ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ – ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ	ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η κατανόηση της συμμετρίας μέσω δραστηριοτήτων χορού από μαθητές Δημοτικού

Ρόϊδου Φωτεινή

Α.Ε.Μ.: 714

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα

Εξεταστές : Σταθοπούλου Χαρούλα, Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Θεσσαλονίκη, 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών και η εκπόνηση της ακόλουθης διπλωματικής εργασίας δεν ήταν ατομικό κατόρθωμα, αλλά συλλογικό έργο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κυρία Δέσποινα Δεσλή για την πολύτιμη βοήθειά της, την καθοδήγηση και τις συμβουλές της κατά την εκπόνηση της παρούσα διπλωματικής εργασίας.

Ακολούθως, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κυρία Χαρούλα Σταθοπούλου και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας κύριο Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους ως μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον διευθυντή του δημοτικού σχολείου κύριο Πολυχρόνη Καλογερίδη, τη δασκάλα της Α΄ τάξης κυρία Πηνελόπη Τσακανίκα και τους γονείς των παιδιών για την αποδοχή και την άψογη συνεργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αμέριστη υποστήριξή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας μιας εναλλακτικής μορφής διδασκαλίας για τη συμμετρία σε μαθητές Α΄ και Β΄ Δημοτικού μέσα από δραστηριότητες χορού. Για τον σκοπό αυτό οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, στην Πειραματική Ομάδα και στην Ομάδα Ελέγχου, και παρακολούθησαν διδασκαλία στο μάθημα της συμμετρίας. Στην Πειραματική Ομάδα η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε μέσω δραστηριοτήτων χορού, ενώ στην Ομάδα Ελέγχου η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε αποκλειστικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Α΄ και Β΄ δημοτικού. Για να ελεγχθεί η επίδοση των συμμετεχόντων στις έννοιες της συμμετρίας μετά το πέρας της διδασκαλίας, οι μαθητές και των δύο ομάδων κλήθηκαν να απαντήσουν σε τρεις δοκιμασίες για την αμφίπλευρη και την περιστροφική συμμετρία. Διαπιστώθηκε ότι δεν υπήρξε σημαντική διαφορά ανάμεσα στην επίδοση των δύο ομάδων, δείχνοντας ότι τόσο η εναλλακτική μορφή διδασκαλίας όσο κι η περισσότερο παραδοσιακή μορφή εξασφαλίζουν εξίσου υψηλές επιδόσεις. Η παρούσα εργασία αναδεικνύει ότι η μαθησιακή διαδικασία μπορεί να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική με μια εναλλακτική μορφή διδασκαλίας, όπως ο χορός, λόγω της ενεργής συμμετοχής και της βιωματικής δράσης των μαθητών, που καθιστά το μάθημα των Μαθηματικών πιο ενδιαφέρον.

Λέξεις- κλειδιά: συμμετρία, αμφίπλευρη, περιστροφική, εναλλακτική μορφή διδασκαλίας, χορός

ABSTRACT

The aim of the present study was to investigate the efficiency of an alternative form of teaching symmetry that of teaching through dance to Year 1 and Year 2 children. For this reason, children were divided into two groups, an Experimental and a Control group. Both groups were taught the concept of symmetry. More specifically, in the Experimental group, an alternative form of teaching was applied with the use of dancing activities, whereas in the Control group, teaching was carried out with the use of Year1 and Year 2 school mathematics textbooks. In order to investigate the students' performance in understanding symmetry after the completion of the teaching, both groups were asked to answer three tasks on bilateral symmetry and helical symmetry. The analysis of the results revealed that there was no significant difference between children's performances between the two groups, showing that the alternative form of teaching as well as the traditional form of teaching resulted in children's equally high scores. The present study points out that the teaching process may be highly efficient when an alternative form such as dancing is used. This is due to the students' active participation and also due to experiential learning which makes mathematics more interesting as a school subject.

Key words: symmetry, reflection/ mirroring, rotational, alternative form of teaching, dance

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά συνδέονται με τον χορό με μία σχέση αιώνων, ξεκινώντας από την εποχή του Πυθαγόρα, ο οποίος κατασκεύασε τη διατονική κλίμακα. Η Γεωμετρία εμπεριέχεται τόσο στον χορό, στις κινήσεις (συμμετρικές- ασύμμετρες) όσο και στις γωνίες και στα γεωμετρικά σχήματα. Κατά συνέπεια, οι χοροδιδάσκαλοι δίνουν μεγάλη σημασία στην ακρίβεια του σώματος (Ωραιόπουλος, 2007).

Σύμφωνα με τους Hon και Goldstein (2008), τα είδη της συμμετρίας είναι τα εξής τέσσερα: η αμφίπλευρη συμμετρία ή συμμετρία ανάκλασης (reflection/ mirroring), η περιστροφική συμμετρία (rotational), η συμμετρία μετατόπισης ή μεταφοράς (translation) και η συμμετρία ανάκλασης με ολίσθηση (glide). Πολλές έρευνες έδειξαν ότι τα ποσοστά των μαθητών του δημοτικού που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της αξονικής συμμετρίας είναι υψηλά. Οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν ο άξονας δεν είναι κατακόρυφος ή οριζόντιος, ενώ πολύ συχνά παρατηρείται σύγχυση ανάμεσα στην αξονική συμμετρία και την παράλληλη μεταφορά ενός σχήματος (Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari, 2008; Μαστρογιάννης & Κορδάκη, 2007).

Η διδασκαλία της συμμετρίας, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα (2003) και το βιβλίο του δασκάλου, προβλέπεται για όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, καθώς δίνονται και ενδεικτικές δραστηριότητες για περαιτέρω εξάσκηση. Αν και η επαφή των μαθητών με την έννοια της συμμετρίας επαναλαμβάνεται σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται στην κατανόησή της.

Ένα από τα βασικότερα αίτια για την αδυναμία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών είναι η απουσία της ενεργητικής συμμετοχής και η βιωματική δράση των παιδιών (Τουμάσης, 2002). Η έκφραση των συναισθημάτων, η ενεργοποίηση της φαντασίας και των γνώσεων των μαθητών μπορούν να επιτευχθούν με την ενεργή συμμετοχή τους σε δραστηριότητες- έργα που συνδυάζουν τη μαθηματική γνώση με το χορό ή το παιχνίδι ή το θέατρο (Μπαρμπούση, 2014; Belcastro & Schaffer, 2011; Chaviaris & Kafoussi, 2010; Pivec, Dziabenko & Schinnerl, 2003).

Με τις εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας επιτυγχάνεται ο εποικοδομητισμός και ειδικότερα ο κοινωνικός εποικοδομητισμός, καθώς παρέχονται ευκαιρίες για την κατανόηση εννοιών μέσα από την ενεργητική συμμετοχή, τον πειραματισμό και την αλληλεπίδραση με το αντικείμενο και τους συμμαθητές τους, στοιχεία που χαρακτηρίζουν αυτή την προσέγγιση (Pivec et al., 2003). Πιο συγκεκριμένα, οι

Γκριμπίζη και Σπανοπούλου (2012) πραγματοποίησαν διδασκαλία για την κατανόηση της έννοιας του χρόνου σε μαθητές, ηλικίας 8-9 ετών, μέσω εναλλακτικής μορφής, μέσω κινητικού παιχνιδιού στο πλαίσιο του μαθήματος της Φυσικής Αγωγής και των Μαθηματικών. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές, εκτός από την κατανόηση της έννοιας του χρόνου μέσω του παιχνιδιού, κατάφεραν να συνεργαστούν και να ανταλλάξουν απόψεις μέσω συζήτησης. Επομένως, όπως πραγματοποιήθηκε στην έρευνα των Γκριμπίζη και Σπανοπούλου (2012) διδασκαλία για την κατανόηση της έννοιας του χρόνου μέσω κινητικού παιχνιδιού, μπορεί να επιτευχθεί διδασκαλία και για την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών μέσω διαφορετικής εναλλακτικής προσέγγισης, ενδεχομένως μέσω χορού.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση μιας εναλλακτικής, μη παραδοσιακής προσέγγισης που αφορά στη διδασκαλία της συμμετρίας σε παιδιά Α’ και Β’ Δημοτικού μέσα από τον χορό. Συγκεκριμένα, ο χορός ως εναλλακτική μορφή διδασκαλίας στις μέρες μας πραγματοποιείται και συμπεριλαμβάνεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού (Grades 3-5) στην Αμερική (Knuchel, 2004). Το κύριο ερευνητικό ερώτημα που απασχολεί την παρούσα εργασία αφορά στη μελέτη μιας διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση του χορού, ως εναλλακτική μορφή διδασκαλίας, στη διδασκαλία της συμμετρίας σε παιδιά Α΄ και Β΄ Δημοτικού. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκαν δύο δομημένες διδασκαλίες κατά τη διάρκεια τριών διδακτικών ωρών σε μαθητές Α΄ και Β΄ Δημοτικού που ήταν χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελούνταν από ένα τμήμα της Α΄ τάξης και από ένα της Β΄ τάξης, που διδάχθηκαν τη συμμετρία με τον «παραδοσιακό» τρόπο ακολουθώντας τις οδηγίες του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών. Η δεύτερη ομάδα αποτελούνταν αντιστοίχως από δύο τμήματα που διδάχθηκαν τη συμμετρία μέσα από δραστηριότητες χορού.

Μετά το πέρας των διδασκαλιών αξιολογήθηκε η κατανόησή τους σε στοιχεία της έννοιας της συμμετρίας σε ένα κοινό φύλλο αξιολόγησης, το οποίο βασίστηκε στη θεωρητική προσέγγιση της Κολέζα (2000). Η θεωρητική προσέγγιση της Κολέζα (2000) εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες της Γεωμετρίας (Διαδικασία Οπτικοποίησης, Κατασκευής και Συλλογισμού/ Απόδειξης).

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί η παρούσα εργασία να εξετάσει είναι:

1. Ποια ήταν η επίδοση των παιδιών για την κατανόηση των ειδών συμμετρίας ανάμεσα στις δύο ομάδες;

Εικάζεται ότι παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι η απουσία της ενεργητικής συμμετοχής, της βιωματικής δράσης, της έκφρασης συναισθημάτων και της ενεργοποίησης της φαντασίας των μαθητών (Μπαρμπούση, 2014; Belcastro & Schaffer, 2011; Chaviaris & Kafoussi, 2010; Pivec et al., 2003). Ενδεχομένως η επίδοση των μαθητών μέσω της εναλλακτικής διδακτικής προσέγγισης, δηλαδή μέσω του χορού, να είναι καλύτερη ή εξίσου καλή συγκριτικά με την παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση.

2. Υπάρχει κάποιο είδος συμμετρίας που ευνοήθηκε περισσότερο από την εναλλακτική διδακτική προσέγγιση;

Δύο είδη συμμετρίας από τα τέσσερα θα εξεταστούν στην παρούσα εργασία, η αμφίπλευρη και η περιστροφική. Αναμένεται τα παιδιά να έχουν καλύτερη επίδοση στην αμφίπλευρη συμμετρία, διότι έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν πιο εύκολα τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα σε σχέση με τον πλάγιο άξονα είτε με τη νοερή δίπλωση του χαρτιού Α4 είτε με τη χάραξη γραμμής με χάρακα (Μαστρογιάννη & Κορδάκη, 2007; Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari, 2008).

3. Διαφοροποιείται η επίδοση ανάμεσα στις δύο τάξεις;

Με δεδομένο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στις μεγαλύτερες τάξεις να κατανοήσουν την έννοια της συμμετρίας, και πιο συγκεκριμένα της αξονικής συμμετρίας (Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari, 2008; Son, 2006; Γαγάτσης & Γαλλής, 1989, στο Σκόδρας, 2010), ενδεχομένως αντίστοιχα να δυσκολεύονται και στις μικρές τάξεις, στην Α΄ και Β΄ δημοτικού.

4. Διαφοροποιείται η επίδοση ανάμεσα στα δύο φύλα;

Αρκετές έρευνες έδειξαν ότι υπάρχουν διαφοροποιήσεις στην επίδοση των μαθητών σε σχέση με το φύλο τόσο στη Γεωμετρία όσο και στις χωρικές έννοιες και σχέσεις με υπεροχή των αγοριών (Καφούση, Σκουμπουρδή & Καλαβάση, 2008), ενώ σε άλλες έρευνες αυτή η υπεροχή δεν εμφανιζόταν (Xistouri & Pitta- Pantazi, 2006). Ενδέχεται οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των φύλων να είναι μηδαμινές.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αποτελεί τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της έρευνας, το οποίο χωρίζεται σε δύο υποενότητες. Αρχικά, στην πρώτη υποενότητα παρουσιάζονται η έννοια και τα είδη της συμμετρίας, καθώς και η προσέγγιση της συμμετρίας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Στη συνέχεια, περιγράφονται γνωστικές διαδικασίες της Γεωμετρίας που κρίνονται απαραίτητες για των μαθηματικών εννοιών. Ακόμη παρατίθενται έρευνες που αναδεικνύουν τον ρόλο του χορού ως εναλλακτική διδακτική προσέγγιση για την κατανόηση της συμμετρίας. Τέλος, στη δεύτερη υποενότητα παρουσιάζονται έρευνες που εστιάζουν σε εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας Μαθηματικών μέσω του παιχνιδιού και του θεάτρου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται ο σχεδιασμός της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Παρουσιάζονται εκτενέστερα η περιγραφή της διδακτικής παρέμβασης, το εργαλείο μέτρησης, η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή δεδομένων και η μέθοδος επεξεργασίας τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα της παρέμβασης της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου, καθώς και η συνολική επίδοση των μαθητών στην προσέγγιση της συμμετρίας μέσω δραστηριοτήτων χορού τόσο ως προς την τάξη όσο κι ως προς το φύλο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφονται και αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ερευνητική διαδικασία καθώς και κάποιοι περιορισμοί. Προτείνονται κάποιες ιδέες για περαιτέρω έρευνα για τη βελτίωση της μαθησιακής διδασκαλίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ακολουθεί η ελληνόγλωσση και ξενόγλωσση βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Το παρόν κεφάλαιο, στο οποίο επιχειρείται η βιβλιογραφική επισκόπηση θεμάτων σχετικά με τη συμμετρία, χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται οι ορισμοί και τα είδη της συμμετρίας καθώς και οι διδακτικές στρατηγικές για τη διδασκαλία της συμμετρίας, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Επιπλέον, δίνεται έμφαση σε έρευνες που σχετίζονται με την κατανόηση της συμμετρίας από τους μαθητές/ τριες. Τέλος, παρουσιάζεται ο ρόλος του χορού και οι εκπαιδευτικές εφαρμογές του σε παρεμβάσεις μάθησης. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται έρευνες με εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας συνδυάζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με το παιχνίδι και το θέατρο.

Α. Η έννοια της συμμετρίας

1. Ορισμοί της συμμετρίας

Η λέξη συμμετρία στην Αρχαία Ελλάδα αναπτύχθηκε από τον Ευκλείδη (300 π.Χ.) μέσω της θεωρίας του για τα σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη, όπου σύμμετρα μεγέθη ονομάζονται αυτά που μετριούνται με το ίδιο μέτρο, ενώ ασύμμετρα αυτά για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο (Tzanakis, 2000).

Στο δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα υπήρξε ο πρώτος σαφής ορισμός της συμμετρίας από τη μετάφραση του Claude Perrault (1674) στο έργο του Βιτρούβιου «De Architectura». Σύμφωνα με αυτόν, η συμμετρία είναι μόνο μια σχέση στην οποία κυριαρχεί η ισοτιμία και η ισότητα. Ωστόσο, ως το τέλος του 18^{ου} αιώνα η συμμετρία ορίζεται ως ισορροπημένη αναλογία μη περιέχοντας την έννοια του μετασχηματισμού (Tzanakis, 2000).

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα οι μη ευκλείδειες Γεωμετρίες έχουν ήδη αναπτυχθεί, όταν το 1872 ο Felix Klein εκδίδει, για την εναρκτήρια διάλεξή του ως καθηγητής στο Ερλάνγκεν, ένα μανιφέστο υπό τον τίτλο «Συγκριτικές παρατηρήσεις πάνω σε νέες γεωμετρικές έρευνες» (*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*). Στη διακήρυξη αυτή, γνωστή ως Πρόγραμμα Ερλάνγκεν, προτείνει μια νέα κατηγοριοποίηση των Γεωμετριών στη βάση της προβολικής Γεωμετρίας και της θεωρίας ομάδων, όπου η αφηρημένη άλγεβρα και η θεωρία ομάδων θεωρητικοποιούν την έννοια της συμμετρίας. Σε κάθε Γεωμετρία, ο

Klein αντιστοιχεί μια ομάδα συμμετριών, δηλαδή μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτα κάποια χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως γωνίες, εμβαδά, μήκη (Beman & Smith, 1987).

Εκτός από τον Klein, προς την ίδια κατεύθυνση κινήθηκε και ο Martin (1982), ο οποίος μελέτησε τους πιο κλασσικούς μετασχηματισμούς που έχουν την ιδιότητα: «Αν l είναι μία ευθεία, τότε και η f(l) είναι μία ευθεία». Ένας μετασχηματισμός f που έχει αυτή την ιδιότητα λέγεται συγγραμμικός. Αναφέροντας ευθεία εννοούμε ένα σύνολο σημείων και η f(l) είναι το σύνολο όλων των σημείων f(P) όπου το σημείο P ανήκει στην ευθεία l. Για έναν δοσμένο συγγραμμικό μετασχηματισμό f, η f(l) είναι ευθεία και το σημείο f(P) ανήκει στην ευθεία f(l) αν και μόνο αν το σημείο P ανήκει στην ευθεία l. Οι μετασχηματισμοί και οι περιστροφές είναι παραδείγματα συγγραμικότητας. Ακόμη, η πρόταση για κάθε σημείο P υπάρχει ένα σημείο Q έτσι ώστε f(P)=Q είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι η f είναι μία αντιστοίχηση σε σύνολα σημείων. Η αντιστοίχηση f λέγεται επί όταν για κάθε σημείο P υπάρχει ένα σημείο Q τέτοιο ώστε f(Q)=P. Η αντιστοίχηση f είναι ένα προς ένα αν f(R)=f(S) , τότε R=S. Άρα, ένας μετασχηματισμός είναι μία τέτοια αντιστοίχηση σημείων που είναι και ένα προς ένα και επί (Martin, 1982).

Με τον παραπάνω ορισμό της συμμετρίας συμφωνούν και άλλοι μαθηματικοί όπως ο Jones (2000), ο οποίος θεωρεί τη συμμετρία ως έναν μετασχηματισμό ενός μαθηματικού αντικειμένου, που αφήνει κάποια ιδιότητα του αντικειμένου αναλλοίωτη. Τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι: η αξονική συμμετρία, η στροφή ως προς σημείο με βάση συγκεκριμένη γωνία ω και η μεταφορά ως προς διάνυσμα δ. Επίσης, ο Sommerville (2005) στο βιβλίο του «The elements of non-Euclidean geometry» αναφέρει ότι η έννοια της συμμετρίας συσχετίζεται με την έννοια της συνάρτησης και η συσχέτιση αυτή πηγάζει από τη θεωρία των γεωμετρικών μετασχηματισμών (Sommerville, 2005).

Αρκετοί ερευνητές έχουν δώσει παρόμοιους ορισμούς για την έννοια της συμμετρίας, σύμφωνα με τον Sommerville (2005). Ο Rosen (1995) διακρίνει δύο συστατικά στοιχεία της συμμετρίας: την πιθανότητα για μια αλλαγή και τη διατήρηση κατά την αλλαγή. Πιο συγκεκριμένα, αλλαγή θεωρείται ο μετασχηματισμός του γεωμετρικού αντικειμένου που διατηρεί όμως το αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες. Σύμφωνα με τους Dakin και Herbert (1998), η συμμετρία είναι μια περίπλοκη ιδιότητα της εικόνας που παρατηρείται σε ένα μεγάλο εύρος από διάφορα είδη και παρατηρείται με απλούς οπτικούς μηχανισμούς.

Οι μηχανισμοί αυτοί ποικίλλουν ανάλογα με τη γωνία της συμμετρίας. Η ανίχνευση της συμμετρίας δεν απαιτεί υπολογιστικές ικανότητες και συναντάται σε μεγάλο φάσμα στη φύση.

Οι Epley, Morewedge και Keysar (2004) υποστηρίζουν ότι η συμμετρία στα Μαθηματικά είναι μια εσωτερική ιδιότητα ενός μαθηματικού αντικειμένου, όπου το αντικείμενο παραμένει αναλλοίωτο από την επίδραση κάποιων μετασχηματισμών, όπως για παράδειγμα της περιστροφής, της αμφίπλευρης συμμετρίας.

2. Είδη συμμετρίας

Σύμφωνα με τους Hon και Goldstein (2008), τα είδη της συμμετρίας είναι τέσσερα: η αμφίπλευρη συμμετρία ή συμμετρία ανάκλασης (reflection/ mirroring), η περιστροφική συμμετρία (rotational), η συμμετρία μετατόπισης ή μεταφοράς (translation) και η συμμετρία ανάκλασης με ολίσθηση/ μετατόπιση (glide).

