Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Διατμηματικό - Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική Των Μαθηματικών»

Κατεύθυνση: Β΄ Ηλικιακός Κύκλος

Διπλωματική εργασία

«Μετατροπή προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων και χρήση αναπαραστάσεων»

Μαυρορματίδου Φανή

Α.Ε.Μ. 953

Επόπτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2021

Στη μνήμη του παππού μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο τέλος αυτής της διαδρομής, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επόπτρια της διπλωματικής μου εργασίας, κυρία Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια του τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για την πολύτιμη καθοδήγηση και την υποστήριξή της καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κύριο Παπαδόπουλο Ιωάννη, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον διευθυντή και τους καθηγητές του 1^{ου} ΓΕΛ Χορτιάτη για τη βοήθειά τους στη διεξαγωγή της έρευνας, και τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδερφή μου, τον Νίκο, την Ελευθερία και τη Σοφία, που ήταν δίπλα μου και με στήριζαν σε όλη αυτή τη διαδρομή, μου έδιναν κουράγιο και δύναμη να συνεχίζω την προσπάθεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη είχε ως στόχο να διερευνήσει τις ενέργειες που ακολουθούν οι μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου, προκειμένου να μετατρέψουν ένα λεκτικό πρόβλημα σε σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους τρόπους αναπαράστασης που χρησιμοποιούν και τις δυσκολίες που εμφανίζουν κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας. Αρχικά, βάση της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε καταγράφηκαν οι διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές ώστε να μετασχηματίσουν το περιεχόμενο ενός λεκτικού προβλήματος για να το εκφράσουν με εξισώσεις και οι αναπαραστάσεις που δημιουργούν για να το πετύχουν αυτό, χρησιμοποιώντας αριθμητικά μοντέλα, εικόνες ή συμβολικές σχέσεις. Στη συνέχεια, καταγράφηκαν οι δυσκολίες που εντοπίζονται στους μαθητές αναφορικά με την κατανόηση της εκφώνησης, τη συμβολοποίηση των σχέσεων και τη δημιουργία σχεδίων για την απεικόνιση του περιεχομένου. Στην έρευνα συμμετείχαν 10 μαθητές από τους οποίους 3 αγόρια και 2 κορίτσια φοιτούσαν στην Α΄ τάξη του Λυκείου και 2 αγόρια και 3 κορίτσια φοιτούσαν στην Β΄ τάξη του Λυκείου. Η έρευνα ήταν ποιοτική, με παρατήρηση της επεξεργασίας ενός φύλλου εργασίας με τρία λεκτικά προβλήματα από τους μαθητές και με ατομικές συνεντεύξεις σχετικά με την επεξεργασία του φύλλου εργασίας (task based interview). Τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτουν από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τα φύλλα εργασίας των μαθητών, τα φύλλα παρατήρησης του ερευνητή και τις ηχογραφήσεις των συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές προτιμούν τους συμβολικούς τρόπους επεξεργασίας και αναπαράστασης των λύσεων σε προβλήματα άλγεβρας, ωστόσο σε περιπτώσεις όπου προκύπτει η ανάγκη ερμηνείας δεδομένων που δεν μπορούν να κατανοήσουν μόνο από την ανάγνωση της εκφώνησης, τότε καταφεύγουν και σε άλλους τρόπους επεξεργασίας, κυρίως στη δημιουργία εικόνων για την έκφραση του περιεχομένου και σε κάποιες περιπτώσεις ανακαλούν αριθμητικές μεθόδους. Ταυτόχρονα τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου και στη δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων, συμβολικών και εικονιστικών, για την απεικόνιση της λύσης.

Λέξεις κλειδιά: λεκτικό πρόβλημα, μετατροπή, σύστημα εξισώσεων, αναπαραστάσεις

ABSTRACT

This research aims to investigate the actions of the students of 4th and 5th grade of high school, in order to turn a word problem into a system of equations with two variables, the representations they use and the difficulties they come across during this procedure. At first, the procedures followed by students to convert the content of a word problem using equations and the representations they create to achieve this target, using numerical models, images or symbolic representations, were written down according to previous researches. Then, the identified difficulties of students regarding the comprehension of the narration of the problem, the symbolization of the relations between variables and numbers and the creation of plans for the depiction of the content, were written down. The research involved 10 students of which 3 boys and 2 girls of the 4th grade of high school and 2 boys and 3 girls of the 5th grade of high school. The research was qualitative, with observation of the elaboration of a worksheet with three word problems by the students and with individual interviews regarding the elaboration of the worksheet (task based interview). The results of the research are derived from the data collected from the students' worksheets, the researcher's observation sheets and the recordings of the interviews. The results show that students prefer the usage of algebraic symbols in order to process and represent solutions on algebra word problems, however in cases where the data interpretation is necessary that cannot be understood only by reading the narration, then they resort to other ways of processing, mainly on images representations so that they express the content and in some cases recall numerical methods. At the same time, the results show that students have difficulties in understanding the word content of the problem and in creating external representations, symbolic and figurative, to illustrate the solution.

Keywords: word problem, conversion, system of equations, representations

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη σχολική μαθηματική εκπαίδευση, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την άλγεβρα από τις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού, και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η τριβή με τις δομές της άλγεβρας γίνεται πιο εντατική. Κατά τους Herscovics και Linchevski (1994), παρατηρείται η έλλειψη ετοιμότητας των μαθητών στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, γεγονός το οποίο αποτελεί βασικό αίτιο της αποτυχίας του μεγαλύτερου ποσοστού των μαθητών στις αλγεβρικές λειτουργίες. Οι ίδιοι, διαχωρίζουν δύο κατηγορίες μαθητών. Η πρώτη περιλαμβάνει τους μαθητές που δοκιμάζουν την άλγεβρα και αποτυγχάνουν ή προσπαθούν να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που συναντούν, και η δεύτερη που αφορά τους μαθητές εκείνους που δεν ασχολούνται ή δεν έχουν ασχοληθεί ποτέ με την άλγεβρα λόγω ενδεχόμενης κακής απόδοσης στην αριθμητική σε μικρότερη ηλικία, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις συνεπάγεται και κακή πορεία στην άλγεβρα. Ιδιαίτερα στην περίπτωση επίλυσης λεκτικών προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου οι μαθητές καλούνται να αποδώσουν νόημα στα αλγεβρικά εργαλεία, η δυσκολία αυξάνεται σημαντικά. Οι μαθητές έχουν συχνά δυσκολίες στην κατανόηση των σχέσεων που δίνονται μέσα από λεκτικές περιγραφές, αλλά και στην έκφραση των σχέσεων αυτών με την επιλογή και το χειρισμό των κατάλληλων αλγεβρικών εργαλείων για τη διατύπωση αλγεβρικών εξισώσεων (Stacey & MacGregor, 1999). Είναι γεγονός ότι στο πλαίσιο της άλγεβρας, η ενασχόληση με προβλήματα που επιδέχονται αλγεβρική λύση είναι ένα αντικείμενο το οποίο πέρα από τους μαθητές, αποφεύγεται σε πολλές περιπτώσεις και από τους ίδιους τους καθηγητές.

Αναφορικά με τον χειρισμό λεκτικών προβλημάτων που επιδέχονται αλγεβρική λύση, οι μαθητές επινοούν πολλούς τρόπους χειρισμού ώστε να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που προκύπτουν και να αποδώσουν τη λύση τους με εξισώσεις, σύμφωνα με τα ατομικά αναπαραστατικά συστήματα που δημιουργούνται στον καθένα και βάση της προϋπάρχουσας εμπειρίας και της φαντασίας τους. Πολλοί από τους τρόπους που επινοούν οι μαθητές, βασίζονται σε αριθμητικά μοντέλα τα οποία πολλές φορές είναι περισσότερο οικεία στους μαθητές, λόγω της επαφής τους με προβλήματα αριθμητικής (Stacey & MacGregor, 1999). Παράλληλα, πολλές φορές στην προσπάθειά τους να αισθητοποιήσουν τα στοιχεία του προβλήματος και να το μετατρέψουν ώστε να γίνει πιο οικείο και καθημερινό για να μπορέσουν να το κατανοήσουν και να το λύσουν, επινοούν εξωτερικές αναπαραστάσεις δημιουργώντας εικόνες. Η χρήση αναπαραστάσεων υπό τη μορφή σχεδίων, σκίτσων ή διαγραμμάτων, σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, παρουσιάζεται ως μια διαδικασία που διευκολύνει τη δραστηριότητα της νοητικής σκέψης του μαθητή σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων και προωθεί την εννοιολογική γνώση. Μάλιστα, θεωρείται ότι η επιτυχία των μαθητών οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως ¨έμπειροι λύτες¨ σε τέτοιου είδους προβλήματα, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην ικανότητά τους να κατασκευάζουν κατάλληλα αναπαραστατικά σχήματα που δεν ακολουθούν την τυπική συμβολική δομή της άλγεβρας και χρησιμοποιούνται ως βοήθημα για την κατανόηση πληροφοριών και σχέσεων που παρουσιάζονται στις εκφωνήσεις των προβλημάτων (Cifarelli, 1998). Η δημιουργία τέτοιου είδους αναπαραστάσεων λειτουργεί ενισχυτικά στο σχεδιασμό των αλγεβρικών αναπαραστάσεων που έχουν πολλές γνωστικές απαιτήσεις.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα η οποία έχει ως στόχο να αναδείξει στοιχεία αναφορικά με τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη μετατροπή λεκτικών προβλημάτων με δύο αγνώστους, σε σύστημα εξισώσεων. Παράλληλα, σκοπός της έρευνας είναι να αναδειχθούν στοιχεία σχετικά με τη χρήση ή μη, των εικονιστικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές για την έκφραση του λεκτικού περιεχομένου και την ενίσχυση της κατανόησης των σχέσεων ποσοτήτων, αλλά και στοιχεία σχετικά με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της μετατροπής. Έτσι στην εργασία αυτή καταγράφονται με βάση τη βιβλιογραφική μελέτη, στοιχεία που αφορούν την κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας, τα στάδια και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν για να μετατρέψουν ένα πρόβλημα σε αλγεβρικές εξισώσεις, τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν και τις δυσκολίες που εντοπίζονται στα στάδια του μετασχηματισμού. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έρευνα η οποία βασίζεται στα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τη μελέτη της βιβλιογραφίας και γίνεται καταγραφή των διαδικασιών που ακολουθούν οι μαθητές, των αναπαραστάσεων που δημιουργούν και των δυσκολιών που εμφανίζουν. Τέλος, γίνεται σύγκριση των χαρακτηριστικών που προέκυψαν με τα αντίστοιχα που συλλέχθηκαν από τη μελέτη της βιβλιογραφίας.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Κατανόηση στην επίλυση προβλήματος

Κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων στο πλαίσιο των μαθηματικών, ένα στάδιο του μετασχηματισμού του κειμένου του προβλήματος σε μαθηματικούς συμβολισμούς και πράξεις, αποτελεί το στάδιο της κατανόησης. Κατά την επεξεργασία ενός μαθηματικού προβλήματος, η έννοια της κατανόησης αφορά τόσο το λεκτικό περιεχόμενό του όσο και τα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται για να συνοδεύσουν τη λύση του. Η κατανόηση των δύο αυτών στοιχείων σε συνδυασμό, αποτελεί κατά τους Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989) το βασικότερο σημείο της διαδικασίας επίλυσης του λεκτικού προβλήματος.

Στο πεδίο της άλγεβρας, η διαχείριση ενός προβλήματος προϋποθέτει ο μαθητής να κατανοεί το περιεχόμενο της εκφώνησής του. Είναι πολύ σημαντικό να αντιλαμβάνεται το λεξιλόγιο και το συντακτικό του, προκειμένου να μπορεί να διακρίνει τις σχέσεις ποσοτήτων που υπονοούνται στο κείμενο. Κατά την επεξεργασία ενός αλγεβρικού προβλήματος, η κατανόηση συνδέεται άμεσα με τη δυνατότητα εντοπισμού των βαθύτερων χαρακτηριστικών μιας έννοιας, αλλά και την ικανότητα γεφύρωσης μεταξύ εννοιολογικών τομέων, που στη συγκεκριμένη περίπτωση αφορούν τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας και τις αλγεβρικές εκφράσεις (Nickerson, 1985), ώστε οι έννοιες αυτές να μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια αλγεβρικών συμβολισμών. Μια μαθηματική έννοια, διαδικασία ή γεγονός, γίνεται κατανοητή όταν συνδέεται με προϋπάρχουσα γνώση ή με ήδη υπάρχοντα αναπαραστατικά συστήματα (Hiebert & Carpenter, 1992). Επομένως η κατανόηση των εννοιών σε ένα μαθηματικό λεκτικό πρόβλημα, συνδέεται άμεσα με τις διανοητικές αναπαραστάσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές, δημιουργώντας ένα ευρύτερο αναπαραστατικό δίκτυο στη βάση της προϋπάρχουσας γνώσης τους.

Παράλληλα με την εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου ενός μαθηματικού λεκτικού προβλήματος, είναι απαραίτητο ο μαθητής να γνωρίζει να χειρίζεται και τα εργαλεία της άλγεβρας. Κατά την επεξεργασία ενός λεκτικού προβλήματος, ο μαθητής καλείται να επιλέξει τα αλγεβρικά εργαλεία και να προσαρμόσει την εφαρμογή τους σε νέα περιβάλλοντα, τα οποία στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν τα αλγεβρικά προβλήματα. Η κατανόηση των αλγεβρικών εργαλείων συνεπάγεται την έκφραση των λεκτικών δεδομένων των προβλημάτων με μαθηματικές σχέσεις και εξισώσεις και παρουσιάζεται ως η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων της γνώσης με τις καταστάσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Όσο περισσότερα γνωρίζει ο μαθητής σε ένα πεδίο τόσο διευρύνει το εννοιολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορεί να κατανοήσει νέα δεδομένα κι επομένως να επιλέξει τις διαδικασίες που θα ακολουθήσει. Ο λύτης επομένως, οφείλει να έχει γνώση για τις ενέργειες που πρέπει να ακολουθήσει για να αντιμετωπίσει μια κατάσταση, αλλά και την εννοιολογική υποδομή που απαιτείται να έχει, το οποίο σύμφωνα με τον Skemp (1976), χαρακτηρίζεται ως ¨σχεσιακός τύπος¨ κατανόησης. Σύμφωνα λοιπόν με τον

¨σχεσιακό τύπο κατανόησης¨, κατά την επεξεργασία ενός μαθηματικού προβλήματος, ο μαθητής επινοεί αναπαραστάσεις προκειμένου να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ της ατομικής του κατανόησης και των δεδομένων που πρόκειται να διαχειριστεί. Αυτό συμβαίνει καθώς ό,τι υπάρχει στο μυαλό του μαθητή εκπροσωπείται με κάποιο τρόπο, που όπως σημειώνει στο έργο του ο Goldin (1998), μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια αναπαραστάσεων λεκτικών, συντακτικών, απεικονιστικών ή συμβολικών.

Η κατανόηση συνεπώς, αφορά τόσο το λεκτικό περιεχόμενο του προβλήματος, όσο και τα εργαλεία της άλγεβρας που χρησιμεύουν για να εκφραστούν συμβολικά οι σχέσεις που παρουσιάζει και αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τη δημιουργία αναπαραστατικών συστημάτων τα οποία μπορούν να απεικονίσουν τη λύση ενός λεκτικού προβλήματος στο πλαίσιο των μαθηματικών.

Στάδια επίλυσης αλγεβρικού προβλήματος

Κατά την επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος στο πλαίσιο των μαθηματικών, προκύπτουν δραστηριότητες οι οποίες δημιουργούν ορισμένα ¨στάδια¨ επίλυσης του προβλήματος. Κατά τους Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989), η κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου του προβλήματος, αλλά και των αλγεβρικών εργαλείων, είναι από τα βασικότερα στάδια της επίλυσης. Οι ίδιοι τονίζουν την αλληλεξάρτηση των δύο αυτών μορφών κατανόησης, καθώς όπως αναφέρουν, η κατανόηση των αλγεβρικών εξισώσεων μπορεί να επαρκεί για την ανάλυση του αλγεβρικού χειρισμού, ωστόσο είναι ελάχιστα χρήσιμη όταν η ανάλυση δε συμπεριλαμβάνει στοιχεία τα οποία οι μαθητές πρέπει πραγματικά να κατανοούν και να χρησιμοποιούν για να λύνουν αλγεβρικά προβλήματα. Επομένως, απαραίτητη για τη δημιουργία της αλγεβρικής λύσης που θα αντιπροσωπεύει ένα λεκτικό πρόβλημα, κρίνεται η κατανόηση του ¨περιστατικού πλαισίου¨ που αυτό παρουσιάζει (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Το πλαίσιο αυτό αποτελείται από το λεξιλόγιο και το συντακτικό του προβλήματος, το οποίο φανερώνει την αλληλεξάρτηση των ποσοτήτων που αναφέρονται στο κείμενο του προβλήματος, αλλά και την ύπαρξη των ποσοτικών περιορισμών. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσονται παράλληλα και οι μαθηματικές σχέσεις και εικόνες που παρουσιάζονται ή υπονοούνται στο κείμενο του προβλήματος. Έπειτα από το στάδιο της κατανόησης, οι μαθητές στην προσπάθεια αναπαραγωγής του περιεχομένου του προβλήματος για τη μοντελοποίηση και τη μετατροπή του σε μορφή αλγεβρικών σχέσεων και εξισώσεων, μπαίνουν στη διαδικασία ανάπτυξης διαισθητικών μοντέλων και εικόνων. Αυτά τα αναπαραστατικά συστήματα πηγάζουν από τη φαντασία του μαθητή, και στοχεύουν στην εννοιολογική κατανόηση του κειμένου, ώστε να καταφέρουν στη συνέχεια να επιλέξουν και να εφαρμόσουν τις κατάλληλες τεχνικές μετασχηματισμού των λεκτικών δεδομένων σε εξισώσεις (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989).

Κατά τον Charbonneau (1996), τα στάδια της αλγεβρικής μεθόδου επίλυσης προβλήματος ακολουθούν μία διαδοχική πορεία διαδικασιών. Η αρχική υπόθεση είναι ότι το πρόβλημα επιδέχεται λύση, για να δοθεί στο μαθητή το κίνητρο για την επεξεργασία του. Στη συνέχεια, έπειτα από μία κριτική αξιολόγηση του περιεχομένου και του περιστατικού πλαισίου του κειμένου του προβλήματος, γίνεται διάκριση μεταξύ γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων, όπου οι άγνωστες ποσότητες ορίζονται με τη χρήση των μεταβλητών. Τέλος, εντοπίζεται η σχέση που συνδέει τις γνωστές και άγνωστες ποσότητες, οι οποίες καθορίζουν τη μορφή της εξίσωσης που θα δημιουργηθεί ώστε η λύση της να αντιπροσωπεύει και τη λύση του προβλήματος. Ωστόσο σε ορισμένα στάδια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, οι μαθητές έχουν την τάση να εκτρέπουν τη σκέψη τους σε αριθμητικές μεθόδους, τις οποίες επιχειρούν να συνδέσουν με τις μεθόδους που καλούνται να χρησιμοποιήσουν, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται πολλές διαφορετικές διαδρομές (Stacey & MacGregor, 1999). Τέλος, κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του μαθηματικού προβλήματος, ενδεχομένως να υπάρχουν στιγμές κατά τις οποίες οι μαθητές προβαίνουν σε επεξεργασία, αναδιοργάνωση και επαναπροσδιορισμό του πλάνου δραστηριότητάς τους, ώστε να αξιολογήσουν και να αναθεωρήσουν τις επιλογές τους (Cifarelli, 1988).

Συνθέτοντας τα ευρήματα αυτά, τα βασικά στάδια που ακολουθούν οι μαθητές για την αλγεβρική επίλυση ενός προβλήματος αποτελούνται από την ανάπτυξη διαισθητικών μοντέλων για την εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου του προβλήματος, με σκοπό τη σωστή επεξεργασία των στοιχείων του και τη διάκριση των γνωστών και αγνώστων στοιχείων. Έπειτα, οι μαθητές με τη βοήθεια διανοητικών διαδικασιών και αναπαραστάσεων, εντοπίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία που συλλέχθηκαν από την εκφώνηση του προβλήματος και προχωρούν στο σχηματισμό της κατάλληλης αλγεβρικής έκφρασης που κρίνουν ότι θα επιφέρει τη λύση του. Σαφώς στη διαδικασία αυτή οι μαθητές παραμένουν επηρεασμένοι από παλαιότερες εμπειρίες στην επίλυση προβλήματος, όπως για παράδειγμα οι αριθμητικές διαδικασίες, αναθεωρούν και αναδιοργανώνουν τη δράση τους.

Στρατηγικές μετασχηματισμού προβλήματος σε εξίσωση

Οι μαθητές, ορμώμενοι από την εμπειρία τους στην επίλυση προβλημάτων σε παλαιότερα έτη της σχολικής τους πορείας, επινοούν ένα πλήθος στρατηγικών προκειμένου να επεξεργαστούν ένα πρόβλημα στο πλαίσιο της άλγεβρας. Συγκεκριμένα, στην επίλυση προβλήματος με τη χρήση εξισώσεων, η επιλογή των στρατηγικών αυτών εξαρτάται άμεσα τόσο από τις γνωστικές τους ικανότητες, όσο και από τις αντιλήψεις που έχουν αναπτύξει σχετικά με τα αλγεβρικά εργαλεία. Σύμφωνα με τους Stacey και MacGregor (1999), εντοπίζονται τρεις διαφορετικές αντιλήψεις μαθητών για το τι είναι μια εξίσωση. Ορισμένοι μαθητές αντιλαμβάνονται την εξίσωση ως μια φόρμουλα επεξεργασίας μιας απάντησης, άλλοι την ορίζουν ως αφήγηση που περιγράφει πράξεις οι οποίες οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα, ενώ κάποιοι την αντιλαμβάνονται ως περιγραφή σημαντικών σχέσεων. Και οι τρεις αυτές απόψεις συνδέονται με τη βασική λογική της αλγεβρικής μεθόδου για την επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος, η οποία αφορά την περιγραφή των σχέσεων που εμφανίζονται στο πρόβλημα, με τη χρήση αριθμών και μεταβλητών και στη συνέχεια τη δημιουργία ισοδύναμων σχέσεων για την επίλυσή του (Stacey & MacGregor, 1999). Η άμεση αλγεβρική επίλυση πολλές φορές αποδεικνύεται αποτελεσματική, ωστόσο τα αποτελέσματα πολλών ερευνών υποστηρίζουν ότι ο αλγεβρικός φορμαλισμός ενδεχομένως να μη λειτουργεί ενισχυτικά σε ορισμένες περιπτώσεις λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχουν ποσοτικούς περιορισμούς (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989), και το σημείο αυτό είναι που δημιουργεί την ανάγκη διατύπωσης εναλλακτικών αναπαραστάσεων, πέραν των συμβολικών με την μορφή των εξισώσεων.

Στο έργο των MacGregor και Stacey (1993), επισημαίνονται τρεις από τους τρόπους που χρησιμοποιούν οι λύτες κατά το μετασχηματισμό προβλήματος σε αλγεβρικές εξισώσεις. Ο πρώτος τρόπος μετασχηματισμού χαρακτηρίζεται ως ¨συντακτική μετάφραση¨ (syntactic translation) και αφορά τη διαμόρφωση εξισώσεων από φυσικές εκφράσεις γλώσσας. Στη μέθοδο αυτή συνήθως η εξίσωση διαμορφώνεται με βάση τη σειρά κατά την οποία είναι διατυπωμένα τα δεδομένα του προβλήματος αλλά και σύμφωνα με τις ¨λέξεις κλειδιά¨ που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Σε κάποιες περιπτώσεις, η συντακτική μετάφραση του κειμένου του προβλήματος μπορεί να αποτελέσει σημαντική αιτία σφάλματος στη δημιουργία εξίσωσης, καθώς η διατύπωση των δεδομένων και των ζητουμένων ενός προβλήματος ενδέχεται να χρειάζεται ερμηνεία για την διάκριση της σειράς με την οποία αποδίδονται αλγεβρικά οι ποσοτικές σχέσεις. Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις οι ¨λέξεις κλειδιά¨ που θεωρούν οι μαθητές ότι υπάρχουν στο κείμενο, μπορεί να παρερμηνευθούν και να παγιδεύσουν τη σκέψη τους, κατευθύνοντάς την σε λανθασμένες επιλογές πράξεων και σχέσεων ποσοτήτων. Στη συνέχεια, αναφέρεται ως τρόπος μετασχηματισμού, η ¨σημασιολογική μετάφραση¨ (semantic translation) των φράσεων του κειμένου του προβλήματος. Η σημασιολογική μετάφραση αποτελεί διαδικασία που περιλαμβάνει σημασιολογική γνώση, κατά την οποία ο μαθητής μετατρέπει το λεκτικό πρόβλημα σε εξισώσεις, ορμώμενος από την ερμηνεία που έχει δώσει ο ίδιος στα δεδομένα και τα ζητούμενά του. Τέλος, το έργο τους οι MacGregor και Stacey (1993), αναφέρουν τη ¨στατική σύγκριση¨ (static comparison) ως διαδικασία μετασχηματισμού, σύμφωνα με την οποία η εξίσωση που σχηματίζεται χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύει μια σχέση συγκριτική μεταξύ ποσοτήτων ή συνόλων (Clement, 1982), όπως για παράδειγμα ποσότητες στις οποία η μία είναι πολλαπλάσια της άλλης. Η ¨στατική σύγκριση¨ θεωρείται επίσης σημαντική αιτία εμφάνισης σφαλμάτων στο σχηματισμό εξισώσεων από τους μαθητές, καθώς πολλές φορές η έννοια των ¨πολλαπλάσιων¨ ποσοτήτων δεν είναι ξεκάθαρη στο μυαλό τους σε ότι αφορά τη διατύπωσή τους με σχέσεις γινομένων (MacGregor & Stacey, 1993).

Πολλές φορές, οι μαθητές με επιτυχία στην άλγεβρα, σύμφωνα με τους Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989), όταν αντιμετωπίζουν αλγεβρικά προβλήματα, θεωρούν ευκολότερες τις αλγεβρικές λύσεις συγκριτικά με αφηρημένους ποσοτικούς υπολογισμούς. Ωστόσο, οι μαθητές που είναι περισσότερο εξοικειωμένη με τις αλγεβρικές λειτουργίες, οι οποίοι στη βιβλιογραφία συχνά χαρακτηρίζονται και ως ¨έμπειροι λύτες¨, κάποιες φορές δοκιμάζουν και εναλλακτικούς τρόπους μετασχηματισμού, επιχειρώντας να σχηματίσουν και να μεταφράσουν εικόνες ή πίνακες δεδομένων σε εξισώσεις , για το σχεδιασμό της λύσης του (Clement, 1982). Κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων λοιπόν, χρησιμοποιούν αναπαραστατικά σχήματα για να κατηγοριοποιήσουν τους τύπους των προβλημάτων, στη συνέχεια αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα με τη χρήση γνωστών ποσοτήτων και περιορισμών, με στόχο την κατασκευή αλγεβρικών λύσεων που βασίζονται σε θεμελιωμένες έννοιες και μια λογική σειρά διαδικασιών και πράξεων.

Πολλοί είναι και οι μαθητές εκείνοι οι οποίοι ορμώμενοι από την εμπειρία στην επίλυση προβλημάτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα στο πλαίσιο της άλγεβρας εφαρμόζουν τη μέθοδο της ¨δοκιμής και λάθους¨ ώστε να καταλήξουν σε ένα σωστό ή λογικό αποτέλεσμα. Σύμφωνα με την τακτική αυτή, το μαθηματικό περιεχόμενο δημιουργείται μέσα από μια διαδικασία ¨αναθεώρησης¨ και ¨επαναφοράς¨ (Sfard, 1991), όπου ο μαθητής επανεξετάζει τη λύση του και επιλέγει να επανατοποθετηθεί εάν το κρίνει απαραίτητο. Στο ίδιο μοντέλο αναφέρεται και ο Goldin (1998), ο οποίο προσθέτει τις μεθόδους συσχέτισης του προβλήματος με απλούστερα προβλήματα από την εμπειρία του μαθητή ή από το πλαίσιο της αριθμητικής, αλλά και διαδικασίες όπου ο μαθητής λύνει το πρόβλημα με τη διαδικασία της διάκρισης περιπτώσεων, και πάλι βασιζόμενος σε αριθμητικά μοντέλα. Καθεμία από αυτές τις διαδικασίες συγκροτεί μια πολύπλοκη δομή, που εξαρτάται άμεσα από την προσωπική πρωτοβουλία και τις δεξιότητες του κάθε μαθητή. Ωστόσο, οι στρατηγικές αυτές για το σχηματισμό εξίσωσης από μόνες τους δε συνεπάγονται πάντα ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει την εξίσωση και την έχει σχηματίσει σωστά. Οι διαδικασίες αυτές συνδέονται με μεγάλη πιθανότητα λάθους ενώ παράλληλα δε θεωρούνται θεμελιωμένες διαδικασίες μετασχηματισμού.

Συνοψίζοντας, η μετατροπή προβλήματος σε εξισώσεις αφορά την περιγραφή του περιεχομένου του προβλήματος με τη χρήση αλγεβρικών εργαλείων, συγκεκριμένα αριθμών, μεταβλητών και μαθηματικών συμβόλων για τη δημιουργία εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή σαφώς δεν αναμένεται να είναι εύκολη για τους μαθητές, οι οποίοι δε τη αντιλαμβάνονται πάντα ως περιγραφή των σχέσεων που αναδεικνύονται στο πρόβλημα. Οι ίδιοι καταφεύγουν σε διάφορες στρατηγικές μετασχηματισμού οι οποίες αν δεν εκτελεστούν σωστά έχοντας λάβει υπόψη όλους τους περιορισμούς και τις παραμέτρους, εγκυμονούν κινδύνους πρόκλησης λάθους. Τέτοιοι κίνδυνοι εντοπίζονται στη συντακτική και σημασιολογική μετάφραση ή την στατική σύγκριση. Συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της ¨δοκιμής και λάθους¨ για την αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, ενώ κάποιοι πιο ¨ικανοί¨ αξιοποιούν αναπαραστατικά σχήματα ή διαγράμματα για τη δημιουργία εξισώσεων κατάλληλων για την επίλυση του προβλήματος, τα οποία αποτελούν μια ευρύτερη κατηγορία στρατηγικών επίλυσης και θα παρουσιαστούν εκτενέστερα παρακάτω.

Εξωτερικές αναπαραστάσεις για την έκφραση του περιεχομένου

Κατά την επεξεργασία ενός προβλήματος, οι μαθητές δημιουργούν πολλών ειδών εσωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες πηγάζουν από τη φαντασία τους και βασίζονται στο δίκτυο των γνώσεων που έχουν αναπτύξει, έχοντας ως στόχο την κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου και της κατάστασης που παρουσιάζει το πρόβλημα. Παρόλο που η κατανόηση στο πεδίο των μαθηματικών βασίζεται σε εσωτερικές αναπαραστάσεις, η ερμηνεία και η εξαγωγή συμπερασμάτων για τις διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές μπορεί να γίνει μόνο μέσω των εξωτερικών αναπαραστάσεων που προκύπτουν από τις εσωτερικές. Για τον λόγο αυτό, η Miura (2001) αναφέρθηκε στις εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις ως «γνωστικές» και «εκπαιδευτικές» αντίστοιχα, καθώς οι δεύτερες εξυπηρετούν την προσπάθεια να αποκτήσουμε πρόσβαση στη δομή της σκέψης των μαθητών.

Η δημιουργία των εξωτερικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές κατά την επίλυση ενός αλγεβρικού προβλήματος θεωρείται σημαντικό στάδιο της διαδικασίας, ενώ ταυτόχρονα τα είδη των εξωτερικών αναπαραστάσεων που προκύπτουν αποτελούν στρατηγικές μετασχηματισμού. Σύμφωνα με την έρευνα του Goldin (2002), ένα σύστημα εξωτερικών αναπαραστάσεων αποτελεί ένα σύνολο από χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται εναλλακτικά για να αντικαταστήσουν τις λέξεις ενός προβλήματος και να σχεδιάσουν τη λύση. Οι χαρακτήρες αυτοί ποικίλουν καθώς μπορεί να είναι φυσικά αντικείμενα ή χαρακτηριστικά και στοιχεία φυσικών μεγεθών, εικόνες, λέξεις ή γράμματα του αλφάβητου, σημεία στίξης, αλλά και αφηρημένα στοιχεία όπως σύμβολα, αριθμοί, σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και μεγεθών (Goldin, 2002, Hiebert & Carpenter, 1992). Ο κύριος λόγος δημιουργίας αυτών των συστημάτων απεικόνισης είναι η κωδικοποίηση του περιεχομένου και των δομών που εμφανίζονται σε ένα πρόβλημα, που αποσκοπεί στην παραγωγή σημασιολογικής ερμηνείας του προβλήματος. Αναφορικά με τα είδη των εξωτερικών αναπαραστάσεων που εντοπίζονται στα λεκτικά προβλήματα στο πεδίο της άλγεβρας, οι Koedinger, Alibalib και Nathan (2008) διαχωρίζουν δύο ευρύτερες ομάδες αναπαραστάσεων: τις ¨θεμελιωμένες¨ και τις ¨αφηρημένες¨. Οι πρώτες χαρακτηρίζονται κατά αυτό τον τρόπο γιατί αναφέρονται σε φυσικά αντικείμενα, καθημερινά γεγονότα, εικόνες και διακριτές ποσότητες, παίρνοντας ένα πιο συγκεκριμένο και καλά ορισμένο χαρακτήρα, σε αντίθεση με τις ¨αφηρημένες¨ οι οποίες δεν αφορούν φυσικά αντικείμενα, αλλά σχετίζονται με αλγεβρικές δομές, εκφράσεις και σύμβολα.

Θεμελιωμένες αναπαραστάσεις

Ξεκινώντας με τα ¨θεμελιωμένα¨ αναπαραστατικά συστήματα, αποτελούν συστήματα τα οποία αφορούν συνήθως ανεπίσημες στρατηγικές, βασισμένες κυρίως σε ποσοτικές γνώσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να επιλύσουν εύκολα ένα πρόβλημα (Koedinger & Nathan, 2004). Σε όλα τα χρόνια της σχολικής φοίτησης, οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν στρατηγικές οι οποίες δεν περιλαμβάνουν αλγεβρικά σύμβολα, επιδιώκοντας να δώσουν νόημα στις λέξεις του προβλήματος που επεξεργάζονται. Οι λύτες κατασκευάζουν μορφές μοντέλων κατάστασης που λειτουργούν υποστηρικτικά, για να οδηγηθούν ευκολότερα σε συμπεράσματα που θα τους βοηθήσουν στην κατανόηση για την επίλυση του προβλήματος (Hall, 1989). Τα μοντέλα αυτά, προκύπτουν από πληροφορίες που αφαιρούνται από το κείμενο του προβλήματος και οργανώνονται με τρόπο ώστε να ενισχύσουν την κατανόηση του περιστατικού πλαισίου του (Ng & Lee, 2009). Ακόμη, σημαντικός λόγος δημιουργίας τέτοιου είδους αναπαραστάσεων, αποτελεί η ανάγκη αντιμετώπισης εννοιολογικών σφαλμάτων που μπορεί να προκύψουν από το κείμενο του λεκτικού προβλήματος (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Επομένως, οι διαδικασίες δημιουργίας των ¨θεμελιωμένων¨ αναπαραστάσεων, αποσκοπούν στον ποσοτικό φορμαλισμό των προβλημάτων και περιλαμβάνουν την αναγνώριση ποσοτήτων που περιέχονται ή υπονοούνται στο πρόβλημα, τη σύνθεση των ποσοτήτων αυτών σε σχεσιακές δομές, την αναγνώριση γνωστών κατασκευαστικών δομών και τον εντοπισμό των περιορισμών που επηρεάζουν το αποτέλεσμα, τη λύση δηλαδή του προβλήματος (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989).

Σύμφωνα με τις ¨θεμελιωμένες¨ αναπαραστάσεις, δημιουργείται ένα πλαίσιο μοντελοποίησης ρόλων, όπου συναρμολογείται το περιεχόμενο του προβλήματος για να στηρίξει τη συλλογιστική και να ενισχύσει την στρατηγική που θα επιλεχθεί (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Ωστόσο, στο κάθε άτομο υπάρχουν πολλά διαφορετικά αναπαραστατικά σχήματα. Ακόμη και στο ίδιο το άτομο πολλές φορές η σκέψη και η γνώση δε βασίζεται σε συνεπείς διαδικασίες, αλλά σε σχήματα τα οποία μπορεί να οδηγήσουν και σε αντιφατικά αποτελέσματα. Έτσι, στο ίδιο το άτομο αλλά και σε διαφορετικά, δημιουργούνται αυτόνομα και ανεξάρτητα αναπαραστατικά σχήματα (Clement, 1982). Τέτοιου είδους αναπαραστάσεις εκφράζονται με τη βοήθεια διαδικασιών όπως για παράδειγμα οι επαναληπτικές διαδικασίες δοκιμής και λάθους, η επίλυση με την ¨προς τα πίσω¨ μέθοδο ξετυλίγοντας το πρόβλημα και τους περιορισμούς. Ακόμη, πολύ σημαντική κατηγορία αυτών των εξωτερικών αναπαραστάσεων αποτελεί η δημιουργία μιας ακολουθίας γραφικών εικόνων, με σχέδια ή γραφήματα για την απεικόνιση των δεδομένων των λεκτικών προβλημάτων (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Οι μαθητές αν και δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτού του είδους τις αναπαραστάσεις, σε κάποιες περιπτώσεις τις χρησιμοποιούν και τις θεωρούν αξιόπιστες, ειδικά σε προβλήματα με σύνθετη πλοκή και ποσοτικούς περιορισμούς. Παρόλα αυτά, στις περισσότερες περιπτώσει στις μεγαλύτερες τάξεις, οι τακτικές που ακολουθούν οι μαθητές αποκτούν κυρίως συμβολικό χαρακτήρα, καθώς οι συμβολικές αναπαραστάσεις με στοιχεία από το πεδίο της άλγεβρας θεωρούνται από τους μαθητές πιο ¨επίσημες¨ στρατηγικές για την παρουσίαση ενός σχεδίου λύσης (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989).

Αφηρημένες αναπαραστάσεις

Οι χαρακτηριζόμενες ως ¨αφηρημένες¨ αναπαραστάσεις κατά τους Koedinger, Alibalib και Nathan (2008), σχετίζονται κυρίως με τις συμβολικές τακτικές. Θεωρούνται αυξημένης δυσκολίας κυρίως γιατί δεν χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα και σε ότι αφορά τη σχολική εκπαίδευση η εισαγωγή τους γίνεται σε μεγαλύτερες τάξεις. Οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις παρόλα αυτά, μετά από τη φυσική γλώσσα, είναι η πρώτη συμβολική γλώσσα που μαθαίνουν οι περισσότεροι άνθρωποι. Η επίλυση των προβλημάτων με αυτή τη γλώσσα, παραμερίζει κάθε αναφορά σε γνωστικά αντικείμενα και χρησιμοποιεί τη δική της ορολογία. Παρά το γεγονός ότι οι δεν είναι όλοι οι μαθητές εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους αναπαραστάσεις, οι ίδιες εμφανίζουν και πολλά πλεονεκτήματα κατά την επίλυση, αφού οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις είναι γρήγορες, σαφείς και αποδοτικές, έχουν συνοπτική μορφή γεγονός το οποίο καθιστά τον χειρισμό τους πιο άμεσο και γρήγορο. Ταυτόχρονα, οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις έχουν μειωμένες απαιτήσεις σε ότι αφορά τη μνήμη εργασίας και απεικονίζουν ευκολότερα τις ποσοτικές σχέσεις (Koedinger, Alibalib & Nathan, 2008). Θεωρείται ότι τέτοιου είδους αναπαραστάσεις είναι πιο αποτελεσματικές σε πολύπλοκα προβλήματα, καθώς η αλγεβρική επίλυση ενισχύει την αποφυγή ή ανίχνευση λάθους και οδηγεί άμεσα σε αξιόπιστα και πιο ισχυρά αποτελέσματα και συμπεράσματα, σε ότι αφορά τόσο τη δομή της λύσης όσο και το αριθμητικό αποτέλεσμα. Τέλος, οι μαθητές που παρουσιάζουν μεγαλύτερη επιτυχία στη επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων, οι χαρακτηριζόμενοι ως ¨έμπειροι¨ ή ¨ικανοί¨ λύτες, προτιμούν τέτοιου είδους αναπαραστάσεις, αφού αυτοί οι μαθητές επικεντρώνουν την προσοχή τους κυρίως στα δομικά χαρακτηριστικά του περιεχομένου τους (Krutetskii, 1976, όπως αναφέρεται σε Kaur, 1997).

