ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ ηλικιακός κύκλος (5-12 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Τα γάντια προπαίδειας ως μέσο διδασκαλίας με παράλληλη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Διδακτική παρέμβαση σε μαθητές της Β' τάξης.»

της

Ειρήνης Τεκίδου

Α.Ε.Μ.: 940

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστές: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Άννα Χρονάκη

Αθήνα, 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«**Διδακτική των Μαθηματικών**»

Εγκρίθηκε την __ / __ /2021 από Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	…………………………….
2. ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	…………………………….
3. ΧΡΟΝΑΚΗ ΑΝΝΑ	ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ	…………………………….

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Η εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας έγινε υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνου Νικολαντωνάκη, και των μελών της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Χαράλαμπου Λεμονίδη και Άννας Χρονάκη και είναι αποτέλεσμα συστηματικής προσπάθειας, έρευνας και μελέτης. Η υλοποίηση και η ολοκλήρωσή της, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την πολύτιμη βοήθεια ορισμένων ανθρώπων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δρ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε με ήθος και αισιοδοξία. Επίσης, όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού, οι οποίοι πραγματικά μού άνοιξαν νέους ορίζοντες στα Μαθηματικά.

Την Ηλιάνα Κατσαρέ που μου επέτρεψε να χρησιμοποιήσω το εργαλείο που έφτιαξε για την παρούσα διπλωματική εργασία.

Τις δασκάλες με τις οποίες συνεργάστηκα για να ολοκληρωθεί η έρευνά μου και τους εξαιρετικούς διευθυντές των σχολείων τους.

Τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα που με τόση όρεξη και ενθουσιασμό αγκάλιασαν το εγχείρημά μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπέροχο σύντροφό μου που με στηρίζει πάντα σε όλες μου τις επιλογές.

Περίληψη

“Τα γάντια της προπαίδειας ως μέσο διδασκαλίας με παράλληλη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Διδακτική παρέμβαση σε μαθητές της Β’ τάξης.”

Στην ελληνική εκπαίδευση κατά τη διδασκαλία της προπαίδειας και εν συνεχεία του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιούνται ακόμη μέθοδοι διδασκαλίας φορμαλιστικές που η μαθηματική τους αφετηρία στηρίζεται στα σύνολα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται μία πειραματική διδασκαλία της προπαίδειας με τη χρήση ιστορίας των μαθηματικών και ταυτόχρονα χρήση ενός εργαλείου για την εκμάθηση της προπαίδειας μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού. Η μέθοδος που ακολουθείται βασίζεται στις εμπειρίες των παιδιών και στα βιώματά τους πάνω στα οποία χτίζεται η νέα γνώση μέσω και της ενσώματης μάθησης, αφού τα γάντια προπαίδειας που χρησιμοποιούνται είναι ισχυρό χειραπτικό εργαλείο, το οποίο βασίζεται και στην αίσθηση των δαχτύλων. Με την ταυτόχρονη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών δημιουργείται ένα πραγματικό πλαίσιο για τα παιδιά, ώστε να αναγνωρίσουν τα μαθηματικά ως κάτι οικείο και να έρθουν σε επαφή με την ανθρώπινή τους διάσταση. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως με ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών και χρήση των γαντιών της προπαίδειας κατά τη διδασκαλία της τελευταίας, οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές που τους βοηθούν στην απομνημόνευση της προπαίδειας και μία θετική στάση προς το μάθημα των μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: Προπαίδεια, ιστορία μαθηματικών, ενσώματη μάθηση, δαχτυλικός πολλαπλασιασμός

Abstract

"The gloves of propaedia as means of teaching with a parallel didactic utilization of the History of Mathematics. Teaching intervention for second grade students. "

In Greek education, during the teaching of propedia and multiplication, formalistic teaching methods are still used, the mathematical starting point of which is based on sets. In the present survey an experimental teaching of propedia is attempted using the history of mathematics and at the same time the use of a tool for learning propedia through finger multiplication. The method followed is based on the experiences of children and their live actions on which new knowledge is built through and embodied learning, since the training gloves that are used are a powerful embodied tool, which is also based on the sense of fingers. Simultaneous use of the history of mathematics creates a real framework for children to recognize mathematics as something familiar and to come in contact with their human dimension. The results showed that by incorporating the history of mathematics and using the gloves of propedia while teaching it, students develop strategies that help them memorize propedia and a positive attitude towards mathematics in general.

Key words: propedia, history of mathematics, embodied learning, finger multiplication

Περιεχόμενα

Πρόλογος....3
Περίληψη....4
Abstract....5
Εισαγωγή....8
Κεφάλαιο 1ο – Η ιστορία των Μαθηματικών....12
1.1 Χρήση ιστορίας στη διδασκαλία μαθηματικών....13
1.2 Λόγοι υπέρ της χρήσης Ιστορίας των Μαθηματικών....14
1.2.1 Η ιστορία «ως εργαλείο»....14
1.2.2 Η ιστορία «ως στόχος»....16
1.3 Λόγοι κατά της χρήσης ιστορίας των μαθηματικών....16
1.4 Αξιοποίηση Ιστορίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση....18
1.5 Μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας....19
1.6 Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην τάξη....20
Κεφάλαιο 2ο – Πολλαπλασιασμός- Προπαίδεια....21
2.1 Ιστορική διάσταση του πολλαπλασιασμού....22
2.2 Προβλήματα στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού και της προπαίδειας....26
2.3 Τρόποι εκμάθησης προπαίδειας....29
Κεφάλαιο 3ο – Αίσθηση αριθμού....31
3.1 Αίσθηση αριθμού και πολλαπλασιασμός....31
Κεφάλαιο 4ο – Ενσώματη μάθηση....34
4.1 Ενσώματη μάθηση στα Μαθηματικά....37
4.2 Χειραπτικά υλικά και Μαθηματικά....38
4.3 Χειρονομίες στα Μαθηματικά....40
Κεφάλαιο 5ο – Ερευνητικό πλαίσιο....42
5.1 Ερευνητικά ερωτήματα....42
5.2 Μέθοδος....42
5.3 Συμμετέχοντες....43
5.4 Ερευνητικό εργαλείο....44
5.4.1 Πλάνα και υλικό διδασκαλιών με ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών....45
5.4.2 Γάντια προπαίδειας....52

5.4.3 Παρουσίαση τρόπου χρήσης των γαντιών 53
5.4.3.1 Τρόπος χρήσης γαντιών στις μικρές προπαίδειες 53
5.4.3.2 Τρόπος χρήσης γαντιών στις μεγάλες προπαίδειες....56
5.5 Διαδικασία....58
5.5.1 Στάδια συνεντεύξεων....58
5.6 Αξιοπιστία και εγκυρότητα....60
Κεφάλαιο 6ο Ευρήματα....61
6.1 Αποτελέσματα αρχικών τεστ....62
6.2 Αποτελέσματα καρτών έργων 64
6.2.1 Αποτελέσματα καρτών έργων μικρών αριθμών (2 έως 5) 65
6.2.2 Αποτελέσματα καρτών έργων μεγάλων αριθμών (6 έως 10) 66
6.2.3 Αποτελέσματα καρτών έργων διπλών γινομένων....68
6.3 Αποτελέσματα απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο 71
6.3.1 Συμπεράσματα ερωτηματολογίου....77
Συζήτηση – Αποτελέσματα....79
Ξένη βιβλιογραφία 87
Ελληνική βιβλιογραφία....95
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α....97
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β....99
Β.1 Κάρτες έργων (προπαίδειες 2 έως 5)....99
Β.2 Κάρτες έργων (προπαίδειες 6 έως 10)....99
Β.3 Κάρτες έργων (διπλά γινόμενα) 100
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ 101
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ....103

Εισαγωγή

Ο άνθρωπος από τη στιγμή που ξεκινάει να σκέφτεται ξεκινάει και να ρωτά. Αυτή η υπαρξιακή του ανάγκη να διατυπώνει ερωτήματα και να αναζητά σχετικές απαντήσεις είναι ζήτημα όλων των ανθρώπων και όχι μόνο των φιλοσόφων. Αυτή του η αναζήτηση τον οδηγεί στην αναζήτηση της αλήθειας μέσω της ιστορίας. Τα ιστορικά γεγονότα δίνουν την ασφάλεια του υπαρκτού, του τεκμηριωμένου, δίνουν τη σιγουριά πως κάποιος έχει παρατηρήσει, έχει προβληματιστεί και έχει καταλήξει σε κάποια συμπεράσματα. Έτσι έχουν μπει οι βάσεις της φιλοσοφίας και των επιστημών, μία από αυτές τις επιστήμες είναι και τα μαθηματικά. Για να δώσουμε νόημα λοιπόν και να καταλάβουμε τα μαθηματικά πρέπει να μελετήσουμε την ιστορία τους.

Τα μαθηματικά δεν είναι μια επιστήμη αποκομμένη από την ιστορία, χωρίς αυτή δε θα μπορούσαμε να τα κατανοήσουμε ούτε και να δώσουμε νόημα στην ύπαρξή τους. Συνεπώς η ιστορία θα μπορούσε και θα έπρεπε να χρησιμοποιείται ως εκπαιδευτικό εργαλείο. Σε αυτή την εργασία θα παρουσιαστεί η σκοπιμότητα της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση για την ουσιαστικότερη χρήση συγκεκριμένου εργαλείου στην εκμάθηση της προπαίδειας. Στην πορεία θα παρουσιάσουμε πόση δύναμη έχει η ενσώματη μάθηση στις διαδικασίες μάθησης, μέσω ενός γαντιού και πως χωρίς την ύπαρξη και αξιοποίηση ιστορικού πλαισίου και νοηματοδότησης της γνώσης, η τελευταία είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί.

Εργάζομαι ως δασκάλα και δασκάλα ειδικής αγωγής τα τελευταία 12 χρόνια και πάντα έψαχνα διαφορετικούς τρόπους να προσεγγίσω τους/τις μαθητές/θήτριές μου, ώστε η διδασκαλία μου να μπορέσει να τους/τις εμπνεύσει και να τους/τις κινητοποιήσει. Με προσωπική έρευνα και από σεμινάρια που παρακολούθησα στράφηκα στη βιωματική και στην ενσώματη μάθηση. Σε αυτές μου τις αναζητήσεις έμαθα για το μεταπτυχιακό στη Διδακτική των Μαθηματικών κι έτσι όταν στα μαθήματα άκουσα για τις έρευνες με αποτελέσματα πως οι μαθητές/θήτριες δεν «συμπαθούν» τα μαθηματικά, είχα την ίδια αντίδραση όπως κάθε φορά που ακούω κάτι παρόμοιο. Πιστεύω πως όλα είναι θέμα προσωπικής δουλειάς, προσπάθειας, τρόπου διδασκαλίας και πως αν κάποιο παιδί δυσκολεύεται ή δεν του αρέσει κάτι, υπάρχουν πάρα πολλά πράγματα να κάνει κανείς, ώστε να το προσεγγίσει ή έστω να προσπαθήσει, για να κάνει τη διαφορά.

Η αξία των μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητη, όμως αποτελεί ένα δύσκολο αντικείμενο για πολλούς μαθητές. Είναι γνωστό ότι τα περισσότερα παιδιά μαθαίνουν μέσα από τη δημιουργία νοητικών σχημάτων άμεσα συνδεδεμένων με την καθημερινότητα (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2007). Έρευνες έδειξαν ότι τα παιδιά έχουν σημαντική μαθηματική κατανόηση πριν από οποιαδήποτε επίσημη διδασκαλία και ότι αυτή η κατανόηση προέρχεται από καθημερινές καταστάσεις στις οποίες τα παιδιά έχουν εκτεθεί. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις η διδασκαλία των μαθηματικών βασίζεται σε ένα σύνολο δεδομένων, τεχνικών και θεωριών χωρίς να υπάρχει σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο. Αυτός ο τρόπος προσέγγισης έχει οδηγήσει τα περισσότερα παιδιά να θεωρούν τα μαθηματικά ένα δυσάρεστο και ταυτόχρονα δύσκολο μάθημα (Perera, Hewagamage & Weerasinghe, 2017).

Δοκιμάζοντας στη διδασκαλία μου λοιπόν αρκετά από όσα διδαχτήκαμε στο μεταπτυχιακό για να ανατρέψω τις παραπάνω αντιλήψεις, παρατήρησα πόσο έντονα κινητοποιούσε τα παιδιά να ακούν και να μαθαίνουν για την Ιστορία των Μαθηματικών πίσω από οποιαδήποτε μαθηματική έννοια. Φυσικά ένα από τα μεγαλύτερα κίνητρα των παιδιών ήταν είναι και θα είναι το παιχνίδι-το βίωμα.

“Μαθαίνει κανείς περισσότερο σε μια ώρα παιχνιδιού, παρά σε έναν χρόνο συζήτησης” υποστήριζε ο Πλάτωνας (Γρηγορίου, 2017). Για τον Vygotsky «το παιχνίδι είναι το μέσο της επαφής του παιδιού με το κοινωνικό του περιβάλλον», ενώ για τις ανθρωπολογικές θεωρίες δεν υπάρχει ενιαίος ορισμός, καθώς αυτός συνεχώς μεταβάλλεται, ανάλογα με το νόημα και τη μορφή που αποκτά σε κάθε κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Ειδικότερα, οι έρευνες που ασχολούνται με τη χρήση του παιχνιδιού στα μαθηματικά επικεντρώνονται συνήθως σε παιχνίδια που αφορούν τη διδασκαλία, την εξάσκηση ή/και την ενίσχυση συγκεκριμένων ικανοτήτων, όπως την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, την κατασκευή μαθηματικών εννοιών, καθώς και την απόκτηση δεξιοτήτων σε μαθηματικές έννοιες. Το παιχνίδι θεωρείται ως η βάση των προγραμμάτων στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης του παιδιού (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2015).

Τονίζεται από έρευνες πως το μεγαλύτερο ποσοστό των εκπαιδευτικών υποστηρίζει τη χρησιμότητά των παιχνιδιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η σημασία και η συνεισφορά της χρήσης των μαθηματικών παιχνιδιών στη διδασκαλία υποστηρίζει ότι μέσα από τα μαθηματικά παιχνίδια τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία, αποκτούν ισχυρότερα κίνητρα και επιτυγχάνεται μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Ucus, 2015; Marshall & Swan, 2009; Fuadi, Othman & Senan, (2018); Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2009). Σύμφωνα με την έρευνα του Ucus (2015) πολλοί εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι μια διδασκαλία βασισμένη στο παιχνίδι μπορεί να είναι αποτελεσματική και να κάνει τα παιδιά να νιώθουν χαρούμενα κατά τη διαδικασία μάθησης.

Μπορεί να αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα για τον εκπαιδευτικό, αλλά με τη σωστή χρήση του μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα. Οι Copple & Bredekamp (2009), καθώς και οι Levy, Schaefer & Phelps (1986), υποστηρίζουν ότι το παιχνίδι μπορεί να συνεισφέρει νοητικά, σωματικά, κοινωνικά αλλά και συναισθηματικά στην ανάπτυξη του παιδιού (Quance, Lehrer & Stathopoulos, 2008). Για να επιτευχθούν όμως τα παραπάνω, γίνεται κατανοητό ότι ο κάθε εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει κάνει τη σωστή επιλογή παιχνιδιού αλλά και τον κατάλληλο σχεδιασμό.

Τα παιδιά δεν μπορούν από μόνα τους να δημιουργήσουν νοητικές σχέσεις ανάμεσα σε αυτό που κάνουν και στη γνώση στην οποία θέλουν να οδηγηθούν (Marshall & Swan, 2009) και χρειάζονται πάντα κάποια καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό της τάξης. Ο δάσκαλος θα πρέπει αρχικά να επιλέξει τα κατάλληλα παιχνίδια σύμφωνα με τους διδακτικούς στόχους που έχει θέσει αλλά και αυτά να είναι ενδιαφέροντα και διασκεδαστικά για τους μαθητές (Ucus, 2015).

Η εκμάθηση της προπαίδειας είναι ένα βασικό ζήτημα στα μαθηματικά στα δημοτικά σχολεία (Gardella, 2009). Πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι η έλλειψη δεξιοτήτων πολλαπλασιασμού ήταν η πηγή χαμηλού επιτεύγματος στα μαθηματικά (Jennie & Mohd Johan, 2010; Stanley & Julaini, 2006; Sharifah, Haibah, Rahil, Rohani, Samsilah & Tajularipin, 2006; Aida, 2006). Αυτό συμβαίνει επειδή το μεγαλύτερο μέρος των ερωτήσεων της προπαίδειας απαιτεί την εφαρμογή δεξιοτήτων μαθηματικών πολλαπλασιαστικών στρατηγικών κατά την απάντηση τους. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να λύσουν μαθηματικά προβλήματα που μπορεί να απαιτούν ικανότητα πολλαπλασιασμού εάν το κάνουν ενώ δεν έχουν κατακτήσει την προπαίδεια. Λόγω της αδυναμίας τους στον έλεγχο των αποτελεσμάτων του πολλαπλασιασμού, όταν θα το κάνουν χάνουν το ενδιαφέρον τους και παρατηρείται πλήξη. Έτσι επηρεάζονται οι μαθηματικές τους αποδόσεις που περιλαμβάνουν κυρίως τη χρήση στρατηγικών πολλαπλασιασμού (Gardella, 2009).

Επομένως, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να τροποποιούν και να εμπλουτίζουν συνεχώς το ρεπερτόριο των μεθόδων διδασκαλίας τους για να προσελκύσουν τους μαθητές για τη βελτίωση των μαθησιακών τους αποτελεσμάτων. Οι μέθοδοι διδασκαλίας πρέπει να επικεντρώνονται περισσότερο στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών (Effandi, 2003, Effandi 2005; Rohana, 2008) και στην πρακτική κονστρουκτιβιστικών μεθόδων (Charlesworth, 2005), με την οποία προσελκύεται η προσοχή των μαθητών στη διδασκαλία και η μάθηση γίνεται πιο σημαντική. Μέσω της ενεργού συμμετοχής στην πράξη της διδασκαλίας και στις μαθησιακές δραστηριότητες, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εξερευνήσουν, να αναπτύξουν, να αξιολογήσουν και να μάθουν.

Βασιζόμενη σε όλα τα παραπάνω και έχοντας συζητήσει με έμπειρους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης πάνω σε ζητήματα που δυσκολεύονται να κατανοήσουν οι μαθητές του δημοτικού στο μάθημα των μαθηματικών, θεώρησα σημαντικό να ασχοληθώ με την εκμάθηση της προπαίδειας. Η Anghileri(1989) αναφέρει πως τα παιδιά διαθέτουν ένα «πλαίσιο γνώσης» για τον πολλαπλασιασμό που έχει αναπτυχθεί μέσω καθημερινών εμπειριών. Θέλησα λοιπόν να παρουσιάσω στα παιδιά κάτι ελκυστικό, το οποίο ήταν τελικά εργαλείο εκμάθησης προπαίδειας, όπου και θα μπορούσα να αξιοποιήσω τα οφέλη της ενσώματης μάθησης, αφού το εργαλείο ήταν γάντια και της ιστορίας των μαθηματικών αλλά και του παιχνιδιού και των εμπειριών των παιδιών ταυτόχρονα.

Το εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι γάντια που χρησιμοποιούνται για την εκμάθηση της προπαίδεια, τα οποία κατασκεύασε η δασκάλα ειδικής αγωγής Ηλιάνα

Κατσαρέ. Η ιδέα της διακρίθηκε στις 10 καλύτερες καινοτόμες ιδέες του 8ου κύκλου του οργανισμού “OK!Thess” το 2018 και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις ηλικίες από τη στιγμή που ξεκινά η εκμάθηση της προπαίδειας.

Επέλεξα να σχεδιάσω πειραματικές διδασκαλίες βασισμένες στην Ιστορία των Μαθηματικών, διότι όπως θα αναλύσω παρακάτω η ενσωμάτωση της ιστορίας στην εκπαιδευτική διαδικασία «ως εργαλείο» κινητοποιεί τους μαθητές και τους προσφέρει πληθώρα θετικών επιρροών κατά τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα διάφορα επιχειρήματα υπέρ και κατά της ενσωμάτωσης των μαθηματικών στη διδασκαλία τους που έχουν διατυπωθεί από τους ερευνητές, καθώς και η αξιοποίηση, οι μορφές αλλά και οι τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί η ενσωμάτωση αυτή και πρακτικά. Στις πειραματικές μας διδασκαλίες η χρήση της ιστορίας συμβάλει στην ψυχολογία, και ειδικά στη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών και στη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Θεωρώ πως για να μάθει κάποιος μαθηματικά πρέπει να γνωρίσει τα βήματα που ακολουθήθηκαν για να εξελιχθεί ή να γεννηθεί μια έννοια. Έτσι είναι σε θέση να παρατηρήσει τα εμπόδια και τις δυσκολίες που συνάντησε κάποιος/οι μέχρι να ολοκληρωθεί κάτι και να αποκτήσει κίνητρα για να ασχοληθεί με το αντικείμενο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός και η προπαίδεια. Αρχικά δίνεται ένα ιστορικό πλαίσιο με τους τρόπους που γίνεται ο πολλαπλασιασμός στους διάφορους πολιτισμούς, για να καταλήξουμε στον δαχτυλικό πολλαπλασιασμό με τον οποίο και θα ασχοληθούμε. Έπειτα, γίνεται αναφορά στα προβλήματα εκμάθησης του πολλαπλασιασμού και της προπαίδειας και σε τρόπους εκμάθησης της τελευταίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην αίσθηση του αριθμού και πώς αυτή συνδέεται με τη εκμάθηση της προπαίδειας και στο τέταρτο κεφάλαιο, λόγω της χρήσης των γαντιών της προπαίδειας, γίνεται αναφορά στην ενσώματη μάθηση και πώς αυτή συνδέεται με τα γάντια ως χειραπτικό υλικό.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, καταγράφονται τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία προσπαθεί να δώσει απάντηση η παρούσα εργασία, καθώς και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τον σκοπό αυτό. Αναφέρεται φυσικά ο σκοπός της έρευνας και οι επιμέρους υποθέσεις.

Στο έκτο κεφάλαιο εξετάζονται οι απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα και αναλύονται τα αποτελέσματα από τις κάρτες έργων. Γίνονται συσχετίσεις, σχολιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας καθώς και επαλήθευση των επαλήθευση ή απόρριψη των προτάσεων. Τέλος, γίνεται περαιτέρω συζήτηση των αποτελεσμάτων και δίνονται κάποιες προτάσεις για μελλοντική χρήση των γαντιών της προπαίδειας.

Κεφάλαιο 1ο – Η ιστορία των Μαθηματικών

Τα μαθηματικά δεν θα έπρεπε να περιορίζονται στη στείρα γνώση θεωρημάτων, συμβόλων και σε μια παθητική συσσώρευση πληροφοριών, αλλά στην κατανόηση των λόγων και των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη όλων αυτών. Πώς γεννιέται μια μαθηματική ιδέα, πόσο χρόνο πήρε σε κάποιον, σε κάποιους να φτάσουν σε κάποιο συμπέρασμα, όλα αυτά είναι προϊόντα ανθρώπινης δραστηριότητας και έτσι δίνουν στα μαθηματικά μία πιο ανθρώπινη διάσταση, μέσω της ιστορικής εξέλιξής τους. Μέσω της ιστορίας των μαθηματικών, οι μαθητές, που τόσο μας ενδιαφέρει η στάση τους προς τα μαθηματικά, μπορούν να αντιληφθούν ότι τα λάθη, οι αμφιβολίες και οι εικασίες είναι κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας και να μην απογοητεύονται από αυτά, αλλά και να αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της σύγχρονης μορφής των μαθηματικών σε σχέση με παλαιότερες μορφές τους.

Η διδασκαλία των μαθηματικών γίνεται ένα πολύ πιο πολύπλοκο εγχείρημα, το οποίο δεν θα πρέπει να περιορίζεται στην απλή παρουσίαση και εκμάθηση επαγωγικά οργανωμένων τελικών προϊόντων της μαθηματικής κοινότητας, αλλά θα πρέπει να δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες μαθηματικής δημιουργίας, «κάνοντας» μαθηματικά οι ίδιοι, ανάλογα με το επίπεδο γνώσεων και νοητικής ανάπτυξης που βρίσκονται (Tzanakis & Arcavi, 2000)

Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει έρευνες για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και εκμάθηση μαθηματικών, τα πλεονεκτήματα, τα μειονεκτήματα, τις δυνατότητές της, περιορισμούς, ιδέες, κ.λπ. . Έχει υποστηριχθεί ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να έχει θετική επιρροή στην εκπαίδευση μαθηματικών και ιδίως ότι η ιστορική γνώση μπορεί να συμβάλει αποφασιστικά στην επίλυση πολλών προβλημάτων που σχετίζονται με την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών (Thomaidis & Tzanakis, 2007).

Η ιστορική γνώση, όπως αναφέρει ο Θωμαΐδης (2015), λειτουργεί ως μία πηγή ενόρασης για τα ζητήματα που σχετίζονται αφενώς με τη διαδικασία της μάθησης, αφετέρου με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/θήτριες.

Σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (2015), υπάρχουν τρεις διαφορετικές θεωρίες μάθησης, που η καθεμία έχει αποτελέσει ξεχωριστό θεωρητικό πλαίσιο για τις έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών και πρεσβεύουν διαφορετικούς τρόπους χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών. Η μία θεωρία είναι από το έργο του Piaget, η άλλη εντάσσεται στα «Ρεαλιστικά Μαθηματικά», και τέλος, αναφέρει τη θεωρία των «Διδακτικών καταστάσεων» του Brousseau.

Η σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών όμως με τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών απασχολεί την επιστημονική κοινότητα και όχι μόνο, εδώ και κάποιους αιώνες.

1.1 Χρήση ιστορίας στη διδασκαλία μαθηματικών

Τα επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους είναι πάρα πολλά. Συνοψίζοντας βρίσκουμε σε πάρα πολλές έρευνες πως η εκμάθηση μαθηματικών δεν αφορά μόνο την γνωριμία και την εξοικείωση στον χειρισμό των συμβόλων και των θεωριών (Schoenfeld, Smith & Arcavi, 1993; Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009), ή και την συσσωρευμένη γνώση τελικών μαθηματικών προϊόντων (Hiebert & Carpenter, 1992), αλλά περιλαμβάνει επίσης την κατανόηση των κινήτρων για την λύση διάφορων προβλημάτων και ερωτημάτων, τους λόγους που έγιναν αυτές οι κινήσεις, και την διαδικασία διαλογισμού για την κατασκευή νοήματος, με την σύνδεση παλιών και νέων προβλημάτων (Hiebert, et al., 1992; Schoenfeld, et al., 1993; Tzanakis, et al., 2000; Τζανάκης, 2009).

Στη βιβλιογραφία έχουν υπάρξει διάφορες προσπάθειες κατηγοριοποίησης των επιχειρημάτων υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους (Fauvel, 1991; Furinghetti, 1997; 2004; Tzanakis, et al., 2000; Tang, 2007; Jankvist, 2009). Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που έχει προταθεί στην ICMI Study (Tzanakis, et al., 2000), η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορεί να υποστηρίξει, να εμπλουτίσει και να βελτιώσει την διδασκαλία των μαθηματικών, σε πέντε κύριες περιοχές:

1. στην εκμάθηση των μαθηματικών,
2. στη φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας,
3. στο διδακτικό ρεπερτόριο και στο παιδαγωγικό υπόβαθρο των δασκάλων,
4. στη συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά, και
5. στην αναγνώριση των μαθηματικών ως μία πολιτισμική – ανθρώπινη προσπάθεια.

Μία ακόμη σημαντική στιγμή και στάση υπέρ της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών είναι πως το 1969, το NCTM των ΗΠΑ (Εθνικό Συμβούλιο για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών) αφιέρωσε το 31ο ετήσιο βιβλίο του στην ιστορία των Μαθηματικών ως εργαλείο διδασκαλίας (Tzanakis et al., 2000).

Πέρα από τα παραπάνω επιχειρήματα ενδιαφέρον παρουσιάζει και η θέση των εκπαιδευτικών. Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να έχει αρκετά οφέλη και για αυτούς, αφού εμπλουτίζει το διδακτικό τους ρεπερτόριο με εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης και διδασκαλίας ενός θέματος, μπορεί να τους βοηθήσει στο να κινητοποιήσουν τους μαθητές, να τους υποδείξει τυχόν δυσκολίες και εμπόδια που μπορεί να εμφανιστούν στην τάξη και πως μπορούν αυτά να ξεπεραστούν, καθώς και να τους ευαισθητοποιήσει σε εναλλακτικούς/ιδιοσυγκρασιακούς τρόπους έκφρασης, εν τέλει σωστών, μαθηματικών (Jankvist, 2009).

Αποτελέσματα ερευνών όμως έχουν δείξει, πως δεν υπάρχει η κατάλληλη επιμόρφωση στους δασκάλους για αν και πώς θα πρέπει να γίνει η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Επίσης, δεν υπάρχει διαθέσιμο το απαραίτητο υλικό στα διδακτικά βιβλία. Σίγουρα η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών είναι μονόδρομος, όπως και η παροχή έτοιμου υποστηρικτικού υλικού για την ουσιαστική χρήση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Τέλος, η ιστορία των μαθηματικών βοηθάει στο να γίνει κατανοητό, ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται τόσο για εσωτερικούς λόγους, διανοητικής περιέργειας και καθαρής ευχαρίστησης, όσο και για πρακτικούς λόγος, υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων, για να εξυπηρετήσουν συγκεκριμένες ανάγκες, και ότι παρά τον σημερινό διεθνιστικό τους χαρακτήρα, αποτελούν μέρος της τοπικής πολιτιστικής παράδοσης (Tzanakis, et al., 2000; Τζανάκης, 2009).

1.2 Λόγοι υπέρ της χρήσης Ιστορίας των Μαθηματικών

Οι Gulikers & Blom (2001) κατηγοριοποιούν τους λόγους χρήσης της Ιστορίας σε εννοιολογικούς, πολυπολιτισμικούς και λόγους κινήτρου. Όσον αφορά στους εννοιολογικούς, αναφέρονται μεταξύ άλλων στο γεγονός ότι οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες αν γνωρίσουν τον τρόπο εξέλιξής τους και αν δεν ακολουθηθεί ο γραμμικός τρόπος παρουσίασης των εννοιών, όπως αυτός εμφανίζεται στα περισσότερα εγχειρίδια. Όσον αφορά στους πολυπολιτισμικούς λόγους, η χρήση της Ιστορίας μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη μιας πολυπολιτισμικής και διαθεματικής προσέγγισης στην τάξη, να εξηγήσει τον ρόλο των Μαθηματικών στην κοινωνία και να παρουσιάσει την εξέλιξή τους ως αποτέλεσμα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Τέλος, όσον αφορά στους λόγους κινήτρου, η χρήση της Ιστορίας θεωρείται ότι μπορεί δημιουργήσει μια ζωντανή ατμόσφαιρα στην τάξη, να δώσει πρόσβαση σε χρήσιμο υλικό πηγών, να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση και να βοηθήσει στην κατανόηση του ίδιου του αντικειμένου των Μαθηματικών.

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη βιβλιογραφία βρίσκεται μέσω επιχειρημάτων «ως εργαλείο» (history-as-a-tool), όταν αυτή έχει σκοπό να βοηθήσει την εκμάθηση και τη διδασκαλία μαθηματικών και όταν χρησιμοποιείται η ίδια η ιστορία «ως στόχος» (history-as-a-goal) (Jankvist, 2007; Jankvist 2009).

1.2.1 Η ιστορία «ως εργαλείο»

Η κατηγορία της χρήσης της ιστορίας «ως εργαλείο» περιλαμβάνει τα επιχειρήματα που έχουν σχέση με το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά (Jankvist, 2009; Τζανάκης, 2009). Η ιστορία θα μπορούσε να λειτουργήσει ως ένας παράγοντας κινητοποίησης για την εκμάθηση και μελέτη των μαθηματικών, βοηθώντας, για παράδειγμα, να διατηρηθεί το ενδιαφέρον και ο ενθουσιασμός των μαθητών για το αντικείμενο (Farmaki & Paschos, 2007). Μια ιστορική προσέγγιση μπορεί να προσδώσει στα Μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο και να τα κάνει λιγότερο ¨τρομακτικά¨ (frightening) (Jankvist, 2009; Russ, Ransom, Perkins, Arcavi, Barbin, Brown & Fowler, 1991).

Όπως αναφέρεται στον Μπιζμπιάνο (2011), η αυτή καθαυτή Ιστορία θεωρείται ότι πρέπει να διδαχθεί για να γνωρίσουν οι μαθητές τη χρονική και χωρική εξέλιξη των Μαθηματικών (Tzanakis & Thomaidis, 2000), να συνειδητοποιήσουν ότι οι άνθρωποι μετείχαν ενεργά στην εξέλιξη του αντικειμένου (Thomaidis & Tzanakis 2007), ότι οι διαφορετικοί πολιτισμοί επηρέασαν και επηρεάστηκαν από την εξέλιξη των Μαθηματικών (Tzanakis & Thomaidis, 2000), ότι η εξέλιξη καθορίστηκε και συνεχίζει να καθορίζεται από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες που έχουν σχέση με τα Μαθηματικά (Jankvist, 2009) και τέλος, ότι η συγκεκριμένη επιστήμη σχετίζεται άμεσα και με άλλες (Τζανάκης, 2009).

Συχνά κομμάτια της μαθηματικής εξέλιξης, τα οποία έχουν ταλαιπωρήσει (have-stumble-upon) μαθηματικούς κατά το παρελθόν, τείνουν να ταλαιπωρούν (be-troublesome) και τους σημερινούς μαθητές, έτσι οι μαθητές θα μπορούσαν να πάρουν κουράγιο εάν γνωρίζουν ότι μία μαθηματική ιδέα που τους δυσκολεύει στην κατανόηση, είναι στην πραγματικότητα αποτέλεσμα δουλειάς εκατοντάδων χρόνων μέχρι να φτάσει στην τελική της μορφή (Bakker & Gravemeijer, 2006). Επίσης, η ιστορία θα μπορούσε να έχει τον ρόλο ενός γνωστικού εργαλείου υποστήριξης της εκμάθησης των μαθηματικών. Η ιστορία θα μπορούσε να βελτιώσει τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, υποδεικνύοντας διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης τους (Jahnke, 2001).

Οι ιστορικές εμπειρικές μελέτες, θα μπορούσαν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη μίας υποθετικής τροχιάς μάθησης, και θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να δουν μέσα από τα μάτια των μαθητών (Bakker, 2004). Μία ειδική χρήση της ιστορίας ως ένα γνωστικό εργαλείο, εμφανίζεται στην αναγνώριση επιστημολογικών εμποδίων, δηλαδή εμποδίων που κάποιος δεν μπορεί, ούτε θα πρέπει να αποφύγει, εξαιτίας του διαμορφωτικού τους ρόλου στην αναζήτηση γνώσης, και στον τρόπο που θα μπορούσαν αυτά να ξεπεραστούν (Bachelard, 1938; Brousseau, 1997). Εδώ, είναι σημαντικό να γίνει σαφές, ότι η ιστορία δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται χωρίς τροποποιήσεις από τους δασκάλους, αλλά η γένεση μίας έννοιας να γίνεται με κατάλληλο για χρήση σε σχολείο τρόπο (Brousseau, 1997).

Τέλος, πολύ σημαντικά επιχειρήματα της κατηγορίας αυτής, είναι τα εξελικτικά επιχειρήματα, τα οποία υποστηρίζουν ότι δεν γίνεται να υπάρξει διδασκαλία μαθηματικών χωρίς τη χρήση ιστορίας, με πιο ξεκάθαρο το επιχείρημα της ανακεφαλαίωσης (recapitulation), το οποίο αναφέρει ότι «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση[1]», δηλαδή για να μάθει κάποιος καλά μαθηματικά, πρέπει να ακολουθήσει τα ίδια βήματα που έχουν ακολουθήσει τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Furinghetti, 2004; Haeckel, 1906). Αυτό συχνά σχετίζεται και με ένα άλλο εξελικτικό επιχείρημα, αυτό του ιστορικού παραλληλισμού, το οποίο αφορά την παρατήρηση δυσκολιών και εμποδίων που εμφανίζονται στην ιστορία και επανεμφανίζονται στην τάξη (Thomaidis & Tzanakis, 2007; Farmaki, et al., 2007; Vasco, 1995). Με όλα τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι η χρήση της ιστορίας «ως εργαλείο» σχετίζεται με ζητήματα που αφορούν το εσωτερικό των μαθηματικών (in-issues) (Davis & Hersh, 1981; Niss, 2001; Jankvist, 2009; Τζανάκης, 2009).

