ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΤΜ. ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΤΜ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜ. ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ ΤΜ. ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Κατεύθυνση: Α’ ηλικιακός κύκλος (5 – 12 ετών)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης εν-ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα με ποσοστά»

της **Ανδρονίκης Σαρηγιάννη,** ΑΕΜ 946

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαράλαμπος Λεμονίδης (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.)

Εξεταστές Καθηγητές: Χαράλαμπος Σακονίδης (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Δ.Π.Θ.)

Ξανθή Βαμβακούση (Αναπλ. Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Π.Ι.)

Φλώρινα, 2021

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: Χαράλαμπος Λεμονίδης

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Χαράλαμπος Σακονίδης

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Ξανθή Βαμβακούση

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός:

Δήλωση

Η συγγραφέας Ανδρονίκη Σαρηγιάννη βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή: ______________________ Ημερομηνία: ______________________

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Επιστήμες της αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών» με κατεύθυνση τον α' ηλικιακό κύκλο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, για την καθοδήγησή του στην επιλογή του ερευνητικού θέματος, τις πολύτιμες συμβουλές και την αμέριστη υπομονή του. Είμαι ευγνώμων για την υπέροχη συνεργασία μας καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου και τις γνώσεις που απλόχερα μου προσέφερε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την κ. Ξανθή Βαμβακούση και τον κ. Χαράλαμπο Σακονίδη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της εργασίας μου, καθώς και όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, οι οποίοι με αγάπη για τη μάθηση και τη Μαθηματική Εκπαίδευση μάς μεταλαμπάδευσαν νέες πολύτιμες γνώσεις.

Τέλος, ευχαριστώ εκ βαθέων καρδιάς την οικογένεια και τους φίλους μου για τη συμπαράσταση και τη στήριξή τους, καθώς και όλους τους συναδέλφους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν πρόθυμα στην έρευνα και διέθεσαν τον πολύτιμο χρόνο τους.

«Τα μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται έτσι ώστε να ενδυναμώνουν κοινωνικά και πολιτικά τους μαθητές ως πολίτες της κοινωνίας»

(Ernest, 2015)

Περίληψη

Η υπολογιστική εκτίμηση αποτελεί μια από τις κύριες συνιστώσες της αίσθησης του αριθμού και είναι πολύ σημαντική για την υπολογιστική ευχέρεια ενός ατόμου στην καθημερινότητά του. Η χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της έννοιας. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης που μελετούν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης μαθητών και ενηλίκων. Λίγες είναι, όμως, εκείνες που αφορούν στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα με ποσοστά, μια κατηγορία προβλημάτων που δεν έχει ακόμα ερευνηθεί, αν και απαντάται διαρκώς στην ενήλικη ζωή των πολιτών μιας σύγχρονης κοινωνίας. Στην παρούσα μελέτη ένα ερωτηματολόγιο 11 προβλημάτων που εμπεριέχουν πράξεις με ποσοστά δόθηκε σε 45 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης με σκοπό να διερευνηθεί το ρεπερτόριο των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν, το στρατηγικό προφίλ τους, η ευελιξία και η προσαρμοστικότητά τους μέσω μιας τροποποιημένης εκδοχής του μοντέλου ιεράρχησης των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης IHMCES. Από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων προέκυψε ότι οι εκπαιδευτικοί δημοτικής εκπαίδευσης δεν γνωρίζουν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης υψηλού επιπέδου, στην πλειοψηφία τους παρουσιάζουν ένα βασικό προφίλ στρατηγικών, δεν είναι ευέλικτοι εκτιμητές, ούτε προσαρμοστικοί. Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύονται και συζητιούνται βάσει του θεωρητικού πλαισίου και των ευρημάτων προηγούμενων ερευνών. Ακόμη, παρατίθενται προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση αναφορικά με τη χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Λέξεις – κλειδιά: υπολογιστική εκτίμηση, IHMCES, στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, στρατηγικό προφίλ, ευελιξία, προσαρμοστικότητα

Abstract

Computational estimation consists of one of the main components of number sense and is very important for the computational fluency of an individual in their daily life. The use of computational estimation strategies is one of the most basic characteristics of this concept. During the last decades, multiple researches that study the computational estimation strategies of students and adults, have been materialized in the area of mathematical education. There are very few of them, though, that contemplate the computational estimation strategies which are used by in-service educators of primary education, in problems with percentages, a category of problems that has not been researched yet, even though it appears constantly during the adult lives of the citizens of any modern society. In the present research one questionnaire of 11 problems that contains mathematical operations with percentages was given to 45 in-service educators of primary education, with the intention to explore the field of the computational estimation strategies that they use, their strategy profile, flexibility and adaptivity, through a modified version of the hierarchy model of the computational estimation strategies, IHMCES. From the answers of the participants, it was concluded that the primary education educators are not knowledgeable of high-level computational estimation strategies; in their majority they present a basic strategies profile, they are neither flexible evaluators nor adaptive. The research results are analyzed and discussed in a theoretical context and based on prior research findings. In addition, suggestions of further exploration in relevance with the use of computational estimation strategies, are included.

Keywords: computational estimation, IHMCES, computational estimation strategies, strategic profile, flexibility, adaptivity

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Η έννοια της εκτίμησης συνιστά ένα σημαντικό μέρος της μαθηματικής γνώσης που είναι διαδεδομένη στις ζωές παιδιών και ενηλίκων. Ας σκεφτούμε μόνο μερικά καθημερινά παραδείγματα. Πόσο χρόνο χρειάζεσαι για να τελειώσεις τις δουλειές σου; Θα μας φτάσει μια μεγάλη πίτσα; Πόσα άτομα ήταν στην αίθουσα; Πόσο κάνει 75×31; Πόσο γρήγορα μπορεί να πάει αυτή η Porsche; Η εκτίμηση χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή πιο συχνά από οποιαδήποτε άλλη υπολογιστική διαδικασία (Siegler & Booth, 2005). Πέρα, όμως, από τη διαδεδομένη χρήση της, η εκτίμηση σχετίζεται, επίσης, και με άλλες πτυχές των μαθηματικών δεξιοτήτων. Η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μπορεί να συνεισφέρει στην καλύτερη κατανόηση, εκμάθηση και εφαρμογή των αλγορίθμων (Dowker, 1996), στην καλύτερη κατανόηση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Sowder, 1992), στον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος και, κατά συνέπεια, στην εφαρμογή αυτοδιορθωτικών κινήσεων (Λεμονίδης, 2000), ενώ συχνά χρησιμοποιείται και στην εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων που παράγονται με αριθμομηχανή ή ηλεκτρονικό υπολογιστή, καθώς είναι συχνό το φαινόμενο σφάλματος στην εισαγωγή των δεδομένων, το οποίο οδηγεί στην παραγωγή εσφαλμένου αποτελέσματος.

Σε καταστάσεις της καθημερινότητας, η διαδικασία της εκτίμησης μπορεί να υποκαταστήσει τον ίδιο τον αλγόριθμο, μια που συνήθως δεν απαιτείται το ακριβές αποτέλεσμα, αλλά μια εκτίμηση του αποτελέσματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις η εκτίμηση πλεονεκτεί σημαντικά, διότι, με την κατάλληλη εξάσκηση, δίνει ταχύτερα αποτελέσματα απ’ ότι η χρήση χαρτιού και μολυβιού ή ακόμα και της αριθμομηχανής, όπως για παράδειγμα, όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το κόστος διαφόρων αγαθών στο σούπερ μάρκετ και να πάρουμε την απόφαση αν τα χρήματα που διαθέτουμε είναι επαρκή για την αγορά τους (Λεμονίδης, 2013).

Βέβαια, είναι γεγονός πως υπάρχει χάσμα ανάμεσα στα σχολικά Μαθηματικά και τα Μαθηματικά της καθημερινής ζωής. Το χάσμα αυτό, ανάμεσα στην επίσημη εκπαίδευση και τις απαιτήσεις μιας σύγχρονης κοινωνίας, πρέπει να γεφυρωθεί. Η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να είναι σε θέση να προσεγγίζει την καθημερινότητα των εκπαιδευομένων και τις ανάγκες ενός πιθανού π.χ. εργασιακού περιβάλλοντος. Βασική δεξιότητα που πρέπει να μεταδίδει είναι η αναδιαμόρφωση της μαθηματικής γνώσης. Ο μαθητής, δηλαδή, που διαθέτει τη μαθηματική γνώση, να είναι σε θέση να την προσαρμόσει στις ανάγκες του εκάστοτε περιβάλλοντος που θα βρεθεί.

Η εκτίμηση είναι μια μαθηματική δεξιότητα που χρησιμοποιείται κατά κόρον στην καθημερινή ζωή, αλλά διδάσκεται περιορισμένα στο σχολείο. Οι περισσότεροι άνθρωποι βασίζονται σε περιορισμένες μεθόδους, τις οποίες έχουν διαμορφώσει μόνοι τους σύμφωνα με τη δική τους ιδιοσυγκρασία. Έτσι, δεν διαθέτουν ένα μεγάλο ρεπερτόριο αυτών, ώστε να είναι σε θέση να αντλήσουν από εκεί την κατάλληλη ανά περίσταση στρατηγική. Αυτή που θα τους φέρει πιο γρήγορα και πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα.

Τα τελευταία χρόνια η Μαθηματική Εκπαίδευση επικεντρώνει το ενδιαφέρον της όλο και περισσότερο στην ικανότητα εκτίμησης του ατόμου, δίνοντας μεγαλύτερο βάρος στην υπολογιστική εκτίμηση, μια και αυτό το είδος απαντάται πιο συχνά στις καθημερινές περιστάσεις. Σε ορισμένα προγράμματα σπουδών η υπολογιστική εκτίμηση κατέχει εδώ και μερικά χρόνια κυρίαρχη θέση (NCTM, 1989; 2000). Ωστόσο, ακόμα, σε πολλές χώρες η αναφορά της στους στόχους των προγραμμάτων σπουδών είναι πολύ μικρή έως και ανύπαρκτη. Στην ελληνική πραγματικότητα η εκτίμηση έκανε την εμφάνισή της το 2003 στο πρόγραμμα σπουδών των ΔΕΠΠΣ, ενώ ξεκίνησε η εφαρμογή της στις σχολικές αίθουσες το 2006 με την εισαγωγή των νέων σχολικών εγχειριδίων.

Στην παρούσα μελέτη επιχειρείται να ερευνηθεί η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, εκείνων που καλούνται να τη διδάξουν στους πολίτες της χώρας μας, σε μια σειρά προβλημάτων που περιλαμβάνουν ποσοστά, ένα μαθηματικό σύνολο που απαντάται καθημερινά σε διαφόρων τύπων καταστάσεις. Αρχικά, γίνεται μια αναφορά στην υπάρχουσα βιβλιογραφία και στα ευρήματα που έχουν ήδη καταγραφεί. Στη συνέχεια, αναλύεται η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και ο τρόπος μέσα από τον οποίο επιχειρείται να απαντηθούν. Τέλος, αναλύονται τα αποτελέσματα και γίνεται μία συζήτηση γύρω από τα συμπεράσματα που προκύπτουν.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Η Εκτίμηση

1.1.1 Η έννοια της Εκτίμησης

Σύμφωνα με τη Dowker (1992) η διαδικασία της εκτίμησης περιλαμβάνει την εκτέλεση μιας λογικής υπόθεσης για την εύρεση μιας προσιτής απάντησης στα αριθμητικά προβλήματα, δίχως να έχει προηγηθεί κάποιος ακριβής υπολογισμός. Λίγο διαφορετικά, ο Bright (1976) ορίζει την εκτίμηση ως μία διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται μια τιμή χωρίς τη βοήθεια εργαλείων και επομένως τη θεωρεί μια νοερή διαδικασία με οπτικές ή χειριστικές τιμές (Λεμονίδης, 2020).

Κατά τους Case & Sowder (2009) η εκτίμηση απαιτεί τον συντονισμό δύο ποιοτικά διαφορετικών δραστηριοτήτων: της κριτικής ικανότητας, ώστε να επιλεγεί ο σωστός τρόπος με τον οποίο θα αντικατασταθούν κατάλληλα οι αριθμοί σε σχέση με το πλαίσιο του προβλήματος, και της ικανότητας νοερής εκτέλεσης πράξεων. Ο Maclellan (2001) επισημαίνει ότι η δύναμή της προέρχεται από τις πολλές πιθανές απαντήσεις που μπορούν να δοθούν σε ένα πρόβλημα, με είτε αρκετές από αυτές είτε όλες να ανταποκρίνονται επαρκώς στις απαιτήσεις του πλαισίου του.

Πιο ολοκληρωμένα οι Segovia & Castro (2009) δίνουν τη γενική έννοια της εκτίμησης μέσα από τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Συνίσταται στην εκτίμηση της αξίας μιας ποσότητας ή του αποτελέσματος μιας αριθμητικής λειτουργίας.

2. Το υποκείμενο που κάνει την αξιολόγηση έχει κάποιες πληροφορίες, παραπομπές ή εμπειρία σχετικά με την κατάσταση που πρέπει να αξιολογηθεί.

3. Η διαδικασία γίνεται νοερά.

4. Είναι γρήγορη, χρησιμοποιώντας τους απλούστερους δυνατούς αριθμούς.

5. Η επιτευχθείσα τιμή δεν είναι ακριβής, αλλά αρκετά κοντά στην ακριβή, ώστε να παρθούν αποφάσεις.

6. Η τιμή που επιτυγχάνεται μπορεί να διαφέρει κάπως, ανάλογα με το άτομο που κάνει την εκτίμηση.

Πολλές φορές η έννοια της εκτίμησης ταυτίζεται ή συγχέεται με την έννοια της προσέγγισης, αφού και οι δύο θα μπορούσαν να αποδοθούν με τη βοήθεια της λέξης «περίπου» (about). Η προσέγγιση είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται συχνά στην αριθμητική, σχετίζεται με την εκτίμηση αλλά δεν είναι συνώνυμες (Hall, 1984). Σύμφωνα με τους Segovia & Castro (2009) η προσέγγιση συνιστά την εύρεση ενός αριθμού αρκετά κοντά σε έναν συγκεκριμένο στόχο. Δίνει έμφαση στην εγγύτητα με το ακριβές αποτέλεσμα και είναι τελείως ελέγξιμη αφού το άτομο μπορεί να φτάσει όσο κοντά επιθυμεί. Για παράδειγμα, ο αριθμός π προσεγγίζεται με τέσσερα δεκαδικά ψηφία ως 3,1416 ή η $\sqrt{2}$ ως 1,4142. Επιπλέον, συνήθως βρίσκουμε μια προσέγγιση μέσω κάποιου αλγορίθμου χρησιμοποιώντας είτε ένα εξωτερικό μέσο είτε χαρτί και μολύβι. Αντιθέτως, η εκτίμηση είναι μια νοερή διαδικασία για την οποία απαιτείται η χρήση υπολογιστικών στρατηγικών και επομένως βασίζεται σε γνώση που ήδη έχουμε ή μπορούμε να αποκτήσουμε (Λεμονίδης, 2020).

Είναι αναμενόμενο να συγχέονται ορισμένες φορές αυτές οι έννοιες, καθώς και τις δύο τις συναντάμε στις μετρήσεις, ενώ ταυτόχρονα αμφότερες συνδέονται με την έννοια της εγγύτητας. Συχνά λέμε στους μαθητές να κάνουν μια εκτίμηση και μετά να βρουν μια προσεγγιστική τιμή με μέτρηση. Άλλες φορές πάλι οι εκτιμήσεις αποτελούν προσεγγίσεις, ειδικά αν σε ένα αριθμητικό πρόβλημα επιλεγεί συνδυασμός υπολογιστικών στρατηγικών και στο τέλος γίνει διόρθωση του αποτελέσματος. Για να ξεκαθαρίσουμε τις δύο έννοιες, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εκτίμηση ξεκινά με ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, οι υπολογισμοί γίνονται νοερά χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων και τελειώνει με μια μη ακριβή ποσοτική δήλωση, ενώ η προσέγγιση ξεκινά και τελειώνει με αριθμούς, πραγματοποιείται συνήθως με τη χρήση εξωτερικών μέσων και πιθανόν να αποτελεί συστατικό περίπλοκων προβλημάτων εκτίμησης (Λεμονίδης, 2020).

1.1.2 Η σπουδαιότητα της εκτίμησης και η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της

Καθημερινά ερχόμαστε αντιμέτωποι με ερωτήματα που οι περιστάσεις απαιτούν να απαντήσουμε γρήγορα και αποτελεσματικά, υπολογίζοντας αριθμητικά μεγέθη δίχως να έχουμε πρόσβαση σε κάποιον υπολογιστή ή σε χαρτί και μολύβι. Καλούμαστε να λάβουμε αποφάσεις σε σύντομο χρονικό διάστημα και να αποφασίσουμε για την ορθότητα των ενεργειών μας, απλώς σκεπτόμενοι. Μου φτάνουν τα χρήματα μου για να πληρώσω στο σούπερ μάρκετ; Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι να φτάσω στον προορισμό μου; Θα προλάβω; Η συσκευασία αυτού του προϊόντος είναι πολύ μεγάλη; Θα χωρέσει στο αυτοκίνητο; Πόσο κόσμο χωράει αυτή η αίθουσα, είναι κατάλληλη για την περίσταση; Στην καθημερινή ζωή η υπολογιστική εκτίμηση χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο είδος υπολογισμού. Οι Northcote & McIntosh (1999) εξέτασαν τις μεθόδους υπολογισμού που χρησιμοποιούσαν ενήλικες κατά τη διάρκεια ενός τυπικού 24ώρου και διαπίστωσαν ότι το 84,6% των υπολογισμών εκτελέστηκαν νοερά με το μεγαλύτερο μέρος αυτών να αποτελούν εκτιμήσεις (Lemonidis & Kaimakami, 2013). Η εκτίμηση της σωστής απάντησης είναι απαραίτητη δεξιότητα στη σύγχρονη κοινωνία και οι λόγοι είναι πολλοί.

Σύμφωνα με τους Segovia & Castro (2009) η εκτίμηση έχει μία πρακτική χρησιμότητα για τους εξής τέσσερις λόγους:

i. δεν είναι πάντοτε δυνατό να γνωρίζουμε την ακριβή απάντηση (π.χ. ο υπολογισμός των αυτοκινήτων που ταξιδεύουν σε ένα δεδομένο Σαββατοκύριακο)

ii. δεν είναι πάντοτε δυνατό να ορίσουμε την ακριβή απάντηση (π.χ. στην περίπτωση πράξης με έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό)

iii. ορισμένες φορές είναι προτιμότερη η αριθμητική σαφήνεια (π.χ. είναι προτιμότερο να πούμε 150 εκατομμύρια χρηματικές μονάδες για 63 χιλιάδες μαθητές, παρά 148.739.426 εκατομμύρια χρηματικές μονάδες για 62.879 μαθητές)

iv. πολλές φορές μια κατ' εκτίμηση απάντηση είναι επαρκής και εξίσου χρήσιμη (π.χ. η κατάλληλη στρογγυλοποίηση και ο κατάλληλος νοερός υπολογισμός μπορούν να παράσχουν έναν απλό τρόπο λήψης μιας απάντησης, η οποία είναι αρκετά ακριβής και χρήσιμη ώστε να ληφθεί κάποια απόφαση).

Επιπλέον, η αξιολόγηση του αποτελέσματος ως εύλογο ή μη αποτελεί ακόμη έναν λόγο χρησιμότητας της ικανότητας εκτίμησης. Η ευρεία χρήση της τεχνολογίας για τον υπολογισμό διαφόρων αποτελεσμάτων δίνει σημασία στην εκτίμηση, καθώς μπορεί π.χ. να προκύψουν λάθη κατά την πληκτρολόγηση. Ο χρήστης πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζει αν είναι λογικό ή όχι το αποτέλεσμα των πράξεών του (Alajmi, 2009).

Ωστόσο, η ανάγκη να γνωρίζουμε πώς να εκτιμήσουμε είναι πιο θεμελιώδης από αυτή του ελέγχου ενός αποτελέσματος (Sowder, 1984) και έγκειται στη δυνατότητα να αποδώσει νόημα στους αριθμούς, καθώς η εκτίμηση απαιτεί σκέψη, αποτελεί πολύ σημαντική πτυχή της αίσθησης του αριθμού και των μαθηματικών εργασιών (Bana & Dolma, 2004) και τείνει να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση των αριθμητικών πράξεων (Lemonidis & Kaimakami, 2013; Lemonidis 2020).

Κατά τους Sowder & Wheeler (1989) λίγοι είναι οι μαθητές που μπορούν να δεχτούν πολλαπλές αριθμητικές τιμές ως έγκυρα αποτελέσματα για το ίδιο πρόβλημα εκτίμησης, γεγονός που ίσως μπορεί να εξηγηθεί από την έμφαση που δίνεται στα περισσότερα προγράμματα σπουδών σχετικά με τη λήψη μίας και μοναδικής σωστής απάντησης σε ένα πρόβλημα υπολογισμού. Η συνειδητοποίηση ότι στη διαδικασία της εκτίμησης δεν υπάρχει μόνο μία σωστή απάντηση είναι ένα σημαντικό στοιχείο της ικανότητας εκτίμησης. Το βήμα πέρα από τη μηχανική εφαρμογή διαδικασιών και η εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης με ευέλικτους τρόπους αποτελεί ακόμη έναν σημαντικό λόγο που καθιστά τη διδασκαλία της εκτίμησης σπουδαία, καθώς η επίλυση προβλημάτων με προσαρμοστικό τρόπο συνιστά θεμελιώδη στόχο των σύγχρονων μαθηματικών (Siegler & Booth; 2005, Λεμονίδης, 2020).

Οι Sowder (1984), Bana & Dolma (2004) και ο Alajmi (2009) υποστήριξαν ότι η εκτίμηση παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων. Ο Reys (1986) παρομοιάζει την εκτίμηση με την επίλυση προβλημάτων, διότι και αυτή απαιτεί μια ποικιλία δεξιοτήτων και στάσεων, ενώ μπορεί να αναπτυχθεί και να βελτιωθεί με την πάροδο του χρόνου. Ένας καλός εκτιμητής επιλέγει τη στρατηγική του σύμφωνα με το πλαίσιο του προβλήματος (Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014), ενώ ταυτόχρονα αποδεικνύει την κατανόησή του για το μέγεθος του αριθμού, τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και το νόημα των αποτελεσμάτων των πράξεων (Alajmi, 2009). Για τους LeFevre et al. (1993), αν και είναι σημαντικό να διδαχθούν τα παιδιά κανόνες εκτίμησης, θεωρούν πιο κρίσιμο να μάθουν πότε και γιατί να τους εφαρμόζουν, ώστε να μπορούν να αρνηθούν μια αλγοριθμική προσέγγιση όταν αυτή μπορεί να επιτευχθεί σχετικά γρήγορα νοερά και με ακρίβεια.

Τέλος, ένας ακόμη σημαντικός λόγος για τον οποίο πρέπει να ενταχθεί αποτελεσματικά η διδασκαλία της εκτίμησης στα σχολικά περιβάλλοντα είναι το γεγονός ότι πολλές έρευνες έχουν δείξει πως οι μαθητές (Bana & Dolma, 2004; Siegler & Booth, 2005) αλλά και πολλοί ενήλικες (Levine, 1982; Goodman, 1991; Alajmi, 2009, Lemonidis et al., 2014) συναντούν δυσκολίες κατά τη διαδικασία της.

Σπουδαία ονόματα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης έχουν επισημάνει τα τελευταία χρόνια τη σημασία της εκτίμησης. Ο Trafton (1986) τόνισε ότι *«κορυφαία προτεραιότητα όσων φτιάχνουν τα προγράμματα σπουδών πρέπει να είναι η κατασκευή ενός ισχυρού σκελετού διδασκαλίας της υπολογιστικής εκτίμησης»*. Ο Usiskin (1986) υποστήριξε ότι *«οι χρήσεις της εκτίμησης ταιριάζουν στα ιδανικά των Μαθηματικών»*, ενώ η Reys (1992) ισχυρίστηκε ότι *«περισσότερο από το 80% όλων των μαθηματικών εφαρμογών απαιτούν εκτίμηση αντί για ακριβή υπολογισμό»* (Bana & Dolma, 2004). Επιπλέον, αρκετά προγράμματα σπουδών σε διάφορες χώρες παγκοσμίως αναγνωρίζουν την εκτίμηση ως ένα ιδιαίτερα σημαντικό ζήτημα στα σχολικά Μαθηματικά και την εντάσσουν στους σκοπούς της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (NCTM, 2000; Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics, 2008; Australian Education Council, 2015).

Ωστόσο, αν και η σημασία της εκτίμησης αναγνωρίζεται ευρέως, τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών φαίνεται να δίνουν πολύ λίγη προσοχή (Bana & Dolma, 2004). Η Sowder (1984) θεωρεί ότι η διδασκαλία της ικανότητας εκτίμησης είναι ένα από τα πιο παραμελημένα μέρη των μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών, ενώ ο Trafon (1978) επεσήμανε ότι η διδασκαλία της αντιμετωπίζεται με *«επιφανειακό, στιλβωμένο, απομονωμένο τρόπο»*.

Παρά τη σημασία της τόσο στην τάξη όσο και στην καθημερινή ζωή, πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά για την ανάπτυξή της σε σχέση με την ανάπτυξη άλλων βασικών ποσοτικών ικανοτήτων, όπως η καταμέτρηση και η πρόσθεση. Η εκτίμηση δεν περιλαμβάνει μία, αλλά ένα ποικίλο σύνολο διεργασιών. Ορισμένες εργασίες εκτίμησης, π.χ. η εκτίμηση της απόστασης μεταξύ δύο πόλεων ή ο χρόνος για την ολοκλήρωση μιας εργασίας, απαιτούν τη γνώση μονάδων μέτρησης, όπως τα μέτρα ή τα λεπτά, ενώ άλλες εργασίες εκτίμησης όχι, όπως π.χ. η εκτίμηση του αριθμού των γλυκών μέσα σε ένα κουτί. Ομοίως, ορισμένες φορές η διαδικασία της εκτίμησης απαιτεί προηγούμενη γνώση ή σημεία αναφοράς, όπως π.χ. η εκτίμηση του κόστους μιας πίτσας ή της ταχύτητας μιας Lamborghini. Σύμφωνα με τους Siegler & Booth (2005) αυτή η μεταβλητότητα στις γνώσεις και τις διαδικασίες που απαιτούνται για τις διάφορες καταστάσεις εκτίμησης εμπόδισαν την πρόοδο στην ανάπτυξή της.

