ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Κατεύθυνση: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος

Διπλωματική εργασία

Επίλυση Ανοιχτών και Κλειστών Προβλημάτων σε μαθητές ηλικίας 11-12 ετών

της

Λογοθέτη Αρχοντίας

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Α.Π.Θ.
Μέλη Τριμελούς Επιτροπής: Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.
Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Φλώρινα, Ιούλιος 2021

Πίνακας περιεχομένων

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία και τη φοίτησή μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών», θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα άτομα που με βοήθησαν με την παρούσα εργασία. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την επόπτριά μου κυρία Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια του Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ., για όλη την υποστήριξη και τη βοήθεια που μου πρόσφερε από τη στιγμή που ξεκίνησε η συνεργασία μας μέχρι το τέλος της, την άμεση ανταπόκρισή της σε κάθε προβληματισμό μου και την εμπιστοσύνη της. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κύριο Ιωάννη Παπαδόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. και τον κύριο Χαράλαμπο Σακονίδη, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δ.Π.Θ. για τη συνεργασία και τη βοήθειά τους.

Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά την κυρία Ζωή Γεροστάθη, διευθύντρια του 1ου Δημοτικού Σχολείου Αγριάς που μου πρόσφερε μεγάλη βοήθεια στην εύρεση συμμετεχόντων για την πραγματοποίηση της έρευνάς μου, καθώς και όλους τους διευθυντές και εκπαιδευτικούς που μου επέτρεψαν να μπω στις τάξεις τους σε μια τόσο ιδιαίτερη σχολική χρονιά. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη συμμετοχή τους όλες τις μαθήτριες και όλους τους μαθητές που δέχθηκαν να συμμετέχουν στην έρευνά μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου αλλά και όλους τους δικούς μου ανθρώπους που με υποστήριξαν ψυχολογικά κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με σκοπό να διερευνήσει τις ικανότητες των μαθητών ηλικίας 11-12 ετών κατά την επίλυση ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στα μαθηματικά. Ειδικότερα, εξετάστηκε ποιες από τις ικανότητες επίλυσης κλειστών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές, ποιες από τις ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων καθώς και το πώς σχετίζονται οι δύο αυτές ομάδες ικανοτήτων μεταξύ τους. Στην έρευνα συμμετείχαν 100 μαθητές Στ΄ δημοτικού οι οποίοι κλήθηκαν να λύσουν ένα κλειστό και ένα ανοιχτό πρόβλημα ακολουθώντας τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος του Polya και να απαντήσουν σε τέσσερις ερωτήσεις για κάθε πρόβλημα που σκοπό είχαν τη διερεύνηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων. Οι ικανότητες που διερευνήθηκαν ήταν οι εξής: για το 1^{ο} στάδιο, η ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων και η οπτική αναπαράσταση του προβλήματος, για το 2^{ο} στάδιο, η ικανότητα δημιουργίας σχεδίου λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους και η ικανότητα επιλογής κατάλληλης στρατηγικής, για το 3^{ο} στάδιο, η ικανότητα πραγματοποίησης σωστών πράξεων, η δημιουργική ικανότητα, κι επιπλέον, σε όσους έδωσαν σωστή λύση, η ικανότητα επιλογής ενός οικονομικού και ενός ποιοτικού τρόπου λύσης, και τέλος, για το 4^{ο} στάδιο, η ικανότητα ελέγχου της ορθότητας της λύσης και η ικανότητα κριτικής σκέψης, μέσω της διερεύνησης του αν η λύση που δόθηκε ήταν λογική. Διαπιστώθηκε ότι η ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων και η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης του προβλήματος έχουν αναπτυχθεί ως ένα βαθμό καθώς και στα δύο προβλήματα. Επίσης, αναδείχθηκε ότι η ικανότητα δημιουργίας σχεδίου λύσης δεν έχει κατακτηθεί ακόμα και, κατ’ επέκταση, λίγοι ήταν οι μαθητές που φάνηκε να επέλεξαν στο συγκεκριμένο στάδιο τη σωστή στρατηγική με την οποία θα λύσουν τα δύο προβλήματα. Ακόμα, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών έχει αναπτύξει την ικανότητα πραγματοποίησης σωστών υπολογισμών και οι περισσότεροι από όσους έλυσαν σωστά είτε το κλειστό, είτε το ανοιχτό πρόβλημα, είτε και τα δύο, ακολούθησαν έναν οικονομικό τρόπο λύσης ενώ αρκετοί ήταν αυτοί που πρότειναν λύση χαμηλής ποιότητας στο ανοιχτό πρόβλημα. Αναφορικά με την ικανότητα δημιουργικής σκέψης, φάνηκε ότι δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα από την πλειοψηφία των μαθητών αλλά παρατηρήθηκε ότι προωθήθηκε περισσότερο κατά τη λύση του ανοιχτού προβλήματος. Ακόμα, οι περισσότεροι από όσους ακολούθησαν το 4^{ο} στάδιο φάνηκε να έχουν αναπτύξει αρκετά την ικανότητα να επαληθεύουν την ορθότητα της λύσης τους ενώ η κριτική σκέψη βρίσκεται ακόμα υπό ανάπτυξη. Επιπρόσθετα, οι περισσότεροι μαθητές έχουν αναπτύξει τη μεταγνωστική ικανότητα της δηλωτικής γνώσης και την ικανότητα γνώσης υπό όρους. Ακόμα, φάνηκε ότι λίγοι είναι οι μαθητές που έχουν μεταγνωστική επίγνωση και λιγότεροι από τους μισούς μαθητές που δήλωσαν σίγουροι για την ορθότητα της λύσης τους έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα και λίγο περισσότεροι από τους μισούς που δήλωσαν βεβαιότητα για τη λύση τους στο ανοιχτό πρόβλημα τα έλυσαν πράγματι σωστά, αναδεικνύοντας ότι δεν έχουν αναπτύξει ακόμα τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης.

Λέξεις-κλειδιά: ανοιχτό πρόβλημα, κλειστό πρόβλημα, ικανότητες επίλυσης προβλήματος, μεταγνωστικές ικανότητες, αξιοποίηση ανοιχτών προβλημάτων

ABSTRACT

The present research was conducted in order to investigate the skills of 11-12 years old students in solving open-ended and closed problems in mathematics. In particular, it was examined which of the problem-solving skills of closed problems the students have developed, which of the problem-solving skills of open-ended problems they have developed, as well as how these two groups of skills are related to each other. The study involved 100 primary school students who were asked to solve a closed and an open-ended problem following the four problem-solving stages of Polya and to answer four questions for each problem aimed to explore metacognitive skills. The skills that were investigated are the following: at the 1st stage, the ability to identify data of the problem and the visual representation of the problem, at the 2nd stage, the ability to create a solution plan by setting intermediate goals and the ability to choose an appropriate strategy, at the 3rd stage , the ability to perform correct mathematical operations, the creative ability, and in addition, to those who gave the right solution, the ability to choose an economical and a qualitative solution, and finally, at the 4th stage, the ability to check the correctness of the solution and the critical thinking ability, by investigating whether the solution given was logical. It was found that the ability to locate data and the ability to visually represent the problem have been developed to some degree in both problems. It also turned out that the ability to create a solution plan has not been mastered and consequently, only few students seemed to have chosen, at this stage, the right strategy to solve the two problems. In addition, the vast majority of students have developed the ability to make correct calculations and most of those who correctly solved either the closed or the open problem, or both, followed an economical way of solving while many were those who suggested a low quality solution to the open-ended problem. Regarding the ability of creative thinking, it seemed that it has not yet been developed by the majority of students, but it was observed that it was further promoted in solving the open-ended problem. Moreover, most of those who followed the 4th stage seemed to have developed considerable ability to verify the correctness of their solution while critical thinking is still under development. Furthermore, most students have developed the metacognitive ability of declarative knowledge and the ability of conditional knowledge. It appeared that not many students are metacognitively aware and less than half of the students who said they were sure of the correct solution regarding the closed problem solved it, indeed correctly. Moreover, a little more than half of the students who said they were sure of the solution to the open-ended problem solved it, indeed correctly, showing that they have not yet developed the metacognitive capacity of evaluation, showing that they have not yet developed the metacognitive capacity of evaluation.

Key words: open-ended problem, closed problem, problem-solving skills, metacognitive skills, utilization of open-ended problems

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί μεγάλο ενδιαφέρον αναφορικά με την επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά τόσο στην Ελλάδα όσο και σε όλο τον κόσμο. Μάλιστα, η επίλυση προβλημάτων κατέχει κεντρική θέση στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών. Επιπλέον, όλο και συχνότερα εντοπίζεται η χρήση μη-τυποποιημένων προβλημάτων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα μη-τυποποιημένα προβλήματα είναι προβλήματα που είναι πολύ πιθανό να είναι άγνωστα στους μαθητές και τα οποία έχουν γνωστικές απαιτήσεις πέραν αυτών που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων ρουτίνας, ακόμα και όταν οι μαθητές έχουν αποκτήσει τις γνώσεις και τις δεξιότητες που απαιτούνται για τη λύση τους, σύμφωνα με τους Mullis et al. (2003, οπ. αναφ. Kolovou, Van Den Heuvel-Panhuizen, & Bakker, 2011). Σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων ανήκουν και τα ανοιχτά προβλήματα (open-ended problems), τα οποία, σύμφωνα με τον Yee (2002), θεωρούνται «μη δομημένα προβλήματα» (ill-structured problems) επειδή δεν είναι σαφώς διατυπωμένα καθώς λείπουν δεδομένα ή υποθέσεις και δεν υπάρχει σταθερή διαδικασία που να εγγυάται τη σωστή λύση.

Η ιδέα της ένταξης ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει αναπτυχθεί και επεκταθεί με διάφορους τρόπους μέσω της συνεργασίας ερευνητών και σχολικών δασκάλων και έχει υλοποιηθεί σε πραγματικές τάξεις μαθηματικών στην Ιαπωνία. Η αξιοποίηση ανοιχτών μαθηματικών προβλημάτων, στο πλαίσιο της υιοθέτησης της μεθόδου ανοιχτής προσέγγισης (open approach method), στοχεύει στο να προσφέρει τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά με βάση τις προσωπικές δυνατότητες του καθενός, επιτρέποντάς τους να καθορίσουν οι ίδιοι τη μάθηση σε ένα βαθμό. Επιπλέον, τα ανοιχτά προβλήματα πληρούν τις προϋποθέσεις-αρχές της μεθόδου ανοιχτής προσέγγισης που είναι: 1) η αυτονομία των δραστηριοτήτων των μαθητών, 2) η εξελικτική και αναπόσπαστη φύση των μαθηματικών γνώσεων, δηλαδή το γεγονός ότι όσο πιο ουσιαστική είναι η γνώση, τόσο πιο κατανοητά αντλεί αναλογική, ειδική και γενική γνώση και 3) η παροχή κυρίαρχης θέσης στις απροσδόκητες ιδέες των μαθηματικών. (Nohda, 2000)

Μέσα από το πλήθος ερευνών που μελέτησαν την αξιοποίηση της επίλυσης ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών αναδείχθηκαν, μεταξύ άλλων, οι ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυσή τους. Επιπλέον, παρατηρήθηκε συχνή αναφορά στα στάδια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος και φάνηκε ότι οι ικανοί λύτες προσεγγίζουν τα προβλήματα ακολουθώντας αυτά τα στάδια και εμφανίζοντας συγκεκριμένες ικανότητες σε καθένα από αυτά. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, το πλήθος και η ποικιλία των ικανοτήτων που έχουν καταγραφεί αποτέλεσαν την αφορμή για την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας με στόχο τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 11-12 ετών κατά την επίλυση ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στα μαθηματικά. Με βάση αυτόν τον στόχο προέκυψαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: 1) Ποιες από τις ικανότητες επίλυσης κλειστών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές;, 2) Ποιες από τις ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές;, 3) Πώς σχετίζονται οι δύο ομάδες ικανοτήτων μεταξύ τους; Η επιλογή των ικανοτήτων η ύπαρξη των οποίων διερευνήθηκε έγινε με βάση τα ερευνητικά ευρήματα σχετικά με τις ικανότητες επίλυσης ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στα μαθηματικά σε συνδυασμό με τις ικανότητες που εμφανίζουν οι ικανοί λύτες κατά την επίλυση προβλήματος. Απώτερος σκοπός της πραγματοποίησης μιας τέτοιας έρευνας είναι η καταγραφή των ικανοτήτων που έχουν αναπτύξει οι μαθητές αλλά και αυτών που δεν έχουν αποκτήσει ακόμα. Με βάση τη βιβλιογραφική αναζήτηση θεωρείται πιθανό να αναδειχθεί ότι κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν και συνεπώς ωθούνται να αναπτύξουν εκείνες τις ικανότητες που απαιτούνται και για την επίλυση ενός κλειστού προβλήματος και ακόμα περισσότερες. Έτσι, υπό το πρίσμα της επαλήθευσης της παραπάνω υπόθεσης, τα ανοιχτά προβλήματα θα μπορούσαν να αποκτήσουν σημαντική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών τουλάχιστον στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου με σκοπό την ανάπτυξη των ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση τόσο των ανοιχτών όσο και των κλειστών προβλημάτων.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ο σκοπός της σχολικής εκπαίδευσης σε όλον τον κόσμο είναι κοινός σε γενικές γραμμές και αυτός είναι ο «εφοδιασμός» των μαθητών με γνώσεις, ικανότητες και στάσεις που θα τους βοηθήσουν να είναι ανεξάρτητοι, να παίρνουν πρωτοβουλίες, να έχουν κριτική σκέψη και να μπορούν να διαχειρίζονται τις καταστάσεις που θα καλούνται να αντιμετωπίζουν κατά τη διάρκεια της ζωής τους σε διάφορους τομείς (Pehkonen, 1999). Σύμφωνα με τους Blumenfeld et al. (1991, όπ. αναφ. Pehkonen, 1999), η ενεργητική μάθηση μπορεί να συμβάλει στη «δημιουργία» τέτοιων ατόμων καθώς ωθεί τους μαθητές στην ενασχόληση με ρεαλιστικά προβλήματα η επίλυση των οποίων μπορεί να βρει εφαρμογή και στην καθημερινή ζωή και ταυτόχρονα στηρίζεται στις βάσεις του κονστρουκτιβισμού προωθώντας την αντίληψη ότι κάθε άτομο διαμορφώνει τις γνώσεις του ενεργά. Η ενεργητική μάθηση μπορεί να συμβεί όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με προβλήματα που αποτελούν ανοιχτά περιβάλλοντα μάθησης όπως οι έρευνες και τα project. Μάλιστα, είναι διεθνώς αποδεκτό ότι τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών καθώς δίνουν έμφαση στην κατανόηση και τη δημιουργικότητα (Nohda 1991, Silver 1993, Stacey 1995, όπ. αναφ. Pehkonen, 1999). Γενικότερα, μελετώντας τη βιβλιογραφία από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σε ανοιχτά και κλειστά μαθηματικά προβλήματα διαπιστώθηκε ότι και τα δύο είδη προβλημάτων μπορούν να αξιοποιηθούν στην τάξη για διαφορετικούς στόχους και ως «εργαλεία» άντλησης διαφορετικού είδους πληροφοριών για τους λύτες (Sullivan, Warren, White & Suwarsono, 1998 · Sullivan, Warren, & White, 2000).

2.1 Πρόβλημα

Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία διαπιστώνεται ότι η κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης απέχει πολύ από μια συναινετική θεώρηση του όρου «πρόβλημα» (Schoenfeld 1992, Lester 1994, Arcavi & Friedlander 2007, όπ. αναφ. Xenofontos & Andrews, 2014). Για παράδειγμα, κάποιοι θεωρούν τα προβλήματα ως ασκήσεις ρουτίνας που χρησιμοποιούνται για την εδραίωση νέων μαθηματικών τεχνικών και γνώσεων και άλλοι τα βλέπουν ως εργασίες των οποίων η πολυπλοκότητα τις καθιστά πραγματικά προβληματικές ή αλλιώς μη-τυποποιημένα προβλήματα (Schoenfeld 1992, Goos et al. 2000). Άλλοι μελετητές πρότειναν να θεωρούνται προβλήματα όσες μαθηματικές εργασίες περιλαμβάνουν «την εφαρμογή των μαθηματικών σε μια κατάσταση όπου υπάρχει ένας σαφώς καθορισμένος στόχος» (Haylock & Cockburn 2008, 229). Ωστόσο, παρόλο που οι στόχοι μπορούν να καθοριστούν με σαφήνεια, οι διαδικασίες με τις οποίες επιτυγχάνονται ποικίλλουν σημαντικά ανάλογα με την εργασία που παρουσιάζεται και ο λύτης είναι ανίκανος να φτάσει στον στόχο χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες γνώσεις του ή/και δεν υπάρχει κανένας προσιτός αλγόριθμος που να καθορίζει εντελώς τη μέθοδο διεκπεραίωσής της διαδικασίας που πρέπει να ακολουθηθεί από τον λύτη έτσι ώστε να λύσει το πρόβλημα. Έτσι πρέπει να σκεφτεί έναν τρόπο για να χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες που έχει στη διάθεσή του για να φτάσει στη λύση του προβλήματος (Pólya 1945 · Kantowski, 1977 · Buchanan, 1987 · Blum & Niss, 1991 · Lester, 1980, όπ. αναφ. Siswono, 2008 · Nunokawa 2005, όπ. αναφ. Xenofontos & Andrews, 2014). Με βάση αυτή τη θεώρηση, η πολυπλοκότητα του προβλήματος δεν έγκειται στο πρόβλημα αλλά στον λύτη, ως συνάρτηση των γνώσεων, της εμπειρίας και της ψυχικής του κατάστασης (Schoenfeld 1985 · Borasi 1986). Επιπλέον, τα μαθηματικά προβλήματα διακρίνονται με βάση το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζονται σε προβλήματα που είναι καθαρά μαθηματικά και σε προβλήματα που εφαρμόζονται και σε πραγματικές καταστάσεις (Blum & Niss 1991 · Chapman 2006). Αυτή η διάκριση επιτρέπει στη μαθηματική δομή ενός προβλήματος να υπάρχει και στις δύο κατηγορίες και μπορεί να βρεθεί στους σκοπούς και τους στόχους των πιο γνωστών διεθνών αξιολογήσεων της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, με τις διάφορες αναλύσεις TIMSS που αφορούν τις πρώτες και τις διάφορες μελέτες PISA που εξετάζουν την τελευταία. Τέλος, σύμφωνα με τον Schoenfeld (1983, σελ. 41, όπ. αναφ. Carlson & Bloom, 2005), «ένα πρόβλημα είναι πράγματι πρόβλημα (όπως οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν τη λέξη) εάν δεν ξέρουμε πώς να το λύσουμε». Ένα πρόβλημα που δεν διαφυλάσσει «εκπλήξεις» και μπορεί να λυθεί άνετα με ρουτίνες ή γνωστές διαδικασίες (ανεξάρτητα από το πόσο δύσκολο) είναι μια άσκηση και όχι πρόβλημα». (Xenofontos & Andrews, 2014)