1.2.2 Η ιστορία «ως στόχος»

Η κατηγορία της χρήσης της ιστορίας «ως στόχο» περιλαμβάνει τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν ότι η εκμάθηση πτυχών της ιστορίας των μαθηματικών αποτελεί από μόνη της έναν σκοπό, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι η εκμάθηση της ιστορίας των μαθηματικών αντιμετωπίζεται ως ανεξάρτητο μάθημα, αλλά θα πρέπει να εστιάζει στις αναπτυξιακές και εξελικτικές πτυχές των μαθηματικών ως αντικείμενο (Jankvist, 2009; Τζανάκης, 2009). Υπό αυτήν την έννοια, κάποιοι από τους στόχους της ιστορίας, είναι να δείξει στους μαθητές, ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στον χρόνο και στον χώρο (Tzanakis, et al., 2000), ότι είναι ένα επιστημονικό πεδίο που έχει εξελιχθεί και όχι κάτι που ήρθε από το πουθενά (Philippou & Christou, 1998). Άλλοι στόχοι που αναφέρονται στη βιβλιογραφία είναι ότι οι άνθρωποι έχουν πάρει μέρος σε αυτήν την εξέλιξη (Thomaidis, et al., 2007), ότι η εξέλιξη των μαθηματικών οφείλεται σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας, ότι και η διαμόρφωση των μαθηματικών έχει επηρεαστεί από αυτούς τους πολιτισμούς, αλλά και πως οι πολιτισμοί έχουν επηρεαστεί από την εξέλιξη των μαθηματικών (Tzanakis, et al., 2000), καθώς και ότι η εξέλιξη οδηγείται τόσο από εσωτερικές όσο και από εξωτερικές δυνάμεις (Fried, 2001). Με όλα τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι η χρήση της ιστορίας «ως στόχο» σχετίζεται με θέματα των μαθηματικών, όπως με την φύση, τον ρόλο και τη σημασία τους, που θα μπορούσαν να ονομαστούν επιγραμματικά μετα-ζητήματα (meta-issues) (Davis, et al., 1981; Niss, 2001; Jankvist, 2009; Τζανάκης, 2009).

1.3 Λόγοι κατά της χρήσης ιστορίας των μαθηματικών

Τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση έχει αυξηθεί. Όπως είδαμε υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός διαφορετικών επιχειρημάτων που ζητούν τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ως ένα διδακτικό εργαλείο, αλλά οι συνεισφορές στη συζήτηση φαίνεται να είναι απομονωμένες μεταξύ τους. Το ποσό των «γενικών» (general)

[1] η οντογένεση αφορά την εξέλιξη ενός ατόμου, ενώ η φυλογένεση την εξέλιξη ενός είδους

άρθρων που συμβάλλουν στη συζήτηση ξεπερνά τα «πρακτικά» (practical) δοκίμια που περιέχουν προτάσεις για πόρους ή μαθήματα. Η διδασκαλία των μαθηματικών με ιστορική προοπτική, φαίνεται να προσφέρει μια πιθανότητα να αναπτυχθούν πόροι που είναι σύμφωνοι με τη φυσική ανάπτυξη των ενδιαφερόμενων μαθητών. Μπορούμε να πάρουμε για παράδειγμα υπολογισμούς σε γεωμετρικά αντικείμενα, οι οποίοι στις μέρες μας έχουν γίνει αλγεβρικές δραστηριότητες κι έτσι δεν ακολουθούν την εκπαιδευτική εμπειρία των μαθητών. Θα μπορούσαν λοιπόν αυτά τα αντικείμενα να χρησιμοποιηθούν για να κάνουν τις ασκήσεις πιο αναγνωρίσιμες στους μαθητές και για να παρέχουν μαθηματική κατανόηση. Δηλαδή οι παλιοί ελληνικοί χειρισμοί με γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιούνταν για να αποδείξουν τις αλγεβρικές ταυτότητες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κάνουν τις ασκήσεις πιο αναγνωρίσιμες στους μαθητές και για να παρέχουν μαθηματική κατανόηση.

Ένα άλλο συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει ένα κενό μεταξύ των ιστορικών που συντάσσουν άρθρα πιο «γενικά» (general) και των εκπαιδευτικών οι οποίοι συντάσσουν πιο «πρακτικά» (practical) άρθρα. Στα περισσότερα δοκίμια οι ακόλουθες ερωτήσεις σχεδόν δεν έχουν απαντηθεί:

«Τι κάνει κάποιον να πιστεύει ότι η χρήση της ιστορίας εμβαθύνει τη μαθηματική κατανόηση;»

«Είναι πραγματικά παρακινητική η χρήση της ιστορίας στην τόνωση της ανθρώπινης πτυχής των μαθηματικών ή είναι ο ενθουσιώδης δάσκαλος που παρακινεί την τάξη του;»

«Έχει γίνει έρευνα για την επιβεβαίωση όλων των παραπάνω σκέψεων;»

«Υπάρχει κάποια ψυχολογική θεωρία που να επιβεβαιώνει τα παραπάνω;»

«Πώς οι άνθρωποι που κάνουν χρήση της ιστορίας των μαθηματικών δικαιολογούν την επιλογή των πόρων τους;»

Οι Gulikers & Blom (2001), αναφέρουν πως αν μπορούσαμε να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις θα ήταν πιθανώς ευκολότερο να γενικεύσουμε τις διάφορες διαφορετικές ιδέες και να καταλήξουμε σε συμπεράσματα. Με μια τέτοια γενίκευση θα μπορούσαμε πιθανώς να αναπτύξουμε ένα είδος «λίστας ελέγχου» (checklist) για να συμβουλευόμαστε, εάν αποφασίσουμε να διδάξουμε με την ιστορία των μαθηματικών ως διδακτικό εργαλείο .

Ειδικά η έλλειψη έρευνας σχετικά με τη μεθοδολογία της διδασκαλίας των μαθηματικών με την ιστορία των μαθηματικών ως διδακτικού εργαλείου πρέπει να σημειωθεί. Οι διδακτικές στρατηγικές που χρησιμοποιούνται βασίζονται σε προσωπικές προτιμήσεις και στις περισσότερες περιπτώσεις οι συγγραφείς δεν χρησιμοποιούν διδακτικά ή μεθοδολογικά επιχειρήματα στην υποστήριξη των ιδεών τους. Προκειμένου να αναπτυχθεί η εφαρμογή της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση των μαθηματικών πρέπει να μάθουμε περισσότερα για τη μεθοδολογία αυτής.

Παρά τα πολλά πλεονεκτήματα της πρακτικής της ιστορίας των μαθηματικών στις τάξεις τα επιχειρήματα κατά της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία τους, χωρίζονται κυρίως σε δύο κατηγορίες δυσκολίας: φιλοσοφικές – επιστημολογικές ενστάσεις και πρακτικές – διδακτικές ενστάσεις (Tzanakis, et al., 2000; Τζανάκης, 2009). Οι Τζανάκης και Θωμαΐδης (2012) συνοψίζουν μερικά από αυτά τα επιχειρήματα με τον ακόλουθο τρόπο:

(α) Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά

(β) Η ιστορία μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση αντί για διευκρίνιση

(γ) πολλοί μαθητές βρίσκουν την ιστορία βαρετή και αυτό μπορεί να τους οδηγήσει να αντιπαθούν τα μαθηματικά

(δ) οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν πολύ χρόνο να αφιερώσουν στην ιστορία των μαθηματικών

(ε) έλλειψη απαραίτητων πηγών διδασκαλίας,

(στ) έλλειψη κατάρτισης εκπαιδευτικών σχετικά με τον τρόπο ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών και

(ζ) ακατάλληλη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στα μαθήματα που θα μπορούσε να ενθαρρύνει ή / και να διατηρήσει στερεοτυπικές πολιτιστικές αντιλήψεις και εθνικισμό.

Είναι, επομένως, σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι να χειριστούν τις ιστορικές αναφορές στη διδασκαλία των μαθηματικών τους προκειμένου να αποφευχθούν αυτά τα εμπόδια (Charalambous, Panaoura, & Philippou, 2009; Panasuk & Horton, 2012).

1.4 Αξιοποίηση Ιστορίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες προσεγγίσεων σχετικά με το πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η Ιστορία στη Μαθηματική Εκπαίδευση (Jankvist, 2009). Η πρώτη κατηγορία προσεγγίσεων αναφέρεται στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination-approaches), οι οποίες προτείνουν τη χρήση ιστορικών πληροφοριών ως συμπλήρωμα του μαθήματος. Οι πληροφορίες αυτές (isolated-factual-information – historical-snippets) μπορεί να είναι ονόματα, χρονολογίες, φημισμένα έργα και γεγονότα, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, φημισμένα προβλήματα και ερωτήματα, πιστά αντίγραφα βιβλίων κ.ά. (Tzanakis et al., 2000). Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν και οι ιστορικοί επίλογοι ή πρόλογοι (historical epilogues or prologues) με αντίστοιχες ιστορικές πληροφορίες στην αρχή ή στο τέλος των κεφαλαίων (Jankvist, 2009).

Η δεύτερη κατηγορία προσεγγίσεων αναφέρεται σε συγκεκριμένες ολόκληρες ενότητες με θέματα Ιστορίας. Οι ενότητες αυτές μπορεί να είναι ένα έτοιμο ιστορικό εκπαιδευτικό υλικό (historical-packages) για 2-3 διδακτικές ώρες που σχετίζεται με την ύλη, μεγαλύτερες ενότητες για 10-20 διδακτικές ώρες που δε σχετίζονται απαραίτητα με την ύλη ή ολόκληρα βιβλία και μαθήματα για την Ιστορία των Μαθηματικών με πλήθος ιστορικών πηγών και δεδομένων (Jankvist, 2009).

Στην τρίτη και τελευταία κατηγορία ανήκουν οι προσεγγίσεις που δεν προτείνουν τη μελέτη της Ιστορίας αυτής καθαυτής, αλλά στηρίζονται στην Ιστορία των Μαθηματικών για να εισάγουν τη σειρά των μαθηματικών εννοιών. Μία τέτοια προσέγγιση είναι η γενετική (genetic-approach) (Jankvist, 2009).

1.5 Μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας

Οι μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορούν επίσης να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία σχετίζεται με την εκμάθηση της Ιστορίας με άμεσο τρόπο μέσα από ιστορικές πληροφορίες. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με ιστορικά σημειώματα ή με ολόκληρα μαθήματα ή βιβλία που αναφέρονται στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η Ιστορία στη συγκεκριμένη κατηγορία προβάλλεται ως στόχος, ενώ μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στη φύση των Μαθηματικών παρά στα ίδια τα Μαθηματικά (Tzanakis et al., 2000; Τζανάκης, 2009). Η παρούσα μορφή αξιοποίησης στηρίζεται στις δύο πρώτες κατηγορίες προσεγγίσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η δεύτερη κατηγορία σχετίζεται με την εκμάθηση των Μαθηματικών που στηρίζεται στην Ιστορία τους. Η Ιστορία στη συγκεκριμένη κατηγορία προβάλλεται ως εργαλείο (Τζανάκης, 2009; Jankvist, 2009) και εμπνέεται από τη γενετική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία, η ιστορική διάσταση μπορεί να βοηθήσει σε μια πιο ολοκληρωμένη και βαθύτερη κατανόηση των αντικειμένων των Μαθηματικών. Τα βασικά ερωτήματα, τα προβλήματα και οι ιδέες κλειδιά της ιστορικής εξέλιξης ανακατασκευάζονται για να προσαρμοστούν στους μαθητές με στόχο τη γνώση του μαθηματικού αντικειμένου (Tzanakis et al., 2000).

Τέλος, η τρίτη κατηγορία σχετίζεται με την ανάπτυξη μίας βαθιάς γνώσης και συνείδησης για τα ίδια τα Μαθηματικά, με τα ενδογενή δηλαδή χαρακτηριστικά τους, αλλά και το κοινωνικοπολιτιστικό πλαίσιο που τα περιβάλλει κατά την εξέλιξή τους, δηλαδή με τα εξωγενή χαρακτηριστικά τους (Tzanakis et al., 2000). Η Ιστορία στη συγκεκριμένη κατηγορία προβάλλεται ως στόχος (Τζανάκης, 2009) και σε σχέση με τις παραπάνω προσεγγίσεις ο πιο κατάλληλος τρόπος για να επιτευχθεί ο στόχος της βαθιάς γνώσης και συνείδησης είναι η διδασκαλία ολόκληρων ενοτήτων με θέματα Ιστορίας (Jankvist, 2009).

1.6 Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην τάξη

Η κατηγοριοποίηση που προτείνει ο Τζανάκης (2009) βάσει τη διεθνή βιβλιογραφία για τους τρόπους ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην τάξη είναι πέντε:

- *Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα*

  Σε αυτές ανήκουν η ενσωμάτωση στο μάθημα ιστορικών σημειωμάτων και εισαγωγών, οι επισκέψεις σε μουσεία, αρχαιολογικούς και άλλους χώρους και η χρήση βίντεο (video) και ταινιών με σχετικά θέματα.

- *Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες*

  Σε αυτές ανήκουν ολόκληρα ερευνητικά πρότζεκτς (projects) που ξεκινούν από ιστορικά κείμενα, η χρήση ολοκληρωμένων πρωτότυπων πηγών ή φύλλων εργασίας που περιέχουν αποσπάσματά τους και τέλος, πλήρη ιστορικά πακέτα (historical-packages) για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

- *Ευέλικτες εφαρμογές προσαρμοσμένες στην εκάστοτε τάξη*

  Σε αυτές ανήκουν η διδακτική χρήση ιστορικών λαθών, της αλλαγής οπτικής, μαθηματικών παραδόξων που έχουν εντοπιστεί κατά την εξέλιξη της ιστορίας, καθώς και η χρήση ιστορικών προβλημάτων στη διδασκαλία.

- *Εφαρμογές εμπειρικού χαρακτήρα*

  Σε αυτές ανήκουν η παρουσίαση μηχανικών εργαλείων που έπαιξαν ρόλο στην Ιστορία των Μαθηματικών, καθώς και η ένταξη βιωματικών δραστηριοτήτων, αλλά και η δημιουργία θεατρικών παραστάσεων εμπνευσμένων από την Ιστορία.

- *Το διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης*

  Σε αυτήν την κατηγορία ανήκει η χρήση ιστοσελίδων διαφόρων κατηγοριών που μπορούν να συνδράμουν στην πληροφόρηση εκπαιδευτικών και μαθητών για θέματα Ιστορίας των Μαθηματικών.

Κεφάλαιο 2ο – Πολλαπλασιασμός- Προπαίδεια

Βασική ιδέα είναι τα μαθηματικά να έχουν νόημα για τα παιδιά, να πιστέψουν πως είναι ικανά να ασχοληθούν με αυτά και οι μαθητές αλλά και οι εκπαιδευτικοί. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να καλλιεργεί το πνεύμα της αναζήτησης, της εμπιστοσύνης και της προσδοκίας. Κεντρικός άξονας είναι τα παιδιά να βρίσκουν μόνα τους λύσεις, να εξετάζουν ιδέες, να κάνουν συσχετισμούς, να αναπτύσσουν λογική και να προτείνουν εξηγήσεις. Σημαντικό είναι να δουλεύουν σε ομάδες ή ζευγάρια ώστε να μοιράζονται την σκέψη τους να αλληλοδιορθώνονται και να χρησιμοποιούν τους μαθηματικούς όρους σωστά (Van de Walle, 2004)

Στην ηλικία των 6 – 8 ετών τα παιδιά είναι σε θέση να αυτοματοποιούν (συνθήκες: προσοχή - έλεγχος συχνότητας συμβάντων) και να κωδικοποιούν (εικονικά – συμβολικά κλπ.). Μπορούν να αναλύουν ένα έργο και να αναγνωρίζουν τη σειρά των διαδικασιών επίλυσης ενός προβλήματος. Στον πολλαπλασιασμό, στη Β' και Γ' τάξη, προσθέτουν συνήθως τον πολλαπλασιαστή τόσες φορές όσες λέει ο πολλαπλασιαστέος. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις μαθητών που απλώς ανακαλούν τη λύση των αποτελεσμάτων μέσω του πίνακα της προπαίδειας, από την μνήμη τους. Άλλες, βασίζουν την απάντησή τους σε λύσεις αντίστοιχων προβλημάτων με παρόμοια νούμερα (κοντινά). Χρησιμοποιούνται πολλές υποστηρικτικές στρατηγικές όπως το μέτρημα, στα πρώτα στάδια (Βοσνιάδου, 2002).

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν συχνά τα παιδιά στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού είναι η «μνημονική συγκράτηση διψήφιων αριθμών», η μεταφορά διάφορων αριθμών από στήλη σε στήλη και η τοποθέτηση ψηφίων στον χώρο. Σημαντικά είναι τα λάθη που γίνονται κατά την πράξη του πολλαπλασιασμού, όπως είναι η παράλειψη του κρατουμένου, η «παραβίαση της σειράς εκτέλεσης των προσθέσεων και των πολλαπλασιασμών» καθώς και η «εφαρμογή ελαττωματικών αλγορίθμων της μορφής του κατά στήλη πολλαπλασιασμού». Η αντιμεταθετική ιδιότητα που υπάρχει στον πολλαπλασιασμό δημιουργεί μια σύγχυση κατά την διδασκαλία του, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν συνήθως οι μαθητές προβλήματα στην κατανόηση. Επιπλέον, η «κατάλληλη ενεργοποίηση της εννοίας της θεσιακής αξίας» συναντάται τις περισσότερες φορές, διότι δεν έχει γίνει κατανοητό ακόμα πως ένα γινόμενο μπορεί σε μια θέση να δηλώνει εκατοντάδα ενώ σε άλλη δεκάδα. Η «μέθοδος των μερικών γινομένων» προβλέπει τη γραφή αυτούσιου του γινομένου χωρίς μετακινήσεις θέσεως (Αγαλιώτης,2011).

Ο Hutching (1976) με τον «αλγόριθμο της κλιμακωτής σημείωσης γινομένου» δίνει μια λύση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στον χειρισμό των κρατουμένων. Ένας ακόμη τρόπος που βοηθάει τα παιδιά στην επίλυση των προβλημάτων για τον πολλαπλασιασμό είναι ο «πολλαπλασιασμός πλέγμα ή ελληνικό ή λατινικό τετράγωνο» (Αγαλιώτης,2011).

Στην έρευνα των Wong & Evans αναφέρεται πως υπάρχουν διάφορες τυπικές στρατηγικές υπολογισμού για ολόκληρο τον αριθμό (Monica Wong and David Evans, 2007) :

- Καταμέτρηση: τα αντικείμενα είναι απλά και υπολογίζονται χωρίς καμία προφανή αναφορά στην πολλαπλασιαστική δομή.

- Ρυθμική: ακολουθεί τη δομή του προβλήματος (π.χ., "1, 2? 3, 4? 5, 6" ή "6? 5, 4? 3, 2."). Ταυτόχρονα με καταμέτρηση, μια δεύτερη μέτρηση διατηρείται από τον αριθμό των ομάδων.

- Μεταφορά: Μετρώντας με πολλαπλάσια (π.χ., "2, 4, 6" ή "6, 4, 2"), πράγμα που καθιστά ευκολότερο να κρατήσει την καταμέτρηση του αριθμού των ομάδων.

- Προσθετικό: υπολογισμού. (π.χ., 2 + 2 = 4, 4 + 2 = 6).

- Πολλαπλασιαστική: Ο υπολογισμός λαμβάνει τη μορφή των γνωστών γεγονότων (π.χ., "3 φορές 2 είναι 6" ή παράγωγα από ένα γνωστό γεγονός π.χ., 3 x 2 = 2 x 2 + 2).

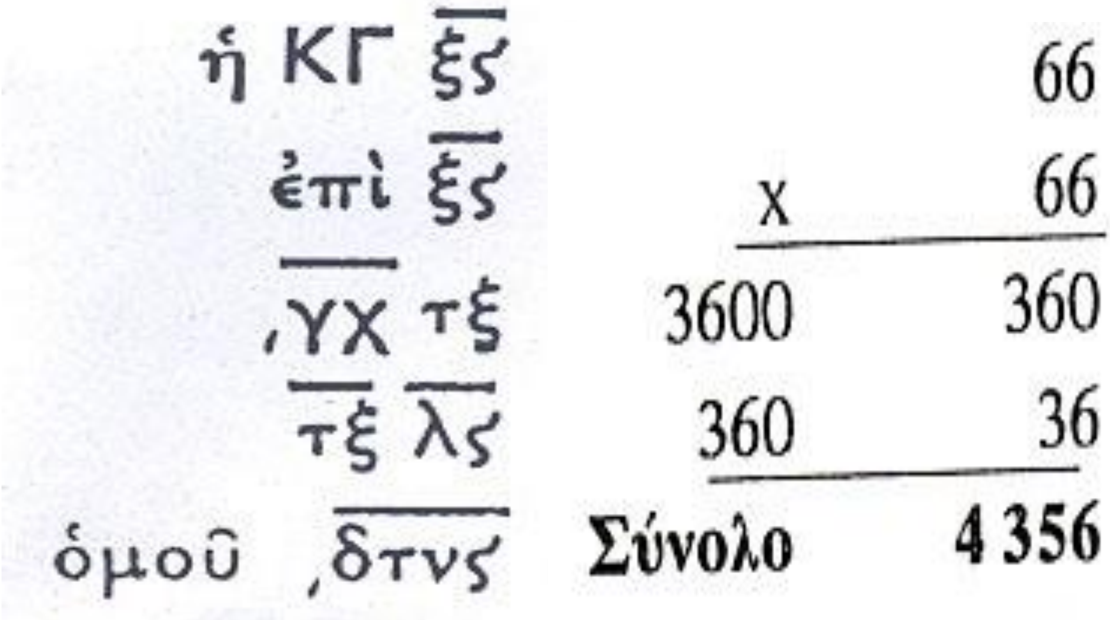
- Αντιμεταθετική: Η αλλαγή της σειράς των δύο αριθμών σε μια εξίσωση πολλαπλασιασμό δεν αλλάζει την απάντηση (π.χ., 7 x 9 = 9 x 7).

- Διανεμητικό: α x (β + γ) = a x γ + a x β (π.χ. "9 φορές 14" είναι 9 x (7 + 7) = 9 x 7 + 9 x 7)

2.1 Ιστορική διάσταση του πολλαπλασιασμού

Όταν κάνουμε λόγο για πολλαπλασιασμό δε θα μπορούσαμε να μην αναφερθούμε στην ιστορία του για να μας βοηθήσει να απαντήσουμε στα ερωτήματα που γεννιούνται το πώς τον φανταζόμαστε και πώς κατέληξε να έχει αυτή τη μορφή και φυσικά να μάθουμε την ιστορική σημασία αυτής της εξέλιξης. Συγκεκριμένα για την εξέλιξη του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού:

Όπως αναφέρουν οι Λεμονίδης & Νικολαντωνάκης (2007), είναι γνωστοί πλέον κάποιοι ιστορικοί αλγόριθμοι του πολλαπλασιασμού οι οποίοι χρησιμοποιούνται και στη διδασκαλία. Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι είναι οι εξής: Ο Αιγυπτιακός αλγόριθμος ο οποίος εμφανίστηκε στον πάπυρο του Rhind, περίπου το 1650 π.Χ. και βασίζεται στον διπλασιασμό. Μια παραλλαγή του Αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού είναι ο πολλαπλασιασμός που χρησιμοποιούσαν οι Ρώσοι χωρικοί στις αρχές του 20ου αιώνα και βασιζόταν στον διπλασιασμό και υπόδιπλασιασμό. Ένας άλλος ιστορικός αλγόριθμος που χρησιμοποιείται πολύ και στην εκπαίδευση είναι ο πολλαπλασιασμός των Αράβων. Η εν λόγω μέθοδος χρειάζεται τη γνώση πινάκων του πολλαπλασιασμού και την εφάρμοσε ο μεγάλος Άραβας μαθηματικός Al Khwarismi στις αρχές του 9ου αιώνα. Μια αντίστοιχη διάταξη εμφανίζεται στον Άραβα μαθηματικό Al Kashi τον 15ο αιώνα. (Ήταν παλαιότερη και είχε εμφανισθεί στην Ινδία περίπου τον 12ο αιώνα). Είναι η μέθοδος με τον τετραγωνισμό που ονομάζονταν μεταγενέστερα από τους Ιταλούς per gelosia.



Εικόνα 1: Ελληνικός Πολλαπλασιασμός[2]

Στην ιστορική έρευνα που πραγματοποίησαν οι Λεμονίδης & Νικολαντωνάκης (2007) στα πρωτότυπα κείμενα βρήκαν ότι ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός περιγράφεται στα σχόλια του Ευτόκιου από την Ασκαλών για την πραγματεία Κύκλου Μέτρησις του Αρχιμήδη. Οι πολλαπλασιασμοί που εκτελεί ο Ευτόκιος είναι για να βρει τα τετράγωνα ενός αριθμού. Δηλαδή πολλαπλασιάζει κάθε φορά έναν αριθμό με τον εαυτό του. Χωρίζει τον αριθμό σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κτλ. και βρίσκει τα μερικά γινόμενα μεταξύ μονάδων ίδιας τάξης τα οποία προσθέτει για να βρει το τελικό αποτέλεσμα.

Άλλες εναλλακτικές τεχνικές εκτέλεσης της πράξης του πολλαπλασιασμού από ιστορική πλευρά είναι:

- Ο Δαχτυλικός Υπολογισμός ή προπαίδεια με τα δάχτυλα
- Η γνώση των διπλάσιων και των μισών και η τεχνική της πρόσθεσης και
- Γραπτές τεχνικές εκτέλεσης της πράξης

[2] (6 Δεκάδες + 6 Μονάδες)(6 Δεκάδες + 6 Μονάδες) = 36 Εκατοντάδες + 36 Δεκάδες + 36 Δεκάδες + 36 Μονάδες = 4356

Παραδείγματος χάρη στο δαχτυλικό πολλαπλασιασμό δύο αριθμών μεταξύ του 5 και του 10 Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον πίνακα του πολλαπλασιασμού μέχρι το 5x5.

Για να βρούμε για παράδειγμα το γινόμενο 9x8.

- Σηκώνουμε 4 δάχτυλα στο αριστερό χέρι και 3 δάχτυλα στο δεξί χέρι (9-5 = 4 και 8-5 = 3).
- Παραμένουν διπλωμένα ένα δάχτυλο στο αριστερό χέρι και δύο δάχτυλα στο δεξί χέρι.
- Αθροίζουμε τα όρθια δάχτυλα 4 + 3 = 7, το οποίο είναι το ψηφίο των δεκάδων.
- Στην συνέχεια εκτελούμε το γινόμενο των διπλωμένων δαχτύλων 1x2 = 2, 2 είναι το ψηφίο των μονάδων.
- Προσθέτουμε τις δεκάδες και τις μονάδες.
- Το αποτέλεσμα είναι το 72.

Αυτή η μέθοδος μπορεί να γενικευτεί στο γινόμενο των αριθμών σε μορφή 10α + β και 10α + γ, οι αριθμοί οι οποίοι έχουν το ίδιο ψηφίο δεκάδων

Παραδείγματος χάρη, θέλουμε να πολλαπλασιαστεί ο αριθμός 35 με το 36.

- Προσθέτουμε τις μονάδες του ενός με ολόκληρο τον άλλο αριθμό 35 + 6 = 41
- Πολλαπλασιάζουμε 41 με 10x3. 41 x10 x 3 = 1230
- Προσθέτουμε το γινόμενο των μονάδων 5x6 = 30
- 1230+30 = 1260.
- 35x36 = 1260.
- Οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται είναι 10α + β και 10α + γ,
- Προσθέτουμε γ στο 10α +β, και παίρνουμε 10α + β + γ
- Πολλαπλασιάζουμε με 10α: 10α(10α + β + γ)
- Προσθέτουμε το γινόμενο των μονάδων βγ
- 10α(10α + β + γ) + βγ.
- Το αποτέλεσμα είναι το γινόμενο (10α + β)(10α + γ)

Ακολουθούν οι τεχνικές πολλαπλασιασμού από διάφορους πολιτισμούς που αναφέρθηκαν παραπάνω με εικόνες:

1	37 = 1x37
2	74 = 2x37
4	148 = 4x37
8 /	296 = 8x37 /
16 /	592 = 16x37 /

Εικόνα 2: Αιγυπτιακός Πολλαπλασιασμός 24 x 19

Επεξήγηση : 24 x 19 = 24 x (1 + 2 + 16) = 24 + 48 + 384 = 456.
Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ανάλυση του αριθμού 19 σε άθροισμα δυνάμεων του 2 και την χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

16x23

16	23
8	46
4	92
2	184
1	368

16x23 = 368

17x23

17	23*
8	46
4	92
2	184
1	368

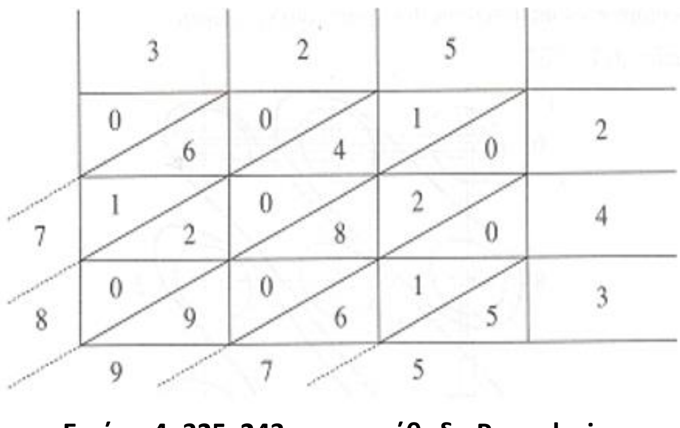
17x23 = 368 + 23 = 391

19x23

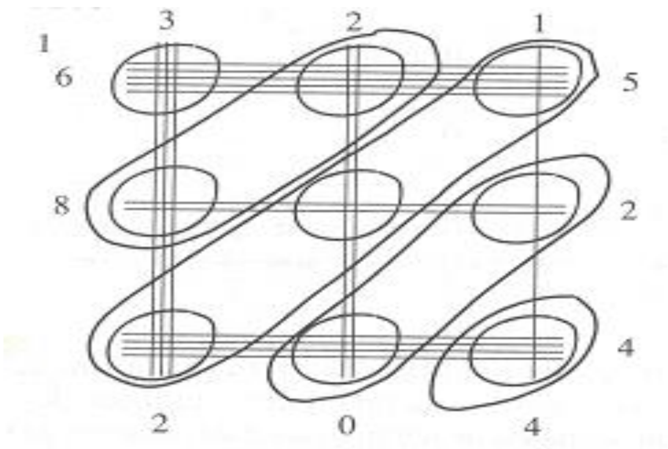
19	37*
9	74*
4	148
2	296*
1	592

19x23=37+74+592 = 703

Εικόνα 3: Ρώσικος πολλαπλασιασμός ή πολλαπλασιασμός των χωρικών



Εικόνα 4: 325x243 με την μέθοδο Per gelosia



Εικόνα 5: Κινέζικος Πολλαπλασιασμός 321x524

2.2 Προβλήματα στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού και της προπαίδειας

Από την βιβλιογραφική έρευνα που αρχικά έγινε, διαπιστώθηκε ότι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εκμάθησης τόσο της προπαίδειας όσο και μετέπειτα του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού είναι:

- η διαδικασία αποστήθισης της «προπαίδειας»,
- η θέση των αριθμών στις κάθετες πράξεις πολλαπλασιασμού,
- η συγκράτηση και μέτρηση των κρατουμένων,
- η υποδιαστολή στον πολλαπλασιασμό δεκαδικών αριθμών και τέλος
- ο ίδιος ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού.

Τα αποτελέσματα ερευνών αποκαλύπτουν πως τα προβλήματα που αναφέρουν οι δάσκαλοι για μαθητές Β΄ και Γ΄ Δημοτικού εντοπίζονται κατά τη διδασκαλία της πράξης καθώς και του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού και της προπαίδειας που πραγματοποιείται στην αρχή της χρονιάς (Β΄ και Γ΄ τάξη). Η αδυναμία του παιδιού για άμεση ανάκληση αριθμών από τη μνήμη ή η αδυναμία του να θυμηθεί απέξω σημαντικές αριθμητικές πράξεις, όπως την προπαίδεια, αποτελεί σημαντικό περιορισμό στα μαθηματικά (Chinn & Ashcroft, 1993).

Συγκεκριμένα, το μεγαλύτερο ποσοστό των εκπαιδευτικών αναφέρει την αποστήθιση της προπαίδειας ως το πιο σημαντικό πρόβλημα κατά την εκμάθηση του πολλαπλασιασμού. Ακολουθεί το πρόβλημα της διάταξης – θέσης των αριθμών στους κάθετους πολλαπλασιασμούς, ενώ ακολουθούν η κατανόηση του πολλαπλασιασμού ως μηχανιστικό εργαλείο, τα κρατούμενα, το ζήτημα στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων και τέλος η χρήση της πράξης της πρόσθεσης σε προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν με πολλαπλασιασμό (Αγαλιώτης, 2011).

Πριν ο μαθητής προχωρήσει στο πρακτικό κομμάτι των μαθηματικών, δηλαδή στην εφαρμογή των όσων έμαθε, πρέπει να έχει κατανοήσει πλήρως τη μαθηματική ορολογία. Ο μαθητής παρουσιάζει δυσκολίες σύνδεσης των μαθηματικών όρων και εννοιών με τις αντίστοιχες σημασίες του, όπως για παράδειγμα, «μείον», «συν», «διαιρώ», «μοιράζω», «πολλαπλασιάζω» κ.ά. ή δυσκολεύεται να κατανοήσει λέξεις με πολλαπλή σημασία όπως, «περίμετρος», «υπολογισμός», «ισούται» (Pollack & Waller, 1994). Επιπλέον, υπάρχουν πάρα πολλοί μαθηματικοί όροι που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή, με διαφορετική όμως έννοια από ότι στα μαθηματικά, και αυτό δημιουργεί περισσότερη αναστάτωση στα παιδιά, (Miles, 1999). Χαρακτηριστικό παράδειγμα ο μαθηματικός όρος «περιττός» δηλώνει τους αριθμούς 1,3,5,7,9,11, 13…τους αριθμούς δηλαδή της μορφής 2ν+1, ενώ στην καθημερινότητα χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει κάτι που δεν είναι απαραίτητο.

Γενικότερα έρευνες έχουν δείξει ότι όταν ένα παιδί γνωρίζει λίγα αθροίσματα και διαφορές από έξω, κάνει λάθη όταν προσθέτει ή αφαιρεί μεγάλους αριθμούς όπως κάνει λάθη και σε διαδικασίες αντίστροφης μέτρησης (Yeo, 2008). Επίσης δεν θυμάται πώς να ανακαλέσει γρήγορα αριθμητικές πράξεις. Συνέπεια των μνημονικών προβλημάτων είναι επιπροσθέτως και η δυσκολία εκμάθησης της προπαίδειας. Τα παιδιά όταν απαγγέλουν τους πίνακες της προπαίδειας χάνουν την σειρά τους, μεταπηδούν σε άλλους πίνακες ή μπερδεύονται. Ίσως αυτά όλα να οφείλονται και σε συναισθηματικούς παράγοντες (άγχος, πίεση) (Miles, 1999).

Οι συναισθηματικοί παράγοντες αποτελούν μια νέα κατηγορία παραγόντων στην οποία εστιάζεται η σύγχρονη έρευνα. Τα μαθηματικά προκαλούν ιδιαίτερο άγχος στους μαθητές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το να δυσανασχετούν στο να λύσουν μια άσκηση ή να απαντήσουν σε μια ερώτηση. Οι μαθητές είναι αργοί και αυτό σχετίζεται με την αδυναμία ανάκλησης από την μνήμη τους τύπων, κανόνων, συμβόλων, κτλ. (Chinn & Ashcroft, 1993).

Η στερεότυπη επανάληψη ίσως προκαλεί μια σειρά από δυσκολίες - για παράδειγμα, αποτυχίες στη μνήμη εργασίας, ανασταλτικό έλεγχο ή δυσκολία ανάκτησης λέξης - και κάποιοι μαθητές ενδέχεται να δείξουν μεγαλύτερη δυσκολία στη σωστή εξαγωγή αποτελέσματος λόγω αυξημένων διαφορετικών υποκείμενων ελλειμμάτων.

Το σύστημα υπολογισμού της προπαίδειας περιλαμβάνει επιπλέον εξειδικευμένους μηχανισμούς (Holmes & Adams, 2006). Πριν την ενεργοποίηση αυτών των μηχανισμών εννοείται ότι έχει διεκπεραιωθεί η αριθμητική επεξεργασία που προαναφέρθηκε. Συγκεκριμένα έχουμε τρεις αλληλένδετους μηχανισμούς:

1) Η ικανότητα αναγνώρισης των λέξεων ή συμβόλων των αριθμητικών πράξεων και η λειτουργία τους (πχ. +, πλην).

2) η ικανότητα ανάκτησης γενικών κανόνων όπως, του πίνακα της προπαίδειας ή όταν πολλαπλασιάζω με το μηδέν ισούται με μηδέν.

3) Η εφαρμογή των κινήσεων των διαδικασιών των πράξεων για σωστά αποτελέσματα. Κατανοούμε λοιπόν, ότι πρόκειται για ένα πολύπλοκο σύστημα.

Σε κάποιους αυτή η συνολική επεξεργασία γίνεται πολύ γρήγορα, σε κάποιους άλλους όμως όχι.

Έρευνες που έχουν γίνει σε άλλες χώρες, έχουν δείξει ότι οι μαθητές της δευτέρας τάξης παρουσιάζουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση της αξίας θέσης και στην εκτέλεση της τυπικής διαδικασίας της πρόσθεσης με πολυψήφιους αριθμούς και του πολλαπλασιασμού. Όπως επισημαίνει η Fuson (1992), τα παιδιά φαίνεται να χειρίζονται τους πολυψήφιους αριθμούς σαν μια σειρά από μονοψήφιους αριθμούς που ο ένας είναι τοποθετημένος δίπλα στον άλλο, και δεν αποδίδουν στα ψηφία τους τα νοήματα που αυτά έχουν, σε σχέση με τη θέση που κατέχουν στον αριθμό.