Αναλυτικότερα, σε δυσδιάστατες εικόνες και σχήματα διακρίνονται:

- ❖ η αμφίπλευρη συμμετρία ή συμμετρία ανάκλασης. Αν στην εικόνα μιας πεταλούδας τραβήξουμε μια κατακόρυφη γραμμή στη μέση, τότε, διπλώνοντάς τη κατά μήκος της γραμμής αυτής, το μισό της πεταλούδας συμπίπτει με το άλλο μισό.
- ❖ η περιστροφική συμμετρία. Ένα σχήμα, αν περιστραφεί κατά 60, 120,180, 240, 360 μοίρες γύρω από έναν άξονα που περνά από το κέντρο του (κάθετα στο επίπεδο), παραμένει πανομοιότυπο.
- ❖ η συμμετρία μετατόπισης. Ένα βασικό σχήμα παραμένει ίδιο είτε μετακινώντας το είτε αλλάζοντας θέση κατά μια συγκεκριμένη απόσταση κατά μήκος μιας γραμμής.
- ❖ η συμμετρία ανάκλασης με ολίσθηση. Ο μετασχηματισμός αποτελείται από μια ολίσθηση (μετατόπιση) και μια ανάκλαση ως προς μια γραμμή παράλληλη προς την κατεύθυνση της μετατόπισης.

Υπάρχει, επίσης, και η συμμετρία κλίμακας, η οποία πραγματοποιείται αρχικά σε τρισδιάστατο χώρο και έπειτα σε δομές κτιρίων, όπως τα φρακτάλς. Σε αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός αποτελείται από μια αλλαγή μεγέθους. Τα φρακτάλς αναπαράγουν τον εαυτό τους στο χώρο με ελάχιστη διαφοροποίηση σε σχήμα από το αρχικό μοτίβο αλλά σε άλλο μέγεθος, καθώς εξελίσσονται. Συμμετρίες που μεταφέρονται και σε τρισδιάστατο χώρο είναι η σφαιρική συμμετρία, κατοπτρική ή ως προς επίπεδο συμμετρία (Schattschneider, 2004).

3. Η έννοια της συμμετρίας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο

Μελετώντας τον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συμμετρίας στο δημοτικό σχολείο στην Ελλάδα, παρατηρείται ότι τα παιδιά διδάσκονται τη συμμετρία από την Α΄ δημοτικού μέχρι και την Στ΄ δημοτικού.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) του 2003 και το Βιβλίο των Μαθηματικών του Δασκάλου, η διδασκαλία της συμμετρίας θέτει τους εξής στόχους για κάθε τάξη:

- **Α΄ τάξη:** «οι μαθητές να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 256). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έρχονται σε μία πρώτη εμπειρική επαφή με αντικείμενα, εικόνες και σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα (Βιβλίο Δασκάλου).
- **Β΄ τάξη:** «οι μαθητές να παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 259). Ειδικότερα, οι μαθητές πρέπει α) να μπορούν να χρησιμοποιούν το διαφανές χαρτί ή τον καθρέφτη για να αντιληφθούν αν ένα σχήμα είναι συμμετρικό και να βρουν τον άξονα συμμετρίας του και β) να αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα με περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας (Βιβλίο Δασκάλου).
- **Γ΄ τάξη:** «οι μαθητές να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 263). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση α) να αναγνωρίζουν αν ένα ή δύο διαφορετικά σχήματα είναι συμμετρικά ή όχι και β) να εντοπίζουν τον άξονα συμμετρίας τους με τη μέθοδο «δίπλωσης» (Βιβλίο Δασκάλου).
- **Δ΄ τάξη:** «οι μαθητές να μπορούν να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας και να διενεργούν μεταφορά ενός σχήματος στο τετραγωνισμένο χαρτί κατά το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 266). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές πρέπει να μπορούν α) να αναγνωρίζουν τους άξονες συμμετρίας (κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα) ενός επίπεδου σχήματος, β) να

συμπληρώνουν ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας και γ) να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας του (Βιβλίο Δασκάλου).

- **Ε΄ τάξη:** «οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 271). Εκτενέστερα, οι μαθητές να μπορούν να ερευνούν τις σχέσεις των επιμέρους γεωμετρικών σχημάτων που σχηματίζονται φέροντας τον άξονα συμμετρίας, κατακόρυφα ή οριζόντια ή πλάγια, σε ένα αρχικό γεωμετρικό σχήμα (Βιβλίο Δασκάλου).
- **Στ΄ τάξη:** «οι μαθητές να μπορούν να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα» (ΑΠΣ, 2003, σελ. 274). Αναλυτικά, οι μαθητές να μπορούν α) να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας, β) να εντοπίζουν τους άξονες συμμετρίας (κατακόρυφο ή οριζόντιο ή πλάγιο) των σχημάτων και γ) να σχεδιάζουν σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα (Βιβλίο Δασκάλου).

Οι προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας για τη συμμετρία αντιστοιχούν σε 1 έως 2 διδακτικές ώρες για όλη τη σχολική χρονιά σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών για τις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

- **Α΄ τάξη**

Οι μαθητές στη δραστηριότητα της Εικόνας 1 καλούνται να διαπιστώσουν αν οι εικόνες είναι συμμετρικές ή μη συμμετρικές. Ως βοήθεια μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη νοερή δίπλωση της εικόνας στη μέση χρησιμοποιώντας το παράδειγμα δραστηριότητας που έχει προηγηθεί και αφορούσε στη δίπλωση ενός χαρτιού Α4 στη μέση. Επομένως, διπλώνοντας την εικόνα νοερά στη μέση είναι σε θέση να ελέγξουν τη συμμετρία (Βιβλίο Δασκάλου).

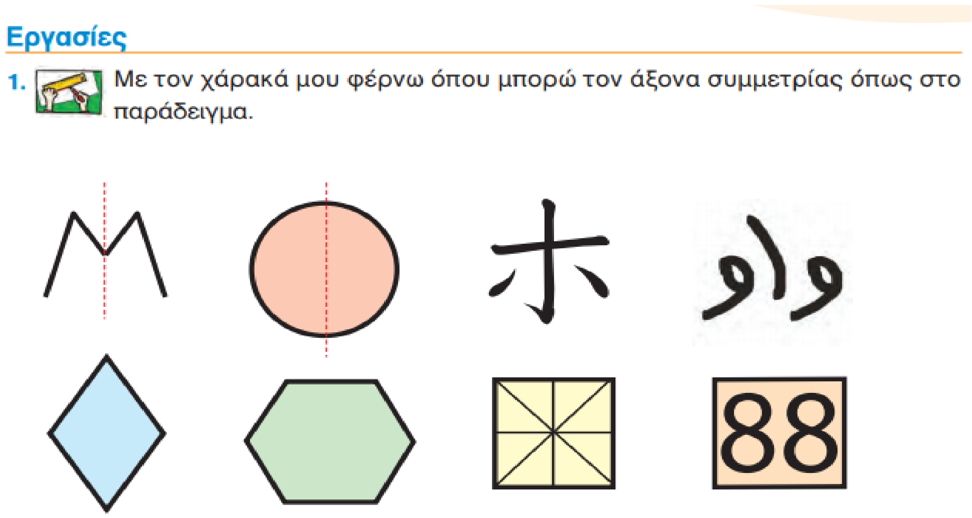
Εικόνα 1: Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας για τη διδασκαλία της συμμετρίας στην Α΄ Δημοτικού (ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθητή Α΄ τάξης, β' τεύχος, σελ.63).

- **Β΄ τάξη**

Οι μαθητές στη δραστηριότητα της Εικόνας 2 καλούνται να αναγνωρίσουν αν τα παραπάνω σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας ή όχι. Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να χρησιμοποιούν το διαφανές χαρτί για να αντιγράψουν τα σχήματα και να βρουν στη συνέχεια με τη δίπλωση αυτά που έχουν άξονα συμμετρίας. Ακόμη ένας τρόπος για να ελέγξουν οι μαθητές αν υπάρχει άξονας συμμετρίας είναι η χρήση ενός πλαστικού καθρέφτη. Τέλος, χαράζουν τον άξονα συμμετρίας με τη βοήθεια του χάρακα (Βιβλίο Δασκάλου).

- **Γ΄τάξη**

Στη δραστηριότητα της Εικόνας 3 οι μαθητές παρατηρώντας την πρώτη εικόνα με τον κύκνο διαπιστώνουν το φαινόμενο της αντανάκλασης του ειδώλου του κύκνου στο νερό. Οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν αντίστοιχα παραδείγματα ζώων όπου υπάρχει άξονας συμμετρίας (π.χ. έντομα). Επιπρόσθετα, στη δεύτερη εικόνα οι μαθητές παρατηρώντας διάφορα αντικείμενα που γνωρίζουν από το μάθημα της Ιστορίας, καλούνται να αναγνωρίσουν είτε νοερά είτε με τη χρήση καθρέφτη ποια αντικείμενα είναι συμμετρικά και ποια όχι και να χαράξουν τον άξονα συμμετρίας με τη βοήθεια χάρακα (Βιβλίο Δασκάλου).



Εικόνα 2: Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας για τη διδασκαλία της συμμετρίας στη Β΄ Δημοτικού (ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθητή Β΄ τάξης, α' τεύχος, σελ. 27).

Εικόνα 3: Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας για τη διδασκαλία της συμμετρίας στην Γ΄ Δημοτικού (ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθητή Γ΄ τάξης, σελ. 104).

4. Κατανόηση της συμμετρίας από τα παιδιά

Οι πληροφορίες που αφορούν στην ανάπτυξη και τη διδασκαλία της συμμετρίας φαίνεται να είναι αρκετά ελλιπείς, καθώς δεν είναι μεγάλος ο αριθμός των ερευνών που σχετίζονται με το συγκεκριμένο θέμα. Ένα βασικό όμως σημείο που διευκολύνει την κατανόηση της συμμετρίας είναι ότι οι έρευνες εστιάζουν κυρίως σε πειράματα διδασκαλίας που περιέχουν συνήθως τεχνολογικά μέσα (Epley, Morewedge & Keysar, 2004).

Οι Hoyles και Healy (1997), για παράδειγμα, χρησιμοποίησαν τον μικρόκοσμο για να βοηθήσουν μαθητές ηλικίας 11-12 ετών να συνδυάσουν ταυτόχρονα σε δραστηριότητες σχετικές με συμμετρία ως προς άξονα, οπτικές σχέσεις και συμβολικές αναπαραστάσεις. Ο μικρόκοσμος βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές με στόχο την αντιμετώπιση έργων συμμετρίας ως προς άξονα με τη χρήση μολυβιού και χαρτιού όταν τους ζητήθηκε να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν οριζόντιο, κατακόρυφο και πλάγιο άξονα συμμετρίας. Διαπιστώθηκε ότι η εύρεση συμμετρίας ενός αντικειμένου σε κατακόρυφο άξονα ήταν πιο εύκολη για τους μαθητές από την εύρεση σε οριζόντιο ή πλάγιο άξονα. Μια προσεγγιστική στρατηγική χρησιμοποίησε η δωδεκάχρονη Emily που προκύπτει από τη δίπλωση του χαρτιού. Πιο συγκεκριμένα, όταν το σχήμα εφαπτόταν με τον άξονα συμμετρίας ή τον έτεμνε, η μαθήτρια κατασκεύαζε τότε την εικόνα επιμηκύνοντας το αντικείμενο πέρα από τον άξονα συμμετρίας και με μία ώθηση προς τα επάνω που δεν εφαπτόταν με την επιφάνεια κατέληγε σε μια περιστροφή παρά σε μια ανάκλαση. Αυτό που είναι σημαντικό στην έρευνα αυτή είναι ο ισχυρισμός των ερευνητών ότι η Emily κατάφερε να αντιληφθεί τις ιδιότητες της συμμετρίας με τοποθέτηση του εαυτού της στον εικονικό κόσμο των χελωνών.

Σε έρευνα των Xistouri και Pitta-Pantazi (2006) που εξέταζε την επίδοσή παιδιών ηλικίας 10-12 ετών σε έργα συμμετρίας ως προς άξονα με τη χρήση τεχνολογικών μέσων, διαπιστώθηκε ότι η επιτυχία σε αυτά μπορεί να προβλεφθεί από τη γενική μαθηματική επιτυχία των παιδιών, τις ικανότητές τους στην προοπτική απεικόνιση και σε αυτές της χωρικής περιστροφής. Γίνεται αντιληπτό ότι δε συσχετίζεται το φύλο και το επίπεδο της τάξης με τη γενική μαθηματική επιτυχία των παιδιών και τη χρήση τεχνολογικών μέσων. Ωστόσο, σύμφωνα με την έρευνα των Καφούση, Σκουμπουρδή και Καλαβάση (2008) σχετικά με το φύλο και τα μαθηματικά χωρίς τη χρήση τεχνολογικών μέσων, διαπιστώθηκε η υπεροχή των αγοριών στις επιδόσεις τους τόσο στη Γεωμετρία, όσο και στις χωρικές έννοιες, σε σύγκριση με των κοριτσιών.

Παράλληλα, παρουσιάστηκε συσχέτιση ανάμεσα σε έργα συμμετρίας ως προς κάθετο και οριζόντιο άξονα, αλλά όχι τόσο δυνατή όπως σε άλλες έρευνες (Kozhevnikov & Hegarty, 2001; Zacks, Ollinger, Sheridan & Tversky, 2002; Hegarty & Waller, 2004, στο Xistouri & Pitta- Pantazi, 2006). Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται στο νεαρό της ηλικίας του πληθυσμού της έρευνας, αν ληφθεί υπόψη ότι συγκρίθηκαν με τους φοιτητές του κολεγίου, που αποτέλεσαν τον πληθυσμό των προαναφερόμενων ερευνών. Ίσως τα παιδιά να μην αναγνωρίζουν τις ομοιότητες όπως οι μεγάλοι και να οπτικοποιούν νοερά με διαφορετικό τρόπο από τους μεγάλους.

Από την έρευνα αυτή εξάγεται το συμπέρασμα ότι διαφορετικά έργα συμμετρίας απαιτούν διαφορετικές ικανότητες. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα συμμετρίας στην παρούσα έρευνα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στην παραδοσιακή προσέγγιση της συμμετρίας μέσω λεκτική διδασκαλίας με τη χρήση μολυβιού και χαρτιού και στην προσέγγιση με το χειρισμό αντικειμένων και της οπτικής απεικόνισης με τη βοήθεια της τεχνολογίας με σκοπό την ενθάρρυνση της χωρικής σκέψης. Με βάση τα αποτελέσματα αναδεικνύεται ότι τέτοια έργα απαιτούν περισσότερο χωρικές παρά γνωστικές ικανότητες, ιδιαίτερα όμως περισσότερο ικανότητες χωρικού προσανατολισμού, όπως την «προοπτική απεικόνιση», παρά ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης, όπως τη «νοερή περιστροφή».

Αν και η επαφή των μαθητών με την έννοια της συμμετρίας επαναλαμβάνεται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται στην κατανόησή της και σε μεγαλύτερες τάξεις. Με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις έννοιες της αξονικής συμμετρίας και του άξονα συμμετρίας ασχολήθηκαν πολλοί ερευνητές (Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari, 2008; Son, 2006; Γαγάτσης & Γαλλής, 1989, στο Σκόδρας, 2010).

Αναλυτικότερα, ο Σκόδρας (2010) πραγματοποίησε διδακτικό πείραμα με στόχο την κατανόηση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας και του άξονα συμμετρίας με τη χρήση χειραπτικών υλικών (γεωπίνακες, Giles-παζλ, πλαστικά σχήματα) και του λογισμικού του Geogebra. Συμμετείχαν 24 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, όπου χωρίστηκαν σε δύο τμήματα: το ένα τμήμα όπου συμμετείχε σε όλες τις φάσεις της έρευνας και των διδακτικών παρεμβάσεων, ενώ το δεύτερο που λειτούργησε ως Ομάδα Ελέγχου.

Στη συγκεκριμένη έρευνα, αρχικά, όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο (pre-test) που περιλάμβανε έργα με τη συμμετρία. Οι μαθητές του πρώτου τμήματος συμμετείχαν στις δύο φάσεις της διδακτικής παρέμβασης για την κατανόηση της συμμετρίας μέσω του λογισμικού Geogebra. Εργάστηκαν σε φορητούς υπολογιστές πρώτα ατομικά και έπειτα ομαδικά, όπου κάθε ομάδα είχε να περάσει από τέσσερις συνολικά σταθμούς. Σε κάθε σταθμό οι μαθητές ανά ομάδα συμπλήρωναν ένα φύλλο δραστηριοτήτων. Η ομαδοσυνεργατική εργασία βοήθησε τους μαθητές να προσεγγίσει και να αποδεχτεί ο ένας την άποψη του άλλου. Αντιθέτως, οι μαθητές του δευτέρου τμήματος ακολούθησαν τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας χωρίς τη χρήση ΤΠΕ και χειραπτικών υλικών. Μετά το πέρας δέκα εβδομάδων από το τέλος της έρευνας, τα τμήματα αξιολογήθηκαν σε μια τελική δοκιμασία (post test).

Συμπερασματικά, η ομαδοσυνεργατική εργασία ευνόησε εποικοδομητικά τους μαθητές του πρώτου τμήματος, καθώς συνεργάστηκαν στην αρχή διστακτικά και έπειτα μοιράστηκαν τις απόψεις και τις ιδέες τους πριν συμπληρώσουν από κοινού το φύλλο δραστηριοτήτων. Οι μαθητές του πρώτου τμήματος είχαν ενεργητική συμμετοχή αναπτύσσοντας το αίσθημα της χαράς μέσω διαφορετικής προσέγγισης της διδασκαλίας συγκριτικά με τους μαθητές του δεύτερου τμήματος.

Έρευνες, επιπρόσθετα, πραγματοποιήθηκαν για την κατανόηση της συμμετρίας με την απουσία τεχνολογικών μέσων, αλλά μέσω παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, μια έρευνα που διενεργήθηκε στην Ελλάδα από τους Μαστρογιάννη και Κορδάκη (2007) εξέταζε την κατανόηση των μαθητών της Δ΄ Δημοτικού ηλικίας 7-8 ετών για την αμφίπλευρη συμμετρία. Δόθηκαν στους συμμετέχοντες τρεις κατηγορίες σχημάτων: α) μη γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία προέρχονταν από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών, β) γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και γ) τυπικά γεωμετρικά σχήματα. Ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν τη συμμετρία στα σχήματα, τους άξονες συμμετρίας και αν αυτοί είναι κατακόρυφοι, οριζόντιοι ή πλάγιοι.

Η έρευνα αυτή έδειξε ότι οι μαθητές ήταν σε θέση να κατανοήσουν την έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας και μπορούσαν να αναγνωρίσουν τα συμμετρικά σχήματα, ιδιαίτερα μέσω της δίπλωσης. Ακόμη παρατηρήθηκε ότι αναγνώρισαν πιο εύκολα τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας από τον οριζόντιο ή τον πλάγιο άξονα. Η πλειοψηφία των μαθητών αντιλήφθηκε μόνο από τα περιγράμματα αν ένα σχήμα είναι συμμετρικό αγνοώντας τη χρωματική διαφοροποίηση όπου υπήρχε.

Η Ξυστούρη (2007) πραγματοποίησε έρευνα για την κατανόηση της συμμετρίας με οπτική αναγνώριση, χωρίς τη χρήση τεχνολογικών μέσων, μολυβιού ή χαρτιού. Ειδικότερα, η κατανόηση των παιδιών ηλικίας 6-8 ετών και η επίδοση τους ποικίλλει σε διαφορετικού τύπου και βαθμού δυσκολίας έργα τα οποία εξετάζουν οπτική συμμετρία. Στην έρευνα συμμετείχαν 507 μαθητές, στους οποίους χορηγήθηκαν εργαλεία για τη μέτρηση: α) της ικανότητας στις έννοιες της συμμετρίας των μετασχηματισμών, β) της ικανότητας στην αντίληψη των εννοιών του χώρου και γ) της ικανότητας των τριών διαστάσεων γνωστικού στυλ (εικονικών, χωρικών και λεκτικών αναπαραστάσεων). Μέσω της έρευνας αποδείχθηκε ότι η ικανότητα στις έννοιες της συμμετρίας των μετασχηματισμών αποτελείται από τις ικανότητες: (α) στη μεταφορά, (β) στην ανάκλαση και (γ) στην περιστροφή. Τα βήματα των γνωστικών ικανοτήτων περιλαμβάνουν: 1) την αναγνώριση εικόνας, 2) την αναγνώριση μετασχηματισμού, 3) τον προσδιορισμό παραμέτρων και 4) την κατασκευή εικόνας. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την απαραίτητη χρήση των γνωστικών ικανοτήτων, καθώς οι μαθητές κατανόησαν την έννοια της συμμετρίας ακολουθώντας τα τέσσερα βήματα, ενώ αναγνώρισαν οπτικά τα συμμετρικά σχήματα.

5. Γνωστικές διαδικασίες για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας

Από τη μελέτη της ενότητας της συμμετρίας από το σχολικό εγχειρίδιο και το Βιβλίο του Δασκάλου, καθώς κι από τη μελέτη ερευνών σχετικά με την κατανόηση της συμμετρίας, η οποία εντάσσεται στη Γεωμετρία προκύπτει ότι είναι μία ενότητα αυξημένης δυσκολίας για τους μαθητές. Ωστόσο, σημαντική κρίνεται η αναγκαιότητα των απαραίτητων γνωστικών διαδικασιών για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών με σκοπό την κατανόησή της από τους μαθητές (Τουμάσης, 2002).

Η Κολέζα (2000) θεωρεί ότι η μελέτη της Γεωμετρίας είναι απαραίτητη, γιατί εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες:

- **Διαδικασίες Οπτικοποίησης** για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, ή για μια υποκειμενική επαλήθευση και τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων.
- **Διαδικασίες Κατασκευής** με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες.
- **Διαδικασίες Συλλογισμού / Απόδειξης** όπου μπορούν να εκτελεσθούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη, αλλά ο συνδυασμός τους είναι απαραίτητος για την γεωμετρική σκέψη.

Η συνύπαρξη των τριών γνωστικών διαδικασιών προσφέρει μεθοδολογικά πλεονεκτήματα στη Γεωμετρία.

