ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

‹‹ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ››

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α’ ηλικιακός κύκλος

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

του φοιτητή **Καρακώστα Μιχαήλ (ΑΕΜ: 954)**

Τίτλος

Νοεροί υπολογισμοί με ρητούς: Διαφορές ανάμεσα στις διαθέσιμες συλλογές στρατηγικών και στην στρατηγική που επιλέγουν οι λύτες.

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Παπαδόπουλος, Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ.

Εξεταστές: 1) Λεμονίδης Χαράλαμπος, Π.Τ.Δ.Ε., Π.Δ.Μ.

2) Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Π.Τ.Δ.Ε., Π.Δ.Μ.

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2021

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη.

Στην εργασία αυτή, μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κλήθηκαν να απαντήσουν στην ίδια συλλογή δραστηριοτήτων νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς (κυρίως κλάσματα και μεικτούς αριθμούς). Αρχικά, οι μαθητές έπρεπε να κάνουν τους υπολογισμούς νοερά. Στην συνέχεια, έκαναν τους ίδιους υπολογισμούς γραπτά εξαντλώντας όσο το δυνατόν περισσότερες διαφορετικές στρατηγικές. Τέλος, έπρεπε να αιτιολογήσουν την επιλογή της νοερής στρατηγικής τους. Σκοπός της εργασίας ήταν να αναδείξει το εύρος στρατηγικών των μαθητών αλλά και πως αυτές διαχωρίζονται στους δυο πληθυσμούς. Όπως επίσης και να διαφωτίσει του λόγους στους οποίους βασίζεται η επιλογή στρατηγικής. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο γραπτός αλγόριθμος είναι η κυρίαρχη στρατηγική επίλυσης τόσο στην νοερή επίλυση όσο και στην γραπτή επίλυση. Διαφορετικές στρατηγικές εμφανίστηκαν κυρίως μόνο στους μαθητές της δευτεροβάθμιας αλλά σε πολύ μικρά ποσοστά ενώ και στις δυο κατηγορίες μαθητών παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη και περιπτώσεις αδυναμίας απάντησης. Αναφορικά με τα κριτήρια επιλογής η πλειοψηφία όσων απάντησαν επέλεξε την στρατηγική (κυρίως) του αλγορίθμου με βάση την αποτελεσματικότητα-ταχύτητα-ευκολία που τους παρείχε ή την απουσία γνώσης άλλων στρατηγικών.

Λέξεις-κλειδιά: Ρητοί αριθμοί, γραπτός αλγόριθμος, νοερή επίλυση, γραπτή επίλυση, κριτήρια επιλογής στρατηγικής.

Abstract.

In this study primary and secondary education students were invited to cope with the same collection of tasks concerning mental calculations with rational numbers (mainly fractions and mixed numbers). Initially, students had to calculate mentally. Then, for the same tasks, they were asked to write down as many different ways of calculation as they could. At the same time they had to justify their choice of mental strategy. The aim of the study was to highlight the range of the students’ strategies and their distribution to both populations. An additional aim was to clarify the reasons for making certain strategy choices. The results highlight the dominance of the written algorithm in both mental and written calculations. A small percentage of different strategies occurred in the secondary school students. Both groups of students exhibited to a great extent errors and inability to perform the calculations. Finally, most of them chose (mainly) the algorithm strategy based either on the efficiency-speed-ease it provided or the lack of knowledge of other strategies.

Key-words: Rational numbers, written algorithm, mental calculations, written calculations, strategy-selection criteria.

1. Εισαγωγή.

Η μεγάλη σημασία της ικανότητας νοερών υπολογισμών αλλά και ευελιξίας στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών στην μαθηματική ανάπτυξη όσο και στην καθημερινή ζωή, έχει τονιστεί από την κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών πολλές φορές. Ωστόσο ο αριθμός των ερευνών που συνδυάζουν αυτές τις δυο όψεις, ιδιαίτερα σε σχέση με νοερούς υπολογισμούς που εμπλέκουν ρητούς αριθμούς φαίνεται να είναι περιορισμένος. Αφορμή για την εργασία αυτή αποτέλεσε ο προβληματισμός σχετικά με τα κριτήρια στα οποία οι μαθητές βασίζουν την επιλογή της στρατηγικής όταν καλούνται να επιλύσουν μια νοερή δραστηριότητα με ρητούς αριθμούς. Επιπλέον ενδιαφέρον παρουσιάζει το κατά πόσο η επιλεγμένη στρατηγική είναι και η μοναδική, την οποία γνωρίζουν ή μπορούν να αξιοποιήσουν. Και οι δυο προβληματισμοί συνδέονται με την εργασία των Papadopoulos, Panagiotopoulou και Karakostas (2019) η οποία μελετώντας τις επιδόσεις μαθητών και φοιτητών σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς άφησε ανοικχά τα δυο αυτά θέματα προς περαιτέρω διερεύνηση. Σε αυτούς τους προβληματισμούς λοιπόν επιχειρεί η παρούσα εργασία να δώσει απαντήσεις. Ελπίζουμε επίσης να αποτελέσει αφορμή για μελλοντικές έρευνες αλλά και να ευαισθητοποιήσει την εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα ακόμη περισσότερο σχετικά με το θέμα αυτό.

1.1. Ερευνητικά ερωτήματα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και τα οποία η παρούσα εργασία προσπάθησε να απαντήσει ήταν:

1) Ποιο είναι το εύρος των στρατηγικών που εφαρμόζουν μαθητές Δημοτικού και Λυκείου κατά τη διαδικασία νοερών και γραπτών υπολογισμών με ρητούς και πως αυτές διαφοροποιούνται ανάμεσα στους δυο πληθυσμούς;

2) Με ποιο κριτήριο αποφασίζουν οι λύτες την επιλογή στρατηγικής στους νοερούς υπολογισμούς ;

1.2. Γενική Επισκόπηση.

Μετά την εισαγωγή ακολουθεί στο Κεφάλαιο 2 η βιβλιογραφική επισκόπηση των αποτελεσμάτων ανάλογων ερευνών πάνω στους νοερούς υπολογισμούς. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνονται: οι ορισμοί των κύριων εννοιών, η σημασία των νοερών υπολογισμών και της ευελιξίας στη σκέψη, οι προϋποθέσεις επιτυχών νοερών υπολογισμών, οι παράγοντες ευελιξίας, η επιλογή νοερής στρατηγικής, η διδασκαλία, οι στρατηγικές και οι δυσκολίες των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς.

Έπειτα στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ερευνητική διαδικασία που ακολουθήθηκε. Αναλυτικότερα, αναφέρονται πληροφορίες σχετικά με το δείγμα της έρευνας καθώς και το μαθηματικό υπόβαθρο του. Ακολουθεί η παρουσίαση των δραστηριοτήτων καθώς και η πορεία συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων.

Εν συνεχεία, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας ξεχωριστά για κάθε μια από τις δραστηριότητες και για κάθε έναν από τους δυο πληθυσμούς που συμμετείχαν Τα ευρήματα αυτά συνοδεύονται από έναν σύντομο σχολιασμό.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της συζήτησης, λαμβάνει χώρα η ερμηνεία των αποτελεσμάτων σε συνάφεια με τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία βασίστηκε η συγκεκριμένη έρευνα.

Στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα όπου γίνεται μια συνοπτική ανακεφαλαίωση των βασικών συμπερασμάτων, ενώ παράλληλα παρουσιάζονται κάποιοι από τους περιορισμούς της έρευνας. Επίσης τίθενται ερωτήματα-προβληματισμοί και σκέψεις για μελλοντικές έρευνες.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση της βιβλιογραφίας, του ευρετηρίου των διαγραμμάτων και των πινάκων που συμπεριλήφθηκαν καθώς και του παραρτήματος όπου περιλαμβάνονται ορισμένες απαντήσεις μαθητών.

2. Βιβλιογραφική επισκόπηση.

2.1. Ορισμοί Κυρίων Εννοιών.

Ξεκινώντας με τους ορισμούς, η διεθνής βιβλιογραφία φαίνεται να αποδέχεται το γενικό ορισμό των *νοερών υπολογισμών* ως την υπολογιστική διαδικασία ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια, χωρίς να υπάρχει χρήση εξωτερικών συσκευών καταγραφής και υπολογισμού (Maclellan, 2001; Reys, 1985, οπ. αν. οι Varol & Faran, 2007). Οι Carvalho και Ponte (2017, 2019), αναφέρονται στον παραπάνω ορισμό, προσθέτοντας ότι αυτός ο ακριβής υπολογισμός θα πρέπει να γίνεται με γρήγορο και αποτελεσματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας, στοιχεία αριθμών (π.χ. προπαίδεια), γνωστούς κανόνες (π.χ. πολλαπλασιασμοί με το 10 και τα πολλαπλάσια του) και τη σχέση ανάμεσα στους αριθμούς και τις πράξεις, υποστηριζόμενοι στις νοερές αναπαραστάσεις (π.χ. νοερή εικόνα του κλάσματος). Οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν, από την συμπεριφοριστική οπτική γωνία, μία βασική ικανότητα, η οποία μάλιστα είναι προαπαιτούμενη για τις γραπτές διαδικασίες υπολογισμού αλλά και εκτίμησης. Αντιθέτως υπάρχει και η κονστρουκτιβιστική άποψη όπου οι νοεροί υπολογισμοί αντιμετωπίζονται ως ανώτερη νοητική λειτουργία. (Shibata, 1994; Resnick, 1986; Sowder, 1992, οπ. αν. οι Reys, Reys, Nohda & Emori, 1995).

Ο Threlfall (2009) αναφέρει πως τα διάφορα αριθμητικά προβλήματα μπορούν να λυθούν με μια ποικιλία διαφορετικών τρόπων. Στους νοερούς υπολογισμούς αυτοί οι διαφορετικοί τρόποι ονομάζονται στρατηγικές. Ο Ashcraft (1990) ορίζει τον όρο στρατηγική ως οποιαδήποτε νοερή διεργασία ή διαδικασία στην ροή μιας σειράς δραστηριοτήτων επεξεργασίας πληροφοριών που υπηρετεί έναν σχετιζόμενο σκοπό. Ο Threlfall (2000) δίνει έναν πιο εύκολα κατανοητό ορισμό της στρατηγικής χωρίζοντας την σε 2 σκέλη. Το πρώτο σκέλος αφορά την απόφαση του λύτη να εκτελέσει κάτι με έναν συγκεκριμένο τρόπο ενώ το δεύτερο την ακολουθία των βημάτων για την επίτευξη του στόχου. Πιο συγκεκριμένα στο θέμα, ο Thompson (1999) αναφέρεται στον όρο *νοερές στρατηγικές* ως την εφαρμογή των γνωστών ή των γρήγορα υπολογίσιμων στοιχείων του αριθμού σε συνδυασμό με συγκεκριμένες ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος για την εύρεση του αποτελέσματος. Ενώ ο Mayer (2010, οπ. αν. ο Csíkos, 2012) νοηματοδοτεί τις νοερές στρατηγικές σαν διαδικασίες συνειδητής οργάνωσης και παρακολούθησης που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση λύσης σε διαφορετικά προβλήματα.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι κάθε διαδικασία επίλυσης θα οφείλει να χαρακτηρίζεται από αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα ώστε να μπορεί να ονομαστεί στρατηγική (Askew, 1998). O Threlfall (2000) τονίζει πως η επιλογή της στρατηγικής θα πρέπει να διευκολύνει τον εντοπισμό της λύσης, όπως με το να υπογραμμίζει τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων ή/και να χωρίζει τα στοιχεία του προβλήματος σε μικρότερα μέρη κ.ά. Η ικανότητα του λύτη να διαμορφώσει μια ποικιλία διαφορετικών αποτελεσματικών στρατηγικών που ταιριάζουν στο εκάστοτε πρόβλημα ονομάζεται ευελιξία. Σε ένα μοντέλο ευελιξίας, για την επιλογή στρατηγικής θα πρέπει (Threlfall, 2009):

1) Να υπάρχουν αναγνωρίσιμες εναλλακτικές στρατηγικές που να ταιριάζουν στα στοιχεία/χαρακτηριστικά του προβλήματος.
2) Οι εναλλακτικές αυτές, να έχουν νόημα για το λύτη.
3) Να υπάρχει μια εύλογη βάση για επιλογή.

Η ευελιξία μπορεί να είναι σύμφωνα με τους Elia, Van den Heuvel-Panhuizen και Kolovou (2009) δύο ειδών, είτε ''inter-task'', δηλαδή αλλαγή στρατηγικών καθώς αλλάζουν τα προβλήματα είτε ''intra-task'' δηλαδή αλλαγή στρατηγικών μέσα στο ίδιο πρόβλημα. Και συνδέεται άμεσα με την προσαρμοστικότητά η οποία δηλώνει την παραγωγή ή την επιλογή της καταλληλότερης στρατηγικής, συνειδητά ή ασυνείδητα, από αυτές που έχει ο λύτης στη διάθεση του (Heinze, Marschick, & Lipowsky, 2009; Threlfall, 2009; Selter, 2009). Η προσαρμοστικότητα υποδηλώνει, ευελιξία και επιπρόσθετα την ικανότητα προσαρμογής σε ένα μαθηματικό πρόβλημα για έναν συγκεκριμένο λύτη σε ένα κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο (Selter, 2009). O Rechtsteiner-Merz (2013, οπ. αν. στους Rathgeb-Schnierer & Green, 2017), παρατήρησε τρία στοιχεία από τα οποία μπορεί να αναγνωριστεί η προσαρμοστικότητα. Αυτά είναι:

- Η καταλληλόλητα, της πορείας λύσης σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας.
- Η ορθότητας και η ταχύτητα επίλυσης.
- Η καταλληλόλητα των γνωστικών στοιχείων που υποστηρίζουν την διαδικασία επίλυσης.

Η προσαρμοστικότητα είναι δύσκολο να επιτευχθεί από μαθητές μικρής ηλικίας αλλά και αδύναμους μαθηματικά καθώς δεν είναι κάτι που μπορεί να διδαχτεί άμεσα σύμφωνα με τους Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel και Van Dooren (2007), αλλά αντιθέτως πρέπει να προωθηθεί και να καλλιεργηθεί σε ένα βάθος χρόνου. Ωστόσο σύμφωνα με τους Heinze, Star, και Verschaffel, (2009), οι έννοιες της ευελιξίας και της προσαρμοστικότητας, ερμηνεύονται πολλές φορές και σαν συνώνυμες.

2.2. Σημασία Των Νοερών Υπολογισμών.

Η αξία και η σημασία των νοερών υπολογισμών τόσο για την μαθηματική εκπαίδευση όσο και για την ίδια ανάπτυξη του ατόμου έχει επισημανθεί από πολλούς σημαντικούς ερευνητές αλλά και οργανισμούς κατά την διάρκεια των τελευταίων 2 αιώνων. Σε ομιλία το 1924, στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, ο Καραθεοδωρή αναφέρει ότι οι μαθητές θα πρέπει να εξασκούνται στους νοερούς υπολογισμούς. Επιπλέον τα διεθνούς φήμης Ministry of National Education [(MNE), 2013] και Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [(NCTM), 2000] τονίζουν την σημασία ένταξης αυτών στην εκπαίδευση. Ερευνητές στο χώρο επισημαίνουν με τα ευρήματά τους ότι η ενασχόληση με τους νοερούς υπολογισμούς συμβάλλει σε μια σειρά από δεξιότητες:

- Βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων και της δομής αριθμών (McIntosh, 1990; Sowder, 1990; Varol & Farran, 2007; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren 2007).
- Δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού (Maclellan, 2001; Gürbüz & Erdem 2016).
- Είναι προαπαιτούμενη για μια επιτυχημένη ανάπτυξη όλων των γραπτών αριθμητικών αλγορίθμων και μεθόδων υπολογισμού (Threlfall, 2002; Thompson, 2010).
- Βελτιώνει τις ικανότητες που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων. (Thompson, 2010)
- Συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας της εκτίμησης και της μαθηματικής επιχειρηματολογίας (Reys, 1984; Gürbüz & Erdem 2016).
- Αναπτύσσει την κριτική σκέψη (Gürbüz & Erdem 2016).
- Διευρύνει τις διαθέσιμες στρατηγικές του λύτη και έχει ως αποτέλεσμα την γρηγορότερη και ακριβέστερη επίλυση. (Varol & Farran, 2007; Csikos 2012).

- Προωθεί τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνει τους μαθητές να βρίσκουν ή/και να εκφράζουν τους δικούς τους τρόπους για να χειρίζονται αριθμούς ή/και να λύνουν διάφορα μαθηματικά προβλήματα (Thompson, 2010).
- Κάνει την καθημερινή ζωή (όσον αφορά μαθηματικούς και υπολογιστικούς τομείς) πιο εύκολη. Σε έρευνα του McIntosh (2006), αναφέρεται ότι οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται για πάνω από τα τρία τέταρτα των πράξεων που εκτελούν στην καθημερινή τους ζωή οι άνθρωποι.
- Εξασκεί την ικανότητα αναπαράστασης και χρήσης αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη, την μεταγνωστική ικανότητα καθώς και την ευελιξία στην εκτέλεση των πράξεων (Λεμονίδης, 2016).
- Προωθεί την υψηλή μαθηματική σκέψη (Reys et al., 1995).

2.3. Σημασία Ευελιξίας

Στις αρχές του εικοστού πρώτου αιώνα, το NCTM, (2000). υποστήριξε ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση, να χρησιμοποιούν μια μεγάλη ποικιλία στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων καθώς και να προσαρμόζουν τις ήδη οικείες στρατηγικές τους και να εφεύρουν νέες, γεγονός που αποτελεί σαφή αναφορά στην έννοια της ευελιξίας όπως αυτή παρουσιάστηκε πιο πάνω. Πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι η γνώση μιας ποικιλίας στρατηγικών σχετίζεται με βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αυτές οι στρατηγικές λειτουργούν. (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009; Siegler, 1994; Verschaffel et al., 2009). Στην απόκτηση στρατηγικών και επομένως στην ικανότητα ευελιξίας συμβάλει σε σημαντικό βαθμό η μεταγνώση η οποία περιλαμβάνει τις ικανότητες πρόβλεψης αποτελεσμάτων, εσωτερικής εξήγησης (με σκοπό την βελτίωση της κατανόησης), εντοπισμού λαθών, αξιοποίησης βασικών γνώσεων, οργάνωσης σχεδίου εργασίας, αποτελεσματικής κατανομής χρόνου και μνήμης (National Research Council, 2000) και θεωρείται ως ένα από πιο βασικά στοιχεία για τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών.

Οι λύτες που εμφανίζουν ευελιξία στις στρατηγικές που επιλέγουν, είναι πιο πιθανόν να χρησιμοποιήσουν ή να προσαρμόσουν μία γνωστή στρατηγική όταν αντιμετωπίζουν ένα νέο για αυτούς πρόβλημα και να έχουν μια καλύτερη κατανόηση της κατάστασης την οποία αντιμετωπίζουν (Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova

2009; Tenison & MacLellan, 2014). Οι ευέλικτοι λύτες σκέφτονται κριτικά για ένα πρόβλημα συγκρίνουν πολλαπλές λύσεις και μεθόδους για τα προβλήματα και επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν περισσότερο αποτελεσματικές στρατηγικές λύσης για την επίλυση (Yakes & Star, 2011). Δίνουν προσοχή στα χαρακτηριστικά του προβλήματος που είναι σημαντικά για την εκτέλεση αυτών των στρατηγικών. Με αυτόν τον τρόπο υποστηρίζεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που υπάρχουν σε ένα πρόβλημα (DeCaro, 2016).

Επιπλέον με τη γνώση και τη χρήση πολλαπλών στρατηγικών λύσεων, οι μαθητές μπορούν να εργαστούν πέρα από ένα περιορισμένο εύρος προβλημάτων καθώς και να μειώσουν την επιβάρυνση των πόρων της μνήμης εργασίας χρησιμοποιώντας αποτελεσματικές στρατηγικές για την ταχεία και ακριβή επίλυση προβλημάτων (Beilock & DeCaro, 2007; Siegler, 2003, οπ. αν. στον DeCaro, 2016).

Το σημαντικότερο σημείο της ευελιξίας στους νοερούς υπολογισμούς, δεν είναι τα πλεονεκτήματα που προσδίδει στους λύτες στις διαδικασίες υπολογισμού αλλά το γεγονός ότι υποδεικνύει την ύπαρξη μεγάλης μαθηματικής ικανότητας (όπως η επίλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων αποτελεσματικά, δημιουργικά και ευέλικτα) πέρα από την απλή απόκτηση εμπράκτων και διαδικαστικών γνώσεων (Threlfall, 2009). Θεωρείται πως μια ευρεία γνώση γύρω από στρατηγικές, μορφές αναπαραστάσεων καθώς και η χρήση αυτών συνεπάγεται μια βαθύτερη κατανόηση των σχετικών μαθηματικών περιοχών και συνεπώς επωφελείται η περαιτέρω μάθηση και ανάπτυξη (Heinze et.al., 2009).

2.4. Προϋποθέσεις στους Νοερούς Υπολογισμούς.

Για την αποτελεσματική εκτέλεση και χρήση των νοερών υπολογισμών ο λύτης θα πρέπει να κατέχει μία σειρά ικανοτήτων και χαρακτηριστικών. Από τις διάφορες έρευνες που αναφέρονται σε αυτό το θέμα, γίνεται ευδιάκριτο πως, οι προϋποθέσεις των νοερών υπολογισμών μπορούν να διαχωριστούν σε 2 βασικές κατηγορίες: Σε αυτές που αναφέρονται στις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες του ατόμου και σε αυτές που αφορούν το ίδιο το άτομο και το περιβάλλον του.

Αρχικά γύρω από τις μαθηματικές προϋποθέσεις, οι οποίες φαίνεται να είναι και περισσότερες, βασική προϋπόθεση αποτελεί η αίσθηση του αριθμού -η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται τους αριθμούς και το μέγεθός τους- (Reys et al., 1995; Heirdfield & Cooper, 2004; Heirdsfield, 2011; Λυγούρας, 2012; Lemonidis, Tsakiridou

& Meliopoulou, 2018) η οποία περιλαμβάνει γνώσεις για τους αριθμούς , την ικανότητα εκτίμησης, τον αριθμητισμό (ο οποίος ορίζεται από το National Numeracy Strategy (NNS) ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται με άνεση αριθμούς και μετρήσεις). Ο Thompson (2010) περνάει σε μία πιο λεπτομερή εξήγηση και ομαδοποίηση κατηγοριών προϋποθέσεων: τις γνώσεις (π.χ. σχέσεις αριθμών, προπαίδεια κ.ά.), τις δεξιότητες (π.χ. χρήση τεχνικών, γρήγοροι υπολογισμοί κ.ά.) και την κατανόηση (π.χ. ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος και των πράξεων καθώς και στη σχέση μεταξύ των πράξεων κ.ά.). Επιπλέον ο Dehaene (1997, οπ. αν. στους Carvalho & Ponte 2017, 2019) αναφέρει ότι η ικανότητά στους νοερούς υπολογισμούς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη μνήμη. Η μνήμη είναι χρήσιμη όχι μόνο για την αποθήκευση μαθηματικών γνώσεων αλλά και για τις νοερές αναπαραστάσεις οι οποίες, υποστηρίζουν την συλλογιστική πορεία του λύτη και νοηματοδοτούν το μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο παρουσιάζονται τα μαθηματικά προβλήματα. Τέλος μπορεί να προστεθεί ως προϋπόθεση η ικανότητα συλλογής πληροφοριών και η ανάγκη προσαρμογής στα χαρακτηριστικά του προβλήματος που τίθεται για λύση (Csikos, 2016).

