ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ Β'

Διπλωματική εργασία

"Πειραματική διδασκαλία με βάση τις νέες αρχές διδασκαλίας της Άλγεβρας στη Β΄ Γυμνασίου"

του

Δημητρίου Μέμτσα,
Α.Ε.Μ. 572

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής
Εξεταστές: Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής
Ιωάννης Παπαδόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, Ιούνιος 2018

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη

Η άλγεβρα αποτελεί μία από τις σπουδαιότερες αλλά και δυσκολότερες ενότητες των μαθηματικών τόσο από άποψη μάθησης όσο και διδασκαλίας. Η αφαιρετική σκέψη, η σχέση της με την αριθμητική, η ανάγκη επιδεξιότητας χειρισμού συμβόλων, η μετάβαση από την διαδικαστική στη δομική σκέψη είναι κάποιες από τις αιτίες των δυσκολιών αυτών. Η εισαγωγή της γίνεται παραδοσιακά στα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μετά την διδασκαλία της αριθμητικής. Το θέμα της άλγεβρας και ιδιαίτερα το θέμα των συναρτήσεων, λόγω των δυσκολιών αυτών έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία έρευνα σχεδιασμού στην εισαγωγή των συναρτήσεων στο Γυμνάσιο. Η έρευνα αυτή περιλαμβάνει τον σχεδιασμό σειράς μαθημάτων βάσει των νέων αρχών στη διδασκαλία της άλγεβρας, με χρήση ψηφιακών εργαλείων, ρεαλιστικών προβλημάτων, καθώς επίσης και διαθεματικών δραστηριοτήτων σε έννοιες της Φυσικής. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε το σχολικό έτος 2016-17 και τα αποτελέσματά της συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ομάδας ελέγχου στην οποία η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε με συμβατικές μεθόδους. Τα αποτελέσματα αυτής της σύγκρισης παρουσιάζονται επίσης στην διπλωματική αυτή εργασία.

Λέξεις κλειδιά: συναρτήσεις, ΤΠΕ, διαθεματικότητα, έρευνα σχεδιασμού

Κεφάλαιο 1

1.1 Η άλγεβρα

Η άλγεβρα είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τον συμβολισμό γενικών αριθμητικών σχέσεων και μαθηματικών δομών και με την εκτέλεση πράξεων μεταξύ των δομών αυτών (Kieran, 1992). Αυτό συνεπάγεται την διερεύνηση αριθμητικών συστημάτων και των πράξεων σ' αυτά και στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει πράξεις με μεταβλητές, επίλυση εξισώσεων, δημιουργία τύπων για προβληματικές καταστάσεις, εργασία στις συναρτήσεις με την βοήθεια τύπων, πινάκων και γραφημάτων κλπ. (Drijvers, Goddijn, & Kindt, 2011). Κατά τον Usiskin, (1988), η άλγεβρα είναι «γενικευμένη αριθμητική», ένας τρόπος λύσης διαφόρων τύπων προβλημάτων, μία μελέτη σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων και μία μελέτη δομών. Οι Stacey & Chick, (2004), θεωρούν ότι η άλγεβρα είναι ένας τρόπος έκφρασης γενικοτήτων, μία μελέτη χειρισμού συμβόλων και επίλυσης εξισώσεων, μία μελέτη συναρτήσεων, ένας τρόπος λύσης συγκεκριμένων κλάσεων προβλημάτων, ένας τρόπος μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων και ένα φορμαλιστικό σύστημα που περιλαμβάνει την θεωρία των συνόλων, τη λογική και πράξεις επί οντοτήτων πέραν των πραγματικών αριθμών. Οι παραπάνω ορισμοί μας δίνουν μία ολοκληρωμένη εικόνα για τον ορισμό της άλγεβρας καθώς καθένας τους δίνει έμφαση σε ιδιαίτερες πτυχές της.

Η εισαγωγή της άλγεβρας παραδοσιακά γίνεται στα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μετά την διδασκαλία της αριθμητικής στο πρόγραμμα σπουδών των προηγουμένων ετών, αν και τα τελευταία χρόνια υποστηρίζεται ότι αυτή θα πρέπει να αποτελεί ένα τρόπο σκέψης και επίλυσης προβλημάτων που ξεκινά από την πρώτη βαθμίδα και επεκτείνεται σε όλη τη μαθηματική εκπαίδευση (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008; Radford, 2015). Η εικόνα της άλγεβρας στο σχολείο είναι η απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων, η επίλυση εξισώσεων και η εκμάθηση κανόνων χειρισμού συμβόλων. Οι συναρτήσεις περιλαμβάνονται στο περιεχόμενο της παραδοσιακής σχολικής άλγεβρας έχουν όμως γενικά ένα περιορισμένο ρόλο. Πολλές φορές οι μαθητές καταφεύγουν στην απομνημόνευση κανόνων και διαδικασιών θεωρώντας ότι αυτό αποτελεί την ουσία της άλγεβρας. Η άλγεβρα όμως, ιδιαίτερα ως χειρισμός συμβόλων, αποτελεί ένα από τα δύσκολα πεδία των μαθηματικών καθώς δεν σχετίζεται άμεσα με την καθημερινή ζωή των μαθητών και αυτό αποτελεί μία από τις αιτίες αποξένωσης τους από τα μαθηματικά (Stacey & Chick, 2004). Επιπλέον, η σχολική άλγεβρα παραδοσιακά διδάσκεται σαν ένα σύνολο διαδικασιών αποσυνδεδεμένων τόσο από την υπόλοιπη μαθηματική γνώση όσο και από τον, πραγματικό κόσμο (Kaput, 1999) Μια τέτοια άλγεβρα όμως αποτυγχάνει σε όλες τις διαστάσεις που θεωρούνται απαραίτητες για την κατανόηση στην τάξη (Carpenter & Lehrer, 1999).

Η παραδοσιακή προσέγγιση της διδασκαλίας της άλγεβρας συνάδει με την γενικότερη αντίληψη που επικρατούσε για τη φύση των μαθηματικών τα οποία θεωρούνταν από τους περισσότερους ως ένα σταθερό, στατικό σώμα γνώσης

(Romberg & Kaput, 1999). Η αντίληψη αυτή έχει επιδράσει καθοριστικά τόσο στον προσδιορισμό του περιεχομένου όσο και στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών. Στα προγράμματα αυτά επικρατεί η δασκαλοκεντρική προσέγγιση και ο ρόλος τους δασκάλου είναι να διδάξει τους ορισμούς των εννοιών, ενώ οι μαθητές θα πρέπει να περιορίζονται στο να αφομοιώνουν αυτά που κάποιοι άλλοι έχουν προετοιμάσει γι αυτούς, να απομνημονεύουν τη γνώση και να ασκούνται στην εφαρμογή διαφόρων διαδικασιών μέχρις ότου αυτές να γίνουν κτήμα τους. Στα παραδοσιακά σχολεία επομένως οι μαθητές δεν κάνουν μαθηματικά και αυτό που θεωρείται ως μαθηματική γνώση είναι στην πραγματικότητα η μάθηση και η δεξιοτεχνία χειρισμού κάποιων τεχνικών που τους είναι χρήσιμες για συγκεκριμένες περιπτώσεις, χωρίς να δίνεται βάρος στην εννοιολογική τους κατανόηση.

Η παραδοσιακή διδασκαλία όμως της άλγεβρας του χειρισμού των συμβόλων δεν παρέχει κίνητρα για την μάθηση καθώς δεν αφήνει στο μαθητή περιθώρια για εφευρετικότητα ή διαίσθηση, για εικασία, έκπληξη ή ανακάλυψη. Με τον τρόπο αυτό διδασκαλίας επίσης απομονώνονται τα μαθηματικά από τις πρακτικές εφαρμογές τους καθώς και από άλλα επιστημονικά αντικείμενα. Το θέμα επομένως της άλγεβρας και των δυσκολιών μάθησής της, στο πλαίσιο και της γενικότερης έρευνας και εξέλιξης των θεωριών μάθησης, αποτέλεσε ένα από τα πιο σημαντικά πεδία των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών και αποτελεί ένα επίκαιρο θέμα μελέτης ακόμη και σήμερα. Το θέμα που ερευνάται είναι αν το πρόβλημα εντοπίζεται στο περιεχόμενο της άλγεβρας αυτό καθ' αυτό ή μήπως αυτό δημιουργείται από τον τρόπο διδασκαλίας της. Παράλληλα τα τελευταία χρόνια δύο παράγοντες που συνετέλεσαν στην ιδιαίτερη προσοχή που δίνεται στην διδασκαλία της άλγεβρας είναι η «μαζικοποίηση» της εκπαίδευσης οπότε αυτή παύει να αποτελεί «προνόμιο» των λίγων, αλλά και η πρόοδος της τεχνολογίας (Stacey, 2009). Για τους λόγους αυτούς στόχος και πρόκληση είναι ο επανακαθορισμός κι η αντίληψη της άλγεβρας και της διδασκαλίας της ως ενός θέματος άμεσα συσχετισμένου με θέματα της καθημερινότητας των μαθητών και ταυτόχρονα κατανοητού και χρήσιμου.

1.2 Ο αλγεβρικός συλλογισμός

Από την συζήτηση κατά τις δεκαετίες του 80και του 90 επί του θέματος της άλγεβρας προέκυψε μία λίγο ή πολύ γενική συμφωνία σε δύο πτυχές της αλγεβρικής σκέψης (Radford, 2010). Η άλγεβρα από την μία ασχολείται με αντικείμενα που είναι αόριστα από τη φύση τους όπως οι άγνωστοι, οι μεταβλητές και οι παράμετροι από την άλλη δε η επεξεργασία των αντικειμένων αυτών γίνεται με αναλυτικό τρόπο. Στην άλγεβρα δηλαδή γίνονται υπολογισμοί επί αορίστων ποσοτήτων ωσάν αυτές να ήταν γνωστοί αριθμοί. Η άλγεβρα αποτελεί συνήθως το πρώτο πεδίο στα σχολικά μαθηματικά στο οποίο αναπτύσσεται ο αφηρημένος συλλογισμός, μέσω της μετάβασης από την αριθμητική στη συμβολική γλώσσα της άλγεβρας. Κατά τη μετάβαση αυτή οι μαθητές αναπτύσσουν τον τρόπο σκέψης τους μαθαίνοντας να λειτουργούν με χρήση αφηρημένων αντί απτών ποσοτήτων και καθίστανται ικανοί να θεωρούν μόνο λογικές σχέσεις μεταξύ διαφορετικών στοιχείων αγνοώντας το απτό περιεχόμενό τους. Αυτό συμβαίνει στην ηλικία περίπου των δώδεκα ετών κατά την οποία σύμφωνα με την θεωρία των σταδίων της γνωστικής ανάπτυξης του Piaget συμβαίνει μία ποιοτική μεταβολή στην γνωστική ανάπτυξη του ατόμου (Piaget, 1976) κατά την οποία μεταβαίνει από το δεύτερο στάδιο ανάπτυξης της συγκεκριμένης λογικής σκέψης στο τρίτο στάδιο της λογικής σκέψης. Ο αλγεβρικός συλλογισμός που είναι σημαντικός για τη συνέχεια τόσο στα μαθηματικά όσο και στις φυσικές επιστήμες, αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων τις οποίες οι μαθηματικοί μπορούν εύκολα να εκφράσουν χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς (Carraher & Schliemann, 2007). Κατά τους Susac, Bubic, Vrbanc, & Planinic, (2014) η μετάβαση από τον απτό στον αφηρημένο συλλογισμό μπορεί να είναι μία μακρά διαδικασία ακόμη και για απλά αλγεβρικά προβλήματα όπως η επίλυση εξίσωσης, πράγμα οποίο θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη οι δάσκαλοι και οι σχεδιαστές των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών.

Ο Wheeler, (1996), θεωρεί ότι ανεξάρτητα από το μοντέλο διδασκαλίας της άλγεβρας, δύο είναι οι **μεγάλες ιδέες** τις οποίες θα πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές κατά την διδασκαλία. Η πρώτη αναφέρεται στον πανταχού παρόντα “x” και η ιδέα που θα πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές είναι ότι ένας αριθμός που είναι ακόμη άγνωστος, ένας γενικός αριθμός, μία μεταβλητή, μπορούν να συμβολισθούν με το “x” και να αποτελέσουν αντικείμενο επεξεργασίας ωσάν αυτό να ήταν ένας αριθμός. Η δεύτερη «μεγάλη ιδέα» είναι αυτή της συνειδητοποίησης ότι η άλγεβρα εισάγει το εργαλείο αυτό σε ένα σύνολο άλλων εργαλείων – πίνακες, γραφήματα, τύποι, εξισώσεις, ταυτότητες, συναρτησιακές σχέσεις κλπ - που σχετίζονται το ένα με το άλλο και κάποια από αυτά είναι ισοδύναμα και όλα μαζί αποτελούν μία σημαντική τεχνολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανακάλυψη και επινόηση πραγμάτων.

Ο Kaput, (2008), θεωρεί ότι η άλγεβρα αποτελεί ένα πολιτιστικό εργαλείο που εκφράζεται κυρίως ως ένα τυπικό-συμβατικό συμβολικό σύστημα και ως κάποια είδη της ανθρώπινης δραστηριότητας και τα δύο συστατικά στοιχεία του αλγεβρικού συλλογισμού είναι: (α) ο συστηματικός συμβολισμός γενικεύσεων κανονικοτήτων και περιορισμών, και (β) οι δράσεις και ο συντακτικά καθοδηγούμενος συλλογισμός επί των γενικεύσεων, που εκφράζονται με την βοήθεια τυπικών συμβολικών συστημάτων. Αρχικά οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν κανονικότητες και να προσπαθούν να τις γενικεύσουν, ενώ τη συνέχεια θα πρέπει να τις αναπαριστούν. Οι τυπικές μορφές αναπαράστασης όπως ο αλγεβρικός συμβολισμός, οι πίνακες, τα γραφήματα, η αριθμογραμμή ή και οι φυσικές γλωσσικές μορφές, θεωρείται ότι δεν είναι απλά κάποια μέσα έκφρασης, αλλά βοηθούν στον εμπλουτισμό και την εμβάθυνση του αλγεβρικού συλλογισμού των μαθητών.

Αυτά τα δύο συστατικά στοιχεία του αλγεβρικού συλλογισμού εμφανίζονται με κάποια μορφή στις τρεις πτυχές της άλγεβρας που σύμφωνα με τον Kaput, (2008), είναι:

- η μελέτη δομών και συστημάτων που προκύπτουν από υπολογισμούς και σχέσεις περιλαμβανομένων και αυτών που προκύπτουν από τον αριθμητικό και τον ποσοτικό συλλογισμό,
- η μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και από κοινού μεταβολών,
- η εφαρμογή μίας συστάδας γλωσσών μοντελοποίησης τόσο εντός όσο και εκτός των μαθηματικών.

Η ιδέα της εισαγωγής της άλγεβρας ως γενικευμένης αριθμητικής, που περιλαμβάνεται στην πρώτη πτυχή, θεωρείται ελκυστική στον σχεδιασμό των προγραμμάτων σπουδών διότι με τον τρόπο αυτό θεωρείται ότι οι μαθητές βοηθούνται να γενικεύσουν τις γνώσεις τους στους αριθμούς, αναπτύσσουν μέσω της διαδικασίας αυτής την ικανότητά τους να γενικεύουν και εκμεταλλεύονται την δομή και τις ιδιότητες των ακεραίων ως ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη μορφωμάτων, τυποποίησης και επιχειρηματολογία (Kaput, 1995). Η διαδικασία αυτή της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα περιλαμβάνει και την επέκταση της χρήσης του συμβόλου της ισότητας και ως συμβόλου ισοδυναμίας. Η γενίκευση από την αριθμητική για τους λόγους αυτούς θεωρείται από πολλούς ερευνητές και δασκάλους ως ο κυριότερος τρόπος για την εισαγωγή της άλγεβρας. Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι αντί της χρήσης αριθμών να γίνεται χρήση ποσοτήτων (Dougherty, 2008). Στην προσέγγιση αυτή χρησιμοποιούνται ποσότητες όπως μήκη, ύψη, όγκοι και η εκπαιδευτική δραστηριότητα εστιάζεται σε συγκρίσεις, οι οποίες εκφράζονται συμβολικά με χρήση γραμμάτων. Και στους δύο τρόπους υπεισέρχεται το κρίσιμο θέμα της γενίκευσης και της έκφρασης των γενικεύσεων αυτών με κάποιο συστηματικό τρόπο.

Ο αλγεβρικός συλλογισμός στα πρώτα στάδια σύμφωνα με την Kieran, (2004a), σχετίζεται με την ανάπτυξη του τρόπου σκέψης με τη βοήθεια δραστηριοτήτων, στις οποίες μπορεί να γίνει και χρήση γραμμάτων, που περιλαμβάνουν ανάλυση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, παρατήρηση της δομής, μελέτη της μεταβολής, γενίκευση, επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, απόδειξη, επαλήθευση και πρόβλεψη.

1.3 Οι δραστηριότητες της άλγεβρας

Η άλγεβρα στο σχολείο είναι συνυφασμένη με μία σειρά δράσεων όπως η επίλυση, ο χειρισμός, η γενίκευση, η τυποποίηση, η διερεύνηση δομής και η αφαίρεση. Κέντρο της διδακτικής πρακτικής των δράσεων αυτών είναι η αλγεβρική δραστηριότητα. Η αλγεβρική δραστηριότητα κατά τους Drijvers et al., (2011), χαρακτηρίζεται από τον χειρισμό αριθμών ή αριθμητικών δομών και περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα από τα χαρακτηριστικά που ακολουθούν:

- διατύπωση κάποιας υπονοούμενης ή σαφούς γενίκευσης,

- διερεύνηση μορφωμάτων ή σχέσεων μεταξύ αριθμών ή τύπων,
- επίλυση προβλημάτων με την εφαρμογή γενικών ή εξειδικευμένων για κάθε περίπτωση κανόνων,
- εκτέλεση κάποιου λογικού συλλογισμού με άγνωστες ή μέχρι τότε άγνωστες ποσότητες,
- εκτέλεση μαθηματικών πράξεων μεταβλητών που παριστάνονται με γράμματα και διατύπωση των αποτελεσμάτων με την μορφή τύπων,
- χρησιμοποίηση ειδικών συμβόλων για αριθμητικές πράξεις και σχέσεις,
- χρησιμοποίηση πινάκων και γραφημάτων για την αναπαράσταση και διερεύνηση τύπων,
- σύγκριση και μετασχηματισμός τύπων και παραστάσεων,
- χρησιμοποίηση τύπων και παραστάσεων για την περιγραφή καταστάσεων στις οποίες παίζουν ρόλο μονάδες και ποσότητες,
- διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων που περιλαμβάνουν βήματα βάσει κάποιων υπολογιστικών κανόνων αλλά δεν έχουν οπωσδήποτε κάποιο νόημα μέσα στο πλαίσιο του προβλήματος.

Η Kieran, (2007), ανέπτυξε ένα μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει τρεις τύπους δραστηριοτήτων της σχολικής άλγεβρας:
Οι **παραγωγικές δραστηριότητες** περιλαμβάνουν το σχηματισμό εκφράσεων και εξισώσεων που είναι και τα αντικείμενα της άλγεβρας. Η δόμηση νοήματος για τα αντικείμενα της άλγεβρας όπως οι μεταβλητές και οι άγνωστοι, το σύμβολο της ισότητας, η έννοια της εξίσωσης, συμβαίνει κατά μεγάλο μέρος παραγωγικές δραστηριότητες. Παραδείγματα παραγωγικών δραστηριοτήτων είναι: (i) εξισώσεις με έναν άγνωστο που εκφράζουν κάποια κατάσταση ή κάποιο πρόβλημα, (ii) εκφράσεις κάποιας κανονικότητας που προκύπτει από κάποιο γεωμετρικό μόρφωμα ή ακολουθία αριθμών, (iii) εκφράσεις κανόνων που διέπουν αριθμητικές σχέσεις.
Οι **μετασχηματιστικές δραστηριότητες** περιλαμβάνουν τον μετασχηματισμό μιας έκφρασης ή εξίσωσης, με διατήρηση της ισοδυναμίας αλλά και την δόμηση νοήματος για τη χρήση των ιδιοτήτων και αξιωμάτων που διέπουν τις μετασχηματιστικές διαδικασίες. Τα τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν την αναγωγή ομοίων όρων, πράξεις μεταξύ πολυωνυμικών εκφράσεων, την αναγωγή ομοίων όρων, την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων και την αντικατάσταση αριθμητικών τιμών σ' αυτές κλπ.
Οι **δραστηριότητες συνολικού μετα-επιπέδου** περιλαμβάνουν τις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες η άλγεβρα χρησιμοποιείται σαν ένα εργαλείο που όμως δεν περιορίζεται αποκλειστικά σ' αυτήν. Πρόκειται για γενικότερες μορφές διαδικασιών και δραστηριοτήτων που παρέχουν το πλαίσιο, το σκοπό και το κίνητρο για την εμπλοκή σε παραγωγικές και μετασχηματιστικές δραστηριότητες. Τυπικά παραδείγματα των δραστηριοτήτων αυτών περιλαμβάνουν την επίλυση προβλημάτων, την μοντελοποίηση, την παρατήρηση της δομής, την μελέτη της

αλλαγής, την γενίκευση, την ανάλυση των σχέσεων, την αιτιολόγηση, την απόδειξη και πρόβλεψη.

Τα σχολικά βιβλία παραδοσιακά δίνουν έμφαση στον μετασχηματιστικό χαρακτήρα των αλγεβρικών δραστηριοτήτων, το πρόβλημα όμως είναι ότι εστιάζουν περισσότερο στους κανόνες που πρέπει να ακολουθούνται στον χειρισμό των αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων παρά στις εννοιολογικές αντιλήψεις που αιτιολογούν τον χειρισμό αυτό (Kieran, 2004b). Αν και οι δραστηριότητες συνολικού μετα-επιπέδου φαίνεται ελκυστικές για μία προσέγγιση της διδασκαλίας της άλγεβρας με την χρήση τους, αυτές δεν μπορεί να καλύψουν το πλήρες περιεχόμενό της και δεν πρέπει να παραγνωρίζονται και οι άλλες μορφές δραστηριοτήτων. Οι διαδικασίες χειρισμού των αλγεβρικών παραστάσεων των μετασχηματιστικών δραστηριοτήτων ιδιαίτερα, μπορεί να έχουν νόημα, όπως συμβαίνει και με τα άλλα αλγεβρικά αντικείμενα – τους αγνώστους, τις μεταβλητές, τις εξισώσεις, και να μην γίνονται μηχανικά. Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν λαμβάνονται υπόψη η εννοιολογική κατανόηση ισοτήτων και ισοδυναμιών, καθώς επίσης και οι κανόνες που διέπουν τους μετασχηματισμούς τους (Ayalon & Even, 2013).

1.4 Δυσκολίες στην διδασκαλία της άλγεβρας

Η άλγεβρα και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μ’ αυτή είναι ένα θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν πολλοί ερευνητές (για μία σύνοψη βλ. Carraher & Schliemann, 2007). Οι δυσκολίες έχουν πολλές αιτίες, στις οποίες περιλαμβάνονται το επίπεδο της αφαίρεσης, η σχέση της άλγεβρας με την αριθμητική, η ανάγκη για επιδεξιότητα στο χειρισμό συμβόλων και η ανάγκη μετάβασης από την διαδικαστική στη δομική σκέψη (Stacey & Chick, 2004). Η σχολική άλγεβρα αντιμετωπίζεται ως γενικευμένη αριθμητική, με αποτέλεσμα να διδάσκεται μετά από αυτήν. Η άλγεβρα σαν μία γλώσσα επίσης, περιλαμβάνει πολλούς από τους όρους και τα σύμβολα που οι μαθητές συνάντησαν στην αριθμητική. Αυτό όμως δημιουργεί και το πρώτο γενικό εμπόδιο στη διδασκαλία της (Wheeler, 1996), καθώς προκύπτουν δυσκολίες στην κατανόηση των συμβόλων και της σύνταξης της γλώσσας της άλγεβρας (Radford & Puig, 2007). Η ομοιότητα αριθμητικής - άλγεβρας έχει ως αποτέλεσμα από την μία την άμεση πρόσβαση των μαθητών στη γλώσσα της άλγεβρας, παράλληλα όμως έχει και αρνητικά στοιχεία καθώς οι μαθητές παρασύρονται από την υπόθεση ότι τα κοινά στοιχεία αριθμητικής και άλγεβρας έχουν ακριβώς την ίδια σημασία, κάτι όμως που δεν συμβαίνει παρά μόνο σε τετριμμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα στην αριθμητική σύμβολα όπως το + ή το = ερμηνεύονται τυπικά σαν κίνητρα για εκτέλεση κάποιας δράσης, καθώς το πρώτο σημαίνει την εκτέλεση της πράξης της πρόσθεσης, ενώ το δεύτερο αποτελεί ένα κίνητρο για υπολογισμό κάποιου αποτελέσματος. Η αντίληψη αυτή μεταφέρεται στους μεγαλύτερους μαθητές οι οποίοι δεν αντιλαμβάνονται ότι το + μπορεί να δηλώνει εκτός από την δράση για εκτέλεση της πράξης και κάποιο μαθηματικό αντικείμενο που είναι το αποτέλεσμα της πράξης, ή ότι το = μπορεί να δηλώνει κάποια ισοδυναμία και να μην αποτελεί σήμα για κάποιο υπολογισμό (Booth, 1988). Το πρόβλημα της αμφισημίας του συμβολισμού των αριθμητικών πράξεων προκαλείται από την δυαδικότητα διαδικασίας – αντικειμένου (Sfard, 1991).

Η «μεγάλη ιδέα» επίσης της μεταβλητής είναι μία άλλη πηγή δυσκολίας καθώς πρόκειται για μία έννοια με πολλές πτυχές (Usiskin, 1988). Οι μεταβλητές σε κάποιο τύπο π.χ. εκφράζουν κάτι που δίνει την αίσθηση του γνωστού (π.χ. εμβαδόν, μήκος) ενώ σε κάποια εξίσωση η μεταβλητή θεωρείται ότι εκφράζει κάτι άγνωστο. Ακόμη η μεταβλητή στο συμβολισμό κάποιας συνάρτησης δηλώνει το όρισμά της, ενώ στον τύπο μία ακολουθίας μπορεί να δηλώνει την σειρά σε κάποιο μόρφωμα.

Για τους Drijvers et al., (2011), προβλήματα αποτελούν επίσης στον αλγεβρικό συλλογισμό η επίτευξη της αφαίρεσης και η γενίκευση. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατακτήσουν την αφαίρεση, μέσω της οποίας ο υπερβατικός κόσμος των αλγεβρικών αντικειμένων και πράξεων μπορεί να γίνει μία πραγματικότητα με νόημα που τους βοηθά και στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Το πρόβλημα στη γενίκευση είναι ότι οι μαθητές πολλές φορές δεν αντιλαμβάνονται τα όρια και υπερ-γενικεύουν την εφαρμογή κανόνων όπως είναι οι ιδιότητες των πράξεων. Οι δυσκολίες αυτές αποκαλύπτουν τις περιορισμένες ικανότητες των μαθητών στην εκτέλεση των πράξεων, στην εφαρμογή των κανόνων της προτεραιότητας τους σε υπολογισμούς και στην σωστή χρήση των ιδιοτήτων τους (Jupri, Drijvers, & van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

Ένα ακόμη πρόβλημα της άλγεβρας αφορά στη μαθηματικοποίηση που είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Η οριζόντια μαθηματικοποίηση περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως η διαμόρφωση ενός προβλήματος με διαφορετικό τρόπο, η ανακάλυψη σχέσεων και κανονικοτήτων καθώς και η μεταφορά ενός πραγματικού προβλήματος στον συμβολικό κόσμο των μαθηματικών. Οι δυσκολίες στην κάθετη μαθηματικοποίηση σχετίζονται με την διαδικασία του μετασχηματισμού του μαθηματικού προβλήματος εντός του μαθηματικού κόσμου και οι σχετικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν τον συνδυασμό, την ολοκλήρωση και την διατύπωση αλγεβρικών μοντέλων κατά την επίλυση εξισώσεων, την κατασκευή νέων μαθηματικών εννοιών καθώς και την απόδειξη κανονικοτήτων και τη γενίκευση (Jupri et al., 2014).

Κάποιοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα προβλήματα στην άλγεβρα μπορεί να οφείλονται σε αναπτυξιακά εμπόδια (Filloy & Rojano, 1989), καθώς θεωρείται ότι οι μαθητές δεν έχουν την απαραίτητη γνωστική ανάπτυξη για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Την ίδια άποψη έχει και ο MacGregor, (2001), ο οποίος θεωρεί επιπλέον ότι τα προβλήματα αυτά μπορεί να οφείλονται και στην ανεπαρκή θεμελίωση της αριθμητικής στις προηγούμενες τάξεις, καθώς η σε βάθος γνώση της άλγεβρας πέρα από τον μηχανικό χειρισμό των συμβόλων, απαιτεί μία ουσιαστική κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμών και των κανόνων που διέπουν τη συμπεριφορά τους. Άλλοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα προβλήματα αυτά υπάρχουν διότι υπάρχει κάποιος παραλληλισμός μεταξύ της ιστορικής ανάπτυξης της άλγεβρας (φυλογένεση) και των αναπτυξιακών σταδίων του ατόμου (οντογένεση) και η ανάπτυξη του ατόμου αποτελεί μία επανάληψη της φυλογενετικής δηλαδή της ιστορικής, εξέλιξης (Radford, 2012; Sfard, 1995). Τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν διεξαχθεί για την μελέτη των δυσκολιών της άλγεβρας υπογραμμίζουν ότι για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών θα πρέπει η διδασκαλία να τους βοηθά να βελτιώσουν την αίσθηση και την δυναμική αντίληψη των μεταβλητών, να αναπτύξουν την ικανότητά τους να γενικεύουν και να εκφράζουν τις γενικεύσεις τους, να αναγνωρίζουν την δυναμική σχέση που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών και να προσδιορίζουν την υπάρχουσα αλγεβρική δομή (Warren, Trigueros, & Ursini, 2016). Οι Carraher & Schliemann, (2007) οι οποίοι είναι υπέρμαχοι της πρώιμης άλγεβρας θεωρούν ότι δεν είναι απαραίτητος ο αλγεβρικός συμβολισμός για την επίτευξη των γενικεύσεων της άλγεβρας και ότι επειδή η αριθμητική έχει έναν εγγενή αλγεβρικό χαρακτήρα, αυτή θα πρέπει να αποτελεί μάλλον ένα μέρος της άλγεβρας και όχι ένα ξεχωριστό διδακτικό αντικείμενο. Κατά τον Radford, (2010), επίσης η αλγεβρική σκέψη δεν είναι απαραίτητο να βασίζεται στα αλφαριθμητικά σύμβολα, και η αποκαλούμενη από αυτόν *ζώνη εμφάνισης της αλγεβρικής σκέψης* δεν έχει μελετηθεί αρκετά μέχρι τώρα, λόγω της κυριαρχίας της χρήσης των συμβόλων. Επομένως ένα ανοικτό ερευνητικό θέμα για το μέλλον είναι αν θα πρέπει η αριθμητική και η αλγεβρική σκέψη να διασυνδεθούν κατά τα πρώτα σχολικά χρόνια και με ποιο τρόπο θα μπορούσε αυτό να πραγματοποιηθεί (Warren et al., 2016).

1.5 Η νέα άλγεβρα

Στο Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά αναφέρεται ότι «ένας σκεπτόμενος, ενεργός πολίτης χρειάζεται να διαθέτει στις μέρες μας την ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων», γι αυτό «μία τις κυρίαρχες σήμερα στοχεύσεις των Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά, είναι αυτή του μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή η ικανότητα κάποιου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον» (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, 2011). Η ικανότητα αυτή εξαρτάται από μία σειρά παραγόντων όπως η ύπαρξη μίας ισχυρής γνωστικής βάσης, η γνώση παραγωγικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, η αποτελεσματική χρήση της γνώσης (μεταγνώση), η πίστη του ατόμου στις δυνάμεις του και στην δύναμη των μαθηματικών και η ικανότητά του να δρα με σωστό μαθηματικό τρόπο (Schoenfeld, 2004). Η έρευνα όμως υποδεικνύει ότι η διδασκαλία που εστιάζεται αποκλειστικά στην γνωστική βάση στερεί τους μαθητές από την γνώση της επίλυσης προβλημάτων που καθώς αυτοί δεν είναι ικανοί να επιλύουν προβλήματα διαφορετικά από αυτά που διδάχθηκαν ή σε άλλα ευρύτερα πλαίσια, για αυτό και οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη όχι μόνο του γνωστικού περιεχομένου αλλά και της ικανότητας της ευρύτερης μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Schoenfeld, 2004). Επομένως ο κύριος στόχος της διδασκαλίας της άλγεβρας θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη όχι τόσο των διαδικαστικών δεξιοτήτων αλλά θα πρέπει να στοχεύει σε νέους τρόπους κατανόησης μέσω της ανάπτυξης των δεξιοτήτων αιτιολόγησης, ευέλικτης χρήσης των συμβόλων και επίλυσης προβλημάτων (Drijvers et al., 2011).

Οι τρείς βασικές αρχές για την μάθηση σύμφωνα με τους Donovan & Bransford, (2005), είναι:
1η αρχή: Οι μαθητές έρχονται στην τάξη με τις δικές τους εμπειρίες και προκαταλήψεις σχετικά με το πώς η λειτουργεί ο κόσμος. Εάν δεν εμπλακούν στην διδασκαλία οι αρχικές τους αντιλήψεις, μπορεί να αποτύχουν να κατανοήσουν τις νέες έννοιες και πληροφορίες, ή μπορεί να τις μάθουν προσωρινά, επανερχόμενοι στις προκαταλήψεις τους όταν βρεθούν έξω από την τάξη.
2η αρχή: Για την ανάπτυξη ικανοτήτων σε μια εννοιολογική περιοχή, οι μαθητές πρέπει (α) να έχουν μια βαθιά θεμελίωση της πραγματικής γνώσης, (β) να κατανοούν γεγονότα και ιδέες μέσα στο πλαίσιο της περιοχής αυτής , και (γ) να οργανώσουν τη γνώση με τρόπους που αυτή να μπορεί εύκολα να ανακτηθεί και να εφαρμοστεί.
3η αρχή: Μία «μεταγνωστική» προσέγγιση στη διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ελέγχουν οι ίδιοι την μάθησή τους θέτοντας διδακτικούς στόχους και παρακολουθώντας οι ίδιοι την πρόοδό τους στην διαδικασία επίτευξης των στόχων τους.

Η μαθηματική ικανότητα περιλαμβάνει πέντε συστατικά που είναι

- **η εννοιολογική κατανόηση**, η αντίληψη δηλαδή των μαθηματικών εννοιών, των πράξεων, καθώς και των σχέσεων
- **η διαδικαστική δεξιότητα**, δηλαδή η ικανότητα να διενεργεί διαδικασίες ευέλικτα, αποτελεσματικά, κατάλληλα και με ακρίβεια
- **η στρατηγική επάρκεια**, δηλαδή η ικανότητα να διαμορφώνει να αναπαριστά και να επιλύει μαθηματικά προβλήματα
- **ο ευέλικτος συλλογισμός**, δηλαδή η ικανότητα λογικής σκέψης, προβληματισμού, εξήγησης και αιτιολόγησης, και
- **η παραγωγική διάθεση**, η προδιάθεση δηλαδή να αντιμετωπίζει κάποιος τα μαθηματικά ως κάτι λογικό, χρήσιμο, και αξιόλογο , σε συνδυασμό με την πίστη στην επιμέλεια και την αποτελεσματικότητά του.

Τα συστατικά αυτά είναι αλληλοσυνδεόμενα και αλληλοεξαρτώμενα στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας και αντιστοιχούν απευθείας με τις τρεις βασικές αρχές της μάθησης των Donovan & Bransford, (2005). Στην 2η αρχή η πραγματική κατανόηση αναφέρεται στην διαδικαστική δεξιότητα η οποία πρέπει να συνδυάζεται με το εννοιολογικό πλαίσιο (εννοιολογική κατανόηση) και να οργανώνεται με τρόπους εύκολης ανάκτησης και εφαρμογής (στρατηγική επάρκεια). Η «μεταγνωστική» προσέγγιση της 3ης αρχής αντιστοιχεί με τον ευέλικτο συλλογισμό, ενώ η παραγωγική διάθεση και οι προκαταλήψεις που έχει κάποιος για τα μαθηματικά αντιστοιχούν στην 1η αρχή.

Κατά τους Carpenter & Lehrer, (1999), η κατανόηση στα μαθηματικά προκύπτει από πέντε μορφές νοητικής δραστηριότητας του ατόμου που είναι:
η **δημιουργία σχέσεων,** καθώς οι νέες ιδέες ή διαδικασίες αποκτούν νόημα από τους τρόπους που διασυνδέονται με άλλες ιδέες ή διαδικασίες που έχουν ήδη κατανοηθεί,
η επέκταση και εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης, καθώς πέρα από τη διασύνδεση της νέας γνώσης με την προϋπάρχουσα, μέσω της δημιουργίας νέων πλούσιων και ολοκληρωμένων νοητικών δομών η κατανόηση γίνεται παραγωγική,
ο **συλλογισμός επί των εμπειριών** μέσω της συνειδητής εξέτασης των πράξεων και των σκέψεών του ιδιαίτερα σε ασυνήθιστα προβλήματα, καθώς η εφαρμογή απλών διαδικασιών χωρίς σκέψη δεν προσφέρει στην μαθηματική κατανόηση,
η **έκφραση και επικοινωνία της γνώσης** με διάφορα εκφραστικά μέσα, καθώς η έκφραση προϋποθέτει συλλογισμό επί της δραστηριότητας και εντοπισμό των σημαντικότερων στοιχείων της καθώς η δραστηριότητα γίνεται με τον τρόπο αυτό ένα αντικείμενο σκέψης και
η κατοχή της γνώσης, το να κάνει δηλαδή κάποιος τη γνώση κτήμα του, καθώς η κατανόηση προϋποθέτει την κατασκευή της γνώσης από τα ίδια τα άτομα μέσω των δραστηριοτήτων τους.

Η διδασκαλία της άλγεβρας επομένως, όπως και των μαθηματικών γενικότερα, θα πρέπει να στοχεύει στην ισορροπημένη ανάπτυξη και των πέντε συστατικών της μαθηματικής ικανότητας μέσω των νοητικών δραστηριοτήτων για την μαθηματική κατανόηση. Καθώς επίσης οι δυσκολίες και τα εμπόδια έχουν εκτενώς μελετηθεί τα τελευταία χρόνια η διδασκαλία θα πρέπει να στοχεύει στον σχεδιασμό καταλλήλων δραστηριοτήτων και προγραμμάτων σπουδών για το ξεπέρασμά τους. Οι δραστηριότητες αυτές θα πρέπει να συνδέονται με τις εμπειρίες των μαθητών και να στοχεύουν στην βαθειά εννοιολογική κατανόηση. Οι αλλαγές σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία της άλγεβρας είναι (Kaput, 1999):

- ξεκίνημα νωρίς χτίζοντας στην υπάρχουσα άτυπη γνώση των μαθητών,
- ενσωμάτωση της διδασκαλίας της άλγεβρας με άλλα επιστημονικά αντικείμενα με την επέκταση και εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης,
- συμπερίληψη των διαφορετικών μορφών της αλγεβρικής σκέψης μέσω των εφαρμογών της μαθηματικής γνώσης,
- χτίσιμο επί των φυσικών γλωσσικών και γνωστικών δυνατοτήτων των μαθητών με παράλληλη ενθάρρυνσή τους να συλλογίζονται και να εκφράζουν αυτά που μαθαίνουν και αυτά που γνωρίζουν,
- ενθάρρυνση της ενεργούς μάθησης και της δημιουργίας διασυνδέσεων που δίνουν έμφαση στην δημιουργία νοήματος και την κατανόηση.

Οι Filloy & Sutherland, (1996), προτείνουν έξι κριτήρια ως ένα πλαίσιο με το οποίο μπορεί να αναλυθούν όλες οι πτυχές του προγράμματος σπουδών της άλγεβρας:

- Μαθηματικές έννοιες και σχετικά σημειωτικά συστήματα
- Μαθηματική γνωστική λειτουργία και γνωστικές τάσεις

- Διδασκαλία και μάθηση και αφαιρετικές διαδικασίες
- Σχέση μεταξύ της άλγεβρας και της πρακτικής γνώσης
- Νέες τεχνολογίες για την διδασκαλία και την μάθηση της άλγεβρας
- Μαθηματική μοντελοποίηση – το αναλυτικό και ουσιαστικό εργαλείο της άλγεβρα εντός διαφορετικών περιοχών γνώσης.

Η εισαγωγή και διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας μπορεί να γίνει μέσω μιας σειράς διαφορετικών προσεγγίσεων όπως είναι οι κανόνες για μετασχηματισμό και επίλυση εξισώσεων, η επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων ή τύπων προβλημάτων, η μοντελοποίηση και οι συναρτήσεις (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996).

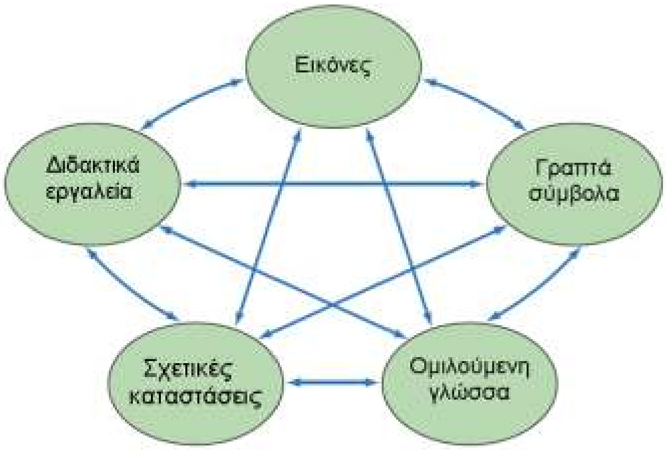
Η άλγεβρα όπως και τα μαθηματικά του σχολείου γενικότερα, θα πρέπει να θεωρούνται ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα, η οποία αντανακλά την ιστορική μαθηματική γνώση. Από αυτή την ιστορική-πολιτισμική προοπτική είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν την εμπειρία μίας άλγεβρας η οποία αποτελεί μία ανθρώπινη δημιουργία εργαλείων και γνώσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση αναγνωρίσιμων προβλημάτων και όχι την άλγεβρα του παρελθόντος ως ένα άκαμπτο προϊόν (Drijvers et al., 2011). Η άλγεβρα επίσης είναι μία νοητική δραστηριότητα και η μαθηματική γνώση, θα πρέπει να προκύπτει από την διερεύνηση και μαθηματικοποίηση προβληματικών καταστάσεων στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές, οι οποίοι θα πρέπει να επιλέγουν τις μεταβλητές του προβλήματος, τους τρόπους που αυτές σχετίζονται μεταξύ τους, να κάνουν υπολογισμούς και προβλέψεις και να επαληθεύουν τα αποτελέσματά τους.

Δραστηριότητες στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών που αντανακλούν μία τέτοια προοπτική είναι αυτές που εμπλέκουν τους μαθητές στην επίλυση προβλήματος και ενισχύουν την μαθηματικοποίηση (Romberg & Kaput, 1999). Εξειδικεύοντας στην άλγεβρα είναι δραστηριότητες που παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία του αλγεβρικού συλλογισμού και της εξοικείωσης με κάποιες βασικές ιδέες της άλγεβρας σε διαφορετικά πλαίσια όπως είναι οι εξισώσεις, η γενίκευση κανονικοτήτων και η ερμηνεία των γραφημάτων. Οι δραστηριότητες αυτές επιπλέον θα πρέπει να ενθαρρύνουν την χρήση της μαθηματικής γλώσσας για την έκφραση, την επικοινωνία, την αιτιολόγηση, τους υπολογισμούς, την αφαίρεση, την γενίκευση και την τυποποίηση. Τελικά οι μαθητές δεν θα πρέπει μόνο να γνωρίζουν έννοιες και διαδικασίες αλλά και να αντιλαμβάνονται πώς τα μαθηματικά δημιουργούνται και χρησιμοποιούνται.

Κεφάλαιο 2

2.1 Αναπαραστάσεις

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της έννοιας της συνάρτησης είναι η πληθώρα των αναπαραστάσεών της με την μορφή ενός μαθηματικού τύπου, ενός πίνακα τιμών, μίας γραφικής παράστασης ή και γραφικών απεικονίσεων άλλου τύπου όπως π.χ ένα διάγραμμα του Venn. Η αναγνώριση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης αποτελεί επομένως έναν κρίσιμο παράγοντα στην σωστή οικοδόμηση της έννοιας, καθώς κάποιες φορές η πληθώρα των αναπαραστάσεων αποτελεί και πηγή παρανοήσεων όπως θα αναφερθεί και στο επόμενο κεφάλαιο. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι υποθέτουν ότι οι πληροφορίες του περιβάλλοντος γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας από τον εγκέφαλο μέσω γνωστικών διαδικασιών όπως η αντίληψη, η προσοχή, η μνήμη, κλπ. Πιστεύουν ότι ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον μέσω της ικανότητας αναπαράστασης του περιβάλλοντος, της ικανότητας χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και της ικανότητας χρήσης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας (Βοσνιάδου, 2001). Βάση των σύγχρονων γνωστικών θεωριών είναι η μνήμη. Η μνήμη θεωρείται ως ένα πολύπλοκο νοητικό σύστημα που η λειτουργία του συνίσταται σε τρία στάδια την κωδικοποίηση της πληροφορίας, την αποθήκευση και την ανάσυρσή της. Οι πληροφορίες τοποθετούνται σε διάφορους μνημονικούς κώδικες οι οποίοι αποτελούν νοητικές αναπαραστάσεις των φυσικών ερεθισμάτων.



Εικόνα 1. Πέντε αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών (Πηγή: Reys et al., 2009)

Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά παράγονται μέσω της εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες που επιλέγονται κατάλληλα από τον εκπαιδευτικό και τους βοηθούν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Μέσω των δραστηριοτήτων αναπαριστώνται μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούνται καταστάσεις με χρήση συγκεκριμένων υλικών, εικόνων, διαγραμμάτων (π.χ. αριθμογραμμή), γραφημάτων, πινάκων. Τα μαθηματικά σύμβολα και οι αναπαραστάσεις παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες καταγραφής και επικοινωνίας των μαθηματικών ιδεών και εργασίας επί συμβατικών καταστάσεων. Όταν οι μαθητές καταφέρουν να τα κατανοήσουν βαθιά έχουν ένα σύνολο εργαλείων που επεκτείνει την ικανότητά τους να σκέπτονται με μαθηματικό τρόπο (Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά μπορεί να είναι εικόνες, γραφήματα, πίνακες. διαγράμματα, γραφικά υπολογιστών και φορμαλιστικά συμβολικά συστήματα και συχνά θεωρείται ότι αποδίδουν ή εκφράζουν ιδέες και έννοιες (εικόνα 1).

Οι εσωτερικές νοητικές αναπαραστάσεις είναι οι νοητικοί ή γνωστικοί σχηματισμοί που αναπαριστούν στη μνήμη κάποιες πτυχές του εξωτερικού κόσμου. Λόγω της φύσης τους οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες, αλλά γίνονται αντιληπτές από την εξωτερική έκφρασή τους σε ομιλούμενη ή συμβολική γλώσσα. Οι αναπαραστάσεις επίσης αναφέρονται στη δράση ή στη διαδικασία ανακάλυψης ή δημιουργίας τους και η αναφορά αυτή μπορεί να είναι είτε στην παραγωγή μίας εξωτερικής αναπαράστασης είτε στη γνωστική ή νοητική διαδικασία για την δημιουργία της εξωτερική ή εσωτερικής αναπαράστασης (Goldin, 2014). Ο (Vergnaud, 1998), θεωρεί ότι μία αναπαράσταση δεν είναι μία στατική κατάσταση αλλά μία δυναμική διαδικασία που περικλείει πολλά στοιχεία από τον τρόπο που οργανώνεται μια μαθηματική δραστηριότητα.

Οι εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις έχουν συχνά μία σχέση αμφίδρομη. Μπορεί δηλαδή κάποιο εξωτερικό ερέθισμα να γεννά κάποια εσωτερική αναπαράσταση, ενώ συχνά επίσης το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, με την ομιλία, την γραφή, κλπ. (Goldin & Kaput, 1996). Αρκετές φορές μάλιστα αυτές οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων συμβαίνουν ταυτόχρονα. Βέβαια αυτό δεν σημαίνει ότι πρόκειται για μία απόλυτη και μία-προς-μία σχέση (Goldin, 2014). Μία κατάσταση που περιλαμβάνει τέτοιου είδους αλληλεπιδράσεις είναι η επίλυση προβλήματος. Πολλές θεωρίες περιγράφουν την επίλυση ενός προβλήματος ως μία διαδικασία διαδοχικώς πιο πλούσιων και εκλεπτυσμένων αναπαραστάσεών του (Silver, 1987). Ο λύτης δηλαδή ξεκινά με μία αρχική αναπαράσταση την οποία στη συνέχεια σταδιακά επεξεργάζεται και επανακαθορίζει μέχρι που να φτάσει στην τελική μορφή της που είναι η λύση του προβλήματος. Η αναπαράσταση δηλαδή ενός προβλήματος είναι ένα κομβικό στοιχείο στην διαδικασία επίλυσής του. Η μοντελοποίηση, η διαδικασία δηλαδή ανεύρεσης μίας μαθηματικής αναπαράστασης για ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι μια ανάλογη διαδικασία. Όταν το άτομο επεξεργάζεται νοητικά το μαθηματικό μοντέλο, δημιουργεί εσωτερικά αναπαραστάσεις του. Επομένως η νοητική αναπαράσταση σχετίζεται με το μοντέλο, όπως το μαθηματικό μοντέλο σχετίζεται με την πραγματική κατάσταση την οποία περιγράφει Κάθε μία αποδίδει κάποιες ιδιότητες της άλλης (Dreyfus, 1991).