Σύμφωνα λοιπόν με τη βιβλιογραφία που μελετήθηκε, η ανάγκη έκφρασης του περιεχομένου των προβλημάτων, αλλά και η ανάγκη για κατανόηση των στοιχείων και της δομής ενός μαθηματικού προβλήματος, οδηγεί στη δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων. Έτσι, υποστηρίζεται ότι τόσο τα αφηρημένα όσο και τα θεμελιωμένα αναπαραστατικά συστήματα, έχουν σημαντική επίδραση στην επίλυση των λεκτικών προβλημάτων και δρουν ενισχυτικά στις επιλογές που κάνει ο λύτης (Collins & Ferguson, 1993, Kirshner, 1989, Zhang, 1997). Αυτά τα συστήματα αντιπροσώπευσης λειτουργούν υποστηρικτικά για την καλύτερη κατανόηση της γλώσσας αλλά και του εννοιολογικού πλαισίου του προβλήματος και εκφράζονται με διαφορετικούς τρόπους οι οποίοι εξαρτώνται πλήρως από την προσωπική εμπειρία και κατανόηση του κάθε λύτη. Έτσι προκύπτουν διαφόρων ειδών εξωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες εντάσσονται σύμφωνα με τη βιβλιογραφία σε ευρύτερες κατηγορίες αναπαραστάσεων που αφορούν φυσικά αντικείμενα, αφηρημένες δομές και αλγεβρικούς συμβολισμούς.

Έμπειροι και μη έμπειροι λύτες προβλημάτων

Η επίλυση προβλημάτων και ειδικότερα στο πλαίσιο της άλγεβρας, αποτελεί αντικείμενο αυξημένης δυσκολίας για το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών, καθώς απαιτεί ένα συνδυασμό εννοιολογικής κατανόησης και γνώσης χειρισμού των αλγεβρικών εργαλείων. Έτσι, προκύπτουν κάποιες βασικές διαφορές στη διαχείριση των αλγεβρικών προβλημάτων μεταξύ μαθητών που θεωρούνται έμπειροι λύτες, κατέχοντας καλύτερη γνώση των αλγεβρικών χειρισμών, και μη έμπειροι λύτες, οι οποίοι σύμφωνα με τη σχολική τους πορεία δεν παρουσιάζουν επιτυχία στο μάθημα των μαθηματικών.

Ο Krutetskii (1976), όπως αναφέρεται στο έργο του Kaur, (1997), μελέτησε τις διαφορές που παρουσιάζουν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους ¨καλούς¨ και ¨κακούς¨ λύτες. Σύμφωνα με τις μελέτες του, διαπίστωσε ότι οι πιο έμπειροι λύτες παρουσιάζουν τη δυνατότητα διάκρισης των χρήσιμων και σχετικών πληροφοριών για τη λύση του μαθηματικού προβλήματος, ενώ παράλληλα έχουν την ικανότητα να κατανοούν γρήγορα και με ακρίβεια τη δομή του προβλήματος και να το γενικεύουν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο παρόμοιων προβλημάτων. Κατά την επεξεργασία του προβλήματος, επικεντρώνουν την προσοχή τους κυρίως στα δομικά χαρακτηριστικά του αγνοώντας τα υπόλοιπα στοιχεία του. Παράλληλα, όπως τονίζει ο ίδιος, οι μαθητές με μεγαλύτερη επιτυχία στο μάθημα των μαθηματικών και ειδικότερα στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, έχουν αναπτύξει μεγαλύτερη μνήμη εργασίας αφού μπορούν να συγκρατούν στη μνήμη τους τη δομή το προβλήματος για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγει και ο Foong (1994), ο οποίος υποστηρίζει ότι οι επιτυχημένοι λύτες, όταν καλούνται να επεξεργαστούν ένα λεκτικό πρόβλημα, μεταφράζουν και αξιολογούν σωστά και με ακρίβεια τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και στη συνέχεια σχεδιάζουν ένα πλήρες πλάνο επίλυσης. Διατυπώνουν ολοκληρωμένες και λεπτομερείς λύσεις προτού τις εκτελέσουν, ενώ παράλληλα έχουν επίγνωση για τη σκιαγράφηση της λύσης βάσει της προϋπάρχουσας γνώσης τους.

Σε ότι αφορά τους μη έμπειρους λύτες, θεωρείται ότι ασχολούνται κυρίως με τα στοιχεία της εκφώνησής του προβλήματος που καλούνται να επιλύσουν και σε αντίθεση με τους έμπειρους λύτες, πολλές φορές επικεντρώνονται σε συγκεκριμένες λεπτομέρειες του προβλήματος, χάνοντας τα βασικά δομικά χαρακτηριστικά του (Krutetskii, 1976, όπως αναφέρεται στο έργο του Kaur, 1997). Πολλές φορές συγκρατούν μόνο τις προφανείς λεπτομέρειες ενός προβλήματος, μεταφράζοντάς το λέξη προς λέξη χωρίς να λαμβάνουν υπόψη το γενικότερο νόημα της κατάστασης που παρουσιάζει το πρόβλημα (Foong, 1994), με αποτέλεσμα να πέφτουν σε σφάλματα λόγω συντακτικής και σημασιολογικής μετάφρασης. Ταυτόχρονα, οι λύτες οι οποίοι δεν παρουσιάζουν επιτυχία στο μάθημα των μαθηματικών, συχνά γίνονται παρορμητικοί και προσπαθούν να εκτελέσουν τη λύση του προβλήματος χωρίς να το έχουν κατανοήσει πλήρως. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα, επιμένουν σε λύσεις οι οποίες δεν οδηγούν σε κάποιο λογικό αποτέλεσμα και επαναλαμβάνουν τις προσπάθειες στις ίδιες εσφαλμένες μεθόδους. Τέλος, θεωρείται ότι οι μη έμπειροι λύτες επηρεάζονται έντονα από συναισθηματικά αίτια, καθώς η αδυναμία τους να ανταπεξέλθουν στην επίλυση του προβλήματος μπορεί να τους προκαλέσει σύγχυση, άγχος και απογοήτευση, συναισθήματα τα οποία με δυσκολία μπορούν να διαχειριστούν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας (Foong, 1994).

Δυσκολίες και λάθη κατά το μετασχηματισμό λεκτικού προβλήματος

Η επίλυση προβλήματος είναι μια διαδικασία με την οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή από τα πρώτα χρόνια της σχολικής τους πορείας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ η επίλυση προβλήματος στο πλαίσιο της άλγεβρας εισάγεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Είναι γεγονός ότι υπάρχει μια γενικότερη αδυναμία των μαθητών να ανταποκριθούν σε καταστάσεις λεκτικών προβλημάτων σε όλες τις βαθμίδες της σχολικής εκπαίδευσης (Herscovics & Linchevski, 1994), καθώς η διαδικασία επίλυσής τους απαιτεί βαθιά κατανόηση του λεξιλογίου και του συντακτικού του προβλήματος, των συμβόλων και των λειτουργιών των πράξεων, η οποία δεν καλλιεργείται πάντα στον απαιτούμενο βαθμό.

Οι περισσότεροι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με αλγεβρικά προβλήματα, φαίνεται να έχουν την τάση να προσπαθούν να βρουν τη σωστή απάντηση προτού ακόμη σχηματίσουν την εξίσωση. Αυτός ο καταναγκασμός θεωρείται ότι προέρχεται από προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών που συνδέονται με την επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο της αριθμητικής, και οφείλεται στη έλλειψη ουσιαστικής σύνδεσης των αλγεβρικών μεθόδων με τις αριθμητικές (Stacey & MacGregor, 1999). Παρόλο που οι περισσότεροι μαθητές στις τάξεις του Λυκείου έχουν παρακολουθήσει μαθήματα άλγεβρας και έχουν ολοκληρώσει ένα μεγάλο κομμάτι της ύλης της βασικής σχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης, λίγοι είναι οι μαθητές εκείνοι οι οποίοι έχουν κατανοήσει τη δομή και τη λειτουργία της άλγεβρας (Swafford & Brown, 1989). Η ικανότητα διαχείρισης αλγεβρικών σχέσεων είναι εμφανής, αφού οι περισσότεροι μαθητές μπορούν εύκολα να εκτελέσουν τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση και να λύσουν μια εξίσωση όταν τους δοθεί η εντολή, παρόλα αυτά όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν ένα λεκτικό πρόβλημα παρουσιάζουν μεγάλη δυσκολία στην μετάφρασή του σε αλγεβρικές εκφράσεις (Herscovics & Linchevski, 1994, MacGregor & Stacey, 1993). Αυτή η έλλειψη σύνδεσης των αλγεβρικών συμβολισμών με την λειτουργία τους, στη βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται και ως κεντρικό γνωστικό χάσμα, και υποστηρίζεται ότι στην ύπαρξη αυτού του χάσματος οφείλονται και πολλά λάθη στον σχηματισμό εξισώσεων για την επίλυση προβλήματος (Clement, 1982).

Παρόλο που πολλοί μαθητές φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι με τις αλγεβρικές διαδικασίες και την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, ελάχιστοι είναι εκείνοι που παρουσιάζουν επιτυχία στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σε πολλές περιπτώσεις, ακόμη και οι πιο έμπειροι λύτες, παρόλο που αναγνωρίζουν και κατανοούν το λεκτικό περιεχόμενο, τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, προχωρώντας στη λύση του αποτυγχάνουν να μεταφέρουν τα στοιχεία αυτά αφαιρετικά στο πλαίσιο της άλγεβρας για να υλοποιήσουν την αλγεβρική επίλυση (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Η έλλειψη, επομένως, της εμπειρίας των μαθητών σε ότι αφορά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας, γίνεται αντιληπτή από τη δράση τους, καθώς όταν καλούνται να επιλύσουν ένα πρόβλημα, ελάχιστοι είναι οι μαθητές οι οποίοι εκπροσωπούν τις ζητούμενες ποσότητες με μεταβλητές και τις πληροφορίες του προβλήματος με εξισώσεις, εάν δεν τους ζητηθεί ξεκάθαρα η επίλυση με αλγεβρικές μεθόδους (Stacey & MacGregor, 1999). Ακόμη όμως και σε περιπτώσει όπου ζητείται ρητά η αλγεβρική επίλυση, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στον εντοπισμό των ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν οι άγνωστες ποσότητες, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να προκύψει ο σχηματισμός και κατ' επέκταση η επίλυση της εξίσωσης που αντιπροσωπεύει το πρόβλημα (Herscovics & Linchevski, 1994). Φαίνεται λοιπόν, ότι οι περισσότεροι μαθητές εμφανίζουν ιδιαίτερη αδυναμία στην προσθήκη νοήματος στους αλγεβρικούς συμβολισμούς (Herscovics & Linchevski, 1994). Πολλές φορές, μάλιστα, γίνεται εμφανές ότι οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν τη λειτουργία των συμβόλων, παρουσιάζοντας σημαντική δυσκολία στην επιλογή και χρήση των κατάλληλων συμβόλων πράξεων και της ισότητας, για τη διατύπωση των εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τις πληροφορίες του προβλήματος (Stacey & MacGregor, 1999). Οι μαθητές σε αυτές τις ηλικίες δεν είναι ακόμα σε θέση να νοηματοδοτούν και να χειρίζονται με ευχέρεια μεταβλητές και σχέσεις μεταξύ άγνωστων και γνωστών ποσοτήτων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα γνωστικό χάσμα, το οποίο κατ' επέκταση δημιουργεί αδυναμίες που αφορούν κυρίως τις άτυπες διαδικασίες σχηματισμού εξισώσεων που προκύπτουν από τις πληροφορίες ενός προβλήματος (Herscovics & Linchevski, 1994).

Συγκεκριμένα στην επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων, είναι συχνότερο το φαινόμενο οι μαθητές να εντοπίζουν και να ερμηνεύουν εξισώσεις μίας μεταβλητής, όμως όταν προκύπτει και δεύτερη, εκεί η δυσκολία αυξάνεται για αυτούς. Ιδιαίτερα σε ότι αφορά το σχηματισμό εξισώσεων με δύο μεταβλητές μέσω ενός λεκτικού προβλήματος, η δυσκολία αυξάνεται σημαντικά καθώς η μετατροπή αυτή απαιτεί κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής σε ένα ακόμη βαθύτερο επίπεδο απ' ότι για το σχηματισμό εξίσωσης μίας μεταβλητής (Clement, 1982). Σύμφωνα με έρευνες, ακόμα και απλές γραμμικές εξισώσεις δύο μεταβλητών τις περισσότερες φορές διατυπώνονται από τους μαθητές με λάθος τρόπο (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, Rosnik & Clement, 1980). Παράλληλα, οι πολλαπλές αναφορές άγνωστων ποσοτήτων όταν αυτές υπονοούνται μέσα στο κείμενο του προβλήματος, αυξάνουν την πολυπλοκότητα της λύσης και δυσκολεύουν τη μνήμη να εργασίας να εκτελέσει τους κατάλληλους χειρισμούς (Koedinger, Alibalib & Nathan, 2008).

Συνοψίζοντας, βλέπουμε πως σε ότι αφορά τη μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αλγεβρικές εξισώσεις, οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές ποικίλουν. Κατά κύριο λόγο δυσκολίες εμφανίζονται κατά την μεταφορά των στοιχείων του προβλήματος στο πλαίσιο την άλγεβρας για το σχηματισμό της εξίσωσης που θα εκφράζει τη λύση του. Ιδιαίτερα όταν στο πρόβλημα υπονοούνται περισσότερες από μία μεταβλητές ή αρνητικές ποσότητες, οι δυσκολίες αυξάνονται σημαντικά. Είναι σημαντικό λοιπόν, να μελετηθούν και οι αιτίες που τις προκαλούν βάσει της βιβλιογραφίας.

Αιτίες εμφάνισης δυσκολιών κατά το μετασχηματισμό προβλήματος

Είναι γεγονός ότι τα λεκτικά προβλήματα τόσο στο πλαίσιο της αριθμητικής όσο και στο χώρο της άλγεβρας, αποτελούν αντικείμενο μεγάλης δυσκολίας για τους μαθητές κάθε ηλικίας. Αυτό οφείλεται σε πολλούς παράγοντες που αφορούν κυρίως την εκπαιδευτική διαδικασία η οποία επηρεάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη διαμόρφωση της εννοιολογικής κατανόησης που αναπτύσσουν οι μαθητές, αλλά και τη στάση που αποκτούν οι ίδιοι σε ότι αφορά την αλγεβρική επίλυση των προβλημάτων.

Αρχικά, πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, φαίνεται να πηγάζουν από το γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί αλλά και συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων, δε γνωρίζουν ή δε λαμβάνουν υπόψη τις σοβαρές γνωστικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας (Herscovics & Linchevski, 1994). Οι γνωστικές δυσκολίες προκύπτουν κυρίως από το γεγονός ότι δεν προσφέρεται ο απαιτούμενος χρόνος ώστε οι μαθητές να κατασκευάσουν μια ισχυρή διαισθητική βάση σε ότι αφορά την αλγεβρική λογική και τις αλγεβρικές ιδέες. Έτσι, στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές δεν προλαβαίνουν να δημιουργήσουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των αλγεβρικών και προ-αλγεβρικών ιδεών που οικοδομήθηκαν από το δημοτικό, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν ιδιαίτερη αδυναμία στην προσθήκη νοήματος στους (νέους) αλγεβρικούς συμβολισμούς (Herscovics & Linchevski, 1994).

Σε πολλές περιπτώσεις, οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές και οι αιτίες εμφάνισης λανθασμένων αλγεβρικών λύσεων στα λεκτικά προβλήματα, φαίνεται να πηγάζουν από το γεγονός ότι η δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων μέσα από προβλήματα δεν ανταποκρίνεται στις τυπικές εκπαιδευτικές διαδικασίες (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Για το λόγο αυτό μάλιστα, θεωρείται ότι κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η ένταξη των λεκτικών προβλημάτων στη διδασκαλία της άλγεβρας αποφεύγεται ακόμη και από τους εκπαιδευτικούς καθώς πέρα από τους μαθητές, δυσκολεύει ακόμη και τους ίδιους. Ωστόσο οι αιτίες εμφάνισης δυσκολιών στους μαθητές πολλές φορές σχετίζονται με την έλλειψη κατανόησης της βασικής λογικής του προβλήματος, από την οποία εξαρτάται η σημασία που αποκτούν οι άγνωστοι, ο εντοπισμός τους και οι ποσότητες που αντιπροσωπεύουν, αλλά και η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου μετασχηματισμού (Stacey & MacGregor, 1999).

Στο έργο των MacGregor και Stacey (1993), εντοπίζονται τρία βασικά αίτια που προκαλούν δυσκολίες και λάθη κατά την διαμόρφωση αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων μέσα από ένα πρόβλημα:

Η *συντακτική μετάφραση* που αφορά τον σχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων ή εξισώσεων, μέσα από αντιστοίχιση λέξεων ή φράσεων του κειμένου με μαθηματικά σύμβολα και αριθμούς (Mestre, 1988, MacGregor, 1991, Pimm, 1981, Schoenfeld, 1985, όπως αναφέρεται σε MacGregor & Stacey, 1993). Η συντακτική μετάφραση του περιεχομένου βασίζεται σε μεθόδους κατά τις οποίες για το σχεδιασμό της λύσης, η προσοχή εστιάζεται σε ¨λέξεις κλειδιά¨ του κειμένου. Ωστόσο, σε ένα ανώτερο επίπεδο, σε τάξεις δηλαδή γυμνασίου και λυκείου, ο χειρισμός των προβλημάτων με βάσει τις ¨λέξεις κλειδιά¨ που εμφανίζονται, όπως και η αντικατάσταση των λεκτικών δεδομένων με μαθηματικές σχέσεις διαδοχικά από αριστερά προς τα δεξιά, αποτελούν μεθόδους οι οποίες στο πεδίο της άλγεβρας μπορούν να οδηγήσουν σε παρερμηνεία των δεδομένων και κατά συνέπεια να επιφέρουν πολλά λάθη.

Η *παρερμηνεία αλγεβρικών γραμμάτων* που σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη σωστή σειρά των λέξεων που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μεταβλητές, τα σύμβολα των πράξεων αλλά και το σύμβολο της ισότητας να μην αποκτούν τη σωστή ερμηνεία, γεγονός το οποίο οδηγεί σε λάθη στη δομή των εξισώσεων που σχηματίζονται (Clement 1982, Rosnick & Clement, 1980).

Η *παρεμβολή από τη φυσική γλώσσα* η οποία αφορά περιπτώσεις όπου η σύνταξη της γλώσσας είναι σύνθετη και η σειρά των λέξεων είναι τέτοια ώστε να μην καθίσταται σαφές το νόημα των φράσεων. Οι παράγοντες αυτοί μπορούν να παραπλανήσουν και να δυσκολέψουν αυτόν που καλείται να μετασχηματίσει τα λεκτικά δεδομένα σε αλγεβρικές εξισώσεις (MacGregor & Stacey, 1993).

Ακόμη, ο Kaput (1987) (όπως αναφέρεται σε MacGregor, 1993), ο οποίος θεωρεί τη συντακτική μετάφραση ως βασική γνωστική διαδικασία πρόκλησης λαθών, συμπληρώνει και τη διαδικασία της ¨στρατηγικής απεικόνισης¨. Σύμφωνα με αυτή, τα ουσιαστικά του κειμένου μεταφράζονται ως μεταβλητές ενώ τα επίθετα του κειμένου μεταφράζονται ως αριθμοί για το σχηματισμό της εξίσωσης. Η μέθοδος αυτή δε λειτουργεί σωστά σε όλες τις περιπτώσεις, και ιδιαίτερα σε περιπτώσεις προβλημάτων με ποσοτικούς περιορισμούς ή σύνθετη διατύπωση, γίνεται αιτία εμφάνισης πολλών λαθών.

Ωστόσο οι MacGregor και Stacey (1993) στο έργο τους επιχειρούν να δείξουν ότι οι αιτίες που προαναφέρθηκαν δεν αποτελούν τα μοναδικά αίτια αποτυχίας των μαθητών στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, τονίζοντας ότι γενικότερα η μετατροπή της φυσικής γλώσσας σε άλγεβρα αποτελεί μια διαδικασία στην οποία οι μαθητές οδηγούνται σε λάθη. Ακόμη και σε προβλήματα με εύκολο συντακτικό, σαφή δεδομένα και ζητούμενα, η ενδεχόμενη εμφάνιση άγνωστων λέξεων στο κείμενο θα μπορούσε να θεωρηθεί αιτία λαθών κατά το μετασχηματισμό του (Koedinger, 2008). Έτσι, οι MacGregor και Stacey (1993) στην έρευνά τους, η οποία σχεδιάστηκε κατάλληλα ώστε να εξαλείψει τον κίνδυνο λάθους στη συντακτική μετάφραση, τη στατική σύγκριση και την χρήση μεταβλητών για την ερμηνεία αριθμών και σχέσεων, τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών παρέμειναν υψηλά, με κύρια αιτία την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης του κειμένου και τη λανθασμένη διατύπωση των εξισώσεων. Συμπεραίνουν ότι οι μαθητές στην προσπάθειά τους να ¨περιγράψουν¨ το πρόβλημα υπό τη μορφή εξίσωσης και θέλοντας να εκπροσωπήσουν τα γνωστικά μοντέλα, ενδεχομένως παραφράζουν κάποιες εκφράσεις και δεν νοηματοδοτούν σωστά τα σύμβολα των πράξεων. Είναι γεγονός βέβαια ότι η φυσική γλώσσα περιλαμβάνει συντακτικό και σημασιολογία που από μόνα τους ορίζουν ένα γνωστικό μοντέλο, επομένως η ερμηνεία αυτού και στη συνέχεια η ένταξή του στο πλαίσιο της άλγεβρας, αποτελεί μια πιο σύνθετη διαδικασία.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι παρόλο που τα περισσότερα προβλήματα στην άλγεβρα συνδέονται άμεσα με τον ¨πραγματικό κόσμο¨, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών αδυνατεί να αντιληφθεί αυτή τη σχέση (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Κατά συνέπεια, η εμφάνιση δυσκολιών και λαθών κατά την επεξεργασία λεκτικών προβλημάτων με τη χρήση αλγεβρικών εργαλείων, πηγάζει κυρίως από την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης τόσο των αλγεβρικών εργαλείων όσο και της γλώσσας και του συντακτικού που χρησιμοποιείται στο κείμενο του προβλήματος. Οι μαθητές δυσκολεύονται να εντάξουν τα αλγεβρικά εργαλεία και τις λειτουργίες τους στον πραγματικό κόσμο, ενώ παράλληλα αντιμετωπίζουν δυσκολία και στην ερμηνεία των λεκτικών δεδομένων, που στη συνέχεια οδηγεί σε λανθασμένη νοηματοδότηση των γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων και παρερμηνεία των δεδομένων και των σχέσεων που παρουσιάζονται.

Διδασκαλία των μαθηματικών στο πεδίο επίλυσης προβλημάτων

Η διδασκαλία των μαθηματικών από τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης έχει καθοριστικό ρόλο στη σχέση που πρόκειται να αναπτυχθεί μεταξύ των μαθητών και του χειρισμού των προβλημάτων στο πλαίσιο της αριθμητικής αλλά και της άλγεβρας. Οι περισσότεροι μαθητές μπορούν με ευκολία να λύσουν μια εξίσωση, ωστόσο όταν καλούνται να τη σχηματίσουν μέσα από ένα πρόβλημα κι έπειτα να τη λύσουν, αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες. Το πεδίο της έρευνας δείχνει ότι σε πολλά σχολεία οι μαθητές δεν εξοικειώνονται με την αξιοποίηση της άλγεβρας ως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων. Για να αποκτήσουν ευελιξία στην κατασκευή εξισώσεων μέσα από προβλήματα και κατ' επέκταση στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να έχουν πρώτα κατανοήσει βασικές έννοιες όπως αυτή της ισοδυναμίας του αριστερού και δεξιού μέλους της εξίσωσης, καθώς και των συμβόλων των πράξεων που εκφράζουν τις σχέσεις των ποσοτήτων (Stacey & MacGregor, 1999).

Οι μαθητές πιστεύουν ότι η αλγεβρική επίλυση προβλήματος είναι δυσκολότερη σε σχέση με τις αριθμητικές μεθόδους, και επιβάλλεται από τους εκπαιδευτικούς χωρίς κάποιο προφανή λόγο (Stacey & MacGregor, 1999). Αυξάνεται επομένως η ανάγκη για πιο στοχευμένη ανάπτυξη και επέκταση των αριθμητικών εννοιών σε μικρή ηλικία, ώστε να αναδειχθούν ουσιαστικές για τη μεταγενέστερη πορεία των μαθητών στο πεδίο της άλγεβρας (Herscovics & Linchevski, 1994). Κατά τη διδακτική διαδικασία στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση αλγεβρικών σχέσεων κι εξισώσεων, θα πρέπει να εφαρμόζονται διαισθητικές και μη τυπικές μέθοδοι, οι οποίες ενισχύουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Αυτό βασίζεται στη θεωρία ότι τα ασυνεπή ημιαυτόνομα σχήματα μπορεί να αποτελούν σημαντικούς παράγοντες σε μία ευρύτερη ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων (Clement, 1982). Είναι εξάλλου γεγονός ότι η εμβάθυνση στην εννοιολογική γνώση βοηθά στην κατασκευή των σωστών συνδέσεων και αναπαραστάσεων (Ng & Lee, 2009).

Βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πεδίο της επίλυσης προβλημάτων είναι να δημιουργηθεί ένα πλαίσιο ικανό ώστε να ευνοεί την παρουσίαση εννοιολογικών συστημάτων ως αναπαραστατικά συστήματα που μπορούν να απεικονίσουν τη μαθηματική γνώση ώστε να την κάνουν πιο οικεία και κατανοητή από τους μαθητές. Οι δομές αυτές μεταβάλλονται και αναπτύσσονται διαρκώς κατά της πάροδο του χρόνου, επομένως η διδασκαλία οφείλει να προσαρμόζεται στα δεδομένα αυτά ανά πάσα στιγμή (Goldin, 2002). Οι στόχοι των εκπαιδευτικών σε ότι αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν πρέπει να περιορίζεται στη μεταφορά συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου στους μαθητές. Αντιθέτως, ο πρωταρχικός στόχος των εκπαιδευτικών θα πρέπει να είναι η προσπάθεια οικοδόμησης ενός περιβάλλοντος ευνοϊκού για την κατασκευή ισχυρών διαισθητικών συστημάτων αναφορικά με όλες τις διδασκόμενες έννοιες. Ωστόσο, στη μαθηματική εκπαίδευση μεγάλο μέρος των μαθημάτων εξακολουθεί να είναι αφιερωμένο σε τυπικές διαδικαστικές μεθόδους, όπου πρεσβεύουν οι κανόνες και δεν γίνεται καμία προσπάθεια ανανέωσης των μεθόδων αυτών. Ειδικότερα σε ότι αφορά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, στις πρακτικές που εφαρμόζονται στην τάξη δεν επιχειρούνται μέθοδοι οπτικοποίησης ή αναπαράστασης των δεδομένων. Η επίλυση προβλημάτων πολλές φορές περιορίζεται στην μετάφραση των λέξεων για το σχηματισμό της κατάλληλης σχέσης και στη συνέχεια η επίλυσης του προβλήματος προκύπτει από εφαρμογή των πρότυπων αλγορίθμων που αφορούν τη σχέση αυτή. Εάν στη διδασκαλία των προβλημάτων ενταχθεί η λογική της δημιουργίας και ανάπτυξης αναπαραστάσεων, το εννοιολογικό υπόβαθρο των μαθητών θα ενισχυθεί και οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων για να κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο (Goldin, 2002).

Κριτική αποτίμηση βιβλιογραφίας

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία που μελετήθηκε, ο μετασχηματισμός ενός προβλήματος σε αλγεβρική εξίσωση αφορά τη διαδικασία ¨μετάφρασης¨ των λέξεων και των ποσοτικών σχέσεων που παρουσιάζονται μέσα στο πρόβλημα σε μαθηματικά σύμβολα, για τη δημιουργία σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και αριθμών (MacGregor & Stacey, 1993). Η διαδικασία αυτή ακολουθεί μια σειρά τυπικών και άτυπων μεθόδων που συνοδεύονται από επίσημες ή ανεπίσημες μορφές αναπαραστάσεων. Στο μυαλό των μαθητών δημιουργείται πλήθος εσωτερικών αναπαραστάσεων που εκφράζονται με αντίστοιχες εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν βάση των χαρακτηριστικών που φέρουν, σε δύο ευρύτερες κατηγορίες, τις αφηρημένες (συμβολικές) αναπαραστάσεις, που αποτελούνται από αριθμούς και σύμβολα και τις θεμελιωμένες αναπαραστάσεις, οι οποίες ακολουθούν μη τυπικές μεθόδους και εκφράζονται μέσω εικονιστικών αναπαραστάσεων υπό τη μορφή σχεδίων ή μέσω δοκιμών με αριθμούς (Koedinger, Alibalib & Nathan, 2008). Οι τυπικές μέθοδοι αφορούν τη δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων και ακολουθούν μια πορεία η οποία αποτελείται από την ανάγνωση της εκφώνησης του κειμένου, τη διάκριση των γνωστών από τις άγνωστες ποσότητες για τον ορισμό μεταβλητών και τον εντοπισμό των συμβολικών σχέσεων που τις συνδέουν (Carbonneau, 1996). Για τη δημιουργία των σχέσεων αυτών, οι μαθητές εκτελούν ¨συντακτική¨ και ¨σημασιολογική¨ μετάφραση των φράσεων του κειμένου (MacGregor & Stacey, 1993), προκειμένου να δημιουργήσουν εξισώσεις οι οποίες εκφράζουν το νόημα του κειμένου. Στις περιπτώσεις όπου προκύπτει η ανάγκη για την ενίσχυση της κατανόησης ποσοτικών σχέσεων και κατασκευαστικών δομών που εντοπίζονται στο πρόβλημα, οι μαθητές καταφεύγουν σε άτυπες διαδικασίες μετασχηματισμού, όπου ο κάθε μαθητής δημιουργεί συνδέσεις σύμφωνα με την ατομική του κατανόηση και σχηματίζει ατομικά αναπαραστατικά σχήματα (Clement, 1982). Τα σχήματα αυτά πολλές φορές εκφράζονται με τη δημιουργία σχεδίων απεικόνισης του περιεχομένου, δηλαδή με τη χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Οι μαθητές με μεγαλύτερη επιτυχία στις αλγεβρικές μεθόδους, θεωρείται ότι δοκιμάζουν ευκολότερα να χρησιμοποιήσουν σχέδια και εικόνες για να στηρίξουν τη λύση τους (Clement, 2000). Ακόμη, πολλές φορές οι μαθητές εκτρέπουν τη σκέψη τους σε αριθμητικές μεθόδους προκειμένου να ενισχύσουν την κατανόησή τους και να επεξεργαστούν το αλγεβρικό πρόβλημα, εκτελώντας δοκιμές με αριθμούς ή συσχετίζοντας το πρόβλημα με κάποιο αντίστοιχο στο πλαίσιο της αριθμητικής (Goldin, 1998, Stacey & MacGregor, 1999). Ωστόσο οι περισσότεροι μαθητές προτιμούν τους συμβολικούς τρόπους αναπαράστασης (Stacey & MacGregor, 1999, MacGregor & Stacey, 1993, Clement, 1982), θεωρώντας πολύπλοκες και ανεπίσημες τεχνικές μετασχηματισμού τόσο τη δημιουργία εικόνων (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989), όσο και την εκτροπή της σκέψης σε αριθμητικές μεθόδους (Goldin, 1998).

Τα λεκτικά προβλήματα αποτελούν ένα κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης που από τα πρώτα σχολικά χρόνια παρουσιάζει δυσκολίες. Ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όπου τα προβλήματα που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια επιδέχονται αλγεβρική λύση, η πολυπλοκότητα αυξάνεται καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ της συλλογιστικής της επίλυσης προβλημάτων στο δημοτικό, με αυτή που χρειάζεται σε ένα μεγαλύτερο επίπεδο και συγκεκριμένα σε προβλήματα άλγεβρας. Οι μαθητές σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζουν έντονη δυσκολία στη συντακτική και δομική ερμηνεία του κειμένου, η οποία επηρεάζει τη προσθήκη νοήματος στα αλγεβρικά σύμβολα για τη δημιουργία των σχέσεων που συντελούν στη μοντελοποίηση ενός προβλήματος και την απεικόνισή του με εξισώσεις (Herconics & Linchevski, 1994, Stacey & MacGregor, 1999, Clement, 1982). Δυσκολίες εντοπίζονται επιπλέον στην προσθήκη νοήματος και στη διαχείριση των εργαλείων της άλγεβρας (Swafford & Brown, 1989), όπως τα σύμβολα των πράξεων και της ισότητας (Clement, 1982, Rosnik & Clement, 1980) και οι αρνητικές ποσότητες (Koedinger, Alibalib & Nathan, 2008). Ακόμη, οι δυσκολίες των μαθητών εμφανίζονται στον εντοπισμό και τη διαχείριση πολλαπλών μεταβλητών (MacGregor & Stacey, 1993, Clement, 1982, Rosnik & Clement, 1980) και στη σημασία που αποκτούν οι άγνωστοι (Stacey & MacGregor, 1999). Η εμφάνιση των δυσκολιών που αναφέρονται, εμποδίζει τους μαθητές στη δημιουργία της κατάλληλης αλγεβρικής σχέσης που περιγράφει τη λύση του λεκτικού προβλήματος. Παράλληλα, λάθη κατά το μετασχηματισμό ενός προβλήματος σε εξίσωση εμφανίζονται στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές δε λαμβάνουν υπόψη τους τούς ποσοτικούς περιορισμούς (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989) ή εγκλωβίζονται στη σειρά των λέξεων και σε λέξεις ή φράσεις που θεωρούν ¨κλειδιά¨ για τον σχηματισμό (MacGregor & Stacey, 1993). Τέλος, κατά το μετασχηματισμό οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες και στη δημιουργία σχεδίων για την απεικόνιση του περιεχομένου του κειμένου (Koedinger & Nathan, 2004), καθώς δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους αναπαραστάσεις (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989).

Τα ευρήματα της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε, αφορούν κυρίως έρευνες σχετικά με τη μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση μίας μεταβλητής. Φαίνεται πως ιδιαίτερη κατηγορία προβλημάτων αποτελούν εκείνα στα οποία εμφανίζονται δύο άγνωστες ποσότητες, καθώς θεωρείται ότι στα προβλήματα αυτά η πολυπλοκότητα αυξάνεται λόγω της ύπαρξης δύο μεταβλητών (MacGregor & Stacey, 1993, Clement, 1982, Rosnik & Clement, 1980). Η έρευνα ωστόσο σε προβλήματα που αφορούν δύο αγνώστους δεν έχει διευρυνθεί στον ίδιο βαθμό συγκριτικά με τα προβλήματα που εκφράζονται με εξισώσεις μίας μεταβλητής. Έτσι η παρούσα εργασία εστιάζει σε ένα νέο ερευνητικό στόχο που αφορά τη μελέτη στο πεδίο του μετασχηματισμού προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους και των εξωτερικών αναπαραστάσεων που δημιουργούνται στους μαθητές κατά τη διαδικασία αυτή.

ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Στόχος

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη μετατροπή προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων, με τη χρήση ή μη των εικονιστικών αναπαραστάσεων.

Ερευνητικά ερωτήματα

- Ποιες είναι οι ενέργειες στις οποίες προβαίνουν οι μαθητές προκειμένου να μετατρέψουν ένα λεκτικό πρόβλημα σε σύστημα εξισώσεων
- Κατά πόσο οι μαθητές καταφεύγουν στη χρήση εξωτερικών εικονιστικών αναπαραστάσεων κατά την επίλυση προβλημάτων με τη χρήση συστήματος εξισώσεων
- Ποιες δυσκολίες συναντούν οι μαθητές κατά τη μετατροπή του προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Προτού προχωρήσω στη σκιαγράφηση της μεθοδολογίας της έρευνας, παρουσιάζεται το εννοιολογικό πλαίσιο το οποίο αφορά το μετασχηματισμό του λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση, τις ευρετικές διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές κατά το μετασχηματισμό καθώς και τις αναπαραστάσεις που δημιουργούν για να υποστηρίξουν ή να ενισχύσουν τη λύση τους και τέλος, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν αναφορικά με τη διαδικασία της μετατροπής.

Μετασχηματισμός λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση

Η έννοια του μετασχηματισμού ενός λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση αφορά τις ποσότητες και τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων αυτών, οι οποίες εντοπίζονται στο κείμενο του προβλήματος κι εξάγονται από αυτό έτσι ώστε να γίνει η μετατροπή τους σε αλγεβρικές σχέσεις για να εκφράσουν το κεντρικό νόημά του. Επομένως ο μετασχηματισμός ενός προβλήματος σε εξίσωση αποτελείται από το στάδιο της κατανόησης του προβλήματος και από το στάδιο δημιουργίας αναπαράστασης, συμβολικής ή γραφικής, μέσω της σημασιολογικής και συντακτικής μετατροπής του προβλήματος, με στόχο την έκφραση του περιεχομένου του.

Με τον όρο ¨κατανόηση¨ του προβλήματος αναφερόμαστε τόσο στην ερμηνεία και το χειρισμό του κειμένου του προβλήματος, όσο και στο χειρισμό των αλγεβρικών εργαλείων που χρησιμεύουν για τη λύση του. Η κατανόηση του κειμένου του προβλήματος αφορά την ερμηνεία των λέξεων, των φράσεων και του συντακτικού που εμφανίζονται στο λεκτικό πρόβλημα. Παράλληλα, η κατανόηση των αλγεβρικών εργαλείων συνδέεται με το χειρισμό και την επιλογή των κατάλληλων αλγεβρικών συμβόλων μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών για τη δημιουργία των αλγεβρικών παραστάσεων, όπως για παράδειγμα προσθετικές σχέσεις, αρνητικές ποσότητες, σχέσεις μεταξύ μεγεθών που αφορούν αριθμούς και μεταβλητές (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Κατά συνέπεια, η κατανόηση που αναπτύσσει ο μαθητής συνδέεται άμεσα με την ικανότητά του να αντιλαμβάνεται τις ενέργειες που πρέπει να ακολουθήσει έτσι ώστε να επιλέγει τα κατάλληλα αλγεβρικά εργαλεία για να εκφράσει το λεκτικό περιεχόμενο του προβλήματος.

Για το μετασχηματισμό του προβλήματος σε εξίσωση, έπειτα από το στάδιο της κατανόησης ακολουθεί η μετατροπή του κειμένου του προβλήματος σε σχέσεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών, για τη δημιουργία της εξίσωσης. Ο όρος ¨μετατροπή¨ αφορά τη ¨συντακτική¨ και ¨σημασιολογική¨ μετάφραση του περιεχομένου του προβλήματος, την έκφραση, δηλαδή, του κεντρικού του νοήματος με συμβολικές ή γραφικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν από την ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στο λεξιλόγιο και το συντακτικό του κειμένου (MacGregor & Stacey, 1993). Οι αναπαραστάσεις αυτές δημιουργούν μαθηματικές σχέσεις μέσω της μετάφρασης των ποσοτήτων και των σχέσεων που υπονοούνται στο πρόβλημα, με μαθηματικά σύμβολα, μεταβλητές και αριθμούς ή εικόνες και γραφήματα

(Herscovics, 1989, όπως αναφέρεται στο έργο των MacGregor & Stacey, 1993). Επομένως η μετατροπή του προβλήματος σε εξίσωση, είναι η ονομασία των άγνωστων ποσοτήτων με τη χρήση μεταβλητών και η έκφραση της σχέσης μεταξύ άγνωστων και γνωστών ποσοτήτων για το σχηματισμό της εξίσωσης (Charbonneau, 1996).

Συνοψίζοντας, βάσει της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός προβλήματος σε εξίσωση αφορά τα στάδια της κατανόησης του προβλήματος και της δημιουργίας της αναπαράστασής του, όπου:

- Η κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές για τον χειρισμό ενός λεκτικού προβλήματος, αναλύεται σε δύο διαστάσεις:
  - Την κατανόηση των δεδομένων και των σχέσεων που παρουσιάζονται στο κείμενο του προβλήματος, μέσα από την ερμηνεία των λέξεων, φράσεων και του συντακτικού του προβλήματος.
  - Την κατανόηση της λειτουργίας και του χειρισμού των αλγεβρικών εργαλείων, που αφορά τη νοηματοδότηση των αλγεβρικών συμβόλων για τη δημιουργία των κατάλληλων σχέσεων μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών.

- Η δημιουργία συμβολικής ή γραφικής αναπαράστασης για το μετασχηματισμό του προβλήματος σε εξίσωση είναι:
  - Η συντακτική και σημασιολογική μετάφραση του περιεχομένου του προβλήματος.
  - Η έκφραση του κεντρικού νοήματος: με συμβολικές ή γραφικές αναπαραστάσεις:
    - Με συμβολικές αναπαραστάσεις, οι οποίες σχηματίζονται με τη χρήση αλγεβρικών εργαλείων για την έκφραση του περιεχομένου του προβλήματος με αλγεβρικές παραστάσεις κι εξισώσεις. Ο σχηματισμός τους προκύπτει από την ονομασία άγνωστων ποσοτήτων με μεταβλητές και την έκφραση της σχέσης μεταξύ άγνωστων και γνωστών ποσοτήτων με αλγεβρικά σύμβολα, για τη δημιουργία της εξίσωσης.
    - Με γραφικές αναπαραστάσεις, οι οποίες αποτελούν σκίτσα, εικόνες ή γραφήματα τα οποία δημιουργούνται από τον ίδιο το μαθητή κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του προβλήματος, πηγάζουν από τη φαντασία του και αποτελούν τον τρόπο με τον οποίο επιδιώκουν να κατανοήσουν και να παρουσιάσουν το κεντρικό νόημα του λεκτικού προβλήματος.