Επιπλέον, αρκετές έρευνες δείχνουν ότι η κατανόηση της αξίας θέσης είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την σωστή εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (Groen & Parkman, 1972). Η Anghileri (2007), τονίζει ότι όλες οι έρευνες που έχουν γίνει στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών συγκλίνουν σε τέσσερα βασικά συστατικά στοιχεία που θεωρούνται απαραίτητα για την κατανόηση της αξίας της θέσης. Τα στοιχεία αυτά είναι

- η αρίθμηση ανά 10 ή ανά 100,
- η ανάλυση ενός αριθμού με πολλούς τρόπους σε μονάδες διαφόρων τάξεων,
- η σύνθεση ενός αριθμού με δεδομένο το πλήθος των μονάδων των διαφόρων τάξεων από τις οποίες αποτελείται, και τέλος
- η εύρεση σχέσεων μεταξύ των πολυψήφιων αριθμών.

Η επιτυχής αντιμετώπιση από τους μαθητές δραστηριοτήτων που αναφέρονται στα παραπάνω συστατικά στοιχεία της αξίας θέσης τούς βοηθά να κατανοήσουν τις τυπικές διαδικασίες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Οι αλγόριθμοι των πράξεων αυτών απαιτούν από τα παιδιά να συνειδητοποιήσουν ότι:

I. προσθέτουμε μονάδες που πρέπει να ανήκουν στην ίδια τάξη και
II. την έννοια του κρατουμένου στην εκτέλεση της διαδικασίας της κάθε πράξης.

Η οικοδόμηση μιας κατανόησης της έννοιας του πολλαπλασιασμού απαιτεί την ανάπτυξη μιας γλώσσας για σκέψη και περιγραφή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων και των ποσοτήτων τους. Το παραδοσιακό πρόγραμμα σπουδών και οδηγιών της δευτέρας και τρίτης τάξης δίνει έμφαση στην απομνημόνευση του πολλαπλασιασμού, γεγονός που παράγει πολύ λιγότερη κατανόηση των βασικών εννοιών του πολλαπλασιασμού από ένα πρόγραμμα σπουδών βασισμένο σε πρότυπα και οδηγίες που δίνουν έμφαση στην κατασκευή αριθμητικής αίσθησης και σημασίας για τις λειτουργίες του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης (Smith & Smith, 2006).

Ο Λεμονίδης (2003) αναφέρει πως τα περισσότερα παιδιά δεν μπορούν άμεσα να απομνημονεύσουν τους πίνακες της προπαίδειας μέσω της εξάσκησης και πρακτικής, περνούν όμως από ένα ενδιάμεσο στάδιο στο οποίο αυθόρμητα χρησιμοποιούν κάποιες στρατηγικές για να παράγουν τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού (Ter Heege,1985).

Οι στρατηγικές είναι οι εξής:

1) Χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας (6 x 7 = 7 x 6).

2) Χρήση των πολλαπλασίων του 10, π.χ. χρησιμοποιούν το 10 x 6 = 60 για να υπολογίσουν το 5 x 6 = 30, ή το 10 x 8 = 80 για να υπολογίσουν το 9 x 8 = 72.

3) Υπολογισμός των γινομένων με διπλασιασμό, π.χ. χρησιμοποιούν το γινόμενο 2 x 7 = 14 για να υπολογίσουν το 4 x 7 διπλασιάζοντας το 14.

4) Υπολογισμός με το μισό, χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τον υπολογισμό των γινομένων τις μορφής 5 x …, τα οποία υπολογίζονται παίρνοντας το μισό του 10 x …

5) Αύξηση κατά ένα. Τα παιδιά αυξάνουν ένα γνωστό γινόμενο προσθέτοντας τον πολλαπλασιαστή μία φορά. Όταν γνωρίζουν ή υπολογίζουν εύκολα το 5 x 7 = 35 τότε βρίσκουν το 6 x 7 υπολογίζοντας 35 + 7.

6) Μείωση κατά ένα. Τα παιδιά μειώνουν ένα γνωστό γινόμενο αφαιρώντας τον πολλαπλασιαστή μια φορά. Συχνά υπολογίζουν 9 x 7 = 70 – 7. Αυτή η στρατηγική του "ένα λιγότερο" χρησιμοποιείται αποκλειστικά στα γινόμενα της μορφής 9 x …

2.3 Τρόποι εκμάθησης προπαίδειας

Από τη βιβλιογραφία μπορούμε να βρούμε πολλές έρευνες που έχουν γίνει για την εκμάθηση της προπαίδειας στο Δημοτικό σχολείο. Συνοψίζοντάς τες θα μπορούσαμε να τις κατατάξουμε σε αυτές που:

1. χρησιμοποιούν Τεχνολογία Πληροφοριών και Επικοινωνίας (ΤΠΕ),
2. βασίζονται σε κάποια τεχνική και έχουν ως κύριο μέσο κάποιο εργαλείο ή κάποιο παιχνίδι
3. είναι πειραματικές διδασκαλίες και πειραματικές διδασκαλίες με χρήση ιστορίας των μαθηματικών.

Ενδεικτικά θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα από κάθε περίπτωση.

Πάρα πολλές έρευνες και παρεμβάσεις έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια με χρήση ΤΠΕ για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και την εκμάθηση της προπαίδειας. Η χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία πρέπει να θεωρείται δεδομένη πια, καθώς τα οφέλη είναι πολλά σε όλα τα μαθήματα. Το ίδιο φυσικά ισχύει και στα μαθηματικά, που θεωρούνται κατεξοχήν το πιο δύσκολο και απαιτητικό μάθημα σε όλες τις τάξεις του δημοτικού και όχι μόνο. Με τη βοήθεια των ΤΠΕ, το μάθημα γίνεται άμεσα πιο ευχάριστο για το μαθητή, πιο ενδιαφέρον, διασκεδαστικό και ελκυστικό (Κόμης, 2000). Κομμάτι των νέων τεχνολογιών θεωρούνται και τα εκπαιδευτικά λογισμικά και παιχνίδια, τα οποία είναι ιδιαίτερα εύκολα στη χρήση και μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν παιδιά από πολύ μικρή ηλικία.

Εκτός όμως από τα εκπαιδευτικά λογισμικά και τα παιχνίδια, έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές και παιχνίδια για την εκμάθηση πινάκων προπαίδειας. Σύμφωνα με μία από αυτές, οι εκπαιδευτικοί ζητούν από τους μαθητές να μαθαίνουν κάθε φορά μόνο δυο γινόμενα από κάθε πίνακα (π.χ. 5x2=10 και 8x2=16). Αφού λοιπόν οι μαθητές εμπεδώσουν την συγκεκριμένη δυάδα, τους αναθέτει άλλη μια (4x2=8 και 6x2=12). Στη φάση της επανάληψης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει κενές κάρτες διαφορετικού χρώματος για κάθε πίνακα πολλαπλασιασμού. Αυτό πιστεύουν πως θα βοηθήσει ιδιαίτερα τους μαθητές, καθώς θα ταυτίζουν τον πίνακα με ένα συγκεκριμένο χρώμα. Στη μια πλευρά της κάρτας τοποθετείται το γινόμενο χωρίς την λύση, και στην άλλη δίνεται το αποτέλεσμα, η μέθοδος αυτή αν και χρονοβόρα έχει αποτελέσματα όπως υποστηρίζουν οι Pollack & Waller (1994). Συνεχίζουν πως ο μαθητής μαθαίνει σιγά σιγά να “μαντεύει” το αποτέλεσμα πριν γυρίσει την κάρτα. Προτείνουν λοιπόν το συγκεκριμένο εργαλείο μάθησης για την εκμάθηση της προπαίδειας.

Μία πειραματική εφαρμογή του Λεμονίδη (2003) για την εκμάθηση της προπαίδειας με ταυτόχρονη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία προτείνει αρχικά ως εισαγωγή για τις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης εμπειρικές καταστάσεις από την καθημερινή ζωή, πριν την εισαγωγή των συμβολικών πράξεων. Έπειτα για τη διδασκαλία της προπαίδειας προτείνει διαφορετικό τρόπο από αυτόν της παραδοσιακής διδασκαλίας. Αρχίζει με γινόμενα ήδη γνωστά στους μαθητές που μπορούν να τα χειριστούν, δηλαδή με τις στήλες του δύο, του πέντε και του δέκα. Τα γινόμενα του δύο, όπως αναφέρει, είναι γνωστά ως τα διπλάσια των αριθμών. Τα γινόμενα του πέντε είχαν ήδη προετοιμαστεί με τη μέτρηση 5-5, και τα γινόμενα του δέκα ήταν εύκολα, ως ιδιότητα με την οποία υπολογίζονται οι δεκάδες των αντίστοιχων αριθμών. Με αυτά τα γινόμενα οι μαθητές εξασκούνται στις κολόνες τις προπαίδειας και στη διαδοχή που έχουν οι φορές από το ένα μέχρι το δέκα. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν και εξασκούνταν στην αντιμεταθετική ιδιότητα, καθώς και σε διάφορες στρατηγικές.

Στη συνέχεια διδάσκονταν οι στήλες του τρία και του τέσσερα και μετά οι στήλες των μεγαλύτερων αριθμών. Κατά τη διδασκαλία της κάθε στήλης θεωρούν στρατηγικό γινόμενο το γινόμενο του πέντε και εξασκούν τους μαθητές να υπολογίζουν με βάση αυτό, για παράδειγμα το γινόμενο του 6, είναι το γινόμενο του 5 συν μια φορά, ενώ το γινόμενο του τέσσερα είναι μείον μια φορά. Τέλος, εξασκούν τους μαθητές να κινούνται πάνω στη στήλη με βάση τις φορές και πολύ σημαντικό γεγονός είναι, πως στη διδασκαλία που προτείνουν δίνουν μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς.

Κεφάλαιο 3ο – Αίσθηση αριθμού

Η αίσθηση αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση του αριθμού και των λειτουργιών ενός ατόμου με την ικανότητα και την τάση να χρησιμοποιείται αυτή η κατανόηση με ευέλικτους τρόπους δημιουργίας μαθηματικών κρίσεων και για την ανάπτυξη χρήσιμων και αποτελεσματικών στρατηγικών για τη διαχείριση αριθμητικών καταστάσεων. Καταλήγει σε μια άποψη των αριθμών ως σημαντικών οντοτήτων και προσδοκίας ότι οι μαθηματικοί χειρισμοί και τα αποτελέσματα πρέπει να έχουν νόημα. Εκείνοι που βλέπουν τα μαθηματικά με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιούν συνεχώς μια ποικιλία εσωτερικών "ελέγχων και ισορροπιών" για να κρίνουν το εύλογο των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Όταν ένα αποτέλεσμα συγκρούεται με την αντιληπτή προσδοκία, το άτομο επανεξετάζει τη μαθηματική κατάσταση για να το εξετάσει εξωτερικά, συχνά μέσω ενός άλλου φακού και αποπειράται να λύσει τη σύγκρουση. Συνοψίζοντας, οι αριθμοί είναι χρήσιμοι και τα μαθηματικά έχουν κάποια κανονικότητα (Mcintosh, Reys & Reys, 1992).

Η αίσθηση αριθμού χρησιμοποιείται ευρέως στα μαθηματικά έγγραφα, καθώς προσδιορίζει το θέμα της εκμάθησης μαθηματικών ως μια λογική δραστηριότητα. Η αίσθηση αριθμού είναι ένας αόριστος όρος που έχει ξεκινήσει τη συζήτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων των εκπαιδευτικών στην τάξη, των συγγραφέων προγραμμάτων σπουδών και των ερευνητών. Αυτές οι συζητήσεις περιλαμβάνουν μια λίστα με βασικά στοιχεία για την αίσθηση του αριθμού (Resnick, 1989; Sowder & Schappelle, 1989; Sowder, 1991; Willis, 1990), περιγραφές μαθητών που εμφανίζουν αίσθηση αριθμού (ή έλλειψη) (Howden, 1989; Reys, 1994), και σε βάθος θεωρητική ανάλυση της αίσθησης του αριθμού από μια ψυχολογική προοπτική (Greeno, 1991).

Αν και ο όρος «αίσθηση αριθμού» είναι σχετικά νέος στη γλώσσα των μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών, το νόημά του που δίνει έμφαση στην κατανόηση και τη σημαντική μάθηση είναι συνηθισμένο στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, McIntosh & Yang, 1999). Τα τελευταία χρόνια αυτή η συζήτηση είναι έντονη, για το αν μια εκπαίδευση αφιερωμένη στα μαθηματικά σε υψηλό επίπεδο σχετίζεται με μια καλύτερη γενική κατανόηση των αριθμών και με εξαιρετικές βασικές αριθμητικές ικανότητες (Mcintosh et al., 1992).

3.1 Αίσθηση αριθμού και πολλαπλασιασμός

Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, τα βρέφη τεσσάρων έως πέντε μηνών είναι ήδη σε θέση να υπολογίσουν προ-λεκτικά τις αριθμητικές συνέπειες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης καθώς και μικρά σύνολα αντικειμένων (Wynn, 1995). Τα νήπια δύο έως τριών ετών μαθαίνουν να μετράνε και να χρησιμοποιούν καταμέτρηση, μαζί με μετρήσιμα αντικείμενα (ειδικά τα δάχτυλά τους), για πρόσθεση και αφαίρεση (Fuson, 1992). Η επίσημη εκμάθηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ξεκινά στις περισσότερες χώρες στο νηπιαγωγείο.

Τα προγράμματα σπουδών συνήθως εισάγουν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση αργότερα από την πρόσθεση και την αφαίρεση (συνήθως στη δεύτερη ή τρίτη τάξη). Αρχικά τα παιδιά επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού εκτελώντας διαδικαστικές στρατηγικές όπως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή παράγωγα γεγονότα (π.χ. 7 × 8 = 7 × 7 + 7). Ανάλογα με την ηλικία και το σχολείο, σχηματίζουν ένα συνεργατικό δίκτυο προβλημάτων και λύσεων σε προβλήματα μακροχρόνιας μνήμης και στη συνέχεια ανασύρουν τις λύσεις για τα περισσότερα προβλήματα από τη μνήμη (Lemaire & Siegler, 1995; Sherin & Fuson, 2005). Κατά συνέπεια, η απόδοση των παιδιών σταδιακά γίνεται γρήγορη και ακριβής. Τα παιδιά έχουν καλύτερη απόδοση όσον αφορά την ακρίβεια και την ταχύτητα σε προβλήματα που περιλαμβάνουν αριθμούς όπως το 1, 0 και (ονομάζονται προβλήματα βάσει κανόνα, π.χ. 3 × 0), προβλήματα που αφορούν αριθμούς μικρότερους από 5 (ονομάζονται μικρά προβλήματα, π.χ. 2 × 3), προβλήματα που αφορούν διπλούς αριθμούς (ονομάζονται προβλήματα ισοπαλίας, π.χ. 4 × 4) και προβλήματα που αφορούν τον αριθμό 5 (ορίζονται ως προβλήματα πέντε, π.χ. 5 × 3) από ό, τι σε προβλήματα που αφορούν αριθμούς μεγαλύτερους από πέντε (ορίζονται ως μεγάλα προβλήματα, π.χ. 8 × 9) και αριθμοί που περιλαμβάνουν έναν αριθμό μεγαλύτερο από πέντε και έναν αριθμό μικρότερο από πέντε (εφεξής ονομάζονται μεσαία προβλήματα, π.χ. 4 × 8) (De Brauwer & Fias, 2009; De Brauwer, Verguts, & Fias, 2006).

Σύμφωνα με το τρέχον μοντέλο του διανοητικού πολλαπλασιασμού (Verguts & Fias, 2005), μικρά, βάσει κανόνα και προβλήματα πέντε είναι πιο εύκολο να επιλυθούν από τα μεσαία και τα μεγάλα προβλήματα επειδή τα προϊόντα τους έχουν πιο συνεπή και λιγότερο ασυνεπή ψηφία στην ίδια θέση με τα γειτονικά προϊόντα. Τα γειτονικά προϊόντα είναι προϊόντα προβλημάτων στα οποία ένας από τους χειριστές αλλάζει κατά ± 1 ή ± 2 (π.χ. το πρόβλημα 6 × 4 και οι γείτονές του 7 × 4, 5 × 4, 6 × 3, 6 × 5). Συνεπείς γείτονες (π.χ. 28 και 24 για το πρόβλημα 6 × 4) «συνεργάζονται» με το πραγματικό προϊόν και διευκολύνουν την ανάκτησή του, μειώνοντας έτσι τη δυσκολία του προβλήματος. Ασυνεπείς γείτονες (π.χ. 18 και 24 για το πρόβλημα 6 × 4) ανταγωνίζονται με το πραγματικό προϊόν και παρεμβαίνουν στην ανάκτησή του, αυξάνοντας έτσι τη δυσκολία του προβλήματος (Verguts & Fias, 2005).

Μεγαλώνοντας σε ηλικία τα παιδιά έρχονται σε επαφή και με άλλα προβλήματα και οι διαφορές μεταξύ εύκολων και δύσκολων προβλημάτων μειώνονται (De Brauwer et al., 2006). Ωστόσο, αυτές οι διαφορές δεν εξαφανίζονται τελείως και εξακολουθούν να είναι ισχυρές σε κάποιους ενήλικες (Ashcraft, 1992; Domahs, Delazer & Nuerk 2005), έτσι οι διαδικαστικές στρατηγικές, οι οποίες μερικές φορές χρησιμοποιούνται για την επίλυση μονοψήφων προβλημάτων, χρησιμοποιούνται κυρίως σε δύσκολα προβλήματα. Είναι πιθανό οι ομοιότητες στα μοτίβα απόδοσης (π.χ. παρόμοια μοτίβα ταχύτητας/ακρίβειας μεταξύ τύπων προβλημάτων) να υποδηλώνουν παρόμοιο δίκτυο μνήμης (Ashcraft, 1992; De Brauwer et al., 2006; Domahs et al., 2005; Verguts & Fias, 2005). Μέχρι την έκτη τάξη, τα παιδιά έχουν ήδη ένα δίκτυο μνήμης πολλαπλασιασμού παρόμοιο με αυτό των ενηλίκων (De Brauwer et al., 2006).

Η ιδέα της ανάπτυξης αριθμητικής αίσθησης ως κεντρικού στόχου των σχολικών μαθηματικών είναι πρόσφατη, και αρχίζει να εμφανίζεται ευρεία συμφωνία ως προς το πεδίο εφαρμογής της. Η ανάπτυξη γραπτών ομαδικών δοκιμών αριθμητικής αίσθησης είναι ακόμη πιο εμβρυϊκή, και μάλιστα δεν συμφωνούν όλοι οι εμπειρογνώμονες ότι οι δοκιμές με μολύβι και χαρτί, πόσο μάλλον οι δοκιμές, συμπεριλαμβανομένων πολλαπλών ειδών επιλογής, είναι ένας κατάλληλος τρόπος αξιολόγησης της αίσθησης του αριθμού (MacIntosh, 1997).

Κεφάλαιο 4ο – Ενσώματη μάθηση

Η απόφαση των κοινωνικών επιστημόνων να εμπλέξουν το σώμα στις προσεγγίσεις τους ως ένα βασικό στοιχείο που παίζει σημαντικό ρόλο είναι η αβεβαιότητα και η ρευστότητα που βιώνει ο σύγχρονος άνθρωπος στην κοινωνία. Έχει καταρριφθεί πλέον η έννοια του «φυσικού, στατικού, παθητικού, βιολογικού, αμετάβλητου σώματος» των θετικιστών. Με την έννοια της «σωματοποιημένης» γνώσης το σώμα με τις δυνατότητες της πολλαπλής του χρήσης βρίσκεται ως σημείο αναφοράς από όλους τους ερευνητές (Πούρκος 2017).

Διακρίνονται δύο βασικές ερευνητικές κατευθύνσεις, η πρώτη που αναφέρεται στην ενσώματη γνώση εννοεί την κατάσταση του να είσαι ενσώματος, ενώ η δεύτερη πραγματεύεται τη δράση ή διαδικασία της σωματοποίησης. Και στις δύο περιπτώσεις όμως δεχόμαστε πως το σώμα και ο νους δεν είναι δύο ξεχωριστές ουσίες αλλά μία ενιαία δυναμική διαδικασία. Έτσι από την προσχολική εκπαίδευση παρατηρείται έντονη η ανάγκη να γίνει κατανοητό πως το φυσικό σώμα αποτελεί απλώς το μέσον για την ανάπτυξη του εσωτερικού/νοητικού σώματος (Πούρκος, 2017 pp. 345).

Η δράση των παιδιών στην προσχολική ηλικία από τους παιδαγωγούς δεν στοχεύει στην εξωτερική πειθαρχία των σωμάτων των παιδιών, αντιθέτως με τις δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα προωθείται η αυτενέργεια και προσπαθούν να δημιουργηθούν τα πλαίσια εκείνα στα οποία τα παιδιά θα μπορέσουν να οργανώσουν τον χώρο και τον χρόνο τους μέσα από τη δράση. Η οικοδόμηση του χώρου συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη και την ολοκλήρωση του σωματικού νου για να μπορέσει το παιδί μεγαλώνοντας να αξιοποιήσει στο έπακρο τις δεξιότητές του τόσο κινητικά όσο και νοητικά, αφού υπάρχει τόσο στενή σύνδεση των δύο, αλλά και να προχωρήσει σε πολυπλοκότερες κατακτήσεις πρέπει οι πρωταρχικές του εμπειρίες να είναι πλούσιες σε ποιότητα και ποικιλία. Το νηπιαγωγείο είναι λοιπόν ο τόπος που θα λειτουργήσει ως στήριγμα στις σχολικές και κοινωνικές μαθήσεις, ώστε να συνεχίσει σε όλες τις υπόλοιπες βαθμίδες αναπτύσσοντας μέσω της ψυχοκινητικής αγωγής τον τρόπο που κοινωνικοποιείται και μαθαίνει χρησιμοποιώντας το σώμα του.

Τις τελευταίες δεκαετίες, η «ενσώματη γνωστική επιστήμη» αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη επιρροή στην ψυχολογία και τη φιλοσοφία του νου. Εν συντομία, θεωρεί ότι το μυαλό είναι εγγενώς προσδιορισμένο και δομημένο από το σώμα και το περιβάλλον, ή από μια πιο ριζοσπαστική άποψη, ότι το μυαλό επεκτείνεται πάνω στο σώμα και το περιβάλλον (Clark, 2008 ; Shapiro, 2014). Η ενσώματη γνωστική επιστήμη προϋποθέτει εξ ορισμού ένα διαχωρισμό από βασικές και μακροχρόνιες υποθέσεις της κλασικής γνωστικής επιστήμης, η οποία θεωρεί πως το μυαλό αποτελεί ουσιαστικά ένα αυτόνομο σύστημα που επεξεργάζεται συμβολικές αναπαραστάσεις, οι οποίες δεν συσχετίζονται με την εκάστοτε τρέχουσα κατάσταση του σώματος και του περιβάλλοντός του (De Bruin & Kästner, 2011).

Ένα ακόμη πεδίο έρευνας για την ενσώματη μάθηση αφορά στην περιοχή της μνήμης. Οι Agostinho, Tindall-Ford, Ginns, Howard, Leahy, & Paas, (2015) στη μελέτη τους σχετικά με τη χωρητικότητα μνήμης και τους περιορισμούς που επιβάλλει τόσο στην ικανότητα όσο και τη διάρκεια διατήρησης της γνώσης, αξιοποιούν τη θεωρία του γνωστικού φορτίου, η οποία υποστηρίζει ότι οι περιορισμοί της βραχυπρόθεσμης μνήμης αποτελούν κύριο εμπόδιο για τη μάθηση και αναζητούν τρόπους και διαδικασίες για βελτίωση του σχεδιασμού της διδασκαλίας με γνώμονα τους περιορισμούς αυτούς. Με βάση αυτή τη θεώρηση, εξετάζουν πώς μπορεί να επιδράσει στη μάθηση η συλλογική χρήση της μνήμης. Με ποιους τρόπους δηλαδή οι συνεργαζόμενοι μαθητές μπορούν να κερδίσουν από τη χωρητικότητα μνήμης εργασίας του άλλου κατά τη διάρκεια της μάθησης ή πώς μέσω των συντονισμένων κινήσεων ματιών και χεριών επιτυγχάνεται η «στρατηγική ελάχιστης μνήμης» (Wilson, 2002) στο χειρισμό πλαισιοθετημένων χωρικών πληροφοριών και τον προσδιορισμό λογικών σχέσεων (π.χ. αναπαραγωγή σχεδίων, διαγράμματα Venn), χωρίς να επιβαρύνεται η βραχυπρόθεσμη μνήμη.

Αντίστοιχα, η έρευνα για τη σχέση σωματικής δραστηριότητας και μνήμης έχει δείξει ότι η σωματική δραστηριότητα και η δυνατότητα ανάκλησης συνδέονται με περίπλοκο τρόπο, ανάλογα με το μέγεθος της σωματικής ενεργοποίησης, το περιεχόμενο των ερεθισμάτων και τις διαμεσολαβητικές ιδιότητες των συναισθημάτων των υποκειμένων. Η δυνατότητα ανάκλησης της μνήμης μπορεί στην πραγματικότητα να υπολειτουργεί, όταν η σωματική δραστηριότητα ξεπερνά τα φυσιολογικά επίπεδα καρδιακών παλμών (Mueller, Gibbs & Vetere, 2008). Η συναισθηματική κατάσταση και η σωματική δραστηριότητα είναι, προφανώς, άρρηκτα συνδεδεμένες, καθώς μεταβολές της μίας οδηγούν αναπόφευκτα σε αλλαγές της άλλης (Revelle & Loftus, 1992).

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει ως επίδραση της σωματικής άσκησης, είναι ότι προωθεί αλλαγές στο μυαλό που διευκολύνουν τη μάθηση και τη μνήμη (Hillman, Erickson & Kramer 2008; Liu-Ambrose, Nagamatsu, Voss, Khan & Handy, 2012). Σε μια προσπάθεια να αναδείξουν τους βασικούς μηχανισμούς που έχουν σχέση με τη σωματική δραστηριότητα, οι Erickson, Hillman & Kramer, (2015) επανεξέτασαν μελέτες σχετικές με την επίδραση της σωματικής δραστηριότητας στη δομή του εγκεφάλου, τη λειτουργία του εγκεφάλου και τη σχολική επίδοση. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα πιο δραστήρια και πιο ζωηρά παιδιά παρουσίαζαν ένα εύρος θετικών εγκεφαλικών μεταβολών (π.χ. μεγαλύτερος όγκος της ύλης στον ιππόκαμπο, πιο αποτελεσματικά μοτίβα εγκεφαλικής δραστηριότητας), και είχαν καλύτερη απόδοση σε δραστηριότητες που απαιτούν εκτελεστικό έλεγχο και συσχετιστική μνήμη και παρουσίαζαν υψηλότερες σχολικές επιδόσεις.

Η μελέτη των Sibley και Etnier (2003) έδειξε θετικό αντίκτυπο στη γνωστική λειτουργία των παιδιών, η οποία δεν εξαρτώνταν από το είδος της σωματικής δραστηριότητας. Η επίδραση της σωματικής δραστηριότητας στη γνωστική απόδοση ήταν μεγαλύτερη για παιδιά των πρώτων τάξεων της δημοτικής εκπαίδευσης, αλλά και του γυμνασίου συγκριτικά με άλλες ηλικίες παιδιών. Επίσης, διέφερε σημαντικά, ανάλογα με τον τύπο της γνωστικής αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκε. Οι σημαντικότερες αλλαγές διαπιστώθηκαν σε δραστηριότητες σχετικές με αντιληπτικές ικανότητες, ακολουθούμενες από τεστ IQ, σχολική επίδοση, μαθηματικές και λεκτικές δοκιμασίες.

Επιπλέον, η μελέτη του Tomporowski (2003), έδειξε ότι είτε μετά από έντονη σωματική άσκηση, ή ακόμα και κατά τη διάρκειά της, μπορεί να υπάρχει θετική επίδραση σε γνωστικές δραστηριότητες. Ακόμη και η σύντομη σωματική δραστηριότητα επηρεάζει τις γνωστικές διεργασίες αυξάνοντας την ακρίβεια και την ταχύτητα απόκρισης βελτιώνει τη μνήμη εργασίας και την επίδοση σε δραστηριότητες ελεύθερης ανάκλησης.

Η ενσώματη μάθηση αποτελεί μια σύγχρονη παιδαγωγική θεωρία της μάθησης, η οποία δίνει έμφαση στη χρήση του σώματος στην εκπαιδευτική πρακτική και στην αλληλεπίδραση μαθητών-δασκάλων τόσο εντός όσο και εκτός της τάξης αλλά και σε συνδυασμό με ψηφιακό περιβάλλον. Αρκετές έρευνες υπογραμμίζουν τη χρησιμότητα και την αναγκαιότητα του ίδιου του σώματος ως εκπαιδευτικού εργαλείου. Παρά ταύτα, μέχρι πρόσφατα το σώμα χρησιμοποιήθηκε κυρίως ως μέσο για να επιτρέψει τη βιωματική συμμετοχή των μαθητών και να προσελκύσει το ενδιαφέρον τους (Kamii, Lewis, & Kirkland, 2001).

Η χρήση του σώματος είναι απαραίτητη για την έννοια της εκπροσώπησης και της επικοινωνίας, ενώ αυτό επιβεβαιώνεται και από την έμφαση που δίνουν άλλα πεδία και γνωστικά αντικείμενα στο σώμα ως εργαλείο μάθησης, όπως το χορευτικό θέατρο, η κινησιολογία, ο αθλητισμός ακόμα και τα Μαθηματικά και η Φυσική. Όλα αυτά τα γνωστικά αντικείμενα έχουν τη συνεργασία των μαθητών, την κίνηση και τη διαδικασία της γνωσιακής ανάπτυξης ως κοινό παρανομαστή (Kamii, et al., 2001).

Η ενσώματη μάθηση συνδέεται στενά με τα διδακτικά μοντέλα του κονστρουκτιβισμού και με τις σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες σχετικά με τον ρόλο του δασκάλου, του μαθητή και της μόρφωσης στην εκπαιδευτική πρακτική. Ενσώματη εκπαίδευση έχει οριστεί ως η βασική έννοια που περιλαμβάνει την ενσώματη διδασκαλία και τη ενσώματη μάθηση. Στην πραγματικότητα, οι όροι ενσώματη μάθηση και ενσώματη διδασκαλία χρησιμοποιούνται εναλλακτικά για να αναφερθούν σε σύγχρονες επιστημονικές και εκπαιδευτικές πρακτικές (Kamii et al., 2001).

Ωστόσο, έχουν διεξαχθεί μόνο λίγες μελέτες για τη σύνδεση της ενσώματης μάθησης με τη δραματοποίηση των εκπαιδευτικών σεναρίων και την εκπροσώπηση των επιστημονικών εννοιών και γνώσεων, με στόχο την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών και της κριτικής σκέψης, την ενεργό συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία, την κατανόηση των επιστημονικών εννοιών και φαινομένων και τη διεπιστημονική σύνδεση των επιστημών με μορφές τέχνης.

Βασικός περιορισμός και αδυναμία της έρευνας για την ενσώματη μάθηση είναι ότι μεγάλο μέρος του όγκου της, περιλαμβάνει σύντομες και τεχνητές μελέτες.

Απαιτείται αυστηρή έρευνα για να δοκιμαστεί η ενσώματη γνώση σε μια πιο εντατική παρέμβαση στην τάξη, τόσο για να μάθουν πώς οι στρατηγικές που εφαρμόζουν τις αρχές της νευροεπιστήμης μπορούν να αυξήσουν την εκμάθηση αλλά και για να εμπλουτίσουν τη θεωρητική εργασία με ρεαλιστικές και μακροπρόθεσμες διαπιστώσεις. Τέλος, ο μικρός αριθμός συμμετεχόντων εκπαιδευτικών στην έρευνα πιθανότατα να διαστρεβλώνει τα αποτελέσματα, τα οποία πιθανόν να διαφέρουν σε μεγάλα δείγματα. Μελλοντικές έρευνες με μεγαλύτερα δείγματα συμμετεχόντων σε περισσότερα σχολεία χρειάζεται να επιβεβαιώσουν τα αποτελέσματα, ενώ για τις ασφαλείς διαπιστώσεις αξίζει να υποβληθούν σε περισσότερο δομημένες δοκιμές.

Επιπρόσθετα, μια κατηγοριοποίηση και ταξινόμηση των ερευνών που βασίζονται σε όλες αυτές τις διαφορετικές πτυχές της ενσώματης μάθησης (π.χ. ο βαθμός χαμηλής ή υψηλής σωματικής εμπλοκής, επίπεδα αλληλεπίδρασης, γνωστικό φορτίο) είναι απαραίτητη για την εκπαιδευτική ψυχολογία και τις γνωστικές διαδικασίες στην εκπαίδευση (Wilson, 2002; Corcoran, 2018; Skulmowski & Rey, 2018). Αν και τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετά διαδραστικά παιχνίδια, που ευνοούν την ενεργό συμμετοχή των παιδιών, ασκώντας τόσο τις σωματικές, όσο και τις γνωστικές τους ικανότητές, υπάρχει περιορισμένη εμπειρική έρευνα που μελετά τη χρήση τους στη γενική καθώς και στην ειδική εκπαίδευση.

Στην παρούσα έρευνα μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού θα προσπαθήσουμε ακριβώς αυτό, να αποδείξουμε πως τα παιδιά μέσω της ενσώματης μάθησης έχουν καλύτερη απόδοση σε δραστηριότητες που απαιτούν εκτελεστικό έλεγχο και συσχετιστική μνήμη και παρουσιάζουν καλύτερες σχολικές επιδόσεις στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού. Θα εξετάσουμε αν μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού επηρεάζεται η ταχύτητα απόκρισης αλλά και η ακρίβειά τους, σε δραστηριότητες ελεύθερης ανάκλησης.

4.1 Ενσώματη μάθηση στα Μαθηματικά

Υπάρχουν μεγάλες ενδείξεις ότι διάφορες πτυχές των μαθηματικών είναι ενσώματες. Ένα παράδειγμα είναι οι χειρονομίες που παράγουν οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές όταν συνεργάζονται ή επικοινωνούν για μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Ένα άλλο παράδειγμα για να εξηγηθεί πώς τα φυσικά χαρακτηριστικά του σώματος επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα επεξεργάζονται τους αριθμούς, είναι η χρήση των δακτύλων για τον υπολογισμό και την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Fischer & Brugger, 2011). Είναι αρκετά συνηθισμένο να παρατηρήσουμε ότι, ειδικά τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους σε συνδυασμό με μαθηματικές διεργασίες, καθώς τα δάχτυλα είναι συνήθως άμεσα διαθέσιμα και καλύπτουν το εύρος των αριθμών εντός των οποίων τα παιδιά συνήθως εισάγονται στην καταμέτρηση και την αριθμητική. Αυτή η χρήση των δακτύλων είναι μια εκδήλωση ενσωματωμένης γνώσης και στην περίπτωση της μέτρησης έχει επισημανθεί ως ενσωματωμένη αριθμητικότητα (embodied-numerosity) (Moeller, Fischer, Link, Wasner, Huber, Cress & Nuerk, 2012). Η γνώση των δακτύλων είναι η ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται και να διακρίνουν τα δάχτυλα των χεριών τους χωρίς οπτική καθοδήγηση. Μερικές μελέτες διαπιστώνουν ότι η καλύτερη δακτυλική γνώση σχετίζεται με υψηλότερα επίπεδα αριθμητικής ικανότητας (Newman, 2016; Poltz, Wyschkon, Höse, von Aster & Esser, 2015).

Ωστόσο, η συσχέτιση μεταξύ της συχνότητας χρήσης των δακτύλων και της ακρίβειας των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης εξασθενεί καθώς μεγαλώνουν τα παιδιά. Μία μελέτη (Jordan, Kaplan, Ramineni, & Locuniak, 2008) παρακολούθησε παιδιά που ξεκίνησαν στο νηπιαγωγείο μέχρι το τέλος της δεύτερης τάξης, και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η χρήση των δακτύλων, ενώ αρχικά παρέχει μια φυσική «σκαλωσιά» για τον υπολογισμό, στη συνέχεια τα οφέλη από τη χρήση τους εξασθενίζουν, πιθανώς επειδή τα δάχτυλα δεν αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά την πολυπλοκότητα των μεταγενέστερων μαθηματικών.

Αυτό που μπορούμε να μάθουμε από τη βιβλιογραφία είναι το πώς αλληλοσυνδέονται κάποια τμήματα του σώματός μας και διαδικασίες σκέψης. Αλλά είναι σαφές ότι αυτή η σχέση δεν είναι απλή και ποικίλλει καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μας. Σχετικά είναι και τα ευρήματα που παρουσιάζουν ότι τα άτομα παράγουν μικρότερους τυχαίους αριθμούς εάν το κεφάλι τους ή το σώμα είναι στραμμένο προς τα αριστερά, και μεγαλύτερα νούμερα αν το κεφάλι ή το σώμα τους γύρουν προς τα δεξιά (Loetscher, Schwarz, Schubiger & Brugger, 2008).