2.1.1 Διάκριση ανοιχτών – κλειστών προβλημάτων

Σύμφωνα με τον Pehkonen (1997), ένα πρόβλημα είναι «κλειστό» αν η αρχική του κατάσταση και η κατάσταση του στόχου είναι κλειστή, δηλαδή εξηγείται ακριβώς. Έτσι όρισε την έννοια «ανοιχτό» πρόβλημα ως ένα πρόβλημα του οποίου η αρχική κατάσταση ή/ και η κατάσταση του στόχου είναι ανοιχτές. Επιπλέον, σύμφωνα με την Yee (2002), τα κλειστά προβλήματα είναι «καλά δομημένα» σε ό,τι αφορά τις διατυπωμένες εργασίες οι οποίες είναι σαφείς και η σωστή απάντηση μπορεί πάντα να προσδιοριστεί με κάποιους καθορισμένους τρόπους με βάση τα απαραίτητα δεδομένα που δίνονται στην κατάσταση του προβλήματος. Έτσι, τα κλειστά προβλήματα περιλαμβάνουν προβλήματα ρουτίνας τα οποία έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο και η λύση τους προκύπτει έπειτα από την υλοποίηση πολλαπλών βημάτων, καθώς και προβλήματα τα οποία δεν είναι ρουτίνας και βασίζονται σε κάποια ευρετική. Ακόμα, η Yee (2002) αναφέρει ότι τα ανοιχτά προβλήματα (open-ended problems) συχνά θεωρούνται «μη δομημένα προβλήματα» (ill-structured problems) επειδή δεν είναι σαφώς διατυπωμένα καθώς λείπουν δεδομένα και δεν υπάρχει σταθερή διαδικασία που να εγγυάται τη σωστή λύση. Πολλά από τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου όπως π.χ. «Πόσο νερό και πόσα χρήματα μπορεί να εξοικονομήσει ένα σχολείο κατά την εκστρατεία "Εξοικονόμηση νερού";» εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία (Yee, 2002).

2.1.2 Είδη ανοιχτών προβλημάτων

Έπειτα από συστηματική βιβλιογραφική αναζήτηση αναφορικά με τη χρήση προβλημάτων κατά την επίλυση προβλήματος, η Foong (1990) ταξινόμησε τα προβλήματα που προτείνονται για τους μαθητές του 21ου αιώνα σε προβλήματα κλειστού τύπου και σε προβλήματα ανοιχτού τύπου, στα οποία συγκαταλέγονται και οι μαθηματικές διερευνήσεις και τα project. Τα προβλήματα ανοιχτού τύπου μπορεί να είναι: 1) προβλήματα από εγχειρίδια των οποίων η κατάσταση του προβλήματος έχει μετατραπεί από κλειστή σε ανοιχτή, είτε μέσω της απόκρυψης κάποιων δεδομένων, είτε μέσω της επεξήγησης των εννοιών που εμπλέκονται στο πρόβλημα, είτε μέσω αλλαγής στην απόδοσή τους ώστε να ζητούν την διατύπωση προβλήματος από τον λύτη (problem posing) ή 2) εφαρμοσμένα προβλήματα με ρεαλιστικό περιεχόμενο, δηλαδή που αναφέρεται σε ζητήματα της καθημερινής ζωής (Yee, 2002). Με βάση τον ορισμό του Pehkonen (1997) για τα ανοιχτά προβλήματα αλλά και την κατηγοριοποίηση του Reitman (1965) , σύμφωνα με τον Shuk-kwan (1997, όπ. αναφ. Pehkonen, 1997), έχουμε τρεις τύπους ανοιχτών προβλημάτων: 1) τα ανοιχτά προβλήματα όπου η αρχική κατάσταση είναι ανοιχτή (πραγματικές καταστάσεις από την καθημερινή ζωή – real-life situations, παραλλαγές προβλήματος – problem variations), 2) τα ανοιχτά προβλήματα όπου η τελική κατάσταση είναι ανοιχτή (προβλήματα με παραπάνω από μία σωστή λύση – open-ended problems, πραγματικές καταστάσεις – real-life situations, έρευνες – investigations, πεδία προβλημάτων – problem fields, παραλλαγές προβλήματος – problem variations) και 3) τα ανοιχτά προβλήματα όπου τόσο η αρχική όσο και η τελική κατάσταση είναι ανοιχτές (πραγματικές καταστάσεις – real-life situations, παραλλαγές προβλημάτων – problem variations, projects, διατύπωση προβλήματος – problem posing).

2.2 Επίλυση προβλήματος

Η επίλυση προβλημάτων είναι ένας από τους πιο θεμελιώδεις στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλά και ένας από τους πιο ασύλληπτους. Ένας από τους απώτερους σκοπούς της διδασκαλίας είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να διεξάγουν μαθηματικές έρευνες μόνοι τους και να προσδιορίσουν πού τα μαθηματικά που έχουν μάθει είναι εφαρμόσιμα σε πραγματικές καταστάσεις (Stacey, 2005).

Σύμφωνα με τους Chapman (1997), Avcu & Avcu (2010) και Xenofontos & Andrews (2012, όπ. αναφ. Xenofontos & Andrews, 2014), η βιβλιογραφία έχει επισημάνει τρεις κυρίαρχες αντιλήψεις σχετικά με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων: επίλυση προβλημάτων ως διαδικασία, επίλυση προβλημάτων ως μαθηματικός στόχος και επίλυση προβλημάτων ως εκπαιδευτική προσέγγιση. Με βάση την κατηγοριοποίηση των μαθηματικών προβλημάτων της Yee (1990, όπ. αναφ. Yee, 2002), υπό το πρίσμα της επίλυσης προβλημάτων ως εκπαιδευτική προσέγγιση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εκμεταλλευτούν τα προβλήματα με τρεις τρόπους στη διδασκαλία. Πρώτον, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους στην επίλυση προβλημάτων (διδασκαλία για επίλυση προβλημάτων). Αυτού του είδους η αξιοποίηση αντικατοπτρίζει την άποψη ότι τα μαθηματικά διδάσκονται έχοντας κατά νου την επίλυση προβλημάτων. Δεύτερον, τα προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκμάθηση νέων μαθηματικών γνώσεων καθώς και του τρόπου με τον οποίο αυτές οι γνώσεις σχετίζονται με τις ήδη υπάρχουσες (διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλημάτων). Τρίτον, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επικεντρωθούν στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (διδασκαλία σχετικά με την επίλυση προβλημάτων). (Yee, 2002 · Xenofontos & Andrews, 2014)

Από την άλλη πλευρά, οι Stanic και Kilpatrick (1989, όπ. αναφ. Schoenfeld, 1992), κάνοντας μια ιστορική επισκόπηση της επίλυσης προβλημάτων, κατέληξαν σε μια τρισκελή κατηγοριοποίηση της επίλυσης προβλήματος με βάση τη χρήση της: 1) επίλυση προβλημάτων ως πλαίσιο (problem solving as context), 2) επίλυση προβλημάτων ως ικανότητα (problem solving as skill) και 3) επίλυση προβλημάτων ως τέχνη (problem solving as art). Στη πρώτη περίπτωση, τα προβλήματα χρησιμοποιούνται ως φορείς στην εξυπηρέτηση άλλων στόχων, όπως για την αιτιολόγηση της διδασκαλίας των μαθηματικών, για την παροχή κινήτρων, για διασκέδαση για εξάσκηση και ως μέσο ανάπτυξης νέων δεξιοτήτων. Στην δεύτερη περίπτωση, με βάση την έρευνα του Thorndike η οποία αποδόμησε την άποψη ότι η εκμάθηση δεξιοτήτων συλλογιστικής σε τομείς όπως τα μαθηματικά θα οδηγούσε απλά σε γενικά βελτιωμένη απόδοση συλλογιστικής σε άλλους τομείς, τονίζεται ότι επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι σημαντική όχι μόνο ως εργαλείο αλλά και ως δεξιότητα. Τέλος, στην τρίτη κατηγορία των Stanic και Kilpatrick (1989), η επίλυση προβλημάτων θεωρείται «τέχνη» καθώς υποστηρίζεται ότι η πραγματική επίλυση προβλημάτων (δηλαδή, προβλημάτων που προκαλούν «προβληματισμό») είναι η καρδιά των μαθηματικών, αν όχι τα ίδια τα μαθηματικά. (Schoenfeld, 1992)

Οι παραπάνω προσεγγίσεις και αναλύσεις της επίλυσης προβλήματος αναδεικνύουν ότι τα τελευταία χρόνια έγινε εμφανές πως η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων αξίζει ιδιαίτερη προσοχή. Αυτή η εστίαση και το έντονο ενδιαφέρον έχει δημιουργήσει σύγχυση αναφορικά με τον όρο «επίλυση προβλήματος». Σύμφωνα με τον Reitman (1965, όπ. αναφ. Klavir & Hershkovitz, 2008), είναι συνηθισμένο να δηλώνεται ότι ένα άτομο ασχολείται με την «επίλυση προβλήματος» όταν δεν έχει άμεσα διαθέσιμα μέσα για να φτάσει στη λύση ενός προβλήματος, ενώ σύμφωνα με τους Szetela & Nicol (1992), η επίλυση προβλήματος είναι η διαδικασία αντιμετώπισης μιας νέας κατάστασης, διαμόρφωσης ερωτήσεων μεταξύ δεδομένων γεγονότων, προσδιορισμού του στόχου και διερεύνησης πιθανών στρατηγικών για την επίτευξη του στόχου. Όσον αφορά στα μαθηματικά, σύμφωνα με τους Lester & Kehle (2003, όπ. αναφ. Nunokawa, 2005), η επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι μια διαδικασία σκέψης στην οποία ένας λύτης προσπαθεί να κατανοήσει μια προβληματική κατάσταση χρησιμοποιώντας μαθηματικές γνώσεις που έχει και προσπαθεί να αποκτήσει νέες πληροφορίες σχετικά με αυτήν την κατάσταση έως ότου να μπορεί να «επιλύσει την ασάφεια που υπάρχει».

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1987), το 1957 εμφανίστηκε το πιο σημαντικό έργο της εποχής αναφορικά με την επίλυση προβλήματος, το «How to solve it» του Polya, καθώς αποτέλεσε σημείο καμπής τόσο για τον συγγραφέα, όσο και για τη μαθηματική εκπαίδευση και για τον κόσμο της επίλυσης προβλημάτων. Στο «How to solve it» περιγράφονται από τον Polya τέσσερις φάσεις που λαμβάνουν χώρα κατά την επίλυση ενός προβλήματος: 1) η κατανόηση του προβλήματος, 2) η επινόηση ενός σχεδίου, 3) η εκτέλεση του σχεδίου και 4) η αναδρομή – έλεγχος (Schoenfeld, 1987). Σύμφωνα με τους Carlson και Bloom (2005), το 1982 οι Garofalo και Lester περιέγραψαν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ως αποτελούμενη από τέσσερις φάσεις διαφορετικών μεταγνωστικών δραστηριοτήτων: 1) του προσανατολισμού, 2) της οργάνωσης, 3) της εκτέλεσης και 4) της επαλήθευσης. Στη βιβλιογραφία καταγράφονται, επίσης, κι άλλες κατηγοριοποιήσεις των φάσεων που περνά ένας λύτης κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος αλλά σε γενικές γραμμές, όλες αποτελούν επέκταση ή συμπύκνωση των τεσσάρων φάσεων του Polya.

Παρόλο που τα στάδια επίλυσης προβλήματος αποτελούν σημαντική βοήθεια στην ενασχόληση του λύτη με το εκάστοτε πρόβλημα, η προσεκτική ακολούθησή τους δεν επαρκεί πάντα για να φτάσει στη λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1987), ο Polya στο έργο του «How to solve it» προτείνει ευρετικές. Οι ευρετικές – στρατηγικές είναι κανόνες για την επίτευξη προόδου σε δύσκολα προβλήματα. Υπάρχουν, για παράδειγμα, ευρετικές – στρατηγικές για την κατανόηση ενός προβλήματος (εστίαση στο άγνωστο, στα δεδομένα, σχεδίαση διαγράμματος κ.λπ.), για την εκπόνηση ενός σχεδίου (εκμετάλλευση σχετικών προβλημάτων, ανάλογων προβλημάτων, εργασία προς τα πίσω κ.λπ.) και για τη διεξαγωγή και τον έλεγχο μιας λύσης (Schoenfeld, 1987). Επιπλέον, έχουν καταγραφεί πολλές ευρετικές – στρατηγικές που μπορεί να βοηθήσουν στην επίλυση ενός προβλήματος όπως: 1) η διατύπωση και ο έλεγχος υπόθεσης, 2) η επίλυση απλούστερου προβλήματος, 3) η κατασκευή πίνακα (μοτίβο → γενικός κανόνας), 4) η χρήση αναπαράστασης, 5) η αντίστροφη επίλυση και 6) η αναζήτηση μοτίβου κανονικότητας (Κολέζα, 2017).

2.3 Ικανός λύτης

Σύμφωνα με τον Polya (2004) «ικανός λύτης προβλημάτων» είναι αυτός που συχνά θέτει στον εαυτό του ερωτήματα που αφορούν κάθε στάδιο επίλυσης, τα οποία διευκολύνουν την παρακολούθηση των διαδικασιών που ακολουθούνται σε κάθε στάδιο. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985) οι ικανοί λύτες σκέφτονται καλύτερες στρατηγικές, τις οποίες εφαρμόζουν πιο αποτελεσματικά από τους αδύναμους λύτες και παράλληλα η μεταγνώση τους διαφέρει σημαντικά από αυτή των αδύναμων. Σύμφωνα με τον Flavell (1981, οπ. αναφ. Lioe, Fai, & Hedberg, 2006), η μεταγνώση αναφέρεται στην ευαισθητοποίηση των μαθητών για τις δικές τους γνωστικές διαδικασίες και τη ρύθμιση αυτών για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου. Ακόμα, σύμφωνα με τους Carlson και Bloom (2005) «ικανός λύτης» είναι εκείνος που έχει στην κατοχή του πολλές και ορθά συνδεδεμένες γνώσεις και πλούσια σχήματα, μπορεί να ελέγχει τις προσπάθειές του κατά την επίλυση του προβλήματος και ενδιαφέρεται για την κομψότητα των λύσεων. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Mayer (1992, οπ. αναφ. Μώκος, 2012) ένας λύτης προβλήματος μπορεί να χαρακτηριστεί ως «ικανός» αν είναι σε θέση να αναγνωρίσει τον τύπο του προβλήματος και να σκεφτεί τη σωστή λύση μέσα από την επεξεργασία των δεδομένων του.

Επιπρόσθετα, όπως αναφέρεται στο How to solve it (Polya, 2004) ο ικανός λύτης ακολουθεί τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος. Κατά το πρώτο στάδιο, εντοπίζει τα χρήσιμα δεδομένα και τα διαχωρίζει από τα περιττά (Foong, 1994 · Polya, 2004), κατανοεί σημασιολογικά το πρόβλημα, διαδικασία μετάφρασης που σύμφωνα με τους Mayer et al. (1984, όπ. αναφ. Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998) απαιτεί τις περισσότερες από τις γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για την κατανόηση κάθε άλλου είδους κειμένου, δημιουργεί μαθηματικές σχέσεις και αναπαριστά το πρόβλημα (Krutetski, 1976 · Montague & Bos, 1990 · Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998 · Borovik & Gardiner, 2007). Μάλιστα, η αναπαράσταση, δηλαδή η κατασκευή ενός νοητικού μοντέλου, σύμφωνα με τον Mayer (1981, 1992, οπ. αναφ. Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998) είναι εξαιρετικά σημαντική για την καθοδήγηση των μελλοντικών επιλογών του λύτη κατά την επίλυση του προβλήματος. Ακόμα, δε φοβάται να μη «χαθεί» ή δυσκολευτεί κατά τη διαδικασία επίλυσης (Schoenfeld, 1987 · Borovik & Gardiner, 2007). Στο δεύτερο στάδιο δημιουργεί συνδέσεις με άλλα προβλήματα (Polya, 2004), συνδέει και οργανώνει τα δεδομένα για να κατασκευάσει σχέδιο λύσης του προβλήματος (Foong, 1994 · Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998 · Borovik & Gardiner, 2007) και παρουσιάζει ευελιξία στο σχεδιασμό, σκεπτόμενος διαφορετικούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος (Leikin, 2007). Το σχέδιο λύσης που κατασκευάζει είναι οργανωμένο έτσι ώστε να γνωρίζει ακριβώς σε ποιον ενδιάμεσο στόχο θα τον οδηγήσει κάθε του βήμα (Krutetski, 1976). Επιπλέον, σε αυτό το στάδιο ο ικανός λύτης μπορεί να κατηγοριοποιήσει το πρόβλημα κι έτσι να κάνει συνδέσεις με άλλα παρόμοια προβλήματα που έχει λύσει του και γνωρίζει πως να λύσει παρόμοια προβλήματα (Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998 · Borovik & Gardiner, 2007). Στο τρίτο στάδιο αναζητά την πιο ποιοτική λύση (Polya, 2004) που αποτελεί ταυτόχρονα και την πιο σαφή και οικονομική, δηλαδή εκείνη που απαιτεί την πραγματοποίηση των λιγότερων πράξεων (Krutetski, 1976 · Foong, 1994). Ακόμα, παρουσιάζει ευελιξία υιοθετώντας διαφορετικές στρατηγικές όποτε χρειάζεται (ευελιξία) ώστε να φτάσει στην επίλυση της εκάστοτε κατάστασης (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009) και ευχέρεια καθώς μπορεί να εφαρμόσει πλήθος στρατηγικών μέχρι να βρει την καταλληλότερη και μάλιστα κάποια από αυτές μπορεί να είναι πρωτότυπη (Leikin, 2007). Στο τέταρτο στάδιο ο ικανός λύτης ελέγχει αν έχει βρει το ζητούμενο του προβλήματος και αν το αποτέλεσμα που βρήκε είναι λογικά σωστό (Polya, 1998, όπ. αναφ. Καϊμάκη, 2017). Επίσης, ο ικανός λύτης έχει προχωρημένη μαθηματική σκέψη και για αυτό τον λόγο προσεγγίζει εκ νέου το πρόβλημα αναζητώντας κι άλλον τρόπο λύσης (Zaskis & Applebaum, 2007, οπ. αναφ. Leikin, 2007).