Διαδικασίες μετασχηματισμού

Ο λύτης κατά τη μετατροπή ενός λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση ακολουθεί μια σειρά από ευρετικές διαδικασίες, οι οποίες αφορούν το σύνολο των ενεργειών που ακολουθεί ο ίδιος ακολουθεί. Σύμφωνα με Goldin (1998), Stacey και MacGregor (1999) μια ευρετική διαδικασία που εμφανίζεται κατά τον σχεδιασμό και την εκτέλεση της λύσης είναι η συσχέτιση του προβλήματος με ένα απλούστερο πρόβλημα από την προϋπάρχουσα εμπειρία του μαθητή, η συσχέτισή του δηλαδή με μία όμοια κατάσταση με αριθμούς. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται από τον λύτη καθώς ο ίδιος κατανοεί καλύτερα μια προβληματική κατάσταση στο πλαίσιο της αριθμητικής, γεγονός το οποίο του επιτρέπει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ της ήδη υπάρχουσας εμπειρίας του με την προβληματική κατάσταση που καλείται να αντιμετωπίσει, ώστε να σχεδιάσει την κατάλληλη λύση. Ακόμη, σημαντική διαδικασία μετασχηματισμού θεωρείται από τους Koedinger, Alibalib και Nathan (2008) η αξιοποίηση θεμελιωμένων ή αφηρημένων αναπαραστάσεων. Οι θεμελιωμένες αναπαραστάσεις αφορούν κατά κύριο λόγο γραφικές εικόνες, σκίτσα και στοιχεία από την καθημερινότητα, που χρησιμοποιεί ο λύτης για να αναπαραστήσει σημεία του περιεχομένου του προβλήματος και να ενισχύσει κατανόηση για τη δημιουργία των κατάλληλων εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τη λύση του προβλήματος. Αντίθετα, οι αφηρημένες αναπαραστάσεις, χρησιμοποιούνται ως διαδικασία επίλυσης για να αναπαριστούν το πρόβλημα με μεταβλητές, σύμβολα και αριθμούς και κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούνται από τους μαθητές που θεωρούνται ¨έμπειροι λύτες¨, καθώς εκείνοι που δεν ανήκουν στην ίδια κατηγορία μαθητών, θεωρείται ότι είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις θεμελιωμένες αναπαραστάσεις.

Συνοψίζοντας, προκύπτει ότι διαδικασίες μετασχηματισμού προβλήματος σε εξίσωση αποτελούν:

- Η συσχέτιση του προβλήματος που καλείται να επεξεργαστεί ο λύτης, με παρόμοιο απλούστερο πρόβλημα από το πεδίο της αριθμητικής, με σκοπό να ενισχύσει την κατανόηση του περιεχομένου του.
- Η απόδοση του προβλήματος με σχήματα, με την αξιοποίηση των θεμελιωμένων αναπαραστάσεων.
- Η απόδοση του προβλήματος με σύμβολα, με την αξιοποίηση των αφηρημένων αναπαραστάσεων.

Η αξιοποίηση των θεμελιωμένων και των αφηρημένων αναπαραστάσεων αποτελεί διαδικασία μετασχηματισμού, ωστόσο η διατύπωση των αναπαραστάσεων αυτών αφορά το στάδιο της δημιουργίας εξωτερικών αναπαραστάσεων, το οποίο παρουσιάζεται αναλυτικότερα στην επόμενη ενότητα.

Εξωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές

Οι μαθητές πολλές φορές καταφεύγουν στη δημιουργία αναπαραστατικών συστημάτων με σκοπό να δώσουν συντακτική και δομική ερμηνεία στο περιεχόμενο του προβλήματος. Προκύπτουν έτσι εξωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες αποτελούν ένα σύνολο διακεκριμένων χαρακτήρων, το οποίο περιλαμβάνει γράμματα, αριθμούς, αριθμητικά σύμβολα, αλλά και σχέδια ή εικόνες, μοντέλα χειρισμού τα οποία εντοπίζονται στη δράση των μαθητών για την ανάλυση των προβλημάτων και την συγκρότηση των πληροφοριών που εμπεριέχουν (Lesh, 1981, Lesh, Landau & Hamilton, 1983, όπως αναφέρεται σε Goldin, 1998). Αποτελούν επομένως, οργανωμένες ενέργειες που δημιουργούνται από του λύτες των προβλημάτων και χρησιμεύουν ως ερμηνευτικά εργαλεία κατανόησης και εργαλεία απεικόνισης της λύσης τους (Cifarelli, 1988) και διακρίνονται σε δύο κατηγορίες εξωτερικών αναπαραστατικών συστημάτων, τα συγγραφικά και τα εικονιστικά συστήματα (Goldin, 1998).

Τα συγγραφικά αναπαραστατικά συστήματα, δημιουργούνται βάσει των πληροφοριών που πηγάζουν από κανόνες γραμματικής και σύνταξης που εντοπίζονται στο περιεχόμενο του προβλήματος. Αφορούν επομένως την περιγραφή του λεκτικού προβλήματος μέσω της επεξεργασίας της φυσικής γλώσσας και του συντακτικού, στο επίπεδο λέξεων, φράσεων και προτάσεων, αφού τα στοιχεία αυτά μεταφράζονται σε αλγεβρικά σύμβολα και σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και αριθμών, για τη δημιουργία των συμβολικών αλγεβρικών εκφράσεων. Τα εικονιστικά αναπαραστατικά συστήματα, τα οποία δεν είναι λεκτικά ή γνωστικά, πηγάζουν από τη ¨φαντασία¨ του μαθητή για την περιγραφή των σημασιολογικών δομών και την επεξεργασία τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Εκφράζονται με τη δημιουργία οπτικών εικόνων, σκίτσων, γραφικών παραστάσεων από τον ίδιο το μαθητή, τα οποία στη συνέχεια υποβάλλονται σε επεξεργασία με σκοπό την κατανόηση του περιεχομένου του προβλήματος. Στο πεδίο της άλγεβρας, επομένως, εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα αποτελούν τόσο τα γραφήματα και οι εικόνες όσο και μαθηματικές πράξεις όλων των ειδών και οι σχέσεις που δημιουργούν (Goldin, 1998).

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις επομένως, διακρίνονται σε:

- Συγγραφικά αναπαραστατικά συστήματα (αφηρημένες αναπαραστάσεις), που αφορούν τη διατύπωση σχέσεων μεταξύ αριθμών, μεταβλητών και μαθηματικών συμβόλων των πράξεων και της ισότητας, δηλαδή συμβολικές αναπαραστάσεις που εκφράζονται με τη βοήθεια των εργαλείων της άλγεβρας και προκύπτουν από κανόνες γραμματικής και σύνταξης της φυσικής γλώσσας για να εκφράσουν το περιεχόμενο του προβλήματος.

- Εικονιστικά αναπαραστατικά συστήματα (θεμελιωμένες αναπαραστάσεις), που αφορούν τη δημιουργία οπτικών εικόνων που προκύπτουν από σκίτσα, γραφήματα, γραφικές παραστάσεις που πηγάζουν από τη φαντασία του μαθητή.

Δυσκολίες των μαθητών κατά τη μετατροπή του προβλήματος σε εξισώσεις

Η μετατροπή ενός λεκτικού προβλήματος σε εξισώσεις δεν θεωρείται εύκολη διαδικασία, γεγονός το οποίο είναι συνέπεια των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την πορεία αυτή. Οι δυσκολίες των μαθητών κατά τη μετατροπή του προβλήματος σε εξισώσεις εντοπίζονται τόσο κατά το μετασχηματισμό του λεκτικού περιεχομένου του προβλήματος, όσο και στις αναπαραστάσεις της λύσης του.

Πιο συγκεκριμένα, οι δυσκολίες κατά το μετασχηματισμό του προβλήματος σε εξισώσεις αφορούν την κατανόηση του περιεχομένου του προβλήματος, αφού οι μαθητές πολλές φορές αδυνατούν να δώσουν συντακτική και δομική ερμηνεία στις πληροφορίες του προβλήματος ώστε να είναι σε θέση να αντιληφθούν το νόημα μέσα από το λεξιλόγιο και το συντακτικό του (Stacey & MacGregor, 1999, Clement, 1982). Παράλληλα, κατά το μετασχηματισμό σημαντικές δυσκολίες εντοπίζονται και στην προσθήκη νοήματος στους αλγεβρικούς συμβολισμούς και κατ' επέκταση στη δημιουργία συμβόλων για τη διατύπωση της εξίσωσης ή των εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τη λύση του προβλήματος (Hercovincs & Linchevski, 1994).

Ακόμη, σε ότι αφορά τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές στις αναπαραστάσεις της λύσης ενός προβλήματος στο πεδίο της άλγεβρας, αυτές εντοπίζονται στη διαχείριση και την ονομασία δύο άγνωστων ποσοτήτων σε ένα πρόβλημα, οι οποίες μεταφράζονται σε δύο διαφορετικές μεταβλητές (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, Rosnik & Clement, 1980). Ταυτόχρονα, δυσκολίες εντοπίζονται και στη διαχείριση αρνητικών ποσοτήτων, είτε αυτές αναφέρονται ρητά είτε υπονοούνται μέσα από το κείμενο του προβλήματος, οι οποίες δημιουργούν προβλήματα στη συμβολική αναπαράσταση των σχέσεων για το σχηματισμό εξίσωσης (Koedinger, Alibalib & Nathan, 2008). Τέλος, δυσκολίες παρατηρούνται και στη χρήση σχεδίων για την αναπαράσταση της λύσης ενός προβλήματος, αφού οι μαθητές φαίνεται να μην είναι εξοικειωμένοι με αυτό τον τρόπο διατύπωσης της λύσης ενός προβλήματος καθώς δε χρησιμοποιείται στον ίδιο βαθμό κατά την εκπαιδευτικά διαδικασία, ενώ ταυτόχρονα θεωρούν πιο επίσημες τις συμβολικές λύσεις που χρησιμοποιούν τα σύμβολα της άλγεβρας, τους αριθμούς και τις μεταβλητές (Koedinger & Nathan, 2004).

Συνοψίζοντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία μετασχηματισμού λεκτικού προβλήματος σε εξισώσεις προκύπτουν:

- δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου της εκφώνησης του προβλήματος, οι οποίες σχετίζονται με τη συντακτική και σημασιολογική ερμηνεία των δεδομένων και ζητουμένων του προβλήματος
- δυσκολίες στη συμβολοποίηση των δεδομένων που προκύπτουν από το περιεχόμενο του προβλήματος και αφορούν:
    - τον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων και την ονομασία μεταβλητών
    - τη διαχείριση περισσότερων από μία, αγνώστων ποσοτήτων
    - τη διαχείριση αρνητικών ποσοτήτων
    - τη σημασιολογική ερμηνεία των στοιχείων του λεκτικού προβλήματος για την επιλογή του κατάλληλου συμβόλου πράξης και της ισότητας και τη διατύπωση των κατάλληλων εξισώσεων που αποδίδουν το νόημα του λεκτικού περιεχομένου
- δυσκολίες στη χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων, που αφορούν τη δημιουργία σχεδίων για την απεικόνιση του λεκτικού περιεχομένου του προβλήματος

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Επιλογή μεθόδου

Για την παρούσα έρευνα επιλέχθηκε η ποιοτική μέθοδος, με παρατήρηση εκτέλεσης ενός έργου και με χρήση δομημένης συνέντευξης έπειτα από την ολοκλήρωση του κάθε έργου. Η επιλογή αυτή βασίστηκε στη μέθοδο των συνεντεύξεων εργασιών, η οποία στη βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται ως ¨task based interview¨ (Maher & Sigley, 2020) και έγινε με σκοπό να συλλεχθεί ένα πλήθος ποιοτικών και ποσοτικών χαρακτηριστικών που αφορούν τον τρόπο σκέψης των μαθητών, τις ενέργειες που ακολουθούν, τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν και τις δυσκολίες τις οποίες συναντούν όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα άλγεβρας και συγκεκριμένα προβλήματα που λύνονται με τη χρήση συστήματος εξισώσεων.

Στις συνεντεύξεις εργασιών, η συλλογή του υλικού πραγματοποιείται από διαφορετικά εργαλεία συλλογής δεδομένων και στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στις περιγραφές των μαθητών για τις διαδικασίες και τις ενέργειες τι οποίες κάνουν κατά τη διάρκεια επεξεργασίας των εργασιών (Maher & Sigley, 2020), με αποτέλεσμα να ενισχύουν:

- τον προσδιορισμό στρατηγικών και συλλογιστικής που αναπτύσσουν οι μαθητές
- τη διερεύνηση της κατανόησης των διαδικασιών και του χειρισμού των εργαλείων που χρησιμοποιούν
- την παρατήρηση της δημιουργίας αναπαραστάσεων των εννοιών και των τρόπων αιτιολόγησης των ιδεών
- τον εντοπισμό λαθών και παρερμηνειών

Έτσι, στην παρούσα έρευνα, η ποιοτική μέθοδος με τη χρήση συνεντεύξεων εργασιών παρέχει τη δυνατότητα διατύπωσης ενδιάμεσων ερωτημάτων κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, αλλά και τη δυνατότητα προτροπής των μαθητών να εξηγούν δυνατά τι κάνουν σε κάθε βήμα (Clement, 2000). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να γίνει δυνατή η καταγραφή της ¨σκέψης δυνατά¨ των μαθητών, η οποία αφορά λεκτικές περιγραφές, εξωτερικές σημειώσεις και αναπαραστάσεις, αλλά και δυσκολίες με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του λεκτικού προβλήματος (Stacey & MacGregor, 1999). Παράλληλα, αυτού του είδους η συλλογή δεδομένων επιτρέπει τις υποθέσεις για τις ευρετικές διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές, για ένα πλήθος ποιοτικών χαρακτηριστικών που όπως σημειώνει και ο Goldin (1998), αφορά τις δοκιμές που κάνουν οι μαθητές, τις διαδρομές που ακολουθούν κατά τη διαδικασία επίλυσης, καθώς και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν. Εξάλλου, είναι γεγονός ότι δε μπορούμε να έχουμε άμεση πρόσβαση στις εσωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές για να κατανοήσουν καλύτερα ένα πρόβλημα, ωστόσο οι εσωτερικές αυτές αναπαραστάσεις συνδέονται με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες μπορούν να φανερώσουν ένα μέρος του δικτύου σκέψης των μαθητών (Davis, 1984). Με τη βοήθεια των συνεντεύξεων, γίνεται δυνατή η παρατήρηση και η καταγραφή αυτών των στοιχείων, από τα οποία μπορεί να προκύψει πληθώρα ποιοτικών και ποσοτικών χαρακτηριστικών για τις διαδικασίες και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να κατανοήσουν καλύτερα το περιεχόμενο, τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, αλλά και τις δυσκολίες που συναντούν κατά τη διαδικασία μετατροπής του υπό τη μορφή συστήματος εξισώσεων.

Δείγμα

Η ποιοτική έρευνα πραγματοποιήθηκε με 10 μαθητές από σχολεία της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Η επιλογή του δείγματος που συμμετείχε στην έρευνα αποτελεί βολική δειγματοληψία, καθώς λόγω των συνθηκών η διαθεσιμότητα των μαθητών για συμμετοχή ήταν περιορισμένη, αλλά και η πρόσβαση σε σχολεία εξαιρετικά δύσκολη. Από τους 10 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, 5 μαθητές φοιτούσαν στην Α΄ τάξη του Γενικού Λυκείου και 5 μαθητές φοιτούσαν στη Β΄ τάξη του Γενικού Λυκείου. Η επιλογή δείγματος μαθητών από τις συγκεκριμένες τάξεις του Λυκείου, έγινε με κριτήριο την ύλη την οποία έχουν διδαχθεί οι μαθητές των ηλικιών αυτών. Τα συστήματα εξισώσεων αποτελούν κεφάλαιο που πρώτη φορά συναντάται στην ύλη της Γ΄ Γυμνασίου, ενώ παράλληλα, τα συστήματα εξισώσεων αλλά και τα προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια συστήματος, διδάσκονται αναλυτικότερα στην αρχή της χρονιάς της Β΄ Λυκείου. Επομένως οι μαθητές της Α΄ και κυρίως της Β΄ Λυκείου έχουν αποκτήσει μια εξοικείωση με τη δημιουργία και τη λειτουργία των συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Ακόμη, με στόχο την αντικειμενικότητα των αποτελεσμάτων της έρευνας, επιλέχθηκαν μαθητές ίσου πλήθους αγοριών και κοριτσιών, ανεξαρτήτως επιπέδου σε ότι αφορά την επιτυχία στο μάθημα των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, από τους μαθητές της Α΄ τάξης οι 3 ήταν αγόρια και οι 2 κορίτσια, ενώ από τους μαθητές της Β΄ τάξης οι 2 ήταν αγόρια και οι 3 κορίτσια. Η έρευνα με τους περισσότερους μαθητές πραγματοποιήθηκε στο χώρο του σχολείου, ενώ με τις δύο μαθήτριες της Α΄ τάξης η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατ’ οίκον.

Ερευνητικό εργαλείο

Σύμφωνα με την ερευνητική μέθοδο που επιλέχθηκε για την παρούσα έρευνα, η συλλογή δεδομένων από την παρατήρηση εκτέλεσης έργων από τους μαθητές πραγματοποιείται με τη βοήθεια τριών διαφορετικών μέσων. Έτσι, το εργαλείο της έρευνας αποτελείται από το φύλλο εργασίας για τους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα, διαμορφωμένο ως ατομικό ερωτηματολόγιο υπό τη μορφή γραπτού τεστ, το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή και το σχεδιάγραμμα των ερωτήσεων της συνέντευξης που ακολουθεί έπειτα από την επεξεργασία του φύλλου εργασίας από τους μαθητές. Σκοπός της διαμόρφωσης του εργαλείου με αυτό τον τρόπο, είναι η συλλογή δεδομένων από την παρατήρηση των ενεργειών και της ¨σκέψης δυνατά¨

των μαθητών, αλλά και από τις ηχογραφήσεις των συζητήσεων με τους μαθητές βάση των ερωτημάτων των συνεντεύξεων, για να είναι δυνατή μεταγενέστερα, η ανάλυση των στοιχείων αυτών σε συνδυασμό με τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στο φύλλο εργασίας.

Το φύλλο εργασίας για τους μαθητές

Το φύλλο εργασίας των μαθητών αποτελείται από τρεις σελίδες, οι οποίες περιέχουν τα τρία λεκτικά προβλήματα της έρευνα, ένα σε κάθε σελίδα. Εφόσον η έρευνα έχει στόχο τη μελέτη των διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για το μετασχηματισμό λεκτικών προβλημάτων σε σύστημα εξισώσεων, στο κάθε πρόβλημα της έρευνας υπονοούνται δύο άγνωστες ποσότητες και η αλγεβρική του λύση μπορεί να προκύψει μέσω της μετατροπής του περιεχομένου του σε αλγεβρικές εξισώσεις και να εκφραστεί με τη βοήθεια συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους. Τα προβλήματα του φύλλου εργασίας είναι διατυπωμένα με απλό λεξιλόγιο και όσο το δυνατό σαφέστερα δεδομένα και ζητούμενα, ενώ παράλληλα οι καταστάσεις που περιγράφονται στα προβλήματα αποτελούν οικείες καταστάσεις τις καθημερινής ζωής, με σκοπό να είναι ευκολότερη η κατανόηση του ¨περιστατικού πλαισίου¨ τους, γεγονός το οποίο αποτελεί κίνητρο για τους μαθητές να τα επεξεργαστούν έτσι ώστε να μπορέσουν να προκύψουν τα αποτελέσματα για την κατανόηση, τις διαδικασίες και τις δυσκολίες που συναντούν κατά τη διαδικασία αυτή (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989). Παράλληλα, τα προβλήματα του φύλλου εργασίας σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να προσφέρονται για τη δημιουργία εξωτερικών εικονικών αναπαραστάσεων, ώστε οι μαθητές να παρακινούνται να αποδώσουν στοιχεία από τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος με τη μορφή σχεδίων και σκίτσων.

Πιο αναλυτικά, τα προβλήματα του φύλλου εργασίας των μαθητών στοχεύουν αρχικά στη διερεύνηση της κατανόησης του λεκτικού περιεχομένου τους, που αφορά την ερμηνεία των δεδομένων και τον εντοπισμό των ζητουμένων που περιλαμβάνει η εκφώνηση. Κάθε πρόβλημα λοιπόν, διερευνά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται ο μαθητής το περιεχόμενό του με βάση το λεξιλόγιο και το συντακτικό του, για την οργάνωση στη συνέχεια των δεδομένων και των ζητουμένων του.

Στην συνέχεια, μέσω της επεξεργασίας των προβλημάτων του φύλλου εργασίας, στόχος είναι ο εντοπισμός των διαδικασιών που ακολουθούν οι μαθητές για το μετασχηματισμό τους σε εξισώσεις. Στο σημείο αυτό, τα προβλήματα επιχειρούν να εντοπίσουν διαδικασίες συσχετισμού των προβλημάτων με άλλα απλούστερα τα οποία προέρχονται από την προϋπάρχουσα εμπειρία που έχουν αποκτήσει οι μαθητές από μικρότερες τάξεις, και τον τρόπο με τον οποίο η μέθοδος αυτή ενισχύει την κατανόησή τους και τους βοηθά να προχωρήσουν στην επιλογή των μεταβλητών και των κατάλληλων συμβόλων για τη δημιουργία των σχέσεων μεταξύ των αριθμητικών δεδομένων και των μεταβλητών. Ταυτόχρονα, τα προβλήματα στοχεύουν στη διερεύνηση διαδικασιών δημιουργίας αναπαραστάσεων που αφορούν τόσο τη δημιουργία συμβόλων όσο και τη δημιουργία σχεδίων. Σε ότι αφορά τη δημιουργία συμβόλων, επιδιώκεται να διερευνηθεί η συντακτική και σημασιολογική επεξεργασία του κειμένου που εκτελείται από τους οι μαθητές, για να ερμηνεύσουν και να μεταφέρουν τα λεκτικά δεδομένα στο πλαίσιο της άλγεβρας και να μετασχηματίσουν τις λέξεις και φράσεις του κειμένου σε εξισώσεις με τη χρήση κατάλληλων αλγεβρικών συμβόλων για τη δημιουργία του συστήματος των εξισώσεων. Με τον τρόπο αυτό, ελέγχεται και η κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές ως προς τη σημασία και τη χρήση των αλγεβρικών εργαλείων και συμβόλων, μέσω της σημασιολογικής μετάφρασης του κειμένου.

Αναφορικά με τις διαδικασίες δημιουργίας εικονιστικών αναπαραστάσεων, μέσα από τα προβλήματα του φύλλου εργασίας, επιδιώκεται να διερευνηθούν οι αυθόρμητες απεικονίσεις που δημιουργούν οι μαθητές για το σχεδιασμό του περιεχομένου των προβλημάτων στο χαρτί, με τη μορφή σκίτσων και εικόνων, αλλά και η συμβολή αυτών στην κατανόηση των σχέσεων που παρουσιάζονται στο πρόβλημα. Ακόμη, επιδιώκεται να διερευνηθούν οι διαφορετικοί τρόποι απεικόνισης με σχέδια που επινοούν, αλλά και η προσπάθεια δημιουργίας τέτοιου είδους αναπαραστάσεων ή η αγνόηση αυτών. Στο σημείο αυτό, η διερεύνηση των επιλογών των μαθητών μπορεί να αναδείξει στοιχεία που αφορούν την εξοικείωσή τους με τα εικονιστικά αναπαραστατικά συστήματα, όταν έρχονται σε επαφή με λεκτικά προβλήματα που επιδέχονται αλγεβρικές λύσεις.

Παράλληλα με όσα προαναφέρθηκαν, μέσα από την επεξεργασία των προβλημάτων του εργαλείου επιδιώκεται και η διερεύνηση των δυσκολιών με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια επεξεργασίας και μετασχηματισμού των λεκτικών προβλημάτων σε σύστημα εξισώσεων. Στόχος είναι να αναδειχθούν οι δυσκολίες που προκύπτουν αρχικά στην κατανόηση της εκφώνησης του λεκτικού προβλήματος, οι οποίες μπορεί να σχετίζονται τόσο με τις λέξεις που περιέχει όσο και με τη διατύπωση και τη σύνταξη των φράσεών του. Ταυτόχρονα, οι δυσκολίες αυτές ενδέχεται να σχετίζονται και με τον εντοπισμό των δεδομένων, των ζητουμένων και των σχέσεων ποσοτήτων που παρουσιάζονται στο κείμενο. Ακόμη, μέσω της επεξεργασίας των προβλημάτων από τους μαθητές επιδιώκεται και η ανάδειξη δυσκολιών που αφορούν τη δημιουργία συμβόλων, τη μετατροπή δηλαδή των δεδομένων του κειμένου σε αλγεβρικά σύμβολα και σχέσεις μεταξύ γνωστών και αγνώστων ποσοτήτων σύμφωνα με την κατανόηση που αναπτύσσει κάθε μαθητής. Τέλος, στόχος του φύλλου εργασίας είναι ο εντοπισμός των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν τη δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων υπό τη μορφή σχεδίων.

Συνοπτικά λοιπόν, μέσω της επεξεργασίας των τριών λεκτικών προβλημάτων από τους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα, επιδιώκεται η ανάδειξη στοιχείων που αφορούν την κατανόηση που αναπτύσσουν κατά την ερμηνεία της εκφώνησης των προβλημάτων και τις διαδικασίες που επιστρατεύονται για την οργάνωση των στοιχείων αυτών και τη δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων, συμβολικών ή εικονιστικών. Στην περίπτωση των εικονιστικών αναπαραστάσεων, επιδιώκεται και η εξέταση της συμβολής τους στην εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου των προβλημάτων για την ενίσχυση της συμβολικής αλγεβρικής λύσης, αλλά και η εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους αναπαραστάσεις. Τέλος, επιδιώκεται η ανάδειξη των δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές σε κάθε στάδιο της διαδικασίας του μετασχηματισμού.

Παρουσίαση των προβλημάτων της έρευνας

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα προβλήματα του φύλλου εργασίας της έρευνας που απευθύνεται στους μαθητές της Α’ και Β’ τάξης του Γενικού Λυκείου.

Πρόβλημα 1.

«Η Α΄ τάξη του Λυκείου μιας περιοχής πήγε τριήμερη εκδρομή στην Αθήνα. Τα παιδιά που συμμετείχαν στη εκδρομή ήταν 118. Για τη διαμονή τους έκλεισαν 34 δωμάτια σε ένα ξενοδοχείο, ορισμένα τρίκλινα και ορισμένα τετράκλινα. Πόσα τρίκλινα και πόσα τετράκλινα δωμάτια έκλεισαν για την εκδρομή; (Διευκρίνιση: τα 118 παιδιά χωράνε ακριβώς στα τρίκλινα και τα τετράκλινα δωμάτια, κανένα κρεβάτι των δωματίων δε μένει κενό)»

Το πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας βασίζεται σε γεγονότα της καθημερινότητα και χαρακτηρίζεται από απλό λεξιλόγιο και συντακτικό με εύκολες λέξεις και απλή σύνταξη των φράσεων. Οι αλγεβρικές σχέσεις που προκύπτουν από το πρόβλημα είναι απλές γραμμικές εξισώσεις, με θετικές ποσότητες. Τέλος, οι εικονιστικές αναπαραστάσεις τις οποίες ενθαρρύνει το πρόβλημα αυτό, αποτελούν σχέδια απεικόνισης των δωματίων και του πλήθους των μαθητών που φιλοξενεί το κάθε είδος δωματίου.

Πιο αναλυτικά, μέσα από την επεξεργασία του πρώτου προβλήματος του φύλλου εργασίας των μαθητών, επιδιώκεται να εξεταστεί:

- Ο τρόπος επεξεργασίας του λεκτικού περιεχομένου από του μαθητές, οι επαναλήψεις στην ανάγνωση της εκφώνησης και οι δυσκολίες στην κατανόηση λέξεων ή φράσεών του
- Η οργάνωση των δεδομένων που αποτελούν οι 118 μαθητές που συμμετείχαν στην εκδρομή και η φιλοξενία τους σε 34 δωμάτια εκ των οποίων κάποια είναι τρίκλινα και κάποια τετράκλινα
- Ο εντοπισμός των ζητουμένων του προβλήματος, που αποτελούν τα πλήθη των τρίκλινων και τετράκλινων δωματίων αντίστοιχα, ο ορισμός των μεταβλητών σύμφωνα με τα ζητούμενα του προβλήματος και η επιλογή των συμβόλων με τα οποία απεικονίζονται οι μεταβλητές αυτές
- Οι δυσκολίες στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων του προβλήματος και στη δημιουργία των μεταβλητών
- Η επιλογή του κάθε μαθητή ως προς τη χρήση συμβολικών ή εικονιστικών αναπαραστάσεων για την εκκίνηση της επεξεργασίας του προβλήματος
- Η σημασιολογική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στα σύμβολα των πράξεων για τη δημιουργία την εξίσωσης που συμβολίζει το συνολικό πλήθος των 34 δωματίων

- Η σημασιολογική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στα σύμβολα των πράξεων για να δημιουργήσουν την αλγεβρική σχέση που απεικονίζει το συνολικό πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή και η δημιουργία της ισότητας με το πλήθος 118
- Οι δυσκολίες των μαθητών στη συντακτική και σημασιολογική ερμηνεία του κειμένου για την επιλογή συμβόλων και τη διατύπωση των εξισώσεων
- Η δημιουργία σχεδίων με ή χωρίς την παρακίνηση του ερευνητή και τα στοιχεία που απεικονίζουν τα σχέδια των μαθητών
- Η συμβολή των σχεδίων που δημιουργούν οι μαθητές, στην κατανόηση των σχέσεων των ποσοτήτων που περιγράφονται στο πρόβλημα
- Οι δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία των σχεδίων αυτών και η εξοικείωσή τους με αυτή τη μορφή αναπαράστασης του περιεχομένου

Πρόβλημα 2.

«Ένας κύριος περιμένει στην ουρά για το ταμείο μιας τράπεζας. Εάν μετακινηθεί δύο θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του. Εάν όμως μετακινηθεί δύο θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων. Πόσοι άνθρωποι περιμένουν στην ουρά μπροστά και πίσω από τον κύριο;»

Το περιεχόμενο του δεύτερου προβλήματος του φύλλου εργασίας βασίζεται επίσης σε γεγονότα της καθημερινότητας και περιέχει απλό λεξιλόγιο και συντακτικό. Οι αλγεβρικές σχέσεις που προκύπτουν από το πρόβλημα είναι γραμμικές εξισώσεις, με θετικές και αρνητικές ποσότητες, προσθετικές σχέσεις και σχέσεις γινομένων. Στο πρόβλημα αυτό, ο σχηματισμός των εξισώσεων απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στη συντακτική και σημασιολογική μετάφραση, αφού πρέπει να ληφθούν υπόψη οι σχέσεις ποσοτήτων που αφορούν τι αυξομειώσεις στο πλήθος των θέσεων που βρίσκονται μπροστά και πίσω από τον κύριο που αναφέρεται στο πρόβλημα. Οι εικονιστικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν από το περιεχόμενο του προβλήματος αυτού, αποτελούν σκίτσα με τις μετακινήσεις του κυρίου στην ουρά αναμονής, καθώς και σχέδια με το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μπροστά και πίσω από τον κύριο σε κάθε περίπτωση μετακίνησης.

Πιο συγκεκριμένα, η επεξεργασία του δεύτερου προβλήματος από τους μαθητές, έχει ως στόχο να διερευνηθεί:

- Ο τρόπος επεξεργασίας του λεκτικού περιεχομένου από του μαθητές, οι επαναλήψεις στην ανάγνωση της εκφώνησης και οι δυσκολίες στην κατανόηση λέξεων ή φράσεών του

- Η οργάνωση των δεδομένων που αποτελούν οι υποθετικές μετακινήσεις του κυρίου στην ουρά αναμονής, αρχικά κατά 2 θέσεις προς τα πίσω κι έπειτα κατά δύο θέσεις προς τα μπροστά
- Ο εντοπισμός των ζητουμένων του προβλήματος, που αποτελούν το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο και το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται πίσω από τον κύριο στην ουρά αναμονής, ο ορισμός των μεταβλητών σύμφωνα με τα ζητούμενα αυτά και η επιλογή των συμβόλων με τα οποία απεικονίζονται οι μεταβλητές
- Οι δυσκολίες στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων του προβλήματος και στη δημιουργία των μεταβλητών
- Η επιλογή του κάθε μαθητή ως προς τη χρήση συμβολικών ή εικονιστικών αναπαραστάσεων για την εκκίνηση της επεξεργασίας του προβλήματος
- Η συντακτική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στη φράση που περιγράφει την πρώτη μετακίνηση του κυρίου στην ουρά αναμονής «**εάν μετακινηθεί 2 θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του**» και η σημασιολογική ερμηνεία που δίνουν στα σύμβολα των πράξεων για να περιγράψουν τα δεδομένα της φράσης αυτής με σχέσεις συμβόλων
- Η συντακτική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στη φράση που περιγράφει την δεύτερη μετακίνηση του κυρίου στην ουρά αναμονής «**εάν μετακινηθεί δύο θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων**» και η σημασιολογική ερμηνεία των συμβόλων των πράξεων για την συμβολοποίηση των σχέσεων που παρουσιάζει
- Οι δυσκολίες των μαθητών στη συντακτική και σημασιολογική ερμηνεία του κειμένου για την επιλογή συμβόλων και τη διατύπωση των εξισώσεων
- Η δημιουργία σχεδίων με ή χωρίς την παρακίνηση του ερευνητή και τα στοιχεία που απεικονίζουν τα σχέδια των μαθητών
- Η συμβολή των σχεδίων που δημιουργούν οι μαθητές, στην κατανόηση των μετακινήσεων του κυρίου στην ουρά αναμονής και των μεταβολών του πλήθους των ατόμων που βρίσκονται μπροστά και πίσω από τον κύριο σε κάθε περίπτωση μετακίνησης
- Οι δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία των σχεδίων αυτών και η εξοικείωσή τους με αυτή τη μορφή αναπαράστασης του περιεχομένου

Πρόβλημα 3.

« Ένας αγρότης έχει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 140 μέτρα. Ο αγρότης έφραξε τις 3 πλευρές του χωραφιού με φράχτη. Η περίφραξη στοίχισε 3 ευρώ το μέτρο και 40 ευρώ τα εργατικά. Συνολικά ο αγρότης πλήρωσε 370 ευρώ. Ποιες είναι οι διαστάσεις του χωραφιού του αγρότη; »

Το τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας αποτελεί πρόβλημα του πραγματικού κόσμου, το οποίο συνδέεται με το χώρο της γεωμετρίας με την αναφορά του στο χωράφι σχήματος ορθογωνίου. Το πρόβλημα περιέχει εύκολο λεξιλόγιο και το συντακτικό του είναι απλό. Οι εξισώσεις που αναπαριστούν τη λύση του προβλήματος είναι γραμμικές εξισώσεις, με θετικές ποσότητες, σχέσεις αθροίσματος και γινομένου. Πιο συγκεκριμένα, στο πρόβλημα αυτό η μία εξίσωση του γραμμικού συστήματος που αναπαριστά τη λύση του, αποτελεί τον αλγεβρικό τύπο εύρεσης της περιμέτρου ορθογωνίου παραλληλογράμμου, επομένως προϋποθέτει ότι οι μαθητές γνωρίζουν την έννοια της περιμέτρου ορθογωνίου παραλληλογράμμου, η οποία διδάσκεται σε μικρότερες τάξεις. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος παρουσιάζει πιο πολύπλοκες σχέσεις, οι οποίες αφορούν συνδέσεις μεταξύ μήκους, κόστους κατασκευής και κόστους εργατικών για να αποδοθεί το συνολικό ποσό για την κατασκευή του φράχτη που αναφέρεται στην εκφώνηση. Η εικονιστική αναπαράσταση που ενθαρρύνει το πρόβλημα αυτό είναι η απεικόνιση του ορθογώνιου χωραφιού και του φράχτη που περιφράσσει τις τρεις πλευρές του χωραφιού.

Αναλυτικότερα, η επεξεργασία του τρίτου προβλήματος από τους μαθητές έχει ως στόχο να αναδείξει στοιχεία αναφορικά με:

- Τον τρόπο επεξεργασίας του λεκτικού περιεχομένου από του μαθητές, τις επαναλήψεις στην ανάγνωση της εκφώνησης και τις δυσκολίες στην κατανόηση λέξεων ή φράσεών του
- Την οργάνωση των δεδομένων που αποτελούν η περίμετρος του οικοπέδου, οι πλευρές περίφραξης, το κόστος ανά μέτρο περίφραξης, το κόστος των εργατικών εξόδων και το συνολικό κόστος κατασκευής.
- Τον εντοπισμό των ζητουμένων του προβλήματος, που αποτελούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που αναπαριστά το χωράφι το οποίο αναφέρεται στο πρόβλημα
- Τις δυσκολίες στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων του προβλήματος και στη δημιουργία των μεταβλητών
- Την επιλογή του κάθε μαθητή ως προς τη χρήση συμβολικών ή εικονιστικών αναπαραστάσεων για την εκκίνηση της επεξεργασίας του προβλήματος
- Τη σημασιολογική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στα σύμβολα των πράξεων για να περιγράψουν την έννοια της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που αποτελεί το χωράφι
- Τη σημασιολογική ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στις φράσεις του κειμένου για την περίφραξη των τριών πλευρών του χωραφιού, το κόστος των 3 ευρώ για κάθε μέτρο περίφραξης και την επιβάρυνση κατά 40 ευρώ για να εργατικά έξοδα και η σύνδεση των δεδομένων αυτών με το συνολικό κόστος του έργου, για τη συμβολοποίηση των σχέσεων που παρουσιάζονται
- Τις δυσκολίες των μαθητών στη συντακτική και σημασιολογική ερμηνεία του κειμένου για την επιλογή συμβόλων και τη διατύπωση των εξισώσεων

- Τη δημιουργία σχεδίων με ή χωρίς την παρακίνηση του ερευνητή και τα στοιχεία που απεικονίζουν τα σχέδια των μαθητών
- Τη συμβολή των σχεδίων που δημιουργούν οι μαθητές, στον εντοπισμό των πλευρών περίφραξης
- Οι δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία των σχεδίων αυτών

Το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή

Το δεύτερο μέρος του εργαλείου της έρευνας αποτελεί το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή, το οποίο αποτελείται από τρεις σελίδες, μία για κάθε λεκτικό πρόβλημα της έρευνας, οι οποίες παρατίθενται στο παράρτημα της εργασίας. Το φύλλο παρατήρησης διαμορφώνεται με τον ίδιο τρόπο για το κάθε λεκτικό πρόβλημα και ο ερευνητής εργάζεται σε αυτό καθ' όλη τη διάρκεια της επεξεργασίας των προβλημάτων από τους μαθητές, κρατώντας σημαντικές σημειώσεις που προκύπτουν από την παρατήρηση της δράσης των μαθητών όσο εκείνοι επεξεργάζονται το κάθε λεκτικό πρόβλημα.

Αρχικά, στο φύλλο παρατήρησης του ερευνητή συγκεντρώνονται δεδομένα για το πλήθος των μαθητών που διαβάζει πολλές φορές την εκφώνηση του προβλήματος προτού προχωρήσει στην επεξεργασία του. Στη συνέχεια, συλλέγονται ποσοτικά δεδομένα τα οποία αφορούν τις διαδικασίες επεξεργασίας που επιστρατεύονται οι μαθητές για τη δημιουργία αναπαραστάσεων κατά την επεξεργασία του κάθε λεκτικού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, συλλέγονται στοιχεία αναφορικά με το πλήθος των μαθητών που συσχετίζει το πρόβλημα με παρόμοιο απλούστερο πρόβλημα που πηγάζει από την προϋπάρχουσα εμπειρία του, για την ενίσχυση της κατανόησής του, το πλήθος των μαθητών που επιλέγει να ξεκινήσει την επεξεργασία του προβλήματος είτε με συμβολικές αναπαραστάσεις, δημιουργώντας αλγεβρικές σχέσεις, είτε με εικονιστικές αναπαραστάσεις, σχεδιάζοντας σκίτσα για την απεικόνιση των δεδομένων και το πλήθος των μαθητών που χρησιμοποιεί το κάθε είδος εξωτερικής αναπαράστασης του περιεχομένου, ανεξάρτητα με το είδος με το οποίο επέλεξε να ξεκινήσει. Για τους μαθητές που δημιουργούν συμβολικές αναπαραστάσεις, στο φύλλο εργασίας συλλέγονται δεδομένα που αφορούν το πλήθος των μαθητών που εντοπίζει σωστά τις άγνωστες ποσότητες, αλλά και εκείνων που για το σχηματισμό των εξισώσεων καταφέρνουν να μεταφράσουν σωστά σε σύμβολα τις σχέσεις ποσοτήτων. Στη συνέχεια συγκεντρώνονται στοιχεία για το πλήθος των μαθητών που επιλέγει να χρησιμοποιήσει με δική του πρωτοβουλία εικονιστικές αναπαραστάσεις στη λύση του κάθε προβλήματος, αλλά και για το πλήθος των μαθητών που χρησιμοποιεί τέτοιου είδους αναπαραστάσεις έπειτα από την παρακίνηση του ερευνητή. Ακόμη, στο φύλλο παρατήρησης συγκεντρώνονται ποσοτικά στοιχεία για το πλήθος των μαθητών που επιχειρούν να σχεδιάσουν περισσότερες από μία εικονιστικές αναπαραστάσεις.