Αναφορικά με τις προϋποθέσεις που σχετίζονται με το άτομο και το περιβάλλον του, ο Thompson, (2010), τονίζει τη σημασία της *στάσης* απέναντι στα μαθηματικά. Όταν κάποιος τρέφει θετική στάση, έχει αυτοπεποίθηση και είναι επομένως διατεθειμένος να πειραματιστεί, να πάρει ρίσκα και να ανακαλύψει νέες στρατηγικές. Οι Heirdfield και Cooper (2004) στην έρευνα τους αναφέρονται πέρα από συναισθηματικά ζητήματα του ατόμου και στους κοινωνικούς παράγοντες. Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο τόσο στον τρόπο διδασκαλίας όσο και στο κλίμα που δημιουργεί μαζί με τους μαθητές. Αρχικά, θα πρέπει να γνωρίζει την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών (Heirdsfield, 2011). Έπειτα σύμφωνα με τον Thompson (2009, οπ. αν. στους Carvalho & Ponte 2013) ο εκπαιδευτικός οφείλει να ακούει προσεκτικά τις στρατηγικές των μαθητών και πως αυτοί τις εξηγούν ενώ παράλληλα να επιβραβεύει τα θετικά χαρακτηριστικά. Ακόμα πρέπει να εμπλουτίζονται οι γνώσεις των μαθητών γύρω από τους αριθμούς και να ενισχύεται η ικανότητα εφαρμογής αποτελεσματικών στρατηγικών. Επιπλέον ο εκπαιδευτικός πρέπει να εξασφαλίσει ότι οι μαθητές θα λάβουν τα κατάλληλα ερεθίσματα ώστε σταδιακά να αναπτύξουν περισσότερο περίπλοκες στρατηγικές. Αναφορικά με την ίδια την τάξη, είναι ωφέλιμο να επικρατεί ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές ενθαρρύνονται, να εξερευνούν να εκφράσουν, να μοιράζονται και να συζητούν για τις απόψεις και τις ιδέες που έχουν γύρω από τα μαθηματικά.

2.5. Παράγοντες ευελιξίας.

Υπάρχει ευρεία συναίνεση στα μαθηματική εκπαίδευση σχετικά με το ότι τα άτομα θα πρέπει να είναι σε θέση να λύσουν μαθηματικές δραστηριότητες όχι μόνο γρήγορα και με ακρίβεια, αλλά και με ποικιλία ουσιαστικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη το γνωστικό αντικείμενο, τα ζητούμενα, και τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας (Heinze,et.,al. 2009). Η ικανότητά ευελιξίας στους νοερούς φαίνεται να διαμορφώνεται από μια σειρά παραγόντων όπως: (Rathgeb-Schnierer & Green, 2015).

- Η διδασκαλία του αλγορίθμου. Αφού οι μαθητές διδαχτούν τον αλγόριθμο για μία πράξη υπολογισμού, έχουν την τάση να επιλέγουν αυτόν ως τρόπο λύσης ώστε να αντικατοπτρίζουν τη διδασκαλία του εκπαιδευτικού και όχι κάποια άλλη στρατηγική που γνωρίζουν (Heirdsfield & Cooper, 2004). Η επιλογή του αλγορίθμου προτιμάται ακόμα και σε ασκήσεις/προβλήματα όπου, δεν θεωρείται η πιο αποτελεσματική και κατάλληλη λύση (Selter, 2000, 2001). Για αυτό το λόγο υποστηρίζεται ότι θα πρέπει οι μαθητές να νιώθουν ελεύθεροι να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν τις δικές στους στρατηγικές (Heirdsfield & Cooper, 2004). Μαθητές που καθοδηγήθηκαν να αξιοποιούν μια συγκεκριμένη στρατηγική για συγκεκριμένες πράξεις και μετέπειτα διδάχτηκαν πως μπορούν είναι ευέλικτοι παρουσίασαν μεγαλύτερες δυσκολίες σε αυτό το εγχείρημα από αυτούς που αντιμετώπισαν την πρόκληση εξ αρχής να εφαρμόζουν διάφορες στρατηγικές. Ωστόσο μαθητές με αδύναμο μαθηματικό υπόβαθρο επωφελούνται περισσότερο από μια καθοδηγητική προσέγγιση στην αρχή (Verschaffel et al., 2007; Torbeyns, De Smedt, Ghesquie`re & Verschaffel, 2009.).
- Η διδασκαλία μέσα από παραδείγματα. Έχει παρατηρηθεί πως η διδασκαλία στρατηγικών μέσω παραδειγμάτων μπορεί να επιφέρει αρνητικό αποτέλεσμα στην ευελιξία. Αυτό συμβαίνει επειδή, οι μαθητές τείνουν να εστιάζουν στις συγκεκριμένες διαδικασίες παρά στους γενικές κανόνες και σχέσεις. Επομένως είναι ωφέλιμο οι νοερές στρατηγικές να μην διδάσκονται με τον ίδιο τρόπο που διδάσκεται ο κλασικός αλγόριθμος (McIntosh, 1996).

- Το πλαίσιο. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του προβλήματος/άσκησης και πως αυτά γίνονται αντιληπτά από τον λύτη.

- Γνώσεις-Στάση του λύτη. Όπως προαναφέρθηκε, τόσο μαθηματικές γνώσεις και ικανότητές όπως η ουσιαστική κατανόηση των αριθμών-πράξεων, η αναγνώριση μοτίβων και σχέσεων καθώς και η στάση (θετική ή αρνητική) από την οποία διακατέχεται ο λύτης επηρεάζουν ανάλογα την ευελιξία που παρουσιάζει.

Οι Star και Rittle-Johnson (2008), προσθέτουν πως επίλυση του ίδιου μαθηματικού προβλήματος με διαφορετικές στρατηγικές συνδυασμένη με τον αναστοχασμό των διαφορών και των ομοιοτήτων μεταξύ αυτών σε σύγκριση με την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων (με παρόμοια δομή) είναι πιο αποδοτική για την ανάπτυξη της ευελιξίας. Επιπλέον θετικό αντίκτυπο έχει η ανάλυση και σύγκριση παραδειγμάτων όταν αυτά βρίσκονται μαζί στο οπτικό πεδίο των μαθητών (Rittle-Johnson & Star, 2007). Ακόμα οι μαθητές πρέπει να έχουν εξοικειωθεί με μία στρατηγική πριν μπορέσουν να παρουσιάσουν ευελιξία, με τη χρήση πολλαπλών στρατηγικών καθώς είναι αρκετά απαιτητικό ιδιαίτερα για τους μαθητές που είναι στα πρώτα τους βήματα να μπορέσουν να μάθουν πολλές νέες στρατηγικές ταυτόχρονα (Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova 2009).

Οι Rathgeb-Schnierer και Green (2015) προτείνουν μια προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων συνδυασμένη με συγκεκριμένες δραστηριότητες που ευνοούν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και των μεταγλωσσικών ικανοτήτων. Μια επιπλέον πρακτική για τους εκπαιδευτικούς είναι να εμπλέκουν τους μαθητές σε συζητήσεις με θέμα την σύγκριση των πολλαπλών στρατηγικών. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να γίνει φανερό, γιατί συγκεκριμένες στρατηγικές ή βήματα στρατηγικών είναι πιο αποδοτικά/αποτελεσματικά απ’ ότι άλλα σε συγκεκριμένα προβλήματα (Silver et al., 2005). Χρέος των εκπαιδευτικών είναι να συντονίζουν και να καθοδηγούν τη συζήτηση ώστε το σύνολο της τάξης να καταφέρει να διακρίνει τις συνδέσεις ανάμεσα στις στρατηγικές (Yakes & Star, 2011). Σε έρευνα της Blote και των συνεργατών της (2001, οπ. αν. στους Star & Newton, 2009), τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ένα πρόγραμμα διδασκαλίας που είχε ως στόχο την εννοιολογική κατανόηση βοήθησε τους μαθητές να παρουσιάσουν μεγαλύτερη ευελιξία από αυτό που ακολούθησε μια πιο παραδοσιακή προσέγγιση δίνοντας έμφαση στις διαδικασίες.

2.6. Επιλογή Νοερής Στρατηγικής.

Οι νοεροί υπολογισμοί θεωρούνται ως διαδικασία υψηλής νοητικής διεργασίας όπου η επιλογή της στρατηγικής είναι το ίδιο σημαντική με την εκτέλεση της (Erdem, 2017). Ωστόσο πολλές διαφορετικές στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση λύσης σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Όπως προαναφέρθηκε η στρατηγική την οποία επιλέγουν οι λύτες για να αντιμετωπίσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα εξαρτάται από: τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του προβλήματος και το πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάζονται (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren 2009). Ένα μαθηματικό πρόβλημα για να λυθεί επιτυχώς είναι απαραίτητο να προηγηθεί η νοερή επεξεργασία του καθώς και μια σειρά υπολογιστικών βημάτων ώστε ο λύτης να καταλήξει σε κάποια στρατηγική (Vansteensel et al., 2014). Επομένως η επιλογή και η χρήση της ‘’καταλληλότερης’’ στρατηγικής έχει μεγάλη σημασία.

Ο Threlfall (2000), αναφέρεται σε μία σειρά βημάτων τα οποία πρέπει να ακολουθούν όσοι προσπαθούν να λύσουν νοερά ένα πρόβλημα ώστε να επιλέξουν την κατάλληλη στρατηγική:

1. Αρχικά θα πρέπει να γίνεται ανάλυση των στοιχείων/χαρακτηριστικών του προβλήματος που μπορεί να συνδέονται με πιθανές στρατηγικές.
2. Έπειτα, ο λύτης θα πρέπει να περιορίσει τις πιθανές στρατηγικές με τις οποίες σκέφτεται να εργαστεί, μέσω εσωτερικής αναζήτησης γνώσης και στοιχείων που απαιτούνται για αυτές τις στρατηγικές.
3. Αφού ολοκληρωθεί και το 2^{ο} βήμα, ακολουθεί η απόφαση για την στρατηγική που θα χρησιμοποιηθεί, η οποία εξαρτάται πολλές φορές από την εμπειρία του λύτη, αλλά και από το ποια φαίνεται να ταιριάζει περισσότερο στο δοσμένο πλαίσιο.
4. Και τέλος να γίνεται η εκτέλεση της απόφασης που πάρθηκε προηγουμένως.

Ωστόσο τα παραπάνω βήματα, φαίνεται να αντικατοπτρίζουν περισσότερο τη θεωρία και όχι την πραγματικότητά καθώς δεν υπάρχουν αποδείξεις ότι τα άτομα αποφασίζουν πώς θα υπολογίσουν πριν το κάνουν (κάτι που σκοπεύει να μελετήσει η παρούσα εργασία). Οι λύτες, όπως αναφέρεται στους Threlfall (2002) και Proulx (2013), εφαρμόζουν την στρατηγική που τους ‘’έρχεται πρώτη στο μυαλό’’ αντί να σκέφτονται αναλυτικά και να προσπαθούν να καταλήξουν στην καταλληλότερη. Ερχόμενοι αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα οι λύτες ψάχνουν για τη λύση και όχι για μια μέθοδο. Ο Threlfall (2002), υποστηρίζει ότι οι στρατηγικές στην ουσία δεν επιλέγονται αλλά 'αναδύονται/προκύπτουν'. Σε αυτή την ερμηνεία, οι νοερές στρατηγικές αποτελούν αναλυτικές και όχι στρατηγικές λύσης, δηλαδή δεν περιγράφουν ολόκληρη την ακολουθία λύσης, αλλά αφορούν μόνο ορισμένα βήματα, για παράδειγμα τρόπους έναρξης, σκέψης για τους αριθμούς κ.ά.

2.7. Διδασκαλία Νοερών Υπολογισμών.

Η επιλογή στρατηγικής λοιπόν, εξαρτάται από το κάθε πρόβλημα αλλά και από τις γνώσεις, τα χαρακτηριστικά του λύτη, το περιβάλλον και επομένως ακόμα και ένα πρόβλημα το οποίο, φαίνεται να ευνοεί μια συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης, αυτή μπορεί να μην είναι η καλύτερη επιλογή για όλους. Γίνεται εμφανές ότι η επιλογή της στρατηγικής εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που δεν μπορούν να καλυφθούν όλοι μέσω της διδασκαλίας.

Για αυτό το λόγο ο Threlfall (2002), προτείνει την επικέντρωση της διδασκαλίας στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και όχι στις στρατηγικές αυτές καθ' αυτές. Η διδασκαλία των στρατηγικών των νοερών υπολογισμών αλλά και η σωστή επιλογή αυτών απορρέει μέσα από ανάπτυξη της γνώσης και κατανόησης για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους, ώστε να είναι σε θέση ο λύτης να τους χειρίζεται με ευχέρεια και να επιλέγει ή να δημιουργεί μια στρατηγική κατάλληλη, για κάθε πρόβλημα που καλείται να αντιμετωπίσει.

2.8. Στρατηγικές Νοερών Υπολογισμών Με Ρητούς Αριθμούς.

Οι έρευνες πάνω στους νοερούς υπολογισμούς έχουν επικεντρωθεί σε μικρές τάξεις κυρίως σε προβλήματα/ασκήσεις που πραγματεύονται ακέραιους - φυσικούς αριθμούς γι' αυτό και η σχετική βιβλιογραφία είναι πλουσιότερη σε σύγκριση με έρευνες που σχετίζονται με τους ρητούς αριθμούς. Εν τούτοις, ξεχωρίζει η έρευνα των Caney και Watson (2003) οι οποίες κατέγραψαν τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν μαθητές από την Γ΄ Δημοτικού μέχρι την Α' Λυκείου σε μια σειρά νοερών υπολογισμών που περιλάμβαναν ρητούς αριθμούς (κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά) και όλες τις πράξεις.

Ονομασία Στρατηγικής	**Περιγραφή**	**Παράδειγμα**
Μετατροπή Πράξης (Changed operation)	Από διαίρεση σε πολλαπλασιασμό (Division to multiplication)	3 : 0,5, μετατρέπεται σε 3 x 2
	Από αφαίρεση σε πρόσθεση Subtraction to addition)	4,5 – 3, λύνεται με τη στρατηγική έμμεσης πρόσθεσης
Μετατροπή Συμβολικής Αναπαράστασης (Changed representation)	Κλάσμα σε δεκαδικό Fractions to decimals)	¾ - ½, μετατρέπεται σε 0,75 - 0,5
	Δεκαδικός σε κλάσμα (Decimals to fractions)	0,5 + 0,75, μετατρέπεται σε ½ + ¾
	Ποσοστό σε κλάσμα (Percent to fractions)	Το 25% του 80, όπου το 25% μετατρέπεται σε ¼
	Μετατροπή σε ακέραιο/φυσικό (Whole number referent of 10/100)	Το 0,19 + 0,1 μετατρέπεται σε 19+10
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων (Used equivalents)	Προερχόμενο από ισοδύναμα (Derived from equivalents)	¾ - ½ όπου το ½ αντικαθίσταται από το 2/4
Χρήση Γνωστών Δεδομένων (Used known facts)	Προερχόμενο από γνωστά δεδομένα (Derived from a known fact)	Για το 10% του 45, χρησιμοποιεί την γνώση σχετικά με το 10% για να βρει το 10% του 40 και το 10% του 50
Επαναλαμβανόμενη Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμ ός (Repeated addition/multiplication)	Επαναλαμβανόμενη Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός (Repeated addition/ multiplication)	4 x ¾ , πολλαπλασιάζει το ¾ επί δύο, και το αποτέλεσμα πάλι επί δύο
	Επαναλαμβανόμενος διπλασιασμός/υποδιπλασιασμός (Repeated doubling/ halving)	25% του 80, χωρίζει το 80 στα δύο, δύο φορές

Χρήση Γέφυρας (Used bridging)	Γεφύρωση της μονάδας/ολοκλήρου (Bridged to one/whole)	6,2 + 1,9, το 1,9 γίνεται 2
Χρήση των Μερών του Δεύτερου Αριθμού (Worked with parts of a second Number)	Διαχωρισμός με βάση την αξία θέσης ψηφίου (Split by place value)	10% του 45, διαίρεση του 40 με το 10 και του 5 με το 10
	Διαχωρισμός με βάση τα μέρη (Split by parts)	0,5 + 0,75, το 0,75 χωρίζεται σε 0,5 και 0,25
Ξεκινώντας από τα Αριστερά/Δεξιά (Worked from the left/right)	Διαχωρισμός και των δύο αριθμών στο σημείο της υποδιαστολής (Split both numbers separated by a decimal)	4,5 - 3,3, ξεκινώντας την αφαίρεση είτε τους φυσικούς αριθμούς αρχικά (αριστερά) είτε τα δεκαδικά ψηφία (δεξιά)
	Διαχωρισμός με βάση την αξία θέσης ψηφίου μόνο για τα δεκαδικά ψηφία (Split by place value after decimal point only)	0,19 + 0,1, προσθέτοντας αρχικά τα δέκατα
Χρήση Νοερής Εικόνας (Used a mental picture)	-	¾ - ½ , διαίρεση ενός φανταστικού τετραγώνου σε 4 ίσα μέρη
Νοερή εφαρμογή Του Γραπτού Αλγόριθμου (Used mental form of written algorithm)	-	0,5 + 0,75 , νοερή ευθυγράμμιση των ψηφίων και επίλυση του αλγόριθμου
Χρήση Κανόνα (Used memorized rules)	-	1,2 x 10 , χρήση του κανόνα «μετακίνησε την υποδιαστολή προς τα δεξιά»

Πίνακας 2.1: Στρατηγικές νοερού υπολογισμού για πράξεις με ρητούς αριθμούς (Caney & Watson, 2003).

Η βιβλιογραφία φαίνεται να συμφωνεί ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι λύτες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 2 μεγάλες κατηγορίες. Τόσο οι Caney και Watson, (2003), Yang, (2005) όσο και οι Yang, Reys και Reys, (2009), διακρίνουν τις στρατηγικές σε στρατηγικές αίσθησης του αριθμού ή εννοιολογικές και στρατηγικές βασισμένες σε κανόνα ή εργαλειακές. Οι πρώτες απαιτούν κατανόηση για τους αριθμούς και τις πράξεις που εμπλέκονται και μπορεί να δημιουργηθούν από τον ίδιο το λύτη. Αντιθέτως οι δεύτερες περιλαμβάνουν στρατηγικές που βασίζονται σε κανόνες που ακολουθούνται μηχανιστικά και χωρίς να υπάρχει κατανόηση. Ωστόσο μπορεί να υπάρξει και μια τρίτη κατηγορία -μικτές στρατηγικές-, όταν ο λύτης επιλέγει και χρησιμοποιεί έναν κανόνα συνειδητά, τον οποίο ξέρει και κατανοεί.

2.9. Δυσκολίες Στους Νοερούς Με Ρητούς.

Οι Caney και Watson (2003), τονίζουν την ανάγκη της εστίασης των μελλοντικών ερευνών στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Ένας λόγος για την ανάγκη αυτή είναι οι δυσκολίες που φαίνεται να έχουν οι μαθητές με τους αριθμούς αυτούς εξαιτίας εν μέρει της φύσης των αριθμών αυτών. Η παρουσίαση των ρητών αριθμών και των σχέσεων μεταξύ αυτών, τόσο ως ένα νέο αριθμητικό σύστημα αλλά όσο και ως ένα σύστημα διαφορετικών αναπαραστάσεων και συνδέσεων μπορεί να προβεί αρκετά απαιτητικό για τους μαθητές. Το NCTM (2000) και το Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010), υποστήριξαν ότι η δυνατότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί ένα χαρακτηριστικό ζωτικής σημασίας για έναν λύτη καθώς υποστηρίζει την μαθηματική κατανόηση. Σύμφωνα με την Prediger (2008, οπ. αν. στους Carvalho & Ponte, 2017) οι δυσκολίες αυτές οφείλονται στην απουσία των κατάλληλων νοητικών μοντέλων. Παραδείγματος χάρη, οι μαθητές είναι πιθανόν να συνδέσουν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση με την πράξη του πολλαπλασιασμού στο πλαίσιο των ακέραιων αριθμών, κάτι που όμως δεν ισχύει με την πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Επιπλέον στα κλάσματα μπορούν να δοθούν ερμηνείες που δεν ισχύουν στους ακέραιους (π.χ., μέρος όλου). Οι μαθητές συχνά απομνημονεύουν τις διαδικασίες για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων χωρίς να κατανοούν γιατί ή πώς λειτουργούν. Επιπλέουν έχουν τη τάση να εφαρμόζουν αυτές τις διαδικασίες για να λύσουν νέους τύπους προβλημάτων, ακόμα και όταν αυτές οι στρατηγικές δεν είναι πλέον αποτελεσματικές ή ακόμα και σωστές. Η Moss (2003 οπ. αν. στους Caney & Watson, 2003), αναφέρει πως, όταν οι μαθητές υπολογίζουν νοερά με ρητούς αριθμούς χωρίς να καταλαβαίνουν τα μεγέθη που εμπλέκονται, δυσκολεύουν τους εκπαιδευτικούς/ερευνητές στον εντοπισμό του τρόπου σκέψης και των στρατηγικών που εμπλέκονται. Για τους νοερούς υπολογισμούς, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν το μέγεθος και την αξία των αριθμών, την επίδραση των αριθμητικών πράξεων στους αριθμούς, καθώς και να αποκτήσουν ένα σύνολο αριθμητικών γνώσεων που να τους επιτρέπουν να υπολογίζουν γρήγορα και με ακρίβεια (Heirdsfield, 2011).

2.10. Σύνδεση Με Προηγούμενες Έρευνες.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί μεγάλο μέρος των ερευνητικών εργασιών περιστρέφεται γύρω από τους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς. Δυστυχώς η βιβλιογραφία που σχετίζεται με τους ρητούς δεν είναι τόσο εκτενής, γεγονός αναμενόμενο, λαμβάνοντας υπόψη πως είναι σχετικά πιο πρόσφατη. Οι Caney και Watson (2003), υλοποίησαν μια συστηματική καταγραφή των στρατηγικών οι οποίες επιλέγονταν και αξιοποιούνταν από μαθητές των δυο πρώτων βαθμίδων εκπαίδευσης, πάνω σε δραστηριότητες που περιείχαν δεκαδικούς, κλάσματα και ποσοστά. Παρατήρησαν τελικά, πως πολλές στρατηγικές είναι κοινές για τους ρητούς και φυσικούς αριθμούς. Η έρευνα των Callingham και Watson (2004) σε πληθυσμό με παρόμοια χαρακτηριστικά έδειξε πως τα κλάσματα είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμα από τους δεκαδικούς και τα ποσοστά όπως και η διαίρεση είναι πολύ πιο απαιτητική πράξη από την αφαίρεση και την πρόσθεση, κάτι που ισχύει και με τους φυσικούς αριθμούς. Στα πλαίσια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των δεκαδικών αριθμών, ο Rezat (2011), πραγματοποίησε και αυτός μια καταγραφή στρατηγικών. Ωστόσο η εστίαση έγινε στην ανάλυση των στρατηγικών και την ικανότητα προσαρμοστικότητας των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλες οι δραστηριότητες επιλύθηκαν με στρατηγικές, που τα παιδιά ήδη χρησιμοποιούσαν στους φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον η επιλογή γινόταν χωρίς να δίνεται η πρέπουσα σημασία στα χαρακτηριστικά της εκάστοτε δραστηριότητας οδηγώντας σε μη αποδοτικές επιλογές.

Ιδιαίτερα με την μελέτη των νοερών υπολογισμών στους ρητούς έχουν ασχοληθεί οι Carvalho και Ponte (2015, 2017, 2019), με μία πληθώρα δημοσιεύσεων. Δουλεύοντας με μαθητές Στ’ Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς, κατέληξαν σε δυο βασικά ευρήματα. Φαίνεται πως οι μαθητές όταν εργάζονται με κλάσματα, έχουν τη τάση να κάνουν χρήση της στρατηγικής της μετατροπής της αναπαράστασης (από κλάσματα σε δεκαδικούς) και να χρησιμοποιούν της σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των αριθμητικών παραστάσεων και των ιδιοτήτων των πράξεων. Αυτές οι αριθμητικές σχέσεις συνδέονται άμεσα με τις απεικονιστικές και περιγραφικές αναπαραστάσεις των παιδιών.