Για να τα καταφέρνει κάποιος στα μαθηματικά θα πρέπει να έχει ένα πλούτο αναπαραστάσεων για τις μαθηματικές έννοιες γιατί τότε θεωρείται ότι οι έννοιες είναι περισσότερο κατανοητές. Μία αναπαράσταση θεωρείται φτωχή αν περιλαμβάνει λίγα στοιχεία και δεν προσφέρει ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων

(Dreyfus, 1991). Σημαντικό επίσης είναι ο λύτης πέραν του πλούτου των αναπαραστάσεων για μία έννοια, να γνωρίζει την λειτουργική σχέση των αναπαραστάσεων αυτών μεταξύ τους (Goldin & Shteingold, 2001) και να έχει την ευελιξία και την δυνατότητα μετάβασης από την μία μορφή αναπαράστασης σε κάποια άλλη (Dreyfus, 1991). Οι Disessa & Sherin, (2000), χρησιμοποιούν τον όρο μετα-αναπαραστατική ικανότητα για να περιγράψουν το πλήρες εύρος των δεξιοτήτων που έχει κάποιος στην παραγωγή και χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων, αλλά και στην ικανότητά του να τις αντιμετωπίζει με κριτικό μάτι και να τις τροποποιεί κατάλληλα. Η πληθώρα επίσης αναπαραστάσεων στα μαθηματικά (διαγράμματα, εικόνες, κείμενα, παραδείγματα) και η χρήση στη διδασκαλία σταδιακά αναπτύσσουν την "αναγραφική" δεξιότητα των μαθητών, την ικανότητά τους δηλαδή να παράγουν, να χρησιμοποιούν, να ανασκευάζουν αναπαραστάσεις και να μπορούν να εκφράζουν μαθηματικές ιδέες και έννοιες με πολλούς τρόπους (Lehrer & Schauble, 2005).

Αντί των παραδοσιακών διδακτικών στόχων, οι Goldin & Kaput (1996) προτείνουν τον σχεδιασμό της διδασκαλίας με βάση τα εσωτερικά συστήματα αναπαραστάσεων που επιδιώκεται να αναπτύξουν οι μαθητές. Όπως λέει και ο Vergnaud, (1998), οι δάσκαλοι είναι οι μεσολαβητές, κα ρόλος τους είναι να προσφέρουν στους μαθητές τους ένα παραγωγικό περιβάλλον μάθησης που θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν τα δικά τους σχήματα και τις δικές τους αναπαραστάσεις. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίζουν σταδιακά πιο δύσκολα αντικείμενα και προβλήματα. Οι Panasuk & Beyranevand, (2010), θεωρούν επίσης ότι οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία της συστηματικής και συνεπούς αναγνώρισης της ίδιας σχέσης σε διαφορετικές καταστάσεις καθώς και της επίλυσης προβλημάτων που τίθενται με διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης. Επιπλέον η πληροφορία στην τάξη θα πρέπει να παρουσιάζεται στους μαθητές με πολλαπλούς τρόπους ώστε αυτοί να είναι ικανοί να δομήσουν πολλαπλούς τρόπους σκέψης και τεχνικές και να προάγουν το γνωστικό τους υπόβαθρο, καθώς για να είναι κάποιος πετυχημένος τα μαθηματικά θα πρέπει να κατέχει ένα πλούτο νοητικών αναπαραστάσεων των εννοιών (Dreyfus, 1991).

2.2 Η εικόνα της έννοιας της συνάρτησης

Ένα θέμα που σχετίζεται με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι η λεγόμενη εικόνα μιας έννοιας. Η εικόνα μιας έννοιας είναι ολόκληρη η γνωστική δομή μία έννοιας η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, διαδικασίες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια (Tall & Vinner, 1981). Η εικόνα της έννοιας αποτελείται από τα αναπαραστατικά σχήματα που έχουν οργανωθεί με βάση τις αναπαραστάσεις που κυριαρχούν στην καθημερινή σχολική πρακτική των μαθητών και μπορεί να είναι κάποια οπτική αναπαράσταση της έννοιας ή κάποιες εντυπώσεις ή εμπειρίες, που μετά την ανάσυρσή τους μεταφράζονται σε γλωσσικές μορφές. Οι ίδιοι θεωρούν ότι η μαθηματική γνώση των μαθητών οργανώνεται σε δύο διαφορετικές οντότητες: την έννοια - ορισμό δηλαδή τη διατυπωμένη ή λεκτική γνώση, και την έννοια---εικόνα. Ο Vinner, (2002) θεωρεί ότι στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια υπάρχουν δύο διαφορετικών κελιά, το ένα από τα οποία αφορά στον ορισμό της έννοιας και το δεύτερο στην εικόνα της έννοιας. Κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος τα δύο κελιά μπορεί να ενεργοποιηθούν. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, τα κελιά της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Η μαθηματικά ορθή διαδικασία στην επίλυσης ενός προβλήματος περιλαμβάνει οπωσδήποτε τον ορισμό της έννοιας. Πολλές φορές όμως οι μαθητές ενεργούν με βάση την εικόνα της έννοιας αγνοώντας τον ορισμό, ακόμη και αν είναι σε θέση να τον διατυπώσουν σωστά και οδηγούνται σε λανθασμένα αποτελέσματα. Όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης πολλές φορές οι μαθητές έχουν σχηματίσει λανθασμένη εικόνα της έννοιας ακόμα κι αν είναι σε θέση να διατυπώσουν σωστά τον ορισμό. Κάποιοι θεωρούν ότι μια συνάρτηση είναι μεν ένας κανόνας αντιστοίχισης, απορρίπτοντας όμως ταυτόχρονα τη δυνατότητα μιας αντιστοιχίας η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο κανόνα, άλλοι θεωρούν ότι μια συνάρτηση είναι ένας τύπος ή μια εξίσωση και ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δεν δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, άλλοι πάλι πιστεύουν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Vinner, 2002). Η σωστή εικόνα της έννοιας της συνάρτησης προϋποθέτει πέραν της απλής γνώσης του ορισμού, την κατανόησή του και την ικανότητα αναγνώρισης των διαφορετικών αναπαραστάσεών της όπως θα αναφερθεί και στο επόμενο κεφάλαιο.

2.3 Η θεωρία APOS και η διδασκαλία των συναρτήσεων

Με βάση την θεωρία του Piaget για το σχηματισμό των εννοιών στο αρχικό αισθησιοκινητικό στάδιο, ο Dubinsky και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν μία θεωρία, η οποία στην ουσία αποτελεί επέκταση της θεωρίας του Piaget σε μεγαλύτερες ηλικίες και ερμηνεύει το σχηματισμό της ανώτερης μαθηματικής γνώσης. Η βασική αρχή της θεωρίας είναι ότι η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται από την τάση του ατόμου να αντιμετωπίσει, στο κοινωνικό πλαίσιο, μαθηματικές προβληματικές καταστάσεις κατασκευάζοντας νοητικές δράσεις, διαδικασίες και αντικείμενα τα οποία οργανώνει σε σχήματα με σκοπό την κατανόηση αυτών των καταστάσεων και την επίλυση των αντιμετωπιζόμενων προβλημάτων (Asiala et al., 1997; Dubinsky & McDonald, 2001).

Τα διαδοχικά στάδια μετάβασης του ατόμου μέχρι την πλήρη συγκρότηση μιας έννοιας είναι η Ενέργεια, η Διαδικασία, το Αντικείμενο και το Σχήμα. Στο στάδιο της Ενέργειας το άτομο μετασχηματίζει αντικείμενα τα οποία γίνονται αντιληπτά ως εξωτερικά σε σχέση με το ίδιο το άτομο και απαιτούνται - είτε σιωπηρά είτε από μνήμης - οδηγίες για τη βήμα προς βήμα υλοποίηση της ενέργειας. Όταν το άτομο επαναλάβει μία ενέργεια την οποία αναστοχάζεται δημιουργώντας μία εσωτερική νοητή κατασκευή και είναι ικανό να σκεφτεί ότι πραγματοποιεί το ίδιο είδος ενέργειας χωρίς όμως να χρειάζεται κάποιο εξωτερικό ερέθισμα βρίσκεται στο στάδιο της Διαδικασίας. Στη στάδιο αυτό το άτομο αντιλαμβάνεται έναν μετασχηματισμό ως μία διαδικασία, την αναστοχάζεται, μπορεί να σκεφτεί ότι πραγματοποιεί τη διαδικασία χωρίς όμως να την εκτελεί, και είναι σε θέση να σκεφτεί τα βήματα για την αντίστροφη διαδικασία ή να τη συνθέσει με άλλες διαδικασίες. Στο επόμενο στάδιο του Αντικειμένου το άτομο δημιουργεί μία νοητική κατασκευή την οποία με την οποία αντιλαμβάνεται μία διαδικασία ως ολότητα και συνειδητοποιεί ότι μπορεί να εφαρμόσει μετασχηματισμούς πάνω σε αυτή. Η διαδικασία στην φάση αυτή έχει ενσωματωθεί στο αντικείμενο. Μία συλλογή από ενέργειες, διαδικασίες, αντικείμενα που συγκροτείται με κάποιες γενικές αρχές με σκοπό τη μορφοποίηση ενός πλαισίου, στο μυαλό του ατόμου και το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το άτομο για την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων που αφορούν στην έννοια ονομάζεται Σχήμα (Schema). Το πλαίσιο αυτό πρέπει να είναι συνεκτικό με την έννοια ότι παρέχει τα μέσα ώστε το άτομο να προσδιορίζει σε τι είδους καταστάσεις είναι χρήσιμο ή όχι. Οι νοητικές ενέργειες, οι διαδικασίες και τα αντικείμενα που συγκροτούν το νοητικό σχήμα μιας έννοιας, αποτελούν ένα δυναμικό σύστημα στο οποίο δομές χαμηλότερου επιπέδου μετασχηματίζονται σε δομές υψηλότερου επιπέδου. Η ιδέα του σχήματος είναι παρόμοια με την εικόνα της έννοιας που εισήγαγαν οι Tall & Vinner, (1981) και η διαφορά τους έγκειται μόνο στην συνεκτικότητα που χαρακτηρίζει το σχήμα (Dubinsky & McDonald, 2001).Η μετάβαση από τη μία δομή χαμηλότερου επιπέδου στην επόμενη πραγματοποιείται όταν το άτομο έρθει σε επαφή με προβληματικές καταστάσεις, που αφορούν στην έννοια και ο νοητικός μηχανισμός μετατροπής των δομών είναι η στοχαστική αφαίρεση. Σύμφωνα με θεωρία APOS στη μελέτη των συναρτήσεων το άτομο οικοδομεί την έννοια μεταβαίνοντας σταδιακά από τις ενέργειες, στις διαδικασία, στο αντικείμενο και στο σχήμα, οπότε και θεωρείται ότι έχει οικοδομηθεί πλήρως η εικόνα της έννοιας. Η διαδοχική αυτή μετάβαση μεταξύ των σταδίων εξασφαλίζεται με κατάλληλη διδακτική προσέγγιση η οποία βασίζεται στην γενετική αποδόμηση της έννοιας, όπως και θα αναφερθεί παρακάτω, με βάση την οποία σχεδιάζεται το διδακτικό υλικό και υλοποιείται η διδασκαλία στην τάξη.

2.4 Η διττότητα διαδικασία-αντικείμενο και η έννοια της συνάρτησης

Η Sfard, (1991), ανέπτυξε μία θεωρία σύμφωνα με την οποία οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες μπορεί να κατανοηθούν λειτουργικά σαν διαδικασίες ή δομικά ως αντικείμενα και ότι η γνώση των μαθητών έχει διττή φύση, τη διαδικαστική αντίληψη για την έννοια και την εννοιολογική αντίληψη. Η διαδικαστική αντίληψη είναι το πρώτο βήμα για την κατανόηση μίας έννοιας και η δομική της αντίληψη επιτυγχάνεται σταδιακά, μεταξύ των δύο αντιλήψεων δε μεσολαβεί ένα σημαντικό κενό που θα πρέπει να υπερκερασθεί. Το πέρασμα από τη διαδικασία στο αντικείμενο επιτυγχάνεται όταν το κέντρο της προσοχής του υποκειμένου μετατοπίζεται από τη διαδικασία αυτή καθαυτή στο αποτέλεσμά της. Ένα άτομο έχει κατακτήσει την δομική αντίληψη μίας έννοιας όταν μπορεί να αναφερθεί σ’ αυτή σαν να ήταν ένα πραγματικό αντικείμενο και είναι ικανό να την αντιλαμβάνεται συνολικά χωρίς να υπεισέρχεται σε λεπτομέρειες. Η δομική αντίληψη επομένως είναι στατική, στιγμιαία και ολοκληρωμένη σε αντίθεση με την λειτουργική που είναι δυναμική, διαδοχική και λεπτομερής, καθώς αυτή υφίσταται ως μία διαδικασία δράσεων

Η Sfard, (1989) θεωρεί ότι όπως ακριβώς συμβαίνει με την μάθηση του ατόμου **η ιστορική εξέλιξη** των μαθηματικών κατ' αναλογίαν, υποδεικνύει ότι ιστορικά διάφορα τμήματα των μαθηματικών μπορεί να θεωρηθούν ότι ανήκουν σε κάποιο είδος ιεραρχίας στην οποία αυτό που σε κάποιο επίπεδο γίνονταν αντιληπτό διαδικαστικά γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο. Με αυτή τη θεώρηση οι αλγεβρικές έννοιες είναι **«προϊόντα» διαδικασιών** οι οποίες εφαρμόστηκαν είτε σε αντικείμενα της εμπειρίας μας είτε σε μαθηματικά αντικείμενα, και οι οποίες με τη σειρά τους μετατράπηκαν σε μαθηματικά αντικείμενα υψηλότερης τάξης (Sfard 1989). Η διττή φύση των μαθηματικών εννοιών μπορεί να παρατηρηθεί τόσο στις λεκτικές περιγραφές όσο και στους διαφορετικούς τρόπους των συμβολικών αναπαραστάσεών τους. Η Sfard μελετώντας τις συναρτήσεις θεωρεί ότι μία αναπαράστασή τους με την μορφή ενός προγράμματος για τον υπολογισμό ενός πίνακα τιμών τους αντιστοιχεί σε μία διαδικαστική περισσότερο αντίληψη, ενώ αντίθετα η αναπαράστασή τους με την μορφή ενός γραφήματος εμπεριέχει μία πιο ολιστική έκφραση της συνάρτησης εκφράζοντας επομένως μία δομική αντίληψη της έννοιας.

Από ψυχολογική πλευρά οι μαθηματικές έννοιες δημιουργούνται σε τρία στάδια που είναι η εσωτερίκευση (interiorization), η συμπύκνωση (condensation) και η πραγμοποίηση ή υλοποίηση (reification). Τα στάδια αυτά θεωρείται ότι αναλογούν με τις φάσεις της ιστορική ανάπτυξης και καθιέρωσης των μαθηματικών εννοιών. Η **εσωτερίκευση** είναι το στάδιο κατά το οποίο υλοποιούνται κάποιες διαδικασίες σε ήδη γνωστά μαθηματικά αντικείμενα, το άτομο εξοικειώνεται με τις δεξιότητες αυτές σταδιακά αποκτά δεξιότητες στην εκτέλεσή τους, ώστε τελικά να αρχίσει να γεννάται η νέα έννοια. Στην περίπτωση της συνάρτησης στο στάδιο αυτό γεννάται η ιδέα της μεταβλητής και η δυνατότητα της χρήσης του τύπου της συνάρτησης για τον υπολογισμό τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Το στάδιο γέννησης μία μαθηματικής έννοιας είναι **η συμπύκνωση** κατά το οποίο οι μακρόσυρτες ακολουθίες των δράσεων συμπυκνώνονται σε μονάδες που είναι πιο εύκολο να διαχειριστούν και να γίνουν αντιληπτές ως ολότητες χωρίς να λαμβάνονται υπόψη λεπτομέρειες. Η πρόοδος στην φάση της συμπύκνωσης εκδηλώνεται με την αυξανόμενη ευκολία εναλλαγής μεταξύ διαφορετικών παραστάσεων της έννοιας. Στην περίπτωση των συναρτήσεων όσο περισσότερο προωθημένη είναι η συμπύκνωση τόσο το άτομο καθίσταται ικανό στην αντίληψή τους συνολικά χωρίς να λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένες τιμές τους, ώστε τελικά να μπορεί να τις διερευνά, να σχεδιάζει τις γραφικές τους παραστάσεις, να τις συνθέτει ή να βρίσκει την αντίστροφη μίας συνάρτησης. Το στάδιο της συμπύκνωσης διαρκεί καθόσον η νέα οντότητα παραμένει στενά συνδεδεμένη με κάποια διαδικασία. Το τελικό στάδιο σχηματισμού των μαθηματικών εννοιών είναι η **πραγμοποίηση**, κατά την οποία το άτομο αντιλαμβάνεται πλέον την έννοια ξεχωριστά από την συγκεκριμένη διαδικασία. Κατά το στάδιο αυτό που συμβαίνει απότομα ολοκληρώνεται το σχήμα της έννοιας καθώς η διαδικασία παγιώνεται σε ένα διακριτό αντικείμενο, δηλαδή σε μία στατική δομή η οποία θα αποτελέσει στο μέλλον προϊόν επεξεργασίας στη δημιουργία νέων αντικειμένων. Στην περίπτωση των συναρτήσεων η πραγμοποίηση υφίσταται όταν το άτομο είναι ικανό: να λύνει εξισώσεις με αγνώστους συναρτήσεις, να αντιλαμβάνεται τις ιδιότητες διαδικασιών που εφαρμόζονται σε συναρτήσεις, όπως η σύνθεση ή η αντιστροφή και να αναγνωρίζει ότι ο υπολογισμός δεν αποτελεί ένα απαραίτητο χαρακτηριστικό για τον ορισμό της συνάρτησης, ο οποίος μπορεί να γίνει και με χρήση διατεταγμένων ζευγών. Τα τρία αυτά στάδια είναι δομημένα ιεραρχικά και επαναλαμβανόμενα στη συνέχεια σχηματίζουν αντικείμενα υψηλότερης τάξης.

Από την παραπάνω θεωρία προκύπτουν δύο σημαντικές διδακτικές αρχές (Sfard, 1989):

<u>Διδακτική αρχή Ι</u>: Το προτεινόμενο μοντέλο σχηματισμού των εννοιών συνεπάγεται ότι θα ήταν ελάχιστα ή καθόλου εφικτό να εισαχθεί μια νέα μαθηματική έννοια μέσω της δομικής της περιγραφής και για να μπορέσει ο μαθητής να κατανοήσει τον δομικό ορισμό θα πρέπει να προηγηθεί η ενασχόληση και εμπειρία του με τις υποκείμενες διαδικασίες.

<u>Διδακτική αρχή ΙΙ</u>: Η δομική προσέγγιση δεν πρέπει να επιχειρείται μέχρις ότου γίνει ένα πραγματικό βήμα προς μια θεωρία υψηλότερου επιπέδου για την οποία είναι απαραίτητη αυτή η προσέγγιση. Για να μπορέσει ο μαθητής να αντιμετωπίσει ένα νέο είδος έννοιας θα πρέπει να έχει ένα ισχυρό κίνητρο. Η απαιτούμενη νοητική προσπάθεια πιθανότατα δεν θα πραγματοποιηθεί μέχρι να αποδειχτεί ανεπαρκής η διαδικαστική προσέγγιση και η πραγμοποίηση της δεδομένης διαδικασίας να αποτελέσει απαραίτητη προϋπόθεση για την περαιτέρω μάθηση. Μια τέτοια κατάσταση προκύπτει μόνο όταν εκτελούνται ορισμένες διαδικασίες υψηλότερου επιπέδου στην εν λόγω έννοια.

Οι αρχές όμως αυτές δεν τηρούνται πάντα στο σχολείο (Sfard & Linchevski, 1994) καθώς στο πρόγραμμα σπουδών αντιστρέφεται η σειρά ανάπτυξης των εννοιών και ο τρόπος που αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Η προηγμένη δομική προσέγγιση θεωρείται πολλές φορές εξαρχής όταν ο μαθητής δεν είναι έτοιμος να συλλάβει την δυαδικότητα διαδικασίας-αντικειμένου. Αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης είναι τα προβλήματα που παρατηρούνται στα μαθησιακά αποτελέσματα στο σχολείο. Επιπλέον φαίνεται λογικό ότι μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη φυσική τάση των μαθητών για μία επιχειρησιακή προσέγγιση ξεκινώντας από τις διαδικασίες και όχι από τα έτοιμα αλγεβρικά αντικείμενα, και στο θέμα μπορεί να συμβάλλει και η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Για παράδειγμα είναι αρκετά πιθανό ότι η χρήση των γραφικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών, ιδιαίτερα στο θέμα των συναρτήσεων που αποτελεί ένα πρόσφορο αντικείμενο, μπορεί να βοηθήσουν αντιστρέφοντας την σημερινή λανθασμένη προσέγγιση ώστε η δομική προσέγγιση της άλγεβρας να καταστεί προσιτή ακόμη και στους μικρούς μαθητές.

2.5 Οι διαδικασιοέννοιες και η συνάρτηση

Οι Gray & Tall, (1992), εισήγαγαν τον όρο διαδικασιοέννοια (procept) για να τονίσουν το ρόλο των συμβόλων και να εκφράσουν τη δυϊκότητα μεταξύ διαδικασίας και έννοιας. Μία διαδικασιοέννοια είναι ένα σύνθετο νοητικό αντικείμενο αποτελούμενο από μια διαδικασία, μία έννοια που παράγεται από αυτήν και ένα σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται να αναπαραστήσει είτε τη διαδικασία είτε το αντικείμενο. Η Sfard, (1989), θεωρεί ότι η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται τις μαθηματικές έννοιες ως διεργασίες και αντικείμενα ταυτόχρονα, είναι στην πραγματικότητα συμπληρωματική, αν και φαινομενικά οι δύο διαφορετικές όψεις της έννοιας είναι ασυμβίβαστες.

Οι Gray & Tall, (1994), θεωρούν ότι υπάρχει μία σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των ικανότερων μαθητών στα μαθηματικά και των λιγότερο ικανών καθώς οι μαθητές που τα καταφέρνουν καλύτερα έχουν διαδικασιοεννοιολογική σκέψη σε αντίθεση με την διαδικαστική σκέψη των λιγότερο ικανών μαθητών. Η διαδικαστική σκέψη χαρακτηρίζεται από την επικέντρωση στην διαδικασία και στα φυσικά ή σχεδόν φυσικά βοηθήματα που την υποστηρίζουν. Ο μαθητής στην περίπτωση αυτή έχει μία περιορισμένη άποψη για τα σύμβολα και γι αυτόν στην περίπτωση της αριθμητικής π.χ. οι αριθμοί χρησιμοποιούνται μόνο ως συγκεκριμένες οντότητες που χρησιμοποιούνται στην διαδικασία υπολογισμού. Λόγω της έμφασης στη διαδικασία μειώνεται η εστίαση στη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου, οδηγώντας συχνά σε ιδιοσυγκρασιακές επεκτάσεις της διαδικασίας υπολογισμού που μπορεί να μην γενικεύονται. Αντίθετα η διαδικασιοεννοιολογική σκέψη χαρακτηρίζεται από την ικανότητα σύμπτυξης των σταδίων χειρισμού των συμβόλων μέχρι το σημείο στο οποίο τα σύμβολα θεωρούνται αντικείμενα που μπορούν να αποσυντεθούν και να ανασυγκροτηθούν με ευέλικτους τρόπους. Ο μαθητής στην περίπτωση αυτή είναι ικανός να χειρίζεται τα σύμβολα ευέλικτα σαν διαδικασίες ή έννοιες εναλλάσσοντας εύκολα διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο.

Η συνάρτηση, ως διαδικασία (process) είναι "είσοδος και έξοδος" δεδομένων, σύμφωνα με τη οποία ένα στοιχείο x του πεδίου ορισμού μέσα από μία διαδικασία, μετασχηματίζεται σε ένα στοιχείο f(x) του συνόλου τιμών ενώ ταυτόχρονα η συνάρτηση ως έννοια (concept) αποτελεί να μαθηματικό αντικείμεενο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστούν πράξεις. Η διαδικασία και η έννοια της συνάρτησης συμβολίζονται ταυτόχρονα με το ίδιο σύμβολο. Η διαδικασιοέννοια της συνάρτησης γίνεται περισσότερο εύπλαστη όσο ο μαθητής αποκτά περισσότερη εμπειρία. Καθώς υφίσταται με την μορφή διαφόρων αναπαραστάσεων, ο δυναμικός τρόπος χρήσης της συνίσταται στην ικανότητα επιλογής κάθε φορά της κατάλληλης αναπαράστασης, ενώ κατά την μετακίνηση από την μία μορφή αναπαράστασης σε κάποια άλλη δεν υπάρχει κάποια αίσθηση μετάβασης καθώς όλες οι αναπαραστάσεις ανήκουν στην ίδια διαδικασιοέννοια.

2.6 Η γενετική αποδόμηση των μαθηματικών εννοιών

Μια γενετική αποδόμηση στη μάθηση είναι ένα υποθετικό μοντέλο που σύμφωνα με τις αρχές της θεωρίας APOS περιγράφει τις νοητικές δομές και τους μηχανισμούς που χρειάζεται ένας μαθητής για να κατασκευάσει κάποια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια (Dubinsky, 1991). Για να την υλοποιήσει κάποιος κάνει υποθέσεις βασιζόμενος στην προσωπική του γνώση εκπαιδευτικού και παιδαγωγικού περιεχομένου για την υπό μελέτη έννοια, σε δημοσιευμένες μελέτες για το θέμα καθώς και στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Η γενετική αποδόμηση κάποιας έννοιας προκύπτει από την παρατήρηση της κατασκευής της γνώσης και δεν είναι μοναδική, αποτελεί δε έναν οδηγό για τον μελλοντικό σχεδιασμό της διδασκαλίας.

Μια νέα μαθηματική έννοια συχνά προκύπτει ως ένας μετασχηματισμός της υπάρχουσας γνώσης. Επομένως στόχος της γενετικής ανάλυσης είναι η αναλυτική περιγραφή των ενεργειών που χρειάζεται να εκτελέσει ο μαθητής στα υπάρχοντα νοητικά αντικείμενα και η παροχή εξηγήσεων για τον τρόπο με τον οποίο οι ενέργειες αυτές εσωτερικοποιούνται ως διαδικασίες. Στο σημείο αυτό η νέα έννοια είναι στο στάδιο των ενεργειών του ατόμου και για να θεωρηθεί ως μία αυτόνομη οντότητα που μπορεί στο μέλλον να μετασχηματιστεί θα πρέπει να ενσωματωθεί σε ένα νοητικό αντικείμενο. Μια έννοια μπορεί να αποτελείται από πολλές διαφορετικές Ενέργειες, Διαδικασίες και Αντικείμενα και μία γενετική αποδόμησή της μπορεί να περιλαμβάνει την αναλυτική περιγραφή του τρόπου με τον οποίο οι δομές αυτές συσχετίζονται και οργανώνονται σε μια μεγαλύτερη νοητική δομή που είναι το Σχήμα. Μία γενετική αποδόμηση επίσης μπορεί να περιλαμβάνει τους διαφορετικούς τρόπους απόκρισης των μαθητών στην δημιουργία των νοητικών τους κατασκευών. Όπως συμβαίνει και με άλλα μοντέλα, μια γενετική αποδόμηση δεν είναι μοναδική, καθώς διαφορετικοί ερευνητές μπορούν να προτείνουν διαφορετικές γενετικές αναλύσεις για την ίδια έννοια. Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι οι νοητικές κατασκευές των μαθητών που προβλέπονται από τη γενετική αποδόμηση παρατηρούνται στην πράξη κατά την διδασκαλία.

Το μοντέλο της γενετικής ανάλυσης που υποτίθεται αρχικά, χρησιμοποιείται στη μεθοδολογία της θεωρίας για να σχεδιαστούν δραστηριότητες που μπορούν να επιτρέψουν στους ερευνητές να «παρατηρήσουν» έμμεσα μέσα από την εργασία των μαθητών, τις νοητικές κατασκευές που έχουν δημιουργήσει και επομένως την πρόοδό τους στην κατανόηση της έννοιας (Martínez-Planell & Trigueros Gaisman, 2012). Εάν παρατηρηθούν στην πράξη οι κατασκευές που περιγράφονται στο υποτιθέμενο μοντέλο τότε αυτό θεωρείται έγκυρο, διαφορετικά απορρίπτεται και σχεδιάζεται ένα νέο. Όταν το μοντέλο της γενετικής ανάλυσης επικυρωθεί όσον αφορά την παρατήρηση των προβλεπόμενων σ’ αυτό νοητικών κατασκευών, τότε μπορεί αυτό να χρησιμοποιηθεί στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία της έννοιας. Η εργασία των σπουδαστών σε αυτές τις δραστηριότητες και ο προβληματισμός για την εργασία τους υποτίθεται ότι συμβάλλουν στην νοητική κατασκευή της έννοιας.

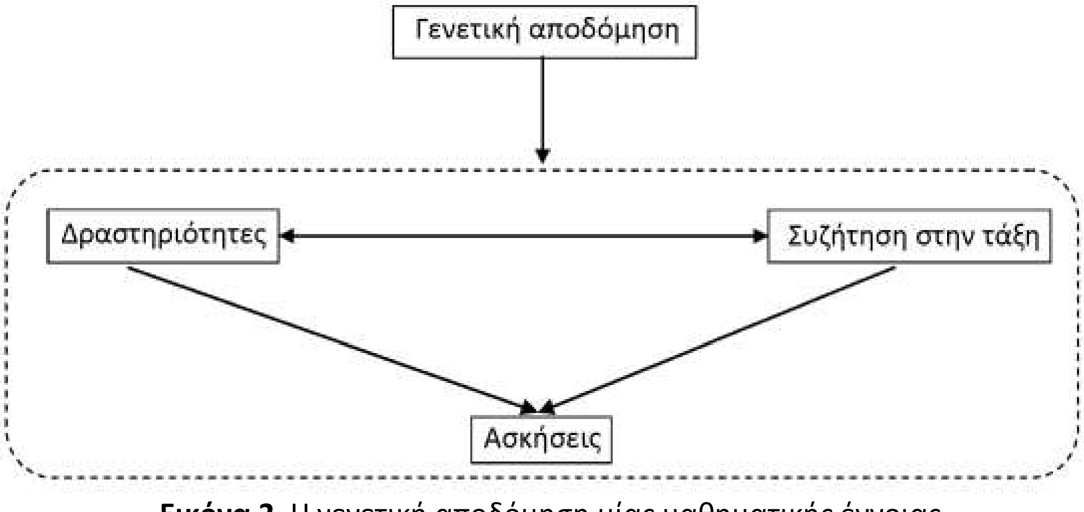
Το μοντέλο της γενετικής ανάλυσης αν και στην περιγραφή του φαίνεται γραμμικό, προβλέπει τη δυνατότητα διαφορετικών τροχιών που περιλαμβάνουν εκκινήσεις, στάσεις και ασυνέχειες που συμβαίνουν στη μάθηση. Η θεωρία APOS αναγνωρίζει ότι ένας μαθητής μπορεί να ακολουθήσει διαφορετικές τροχιές μάθησης, καθώς αυτός κινείται από τη διαδικασία Σε ενέργεια και πίσω στη διαδικασία ή από το αντικείμενο σε διαδικασία και πίσω στο αντικείμενο (Arnon et al., 2013). Παρά τις ατομικές διαφορές, μια γενετική ανάλυση περιγράφει τις δομές που πρέπει να κατασκευάσει ο μαθητής στην εκμάθηση μιας έννοιας.

Αν και φαίνονται παρόμοιες, η γενετική ανάλυση και οι νοητικές τροχιές έχουν ένα διαφορετικό περιεχόμενο και εστιάζουν το θέμα της μάθησης από μία διαφορετική σκοπιά (Arnon et al., 2013). Η γενετική ανάλυση περιγράφεις τις νοητικές δομές και τους μηχανισμούς με τους οποίους οι δομές αυτές οικοδομούνται. Ανάλογα οι νοητικές τροχιές περιγράφουν την σειρά την οποία οι μαθητές ακολουθούν στην μάθηση των εννοιών. Οι νοητικές τροχιές δηλαδή στην διαδικασία της μάθησης εστιάζονται στις μαθηματικές πτυχές της έννοιας. Η γενετική αποδόμηση της έννοιας της συνάρτησης σύμφωνα με τις αρχές που αναπτύχθηκαν παρουσιάζεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

2.7 Διδακτική εφαρμογή της θεωρίας APOS

Ο Dubinsky, (1991). δίνει γενικές διδακτικές αρχές για την δημιουργία μιας εναλλακτικής πρότασης σε σχέση με την παραδοσιακή διδακτική πρακτική για την ανάπτυξη της μαθηματικής εννοιολογικής σκέψης των μαθητών. Προτείνει αρχικά την παρατήρηση της διαδικασίας της μάθησης στην τάξη ενός συγκεκριμένου θέματος και τον εντοπισμό των αναπτυσσόμενων εννοιολογικών δομών δηλαδή την εικόνα της έννοιας. Στην συνέχεια με βάση τις παρατηρήσεις και την εμπειρία του ερευνητή, θα πρέπει να δημιουργηθεί μία γενετική αποδόμηση για τα θέματα που πρόκειται να διδαχθούν που να αναπαριστά ένα πιθανό τρόπο με τον οποίο ο μαθητής ια δημιουργήσει την γνώση. Ακολουθεί ο σχεδιασμός της διδασκαλίας με την δημιουργία καταλλήλων δραστηριοτήτων για την πρόκληση καταστάσεων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις αναμενόμενες στοχαστικές αφαιρέσεις. Η γενετική αποδόμηση και οι δραστηριότητες ανασκευάζονται και ο διδακτικός κύκλος επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να παρατηρηθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Η εφαρμογή των γενικών αρχών του Dubinsky και της θεωρίας APOS στην διδασκαλία επιτυγχάνεται με τον κύκλο Δραστηριότητες, συζήτηση στην Τάξη, Ασκήσεις (ΔΤΑ) που είναι μία διδακτική προσέγγιση που υποστηρίζει την ανάπτυξη νοητικών κατασκευών σύμφωνα με μία γενετική ανάλυση (Arnon et al., 2013). Κατά την διάρκεια των δραστηριοτήτων που είναι το πρώτο μέρος του κύκλου οι μαθητές σε συνεργασία υλοποιούν τις δραστηριότητες που είναι κατάλληλα σχεδιασμένες για να προκαλέσουν μέσω της στοχαστικής αφαίρεσης την δημιουργία των νοητικών κατασκευών που προβλέπονται από την γενετική ανάλυση. Οι δραστηριότητες είναι σχεδιασμένες να προάγουν την εσωτερίκευση των Ενεργειών σε Διαδικασίες, να βοηθούν στον συντονισμό και στην αντιστροφή των διαδικασιών και να υποστηρίζουν την ενσωμάτωση των Διαδικασιών σε Αντικείμενα. Μία διδακτική ακολουθία μπορεί επίσης να περιλαμβάνει δραστηριότητες νε στόχο την δημιουργία σχέσεων μεταξύ διαφόρων Ενεργειών, Διαδικασιών, Αντικειμένων και Σχημάτων που προϋπήρχαν. Οι δραστηριότητες αυτές βοηθούν τους μαθητές να δημιουργήσουν το νέο Σχήμα της διδασκόμενης έννοιας ή να το αναπτύξουν και να το τελειοποιήσουν στην περίπτωση που είχε κατασκευαστεί πιο πριν. Κατά το δεύτερο στάδιο διεξάγεται συζήτηση στην τάξη επί των δραστηριοτήτων που προηγήθηκαν κατάλληλα καθοδηγούμενη από τον διδάσκοντα. Κατά την φάση αυτή οι μαθητές έχουν την ευκαιρία σκέψης και περαιτέρω διερεύνησης των δραστηριοτήτων που υλοποίησαν. Κατά τη διάρκειά της ο διδάσκων μπορεί να δώσει ορισμούς, να εξηγήσει και να συνοψίσει κατάλληλα τις σκέψεις των μαθητών και την εργασία τους. Το τρίτο μέρος του κύκλου είναι η εργασία στο σπίτι που είναι προβλήματα που στοχεύουν να ενισχύσουν τις δραστηριότητες και την συζήτηση στην τάξη. Οι ασκήσεις βοηθούν τους μαθητές να εφαρμόσουν αυτά που έμαθαν και υποστηρίζουν την συνεχιζόμενη ανάπτυξη των νοητικών κατασκευών που προβλέπονται από την γενετική αποδόμηση. Το γενικό πλαίσιο της γενετικής αποδόμησης των μαθηματικών εννοιών παρουσιάζεται στην εικόνα 2.



Εικόνα 2. Η γενετική αποδόμηση μίας μαθηματικής έννοιας

Ο διδακτικός κύκλος ΔΤΑ επηρεάζεται από την γενετική αποδόμηση όπως δείχνει και το σχετικό βέλος στην εικόνα. Το βέλος μεταξύ των δραστηριοτήτων και της συζητήσεις έχει διπλή φορά υποδεικνύοντας ότι από την μία οι δραστηριότητες είναι το κύριο θέμα στη συζήτηση ενώ από την άλλη η συζήτηση δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να σκεφτούν επί των δραστηριοτήτων που υλοποίησαν. Τα δύο βέλη από τις δραστηριότητες και τη συζήτηση προς τις ασκήσεις υποδεικνύουν ότι ο κύριος στόχος των ασκήσεων είναι η ενδυνάμωση των νοητικών κατασκευών των μαθητών που ξεκίνησαν από τα δύο προηγούμενα στάδια. Η διδασκαλία των συναρτήσεων της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκε σύμφωνα με τις διδακτικές αρχές του κύκλου ΔΤΑ που περιγράφηκε παραπάνω. Το διδακτικό υλικό επελέγη με τρόπο ώστε να δομηθεί η εικόνα της έννοιας της συνάρτησης χωρίς λάθη και παρανοήσεις, μέσα από τον κύκλο των δραστηριοτήτων, των ασκήσεων και της συζήτησης στην τάξη.

Μετά το τέλος της διδασκαλίας, μπορεί επίσης να ακολουθήσει έρευνα με στόχο να προσδιοριστεί το κατά πόσον οι μαθητές δημιούργησαν τις προβλεπόμενες από την γενετική αποδόμηση νοητικές κατασκευές και αν οι κατασκευές αυτές τους βοήθησαν να μάθουν την διδασκόμενη έννοια. Η ανάλυση αυτή μπορεί να οδηγήσει στην αναμόρφωση της γενετικής ανάλυσης. Μπορεί επίσης να διεξαχθεί συγκριτική έρευνα για να συγκριθεί η μαθηματική απόδοση μεταξύ των μαθητών που ολοκλήρωσαν μία διδακτική παρέμβαση με βάση την θεωρία APOS και μαθητών που παρακολούθησαν μία συμβατική διδασκαλία. Σε διάφορες έρευνες της ερευνητικής ομάδας του Dubinsky έχουν αναδειχθεί οι προοπτικές της εφαρμογής της θεωρίας APOS και του διδακτικού κύκλου ΔΣΑ (Weller et al., 2003). Η προσέγγιση αυτή ακολουθήθηκε και στην παρούσα έρευνα με την μορφή του τελικού ελέγχου που διεξήχθη στις πειραματικές ομάδες όπως αναλυτικά παρουσιάζεται στον πειραματικό σχεδιασμό της έρευνας στο πέμπτο κεφάλαιο.

2.8 Η κοινωνικο-πολιτισμική μάθηση και η παρούσα έρευνα

Ο Vygotsky, θεμελιωτής του **κοινωνικού εποικοδομισμού και της** κοινωνικοπολιτισμικής μάθησης**,** (Ελληνιάδου, Ε., Κλεφτάκη, & Μπαλκίζας, 2008), θεωρεί ότι ένας ουσιώδης παράγοντας της γνωστικής και διανοητικής ανάπτυξης είναι η κοινωνική αλληλεπίδραση και δίνει μεγάλη έμφαση στο διάλογο και τις άλλες αλληλεπιδράσεις μεταξύ του ατόμου και κάποιου άλλου. Με την θεωρία της κοινωνικοπολιτισμικής μάθησης μετατίθεται η εστίαση από το άτομο που ήταν το κέντρο των μέχρι τότε γνωστικών θεωριών στο ευρύτερο κοινωνικό του πλαίσιο. Κάθε λειτουργία στην πολιτιστική ανάπτυξη του ατόμου στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής εμφανίζεται σε δύο επίπεδα: πρώτα στο κοινωνικό μεταξύ των ατόμων και στη συνέχεια στο ατομικό επίπεδο και όλες οι υψηλότερες λειτουργίες πηγάζουν από τις σχέσεις και τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων.
Βασικές θέσεις της θεωρίας της **κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης** της μάθησης είναι (Ελληνιάδου et al., 2008) ότι:

- τα άτομα οικοδομούν τη γνώση,
- η μάθηση προωθεί την ανάπτυξη,
- η ανάπτυξη δεν μπορεί να διαχωριστεί από το κοινωνικό της πλαίσιο,
- η γλώσσα παίζει καθοριστικό ρόλο στην πνευματική ανάπτυξη.

Ένα σημαντικό στοιχείο του έργου του Vygotsky είναι ότι το δυναμικό της γνωστικής ανάπτυξης και της μάθησης εξαρτάται από την μετάβαση διά της ονομαζόμενης ζώνης επικείμενης ανάπτυξης (ΖΕΑ). Η ΖΕΑ είναι μία υποθετική περιοχή κατανόησης ή γνωστικής ανάπτυξης, που είναι κοντά, αλλά ακριβώς πέρα από το τρέχον γνωστικό επίπεδο του μαθητή. Για την πρόοδο των μαθητών θα πρέπει να υπάρχει βοήθεια κατά την μετάβασή τους δια της ζώνης αυτής και στη συνέχεια πέρα από αυτήν σε ένα νέο υψηλότερο επίπεδο. Από αυτό το νέο επίπεδο θα υπάρξει μία νέα ΖΕΑ που συνεπάγεται τη δυνατότητα για περαιτέρω ανάπτυξη σε κάθε στάδιο. Η έννοια της «σκαλωσιάς» (scaffold) περιγράφει τους διάφορους τύπους υποστήριξης και βοήθειας που παρέχονται από τους μαθητές η οποία είναι αποτελεσματική όταν περιλαμβάνει έργα που βρίσκονται μέσα στη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης. Η βοήθεια αυτή μπορεί να έχει τη μορφή επεξηγήσεων, παροχής βοηθητικών στοιχείων, δημιουργικών ερωτήσεων και ανατροφοδότησης, επιλογής της ποσότητας της πληροφορίας και ταξινόμησής της σε κατάλληλη σειρά, της προφορικής διατύπωσης της σκέψης (Pritchard & Woollard, 2010).

Στην κοινωνικο-πολιτισμική μάθηση τονίζεται η ικανότητα να μαθαίνουμε μέσα από τη συμμετοχή σε δραστηριότητες. Η θεωρία της δραστηριότητας ξεκίνησε από τον Vygotsky και εξελίχθηκε από τον μαθητή και συνεργάτη του Alexei Leont'ev. Η βασική αρχή της θεωρίας αυτής είναι η ιδέα της διαμεσολάβησης του Vygotsky, σύμφωνα με την οποία η ανθρώπινη δράση διαμεσολαβείται από πολιτισμικά σύμβολα, τη γλώσσα και τα εργαλεία τα οποία επιδρούν στη δραστηριότητα του ατόμου και στις διανοητικές του διεργασίες. Η ιδέα της διαμεσολάβησης αποτυπώνεται στο τριγωνικό μοντέλο του Vygotsky, (1978) στο οποίο η υπό προϋποθέσεις άμεση σύνδεση μεταξύ ερεθίσματος και απόκρισης διευκολύνεται από κάποια δράση διαμεσολάβησης. Το μοντέλο αυτό εκφράζεται συνήθως ως μία τριάδα υποκειμένου, αντικειμένου και διαμεσολαβητικού εργαλείου (Engeström, 2001). Ένα εργαλείο αποτελεί μία γενικευμένη ενσωμάτωση διαδικασιών που έχουν προτυποποιηθεί μέσω της επαναληπτικής του χρήσης. Ο Vygotsky, (1978) διέκρινε δύο τύπους εργαλείων, τα τεχνικά και τα ψυχολογικά. Τα τεχνικά εργαλεία προορίζονται για τον χειρισμό των φυσικών αντικειμένων ενώ τα ψυχολογικά χρησιμοποιούνται από τα άτομα για να επηρεάσουν άλλα άτομα ή τον ίδιο τον εαυτό τους. Στα ψυχολογικά εργαλεία συγκαταλέγονται η γλώσσα, διάφορα συστήματα αρίθμησης, τεχνικές απομνημόνευσης, αλγεβρικά σημειωτικά συστήματα, διαγράμματα, χάρτες κλπ. Τα εργαλεία – τεχνουργήματα δεν είναι απλά ένα ουδέτερο υλικό που χρησιμοποιείται απλά στην λογική σκέψη αλλά αποτελούν πολιτιστικές οντότητες για την υποστήριξη της μάθησης καθώς η γνωστική δραστηριότητα είναι κατανεμημένη ή μοιράζεται στα άτομα και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν. Τα εργαλεία εξυπηρετούν την επικοινωνία μεταξύ των πιο ικανών και των λιγότερο ικανών ατόμων μιας ομάδας, ενώ παράλληλα μπορούν να υποστηρίξουν και να εξελίξουν τις δράσεις των μελών της ομάδας που αναζητούν τη λύση σε κάποιο πρόβλημα. Τα τεχνουργήματα και τα υποβοηθήματα (σκαλωσιές, scaffoldings) αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της κοινωνικο-πολιτισμικής θεωρίας της μάθησης.

Περιορισμός της θεωρίας όπως αυτή αναπτύχθηκε από την πρώτη γενιά ήταν ότι η μονάδα ανάλυσης ήταν το άτομο. Η δεύτερη γενιά, επικεντρωμένη γύρω από τον Leont'ev (Leont'ev, 1981) επισήμανε την κρίσιμη διαφορά μεταξύ της δράσης ενός ατόμου και μια συλλογικής δραστηριότητας. Η τρίτη γενιά της θεωρίας δραστηριότητας αναπτύσσει εννοιολογικά εργαλεία που περιλαμβάνουν δίκτυα αλληλεπιδρώντων συστημάτων δραστηριότητας, καθώς το βασικό μοντέλο επεκτείνεται ώστε να περιλαμβάνει τουλάχιστον δύο αλληλεπιδρώντα συστήματα. (Engeström, 1987).

Η σκέψη και η μάθηση επί μιας προβληματικής κατάστασης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το πλαίσιο και τον πολιτισμό στα οποία λαμβάνουν χώρα. Επομένως η σκέψη γενικά και η αλγεβρική σκέψη ειδικότερα είναι μία γνωστική ιστορική πράξη που διαμεσολαβείται από το υποκείμενο, τα σύμβολα και τα εργαλεία. Οι διαδικασίες δημιουργίας των μαθηματικών αντικειμένων είναι οι κοινωνικές διαδικασίες μέσω των οποίων οι μαθητές συλλαμβάνουν την πολιτιστική λογική με την οποία είναι προικισμένα τα αντικείμενα της γνώσης και αντιλαμβάνονται τις μορφές δράσης και σκέψης στην ιστορία που συνετέλεσαν στην δημιουργία τους (Radford, 2010)

Η θεωρία της δραστηριότητας αποτελεί ένα ισχυρό κοινωνικο-πολιτισμικό και κοινωνικο-ιστορικό εργαλείο μέσω του οποίου μπορεί να αναλυθούν οι περισσότερες μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας. Για την εφαρμογή της θεωρίας δραστηριότητας στην ανάλυση πραγματικών καταστάσεων με σκοπό τον σχεδιασμό κονστρουβιστικών περιβαλλόντων μάθησης, απαιτείται η εξέταση και επεξεργασία διαφόρων παραγόντων όπως οι δομές της δραστηριότητας που περιλαμβάνονται στην εργασία, τα εργαλεία, οι κανόνες και το συμβολικά συστήματα που μεσολαβούν στην εργασία καθώς και το κοινωνικό και το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο η εργασία αυτή λαμβάνει χώρα (Jonassen & Rohrer-Murphy, 1999).

Δραστηριότητες στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών που αντανακλούν μία τέτοια προοπτική είναι αυτές που εμπλέκουν τους μαθητές στην επίλυση προβλήματος και ενισχύουν την μαθηματικοποίηση. Εξειδικεύοντας στην άλγεβρα είναι δραστηριότητες που παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία του αλγεβρικού συλλογισμού και της εξοικείωσης με κάποιες βασικές ιδέες της άλγεβρας σε διαφορετικά πλαίσια όπως είναι οι εξισώσεις, η γενίκευση κανονικοτήτων και η ερμηνεία των γραφημάτων. Οι δραστηριότητες αυτές επιπλέον θα πρέπει να ενθαρρύνουν την χρήση της μαθηματικής γλώσσας για την έκφραση, την επικοινωνία, την αιτιολόγηση, τους υπολογισμούς, την αφαίρεση, την γενίκευση και την τυποποίηση. Τελικά οι μαθητές δεν θα πρέπει μόνο να γνωρίζουν έννοιες και διαδικασίες αλλά και να αντιλαμβάνονται πώς τα μαθηματικά δημιουργούνται και χρησιμοποιούνται.

Οι παραπάνω αρχές της κοινωνικοπολιτισμικής μάθησης και της θεωρίας της δραστηριότητας υιοθετήθηκαν και στην παρούσα έρευνα, καθώς από την μία χρησιμοποιήθηκαν οι διδακτικές δραστηριότητες ως το βασικό μέσο για την οικοδόμηση της γνώσης, δίνοντας παράλληλα σημασία και στο ευρύτερο περιβάλλον της τάξης μέσω της προαγωγής των συζητήσεων. της επιχειρηματολογίας και της έκφρασης της σκέψης και των απόψεων των μαθητών. Οι δραστηριότητες αυτές σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν την γνώση τους δρώντας οι ίδιοι και επιλύοντας προβλήματα της καθημερινής ζωής και της φυσικής. Παράλληλα η κατάλληλης διδακτική υποστήριξη του διδάσκοντα μέσα στο μάθημα και η χρήση της τεχνολογίας ως ενός χρήσιμου εργαλείου στη διδασκαλία αποτέλεσαν την απαραίτητα «σκαλωσιά» για την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 3

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης έχει καταστεί μια από τις θεμελιώδεις ιδέες των σύγχρονων μαθηματικών, διαπερνώντας ουσιαστικά σε όλες τις περιοχές του θέματος (Eisenberg, 1991). Κατά συνέπεια η συνάρτηση αποτελεί ένα πολύ σημαντικό θέμα στην διδασκαλία των μαθηματικών (Hitt, 1998) που όμως είναι συνυφασμένο με πολλές δυσκολίες (Akkus, Hand, & Seymour, 2008; Ponce, 2007).