Στη συνέχεια, στο φύλλο παρατήρησης του ερευνητή συλλέγονται ποσοτικά δεδομένα σχετικά με το πλήθος των μαθητών που αντιμετώπισε δυσκολίες σε σημεία της διαδικασίας επεξεργασίας του κάθε λεκτικού προβλήματος, που αφορούν την κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου τους, τη δημιουργία των μεταβλητών, τη δημιουργία συμβόλων για τη διατύπωση των εξισώσεων και τη δημιουργία σχεδίων για την παρουσίαση εικονιστικών αναπαραστατικών συστημάτων. Παράλληλα, συγκεντρώνονται δεδομένα που αφορούν το πλήθος των μαθητών που σχηματίζουν το σωστό σύστημα εξισώσεων που αναπαριστά τη λύση του κάθε προβλήματος του φύλλου εργασίας, εκείνων που δημιουργούν λανθασμένο σύστημα, αλλά κι εκείνων που δεν παρουσιάζουν κάποιο σύστημα εξισώσεων ως απάντηση για το πρόβλημα.

Τέλος, στο φύλλο παρατήρησης του ερευνητή, συλλέγονται στοιχεία για το πλήθος των μαθητών οι οποίοι εκφράζουν δυνατά τη σκέψη τους και εξηγούν τις ενέργειες που κάνουν κατά την επεξεργασία. Στο κάτω μέρος του φύλλου παρατήρησης, υπάρχει χώρος στον οποίο καταγράφονται σημαντικά στοιχεία από τον ερευνητή, που αφορούν προφορικές περιγραφές των μαθητών, ¨εξωτερικές σημειώσεις¨ που συνοδεύουν τη λύση τους κατά τη διάρκεια επεξεργασίας των προβλημάτων. Οι πληροφορίες αυτές σε συνδυασμό με τα στοιχεία του φύλλου παρατήρησης ενισχύουν τη συλλογή δεδομένων για την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Ωστόσο, από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επεξεργασία των προβλημάτων, δε μπορούν να προκύψουν ξεκάθαρες πληροφορίες σχετικά με την κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές σε κάθε στάδιο επίλυσης. Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν κυρίως από τη διαδικασία της συνέντευξης με τους μαθητές, και σε συνδυασμό με τα δεδομένα από το φύλλο παρατήρησης και το φύλλο εργασίας των μαθητών, βοηθούν στη διατύπωση των αποτελεσμάτων και στη εξαγωγή στη συνέχεια των συμπερασμάτων.

Η συνέντευξη

Κατά τη διάρκεια την επεξεργασίας των προβλημάτων του εργαλείου της έρευνας από τους μαθητές, ο ρόλος του ερευνητή είναι κυρίως καθοδηγητικός, αφού δεν προσφέρει κάποια βοήθεια στους μαθητές και δε σχολιάζει την ορθότητα των λύσεών τους. Ωστόσο, ο ερευνητής ενθαρρύνει τους μαθητές να διαβάζουν προσεκτικά το πρόβλημα και να δοκιμάζουν διαφορετικά αναπαραστατικά συστήματα για να ενισχύσουν την κατανόηση και τη λύση τους. Έπειτα από την ολοκλήρωση της επεξεργασίας καθενός από τα προβλήματα της έρευνας, η παρέμβαση του ερευνητή έχει ως στόχο την εξωτερίκευση της σκέψης του μαθητή, της ¨σκέψης δυνατά¨ όπως αποκαλείται στη βιβλιογραφία, με ερωτήσεις οι οποίες αφορούν όλη τη διαδικασία επεξεργασίας και αποτελούν το μέρος της συνέντευξης της ποιοτικής έρευνας. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης διαμορφώνονται σε τρία ξεχωριστά έντυπα, ένα για το κάθε πρόβλημα, τα οποία παρατίθενται στο παράρτημα της εργασίας. Οι ερωτήσεις είναι διαμορφωμένες σύμφωνα με τους άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων και το περιεχόμενο του κάθε προβλήματος, και αφορούν:

- Την κατανόηση της εκφώνησης του κειμένου και την ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στις λεκτικές περιγραφές, την κατανόηση των δεδομένων και των σχέσεων που παρουσιάζονται
- Τον εντοπισμό των ζητουμένων του προβλήματος και των άγνωστων ποσοτήτων
- Τις διαδικασίες που επιλέγουν οι μαθητές για να κατανοήσουν το πρόβλημα:
    - την επιλογή συσχετισμού του προβλήματος με κάποιο απλούστερο
    - τη διατύπωση συμβολικών αλγεβρικών σχέσεων που βοηθούν στη δημιουργία των εξισώσεων
    - τη δημιουργία σχεδίων για την αναπαράσταση του λεκτικού περιεχομένου
- Την ερμηνεία των συμβόλων που δημιουργούν οι μαθητές για τη διατύπωση των εξισώσεων και την ερμηνεία των σχέσεων που παρουσιάζουν
- Την ερμηνεία για την επιλογή των σκίτσων που δημιούργησαν οι μαθητές για την περιγραφή των δεδομένων
- Τη σημασία που έχει για τους μαθητές η δημιουργία ενός σχεδίου για την υποστήριξη της λύσης τους
- Τους λόγος που εμπόδισαν την παρουσίαση τελικής απάντησης για όσους μαθητές δεν απάντησαν σε κάποιο πρόβλημα
- Τις δυσκολίες που συνάντησα οι μαθητές
    - στην επεξεργασία του κειμένου του προβλήματος
    - στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων από το κείμενο του προβλήματος
    - στη δημιουργία συμβόλων για τη διατύπωση των εξισώσεων
    - στη δημιουργία σχεδίων

Διαδικασία

Η ποιοτική έρευνα πραγματοποιήθηκε ατομικά με τον κάθε μαθητή. Με τους περισσότερους μαθητές πραγματοποιήθηκε στο χώρο του σχολείου και με 2 μαθητές κατ' οίκον. Σε κάθε μαθητή δόθηκαν τρεις κόλλες χαρτί, μία για καθένα από τα τρία προβλήματα, ώστε να υπάρχει αρκετός χώρος για σημειώσεις, σχήματα και αναπαραστάσεις. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους έως και 90 λεπτά για την επεξεργασία και των τριών προβλημάτων. Καθ' όλη τη διάρκεια της επεξεργασίας των προβλημάτων ο ρόλος του ερευνητή ήταν καθοδηγητικός. Δε βοηθούσε τους μαθητές, αλλά τους προέτρεπε να εκφράζουν τη σκέψη τους δυνατά και τους παρακινούσε να δοκιμάζουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των λύσεών τους, ενώ παράλληλα ο ίδιος κρατούσε σημειώσεις στο φύλλο παρατήρησης για τις ενέργειες των μαθητών και κατέγραφε προφορικές περιγραφές που έκαναν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας. Έπειτα από την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του φύλλου εργασίας από τον κάθε μαθητή, ακολούθησε ατομική συνέντευξη με ερωτήσεις που αφορούσαν όλα τα στάδια της διαδικασίας, η οποία διήρκησε για τον καθένα από 10 έως 15 λεπτά και έγινε ηχογράφηση των απαντήσεων που δόθηκαν. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης αποσκοπούν στη συλλογή στοιχείων για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ερμήνευσαν τα δεδομένα του κάθε προβλήματος, για τη συλλογιστική που ακολούθησαν για την επιλογή συμβόλων, πράξεων και αναπαραστάσεων, αλλά και για τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας των προβλημάτων για τη μετατροπή τους σε σύστημα εξισώσεων.

Ανάλυση δεδομένων

Από την έρευνα συγκεντρώθηκαν από τον κάθε μαθητή τα τρία φύλλα εργασίας, τα φύλλα παρατήρησης του ερευνητή και το υλικό από τις συνεντεύξεις, οι ηχογραφήσεις και οι σημειώσει του ερευνητή, όπου καταγράφεται η ¨δυνατή σκέψη¨ και οι περιγραφές των μαθητών κατά τη διάρκεια επεξεργασίας των προβλημάτων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από την έρευνα αναλύονται στη συνέχεια ποσοτικά και ποιοτικά, ως προς τα τρία βασικά σημεία που ορίζουν οι άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων: τις διαδικασίες μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές με βάση την ατομική τους κατανόηση, τις συμβολικές αναπαραστάσεις που διατυπώνουν και τις εικονιστικές αναπαραστάσεις που ενδεχομένως επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν για να στηρίξουν τη δημιουργία των συμβολικών, και τις δυσκολίες που συναντούν στην κατανόηση του κειμένου και στη δημιουργία του κάθε είδους αναπαράστασεων. Τα ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα που προκύπτουν από την έρευνα αναλύονται σε συνδυασμό, καθώς το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό και επιτρέπει την παρουσίαση ποσοτικών στοιχείων παράλληλα με τις αναλύσεις των ενεργειών των μαθητών.

Πιο συγκεκριμένα, η ποσοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων βασίζεται κυρίως στο φύλλο παρατήρησης του ερευνητή και στα φύλλα εργασίας που συλλέχθηκαν από τους μαθητές. Η συλλογή των δεδομένων από τα δύο αυτά εργαλεία συγκεντρώνει πληροφορίες για τον αριθμό των μαθητών που:

- κατανοεί και ερμηνεύει σωστά τις πληροφορίες που αντλεί από το κείμενο του προβλήματος, τα δεδομένα και τις σχέσεις ποσοτήτων
- χρησιμοποιεί διαδικασίες συσχετισμού του προβλήματος με απλούστερο πρόβλημα από την προϋπάρχουσα εμπειρία που αναπτύχθηκε σε μικρότερες τάξεις
- χρησιμοποιεί συμβολικές αλγεβρικές αναπαραστάσεις για να στηρίξει τη λύση του
- νοηματοδοτεί τα αλγεβρικά εργαλεία και σχηματίζει σωστές εξισώσεις
- χρησιμοποιεί σχέδια για να στηρίξει τη λύση του, είτε αυτοβούλως είτε με την παρακίνηση του ερευνητή
- χρησιμοποιεί περισσότερες από μία εικονιστικές αναπαραστάσεις για την απεικόνιση του προβλήματος
- σχηματίζει λανθασμένες εξισώσεις ή δεν παρουσιάζει λύση

- παρουσιάζει δυσκολίες στην κατανόηση του κειμένου, στον εντοπισμό των δεδομένων και των ζητουμένων, στη δημιουργία συμβολικών σχέσεων και στη δημιουργία σχεδίων

Η ποιοτική ανάλυση βασίζεται κυρίως σε στοιχεία που συλλέχθηκαν από τις ηχογραφήσεις των περιγραφών των μαθητών κατά τη συνέντευξη, όπου περιγράφονται οι διαδικασίες που οι ίδιοι ακολούθησαν στην επεξεργασία των προβλημάτων για τη διατύπωση των λύσεων που παρουσιάζουν στο φύλλο εργασίας. Κατά την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων, παρουσιάζονται στοιχεία που αφορούν:

- τις περιγραφές των στοιχείων της εκφώνησης από τους μαθητές
- τη συλλογιστική των μαθητών για τον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων του κειμένου
- την ενίσχυση της ατομικής τους κατανόησης από μεθόδους συσχετισμού των προβλημάτων με απλούστερα προβλήματα, από τη διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων ή σχεδίων
- τη συντακτική και σημασιολογική μετάφραση του κειμένου για την επιλογή των συμβόλων και την περιγραφή του σχηματισμού των εξισώσεων του συστήματος
- τη συλλογιστική των μαθητών για το σχηματισμό των εικονιστικών αναπαραστάσεων
- τη συμβολή που θεωρούν οι μαθητές ότι έχουν οι εικόνες στην κατανόηση στοιχείων του προβλήματος και στη δημιουργία των αλγεβρικών σχέσεων
- τις δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές κατά την επεξεργασία του κειμένου, τον εντοπισμό δεδομένων και ζητουμένων και τη δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων και σχεδίων
- τους λόγους οι οποίοι εμπόδισαν την επίλυση του προβλήματος, εάν δεν παρουσιάστηκε τελική απάντηση

Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Με σκοπό την εξασφάλιση της αξιοπιστίας της παρούσας έρευνας, επιλέχθηκε δείγμα με ίδιο αριθμό μαθητών πρώτης και δευτέρας λυκείου, ίσου πλήθους αγοριών και κοριτσιών ενώ ταυτόχρονα επιλέχθηκαν για να συμμετέχουν στην έρευνα μαθητές όλων των επιπέδων σε ότι αφορά την επιτυχία στο μάθημα των μαθηματικών. Ακόμη, έγινε χρήση πολλαπλών μέσων συλλογής δεδομένων, αφού τα στοιχεία της ανάλυσης συγκεντρώθηκαν από τα φύλλα εργασίας των μαθητών, τα φύλλα παρατήρησης του ερευνητή και τις ηχογραφήσεις των συνεντεύξεων, τα οποία στη συνέχεια διασταυρώθηκαν για να προκύψουν σαφή και αξιόπιστα ευρήματα. Με στόχο την αξιοπιστία της έρευνας, το εργαλείο με τα προβλήματα, το φύλλο παρατήρησης και οι ερωτήσεις της συνέντευξης δοκιμάστηκαν αρχικά σε ένα περιορισμένο δείγμα, ένα μαθητή πρώτης λυκείου και ένα μαθητή δευτέρας λυκείου, κι έπειτα η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο δείγμα των δέκα μαθητών.

Παράλληλα, η εγκυρότητα επιδιώκεται μέσω της σύνδεσης του εργαλείου με τα ερευνητικά ερωτήματα και το εννοιολογικό πλαίσιο της παρούσας έρευνας. Ο σχεδιασμός των προβλημάτων του φύλλου εργασίας των μαθητών έγινε με τρόπο ώστε οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών σε συνδυασμό με τις σημειώσεις του φύλλου παρατήρησης του ερευνητή και το υλικό που συγκεντρώθηκε από τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις της συνέντευξης, να καλύπτουν τα ερευνητικά ερωτήματα, το περιεχόμενο των ερευνητικών απόψεων και την ανάλυση των εννοιών βάσει της βιβλιογραφίας, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν αξιόπιστα αποτελέσματα. Τα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας του εργαλείου παρουσιάζονται με ομοιογένεια και συνοχή και μαζί με το φύλλο παρατήρησης και τις ερωτήσεις της συνέντευξης, επιδιώκουν να αντλήσουν πληροφορίες για την κατανόηση των μαθητών καθώς μελετούν την εκφώνηση του προβλήματος, την αναπαράσταση του προβλήματος με συμβολικά ή εικονιστικά σχήματα, αλλά και τις δυσκολίες σε αυτά τα στάδια επεξεργασίας του προβλήματος. Έτσι, αναλύονται βάσει των τριών αξόνων των ερευνητικών ερωτημάτων, ως προς την κατανόηση, τις διαδικασίες μετασχηματισμού, τις συμβολικές και εικονιστικές εξωτερικές αναπαραστάσεις και τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές κατά τη μετατροπή ενός λεκτικού προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, οι περισσότεροι μαθητές εκδήλωσαν ιδιαίτερη προθυμία και ενθουσιασμό για τη συμμετοχή τους. Εμφανής ήταν η αγωνία ορισμένων μαθητών, οι οποίοι όταν έλαβαν το φύλλο εργασίας με τα λεκτικά προβλήματα, προτού ξεκινήσουν να τα επεξεργάζονται, δήλωσαν ότι δεν έχουν καλή σχέση με τα προβλήματα των μαθηματικών. Οι περισσότεροι ανέφεραν ότι τα προβλήματα αποτελούν για αυτούς δύσκολο αντικείμενο από την αρχή της εμφάνισής τους στη μαθηματική εκπαίδευση. Ωστόσο, αυτή η έλλειψη εξοικείωσης με τα λεκτικά προβλήματα μαθηματικών, για κάποιους μαθητές λειτούργησε ως πρόκληση, αφού το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αφιέρωσε τον απαραίτητο χρόνο στην επεξεργασία και των τριών προβλημάτων, ανεξαρτήτως των δυσκολιών που εμφανίστηκαν. Τα περισσότερα παιδιά αφιέρωσαν από 45 έως 60 λεπτά στην επεξεργασία των προβλημάτων, μία μαθήτρια της Β΄ τάξης ολοκλήρωσε το σχεδιασμό της λύσης και των τριών προβλημάτων σε 30 λεπτά, ενώ ένας μαθητής της Α΄ τάξης και μία μαθήτρια της Β΄ τάξης χρειάστηκαν 80 περίπου λεπτά για να ολοκληρώσουν και να διατυπώσουν την τελική τους απάντηση. Παράλληλα, οι περισσότεροι μαθητές συνεργάστηκαν επιτυχώς με τον ερευνητή, εκφράζοντας προφορικά τη σκέψη τους και τις ενέργειές τους σε κάθε βήμα, βοηθώντας έτσι στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων της έρευνας.

Κάποιοι μαθητές της Α΄ τάξης του λυκείου δεν θυμόντουσαν την έννοια του γραμμικού συστήματος εξισώσεων και τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Παρόλα αυτά, κανένας από τους μαθητές δε ζήτησε να αποσυρθεί από τη διαδικασία της έρευνας, αντιθέτως μάλιστα, οι μαθητές αυτοί προσπάθησαν να ερμηνεύσουν την έννοια «σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους» για να θυμηθούν τη μορφή και το σχηματισμό των συστημάτων ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν στην επεξεργασία των προβλημάτων και να εκφράσουν με τον τρόπο αυτό το περιεχόμενο του κάθε προβλήματος.

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά για το κάθε πρόβλημα του εργαλείου της έρευνας, ποσοτικά στοιχεία τα οποία προκύπτουν από το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή και το φύλλο εργασίας των μαθητών και ποιοτικά στοιχεία τα οποία προκύπτουν από τις συνεντεύξεις των μαθητών σε συνδυασμό με τις γραπτές λύσεις που παρουσιάζουν οι ίδιοι στο φύλλο εργασίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Ποσοτική ανάλυση: Φύλλο παρατήρησης του ερευνητή - Φύλλο εργασίας μαθητών

Από τις λύσεις που διατύπωσαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας με τα λεκτικά προβλήματα και το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή με τις ενέργειες των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης, προκύπτουν ποσοτικά δεδομένα τα οποία αφορούν σημεία της διαδικασίας που σχετίζονται με τους τρόπους χειρισμού των προβλημάτων που ακολουθούν οι μαθητές σύμφωνα με την κατανόησή τους, τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν και τις δυσκολίες που συναντούν κατά την πορεία αυτή.

Στο πρώτο πρόβλημα, όλοι οι μαθητές παρουσίασαν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ως λύση. Από τις απαντήσεις των 10 μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα οι 6 αποτελούν το σωστό σύστημα εξισώσεων.

Διαδικασίες μετατροπής

Επεξεργασία εκφώνησης

Στο πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας οι μαθητές δεν αφιέρωσαν πολύ χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης, καθώς 4 ήταν εκείνοι που διάβασαν πολλές φορές την εκφώνηση προτού ξεκινήσουν την επεξεργασία του. Από το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος 8 μαθητές εντόπισαν τις άγνωστες ποσότητες και τις απεικόνισαν με δύο διαφορετικές μεταβλητές, ενώ 2 μαθητές οι οποίοι δεν κατανόησαν τα ζητούμενα του προβλήματος, δεν προχώρησαν σε σωστό ορισμό μεταβλητών.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Σύμφωνα με τα στοιχεία που συλλέχθηκαν από το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή, ελάχιστοι ήταν οι μαθητές οι οποίοι επιχείρησαν να συσχετίσουν τα προβλήματα που είχαν να επεξεργαστούν με παρόμοια απλούστερα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα ακολούθησαν τη διαδικασία αυτή 2 μαθητές.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Οι μαθητές της έρευνας έδειξαν την προτίμησή τους στους συμβολικούς τρόπους αναπαράστασης της λύσης του προβλήματος, αφού σύμφωνα με τα στοιχεία που συλλέχθηκαν, φαίνεται ότι όλοι οι μαθητές παρουσίασαν λύσεις με συμβολικό χαρακτήρα. Στο πρώτο πρόβλημα όλοι οι μαθητές ξεκίνησαν να επεξεργάζονται το περιεχόμενο χρησιμοποιώντας συμβολικές αναπαραστάσεις. Οι 6 από τους μαθητές της έρευνας κατάφεραν να ερμηνεύσουν σωστά τα δεδομένα και τα ζητούμενα του πρώτου προβλήματος για τη συμβολοποίηση των σχέσεων και τη δημιουργία των εξισώσεων. Από τους μαθητές που δεν το κατάφεραν, οι 2 δεν επέλεξαν να απεικονίσουν με μεταβλητές τις κατάλληλες ποσότητες, με αποτέλεσμα το σύστημα που παρουσίασαν να μην απεικονίζει τη λύση του προβλήματος. Οι άλλοι 2 μαθητές που διατύπωσαν λάθος σύστημα εξισώσεων, δεν επέλεξαν τα κατάλληλα σύμβολα πράξεων για να εκφράσουν τις σχέσεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

Χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων

Στο πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας κανένας από τους μαθητές δε ξεκίνησε την επεξεργασία του προβλήματος δημιουργώντας σχέδιο. Κατά τη διάρκεια επεξεργασίας, ένας μαθητής επιχείρησε να δημιουργήσει εικονιστικές αναπαραστάσεις με δική του πρωτοβουλία. Κατά την επεξεργασία του προβλήματος αυτού, ήταν και η πρώτη φορά όπου ο ερευνητής παρακίνησε τους μαθητές να επιχειρήσουν μορφές αναπαράστασης με κάποιο σχέδιο ή σχήμα. Έπειτα από την παρακίνηση του ερευνητή, ακόμη 3 μαθητές δημιούργησαν σχέδια για να απεικονίσουν το περιεχόμενο του προβλήματος. Κανένας μαθητής δε δοκίμασε να δημιουργήσει περισσότερα σχέδια για την απεικόνιση του περιεχομένου του προβλήματος.

Δυσκολίες

Από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια επεξεργασίας των προβλημάτων του φύλλου εργασίας, συλλέχθηκαν δεδομένα στο φύλλο παρατήρησης του ερευνητή, που αφορούν τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν στους μαθητές της έρευνας. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά, στο πρώτο πρόβλημα, από τους 10 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσίασαν δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου 4 μαθητές και στον εντοπισμό και τη δημιουργία μεταβλητών παρουσίασαν δυσκολία 3 μαθητές. Η δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων ήταν το στάδιο επίλυσης που παρουσίασε τις μεγαλύτερες δυσκολίες, αφού 7 μαθητές έδειξαν ότι δυσκολεύονται στην επιλογή των εργαλείων για τη συμβολοποίηση των σχέσεων και τη δημιουργία εξισώσεων. Σε ότι αφορά τη δημιουργία εικόνων για την αναπαράσταση του λεκτικού περιεχομένου, και οι 4 μαθητές που επιχείρησαν να σχεδιάσουν εικονιστικές αναπαραστάσεις, είτε με δική τους πρωτοβουλία είτε έπειτα από προτροπή του ερευνητή, παρουσίασαν δυσκολίες κατά τη διαδικασία αυτή.

Ποιοτική ανάλυση: Συνέντευξη - Φύλλο εργασίας μαθητών

Έπειτα από την επεξεργασία του φύλλου εργασίας από τους μαθητές, ακολούθησε η συνέντευξη, με ερωτήσεις σχετικά με την κατανόηση που αναπτύχθηκε στους μαθητές κατά την επεξεργασία των προβλημάτων και την ερμηνεία των ενεργειών που ακολούθησαν για τη διατύπωση των γραπτών λύσεων στο φύλλο εργασίας. Στόχος της συνέντευξης είναι η ανάδειξη χαρακτηριστικών που αφορούν την ερμηνεία των λεκτικών και συντακτικών δεδομένων των προβλημάτων από τους μαθητές, για τη μετατροπή τους σε αλγεβρικές σχέσεις με αριθμούς και σύμβολα, με τη βοήθεια εξωτερικών αναπαραστάσεων και οι δυσκολίες που προκύπτουν στη διαδικασία αυτή. Κάποιοι μαθητές ανέφεραν πως μετά από την επεξεργασία του πρώτου προβλήματος ένιωσαν ότι μπήκαν στο ¨κλίμα¨ της έρευνας και τα επόμενα δύο τα διαχειρίστηκαν με ένα πιο οργανωμένο σκεπτικό. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα ευρήματα που προκύπτουν από τη συνέντευξη της έρευνας, τα οποία βασίζονται στις προφορικές απαντήσεις των παιδιών σε συνδυασμό με τις γραπτές λύσεις τους στο φύλλο εργασίας.

Διαδικασίες μετατροπής

Κατανόηση κειμένου

Αναφορικά με το πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών υποστηρίζει ότι το κείμενο του προβλήματος ήταν σαφές και κατανοητό. Οι ίδιοι, θεωρούν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος ήταν ξεκάθαρα, δεν υπήρχαν δυσνόητες λέξεις ή φράσεις, γεγονός το οποίο δεν τους έφερε αντιμέτωπους με δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Πολλοί μαθητές, περιέγραψαν τα στοιχεία του προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους, παρουσιάζοντας όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα, γεγονός που φανερώνει την εξοικείωσή τους με το περιεχόμενο.

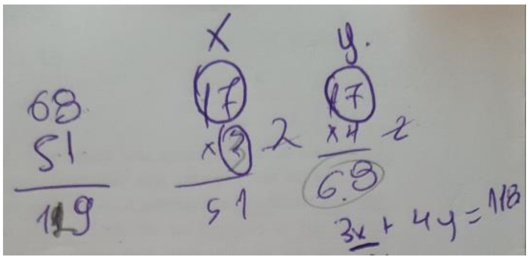
Ορισμός μεταβλητών

Στο πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας των μαθητών, όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις μεταβλητές χ και ψ για τον ορισμό των άγνωστων ποσοτήτων. Οι 8 από τους 10 μαθητές έκαναν τη σωστή επιλογή μεταβλητών, θέτοντας χ και ψ το πλήθος των τρίκλινων και το πλήθος των τετράκλινων δωματίων. Οι μαθητές αυτοί σκέφτηκαν με τον ίδιο τρόπο, όπως ένας από αυτούς εξηγεί: «Φαίνεται εύκολα ποιες είναι οι άγνωστες ποσότητες από το ερώτημα του προβλήματος που ζητάει να βρεθεί το πλήθος των τρίκλινων και τετράκλινων δωματίων που έκλεισε το σχολείο για την εκδρομή, άρα η μία μεταβλητή θα συμβολίζει τον αριθμό των τρίκλινων δωματίων και η άλλη τον αριθμό των τετράκλινων δωματίων που έκλεισαν».

Ένας διαφορετικός χειρισμός εντοπίστηκε από μία μαθήτρια της Β΄ Λυκείου η οποία δε χρησιμοποίησε μόνο τις μεταβλητές χ και ψ, αλλά δημιούργησε και δύο επιπλέον, ορίζοντας ως χ το πλήθος των τρίκλινων δωματίων, ως ψ το πλήθος των τετράκλινων δωματίων, ως ζ το σύνολο των παιδιών που θα μπουν στα τρίκλινα δωμάτια και ως ω το πλήθος των παιδιών που θα μπουν στα τετράκλινα δωμάτια. Στη συνέντευξη, η ίδια εξηγεί: «Το χ είναι το πλήθος των τρίκλινων και το ψ είναι το πλήθος των τετράκλινων δωματίων. Το ζ=3χ αφού το σύνολο των παιδιών που μπαίνουν στα τρίκλινα δωμάτια είναι ίσο με το πλήθος των χ δωματίων επί τρία παιδιά στο καθένα, και ω=4ψ αφού το σύνολο των παιδιών που μπαίνουν στα τετράκλινα είναι ίσο με το πλήθος των ψ δωματίων επί τέσσερα παιδιά στο κάθε τετράκλινο δωμάτιο». Στη συνέχεια με τη βοήθεια αυτών των μεταβλητών προχώρησε στη δημιουργία των συμβολικών αναπαραστάσεων.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Στο πρώτο πρόβλημα, δύο ήταν οι μαθητές που επιχείρησαν να απλοποιήσουν το περιεχόμενο του προβλήματος για να μπορέσουν να το κατανοήσουν καλύτερα και να σχεδιάσουν ένα πλάνο για τη λύση του. Όπως οι ίδιοι αναφέρουν στη συνέντευξη, επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν τυχαίους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών και να κάνουν δοκιμές με τους αριθμούς αυτούς. Η διαδικασία αυτή τους βοήθησε να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των άγνωστων και γνωστών ποσοτήτων, για να μπορέσουν να επιλέξουν στη συνέχεια τα κατάλληλα αλγεβρικά εργαλεία για το σχηματισμό του συστήματος που περιγράφει τη λύση του προβλήματος. Κατά τη συνέντευξη μία μαθήτρια εξήγησε: «Αρχικά, αν υποθέσουμε ότι από τα 34 δωμάτια τα 17 ήταν τρίκλινα και τα 17 τετράκλινα, τότε 3 μαθητές μπήκαν στα 17 τρίκλινα άρα οι μαθητές αυτοί ήταν συνολικά 51, και 4 μαθητές μπήκαν στα 17 τετράκλινα δωμάτια άρα ήταν συνολικά 68 μαθητές στα τετράκλινα. Το σύνολο αυτών είναι 51+68=119, εμείς όμως θέλουμε οι μαθητές να είναι όλοι μαζί 118, άρα τα δωμάτια δεν ήταν μισά τρίκλινα και μισά τετράκλινα. Επομένως, αν πούμε ότι χ ήταν τα τρίκλινα και δεν ξέρουμε πόσα είναι και ψ είναι τα τετράκλινα, τότε όλοι οι μαθητές μαζί θα είναι 3χ και 4ψ». Οι δοκιμές που περιέγραψε η μαθήτρια φαίνονται στην εικόνα 1.



Εικόνα 1

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Στο πρώτο πρόβλημα πολλοί μαθητές ξεκίνησαν να επεξεργάζονται να στοιχεία της εκφώνησής του σημειώνοντας αλγεβρικές σχέσεις. Κάποιοι από αυτούς, δίπλα από τις αλγεβρικές σχέσεις σημείωναν με λέξεις τι περιγράφουν οι παραστάσεις που παρουσίαζαν. Στη συνέντευξη οι μαθητές υποστηρίζουν ότι ο τρόπος αυτός τους βοηθά να θυμούνται τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που αναφέρονται στο πρόβλημα, αλλά και να αξιολογούν αν η σκέψη τους οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα.

- *Σωστός σχηματισμός εξισώσεων του συστήματος*

Οι 8 μαθητές οι οποίοι εντόπισαν τις άγνωστες ποσότητες και όρισαν τις κατάλληλες μεταβλητές, δημιούργησαν σωστά τη σχέση του συστήματος που αφορούσε το πλήθος των δωματίων. Η πλειοψηφία των μαθητών, όπως εξηγούν στη συνέντευξη, ερμήνευσε τη φράση του προβλήματος «για τη διαμονή τους στο ξενοδοχείο έκλεισαν 34 δωμάτια, τρίκλινα και τετράκλινα» ως τη σχέση χ+ψ=34, αφού το σύνολο των χ τρίκλινων και ψ τετράκλινων δωματίων είναι ίσο με 34. Πολλοί μαθητές της Α΄ Λυκείου είχαν την τάση να παρουσιάζουν τη μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Για παράδειγμα, κάποιοι σκέφτηκαν: «εφόσον όλα τα δωμάτια μαζί είναι 34 τότε αν χ είναι τα τρίκλινα, τα ψ τετράκλινα θα είναι τα υπόλοιπα, δηλαδή αν από τα 34 δωμάτια βγάλουμε τα χ τρίκλινα» και σημείωσαν σχέσεις της μορφής: 34 - χ = ψ.

Στο σχηματισμό της δεύτερης σχέσης του συστήματος υπήρξαν λιγότερες σωστές απαντήσεις. Έξι από τους μαθητές της έρευνας σχημάτισαν σωστά τη σχέση: 3χ+4ψ=118. Οι περισσότεροι από αυτούς όπως ανέφεραν στη συνέντευξη, χώρισαν τη διαδικασία σε επιμέρους κομμάτια κρατώντας σημειώσεις. Μία από τους μαθητές που σχημάτισαν σωστά τη δεύτερη σχέση αναφέρει: «Αρχικά σκέφτηκα πως 3 μαθητές θα μπουν σε καθένα από τα χ τρίκλινα δωμάτια και αντίστοιχα 4 μαθητές θα μπουν σε καθένα από τα ψ τετράκλινα δωμάτια, επομένως έτσι προκύπτουν τα γινόμενα 3χ και 4ψ που περιγράφουν το πλήθος των μαθητών που μπήκε στο κάθε δωμάτιο. Αν προσθέσουμε το 3χ με το 4ψ θα έχουμε το πλήθος όλων των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή, άρα 3χ + 4ψ = 118». Η μαθήτρια αυτή μαζί με τους υπόλοιπους που σχημάτισαν σωστά την εξίσωση, εκτέλεσαν σωστή συντακτική και σημασιολογική μετάφραση του κειμένου του προβλήματος.

- *Λάθος σχηματισμός συμβολικών αναπαραστάσεων*

Στο σχηματισμό της ίδιας σχέσης του συστήματος, παρουσιάστηκαν και συμβολικές αναπαραστάσεις που σχηματίστηκαν με λάθος τρόπο, όπως φαίνεται παρακάτω:

- 118: (χ + ψ) = 34

Ο μαθητής που σχημάτισε αυτή τη σχέση, όπως εξηγεί στη συνέντευξη, σκέφτηκε πως οι μαθητές που αναφέρει το πρόβλημα ¨μοιράστηκαν¨ στα δωμάτια, κι έτσι μετέφρασε το διαμερισμό στην πράξη της διαίρεσης την οποία και χρησιμοποίησε για το σχηματισμό της δεύτερης σχέσης.

- 118 : 34 = 3χ + 4ψ

Η μαθήτρια που παρουσίασε τη σχέση αυτή, σκέφτηκε πως εφόσον οι 118 μαθητές μοιράστηκαν στα 34 δωμάτια, τότε προκύπτει μία σχέση ποσοτήτων 118 : 34, η οποία είναι ίση με τους μαθητές. Στη συνέχεια σκέφτηκε ότι εφόσον τα χ δωμάτια είναι τρίκλινα και τα ψ είναι τετράκλινα τότε το άθροισμα 3χ + 4ψ θα είναι ίσο με το πηλίκο των παιδιών προς τα δωμάτια.

- *Εξισώσεις που σχηματίστηκαν με λανθασμένο ορισμό μεταβλητών*

Στο ίδιο πρόβλημα, δύο μαθητές θεώρησαν ως χ και ψ το συνολικό πλήθος των μαθητών που έμειναν στα τρίκλινα και τετράκλινα δωμάτια αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να σχηματίσουν τη σχέση χ+ψ=118, θεωρώντας ότι το άθροισμα των χ και ψ εδώ παριστάνει το σύνολο των μαθητών. Στη συνέχεια, για να περιγράψουν τη σχέση που δίνει το πλήθος των δωματίων, όπως εξηγούν, σκέφτηκαν πως τα χ στο πλήθος παιδιά μπήκαν στα τρίκλινα δωμάτια και το ψ στο πλήθος παιδιά μπήκαν στα τετράκλινα δωμάτια, επομένως 3χ+4ψ = 34. Στο σχηματισμό της σχέσης αυτής, δε νοηματοδοτείται σωστά η πράξη του πολλαπλασιασμού, αφού σύμφωνα με τον ορισμό των μεταβλητών, το πλήθος των τρίκλινων δωματίων δίνεται από τη σχέση χ:3 και αντίστοιχα το πλήθος των τετράκλινων δωματίων δίνεται από τη σχέση ψ:4. Επομένως, εδώ οι μαθητές δεν εκτελούν σωστά τη σημασιολογική μετάφραση και την εννοιολογική ερμηνεία των συμβόλων των πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

Οι λανθασμένες συμβολικές αναπαραστάσεις που σχηματίστηκαν από τους μαθητές για τη δημιουργία του συστήματος εξισώσεων που αποτελεί τη λύση του πρώτου προβλήματος και οι αιτίες εμφάνισης των λαθών, συνοψίζονται στον Πίνακα 1.

1η εξίσωση	**Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε**	**Αιτίες εμφάνισης λαθών**
χ+ψ=118	2	Επιλογή μεταβλητών
2η εξίσωση	**Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε**	**Αιτίες εμφάνισης λαθών**
118:(χ+ψ)=34	1	Σημασιολογική μετάφραση
118:34=3χ+4ψ	1	Σημασιολογική μετάφραση
3χ+4ψ=34	2	Επιλογή μεταβλητών Σημασιολογική μετάφραση

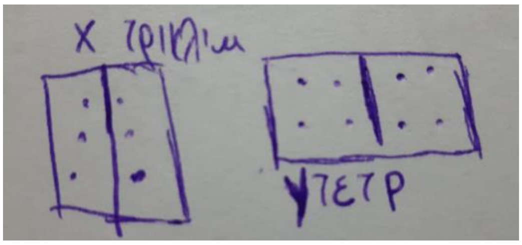
Πίνακας 1: Πρόβλημα 1 - Λανθασμένες συμβολικές αναπαραστάσεις

Εικονιστικές αναπαραστάσεις

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στο πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας τέσσερις ήταν οι μαθητές που χρησιμοποίησαν εικονιστικά αναπαραστατικά συστήματα, εκ των οποίων μόνο ο ένας σχεδίασε εικονικές αναπαραστάσεις με δική του πρωτοβουλία. Στο πρόβλημα αυτό εντοπίστηκαν τρεις διαφορετικές κατηγορίες εικονιστικών αναπαραστάσεων: σχηματικές αναπαραστάσεις, εξεικονιστικές αναπαραστάσεις και συμβολικές εικονιστικές αναπαραστάσεις.

Σχηματικές αναπαραστάσεις

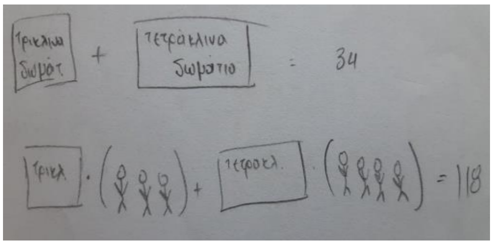
Ο μαθητής ο οποίος με δική του πρωτοβουλία σχεδίασε εικόνες, παρουσίασε μια *σχηματική* αναπαράσταση όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Όπως εξηγεί στη συνέντευξη: «Σχεδίασα δύο σχήματα. Στο ένα είναι δύο τρίκλινα και στο άλλο είναι δύο τετράκλινα δωμάτια». Ο ίδιος αναφέρει ότι αυτό το εικονιστικό αναπαραστατικό σύστημα του φάνηκε χρήσιμο, αφού τον οδήγησε στη διατύπωση δύο αλγεβρικών σχέσεων όπως έγραψε και στη συνέχεια: «Σε κάθε χ τρίκλινο δωμάτιο χωράνε 3 παιδιά, άρα το πλήθος τους είναι 3χ και σε κάθε ψ τετράκλινο δωμάτιο χωράνε 4 παιδιά, άρα το πλήθος τους είναι 4ψ». Οι σχέσεις αυτές αξιοποιήθηκαν στη συνέχεια για τη δημιουργία του συστήματος.



Εικόνα 2

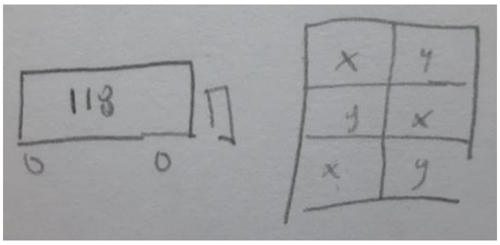
Εξεικονιστικές αναπαραστάσεις

Οι μαθητές που δοκίμασαν να σχεδιάσουν αναπαραστάσεις έπειτα από την παρεμβολή του ερευνητή, αρχικά εκδήλωσαν ιδιαίτερη αμηχανία κατά την επεξεργασία του φύλλου εργασίας, κι έπειτα στη συνέντευξη, δήλωσαν ότι δεν είναι καθόλου εξοικειωμένοι με τη μέθοδο αυτή. Η αναπαράσταση της εικόνας 3 αποτελεί μια *εξεικονιστική* αναπαράσταση στην οποία όμως εμπλέκονται και τα σύμβολα των πράξεων και της ισότητας. Η μαθήτρια που σχεδίασε την αναπαράσταση αυτή προσπάθησε να ζωγραφίσει τα δωμάτια του ξενοδοχείου και τα παιδιά που αντιστοιχούν σε κάθε είδος δωματίου, τρίκλινο και τετράκλινο, και μέσα στη ζωγραφιά αυτή επιχείρησε να εντάξει τις σχέσεις που συνδέουν τα δεδομένα. Η ίδια εξηγεί: «Ουσιαστικά προσπάθησα να ζωγραφίσω με κάποιο τρόπο τα στοιχεία που χρησιμοποίησα για να σχηματίσω τις εξισώσεις του συστήματος που είχα ήδη γράψει. Δεν ήξερα πώς μπορώ να συμβολίσω τα τρίκλινα και τα τετράκλινα δωμάτια για αυτό και τα έγραψα με λέξεις».