Οι Bana & Dolma (2004) επιμένουν ότι πρέπει να αφιερωθεί πολύ περισσότερος χρόνος στην εκτίμηση μέσα στις σχολικές αίθουσες. Η εκτίμηση δεν είναι μία έννοια, αλλά μία διαδικασία και ως τέτοια πρέπει να αντιμετωπίζεται. Διαθεματικά και όχι μεμονωμένα. Πρέπει να αποτελεί στοιχείο όλων των επιμέρους θεμάτων με τα οποία σχετίζεται και να προηγείται των εμπλεκόμενων διαδικασιών. Για παράδειγμα, πρέπει να ζητείται πάντοτε από τα παιδιά να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα πριν κάνουν μια μέτρηση ή έναν υπολογισμό. Αυτό όχι μόνο θα βοηθήσει τη μάθηση, αλλά θα δώσει στα μάτια των παιδιών και μεγαλύτερο νόημα στα Μαθηματικά.

Ο Goodman (1991) υποστήριξε ότι οι δεξιότητες και οι στρατηγικές της εκτίμησης πρέπει να διδαχθούν ρητά στους μαθητές και να τονιστούν οι μαθηματικές έννοιες και οι ιδιότητες που σχετίζονται με αυτήν. Στη μελέτη του φάνηκε ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί δημοτικών σχολείων, παρά τα 10-13 χρόνια διδασκαλίας που είχαν λάβει στα Μαθηματικά, δεν είχαν καταφέρει να αναπτύξουν από μόνοι τους πολλές στρατηγικές εκτίμησης.

Καταλήγουμε, έτσι, στο συμπέρασμα ότι πέρα από την πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης στην καθημερινή ζωή των σύγχρονων κοινωνιών, η ίδια θεωρείται ένα από τα «ιδανικά» των Μαθηματικών που οφείλει να έχει σημαντική θέση στη Μαθηματική Εκπαίδευση, να προσεγγίζεται με ιδιαίτερη προσοχή και να ενθαρρύνεται η ανάπτυξή της από μικρή ηλικία.

1.1.3 Εκτίμηση και αίσθηση του αριθμού

Η ικανότητα εκτίμησης, όπως αναφέρει η Sowder (1984), σχετίζεται άμεσα με την απόκτηση της αίσθησης του αριθμού, την οποία ορίζει ως «*ένα καλά οργανωμένο εννοιολογικό δίκτυο που επιτρέπει στο άτομο να συσχετίσει τους αριθμούς και τις ιδιότητες των λειτουργιών τους*». Η Dowker (1992) προσθέτει ότι «*η αίσθηση του αριθμού εμφανίζεται ως ευελιξία στη σκέψη, ως ικανότητα εκτίμησης σε υπολογισμούς και ως ικανότητα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων σχετικά με τις αριθμητικές ποσότητες*». Ο Buchanan (1978) θεωρεί ότι η εκτίμηση μπορεί να είναι ικανή μακροπρόθεσμα να διαδραματίσει έναν σημαντικό ρόλο στην αύξηση της αίσθησης του αριθμού, έννοια που χρησιμοποιεί ως έναν σύντομο όρο για το «*επίπεδο του γραμματισμού που αφορά στις ποσότητες και τη μαθηματική κατανόηση*» (Edwards, 1984). Ο Λεμονίδης (2020) μελετώντας τους McIntosh et al. (1992), Reys & Yang (1998) και Sowder (1992) συμπεραίνει πως η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση ενός ατόμου των αριθμών και των πράξεων και στην ικανότητα χειρισμού καταστάσεων της καθημερινής ζωής που περιέχουν αριθμούς. Η ικανότητα αυτή προϋποθέτει τη χρήση ευέλικτων, χρήσιμων και αποτελεσματικών στρατηγικών στον νοερό υπολογισμό και την εκτίμηση, για τη διαχείριση αριθμητικών προβλημάτων. Σύμφωνα με το NCTM (1989) η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού συνεπάγεται *(α)* καλή κατανόηση της έννοιας των αριθμών, *(β)* ανάπτυξη πολλαπλών σχέσεων μεταξύ των αριθμών, *(γ)* αναγνώριση του σχετικού μεγέθους των αριθμών, *(δ)* κατανόηση των σχετικών επιπτώσεων των λειτουργιών με αριθμούς και *(ε)* ανάπτυξη αντικειμένων αναφοράς για μετρήσεις, ενώ για τον Howden (1989) η αίσθηση του αριθμού *«αναπτύσσεται σταδιακά ως αποτέλεσμα της εξερεύνησης των αριθμών, της απεικόνισής τους σε διάφορα περιβάλλοντα και της συσχέτισής τους με τρόπους που δεν περιορίζονται από παραδοσιακούς αλγόριθμους»* (Segovia & Castro, 2009).

Παρόλο που υπάρχουν ποικίλες απόψεις για το πώς ορίζεται η αίσθηση του αριθμού, όλες περιλαμβάνουν την εκτίμηση ως αναπόσπαστο μέρος ή θεωρούν ότι είναι στενά συνδεδεμένες έννοιες. Οι Sowder (1984), Dowker (1992), Montague & Van Garderen (2003) και Booth & Siegler (2008) υποστήριξαν θερμά ότι η ικανότητα εκτίμησης συνδέεται άρρηκτα με την ανάπτυξη της αίσθησης αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, η Dowker (1992) ισχυρίστηκε ότι η εκτίμηση όχι μόνον σχετίζεται με την αίσθηση του αριθμού, αλλά εξαρτάται και από αυτήν. Σε αυτή τη λογική, κατά τη Sowder (1984) το να κάνεις μια λογική εκτίμηση εξαρτάται από τη δυνατότητα σύγκρισης αριθμών, ενώ για τους LeFevre et al. (1993) χωρίς την κατανόηση της εγγύτητας οι εκτιμήσεις θα φαίνονται τυχαίες και αδικαιολόγητες.

Βέβαια, ο Edwards (1984) επεσήμανε πως το επίπεδο της αίσθησης του αριθμού ενός ατόμου εξαρτάται και από την κουλτούρα του τόπου του. Για παράδειγμα, όταν το περιβάλλον είναι φτωχό ως προς την ανάπτυξη των Μαθηματικών, μπορεί να χαρακτηριστεί ως αίσθηση του αριθμού η κατανόηση ότι το 4.167 είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερο από 397, ενώ σε μια πιο αναπτυγμένη κουλτούρα περιμένει κανείς αίσθηση του αριθμού να θεωρείται η γνώση ότι το 35% μιας ποσότητας είναι περίπου το ένα τρίτο της.

Σε διεθνή έρευνα των Bana & Farrel (1997) σχετικά με την αίσθηση του αριθμού, όπου πολλά έργα αφορούσαν την ικανότητα εκτίμησης, οι μαθητές ηλικίας 3, 5, 7 και 9 ετών σημείωσαν χαμηλές επιδόσεις. Στα ευρήματα μελέτης του Alsawaie (2012) φάνηκε ότι μαθητές έκτης τάξης στα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα ενστερνίζονται σε πολύ μεγάλο ποσοστό τη χρήση γραπτών αλγορίθμων, καθώς δίνεται μεγάλη έμφαση σε αυτούς στο σχολείο, ενώ σε παρόμοια έρευνα του Yang (2005) οι μαθητές έκτης τάξης επηρεάστηκαν από την ανάγκη τους για ακριβείς απαντήσεις. Είναι φανερό πως η έντονη έμφαση στους αλγόριθμους που σχετίζονται με τους γραπτούς υπολογισμούς κάνει τους μαθητές υποστηρικτές των κανόνων και αφήνει μικρά περιθώρια για την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης. Ωστόσο, σε μελέτη των Northcote & McIntosh (1999) οι ενήλικες έδειξαν λιγότερη εμμονή στη χρήση γραπτών υπολογισμών, παρατηρώντας πως το 60% των νοερών υπολογισμών τους ήταν εκτιμήσεις (Anestaki & Desli, 2014).

Από την άλλη, έχει παρατηρηθεί ότι τα άτομα που κάνουν καλές εκτιμήσεις κατανοούν καλύτερα τους αριθμούς, την αξία θέσης των ψηφίων και τις αριθμητικές ιδιότητες. Είναι, επίσης, ικανοί να κάνουν νοερούς υπολογισμούς, ανεκτικοί στα λάθη και αρκετά ευέλικτοι ώστε να χρησιμοποιήσουν μια ποικιλία στρατηγικών (Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014). Σε αυτό συμφωνεί και η Levine (1982), κατά την οποία οι φοιτητές που είχαν υψηλή αίσθηση του αριθμού χρησιμοποιούσαν περισσότερες στρατηγικές εκτίμησης και ήταν καλύτεροι εκτιμητές σε σχέση με εκείνους που είχαν χαμηλότερη. Όταν πρέπει να υπολογιστεί μια σύνθετη αριθμητική εργασία ή όταν απαιτείται ένας γρήγορος προσδιορισμός μιας ποσότητας, μπορεί κανείς να καταφύγει σε μια εκτίμηση που πρόκειται να οδηγήσει σε κατά προσέγγιση υπολογισμό. Αυτή η ικανότητα μετάφρασης ενός σύνθετου αριθμητικού έργου σε ένα κατ' εκτίμηση αποτέλεσμα αποκαλύπτει την εστίαση στο νόημα των αριθμών και των πράξεων (Desli & Lioliou, 2020).

1.1.4 Εκτίμηση και νοεροί υπολογισμοί

Οι τρέχουσες ανησυχίες σχετικά με τα πρότυπα της αριθμητικής στα δημοτικά σχολεία έχουν αναθεωρήσει την έμφαση που δίνεται στους νοερούς υπολογισμούς και γίνεται προσπάθεια να δίνονται καθημερινά ευκαιρίες στα παιδιά να αναπτύξουν αποτελεσματικές και ευέλικτες μεθόδους αυτών (Maclellan, 2001). Ως νοερό υπολογισμό θεωρούμε τη διαδικασία εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων χωρίς τη βοήθεια εξωτερικών μέσων. Δηλαδή, ο νοερός υπολογισμός πραγματοποιείται «στο κεφάλι» και όχι «στο χαρτί». Ωστόσο, με τη φράση «πραγματοποιείται στο κεφάλι» δεν εννοείται απλώς η γρήγορη ανάκληση συγκεκριμένων αριθμητικών στοιχείων. Στους νοερούς υπολογισμούς χρησιμοποιούνται στρατηγικές διαφορετικές από τους αλγόριθμους που μαθαίνουμε να γράφουμε στο χαρτί χρησιμοποιώντας το μολύβι μας. Οι συμβατικοί αλγόριθμοι έχουν μόνιμη και τυποποιημένη μορφή, ενώ, αντίθετα, οι νοερές στρατηγικές είναι μεταβλητές, ευέλικτες, δημιουργικές και ιδιοσυγκρασιακές (Sowder, 1988). Για να γίνει πιο κατανοητό, οι Thompson (1999) και Anghileri (1999) ως νοερό ερμηνεύουν το «υπολογίζω με το κεφάλι» και όχι μόνο «μέσα στο κεφάλι».

Η Sowder (1988) επεσήμανε πως αν ο σκοπός είναι να λάβουμε μια ακριβή απάντηση στο αριθμητικό πρόβλημα που υπάρχει, τότε απαιτείται ακριβής υπολογισμός, ο οποίος μπορεί να γίνει πιθανόν και νοερά ανάλογα με το μέγεθος των σχετικών αριθμών. Εάν, από την άλλη, ο σκοπός είναι να επιτευχθεί μια κατά προσέγγιση απάντηση ή πράγματι εάν οι αριθμοί είναι μεγάλου μεγέθους, τότε η εκτίμηση είναι κατάλληλη. Η ίδια όρισε την εκτίμηση ως «*τη διαδικασία μετατροπής αριθμών από ακριβείς σε προσεγγιστικούς και τον νοερό υπολογισμό με αυτούς τους αριθμούς, με σκοπό να ληφθεί μια απάντηση, η οποία είναι αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού*».

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους θέλουμε τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στο σχολείο, όπως η συμβολή τους στην επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο, για τους Reys et al. (1984) ένας ισχυρός λόγος για την ενσωμάτωση του νοερού υπολογισμού στο πρόγραμμα σπουδών του δημοτικού είναι η σχέση του με την υπολογιστική εκτίμηση, καθώς οι ίδιοι χαρακτηριστικά αναφέρουν πως ο νοερός υπολογισμός αποτελεί τον «*ακρογωνιαίο λίθο της εκτίμησης*», διότι είναι απαραίτητος για τις διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση. Την άποψη αυτή ενστερνίζεται και ο Gómez (1994), σύμφωνα με τον οποίο η επαρκής ικανότητα νοερών υπολογισμών συνιστά μια καλή βάση για την εκτίμηση (Segovia & Castro, 2009).

Αν και οι Segovia & Castro (2009) θεωρούν την υπολογιστική εκτίμηση απαραίτητη στα Μαθηματικά του δημοτικού σχολείου κυρίως για την πρακτική χρησιμότητά της, ο McIntosh (2002) τονίζει τη συμβολή της στη διεύρυνση της περιοριστικής άποψης ότι τα Μαθηματικά είναι συνώνυμα με τους γραπτούς αλγόριθμους. Με άλλα λόγια, η εκτίμηση περιλαμβάνει τον νοερό υπολογισμό. Ο Maclellan (2001) ισχυρίστηκε ότι «*ο νοερός υπολογισμός είναι μέρος ενός ιστού που συνδέει άμεσα τον ίδιο και την υπολογιστική εκτίμηση*», ενώ ο Λεμονίδης (2013) σημείωσε ότι «*η εκτίμηση είναι κάτι περισσότερο από τον νοερό υπολογισμό και τον περιλαμβάνει*». Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι καθώς η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτεί, όχι μόνο κάποια προσαρμογή των αριθμών, αλλά επίσης και έναν προβληματισμό σχετικά με το ποιες προσαρμογές πρέπει να γίνουν πριν την πραγματοποίηση μιας λογικής εκτίμησης, κατά συνέπεια οι νοεροί υπολογισμοί και οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης είναι έννοιες αλληλένδετες.

1.1.5 Είδη εκτίμησης

«Είναι αρκετά τα χρήματα που έχω στο πορτοφόλι μου, για να αγοράσω αυτά τα προϊόντα;», «Μπορούμε δύο άτομα να σηκώσουμε αυτό το βαρύ κιβώτιο;», «Πόσα άτομα παρευρέθηκαν στη χθεσινή εκδήλωση;», «Πόσο πρέπει να πληρωθώ μετά από τόσες ώρες εργασίας;». Αυτά είναι ορισμένα από τα συνήθη ερωτήματα που συναντούμε καθημερινά στη ζωή μας και καλούμαστε να απαντήσουμε γρήγορα και έγκυρα, κάνοντας μία εκτίμηση. Όπως είδαμε και νωρίτερα, η εκτίμηση περιλαμβάνει την προσαρμογή των δεδομένων ώστε με γρήγορο και απλό τρόπο μέσω ενός νοερού υπολογισμού να δοθεί μία έγκυρη απάντηση, κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα.

Στη βιβλιογραφία (π.χ. Siegler & Booth, 2005; Segovia & Castro, 2009; Λεμονίδης, 2020), αναφέρονται τα παρακάτω τέσσερα είδη εκτίμησης, καθένα από τα οποία απαιτούν διαφορετικά είδη κατανόησης και άλλο σύνολο ικανοτήτων:

α) Η εκτίμηση σε αριθμογραμμή *(number line estimation)*
β) Η εκτίμηση μέτρησης *(estimating measures)*
γ) Η εκτίμηση πλήθους *(estimating numerosity)*
δ) Η υπολογιστική εκτίμηση *(computational estimation)*

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2020) με τον όρο *εκτίμηση σε αριθμογραμμή* εννοείται η ερμηνεία ενός αριθμού πάνω σε μια αριθμογραμμή ή η αντιστοίχιση ενός σημείου του χώρου της αριθμογραμμής σε έναν αριθμό. Οι ερμηνείες των μαθητών για τους αριθμούς σε θέσεις πάνω στην αριθμογραμμή δίνουν ιδιαίτερα άμεσες πληροφορίες σχετικά με τις αναπαραστάσεις που έχουν για τα αριθμητικά μεγέθη.

Η *εκτίμηση μέτρησης* αφορά μεγέθη όπως το μήκος, το βάρος, το εμβαδόν, ο όγκος, ο χρόνος κ.α., δηλαδή μεγέθη μη διακριτά. Η *εκτίμηση μέτρων* (όπως αλλιώς λέγεται) αναφέρεται σε συνεχή μεγέθη, γίνεται χωρίς τη χρήση εργαλείων μέτρησης και βασίζεται στη χρήση μιας συγκεκριμένης μονάδας, όπως είναι για παράδειγμα το μέτρο ή τα εκατοστά για το μήκος. Στην εκτίμηση μέτρησης ορισμένες φορές η μονάδα μέτρησης μπορεί να είναι και αυθαίρετη, όπως για παράδειγμα η μέτρηση μιας απόστασης σε σχέση με το άνοιγμα του βήματος. Καλοί εκτιμητές σε αυτό το είδος εκτίμησης είναι συνήθως οι άνθρωποι οι οποίοι λόγω του επαγγέλματός τους έρχονται συχνά σε επαφή με μέτρηση συνεχών ποσοτήτων, όπως ο κύριος στον πάγκο της λαϊκής αγοράς που ζυγίζει τα φρούτα ή ο πλακατζής που μελετά το εμβαδόν δωματίων.

Αντίθετα με την εκτίμηση μέτρησης, η *εκτίμηση πλήθους* αφορά διακριτά μεγέθη. Σε αυτήν τίθεται συνήθως η ερώτηση «πόσα είναι» και ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων σε ένα σύνολο, όπως π.χ. πόσα άτομα έχουν έρθει στο πάρτι ή ποσά σοκολατάκια λείπουν απ' το κουτί; Μια κοινή διαδικασία που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση πλήθους είναι να μετρηθεί ένα δείγμα και μετά να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό των δειγμάτων (Λεμονίδης, 2020).

Τέλος, η *υπολογιστική εκτίμηση* αφορά αποφάσεις όπως το εάν ή όχι είναι λογική μια απάντηση υπολογισμού, εάν ένας δεδομένος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από την ακριβή απάντηση, εάν η απάντηση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από έναν δεδομένο αριθμό αναφοράς και εάν ή όχι μια εκτίμηση βρίσκεται στη σωστή σειρά μεγέθους (Rubenstein, 1985).

Από τα παραπάνω, το τελευταίο είναι και το πιο διαδεδομένο είδος εκτίμησης στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων (Siegler & Booth, 2005; Sowder, 1984; Lemonidis & Likidis, 2019) και αυτό που θα μελετήσουμε στην παρούσα έρευνα.

1.1.5.1 Υπολογιστική εκτίμηση

Σπουδαία ονόματα στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης έχουν ασχοληθεί με την υπολογιστική εκτίμηση, καθώς τόσο οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί όσο και τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών ολοένα και περισσότερο τονίζουν τη σπουδαιότητά της και ενθαρρύνουν την ανάπτυξή της.

Η Rubenstein (1985) όρισε την υπολογιστική εκτίμηση ως «*την εύρεση μιας κατά προσέγγιση απάντησης σε ένα προφορικό ή γραπτό αριθμητικό πρόβλημα, χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής ή άλλων υποστηρικτικών εργαλείων, χρησιμοποιώντας νοερούς υπολογισμούς που εφαρμόζονται γρήγορα, για να βρεθεί μία επαρκής* απάντηση για τη λήψη αποφάσεων».

Το 1992 η Dowker ανέφερε ότι «*η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνει την εκτέλεση μιας λογικής υπόθεσης με σκοπό την εύρεση μιας προσιτής απάντησης* *στα αριθμητικά προβλήματα, χωρίς να προηγηθεί ακριβής υπολογισμός»*, ενώ λίγο αργότερα την ίδια χρονιά η Sowder (1992) παρατήρησε ότι *«για να είναι σωστή, η απάντηση πρέπει να εμπίπτει σε ένα ορισμένο διάστημα, το οποίο καθορίζεται από το πρόβλημα το ίδιο ή κάποια εξωτερική πηγή, όπως ένας δάσκαλος»*.

Λίγο πιο αναλυτικά, ο De Castro το 2002 ανέφερε ότι *«η υπολογιστική εκτίμηση συνίσταται σε αντικατάσταση των αρχικών δεδομένων με προσεγγίσεις που επιτρέπουν τη μείωση της πολυπλοκότητας των υπολογισμών, τη διατήρηση της απαραίτητης εγγύτητας στο ακριβές αποτέλεσμα, την εφαρμογή ενός νοερού υπολογισμού αυτών των προσεγγίσεων, την πραγματοποίηση διόρθωσης (προγενέστερης ή μεταγενέστερης του αποτελέσματος) και τέλος την αξιολόγηση του αποτελέσματος»*.

Η υπολογιστική εκτίμηση θεωρείται εξαιρετικά σημαντική, καθώς σε πολλές περιπτώσεις συνηθισμένων καθημερινών καταστάσεων είναι πιο γρήγορη και αποτελεσματική από τον ακριβή υπολογισμό. Επίσης, οι νοεροί υπολογισμοί και η υπολογιστική εκτίμηση είναι δύο δεξιότητες που συχνά χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της ορθότητας και της λογικής των αποτελεσμάτων που παράγονται π.χ. από υπολογιστές (Reys, 1984). Επιπλέον, τα άτομα που είναι καλοί εκτιμητές θεωρούν εύλογη την ύπαρξη πολλαπλών απαντήσεων, ενώ, αντιθέτως, τα άτομα με χαμηλές επιδόσεις στην υπολογιστική εκτίμηση βρέθηκαν πιο προσκολλημένα στη ιδέα της ύπαρξης μίας και μοναδικής απάντησης (Sowder & Wheeler, 1989). Τέλος, η υπολογιστική εκτίμηση αποτελεί ένα σημαντικό συστατικό της μαθηματικής γνώσης, διότι παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη γενική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, των στρατηγικών και της ανάπτυξης του αριθμητικού γραμματισμού του ατόμου (Lemaire, 2000). Οι Heirdsfield & Cooper (2004) θεωρούν ότι η υπολογιστική εκτίμηση προϋποθέτει την ανάπτυξη νοερών υπολογισμών και αποτελεί σημαντικό δείκτη της αίσθησης του αριθμού. Σε μελέτη των ίδιων φάνηκε ότι τα παιδιά που ήταν ευέλικτα στον νοερό υπολογισμό ήταν, επίσης, ικανά και στην υπολογιστική εκτίμηση, ενώ, αντίθετα, τα παιδιά που δεν ήταν ευέλικτα, υστερούσαν στην ικανότητα εκτίμησης των αποτελεσμάτων.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης ενός ατόμου δύναται να βελτιωθεί σημαντικά μεγαλώνοντας. Σε έρευνα των Lemaire & Lecacheur (2002) οι ενήλικες και οι μαθητές της 7ης τάξης έδειξαν υψηλότερες επιδόσεις στην εκτίμηση αθροίσματος δύο τριψήφιων προσθετέων απ' ότι οι μαθητές της 4ης τάξης. Ομοίως, στη μελέτη των LeFevre et al. (1993) οι ενήλικες ήταν πιο ακριβείς από τους μαθητές της 8ης τάξης, οι οποίοι με τη σειρά τους ήταν πιο ακριβείς από εκείνους της 6ης τάξης σε κατ’ εκτίμηση γινόμενα πολυψήφιων παραγόντων. Επιπλέον, παρατηρήθηκαν βελτιώσεις στην ταχύτητα εκτίμησης τόσο κατά την πρόσθεση όσο και στον πολλαπλασιασμό καθώς αυξανόταν η ηλικιακή ομάδα.

1.1.5.1.1. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Ο Lemaire (2000) όρισε την έννοια της στρατηγικής ως «*μία διαδικασία ή ένα σύνολο διαδικασιών που πραγματοποιείται για την επίτευξη ενός στόχου ή μιας εργασίας υψηλότερου επιπέδου*», ενώ με τη φράση ρεπερτόριο στρατηγικών εννοείται η ποικιλία μεθόδων που χρησιμοποιεί το άτομο για να παράσχει μία εκτίμηση. Κατά την επίλυση ενός προβλήματος ο λύτης μπορεί να χρησιμοποιήσει πολλές διαφορετικές στρατηγικές ή μια στρατηγική πολλές φορές (Levine, 1982).

Στη βιβλιογραφία βρίσκουμε πολλές μελέτες που διερεύνησαν τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης σε παιδιά και εφήβους (Sowder, 1984; Rubenstein, 1985; Case & Sowder, 1990; Reys et al., 1991a, 1991b; Bana & Dolma, 2004; Lemonidis & Likidis, 2019), σε ενήλικες με υπολογιστικές ικανότητες διαφόρων επιπέδων (Bestgen, 1980; Gliner, 1991; Lemonidis & Kaimakami, 2013), αλλά και σε δείγματα διαφόρων ηλικιών (LeFevre et al., 1993; Lemaire, 2002; Desli & Lioliou, 2020). Στις περισσότερες από αυτές η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης μελετήθηκε από τις απαντήσεις που έδωσαν οι συμμετέχοντες σε αριθμητικά προβλήματα, αξιολογώντας την είτε μέσω της εγγύτητας των εκτιμήσεων στην ακριβή απάντηση, είτε με προφορικά πρωτόκολλα, είτε ορισμένες φορές και με τη μέτρηση του χρόνου απόκρισης. Αξιοσημείωτο είναι ότι, αν και οι μελέτες αυτές πραγματοποιήθηκαν σε πολλά διαφορετικά μέρη του κόσμου: Γαλλία (Lemaire, 2000), Ιαπωνία (Reys et al., 1991a), Καναδάς (LeFevre et al., 1993), Βρετανία, (Dowker, 1996) και Ηνωμένες Πολιτείες (Reys, et al., 1982), οι στρατηγικές που εντοπίσθηκαν είναι κοινές. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι εξεταζόμενοι είχαν διδαχθεί ελάχιστα έως καθόλου τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης στο σχολικό τους περιβάλλον (τουλάχιστον όχι επίσημα), μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτές αναπτύχθηκαν ιδιοσυγκρασιακά σε κάθε άτομο χάρη στη φύση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος και στην ικανότητα λειτουργικής μνήμης εργασίας (Siegler & Booth, 2005).