Η διδασκαλία και η μάθηση των συναρτήσεων είναι στενά συνυφασμένη με την ικανότητα της αντίληψης των συμβόλων και της πραγματοποίησης αλγεβρικών πράξεων καθώς η αντιμετώπιση των συναρτήσεων εξαρτάται από την κατανόηση των μεταβλητών, τον χειρισμό τύπων αλλά και την ικανότητα συσχέτισης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης δηλαδή πινάκων, γραφημάτων και τύπων. Η ελλιπής αλγεβρική γνώση καθιστά τον συλλογισμό επί των συναρτήσεων πολύ δύσκολο αν όχι αδύνατο (Doorman & Drijvers, 2011). Καθώς οι συναρτήσεις έχουν διαφορετικές πτυχές, είναι διδακτικά δύσκολο και προκλητικό ταυτόχρονα να μπορέσουν οι μαθητές να αντιληφθούν τις διαφορετικές αυτές πτυχές ως συστατικά στοιχεία της ίδιας έννοιας (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2012).

Σύμφωνα με τους Doorman & Drijvers, (2011); Doorman et al., (2012), η συνάρτηση είναι:

- Μία **εργασία εισόδου-εξόδου**, που βοηθά στην οργάνωση και στην εκτέλεση μίας υπολογιστικής διαδικασίας. Η θεώρηση αυτή αν και αρχικά ασαφής, μπορεί σταδιακά να αποκτήσει περισσότερες αποχρώσεις: πώς εξαρτάται η έξοδος από την είσοδο, πώς η είσοδος προσδιορίζει την έξοδο.
- Μία **δυναμική διαδικασία συμμεταβολής**. Η ανεξάρτητη μεταβλητή όταν μεταβάλλεται στο πεδίο ορισμού έχει ως αποτέλεσμα η εξαρτημένη μεταβλητή να μεταβάλλεται στο πεδίο τιμών. Αρχικά η συνδεδεμένη μεταβολή μπορεί να παρατηρηθεί με ένα κάπως φαινομενολογικό τρόπο. Στη συνέχεια προκύπτει το ερώτημα πώς και γιατί συμβαίνει αυτή η διαδικασία της συνδεδεμένης δυναμικής.
- Ένα **μαθηματικό αντικείμενο** που μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους όπως βελοειδή διαγράμματα, πίνακες, γραφήματα, τύπους ή και φράσεις, ο καθένας από τους οποίους παρέχει μία διαφορετική άποψη του ίδιου αντικειμένου. Η εικόνα της έννοιας είναι μία ολοκληρωμένη έννοια της συνάρτησης που επιτρέπει τον συλλογισμό με συναρτήσεις σε ένα σφαιρικό επίπεδο.

Τα τρία αυτά στοιχεία της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να συνδεθούν με την διττότητα διαδικασία-αντικείμενο. Οι θεωρήσεις της συνάρτησης ως εργασίας εισόδου εξόδου και ως μίας δυναμικής συμμεταβολής αντιστοιχούν στην διαδικαστική πλευρά της έννοιας ενώ η θεώρηση ως μαθηματικού αντικειμένου αντιστοιχεί στη συνάρτηση ως ένα αντικείμενο, το οποίο μπορεί να ανήκει σε μία οικογένεια συναρτήσεων ή μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο κάποιας άλλης διαδικασίας όπως π.χ. η παραγώγιση.

3.2 Παρανοήσεις και δυσκολίες της έννοιας της συνάρτησης

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο θέμα των συναρτήσεων οι οποίες έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002) και όπως προκύπτει από την έρευνα στην διδασκαλία του μαθηματικού λογισμού οι μαθητές δεν αποκτούν την απαιτούμενη θεμελιώδη κατανόηση στο θέμα και είναι απαραίτητη μία επανεξέταση εκ μέρους της μαθηματικής κοινότητας των προγραμμάτων σπουδών στο θέμα της συνάρτησης (Carlson & Oehrtman, 2005). Η έννοια της συνάρτησης περιλαμβάνει μια ποικιλία αναπαραστάσεων που κάθε μία εκφράζει μία διαφορετική πτυχή της έννοιας παρέχοντας πληροφορίες γι αυτήν. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις συμπληρώνουν η μία την άλλη, χωρίς να περιγράφουν από μόνες τους την ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας.

Ένα πρόβλημα αφορά στην κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων δηλαδή του τύπου, των διαγραμμάτων, των γραφημάτων και των λεκτικών περιγραφών τους καθώς και στη δημιουργία συνδέσμων και στην ευκολία μετάβασης από την μία μορφή αναπαράστασης σε κάποια άλλη χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις (Hitt, 1998). Η γνώση αυτών των διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων και των συνδέσμων τους μπορεί να εξασφαλίσει μία πλούσια εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης στους μαθητές (Kaput, 1989), ενώ η ικανότητα μετάφρασης και μετάβασης από μία μορφή αναπαράστασης μίας συνάρτησης σε κάποια άλλη σχετίζεται θετικά με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Η ικανότητα να οραματίζεται κάποιος την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αποτελεί έναν ισχυρό συστατικό στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αλλά πολλοί μαθητές είναι απρόθυμοι ή δεν γνωρίζουν να διασυνδέσουν ένα γράφημα με την αναλυτική του περιγραφή (Eisenberg 1992). Σύμφωνα με έρευνες οι μαθητές προτιμούν την αναπαράσταση της συνάρτησης από τον αλγεβρικό της τύπο (Dubinsky & Wilson, 2013) και δυσκολεύονται όταν πρόκειται να ερμηνεύσουν κάποια γραφική αναπαράστασή της (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Η προτίμηση αυτή μπορεί να σχετίζεται με γνωστικούς λόγους, που αναφέρονται στη δυσκολία αντίληψης μίας εικόνας ως φορέα αναπαράστασης κάποιας πληροφορίας, σε λόγους σχετικούς με την επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και των σχολικών βιβλίων καθώς επίσης και συναισθηματικούς λόγους που έχουν σχέση με την αμηχανία και αβεβαιότητα που αισθάνονται οι μαθητές με τις εικονικές αναπαραστάσεις (Kaldrimidou & Ikonomou, 1992).Η διδασκαλία και η μάθηση των συναρτήσεων με χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων που επιτρέπουν τον χειρισμό της συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης της συνάρτησης με ταυτόχρονη παρακολούθηση των επιπτώσεων των χειρισμών αυτών έχει παιδαγωγικά πλεονεκτήματα και βοηθά στην κατανόηση της έννοιας (Schwartz & Yerushalmy, 1992).

Μία άλλη πηγή δυσκολίας είναι επίσης η κατανόηση και ο χειρισμός των συμβόλων που χρησιμοποιούνται στις συναρτήσεις. Ακόμη η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιείται στο θέμα των συναρτήσεων μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις καθώς ο ίδιος συμβολισμός f(x) χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο μία συνάρτηση όσο και την τιμή της. Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων θα πρέπει σύμφωνα με την (Sierpinska, 1992) να αντανακλά τόσο στα συγκεκριμένα εμπόδια που εντοπίζονται στο θέμα των συναρτήσεων όσο και στην κατανόηση στα Μαθηματικά γενικότερα.

Ο Ponte, (1992) υποστηρίζει ότι πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά προκύπτουν από την πίεση να χειρίζονται περισσότερο αφηρημένες οντότητες χωρίς να επιδεικνύεται ενδιαφέρον στα φυσικά προβλήματα στα οποία βασίζονται. Όταν κάποιος ασχολείται με πραγματικά προβλήματα και με απτούς αριθμούς που προκύπτουν από αυτά τότε επιτυγχάνονται σημαντικές πτυχές της μαθηματικής ικανότητας όπως να κατασκευάζει και να αναλύει πίνακες, να υπολογίζει αριθμητικές τιμές, να αναπτύσσει μία ποσοτική αίσθηση και αποκτά την ικανότητα να αντιλαμβάνεται το τι είναι αποδεκτό ή μη. Το πιο σημαντικό είναι ο μαθητής να χειρίζεται αλγεβρικές εκφράσεις οι οποίες παίρνουν νόημα από πραγματικές καταστάσεις. Μπορεί στο θέμα αυτό να χρησιμοποιούνται τύποι από άλλες επιστήμες όπως η γεωμετρία και η φυσική και να διερευνώνται σε μαθηματικά προβλήματα.

Η Sierpinska, (1992), προτείνει τέσσερις δράσεις κατανόησης που είναι απαραίτητες για να οδηγήσουν στην έννοια της συνάρτησης, συνδυάζοντας τις απομονωμένες πιθανές εμφανίσεις της στη διδασκαλία. Οι δράσεις αυτές είναι η ταυτοποίηση, η ικανότητα δηλαδή προσδιορισμού ενός αντικειμένου μεταξύ άλλων, η διάκριση μεταξύ δύο αντικειμένων με την παρατήρηση τόσο των διαφορών όσο και των ιδιοτήτων τους, η γενίκευση που αναφέρεται στην πιθανότητα επέκτασης της χρήσης του αντικειμένου και η σύνθεση που σχετίζεται με την αντίληψη των δεσμών μεταξύ στοιχείων που θεωρούνταν μέχρι τότε ασύνδετα. Για τον Dreyfus, (1991), οι διαδικασίες μάθησης των εννοιών περιλαμβάνουν τέσσερα στάδια που είναι: η χρήση μίας απλής αναπαράστασης, η χρήση περισσοτέρων τύπων αναπαράστασης παράλληλα, η δημιουργία δεσμών μεταξύ των αναπαραστάσεων και η αφομοίωση των αναπαραστάσεων και η ευέλικτη μετάβαση μεταξύ αυτών. Κατά τα πρώτα δύο στάδια ο μαθητής μαθαίνει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας, ενώ κατά το τρίτο στάδιο δημιουργούνται οι δεσμοί μεταξύ τους και η εναλλαγή τους, ευνοώντας την στοχαστική αφαίρεση. Κατά ο τελικό στάδιο η στοχαστική αφαίρεση και η κατανόηση της έννοιας ολοκληρώνονται με την αντίληψη των σχέσεων και των κοινών ιδιοτήτων των διαφορετικών τύπων αναπαράστασης, παραβλέποντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

Παράλληλα ο Hitt, (1998), προτείνει ένα περισσότερο λεπτομερές σύστημα πέντε διαφορετικών επιπέδων κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης και κατ’ επέκταση και άλλων μαθηματικών εννοιών:

1) Ασαφείς ιδέες για μία έννοια (ασυνάρτητη ανάμειξη διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).
2) Προσδιορισμός διαφορετικών αναπαραστάσεων μίας έννοιας. Προσδιορισμός συστημάτων αναπαραστάσεων.
3) Μετάβαση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαραστάσεων σε κάποιο άλλο.
4) Συνεκτικός σύνδεσμος μεταξύ δύο συστημάτων αναπαράστασης.
5) Συνεκτικός σύνδεσμος μεταξύ δύο συστημάτων αναπαράστασης στην επίλυση ενός προβλήματος.

Το σύστημα αυτό υποδεικνύει ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος στο επίπεδο 5 περιλαμβάνει την ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε κάποιο άλλο με διατήρηση του νοήματος του επιπέδου 3.

3.3 Το βάθος και το πλάτος της έννοιας της συνάρτησης

Οι DeMarois & Tall, (1996), διακρίνουν στην συνάρτηση το βάθος και το πλάτος της έννοιας. Το βάθος της έννοιας αντιστοιχεί στην κάθετη ανάπτυξή της, με αυξημένα επίπεδα νοητικής αφαίρεσης, στην οποία η έννοια της συνάρτησης εκφράζεται από την διαδικαστική της λειτουργία, ενώ το πλάτος της έννοιας σχετίζεται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας, δηλαδή τις γεωμετρικές, τις αριθμητικές και τις συμβολικές.

Γενικές όψεις	**Όψεις της συνάρτησης**
Αριθμητική	Πίνακας με δύο στήλες ή σύνολα διατεταγμένων ζευγών
Γεωμετρική	Γράφημα σε σύστημα συντεταγμένων
Συμβολική	Εξίσωση με δύο μεταβλητές
Γραπτή	Ορισμός που εκφράζεται με κείμενο
Προφορική	Ορισμός που εκφράζεται προφορικά
Κιναισθητική	Φυσική επίδειξη της συνάρτησης
Κοινή	Συνάρτηση-μηχανή
Συμβολισμός	Συμβολισμός συνάρτησης f(x)

Εικόνα 1. Όψεις και επίπεδα της έννοιας της συνάρτησης (DeMarois & Tall, 1996)

Οι ίδιοι συγγραφείς διακρίνουν διάφορα επίπεδα ανάπτυξης της νοητικής εικόνας της συνάρτησης μέσω νοητικών διαδικασιών. Τα επίπεδα αυτά αντιστοιχούν στα διαφορετικά στάδια νοητικής ανάπτυξης της έννοιας σύμφωνα με την θεωρία APOS, δηλαδή τα στάδια των Ενεργειών, των Διαδικασιών και του Αντικειμένου. Θεωρούν επιπλέον δύο επίπεδα, ένα προκαταρκτικό των προενεργειών για τους μαθητές που βρίσκονται στα πρωταρχικά στάδια και ένα διαδικασιοεννοιολογικό επίπεδο για τους μαθητές που έχουν την ευελιξία μετάβασης μεταξύ αντικειμένου και διαδικασίας όποτε χρειαστεί. Οι δύο πτυχές της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να συνδυαστούν σε ένα διάγραμμα στο οποίο τα επίπεδα που αντιστοιχούν στο βάθος της έννοιας εκφράζονται από ομόκεντρους κύκλους, οι οποίοι διαχωρίζονται σε κυκλικούς τομείς που αναπαριστούν πλάτος της έννοιας που με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της, τις ονομαζόμενες όψεις (facets) της έννοιας.

3.4 Η θέση της συνάρτησης στο Α.Π.

Στις κατώτερες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι συναρτήσεις έχουν κυρίως ένα λειτουργικό χαρακτήρα και θεωρούνται ως μηχανές εισόδου-εξόδου που επεξεργάζονται τις εισερχόμενες σε αυτές τιμές για να εξάγουν το αποτέλεσμα. Στις υψηλότερες βαθμίδες οι συναρτήσεις έχουν πιο δομικά χαρακτηριστικά και αντιμετωπίζονται ως μαθηματικά αντικείμενα που αναπαριστώνται με διάφορους τρόπους που κατηγοριοποιούνται ως προς τις ιδιότητές τους και μπορεί να υποστούν διεργασίες ανώτερης τάξης όπως η παραγώγιση και η ολοκλήρωση. Η μετάβαση αυτή από την συνάρτηση ως μια υπολογιστική διαδικασία στη συνάρτηση-αντικείμενο είναι θεμελιώδης για την εννοιολογική κατανόηση του θέματος (Doorman et al., 2012), καθώς εξασφαλίζεται η ικανότητα χρήσης των συναρτήσεων σε διάφορα πλαίσια και σε διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (O'Shea, Breen, & Jaworski, 2016).

Στο θέμα των συναρτήσεων στο Δημοτικό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με κανονικότητες όπως γεωμετρικά μοτίβα αλλά και ακολουθίες αριθμών και διατυπώνουν λεκτικά το γενικό όρο μιας κανονικότητας. Ασχολούνται επίσης με το θέμα της συμμεταβολής μεγεθών από την καθημερινή ζωή και από τη γεωμετρία) και με προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Με προβλήματα αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών ασχολούνταν επίσης στην Α' Γυμνασίου (μέχρι το σχολικό έτος 2015-16), όπου γίνονταν και η εισαγωγή των συστημάτων συντεταγμένων και των γραφικών παραστάσεων (μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο). Η έννοια της συνάρτησης εισάγεται στην Β' τάξη ενώ στην ίδια τάξη γίνεται και η διδασκαλία των γραμμικών συναρτήσεων και της υπερβολής. Με την διδασκαλία των παραβολών στην τρίτη τάξη ολοκληρώνεται η ύλη του Γυμνασίου.

Στο επίπεδο του ορισμού η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, με βελοειδή διαγράμματα, με πίνακες, με αλγεβρική περιγραφή, σαν συνάρτηση μηχανή, σαν διατεταγμένα ζεύγη κλπ. Η πιο αδύναμη από όλες αυτές τις διαφορετικές προσεγγίσεις είναι αυτή των διατεταγμένων ζευγών (Eisenberg, 1991). Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός δεν ενδείκνυται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Sierpinska, 1992) και η πρακτική της διδασκαλίας των συναρτήσεων όσον αφορά στη χρήση του ορισμού θα πρέπει να διαχωρίζεται σε στάδια ανάλογα με την ηλικία (Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017). Στις πρώτες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι συναρτήσεις πρέπει να διδάσκονται και να διερευνώνται από μία κονστρουκτιβιστική προοπτική της προφορικής παρουσίασης των ακριβών εκφράσεων της νοητικής εικόνας της έννοιας και ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να επικεντρώνεται με επιμονή στην ακριβή χρήση της μαθηματικής γλώσσας, της μορφής και των συμβόλων. Στις ανώτερες βαθμίδες, ο ορισμός πρέπει να αποτελεί ένα τυπικό μέρος της νοητικής εικόνας που να χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την κατανόηση μιας αναπαράστασης, στην διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και στις αποδείξεις. Στα πρώτα στάδια της μάθησης της έννοιας θα πρέπει επίσης να υποστηρίζονται οι ικανότητες των μαθητών για την κατανόηση της συνάρτησης από μία ποσοτική σκοπιά διότι η θεμελίωση της έννοιας σε ποσότητες, σχέσεις και καταστάσεις με νόημα μπορεί τελικά να υποστηρίξει και την τελική μετάβαση στις περισσότερο φορμαλιστικές αλγεβρικές πρακτικές στο μέλλον (Ellis, 2011). Η διδασκαλία της συνάρτησης στο Γυμνάσιο και την δευτεροβάθμια εκπαίδευση γενικότερα αποτελεί ένα κρίσιμο παράγοντα για την εννοιολογική της κατανόηση από τον οποία εξαρτάται και η επιτυχία της διδασκαλίας της στο Πανεπιστήμιο, για αυτό και θα πρέπει να αναθεωρηθούν και οι αρχές της διδασκαλίας της (Thompson, 1994).

3.5 Συμμεταβολικός συλλογισμός

Ο συμμεταβολικός συλλογισμός αναφέρεται στις διανοητικές ικανότητες με τις οποίες συνδυάζονται και εξετάζονται από κοινού δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες για να βρεθεί με ποιον τρόπο μεταβάλλεται η μία σε σχέση με την άλλη (Carlson et al., 2002). Η έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής δύο μεγεθών, που αντανακλά και τις απαρχές της ιστορικής της ανάπτυξης, θα πρέπει να προηγείται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών σε σχέση με την δομική αντίληψη της έννοιας ως αντιστοιχίας (Thompson, 1994). Ο συμμεταβολικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από πέντε διανοητικές δράσεις οι οποίες αποτελούν μία πιο ακριβή προσέγγισή του, που υποδεικνύει την χρησιμότητά του στη δόμηση της έννοιας της συνάρτησης (Carlson, 2002).

Διανοητική δράση	**Περιγραφή της διανοητικής δράσης**
Διανοητική δράση 1	Συνδυάζοντας τις τιμές μίας μεταβλητής με τις αλλαγές της άλλης
Διανοητική δράση 2	Συνδυάζοντας την κατεύθυνση μεταβολής της μίας μεταβλητής με τις αλλαγές της άλλης
Διανοητική δράση 3	Συνδυάζοντας την ποσότητα μεταβολής της μίας μεταβλητής με τις αλλαγές της άλλη
Διανοητική δράση 4	Συνδυάζοντας τον μέσο ρυθμό μεταβολής της μίας μεταβλητής με τις αλλαγές της άλλη
Διανοητική δράση 5	Συνδυάζοντας τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της μίας μεταβλητής με τις αλλαγές της άλλη

Πίνακας 1. Οι διανοητικές δράσεις του συμμεταβολικού συλλογισμού (Carlson, 2002)

Το πλαίσιο αυτό είναι χρήσιμο στον σχεδιασμό των καταλλήλων διδακτικών δραστηριοτήτων για την προώθηση του συμμεταβολικού συλλογισμού των μαθητών. Ο διανοητικές δράσεις αυτού του πλαισίου επίσης αποτελούν ένα μέσο για την κατηγοριοποίηση των παρατηρούμενων συμπεριφορών των μαθητών που εμπλέκονται σε μία δραστηριότητα συμμεταβολής μεγεθών και για την κατηγοριοποίηση της ικανότητας των μαθητών στο θέμα. Ένας μαθητής που παρουσιάζει συμπεριφορές που αντιστοιχούν στην ΔΔ1 αναγνωρίζει ότι η τιμή μίας μεταβλητής y μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η τιμή της μεταβλητής x και αυτό προκύπτει από την παρατηρούμενη συμπεριφορά του της τιτλοδότησης π.χ. των αξόνων σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Όταν ένας μαθητής αναγνωρίζει την κατεύθυνση της μεταβολής και παρατηρεί ότι η τιμή της μεταβλητής y αυξάνεται όταν αυξάνει η τιμή της x στην περίπτωση π.χ. μίας αύξουσας συνάρτησης, δρα στο επίπεδο ΔΔ2 και η παρατηρούμενη συμπεριφορά του είναι ο σχηματισμός της νοητής εικόνας μίας γραμμής με αύξουσα συμπεριφορά. Στην περίπτωση των δράσεων στο επίπεδο ΔΔ3 ο μαθητής συνδυάζει τις σχετικές τιμές των μεταβολών των μεταβλητών x και y εστιάζοντας στο μέγεθος της μεταβολής του y όταν μεταβάλλει το x και μία παρατηρούμενη συμπεριφορά του είναι όταν π.χ. εκτιμά νοερά την κλίση ενός γραφήματος για μικρά διαστήματα του πεδίου ορισμού. Οι δύο άλλες δράσεις ΔΔ4 και ΔΔ5 βρίσκονται στο ανώτερο επίπεδο εστιάζοντας στον μέσο και στον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής y σε σχέση με την x και οι συμπεριφορές που τις εκφράζουν είναι ο σχεδιασμός μίας τεθλασμένης γραμμής αποτελούμενης από διαδοχικές τέμνουσες της γραφικής παράστασης για ίσες μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής (ΔΔ4) ή η κατασκευή μίας ομαλής γραμμής που εκφράζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης (ΔΔ5). Το πλαίσιο αυτό των πέντε διανοητικών δράσεων υπογραμμίζει επίσης την σημασία της μοντελοποίησης στην έννοια της συνάρτησης.

3.6 Γενετική αποδόμηση της συνάρτησης

Στο αρχικό στάδιο της προ-έννοιας η συνάρτηση, έτσι όπως γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές, έχει ελάχιστα χαρακτηριστικά της μαθηματικής έννοιας και ο μαθητής δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει ή να εκτελέσει διαδικασίες σε συγκεκριμένες συναρτήσεις. Η δημιουργία της έννοιας της συνάρτησης αρχίζει με πράξεις σε ένα σύνολο. Οι μαθητές εφαρμόζουν ένα κανόνα, συνήθως με την μορφή ενός αλγεβρικού τύπου σε ένα στοιχείο ενός συνόλου (συνήθως αριθμών) αντιστοιχώντας το σε ένα μόνο στοιχείο ενός δευτέρου συνόλου. Το στάδιο αυτό της ικανότητας χειρισμού και των υπολογισμών για την εύρεση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής από τον αλγεβρικό τύπο μιας συνάρτηση αποτελεί το στάδιο των Ενεργειών. Το στάδιο των ενεργειών αντιστοιχεί σε μία στατική αντίληψη της συνάρτησης καθώς το υποκείμενο περιορίζεται στον υπολογισμό μίας έκφρασης σε κάθε βήμα.

Ένα πιο δυναμικό σχήμα για την συνάρτηση περιλαμβάνει εσωτερίκευση αυτών των πράξεων η οποία ξεκινά όταν ο μαθητής αρχίσει να θεωρεί τη συνάρτηση ως κάποιον μετασχηματισμό που αντιστοιχεί τα στοιχεία ενός συνόλου, του πεδίου ορισμού, με τα στοιχεία ενός άλλου συνόλου, του πεδίου τιμών. Όταν αυτό επιτευχθεί ο μαθητής αποκτά την ικανότητα μετασχηματισμού του αντικειμένου καθώς μπορεί π.χ. να αντιληφθεί την ιδιότητα της 1-1 συνάρτησης ή να υπολογίσει την αντίστροφη μιας συνάρτησης. Πρόκειται για ένα σημαντικό βήμα στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης καθώς ο μαθητής την αντιλαμβάνεται πλέον ως μία Διαδικασία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία ενός είδους φαινομένων. Μία αντίληψη της συνάρτησης ως μία διαδικασία περιλαμβάνει έναν δυναμικό μετασχηματισμό ποσοτήτων κατά την οποία το υποκείμενο μπορεί να αντιληφθεί τον μετασχηματισμό αυτό σαν μία πλήρη δραστηριότητα που ξεκινά με αντικείμενα κάποιου τύπου, την επεξεργασία τους με κάποιο τρόπο ώστε τελικά να προκύψουν κάποια νέα αντικείμενα άλλου τύπο (Dubinsky, 1992).

Το στάδιο της ενοποίησης και ολοκλήρωσης της έννοιας είναι το στάδιο του Αντικειμένου κατά το οποίο το άτομο εστιάζει το ενδιαφέρον του από την έννοια της συνάρτησης ως ενός δυναμικού μετασχηματισμού σε μία στατική ολότητα επί της οποίας είναι σε θέση να εφαρμόζει μετασχηματισμούς. Ενδείξεις αυτής της φάσης μπορεί να είναι π.χ. η ικανότητα του ατόμου να δημιουργεί σύνολα συναρτήσεων ή να εκτελεί αριθμητικές πράξεις επί συναρτήσεων ή να κατασκευάζει μία συνάρτηση που είναι το όριο μία ακολουθίας συναρτήσεων. Και στις τρείς περιπτώσεις οι συναρτήσεις αποτελούν στατικά αντικείμενα επί των οποίων εφαρμόζονται διάφορες ενέργειες.

Κατά τον Dubinsky, (1991), «για τους περισσότερους μαθητές η ιδέα της συνάρτησης περιλαμβάνεται αποκλειστικά στον τύπο της», η έννοια όμως της συνάρτησης ως τύπος έχει μία ισχυρή στατική χροιά. Το σχήμα συνάρτηση-τύπος όμως περιορίζει την έννοια της συνάρτησης μόνο σ' αυτές που εκφράζονται από κάποιο τύπο, που όμως αν και στα στοιχειώδη μαθηματικά δεν δημιουργεί πρόβλημα, στα προχωρημένα μαθηματικά είναι ανεπαρκές. Στο σχήμα αυτό δεν υπεισέρχονται οι έννοιες των πεδίων ορισμού και τιμών της συνάρτησης και επιπλέον η γραφική παράσταση είναι για τον μαθητή κάτι ξεχωριστό από την έννοια της συνάρτησης. Οι Schwartz & Yerushalmy, (1992), θεωρούν ότι η συμβολική αναπαράσταση της συνάρτησης είναι πιο αποτελεσματική για να κάνει εμφανή την φύση της ως μία διαδικασία, καθώς με την αντικατάσταση στον τύπο και τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης, είναι πιο πιθανό να αντιληφθούν οι μαθητές την διαδικαστική της φύση, ενώ η γραφική αναπαράστασή της είναι σχετικά καλύτερη για την αντίληψή της σαν ένα αντικείμενο καθώς η γραφική παράσταση αποδίδει το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό της δηλαδή το σχήμα της.

Ενδείξεις ότι ένα άτομο έχει αρχίσει να δημιουργεί το νοητικό σχήμα της συνάρτησης μπορεί να είναι όταν αυτό είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται πότε μία σχέση αποτελεί μία συνάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών και είναι ικανό να εφαρμόζει διαδικασίες για να βρίσκει το πεδίο ορισμού και τιμών μίας συνάρτησης. Μία ένδειξη της συνεκτικότητας του σχήματος της συνάρτησης θα μπορούσε να είναι η ικανότητα του ατόμου να προσδιορίζει αν κάποια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση μπορεί εκφραστεί από μία συνάρτηση.

Κεφάλαιο 4

4.1 Έρευνα δράσης

Ως έρευνα δράσης γενικά ορίζεται μία συστηματική διερεύνηση η οποία βοηθά κάποιους στην εξεύρεση αποτελεσματικών λύσεων σε προβλήματα που αντιμετωπίζουν (Stringer, 2007). Η έρευνα δράσης, αντίθετα με την παραδοσιακή έρευνα στην οποία διερευνώνται γενικότερες επεξηγήσεις που εφαρμόζονται σε όλα τα πλαίσια, εστιάζεται σε συγκεκριμένα προβλήματα και βοηθά τους ασχολούμενους σε διάφορους τομείς να γίνουν αποτελεσματικότεροι στη δουλειά τους. Οι γενικευμένες λύσεις της επιστημονικής έρευνας πρέπει πολλές φορές να εξειδικεύονται σε τοπικό επίπεδο ή σε συγκεκριμένα πλαίσια ή ανθρώπινες ομάδες και αυτό αποτελεί αντικείμενο μίας έρευνας δράσης. Πλεονέκτημα μια έρευνας δράσης είναι ότι γενικά δεν απαιτούνται προχωρημένες στατιστικές μέθοδοι ανάλυσης για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων. Ο ερευνητής ενδιαφέρεται περισσότερα για τα αποτελέσματα στο συγκεκριμένο πλαίσιο της έρευνας και δεν τον απασχολεί η γενικότητα ή μη των αποτελεσμάτων.

Όσον αφορά στην εκπαίδευση ειδικότερα η έρευνα δράσης είναι μία συστηματική διερεύνησης από τον δάσκαλο-ερευνητή για μία εκπαιδευτική μεταρρύθμιση με την οποία συλλέγονται δεδομένα για την μάθηση των μαθητών με την εφαρμογή κάποιας καινοτομίας. Τα ερευνώμενα θέματα μπορεί να αναφέρονται σε σχέδια βελτίωσης της σχολικής μονάδας, στο πρόγραμμα σπουδών, στη διδακτική διαδικασία, σε ειδικά προγράμματα, στη συμμετοχή των γονέων κλπ. Ο ερευνητής χρησιμοποιώντας κατάλληλες παρεμβάσεις συλλέγει και αναλύει δεδομένα και στη συνέχεια εφαρμόζει δράσεις για το θέμα επιλογής του. Μία έρευνα δράσης στην εκπαίδευση έχει δύο κύριους στόχους. Ο κυριότερος από αυτούς είναι η βελτίωση της διδακτικής πρακτικής του εκπαιδευτικού με αποτέλεσμα τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών, Ο δεύτερος στόχος είναι η αναζήτηση μίας καλύτερης κατανόησης των καταστάσεων της εκπαιδευτικής διαδικασίας για την προαγωγή της γνώσης παιδαγωγικού περιεχομένου των δασκάλων (Shulman, 1987).

Με την διεξαγωγή μίας έρευνας δράσης αφενός μεν μειώνεται ο χρόνος που μεσολαβεί από την δημιουργία κάποιας νέας γνώσης έως την εφαρμογή της στην τάξη αφετέρου δε μπορεί να διεξάγεται από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς οι οποίοι έχουν και την εμπειρία της καθημερινής ενασχόλησης με τους μαθητές μέσα στην τάξη. Μπορεί επομένως να συμβάλει στην επαγγελματική ανάπτυξη των ίδιων των εκπαιδευτικών ενώ είναι συγχρόνως είναι μία έρευνα που δεν απαιτεί μεγάλα κόστη για την διεξαγωγή της.

Παρά τα πλεονεκτήματα όμως διατυπώνονται όμως και σημαντικές επιφυλάξεις για την χρήση της έρευνας δράσης ως ερευνητικής μεθόδου και στην εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της (Feldman & Minstrell, 2000). Τα αποτελέσματα μίας έρευνας δράσης είναι δύσκολο να αποτιμηθούν ενώ μπορεί αυτά να είναι και μεροληπτικά εφόσον η έρευνα διεξάγεται από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό. Στα αποτελέσματα μίας έρευνας δράσης περιλαμβάνονται η γνώση για τη διδασκαλία και τη μάθηση και καλύτερη κατανόηση της πρακτικής. Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να οδηγήσουν στην αλλαγή του εκπαιδευτικού τόσο στο περιεχόμενο της γνώσης του όσο και στη στάση του απέναντι στο επάγγελμά του.

Η έρευνα δράσης αποδίδεται στον Kurt Levin ο οποίος στα τέλη της δεκαετίας του ΄30 συνέλαβε την ιδέα μίας έρευνας με στόχο την κοινωνική αλλαγή. Βασίστηκε στην ανάληψη δράσης στα πλαίσια κάποιας προβληματικής κατάστασης, με στόχο τη συλλογή πληροφοριών για τις δράσεις, τις συνέπειές τους και την αποτίμησή τους. Είναι δηλαδή μία έρευνα η οποία επιδιώκει να λύσει κάποια προβλήματα μεταβάλλοντας τις συνθήκες στις οποίες αυτά υφίστανται και οι οποίες δεν θεωρούνται δεδομένες. Τις ιδέες αυτές ενστερνίστηκε ο Stephen Core του πανεπιστημίου Κολούμπια ο οποίος ενδιαφερόταν περισσότερο για την εφαρμογή της στην εκπαίδευση για την γνώση μέσω της έρευνας υποθέσεων και πρότεινε το παρακάτω μοντέλο έρευνας δράσης ((Corey,1953; in (Feldman, 1994):

1. Ο Προσδιορισμός κάποιας προβληματικής περιοχής επί της οποίας κάποιο άτομο ή κάποια ομάδα ατόμων επιδιώκουν να αναλάβουν κάποια δράση.
2. Η Επιλογή ενός συγκεκριμένου προβλήματος και η διατύπωση κάποιας υπόθεσης η οποία συνεπάγεται κάποιο στόχο και κάποια διαδικασία επίτευξής του.
3. Η προσεκτική καταγραφή των δράσεων που αναλαμβάνονται και η συλλογή αποδεικτικών στοιχείων για να προσδιοριστεί ο βαθμός επίτευξης του στόχου.
4. Η τεκμηρίωση από τα αποδεικτικά στοιχεία γενικεύσεων σχετικά με τις δράσεις που αναλήφθηκαν και τον επιδιωκόμενο στόχο.
5. Ο συνεχής επανέλεγχος των γενικεύσεων αυτών σε καταστάσεις δράσης

Αν και μία έρευνα δράσης δεν μπορεί να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις μίας παραδοσιακής έρευνας, υπάρχουν κάποιες τεχνικές δανεισμένες από την κοινωνική επιστήμη που βοηθούν στην εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της. Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων τον τριγωνισμό, την θεώρηση εναλλακτικών προοπτικών, τον έλεγχο μέσω της πρακτικής. Ο τριγωνισμός συνίσταται στην συλλογή δεδομένων τα οποία αντιπροσωπεύουν διαφορετικές απόψεις επί μίας κατάστασης. Ο δάσκαλος δηλαδή πέραν των δεδομένων που θα συγκεντρώσει ο ίδιος μπορεί να απευθυνθεί στους μαθητές ρωτώντας για τη δική τους προοπτική είτε με την μορφή συνεντεύξεων, είτε με την μορφή γραπτών κειμένων μέσα στην τάξη ή μπορεί να έχει κάποιον ή κάποιους παρατηρητές στην τάξη. Τα δεδομένα επίσης μπορεί να θεωρηθούν και από διαφορετικές προοπτικές, πέραν δηλαδή της δράσης αυτής καθ'αυτής μπορεί να γίνει έλεγχος για τυχόν άλλους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμά της. Οι δάσκαλοι έχουν νέες ιδέες γα την διδασκαλία ή αλλάζουν παλιότερες και τις εφαρμόζουν στην τάξη αποτιμώντας την αποτελεσματικότητά τους με διάφορες μορφές αξιολόγησης. Πέραν από τον έλεγχο της αποτελεσματικότητα των νέων ιδεών στη μάθηση, οι δάσκαλοι έχουν την δυνατότητα να αποτιμήσουν την δυνατότητα εφαρμογής των νέων ιδεών μέσω των πρακτικών προβλημάτων που είναι πιθανόν να ανακύψουν.

4.2 Ο διδακτικός μετασχηματισμός

Τα σχολικά μαθηματικά (στα προγράμματα σπουδών, στα βιβλία, στη διδασκαλία) είναι το αποτέλεσμα αλλαγών και προσαρμογών των μαθηματικών έξω από το σχολείο. Ο γάλλος ερευνητής Chevallard χρησιμοποιεί τον όρο *didactical transposition* για να χαρακτηρίσει την χαρακτηριστική αλλαγή που υφίστανται τα μαθηματικά που επιλέγονται για να εισαχθούν στο σχολείο και να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας. Ο όρος αυτός αποδίδεται ως: διδακτική μετάθεση, μετατόπιση, μετάπλαση, και μετασχηματισμός. Η γνώση δηλαδή που διδάσκονται στο σχολείο, οι συγκεκριμένες πρακτικές διαδικασίες και τα σώματα γνώσης των μαθηματικών που προτείνεται να διδαχθούν στο σχολείο προέρχονται από την αποκαλούμενη ακαδημαϊκή γνώση που παράγεται στα πανεπιστήμια και άλλα ακαδημαϊκά ιδρύματα. Όταν ένα σώμα γνώσης μετασχηματίζεται από το αρχικό του πεδίο στο σχολείο, ο μετασχηματισμός του θα πρέπει να συνοδεύεται από ιδιαίτερη εργασία και μελέτη για την δόμηση ενός καταλλήλου περιβάλλοντος που θα περιλαμβάνει δραστηριότητες τέτοιες που να στοχεύουν να καταστήσουν την γνώση αυτή διδακτέα, ουσιαστική και χρήσιμη (Chevallard & Bosch, 2014).

Ο μετασχηματισμός της γνώσης που διδάσκεται στο σχολείο υλοποιείται από διάφορους ερευνητές, σχεδιαστές προγραμμάτων κλπ οι οποίοι αποφασίζουν και αποτελούν τους μεσάζοντες μεταξύ του διδακτικού συστήματος και της κοινωνίας. Οι φορείς υλοποίησης του μετασχηματισμού αυτού φροντίζουν ώστε η διδακτέα γνώση να διατηρεί τα κύρια στοιχεία της αρχικής επιστημονικής γνώσης ώστε να θεωρείται αυθεντική. Ο μετασχηματισμός που πραγματοποιείται διακρίνεται σε εξωτερικό, από τα ακαδημαϊκά μαθηματικά στα σχολικά μαθηματικά δηλαδή στη γνώση για διδασκαλία και σε εσωτερικό από τα προγράμματα στην τάξη, στη γνώση δηλαδή που διδάσκεται. Τελικό αποτέλεσμα των μετασχηματισμών αυτών είναι η γνώση που τελικά αποκτά ο μαθητής κατά την διδασκαλία.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο προϋποθέτει την μελέτη των αλλαγών που υφίστανται οι γνώσεις για να γίνουν σχολικές και την κατανόηση των πτυχών εκείνων της γνώσης που παραλείφθηκαν και δεν θα διδαχθούν. Κατέστη επομένως αναγκαία η ανάπτυξη του πεδίου της διδακτικής των μαθηματικών ως ενός νέου πεδίου έρευνας με αντικείμενο την μελέτη αφενός μεν της μάθησης και της διδασκαλίας τους, αφετέρου δε και των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει η διαδικασία του μετασχηματισμού της αρχικής γνώσης. Η μελέτη αυτή υποδεικνύει ότι δεν πρέπει να ασχολούμαστε μόνο με αυτό που συμβαίνει μέσα στην τάξη, τη γνώση δηλαδή των δασκάλων και των μαθητών, το διαθέσιμο διδακτικό υλικό, τα λογισμικά κλπ, αλλά να θεωρούνται οι συνθήκες σε ευρύτερα επίπεδα αποφάσεων με τις οποίες προσδιορίζεται η διδακτέα γνώση, ο τρόπος που αυτή διαμοιράζεται και οργανώνεται σε διαφορετικές ενότητες, η διασύνδεση με άλλα πεδία (Bosch & Gascón, 2006).

4.3 Διδακτικά πειράματα

Οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών πειραματίζονται με διδασκαλίες και δοκιμάζουν σχεδιασμούς και διδακτικά περιβάλλοντα που βελτιώνουν τη μάθηση στην τάξη των μαθηματικών μελετώντας τα διδακτικά νοήματα που παράγονται σ' αυτήν. Οι ερευνητές ενδιαφέρονται για διδακτικές εφαρμογές, αντλώντας από ψυχολογικές και κοινωνικές αναλύσεις και η αναζήτησή στους πάνω στο ζήτημα αυτό οδηγεί σε ενδιαφέροντα διδακτικά πειράματα. Τα διδακτικά πειράματα ξεκίνησαν από τις Ηνωμένες Πολιτείες κατά την δεκαετία του '70. Οι μαθηματικές θεωρίες και τα μοντέλα που είχαν προταθεί μέχρι τότε για την γνώση των μαθητών ήταν μοντέλα δανεισμένα από άλλα πεδία όπως η γενετική επιστημολογία, η φιλοσοφία και η ψυχολογία και δεν λάμβαναν υπ' όψιν τους την πρόοδο του μαθητή που μπορούσε να προκύψει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης και της επικοινωνίας μέσα στην τάξη. Επιπλέον μέχρι τότε υπήρχε ένα χάσμα μεταξύ των πρακτικών της έρευνας και των πρακτικών της διδασκαλίας. Τα υποκείμενα της έρευνας υποβάλλονταν απλά σε κάποιου είδους «αγωγή» και μετρούνταν στη συνέχεια οι αποκρίσεις τους, χωρίς να δίνεται βάρος ούτε στην συμμετοχική τους δράση κατά την διάρκεια της διδασκαλίας, ούτε και στον τρόπο που αυτοί κατασκεύαζαν τα μαθηματικά νοήματα (Steffe & Thompson, 2000).

Ο Cobb, (2000), ανέπτυξε ένα ιδιαίτερο είδος διδακτικών πειραμάτων τα οποία διεξάγονται με την συνεργασία του εκπαιδευτικού ο οποίος συμμετέχει στην έρευνα και στην διεξαγωγή του πειράματος. Πειράματα αυτού του είδους μπορεί να είναι κυμαινόμενης διάρκειας από λίγες εβδομάδες έως ολόκληρη σχολική χρονιά και ένας από τους στόχους τους είναι η ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων. Τα πειράματα αυτά περιλαμβάνουν τρεις φάσεις: την προετοιμασία του πειράματος, τον πειραματισμό για την υποστήριξη της μάθησης και την εκ των υστέρων ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν κατά την διάρκεια του πειράματος (Cobb, 2000; Cobb & Gravemeijer, 2008). Κατά την φάση της προετοιμασίας διευκρινίζονται οι διδακτικοί στόχοι, τεκμηριώνονται τα σημεία εκκίνησης και καθορίζεται το ευρύτερο θεωρητικό του πλαίσιο του πειράματος και η μαθηματική θεωρία στην οποία αυτό στηρίζεται. Στην φάση αυτή καθορίζεται επίσης η τροχιά μάθησης που θα ακολουθήσει η διδασκαλία. Κάθε τροχιά μάθησης χαρακτηρίζεται από ένα μαθηματικό στόχο (συστάδες μαθηματικά και μαθησιακά θεμελιωδών εννοιών, δεξιοτήτων και ικανοτήτων), μία διαδρομή (επάλληλα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στην επίτευξη του στόχου) και ένα σύνολο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Κατά την φάση του πειραματισμού για την υποστήριξη της μάθησης ο ερευνητής ερμηνεύει την δράση των συμμετεχόντων και το περιβάλλον μάθησης στο οποίο αυτή λαμβάνει χώρα. Ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά των διδακτικών πειραμάτων είναι ότι ο ερευνητής κατανοεί καλύτερα το φαινόμενο που μελετά κατά την διάρκεια της διαδικασίας και γι αυτό είναι σημαντικό να κρατούνται αναλυτικά στοιχεία όσο αυτή εξελίσσεται. Συγκεντρώνονται επίσης δεδομένα πάσης φύσης που θα είναι χρήσιμα κατά την αναδρομική έρευνα του πειράματος και για την κοινοποίηση των αποτελεσμάτων του (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, & Schauble, 2003).

Στην τελική φάση της εκ των υστέρων ανάλυσης γίνεται η συζήτηση και ο σχολιασμός επί των αποτελεσμάτων του πειράματος. Η συζήτηση αυτή περιλαμβάνει στοιχεία για τον τρόπο που το πείραμα βοήθησε στην ανάπτυξη ιδιαίτερων μορφών συλλογισμού, πώς αυτές οι μορφές συλλογισμού εξελίχθηκαν από προηγούμενα στάδια και για τις πτυχές της οικολογίας της μάθησης που θεωρείται ότι συνέβαλαν αποφασιστικά στην ανάπτυξή τους (Cobb & Gravemeijer, 2008). Στην φάση αυτή τεκμηριώνεται ακόμη η εγκυρότητα της έρευνας παρέχοντας στοιχεία ότι η ανάλυση είναι συστηματική και περιλαμβάνει υποθέσεις εργασίας, τα κριτήρια των συμπερασμάτων είναι σαφή και τεκμηριωμένα από τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν κατά την διεξαγωγή του πειράματος.

Ο Cobb, (2000), υιοθετεί στα πειράματά του αυτό που ο ίδιος αποκαλεί αναδυόμενη προοπτική. Θεωρεί ότι η μάθηση χαρακτηρίζεται τόσο από διαδικασίες ενεργούς ατομικής δόμησης της γνώσης όσο και από διαδικασίες που σχετίζονται με την συμμετοχή του ατόμου σε κοινότητες πρακτικής όπως είναι η σχολική τάξη αποτελούμενη από τους μαθητές και τον δάσκαλο. Σύμφωνα με την αναδυόμενη προοπτική κανένας από τους δύο παράγοντες, δηλαδή η κονστρουκτιβιστική ατομική δραστηριότητα και οι κοινωνικές διαδικασίες στις οποίες συμμετέχει το άτομο στην τάξη, μπορεί να θεωρηθεί ότι μπορεί να ερμηνεύσει από μόνος του τη μάθηση καθώς οι δύο αυτοί παράγοντες συνδέονται με μία σχέση αμοιβαιότητας χωρίς να δίνεται προτεραιότητα σε κανέναν από τους δύο (Cobb, 1994).

Στόχος των διδακτικών πειραμάτων είναι η κατανόηση των διαδικασιών μάθησης των μαθητών και η διατύπωση μοντέλων της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών και των μετασχηματισμών της ως αποτέλεσμα των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων σε ένα περιβάλλον μάθησης (Steffe & Thompson, 2000). Το περιβάλλον της τάξης στην οποία συμμετέχουν οι μαθητές επηρεάζει σημαντικά τους στόχους που οι μαθητές προσπαθούν να επιτύχουν, τα πιστεύω τους για το τι συνιστά μία αποδεκτή μαθηματική εξήγηση και γενικότερα τις αντιλήψεις τους για το τι σημαίνει κάνω μαθηματικά στο σχολείο. Για τους λόγους αυτούς είναι σημαντικό στα διδακτικά πειράματα να διερευνάται το κλίμα και η μικροκουλτούρα της τάξης (Cobb, 2000).

Είναι σημαντική η καθημερινή παρουσία του ερευνητή και η συνεχής ανάλυση της ατομικής δραστηριότητας τω ν μαθητών αλλά και των κοινωνικών διαδικασιών της τάξης και μέσω των αναλύσεων αυτών η τροχιά μάθησης μπορεί να επανεξετάζεται και να επανασχεδιάζεται συνεχώς.

Ο Cobb στα πειράματά του υιοθετεί την θεωρία των ρεαλιστικών μαθηματικών. Η θεωρητική αυτή προσέγγιση αποδέχεται τη χρήση της πραγματικότητας ως πηγή μαθηματικοποίησης. Τα μαθηματικά για την θεωρία αυτή είναι μία δημιουργική δραστηριότητα μέσα σε ένα κοινωνικό περιβάλλον όπου μαθητές και δάσκαλοι αλληλεπιδρούν και συνεργάζονται και η διδασκαλία τους θα πρέπει να στηρίζεται στην διερευνητική δραστηριότητα των παιδιών στην προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα που τους προτείνονται ή δημιουργούν τα ίδια. Μία από τις βασικές αρχές είναι ότι το σημείο εκκίνησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων θα πρέπει να στηρίζονται σε πραγματικές καταστάσεις με νόημα για τους μαθητές είτε από την καθημερινή τους ζωή είτε από τον κόσμο των μαθηματικών. Οι καταστάσεις αυτές τους ενθαρρύνουν να κινηθούν από τις αυθόρμητες και άτυπες στις πιο τυπικές μαθηματικές κατασκευές, με την ανάπτυξη υψηλότερων επιπέδων αφαίρεσης, γενίκευσης και τυποποίησης. Αυτή η δραστηριότητα μοντελοποίησης μπορεί να περιλαμβάνει σχέδια, διαγράμματα πίνακες ή και άτυπες ή τυπικές μαθηματικές κατασκευές.

4.4 Η έρευνα σχεδιασμού

Μία ειδική κατηγορία έρευνας που αποτελεί ένα συγκερασμό της έρευνας δράσης και των διδακτικών πειραμάτων είναι η έρευνα σχεδιασμού (ΕΣ), Η «έρευνα σχεδιασμού» αποτελεί μία διαμορφωτική προσέγγιση στην έρευνα, κατά την οποία ο ερευνητής οραματίζεται ένα προϊόν ή μία διαδικασία (ή ένα «εργαλείο»), το σχεδιάζει, το αναπτύσσει και το ανασκευάζει μέσω κύκλων εφαρμογής, παρατήρησης, ανάλυσης και επανασχεδιασμού, με συστηματική ανατροφοδότηση από τους τελικούς χρήστες (Swan, 2014). Μπορεί να θεωρηθεί ως μια ερευνητική προσέγγιση στην οποία ο σχεδιασμός των εκπαιδευτικών υλικών είναι συνυφασμένη με την ανάπτυξη της θεωρίας (Van Eerde, 2013), η οποία κατέχει εξέχουσα θέση ως μία σημαντική μεθοδολογία στην ερευνητική κοινότητα της εκπαίδευσης των μαθηματικών (Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015). Μια ΕΣ αποτελεί μια εκτεταμένη διερεύνηση των εκπαιδευτικών αλληλεπιδράσεων που προκαλούνται από την χρήση μιας προσεκτικά σχεδιασμένης ακολουθίας καινοτόμων διδακτικών δραστηριοτήτων για την διδασκαλία ενός εννοιολογικού πεδίου (Confrey, 2006).