Εικόνα 3

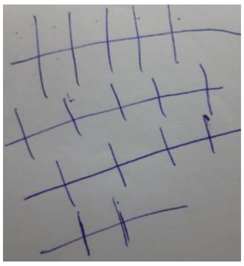
Στη συνέχεια, η αναπαράσταση που φαίνεται στην εικόνα 4, αποτελεί μια *εξεικονιστική* αναπαράσταση και απεικονίζει το λεωφορείο που μετέφερε τους 118 μαθητές που συμμετείχαν στην εκδρομή, στο ξενοδοχείο με τα τρίκλινα και τετράκλινα δωμάτια, τα οποία συμβολίζονται με χ και ψ στη ζωγραφιά που παριστάνει το ξενοδοχείο. Παρόλο που η ζωγραφιά αυτή δεν ενίσχυσε ουσιαστικά την κατανόηση του μαθητή που τη σχεδίασε, ο ίδιος δεν επιχείρησε να δημιουργήσει κάποιο άλλο σχέδιο.



Εικόνα 4

Συμβολικές εικονιστικές αναπαραστάσεις

Στην εικόνα 5 φαίνεται η αναπαράσταση του τρίτου μαθητή που δοκίμασε να κάνει σχέδιο με την παρακίνηση του ερευνητή. Το σχέδιό του αποτελεί μια συμβολική εικονιστική αναπαράσταση, η οποία αποτελείται μόνο από γραμμές. Ο ίδιος εξηγεί στη συνέντευξη: «Χρησιμοποίησα μόνο γραμμές, οι οποίες δεν έχω αποφασίσει τι ακριβώς απεικονίζουν». Δημιούργησε επομένως ένα επιπόλαιο σχέδιο το οποίο τελικά δεν έλαβε υπόψη στη συνέχεια της επεξεργασίας του προβλήματος.



Εικόνα 5

Δυσκολίες

Δυσκολίες στην κατανόηση του κειμένου

Κάποιοι μαθητές στη συνέντευξη ανέφεραν ότι κατά την επεξεργασία της εκφώνησης του κειμένου του πρώτου προβλήματος, παρουσίασαν δυσκολία στην κατανόηση των ζητουμένων. Συγκεκριμένα, μια μαθήτρια της Α΄ Λυκείου η οποία δυσκολεύτηκε να κατανοήσει την ερώτηση, τόνισε πως δεν της φαινόταν σχετική με τα δεδομένα που παρουσιάζει το κείμενο. Ακόμη, μία μαθήτρια της Β΄ Λυκείου παρουσίασε δυσκολία, καθώς την προβλημάτισε το γεγονός ότι στο κείμενο αναφερόταν η τριήμερη εκδρομή και αναρωτιόταν εάν αυτό θα αποτελέσει σημαντικό δεδομένο το οποίο επηρεάζει το σχηματισμό του συστήματος που περιγράφει τη λύση του.

Δυσκολίες στο εντοπισμό άγνωστων ποσοτήτων και τη δημιουργία μεταβλητών

Αναφορικά με το πρώτο πρόβλημα, κατά τη συνέντευξη οι περισσότεροι μαθητές δήλωσαν ότι ο εντοπισμός των άγνωστων ποσοτήτων για τον ορισμό των μεταβλητών του συστήματος ήταν εύκολος, καθώς προέκυπτε άμεσα από την διατύπωση του ερωτήματος του προβλήματος. Τρεις μαθητές παρουσίασαν δυσκολία στον ορισμό μεταβλητών, καθώς όρισαν ως μεταβλητές το πλήθος των παιδιών στα τρίκλινα δωμάτια και το πλήθος των παιδιών στα τετράκλινα δωμάτια. Οι δύο από αυτούς κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, όταν τους ζητήθηκε να εξηγήσουν το σκεπτικό που τους οδήγησε στο ορισμό των μεταβλητών αυτών, συνειδητοποίησαν ότι είχαν κάνει λάθος. Ο ένας από αυτούς είπε: «Θα έπρεπε να είχα διαβάσει πιο προσεκτικά το κείμενο, δεν πρόσεξα τόσο την ερώτηση». Ο τρίτος, αρχικά σκέφτηκε με τον ίδιο τρόπο, ορίζοντας ως μεταβλητές τα πλήθη των παιδιών σε κάθε είδους δωμάτιο, στη συνέχεια όμως στην προσπάθειά του να δημιουργήσει το σύστημα, δεν μπορούσε να δώσει στις σχέσεις που σχημάτιζε το νόημα που ήθελε, επομένως επέστρεψε στην ανάγνωση του κειμένου και προσέχοντας την ερώτηση του προβλήματος τελικά όρισε ως μεταβλητές το πλήθος των τρίκλινων και το πλήθος των τετράκλινων δωματίων.

Δυσκολίες στη δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Η πλειοψηφία των μαθητών παρουσίασε δυσκολίες στη συμβολοποίηση των σχέσεων για τη δημιουργία του συστήματος. Στο σχηματισμό της πρώτης σχέσης που δίνει το πλήθος των δωματίων, παρουσιάστηκε δυσκολία από δύο μαθητές στη σημασιολογική μετάφραση, αφού σκέφτηκαν πως τα χ στο πλήθος παιδιά μπήκαν στα τρίκλινα δωμάτια και το ψ στο πλήθος παιδιά μπήκαν στα τετράκλινα δωμάτια και μετέτρεψαν τη σκέψη αυτή στη σχέση 3χ+4ψ = 34.

Στο σχηματισμό της δεύτερης σχέσης του συστήματος υπήρξαν περισσότερες δυσκολίες και κατ’ επέκταση περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών αντιμετώπισε δυσκολία στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ του πλήθους των μαθητών που αντιστοιχούν στο κάθε δωμάτιο, και της σύνδεσης αυτών με το συνολικό πλήθος των 118 μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή. Ένας μαθητής σκέφτηκε πως οι μαθητές που αναφέρει το πρόβλημα ¨μοιράστηκαν¨ στα δωμάτια, κι έτσι μετέφρασε το διαμερισμό στην πράξη της διαίρεσης την οποία και χρησιμοποίησε για το σχηματισμό της δεύτερης σχέσης, με αποτέλεσμα να προκύψει η εξίσωση της μορφής 118:(χ + ψ) = 34, όπου χ+ψ θεώρησε το σύνολο όλων των μαθητών όπως περιέγραψε στη συνέντευξη. Παράλληλα, μια μαθήτρια σκέφτηκε πως οι 118 μαθητές μοιράστηκαν στα 34 δωμάτια, επομένως προκύπτει μία σχέση ποσοτήτων 118:34, η οποία είναι ίση με τους μαθητές. Στη συνέχεια σκέφτηκε ότι εφόσον τα χ δωμάτια είναι τρίκλινα και τα ψ είναι τετράκλινα τότε θα προκύπτει ότι 118:34 = 3χ+4ψ, γεγονός που φανερώνει τη δυσκολία στη σημασιολογική ερμηνεία των σχέσεων των ποσοτήτων.

Δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων

Η πλειοψηφία των μαθητών εμφάνισε δυσκολίες στην αναπαράσταση του περιεχομένου των λεκτικών προβλημάτων με τη χρήση σχεδίων. Οι περισσότεροι, κατά τη παρακίνησή τους από τον ερευνητή να σχεδιάσουν εικονιστικές αναπαραστάσεις, δίσταζαν να το δοκιμάσουν. Στη συνέντευξη οι μαθητές τόνισαν ότι δεν έχουν συνηθίσει να κάνουν σχέδια για να κατανοήσουν καλύτερα ένα πρόβλημα και θεωρούν ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να τους μπερδέψει περισσότερο αντί να τους βοηθήσει. Πολλοί εξήγησαν ότι έχουν εικόνες στο μυαλό τους διαβάζοντας την εκφώνηση των προβλημάτων, αλλά δεν τους είναι εύκολο να βάλουν ¨σε σειρά¨ αυτές τις σκέψεις για να τις απεικονίσουν.

Οι μαθητές που δημιούργησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις στο πρώτο πρόβλημα έπειτα από την παρακίνηση του ερευνητή, κατά τη συνέντευξη εξήγησαν ότι δε μπορούσαν να σκεφτούν κάποια απεικόνιση του προβλήματος η οποία θα μπορούσε να ενισχύσει την κατανόησή τους. Οι ίδιοι, προσπάθησαν να απεικονίσουν αλγεβρικές σχέσεις που είχαν ήδη διατυπώσει, ώστε να παρουσιάσουν κάποια εικονιστική αναπαράσταση. Ο μαθητής ο οποίος με δική του πρωτοβουλία σχεδίασε αναπαράσταση για το πρώτο πρόβλημα, ανέφερε ότι τον βοήθησε στην δημιουργία των σχέσεων μεταξύ των δωματίων και των παιδιών που αντιστοιχούν σε αυτά, καθώς επιβεβαίωσε τη σκέψη που είχε κάνει για την επιλογή των πράξεων μεταξύ των σχέσεων των ποσοτήτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ποσοτική ανάλυση: Φύλλο παρατήρησης του ερευνητή - Φύλλο εργασίας μαθητών

Από το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή σε συνδυασμό με το φύλλο εργασίας των μαθητών, προκύπτουν ποσοτικά δεδομένα για τον χειρισμό του δεύτερου προβλήματος από τους μαθητές, που παρουσιάζονται παρακάτω. Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, από τους 10 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, οι 9 δε σχημάτισαν το σωστό σύστημα εξισώσεων για να αναπαραστήσουν τη λύση του, ενώ μία μαθήτρια της Β΄ Λυκείου έπειτα από αρκετή ώρα επεξεργασίας, εγκατέλειψε την προσπάθεια και δεν παρουσίασε τελική απάντηση στο πρόβλημα αυτό.

Διαδικασίες μετατροπής

Επεξεργασία εκφώνησης

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας των μαθητών, και οι 10 μαθητές αφιέρωσαν χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης. Όλοι οι μαθητές διάβασαν πολλές φορές την εκφώνηση προτού ξεκινήσουν την επεξεργασία, ενώ κάποιοι κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας ανέτρεχαν στην εκφώνηση και τη διάβαζαν ξανά. Στη συνέχεια, οι 9 μαθητές εντόπισαν τις άγνωστες ποσότητες από το ερώτημα του προβλήματος.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, μία μαθήτρια ακολούθησε τη διαδικασία συσχετισμού του προβλήματος με απλούστερο πρόβλημα με σκοπό να ενισχύσει την κατανόησή της για να προχωρήσει στη μετατροπή του σε εξισώσεις.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Σε αντίθεση με το πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, στο δεύτερο πρόβλημα 5 μαθητές ξεκίνησαν την επεξεργασία με τη δημιουργία συμβολικών σχέσεων. Ωστόσο, όλοι οι μαθητές παρουσίασαν λύσεις με χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων. Σε ότι αφορά την ερμηνεία του κειμένου για την επιλογή των συμβόλων, κανένας δεν κατάφερε να μετατρέψει το λεκτικό περιεχόμενο με τη χρήση των κατάλληλων σχέσεων για τη δημιουργία των εξισώσεων. Οι περισσότεροι μαθητές διατύπωσαν λάθος και τις δύο εξισώσεις του συστήματος που αποτελεί τη λύση του προβλήματος, μία μαθήτρια σχημάτισε σωστά μόνο τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, ενώ ένας μαθητής δεν επέλεξε να απεικονίσει με μεταβλητές τις κατάλληλες ποσότητες με αποτέλεσμα να οδηγηθεί σε λάθος συμβολοποίηση των σχέσεων.

Χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, 5 μαθητές ξεκίνησαν να επεξεργάζονται το περιεχόμενο δημιουργώντας σχέδιο, με δική τους πρωτοβουλία. Συνολικά 8 από τους 10 μαθητές δημιούργησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις κατά την επεξεργασία του προβλήματος, από τους οποίου οι 3 το έκανα έπειτα από παρακίνηση του ερευνητή. Ακόμη, 3 από τους μαθητές της έρευνας δοκίμασαν περισσότερα από ένα αναπαραστατικό σύστημα με εικόνες.

Δυσκολίες

Σε ότι αφορά τις δυσκολίες που εντοπίστηκαν από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επεξεργασία του δεύτερου προβλήματος, και από τη διατύπωση των λύσεών τους στο φύλλο εργασίας, προκύπτει ότι 9 μαθητές παρουσίασαν δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Αντίθετα, στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων 3 μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται. Ακόμη, στο στάδιο της δημιουργίας αναπαραστάσεων οι μαθητές εμφάνισαν τις περισσότερες δυσκολίες, αφού και οι 10 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξαν να δυσκολεύονται στην επιλογή συμβόλων για τη δημιουργία των εξισώσεων, ενώ παράλληλα και οι 8 μαθητές που δημιούργησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις για την απόδοση του λεκτικού περιεχομένου, παρουσίασαν δυσκολίες.

Ποιοτική ανάλυση: Συνέντευξη - Φύλλο εργασίας μαθητών

Στη συνέντευξη για το δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι μαθητές εξηγούν την κατανόηση που ανέπτυξαν κατά την ανάγνωση της εκφώνησης και τις ενέργειες στις οποίες προχώρησαν για να μετατρέψουν τα δεδομένα που συγκέντρωσαν από την εκφώνηση, υπό τη μορφή εξωτερικών αναπαραστάσεων, συμβολικών και εικονιστικών. Ταυτόχρονα, περιγράφουν και τις δυσκολίες που συνάντησαν στη διαδικασία αυτή. Έτσι, προκύπτουν ποιοτικά δεδομένα για το δεύτερο πρόβλημα, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Διαδικασίες μετατροπής

Κατανόηση κειμένου

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, ελάχιστοι ήταν οι μαθητές οι οποίοι κατά τη διαδικασία της συνέντευξης κατάφεραν να εξηγήσουν την εκφώνηση με το δικό τους τρόπο. Οι περισσότεροι μαθητές, όταν τους ζητήθηκε να περιγράψουν σύμφωνα με τη δική τους κατανόηση το περιεχόμενο του κειμένου, χρησιμοποιούσαν ακριβώς τις ίδιες λέξεις και φράσεις με την εκφώνηση, επαναλαμβάνοντας τη διατύπωση του προβλήματος. Η ερμηνεία που έδωσαν κάποιοι από τους μαθητές, ήταν πως το πρόβλημα αναφερόταν σε δύο υποθετικές μετακινήσεις, από τις οποίες η μία λειτουργούσε ως συνέχεια της άλλης. Αυτό προκύπτει από περιγραφές μαθητών κατά τη συνέντευξη, οι οποίο εξήγησαν : «Ο κύριος στην πρώτη μετακίνηση πηγαίνει 2 θέσεις πίσω και στη δεύτερη πηγαίνει 2 θέσεις μπροστά, άρα επιστρέφει στο σημείο απ’ όπου ξεκίνησε». Ακόμη, δύο μαθητές ερμήνευσαν τις πληροφορίες για τις μετακινήσεις του κειμένου ως εξής: «Όταν ο κύριος πάει 2 θέσεις πίσω τότε οι άνθρωποι μπροστά του είναι διπλάσιοι από αυτούς που είχε μπροστά του στην αρχική του θέση, και όταν πάει 2 θέσεις πίσω οι άνθρωποι μπροστά και πίσω από τον κύριο το πλήθος των ανθρώπων θα είναι το ίδιο». Τρεις ήταν οι μαθητές οι οποίοι εξήγησαν ότι το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο διαφορετικές μετακινήσεις, οι οποίες είναι υποθετικές και έχουν ως σημείο αναφοράς τη θέση στην οποία βρίσκεται αρχικά ο κύριος που αποτελεί και το βασικό πρόσωπο του προβλήματος.

Ορισμός μεταβλητών

Στο δεύτερο πρόβλημα, οι περισσότεροι μαθητές εντόπισαν τις άγνωστες ποσότητες και όρισαν ως μεταβλητές το πλήθος των ανθρώπων που περίμεναν μπροστά από τον κύριο και το πλήθος των ανθρώπων που περίμενα πίσω από το κύριο όταν αυτός βρισκόταν στην αρχική του θέση, κατά την αναμονή στην ουρά του ταμείο της τράπεζας. Κάποιοι από αυτούς, ωστόσο, στην επεξήγηση της εκφώνησης του προβλήματος δε φαινόταν να κατανοούν τη χρονική στιγμή στην οποία αναφερόταν η ερώτηση και παρ' όλα αυτά όρισαν μεταβλητές τα πλήθη των ατόμων σύμφωνα με την αρχική θέση του κυρίου. Μία μαθήτρια ενώ είπε πως εντόπισε δύο άγνωστες ποσότητες, όρισε τρεις μεταβλητές, όπου χ θεώρησε το πλήθος των ατόμων που περίμενε μπροστά από τον κύριο, ψ το πλήθος των ατόμων που περίμενε πίσω από τον κύριο και ζ το συνολικό πλήθος των ατόμων αυτών, γιατί όπως είπε, θα τη βοηθούσε στη συνέχεια να φτιάξει τις σχέσεις που είχε στο μυαλό της. Τέλος, ένας μαθητής θεώρησε ότι οι άγνωστες ποσότητες που έπρεπε να ορίσει ως μεταβλητές ήταν το πλήθος των ατόμων που περίμενα μπροστά από τον κύριο και το συνολικό πλήθος των θέσεων μπροστά και πίσω από τον κύριο στην ουρά, ενώ όταν ρωτήθηκε με ποιο σκεπτικό έκανε αυτή την επιλογή, φάνηκε ότι δεν μπορούσε να εξηγήσει περισσότερο.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Κατά την επεξεργασία του δεύτερου προβλήματος, μία μαθήτρια χρησιμοποίηση τη διαδικασία συσχετισμού του προβλήματος με απλούστερο αριθμητικό πρόβλημα. Προκειμένου να κατανοήσει τις μετακινήσεις του κυρίου που αναφερόταν στο πρόβλημα, έβαλε στη θέση των μεταβλητών τυχαίους αριθμούς και έκανε δοκιμές. Η ίδια ανέφερε: «Η εικόνα που σχεδίασα για να αναπαραστήσω την ουρά αναμονής δε με βοήθησε και σκέφτηκα να δοκιμάσω να βάλω πραγματικά νούμερα για τα άτομα που περίμεναν μπροστά και πίσω από τον κύριο, ώστε να καταλάβω πώς μεταβάλλονται οι ποσότητες που πρέπει να χρησιμοποιήσω για τις εξισώσεις. Είπα ότι μπροστά βρίσκονται 7 άτομα και πίσω βρίσκονται 5, και έκανα δοκιμές για να δω πώς αλλάζουν οι αριθμοί». Την ίδια μέθοδο ακολούθησε κι ένας μαθητής, ο οποίος όμως δε διατύπωσε τις δοκιμές στο χαρτί, αλλά τις εξήγησε προφορικά, όταν κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ρωτήθηκε εάν τον βοήθησε στη λύση του κάποιο απλούστερο πρόβλημα. Όπως εξηγεί ο ίδιος: «Έβαλα στο μυαλό μου τυχαίους αριθμούς για το πλήθος των ατόμων που περίμεναν μπροστά και πίσω από τον κύριο, και σύμφωνα με αυτούς προσπαθούσα να καταλάβω πώς μεταβάλλεται ο αριθμός των ατόμων μετά από κάθε μετακίνηση του κυρίου στην ουρά». Τις σκέψεις αυτές δε τις διατύπωσε στο χαρτί, ούτε και προφορικά κατά τη διάρκεια της επίλυσης παρόλο που παρακινούνταν από τον ερευνητή να εκφράζει προφορικά τη σκέψη του σε κάθε βήμα.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Στο στάδιο της δημιουργίας συμβολικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές για το δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, ελάχιστες ταυτίζονται, παρόλο που τα περισσότερα λάθη φαίνεται ότι οφείλονται στην ερμηνεία που δίνουν οι ίδιοι στα λεκτικά δεδομένα και στα σύμβολα των πράξεων. Κάποιοι από αυτούς προσπαθούσαν να χωρίσουν την εκφώνηση του προβλήματος σε επιμέρους κομμάτια για να τα ερμηνεύσουν συμβολικά και να τα αποδώσουν με αλγεβρικές σχέσεις. Ωστόσο, οι μαθητές σχημάτισαν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος με λάθος τρόπο, εκτός από μία μαθήτρια η οποία ερμήνευσε σωστά τα δεδομένα που αφορούσαν τη μία από τις δύο αλγεβρικές εξισώσεις κι έτσι σχημάτισε σωστά μόνο τη μία εξίσωση. Παρακάτω, παρουσιάζονται οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο φύλο εργασίας, σε συνδυασμό με την ερμηνεία που έδωσαν οι ίδιοι κατά τη συνέντευξη, για τη δημιουργία των συγκεκριμένων συμβολικών σχέσεων.

Αρχικά παρουσιάζονται οι συμβολικές αναπαραστάσεις που δημιουργήθηκαν από τους μαθητές για να εκφράσουν με εξίσωση την πρώτη φράση του προβλήματος: «Εάν ο κύριος μετακινηθεί 2 θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του». Στην περίπτωση αυτή, από τους 8 μαθητές που όρισαν ως μεταβλητές χ τα άτομα που βρίσκονταν μπροστά από τον κύριο και ψ τα άτομα που βρίσκονταν πίσω από τον κύριο, παρουσιάστηκαν 7 διαφορετικές απαντήσεις, από τις οποίες καμία δεν είναι σωστή.

➢ *Λάθος σχηματισμός της πρώτης εξίσωσης*

- $\chi + 2 = 2\psi - 2$
  Για να σχηματίσει αυτή την εξίσωση ο μαθητής σκέφτηκε ότι χ θα είναι οι άνθρωποι μπροστά από τον κύριο και θα είναι διπλάσιοι από τους πίσω, το οποίο απεικονίζει με τη σχέση 2ψ. Επιπλέον, εφόσον η μετακίνηση του κυρίου ήταν 2 θέσεις πίσω, τότε οι μπροστινές θέσεις αυξάνονται κατά 2 επομένως θα έχουμε χ +2, και οι πίσω θέσεις μειώνονται κατά 2 άρα θα έχουμε 2ψ - 2. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής σκέφτεται σωστά την αύξηση των μπροστινών και μείωση των πίσω θέσεων λόγω της μετακίνησης προς τα πίσω, ωστόσο αγνοεί το γεγονός ότι στην τελική θέση ισχύει ότι οι μπροστινές θέσεις είναι διπλάσιες από τις πίσω κι έτσι πολλαπλασιάζει με το 2 μόνο τις αρχικές θέσεις που βρίσκονταν πίσω από τον κύριο, δηλαδή το ψ.

- $2\psi = \chi$
  Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής θεωρεί ότι εφόσον οι χ μπροστινοί άνθρωποι είναι διπλάσιοι από τους ψ που βρίσκονται πίσω τότε οι χ θα είναι ίσοι με τους διπλάσιους ψ, δηλαδή με 2ψ. Αρχικά εδώ ο μαθητής έχει μεταφράσει σωστά την αλγεβρική σχέση σε ότι αφορά το διπλασιασμό, ενώ αγνοεί εντελώς το γεγονός ότι η σχέση αυτή ισχύει έπειτα από τη μετακίνηση στην ουρά αναμονής. Δεν ερμηνεύει αλγεβρικά την μετακίνηση του κυρίου κατά δύο θέσεις προς τα πίσω, με αποτέλεσμα να σχηματίζει λανθασμένη εξίσωση, αφού φαίνεται να θεωρεί ότι στην αρχική θέση του κυρίου, οι άνθρωπου που βρίσκονται μπροστά του είναι διπλάσιοι από αυτούς που βρίσκονται πίσω του.

- $\psi - 2 = 2\chi + 2$
  Για το σχηματισμό αυτής της εξίσωσης ο μαθητής θεώρησε ότι εφόσον η μετακίνηση είναι 2 θέσεις πίσω, τότε το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται πίσω από τον κύριο θα είναι ίσο με το αρχικό πλήθος που βρισκόταν πίσω του, μειωμένο κατά 2, άρα ψ - 2. Επομένως οι μπροστινές θέσεις αυξάνονται κατά 2, άρα χ + 2. Στη συνέχεια, εφόσον οι μπροστινές

θέσεις θα είναι διπλάσιες από τις πίσω τότε θα διπλασιαστεί το χ κι έτσι προκύπτει η σχέση 2χ στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Εδώ λοιπόν, βλέπουμε αρχικά ότι ο μαθητής δεν αντιλαμβάνεται τη σχέση του διπλασιασμού που αφορά τη ¨στατική σύγκριση¨ ποσοτήτων, διπλασιάζοντας τη λάθος ποσότητα. Επιπλέον, δεν αντιλαμβάνεται ότι αυτή η σχέση αφορά την τελική θέση στην οποία βρίσκεται ο κύριος, ακριβώς όπως και ο προηγούμενος μαθητής.

- ψ = 2χ + 2

  Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής σκέφτεται ότι εφόσον η μετακίνηση του κυρίου είναι 2 θέσεις πίσω, τότε το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο αυξάνεται κατά δύο. Στη συνέχεια, σκέφτεται ότι αφού οι άνθρωποι μπροστά είναι διπλάσιοι στο πλήθος από εκείνους που βρίσκονται πίσω από τον κύριο, τότε θα διπλασιαστεί το πλήθος των μπροστινών ανθρώπων κι έτσι προκύπτει το 2χ. Σε αυτή τη σχέση φαίνεται ότι ο μαθητής δε σκέφτεται ότι κατά τη μεταβολή του πλήθους των ανθρώπων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο, αντίστοιχα μεταβάλλεται και το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκεται πίσω από τον κύριο και μειώνεται κατά 2. Επιπλέον, εδώ παρερμηνεύεται η σχέση διπλασιασμού μεταξύ των ποσοτήτων, εκτελώντας λανθασμένα τη ¨στατική σύγκριση¨ των ποσοτήτων.

- ψ - 2 = 2ψ

  Αυτή η σχέση, η οποία παρουσιάστηκε από δύο μαθητές, προέκυψε με το σκεπτικό ότι εφόσον ψ είναι το πλήθος των ατόμων στην ουρά πίσω από τον κύριο, τότε αν μετακινηθεί 2 θέσεις προς τα πίσω, οι θέσεις θα μειωθούν κατά 2 άρα προκύπτει ότι το πλήθος των πίσω θέσεων θα είναι ψ - 2. Αφού τότε οι άνθρωποι μπροστά θα είναι διπλάσιοι από τους πίσω, τότε οι μπροστά θα είναι ίσοι με 2ψ. Και πάλι εδώ, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται το γεγονός ότι η σχέση αυτή δεν αφορά την αρχική θέση του κυρίου, αλλά την θέση του έπειτα από την πρώτη μετακίνηση, οπότε δεν παρουσιάζουν κάποια μεταβολή και για το πλήθος των θέσεων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο. Επιπλέον, φαίνεται πως δεν αντιλαμβάνονται τόσο το νόημα του λεκτικού περιεχομένου, όσο και την έννοια της ισότητας, αφού εξισώνουν τις πίσω θέσεις που είναι ψ μειωμένες κατά 2, με την διπλάσια ποσότητα των ψ θέσεων. Στο σχηματισμό της εξίσωσης αυτής επομένως, φαίνεται η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης σε ότι αφορά το ρόλο και τη χρήση των μεταβλητών και της ισότητας.

- ψ - 2 = χ

  Εδώ ο μαθητής θεώρησε ότι έπειτα από τη μετακίνηση του κυρίου κατά 2 θέσεις προς τα πίσω, οι άνθρωποι που θα μείνουν πίσω του θα έχουν πλήθος μειωμένο κατά 2, δηλαδή ψ - 2. Το πλήθος, ωστόσο, των ανθρώπων που θα είναι μπροστά από τον κύριο, δε φαίνεται να μεταβάλλεται. Ο μαθητής αυτός δε λαμβάνει υπόψη ότι αλλάζει και το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο, αγνοεί τα λεκτικά δεδομένα του προβλήματος και ταυτόχρονα, δεν παρουσιάζει τη σχέση που θέλει το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο να είναι το διπλάσιο από το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται από πίσω του.

- $2(\psi - 2) = \chi$
  Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής δείχνει ότι με τη μετακίνηση του κυρίου κατά 2 θέσεις προς τα πίσω, οι θέσεις που βρίσκονται πίσω του μειώνονται κατά 2. Ταυτόχρονα, όπως ο ίδιος σημειώνει, προσπαθεί να παρουσιάσει τη σχέση που δημιουργείται με το πλήθος των ανθρώπων μπροστά να είναι διπλάσιο από το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται πίσω από τον κύριο. Παρόλα αυτά, δε συνυπολογίζει τη μεταβολή του πλήθους των μπροστινών θέσεων μετά τη μετακίνηση, κάτι το οποίο αντιλαμβάνεται κατά τη διάρκεια της συνέντευξης όταν τεκμηριώνει την απάντησή του, αναθεωρεί και λέει τελικά ότι θέσεις μπροστά από τον κύριο θα έχουν πλήθος αυξημένο κατά 2 έπειτα από τη μετακίνηση.

Στη συνέχεια, από τους 8 μαθητές που όρισαν ως μεταβλητές χ τα άτομα που βρίσκονταν μπροστά από τον κύριο και ψ τα άτομα που βρίσκονταν πίσω από τον κύριο, παρουσιάστηκαν 6 διαφορετικές απαντήσεις σχετικά με την αλγεβρική ερμηνεία της φράσης: «Εάν όμως μετακινηθεί 2 θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων», οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω με την αντίστοιχη ερμηνεία που έδωσαν οι μαθητές κατά τη συνέντευξη. Μόνο μία μαθήτρια ερμήνευσε σωστά τα λεκτικά και συντακτικά δεδομένα της φράσης, κι έτσι σχεδίασε τη σωστή συμβολική αναπαράστασή της.

➢ *Σωστός σχηματισμός της δεύτερης εξίσωσης*

- $\chi - 2 = \psi + 2$
  Η εξίσωση αυτή σχηματίστηκε από τη μαθήτρια που κατάφερε να μετασχηματίσει σωστά την φράση του προβλήματος σε συμβολική αναπαράσταση. Η ίδια ανέφερε κατά τη συνέντευξη: «Σκέφτηκα πως όταν ο κύριος θα μετακινηθεί 2 θέσεις μπροστά, τότε μπροστά του θα έχει 2 άτομα λιγότερα από πριν, δηλαδή χ-2, ενώ πίσω του θα έχει 2 άτομα περισσότερα από πριν, δηλαδή ψ+2. Τότε τα χ-2 άτομα θα είναι όσα είναι και τα ψ+2».

➢ *Λάθος σχηματισμός της δεύτερης εξίσωσης*

- $\chi = \psi$
  Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής θεωρεί ότι έπειτα από τη δεύτερη μετακίνηση του κυρίου, το πλήθος χ των ανθρώπων μπροστά του και το πλήθος ψ των ανθρώπων πίσω του είναι ίσα, επομένως τα εξισώνει. Φαίνεται

ότι δεν αντιλαμβάνεται ότι οι ποσότητες χ και ψ αφορούν τα πλήθη των ατόμων μπροστά και πίσω από τον κύριο όταν όμως αυτός βρίσκεται στην αρχική του θέση. Κατά τη συνέντευξη, αντιλήφθηκε ότι υπάρχει λάθος και είπε χαρακτηριστικά: «Δε σκέφτηκα να δείξω με σχέσεις την αλλαγή της θέσης, είναι σαν να λέω ότι αυτές οι σχέσεις ισχύουν για τις αρχικές θέσεις».

- $\chi - 2 = \psi$

  Εδώ ο μαθητής εκφράζει με την παράσταση χ - 2 τη μείωση κατά 2 του πλήθους των θέσεων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο, όταν αυτός μετακινείται κατά δύο θέσεις μπροστά. Στη συνέχεια εξισώνει το πλήθος αυτό με το πλήθος ψ, που αφορά όμως το πλήθος των θέσεων που βρίσκονται πίσω από τον κύριο πριν τη μετακίνησή του. Ενώ λοιπόν μεταβάλλει το πλήθος των μπροστινών θέσεων παραλείπει να κάνει το ίδιο και για το πλήθος των πίσω θέσεων.

- $\chi = \psi + 2$

  Αυτή η εξίσωση ταυτίζεται με την προηγούμενη, ωστόσο αναφέρεται ξεχωριστά καθώς το σκεπτικό των μαθητών που τη σχημάτισαν ήταν διαφορετικό. Πιο συγκεκριμένα, σχηματίστηκε από 2 μαθητές, οι οποίοι θεώρησαν ότι έπειτα από τη μετακίνηση του κυρίου κατά 2 θέσεις μπροστά, οι πίσω θέσεις θα αυξηθούν κατά 2 κι επομένως το πλήθος των χ μπροστινών θέσεων θα είναι ίσο με των ψ + 2 πίσω θέσεων. Εδώ, οι μαθητές αμελούν τη μεταβολή του πλήθους των μπροστινών θέσεων, με αποτέλεσμα να σχηματίζουν λανθασμένη εξίσωση. Ο ένας από τους δύο μαθητές που σχημάτισαν την εξίσωση αυτή, κατά τη συνέντευξη εντόπισε το λάθος που υπάρχει και εξήγησε προφορικά ότι σύμφωνα με τη μετακίνηση αυτή, οι πίσω θέσεις αυξάνονται κατά 2 και ταυτόχρονα οι μπροστά θέσεις μειώνονται κατά 2.

- $\chi + 2 = \psi$

  Η εξίσωση αυτή σχηματίστηκε επίσης από δύο μαθητές, κατά τους οποίους η λέξη «μπροστά» μεταφράζεται σε θετικό πρόσημο και η λέξη «πίσω» σε αρνητικό. Έτσι, έχοντας ορίσει ως χ το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο, ερμηνεύουν συμβολικά ως χ + 2 τη μετακίνηση του κυρίου κατά 2 θέσεις μπροστά, χωρίς να προσπαθήσουν να καταλάβουν διαισθητικά τη μεταβολή του μπροστινού πλήθους κατά τη μετακίνηση αυτή. Ταυτόχρονα, παραβλέπουν τη μεταβολή του πλήθους ψ των ατόμων που βρίσκονταν πίσω από τον κύριο και εξισώνουν το αρχικό πλήθος ψ με το πλήθος χ + 2. Οι συγκεκριμένοι δύο μαθητές, ήταν εκείνοι που δεν δοκίμασαν να αναπαραστήσουν το πρόβλημα με κάποιο σχέδιο και μάλιστα δήλωσαν ότι ο σχηματισμός της εξίσωσης αυτής δεν τους δυσκόλεψε και δε θα τους χρησίμευε κάποια εικονική αναπαράσταση για να κατανοήσουν καλύτερα τις σχέσεις και να προβούν στο σωστό μετασχηματισμό.

- $\chi + 2 = \psi - 2$

  Όπως και στην εξίσωση που παρουσιάστηκε προηγουμένως, και σε αυτή την περίπτωση ο μαθητής θεωρεί ότι η λέξη «μπροστά» εκφράζεται ως ¨+¨. Επομένως θεωρεί ότι το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται στην ουρά μπροστά από τον κύριο θα αυξηθεί κατά 2. Ταυτόχρονα όμως, θεωρεί ότι αφού το χ πλήθος των μπροστινών ατόμων θα αυξηθεί κατά δύο, αυτομάτως το ψ πλήθος των πίσω ατόμων θα μειωθεί κατά δύο. Σχηματίζει λοιπόν τις φράσεις αυτές και τις εξισώνει. Παρόλο που δεν ερμηνεύει σωστά τη μεταβολή των θέσεων έπειτα από τη δεύτερη μετακίνηση του κυρίου, αντιλαμβάνεται ότι η μεταβολή του πλήθους των μπροστινών θέσεων επηρεάζει άμεσα και το πλήθος των πίσω θέσεων.

- *Εξισώσεις που σχηματίστηκαν με λανθασμένο ορισμό μεταβλητών*

Οι δύο από τους δέκα μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, όρισαν μεταβλητές με διαφορετικό τρόπο. Μία μαθήτρια, η οποία θεώρησε όπως και οι περισσότεροι μαθητές ως χ το πλήθος των ατόμων που βρίσκονταν μπροστά από τον κύριο και ψ αντίστοιχα το πλήθος των ατόμων που βρίσκονταν πίσω από τον κύριο, ταυτόχρονα όμως όρισε μία ακόμη μεταβλητή ζ ως το συνολικό πλήθος των ανθρώπων. Έπειτα προχώρησε σε μία σειρά από συμβολικές αναπαραστάσεις που δεν επιδίωκαν να μετασχηματίσουν τα λεκτικά δεδομένα του προβλήματος, αλλά να συσχετίσουν τις τρεις μεταβλητές μεταξύ τους. Η ίδια αναφέρει: «Σχημάτισα πρώτα τη σχέση $\chi + \psi = \zeta$ η οποία συνδέει τα πλήθη μπρος και πίσω από τον κύριο με το συνολικό πλήθος των ατόμων και στη συνέχεια προσπάθησα να βρω ένα τρόπο να χρησιμοποιήσω τη μεταβλητή ζ για να περιγράψω αυτά που γράφει το πρόβλημα, ώστε να έχω μόνο έναν άγνωστο». Η μαθήτρια θεωρεί πως εγκλωβίστηκε στη διαδικασία αυτή και αυτός ήταν και ο λόγος που έπειτα από αρκετή ώρα επεξεργασίας του δεύτερου προβλήματος, τελικά πέρασε στο επόμενο, χωρίς να παρουσιάσει τελική απάντηση.

Ένας μαθητής ο οποίος όρισε ως χ το συνολικό πλήθος των θέσεων και ως ψ το πλήθος των ανθρώπων μπροστά από τον κύριο, εκφράζει ως $\chi - 2$ τη μεταβολή του πλήθους των θέσεων αφού ο κύριος μετακινείται προς τα πίσω 2 θέσεις και η μετακίνηση προς τα πίσω εκφράζεται με αρνητικό πρόσημο, κι εξισώνει το πλήθος αυτό με το διπλάσιο των ανθρώπων που περίμεναν μπροστά από τον κύριο, το οποίο εκφράζει με 2ψ και σχηματίζει τη σχέση $\chi-2=2\psi$. Στη συνέχεια, θεωρεί ότι έπειτα από τη μετακίνησή του κατά 2 θέσεις μπροστά το πλήθος των θέσεων θα είναι $\chi+2$, το οποίο εξισώνει με το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μπροστά από τον κύριο στην αρχική του θέση κι επομένως προκύπτει η σχέση $\chi + 2 = \psi$. Φαίνεται εδώ ότι υπάρχουν δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου και δυσκολίες λόγω της σημασιολογικής μετάφρασης, αφού τα λεκτικά δεδομένα δε νοηματοδοτούνται σωστά.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες εξισώσεις που δημιουργήθηκαν από τους μαθητές για τη δημιουργία του συστήματος δύο εξισώσεων που αποτελεί τη λύση του δεύτερου προβλήματος.

$1^η$ εξίσωση	Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε	Αιτίες εμφάνισης λαθών
χ+2=2ψ-2	1	Σημασιολογική μετάφραση
2χ=ψ	1	Σημασιολογική μετάφραση
ψ-2=2χ+2	1	Συντακτική μετάφραση - ¨λέξεις κλειδιά¨ Σημασιολογική μετάφραση Στατική σύγκριση
ψ=2χ+2	1	Σημασιολογική μετάφραση Στατική σύγκριση
ψ-2=2ψ	2	Σημασιολογική μετάφραση Χρήση ισότητας Εννοιολογική ερμηνεία μεταβλητών
ψ-2=χ	1	Σημασιολογική μετάφραση
2(ψ-2)=χ	1	Σημασιολογική μετάφραση
χ-2=2ψ	1	Επιλογή μεταβλητών
$2^η$ εξίσωση	**Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε**	**Αιτίες εμφάνισης λαθών**
χ=ψ	1	Σημασιολογική μετάφραση
χ-2=ψ	1	Σημασιολογική μετάφραση
χ=ψ+2	2	Σημασιολογική μετάφραση
χ+2=ψ	2	Συντακτική μετάφραση: ¨λέξεις κλειδια¨ Σημασιολογική μετάφραση
χ+2=ψ-2	1	Συντακτική μετάφραση: ¨λέξεις κλειδια¨ Σημασιολογική μετάφραση
χ+2=ψ	1	Επιλογή μεταβλητών Σημασιολογική μετάφραση

Πίνακας 2: Πρόβλημα 2 - Λανθασμένες συμβολικές αναπαραστάσεις

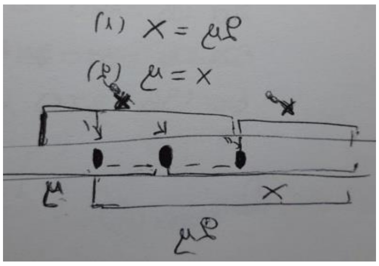
Εικονιστικές αναπαραστάσεις

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι 8 από τους 10 χρησιμοποίησαν σχέδιο για να απεικονίσουν γραφικά την κατάσταση που παρουσιάζει το πρόβλημα, ώστε να την κατανοήσουν. Όπως αναφέρουν πολλοί από αυτούς στη συνέντευξη, οι εικονιστικές αναπαραστάσεις τους βοήθησαν στην κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος που αφορούν τις μετακινήσεις του κυρίου στην ουρά αναμονής. Ωστόσο υπήρξαν και κάποιοι μαθητές οι οποίοι δεν κατάφεραν να σχεδιάσουν μια απεικόνιση η οποία θα μπορούσε να τους φανεί χρήσιμη, κι έτσι δε συμβουλεύτηκαν τα σχέδιά τους στην οργάνωση της λύσης τους και τη δημιουργία των εξισώσεων.