Τέλος, σύμφωνα με τους Fortunato, Hecht, Tittle και Alvarez (1991, όπ. αναφ. Kapa, 2001), οι ικανοί λύτες αξιοποιούν μεταγνωστικές ικανότητες καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος. Μάλιστα, σύμφωνα με τους Baker (1989) και Schraw & Moshman (1995, όπ. αναφ. Hargrove & Nietfeld, 2015), η ταξινόμηση της μεταγνώσης περιλαμβάνει τη γνώση της γνώσης (knowledge of cognition) και τη ρύθμιση της γνώσης (regulation of cognition). Η γνώση της γνώσης αποτελείται από ρητή γνώση της δηλωτικής και διαδικαστικής μνήμης, καθώς και της «υπό όρους» γνώσης, δηλαδή της γνώσης για το «γιατί», «πότε» και «πού» να χρησιμοποιηθούν στρατηγικές. Σύμφωνα με τον Magno (2009), στο πλαίσιο των Schraw και Dennison (1994) η γνώση της γνώσης αποτελείται από τρεις υπο-επεξεργασίες που περιλαμβάνουν: 1) τη δηλωτική γνώση (declarative knowledge), δηλαδή τη γνώση σχετικά με τις δεξιότητες, τους πνευματικούς πόρους και τις ικανότητες ενός εκπαιδευόμενου, 2) τη διαδικαστική γνώση (procedural knowledge), δηλαδή τη γνώση σχετικά με τον τρόπο εφαρμογής μαθησιακών διαδικασιών (στρατηγικές) και 3) τη γνώση υπό όρους (conditional knowledge), δηλαδή τη γνώση σχετικά με το πότε και γιατί να χρησιμοποιηθούν διαδικασίες μάθησης. Από την άλλη, η ρύθμιση της γνώσης αποτελείται από γνώσεις σχετικά με τον προγραμματισμό, την παρακολούθηση και την αξιολόγηση. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Magno (2009), στο πλαίσιο των Schraw και Dennison (1994), η ρύθμιση της γνώσης αποτελείται από τις υπο-επεξεργασίες που περιλαμβάνουν: 1) τον σχεδιασμό (Planning), δηλαδή σχεδιασμός και καθορισμός στόχων και κατανομή πόρων πριν από τη μάθηση, 2) τις στρατηγικές διαχείρισης πληροφοριών (Information Management Strategies), δηλαδή δεξιότητες και ακολουθίες στρατηγικής που χρησιμοποιούνται για την αποτελεσματικότερη επεξεργασία πληροφοριών (οργάνωση, επεξεργασία, σύνοψη, επιλεκτική εστίαση), 3) την παρακολούθηση (Monitoring), δηλαδή την αξιολόγηση της μάθησης ή της στρατηγικής, 4) τις στρατηγικές εντοπισμού σφαλμάτων (Debugging Strategies), δηλαδή στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για τη διόρθωση λάθους της κατανόησης και της απόδοσης (performance) και 5) την αξιολόγηση της μάθησης (Evaluation of learning), δηλαδή την ανάλυση της απόδοσης και της αποτελεσματικότητας της στρατηγικής μετά από επεισόδια μάθησης.

3. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

3.1 Ικανότητες επίλυσης προβλημάτων

3.1.1 Ικανότητες επίλυσης κλειστών προβλημάτων

Μέσα από το πλήθος ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί με επίκεντρο την επίλυση κλειστών μαθηματικών προβλημάτων προκύπτει ότι οι ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση αυτών είναι πολλές και ποικίλες. Λαμβάνοντας υπόψη τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος του Polya – κατανόηση προβλήματος, επινόηση σχεδίου, εκτέλεση σχεδίου, αναδρομή/ έλεγχος (Schoenfeld, 1987) – για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτείται, αρχικά, η κατοχή και η σωστή οργάνωση βασικών αριθμητικών, αλγεβρικών, γεωμετρικών και στατιστικών γνώσεων, ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Έπειτα, είναι απαραίτητη η ευέλικτη εφαρμογή της καλά οργανωμένης βάσης γνώσεων για συγκεκριμένους τομείς, που περιλαμβάνει έννοιες, κανόνες, αρχές, τύπους και αλγόριθμους. Είναι, δηλαδή, αναγκαίο ο λύτης όχι μόνο να έχει σωστά δομημένες και οργανωμένες γνώσεις, αλλά και να μπορεί να κάνει αριθμητικούς, αλγεβρικούς και γεωμετρικούς χειρισμούς (De Corte, 1990 · Dendane & Math, 2009). Επιπλέον, για την κατανόηση του προβλήματος ο μαθητής πρέπει πρώτα να καταλάβει τη διατύπωση του προβλήματος για να κατασκευάσει μια αναπαράσταση του. Η καλή οργάνωση των γνώσεων είναι αυτή που θα βοηθήσει σε μια καλή πρώτη αναπαράσταση του προβλήματος, η ποιότητα, η πληρότητα και η συνοχή της οποίας καθορίζουν την αποτελεσματικότητα της υπόλοιπης διαδικασίας λύσης. Αλλά οι πληροφορίες πρέπει επίσης να διατηρηθούν, να υποβληθούν σε επεξεργασία και να ενημερωθούν με μια σειρά διαδικασιών ελέγχου που εμπλέκονται στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων. Έτσι, γίνεται αντιληπτό ότι μία ακόμα σημαντική ικανότητα που πρέπει να έχει ο λύτης είναι η καλή διαχείριση της εργαζόμενης μνήμης του (Dendane & Math, 2009 · Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015). Ακόμα, ο λύτης πρέπει να είναι ικανός να αναγνωρίσει ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος και ποιο το ζητούμενο έτσι ώστε να είναι σε θέση να δημιουργήσει ένα σωστό σχέδιο επίλυσης του προβλήματος μέσω της αξιοποίησης των πρώτων (Novita, 2012 · İncebacak & Ersoy, 2016). Επιπρόσθετα, ο λύτης πρέπει να είναι ικανός να προσεγγίζει το πρόβλημα με επαγωγική συλλογιστική αλλά και να μπορεί να καταλήγει από το γενικό στο ειδικό, δεξιότητα που είναι απαραίτητη για την κατάλληλη επιλογή αλλά και χρήση ευρετικών και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Κι αυτό γιατί οι ευρετικές μέθοδοι, επειδή προκαλούν μια συστηματική και προγραμματισμένη προσέγγιση του προβλήματος, σε αντίθεση με τη στρατηγική δοκιμής – λάθους, αυξάνουν ουσιαστικά την πιθανότητα επιτυχίας στην επίλυση του προβλήματος. (De Corte, 1990 · Dendane & Math, 2009). Επιπλέον, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνουν ισχυρισμούς, να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να αξιολογούν τις εικασίες και τους ισχυρισμούς τους (Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015).

Επιπρόσθετα, για την επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται «σκέψη υψηλού επιπέδου» (high-level thinking). Η ικανότητα σκέψης υψηλού επιπέδου δίνει τη δυνατότητα εστίασης σε περισσότερα από ένα πράγματα, επιτρέποντας τον συσχετισμό δεδομένων και καταστάσεων (İncebacak & Ersoy, 2016). Μία ακόμα πολύ βασική ικανότητα που απαιτείται για την επίλυση ενός κλειστού μαθηματικού προβλήματος είναι η μεταγνωστική επίγνωση. Οι μεταγνωστικές δεξιότητες αφορούν τη γνώση του ατόμου σχετικά με τη γνωστική λειτουργία του και δραστηριότητες που σχετίζονται με την αυτό-παρακολούθηση και τη αυτό-ρύθμιση των γνωστικών διαδικασιών. Επομένως, είναι απαραίτητες έτσι ώστε το άτομο να ξέρει γιατί, πότε και πού να εφαρμόσει κάποια από τις στρατηγικές που γνωρίζει αλλά και να μπορεί να παρακολουθήσει και να αξιολογήσει επιτυχώς αυτή την εφαρμογή (De Corte, 1990 · Dendane & Math, 2009 · Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015 · Hargrove & Nietfeld, 2015). Τέλος, βασική προϋπόθεση για την επιτυχή ενασχόληση με ένα κλειστό πρόβλημα είναι ο λύτης να μην έχει αρνητική στάση απέναντι στο πρόβλημα αλλά και γενικότερα στα μαθηματικά κι επομένως να μην του προκαλούν άγχος, να έχει επιμονή και να νιώθει αυτοπεποίθηση και ότι έχει υψηλή αυτό-αποτελεσματικότητα όταν έρχεται αντιμέτωπος με ένα κλειστό πρόβλημα (Pajares & Miller, 1994 · Dendane & Math, 2009 · Parkinson & Creswell, 2011 · Hendriana, Johanto, & Sumarmo, 2018).

3.1.2 Ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων

Σύμφωνα με τους Hendriana & Soemarmo (2014) και Friesen (2016, όπ. αναφ. Tanjung, Syahputra, & Irvan, 2020), οι μαθηματικές ικανότητες ταξινομούνται σε πέντε κύριες ικανότητες, δηλαδή: τη μαθηματική κατανόηση, τη μαθηματική επίλυση προβλημάτων, τη μαθηματική επικοινωνία, τη μαθηματική σύνδεση και τη μαθηματική συλλογιστική. Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία έρευνες έχουν δείξει ότι η ενασχόληση των παιδιών με ανοιχτά προβλήματα μπορεί να βοηθήσει στην κατάκτηση της ικανότητας επίλυσης κλειστών μαθηματικών προβλημάτων (Tanjung, Syahputra, & Irvan,2020 · Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020). Για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, πέρα από την κατοχή των ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση κλειστών προβλημάτων, ο λύτης πρέπει να έχει κάποιες επιπλέον ικανότητες.

Αρχικά, δεν αρκεί απλά οι μαθητές να διατυπώνουν αριθμητικές υποθέσεις και να κατασκευάζουν κατάλληλες εξηγήσεις αλλά θα πρέπει να είναι σε θέση να εξετάσουν το πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και απόψεις, εφευρίσκοντας τις δικές τους μεθόδους. Έτσι, πρέπει να είναι ικανοί να εφαρμόζουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις και δεξιότητές τους, να παρατηρούν και να οργανώνουν τα δεδομένα που παρουσιάζονται στις υποθέσεις τους και να εξηγούν τα επιχειρήματά τους τα οποία πρέπει να είναι άρτια και ταυτόχρονα κομψά διατυπωμένα (Kosyvas, 2016). Επιπλέον, για την επιτυχή επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος ο λύτης θα πρέπει να έχει δεξιότητες σκέψης υψηλής τάξης (high order thinking skills), όπως δεξιότητες ανάλυσης, αξιολόγησης και δημιουργίας. Η ανάλυση αποτελείται από τη διαφοροποίηση, την οργάνωση και την απόδοση, η αξιολόγηση αποτελείται από τον έλεγχο και την κριτική, και η δημιουργία αποτελείται από τη δημιουργία, τον σχεδιασμό και την παραγωγή. Αυτές οι ικανότητες είναι απαραίτητες για να κατευθύνουν τον λύτη να χειριστεί τις πληροφορίες μέσω της υπάρχουσας γνώσης, προκειμένου να είναι σε θέση να βρει απαντήσεις σε νέα προβλήματα (Kurniawati & Saputro, 2020). Ακόμα, αναγκαίο εφόδιο για την επίλυση ενός ανοιχτού μαθηματικού προβλήματος είναι η ικανότητα κριτικής σκέψης. Τα άτομα που έχουν αυτή την ικανότητα έχουν ανοιχτό και ευέλικτο τρόπο σκέψης και είναι επιμελή στην εύρεση σχετικών πληροφοριών, έχοντας αναπτύξει βοηθητικά κριτήρια επιλογής (Siswono, 2008 · Afifah & Agoestanto, 2020 · Kurniawati & Saputro, 2020). Επιπλέον, η υψηλή περιέργεια είναι χρήσιμη για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, αποτελώντας, ταυτόχρονα, ένδειξη ότι ένα άτομο έχει δεξιότητες κριτικής σκέψης, αρκετή εμπειρία και αυτοπεποίθηση να εμπλακεί με άγνωστες καταστάσεις. (Afifah & Agoestanto, 2020)

Επιπρόσθετα, για την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος είναι απαραίτητη η κατοχή δημιουργικής και καινοτόμας σκέψης. Έτσι, οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους για την επίλυση προβλημάτων, να βρίσκουν μοναδικές ιδέες για την επίλυσή τους καθώς και να επεκτείνουν, να επιλέγουν, να αναλύουν και να αξιολογούν τη βασική ιδέα του προβλήματος (Albab & Wangguway, 2020). Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της αναζήτησης διαφορετικών λύσεων και διαφόρων προσεγγίσεων, πρέπει να είναι σε θέση να υποβάλει πολλές ιδέες ελεύθερα (ευχέρεια), να κάνει προσπάθειες να επινοήσει νέες στρατηγικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος όπου οι άλλοι αποτυγχάνουν (ευελιξία), να επεξεργαστεί τη δεδομένη ιδέα, να προσθέσει λεπτομέρειες σε αυτήν και να την αναπτύξει μέσω συνδυασμού πρόσθετων ιδεών ή / και βελτίωσή της (επεξήγηση) και τέλος, να σκεφτεί έξυπνες και απροσδόκητες ιδέες (πρωτοτυπία). Τα τέσσερα παραπάνω στοιχεία αποτελούν δείκτες της δημιουργικότητας και είναι αναγκαία για την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος (Kwon, Park, & Park, 2006 · Siswono, 2008 · Bahar & Maker, 2015). Ακόμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα συνήθως παρουσιάζονται στους μαθητές προτρέποντάς τους να τα λύσουν συνεργατικά λόγω του διερευνητικού τους χαρακτήρα, οι λύτες πρέπει είναι σε θέση να χρησιμοποιούν συμβολισμούς, όρους και σύμβολα με ακρίβεια, να είναι ικανοί να εκφράζουν μαθηματικές ιδέες και απαντήσεις λογικά και συνεκτικά καθώς και να εκφράζουν τη σχέση μεταξύ μαθηματικών ιδεών αλλά και των δεδομένων του εκάστοτε προβλήματος. Επομένως, χρήσιμο εφόδιο ενός λύτη κάποιου ανοιχτού προβλήματος αποτελεί η κατοχή επικοινωνιακών δεξιοτήτων (Nasution, Permadi, Saraswati, & Kuspambudi, 2020). Στο παραπάνω πλαίσιο γίνεται αισθητή και η ανάγκη κατοχής ικανοτήτων διαπραγμάτευσης του λύτη έτσι ώστε να μπορεί να υποστηρίξει την πορεία που επέλεξε να ακολουθήσει για την λύση του προβλήματος σε σχέση με κάποια άλλη που μπορεί να ακολούθησε κάποιος συμμαθητής του, δεδομένου ότι τα ανοιχτά προβλήματα προσφέρονται για την υιοθέτηση διαφορετικών τρόπων λύσης (Nohda & Emori, 1997).

3.1.3 Σύγκριση ικανοτήτων επίλυσης κλειστών προβλημάτων και ανοιχτών προβλημάτων

Σε γενικές γραμμές οι ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση κλειστών προβλημάτων και ανοιχτών προβλημάτων παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Αρχικά, και στις δύο περιπτώσεις ο λύτης πρέπει να ακολουθήσει τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος (Schoenfeld, 1987 · Polya, 2004). Ακόμα, χρειάζεται να έχει ορθά συνδεδεμένες γνώσεις, πλούσια σχήματα, να είναι σε θέση να αναγνωρίζει ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος και ποια τα ζητούμενα έτσι ώστε να κατασκευάσει σωστές αναπαραστάσεις του προβλήματος (Schoenfeld, 1987 · Kosyvas, 2016). Επίσης, πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνει υποθέσεις τις οποίες να στηρίζει με κατάλληλα επιχειρήματα, τα οποία πρέπει να παρουσιάζει και να αξιολογεί προσεκτικά και να επιλέγει και να εφαρμόζει κατάλληλες στρατηγικές για την επίλυση κάθε προβλήματος (Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015 · Kosyvas, 2016 · Payadnya, 2019). Επιπλέον, είναι σημαντικό ο λύτης να έχει αυτοπεποίθηση σχετικά με τις μαθηματικές του ικανότητες έτσι ώστε να αντιμετωπίζει με θετική στάση και αυτοπεποίθηση το κλειστό πρόβλημα που συναντά (Pajares & Miller, 1994 · Dendane & Math, 2009 · Parkinson & Creswell, 2011 · Hendriana, Johanto, & Sumarmo, 2018 · Afifah & Agoestanto, 2020). Ακόμα, για την επίλυση ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων είναι απαραίτητη η κατοχή μεταγνωστικών ικανοτήτων. Η φύση των προβλημάτων απαιτεί από τον λύτη να έχει αναπτύξει «μεταγνωστικές στρατηγικές» όπως τον σχεδιασμό μιας συνολικής προσέγγισης του προβλήματος, την επιλογή κατάλληλων στρατηγικών, την παρακολούθηση της εξέλιξης της επίλυσης του προβλήματος, την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και την αναθεώρηση των σχεδίων ή στρατηγικές όταν αυτό είναι απαραίτητο (Lioe, Fai & Hedberg, 2006 · Hargrove & Nietfeld, 2015).