Το 1982 οι Reys et al. πρότειναν έναν ευρύ διαχωρισμό των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης σε τρεις ομάδες: (α) αναδιατύπωση *(reformulation)* όταν πρόκειται για στρατηγική που μετατρέπει τα αριθμητικά δεδομένα σε μια πιο διαχειρίσιμη μορφή, (β) μετάφραση *(translation)* για την περίπτωση αλλαγής της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε μια άλλη πιο βολική και (γ) αντιστάθμιση *(compensation)* όταν υπάρχουν προσαρμογές στην εκτίμηση, έτσι ώστε αυτή να τείνει πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα. Άλλοι ερευνητές (Sowder & Wheeler, 1989; Reys et al., 1991b; Dowker, 1992; LeFevre et al., 1993, Λεμονίδης, 2013, 2020) πρότειναν πιο εξειδικευμένες κατηγοριοποιήσεις, ορίζοντας καθεμία στρατηγική ξεχωριστά. Παρακάτω παρουσιάζονται όλες οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία, σημειώνοντας ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι ονομασίες που τους έχουν αποδοθεί ποικίλουν.

1. **Διαίσθηση** *(intuition)*: στρατηγική που χρησιμοποιείται κυρίως από νεότερους και άπειρους εκτιμητές και μπορεί να ενισχύσει την πεποίθηση ότι οι κατά προσέγγιση απαντήσεις μπορεί να είναι πολύτιμες. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να απαντήσει ότι ο μέσος όρος των 3, 5, 8 και 10 είναι περίπου 6, αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει τον συλλογισμό του (Λεμονίδης, 2020).

2. **Στρογγυλοποίηση** *(rounding)*: το άτομο επιλέγει τη θεσιακή αξία των ψηφίων που πρόκειται να στρογγυλοποιήσει και στη συνέχεια μετατρέπει τα αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος στον πλησιέστερο σε αυτά όρο που τελειώνει σε ένα ή περισσότερα μηδενικά. Διακρίνουμε δύο τύπους αυτής της στρατηγικής:

   i. **Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα:** διαδικασία που βασίζεται στον γνωστό μαθηματικό κανόνα σύμφωνα με τον οποίο επιλέγουμε τη θέση του ψηφίου στην οποία θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε και αν το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά είναι 0, 1, 2, 3 ή 4 τότε αντικαθιστούμε το ψηφίο στρογγυλοποίησης καθώς και όλα όσα ακόμη βρίσκονται στα δεξιά του με μηδενικά, ενώ αν το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά είναι 5, 6, 7, 8 ή 9 τότε αυξάνουμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση κατά μία μονάδα και μετά αντικαθιστούμε τα ψηφία στα δεξιά του με μηδενικά.

ii. **Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα:** στην περίπτωση αυτή λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο του αριθμητικού προβλήματος και μια συγκεκριμένη κατάσταση υπολογισμού. Δεν είναι αναγκαία ούτε επιθυμητή η προσκόλληση στον κανόνα της στρογγυλοποίησης. Αντ' αυτού η διαδικασία πρέπει να είναι ευέλικτη και να γίνεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, ώστε να διευκολυνθεί ο νοερός υπολογισμός. Για παράδειγμα, για το γινόμενο 45 x 33 οι στρογγυλοποιήσεις 40 x 30, 50 x 30 ή 50 x 33 είναι όλες δεκτές.

3. **Περικοπή** *(truncating)*: Στρατηγική που βασίζεται στο σχετικό μέγεθος των αριθμών και τη θεσιακή αξία του πρώτου από αριστερά ψηφίου. Ο αριθμός περικόπτεται και ένα ή περισσότερα ψηφία στο δεξί του μέρος αντικαθίστανται με μηδενικά Η επιλογή της θέσης της περικοπής γίνεται βάσει της κατάστασης του υπολογισμού. Για παράδειγμα το 5.680 μπορεί να μετατραπεί σε 5.000 ή 5.600.

4. **Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου** *(front-end strategy)*: Στρατηγική στην οποία συνήθως παρατηρούνται δύο βήματα. Αρχικά το άτομο εστιάζει στα ψηφία που βρίσκονται στο αριστερό άκρο του αριθμού από τα οποία διαμορφώνει μία εκτίμηση. Στη συνέχεια, συνήθως γίνεται μία προσαρμογή αυτής, καθώς λαμβάνονται υπόψη και τα ψηφία που νωρίτερα είχαν αγνοηθεί. Η στρατηγική αυτή, παρόλο που μπορεί να φανεί βοηθητική και στις τέσσερις πράξεις, η κύρια χρησιμότητά της βρίσκεται στην πρόσθεση δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, στο άθροισμα 1,2+4,8+0,9 αθροίζονται πρώτα τα ακέραια μέρη (εμπρόσθιο άκρο) 1+4+0=5 κι έπειτα μπορεί να τροποποιηθεί το αποτέλεσμα καθώς θα ληφθεί υπόψιν και το δεκαδικό μέρος των αριθμών (0,2+0,8+0,9) το οποίο ισούται περίπου με 2, άρα συνολικά εκτιμούμε ότι έχουμε περίπου 7.

5. **Παραγοντοποίηση** *(factorization)*: Στρατηγική κατά την οποία οι αριθμοί αναλύονται σε γινόμενα μικρότερων παραγόντων, απλούστερης και πιο βοηθητικής μορφής. Για παράδειγμα, το γινόμενο 19 x 304 μπορεί να υπολογιστεί ως 20 x 3 x 100.

6. **Επιμεριστικότητα** *(distributivity)*: Στρατηγική κατά την οποία το άτομο χρησιμοποιεί την επιμεριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα, το γινόμενο 49 x 91

μπορεί να υπολογισθεί κατ’ εκτίμηση ως (50 x 100) – (50 x 10) ώστε να προκύψει 4.500, αποτέλεσμα πολύ κοντά στο ακριβές 4.459.

7. **Στρατηγική με αλγοριθμικό τρόπο** *(proceeding algorithmically)*: Στρατηγική κατά την οποία χρησιμοποιείται κάποιος αλγόριθμος για να γίνουν επιμέρους υπολογισμοί στο περίπου και στη συνέχεια να δοθεί το τελικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 19,7 x 11,2 γίνονται οι υπολογισμοί 20 x 11 = 220 και 20 x 0,2 = 4 ώστε στο τέλος να υπολογιστεί η απάντηση 224.

8. **Εύρος** *(range)*: Στρατηγική κατά την οποία υπολογίζεται το εύρος μέσα στο οποίο αναμένεται ότι βρίσκεται η ακριβής απάντηση. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα του γινομένου 2,6 x 11 αναμένεται να βρίσκεται μεταξύ των 22 και 33, με κατώτατο όριο το 2 x 11 = 22 και ανώτατο το 3 x 11 = 33.

9. **Στρατηγική των Συμβατών αριθμών** *(compatible numbers strategy)*: Στρατηγική κατά την οποία ο εκτιμητής εντοπίζει ποια αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος ταιριάζουν μεταξύ τους. Συνήθως ενδείκνυται περισσότερο σε προσθέσεις και διαιρέσεις. Παραδείγματα αποτελούν η πρόσθεση των 12+31+8+21 που μπορεί να γίνει 12+8 και 31+21 που είναι περίπου 20+50 άρα 70 και η διαίρεση 5.489 : 5,1 η οποία μπορεί να υπολογισθεί κατ’ εκτίμηση ως 5.500 : 5 = 1.100.

10. **Στρατηγική των Ειδικών αριθμών** *(special numbers strategy)*: Στρατηγική που βασίζεται στην ικανότητα του εκτιμητή να εντοπίζει αριθμούς που βρίσκονται κοντά σε ειδικές τιμές, όπως το 0, ½ και 1 για τα κλάσματα ή το 50%, 10% και 1% για τα ποσοστά. Για παράδειγμα, στο άθροισμα 13/15+1/25+19/40 το άτομο μπορεί να σκεφτεί 1+0+0,5=1,5.

11. **Ανασύνθεση ή Αντικατάσταση** *(reformulation or substitution)*: Στρατηγική κατά την οποία οι αριθμοί αντικαθίστανται από άλλους, περίπου ισάξιους, ώστε να έχουν μια πιο βολική μορφή κατά τον υπολογισμό. Για παράδειγμα, η πράξη 0,52 x 0,26 μπορεί να μετατραπεί σε ½ x ¼ ώστε εύκολα να υπολογιστεί το 0,125 που αντιστοιχεί στο 1/8.

12. **Συσσώρευση ή Μέσος όρος** *(clustering or averaging)*: Στρατηγική η οποία εφαρμόζεται κατά το άθροισμα πολλών όρων που όλοι τους βρίσκονται γύρω από μία συγκεκριμένη τιμή. Για παράδειγμα, το άθροισμα 23+18+19+21 μπορεί να υπολογιστεί γρήγορα και εύκολα ως 4 x 20, αν το άτομο παρατηρήσει ότι όλοι οι προσθετέοι βρίσκονται γύρω από την τιμή 20.

13. **Αντιστάθμιση** *(compensation)*: Κι εδώ διακρίνουμε δύο τύπους αυτής της στρατηγικής:

    i. **Προγενέστερη αντιστάθμιση** *(prior compensation)*: Στρατηγική κατά την οποία ο δεύτερος όρος στρογγυλοποιείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τον πρώτο, πριν πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε πράξη. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 47 x 86 μπορεί να γίνει η μετατροπή 50 x 80, δηλαδή η στρογγυλοποίηση του 47 σε 50 αντισταθμίζεται από τη στρογγυλοποίηση του 86 σε 80, ώστε να προκύψει 4.000, αντί του 50 x 90 = 4500 που είναι αρκετά πιο μακριά από το ακριβές αποτέλεσμα 4.042 .

    ii. **Μεταγενέστερη αντιστάθμιση** *(post compensation)*: Στρατηγική που εμφανίζεται συμπληρωματικά, έπειτα από κάποια άλλη, με σκοπό να προσαρμόσει/ διορθώσει την απάντηση, όταν είναι επιθυμητή η μεγαλύτερη ακρίβεια. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 47 x 86 υπολογίζουμε 50 x 90 = 4.500 και αφαιρούμε 3 x 50 = 150 και 4 x 90 = 360, ώστε να γίνει περίπου 4.000.

Από τις παραπάνω στρατηγικές, εκείνη που απαντάται πιο συχνά στη βιβλιογραφία είναι η Στρογγυλοποίηση (Lemaire et al., 2000; LeFevre et al., 1993; Reys et al., 1982, 1991), η οποία βέβαια είναι η μόνη που βασίζεται σε μαθηματικό κανόνα και αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια (Levine, 1982), άρα πιθανόν και αυτή με την οποία έχουν έρθει περισσότερο σε επαφή οι μαθητές ή οι ενήλικες κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με τα Μαθηματικά. Αντιθέτως, η Αντιστάθμιση είναι αυτή που απαντάται σπανιότερα, καθώς σύμφωνα με τους Reys et al. (1982) τα περισσότερα παιδιά δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν τι συνιστά μία λογική αντιστάθμιση. Στη μελέτη των Lemaire et al. (2000) οι μαθητές της 5^{ης} τάξης χρησιμοποίησαν τη Στρογγυλοποίηση ως στρατηγική για να υπολογίσουν κατ' εκτίμηση έργα με αριθμούς πολλών ψηφίων σε ποσοστό 64%, ενώ την Αντιστάθμιση σε ποσοστό μόνο 2%.

Παρόλα αυτά οι μελέτες έδειξαν ότι τα άτομα γνωρίζουν και χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, ιδιαίτερα μάλιστα οι πιο έμπειροι εκτιμητές (Siegler & Booth, 2005). Οι Dowker et al. (1996) εξέτασαν τέσσερις ομάδες ενηλίκων (μαθηματικούς, λογιστές, φοιτητές ψυχολογίας και φοιτητές Αγγλικής φιλολογίας) σε έργα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Εντόπισαν ότι οι στρατηγικές κάθε ομάδας ήταν εξαιρετικά διαφορετικές. Για παράδειγμα, οι 176 συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν 27 διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση του προβλήματος 4.645 : 18. Σε ολόκληρο το σύνολο προβλημάτων οι εξεταζόμενοι σε κάθε ομάδα χρησιμοποίησαν κατά μέσο όρο περισσότερες από 5 στρατηγικές ο καθένας. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, όταν τα ίδια προβλήματα παρουσιάστηκαν σε κάποιους από αυτούς μετά από μερικούς μήνες, οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν στο 46% των προβλημάτων μια διαφορετική στρατηγική από την αρχική τους επιλογή και ομοίως οι φοιτητές ψυχολογίας στο 37% αυτών.

Σε έρευνα των LeFevre et al. (1993) διαπιστώθηκε ότι η δεξιότητα εκτίμησης επηρεάζεται από την ηλικία του εκτιμητή. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης συχνότερα απ' ότι αυτή της μεταγενέστερης αντιστάθμισης, ενώ οι ενήλικες έκαναν το αντίστροφο. Παρόμοια συμπεριφορά είχαν και οι μαθητές της 6^{ης} τάξης σε σχέση με εκείνους της 8^{ης}. Ακόμη, διαπιστώθηκε ότι με το πέρασμα των χρόνων το άτομο αποκτά μεγαλύτερο ρεπερτόριο στρατηγικών, στοιχείο που δείχνει να σχετίζεται θετικά με την αποτελεσματικότητα στην υπολογιστική εκτίμηση (Siegler & Booth, 2005). Ακόμη έναν παράγοντα που συσχετίζεται με την εκτίμηση αποτελεί το γνωστικό υπόβαθρο, όπως έγινε φανερό στην έρευνα των τεσσάρων ομάδων ενηλίκων με διαφορετικό γνωστικό υπόβαθρο (Dowker et al., 1996), ενώ σύμφωνα με τους Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos (2014) τέτοιους παράγοντες συνιστούν επίσης το είδος και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, όπως το μέγεθος των αριθμών (διψήφιοι, τριψήφιοι κ.α.) και το είδος τους (ακέραιοι, δεκαδικοί, κλάσματα κλπ.). Τέλος, ο Goodman (1991) παρατήρησε ότι η απόδοση των υποκειμένων είναι καλύτερη όταν το πρόβλημα δίνεται εντός πλαισίου και όχι ως απλή αριθμητική πράξη. Σύμφωνος στη διαπίστωση αυτή ο Gliner (1991) τόνισε πως οι εκπαιδευτικοί πρέπει να βοηθούν τους μαθητές τους να χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό τα Μαθηματικά στην καθημερινότητά τους.

1.1.6 Ευελιξία

Για να φτάσει κανείς στη λύση ενός προβλήματος, συνήθως υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι. Έτσι, σε πολλά αριθμητικά προβλήματα απάντηση μπορεί να δοθεί από ένα πλήθος στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης ενώ, αντίθετα, υπάρχουν στρατηγικές που δεν «ταιριάζουν» σε κάποια από αυτά. Είναι ευνόητο πως η επιλογή στρατηγικής διαφέρει από άτομο σε άτομο. Ο λύτης επιλέγει για την επίλυση ενός ζητήματος τη στρατηγική που θα τον διευκολύνει, για παράδειγμα επισημαίνοντας σχέσεις μεταξύ των δεδομένων, ώστε να τον οδηγήσει σωστά σε ένα κατ' εκτίμηση αποτέλεσμα.

Κατά τους Lemonidis & Likidis (2019) η ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί ένα άτομο είναι σημαντικός παράγοντας που καθορίζει την ποιότητα της υπολογιστικής εκτίμησης και την αίσθηση του αριθμού. Τα άτομα που θεωρούνται επιτυχημένα στην υπολογιστική εκτίμηση χαρακτηρίζονται συνήθως ως ευέλικτα και γεμάτα αυτοπεποίθηση, είναι ανεκτικά ως προς τα λάθη και αναζητούν τη λογική του αποτελέσματος (Sowder, 1984). Ο Threlfall (2000) ορίζει την ικανότητα του ατόμου να λύσει το πρόβλημα με τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών που ταιριάζουν σε αυτό ως ευελιξία, ενώ ο Λεμονίδης (2020) ως *ευελιξία (flexibility)* αναφέρει τη δυνατότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει. Αυτόν τον ορισμό θα ενστερνιστούμε κι εμείς σε αυτή τη μελέτη.

1.1.7 Προσαρμοστικότητα

Αν και πολλές μελέτες έχουν αναδείξει την ποικιλία των στρατηγικών μαθητών (Lemaire, 2000; Reys et al., 1991b) και ενηλίκων (Dowker et al., 1996; Tsao & Pan, 2011) στην υπολογιστική εκτίμηση, ένα μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών δεν συνεπάγεται πάντα και επιτυχημένες εκτιμήσεις. Για τον De Castro (2002) ένας καλός εκτιμητής δεν πρέπει να είναι μόνο ευέλικτος, αλλά και ικανός να επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική για το πρόβλημα εκτίμησης, καθώς και να αξιολογήσει το αποτέλεσμα εξετάζοντας αν είναι εύλογο.

Για να εξετάσουμε αν δύο στρατηγικές είναι εξίσου αποτελεσματικές, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε όχι μόνο πόσο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα βρίσκονται οι απαντήσεις που δίνουν, αλλά και πόσο γρήγορη ήταν η κάθε στρατηγική (Lemaire, 2000). Για παράδειγμα, ενδέχεται να υπάρχουν δύο στρατηγικές που αποδίδουν εξίσου καλά ως προς την ακρίβεια, αλλά εξακολουθούν να διαφέρουν ως προς την αποτελεσματικότητα, καθώς η μια αποφέρει απάντηση δύο φορές πιο γρήγορα απ' ότι η άλλη. Ως εκ τούτου, για να θεωρηθεί μία υπολογιστική στρατηγική αποτελεσματική ως προς ένα αριθμητικό πρόβλημα, θα πρέπει αυτή να διευκολύνει τον λύτη, ώστε να τον οδηγήσει γρήγορα και έγκυρα στο αποτέλεσμα (Threlfall, 2000). Η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί την καταλληλότερη στρατηγική που γνωρίζει, με σκοπό να δοθεί μια γρήγορη και σωστή απάντηση ονομάζεται *προσαρμοστικότητα (adaptivity)* (Lemaire, 2000; Λεμονίδης, 2020).

Κατά τους Siegler & Booth (2005) οι άνθρωποι επιλέγουν στρατηγικές και αναπαραστάσεις προσαρμοστικά, δηλαδή προσαρμόζουν τις επιλογές τους στα χαρακτηριστικά κάθε προβλήματος με τρόπους που παράγουν πιο γρήγορα και περισσότερο ακριβή αποτελέσματα απ' ό,τι θα μπορούσαν να παραχθούν επιλέγοντας τυχαία μεταξύ όλων των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που γνωρίζουν. Στην υπολογιστική εκτίμηση η προσαρμοστικότητα του ατόμου και η αξιολόγηση του αποτελέσματος αποτελούν μέσα ώστε να ελέγξει το άτομο τον ίδιο του τον εαυτό, διαδικασία που συνιστά μεταγνωστική ικανότητα κατά τον De Castro (2002).

Βέβαια, στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι όροι ευελιξία και προσαρμοστικότητα δεν παρουσιάζονται πάντα διαχωρισμένοι στη βιβλιογραφία (Selter, 2009). Ορισμένοι ερευνητές θεωρούν τις παραπάνω έννοιες συνώνυμες ή άλλοι αλληλένδετες. Για παράδειγμα, ο Rezat (2011) αναφέρει ότι «*η προσαρμοστικότητα σημαίνει ευελιξία*» αφού για να χρησιμοποιήσεις την κατάλληλη στρατηγική πρέπει προηγουμένως να διαθέτεις ένα ρεπερτόριο στρατηγικών, ενώ οι Verschaffel et al. (2009) χαρακτηρίζουν την ευελιξία ως συνέπεια της «*λογικής*» επιλογής στρατηγικών ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που τίθενται για επίλυση κι έτσι προτείνουν ως πιο λειτουργικό όρο την «*προσαρμοστική-ευέλικτη*» επιλογή μιας στρατηγικής, εννοώντας τη συνειδητή ή ασυνείδητη επιλογή και χρήση της πλέον κατάλληλης στρατηγικής λύσης σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση ή πρόβλημα, για ένα δεδομένο άτομο, σε ένα δεδομένο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Στην παρούσα έρευνα οι δύο όροι διαχωρίζονται και μελετώνται ξεχωριστά.

1.2 Η Εκτίμηση στα Προγράμματα Σπουδών

Η εκτίμηση μιας σωστής απάντησης είναι απαραίτητη δεξιότητα στη σύγχρονη κοινωνία, καθώς οι άνθρωποι σήμερα συχνά απαιτείται να λαμβάνουν έγκυρες αποφάσεις σε σύντομο χρονικό διάστημα, να κάνουν γρήγορους υπολογισμούς χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού, για να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικά με τον χρόνο, τη χωρητικότητα, την ποσότητα κ.α. ή να αποφασίζουν για την ορθότητα των αποτελεσμάτων που παράγει μια αριθμομηχανή ή ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής. Μάλιστα, σύμφωνα με έρευνα των Northcote & McIntosh (1999) η υπολογιστική εκτίμηση χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο είδος υπολογισμού στην καθημερινή ζωή. Επιπλέον, η ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης μπορεί να βοηθήσει το άτομο να αποφύγει μεταγενέστερες δυσκολίες σε ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα (Andrews et al., 2021), ενώ του δίνει και τη δυνατότητα να ελέγξει τον ίδιο του τον εαυτό *(μεταγνωστική ικανότητα)* (De Castro, 2002). Οι Andrews et al. (2021) παρατήρησαν ότι ορισμένοι μελετητές (π.χ. οι Sriraman & Knott (2009)) θεωρούν την εκτίμηση, μαζί με την έννοια της αναλογίας και την επίλυση προβλημάτων, έναν από τα πιο σημαντικά θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Και πράγματι, η σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να αναγνωρίζεται παγκοσμίως, μια και τα τελευταία χρόνια η διδασκαλία της συμπεριλαμβάνεται σε όλο και περισσότερα προγράμματα σπουδών. Καθώς τα Μαθηματικά δεν θεωρούνται πια ένα σύνολο κανόνων που πρέπει να εφαρμόζονται, αλλά μέσο που επιτρέπει στους ανθρώπους να κατανοούν και να χειρίζονται καλύτερα τους αριθμούς κάνοντας πιο σωστές μαθηματικές κρίσεις (Desli & Lioliou, 2020), η διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης θεωρείται ένας σημαντικός στόχος σε πολλά προγράμματα σπουδών Μαθηματικής Εκπαίδευσης, όπως σε αυτό της Αγγλίας (National Curriculum for England; Department for Education, 2013), της Ολλανδίας (Kerndoelen primair onderwijs; Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2006), της Ισπανίας (MEC, 1992), των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (Common Core State Standards Initiative, 2010; NCTM, 2000), της Ιαπωνίας (Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics, 2008), της Αυστραλίας (F-10 Curriculum; Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2015) και της Ελλάδας (Δ.Ε.Π.Π.Σ – Α.Π.Σ., 2003). Στη χώρα μας η υπολογιστική εκτίμηση συμπεριλήφθηκε στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών το 2003, ενώ εισήχθη στις αίθουσες διδασκαλίας το 2006, όταν εκδόθηκαν τα νέα σχολικά εγχειρίδια.

Ωστόσο, στην πλειοψηφία αυτών των προγραμμάτων, εκτός από αναφορές και μερικές ασκήσεις στα σχολικά εγχειρίδια, δεν υπάρχουν σημαντικές υποδείξεις διδασκαλίας για την υπολογιστική εκτίμηση και τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών, ώστε να αποκτήσουν σιγά σιγά ευχέρεια οι μαθητές. Το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών συστήνει για πρώτη φορά στους εκπαιδευτικούς να αφιερώσουν χρόνο στους νοερούς υπολογισμούς και στις προσεγγιστικές εκτιμήσεις σε σχέση με τους αριθμούς και τις πράξεις κατά την επίλυση προβλημάτων στην Ε’ Δημοτικού και έπειτα στην Στ’ τάξη, όπου προβλέπεται η διδασκαλία της στρογγυλοποίησης και η αναφορά στην έννοια της εκτίμησης και τον έλεγχο κατά την επίλυση προβλημάτων. Δυστυχώς, όμως, καμία άλλη αναφορά δεν γίνεται τόσο στις υπόλοιπες τάξεις του Δημοτικού, όσο και στο πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι Έλληνες εκπαιδευτικοί προσεγγίζουν το θέμα ανάλογα με την ιδιοσυγκρασία, τις γνώσεις και τη θέλησή τους.