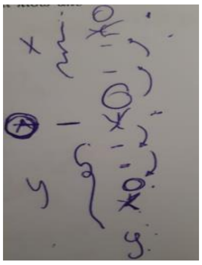
Οι αναπαραστάσεις που παρουσίασαν οι μαθητές διακρίνονται σε εκείνες που έχουν κυρίως συμβολικό χαρακτήρα, με σύμβολα, γραμμές και βελάκια, και σε εκείνες που έχουν πιο εξεικονιστικό χαρακτήρα, παρουσιάζονται δηλαδή μέσα από μία ζωγραφιά. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι κάποιοι μαθητές στις αναπαραστάσεις τους χρησιμοποίησαν τις μεταβλητές που είχαν ορίσει και προσπαθούσαν να σχηματίσουν συμβολικές σχέσεις πάνω στο σχέδιό τους, όπως φαίνεται στις εικόνες που ακολουθούν.

Συμβολικές εικονιστικές αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις που σχεδίασαν οι μαθητές στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, παρουσιάζουν πολλά κοινά στοιχεία μεταξύ τους, αφού οι περισσότερες αποτελούν *συμβολικές εικονιστικές* αναπαραστάσεις, στις οποίες η ουρά αναμονής συμβολίζεται με οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα, οι θέσεις ή τα άτομα μπροστά και πίσω από τον κύριο συμβολίζονται με γραμμές ή κουκκίδες και οι μετακινήσεις του κυρίου στις περισσότερες αναπαραστάσεις συμβολίζονται με βέλη. Κάποιοι μαθητές επέλεξαν να σχεδιάσουν τις μετακινήσεις του κυρίου πάνω στον ίδιο άξονα που αναπαριστά την ουρά αναμονής, όπως φαίνεται στις εικόνες 6 και 7.

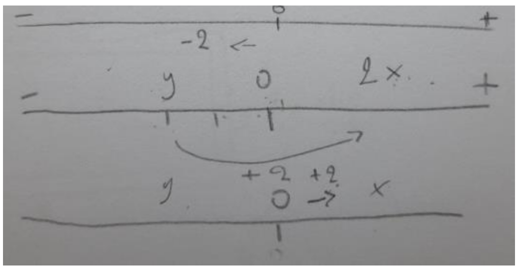


Εικόνα 6

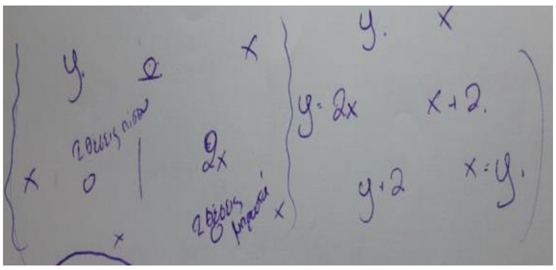


Εικόνα 7

Δύο μαθητές, σχεδίασαν τρεις άξονες, ένα για την αρχική θέση του κυρίου και δύο ακόμη, έναν για κάθε μετακίνησή του, όπως φαίνεται στις εικόνες 8 και 9.

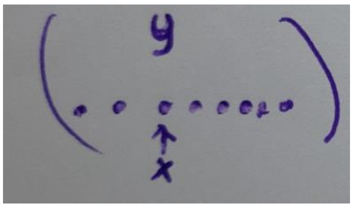


Εικόνα 8



Εικόνα 9

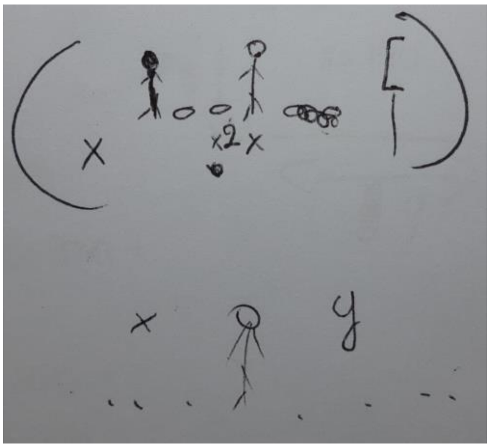
Ένας μαθητής επέλεξε μια καθαρά συμβολική εικονιστική αναπαράσταση, σχεδιάζοντας την ουρά αναμονής με κουκκίδες, η οποία φαίνεται στην εικόνα 10. Ο ίδιος περιέγραψε: «Οι κουκκίδες λειτουργούσαν σαν ¨πιόνια¨ στο μυαλό μου για να μπορέσω να καταλάβω πώς μετακινούνταν ο κύριος και πώς άλλαζε ο αριθμός των θέσεων». Στη συνέχεια όμως, ο μαθητής δεν κατάφερε να ολοκληρώσει στο σχέδιο την σκέψη του, καθώς όπως είπε δεν έχει συνηθίσει να σχεδιάζει. Τελικά, δεν αξιοποίησε την αναπαράσταση που σχεδίασε για να ενισχύσει τη δημιουργία του συστήματος.



Εικόνα 10

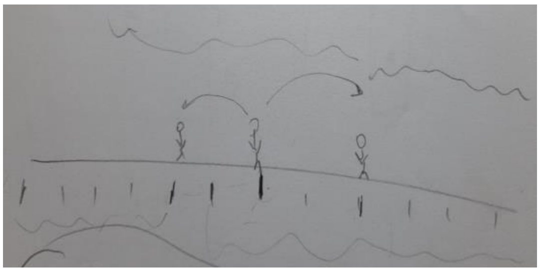
Εξεικονιστικές αναπαραστάσεις

Κάποιοι μαθητές έδωσαν πιο εξεικονιστικό χαρακτήρα στις αναπαραστάσεις τους, δημιουργώντας ζωγραφιές. Ένας μαθητής απεικόνισε τον κύριο στη ουρά αναμονής και το ταμείο της τράπεζας, όπως φαίνεται στην εικόνα 11. Ο μαθητής που τη σχεδίασε δεν ήταν βέβαιος για τις ποσότητες τις οποίες έπρεπε να απεικονίσει, όπως είπε: «Ξεκίνησα με αυτό το σχέδιο αλλά μετά δεν ήξερα πώς να ζωγραφίσω τα υπόλοιπα δεδομένα». Όπως είπε ο ίδιος στη συνέχεια, εγκατέλειψε την προσπάθεια δημιουργίας σχεδίου, το οποίο δεν αξιοποιήθηκε στην υπόλοιπη λύση καθώς δεν ολοκληρώθηκε.

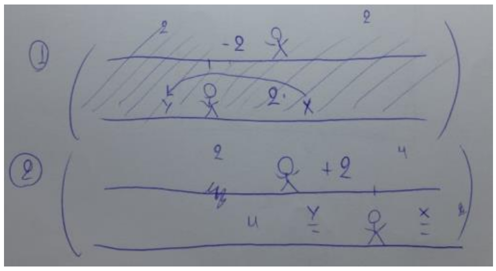


Εικόνα 11

Μία μαθήτρια επέλεξε να ζωγραφίσει τον κύριο που περιμένει στην ουρά αναμονής, την οποία συμβόλισε με έναν άξονα και πάνω στον ίδιο άξονα ζωγράφισε τον κύριο στις θέσεις που θα βρίσκεται μετά από κάθε μετακίνηση, όπως φαίνεται στην εικόνα 12. Τέλος, μία μαθήτρια σχεδίασε δύο ζεύγη αξόνων, όπου στο ένα παρουσίαζε την πρώτη μετακίνησή του κυρίου σε σχέση με την αρχική του θέση και στο δεύτερο αντίστοιχα τη δεύτερη μετακίνησή του κυρίου σε σχέση με την αρχική του θέση, όπως φαίνεται στην εικόνα 13.



Εικόνα 12



Εικόνα 13

Δυσκολίες

Κατανόηση κειμένου

Κατά τη συνέντευξη για το δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, φάνηκε πως οι περισσότεροι μαθητές παρουσίασαν δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Οι περιγραφές των μαθητών προδίδουν την παρουσία δυσκολιών στην προσθήκη νοήματος στις λεκτικές περιγραφές που περιέχει το πρόβλημα, αφού δεν κατανοούν ότι οι μετακινήσεις του κυρίου που αναφέρονται στο κείμενο είναι υποθετικές. Πολλοί μαθητές θεώρησαν ότι οι μετακινήσεις του κυρίου στην ουρά αναμονής λειτουργούν η μία ως συνέχεια της άλλης, παραβλέποντας τη φράση «εάν όμως» που τις διαχώριζε. Ακόμη, δυσκολίες σημειώθηκαν και στον εντοπισμό των ζητουμένων του προβλήματος, καθώς κάποιοι από τους μαθητές κατά την ανάγνωση της εκφώνησης δεν αντιλήφθηκαν πως το ζητούμενο είναι το πλήθος των ανθρώπων που περιμένουν στην ουρά μπροστά και πίσω από τον κύριο, όταν εκείνος βρίσκεται στην αρχική του θέση. Όπως ανέφεραν οι ίδιοι, θεώρησαν ότι δεν ήταν σαφής η χρονική στιγμή στην οποία ζητούσε να βρεθεί το πλήθος των ατόμων που περίμεναν μπροστά και πίσω από τον κύριο. Τέλος, κάποιοι μαθητές ανέφεραν στη συνέντευξη ότι δυσκολεύτηκαν στην κατανόηση του περιεχομένου της εκφώνησης, γιατί δεν περιείχε αρκετά αριθμητικά δεδομένα, ενώ είχε κυρίως λεκτικά τα οποία χρειάζονταν ερμηνεία για να προκύψουν οι αριθμοί και οι σχέσεις των ποσοτήτων που παρουσιάζονται.

Εντοπισμός άγνωστων ποσοτήτων και δημιουργία μεταβλητών

Στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι περισσότεροι μαθητές προχώρησαν σε σωστό ορισμό μεταβλητών, ωστόσο δήλωσαν ότι δυσκολεύτηκα στον εντοπισμό τους και χρειάστηκαν χρόνο για να αποφασίσουν ποιες ποσότητες θα αντιπροσωπεύσουν με μεταβλητές, διαβάζοντας πολλές φορές την εκφώνηση. Οι περισσότεροι όπως είπαν, εστίασαν στην ερώτηση του προβλήματος για τον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων. Ωστόσο θεωρούσαν πως τα πλήθη μπροστά και πίσω από τον κύριο είναι άγνωστα σε κάθε μετακίνησή του κι έψαχναν τρόπο να τα αντιπροσωπεύσουν και αυτά με τη βοήθεια μιας μεταβλητής για το καθένα. Μια μαθήτρια μάλιστα είπε: «Προσπαθούσα να κάνω και σχέδιο για να καταλάβω ποιοι είναι οι άγνωστοι και να βάλω μεταβλητές, αλλά και πάλι δυσκολευόμουν να καταλάβω». Δύο μαθητές, κατά τη συνέντευξη εξήγησαν ότι στην αρχή παρουσίασαν μια αβεβαιότητα σχετικά με τον ορισμό των μεταβλητών, καθώς σκέπτονταν να ορίσουν αρχικά μια μεταβλητή που θα απεικονίζει το συνολικό πλήθος των θέσεων, στην πορεία όμως ξαναδιάβασαν την ερώτηση και άλλαξαν γνώμη, αφού όπως είπαν, η ερώτηση του προβλήματος επικεντρώνεται στο πλήθος των ανθρώπων που περιμένουν μπροστά και πίσω από τον κύριο και όχι στις συνολικές θέσεις που υπήρχαν.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Οι δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου και στη δημιουργία των μεταβλητών στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, δημιούργησαν στη συνέχεια δυσκολίες και στη συμβολοποίηση των σχέσεων που παρουσιάζονται. Αρχικά, σύμφωνα με όσα ανέφεραν οι μαθητές κατά τη συνέντευξη, όλοι παρουσίασαν δυσκολίες στην έκφραση των μεταβολών του πλήθους των ατόμων μπροστά και πίσω από τον κύριο, με τα κατάλληλα σύμβολα των πράξεων για τη δημιουργία των εξισώσεων. Ακόμη, δυσκολία εμφανίστηκε και στη συμβολική έκφραση των ποσοτήτων στις οποίες η μία ήταν διπλάσια της άλλης. Στην περίπτωση αυτή όπως αναφέρουν οι μαθητές, υπήρχε αβεβαιότητα σε ότι αφορά την ποσότητα η οποία θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό 2. Τέλος, εμφανίστηκαν δυσκολίες στη συμβολοποίηση των σχέσεων, οι οποίες προκύπτουν από την έλλειψη κατανόησης της εκφώνησης από τους μαθητές, οι οποίοι στη συνέντευξη ανέφεραν ότι δεν ήταν σίγουροι αν θα έπρεπε να εκφράσουν τις σχέσεις σύμφωνα με την αρχική θέση του κυρίου και αν το πλήθος των ατόμων μετά από κάθε μετακίνηση παραμένει χ μπροστά και ψ πίσω.

Δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων

Οι μαθητές αναφέρουν κατά τη συνέντευξη, ότι παρουσίασαν δυσκολίες στην έκφραση της κατανόησης που είχαν αναπτύξει σε ότι αφορά το περιεχόμενο του κειμένου του προβλήματος, με τη δημιουργία εικόνων. Πολλοί ανέφεραν ότι παρόλο που κατανόησαν τα λεκτικά δεδομένα, δεν κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα ολοκληρωμένο σχέδιο που θα μπορούσε να τους βοηθήσει και στη δημιουργία των συμβολικών αναπαραστάσεων. Κάποιοι επίσης, τόνισαν ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες στην τοποθέτηση μεταβλητών και αριθμών πάνω στο σχήμα, θεωρώντας δεδομένο ότι αυτή η ενέργεια είναι απαραίτητη για τη δημιουργία μια ολοκληρωμένης εικόνας που αναπαριστά το περιεχόμενο του προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ποσοτική ανάλυση: Φύλλο παρατήρησης του ερευνητή - Φύλλο εργασίας μαθητών

Από το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή και τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στο φύλλο εργασίας προκύπτουν ποσοτικά δεδομένα αναφορικά με τις διαδικασίες, τις εικονιστικές αναπαραστάσεις και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την επεξεργασία του τρίτου προβλήματος.

Διαδικασίες μετατροπής

Επεξεργασία εκφώνησης

Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι περισσότεροι μαθητές δεν αφιέρωσαν χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης. Από τους 10 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, οι 3 διάβασαν πολλές φορές την εκφώνηση προτού προχωρήσουν στην επεξεργασία του προβλήματος. Ταυτόχρονα, από την επεξεργασία της εκφώνησης όλοι οι μαθητές εντόπισαν τις άγνωστες ποσότητες και προχώρησαν σε σωστό ορισμό μεταβλητών.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Όπως φαίνεται από τις γραπτές λύσεις των μαθητών και το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή, η διαδικασία συσχετισμού του προβλήματος με παρόμοιο απλούστερο, χρησιμοποιήθηκε από μία μαθήτρια για το τρίτο πρόβλημα. Η ίδια μαθήτρια ήταν και η μοναδική που χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή στην επεξεργασία και του δεύτερου προβλήματος.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Για την επεξεργασία του τρίτου προβλήματος, όλοι οι μαθητές δημιούργησαν συμβολικές αναπαραστάσεις και παρουσίασαν ως τελική απάντηση ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Από αυτούς, 3 μαθητές ξεκίνησαν την επεξεργασία με τη δημιουργία αλγεβρικών σχέσεων. Από τις απαντήσεις των μαθητών, φαίνεται ότι 5 ήταν εκείνοι οι οποίοι προχώρησαν σε σωστή ερμηνεία των αλγεβρικών συμβόλων και των σχέσεων ποσοτήτων και σχημάτισαν το σωστό σύστημα εξισώσεων που απεικονίζει τη λύση του προβλήματος. Από τους υπόλοιπους μαθητές, οι περισσότεροι σχημάτισαν σωστά τη μία από τις δύο εξισώσεις που αποτελούν το σύστημα που εκφράζει τη λύση, εκείνη που εκφράζει την περίμετρο του χωραφιού σχήματος ορθογωνίου που αναφέρει το πρόβλημα.

Χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων

Στο πρόβλημα αυτό, οι 8 από τους 10 μαθητές χρησιμοποίησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις στο σχεδιασμό της λύσης τους. Από τους 8 μαθητές που χρησιμοποίησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις, οι 7 ξεκίνησαν την επεξεργασία του προβλήματος με τη δημιουργία σχεδίου προτού προχωρήσουν στη διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων, με δική τους πρωτοβουλία. Ο ένας από τους 8 μαθητές, προχώρησε στη δημιουργία σχεδίου έπειτα από την παρακίνηση του ερευνητή. Ακόμη, ένας μαθητής δημιούργησε περισσότερα από ένα σχέδιο κατά την επεξεργασία του τρίτου προβλήματος του φύλλου εργασίας.

Δυσκολίες

Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επεξεργασία, συλλέχθηκαν στοιχεία αναφορικά με τις δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές στα στάδια της επεξεργασίας. Από το φύλλο παρατήρησης του ερευνητή προκύπτει ότι 4 μαθητές παρουσίασαν δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές δε παρουσίασαν δυσκολία στη δημιουργία των μεταβλητών, αφού ένας μόνο μαθητής έδειξε να δυσκολεύεται να εντοπίσει τις άγνωστες ποσότητες, ο ίδιος όμως τελικά προχώρησε σε σωστό ορισμό μεταβλητών. Ωστόσο, στη δημιουργία συμβόλων για τη διατύπωση των εξισώσεων του προβλήματος παρουσίασαν δυσκολίες 7 μαθητές. Στη χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων στο πρόβλημα αυτό, μόνο ένας από τους 8 μαθητές που δημιούργησαν σχέδιο παρουσίασε δυσκολία κατά την απεικόνιση του λεκτικού περιεχομένου με τον τρόπο αυτό.

Ποιοτική ανάλυση: Συνέντευξη - Φύλλο εργασίας μαθητών

Κατά τη διαδικασία της συνέντευξης για το τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι μαθητές περιέγραψαν σύμφωνα με την ατομική τους κατανόηση, το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος, εξήγησαν τις ενέργειες που ακολούθησαν στη διαδικασία μετατροπής του σε εξισώσεις και τις δυσκολίες που συνάντησαν στην πορεία αυτή. Οι περιγραφές των μαθητών σε συνδυασμό με τις λύσεις που διατύπωσαν στο φύλλο εργασίας, παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Διαδικασίες μετατροπής

Κατανόηση κειμένου

Οι περισσότεροι μαθητές δεν αφιέρωσαν χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης του τρίτου προβλήματος διαβάζοντάς το μία ή δύο φορές. Όπως αναφέρουν στην συνέντευξη, δε χρειάστηκε να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο καθώς το κείμενο του προβλήματος ήταν βατό με εύκολο λεξιλόγιο και σαφή δεδομένα και ζητούμενα. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών περιέγραψε το περιεχόμενο του προβλήματος σύμφωνα με την ατομική το κατανόηση, χωρίς να παραλείψει στοιχεία του κειμένου. Ωστόσο, ελάχιστοι μαθητές έδειξαν να μην κατανοούν την έννοια των εργατικών εξόδων και δεν μπορούσαν να προσδιορίσουν το ρόλο των εξόδων αυτών σε σχέση με τα υπόλοιπα έξοδα κατασκευής.

Ορισμός μεταβλητών

Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, η πλειοψηφία των μαθητών προχώρησε με επιτυχία στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων και τον ορισμό των μεταβλητών. Οι περισσότεροι μαθητές θεώρησαν πως οι άγνωστες ποσότητες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου οικοπέδου, καθοδηγούμενοι από το ερώτημα του προβλήματος. Οι 9 μαθητές χρησιμοποίησαν τις μεταβλητές χ και ψ για να απεικονίσουν τις διαστάσεις κι ένας μαθητής χρησιμοποίησε τις μεταβλητές α και β. Κάποιοι από αυτούς εξέφρασαν τον προβληματισμό τους για την επιλογή των διαστάσεων, καθώς θεώρησαν ότι έχει σημασία να καταλάβουν ποια από τις τρεις διαστάσεις του ορθογώνιου οικοπέδου δεν περιφράχθηκε, αφού όπως είπαν χαρακτηριστικά «η μία πλευρά θα είναι μεγαλύτερη της άλλης, άρα η μεγαλύτερη ή η μικρότερη θα περιφραχθεί μόνο μία φορά;». Μια μαθήτρια της Α΄ Λυκείου μάλιστα είπε: «Αν ξέραμε ότι το οικόπεδο ήταν τετράγωνο δε θα είχαμε κανένα πρόβλημα». Τέλος, σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα προβλήματα, στο πρόβλημα αυτό ελάχιστοι μαθητές διατύπωσαν στο φύλλο εργασίας τον ορισμό των μεταβλητών χ και ψ, σημειώνοντας τι απεικονίζει η κάθε μεταβλητή, καθώς όπως είπαν δε το θεώρησαν απαραίτητο.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, μία ήταν η μαθήτρια που χρησιμοποίησε τη διαδικασία συσχετισμού του προβλήματος με παρόμοιο απλούστερο πρόβλημα, για να κατανοήσει το σημείο του προβλήματος που αναφερόταν στην περίμετρο του χωραφιού. Όπως είπε η μαθήτρια: «Δεν ήμουν σίγουρη για τον τύπο που δίνει την περίμετρο του ορθογωνίου και θεώρησα τυχαίους αριθμούς ως μήκος και πλάτος και έκανα την πρόσθεση όλων των πλευρών για να βρω την περίμετρο. Μετά στη θέση των αριθμών έβαλα το χ και το ψ και βρήκα τον τύπο». Η μαθήτρια εκτέλεσε δοκιμές με αριθμούς για να ανακαλύψει τη σχέση που συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με τη περίμετρο και να διατυπώσει στη συνέχεια τον τύπο της περιμέτρου του ορθογωνίου χωραφιού.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Στο τρίτο πρόβλημα της έρευνας, οι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον και δοκίμασαν περισσότερες από μία συμβολικές αναπαραστάσεις. Όπως ανέφεραν πολλοί μαθητές στη συνέντευξη, το γεγονός ότι το πρόβλημα αυτό παρουσίαζε περισσότερα αριθμητικά δεδομένα ευνόησε τις δοκιμές. Κάποιοι μάλιστα, χαρακτήρισαν το πρόβλημα πιο ¨μαθηματικό¨ λόγω των αριθμητικών δεδομένων και των σχέσεων μήκους και χρημάτων που περιείχε, σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα προβλήματα των οποίων τα δεδομένα κρύβονταν κυρίως σε λεκτικές περιγραφές. Τέσσερις ήταν οι μαθητές οι οποίοι σχημάτισαν το σωστό σύστημα των εξισώσεων που παριστάνει τα λύση του προβλήματος, ενώ οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να σχηματίσουν σωστά μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος και συγκεκριμένα την εξίσωση που αναπαριστά την περίμετρο του χωραφιού σχήματος ορθογωνίου.

Ξεκινώντας από τον σχηματισμό της εξίσωσης που παριστάνει την περίμετρο του οικοπέδου στο οποίο αναφέρεται το πρόβλημα, φάνηκε πως δεν ήταν όλοι οι μαθητές εξοικειωμένοι με την έννοια της περιμέτρου. Δύο από αυτούς διατύπωσαν λανθασμένη σχέση μεταξύ των πλευρών του ορθογωνίου οικοπέδου και της περιμέτρου του και μία μαθήτρια προσπάθησε να δημιουργήσει τον τύπο της περιμέτρου με τη βοήθεια ενός σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο και κατάφερε. Οι σχέσεις που δημιουργήθηκαν για την έκφραση του μήκους της περιφέρειας του οικοπέδου συγκεντρώνονται παρακάτω.

➢ *Σωστός σχηματισμός εξισώσεων*

- $2\chi + 2\psi = 140$
  Η εξίσωση αυτή σχηματίστηκε από 6 μαθητές σύμφωνα με τον τύπο της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου όπως περιέγραψαν οι ίδιοι, αφού το οικόπεδο του προβλήματος έχει το σχήμα αυτό. Οι μεταβλητές χ και ψ ορίζουν τις διαστάσεις του ορθογωνίου και το διπλάσιο του αθροίσματός τους αποτελεί το μήκος τις περιφέρειάς του, όπως περιγράφουν οι μαθητές στη συνέντευξη. Ένας μαθητής όρισε τις διαστάσεις του χωραφιού με τις μεταβλητές α και β και σχημάτισε την εξίσωση $2\alpha + 2\beta = 140$ για να απεικονίσει αλγεβρικά την περίμετρο του χωραφιού.

- $\chi + \psi = 70$
  Η εξίσωση αυτή δημιουργήθηκε από έναν μαθητή ο οποίος αρχικά είχε σχηματίσει την εξίσωση $2\chi + 2\psi = 140$ σύμφωνα με το σκεπτικό που αναφέρθηκε και παραπάνω. Θεώρησε όμως χρήσιμο να απλοποιήσει όλους τους όρους της σχέσης με το 2 ώστε να έχει όσο το δυνατόν πιο απλές σχέσεις στο σύστημα των εξισώσεων.

➢ *Λανθασμένος σχηματισμός εξισώσεων*

- $2\chi \cdot 2\psi = 140$
  Η παραπάνω εξίσωση σχηματίστηκε από ένα μαθητή ο οποίος δε θυμόταν την έννοια της περιμέτρου επίπεδου σχήματος. Στη προσπάθειά του να θυμηθεί τους τύπους της περιμέτρου για το κάθε σχήμα θεώρησε ότι αυτός ήταν ο τύπος υπολογισμού τη περιμέτρου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

- $\chi + \psi = 140$
  Η σχέση αυτή διατυπώθηκε από ένα μαθητή ο οποίος σύμφωνα με τις περιγραφές του κατά τη διάρκεια επίλυσης αλλά και κατά τη συνέντευξη, φάνηκε να κατανοεί την έννοια της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, αφού την περιέγραψε ως το άθροισμα των τεσσάρων πλευρών του σχήματος. Ωστόσο παρουσίασε ως περίμετρο του σχήματος το άθροισμα των διαστάσεων των δύο άνισων πλευρών του. Κατά τη συνέντευξη, στο σημείο όπου εξήγησε το σχηματισμό της εξίσωσης αυτής εξακολούθησε να μην εντοπίζει κάποιο λάθος στη σχέση που σχημάτισε. Επομένως ο σχηματισμός αυτός ενδέχεται να οφείλεται σε λανθασμένη σημασιολογική ερμηνεία.

Σε ότι αφορά το σχηματισμό της δεύτερης εξίσωσης του προβλήματος, οι απαντήσεις των μαθητών ποικίλουν. Πέντε από αυτούς κατάφεραν να σχηματίσουν τη σωστή συμβολική αναπαράσταση που αποτελεί τη δεύτερη εξίσωση του προβλήματος, ενώ οι υπόλοιποι είτε αμελούσαν στοιχεία του προβλήματος τα οποία ήταν απαραίτητο να συμπεριληφθούν στην εξίσωση, είτε παρουσίαζαν δυσκολίες στην ερμηνεία των λεκτικών δεδομένων για τη σωστή συντακτική και σημασιολογική μετάφραση. Οι απαντήσεις που παρουσίασαν οι μαθητές φαίνονται αναλυτικά παρακάτω.

- *Σωστός σχηματισμός εξισώσεων*

- $(2\chi + \psi) \cdot 3 + 40 = 370$
  Η εξίσωση αυτή σχηματίστηκε από δύο μαθητές οι οποίοι επιχείρησαν να εκφράσουν τα λεκτικά δεδομένα του προβλήματος, θεωρώντας ότι η πλευρά χ περιφράσσετε δύο φορές και η πλευρά ψ μία φορά, επομένως το γινόμενο των μέτρων της περίφραξης με το κόστος ανά μέτρο, αυξημένο κατά 40 ευρώ που είναι τα εργατικά, δίνει το συνολικό κόστος του έργου.

- $6\chi + 3\psi = 330$ ή $2\chi + \psi = 110$
  Οι σχέσεις αυτές διατυπώθηκαν από δύο μαθητές οι οποίοι ξεκίνησαν πραγματοποιώντας αριθμητικές πράξεις για να απλοποιήσουν τα αριθμητικά δεδομένα ώστε ο σχηματισμός των εξισώσεων να πραγματοποιηθεί με μικρότερους αριθμούς. Αρχικά οι μαθητές θεώρησαν χρήσιμο να αφαιρέσουν τα εργατικά έξοδα από το συνολικό κόστος του έργου κι έτσι ξεκίνησαν εκτελώντας την πράξη 370 - 40 = 330 ευρώ. Επομένως θεώρησαν ότι αν περιφραχθούν οι δύο πλευρές μήκους χ και η μία πλευρά μήκους ψ, τότε το κόστος των 330 ευρώ θα προκύπτει από το γινόμενο του συνολικού μήκους περίφραξης $2\chi + \psi$ με τα 3 ευρώ που κοστίζει το κάθε μέτρο. Έτσι προέκυψε η σχέση $6\chi + 3\psi = 330$. Ως επέκταση αυτού, ο ένας από τους δύο μαθητές θεώρησε χρήσιμη τη διαίρεση του ποσού των 330 ευρώ με το 3 που αντιστοιχεί στο κόστος του μέτρου, έτσι ώστε να προκύψει το συνολικό μήκος του φράχτη που περιφράχθηκε, κι έτσι δημιουργήθηκε η σχέση $2\chi + \psi = 110$.

- $370 - 40 = 3 \cdot (140 - \psi)$
  Η σχέση αυτή διατυπώθηκε από ένα μαθητή ο οποίος θεώρησε πως αφού η περίμετρος του οικοπέδου είναι 140 μέτρα, τότε εάν περιφράχθηκε δύο φορές η πλευρά μήκους χ και μία φορά η πλευρά μήκους ψ, τότε το συνολικό μήκος περίφραξης θα είναι ίσο με την περίμετρο ελαττωμένη κατά το μήκος ψ της πλευράς που δεν περιφράχθηκε. Στη συνέχει το μήκος αυτό επί το κόστος της περίφραξης ανά μέτρο θα είναι ίσο με το συνολικό κόστος του έργου εάν αφαιρεθούν από αυτό τα εργατικά έξοδα. Εδώ λοιπόν, ο μαθητής δίνει τη δική του ερμηνεία σε ότι αφορά τα μέτρα περίφραξης και στη συνέχεια δημιουργεί την εξίσωση με τη βοήθεια της σημασιολογικής μετάφρασης του κειμένου του προβλήματος.

- $140 - 110 = \psi$
  Η σχέση αυτή διατυπώθηκε από ένα μαθητή, ο οποίος με αριθμητικές πράξεις επιχειρούσε να βρει το μήκος των πλευρών χ και ψ. Συγκεκριμένα, ο μαθητής θεώρησε πως το κόστος του έργου χωρίς τα εργατικά έξοδα ήταν 330 ευρώ και εφόσον το κόστος ανά μέτρο περίφραξης ήταν 3 ευρώ τότε τα μέτρα που περιφράχθηκαν ήταν 110. Επομένως το μήκος ψ της πλευράς που δεν περιφράχθηκε υπολογίζεται από τη διαφορά του συνολικού μήκους περίφραξης από το συνολικό μήκος της περιφέρειας του οικοπέδου, το οποίο και παρουσιάζει στη σχέση. Ο μαθητής δεν θεώρησε απαραίτητο να δημιουργήσει κάποια εξίσωση η οποία να συμπεριλαμβάνει και τις δύο μεταβλητές χ και ψ, ούτε να εκτελέσει την πράξη μεταξύ των αριθμών στο αριστερό μέλος της σχέσης που διατύπωσε.

➢ *Λανθασμένος σχηματισμός εξισώσεων*

- $6\chi + 3\psi = 370$ ή $6\alpha + 3\beta = 370$
  Στη περίπτωση αυτή, οι μαθητές που σχημάτισαν το σύστημα θεώρησε ότι περιφράσσονται 2 πλευρές μήκους χ ή α και μία μήκους ψ ή β, επομένως το κόστος τη περίφραξης θα δίνεται από τις σχέσεις $6\chi + 3\psi$ ή $6\alpha + 3\beta$ αντίστοιχα, εφόσον το κόστος για το κάθε μέτρο περίφραξης ήταν 3 ευρώ. Στη συνέχεια σκέφτηκαν πως η αλγεβρική σχέση που σχημάτισαν είναι ίση με το συνολικό κόστος κατασκευής, αγνοώντας όμως τα εργατικά έξοδα με αποτέλεσμα να μην σχηματίσουν σωστά τη σχέση. Στις περιγραφές οι μαθητές απέφυγαν να συμπεριλάβουν τα εργατικά έξοδα που αναφέρονταν στο κείμενο, ενδεχομένως γιατί δεν μπορούσαν να κατανοήσει την έννοια για να την εκμεταλλευτούν σωστά.

- $6\chi + 3\psi = 250$
  Η σχέση αυτή διατυπώθηκε από μία μαθήτρια η οποία θεωρώντας ότι περιφράχθηκαν δύο πλευρές μήκους χ και μία πλευρά μήκους ψ, διατύπωσε

τις σχέσεις: $3χ + 40$, $3ψ + 40$, $3χ + 40$, κατά τις οποίες όπως είπε, υπολόγισε το κόστος περίφραξης της κάθε πλευράς και στη συνέχεια τις πρόσθεσε μεταξύ τους με αποτέλεσμα να προκύψει ότι $6χ + 3ψ + 120 = 370$ ως η σχέση που υπολογίζει το συνολικό κόστος κατασκευής του φράχτη. Στη συνέχει για να παρουσιάσει στο σύστημα μια πιο απλοποιημένη σχέση, αφαίρεσε το 120 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει παρανόηση του λεκτικού περιεχομένου του προβλήματος αφού η μαθήτρια δεν αντιλαμβάνεται την έννοια του όρου ¨εργατικά έξοδα¨, και θεωρεί ότι τα έξοδα αυτά χρεώνονται σε κάθε πλευρά στην οποία γίνεται η περίφραξη.

- $3(2χ + ψ) = 140 - ψ$

  Η μαθήτρια που διατύπωσε αυτή την εξίσωση, όπως εξήγησε και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, θεώρησε ότι εφόσον θα περιφραχθούν οι τρεις πλευρές του χωραφιού σχήματος ορθογωνίου, το μήκος του φράχτη θα είναι $2χ + ψ$ ενώ ταυτόχρονα τα μέτρα που θα περιφραχθούν θα είναι η διαφορά του μήκους ψ της πλευρά που δε θα περιφραχθεί, από το συνολικό μήκος των 140 μέτρων της περιφέρειας του χωραφιού. Στη συνέχεια δεν μπορούσε να αποφασίσει τον τρόπο διαχείρισης των πληροφοριών αυτών, αλλά και τον τρόπο συσχέτισης με το κόστος κατασκευής, με αποτέλεσμα να διατυπώσει μια σχέση η οποία στο πρώτο μέλος παρουσιάζει το κόστος περίφραξης του μήκους $2χ + ψ$ των τριών πλευρών, το οποίο εξισώνει με το μήκος $140 - ψ$ των τριών αυτών πλευρών.

Οι συμβολικές αναπαραστάσεις που σχηματίστηκαν από τους μαθητές για το τρίτο πρόβλημα, συνοψίζονται στον Πίνακα 3.

1η εξίσωση	**Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε**	**Αιτίες εμφάνισης λαθών**
$2χ\cdot 2ψ=140$	1	Σημασιολογική μετάφραση
$χ+ψ=140$	1	Σημασιολογική μετάφραση

2η εξίσωση	**Πλήθος μαθητών που τη σχημάτισε**	**Αιτίες εμφάνισης λαθών**
$6α+3β=370$	1	Άγνωστη λέξη
$6χ+3ψ=370$	1	Άγνωστη λέξη
$6χ+3ψ=250$	1	Άγνωστη λέξη
$3(2χ+ψ)=140-ψ$	1	Σημασιολογική μετάφραση Χρήση συμβόλου ισότητας

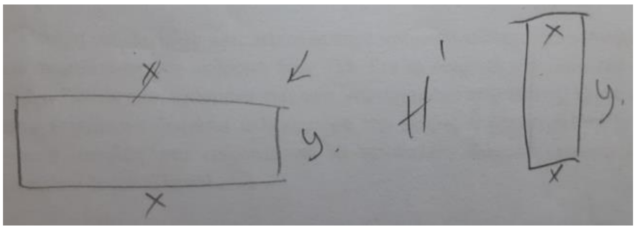
Πίνακας 3: Λανθασμένες συμβολικές αναπαραστάσεις

Εικονιστικές αναπαραστάσεις

Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας των μαθητών, οι οκτώ μαθητές που σχεδίασαν αναπαραστάσεις χρησιμοποίησαν βασικές γνώσεις γεωμετρίας από προηγούμενες τάξεις. Οι 7 μαθητές χρησιμοποίησαν σχηματικές εικονιστικές αναπαραστάσεις, σχεδιάζοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που αναπαριστά το χωράφι στο οποίο αναφερόταν η εκφώνηση. Μία μαθήτρια έδωσε περισσότερο εξεικονιστικό χαρακτήρα στο σχέδιό της, ζωγραφίζοντας το χωράφι και τον φράχτη που περιφράσσει τις 3 πλευρές του.

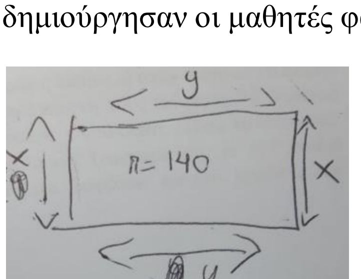
Σχηματικές εικονιστικές αναπαραστάσεις

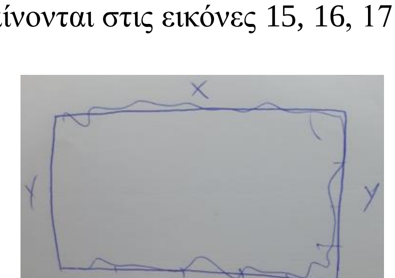
Οι περισσότεροι μαθητές περιορίστηκαν στο σχέδιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και το χρησιμοποίησαν για τον εντοπισμό και την απεικόνιση των μεταβλητών χ και ψ που όρισαν. Δύο μαθητές σχεδίασαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που όπως είπαν, απεικονίζουν τις δύο διαφορετικές εκδοχές περίφραξης του οικοπέδου, θεωρώντας πως στη μία περίπτωση περιφράσσονται οι δύο μεγαλύτερες διαστάσεις του και η μία μικρή, ενώ στην άλλη περιφράσσονται οι δύο μικρότερες διαστάσεις του και η μία μεγάλη, όπως φαίνεται στην εικόνα 14.



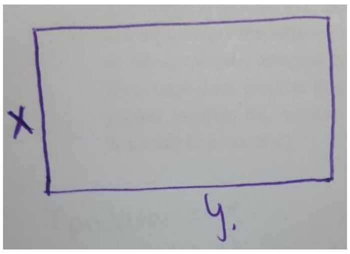
Εικόνα 14

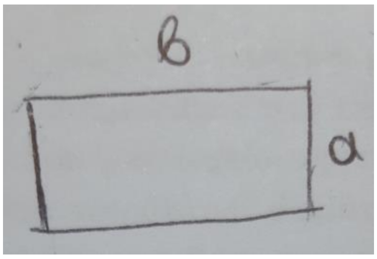
Το σχέδιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου βοήθησε τους μαθητές οι οποίοι δε θυμόντουσαν ξεκάθαρα την έννοια της περιμέτρου, να θυμηθούν πώς υπολογίζεται το συνολικό μήκος της περιφέρειας και ποια είναι η σχέση μεταξύ των διαστάσεων και της περιμέτρου, ώστε να διατυπώσουν τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Στο πρόβλημα αυτό δεν υπήρξε ποικιλία σχεδίων, καθώς τα περισσότερα σχέδια των μαθητών ταυτίζονται μεταξύ τους. Οι μαθητές κατά τη συνέντευξη τόνισαν ότι δεν υπήρχε ανάγκη να σχεδιάσουν επιπλέον στοιχεία, ενώ ταυτόχρονα ανέφεραν ότι δε βρήκαν κάποιο τρόπο να συμπεριλάβουν στο σχήμα τους τις πληροφορίες σχετικά με το κόστος της κατασκευής. Κάποιες από τις σχηματικές αναπαραστάσεις που δημιούργησαν οι μαθητές φαίνονται στις εικόνες 15, 16, 17 και 18.





