις διάλειμμα.
- Ευχαριστώ, κυρία.

6) Η συνέντευξη της Ι . :

- Διάβασε σε παρακαλώ το πρώτο πρόβλημα. Τι έχεις σχεδιάσει;
- 6 μολύβια και 5.
- Τι έγραψες;
- 6 και 5 κάνουν 11.
- Είναι σωστό;
- Ναι.
- Τι απάντησες;
- Έχουν 11 μολύβια.
- Σωστό;
- Ναι.
- Στο άλλο πρόβλημα.
- Πόσες καραμέλες σχεδίασες;
- 10.
- Τι έγραψες;
- 10 βγάζω 4 ίσον 6.
- Τι απάντησες;
- Έχει 6 καραμέλες.
- Είναι σωστό;
- Ναι.
- Στο τρίτο πρόβλημα. Ποιος έχει πιο πολλά;
- Ο Γιάννης.
- Τι σχεδίασες;
- Αυτοκόλλητα.
- Πόσα; (Τα μετράει).
- 13.
- Γιατί 13; Πόσα έπρεπε;
- 12.
- Πόσα πρέπει να σβήσουμε;
- Ένα για να γίνουν 12. Είναι ένα παραπάνω. Δεν το είδα.
- Στο τέταρτο πρόβλημα. Τι σχεδίασες;
- Σχεδίασα 10 ευρώ και 13 ευρώ. (Τα μετράει). Ένα παραπάνω κατά λάθος.
- τι έγραψες;

- 14 πλην 10 ίσον 4.
- Γιατί δεν απάντησες;
- Δεν απάντησα γιατί δεν πρόλαβα.
- Ποια νομίζεις ότι είναι η απάντηση ;
- Είναι 4 ευρώ.
- Σε ευχαριστώ.

7) Η συνέντευξη της Μ .:

- Θα μου πεις τι σχεδίασες στο πρόβλημα;
- Σχεδίασα 6 μολύβια .(Δεν σχεδίασε τα άλλα 5).
- Τι έγραψες;
- 6 και 5 ίσον 11.
- Σωστά ;
- Ναι.
- Τι απάντησες;
- Το γράφουμε με γράμματα.
- Μετά στο δεύτερο πρόβλημα. Τι σχεδίασες;
- Σχεδίασα 10 καραμέλες.
- Τι έγραψες;
- Έγραψα 10 +4 = 6
- Πόσο κάνει;
- 14.
- Γιατί έγραψες 6;
- Δεν το ήξερα.
- Ποιο είναι το σωστό;
- 14. Να απαντήσουμε 14.
- Στο τρίτο πρόβλημα, ο Γιάννης έχει περισσότερα. Εσύ τι έγραψες;
- 12-8=4.
- Είναι σωστό;
- Ναι. Ο Γιάννης έχει 4 περισσότερα.
- Είναι σωστό;
- Ναι.
- Εδώ στο τελευταίο πρόβλημα τι ζωγράφισες;
- Ζωγράφισα ευρώ.
- Πόσα ευρώ;
- 10 ευρώ.
- Τι έγραψες;
- 14-10=4
- Σωστά;
- Ναι.
- Πόσο κάνει;

- Από τα 14 βγάζω τα 10. (Μετράει με τα δάκτυλα). Μένουν 4. Ήθελα να δω αν είναι σωστό.
- Πόσα της λείπουν;
- Της λείπουν 4 ευρώ.
- Γιατί δεν το έγραψες; Δεν πρόλαβες να γράψεις την απάντηση;
- Ναι.