Επιφανειακή είναι η συμπερίληψη της υπολογιστικής εκτίμησης και στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών αντικειμένων και των άλλων χωρών. Κατά τους Segovia & Castro (2009) οι μελέτες φανερώνουν πως η διδασκαλία της εκτίμησης είναι «*δοκιμαστική*», ενώ οι Reys et al. (1984) τη χαρακτηρίζουν ως «*επιφανειακή*» και «*περιορισμένη*». Στις Η.Π.Α. οι εκπαιδευτικοί σπάνια προωθούν την εκτίμηση στις τάξεις τους, λόγω αβεβαιότητας ως προς το *γιατί* αλλά και το *πώς* να τη διδάξουν (Andrews et al., 2021). O Edwards (1984) αναρωτιέται γιατί, αν και η εκτίμηση αναγνωρίζεται ευρέως από την επιστημονική κοινότητα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως ένα από τα πλέον πρακτικά και χρήσιμα θέματα των προγραμμάτων σπουδών, παραμένει το ίσως λιγότερο αποτελεσματικά διδασκόμενο. Σύμφωνα με τον ίδιο «*η διδασκαλία της φαίνεται να προχωρά λυπηρά αργά*». Στην προσπάθεια να δώσει απάντηση σε αυτόν τον προβληματισμό, συμπεραίνει ότι τέσσερις παράγοντες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο:

i. Η πολλαπλότητα των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση δεν βοηθά ώστε να αντιμετωπιστεί το θέμα απλά.
ii. Δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις στην εκτίμηση.
iii. Η αξιολόγησή της είναι πολύ δύσκολη.
iv. Οι μαθητές (ίσως και μερικοί εκπαιδευτικοί) τείνουν να θεωρούν την εκτίμηση ως «κατώτερη» ή «πιο τεμπέλικη» διαδικασία.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, η σπουδαιότητα της εκτίμησης και η αναγκαιότητα της διδασκαλία της είναι μεγάλη. Η ανάπτυξη της ικανότητάς της δεν επέρχεται πάντοτε ή σε μεγάλο βαθμό απλώς με το πέρασμα των χρόνων. Οι Case & Sowder (1990) τονίζουν ότι η υπολογιστική εκτίμηση δεν πρέπει να αφεθεί ως μια αδίδακτη ενότητα. Αντιθέτως, είναι σημαντικό να της δοθεί ιδιαίτερη σημασία. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την αξία της εκτίμησης, να μπορέσουν να τη συμπεριλάβουν σε καταστάσεις της καθημερινότητάς τους και να καθοδηγηθούν από τους εκπαιδευτικούς τους ως προς το πλήθος των στρατηγικών και την κατάλληλη χρήση αυτών. Είναι ανάγκη να ξεπεραστεί πια η πεποίθηση ότι υπάρχει μόνο μία σωστή απάντηση και μοναδικός δρόμος προς αυτήν (Sowder, 1984). Το γεγονός ότι η υπολογιστική εκτίμηση είναι μια διαδικασία πιο περίπλοκη από ότι αρχικά είχαν υποθέσει οι μαθηματικοί, δεν σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να αποφύγουν την επαφή τους με αυτήν σε μικρές τάξεις, αλλά το αντίθετο. Για παράδειγμα, η εύρεση αριθμών κοντά σε μια δεδομένη τιμή, η αναγνώριση ποιος ανάμεσα σε δύο αριθμούς είναι πιο κοντά σε έναν τρίτο ή το πότε ένα πρόβλημα δεν απαιτεί ακριβή απάντηση, είναι θέματα που αξίζουν περισσότερο εκπαιδευτικό χρόνο από ότι τους παραχωρείται τώρα. Σύμφωνα με τους Sowder & Wheeler (1989) οι μαθητές είναι έτοιμοι να ξεκινήσουν αυτό το θεμελιώδες έργο ακόμη και από την τρίτη τάξη του Δημοτικού.

1.3 Έρευνες στην υπολογιστική εκτίμηση

Αρκετές είναι οι έρευνες που έχουν προσπαθήσει να αντλήσουν στοιχεία για την υπολογιστική εκτίμηση. Οι ερευνητές εξέτασαν μαθητές διαφόρων σχολικών τάξεων (Sowder, 1984; Rubenstein, 1985; Sowder & Wheeler, 1989; Case & Sowder, 1990; Reys et al., 1991a, 1991b; Lemaire et al., 2000; Montague & Van Gardener, 2003; Bana & Dolma, 2004; Anestakis & Lemonidis, 2014; Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014; Lemonidis & Likidis, 2019), μελλοντικούς εκπαιδευτικούς (Bestgen, 1980; Levine, 1982; Gliner, 1991; Goodman, 1991; Lemonidis & Kaimakami, 2013; Anestakis & Desli, 2014), εκπαιδευτικούς εν ενεργεία (Dowker, 1992; Alajmi, 2009; Tsao & Pan, 2012; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014) αλλά και ενήλικες με διαφορετικό επαγγελματικό αντικείμενο (Dowker et al.,1996). Παρόλα αυτά υπάρχουν ακόμα ερωτήματα τα οποία πρέπει να μελετηθούν και να διευκρινιστούν. Παρακάτω, γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης των αποτελεσμάτων αυτών των ερευνών.

1.3.1 Έρευνες σε παιδιά

Οι Bana & Dolma (2004) εξέτασαν 77 μαθητές 7ης τάξης (τελευταίας πριν τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) τριών ετερογενών τμημάτων στη Δυτική Αυστραλία θέλοντας να συγκρίνουν την ικανότητα υπολογισμού με την ικανότητα εκτίμησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά ήταν πολύ καλύτερα στους ακριβείς υπολογισμούς απ' ότι στην εκτίμηση, πιθανόν διότι διαφορετικός χρόνος αφιερώνεται σε καθεμία από αυτές τις πτυχές μέσα στις μαθηματικές αίθουσες διδασκαλίας. Εκεί, οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται συνήθως ακολουθώντας κανόνες και όχι με ουσιαστικό τρόπο. Παρόμοιο με αυτό ήταν και το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν οι Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014), οι οποίοι μελέτησαν τις απαντήσεις 596 μαθητών Ε' και Στ' τάξης Ελληνικών Δημοτικών Σχολείων που δεν είχαν μεν λάβει συγκεκριμένη κατάρτιση σε σχέση με τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, αλλά είχαν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, αφού συμμετείχαν εθελοντικά στον 8ο διαγωνισμό «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής». Τα περισσότερα παιδιά έλυσαν τα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης πραγματοποιώντας ακριβείς υπολογισμούς. Φάνηκε ότι οι συμμετέχοντες δεν γνώριζαν ιδιαίτερες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, η πλειοψηφία αυτών ήταν προσκολλημένη στους γραπτούς αλγόριθμους, ενώ όσοι προσπάθησαν να κάνουν μια εκτίμηση χρησιμοποίησαν είτε στρατηγικές που είχαν καταφέρει να αναπτύξουν μόνοι τους είτε έκαναν λάθη, στοιχεία που φανερώνουν την χαμηλή ικανότητά τους σε αυτήν. Ακόμη, σε μεταγενέστερη έρευνα των Lemonidis & Likidis (2019), οι οποίοι μελέτησαν δύο ομάδες Ελλήνων μαθητών Ε' Δημοτικού ως προς τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης σε αριθμητικά προβλήματα, φάνηκε ότι τα παιδιά που είχαν λάβει μόνο παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας δεν ήταν ως επί το πλείστον σε θέση να κάνουν εκτιμήσεις. Δεν γνώριζαν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης κι έτσι χρησιμοποιούσαν κυρίως ακριβείς υπολογισμούς ή «μαντεψιές».

Στην τελευταία μελέτη, αν και η δεύτερη ομάδα, των μαθητών που παρακολούθησε διδακτική παρέμβαση πέντε εβδομάδων, σημείωσε αύξηση στο ρεπερτόριο των στρατηγικών που παρατηρήθηκε στο μεταγενέστερο τεστ, οι επιλογές τους στις στρατηγικές δεν ήταν υψηλού επιπέδου. Σχεδόν οι μισοί μαθητές χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, πιθανόν γιατί απαιτούνταν περισσότερος χρόνος εξάσκησης και αφομοίωσης των υπολοίπων. Την έλλειψη ποικιλίας στρατηγικών παρατήρησαν και οι Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014) στην έρευνά τους. Πέρα, όμως, από τους Έλληνες μαθητές, το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε και στη Γαλλία, όταν οι Lemaire et al. (2000)

διερεύνησαν τις απαντήσεις 23 μαθητών ηλικίας 10 ετών σε έργα πρόσθεσης τριψήφιων προσθετέων. Στην προσπάθεια να εξετάσουν ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν, παρόλο που εντόπισαν ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, διαπίστωσαν ότι η στρογγυλοποίηση (με ή χωρίς τη χρήση του κανόνα) ήταν η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στρατηγική, με την περικοπή και την αντιστάθμιση να έπονται. Το αποτέλεσμα αυτό διαπιστώθηκε ακόμη κι από ενήλικες μαθητές σε σχολείο δεύτερης ευκαιρίας (Anestakis & Lemonidis, 2014), οδηγώντας τους ερευνητές στο συμπέρασμα ότι αν και οι ενήλικες καταφέρνουν να εκτιμήσουν, υπάρχει ακόμη σημαντικό περιθώριο βελτίωσης. Σε αντίθεση με τα παραπάνω ευρήματα ήρθε η μελέτη των Reys et al. (1991b), όταν εκείνοι μελέτησαν 177 μαθητές 8^{ης} τάξης από δώδεκα διαφορετικά σχολεία του Μεξικού. Το δείγμα των μαθητών αντιπροσώπευε ομάδες διαφόρων κοινωνικών και οικονομικών υποβάθρων και στα ευρήματα φάνηκε ότι η στρογγυλοποίηση ήταν μια στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε περιστασιακά. Η πιο κοινή στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε ήταν αυτή του εμπρόσθιου άκρου, ενώ συνηθισμένη ήταν και η στρατηγική των ειδικών αριθμών, κυρίως σε προβλήματα με ποσοστά.

Οκτώ μήνες νωρίτερα, οι Reys et al. (1991a) επέλεξαν να ερευνήσουν ένα ιδιαίτερο σύνολο 466 μαθητών 5^{ης} και 8^{ης} τάξης στην Ιαπωνία, καθώς στη χώρα αυτή οι νοεροί υπολογισμοί είναι περισσότερο συνδεδεμένοι με τη μαθησιακή διαδικασία. Οι Ιάπωνες, επηρεασμένοι από τους Κινέζους εμπόρους, ξεκίνησαν να κάνουν υπολογισμούς με τη βοήθεια του άβακα πολλούς αιώνες πριν. Η χρήση του εισήχθη και στη μαθησιακή διαδικασία και σε συνδυασμό με τους νοερούς υπολογισμούς και τους γραπτούς αλγορίθμους αποτελούσε μέχρι τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο αναπόσπαστο κομμάτι της ιαπωνικής αριθμητικής, ώσπου οι απόψεις του δυτικού πολιτισμού άρχισαν να επηρεάζουν αρνητικά την προσοχή που λάμβανε. Και σε αυτό το σύνολο μαθητών, λοιπόν, οι υπολογισμοί με χαρτί και μολύβι εντοπίστηκαν σε υψηλότερα ποσοστά στις απαντήσεις αριθμητικών προβλημάτων. Δεδομένου ότι οι Ιάπωνες μαθητές κατέχουν πολύ υψηλές θέσεις σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, οι ερευνητές συμπέραναν ότι οι δεξιότητες εκτίμησης δεν εξελίσσονται αναγκαστικά από την ανάπτυξη παραδοσιακών γραπτών υπολογισμών. Αντίθετα, η συνεχής ενασχόληση με αυτούς είναι πιθανόν να εμποδίσει την ανάπτυξη της ικανότητας εκτίμησης, κίνδυνος που επισημάνθηκε και από τους Reys et al. (1991b). Και στις δύο έρευνες οι μελετητές επεσήμαναν ότι, καθώς οι μαθητές δεν αναπτύσσουν μόνοι τους στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης σε ικανοποιητικό επίπεδο και ούτε αυτές αναπτύσσονται παράλληλα με την πρόοδο στους γραπτούς αλγόριθμους, πρέπει να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης. Η εκτίμηση αποτελεί μια διαδικασία και όχι απλώς ένα «θέμα» των Μαθηματικών. Ως τέτοια πρέπει να αντιμετωπίζεται, ενσωματώνοντάς την σε κάθε μαθησιακή διαδικασία, κάνοντας τα Μαθηματικά ουσιαστικά και χρήσιμα στην καθημερινή ζωή (Bana & Dolma, 2004). Πέρα, όμως, από τις ουσιώδεις παρεμβάσεις στα προγράμματα σπουδών, σημαντική είναι και η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, οι οποίοι είναι σημαντικό να εξοικειωθούν με τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης, να τις ενσωματώνουν στη διδασκαλία τους, να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δυνατότητα ύπαρξης πολλών διαφορετικών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα και να τους κάνουν ικανούς να επιλέγουν την καταλληλότερη σε κάθε περίσταση στρατηγική (Reys et al., 1991b).

Το 1984 η Sowder εξέτασε 26 μαθητές Γυμνασίου ποικίλων γνωστικών υποβάθρων, οι οποίοι έδειξαν να είναι περισσότερο άνετοι με έναν άμεσο υπολογισμό παρά με την εκτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, καθώς είχαν διδαχθεί να παράγουν απαντήσεις μέσω γραπτών αλγορίθμων, είχαν την ανάγκη να λάβουν μία μόνο σωστή απάντηση, ενώ μερικοί, μη γνωρίζοντας πώς να εκτιμήσουν, μάντευαν το αποτέλεσμα. Όμοια συμπεριφορά συνάντησαν και οι Sowder & Wheeler (1989). Παρουσιάζοντας σε 48 μαθητές 3^{ης}, 5^{ης}, 7^{ης} και 9^{ης} τάξης (δώδεκα από καθεμία) προβλήματα με υποθετικές λύσεις άλλων μαθητών, λίγοι ήταν εκείνοι που μπορούσαν να δεχτούν πολλαπλές αριθμητικές τιμές ως έγκυρα αποτελέσματα για το ίδιο πρόβλημα εκτίμησης. Οι ερευνητές τόνισαν ότι «*η κατανόηση ότι στη διαδικασία της εκτίμησης δεν υπάρχει μόνο μία σωστή απάντηση είναι ένα κρίσιμο στοιχείο της υπολογιστικής ικανότητας εκτίμησης*».

Παρά το γεγονός αυτό, όμως, οι Sowder & Wheeler (1989) παρατήρησαν ότι η ηλικία τους εκτιμητή είναι ένας παράγοντας που σχετίζεται θετικά με την ικανότητα εκτίμησης. Στα ευρήματά τους φάνηκε ότι η ανάγκη αντιστάθμισης των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης ήταν μεγαλύτερη όσο ανέβαινε το επίπεδο της τάξης. Κατά τους Case & Sowder (1990) η πάροδος των χρόνων συντελεί στην ανάπτυξη της λειτουργικής μνήμης η οποία επιτρέπει στα παιδιά να διατηρούν έναν αυξανόμενο αριθμό αναπαραστάσεων, γεγονός που συνδέθηκε με επιτυχημένες εκτιμήσεις. Η πολυπλοκότητα της διαδικασίας της εκτίμησης δεν πρέπει να λειτουργεί αποτρεπτικά, τονίζουν οι Sowder & Wheeler (1989), αλλά, αντιθέτως, ενθαρρυντικά, γι' αυτό και είναι καλό η διδασκαλία της να ξεκινήσει με απλά βήματα σε νεαρή ηλικία. Σε αυτή την πρόταση οδηγήθηκαν και οι Montague & Van Gardener (2003), μέσα από ένα διαφορετικό δείγμα μελέτης. Οι ανωτέρω ερευνητές εξέτασαν μαθητές διαφορετικών μαθησιακών ικανοτήτων (μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, μαθητές μέτριων επιδόσεων και μαθητές με πολύ υψηλό νοητικό επίπεδο) και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές ανεξαρτήτως επιπέδου ικανοτήτων πρέπει να βελτιώσουν τις ικανότητές τους στην υπολογιστική εκτίμηση και μάλιστα η ανάγκη διδασκαλίας της υπογραμμίζεται να ξεκινήσει από μικρή ηλικία. Αν και υπήρχαν διαφορές μεταξύ των ομάδων των συμμετεχόντων, στο σύνολό τους δεν φάνηκε να έχουν ανεπτυγμένη κατανόηση της εκτίμησης, γεγονός που οδήγησε τους μελετητές να υποστηρίξουν ότι ένας από τους πιο σημαντικούς εκπαιδευτικούς στόχους πρέπει να είναι η ανάπτυξη αριθμητικά εγγράμματων ανθρώπων, οι οποίοι δεν θα αισθάνονται φόβο για τα Μαθηματικά, αλλά θα είναι σε θέση να ασχοληθούν με αυτοπεποίθηση μαζί τους.

Ακόμη ένας παράγοντας που βρέθηκε να σχετίζεται με την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να είναι τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Η Rubenstein (1985) παρατήρησε σε σύνολο 309 μαθητών $8^{ης}$ τάξης ότι η εκτίμηση σε προβλήματα με δεκαδικά αριθμητικά ψηφία ήταν πιο δύσκολη απ' ότι σε εκείνα που είχαν ακέραια, οι Anestakis & Lemonidis (2014) ότι διαπράχθηκαν περισσότερα λάθη από τους μαθητές σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης απ' ότι σε αυτά της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και οι Bana & Dolma (2004) ότι οι μαθητές είχαν σημαντική δυσκολία ακόμη και με τα πιο απλά κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς. Από την άλλη, οι Lemaire et al. (2000), οι οποίοι παρατήρησαν ότι τα παιδιά είναι προσαρμοστικά στην εκτίμησή τους, θεώρησαν ότι η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

Πολλές μελέτες ανέδειξαν και τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης και της αίσθησης του αριθμού. Η Sowder (1984) παρατήρησε ότι οι συμμετέχοντες που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις στα αριθμητικά προβλήματα φάνηκε να έχουν ανεπτυγμένη αίσθηση του αριθμού. Η σημασία της εκτίμησης έγκειται στην ικανότητά της να καταστεί τον αριθμό έτσι ώστε να έχει νόημα για τους μαθητές (Bana & Dolma, 2004). Οι καλύτεροι εκτιμητές κατά τους Anestakis & Lemonidis (2014) είχαν ισχυρό γνωστικό υπόβαθρο και σύμφωνα με τους Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014) καλύτερη κατανόηση των προβλημάτων. Οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν υπολογιστική εκτίμηση μπορούσαν να αλλάζουν μεθόδους (ευελιξία), επέλεγαν με βάση τα χαρακτηριστικά του προβλήματος (προσαρμοστικότητα), έλεγχαν με τη λογική τα αποτελέσματά τους (μεταγνωστική ικανότητα) και έλυνα με μεγαλύτερη επιτυχία τα προβλήματα.

1.3.2 Έρευνες σε ενήλικες

Πολλά από τα παραπάνω ευρήματα μελετών που περιλάμβαναν στο δείγμα τους μαθητές εντοπίστηκαν και σε μελέτες που εξέτασαν ενήλικες. Πιο συγκεκριμένα, ο Levine (1982) έπειτα από τη διερεύνηση των στρατηγικών υπολογισμού 89 Αμερικανών φοιτητών 3ου έτους κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι συμμετέχοντες δυσκολεύονταν αρκετά με την υπολογιστική εκτίμηση. Η μέση επίδοση των απαντήσεών τους ήταν 25,9 στα 60, με τη στρογγυλοποίηση να καταλαμβάνει την πρώτη θέση στις επιλογές τους και τη στρατηγική νοερού υπολογισμού με αλγοριθμικό τρόπο τη δεύτερη. Ο ίδιος δικαιολόγησε τη δημοτικότητα της τελευταίας αναφερόμενος στην εξοικείωση των σπουδαστών στη χρήση κανόνων, αλγορίθμων και ακριβών υπολογισμών με χαρτί και μολύβι επί σειρά ετών. Όμοια ήταν και τα αποτελέσματα της έρευνας του Goodman (1991), ο οποίος μελέτησε την επάρκεια στην υπολογιστική εκτίμηση 46 φοιτητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Και σε αυτήν οι φοιτητές παρουσίασαν χαμηλή απόδοση σε υπολογιστικές εργασίες εκτίμησης (μέσο όρο βαθμολογίας 37 στα 72). Οι Lemonidis & Kaimakami (2013) εξέτασαν μέσω προσωπικών συνεντεύξεων 50 Έλληνες τεταρτοετείς φοιτητές Δημοτικής εκπαίδευσης και διαπίστωσαν ότι ένα μεγάλο ποσοστό αυτών δεν πραγματοποίησαν υπολογιστική εκτίμηση, αλλά, αντίθετα, προσπάθησαν να εκτελέσουν ακριβείς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τους γραπτούς αλγόριθμους νοερά. Ακόμη, η έρευνα έδειξε ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν τις στρατηγικές του μέσου όρου και των συμβατών αριθμών και έχουν περιορισμένη ικανότητα στους νοερούς υπολογισμούς. Έναν χρόνο αργότερα τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν και από άλλη μελέτη που πραγματοποιήθηκε σε δείγμα 80 εν ενεργεία εκπαιδευτικών. Οι Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos (2014) συμπέραναν μέσω προσωπικών συνεντεύξεων ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν υπολογιστική εκτίμηση κι ότι έχουν έλλειψη ευελιξίας στις στρατηγικές. Συγκεκριμένα, φάνηκε να χρησιμοποιούν υπερβολικά τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, ενώ δεν γνώριζαν άλλες, όπως αυτή του εμπρόσθιου άκρου ή των συμβατών αριθμών. Παρόλα αυτά, στη μελέτη τους εντυπωσιακό ήταν το ποσοστό των ατόμων που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική των ειδικών αριθμών (περίπου 70%), την οποία πιθανότατα είχαν αναπτύξει μόνοι τους, καθώς δεν είχαν παρακολουθήσει προηγούμενα διδασκαλία για τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, ούτε και αυτές αναφέρονται στα προγράμματα ή τα βιβλία.

Στο Κουβέιτ ο Alajmi (2009) πήρε συνέντευξη από 59 καθηγητές Μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προκειμένου να διερευνήσει την κατανόησή τους για την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης και τη σημασία της στα προγράμματα σπουδών. Και σε αυτό το δείγμα τα ευρήματα φανέρωσαν ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των εκπαιδευτικών (60%) πραγματοποιεί υπολογιστικές εκτιμήσεις με χρήση της στρογγυλοποίησης, ενώ εντυπωσιακό ήταν το αποτέλεσμα ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ατόμων είχαν περιορισμένη κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της. Ειδικότερα, μόνο το 23% των εκπαιδευτικών τόνισε τα οφέλη της εκτίμησης στην καθημερινή ζωή, ενώ πολλοί ήταν εκείνοι που διαχώρισαν τα «Μαθηματικά του δρόμου» από τα «Μαθηματικά του σχολείου», αιτιολογώντας έτσι την άποψή τους ότι στα σχολικά Μαθηματικά απαραίτητες είναι κυρίως οι ακριβείς απαντήσεις κι η υπολογιστική εκτίμηση ίσως προκαλέσει προβλήματα στην ανάπτυξη των γραπτών αλγορίθμων. Στο δείγμα της μελέτης υπήρξε και ένα ποσοστό καθηγητών που υποστήριξε ότι δεν υπάρχει ανάγκη ενσωμάτωσης της υπολογιστικής εκτίμησης στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, καθώς η στρογγυλοποίηση περιλαμβάνεται ήδη. Για αυτούς τους εκπαιδευτικούς οι δύο έννοιες ήταν ισοδύναμες.

Βέβαια, σε αντίθεση με τα ευρήματα του Alajmi (2009), η πλειοψηφία των 113 φοιτητών 3^{ου} και 4^{ου} έτους του παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης που μελέτησαν οι Anestakis & Desli (2014) δήλωσε ότι θεωρεί την υπολογιστική εκτίμηση πολύ σημαντική τόσο για την καθημερινή ζωή όσο και για το σχολείο και εξέφρασε την επιθυμία να τη συνδέσει με τις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών. Επίσης, αντίθετα με το μικρό ρεπερτόριο στρατηγικών που φάνηκε να έχουν οι Έλληνες υποψήφιοι και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί, στη μελέτη των Tsao & Pan (2012) οι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να εξηγήσουν τη σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης, αλλά και να χρησιμοποιήσουν τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς για να λύσουν σχετικά προβλήματα. Χρησιμοποίησαν ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, όπως τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου, τη στρογγυλοποίηση, τη στρατηγική των συμβατών αριθμών, τη στρατηγική των ειδικών αριθμών και την επιμεριστικότητα. Το εύρημα αυτό είναι σύμφωνο με εκείνα δύο προηγούμενων μελετών της Dowker. Η ίδια (Dowker, 1992) δίνοντας έργα υπολογιστικής εκτίμησης που περιλαμβάναν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης σε 44 καθηγητές Μαθηματικών συμπέρανε ότι οι μαθηματικοί ήταν καλοί εκτιμητές με μεγάλη ποικιλία στις στρατηγικές (έως και 23 για ένα πρόβλημα). Εντυπωσιακό δεν ήταν μόνο το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποίησε κάθε μαθηματικός, αλλά και το γεγονός ότι αυτοί που επανεξετάστηκαν μετά από μερικούς μήνες χρησιμοποίησαν κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό διαφορετική τεχνική από την αρχική τους σε κάθε πρόβλημα. Ομοίως, λίγα χρόνια αργότερα, οι Dowker et al.

(1996) θέλοντας να εξετάσουν και ομάδες ενηλίκων που δεν είχαν κάποιο μαθηματικό υπόβαθρο στην επαγγελματική τους ζωή, αξιολόγησαν τις απαντήσεις 44 μαθηματικών, 44 λογιστών, 44 φοιτητών ψυχολογίας και 44 φοιτητών Αγγλικής φιλολογίας. Παρατήρησαν ότι αν και οι μαθηματικοί ήταν οι πιο ακριβείς εκτιμητές από όλες τις ομάδες (με τους φοιτητές Αγγλικής φιλολογίας στην τελευταία θέση και τους λογιστές και φοιτητές ψυχολογίας να λαμβάνουν ενδιάμεσες βαθμολογίες), όλες οι ομάδες παρουσίασαν μια εντυπωσιακά ευέλικτη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών.

Επιπλέον, όπως και στις μελέτες που συμμετείχαν μαθητές, έτσι και σε έρευνες ενηλίκων τα χαρακτηριστικά του προβλήματος ήταν μια παράμετρος που έτεινε να καθορίζει τα αποτελέσματα. Το επίπεδο δυσκολίας στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης επηρεάζεται από *(i) το είδος της πράξης* (οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία απ' ότι οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις) (Bestgen, 1980; Lemonidis & Kaimakami, 2013), *(ii) το είδος των αριθμών που περιλαμβάνουν οι πράξεις* (οι πράξεις με ακέραιους είναι πιο εύκολες απ' ότι οι πράξεις με δεκαδικούς κι αυτές ευκολότερες απ' ότι εκείνες που εμπεριέχουν κλάσματα και ποσοστά) (Goodman, 1991) και *(iii) τη μορφή του προβλήματος* (η απόδοση ήταν καλύτερη σε έργα που παρουσιάστηκαν σε μορφή λεκτικού προβλήματος παρά μόνο ως αριθμητική πράξη) (Lemonidis & Kaimakami, 2013; Gliner, 1991; Goodman, 1991).