4.2 Χειραπτικά υλικά και Μαθηματικά

Τα μαθηματικά χειραπτικά υλικά, είναι φυσικά ή ψηφιακά αντικείμενα με τα οποία οι μαθητές αλληλοεπιδρούν με απώτερο σκοπό να μάθουν μαθηματικά (Tran, Smith & Buschkuehl, 2017) και είναι σχεδιασμένα για να αναπτύξουν κατά τον χειρισμό τους συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες στα παιδιά (Antle, 2007). Στη βιβλιογραφία τα χειραπτικά υλικά τα συναντάμε και με τον όρο "ενσώματα αντικείμενα" (embodied-objects). Τον όρο «ενσωματωμένο αντικείμενο» οι Gray & Tall (2001) τον χρησιμοποιούν με τρόπο παρόμοιο με τη θεωρία του Lakoff και των συναδέλφων του, που μιλάνε για «ενσώματη γνωστική επιστήμη» (Lakoff, Johnson & Sowa, 1999). Οι Gray & Tall (2001) ορίζουν ως "ενσώματα αντικείμενα" (embodied objects), τα φυσικά αντικείμενα τα οποία χρησιμοποιούμε να χτίσουμε την διανοητική μας αντίληψη μέσω των αισθήσεών μας. Επίσης, στην κατηγορία των μαθηματικών χειραπτικών υλικών ανήκουν και τα εικονικά ψηφιακά χειραπτικά υλικά (virtual manipulatives), η χρήση των οποίων είναι αρκετά δημοφιλής. Σύμφωνα με τον όρο αυτό, ως "virtual manipulative" ορίζεται "μια ψηφιακή οπτική αναπαράσταση ενός μοντέλου αντικειμένου ή μοντέλου μιας σχέσης ή διαδικασίας που παρέχει –μέσω μοντελοποίησης- ευκαιρίες κατασκευής μαθηματικής γνώσης" (Χαλιαμπάλιας, 2017).

Κατά την Τζεκάκη (2016), η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού συμβάλλει στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, εφόσον αυτό ενταχθεί οργανικά στη μαθηματική δραστηριότητα των παιδιών. Όταν μιλάει κανείς για μαθηματικές έννοιες, κάνει λόγο για ιδεατές κατασκευές, οι οποίες μπορούν να αποδοθούν με διαφορετικά μέσα αναπαράστασης. Στο βιβλίο του ο Van de Walle (2005), αναφέρει ότι οι Lesh, Post & Behr (1987), κάνουν λόγο για πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών: τις εικόνες, τα χειραπτικά μοντέλα, το γραπτό συμβολισμό, τις πραγματικές καταστάσεις και την προφορική γλώσσα. Οι μεταφορές ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις και στο εσωτερικό της καθεμιάς βοηθούν στην ανάπτυξη νέων εννοιών. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού είναι να συνδέσει το «συγκεκριμένο» και ρεαλιστικό, το οποίο εκπροσωπείται από το υλικό, με το «αφηρημένο» και ιδεατό, δηλαδή τις μαθηματικές έννοιες.

Με το γενικό όρο «εκπαιδευτικό υλικό» εννοούνται διάφορα αντικείμενα ή υλικά που εισέρχονται για να χρησιμοποιηθούν στη σχολική τάξη, όπως παιχνίδια, εμπράγματο χειραπτικό υλικό, αναπαραστάσεις, εικόνες, φωτογραφίες, ταινίες, ψηφιακές εφαρμογές κ.ά. . Η Laski et al. (2015), ορίζουν τα χειραπτικά υλικά (manipulatives) ως συγκεκριμένα (concrete[5]) υλικά, τα οποία χρησιμοποιούνται για την επίδειξη μιας μαθηματικής ιδέας ή για την υποστήριξη της εκτέλεσης μιας μαθηματικής διαδικασίας.

Η Τζεκάκη (2016) αναφέρεται σε εξειδίκευση του χειραπτικού υλικού, ενώ οι Marshall & Swan (2008) χρησιμοποιούν τον όρο «μαθηματικό χειραπτικό υλικό» (mathematical-manipulative) για να ορίσουν κάθε αντικείμενο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί με έναν τρόπο αισθησιοκινητικό, αναπτύσσοντας συνειδητό ή μη συνειδητό μαθηματικό συλλογισμό.

Τα μαθηματικά χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι από ένα λούτρινο παιχνίδι, μία χαρτοσακούλα, κύβους, ράβδους, ως τα γεωμετρικά αντικείμενα, όπως τρίγωνα, χάρακες, πίνακες αντικειμένων, όπως οι κουκίδες σε ένα ντόμινο, η ψηφιακή σχεδίαση ενός γραφήματος μιας συνάρτησης ή ενός διαγράμματος Venn κ.ά. . Είναι τα υλικά με τα οποία οι μαθητές δύναται να χρησιμοποιήσουν βιωματικά μέσω χειρονομιών ή και κινήσεων ολόκληρου του σώματος στη διάρκεια μιας ενσώματης μαθηματικής διδασκαλίας, με σκοπό να χτίσουν τη μαθηματική αντίληψη μέσω των αισθήσεών τους.

Αρκετές θεωρητικές παραδοχές παρέχουν πληροφορίες για τον αντίκτυπο που έχει στη μάθηση η χρήση των μαθηματικών χειραπτικών μέσων. Πρώτη θεωρητική σκέψη είναι ότι τα χειραπτικά παιχνίδια για τα μαθηματικά υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αφηρημένης συλλογιστικής. Ειδικά για τα μικρότερα παιδιά που έχουν μεγαλύτερη εξάρτηση από το χειραπτικό υλικό, καθώς είναι το μέσο με το οποίο αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον τους για να εξάγουν νόημα (Piaget, 1962; Montessori, 1964).

[5] Ο Φεσάκης (2014) δηλώνει πως ο προσδιορισμός “concrete” χρησιμοποιείται από τους ξένους συγγραφείς για να διακρίνουν το «απτικό υλικό», όπως μεταφράζει ο ίδιος τον όρο “manipulatives”, από το εικονικό (virtual), το οποίο έχει μορφή λογισμικού.

Η σχέση μεταξύ ενσώματων μαθηματικών αντικειμένων και ενσωμάτωσής τους στις μαθηματικές γνωστικές διαδικασίες είναι στενή (Gray & Tall, 2001). Το ενσώματο μαθηματικό αντικείμενο αποτελεί το φυσικό θεμέλιο με το οποίο οι μαθητές χτίζουν φυσικές μαθηματικές εικόνες και αργότερα τις αναπτύσσουν σταθερά σε πιο αφηρημένες διανοητικές μαθηματικές εικόνες, οι οποίες με τη σειρά τους θα αποτελέσουν τη βάση για τη συμβολική και στη συνέχεια για την αξιωματική μαθηματική έννοια.

Επιπλέον, η χρήση των μαθηματικών χειραπτικών υλικών από τους μαθητές τούς δίνουν τις ευκαιρίες να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες μέσω της δική τους βιωματικής εξερεύνησης, τόσο σε ατομικό, όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Όταν οι μαθητές εξερευνούν και ανακαλύπτουν οι ίδιοι τις μαθηματικές έννοιες με τα χέρια ή το σώμα τους, τα αποτελέσματα αυτής της ανακάλυψης είναι ισχυρά και μακροπρόθεσμα, με θετικές επιδράσεις στο μέλλον (Bertsch, Pesta, Wiscott, & McDaniel, 2007). Η διαδικασία σχηματισμού της μαθηματικής γνώσης σε σύγκριση με την παρεχόμενη μαθηματική γνώση είναι αυτή που μαθησιακά ωφελεί τους μαθητές και θα τους καταστήσει ικανούς να αναπαραγάγουν μαθηματικές γνώσεις ή να δομήσουν καινούριες σε μια δοκιμασία αξιολόγησης (Morris, Bransford και Franks, 1977).

Τα χειραπτικά υλικά από μόνα τους δε διδάσκουν (Marshall & Swan, 2008). Η Τζεκάκη (2016) αναφέρει πως για να είναι αποτελεσματικός ο εκπαιδευτικός, χρειάζεται να έχει βαθιά γνώση της μαθηματικής έννοιας που πρόκειται να διδάξει, να επιλέγει τα κατάλληλα μαθηματικά χειραπτικά υλικά, να γνωρίζει πώς αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της συγκεκριμένης έννοιας, να γνωρίζει τους μαθητές του και να τους βοηθά να οικοδομήσουν τη γνώση συνδέοντας ιδέες και τέλος, να μπορεί να διαχειρίζεται το περιβάλλον μάθησης. Για να στηρίξει τα λεγόμενά της δίνει ως παράδειγμα το υλικό Dienes το οποίο μπορεί να αναλύσει και να συνθέσει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κλπ. , αλλά δεν μπορεί να κάνει ομαδοποιήσεις, διαιρέσεις ή υποδιαιρέσεις. Επομένως, για να είναι αποτελεσματικά τα χειραπτικά υλικά, πρέπει να αποτελούν μέρος ενός πολύ καλά σχεδιασμένου προγράμματος μαθηματικών.

4.3 Χειρονομίες στα Μαθηματικά

Οι χειρονομίες αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της επικοινωνίας για τις μαθηματικές ιδέες. Μπορεί να είναι χειρονομίες των εκπαιδευτικών ή των μαθητών και συσχετίζουν την ενσώματη μάθηση με την μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση ενσωματώνεται σε δύο βασικές πτυχές, στην αντίληψη και τη δράση και στηρίζεται στο φυσικό περιβάλλον.

Ο McNeill (1992) οριοθετεί τέσσερις κύριες κατηγορίες χειρονομιών: (α) τις δεικτικές χειρονομίες, που χρησιμεύουν για την ένδειξη αντικειμένων ή θέσεων, συχνά με εκτεταμένο δείκτη, αλλά μερικές φορές με άλλα δάχτυλα ή ολόκληρο το χέρι (π.χ., δείχνοντας έναν κύβο για να αναφερθεί κάποιος σε αυτόν τον κύβο), (β) τις εικονικές χειρονομίες, που απεικονίζουν σημασιολογικό περιεχόμενο απευθείας μέσω της τροχιάς σχήματος ή κίνησης του χεριού (ή χεριών) (π.χ., σχηματισμός ενός τριγώνου στον αέρα που σημαίνει τρίγωνο), (γ) τις μεταφορικές χειρονομίες, οι οποίες απεικονίζουν σημασιολογικό περιεχόμενο μέσω της μεταφοράς (π.χ. χούφτες με τα χέρια σαν να "κρατούν" μια ιδέα, η οποία αντικατοπτρίζει την ιδέα του μεταφορέα, που αναλύονται λεπτομερώς αργότερα) και (δ) τις χειρονομίες με χτύπημα, οι οποίες είναι κινητικές, ρυθμικές χειρονομίες που μπορεί να βοηθούν στην κατανόηση μαθηματικών έργων με διακριτό χαρακτήρα και που μπορούν να συνοδεύουν τις παραπάνω κατηγορίες χειρονομιών.

Κεφάλαιο 5ο – Ερευνητικό πλαίσιο

5.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνά μου κινήθηκε γύρω από τρία ερευνητικά ερωτήματα.

Αν τα γάντια σε συνδυασμό με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών:

I. Είναι κατάλληλα και αποτελεσματικά για τη διδασκαλία εύκολων τρόπων εκμάθησης της προπαίδειας.
II. Και των ιστορικών πολιτισμών που παρουσιάστηκαν, βοήθησαν στην εκμάθηση της προπαίδειας.
III. Μακροπρόθεσμα οι μαθητές/μαθήτριες θυμούνταν την προπαίδεια με την ίδια ευκολία, όπως την περίοδο διεξαγωγής της έρευνας.

Ως επιμέρους ερωτήματα ορίζονται τα εξής:

-είναι ένα εργαλείο ελκυστικό και εύκολο στη χρήση για τους/τις μαθητές/τριες για εκπαιδευτικό σκοπό μέσα στην τάξη;

-προάγει την ενίσχυση γνώσεων που ήδη προϋπάρχουν;

5.2 Μέθοδος

Η εργασία παρουσιάζει μία συγκριτική ποιοτική μελέτη με πειραματική διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε σε δύο σχολεία (ιδιωτικό και δημόσιο) σε τάξεις δευτέρας (Β’) Δημοτικού. Συγκεκριμένα το πρώτο σχολείο ήταν στο Λάκκωμα Χαλκιδικής, το “Big Bang School” ένα πρότυπο βιωματικό Δημοτικό σχολείο, όπου χρησιμοποιήθηκαν πρώτη φορά τα γάντια εκμάθησης προπαίδειας με ταυτόχρονη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Το δεύτερο σχολείο ήταν το 26ο Δημοτικό Σχολείο Θεσσαλονίκης. Η δια ζώσης εκπαίδευση διακόπηκε κάποια στιγμή και αναγκαστήκαμε να συνεχίσουμε την έρευνα μέσω τηλεδιδασκαλιών, την ολοκληρώσαμε τον Ιούνιο δια ζώσης.

Η προσέγγιση της παρούσας εργασίας είναι ποιοτική, ενώ η μέθοδος που επιλέχθηκε είναι οι προσωπικές συνεντεύξεις που βασίζονται σε μαθηματικά έργα (task-based interviews), καθώς μπορούν να προσφέρουν στους ερευνητές σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τις στρατηγικές που προτιμούν οι μαθητές (Clarke, Roche, & Mitchell, 2011) – και στην προκείμενη περίπτωση σχετικά με την εκμάθηση της προπαίδειας χρησιμοποιώντας τα γάντια με ταυτόχρονη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Θεωρείται κατάλληλη για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας επειδή οι μαθητές δεν εκτελούν απλώς μια δοκιμασία, αλλά ερωτώνται για τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται (Clark et al., 2011).

Αρχικά έγινε η διεξαγωγή διαγνωστικού τεστ (pre-test) το οποίο έγινε για να διερευνηθούν οι γνώσεις των παιδιών ανεξαρτήτως του πολλαπλασιασμού. Για τις πειραματικές διδασκαλίες βασίστηκα σε κάποια σημεία μία πειραματική εφαρμογή του Λεμονίδη (2003) για την εκμάθηση της προπαίδειας με ταυτόχρονη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία. Η διδασκαλία της προπαίδειας πραγματοποιήθηκε με διαφορετικό τρόπο και είχε τα παρακάτω κύρια χαρακτηριστικά: Η προπαίδεια άρχιζε με γινόμενα και στήλες, τα οποία ήταν κατά το μεγαλύτερο μέρος γνωστά στους μαθητές και ήταν εύκολο να τα χειριστούν. Αρχίζαμε, δηλαδή, με τις στήλες του δύο, του πέντε και του δέκα. Τα γινόμενα του δύο ήταν γνωστά ως τα διπλάσια των αριθμών. Τα γινόμενα του πέντε είχαν ήδη προετοιμαστεί με τη μέτρηση 5-5, και τα γινόμενα του δέκα ήταν εύκολα, ως ιδιότητα με την οποία υπολογίζονται οι δεκάδες των αντίστοιχων αριθμών. Με αυτά τα γινόμενα οι μαθητές εξασκούνται στις κολόνες τις προπαίδειας και στη διαδοχή που έχουν οι φορές από το ένα μέχρι το δέκα (Λεμονίδης,2003). Στη συνέχεια θα διδάσκονταν οι στήλες του τρία και του τέσσερα και μετά οι στήλες των μεγαλύτερων αριθμών οι οποίες και δυσκολεύουν τους μαθητές πολύ περισσότερο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Στις περισσότερες διδασκαλίες το πλάνο μαθήματος ξεκινούσε με χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως εναρκτήρια βιωματική δράση. Τα γάντια προπαίδειας κατασκευάστηκαν μέσα στην τάξη από τα ίδια τα παιδιά μετά την εκμάθηση των προπαιδειών των μικρών αριθμών (1,2,3,4,5). Τέλος, αφού όλες οι προπαίδειες είχαν διδαχθεί, με το πέρας της σχολικής χρονιάς πραγματοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις με τα παιδιά, στις οποίες σημειώσεις αλλά και τον χρόνο που χρειαζόταν το κάθε παιδί για να ολοκληρώσει την εργασία του, κρατούσαν εκτός από την ερευνήτρια και οι δασκάλες των τάξεων .

5.3 Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2020, σε δύο σχολεία. Εξετάστηκαν δύο ομάδες μαθητών στο τέλος της Β’ τάξης, η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου, η πρώτη ομάδα (πειραματική ομάδα) αποτελούνταν από 16 παιδιά και η δεύτερη ομάδα (ομάδα ελέγχου) από 22. Κανένα παιδί όπως ενημερωθήκαμε από τις δασκάλες των δύο ομάδων δεν είχε κάποιες μαθησιακές δυσκολίες (γνωμάτευση από Κ.Ε.Σ.Υ.) ή κάποια άλλη έντονη δυσκολία στα Μαθηματικά. Επίσης από ένα αρχικό τεστ (pre-test) που έγινε στην αρχή της Β’ τάξης πάνω στις αριθμητικές ικανότητες των παιδιών ανεξαρτήτως του πολλαπλασιασμού και τα δύο τμήματα παρουσίασαν ίδιο επίπεδο σύμφωνα με τις επιδόσεις τους (βλ. ενότητα 6.1).

Το τεστ ήταν βασισμένο σε γνώσεις που είχαν διδαχθεί στην Α’ Δημοτικού και έγινε στα πλαίσια επανάληψης των γνώσεων των παιδιών με την εισαγωγή τους στο σχολείο από τις δασκάλες των τάξεων. Έπειτα οι μαθητές της ομάδας ελέγχου διδάχτηκαν με κλασικό πρόγραμμα του σχολείου και οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με τη νέα πρόταση διδασκαλίας η οποία διήρκεσε χρονικά όσο και η κλασική διδασκαλία. Οι διδασκαλίες στην ομάδα ελέγχου έγιναν από τη δασκάλα της τάξης ενώ οι διδασκαλίες οι οποίες ξεκινούσαν με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην πειραματική ομάδα έγιναν από την ερευνήτρια σε συνεργασία με τη δασκάλα της τάξης.

Συνολικά (38) παιδιά δευτέρας δημοτικού πήραν μέρος στην έρευνα. Τα παιδιά της ομάδας ελέγχου πήραν μέρος στο αρχικό τεστ και στο τελευταίο κομμάτι της έρευνας. Ενώ τα παιδιά της πειραματικής ομάδας σε όλα (και στο τελικό ερωτηματολόγιο τον Ιούνιο).

5.4 Ερευνητικό εργαλείο

Στην ομάδα ελέγχου η δασκάλα ακολούθησε το πλάνο μαθημάτων που προτείνεται από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και από τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ) Δημοτικού. Δηλαδή διδάσκονται αρχικά οι προπαίδειες του 10 και του 5 μαζί, έπειτα του 2 και του 4 και πάλι μαζί, στη συνέχεια του 8, μετά του 7, ακολουθούν οι προπαίδειες του 3 και του 6 μαζί και τέλος του 9 και του 11 και πάλι μαζί. Ενώ στην πειραματική ομάδα όπως αναφέρθηκε ακολουθήθηκε η σειρά που προτείνει ο Λεμονίδης (2003) με ταυτόχρονη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως εισαγωγή για τα μαθήματα εκμάθησης προπαίδειας και πολλαπλασιασμού όπως αναλύεται και παρακάτω.

Οι δύο διδασκαλίες έμοιαζαν και διέφεραν σε αρκετά σημεία. Αρχικά, και οι δύο ξεκινούσαν με τα γινόμενα του 10 και του 5, η διαφορά όμως στην πειραματική διδασκαλία ήταν πως εισάγονταν και τα γινόμενα του 2 παράλληλα, ως γνωστά διπλάσιων αριθμών τα οποία και οι δύο ομάδες είχαν διδαχθεί σε αρχικά μαθήματα της Β' τάξης σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών πριν την εκμάθηση της προπαίδειας.

Έπειτα, στην πειραματική ομάδα συνεχίζονταν οι διδασκαλίες με εκμάθηση των στηλών του 3 και του 4, ενώ στην ομάδα ελέγχου διδάσκονταν του 2 και του 4. Τέλος, στην πειραματική ομάδα συνεχίζαμε με εκμάθηση των προπαιδειών των μεγάλων αριθμών και εισαγωγή και χρήση των γαντιών της προπαίδειας ενώ στην ομάδα ελέγχου με τη σειρά που αναφέρθηκε παραπάνω. Συγκεκριμένα, πρώτα διδάσκονταν την προπαίδεια του 8, μετά του 7, αργότερα του 3 και του 6 μαζί και τέλος του 9 και του 11 μαζί.

Βλέπουμε λοιπόν πως οι δύο διδασκαλίες μοιάζουν στην αρχή μόνο και στη συνέχεια ακολουθούν τελείως διαφορετική πορεία.

5.4.1 Πλάνα και υλικό διδασκαλιών με ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Στην πειραματική ομάδα επιλέχθηκαν δραστηριότητες με βάση την ιστορία των μαθηματικών μέσω διάφορων πολιτισμών. Η κάθε δραστηριότητα και το υποστηρικτικό υλικό επιλέχθηκε για να κινητοποιήσει τους μαθητές, να τους προβάλλει κάτι διαφορετικό, ώστε να τους τραβήξει το ενδιαφέρον και φυσικά διότι ταίριαζε εισάγοντας την ιστορία με τη νέα γνώση που θέλαμε να διδάξουμε.

Τα μαθήματα στην πειραματική ομάδα ξεκίνησαν με την 1η Δραστηριότητα και έπειτα από το πέρας της έγινε η διδασκαλία της προπαίδειας του 1. Επιλέχθηκε η δραστηριότητα με τον πολιτισμό των Σουμέριων, διότι ήταν οι πρώτοι που αναγκάστηκαν να δημιουργήσουν κάποιο είδος αρίθμησης για εμπορικούς λόγους μέσω κουπονιών. Πολύ σημαντικό ιστορικό εύρημα και πάρα πολύ ενδιαφέρουσα ιστορική πληροφορία που τράβηξε αμέσως το ενδιαφέρον των παιδιών, αφού ήταν μία πραγματική κατάσταση και μπόρεσαν να σχετιστούν με αυτό. Επίσης, γίνεται ξεκάθαρα η εισαγωγή της έννοιας του πολλαπλασιασμού, αφού όπως περιγράφεται και παρακάτω τα παιδιά βιωματικά θα χρησιμοποιήσουν υλικά και θα καταγράψουν είδος και πλήθος με κάποιον τρόπο.

Έπειτα παρουσιάζεται η δεύτερη διδασκαλία με χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών (2η Δραστηριότητα), για να μάθουν τα παιδιά πώς και γιατί ξεκίνησαν οι άνθρωποι να πολλαπλασιάζουν, παρουσιάζεται η ανάγκη των ανθρώπων να «επινοήσουν» τον πολλαπλασιασμό. Με το τέλος της, τα παιδιά εξασκούνται στις προπαίδειες του δύο, στη συνέχεια του πέντε και τέλος του δέκα.

Αφού έχουν διδαχθεί οι προπαίδειες του 1,2,5 και 10 προχωρήσαμε στην 3η Δραστηριότητα και στο τέλος της τα παιδιά έκαναν εξάσκηση και έγραψαν στο «Μικρό τους Βιβλίο» τις προπαίδειες που είχαν ήδη μάθει. Η 3η δραστηριότητα επιλέχθηκε για να μπορέσουν ιστορικά τα παιδιά να κατανοήσουν τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι άνθρωποι παλιά, στοχεύουμε στο συναισθηματικό κομμάτι μέσω της ιστορίας «ως εργαλείο», αφού παίζει πάρα πολύ μεγάλο ρόλο όπως αποδεικνύεται και από τη βιβλιογραφία. Η καλλιέργεια θετικής στάσης των παιδιών ως προς τα μαθηματικά μέσω γνώσης των δυσκολιών που αντιμετώπιζαν οι άνθρωποι παλιά και η αναγκαιότητα της δημιουργίας αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού ώστε η ζωή τους να γίνει πιο εύκολη και άνετη.

Η τέταρτη δραστηριότητα επιλέχθηκε ώστε τα παιδιά να γνωρίσουν κι άλλους πολιτισμούς και να εξασκηθούν με έναν ιδιαίτερο καινούριο τρόπο χωρίς απλώς να κάνουν κάποιες διαδικαστικές ασκήσεις χωρίς νόημα. Μπήκαν στη διαδικασία να μάθουν για τα αιγυπτιακά ιερογλυφικά που αναπαριστούν αριθμούς και για τα ρωμαϊκά σύμβολα αριθμών. Κινητοποιήθηκαν και το ενδιαφέρον τους αυξήθηκε αφού μπήκαν στη διαδικασία να γράψουν σύμβολα που δε γνώριζαν και να κάνουν «επανάληψη» μέσω παιχνιδιού και γρίφων που τα ίδια ετοίμασαν. Διπλό το κέρδος και γνώση νέων πολιτισμών και στοιχείων αλλά και παράλληλα εξάσκηση μέσω πρωτότυπου παιχνιδιού.

Η πέμπτη και τελευταία διδασκαλία γίνεται με την παρουσίαση του ρωμαϊκού άβακα «τσέπης» ως δραστηριότητα γνωριμίας των παιδιών με κάποιο εργαλείο, αφού και τα ίδια θα κληθούν να κατασκευάσουν εργαλεία-γάντια προπαίδειας για να τους βοηθήσουν στην εκμάθηση των προπαιδειών. Στόχος είναι τα παιδιά να έρθουν σε επαφή με ένα εργαλείο που βοηθάει στον υπολογισμό. Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα των ανθρώπων να κάνουν γρήγορα υπολογισμούς και να το συνδέσουν με τη δική τους ανάγκη να μάθουν την προπαίδεια και τελικά να θελήσουν/να δημιουργηθεί η ανάγκη να κατασκευάσουν κάποιο εργαλείο για να τους βοηθάει στους δικούς τους υπολογισμούς.

Με το πέρας των διδασκαλιών με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ξεκινάει η κατασκευή των γαντιών της προπαίδειας.

Τα παιδιά κατασκευάζουν σε πρώτο μάθημα την μπροστά μεριά των γαντιών, τα αφήνουμε να πειραματιστούν και τα ρωτάμε τι μπορεί να σημαίνουν οι κουκκίδες. Ακολουθούν μαθήματα για να αποκτήσουν ευχέρεια τα παιδιά με το γάντι και παράλληλα γίνεται η εκμάθηση της προπαίδειας των υπολοίπων αριθμών. Πρώτα των προπαιδειών 3 και 4 και έπειτα των μεγάλων αριθμών.

Σε όλες τις διδασκαλίες, όταν τα παιδιά μάθαιναν την προπαίδεια η διδασκαλία ήταν προσανατολισμένη στην ουσιαστική κατανόηση του αριθμού από τα παιδιά. Σε καμία περίπτωση δεν ήταν σκοπός μας να μπλοκάρουμε την ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης δίνοντάς τους απλά ένα εργαλείο. Προσπαθήσαμε να αναπτύξουμε την αίσθηση του αριθμού στα παιδιά και παράλληλα τους παρείχαμε τα γάντια προπαίδειας, τα οποία θα τους βοηθούσαν να φτάσουν σε αυτή την κατεύθυνση και θα τους παρείχαν τη βοήθεια και την ώθηση που χρειάζονταν σε συνδυασμό με τη χρήση της Ιστορίας, ώστε να κάνουν την εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό και μετέπειτα στη διαίρεση με τις καλύτερες προϋποθέσεις.

Ακολουθεί ανάλυση των πειραματικών διδασκαλιών με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών, καθώς και το υποστηρικτικό υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε.

1η Δραστηριότητα (εισαγωγική)

Θέμα: Σουμέριοι

Παιδαγωγικός σκοπός: Ιστορικές γνώσεις για τους Σουμέριους και συνεισφορά του πολιτισμού τους. Εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό.

Διάρκεια: 1 ή 2 διδακτικές ώρες

Οργάνωση: Ομάδες

Υποστηρικτικό υλικό: Παρουσίαση της ιστορίας των Σουμέριων, τρόπος ζωής, πηλό, κομμάτια ξύλου (μικρά μεγάλα), σχοινί, ύφασμα, φρούτα/λαχανικά.

Στάδια προτεινόμενης εργασίας:

- Τα παιδιά έχουν ξαναχρησιμοποιήσει πηλό και γνωρίζουν πως όταν στεγνώσει γίνεται σκληρός.
- Παιχνίδι ρόλων (δεν επιτρέπεται να πεις/γράψεις αριθμό)
- Χωρίζουμε τα παιδιά σε ομάδες (έμποροι, μεταφορείς, αγοραστές)
- Δίνεται το παρακάτω σενάριο προφορικά:
- Σενάριο: Λέμε στους εμπόρους πως θέλουν να μεταφέρουν τα προϊόντα τους σε κάποιο μέρος για τους αγοραστές. Λέμε στους μεταφορείς να κρύψουν τουλάχιστον ένα από τα προϊόντα (χωρίς να ενημερώσουμε τις άλλες ομάδες) και τέλος στους αγοραστές μόλις πάρουν τα προϊόντα να πάνε και να δείξουν με κάποιο τρόπο πόσα πήραν. Αφήνουμε να εξελιχθεί το σενάριο και να καταλάβουν πως κάποια προϊόντα δεν έφτασαν ποτέ. Βλέπουμε και με ποιον τρόπο τα παιδιά προσπαθούν να εκφράσουν τον αριθμό χωρίς να το πουν.
- Έπειτα τα αφήνουμε να καταλάβουν πόσο κίνδυνο έχει το εμπόριο με αυτό τον τρόπο και τους ζητάμε να σκεφτούν τρόπους να προφυλάξουν το εμπόρευμά τους. Περιμένουμε να μας πουν πώς θέλουν να το γράψουν/αναπαραστήσουν. Τους λέμε να χρησιμοποιήσουν ό, τι υλικό θέλουν από αυτά που υπάρχουν και περιμένουμε τα αποτελέσματα.
- Στο σημείο αυτό όλα τα παιδιά εργάζονται ως έμποροι και αναπαριστούν τα προϊόντα με κάποιο τρόπο.
- Παρουσίαση αποτελεσμάτων κάθε ομάδας και συζήτηση.
- Έπειτα κάνουμε σύντομη παρουσίαση της ιστορίας των Σουμέριων και εξηγούμε πως ήταν οι πρώτοι που αποτύπωσαν με τη μορφή κουπονιών γραφή γιατί ήταν έμποροι και ήθελαν να διασφαλίσουν τα εμπορεύματά τους. Εξηγούμε για την μπάλα με τον πηλό η οποία στο εσωτερικό είχε το κουπόνι, την οποία και έσπαγε ο αγοραστής... (Υποστηρικτικό υλικό)
- Συζήτηση για την πρώτη ανάγκη καταγραφής πλήθους αντικειμένων. Έπειτα τους λέμε να καταγράψουν σε κάρτες πως θα το έγραφαν αυτά. Τους δίνουμε τη δυνατότητα να γράψουν και με αριθμούς και γράμματα, τα παιδιά τα καταγράφουν σε κάρτες και έπειτα τους δίνουμε άλλες κάρτες να το γράψουν μόνο με αριθμούς. <u>Εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό.</u>

Υποστηρικτικό υλικό:

Η ανάγκη δημιουργίας των αριθμών από τους Σουμέριους ήταν για εμπορικούς λόγους. Όταν ήθελαν να στείλουν ένα εμπόρευμα, το φορτίο έπρεπε να συνοδεύεται από ένα «έγγραφο» το οποίο αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αγαθών που μεταφέρονταν. Κάθε κουπόνι όμως, εξακολουθούσε να αναπαριστά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, γιατί οι αριθμοί δεν είχαν διαχωριστεί από τα μετρούμενα αντικείμενα. Αυτό το είδος αρίθμησης ονομάζεται *συγκεκριμένη αρίθμηση από την Ντενίζ Σμαντ*- Μπεσερά και χρησιμοποιούνταν σε φακέλους και πλακίδια μεταξύ 3500-3100 π. Χ. Τέλος γύρω στο 3100 π. Χ., οι Σουμέριοι διαχώρισαν τα αποτυπώματα που αναπαριστούσαν τον αριθμό των αντικειμένων από τα ίδια αντικείμενα.

Εικόνα 6: Κουπόνια Σουμέριων και μπάλες από πηλό

2^{η} Δραστηριότητα

Θέμα: «Πώς μετράς χωρίς αριθμούς»

Παιδαγωγικός σκοπός: Να κατανοήσουν πώς ξεκίνησαν οι άνθρωποι να μετράνε με ποιο τρόπο, ποια μέσα; Στη συνέχεια πώς έμαθαν να προσθέτουν και φυσικά να πολλαπλασιάζουν.

Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα

Οργάνωση /Υποστηρικτικό υλικό: Εικονογραφημένο βιβλίο «Από το μηδέν στο δέκα, Η ιστορία των αριθμών» της Βίβιαν Φρεντς και Ρος Κόλινς (βλ. Παράρτημα Δ).

Στάδια προτεινόμενης εργασίας:

- Ο/Η εκπαιδευτικός διαβάζει το παραμύθι στα παιδιά (σελ. 8 – 9).
- Έπειτα γίνεται συζήτηση στην τάξη και δίνονται έξτρα πληροφορίες για τα διάφορα μέσα που χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι για να μετρήσουν (δάχτυλα, υλικά...)
- Επίσης, δίνεται η πληροφορία από τον εκπαιδευτικό και για άλλους τρόπους που μετράν οι άνθρωποι, με τραγούδια και δίνεται το παρακάτω ιστορικό παράδειγμα: Αφήγηση για τους βοσκούς της Βόρειας Αφρικής που χρησιμοποιούσαν έναν ύμνο σαν προσευχή που τον μάθαιναν απ’ έξω. Αντί για νούμερα σαν μηχανή μέτρησης συγκρατούσαν την τελευταία λέξη της

προσευχής, για το τελευταίο ζώο (αντιστοίχιση ζώου με λέξη) για να ελέγξουν όταν επέστρεφε το κοπάδι αν είχαν έρθει όλα πίσω.

- Έπειτα, μπορεί να γίνει σύνθεση τραγουδιού για όσα παιδιά έχει η τάξη.
- Τέλος, βάζουμε τραγουδάκια προπαίδειας.

3η Δραστηριότητα

Θέμα: Η ιστορία των αριθμών και η ζωή ενός προϊστορικού ανθρώπου

Παιδαγωγικός σκοπός: Κατανόηση των δυσκολιών των προϊστορικών ανθρώπων πριν την εμφάνιση των αριθμητικών συστημάτων και επαφή με την παγκόσμια ιστορία των αριθμών μέσα από την αφήγηση και την εικόνα.

Οι δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν με υπομονή κι επιμονή, **ανθρώπινη υπόσταση των Μαθηματικών.**

Οργάνωση: ομάδες και ατομική εργασία

Υποστηρικτικό υλικό: Εικονογραφημένο βιβλίο «Από το μηδέν στο δέκα, Η ιστορία των αριθμών» της Βίβιαν Φρέντς και Ρος Κόλινς, σπάγκος, βότσαλα, βέργες, χαρτιά Α4 για κατασκευή «Μικρού Βιβλίου», χρώματα

Στάδια προτεινόμενης εργασίας:

- Στο πλαίσιο της φιλαναγνωσίας ο/η εκπαιδευτικός διαβάζει στα παιδιά την εικονογραφημένη ιστορία με τρόπο παραστατικό και δίνοντάς τους χρόνο να παρατηρήσουν τις εικόνες.
- Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και προετοιμάζονται να δραματοποιήσουν τις διάφορες σκηνές – καθημερινά μαθηματικά προβλήματα που περιγράφονται μέσα στο κείμενο.
- Ακολουθεί η συγγραφή ενός «Μικρού Βιβλίου», όπου οι μαθητές καλούνται να γίνουν οι ίδιοι μικροί συγγραφείς αλλά και εικονογράφοι. Η ιστορία τους θα περιλαμβάνει έναν ήρωα του βιβλίου της ιστορίας των αριθμών. Ο ήρωας αυτός μπορεί να ταξιδέψει στον χρόνο και να κουβεντιάσει με έναν άλλο φανταστικό ήρωα του 21ου αιώνα για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε τώρα.
- Το βιβλιαράκι θα εμπλουτίζεται καθώς θα διδάσκουμε τις προπαίδειες στα παιδιά.

4η Δραστηριότητα

Θέμα: Αποκρυπτογράφηση

Παιδαγωγικός σκοπός: Να έρθουν σε επαφή τα παιδιά με σύμβολα άλλων πολιτισμών, να γνωρίσουν την ιστορία όπως. Να παίξουν και να κατανοήσουν την εξέλιξη και πόσο αναγκαίο είναι ένα ενιαίο σύστημα αρίθμησης.

Οργάνωση: ομάδες ή ατομική εργασία

Υποστηρικτικό υλικό: Μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης, αρχαία αιγυπτιακά ιερογλυφικά που αναπαριστούν αριθμούς, ρωμαϊκά σύμβολα αριθμών

Στάδια προτεινόμενης εργασίας:

- Εναρκτήρια δράση για να εξοικειωθούν και να πειραματιστούν τα παιδιά. Δίνονται από διάφορους πολιτισμούς σύμβολα και σημασίες και τα παιδιά συνθέτουν τα δικά τους κρυπτογραφημένα κείμενα για να τα αποκρυπτογραφήσουν οι συμμαθητές/τριές τους.
- Ο/Η εκπαιδευτικός δίνει στα παιδιά τη λέξη πολλαπλασιασμός και αυτά πρέπει να την αποκρυπτογραφήσουν.

Σε αυτό το σημείο χωρίζονται σε ομάδες οι μισοί παίρνουν τα αρχαία αιγυπτιακά ιερογλυφικά που αναπαριστούν αριθμούς και οι άλλοι τα ρωμαϊκά σύμβολα αριθμών.