6. Συμμετρία και χορός

Η συμμετρία, παρόλο που αποτελεί γεωμετρική έννοια, μπορεί να γίνει διακριτή και σε αρκετές χορευτικές κινήσεις. Ο Laban ήταν ένας από τους πρωτοπόρους στον τομέα του, ο οποίος προσπάθησε να αναλύσει την κίνηση (Laban Movement Analysis-LMA), αποδεικνύοντας ότι οι κινήσεις ενός σώματος μπορούν να είναι συμμετρικές ή ασύμμετρες. Ειδικότερα, για να εκτελεστεί μία ολοκληρωμένη κίνηση, συμμετέχουν τα μέρη του σώματος ή ορισμένα μέρη (Σώμα), μέσα σε συγκεκριμένο χώρο (Χώρος), σε σχέση με άλλα σώματα ή αντικείμενα (Σχέσεις), που χαρακτηρίζονται από δύναμη, ροή και ταχύτητα (Προσπάθεια) (Belcastro & Schaffer, 2011).

Ένας από τους τρόπους καταγραφής κίνησης που χρησιμοποίησε ο Laban ήταν το σύστημα σημειογραφίας Labanotation, το οποίο περιείχε σύμβολα. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούσε προέκυπταν με βάση την ανατομία, τη συμμετρία του κινούμενου σώματος, την πλευρικότητα, τη σχέση του σώματος με τη βαρύτητα και τον τρισδιάστατο χώρο της κίνησης, καθώς και τις κατευθύνσεις του σώματος σε σχέση με τον κατακόρυφο άξονα (Τυροβολά & Κουτσούμπα, 2007). Έτσι γίνεται αντιληπτό το γεγονός ότι ο χορός δεν είναι αποτέλεσμα μιμητικών κινήσεων, αλλά συνδυασμός αντίληψης χώρου, χρόνου, συμμετρικών κινήσεων και κατεύθυνσης (Belcastro & Schaffer, 2011).

Η συμμετρία του σώματος αποτελεί ένα από τα σύμβολα του Labanotation και διακρίνεται σε ορισμένα είδη χορού. Για παράδειγμα, στο ντουέτο του φλαμένκο, δύο χορευτές κυκλώνουν ο ένας τον άλλον στενά με περιστροφική συμμετρία 180 μοιρών, δημιουργώντας μια δυναμική οικεία αντίθεση (Belcastro & Schaffer, 2011). Ο καβαλιέρος ή η ντάμα χρησιμοποιεί τόσο την περιστροφική συμμετρία όσο όμως και την ανάκλαση. Η συμμετρία του σώματος παρατηρείται και επιβεβαιώνεται και στους σύγχρονους και μοντέρνους ομαδικούς χορούς, όπως zumba, hip hop (Τυροβολά & Κουτσούμπα, 2007).

Η διδασκαλία του κάθε χορού έχει το δικό της χαρακτηριστικό τρόπο χρήσης μαθηματικών εννοιών. Βασική προϋπόθεση ενός δασκάλου ή μαθηματικού είναι να γνωρίζει πως συνδέονται τα Μαθηματικά με το χορό, ώστε να επιτευχθεί η σωστή προσέγγισή τους (Τυροβόλα & Κουτσούμπα, 2007). Ορισμένοι ερευνητές και χορογράφοι αναφέρουν μερικά ακόμη παραδείγματα που αναδεικνύουν την αλληλεπίδραση μεταξύ συμμετρίας και χορού δημιουργώντας τους «μαθηματικούς χορούς». Το 1990 οι Kathryn και Stern δημιούργησαν δύο ήρωες για μια εκπομπή με τίτλο «Two Guys Dancing About Math», στην οποία ένα από τα θέματα που παρουσίασαν ήταν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή σε συνδυασμό με χορούς που εστιάζουν στη φυσική κίνηση με σκοπό να τονιστεί ο καθοριστικός ρόλος του χορού στην καθημερινότητα των ανθρώπων. Επίσης, το κλασσικό δυτικό μπαλέτο και το Bharatya Natyam (παραδοσιακός χορός της Νότιας Ινδίας) χρησιμοποιούν και τα δύο μια έντονη αίσθηση γραμμής (Belcastro & Schaffer, 2011).

Στην Ελλάδα, στους παραδοσιακούς ελληνικούς χορούς οι χορευτές εκτελούν άρτιες συμμετρικές κινήσεις. Η μορφή αυτών των χορών προάγει τη συμμετοχή, την ομαδικότητα και οδηγεί στην ανάπτυξη σχέσεων ανάμεσα στους χορευτές, διότι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Εκτός από τη συμμετρία, υπάρχει ακόμη ένα βασικό χαρακτηριστικό στους παραδοσιακούς χορούς, το οποίο είναι η αρμονία (Μπαρμπούση, 2014). Το χαρακτηριστικό αυτό της αρμονίας μπορεί να διαπιστωθεί στους χορούς της Θράκης, οι οποίοι παρουσιάζονται με απόλυτη συμμετρία κινήσεων του σώματος προσδίδοντας ένα ξεχωριστό αποτέλεσμα (Καρφής & Ζιάκα, 2009).

Οι ελληνικοί παραδοσιακοί χοροί ταξινομούνται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με το σχήμα τους. Διακρίνονται σε (α) κυκλικούς, όπου ο κύκλος είναι είτε ανοιχτός είτε κλειστός και (β) αντικριστούς χορούς, όπου ο καβαλιέρος τοποθετείται απέναντι από την ντάμα χορεύοντας πανομοιότυπα, ακόμη και στην περιστροφή τους (Τυροβολά & Κουτσούμπα, 2007). Με τα παραπάνω είδη χορών, καθιστάται εφικτό οι χορευτές από μικρή ηλικία να μαθαίνουν μέσω μιας εναλλακτικής διδακτικής προσέγγισης την έννοιας της συμμετρίας (Καρφής & Ζιάκα, 2009).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μερικές φορές και οι χορογράφοι, που δεν είναι μαθηματικοί, επιστρατεύουν τα μαθηματικά έχοντας κατά νου την απλή χρησιμότητά τους. Με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν την απλή αρίθμηση για την τοποθέτηση μιας ομάδας χορευτών σε συμμετρικό ωοειδές σχήμα πάνω στη σκηνή πριν από την έναρξη του χορού. Βασικό στόχο αυτής της ενέργειας αποτελεί η ομοιόμορφη και συμμετρική παρουσίαση του χορού (Εικόνα 5) (Belcastro & Schaffer, 2011).

Σύμφωνα με προϋπάρχουσες έρευνες και με βάσει τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προκύπτει ότι για να ολοκληρωθεί μια χορευτική κίνηση κρίνεται απαραίτητη η πραγματοποίηση ορισμένων συμμετρικών κινήσεων από τον χορευτή, τις οποίες δεν αντιλαμβάνεται ορισμένες φορές ότι τις πραγματοποίησε. Καθώς η συμμετρία μέσω φυσικών κινήσεων εμφανίζεται από πολύ μικρή ηλικία στην καθημερινότητα.

Εικόνα 4: Συμμετρικό ωοειδές σχήμα (ΠΗΓΗ: Belcastro & Schaffer, 2011, σελ. 19).

Β. Εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας των Μαθηματικών

1. Παιχνίδι και Μαθηματικά

Για πολλά χρόνια το παιχνίδι και η εκπαίδευση θεωρούνταν δύο ασυμβίβαστες μεταξύ τους δραστηριότητες. Αν και η μάθηση συνδέεται με τον κόπο, την προσπάθεια και τη συγκέντρωση, ενώ το παιχνίδι με την ελευθερία, την ξεγνοιασιά και την χαρά έχουν αρκετά κοινά στοιχεία. Ένα βασικό κοινό στοιχείο που παρατηρείται είναι ότι η μάθηση, όπως και το παιχνίδι, αποτελεί διαδικασία αλληλεπίδρασης αλλά και πρόκληση στην οποία υπάρχουν κανόνες οι οποίοι οδηγούν στην κατάκτηση της γνώσης και του επιδιωκόμενου στόχου (Breuer & Bente, 2010; Σκουμπουρδή, 2010). Αυτή η συσχέτιση της μάθησης με το παιχνίδι επισημαίνεται και από τον Prenky (2007, στο Breuer & Bente, 2010), ο οποίος αναφέρει ότι η ενασχόληση με κάποιο παιχνίδι συνδέεται άρρηκτα με τη μάθηση.

Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί με σκοπό να εντοπιστεί η σημασία του ελεύθερου και δομημένου παιχνιδιού στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ειδικότερα, σύμφωνα με την έρευνα των Seo και Ginsburg (2004, στο Σκουμπουρδή, 2010) που πραγματοποιήθηκε μέσω βιντεοσκόπησης του ελεύθερου παιχνιδιού παιδιών ηλικίας 4- 5 ετών έδειξε ότι τα παιδιά εμπλέκονται από πολύ νωρίς με τα Μαθηματικά. Έξι κατηγορίες με μαθηματικό περιεχόμενο εντοπίστηκαν στη βιντεοσκόπηση ανάλογα με τις συχνότερες δράσεις των παιδιών: τα μοτίβα και τα σχήματα, το μέγεθος, η απαρίθμηση, η δυναμική, οι χωρικές σχέσεις και η ταξινόμηση.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η αναγνώριση, η κατασκευή μοτίβων ή όχι και η αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων ήταν από τις συχνότερες δράσεις των παιδιών κατά τη διάρκεια του ελεύθερου παιχνιδιού. Το βασικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν οι ερευνητές είναι ότι από μόνο του το ελεύθερο παιχνίδι των παιδιών δεν εξασφαλίζει την επίτευξη της μαθηματικής γνώσης, ωστόσο μία σχεδιασμένη διαχείριση ελεύθερου παιχνιδιού μπορεί να συμβάλλει στη μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας.

Ένα πλαίσιο προσομοίωσης δημιουργήθηκε από τους Edo, Planas & Badillo (2009) στην Ισπανία, ως μία εναλλακτική διδακτική προσέγγιση, για τη διερεύνηση του ρόλου του παιχνιδιού στην επίδοση των παιδιών στα μαθηματικά για παιδιά ηλικίας 5-6 ετών, με σκοπό τα παιδιά να κατανοήσουν την αριθμητική και να συνδυάσουν την υπάρχουσα γνώση και σε άλλες καταστάσεις. Η σχεδιασμένη διδακτική κατάσταση που δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε ήταν «ο φούρνος», ως ένα συμβολικό παιχνίδι ρόλων το οποίο συνδύαζε την αρίθμηση με την πραγματική ζωή. Οι διδακτικοί στόχοι που τέθηκαν από τους ερευνητές ήταν: 1) να καλλιεργήσουν την παρατήρηση, την ανάλυση και τη μάθηση μέσα από την καθημερινότητα, 2) να οργανώσουν τη συνεργασία των μαθητών, τη διαδικασία λήψης αποφάσεων μέσω διαπραγμάτευσης, συμμετοχής σε ομάδα, καθώς και 3) να χρησιμοποιήσουν καθημερινά βοηθητικά εργαλεία, όπως η ζωγραφική σε πλαίσιο σπιτιού και σε πλαίσιο σχολείου (Edo, Planas & Badillo, 2009).

Για να επιτευχθούν οι διδακτικοί στόχοι πραγματοποιήθηκαν δεκατρείς συναντήσεις σε τέσσερις εβδομάδες, όπου δημιουργήθηκε η γωνιά του παιχνιδιού, ο φούρνος. Έπειτα, μοιράστηκαν οι ρόλοι στους μαθητές και έπαιξαν, χωρίς την καθοδήγηση της δασκάλας, το παιχνίδι της αγοροπωλησίας. Μέσα από συμπληρωματικές δραστηριότητες, τα παιδιά κατέκτησαν τη χρήση της αριθμομηχανής και των χρημάτων. Παράλληλα, με αυτόν τον τρόπο στα επόμενα παιχνίδια ήταν σε θέση να φτιάξουν λίστες προϊόντων προς αγορά και να ξεκινήσουν το παιχνίδι της αγοραπωλησίας, ατομικά ή σε ομάδες. Στον κάθε μαθητή δόθηκαν 5 ευρώ για τις συναλλαγές του. Μετά την ολοκλήρωση του παιχνιδιού οι μαθητές ζωγράφισαν και περιέγραψαν τις συναλλαγές τους στη δασκάλα.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών δημιουργήθηκαν πέντε κατηγορίες και παρουσιάζονται ως εξής:

α) «Ποσοτική χρήση μη αριθμητικών λέξεων». Αναλυτικότερα, χρησιμοποιούσαν λέξεις οι οποίες δήλωναν ποσότητα (πολύ, λίγο, καθόλου), τόσο στον προφορικό, όσο και στο γραπτό λόγο.
β) «Χρήση αριθμών χωρίς ποσοτική αντιστοιχία». Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά, μέσω προσομοίωσης στο πλαίσιο του παιχνιδιού, χωρίς να αναζητούν την πραγματική αντιστοιχία με την ποσοτική αξία του αριθμού, χρησιμοποιούσαν προφορικά αριθμολέξεις ή αναπαριστούσαν γραπτά τους αριθμούς ως τιμές, ρέστα και ποσότητες προϊόντων που αγόρασαν.
γ) «Χρήση αριθμών με ποσοτική αντιστοιχία νοερά». Πιο αναλυτικά, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν γραπτά αριθμολέξεις ή αναπαριστούσαν γραπτά τους αριθμούς ως τιμές και ποσότητες αντικειμένων που αγόρασαν, όμως χωρίς να κάνουν πράξεις.
δ) Χρήση των αριθμών ως αριθμητική έννοια. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν προφορικά όταν επικοινωνούσαν μεταξύ τους με αριθμολέξεις ή αναπαριστούσαν τους αριθμούς γραπτά ως το σωστό αποτέλεσμα μιας πράξης, η οποία ωστόσο είχε πραγματοποιηθεί στο παιχνίδι.
ε) Χρήση των αριθμών στην αριθμομηχανή- παιχνίδι. Ειδικότερα, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν την αριθμομηχανή, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, με σκοπό να λύσουν ή να ελέγξουν το αποτέλεσμα μίας πράξης (Edo, Planas & Badillo, 2009, σελ. 330).

Μετά το διαχωρισμό και την ανάλυση των απαντήσεων, οι ερευνητές κατέληξαν ότι το συμβολικό παιχνίδι παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Διαπιστώθηκε ότι στις αρχικές συζητήσεις κανένα παιδί δεν ανέφερε χρήματα, αριθμολέξεις και αριθμούς που να σχετίζονται με τη χρήση των χρημάτων, σε αντίθεση με τις τελικές συζητήσεις όπου τα παιδιά μπορούσαν να διαχειριστούν εκφράσεις που σχετίζονταν με τα χρήματα.

Μέσω του παιχνιδιού βελτιώθηκαν, επίσης, οι γραφικές τους αναπαραστάσεις, καθώς πλέον χρησιμοποιούσαν πιο συχνά αριθμολέξεις και αριθμούς με τη βοήθεια της αριθμομηχανής. Το συμβολικό παιχνίδι όταν πραγματοποιείται σε κατάλληλο περιβάλλον μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στη μάθηση των παιδιών αναπτύσσοντας ταυτόχρονα την ομαδοσυνεργατική μάθηση.

Η χρήση του παιχνιδιού, επιπρόσθετα, για τη διερεύνηση της επίδοσης των παιδιών σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες αποτέλεσε αντικείμενο αρκετών ερευνών. Οι Γκριμπίζη και Σπανοπούλου (2012) πραγματοποίησαν εναλλακτική μορφή διδασκαλίας μέσω κινητικών παιχνιδιών σε μαθητές Γ΄ και Δ΄ δημοτικού, ηλικίας 8-9 ετών, σε δημοτικό σχολείο της Αθήνας. Σκοπός της προσέγγισης αυτής ήταν η κατανόηση και η διδασκαλία της έννοιας του χρόνου στο πλαίσιο του μαθήματος της Φυσικής Αγωγής και κατασκευές στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών.

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε το παραδοσιακό παιχνίδι του «ρολογά» από τους μαθητές. Στη συνέχεια, στο παιχνίδι δόθηκαν διαφορετικά οι ρόλοι, τον ρόλο του ρολογά ανέλαβε ο εκπαιδευτικός, με σκοπό να εξοικειωθούν οι μαθητές με την έννοια του χρόνου. Ο εκπαιδευτικός μέσω συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών που ήθελε να επισημάνει έδινε τις ανάλογες εντολές. Με αυτόν τον τρόπο τα παιδιά αντιλήφθηκαν μέσω της κίνησης την έννοια του χρόνου.

Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές λειτούργησαν άνετα και ισότιμα στην ομάδα, αναπτύσσοντας συνεργατική μάθηση μέσω της ανταλλαγής απόψεων και της βοήθειας που παρείχε ο ένας στον άλλον. Κατά τη διάρκεια της τελευταίας διδακτικής ώρας, τα παιδιά μέσα στην τάξη κατασκεύασαν χάρτινα ρολόγια συνδέοντας με αυτόν τον τρόπο το παιχνίδι με το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών για να επιτευχθεί η ολοκλήρωση της διδασκαλίας με τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν ελάχιστες έρευνες που ισχυρίζονται ότι η διδασκαλία μαθηματικών μέσω παιχνιδιού δεν επιδρά με θετικό τρόπο στην μάθηση. Πιο συγκεκριμένα, η Bragg (2012) πραγματοποίησε έρευνα σε μαθητές 10-12 χρόνων αξιοποιώντας ένα παιγνιώδες περιβάλλον για την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών και επισήμανε ως πιθανές θετικές επιδράσεις από την αξιοποίηση εκπαιδευτικών παιχνιδιών «την αύξηση της συμμετοχής, την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών, τη θετικότερη στάση απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο, την αύξηση της κινητοποίησης των μαθητών, καθώς και την ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων» (σελ. 1448). Ωστόσο, η επιρροή του παιχνιδιού δεν ήταν σημαντική όσον αφορά την μάθηση (Bragg, 2012).

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας διαπιστώνεται ότι οι περισσότερες έρευνες αναφορικά με την αξιοποίηση παιχνιδιών για την επίτευξη εκπαιδευτικών στόχων τονίζουν την θετική επίδραση ως εναλλακτική προσέγγιση, τόσο στην μάθηση όσο και στην ενεργητική συμμετοχή (Σκουμπουρδή, 2010), γεγονός, όμως, που δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός μικρότερου αριθμού μελετών που επισημαίνουν την θετική επίδραση στην ενεργητική συμμετοχή και το ενδιαφέρον, αλλά όχι στην μάθηση (Bragg, 2012).

2. Θέατρο και Μαθηματικά

Δύο διαφορετικοί τομείς που, αν συνδυαστούν, μπορούν να επιφέρουν τα επιθυμητά αποτελέσματα στην διδασκαλία είναι τα Μαθηματικά και το Θέατρο. Στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών δεν είναι μόνο να φέρει τα παιδιά κοντά στις μαθηματικές έννοιες, αλλά και να καλλιεργήσει κοινωνικές δεξιότητες καθώς και δεξιότητες έκφρασης και αυτοεπίγνωσης (Κοντογιάννη, 2008). Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση (ΔΤΕ) εκτός από τα γνωστικά οφέλη, ενδυναμώνει την καλλιτεχνική έκφραση, την αισθητική ανάπτυξη, και την κοινωνικοποίηση (Byayşe, 2012). Προάγει, ακόμη, την ενσυναίσθηση, τη φαντασία, την αυτοέκφραση, τη συνεργασία, τη δημιουργικότητα, την ενσωμάτωση και τη θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Οι μαθητές αισθάνονται κομμάτι μιας ομάδας και με την ασφάλεια αυτή δοκιμάζουν δραστηριότητες, εκφράζοντας σκέψεις και συναισθήματα (Debreld, 2011).

Η ΔΤΕ παρέχει στα παιδιά τις τεχνικές ώστε να παρουσιάσουν εμπειρίες από την καθημερινότητά τους, ενεργητικά, μέσα από το παιγνίδι και να τις χρησιμοποιήσουν για την κατανόηση μαθηματικών καταστάσεων (Byayşe, 2012). Οι τεχνικές της δραματικής τέχνης που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι πολλές. Ενδεικτικά κάποιες τεχνικές είναι οι εξής, όπως αναφέρουν οι Aitken (2013), Byayşe (2012) και Κοντογιάννη (2008) :

- Ο μανδύας του ειδικού: Αποτελεί τεχνική που εισήγαγε και δούλεψε η Heathcote. Ο δάσκαλος δημιουργεί ένα φανταστικό περιβάλλον και ζητά από τους μαθητές να αναλάβουν ρόλους «ειδικών», προκειμένου να αντιμετωπίσουν μια κατάσταση. Από τη θέση «επαγγελματία», τα παιδιά αναλαμβάνουν μια επιχείρηση, με σκοπό να επιτελέσουν ένα καθήκον. Πρέπει να αναλάβουν αρχικά την ευθύνη και έπειτα να αξιοποιήσουν τη γνώση και τις δεξιότητες του «ειδικού», κατανοώντας ότι κάθε πράξη έχει και τις ανάλογες συνέπειες. Ένα παράδειγμα χρήσης της τεχνικής είναι ότι ο μαθητής αναλαμβάνει τη θέση του ταμία σε μανάβικο, εκτελώντας ταυτόχρονα δύο ενέργειες: μέτρηση σε ηλεκτρονική ζυγαριά και χρήση αριθμομηχανής. Αξιοσημείωτο είναι ότι στο μανδύα του ειδικού, η γνώση αντιμετωπίζεται όχι διαχωρισμένη σε γνωστικούς τομείς, αλλά ολιστικά (Aitken, 2013).