Η κριτική σκέψη αποτελεί πολύ απαραίτητο εφόδιο για την επίλυση των ανοιχτών προβλημάτων (Siswono, 2008 · Afifah & Agoestanto, 2020 · Kurniawati & Saputro, 2020), ενώ στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα επιστρατεύεται κυρίως από τον λύτη όταν σκέφτεται αν το αποτέλεσμα που βρήκε μπορεί να είναι λογικά σωστό. Επίσης, η ικανότητα δημιουργικής σκέψης μπορεί να λείπει από έναν λύτη που έρχεται αντιμέτωπος με ένα λεκτικό πρόβλημα και παρόλα αυτά να καταφέρει να το λύσει αν ακολουθήσει σωστά την κατάλληλη στρατηγική αλλά δε μπορεί να λείπει κατά την εμπλοκή του με ένα ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο απαιτεί και μεγαλύτερη καταβολή πνευματικής προσπάθειας (Kwon, Park, & Park, 2006 · Siswono, 2008 · Bahar & Maker, 2015). Μάλιστα, δεδομένα ερευνών έχουν δείξει ότι οι μαθηματικές γνώσεις και η γενική νοημοσύνη είναι οι σημαντικότεροι παράγοντες για την επιτυχή επίλυση κλειστών προβλημάτων, ενώ η γενική δημιουργικότητα, η επικοινωνιακή ικανότητα και η έντονη πνευματική δραστηριότητα εκείνοι για την επιτυχή επίλυση ανοιχτών προβλημάτων (Sullivan, Warren, White, & Suwarsono, 1998 · Bahar & Maker, 2015). Η επικοινωνιακή ικανότητα είναι περισσότερο απαραίτητη κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων από ότι κατά την επίλυση κλειστών μαθηματικών προβλημάτων λόγω της ανάγκης υπεράσπισης του τρόπου λύσης που έχει επιλέξει ένας λύτης σε σχέση με εκείνον που μπορεί να έχει επιλέξει ένας άλλος, αλλά και για την ευκολότερη αποδοχή της ύπαρξης ποικίλων τρόπων λύσεις του ίδιου προβλήματος αλλά και του γεγονός ότι μπορεί να υπάρχει παραπάνω από μία σωστή λύση (Nohda & Emori, 1997).

3.2 Τι δείχνουν οι έρευνες σχετικά με την επίλυση κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον τόσο για την επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά όσο και για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων. Όσον αφορά την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, φαίνεται ότι καταλληλότερη για την απόκτησή της είναι η μάθηση που βασίζεται στα προβλήματα (problem-based learning) (Hendriana, Johanto, & Sumarmo, 2018), ακόμα και σε σχέση με την ανακαλυπτική μάθηση και την αξιοποίηση μεθόδων που εμπλέκουν ανοιχτά προβλήματα (Tanjung, Syahputra, & Irvan, 2020). Επιπλέον, οι ικανότητες επίλυσης προβλήματος σχετίζονται άμεσα με την καλή λειτουργία της εργαζόμενης μνήμης αλλά και με τις μεταγνωστικές ικανότητες του λύτη, οι οποίες έχουν κεντρικό ρόλο στην επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος (Yee, 2002 · Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015). Ακόμα, για την απόκτηση ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος σημαντική προϋπόθεση είναι η ύπαρξη υποστηρικτικού περιβάλλοντος στην τάξη (Burton, 1980 · De Corte, 1990), η προσέγγιση και η ουσιαστική υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό (Burton, 1980 · Nunokawa, 2005) καθώς και η επιλογή αυθεντικών προβλημάτων, έτσι ώστε να έχουν νόημα και ενδιαφέρον για τους μαθητές (Nunokawa, 2005) ενώ σε αυτή μπορεί να συμβάλει και η ενασχόληση με την επίλυση προβλημάτων σε ομάδες (Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015), η οποία βρέθηκε ότι διευκολύνει την κατάκτηση γνώσεων από παιδιά ηλικίας 10 ετών στο πλαίσιο της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Davenport, 1999). Επιπρόσθετα, παρά το γεγονός ότι η αξιοποίηση της επίλυσης προβλήματος ευνοεί στην ανάπτυξη πιο δημιουργικών μαθηματικών προσεγγίσεων (Silver, 1997), έχει παρατηρηθεί ότι μαθητές ηλικίας 8-11 ετών εμφανίζουν ανησυχία κατά την ενασχόλησή τους με την επίλυση ενός προβλήματος, η οποία συσχετίζεται, συνήθως, με αρνητικές στάσεις που έχουν για τα μαθηματικά προβλήματα (Parkinson & Creswell, 2011).

Αντιπαραθέτοντας τα κλειστά με τα ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα, έρευνα των Sullivan, Warren, White και Suwarsono (1998) σε μαθητές ηλικίας 13-14 ετών έδειξε ότι τα ανοιχτά προβλήματα δεν είναι αναγκαίο να είναι πάντα πιο δύσκολα από τα κλειστά. Μάλιστα, σε κάποιες περιπτώσεις είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή των παιδιών σε μια μαθηματική έννοια/ θεματική ενώ σε κάποιες άλλες είναι καλύτερο οι μαθητές να εμπλέκονται με αυτά στο τέλος της ενασχόλησής τους με τη μαθηματική έννοια. Παρόλα αυτά, έχει σημειωθεί ότι και τα δύο είδη προβλημάτων συνεισφέρουν θετικά στη διδασκαλία απλά με διαφορετικό τρόπο (Sullivan, Warren, White & Suwarsono, 1998). Για παράδειγμα, έρευνα των O'Neil Jr. και Brown (1998) έδειξε ότι οι ανοιχτές ερωτήσεις απαιτούν την αξιοποίηση περισσότερων γνωστικών στρατηγικών από τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και προκαλούν μεγαλύτερο άγχος στους ερωτηθέντες. Ακόμα, σύμφωνα με τους Herman et al. (1994, οπ. αναφ. O'Neil Jr. & Brown, 1998), οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής απαιτούν διαφορετικά είδη συλλογισμών από ότι οι ανοιχτές, και μόνο οι δεύτερες ωθούν τους λύτες να αναλογιστούν αναφορικά με τη σημασία της ποιότητας και του βάθους των απαντήσεών τους. Μάλιστα, έρευνα του Widiartana (2018) σε μαθητές ηλικίας 10-11 ετών έδειξε ότι εκείνοι που ανήκαν στην πειραματική ομάδα, προσεγγίζοντας τη μάθηση μέσω της αξιοποίησης ανοιχτών προβλημάτων ανέπτυξαν καλύτερη συλλογιστική ικανότητα στα μαθηματικά από εκείνους της ομάδας ελέγχου, οι οποίοι διδάχτηκαν με τον συμβατικό τρόπο. Επίσης, έρευνα της Payadnya (2019) έδειξε ότι μαθητές ηλικίας 13-14 ετών είναι πιθανό να έχουν αναπτύξει δημιουργική σκέψη αλλά όχι συλλογιστική ικανότητα. Επιπλέον, οι Bahar και Maker (2015) ανέδειξαν ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση ενός λύτη κατά την επίλυση ενός κλειστού και ενός ανοιχτού προβλήματος διαφέρουν, σημειώνοντας ότι οι μαθηματικές γνώσεις και η γενική ευφυΐα επηρεάζουν κατά κύριο λόγο την επίδοση στα κλειστά προβλήματα ενώ η δημιουργικότητα του λύτη και η λεκτική ικανότητα στα ανοιχτά.

Επιπλέον, η δημιουργικότητα αποτελεί μεταβλητή που έχει μελετηθεί πολύ σε έρευνες που σχετίζονται με τα ανοιχτά προβλήματα στα μαθηματικά. Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Damayanti και Sumardi (2018) σε μαθητές ηλικίας 12-13 ετών έγινε αντιληπτό ότι δε μπορούν όλοι οι μαθητές να κατακτήσουν τα στοιχεία/πτυχές της δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα, η πτυχή της ευχέρειας (fluency) και αυτή της ευελιξίας (flexibility) μπορούν να αποκτηθούν μόνο από μαθητές με υψηλή και μέτρια ικανότητα στα μαθηματικά ενώ η πτυχή της πρωτοτυπίας (originality) μπορεί να κατακτηθεί μόνο από μαθητές με υψηλή μαθηματική ικανότητα. Τα παραπάνω αποτελέσματα έρχονται σε συνοχή με εκείνα της έρευνας των Lely, Putra και Syahrilfuddin (2020), η οποία γνωστοποίησε πως η πλειοψηφία των συμμετεχόντων ηλικίας 10-11 ετών έχουν χαμηλή δημιουργική ικανότητα καθώς και με αυτά της έρευνας των Rudyanto et al. (2019) με συμμετέχοντες μαθητές της ίδιας ηλικίας, μέσω της οποίας αναδείχθηκε ότι μόνο οι μαθητές που ήταν καλοί στα μαθηματικά είχαν καλή ικανότητα δημιουργικής σκέψης. Επιπρόσθετα, η ένταξη ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών βρέθηκε ότι μπορεί να βελτιώσει τις ικανότητες ανάλυσης, αξιολόγησης και δημιουργίας μαθητών ηλικίας 13-14 ετών, οι οποίες αποτελούν ικανότητες υψηλού επιπέδου (high order thinking skills) (Kurniawati & Saputro, 2020).

Ακόμα, έρευνες που αξιοποίησαν τα ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα φανέρωσαν ότι αυτά ενθαρρύνουν τους μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού να εμπλακούν ουσιαστικά και παραγωγικά με το πρόβλημα (Kosyvas, 2016), αναπτύσσοντας ποικίλων ειδών συλλογισμούς και αξιοποιώντας προϋπάρχουσες γνώσεις, να σχηματίσουν διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος (Klavir & Hershkovitz, 2008) αλλά και να εργαστούν σε ομάδες, διαμορφώνοντας υποθέσεις και επιχειρήματα έτσι ώστε να τις στηρίξουν (Yee, 2002). Ακόμα, σε έρευνα των Sullivan, Bourke και Scott (1997, οπ. αναφ. Pehkonen, 1997), φάνηκε ότι οι μαθητές προτιμούν να λύνουν ανοιχτά προβλήματα τα δεδομένα των οποίων γνωρίζουν σε τι αναφέρονται. Η ίδια έρευνα έδειξε ότι έπειτα από τη μεσολάβηση ενός χρονικού διαστήματος, συμμετέχοντες που είχαν δώσει πολλές απαντήσεις σε προβλήματα της έρευνας, έχασαν αυτή την ικανότητα. Τέλος, ένα σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από τη διερεύνηση της ένταξης επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων στο πρόγραμμα σπουδών της Αγγλίας από τον Blanc (1997, οπ. αναφ. Pehkonen, 1997), είναι ότι οι επιφανειακές ερμηνείες των αποτελεσμάτων μπορεί να είναι παραπλανητικές. Συνεπώς, θα ήταν ωφέλιμο να χρησιμοποιούνται συνεντεύξεις ως βοηθητικό εργαλείο αξιολόγησης σε έρευνες που εμπλέκουν ανοιχτά προβλήματα.

3.3 Οφέλη επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων

Τα οφέλη της αξιοποίησης ανοιχτών προβλημάτων που έχουν αναδειχθεί από τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με τα ανοιχτά προβλήματα είναι πολλά. Αρχικά, όσον αφορά τους μαθητές, η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων τους δίνει τον κυρίαρχο ρόλο καθώς τους προσφέρει τη δυνατότητα να καθορίσουν οι ίδιοι την πορεία της μάθησης, επηρεάζοντας την κατεύθυνση της ερευνητικής διαδικασίας (Sullivan, Bourke, & Scott, 1997, όπ. αναφ. Pehkonen, 1997 · Nohda, 2000) αλλά και την δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά καθ' όλη τη διαδικασίας της επίλυσης εκφράζοντας ελεύθερα τις ιδέες τους (Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020), κατασκευάζοντας τους δικούς τους τρόπους λύσης (Kwon, Park, & Park, 2006 · Siswono, 2008), κάνοντας υποθέσεις (Yee, 2002) και έχοντας την ελευθερία να δώσουν πλήθος διαφορετικών απαντήσεων για τη λύση του προβλήματος (Kwon, Park, & Park, 2006 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020). Επιπλέον, κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις, ικανότητες και εμπειρίες τους που έχουν είτε αποκτήσει από την προσωπική τους εμπειρία είτε από την ενασχόλησή τους με παρόμοια προβλήματα (Yee, 2002 · Siswono, 2008 · Kosyvas, 2016). Ακόμα, η φύση των ανοιχτών προβλημάτων κινητοποιεί τους μαθητές να ασχοληθούν με τη λύση του προβλήματος (Blanc, 1997 οπ. αναφ. Pehkonen, 1997 · Pehkonen, 1999 · Yee, 2002) και ταυτόχρονα τους επιτρέπει αυτή η ενασχόληση να γίνει με τον ρυθμό του καθενός και τις δικές του ικανότητες (Wu, 1994 · Yee, 2002), γεγονός που πέρα από το ότι μπορεί να βελτιώσει την αυτοεκτίμησή τους (Fatah, Suryadi, & Sabandar, 2016), αναδεικνύει, επίσης, την καταλληλότητα αξιοποίησης ανοιχτών προβλημάτων σε τάξεις με μαθητές μεικτών ικανοτήτων.

Επιπρόσθετα, η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων συμβάλει στην καλλιέργεια και βελτίωση της επικοινωνιακής και της συλλογιστικής ικανότητας των παιδιών. Κι αυτό γιατί καλούνται να αναζητήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις και λύσεις κι έπειτα να τις παρουσιάσουν στους υπολοίπους, επιχειρηματολογώντας και υπερασπίζοντάς τες (Yee, 2002 · Kwon, Park, & Park, 2006 · Nasution, Permadi, Saraswati, & Kuspambudi, 2020). Έτσι, οι μαθητές αναγκάζονται να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα με μεγαλύτερη ακρίβεια (Klavir & Hershkovitz, 2008) καθώς η σωστή προφορική επικοινωνία των στρατηγικών και των λύσεων τους με τους υπολοίπους μπορεί να επηρεάσει την επίδοσή τους στην επίλυση του εκάστοτε ανοιχτού προβλήματος (Bahar & Maker, 2015).

Ακόμα, αναφορικά με τη γνωστική ανάπτυξη, οι έρευνες έχουν δείξει ότι η αξιοποίηση των ανοιχτών προβλημάτων στα μαθηματικά παρέχει τις βέλτιστες συνθήκες για γνωστική ανάπτυξη στην οποία η νέα γνώση κατασκευάζεται κατά τη διάρκεια της επίλυσης και οι προϋπάρχουσες γνώσεις αναγνωρίζονται και αξιολογούνται (Sullivan, Warren, White, & Suwarsono, 1998). Επιπλέον, η γνωστική ανάπτυξη προωθείται και λόγω του ότι οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν γνωστικές στρατηγικές, οδηγώντας τους σε έντονη γνωστική δραστηριότητα (O'Neil Jr. & Brown, 1998) η οποία τους προσφέρει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και ικανότητες (Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020) αλλά και να αποκτήσουν ακόμα νέες γνώσεις και εμπειρίες (Damayanti& Sumardi, 2018). Τέλος, τα ανοιχτά προβλήματα αναδεικνύουν την αξία της διαδικασίας αντί του αποτελέσματος (Morgan, 1997, οπ. αναφ. Pehkonen, 1997), ωθώντας τους μαθητές να αναζητήσουν και να εφαρμόσουν ποικίλες στρατηγικές, δημιουργώντας, έτσι, βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση (Klavir & Hershkovitz, 2008 · Kosyvas, 2016).

Επιπλέον, η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων συμβάλλει στην απόκτηση ή και στην βελτίωση των ικανοτήτων σκέψης υψηλού επιπέδου. Η σκέψη ανωτέρου επιπέδου (higher-order-thinking) περιλαμβάνει την δημιουργική σκέψη και την κριτική σκέψη. Η φύση των ανοιχτών προβλημάτων, όταν πρόκειται για ρεαλιστικά προβλήματα που έχουν νόημα για τα παιδιά, οξύνει την περιέργεια, την δημιουργικότητα και τη φαντασία τους (Yee, 2002 · Klavir & Hershkovitz, 2008 · Kholil, 2020 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020), καθώς τους προσφέρει πνευματικές προκλήσεις που τους αναγκάζουν να αποκτήσουν τρόπους ευέλικτης σκέψης (Kosyvas, 2016). Ακόμα, τα ανοιχτά προβλήματα συνήθως διατυπώνονται με τρόπο που να μην υπάρχουν λέξεις-κλειδιά που να φανερώνει ποια πράξη θα πρέπει να κάνει ο λύτης, αναγκάζοντάς τον να σκεφτεί κριτικά με σκοπό να αντιληφθεί μόνος τους το είδος και τη σειρά των πράξεων που θα χρειαστεί να πραγματοποιήσει, με βάση πάντα, τον τρόπο που επιλέγει ο ίδιος να λύσει το πρόβλημα (Yee, 2002). Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ανοιχτά προβλήματα συμβάλλοντας στην ανάπτυξη ικανοτήτων σκέψης υψηλού επιπέδου μπορούν να αξιοποιηθούν για την αξιολόγηση αυτών (Kwon, Park, & Park, 2006 · Siswono, 2008).

Τα ανοιχτά προβλήματα έχουν ευεργετικό ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020 · Tanjung, Syahputra, & Irvan, 2020). Κι αυτό γιατί απαιτούν όλες τις ικανότητες που χρειάζονται για την επίλυση ενός κλειστού μαθηματικού προβλήματος και κάποιες, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω. Μία από αυτές είναι η μεταγνώση κι ένα από τα σημαντικότερα οφέλη επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων αποτελεί η ανάγκη αξιοποίησης μεταγνωστικών στρατηγικών από τους μαθητές καθώς είναι απαραίτητο να παρακολουθούν την πορεία της σκέψης τους, να αξιολογούν τις διαδικασίες που ακολουθούν και να τις αναπροσαρμόζουν έτσι ώστε να επιλέξουν την καλύτερη, για αυτούς, πορεία λύσης (Lioe, Fai, & Hedberg, 2006 · Siswono, 2008).