- Ο/Η εκπαιδευτικός παρουσιάζει καρτέλες πολλαπλασιασμού (από προπαίδειες που έχουν κάνει τα παιδιά) και ζητάει την απάντηση. Τα παιδιά σχεδιάζουν το σύμβολο ανάλογα στην ομάδα που ανήκουν, όμως όταν βλέπουν τα σύμβολα των παιδιών από διαφορετική ομάδα δεν μπορούν να ξέρουν αν έχουν απαντήσει το ίδιο ή σωστά.
- Ο/Η εκπαιδευτικός ξεκινάει διάλογο και εξηγεί τους λόγους που ένα ενιαίο σύστημα αρίθμησης έπρεπε να βρεθεί, ώστε να μπορούν να επικοινωνούν όλοι αποτελεσματικά.
- Συνεχίζουν με εξάσκηση προπαίδειας.

5η Δραστηριότητα

Θέμα: Πρώτη αριθμομηχανή τσέπης

Παιδαγωγικός σκοπός: Να έρθουν σε επαφή τα παιδιά με ένα εργαλείο που βοηθάει στον υπολογισμό. Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα των ανθρώπων να κάνουν γρήγορα υπολογισμούς και να το συνδέσουν με τη δική τους ανάγκη να μάθουν την προπαίδεια και ίσως να θελήσουν να κατασκευάσουν κάποιο εργαλείο για να τους βοηθάει στους δικούς τους υπολογισμούς.

Οργάνωση: Ατομική εργασία

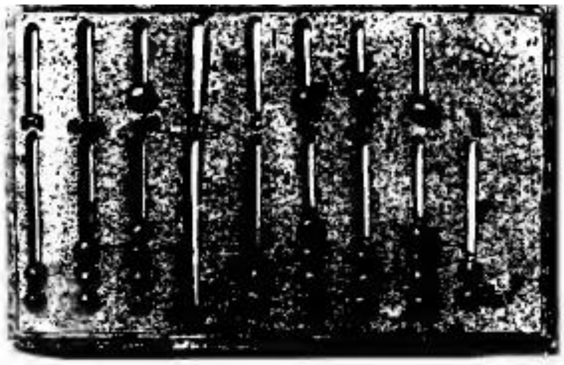
Υποστηρικτικό υλικό: Φύλλο πληροφοριών

Στάδια προτεινόμενης εργασίας :

- Δείχνουμε τις πρώτες αριθμομηχανές τσέπης στα παιδιά και αναφέρουμε την ιστορία τους.
- Ο/Η εκπαιδευτικός ξεκινάει διάλογο για το αν είναι αναγκαίο κάτι τέτοιο και αν θα χρειάζονταν τα παιδιά κάτι παρόμοιο[6].
- Ο/Η εκπαιδευτικός μοιράζει από δύο γάντια στα παιδιά και τους παρουσιάζει το εργαλείο. Ο/Η ίδιος/α φοράει τα δικά του και σιγά σιγά το κατασκευάζουν μαζί, λέγοντάς τους πως είναι η προσωπική τους αριθμομηχανή προπαίδειας.
- Μπορείτε ανάλογα με τον χρόνο που έχετε στη διάθεσή σας αφού ολοκληρώσετε την κατασκευή να το «στολίσετε» και να το «ονομάσετε» όπως θέλετε.

Υποστηρικτικό υλικό:

FIG. 16.94. *Roman "pocket abacus" (in bronze), beginning of Common Era. (Cabinet des médailles, Bibliothèque nationale, Paris.) (br. 1925)*



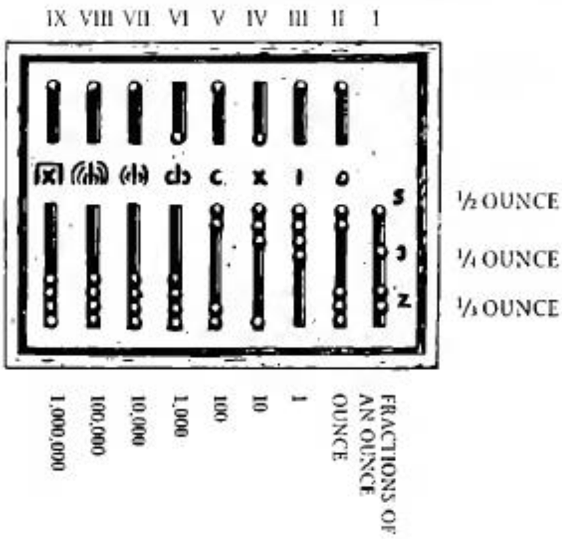


FIG. 16.95. *The principle of the portable Roman abacus. This specimen belonged to the German Jesuit Athanasius Kircher (1601–1680). (Museum of the Thermae, Rome)*

Εικόνα 7: Ρωμαϊκός άβακας «τσέπης» και επεξήγηση χρήσης του

[6] Πολύ σημαντική στιγμή στην έρευνα μας, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή, διότι γίνεται η εισαγωγή του εργαλείου.

5.4.2 Γάντια προπαίδειας

Τα γάντια προπαίδειας που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα

Εικόνα 8: Εξωτερική όψη γαντιών

Εικόνα 9: Εσωτερική όψη γαντιών

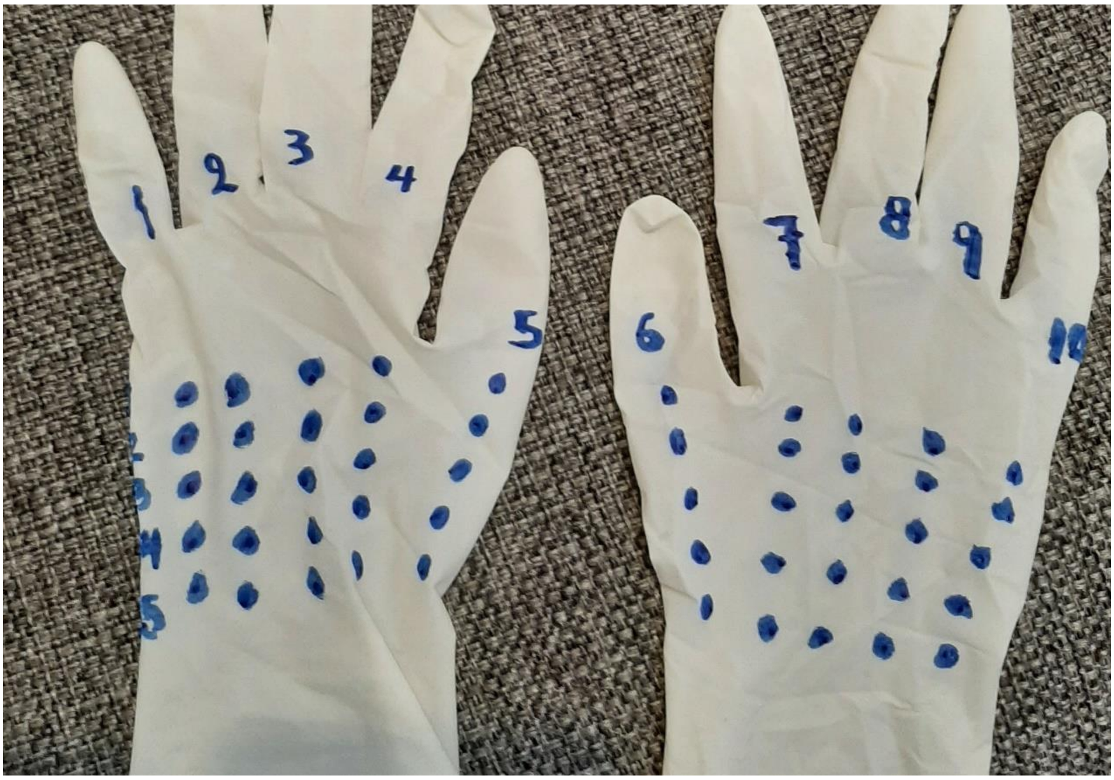
5.4.3 Παρουσίαση τρόπου χρήσης των γαντιών

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον τρόπο χρήσης των γαντιών και για τις μικρές (1 έως 5) και για τις μεγάλες προπαίδειες (6 έως 10).

5.4.3.1 Τρόπος χρήσης γαντιών στις μικρές προπαίδειες

Αξίζει να αναφερθεί πως όταν παρουσιάζαμε τη μεθοδολογία των γαντιών στα παιδιά για πρακτικούς λόγους χρήσης του γαντιού εξηγήσαμε στα παιδιά την αντιμεταθετική ιδιότητα και πως δεν είχε σημασία ποιος αριθμός ήταν πρώτος ή δεύτερος στον πολλαπλασιασμό, διότι το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο. Συμπέρασμα στο οποίο είχαν φτάσει και τα παιδιά, αφού από τις πρώτες μας βιωματικές δράσεις με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών από τα αποτελέσματα αναδύθηκε αυτή η ιδιότητα. Εμείς επιλέξαμε να το κάνουμε, επειδή θα μας βοηθούσε στην πιο αποτελεσματική λειτουργία του γαντιού.

Αρχικά, τα χέρια μας είναι γυρισμένα με την εξωτερική όψη προς το πρόσωπό μας, αφού αυτή είναι και η πλευρά για τους υπολογισμούς των μικρών προπαιδειών. Τα γάντια είναι αριθμημένα από το 1 έως το 10 ξεκινώντας από το μικρό δάχτυλο του αριστερού χεριού ως 1 και συνεχίζοντας προς τα δεξιά στα υπόλοιπα, με αποτέλεσμα το 10 να καταλήγει να είναι στο μικρό δάχτυλο του δεξιού χεριού.



Εικόνα 10: Εξωτερική όψη γαντιών (μικρές προπαίδειες)

Δίνεται το γινόμενο “2 x 3”, τα παιδιά γνωρίζουν πως το γινόμενο αυτό μπορεί και να γραφτεί “3 x 2”, οπότε μπορούν να εργαστούν με όποιο από τα δύο τους βολεύει, αφού το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Ας πούμε ότι θα κάνουμε την πράξη “2 x 3”, αφού βλέπουμε το 2 κλείνουμε τα υπόλοιπα δάχτυλα και κρατάμε ανοιχτά μόνο τα δύο δάχτυλα. Ενημερώνουμε πως θα κοιτάμε μόνο τις κουκκίδες κάτω από το δύο. Έπειτα με το άλλο μας χέρι αφού πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό τρία (3), αφήνουμε τις σειρές με τον αριθμό 3 να φαίνονται και καλύπτουμε τις άλλες κουκίδες με το χέρι μας. Τέλος μετράμε τις κουκκίδες και το αποτέλεσμα είναι το 9.

Αυτός ο τρόπος με την κάλυψη από το άλλο χέρι χρησιμοποιήθηκε στην αρχή, ώστε τα παιδιά να καταλάβουν τη μεθοδολογία. Χρησιμοποιήσαμε στην αρχή μόνο γινόμενα που μας βόλευαν, δηλαδή αυτά με τους αριθμούς από το 1 έως το 5. Στη συνέχεια που τα παιδιά εξοικειώθηκαν με τη διαδικασία συνεχίσαμε με τα υπόλοιπα γινόμενα.

Εικόνα 11: Γινόμενο “2 x 3”

Δίνεται το γινόμενο “4 x 6”. Σε αυτό το γινόμενο αφού οι κουκκίδες είναι μόνο μέχρι το 5 δίνουμε την οδηγία στα παιδιά[7] να χρησιμοποιήσουν την αντιμεταθετική ιδιότητα, για να μπορέσουμε να δουλέψουμε με τη μεθοδολογία που περιγράψαμε. Το γινόμενο γίνεται “6 x 4”, κλείνουμε τα υπόλοιπα δάχτυλα μετά το 6 και αφήνουμε μέχρι και την $4^{η}$ σειρά με τις κουκκίδες να φαίνεται, μετράμε και το αποτέλεσμα είναι το 24.

[7] Δε χρειάστηκε κατά την πειραματική διδασκαλία να δώσουμε εμείς την οδηγία, τα παιδιά κατάλαβαν από μόνα τους τι έπρεπε να κάνουν αφού δεν υπήρχαν παραπάνω από 5 κουκκίδες στα γάντια τους, άλλαξαν τη σειρά των αριθμών για να τα βολεύει (αντιμεταθετική ιδιότητα).

Εικόνα 12: Γινόμενο “6 x 4”

Συνεχίζουμε έτσι για όλα τα γινόμενα. Παρακάτω κάποια παραδείγματα από διάφορα γινόμενα.

Εικόνα 13: Γινόμενο “5 x 4” **Εικόνα 14: Γινόμενο “3 x 3”**

5.4.3.2 Τρόπος χρήσης γαντιών στις μεγάλες προπαίδειες

Αρχικά, τα χέρια μας είναι γυρισμένα με την εσωτερική όψη προς το πρόσωπό μας, αφού αυτή είναι και η πλευρά για τους υπολογισμούς των μεγάλων προπαιδειών. Τα γάντια είναι αριθμημένα και στα δύο χέρια από το 6 έως το 10 ξεκινώντας με τον αριθμό 6 από τον αντίχειρα και καταλήγοντας στο 10 στο μικρό δαχτυλάκι, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2. Αυτή η πλευρά των γαντιών βοηθάει στον υπολογισμό γινομένων με τους αριθμούς από το 6 έως το 10.

Εικόνα 15: Εσωτερική πλευρά γαντιών (μεγάλες προπαίδειες)

Δίνεται το γινόμενο “8 x 9”. Από το ένα χέρι κλείνουμε όλα τα δάχτυλα από το 6 έως το δάχτυλο με τον αριθμό 8, δηλαδή τον αντίχειρα, τον δείκτη και τον μεσαίο και από το άλλο χέρι κλείνουμε τα δάχτυλα μέχρι το 9, δηλαδή τον αντίχειρα και το δεύτερο δάχτυλο (τον δείκτη), τον μεσαίο και τον παράμεσο. Τα κλειστά δάχτυλα αντιπροσωπεύουν τις δεκάδες για το αποτέλεσμά μας, στην προκειμένη περίπτωση υπάρχουν 7 κλειστά δάχτυλα (7x10) άρα κρατάμε στο μυαλό μας τον αριθμό 70[8] ή τον γράφουμε κάπου. Έπειτα βλέπουμε πόσα δάχτυλα έμειναν ανοιχτά στο ένα χέρι, είναι 2 και πόσα στο άλλο, είναι 1 και τα πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους[9]. Δηλαδή πρέπει να γίνει η πράξη “1 x 2” και αυτό το αποτέλεσμα αντιστοιχεί στις μονάδες, δηλαδή στον αριθμό 2. Έπειτα προσθέτουμε τις δεκάδες με τις μονάδες και έχουμε 70 και 2 (70+2) που κάνει 72.

[8] Στις πειραματικές μας διδασκαλίες επειδή είχαμε ξεκινήσει το μικρό βιβλιαράκι με την ιστορία των μαθηματικών, όσα παιδιά ήθελαν έγραφαν εκεί τον αριθμό που θεωρητικά έπρεπε να κρατήσουν στο μυαλό τους. Κάποια άλλα σε οποιοδήποτε φύλο χαρτί.

[9] Σε αυτό το σημείο έγκειται ο λόγος που πρώτα διδάσκουμε τις μικρές προπαίδειες ώστε να αποκτήσουν τα παιδιά ευχέρεια κι έπειτα τις μεγάλες.

Εικόνα 16: Γινόμενο “8 x 9”

Δίνεται το γινόμενο “6 x 7”. Από το ένα χέρι κλείνουμε το δάχτυλο με τον αριθμό 6, δηλαδή τον αντίχειρα και από το άλλο χέρι κλείνουμε τα δάχτυλα μέχρι το 7, δηλαδή τον αντίχειρα και το δεύτερο δάχτυλο (τον δείκτη). Τα κλειστά δάχτυλα αντιπροσωπεύουν τις δεκάδες για το αποτέλεσμά μας, στην προκειμένη περίπτωση υπάρχουν 3 κλειστά δάχτυλα (3x10) άρα κρατάμε στο μυαλό μας τον αριθμό 30 ή τον γράφουμε κάπου. Έπειτα βλέπουμε πόσα δάχτυλα έμειναν ανοιχτά στο ένα χέρι, είναι 4 και πόσα στο άλλο, είναι 3 και τα πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους. Δηλαδή πρέπει να γίνει η πράξη “4 x 3” και αυτό το αποτέλεσμα αντιστοιχεί στις μονάδες, δηλαδή ο αριθμός 12. Έπειτα προσθέτουμε τις δεκάδες με τις μονάδες και έχουμε 30 και 12 (30+12) που κάνει 42.

Εικόνα 17: Γινόμενο “6 x 7”

5.5 Διαδικασία

Το πρώτο στάδιο ήταν τα pre-test στα οποία υποβλήθηκαν και οι δύο τάξεις. Πριν τη διεξαγωγή τους η ερευνήτρια γνωρίστηκε με τα παιδιά και ατομικά έκανε απλά την ερώτηση «Σου αρέσουν τα μαθηματικά» σε όλα τα παιδιά, ένα ένα ξεχωριστά. Έπειτα, κατά τη διάρκεια του pre-test η ερευνήτρια ήταν απλά παρούσα για να καταγράφει αν κάποιο παιδί χρειαζόταν βοήθεια κι αν οι δασκάλες ακολούθησαν ακριβώς τις οδηγίες, ώστε να μην αλλοιωθούν τα αποτελέσματα από εξωτερική βοήθεια. Με το πέρας του pre-test η ερευνήτρια εξήγησε στα παιδιά της ομάδας ελέγχου πως θα συναντιούνταν άλλη μία φορά προς το τέλος της χρονιάς για να κάνουν άλλη μία δοκιμασία. Στην πειραματική ομάδα, αφού τελείωσε η εξέταση έγινε ενημέρωση των παιδιών για το τι πρόκειται να ακολουθήσει τις επόμενες εβδομάδες.

Το δεύτερο στάδιο ήταν οι διδασκαλίες με τη χρήση ιστορίας των Μαθηματικών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σχεδιάστηκαν οι διδασκαλίες με βάση την πειραματική εφαρμογή του Λεμονίδη (2003) για τη σειρά με την οποία θα διδάσκονταν οι προπαίδειες. Η ερευνήτρια ήταν παρούσα κάθε φορά που παρουσιαζόταν στα παιδιά διδασκαλία με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και λάμβανε ενεργό μέρος στη διαδικασία. Επίσης, ήταν πάντα παρούσα κατά την κατασκευή του εργαλείου, αφού ήταν αυτή που εξηγούσε τη μεθοδολογία και τη χρήση του.

Το τρίτο και τελικό στάδιο ήταν αυτό των συνεντεύξεων. Στην ομάδα ελέγχου κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων η ερευνήτρια ήταν αυτή που έδειχνε τις κάρτες έργων στα παιδιά και έκανε όλες τις ερωτήσεις. Στο τέλος τα παιδιά της ομάδας ελέγχου ρωτήθηκαν ξανά αν τους αρέσουν τα μαθηματικά.

Το τρίτο στάδιο για τα παιδιά της πειραματικής ομάδας ήταν ακριβώς το ίδιο με αυτό που περιγράψαμε για την ομάδα ελέγχου παραπάνω με τη μόνη διαφορά πως ακολούθησε κι ένα ερωτηματολόγιο σχετικό με την περίοδο της πειραματικής διδασκαλίας και φυσικά στο τέλος έγινε και σε αυτά τα παιδιά η ερώτηση «Σου αρέσουν τα Μαθηματικά» ξανά.

5.5.1 Στάδια συνεντεύξεων

Αρχικά τα παιδιά ενημερώθηκαν πως δεν πρόκειται για διαδικασία επαναληπτικού ή τεστ και πως απλά θα απαντούσαν σε κάποιες ερωτήσεις. Επίσης, ξεκαθαρίστηκε στα παιδιά πως κάθε φορά που θα απαντούσαν σε μία ερώτηση θα τα ρωτούσε η ερευνήτρια πώς το σκέφτηκαν ή πώς βρήκαν το αποτέλεσμα. Αυτή η ερώτηση δε θα σήμαινε πως είπαν κάτι λάθος, απλά πως η ερευνήτρια ήθελε να μάθει τη στρατηγική και τον τρόπο που το σκέφτηκαν.

Στην πειραματική ομάδα λόγω δικών τους ερωτήσεων τα πληροφορήσαμε πως δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα γάντια προπαίδειάς τους, διότι τα παιδιά ήθελαν να τα φορούν συνέχεια, όπως κάθε φορά που κάναμε μαθηματικά. Σύμφωνα με τα λεγόμενά τους, γίνονταν «σούπερ ήρωες» και τα Μαθηματικά είχαν γίνει πλέον το αγαπημένο τους μάθημα. Τους ενημερώσαμε όμως πως μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλά τους και τη μεθοδολογία που είχαν μάθει αν το χρειάζονταν. Το ίδιο βέβαια για τη χρήση των δαχτύλων τους επικοινωνήσαμε και στην ομάδα ελέγχου, πως αν ήθελαν να μετρήσουν ή να προσθέσουν κάτι μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλά τους.

Οι κάρτες έργων που δόθηκαν στα παιδιά ήταν σε σχήμα ορθογωνίου και ήταν ήδη γνωστές στα παιδιά όλων των ομάδων, αφού τις χρησιμοποιούσαν σε διάφορα παιχνίδια και για εξάσκηση με τις δασκάλες τους. Το μέγεθός τους ήταν μισό Α3 και ήταν ευδιάκριτες με μεγάλους αριθμούς.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων στο πρώτο μέρος παρουσιάστηκαν, μια προς μια, κάρτες ζευγών πολλαπλασιασμού σε κάθε παιδί. Δε δόθηκε καμία βοήθεια στα παιδιά, ενώ επιτρεπόταν να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλα τους αν το ήθελαν, όπως αναφέραμε. Στο τέλος κάθε απάντησης, όπως έχει αναφερθεί ζητούσαμε από τα παιδιά να μας πουν πώς σκέφτηκαν την απάντηση.

Τα παιδιά όλων των ομάδων κλήθηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις των γινομένων ένα ένα κάθε φορά. Η ερευνήτρια και η εκάστοτε δασκάλα κρατούσαν σημειώσεις. Τις ερωτήσεις τις έκανε η ερευνήτρια κάθε φορά, η οποία χρονομετρούσε τον χρόνο που χρειαζόταν κάθε παιδί για να απαντήσει και κατέγραφε τα αποτελέσματα.

Τα έργα που επιλέξαμε ήταν για να μπορέσουμε να εξετάσουμε γινόμενα από όλες σχεδόν τις προπαίδειες, καθώς και τα «διπλά». Δεν έχουν επιλεγεί καθόλου γινόμενα από την προπαίδεια του ένα (1), διότι δεν παρατηρήθηκε καμία δυσκολία κατά την εκμάθηση των εν λόγω προπαιδειών, ούτε προκύπτει ανάγκη να διερευνηθεί κάτι αντίστοιχο από τη βιβλιογραφία. Τα έργα δόθηκαν στα παιδιά μπερδεμένα και όχι κατηγοριοποιημένα όπως τα παρουσιάζουμε στις κάρτες έργων[10]. Αυτή η κατηγοριοποίηση έχει γίνει για να μπορέσουμε να αναλύσουμε τα αποτελέσματα πιο εύκολα. Επίσης, όπως φαίνεται (βλ. Παράρτημα Β) δεν έχουμε βάλει ίδια γινόμενα αντίστροφα, διότι δε χρειαζόταν να ελέγξουμε για την αντιμεταθετική ιδιότητα, αφού από τον τρόπο που απαντούσαν τα παιδιά φαινόταν πως για να ελέγξουν κάποια γινόμενα την είχαν κατακτήσει. Είχε δουλευτεί πάρα πολύ κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών για την ευκολότερη χρήση των γαντιών (βλ. ενότητα 5.4.3.1)

Τα παιδιά όλων των ομάδων κλήθηκαν ένα ένα σε ήσυχο περιβάλλον στον χώρο του σχολείου τους να απαντήσουν προφορικά στις κάρτες γινομένων. Η ερευνήτρια και η εκάστοτε δασκάλα κρατούσαν σημειώσεις. Τις ερωτήσεις τις έκανε η ερευνήτρια κάθε φορά.

[10] Παράρτημα Β

Μόνο για την πειραματική ομάδα, αφού τελείωσαν το πρώτο μέρος της διαδικασίας, στο τρίτο μέρος η ερευνήτρια ζητούσε την απάντηση στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου[11] που δόθηκαν κι αυτές προφορικά. Οι ερωτήσεις ήταν σχετικές με τα γάντια και τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην πειραματική διδασκαλία. Δεν παρεχόταν ανατροφοδότηση στους μαθητές αναφορικά με την ορθότητα των απαντήσεών τους, ενώ κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων δεν έλαβε χώρα κανένα είδος διδασκαλίας.

5.6 Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Σημαντικό στοιχείο για την επίτευξη της εγκυρότητας μιας συνέντευξης αποτελεί η ελάττωση της μεροληψίας. Το μεροληπτικό δείγμα, η ανεπαρκής συνέπεια και η μεροληπτική διερεύνηση, οι αλλαγές στην αλληλουχία των ερωτήσεων και στη διατύπωσή τους, καθώς και η επιλεκτική καταγραφή των απαντήσεων ενισχύουν τη μεροληψία (Cohen, Manion & Morrison 2008).

Επίσης, για την αποφυγή/ καταπολέμηση της μεροληψίας, και η ερευνήτρια και η δασκάλα της τάξης ήταν παρούσες σε κάθε συνέντευξη, ενώ πραγματοποιήθηκε προσπάθεια τήρησης κοινής αλληλουχίας των ερωτήσεων και διατύπωσής τους, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, βάσει του οδηγού συνέντευξης.

Η αξιοπιστία στην ποιοτική έρευνα μπορεί να ερμηνευτεί ως το ταίριασμα ανάμεσα σε αυτό που ο ερευνητής καταχωρεί ως δεδομένο και σε αυτό που πραγματικά συμβαίνει στο ερευνητικό περιβάλλον που τίθεται υπό εξέταση. Η αξιοπιστία μιας συνέντευξης επιτυγχάνεται όταν είναι καλά δομημένη, με την ίδια δομή και αλληλουχία λέξεων και ερωτήσεων για κάθε συνεντευξιαζόμενο (Cohen et. al., 2008). Αυτά τα κριτήρια εξυπηρετούνται από την παράλληλη εμπλοκή των δύο μελών (ερευνήτριας-δασκάλας τάξης) κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, προσφέροντας σταθερότητα, ως προς το ύφος των ερωτήσεων και το κλίμα που επικρατούσε κατά τη διαδικασία των συνεντεύξεων, αλλά και από την επικέντρωση στον οδηγό συνέντευξης. Ακόμα, οι ερωτήσεις και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κατάλληλο για το επίπεδο των παιδιών, γεγονός το οποίο σύμφωνα τους Cohen et. al. (2008), συμβάλει στην αξιοπιστία μιας συνέντευξης.

[11] Παράρτημα Γ

Κεφάλαιο 6ο Ευρήματα

Στην ανάλυση των αποτελεσμάτων θα χρησιμοποιήσουμε για διευκόλυνση και καλύτερη κατανόηση τις στρατηγικές που προτείνει ο Λεμονίδης (2003) στην εργασία του "Η εισαγωγή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο Δημοτικό: μια πειραματική εφαρμογή".

Σε αυτή προτείνει τρεις κατηγοριοποιήσεις στρατηγικών για τους νοερούς υπολογισμούς των παιδιών όσον αφορά την προπαίδεια και είναι οι εξής:

1)¨*Γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού*¨ ονομάζει τη στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές γνωρίζουν απέξω το αποτέλεσμα του γινομένου και το ανακαλούν αμέσως από τη μνήμη μακράς διάρκειας.

2)Τη στρατηγική της ¨*Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού*¨ η οποία εμπεριέχει τρεις υποπεριπτώσεις:

- ¨*Ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων*¨. Εδώ οι μαθητές ανακαλούν άλλα γινόμενα ή γινόμενα και προσθαφαιρέσεις για να υπολογίσουν το ζητούμενο γινόμενο. Για παράδειγμα στο γινόμενο 6x7 οι μαθητές υπολογίζουν: 6x6=36, 36+6=42 ή 7x7=49, 49-7=42 ή 3x7=21, 21+21=42.
- ¨*Ανάκληση προπαίδειας*¨. Οι μαθητές εδώ απαγγέλλουν από την αρχή την αντίστοιχη κολόνα της προπαίδεια. Για παράδειγμα για να βρούνε το 6x7 λένε: 1x7=6, 2x7=12, …, 6x7=42.
- ¨*Ανάκληση προσθαφαιρέσεων*¨. Στη περίπτωση αυτή οι μαθητές ανακαλούν από τη μνήμη τους αθροίσματα ή διαφορές και όχι γινόμενα για να υπολογίσουν το γινόμενο. Στο 6x7 λένε: 7+7=14, 14+14=28, 28+14=42.

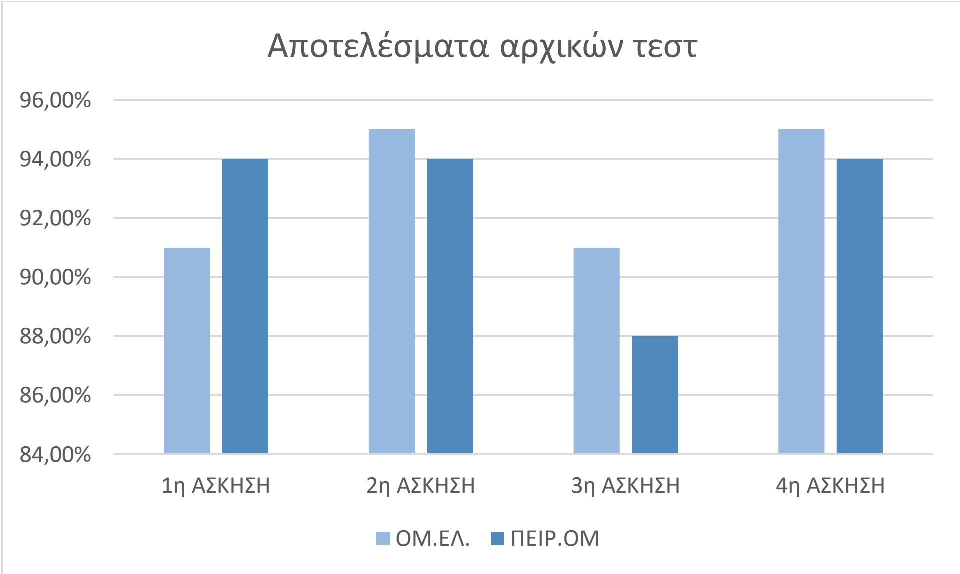
3)Τη στρατηγική ¨επαναλαμβανόμενη πρόσθεση¨ όπου οι μαθητές υπολογίζουν το γινόμενο με επαναλαμβανόμενες προσθέσεις, π.χ. για το γινόμενο 3x4 υπολογίζουν 4+4=8, 8+4=12.

Στη στρατηγική ¨επαναλαμβανόμενη πρόσθεση με δάκτυλα ή αντικείμενα¨ οι μαθητές χρησιμοποιούν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αλλά την πραγματοποιούν με τη βοήθεια αντικειμένων ή των δακτύλων.

Επιλέξαμε αυτή την κατηγοριοποίηση, διότι από την ανάλυση και επεξεργασία των απαντήσεων των παιδιών στο «πώς» σκέφτηκαν και βρήκαν το αποτέλεσμα, προέκυψαν ακριβώς όλες αυτές οι κατηγοριοποιήσεις όπως τις περιγράφει ο Λεμονίδης (2003).

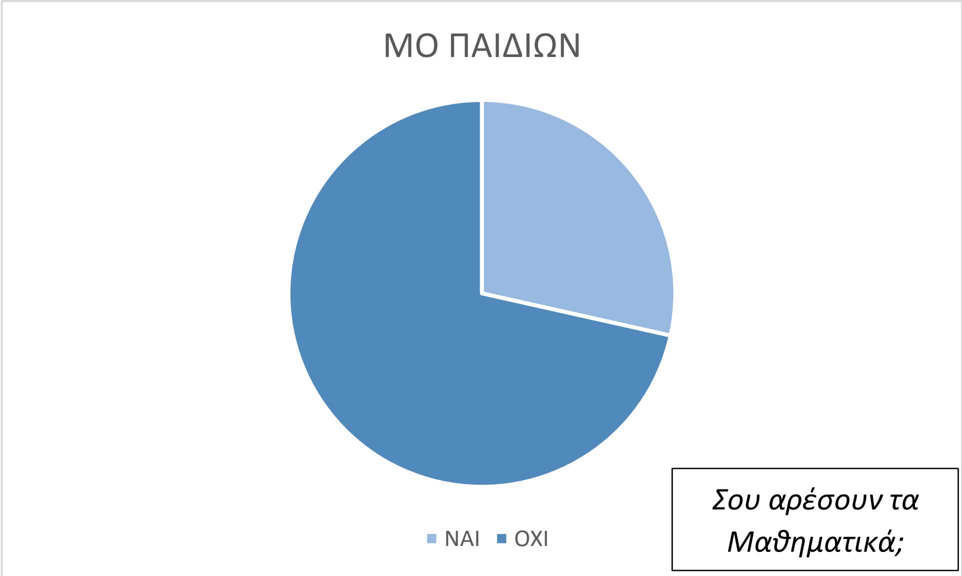
6.1 Αποτελέσματα αρχικών τεστ

Τα παιδιά και των δύο ομάδων ολοκλήρωσαν τα αρχικά τεστ χωρίς σοβαρά λάθη όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα και για αυτό τον λόγο οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα πως και τα δύο τμήματα παρουσίασαν ίδιο επίπεδο σύμφωνα με τις επιδόσεις τους.



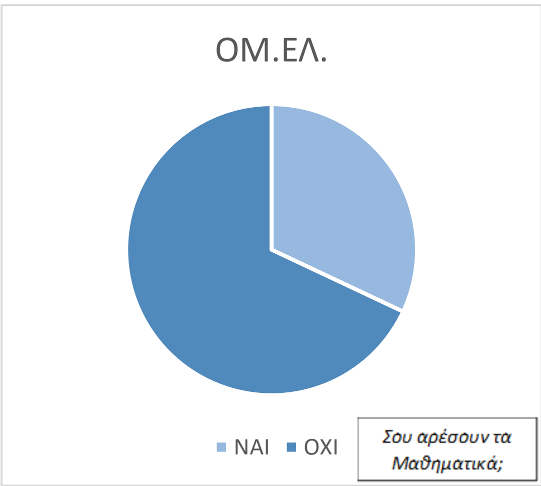
Γράφημα 1: Ποσοστά επιτυχίας στο αρχικό τεστ

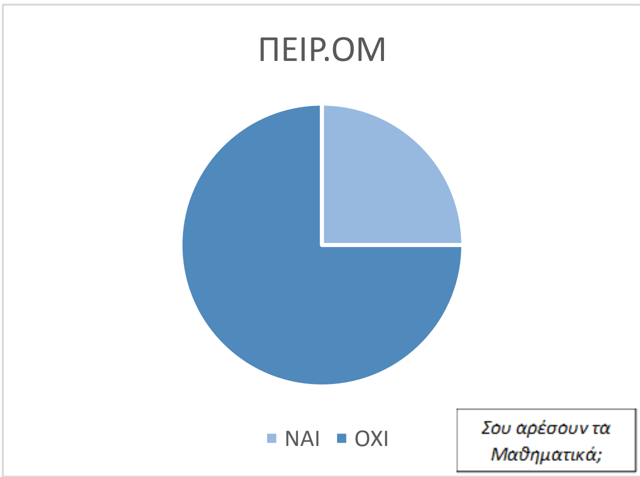
Όπως αναφέραμε πριν το αρχικό τεστ έγινε η ερώτηση «***Σου αρέσουν τα Μαθηματικά***;» σε όλα τα παιδιά και των δύο ομάδων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα 27 απάντησαν αρνητικά και τα 11 θετικά. Συνολικά λοιπόν το 71% των παιδιών εκδήλωσε αρνητικό συναίσθημα για τα Μαθηματικά και μόνο το 29% εκφράστηκε θετικά.



Γράφημα 2: Μέσος Όρος όλων των απαντήσεων στην αρχική ερώτηση

Από την ομάδα ελέγχου το 32% δήλωσε πως τους αρέσουν τα Μαθηματικά, ενώ από την πειραματική ομάδα μόνο το 25%. Πολύ χαμηλά τα ποσοστά και για τις δύο ομάδες, όπως ήταν αναμενόμενο και από τη μελέτη της βιβλιογραφίας.