- Παιχνίδια ρόλων: Οι μαθητές υποδύονται ρόλους και εξερευνούν χαρακτήρες της καθημερινής ζωής συνδυάζοντάς τους με την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, όπως αρίθμηση, διαχείριση χρημάτων, μέτρηση και σύγκριση τιμών ή αντικειμένων (μεγαλύτερο ή μικρότερο) (Κοντογιάννη, 2008). Τα παιχνίδια ρόλων είναι ζωτικής σημασίας για την πρώιμη παιδική ηλικία αφού παρέχουν ευκαιρίες για αλληλεπίδραση, ενσυναίσθηση, αποδοχή του διαφορετικού, αντικατοπτρίζουν συναισθήματα και σκέψεις και προωθούν την επίλυση προβλημάτων, με σκοπό την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Ένα παράδειγμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις πρώτες τάξεις του νηπιαγωγείου και του δημοτικού είναι το παιχνίδι «ρόλων» για την εκμάθηση των αριθμών (Byayşe, 2012).
- Αυτοσχεδιασμοί: Τα παιδιά με τη βοήθεια των συμμαθητών τους ή του δασκάλου προσποιούνται ότι, για παράδειγμα, πηγαίνουν στο φούρνο να αγοράσουν ψωμί και επιλέγουν ποιο ψωμί θέλουν χρησιμοποιώντας τις λέξεις που δηλώνουν σειρά (πρώτος, δεύτερος) και θέση (πάνω, κάτω, αριστερά, δεξιά) (Erdogan & Baran, 2009). Ο αυτοσχεδιασμός, όμως, μπορεί να γίνει είτε πάνω σε ένα συγκεκριμένο θέμα είτε να είναι ελεύθερος. Μέσω αυτής της δραστηριότητας προάγεται η δημιουργικότητα, η φαντασία, η εύρεση λύσεων και παράλληλα δημιουργούνται σχέσεις εμπιστοσύνης στην ομάδα. Αυτή η δραστηριότητα είναι πολύ σημαντική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, διότι δίνει την ευκαιρία να αναχαραχτούν καθημερινές δραστηριότητες που εμπεριέχουν μαθηματική εμπειρία (Byayşe, 2012).

Αφού αναφέρθηκαν διάφορες τεχνικές χρήσης της δραματικής τέχνης στην διδασκαλία, είναι σημαντικό να επισημανθεί η ύπαρξη αρκετών ερευνών που υποστηρίζουν τη θετική επίδραση της δραματικής τέχνης στην εκπαίδευση γενικότερα και στη διδασκαλία των μαθηματικών σε παιδιά νηπιαγωγείου και δημοτικού, ειδικότερα.

Πιο συγκεκριμένα, στην Τουρκία οι Erdogan και Baran (2008) πραγματοποίησαν έρευνα για να εξετάσουν εάν η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω τεχνικών δραματικής τέχνης επιδρά στην μαθηματική ικανότητα των μικρών παιδιών. Η έρευνα έγινε σε 105 εξάχρονα παιδιά από δύο διαφορετικά δημόσια σχολεία στην Άγκυρα. Η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου απαρτίζονταν από τριάντα πέντε παιδιά, τα οποία είχαν επιλεχθεί από το ίδιο σχολείο. Επίσης υπήρχε και μια δεύτερη ομάδα ελέγχου, όπου είχε επιλεχθεί από διαφορετικό σχολείο. Τα παιδιά που πήραν μέρος δεν είχαν προηγούμενη εκπαίδευση, καθώς είχαν ξεκινήσει το σχολείο εκείνη τη χρονιά. Στην πειραματική ομάδα η διδασκαλία των μαθηματικών έγινε με τη χρήση τεχνικών δραματικής τέχνης, ενώ τα παιδιά της ομάδας ελέγχου παρακολούθησαν τη διδασκαλία των μαθηματικών σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα. Το πρόγραμμα που ήταν βασισμένο στη δραματική τέχνη δόθηκε σε επτά δασκάλους από τον χώρο της ΔΤΕ, της προσχολικής αγωγής και των προγραμμάτων ανάπτυξης στην εκπαίδευση, προκειμένου να αξιολογηθεί.

Η αξιολόγηση έγινε βάσει κάποιων κριτηρίων, όπως η καταλληλότητα των στόχων, η σαφήνεια της δομής, η καταλληλότητα των δραστηριοτήτων μέσω τεχνικών δραματικής τέχνης. Για την ανίχνευση των μαθηματικών ικανοτήτων χρησιμοποιήθηκε το Τεστ πρώιμων μαθηματικών ικανοτήτων -3 (TEMA-3) των Ginsburg και Baroody (1993), που προσαρμόστηκε στην τουρκική διάλεκτο από τους Ergogan και Baran (2006). Το συγκεκριμένο Τεστ μετρά τη μαθηματική ικανότητα σε παιδιά ηλικίας από τριών έως οκτώ χρονών και έντεκα μηνών. Πραγματοποιήθηκαν είκοσι τέσσερα βιωματικά εργαστήρια ΔΤΕ. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η μέθοδος διδασκαλίας που ήταν βασισμένη στις τεχνικές δραματικής τέχνης είχε θετική επίδραση στη μαθηματική ικανότητα των εξάχρονων παιδιών.

Λίγα χρόνια αργότερα, οι Sezer και Güler- Öztürk (2011), με σκοπό να διερευνήσουν την επίδραση της διδασκαλίας με τεχνικές δραματικής τέχνης στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού και των λειτουργιών του, πραγματοποίησαν έρευνα σε 20 παιδιά, ηλικίας 5 ετών, ενός δημόσιου νηπιαγωγείου της Τουρκίας. Τα παιδιά ισομοιράστηκαν με τυχαίο τρόπο στην πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου. Η πειραματική ομάδα παρακολούθησε 18 εφαρμογές ενός ειδικά διαμορφωμένου εκπαιδευτικού προγράμματος, όπου χρησιμοποιούσε τεχνικές δραματικής τέχνης, ενώ η ομάδα ελέγχου ακολούθησε το κανονικό αναλυτικό πρόγραμμα του Νηπιαγωγείου.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι τα παιδιά της πειραματικής ομάδας κατανόησαν καλύτερα την έννοια του αριθμού και τη λειτουργία του, συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου. Παρατηρήθηκε, λοιπόν, ότι οι τεχνικές δραματικής τέχνης είχαν σημαντική επίδραση στα παιδιά, αφού τα βοήθησε να σχηματίσουν και να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια του αριθμού.

Στην Ελλάδα, οι Καμπέζα και Ραβάνης (2000, στο Ιωακειμίδης, 2012) εφάρμοσαν ένα σχέδιο δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία της ενότητας των μαθηματικών «Τα γεωμετρικά σχήματα-στερεά», που βασίστηκε στο Θεατρικό Παιχνίδι. Πρόκειται για ένα δρώμενο, που έλαβε χώρα σε τρεις φάσεις και προσέφερε τα ερεθίσματα στους συμμετέχοντες μαθητές για περαιτέρω προβληματισμό και επεξεργασία πληροφοριών.

Μία από τις τρεις φάσεις που έπαιξαν σημαντικό ρόλο για την πραγματοποίηση και ολοκλήρωση της εν λόγω προσπάθειας για τη γνωριμία των παιδιών με τα γεωμετρικά σχήματα και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους ήταν οι διάφορες μορφές δραματικής έκφρασης. Οι συμμετέχοντες είχαν ενεργητικό ρόλο και εκφράστηκαν ποικιλοτρόπως. Ειδικότερα, συμμετείχαν μαθητές της Α΄ και Β΄ δημοτικού από την Κρήτη. Μέσα από το Θεατρικό Παιχνίδι «Τα γεωμετρικά σχήματα-στερεά» οργανώθηκαν εφτά δραστηριότητες που διήρκησαν συνολικά 16 διδακτικές ώρες και εκτελέστηκαν ομαδικά :

• Παντομίμας-Αυτοσχεδιασμών: σχηματισμός του περιγράμματος διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων με μάλλινη κλωστή (κουβάρια).

• Θεατρικού Σκετς: σύντομο κείμενο που περιείχε τεχνικές δραματικής τέχνης για τα σχήματα (ομοιότητες και διαφορές τους).

• Παγωμένης Εικόνας: δημιουργία με το σώμα των παιδιών διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων και φωτογράφιση της όλης προσπάθειας.

• Θεατρικού Παιχνιδιού: δημιουργία δρώμενου με ερέθισμα εικόνες γεωμετρικών σχημάτων.

• Κουκλοθέατρου: κατασκευή επίπεδης κούκλας και ονομασία της.

• Θεάτρου Σκιών: πραγματοποίηση μαθήματος από τον Καραγκιόζη δάσκαλο στα παιδιά του για τα γεωμετρικά σχήματα μέσω των σκιών.

• Θεατρικού Δρωμένου: οι μαθητές με πρόχειρα κοστούμια φτιαγμένα από χαρτόνι μπήκαν στις τάξεις του σχολείου δημιουργώντας αναστάτωση. Οι υπόλοιποι συμμαθητές τους, σε ρόλο επιθεωρητή, έψαχναν για τα άτακτα σχήματα με σκοπό την κράτησή τους στην σχηματοφυλακή.

Για την υλοποίηση του συγκεκριμένου σεναρίου κρίθηκε απαραίτητη η εφαρμογή στο καθημερινό πρόγραμμα δραστηριοτήτων δραματικής έκφρασης. Με αυτόν τον τρόπο το μάθημα θα γινόταν πιο ελκυστικό για τους μαθητές, καθώς θα τους δινόταν η δυνατότητα για συνεργασία, ομαδικότητα και παιγνιώδεις δράσεις. Η επιλογή των δραστηριοτήτων και η εφαρμογή τους στη σχολική τάξη βασίστηκε στη μαθητοκεντρική αντίληψη για μάθηση και όχι τη δασκαλοκεντρική που κυριαρχεί στην παραδοσιακή διδασκαλία. Σε αυτά τα πλαίσια, ο εκπαιδευτικός δεν κατείχε τον βασικό ρόλο στην μάθηση, αλλά αναλάμβανε ρόλους συνεργάτη, φορέα ερεθισμάτων και εμψυχωτή.

Με την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων προέκυψε κατόπιν αξιολόγησης μέσω αναστοχαστικών ερωτήσεων ότι τα παιδιά κατέκτησαν σημαντικές γνώσεις αναφορικά με τη συγκεκριμένη ενότητα της Γεωμετρίας που διδάχθηκε από τον εκπαιδευτικό. Η κατάκτηση της γνώσης έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές διέκριναν τα σχήματα αναφέροντάς τα με το όνομά τους, ξεχώρισαν τα βασικά γνωρίσματα τους και βρήκαν ομοιότητες και διαφορές των σχημάτων αυτών με διάφορα του περιβάλλοντός τους. Οι θεατροπαιδαγωγικές δραστηριότητες κέντρισαν το ενδιαφέρον των παιδιών και τα μετέτρεψαν σε ενεργούς συμμετέχοντες στη διαδικασία της μάθησης, δίνοντας στον εκπαιδευτικό έναν δευτερεύοντα ρόλο.

Μερικές μελέτες επικεντρώθηκαν στις ευκαιρίες που μπορούν να προσφέρουν οι δραστηριότητες δραματικής τέχνης στους μαθητές προκειμένου να προβληματιστούν για την κοινωνική τους αλληλεπίδραση κατά την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών (Chaviaris & Kafoussi, 2010). Πιο συγκεκριμένα, οι Chaviaris και Kafoussi (2010), λοιπόν, πραγματοποίησαν μία μελέτη για να διερευνηθεί πώς η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω δραστηριοτήτων δραματικής τέχνης επηρέασε την κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμαθητών. Στη μελέτη αυτή συμμετείχαν 18 μαθητές της Ε΄ τάξης (9 αγόρια και 9 κορίτσια) ενός δημοτικού σχολείου της Αθήνας. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ζευγάρια τέσσερις φορές την εβδομάδα κατά τη διάρκεια των διδακτικών ωρών των μαθηματικών. Η ενότητα με την οποία ασχολήθηκαν αφορούσε την έννοια κλασμάτων. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της μελέτης βασίστηκε στη μελέτη περίπτωσης (case study). Πραγματοποιήθηκαν τέσσερα στάδια: α) η μελέτη των προφίλ των μαθητών για να χωριστούν σε 9 ζευγάρια, β) η ερώτηση προς τους μαθητές για το αν ήταν ικανοποιημένοι με την επίδοση τους στα μαθηματικά, γ) η αξιολόγηση των μαθητών από τη δασκάλα με βάση την προσωπική της αξιολόγηση και δ) η συμπλήρωση ερωτηματολογίου από τους γονείς σχετικά με την επίδοσή τους στα μαθηματικά τόσο στο σχολείο όσο και στο σπίτι.

Παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές μελέτες περίπτωσης των 9 ζευγαριών που ασχολήθηκαν με την κατανόηση της έννοια των κλασμάτων μέσω δραστηριοτήτων δραματικής τέχνης. Στις διαφορετικές μελέτες περίπτωσης των ζευγαριών δόθηκε βάση στην αλληλεπίδραση τόσο των σχέσεων των μαθητών μεταξύ τους, όσο και της σχέσης τους με τα μαθηματικά, τα οποία εξετάστηκαν μέσω ανάλυσης μαγνητοσκοπημένου βίντεο. Αναλυτικότερα, το μαγνητοσκοπημένο βίντεο περιελάμβανε τη συζήτηση των ζευγαριών σε καθεμία από τις τρεις διαφορετικές μελέτες περίπτωσης, όπου προσπαθούσαν, πρώτον, να εξηγήσουν τη σκέψη τους για τις λύσεις των μαθηματικών δραστηριοτήτων μέσω του θεατρικού παιχνιδιού με ρόλους στο οποίο συμμετείχαν. Και δεύτερον, να απαντήσουν στην ερώτηση αν επηρεάστηκε το ένα μέλος της ομάδας από το άλλο κατά τη συνεργασία τους.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι με αυτόν τον εναλλακτικό τρόπο εκμάθησης οι μαθητές κατανόησαν την έννοια των κλασμάτων και αντιλήφθηκαν τα χαρακτηριστικά μιας αποτελεσματικής συνεργασίας. Επιπρόσθετα, οι απόψεις των μαθητών με υψηλή επίδοση για την επίλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων κατά τη διάρκεια μιας συζήτησης, φάνηκε ότι επηρέασαν σε μεγάλο βαθμό τις απόψεις των μαθητών με χαμηλή επίδοση. Αξιοσημείωτο είναι ότι μέσα από τις δραστηριότητες δραματικής τέχνης οι μαθητές αντάλλαξαν τις απόψεις τους πριν καταλήξουν ομόφωνα στην επίλυση της δραστηριότητας, κατόπιν παραγωγικής συνεργασίας.

Σύμφωνα με τις παραπάνω έρευνες και τη βιβλιογραφική ανασκόπηση διαπιστώνεται ότι οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν τα Μαθηματικά με έναν εναλλακτικό τρόπο, μέσω δραστηριοτήτων δραματικής τέχνης, ενεργοποιώντας τη φαντασία, το συναίσθημα και τις προηγούμενες γνώσεις τους (Chaviaris & Kafousi, 2010). Συμπεραίνεται ότι και με εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας των Μαθηματικών επιτυγχάνονται εξίσου καλές επιδόσεις, με τη σημαντική προσθήκη ότι οι μαθητές δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα (Κοντογιάννη, 2008; Breuer & Bente, 2010; Chaviaris & Kafoussi, 2010).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Παρουσιάζονται αναλυτικά οι συμμετέχοντες, ο σχεδιασμός της έρευνας και το εργαλείο μέτρησης καθώς και η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή δεδομένων και η μέθοδος επεξεργασίας τους.

2.1 Συμμετέχοντες

Το ερευνητικό δείγμα αποτέλεσαν συνολικά 53 παιδιά, από τα οποία τα 27 ήταν μαθητές/ τριες της Α΄ τάξης (14 κορίτσια και 13 αγόρια, ηλικίας από 6 ετών και 2 μηνών έως 7 ετών και 5 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 6 έτη και 9 μήνες) και οι 26 μαθητές/ τριες της Β΄ τάξης (12 κορίτσια και 14 αγόρια, ηλικίας από 7 ετών και 4 μηνών έως 8 ετών και 4 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 7 έτη και 9 μήνες) που φοιτούσαν σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της ευρύτερης περιοχής της Λήμνου και ανήκαν σε διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η σχολική τους επίδοση κάλυπτε διαφορετικά επίπεδα.

Οι συμμετέχοντες τόσο της Α΄ τάξης όσο και της Β΄ τάξης δεν διδάχθηκαν στο Νηπιαγωγείο την έννοια της συμμετρίας. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι η Β΄ τάξη λόγω δυσκολιών δεν διδάχθηκαν την έννοια της συμμετρίας στην Α΄ τάξη.

2.2 Σχεδιασμός έρευνας

Για τον σκοπό της παρούσας έρευνας, οι συμμετέχοντες από κάθε ηλικιακή ομάδα τυχαία κατανεμήθηκαν σε μία από τις δύο ομάδες, Ομάδα Ελέγχου (N= 26, 14 αγόρια και 12 κορίτσια) και Πειραματική Ομάδα (N= 27, 13 αγόρια και 14 κορίτσια). Και στις δύο ομάδες πραγματοποιήθηκε διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας, σύμφωνα με τους διδακτικούς στόχους που περιγράφονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου (2003). Συγκεκριμένα, οι στόχοι είναι:

α) «να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα» (Α΄ Δημοτικού, σελ. 256)

β) «να παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας» (Β΄ Δημοτικού, σελ. 258).

Για την επίτευξη των επιδιώξεων της διδασκαλίας αξιοποιήθηκε η πειραματική μέθοδος, οιονεί πείραμα (quasi-experiment). Το οιονεί πείραμα είναι η μελέτη ενός φαινομένου μέσα από τον μερικό έλεγχο των συνθηκών εμφάνισής του, όπου οι συμμετέχοντες δεν τοποθετούνται τυχαία, τοποθετούνται σε συγκεκριμένη συνθήκη (ομάδα) έχοντας έστω κι ένα κοινό χαρακτηριστικό (ηλικία, φύλο, ένα προσωπικό χαρακτηριστικό) που τους τοποθετεί στη συνθήκη αυτή. Είναι η μελέτη μιας κοινωνικής περίπτωσης, με στόχο τη βελτίωση της ποιότητας της παιδαγωγικής πράξης (Christensen, 2007).

Στην Ομάδα Ελέγχου η έννοια της συμμετρίας προσεγγίστηκε διδακτικά ακολουθώντας αποκλειστικά τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Α΄ και της Β΄ τάξης. Τα παιδιά από την Α΄ και την Β΄ τάξη που ανήκουν σε αυτή την ομάδα παρακολούθησαν σε σχολική αίθουσα κοινή διδασκαλία στη συμμετρία διάρκειας τριών διδακτικών ωρών. Στους μαθητές πραγματοποιήθηκε διδασκαλία από την ερευνήτρια που ακολούθησε τους στόχους από: α) το κεφάλαιο 56 της 8^{ης} ενότητας από το β' τεύχος του βιβλίου των Μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού (σελίδες 62 και 63) και β) το κεφάλαιο 8 της 1^{ης} ενότητας από το α' τεύχος του βιβλίου των Μαθηματικών της Β΄ Δημοτικού (σελίδες 26 και 27). Επιπρόσθετα, στη διδασκαλία συμπεριλήφθηκε ο ορισμός και ο διαχωρισμός της αμφίπλευρης και της περιστροφικής συμμετρίας. Ακολούθως πραγματοποιήθηκαν οι δραστηριότητες από τα αντίστοιχα κεφάλαια του τετραδίου εργασιών των δύο τάξεων (δ' τεύχος, σελίδες 18 και 19 για την Α΄ Δημοτικού, και α' τεύχος, σελίδες 20 και 21 για την Β΄ Δημοτικού).

Στην Πειραματική Ομάδα, η έννοια της συμμετρίας προσεγγίστηκε διδακτικά μέσω δραστηριοτήτων χορού και βασίστηκε στη θεωρητική προσέγγιση της Κολέζα (2000) για τα τρία είδη των γνωστικών διαδικασιών της Γεωμετρίας (Διαδικασία Οπτικοποίησης, Κατασκευής και Συλλογισμού/ Απόδειξης). Ο προγραμματισμός της κάθε διδακτικής ώρας βασίστηκε και στα τρία είδη των γνωστικών διαδικασιών. Τα παιδιά από την Α΄ και τη Β΄ τάξη που ανήκουν σε αυτή την Ομάδα παρακολούθησαν κοινή διδασκαλία στη συμμετρία στο ανοιχτό γήπεδο μπάσκετ του δημοτικού σχολείου διάρκειας τριών διδακτικών ωρών.

2.3 Περιγραφή της διδακτικής παρέμβασης

Στην πρώτη διδακτική ώρα, πραγματοποιήθηκε παρουσίαση της έννοιας της συμμετρίας μέσω προβολής πέντε βίντεο από το Internet με τη χρήση προτζέκτορα. Τα βίντεο παρουσίαζαν διαφορετικά είδη χορού που περιείχαν συμμετρικές κινήσεις (*διαδικασία οπτικοποίησης*) [σύγχρονο https://youtu.be/8aHGLXelhXw?t=77 (0:00-

2:00), ελεύθερο σύγχρονο https://youtu.be/UuTLrLIAU-s?t=57 (0:46-1:15), hip hop https://youtu.be/x-U3mUd0uEs?t=28 (0:00-1:32), καλλιτεχνικό πατινάζ https://youtu.be/pJQfWY9mDtM?t=275 (0:00-4:17), παραδοσιακός χορός- Ράικος https://youtu.be/r9ArWoBhaJY?t=28 (0:00-1:50)]. Κατά τη διάρκεια της παρουσίασης των βίντεο πραγματοποιήθηκε ο σχολιασμός τους από την ερευνήτρια με τη συμμετοχή των μαθητών/ τριών, όσον αφορά την εμφάνιση συμμετρικών ή μη συμμετρικών κινήσεων στις χορευτικές δραστηριότητες. Η παρουσίαση των πέντε βίντεο και ο σχολιασμός τους διήρκησε 20 λεπτά.