Κατά τον Gliner (1991) παρουσιάζοντας τις πράξεις μέσα από καθημερινές καταστάσεις, όπως είναι για παράδειγμα οι χρηματικές συναλλαγές, η πιθανότητα πετυχημένης εκτίμησης μπορεί να αυξηθεί και η αίσθηση του αριθμού να αναπτυχθεί. Και αντίστροφα, τα άτομα με ανεπτυγμένη μαθηματική ικανότητα τείνουν να αποδίδουν σημαντικά καλύτερα σε εργασίες εκτίμησης απ' ότι άτομα χαμηλότερων επιδόσεων (Goodman, 1991). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι εντοπίζεται μια αλληλεξάρτηση μεταξύ της υπολογιστικής εκτίμησης και της αίσθησης του αριθμού. Σύμφωνα με τους Ansetakis & Desli (2014) οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί εστιάζουν στην πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης και τη συσχετίζουν με έναν προσαρμοστικό και ευέλικτο τρόπο σκέψης που οφείλει να διδάσκεται στα μαθηματικά περιβάλλοντα ως μέσο απελευθέρωσης από τους αλγόριθμους και τη συνεχή τήρηση αριθμητικών κανόνων, ενώ κατά τους Dowker et al. (1996) η καλή μαθηματική γνώση και ικανότητα συνεπάγεται ποικιλία στρατηγικών (ευελιξία) και κυρίως κατάλληλων (προσαρμοστικότητα). Για τη Dowker (1992) οι καλοί εκτιμητές συχνά επινοούν δικές τους τεχνικές που δεν βασίζονται στα Μαθηματικά του σχολείου, ενώ, τέλος, ο Goodman (1991) παρατήρησε ότι για την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης πρέπει να τονίζονται οι αριθμητικές ιδιότητες και οι σχέσεις, όπως η λειτουργία των δεκάδων, η σύγκριση των αριθμών κ.α.

Καταλήγοντας, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι δεν είναι πιθανό το άτομο να αναπτύξει μεγάλη ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης από μόνο του ή να τις κατοχυρώσει στην πορεία της ζωής του (Goodman, 1991). Οι συμπεριφορές και οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης επιδέχονται σημαντική βελτίωση (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014) κι έτσι, για να εισαχθεί στα προγράμματα σπουδών, είναι απαραίτητο πρώτα οι εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν το νόημα και την αξία της στην εκπαίδευση (Alajmi, 2009) κι έπειτα να διδαχθούν ρητά τις δεξιότητες και τεχνικές των κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Goodman, 1991). Η διδακτική παρέμβαση θα βελτιώσει την αίσθηση του αριθμού και θα βοηθήσει το άτομο να σκέφτεται πιο ευέλικτα στους νοερούς υπολογισμούς (Whitacre, 2015).

1.3.3 Έρευνες σε παιδιά και ενήλικες

Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι έρευνες που εξέτασαν με κοινά τεστ τόσο μαθητές διαφόρων ηλικιών όσο και ενήλικες, διότι έδωσαν σημαντικά στοιχεία για την εξέλιξη της ανάπτυξης της υπολογιστικής εκτίμησης με την πάροδο των χρόνων. Οι LeFevre et al. (1993) έδωσαν έργα πολλαπλασιασμού με παράγοντες που διέφεραν στον αριθμό ψηφίων σε μαθητές 4ης, 6ης και 8ης τάξης και σε ενήλικες. Φάνηκε ότι η ικανότητα εκτίμησης βελτιώθηκε με την αύξηση της ηλικίας, με τους ενήλικες να παράγουν ακριβέστερες εκτιμήσεις απ' ότι τα παιδιά. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Lemaire & Lecacheur (2002) εξετάζοντας 72 ενήλικες και 144 μαθητές 4ης και 6ης τάξης. Δίχως να έχουν διδαχθεί προηγουμένως τις στρατηγικές εκτίμησης έγινε φανερό ότι η χρήση και η εκτέλεσή τους επηρεάστηκε από την ηλικία των συμμετεχόντων, εύρημα που επιβεβαίωσε και η πρόσφατη μελέτη των Desli & Lioliou (2020) στην οποία συμμετείχαν 37 μαθητές 6ης τάξης και 35 ενήλικες.

Η ηλικία φαίνεται να παίζει ρόλο και σε άλλες παραμέτρους. Σύμφωνα με τους LeFevre et al. (1993) οι ενήλικες έδειξαν μεγαλύτερη κατανόηση στην αρχή της εγγύτητας, παρήγαγαν λύσεις ακριβούς απάντησης στα απλά προβλήματα, ενώ στα πιο δύσκολα έκαναν εκτιμήσεις πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα σε σχέση με τα παιδιά (έπειτα από αντιστάθμιση). Κατά τους Lemaire & Lecacheur (2002) η ηλικία σχετίζεται και με την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής, καθώς τα παιδιά ήταν λιγότερο προσαρμοστικά απ' ότι οι ενήλικες. Οι ίδιοι αιτιολόγησαν το αποτέλεσμα αυτό επισημαίνοντας ότι όσο μεγαλώνει το άτομο τόσο πιο εξοικειωμένο είναι με την αριθμητική. Οι Desli & Lioliou (2020) παρατήρησαν μια σημαντική θετική συσχέτιση μεταξύ ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης και ικανότητας επίλυσης προβλημάτων: οι συμμετέχοντες που είχαν μεγάλη επιτυχία στην υπολογιστική εκτίμηση έτειναν να επιδεικνύουν υψηλά ποσοστά επιτυχίας και στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, οι ενήλικες παρουσίασαν μεγαλύτερη ευελιξία στη χρήση των στρατηγικών σε σύγκριση με τα παιδιά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι όσο μεγαλώνει το άτομο, τόσο αναπτύσσει καλύτερη αίσθηση των αριθμών και επομένως δείχνει βελτίωση και στην ικανότητα εκτίμησης. Σύμφωνα με τους Lemaire & Lecacheur (2002) βελτιωμένος ήταν και ο χρόνος απόκρισης στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Επιπλέον, ένα ακόμη κοινό εύρημα των παραπάνω ερευνών ήταν ότι σε όλες τις ηλικιακές ομάδες η πιο κοινή στρατηγική ήταν η στρογγυλοποίηση. Επίσης, οι Lemaire & Lecacheur (2002) επιβεβαίωσαν ότι τα χαρακτηριστικά του προβλήματος είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει την ικανότητα εκτίμησης. Σε αυτό συμφώνησαν και οι Desli & Lioliou (2020) παρατηρώντας π.χ. ότι τα προβλήματα γεωμετρίας δυσκόλεψαν περισσότερο από τα υπόλοιπα και τους μαθητές και τους ενήλικες.

1.4 Προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης με ποσοστά

Το σύμβολο %, της φράσης «στα εκατό» (ή «τοις εκατό» όπως έχει καθιερωθεί στην καθομιλουμένη στα Ελληνικά), είναι κοινό στις δυτικές κοινωνίες. Έτσι, όντας πολιτιστικά ενσωματωμένα, τα ποσοστά συνιστούν ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο των Μαθηματικών, καθώς σχετίζονται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο (Dole, 2004). Χρησιμοποιούνται σε καθημερινή βάση για να διαφημίσουν τις αλλαγές στις τιμές των προϊόντων, περιγράφουν τις προτιμήσεις ψήφων, τον Φ.Π.Α., τα τραπεζικά επιτόκια, τα συναντάμε στις εκπτώσεις, τα κέρδη, τις απώλειες, τις αποταμιεύσεις, τις αυξήσεις και τα στατιστικά στοιχεία και αναγράφονται στις διαφημίσεις, τα καταστήματα, τις εφημερίδες, τα περιοδικά και τα μέσα ενημέρωσης. Βρίσκονται κυριολεκτικά παντού γύρω μας.

Στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα είναι γνωστό πως τα ποσοστά συνιστούν ένα δύσκολο αντικείμενο, τόσο ως προς τη διδασκαλία όσο και ως προς την εκμάθησή τους. Σύμφωνα με τον Dole (2004) η δυσκολία τους έγκειται στο γεγονός ότι παίρνουν διαφορετικές έννοιες μέσα στα ποικίλα πλαίσια που χρησιμοποιούνται. Το ποσοστό μπορεί να είναι ένας *αριθμός*, όταν είναι γραμμένο ως ισοδύναμο κλάσμα ή ως δεκαδικός αριθμός, μπορεί να είναι μια *σύγκριση* σε σχέση με την έννοια ενός συνόλου (π.χ. ένας υποψήφιος λαμβάνει ψήφους 35% του συνόλου), μπορεί να είναι μια *σχέση αναλογίας* μεταξύ δύο διαφορετικών συνόλων (π.χ. υπάρχουν 400% περισσότερα αγόρια απ' ότι κορίτσια), μπορεί να είναι μία *στατιστική*, όταν τα δεδομένα σημειώνονται σε μια διαχειρίσιμη μορφή ερμηνείας (π.χ. ποσοστό απασχόλησης 8,5% συγκρίνεται με τον εθνικό μέσο όρο του 10%) και, τέλος, το ποσοστό μπορεί να είναι μια *λειτουργία*, όταν κάποιο ποσό υπολογίζεται σύμφωνα με ένα δηλωμένο ποσοστό (π.χ. τόκοι, τιμές, εκπτώσεις κ.α.). Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι η σημασία του αλλάζει ανάλογα με την κατάσταση κατά την οποία χρησιμοποιείται, η βασική έννοια του ποσοστού είναι η *αναλογικότητα*. Σύμφωνα με τους Parker & Leinhardt (1995) «*το κοινό νήμα που υφαίνεται μέσα από όλες αυτές τις περιγραφές είναι ότι το ποσοστό αποτελεί μια εναλλακτική λύση της γλώσσας, η οποία χρησιμοποιείται για την περιγραφή αναλογικών σχέσεων – πρόκειται για μία φράση που είναι μοναδική, συνοπτική και παρέχει ένα προνομιούχο σύστημα σημειογραφίας*».

Παρά, όμως, τη σημαντικότητα του αντικειμένου, η έρευνα στο κεφάλαιο των ποσοστών υστερεί συγκριτικά με τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, γεγονός που προκαλεί έκπληξη, αν ληφθεί υπόψιν ότι το ποσοστό αποτελεί αδιαμφισβήτητα την αριθμητική μορφή που συναντάται συχνότερα στην καθημερινότητα της ενήλικης ζωής. Στις έρευνες που μέχρι στιγμής έχουν γίνει σκιαγραφείται μία ζοφερή εικόνα σχετικά με την επίδοση μαθητών και φοιτητών σε ασκήσεις που περιλαμβάνουν ποσοστά (Parker & Leinhardt, 1995; Glatzer, 1984; Caney & Watson, 2003; Jacobs & Gelman, 2017). Και παρόλο που ο Glatzer (1984) σημειώνει ότι τα παιδιά φαίνεται να κατέχουν μια διαισθητική έννοια του ποσοστού πριν από την επίσημη εισαγωγή της στο πρόγραμμα σπουδών, οι Parker & Leinhardt (1995) στην περίληψη των επί έξι δεκαετίες ερευνών τους εκφράζουν την άποψη ότι «*τα ποσοστά είναι ένα θέμα στο οποίο οι μαθητές έχουν επιδείξει ανεπαρκείς επιδόσεις, και, σε μερικές περιπτώσεις, απόλυτη σύγχυση. Η μελέτη της επίδοσης των σπουδαστών σε προβλήματα που εμπεριέχουν ποσοστά υπογραμμίζει όχι μόνο τη δυσκολία τους να κατανοήσουν την έννοια των ποσοστών, αλλά και το γεγονός πως η διδασκαλία των τελευταίων στο σχολείο έχει ως επακόλουθο να αντικαθίσταται η κατανόηση από διαδικαστικές, δίχως νόημα πρακτικές*». Κατά τον Dole (2004) η έμφαση που δίνεται στο σχολείο στα ποσοστά δεν αναδεικνύει την ίδια την έννοια, αλλά το πώς να τα υπολογίσεις.

Η υιοθέτηση μιας τυπικής – υπολογιστικής προσέγγισης των Μαθηματικών τείνει να τα απομονώνει από τα καθημερινά βιώματα των μαθητών, με αποτέλεσμα να αποθαρρύνονται από την ενασχόλησή τους με αυτά. Η προσθήκη καθημερινών εμπειριών για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι αναμφίβολα ωφέλιμη. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει ως έναυσμα συνθήκες που επηρεάζουν τους μαθητές καθημερινά, να εντοπίσει μαθηματικές έννοιες σε αυτές και να θέσει ένα πλαίσιο, από το οποίο μπορεί να ξεκινήσει ή η προέκταση των υπαρχουσών γνώσεων ή η διδασκαλία ενός νέου μαθηματικού αντικειμένου. Οι καθημερινές καταστάσεις δεν πρέπει να είναι αποσπασματική προσθήκη στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά κυρίαρχο μέρος, δεδομένου ότι η καθημερινότητα επηρεάζει τη μάθηση, αλλά και το αντίθετο.

Στις έρευνες που αφορούν στην υπολογιστική εκτίμηση, ενίοτε υπάρχουν έργα που αφορούν πράξεις με ποσοστά (Lemonidis & Kaimakami, 2013; Lemonidis, Nolka & Nikoladonakis, 2014). Ωστόσο, αν και τα ποσοστά απαντώνται συνέχεια γύρω μας και ενώ οι εκτιμήσεις αφορούν το μεγαλύτερο μέρος των υπολογισμών που κάνει ο μέσος άνθρωπος στις δυτικές κοινωνίες καθημερινά, δεν έχει υπάρξει μέχρι στιγμής μελέτη να ερευνήσει την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε προβλήματα της καθημερινότητας που περιλαμβάνουν ποσοστά. Καθώς, λοιπόν, είναι σημαντικό να συμπεριλαμβάνονται οικείες καταστάσεις στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και να τίθενται πραγματικοί στόχοι, στην παρούσα μελέτη επιχειρείται να διερευνηθεί η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε καθημερινά προβλήματα που περιλαμβάνουν ποσοστά των ανθρώπων που πρόκειται να διδάξουν τους μαθητές, δηλαδή των εκπαιδευτικών.

1.5 Η συνεισφορά της παρούσας έρευνας

Η σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης τονίζεται παγκοσμίως στα Προγράμματα Σπουδών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η ικανότητα έγκυρων εκτιμήσεων αποτελεί χρήσιμη διεργασία της καθημερινότητας, βοηθά το άτομο να κρίνει την καταλληλότητα των αποτελεσμάτων των υπολογισμών του και αποτελεί σημαντική πτυχή της αίσθησης του αριθμού και των μαθηματικών εργασιών (Bana & Dolma, 2004). Η βελτίωση της διδασκαλίας της εκτίμησης πρόκειται να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση των αριθμητικών πράξεων (Edwards, 1984; Lemonidis 2020), γι’ αυτό είναι σημαντικό οι στρατηγικές της να διδαχθούν και να αναπτυχθούν στο πλαίσιο του σχολικού περιβάλλοντος, και όχι ατομικά και ιδιοσυγκρασιακά. Τα αριθμητικά χαρακτηριστικά κάθε προβλήματος ποικίλλουν, γι' αυτό οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να προσαρμόζουν τη χρήση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και να επιλέγουν την κατάλληλη διαδικασία βάσει των δεδομένων κάθε προβλήματος. Και καθώς μερικοί οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι η υπολογιστική εκτίμηση χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή ακόμη πιο συχνά απ' ότι η ακριβής αριθμητική (Northcote & McIntosh, 1999), το ενδιαφέρον αυτής της μελέτης στρέφεται στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης εκείνων που έχουν αναλάβει να τη διδάξουν στους επόμενους πολίτες της κοινωνίας μας, των εκπαιδευτικών.

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διαδραματίσουν καθοριστικό ρόλο στη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης. Σύμφωνα με τον Trafton (1986) είναι υπεύθυνοι να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των εκτιμήσεων, να αναπτύξουν ευέλικτη σκέψη και ικανότητα λήψης αποφάσεων, να γίνουν προσαρμοστικοί ως προς την καταλληλότητα της στρατηγικής βάσει των δεδομένων του προβλήματος και να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν εάν οι απαντήσεις τους είναι λογικές ή μη. Κατά τον Alajmi (2009) οι εκπαιδευτικοί που αναγνωρίζουν τη σημασία των έγκυρων απαντήσεων, δίνουν μεγάλη έμφαση στη λογική στη διδασκαλία τους και ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν τις λογικές απαντήσεις. Ο Edwards (1984) επισημαίνει πως η κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης από τους εκπαιδευτικούς είναι ιδιαίτερα σημαντική, διότι αν οι ίδιοι εστιάσουν απλώς στη διδασκαλία των στρατηγικών, είναι πιθανόν ένας μέτριος εκτιμητής να μην είναι σε θέση να καταλάβει αν η εκτίμησή του είναι καλή ή όχι. Για παράδειγμα, ακόμη κι αν ο εκτιμητής χρησιμοποιεί σωστά την εκάστοτε μέθοδο, το περιθώριο λάθους διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα κι από κατάσταση σε κατάσταση. Τέλος, η Maclellan (2001) υποστηρίζει ότι ο δάσκαλος που αντιλαμβάνεται την πολυπλοκότητα της έννοιας του αριθμού και είναι εξοικειωμένος με τα στάδια της ανάπτυξής της, μπορεί να είναι πιο σαφής κατά τη διδασκαλία του και να επιτύχει καλύτερα διδακτικά αποτελέσματα.

Στη χώρα μας, αν και η σημασία της εκτίμησης αναγνωρίζεται μέσα στο Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003), απουσιάζει μια συστηματική διδασκαλία ή κατάρτιση για τους εκπαιδευτικούς. Έτσι, στην καθημερινότητά τους οι Έλληνες εκπαιδευτικοί είτε υιοθετούν την παραδοσιακή διδασκαλία δίνοντας έμφαση στους τυποποιημένους αλγόριθμους με χαρτί και μολύβι, είτε διδάσκουν στους μαθητές τους ορισμένες μόνο στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, τις οποίες κατά πάσα πιθανότητα έχουν αναπτύξει μόνοι τους ιδιοσυγκρασιακά. Προηγούμενες μελέτες έδειξαν ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί στερούνται σημαντικών γνώσεων πάνω στον τομέα της εκτίμησης (Gliner, 1991; Goodman, 1991; Lemonidis & Kaimakami, 2013;), ενώ λίγες είναι οι διαθέσιμες έρευνες που εξέτασαν εκπαιδευτικούς εν ενεργεία (Dowker, 1992; Alajmi, 2009; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014). Τόσο οι μελλοντικοί όσο και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί δεν έχουν το απαραίτητο υπόβαθρο για να εκτελέσουν υπολογιστικές εκτιμήσεις και να χρησιμοποιήσουν ποικιλία κατάλληλων στρατηγικών.

Στην παρούσα έρευνα γίνεται προσπάθεια να ενισχυθούν τα λιγοστά δεδομένα της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, αγγίζοντας για πρώτη φορά μία κατηγορία αριθμητικών προβλημάτων που απαντάται πολύ συχνά στην καθημερινότητα των ανθρώπων, αυτή των προβλημάτων που εμπεριέχουν ποσοστά. Δεδομένης της ιδιαίτερης σημασίας της υπολογιστικής εκτίμησης, αλλά και της συχνότητας εμφάνισης προβλημάτων με ποσοστά στην καθημερινότητα μιας σύγχρονης κοινωνίας, θεωρείται σκόπιμη η μελέτη των στρατηγικών που ιδιοσυγκρασιακά έχουν αναπτύξει οι αρωγοί της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί. Για τους παραπάνω λόγους στην παρούσα έρευνα επιχειρείται να μελετηθεί, μέσω του μοντέλου IHMCES, η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα που περιλαμβάνουν πράξεις με ποσοστά.

2. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2.1 Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετασθεί, μέσω μιας τροποποίησης του μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019), η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα που περιλαμβάνουν πράξεις με ποσοστά. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

1) Ποιες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης χρησιμοποιούν οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα με ποσοστά;

2) Ποιο είναι το στρατηγικό προφίλ των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης με ποσοστά;

3) Διαθέτουν οι Έλληνες εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ευελιξία στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης σε προβλήματα με ποσοστά;

4) Διαθέτουν οι Έλληνες εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προσαρμοστικότητα στην επίλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν ποσοστά;

2.2 Μεθοδολογία

Προκειμένου να διερευνηθούν και να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης, συλλέχθηκαν ποιοτικά δεδομένα από εκπαιδευτικούς που διδάσκουν σε Δημοτικά σχολεία της χώρας, τα οποία στη συνέχεια μετατράπηκαν σε ποσοτικά δεδομένα και επεξεργάστηκαν με στατιστική ανάλυση. Η έρευνα βασίστηκε στη δειγματοληψία σκοπιμότητας (βολική) και η συλλογή δεδομένων έγινε μέσω προφορικών συνεντεύξεων.

2.3 Δείγμα

Για τη διεξαγωγή της έρευνας επιλέχθηκε η μέθοδος της βολικής δειγματοληψίας και το δείγμα θεωρείται ευκολίας. Οι εκπαιδευτικοί επιλέχθηκαν βάσει της διαθεσιμότητας και της προθυμίας τους να συμμετέχουν στη μελέτη. Ο λόγος της επιλογής των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι ότι το ενδιαφέρον της έρευνας επικεντρώνεται σε εκείνους που διδάσκουν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης στους μαθητές, είτε επειδή αυτές υπάρχουν στους στόχους του αναλυτικού προγράμματος (όπως η στρογγυλοποίηση) είτε επειδή οι ίδιοι αναγνωρίζουν τη σημασία της και το επιδιώκουν. Ταυτόχρονα αναμένεται να δώσουν σαφείς, ευκρινείς και συνοπτικές περιγραφές των στρατηγικών που χρησιμοποιούν στα μαθηματικά προβλήματα, λόγω της διδακτικής τους εμπειρίας. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται πληροφορίες για τη σύνθεση του δείγματος, όπως το φύλλο, το μορφωτικό επίπεδο, ο νομός εργασίας και τα χρόνια διδακτικής εμπειρίας.

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 45 εκπαιδευτικοί ηλικίας 25–54 ετών, από τους οποίους οι 40 ήταν γυναίκες.

Πίνακας 1. Φύλλο εκπαιδευτικών

Φύλλο	Συχνότητα	Ποσοστό
Άνδρας	5	11,1%
Γυναίκα	40	88,9%
Σύνολο	45	100%

Όσον αφορά το μορφωτικό επίπεδο των εκπαιδευτικών το 40% (18 εκπαιδευτικοί) κατείχε το πτυχίο του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, το 57,8% (26 εκπαιδευτικοί) διέθετε επιπλέον και μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών, ενώ συμμετείχε και ένας εκπαιδευτικός (ποσοστό 2,2%) που είχε αποκτήσει και διδακτορικό τίτλο σπουδών.

Πίνακας 2. Μορφωτικό επίπεδο εκπαιδευτικών

Επίπεδο	Συχνότητα	Ποσοστό
Πτυχίο	18	40%
Μεταπτυχιακό	26	57,8%
Διδακτορικό	1	2,2%
Σύνολο	45	100%

Έγινε προσπάθεια να συμμετέχουν στην έρευνα εκπαιδευτικοί από ποικίλες περιοχές της Ελλάδας. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών εργαζόταν σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία του νομού Θεσσαλονίκης (64,5%). Στον επόμενο πίνακα καταγράφονται όλοι οι νομοί στους οποίους βρίσκονται τα Δημοτικά σχολεία στα οποία απασχολούνται κατά την περίοδο της έρευνας οι εκπαιδευτικοί που έλαβαν μέρος στην έρευνα.

Πίνακας 3. Νομός Σχολείου Εργασίας Εκπαιδευτικών

Νομός	Συχνότητα	Ποσοστό
Αιτωλοακαρνανίας	1	2,2%
Αττικής	6	13,3%
Θεσσαλονίκης	29	64,5%
Λαμίας	1	2,2%
Λάρισας	2	4,4%
Λευκάδας	1	2,2%
Ρεθύμνου	1	2,2%
Σάμου	1	2,2%
Χαλκιδικής	2	4,4%
Χανίων	1	2,2%
Σύνολο	45	100%

Ο μέσος όρος των ετών υπηρεσίας των εκπαιδευτικών του δείγματος ήταν τα 11,2 χρόνια. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες διέθεταν από 0 – 5 έτη υπηρεσίας, με ποσοστό 33,3% (15 εκπαιδευτικοί). Ακολουθούν εκείνοι που είχαν από 10 – 15 έτη υπηρεσίας με ποσοστό 22,2% (10 εκπαιδευτικοί), και στη συνέχεια το 15,6% (7 εκπαιδευτικοί) με 15 – 20 έτη υπηρεσίας, το 13,4% (6 εκπαιδευτικοί) με 20 – 25 έτη υπηρεσίας και το 11,1% (5 εκπαιδευτικοί) με 5 – 10 έτη υπηρεσίας. Τέλος, υπήρχαν 2 εκπαιδευτικοί (4,4%) που είχαν 25-30 έτη υπηρεσίας, ενώ κανένας συμμετέχοντας δεν είχε ξεπεράσει τα 30 έτη ενεργείας.