3.4 Δυσκολίες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων

Πέρα από το πλήθος των θετικών επιδράσεων που έχει η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων από τα παιδιά, συνοδεύεται κι από ορισμένες δυσκολίες. Αρχικά, μέσα από τις έρευνες έχουν αναδειχθεί δυσκολίες που σχετίζονται με τις ικανότητες που χρειάζονται για την επιτυχή επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στην εκτέλεση των πράξεων (Davenport, 1999 · Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020), στην συνειδητή επιλογή των κατάλληλων πράξεων και διαδικασιών που θα πρέπει να ακολουθήσουν για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος (Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020) καθώς και στην επιλογή και εφαρμογή της κατάλληλης στρατηγικής (Stacey, 2005). Επιπλέον, μια ακόμα δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αφορά στην κατανόηση του προβλήματος. Παρατηρούνται λάθη λόγω της εσφαλμένης κατανόησης των εκφωνήσεων είτε λόγω της δυσκολίας των μαθητών να καταλάβουν τη μαθηματική γλώσσα (Sepeng & Madzorera, 2014), είτε λόγω της ασαφούς διατύπωσης των εκφωνήσεων καθώς μπορεί να αναφέρονται σε μη οικείο, για τα παιδιά, περιεχόμενο (Eric, 2005), είτε λόγω της κακής πρόσληψης αυτών από τους μαθητές καταλήγοντας στο να μην αντιλαμβάνονται ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος και ποιο το ζητούμενο (Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020). Επιπλέον, πέρα από δεξιότητες κατανόησης, τα ανοιχτά προβλήματα απαιτούν από τους λύτες να έχουν αναπτύξει και μεταγνωστικές ικανότητες. Η έλλειψη αυτών, επομένως, αποτελεί πηγή δυσκολιών για τους μαθητές

(Βισσαρίου & Δεσλή, 2019). Επίσης, παρά το γεγονός ότι – όπως προαναφέρθηκε – η δημιουργικότητα και η λεκτική ικανότητα αποτελούν σημαντικότερα εφόδια για την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος από ότι η νοημοσύνη, παρατηρήθηκε ότι μαθητές με μέτρια ή χαμηλή οπτικο-χωρική νοημοσύνη εμφανίζουν δυσκολία κατά τις μεταγνωστικές διαδικασίας που σχετίζονται με τη γνώση όσον αφορά τη στρατηγική, τις γνωστικές εργασίες αλλά και την αυτογνωσία (Rimbatmojo, Kusmayadi, & Riyadi, 2017). Κλείνοντας το κομμάτι των ικανοτήτων, οι ελλιπείς επικοινωνιακές ικανότητες αποτελούν συχνά πηγή δυσκολιών για τους μαθητές κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων. Κι αυτό γιατί επιζητούν από τον λύτη να επικοινωνήσει καθαρά στους υπολοίπους τις σκέψεις του αλλά και τον τρόπο λύσης που επέλεξε, τόσο γραπτά, προκειμένου να μπορέσει να αξιολογηθεί τη πρότασή (Nasution, Permadi, Saraswati, & Kuspambudi, 2020 · Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020), αλλά όσο και προφορικά, έτσι ώστε να προωθηθεί η συζήτηση και η ανταλλαγή ιδεών, στρατηγικών και λύσεων με τους άλλους (Szetala & Nicol, 1992 · Eric, 2005).

Επιπρόσθετα, μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων είναι η πίεση λόγω χρόνου. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι αρκετά απαιτητικά με αποτέλεσμα οι μαθητές συχνά να πιέζονται να τα ολοκληρώσουν εντός περιορισμένης χρονικής διάρκειας λόγω της πίεσης του σχολικού χρονοδιαγράμματος (Eric, 2005 · Becker & Shimada, 1997). Ακόμα, αυτή η απαιτητικότητα συνεπάγεται και την ανάγκη για διατήρηση ενός υψηλού επιπέδου δέσμευσης από τον λύτη, κάτι που είναι δύσκολο σε πνευματικό επίπεδο (Henningsen & Stein, 1997 · Stacey, 2005). Στο ίδιο πλαίσιο, η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο να συνοψίσουν με σαφήνεια τα αποτελέσματα στα οποία έχουν καταλήξει τους δημιουργεί την αίσθηση ότι η μάθησή τους δεν είναι ικανοποιητική, συμβάλλοντας με αρνητικό τρόπο στην διάθεσή τους να ασχοληθούν με ανοιχτά προβλήματα (Becker & Shimada, 1997).

Ακόμα, τα ανοιχτά προβλήματα εμφανίζουν δυσκολίες και για τους εκπαιδευτικούς καθώς απαιτούν αλλαγή του παραδοσιακού ρόλου του δασκάλου. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να δομήσει τη διδασκαλία του με τρόπο ώστε να υποστηρίζει την δημιουργία μεταγνωστικών στρατηγικών από τους μαθητές (Lioe, Fai, & Hedberg, 2006), να έχει ολοκληρωμένες και εκτενείς γνώσεις για κάθε μαθηματικό «αντικείμενο» έτσι ώστε να μπορεί να απαντήσει στις υποθέσεις των παιδιών, να έχει υπομονή αφήνοντας τα παιδιά να ξετυλίξουν τις ιδέες τους χωρίς να παρεμβαίνει (Schettino, 2003) και ταυτόχρονα να είναι σε θέση να πάρει γρήγορες αποφάσεις ανά πάσα στιγμή (Sullivan, Warren, & White, 2000). Κατασταλτικοί παράγοντες για την ένταξη ανοιχτών προβλημάτων στη σχολική τάξη αποτελούν, ακόμα, ο χρόνος που απαιτείται για τον προγραμματισμό ενός μαθήματος που θα τα περιέχει (Eric, 2005) αλλά και οι αρνητικές στάσεις και πεποιθήσεις που φέρουν πολλοί εκπαιδευτικοί αναφορικά με τα μαθηματικά και το τι σημαίνει να «κάνεις μαθηματικά», οι οποίες επηρεάζουν και την επίδοση των παιδιών (Emenaker, 1996 · Pehkonen, 1999).

Τέλος, θεωρώ σκόπιμο να αναφερθεί ότι τα ανοιχτά προβλήματα, αν δεν διαχειριστούν προσεκτικά από τους εκπαιδευτικούς μπορεί να παραπλανήσουν τους μαθητές οδηγώντας τους στη σύγχυση μεταξύ εικασίας και πειραματισμού από τη μία πλευρά, και έγκυρης, λογικής συλλογιστικής από την άλλη, η οποία αποτελεί κρίσιμο στοιχείο στα μαθηματικά. Επομένως, όταν οι μαθητές κάνουν υποθέσεις κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος θα πρέπει να διευκρινίζεται ότι αυτές δεν είναι πάντα έγκυρες κι επιπλέον, θα πρέπει να δίνεται πάντα ένα «κλείσιμο» σε κάθε ανοιχτό πρόβλημα ώστε οι μαθητές να μη μένουν με πλήθος αποριών και υποθέσεων για τη λύση του. (Wu, 1994 · Schettino, 2003 · Eric, 2005)

3.5 Αξιοποίηση της επίλυσης προβλημάτων ως μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών στην τάξη

Μέσα από τις έρευνες που μελετήθηκαν γίνεται αντιληπτό ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων χρησιμοποιείται ως μέσω για την ανάπτυξη και βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος (Parkinson & Creswell, 2011 · Novita, 2012 · Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015 · Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015 · Surya & Putri, 2017 · Hendriana, Johanto, & Sumarmo, 2018) καθώς και για την αξιολόγηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων των μαθητών (Leitze, 1999 · Magno, 2009 · Kuzle, 2018). Ακόμα, τα ανοιχτά προβλήματα αξιοποιούνται με σκοπό τη βελτίωση της δημιουργικής και αποκλίνουσας σκέψης (Silver, 1997 · Kwon, Park, & Park, 2006 · Siswono, 2008 · Fatah, Suryadi, & Sabandar, 2016 · Kholil, 2020 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020), της αυτο-εκτίμησης των παιδιών σχετικά με τα μαθηματικά (Fatah, Suryadi, & Sabandar, 2016), της σκέψης υψηλού επιπέδου (Henningsen &

Stein, 1997 · Kurniawati, & Saputro, 2020) και την αξιολόγησή της μέσω της μέσα από αυτά (Insani & Akbar, 2019), την προώθηση της επικοινωνίας στην τάξη (Viseu & Oliveira, 2012), τη διερεύνηση της μαθηματικής συλλογιστικής ικανότητας των μαθητών (Kosyvas, 2016 · Widiartana, 2018 · Payadnya, 2019) και τη μελέτη της επίδρασής της στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων (Alman, 2017 · Tanjung, Syahputra, & Irvan, 2020 · Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020).

Παρατηρώντας την σύγχρονη σχολική πραγματικότητα στην Ελλάδα, τα μαθηματικά διδάσκονται στο δημοτικό σχολείο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών που διαμορφώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). Το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών διαρθρώνεται γύρω από επτά άξονες γνωστικού περιεχομένου, ένας από τους οποίους είναι η Επίλυση Προβλημάτων. Ανατρέχοντας στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003) διαπιστώνεται ότι η επίλυση προβλήματος απασχολεί τα παιδιά και τους εκπαιδευτικούς σε όλες τις τάξης του δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, οι διδακτικοί στόχοι σχετικά με την επίλυση προβλήματος φανερώνουν ότι, έπειτα από την ολοκλήρωση και των έξι τάξεων του δημοτικού, οι μαθητές αναμένεται να μπορούν: να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις, να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής, να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του, να αυτο-αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία, να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση, να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της εκάστοτε τάξης, να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης, να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα, να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων, να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση, να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα και να τους δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιούν τον Η/Υ με ανάλογα προγράμματα π.χ. SketchPad, Cabri, Logo, Word, Excel, Paint κ.λπ. για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο διδακτικός στόχος που αναφέρεται στη διερεύνηση ανοιχτών προβληματικών καταστάσεων εμφανίζεται πρώτη φορά στην Γ΄ δημοτικού και είναι παρών μέχρι και την Στ΄ δημοτικού. Τέλος, διαβάζοντας τους παραπάνω διδακτικούς στόχους παρατηρούμε ότι ουσιαστικά αναφέρονται στις ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση ενός κλειστού μαθηματικού προβλήματος.

3.6 Με τι εργαλεία ερευνώνται οι ικανότητες

3.6.1 Πώς ερευνώνται οι ικανότητες επίλυσης κλειστών προβλημάτων

Ανατρέχοντας στις έρευνες που μελετήθηκαν σχετικά με την επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά και τις ικανότητες που απαιτούνται για αυτή, παρατηρείται πλήθος «εργαλείων» που ποικίλουν. Σε όλες τις έρευνες οι συμμετέχοντες ήρθαν αντιμέτωποι με τεστ που αποτελούνταν από μαθηματικά προβλήματα τα οποία καλούνταν να λύσουν. Πολλοί μελετητές κατέφυγαν στην ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στα τεστ, επιλέγοντας να αντλήσουν και ποιοτικά δεδομένα για να ελέγξουν τις ικανότητες που επιστράτευσαν οι συμμετέχοντες σε κάθε στάδιο επίλυσης προβλήματος, με μέσα όπως συνεντεύξεις (Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 · Novita, 2012 · Kuzle, 2018), παρατήρηση της τάξης και καταγραφή των συμπεριφορών των μαθητών (Kuzle, 2018) και ακόμα, ακουστικά και οπτικοακουστικά δεδομένα από την καταγραφή της τάξης καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας (Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 · Kuzle, 2018). Σε κάποιες περιπτώσεις επιλέχθηκε ο διαχωρισμός του δείγματος σε πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου, με μόνο την πειραματική ομάδα να δέχεται παρέμβαση η οποία καθοδηγούσε τους μαθητές κατά τη διάρκεια της επίλυσης των προβλημάτων (Tanner & Jones, 1997, οπ. αναφ. Pehkonen, 1997 · Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 · Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015), με πραγματοποίηση pre-test και post-test, τα αποτελέσματα των οποίων αναδείκνυαν την επιτυχημένη συμβολή της παρέμβασης.

Η εργαζόμενη μνήμη των μαθητών αξιολογήθηκε με ειδικά τεστ όπως μια προσαρμογή του έργου που προτείνουν οι Palladino, Cornoldi, De Beni και Pazzaglia (2001) που περιλαμβάνει ενημέρωση πληροφοριών σύμφωνα με ένα σχετικό κριτήριο (Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015) με βαθμολογίες αξιολόγησης της Δομής της Διανοητικής Μάθησης (SOI-LA) (Bahar & Maker, 2015). Ακόμα, για τη διερεύνηση της οργάνωσης της πορείας λύσης αξιοποιήθηκαν κυρίως οι συνεντεύξεις καθώς και ειδικές κάρτες (action cards) που μπορούσαν να διατάξουν οι μαθητές με τρόπο που να περιγράφει την πορεία που ακολούθησαν για τη λύση του προβλήματος σε περίπτωση που δεν εξωτερίκευαν τη σκέψη τους κατά τη διάρκεια αυτής (Kuzle, 2018). Οι μεταγνωστικές ικανότητες διερευνήθηκαν μέσω ειδικών ερωτηματολογίων (Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati, 2015), μέσω ειδικού τεστ που μετρούσε την ικανότητα γενίκευσης των λύσεων από τους μαθητές (Parkinson & Creswell, 2011) ή και μέσω ρουμπρίκων (O'Neil Jr. & Brown, 1998 · Magno, 2009).

Επίσης, η διερεύνηση της στάσης των συμμετεχόντων απέναντι στα προβλήματα, η ψυχολογική τους κατάσταση και οι αντιλήψεις που φέρουν για τις ικανότητές τους στα μαθηματικά διερευνήθηκαν μέσω ερωτηματολογίων αυτό-αναφοράς όπου καλούνταν να απαντήσουν με βάση δοσμένες κλίμακες τύπου Likert (O'Neil Jr. & Brown, 1998 · Parkinson & Creswell, 2011 · Hendriana, Johanto, & Sumarmo, 2018).

3.6.2 Πώς ερευνώνται οι ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων

Οι κοινές ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων διερευνώνται με τους ίδιους τρόπους όσον αφορά την άντληση ποσοτικών δεδομένων, δηλαδή κυρίως με ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων και με την αξιοποίηση ποιοτικών εργαλείων. Παρόλο αυτά, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον το γεγονός ότι για τη διερεύνηση των ικανοτήτων που αξιοποιούνται για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων αλλά και την πορεία που ακολουθούν οι μαθητές, παρατηρείται ιδιαίτερα αυξημένη χρήση ποιοτικών εργαλείων, όπως οι συνεντεύξεις και η παρατήρηση, πολύ μεγαλύτερη από εκείνη για τη διερεύνηση των ικανοτήτων επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις οι ερευνητές επιλέγουν να αξιοποιήσουν συνδυαστικά τις συνεντεύξεις και την παρατήρηση (Viseu & Oliveira, 2012 · Damayanti & Sumardi, 2018 · Payadnya, 2019 · Kholil, 2020 · Albab & Wangguway, 2020 · Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020), ενώ άλλοι χρησιμοποίησαν οπτικοακουστικά δεδομένα που αντλήθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας (Lioe, Fai, & Hedberg, 2006 · Kosyvas, 2016 · Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020). Η αυξημένη χρήση ποιοτικών εργαλείων πηγάζει από την επιθυμία των ερευνητών να αντλήσουν όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες για τις πνευματικές διαδικασίες που πραγματοποιούν οι μαθητές κατά την επίλυση απαιτητικών προβλημάτων όπως τα ανοιχτά προβλήματα.

Επιπλέον, η δημιουργική σκέψη των μαθητών κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων διερευνάται μέσω των «συστατικών» της, τα οποία είναι η ευχέρεια (fluency), η ευελιξία (flexibility), και η πρωτοτυπία (originality) (Szetela & Nicol, 1992 · Damayanti & Sumardi, 2018 · Wijaya, 2018 · Kholil, 2020) και σε κάποιες περιπτώσεις επιπρόσθετα σε αυτά είναι η ανάπτυξη (elaboration) (Klavir & Hershkovitz, 2008 · Siswono, 2008) ή η κομψότητα (Nohda, 2000), είτε μέσω της ανάλυσης των λύσεων των συμμετεχόντων (Nohda & Emori, 1997), είτε μέσω ειδικών τεστ που μετρούν τη δημιουργική ικανότητα (Fatah, Suryadi, & Sabandar, 2016 · Albab & Wangguway, 2020). Τέλος, οι Insani και Akbar (2019), πραγματοποιώντας έρευνα με στόχο να δημιουργήσουν μαθηματικά προβλήματα ανοιχτού τύπου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση των ικανοτήτων σκέψης υψηλού επιπέδου (high level thinking skills) των μαθητών ηλικίας 12-13 ετών, χρησιμοποίησαν το μοντέλο Plomp, το οποίο αποτελείται από τρεις φάσεις: 1) την προκαταρκτική έρευνα με δραστηριότητες ανάλυσης αναγκών περιβάλλοντος, ανασκόπηση βιβλιογραφίας, εννοιολογική ανάπτυξη και θεωρητικά πλαίσια έρευνας, 2) το στάδιο σχεδιασμού (στάδιο πρωτοτύπου) όπου χρησιμοποιείται η διαμορφωτική αξιολόγηση που υιοθετήθηκε από το Tesmer και 3) το στάδιο αξιολόγησης (φάση αξιολόγησης), το οποίο είναι η φάση ημι-αθροιστικής αξιολόγησης για την ολοκλήρωση των αποτελεσμάτων της ανάπτυξης (Insani & Akbar, 2019). Από τα αποτελέσματα της έρευνας φάνηκε αν επιλεγούν ερωτήσεις που να έχουν διαφορετικές απαντήσεις ή διάφορους τρόπους απάντησης και να μπορούν να μετρήσουν δεξιότητες όπως ανάλυση, αξιολόγηση και δημιουργία, με την προϋπόθεση ότι έχουν κατάλληλο περιεχόμενο, μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο διερεύνησης της ικανότητας σκέψης υψηλού επιπέδου των συμμετεχόντων.

4. ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4.1 Στόχος και Ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση τα ερευνητικά ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης αναδείχθηκε η αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών ως βασική προϋπόθεση για την απόκτηση ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος (Nunokawa, 2005). Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί ότι τόσο τα μαθηματικά προβλήματα όσο και τα ανοιχτά προβλήματα συνεισφέρουν θετικά στη διδασκαλία απλά με διαφορετικό τρόπο (Sullivan, Warren, White & Suwarsono, 1998) και απαιτούν διαφορετικά εργαλεία από τους μαθητές. Τα ανοιχτά προβλήματα απαιτούν την αξιοποίηση περισσότερων γνωστικών στρατηγικών και διαφορετικών ειδών συλλογισμών από τα τυπικά μαθηματικά προβλήματα και ενθαρρύνουν τους μαθητές να στρέψουν την προσοχή τους όχι μόνο στην εύρεση της λύσης του προβλήματος αλλά και στην ποιότητα των απαντήσεών τους (O'Neil Jr. & Brown, 1998), μπορούν να βελτιώσουν τις ικανότητες σκέψης υψηλού επιπέδου όπως είναι οι ικανότητες ανάλυσης, αξιολόγησης καθώς και δημιουργικής και κριτικής σκέψης (Rudyanto,et al. 2019 · Kurniawati & Saputro, 2020). Επιπλέον, τα ανοιχτά προβλήματα ωθούν τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί με παραπάνω από έναν τρόπους και ότι μπορεί να έχει παραπάνω από μία σωστή λύση, γεγονός που προάγει την ουσία των μαθηματικών έναντι στην πεποίθηση ότι αυτοσκοπός της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων είναι η εύρεση του ζητούμενου (O'Neil Jr. & Brown, 1998 · Klavir & Hershkovitz, 2008). Επιπρόσθετα, μέσα από τις έρευνες που μελετήθηκαν έγινε αντιληπτό το πλήθος και η ποικιλία των ικανοτήτων που καλούνται να αξιοποιήσουν οι μαθητές κατά την επίλυση ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων. Τέλος, όπως αναφέρθηκε αναλυτικότερα παραπάνω, τα ευρήματα φανερώνουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στις ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση καθενός από τους δύο τύπους προβλημάτων.

Μέσα από αυτή τη διαπίστωση γεννήθηκε το ενδιαφέρον για την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας με στόχο τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 11-12 ετών κατά την επίλυση ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στα μαθηματικά. Με βάση αυτόν τον στόχο προέκυψαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: 1) Ποιες από τις ικανότητες επίλυσης κλειστών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές;, 2) Ποιες από τις ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές;, 3) Πώς σχετίζονται οι δύο ομάδες ικανοτήτων μεταξύ τους; Η επιλογή των συγκεκριμένων ικανοτήτων η ύπαρξη των οποίων διερευνήθηκε έγινε με βάση τα ερευνητικά ευρήματα σχετικά με τις ικανότητες επίλυσης ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων στα μαθηματικά γιατί κρίθηκαν ικανές να προσφέρουν μια αντιπροσωπευτική εικόνα του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν ένα πρόβλημα αλλά και καθένα από τα στάδια επίλυσής του.

4.2 Εννοιολογικό πλαίσιο

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς που παρατέθηκαν στο θεωρητικού μέρος για το τι είναι «πρόβλημα», στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας ως πρόβλημα θεωρείται μια μαθηματική κατάσταση που καλείται να αντιμετωπίσει ο μαθητής χωρίς να γνωρίζει εξ αρχής τη διαδικασία που θα τον οδηγήσει εγγυημένα στην επιτυχή λύση του (Carlson & Bloom, 2005 · Xenofontos & Andrews, 2014). Έτσι, για αυτή την έρευνα η επίλυση προβλημάτων αφορά όλη τη διαδικασία ενασχόλησης με το μαθηματικό πρόβλημα που ακολουθεί ο λύτης προκειμένου να κατανοήσει το πρόβλημα, να οργανώσει και να υλοποιήσει το σχέδιο λύσης του και να ελέγξει την ορθότητα αυτής. Επιπλέον, για την παρούσα έρευνα ως κλειστό πρόβλημα θεωρείται εκείνο που είναι διατυπωμένο έτσι ώστε τα δεδομένα να δίνονται με σαφή τρόπο, όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τη λύση του να δίνονται στην εκφώνησή του και το ζητούμενο του οποίου μπορεί πάντα να βρεθεί μέσα από την πραγματοποίηση καθορισμένων βημάτων (Yee, 2002). Ο όρος «ανοιχτό πρόβλημα» στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στο πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με παραπάνω από έναν τρόπο και δεν έχει μόνο μία σωστή λύση (Pehkonen, 1997). Με βάση τον ορισμό της λέξης «ικανός» (Μπαμπινιώτης, 2002), οι ικανότητες είναι τα προσόντα που έχει ένα άτομο να κάνει κάτι καλά και, στην περίπτωσή μας ο λύτης, και οι «ικανότητες επίλυσης» αναφέρονται στις ικανότητες που καλούνται να αξιοποιήσουν/ εμπλέξουν οι μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης των δύο προβλημάτων. Ο διαχωρισμός «ικανότητες επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων» και «ικανότητες επίλυσης κλειστών μαθηματικών προβλημάτων» γίνεται με σκοπό την ανάδειξη των κοινών και μη ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση των δύο αυτών ειδών προβλημάτων έτσι ώστε να διευκολυνθεί η μετέπειτα συσχέτιση των δύο ομάδων ικανοτήτων μεταξύ τους, δηλαδή να προσδιοριστεί η σχέση τους.

Σύμφωνα με τον Foong (1990, οπ. αναφ. στο Guven, Aydin-Guc, & Ozmen, 2016), οι διάφοροι τύποι προβλημάτων που συναντώνται στη διδασκαλία των μαθηματικών του 21ου αιώνα μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κύριες κατηγορίες: προβλήματα κλειστού τύπου (close-ended problems), προβλήματα ανοιχτού τύπου (open-ended problems) και προβλήματα τύπου έργου (project-type problems). Τα κλειστά προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τα προβλήματα ρουτίνας, που έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο και η λύση τους μπορεί να προκύψει μέσω της πραγματοποίησης κάποιων βημάτων, και τα προβλήματα μη ρουτίνας, τα οποία απαιτούν της χρήση ευρετικών και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος (Yee, 2002). Επιπλέον, οι Ozmen, Taskin και Guven (2012, οπ. αναφ. στο Guven, Aydin-Guc, & Ozmen, 2016), παρατήρησαν μαθήματα μαθηματικών για να προσδιορίσουν τους τύπους προβλημάτων που χρησιμοποιούνται και κατέληξαν στην κατηγοριοποίησή τους σε τρεις κατηγορίες με βάση: 1) την παρουσίαση του προβλήματος, 2) το περιεχόμενο του προβλήματος και 3)τη λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με αυτήν την ταξινόμηση, με βάση την παρουσίαση διακρίνονται: α) τα προφορικά προβλήματα, με γραπτές δηλώσεις ή αριθμούς, β) οπτικά προβλήματα, που παρουσιάζονται με οπτικά βοηθήματα όπως σχήματα, πίνακες ή γραφικά, γ) προβλήματα που περιλαμβάνουν ποσοτικά δεδομένα, δ) προβλήματα που δεν περιλαμβάνουν ποσοτικά δεδομένα (παρουσιάζονται με τέσσερα ή λιγότερα ποσοτικά δεδομένα), ε) εκτενή προβλήματα, που παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας μεγάλο αριθμό λέξεων ή προτάσεων, στ) σύντομα προβλήματα, που παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας έναν μικρό αριθμό λέξεων ή προτάσεων (τέσσερις και λιγότερες προτάσεις). Αναφορικά με την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων με βάση το περιεχόμενο, διακρίνονται τα προβλήματα ρουτίνας, τα προβλήματα μη ρουτίνας, τα προβλήματα που εμπλέκουν άσχετα δεδομένα, τα προβλήματα που δεν εμπλέκουν άσχετα δεδομένα, τα προβλήματα με περιεχόμενο μακριά από την καθημερινή ζωή, τα προβλήματα σχετικά με την καθημερινή ζωή, τα προβλήματα όπου λείπουν δεδομένα, τα προβλήματα όπου δε λείπουν δεδομένα, τα προβλήματα που εξαρτώνται από το πρόγραμμα σπουδών για τη συγκεκριμένη – κάθε φορά – τάξη και τα προβλήματα ανεξάρτητα από το πρόγραμμα σπουδών. Τέλος, κατηγοριοποιώντας τα προβλήματα με βάση τη λύση τους, υπάρχουν τα προβλήματα που απαιτούν την πραγματοποίηση πολλών υπολογισμών, τα προβλήματα που δεν απαιτούν πολλούς υπολογισμούς, τα προβλήματα που απαιτούν την αξιοποίηση διαφορετικών στρατηγικών και μπορούν να λυθούν με διαφορετικές λύσεις εκτός από τη γραμμική λύση (όπως σχεδίαση διαγράμματος, έξυπνη εικασία και δοκιμή, οργάνωση των δεδομένων, εργασία προς τα πίσω στρατηγικές κ.λπ.), τα προβλήματα που δεν απαιτούν την αξιοποίηση διαφορετικών στρατηγικών, τα δύσκολα προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν από όλους τους μαθητές και μπορούν να οδηγήσουν σε διάκριση των μαθητών σε διαφορετικά επίπεδα και τα εύκολα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν χωρίς ιδιαίτερο κόπο από όλους τους μαθητές και να έχουν παρόμοιες δομές. (Guven, Aydin-Guc, & Ozmen, 2016 · Yildiz & Hacisalihoglu Karadeniz, 2016)

Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς του «ικανού λύτη», τα χαρακτηριστικά αυτού και τις ικανότητες που απαιτούνται για την επίλυση κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων που παρουσιάστηκαν στο Θεωρητικό Μέρος, στην παρούσα έρευνα οι «ικανότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων» που θα διερευνηθεί αν έχουν αναπτύξει οι μαθητές θα καταγραφούν με βάση τα τέσσερα στάδια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος του Polya και είναι οι εξής:

Στο πρώτο στάδιο (κατανόηση του προβλήματος): 1) η ικανότητα εντοπισμού/ καταγραφής των δεδομένων και του ζητούμενου του προβλήματος (Schoelfeld, 1987 · Foong, 1994 · Polya, 2004 · Novita, 2012 · İncebacak & Ersoy, 2016 · Kosyvas, 2016) και 2) η ικανότητα καταγραφής των δεδομένων και του ζητούμενου του προβλήματος με τρόπο που να αναπαριστά το πρόβλημα (Krutetski, 1976 · Montague & Bos, 1990 · Pehkonen,1997 · Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998 · Borovik & Gardiner, 2007 · Siswono, 2008). Στο δεύτερο στάδιο (δημιουργία σχεδίου λύσης): 1) η ικανότητα δημιουργίας σχεδίου λύσης (Carlson & Bloom, 2005 · Lioe, Fai, & Hedberg, 2006 · Klavir & Hershkovitz, 2008 · Cornoldi, Carretti, Drusi & Tencati, 2015) διατυπώνοντας ενδιάμεσους στόχους (Krutetski, 1976) μέσω σύνδεσης των δεδομένων του προβλήματος και των ενεργειών που θα ακολουθηθούν (Foong, 1994 · Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998 · Borovik & Gardiner, 2007), 2) η ικανότητα επιλογής κατάλληλης στρατηγικής για τη λύση του προβλήματος (Leitze, 1999 · İncebacak & Ersoy, 2016). Στο τρίτο στάδιο (λύση προβλήματος): 1) η ικανότητα πραγματοποίησης σωστών αριθμητικών υπολογισμών (De Corte, 1990 · Dendane & Math, 2009) και 2) η ικανότητα εφαρμογής διαφορετικών τρόπων λύσης (δημιουργική σκέψη) (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009 · Albab & Wangguway, 2020). Επιπλέον, με βάση τα χαρακτηριστικά του ικανού λύτη οι απαντήσεις όσων έδωσαν σωστή λύση διερευνήθηκαν περαιτέρω με σκοπό τη διερεύνηση της ικανότητας επιλογής «οικονομικού» (Krutetski, 1976) και ποιοτικού τρόπου λύσης (Krutetski, 1976). Στο τέταρτο στάδιο (έλεγχος): 1) η ικανότητα να ελέγχει αν το αποτέλεσμα είναι λογικό και 2) η ικανότητα να ελέγχει αν το αποτέλεσμα είναι σωστό (Polya, 1998, όπ. αναφ. Καϊμάκη, 2017 · Polya, 2004), με σκοπό την απόκτηση εικόνας για κριτικής σκέψης, ως ικανότητα σκέψης υψηλού επιπέδου (Fatah, Suryadi, & Sabandar, 2016 · Damayanti & Sumardi, 2018 · Albab & Wangguway, 2020 · Kholil, 2020 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020).

Τέλος, θα εξεταστεί η κατοχή μεταγνωστικών ικανοτήτων καθώς σύμφωνα με τους Fortunato, Hecht, Tittle και Alvarez (1991, όπ. αναφ. Kapa, 2001), η αξιοποίηση μεταγνωστικών ικανοτήτων αποτελεί χαρακτηριστικό των ικανών λυτών. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα, λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο των Schraw και Dennison (1994), επιλέχθηκε να διερευνηθεί η ύπαρξη της μεταγνωστικής ικανότητας δηλωτικής γνώσης (declarative knowledge), γνώσης υπό όρους (conditional knowledge), αξιολόγησης της μάθησης (evaluation of learning) (Magno, 2009) και η μεταγνωστική επίγνωση. Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας κρίθηκε προτιμότερο όλες οι ερωτήσεις να απαντηθούν μετά την επίλυση κάθε προβλήματος. Αυτός ήταν κι ένας από τους λόγους που ερωτήσεις του ερωτηματολογίου του Magno (2009) τροποποιήθηκαν ελαφρώς.

Οι «ικανότητες επίλυσης ανοιχτού προβλήματος» που θα διερευνηθούν σε κάθε στάδιο είναι οι ίδιες με αυτές που θα διερευνηθούν κατά την επίλυση του κλειστού προβλήματος αλλά κατά την επίλυση του ανοιχτού θα εξεταστεί εκτενέστερα η ικανότητα εξέτασης του προβλήματος από διαφορετικές οπτικές καθώς, σύμφωνα με τους Kwon, Park και Park (2006, όπ. αναφ. Wijaya, 2018) τα ανοιχτά προβλήματα προωθούν την ανάπτυξη όλων των «συστατικών» της δημιουργικής σκέψης, δηλαδή της ευχέρειας, της ευελιξίας αλλά και της κομψότητας και της πρωτοτυπίας. Τέλος, θα ελεγχθεί το αν οι συμμετέχοντες φάνηκε να διαπιστώνουν ότι το ανοιχτό πρόβλημα, σε αντίθεση με το κλειστό, δεν είχε μόνο μία σωστή λύση. Η ενδεχόμενη πραγματοποίηση αυτής της διαπίστωσης είναι πολύ σημαντική καθώς αναδεικνύει ότι η δημιουργικότητα και ανάδειξη διαφορετικών τρόπων σκέψης κατά την επίλυση ενός προβλήματος έχουν περισσότερη μαθηματική αξία από ότι η εύρεση του σωστού αποτελέσματος (Nohda, 2000).

Οι ικανότητες που επιλέχθηκε να διερευνηθούν θα εξεταστούν μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στα προβλήματα και στις ερωτήσεις που αφορούν τη μεταγνώση. Ο λόγος που επιλέχθηκε η διερεύνηση των συγκεκριμένων ικανοτήτων ήταν λόγω της ικανότητάς τους να παρέχουν μια αντιπροσωπευτική εικόνα για τις κύριες ικανότητες που αξιοποιούνται σε κάθε στάδιο. Ακόμα, στο τέλος κάθε προβλήματος παρατίθεται μία ερώτηση για κάθε μία από τις υποκατηγορίες μεταγνωστικών ικανοτήτων που θα ελεγχθούν. Επιπλέον, η επιλογή αυτών των ικανοτήτων πραγματοποιήθηκε λόγω της δυνατότητας να ελεγχθεί η ύπαρξή τους μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών με την αξιοποίηση φύλλου εργασίας, το οποίο άφηνε τη δυνατότητα στους συμμετέχοντες να συμπληρώσουν κάθε στάδιο επίλυσης προβλήματος και κάθε ερώτηση με ανοιχτού τύπου απάντηση, καθώς λόγω της ιδιαίτερης κατάστασης που προκάλεσαι η πανδημία, η πραγματοποίηση συνεντεύξεων κρίθηκε μη εφικτή. Έτσι, επιλέχθηκε μεγάλο δείγμα (100 παιδιά) για την απόκτηση μιας όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικής εικόνας υπό το πρίσμα της αξιοποίησης μόνο ενός ερευνητικού εργαλείου.