Στη συνέχεια, οι μαθητές/ τριες χωρίστηκαν σε ζεύγη, ανεξάρτητα από σχολική τάξη. Η ερευνήτρια και η δασκάλα της Α΄ τάξης πραγματοποίησαν τις εξής δύο κινήσεις χωρίς μουσική (*διαδικασία οπτικοποίησης και κατασκευής*):

α) συγχρονισμένη κίνηση «tango», πραγματοποιώντας ένα βήμα προς τα αριστερά (βλ. Εικόνα 1, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α) και

β) συγχρονισμένη κίνηση «hip-hop», ενώνοντας η ερευνήτρια το δεξί της χέρι με το αριστερό χέρι της δασκάλας, τοποθετημένες σε ευθεία κοιτάζοντας μπροστά, όπου η ερευνήτρια πραγματοποίησε θέση «καρέκλα», ενώ η δασκάλα παρέμεινε όρθια (βλ. Εικόνα 2, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

Μετά την επίδειξη των κινήσεων, ζητήθηκε από τα ζεύγη των μαθητών να επιλέξουν ανάμεσα στις δύο παραπάνω χορευτικές κινήσεις εκείνη που αφορούσε τη συμμετρία, σημειώνοντας με κιμωλία στο τσιμέντο τον αντίστοιχο αριθμό, το 1 για την πρώτη κίνηση και το 2 για τη δεύτερη κίνηση (*διαδικασία συλλογισμού/ απόδειξης*) (βλ. Εικόνα 3, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

Στη δεύτερη διδακτική ώρα, πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία της αμφίπλευρης συμμετρίας, όπου η ερευνήτρια μαζί με τη δασκάλα της Α΄ τάξης παρουσίασαν την αμφίπλευρη συμμετρία στους μαθητές μέσω δραστηριότητας χορού (*διαδικασία οπτικοποίησης*). Πιο αναλυτικά, υπό τους ήχους της μουσικής του καλλιτεχνικού πατινάζ η ερευνήτρια και η δασκάλα της Α΄ τάξης ένωσαν το αντίθετό τους χέρι σχηματίζοντας μία ευθεία γραμμή (βλ. Εικόνα 4, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α). Ακολούθως, χωρίς να αφήσουν τα χέρια τους, ένωσαν και τα άλλα δύο αντίθετα χέρια γυρνώντας πλάτη με πλάτη (βλ. Εικόνα 5, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α). Αυτό εκτελέστηκε τρεις φορές σε διάστημα 20 λεπτών. Μετά την εκτέλεση της χορευτικής κίνησης τα παιδιά ρωτήθηκαν τι παρατήρησαν. Πριν καταλήξει η ομάδα στη δημιουργία ενός ορισμού της αμφίπλευρης συμμετρίας, οι μαθητές σε ζεύγη, όπως είχαν χωριστεί από την πρώτη διδακτική ώρα, εκτέλεσαν την ίδια δραστηριότητα χορού που διήρκησε 10 λεπτά (*διαδικασία κατασκευής)*. Έπειτα, η ομάδα μέσα από συζήτηση με πνεύμα συνεργασίας και ομαδικότητας κατέληξαν σε ορισμό για την αμφίπλευρη συμμετρία. Η συζήτηση αυτή διήρκησε 5 λεπτά.

Στη συνέχεια, η ερευνήτρια και η δασκάλα πραγματοποίησαν τις εξής δύο κινήσεις, διάρκειας 10 λεπτών, με μουσική (*διαδικασία οπτικοποίησης και κατασκευής*):

α) συγχρονισμένη κίνηση «hip hop». Πιο συγκεκριμένα, η δασκάλα στάθηκε όρθια με γυρισμένη πλάτη στην ερευνήτρια και η ερευνήτρια έπιασε με τα χέρια της τους αστραγάλους της δασκάλας σχηματίζοντας γωνία με το σώμα της (βλ. Εικόνα 6, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α) και

β) συγχρονισμένη κίνηση «σύγχρονου χορού». Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια και η δασκάλα σε όρθια στάση παράλληλα κοιτώντας η μία την άλλη τοποθέτησαν τα χέρια τους στο έδαφος σχηματίζοντας με τα σώματά τους δύο γωνίες (βλ. Εικόνα 7, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

Στο τέλος, η ερευνήτρια, για να ελέγξει αν κατανόησαν την έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας (*διαδικασία συλλογισμού/ απόδειξης*), ζήτησε από τα ζεύγη των μαθητών/ τριών να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο χορευτικές κινήσεις εκείνη που αφορούσε την αμφίπλευρη συμμετρία, σημειώνοντας με κιμωλία στο τσιμέντο τον αντίστοιχο αριθμό, το 1 για την πρώτη κίνηση και το 2 για τη δεύτερη κίνηση (βλ. Εικόνα 8, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

Στην τρίτη διδακτική ώρα, πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία της περιστροφικής συμμετρίας. Συγκεκριμένα, δημιουργήθηκαν δύο μεικτές ομάδες με τυχαία επιλογή παιδιών, με οργανωτές τη δασκάλα της Α΄ τάξης η μία ομάδα και την ερευνήτρια η δεύτερη ομάδα. Τα παιδιά ενημερώθηκαν ότι θα χορέψουν τον «Κεχαγιά», παραδοσιακό χορό της Λήμνου (*διαδικασία κατασκευής*). Ο χωρισμός των ομάδων και ο χορός διήρκησαν 15 λεπτά. Κατά τη διάρκεια του χορού, στα κουπλέ οι χορευτές ήταν πιασμένοι από τον ώμο όντας σε κύκλο. Στο ρεφρέν κινήθηκαν προς τη φορά του κύκλου προς τα δεξιά πραγματοποιώντας συγχρονισμένα ένα κάθισμα, σηκώνοντας ελαφρώς πρώτα το δεξί χέρι κι έπειτα το αριστερό καταλήγοντας στην αρχική τους θέση με τα χέρια στους ώμους (βλ. Εικόνα 9, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α). Ακολούθως, ρωτήθηκαν οι μαθητές/ τριες τι παρατήρησαν όσον αφορά τη συμμετρία γενικά και προσπάθησαν να δημιουργήσουν τον ορισμό της περιστροφικής συμμετρίας. Η ομάδα συζήτησε με πνεύμα συνεργασίας και ομαδικότητας και κατέληξε σε ορισμό. Η συζήτηση αυτή διήρκησε 15 λεπτά.

Ακολούθως η ερευνήτρια και η δασκάλα πραγματοποίησαν τις εξής δύο κινήσεις, διάρκειας 10 λεπτών, με μουσική (*διαδικασία οπτικοποίησης και κατασκευής*):

α) μία συγχρονισμένη κίνηση νησιώτικου χορού «Καρσιλαμάς Αιγαίου». Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια με τη δασκάλα ένωσαν και τα δύο τους χέρια, σχηματίζοντας κύκλο και με τον ήχο της μουσικής πραγματοποίησαν τα 4 βήματα του χορού επί τέσσερις επαναλήψεις ώστε να συμπληρωθεί μια στροφή 360^{o} (βλ. Εικόνα 10, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α) και

β) μία συγχρονισμένη κίνηση «σύγχρονου χορού». Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια με το άκουσμα της μουσικής πραγματοποίησε «γέφυρα» (ανύψωση της λεκάνης και της πλάτης από το έδαφος) και η δασκάλα ξάπλωσε σε οριζόντια θέση μπρούμυτα και κάθετα κάτω από τη γέφυρα (βλ. Εικόνα 11, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

Στο τέλος, η ερευνήτρια για να ελέγξει αν κατανόησαν την έννοια της περιστροφικής συμμετρίας (*διαδικασία συλλογισμού/ απόδειξης*), ζήτησε από τα ζεύγη των μαθητών/ τριών να επιλέξουν ανάμεσα στις δύο χορευτικές κινήσεις εκείνη που αφορούσε την περιστροφική συμμετρία, σημειώνοντας με κιμωλία στο τσιμέντο τον αντίστοιχο αριθμό, το 1 για την πρώτη κίνηση και το 2 για τη δεύτερη κίνηση σε διάστημα 5 λεπτών (βλ. Εικόνα 12, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α).

2.4 Εργαλείο Μέτρησης

Με σκοπό να ελεγχθεί αν οι μαθητές/ τριες μέσω της εναλλακτικής προσέγγισης του χορού κατανόησαν τη συμμετρία σχεδιάστηκε φύλλο αξιολόγησης. Οι δραστηριότητες του φύλλου αξιολόγησης ήταν τρεις και ζητούσαν από τους μαθητές/ τριες ατομικά να ονοματίσουν, να επιλέξουν και να σχεδιάσουν σκίτσα.

Στην πρώτη δραστηριότητα του φύλλου αξιολόγησης παρουσιάστηκαν στους μαθητές/ τριες έξι σκίτσα στα οποία υπήρχε ισάριθμα, αμφίπλευρη συμμετρία ή περιστροφική συμμετρία. Ζητήθηκε να αναγνωρίσουν τα δύο είδη της συμμετρίας. Για κάθε σκίτσο υπήρχε μία μόνο σωστή απάντηση.

Στη δεύτερη δραστηριότητα παρουσιάστηκαν στους μαθητές/ τριες έξι σκίτσα σε τρία από τα οποία υπήρχε αμφίπλευρη συμμετρία. Ζητήθηκε να αναγνωρίσουν την αμφίπλευρη συμμετρία όπου υπήρχε. Για κάθε σκίτσο υπήρχε μία μόνο σωστή απάντηση.

Στην τρίτη δραστηριότητα του φύλλου αξιολόγησης οι μαθητές/ τριες κλήθηκαν να σχεδιάσουν ένα συμμετρικό σκίτσο για την αμφίπλευρη συμμετρία και ένα για την περιστροφική συμμετρία. Συγκεκριμένα, τους ζητήθηκε να αποδώσουν τις έννοιες της αμφίπλευρης και της περιστροφικής συμμετρίας σχεδιάζοντας ένα δικό τους παράδειγμα μέσα σε ένα πλαίσιο. Ως σωστή απάντηση λαμβάνονταν μόνο το σκίτσο που αντιστοιχούσε: α) στον ορισμό της αμφίπλευρης και β) στον ορισμό της περιστροφικής συμμετρίας.

Το φύλλο αξιολόγησης περιελάμβανε μόνο σκίτσα, καθώς η Ομάδα Ελέγχου που διδάχθηκε από το σχολικό εγχειρίδιο ήρθε σε επαφή με δραστηριότητες που περιελάμβαναν κυρίως εικόνες. Το φύλλο αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα παρατίθεται στο «ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β».

2.5 Διαδικασία

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας και μετά το πέρας τεσσάρων ημερών, όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά σε εσωτερικό χώρο του σχολείου, όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα συγκέντρωσης σε μία συνάντηση που διήρκησε περίπου 20-25 λεπτά. Σε όλα τα παιδιά, ανεξάρτητα από την ομάδα στην οποία ανήκουν, Ομάδα Ελέγχου ή Πειραματική Ομάδα, δόθηκε το φύλλο αξιολόγησης. Έγινε σαφές στους συμμετέχοντες πως η έρευνα δεν αφορούσε τεστ αξιολόγησης μαθηματικών ικανοτήτων και ότι μπορούσαν να απαντήσουν στις δραστηριότητες του φύλλου αξιολόγησης χωρίς να προβληματίζονται για την τελική τους επίδοση. Τέλος, διατηρήθηκε η ανωνυμία των παιδιών και δεν μαγνητοσκοπήθηκε η διδακτική παρέμβαση, μόνο φωτογραφήθηκε με τη συγκατάθεση των γονέων. Η συμμετοχή τους στην έρευνα έγινε σε εθελοντική βάση.

2.6 Στατιστική ανάλυση

Για την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από τη συμπλήρωση του φύλλου αξιολόγησης χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (έκδοση 22.0). Αρχικά, έγινε χρήση περιγραφικής στατιστικής για την εξέταση των συχνοτήτων εμφάνισης των ανεξάρτητων μεταβλητών της έρευνας (ομάδα, φύλο, τάξη). Επίσης, με τη χρήση δεικτών περιγραφικής στατιστικής εξετάστηκαν τα ποσοστά κατανόησης των εννοιών της συμμετρίας, της αμφίπλευρης και της περιστροφικής συμμετρίας, στους μαθητές της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου. Για τη διερεύνηση της ύπαρξης σημαντικής επίδρασης των ανεξάρτητων μεταβλητών στον αριθμό σωστών απαντήσεων στο φύλλο αξιολόγησης εφαρμόστηκαν T test για ανεξάρτητα δείγματα. Αναλυτικά, για την κωδικοποίηση των μεταβλητών χρησιμοποιήθηκε 0 για κάθε λανθασμένη απάντηση και 1 για κάθε σωστή απάντηση.

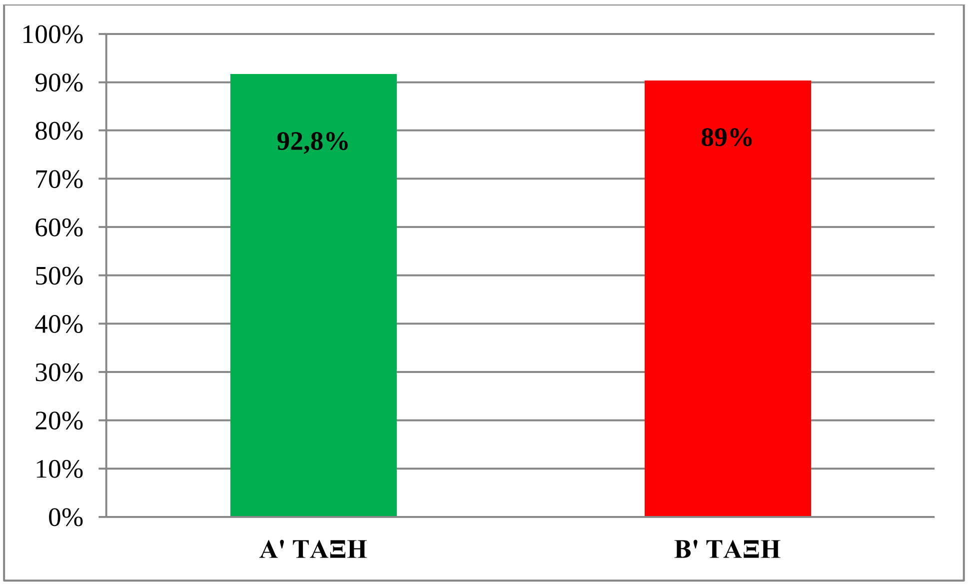
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της γενικής επίδοσης των μαθητών, καθώς και της επίδοσης της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου στη διδασκαλία της συμμετρίας μέσω δραστηριοτήτων χορού ως προς την τάξη, ως προς το φύλο και ως προς την ομάδα.

3.1 Γενική επίδοση των Συμμετεχόντων

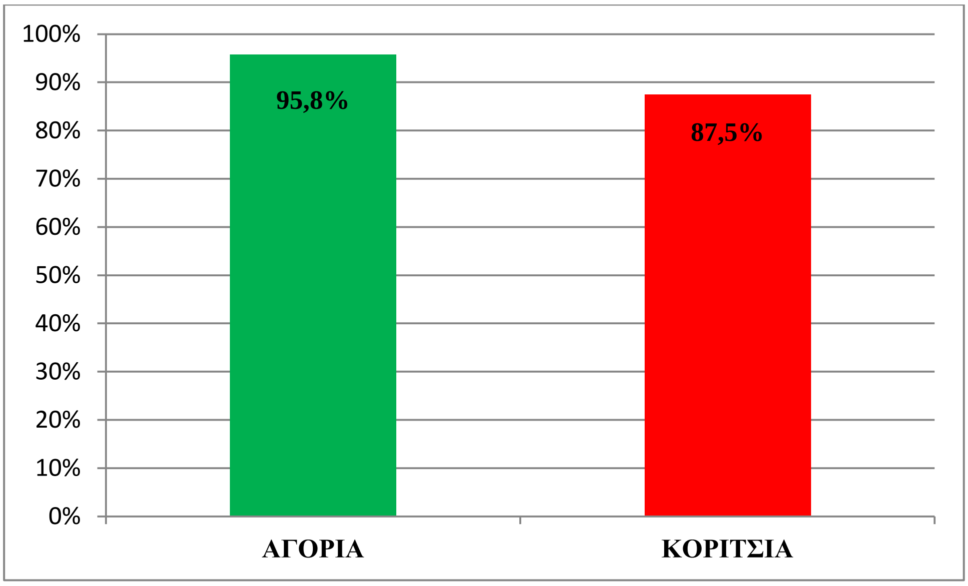
Λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των σωστών απαντήσεων, η γενική επίδοση όλων των συμμετεχόντων ήταν πολύ υψηλή. Συγκεκριμένα, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων της Α΄ τάξης στο σύνολο των δραστηριοτήτων ήταν 92,8%, ενώ της Β΄ τάξης ήταν 89%.

Προκειμένου να εξεταστεί αν η τάξη (ηλικιακή ομάδα) επηρέασε τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την τάξη ($t=0{,}829$, $df=50$, $p=0{,}411$). Πιο συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Α΄ τάξης όσο και της Β΄ τάξης είχαν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 1 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



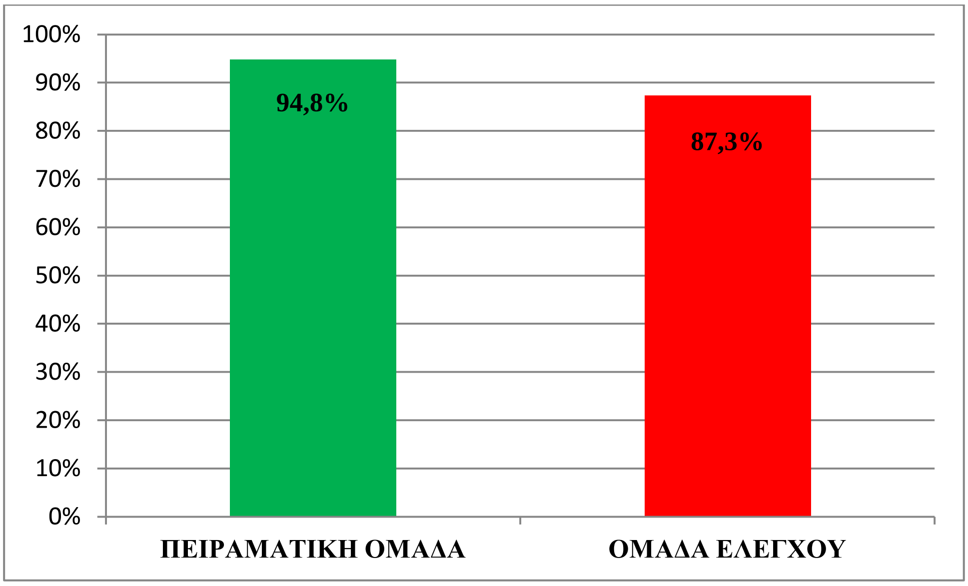
Σχήμα 1: Γενική επίδοση ως προς την τάξη

Δεύτερον, προκειμένου να εξεταστεί αν το φύλο επηρέασε τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το φύλο (t=2,256, df=50, p=0,028<0,05). Πιο συγκεκριμένα, τα αγόρια είχαν καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια (95,8% και 87,5% αντίστοιχα). Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 2: Γενική επίδοση ως προς το φύλο

Τρίτον, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα, προκειμένου να εξεταστεί αν η ομάδα επηρέασε τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα (t=1,659, df=50, p=0,103). Πιο συγκεκριμένα, η Πειραματική Ομάδα (94,8%) και η Ομάδα Ελέγχου (87,3%) είχαν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