Οι Lemonidis και Kaiafa (2014) εργάστηκαν με μαθητές της Ε' και Στ' Δημοτικού, εξετάζοντας την αίσθηση του αριθμού πάνω στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Αναφέρουν, ότι η πλειοψηφία χρησιμοποιούσε στρατηγικές βασισμένες σε κανόνα/ (εργαλειακές στρατηγικές) σε πράξεις με κλάσματα και ποσοστά. Επιπλέον παρατηρήθηκε πως όσοι παρουσίαζαν ευελιξία στην επιλογή στρατηγικής και χρησιμοποιούσαν εννοιολογικές στρατηγικές είχαν και καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση προβλήματος. Αξιοσημείωτη είναι επίσης έρευνα των Lemonidis, Tsakiridou και Meliopoulou (2018) η οποία μελετούσε εκπαιδευτικούς Δημοτικών σχολείων οι οποίοι έπρεπε να λύσουν νοερά μια σειρά ασκήσεων με ρητούς και να απαντήσουν σε μερικές ερωτήσεις παιδαγωγικού χαρακτήρα. Από τα αποτελέσματα σημειώθηκε ξεκάθαρα η απουσία ευελιξίας στην χρήση νοερών στρατηγικών. Επιπλέον βρέθηκε ότι εκπαιδευτικοί με μεγαλύτερη ευελιξία και γνώση περιεχομένου (μαθηματικών στην προκειμένη περίπτωση) ήταν πιο πιθανό να διδάξουν τους νοερούς υπολογισμούς.

Η παρούσα διπλωματική που εξετάζει κυρίως νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και μεικτούς αριθμούς, βασίστηκε και αποτελεί επέκταση των ευρημάτων προηγούμενης έρευνα των Papadopoulos, Panagiotopoulou και Karakostas (2019). Πιο συγκεκριμένα στην έρευνα αυτή, οι ερευνητές προσπάθησαν σε πρώτο βήμα να χαρτογραφήσουν το εύρος των διαφορετικών στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς που χρησιμοποιούνται από μαθητές σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, όταν καλούνται να λύσουν ασκήσεις που περιλαμβάνουν ρητούς αριθμούς. Καθώς επίσης και πως αυτές οι στρατηγικές κατανέμονται στο σύνολο του πληθυσμού. Η έρευνα βασίστηκε σε ένα δείγμα 295 ατόμων από το οποίο, τα 78 άτομα φοιτούσαν στην έκτη (Στ') τάξη Δημοτικού, τα 97 στις τάξεις του Λυκείου (Α',Β',Γ') και τα τελευταία 120 ακολουθούσαν ακαδημαϊκές σπουδές (63 σε τμήματα του Παιδαγωγικού, ενώ τα υπόλοιπα 57 τμήματα του Μαθηματικού και του Πολυτεχνείου). Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν σε ατομική συνέντευξη όπου τους παρουσιάστηκε μια συλλογή ασκήσεων, η ίδια για όλους τους συμμετέχοντες ανεξαρτήτως βαθμίδας εκπαίδευσης, τις οποίες έπρεπε να επιλύσουν σκεπτόμενοι 'φωναχτά' (thinking aloud). Η διαδικασία δεν περιλάμβανε κανενός είδους βοήθεια ή ανατροφοδότηση παρά μόνο τη διευκρίνιση των μαθηματικών όρων όπου θεωρούνταν αναγκαίο για τη συνέχιση της διαδικασίας (πχ τη διάκριση ανάμεσα σε έναν μεικτό αριθμό όπου η πράξη μεταξύ του φυσικού και του κλάσματος είναι η πρόσθεση και όχι ο πολλαπλασιασμός όπως θεωρούν πολλοί μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σκεπτόμενοι αλγεβρικά και όχι αριθμητικά). Η συλλογή των δραστηριοτήτων που αξιοποιήθηκαν περιλάμβανε έντεκα (11) υπολογισμούς και με τις τέσσερις πράξεις, (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση) ανάμεσα σε ρητούς ή ανάμεσα σε έναν φυσικό και έναν ρητό αριθμό:

α) $\frac{1}{2}+\frac{4}{8}$	β) $4 \times \frac{3}{4}$	γ) $4 \times \frac{2}{8}$
δ) $\frac{5}{6}+\frac{4}{3}$	ε) $1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$	στ) $3\frac{4}{8}\times 2$
ζ) $1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$	η) $\frac{3}{4}$ του 20	θ) $6 \div \frac{2}{6}$
ι) $\frac{1}{2}+\square=\frac{7}{8}$	ια) $1\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$	

Πίνακας 2.2: Ασκήσεις με ρητούς αριθμούς (Papadopoulos, et, al. 2019).

Η κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που παρατηρήθηκαν βασίστηκαν στο μοντέλο στρατηγικών των Caney και Watson (2003). Από αυτές εντοπίστηκαν οι εφτά (μετατροπή συμβολικής αναπαράστασης, χρήση ισοδύναμων κλασμάτων, χρήση γνωστών δεδομένων, επαναλαμβανόμενη πρόσθεση/πολλαπλασιασμός, χρήση μερών του αριθμού, χρήση νοερής εικόνας, χρήση μερών του αριθμού, νοερή επίλυση του γραπτού αλγόριθμου) και επιπλέον προστέθηκε η στρατηγική της απλοποίησης. Εντυπωσιακό αλλά αναμενόμενο, ήταν το γεγονός ότι η στρατηγική νοερής επίλυσης με την εφαρμογή του γραπτού αλγορίθμου κυριάρχησε έναντι των υπολοίπων στρατηγικών αφού αποτέλεσε περίπου τα οκτώ δέκατα ($\frac{8}{10}$) των σωστών απαντήσεων (και το 42,95% των συνολικών). Καμία άλλη στρατηγική δεν εμφάνισε συχνότητα εμφάνισης πάνω από 2% με εξαίρεση την στρατηγική της απλοποίησης (5,41%).

Στην δεύτερη φάση της έρευνας έγινε η καταγραφή της συχνότητα εμφάνισης της κάθε στρατηγικής στον κάθε πληθυσμό της έρευνας. Αρχικά αυτό που παρουσίασε ιδιαίτερο ενδιαφέρον ήταν τα υψηλά ποσοστά χρήσης αλγορίθμου από τους φοιτητές. Το 45% των μελλοντικών δασκάλων και το 60% των φοιτητών θετικής κατεύθυνσης σπουδών κατέφυγαν στην νοερή χρήση του γραπτού αλγόριθμου, γεγονός το οποίο φαίνεται παράδοξο αφού πρόκειται για τους συμμετέχοντες με το ισχυρότερο μαθηματικό υπόβαθρο. Τόσο με τους μαθητές των Δημοτικών σχολείων όσο και των Λυκείων, η πλειονότητά των απαντήσεων απαρτίζονταν είτε από σωστές με τη χρήση του νοερού αλγόριθμου είτε από λανθασμένες απαντήσεις. Ακόμα παρατηρήθηκε πως με το πέρασμα στη ανώτερη βαθμίδα εκπαίδευσης οι φοιτητές εμφάνισαν μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών (18,75% όσων φοιτούσαν στην παιδαγωγική σχολή και 28,02% όσων στην μαθηματική ή στο πολυτεχνείο). Ωστόσο αυτό το αυξημένο ποσοστό οφείλεται στα μικρότερα ποσοστά λαθών και αναπάντητων καθώς για άλλη μια φορά η επιλογή του αλγορίθμου ήταν η επικρατέστερη.

3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας.

3.1. Περιγραφή Του Δείγματος.

Στην έρευνα συμμετείχαν 127 συνολικά μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα, από την πρωτοβάθμια, έλαβαν μέρος 65 μαθητές της Ε' και Στ' τάξης από τρία διαφορετικά Δημοτικά σχολεία. Αναφορικά με την δευτεροβάθμια, συμμετείχαν 62 μαθητές Α', Β', και Γ' τάξης που φοιτούσαν σε δυο Λύκεια. Όλα τα Δημοτικά και τα Λύκεια από τα οποία αντλήθηκε το δείγμα της εργασίας βρίσκονται σε μη αστικές περιοχές του νομού Σερρών.

3.2. Μαθηματικό Υπόβαθρο Των Συμμετεχόντων.

Σύμφωνα με το ισχύον Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών έχει τεθεί ως βασικός στόχος ήδη από την Έ τάξη του Δημοτικού Σχολείου, οι μαθητές να είναι σε θέση να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης φυσικών, κλασματικών και δεκαδικών αριθμών. Αναφορικά με την Στ' τάξη οι στόχοι δηλώνουν πως, οι μαθητές θα μπορούν να απαγγέλλουν, να διαβάζουν, να γράφουν και να διατάσσουν φυσικούς, κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς καθώς και να εκτελούν όλες τις πράξεις τους. Επιπλέον βασικός στόχος είναι η κατανόηση και η εφαρμογή των εννοιών του λόγου, της αναλογίας και του ποσοστού. Σχετικά με την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στην πρώτη τάξη του γυμνασίου, εντοπίζονται αρκετά σχετικά κεφάλαια με σκοπό την απόκτηση μεγαλύτερης εμπειρίας και ευχέρειας με τους ρητούς και τις πράξεις αυτών. Σε μεγαλύτερες τάξεις εμφανίζονται επαναληπτικά κεφάλαια αλλά και έννοιες στενά συνδεδεμένες με τους ρητούς.

Όλοι οι μαθητές της Ε' και Στ' τάξεις Δημοτικού που συμμετείχαν στην έρευνα, είχαν ήδη διδαχθεί τα κλάσματα. Όσον αφορά στους μαθητές Λυκείου, είναι σίγουρο πως ξανασυνάντησαν τους ρητούς αριθμούς στο Γυμνάσιο και πλέον έρχονται καθημερινά σε επαφή με προβλήματα και ασκήσεις, είτε στα μαθήματα γενικής παιδείας τα οποία όλοι παρακολουθούν υποχρεωτικά είτε στα ειδικά μαθήματα κατεύθυνσης (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία), όπου απαιτείται ευχέρεια στη χρήση και στον υπολογισμό τους.

3.3. Παρουσίαση Των Δραστηριοτήτων

Όλοι οι συμμετέχοντες στην έρευνα κλήθηκαν να απαντήσουν τις ίδιες δραστηριότητες με την ίδια σειρά (από τη λιγότερο απαιτητική προς την περισσότερο) πρώτα νοερά και έπειτα γραπτά. Οι δραστηριότητες αυτές βασίστηκαν σε παρόμοιες δραστηριότητες από την αντίστοιχη ερευνητική δουλειά των Papadopoulos, Panagiotopoulou και Karakostas (2019). Οι δραστηριότητες, πέντε στο σύνολο, περιείχαν υπολογισμούς και με τις τέσσερις γνωστές πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, αφαίρεση και διαίρεση). Επιπλέον για να υπάρχει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των πράξεων στους ρητούς, συμπεριλήφθηκαν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί: φυσικός-κλάσμα, κλάσμα-κλάσμα, μεικτός-κλάσμα, συνδυάζοντάς κατά κόρον κλάσματα (κυρίως τα ισοδύναμα του ½). Βασικό κριτήριο στο σχεδιασμό και την επιλογή των δραστηριοτήτων αποτέλεσε η ύπαρξη πολλαπλών διαφορετικών τρόπων επίλυσης για την καθεμία ώστε οι λύτες να έχουν τη δυνατότητα επιλογής ανάλογα με τις ικανότητές τους. Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι οι δραστηριότητες βασίστηκαν στις μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες των παιδιών του Δημοτικού, με αριθμούς και σύμβολα που τους είναι γνωστά για να αποφευχθεί το ενδεχόμενο να μπερδευτούν ή να δυσκολευτούν από κάτι τέτοιο.

Οι δραστηριότητες με τη σειρά που παρουσιάστηκαν καθώς και οι ενδεικτικοί τρόποι λύσης, είναι οι εξής:

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

$$\frac{3}{6}+\frac{4}{8}$$

Ενδεικτικοί τρόποι λύσης:

- Στην δραστηριότητά αυτή η λύση μπορεί να γίνει φανερή αμέσως, αν ο λύτης αναγνωρίσει την αναφορά του κάθε κλάσματος στο μισό, γεγονός που κάνει προφανές το αποτέλεσμα χωρίς την ανάγκη κάποιας πράξης. Γι' αυτό και ως πρώτη λύση προτείνεται η συνειδητοποίηση ότι πρόκειται για δύο μισά.
- Μία άλλη προσέγγιση βασίζεται στη μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικό, οπότε 0,5 + 0,5 = 1.

- Ένας τρόπος σκέψης που μπορεί να αξιοποιηθεί είναι η χρήσης των ισοδύναμων κλασμάτων, όταν ο λύτης αντικαθιστά το $\frac{3}{6}$ και/ή το $\frac{4}{8}$ με το ισοδύναμο κλάσμα $\frac{1}{2}$.
- Μία διαφορετική λύση μπορεί να είναι η χρήση νοερής εικόνας, όπου ο λύτης φαντάζεται τα κλάσματα ως μέρος ενός σχήματος συνήθως κύκλου.
- Τέλος, η χρήση του αλγόριθμου με τον οποίον ο λύτης κάνει τα κλάσματα ομώνυμα χρησιμοποιώντας ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ($\frac{12}{24}+\frac{12}{24}$) ή πολλαπλασιάζοντας τους δύο όρους του κάθε κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου ($\frac{24}{48}+\frac{24}{48}$).

Δραστηριότητα 2η

$$4 \times \frac{6}{12}$$

Ενδεικτικοί τρόποι λύσης:

- Η βασική ιδέα για μια νοερή λύση εδώ είναι να δει ο λύτης ότι πρόκειται για τέσσερα μισά και επομένως το αποτέλεσμα είναι 2.
- Ένας τρόπος επίλυσης, είναι με απλοποίηση του παρονομαστή με τον φυσικό, δίνοντας γρήγορα την απάντηση $\frac{6}{3}$, από την οποία διακρίνεται εύκολα η σωστή απάντηση, 2.
- Θα μπορούσε επίσης να γίνει απλοποίηση του κλάσματος 6/12 σε ½, οπότε η λύση θα πρόκυπτε από το $4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.
- Η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό είναι άλλη μία πιθανή λύση, δηλαδή $4 \times 0{,}5$.

- Μια ακόμη στρατηγική που μπορεί να εφαρμοστεί είναι αυτή της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, δηλαδή $\frac{6}{12}+\frac{6}{12}+\frac{6}{12}+\frac{6}{12}$ ή αν έχει προηγηθεί η απλοποίηση του κλάσματος να γίνει $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.
- Μία (αναμενόμενη) στρατηγική είναι η χρήση του αλγορίθμου, όπου για την περίπτωση φυσικού επί κλάσμα είναι: $\frac{4}{1}\times\frac{6}{12}=\frac{24}{12}=2$ ή $\frac{4\times 6}{12}=\frac{24}{12}=2$.

.

<u>Δραστηριότητα 3η</u>

$$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

Ενδεικτικοί τρόποι λύσης:

- Η μετατροπή του μεικτού σε δεκαδικό αριθμό στη συγκεκριμένη άσκηση είναι ίσως η πιο γρήγορη και αποτελεσματική λύση. Στη περίπτωση που κάποιος μπορέσει να μετατρέψει αυτόματα την πράξη σε $1{,}5-0{,}25$ μπορεί να φτάσει εύκολα στην απάντηση χωρίς να χρειαστεί να κάνει περίπλοκες και περιττές πράξεις.
- Μία άλλη λύση θα μπορούσε να είναι αυτή όπου ο λύτης μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα και τα αφαιρεί διατηρώντας τον φυσικό άθικτο: $1\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$
- Αντίστοιχα, μπορεί να διατηρήσει το κλασματικό μέρος του μεικτού αριθμού και να αφαιρέσει το κλάσμα από τον φυσικό, δηλαδή $\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=1\frac{1}{4}$
- Σαν πιο ιδιαίτερος τρόπος λύσης, αριθμός 1 μπορεί να αναλυθεί στο άθροισμα $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$. Έτσι προκύπτει η εξής πράξη: $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.
- Τέλος, με τη χρήση αλγορίθμου όπου αρχικά ο μεικτός αριθμός γίνεται κλάσμα και ύστερα ακολουθεί η αφαίρεση των κλασμάτων αφού γίνουν ομώνυμα:

$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

Δραστηριότητα $4^{η}$

$$2\frac{5}{10} \times 2$$

Ενδεικτικοί τρόποι λύσης:

- Αυτή η δραστηριότητα θα μπορούσε να λυθεί με την μετατροπή της συμβολικής αναπαράστασης σε δεκαδικούς, δηλαδή $2{,}5 \times 2 = 5$.
- Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Σε αυτήν ο λύτης πολλαπλασιάζει ξεχωριστά το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του δεκαδικού αριθμού με τον ακέραιο και προσθέτει τα γινόμενα: $(2 \times 2) + \left(\frac{5}{10} \times 2\right) = 4 + 1 = 5$. Μία βελτιωμένη εκδοχή της ίδιας στρατηγικής, περιλαμβάνει την χρήση ισοδύναμου κλάσματος: $2\frac{1}{2} \times 2 = (2 \times 2) + \left(\frac{1}{2} \times 2\right) = 4 + 1 = 5$
- Τέλος, η χρήση αλγορίθμου όπου ο μεικτός αριθμός γίνεται κλάσμα και ακολουθεί ο πολλαπλασιασμός: $\frac{25}{10} \times 2 = \frac{50}{10} = 5$.

Δραστηριότητα $5^{η}$

$$8 : \frac{4}{8}$$

Ενδεικτικοί τρόποι λύσης:

- Μία διαφορετική προσέγγιση η οποία δεν απαιτεί γνώση αλγορίθμου αλλά κατανόηση της πράξης είναι να γίνει αντιληπτό από το λύτη πως η παραπάνω διαίρεση μπορεί να ερμηνευτεί ως πόσα ‘μισά’ χωράνε ή έχει/βρίσκονται στο 8, κάνοντας γρήγορα φανερή την σωστή απάντηση 16.
- Ο πιο συνήθης τρόπος λύσης της παραπάνω δραστηριότητα είναι με τη νοερή επίλυση του γραπτού αλγορίθμου. Σε αυτή τη στρατηγική κατατάσσονται δύο διαφορετικοί αλγόριθμοι: α) $\frac{8}{1} : \frac{4}{8} = \frac{8}{1} \times \frac{8}{4} = \frac{64}{4} = 16$, όπου γίνεται αντιστροφή

του δεύτερου κλάσματος και η πράξη μετατρέπεται σε πολλαπλασιασμό και β) $\frac{\frac{8}{1}}{\frac{\frac{4}{8}}{}}$ $\frac{\frac{8}{1}}{\frac{4}{8}} = \frac{64}{4} = 16$, όπου η διαίρεση των κλασμάτων αναπαριστάνεται ως σύνθετο κλάσμα.

- Με συνδυασμό αλγορίθμου και κάποιου άλλου τρόπου, π.χ.: Πριν την εκτέλεση του αλγορίθμου μπορεί να προηγηθεί ένα βήμα όπου με τη χρήση ισοδύναμων κλασμάτων ο λύτης αντικαθιστά το $\frac{4}{8}$ με το $\frac{1}{2}$ διευκολύνοντας έτσι τις πράξεις που ακολουθούν. Επίσης Κατά την διάρκεια του αλγορίθμου ο λύτης μπορεί απλοποιήσει το 8 με το 4 παρονομαστή του $\frac{8}{4}$. οπότε γίνεται 2 x 8 = 16.

3.4. Συλλογή Και Ανάλυση Δεδομένων

Τα δεδομένα που αξιοποιήθηκαν σ ’αυτή την έρευνα, αποτέλεσαν προϊόν ηχογραφημένων ατομικών συνεντεύξεων και ατομικών φύλλων εργασίας. Το κάθε άτομο καλούνταν ξεχωριστά σε αίθουσες οι οποίες είχαν υποδειχθεί από τους διευθυντές των σχολείων. Εκεί ο ερευνητής σε πρώτη φάση παρουσίαζε διαδοχικά την κάθε δραστηριότητα της συλλογής οι οποίες ήταν τυπωμένες σε μεγάλες και ευδιάκριτες καρτέλες. Ο υπολογισμός του αποτελέσματος για κάθε δραστηριότητα έπρεπε να γίνεται νοερά χωρίς να δίνεται η δυνατότητα γραπτών υπολογισμών ή σημειώσεων. Επιπλέον ο λύτης κλήθηκε να «σκέφτεται φωναχτά» (think aloud), ώστε να καταγράφεται ο τρόπος σκέφτεται προκειμένου να γίνουν εμφανείς οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν. Σε περίπτωση όπου ο λύτης παρέμενε σιωπηλός για αρκετό χρονικό διάστημα, ο ερευνητής υπενθύμιζε ότι έπρεπε να εκφράζει φωναχτά τη σκέψη του, ακόμα και αν δεν είχε ακόμα καταλήξει σε συγκεκριμένη προσέγγιση ή απάντηση.

Στη δεύτερη φάση, μετά την ολοκλήρωση της προφορικής συνέντευξης, δινόταν στον λύτη ένα φύλλο εργασίας. Το φύλλο αποτελούνταν από πέντε σελίδες (μια για κάθε δραστηριότητα) και συμπεριλάμβανε την ίδια συλλογή δραστηριοτήτων, με την ίδια σειρά όπως και στην προφορική τους παρουσίαση. Σε αντίθεση με την νοερή επίλυση, εδώ ζητούνταν από τον κάθε λύτη να καταγράψει όσες περισσότερες διαφορετικές λύσεις μπορούσε για κάθε δραστηριότητα. Έπειτα καλούνταν να απαντήσει επίσης γραπτώς, γιατί δεδομένων των διαφορετικών τρόπων υπολογισμού που γνώριζε επέλεξε την συγκεκριμένη στη διαδικασία της πρώτης φάσης για την νοερή επίλυση. Σε περίπτωση όπου υπήρχε αδυναμία εύρεσης διαφορετικών λύσεων, ο λύτης είτε προσπερνούσε αυτή την ερώτηση είτε αιτιολογούσε την μοναδική του λύση.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι είχε διευκρινιστεί και στις δύο φάσεις της συλλογής δεδομένων, ότι όλοι οι λύτες είχαν την δυνατότητα να προσπεράσουν όποια δραστηριότητά τους φαινόταν ιδιαίτερα απαιτητική ή δύσκολη. Ωστόσο μπορούσαν να επιστρέψουν σε κάποια που είχαν προσπεράσει αν ήθελαν να ξαναπροσπαθήσουν. Επιπλέον δεν είχε τεθεί κάποιο προκαθορισμένο χρονικό πλαίσιο μέσα στο οποίο έπρεπε να δοθεί κάποια απάντηση. Παρόλα αυτά, σε περιπτώσεις που παρατηρούνταν παρατεταμένη σιωπή ή αδυναμία απάντησης γινόταν παρότρυνση να προχωρήσουν σε επόμενη δραστηριότητα. Τέλος ο ερευνητής δεν παρείχε καμία απολύτως βοήθεια ή υπόδειξη ή ανατροφοδότηση σχετικά με την ορθότητα των απαντήσεων.

Η ανάλυση των δεδομένων ξεκίνησε με την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων (transcription of data) και ακολουθήσε η επεξεργασία των φύλλων εργασιών. Αναφορικά με τον τρόπο ανάλυσης των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε τόσο ποιοτική όσο και ποσοτική ανάλυση. Η πρώτη εστίαζε στον εντοπισμό αλλά και τη διαμόρφωση των κατηγοριών των απαντήσεων, ενώ στη δεύτερη υπολογίστηκαν οι συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών ανά πληθυσμό και δραστηριότητα.

Το σύστημα κατηγοριοποίησης που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία, ήταν αυτό που χρησιμοποίησαν οι Papadopoulos, et., al. (2019) εμπνευσμένοι από τους Caney & Watson (2003). Σε περιπτώσεις όπου υπήρχε αμφιβολία σχετικά με την κατηγοριοποίηση της απάντησης, αυτή επιλυόταν ύστερα από συζήτηση με τον επιβλέποντα καθηγητή.

Σε ένα πρώτο επίπεδο ανάλυσης έγινε ομαδοποίηση ανάλογα με το αν η απάντηση ήταν ορθή, λανθασμένη, αναπάντητη ή μη κωδικοποιήσιμη.