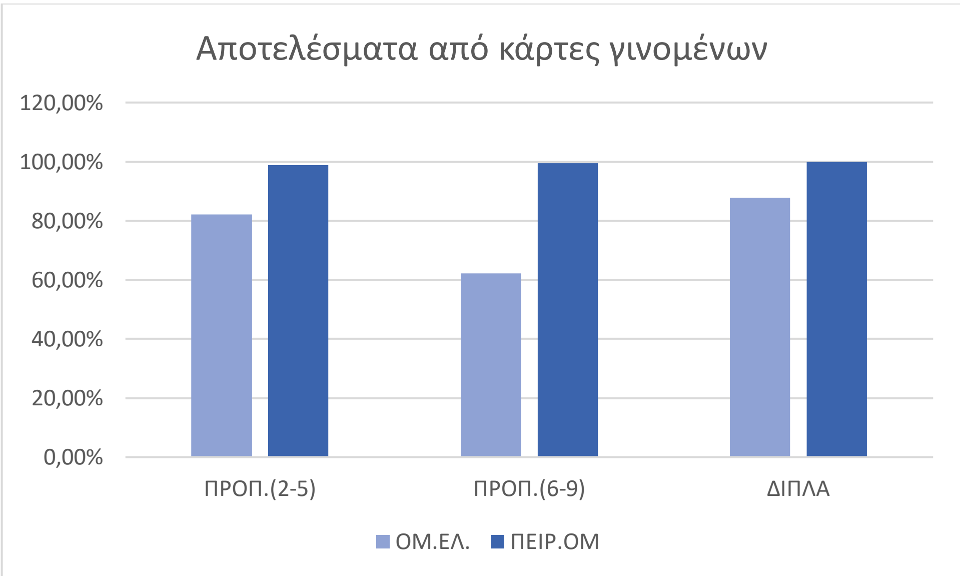
Γράφημα 3: Απαντήσεις ομάδας ελέγχου στην αρχική ερώτηση

Γράφημα 4: Απαντήσεις πειρ. ομάδας στην αρχική ερώτηση

6.2 Αποτελέσματα καρτών έργων

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας συλλογής των δεδομένων οι απαντήσεις των παιδιών στις κάρτες γινομένων ελέγχθηκαν και κωδικοποιήθηκαν ως σωστές ή λανθασμένες. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η ανάλυση αυτών.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της έρευνάς μας και εξάγοντας τα πρώτα, γενικά, συμπεράσματα από αυτά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι επαληθεύτηκαν οι περισσότερες υποθέσεις που κάναμε με βάση τους στόχους που θέσαμε, αλλά προέκυψαν και επιπλέον χρήσιμες και σημαντικές πληροφορίες που σχετίζονται με το δείγμα μας. Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας έχοντας διδαχθεί με τα γάντια προπαίδειας κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων κουνούσαν τα δάχτυλά τους σαν να φορούσαν τα γάντια για να ελέγξουν τις απαντήσεις τους αν θυμούνταν το γινόμενο (απομνημόνευση) ή απλά για να δώσουν τις απαντήσεις τους. Δεν παρατηρήθηκε σχεδόν κανένα λάθος, όπως και στις ώρες των διδασκαλιών. Επίσης η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, από τις απαντήσεις τους, φάνηκε πως τα κινητοποίησε πάρα πολύ και πως ίσως και για λίγο άλλαξε τη στάση τους στα μαθηματικά. Σίγουρα όμως τα βοήθησε να νιώσουν τα μαθηματικά πιο οικεία και έκανε το μάθημα πιο «ζωντανό», όπως μας είπαν και αυτά.



Γράφημα 5: Αποτελέσματα από κάρτες γινομένων

Συγκεκριμένα στο 2ο γράφημα φαίνεται ξεκάθαρα πως η πειραματική ομάδα απάντησε σχεδόν σε όλες τις ερωτήσεις σωστά. Ενώ η ομάδα ελέγχου αντιμετώπισε αρκετά προβλήματα στις προπαίδειες των μικρών και των μεγάλων αριθμών πολύ περισσότερο. Ξεκάθαρα φαίνεται επίσης πως και οι δύο ομάδες τα πήγαν εξίσου καλά και χωρίς πολλά λάθη στις κάρτες των διπλών γινομένων.

6.2.1 Αποτελέσματα καρτών έργων μικρών αριθμών (2 έως 5)

Τα γινόμενα των μικρών αριθμών (2 έως 5) προσπαθήσαμε να είναι αντιπροσωπευτικά του πίνακα της προπαίδειας[12] και τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω.

	3 x 4	5 x 6	2 x 8	2 x 3	4 x 6	3 x 7	4 x 9	5 x 3	2 x 4	4 x 7
Ομάδα Ελέγχου	**91%**	**86%**	**82%**	**95%**	**73%**	**73%**	**77%**	**86%**	**86%**	**73%**
Πειραμ. Ομάδα	**94%**	**100%**	**100%**	**100%**	**94%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Πίνακας 1: Ποσοστά επιτυχίας στις κάρτες προπαίδειας (2 έως 5)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 1, παρατηρούμε ότι, η επιτυχία των παιδιών της ομάδας ελέγχου είναι μεγάλη (πάνω από 80%) στα γινόμενα από τις προπαίδειες του 5 και του 2. Τα ποσοστά επιτυχίας τους χαμηλώνουν στα γινόμενα των υπολοίπων προπαιδειών (του 3 και του 4) με μία εξαίρεση το γινόμενο “3 x 4”. Εκτός από το γεγονός ότι τα παιδιά έκαναν λάθος στο αποτέλεσμα, αργούσαν πολύ περισσότερο συγκριτικά με τα παιδιά της πειραματικής ομάδας στο να δώσουν μία απάντηση και πολλές φορές άλλαζαν την απάντησή τους μέχρι να πάρουν κάποια λεκτική ή μη νύξη από την ερευνήτρια ή από την εκπαιδευτικό της τάξης τους. Στο σημείο εκείνο επαναλάβαμε τις οδηγίες που είχαμε δώσει στην αρχή. Συγκεκριμένα υπενθυμίζαμε στα παιδιά πως δεν πρόκειται για διαδικασία επαναληπτικού και πως δεν πρόκειται να βαθμολογηθούν για τις απαντήσεις τους. Τέλος, τους θυμίζαμε πως δε θα τους παρείχαμε καμία βοήθεια και πως απλά έπρεπε να μας πουν το αποτέλεσμα και πως το σκέφτηκαν. Πολλά παιδιά της ομάδας ελέγχου συνέχιζαν να κοιτούν τη δασκάλα για επιβεβαίωση, ακόμη και μετά τις οδηγίες.

Όσον αφορά τις απαντήσεις που μας έδωσαν για τον τρόπο με τον οποίο έβρισκαν το αποτέλεσμα, σύμφωνα με τις στρατηγικές που προτείνει ο Λεμονίδης (2003), το μεγαλύτερο μέρος των απαντήσεων (82%) ήταν από ανάκληση της προπαίδειας, στρατηγική της «παραγωγής της πράξης του πολλαπλασιασμού»

Μόνο το 9% των απαντήσεων ήταν με τη στρατηγική «γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού». Τα παιδιά αυτά μας είπαν πως τις θυμούνταν απέξω. Συγκεκριμένα οι απαντήσεις των παιδιών ήταν:

[12] Κάποια (3x4,3x7,4x6) είναι από τα γινόμενα που είχε χρησιμοποιήσει και ο Λεμονίδης (2003) στην έρευνά του «Η εισαγωγή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο Δημοτικό: μια πειραματική εφαρμογή».

«Μας το έμαθε η κυρία. Έπρεπε να τα ξέρω απέξω»

«Το έχω μάθει απέξω.»

Αντίθετα τα παιδιά της πειραματικής ομάδας απάντησαν σχεδόν σε όλες τις κάρτες γινομένων των μικρών αριθμών σωστά. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να αναφέρω πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας ένιωθαν πολύ μεγάλη οικειότητα με την ερευνήτρια και ήταν πολύ χαρούμενα με την όλη διαδικασία. Ίσως σε ένα πολύ μικρό βαθμό η επιτυχία τους και η συγκέντρωσή τους να επηρεάστηκε και από αυτό.

Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας απάντησαν σωστά και πολύ πιο γρήγορα από τα παιδιά της ομάδας ελέγχου, ακόμη και όταν όπως έχω αναφέρει και παραπάνω κουνούσαν τα χέρια και τα δάχτυλά τους με τέτοιο τρόπο σαν να φορούσαν τα γάντια προπαίδειας.

Οι στρατηγικές τους όπως μας περιέγραψαν ήταν στο 81% «η γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού». Τέλος το υπόλοιπο 19% των παιδιών χρησιμοποίησε τη στρατηγική της «παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού» και συγκεκριμένα την πρώτη υποπερίπτωση «Ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων». Παρατηρήθηκε πολύ συχνά να χρησιμοποιούν τα γινόμενα των διπλών αριθμών και να προσθέτουν ή να αφαιρούν για να φτάσουν στο αποτέλεσμα.

Συμπερασματικά για τις κάρτες γινομένων μικρών αριθμών (2 έως 5) φαίνεται ξεκάθαρα πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας έχουν οικειοποιηθεί τη νέα γνώση και δεν εμφανίζουν καμία δυσκολία σε αντίθεση με τα παιδιά της ομάδας ελέγχου.

6.2.2 Αποτελέσματα καρτών έργων μεγάλων αριθμών (6 έως 10)

Τα μεγάλα γινόμενα ήταν αυτά που από τη βιβλιογραφία περιμέναμε να δυσκολέψουν περισσότερο τα παιδιά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ξεκάθαρα πως τα αποτελέσματα ήταν τα αναμενόμενα για την ομάδα ελέγχου, όμως για την πειραματική ομάδα η σχεδόν απόλυτη επιτυχία τους είναι αξιοσημείωτη για άλλη μία φορά.

	7 x 6	**8 x 9**	**10 x 7**	**6 x 8**	**6 x 9**	**10 x 8**	**9 x 8**	**10 x 6**	**7 x 9**	**8 x 7**
Ομάδα Ελέγχου	**41%**	**45%**	**100%**	**50%**	**45%**	**100%**	**55%**	**100%**	**45%**	**41%**
Πειραμ. Ομάδα	**94%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Πίνακας 2: Ποσοστά επιτυχίας στις κάρτες προπαίδειας (6 έως 10)

Για εμάς το αποτέλεσμα δεν ήταν καθόλου περίεργο, όλη την περίοδο διδασκαλίας είχαμε βιώσει πόσο πολύ είχαν κινητοποιηθεί τα παιδιά, πόσο είχε ανέβει το επίπεδο συμμετοχής τους και πόσο καλά χειρίζονταν τα γινόμενα της προπαίδειας κάνοντας χρήση του εργαλείου (των γαντιών).

Αξίζει να αναφερθεί πως τα παιδιά και των δύο ομάδων απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις γινομένων της προπαίδειας του 10. Σε αυτά τα γινόμενα τα παιδιά και των δύο ομάδων απάντησαν σε ποσοστό 100% με τη στρατηγική της «γνωστής πράξης πολλαπλασιασμού».

Σύμφωνα λοιπόν με τα δεδομένα του πίνακα 2 το ποσοστό επιτυχίας των παιδιών της ομάδας ελέγχου είναι αν εξαιρέσουμε τα γινόμενα της προπαίδειας του 10 κάτω από το 50%. Οι μισές απαντήσεις των παιδιών ήταν λανθασμένες, επιπροσθέτως τα παιδιά δυσκολεύτηκαν πάρα πολύ να δώσουν ακόμη και τις σωστές απαντήσεις και έδειχναν τη δυσαρέσκειά τους προς τα συγκεκριμένα γινόμενα λεκτικά και μη.

Ένα σημαντικό εύρημα είναι πως 3 παιδιά της ομάδας ελέγχου απάντησαν σχεδόν σε όλες τις κάρτες γινομένων σωστά και η στρατηγική που καταγράψαμε ήταν αυτή της «παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού» και συγκεκριμένα «ανάκληση προπαίδειας». Γεγονός που μας οδήγησε στο συμπέρασμα πως στις προπαίδειες των μεγάλων αριθμών, έμαθαν τα γινόμενα απέξω μηχανικά, χωρίς να φαίνεται πως έχουν προχωρήσει σε άλλες στρατηγικές. Ενώ τα παιδιά της πειραματικής ομάδας σε καμία περίπτωση δεν έκαναν «ανάκληση προπαίδειας» μέχρι να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, όπως έκανε το 14% των μαθητών της ομάδας ελέγχου.

Άλλη στρατηγική που ακολούθησε το 32% της ομάδας ελέγχου και απάντησε σωστά ήταν αυτή της «επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης με δάχτυλα ή αντικείμενα». Χρειάστηκε πολλή ώρα για να απαντήσουν στις κάρτες γινομένων και αρκετές φορές ξαναέκαναν τις πράξεις, διότι ο αριθμός που έβρισκαν δεν τους φαινόταν σωστός. Τα υπόλοιπα παιδιά που απάντησαν λάθος έκαναν και αυτά τις δύο παραπάνω στρατηγικές, όπως μας εξήγησαν αλλά δεν έφταναν στο σωστό αποτέλεσμα. Μόνο ένα ποσοστό 14% των παιδιών απαντούσαν άμεσα λέγοντάς μας πως ήξεραν την απάντηση απέξω με «γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού», αλλά κι από αυτά μόνο ένα παιδί πέτυχε το σωστό αποτέλεσμα.

Παρατηρούμε επίσης, ότι το γινόμενο του 10, το διπλό γινόμενο με το 5 και τα γινόμενα με τους ίδιους αριθμούς (διπλά), έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη των παιδιών και χρησιμοποιούνται άμεσα και από τις δύο ομάδες ανεξάρτητα από τη διδασκαλία. Επιβεβαιώνονται τα ευρήματα από τη διεθνή βιβλιογραφία για το γινόμενο του 10 και το διπλό γινόμενο με το 5. Αυτό σημαίνει ότι, κατά τη διδασκαλία μπορούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές σε καταστάσεις τέτοιες ώστε να χρησιμοποιούν τα γινόμενα αυτά ως βάση για να υπολογίζουν άλλα πιο δύσκολα (Λεμονίδης,2003).

Από την άλλη τα παιδιά της πειραματικής ομάδας σε ποσοστό 19% χρησιμοποίησαν στρατηγική της «παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού» την υποκατηγορία «ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων» και στο τέλος έκλειναν τα δάχτυλά τους με τέτοιο τρόπο σαν να φορούσαν τα γάντια της προπαίδειας για να ελέγξουν το αποτέλεσμά τους. Αυτό δείχνει ότι τα παιδιά της ομάδας ελέγχου υστερούν έναντι των παιδιών της πειραματικής ομάδας, αφού τα τελευταία φαίνεται να χρησιμοποιούν πιο εξελιγμένες στρατηγικές. Έχουν ίσως καλύτερη αίσθηση αριθμού και μπορούν να διαχειρίζονται διαφορετικά τα γινόμενα, όχι μόνο με «ανάκληση της προπαίδειας» ή προσθαφαιρέσεις. Φαίνεται λοιπόν πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούν πιο προωθημένες, δηλαδή, πιο αφηρημένες στρατηγικές από αυτές που χρησιμοποιούν τα παιδιά της ομάδας ελέγχου.

Επίσης, ένα ποσοστό 63% των παιδιών στην πειραματική ομάδα χρησιμοποίησε τη στρατηγική της «γνωστής πράξης πολλαπλασιασμού» και ασυναίσθητα έκλειναν τα δάχτυλα των χεριών τους σαν να φορούσαν τα γάντια της προπαίδειας. Όταν τα ρωτήσαμε πώς σκέφτηκαν το αποτέλεσμα μάς είπαν πως το ήξεραν απέξω, τότε τα ρωτήσαμε γιατί κουνούσαν τα δάχτυλά τους με αυτόν τον τρόπο και μας απάντησαν, πως δεν είχαν καταλάβει καν πως το έκαναν και πως συνηθίζουν να το κάνουν πάντα για έλεγχο.

Τέλος, τα υπόλοιπα παιδιά δε μας ανέφεραν κάποιο τρόπο σκέψεις απλά πως το βρήκαν από τη μεθοδολογία του γαντιού. Συνοψίζοντας για τα γινόμενα των μεγάλων αριθμών στα παιδιά της πειραματικής ομάδας μπορούμε να καταλάβουμε ξεκάθαρα πως πάντα έκαναν κινήσεις σαν να φορούσαν τα γάντια, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η ενσώματη μάθηση σε συνδυασμό με τη διδασκαλία με τη χρήση της ιστορίας είχε τρομερό αντίκτυπο στα παιδιά και θεαματικά αποτελέσματα τα οποία φαίνονται ξεκάθαρα από τα ποσοστά των σωστών τους απαντήσεων.

6.2.3 Αποτελέσματα καρτών έργων διπλών γινομένων

Οι δύο ομάδες είχαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε αυτές τις κάρτες γινομένων (βλ. Πίνακα 3). Συγκεκριμένα οι απαντήσεις των παιδιών της ομάδας ελέγχου μάς έδωσαν να καταλαβαίνουμε πως ήταν αυτά τα γινόμενα (διπλά) στα οποία έδωσε περισσότερη προσοχή η δασκάλα της τάξης τους. Κάποιες απαντήσεις των παιδιών της ομάδας ελέγχου όταν τους δείχναμε κάρτες διπλών γινομένων:

«Αυτά είναι τα εύκολα, τόσες φορές που τα κάναμε τα έμαθα από εξώ.»

«Πάλι αυτά, τα βλέπω και στον ύπνο μου, τα ξέρω αυτά.»

«Δύο δύο τέσσερα, τρεις τρεις εννιά, ναι εννιά. Αυτά δεν τα ξεχνάω.»

Η στρατηγική που εμφανίζεται είναι αυτή της «γνωστής πράξης πολλαπλασιασμού» και επίσης φαίνεται πως κάποια παιδιά αντιμετωπίζουν τα διπλά γινόμενα ως ξεχωριστή στήλη προπαίδειας και κάνουν ανάκληση απαγγέλοντας ένα ένα τα ζευγάρια.

Ένα ακόμη εύρημα αναφορικά με το συναισθηματικό κομμάτι των παιδιών της ομάδας ελέγχου ήταν πως από τις απαντήσεις τους οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα πως η εκμάθηση της προπαίδεια ήταν κάτι που τα είχε κουράσει αρκετά.

Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας στις κάρτες των διπλών γινομένων απάντησαν όλα σωστά σε όλες τις ερωτήσεις και όπως και με τα υπόλοιπα γινόμενα ακόμη κι αν δε φορούσαν τα γάντια προπαίδειας πάντα κουνούσαν τα χέρια και τα δάχτυλά τους με τέτοιο τρόπο, ώστε να βοηθηθούν και να βρουν το σωστό αποτέλεσμα ή να ελέγξουν την ορθότητα της απάντησής τους. Σε ποσοστό 88% τα παιδιά απάντησαν αμέσως με στρατηγική «γνωστής πράξης πολλαπλασιασμού» και ελέγχοντας με τα δάχτυλά τους (σαν να φορούσαν το γάντι). Το υπόλοιπο 12% χρησιμοποίησε στρατηγική της «παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού» την υποκατηγορία «ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων» πάντα με έλεγχο όπως έχουμε αναφέρει.

	3 x 3	**6 x 6**	**9 x 9**	**4 x 4**	**8 x 8**	**5 x 5**	**7 x 7**
Ομάδα Ελέγχου	**91%**	**82%**	**86%**	**91%**	**82%**	**100%**	**82%**
Πειραμ. Ομάδα	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Πίνακας 3: Ποσοστά επιτυχίας στις κάρτες προπαίδειας (διπλά)

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας ιδιαίτερα στα γινόμενα των μεγάλων αριθμών όταν ερωτούνταν πώς σκέφτηκαν το αποτέλεσμα σαν πρώτη απάντηση έλεγαν «Από το γάντι κυρία». Έπειτα όταν τους ρωτούσαμε -όπως συνηθίζαμε να κάνουμε και κατά τη διδασκαλία για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού- γιατί το αποτέλεσμα είναι αυτό που έδωσαν μας έλεγαν την πορεία της σκέψης τους που αναλύθηκε παραπάνω.

Είναι σημαντικό να εξηγήσουμε κάποια από τα χαρακτηριστικά της πειραματικής διδασκαλίας. Δώσαμε αρχικά πάρα πολύ μεγάλη σημασία στη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών και μέσα από βιωματικές δράσεις με ενσώματη μάθηση τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με αυτά τα κομμάτια της ιστορίας. Όταν παρουσιάσαμε το εργαλείο και τα παιδιά απόκτησαν ευχέρεια ποτέ δεν το κάναμε με τέτοιο τρόπο ώστε τα παιδιά να μάθουν απέξω τα αποτελέσματα με έναν εύκολο τρόπο και να μη δώσουν σημασία στη διαδικασία και στις σχέσεις των αριθμών. Θέλαμε να κάνουμε τα παιδιά να μπορέσουν να έρθουν σε επαφή με εμπειρικές καταστάσεις του πολλαπλασιασμού για να εδραιωθεί η σημασία του και να αποκτήσουν νόημα οι πράξεις αυτές. Έτσι τα παιδιά εφαρμόζοντας τις διαισθητικές ή άτυπες στρατηγικές της καταμέτρησης, της καταμέτρησης σε ομάδες, της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και αφαίρεσης μπόρεσαν ομαλά να καλλιεργήσουν τις στρατηγικές που χρειάζονταν για να φθάσουν στην εκμάθηση της προπαίδειας αλλά και στην κατανόηση της διαδικασίας.

Ήταν πάρα πολύ σημαντικό για εμάς να μη δώσουμε απλά ένα εργαλείο το οποίο θα χρησιμοποιούσαν για κάτι που δε θα είχε νόημα για αυτά, αλλά να καλλιεργηθεί η ενσώματη μάθηση και να μπορέσουν να αποκτήσουν μία καλύτερη αίσθηση αριθμού. Σύμφωνα, λοιπόν, με τα εμπειρικά αποτελέσματα που είδαμε παραπάνω, η πειραματική διδασκαλία με τη χρήση των γαντιών προπαίδειας και της Ιστορίας των Μαθηματικών δημιουργεί εμφανή διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών στο τέλος της Β’ τάξης, στην εκτέλεση των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού κατά την εκμάθηση της προπαίδειας. Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας προχωρούν καλύτερα και πιο σταθερά στην απομνημόνευση των γινομένων και χρησιμοποιούν πιο προωθημένες στρατηγικές, όσον αφορά τον βαθμό αφαίρεσης, για να υπολογίζουν τα γινόμενα. Γνωρίζουν και χειρίζονται καλύτερα τα γινόμενα με μεγάλους αριθμούς και με τη χρήση των γαντιών όλες τους οι απαντήσεις ήταν σωστές. Θεωρούμε πως η επιτυχία αυτή των παιδιών είναι ένας συνδυασμός ενσώματης μάθησης (γάντια προπαίδειας) με συστηματική χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε:

- να μειωθούν τα ποσοστά εγκατάλειψης του μαθήματος,
- η διδασκαλία να είναι πιο αποτελεσματική στην επίτευξη αποτελεσμάτων,
- να είναι πιο αποτελεσματική για τους μαθητές, βοηθώντας τους να επιτύχουν αποτελέσματα πιο γρήγορα,
- να απελευθερώσει τους διδάσκοντες να εστιάζουν στην άμεση βοήθεια εκεί που χρειάζεται περισσότερο.

6.3 Αποτελέσματα απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο όπως έχουμε αναφέρει το έκανε μόνο η πειραματική ομάδα στο τέλος των συνεντεύξεων. Σχεδιάστηκε με απλές και κατανοητές ερωτήσεις για να είναι πολύ εύκολο στα παιδιά και οι απαντήσεις τους μπορούσαν να είναι θετικές ή αρνητικές και φυσικά άλλες ανοιχτού τύπου για οτιδήποτε άλλο μπορεί να ήθελαν τα παιδιά να μοιραστούν μαζί μας. Αυτό που μας ενδιέφερε πιο πολύ ήταν να δούμε κατά πόσο τα παιδιά μπορούσαν να μας μεταφέρουν αυτό που βλέπαμε να συμβαίνει κατά τις διδασκαλίες και φυσικά μας ενδιέφερε να μάθουμε τι από όλα όσα κάναμε με το τέλος της χρονιάς τους έμεινε στη μνήμη.

Οι ερωτήσεις που κλήθηκαν τα παιδιά να απαντήσουν, στην εξατομικευμένη συνέντευξη που ακολούθησε στο τέλος της χρονιάς, ήταν σχετικές με την ιστορία των Μαθηματικών, τα γάντια και τη στάση των παιδιών προς τα Μαθηματικά.

➢ Στην πρώτη ερώτηση « *Θυμάσαι τα μαθήματα που κάναμε με την Ιστορία των Μαθηματικών; Αν ναι: Ποιο ήταν το αγαπημένο σου; Γιατί;*» τα αποτελέσματα ήταν τα εξής.

Σε ποσοστό 100% τα παιδιά θυμούνταν τα μαθήματα με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και το πιο εντυπωσιακό ήταν πως όλα τα παιδιά είχαν τεράστια χαμόγελα όταν απαντούσαν και φυσικά τα σχόλιά τους. Μερικές από τις απαντήσεις τους ήταν:

«*Κυρία εννοείται*!»

«*Είναι δυνατόν να μην τα θυμόμουν, ήταν τα αγαπημένα μου*.»

«*Ναι κυρία, αφού παίζουμε στα διαλείμματα τους αρχαίους*.»

Στη δεύτερη ερώτηση «Σου άρεσαν τα μαθήματα με την ιστορία των Μαθηματικών; α) Αν ναι γιατί; Ποιο ήταν το αγαπημένο σου; β) Αν όχι γιατί;» και πάλι το 100% των απαντήσεων των παιδιών ήταν θετικό.

➢ Στις υπο-ερωτήσεις της 1ης ερώτησης «*Ποιο ήταν το αγαπημένο σου; Γιατί;»,* οι απαντήσεις των παιδιών ήταν χειμαρρώδεις. Δεν μπορούσαν να ξεχωρίσουν κάτι συγκεκριμένο και μας ανέφεραν πολλά από τα μαθήματα και από τις πληροφορίες που θυμούνταν. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως δεν τα είχαν ξεχάσει και πως ο ενθουσιασμός που βλέπαμε και τότε ήταν έκδηλος και στις συνεντεύξεις. Αυτό που έχει σημασία να αναφερθεί ήταν οι απαντήσεις τους στην ερώτηση «Γιατί». Κάποιες από τις απαντήσεις των παιδιών:

«*Γιατί ήταν τα καλύτερα μαθήματα*.»

«*Γιατί δε βαρέθηκα καθόλου*.»

«*Γιατί παίζαμε και μαθαίναμε. Το αγαπημένο μου* (η μαθήτρια την τελευταία της φράση την είπε με σηκωμένα τα χέρια και χαμογελώντας)!»

- Στην τρίτη ερώτηση «*Θέλεις να μου πεις κάτι άλλο για τα μαθήματα που κάναμε με την ιστορία των Μαθηματικών;»* τα παιδιά συνέχιζαν με πολύ θετικά σχόλια, λέγοντας πληροφορίες για τα μαθήματα που τους είχαν εντυπωσιάσει και δεν είχαν αναφέρει στην προηγούμενη ερώτηση. Ένα σημαντικό σχόλιο που εντοπίσαμε στο 50% των απαντήσεων των παιδιών ήταν πως θα ήθελαν και τα υπόλοιπα μαθήματα στα μαθηματικά να εμπλουτίζονταν με την ιστορία των μαθηματικών. Συγκεκριμένα οι απαντήσεις τους ήταν:

«*Μακάρι να μη σταματούσαμε την ιστορία*[13] *κυρία.*»

«*Θα ήθελα κάθε μέρα ιστορία.*»

«*Λέγαμε στην κυρία να μας κάνει πάλι ιστορία, σας το είπε;*»

Οι απαντήσεις των παιδιών στην ενότητα των ερωτήσεων για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών επιβεβαιώνουν τις αρχικές μας προβλέψεις και τα ερευνητικά δεδομένα που παραθέσαμε, πως είναι πολύ μεγάλο κίνητρο για τα παιδιά και πως προάγει πολύ θετικά τη διδασκαλία. Τα παιδιά και από τις απαντήσεις τους και από την ανταπόκριση και συμπεριφορά τους κατά την περίοδο των διδασκαλιών φάνηκε πως ένιωσαν τα μαθηματικά πιο οικεία και πως απόκτησαν πολύ περισσότερο νόημα για αυτά.

Σημαντικό είναι βέβαια να αναφέρουμε πως από τις έρευνες που έχουν γίνει συμπεριλαμβανομένης και της συγκεκριμένης δεν μετριέται με ποσοτικό τρόπο το κατά πόσο η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση είναι αποτελεσματική. Δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά πως η χρήση της ιστορίας είχε ως αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Στη συγκεκριμένη έρευνα λόγω του ενθουσιασμού των παιδιών και κατά την περίοδο των διδασκαλιών και κατά τη διάρκεια των ερωτηματολογίων και φυσικά λόγω των εξαιρετικών επιδόσεών τους μπορούμε να πούμε σίγουρα πως απόλαυσαν τη διαδικασία και πως ήταν αποτελεσματική. Η κινητοποίηση και ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών μπορεί να οφειλόταν στον ενθουσιασμό που μετέφεραν η εκπαιδευτικός και η ερευνήτρια και ίσως όχι στην αναγνώριση από μεριάς των παιδιών της ανθρώπινης διάστασης των μαθηματικών. Όποιος/οι κι αν ήταν ο/οι λόγος/οι που οδήγησε/αν τα παιδιά να πετύχουν τόσο εξαιρετικά αποτελέσματα η χρήση ιστορίας των μαθηματικών σίγουρα έπαιξε σημαντικό ρόλο, ώστε να επιτευχθούν.

- Στην 4η ερώτηση «*Σου αρέσουν τα γάντια της προπαίδειας; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;»* όλα τα παιδιά απάντησαν θετικά και πάλι ο ενθουσιασμός τους ήταν έκδηλος. Μερικές από τις απαντήσεις τους ενδεικτικά:

«*Πάρα πολύ, τα θυμάστε τα δικά μου κυρία; Έκανα κι άλλα για δύο φίλους μου!!*»

[13] Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας αναφέρονταν στην ιστορία των μαθηματικών ως «ιστορία».

«*Ναι, τα γάντια είναι τα πιο τέλεια!*»

«*Πάρα πολύ κυρία! Όπως ο ρωμαϊκός άβακας που μας δείξατε και χωρούσε στην τσέπη τους, τα γάντια μου χωράνε παντού*!»

Καταλαβαίνουμε πως τα παιδιά είχαν ενθουσιαστεί με τα γάντια και ακόμη και στο τέλος της χρονιάς, όταν απάντησαν στο ερωτηματολόγιο τα σχόλιά τους ήταν μόνο θετικά. Όπως φαίνεται παραπάνω αλλά και από την ανάλυση όλων των απαντήσεων των παιδιών τρία από αυτά έφτιαξαν γάντια και για άλλους φίλους τους. Γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως τα θεωρούσαν πολύ βοηθητικά και ήθελαν να μοιραστούν αυτή τους τη γνώση. Τα παιδιά καλλιέργησαν έτσι τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες, αφού ήταν σε θέση να διδάξουν σε άλλους κάτι που είχαν διδαχθεί αυτά.

- Στην πέμπτη ερώτηση «*Τα γάντια της προπαίδειας τα φοράς όταν κάνεις μαθηματικά; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;*» οι απαντήσεις των παιδιών αναλύονται παρακάτω:

Τα παιδιά σε ποσοστό 57% απάντησαν θετικά και από τις απαντήσεις τους φανερώνεται πως τα γάντια της προπαίδειας έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στο να κατανοήσουν την προπαίδεια και να μπορέσουν να φτάσουν στο επίπεδο της απομνημόνευσής της μέσω των στρατηγικών που εφάρμοζαν. Το υπόλοιπο 43% των παιδιών που απάντησαν αρνητικά μας το αιτιολόγησαν λέγοντάς μας πως ενώ δεν τα φοράν πλέον είναι σαν να τα φοράν. Ο λόγος, διότι ήξεραν πως κλείνοντας τα δάχτυλά τους με συγκεκριμένο τρόπο τα «δύσκολα» γινόμενα – τα παιδιά αυτά όταν ερωτήθηκαν ποια γινόμενα ήταν δύσκολα απάντησαν το «6 x 7, 8 x7, 8 x 8» ή αλλιώς τα μεγάλα όπως μας είπαν – γίνονταν εύκολα. Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως ήταν ξεκάθαρο πως η ενσώματη μάθηση εξηγεί τι είχε συμβεί και τα παιδιά απαντούσαν με αυτόν τον τρόπο. Πολύ ενδιαφέρουσες ήταν κάποιες από τις απαντήσεις των παιδιών που συνηγορούν και αυτές σε αυτό μας το συμπέρασμα ως προς τη δύναμη της ενσώματης μάθησης και είναι οι παρακάτω:

«*Όχι κυρία, δε χρειάζεται να τα φοράω, αφού… (σε αυτό το σημείο ο μαθητής έκλεινε τα δάχτυλά του και μας έδειχνε γινόμενα με τη μεθοδολογία των γαντιών και έλεγε 7 x 8=56, 8 x 8=64 …)τα ξέρω όλα*!»

«*Όχι κυρία, αλλά είναι σαν να τα φοράω, αν χρειαστώ κάτι από την προπαίδεια απλά κοιτάω τα χέρια μου και βρίσκω τι να πω, όπως σήμερα.*»

«*Όχι κυρία, αν και στο σπίτι τα φοράω συχνά και παίζω με τον αδερφό μου, έφτιαξα και καινούρια γιατί μου χάλασαν. Εδώ δε μου χρειάζονται έμαθα την προπαίδεια και αν θέλω να σιγουρευτώ για κάτι απλά κλείνω τα δάχτυλά μου*.»

Φαίνεται ξεκάθαρα λοιπόν πως οι κινήσεις που έκαναν κατά την εκμάθηση της προπαίδειας έχουν χαραχθεί στο μυαλό τους και όποτε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν αυτή τη γνώση δεν δυσκολεύονται καθόλου τις ανασύρουν από τη μνήμη τους και να θυμηθούν τελικά το αποτέλεσμα οποιουδήποτε γινόμενου της προπαίδειας. Ένα πάρα πολύ δυνατό εύρημα υπέρ της ενσώματης μάθησης με χειραπτικό υλικό αρχικά και έπειτα και χωρίς αυτό με χειρονομίες.

➢ Στην έκτη ερώτηση του ερωτηματολογίου «*Τα γάντια της προπαίδειας τα φοράς κι άλλες ώρες εκτός από την ώρα των Μαθηματικών; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;*» οι απαντήσεις των παιδιών αναλύονται παρακάτω:

Σε ποσοστό 44% τα παιδιά μας απάντησαν πως φορούν τα γάντια της προπαίδειας και σε άλλα μαθήματα αλλά και στο σπίτι. Μερικές από τις απαντήσεις τους είναι οι παρακάτω:

«Ναι, τα φοράω γιατί είμαι σούπερ-ήρωας και μου αρέσει να τα δείχνω!»

«Τα φοράω και συγκεντρώνομαι, αν χρειαστεί να υπολογίσω κάτι το κάνω αμέσως.»

«Ναι, μου αρέσουν πολύ, τα φοράω και παίζω με τους φίλους μου προπαίδεια.»

«Ναι, τα φοράω γιατί νιώθω άνετα και είναι πολύ όμορφα!»

«*Ναι, γιατί τα αγαπώ*!»

Εύκολα καταλαβαίνουμε πως τα παιδιά που απάντησαν θετικά, έχουν νιώσει πολύ άνετα φορώντας το γάντι και έχουν βρει κι άλλους τρόπους για να το εκμεταλλεύονται. Όπως και στην 5η ερώτηση ένας μαθητής απάντησε πως δεν το φοράει στα μαθηματικά αλλά στο σπίτι όταν παίζει με τον αδερφό του έτσι και ένας άλλος μαθητής είπε πως παίζει με τους φίλους του. Αυτό σημαίνει πως τα παιδιά εξασκούνταν συχνά ακόμη και εκτός τάξης και συνέχιζαν να το κάνουν μέχρι και το τέλος της χρονιάς.

Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών όταν εισαγάγαμε πρώτη φορά τα γάντια οι αντιδράσεις των παιδιών και τότε ήταν πολύ θετικές, δεν είχαμε κανένα παράπονο για ενόχληση από τη χρήση τους. Φαίνεται λοιπόν ξεκάθαρα πως τα γάντια ήταν εκτός από βοηθητικό εργαλείο στην εκμάθηση της προπαίδειας, εργαλείο για εξάσκηση, την οποία έκαναν μόνα τους χωρίς να τους το επιβάλλει κανείς. Επίσης κάποια παιδιά ένιωθαν σαν «σούπερ ήρωες», αυξήθηκε η αυτοπεποίθησή τους και πίστεψαν πολύ περισσότερο στον εαυτό τους και στις δυνάμεις του[14].

➢ Στην 7η ερώτηση «Θέλεις να μου πεις κάτι άλλο για τα γάντια της προπαίδειας;» σε ποσοστό 100% όλα τα παιδιά έδωσαν απαντήσεις και οι απαντήσεις τους εμπίπτουν σε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω κατηγορίες:

I. Οι αναμνήσεις τους από στιγμές που κάναμε μαθήματα με τα γάντια της προπαίδειας και ήθελαν να μοιραστούν μαζί μας.

[14] Σύμφωνα με μαρτυρία της δασκάλας της τάξης για παιδιά που δε συμμετείχαν πολύ έντονα, ούτε έδειχναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

II. Παιχνίδια που παίζουν και πόσο τους αρέσει να φοράν τα γάντια.

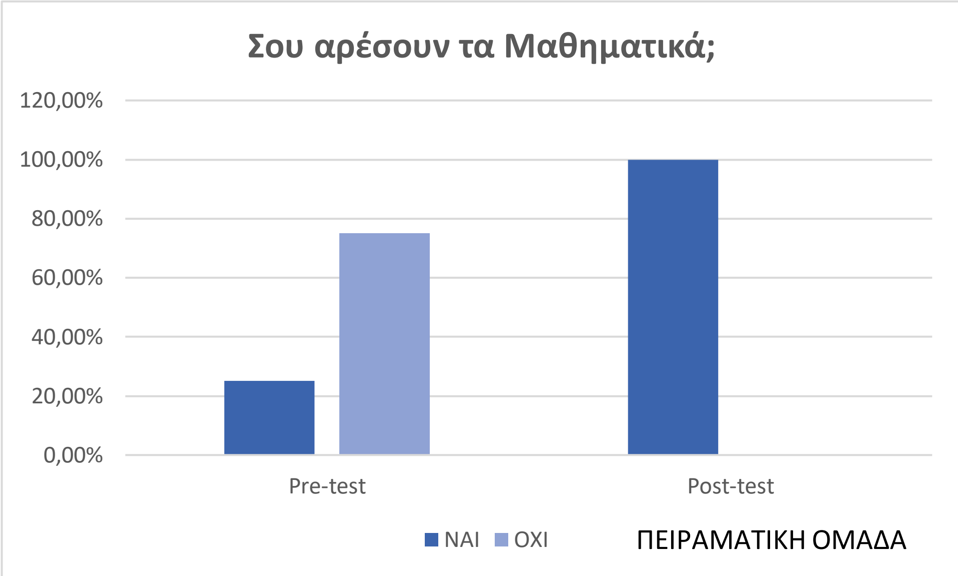
III. Χαρακτηρισμοί για τα γάντια «τέλεια, μαγικά γάντια, φανταστικά κ.ά.».