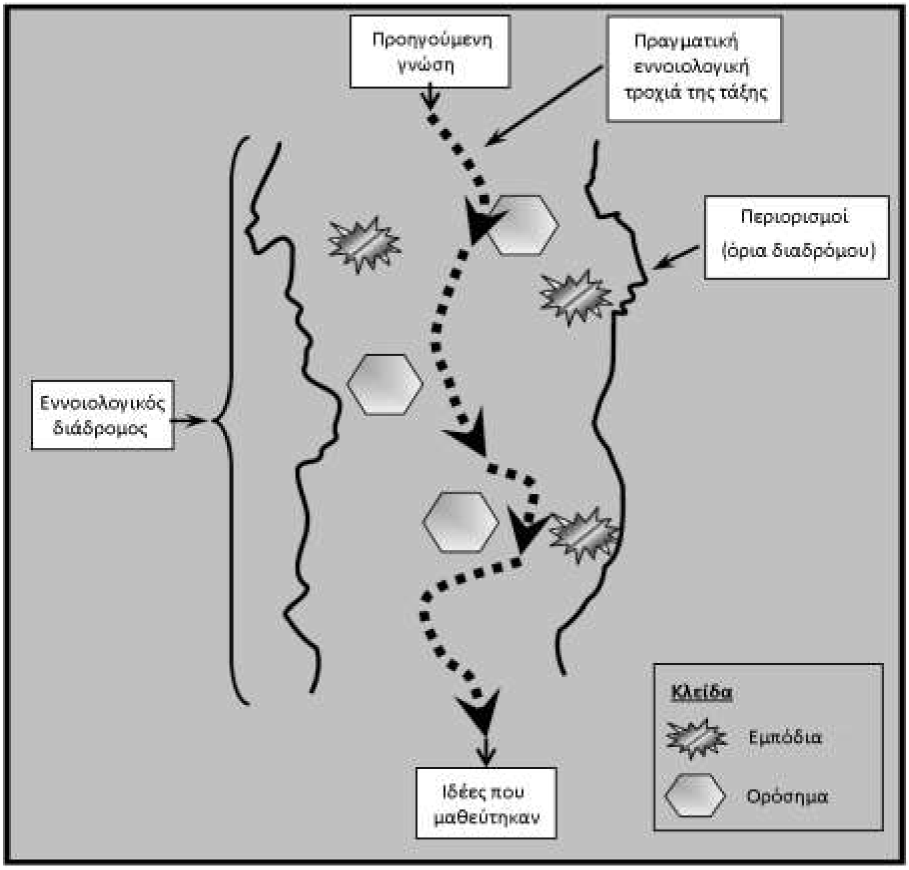
Η ΕΣ στοχεύει στην εκπαιδευτική καινοτομία μέσω του σχεδιασμού εργαλείων τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν και από άλλους, στην περιγραφή - επεξήγηση της λειτουργίας τους και στην διερεύνηση του εύρους εφαρμογής τους, καθώς επίσης και στην ανάπτυξη αρχών και θεωριών για μελλοντικούς σχεδιασμούς. Στα εργαλεία αυτά περιλαμβάνονται καινοτόμες μέθοδοι διδασκαλίας και εκπαιδευτικά υλικά που σχεδιάζονται και τελειοποιούνται με βάση τις αρχές της εκπαιδευτικής θεωρίας. Τελικά, ο στόχος είναι μετασχηματιστικός καθώς επιδιώκεται η δημιουργία νέων δυνατοτήτων για την διδασκαλία και τη μάθηση και η μελέτη των επιπτώσεων τους για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Οι ερευνητικές υποθέσεις διατυπώνονται προ της συλλογής δεδομένων, ωστόσο δοκιμάζονται συνεχώς και αναθεωρούνται κατά τη διάρκεια του πειράματος διδασκαλίας.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της έρευνας σχεδιασμού είναι ο κυκλικός της χαρακτήρας. Διακρίνονται μακρο- και μικρο-κύκλοι. Οι μακρο-κύκλοι αποτελούνται από τις τρεις φάσεις των διδακτικών πειραμάτων: σχεδιασμός, πείραμα διδασκαλίας και αναδρομική ανάλυση. Η αναδρομική ανάλυση παρέχει στοιχεία για ένα νέο μακρο-κύκλο που ξεκινά με τη φάση του σχεδιασμού και υλοποίηση ενός νέου κύκλου (Koeno Gravemeijer & Cobb, 2006).

Η υποθετική τροχιά μάθησης αποτελεί βασικό εργαλείο κατά τη διάρκεια κάθε φάσης της έρευνας σχεδιασμού, αν και έχει διαφορετικό ρόλο σε κάθε φάση. Η Υποθετική Τροχιά Μάθησης (ΥΤΜ) περιλαμβάνει: τα σημεία εκκίνησης, τους μαθησιακούς στόχους που καθορίζουν την κατεύθυνση, προβλήματα και δραστηριότητες διδασκαλίας, υποθέσεις για τον τρόπο σκέψης και την κατανόηση των μαθητών. Η ΥΤΜ έχει διαφορετικές λειτουργίες στα τρία στάδια της έρευνας σχεδιασμού. Είναι σχεδιασμένη κατά τη φάση προετοιμασίας ενώ κατά τη διάρκειά του πειράματος διδασκαλίας καθοδηγεί τον ερευνητή εστιάζοντας στα σημεία που θα πρέπει να επικεντρωθεί κατά την εκτέλεσή του (Van Eerde, 2013). Η ΥΤΜ αποτελεί τον στυλοβάτη μίας έρευνας σχεδιασμού καθώς παρέχει μία σταθερή κατεύθυνση δράσης ανεξάρτητα από τις όποιες προσαρμογές κριθούν απαραίτητες κατά την εκτέλεση του πειράματος λόγω απρόβλεπτων περιστάσεων. Στόχος κατά την δεύτερη φάση της εκτέλεσης του πειράματος δεν είναι να αποδειχθεί η ορθότητα της τροχιάς μάθησης που σχεδιάστηκε αρχικά, αλλά μάλλον η ανασκευή και βελτίωσή της μέσω της δοκιμής και αναθεώρησης των αρχικών υποθέσεων για την ΥΤΜ καθώς και τα διδακτικά εργαλεία που την υποστηρίζουν (Cobb & Gravemeijer, 2008).

Η κύρια συνεισφορά των ΕΣ είναι η διάρθρωση οδηγιών σε συγκεκριμένους τομείς που διαφωτίζουν εννοιολογικές τροχιές για την εκμάθηση του περιεχομένου (Confrey, 2006). Στόχος μίας ΕΣ είναι η διάρθρωση δύο συσχετιζόμενων εννοιών, ενός εννοιολογικού διαδρόμου και μίας εννοιολογικής τροχιάς. Ο εννοιολογικός διάδρομος είναι ένα θεωρητικό κατασκεύασμα που περιγράφει τον πιθανό χώρο που θα πρέπει να γίνει μία επιτυχής πλοήγηση για την εκμάθηση του εννοιολογικού περιεχομένου. Στον χώρο αυτό κατά την διάρκεια της ΕΣ η τάξη θα διαγράψει μία συγκεκριμένη τροχιά μάθησης, ενώ αντικείμενο της ΕΣ είναι η περιγραφή όλων των πιθανών τροχιών στα όρια του διαδρόμου.

Μία αποτελεσματική διδασκαλία εξαρτάται από το πόσο καλά έχει διαμορφωθεί ο εννοιολογικός διάδρομος ώστε η εννοιολογική τροχιά να είναι περισσότερο αποδοτική. Οι ΕΣ παρέχουν τα μέσα για την διαμόρφωση του εννοιολογικού διαδρόμου. Ο σχεδιασμός και η ακολουθία των δραστηριοτήτων και των εργασιών στην τάξη δημιουργούν τα όρια ή περιορισμούς του διαδρόμου. Σημαντική επίσης είναι η γνώση της προηγούμενης γνώσης των μαθητών που οριοθετεί και την πρόσβαση στον διάδρομο και την αρχή της εννοιολογικής τροχιάς. Η πρόβλεψη της απόκρισης των μαθητών η συμμετοχή τους σε διαμορφωτικές αξιολογήσεις δημιουργούν επίσης ένα σύνολο από ορόσημα που τους βοηθούν και καθοδηγούν την πορεία τους. Η επιτυχής πλοήγηση του εννοιολογικού διαδρόμου παρέχει στον μαθητή τη γνώση που θα του είναι απαραίτητη για την είσοδο και πλοήγηση στον επόμενο διάδρομο. Η διδασκαλία θα πρέπει να παρέχει στον μαθητή τα απαραίτητα όργανα πλοήγησης που είναι οι δραστηριότητες, τα προβλήματα, ο πλούτο αναπαραστάσεων, η πρακτική εξάσκηση, οι ευκαιρίες για συζήτηση και επιχειρηματολογία κλπ. Στην εικόνα 4 αναπαριστάται η σχέση μεταξύ του εννοιολογικού διαδρόμου και της εννοιολογικής τροχιάς.



Εικόνα 4. Ο στόχος μίας έρευνας σχεδιασμού (Πηγή: Confrey, 2006)

Η επιστημονική έρευνα σύμφωνα με το μοντέλο του Stokes, (1997), περιλαμβάνει τέσσερα τεταρτημόρια με δύο διαστάσεις στόχων (βλέπε εικόνα 5). Η έρευνα σχεδιασμού μπορούμε να πούμε ότι σύμφωνα με το μοντέλο του Stokes, (1997), για την επιστημονική έρευνα αντιστοιχεί στο τεταρτημόριο του Pasteur. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό το άνω αριστερό τεταρτημόριο συνιστά την βασική έρευνα με αποκλειστικό σκοπό την κατανόηση χωρίς να λαμβάνεται καθόλου υπόψη η πρακτική της χρήση. Το κάτω-δεξιό τεταρτημόριο συνιστά την έρευνα που εστιάζεται αποκλειστικά στην πρακτική χρήση χωρίς να υπάρχει ενδιαφέρον για την γενικότερη κατανόηση του εξεταζόμενου φαινομένου. Η ΕΣ επομένως μπορεί να έχει δύο προσεγγίσεις: η πρώτη στοχεύει κύρια στην άμεση πρακτική χρήση, ενώ η δεύτερη στη διατύπωση μίας θεωρίας για την διδασκαλία σε κάποιο θέμα. Αυτό αντικατοπτρίζεται και στα προϊόντα που αναμένονται από μία ΕΣ. Τα προϊόντα αυτά μπορεί να είναι αντίστοιχα διδακτικά εργαλεία και αρχές σχεδιασμού έτοιμα προς χρήση από τους χρήστες και τους σχεδιαστές προγραμμάτων σπουδών ή τοπικές θεωρίες και παραδείγματα για την πληροφόρηση των χρηστών και των ερευνητών (Prediger et al., 2015).

Εξέταση της χρήσης;

		Όχι	Ναι
Αναζήτηση της θεμελιώδους γνώσης;	Ναι	Καθαρά βασική έρευνα (Bohr)	Εμπνευσμένη από τη χρήση βασική έρευνα (Pasteur)
	Όχι		Καθαρά εφαρμοσμένη έρευνα (Edison)

Εικόνα 5. Οι στόχοι της επιστημονικής έρευνας (μοντέλο του Stokes)

Η έρευνα σχεδιασμού χρησιμοποιείται για την μελέτη της μάθησης σε περιβάλλοντα που σχεδιάζονται και συστηματικά μεταβάλλονται από τον ερευνητή. Στόχος της είναι να χρησιμοποιήσει την προσεκτική μελέτη του φαινομένου της μάθησης, καθώς αναπτύσσεται σε ένα φυσιολογικό πλαίσιο μέσα στην τάξη που περιλαμβάνει καινοτομίες εμπνευσμένες από την θεωρία, καθώς και εργαλεία και πρακτικές που μπορεί να γενικευθούν και σε άλλες τάξεις. Σύμφωνα με τους Cobb et al., (2003), «η ΕΣ περιλαμβάνει τόσο τον σχεδιασμό συγκεκριμένων μορφών μάθησης όσο και την συστηματική μελέτη αυτών των μορφών μάθησης εντός που πλαισίου που καθορίζεται από τα εργαλεία που το υποστηρίζουν. Το σχεδιασμένο αυτό πλαίσιο μάθησης υπόκειται σε συνεχείς ελέγχους και αναθεωρήσεις και οι διαδοχικές επαναλήψεις που προκύπτουν αντιστοιχούν στην συστηματική διακύμανση που παρατηρείται σε κάποιο πείραμα».

Οι επικριτές της ΕΣ αναφέρεται ότι αυτή δεν παρέχει εμπειρικά στοιχεία για στέρεα επιστημονικά συμπεράσματα αλλά στην καλύτερη περίπτωση μπορεί να προσφέρει διαμορφωτικές ιδέες που θα πρέπει όμως να ελεγχθούν σε αυστηρότερες πειραματικές συνθήκες. Κατά τον Barab, (2014) η ΕΣ δεν αποτελεί απλά ένα πρόδρομο μια πιο αυστηρής πειραματικής έρευνας αλλά τα εμπειρικά συμπεράσματα της είναι ισχυρά και μπορεί να είναι περισσότερο διαφωτιστικά και χρήσιμα λόγω της έμφασης που δίνεται από την ΕΣ στους παρατηρούμενους μηχανισμούς μάθησης και της διασύνδεσής της με τις συνθήκες στις οποίες οι μηχανισμοί αυτοί υλοποιούνται. Για τους ερευνητές της ΕΣ η ακαταστασία που παρατηρείται στις πραγματικές συνθήκες θα πρέπει να αναγνωρισθεί, να κατανοηθεί και να ενσωματωθεί στους θεωρητικούς ισχυρισμούς, έτσι ώστε αυτοί να έχουν επεξηγηματική αξία στον πραγματικό κόσμο. Ένα κύριο επιχείρημα υπέρ της ΕΣ είναι ότι η συμπερίληψη του πλαισίου διεξαγωγής της θα πρέπει να είναι ένα κύριο συστατικό της διαδικασίας επικύρωσής της θεωρίας που αναλαμβάνουν οι εμπειρικοί ερευνητές. Οι πειραματικές μελέτες μπορούν βέβαια να επικυρώσουν θεωρίες, απλά αναδεικνύοντας την σημαντικότητα μιας μεταβλητής η οποία όμως μπορεί να είναι λιγότερο αποτελεσματική από περιπτώσεις που αναφέρονται στον τρόπο που μια συγκεκριμένη μεταβλητή ή θεωρία εφαρμόζεται στην πρακτική του καθημερινού κόσμου.

Η ΕΣ μοιάζει με την έρευνα δράσης καθώς και οι δύο αφορούν σε έρευνα για προβλήματα του πραγματικού κόσμου και περιλαμβάνουν ενεργό εμπλοκή των επαγγελματιών που τις διεξάγουν. Η έρευνα δράσης επίσης όπως και η ΕΣ στοχεύει στην βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής και είναι κυκλική όσον αφορά στην διεξαγωγή της. Η ουσιώδης όμως διαφορά μεταξύ των δύο τύπων έρευνας είναι ότι στόχος της ΕΣ είναι η παραγωγή αρχών σχεδιασμού ενώ ο στόχος της έρευνας δράσης είναι πιο περιορισμένος, καθώς ο εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται απλά να αλλάξει την υπάρχουσα κατάσταση βελτιώνοντας την διδακτική του πρακτική (Plomp, 2013).

Η ΕΣ είναι (Prediger et al., 2015; Swan, 2014):

Δημιουργική και οραματική, καθώς τελικός της στόχος είναι η δημιουργία ενός αποτελεσματικού σχεδιασμού, η συμπερίληψη των αρχών και της θεωρίας που υποστηρίζουν τον σχεδιασμό και μία ανάλυση του εύρους λειτουργίας του σχεδιασμού αυτού σε ένα τυπικό δείγμα μαθητών και δασκάλων.
Οικολογικά έγκυρη, καθώς ο ερευνητής μελετά και ανασκευάζει τον σχεδιασμό στο αυθεντικό πλαίσιο της τάξης αποκλείοντας τον εκ των προτέρων χειρισμό συγκεκριμένων μεταβλητών. Είναι επομένως σημαντικό να διακρίνει τις πτυχές εκείνες του σχεδιασμού που μελετώνται από άλλες εξωγενείς.
Παρεμβατική και επαναληπτική, καθώς ο ρόλος του ερευνητή εξελίσσεται όσο προχωρά η έρευνα. Ο σχεδιασμός στα πρώτα στάδια είναι πιο πρόχειρος και σταδιακά καθίσταται περισσότερο λειτουργικός με την παρέμβαση του ερευνητή. Στις τελικές επαναλήψεις στόχος είναι η μελέτη της λειτουργίας του σχεδιασμού σε ένα μεγαλύτερο εύρος αυθεντικών πλαισίων με δασκάλους που δεν είχαν εμπλακεί μέχρι τότε στη διαδικασία. Αυτό ακριβώς είναι και το πλεονέκτημα της μεθόδου καθώς σε κάθε κύκλο της διαδικασίας το μέγεθος διευρύνεται και γίνεται περισσότερο τυπικό του μελετώμενου πληθυσμού. Τα θέματα που εν τω μεταξύ προκύπτουν μπορεί να μελετηθούν προσεκτικότερα σε μικρότερα δείγματα πληθυσμού.
Δημιουργός θεωριών, καθώς τα αποτελέσματά της περιλαμβάνουν θεωρίες για την μάθηση και για τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία. Ο ερευνητής μελετά τον τρόπο λειτουργίας του σχεδιασμού σε διαφορετικά πλαίσια και εστιάζεται στα πως και γιατί της λειτουργίας συγκεκριμένων χαρακτηριστικών του σχεδιασμού του. Η θεωρία είναι ταυτόχρονα εξειδικευμένη και παραγωγική καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθεί ο τρόπος λειτουργίας μελλοντικών σχεδιασμών με το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

4.5 Χρήση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία

Κατά την δεκαετία του 90, δεδομένης της συνεχιζόμενης ανάπτυξης της τεχνολογίας παρατηρήθηκε μία ανάπτυξη της έρευνας στην άλγεβρα για την χρήση δυναμικών περιβαλλόντων στη διδασκαλία και τη μάθηση που περιλαμβάνουν την διερεύνηση και την μοντελοποίηση φυσικών καταστάσεων με τεχνολογικά εργαλεία (Kieran, 2006). Προτάθηκε τότε η διδασκαλία της Άλγεβρας με εντατική χρήση υπολογιστών (Heid, 1996; Lynch, Fischer, & Green, 1989; O'Callaghan, 1998), ως μία εναλλακτική πρόταση διδασκαλίας σε σχέση με την παραδοσιακή άλγεβρα και ακόμη και σήμερα η χρήση της τεχνολογίας εξακολουθεί να αποτελεί ένα σημαντικό και ενδιαφέρον θέμα στην διδασκαλία των μαθηματικών (Warren et al., 2016).

Η χρήση των ψηφιακών διδακτικών εργαλείων στη μαθηματική εκπαίδευση βασίζεται σε ποικίλα θεωρητικά πλαίσια καθένα από τα οποία προσφέρει διαφορετικές θεωρητικές προοπτικές. Οι Michèle Artigue & Cerulli, (2008), συνοψίζοντας τη σχετική βιβλιογραφία αναφέρουν οκτώ κύριες θεωρίες στο θέμα που είναι: η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής, η εργαλειακή προσέγγιση, η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης, η κοινωνική σημειωτική, ο κοινωνικός εποικοδομισμός και ο κονστρακτιονισμός. Οι θεωρίες αυτές βασίζονται στην κονστρουκτιβιστική θεωρία του Piaget και στις κοινωνικοπολιτισμικές της προεκτάσεις από τον Vygotsky και τους επιγόνους του.

Η διδασκαλία της άλγεβρας με χρήση υπολογιστών που ξεκίνησε την δεκαετία του 90 με επίκεντρο στις συναρτήσεις, χαρακτηρίζεται από: α) την επίλυση προβλημάτων με βάση την μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, β) την έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και γ) την ευρεία χρήση της τεχνολογίας (O'Callaghan, 1998). Το πρόγραμμα αυτό σχεδιάζεται έτσι ώστε οι έννοιες να αναπτύσσονται σταδιακά και μέσω παραδειγμάτων και όχι μέσω των ορισμών και των εφαρμογών τους. Με την προσέγγιση αυτή οι μαθητές δεν αναμένεται να μάθουν κάθε διδασκόμενη έννοια και διαδικασία από την αρχή, αλλά αναπτύσσουν συνεχώς την κατανόησή τους μέσω της ενασχόλησή τους με μαθηματικά προβλήματα επί πραγματικών καταστάσεων. Μέσω της ενασχόλησης αυτής το πρόγραμμα στοχεύει οι μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητά τους να αιτιολογούν και να επιχειρηματολογούν επί των γραφικών, αριθμητικών και συμβολικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, αλλά και να είναι ικανοί να συνδυάζουν τις αναπαραστάσεις αυτές ως διαφορετικές όψεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου. Οι υποθέσεις αυτές βασίζονται στην άποψη ότι για την μάθηση είναι απαραίτητη ποικιλία παραδειγμάτων με πρακτική εξάσκηση που αναπτύσσεται σταδιακά στο χρόνο και με την ενεργό συμμετοχή του ατόμου για την κατασκευή της γνώσης μέσω των αλληλεπιδράσεών τους με το περιβάλλον.

Πέρα δηλαδή από τις αλλαγές στη μαθηματική θεματολογία και το περιεχόμενό της, στην διδασκαλία της άλγεβρας με εντατική χρήση υπολογιστών προτείνονται νέοι ρόλοι για τον μαθητή και για τον δάσκαλο μέσα σε ένα κονστρουκτιβιστικό περιβάλλον οικοδόμησης της γνώσης. Ενισχύεται η αυτομάθηση καθώς οι μαθητές αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες, συνεργάζονται μεταξύ τους, ανταλλάσσουν τις εμπειρίες τους και συζητούν τις σκέψεις τους. Οι δάσκαλοι οργανώνουν και καθοδηγούν τους γόνιμους διαλόγους στο περιβάλλον της τάξης, ενθαρρύνουν και ενισχύουν τους μαθητές και αναπτύσσουν νέες στρατηγικές για την μάθηση (O'Callaghan, 1998). Το πρόγραμμα σπουδών για την διδασκαλία της άλγεβρας με χρήση υπολογιστών δομείται με την άποψη ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες όταν τις χρησιμοποιούν σε καταστάσεις εφαρμογών ερχόμενοι παράλληλα σε επαφή με ένα πλούτο διαφορετικών αναπαραστάσεων των διδασκόμενων εννοιών (Heid, 1996). Παράλληλα η χρήση της τεχνολογίας και των υπολογιστών στην διδασκαλία έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να αφιερώνεται λιγότερος χρόνος στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και αντίστοιχα περισσότερος στην αλγεβρική σκέψη και στην εννοιολογική κατανόηση.

Τα περιβάλλοντα μάθησης με χρήση υπολογιστών έχουν ένα μοναδικό χαρακτηριστικό που είναι ο εγγενής γνωστικός τους χαρακτήρας, καθώς ο μαθητευόμενος χρήστης έχει άμεση αλληλεπίδραση και ανατροφοδότηση από τον υπολογιστή. Η αλληλεπίδραση βασίζεται σε μία συμβολική ερμηνεία και υπολογισμό αυτού που εισάγει ο μαθητευόμενος στον υπολογιστή και η ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος παρέχεται με μία κατάλληλη καταγραφή που επιτρέπει την ανάγνωσή της ως ένα μαθηματικό φαινόμενο (Balacheff & Kaput, 1996). Ο σχεδιασμός επίσης δραστηριοτήτων με χρήση υπολογιστών μπορεί να αποτελέσει μία σημαντική πηγή εμπειριών για την προαγωγή της στοχαστικής αφαίρεσης των μαθητών καθώς η εφαρμογή μίας διαδικασίας σε ένα υπολογιστή από τον μαθητή έχει σαν αποτέλεσμα την εσωτερικοποίηση αυτής της διαδικασίας. Στη συνέχεια η επεξεργασία της διαδικασίας αυτής, η οποία έχει εσωτερικοποιηθεί, με την εκτέλεση πράξεων σ’ αυτή σαν να ήταν ένα αντικείμενο, μπορεί να οδηγήσει στην ενσωμάτωσή της (Dubinsky, 1991).

Η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για την διδασκαλία της συμμεταβολής μεγεθών που υπεισέρχεται στο θέμα των συναρτήσεων. Με την χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας ο χρήστης μπορεί να συνειδητοποιήσει την συμμεταβολή μεγεθών μετακινώντας σημεία πάνω στην οθόνη του υπολογιστή και παρατηρώντας την σχετική αναπαράσταση των αντίστοιχων μεταβλητών. Τα λογισμικά αυτά δηλαδή περιλαμβάνουν την ιδέα της μεταβολής και της συναρτησιακής εξάρτησης. Ακόμη προσφέρουν ένα δυναμικό περιβάλλον που ενσωματώνει τον σημασιολογικό τομέα του χώρου και του χρόνου στον οποίο μπορεί να εδρασθεί η έννοια της συνάρτησης αποτελώντας εργαλεία σημασιολογικής διαμεσολάβησης σύμφωνα με την προοπτική του Vygotsky (Mariotti, Laborde, & Falcade, 2003).

Παρά τα πλεονεκτήματά τους η εισαγωγή των υπολογιστών στα σχολεία είναι αργή και η ενσωμάτωσή τους στη διδακτική πρακτική ακόμη πιο αργή. Η ενσωμάτωσή τους απαιτεί μία ριζική αλλαγή των διδακτικών στόχων και δραστηριοτήτων και της διδακτικής πρακτικής γενικότερα. Η συνειδητή χρήση των υπολογιστών ως εργαλείων για την σημειωτική διαμεσολάβηση της μάθησης απαιτεί ένα προσεκτικό σχεδιασμό των διδακτικών δραστηριοτήτων με βαθειά γνώση τόσο του εργαλείου όσο και της διδακτικής διαδικασίας (Mariotti, 2002). Οι δάσκαλοι αποτελούν τον κύριο παράγοντα για την εισαγωγή της τεχνολογίας στη διδασκαλία και ανασταλτικοί παράγοντες στο θέμα αυτό μπορεί να είναι από τη μία οι αντιλήψεις τους για τη φύση των μαθηματικών και από την άλλη η κατανόηση εκ μέρους τους των αρχών και των απαιτούμενων τεχνικών για την διδασκαλία με χρήση τεχνολογικών εργαλείων.

4.6 Μοντελοποίηση – διαθεματικότητα

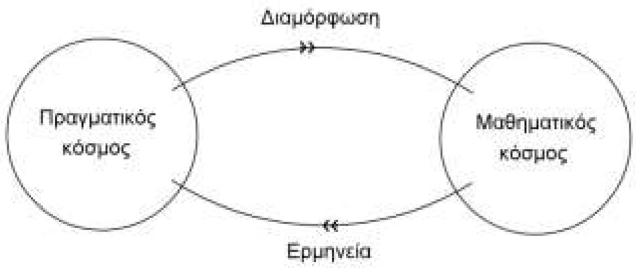
Η έννοια της συνάρτησης δεν εμφανίστηκε τυχαία στην ιστορία των Μαθηματικών. Επινοήθηκε ως ένα χρήσιμο εργαλείο για την ποσοτική ανάλυση φυσικών φαινομένων αρχικά από τους Γαλιλαίο και Κέπλερ και αργότερα η περαιτέρω ανάπτυξή της έγινε δυνατή χάρις στον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό που έφερε ο Viete και την αναλυτική γεωμετρία που εισήγαγαν ο Descartes και ο Fermat. Την εποχή εκείνη τα μαθηματικά ως επιστημονικός κλάδος ήταν στενά συνυφασμένα με τις γειτονικές τους επιστήμες φυσική, αστρονομία και μηχανική και ο Νεύτωνας, που θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς ήταν επίσης επιφανής φυσικός, ενώ και άλλοι μαθηματικοί όπως οι Bernouli, Euler, Langrange και Fourier ασχολήθηκαν επίσης με φυσικά προβλήματα. Έτσι μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα τα μαθηματικά θεωρούνταν σε μεγάλο βαθμό ως φυσική επιστήμη που περιελάμβανε πολλές εφαρμογές και δραστηριότητες μοντελοποίησης (Niss, Blum, & Galbraith, 2007).

Ο Kaput, (1989), έχει περιγράψει τέσσερις πηγές για την δημιουργία νοήματος στα μαθηματικά τις οποίες κατατάσσει σε δύο συμπληρωματικές κατηγορίες που είναι η αναφορική επέκταση και η ενοποίηση. Η αναφορική επέκταση, περιλαμβάνει τις μεταφράσεις μεταξύ μαθηματικών συστημάτων αναπαράστασης και μεταφράσεις μεταξύ μαθηματικών και μη-μαθηματικών συστημάτων. Η ενοποίηση περιλαμβάνει την μελέτη κανονικοτήτων και της συντακτικής δομής μέσω των μετασχηματισμών και των πράξεων εντός ενός αναπαραστατικού συστήματος και την οικοδόμηση εννοιολογικών οντοτήτων μέσω της πραγμάτωσης των ενεργειών, των διαδικασιών και των εννοιών σε εννοιολογικά αντικείμενα τα οποία μπορεί να αποτελέσουν την βάση για νέες δράσεις, διαδικασίες και έννοιες σε ένα ανώτερο επίπεδο. Η τελευταία κατηγορία της ενοποίησης είναι ανάλογη άλλων θεωριών που περιλαμβάνουν την διάκριση μεταξύ διαδικασιών-αντικειμένου σε σχέση με την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος (Dubinsky, 1991; E. M. Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991).

Ο O'Callaghan, (1998), στηριζόμενος στη θεωρία του Kaput ανέπτυξε ένα εννοιολογικό μοντέλο για να περιγράψει την κατανόηση των συναρτήσεων με βάση την επίλυση προβλήματος και την μοντελοποίηση. Το μοντέλο αυτό δεν είναι ένα μοντέλο διαδικασιών, που περιγράφει δηλαδή τι πράττει κάποιος μαθητής για να κατανοήσει τις συναρτήσεις, αλλά περιγράφει τα επιμέρους χαρακτηριστικά της εννοιολογικής γνώσης των συναρτήσεων που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος. Οι τέσσερις ικανότητες του μοντέλο είναι: της μοντελοποίησης, της ερμηνείας, της μετάφρασης και της πραγμάτωσης.

- Η **μοντελοποίηση** αναφέρεται στην ικανότητα του μετασχηματισμού ενός προβλήματος σε μία μαθηματική αναπαράστασή του με την βοήθεια μίας συνάρτησης.
- Η **ερμηνεία**, που αποτελεί την αντίστροφη διαδικασία και αναφέρεται στην κατανόηση και επεξήγηση όλων των τύπων αναπαράστασης των συναρτήσεων.
- Η **μετάφραση**, που αναφέρεται στην ικανότητα μετασχηματισμού και μετάβασης μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης των συναρτήσεων.
- Η **πραγμάτωση**, που αποτελεί την τελική φάση κατά την οποία αυτό που αποτελούσε πριν μία διαδικασία γίνεται πλέον αντιληπτό ως ένα ενιαίο νοητό αντικείμενο. Η πραγμάτωση είναι το πιο αποφασιστικό βήμα στην κατανόηση των συναρτήσεων κατά την οποία μέσω της στοχαστικής αφαίρεση του Piaget επιτυγχάνεται ο τελικός στόχος της διδασκαλίας και της μάθησης που είναι η δημιουργία του σχήματος της συνάρτησης.

Τα μαθηματικά αν και δεν είναι σήμερα τόσο στενά συνδεδεμένα με τις φυσικές επιστήμες όπως στο παρελθόν παρέχουν εργαλεία τόσο σ΄αυτές όσο και σε άλλες επιστήμες, με τα οποία ο ερευνητής μπορεί να μελετήσει φαινόμενα και καταστάσεις, να τα περιγράψει, να τα εξηγήσει να τα ελέγξει και να προβλέψει την συμπεριφορά τους. Ο όρος μοντελοποίηση αναφέρεται σε μία μαθηματική αναπαράσταση ενός μη μαθηματικού αντικειμένου ή διαδικασίας και το μαθηματικό εργαλείο που υποστηρίζει τις εφαρμογές αυτές είναι το μαθηματικό μοντέλο. Ένα μαθηματικό μοντέλο (βλέπε εικόνα 6), αποτελεί μία αναπαράσταση με την βοήθεια μεταβλητών και μαθηματικών σχέσεων, ενός φυσικού συστήματος λαμβανομένων υπόψη των βασικότερων χαρακτηριστικών του.



Εικόνα 6. Η σχηματική αναπαράσταση ενός μαθηματικού μοντέλου

Τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου του αριστερού κύκλου, τα οποία είναι προς επίλυση, διαμορφώνονται και παίρνουν μαθηματική μορφή μέσω της εισαγωγής μεταβλητών και υποθέσεων για τους νόμους που συνδέουν τις μεταβλητές αυτές. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται το μαθηματικό μοντέλο το οποίο βρίσκεται στον κύκλο στα δεξιά του σχήματος. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο αυτό λύνεται το αρχικό μαθηματικό πρόβλημα και οι λύσεις του ανάγονται και ερμηνεύονται στο αρχικό πλαίσιο. Ο κύκλος αυτός μπορεί να επαναληφθεί με την δημιουργία ενός πιο πολύπλοκου και εξελιγμένου μοντέλου στην περίπτωση που το αρχικό αποδειχθεί ανεπαρκές. Στόχος της διαδικασίας αυτής είναι να βρεθεί η ιδανική ισορροπία μεταξύ της πολυπλοκότητας του μοντέλου, ώστε αυτό να είναι όσον το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερο του πραγματικού προβλήματος και της ικανότητας χειρισμού των μαθηματικών σχέσεων του μοντέλου (Burghes, 1980).

Η διαδικασία αυτή εξειδικεύεται ακόμη περισσότερο στην επίλυση ενός προβλήματος μοντελοποίησης από μαθητές οι οποίοι θα πρέπει να ακολουθούν τις εξής διαδικασίες (α) Κατανόηση και απλοποίηση του προβλήματος, κατά την οποία οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές τους γνώσεις για τις σχετικές έννοιες, κατανοούν όλα τα επιμέρους στοιχεία του αρχικού προβλήματος. (β) Χειρισμός του προβλήματος και διαμόρφωση ενός μαθηματικού μοντέλου, κατά την οποία προσδιορίζονται οι μεταβλητές και οι σχέσεις τους στο πρόβλημα και με την χρήση καταλλήλων στρατηγικών και τεχνικών προκύπτει το μαθηματικό μοντέλο. (γ) Η ερμηνεία της λύσης του προβλήματος οπότε ανάλογα με την φύση του προβλήματος, λαμβάνονται αποφάσεις, αναλύεται ή σχεδιάζεται ένα σύστημα ώστε να πληρούνται συγκεκριμένοι στόχοι ή γίνεται μία διάγνωση και προτείνεται μία λύση. (δ) Επαλήθευση, επικύρωση και αναλογισμός της λύσης, που περιλαμβάνει την δημιουργία ποικίλων τρόπων αναπαράστασης της λύσης, την γενίκευσή της, την εκτίμησή της από διαφορετικές προοπτικές ώστε αυτή να καταστεί περισσότερο αποδεκτή ο αναλογισμός της και γενικά η διερεύνηση του μοντέλου (Mousoulides, 2009).

Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει επίσης και μία νοητική αναπαράσταση του μοντέλου με μία διαδικασία η οποία είναι σε κάποιο βαθμό ανάλογη αυτής της δημιουργίας του μαθηματικού μοντέλου σε ένα άλλο επίπεδο. Η μοντελοποίηση ενός συστήματος ή μιας κατάστασης είναι φυσική και προκύπτει το μαθηματικό μοντέλο, η νοητική αναπαράσταση όμως αποτελεί την αναπαράσταση μιας μαθηματικής δομής και το μοντέλο που προκύπτει είναι μία νοητική δομή. Το φυσικό και το νοητικό μοντέλο αναπαράστασής του συσχετίζονται και το καθένα αντανακλά σε κάποιες από τις ιδιότητες του άλλου, προάγοντας την ικανότητα του υποκειμένου στον νοητικό χειρισμού του μελετώμενου συστήματος (Dreyfus 1991).

Η επίλυση προβλήματος και οι εφαρμογές μοντελοποίησης αποτελούν ένα σημαντικό θέμα στη μαθηματική εκπαίδευση όπως προκύπτει από την βιβλιογραφία και από πληθώρα εθνικών και διεθνών επιστημονικών συνεδρίων στο θέμα αυτό. Διάφορα καινοτόμα προγράμματα έχουν αξιολογήσει θετικά τη χρήση καταστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση (ρεαλιστικά μαθηματικά, διδακτική μηχανική κ.α.) στηριζόμενα στην άποψη ότι με τη χρήση καταστάσεων ενισχύεται η σχέση των μαθηματικών με την προηγούμενη γνώση των μαθητών, τις εμπειρίες τους και τις μελλοντικές εφαρμογές των μαθηματικών σε άλλα πλαίσια. Ωστόσο, η αξία της μοντελοποίησης πάει παραπέρα καλώντας τους μαθητές να εισέλθουν πιο αποτελεσματικά στα μαθηματικά και προετοιμάζοντάς τους στον σχεδιασμό συνδέσεων πέρα από το πεδίο των μαθηματικών (Confrey, 2007). Η μοντελοποίηση δηλαδή στο σχολείο έχει δύο ταυτόχρονους στόχους που είναι από την μία η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος και από την άλλη η ανάπτυξη στο χρόνο ικανοτήτων μοντελοποίησης που τους ενδυναμώνουν στην περιγραφή και επίλυση προβλημάτων στην προσωπική και κοινωνική τους ζωή (Stillman, 2015). Για τους λόγους αυτούς η συμπερίληψή τους στη διδασκαλία των μαθηματικών θωρείται ως θετικό στοιχείο και όπως προκύπτει από την βιβλιογραφία έχουν προταθεί στο θέμα αυτό από τους (Blum & Niss, 1991) πέντε βασικά επιχειρήματα.

Το **διαμορφωτικό επιχείρημα** το οποίο δίνει έμφαση στη χρήση της επίλυσης προβλήματος και της μοντελοποίησης ως εργαλείων για την ανάπτυξη της επάρκειας των μαθητών στην προαγωγή των συνολικών ικανοτήτων τους όπως είναι οι στάσεις, οι στρατηγικές και οι τεχνικές που αναπτύσσουν, καθώς και η εμπιστοσύνη στον εαυτό τους και στις δυνάμεις τους.

Το επιχείρημα της **κριτικής ικανότητας** το οποίο εστιάζει στην προετοιμασία των μαθητών για την μελλοντική τους δράση ως πολιτών, οι οποίοι θα έχουν ανεπτυγμένη κρίση και θα είναι ικανοί να κρίνουν, να αναλύουν, να κατανοούν και να αξιολογούν τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην επίλυση κοινωνικών προβλημάτων.

Το επιχείρημα της **χρησιμότητας**, που στηρίζεται στην άποψη ότι οι μαθητές θα πρέπει να προετοιμάζονται στη χρήση των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων στον έξω κόσμο καθώς η ικανότητα αυτή δεν προκύπτει αυτόματα αλλά χρειάζεται εξάσκηση και προετοιμασία στο σχολείο.

Το επιχείρημα της **εικόνας των μαθηματικών** βάσει του οποίου οι μαθητές θα πρέπει να διαμορφώσουν μία πλούσια και συνεκτική εικόνα των μαθηματικών με όλες τις πτυχές τους, σαν επιστήμη, σαν ένα πεδίο δράσης στην κοινωνία και σαν πολιτιστικό εργαλείο.

Το επιχείρημα της **προώθησης της μαθηματικής γνώσης**, που δίνει έμφαση στην βοήθεια που παρέχεται στους μαθητές στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσω της παροχής κινήτρων στην ενασχόληση σχετικών μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Οι δραστηριότητες δημιουργίας μοντέλων, όπως υποδηλώνει το όνομά τους, είναι δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων που παράγουν ένα μοντέλο Για να είναι οι δραστηριότητες αυτές χρήσιμες και να παρέχουν πληροφορίες που βοηθούν τον δάσκαλο στο σχεδιασμό του μαθήματός του και τους ερευνητές στην μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών, θα πρέπει οι μαθητές που εργάζονται σ’ αυτές να αποκαλύπτουν με ακρίβεια την ανάπτυξη των νοητικών κατασκευών τους που είναι σημαντικά από μαθηματική άποψη και με πρακτική εφαρμογή ταυτόχρονα. Στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές θα πρέπει να εκφράσουν την λύση τους σε κάποιο πρόβλημα με την μορφή μοντέλων που ελέγχονται και διορθώνονται πολλές φορές. Έτσι, οι τελικές λύσεις δεν αφορούν μόνο στο τελικό μοντέλο αλλά και στη διαδικασία δημιουργίας τους με την ανάλογη ανάπτυξη των νοητικών κατασκευών και των εννοιολογικών συστημάτων που ενσωματώνουν τα μοντέλα. Έχουν προταθεί έξι βασικές αρχές για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων δημιουργίας μοντέλων (Lesh et al., 2000), που είναι

- Η **αρχή της πραγματικότητας**, καθώς οι μαθητές θα πρέπει να εμπλέκονται σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος στις οποίες αναγνωρίζουν ότι πρέπει να ανασκευάζουν ή να βελτιώσουν τον τρόπο σκέψης τους για μία κατάσταση την οποία θα πρέπει να κατανοήσουν με βάση τις επεκτάσεις των προσωπικών τους γνώσεων και εμπειριών.
- Η **αρχή της κατασκευής του μοντέλου**, καθώς στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές θα πρέπει να αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης τους μέσω της συμβολικής περιγραφής των σημαντικών καταστάσεων δηλαδή της μαθηματικοποίησης και να καταλήξουν στη δημιουργία ενός μοντέλου για την επίλυση του προβλήματος.
- Η **αρχή της αυτοαξιολόγησης** του μοντέλου καθώς οι ίδιοι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίζουν αν το μοντέλο στο οποίο κατέληξαν είναι σημαντικό και χρήσιμο γα το πρόβλημά τους ή αν αυτό θα πρέπει αυτό να βελτιωθεί περαιτέρω.
- Η **αρχή της τεκμηρίωσης κατασκευής** καθώς οι ίδιοι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να τεκμηριώσουν και να περιγράψουν τη λειτουργία του μοντέλου τους κατά την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.
- Η **αρχή της δυνατότητας διαμοίρασης και επαναχρησιμοποίησης** του μοντέλου, καθώς το μοντέλο δεν θα πρέπει να είναι χρήσιμο μόνο στον κατασκευαστή του στο πλαίσιο μόνο του συγκεκριμένου προβλήματος αλλά αυτό θα πρέπει να παρέχει ένα τρόπο σκέψης που μοιράζεται, μεταφέρεται, τροποποιείται εύκολα και μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί σε παρόμοιες καταστάσεις.
- Η **αρχή της αποτελεσματικότητας και της πρωτοτυπίας** του μοντέλου, καθώς αυτό θα πρέπει να είναι απλό και αποτελεσματικό ταυτόχρονα και να αποτελεί ένα χρήσιμο πρότυπο για την ερμηνεία και άλλων σχετικών καταστάσεων, το οποίο θα είναι δυνατόν να ανακληθεί για χρήση στο μέλλον.

Όταν πληρούνται οι αρχές αυτές και το μοντέλο σχετίζεται με μαθηματικά σημαντικές έννοιες, τότε η ανάπτυξη του μοντέλου περιλαμβάνει σημαντικές μορφές ανάπτυξης των εννοιών και αυτό επιτυγχάνεται ακόμη και από μέσους μαθητές ή και μαθητές με χαμηλότερη επίδοση (Richard Lesh & Yoon, 2007). Όμως, αν και η αξία της μοντελοποίησης έχει αναγνωρισθεί από πολλούς ερευνητές και στις μέρες η μοντελοποίηση παίζει έναν πολύ σημαντικότερο ρόλο στις τάξεις σε σχέση με το παρελθόν, εξακολουθεί να υπάρχει ένα σημαντικό κενό μεταξύ των ιδεωδών της διδακτικής και των καινοτόμων προγραμμάτων από την μία και της καθημερινής διδακτικής πρακτικής από την άλλη, καθώς οι δραστηριότητες της μοντελοποίησης δεν είναι πολύ συχνές στις μαθηματικές τάξεις (Blum, 2002),

Κεφάλαιο 5

5.1 Το σκεπτικό της έρευνας

Τα σχολικά μαθηματικά για μεγάλο διάστημα εστιάζουν στους αλγεβρικούς χειρισμούς, η ικανότητα όμως των μαθητών στη διαχείριση μαθηματικών εκφράσεων και πράξεων δεν είναι αρκετά για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία για πρακτική εξάσκηση και αναστοχασμό επιλύοντας σημαντικά προβλήματα (Ponte, 1992). Στο θέμα αυτό πολύ σημαντικός μπορεί να αναδειχθεί ο ρόλος της τεχνολογίας. Η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει στην αποφυγή τετριμμένων και χρονοβόρων μαθηματικών χειρισμών και πράξεων και στην επικέντρωση σε πιο σημαντικές πτυχές της μαθηματικής δημιουργίας και μάθησης, όπως είναι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η επινόηση και επεξεργασία καταλλήλων στρατηγικών στην επίλυση προβλημάτων.

Για την διαδικαστική προσέγγιση στο θέμα των συναρτήσεων, μία συνάρτηση μετατρέπει μία εισερχόμενη ποσότητα σε εξερχόμενη και για την περίπτωση της σχολικής άλγεβρας και οι δύο αυτές ποσότητες είναι πραγματικοί αριθμοί. Οι μαθητές υπολογίζουν τιμές συναρτήσεων και απεικονίζουν τα σημεία που προκύπτουν σε γραφήματα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές σταδιακά προχωρούν στην εμπέδωση της έννοιας της συνάρτησης ως αντικείμενο οπότε και είναι σε θέση να σκέπτονται ολιστικά για την έννοια και να μην περιορίζονται στις τιμές που υπολογίζουν για συγκεκριμένους αριθμούς. Η συνάρτηση αποκτά με τον τρόπο αυτό ιδιότητες οι οποίες επιτρέπουν στον μαθητή να την συγκρίνει με άλλες συναρτήσεις με διάφορους τρόπους. Καθώς αναπτύσσεται η έννοια της συνάρτησης – αντικείμενο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις γενικές ιδιότητες οικογενειών συναρτήσεων και με τον τρόπο αυτό αποκτούν επίγνωση συναρτησιακής συμπεριφοράς σε πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Η μετάβαση αυτή από τις συναρτήσεις διαδικασίες στις συναρτήσεις αντικείμενα παρατηρείται και στην ιστορική εξέλιξη των συναρτήσεων. Αρχικά η έννοια της συνάρτησης ήταν στενά συνδεδεμένη με τον μαθηματικό της τύπο και στον τρόπο που μεταβάλλονταν η εξαρτημένη μεταβλητή από τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Σταδιακά όμως η ιδέα της συνάρτησης επεκτάθηκε καθώς υποβαθμίστηκε η αντίληψή της απλά ως κανόνα υπολογισμού (διαδικασία) και σήμερα η συνάρτηση δεν είναι παρά ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών (αντικείμενο).

Η διδασκαλία των συναρτήσεων δεν είναι απλά ένα θέμα για το οποίο ξεκινά κανείς από την διαδικαστική του προοπτική (υπολογισμοί τιμών και δημιουργία γραφικών παραστάσεων) και στη συνέχεια αποκτά και την προοπτική της συνάρτησης-αντικείμενο που είναι προτιμότερη. Ένα σημαντικό στοιχείο για την ανάπτυξη ικανοτήτων είναι η διδασκαλία να κινείται ευέλικτα μεταξύ των δύο προοπτικών ώστε να επιλέγεται κάθε φορά η κατάλληλη προοπτική για την επίτευξη του επιθυμητού στόχου. Μία τέτοια ευελιξία εκφράζεται από την ιδέα της «διαδικασιοέννοιας» (procept). Η διδασκαλία των συναρτήσεων περιλαμβάνει πολύ περισσότερα από τις μεταβάσεις μεταξύ διαδικασίας και αντικειμένου. Το θέμα είναι πολύπλοκο καθώς από την μία υπάρχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις από την άλλη δεν υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη συναρτήσεων. Η ανάπτυξη της ιδέας ότι η συνάρτηση είναι ένα αντικείμενο και όχι ένα σύνολο υπολογισμών είναι μία σημαντική θεμελίωση για τα μαθηματικά του μέλλοντος και χρειάζεται χρόνος για την πλήρη ανάπτυξή της (Arcavi, Drijvers, & Stacey, 2017).

Οι γενικοί στόχοι του ισχύοντος προγράμματος σπουδών στο θέμα της διδασκαλίας των συναρτήσεων στη Β’ Γυμνασίου είναι οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης, να μπορούν να ερμηνεύουν τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και να μπορούν να μεταβαίνουν από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο.
- Να γνωρίσουν τα διάφορα είδη των αναπαραστάσεων των συναρτήσεων $y = ax$, $y = ax + \beta$ και $y = \frac{a}{x}$ και να τα χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (π.χ. ανάλογα ποσά, αντιστρόφως ανάλογα ποσά κτλ.).

Οι γενικοί αυτοί στόχοι αναλύονται και εξειδικεύονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού και για τις ενότητες 3.1, 3.2 και 3.3. είναι:

5.1.1 Ενότητα 3.1 - Η έννοια της συνάρτησης

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- Να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου εφόσον αυτό είναι δυνατόν
- Να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μίας συνάρτησης

5.1.2 Ενότητα 3.2 - Γραφική παράσταση συνάρτησης

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου
- Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του
- Να βρίσκουν τις συντεταγμένες του συμμετρικού ενός σημείου, ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων
- Να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων όταν δίνονται οι συντεταγμένες τους
- Να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών
- Να βρίσκουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης
- Να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης

5.1.3 Ενότητα 3.3 - Η συνάρτηση y=ax

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- Να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών
- Να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=ax διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει κλίση α και να μπορούν να τη σχεδιάζουν
- Να βρίσκουν την εξίσωση μίας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν γνωρίζουν την κλίση της
- Να κατανοήσουν το σημαντικό ρόλο της y=ax στη μελέτη φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια του διαγράμματος διαστήματος –χρόνου μίας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

Από το παρόν σχολικό έτος το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής προχώρησε σε αναπροσαρμογές και εξορθολογισμό της ύλης όλων των μαθημάτων μεταξύ των οποίων και τα Μαθηματικά. Στο πλαίσιο αυτό μειώθηκε η διδασκόμενη ύλη, ενώ παράλληλα αυξήθηκαν οι ώρες διδασκαλίας στα κεφάλαια που διατηρήθηκαν με σκοπό την εμβάθυνση των εννοιών. Στα πλαίσια των οδηγιών αυτών παραλείπεται η διδασκαλία των αναλόγων και των αντιστρόφως αναλόγων ποσών από την Α’ Γυμνασίου.