Πίνακας 4. Έτη υπηρεσίας Εκπαιδευτικών

Έτη	Συχνότητα	Ποσοστό	Μέσος όρος ετών υπηρεσίας
[0 -5)	15	33,3%	
[5 – 10)	5	11,1%	
[10 – 15)	10	22,2%	
[15 – 20)	7	15,6%	11,222
[20 – 25)	6	13,4%	
[25 – 30)	2	4,4%	
[30 – 35]	0	0%	
Σύνολο	45	100%	

Τέλος, σημειώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί που πήραν μέρος στην έρευνα δεν είχαν προηγουμένως διδαχθεί την έννοια της εκτίμησης ούτε στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Οι συμμετέχοντες δεν μπορούν να θεωρηθούν αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού, όμως αναμένεται να δώσουν χρήσιμες πληροφορίες για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Η ερευνήτρια είναι εκπαιδευτικός σε ένα από τα σχολεία εργασίας των εκπαιδευτικών του δείγματος στον νομό Θεσσαλονίκης.

2.4 Εργαλείο

Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν με τη μέθοδο των προφορικών συνεντεύξεων, μέσω ενός πρωτοκόλλου που δημιουργήθηκε ειδικά για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης. Το προφορικό πρωτόκολλο αποτελούταν από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορούσε ερωτήσεις δημογραφικών στοιχείων των συμμετεχόντων, όπως το φύλο, το επίπεδο σπουδών, τα έτη υπηρεσίας ως εκπαιδευτικοί και την περιοχή της σχολικής μονάδας απασχόλησής τους. Το δεύτερο μέρος αποτελούταν από 11 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης με ποσοστά, τα οποία διερευνούσαν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τα έργα αυτά είχαν σχεδιαστεί έτσι ώστε σε καθένα να αντιστοιχεί μια ενδεδειγμένη στρατηγική, προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητα προσαρμοστικότητας των εκπαιδευτικών.

2.4.1 Έργα υπολογιστικής εκτίμησης εργαλείου

Ο σχεδιασμός των έργων του ερωτηματολογίου βασίστηκε σε τρεις συνθήκες. Κάθε έργο να:

α) αφορά ένα πρόβλημα της καθημερινότητας, ώστε να ελκύει το ενδιαφέρον του εκπαιδευτικού και να έχει νόημα για εκείνον να δώσει μια κατ' εκτίμηση απάντηση.

β) εμπεριέχει ποσοστά, ώστε να είναι οικείο στον συμμετέχοντα, μια και τα ποσοστά εντοπίζονται συνέχεια σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής ενός ενήλικα.

γ) επιλύεται γρηγορότερα αλλά και έγκυρα με μία συγκεκριμένη στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης από αυτές που αναγράφονται στη βιβλιογραφία, ώστε να εξετασθεί η προσαρμοστικότητα κάθε συμμετέχοντα.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα 11 έργα του ερωτηματολογίου και η κατάλληλη στρατηγική που αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά. Έγινε προσπάθεια η κάθε στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης να εμφανίζεται μία φορά ως κατάλληλη, με εξαίρεση την αντιστάθμιση, η οποία εμφανίζεται δύο φορές ως στρατηγική του ανώτατου επιπέδου ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης (βλ. κεφάλαιο 2.6, Το μοντέλο IHMCES).

Πίνακας 5. Έργα ερωτηματολογίου

Αριθμός έργου	Έργο	Κατάλληλη Στρατηγική
Π1	Ο Γιάννης πρέπει να διανύσει με το αυτοκίνητό του μία απόσταση 1000 km. Την 1η ημέρα έκανε 491 km και τη 2η ημέρα 278 km. Εκτιμήστε πόσο % της διαδρομής έχει ολοκληρώσει;	Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα
Π2	Ένα τρένο διανύει το 56,18% της συνολικής του διαδρομής σε 4,89 ώρες. Εκτιμήστε πόσο % περίπου της συνολικής διαδρομής διανύει σε 1 ώρα.	Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα
Π3	Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσοστών: 1,26% 4,79% 0,99% 1,37% 2,58%	Στρατηγική του εμπρόσθιο άκρο

Π4	Ο κύριος Διονύσης ρώτησε τα παιδιά ποιο είναι το αγαπημένο τους άθλημα. Το 51,9% δήλωσε το ποδόσφαιρο, το 12,6% δήλωσε το μπάσκετ, το 19,7% το βόλεϊ, το 8,3% το τένις και τα υπόλοιπα παιδιά δήλωσαν το πινγκ-πονγκ. Εκτιμήστε ποιο ποσοστό στα % αποτελούν τα παιδιά που δήλωσαν ότι αγαπούν πιο πολύ το πινγκ-πονγκ.	Στρατηγική των συμβατών αριθμών
Π5	Σε μία συσκευασία 826 ml αρώματος το 9,84% είναι αιθέριο έλαιο. Εκτιμήστε πόσα περίπου ml είναι το αιθέριο έλαιο;	Στρατηγική των ειδικών αριθμών
Π6	Εκτιμήστε το ακόλουθο αποτέλεσμα: 8,1% · 150 γρ, για να βρείτε τα γραμμάρια πρωτεΐνης που περιέχει ένα επιδόρπιο γιαουρτιού.	Παραγοντοποίηση
Π7	Από κάθε φράουλα παίρνουμε κατά μέσο όρο 73 mg βιταμίνης C. Η Δανάη έφαγε 11 φράουλες. Εκτιμήστε πόσο % της ημερήσιας πρόσληψης βιταμίνης C πήρε, αν γνωρίζετε ότι ο γιατρός τής συνέστησε να λαμβάνει 1000 mg ημερησίως.	Επιμεριστικότητα
Π8	Η Αλίκη περπάτησε 2/3 km το πρωί και 1/5 km το απόγευμα. Εκτιμήστε πόσο % του km περπάτησε συνολικά.	Αντικατάσταση
Π9	Στις τελευταίες εκλογές του Δήμου Ιωαννιτών σημειώθηκαν τα εξής αποτελέσματα: • Α' παράταξη: 15,7% • Β' παράταξη: 14,8% • Γ' παράταξη: 15,1% • Δ' παράταξη: 13,9% • λευκό/άκυρο: 14,3% Εκτιμήστε πόσος περίπου κόσμος πήγε να ψηφίσει, αν είναι γνωστό ότι ο δήμος έχει καταγεγραμμένους 101.050 δημότες.	Συσσώρευση (Μέσος όρος)
Π10	Για τη χθεσινή συναυλία στο θέατρο Δάσους τα εισιτήρια είχαν εξαντληθεί από νωρίς. Σύμφωνα με τις νέες οδηγίες του ΕΟΔΥ, η πληρότητα θέσεων επιτρέπεται να είναι 75%. Εκτιμήστε πόσος κόσμος παρακολούθησε τη συναυλία, αν είναι γνωστό ότι ο χώρος διαθέτει 3.800 θέσεις.	Αντιστάθμιση
Π11	Εκτιμήστε πόσο είναι περίπου το 15% των 148€.	Αντιστάθμιση

Τα παραπάνω έργα σχεδιάστηκαν για τον σκοπό της παρούσας έρευνας. Ωστόσο, πέντε από αυτά (Π1, Π2, Π3, Π5 και Π8) βασίστηκαν σε έργα άλλων ερευνητών. Συγκεκριμένα:

- το έργο Π1 αποτελεί παραλλαγή του προβλήματος «*Ο Άρης και η οικογένειά του ταξίδεψαν από την Αθήνα στην Κατερίνη, για διακοπές, διανύοντας απόσταση 496 km. Μία εβδομάδα αργότερα, συνέχισαν πηγαίνοντας από την Κατερίνη στην Ξάνθη διανύοντας απόσταση 295 km. Πόσα χιλιόμετρα έκαναν κατά προσέγγιση σε όλο το ταξίδι τους;*» του pre-test των Lemonidis & Likidis (2019).

- το έργο Π2 είναι εμπνευσμένο από τη δοκιμασία «*Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 km σε 52 ώρες. Πόσα περίπου km διανύει το τρένο σε μία ώρα;*» των Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos (2014).

- το έργο Π3 αποτελεί μικρή παραλλαγή του προβλήματος «*Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών: 1,26€, 4,79€, 0,99€, 1,37€, 2,58€.*» των Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014) στον 7ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής».

- το έργο Π5 αποτελεί, επίσης, μικρή παραλλαγή του προβλήματος «*Στα 816 ml μιας ουσίας το 9,84% είναι αλκοόλη. Πόση περίπου αλκοόλη έχει η ουσία;*» των Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014) στον 7ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής».

- και το έργο Π8 αποτελεί κι αυτό παραλλαγή του προβλήματος «*Η Μαρία έτρεξε ½ km το πρωί και 3/8 km το απόγευμα. Έτρεξε τουλάχιστον 1 km;*» των Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis (2014) στον 7ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής».

2.5 Διαδικασία

Στην παρούσα μελέτη, για να προσδιοριστούν οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί όταν κάνουν νοερούς υπολογισμούς, χρησιμοποιήθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις. Οι συμμετέχοντες αρχικά ρωτήθηκαν αν είναι πρόθυμοι να λάβουν μέρος στην έρευνα κι αφού δέχτηκαν, οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν συνεννόησης. Αυτές με όσους απασχολούνται σε σχολεία της Θεσσαλονίκης έγιναν στον χώρο εργασίας τους κάποια πρωινή ώρα, ενώ εκείνες με όσους εκπαιδευτικούς εργάζονται σε σχολεία εκτός του νομού Θεσσαλονίκης πραγματοποιήθηκαν μέσω βιντεοκλήσεων, κατά τη διάρκεια των οποίων οι εκπαιδευτικοί έβλεπαν στην οθόνη τους τα έργα του προφορικού πρωτοκόλλου.

Πριν την έναρξη του ερωτηματολογίου έλαβε χώρα μια συζήτηση με κάθε συμμετέχοντα για την έννοια της εκτίμησης και τη χρήση της στην καθημερινή ζωή. Οι συμμετέχοντες δεν είχαν διδαχθεί νωρίτερα την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης, ούτε στρατηγικές αυτής, πέρα από τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης που υπάρχει και διδάσκεται στα σχολικά εγχειρίδια. Έπειτα, κατά τη διαδικασία, η ερευνήτρια παρουσίαζε το προφορικό πρωτόκολλου στον εκπαιδευτικό σε γραπτή μορφή, με το οποίο ο ίδιος είχε μόνο οπτική επαφή. Δεν του παρασχέθηκαν χαρτί και μολύβι, καθώς όπως του έγινε κατανοητό οι απαντήσεις έπρεπε να δοθούν υπολογίζοντας νοερά. Τα προβλήματα εκφωνούνταν αρχικά από την ερευνήτρια και αν ο συνεντευξιαζόμενος το επιθυμούσε μπορούσε να τα επαναλάβει ή να τα ξαναδιαβάσει σιωπηλά.

Καθόλη τη διάρκεια της συνέντευξης η ερευνήτρια κρατούσε σημειώσεις, ενώ ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς και άδεια ηχογράφησης των απαντήσεών τους, έτσι ώστε η ίδια να έχει και μετέπειτα την ευκαιρία να αξιολογήσει και να καταγράψει την υπολογιστική στρατηγική καθενός στα 11 έργα του ερωτηματολογίου. Οι συμμετέχοντες είχαν ενημερωθεί ότι το κύριο ενδιαφέρον της μελέτης ήταν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν και όχι η εγγύτητα της απάντησής τους στο ακριβές αποτέλεσμα. Έγινε προσπάθεια, δηλαδή, να γίνει κατανοητό πως δεν ήταν οι ακριβείς νοεροί υπολογισμοί το επιδιωκόμενο. Έπειτα από κάθε απάντηση σε ένα έργο η ερευνήτρια ζητούσε από τον συνεντευξιαζόμενο να εξηγήσει τον τρόπο που είχε σκεφτεί και τον είχε οδηγήσει στη συγκεκριμένη απάντηση. Τέλος, δεν δόθηκε κάποιος χρονικός περιορισμός κατά τη διάρκεια των απαντήσεων. Κάθε συνέντευξη διήρκησε συνολικά 10-20 λεπτά.

2.6 Το μοντέλο IHMCES

Στην παρούσα μελέτη οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί εντοπίστηκαν μέσω των απαντήσεών τους και στη συνέχεια κατηγοριοποιήθηκαν σε επίπεδα βάσει του μοντέλου IHMCES (Integrated Hierarchical Model of Computation Estimation Strategies) των Lemonidis & Likidis (2019). Αρχικά, ο Whitacre (2015) δημιούργησε ένα μοντέλο με σκοπό να ομαδοποιήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί ένα άτομο για να αξιολογήσει την πρόοδο των μαθητών στην αίσθηση του αριθμού. Στη συνέχεια, οι Lemonidis & Likidis (2019), επηρεασμένοι από το μοντέλο του Whitacre, δημιούργησαν το IHMCES, στο οποίο οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης ιεραρχούνται σε πέντε επίπεδα σύμφωνα με τα εξής κριτήρια:

1) πραγματοποίηση εκτίμησης ή μη
2) αντιμετώπιση των αριθμών στο πρόβλημα με βάση τη θεσιακή αξία, αλλάζοντας τους πιο βολικούς αριθμούς για υπολογισμό
3) αντικατάσταση ενός ή περισσότερων αριθμών στο πρόβλημα με πιο βολικούς για υπολογισμό αριθμούς
4) αλλαγή της δομής του προβλήματος σε μια πιο βολική μορφή υπολογισμού
5) πραγματοποίηση προσαρμογής για καλύτερη εκτίμηση

2.6.1 Ιεράρχηση των στρατηγικών

Στο μοντέλο τους οι Lemonidis & Likidis (2019) διατήρησαν τη σειρά των Segovia et al. (1989), δηλαδή πρώτη τοποθετείται η *ανασύνθεση*, μετά η *μετάφραση* και τέλος, στο πιο υψηλό επίπεδο, η *αντιστάθμιση*. Επιπλέον, οι στρατηγικές *μη εκτίμησης* (επίπεδο 0) θεωρήθηκαν ότι είναι ένα διακριτό επίπεδο, καθώς χρησιμοποιούνται από πολλούς μαθητές και ενήλικες που δεν έχουν μυηθεί στην εκτίμηση. Ακόμη, οι στρατηγικές στην ομάδα της *ανασύνθεσης* διαιρέθηκαν σε δύο υποομάδες, την *ανασύνθεση 1* και την *ανασύνθεση 2*, σύμφωνα με τα κριτήρια 2 και 3 αντίστοιχα. Όλες οι στρατηγικές που εμπεριέχουν ως κύρια διαδικασία τη στρογγυλοποίηση των αριθμών βάσει της θεσιακής τους αξίας περιλαμβάνονται στην υποομάδα *ανασύνθεση 1* (επίπεδο 1), ενώ στην υποομάδα *ανασύνθεση 2* (επίπεδο 2) συγκαταλέγονται οι στρατηγικές όπου ένας ή περισσότεροι αριθμοί αντικαθίστανται από άλλους, πιο βολικούς (αντί να αλλάζουν). Θεωρήθηκε ότι η μεταχείριση των αριθμών στο επίπεδο της ανασύνθεσης 2 είναι πιο απαιτητική από εκείνο της ανασύνθεσης 1, οπότε και ανώτερη. Σύμφωνα με το τέταρτο κριτήριο, το επίπεδο 3 αφορά σε στρατηγικές όπου το άτομο αλλάζει τη δομή του προβλήματος σε μια πιο βολική μορφή υπολογισμού (π.χ. αντί να προσθέτει, πολλαπλασιάζει), ενώ στο τέταρτο και ανώτερο επίπεδο περιλαμβάνονται, καθοδηγούμενα από το κριτήριο 5, οι αντισταθμίσεις που πραγματοποιούνται από το άτομο προκειμένου η εκτίμηση να είναι καλύτερη.

Πίνακας 6. Ιεραρχική ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης

Επίπεδα στρατηγικών		Στρατηγικές	
Ονομασία	Κωδικός	Κωδικός	Ονομασία
Αντιστάθμιση	4	4	Αντιστάθμιση
Μετάφραση	3	3	Συσσώρευση (Μέσος όρος)
Ανασύνθεση 2	2	2.5	Αντικατάσταση
		2.4	Επιμεριστικότητα
		2.3	Παραγοντοποίηση
		2.2	Στρατηγική των ειδικών αριθμών
		2.1	Στρατηγική των συμβατών αριθμών
Ανασύνθεση 1	1	1.4	Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου
		1.3	Περικοπή
		1.2	Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα
		1.1	Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα
Μη εκτίμηση	0	0.3	Διαίσθηση
		0.2	Ακριβής υπολογισμός κι έπειτα στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος
		0.1	Ακριβής υπολογισμός
		0.0	Τυχαία απάντηση

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται οι 11 πιθανές στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα προβλήματα που τέθηκαν σε αυτήν την έρευνα και τα επίπεδα στα οποία ταξινομούνται. Όσο περισσότερο μια στρατηγική σχετίζεται με την ιδέα της εκτίμησης, τόσο υψηλότερα τοποθετείται στην ιεραρχία. Η παρακάτω ιεράρχηση αποτελεί μια τροποποίηση του αρχικού μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019), καθώς, ύστερα από μελέτη της βιβλιογραφίας για το σύνολο των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, θεωρήθηκε σκόπιμο να προστεθεί η στρατηγική της *Διαίσθησης* στο επίπεδο 0, καθώς υποδεικνύει ελλιπή κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης, και οι στρατηγικές *Παραγοντοποίηση*, *Επιμεριστικότητα* και *Αντικατάσταση* στο επίπεδο 2, αφού και στις τρεις οι αριθμοί του προβλήματος μετασχηματίζονται σε άλλους προκειμένου να είναι πιο βολικοί οι υπολογισμοί.

Επίπεδο 0 – Μη εκτίμηση

Για να πραγματοποιήσει κάποιος μια εκτίμηση, πρέπει να γνωρίζει ποια είναι η διαδικασία της εκτίμησης. Υπάρχουν απαντήσεις που φανερώνουν ότι το άτομο έχει ανεπαρκή ή ελλιπή εννοιολογική κατανόηση της διαδικασίας της εκτίμησης. Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο 1, στο επίπεδο 0 περιλαμβάνονται οι παρακάτω στρατηγικές:

- *Τυχαία απάντηση* (κωδικός 0.0), όταν το άτομο δίνει μία τυχαία απάντηση, δίχως λογική και σκέψη, π.χ. 8,1% · 150γρ. = 8400γρ.
- *Ακριβής υπολογισμός* (κωδικός 0.1), όταν το άτομο πραγματοποιεί τον αριθμητικό αλγόριθμο νοερά και με ακρίβεια, π.χ. 491 + 278 = 769.
- *Ακριβής υπολογισμός κι έπειτα στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος* (κωδικός 0.2), όταν το άτομο εκτελεί με ακρίβεια τον αριθμητικό αλγόριθμο στον νου του κι έπειτα στρογγυλοποιεί το αποτέλεσμα, ώστε να φανεί ως εκτίμηση, π.χ. 491 + 278 = 769, άρα περίπου 800.
- *Διαίσθηση* (κωδικός 0.3), όταν το άτομο δίνει μία έγκυρη απάντηση, αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει τον συλλογισμό του, π.χ. *«Το 15% των 148€ θα πω ότι είναι περίπου 20€, αλλά δεν μπορώ να εξηγήσω γιατί.»*

Επιπλέον, σε αυτό το επίπεδο, πέρα από τις απαντήσεις *μη ανταπόκρισης*, σύμφωνα με το κριτήριο 1 περιλαμβάνονται και τα *σφάλματα*, τα οποία αναλύονται παρακάτω.

Επίπεδο 1 – Ανασύνθεση 1

Το πρώτο επίπεδο ανασύνθεσης καθορίζεται με βάση το κριτήριο 2, δηλαδή οι αριθμοί στο πρόβλημα αντιμετωπίζονται με βάση τη θεσιακή τους αξία (στρογγυλοποίηση), αλλάζοντάς τους με πιο βολικούς προς υπολογισμό αριθμούς. Η πρώτη βασική διαδικασία είναι η στρογγυλοποίηση και πάνω σε αυτήν διαμορφώνονται και οι άλλες τρεις στρατηγικές υψηλότερου επιπέδου. Έτσι, στο επίπεδο 1 περιλαμβάνονται οι παρακάτω στρατηγικές:

- *Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα* (κωδικός 1.1), κατά την οποία το άτομο συνήθως δεν εξετάζει το πλαίσιο ή την κατάσταση του προβλήματος. Επιλέγει την πρώτη δυνατή τάξη και στρογγυλοποιεί σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα, π.χ. 491 + 278 -> 490 + 280 = 770.

- *Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα* (κωδικός 1.2), όταν το άτομο λαμβάνει υπόψιν του το πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο απαιτεί έναν γρήγορο και εύκολο υπολογισμό και υποδηλώνει μια ουσιαστική χρήση της στρογγυλοποίησης, π.χ. 56,18 : 4,89 είναι περίπου ίσο με 55 : 5 = 11.

- *Περικοπή* (κωδικός 1.3), όταν το άτομο αντικαθιστά ένα ή περισσότερα ψηφία στο δεξί άκρο των αριθμών με μηδενικά, δίχως να στρογγυλοποιεί με βάση τον κανόνα. Γι' αυτό και η στρατηγική αυτή ενδείκνυται σε περιπτώσεις προβλημάτων όπου είναι αποδεκτό μεγαλύτερο εύρος για μια έγκυρη απάντηση, π.χ. 491 + 278 -> 400 + 200 = 600.

- *Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου* (κωδικός 1.4), όταν το άτομο αρχικά εστιάζει μόνο στο πρώτο ψηφίο στα αριστερά των αριθμών κι έπειτα επιστρέφει στο μέρος του αριθμού που αγνοήθηκε κάνοντας μια προσαρμογή της απάντησης, π.χ. 1,26 + 4,79 + 0,99 + 1,37 + 2,58 -> 1+4+0+1+2=8 και στη συνέχεια 0,26+0,79+0,99+0,37+0,58 κάνει περίπου 3 άρα συνολικά 8+3=11.

Επίπεδο 2 – Ανασύνθεση 2

Το δεύτερο επίπεδο ανασύνθεσης καθορίζεται με βάση το κριτήριο 3, δηλαδή οι αριθμοί στο πρόβλημα δεν μετασχηματίζονται με βάση τη στρογγυλοποίηση, αλλά αντικαθίστανται με άλλους, έτσι ώστε να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί. Οι στρατηγικές αυτού του επιπέδου θεωρούνται ανώτερες, διότι η αντικατάσταση των αριθμών στο πρόβλημα προϋποθέτει πιο προχωρημένες ικανότητες από τον μετασχηματισμό του αριθμού βάσει της θεσιακής αξίας κάποιων ψηφίων. Στο επίπεδο αυτό οι αριθμοί εξετάζονται και ανασυντίθενται λαμβάνοντας υπόψιν και τους υπόλοιπους αριθμούς του προβλήματος και όχι ανεξάρτητα. Έτσι, στο δεύτερο επίπεδο ανασύνθεσης περιλαμβάνονται οι παρακάτω στρατηγικές:

- *Στρατηγική των συμβατών αριθμών* (κωδικός 2.1), όταν το άτομο εντοπίζει στο πρόβλημα «ταιριαστούς» αριθμούς που καθιστούν τον υπολογισμό εύκολο, δηλαδή συνήθως τέτοιους ώστε να προσεγγίζουν ανά δύο έναν άλλον χαρακτηριστικό αριθμό. Η στρατηγική αυτή ισχύει κυρίως για την πρόσθεση ή την αφαίρεση, π.χ. στο 51,9+12,6+19,7+8,3 έχουμε 51,9+19,7 -> 51+19=70 και 12,6+8,3 -> 12+8=20 άρα 70+20=90.

- *Στρατηγική των ειδικών αριθμών* (κωδικός 2.2), όταν το άτομο ξεχωρίζει και χρησιμοποιεί αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές ή σημεία αναφοράς. Αυτό συμβαίνει με τα κλάσματα, όπου ειδικές τιμές θεωρούνται το 0, ½ και 1 ή στα ποσοστά όπου σημεία αναφοράς αποτελούν το 50%, 10%, 1% κ.α., π.χ. αντί για να βρούμε το 9,84% των 826ml, βρίσκουμε το 10% που αποτελεί σημείο αναφοράς.

- *Παραγοντοποίηση* (κωδικός 2.3), όταν το άτομο αναλύει τους αριθμούς σε γινόμενο μικρότερων παραγόντων ώστε να είναι πιο απλός ο υπολογισμός, π.χ. $8,1 \cdot 150 \to 8 \cdot 150 \to 8 \cdot 15 \cdot 10 = 1200$.

- *Επιμεριστικότητα* (κωδικός 2.4), όταν το άτομο χρησιμοποιεί την επιμεριστική ιδιότητα για να υπολογίσει πιο γρήγορα και εύκολα, π.χ. $73 \cdot 11 = 73 \cdot 10 + 73 \cdot 1 = 730 + 73 = 803$.

- *Αντικατάσταση* (κωδικός 2.5), όπου το άτομο αντικαθιστά τους αριθμούς του προβλήματος με μία άλλη μορφή τους, π.χ. 2/3 + 1/5 -> 66,6% + 20% = 86,6%.

Επίπεδο 3 – Μετάφραση

Το τρίτο επίπεδο στρατηγικών καθορίζεται βάσει του κριτηρίου 4, όπου η δομή του προβλήματος αλλάζει σε μια πιο βολική προς υπολογισμό δομή. Σύμφωνα με τους Reys et al. (1982) η μετάφραση θεωρείται ανώτερου επιπέδου από την ανασύνθεση, καθώς απαιτεί την αναδιάρθρωση του προβλήματος μαζί με την αλλαγή των αριθμών (Λεμονίδης, 2020). Θα λέγαμε δηλαδή ότι η διαδικασία της μετάφρασης είναι πιο γενική καθώς συμπεριλαμβάνει αλλαγές τόσο στο πρόβλημα όσο και στους αριθμούς, οι οποίοι εξετάζονται πάντα σε σχέση με τους υπόλοιπους. Στο επίπεδο αυτό καταγράφεται μόνο μία στρατηγική:

- *Συσσώρευση ή Μέσος όρος* (κωδικός 3), όταν το άτομο καλείται να προσθέσει πολλούς αριθμούς οι οποίοι βρίσκονται γύρω από μία συγκεκριμένη τιμή, π.χ. στο άθροισμα 15,7+14,8+15,1+13,9+14,3 όλοι οι προσθετέοι βρίσκονται γύρω από την τιμή 15, οπότε, αντί για πρόσθεση, γίνεται πολλαπλασιασμός 15·5=75.