Σε δεύτερο επίπεδο, κατηγοριοποιήθηκαν οι ορθές απαντήσεις με βάση τις στρατηγικές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Πρέπει να αναφερθεί ακόμα πως:

- Δεν εντοπίστηκαν όλες οι στρατηγικές που εμφανίστηκαν στις δυο παραπάνω έρευνες που αποτέλεσαν τη βάση της παρούσας έρευνας.
- Έγινε προσθήκη δυο νέων κατηγοριών στρατηγικών. Αρχικά η στρατηγική «Αλγεβρικά». Εδώ ο λύτης μετατρέπει τη δοσμένη παράσταση σε εξίσωση, με την εισαγωγή μιας μεταβλητής και λύνει ως προς αυτή. Και δεύτερον αυτή

του «συνδυασμού». Όπως υποδηλώνει το όνομα, ο λύτης έκανε χρήση περισσότερων από μίας στρατηγικών για την επίλυση κάποιάς δραστηριότητας (π.χ. Χρήση ισοδύναμων κλασμάτων και ‘έπειτα χρήση του αλγορίθμου.)

Οι στρατηγικές οι οποίες τελικά παρατηρήθηκαν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα με παραδείγματα από τις απαντήσεις όπως αυτές δόθηκαν από δείγμα της έρευνας.

Όνομα στρατηγικής	**Παράδειγμα Απάντησης**
Μετατροπή συμβολική αναπαράστασης	$2\frac{5}{10} \times 2$ μετατρέπεται σε 2,5 × 2 = 5
Χρήση ισοδύναμων κλασμάτων	$\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
Χρήση των μερών του αριθμού	$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=1\frac{1}{4}$
Απλοποίηση	$4\times\frac{6}{12}=\frac{6}{3}=2$
Αλγεβρικά	$\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\chi => 48\times\frac{3}{6}+48\times\frac{4}{8}=48\times\chi=>$ $=> 3\times 8+4\times 6=48\chi => 48=48\chi => \chi=1$
Νοερή επίλυση του γραπτού αλγόριθμου	$8 \div\frac{4}{8}=\frac{8}{1}\times\frac{8}{4}=\frac{64}{4}$
Συνδυασμός	$8 \div\frac{4}{8}=8 \div\frac{1}{2}=\frac{8}{1}\times\frac{2}{1}=16$

Πίνακας 3.1: Κατηγορίες στρατηγικών που εντοπίστηκαν.

Σε τρίτο επίπεδο, έγινε καταγραφή του συνόλου όλων των διαφορετικών επιτυχημένων στρατηγικών που παρουσίασε κάθε λύτης (σε περιπτώσεις όπου αξιοποιούνταν η ίδια στρατηγική αλλά με διαφορετικό τρόπο π.χ.: χρήση ισοδύναμων κλασμάτων, η καταγραφή γινόταν μόνο μια φορά).

Τέλος, έγινε προσπάθεια ανάλυσης των απαντήσεως των μαθητών στην ερώτηση: ‘Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους τους διαφορετικούς τρόπος επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό ;’. Η ανάλυση έγινε στη βάση της ανάλυσης περιεχομένου (content analysis) με σκοπό την κατηγοριοποίηση των λόγων για τους οποίους επιλέξαν μια στρατηγική στους νοερούς υπολογισμούς και όχι κάποια άλλη.

4. Αποτελέσματα.

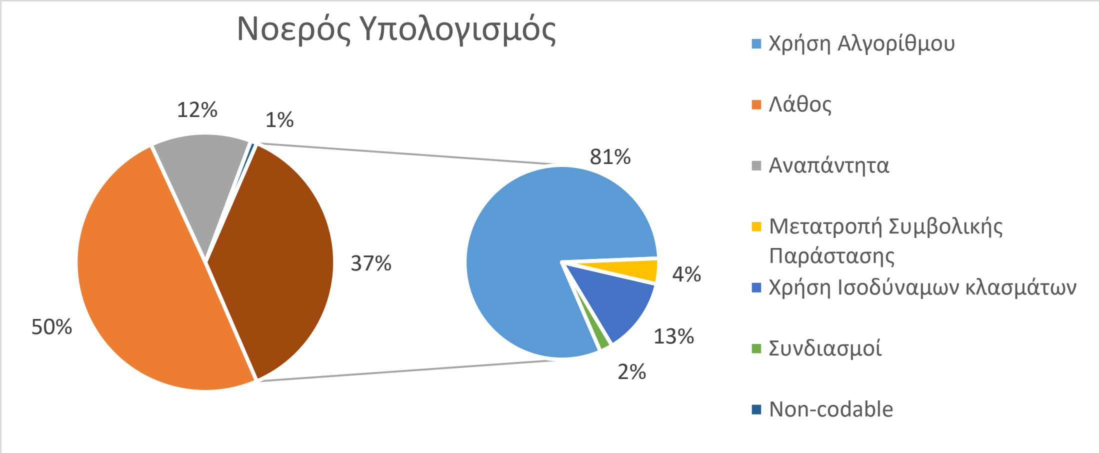
Δραστηριότητα 1η:

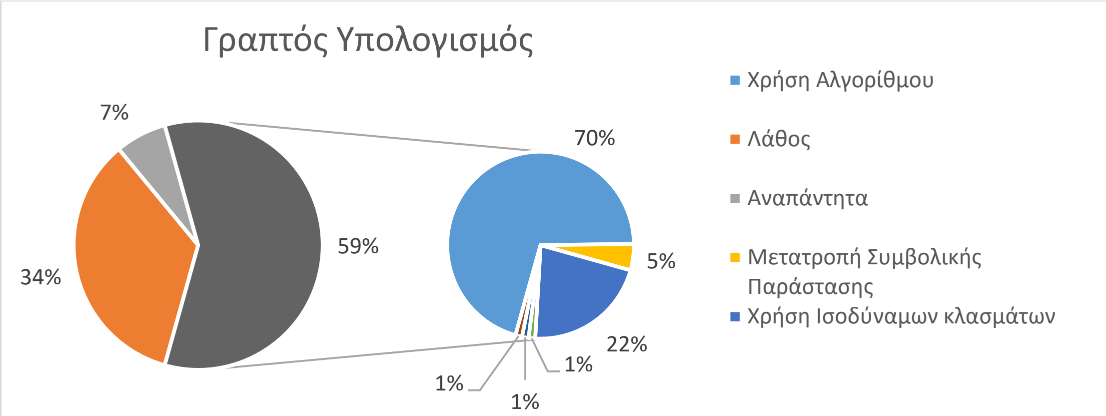
$$\frac{3}{6}+\frac{4}{8}$$

Οι επιδόσεις συνολικά των μαθητών και των δυο βαθμίδων που συμμετείχαν στην έρευνα φαίνονται παρακάτω στον Πίνακα 4.1.

	Νοερή επίλυση	Γραπτή επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	38	62
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων	6	19
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	2	4
Συνδυασμοί	1	1
Χρήση Μερών του Αριθμού	-	1
Αλγεβρικά	-	1
Λάθος	63	52
Αναπάντητα	16	10
Non-codable	1	-
ΣΥΝΟΛΟ	**127**	**150**

Πίνακας 4.1: Δραστηριότητα 1 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης.





Πίνακας 4.2: Δραστηριότητα 1 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης, κυκλικά διαγράμματα.

Με μια γρήγορη ματιά και οι δύο κατηγορίες φαίνεται να παρουσιάζουν μια σχετικά παρόμοια εικόνα, με τη χρήση του αλγορίθμου και τις λανθασμένες απαντήσεις να καταλαμβάνουν την πλειοψηφία των συνολικών απαντήσεων.

Αναλυτικότερα, στις περιπτώσεις των νοερών υπολογισμών στο σύνολο των σωστών απαντήσεων (47 απαντήσεις) οι 38 έκαναν «νοερή» χρήση του γραπτού αλγορίθμου, σε ποσοστό δηλαδή της τάξης του 80,85%: $\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{12}{24}+\frac{12}{24}=\frac{24}{24}=1$. Το αντίστοιχο ποσοστό για την περίπτωση των γραπτών απαντήσεων ήταν επίσης υψηλό και άγγιξε το 70,45% (62 από τις 88 σωστές απαντήσεις). Οι μαθητές έκαναν επίσης χρήση σε πολύ μικρό βαθμό των ισοδύναμων κλασμάτων $(\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1)$, της μετατροπής συμβολικής παράστασης $(\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=0{,}5+0{,}5=1)$, της χρήσης μερών του αριθμού $(\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{3}+\frac{4}{4}\right)=1$ και της αλγεβρικής επίλυσης $(\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\chi => 48\times\frac{3}{6}+48\times\frac{4}{8}=48\times\chi => 3\times 8+4\times 6=48\chi => 48=48\chi => \chi=1)$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το μεγάλο ποσοστό είτε των λανθασμένων απαντήσεων είτε των περιπτώσεων μαθητών που δεν μπόρεσαν να απαντήσουν καθόλου. Στην προσπάθεια να κάνουν τον υπολογισμό νοερά 63 από τους 127 (49,61%) έδωσαν λανθασμένη απάντηση ενώ ταυτόχρονα 16 μαθητές (12,59%) δεν έδωσαν καμία απάντηση, ενώ μια απάντηση θεωρήθηκε μη κωδικοποιήσιμη. Όταν οι ίδιοι μαθητές ζητήθηκε να απαντήσουν γραπτά η εικόνα είναι καλύτερη, εξακολουθεί όμως να δημιουργεί προβληματισμό μιας που στο σύνολο των 150 απαντήσεων που δόθηκαν οι 52 ήταν λανθασμένες (34,66%) και 10 δεν έδωσαν καθόλου απαντήσεις. Μόλις ένας μαθητής χρησιμοποίησε συνδυασμό, ενώ 10 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου.

Από τα δεδομένα φαίνεται οι επιδόσεις να είναι καλύτερες όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν τους συγκεκριμένους υπολογισμούς γραπτά. Παρόλα αυτά όμως η «καλύτερη» αυτή εικόνα είναι πάντα συνδεδεμένη κυρίως με την εφαρμογή του γραπτού αλγόριθμου και όχι με την εφαρμογή άλλων στρατηγικών υπολογισμού. Στο συγκεκριμένο υπολογισμό θα αναμενόταν νοεροί υπολογισμοί βασισμένοι στη διαπίστωση ότι οι δυο όροι του αθροίσματος είναι δυο διαφορετικές αναπαραστάσεις του ½ κάτι που εξαλείφει κάθε απαίτηση για επιμέρους πράξεις ή υπολογισμούς. Επιπλέον ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα υψηλά ποσοστά λάθους παρά τις χαμηλές γνωστικές απαιτήσεις της δραστηριότητας.

Στη συνέχεια τα πιο πάνω αποτελέσματα κατανέμονται με βάση την βαθμίδα εκπαίδευσης στην οποία εντοπίστηκαν σύμφωνα με τον Πίνακα 4.3.

	Μαθητές Δημοτικού		Μαθητές Λυκείου	
	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	14	20	24	42
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	1	2	3
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων	-	-	6	19
Χρήση Μερών του Αριθμού	-	-	-	1
Συνδυασμοί	-	-	1	1
Λάθος	37	35	26	17

Αναπάντητα	14	10	2	-
Non-codable	-	-	1	-
ΣΥΝΟΛΟ	**65**	**66**	**62**	**83**

Πίνακας 4.3: Δραστηριότητα 1 - Αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης ανά ομάδα πληθυσμού.

Στην φάση της νοερής επίλυσης των μαθητών του Δημοτικού δυο πράγματα γίνονται φανερά: Η χρήση του αλγορίθμου ως μοναδική στρατηγική υπολογισμού και ο μεγάλος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων (37 από τις 65 απαντήσεις). Η εικόνα στη φάση των γραπτών υπολογισμών είναι ακριβώς η ίδια (αν εξαιρέσει κανείς την εμφάνιση απλά μιας περίπτωση υπολογισμού με τη στρατηγική της μετατροπής συμβολικής παράστασης.

Η ομάδα των μαθητών λυκείου επιδεικνύει μια μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών χωρίς όμως αριθμητικά η παρουσία τους να απειλεί κι εδώ την κυριαρχία του αλγόριθμου. Έτσι, στη φάση του νοερού υπολογισμού εμφανίζεται η χρήση του αλγορίθμου σε ποσοστό 72,72% και στη συνέχεια εμφανίζονται και οι περιπτώσεις της χρήσης ισοδύναμων κλασμάτων (6 απαντήσεις), της μετατροπής συμβολικής παράστασης (2 απαντήσεις) και του συνδυασμού (1 απάντηση). Πολύ μεγάλος ήταν επίσης ο αριθμός όσων έδωσαν λανθασμένη απάντηση (41,93%). Στην φάση του γραπτού υπολογισμού η εικόνα βελτιώνεται. Φαίνεται ότι ένας αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων, όπως επίσης και οι αναπάντητες και μη κωδικοποιήσιμες απαντήσεις μετακινούνται τώρα πλέον στη σφαίρα των επιτυχών στρατηγικών και ιδιαίτερα της εφαρμογής του αλγορίθμου και της χρήσης ισοδύναμων κλασμάτων (ποσοστά αντίστοιχα 67,74% και 28,78% των σωστών απαντήσεων).

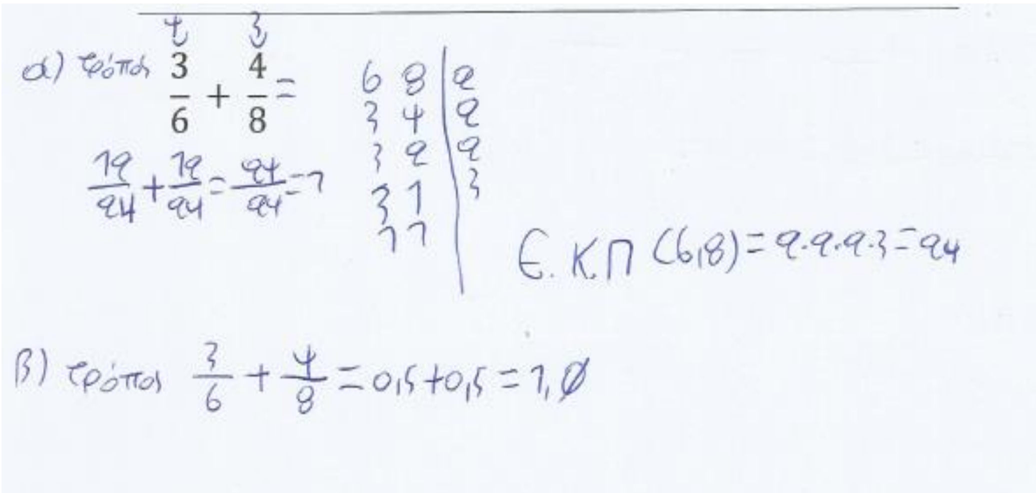
Αριθμός Διαφορετικών Γραπτών Στρατηγικών	Καμία (0) Στρατηγική	Μια (1) Στρατηγική	Δύο (2) Στρατηγικές	Τρεις (3) Στρατηγικές
Μαθητές Δημοτικού	45	19	1	-
Μαθητές Λυκείου	17	25	18	2
ΣΥΝΟΛΟ	**62**	**44**	**19**	**2**

Πίνακας 4.4: Δραστηριότητα 1 - Αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά ομάδα πληθυσμού.

Η φάση του νοερού υπολογισμού εμπλέκει μια μόνο στρατηγική υπολογισμού σε κάθε δραστηριότητα. Αντίθετα στη φάση του γραπτού υπολογισμού οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν το εξαγόμενο με όσους τρόπους γνώριζαν. Στη βάση των δεδομένων που συλλέχθηκαν ο Πίνακας 4.4, παρουσιάζει τη δυνατότητα των μαθητών να χρησιμοποιήσουν περισσότερες από μια στρατηγικές στη φάση αυτή.

Φαίνεται ότι το σύνολο των μαθητών του Δημοτικού είχαν να επιδείξουν μια μόνο στρατηγική (χρήση αλγορίθμου) ανεξαρτήτως του αν ο υπολογισμός επιτελούνταν νοερά ή γραπτά.

Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για το 40,32% των μαθητών του Λυκείου. Εκεί όμως υπήρχε και ένα ποσοστό μαθητών (29,03%) που έκανε χρήση δυο στρατηγικών, και μόλις 2 μαθητές έκαναν χρήση 3 στρατηγικών. Συνολικά στους 127 μαθητές που συμμετείχαν σε αυτήν την δραστηριότητα μόλις το 16,53% ήταν σε θέση να επιδείξει περισσότερες από μια στρατηγικές υπολογισμού.



Λύση μαθητή με διαφορετικούς τρόπους στην 1η δραστηριότητα.

Τέλος, ακολουθεί η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στην ερώτηση: ‘Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους τους διαφορετικούς τρόπος επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό ;’

	Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	Σιγουριά	Απουσία άλλης γνώσης	**ΣΥΝΟΛΟ**
Μαθητές Δημοτικού	2	1	1	**4**
Μαθητές Λυκείου	19	11	-	**30**

Πίνακας 4.5: Δραστηριότητα 1- Αριθμός κατηγοριών εξηγήσεων ανά ομάδα πληθυσμού.

Είναι εντυπωσιακός ο μικρός αριθμός μαθητών που κατάφερε να ανταποκριθεί στην ερώτηση και να δώσει μια εξήγηση. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του Δημοτικού σχολείου μόλις τέσσερις μαθητές μπόρεσαν να το κάνουν. Για το Λύκειο το ποσοστό αγγίζει το 50% (48,38%).

Οι απαντήσεις τους φαίνεται να συγκεντρώνονται γύρω από δυο επιλογές. Πρώτη σε προτιμήσεις έρχεται η απάντηση ότι ο συγκεκριμένος τρόπος υπολογισμού (και εδώ με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες αναφερόμαστε κυρίως στην περίπτωση του αλγορίθμου) επιλέχτηκε γιατί τους προσφέρει ευκολία, ταχύτητα και αποτελεσματικότητα. Το 35,29% των μαθητών (12 μαθητές) εξήγησε πως παρόλο που ίσως γνώριζαν και άλλους τρόπους υπολογισμού επέλεξαν αυτόν γιατί τους δημιουργούσε ένα αίσθημα σιγουριάς. Τέλος ένας μαθητής ανέφερε πως αυτός ήταν ο μοναδικός τρόπος με τον οποίο μπόρεσε να λύσει την δραστηριότητα.

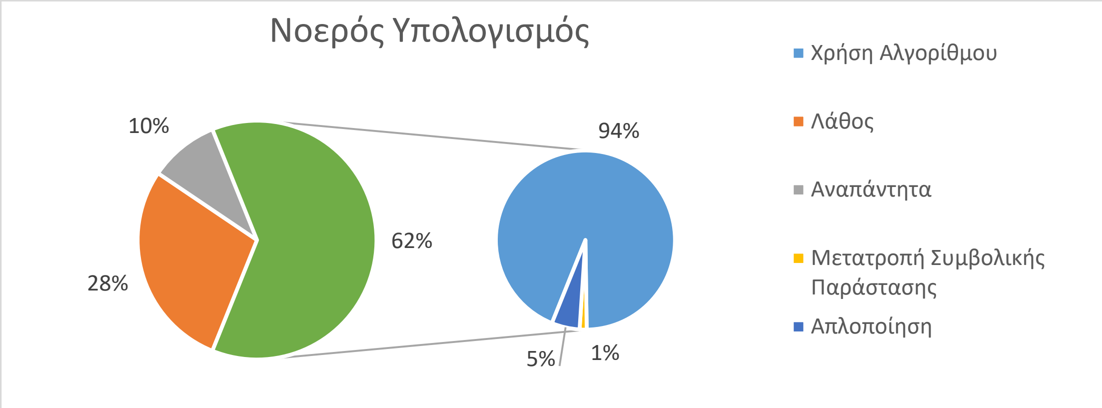
Δραστηριότητα 2^{η}:

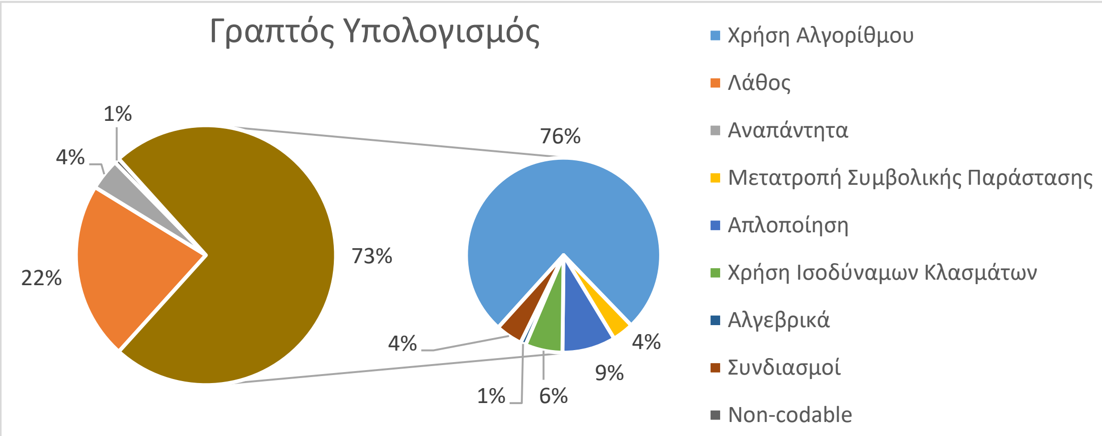
$$4 \times \frac{6}{12}$$

Ακολουθεί η παρουσίαση των απαντήσεων όπως αυτές σημειώθηκαν, για την δεύτερη δραστηριότητα.

	Νοερή επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση αλγορίθμου	74	86
Απλοποίηση	4	10
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	1	4
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων	-	7
Αλγεβρικά	-	1
Συνδυασμοί	-	5
Λάθος	36	34
Αναπάντητα	12	6
Non-codable	-	1
ΣΥΝΟΛΟ	**127**	**154**

Πίνακας 4.6: Δραστηριότητα 2 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης.





Πίνακας 4.7: Δραστηριότητα 2 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης, κυκλικά διαγράμματα.

Συνεχίζοντάς στην δεύτερη δραστηριότητα, εύκολα γίνεται αντιληπτή η επικράτηση του αλγορίθμου και στις δυο περιπτώσεις, ακολουθούμενη από τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων. Πιο συγκεκριμένα, εντυπωσιακά ψηλά είναι το ποσοστά χρήσης του αλγορίθμου στους νοερούς υπολογισμούς, καταλαμβάνοντας το 93,67% (74 απαντήσεις από τις 79) των συνολικών σωστών προφορικών απαντήσεων ($4 \times \frac{6}{12} = \frac{4\times6}{12} = \frac{24}{12} = 2$). Παρομοίως, στην γραπτή επίλυση η στρατηγική του αλγορίθμου κατέλαβε τις 86 από τις 113 σωστές απαντήσεις (76,1%). Πέρα από την χρήση του αλγορίθμου, τέσσερις μαθητές επέλεξαν την στρατηγική της απλοποίησης ($4 \times \frac{6}{12} = 4 \times \frac{6}{12} = \frac{6}{3} = 2$) και μόνο ένας την μετατροπή συμβολικής παράστασης ($4 \times \frac{6}{12} = 4 \times 0{,}5 = 2$) στην νοερή επίλυση. Οι ίδιες στρατηγικές σημειώθηκαν και στην γραπτή επίλυση με ελαφρώς μεγαλύτερη συχνότητα (10 και 4 φορές αντιστοίχως). Στην γραπτή επίλυση υπήρξαν περιπτώσεις μαθητών που χρησιμοποίησαν την στρατηγική της Χρήσης Ισοδύναμων κλασμάτων ($4 \times \frac{6}{12} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$), την αλγεβρική ($4 \times \frac{6}{12} = \chi => 4 \times 6 = \chi \times 12 => 24 = 12\chi => 2 = \chi$) αλλά και κάποιο συνδυασμό στρατηγικών.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι 36 στους 127 μαθητές (28,34%) δεν κατάφεραν να απαντήσουν σωστά στον νοερό υπολογισμό και 12 δεν απάντησαν καθόλου. Με την μετάβαση στην γραπτή επίλυση αν και ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων παρέμεινε σχεδόν ο ίδιος (34), το ποσοστό όμως έπεσε στο 22% λόγω του μεγαλύτερου πλήθους απαντήσεων. Ο αριθμός των αναπάντητων μειώθηκε στο μισό (6) ενώ παρατηρήθηκε και μία μη-κωδικοποίησή απάντηση.