Παράλληλα στις οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος υιοθετήθηκαν αρχές του προταθέντος πιλοτικού προγράμματος σπουδών (2011) και στις οδηγίες αυτές επίσης εντάχθηκαν πολλές από τις δραστηριότητες του πιλοτικού προγράμματος. Όσον αφορά στις συναρτήσεις δεν υπάρχει καμία μεταβολή στο μέγεθος της διδακτέας ύλης, στις οδηγίες όμως παρατηρούνται ενδιαφέρουσες αλλαγές. Παλαιότερα προτείνονταν δέκα τρεις ώρες διδασκαλίας του κεφαλαίου των συναρτήσεων, ενώ από το σχολικό έτος 2016-17 οι ώρες αυξήθηκαν σε δέκα οκτώ. Η ύλη του κεφαλαίου κατανέμεται σε τέσσερις παραγράφους (βλέπε πίνακα 2)

Παράγραφος		Διδακτικές ώρες (πριν)	Διδακτικές ώρες (τώρα)
3.1	Η έννοια της συνάρτησης	2	3
3.2	Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης (χωρίς τις εφαρμογές 2 και 3).	3	5
3.3	Η συνάρτηση $y=\alpha\cdot x$	3	4
3.4	Η συνάρτηση $y=\alpha\cdot x+\beta$ (χωρίς τις υποπαραγράφους: «Η εξίσωση της μορφής «$\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$» και «Σημεία τομής της ευθείας $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$ με τους άξονες»).	3	4
3.5	Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή	2	2

Πίνακας 2. Σύγκριση του παρόντος προγράμματος με το προηγούμενό του

Στις οδηγίες αυτές διατυπώνονται για τις ενότητες 3.1 και 3.2 ενδιαφέρουσες επισημάνσεις:

Στην ενότητα 3.1 γίνεται αναφορά στη χρήση γράμματος ως μεταβλητής και όχι μόνο ως άγνωστου σε μια εξίσωση το ποίο όπως αναφέρεται είναι κάτι που δεν έχει γίνει επαρκώς αντικείμενο συζήτησης μέχρι τώρα. Για το σκοπό αυτό προτείνεται τόσο η δημιουργία αλγεβρικών τύπων συναρτήσεων από λεκτικές διατυπώσεις ποσοτήτων, όσο και η συμπλήρωση τιμών σε πίνακα (με αντικατάσταση αριθμητικών τιμών στον τύπο). Έμφαση θα πρέπει να δοθεί επίσης στη συμμεταβολή μεγεθών που οδηγεί στην έννοια της συνάρτησης, μέσα από παραδείγματα διαφορετικών συναρτήσεων.

Στην ενότητα 3.2 αναφέρεται ότι κατά τη διδασκαλία της παραγράφου η έμφαση θα πρέπει να δοθεί στις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης: λεκτική, γεωμετρική (γραφική παράσταση), αριθμητική (πίνακας τιμών) και αλγεβρική (τύπος) καθώς η εστίαση μόνο στον τύπο και τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς του δεν συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Αντίθετα, η εμπλοκή όλων των αναπαραστάσεων και η ανάπτυξη της ικανότητας μεταφράσεων μεταξύ τους είναι σημαντικός στόχος. Έτσι, καλό είναι να δοθούν ασκήσεις και προβλήματα με γραφικές παραστάσεις τις οποίες θα πρέπει οι μαθητές να "διαβάσουν" για να βρουν ποιες τιμές του y αντιστοιχούν σε δεδομένες τιμές του x και αντιστρόφως. Επίσης, επειδή μια συχνή παρανόηση είναι ότι όλα τα συμμεταβαλλόμενα ποσά είναι ανάλογα (ή και αντιστρόφως ανάλογα), είναι σημαντική η ανάδειξη συναρτήσεων (και αντίστοιχων συμμεταβαλλόμενων ποσών) που δεν αντιστοιχούν σε ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα.

Στις νέες οδηγίες διδασκαλίας πρώτη φορά αναφέρεται ότι θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη συμμεταβολή μεγεθών καθώς επίσης και στις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, λεκτική, γεωμετρική (γραφική παράσταση), αριθμητική (πίνακας τιμών) και αλγεβρική (τύπος). Μέσα από κάποιες δραστηριότητες που προτείνονται επίσης εισάγονται όροι όπως «ρεαλιστικό πλαίσιο» και μοντελοποίηση, χωρίς περαιτέρω όμως διευκρινήσεις. Συνολικά προτείνονται επτά δραστηριότητες τρεις από τις οποίες είναι ψηφιοποιημένες με το λογισμικό Geogebra και είναι διαθέσιμες στο φωτόδενδρο. Για την εισαγωγή της καινοτομίας πέραν των οδηγιών διδασκαλίας του μαθήματος οι σύμβουλοι των μαθηματικών αφού ενημερώθηκαν για τα νέα δεδομένα διεξήγαγαν ενημερωτικές ημερίδες για τους εκπαιδευτικούς ευθύνης τους.

5.2 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της έρευνας είναι η σύγκριση του ανανεωμένου προγράμματος διδασκαλίας των μαθηματικών που εφαρμόζεται από φέτος στα σχολεία με μία πειραματική εφαρμογή ενός διαφορετικού προγράμματος σπουδών με χρήση ψηφιακών εργαλείων και με βάση ρεαλιστικά προβλήματα, καθώς επίσης και η εκτίμηση της αποτελεσματικότητας της πειραματικής μεθόδου στη στάση των μαθητών ως προς τα μαθηματικά και τα νοήματα που αναπτύσσονται στην τάξη.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

- 1. Κατά πόσον είναι αποτελεσματική η νέα πρόταση διδασκαλίας σε σύγκριση με μία πειραματική διδασκαλία η οποία θα βασίζεται στην χρήση ψηφιακών εργαλείων στο θέμα των συναρτήσεων;
- 2. Κατά πόσον είναι αποτελεσματική η νέα πρόταση διδασκαλίας σε σύγκριση με μία πειραματική διδασκαλία η οποία θα βασίζεται στην χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων στο θέμα των συναρτήσεων;
- 3. Ποιοι είναι οι κοινωνικομαθηματικοί κανόνες που αναπτύσσονται στην τάξη των μαθηματικών σε ένα περιβάλλον με χρήση ψηφιακών εργαλείων και ρεαλιστικών προβλημάτων στη διδακτική διαδικασία;
- 4. Στο προτεινόμενο πρόγραμμα επιδιώκεται καλύτερη σύνδεση του μαθήματος μαθηματικών στις συναρτήσεις με το μάθημα της Φυσικής. Έχει επιπτώσεις αυτό στην καλύτερη κατανόηση εννοιών της Φυσικής που αφορούν στις συναρτήσεις;

5.3 Η εφαρμογή του πειραματικού προγράμματος

Το πειραματικό πρόγραμμα σχεδιάστηκε με βάση τις τρεις βασικές αρχές μάθησης των Donovan & Bransford, (2005) και εντάσσεται στην σχολή των ρεαλιστικών μαθηματικών με επίλυση δηλαδή προβλημάτων και δραστηριοτήτων σε ένα ρεαλιστικό για τους μαθητές πλαίσιο. Οι δραστηριότητες και τα προβλήματα θα διαπραγματεύονται από τους μαθητές είτε συμβατικά, είτε με χρήση της τεχνολογίας. Για τις ψηφιακές εφαρμογές και δραστηριότητες του πειραματικού προγράμματος θα χρησιμοποιηθεί κυρίως το λογισμικό Geogebra καθώς επίσης το λογισμικό Squiggle.

Το πειραματικό πρόγραμμα είναι μία έρευνα σχεδιασμού η οποία υλοποιήθηκε σε μαθητές της Β’ Γυμνασίου με θέμα την εισαγωγή στο θέμα των συναρτήσεων και ιδιαίτερα των γραμμικών συναρτήσεων. Η έρευνα αυτή εντάσσεται στις αρχές των διδακτικών πειραμάτων του Cobb και των συνεργατών του. Ο διδάσκων του πειραματικού προγράμματος επωμίζεται διπλό ρόλο καθώς πέρα από την εφαρμογή αναλαμβάνει και τον ρόλο του ερευνητή που θα το παρακολουθεί κατά την διάρκεια διεξαγωγής του. Το πειραματικό πρόγραμμα θα εφαρμοστεί σε δύο τμήματα της Β’ Γυμνασίου, ενώ η ομάδα ελέγχου θα αποτελείται επίσης από δύο τμήματα της ίδιας τάξης και θα εφαρμόσουν το νέο προτεινόμενο πρόγραμμα. Ο ερευνητής – διδάσκων θα κρατά καθημερινό ημερολόγιο για την πρόοδο της διδασκαλίας. Παράλληλα όλα τα μαθήματα θα ηχογραφούνται με την βοήθεια φορητού υπολογιστή. Στο τέλος της έρευνας όλοι οι μαθητές θα συμπληρώσουν ένα τελικό τέστ για την σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, με βάση το οποίο θα δοθεί απάντηση στο πρώτο και τρίτο ερευνητικό ερώτημα. Το τρίτο ερώτημα, αν και αρκετά δύσκολο, θα γίνει προσπάθεια να απαντηθεί με χρήση των ηχογραφήσεων των πειραματικών διδασκαλιών και των καταγραφών στο καθημερινό ημερολόγιο.

5.4 Διδακτικές επιλογές

Η διδασκαλία περιλαμβάνει μία σειρά επιλογών που είναι:

5.4.1 Πλαίσιο διδασκαλίας

Το περιεχόμενο της διδασκαλίας θα αναφέρεται στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής και των εμπειριών των μαθητών καθώς επίσης και στο ευρύτερο πλαίσιο της διαθεματικότητας των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες.

5.4.2 Μοντελοποίηση - Επίλυση προβλήματος

Η διδασκαλία θα βασίζεται στη μοντελοποίηση καταστάσεων της καθημερινής ζωής και σε προβλήματα, στην διαδικασία επίλυση των οποίων οι μαθητές θα έχουν ένα πραγματικό κίνητρο εμπλοκής.

5.4.3 Χρήση της τεχνολογίας

Η χρήση της τεχνολογίας θα αποτελέσει από τη μία ένα εργαλείο πολλαπλών αναπαραστάσεων του προβλήματος, ενώ παράλληλα θα βοηθήσει στην δημιουργία θετικού κλίματος ως προς το μάθημα

5.4.4 Μοντέλα και οπτικοποίηση των εννοιών

Οι έννοιες κατανοούνται καλύτερα όταν οπτικοποιούνται με χρήση μοντέλων και μάλιστα με πολλαπλούς τύπους αναπαράστασης. Στην έννοια της συνάρτησης η χρήση μοντέλων όπως τα διαγράμματα χαρτογράφησης βοηθούν στην κατανόηση του ορισμού (διαγράμματα Venn) και στην συμμεταβολή των δύο μεγεθών (dynographs). Η χρήση επίσης της κάθετης ευθείας και ο προσδιορισμός των σημείων στα οποία τέμνει μία γραφική παράσταση μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για να αποφασίζει κάποιος αν κάποια σχέση αποτελεί συνάρτηση με την βοήθεια της αντίστοιχης γραφικής παράστασης.

5.5 Η διδακτική παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση έγινε το σχολικό έτος 2016-17 στα δύο τμήματα της Β' τάξης σε Πειραματικό Γυμνάσιο της Θεσσαλονίκης ενώ η ομάδα ελέγχου ήταν δύο τμήματα της ίδιας τάξης σε ομοειδές σχολείο. Οι διδακτικές ώρες που διατέθηκαν για την διδακτική παρέμβαση στη διδασκαλία των συγκεκριμένων ενοτήτων ήταν οι προτεινόμενες από το Υπουργείο Παιδείας, για να υπάρχει ισορροπία μεταξύ των δύο σχολείων και να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των διαγνωστικών ελέγχων μετά πέρας της παρέμβασης σ' αυτά. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε για τα μαθήματα των τριών πρώτων ενοτήτων του κεφαλαίου των συναρτήσεων. Οι ενότητες αυτές αναφέρονται στην έννοια της συνάρτησης (ενότητα 3.1), στις καρτεσιανές συντεταγμένες και στη γραφική παράσταση συνάρτησης (ενότητα 3.2) και στη συνάρτηση y=ax (ενότητα 3.3). Οι ενότητες αυτές διδάχθηκαν σε δώδεκα μαθήματα μίας διδακτικής ώρας σύμφωνα και με τον προγραμματισμό διδασκαλίας τους που προτείνεται από το Υπουργείο Παιδείας. Το περιεχόμενο των μαθημάτων αυτών παρουσιάζεται στη συνέχεια.

5.5.1 Μάθημα 1 - Εισαγωγή στις συναρτήσεις – Κανονικότητες

Το μάθημα αποτελεί μία γέφυρα της γνώσης που απέκτησαν οι μαθητές κατά την πρώτη τάξη με την μελέτη των ανάλογων ποσών και την γραφική παράσταση σχέσεων αναλογίας. Οι μαθητές κατά την προηγούμενη χρονιά έχουν έλθει επίσης σε επαφή με δεδομένα σε πίνακες τιμών τα οποία και απεικόνισαν στο πρώτο τεταρτημόριο.

Οι κανονικότητες θεωρούνται ως ένα σημαντικό πεδίο στην τροχιά μάθησης των συναρτήσεων καθώς η ανάγκη της συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Παράλληλα η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί στις συναρτήσεις.

Στόχοι της παρέμβασης είναι οι μαθητές:

- Να είναι ικανοί να διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και να διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση με την βοήθεια μιας μεταβλητής.
- Να είναι ικανοί να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή που προκύπτει από τον αλγεβρικό τύπο μιας κανονικότητας για διάφορες τιμές της μεταβλητής και αντιστρόφως να υπολογίζουν την τιμή της μεταβλητής όταν είναι γνωστή η τιμή της αλγεβρικής παράστασης του τύπου μιας κανονικότητας.
- Να είναι ικανοί να αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι μαθητές συμπληρώνουν φύλλο εργασίας που περιλαμβάνει την εύρεση του γενικού τύπου κανονικότητας, την συμπλήρωση πίνακα τιμών και την γραφική απεικόνιση σε σύστημα συντεταγμένων.

5.5.2 Μάθημα 2 – Ορισμός της συνάρτησης

Στόχος του 2ουμαθήματος είναι να γίνει εισαγωγή στην έννοια και να κατανοήσουν οι μαθητές τον ορισμό της συνάρτησης, ότι πρόκειται δηλαδή για μία σχέση με την οποία σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής Χ αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Υ. Η πρώτη δραστηριότητα του μαθήματος αναφέρεται στην έννοια της αντιστοιχίας η οποία παριστάνεται γραφικά με χρήση διαγραμμάτων Venn. Στις υπόλοιπες δραστηριότητες του μαθήματος για την αναπαράσταση της αντιστοιχίας του ορισμού χρησιμοποιούνται διαγράμματα χαρτογράφησης (Bridger & Bridger, 2001). Τα διαγράμματα χαρτογράφησης αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο απεικόνισης των συναρτήσεων σε σχέση με τον συμβατικό τρόπο αναπαράστασής τους σε καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων. Αποτελούνται από δύο κάθετους ή οριζόντιους άξονες στον πρώτο εκ των οποίων βρίσκονται οι τιμές του πεδίου ορισμού ενώ στον δεύτερο απεικονίζεται το πεδίο τιμών, ενώ βέλη μεταξύ των δύο αξόνων απεικονίζουν την σχέση μεταξύ των τιμών x του πρώτου άξονα, με τις τιμές f(x) του δευτέρου άξονα. Τα καρτεσιανά συστήματα είναι χρήσιμα για την απεικόνιση και κατανόηση της μονοτονίας, των ακραίων τιμών, της καμπυλότητας και των ασυμπτώτων. Με τα διαγράμματα χαρτογράφησης γίνεται αμέσως αντιληπτό το κατά πόσον η λειτουργία της συνάρτησης οδηγεί στην επέκταση ή την συστολή των τιμών του πεδίου τιμών σε σχέση με αυτές του πεδίου ορισμού. Τα διαγράμματα αυτά επίσης είναι χρήσιμα για την απεικόνιση των 1-1 συναρτήσεων, της αντίστροφης συνάρτησης, όπως και για την σύνθεση των συναρτήσεων. Το πλεονέκτημα επομένως των διαγραμμάτων χαρτογράφησης είναι ότι με αυτά γίνεται αντιληπτή όχι η διαδικασία υπολογισμού τιμών της συνάρτησης αλλά η διαδικασία προσδιορισμού της συμπεριφοράς της (Goldenberg, Lewis, & O'Keefe, 1992). Τα διαγράμματα αυτά είναι δυναμικά και με τη βοήθειά τους για να κατανοήσει ο χρήστης αυτή τη συμπεριφορά δημιουργεί διανοητικά μια αναλλοίωτη σχέση μεταξύ μεταβλητής και τιμής που βοηθά περισσότερο στην κατανόηση της έννοιας ως αντικείμενο. Στις συμβατικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων οι μαθητές βλέπουν τις συναρτήσεις ως αντικείμενα και θα πρέπει οι ίδιοι να μάθουν και να αντιληφθούν την δυναμική που κρύβεται σ΄ αυτά, ενώ στις δυναμικές αναπαραστάσεις αντίθετα οι μαθητές βλέπουν την μεταβολή και αντιλαμβάνονται τη σταθερότητα.

Τα διαγράμματα χαρτογράφησης χρησιμοποιήθηκαν για να αντιληφθούν οι μαθητές την δυναμική των συναρτήσεων και την συμμεταβολή των δύο μεγεθών που υπεισέρχονται στον ορισμό τους. Για την αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιήθηκε τόσο το λογισμικό Geogebra όσο και το ειδικό λογισμικό για την μελέτη συναρτήσεων Squiggle (2010) το οποίο διατίθεται ελεύθερα στο διαδίκτυο και δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος "Πανεπιστημιακή έρευνα ως συμβολή στον επαγγελματισμό της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης" (Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre - Zukunftswerkstatt Hochschullehre). Στο λογισμικό Geogebra επίσης δημιουργήθηκε και σχετική δραστηριότητα αξιολόγησης κατά την οποία οι μαθητές παρατηρώντας την εικόνα του γραφήματος καλούνταν να βρουν τον τύπο της συνάρτησης από τον οποίο αυτό προέκυψε.

5.5.3 Μάθημα 3 – Οι διάφοροι τρόποι παρουσίασης της συνάρτησης

Στόχος του 3ου μαθήματος είναι οι μαθητές να γίνουν ικανοί να αναγνωρίζουν τις διάφορες μορφές παρουσίασης μιας συνάρτησης: με λεκτικό πρόβλημα, με αλγεβρικό τύπο ή πίνακα τιμών. Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευελιξία μετάβασης μεταξύ αυτών των διαφορετικών αναπαραστάσεων μίας συνάρτησης (αλγεβρικός τύπος, λεκτική περιγραφή, πίνακας τιμών). Επίσης να αντιληφθούν ότι δεν είναι απαραίτητος πάντα ο αλγεβρικός τύπος για τον ορισμό μίας συνάρτησης. Στην πρώτη δραστηριότητα του μαθήματος οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τον κανόνα που κρύβεται πίσω από τους πίνακες τιμών διαφόρων συναρτήσεων, ο οποίος μπορεί να είναι είτε ένας μαθηματικός τύπος είτε μία άλλη λεκτική περιγραφή του κανόνα που αναγνώρισαν. Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές λύνουν ένα πρόβλημα αναλογίας που αναφέρεται σε ένα φυσικό φαινόμενο (ύψος βροχής) και καλούνται να απαντήσουν μία σειρά ερωτημάτων. Στην επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα αναλογίας επίσης που αναφέρεται σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και συμπληρώνουν σχετικό πίνακα τιμών. Στην τελική δραστηριότητα δίνεται στους μαθητές ο τύπος μετατροπής θερμοκρασιών μεταξύ βαθμών Fahrenheit και βαθμών Κελσίου και οι μαθητές συμπληρώνουν πίνακα τιμών για την επίλυση σχετικού προβλήματος.

5.5.4 Μάθημα 4 – Συντεταγμένες στο επίπεδο

Στόχος του μαθήματος είναι η επέκταση του συστήματος συντεταγμένων από το πρώτο τεταρτημόριο όπως το γνωρίζουν οι μαθητές από την προηγούμενη τάξη σε συστήματα συντεταγμένων και με αρνητικούς αριθμούς. Οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν συντεταγμένες σημείων στο επίπεδο και αντιστρόφως, να τοποθετούν δηλαδή σημεία στο επίπεδο με βάση τις συντεταγμένες τους. Μαθαίνουν επίσης τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν σε έναν από τους δύο άξονες ή σε ένα τεταρτημόριο. Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει φύλλο εργασίας με σειρά ερωτήσεων που αναφέρονται στην εύρεση των συντεταγμένων σημείων στο πρώτο τεταρτημόριο, καθώς επίσης και των συνθηκών που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν στους άξονες. Με την δεύτερη δραστηριότητα του μαθήματος επεκτείνεται η γνώση και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια. Τέλος με σχετική δραστηριότητα που δημιουργήθηκε στο Geogebra, αξιολογείται η αποκτηθείσα γνώση καθώς οι μαθητές καλούνται να βρουν τις συντεταγμένες σημείων που προκύπτουν τυχαία στο επίπεδο με χρήση ειδικού εικονικού πλήκτρου στην εφαρμογή. Για την αξιολόγηση επίσης χρησιμοποιούνται και σχετικά παιχνίδια που διατίθενται στο διαδίκτυο.

5.5.5 Μάθημα 5 - Γραφική παράσταση συνάρτησης

Στόχος του μαθήματος είναι οι μαθητές να μάθουν να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης από τον πίνακα τιμών της. Στην εισαγωγική συνάρτηση οι μαθητές συμπληρώνουν πίνακα τιμών που προκύπτουν από την παρατήρηση ενός φυσικού φαινομένου (ελεύθερη πτώση). Στη συνέχεια χρησιμοποιούν τη γνώση του προηγούμενου μαθήματος για να απεικονίσουν σημεία στο επίπεδο, συνδέοντας το αποτέλεσμα με την έννοια της συνάρτησης. Στην δεύτερη δραστηριότητα αξιοποιείται η γνώση των μαθητών από το μάθημα της φυσικής για την δημιουργία πίνακα τιμών και του σχετικού διαγράμματος σε ένα πρόβλημα ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Οι μαθητές μαθαίνουν τέλος να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν γραφήματα και παραστάσεις σημείων στο επίπεδο που εκφράζουν μία συνάρτηση.

5.5.6 Μάθημα 6 -Η σημασία της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης

Στόχος του μαθήματος είναι κατ’ αρχήν είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι η γραφική παράστασης μίας συνάρτησης μπορεί να εκφράζει από μόνη της την συνάρτηση, όπως συμβαίνει και με τον πίνακα τιμών και τον τύπο της συνάρτησης. Αυτό διότι οι μαθητές συχνά θεωρούν ότι η συνάρτηση εκφράζεται μόνο από τον τύπο της. Επιπλέον στόχος είναι η αναγνώριση στοιχείων για την συμπεριφορά μίας συνάρτησης από την γραφική της παράσταση. Στις εισαγωγικές δραστηριότητες παρουσιάζονται γραφήματα φυσικών φαινομένων όπως η μεταβολή της θερμοκρασίας στην ατμόσφαιρα σε σχέση με το ύψος και η μεταβολή της θερμοκρασίας επίσης του θαλάσσιου νερού των ωκεανών σε σχέση με το βάθος. Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν την μεταβολή της θερμοκρασίας σε σχέση με το βάθος ή το ύψος που παρουσιάζει και στις δύο περιπτώσεις κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και να αποφασίσουν κατά πόσον τα γραφήματα μπορεί αποτελούν εικόνα μίας συνάρτησης.

5.5.7 Μάθημα 7 Επαναληπτικό

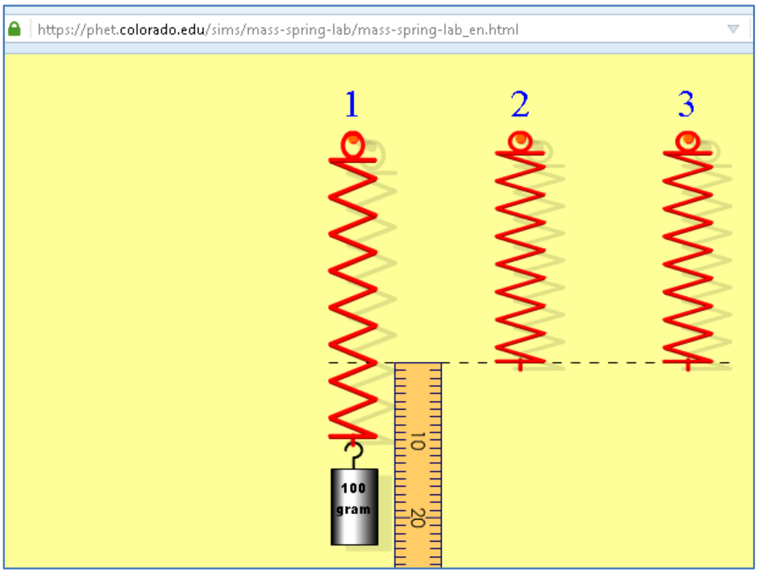
Το μάθημα αυτό είναι επαναληπτικό και περιλαμβάνει δραστηριότητες αξιολόγησης των στόχων που είχαν τεθεί στα προηγούμενα μαθήματα. Συγκεκριμένα υπάρχουν τρεις δραστηριότητες από τις οποίες η πρώτη αναφέρεται στον ορισμό της συνάρτησης, η δεύτερη είναι ένα πρόβλημα υπολογισμού της απόστασης μεταξύ δύο σημείων σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, ενώ η τρίτη είναι μία δραστηριότητα συμπλήρωσης πίνακα τιμών μίας συνάρτησης με την βοήθεια του τύπου και απεικόνισής της στη συνέχεια σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

5.5.8 Μάθημα 8 – Διαφορά του ρυθμού μεταβολής μεγεθών που εκφράζονται με ευθεία ή με καμπύλη

Στόχος του μαθήματος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων με γραφική παράσταση ευθεία και των συναρτήσεων με γραφική παράσταση κάποια καμπύλη, καθώς η σταθερότητα του ρυθμού μεταβολής των γραμμικών συναρτήσεων είναι μία σημαντική έννοια με εφαρμογές στα επόμενα μαθήματα και την κλίση των γραμμικών συναρτήσεων. Στην αρχική δραστηριότητα οι μαθητές συμπληρώνουν τους πίνακες τιμών και δημιουργούν δύο ξεχωριστά γραφήματα για μία γραμμική και μία δευτεροβάθμια συνάρτηση. Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές με την βοήθεια σχετικών εικονικών αναπαραστάσεων απαντούν σε σειρά ερωτημάτων που τους επιτρέπουν να αντιληφθούν τη διαφορά μίας γραμμικής συνάρτησης η οποία παρουσιάζει σταθερό ρυθμό μεταβολής για τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής, σε αντίθεση με την καμπύλη του γραφήματος της δεύτερης συνάρτησης. Ακολουθεί δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές θα πρέπει να επιλύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα που αναφέρεται στην απόσταση ενός αερόστατου στον ορίζοντα σε σχέση με το ύψος του στην ατμόσφαιρα. Παρουσιάζεται στους μαθητές πίνακας τιμών του φαινομένου και καλούνται να σχεδιάσουν την εικόνα του γραφήματος που αναμένουν, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τις πραγματικές τιμές του πίνακα. Στο τέλος της δραστηριότητας τα δεδομένα ενώπιον όλης της τάξης καταγράφονται με χρήση του διαδραστικού πίνακα στο Geogebra και σχεδιάζεται η γραφική παράσταση και οι μαθητές συγκρίνουν την πραγματική εικόνα με την αρχική τους πρόβλεψη. Ακολουθεί τέλος ανάλογη δραστηριότητα αξιολόγησης κατά την οποία οι μαθητές παρατηρούν διάφορους πίνακες τιμών και καλούνται να προβλέψουν την εικόνα της αντίστοιχης γραφικής παράστασης.

5.5.9 Μάθημα 9 -Εισαγωγή στη συνάρτηση y=ax

Στόχος του μαθήματος είναι οι μαθητές να ανακτήσουν τη γνώση που έχουν αποκτήσει για τα ανάλογα ποσά στην προηγούμενη τάξη και να την συνδέσουν με την γραμμική συνάρτηση **y=ax**. Στην εισαγωγική δραστηριότητα οι μαθητές χρησιμοποιούν μία εφαρμογή στο διαδίκτυο (https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html) η οποία προσομοιώνει την επιμήκυνση ενός ελατηρίου όταν στην άκρη του προσαρτάται κάποιο βάρος (βλέπε εικόνα 1). Οι μαθητές προσαρτούν διαφορετικά βάρη και μετρούν κάθε φορά την επιμήκυνση του ελατηρίου. Τα βάρη που προσαρτώνται και οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις του ελατηρίου καταγράφονται σε πίνακα. Οι μαθητές καλούνται επίσης να υπολογίσουν σε μία ξεχωριστή στήλη τους λόγους $\frac{E}{B}$ σε μία ξεχωριστή στήλη και να διαπιστώσουν ότι οι λόγοι αυτοί παραμένουν σταθεροί.



Εικόνα 2. Η εισαγωγική δραστηριότητα για την επιμήκυνση του ελατηρίου

Στην συνέχεια προκαλείται συζήτηση στην τάξη κατά την οποία οι μαθητές διαπιστώνουν ότι πρόκειται για ποσά ανάλογα, και βρίσκουν τον συντελεστή αναλογίας και την σχέση που συνδέει την επιμήκυνση του ελατηρίου με το προσαρτώμενο βάρος. Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές κατ' αρχήν ερωτώνται αν η σχέση που βρήκαν εκφράζει μία συνάρτησης καθώς επίσης και για τα πεδία ορισμού και τιμών της. Καλούνται επίσης να δημιουργήσουν την γραφική παράσταση αρχικά σε φύλλο εργασίας και στη συνέχεια στον διαδραστικό πίνακα. Στην συνέχεια και με κατάλληλες ερωτήσεις ο διδάσκων επαναφέρει στους μαθητές την προηγούμενη γνώση, ότι δηλαδή η γραφική παράσταση μίας σχέσης αναλογίας είναι μία ημιευθεία στο πρώτο τεταρτημόριο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Στη δεύτερη δραστηριότητα του μαθήματος οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης που προέκυψε στην προηγούμενη δραστηριότητα χωρίς όμως να περιορίζονται στο πρώτο τεταρτημόριο του πραγματικού προβλήματος. Μετά την δημιουργία του γραφήματος και με την βοήθεια καταλλήλων ερωτήσεων εκμαιεύονται οι ιδιότητες της συνάρτησης y=ax. Ακολουθεί τέλος τρίτη δραστηριότητα που είναι μία εφαρμογή κεφαλαίου-τόκου. Οι μαθητές καλούνται αρχικά να συμπληρώσουν πίνακα τιμών του αρχικού κεφαλαίου, του επιτοκίου και του συνολικού τελικού ποσού μετά τον τοκισμό διαφόρων ποσών με συγκεκριμένο επιτόκιο. Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τον τύπο της συνάρτησης που εκφράζει το επιτόκιο και το συνολικό τελικό κεφάλαιο σε σχέση με το αρχικά κατατιθέμενο ποσό.

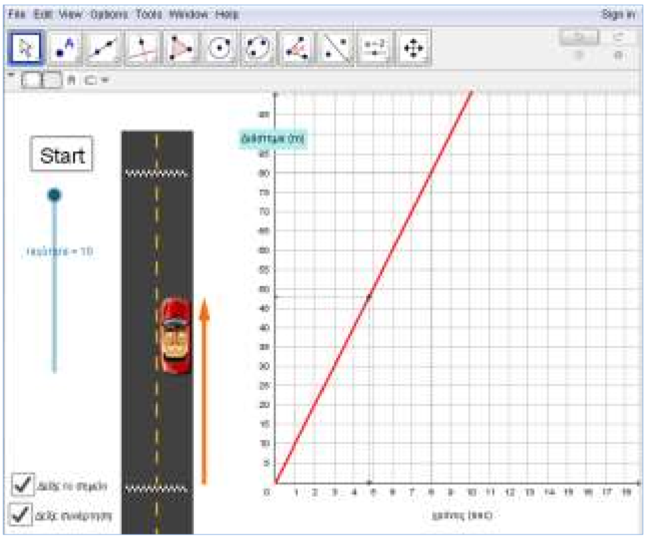
5.5.10 Μάθημα 10 – Ο συντελεστής a στην συνάρτηση y=ax

Στόχος του μαθήματος είναι η διερεύνησης του συντελεστή a της γραμμικής συνάρτησης y=ax. Οι μαθητές στην πρώτη δραστηριότητα καλούνται να εκτελέσουν στον διαδραστικό πίνακα εφαρμογή στο Geogebra που απεικονίζει την γραφική συνάρτηση y=ax για διάφορες τιμές του συντελεστή a. Η εφαρμογή περιλαμβάνει δρομέα ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές σε ένα εύρος π.χ. από το -5 έως το 5. Οι μαθητές μεταβάλλουν τον δρομέα ο οποίος ορίζει και την τιμή του συντελεστή στη συνάρτηση $y = ax$ και παρατηρούν το γράφημα της συνάρτησης που προκύπτει. Στην συνέχεια καλούνται να απαντήσουν για την επιλεγόμενη κάθε φορά τιμή του συντελεστή a σε μία σειρά ερωτημάτων από τις απαντήσεις των οποίων προκύπτουν τα χαρακτηριστικά της κλίσης που είναι και ο στόχος του μαθήματος. Παράλληλα οι μαθητές διαπιστώνουν το ρόλο του προσήμου στον συντελεστή α, και ότι για θετικό συντελεστή η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ για αρνητικό συντελεστή στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο. Διαπιστώνουν επίσης ότι σε όλες τις περιπτώσεις η γραφική παράσταση περνά από το σημείο (0,0).

Κατά την δεύτερη δραστηριότητα του μαθήματος εκτελείται στο διαδραστικό πίνακα εφαρμογή Geogebra. Η εφαρμογή περιλαμβάνει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει κάθε φορά μία διαφορετική τυχαία συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται να βρούν την κλίση της ευθείας που προκύπτει κάθε φορά.

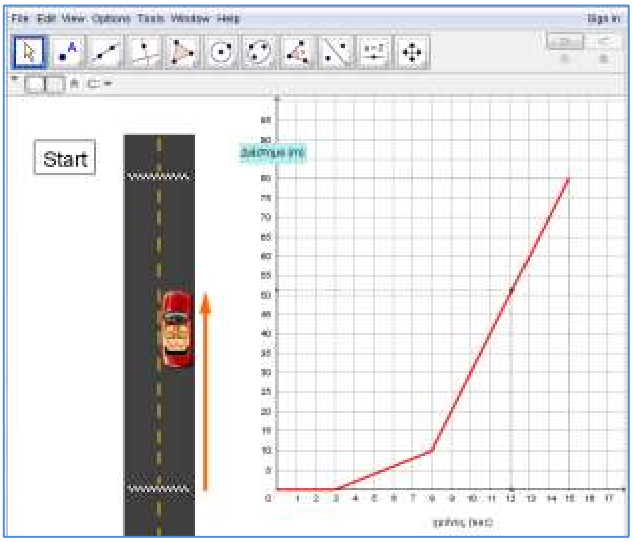
5.5.11 Μάθημα 11 -Σχέση ταχύτητας κινητού – κλίσης συνάρτησης

Η αρχική δραστηριότητα του μαθήματος βασίζεται σε εφαρμογή στο Geogebra η οποία προσομοιώνει της ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κινητού για διάφορες τιμές της ταχύτητας που μεταβάλλονται από το χρήστη με χρήση δρομέα. Οι μαθητές καλούνται να απεικονίσουν τα ζεύγη τιμών διαστήματος - χρόνου (S, t) των διαστημάτων που διανύει το κινητό ως προς τον χρόνο και για τις τρεις περιπτώσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Η γραφικές παραστάσεις μπορεί να απεικονιστούν επίσης αυτόματα και από την εφαρμογή με κατάλληλη επιλογή. Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τις κλίσεις των τριών ευθειών στα γραφήματά τους και να διαπιστώσουν την ισότητα κλίσης – ταχύτητας που επέλεξαν.



Εικόνα 3. Η δραστηριότητα 1 για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κινητού στο Geogebra

Η δεύτερη δραστηριότητα προσομοιώνει επίσης την κίνηση ενός κινητού στο Geogebra. Αυτή τη φορά όμως το κινητό για το χρόνο προσομοίωσης κινείται με τρείς διαφορετικές ταχύτητες σε τρία συγκεκριμένα διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Οι μαθητές καλούνται αρχικά να υπολογίσουν την ταχύτητα κίνησης του κινητού στα τρία αυτά χρονικά διαστήματα και να διαπιστώσουν ότι η διαφορά των ταχυτήτων στις τρεις ανωτέρω περιπτώσεων στο γράφημα διαστήματος χρόνου εκφράζεται από τις διαφορετικές κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων διαστήματος-χρόνου που εκφράζουν την κίνηση στα διαστήματα αυτά. Τέλος οι μαθητές καλούνται να απεικονίσουν σε ένα σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του κινητού ως προς το χρόνο



Εικόνα 4. Η δραστηριότητα 2 για την κίνηση του κινητού με διαφορετικές ταχύτητες στο Geogebra

Κατά την τρίτη δραστηριότητα του μαθήματος εκτελείται στο διαδραστικό πίνακα εφαρμογή Geogebra. Στην εφαρμογή αυτή υπάρχει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει μία διαφορετική συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται αυτή τη φορά να σχεδιάσουν την ευθεία που προκύπτει κάθε φορά μετακινώντας κατάλληλα δύο σημεία στην εφαρμογή που προσδιορίζουν κάθε φορά την θέση της ευθείας που επιλέγουν οι μαθητές. Η εφαρμογή αυτή περιλαμβάνει επίσης ανατροφοδότηση γα την ορθότητα ή μη της επιλογής του μαθητή.

5.5.12 Μάθημα 12 - Επαναληπτικό

Το τελευταίο μάθημα είχε επαναληπτικό χαρακτήρα. Περιελάβανε αρχικά δραστηριότητα αναγνώρισης ταχυτήτων που απεικονίζονταν σε κοινό γράφημα. Στην συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν σειρά προβλημάτων αναλογιών στα οποία οι μαθητές καλούνταν να προσδιορίσουν κάθε φορά τη συνάρτηση που περιέγραφε το πρόβλημα και να απαντήσουν στα ερωτήματα που ετίθεντο. Στο τέλος του μαθήματος εκτελέστηκαν οι δύο εφαρμογές στο Geogebra από προηγούμενα μαθήματα για την αναγνώριση της κλίσης τυχαίων ευθειών (μάθημα 10) και την σχεδίαση ευθειών με δεδομένη κλίση (μάθημα 11).

5.6 Διαγνωστικός έλεγχος προ της διδασκαλίας των συναρτήσεων

Πριν από την διδακτική παρέμβαση προηγήθηκε διαγνωστικός έλεγχος που έγινε στα δύο σχολεία την ίδια χρονική περίοδο (αρχές Μαρτίου) και περιελάμβανε έξι ερωτήματα-προβλήματα τα οποία απαντήθηκαν σε χρονικό διάστημα 30ʹ λεπτών. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται σε βασικές γνώσεις των μαθηματικών και της άλγεβρας που κρίνονται απαραίτητες στην διδακτική τροχιά της διδασκαλίας των συναρτήσεων. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονταν:

1. Στην ικανότητα αλγεβρικής έκφρασης του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου αποτελούμενου από δύο μικρότερα παραλληλόγραμμα με την μορφή μίας αλγεβρικής παράστασης. Σε δύο από τα τρία απαιτούμενα μεγέθη τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων δίνονται αριθμητικά, ενώ στο τρίτο το μήκος εκφράζεται από μεταβλητή.
2. Στην ικανότητα της εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση σε μία αλγεβρική παράσταση και στη συνέχεια της αναγωγής των ομοίων όρων που προέκυψαν.
3. Στην ικανότητα αλγεβρικών μετασχηματισμών, και επίλυσης μίας απλής εξίσωσης πρώτου βαθμού με αγνώστους όρους και στα δύο μέλη της εξίσωσης.
4. Στην ικανότητα χρήσης μεταβλητής και έκφρασης ενός απλού προβλήματος από μία απλή εξίσωση πρώτου βαθμού,
5. Στην ικανότητα ανάγνωσης και αντιστοίχισης πινάκων τιμών με τις αντίστοιχες αλγεβρικών εξισώσεις με δύο μεταβλητές. Οι μαθητές πρωτοσυνάντησαν ανάλογα προβλήματα στην προηγούμενη τάξη κατά τη διδασκαλία των αναλόγων ποσών.

6. Στην ικανότητα ανάγνωσης των βασικών χαρακτηριστικών στην μελέτη ενός φαινομένου το οποίο απεικονίζεται με την βοήθεια καμπύλης σε ένα γράφημα.

Τα ερωτήματα του διαγνωστικού ελέγχου παρουσιάζεται στο παράρτημα Α.

5.7 Έλεγχος γνώσεων μετά τη διδασκαλία των συναρτήσεων

Ο τελικός έλεγχος μετά τη διδασκαλία των συναρτήσεων έγινε στα δύο σχολεία την ίδια χρονική περίοδο (αρχές Απριλίου) και περιελάμβανε και πάλι έξι ερωτήματα-προβλήματα τα οποία απαντήθηκαν σε χρονικό διάστημα μίας διδακτικής ώρας. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται στις γνώσεις των μαθητών στο θέμα των συναρτήσεων και ειδικότερα των γραμμικών συναρτήσεων της μορφής y=ax η διδασκαλία των οποίων έγινε στις δώδεκα διδακτικές ώρες στην ομάδα της διδακτικής παρέμβασης και στην ομάδα ελέγχου.

Συγκεκριμένα το περιεχόμενο των έξι προβλημάτων ήταν:

1. Το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στον ορισμό της συνάρτησης και οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών περιπτώσεων που εκφράζονται με πίνακες τιμών και διαγράμματα ποιες από αυτές ορίζουν μία συνάρτηση.
2. Στο δεύτερο πρόβλημα παρουσιάζεται η γραφικής παράσταση της συνάρτησης ενός φυσικού φαινομένου (θερμοκρασία ως προς το χρόνο στη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου). Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε πέντε υποερωτήματα που σχετίζονται με την αναγνώριση της συμπεριφοράς της καμπύλης στον χρόνο και με βασικές γνώσεις των γραφημάτων των συναρτήσεων (εύρεση της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής για συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και το αντίστροφο, αναγνώριση τοπικού μεγίστου).
3. Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται στην ικανότητα της αναγνώρισης του τύπου μιας γραμμικής συνάρτησης που εκφράζει κάποιο πρόβλημα της καθημερινής ζωής και αναφέρεται στο κόστος ενοικίασης ενός αυτοκινήτου ανά διανυόμενο χιλιόμετρο. Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τον σωστό τύπο του κόστους ως προς τα χιλιόμετρα μεταξύ τεσσάρων περιπτώσεων.
4. Το τέταρτο πρόβλημα αναφέρεται στην κλίση συναρτήσεων της μορφής y=ax Περιλαμβάνει συγκεκριμένα δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις με θετική και αρνητική κλίση. Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν την κλίση επιλέγοντας την σωστή απάντηση μεταξύ των τεσσάρων προτεινόμενων για το κάθε γράφημα.
5. Το πέμπτο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα αναλογίας της καθημερινής ζωής και αναφέρεται στον ρυθμό πλήρωσης ενός κολυμβητηρίου με νερό. Τα δεδομένα παρέχονται με την μορφή ενός πίνακα δεδομένων. Το πρόβλημα τίθεται για να αναγνωρισθεί η ικανότητα των μαθητών να το εκφράσουν με

την μορφή μίας συνάρτησης και στη συνέχεια να απαντήσουν σε δύο συγκεκριμένα ερωτήματα με χρήση της συνάρτησης αυτής.

6. Το τελευταίο ήταν ένα πρόβλημα της φυσικής. Οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν δύο περιπτώσεις ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, η πρώτη από τις οποίες εκφράζεται από την γραφική παράσταση του διαστήματος ως προς τον χρόνο, ενώ στη δεύτερη η σχέση μεταξύ των δύο ίδιων μεγεθών εκφράζεται από αλγεβρικό τύπο.

Τα ερωτήματα του ελέγχου γνώσεων μετά τη διδασκαλία παρουσιάζονται στο παράρτημα Β.

Κεφάλαιο 6

6.1 Αποτελέσματα

6.1.1 Μέγεθος του δείγματος

Οι μαθητές ανά τμήμα στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου που συμμετείχαν τόσο στην προκαταρκτική όσο και στην τελική εξέταση παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

	Α (πειραματική ομάδα) Τμήμα		Β (ομάδα ελέγχου) Τμήμα	
	A_B1	A_B2	B_B1	B_B2
Μαθητές που απάντησαν	25	25	24	24
Σύνολο	50		48	

Πίνακας 3. Μαθητές που συμμετείχαν στο πρόγραμμα

Όλες οι απαντήσεις των ερωτημάτων κωδικοποιήθηκαν στην μορφή -0 – 1 για λανθασμένες και σωστές απαντήσεις. Στις περιπτώσεις που τα ερωτήματα ήταν πιο σύνθετα αυτά αναλύθηκαν σε επιμέρους υποερωτήματα που κωδικοποιήθηκαν με τον ίδιο τρόπο.

6.1.2 Σύγκριση ποσοστών ανεξαρτήτων δειγμάτων: πίνακας 2x2

Σε πολλά προβλήματα προκύπτει η ανάγκη σύγκρισης μεταξύ δύο ποσοστών που υπολογίζονται από ανεξάρτητα δείγματα. Στις συγκρίσεις αυτού του είδους θεωρείται ότι τα δύο ανεξάρτητα δείγματα προκύπτουν από δύο δυωνυμικούς πληθυσμούς με ανεξάρτητες παραμέτρους p_1 και p_2. Τα ποσοστά επιτυχίας προσεγγίζονται από κανονική κατανομή και με βάση την προσέγγιση αυτή μπορεί να υπολογιστούν διαστήματα εμπιστοσύνης και να γίνουν στατιστικές συγκρίσεις (βλέπε: Ott, 1988, σελ. 116;Snedecor & Cochran, 1980, σελ. 124). Αν παρατηρούνται y_1 επιτυχίες στο ανεξάρτητο δείγμα μεγέθους n_1 από τον πληθυσμό 1 και y_2 επιτυχίες στο ανεξάρτητο δείγμα μεγέθους n_2 από τον πληθυσμό 2, τότε οι σημειακές εκτιμήσεις των p_1 και p_2 είναι τα παρατηρούμενα ποσοστά των δύο δειγμάτων: $\hat{p}_1 = \frac{y_1}{n_1}$ και $\hat{p}_2 = \frac{y_2}{n_2}$ αντίστοιχα. Η δειγματική κατανομή της διαφοράς $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ μπορεί να προσεγγισθεί από μία κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπικό σφάλμα:

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$$

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Η προσέγγιση με κανονική κατανομή δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού διαστημάτων εμπιστοσύνης και εκτέλεσης στατιστικών ελέγχων για τη διαφορά $p_1 - p_2$.

Το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $p_1 - p_2$ είναι:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{a/2}\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ και $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$.

Η τιμή $z_{a/2}$ λαμβάνεται από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, ενώ στον τύπο υπολογισμού του $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$, στην θέση των p_1 και p_2 τίθενται οι προσεγγίσεις τους που υπολογίστηκαν από τα δείγματα.

Το τυπικό σφάλμα στο στατιστικό έλεγχο είναι λίγο διαφορετικό. Όταν η μηδενική υπόθεση H_o του στατιστικού ελέγχου είναι αληθής, είναι $p_1 = p_2$ και η κοινή τιμή των p_1 και p_2 μπορεί να γραφεί ως p.

Είναι δε $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}$.

Στη συνέχεια η διαδικασία του στατιστικού ελέγχου μπορεί να παρασταθεί συνοπτικά ως:

$H_o: p_1 - p_2 = 0$

H_a: 1. $p_1 - p_2 > 0$
2. $p_1 - p_2 < 0$
3. $p_1 - p_2 \neq 0$

$z = \dfrac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$, όπου $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}$

και το p υπολογίζεται προσεγγιστικά ως: $\hat{p} = \dfrac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2}$.

Για δεδομένη τιμή α η Ho απορρίπτεται:

1. αν είναι $z > z_a$
2. αν είναι $z < -z_a$
3. αν είναι $|z| > z_{a/2}$

Η προσέγγιση με κανονική κατανομή της διαφοράς $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ με το στατιστικό z δεν είναι κατάλληλη για μικρά μεγέθη δείγματος και εναλλακτικά προτείνεται το τεστ

Fisher όταν (i) το συνολικό μέγεθος του δείγματος N είναι μικρότερο του 20 ή (ii) το N βρίσκεται μεταξύ του 20 και του 40 και ο μικρότερος αναμενόμενος αριθμός στα κελιά είναι μικρότερος του 5 (Snedecor & Cochran 1980, σελ. 127). Στις περιπτώσεις αυτές προτείνεται η διόρθωση του Yates και το στατιστικό που προτείνεται (Zar, 1999) είναι το z_c:

$$z_c = \frac{\left|\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

Στην έρευνά μας δεδομένου ότι πληρούται η βασική προϋπόθεση για το μέγεθος των δειγμάτων (n_1=50, n_2=48) αποφασίστηκε οι συγκρίσεις μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας στους δύο πληθυσμούς να διεξαχθούν με την βοήθεια των στατιστικών z και z_c. Σε όλες τις περιπτώσεις διεξήχθη δίπλευρος έλεγχος με εναλλακτική υπόθεση:

$$H_a: p_1 - p_2 \neq 0.$$

6.2 Αποτελέσματα διαγνωστικού ελέγχου

6.2.1 Σύγκριση ανά ερώτημα/υποερώτημα

Τα πέντε πρώτα ερωτήματα το καθένα από τα οποία επιδέχονταν μοναδική απάντηση κωδικοποιήθηκαν με 0-1 για λανθασμένες και σωστές απαντήσεις. Στο ερώτημα 6 που αναφέρονταν στην αναγνώριση της συμπεριφοράς μίας γραφικής παράστασης υπήρχαν τέσσερα διαφορετικά υποερωτήματα για κάθε ένα από τα οποία θεωρήθηκε ως μία μεταβλητή κωδικοποιημένη επίσης με 0 και 1. Ο αριθμός των επιτυχών απαντήσεων και των ποσοστών τους, για τα ερωτήματα 1-5 και τα τέσσερα υποερωτήματα του ερωτήματος 6, για την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου αντίστοιχα, παρουσιάζονται στον πίνακα 4. Από την παρατήρηση των ποσοστών επιτυχίας προκύπτει υπεροχή της ομάδας ελέγχου στο ερώτημα 1 και της πειραματικής ομάδας στο ερώτημα 4, ενώ μικροδιαφορές παρουσιάζονται στα υπόλοιπα ερωτήματα και υποερωτήματα.