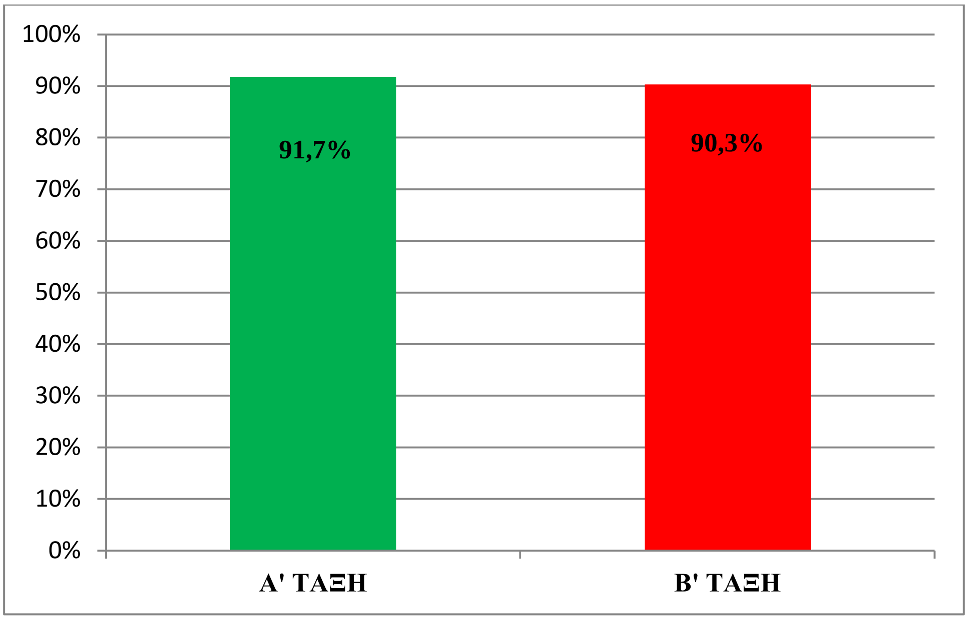


Σχήμα 3: Γενική επίδοση ως προς την ομάδα

3.2.Επίδοση ξεχωριστά σε κάθε δραστηριότητα

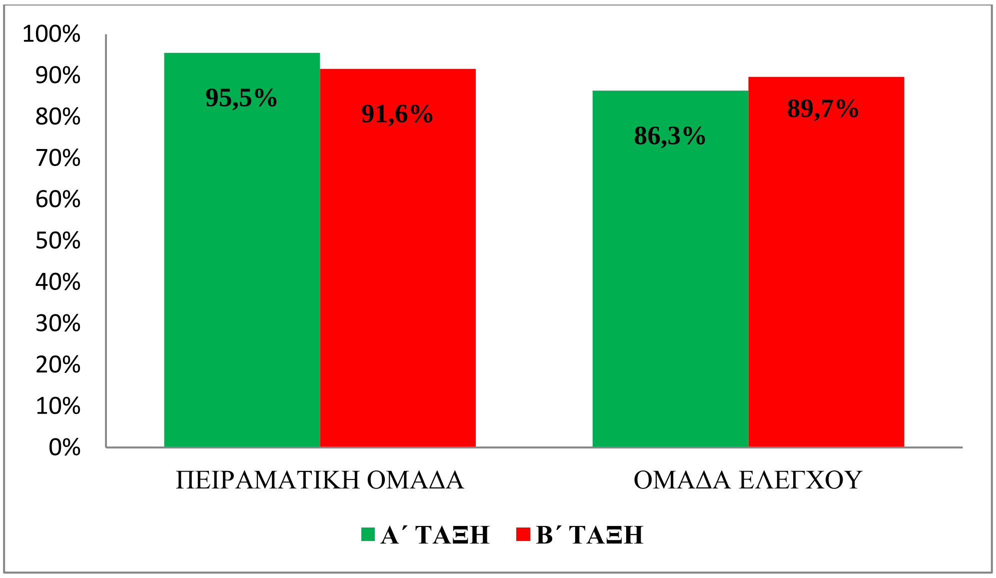
- **Δραστηριότητα 1 (Αμφίπλευρη ή Περιστροφική συμμετρία)**

Αρχικά, προκειμένου να ελεγχθεί αν η τάξη (ηλικιακή ομάδα) επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 1 ($t=0{,}247$, $df=50$, $p=0{,}806$), ωστόσο η επίδοση τους ήταν πολύ υψηλή ξεπερνώντας το 90%. Δηλαδή, τόσο τα παιδιά της Α΄ όσο και της Β΄ τάξης είχαν παρόμοια επίδοση (91,7% και 90,3% αντίστοιχα). Το Σχήμα 4 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



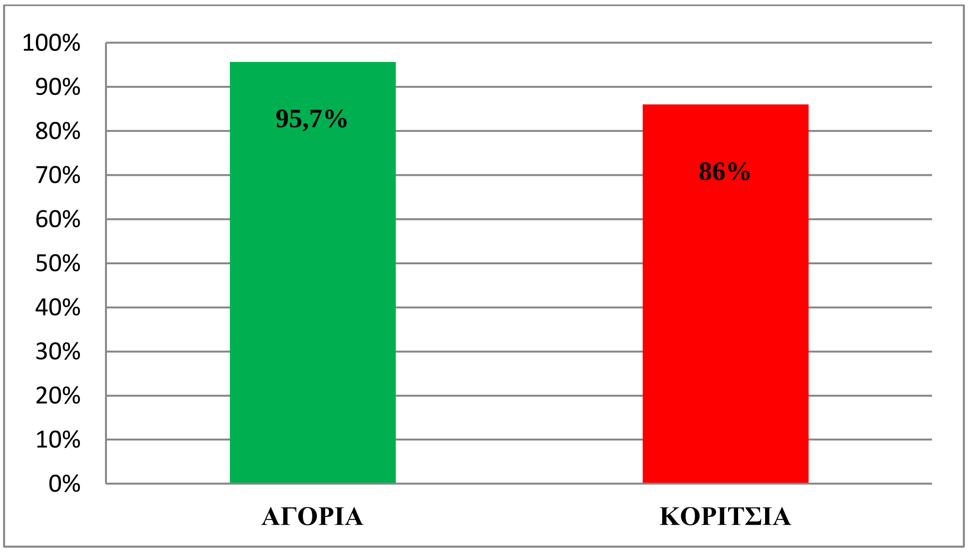
Σχήμα 4: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 1

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Πειραματικής Ομάδας και τα παιδιά της Ομάδας Ελέγχου, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, στην Πειραματική Ομάδα τα παιδιά της Α΄ τάξης είχαν παρόμοια επίδοση με τα παιδιά της Β΄ τάξης (95,5% και 91,6% αντίστοιχα) στη Δραστηριότητα 1 ($t=0{,}622$, $df=23$, $p=0{,}540$). Παρόμοια, στην Ομάδα Ελέγχου τα παιδιά της Α΄ και της Β΄ τάξης παρουσίασαν παρόμοια επίδοση (86,3% και 89,7%) στη Δραστηριότητα 1 ($t=0{,}383$, $df=25$, $p=0{,}705$). Το Σχήμα 5 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



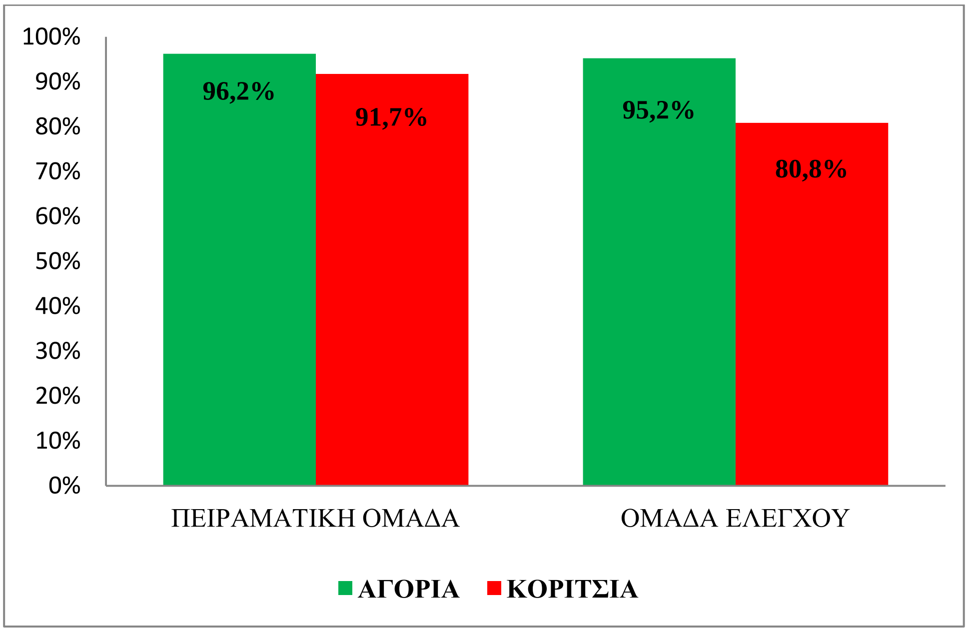
Σχήμα 5: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 1

Πραγματοποιήθηκε, επίσης, t-test για ανεξάρτητα δείγματα, με σκοπό να εξεταστεί αν το φύλο επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Η ανάλυση έδειξε ότι οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 1 ($t=1{,}934$, $df=50$, $p=0{,}059$). Δηλαδή, τόσο τα αγόρια (95,7%) όσο και τα κορίτσια (86%) έχουν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 6 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



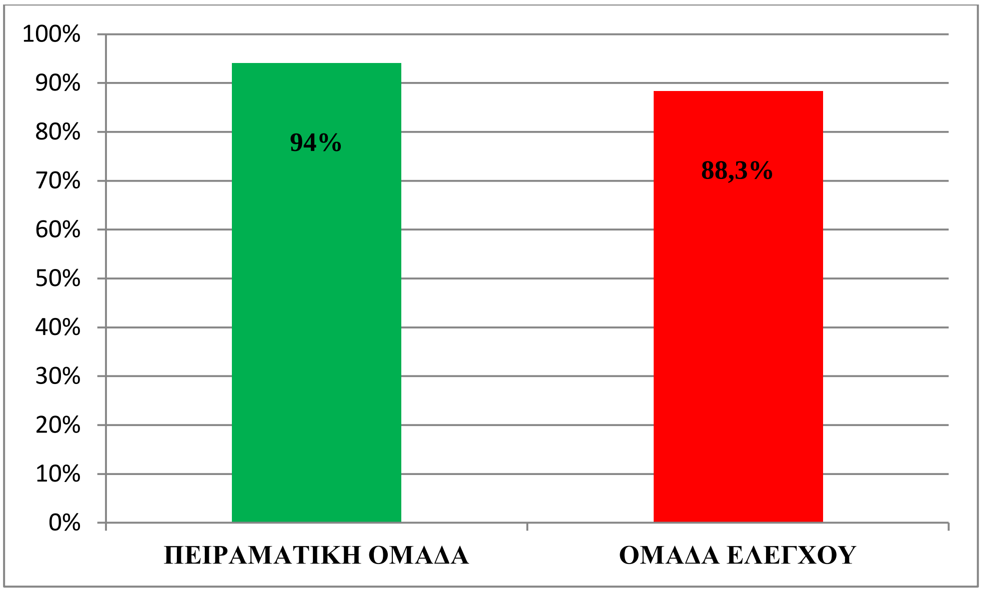
Σχήμα 6: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 1

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε Ομάδα, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, τα αγόρια είχαν παρόμοια επίδοση με τα κορίτσια στη Δραστηριότητα 1, τόσο στην Πειραματική Ομάδα (96,2% και 91,7%, αντίστοιχα), όσο και στην Ομάδα Ελέγχου (95,2% και 80,8%, αντίστοιχα) (t=0,734, df=23, p=0,470 για την Πειραματική Ομάδα και t=1,864, df=25, p=0,074 για την Ομάδα Ελέγχου). Το Σχήμα 7 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 7: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 1

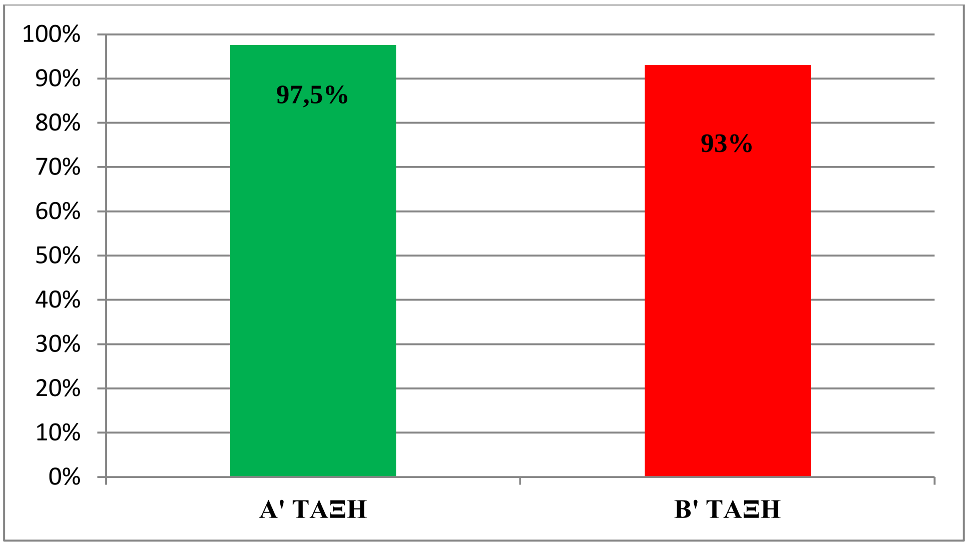
Με σκοπό να ελεγχθεί αν η ομάδα επηρέασε την επίδοση όλων των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 1 (t=1,118, df=50, p=0,269). Δηλαδή, τόσο τα παιδιά της Πειραματικής Ομάδας (94%) όσο και της Ομάδας Ελέγχου (88,3%) είχαν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 8 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 8: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 1

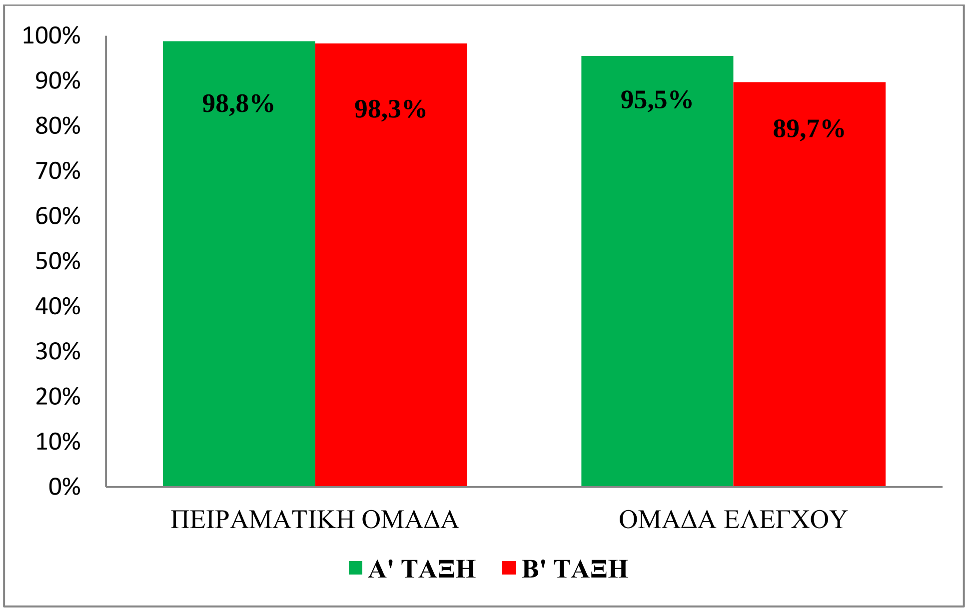
- **Δραστηριότητα 2 (Αμφίπλευρη συμμετρία)**

Πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα, για να διαπιστωθεί αν η τάξη (ηλικιακή ομάδα) επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων στη Δραστηριότητα 2. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 2 ($t=1,353$, $df=50$, $p=0,182$). Δηλαδή, τόσο τα παιδιά της Α΄ τάξης (97,5%) όσο και της Β΄ τάξης (93%) είχαν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 9 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



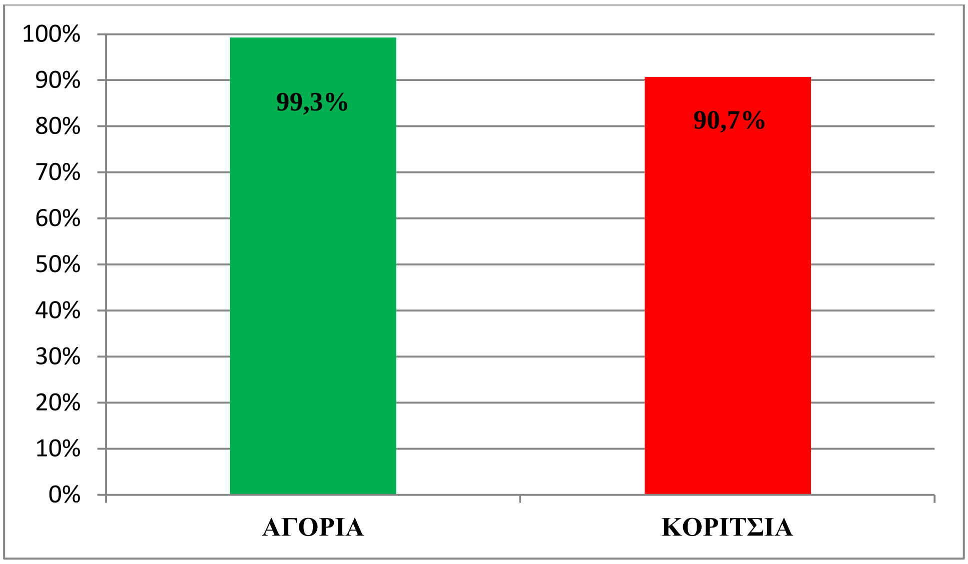
Σχήμα 9: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 2

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν, όταν πραγματοποιήθηκε η ίδια ανάλυση ξεχωριστά για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου. Ειδικότερα, τόσο στην Πειραματική Ομάδα όσο και στην Ομάδα Ελέγχου, η επίδοση των παιδιών της Α΄ τάξης και της Β΄ τάξης (98,8% και 98,3% για την Πειραματική Ομάδα και 95,5% και 89,7% για την Ομάδα Ελέγχου) στη Δραστηριότητα 2 δε διέφερε στατιστικά σημαντικά ($t=0{,}289$, $df=23$, $p=0{,}775$ και $t=0{,}960$, $df=25$, $p=0{,}346$ για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου, αντίστοιχα). Το Σχήμα 10 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 10: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 2

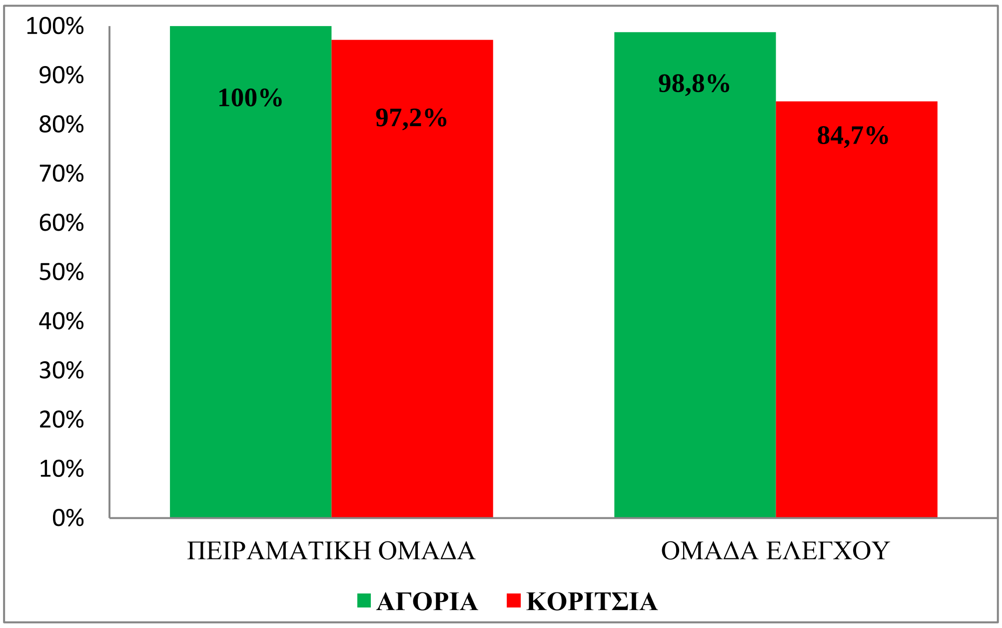
Προκειμένου, ακόμη, να εξεταστεί αν το φύλο επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων στη δραστηριότητα αυτή, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 2 ($t=2{,}771$, $df=50$, $p=0{,}008<0{,}05$), με τα αγόρια (99,3%) να εμφανίζουν καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια (90,7%) στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Το Σχήμα 11 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



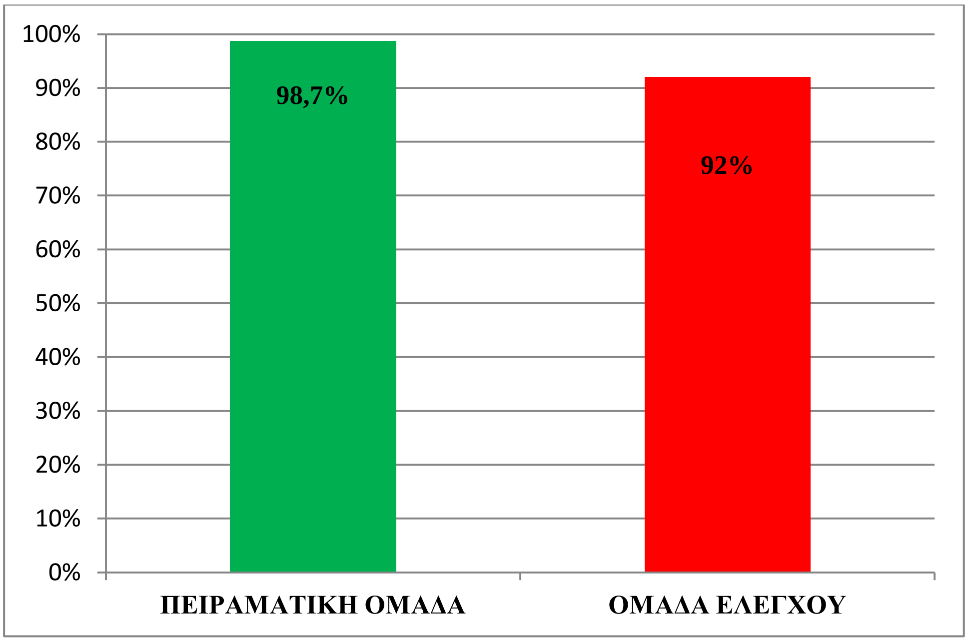
Σχήμα 11: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 2