Επίπεδο 4 – Αντιστάθμιση

Το τέταρτο επίπεδο της αντιστάθμισης καθορίζεται με βάση το τελευταίο κριτήριο, όταν δηλαδή πραγματοποιούνται προσαρμογές, έτσι ώστε να δοθεί μια εκτίμηση πιο κοντά στην ακριβή απάντηση. Η αντιστάθμιση αποτελεί το ανώτερο επίπεδο στην ιεράρχηση των στρατηγικών, επειδή υποδηλώνει ότι το άτομο χρησιμοποιεί σωστά μία από τις προηγούμενες στρατηγικές αλλά επιδιώκει μεγαλύτερη ακρίβεια, οπότε αντισταθμίζει την εκτίμησή του με μία καλύτερη. Ουσιαστικά, η εκτίμηση χρησιμοποιείται ως εργαλείο για να εξεταστεί η αρχική εκτίμηση και να γίνει μια προσαρμογή (Λεμονίδης, 2020). Έτσι, στο τέταρτο επίπεδο βρίσκεται η αντιστάθμιση, προγενέστερη ή μεταγενέστερη:

- *Αντιστάθμιση* (κωδικός 4), όταν το άτομο εκτελεί αποτελεσματικά μια από τις προηγούμενες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και επιζητά μεγαλύτερη ακρίβεια. Αντιλαμβανόμενο τη φορά της αντιστάθμισης και την κατάλληλη τάξη μεγέθους του αριθμού που θα αντισταθμίσει κάνει τις κατάλληλες προσαρμογές. Η αντιστάθμιση μπορεί να γίνει είτε πριν από τον υπολογισμό *(προγενέστερη)*, είτε μετά από αυτόν *(μεταγενέστερη)*. Για παράδειγμα στην πράξη 75% · 3800 υπάρχει η επιλογή της προγενέστερης αντιστάθμισης, π.χ. 70% · 4000 οπότε το αποτέλεσμα είναι 2800, ή η επιλογή της μεταγενέστερης αντιστάθμισης, π.χ. 75% · 4000 = 3000 και στη συνέχεια γίνεται αφαίρεση του 75% · 200 = 150, άρα 3000 – 150 = 2850.

2.6.2 Διαχείριση λαθών

Ακολουθώντας τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται σε μελέτες που εξετάζουν τα ποσοστά εκτίμησης ενηλίκων και παιδιών (π.χ. Dowker, 1992) επιτυχημένες εκτιμήσεις θεωρούνται οι εύλογες εκτιμήσεις, δηλαδή εκείνες που απέχουν λιγότερο από το 20% ή 30% του ακριβούς αποτελέσματος. Στα έργα υπολογιστικής εκτίμησης της παρούσας μελέτης επιτυχημένες απαντήσεις θεωρήθηκαν οποιεσδήποτε απαντήσεις ήταν μικρότερες από το 10% της σωστής λύσης (+/- 10%), ή αλλιώς, το σφάλμα εκτίμησης δεν ξεπέρασε το 10% της ακριβούς απάντησης. Για παράδειγμα, στο έργο Π1 που εμπεριέχει την πρόσθεση 491 + 278 και το ακριβές αποτέλεσμα είναι 769, οι απαντήσεις που κυμαίνονται από 692 έως 845 θεωρήθηκαν σωστές και αντίστοιχα τα ποσοστά ανάμεσα στο 69,2% και το 84,5%.

Στις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών οι μη έγκυρες απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε τέσσερις ομάδες. Αυτές είναι οι εξής:

1. *Λανθασμένη επιλογή πράξης* (κωδικός ΛΠ): όταν το άτομο εκτελούσε διαφορετική πράξη από αυτή που απαιτούσε το πρόβλημα.

2. *Σωστή επιλογή πράξης, λανθασμένη εκτέλεση* (κωδικός ΛΕ): όταν το άτομο εκτελούσε την απαιτούμενη πράξη ή πράξεις, αλλά έκανε λάθος κατά τη διαδικασία, με αποτέλεσμα να δίνει μη έγκυρη απάντηση.

3. *Εκτίμηση εκτός ορίων* (κωδικός ΕΟ): όταν το άτομο έκανε μια εκτίμηση πέρα από το όριο του +/- 10%.

4. *Δεν δόθηκε απάντηση* (κωδικός ΔΑ): όταν το άτομο δεν ήξερε πώς να εκτιμήσει και προτιμούσε να μη δώσει καμία απάντηση.

2.6.3 Στρατηγικά προφίλ

Τα στρατηγικά προφίλ των εκπαιδευτικών ορίζονται βάσει των στρατηγικών που επέλεξαν οι ίδιοι να χρησιμοποιήσουν στα έργα του ερωτηματολογίου προκειμένου να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση και το επίπεδο αυτών και τους κατατάσσουν σε πέντε κατηγορίες: προφίλ μη εκτίμησης, προφίλ εκκίνησης, βασικό προφίλ, προηγμένο προφίλ και διευρυμένο προφίλ. Οι παραπάνω κατηγορίες στρατηγικών προφίλ αποτελούν μια τροποποίηση σε σχέση με το όνομα και τον τρόπο προσδιορισμού που επέλεξαν αρχικά οι Lemonidis & Likidis (2019) αποσκοπώντας σε μια πιο οικονομική και λιγότερο περίπλοκη διαδικασία κατάταξης. Έτσι, σύμφωνα με αυτά ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει:

- *Προφίλ μη εκτίμησης* (κωδικός 0) : όταν εντοπίζονται σε έξι ή περισσότερα έργα στρατηγικές μη εκτίμησης (επιπέδου 0) ή σφάλματα.

- *Προφίλ εκκίνησης* (κωδικός 1) : όταν όλες οι στρατηγικές που χρησιμοποίησε ανήκουν στο επίπεδο 1 (Μετασχηματισμός 1).

- *Βασικό προφίλ* (κωδικός 2) : όταν όλες οι στρατηγικές που σημειώθηκαν προέρχονται από τα επίπεδα 1 (Μετασχηματισμός 1) και 2 (Μετασχηματισμός 2).

- *Προηγμένο προφίλ* (κωδικός 3) : όταν όλες οι στρατηγικές που κατάγράφηκαν προέρχονται από τα επίπεδα 1 (Μετασχηματισμός 1), 2 (Μετασχηματισμός 2) και 3 (Μετάφραση).

- *Διευρυμένο προφίλ (κωδικός 4) :* όταν έχει γίνει χρήση στρατηγικών και από τα 4 επίπεδα του μοντέλου.

2.6.4 Μέτρηση ευελιξίας

Μια τροποποίηση του αρχικού μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) προτείνεται στην παρούσα μελέτη και για τον τρόπο μέτρησης της ευελιξίας των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, διακρίνονται δύο τύποι ευελιξίας που αποδίδονται σε δύο διαφορετικές μεταβλητές. Η πρώτη αντιστοιχεί στην *ευελιξία 1* (DSN) και αφορά στον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών (Different Strategies Number) που χρησιμοποίησε κάθε εκπαιδευτικός στα 11 έργα του ερωτηματολογίου. Εάν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε 6 ή περισσότερες διαφορετικές στρατηγικές στα 11 έργα του ερωτηματολογίου, τότε συγκαταλέγεται στους ευέλικτους εκπαιδευτικούς. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός Ε17 χρησιμοποίησε τις στρατηγικές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 7 στα έντεκα προβλήματα του ερωτηματολογίου και έτσι, ως προς την ευελιξία 1, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ευέλικτος, καθώς παρουσιάζει DSN=7.

Πίνακας 7. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησε ο εκπαιδευτικός Ε17

Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7	Π8	Π9	Π10	Π11
0.2	1.2	1.2	ΛΕ	2.2	2.3	2.4	2.5	1.1	4	2.2

Ο δεύτερος τύπος ευελιξίας θεωρείται η ευελιξία 2 και αντιστοιχεί στη μεταβλητή SP (Strategic Power), η οποία ορίζεται ως το άθροισμα των γινομένων του κωδικού κάθε επιπέδου επί τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν και ανήκουν σε αυτό. Έτσι, καθώς έχουμε 5 επίπεδα στρατηγικών (0^o, 1^o, 2^o, 3^o, 4^o), αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των στρατηγικών που χρησιμοποίησε το άτομο σε κάθε επίπεδο είναι a, b, c, d και e αντίστοιχα, θα έχουμε την εξίσωση $SP = 0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d + 4 \cdot e$. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός Ε39 χρησιμοποίησε τις στρατηγικές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 8 στα έντεκα προβλήματα του ερωτηματολογίου και έτσι παρουσιάζει $SP = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 18$.

Πίνακας 8. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησε ο εκπαιδευτικός Ε39

Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7	Π8	Π9	Π10	Π11
1.2	2.2	1.2	2.1	2.2	ΛΕ	1.2	ΛΕ	3	4	2.2

Ο δείκτης αυτός μας επιτρέπει να μετρήσουμε την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί το άτομο συναρτήσει του επιπέδου αυτών. Έτσι, όσο μεγαλύτερη η ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί το άτομο και όσο υψηλότερου επιπέδου αυτές, τόσο υψηλότερη και η τιμή της μεταβλητής SP.

2.6.5 Μέτρηση προσαρμοστικότητας

Η ικανότητα προσαρμοστικότητας των εκπαιδευτικών, δηλαδή η ικανότητα να χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη στρατηγική εστιάζοντας στην ταχύτητα και την ακρίβεια της απάντησης, μετρήθηκε με τη μεταβλητή ADSN (Appropriate Different Strategies Number), η οποία αφορά στον αριθμό κατάλληλων στρατηγικών που επιλέχθηκαν από κάθε εκπαιδευτικό στα 11 έργα του ερωτηματολογίου. Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει τις κατάλληλες στρατηγικές των έργων του ερωτηματολογίου. Αυτές αποτελούν τον γρηγορότερο και καταλληλότερο τρόπο με τον οποίο μπορεί το άτομο να πραγματοποιήσει μια καλή εκτίμηση με την επιθυμητή ακρίβεια. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα Π9 η πρόσθεση 15,7 + 14,8 + 15,1 + 13,9 + 14,3 γίνεται πιο γρήγορα αν γίνει αντιληπτό ότι όλοι οι προσθετέοι βρίσκονται γύρω από την αριθμητική τιμή 15 και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό 15·5, δίχως να απομακρύνεται η απάντηση της εκτίμησης από το ακριβές αποτέλεσμα.

Πίνακας 9. Οι κατάλληλες στρατηγικές στα 11 έργα του ερωτηματολογίου

Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7	Π8	Π9	Π10	Π11
1.1	1.2	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	4	4

Εάν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε στα 11 έργα του ερωτηματολογίου 6 ή περισσότερες διαφορετικές στρατηγικές, τότε θεωρήθηκε ότι διαθέτει την ικανότητα της προσαρμοστικότητας. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός Ε11 χρησιμοποίησε τις στρατηγικές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 10 και έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν διαθέτει προσαρμοστικότητα, καθώς παρουσιάζει ADSN=5.

Πίνακας 10. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησε ο εκπαιδευτικός Ε11

	Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7	Π8	Π9	Π10	Π11
Κατάλληλη στρατηγική	1.1	1.2	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	4	4
Ε11	1.2	1.2	1.4	1.2	2.2	2.2	2.4	ΛΕ	3	ΕΟ	2.2

2.7 Αποτελέσματα δεδομένων

2.7.1 Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί

Από τη στατιστική ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων στο ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε ειδικά για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης προκύπτει ότι οι εκπαιδευτικοί ήταν ικανοί να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε ποσοστό 79,4%. Ο Πίνακας 11 παρουσιάζει τη συχνότητα χρήσης κάθε στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES καθώς και το ποσοστό των απαντήσεων που δεν περιλάμβαναν κάποια εκτίμηση.

Πίνακας 11. Συχνότητες και ποσοστά της χρήσης των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης

Επίπεδο Στρατηγικής/ Στρατηγική	N = 495 Συχνότητα (%)
4. Αντιστάθμιση	10 (2)
4. Αντιστάθμιση (προγενέστερη ή μεταγενέστερη)	10 (2)
3. Μετάφραση	6 (1,2)
3. Συσσώρευση ή Μέσος όρος	6 (1,2)
2. Μετασχηματισμός 2	189 (38,2)
2.5 Αντικατάσταση	22 (4,4)
2.4 Επιμεριστικότητα	38 (7,7)
2.3 Παραγοντοποίηση	9 (1,8)
2.2 Στρατηγική των ειδικών αριθμών	104 (21,1)
2.1 Στρατηγική των συμβατών αριθμών	16 (3,2)
1. Μετασχηματισμός 1	188 (38)
1.4 Στρατηγική εμπρόσθιου άκρου	16 (3,2)
1.3 Περικοπή	1 (0,2)
1.2 Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα	145 (29,3)
1.1 Στρογγυλοποίηση με χρήση του κανόνα	(5,3)
0. Μη εκτίμηση	102 (20,6)
0.3 Διαίσθηση	2 (0,4)
0.2 Ακριβής υπολογισμός κι έπειτα στρογγυλοποίηση	16 (3,2)
0.1 Ακριβής υπολογισμός	7 (1,5)
0.0 Τυχαία απάντηση	4 (0,8)
(ΛΠ) Λανθασμένη πράξη	6 (1,2)
(ΛΕ) Λανθασμένη εκτέλεση πράξης	41 (8,3)
(ΕΟ) Αποτέλεσμα εκτός ορίων	18 (3,6)
(ΔΑ) Καμία απάντηση	8 (1,6)

Η στρατηγική που φαίνεται να χρησιμοποιήθηκε συνολικά περισσότερο στο σύνολο των έργων είναι η *Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα* (145 φορές στα 495 έργα, ποσοστό 29,3%). Αν και τα προβλήματα που δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς ήταν σχεδιασμένα έτσι ώστε να δύνανται να λυθούν με περισσότερες από μία στρατηγικές, η στρατηγική της στρογγυλοποίησης κυριάρχησε στις περισσότερες συνεντεύξεις. Η επιλογή αυτή μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η στρογγυλοποίηση αποτελεί τη μοναδική στρατηγική που εντοπίζεται μέσα στα σχολικά εγχειρίδια και ως εκ τούτου, οι περισσότεροι ενήλικες, και δη οι εκπαιδευτικοί, νιώθουν μεγαλύτερη εξοικείωση. Από την άλλη, εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι η στρατηγική της *Στρογγυλοποίησης με τη χρήση του γνωστού κανόνα* καταγράφηκε σε πολύ μικρότερη συχνότητα (26 φορές στα 495, ποσοστό 5,3%). Το στοιχείο αυτό θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως καλή αντίληψη των εκπαιδευτικών της κατάστασης που περιγράφεται σε κάθε πρόβλημα. Η χρήση της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης με τη χρήση του κανόνα πολλές φορές μαρτυρά μια πιο τυποποιημένη χρήση των Μαθηματικών, ενώ αντίθετα η χρήση της στρογγυλοποίησης δίχως τη χρήση του κανόνα μας βοηθά να συμπεράνουμε ότι το άτομο λαμβάνει υπόψιν του τόσο το πλαίσιο όσο και την ταχύτητα απόκρισης.

Ακόμη, από τον Πίνακα 11 μπορούμε να δούμε πως, από τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης του $1^{ου}$ επιπέδου, η *Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου* εμφανίστηκε σε πολύ μικρό ποσοστό στο σύνολο των έργων του ερωτηματολογίου (3,2%). Παρόλα αυτά, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι 1 στους 3 εκπαιδευτικούς την επέλεξε ως κατάλληλη στρατηγική στο έργο Π3. Μπορεί δηλαδή να μην θεωρήθηκε ως κατάλληλη στην πλειοψηφία των έργων του ερωτηματολογίου, αλλά θεωρήθηκε από ένα μεγάλο ποσοστό των συμμετεχόντων κατάλληλη για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, του προβλήματος Π3. Αυτό συνέβη, διότι η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου συνήθως επιχειρείται σε πράξεις που περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς (είναι εύκολο και γρήγορο να προσθέσουμε πρώτα το ακέραιο μέρος των προσθετέων κι έπειτα το δεκαδικό). Το στοιχείο αυτό είναι ενθαρρυντικό, καθώς φανερώνει την ικανότητα της προσαρμοστικότητας ενός υψηλού ποσοστού εκπαιδευτικών σε προβλήματα τέτοιου είδους.

Από την άλλη, η στρατηγική της *Περικοπής* κατέχει στον Πίνακα 11 τη θέση της στρατηγικής με τη μικρότερη συχνότητα εμφάνισης, αφού απαντήθηκε μόνο μία φορά (0,2%) στο σύνολο των έργων. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι η Περικοπή συνιστά μια στρατηγική που απομακρύνει αρκετά την εκτίμηση από το ακριβές αποτέλεσμα, διότι λαμβάνεται υπόψιν μόνο το αριστερό ψηφίο των αριθμών και όχι τα υπόλοιπα δεξιά από αυτό. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι συμμετέχοντες επιδιώκουν να δώσουν αρκετά εγγύς εκτιμήσεις στην ακριβή λύση των προβλημάτων.

Στο επίπεδο του Μετασχηματισμού 2 ($2^{ο}$ επίπεδο του μοντέλου IHMCES) η στρατηγική που σημειώθηκε περισσότερες φορές ήταν αυτή των *Ειδικών αριθμών* (21,7%). Αν αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν πραγματοποιήθηκε κάποια εκτίμηση ή αυτές που οι εκπαιδευτικοί περιήλθαν σε σφάλμα, η Στρατηγική των ειδικών αριθμών έτεινε να χρησιμοποιείται σε 1 στις 4 εκτιμήσεις, πλησιάζοντας πάρα πολύ κοντά στη συχνότητα εμφάνισης της στρογγυλοποίησης (1 στις 3). Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν ληφθεί υπόψιν το γεγονός ότι η στρογγυλοποίηση είναι επίσημα διδαγμένη ως στρατηγική εκτίμησης, ενώ η στρατηγική των ειδικών αριθμών όχι. Από την άλλη, βέβαια, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι όλα τα έργα αφορούσαν (και) ποσοστά, ένα κεφάλαιο των Μαθηματικών που προσεγγίζεται ιδιαίτερα εύκολα και γρήγορα με τη χρήση σημείων αναφοράς (π.χ. 50%, 10%, 1%), επομένως οι συμμετέχοντες έτειναν να τα χρησιμοποιούν συχνά. Παρόλα αυτά, δεν παύει να συνιστά μια ιδιοσυγκρασιακή στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης, γι’ αυτό και αξίζει να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στο εύρημα αυτό.

Λόγω αυτού του γεγονότος, της μεγάλης συχνότητας εμφάνισης της στρατηγικής των ειδικών αριθμών εξαιτίας των ποσοστών, οι στρατηγικές του επιπέδου 2 στο σύνολό τους (38,2%) έφτασαν τα επίπεδα εμφάνισης με το σύνολο των στρατηγικών του $1^{ου}$ επιπέδου (38%). Έτσι, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να χρησιμοποιούν αρκετά και στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης υψηλότερου επιπέδου από το πρώτο, το οποίο περιλαμβάνει μόνο τη γνωστή σε όλους στρογγυλοποίηση και παραλλαγές αυτής.

Τέλος, στο επίπεδο 2 αρκετά κοντά ως προς τη συχνότητα χρήσης βρέθηκαν οι τρεις στρατηγικές της *Επιμεριστικότητας* (7,7%), της *Αντικατάστασης* (4,4%) και των *Συμβατών αριθμών* (3,2%), ενώ η στρατηγική της *Παραγοντοποίησης* σημείωσε τη μικρότερη συχνότητα εμφάνισης (1,8%).

Όσον αφορά στη στρατηγική του $3^{ου}$ επιπέδου, αυτού της Μετάφρασης, η στρατηγική της *Συσσώρευσης ή Μέσου όρου* χρησιμοποιήθηκε από μικρό αριθμό εκπαιδευτικών (1,2%), αποκλειστικά για το έργο Π9. Ως στρατηγική υψηλού επιπέδου και αδίδακτη επίσημα στο πρόγραμμα σπουδών, κατατάσσεται στις σπάνιες επιλογές ενός ατόμου και βασίζεται στην καλή αίσθηση του αριθμού που το ίδιο το άτομο ιδιοσυγκρασιακά έχει αναπτύξει. Είναι αρκετά απαιτητικό να καταλάβει κάποιος πως η αλλαγή της δομής του προβλήματος (π.χ. από πρόσθεση σε πολλαπλασιασμό) θα οδηγήσει σε πιο γρήγορα αλλά εξίσου αξιόπιστα αποτελέσματα.

Στο τελευταίο και υψηλότερο επίπεδο των στρατηγικών, η στρατηγική της *Αντιστάθμισης* εμφανίστηκε, επίσης, σε πολύ χαμηλό ποσοστό (2%). Το αποτέλεσμα αυτό δικαιώνει την κατάταξή της στο υψηλότερο επίπεδο ιεράρχησης των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων στρατηγικών με σκοπό μια ακριβέστερη εκτίμηση δυσκολεύει τους εκτιμητές, είναι πιο δύσκολο να αναπτυχθεί ιδιοσυγκρασιακά και πιθανόν χρειάζεται να προηγηθεί διδασκαλία και εξάσκηση.

Τέλος, ένα ακόμη αξιοσημείωτο αποτέλεσμα που φαίνεται στον Πίνακα 11 είναι ο αριθμός των περιπτώσεων που κατατάσσονται στην κατηγορία της *Μη εκτίμησης*. Ένα μεγάλο ποσοστό, το 20,6% των απαντήσεων των συμμετεχόντων, δεν περιλάμβανε κάποια εκτίμηση. Επρόκειτο είτε για ακριβείς υπολογισμούς είτε για σφάλματα. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως θα μπορούσε να είναι διαφορετικό σε άλλη περίπτωση, διότι κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων αρκετοί ήταν οι εκπαιδευτικοί που έδειξαν σημάδια άγχους, μάλλον διότι γνώριζαν την ερευνήτρια και ίσως αυτό τους επηρέασε στο να κάνουν λανθασμένους υπολογισμούς.

2.7.2 Κατάταξη των εκπαιδευτικών σε στρατηγικά προφίλ

Στον Πίνακα 12 παρουσιάζονται τα στρατηγικά προφίλ των εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης, όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεών τους στα έργα του προφορικού πρωτόκολλου. Η συντριπτική πλειοψηφία αυτών (64,4%) κατέχει *Βασικό προφίλ* υπολογιστικής εκτίμησης, αποτέλεσμα που θα μπορούσε να θεωρηθεί αναμενόμενο, καθότι ήταν εξ αρχής γνωστό ότι οι συμμετέχοντες δεν είχαν λάβει συγκεκριμένη επιμόρφωση αναφορικά με τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και επομένως δεν αναμένονταν επιδόσεις υψηλού επιπέδου.

Πίνακας 12. Προφίλ Εκπαιδευτικών

Προφίλ	Κωδικός	Συχνότητα	Ποσοστό
Μη εκτίμησης	0	2	4,4%
Εκκίνησης	1	3	6,7%
Βασικό	2	29	64,4%
Προηγμένο	3	3	6,7%
Διευρυμένο	4	8	17,8%
Σύνολο	-	45	100%

Το αμέσως επόμενο υψηλότερο ποσοστό (17,8%) ανήκει στην κατηγορία του *Διευρυμένου προφίλ*, καθώς υπήρξαν 8 εκπαιδευτικοί από τους 45 που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της *Αντιστάθμισης* και συγκεκριμένα στο σύνολό τους τη στρατηγική της μεταγενέστερης αντιστάθμισης. Εδώ, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων αρκετοί εκπαιδευτικοί, αφού πραγματοποιούσαν μία εκτίμηση με τη βοήθεια μιας στρατηγικής, στη συνέχεια αποκρίνονταν πως το σωστό αποτέλεσμα είναι «λίγο λιγότερο» ή «λίγο περισσότερο» από την απάντηση που μόλις είχαν δώσει, δίχως όμως να προσδιορίζουν πόσο λιγότερο ή πόσο περισσότερο ήταν αυτό. Άλλες φορές ανέφεραν έναν αριθμό διαισθητικά, δίχως να πραγματοποιούν επιπλέον υπολογισμούς. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός Ε10 στο πρόβλημα Π10 («*Για τη χθεσινή συναυλία στο θέατρο Δάσους τα εισιτήρια είχαν εξαντληθεί από νωρίς. Σύμφωνα με τις νέες οδηγίες του ΕΟΔΥ, η πληρότητα θέσεων επιτρέπεται να είναι 75%. Εκτιμήστε πόσος κόσμος παρακολούθησε τη συναυλία, αν είναι γνωστό ότι ο χώρος διαθέτει 3.800 θέσεις.*») απάντησε «*Βρίσκω το 75% του 4.000 που είναι 3.000 θέσεις και βγάζω και κάτι ακόμα, άρα 2.900 θέσεις*». Σε αυτού του είδους τις περιπτώσεις, αν και οι εκπαιδευτικοί έτειναν να πραγματοποιήσουν μια αντιστάθμιση προκειμένου η εκτίμησή τους να βρίσκεται εγγύτερα στο ακριβές αποτέλεσμα, η απάντησή τους δεν καταγράφηκε στις στρατηγικές του επιπέδου 4, καθώς θεωρήθηκε ως μια πιο υποβαθμισμένη κατηγορία αντιστάθμισης που εκτελείται διαισθητικά και όχι ως ένας συνειδητός υπολογισμός. Παρόλα αυτά, τόσο το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί που χρησιμοποίησαν στρατηγικές του 4^{ου} επιπέδου, όσο και το ότι αρκετοί ήταν εκείνοι που είχαν τη θέληση να κάνουν μια διόρθωση, έστω και εμπειρικά, είναι ιδιαίτερα θετικό, διότι φανερώνει την επιθυμία τους να πραγματοποιούν όσο το δυνατόν ακριβέστερες εκτιμήσεις.