Κι εδώ φαίνεται μια μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών στην γραπτή επίλυση όχι όμως εντυπωσιακή σε επίπεδο αριθμών. Εντύπωση προκαλούν, το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων παρά το χαμηλό επίπεδο δυσκολίας του υπολογισμού καθώς και το πλήθος των μαθητών που επέλεξαν τον αλγόριθμό.

	Μαθητές Δημοτικού		Μαθητές Λυκείου	
	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	28	33	46	53
Απλοποίηση	-		4	10
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	-	1	4
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων	-	-	-	7
Αλγεβρικά	-	-	-	1
Συνδυασμοί			-	5
Λάθος	26	27	10	7
Αναπάντητα	11	5	1	1
Non-codable	-	-	-	1
ΣΥΝΟΛΟ	**65**	**65**	**62**	**89**

Πίνακας 4.8: Δραστηριότητα 2 - Αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης ανά ομάδα πληθυσμού.

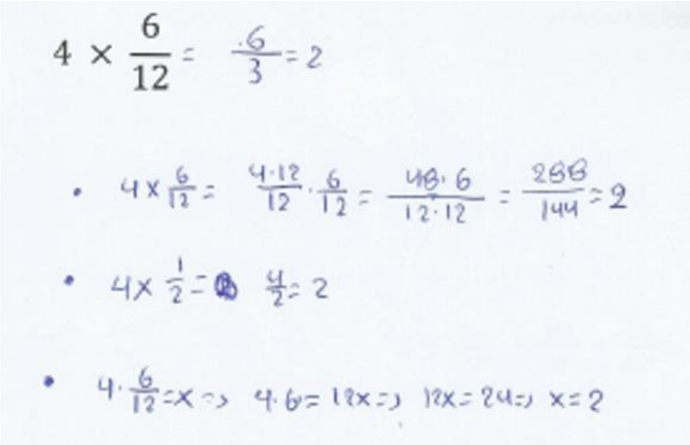
Συνεχίζοντας στην εξέταση κάθε βαθμίδας ξεχωριστά, γίνεται αμέσως αντιληπτή η έλλειψη στρατηγικών πέρα από αυτή της χρήσης αλγορίθμου στους μαθητές του Δημοτικού. Τόσο στην νοερή όσο και στην γραπτή επίλυση ο αλγόριθμος αποτέλεσε τον μοναδικό τρόπο λύσης. Παρομοίως και τα λάθη κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα και στις δυο περιπτώσεις (26 και 27 λανθασμένες απαντήσεις), με μόνο τον αριθμό των αναπάντητων να μειώνεται από τα 11 στα 5.

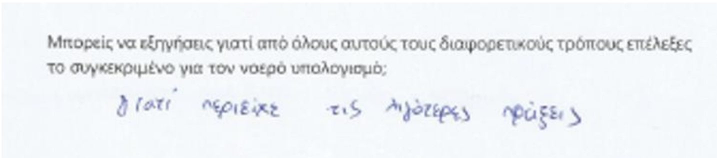
Περνώντας στους μαθητές του Λυκείου, παρά τις επιμέρους διαφορετικές στρατηγικές που εμφανίστηκαν, η επικράτηση της χρήσης του αλγορίθμου ως του πιο διαδεδομένου τρόπου επίλυσης συνεχίζεται. Αρχικά στην νοερή επίλυση ο αλγόριθμος αποτέλεσε το 90,19% των σωστών απαντήσεων με μόνο 5 μαθητές να επιλέγουν την στρατηγική της απλοποίησης (4 απαντήσεις) και της μετατροπής συμβολικής παράστασης (1 απάντηση). Εντοπίστηκαν μόνο 10 λάθη, κάνοντας την 2η δραστηριότητα αυτή με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας, ενώ ένας μαθητής δεν έδωσε απάντηση. Στη φάση του γραπτού υπολογισμού, 53 από τις 80 συνολικές σωστές απαντήσεις, βασίστηκαν στον αλγόριθμο. Οι συχνότητες των στρατηγικών της απλοποίησης και της μετατροπής αυξήθηκαν ελαφρώς ενώ εντοπίστηκαν και σωστές λύσεις που έγιναν με τη χρήση των στρατηγικών των ισοδύναμων κλασμάτων (7 απαντήσεις), την αλγεβρική (1 απάντηση) αλλά και των συνδυασμό στρατηγικών (5 απαντήσεις). Το πλήθος των λαθών και των αναπάντητων παρέμεινε σε σχεδόν ίδια επίπεδα και μία απάντηση καταχωρήθηκε ως μην κωδικοποίησή.

Αριθμός Διαφορετικών Γραπτών Στρατηγικών	Καμία (0) Στρατηγική	Μια (1) Στρατηγική	Δύο (2) Στρατηγικές	Τρεις (3) Στρατηγικές	Τέσσερις(4) Στρατηγικές
Μαθητές Δημοτικού	32	33	-	-	-
Μαθητές Λυκείου	9	36	10	5	2
ΣΥΝΟΛΟ	**41**	**69**	**10**	**5**	**2**

Πίνακας 4.9: Δραστηριότητα 2 – Αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά μονάδα πληθυσμού.

Περνώντας στον αριθμό διαφορετικών γραπτών στρατηγικών, είναι ξεκάθαρο πως κανένας μαθητής του Δημοτικού δεν κατάφερε να παρουσιάσει περισσότερες από μία στρατηγική στην γραπτή επίλυση, όπως επίσης και το 72,58% των μαθητών του Λυκείου. Ωστόσο υπήρξαν περιπτώσεις μαθητών οι οποίοι κατάφεραν να βρουν δυο (10 μαθητές), τρεις (5 μαθητές) και ακόμα και τέσσερις (2 μαθητές), διαφορετικές στρατηγικές.





Λύση με διαφορετικούς τρόπους και εξήγηση μαθητή στην 2η δραστηριότητα.

	Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	Διδασκαλία	Σιγουριά	Απουσία άλλης γνώσης	**ΣΥΝΟΛΟ**
Μαθητές Δημοτικού	1	1	-	2	**4**
Μαθητές Λυκείου	23	-	5	-	**28**

Πίνακας 4.10: Δραστηριότητα 2 - Αριθμός κατηγοριών εξηγήσεων ανά ομάδα πληθυσμού.

Τέλος, στην κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στην ερώτηση: ‘Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους τους διαφορετικούς τρόπος επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό ;’ παρατηρήθηκε πολύ χαμηλό ποσοστό ανταπόκρισής με μόλις 4 μαθητές του Δημοτικού και λιγότερους από τους μισούς μαθητές του Λυκείου (28 από τους 62).

Και σ ’αυτήν την δραστηριότητα η πλειονότητα των μαθητών (75%) εξήγησε ότι ο τρόπος επίλυσης (η επιλογή του αλγορίθμου) που ακολούθησαν βασίστηκε στην ευκολία, την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα που τους παρείχε. Δεύτερη πιο διαδεδομένη εξήγηση, (5 μαθητές) αποτέλεσε η επιλογή στρατηγικής με βάση το πόσο σίγουροι ένιωθαν οι χρήστες. Τέλος δυο μαθητές απάντησαν πως αυτός ήταν ο μόνος τρόπο που τους ήρθε στο μυαλό ενώ μόλις ένας μαθητής εξήγησε πως αυτός ήταν ο τρόπος λύσης που διδάχθηκε προκειμένου να αντιμετωπίζει ανάλογες δραστηριότητες.

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό γιατι με αυτον τον τροπο μας τον εμαθε η κυρια

Εξήγηση μαθητή στην 2η δραστηριότητα.

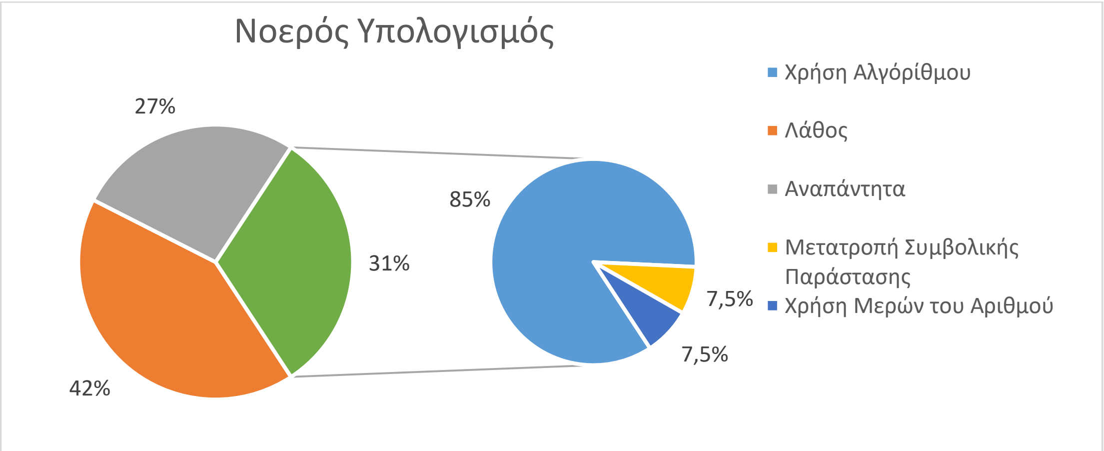
Δραστηριότητα 3η:

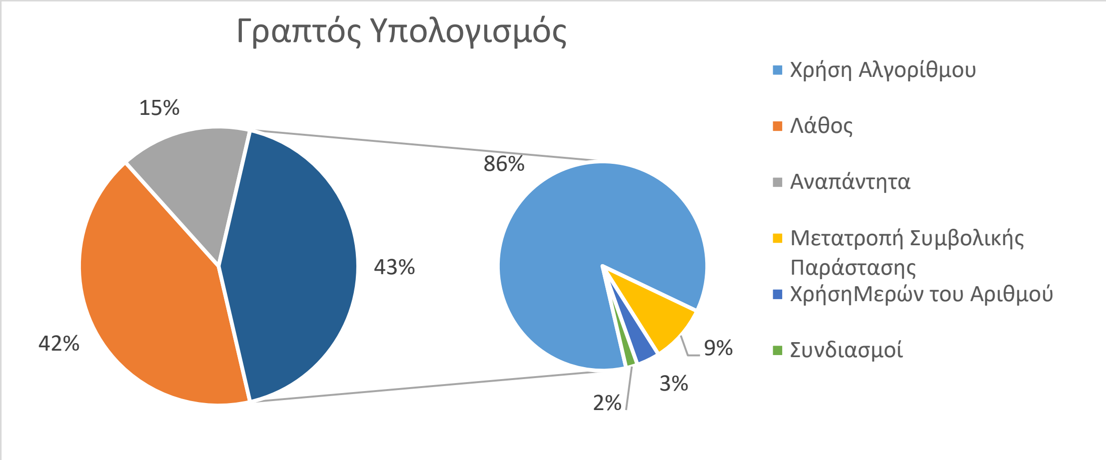
$$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.11) παρουσιάζεται η καταγραφή των επιδόσεων συνολικά των μαθητών.

	Νοερή επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	34	48
Χρήση Μερών του Αριθμού	3	2
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	3	5
Συνδυασμοί	-	1
Λάθος	53	55
Αναπάντητα	34	20
ΣΥΝΟΛΟ	**127**	**131**

Πίνακας 4.11: Δραστηριότητα 3 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης.



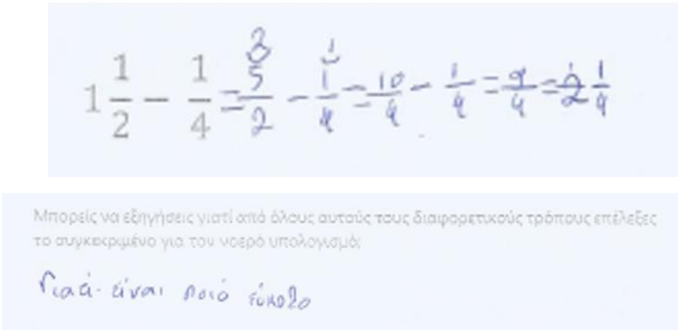


Πίνακας 4.12: Δραστηριότητα 3 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης, κυκλικά διαγράμματα.

Συνεχίζοντας με την 3η δραστηριότητα, η γενική εικόνα παραμένει η ίδια με την κυριαρχία του αλγόριθμου έναντι των υπολοίπων στρατηγικών και το μεγάλο αριθμό λανθασμένων απαντήσεων . Ωστόσο αυτό που φαίνεται να αλλάζει είναι τα ποσοστά των μαθητών που δεν κατάφεραν να απαντήσουν τόσο στην νοερή όσο και στην γραπτή επίλυση. Αναλυτικότερα στο κομμάτι των νοερών υπολογισμών σχεδόν 7 στους 10 μαθητές (69%) συνάντησε δυσκολία με τον συγκεκριμένο υπολογισμό. Με το πέρασμα στο γραπτό κομμάτι της διαδικασίας η εικόνα των μαθητών βελτιώνεται ελαφρώς με το ποσοστό αποτυχίας να μειώνεται στο 57%. Αυτό συμβαίνει λόγω της μείωσης του ποσοστού των αναπάντητων από το 27% στο 15%, το οποίο ενισχύει την περίπτωση της χρήσης του αλγόριθμου, ενώ το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων δεν μεταβλήθηκε.

Από τις σωστές απαντήσεις που σημειώθηκαν, το 85% βασιζόταν στη εφαρμογή του αλγορίθμου ($1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$), κάτι που παρέμεινε σχεδόν το ίδιο και στο γραπτή επίλυση (85,71%). Το υπόλοιπο 15% κατανεμήθηκε στις στρατηγικές της Χρήσης Μερών του Αριθμού ($1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=1\frac{1}{4}$), (3 περιπτώσεις στην νοερή και 2 στην γραπτή επίλυση) και της μετατροπή συμβολικής παράστασης ($1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1{,}5-0{,}25=1{,}25$) (3 περιπτώσεις στην νοερή και 5 στην γραπτή επίλυση). Τέλος ένας μαθητής χρησιμοποίησε συνδυασμό στρατηγικών στο γραπτό μέρος.

Αυτή ήταν η πρώτη δραστηριότητα όπου εμφανίζεται μεικτός αριθμός με την ιδιαιτερότητα ότι ζητείται μια αφαίρεση στην οποία ο αφαιρετέος είναι κλάσμα με μεγαλύτερο παρονομαστή από αυτόν του μειωτέου. Αυτό δημιουργεί απαιτήσεις εξ 'αιτίας ίσως του πλήθους των μετατροπών που απαιτούνται. Πολλοί μαθητές δεν απάντησαν, ωστόσο όσοι απάντησαν το έκαναν με τη χρήση αλγορίθμου με αποτέλεσμά να προκύψει ένας μεγάλος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων και με τον αλγόριθμο να παραμένει η πιο δημοφιλής στρατηγική των μαθητών.



Λύση και εξήγηση μαθητή στην 3η δραστηριότητα.

	Μαθητές Δημοτικού		Μαθητές Λυκείου	
	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	14	24	20	24
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	-	3	5
Χρήση Μερών του Αριθμού	2	-	1	2
Συνδυασμοί	-		-	1
Λάθος	25	28	28	27
Αναπάντητα	24	13	10	7
ΣΥΝΟΛΟ	**65**	**65**	**62**	**66**

Πίνακας 4.13: Δραστηριότητα 3 - Αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης ανά ομάδα πληθυσμού.

Σχετικά με την κατανομή των μαθητών ανά βαθμίδα εκπαίδευσης φαίνεται ότι από τους μαθητές του Δημοτικού, στην νοερή επίλυση μόνο 16 μαθητές απάντησαν σωστά, με τους 14 να χρησιμοποιούν τον αλγόριθμό και μόλις δυο την στρατηγική τη χρήση μερών του αριθμού. Η πλειοψηφία απάντησε λανθασμένα (38,46%) ενώ παρόμοιο ποσοστό μαθητών δεν απάντησε καθόλου (36.92%). Περνώντας στην γραπτή επίλυση ο αλγόριθμος γίνεται ο αποκλειστικός τρόπος λύσης ενώ ένα μέρος των μαθητών μετακινήθηκε από την κατηγορία των αναπάντητων (από 24 σε 13) στις κατηγορίες του αλγορίθμου και των λαθών.

Οι επιδόσεις των μαθητών του Λυκείου δεν διαφέρουν αναλογικά από αυτές του Δημοτικού. Οι 20 από τις 24 σωστές απαντήσεις βασίστηκαν στην χρήση του αλγορίθμου, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις στη μετατροπή συμβολικής παράστασης και τη Χρήση μερών του Αριθμού. Όπως συνέβη και με τους μαθητές της πρωτοβάθμιας η πλειοψηφία έδωσε μη έγκυρη απάντηση (28 από τις 62 απαντήσεις) ενώ δέκα μαθητές επέλεξαν να μην απαντήσουν. Η εικόνα δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα με το πέρασμα στο γραπτό κομμάτι καθώς οι αριθμοί σε όλες τις κατηγορίες μένουν στα ίδια επίπεδα. Η πιο αξιοσημείωτη διαφορά είναι ίσως η εμφάνιση της στρατηγικής του συνδυασμού από έναν μαθητή.

Αριθμός Διαφορετικών Γραπτών Στρατηγικών	Καμία (0) Στρατηγική	Μια (1) Στρατηγική	Δύο (2) Στρατηγικές
Μαθητές Δημοτικού	41	24	-
Μαθητές Λυκείου	34	24	4
ΣΥΝΟΛΟ	**75**	**48**	**4**

Πίνακας 4.14: Δραστηριότητα 3 – Αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά μονάδα πληθυσμού.

Για άλλη μια φορά οι μαθητές του Δημοτικού επέδειξαν απουσία σε ποικιλία στρατηγικών ενώ πολύ περιορισμένη ήταν και αυτή των μαθητών του Λυκείου, καθιστώντας την δραστηριότητα, αυτή ως την δραστηριότητα με τις λιγότερες γραπτές απαντήσεις. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μόλις τέσσερις μαθητές του Λυκείου κατάφεραν να επιλύσουν την 3η δραστηριότητα με περισσότερους από έναν τρόπους με το 96,85% των μαθητών είτε να περιορίζεται σε μόνο έναν (κυρίως τον αλγόριθμο) είτε να μην τα καταφέρνει καθόλου.

	Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	Διδασκαλία	Σιγουριά	Απουσία άλλης γνώσης	**ΣΥΝΟΛΟ**
Μαθητές Δημοτικού	2	-	-	2	**4**
Μαθητές Λυκείου	12	1	1	3	**17**

Πίνακας 4.15: Δραστηριότητα 3 - Αριθμός κατηγοριών εξηγήσεων ανά ομάδα πληθυσμού.

Εμφανής ήταν και η δυσκολία των μαθητών να τεκμηριώσουν την επιλογή της νοερής στρατηγικής που έκαναν. Ο αριθμός απαντήσεων ήταν υπερβολικά μικρός αφού απάντησαν μόνο 21 από τους 127 συνολικά μαθητές. Περισσότερες από τις μισές εξηγήσεις (14 περιπτώσεις) κατατάχθηκαν στην κατηγορία της ευκολίας-ταχύτητας και αποτελεσματικότητας. Πέντε μαθητές ανέφεραν πως δεν μπόρεσαν να σκεφτούν κάποια διαφορετική στρατηγική. Ακόμα υπήρξε μία περίπτωση μαθητή που δικαιολόγησε πως η επιλογή του ήταν σύμφωνη με τον τρόπο που τους έχουν δείξει στο σχολείο ενώ κάποιος άλλος εξήγησε πως η επιλογή του έγινε με βάση το αίσθημα σιγουριάς που του παρείχε.

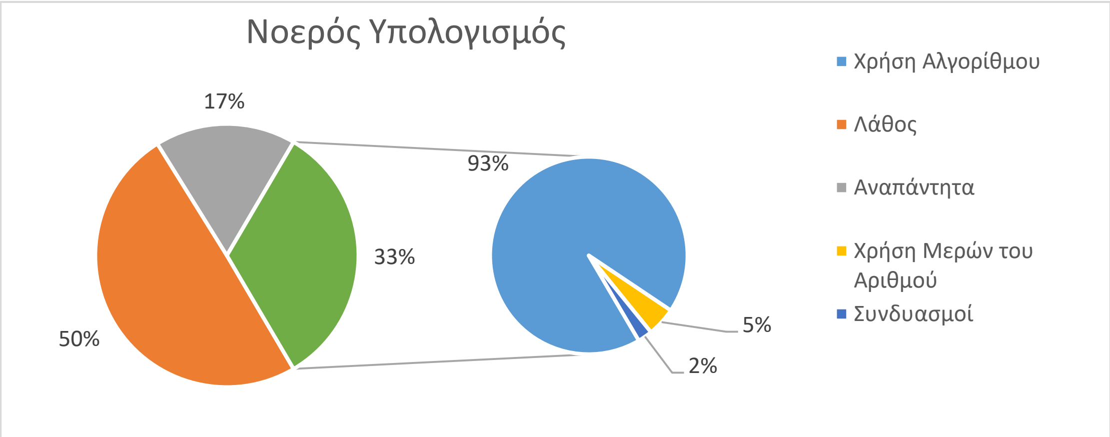
Δραστηριότητα 4^η:

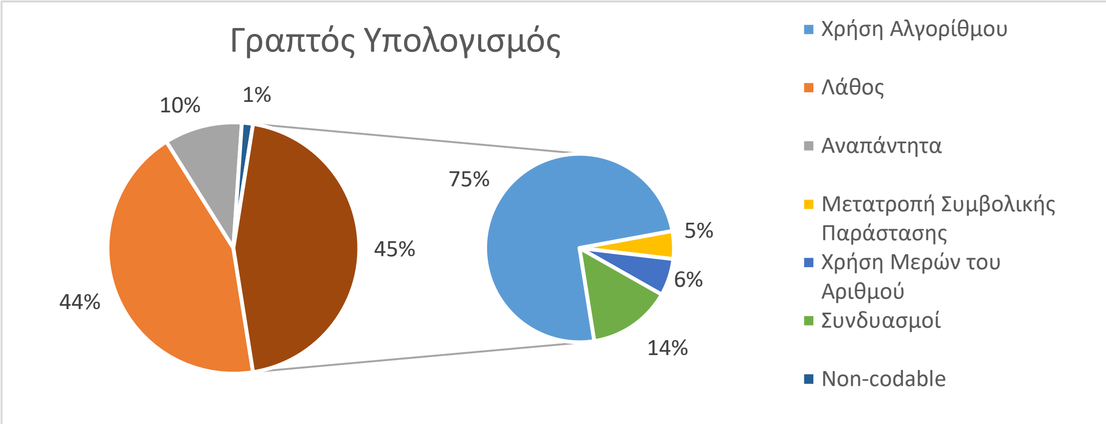
$$2\frac{5}{10} \times 2$$

Στον πίνακα 4.16., τοποθετήθηκαν οι συνολικές νοερές και γραπτές απαντήσεις των μαθητών της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

	Νοερή επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση αλγορίθμου	39	47
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	3
Χρήση Μερών του Αριθμού	2	4
Συνδυασμοί	1	9
Λάθος	63	61
Αναπάντητα	22	14
Non-codable	-	2
ΣΥΝΟΛΟ	**127**	**140**

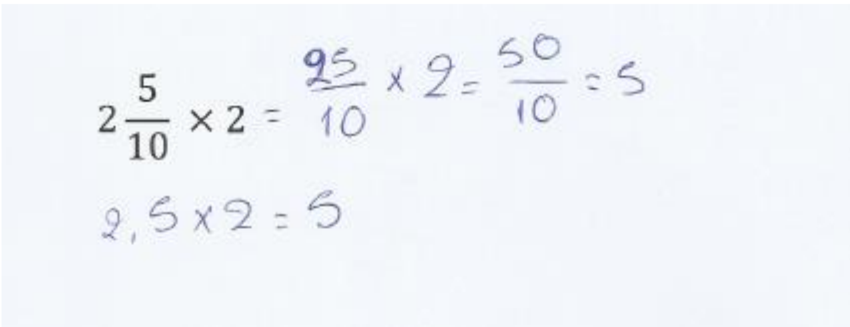
Πίνακας 4.16: Δραστηριότητα 4 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης.