Τέλος κάποια παιδιά σε αυτή την ερώτηση μας ρώτησαν αν του χρόνου θα κάνουμε κι άλλα μαθήματα με ιστορία και με τέτοια εργαλεία. Γενικά το κλίμα ήταν πολύ θετικό και τα παιδιά ήταν πάρα πολύ χαρούμενα και με τη διαδικασία και με τις ερωτήσεις στη συνέχεια. Καταλήγουμε πως δεν υπήρχε ούτε ένα παιδί το οποίο να ένιωσε κάποιο αρνητικό συναίσθημα, αφού κάτι τέτοιο δεν εκφράστηκε ποτέ ούτε κατά την περίοδο εκμάθησης της προπαίδειας ούτε κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Τα παιδιά δέχτηκαν με πολύ μεγάλη άνεση τα γάντια ως εργαλείο και τα χρησιμοποίησαν πολύ άνετα.

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε πως τα παιδιά χρειάστηκαν μία διδακτική ώρα για την εκμάθηση της χρήσης των γαντιών για τη μία του πλευρά και μια διδακτική ώρα για την άλλη την περίοδο της εκμάθησης της μεθοδολογίας των γαντιών. Σε κανένα παιδί δε χρειάστηκε να επαναλάβουμε τη μεθοδολογία δεύτερη μέρα κι όπως μας είχαν πει και τα ίδια τότε, ήταν «παιχνιδάκι» να το μάθουν. Ίσως και η ευκολία στη χρήση του να ήταν ένας ακόμη λόγος που τα παιδιά τα δέχτηκαν τόσο εύκολα και μπόρεσαν να τα μάθουν τόσο γρήγορα.

- Στην 8η ερώτηση «Σου αρέσουν τα μαθηματικά; *Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;*» τα αποτελέσματα ήταν σε ποσοστό 100% θετικές απαντήσεις.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αξιοσημείωτο, διότι η ίδια ερώτηση έγινε στα παιδιά (χωρίς να τους ζητηθεί να αιτιολογήσουν όπως στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου) και στην αρχή της έρευνας πριν να γίνει καμία δική μας παρέμβαση και το αποτέλεσμα ήταν μόνο το 25% των παιδιών να απαντήσουν θετικά. Θεωρούμε λοιπόν πως ξεκάθαρα άλλαξε η στάση των παιδιών ως προς τα μαθηματικά και ελπίζουμε να συνεχίσουν να τα βλέπουν με την ίδια θετική διάθεση όπως όταν ερωτήθηκαν.



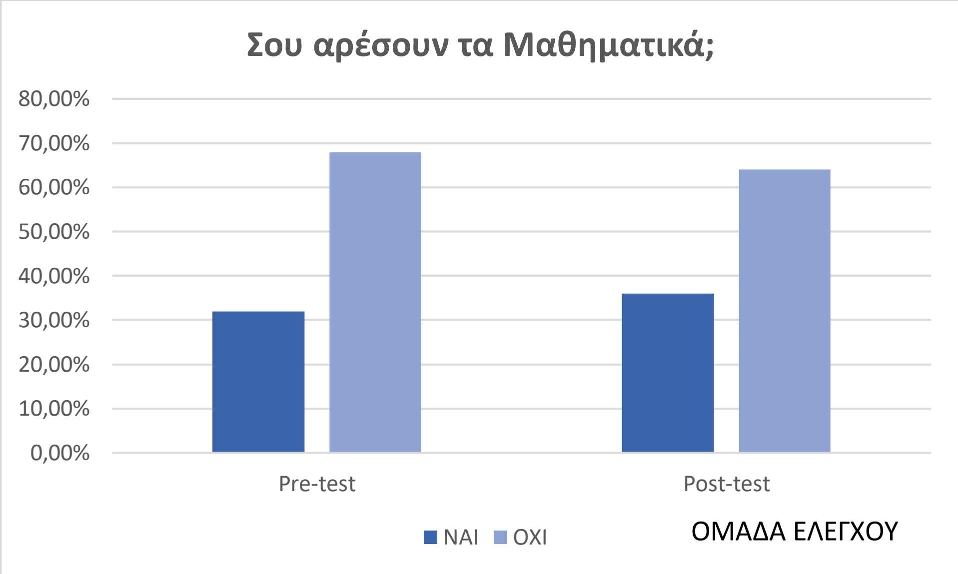
Γράφημα 6: Απαντήσεις πειραματικής ομάδας στην ερώτηση «Σου αρέσουν τα Μαθηματικά;» στο pre-test και στο post-test.

Ως αιτιολόγηση στο δεύτερο σκέλος των ερωτήσεων « *Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί*;» οι απαντήσεις των παιδιών παρακάτω:

- «Τα μαθηματικά είναι τέλεια!» σε ποσοστό 25%.
- «Αγαπώ τα μαθηματικά!» σε ποσοστό 13%.
- «Τα μαθηματικά είναι το αγαπημένο μου μάθημα!» σε ποσοστό 62%.

Οι απαντήσεις των παιδιών είχαν και επιπρόσθετα σχόλια τα οποία όλα ήταν σχετικά με τις διδασκαλίες μας με τη χρήση ιστορίας και τις βιωματικές μας δράσεις. Επίσης, τα παιδιά μάς ενημέρωσαν πως ζητούσαν συνέχεια από την κυρία τους κι άλλες τέτοιες δράσεις και περισσότερη ιστορία των μαθηματικών αφού τελειώσαμε τις διδασκαλίες, γεγονός που ήδη γνωρίζαμε όπως μας είχε ήδη πληροφορήσει η εκπαιδευτικός.

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε και τα αποτελέσματα στην ερώτηση «Σου αρέσουν τα Μαθηματικά;» από τα παιδιά της ομάδας ελέγχου τη δεύτερη φορά που ερωτήθηκαν στο τέλος της χρονιάς, μετά τις συνεντεύξεις τους.



Γράφημα 7: Απαντήσεις ομάδας ελέγχου στην ερώτηση «Σου αρέσουν τα Μαθηματικά;» στο pre-test και στο post-test.

Φαίνεται από το γράφημα 7, πως τα παιδιά της ομάδας ελέγχου δεν άλλαξαν τη γνώμη τους για τα μαθηματικά. Το ποσοστό που απάντησε θετικά στο post-test, δηλαδή το 36% απλά μας δείχνει πως αυξήθηκε λίγο σε σχέση με το 32% του pre-test. Παραμένουν πολύ χαμηλά και τα δύο ποσοστά, όπως και ήταν αναμενόμενο.

6.3.1 Συμπεράσματα ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο της έρευνας συντάχθηκε περισσότερο για να πάρουμε μία εικόνα του πώς τα παιδιά βίωσαν τη διαδικασία και για να μπορέσουμε να μάθουμε παραμέτρους που ίσως κατά τη διάρκεια της πειραματικής διδασκαλίας δεν είχαμε αντιληφθεί. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να αναφερθώ και στο σχολείο στο οποίο πραγματοποιήθηκε η πειραματική διδασκαλία, διότι θεωρώ πως παίζει σημαντικό ρόλο η στάση και η όρεξη των παιδιών, καθώς και η εξοικείωσή τους με πειραματικές διδασκαλίες και βιωματικές δράσεις.

Το Big Bang School, είναι ένα πρότυπο Δημοτικό σχολείο που οι αρχές και η φιλοσοφία του βασίζονται στη βιωματική μάθηση και στην «Παιδεία του βάθους». Τα παιδιά καθημερινά δουλεύουν μέσω projects και μέσω διαφόρων μεθόδων διδασκαλίας με ξεκάθαρο προσανατολισμό στη μαθητοκεντρική διδασκαλία και στην ανακαλυπτική μέθοδο. Για αυτούς τους λόγους η πειραματική διδασκαλία για αυτά δεν ήταν κάτι ιδιαίτερο και άγνωστο, τουναντίον έρχονταν σε επαφή με τέτοιου είδους διδασκαλίες συνέχεια και ήταν απόλυτα εξοικειωμένα με χρήση εργαλείων, δεύτερο εκπαιδευτικό στην τάξη, βιωματικές δράσεις κ.ά. . Θεώρησα σημαντικό να κάνω αυτή την παρέμβαση και να αναφερθώ στο συγκεκριμένο θέμα, για να αποφευχθεί οποιαδήποτε αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων των παιδιών ως αποτέλεσμα μιας ιδιαίτερης και άγνωστης προς αυτά διδασκαλίας, οπότε και καταδικασμένη να πετύχει.

Οι απαντήσεις των παιδιών της πειραματικής ομάδας τόσο για την ιστορία των μαθηματικών όσο και για τη χρήση των γαντιών ήταν σε ποσοστό 100% θετικές. Δεν αναφέρθηκε τίποτα αρνητικό και τα παιδιά φάνηκε ξεκάθαρα πως απόλαυσαν τη διαδικασία σε πολύ μεγάλο βαθμό, αφού εκτός από τα δικά τους σχόλια είχαμε ανατροφοδότηση και από τους γονείς τους οι οποίοι ήταν ενθουσιασμένοι με τα αποτελέσματα της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα πολλοί από αυτούς μας είχαν εκφράσει την ανησυχία τους ως προς τη δυσκολία που περίμεναν να αντιμετωπίσουν τα παιδιά τους κατά εκμάθηση της προπαίδειας πριν να ξεκινήσουμε την έρευνα. Τόσο κατά τη διάρκεια όσο και στο τέλος της έρευνας αλλά και της χρονιάς με την τελική συνέντευξη, τα σχόλια, οι σκέψεις και οι παρατηρήσεις τους ήταν σε απόλυτη συμφωνία με αυτά των παιδιών τους, αφού ήταν και οι ίδιοι κατενθουσιασμένοι.

Συνολικά, από όλες τις απαντήσεις των παιδιών στο ερωτηματολόγιο μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε πως τα παιδιά απόλαυσαν τη διαδικασία και σίγουρα κατάφεραν να μάθουν την προπαίδεια. Σημαντικό γεγονός ήταν πως τα παιδιά άλλαξαν τη στάση τους προς τα μαθηματικά και συνέχισαν για όλη τη χρονιά και όχι μόνο για την περίοδο που τους παρουσιάστηκε κάτι διαφορετικό.

Συζήτηση – Αποτελέσματα

Μέσω της συγκεκριμένης εργασίας επιχειρήθηκε να ερευνηθεί το κατά πόσον ένα εργαλείο πολλαπλασιασμού με ταυτόχρονη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών «ως εργαλείο» (*history-as-a-tool*), όταν αυτή έχει σκοπό να βοηθήσει την εκμάθηση και τη διδασκαλία μαθηματικών (Jankvist, 2009) και συγκεκριμένα γάντια προπαίδειας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη σχολική τάξη για εκπαιδευτικούς σκοπούς, εντός της διδασκαλίας του πολλαπλασιασμού.

Η θέση της ιστορίας των μαθηματικών είναι καίρια σε όλη τη διάρκεια της πειραματικής διδασκαλίας και με τη συμβολή αυτής μέσω ιστορικών πηγών ως υποστηρικτικό υλικό καταφέραμε να κάνουμε τα παιδιά να ενδιαφερθούν και να νιώσουν την ανάγκη εκμάθησης προπαίδειας και το πώς γεννήθηκε η ιδέα του πολλαπλασιασμού. Τους φέραμε σε επαφή με προκλήσεις που αντιμετώπισαν οι «αρχαίοι» ή οι «παλιοί», όπως τους έλεγαν τα παιδιά κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, και αυτά με τη σειρά τους προσπάθησαν να βρουν λύσεις σε αυτές τις δυσκολίες. Τους δίναμε γνήσιες προκλήσεις και κάναμε παραλληλισμούς με τις δικές τους εμπειρίες, για να μπορέσουν να τις βιώσουν πιο έντονα και να κινητοποιηθούν περισσότερο. Τέλος, τους εξιστορήσαμε μέσω παραμυθιών αρκετές φορές πώς έγιναν και πώς ξεκίνησαν τα μαθηματικά και τα αποτελέσματα ήταν εκπληκτικά.

Η ιστορία των μαθηματικών χρησιμοποιείται στην έρευνα και ως κρίσιμο παρακινητικό στοιχείο για μια ανάλυση. Όταν μιλάμε για ανάλυση εννοούμε ανάλυση, από τη σκοπιά της διδασκαλίας, των εννοιών, της συλλογιστικής και των μεθόδων που χρησιμοποιούνταν από τους «αρχαίους», και τις δυσκολίες και τα εμπόδια που μπορεί να είχαν εμποδίσει την εξέλιξη εννοιών ή μεθόδων. Όλα αυτά παρουσιάστηκαν στα παιδιά και μπόρεσαν ίσως να αναδείξουν την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών.

Ένας από τους κεντρικούς ρόλους της ιστορίας των μαθηματικών ως επιστημονικής περιοχής είναι να παρέχει απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικά με την προέλευση των μαθηματικών, την ίδρυσή τους, τη χρησιμότητά τους, τις σχέσεις τους με την κοινωνία και άλλους επιστημονικούς τομείς, την ανάπτυξή τους, καθώς και τις συγκρούσεις και εμπόδια που οι μαθηματικοί έπρεπε να ξεπεράσουν κατά τη διάρκεια των αιώνων μέχρι τα μαθηματικά να πάρουν τη μορφή τους όπως τα γνωρίζουμε σήμερα (Farmaki, Klaudatos, & Paschos, 2004). Έτσι έγινε και στην έρευνα μας, τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα παιδιά εξοικειώθηκαν με τα μαθηματικά και τους βοήθησε πάρα πολύ η γνώση της ιστορίας τους και για τον πολιτισμό μας και για διαφόρους πολιτισμούς.

Η γνωριμία με διαφόρους πολιτισμούς έπαιξε πάρα πολύ σημαντικό ρόλο, αφού οι μαθηματικές έννοιες είναι αποτέλεσμα πολλών προσπαθειών, προσθέσεων και αφαιρέσεων στο πέρασμα του χρόνου. Τα παιδιά μπόρεσαν να καταλάβουν πόσο σημαντική είναι αυτή η εξέλιξη και πως δεν έγινε σε μία μέρα. Κινητοποιήθηκαν και αυξήθηκε το ενδιαφέρον τους κατακόρυφα όταν ασχολούνταν με την ιστορία των μαθηματικών.

Κατά συνέπεια, ενσωματώνοντας κατάλληλα ιστορικές αναφορές σε μαθήματα μαθηματικών, όπως κάναμε και στην έρευνά μας, τα μαθηματικά ως σχολικό μάθημα ανέδειξαν τις ανθρώπινες τους διαστάσεις και σταμάτησαν να παρουσιάζονται ως κάτι διαφορετικό στην ανθρώπινη εξέλιξη και ως ένα σύστημα γνώσης που μας έφτασε άθικτο, τέλειο, με αναμφισβήτητες αλήθειες που δεν υπόκεινται σε αλλοιώσεις, σκεπτικισμό, αντιδράσεις και συγκρούσεις (Farmaki et al., 2004). Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπόρεσαν να αποφύγουν να αντιληφθούν τα μαθηματικά ως κάτι μακρινό και άγνωστο, ενώ οι μαθηματικές έννοιες μπόρεσαν να παρουσιαστούν σε αυτά με περισσότερους φυσικούς τρόπος, που οδηγούν σε ομαλότερη μετάβαση σε επίσημες μεθόδους και αποδείξεις (Tzanakis & Thomaidis, 2000).

Μελετώντας μαθηματικά προβλήματα της αρχαιότητας από διαφόρους πολιτισμούς, τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν τις σύγχρονες στρατηγικές λύσεών τους με τις αρχικές λύσεις των αρχαίων μαθηματικών. Μια τέτοια διαδικασία τους βοήθησε να συνειδητοποιήσουν την αποτελεσματικότητα των σύγχρονων μαθηματικών σημειώσεων σε αντίθεση με τις αρχαίες (Fasanelli, 2002) καθώς και τους τρόπους με τους οποίους η μαθηματική γνώση του παρελθόντος επηρέασε τη σύγχρονη καθημερινή μας ζωή (Jahnke, 2001).

Βασιζόμενοι λοιπόν στα συμπεράσματα και στα αποτελέσματα της έρευνάς μας, θεωρούμε πως η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ήταν πολύ σημαντικό και απαραίτητο στοιχείο, ώστε να πετύχουμε τον τελικό μας στόχο καθώς και η παρουσίαση ιστορικών γεγονότων άλλων πολιτισμών. Το κίνητρο και ο ενθουσιασμός που πρόσφερε στα παιδιά, η ενεργοποίησή τους κατά τη μαθησιακή διαδικασία τοποθετούν την ιστορία των μαθηματικών πολύ ψηλά στο μυαλό των παιδιών. Όπως είδαμε από τα σχόλιά τους στις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο αλλά και καθ’ όλη τη διάρκεια των πειραματικών διδασκαλιών η ιστορία ήταν εκείνη που τα επηρέασε θετικά και τους δημιούργησε το θετικό κλίμα για να γίνει ομαλή εισαγωγή της έννοιας του πολλαπλασιασμού, αφού έκανε τα μαθηματικά κάτι προσιτό και ανθρώπινο. Τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με άλλους πολιτισμούς και μπόρεσαν να νοηματοδοτήσουν τις καινούριες έννοιες που κλήθηκαν να μάθουν, ώστε να επηρεαστεί ο τρόπος αφομοίωσης του περιεχομένου του μαθήματος από τους μαθητές και ο τρόπος που μεταφέρονται οι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών.

Όπως γνωρίζουμε η μέθοδος διδασκαλίας είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τα μαθηματικά επίτευγμα των παιδιών (Copley, 2000). Για αυτό τον λόγο στην παρούσα έρευνα εφαρμόσαμε διάφορες μεθόδους διδασκαλίας που να είναι επικεντρωμένες στους μαθητές. Όμως, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα αποτελέσματα ερευνών με χρήση της ιστορίας των μαθηματικών δεν είναι εύκολα μετρήσιμα και συνήθως αμφισβητούνται, αφού δεν υπάρχουν αρκετά μετρήσιμα στοιχεία, ώστε να μπορέσουμε να είμαστε ακριβείς και απόλυτοι. Για αυτό τον λόγο και σε αυτή την έρευνα δεν επιχειρήθηκε κάτι τέτοιο, αφού αυτό που προσπαθήσαμε να κάνουμε ήταν να εισάγουμε ένα εργαλείο εκμάθησης προπαίδειας και να μπορέσουμε να το χρησιμοποιήσουμε με τα παιδιά με ταυτόχρονη χρήση ιστορίας ως κίνητρο και εργαλείο κινητοποίησης.

Φυσικά δε θέλαμε να παρουσιάσουμε ένα εργαλείο στα παιδιά με το οποίο θα σταματούσαμε την ανάπτυξη στρατηγικών και μαθηματικών σχέσεων που λογικά θα ανέπτυσσαν, ώστε να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα της απομνημόνευσης της προπαίδειας. Για να μην δώσουμε απλά μια εύκολη λύση, η οποία δε θα είχε ουσία και νόημα στα παιδιά, προσπαθήσαμε να τους καλλιεργήσουμε την αίσθηση του αριθμού και προσπαθήσαμε να αφήσουμε τον χρόνο και τον χώρο που χρειαζόταν το κάθε παιδί, ώστε να φτάσει εκεί που μπορούσε, πάντα με δική μας καθοδήγηση και στήριξη όταν μας το ζητούσαν και όταν θεωρούσαμε πως χρειαζόταν για την ομαλή εξέλιξη της διαδικασίας.

Δώσαμε λοιπόν πάρα πολύ μεγάλη σημασία στην καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού. Προσπαθήσαμε μέσα από δράσεις τα παιδιά να αναπτύξουν ένα ευρύ φάσμα γνώσεων στα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων εννοιών και λεξιλογίου. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω έρευνες έχουν δείξει πως τα παιδιά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση που σε μικρές τάξεις επιδεικνύουν δυσκολίες στα μαθηματικά θα τις έχουν και μεταγενέστερα αν δεν αναπτύξουν ισχυρή αίσθηση του αριθμού σε σύγκριση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομηλίκους τους (βλ. κεφάλαιο 3). Έτσι προσπαθήσαμε να εμβαθύνουμε στα μαθηματικά χωρίς απλά να δώσουμε στα παιδιά έτοιμες λύσεις, προσπαθήσαμε όπως οι «αρχαίοι» να τα κάνουμε κι αυτά συνδημιουργούς της ανακάλυψης και τελικά της γνώσης.

Η μαθηματική γνώση έχει αναγνωριστεί τόσο κοινωνικά όσο και επιστημονικά ως σημαντική και απαραίτητη. Είναι γνωστό ότι τα προγράμματα σπουδών περιλαμβάνουν πολλές μαθηματικές έννοιες αλλά είναι άγνωστο πόσες από αυτές μαθαίνει, κατανοεί και εφαρμόζει ο μέσος άνθρωπος (Τζεκάκη, 2007). Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας εμφανέστατα καταδεικνύουν πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας κατανόησαν τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν ή έφτασαν μέσω της διδασκαλίας να ανακαλύψουν. Επιπλέον, οι μαθηματικές δραστηριότητες χρειάζεται να προκαλούν δράση και σκέψη, γεγονός που προσπαθήσαμε και καταφέραμε από τα αποτελέσματα να καλλιεργήσουμε. Εννοώντας ότι πέρα από την ανάπτυξη μιας έννοιας, η μαθηματική δραστηριότητα εμπλέκει και άλλες έννοιες που πιθανά να επιτρέψουν τρόπους αντιμετώπισης που υπεκφεύγουν τη δημιουργία μιας νέας ιδέας.

Μαθηματική δεν είναι η δραστηριότητα με αριθμούς, σχήματα, πράξεις και γενικά με μαθηματικά αντικείμενα. Μαθηματική δραστηριότητα είναι η ανάπτυξη μιας μαθηματικής έννοιας που από προηγούμενες γνώσεις θα γεννηθεί ή και θα αναπτυχθεί. Όπως ακριβώς έγινε λοιπόν και στην έρευνά μας, ενώ η παραδοσιακή διδασκαλία έχει τελείως διαφορετική πορεία και σπάνια προσφέρει δυνατότητες ενασχόλησης των παιδιών με τα μαθηματικά. Η παραδοσιακή διδασκαλία ξεκινάει με την εξήγηση ιδεών που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια και προχωράει με την επίλυση αντίστοιχων ασκήσεων. Έμφαση δίνεται στην εύρεση απαντήσεων και τα παιδιά συχνά αποθαρρύνονται. Κυριαρχεί επομένως η αντίληψη πως τα μαθηματικά αφορούν την εφαρμογή κανόνων, την εκτέλεση πράξεων - υπολογισμών και την αναζήτηση σωστών απαντήσεων (Τζεκάκη 2007).

Τέλος, οι μαθηματικές δραστηριότητες αφορούν την αυτόνομη δράση του μαθητή. Με άλλα λόγια, η ανάπτυξη εννοιών μέσα από ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες σημαίνει τη συστηματική εμπλοκή του μαθητή σε αυτές, αλλά και την «εκχώρησή» τους από τη μεριά του εκπαιδευτικού. Ο μαθητής μπορεί να μην ενδιαφερθεί να ασχοληθεί ή να ασχοληθεί με άλλη πλευρά της δραστηριότητας, ενώ ο εκπαιδευτικός, καθώς παρατηρεί τη δράση του μαθητή ξεφεύγει από τον αρχικό του στόχο να προσπαθεί με διαδοχικές ερωτήσεις ή παρεμβάσεις να επαναφέρει τη δράση που επιθυμεί, ακυρώνοντας έτσι τη δράση (Τζεκάκη, 2007). Γεγονός που ποτέ δεν έγινε στις πειραματικές μας διδασκαλίες. Πάντα δίναμε την αρχική δραστηριότητα κι έπειτα αφήναμε τα παιδιά να δημιουργήσουν, με δικές μας παρεμβάσεις όπου μας το ζητούσαν. Βλέπαμε την πορεία της κατανόησης των παιδιών αλλά και το σταδιακό χτίσιμο της νέας γνώσης και των νέων στρατηγικών.

Πολύ σημαντική ήταν η συζήτηση μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων που πραγματοποιούνταν. Τα παιδιά συζητούσαν, μοιράζονταν πληροφορίες, κατανοούσαν ίσως καλύτερα και χρησιμοποιούσαν τις γνώσεις που κατέκτησαν. Αυτή η διαδικασία οδηγεί στην κατάκτηση της μεταγνώσης, όπου τα παιδιά δεν μένουν μόνο στην κατανόηση της γνώσης των μαθηματικών αλλά προχωρούν στην γνώση για τα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, κατανοούν τη σημαντικότητα τους, ήταν σε θέση να διακρίνουν ποιες ήταν οι λανθασμένες αρχικές εντυπώσεις για το συγκεκριμένο διδαχθέν αντικείμενο. Επιπλέον, τη συσχετίζουν με αντίστοιχες πραγματικές καταστάσεις και είναι σε θέση να τη χρησιμοποιήσουν. Η τελική σύνοψη από εμάς, ήταν πολύ σημαντική, για την ορθή ανακεφαλαίωση και την ορθή χρήση της ορολογίας, όταν την είχαν κατανοήσει πλήρως τα παιδιά.

Σημαντικοί ήταν επίσης και οι συναισθηματικοί στόχοι. Τα παιδιά και οι εκπαιδευτικοί πρέπει να νιώθουν πως έχουν τις δυνατότητες να λύσουν τα προβλήματα, πρέπει να υπάρχει προθυμία εναλλακτικών μεθόδων καθώς και ευελιξία. Πρέπει τα μαθηματικά να γίνονται απολαυστικά, να ακούγονται όλες οι απόψεις και να επιβραβεύονται οι σωστές αλλά και οι ξεχωριστές λύσεις που δίνουν τα παιδιά με διαφορετικό τρόπο σκέψης.

Έχοντας λοιπόν υπόψη μας όλα τα παραπάνω καταλήξαμε σε διδασκαλίες προσανατολισμένες σε αυτές τις κατευθύνσεις. Με την εισαγωγή του γαντιού καταφέραμε να δώσουμε στα παιδιά άλλο ένα ισχυρό εργαλείο, αυτό της ενσώματης μάθησης. Τα παιδιά σε ποσοστό 88% ήταν αλάνθαστα και τα υπόλοιπα έκαναν μόνο από ένα λάθος σε κάποια ζεύγη γινομένων. Το εντυπωσιακό ήταν πως χρησιμοποιούσαν συνέχεια τα χέρια τους ακόμη και ασυναίσθητα. Ξεκάθαρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν, πως στη μνήμη τους είχαν χαραχθεί αυτές οι κινήσεις, ώστε κατάφερναν να επαναφέρουν την πράξη που ήθελαν στο νου τους χωρίς κόπο, απλά με την κίνηση των δαχτύλων τους.

Στην ενσώματη μάθηση το βασικό ρόλο τον παίζει το σώμα στις ανθρώπινες γνωστικές διαδικασίες. Οι θεωρίες ενσώματης μάθησης υποστηρίζουν υψηλότερης τάξης γνωστικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένης της μνήμης και της συμβολικής σκέψης. Στηρίζονται στην αντίληψη που βασίζεται στο σώμα και δρα μέσα σε ένα φυσικό περιβάλλον (βλ. κεφάλαιο 4). Αν και υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις, οι ενσώματες θεωρίες μάθησης κυμαίνονται μεταξύ δύο απόψεων όπως έχουμε αναφέρει. Από τη μία πλευρά, η ισχυρή άποψη της ενσώματης μάθησης υποστηρίζει ότι όλη η γνώση βρίσκεται και βασίζεται στη δράση. Βάσει αυτής της θέσης οι έννοιες σχετίζονται στενά με τα αντιληπτικά και κινητικά σχήματα. Από την άλλη πλευρά, η πιο ήπια άποψη της ενσώματης γνώσης υποστηρίζει ότι ορισμένες έννοιες μπορεί να βασίζονται σε άλλες έννοιες, οι οποίες με τη σειρά τους βασίζονται σε αντιληπτικές και κινητικές πληροφορίες. Μια πιο αφαιρετική ανώτερη τάξη σχημάτων που μπορεί να αλληλεπιδράσει με αντιληπτικά και κινητικά σχήματα για να στηρίξει τη σημασία τους.

Όποια πλευρά κι αν επιλέξουμε αυτό που καταφέραν τα παιδιά έγινε σίγουρα και με τη συμβολή της ενσώματης μάθησης. Συγκεκριμένα μέσω της χρήσης του εργαλείου(γάντια προπαίδειας) ως χειραπτικό υλικό, αλλά και χωρίς τη χρήση του, μόνο με τη μνήμη του σώματος από τη δράση, χρησιμοποιώντας χειρονομίες μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού τα παιδιά μπόρεσαν να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη και να μάθουν την προπαίδεια.

Πολύ σημαντικά ήταν τα σχόλια των παιδιών της πειραματικής ομάδας για τη χρήση των γαντιών και με άλλους τρόπους. Σε κάποια από τα μαθήματά μας πολλά από τα παιδιά έδιναν ιδέες για χρήση του γαντιού (όπως για την πρόσθεση ή την αφαίρεση κ.ά.). Ρωτούσαν πως αν τελικά κατάφερναν να κάνουν και αυτά μία «ανακάλυψη», όπως έλεγαν, αν θα έμπαιναν και οι δικές τους «ανακαλύψεις» στην ιστορία των Μαθηματικών. Συνέχιζαν ρωτώντας αν και άλλα παιδιά μετά από χρόνια θα διάβαζαν για τη δική τους ιστορία των μαθηματικών και θα αναφέρονταν σε αυτά ως «αρχαίους». Μας ζητούσαν να καταγράψουμε πόσο τα ίδια τα παιδιά κουράστηκαν και πόσες πολλές προσπάθειες έκαναν μέχρι να μπορέσουν να φτάσουν στην «ανακάλυψη» που ήθελαν. Πίστευαν πως με αυτό τον τρόπο θα εμπνέονταν κι άλλα παιδιά να γίνουν «επιστήμονες», όπως έλεγαν.

Τα παιδιά αυτά που έκαναν τα σχόλια, επικοινώνησαν την ιδέα τους και με την υπόλοιπη ομάδα και έτσι γεννήθηκε η ιδέα να γίνουν «ιστορικοί των μαθηματικών». Ήταν πάρα πολύ εντυπωσιακό να βλέπεις πώς μια αλλαγή στη διδασκαλία μπορούσε να ξεκινήσει τόσες δημιουργικές σκέψεις και αναζητήσεις. Η ιστορία των μαθηματικών πραγματικά έκανε πάρα πολύ θετική εντύπωση στα παιδιά και τους άνοιξε νέους ορίζοντες στη σκέψη για δημιουργία. Συνολικά, και η χρήση ιστορίας και η διδασκαλία με τα γάντια προπαίδειας, μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού, δημιούργησαν ένα περιβάλλον μάθησης για τα παιδιά πολύ ενδιαφέρον και παρακινητικό. Κάθε μέρα μάθαιναν και κάτι καινούριο, κάθε φορά ανυπομονούσαν για την επόμενη και πραγματικά έκαναν μαθηματικά και χαίρονταν τη διαδικασία. Με τα γάντια προπαίδειας ένιωθαν «σούπερ ήρωες» και με την ιστορία των μαθηματικών «δημιουργοί» κατά τα λεγόμενά τους. Δε θα μπορούσε να πάει καλύτερα η πειραματική μας διδασκαλία, ο ενθουσιασμός των παιδιών ήταν έκδηλος κάθε φορά και τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν πως όχι μόνο διασκέδασαν αλλά και έμαθαν ταυτόχρονα.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί πως τα παιδιά της πειραματικής ομάδας άλλαξαν εντελώς την άποψή τους για τα μαθηματικά, αφού το 100% της τάξης απάντησε πως τους αρέσουν τα μαθηματικά στο τέλος της χρονιάς, ενώ στην αρχή τα αποτελέσματα ήταν τελείως διαφορετικά με μόνο το 25% των παιδιών να απαντούν θετικά στην ερώτηση. Η ψυχολογία τους ήταν πάντα πολύ ανεβασμένη σε όλα τα μαθήματα και η διάθεσή τους πάντα θετική.

Συνοψίζοντας και απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν στην αρχή μπορούμε να πούμε πως:

1. Τα γάντια προπαίδειας σε συνδυασμό με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών φαίνεται από τα αποτελέσματα των απαντήσεων των παιδιών της πειραματικής ομάδας πως είναι κατάλληλα και αποτελεσματικά για τη διδασκαλία εύκολων τρόπων εκμάθησης της προπαίδειας. Τα παιδιά δε δυσκολεύτηκαν σε κανένα σημείο και ενώ είχαμε προγραμματίσει περισσότερες ώρες διδασκαλίας για εξάσκηση και εξοικείωση με το εργαλείο τελικά όλα έγιναν πολύ πιο γρήγορα, αφού τα παιδιά χειρίζονταν τα γάντια αμέσως. Τους παρουσιάσαμε, όπως έχουμε αναφέρει, τον τρόπο χρήσης τους μία μέρα για τους μικρούς αριθμούς και δε χρειάστηκαν παραπάνω. Το ίδιο συνέβη και με την προπαίδεια των μεγάλων αριθμών. Άρα καταλήγουμε, πως σίγουρα τα γάντια παρέχουν εύκολους τρόπους για τη διδασκαλία της προπαίδειας.
2. Τα γάντια προπαίδειας και η χρήση ιστορίας των μαθηματικών με την παρουσίαση ιστορικών πολιτισμών, σίγουρα βοήθησαν στην εκμάθηση της προπαίδειας, ήταν το εργαλείο στο οποίο τα παιδιά μπορούσαν να εξασκηθούν, να παίξουν και να ανατρέξουν κάθε φορά που συναντούσαν κάποια δυσκολία. Όσον αφορά τη συμβολή και την επιλογή χρήσης υλικού διαφόρων πολιτισμών, τα αποτελέσματα μας δικαίωσαν και κατέδειξαν πόσο ισχυρό εργαλείο είναι η ιστορία των μαθηματικών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Η κινητοποίηση των παιδιών, ο ενθουσιασμός και η δίψα για μάθηση ήταν προφανείς καθ' όλη τη διάρκεια, σε αυτό συνέβαλλε σε τεράστιο βαθμό η χρήση ιστορίας των μαθηματικών με την παρουσίαση ιστορικών πολιτισμών. Η χρήση της είχε τη δυναμική να κινητοποιεί τα παιδιά και να προκαλεί το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά. Από την εισαγωγική δραστηριότητα με τους Σουμέριους, τα παιδιά έδειξαν τον ενθουσιασμό τους και μέσω της γνωριμίας με διάφορους πολιτισμούς προσδόθηκε μια

κοινωνικο-πολιτιστική διασταση στη μαθησιακή διαδικασία. Παράλληλα με την ιστορία με την κατασκευή των γαντιών τους για εργαλείο τους, όπως είδαν πως γινόταν και σε άλλους πολιτισμούς, ήταν πάρα πολύ βοηθητικό για τα ίδια και για την ψυχολογία τους να έχουν την προσωπική αριθμομηχανή τους, όπως αυτές που παρουσιάσαμε μέσω της ιστορίας των μαθηματικών. Τα παιδιά ένιωθαν ασφάλεια και αυτοπεποίθηση όταν τα φορούσαν και τελικά και χωρίς αυτά, όταν πλέον είχαν μάθει τον τρόπο χρήσης τους. Μέσω της ενσώματης μάθησης αποτυπώθηκαν οι κινήσεις στο μυαλό τους και μπόρεσαν να αποθηκεύσουν πολύ εύκολα τις πληροφορίες που ήθελαν για να μάθουν την προπαίδεια. Όπως είδαμε αυτές οι πληροφορίες ακόμη και στο τέλος της χρονιάς ήταν πολύ έντονα αποτυπωμένες στη μνήμη τους, αφού ακόμη και τότε χωρίς να φοράν τα γάντια τους έκαναν τις χειρονομίες με τα δάχτυλά τους.

3. Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών και όταν τελειώναμε την εκμάθηση κάποιας προπαίδειας ελέγχαμε τις γνώσεις των παιδιών με διάφορα παιχνίδια και άλλους τρόπους εξέτασης. Τα παιδιά πάντα με τη χρήση των γαντιών απαντούσαν σωστά και πολύ σπάνια έκαναν λάθη. Τα αποτελέσματα των post-tests έδειξαν πως τα παιδιά απάντησαν σχεδόν σε όλες τις ερωτήσεις σωστά με ελάχιστα λάθη. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως μακροπρόθεσμα τα γάντια σίγουρα βοήθησαν τους μαθητές να θυμούνται την προπαίδεια τόσο καλά όσο και την περίοδο που τη δουλεύαμε. Θα μπορούσαμε να πούμε και καλύτερα, αφού στο τέλος της χρονιάς τα παιδιά είχαν αποκτήσει πολύ καλύτερη αίσθηση των αριθμών και είχαν αναπτύξει κι άλλες στρατηγικές ώστε να φτάνουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Από τα επιμέρους ερωτήματα που είχαμε θέσει προέκυψαν ενδιαφέροντα συμπεράσματα, αφού τα γάντια προπαίδειας αποδείχτηκαν πολύ ελκυστικό εργαλείο για τα παιδιά, το οποίο και δεν αποχωρίζονταν σχεδόν ποτέ. Τα φορούσαν συνέχεια όταν κάναμε μαθηματικά, αλλά και στα διαλείμματα, πολλές φορές τα στόλιζαν και τα διακοσμούσαν ανάλογα με το γούστο τους και ήταν η «δύναμή» τους, όπως συχνά μας έλεγαν, αφού είχαν γίνει «σούπερ ήρωες».