Από την διεξαγωγή στατιστικών ελέγχων με τα στατιστικά z και z_c προέκυψε στατιστική σημαντικότητα όσον αφορά στην διαφοροποίηση της ομάδας ελέγχου από την πειραματική ομάδα για το ερώτημα 1 (z=2,363, p=0,018 και z_c=2,317, p=0,021). Αντίστοιχα για το ερώτημα 4 στο οποίο υπερείχε η πειραματική ομάδα, προκύπτει στατιστική σημαντικότητα όσον αφορά στη διαφοροποίηση των δύο πληθυσμών (z=2,667, p=0,023 και z_c=2,224, p=0,026). Στα υπόλοιπα ερωτήματα δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση από την διεξαγωγή των στατιστικών ελέγχων.

Στο πρώτο ερώτημα που αναφέρονταν στην αλγεβρική έκφραση του εμβαδού του ορθογωνίου οι μαθητές της ομάδας ελέγχου υπερείχαν με ποσοστό επιτυχίας 83,3% έναντι αντίστοιχου ποσοστού 62% της πειραματικής ομάδας. Όσον αφορά στα λάθη, κάποιοι από τους μαθητές (6 της π.ο., 2 της ο.ε.) παρέλειψαν την παρένθεση στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot 3 + x$. Οι απαντήσεις τους θεωρήθηκαν λανθασμένες διότι δεν είναι σαφές αν αυτοί είχαν αντιληφθεί σωστά την έκφραση του εμβαδού αυτού ως γινόμενο των δύο διαστάσεων του ορθογωνίου ή απλά άθροιζαν το γινόμενο $2 \cdot 3$ με το x. Ένα άλλο χαρακτηριστικό λάθος στο ερώτημα είναι η έκφραση της μίας διάστασης του ορθογωνίου ως γινομένου 3x αντί του αθροίσματος 3+x (5 της π.ο., 3 της ο.ε.). Οι υπόλοιποι μαθητές είτε δεν απάντησαν καθόλου, είτε έκαναν άλλου είδους λάθη.

Ερώτημα	**Επιτυχίες**	**Πειραματική ομάδα**	**Ομάδα ελέγχου**	**Σύνολο**
pre_1	Πλήθος	31	40	71
	%	62,00%	83,30%	72,40%
pre_2	Πλήθος	27	31	59
	%	54,00%	62,50%	58,20%
pre_3	Πλήθος	39	40	79
	%	78,00%	83,33%	80,61%
pre_4	Πλήθος	38	27	65
	%	76,00%	56,25%	66,33%
pre_5	Πλήθος	35	31	66
	%	70,00%	64,58%	67,35%
pre_6a	Πλήθος	48	45	93
	%	96,00%	93,80%	94,90%
pre_6b	Πλήθος	50	48	98
	%	100,00%	100,00%	100,00%
pre_6c	Πλήθος	47	44	91
	%	94,00%	91,70%	92,90%
pre_6d	Πλήθος	50	46	96
	%	100,00%	95,80%	98,00%

Πίνακας 4 Ποσοστά επιτυχίας διαγνωστικού ελέγχου ανά ερώτημα/υποερώτημα και σχολείο

Στο δεύτερο ερώτημα η πειραματική ομάδα είχε την χειρότερη επίδοση σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα ερωτήματα με ποσοστό επιτυχίας 54%. Η ομάδα έλεγχου τα πήγε καλύτερα με αντίστοιχο ποσοστό 62,5%. Ένα χαρακτηριστικό λάθος και για τις δύο ομάδες ήταν η λανθασμένη εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας στο γινόμενο $-3(x-4)$, δίνοντας ως αποτέλεσμα το $-3x-12$ ή το $-3x-3 \cdot 4$ αγνοώντας το πρόσημο του 3 στο δεύτερο γινόμενο (10 της π.ο., 6 της ο.ε). Οι υπόλοιπες λανθασμένες απαντήσεις προέκυψαν από μία ποικιλία λαθών. Στην πειραματική ομάδα π.χ. 4 μαθητές έδωσαν ως σωστή απάντηση την έκφραση 3x-7. Οι μαθητές αυτοί φαίνεται να αγνόησαν την πράξη του πολλαπλασιασμού στην επιμεριστική ιδιότητα και αντί να πολλαπλασιάσουν προσέθεσαν απλά τους εμφανιζόμενους όρους 2x και x, -3 και -4. Στην ίδια ομάδα επίσης 3 μαθητές δεν εφάρμοσαν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιάζοντας το -3 μόνο με το x, αφήνοντας τον όρο -4 ως είχε. Στα λάθη της ομάδας ελέγχουν δεν προέκυψε κάποιου είδους ομαδοποίηση. Ένα χαρακτηριστικό της ομάδας αυτής ήταν ότι κάποιοι μαθητές είχαν την τάση να μην δίνουν το αποτέλεσμα ως μία αλγεβρική παράσταση αλλά ως μία ισότητα διαχωρίζοντας τους γνωστούς από τους αγνώστους όρους, κάτι που δεν παρατηρήθηκε σε κανένα μαθητή της πειραματικής ομάδας.

Στο τρίτο ερώτημα που αναφέρονταν στην επίλυση μίας εξίσωσης οι μαθητές και των δυο ομάδων τα πήγαν αρκετά καλά με ελαφρά υπεροχή του ποσοστού επιτυχίας της ομάδας ελέγχου (83,33% έναντι 78% της π.ο.). Στα λάθη παρατηρήθηκε ότι κάποιοι μαθητές ενώ επέλυαν την εξίσωση φτάνοντας στη σχέση –x=-2 παρέλειπαν να δώσουν την τελική λύση x=2 (2 μαθητές της π.ο., 3 μαθητές της ο.ε.). Τα υπόλοιπα λάθη και στις δύο ομάδες προέκυψαν είτε λόγω της μη μεταβολής του προσήμου κάποιου όρου κατά τη μεταφορά του από το ένα μέρος της εξίσωσης στο άλλο, είτε σε λάθη πράξεων και αναγωγής των ομοίων όρων.

Στο τέταρτο ερώτημα υπερείχε η πειραματική ομάδα με ποσοστό επιτυχίας 76% έναντι 54,2% που ήταν το ποσοστό επιτυχία της ομάδας ελέγχου. Όσον αφορά στα σφάλματα παρατηρήθηκε ότι αρκετοί μαθητές δεν δημιούργησαν την ζητούμενη εξίσωση αλλά προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα κάνοντας πράξεις επί των δεδομένων του προβλήματος (5 μαθητές της π.ο., 6 μαθητές της ο.ε.). Αρκετοί μαθητές επίσης βρήκαν λανθασμένα την εξίσωση x+11=195 (2 μαθητές της π.ο., 5 μαθητές της ο.ε.). Κάποιοι μαθητές επίσης βρήκαν την λανθασμένη εξίσωση x+11x=195 (2 της π.ο., 2 της ο.ε.), εκφράζοντας τα μετάλλια της δεύτερης ομάδας ως 11x αντί να προσθέσουν (11+x). Από τους υπόλοιπους μαθητές κάποιοι βρήκαν λανθασμένη εξίσωση ενώ κάποιοι δεν απάντησαν καθόλου το πρόβλημα (2 μαθητές της π.ο., 3 μαθητές της ο.ε.).

Στο πέμπτο ερώτημα που ήταν ένα ερώτημα αντιστοίχισης μεταξύ τύπου και πίνακα τιμών, οι δύο ομάδες τα πήγαν σχετικά καλά με ελαφρά υπεροχή της πειραματικής ομάδας με ποσοστό επιτυχίας 70% έναντι ποσοστού 65% της ομάδας ελέγχου. Στο έκτο ερώτημα που αναφέρονταν στην ανάγνωση γραφήματος και οι δύο ομάδες τα πήγαν πολύ καλά παρουσιάζοντας υψηλά ποσοστά επιτυχίας (> 90%) και στα τέσσερα σχετικά υποερωτήματα.

6.2.2 Συνολική σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων

Για την συνολική σύγκριση μεταξύ των πληθυσμών των δύο σχολείων δημιουργήθηκε μία νέα μεταβλητή η οποία είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους μεταβλητών κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα ερώτημα ή υποερώτημα του προκαταρκτικού διαγνωστικού ελέγχου (συνολικά 9 μεταβλητές). Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής για την πειραματική ομάδα (μ=7,32 και s=1,57) και την ομάδα ελέγχου (μ=7,33 και s=1,46) δεν υποδεικνύουν διαφορές μεταξύ των δύο πληθυσμών όπως επιβεβαιώθηκε και από την διεξαγωγή σχετικού στατιστικού ελέγχου. Από τον έλεγχο κανονικότητας των δεδομένων με τον έλεγχο Kolomogorov-Smirnov προέκυψε μη κανονική κατανομή (K.S.=0.203, df: 98, p=0). Για τον λόγο αυτό αποφασίστηκε η σύγκριση μεταξύ των δυο πληθυσμών να διεξαχθεί με τον μη παραμετρικό έλεγχο Mann-Whitney. Ο στατιστικός έλεγχος επιβεβαίωσε την αρχική παρατήρηση καθώς δεν απορρίφθηκε η μηδενική υπόθεση περί ισότητας των μέσων τιμών της μεταβλητής για ους δύο συγκρινόμενους πληθυσμούς (U=1181,5 και p=0,883). Επομένως παρά τις μικροδιαφορές που αναφέρθηκαν στα επιμέρους ερωτήματα συνολικά οι δύο πληθυσμοί δεν διαφέρουν και βρίσκονται σε ένα παρόμοιο γνωστικό επίπεδο.

6.3 Αποτελέσματα τελικού ελέγχου

Οι απαντήσεις των ερωτημάτων του τελικού ελέγχου αξιολόγησης κωδικοποιήθηκαν και εξετάστηκαν με παρόμοια διαδικασία. Για τα ερωτήματα με μία μόνο απάντηση θεωρήθηκε μία μοναδική μεταβλητή, ενώ για τις περιπτώσεις που υπήρχαν υποερωτήματα θεωρήθηκε μία ξεχωριστή μεταβλητή για καθένα από αυτά.

6.3.1 Ερώτημα 1

Στο ερώτημα αυτό στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν σε ποιες από τις τέσσερις παρουσιαζόμενες περιπτώσεις ορίζονταν μία συνάρτηση, διακρίθηκαν τέσσερα υποερωτήματα, ένα για κάθε περίπτωση. Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται τα πλήθη των επιτυχιών και τα αντίστοιχα ποσοστά ανά υποερώτημα και σχολείο.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_1a	Πλήθος	46	26	72
	%	92,00%	54,20%	73,50%
post_1b	Πλήθος	43	43	86
	%	86,00%	89,60%	87,80%
post_1c	Πλήθος	30	19	49
	%	60,00%	39,60%	50,00%
post_1d	Πλήθος	25	14	39
	%	50,00%	29,20%	39,80%

Πίνακας 5. Ποσοστά επιτυχίας ανά υποερώτημα και σχολείο του ερωτήματος 1 τελικού ελέγχου

Από την παρατήρηση των ποσοστών επιτυχίας προκύπτει υπεροχή της πειραματικής ομάδας στα υποερωτήματα 1a, 1c και 1d. Από τους στατιστικούς ελέγχους στα παρατηρηθέντα ποσοστά προκύπτει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δυο σχολείων στα υποερωτήματα 1a (z=4,23, p=0 και z_c=4,192 sig.=0), 1c (z=2,019, p=0,043 και z_c=1,978 p=0,048), και 1d (z=2,103, p=0,035 και z_c=2,061, p=0,039).

Η σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας μεταξύ των υποερωτημάτων υποδεικνύει ότι για την πειραματική ομάδα το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (92%) παρατηρείται στο πρώτο υποερώτημα ενώ για την ομάδα ελέγχου στο δεύτερο (89,6%). Και στα δύο υποερωτήματα οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν αν ο πίνακας τιμών μπορεί να εκφράζει μία συνάρτηση. Γενικά τα ποσοστά επιτυχίας της πειραματικής ομάδας ήταν μεγαλύτερα ή ίσα του 50% και στα τέσσερα υποερωτήματα σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου για την οποία τα ποσοστά επιτυχίας του τρίτου και του τετάρτου υποερωτήματος ήταν κάτω από 50%.

Για την σύγκριση του ερωτήματος 1 μεταξύ των δύο σχολείων συνολικά, δημιουργήθηκε βοηθητική μεταβλητή αθροίζοντας για κάθε μαθητή τις επιτυχίες του στα τέσσερα υποερωτήματα. Αρχικά υπολογίστηκαν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής για την πειραματική ομάδα (μ=2,880, s=1,189) και για την ομάδα ελέγχου(μ=2,125, s=1,214). Από τον έλεγχο κανονικότητας των τιμών της νέας μεταβλητής με τον έλεγχο Kolomogorov-Smirnov προέκυψε μη κανονική κατανομή(K.S.=0.209, df=98, p=0). Για τον λόγο αυτό η σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων έγινε με την βοήθεια του μη παραμετρικού ελέγχου Mann- Whitney. O στατιστικός έλεγχος υπέδειξε διαφοροποίηση μεταξύ των δυο πληθυσμών καθώς απορρίφθηκε η μηδενική υπόθεση περί ισότητας των μέσων τιμών της μεταβλητής για ους δύο συγκρινόμενους πληθυσμούς (U=775,0, p=0,002).

6.3.2 Ερώτημα 2

Οι απαντήσεις των πέντε υποερωτημάτων του ερωτήματος 2 που αναφέρεται στην αναγνώριση της συμπεριφοράς μίας καμπύλης κωδικοποιήθηκαν επίσης με 0 ή 1. Στο πρώτο υποερώτημα (2a) οι μαθητές θα έπρεπε να αναγνωρίσουν τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία ήταν 2^o C (τρεις περιπτώσεις). Για το υποερώτημα αυτό διακρίθηκαν τρείς διαφορετικές μεταβλητές (2a_1, 2a_2 2a_3), μία για κάθε περίπτωση που κωδικοποιήθηκαν με τον ίδιο τρόπο. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα πλήθη των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων και τα αντίστοιχα ποσοστά ανά σχολείο για όλα τα υποερωτήματα.

Από τα παρουσιαζόμενα ποσοστά των απαντήσεων (βλέπε πίνακα 6) παρατηρείται μία υπεροχή της πειραματικής ομάδας στα υποερωτήματα 2a_1, 2a_2, 2d και 2e. Οι διαφορές μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας των δύο σχολείων ελέγχθηκαν και με στατιστικούς ελέγχους. Από τα αποτελέσματα επιβεβαιώνεται ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δυο σχολείων σε επίπεδο 95% στο υποερώτημα 2a_2 (z=2,970, p=0,0029 και z_c=2,928, p=0,0034). Σε επίπεδο 90% επίσης παρατηρήθηκε διαφοροποίηση τα υποερωτήματα 2d (z=1,858, p=0,063 και z_c=1,810, p=0,070) και 2e (z=1,815, p=0,069 και z_c=1,744, p=0,080).

Στο πρώτο υποερώτημα στο οποίο οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν την χρονική στιγμή για την οποία η θερμοκρασία είναι 2^o C, πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας (ποσοστό 10%) δεν μπόρεσαν να εντοπίσουν καμία από τις τρεις χρονικές στιγμές που παρατηρείται το φαινόμενο. Ο αντίστοιχος αριθμός μαθητών της ομάδας ελέγχου ήταν 11 μαθητές (ποσοστό 23%). Το χαρακτηριστικότερο λάθος και στους δύο πληθυσμούς ήταν ότι οι μαθητές θεωρούσαν ότι η θερμοκρασία αυτή παρατηρείται την $2^η$ ώρα, ταυτίζοντας την τιμή 2 στον άξονα της θερμοκρασίας με την χρονική στιγμή που αυτή παρατηρείται. Οι περισσότεροι μαθητές και στους δύο πληθυσμούς βρήκαν την χρονική στιγμή 0, παραλείποντας τις άλλες δύο περιπτώσεις, ενώ λιγότεροι βρήκαν μόνο την τιμή 11, παραλείποντας τις άλλες 2 τιμές.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_2a_1	Πλήθος	40	35	80
	%	80,00%	72,91%	81,60%
post_2a_2	Πλήθος	26	11	31
	%	52,00%	22,91%	31,60%
post_2a_3	Πλήθος	16	16	35
	%	32,00%	33,33%	35,70%
post_2b	Πλήθος	49	48	97
	%	98,00%	100,00%	99,00%
post_2c	Πλήθος	50	46	96
	%	100,00%	95,80%	98,00%
post_2d	Πλήθος	42	33	76
	%	84,00%	68,80%	77,60%
post_2e	Πλήθος	48	41	88
	%	96,00%	85,40%	89,80%

Πίνακας 6. Ποσοστά επιτυχίας ανά υποερώτημα και σχολείο του ερωτήματος 2 του τελικού ελέγχου

Στα υποερωτήματα 2b και 2c σχεδόν όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας και τις χρονικές στιγμές που αυτές παρατηρούνται επιτυγχάνοντας πολύ υψηλά ποσοστά επιτυχίας.

Στο υποερώτημα 2d οι μαθητές με λανθασμένες απαντήσεις δεν κατάφεραν να εντοπίσουν σωστά το ζητούμενο διάστημα στο οποίο παρατηρείται αρνητική θερμοκρασία. Κάποιοι μαθητές ανέφεραν μόνο τις ακέραιες τιμές του διαστήματος ενώ άλλοι περιόριζαν το ζητούμενο διάστημα από την $3^η$ έως την $9^η$ ώρα.

Στο υποερώτημα 2e οι μαθητές με λανθασμένη απάντηση δεν προσδιόρισαν με ακρίβεια τη ζητούμενη τιμή στρογγυλοποιώντας την στις τιμές 3 ή 4.

Για την σύγκριση του ερωτήματος 2 μεταξύ των δύο σχολείων συνολικά, δημιουργήθηκε βοηθητική μεταβλητή αθροίζοντας για κάθε μαθητή τις επιτυχίες του στα επτά υποερωτήματα. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τιμών της νέας μεταβλητής για την πειραματική ομάδα (μ=5,440 και s=1,311) και την ομάδα ελέγχου (μ=4,791 και s=1,336) υποδεικνύουν διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών η οποία ελέγχθηκε στατιστικά. Μετά τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov των τιμών της νέας μεταβλητής απορρίφθηκε η μηδενική υπόθεση περί κανονικότητας των δεδομένων (K.S.=0.220, df=98, p=0). Για τον λόγο αυτό τα αποτελέσματα για τα δύο σχολεία συγκρίθηκαν με το μη παραμετρικό τεστ Mann-Whitney. Το μη παραμετρικό τεστ επιβεβαίωσε τα επιμέρους αποτελέσματα υποδεικνύοντας στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών (U=869, p=0,021).

6.3.3 Ερώτημα 3

Στο ερώτημα 3 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν την σωστή συνάρτηση μεταξύ τεσσάρων που περιέγραφε το λεκτικό πρόβλημα. Οι σωστές και οι λανθασμένες απαντήσεις ανά σχολείο παρουσιάζονται στον πίνακα 7.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_3	Πλήθος	43	37	80
	%	86,00%	77,10%	81,60%

Πίνακας 7. Ποσοστά επιτυχίας ανά σχολείο του ερωτήματος 3 του τελικού ελέγχου

Από την παρατήρηση των ποσοστών επιτυχίας δεν προκύπτει διαφοροποίηση μεταξύ των δύο σχολείων, όπως επιβεβαιώνεται και από τους στατιστικούς ελέγχους που διεξήχθησαν στη συνέχεια ($z=1{,}138$, $p=0{,}255$ και $z_c=1{,}085$, $p=0{,}278$). Οι επτά λανθασμένες απαντήσεις της πειραματικής ομάδας μοιράστηκαν στις επιλογές: α, (3 μαθητές) και γ, (4 μαθητές). Οι ένδεκα λανθασμένες απαντήσεις της ομάδας ελέγχου κατανεμήθηκαν στις επιλογές: α (5 μαθητές), β (3 μαθητές) και γ (3 μαθητές).

6.3.4 Ερώτημα 4

Στο ερώτημα 3 οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν την κλίση και να επιλέξουν την σωστή συνάρτηση μεταξύ τεσσάρων σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Διακρίθηκαν λοιπόν δύο υποερωτήματα, ένα για κάθε περίπτωση. Οι σωστές και οι λανθασμένες απαντήσεις ανά υποερώτημα και σχολείο παρουσιάζονται στον πίνακα 8.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_4a	Πλήθος	43	32	75
	%	86,00%	66,70%	76,50%
post_4b	Πλήθος	40	38	78
	%	80,00%	79,20%	79,60%

Πίνακας 8. Ποσοστά επιτυχίας ανά υποερώτημα και σχολείο του ερωτήματος 4 του τελικού ελέγχου

Από την παρατήρηση των ποσοστών επιτυχίας ανά σχολείο προκύπτει υπεροχή της πειραματικής ομάδας στο πρώτο υποερώτημα 4a όπως επιβεβαιώθηκε και μετά την διεξαγωγή στατιστικού ελέγχου ($z=2{,}254$, $p=0{,}024$ και $z_c=2{,}206$, $p=0{,}027$). Αντίθετα στο υποερώτημα 4b δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση.

Οι επτά λανθασμένες απαντήσεις της πειραματικής ομάδας στο υποερώτημα 4a μοιράστηκαν στις απαντήσεις: i (2 μαθητές), ii (3 μαθητές) και iii (2 μαθητές). Στο ίδιο υποερώτημα οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της ομάδας ελέγχου κατανεμήθηκαν στις απαντήσεις: i (4 μαθητές), ii (10 μαθητές), iii (2 μαθητές). Οι μαθητές που επέλεξαν τις απαντήσεις i και iii δεν αναγνώρισαν σωστά ούτε καν το πρόσημο της κλίσης καθώς για μία ευθεία με θετική κλίση επέλεξαν τύπους συνάρτησης στους οποίους η κλίση ήταν αρνητική. Οι υπόλοιποι μαθητές που επέλεξαν την απάντηση ii, προέβλεψαν σωστά το πρόσημο της κλίσης, απέτυχαν όμως στον υπολογισμό της.

Στο υποερώτημα 4β στο οποίο ζητούνταν η αναγνώριση του τύπου μίας συνάρτησης με αρνητική κλίση, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με το 4a, καθώς έδωσαν λανθασμένη απάντηση 10 μαθητές. Οι λανθασμένες απαντήσεις κατανεμήθηκαν στις επιλογές iii (5 μαθητές) και iv (5 μαθητές). Στο ίδιο υποερώτημα οι μαθητές της ομάδας ελέγχου τα πήγαν καλύτερα σε σχέση με το υποερώτημα 4a καθώς οι λανθασμένες επιλογές περιορίστηκαν σε δέκα μαθητές. Οι λανθασμένες απαντήσεις κατανεμήθηκαν στις επιλογές: ii (2 μαθητές), iii (4 μαθητές) και iv (1 μαθητής), ενώ τρεις μαθητές άφησαν το ερώτημα αναπάντητο. Όπως και στο υποερώτημα 4a, οι μαθητές που επέλεξαν τις απαντήσεις ii και iii δεν αναγνώρισαν σωστά το πρόσημο της κλίσης καθώς για μία ευθεία με αρνητική κλίση επέλεξαν τύπους συνάρτησης στους οποίους η κλίση ήταν θετική. Οι μαθητές που επέλεξαν την απάντηση iv, προέβλεψαν σωστά το πρόσημο της κλίσης, απέτυχαν όμως στον υπολογισμό της.

6.3.5 Ερώτημα 5

Στο ερώτημα 5 οι μαθητές έπρεπε να επιλύσουν πρόβλημα απαντώντας σε δύο υποερωτήματα. Στο πρώτο υποερώτημα οι μαθητές θα έπρεπε να ορίσουν μία γραμμική συνάρτηση με βάση τα δεδομένα, την οποία και να χρησιμοποιήσουν στη συνέχεια για την απάντηση του δευτέρου υποερωτήματος. Συγκεκριμένα δίνονταν η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y και ζητούμενο ήταν ο υπολογισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Για κάθε ένα από τα δύο ορίσθηκαν δύο μεταβλητές. Το πλήθος των σωστών απαντήσεων και τα αντίστοιχα ποσοστά επιτυχίας ανά υποερώτημα και σχολείο παρουσιάζονται στον πίνακα 9.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_5a	Πλήθος	42	33	75
	%	84,00%	68,80%	76,50%
post_5b	Πλήθος	25	21	46
	%	50,00%	43,80%	46,90%

Πίνακας 9. Ποσοστά επιτυχίας ανά υποερώτημα και σχολείο του ερωτήματος 5 του τελικού ελέγχου

Από την παρατήρηση των ποσοστών των σωστών απαντήσεων προκύπτει υπεροχή στην πειραματική ομάδα (σημαντικότερη στο πρώτο, ασθενέστερη στο δεύτερο υποερώτημα). Ο στατιστικός έλεγχος υπέδειξε στατιστικά σημαντικότερη διαφοροποίηση σε επίπεδο 90% μόνο στο πρώτο υποερώτημα ($z=1,776$, $p=0,076$ και $z_c=1,727$, $p=0,084$).

Στην πειραματική ομάδα 8 μαθητές δεν κατάφεραν να προσδιορίσουν σωστά τον ζητούμενο τύπο της συνάρτησης στο πρώτο υποερώτημα, αν και ορισμένοι από αυτούς προσδιόρισαν σωστά τον γενικό της τύπο. Στην ομάδα ελέγχου οι λανθασμένες απαντήσεις στο υποερώτημα ήταν περισσότερες (15 μαθητές). Πέντε από τους μαθητές αυτούς ενώ δεν βρήκαν τον ζητούμενο τύπο της συνάρτησης κατάφεραν να απαντήσουν σωστά το επόμενο υποερώτημα με τις τεχνικές υπολογισμού που γνώριζαν ήδη από το δημοτικό σχολείο για τα ανάλογα ποσά.

Στο δεύτερο υποερώτημα οι μισοί μαθητές της πειραματικής ομάδας (25 μαθητές) δεν κατάφεραν να κάνουν σωστά τον ζητούμενο υπολογισμό. Από αυτούς 13 μαθητές, ενώ ακολούθησαν σωστά την διαδικασία, δεν κατέληξαν σε σωστό αποτέλεσμα διότι δεν έκαναν την απαραίτητη μετατροπή μονάδας (από m σε cm). Τέσσερις μαθητές από τους υπόλοιπους έκαναν λάθος αντικατάσταση της τιμής της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής y στη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Οι υπόλοιποι μαθητές είτε άφησαν το ερώτημα αναπάντητο είτε έκαναν άλλα λάθη. Στην ομάδα ελέγχου εντελώς ανάλογα από τους μαθητές με λανθασμένη απάντηση (27 άτομα) οι ένδεκα παρέλειψαν την μετατροπή της μονάδας (από m σε cm). Από τους υπόλοιπους οι τρεις εφάρμοσαν λάθος τον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστώντας την τιμή εξαρτημένης μεταβλητής y στη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, ένας κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα με χρήση της μεθόδου των τριών, ενώ αρκετοί δεν απάντησαν το ερώτημα.

6.3.6 Ερώτημα 6

Στο ερώτημα 6 οι μαθητές θα έπρεπε να συγκρίνουν δύο περιπτώσεις ευθύγραμμης ομαλής κίνησης που η μία εκφράζεται από διάγραμμα διαστήματος χρόνου ενώ η δεύτερη από αντίστοιχο τύπο. Οι απαντήσεις πινακοποιήθηκαν και τα αντίστοιχα ποσοστά επιτυχίας ανά σχολείο παρουσιάζονται στον πίνακα 10.

Ερώτημα	Επιτυχίες	Πειραματική ομάδα	Ομάδα ελέγχου	Σύνολο
post_6a	Πλήθος	37	31	68
	%	74,00%	64,60%	69,40%

Πίνακας 10. Ποσοστά επιτυχίας ανά ομάδα του ερωτήματος 6 του τελικού ελέγχου

Αν και παρατηρήθηκε μία ελαφρά υπεροχή της πειραματικής ομάδας στο ποσοστό επιτυχίας, από τον στατιστικό έλεγχο δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο σχολείων ($z=1{,}009$, $p=0{,}313$ και $z_c=0{,}965$, $p=0{,}334$). Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που απάντησαν σωστά χρησιμοποίησαν ποικιλία στρατηγικών. Οι περισσότεροι συνέκριναν την διανυόμενη απόσταση για δεδομένο χρόνο και έβγαλαν το σωστό συμπέρασμα. Κάποιοι άλλοι δημιούργησαν πίνακα τιμών για τις δύο περιπτώσεις ενώ άλλοι θεώρησαν τους τύπους των δύο συναρτήσεων και ερμήνευσαν σωστά τις δύο κλίσεις. Οι λανθασμένες απαντήσεις τους δεν είναι δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν παρά μόνο μπορεί να ειπωθεί ότι τα επιχειρήματα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις απαντήσεις τους δεν ήταν τεκμηριωμένα.

6.3.7 Συνολική σύγκριση μεταξύ των δύο σχολείων

Για την συνολική σύγκριση μεταξύ των πληθυσμών των δύο σχολείων δημιουργήθηκε μία νέα μεταβλητή η οποία είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους μεταβλητών κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα ερώτημα ή υποερώτημα του τελικού διαγνωστικού ελέγχου (συνολικά 17 μεταβλητές). Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής αυτής συνολικά είναι μ=11,938 και s=3,069 αντίστοιχα. Οι επιμέρους τιμές των δύο στατιστικών μεγεθών για την πειραματική ομάδα ήταν μ=12,92 και s=3,24, ενώ για την ομάδα ελέγχου ήταν μ=10,92 και s=2,52. Από τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov απορρίφθηκε οριακά η μηδενική υπόθεση περί κανονικότητας των τιμών της συνολικής μεταβλητής (K.S=0,09, df=98, p= 0,051).

Για τον λόγο αυτό αποφασίστηκε η σύγκριση μεταξύ των δυο πληθυσμών να διεξαχθεί με τον μη παραμετρικό έλεγχο Mann-Whitney. Ο στατιστικός αυτός έλεγχος υπέδειξε διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών και απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης (U=722,5 και p=0,001).

6.4 Αντιστοίχιση ερωτημάτων τελικού ελέγχου με τα ερευνητικά ερωτήματα

Τα αποτελέσματα του τελικού διαγνωστικού ελέγχου είναι αυτά που καθορίζουν την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης πειραματικής διδασκαλίας σε σχέση με τον συμβατικό τρόπο διδασκαλίας στην ομάδα ελέγχου σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αναφέρεται στην αποτελεσματικότητα ή μη της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στην διδασκαλία. Αυτό το ερευνητικό ερώτημα μπορεί να θεωρηθεί ότι συσχετίζεται άμεσα με τα ερωτήματα 1, 2, 4 και 6 του τελικού ελέγχου, τα οποία περιλαμβάνουν εικόνες και γραφήματα που αποτελούν και το πλέον ισχυρό χαρακτηριστικό των ψηφιακών εργαλείων, αν και μπορεί κάποιος να ισχυρισθεί ότι θα μπορούσαν να ληφθεί υπ' όψη το σύνολο των ερωτημάτων του τελικού ελέγχου, με την έννοια ότι η χρήση των ψηφιακών εργαλείων επιδρά συνολικά στην μαθηματική ικανότητα και την επίλυση προβλημάτων πέρα από την στενή προσέγγιση του θέματος σε σχέση με τις γραφικές απεικονίσεις.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα που αναφέρεται στη χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων στη διδασκαλία των συναρτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι συσχετίζεται με τα ερωτήματα 3, 5α και 5β του τελικού ελέγχου.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα που αναφέρεται στους κοινωνικομαθηματικοί κανόνες που αναπτύσσονται στην τάξη των μαθηματικών σε ένα περιβάλλον με χρήση ψηφιακών εργαλείων και ρεαλιστικών προβλημάτων στη διδακτική διαδικασία σχετίζεται με όλα τα ερωτήματα του τελικού ελέγχου. Η απάντησή του όμως προκύπτει ευρύτερα από τις παρατηρήσεις του ερευνητή εκπαιδευτικού ερευνητή καθώς επίσης και του παρατηρητή της έρευνας, ενώ βοήθησε επίσης και η ηχητική καταγραφή όλων των μαθημάτων μέσα στην τάξη.

Το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα που αναφέρεται στη διασύνδεση μαθηματικών και φυσικής στη διδασκαλία των συναρτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι συσχετίζεται άμεσα με το ερώτημα 6 του τελικού διαγνωστικού ελέγχου, που αφορά σε ένα πρόβλημα ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και την σύγκριση μεταξύ δύο διαφορετικών του εκφράσεων, μίας με τη μορφή συνάρτησης και μίας με τη μορφή γραφικής παράστασης διαστήματος ως προς τον χρόνο.

6.5 Σύγκριση των δύο πειραματικών ομάδων επί των ερευνητικών ερωτημάτων

Για την σύγκριση των δύο πειραματικών ομάδων επί των ερευνητικών ερωτημάτων προέκυψε η ανάγκη δημιουργίας δύο νέων μεταβλητών με την άθροιση των επιμέρους ερωτημάτων που αντιστοιχούν στο πρώτο και στο δεύτερο ερευνητικά ερωτήματα.

6.5.1 Ερευνητικό ερώτημα 1

Η μεταβλητή για τη σύγκριση επί του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος δημιουργήθηκε από την άθροιση των δεκατεσσάρων επιμέρους μεταβλητών που αντιστοιχούν στα ερωτήματα 1, 2, 4 και 6 ή στα επιμέρους τους υποερωτήματα (4 μεταβλητές για το ερώτημα 1, 7 μεταβλητές για το ερώτημα 2, 2 μεταβλητές για το ερώτημα 4 και 1 μεταβλητή για το ερώτημα 6).

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τιμών της νέας μεταβλητής για την πειραματική ομάδα (μ=10,720 και s=2,556) και την ομάδα ελέγχου (μ=9,020 και s=2,129) υποδεικνύουν υπεροχή της πειραματικής ομάδας. Στην συνέχεια ελέγχθηκε στατιστικά η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών. Επειδή από τον έλεγχο κανονικότητας των τιμών της μεταβλητής με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov απορρίφθηκε η μηδενική υπόθεση περί κανονικότητας των δεδομένων (K.S.=0,105, df=98, p=0,01 τα αποτελέσματα για τα δύο σχολεία συγκρίθηκαν με το μη παραμετρικό τεστ Mann-Whitney. Το μη παραμετρικό τεστ υπέδειξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών (U=712, p=0,000).

6.5.2 Ερευνητικό ερώτημα 2

Η μεταβλητή για τη σύγκριση επί του δευτέρου ερευνητικού ερωτήματος δημιουργήθηκε από την άθροιση των τριών μεταβλητών που αντιστοιχούν στα ερωτήματα 3, 5α και 5β.

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τιμών της νέας μεταβλητής για την πειραματική ομάδα (μ=2,200 και s=0,969) και την ομάδα ελέγχου (μ=1,896 και s=0,951) υποδεικνύουν ελαφρά υπεροχή της πειραματικής ομάδας. Στην συνέχεια ελέγχθηκε στατιστικά η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών. Επειδή από τον έλεγχο κανονικότητας των τιμών της μεταβλητής με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov απορρίφθηκε η μηδενική υπόθεση περί κανονικότητας των δεδομένων (K.S.=0,244, df=98, p=0,000) τα αποτελέσματα για τα δύο σχολεία συγκρίθηκαν με το μη παραμετρικό τεστ Mann-Whitney. Το τεστ υπέδειξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο πληθυσμών (U=957,5, p=0,067) σε χαμηλότερο όμως επίπεδο σημαντικότητας σε σχέση με το προηγούμενο ερευνητικό ερώτημα.

6.5.3 Ερευνητικό ερώτημα 3

Οι καταγραφές του διδάσκοντα ερευνητή και του παρατηρητή που ήταν παρών σε όλα τα μαθήματα της πειραματικής ομάδας, σε γενικές γραμμές υπέδειξαν μία θετική στάση των μαθητών στις δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης. Ιδιαίτερα οι δραστηριότητες στο Geogebra που περιελάμβαναν χρήση διαδραστικού πίνακα με ενεργό συμμετοχή και εμπλοκή των μαθητών, κέντρισαν το ενδιαφέρον τους και βοήθησαν στην δημιουργία ενός δημιουργικού κλίματος μέσα στην τάξη. Οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος δεν ήταν πάντα το ίδιο αποτελεσματικές ιδιαίτερα στο ένα από τα δύο τμήματα στο οποίο υπήρχαν περισσότεροι ατίθασοι μαθητές. Στην δημιουργία του θετικού κλίματος μέσα στην τάξη και στην επικοινωνία συνέβαλε επίσης η χρήση πολλαπλών μορφών απόδοσης του μαθηματικού νοήματος. Στις μορφές αυτές πέραν του προφορικού λόγου και των λεκτικών διατυπώσεων και περιγραφών και των μαθηματικών συμβόλων, ιδιαίτερα σημαντική ήταν η εικονιστική λειτουργία μέσω του πλούτου των αναπαραστάσεων όπως οι πίνακες, οι τύποι και οι γραφικές παραστάσεις που εξασφαλίσθηκε μέσω της χρήσης του Η/Υ και των ψηφιακών εργαλείων.

6.5.4 Ερευνητικό ερώτημα 4

Η σύγκριση των δύο σχολείων όσον αφορά στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα προκύπτει από την σύγκριση του έκτου ερωτήματος του τελικού ελέγχου που παρουσιάστηκε στην αντίστοιχη ενότητα. Στο ερώτημα αυτό παρατηρήθηκε μεν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας της πειραματικής ομάδας που όμως δεν επιβεβαιώθηκε και στατιστικά από τον ανάλογο έλεγχο.

6.6 Συζήτηση – συμπεράσματα

Σύμφωνα με τα πρότυπα της NCTM ένας μεγάλος στόχος στη διδασκαλία των μαθηματικών στις μεσαίες βαθμίδες είναι η ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών ώστε να είναι σε θέση να αναλύουν μία ποικιλία φαινομένων και σχέσεων σε μαθηματικά προβλήματα ή στον πραγματικό κόσμο. Σήμερα με την χρήση των ψηφιακών εργαλείων για την δημιουργία γραφικών αναπαραστάσεων και την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων οι μαθητές μπορούν να εστιάζουν στην χρήση συναρτήσεων για την μοντελοποίηση προτύπων ποσοτικών μεταβολών. Μέσω της επίλυσης προβλημάτων και της μοντελοποίησης καταστάσεων τα μαθηματικά παύουν να είναι ένα αφηρημένο αντικείμενο και συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις που έχουν άμεση σχέση με τις εμπειρίες των μαθητών και οι συναρτήσεις από ένα θεωρητικό αλγεβρικό κατασκεύασμα μετατρέπονται σε ένα εργαλείο για την μελέτη του πραγματικού κόσμου. Οι καταστάσεις και τα προβλήματα μπορεί να αποτελέσουν το πλαίσιο για την δόμηση και οργάνωση των δραστηριοτήτων της διδασκαλίας που θα επιτρέψει τους μαθητές να ασχοληθούν με το διαδικαστικό-λειτουργικό επίπεδο των συναρτήσεων. Οι δραστηριότητες αυτές και οι διαδικασίες των υπολογισμών αποκτούν νόημα καθώς υλοποιούνται για την απάντηση ερωτημάτων που έχουν κάποιο φυσικό νόημα. Ο πλούτος των προβλημάτων κα η ποικιλία των αναπαραστάσεών τους θα βοηθήσει τους μαθητές να εμπεδώσουν την συνάρτηση-αντικείμενο, ώστε να είναι σε θέση να διακρίνουν π.χ. αν μία συνάρτηση είναι γραμμική ή όχι, αν η κλίση της είναι θετική ή αρνητική κ.λπ.

Στο πλαίσιο αυτό οργανώθηκε και υλοποιήθηκε η παρούσα έρευνα σχεδιασμού για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας ενός νέου προγράμματος διδασκαλίας των συναρτήσεων σε σύγκριση με το αντίστοιχο συμβατικό πρόγραμμα. Η συνολική στατιστική σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων υπέδειξε υπεροχή της πειραματικής ομάδας και της προτεινόμενης διδακτικής παρέμβασης σε σχέση με την συμβατική διδασκαλία της ομάδα ελέγχου. Η περαιτέρω διερεύνηση επί των ερευνητικών ερωτημάτων μέσω της αντιστοίχισης σε αυτά ερωτημάτων του τελικού ελέγχου υποδεικνύει ότι τα αποτελέσματα όσον αφορά στη σύγκριση μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου είναι θετικά για το πρώτο και το δεύτερο ερευνητικά ερωτήματα που εστιάζουν στην χρήση ψηφιακών εργαλείων και στη χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων στην διδασκαλία αντίστοιχα. Αντίθετα στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα που αναφέρεται στη χρήση προβλημάτων της φυσικής στην διδακτική διαδικασία δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο πειραματικών ομάδων.

Η Kalchman, (2002) υιοθετώντας μία λογική σταδίων κατά Piaget και υιοθετώντας τις τρείς βασικές αρχές για την μάθηση σύμφωνα με τους Donovan & Bransford, (2005), ανέπτυξε μία διδακτική πρόταση για τις συναρτήσεις εστιάζοντας στην εννοιολογική κατανόηση και βασιζόμενη σε πραγματικά προβλήματα. Στην έρευνά της απέδειξε πειραματικά ότι μία τέτοιου είδους προσέγγιση είναι πιο αποτελεσματική στη μάθηση από την παραδοσιακή διδασκαλία για μαθητές της όγδοης και της δέκατης βαθμίδας. Στις μέρες μας επίσης όλο και περισσότερο χρησιμοποιούνται τα ψηφιακά εργαλεία και οι on-line εφαρμογές στη διδασκαλία. Οι Doorman et al., (2012), μελετώντας την χρήση εργαλείων και το κατά πόσο η χρήση αυτή βοηθά στην μετάβαση από μία διαδικαστική σε μία δομική άποψη στη διδασκαλία των συναρτήσεων, κατέληξαν σε θετικά συμπεράσματα. Διαπίστωσαν ότι η εννοιολογική ανάπτυξη στο θέμα των συναρτήσεων προάγεται από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που παρέχουν τα ψηφιακά εργαλεία, ιδιαίτερα στις εισαγωγικές δραστηριότητες και προτείνουν τα εργαλεία αυτά να χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με εργασία επί χάρτου. Αντίθετα οι Drijvers, Doorman, Kirschner, Hoogveld, & Boon, (2014), οι οποίοι διερεύνησαν πειραματικά την αποτελεσματικότητα των on-line δραστηριοτήτων στη διδασκαλία της άλγεβρας, βρήκαν ότι τα αποτελέσματα της πειραματικής ομάδας ήταν ελαφρά χαμηλότερα από την ομάδα ελέγχου στην οποία η διδασκαλία έγινε με συμβατικές μεθόδους.

Η δύναμη της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης στη διδασκαλία διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων έγκειται στο γεγονός ότι αυτή γεφυρώνει τα ανεπίσημα με τα επίσημα μαθηματικά, καθώς με την προσέγγιση αυτή τα άτυπα μαθηματικά δεν υποβαθμίζονται αλλά χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη των τυπικών μαθηματικών. Κατά την μετάβαση των μαθητών μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράσταση της συνάρτησης αυτοί μπορούν να αντιληφθούν ότι οι όποιες διαφορές μεταξύ των μορφών είναι επιφανειακές και στην πραγματικότητα διασυνδέονται από μία κύρια έννοια, την έννοια της συνάρτησης (Makonye, 2014). Τα πλεονεκτήματα στη διδασκαλία που προσφέρει η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση στην υποστήριξη της διαδικασίας επανανακάλυψης των μαθηματικών και της μετάβασης από τα άτυπα στα τυπικά μαθηματικά διερεύνησαν επίσης οι Gravemeijer & Doorman, (1999), οι οποίοι μελέτησαν τη χρήση προβλημάτων πλαισίου που αναφέρονται σε ρεαλιστικές καταστάσεις για τους μαθητές στην διδασκαλία του διαφορικού λογισμού.

Το πρώτο από τα ερωτήματα του τελικού ελέγχου που αναφέρεται στην αναγνώριση του κατά πόσον μία αναπαράσταση με την μορφή πίνακα ή γραφήματος αποτελεί συνάρτηση είχε μικρά ποσοστά επιτυχίας αν και αυτά της πειραματικής ομάδας ήταν σχετικά υψηλότερα. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν τους ενδοιασμούς που έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς για την ικανότητα των μαθητών του Γυμνασίου να αντιληφθούν σε αυστηρό θεωρητικό επίπεδο την έννοια της συνάρτησης (Panaoura et al., 2017; Sierpinska, 1992).

Η χρήση προβλημάτων φυσικής στη διδασκαλία των συναρτήσεων που διερευνήθηκε στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο της διαθεματικότητας της διδασκαλίας των θετικών μαθημάτων, που στις μέρες μας αποδίδεται με τον όρο STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Κατά την McDonald, (2016), που πραγματοποίησε μία εκτεταμένη ανασκόπηση των ευρημάτων από 237 ερευνητικές εργασίες, υπάρχουν τρεις κύριοι παράγοντες που θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στην προσπάθεια της επιτυχούς εφαρμογής των αρχών STEM στην διδασκαλία και μάθηση στα σχολεία. Ο πρώτος αναφέρεται στην αποσύνδεση που υπάρχει στις μέρες μας στα αντικείμενα του STEM στο Γυμνάσιο και στην ανάγκη της διατήρησης των κινήτρων και του ενδιαφέροντος των μαθητών στα θέματα STEM. Ο δεύτερος έχει σχέση με τις αρχές της ενεργούς μάθησης και της δημιουργικότητας μέσω της εμπλοκής του μαθητή σε αυθεντικές καταστάσεις και στην επίλυση προβλημάτων. Ο τρίτος και ίσως ο σημαντικότερος παράγοντας αναφέρεται στο ρόλο του δασκάλου καθώς ένας καλός δάσκαλος επιδρά θετικά στις στάσεις και τα κίνητρα καθώς και στην προαγωγή της μάθηση των μαθητών. Αν και στην παρούσα έρευνα υιοθετήθηκαν τουλάχιστον οι δύο πρώτοι παράγοντες, τα ερευνητικά αποτελέσματα όσον αφορά στην απάντηση του τέταρτου ερευνητικού ερωτήματος που αναφέρεται στην χρήση των προβλημάτων της φυσικής στη διδασκαλία, δεν απέδειξαν στατιστικά σημαντική υπεροχή της πειραματικής ομάδας. Κατά την McDonald, (2016) «το όλο είναι περισσότερο από τα μέρη» και η πειθαρχική προσέγγιση στην εξέταση των αντικειμένων STEM έχει εγγενείς αδυναμίες και υπάρχει ανάγκη ευρύτερων διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη μελλοντική έρευνα. Ίσως θα ήταν καλύτερα οι σχετικές δραστηριότητες να υλοποιούνται σε εργαστηριακό περιβάλλον και σε ένα διεπιστημονικό-διαθεματικό πλαίσιο σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό της Φυσικής.

Τα τελευταία χρόνια, οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών εξετάζουν την μαθηματική γνώση σε σχέση με τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και δασκάλων και τον τρόπο που αυτοί λειτουργούν μέσα στην τάξη. Στο πλαίσιο αυτό μελετώνται οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες (Yackel & Cobb, 1996) της τάξης, τα κανονιστικά δηλαδή πρότυπα μέσω των οποίων οι μαθητές μέσα στις κοινότητες των τάξεων δημιουργούν και δικαιολογούν τη μαθηματική γνώση. Οι νόρμες αυτές αποτέλεσαν το αντικείμενο του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, το τελικό γνωστικό επίτευγμα καθορίζεται σημαντικά από τη γενικότερη δυναμική της τάξης και οι δραστηριότητες κατά την διδασκαλία θα πρέπει να μελετώνται όχι ξέχωρα αλλά εντός του ευρύτερου κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου της τάξης. Ο μαθητής διαμορφώνει την αντίληψή του για τον ρόλο του μέσα στην τάξη, τα πιστεύω του για τα μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση, μέσω της συμμετοχής του και της συνεισφοράς του στις κοινωνικομαθηματικές νόρμες και στην μαθηματική πρακτική στην κοινότητα της τάξης. Οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες δεν επιβάλλονται εξωτερικά αλλά δημιουργούνται και διαμορφώνονται συνεχώς μέσα στην τάξη. Οι νόρμες αυτές υπάρχουν σε όλες τις τάξεις των μαθηματικών, διαφέρουν όμως από τάξη σε τάξη και εξαρτώνται από το πόσο η διδασκαλία είναι εστιασμένη στο μαθητή ή στο δάσκαλο. Στην παρούσα έρευνα το πλαίσιο της διδασκαλίας και το περιεχόμενο των διδακτικών δραστηριοτήτων διαμόρφωσαν ένα ποιοτικό μαθηματικό περιβάλλον που βοήθησε στην εκπλήρωση των διδακτικών στόχων που είχαν τεθεί αρχικά., καθώς η δημιουργία της μαθηματικής γνώσης μέσα στην τάξη αποτελεί μία δυναμική διαδικασία που εξελίσσεται μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ δασκάλου και μαθητών (Bauersfeld, 1995). Το διδακτικό πλαίσιο επίσης και οι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες κατά τη διδασκαλία αποτέλεσαν στοιχεία του ευρύτερου «διδακτικού συμβολαίου» της τάξης, που αποτελεί μια ερμηνεία των δεσμεύσεων, των προσδοκιών, των πεποιθήσεων, των μέσων, των αποτελεσμάτων και των κυρώσεων που προβλέπονται από κάποιον εκ των πρωταγωνιστών μιας διδακτικής κατάστασης (μαθητής, δάσκαλος, γονείς, κοινωνία) γι 'αυτόν και για καθένα από τους άλλους σε σχέση με τη μαθηματική γνώση που διδάσκεται (Brousseau, 1997).

Οι δραστηριότητες που επελέγησαν στην διδακτική διαδικασία αποτέλεσαν ένα ουσιώδη παράγοντα για την επιτυχή υλοποίησή της όπως ορίζεται και από την θεωρητική τεκμηρίωση τόσο της κοινωνικοπολιτισμικής όσο και της κονστρουβιστικής προσέγγιση στην μαθηματική γνώση. Στην κονστρουβιστική προσέγγιση, αν και αναγνωρίζεται ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση μπορεί να επιδράσει στη μάθηση, η γνώση θεωρείται αποκλειστικά ως ένα ατομικό ψυχολογικό επίτευγμα. Αντίθετα η κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση για τη γνωστική ανάπτυξη θέτει μια διαλεκτική σχέση μεταξύ του ατόμου και του κοινωνικού πλαισίου στο οποίο αυτό αναπτύσσεται. Η προσέγγιση αυτή δίνει έμφαση αφενός μεν στην κοινωνική συμμετοχή και στην συλλογική δράση καθώς θεωρείται ότι η κοινότητα είναι πιο αποτελεσματική όταν εργάζεται συλλογικά για την επίτευξη ενός κοινού σκοπού, αφετέρου δε στην αυθεντικότητα των έργων στα οποία είναι ενσωματωμένη η μάθηση (π.χ. ρεαλιστικά μαθηματικά). Οι παραπάνω αρχές υιοθετήθηκαν και στην παρούσα έρευνα με θετικό πρόσημο όπως αποδεικνύεται και από τα αποτελέσματά της.