Εικόνα 15 ***Εικόνα 16***

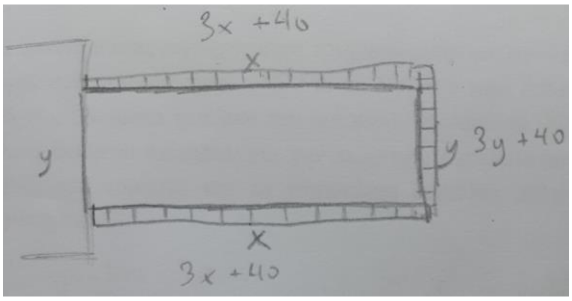




Εικόνα 17 ***Εικόνα 18***

Εξεικονιστικές αναπαραστάσεις

Μία μαθήτρια ζωγράφισε το χωράφι σχήματος ορθογωνίου και το φράχτη με τον οποίο περιφράσσεται, δίνοντας πιο εξεικονιστικό χαρακτήρα στην αναπαράστασή της. Θεώρησε ότι περιφράχθηκαν οι δύο πλευρές μήκους χ και μία πλευρά μήκους ψ, και στο σχήμα παρουσίασε το κόστος περίφραξης της κάθε πλευράς, το οποίο όπως είπε η ίδια, τη βοήθησε στο σχηματισμό της πολυπλοκότερης κατά της άποψή της, εξίσωσης του συστήματος που απεικονίζει τη λύση του προβλήματος. Η μαθήτρια αυτή, θεώρησε πως στο κόστος περίφραξης της κάθε πλευράς του χωραφιού χρεώνονται και τα εργατικά έξοδα, κι έτσι παρουσίασε το σχέδιο που φαίνεται στην εικόνα 19, πάνω στο οποίο διατύπωσε και συμβολικές αναπαραστάσεις για να τη βοηθήσουν στη διατύπωση των εξισώσεων του συστήματος.



Εικόνα 19

Δυσκολίες

Κατανόηση κειμένου

Στη συνέντευξη για το τρίτο πρόβλημα, κάποιοι μαθητές τόνισαν ότι κατά την πρώτη ανάγνωση της εκφώνησης δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τη σύνδεση των μέτρων με τα χρηματικά ποσά που αναφέρονται στο κείμενο, αφού καθώς το διάβαζαν υπέθεσαν ότι θα ασχοληθούν μόνο με σχέσεις μήκους. Ακόμη, δύο μαθητές ανέφεραν ότι δεν ήταν ξεκάθαρο αν το ποσό των 40 ευρώ που αναφερόταν σε εργατικά έξοδα, εμπεριέχεται στο ποσό των 370 ευρώ που αφορούσε το κόστος κατασκευής. Επιπλέον, ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου ανέφερε ότι αντιμετώπισε δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου, καθώς δε γνώριζε την έννοια της περιμέτρου, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να αντιληφθεί το νόημα του κειμένου.

Εντοπισμός άγνωστων ποσοτήτων και δημιουργία μεταβλητών

Οι δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές στον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων του κειμένου, αφορούν την ίδια την έννοια της μεταβλητής. Όπως ανέφεραν οι ίδιοι στη συνέντευξη, όρισαν τυχαία μεταβλητές γιατί δε γνώριζαν ποια διάσταση του ορθογωνίου χωραφιού δε θα περιφραχθεί. Οι ίδιοι θεώρησαν ότι το στοιχείο αυτό θα έπρεπε να το γνωρίζουν από την αρχή, αφού η μία διάσταση είναι μεγαλύτερη της άλλης, επομένως έχει σημασία ποια από τις δύο διαστάσεις θα περιφραχθεί δύο φορές και ποια μία. Σκεπτόμενη με τον ίδιο τρόπο, μια μαθήτρια της Α΄ λυκείου τόνισε ότι «εάν το σχήμα του οικοπέδου ήταν τετράγωνο δε θα είχαμε αυτό το πρόβλημα αφού όλες θα ήταν ίσες».

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Μια από τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν στους μαθητές, όπως οι ίδιοι αναφέρουν στη συνέντευξη, ήταν η δημιουργία της εξίσωσης που εκφράζει την περίμετρο. Κάποιοι δεν ήταν σίγουροι για την έννοια της περιμέτρου και προσπαθούσαν να θυμηθούν τον τύπο που δίνει την περίμετρο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ακόμη, ορισμένοι μαθητές εξέφρασαν την αβεβαιότητά τους σε ότι αφορά την επιλογή της πλευράς που περιφράσσεται μόνο μία φορά, για τη δημιουργία της δεύτερης εξίσωσης. Οι ίδιοι, θεωρούσαν πως θα έπρεπε να γνωρίζουν από την εκφώνηση ποια από τις δύο διαστάσεις περιφράσσεται μία φορά, η «μικρή» ή η «μεγάλη». Ένα ακόμη πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά τη δημιουργία των εξισώσεων, ήταν η διαχείριση των εργατικών εξόδων. Ορισμένοι δεν ήταν βέβαιοι για την έννοια των εργατικών εξόδων, εάν αυτά συμπεριλαμβάνονται στο κόστος κατασκευής, εάν χρεώνονται στην κατασκευή του φράχτη για κάθε πλευρά του οικοπέδου. Τέλος, πολλοί μαθητές ανέφεραν ότι παρουσίασαν δυσκολία στη σύνδεση των σχέσεων μήκους με το κόστος της κατασκευής, καθώς δεν μπορούσαν να αποφασίσουν με βεβαιότητα τα κατάλληλα σύμβολα των πράξεων. Ένας μαθητής ανέφερε ότι αυτό που τον δυσκόλεψε περισσότερο ήταν το γεγονός ότι αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της αριθμητικής και ήταν πολύ δύσκολο να προσανατολίσει τη σκέψη του στη δημιουργία αλγεβρικών σχέσεων για τη διατύπωση της λύσης του.

Δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων

Στο τρίτο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές υποστήριξαν ότι δεν παρουσίασαν κάποια δυσκολία στο σχεδιασμό των εικονιστικών αναπαραστάσεων που δημιούργησαν. Κάποιοι ανέφεραν ότι δυσκολεύτηκαν στην επιλογή των πλευρών περίφραξης και στην απεικόνιση των δεδομένων της εκφώνησης που αφορούσαν το κόστος κατασκευής. Ωστόσο, όπως και στα δύο προηγούμενα προβλήματα οι μαθητές αναφέρθηκαν στην έλλειψη εξοικείωσης με αυτού του είδους τις αναπαραστάσεις, αφού επέλεξαν να αρκεστούν στη χρήση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου για την απεικόνιση των δεδομένων και δεν πειραματίστηκαν στη δημιουργία πιο πλούσιων σχεδίων.

Σύνοψη - Γενικές παρατηρήσεις συμπεριφοράς των μαθητών

Τα ποσοτικά και ποιοτικά στοιχεία που συλλέχθηκαν από τα τρία προβλήματα του εργαλείου για την κατανόηση, τις αναπαραστάσεις και τις δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές κατά τη μετατροπή του λεκτικού περιεχομένου σε σύστημα εξισώσεων, παρουσιάζουν ομοιότητες και διαφορές στα αντίστοιχα στάδια του μετασχηματισμού. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα στοιχεία αυτά αναφορικά με τις διαδικασίες μετατροπής που χρησιμοποιούν οι μαθητές και τις δυσκολίες που συναντούν, για το σύνολο των προβλημάτων του φύλλου εργασίας.

Διαδικασίες μετατροπής

Επεξεργασία εκφώνησης προβλημάτων

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, όταν έλαβαν το φύλλο εργασίας με τα τρία λεκτικά προβλήματα ξεκίνησαν με το πρώτο. Σε όλα τα προβλήματα παρατηρήθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές κατά την ανάγνωση της εκφώνησης υπογράμμιζαν τα αριθμητικά δεδομένα ή τα κατέγραφαν. Στο δεύτερο πρόβλημα μάλιστα, υπογράμμιζαν ολόκληρες φράσεις στις οποίες ανέτρεχαν τακτικά κατά το σχηματισμό των εξωτερικών αναπαραστάσεων, συμβολικών και εικονιστικών. Οι περισσότεροι μαθητές υποστηρίζουν ότι ο τρόπος αυτός τους βοηθάει στην κατανόηση του περιεχομένου, ενώ ένας από αυτούς αναφέρει χαρακτηριστικά: «Ο τρόπος αυτός με βοηθάει να εστιάζω στις ¨λέξεις κλειδιά¨ της εκφώνησης και ξεχωρίζω τα δεδομένα με τα οποία θα ασχοληθώ για να φτιάξω τις εξισώσεις».

Όλοι οι μαθητές αφιέρωσαν χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης του δεύτερου προβλήματος, διαβάζοντάς το πολλές φορές πριν ξεκινήσουν την διατύπωση της λύσης τους, αλλά και κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του. Όπως είπαν χαρακτηριστικά «πολλά σημεία του προβλήματος αυτού χρειάζονταν ερμηνεία» και το γεγονός ότι το δεύτερο πρόβλημα δεν παρουσιάζει ρητά τα αριθμητικά δεδομένα αποτέλεσε παράγοντα που αύξησε τη δυσκολία σε ότι αφορά την κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Αυτός ήταν και ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο στην ανάγνωση της εκφώνησης του δεύτερου προβλήματος, συγκριτικά με το πρώτο και το τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, όπου ελάχιστοι μαθητές διάβασαν την εκφώνηση περισσότερο από μία ή δύο φορές. Το πρώτο πρόβλημα χαρακτηρίστηκε από τους μαθητές ως «βατό», με εύκολο λεξιλόγιο και συντακτικό, ενώ το τρίτο πρόβλημα χαρακτηρίστηκε ως πιο «μαθηματικό» από ορισμένους μαθητές, γιατί παρουσίαζε στην εκφώνησή του περισσότερα αριθμητικά δεδομένα και σχέσεις ποσοτήτων.

Εντοπισμός μεταβλητών

Σε όλα τα προβλήματα του φύλλου εργασίας, οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις μεταβλητές χ και ψ για να απεικονίσουν τις άγνωστες ποσότητες και να σχηματίσουν τις εξισώσεις, εκτός από ένα μαθητή ο οποίος στο τρίτο μόνο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, αντί για χ και ψ χρησιμοποίησε τις μεταβλητές α και β για την απεικόνιση των αγνώστων, λέγοντας χαρακτηριστικά: «Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις α επί β, άρα θα ορίσω α το μήκος του οικοπέδου και β το πλάτος του». Ελάχιστοι μαθητές, πέρα από τις μεταβλητές χ και ψ, κατά την επεξεργασία των προβλημάτων δημιουργούσαν και άλλες μεταβλητές, ως βοηθητικές, δίνοντάς τους διαφορετικές ονομασίες.

Παράλληλα, στο στάδιο του εντοπισμού των άγνωστων ποσοτήτων, παρατηρήθηκε ότι στα περισσότερα προβλήματα οι μαθητές της Β΄ Λυκείου έπειτα από την ανάγνωση της εκφώνησης των προβλημάτων προχωρούσαν αμέσως σε ορισμό μεταβλητών, τον οποίο διατύπωναν στο φύλλο εργασίας. Αντίθετα, οι περισσότεροι μαθητές της Α΄ Λυκείου δεν ακολουθούσαν συγκεκριμένη δομή στη διατύπωση της λύσης τους. Πολλοί, έπειτα από την ανάγνωση της εκφώνησης, ξεκινούσαν κάνοντας δοκιμές με αλγεβρικές σχέσεις ή σχέδια και έπειτα όριζαν μεταβλητές, σημειώνοντας ποια ποσότητα αναπαριστά η κάθε μεταβλητή.

Συσχέτιση με απλούστερο πρόβλημα

Κατά την επεξεργασία των προβλημάτων του φύλλου εργασίας για τη δημιουργία του συστήματος εξισώσεων που απεικονίζει τη λύση του καθενός, η πλειοψηφία των μαθητών δεν επιχείρησε το συσχετισμό με άλλα απλούστερα προβλήματα που προέρχονται από την προϋπάρχουσα εμπειρία τους στην επίλυση, στο πλαίσιο της αριθμητικής. Στη συνέντευξη, οι περισσότεροι μαθητές δήλωσαν ότι η διαδικασία αυτή κάνει «πολυπλοκότερη» τη λύση, απαιτεί περισσότερο χρόνο και δεν αποτελεί τρόπο ο οποίος μπορεί να ενισχύσει την κατανόησή τους. Παρόλα αυτά, οι ελάχιστοι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη διαδικασία αυτή στα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας, θεωρούν ότι λειτουργεί ενισχυτικά στην κατανόηση των σχέσεων των ποσοτήτων που παρουσιάζονται στο λεκτικό πρόβλημα, και ξεκινώντας από ένα πιο οικείο πλαίσιο με σχέσεις αριθμών, τους βοήθησε να ανάγουν τις σχέσεις αυτές στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη δημιουργία των εξισώσεων.

Δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, σε όλα τα προβλήματα του φύλλου εργασίας χρησιμοποίησαν συμβολικές αναπαραστάσεις. Στο πρώτο πρόβλημα όλοι οι μαθητές ξεκίνησαν με τη δημιουργία συμβολικών σχέσεων και πολλοί από αυτούς μάλιστα, έπειτα από την ανάγνωση της εκφώνησης και προτού ακόμα ορίσουν μεταβλητές, σημείωναν αλγεβρικές σχέσεις που θεωρούσαν ότι θα τους χρησιμεύσουν στην πορεία για τη δημιουργία του συστήματος. Στα επόμενα δύο προβλήματα, δεν ξεκίνησαν όλοι οι μαθητές με τον ίδιο τρόπο, ωστόσο συμβολικές αναπαραστάσεις σχεδιάστηκαν από όλους. Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας, κάποιοι μαθητές διατύπωναν σχέσεις με αλγεβρικούς συμβολισμούς και δίπλα τους σημείωναν με λέξεις τι περιγράφουν οι σχέσεις που δημιουργούσαν. Αυτό φάνηκε να τους βοηθά ώστε σταδιακά να σχηματίσουν τις κατάλληλες εξισώσεις για τη δημιουργία των συστημάτων για το κάθε πρόβλημα. Παρόλα αυτά, οι δυσκολίες και τα λάθη στη σημασιολογική ερμηνεία του λεκτικού περιεχομένου εμπόδισαν σε πολλές περιπτώσεις τους μαθητές να δημιουργήσουν τις κατάλληλες συμβολικές αναπαραστάσεις. Για το λόγο αυτό, η πλειοψηφία των μαθητών δεν παρουσίασε τα σωστά συστήματα εξισώσεων για την απεικόνιση της λύσης του πρώτου και του τρίτου προβλήματος, ενώ στο δεύτερο πρόβλημα δεν υπήρξε σωστή απάντηση.

Δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων

Σε όλα τα προβλήματα του φύλλου εργασίας, φάνηκε ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τη δημιουργία σχεδίων για την απεικόνιση του λεκτικού περιεχομένου. Στο πρώτο πρόβλημα, όταν οι μαθητές παρακινήθηκαν να δοκιμάσουν να δημιουργήσουν κάποιο σχέδιο για να υποστηρίξουν τη λύση τους, φάνηκαν ιδιαίτερα διστακτικοί και λίγοι ήταν εκείνοι που το επιχείρησαν. Ωστόσο η συμπεριφορά των μαθητών στην επεξεργασία του δεύτερου και τρίτου προβλήματος ήταν διαφορετική, καθώς πολλοί ξεκίνησαν την επεξεργασία σχεδιάζονται εικόνες για την αναπαράσταση των δεδομένων, με στόχο να προκύψουν με τη βοήθεια αυτών οι κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Όπως υποστηρίζουν οι περισσότεροι μαθητές: «Τα σχέδια στο δεύτερο πρόβλημα ήταν απαραίτητα για να καταλάβουμε τι συμβαίνει με τον κύριο που μετακινείται στην ουρά». Η εκφώνησή του προβλήματος αυτού παρουσίαζε πολλές σχέσεις ποσοτήτων, η διάκριση των οποίων μπορούσε να γίνει ευκολότερα με τη βοήθεια ενός σχεδίου για να διευκολύνει στη συνέχεια και την επιλογή των αλγεβρικών εργαλείων για τη διατύπωση των εξισώσεων. Στο πρόβλημα αυτό οι περισσότεροι μαθητές προσπαθούσαν να βάλουν τις μεταβλητές πάνω στα σχέδια που δημιούργησαν, για να μπορέσουν να διακρίνουν τις σχέσεις των ποσοτήτων και να επιλέξουν τα κατάλληλα σύμβολα πράξεων για τη διατύπωση των εξισώσεων. Στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι περισσότεροι μαθητές ξεκίνησαν την επεξεργασία σχεδιάζοντας αναπαραστάσεις γιατί ήταν «αρκετά προφανείς» όπως υποστηρίζουν οι ίδιοι. Θεωρούν ότι στο πρόβλημα αυτό οι εικονιστικές αναπαραστάσεις ήταν «πιο εύκολες» από τις συμβολικές, επομένως με τη βοήθεια αυτών ξεκίνησαν την οργάνωση της αλγεβρικής λύσης.

Οι διαδικασίες που ακολούθησαν οι μαθητές προκειμένου να μετασχηματίσουν καθένα από τα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας σε σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους, συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 4.

Ενέργειες μαθητών	Πλήθος μαθητών		
	1ο Πρ.	2ο Πρ.	3ο Πρ.
Ξεκινά να παρουσιάζει τη λύση χρησιμοποιώντας συμβολική αναπαράσταση	10	5	2
Ξεκινά να παρουσιάζει τη λύση χρησιμοποιώντας αναπαράσταση με σχέδιο	0	5	8
Χρησιμοποιεί συγγραφικές αναπαραστάσεις	10	10	10
Χρησιμοποιεί εικονιστικές αναπαραστάσεις χωρίς την παρακίνηση του ερευνητή	1	5	7
Χρησιμοποιεί εικονιστικές αναπαραστάσεις έπειτα από παρακίνηση του ερευνητή	3	3	1
Συσχετίζει το πρόβλημα με κάποιο απλούστερο αριθμητικό πρόβλημα	2	1	1

Πίνακας 4: Διαδικασίες μετασχηματισμού του λεκτικού περιεχομένου για τη δημιουργία συστήματος εξισώσεων

Δυσκολίες

Δυσκολίες στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, εμφάνισαν δυσκολίες σε όλα τα προβλήματα του φύλλου εργασίας, ωστόσο στο κάθε πρόβλημα οι δυσκολίες ήταν εντονότερες σε συγκεκριμένα στάδια της επεξεργασίας. Ξεκινώντας με την κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου, οι περισσότεροι μαθητές εμφάνισαν δυσκολίες στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, το οποίο χαρακτήρισαν και ως το «δυσκολότερο» από τα τρία λεκτικά προβλήματα, γιατί όπως πολλοί μαθητές είπαν: «Περιείχε πολλές πληροφορίες που χρειάζονταν ερμηνεία». Στο πρώτο και στο τρίτο πρόβλημα, ελάχιστοι μαθητές εμφάνισαν δυσκολίες, ενώ οι περισσότεροι χαρακτήρισαν τα προβλήματα αυτά «σαφή» με εύκολο λεξιλόγιο και συντακτικό και εμφανή δεδομένα και ζητούμενα.

Δυσκολίες στη συμβολοποίηση των σχέσεων που παρουσιάζει το πρόβλημα

Κατά την διαδικασία συμβολοποίησης των σχέσεων ποσοτήτων που παρουσιάστηκαν στα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας, στο στάδιο της επιλογής μεταβλητών ελάχιστοι ήταν οι μαθητές που εμφάνισαν δυσκολίες. Οι δυσκολίες που παρουσιάστηκαν αφορούν περιπτώσεις όπου οι μαθητές δεν εστίασαν στο ερώτημα των προβλημάτων για τον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων, με αποτέλεσμα να δημιουργούν μεταβλητές στις οποίες δεν αποδίδουν την κατάλληλη ερμηνεία για το σχηματισμό των εξισώσεων. Αντίθετα, στην επιλογή συμβόλων πράξεων για τη δημιουργία των εξισώσεων, και στα τρία προβλήματα η πλειοψηφία των μαθητών εμφάνισε δυσκολίες. Τα περισσότερα εμπόδια εμφανίστηκαν στη σημασιολογική και συντακτική μετάφραση του περιεχομένου του κειμένου, με αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις να μην επιλεγούν τα κατάλληλα σύμβολα των πράξεων και οι κατάλληλες σχέσεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών, για τη διατύπωση των εξισώσεων. Το δεύτερο πρόβλημα ήταν εκείνο στο οποίο και οι 10 μαθητές αντιμετώπισαν τέτοιου είδους δυσκολίες, ενώ στο πρώτο και τρίτο πρόβλημα ένα ποσοστό μαθητών παρέκαμψε αυτά τα εμπόδια.

Δυσκολίες στη δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων

Σύμφωνα με τα ευρήματα από τα εργαλεία της έρευνας, σε όλα τα προβλήματα του φύλλου εργασίας, εκδηλώθηκε η έλλειψη εξοικείωσης των μαθητών με τη δημιουργία σχεδίων για την εικονιστική αναπαράσταση του περιεχομένου, γεγονός το οποίο τους έφερε αντιμέτωπους με δυσκολίες στο στάδιο αυτό. Οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις δυσκολεύονταν να διατυπώσουν με τη βοήθεια σχεδίων το σκεπτικό που είχαν αναπτύξει για τη λύση των προβλημάτων και δε δοκίμαζαν περισσότερες από μία εικονιστικές αναπαραστάσεις. Παράλληλα, στο πρώτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας οι περισσότεροι δίσταζαν να δημιουργήσουν σχέδια. Οι ελάχιστοι μαθητές που το επιχείρησαν, εμφάνισαν δυσκολίες στη δημιουργία των κατάλληλων εικόνων που μπορούσαν να εκφράσουν το λεκτικό περιεχόμενο και τις ποσοτικές σχέσεις και τελικά δεν αξιοποίησαν τα σχέδιά τους για την κατανόηση των σχέσεων των ποσοτήτων και τη δημιουργία των εξισώσεων. Στο δεύτερο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές δημιούργησαν εικόνες, καθώς το έκριναν «απαραίτητο» για την κατανόηση του περιστατικού πλαισίου του, ωστόσο οι δυσκολίες που εμφάνισαν στην κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος αυτού είχαν αντίκτυπο και στη δημιουργία των σχεδίων. Τέλος, στο τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας οι μαθητές δεν παρουσίασαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη δημιουργία εικόνων, καθώς θεώρησαν την αναπαράσταση του προβλήματος αυτού «εύκολη» και «προφανή».

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται συνοπτικά για τα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας, τα ποσοτικά δεδομένα που αφορούν το πλήθος των μαθητών που αντιμετώπισε δυσκολίες σε κάθε στάδιο του μετασχηματισμού.

Ενέργειες μαθητών	Πλήθος μαθητών		
	$1^{ο}$ Πρ.	$2^{ο}$ Πρ.	$3^{ο}$ Πρ.
Παρουσιάζει δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου	4	9	4
Παρουσιάζει δυσκολία στη δημιουργία μεταβλητών	3	3	1
Παρουσιάζει δυσκολία στη συμβολοποίηση σχέσεων	7	10	6
Παρουσιάζει δυσκολία στη χρήση σχεδίων για την αναπαράσταση του περιεχομένου του προβλήματος (συγκριτικά με το σύνολο των μαθητών που δημιούργησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις)	4/4	8/8	1/8

Πίνακας 4: Δυσκολίες μαθητών κατά τη μετατροπή του προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων

Αξίζει να αναφερθεί ότι πολλοί από τους μαθητές οι οποίοι δεν σχημάτισαν τις σωστές αλγεβρικές σχέσεις για την αναπαράσταση των λύσεων των προβλημάτων, στη συνέντευξη παραδέχτηκαν ότι θα μπορούσαν να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο, να ξανασκεφτούν και να σχεδιάσουν επιπλέον τρόπους λύσης. Όπως είπε ένας από τους μαθητές αυτούς: «Όσο περνούσε η ώρα και δεν κατέληγα με σιγουριά σε κάτι, κουραζόμουν. Παρουσίασα συστήματα τα οποία ήξερα ότι δεν ήταν σωστά, για να μην αφήσω άλυτο κανένα πρόβλημα». Επομένως, όταν οι μαθητές δεν κατανοούσαν πλήρως το πρόβλημα για να το αναπαραστήσουν υπό τη μορφή συστήματος, έχαναν το ενδιαφέρον τους, οπότε παρουσίασαν λύσεις τις οποίες δε θεωρούσαν και οι ίδιοι σωστές, γιατί ήθελαν οπωσδήποτε να δώσουν μια τελική απάντηση. Αξίζει επίσης να σημειωθεί το γεγονός ότι πολλοί μαθητές κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, μέσα από τις δικές τους απαντήσεις, αναθεωρούσαν, ερμήνευαν διαφορετικά τα λεκτικά δεδομένα κι εντόπιζαν τα λάθη τους. Ακόμη, δεν ήταν λίγες οι περιπτώσεις στις οποίες εξηγούσαν την αιτία που προκάλεσε το λάθος και στη συνέχεια διατύπωναν και τη σωστή απάντηση προφορικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από το σύνολο των ευρημάτων της έρευνας μπορούν να προκύψουν συμπεράσματα τα οποία αφορούν τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης του Λυκείου προκειμένου να μετατρέψουν ένα λεκτικό πρόβλημα στη μορφή συστήματος εξισώσεων. Επιπλέον μπορούν να προκύψουν συμπεράσματα σχετικά με το αν οι μαθητές επιλέγουν να σχεδιάσουν εικόνες για να αναπαραστήσουν το πρόβλημα που επεξεργάζονται, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα το περιεχόμενό του προτού προχωρήσουν στη δημιουργία των εξισώσεων του συστήματος, και τη μορφή που έχουν οι εικόνες που δημιουργούν. Τέλος, προκύπτουν συμπεράσματα αναφορικά με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σε κάθε στάδιο του μετασχηματισμού.

Ενέργειες μαθητών στη μετατροπή προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων

Σύμφωνα με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, η πορεία που ακολουθούν οι μαθητές κατά την επεξεργασία αλγεβρικών προβλημάτων αποτελείται από την ανάγνωση της εκφώνησής τους, τη διάκριση γνωστών και αγνώστων ποσοτήτων για τον ορισμό των μεταβλητών και στη συνέχεια τον εντοπισμό των σχέσεων που συνδέουν τους αριθμούς με τις μεταβλητές για το σχηματισμό των εξισώσεων, όπως υποστηρίζει και ο Carbonneau (1996) για τα στάδια του μετασχηματισμού. Ωστόσο, όπως προκύπτει από το χειρισμό των μαθητών στο δεύτερο και τρίτο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, οι μαθητές πέρα από τα στάδια μετασχηματισμού που αναφέρει ο Carbonneau (1996), όταν προσπαθούν να κατανοήσουν σχέσεις ποσοτήτων και κατασκευαστικές δομές του κειμένου, καταφεύγουν σε διαδικασίες ανάπτυξης διαισθητικών μοντέλων, προκειμένου να ενισχύσουν την κατανόησή τους για να προχωρήσουν στη δημιουργία αλγεβρικών σχέσεων. Οι μαθητές συμπεριφέρθηκαν κατά αυτό τον τρόπο στο δεύτερο και τρίτο πρόβλημα της έρευνας, καθώς αυτά περιείχαν ποσότητες οι οποίες χρειάζονταν ερμηνεία και δε μπορούσαν να τις κατανοήσουν αποκλειστικά από την ανάγνωση της εκφώνησης, γεγονός το οποίο έρχεται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις των Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989) για την επεξεργασία των προβλημάτων άλγεβρας. Έπειτα από τη διατύπωση της λύσης, η πλειοψηφία των μαθητών δεν επιστρέφει σε αυτή για να ξανασκεφτούν και να αναδιοργανώσουν το σχεδιασμό της, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα για τις σχέσεις που δημιουργήθηκαν, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα του Cifarelli (1998), που υποστηρίζει ότι ένα από τα στάδια του μετασχηματισμού είναι ο επανέλεγχος και η αναδιοργάνωση της λύσης.

Οι ενέργειες που ακολουθούν οι μαθητές προκειμένου να μετατρέψουν ένα λεκτικό πρόβλημα με δύο άγνωστες ποσότητες σε σύστημα εξισώσεων παρουσιάζονται αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Χρησιμοποιούν αριθμητικές μεθόδους

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, υποστηρίζεται ότι οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους στην επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας, εμμένουν σε αριθμητικούς τρόπους χειρισμού επηρεασμένοι από την προϋπάρχουσα εμπειρία τους (Goldin, 1998, Stacey & MacGregor, 1999). Ωστόσο, αυτό δεν επιβεβαιώνεται από την πλειοψηφία των μαθητών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα καθώς κατά την επεξεργασία των προβλημάτων του φύλλου εργασίας, από το δείγμα των δέκα μαθητών, δύο μαθητές επιδίωξαν να φέρουν στο μυαλό τους κάποιο απλούστερο πρόβλημα από την προϋπάρχουσα εμπειρία τους στο πλαίσιο της αριθμητικής. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν παρουσίασαν πρόθεση να εκτρέψουν τη σκέψη τους σε αριθμητικές μεθόδους προκειμένου να κατανοήσουν καλύτερα το περιεχόμενο προτού δημιουργήσουν εξισώσεις, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα των Goldin (1998) και Stacey & MacGregor (1999), οι οποίοι υποστηρίζουν την τάση των μαθητών σε αυτές τις διαδικασίες. Οι περισσότεροι μαθητές, αφού δημιουργούσαν το σύστημα των εξισώσεων, επιδίωκαν να το λύσουν για να ελέγξουν εάν οδηγούνται σε κάποιο λογικό αριθμητικό αποτέλεσμα και να αξιολογήσουν την ορθότητα της λύσης τους, ελάχιστοι όμως χρησιμοποίησαν εξ αρχής αριθμητικές δοκιμές ως διαδικασία υποστήριξης της λύσης και της κατανόησής τους.

Αναφορικά με του μαθητές που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν διαδικασίες συσχετισμού του προβλήματος με κάποιο απλούστερο στο πλαίσιο της αριθμητικής, από την παρούσα έρευνα προκύπτει ότι χρησιμοποιούν τυχαίους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών και εκτελούν δοκιμές προκειμένου να κατανοήσουν τις σχέσεις των ποσοτήτων και να τις ανάγουν στη συνέχεια στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη διατύπωση των εξισώσεων, επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα των Stacey & MacGregor (1999). Πράγματι η διαδικασία αυτή φαίνεται να είναι οικεία στους μαθητές, και τους βοηθά να αντιληφθούν τις ποσοτικές σχέσεις τις οποίες δυσκολεύονται να κατανοήσουν από την ανάγνωση της εκφώνησης των προβλημάτων. Η πλειοψηφία των μαθητών που δεν επιλέγει αυτές τις τεχνικές, θεωρεί ότι στη προσπάθεια αυτή χάνεται πολύτιμος χρόνος και αποπροσανατολίζεται η σκέψη από τη δημιουργία αλγεβρικών λύσεων. Παράλληλα, οι μαθητές θεωρούν ότι μια τέτοια μέθοδος δεν αποτελεί επίσημο τρόπο τεκμηρίωσης της λύσης. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν τις απόψεις του Goldin (1998), ο οποίος αναφορικά με αυτό το μοντέλο μετασχηματισμού τόνισε ότι αποτελείται πολλές φορές από πολύπλοκες δομές και οι μαθητές για το λόγο αυτό δεν το προτιμούν, ενώ παράλληλα δε το θεωρούν αποδεκτό τρόπο σχεδιασμού της λύσης τους.

Δημιουργούν συμβολικές αναπαραστάσεις

Σύμφωνα με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, επιβεβαιώνονται οι απόψεις πολλών ερευνών που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές κατά την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων στρέφουν την προσοχή τους κυρίως σε συμβολικούς τρόπους αναπαράστασης της λύσης (MacGregor & Stacey, 1993, Clement, 1982). Αναζητούν τις άγνωστες ποσότητες από την εκφώνηση του προβλήματος και με τη βοήθεια αυτών δημιουργούν εξισώσεις.

- Εντοπίζουν τους αγνώστους και ορίζουν μεταβλητές

Οι μαθητές της Β΄ Λυκείου, προτού ξεκινήσουν το σχεδιασμό συμβολικών σχέσεων, ορίζουν τις μεταβλητές με τις οποίες πρόκειται να εκφράσουν τις σχέσεις των ποσοτήτων, ενώ οι μαθητές της Α΄ Λυκείου συχνά ξεκινούν να διατυπώνουν εξισώσεις και στην πορεία ορίζουν μεταβλητές. Και στις δύο τάξεις, οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τον εντοπισμό των άγνωστων ποσοτήτων μέσα από ένα κείμενο και τον ορισμό των μεταβλητών. Συνηθίζουν να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές χ και ψ όταν εντοπίζουν δύο άγνωστες ποσότητες με τις οποίες πρόκειται να δημιουργήσουν σύστημα εξισώσεων, εστιάζοντας στο ερώτημα του προβλήματος από όπου προκύπτουν και τα ζητούμενα. Σε περιπτώσεις προβλημάτων όπου εμπλέκονται στοιχεία από την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, όπως ήταν ο τύπος της περιμέτρου που χρειαζόταν για την επίλυση του τρίτου προβλήματος του φύλλου εργασίας, οι μαθητές επηρεάζονται από τον τρόπο με τον οποίο έχουν συνηθίσει να απεικονίζουν τα στοιχεία αυτά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ένας μαθητής στο τρίτο πρόβλημα χρησιμοποίησε τις μεταβλητές α και β για την απεικόνιση των αγνώστων, γιατί οι άγνωστοι αποτελούσαν πλευρές ενός σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο οποίο ο μαθητής συνήθισε να βλέπει ως α το μήκος του και ως β το πλάτος του.

- Δημιουργούν εξισώσεις

Για τη διατύπωση της λύσης των λεκτικών προβλημάτων, οι μαθητές χρησιμοποιούν μεθόδους μετασχηματισμού σύμφωνα με την ατομική τους κατανόηση, προκειμένου να μετατρέψουν το περιεχόμενο του κειμένου σε εξισώσεις. Μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν είναι η ¨συντακτική μετάφραση¨ κατά την οποία ερμηνεύουν σε σύμβολα τις φυσικές εκφράσεις της γλώσσας. Επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα των MacGregor και Stacey (1993), οι μαθητές χρησιμοποιούν τη σειρά των λέξεων όπως αυτές είναι διατυπωμένες στην εκφώνηση του προβλήματος, και τις ¨λέξεις κλειδιά¨ του κειμένου προκειμένου να επιλέξουν τα σύμβολα των πράξεων. Όπως ήταν αναμενόμενο, στην παρούσα έρευνα η χρήση της μεθόδου αυτής οδήγησε σε πολλά σφάλματα. Οι μαθητές εγκλωβίζονταν σε συγκεκριμένες λέξεις και στη σύνταξη της γλώσσας, αγνοώντας τη σημασιολογική ερμηνεία των φράσεων με αποτέλεσμα να μην αντιλαμβάνονται τους ποσοτικούς περιορισμούς και να μην ερμηνεύουν σωστά το νόημα του κειμένου. Λάθη που προκύπτουν από τον εγκλωβισμό της σκέψης σε ¨λέξεις κλειδιά¨ του κειμένου, έγιναν ιδιαίτερα εμφανή κυρίως στο δεύτερο πρόβλημα του κειμένου όπου πολλοί μαθητές μετέφρασαν τη λέξη ¨πίσω¨ με το αρνητικό πρόσημο και τη λέξη ¨μπροστά¨ με το θετικό πρόσημο, χωρίς να λάβουν υπόψη τις πραγματικές μεταβολές των ποσοτήτων. Στο σημείο αυτό γίνεται εμφανές ότι ο αλγεβρικός φορμαλισμός δεν είναι πάντοτε αποτελεσματικός όταν υπάρχουν ποσοτικοί περιορισμοί, όπως υποστηρίζουν και οι Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989), αφού είναι δύσκολη η μετάβαση στη δημιουργία των εξισώσεων εάν δεν προηγηθούν διαδικασίες που στοχεύουν στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων.

Παράλληλα, οι μαθητές εκτελούν ¨σημασιολογική μετάφραση¨ των λέξεων και φράσεων του κειμένου, προκειμένου να ερμηνεύσουν το περιεχόμενο του προβλήματος σε σύμβολα για τη δημιουργία των εξισώσεων, η οποία αποτελεί μέθοδο που επίσης σημειώνεται από τους MacGregor και Stacey (1993). Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές ερμηνεύουν τις φράσεις του κειμένου σύμφωνα με την ατομική τους κατανόηση, χωρίς να εστιάζουν απαραίτητα σε ¨λέξεις κλειδιά¨, και προσπαθούν να αποδώσουν το νόημα χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών. Ωστόσο, η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης των συμβόλων των πράξεων και των λειτουργιών τους, την οποία τονίζουν οι Hercovics και Linchevski (1994), οδηγεί στη λανθασμένη σημασιολογική μετάφραση του κειμένου και κατ' επέκταση σε λανθασμένη δημιουργία εξισώσεων. Τα λάθη λόγω της σημασιολογικής μετάφρασης στα συστήματα εξισώσεων που σχηματίστηκαν από τους μαθητές, εντοπίστηκαν και στα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας.

Στις μεθόδους μετατροπής του κειμένου σε εξισώσεις, εντοπίζεται ακόμη η μέθοδος της ¨στατικής σύγκρισης¨ που αναφέρουν οι MacGregor και Stacey (1993). Χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές στο δεύτερο πρόβλημα του φύλλου εργασίας, για την έκφραση της σχέσης που αφορούσε δύο ποσότητες στις οποίες η μία ήταν διπλάσια της άλλης στο δεύτερο πρόβλημα. Οι μισοί από τους μαθητές εκτέλεσαν λάθος τη σύγκριση αυτή, αφού δεν επέλεξαν να διπλασιάσουν την κατάλληλη ποσότητα με αποτέλεσμα να δημιουργήσουν λάθος την εξίσωση, επιβεβαιώνοντας ότι η μέθοδος της ¨στατικής σύγκρισης¨ δύο ποσοτήτων είναι ακόμη μία αιτία πρόκλησης λαθών. Οι μαθητές παρόλο που κατανοούν την έννοια της ¨διπλάσιας¨ ποσότητας, δεν την μετατρέπουν σωστά σε συμβολικές σχέσεις.

Δημιουργούν εικονιστικές αναπαραστάσεις

Υποστηρίζεται ότι οι μαθητές έχουν την τάση να δημιουργούν εικόνες για να αποδώσουν νόημα στις φράσεις ενός λεκτικού προβλήματος, στο πλαίσιο της άλγεβρας όμως αυτό δεν είναι αναμενόμενο στον ίδιο βαθμό για κάθε είδους πρόβλημα (Hall, 1989). Στην παρούσα έρευνα φάνηκε η έλλειψη εξοικείωσης των μαθητών με αυτού του είδους τα αναπαραστατικά συστήματα, αφού κάποιοι μαθητές ακόμα και έπειτα από την παρακίνηση του ερευνητή δε δοκίμαζαν να δημιουργήσουν σχέδια για να στηρίξουν την λύση τους και να ενισχύσουν την κατανόησή τους. Οι μαθητές δεν μπορούσαν να σκεφτούν κατάλληλα σχέδια για την απεικόνιση του περιεχομένου των προβλημάτων, άλλοι θεωρούσαν ότι ένα σχέδιο θα τους μπέρδευε αντί να λειτουργήσει ενισχυτικά ενώ παράλληλα δεν αποτελεί επίσημη διαδικασία για να ενταχθεί στη λύση ενός προβλήματος, επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα των Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989). Ωστόσο, στα δύο από τα τρία προβλήματα με τα οποία ασχολήθηκαν, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών σχεδίασε αναπαραστάσεις είτε με δική του πρωτοβουλία είτε με την παρότρυνση του ερευνητή.

Με βάση τα ευρήματα της παρούσας έρευνα, προκύπτει ότι οι μαθητές δημιουργούν αυτόνομα αναπαραστατικά σχήματα με βάση της ατομική τους κατανόηση, όπως υποστηρίζεται και από τον Clement (1982). Οι μαθητές χρησιμοποιούν *συμβολικές εικονιστικές αναπαραστάσεις* στις οποίες τα στοιχεία δίνονται με σύμβολα, κουκκίδες, γραμμές ή βέλη, *σχηματικές αναπαραστάσεις*, στις οποίες πρωταγωνιστούν τα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία απεικονίζουν τα στοιχεία του προβλήματα, αλλά και καθαρά *εξεικονιστικές αναπαραστάσεις*, όπου ζωγραφίζουν το πρόβλημα και δημιουργούν ένα σκίτσο για να αποδώσουν το περιεχόμενό του. Η επιλογή του είδους του σχεδίου που δημιουργούν εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος που αντιμετωπίζουν και από τον τρόπο που οι ίδιοι αντιλαμβάνονται τη διαδικασία της απεικόνισης ενός προβλήματος με σχέδιο.