Επίσης, η μεθοδολογία του εργαλείου βασίζεται και στην πρόσθεση, δηλαδή σε προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών. Έτσι κατά τη διάρκεια της εκμάθησης των προπαιδειών μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού τα παιδιά ενίσχυσαν πάρα πολύ αυτές τους τις γνώσεις, διότι τις εξασκούσαν καθημερινά για να μάθουν τον τρόπο χρήσης του γαντιού και τελικά την προπαίδεια. Δεν προσπαθούσαν να κάνουν απλά απομνημόνευση των αποτελεσμάτων, όπως έχουμε ήδη αναφέρει προσπαθήσαμε να νοηματοδοτήσουμε την όλη διαδικασία και έτσι έκαναν μόνα τους το άλμα μέσα από στρατηγικές που ανέπτυσσαν και έφτασαν να είναι πολύ προχωρημένες, ώστε να φτάσουν στον τελικό τους στόχο.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να παραθέσω πως τη χρονιά που πραγματοποιήθηκε η έρευνα ήμουν δασκάλα της Ε’ τάξης στο Big Bang School, όπου και κάναμε τις πειραματικές διδασκαλίες. Στο σχολείο συνηθίζαμε να κάνουμε συνδιδασκαλίες, αλλά και να χρησιμοποιούμε τα παιδιά ως «βοηθούς» για μαθήματα σε μικρότερες τάξεις ή να κάνουμε διαφορετικές τάξεις μαζί κάποια μαθήματα. Αποφάσισα στις πειραματικές διδασκαλίες να έχω ως «βοηθούς» μου δύο μαθητές της Ε’ τάξης με δυσκολίες στα μαθηματικά. Έτσι συμμετείχαν σε πολλές από τις πειραματικές διδασκαλίες κι όπως ήταν αναμενόμενο έμαθαν και τη μεθοδολογία χρήσης των γαντιών μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιασμού. Τα παιδιά αυτά δεν αντιμετώπισαν ποτέ ξανά πρόβλημα στην προπαίδεια, γεγονός που τους βοήθησε πάρα πολύ στους πολλαπλασιασμούς, στις διαιρέσεις και γενικά στα μαθηματικά. Καθώς, τους έβλεπα καθημερινά, μπορούσα πολύ εύκολα να διακρίνω την αλλαγή στη διάθεσή τους, όταν χρειαζόταν να κάνουν κάποια πράξη ή να λύσουν κάποιο πρόβλημα στην τάξη. Η αυτοπεποίθησή τους ήταν φανερά ανεβασμένη και ήθελαν να συμμετέχουν πολύ πιο ενεργά στα projects της τάξης.

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα ήταν πως τα παιδιά της Ε΄ τάξης χρειάστηκαν πολύ λιγότερο χρόνο, ώστε να κατανοήσουν τη μεθοδολογία των γαντιών σε σύγκριση με τα παιδιά της Β΄ τάξης και λόγω της εξάσκησης τους σε ώρες διαλειμμάτων έμαθαν και στα υπόλοιπα παιδιά τη μεθοδολογία. Με αυτόν τον τρόπο σιγά σιγά τα παιδιά γίνονταν «δάσκαλοι» και η προπαίδεια στο σχολείο μας ήταν πλέον «παιχνιδάκι», όπως έλεγαν τα παιδιά. Άλλες εκπαιδευτικοί που εργάζονταν στο σχολείο μού ζήτησαν να τους δώσω τα γάντια της προπαίδειας και δούλεψαν με μαθητές τους που είχαν δυσκολία στην εκμάθησή της προπαίδειας και τα αποτελέσματα ήταν πολύ θετικά και εκεί.

Καταλήγω τελικά, πως εκτός από τον τρόπο με τον οποίο εισαγάγαμε εμείς τα γάντια της προπαίδειας μέσω του δαχτυλικού πολλαπλασιαμού, στη Β’ τάξη πριν ξεκινήσουν τις προπαίδειες με ταυτόχρονη χρήση ιστορίας, τα γάντια θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο σε οποιαδήποτε τάξη (Β’ και πάνω). Από προσωπική εμπειρία θεωρώ, πως θα βοηθούσαν πάρα πολύ στα παιδιά που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τα μαθηματικά, οπότε για μελλοντικές έρευνες ίσως πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσο τα γάντια θα μπορούσαν να βοηθήσουν μαθητές με δυσκολίες στην εκμάθηση της προπαίδειας και γενικά στα μαθηματικά.

Ξένη βιβλιογραφία

Agostinho, S., Tindall-Ford, S., Ginns, P., Howard, S. J., Leahy, W., & Paas, F. (2015). Giving learning a helping hand: Finger tracing of temperature graphs on an iPad. *Educational Psychology Review*, Vol. *27*, 3, pp. 427-443.

Aida, I. (2006). Meningkatkan kemahiran murid mencongak fakta asas darab melalui pendekatan permainan domino. Jurnal Kajian Tindakan Negeri Johor, 2006, 1-13.

Anghileri, J. (2007). Three level approach to scaffolding can be applied to teaching math. *Educational Research Newsletter*, vol. *20*, 3, pp. 1-2.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. *20*, 4, pp. 367–385. https://doi.org/10.1007/BF00315607

Agostinho, S., Tindall-Ford, S. K., Ginns, P., Howard, S. J., Leahy, W., & Paas, F. (2015). How finger tracing of temperature graphs on an iPad can support primary school students' learning.

Antle, A. N. (2007, February). The CTI framework: informing the design of tangible systems for children. In *Proceedings of the 1st international conference on Tangible and embedded interaction* (pp. 195-202).

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition*, Vol. *44*, 1-2, pp. 75-106.

Bachelard, G. (1938). La formation de l' esprit scientifique. Paris : Vrin

Bakker, A. and Gravemeijer, K. P. E. (2006). An Historical Phenomenology of Mean and Median. Educational Studies in Mathematics. Vol. 62, pp. 149-168.

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education - On symbolizing and computer tools. Utrecht : The Freudenthal Institute. Ph.D. Thesis.

Bertsch, S., Pesta, B. J., Wiscott, R., & McDaniel, M. A. (2007). The generation effect: A meta-analytic review. *Memory & cognition*, Vol. *35*, 2, pp. 201-210.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Charalambous, C. Y., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: Insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, Vol *71*, 2, pp. 161-180.

Charlesworth, R. (2005). Experiences in math for young children (5th ed.). Australia: Thomson Delmar Learning.

Chinn, S., & Ashcroft, R. (1993). 1993: Mathematics for dyslexics: a teaching handbook. London: Whurr.

Clark, A. (2008). Pressing the flesh: a tension in the study of the embodied, embedded mind?. *Philosophy and phenomenological research*, Vol. *76*, 1, pp. 37-59.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2011). One-to-one student interviews provide powerful insights and clear focus for the teaching of fractions in the middle years. In J. Way, & J. M. Bobis (Eds.), *Fractions: Teaching for understanding* (pp. 23-31). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Copple, C., & Bredekamp, S. (2009). *Developmentally appropriate practice in early childhood programs serving children from birth through age 8* (Vol. 1313, pp. 22205-4101). Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. National Association for the Education of Young Children, 1509 16th Street, NW, Washington, DC 20036-1426.

Corcoran, R. P. (2018). An embodied cognition approach to enhancing reading achievement in New York City public schools: Promising evidence. *Teaching and teacher education*, *71*, 78-85.

Craik, F. I., & Lockhart, R. S. (1972). Levels of processing: A framework for memory research. *Journal of verbal learning and verbal behavior*, Vol. *11*, 6, pp. 671-684.

Davis, P. J. and Hersh, R. (1981). The Mathematical Experience. London : Pinguin Books.

De Brauwer, J., & Fias, W. (2009). A longitudinal study of children's performance on simple multiplication and division problems. *Developmental psychology*, Vol. *45*, 5, pp. 1480.

De Brauwer, J., Verguts, T., & Fias, W. (2006). The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology*, Vol. *94*, 1, pp. 43-56.

De Bruin, L. C., & Kästner, L. (2012). Dynamic embodied cognition. *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, Vol. *11*, 4, pp. 541-563.

Domahs, F., Delazer, M., & Nuerk, H. C. (2006). What makes multiplication facts difficult: Problem size or neighborhood consistency?. *Experimental Psychology*, Vol. *53*, 4, pp. 275-282.

Effandi, Z. (2003). Kesan pembelajaran koperatif ke atas pelajar-pelajar dalam kelas matematik matrikulasi (Unpublished doctoral dissertation). Fakulti Pendidikan, Universiti Kebangsaan Malaysia.

Effandi, Z. (2005). Asas pembelajaran koperatif dalam matematik. Shah Alam: Karisma Publications Sdn. Bhd

Erickson, K. I., Hillman, C. H., & Kramer, A. F. (2015). Physical activity, brain, and cognition. *Current opinion in behavioral sciences*, *4*, pp. 27-32.

Farmaki, V., Klaudatos, N., & Paschos, T. (2004). Interating the History of Mathematics in Educational Praxis. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Farmaki, V. and Paschos, T. (2007). Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities. Educational Studies in Mathematics. Vol. 66, pp. 83-106.

Fasanelli F. et al., 2000, 'The political context', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study,* Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp.1-38.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics. Vol. 11, 2, pp. 3-6.

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). When digits help digits: spatial–numerical associations point to finger counting as prime example of embodied cognition. *Frontiers in psychology*, *2*, 260.

Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? Science and Education. Vol. 10, pp. 391-408.

Fuadi, N. F. A., Othman, M. F., & Senan, N. (2018). Perception of Mathematics Game's Design for Primary School: Based on Teachers' Opinions.*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1049,* No. 1. doi:10.1088/1742-6596/1049/1/012085

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 3, 1-2, pp. 1-20.

Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. For the Learning of Mathematics. Vol. 17, 1, pp. 55-61.

Gardella, F.J. (2009). Introducing difficult mathematics topic in the elementary classroom: A teacher's guide to initial lessons. New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Gray, E., & Tall, D. (2001, July). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In *PME conference* (Vol. 3, pp. 3-65).

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, Vol. *22*, 3, pp. 170-218.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological review*, Vol. *79*, 4, pp. 329.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. *47*, 2, pp. 223-258.

Haeckel, E. (1906). The Evolution of Man - A Popular Scientific Study. London : Watts & Co.

Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. [eds.] D. A. Grouws. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York : Macmillian Publishing Company, pp. 65-97.

Hillman, C. H., Erickson, K. I., & Kramer, A. F. (2008). Be smart, exercise your heart: exercise effects on brain and cognition. *Nature reviews neuroscience*, Vol. *9*, 1, pp. 58-65.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *The Arithmetic Teacher*, Vol. *36*, 6, pp. 6-11.

Holmes, J., & Adams, J. W. (2006). Working memory and children's mathematical skills: Implications for mathematical development and mathematics curricula. *Educational Psychology*, Vol. *26*, 3, pp. 339-366.

Hostetter, A. B., & Alibali, M. W. (2010). Language, gesture, action! A test of the Gesture as Simulated Action framework. *Journal of Memory and Language*, Vol. *63*, 2, pp. 245-257.

Hostetter, A. B., & Alibali, M. W. (2008). Visible embodiment: Gestures as simulated action. *Psychonomic bulletin & review*, Vol. *15*, 3, pp. 495-514.

Hutchings, B. (1976). Low-Stress Algorithms. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal and Ordinal Infinies: An Epistemological and Didactic View. Educational Studies in Mathematics. Vol. 48, pp. 175-197.

Jankvist, U. T. (2009). A Categorization of the "Whys" and "Hows" of Using History in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 71, 3, pp. 235-261.

Jankvist, U. T. (2007). Den matematikhistoriske dimension i undervisning - generelt set. MONA. Vol. 3, 3, pp. 70-90.

Jennie, L. L., & Mohd Johan, J. (2010). Penggunaan bahan manipulatif (bekas telur) untuk membantu murid tahun tiga dalam memahami sifir enam. In Prosiding seminar penyelidikan tindakan (matematik pendidikan rendah) Jabatan Matematik Institut Pendidikan Guru Kampus Sarawak (pp. 125-133).

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2008). Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help?. *Developmental science*, Vol. *11*, 5, pp. 662-668.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful?. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. *20*, 1, pp. 21-31.

Lakoff, G., Johnson, M., & Sowa, J. F. (1999). Review of Philosophy in the Flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought. *Computational Linguistics*, Vol. *25*, 4.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. & Murray, A. K., (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. SAGE Open, Vol. 5, 2, pp. 1-8.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83.

Levy, A. K., Schaefer, L., & Phelps, P. C. (1986). Increasing preschool effectiveness: Enhancing the language abilities of 3-and 4-year-old children through planned sociodramatic play. *Early Childhood Research Quarterly*, Vol. *1*, 2, pp. 133-140.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Liu-Ambrose, T., Nagamatsu, L. S., Voss, M. W., Khan, K. M., & Handy, T. C. (2012). Resistance training and functional plasticity of the aging brain: a 12-month randomized controlled trial. *Neurobiology of aging*, Vol. *33*, 8, pp. 1690-1698.

Loetscher, T., Schwarz, U., Schubiger, M., & Brugger, P. (2008). Head turns bias the brain's internal random generator. *Current Biology*, Vol. *18*, 2, pp. R60-R62.

Marshall, L., & Swan, P. (2009). Games: A catalyst for learning or busy work?. In C. Hurst, M. Kemp, B. Kissane, L. Sparrow & T. Spencer (Ed.), *Proccedings of the 22nd Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc.,* (p.p. 146-152). Adelaide: The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.

MacIntosh, A. (Ed.). (1997). *Number sense in school mathematics: Student performance in four countries*. MASTEC.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, Vol. *12*, 3, pp. 2-44.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago press.

Miles, B. (1999). *Remarkable conversations: A guide to developing meaningful communication with children and young adults who are deafblind*. eBookIt. com.

Moeller, K., Fischer, U., Link, T., Wasner, M., Huber, S., Cress, U., & Nuerk, H. C. (2012). Learning and development of embodied numerosity. *Cognitive processing*, Vol. *13*, 1, pp. 271-274.

Montessori, M. (1964). *Reconstruction in education*. Theosophical Publishing House.

Morris, C. D., Bransford, J. D., & Franks, J. J. (1977). Levels of processing versus transfer appropriate processing. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 16, 519-533

Mueller, F. F., Gibbs, M. R., & Vetere, F. (2008, December). Taxonomy of exertion games. In *Proceedings of the 20th Australasian Conference on Computer-Human Interaction: Designing for Habitus and Habitat* (pp. 263-266).

Newman, S. D. (2016). Does finger sense predict addition performance?. *Cognitive processing*, Vol. *17*, 2, pp. 139-146.

Niss, M. (2001). University Mathematics Based on Problem-Oriented Student Projects: 25 Years of Experience with the Rockslide Model. [eds.] D. Holton. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, An ICMI Study. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, pp. 153-165.

Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: what are the chances and constraints?. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. *7*, 1, pp. 3-20.

Perera, H., Hewagamage, K. P., & Weerasinghe, T. A. (2017, September). Game based learning as a supplementary approach in teaching mathematics. In *2017 Seventeenth International Conference on Advances in ICT for Emerging Regions (ICTer)* (pp. 1-7). IEEE.

Philippou, G. N. and Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. Educational Studies in Mathematics. Vol. 35, pp. 189-206.

Piaget, J. (1962). The relation of affectivity to intelligence in the mental development of the child. *Bulletin of the Menninger clinic*, Vol. *26*, 3, pp. 129.

Pollack, J., Waller, E. (1994). Day-To-Day Dyslexia in the Classroom. London: Routledge.

Poltz, N., Wyschkon, A., Höse, A., von Aster, M., & Esser, G. (2015). Από το αίσθημα των δακτύλων στην αριθμητική. *Μαθησιακές και μαθησιακές δυσκολίες* .

Quance, A., Lehrer, J. S., & Stathopoulos, H. (2008). Play in the grade one classroom: An exploration of teacher beliefs, classroom organization, and obstacles to implementation in Quebec. *Canadian Journal for New Scholars in Education/Revue canadienne des jeunes chercheures et chercheurs en éducation*, *1*(1).

Rebhorn, L. S., & Miles, D. D. (1999). High-Stakes Testing: Barrier to Gifted Girls in Mathematics and Science?. *School Science and Mathematics*, Vol. 99, 6, pp. 313-319.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, *44*(2), 162.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, Vol. *99*, 2, pp. 61-70.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. *1*, 2, pp. 114-120.

Revelle, W., & Loftus, D. A. (1992). The implications of arousal effects for the study of affect and memory. *The handbook of emotion and memory: Research and theory*, pp. 113-149.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, Vol. *44*, 2, pp. 162.

Rohana, A. T. (2008). Pembelajaran berasaskan masalah matematik. In S. M. Y. Aida, F. M. A. Ahmad, & T. Othman (Eds.), Amalan dalam pengajaran dan pembelajaran: Sains, matematik dan pembelajaran berasaskan ICT (pp. 44-56). Serdang: Penerbit Universiti Putra Malaysia

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Arcavi, A., Barbin, E., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*. Vol *11*, 2, pp. 7-16.

Schoenfeld, A. H., Smith, J. and Arcavi, A. (1993). Learning: the microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. [eds.] 111 R. Glaser. Advances in instructional psychology. New Jersey : Erlbaum, Vol. 4, pp. 55- 175.

Shapiro, L. (2014). When is cognition embodied?. *Current Controversies in Philosophy of Mind*, pp. 73-90.

Sharifah, M. N., Habibah, E., Rahil, M., Rohani, A. T., Samsilah, R., & Tajularipin, S. (2006). Laporan akhir kajian ciri-ciri sekolah dan pelajar berkeperluan khas yang berkaitan dengan pencapaian peperiksaan UPSR, PMR dan SPM. Laporan yang dibiayai oleh Jabatan

Pendidikan Khas Kementerian Pelajaran Malaysia, Fakulti Pengajian Pendidikan Universiti Putra Malaysia.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for research in mathematics education*, Vol. *36*, 4, pp. 347-395.

Sibley, B. A., & Etnier, J. L. (2003). The relationship between physical activity and cognition in children: a meta-analysis. *Pediatric exercise science*, Vol. *15*, 3, pp. 243-256.

Skulmowski, A., & Rey, G. D. (2018). Embodied learning: introducing a taxonomy based on bodily engagement and task integration. *Cognitive research: principles and implications*, Vol. *3,* 1, pp. 1-10.

Smith, S. Z., & Smith, M. E. (2006). Assessing elementary understanding of multiplication concepts. *School Science and Mathematics*, Vol. *106*, 3, pp. 140-149.

Sowder, W. (1991). *Existential-phenomenological readings on Faulkner*. Pelican Publishing.

Sowder, J. T., & Schappelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*. San Diego State University. College of Sciences. Center for Research in Mathematics and Science Education.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, Vol. *20*, 5, pp. 498-505.

Stanley, G. J., & Julaini, J. M. (2006). Masalah penguasaan asas darab di dua buah sekolah rendah dalam bahagian Sarikel. Seminar Penyelidikan Pendidikan, Sarawak: Institut perguruan Rajang Bintagor.

Tang, K.-C. (2007). History of Mathematics for the Young Educated Minds: A Hond Kong Reflection. [eds.] F. Furinghetti, S. Kaijser and C. Tzanakis. Proceedings HPM2004 & ESU4. s.l.: Uppsala Universitet, pp. 630-638.

Ter Heege, H. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. *16*, 4, pp. 375-388.

Thomaidis, Y. and Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. Educational Studies in Mathematics. Vol. 66, pp. 165-183.

Tomporowski, P. D. (2003). Effects of acute bouts of exercise on cognition. *Acta psychologica*, Vol. *112*, 3, pp.97-324.

Tran, C., Smith, B., & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. *Cognitive Research: Principles and Implications*, Vol. *2*, 1, pp. 1-18.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*, 247-294.

Tzanakis, C. and Thomaidis, Y. (2000). Integrating the Close Historical Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks. For the Learning of Mathematics. Vol. 20, 1, pp. 44-55.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom, chapter 7.

Ucus, S. (2015). Elementary School Teachers' Views on Game-based Learning as aTeaching Method (Ed.), *5th World Conference on Learning, Teaching and Educational Leadership, WCLTA, 29-30 October 2014* (p.p 401-409). Prague: Procedia – Social and Behavioral Sciences. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.216

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική διδασκαλία (από μετάφραση).* Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δάρδανος.

Van de Walle, J. (2004). Elementary and middle school mathematics (5th ed.). Boston, MA: Pearson Education Inc.

Vasco, C. E. (1995). History of Mathematics as a Tool for Teaching Mathematics for Understanding. In D. N. Perkins, et al [eds.] Software Goes to School - Teaching for Understanding with New Technologies. New York : Oxford University Press, pp. 56- 69.

Verguts, T., & Fias, W. (2005). Interacting neighbors: A connectionist model of retrieval in single-digit multiplication. *Memory & cognition*, Vol. *33*, 1, pp. 1-16.

Willis, S. (1990) Being numerate: what counts? Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic bulletin & review*, Vol. *9*, 4, pp. 625-636.

Wong, M., & Evans, D. (2007). Improving basic multiplication fact recall for primary school students. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. *19*, 1, pp. 89-106.

Wynn, K. (1995). Infants possess a system of numerical knowledge. *Current directions in psychological science*, Vol. *4*, 6, pp. 172-177.

Yeo, D. (2008). *Dyslexia, dyspraxia and mathematics*. John Wiley & Sons.

Ελληνική βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2011). Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών.

Βοσνιάδου, Σ. (2002) Η εννοιολογική αλλαγή στην παιδική ηλικία: παραδείγματα από τον χώρο της Αστρονομίας, στο Β. Κουλαΐδης (Επιμ) Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου, Αθήνα Εκδόσεις Gutenberg.

Γρηγορίου, Α. (2017). Το παιχνίδι στην εκπαιδευτική διαδικασία: οι απόψεις των εκπαιδευτικών.

Θωμαΐδης, Γ. (2015). Ιστορικά και διδακτικά σχόλια για ένα Βαβυλωνιακό πρόβλημα με αφορμή τη διαδικτυακή συζήτηση στο www.mathematica.gr. Εκθέτης, Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας. Τόμ. 15.

Κόμης, Β., (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των επικοινωνιών,* Αθήνα, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών

Λεμονίδης, Χ., & Νικολαντωνάκης, Κ. (2007). Ελληνικός πολλαπλασιασμός: ένας άγνωστος ιστορικός αλγόριθμος κατάλληλος για τη διδασκαλία. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, (151), 169-178.

Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. *Αθήνα: Πατάκης*.

Μπιζμπιάνος, Μ. (2011). Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών-Η Περίπτωση της Γεωμετρίας (Μεταπτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα & Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος.

Πουρκός, Μ. (2017). Η ενσώματη στροφή στις κοινωνικές επιστήμες: Το σώμα ως τόπος βιωμάτων, ταυτοτήτων και κοινωνικών νοημάτων». Στο ΜΑ Πουρκός (επιμ.). *Το σώμα ως τόπος βιωμάτων, ταυτοτήτων και κοινωνικών νοημάτων*, 39-83.

Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2007). Σχεδιασμός ένταξης του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. *Στο Φ. Καλαβάσης and Α. Κοντάκος (επιμ.), Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού*, 137-156.

Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2015). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική επιθεώρηση*, *47*.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. [Επιμ.] Ιωάννης Θωμαΐδης, και συν. Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σσ. 17-39.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα. *Αθήνα: Gutenberg*.

Τζεκάκη, Μ. (2016). Εκπαιδευτικό υλικό ως στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Στο Σκουμιός, Μ. & Σκουμπουρδή, Χ. (επιμ.), *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου "Το* *εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;"* (σ. 380-390). Ρόδος: ΤΕΠΑΕΣ, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Φεσάκης, Γ., (2014). Εικονικό και συμβατικό απτικό υλικό στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών: Θεωρητική ανάλυση. Στο Σκουμπουρδή, Χ. & Σκουμιός, Μ., (Επιμ.), *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου "Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες" (pp. 72-105).* Ρόδος: ΤΕΠΑΕ, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

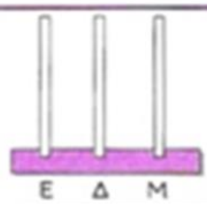
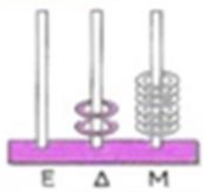
Χαλιαμπάλιας, Ρ. (2017). *Συστήματα Απτών Διεπαφών Χρήστη και Ανάπτυξη της Αίσθησης του Αριθμού με Μικρά Παιδιά: Η παιδαγωγική μελέτη σχεδιασμού του AddOnTable* (Διδακτορική διατριβή). Π.Τ.Π.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Αρχικό τεστ (pre-test) που έγινε και στις δύο ομάδες

Σου αρέσουν τα Μαθηματικά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

1. Γράφω τους αριθμούς με ψηφία, με λέξεις και τους σχηματίζω στον άβακα.

Με λέξεις	Με ψηφία	Με άβακα
σαράντα έξι	Ε Δ Μ	
....	Ε Δ Μ 1 8	
....	Ε Δ Μ	

2. Συμπληρώνω με προσοχή τις αριθμογραμμές .

67	66	65	...	...	...	...	...	...	58
42	44	46	...	...	...	...	...	...	60
35	40	45	...	...	...	...	...	...	80
93	83	73	...	...	...	...	...	...	3

3. Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα:

το μισό								
το ολόκληρο	4	10	16	18	40	60	80	100

4. Λύνω με προσοχή τις κάθετες πράξεις:

$$\begin{array}{r} 4\;2 \\ +\;1\;4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\;7 \\ +\;4\;2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\;5 \\ +\;3\;3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\;7 \\ -\;1\;0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\;8 \\ -\;2\;3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\;5 \\ -\;5\;2 \\ \hline \end{array}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Β.1 Κάρτες έργων (προπαίδειες 2 έως 5)

1. 3 x 4 =
2. 5 x 6 =
3. 2 x 8 =
4. 2 x 3 =
5. 4 x 6 =
6. 3 x 7 =
7. 4 x 9 =
8. 5 x 3 =
9. 2 x 4 =
10. 4 x 7=

Β.2 Κάρτες έργων (προπαίδειες 6 έως 10)

1. 7 x 6 =
2. 8 x 9 =
3. 10 x 7 =
4. 6 x 8 =
5. 6 x 9 =
6. 10 x 8 =
7. 9 x 8 =
8. 10 x 6 =

9. 7 x 9 =
10. 8 x 7 =

Β.3 Κάρτες έργων (διπλά γινόμενα)

1. 3 x 3 =
2. 6 x 6 =
3. 9 x 9 =
4. 4 x 4 =
5. 8 x 8 =
6. 5 x 5 =
7. 7 x 7 =

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

**Ερωτηματολόγιο για πειραματική ομάδα μόνο*

ΦΥΛΟ ΑΓΟΡΙ ☐ ΚΟΡΙΤΣΙ ☐

1. Θυμάσαι τα μαθήματα που κάναμε με την Ιστορία των Μαθηματικών;

2. Σου άρεσαν τα μαθήματα με την ιστορία των Μαθηματικών;

α) Αν ναι γιατί; Ποιο ήταν το αγαπημένο σου;

β) Αν όχι γιατί;

3. Θέλεις να μου πεις κάτι άλλο για τα μαθήματα που κάναμε με την ιστορία των Μαθηματικών;

4. Σου αρέσουν τα γάντια της προπαίδειας;

α) Αν ναι γιατί;

β) Αν όχι γιατί;

γ) Κάτι άλλο:

5. Τα γάντια της προπαίδειας τα φοράς όταν κάνεις Μαθηματικά;

α) Αν ναι γιατί;

β) Αν όχι γιατί;

6. Τα γάντια της προπαίδειας τα φοράς κι άλλες ώρες εκτός από την ώρα των Μαθηματικών;

α) Αν ναι γιατί;

β) Αν όχι γιατί;

7. Θέλεις να μου πεις κάτι άλλο για τα γάντια της προπαίδειας;

8. Σου αρέσουν τα Μαθηματικά;

α) Αν ναι γιατί;

β) Αν όχι γιατί;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Σελίδες 8-9 από το εικονογραφημένο βιβλίο «Από το μηδέν στο δέκα, Η ιστορία των αριθμών» της Βίβιαν Φρεντς και Ρος Κόλινς που χρησιμοποιήσαμε στη 2η Δραστηριότητα κατά τις διδασκαλίες με χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

ΠΩΣ ΜΕΤΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ;

Η ΠΙΟ ΕΥΚΟΛΗ **μηχανή μέτρησης** που μπορείς να χρησιμοποιήσεις είναι το χέρι σου – είναι το πρώτο κομπιουτεράκι! Με δύο χέρια έχεις οκτώ δάχτυλα και δύο αντίχειρες : δέκα! Και επίσης μπορείς να μετρήσεις και τα δάχτυλα των ποδιών σου... Είκοσι!

Έτσι λοιπόν, οι άνθρωποι άρχισαν να μετράνε με τα δάχτυλά τους. Πολύ χρήσιμο – αλλά τι γίνεται όταν θέλεις να στείλεις μηνύματα; Δεν μπορείς να στείλεις τα δάχτυλά σου...

Ας υποθέσουμε ότι στέλνεις το μικρό σου αδελφό να αγοράσει τέσσερα γουρούνια. Μπορείς να του δείξεις τα τέσσερα με τα δάχτυλά του ή να του πεις «τόσα όσα τα πόδια ενός γουρουνιού». Αλλά είναι πιθανό να το ξεχάσει!

Ένα βότσαλο για κάθε γουρούνι!

Μπορείς να του δώσεις τέσσερα βότσαλα, και μετά να ελέγξει: ένα βότσαλο για κάθε γουρούνι. Θα μπορούσε ακόμη να αφήσει τα τέσσερα βότσαλα στον ιδιοκτήτη των γουρουνιών. Έτσι ο ιδιοκτήτης θα είχε μια απόδειξη ή αρχείο για το πόσα γουρούνια έχουν φύγει: ένα βότσαλο για κάθε γουρούνι!

Υ.Γ. Και μη νομίσεις ότι οι σημερινοί προχωρημένοι μαθηματικοί έχουν ξεχάσει τα βότσαλα. Η λέξη «calculate» («υπολογίζω») προέρχεται κατευθείαν από τη λατινική λέξη calculus... Η οποία τι σημαίνει; Ναι, λοιπόν, σημαίνει βότσαλο!

Ένα σημάδι για κάθε νεκρό γουρούνι!

Ένας άλλος τρόπος καταγραφής των αριθμών είναι να κάνουμε ένα σημάδι. Υπάρχουν ακόμα σημάδια στα τοιχώματα των σπηλαίων που δείχνουν πόσα ζώα σκότωσαν οι άνθρωποι των σπηλαίων… Τουλάχιστον αυτό πιστεύουμε ότι σημαίνουν τα σημάδια. Μπορεί να *δείχνουν* πόσα ζεστά γεύματα έφαγαν ή πόσες φορές η μητέρα τους, τους ζήτησε να καθαρίσουν τα κόκαλα. Ορισμένοι έκαναν σημάδια πάνω σε ραβδιά. Τα ραβδιά αυτά ονομάζονται ραβδιά αριθμητικής.

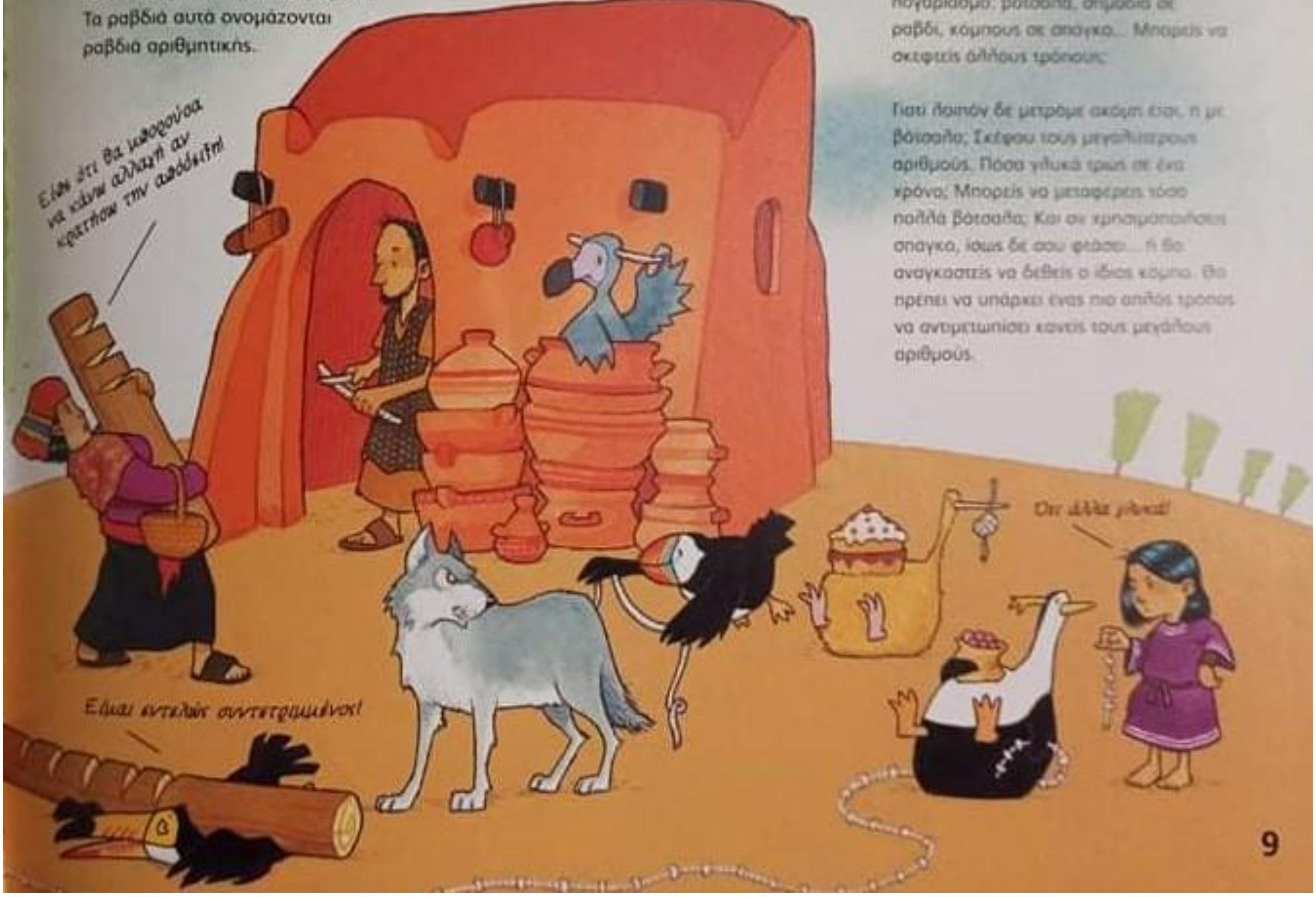
Στην Τσεχοσλοβακία βρέθηκε ένα κόκαλο λύκου με 55 χαραγματιές. Ένα ακόμη παλιότερο ραβδί βρέθηκε στα όρη Λεμπέμπο στην Αφρική. Η ηλικία του είναι πάνω από 37.000 χρόνια! Ποιος να το είχε στην κατοχή του και τι να μετρούσε;

Τα ραβδιά αριθμητικής μπορεί να μοιάζουν παλιομοδίτικα, αλλά χρησιμοποιούνταν μέχρι πρόσφατα. Βλέπεις, δεν μπορείς να κάνεις ζαβολιές με ένα ραβδί αριθμητικής: ένας καταστηματάρχης μπορεί να πάρει δύο ραβδιά και να κάνει ένα σημάδι και στα δύο κάθε φορά που πουλάει κάτι. Ο ίδιος κρατάει ένα ραβδί αριθμητικής και ο πελάτης κρατάει το άλλο – σαν απόδειξη!

Και ένας κόμπος για κάθε γλυκό

Οι **Ίνκας** της Νότιας Αμερικής μετρούσαν δένοντας κόμπους σε ένα κομμάτι σπάγκου. Πόσα γλυκά έφαγες σε μια εβδομάδα; Προσπάθησε να κρατήσεις λογαριασμό: βότσαλα, σημάδια σε ραβδί, κόμπους σε σπάγκο… Μπορείς να σκεφτείς άλλους τρόπους;

Γιατί λοιπόν δε μετράμε ακόμη έτσι, ή με βότσαλα; Σκέψου τους μεγαλύτερους αριθμούς. Πόσα γλυκά τρως σε ένα χρόνο; Μπορείς να μεταφέρεις τόσο πολλά βότσαλα; Και αν χρησιμοποιήσεις σπάγκο, ίσως δε σου φτάσει… ή θα αναγκαστείς να δέσεις ο ίδιος κόμπο. Θα πρέπει να υπάρχει ένας πιο απλός τρόπος να αντιμετωπίσει κανείς τους μεγάλους αριθμούς.



9