Με την πραγματοποίηση της ίδιας ανάλυσης ξεχωριστά για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, στην Πειραματική Ομάδα η επίδοση των αγοριών ήταν παρόμοια με των κοριτσιών (100% και 97,2%, αντίστοιχα) στη Δραστηριότητα 2 ($t=1{,}574$, $df=23$, $p=0{,}136$). Αξιοσημείωτο είναι ότι η επίδοση τόσο των αγοριών όσο και των κοριτσιών στην Πειραματική Ομάδα ήταν πολύ υψηλή, ξεπερνώντας το 90%. Αντιθέτως, στην Ομάδα Ελέγχου τα αγόρια εμφάνισαν καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια (98,8% και 84,7%) στη Δραστηριότητα 2 ($t=2{,}617$, $df=25$, $p=0{,}015<0{,}05$). Το Σχήμα 12 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, για να ελεγχθεί αν η ομάδα επηρέασε την επίδοση όλων των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 2 ($t=2{,}063$, $df=50$, $p=0{,}044<0{,}05$), με τα παιδιά της Πειραματικής Ομάδας να εμφανίζουν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά της Ομάδας Ελέγχου (98,7% και 92%, αντίστοιχα). Το Σχήμα 13 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



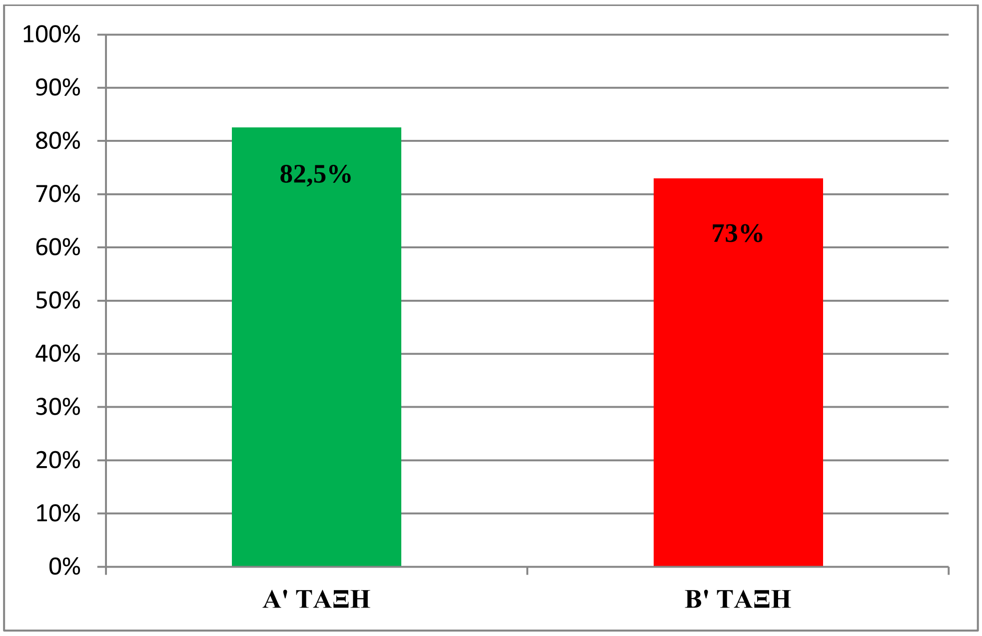
Σχήμα 12: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 2



Σχήμα 13: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 2

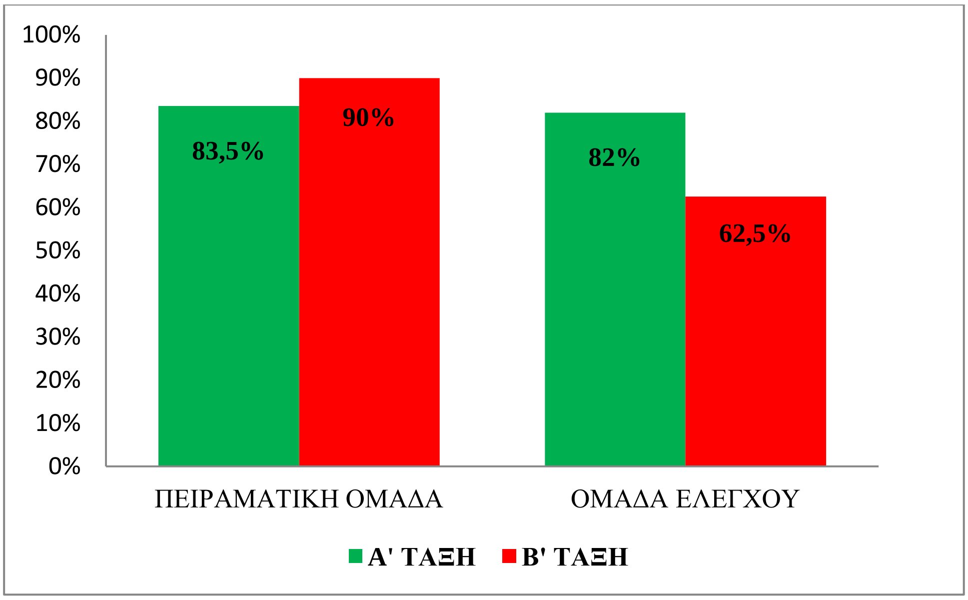
- **Δραστηριότητα 3 (Σχεδίαση σκίτσου για την αμφίπλευρη και για την περιστροφική συμμετρία)**

Στη δραστηριότητα αυτή πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα, για να ελεγχθεί αν η τάξη (ηλικιακή ομάδα) επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων,. Η ανάλυση έδειξε ότι η επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την τάξη δε διέφερε σημαντικά στη Δραστηριότητα 3 ($t=0,994$, $df=50$, $p=0,325$). Συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Α΄ τάξης (82,5%) όσο και της Β΄ τάξης (73%) είχαν παρόμοια επίδοση. Το Σχήμα 14 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



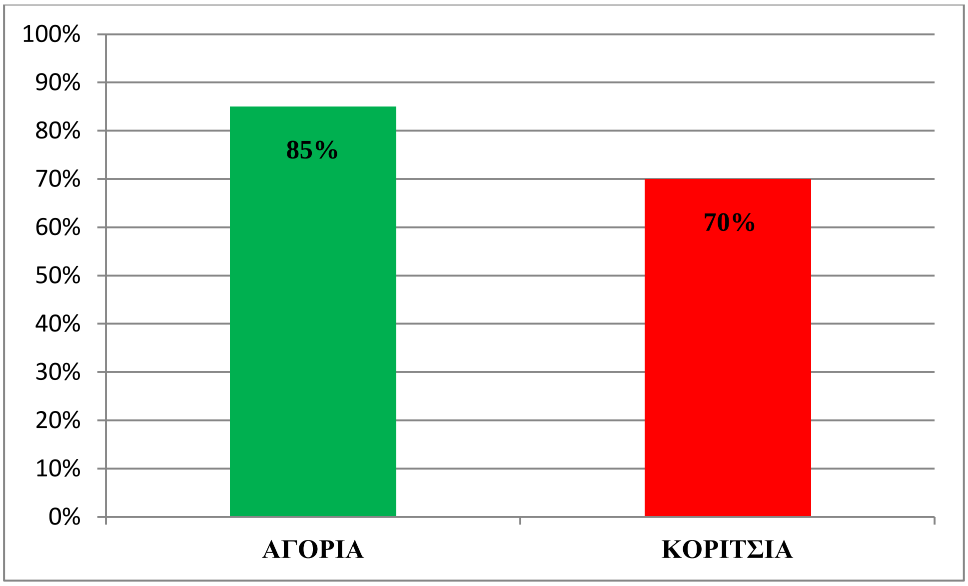
Σχήμα 14: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 3

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου. Αναλυτικότερα, στην Πειραματική Ομάδα τα παιδιά της Α΄ τάξης εμφάνιζαν παρόμοια επίδοση με τα παιδιά της Β΄ τάξης (83,5% και 90%, αντίστοιχα) στη Δραστηριότητα 3 ($t=-0,595$, $df=23$, $p=0,558$). Παρόμοια, στην Ομάδα Ελέγχου τα παιδιά της Α΄ και της Β΄ τάξης παρουσίασαν εξίσου όμοια επίδοση (82% και 62,5%) στη Δραστηριότητα 3 ($t=1,251$, $df=25$, $p=0,223$). Το Σχήμα 15 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



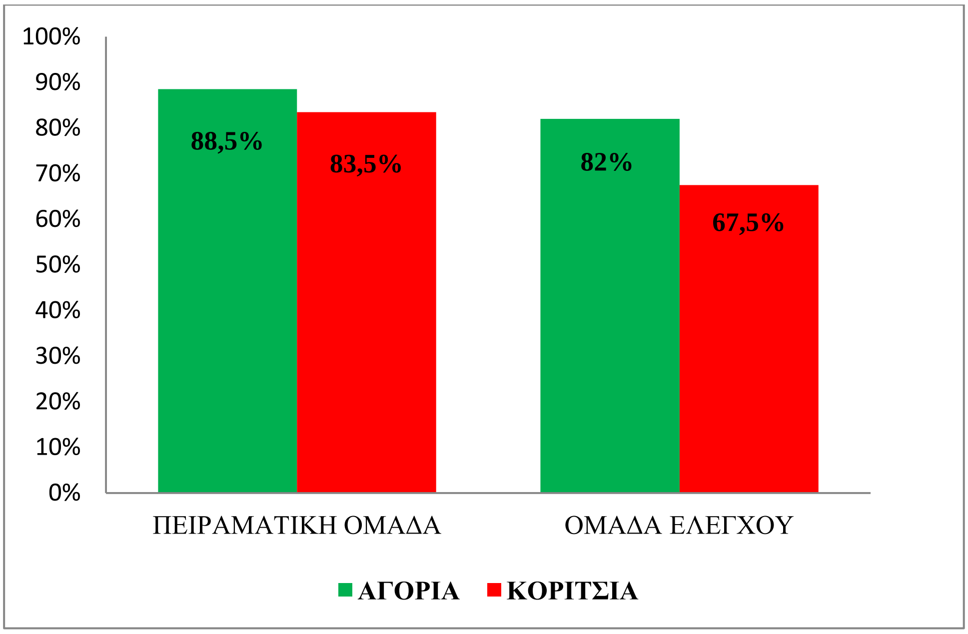
Σχήμα 15: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς την τάξη στη Δραστηριότητα 3

Στη Δραστηριότητα 3, για να διαπιστωθεί αν το φύλο επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι η επίδοση όλων των συμμετεχόντων δε διέφερε σημαντικά ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 3 ($t=1{,}592$, $df=50$, $p=0{,}118$). Δηλαδή, τα αγόρια και τα κορίτσια είχαν παρόμοια επίδοση (85% και 70% αντίστοιχα). Το Σχήμα 16 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



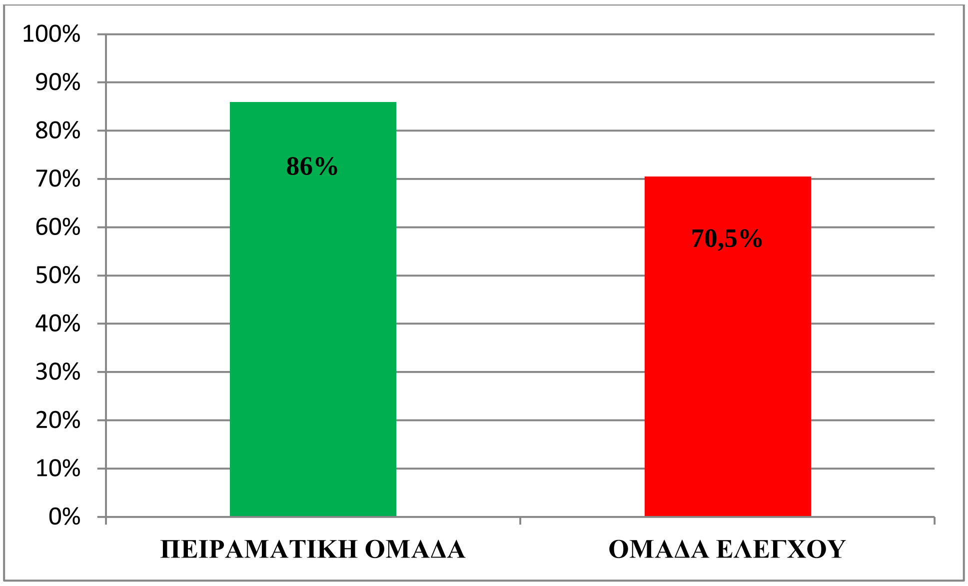
Σχήμα 16: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 3

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν, με την πραγματοποίηση της ίδιας ανάλυσης ξεχωριστά για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου. Ειδικότερα, τόσο στην Πειραματική Ομάδα όσο και στην Ομάδα Ελέγχου δεν υπήρξε σημαντική επίδραση ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 3 (t=0,464, df=23, p=0,646 και t=1,644, df=25, p=0,113 αντίστοιχα). Δηλαδή, τα αγόρια βρέθηκε να εμφανίζουν παρόμοια επίδοση με τα κορίτσια και στις δύο ομάδες (88,5% και 83,5% στην Πειραματική Ομάδα και 82% και 67,5% στην Ομάδα Ελέγχου). Το Σχήμα 17 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 17: Επίδοση της Πειραματικής Ομάδας και της Ομάδας Ελέγχου ως προς το φύλο στη Δραστηριότητα 3

Πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα, με σκοπό να ελεγχθεί αν η ομάδα επηρέασε την επίδοση όλων των συμμετεχόντων σε αυτή τη δραστηριότητα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 3 (t=1,641, df=50, p=0,107). Αναλυτικότερα, τόσο τα παιδιά της Πειραματικής Ομάδας όσο και της Ομάδας Ελέγχου είχαν παρόμοια επίδοση (86% και 70,5%, αντίστοιχα). Το Σχήμα 18 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



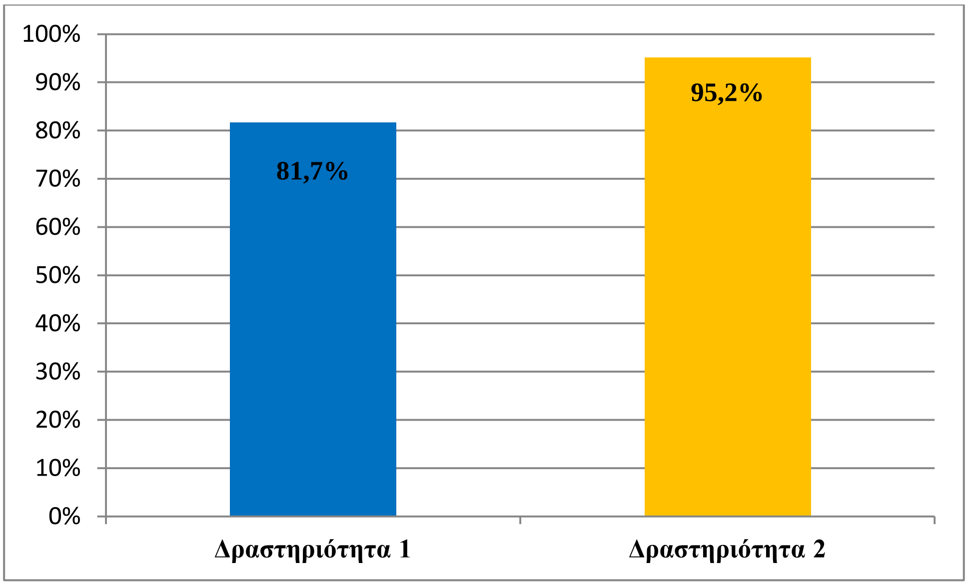
Σχήμα 18: Επίδοση όλων των συμμετεχόντων ως προς την ομάδα στη Δραστηριότητα 3

3.3. Σύγκριση των δραστηριοτήτων

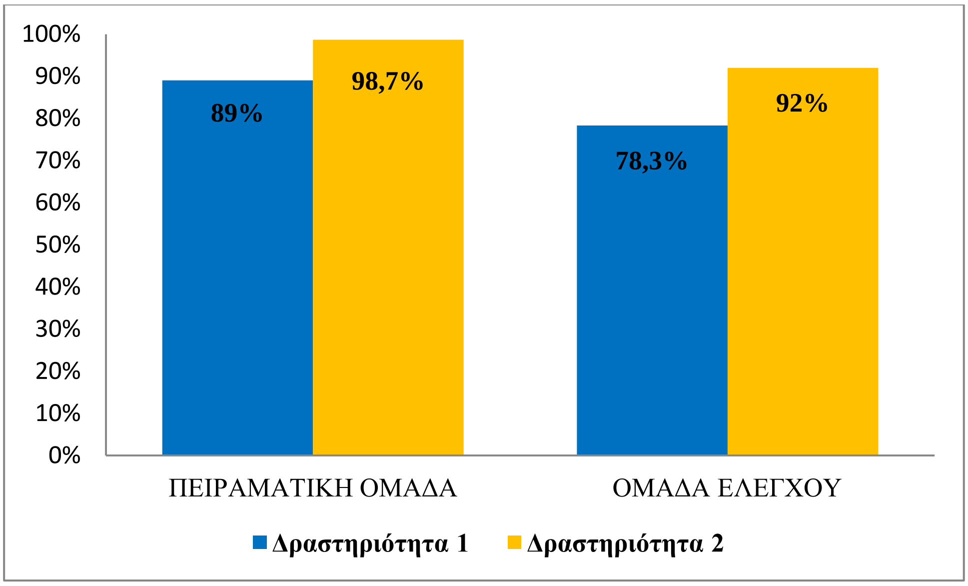
- **Δραστηριότητα 1 με Δραστηριότητα 2 για όλους τους συμμετέχοντες**

Προκειμένου να εξεταστεί αν τα παιδιά είχαν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 1 ή στη Δραστηριότητα 2 ή δεν διαφοροποιήθηκε η επίδοσή τους στις δραστηριότητες αυτές, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση ανέδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση όλων των συμμετεχόντων στις δύο δραστηριότητες ($t=-2,642$, $df=51$, $p=0,011<0,05$). Δηλαδή, οι συμμετέχοντες είχαν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 (95,2%) συγκριτικά με τη Δραστηριότητα 1 (81,7%). Το Σχήμα 19 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, συγκρίνοντας την επίδοση των παιδιών στη Δραστηριότητα 1 και στη Δραστηριότητα 2 ($t=-2,064$, $df=24$, $p=0,05$ και $t=-1,654$, $df=26$, $p=0,011<0,05$ για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου, αντίστοιχα). Δηλαδή, τα παιδιά της Πειραματικής Ομάδας είχαν οριακά καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 από τη Δραστηριότητα 1 (98,7% και 89%, αντίστοιχα). Στην Ομάδα Ελέγχου τα παιδιά εμφάνισαν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 σε σχέση με τη Δραστηριότητα 1 (92% και 78,3%). Το Σχήμα 20 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 19: Σύγκριση της επίδοσης στις Δραστηριότητες 1 και 2 για όλους τους συμμετέχοντες



Σχήμα 20: Σύγκριση της επίδοσης στις Δραστηριότητες 1 και 2 για την Πειραματική και την Ομάδα Ελέγχου

- **Δραστηριότητα 1 με Δραστηριότητα 3 για όλους τους συμμετέχοντες**

Η σύγκριση μεταξύ των επιδόσεων των παιδιών στις Δραστηριότητες 1 και 3 δεν πραγματοποιήθηκε, λόγω της διαφοράς στον αριθμό των δοκιμασιών (η δραστηριότητα 1 είχε 6 σκίτσα, ενώ η δραστηριότητα 3 είχε 2 σκίτσα).

Συγκρίνοντας την επίδοση των παιδιών στη Δραστηριότητα 1 και στη Δραστηριότητα 3 στην Πειραματική Ομάδα φάνηκε ότι για τη Δραστηριότητα 1 τα παιδιά εμφάνιζαν καλύτερη επίδοση (94%) από τη Δραστηριότητα 3 (86%). Παρόμοια, η επίδοση των παιδιών στην Ομάδα Ελέγχου ήταν καλύτερη για τη Δραστηριότητα 1 (88,3%) από τη Δραστηριότητα 3 (70,5%).

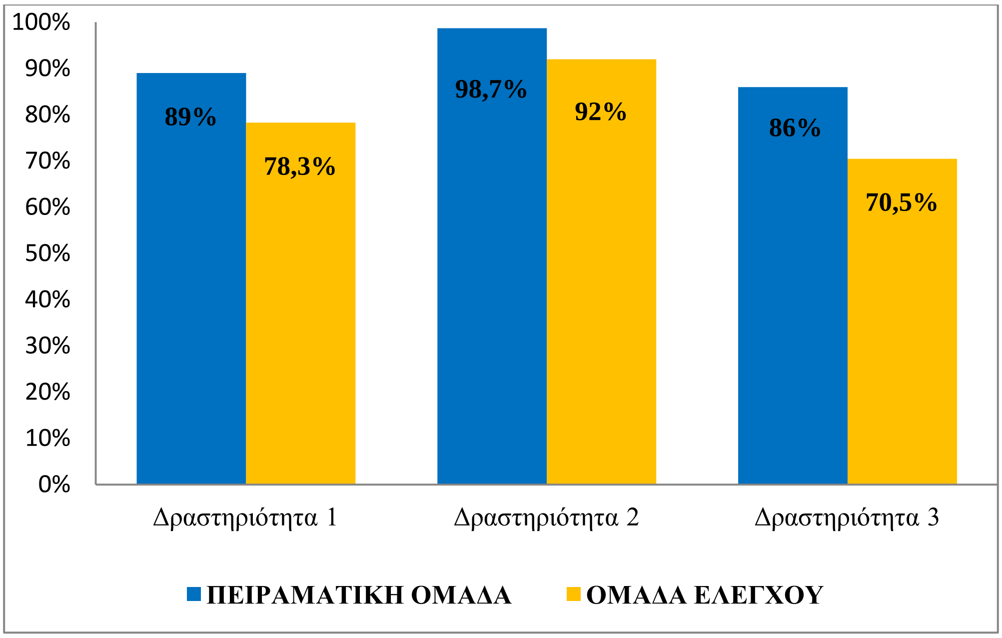
- **Δραστηριότητα 2 με Δραστηριότητα 3 για όλους τους συμμετέχοντες**

Δεν πραγματοποιήθηκε, επίσης, η σύγκριση μεταξύ των επιδόσεων των παιδιών της Δραστηριότητας 2 και της Δραστηριότητας 3, λόγω της διαφοράς στον αριθμό των δοκιμασιών (η δραστηριότητα 2 είχε 6 σκίτσα, ενώ η δραστηριότητα 3 είχε 2 σκίτσα).