4.3 Μεθοδολογία

4.3.1 Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα αξιοποίησε την ποιοτική ερευνητική προσέγγιση και την περιγραφική μέθοδο. Η συλλογή των δεδομένων γίνεται με σκοπό την απόκτηση μιας εικόνας σχετικά με τις ικανότητες επίλυσης κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων που έχουν αναπτύξει οι μαθητές ηλικίας 11-12 ετών και η συζήτηση των ευρημάτων έτσι ώστε να μπορέσουν να φανούν χρήσιμα στην διδασκαλία των μαθηματικών. Στα πλαίσια της βιβλιογραφικής επισκόπησης μελετήθηκαν έρευνες που αξιοποίησαν ποσοτική μέθοδο συλλογής δεδομένων (Kwon, Park, & Park, 2006 · Bahar & Maker, 2015 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020), ποιοτική μέθοδο (İncebacak & Ersoy, 2016 · Damayanti & Sumardi, 2018 · Albab & Wangguway, 2020) αλλά και πλήθος ερευνών που αξιοποίησαν τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά εργαλεία κι επέλεξαν να τα αναλύσουν είτε ποιοτικά, είτε ποσοτικά (Nohda, 2000 · Lioe, Fai & Hedberg, 2006 · Novita, 2012 · Payadnya, 2019 · Afifah & Agoestanto, 2020 · Kholil, 2020 · Pratiwi, Sudiarta, & Suweken, 2020). Στη συγκεκριμένη έρευνα επιλέχθηκε η ποιοτική μέθοδος συλλογής δεδομένων καθώς θεωρήθηκε σκόπιμο να υπάρξει ελευθερία στον τρόπο προσέγγισης από τους μαθητές με σκοπό να ανακτηθεί μια αντικειμενική εικόνα αναφορικά με τις ικανότητες επίλυσης κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων, χωρίς να καθοδηγούνται οι συμμετέχοντας. Πιο συγκεκριμένα, για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήθηκε ένα φύλλο εργασίας που περιείχε ένα κλειστό (λεκτικό) πρόβλημα, ένα ανοιχτό πρόβλημα και τέσσερις ερωτήσεις για τη διερεύνηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων και οι απαντήσεις που σε αυτά ήταν ανοιχτές.

4.3.2 Δείγμα

Η έρευνα είναι δειγματοληπτική με βολικό κι όχι αντιπροσωπευτικό δείγμα το οποίο απαρτίζεται από 100 μαθητές και μαθήτριες Στ΄ δημοτικού (11-12 ετών) σχολείων της ευρύτερης περιοχής του Βόλου. Πριν από την πραγματοποίηση της έρευνας πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα προκειμένου να διαπιστωθεί ότι τα προβλήματα είναι κατανοητά από τα παιδιά και να διερευνηθούν ενδεχόμενα σφάλματα/ ανακρίβειες στις εκφωνήσεις τους και γενικότερα στο Φύλλο Εργασίας. Το δείγμα της πιλοτικής έρευνας ήταν 12 μαθητές και μαθήτριες. Ο λόγος που επιλέχθηκαν ως συμμετέχοντες μαθητές της τελευταίας τάξης του δημοτικού είναι ότι έχουν μεγαλύτερη εμπειρία με την επίλυση κλειστών προβλημάτων έναντι των μαθητών των υπόλοιπων τάξεων. Ακόμα, σύμφωνα με τον Fisher (1998), ο Piaget τόνισε ότι η μεταγνωστική επίγνωση – ή η «ανακλαστική αφαίρεση», όπως ονόμαζε ο ίδιος ότι το «να σκέφτεται κανείς σχετικά με το πώς σκέφτεται» – αναπτύσσεται στα παιδιά μέσω της αυξανόμενης συνειδητοποίησής τους για διαφορετικές απόψεις και την εμπειρία της αυτο-σύγκρουσης όταν αμφισβητείται η κατανόησή τους. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η μεταγνωστική επίγνωση αναμένεται να αυξάνεται ανάλογα με την ηλικία του ατόμου κι άρα είναι πιθανότερο να παρατηρηθούν μεταγνωστικές ικανότητες σε μαθητές Στ΄ δημοτικού σε σχέση με εκείνους των μικρότερων τάξεων.

Μέσα από τη βιβλιογραφία αναδείχθηκαν κάποια χαρακτηριστικά των μαθητών που φαίνεται να επηρεάζουν την επίλυση προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι εμφανίζουν καλές επιδόσεις στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μαθητές με δημιουργικότητα (Bahar & Maker, 2015 · Klavir & Hershkovitz, 2008) και επικοινωνιακές ικανότητες εξήγησης του τρόπου σκέψης και επίλυσης (Bahar & Maker, 2015) αναφορικά με τα ανοιχτά προβλήματα. Επιπλέον, οι μαθητές με χαμηλά επίπεδα άγχους και υψηλή αυτο-αποτελεσματικότητα στα μαθηματικά (self-efficacy) παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις από εκείνους με υψηλά επίπεδα άγχους και χαμηλή αυτο-αποτελεσματικότητα (Pajares & Miller, 1994) ενώ συναισθηματικές συμπεριφορές όπως η απογοήτευση και η σύγχυση βρέθηκαν να είναι συχνότερες στους αδύναμους λύτες προβλημάτων (Foong, 1994). Επιπρόσθετα, αν και το φύλο δε φάνηκε να επηρεάζει την επίδοση κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στο δημοτικό, φαίνεται ότι προχωρώντας σχολικές βαθμίδες παρουσιάζονται διαφορές στις επιδόσεις των δύο φύλων (Pajares & Miller,1994).

4.3.3 Ερευνητικό εργαλείο

Για την πραγματοποίηση της έρευνας δημιουργήθηκε ένα φύλλο εργασίας το οποίο περιλαμβάνει ένα κλειστό πρόβλημα κι ένα ανοιχτό πρόβλημα καθώς και τέσσερις ερωτήσεις που αφορούν στη μεταγνωστική επίγνωση. Τα προβλήματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε να ανταποκρίνονται σε γνώσεις που έχουν στην κατοχή τους τα παιδιά αυτής της ηλικίας αφού είναι προβλήματα που περιλαμβάνουν τουλάχιστον δύο εκ των τεσσάρων πράξεων, ανάλογα με τον τρόπο επίλυσης που θα διαλέξει ο λύτης. Τα «προβλήματα τεσσάρων πράξεων» εμφανίζονται στο πρώτο κεφάλαιο της ύλης των μαθηματικών Στ΄ δημοτικού. Η επιλογή της συγκεκριμένης ενότητας έγινε έπειτα από συζήτηση με κάποιους από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα καθώς όταν τους ενημέρωσα ότι σκόπευα να επιλέξω προβλήματα που έχουν να κάνουν με εμβαδόν και περίμετρο, μου είπαν ότι λόγω της πανδημίας δεν είχαν προλάβει να διδάξουν το σχετικό κεφάλαιο την προηγούμενη χρονιά. Έτσι, έκρινα ως ασφαλέστερη λύση την επιλογή προβλημάτων που αντιστοιχούν στο πρώτο κεφάλαιο της ύλης της Στ΄ δημοτικού αφότου ενημερώθηκα ότι είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία του σε όλες οι τάξεις που θα συμμετείχαν στην έρευνα.

Τόσο το κελιστό όσο και το ανοιχτό πρόβλημα είχαν τον ίδιο αριθμό δεδομένων (3) και ζητούμενων (1) και αφορούσαν και τα δύο χρήματα. Ειδικότερα, το κλειστό πρόβλημα ανταποκρίνεται στα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια καθώς είναι κλειστό, δηλαδή ο μαθητής μπορεί να οδηγηθεί στη λύση του μέσα από την πραγματοποίηση ορισμένων καθορισμένων βημάτων με βάση τα δεδομένα που δίνονται και υπάρχει μόνο μία σωστή λύση (Yee, 2002). Το κλειστό πρόβλημα που αξιοποιήθηκε δημιουργήθηκε από εμένα, έπειτα από μελέτη των προβλημάτων που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια και σε διαδικτυακές πηγές και, σύμφωνα με την ταξινόμηση των Ozmen, Taskin και Guven (2012, οπ. αναφ. στο Yildiz & Hacisalihoglu Karadeniz, 2016): 1) Με βάση την παρουσίασή του, είναι λεκτικό πρόβλημα που περιλαμβάνει ποσοτικά δεδομένα και είναι σύντομο καθώς παρουσιάζεται με λιγότερο από τέσσερις προτάσεις, 2) με βάση το περιεχόμενο, είναι πρόβλημα ρουτίνας που δεν εμπλέκει άσχετα δεδομένα, είναι σχετικό με την καθημερινή ζωή και εξαρτάται από το πρόγραμμα σπουδών της τάξης και 3) με βάση τη λύση του είναι πρόβλημα που δεν απαιτεί την πραγματοποίηση πολλών υπολογισμών, μπορεί να λυθεί με διαφορετικές λύσεις αλλά όλες είναι γραμμικές και αναφορικά με τη δυσκολία του, μπορεί να αξιολογηθεί ως εύκολο ή δύσκολο ανάλογα με τον λύτη.

Το ανοιχτό πρόβλημα επιλέχθηκε από προηγούμενη έρευνα όπου χρησιμοποιήθηκε για την ανάδειξη των επιπέδων αριθμητικής συλλογιστικής που εμφανίζονταν κατά την επίλυση του προβλήματος από μαθητές 12 ετών (Kosyvas, 2016). Όμως, για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας έγινε μια τροποποίηση στην εκφώνησή του ώστε να μην έχει μόνο μία σωστή απάντηση. Έτσι, με βάση τον ορισμό του Pehkonen (1997) και την κατηγοριοποίηση του Reitman (1965) για τα ανοιχτά προβλήματα, το ανοιχτό πρόβλημα που επιλέχθηκε έχει ανοιχτή αρχική και ανοιχτή τελική κατάσταση/ ανοιχτά τελικά προϊόντα (Pehkonen, 1997 · Nohda, 2000) και η διαδικασία επίλυσής για την εύρεση λύσης είναι ανοιχτή (Nohda, 2000), γεγονός που ευνοεί την εμφάνιση των συστατικών της δημιουργικής σκέψης.

Και τα δύο προβλήματα είναι διατυπωμένα με τρόπο ώστε να μην υπάρχουν περιττές πληροφορίες. Επιπλέον, στο φύλλο εργασίας κάθε πρόβλημα ήταν χωρισμένο σε τέσσερα μέρη, στα τέσσερα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος σύμφωνα με τον Polya και δίπλα από κάθε στάδιο υπήρχε σε παρένθεση μια περιγραφή ως βοηθητική οδηγία για το τι αναμένεται/ προτείνεται να πραγματοποιηθεί σε αυτή (π.χ. «2^{ο} στάδιο (Γράψε ένα σχέδιο για τη λύση του προβλήματος)»). Κατά την πιλοτική έρευνα διαπιστώθηκε ότι η περιγραφή του 4^{ου} σταδίου («Επιβεβαίωσε την ορθότητα της λύσης») δεν ήταν ξεκάθαρη για ορισμένα παιδιά (3) τα οποία με ρώτησαν τι εννοούσε η επεξήγηση. Έτσι, μετά τη συλλογή των φύλλων εργασίας, ρώτησα όλους τους συμμετέχοντες της πιλοτικής έρευνας τι πίστευαν ότι έπρεπε να αναγράφεται στην παρένθεση ώστε να καταλάβουν ότι αυτό που τους ζητείται είναι να ελέγξουν αν η λύση τους είναι σωστή. Πρόθυμοι να απαντήσουν ήταν οι τρεις μαθητές που μου είχαν ζητήσει τη διευκρίνηση, οι οποίοι είπαν ομόφωνα ότι θα προτιμούσαν τη φράση «Επαλήθευσε την ορθότητα της λύσης». Επομένως, στο φύλλο εργασίας που δόθηκε στους συμμετέχοντες της «κανονικής» έρευνας υπήρξε η συγκεκριμένη τροποποίηση.

Οι τέσσερις ερωτήσεις που αφορούν στη μεταγνωστική επίγνωση στηρίχτηκαν στο ερωτηματολόγιο αυτο-αναφοράς του Magno (2009) που δημιουργήθηκε για τη μέτρηση της μεταγνώσης μαθητών ηλικίας 9-10 ετών και το οποίο απαρτίζεται από οχτώ ερωτήσεις που μετρούν: τη δηλωτική γνώση, τη διαδικαστική γνώση, τη γνώση υπό όρους, προβλέψεις, σχεδιασμός, αξιολόγηση, μία για κάθε υποκατηγορία καθώς και δύο ερωτήσεις αναφορικά με την παρακολούθηση. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μαθητές θα καταβάλουν προσπάθεια και θα αφιερώσουν αρκετό χρόνο για να λύσουν τα δύο προβλήματα, κρίθηκε ότι η ύπαρξη οχτώ ερωτήσεων προς απάντηση μετά από την επίλυση κάθε προβλήματος ήταν πολύ πιθανό να προκαλέσει επιπλέον κούραση με αποτέλεσμα πολλά παιδιά να μην τις διαβάσουν προσεκτικά πριν τις απαντήσουν ή και να μην τις απαντήσουν καθόλου. Έτσι, με βάση το ερωτηματολόγιο αυτο-αναφοράς του Magno (2009) συμπεριλήφθηκε στο φύλλο εργασίας, έπειτα από τροποποίηση, η ερώτηση που απαιτεί τη δηλωτική γνώση (Αν απαντούσες με «πάρα πολύ», «πολύ», «αρκετά», «λίγο» και «καθόλου», πόσο δύσκολο θα έλεγες ότι ήταν το πρόβλημα;) και η ερώτηση που διερευνά τη γνώση υπό όρους (Σε τι ήταν δύσκολο;). Επιπλέον, συμπεριλήφθηκε μια ερώτηση με σκοπό τη διερεύνηση της μεταγνωστικής επίγνωσης σχετικά με το τι έκαναν για να λύσουν το πρόβλημα (Τι έκανες για να το λύσεις;) ως μία από τις τρεις λειτουργίες της μεταγνώσης, δηλαδή της επίγνωσης, της αξιολόγησης και της ρύθμισης (Wilson & Clarke, 2004), στηριζόμενη στην ερώτηση του εργαλείου του Magno (2009) που απαιτούσε διαδικαστική γνώση, η οποία τροποποιήθηκε έτσι ώστε να απαντηθεί μετά τη λύση του προβλήματος μαζί με τις υπόλοιπες ερωτήσεις. Τέλος, η τέταρτη ερώτηση του φύλλου εργασίας επιλέχθηκε για να διερευνήσει τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης (Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση;). Έπειτα από την πραγματοποίηση της πιλοτικής έρευνας, η τελευταία ερώτηση τροποποιήθηκε σε «Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση; Αν ναι, πώς το ξέρεις;» γιατί ορισμένοι μαθητές απάντησαν μονολεκτικά («Ναι») χωρίς να εξηγούν πώς ξέρουν ότι είναι σωστή η λύση τους. Το φύλλο εργασίας παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

4.3.4 Διαδικασία

Αρχικά, μέσω της γνωριμίας μου με τη διευθύντρια του ενός από τα σχολεία οι μαθητές της Στ΄ του οποίου συμμετείχαν στην έρευνα ήρθα σε επαφή με τους διευθυντές ορισμένων ακόμα σχολείων. Έπειτα από τηλεφωνική ενημέρωση σχετικά με την έρευνά μου, μου ζητήθηκε βεβαίωση από το πανεπιστήμιο καθώς και η δημιουργία υπεύθυνων δηλώσεων για τους γονείς/ κηδεμόνες των μαθητών, προκειμένου να υπάρχει έγκριση για τη συμμετοχή όσων μαθητών το επιθυμούσαν. Κατά την επίσκεψή μου με σκοπό την παροχή των παραπάνω, είχα την ευκαιρία να μιλήσω με τους εκπαιδευτικούς των τάξεων που θα επισκεπτόμουν και να τους ενημερώσω σχετικά με τη ροή που θα είχε η επίσκεψή μου στην τάξη τους.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τέλος Φεβρουαρίου με αρχές Μαρτίου του 2021. Κατά τη διάρκεια της έρευνας πραγματοποιήθηκε επίσκεψη μία φορά σε κάθε τάξη η οποία είχε διάρκεια μία διδακτική ώρα καθώς θεωρήθηκε επαρκής για την επίλυση δύο μαθηματικών προβλημάτων, υπόθεση που επιβεβαιώθηκε και από την πιλοτική έρευνα. Η επίσκεψή μου σε κάθε τάξη είχε την εξής ροή: Έπειτα από την είσοδό μου στην αίθουσα παρουσίαζα σύντομα τον εαυτό και το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται η παρούσα έρευνα και επισήμαινα ότι στο φύλλο εργασίας δεν χρειάζεται να αναγράψουν το επίθετό τους παρά μόνο το μικρό τους όνομα και πως αν κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων αναφερόμουν σε κάποιο από τα γραφόμενά τους θα το έκανα με τη χρήση μόνο του αρχικού γράμματος του ονόματός τους. Ακόμα, διευκρίνιζα ότι με ενδιαφέρει να δω τον τρόπο με τον οποίο λύνουν τα προβλήματα κι όχι αποκλειστικά τη λύση τους, ότι το φύλλο εργασίας δεν θα βαθμολογούταν ούτε θα έβλεπε τις απαντήσεις ο/η εκπαιδευτικός της τάξης. Στη συνέχεια, εξηγούσα τη δομή του φύλλου εργασίας και απαντούσα σε τυχόν ερωτήσεις των παιδιών σχετικά με τις περιγραφές κάθε σταδίου που δίνονταν σε παρένθεση ή και με τις ερωτήσεις που υπήρχαν στο τέλος κάθε προβλήματος. Πριν την έναρξη της λύσης των προβλημάτων ενημέρωνα τα παιδιά ότι σε περίπτωση που σκέφτονταν παραπάνω από έναν τρόπο επίλυσης, θα με ενδιέφερε να τον δω. Τέλος, τονίστηκε ότι ο διαχωρισμός της επίλυσης κάθε προβλήματος σε τέσσερα στάδια υπήρχε ώστε να τους βοηθήσει κατά τη διαδικασία επίλυσης.