Όσον αφορά τις υπόλοιπες κατηγορίες στρατηγικών προφίλ, στο *προφίλ εκκίνησης* καταγράφηκε το ίδιο ποσοστό με το *προηγμένο προφίλ* (6,7%), ενώ υπήρξαν και 2 εκπαιδευτικοί που δεν κατάφεραν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε περισσότερα από 6 προβλήματα του ερωτηματολογίου (4,4%), μπαίνοντας έτσι στην κατηγορία του *προφίλ μη εκτίμησης*.

2.7.3 Ευελιξία των εκπαιδευτικών

Στο πλαίσιο επίλυσης ενός συνόλου αριθμητικών προβλημάτων έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε εάν τα άτομα επιλέγουν κάθε φορά την ίδια στρατηγική προκειμένου να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση ή αν είναι περισσότερο ευέλικτοι στον τρόπο που σκέφτονται και υπολογίζουν, δηλαδή αν διαθέτουν ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Από την στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων αρχικά διερευνήθηκε η *ευελιξία 1* (DSN), τουτέστιν ο αριθμός των διαφορετικών στρατηγικών (Different Strategies Number) που χρησιμοποίησε κάθε συμμετέχοντας στα 11 έργα του ερωτηματολογίου. Στον Πίνακα 13 παρουσιάζεται η κατάταξη των εκπαιδευτικών που έλαβαν μέρος στην έρευνα σε ευέλικτους και μη ευέλικτους, σύμφωνα με τα κριτήρια που σημειώθηκαν στην ενότητα 2.6.4.

Πίνακας 13. Συχνότητες και ποσοστά της ευελιξίας 1 των εκπαιδευτικών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Ευέλικτοι	10	22,2%
Μη ευέλικτοι	35	77,8%
Σύνολο	45	100%

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι το 77,8% των εκπαιδευτικών δεν διαθέτουν μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και επομένως εντάσσονται στην κατηγορία *Μη ευέλικτοι*. Μόνο το 1/5 αυτών απέκτησε τον χαρακτηρισμό *Ευέλικτος*, καθώς χρησιμοποίησε σωστά 6 ή περισσότερες διαφορετικές στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης.

Πέρα από το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, ενδιαφέρον έχει να εντοπιστεί και το επίπεδο αυτών. Για το λόγο αυτό η *ευελιξία 2* εξετάστηκε με τον δείκτη SP (Strategic Power), μια μεταβλητή που εκφράζει αφενός τον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν σωστά από κάθε συμμετέχοντα και αφετέρου το επίπεδο στο οποίο αυτές ανήκουν. Στον Πίνακα 14, όπου παρουσιάζονται οι τιμές της μεταβλητής SP, παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο μέρος του πλήθους των εκπαιδευτικών κινήθηκε σε μεσαία τιμές, καταγράφοντας μέσο όρο 13,89 στα 24, που είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η μεταβλητή βάσει της καταλληλότερης στρατηγικής επίλυσης κάθε προβλήματος.

Πίνακας 14. Συχνότητες και ποσοστά της ευελιξίας 2 των εκπαιδευτικών

Μέγεθος	Συχνότητα	Ποσοστό	Μέσος όρος ευελιξίας 2
[0 – 5)	0	0%	
[5 – 10)	9	20%	
[10 – 15)	15	33,3%	13,888
[15 – 20)	17	37,8%	
[20 – 25]	4	8,9%	
Σύνολο	45	100%	

2.7.4 Προσαρμοστικότητα των Εκπαιδευτικών

Πέρα όμως το πλήθος των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί και το επίπεδο αυτών, η μελέτη αυτή σχεδιάστηκε έτσι ώστε να διερευνηθεί επιπλέον το κατά πόσο οι συμμετέχοντες επέλεξαν να υπολογίσουν βάσει του πλαισίου κάθε προβλήματος και της ταχύτητας απάντησης. Το στοιχείο αυτό ερευνήθηκε μέσω της μεταβλητής ADSN (Appropriate Different Strategies Number). Στον Πίνακα 15 παρουσιάζεται το ποσοστό των εκπαιδευτικών που φάνηκε ότι διαθέτει προσαρμοστική ικανότητα.

Πίνακας 15. Συχνότητες και ποσοστά της προσαρμοστικότητας των εκπαιδευτικών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Προσαρμοστικοί	6	13,3%
Μη προσαρμοστικοί	39	86,7%
Σύνολο	45	100%

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 15, μόνο το 13,3% των συμμετεχόντων κατάφερε να εντοπίσει την κατάλληλη στρατηγική εκτίμησης του εκάστοτε προβλήματος σε 6 ή περισσότερα από τα έργα του ερωτηματολογίου. Το στοιχείο αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί από το γεγονός προηγούμενο αποτέλεσμα. Καθώς οι εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, δεν έχουν στη διάθεσή τους αρκετές μεθόδους ώστε να εντοπίσουν την καταλληλότερη για κάθε περίπτωση. Εδώ φανερώνεται και η ανάγκη διδακτικής παρέμβασης στους εκπαιδευτικούς, έτσι ώστε να αποκτήσουν πιο πολλά όπλα στην φαρέτρα τους, να εξοικειωθούν με περισσότερες μαθηματικές καταστάσεις και να εντοπίζουν ευκολότερα τον τρόπο που θα τους οδηγήσει σε μια γρήγορη και σωστή εκτίμηση.

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

3.1 Κύρια Ευρήματα

Στην παρούσα έρευνα έγινε προσπάθεια να διερευνηθεί η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα που περιλαμβάνουν ποσοστά. Μέσω προφορικών συνεντεύξεων οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε 11 έργα. Η ιεραρχική ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης βάσει ενός τροποποιημένου μοντέλου της μεθόδου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) βοήθησε να διαμορφωθεί μια συνολική εικόνα του τύπου των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, του στρατηγικού προφίλ τους, της ικανότητας ευελιξίας τους και της ικανότητας προσαρμοστικότητάς τους. Με τον πρώτο τύπο ευελιξίας μετρήθηκε η ποικιλία των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα άτομο σε μια ομάδα προβλημάτων, ενώ με τον δεύτερο τύπο ευελιξίας αξιολογήθηκε η δυναμική αυτών των στρατηγικών, ανάλογα με το επίπεδο στο οποίο βρίσκονταν. Με τη διερεύνηση της προσαρμοστικότητας των συμμετεχόντων μελετήθηκε η ικανότητά τους να επιλέγουν την καταλληλότερη στρατηγική προκειμένου να εκτιμήσουν γρήγορα και σωστά, λαμβάνοντας υπόψη το πλαίσιο των προβλημάτων.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη είναι ότι οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σημειώνουν μέτριες επιδόσεις υπολογιστικής εκτίμησης. Από τη στατιστική ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών προέκυψε ότι οι περισσότεροι διαθέτουν βασικό προφίλ ικανότητας εκτίμησης. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με άλλες έρευνες που έγιναν σε ενήλικες φοιτητές και εκπαιδευτικούς όσον αφορά στην υπολογιστική εκτίμηση (Dowker, 1996; Alajmi, 2009; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014). Σύμφωνα με αυτές τόσο οι φοιτητές εκπαίδευσης όσο και οι εκπαιδευτικοί άλλων βαθμίδων δεν διαθέτουν ποικιλία στρατηγικών.

Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας, οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη έτειναν να χρησιμοποιούν πιο συχνά από όλες τη στρατηγική της Στρογγυλοποίησης, στοιχείο αναμενόμενο, καθώς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία η στρατηγική της Στρογγυλοποίησης έρχεται πρώτη στις επιλογές μεθόδων εκτίμησης τόσο των μαθητών όσο και των ενηλίκων (Lemaire, 2000; Anestakis & Desli, 2014; Lemonidis & Likidis; 2019). Η στρατηγική της Στρογγυλοποίησης αποτελεί τη μοναδική μέθοδο εκτίμησης που διδάσκεται το άτομο κατά τη διάρκεια της μαθητικής του ζωής και για τον λόγο αυτό συνιστά εκείνη με την οποία είναι και περισσότερο εξοικειωμένο. Σε αντίθεση, όμως, με άλλα ευρήματα της βιβλιογραφίας (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014) ένας σημαντικός αριθμός εκπαιδευτικών του δείγματος χρησιμοποίησε τη Στρατηγική των Ειδικών αριθμών. Στη μελέτη των Lemonidis et al. (2014) παρατηρήθηκε ότι οι περισσότεροι καθηγητές δεν γνώριζαν κι επομένως δεν χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική των Ειδικών αριθμών. Το αποτέλεσμα της παρούσας έρευνας μπορεί να ερμηνευτεί από την παρουσία των ποσοστών στα έργα του δοθέντος ερωτηματολογίου, καθώς όλα τα προβλήματα εμπεριείχαν ποσοστά, ένα πεδίο των Μαθηματικών που σχετίζεται άμεσα με τους ειδικούς αριθμούς και τα σημεία αναφοράς.

Όσον αφορά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, η στατιστική ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξε ότι οι περισσότεροι από αυτούς διαθέτουν βασικό προφίλ ικανότητας εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι η πλειοψηφία των δασκάλων χρησιμοποιεί κατά τη διαδικασία εκτίμησης στρατηγικές από το πρώτα δύο επίπεδα του μοντέλου ιεράρχησης των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης IHMCES, δηλαδή είτε στρατηγικές στρογγυλοποίησης είτε στρατηγικές που ανασυνθέτουν τα αριθμητικά δεδομένα με σκοπό πιο εύκολους και γρήγορους υπολογισμούς. Ιδιαίτερα λίγοι ήταν οι εκπαιδευτικοί που βρέθηκαν με προηγμένο ή διευρυμένο προφίλ, καθώς οι στρατηγικές αλλαγής δομής του προβλήματος ή αυτές της αντιστάθμισης, δηλαδή κάποιας προσαρμογής αποσκοπώντας σε ακριβέστερη εκτίμηση, απαντήθηκαν πολύ λίγες φορές.

Η στατιστική ανάλυση των απαντήσεων του ερωτηματολογίου σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα φανέρωσε ότι ο αριθμός των εκπαιδευτικών που διαθέτουν μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι μικρός. Οι περισσότεροι στερούνται ποικιλίας στρατηγικών, ενώ εκείνες που επιλέγουν στην πλειοψηφία των προβλημάτων ανήκουν στα χαμηλότερα επίπεδα στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Παρόμοια αποτελέσματα που υποδεικνύουν τη μικρή ευελιξία των εκπαιδευτικών βρίσκονται στη βιβλιογραφία και σε άλλες μελέτες (Levine, 1982; Goodman, 1991). Η πλειοψηφία των ατόμων που ασχολούνται με την εκπαίδευση (φοιτητές, δάσκαλοι, καθηγητές) γνωρίζουν περιορισμένο αριθμό στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης με αποτέλεσμα να μη δύνανται να είναι ευέλικτοι σε μία γκάμα διαφόρων ειδών αριθμητικών έργων.

Τέλος, στην παρούσα έρευνα θεωρήθηκε σκόπιμο να διερευνηθεί η προσαρμοστικότητα των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς η ένδειξη αυτής μπορεί να μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την αποτελεσματικότητα με την οποία ένα άτομο χειρίζεται τις στρατηγικές στην υπολογιστική εκτίμηση. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν κατάφερε να εντοπίσει τις κατάλληλες στρατηγικές εκτίμησης στα περισσότερα έργα. Καθώς οι εκπαιδευτικοί ήταν εξοικειωμένοι με μικρό αριθμό στρατηγικών, δεν τους ήταν εύκολο να επιλέξουν την κατάλληλη στρατηγική μέσα από ένα τόσο περιορισμένο ρεπερτόριο.

3.2 Συζήτηση

Καθώς το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη αυτή συμφωνεί με τα υπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχουν σημαντικά περιθώρια βελτίωσης της επίδοσης των εκπαιδευτικών στον τομέα της υπολογιστικής εκτίμησης. Για να «μετακινηθεί» η πλειοψηφία των δασκάλων από το βασικό προφίλ ικανότητας εκτίμησης σε κάποιο ανώτερο και για να αυξηθούν οι επιδόσεις τους στην υπολογιστική εκτίμηση, συνίσταται εκπαιδευτική παρέμβαση. Είναι σημαντικό να μη ξεχνάμε πως το μεγαλύτερο μέρος του συνόλου των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί έχει αναπτυχθεί ιδιοσυγκρασιακά. Για τον λόγο αυτό, ένα μεθοδευμένο πρόγραμμα παρέμβασης θα βοηθούσε σημαντικά τους εκπαιδευτικούς να γνωρίσουν περισσότερες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και να εξοικειωθούν με διαφορετικά πλαίσια αριθμητικών προβλημάτων, έτσι ώστε να αποκτήσουν περισσότερα όπλα στη «φαρέτρα» τους (ανάπτυξη ευελιξίας) και να γίνουν ικανοί, μέσω μιας πιο έμπειρης πλέον ματιάς, να επιλέγουν την κατάλληλη κάθε φορά στρατηγική που θα τους οδηγήσει πιο γρήγορα αλλά και έγκυρα σε μία καλή εκτίμηση (ανάπτυξη προσαρμοστικότητας).

Πέρα, όμως, από το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται πρωτίστως οι ίδιοι επιμόρφωση πάνω στις μεθόδους υπολογιστικής εκτίμησης, σημαντικό θα είναι να τροποποιηθεί και το πρόγραμμα σπουδών της χώρας αλλά και τα σχολικά εγχειρίδια, ώστε να επιμορφωθούν στη συνέχεια και οι μαθητές της χώρας μας στον τομέα της υπολογιστικής εκτίμησης, μιας ικανότητας τόσο χρήσιμης και άμεσα συνδεδεμένης με την ενήλικη ζωή των σύγχρονων πολιτών. Ο απώτερος στόχος μας πρέπει να αποβλέπει στο ότι οι μαθητές θα έχουν την ικανότητα να εκτελούν υπολογισμούς με διαφορετικούς τρόπους και θα μπορούν να χρησιμοποιούν νοερές μεθόδους, διότι αναπτύσσοντας ικανότητες υπολογιστικής εκτίμησης, θα αναπτύξουν καλύτερη αίσθηση του αριθμού (Reys, 1992), θα είναι σε θέση να κάνουν αυτοέλεγχο, θα μπορούν να αξιολογούν τα αποτελέσματα των αριθμομηχανών και ταυτόχρονα θα επιλύουν πιο γρήγορα και πιο σωστά μαθηματικά προβλήματα.

3.3 Περιορισμοί

Η παρούσα μελέτη ήταν μια έρευνα μικρής κλίμακας. Η βολική δειγματοληψία δεν κατοχυρώνει την πλήρη αξιοπιστία της, γεγονός που δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, αν και έγινε μια προσπάθεια να διερευνηθούν οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης των εκπαιδευτικών σε προβλήματα που περιλαμβάνουν ποσοστά, υπάρχουν πολλές ακόμη κατηγορίες προβλημάτων με ποσοστά, οι οποίες δεν ήταν εφικτό να ενταχθούν στο πλαίσιο του ερωτηματολογίου. Για να μπορέσουμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα σχετικά με την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε προβλήματα με ποσοστά, θα πρέπει να μελετήσουμε πώς ανταποκρίνονται οι εκπαιδευτικοί και σε άλλες κατηγορίες αριθμητικών προβλημάτων που τα περιλαμβάνουν. Τέλος, κατά τη διαδικασία των προφορικών συνεντεύξεων θα ήταν προτιμότερο οι συμμετέχοντες να μη γνωρίζουν προσωπικά τον/την ερενητή/ρια, για να μην έχουν το άγχος τής αξιολόγησής τους από τον ίδιο/α.

3.4 Προτάσεις για μελλοντικές μελέτες

Παρά τη μικρή κλίμακα της παρούσας μελέτης, τα κύρια ευρήματά της έρχονται σε συμφωνία με αρκετές έρευνες του πεδίου αυτού, ενώ ταυτόχρονα προχωρούν ένα βήμα παρακάτω, οπότε η ίδια θα μπορούσαμε να πούμε ότι δύναται να αποτελέσει το εφαλτήριο για περεταίρω διερεύνηση. Δεδομένου ότι μια «γρήγορη» εκτίμηση είναι συχνά επιθυμητή, μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξετάσουν πόσο καλά πραγματοποιούν εκτιμήσεις τα άτομα με τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών, όταν υπάρχουν χρονικοί περιορισμοί. Ακόμη, θα μπορούσε να διερευνηθεί με ποια κριτήρια επιλέγει το άτομο τη στρατηγική που θα χρησιμοποιήσει και πώς αυτή σχετίζεται με το μαθηματικό αντικείμενο του προβλήματος; Επηρεάζεται από παράγοντες όπως το είδος των αριθμών ή το πλαίσιο του προβλήματος; Τι αποτελέσματα μπορεί να επιφέρει μια επιμόρφωση στους εκπαιδευτικούς, τόσο στις δικές τους ικανότητες υπολογιστικής εκτίμησης όσο και σε εκείνες των μαθητών τους; Αυτά είναι μερικά από τα ερωτήματα που θα υπήρχε ενδιαφέρον να εξετασθούν στο εγγύς μέλλον.

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A. H., (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education Volume 12, Number 4*, 263-283, DOI: 10.1007/s10857-009-9106-3

Anestakis, P., Desli, D. (2014). Computational estimation in the Greek primary school: Tasks proposed for its teaching. *MENON: Journal of Educational Research.* 1st Thematic issue, 75-89.

Anestakis, P., Lemonidis, C. (2014). Computational estimation in an adult secondary school: A teaching experiment. *MENON: Journal of Educational Research.* 1st Thematic issue, 28-45.

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools* (pp. 184–194). Buckingham: Open University Press.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority (2015). *Mathematics: Sequence of achievement*. Retrieved from https://australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/pdf-documents/.

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). *Mental Computation Strategies for Part-Whole Numbers.* Paper presented at the International Educational Research Conference, Auckland.

Case, R., & Sowder, J. T. (1990). *The development of computational estimation: A neo-Piagetian analysis. Cognition and Instruction*, 7, 79-104.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/Math/.

Curriculum Council of Western Australia. (1998). *Curriculum framework for Kindergarten to Year 12 education in Western Australia.* Perth: Author.

De Castro, C., Segovia, I., & Castro, E. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi

(Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 193-200). Norwich, UK.

Department for Education (2013). *The National curriculum in England: Key stages 1 and 2 framework document*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/collections/national-curriculum.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ., (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between Computational Estimation and Problem Solving. *International Electronic Journal of mathematics Education*, 15(3).

Dole, S. (2004). Rethinking percent instruction in the middle grades. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp. 137-147). Perth: MASTEC, Edith Cowan University.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45–55. doi:10.2307/749163.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harriss, L., & Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition*, 2(2), 113-135.

Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 59-73.

Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics, Retrieved from http://www.lsalliance.org/wpcontent/uploads/2016/10/Japanese_COS_Teaching Guide_en.pdf.

Glatzer, D.J. (1984). Teaching Percentage: Ideas and Suggestions. *The Arithmetic Teacher*, 31/6:, pp. 24-26

Gliner, G. (1991) Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: types of problems and previous mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 595-606.

Goodman, T. (1991). Computational estimation skills of pre-service elementary teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 259-272.

Hall Jr, L. T. (1984). Estimation and Approximation--Not Synonyms. *Mathematics teacher*, 77(7), 516-17.

Jacobs Danan, J. A., & Gelman, R. (2017). The problem with percentages. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 373(20160519), 1–10.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11, 95-132.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141–148. doi:10.1037/h0087336.

Lemaire, P., Lecacheur, M., (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology* 82, 281–304.

Lemonidis, C. & Likidis, N. (2019). Integrated hierarchical model of computational estimation strategies of 5th grade students. *International Journal of Mathematical Education In Science and Technology.* Issue 1, 84-106.

Lemonidis, C., Nolka, E., & Nikolantonakis, K. (2014). Students' behavior in computational estimation correlated with their problem-solving ability. *Menon: Journal of Educational Research.* 1st Thematic Issue, p.46-60 (7).

Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013) Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Reasearch*, Issue 2b, 86-98.

Lemonidis, Ch., Mouratoglou, A. & Pnevmatikos D. (2014) Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *Menon: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue*, 147-158.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, Νοεροί υπολογισμοί, Λογαράζω με το τζιμίδι μ'*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί Υπολογισμοί και Εκτιμήσεις, Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 350-359.

M.E.C. (1992). Propuestas de secuencia matemáticas. [Prposals for mathematics sequences.] Editorial Escuela Española. S.A. Madrid.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, 24(2), 145-154.

McIntosh, A. J. (2002). *Developing informal written computation*. Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education, Brisbane: University of Queensland

Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (2006). Kerndoelen primair onderwijs. [Key objectives primary education]. Retrieved from http://www.slo.nl/primair/kerndoelen/Kerndoelenboekje.pdf/.

Montague, M., & Van Garderen, D. (2003). A cross-sectional study of mathematics achievement, estimation skills, and academic self-perception in students of varying ability. *Journal of learning disabilities*, 36(5), 437-448. (41)

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Northcote, M. and McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4 (1), p. 19—21

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65(4),* 421-481.

Reys R., Reys B., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. & Shimizu, K. (1991b) Estimation Performance and strategy use of fifth and eighth grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 22, (1), 39-58.

Reys, B., Reys, R. & Penafiel, A. (1991a) Estimation Performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 353-375.

Reys, R. (1984). Mental Computation and Estimation: Past, Present, and Future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 547-557. (39)

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 183–201.

Reys, R. E., Trafton, P. R., Reys, B. B., & Zawojewski, J. (1984). *Developing computational esti- mation materials for the middle grades*. Final Report NSF Grant No. NSF 81/13601. Columbia, MO: University of Misouri.

Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 396-405). Rzeszow, Pologne: CERME

Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 106-119.

Segovia, I. Castro. E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics didactics department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(1), 499-536.

Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review, 27*, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.01.002

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, 41(5), 619-625.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). *Development of numerical estimation: A review*. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 197-212). New York: Psychology Press.

Sowder, J. & Wheeler, M. (1989) The development of concepts and strategies used in computational estimation. *J.R.M.E.*, 20, 130-146.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behrs (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York, NY: Macmillan.

Sowder, J.T. (1984) Computational Estimation Procedures of School Children, *The Journal of Educational Research*, 77:6, 332-336, DOI: 10.1080/00220671.1984.10885551

Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools* (pp. 161–171). Buckingham: Open University Press.

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. *Research in Mathematics Education*, 2(1), 77-90

Tsao, YL. (2013). *Computational Estimation and Computational Estimation Attitudes of Pre-service Elementary Teachers*. US-China Education Review B, ISSN 2161-6248. November 2013, Vol. 3, No. 11, 835-846 (29)

Tsao, YL., Pan, T. (2011). Study on the Computational Estimation Performance and Computational Estimation Attitude of Elementary School Fifth Graders in Taiwan. Online Submission, *US-China Education Review* v8 n3 p264-275 Mar 2011 (1)

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.

Whitacre, I. (2015). Strategy ranges: Describing change in prospective elementary teachers' approaches to mental computation of sums and differences. Journal of Mathematics Teacher Education, 2015(18), 353–373.

5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

φύλο:	επίπεδο σπουδών:
σχολείο εργασίας:	χρόνια εργασίας:

1. Ο Γιάννης πρέπει να διανύσει με το αυτοκίνητό του μία απόσταση 1000 km. Την 1η ημέρα έκανε 491 km και τη 2η ημέρα 278 km. Εκτιμήστε πόσο % της διαδρομής έχει ολοκληρώσει;

2. Ένα τρένο διανύει το 56,18% της συνολικής του διαδρομής σε 4,89 ώρες. Εκτιμήστε πόσο % περίπου της συνολικής διαδρομής διανύει σε 1 ώρα.

3. Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσοστών:
   1,26%   4,79%   0,99%   1,37%   2,58%

4. Ο κύριος Διονύσης ρώτησε τα παιδιά ποιο είναι το αγαπημένο τους άθλημα. Το 51,9% δήλωσε το ποδόσφαιρο, το 12,6% δήλωσε το μπάσκετ, το 19,7% το βόλεϊ, το 8,3% το τένις και τα υπόλοιπα παιδιά δήλωσαν το πινγκ-πονγκ. Εκτιμήστε ποιο ποσοστό στα % αποτελούν τα παιδιά που δήλωσαν ότι αγαπούν πιο πολύ το πινγκ-πονγκ.

5. Σε μία συσκευασία 826 ml αρώματος το 9,84% είναι αιθέριο έλαιο. Εκτιμήστε πόσα περίπου ml είναι το αιθέριο έλαιο;

6. Εκτιμήστε το ακόλουθο αποτέλεσμα: 8,1% · 150 γρ, για να βρείτε τα γραμμάρια πρωτεΐνης που περιέχει ένα επιδόρπιο γιαουρτιού.

7. Από κάθε φράουλα παίρνουμε κατά μέσο όρο 73 mg βιταμίνης C. Η Δανάη έφαγε 11 φράουλες. Εκτιμήστε πόσο % της ημερήσιας πρόσληψης βιταμίνης C πήρε, αν γνωρίζετε ότι ο γιατρός τής συνέστησε να λαμβάνει 1000 mg ημερησίως.

8. Η Αλίκη περπάτησε 2/3 km το πρωί και 1/5 km το απόγευμα. Εκτιμήστε πόσο % του km περπάτησε συνολικά.

9. Στις τελευταίες εκλογές του Δήμου Ιωαννιτών σημειώθηκαν τα εξής αποτελέσματα:
   - Α’ παράταξη: 15,7%
   - Β’ παράταξη: 14,8%
   - Γ’ παράταξη: 15,1%
   - Δ’ παράταξη: 13,9%
   - λευκό/άκυρο: 14,3%

   Εκτιμήστε πόσος περίπου κόσμος πήγε να ψηφίσει, αν είναι γνωστό ότι ο δήμος έχει καταγεγραμμένους 101.050 δημότες.

10. Για τη χθεσινή συναυλία στο θέατρο Δάσους τα εισιτήρια είχαν εξαντληθεί από νωρίς. Σύμφωνα με τις νέες οδηγίες του ΕΟΔΥ, η πληρότητα θέσεων επιτρέπεται να είναι 75%. Εκτιμήστε πόσος κόσμος παρακολούθησε τη συναυλία, αν είναι γνωστό ότι ο χώρος διαθέτει 3.800 θέσεις.

11. Εκτιμήστε πόσο είναι περίπου το 15% των 148€.