Πίνακας 4.17: Δραστηριότητα 4 - Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης, κυκλικά διαγράμματα.

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.17., τα υψηλότερα νούμερα συγκεντρώνονται στην στρατηγική του αλγορίθμου και στις λανθασμένες απαντήσεις τόσο στην νοερή όσο και στην γραπτή επίλυση. Ξεκινώντας με τους νοερούς υπολογισμούς, το 92.85% των σωστών απαντήσεων αξιοποίησαν τον αλγόριθμο ($2\frac{5}{10} \times 2 = \frac{25}{10} \times 2 = \frac{25\times2}{10} = \frac{50}{10} = 5$). Μόνο τρεις σωστές απαντήσεις καταγράφηκαν οι οποίες αξιοποίησαν τις στρατηγικές της χρήσης μερών του αριθμού ($2\frac{5}{10} \times 2 = (2 \times 2) + \left(\frac{5}{10} \times 2\right) = 4 + 1 = 5$) και του συνδυασμού στρατηγικών. Στη γραπτή επίλυση προστέθηκε και η στρατηγική της μετατροπής συμβολικής παράστασής ($2\frac{5}{10} \times 2 = 2{,}5 \times 2 = 5$), με τις υπόλοιπες μη-αλγοριθμικές στρατηγικές να εμφανίζονται ελαφρά αυξημένες. Η χρήση του αλγορίθμου ωστόσο κυριάρχησε για ακόμα μια φορά καταλαμβάνοντας το 74,6% των σωστών απαντήσεων.



Λύση μαθητή με διαφορετικούς τρόπους στη 4η δραστηριότητα.

Εντύπωση προκαλεί πως περίπου, τους 2 στους 3 μαθητές δεν μπόρεσαν να ανταποκριθούν στον νοερό υπολογισμό. Αν και οι επιδόσεις αυξήθηκαν ελαφρώς κατά τη μετάβαση στους γραπτούς υπολογισμούς, το 54% των μαθητών απέτυχε, δίνοντας είτε εσφαλμένες λύσεις (44%) είτε αδυνατώντας να απαντήσει (10%). Τέλος δυο απαντήσεις κρίθηκαν μη-κωδικοποιήσιμες.

Η δραστηριότητα φαίνεται να δυσκόλεψε όσους επιχείρησαν να την επιλύσουν, αφού συγκέντρωσε τα υψηλότερα ποσοστά λαθών τόσο στην νοερή όσο και στην γραπτή επίλυση. Επιπλέον η επιμονή των μαθητών στη επιλογή του αλγορίθμου δεν βοήθησε την κατάσταση καθώς απαιτεί την ακολουθία πολλών βημάτων αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα εμφάνισης κάποιου λάθους.

	Μαθητές Δημοτικού		Μαθητές Λυκείου	
	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	23	25	16	22
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	-	-	3
Χρήση Μερών του Αριθμού	-	1	2	3
Συνδυασμοί	-	-	1	9
Λάθος	29	31	34	30
Αναπάντητα	13	8	9	6
Non-codable	-	-	-	2
ΣΥΝΟΛΟ	**65**	**65**	**62**	**75**

Πίνακας 4.18: Δραστηριότητα 4 - Αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης ανά ομάδα πληθυσμού.

Βλέποντας τις επιδόσεις των μαθητών ανά βαθμίδα εκπαίδευσής, γίνεται εύκολα αντιληπτό το μεγάλο πλήθος μην ορθών απαντήσεων. Αρχικά στο Δημοτικό, η μέχρι τώρα εικόνα δεν φαίνεται να αλλάζει, με τον αλγόριθμο να αποτελεί το μοναδικό τρόπο υπολογισμού πλην μόνο μιας περίπτωσης στην γραπτή επίλυση όπου εφαρμόστηκε η στρατηγική της χρήση μερών του αριθμού. Αντιθέτως τα λάθη και η έλλειψη απάντησης φτάνουν ποσοστά της τάξεως του 64,6% στους νοερούς υπολογισμούς και 60% στους γραπτούς.

Αναφορικά με τους μαθητές του Λυκείου, ο αλγόριθμος αγγίζει το ποσοστό του 84,2% των σωστών απαντήσεων (16 από τις 19). Μόλις δυο μαθητές χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της χρήσης μερών και ένας το συνδυασμό στρατηγικών. Στην γραπτή επίλυση οι μαθητές παρουσιάζουν ελαφρώς μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών καθώς εμφανίστηκε και η στρατηγική της μετατροπής συμβολικής παράστασης (τρεις φορές). Επίσης η στρατηγική του συνδυασμού αυξήθηκε από την μια στις εννιά απαντήσεις, ενώ ο αριθμός των αναπάντητων μειώθηκε από τις εννιά στις έξι. Ωστόσο ο αλγόριθμος παρέμεινε στη κορυφή των προτιμήσεων καταλαμβάνοντας το 56,41%. Τέλος, σε αυτήν την δραστηριότητα σημειώθηκαν οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις από κάθε άλλη δραστηριότητα τόσο στο νοερό όσο και στο γραπτό μέρος της διαδικασίας (34 και 30 λανθασμένες απαντήσεις αντιστοίχως).

Αριθμός Διαφορετικών Γραπτών Στρατηγικών	Καμία (0) Στρατηγική	Μια (1) Στρατηγική	Δύο (2) Στρατηγικές	Τρεις(3) Στρατηγικές
Μαθητές Δημοτικού	39	26	-	-
Μαθητές Λυκείου	38	13	9	2
ΣΥΝΟΛΟ	**77**	**39**	**9**	**2**

Πίνακας 4.19: Δραστηριότητα 4 – Αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά μονάδα πληθυσμού.

Συνεχίζοντας με τον αριθμό των μαθητών και τον αριθμό των διαφορετικών γραπτών στρατηγικών, γίνεται αμέσως φανερό πως μόνο 11 μαθητές αποκλειστικά και μόνο του Λυκείου, κατάφεραν να παρουσιάσουν από δυο μέχρι τρεις εναλλακτικές στρατηγικές. Μόνο μια στρατηγική (κυρίως τον αλγόριθμο) εφάρμοσαν 39 μαθητές ενώ ένα ποσοστό της τάξεως του 60,62% δεν έλυσε την δραστηριότητα.

	Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	Σιγουριά	Απουσία άλλης γνώσης	**ΣΥΝΟΛΟ**
Μαθητές Δημοτικού	1	-	2	**3**
Μαθητές Λυκείου	12	2	1	**15**

Πίνακας 4.20: Δραστηριότητα 4 - Αριθμός κατηγοριών εξηγήσεων ανά ομάδα πληθυσμού.

Η δραστηριότητα αυτή συγκέντρωσε το μικρότερο αριθμό εξηγήσεων. Από τον Πίνακα 4.20, γίνεται φανερό ότι μόνο το 14,17% του δείγματος εξήγησε που βασίστηκε για την επιλογή της νοερής στρατηγικής. Για την ακρίβεια πρόκειται για 18 από τους 127 μαθητές , από τους οποίους οι 15 φοιτούσαν σε κάποια τάξη του Λυκείου ενώ οι υπόλοιποι τρεις στο Δημοτικό. Η συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων αφορούσε την ευκολία-ταχύτητα-αποτελεσματικότητα (13 από τις 18 απαντήσεις). Δυο μαθητές ακολούθησαν την στρατηγική για την οποία ένιωθαν δικαιολόγησαν την επιλογή τους στη σιγουριά που ένιωθαν σχετικά με την στρατηγική που εφάρμοσαν ενώ άλλοι τρεις μαθητές ανέφεραν πως δεν μπόρεσαν να σκεφτούν κάποιο άλλο διαφορετικό τρόπο.

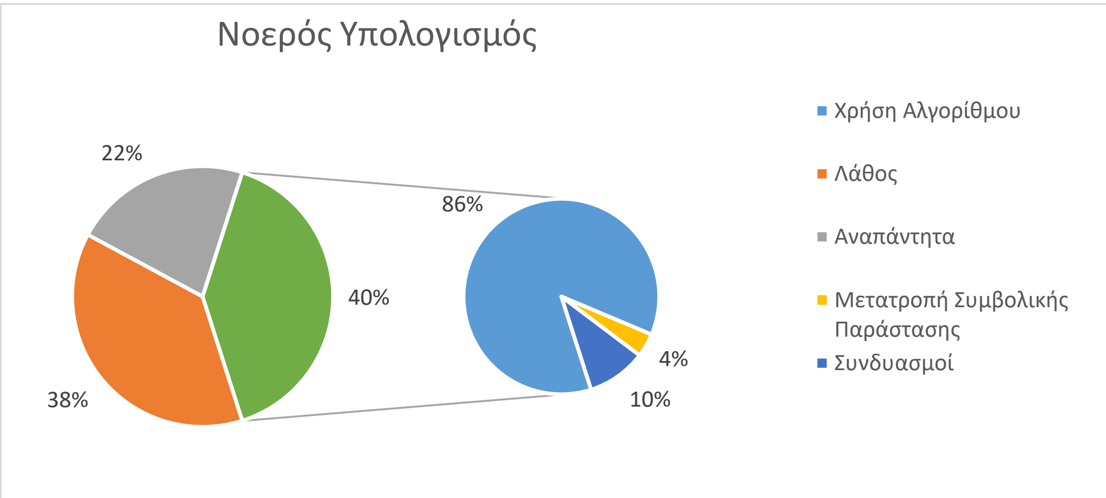
Δραστηριότητα 5η:

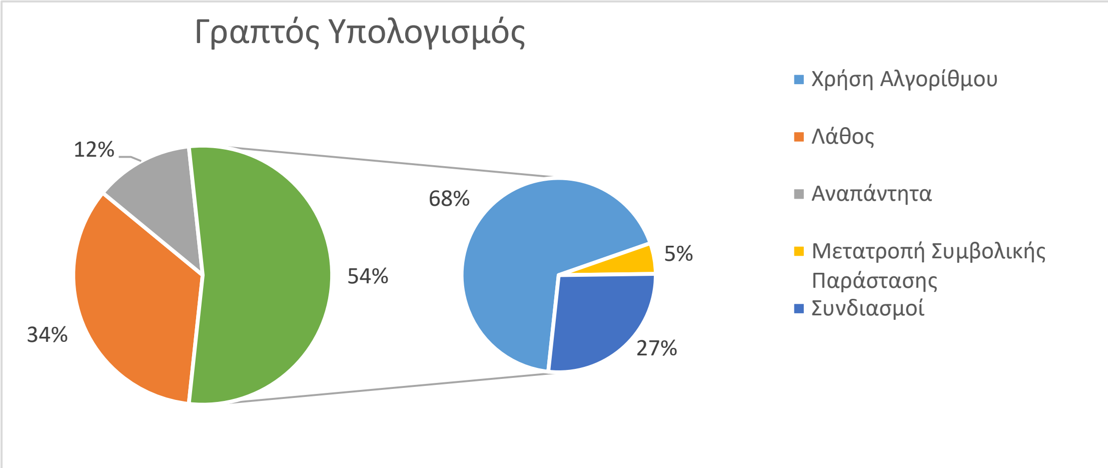
$$8 \div \frac{4}{8}$$

Στην 5η και τελευταία δραστηριότητα της συλλογής τα αποτελέσματα που συγκεντρώθηκαν ήταν τα εξής:

	Νοερή επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση αλγορίθμου	44	53
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	2	4
Συνδυασμοί	5	21
Λάθος	48	50
Αναπάντητα	28	18
ΣΥΝΟΛΟ	**127**	**146**

Πίνακας 4.21: Δραστηριότητα 5- Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης.



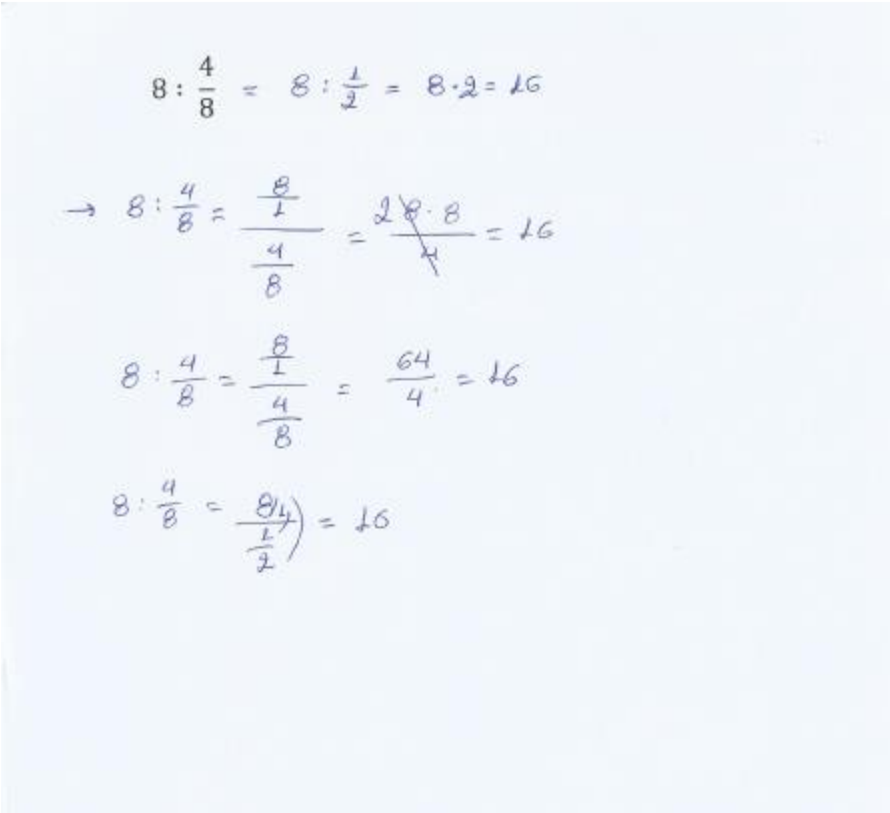


Πίνακας 4.22: Δραστηριότητα 5 – Συνολικά αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης, κυκλικά διαγράμματα.

Στη τελευταία δραστηριότητα η γενική επικράτηση του αλγορίθμου και των λανθασμένων απαντήσεων παραμένει και της δυο κατηγορίες υπολογισμού. Στον νοερό υπολογισμό το 86,27% των σωστών απαντήσεων δόθηκε με την χρήση του αλγορίθμου $(8 \div \frac{4}{8} = 8 \times \frac{8}{4} = \frac{8{\times}8}{4} = \frac{64}{4} = 16)$ ενώ το αντίστοιχο ποσοστό της γραπτούς υπολογισμούς κυμάνθηκε στο 67,94%. Επιπλέον έγινε εφαρμογή των στρατηγικών της μετατροπής συμβολικής παράστασης $(8 \div \frac{4}{8} = 8 \div 0{,}5 = 16)$ και του συνδυασμού στρατηγικών οι οποίες αυξήθηκαν σημαντικά στο γραπτό μέρος (5 της νοερούς ενώ 21 της γραπτούς υπολογισμούς).

Και της δυο διαδικασίες, τα λάθη κατέλαβαν σημαντικά ποσοστά (38% και 34%) ενώ αρκετά υψηλός ήταν και ο αριθμός των μαθητών που δεν ήταν σε θέση να δώσουν κάποια απάντηση (28 μαθητές της νοερούς υπολογισμούς και 18 της γραπτούς).

Η δραστηριότητα αυτή θεωρήθηκε δυσκολότερη λόγω της απαιτούμενης διαίρεσης και φαίνεται όντως να δυσκόλεψε αρκετούς μαθητές καθώς ήταν αρκετοί εκείνοι που είτε έδωσαν λανθασμένη απάντηση είτε δεν απάντησαν καθόλου. Όσοι απάντησαν σωστά βασίστηκαν κυρίως στην χρήση του αλγόριθμου.



$$8 : \frac{4}{8} = 8 : \frac{1}{2} = 8 \cdot 2 = 16$$

$$\rightarrow 8 : \frac{4}{8} = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{4}{8}} = \frac{2\cancel{8} \cdot 8}{\cancel{4}} = 16$$

$$8 : \frac{4}{8} = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{4}{8}} = \frac{64}{4} = 16$$

$$8 : \frac{4}{8} = \frac{8/4}{\frac{1}{2}} = 16$$

Λύση μαθητή με διαφορετικούς τρόπους στην $5^{η}$ δραστηριότητα.

	Μαθητές Δημοτικού		Μαθητές Λυκείου	
	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση	Νοερή Επίλυση	Γραπτή Επίλυση
Χρήση Αλγορίθμου	18	21	26	32
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	-	2	4
Συνδυασμοί	-	-	5	21
Λάθος	21	27	27	23
Αναπάντητα	26	17	2	1
ΣΥΝΟΛΟ	**65**	**65**	**62**	**81**

Πίνακας 4.23: Δραστηριότητα 5 – Αποτελέσματα νοερής και γραπτής επίλυσης ανά ομάδα πληθυσμού.

Συνεχίζοντας στην κατανομή των απαντήσεων στην κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα γίνεται φανερό πως όσοι μαθητές του Δημοτικού απάντησαν σωστά το έκαναν μόνο με τη χρήση του αλγορίθμου τόσο στον νοερό υπολογισμό (18 μαθητές από τους 65) όσο και στον γραπτό (21 από τους 65), ενώ όλοι οι υπόλοιποι έκαναν λάθος ή δεν απάντησαν.

Η ομάδα των μαθητών του λυκείου αν και παρουσίασε μεγαλύτερη ποικιλία διαφορετικών στρατηγικών (μετατροπή συμβολικής παράστασης και συνδυασμό στρατηγικών) η παρουσία τους περιορίστηκε σε αρκετά χαμηλά επίπεδα. Στον νοερό υπολογισμό η πλειονότητα αρκέστηκαν στην επιλογή του αλγόριθμου (26 από τους 33 μαθητές), ενώ οι περισσότεροι ήταν αυτοί που έκαναν κάποιο λάθος (27 από τους 62). Με το πέρασμα στους γραπτούς υπολογισμούς παρατηρήθηκε αύξηση στις απαντήσεις που έγιναν με την χρήση του αλγορίθμου (26=>32) και ιδιαίτερα με του συνδυασμό (5=>21), καθώς οι υπόλοιπες κατηγορίες παρέμειναν σε παρόμοια επίπεδα.

Αριθμός Διαφορετικών Γραπτών Στρατηγικών	Καμία (0) Στρατηγική	Μια (1) Στρατηγική	Δύο (2) Στρατηγικές	Τρεις (3) Στρατηγικές	Τέσσερις(4) Στρατηγικές
Μαθητές Δημοτικού	44	21	-	-	-
Μαθητές Λυκείου	24	25	8	4	1
ΣΥΝΟΛΟ	**68**	**46**	**8**	**4**	**1**

Πίνακας 4.24: Δραστηριότητα 5 – Αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά μονάδα πληθυσμού.

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.24., κανένας μαθητής του Δημοτικού δεν μπόρεσε να βρει παραπάνω από μία στρατηγική όταν κληθήκαν να λύσουν την δραστηριότητα και γραπτά. Από τους μαθητές του Λυκείου, μόνο ένα μικρό ποσοστό της τάξεως του 20% μπόρεσαν να δώσουν πάνω από μια λύσεις. Πιο συγκεκριμένα το 12,9% των μαθητών κατάφερε να επιδείξει δύο διαφορετικές στρατηγικές, ενώ το 6.45% κατάφερε να βρει τρεις στρατηγικές. Μόνο ένας μαθητής έλυσε αυτή τη δραστηριότητα με τέσσερις στρατηγικές σε μεγάλη αντίθεση με το υπόλοιπο 79,03% όπου έδωσε μία ή καμία απάντηση.

	Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	Διδασκαλία	Σιγουριά	Απουσία άλλης γνώσης	**ΣΥΝΟΛΟ**
Μαθητές Δημοτικού	1	-	-	1	**2**
Μαθητές Λυκείου	14	1	7	3	**25**

Πίνακας 4.25: Δραστηριότητα 5 - Αριθμός κατηγοριών εξηγήσεων ανά ομάδα πληθυσμού.

Για ακόμα μια φορά, μικρό είναι το ποσοστό των μαθητών που ήταν σε θέση να εξηγήσουν την επιλογή της στρατηγικής τους (21,25%). Από αυτούς μόνο δυο είναι μαθητές Δημοτικού. Οι περισσότεροι μαθητές (15 από τους 27) δήλωσαν πως η επιλογή τους βασίστηκε στο ότι ο τρόπος που επέλεξαν ήταν ο πιο εύκολος, γρήγορος ή ακόμα και ο πιο αποτελεσματικός που γνώριζαν. Η δεύτερη δημοφιλέστερη εξήγηση (7 μαθητές) ήταν το αίσθημα της σιγουριάς που παρείχε στους μαθητές η επιλογή τους. Τέσσερις μαθητές απάντησαν πως δεν είχαν κάποια άλλη επιλογή μιας και ήταν ο μοναδικός τρόπος τον οποίο ήξεραν ή θυμούνταν. Τέλος, σημειώθηκε ακόμα μία διαφορετική εξήγηση: πως στο σχολείο τους έχουν μάθει να χρησιμοποιούν αυτόν τον τρόπο.

5. Συζήτηση.

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 5.1), παρουσιάζονται όλες οι απαντήσεις των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και για τις πέντε δραστηριότητες:

Στρατηγικές	Συχνότητά εμφάνισης					
	Νοερή Επίλυση			Γραπτή Επίλυση		
	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	**ΣΥΝΟΛΟ**	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	**ΣΥΝΟΛΟ**
Χρήση Αλγορίθμου	97	132	**229**	123	173	**296**
Χρήση Ισοδύναμων Κλασμάτων	-	6	**6**	-	26	**26**
Χρήση Μερών του Αριθμού	2	3	**5**	1	6	**7**
Μετατροπή Συμβολικής Παράστασης	-	8	**8**	1	19	**20**
Απλοποίηση	-	4	**4**	-	10	**10**
Αλγεβρικά	-		**-**	-	2	**2**
Συνδυασμοί	-	7	**7**	-	37	**37**
Λάθος	138	125	**263**	148	104	**252**
Αναπάντητα	88	24	**112**	53	15	**68**
Non Codable	-	1	**1**	-	3	**3**
ΣΥΝΟΛΟ	**325**	**310**	**635**	**326**	**395**	**721**

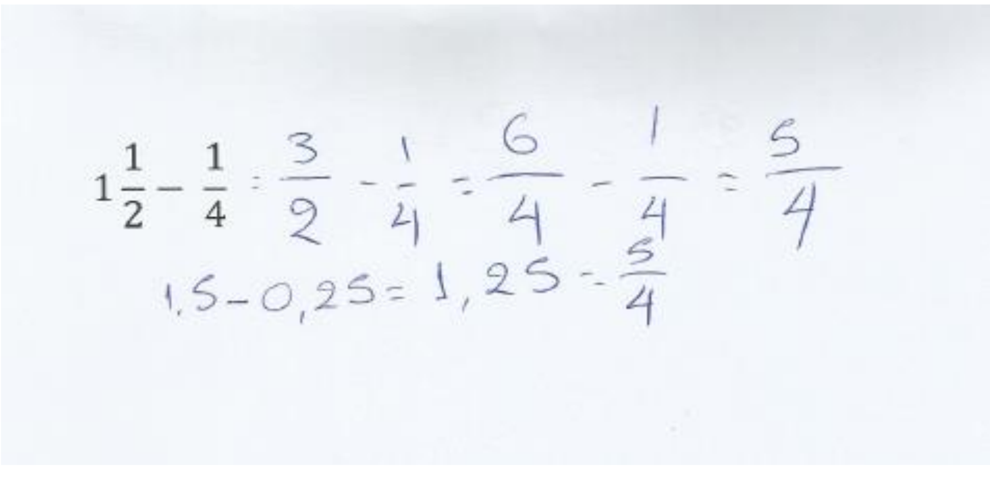
Πίνακας 5.1: Συνολικά νοερά και γραπτά αποτελέσματα ανά πληθυσμό.