Οι αρχές που υιοθετήθηκαν κατά την διδασκαλία καθώς και το περιεχόμενο και το είδος των διδακτικών δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν εντάσσουν την παρούσα διδακτική πρόταση στο πλαίσιο της επαγωγικής μάθησης (inquiry-based learning). Η επαγωγική μάθηση υποστηρίζεται από έξι διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών που είναι: η επίλυση προβλήματος, η θεωρία διδακτικών καταστάσεων, το πρόγραμμα των ρεαλιστικών μαθηματικών, η μοντελοποίηση, η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής και η κριτική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση (Michéle Artigue & Blomhøj, 2013). Η προσέγγιση αυτή αποτελεί μία διδακτική προοπτική η οποία έχει στόχο να δώσει στον μαθητή την ευκαιρία να βιώσει ό ίδιος, μέσω των δραστηριοτήτων που υλοποιούνται στην τάξη, την ουσιαστική ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα που προέκυψαν δεν είναι παρά προϊόντα της πρώτης εφαρμογής της παρούσας έρευνας σχεδιασμού. Όπως αναφέρθηκε όμως και στο θεωρητικό μέρος της έρευνας, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της έρευνας σχεδιασμού είναι ο κυκλικός της χαρακτήρας. Η πρώτη εφαρμογή του διδακτικού πειράματος δεν αποτελεί παρά μόνο τον πρώτο κύκλο της έρευνας. Στο τέλος του κύκλου αυτού θα πρέπει να επανεκτιμηθεί η πειραματική προσέγγιση βάσει των αποτελεσμάτων της έρευνας στο πλαίσιο της αναδρομικής ανάλυσης. Μέσω της ανάλυσης αυτής θα πρέπει να επανεκτιμηθούν τόσο το διδακτικό υλικό όσο και η εφαρμογή της διδακτικής προσέγγισης στην τάξη. Η ανάλυση αυτή θα παράσχει τα στοιχεία εκείνα στα οποία θα πρέπει να επέλθουν οι απαραίτητες αλλαγές και να ξεκινήσεις μία άλλη φάση του σχεδιασμού μέσω της υλοποίηση ενός νέου κύκλου (Koeno Gravemeijer & Cobb, 2006). Ο νέος κύκλος της εφαρμογής θα πρέπει πιθανόν να βασιστεί στον επανασχεδιασμό και την βελτίωση πέραν των διδακτικών εργαλείων και της ίδιας της υποθετικής τροχιάς μάθησης. Ακόμη στο πλαίσιο της εφαρμογής των γενικών αρχών του Dubinsky και της θεωρίας APOS, θα πρέπει να δοθεί ίσως μεγαλύτερο βάρος κατά την διδασκαλία στον δεύτερο πόλο του κύκλου «Δραστηριότητες, συζήτηση στην Τάξη, Ασκήσεις» ο οποίος σχετίζεται άμεσα με τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης.

Βιβλιογραφία

Akkus, R., Hand, B., & Seymour, J. (2008). Understanding students' understanding of functions. *Mathematics Teaching, 207*, 10-13.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities*. New York: Routledge.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*: Springer Science & Business Media.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797-810.

Artigue, M., & Cerulli, M. (2008). *Connecting theoretical frameworks: the telma perspective.* Paper presented at the PME 32 PME-NA XXX Joint meeting of the International Group and the North American Chapter of Psychology of Mathematics.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37-54.

Ayalon, M., & Even, R. (2013). Students opportunities to engage in transformational algebraic activity in different beggining algebra topics and classes. *International Journal of Science & Mathematics Education, 13*(Suppl 2), S285-S307.

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (pp. 469-501). Dordrecht: Springer Netherlands.

Barab, S. (2014). Design-Based Research: A Methodological Toolkit for Engineering Change. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (Second ed., pp. 151-170). New York: Cambridge University Press.

Bauersfeld, H. (1995). " Language Games" in the Mathematics Classroom: Their Func-tion and Their Effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning* (pp. 277-297). Hillsdak, New Jersey: Routledge.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Dordrecht: Springer Netherlands.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1), 149-171. doi:10.1023/a:1022435827400

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. doi:10.1007/bf00302716

Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12 (1988 Yearbook)* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

Bridger, M., & Bridger, M. (2001). Mapping diagrams: Another view of functions. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Burghes, D. N. (1980). Mathematical modelling: A positive direction for the teaching of applications of mathematics at school. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 113–131.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Research sampler: 9. Key aspects of knowing and learning the concept of function. Mathematical Association of America. In.
Carlson, M. P. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. *Representations and mathematics visualization*, 63-77.
Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.
Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170-174). Dordrecht: Springer Netherlands.
Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational researcher, 23*(7), 13-20.
Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-334). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13.
Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*, 68-95.
Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (First ed., pp. 135-151). Cambridge: Cambridge University Press.
Confrey, J. (2007). Epistemology and Modelling — Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 125-128). Boston, MA: Springer US.
DeMarois, P., & Tall, D. (1996). *Facets and layers of the function concept.* Paper presented at the PME CONFERENCE.
Disessa, A. A., & Sherin, B. L. (2000). Meta-representation: An introduction. *The Journal of Mathematical Behavior, 19*, 385–398.
Donovan, M. S., & Bransford, J. D. (2005). *How students learn: History in the classroom*: National Academies Press.
Doorman, M., & Drijvers, P. (2011). Algebra in function. In *Secondary algebra education* (pp. 119-135): Springer.
Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.
Dougherty, B. (2008). Measure Up: A Quantitative View of Early Algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 389-412). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Dordrecht: Springer Netherlands.
Drijvers, P., Doorman, M., Kirschner, P., Hoogveld, B., & Boon, P. (2014). The effect of online tasks for algebra on student achievement in grade 8. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(1-2), 1-18.
Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. In *Secondary algebra education* (pp. 5-26): Springer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 95-126). Dordrecht: Springer Netherlands.

Dubinsky, E. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25, pp. 85-107). Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282): Springer.

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 83-101.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 140-152). Dordrecht: Springer Netherlands.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. *Early algebraization*, 215-238.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research* (Second edition ed.). New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156.

Feldman, A. (1994). Erzberger's dilemma: Validity in action research and science teachers' need to know. *Science education, 78*(1), 83-101.

Feldman, A., & Minstrell, J. (2000). Action research as a research methodology for the study of the teaching and learning of science. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 429-455.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning o.f Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. In *International handbook of mathematics education* (pp. 139-160): Springer.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Goldenberg, P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington, USA: MAA Notes 25, Mathematical Association of America.

Goldin, G. (2014). Mathematical Representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 409-412). Dordrecht: Springer.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. Cucoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston: National Council of Teachers Mathematics.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). London: Routledge, Taylor & Francis Group.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 111-129.

Gray, E., & Tall, D. (1992). Success and Failure in Mathematics:The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching, 142*, 6–10.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility:A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115–141.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18, pp. 239-255). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Jonassen, D. H., & Rohrer-Murphy, L. (1999). Activity theory as a framework for designing constructivist learning environments. *Educational Technology Research and Development, 47*(1), 61-79.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal, 26*(4), 683-710. doi:10.1007/s13394-013-0097-0

Kalchman, M. (2002). *USING A NEO-PLAGETIAN FRAMEWORK FOR LEARNING AND TEACHING MATHEMATICAL FUNCTIONS.* University of Toronto,

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1992). High school graduates' ability in using graphical representations. *Cahiers de Didactique des MatheÂmatiques, 10-11*, 21-43.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra'. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 167-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2004b). The core of algebra: Reflections on its main activities. In *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (pp. 21-33): Springer.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 11-49.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 707.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2005). Developing modeling and argument in the elementary grades. In T. A. Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 29-53). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Leont'ev, A. (1981). *Problems of the Development of Mind*. Moscow: Progress.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, & T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (Our Views about) Models & Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching? In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 161-170). Boston, MA: Springer US.

Lynch, J. K., Fischer, P., & Green, S. F. (1989). Teaching in a computer-intensive algebra curriculum. *The Mathematics Teacher, 82*(9), 688-694.

MacGregor, M. (2001). *Does learning algebra benefit most people.* Paper presented at the Proceedings of the 12th ICMI Study Conference.

Makonye, J. P. (2014). Teaching functions using a realistic mathematics education approach: A theoretical perspective. *International Journal of Educational Sciences, 7*(3), 653-662.

Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 695-723). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (2003). Function and Graph in DGS Environment. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 237-244.

Martínez-Planell, R., & Trigueros Gaisman, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 365-384. doi:10.1007/s10649-012-9408-8

McDonald, C. V. (2016). STEM Education: A Review of the Contribution of the Disciplines of Science, Technology, Engineering and Mathematics. *Science Education International, 27*(4), 530-569.

Mousoulides, N. G. (2009). Mathematical modeling for elementary and secondary school teachers. In A. Kontakos (Ed.), *Research and theories in teacher education*. Rhodes, Greece: University of the Aegean.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32).

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for research in mathematics education*, 21-40.

Ott, L. (1988). *An introduction to statistical methods and data analysis* (3rd ed.). Boston, Massachusetts: PWS-KENT Publishing Company.

O'Shea, A., Breen, S., & Jaworski, B. (2016). The Development of a Function Concept Inventory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 279-296.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(4), 723-740.

Panasuk, R. M., & Beyranevand, M. L. (2010). Algebra students' ability to recognize multiple representations and achievement. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*, 1-21.

Plomp, T. (2013). Educational Design Research:An Introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *EducationalDesign Research - Part A: An introduction* (pp. 10-51). Enschede, the Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Ponce, G. A. (2007). Critical juncture ahead: Proceed with caution to introduce the concept of function. *Mathematics Teacher, 101*(2), 136–144.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2).

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877-891.

Pritchard, A., & Woollard, J. (2010). *Psychology for the Classroom:Constructivism and Social Learning*. London: Routledge, Taylor & Francis Group.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2012). *On the Development of Early Algebraic Thinking*. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L. (2015). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 209-227). Cham: Springer International Publishing.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145–164.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, L. N. (2009). *Helping Children Learn Mathematics* (9 ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Romberg, T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. *Mathematics classrooms that promote understanding*, 3-17.

Schoenfeld, A. H. (2004). The Math Wars. *Educational Policy, 18*(1), 253-286.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 261-289). Washington DC, USA: Mathematics Association of America.

Sfard, A. (1989). *Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited.* Paper presented at the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XIII, Paris, France.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational studies in mathematics, 26*(2-3), 191-228.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), 1-23.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & Q. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 23-58). USA: Mathematical Association of America.

Silver, E. A. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Snedecor, G., & Cochran, W. (1980). *Statistical Methods* (7th ed.): The Iowa State University Press.

Squiggle [Computer Software] (2010). Retrieved from http://www.sail-m.de/sail-m.de/Squiggle-M.html

Stacey, K. (2009). Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Looking back to the Future of the Teaching and Learning of Algebra. *L'Enseignement Mathématique, 55*(3), 397-402.

Stacey, K., & Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (pp. 1-20): Springer.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

Stillman, G. A. (2015). *Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?* Paper presented at the Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education.

Stokes, D. E. (1997). *Pasteur's quadrant: Basic science and technological innovation*. Washington DC: Brooking Institution Press.

Stringer, E. T. (2007). *Action research* (Third ed.). Thousand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

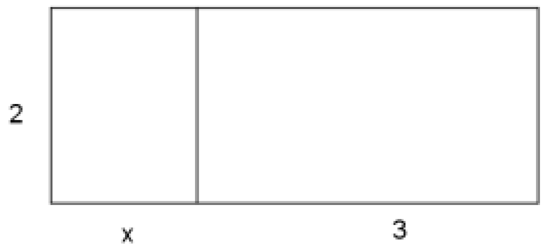
Susac, A., Bubic, A., Vrbanc, A., & Planinic, M. (2014). Development of abstract mathematical reasoning:the case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience, 8*, 1-10.
Swan, M. (2014). Design research in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 148-152): Springer.
Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.
Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in collegiate mathematics education, 1*, 21-44.
Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford & A. P. Shuttle (Eds.), *The ideas of algebra, K- 12* (pp. 8-19). VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Van Eerde, H. (2013). *Design research: Looking into the heart of mathematics education.* Paper presented at the Proceedings van de 1st South-East Asian Design Research conference, 2-23 April 2013, UNSRI, Palembang.
Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181. doi:https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3
Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81): Springer.
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-108): Springer.
Weller, K., Clark, J., M., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A., & Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. In *Research in Collegiate mathematics education V* (Vol. 12, pp. 97–131). Providence, RI: American Mathematical Society.
Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra:Perspectives for Research and Teaching* (pp. 317-325). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 458-477.
Zar, J. (1999). *Biostatistical Analysis* (4th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Τόμος Α'*. Αθήνα: Gutenberg.
Ελληνιάδου, Ε., Κλεφτάκη, Ζ., & Μπαλκίζας, Ν. (2008). Η *συμβολή των παιδαγωγικών προσεγγίσεων στην κατανόηση του φαινομένου της μάθησης*. In. Αθήνα: Πανεπιστημιακό Κέντρο Επιμόρφωσης (ΠΑ.Κ.Ε.).
Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά, 2011. ΕΣΠΑ 2007 - 13 \ Ε.Π. Ε&ΔΒΜ \ Α.Π. 1 - 2 - 3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21 ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS : 295450 Με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α’ - Διαγνωστικός έλεγχος προ της διδασκαλίας

Έλεγχος προ της διδασκαλίας των συναρτήσεων

(να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις)

1.



Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού σχήματος; Να εκφράσετε το ζητούμενο μέγεθος με μία αλγεβρική παράσταση.

…………………..…………………………………………….

2. Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση σε απλούστερη μορφή:

$$2x-3(x-4)$$

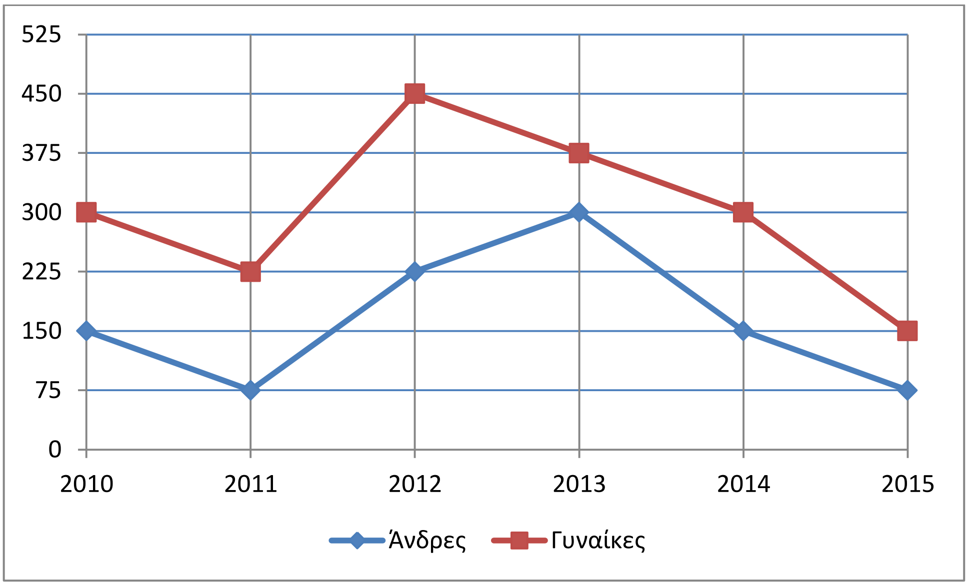
3. Να λύσετε την εξίσωση: $2x-5=3x-7$

4. Στους Ολυμπιακούς αγώνες του 2004 οι ΗΠΑ κέρδισαν 11 μετάλλια περισσότερα από την Ρωσία. Αν και οι δύο χώρες κέρδισαν συνολικά 195 μετάλλια, πόσα μετάλλια κέρδισε η κάθε μία; Γράψτε μία εξίσωση που να περιγράφει το πρόβλημα.

5. Αντιστοίχισε κάθε πίνακα με ένα από τους προτεινόμενους τύπους

Α.	x	4	6	8	(1) $y=2x+3$
	y	10	15	20	
Β.	x	-2	3	4	(2) $y=2,5x$
	y	-10	10	14	
Γ.	x	-1	-3	2	(3) $y=-x+4$
	y	5	7	2	
Δ.	x	2	3	8	(4) $y=4x-2$
	y	7	9	19	

6.



Στο γράφημα παρουσιάζεται ο αριθμός των εργαζόμενων ανδρών και γυναικών σε μία εταιρεία από το 2010 μέχρι το 2015.

1. Ποια χρονιά ο αριθμός των εργαζομένων ανδρών στην εταιρεία ήταν ο μεγαλύτερος;
2. Ποιος ήταν ο συνολικός αριθμός των υπαλλήλων το 2010;
3. Πια χρονιά υπήρχαν συνολικά 225 εργαζόμενοι (άνδρες και γυναίκες);
4. Ποια ήταν η διαφορά ανδρών και γυναικών εργαζομένων το έτος 2013;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β' - Τελικός έλεγχος μετά την διδασκαλία

Τέστ στις συναρτήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις εκφράζουν μία συνάρτηση του Υ ως προς το Χ;
(απαντήστε με ΝΑΙ ή ΟΧΙ για κάθε περίπτωση)

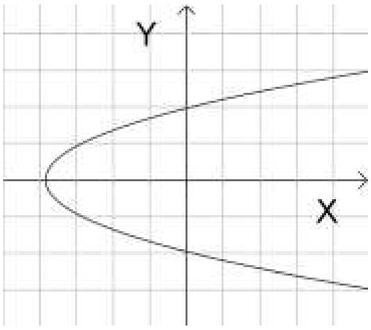
Α

Χ	Υ
2	7
4	9
7	12
8	5
10	-1

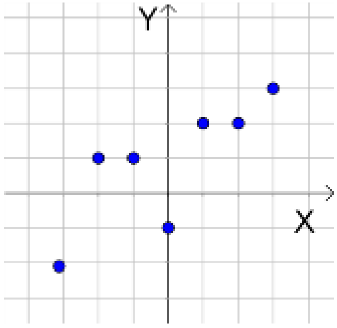
Β

Χ	Υ
4	8
-1	2
2	5
4	7
5	9

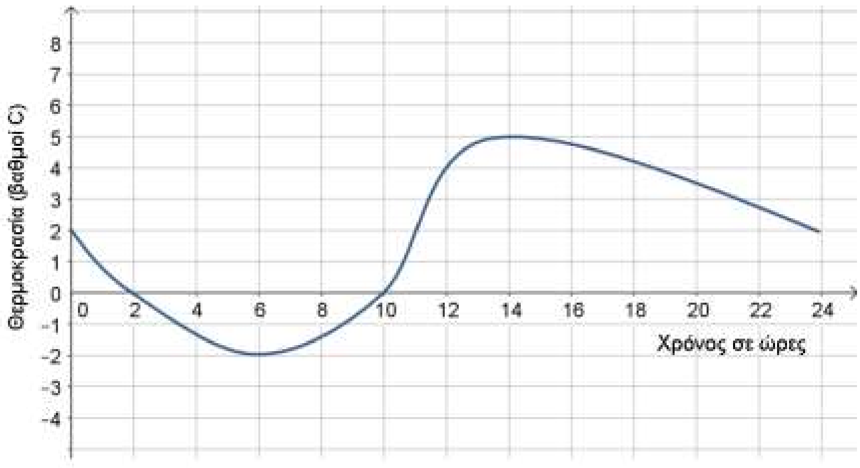
Γ



Δ



2. Στο γράφημα παρουσιάζεται η θερμοκρασία που καταγράφηκε σε ένα μετεωρολογικό σταθμό στη διάρκεια μίας μέρας



- Πότε ήταν η θερμοκρασία 2^o C;
……
- Ποια είναι η χαμηλότερη θερμοκρασία και ποια ώρα αυτή παρατηρείται;
……
- Ποια είναι η υψηλότερη θερμοκρασία και ποια ώρα αυτή παρατηρείται;
……
- Ποιο χρονικό διάστημα η θερμοκρασία είναι χαμηλότερη του μηδενός;
……
- Ποια ήταν η θερμοκρασία στις 20 ή ώρα το βράδυ;
……

3. Μία εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει την ενοικίαση για μια μέρα ενός συγκεκριμένου μοντέλου με ένα πάγιο ποσόν 12 €, συν επιπλέον 25 λεπτά του Ευρώ ανά διανυόμενο χιλιόμετρο. Η συνάρτηση που εκφράζει το ποσό Y που πληρώνει κάποιος πελάτης για μία μέρα ενοικίασης ως προς τα διανυόμενα χιλιόμετρα X είναι:
(επιλέξτε μία απάντηση)

α) $Y = 12X + 0,25$

β) $Y = 0,25X + 12X$

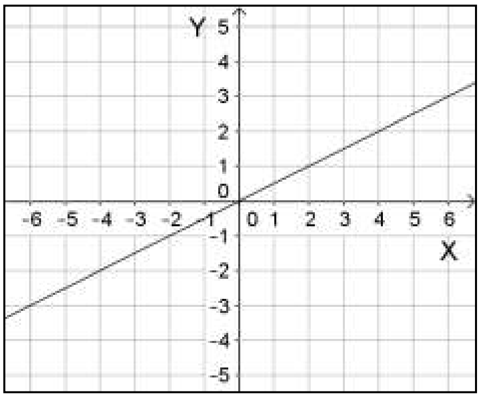
γ) $Y = 12,25X$

δ) $Y = 0,25X + 12$

4. Βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις:

(επιλέξτε τη σωστή απάντηση για κάθε περίπτωση)

A



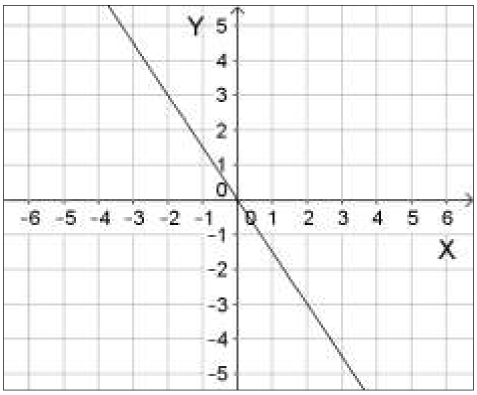
i) $y = -\frac{1}{2}x$

ii) $y = 2x$

iii) $y = -2x$

iv) $y = \frac{1}{2}x$

B



i) $y = -\frac{3}{2}x$

ii) $y = \frac{2}{3}x$

iii) $y = \frac{3}{2}x$

iv) $y = -\frac{2}{3}x$

5. Ένα κολυμβητήριο γεμίζει με νερό από μία σταθερή παροχή νερού και στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται το ύψος του νερού σε διάφορες χρονικές στιγμές:

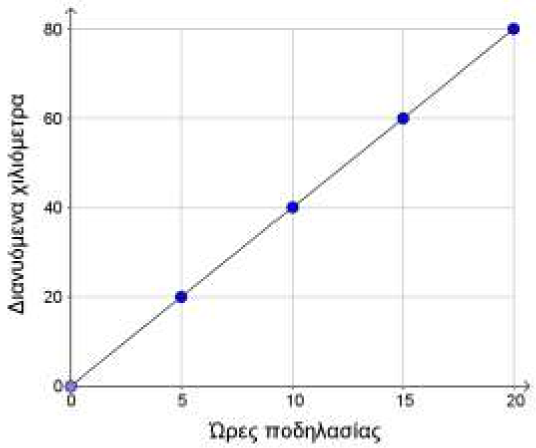
Χρόνος (λεπτά) X	Ύψος νερού (cm) Y
0	0
5	8
8	12,8
15	24

α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει το ύψος του νερού Y ως συνάρτηση του χρόνου X.

β) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το ύψος του νερού στο κολυμβητήριο το 1,6 m;

6. Ο Κώστας και ο Γιάννης πηγαίνουν συχνά βόλτα με τα ποδήλατα τους. Και οι δύο συνηθίζουν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα. Το γράφημα αριστερά δείχνει το διάστημα σε χιλιόμετρα που διανύει ο Κώστας ανάλογα με το χρόνο που ποδηλατεί. Ο τύπος δεξιά περιγράφει την κίνηση του Γιάννη με το ποδήλατό του. Ποιος από τους δύο κινείται πιο γρήγορα; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Κώστας



Γιάννης

$$5x = y$$

x: χρόνος σε ώρες

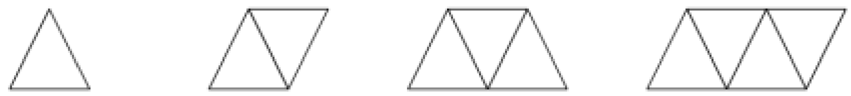
y : χιλιόμετρα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ' - Το διδακτικό υλικό

Μάθημα 1. - Κανονικότητες

Φύλλο εργασίας στις κανονικότητες

1. Στην ακόλουθη σειρά σχημάτων κάθε σχήμα προκύπτει από το προηγούμενό του με βάση κάποιον κανόνα. Βρείτε τον κανόνα αυτό και σχεδιάστε τα τρία επόμενα σχήματα.



_____________________ _____________________ _____________________

2. Αν τα σχήματα είναι κατασκευασμένα από σπίρτα, βρείτε τον αριθμό των σπίρτων στο καθένα και συμπληρώστε τα κενά που ακολουθούν:

………… ………… ………… ………… ………… ………… …………

3. Υπολογίστε την περίμετρο του καθενός από τα σχήματα του πρώτου ερωτήματος (σε αριθμό σπίρτων) και συμπληρώστε τα κενά που ακολουθούν:

………… ………… ………… ………… ………… ………… …………

4. Αν συμβολίσουμε με n τη σειρά που έχει το κάθε σχήμα του μοτίβου, να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση για τον υπολογισμό:

Α) του πλήθους Ν των σπίρτων του κάθε σχήματος

Β) της περιμέτρου Π του κάθε σχήματος

με την βοήθεια του n.

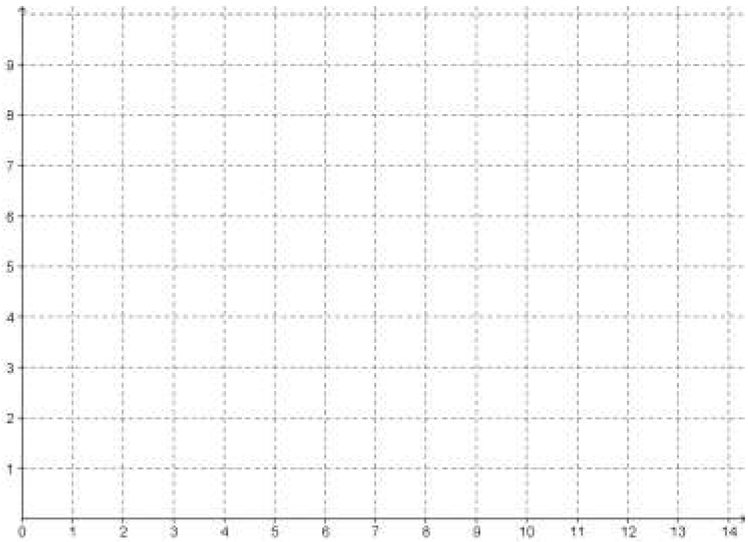
Ν = ………………………………………

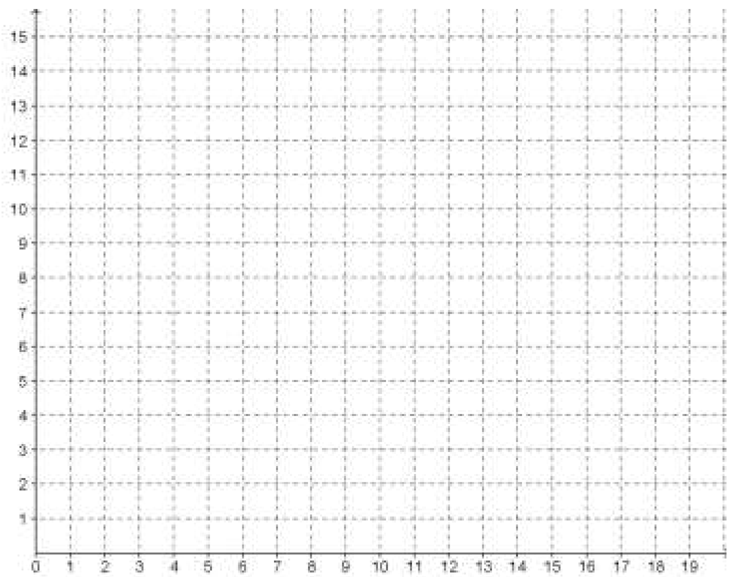
Π = ………………………………………

5. Να συμπληρώσετε τις τιμές στον παρακάτω πίνακα:

Σειρά n	Πλήθος σπίρτων Ν	Περίμετρος σχήματος Π
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

6. Απεικονίστε τα ζεύγη τιμών (n,Π) και (n,N) στα παρακάτω συστήματα συντεταγμένων





7. Μπορείτε να βρείτε ποια θα είναι η περίμετρος του σχήματος στην $500^{η}$ και στην $1000^{η}$ θέση;

$500^{η}$:

$1000^{η}$:

8. Μπορείτε να βρείτε ποιος θα είναι ο αριθμός των σπίρτων στην $137^{η}$ και στην $872^{η}$ θέση;

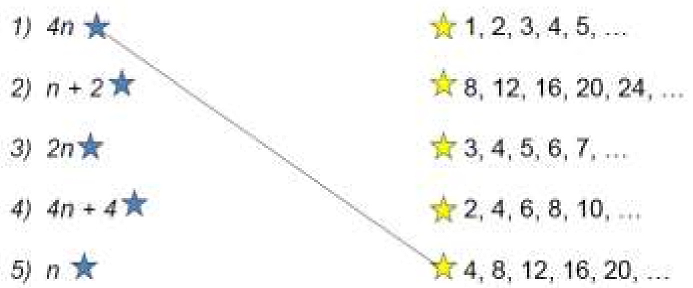
$137^{η}$:

$872^{η}$:

9. Ο Γιάννης υπολόγισε τον αριθμό 1312 με βάση κάποια από τις δύο αλγεβρικές παραστάσεις που υπολογίσατε κι εσείς στο ερώτημα 4. Μπορείτε να βρείτε με βάση ποιον κανόνα υπολογίστηκε ο αριθμός αυτός και ποια θα είναι η σειρά καταγραφής του;

Ασκήσεις αξιολόγησης

1. Αντιστοιχώ με μια γραμμή το σωστό



2. Ποια από τις επόμενες σειρές αριθμών προκύπτει από τον κανόνα 8ν-4, όπου το ν δείχνει τη θέση του κάθε αριθμού στην σειρά αυτή των αριθμών δηλαδή όταν ν=1 είναι ο πρώτος αριθμός, ν=2 ο δεύτερος κτλ:

Α. 16,12,8,4,0

Β. 8,16,24,32,40

Γ. 4,16,64,216,1024

Δ. 4,12,20,28,36

3. Ποια σειρά αριθμών προκύπτει από τον κανόνα $\frac{n}{4}$, όπου το n δείχνει τη θέση του κάθε αριθμού στην σειρά αυτή των αριθμών δηλαδή όταν n=1 είναι ο πρώτος αριθμός, n=2 ο δεύτερος κτλ:

$$A.\ \ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{4},\ ....$$

$$B.\ \ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{2},\ ....$$

$$\Gamma.\ \ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{4},\ ....$$

$$\Delta.\ \ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ ....$$

Μάθημα 2 – Ορισμός της συνάρτησης

<u>**Εισαγωγική δραστηριότητα**</u>

Η έννοα της αντιστοιχίας μεταξύ αντικειμένων είναι το θέμα της δραστηριότητας. Μετά την αναφορά από τον διδάσκοντα κάποιων παραδειγμάτων καλούνται οι μαθητές να αναφέρουν δικά τους παραδείγματα τα οποία καταγράφονται στον πίνακα.

Στην συνέχεια η δραστηριότητα συνεχίζεται ως εξής:

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα πρώτα σε πωλήσεις μοντέλα αυτοκινήτων κατά το έτος 2015 στην Ευρώπη:

Σειρά	Μοντέλο	Πωλήσεις
1	Volkswagen Golf	562.835
2	Volkswagen Polo	314.494
3	Renault Clio	290.070
4	Ford Fiesta	278.684
5	Opel Corsa	238.302
6	Nissan Qashqai	220.132
7	Ford Focus	213.075
8	Volkswagen Passat	212.402

Ακολούθως οι μαθητές ανοίγουν σχετικές εφαρμογές Geogebra για την δημιουργία διαγραμμάτων Venn για τις ακόλουθες αντιστοιχίσεις (Τα σύνολα για τα πεδία ορισμού και τιμών θα είναι έτοιμα στην εφαρμογή και οι μαθητές θα κληθούν να σχεδιάσουν τις σχετικές απεικονίσεις με βέλη).

Εταιρεία -→ Μοντέλο

Μοντέλο -→ Πωλήσεις

Οι δύο αντιστοιχίσεις συγκρίνονται και δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης.

Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν αν οι αντιστοιχίσεις που ανέφεραν στην αρχή αποτελούν συναρτήσεις σύμφωνα με τον ορισμό.

<u>Δραστηριότητα 2</u>

Οι μαθητές έχουν μαζί τους υπολογιστές τσέπης (αριθμομηχανές). Με την βοήθεια της αριθμομηχανής καλούνται να υπολογίσουν τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που επιθυμούν και να καταγράψουν τα δεδομένα τους σε έναν πίνακα, η μία στήλη του οποίου θα αναφέρεται στις τιμές X που επιλέγουν και η δεύτερη στήλη θα αναφέρεται στις τιμές των τετραγωνικών ριζών που υπολόγισαν. Το αντικείμενο των τετραγωνικών ριζών θεωρείται κατάλληλο καθώς είναι ένα θέμα με το οποίο οι μαθητές διαπραγματεύθηκαν το αμέσως προηγούμενο διάστημα στο κεφάλαιο των αρρήτων αριθμών.

Αφού συμπληρώσουν τον πίνακα οι μαθητές σε σχετικό φύλλο εργασίας καλούνται να αναφέρουν ζεύγη τιμών που βρήκαν, τα οποία καταγράφονται από κοινού σε πίνακα τιμών στον διαδραστικό πίνακα.

Στην συνέχεια οι μαθητές στον διαδραστικό πίνακα χρησιμοποιούν το αρχείο dyno_sqrt.ggb. Στο αρχείο παρουσιάζονται διάφορα ζεύγη τιμών που προκύπτουν από τον υπολογισμό της ρίζας πάνω σε δύο ξεχωριστούς παράλληλους άξονες. Στόχος της χρήσης του αρχείου είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την δυναμική συμμεταβολή των τιμών των μεταβλητών X και Y και ότι σε κάθε τιμή του X αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του Y..

Μετά την διερεύνηση του αρχείου και σχετική συζήτηση που θα προκληθεί από τον διδάσκοντα οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν αν ο πίνακας τιμών που δημιουργήθηκε εκφράζει συνάρτηση σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε προηγουμένως. Καλούνται επίσης να αναφέρουν τη διαφορά της συνάρτησης «τετραγωνική ρίζα» σε σχέση με τις προηγούμενες. Η τετραγωνική ρίζα ως παράδειγμα προσφέρεται επιπλέον για την επέκταση της συζήτησης στο θέμα του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών μιας συνάρτησης με χρήση κατάλληλων ερωτήσεων: π.χ

- Γιατί δεν πήρατε αρνητικές τιμές για το X;
- Θα μπορούσε το αποτέλεσμα του υπολογισμού σας να είναι αρνητικό;

Στην τελική φάση της δραστηριότητας παρουσιάζονται πάλι στον διαδραστικό πίνακα άλλες περιπτώσεις δυναμικής συμμεταβολής δύο μεταβλητών X και Y και οι μαθητές καλούνται να βρούν τον κανόνα με βάση τον οποίο συμμεταβάλλονται οι τιμές αυτές (π.χ. $Y = X^2$, $Y = -2X$, $Y = 2X$

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα πλήθη των κουνελιών και των αλεπούδων ενός περιβαλλοντικού πάρκου, όπως αυτοί καταγράφηκαν από ένα βιολόγο ερευνητή ανά μήνα κατά τη διάρκεια ενός χρόνου. Κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχεί στην αρχή του αντίστοιχου μήνα:

***t*, μήνας**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
***K*, πλήθος κουνελιών**	1000	750	567	500	567	750	1000	1250	1433	1500	1433	1250
***A*, πλήθος αλεπούδων**	150	143	125	100	75	57	50	57	75	100	125	143

- Σύμφωνα με τον πίνακα των δεδομένων είναι το πλήθος Α των αλεπούδων συνάρτηση του πλήθους Κ των κουνελιών;
- Είναι το πλήθος Κ των κουνελιών συνάρτηση του πλήθους Α των αλεπούδων;
- Είναι ο αριθμός των αλεπούδων Α ή ο αριθμός των κουνελιών Κ συνάρτηση του χρόνου t;

Εργασία για το σπίτι

1. Ο σκάνερ στο ταμείο ενός super-market συνδέει τον barcode Β ενός προϊόντος με την αντίστοιχη τιμή Ρ του προϊόντος.

- Είναι η τιμή Ρ μία συνάρτηση του barcode Β; (Δώστε εξήγηση)
- Είναι ο barcode ενός προϊόντος συνάρτηση της τιμής; (Δώστε εξήγηση)

2. Μπορεί να θεωρηθεί ότι υα ζεύγη τιμών που παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες μπορεί να εκφράζουν μία συνάρτηση ή όχι και γιατί;

Α

X1	Y1
3	8
-1	11
3	10
1	5

Β

X2	Y2
2	8
5	-2
8	7
-1	5

Γ

X3	Y3
16	4
25	5
16	-4
9	3

Δ

X4	Y4
3	8
6	11
-1	1
0	5

3. Να βρείτε δικά σας παραδείγματα για σχέσεις που:

- εκφράζουν μία συνάρτηση (2 περιπτώσεις)
- δεν εκφράζουν συνάρτηση (2 περιπτώσεις)

Μάθημα 3 – Οι διάφοροι τρόποι παρουσίασης της συνάρτησης

Δραστηριότητα 1 (πηγή www.illustrativemathematics.org)

Στους ακόλουθους πίνακες παρουσιάζονται κάποια ζεύγη τιμών που προέκυψαν από κάποια συνάρτηση. Για κάθε συνάρτηση περιγράψτε με λόγια τον κανόνα με τον οποίο θεωρείτε ότι προέκυψε η αντιστοιχία μεταξύ της η εισαγόμενης και της εξαγόμενης τιμής. Στην συνέχεια συμπληρώστε τα κενά κελιά του πίνακα με βάση τον κανόνα που βρήκατε:

Α. Τα εισαγόμενα της συνάρτησης είναι λέξεις της ελληνικής γλώσσας, ενώ τα εξαγόμενα είναι γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.

Εισαγόμενο	σχολείο	σπίτι	κόστος	θρανίο			
Εξαγόμενο	ο	ι	ς		ξ	η	ρ

Β. Τα εισαγόμενα της συνάρτησης είναι ρητοί αριθμοί, τα εξαγόμενα είναι επίσης ρητοί αριθμοί.

Εισαγόμενο	2	5	−1.53	0	−4	
Εξαγόμενο	7	10	3.47	5		8

Γ. Τα εισαγόμενα και τα εξαγόμενα της συνάρτησης είναι φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν.

Εισαγόμενο	1	2	3	4	5	6	7
Εξαγόμενο	2	1	4				

Δ. Τα εισαγόμενα της συνάρτησης είναι φυσικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 365, τα εξαγόμενα είναι μήνες του χρόνου.

Εισαγόμενο	25	365	35	95	330	60	
Εξαγόμενο	Ιανουάριος	Δεκέμβριος	Φεβρουάριος	Απρίλιος	Νοέμβριος		Οκτώβριος

Για τουλάχιστον έναν από τους πίνακες αναφέρετε ένα δεύτερο κανόνα που ταιριάζει με τα δεδομένα του πίνακα, αλλά τελικά παράγονται διαφορετικά ζεύγη από αυτά που βρήκατε αρχικά για τα κενά κελιά του πίνακα.

Δραστηριότητα 2

Η ποσότητα του νερού που φθάνει στο έδαφος ως βροχή, ονομάζεται ύψος βροχής. Το ύψος βροχής το μετράμε σε χιλιοστά (mm) ή σε ίντσες (in). Για να καταλάβουμε τι είναι ένα χιλιοστό βροχής μπορούμε να πούμε ότι αν σε μια επιφάνεια ενός τετραγωνικού μέτρου πέσει βροχή ενός (1) χιλιοστού τότε θα μαζευτεί νερό ίσο με ένα (1) λίτρο. Ανάλογα μετράμε και το ύψος του χιονιού.

- Οι μετεωρολόγοι υπολογίζουν ότι 10 mm χιονιού είναι ισοδύναμα περίπου με 1 mm βροχής. Γράψτε μία σχέση που να υπολογίζει το ύψος της βροχής r σε mm σαν συνάρτηση του ύψους του χιονιού s.
- Ποιο είναι το ύψος της βροχής r για 5 mm χιονιού;
- Για ποιο ύψος χιονιού s, το ύψος της βροχής είναι 5 mm;

Δραστηριότητα 3

Ένα αντικείμενο κινείται με τρόπο που να διανύσει απόσταση 80 m σε 4 sec. Αν το αντικείμενο αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα να γράψετε μία αλγεβρική σχέση με δύο μεταβλητές που να περιγράφει αυτή την κατάσταση. Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή να υπολογίσετε τους ζητούμενους χρόνους και τις αποστάσεις στον επόμενο πίνακα:

Χρόνος κίνησης του αντικειμένου (x)	Απόσταση που διανύθηκε (y)
0	
	120
2	
3,7	
	250

Δραστηριότητα 4

Ο Γιάννης πρόκειται να ταξιδέψει με την οικογένειά του στην Αμερική. Σκέφτηκε λοιπόν να ψάξει για τον καιρό που επικρατεί εκεί. Από μία έρευνα που έκανε στο Internet βρήκε τη θερμοκρασία σε κάποιες πόλεις. Επειδή όμως δεν είναι συνηθισμένος με την κλίμακα Fahrenheit σκέφτηκε να μετατρέψει τις θερμοκρασίες που βρήκε σε βαθμούς Κελσίου. Η εξίσωση $F = 1,8C + 32$ μετατρέπει τους βαθμούς Κελσίου σε βαθμούς Fahrenheit.

Α) Να βρείτε τη σχέση που μετατρέπει τους βαθμούς Fahrenheit σε βαθμούς Κελσίου

Β) Να μετατρέψετε τις θερμοκρασίες των πόλεων του πίνακα που ακολουθεί σε βαθμούς βρείτε και να δημιουργήσετε κατάλληλο πίνακα τιμών με τις αντίστοιχες θερμοκρασίες.

Πόλη	**Θερμοκρασία (^oF)**
New York	34
Chicago	23
San Francisco	55
Miami	72
Washington, D.C.	40

Ασκήσεις

5,6,8 βιβλίου

Μάθημα 4 – Συντεταγμένες στο επίπεδο

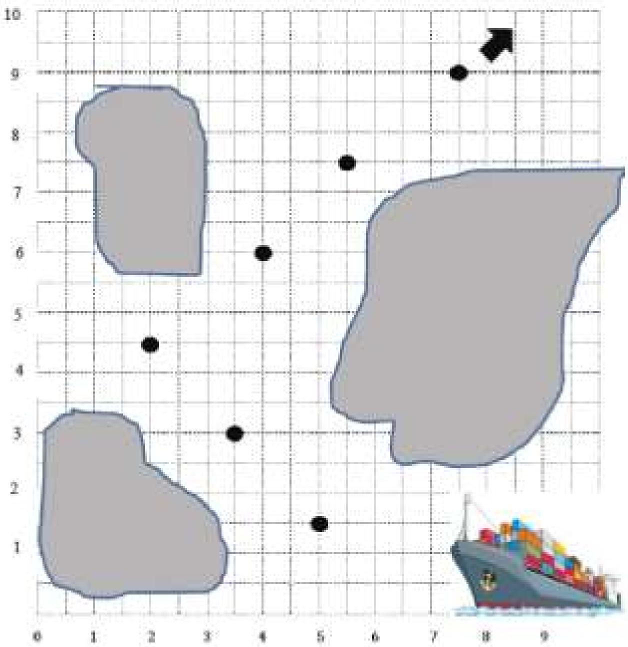
Εισαγωγική δραστηριότητα – Ανάκληση προϋπάρχουσας γνώσης

Ο καπετάνιος του πλοίου πρέπει να το οδηγήσει ανάμεσα στα τρία νησιά του χάρτη. Η πορεία για την ασφαλή διέλευση του πλοίου υποδεικνύεται από έξι σημεία. Μπορείτε να τον βοηθήσετε αναφέροντας διαδοχικά τις συντεταγμένες των σημείων που θα πρέπει να ακολουθήσει το πλοίο;

(……….,………..), (……….,………..)

(……….,………..), (……….,………..)

(……….,………..), (……….,………..)



Μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας ακολουθεί συζήτηση στην τάξη για το σύστημα συντεταγμένων όπως το γνώρισαν οι μαθητές στην προηγούμενη τάξη με στόχο την υπενθύμιση-ανάκληση της σχετικής ορολογίας (συντεταγμένες, τετμημένη, τεταγμένη, διατεταγμένο ζεύγος)

Δραστηριότητα 2

1. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις τιμές των δύο αξόνων στο προηγούμενο πρόβλημα;

Οι τιμές στους άξονες είναι θετικές

2. Πώς θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε τους άξονες ώστε να υπάρχουν σ’ αυτούς και αρνητικοί αριθμοί;

Με βάση τις προτάσεις των μαθητών και τη σχετική συζήτηση σχεδιάζεται το σύστημα συντεταγμένων

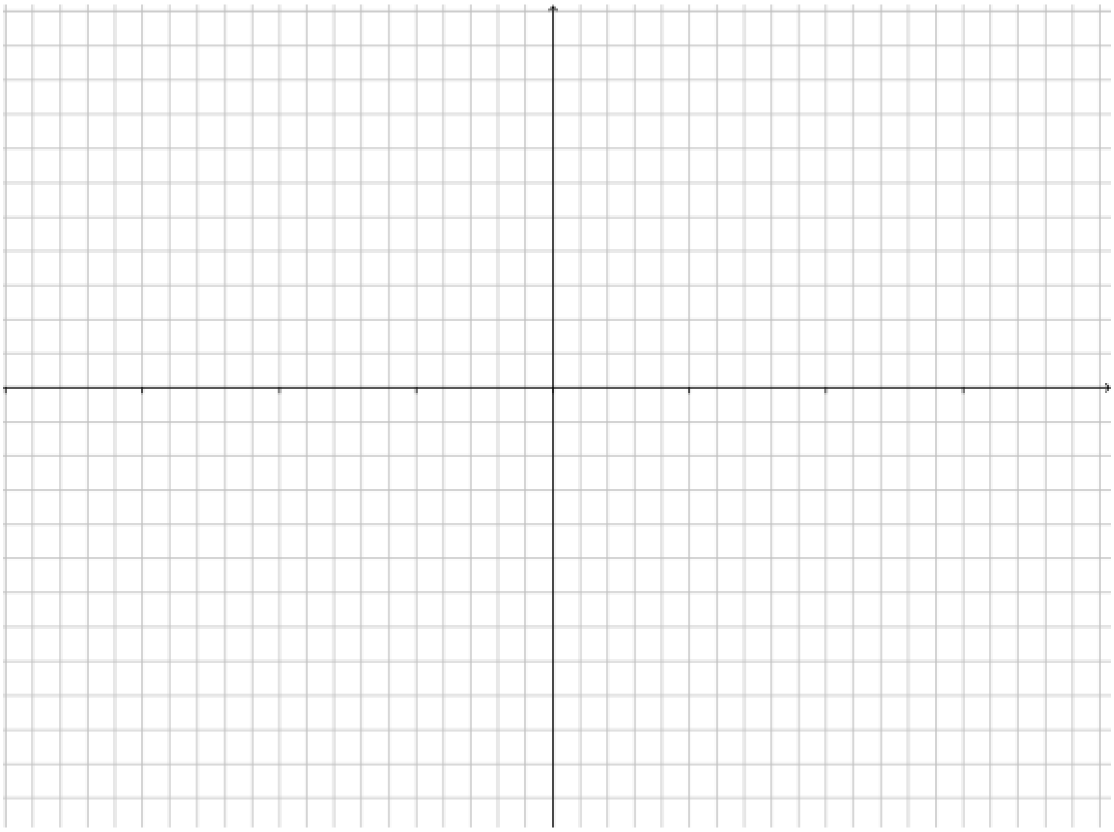
3 Ποια είναι η αρχή στο σύστημα συντεταγμένων που βρήκατε με βάση την οποία υπολογίζονται οι συντεταγμένες όλων των σημείων στο επίπεδο;

Το σημείο (0,0)

4. Πώς μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο με βάση το νέο σύστημα συντεταγμένων που προτείνατε;

Για την τετμημένη βρίσκουμε πόσες θέσεις μετακινηθήκαμε από την αρχή κατά μήκος του άξονα των x, ενώ για την τεταγμένη βρίσκουμε πόσες θέσεις μετακινηθήκαμε από την αρχή κατά μήκος του άξονα των y

Δραστηριότητα 3 – Ανάπτυξη της γνώσης



Α.

Πάρτε πέντε τουλάχιστον διαφορετικά σημεία στον άξονα των Χ και γράψτε δίπλα τους τις συντεταγμένες τους

Τι κοινό έχουν οι συντεταγμένες των σημείων που πήρατε;

Τι συμβαίνει στα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα των Χ και γιατί;

Β.

Πάρτε πέντε τουλάχιστον διαφορετικά σημεία στον άξονα των Υ και γράψτε δίπλα τους τις συντεταγμένες τους

Τι κοινό έχουν οι συντεταγμένες των σημείων που πήρατε;

Τι συμβαίνει στα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα των Υ και γιατί;

Δραστηριότητα 4

Με διερεύνηση στο διαδραστικό πίνακα σχετικής εφαρμογής στο Geogebra οι μαθητές μαθαίνουν τα τεταρτημόρια και ρις συνθήκες που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων στο κάθε τεταρτημόριο

Αρχείο: Syntet1.ggb (Τεταρτημόρια, σημεία στον άξονα)

Δραστηριότητα 5 (αξιολόγηση)

1. Οι μαθητές τοποθετούν με τη βοήθεια σχετικής εφαρμογής στο Geogebra σημεία στο επίπεδο με βάση τις υποδεικνυόμενες συντεταγμένες τους.