Η επίδοση των παιδιών της Πειραματικής Ομάδας ήταν καλύτερη στη Δραστηριότητα 2 (98,7%) από τη Δραστηριότητα 3 (86%). Τα παιδιά, επίσης, στην Ομάδα Ελέγχου είχαν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 (92%) από τη Δραστηριότητα 3 (70,5%).

- **Σύνολο σωστών απαντήσεων των παιδιών στις 3 Δραστηριότητες στην Πειραματική Ομάδα και στην Ομάδα Ελέγχου**

Αναλυτικότερα, στην Πειραματική Ομάδα τα παιδιά είχαν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 (98,7%) από τις άλλες δύο δραστηριότητες. Το ίδιο συνέβη και στην Ομάδα Ελέγχου με τα παιδιά να εμφανίζουν καλύτερη επίδοση στη Δραστηριότητα 2 (92%). Αξιοσημείωτο είναι ότι στη Δραστηριότητα 3 και οι δύο ομάδες είχαν τις λιγότερες σωστές απαντήσεις (86% και 70,5% για την Πειραματική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου, αντίστοιχα). Το Σχήμα 21 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 21: Συγκεντρωτικός πίνακας με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των παιδιών στις 3 Δραστηριότητες ως προς την Ομάδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία είχε ως σκοπό να συνεισφέρει στην ήδη υπάρχουσα, αν και περιορισμένη, βιβλιογραφία σχετικά με την αποτελεσματικότητα μιας εναλλακτικής μορφής διδασκαλίας των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η εφαρμογή μιας εναλλακτικής μορφής διδασκαλίας, της αμφίπλευρης και περιστροφικής συμμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παρουσιάζονται τα βασικά ευρήματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε και στη συνέχεια διατυπώνονται κάποιοι από τους περιορισμούς της, καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα.

Πρώτον, η επίδοση των παιδιών που διδάχθηκαν τη συμμετρία μέσα από δραστηριότητες χορού (Πειραματική Ομάδα) ήταν παρόμοια με την επίδοση των παιδιών που διδάχθηκαν τη συμμετρία μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία με τη χρήση δραστηριοτήτων που προτείνονται από τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών (Ομάδα Ελέγχου). Πραγματοποιώντας ακολούθως ανάλυση ξεχωριστά για κάθε δραστηριότητα ως προς την ομάδα, υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στη Δραστηριότητα 2, η οποία αφορούσε στην αναγνώριση της αμφίπλευρης συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, η επίδοση των παιδιών της Πειραματικής Ομάδας ήταν καλύτερη από την επίδοση των παιδιών της Ομάδας Ελέγχου στην αναγνώριση της αμφίπλευρης συμμετρίας. Φαίνεται δηλαδή ότι η διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας μπορεί να είναι αποτελεσματική, ακόμα και με εναλλακτική διδακτική προσέγγιση, δηλαδή μέσω δραστηριοτήτων χορού. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει εν μέρει τα ευρήματα άλλων ερευνών, όπως ειδικότερα διαπιστώθηκε στις έρευνες των Μπαρμπούση (2014), Belcastro & Schaffer (2011), Chaviaris & Kafoussi (2010) και Pivec et al. (2003), παρόλο που οι μαθηματικές έννοιες και οι διδακτικές προσεγγίσεις ήταν διαφορετικές. Συνεπώς, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μπορεί να επιτευχθεί μέσω εναλλακτικής διδακτικής προσέγγισης, καθώς τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά και δρουν βιωματικά.

Δεύτερον, όπως διαπιστώνεται στη Δραστηριότητα 2, που αφορούσε στην αναγνώριση της αμφίπλευρης συμμετρίας, τα παιδιά της Πειραματικής ομάδας παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις από τα παιδιά της Ομάδας Ελέγχου. Αντιθέτως, στις άλλες δύο δραστηριότητες που υπήρχε η αναγνώριση της αμφίπλευρης και της περιστροφικής συμμετρίας, καθώς και η σχεδίαση συμμετρικού σκίτσου για κάθε είδος συμμετρίας, τα παιδιά είχαν παρόμοιες επιδόσεις, χωρίς να παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Ειδικότερα, τα ευρήματα της παρούσας εργασίας συμφωνούν εν μέρει με αυτά των Μαστρογιάννη & Κορδάκη (2007) και Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari (2008). Φαίνεται, δηλαδή, ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο στην έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας, συγκεκριμένα στην αναγνώριση των αξόνων, κυρίως των πλάγιων.

Τρίτον, η επίδοση των παιδιών μεταξύ της Α΄ και της Β΄ τάξης δεν διέφερε στατιστικά σημαντικά. Τα παιδιά και των δύο τάξεων εμφάνισαν πολύ υψηλή επίδοση και στις τρεις δραστηριότητες του φύλλου αξιολόγησης, παρόλο που δεν είχαν διδαχθεί τη συμμετρία σε προηγούμενα έτη. Τα ευρήματα της συγκεκριμένης εργασίας έρχονται σε αντίθεση με ευρήματα από έρευνες που δείχνουν ότι τα παιδιά μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού και του γυμνασίου δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν την έννοια της συμμετρίας, κυρίως της αξονικής συμμετρίας (Markopoulos, Panagiotakopoulos & Potari, 2008; Son, 2006; Γαγάτσης & Γαλλής, 1989, στο Σκόδρας, 2010). Κάτι παρόμοιο, όμως, δεν διαπιστώθηκε στην παρούσα εργασία στις μικρές τάξεις, στην Α΄ και Β΄ δημοτικού.

Τέταρτον, η γενική επίδοση των αγοριών ήταν καλύτερη από τη γενική επίδοση των κοριτσιών. Ωστόσο, στη Δραστηριότητα 1, που αφορούσε στην αναγνώριση της αμφίπλευρης και της περιστροφικής συμμετρίας, τα αγόρια και τα κορίτσια εμφάνιζαν παρόμοιες επιδόσεις και στις δύο ομάδες. Αντιθέτως, στη Δραστηριότητα 2, που αφορούσε στην αναγνώριση της αμφίπλευρης συμμετρίας, μόνο στην Ομάδα Ελέγχου οι επιδόσεις των αγοριών ήταν καλύτερες από των κοριτσιών. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, όσον αφορά την επίδοση μεταξύ των δύο φύλων, συμφωνούν εν μέρει με ευρήματα από έρευνες που έδειξαν ότι παρουσιάζουν την υπεροχή των αγοριών στη Γεωμετρία και στις χωρικές έννοιες συγκριτικά με των κοριτσιών (Καφούση, Σκουμπουρδή & Καλαβάση, 2008), όμως υπάρχουν έρευνες στις οποίες δεν παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές (Xistouri & Pitta- Pantazi, 2006).

Κρίνεται απαραίτητο να διευκρινιστεί ότι στην παρούσα πειραματική μέθοδο (οιονεί πείραμα), για την επίτευξη των επιδιώξεων της διδασκαλίας, παρόλο που προέκυψαν ενδιαφέροντα ευρήματα σε ένα πεδίο που τα διαθέσιμα δεδομένα είναι περιορισμένα, συμμετείχε ένα μικρό δείγμα μαθητών από την ευρύτερη περιοχή της Λήμνου, χαρακτηριστικό που δυσχεραίνει τη δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, η πραγματοποίηση παρόμοιας έρευνας με μεγαλύτερο δείγμα θα έχει ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον.

Ενδιαφέρουσα πρόταση για τη διδασκαλία του μαθήματος της συμμετρίας θα ήταν η συνεργασία δασκάλου ή καθηγητή και γυμναστή. Αξίζει να μελετηθεί το θέμα αυτό περαιτέρω, καθώς παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, στα οποία δραστηριότητες- παιχνίδια μέσω χορού εμπεριέχονται στην καθημερινότητά τους. Τα παιδιά, όταν τους δίνεται η δυνατότητα να κατανοήσουν μία μαθηματική έννοια μέσω εναλλακτικής διδακτικής προσέγγισης, μπορούν να εκφράσουν τα συναισθήματά τους και να ενεργοποιήσουν τις γνώσεις τους (Μπαρμπούση, 2014). Περαιτέρω θα μπορούσε να ερευνηθεί ο συνδυασμός του χορού ως βοηθητικό μέσο για νοερούς υπολογισμούς σε παιδιά τυπικής ανάπτυξης και σε παιδιά με ειδικές ανάγκες. Τόσο ο χορός, όσο κι οι υπόλοιπες εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας κινητοποιούν το ενδιαφέρον των παιδιών μέσω της ενεργητικής συμμετοχής και της βιωματικής τους δράσης (Chaviaris & Kafoussi, 2010).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aitken, V. (2013). Dorothy Heathcote’s Mantle of the expert approach to teaching and learning: a brief introduction. In V. Aitken, D. Fraser, & B. Whyte (Eds). *Connecting curriculum, linking learning* (pp.34-56). Wellington: NZCER Press.

Belcastro, M. & Scaffer, K. (2011). Dancing mathematics and the mathematics of dance. *Math Horizons*, *18*(3), 16-20.

Beman, W. & Smith, D. (1987). *Famous problems of elementary geometry*. Boston.

Bragg, A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children’s learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1445-1467.

Breuer, S., & Bente, G. (2010). Why so serious? On the relation of serious games and learning. Eludamos. *Journal for Computer Game Culture*, *4*(1), 7-24.

Byayşe, G. (2012). *The effect of creative drama based instruction on seventh grade students’ mathematics achievement in probability concept and their attitudes toward mathematics*. Thesis, MA of Science, Middle East Technical University. Turkey.

Chaviaris, P., & Kafoussi, S. (2010). Developing students’ collaboration in a mathematics classroom through dramatic activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *5*(2), 91-110.

Debrelđ, E. (2011). *The effect of creative drama based instruction on seventh grade students’ achievement in ratio and proportion concepts and attitudes toward mathematics.* Thesis, MA of Science, Middle East Technical University. Turkey.

Edo, M., Planas, N., & Badillo, E. (2009). Mathematical learning in a context of play. *European Early Childhood Education Research Journal*, *17*(3), 325-341.

Epley, N., Morewedge, K., & Keysar, B. (2004). Perspective taking in children and adults: Equivalent egocentrism but differential correction. *Journal of Experimental Social Psychology*, *40*, 760–768.

Erdogan, S., & Baran, G. (2009). A study on the effect of mathematics teaching provided through drama on the mathematics ability of six-year-old children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *5*(1), 79-85.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers in Mathematical Learning*, *2* (1), 27-59.

Hon, G., & Goldstein, B. R. (2008). *From summetria to symmetry: The making of a Revolutionary Scientific Concept* (Archimedes 20). Springer.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Mathematics Enthusiast, 1*(1). Ανακτήθηκε τον Μάιο 2018 από: http://scholarworks.umt.edu/tme/vol1/iss1/2.

Markopoulos, C., Panagiotakopoulos, C., & Potari, D. (2008). *Prospective primary teachers' conceptions of axial symmetry.* ICME-11 (σελ.783-788). Monterrey, Mexico.

Martin, G. (1982). *Transformation geometry: An introduction to symmetry.* New York: Springer.

Pivec, M., Dziabenko, O., & Schinnerl, I. (2003). Aspects of game-based learning. *In Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Management* (pp. 216-225). Graz, Austria.

Schattschneider, D. (2004). *M. C. Escher: Visions of symmetry, Harry Abrams*. New York.

Sezer, T., & Güler- Öztürk, S. (2011). The effects of drama in helping five-year-old children acquire the concepts of number and operation. *Educational Research*, *2*(6), 1210-1218.

Sommerville, D. (2005). *The elements of non-Euclidean geometry*. New York: Dover Publications.

Tzanakis C. (2000). Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history: A genetic approach. In V. Katz (Ed)., *An international* *perspective* (pp.68-90). Washington D. C: Mathematical Association of America.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. In J. Novotna, H. Moraova, M. Ktatka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.5, pp. 425-432). Prague, Czech Republic: PME.

5.2. ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γκριμπίζη, Ο., & Σπανοπούλου, Ε. (2012). Από τα ομαδικά παιχνίδια στις μαθηματικές έννοιες: «Το παιχνίδι του ρολογά». Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *10ο διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών: Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σελ. 91-110). Αθήνα.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003). Τόμος Α΄ & Β΄, ΥΠΔΒΜΘ, Αθήνα, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε τον Απρίλιο 2018: http://www.pi-schools.gr/programs/depps/.

Ιωακειμίδης, Π. (2012). Όταν η θεατρική παιδεία συναντά τα Μαθηματικά: μια πρόταση εκπαιδευτικού σεναρίου με δράσεις Θεατρικής Αγωγής για τη διδασκαλία της ενότητας «Τα Γεωμετρικά Σχήματα». *Πρακτικά 6^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.)* (σελ. 4-10). Αθήνα.

Καρφής, Β., & Ζιάκα, Μ. (2009). *Ο ελληνικός παραδοσιακός χορός στην εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Βιβλιοδιάπλους.

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2008). Φύλο και μαθηματικά: αναγκαιότητα μιας συνολικής επαναδιαπραγμάτευσης των μαθηματικών στην εκπαίδευση. *Ευκλείδης γ΄*, *69*, 23-39.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Leader Bocks.

Κοντογιάννη, Α. (2008). *Μαύρη αγελάδα άσπρη αγελάδα: Δραματική τέχνη στην εκπαίδευση και διαπολιτισμικότητα.* Αθήνα: Τόπος.

Christensen, B. (2007). *Η πειραματική μέθοδος στην επιστημονική έρευνα.* Αθήνα: Παπαζήσης.

Μαστρογιάννης, Α., & Κορδάκη, Μ. (2007). Αμφίπλευρη συμμετρία: αντιλήψεις μαθητών Δημοτικού. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επιμ.), *2ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ.358-368). Αλεξανδρούπολη.

Μπαρμπούση, Β. (2014). *Η τέχνη του χορού στην Ελλάδα τον 20ο αιώνα.* Αθήνα: Gutenberg.

Ξυστούρη, Ξ. (2007). *Η ικανότητα στη γεωμετρία των μετασχηματισμών, η σχέση της με ατομικές διαφορές, και η επίδραση δύο δυναμικών αλληλεπιδραστικών οπτικοποιήσεων.* Ανακτήθηκε τον Μάιο 2018: https://lekythos.library.ucy.ac.cy/handle/10797/12940.

Σκόδρας, Α. (2010). Σύγχρονα περιβάλλοντα μάθησης και παραγωγή διδακτικού υλικού: *Ανάπτυξη και χρήση ψηφιακού και χειραπτικού υλικού για τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας σε μαθητές και μαθήτριες της πρώτης τάξης του Γυμνασίου* (Διπλωματική εργασία). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018 από: http://ir.lib.uth.gr/bitstream/handle/11615/41870/9161.

Σκουμπουρδή, Χ. (2010). Το παιχνίδι ως πλαίσιο για την προσέγγιση των μαθηματικών της πρώτης σχολικής ηλικίας: Σχεδιασμός επιτραπέζιων παιχνιδιών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση, 162*, 82-99.

Τουμάσης, Μπ. (2002). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Τυροβολά, Β., & Κουτσούμπα, Μ. (2007). *Ανάλυση του χορού. Θεωρία και πράξη.* Αθήνα: Ιατρ. Εκδ. Πασχαλίδη.

Ωραιόπουλος, Γ. (2007). Επίδραση των μαθηματικών στην τέχνη. *Ευκλείδης Α΄, 66*, 161-189.

ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ

So You Think You Can Dance- Live 7 (2017). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018: https://youtu.be/8aHGLXelhXw?t=77 (0:00-2:00).

So You Think You Can Dance- Live 6 (2017). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018: https://youtu.be/UuTLrLIAU-s?t=57 (0:46-1:15).

So You Think You Can Dance. Turn down for WHAT! (2017). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018: https://youtu.be/x-U3mUd0uEs?t=28 (0:00-1:32).

Παγκόσμιοι Πρωταθλητές Καλλιτεχνικού Πατινάζ- Gabriella PAPADAKIS+ Guillaume IZERON (2015). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018: https://youtu.be/pJQfWY9mDtM?t=275 (0:00-4:15).

Ράικος- Λύκειο Ελληνίδων Θεσσαλονίκης (2014). Ανακτήθηκε τον Ιούλιο 2018: https://youtu.be/r9ArWoBhaJY?t=28 (0:00-1:50).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΕΙΚΟΝΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Εικόνα 1

Εικόνα 2

Εικόνα 3

Εικόνα 4

Εικόνα 5

Εικόνα 6

Εικόνα 7

Εικόνα 8

Εικόνα 9

Εικόνα 10

Εικόνα 11

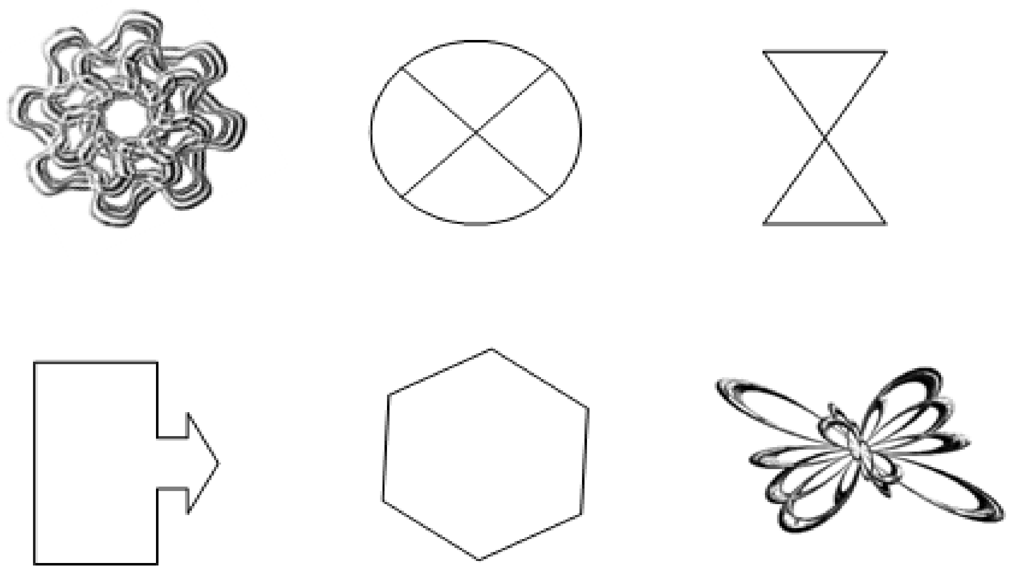
Εικόνα 12

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

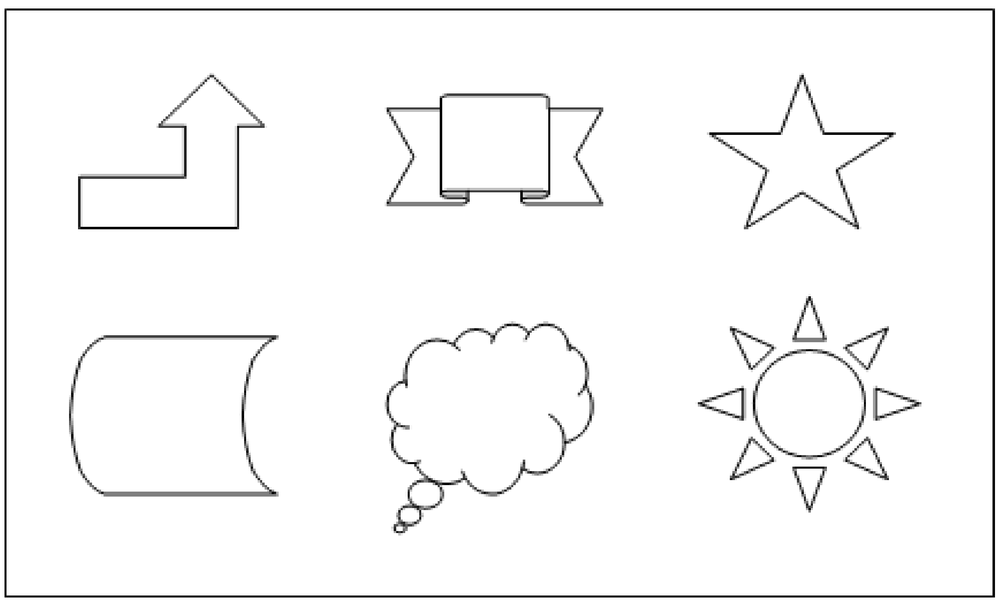
1η δραστηριότητα

Να ονοματίσεις τα είδη της συμμετρίας που εμφανίζονται στα παρακάτω σκίτσα.



2η δραστηριότητα

Να επιλέξεις κυκλώνοντας ή ζωγραφίζοντας τα σκίτσα που έχουν *αμφίπλευρη συμμετρία*.



3η δραστηριότητα

Να σχεδιάσεις ένα συμμετρικό σκίτσο για την αμφίπλευρη συμμετρία και ένα για την περιστροφική μέσα στους παρακάτω πίνακες.

ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΗ	ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