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που μελετούσε το εύρος των στρατηγικών των μαθητών και ξεκινώντας με τους μαθητές που φοιτούν στις δυο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, οι στρατηγικές που παρατηρήθηκαν στην νοερή επίλυση περιορίστηκαν σε μόλις δυο. Από τις 99 σωστές απαντήσεις, οι 97 δόθηκαν με την χρήση του αλγορίθμου (ποσοστό 97,97%) ενώ μόνο δυο με την χρήση μερών του αριθμού. Με την μετάβαση στην γραπτή επίλυση η εικόνα των σωστών απαντήσεων παραμένει απαράλλαχτη. Η χρήση του αλγορίθμου εμφανίστηκε 123 φορές (από τις 125 σωστές, ποσοστό 98,4%). Από τις υπόλοιπες στρατηγικές εμφανίζονται από μια φορά η χρήση μερών του αριθμού και η στρατηγική της μετατροπής συμβολικής παράστασης Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα, τα λάθη ξεπέρασαν τις σωστές απαντήσεις κατά σημαντικό βαθμό τόσο στη νοερή όσο και στην γραπτή επίλυση (138 από τις 325 και 148 από τις 326. Τέλος οι δραστηριότητες που έμειναν χωρίς απάντηση ήταν αρκετές και στα δυο είδη επίλυσης αλλά ιδιαίτερα στην νοερή. Συνολικά οι μαθητές του Δημοτικού είχαν να επιδείξουν στην ουσία μόνο μια στρατηγική, αυτή του αλγόριθμου. Αυτό δεν φαίνεται να συσχετίζεται με τον τρόπο υπολογισμού (γραπτός ή νοερός). Αυτό που φαίνεται να παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον είναι η μείωση των αναπάντητων με το πέρασμα στην γραπτή επίλυση (88=>53), γεγονός που μπορεί να υποδηλώνει άγχος κατά την προφορική επίλυση ή μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση με το χαρτί και μολύβι. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί πως σε καμία απολύτως δραστηριότητα οι σωστές απαντήσεις δεν ξεπέρασαν τον συνολικό αριθμό λανθασμένων και αναπάντητων ούτε στη νοερή αλλά ούτε και στην γραπτή επίλυση. Έτσι δεν μπορούμε καν να μιλήσουμε για εύρος στρατηγικών αφού στην ουσία περιορίζονται μόνο στην περίπτωση του αλγόριθμου.

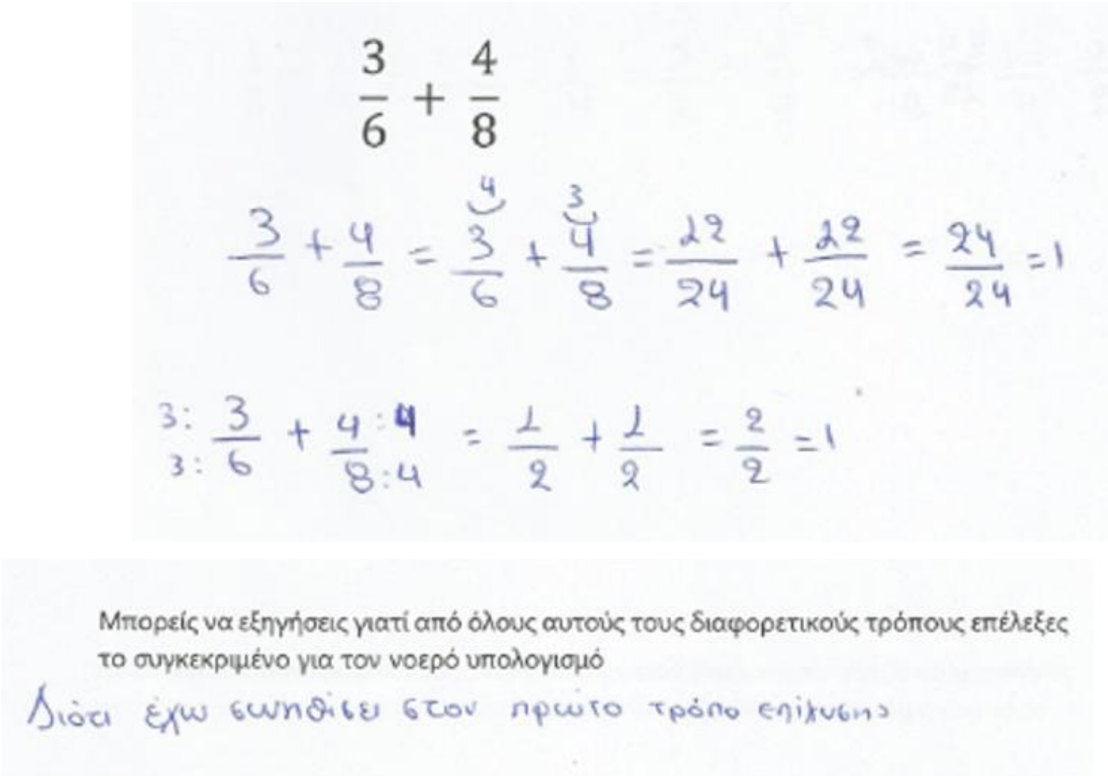
Περνώντας τώρα στους μαθητές της Δευτεροβάθμιας παρατηρείται ένα μεγαλύτερο εύρος στρατηγικών. Ήδη από την νοερή επίλυση εντοπίστηκαν έξι διαφορετικές στρατηγικές: η χρήση του αλγορίθμου, η χρήση ισοδύναμων κλασμάτων, η χρήση μερών του αριθμού, η μετατροπή συμβολική αναπαράστασης, η απλοποίηση και τέλος οι συνδυασμοί. Αν και το εύρος αυτό φαίνεται αρχικά εντυπωσιακό καμία, από αυτές δεν ξεπέρασε τον αριθμό των οκτώ απαντήσεων, με εξαίρεση φυσικά αυτή του αλγορίθμου η οποία κατέλαβε το 82,5% των σωστών απαντήσεων (132 από τις 160). Η εικόνα είναι λίγο πολύ η ίδια στην γραπτή επίλυση όπου παρατηρήθηκε μια νέα στρατηγική, η αλγεβρική. Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση παρά την αύξηση του πλήθους των στρατηγικών αλλά και της συχνότητάς εμφάνισης αυτών καμία δεν μπόρεσε να πλησιάσει την στρατηγική της χρήσης του αλγορίθμου (173 από τις 273 σωστές απαντήσεις, δηλ. 63,36%). Σχετικά με τις λανθασμένες απαντήσεις, τα ποσοστά ήταν ιδιαίτερα υψηλά σε σχέση με τις απαιτήσεις των δραστηριοτήτων (40,32% στην νοερή και 26,32% στην νοερή επίλυση). Επίσης στην περίπτωση των μαθητών του Λυκείου υπήρξαν και μερικές περιπτώσεις όπου οι απαντήσεις που δόθηκαν δεν μπόρεσαν να κατηγοριοποιηθούν, ωστόσο αυτές περιορίστηκαν σε αρκετά χαμηλά νούμερα. Σε γενικές γραμμές η εικόνα των μαθητών βελτιώθηκε ελαφρώς στην γραπτή επίλυση αν και αναλογίες φαίνονται να παραμένουν σταθερές, π.χ.: η κυριαρχία του αλγορίθμου έναντι των άλλων στρατηγικών και ο μεγάλος αριθμός λαθών.

Γενικά φαίνεται ότι οι μαθητές, ανεξαρτήτως σχολικής βαθμίδας, έχουν ως πρώτη επιλογή για τους υπολογισμούς τους την διαδικασία του αλγορίθμου. Επίσης, ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων ήταν πολύ μεγάλος τόσο για τους μαθητές του Δημοτικού όσο και του Λύκειο. Οι διαφορές ανάμεσα στις δυο ομάδες εντοπίζονται σε δυο σημεία. Πρώτον, στο εύρος των στρατηγικών, με τους μαθητές τους Δημοτικού να παρουσιάζουν συνολικά τρεις διαφορετικές στρατηγικές ενώ ο αριθμός αυξάνεται στις 7 στους μαθητές του Λυκείου. Δεύτερο, ο αριθμός των αναπάντητων παρουσιάζει υψηλά νούμερα στην νοερή αλλά και στην γραπτή επίλυσης στους μαθητές του Δημοτικού σε αντίθεση με αυτόν των μαθητών Λυκείου όπου παραμένει συγκριτικά χαμηλός.

Παρατηρώντας τις επιδόσεις συνολικά όλων των μαθητών, γίνεται ξεκάθαρη η υπεροχή του αλγορίθμου έναντι όλων των υπολοίπων στρατηγικών. Καταλαμβάνοντας ποσοστά των σωστών απαντήσεων της τάξεως του 88,41% στην νοερή και 74,37% στην γραπτή επίλυση. Την ίδια στιγμή η επόμενη σε σειρά κατάταξης στρατηγική συγκεντρώνει 8 και 37 απαντήσεις, στην νοερή στην γραπτή αντιστοίχως. Αυτοί οι αριθμοί στην ουσία καταργούν κάθε ανάγκη σύγκριση των στρατηγικών μεταξύ τους. Το γεγονός της κυριαρχίας της αλγοριθμικής προσέγγισης αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον αν αναλογιστούμε ότι οι δραστηριότητες ήταν σχεδιασμένες ώστε να ευνοούν την επιλογή διαφορετικών στρατηγικών πέρα από αυτή του αλγορίθμου. Για παράδειγμα, ήδη από την πρώτη δραστηριότητα ($\frac{3}{6}+\frac{4}{8}$) ο υπολογισμός είναι σχεδόν προφανής σε σημείο που ο λύτης δεν χρειάζεται καν να κάνει πράξεις, αναλογιζόμενος ότι στην ουσία πρόκειται για την πρόσθεση δυο 'μισών' Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τρίτη δραστηριότητα ($1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$), η οποία μπορεί να λυθεί αμέσως και χωρίς περίπλοκες διαδικασίες αν ο λύτης σκεφτεί να μετατρέψει τα κλάσματα σε δεκαδικούς οπότε προκύπτει η απλή αφαίρεση $1{,}5-0{,}25$. Σε κάθε περίπτωση, ο αλγόριθμος αποτέλεσε την δημοφιλέστερη στρατηγική από την πλειοψηφία των μαθητών σε όλες τις δραστηριότητες.



Λύση μαθητή με διαφορετικούς τρόπους στην 3η δραστηριότητα.



Λύση με διαφορετικούς τρόπος και εξήγηση μαθητή στην 1η δραστηριότητα.

Το δεύτερο σημείο που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι τα υψηλά ποσοστά αποτυχίας. Στην νοερή επίλυση εντοπίστηκαν 263 λανθασμένες απαντήσεις, ξεπερνώντας ακόμα και τον αλγόριθμο, ενώ άλλοι 112 υπολογισμοί έμειναν αναπάντητοι. Αθροιστικά το ποσοστό αποτυχίας (λανθασμένες – αναπάντητες – μαζί με μια μη-κατηγοριοποιήσιμη απάντηση) φτάνει στο 59,21% του συνολικού αριθμού απαντήσεων. Το αντίστοιχο ποσοστό στην γραπτή επίλυση αν και μειώθηκε ελαφρώς παρέμεινε στο υψηλό 44,79%. Αυτό δηλαδή που κάνει φανερό ο συγκεντρωτικός πίνακας είναι ότι οι επιλογές είναι στην ουσία είτε ο αλγόριθμος είτε μια μη επιτυχής προσπάθεια και αυτό δεν φαίνεται να διαφοροποιείται από την μια βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη.

Στη συνέχεια ο Πίνακας 5.2, προσεγγίζει το σύνολο των μαθητών στη βάση του πόσες διαφορετικές στρατηγικές μπορούν να ανακαλέσουν όταν γραπτά τους ζητείται να κάνουν υπολογισμούς.

Διαφορετικές Γραπτές Στρατηγικές	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	**ΣΥΝΟΛΟ**
Καμία (0) Στρατηγική	201	122	**323**
Μια (1) Στρατηγική	123	123	**246**
Δύο (2) Στρατηγικές	1	49	**50**
Τρεις (3) Στρατηγικές	-	13	**13**
Τέσσερις(4) Στρατηγικές	-	3	**3**
ΣΥΝΟΛΟ	**325**	**310**	**635**

Πίνακας 5.2: Συνολικός αριθμός διαφορετικών γραπτών στρατηγικών ανά πληθυσμό.

Ο πίνακας με την πρώτη ματιά επιβεβαιώνει τον πιο πάνω ισχυρισμό. Το σύνολο των μαθητών του Δημοτικού στην φάση του γραπτού υπολογισμού δεν έχει να επιδείξει κάτι πέραν του αλγορίθμου ή της λανθασμένης απάντησης (0 ή 1 στρατηγική). Επομένως δεν είναι το πλαίσιο που επέβαλε την συγκεκριμένη επιλογή αφού η εικόνα και στα δυο πλαίσια είναι η ίδια. Υπήρξε μία και μοναδική περίπτωση μαθητή όπου αξιοποιήθηκαν δυο διαφορετικές στρατηγικές. Στους μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το σκηνικό φαίνεται να μεταβάλλεται. Μια προσεκτική όμως ανάγνωση των δεδομένων δείχνει ότι δεν πρόκειται για μεγάλες αλλαγές συγκριτικά με τους μικρούς μαθητές. Οι λύτες κατάφεραν να επιδείξουν γνώση τριών ακόμα και τεσσάρων διαφορετικών στρατηγικών. Ωστόσο αν και ενθαρρυντικό το γεγονός αυτό, οι περιπτώσεις αυτές είναι σε υπερβολικά χαμηλά επίπεδα. Η πλειονότητα περιορίστηκε σε μόνο μια στρατηγική, αυτή του αλγορίθμου (123 περιπτώσεις), ενώ σχεδόν παρόμοιος ήταν ο αριθμός των αποτυχημένων απαντήσεων (122 περιπτώσεις).

Συμπερασματικά μπορεί να ειπωθεί ότι στην περίπτωση των μαθητών του Λυκείου ο αριθμός των αποτυχημένων απαντήσεων μειώθηκε αισθητά, ταυτόχρονα αυξήθηκε η κατηγορία των δυο στρατηγικών (1=>49) ενώ η κατηγορία της μιας στρατηγικής παρέμεινε ακριβώς στα ίδια νούμερα (123 περιπτώσεις).

Συνοψίζοντας, περίπου ένας στους δυο μαθητές δεν κατάφερε να παρουσιάσει καμία στρατηγική (50,86%), ενώ στη πλειοψηφία το 78,84% των σωστών γραπτών απαντήσεων βασίστηκε αποκλειστικά σε μόνο μια στρατηγική, αυτή του αλγορίθμου. Οι περιπτώσεις όπου η σωστή απάντηση έγινε με τρεις και τέσσερις διαφορετικές στρατηγικές κυμάνθηκαν στα ποσοστά του 4,16% και 0,96% αντίστοιχα.

Φαίνεται λοιπόν ότι το ερώτημα για το εύρος των στρατηγικών έχει καθαρή απάντηση. Για τους περισσότερους μαθητές οι επιλογές εμφανίζονται να είναι δύο. Ή γίνεται χρήση του αλγορίθμου για τον υπολογισμό, ή παρουσιάζεται αδυναμία να ανταποκριθούν. Η εικόνα πολύ λίγο βελτιώνεται στους μαθητές της Δευτεροβάθμιας, χωρίς όμως να ανατρέπει το γεγονός τόσο της κυριαρχίας του αλγορίθμου όσο και της εκτεταμένης αδυναμίας στο να ανταποκριθούν.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα που κλήθηκε να απαντήσει η παρούσα έρευνα ήταν: ‘Με ποιο κριτήριο αποφασίζουν οι λύτες την επιλογή στρατηγικής στους νοερούς υπολογισμούς ;’. Ο πίνακας συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών συνολικά ανά βαθμίδα στο σύνολο των υπολογισμών που είχαν να κάνουν.

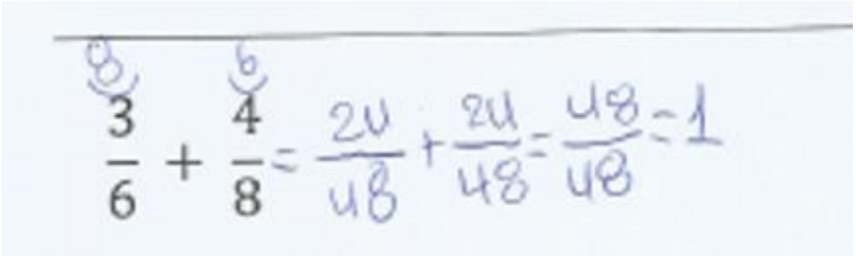
Εξηγήσεις Νοερής Επίλυσης	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	**ΣΥΝΟΛΟ**
Ευκολία Ταχύτητα Αποτελεσματικότητα	7	80	**87**
Διδασκαλία	1	2	**3**
Σιγουριά	1	28	**29**
Απουσία άλλης Γνώσης	8	5	**13**
ΣΥΝΟΛΟ	**17**	**115**	**132**

Πίνακας 5.3: Συνολικές εξηγήσεις απόφασης στρατηγικής ανά πληθυσμό.

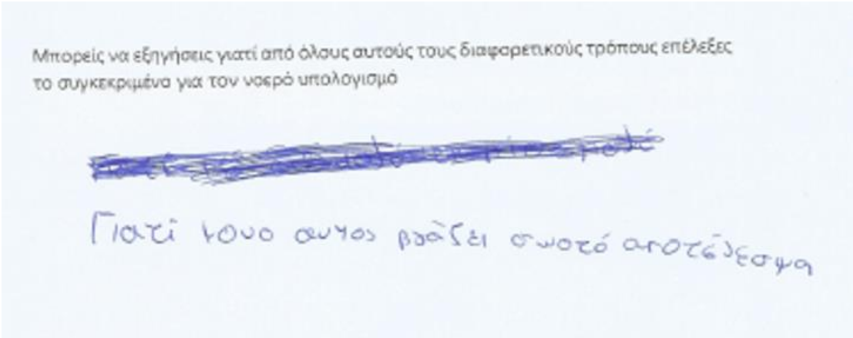
Η ανάλυση των απαντήσεων οδήγησε σε πέντε διαφορετικά κριτήρια επιλογής όπως αυτά παρουσιάζονται στο παραπάνω πίνακα. Στην δεύτερη στήλη συγκεντρώθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπου εντύπωση προκαλεί το μικρό πλήθος συμμετοχής. Συνολικά ζητήθηκε σχετική απάντηση για 325 δραστηριότητες (65 μαθητές επί πέντε δραστηριότητες). Ωστόσο συνολικά μόνο 17 επεξηγήσεις δόθηκαν προκειμένου να εξηγήσουν τη στρατηγική που επέλεξαν. Για τους μαθητές του Δημοτικού φαίνεται ότι κυρίως δυο ήταν οι λόγοι που οδήγησαν στην επιλογή του αλγορίθμου. Ο ένας σχετιζόταν με το γεγονός ότι η στρατηγική αυτή θεωρείται από τους μαθητές ότι προσφέρει ευκολία, ταχύτητα και αποτελεσματικότητα (7 απαντήσεις). Ο άλλος λόγος ήταν ότι ήταν ο μοναδικός τρόπος που γνώριζαν (απουσία άλλης γνώσης, 8 απαντήσεις). Τέλος οι δυο εναπομείναντες απαντήσεις μοιράστηκαν στις κατηγορίες της Διδασκαλίας και της Σιγουριάς.

Με τους μαθητές τις Δευτεροβάθμιας το πλήθος των εξηγήσεων αυξάνεται σημαντικά δεδομένου ότι οι δυο πληθυσμοί ήταν περίπου του ίδιου μεγέθους (62 μαθητές έναντι των 65 αυτών του Δημοτικού). Αν και θετικό το γεγονός αυτό και πάλι το μεγαλύτερο μέρος μαθητών δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει την απόφαση του πάνω στην επιλογή στρατηγικής. Δεν δόθηκε λοιπόν εξήγηση για το 62,90% των απαντήσεων. Οι απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν κατανέμονται ως εξής: Το 69,5% των απαντήσεων (80 από τις 115 εξηγήσεις) κατηγοριοποιήθηκαν στην Ευκολία-Ταχύτητα-Αποτελεσματικότητα, ενώ δεύτερο πιο δημοφιλές κριτήριο αποτέλεσε η σιγουριά που παρείχε στους χρήστες η συγκεκριμένη στρατηγική (28 περιπτώσεις). Οι περιπτώσεις όπου το κριτήριο αποτέλεσε ο τρόπος διδασκαλίας που λαμβάνει χώρο της τάξη, ήταν δυο, ενώ πέντε την τεκμηρίωσαν στη βάση απουσίας άλλης γνώσης.

Εστιάζοντας την προσοχή στην συνολική εικόνα του δείγματος, χαρακτηριστική ήταν η αδυναμία των μαθητών να τεκμηριώσουν τις επιλογές τους. Συγκεντρώθηκε τεκμηρίωση μόνο για το $\frac{1}{5}$ (132 από τις 635 δυνατές περιπτώσεις) του αναμενόμενου πλήθους εξηγήσεων. Παρατηρήθηκε πως αρκετοί μαθητές απέφυγαν να απαντήσουν την ερώτηση καθότι δεν μπόρεσαν να αξιοποιήσουν κάποιο διαφορετικό τρόπο στην γραπτή επίλυση από αυτόν που είχαν ήδη αναφέρει στην νοερή επίλυση. Αυτό κατά κάποιο τρόπο αφήνει να εννοηθεί ότι αν υπήρχε απάντηση αυτή θα ήταν στην κατηγορία ¨Απουσία άλλης γνώσης». Ενδιαφέρον παρουσιάζει όμως ένα παράδοξο που εμφανίζεται στις απαντήσεις. Στη φάση του νοερού υπολογισμού ήταν σχεδόν καθολική η προτίμηση στον αλγόριθμο. Η επιλογή αυτή από τους ίδιους τους μαθητές (οι περισσότεροι έδωσαν την απάντηση αυτή) βασίστηκε στο ότι θεωρούν πως η προσέγγιση αυτή παρέχει ευκολία, ταχύτητα, αποτελεσματικότητα. Δεν μπορεί κανείς να αμφισβητήσει το τελευταίο. Όμως δημιουργεί εντύπωση το ότι για μια δραστηριότητα όπως π.χ.: η $\frac{3}{6}+\frac{4}{8}$ όπου μια προσέγγιση είναι «αναγνωρίζω τα δυο μισά άρα το άθροισμα είναι 1» οι συμμετέχοντας θεωρούν ότι γρηγορότερο και ευκολότερο είναι να κάνουν νοερά τα κλάσματα ομώνυμα, να τα προσθέσουν, και να απλοποιήσουν το αποτέλεσμα για να πάρουν ως αποτέλεσμα 1. Το εύρημα αυτό κατέχει ιδιαίτερη θέση στην έρευνα αυτή, καθώς κάτι τέτοιο αναδεικνύει το παράδοξο που αναφέρθηκε πιο πάνω. Η δεύτερη μεγάλη ομάδα απαντήσεων έχει κι αυτή το δικό της ενδιαφέρον. Κάποιος επιλέγει τον αλγόριθμο επειδή νιώθει σιγουριά με αυτόν ανεξάρτητα του πόσο μακροσκελής ή απαιτητικός μπορεί να είναι σε επίπεδο νοερής επίλυσης.



$$\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{24}{48}+\frac{24}{48}=\frac{48}{48}=1$$



Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένα για τον νοερό υπολογισμό

Γιατί μονο αυτος βγάζει σωστό αποτέλεσμα

Λύση και εξήγηση μαθητή στην 1η δραστηριότητα.

6. Συμπεράσματα.