Αρχείο: Coordinates_test_mine.ggb Πρακτική εξάσκηση με τοποθέτηση σημείων στη σωστή θέση

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_331_g_3_t_2.html?from=topic_t_2.html

2. Οι μαθητές βρίσκουν τις συντεταγμένες σημείων στο επίπεδο παίζοντας τα παιχνίδια:

http://assets.varsitytutors.com/assets/vt-hotmath-legacy/hotmath_help/games/ctf/ctf_hotmath.swf

http://www.mathplayground.com/locate_aliens.html

http://www.shodor.org/interactivate/activities/GeneralCoordinates/

Μάθημα 5 - Γραφική παράσταση συνάρτησης

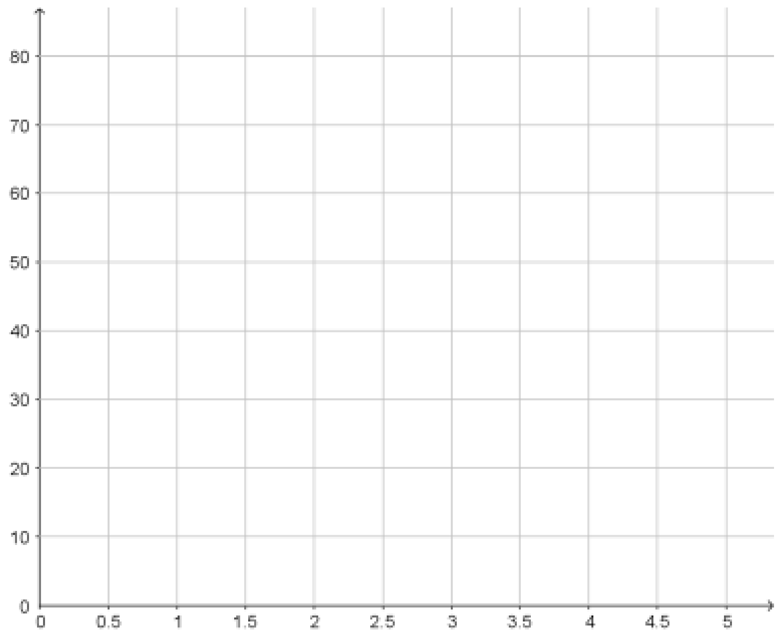
Δραστηριότητα 1

Μία πέτρα αφήνεται να πέσει από ύψος 80 m από έναν ουρανοξύστη και σε χρόνο 4 sec φτάνει στο έδαφος. Παρακολουθείστε το video με την κίνηση του αντικειμένου στη διεύθυνση: http://www.youtube.com/watch?v=KrX_zLuwOvc

Παρακολουθείστε την προσομοίωση του φαινομένου με την βοήθεια αρχείου Geogebra (ouranox.ggb) και συμπληρώστε τον πίνακα:

Χρόνος κίνησης του αντικειμένου (t) σε sec	Απόσταση που διανύθηκε (S) σε m
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	

Να απεικονίσετε τα ζεύγη τιμών (t,S) στο ακόλουθο σύστημα συντεταγμένων:



1. Ενώστε τα διαδοχικά σημεία που βρήκατε με μία γραμμή.

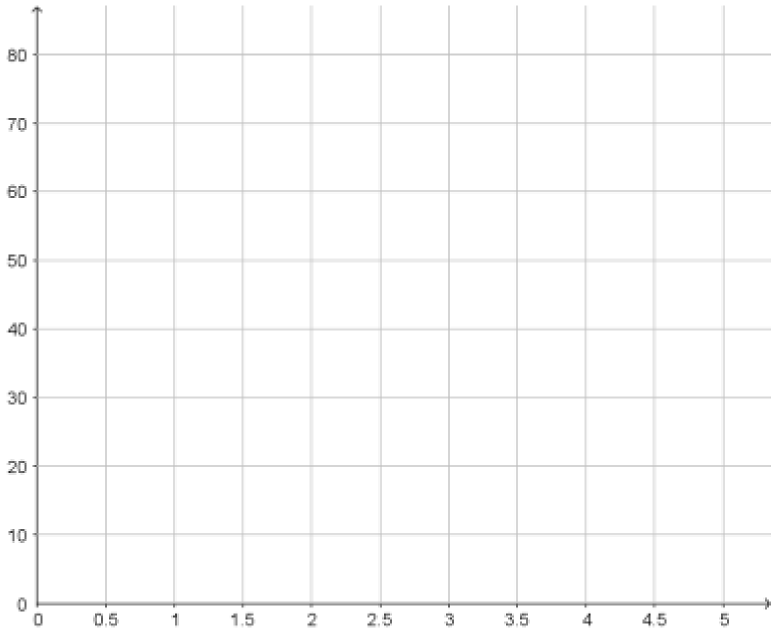
2. Είναι το διάστημα S συνάρτηση της χρονικής στιγμής t ή όχι και γιατί;
3. Πόσο διάστημα διάνυσε η πέτρα στα πρώτα 2 δευτερόλεπτα; Πόσο διάστημα διάνυσε στα τελευταία 2 δευτερόλεπτα;

Δραστηριότητα 2

Ένα αντικείμενο κινείται με τρόπο που να διανύσει απόσταση 80 m σε 4 sec. Αν το αντικείμενο αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών που ακολουθεί:

Χρόνος κίνησης του αντικειμένου (t) σε sec	Απόσταση που διανύθηκε (S) σε m
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	

Να απεικονίσετε τα ζεύγη τιμών (t,S) στο ακόλουθο σύστημα συντεταγμένων:



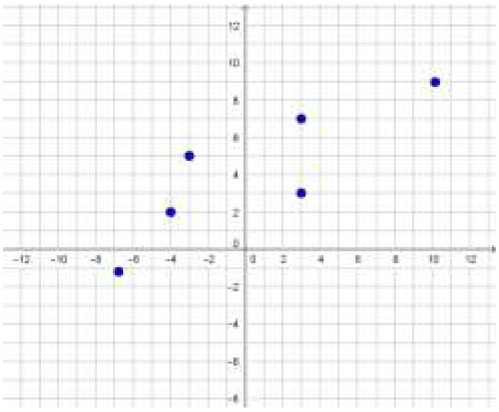
4. Ενώστε τα διαδοχικά σημεία που βρήκατε με μία γραμμή.
5. Είναι το διάστημα S συνάρτηση της χρονικής στιγμής t ή όχι και γιατί;

6. Να βρείτε μία γράψετε μία αλγεβρική σχέση με δύο μεταβλητές που να περιγράφει αυτό το πρόβλημα.
7. Πόσο διάστημα διάνυσε το αντικείμενο στα πρώτα 2 δευτερόλεπτα; Πόσο διάστημα διάνυσε στα τελευταία 2 δευτερόλεπτα;

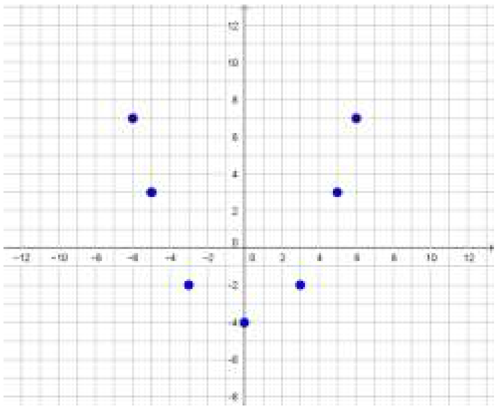
Δραστηριότητα 3

Ποια από τα παρακάτω γραφήματα απεικονίζουν μία συνάρτηση και ποια όχι και γιατί;

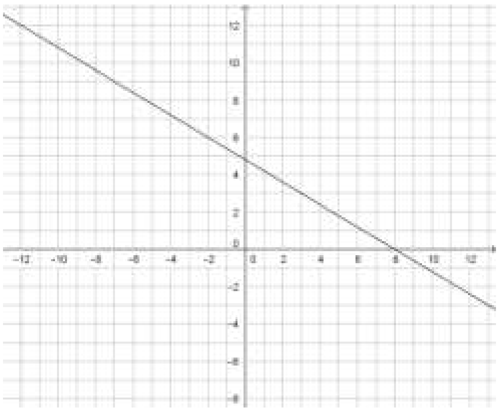
Α.



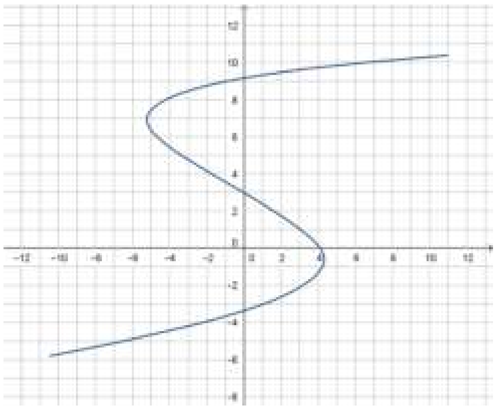
Β.



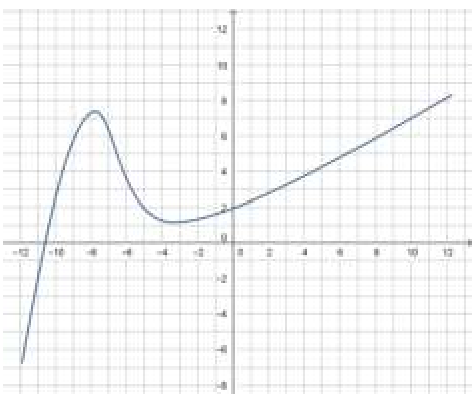
Γ.



Δ.



Ε.



<u>Ασκήσεις</u>

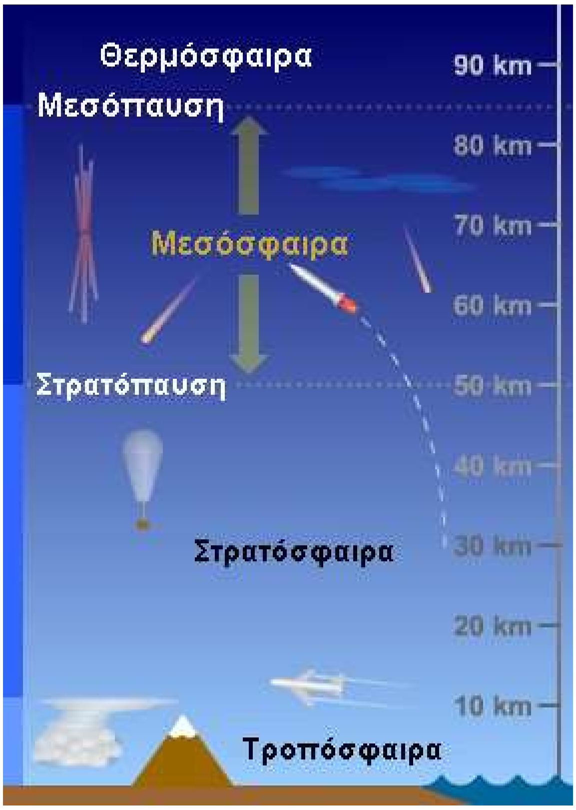
1. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = -2x + 5$ και $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

Να δημιουργήσετε πίνακα τιμών για κάθε μία συνάρτηση και να απεικονίσετε κάθε συνάρτησης σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

2. Να απεικονίσετε σε συστήματα συντεταγμένων τα σημεία από τους πίνακες τιμών των συναρτήσεων των ασκήσεων 1 και 2 της σελίδας 57 που λύσατε σε προηγούμενο μάθημα.

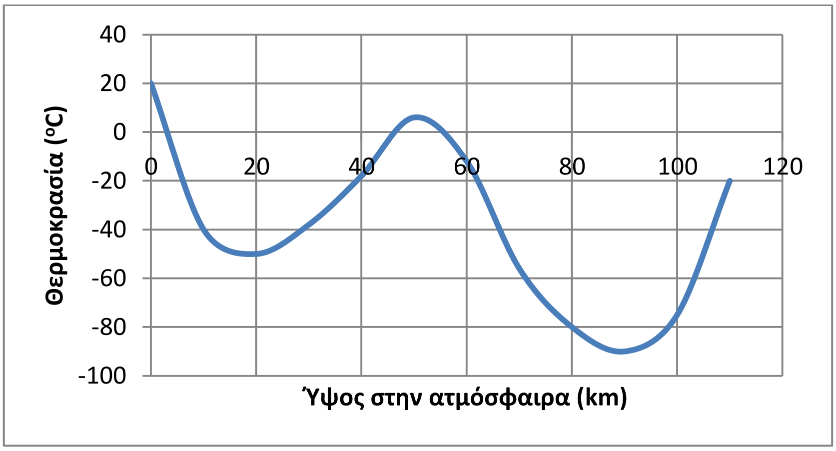
Μάθημα 6

Δραστηριότητα 1



Α. Στην ατμόσφαιρα της γης διακρίνουμε διάφορα στρώματα βλέπε διπλανή εικόνα:

1. Εκφράζει η γραφική παράσταση μία συνάρτηση της θερμοκρασίας ως προς το υψόμετρο;
2. Σχολιάστε την μεταβολή της θερμοκρασίας στα διάφορα στρώματα της ατμόσφαιρας παρατηρώντας το ανωτέρω γράφημα. Σε ποια στρώματα η θερμοκρασία αυξάνεται με την αύξηση του υψομέτρου και σε ποια μειώνεται;
3. Τι παρατηρείτε για τις τιμές της θερμοκρασίας σε υψόμετρα 20 km, 50 km και 90 km από την επιφάνεια της θάλασσας;
4. Σε πόσο υψόμετρο από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι ίση με 0^{o} C;
5. Ποια είναι η τιμή της θερμοκρασίας σε υψόμετρα 10 km, 40 km, 80 km;

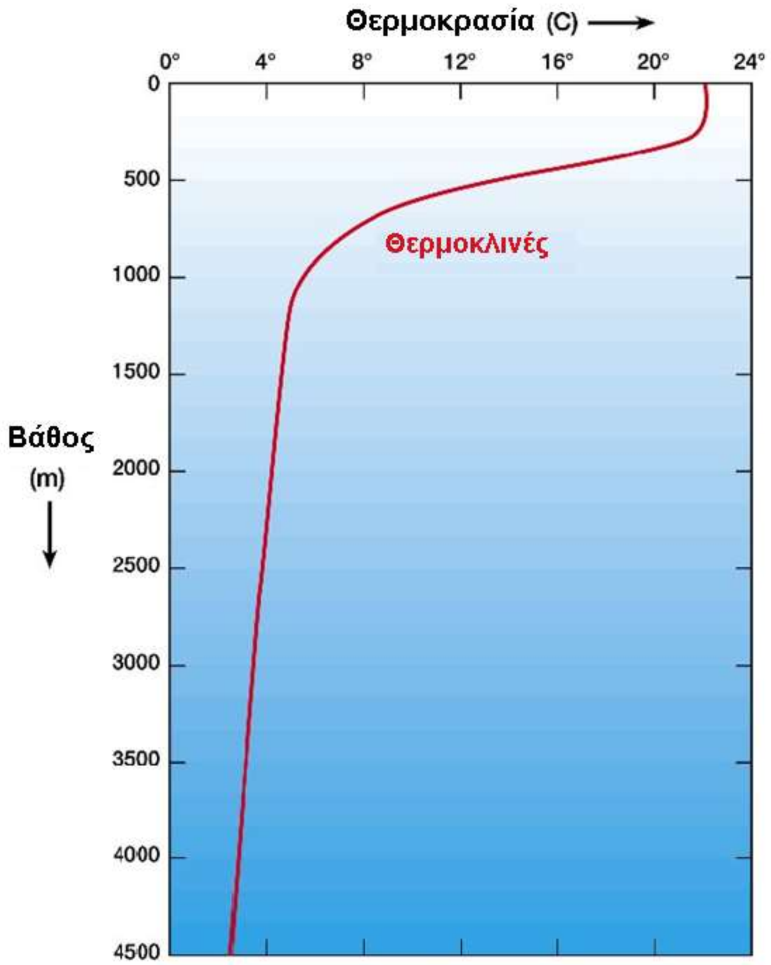


Δραστηριότητα 2

Η θερμοκρασία των ωκεανών

Στους ωκεανούς διακρίνουμε επίσης διάφορα στρώματα. Το επάνω μέρος (καλείται επιφανειακό στρώμα Στην συνέχεια ακολουθεί ένα ενδιάμεσο στρώμα το οποίο ονομάζεται θερμοκλινές, το οποίο διαχωρίζει το επιφανειακό στρώμα από τον βαθύ ωκεανό. Στην γραφική παράσταση που ακολουθεί παρουσιάζεται η μεταβολή της θερμοκρασίας του ωκεανού ως προς το βάθος του στα μεσαία γεωγραφικά πλάτη.

1. Περιγράψτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας στα τρία στρώματα.
2. Πόση είναι η θερμοκρασία σε βάθος 4000 m
3. Σε ποιο βάθος έχουμε θερμοκρασία 12ο;.
4. Παριστάνει η γραφική αυτή παράσταση μία συνάρτηση ή όχι και γιατί;

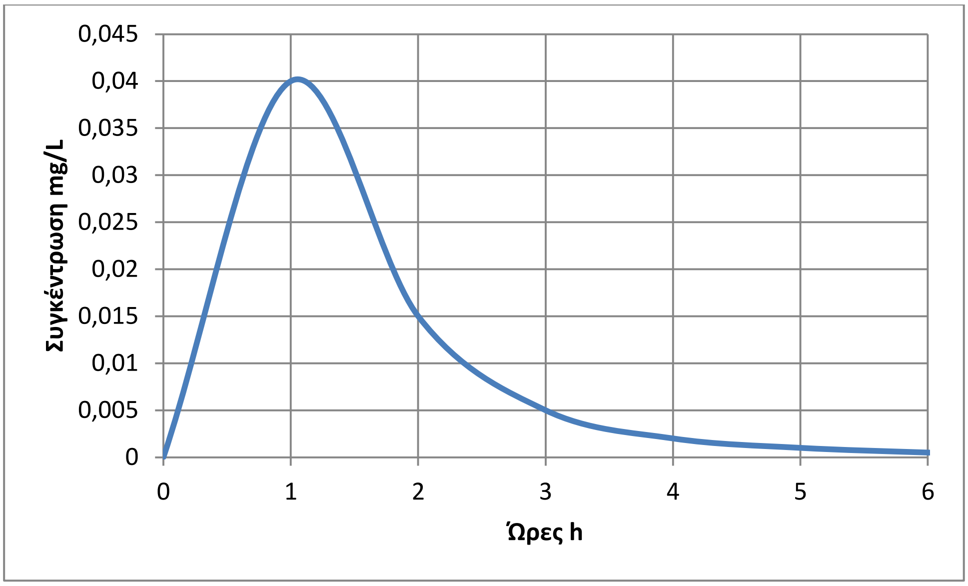


Windows to the Universe original image
Πηγή: http://www.windows2universe.org/earth/Water/temp.html

Δραστηριότητα 3

Το φάρμακο

Η συγκέντρωση ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς σε mg/L ως προς τον χρόνο σε ώρες h που μεσολάβησε από την λήψη του φαρμάκου δίνεται από το ακόλουθο γράφημα:



1. Εκφράζει η ανωτέρω γραφική παράσταση μία συνάρτηση;
2. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται η συγκέντρωση του φαρμάκου ως προς τον χρόνο.
3. Ποια είναι η συγκέντρωση του φαρμάκου μία ώρα μετά την λήψη του;
4. Αν θεωρηθεί ότι το φάρμακο είναι δραστικό για συγκεντρώσεις μεγαλύτερες από 0,005 mg/L ποιο είναι το χρονικό διάστημα δραστικότητας του φαρμάκου μετά την λήψη του.

Ασκήσεις

8,9,10 σελίδας 66 βιβλίου

Μάθημα 7 - Επαναληπτικό

Δραστηριότητες

1. Διάλεξε τρείς συμμαθητές σου και πάρε τις ακόλουθες σχέσεις:

a) Αντιστοιχίζω τον μαθητή στην ηλικία: **Μαθητής→ Ηλικία**
b) Αντιστοιχίζω την ηλικία στον μαθητή: **Ηλικία → Μαθητής**

Αν η ηλικία μετράται σε χρόνια ποια από τις δύο σχέσεις δεν είναι συνάρτηση και γιατί;

………

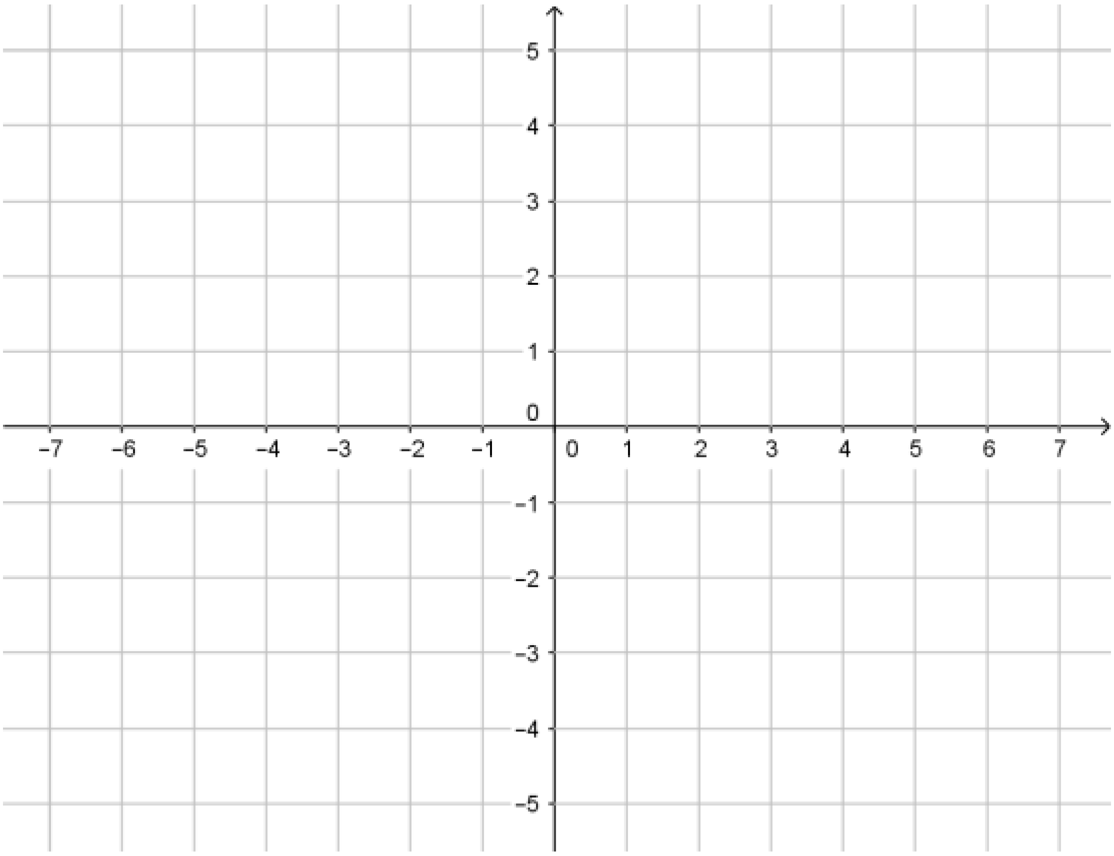
………

………

………

………

2. Πάρτε στο ακόλουθο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία Α (3,-2) και Β (-5, 4). Να υπολογίσετε την απόσταση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ:



3. Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

X	**-10**	**-5**	**-2**	**0**	**2**	**5**	**10**
Y							

Σχεδιάστε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και απεικονίστε τα ζεύγη τιμών (Χ,Υ) του πίνακα.

Ασκήσεις

1) Δίνονται τα σημεία Α(-3,2), Β(3,-6) και Γ(11,0). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

2) Άσκηση 7 σελίδας 66 βιβλίου

3) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών και να κάνετε την γραφική παράσταση της

συνάρτησης $y=\frac{1}{2}x^2-3$

X	**-3**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Y									

Μάθημα 8

Δραστηριότητα 1

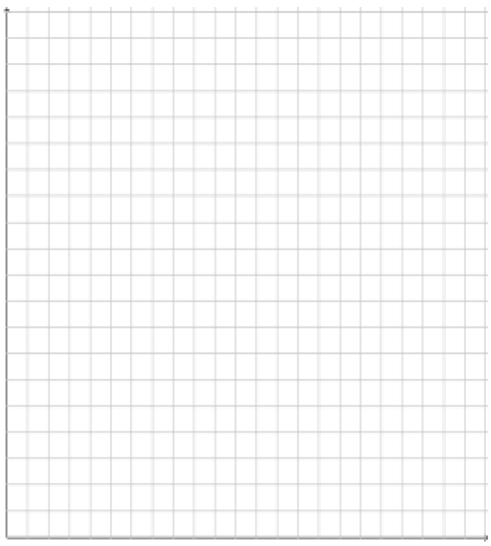
Δίνονται οι συναρτήσεις $y_1=2x+3$ και $y_2=x^2$

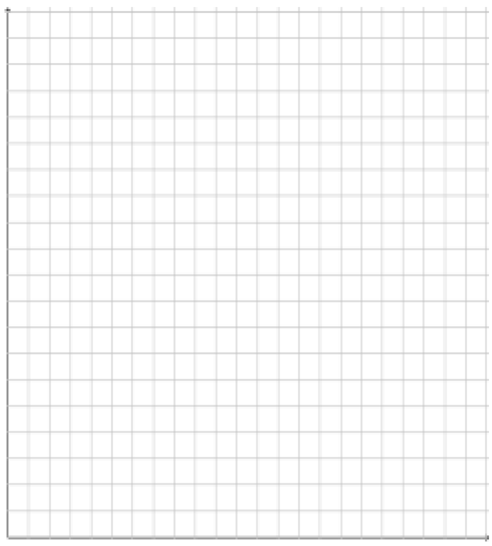
Να συμπληρώσετε πίνακες τιμών για τις δύο συναρτήσεις για θετικές τιμές του x:

x	y_1
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

x	y_2
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Απεικονίστε τα σημεία που βρήκατε στο επίπεδο και χαράξτε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων:





α) Τι είδους γραμμή είναι η γραφική παράσταση της y_1

β) Τι είδους γραμμή είναι η γραφική παράσταση της y_2

γ) Πώς μεταβάλλεται το y όταν το x αυξάνεται κατά μία μονάδα στην y_1;

δ) Πώς μεταβάλλεται το y όταν το x αυξάνεται κατά μία μονάδα στην y_2;

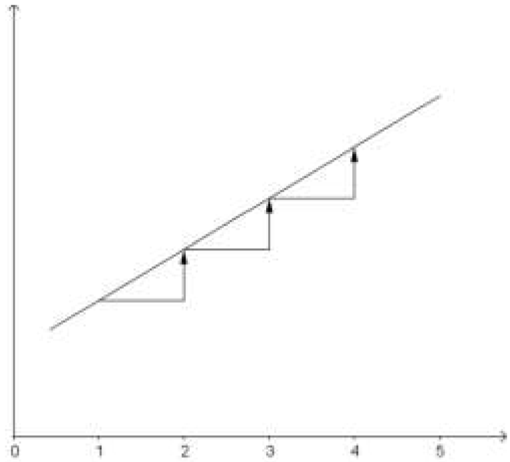
Παρατηρείστε τις εικόνες Α, Β και Γ.

Με ποια από τις ακόλουθες περιπτώσεις Α, Β και Γ ταιριάζει η συνάρτηση y_1;

Με ποια από τις ακόλουθες περιπτώσεις Α, Β και Γ ταιριάζει η συνάρτηση y_2;

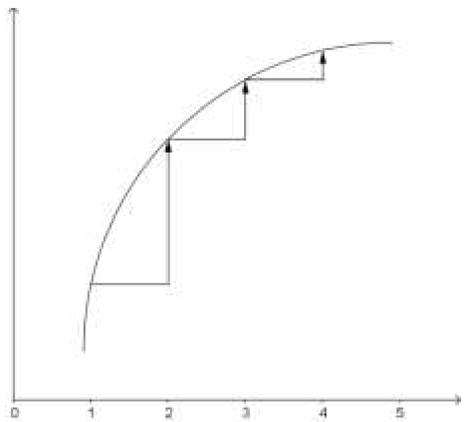
Α

Η τιμή του y μεταβάλλεται κατά ίσες ποσότητες



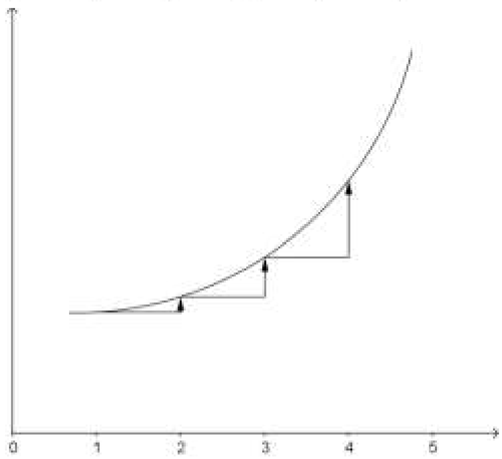
Β

Η τιμή του y μεταβάλλεται κατά όλο και μικρότερες ποσότητες



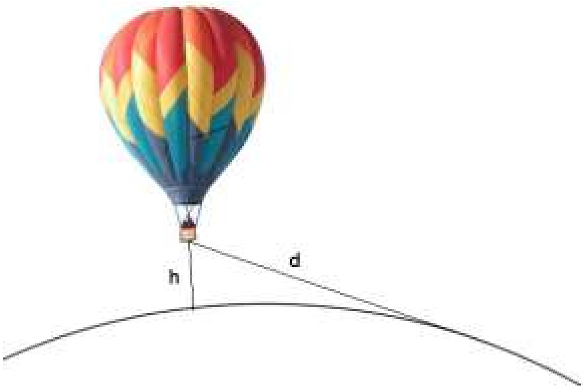
Γ

Η τιμή του y μεταβάλλεται κατά όλο και μεγαλύτερες ποσότητες



Δραστηριότητα 3

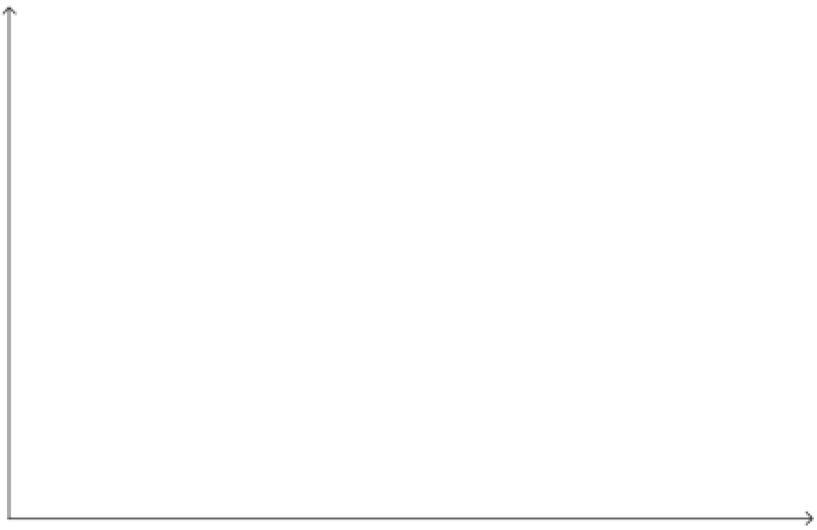
Όταν ένα αερόστατο πετά στον ουρανό σε ύψος h σε m, η απόστασή του d στον ορίζοντα από κάποιον παρατηρητή έστω ότι είναι d. Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται υψόμετρα και οι αντίστοιχες αποστάσεις στον ορίζοντα όπως προκύπτουν για κάποιον παρατηρητή:



Ύψος σε m	**Απόσταση στον ορίζοντα σε km**
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	36
500	80

Παρατηρείστε τα δεδομένα του πίνακα. Σε ποια από τις τρεις περιπτώσεις του προηγούμενου παραδείγματος θεωρείται ότι ανήκουν τα δεδομένα αυτού του πίνακα;

Με βάση την παρατήρηση αυτή σχεδιάστε πρόχειρα με το μολύβι σας την γραφική παράσταση της απόστασης στον ορίζοντα d ως προς το ύψος h.



Στο τέλος της δραστηριότητα τα δεδομένα ενώπιον όλης της τάξης καταγράφονται με χρήση του διαδραστικού πίνακα στο Geogebra και σχεδιάζεται η γραφική παράσταση από τους μαθητές.

Δραστηριότητα 3

Παρατηρείστε τους παρακάτω πίνακες τιμών και αναγνωρίστε αν τα ζεύγη (X,Y) ανήκουν σε μία ευθεία ή σε μία καμπύλη:

Α

x	**y**
2	6
4	12
6	18
8	24
10	30

Β

x	**y**
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

Γ

x	**y**
-5	0
-4	9
-3	16
-2	21
-1	24
0	25

Δ

x	**y**
0	-5
1	-2
2	1
3	4
4	7
5	10

Άσκηση για το σπίτι

Ο πατέρας σου, σου προτείνει δύο εναλλακτικά σχέδια για το χαρτζηλίκι που θα πάρεις το επόμενο διάστημα.

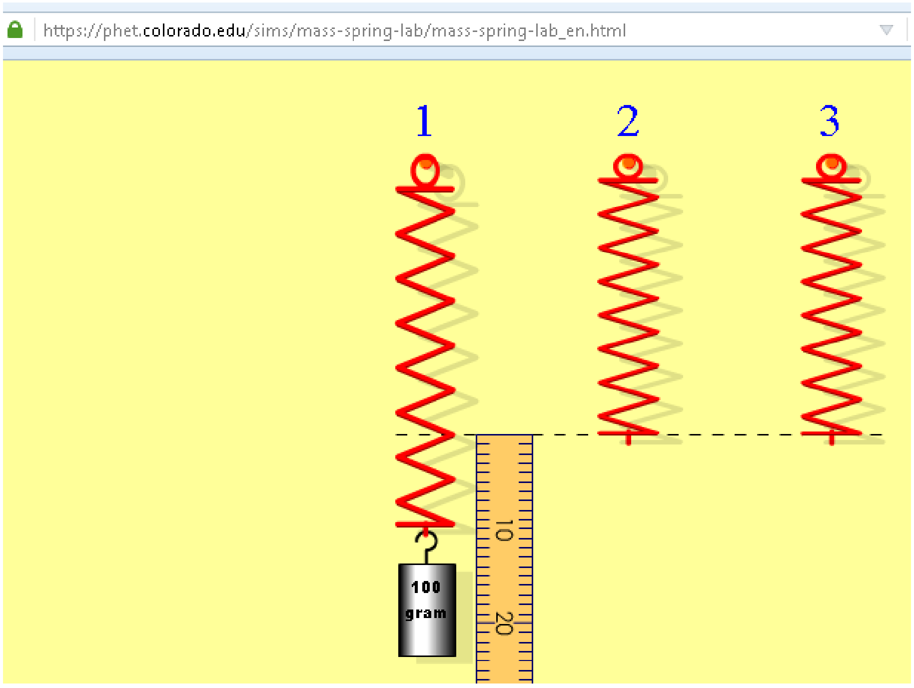
- Την πρώτη εβδομάδα θα πάρεις 0,1 Ευρώ και στη συνέχεια το ποσό που θα παίρνεις κάθε φορά θα διπλασιάζεται, την δεύτερη 0,2 Ευρώ, την τρίτη 0,4 κ.ο.κ
- Κάθε βδομάδα θα παίρνεις 10 Ευρώ

Α) Σε ποια από τις τρεις περιπτώσεις της δραστηριότητας 1 θεωρείτε ότι ανήκουν αυτές οι δύο διαφορετικές προτάσεις;
Β) Να δημιουργηθούν πίνακες τιμών των χρηματικών ποσών ανά εβδομάδα και για τις δύο περιπτώσεις και να γίνει η γραφική τους απεικόνιση στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
Γ) Ποια προσφορά από τις δύο προτιμάς αν η προσφορά αυτή ισχύει για τρείς μήνες (12 εβδομάδες);
Δ) Είναι το χαρτζηλίκι ανά εβδομάδα μία συνάρτηση, και αν ναι βρείτε τον τύπο της για την κάθε περίπτωση.

Μάθημα 9 - Η συνάρτησηy=αx

Εισαγωγική δραστηριότητα – Σύνδεση με την γνώση των μαθητών για τα ανάλογα ποσά από την προηγούμενη τάξη.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν εφαρμογή στο διαδίκτυο (https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html) που προσομοιώνει την επιμήκυνση ενός ελατηρίου όταν στην άκρη του προσαρτάται κάποιο βάρος.



Οι μαθητές προσαρτούν τρία διαφορετικά βάρη και μετρούν κάθε φορά την επιμήκυνση του ελατηρίου. Τα βάρη που προσαρτώνται και οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις του ελατηρίου καταγράφονται σε πίνακα. Οι μαθητές καλούνται επίσης να υπολογίσουν σε μία ξεχωριστή στήλη τους λόγους $\frac{E}{B}$ σε μία ξεχωριστή στήλη.

Βάρος Β σε gr	Επιμήκυνση Ε σε cm	$\frac{E}{B}$

Στην συνέχεια προκαλείται συζήτηση στην τάξη κατά την οποία οι μαθητές διαπιστώνουν ότι πρόκειται για ποσά ανάλογα, και βρίσκουν τον συντελεστή αναλογίας και την σχέση που συνδέει την επιμήκυνση του ελατηρίου με το προσαρτώμενο βάρος.

Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές κατ' αρχήν ερωτώνται αν η σχέση που βρήκαν εκφράζει μία συνάρτησης καθώς επίσης και για τα πεδία ορισμού και τιμών της. Καλούνται επίσης να δημιουργήσουν την γραφική παράσταση αρχικά σε φύλλο εργασίας και στη συνέχεια στον διαδραστικό πίνακα.

Με κατάλληλες ερωτήσεις ο διδάσκων επαναφέρει στους μαθητές την προηγούμενη γνώση, ότι δηλαδή η γραφική παράσταση μίας σχέσης αναλογίας είναι μία ημιευθεία στο πρώτο τεταρτημόριο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ακόμη για να γίνει σύνδεση με το μάθημα 8 οι μαθητές ερωτώνται:

Ποια είναι η επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου όταν το προσαρτώμενο βάρος αυξάνεται κατά 1 gr; Οι μαθητές μπορεί να κάνουν τον υπολογισμό για τις τιμές που βρήκαν στον πίνακα με την βοήθεια του τύπου της σχέσης αναλογίας που προσδιόρισαν ώστε να διαπιστώσουν ότι οι τιμές που βρίσκουν είναι ίσες με την σταθερά αναλογίας.

Δραστηριότητα 2 Από τα ανάλογα ποσά στη συνάρτηση $y = ax$ με πεδίο ορισμού το R

Οι τιμές δύο μεταβλητών x και y συνδέονται με την σχέση $y = 0,1x$.

- Είναι η σχέση αυτή μία συνάρτηση;
- Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x και ποιες η μεταβλητή y;
- Ποια πιστεύετε ότι είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης;
- Οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης με όποιον τρόπο θεωρούν αυτοί καλύτερο.
- Στη συνέχεια με την βοήθεια της γραφικής παράστασης καλούνται να πάρουν δύο διαφορετικές τιμές x1 και x2 και αφού υπολογίσουν τα αντίστοιχα y1 και y2 να υπολογίσουν τον λόγο της μεταβολής του y (y2-y1). προς την μεταβολή του x (x2-x1). Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι ο λόγος που υπολόγισαν είναι ίσος με τον συντελεστή του x στον τύπο της συνάρτησης.

Η συζήτηση μπορεί να γενικευθεί στην συνάρτηση y=ax. Υπάρχει κάποιο σημείο στο επίπεδο από το οποίο γνωρίζουμε ότι περνά η γραφική παράστασή της ακόμη κι αν δεν γνωρίζουμε το α;

Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=ax. Οι μαθητές καλούνται να δικαιολογήσουν την απάντησή τους επιχειρηματολογώντας με βάση όσα προηγήθηκαν για τις μεταβολές των τιμών των μεταβλητών.

Δραστηριότητα 3

Μία τράπεζα προσφέρει ετήσιο επιτόκιο 5% για κατατιθέμενα ποσά μέχρι 100.000 Ευρώ. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τον τόκο και το συνολικό κεφάλαιο μετά από ένα χρόνο αν κατατεθούν τα ποσά που φαίνονται στον πίνακα:

Αρχική κατάθεση x	10.000	38.000	50.000	75.000	100.000
Τόκος σε ένα χρόνο T					
Συνολικό κεφάλαιο σε ένα χρόνο K					

Να εκφράσετε τον ετήσιο τόκο T ως συνάρτηση της αρχικής κατάθεσης x

Να εκφράσετε το συνολικό κεφάλαιο ως συνάρτηση της αρχικής κατάθεσης x

Ασκήσεις 1, 2,4

Μάθημα 10 – Ο συντελεστής a στην συνάρτηση . y=ax

Δραστηριότητα

y=ax_217_last.ggb

Οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν στον διαδραστικό πίνακα εφαρμογή στο Geogebra (y=ax_217_last.ggb) Η εφαρμογή περιλαμβάνει δρομέα ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές σε ένα εύρος π.χ από το -5 έως το 5. Οι μαθητές μεταβάλλουν τον δρομέα ο οποίος ορίζει και την τιμή του συντελεστή στη συνάρτηση $y=ax$ και παρατηρούν το γράφημα της συνάρτησης που προκύπτει. Στην συνέχεια καλούνται να απαντήσουν στα παρακάτω για την συγκεκριμένη συνάρτηση που επιλέγεται κάθε φορά με μεταβολή δρομέα που καθορίζει την κλίση της ευθείας.

- Πάρτε ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην γραφική παράσταση και γράψτε τις συντεταγμένες του. Υπολογίστε τον λόγο $\frac{y}{x}$
- Για τα σημεία Α με συντεταγμένες (x_A,y_A) και Β με συντεταγμένες (x_B,y_B) υπολογίστε τον λόγο $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Ποια μορφή παίρνει ο λόγος $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ όταν ως ένα σημείο επιλέξετε το σημείο (0, 0);
- Πόσο μεταβάλλεται η τιμή του y όταν η τιμή του x αυξάνεται κατά μία μονάδα;

Για θετικές τιμές του a οι μαθητές ερωτώνται:

- Ποια είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τον άξονα των x. Ποια σχέση έχει ο υπολογισμός αυτός με τους προηγούμενους;

Για αρνητικές τιμές του a οι μαθητές ερωτώνται:

- Τι είδους γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x; Μπορείτε να υπολογίσετε την εφαπτομένη αυτής της γωνίας;

Παράλληλα οι μαθητές διαπιστώνουν το ρόλο του προσήμου στον συντελεστή α, και ότι για θετικό συντελεστή η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ για αρνητικό συντελεστή στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο. Διαπιστώνουν επίσης ότι σε όλες τις περιπτώσεις η γραφική παράσταση περνά από το σημείο (0,0).

Δραστηριότητα 2

find_slope.ggb

Στον διαδραστικό πίνακα εκτελείται η εφαρμογή Geogebra find_slope.ggb. Στην εφαρμογή υπάρχει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει μία διαφορετική τυχαί συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται να βρούν την κλίση της ευθείας που προκύπτει κάθε φορά.

Ασκήσεις 3,5,6,7

Μάθημα 11

Δραστηριότητα 1

Ένα κινητό κινούμενο με σταθερή ταχύτητα διανύει διάστημα 80 m. Παρατηρείστε το φαινόμενο στο αρχείο Geogebra auto1.ggb επιλέγοντας με την βοήθεια του δρομέα διαδοχικά ταχύτητες 2,5 m/sec, 5 m/sec και 10 m/sec.

Απεικονίστε τα ζεύγη (S, t) των διαστημάτων που διανύει το κινητό ως προς τον χρόνο και για τις τρεις περιπτώσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

(Στο τέλος γίνεται έλεγχος των απαντήσεων με επαλήθευση στον διαδραστικό πίνακα)

Γράψτε τη σχέση που εκφράζει το διανυόμενο διάστημα ως προς τον χρόνο και για τις τρεις περιπτώσεις.

Ποια είναι η κλίση των τριών ευθειών που χαράξατε στο σύστημα συντεταγμένων;

Δραστηριότητα 2

Γίνεται χρήση του αρχείου Geobera auto_second.ggb το οποίο προσομοιώνει την κίνηση ενός κινητού το οποίο διανύει διάστημα 80 m. Οι μαθητές παρατηρούν το φαινόμενο και καλούνται να απαντήσουν στα ερωτήματα:

Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού στο διάστημα από 0 έως 3 sec.

Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού στο διάστημα από 3 έως 8 sec.

Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού στο διάστημα από 8 έως 15 sec.

Πως εκφράζεται η διαφορά των ταχυτήτων των τριών ανωτέρω περιπτώσεων στο γράφημα διαστήματος χρόνου όπως παρουσιάζεται στο αρχείο Geogebra;

Απεικονίστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων την ταχύτητα του κινητού ως προς το χρόνο

Δραστηριότητα 3

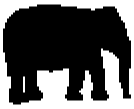
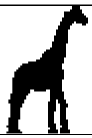
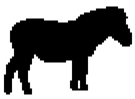
Στον διαδραστικό πίνακα εκτελείται η εφαρμογή Geogebra draw_line.ggb. Στην εφαρμογή υπάρχει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει μία διαφορετική συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν την ευθεία που προκύπτει κάθε φορά μετακινώντας κατάλληλα δύο σημεία.

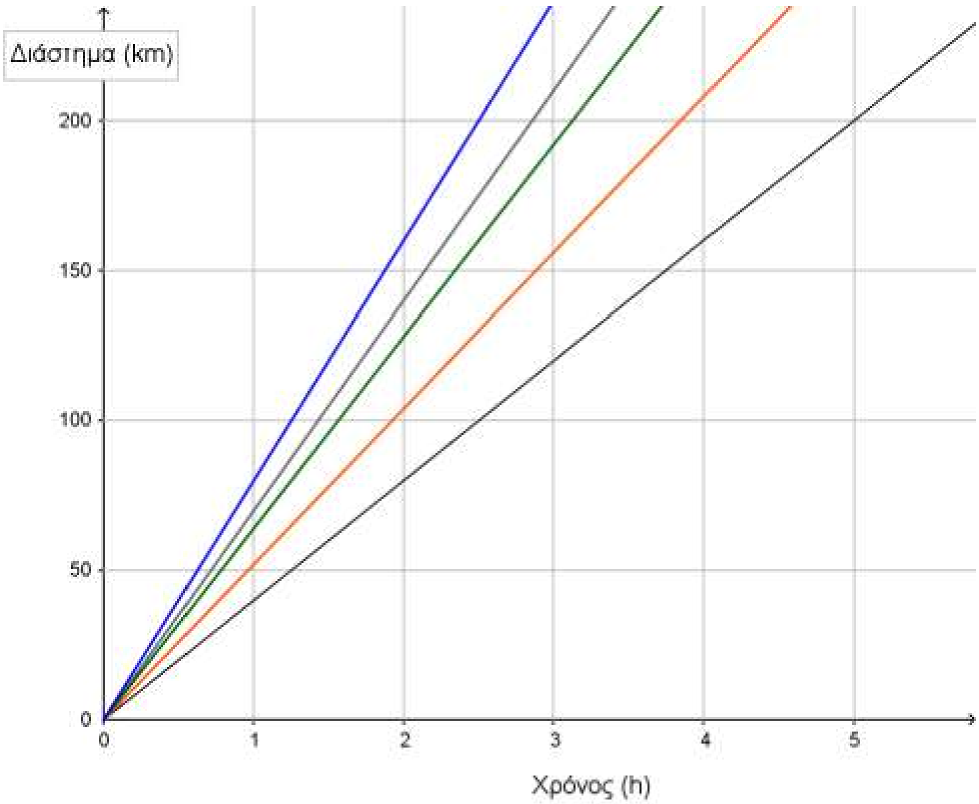
Ασκήσεις 8,9

Μάθημα 12 – Επαναληπτικό

<u>Δραστηριότητα</u>

Στον πίνακα φαίνονται οι μέγιστες ταχύτητες για πέντε ζώα της ζούγκλας.
Ποια γραμμή στο γράφημα που ακολουθεί αντιστοιχεί στο κάθε ένα από τα ζώα αυτά;

		Μέγιστη ταχύτητα
	Αφρικανικός ελέφαντας	40 km/h
	Λιοντάρι	80 km/h
	Καμηλοπάρδαλη	52 Km/h
	Ζέβρα	64 km/h
	Στρουθοκάμηλος	70 km/h



Δραστηριότητες - προβλήματα

1. Ο Κώστας το καλοκαίρι κολυμπά κάθε μέρα. Αν καίει περίπου 9,5 θερμίδες το λεπτό κατά την κολύμβηση, να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τις θερμίδες Y που καίει ως προς τον χρόνο κολύμβησης t (σε λεπτά) και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Αν ο Κώστας θέλει μια μέρα να κάψει 350 θερμίδες πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει;

2. Ένα σμήνος χελιδονιών την μεταναστευτική περίοδο διένυσε διάστημα 450 χιλιομέτρων σε 7,5 ώρες. Να γράψετε μία συνάρτηση που εκφράζει το διανυόμενο διάστημα ως προς τον χρόνο (θεωρείστε ότι τα χελιδόνια πετούν με μία σταθερή ταχύτητα).

3. Ο βάρος ενός αντικειμένου στην σελήνη είναι ανάλογο του βάρους του ίδιου αντικειμένου στη γή. Αν ένα αντικείμενο που ζυγίζει στη γή 75 Nt, στη σελήνη ζυγίζει 12,5 Nt να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το βάρος ενός αντικειμένου στη σελήνη ως προς το βάρος του στη γή. Ποιο είναι το βάρος στη σελήνη ενός αντικειμένου που στη γη ζυγίζει 114 Nt;

Δραστηριότητες στο Geogebra (επανάληψη δραστηριοτήτων από μαθήματα 8 και 9)

Στον διαδραστικό πίνακα εκτελείται η εφαρμογή Geogebra find_slope.ggb. Στην εφαρμογή υπάρχει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει μία διαφορετική τυχαία συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται να βρούν την κλίση της ευθείας που προκύπτει κάθε φορά.

Στον διαδραστικό πίνακα εκτελείται η εφαρμογή Geogebra draw_line.ggb. Στην εφαρμογή υπάρχει εικονικό πλήκτρο με το πάτημα του οποίου προκύπτει μία διαφορετική συνάρτηση της μορφής y=ax. Οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν την ευθεία που προκύπτει κάθε φορά μετακινώντας κατάλληλα δύο σημεία.