Στην παρούσα έρευνα, οι μαθητές κατέφυγαν στη δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων κατά την επεξεργασία του δεύτερου προβλήματος, προκειμένου να οργανώσουν τα δεδομένα από τις περιγραφές της εκφώνησης και τις μεταβολές ποσοτήτων. Έτσι, επιβεβαιώνοντας και πάλι τα ευρήματα των Hall, Kibler, Wenger και Truxaw (1989), οι μαθητές δημιουργούν εικόνες προκειμένου να αντιμετωπίσουν τα εννοιολογικά σφάλματα στο περιεχόμενο προβλημάτων και να εντοπίσουν τους ποσοτικούς περιορισμούς που περιέχονται στα δεδομένα του προβλήματος. Παράλληλα, στο τρίτο πρόβλημα οι μαθητές δημιούργησαν εικονιστικές αναπαραστάσεις, επειδή τους ήταν πιο οικείες αφού αφορούσαν το σχηματισμό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου χωραφιού. Στο πρόβλημα αυτό οι αναπαραστάσεις που δημιούργησαν οι μαθητές, χρησιμοποιήθηκαν για την αναγνώριση κατασκευαστικών δομών (Hall, Kibler, Wenger & Truxaw, 1989), όπως ο τύπος της περιμέτρου, από μαθητές οι οποίοι δεν θυμόντουσαν τον τύπο που είχαν διδαχθεί σε μικρότερες τάξεις.

Τέλος, οι μαθητές που φάνηκε να έχουν μεγαλύτερη ευχέρεια στις αλγεβρικές μεθόδους ήταν εκείνοι οι οποίοι απέφευγαν περισσότερο τη δημιουργία σχεδίων κατά την επεξεργασία των προβλημάτων, σε αντίθεση με τα ευρήματα του Clement (1982), ο οποίος υποστηρίζει ότι οι μαθητές με μεγαλύτερη επιτυχία στις αλγεβρικές μεθόδους, δοκιμάζουν ευκολότερα να μεταφράσουν εικόνες για το σχεδιασμό της λύσης. Οι μαθητές που είναι εξοικειωμένοι με τις αλγεβρικές μεθόδους, θεωρούν ότι η δημιουργία σχεδίων κάνει πολύπλοκη τη λύση, ενώ η διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων είναι ένας πιο ¨ασφαλής¨ τρόπος επεξεργασίας, με τη βοήθεια ενός πλάνου που σχεδιάζουν στο μυαλό τους το οποίο κρίνουν ότι αρκεί για την κατανόηση των σχέσεων και το σχεδιασμό των εξισώσεων.

Δυσκολίες και λάθη που προκύπτουν κατά τη μετατροπή του προβλήματος σε σύστημα εξισώσεων

Στην επίλυση των προβλημάτων του φύλλου εργασίας της παρούσας έρευνας, παρουσιάστηκε μια γενικότερη αδυναμία διαχείρισης από όλα τα επίπεδα μαθητών Α και Β Λυκείου, αφού τα συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους που παρουσίασαν ως λύσεις των τριών προβλημάτων, κατά το μεγαλύτερο ποσοστό τους ήταν λάθος. Από τη γενικότερη εικόνα της διαχείρισης του φύλλου εργασίας από τους μαθητές, και από την ερμηνεία που έδωσαν οι ίδιοι κατά τις συνεντεύξεις για τον τρόπο σκέψης και τις ενέργειές τους, φάνηκε η έλλειψη ουσιαστικής κατανόησης του λεξιλογίου και του συντακτικού των προβλημάτων, αλλά και της εννοιολογικής κατανόησης των συμβόλων και των λειτουργιών τους για τη δημιουργία των εξισώσεων, επιβεβαιώνοντας τις απόψεις των Hercovics & Linchevski (1994). Οι μαθητές αυτών των βαθμίδων, παρόλο που έχουν διδαχθεί το μεγαλύτερο μέρος την ύλης της άλγεβρας που διδάσκεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, φαίνεται πως δεν έχουν κατανοήσει πολλά εργαλεία και λειτουργίες τους, γεγονός το οποίο επηρεάζει την επίδοσή τους όταν έχουν να αντιμετωπίσουν λεκτικά προβλήματα με τη χρήση της άλγεβρας, που έρχεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των Swafford και Brown (1989). Στην έρευνα, οι μαθητές στο τέλος της επεξεργασίας των προβλημάτων αποφάσιζαν να λύσουν το σύστημα των εξισώσεων που δημιούργησαν προκειμένου να ελέγξουν εάν το αποτέλεσμα του συστήματος είναι λογικό και να αξιολογήσουν με τον τρόπο αυτό την ορθότητα του μετασχηματισμού που εκτέλεσαν. Πράγματι, όπως τόνισαν και οι Hercovics και Linchevski (1994), οι μαθητές μπορούσαν να λύσουν το σύστημα χωρίς δυσκολία, χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τεχνικές, ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις οι εξισώσεις σχηματίστηκαν με λάθος μετάφραση του κειμένου σε συμβολικές σχέσεις, γεγονός το οποίο φανερώνει την έλλειψη της εννοιολογικής κατανόησης.

Οι δύο ευρύτερες κατηγορίες στις οποίες εντοπίζονται οι δυσκολίες των μαθητών αφορούν αρχικά το μετασχηματισμό και στη συνέχεια τη δημιουργία αναπαράστασης.

Δυσκολίες των μαθητών στο μετασχηματισμό

Για το μετασχηματισμό λεκτικού προβλήματος σε εξισώσεις, απαραίτητη είναι η κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου. Η κατανόηση που αναπτύσσουν αρχικά οι μαθητές κατά την επεξεργασία του λεκτικού περιεχομένου ενός προβλήματος συνδέεται άμεσα με τις διανοητικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές προκειμένου να το περιγράψουν (Hieber & Carpenter, 1992). Στην παρούσα έρευνα, οι μαθητές φαίνεται να μπορούν να περιγράψουν ολοκληρωμένα σύμφωνα με την ατομική τους κατανόηση το περιεχόμενο των προβλημάτων τα οποία περιέχουν περισσότερες αριθμητικές ποσότητες, όπως το πρώτο και το τρίτο πρόβλημα. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η ύπαρξη άγνωστων λέξεων εμποδίζει την κατανόηση του περιεχομένου και στη συνέχεια του μετασχηματισμού του, όπως υποστηρίζουν και οι Koedinger, Alibalib και Nathan (2008). Αυτό έγινε φανερό από το τρίτο πρόβλημα όπου κάποιοι μαθητές δε γνώρισαν τη έννοια των «εργατικών εξόδων», με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν δυσκολίες και σε επόμενα στάδια της διαδικασίας. Παράλληλα, όπως φάνηκε από το δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στη διαχείριση του περιεχομένου της εκφώνησης προβλημάτων στα οποία τα δεδομένα δίνονταν με λεκτικές περιγραφές και το κείμενο δεν περιλαμβάνει αριθμούς. Οι ποσοτικές σχέσεις που περιγράφονται πολλές φορές δεν ερμηνεύονται σωστά από τους μαθητές και οδηγούν στην εξαγωγή λανθασμένων συμπερασμάτων λόγω λανθασμένης εκτέλεσης της συντακτικής και σημασιολογικής μετάφρασης, το οποίο στη συνέχεια επηρεάζει και τον σχεδιασμό της λύσης. Βλέπουμε επομένως, ότι παρόλο που λεκτικά προβλήματα όπως τα τρία προβλήματα της παρούσας έρευνας, πραγματεύονται οικείες καταστάσεις της καθημερινότητας, περιέχουν απλό λεξιλόγιο και τα δεδομένα είναι διατυπωμένα με τη σειρά για την αποφυγή παρερμηνειών, οι μαθητές εξακολουθούν να δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να αποδώσουν τη σωστή ερμηνεία στις λεκτικές περιγραφές, επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα των MacGregor και Stacey (1993). Όλα τα παραπάνω σε συνδυασμό, προδίδουν την γενικότερη έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης, συντακτικής και δομικής ερμηνείας των πληροφοριών των λεκτικών προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας, το οποίο τόνισαν και οι Stacey και MacGregor (1999) και Clement (1982).

Δυσκολίες των μαθητών στη δημιουργία συμβολικής αναπαράστασης

Πολλές δυσκολίες των μαθητών εντοπίζονται στη δημιουργία των εξωτερικών αναπαραστάσεων, τόσο των συμβολικών όσο και των εικονιστικών. Ξεκινώντας με τις συμβολικές αναπαραστάσεις, στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων θεωρείται ότι η ονομασία και η διαχείριση δύο άγνωστων ποσοτήτων από τους μαθητές δημιουργεί δυσκολίες (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, Rosnik & Clement, 1980), ωστόσο στην παρούσα έρευνα, οι μαθητές δε παρουσίασαν τέτοιου είδους δυσκολίες. Αντίθετα, εμφάνισαν δυσκολίες στη διαχείριση των δύο αγνώστων ως προς την επιλογή των συμβόλων για τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ τους, το οποίο αφορά κυρίως τη συμβολοποίηση των σχέσεων και όχι την επιλογή μεταβλητών. Αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, σε σημεία του μετασχηματισμού σε εξισώσεις οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται στη σημασία που αποκτούν οι άγνωστοι, αφού δημιουργούν εξισώσεις όπου χρησιμοποιούν τις ίδιες μεταβλητές χ και ψ, όμως στην κάθε εξίσωση οι ίδιες μεταβλητές αναπαριστούν διαφορετικές ποσότητες. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν μια από τις αιτίες δυσκολιών και λαθών που σημειώνουν οι Stacey & MacGregor (1999) στο έργο τους.

Στη βιβλιογραφία πολλές δυσκολίες κατά το μετασχηματισμό, εντοπίζονται στη διαδικασία συμβολοποίησης των σχέσεων που παρουσιάζονται στο λεκτικό περιεχόμενο, και πράγματι τέτοιες δυσκολίες εμφανίστηκαν και στα ευρήματα της παρούσας έρευνας. Παρόλο που τα προβλήματα της έρευνας βασίζονταν σε οικείες καταστάσεις και το λεξιλόγιό τους είναι απλό, η μετάφραση της φυσικής γλώσσας σε εξισώσεις φαίνεται να προκαλεί δυσκολίες στην επιλογή των κατάλληλων συμβόλων πράξεων για την έκφραση των σχέσεων των ποσοτήτων, λόγω της συντακτικής και σημασιολογικής μετάφρασης, ή στατικής σύγκρισης ποσοτήτων, όπως αναμενόταν και σύμφωνα με τους MacGregor και Stacey (1993). Παράλληλα, οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην επιλογή των αλγεβρικών συμβόλων γιατί δεν κατανοούν τη σημασία των ίδιων των συμβόλων πράξεων με αποτέλεσμα να μην κάνουν τις σωστές επιλογές και να παρουσιάζουν λάθος σχηματισμό εξισώσεων, όπως αναμενόταν σύμφωνα με τους Clement (1982), Rosnick και Clement (1980). Όπως εντόπισαν οι ίδιοι ερευνητές, από τα ευρήματα της παρούσας έρευνα προκύπτει ακόμη ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία και στη διαχείριση του συμβόλου της ισότητας, αφού κάποιοι παρουσίασαν σχέσεις εξισώνοντας ποσότητες ανόμοιες μεταξύ τους για το σχηματισμό των εξισώσεων του συστήματος. Ωστόσο, δεν εντοπίστηκε αυξημένη δυσκολία στη διαχείριση αρνητικών ποσοτήτων, όπως αντιθέτως αναμενόταν από τα ευρήματα των Koedinger, Alibalib και Nathan (2008). Η αδυναμία των μαθητών στη διαχείριση των ποσοτήτων φάνηκε να είναι ευρύτερη, χωρίς να αποτελεί επιπρόσθετη δυσκολία η έκφραση και χρήση αρνητικών αριθμών.

Δυσκολίες των μαθητών στο σχεδιασμό εικονιστικών αναπαραστάσεων

Η δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων υπό τη μορφή σχεδίων για την απεικόνιση του περιεχομένου των προβλημάτων, αποτελεί ένα ακόμη στάδιο του μετασχηματισμού όπου οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες, το οποίο επιβεβαιώνεται και από τα τρία προβλήματα του φύλλου εργασίας της παρούσας έρευνας. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν επιλέγει να χρησιμοποιήσει εικόνες για την αναπαράσταση ενός λεκτικού προβλήματος που επιδέχεται αλγεβρική λύση, εάν δε παρακινηθεί να το κάνει. Ακόμη και σε προβλήματα που ευνοούν τη δημιουργία τέτοιου είδους αναπαραστάσεων οι μαθητές χρειάζονται παρακίνηση προκειμένου να δοκιμάσουν να δημιουργήσουν σχέδια. Αυτό πηγάζει αρχικά από το γεγονός ότι τέτοιου είδους αναπαραστάσεις δε θεωρούνται «επίσημες» μέθοδοι απεικόνισης από τους μαθητές, το οποίο επιβεβαιώνουν οι ίδιοι στη συνέντευξη. Παράλληλα, δεν είναι εξοικειωμένοι με τη δημιουργία σχεδίων καθώς σε μικρότερες τάξεις δεν εξασκήθηκαν σε τρόπους απεικόνισης του περιεχομένου προβλημάτων με τη χρήση σχεδίων. Τα στοιχεία αυτά που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα, επιβεβαιώνουν τις απόψεις των Koedinger και Nathan (2004), οι οποίοι τονίζουν την εμφάνιση δυσκολιών κατά τη δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων, λόγω της έλλειψης εξοικείωσης με τις απεικονίσεις αυτές και της καλλιέργειας της άποψης ότι οι εικόνες δεν αποτελούν αποδεκτές μεθόδους επεξεργασίας ενός αλγεβρικού προβλήματος.

Σύνοψη συμπερασμάτων

Συνοψίζοντας τις παρατηρήσεις που έγιναν σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, μπορούν να προκύψουν ορισμένα συμπεράσματα που έρχονται σε συμφωνία με τα ευρήματα των περισσότερων ερευνών που μελετήθηκαν, αναφορικά με:

- τις ενέργειες που ακολουθούν οι μαθητές προκειμένου να μετατρέψουν ένα λεκτικό πρόβλημα σε σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους
- τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν για το σκοπό αυτό
- τις δυσκολίες με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι σε όλη τη διαδικασία του μετασχηματισμού

Αρχικά είδαμε ότι οι μαθητές ακολουθούν μια δομή κατά την οποία εντοπίζουν τις άγνωστες ποσότητες από το κείμενο του προβλήματος για να ορίσουν μεταβλητές, και στη συνέχεια προχωρούν στην επιλογή συμβόλων πράξεων προκειμένου να δημιουργήσουν τις εξισώσεις του συστήματος που εκφράζουν το περιεχόμενό του, δείχνοντας φανερά την προτίμησή τους σε αλγεβρικές μεθόδους απεικόνισης. Ταυτόχρονα, είδαμε ότι σε περιπτώσεις προβλημάτων όπου οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν τις ποσοτικές σχέσεις ή τις κατασκευαστικές δομές, επιχειρούν να δημιουργήσουν σχέδια με σκοπό να ενισχύσουν την κατανόησή τους και να σχηματίσουν στη συνέχεια τις εξισώσεις του συστήματος. Ωστόσο, οι εικονιστικές αναπαραστάσεις σχεδιάζονται από τους μαθητές και σε περιπτώσει όπου το περιεχόμενο του προβλήματος ευνοεί οικείες και προφανείς απεικονίσεις, χωρίς να είναι απαραίτητη η χρήση τους για την βαθύτερη κατανόηση του περιεχομένου και των σχέσεων που περιέχει. Ακόμη, σε ελάχιστες περιπτώσεις, στα αλγεβρικά προβλήματα με εκφωνήσεις όπου τα αριθμητικά δεδομένα είναι πολλά, ορισμένοι μαθητές έχουν την τάση να προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα μόνο με αριθμητικές μεθόδους, με τις οποίες φαίνεται να έχουν αναπτύξει μεγαλύτερη οικειότητα.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι διαδικασίες μετασχηματισμού που προτιμούν οι περισσότεροι μαθητές στα αλγεβρικά προβλήματα, είναι η δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων. Ωστόσο, όταν θεωρούν ότι υπάρχει ανάγκη, χρησιμοποιούν και αναπαραστάσεις με σχέδια ή εκτρέπουν τη σκέψη τους σε αριθμητικές μεθόδους προσπαθώντας να απλοποιήσουν το πρόβλημα προκειμένου να το κατανοήσουν. Σύμφωνα με την τελευταία διαδικασία μετασχηματισμού, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τη μειοψηφία των μαθητών, οι μαθητές θέτουν τυχαία νούμερα στη θέση των μεταβλητών και εκτελούν δοκιμές οι οποίες τους βοηθούν να αντιληφθούν ευκολότερα τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που εντοπίζονται στο πρόβλημα. Οι περισσότεροι μαθητές οι οποίοι αποφεύγουν τη μέθοδο αυτή, τη θεωρούν ιδιαίτερα χρονοβόρα και ανεπίσημη τακτική η οποία δε μπορεί να ενισχύσει τη λύση ενός τέτοιου προβλήματος.

Σε ότι αφορά τη δημιουργία των συμβολικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικές μεθόδους προκειμένου να δημιουργήσουν τις εξισώσεις, με τους περισσότερους να χρησιμοποιούν διαδικασίες ¨συντακτικής¨ και ¨σημασιολογικής¨ μετάφρασης. Σύμφωνα με την πρώτη, οι περισσότεροι μαθητές, κατά την ανάγνωση της εκφώνησης υπογραμμίζουν τις ¨λέξεις κλειδιά¨ του κειμένου, για να τις χρησιμοποιήσουν τη συνέχεια για την επιλογή των κατάλληλων συμβόλων των πράξεων και να μεταφράσουν τις ποσοτικές σχέσεις σε εξισώσεις με τους αγνώστους χ και ψ. Για πολλούς μαθητές, η σειρά των λέξεων και οι λέξεις κλειδιά παίζουν καθοριστικό ρόλο στη συμβολοποίηση των σχέσεων, γεγονός που πολλές φορές αποτελεί και αιτία λάθους και οδηγεί σε παρουσίαση συστημάτων εξισώσεων που δεν αποτελούν τη λύση του προβλήματος. Παράλληλα, οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της ¨σημασιολογικής μετάφρασης¨, προσπαθώντας αρχικά να κατανοήσουν τις έννοιες που εμφανίζονται στο κείμενο και να ερμηνεύσουν τη σημασία των φράσεων με τη βοήθεια των κατάλληλων αλγεβρικών συμβόλων για να συνδέσουν τα αριθμητικά δεδομένα με τις μεταβλητές. Οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις δεν αποδίδουν τη σωστή ερμηνεία στο περιεχόμενο και οδηγούνται σε λάθος σχηματισμό εξισώσεων.

Από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επεξεργασία των προβλημάτων, έγινε εμφανής η έλλειψη εξοικείωσής τους με άλλου είδους αναπαραστατικά σχήματα, όπως η δημιουργία σχεδίων. Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα διστακτικοί στη δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων, με την παρότρυνση όμως του ερευνητή, στο δεύτερο και τρίτο πρόβλημα το μεγαλύτερο ποσοστό επιχείρησε να σχεδιάσει εικόνες. Φάνηκε ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τη μέθοδο αυτή, αφού τα σχέδιά τους ήταν τις περισσότερες φορές επιπόλαια, δε δοκίμαζαν περισσότερες από μία αναπαραστάσεις και πολλές φορές, πάνω στα σχέδιά τους διατύπωναν αλγεβρικές σχέσεις, γεγονός που φανερώνει την εμμονή τους στις αλγεβρικές μεθόδους. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσει οι μαθητές κρίνουν απαραίτητη τη δημιουργία εικόνων προκειμένου να αισθητοποιήσουν τις πληροφορίες που αντλούν από το κείμενο σε περιπτώσεις όπου η ανάγνωση της εκφώνησης δεν αρκεί για την κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων. Υπάρχουν όμως και εκείνοι οι οποίοι θεωρούν ότι η δημιουργία κάποιου σχεδίου θα τους μπέρδευε και θα τους στερούσε πολύτιμο χρόνο από την επεξεργασία του προβλήματος, αφού δεν έχουν εκπαιδευτεί σε αυτό τον τρόπο μετασχηματισμού και δεν μπορούν να κάνουν εύστοχες επιλογές σχεδίων για να ενισχύσουν την κατανόησή τους.

Οι δυσκολίες των μαθητών παρουσιάστηκαν στα περισσότερα στάδια της διαδικασίας μετασχηματισμού σε σύστημα εξισώσεων. Η βασικότερη δυσκολία που εντοπίστηκε στους μαθητές, η οποία επηρεάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό και τις δυσκολίες που δημιουργήθηκαν και στα υπόλοιπα στάδια, αφορά την εννοιολογική κατανόηση των φράσεων του κειμένου των προβλημάτων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τις ποσοτικές σχέσεις που υπονοούνται στο κείμενο, δε λαμβάνουν υπόψη όλα τα λεκτικά δεδομένα ή συναντούν άγνωστες έννοιες, με αποτέλεσμα στη συνέχεια να προκύπτουν δυσκολίες σε όλες τις διαδικασίες αναπαράστασης των σχέσεων αυτών. Έτσι, εμφανίζονται σημαντικές δυσκολίες στην επιλογή συμβόλων για τη δημιουργία των αναπαραστάσεων, οι οποίες μπορεί να οφείλονται στην έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης τόσο του λεκτικού περιεχομένου, όσο και των ίδιων των συμβόλων πράξεων και της ισότητας. Οι μαθητές, παρόλο που δε παρουσιάζουν δυσκολία στον εντοπισμό των δύο άγνωστων ποσοτήτων, η διαχείρισή τους και η έκφραση των σχέσεων που τις συνδέουν δεν αποτελεί για αυτούς εύκολη διαδικασία. Ακόμη, οι δυσκολίες των μαθητών εντοπίζονται και στη δημιουργία εικονιστικών αναπαραστάσεων, και εκδηλώνονται με την αποφυγή δημιουργίας σχεδίων, αλλά και για όσους δημιουργούν σχέδια, οι δυσκολίες γίνονται εμφανείς από τις επιλογές σχεδίων που κάνουν. Οι μαθητές προβαίνουν στο σχεδιασμό επιπόλαιων εικόνων που πολλές φορές δεν περιέχουν όλα τα απαραίτητα στοιχεία της εκφώνησης και στις περισσότερες περιπτώσεις πάνω σε αυτές σημειώνονται και συμβολικές σχέσεις. Λόγω της έλλειψης εξοικείωσης με αυτού του είδους τις αναπαραστάσεις, οι μαθητές συνήθως δεν επιλέγουν τη δημιουργία περισσότερων από ένα σχεδίων για να ενισχύσουν τη λύση τους.

Προεκτάσεις

Το θέμα της παρούσας έρευνας χρειάζεται περεταίρω διερεύνηση προκειμένου να προκύψουν ολοκληρωμένα και αξιόπιστα συμπεράσματα αναφορικά με τις ενέργειες που ακολουθούν οι μαθητές, τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν και τις δυσκολίες που συναντούν κατά τη μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Η συγκεκριμένα έρευνα μελετά τα στοιχεία αυτά μέσα από τρία λεκτικά προβλήματα και σε ένα πολύ περιορισμένο αριθμό μαθητών που αποτελεί το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε, γεγονός το οποίο δεν επιτρέπει γενικεύσεις των συμπερασμάτων που προκύπτουν. Ωστόσο, μπορεί να αποτελέσει μια βάση για τη διεξαγωγή μια ευρύτερης έρευνας με τον ίδιο στόχο, η οποία θα μπορούσε να διεξαχθεί σε μεγαλύτερο πλήθος μαθητών και με περισσότερα προβλήματα τα οποία θα μπορούν να εστιάσουν στην ανάδειξη περισσότερων χαρακτηριστικών σχετικά με τις διαδικασίες, τις αναπαραστάσεις και τις δυσκολίες που εντοπίζουν οι μαθητές. Ακόμη, θα μπορούσε να γίνει μία έρευνα, κατά την οποία οι μαθητές επεξεργάζονται κάποια λεκτικά προβλήματα των οποίων η λύση προκύπτει από ένα σύστημα εξισώσεων, έπειτα μεσολαβεί διδακτική παρέμβαση του ερευνητή σχετικά με τους τρόπους αναπαράστασης ενός αλγεβρικού προβλήματος προκειμένου να ενισχυθεί η κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων και να συνδεθούν οι σχέσεις ποσοτήτων με τα σύμβολα των πράξεων και στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται ξανά να επεξεργαστούν κάποια λεκτικά προβλήματα του ίδιου είδους, προκειμένου να μελετηθεί εάν υπάρχει εξέλιξη στον τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων από τους μαθητές και ποιοι παράγοντες την ενισχύουν.

Περιορισμοί

Στην διεξαγωγή της παρούσας έρευνας υπήρχαν κάποιοι περιορισμοί. Αρχικά οι βασικότεροι περιορισμοί ήταν η πρόσβαση σε σχολικές μονάδες και η επιλογή ικανού δείγματος μαθητών, καθώς η έρευνα διεξήχθη σε περίοδο κατά την οποία οι σχολικές μονάδες υπολειτουργούσαν λόγω της πανδημίας του COVID-19. Έπειτα από μία περίοδο κατά την οποία τα σχολεία ήταν κλειστά για περισσότερο από δύο μήνες, λειτούργησαν στο τέλος της σχολικής χρονιάς για τέσσερις εβδομάδες τον Ιούνιο, όπου οι μαθητές πήγαιναν εκ περιτροπής στο σχολείο, με αποτέλεσμα το σχολείο να λειτουργεί με τους μισούς μαθητές, οι οποίοι μάλιστα έμεναν στο σχολείο μέχρι την τρίτη ή τέταρτη ώρα. Ταυτόχρονα, για τις ανάγκες της έρευνας ήταν απαραίτητη η επικοινωνία και με τους γονείς των μαθητών, οι οποίοι έπρεπε να δώσουν την άδειά τους προτού ρωτηθούν οι μαθητές για τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Ακόμη, η διαδικασία της έρευνας είχε διάρκεια από 45 έως 90 λεπτά, χρόνος ο οποίος θα έπρεπε να είναι μεταξύ της πρώτης και της τέταρτης ώρας, προτού αποχωρήσουν από το σχολείο οι μαθητές, επομένως ήταν απαραίτητη και η επικοινωνία με τους καθηγητές με τους οποίους είχαν μάθημα οι μαθητές τις αντίστοιχες ώρες, προκειμένου να τους δώσουν την άδεια να απουσιάσουν από το μάθημα. Τόσο οι μαθητές, όσο και οι γονείς και οι καθηγητές τους ήταν συνεργάσιμοι κι έτσι συγκεντρώθηκε ένα ικανό δείγμα για να στηρίξει την έρευνα υπό αυτές τις συνθήκες.

Ένας ακόμη σημαντικός περιορισμός, ο οποίος σχετίζεται με την διαδικασία της επεξεργασίας των προβλημάτων, αφορά την ύπαρξη περιπτώσεων κατά τις οποίες ένας μαθητής μπορεί να μετασχηματίσει και να λύσει σωστά κάποιου είδους λεκτικό πρόβλημα, αλλά ο ίδιος μαθητής μπορεί σε άλλη χρονική στιγμή και σε διαφορετικό πλαίσιο να μην καταφέρει να αντιμετωπίσει με επιτυχία ένα παρόμοιο πρόβλημα. Αυτό όπως υποστηρίζει ο Goldin (1998) στο έργο του, συνδέεται με τις συνθήκες υπό τις οποίες ο μαθητής ασχολείται με την επίλυση, οι οποίες επηρεάζουν άμεσα τη συγκέντρωσή του, την ύπαρξη ή έλλειψη ενδιαφέροντος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αυτοί οι δευτερεύοντες παράγοντες μπορεί να τον οδηγήσουν σε λάθη, επομένως δεν είναι δυνατό να προκύψουν ανεπιφύλακτα συμπεράσματα για την ικανότητα ή μη κάποιου μαθητή σε ότι αφορά την απόδοσή του κατά την επεξεργασία λεκτικών προβλημάτων και τη μετατροπή τους σε σύστημα εξισώσεων. Μπορούμε, παρόλα αυτά, να βγάλουμε γενικότερα συμπεράσματα, υπό όρους, τα οποία θα εξαρτώνται από το πλαίσιο στο οποίο γίνονται οι διαδικασίες επεξεργασίας των προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Charbonneau, L., (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. *Perspectives for research and teaching,* 15-37.

Cifarelli, V., V., (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 239-264.

Clement, J., (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in Mathematics Education*, 13 (1), 16-30.

Clement, J., (2000). Analysis of clinical interviews: foundation and model viability. In: Lesh R, Kelly AE (eds). *Research design in mathematics and science education,* 547–589.

Collins, A., & Ferguson, W., (1993). Epistemic forms and epistemic games: Structures and strategies to guide inquiry. *Educational Psychologist*, 28, 25–42.

Davis, R., B., (1984). Learning Mathematics: The Cognitive Approach to Mathematics Education, 3 (1), 1-5. London: Croom Helm

Foong, P., Y., (1994). Differences in the processes of solving mathematical problems between successrl and unsuccessll solvers. *Teaching and Learning*, 14(2), 61-72. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Tecllnological University.

Gagatsis, A., & Elia, I., (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 447-454.

Goldin, G., A., (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Goldin, G., A., (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. *Handbook of international research in mathematics education*, 197-218.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C., (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. *Cognition and instruction*, 6 (3), 223-283.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59-78.

Hiebert, J., & Carpenter, T., P., (1992). Learning and Teaching with Understanding. In Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 65-97. New York: Macmillan

Hutchinson, N., (1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 16 (1), 34-63.

Kaur, B., (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. The Mathematics Educator, 2(1), 93-112.

Kirshner, D., (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 274-287.

Koedinger, K., R., & Nathan, M., J., (2004). The real story behind story problems: Effects of representation on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, 13, 129-164.

Koedinger, K., Alibalib, M., & Nathan, M., (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive science*, 32 (2), 366-397.

MacGregor, M., & Stacey, K., (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for research in mathematics education*, 24(3), 217-232.

Maher, C., A., & Sigley R., (2020) Task-Based Interviews in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_147

Miura, I. T. (2001). The Influence of Language on Mathematical Representations. In Cuoco, A. A. and Curcio, F. R. (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics,* 53-62. National Council of Teachers of Mathematics

Nickerson, R., S., (1985). Understanding Understanding. *American Journal of Education*, 93(2), 201-239.

Ng, S., F., & Lee, K., (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3), 282-313.

Rosnick, P., & Clement, R., (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3(1), 3-27.

Schoenfeld, A., (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. *Journal of education.* 196 (2), 334-370.

Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shalin, V., & Bee, N., V., (1985). Structural Differences Between Two-Step Word Problems. Pittsburgh University of Pittsburgh, Learning Re- search and Development Center, 1-25.

Skemp, R., (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Stacey, K., & MacGregor, M., (1999). Learning the algebraic method solving problems. *Journal of mathematical behavior*, 18 (2), 149-167.

Stylianou, D., A., & Silver, E., A., (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, 6(4), 353-387.

Swafford, J., O., & Brown, C., A., (1989). 'Variables and relations', in M. Montgomery Lindquist (ed.), *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*, NCTM: Reston, Virginia, 55-53.

Sweller, J., & Cooper, G., (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and instruction*, 2 (1), 59-89.

Zhang, J., (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science*, 21, 179-217.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας μαθητών

Μαθητής / Μαθήτρια **Α΄ Λυκείου / Β΄ Λυκείου**
Πρόβλημα 1. Η Α΄ τάξη του Λυκείου μιας περιοχής πήγε τριήμερη εκδρομή στην Αθήνα. Τα παιδιά που συμμετείχαν στη εκδρομή ήταν 118. Για τη διαμονή τους έκλεισαν 34 δωμάτια σε ένα ξενοδοχείο, ορισμένα τρίκλινα και ορισμένα τετράκλινα. Πόσα τρίκλινα και πόσα τετράκλινα δωμάτια έκλεισαν για την εκδρομή; (Διευκρίνιση: τα 118 παιδιά χωράνε ακριβώς στα τρίκλινα και τα τετράκλινα δωμάτια, κανένα κρεβάτι των δωματίων δε μένει κενό)
Πρόβλημα 2. Ένας κύριος περιμένει στην ουρά για το ταμείο μιας τράπεζας. Εάν μετακινηθεί 2 θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του. Εάν όμως μετακινηθεί δύο θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων. Πόσοι άνθρωποι περιμένουν στην ουρά μπροστά και πίσω από τον κύριο;
Πρόβλημα 3. Ένας αγρότης έχει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 140 μέτρα. Ο αγρότης έφραξε τις 3 πλευρές του χωραφιού με φράχτη. Η περίφραξη στοίχισε 3 ευρώ το μέτρο και 40 ευρώ τα εργατικά. Συνολικά ο αγρότης πλήρωσε 370 ευρώ. Ποιες είναι οι διαστάσεις του χωραφιού του αγρότη;

Φύλλο παρατήρησης ερευνητή

ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ Μαθητής / Μαθήτρια Α’ Λυκείου / Β’ Λυκείου **ΠΡΟΒΛΗΜΑ …**		
	Ο μαθητής:	**ΝΑΙ**
1.	Διαβάζει πολλές φορές την εκφώνηση του προβλήματος	
2.	Συσχετίζει το πρόβλημα με απλούστερο όμοιο πρόβλημα	
3.	Ξεκινά να παρουσιάζει τη λύση χρησιμοποιώντας συμβολική αναπαράσταση	
4.	Ξεκινά να παρουσιάζει τη λύση χρησιμοποιώντας αναπαράσταση με σχέδιο	
5.	Χρησιμοποιεί συγγραφικές αναπαραστάσεις	
6.	Χρησιμοποιεί εικονιστικές αναπαραστάσεις	
7.	Χρησιμοποιεί εικονιστικές αναπαραστάσεις έπειτα από παρακίνηση του ερευνητή	
8.	Εντοπίζει τις άγνωστες ποσότητες	
9.	Μεταφράζει σωστά σε σύμβολα, τις σχέσεις των ποσοτήτων	
10.	Δοκιμάζει περισσότερες από μία εικονιστικές αναπαραστάσεις	
11.	Παρουσιάζει δυσκολία στην κατανόηση του λεκτικού περιεχομένου	
12.	Παρουσιάζει δυσκολία στη δημιουργία μεταβλητών	
13.	Παρουσιάζει δυσκολία στη συμβολοποίηση σχέσεων	
14.	Παρουσιάζει δυσκολία στη χρήση σχεδίων για την αναπαράσταση του περιεχομένου του προβλήματος	
15.	Εξηγεί αναλυτικά τις ενέργειές του κατά τη διάρκεια της επίλυσης	
16.	Σχηματίζει το σωστό σύστημα εξισώσεων που αναπαριστά τη λύση του προβλήματος	
17.	Σχηματίζει λανθασμένο σύστημα εξισώσεων που αναπαριστά τη λύση	

	του προβλήματος	
18.	Δεν παρουσιάζει τελική απάντηση	
Λεκτικές περιγραφές που συνοδεύουν τη λύση του προβλήματος:		

Έντυπο συνέντευξης

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ Πρόβλημα 1.	
1.	Μπορείς να περιγράψεις με δικά σου λόγια την κατάσταση που παρουσιάζει η εκφώνηση του προβλήματος;
2.	Θεωρείς ότι η εκφώνηση του προβλήματος ήταν σαφής; Αν όχι, σε ποιο σημείο της εκφώνησης παρουσιάστηκε δυσκολία και τι δυσκολία ήταν αυτή;
3.	Ποιες άγνωστες ποσότητες εντόπισες στο κείμενο του προβλήματος;
4.	Ποιές ποσότητες ονόμασες με μεταβλητές;
5.	Δυσκολεύτηκες να εντοπίσεις τις άγνωστες ποσότητες;
6.	Σε βοήθησε στη λύση σου κάποιο πιο απλό πρόβλημα που έχεις λύσει παλιότερα; Έφερες στο μυαλό σου κάποιο απλούστερο παρόμοιο πρόβλημα για να το καταλάβεις καλύτερα;
7.	Πώς κατέληξες σε αυτές τις εξισώσεις; Ποιες σχέσεις παρουσιάζεις;
8.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των εξισώσεων του συστήματος;
9.	Πώς σκέφτηκες για να σχεδιάσεις αυτές τις αναπαραστάσεις; (αν υπάρχουν στη λύση)
10.	Θεωρείς ότι αν έκανες κάποιο σχέδιο για να λύσεις το πρόβλημα, θα σε βοηθούσε στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν δεν υπάρχει σχέδιο στη λύση)

11.	Θεωρείς ότι οι αναπαραστάσεις που σχεδίασες σε βοήθησαν στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν υπάρχει σχέδιο στη λύση)
12.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των σχεδίων για την απεικόνιση του προβλήματος;
13.	Αν το πρόβλημα δε λύθηκε, ποιοι ήταν οι λόγοι;

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ Πρόβλημα 2.	
1.	Μπορείς να περιγράψεις με δικά σου λόγια την κατάσταση που παρουσιάζει η εκφώνηση του προβλήματος; - Πώς ερμηνεύεις τη φράση «**εάν μετακινηθεί 2 θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του**»; - Πώς ερμηνεύεις τη φράση «**εάν όμως μετακινηθεί δύο θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων**»;
2.	Θεωρείς ότι η εκφώνηση του προβλήματος ήταν σαφής; Αν όχι, σε ποιο σημείο της εκφώνησης παρουσιάστηκε δυσκολία και τι δυσκολία ήταν αυτή;
3.	Ποιες άγνωστες ποσότητες εντόπισες στο κείμενο του προβλήματος;
4.	Ποιές ποσότητες ονόμασες με μεταβλητές;
5.	Δυσκολεύτηκες να εντοπίσεις τις άγνωστες ποσότητες;
6.	Σε βοήθησε στη λύση σου κάποιο πιο απλό πρόβλημα που έχεις λύσει παλιότερα; Έφερες στο μυαλό σου κάποιο απλούστερο παρόμοιο πρόβλημα για να το καταλάβεις καλύτερα;
7.	Πώς κατέληξες σε αυτές τις εξισώσεις; Ποιες σχέσεις παρουσιάζεις; -Πώς σκέφτηκες για να παρουσιάσεις αλγεβρικά τη φράση του προβλήματος: «**εάν μετακινηθεί 2 θέσεις πίσω από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του θα έχει τους διπλάσιους ανθρώπους από ότι πίσω του**»; -Πώς σκέφτηκες για να παρουσιάσεις αλγεβρικά τη φράση του προβλήματος: «**εάν όμως μετακινηθεί δύο θέσεις μπροστά από τη θέση στην οποία βρίσκεται, τότε μπροστά του και πίσω του θα έχει το ίδιο πλήθος ανθρώπων**»;
8.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των εξισώσεων του συστήματος;

9.	Πώς σκέφτηκες για να σχεδιάσεις αυτές τις αναπαραστάσεις; (αν υπάρχουν στη λύση)
10.	Θεωρείς ότι αν έκανες κάποιο σχέδιο για να λύσεις το πρόβλημα, θα σε βοηθούσε στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν δεν υπάρχει σχέδιο στη λύση)
11.	Θεωρείς ότι οι αναπαραστάσεις που σχεδίασες σε βοήθησαν στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν υπάρχει σχέδιο στη λύση)
12.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των σχεδίων για την απεικόνιση του προβλήματος;
13.	Αν το πρόβλημα δε λύθηκε, ποιοι ήταν οι λόγοι;

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ Πρόβλημα 3.	
1.	Μπορείς να περιγράψεις με δικά σου λόγια την κατάσταση που παρουσιάζει η εκφώνηση του προβλήματος;
2.	Θεωρείς ότι η εκφώνηση του προβλήματος ήταν σαφής; Αν όχι, σε ποιο σημείο της εκφώνησης παρουσιάστηκε δυσκολία και τι δυσκολία ήταν αυτή;
3.	Ποιες άγνωστες ποσότητες εντόπισες στο κείμενο του προβλήματος;
4.	Ποιές ποσότητες ονόμασες με μεταβλητές;
5.	Δυσκολεύτηκες να εντοπίσεις τις άγνωστες ποσότητες;
6.	Σε βοήθησε στη λύση σου κάποιο πιο απλό πρόβλημα που έχεις λύσει παλιότερα; Έφερες στο μυαλό σου κάποιο απλούστερο παρόμοιο πρόβλημα για να το καταλάβεις καλύτερα;
7.	Πώς κατέληξες σε αυτές τις εξισώσεις; Ποιες σχέσεις παρουσιάζεις; - Πώς σκέφτηκες για να παρουσιάσεις αλγεβρικά τη φράση του προβλήματος: «έφραξε τις 3 πλευρές του χωραφιού»;
8.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των εξισώσεων του συστήματος;
9.	Πώς σκέφτηκες για να σχεδιάσεις αυτές τις αναπαραστάσεις; (αν υπάρχουν στη λύση)
10.	Θεωρείς ότι αν έκανες κάποιο σχέδιο για να λύσεις το πρόβλημα, θα σε βοηθούσε στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν δεν υπάρχει σχέδιο στη λύση)
11.	Θεωρείς ότι οι αναπαραστάσεις που σχεδίασες σε βοήθησαν στη διατύπωση των εξισώσεων; (αν υπάρχει σχέδιο στη λύση)

12.	Συνάντησες κάποια δυσκολία στη δημιουργία των σχεδίων για την απεικόνιση του προβλήματος;
13.	Αν το πρόβλημα δε λύθηκε, ποιοι ήταν οι λόγοι;