Η σημασία που δίνει η ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών στους νοερούς υπολογισμούς και την επιλογή στρατηγική νοερού υπολογισμού είναι μεγάλη. Στα πλαίσια αυτά δόθηκε σε μαθητές της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η ίδια συλλογή δραστηριοτήτων ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί. Φαίνεται λοιπόν, πως οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου όταν καλούνται να λύσουν μια δραστηριότητα με ρητούς αριθμούς η μοναδική στρατηγική που είναι σε θέση να επιστρατεύσουν είναι αυτή του αλγορίθμου. Αυτό ισχύει είτε σε νοερούς είτε σε γραπτούς υπολογισμούς. Αναφορικά με τους μαθητές του Λυκείου, αν και μπορούν να εμφανίσουν κάποιο εύρος στις στρατηγικές, αυτό περιορίζεται σε πολύ μικρά ποσοστά με την πλειοψηφία να επιλέγει και αυτή τον αλγόριθμό ως στρατηγική επίλυσης. Η εικόνα επικρατεί στη νοερή και στη γραπτή επίλυση, αλλά σε μεγαλύτερο βαθμό στην πρώτη.

Άρρητα συνδεδεμένα με το προηγούμενο εύρημα είναι, η μικρή ευελιξία που παρουσίασαν οι μαθητές. Αρχικά οι μαθητές του Δημοτικού και Λυκείου δυσκολεύονται να απαντήσουν σωστά σε τέτοιες δραστηριότητες (τόσο νοερά όσο και γραπτά) ενώ όσοι είναι σε θέση να το κάνουν χρησιμοποιούν ως επί το πλείστων μόνο μια στρατηγική. Μόνο μια μικρή μερίδα μαθητών του Λυκείου μπόρεσε να παρουσιάσει από δυο έως και τέσσερις διαφορετικούς τρόπους λύσεων.

Τέλος η έρευνα έδειξε πως οι μαθητές επιλέγουν κυρίως την στρατηγική του αλγορίθμου με βάση την «αποτελεσματικότητα, την ταχύτητα και ευκολία» που παρέχει αυτή η επιλογή. Το επιχείρημα ακούγεται αντικειμενικό αλλά με καθαρά μαθηματικά κριτήρια δημιουργεί ένα παράδοξο γιατί η εφαρμογή του δημιουργεί αυξημένο γνωστικό φόρτο συγκριτικά με μια νοερή προσέγγιση του υπολογισμού. Ταυτόχρονα πολλοί μαθητές δεν ήταν σε θέση να δώσουν κάποια εξήγηση για την επιλογή τους.

Η έρευνα αυτή έρχεται να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα που προέκυψαν από μια ανάλογη έρευνα των Papadopoulos, et al.,(2019). Ένα από τα βασικά ερωτήματα που είχαν προκύψει, ήταν το κατά πόσο η επικράτηση του αλγορίθμου είναι προϊόν επιλογής μέσα από μια ποικιλία διαθέσιμων στρατηγικών ή η μοναδική επιλογή λόγω απουσία γνώσης άλλων στρατηγικών. Φαίνεται ότι υπάρχει ένας συνδυασμός των παραπάνω τόσο για τους μαθητές του Δημοτικού όσο και του Λυκείου που έδειξαν πως δεν είναι σε θέση να αξιοποιήσουν άλλους τρόπους διαφορετικούς από τον

Αλγόριθμο είτε επειδή τον θεωρούν ως τη βέλτιστη στρατηγική χωρίς λόγο ύπαρξης άλλων στρατηγικών είτε επειδή δεν γνωρίζουν κάποιο άλλο τρόπο υπολογισμού.

Η περίοδος κατά την οποία έλαβε χώρα η έρευνα συμπίπτει με την παρουσία της πανδημίας Covid-19, που δεν έχει αφήσει τίποτα ανεπηρέαστό στην πορεία της και κατά συνέπεια επηρέασε και την πορεία υλοποίησης της έρευνας. Η συλλογή των δεδομένων αλλά και η εύρεση του ίδιου του δείγματος αποδείχθηκε δύσκολη λόγω της υποχρεωτικής καραντίνας και των αυστηρών μέτρων λειτουργίας των σχολείων. Έτσι η πρόσβαση σε μεγαλύτερο δείγμα αλλά και σε φοιτητές δεν στάθηκε δυνατή. Έτσι ο σχετικά μικρός αριθμός συμμετεχόντων αποτελεί έναν περιορισμό για την έρευνα και την γενίκευση των συμπερασμάτων της.

Τα ευρήματα της έρευνας προκαλούν όχι μόνο τον προβληματισμό για τις δυνατότητες των μαθητών στην επιχειρηματολογία, αλλά κυρίως για τις ικανότητες τους στα Μαθηματικά αλλά και στο τρόπο με τον οποίο αυτά διδάσκονται μέσα στις τάξεις. Η έρευνα με τα ευρήματά της αναδεικνύει μια ενδιαφέρουσα πραγματικότητα σχετικά με το θέμα που διαπραγματεύεται. Βέβαια για να γενικευτούν τα συμπεράσματα, θα πρέπει να λάβει χώρα έρευνα μεγαλύτερης κλίμακας η οποία θα συμπεριλαμβάνει και φοιτητές από διαφορετικά τμήματα θα μπορέσει να αναδείξει σφαιρικά την πραγματική εικόνα σχετικά με το θέμα των νοερών υπολογισμών με ρητούς. Επίσης ενδιαφέρον θα είχε μια παρόμοια έρευνα η οποία ωστόσο θα επικεντρώνονταν στους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Βιβλιογραφία.

- Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης.
- Λυγούρας, Γ. (2012). Η επίδραση κοινωνικών και ψυχολογικών παραγόντων στην ευελιξία μαθητών Στ' τάξης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή,* Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.
- Ashcraft, M. H. (1990). Strategic mental processing in children's mental arithmetic: A review and proposal. In D. F. Bjorklund (Ed*.), Children's strategies* (pp. 185–211). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Askew, M. (1998). *Teaching Primary Mathematics.* London: Hodder and Stoughton.
- Beilock, S. L., & DeCaro, M. S. (2007). From poor performance to success under stress: Working memory, strategy selection, and mathematical problem solving under pressure. *Journal of Experimental Psychology*: *Learning, Memory, and Cognition, 33*, 983–998.
- Blote, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*, 627–638. doi:10.1037/0022-0663.93.3.627.
- Caney, A., Watson, J. M., (2003). Mental computational strategies for part-whole Numbers. *Paper presented at the joint AARE/NZARE Conference,* Auckland, and University of Tasmania.
- Carathéodory, C. (1924). About Mathematics in Secondary Education. *Deltion of Hellenic Mathematical Society, vol. E,* 83–88 (in Greek).
- Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2013). Students' Mental Computation Strategies with Fractions. In Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M. A. (Eds.)*. Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 283-292)*.* Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.
- Carvalho, R., & Ponte, J., P. (2015). Student's strategies and errors in mental computation with rational numbers in open number sentences. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 245-251). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

- Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2017). Mental computation with rational numbers: students' mental representations. *Journal of Mathematics Education, 10*(2), 17-29. doi:10.26711/007577152790010.
- Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2019). Mental computation: An opportunity to develop students' strategies in rational number division. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 387-394). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI]. (2010*). Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Retrieved February 21, 2017, http://corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20 Standards.pdf
- Csikos, C. (2012). Success and strategies in 10 year old students' mental three-digit addition. In Tso,T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 179-186). Taipei, Taiwan: PME.
- Csikos, C. (2016). Strategies and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 123-139.
- DeCaro, M. S., (2016). Inducing mental set constraints procedural flexibility and conceptual understanding in mathematics. *Memory and Cognition, 44*:1138–1148. doi: 10.3758/s13421-016-0614-y.
- Dehaene, S. (1997). The number sense: How the mind creates mathematics. New York, NY: *Oxford University Press*.
- Elia, I., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education* (2009) 41:605–618.
- Erdem, E. (2017). Mental Computation: Evidence from Fifth Graders. *International Journal of Science and Mathematic Education. 15(6),* 1157–1174
- Gürbüz, R., Erdem, E. (2016). Relationship between mental computation and mathematical reasoning. *Cogent Education. 3(1) 1212683.*
- Heinze, A., Marschick, F., Lipwosky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41,* 591-604.

- Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540. doi: 10.1007/s11858-009-0214-4.
- Heirdfield, A. M., Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior 23,* 443-463.
- Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *YC Young Children, 66(2*), pp. 96-102.
- Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grades students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *MENON Journal of Educational Research,* 12(1), 61-74.
- Lemonidis, C., Tsakiridou, E., & Meliopoulou, I. (2018). In-service teachers' Content and Pedagogical Content Knowledge in mental calculations with rational numbers*. International Journal of Science and Mathematics education, 16(6),* 1127–1145.
- Maclellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy, *Westminster Studies in Education, 24(2)*, 145–54.
- Mayer, R. E. (2010). Fostering scientific reasoning with multimedia instruction. In H. Salatas Waters & W. Schneider (Eds.), *Metacognition, strategy use, and instruction (pp. 160-175)*. New York-London: The Guilford Press.
- McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: Developing number sense. In S. Willis (Ed.). *Being numerate: What counts* (pp. 24-43). Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.
- McIntosh, A. (1996). Mental computation and number sense of Western Australian students. In: J. Mulligan, & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning* (pp. 259–276). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers, Inc.
- McIntosh, A. (2006). Mental computation of school-aged students: Assessment, performance levels and common errors*. In The Fifth Swedish Mathematics Education Research Seminar (MADIF-5)-Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning*, Malmö, Sweden.
- Ministry of National Education (MNE). (2013). *Middle school mathematics 5–8. classes teaching program*. Ankara, Turkey: Head Council of Education and Morality
- Moss, J. (2003). Introducing percents in linear measurement to foster an understanding of rational-number operations. *Teaching Children Mathematics, 9*, 335-339

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000*). Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and schoo*l. Washington, DC: National Academy Press
- Papadopoulos, I., Panagiotopoulou, S., & Karakostas, M. (2019) Mental calculations with rational numbers across educational levels. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 469-476). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction, 18*(1), 3-17*.*
- Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 309-328.
- Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2015). Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 339-345). Prague, Czech Republic.
- Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2017) Profiles of Cognitive Flexibility in Arithmetic Reasoning: A Cross-Country Comparison of German and American Elementary Students. *Journal of Mathematics Education Vol. 10, No. 1*, pp. 1-16 https://doi.org/10.26711/007577152790009.
- Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). Flexible mental calculation and „Zahlenblickschulung“. Developing flexible mental calculation in low achieving first grade students. *Münster: Waxmann*.
- Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter, (Ed*.), Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (Vol. 19, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Reys, B. J. (1985). Mental computation. *Arithmetic Teacher, 32(6)*, 43–46.
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: past, present, and future, *The Elementary School Journal, 84(5),* 546–57.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 304–326.

- Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In M. Pytlack, T. Rowland, & E. Swodoba (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 396–405). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561–574. doi:10.1037/0022-0663.99.3.561.
- Selter, C. (2000). Strategies of primary students in addition and subtraction of three-digit numbers. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(3/4), 227–258.
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics 47,* 145–173.
- Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education 41*:619–625. doi: 10.1007/s11858-009-0203-7.
- Shibata, R. (1994). Computation in Japan from the Edo Era to today: Historical reflection on the teaching of mental computation. In R.E. Reys & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty first century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States (pp. 14-18).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Siegler, R. S. (1994). Cognitive variability: A key to understanding cognitive development. *Current Directions in Psychological Science, 3*, 1–5.
- Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In J. Kilpatrick, W. B. Martin, & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219–233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Strawhun, B. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 287–301.
- Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher, 37,* 18-20.
- Sowder, J. T. (1992). Estimation and related topics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

- Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: the case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565–579. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.09.018.
- Star. J. R., & Newton, J. K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations*. ZDM Mathematics Education 41*:557–567. doi: 10.1007/s11858-009-0185-5
- Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation (this issue).
- Tenison, C., & MacLellan, L., C. (2014) Modeling Strategy Use in an Intelligent Tutoring System: Implications for Strategic Flexibility. S. Trausan-Matu et al. (Eds.): *LNCS 8474*, pp. 466–475, 2014.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1, *Mathematics in School, 28(5)*, 2–4.
- Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*. 40-42.
- Thompson, I. (2010). *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools.* Berkshire: Open University Press.
- Threlfall, T. (2000). Mental calculation strategies. *Research in Mathematics Education, 2(1),* 77-90*.*
- Threlfall, T. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 29-49.
- Threlfall, T. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education, 41,* 541-555.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 11-17.
- Vansteensel, M. J., Bleichner, M. G., Freudenburg, Z. V., Hermes, D., Aarnoutse, E. J., Leijten, F. S. S., Ferrier, H. C., Jansma, J. M., Ramsey, N. F. (2014). Spatiotemporal characteristics of electrocortical brain activity during mental calculation*. Human Brain Mapping, 35*(12), 5903–5920.
- Varol, F., Farran, D. (2007). Elementary School Students' Mental Computation Proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35(1)*, 89-94.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2007). Developing adaptive expertise: A feasible and valuable goal for (elementary) mathematics education? *Ciencias Psicologicas, 1*, 27–35.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in

elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24,* 335–359.

- Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & Van Dooren, W. (2007) Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational & Child Psychology Vol 24 No 2*. The British Psychological Society
- Yakes, C., & Star, J., R., (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 14:175–191. doi: 10.1007/s10857-009-9131-2.
- Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31(3)*, 317–334.
- Yang, D.C., Reys, R.E., & Reys, B.J. (2009). Number sense strategies used by preservice teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7 (2), 383-403.

Ευρετήριο.

7. Παράρτημα.

Στο σημείο αυτό παρατίθενται, πέντε απομαγνητοφωνημένα πρωτόκολλα, ένα για κάθε μία δραστηριότητα, στο κομμάτι της νοερής επίλυσης καθώς πέντε φωτογραφίες από τις λύσεις όπως αυτές δόθηκαν από διαφορετικούς μαθητές, στην γραπτή επίλυση.

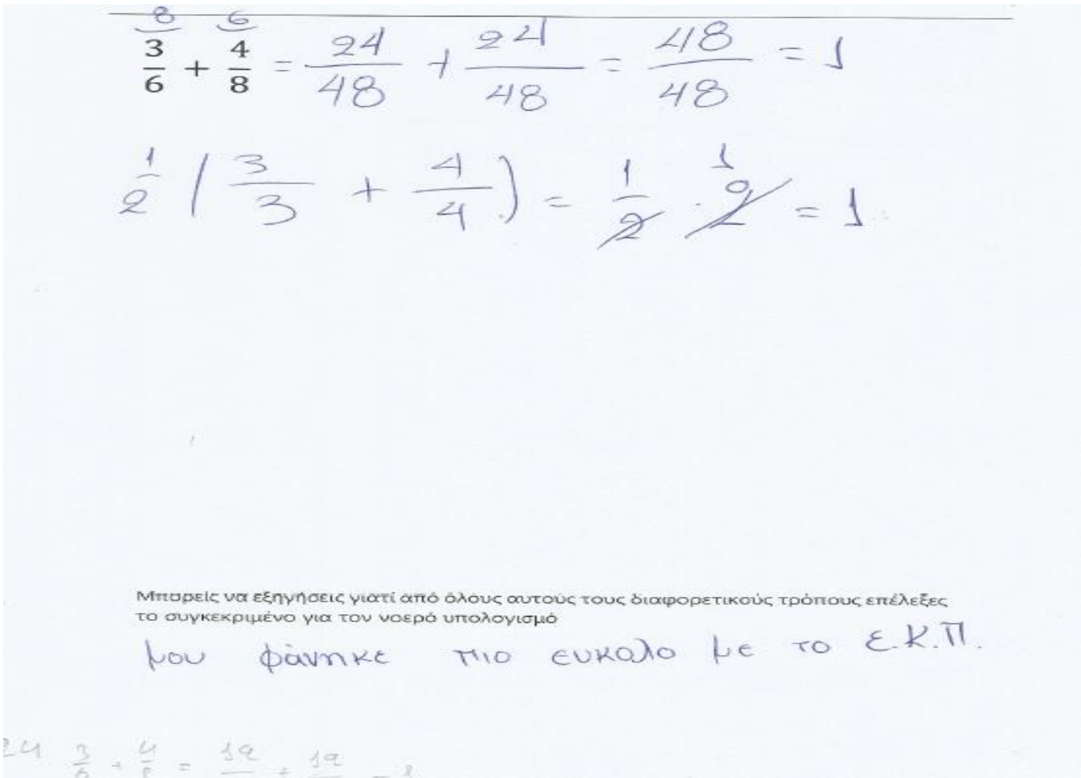
<u>Δραστηριότητα 1η</u>

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}$$

Νοερή επίλυση:

- *Ερευνητής*: Τι σκέφτεσαι να κάνεις εδώ;
- *Μαθητής*: Πρέπει τα κλάσματα να τα κάνουμε ομώνυμα, ε θα γίνει….το πρώτο κλάσμα θα γίνει $\frac{12}{24}$ και το δεύτερο....πάλι $\frac{12}{24}$ και θα τα προσθέσουμε και θα βγάλουμε $\frac{24}{24}$.

Γραπτή επίλυση:


$\overset{8}{\frac{3}{6}}+\overset{6}{\frac{4}{8}}=\frac{24}{48}+\frac{24}{48}=\frac{48}{48}=1$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}+\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1}=1$

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό

μου φάνηκε πιο ευκολο με το Ε.Κ.Π.

24 $\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{12}{}+\frac{12}{}$

<u>Δραστηριότητα 2η</u>

$$\mathbf{4} \times \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{12}}$$

Νοερή επίλυση:

- *Μαθητής*: Ε… θα το απλοποιήσουμε με τον παρονομαστή, αρά 4 δια 12 μένει από κάτω 3, 6 δια 3, 2.

Γραπτή επίλυση:

$$4 \times \frac{6}{12} = \frac{6}{3} = 2$$

- $4 \times \frac{6}{12} = \frac{4 \cdot 12}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{48 \cdot 6}{12 \cdot 12} = \frac{288}{144} = 2$
- $4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- $4 \cdot \frac{6}{12} = x \Rightarrow 4 \cdot 6 = 12x \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2$

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό;

γιατί περιείχε τις λιγότερες πράξεις

<u>Δραστηριότητα 3η</u>

$$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

Νοερή επίλυση:

- *Ερευνητής*: Αυτός είναι μεικτός αριθμός, τα θυμάσαι;
- *Μαθητής*: Ναι, λοιπόν, το πρώτο βγαίνει $\frac{3}{2}$ νομίζω, κάνουμε 1 συν 2…προσθέτουμε αυτά τα 2, όχι μισό…αυτό το μεταφράζουμε σαν 1,5 επομένως κάτι για να είναι ίσο με το 1,5 είναι το $\frac{3}{2}$, μετά μείον το $\frac{1}{4}$ τα κάνουμε πάλι ομώνυμα για να αφαιρέσουμε. Το ελάχιστό κοινό πολλαπλάσιο είναι το 4, πολλαπλασιάζουμε το $\frac{3}{2}$ με το 2 και αυτό το κλάσμα, το κάθε όρο του κλάσματος με το 1 και έτσι βγαίνει $\frac{6}{4}$ μείον $\frac{1}{4}$ δηλαδή $\frac{5}{4}$.

Γραπτή επίλυση:

$$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

1

$$1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2+1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2}-\frac{1}{4}=$$

$$\overset{2)}{\frac{3}{2}}-\overset{1)}{\frac{1}{4}}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\overset{2)}{\frac{2}{2}}+\overset{2)}{\frac{1}{2}}-\overset{1)}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό;

Επέλεξα το 1 τρόπο επειδή θεωρώ ότι πιο εύκολος και γρήγορος απο τους υπόλοιπους διότι στο τέλος έχεις να κάνεις λιγότερα κλάσματα ~~ομ~~ ομώνυμα απο ότι στον δεύτερο

Δραστηριότητα 4η

$$2\frac{5}{10}\times 2$$

Νοερή επίλυση:

- *Μαθητής*: 5.
- *Ερευνητής*: Πως το βρήκες;
- *Μαθητής*: 2 επί 10, 20 συν 5, 25 δια 10 και επί 2, 25 επί 2, 50 δια 10, 5.

Γραπτή επίλυση:

$$2\frac{5}{10}\times 2 = \frac{2\cdot 10+5}{10}\times 2 = \frac{25}{10}\times 2 = \frac{50}{10} = 5$$

$$\frac{25}{10}\times 2 = 2{,}5\cdot 2 = 5$$

$$2\frac{1}{2}\times 2 = \frac{5}{2}\times 2 = \frac{10}{2} = 5$$

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό;

~~Έκα~~ Έκανα το μεικτό κλάσμα απλό και μετά πολλαπλασίασα γιατί το σκέφτηκα έτσι από την αρχή.

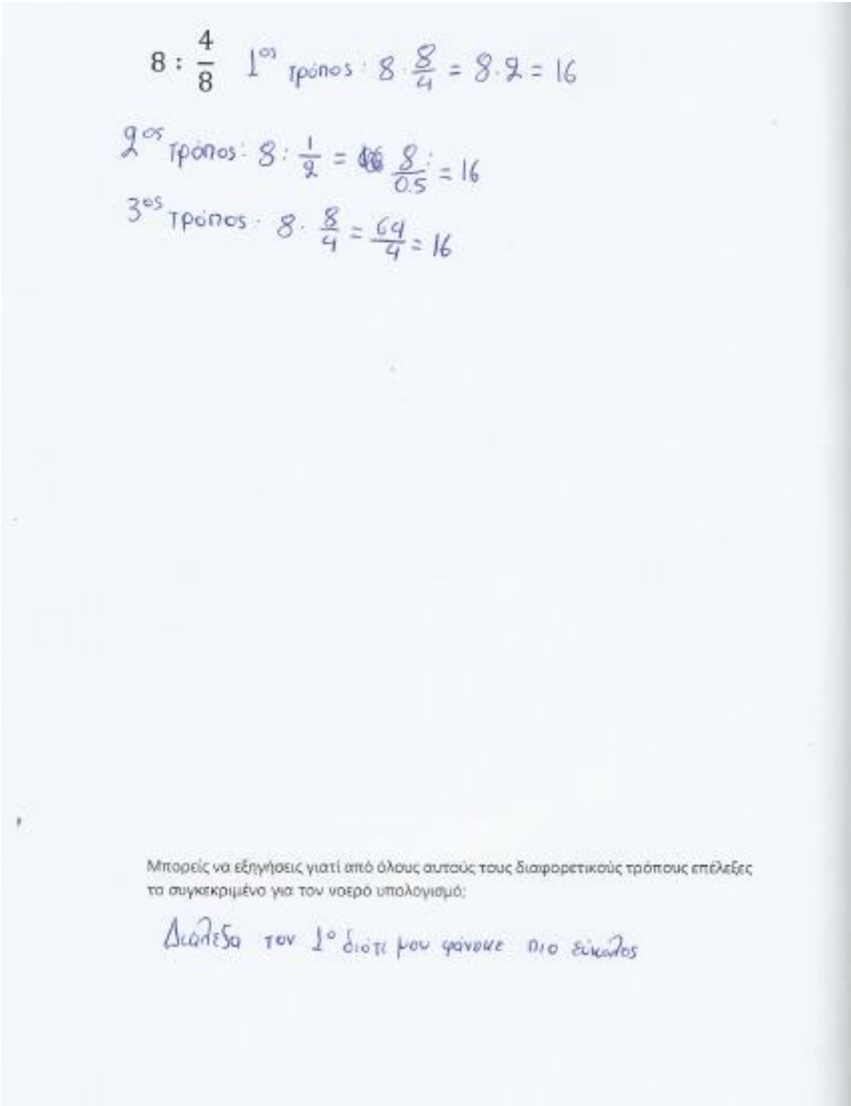
Δραστηριότητα 5η

$$\mathbf{8 : \frac{4}{8}}$$

Νοερή επίλυση:

- *Μαθητής*: 8 διά 8, το 8 είναι $\frac{1}{2}$ άρα 0,5 και το 0,5 ανεβάζει άρα 16.

Γραπτή Επίλυση:



$8 : \frac{4}{8}$ 1ος τρόπος: $8 \cdot \frac{8}{4} = 8 \cdot 2 = 16$

2ος τρόπος: $8 : \frac{1}{2} = \frac{8}{0.5} = 16$

3ος τρόπος: $8 \cdot \frac{8}{4} = \frac{64}{4} = 16$

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί από όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους επέλεξες το συγκεκριμένο για τον νοερό υπολογισμό;

Διάλεξα τον 1ο διότι μου φάνηκε πιο εύκολος