4.3.5 Ανάλυση Δεδομένων

Έπειτα από τη συγκέντρωση όλων των φύλλων εργασίας πραγματοποιήθηκε ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των δεδομένων. Η ποσοτική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με σκοπό την ανάδειξη του αριθμού των συμμετεχόντων που φάνηκε να έχουν αναπτύξει τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος που διερευνήθηκαν. Ειδικότερα, σε κάθε στάδιο επίλυσης καθενός από τα προβλήματα εξετάστηκε η ύπαρξη ορισμένων ικανοτήτων μέσα από την μελέτη των απαντήσεων των συμμετεχόντων. Τα δεδομένα αναλύθηκαν και οργανώθηκαν έχοντας ως γνώμονα τη θεματική ανάλυση δεδομένων (Clarke, Braun & Hayfield, 2015, οπ. αναφ. Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Αρχικά πραγματοποιήθηκε προσεκτική ανάγνωση του συνόλου των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε πρόβλημα και κάθε ερώτηση με σκοπό την αναζήτηση κοινών μοτίβων. Έτσι, δημιουργήθηκαν κάποιες αρχικές ταξινομήσεις των απαντήσεων ώστε να προκύψει μια πρώτη συνολική εικόνα αναφορικά με τις ικανότητες που εξετάστηκαν σε κάθε στάδιο κάθε προβλήματος καθώς και τη μεταγνωστική επίγνωση. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε εκ νέου ανάγνωση κι έπειτα ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και σύντομη κωδικοποίηση των «μοτίβων απαντήσεων» που παρατηρήθηκαν. Έπειτα, κάθε περίπτωση της παραπάνω κωδικοποίησης μελετήθηκε προσεκτικά με σκοπό την κατάταξή της στην κατάλληλη κατηγορία ανάλογα με το σε τι βαθμό φανερώνει ότι έχει αναπτυχθεί η εκάστοτε ικανότητα από κάθε μαθητή. Αφού ολοκληρώθηκε η ταξινόμηση όλων των περιπτώσεων στην κατάλληλη βαθμίδα κατοχής κάθε ικανότητας – δηλαδή ως «όχι», «μερικώς» ή «ναι» – οι απαντήσεις κάθε συμμετέχοντα εξετάστηκαν εκ νέου. Αυτό έγινε για εξακριβωθεί ότι η ταξινόμησή τους είναι σωστή και σε αυτό το σημείο είναι που προέκυψε η ανάγκη επιπλέον διαχωρισμού της κατηγορίας «μερικώς» σε «μερικώς (-)» και «μερικώς (+)» σε κάποιες ικανότητες. Σε αυτό το σημείο πραγματοποιήθηκε μια τελευταία εξέταση όλων των απαντήσεων ώστε να ελεγχθεί ότι έχουν κατηγοριοποιηθεί σωστά.

Με παρόμοιο τρόπο κωδικοποιήθηκαν και οι απαντήσεις των ερωτήσεων που στόχευαν στη διερεύνηση της μεταγνωστικής επίγνωσης. Ειδικότερα, έπειτα από σύντομη καταγραφή των απαντήσεων, μελετήθηκαν συνολικά και μέσα από τη σύγκριση των απαντήσεων αναδείχθηκαν κοινά σημεία τα οποία οδήγησαν στη δημιουργία κατηγοριών.

4.3.6 Εγκυρότητα και αξιοπιστία

Η διασφάλιση της αξιοπιστίας θα πραγματοποιηθεί μέσω της εξωτερικής αξιολόγησης από την επιβλέπουσα καθηγήτρια (Creswell, 2011). Η μεταβιβασιμότητα ή γενικευσιμότητα των ευρημάτων μιας ποιοτικής μελέτης, αντίστοιχα με τον όρο «εξωτερική εγκυρότητα» ο οποίος χρησιμοποιείται στην ποσοτική σχολή εκπαιδευτικής έρευνας, αναφέρεται στον βαθμό που τα συμπεράσματα της μελέτης μπορούν να γενικευτούν σε ευρύτερα σύνολα ομοειδών περιπτώσεων από τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται το συγκεκριμένο δείγμα. Η διασφάλισή της θα γίνει μέσω της πυκνής περιγραφής των δεδομένων όπως προτείνεται για ευρήματα ποιοτικής έρευνας (Συμεού, 2006).

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Ποσοτική ανάλυση δεδομένων

Η κατηγοριοποίηση και κωδικοποίηση των απαντήσεων αναφορικά με τον βαθμό στον οποίο φαίνονται ότι έχουν αναπτυχθεί οι ικανότητες που διερευνήθηκαν έγιναν με κοινή λογική για το κλειστό και το ανοιχτό πρόβλημα και περιγράφονται αναλυτικά στην ποιοτική ανάλυση των δεδομένων.

5.1.1 Κλειστό πρόβλημα

1ο στάδιο

Από το σύνολο των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν στην έρευνα οι 89 συμπλήρωσαν το 1ο στάδιο του κλειστού προβλήματος ενώ οι υπόλοιποι 11 το άφησαν κενό. Σε αυτό το στάδιο οι ικανότητες που διερευνήθηκαν ήταν η ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων (όπου εξετάστηκε αν οι μαθητές εντοπίζουν και καταγράφουν όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της εκφώνησης που είναι απαραίτητα για τη λύση του προβλήματος) και η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης των πληροφοριών του προβλήματος (όπου διερευνήθηκε αν οι μαθητές παραστούν με κάποιο τρόπο τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος). Οι δύο αυτές ικανότητες εξετάστηκαν με βάση το περιεχόμενο των απαντήσεων που δόθηκαν στο «πλαίσιο» που υπήρχε στο φύλλο εργασίας για το 1ο στάδιο. Για την ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων δημιουργήθηκε τετραπλή κλίμακα κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, η οποία παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Κλειστό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Εντοπισμός/ καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	11
ΟΧΙ	21
ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	43
ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	15
ΝΑΙ	10
Σύνολο	**100**

Διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών είναι, σε γενικές γραμμές, σε θέση να εντοπίσει τα δεδομένα και το ζητούμενο του προβλήματος αλλά όχι με συνεπή τρόπο καθώς οι 58 από τους συμμετέχοντες δεν κατέγραψαν όλες τις χρήσιμες πληροφορίες της εκφώνησης.

Η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης του προβλήματος εξετάστηκε με βάση το κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να παραστήσουν τις πληροφορίες του προβλήματος. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, οι περισσότεροι μαθητές (38) παραστούν «μερικώς» τις πληροφορίες της εκφώνησης διαχωρίζοντάς τες σε «δεδομένα» και «ζητούμενα» είτε μέσα σε κείμενο χρησιμοποιώντας λέξεις όπως «ξέρω-ψάχνω», είτε σημειώνοντάς τα σε διαφορετικό χώρο (μερικώς -) ή δημιουργώντας δύο ομάδες («δεδομένα» και «ζητούμενα») και σημειώνοντας με σύντομες φράσεις τις πληροφορίες που ανήκουν στην αντίστοιχη κατηγορία.

Πίνακας 2: Κλειστό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Οπτική αναπαράσταση πληροφοριών

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	11
ΟΧΙ	31
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	33
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	5
ΝΑΙ	20
Σύνολο	**100**

2ο στάδιο

Από τους 100 συμμετέχοντες, οι 78 συμπλήρωσαν το 2ο στάδιο. Σε αυτό το στάδιο οι δύο ικανότητες που εξετάστηκαν ήταν η ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους (όπου εξετάστηκε αν δομούν ένα σχέδιο για το πώς θα φτάσουν στην εύρεση του ζητούμενου γνωρίζοντας σε ποιον ενδιάμεσο στόχο οδηγεί κάθε τους βήμα) και η ικανότητα να επιλέγουν την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος. Με βάση τα δεδομένα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3 φαίνεται ότι 40 από τους 100 μαθητές είτε έκαναν λανθασμένο σχέδιο λύσης (π.χ. πίνακας μεθόδου των τριών), είτε δεν έκαναν σχέδιο λύσης.

Πίνακας 3: Κλειστό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	22
ΟΧΙ	40
ΜΕΡΙΚΩΣ	17
ΝΑΙ	21
Σύνολο	**100**

Όσον αφορά την ικανότητα επιλογής κατάλληλης στρατηγικής, η πλειοψηφία είτε επέλεξε λανθασμένη στρατηγική είτε δεν φανέρωσε τη στρατηγική που θα ακολουθήσει καθώς δεν δημιούργησε σχέδιο λύσης (Πίνακας 4). Επίσης, από όσους δημιούργησαν ένα σχέδιο λύσης, οι 17 έκαναν σωστή επιλογή στρατηγικής.

Πίνακας 4: Κλειστό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Επιλογή κατάλληλης στρατηγικής

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	22
ΟΧΙ	48
ΝΑΙ	17
ΑΛΛΟ	13
Σύνολο	**100**

3ο στάδιο

Από τους 100 συμμετέχοντες, 95 συμπλήρωσαν το τρίτο στάδιο επίλυσης του κλειστού προβλήματος. Οι 37 έδωσαν σωστή λύση ενώ οι 58 έδωσαν λανθασμένη λύση. Φαίνεται, δηλαδή, πως παρά το γεγονός ότι το κλειστό πρόβλημα ανήκει στην ίδια κατηγορία με την πλειοψηφία των προβλημάτων που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ τάξης, πάνω από τους μισούς μαθητές που το έλυσαν δεν κατάφεραν να δώσουν σωστή λύση. Σε αυτό το στάδιο εξετάστηκαν η ικανότητα πραγματοποίησης σωστών πράξεων και η ικανότητα των μαθητών να προτείνουν παραπάνω από έναν τρόπο λύσης. Όπως παρουσιάζεται και στον Πίνακα 5, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών έχει αναπτύξει την ικανότητα να πραγματοποιεί σωστούς μαθηματικούς υπολογισμούς.

Πίνακας 5: Κλειστό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Σωστή πραγματοποίηση πράξεων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	5
ΟΧΙ	5
ΜΕΡΙΚΩΣ	10
ΝΑΙ	79
ΑΛΛΟ	1
Σύνολο	**100**

Αντίθετα, μόνο 1 από τους 95 μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα πρότεινε παραπάνω από έναν τρόπο λύσης γεγονός που υποδεικνύει ότι η η δημιουργική σκέψη των μαθητών δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα αρκετά.

Σε όσους συμμετέχοντες έλυσαν σωστά το πρόβλημα, η λύση τους μελετήθηκε περαιτέρω με σκοπό την διερεύνηση του κατά πόσο ο τρόπος λύσης που επέλεξαν ήταν οικονομικός και ποιοτικός. Διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία επέλεξε έναν από τους πιο οικονομικούς (Πίνακας 6) ποιοτικούς τρόπους λύσης (Πίνακας 7).

Πίνακας 6: Κλειστό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει οικονομικό τρόπο λύσης

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΟΧΙ	3

ΜΕΡΙΚΩΣ	3
ΝΑΙ	31
Σύνολο	**37**

Πίνακας 7: Κλειστό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει ποιοτικό τρόπο λύσης

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΟΧΙ	3
ΜΕΡΙΚΩΣ	1
ΝΑΙ	33
Σύνολο	**37**

4ο στάδιο

Το τέταρτο στάδιο επίλυσης του κλειστού προβλήματος συμπλήρωσαν 60 από τους 100 συμμετέχοντες. Σε αυτό το στάδιο εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να σκέφτονται κριτικά διερευνώντας το αν η απάντηση που έδωσαν είναι λογική μέσα από το αποτέλεσμα που έδωσαν στο 3ο στάδιο καθώς και από το περιεχόμενο των απαντήσεων του 4ου σταδίου όσων το συμπλήρωσαν. Πέρα από τη σωστή απάντηση, λογικό κρίθηκε το αποτέλεσμα που απείχε έως +/- 20€ από αυτή. Με βάση τον Πίνακα 8 παρατηρούμε έναν ισομερή διαμερασμό μεταξύ όσων έδωσαν μη λογική απάντηση (42 μαθητές) και όσων έδωσαν λογική απάντηση (40 μαθητές). Παρατηρείται ότι η ικανότητα κριτικής σκέψης δεν έχει κατακτηθεί ακόμα από ένα μεγάλο αριθμό μαθητών.

Πίνακας 8: Κλειστό πρόβλημα. Δίνει λογικό αποτέλεσμα

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	5
ΟΧΙ	42
ΑΡΚΕΤΑ	13
ΝΑΙ	40
Σύνολο	**100**

Ακόμα, εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να επαληθεύουν την απάντησή τους, δηλαδή να ελέγχουν την ορθότητα της λύσης τους. Οι περισσότεροι μαθητές που ακολούθησαν αυτό το βήμα έλεγξαν είτε όλες είτε κάποιες από τις πράξεις της λύσης του για να σιγουρευτούν για την απάντησή τους (Πίνακας 9).

Πίνακας 9: Κλειστό πρόβλημα. 4ο στάδιο. Ελέγχει ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	40
ΟΧΙ	4
ΜΕΡΙΚΩΣ	23
ΝΑΙ	27
ΑΛΛΟ	6
Σύνολο	**100**

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Για τη διερεύνηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων οι ερωτήσεις που δόθηκαν στα πλαίσια της παρούσας έρευνας στηρίχτηκαν στο ερωτηματολόγιο αυτο-αναφοράς του Magno (2009) που δημιουργήθηκε για τη μέτρηση της μεταγνώσης μαθητών ηλικίας 9-10 ετών. Η πρώτη ερώτηση αποσκοπούσε στη διερεύνηση της δηλωτικής γνώσης – δηλαδή τη γνώση σχετικά με τις δεξιότητες, τους πνευματικούς πόρους και τις ικανότητες ενός λύτη – ρωτώντας τους συμμετέχοντες πόσο δύσκολο τους φάνηκε το πρόβλημα. Η πλειοψηφία των μαθητών δήλωσε ότι το πρόβλημα ήταν από «καθόλου» εώς «λίγο» δύσκολο (60 μαθητές), βαθμός δυσκολίας που δεν έχει μεγάλη συνάφεια με τον αριθμό των μαθητών που έλυσαν σωστά το πρόβλημα (37 μαθητές). Επομένως, διαπιστώνεται ότι αρκετοί μαθητές φαίνεται ότι εκτίμησαν λανθασμένα την ικανότητά τους να λύσουν το κλειστό πρόβλημα.

Πίνακας 10: Κλειστό πρόβλημα. 1η ερώτηση: Αν απαντούσες με «πάρα πολύ», «πολύ», «αρκετά», «λίγο» και «καθόλου», πόσο δύσκολο θα έλεγες ότι ήταν το πρόβλημα;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
Πάρα πολύ/ Πολύ	0
Αρκετά	16
Λίγο/ Καθόλου	60
Δεν απάντησαν (Δ.Α.)	24
Σύνολο	**100**

Η δεύτερη ερώτηση είχε σκοπό τη διερεύνηση της γνώσης υπό όρους και ουσιαστικά ωθούσε τους μαθητές να αναρωτηθούν σχετικά με τον παράγοντα που τους δυσκόλεψε να λύσουν το πρόβλημα. Παρατηρείται ότι σχεδόν το 1/3 των μαθητών δήλωσε ότι δεν συνάντησε καμία δυσκολία ενώ περίπου οι μισοί από αυτούς φάνηκε ότι δυσκολεύτηκαν στην δημιουργία του σχεδίου λύσης του προβλήματος (Πίνακας 11). Αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στο ότι τις περισσότερες φορές οι μαθητές είτε καταγράφουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος κι έπειτα προχωρούν στη λύση, είτε ξεκινούν να λύνουν το πρόβλημα αμέσως μετά την ανάγνωση της εκφώνησης.

Πίνακας 11: Κλειστό πρόβλημα. 2η ερώτηση: Σε τι ήταν δύσκολο;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
Κατανόηση/ τι ζητάει	9
2ο στάδιο/ πώς θα το λύσω	15
2ο και 4ο στάδιο	2
Πράξεις	7
Επαλήθευση	7
Σε τίποτα	31
Άλλο	
α) 1ο και 2ο στάδιο	1

β) «Το ότι θα απαντούσα με 5 λέξεις.»	1
Δ.Α.	27
Σύνολο	**100**

Η τρίτη ερώτηση ήταν αυτή που απαντήθηκε από τους περισσότερους σε σχέση με πολλές υπόλοιπες. Από τα δεδομένα του Πίνακα 12 γίνεται αντιληπτό ότι η πλειοψηφία δεν έχει μεταγνωστική επίγνωση σχετικά με το πώς προσέγγισε το πρόβλημα καθώς ανέφερε απλά ποιες πράξεις έκανε. Παρόλα αυτά, αρκετοί ήταν εκείνοι που φάνηκε να επιστρέφουν στο πρόβλημα για να σκεφτούν τι έκαναν ανατρέχοντας στο σχέδιο λύσης που κατασκεύασαν (27 μαθητές).

Πίνακας 12: Κλειστό πρόβλημα. 3η ερώτηση: Τι έκανες για να το λύσεις;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Ανάγνωση πολλές φορές	2
2ο στάδιο συνοπτικά	27
Ποιες πράξεις (ονομαστικά)	52
Άλλο	
α) γενική απάντηση («διάφορα», «πράξεις»)	2
β) «Έγραψα αυτό που έκανα στο πρόβλημα	1
Δ.Α.	16
Σύνολο	**100**

Η τελευταία ερώτηση απαιτούσε την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της στρατηγικής που επιλέχθηκε. Οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν αν η λύση τους ήταν σωστή και, όπως προαναφέρθηκε, έπειτα από την πιλοτική έρευνα προστέθηκε σε αυτή ένα δεύτερο σκέλος το οποίο ζητούσε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν πώς ξέρουν ότι η λύση τους είναι σωστή. Από τους 48 μαθητές που δήλωσαν βεβαιότητα ότι η απάντησή τους είναι σωστή (Πίνακας 13), μόνο οι 19 έλυσαν σωστά το πρόβλημα.

Πίνακας 13: Κλειστό πρόβλημα. 4η ερώτηση: Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση; Αν ναι, πώς το ξέρεις;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	21
Όχι (δεν ξέρω)	31
Ναι	
α) χωρίς αιτιολόγηση	5
β) το πρόβλημα ήταν εύκολο	4
γ) το σκέφτηκα	2
δ) επέλεξα ωραίο τρόπο	2
ε) έκανα επαλήθευση	31
στ) Άλλο	
στ1) παραθέτει το σχέδιο λύσης	1
στ2) «Έγραψα τα ζητούμενα τα οποία με βοήθησαν»	1
στ3) «Αυτή την εβδ. δούλεψε 3 ώρες άρα και περισ. χρήματα»	1
Σύνολο	**100**

Γενικές παρατηρήσεις για το κλειστό πρόβλημα

Αναφορικά με τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος που εξετάστηκαν, διαπιστώνεται ότι τόσο η ικανότητα εντοπισμού των δεδομένων και των ζητούμενων όσο και η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης του προβλήματος δεν έχουν αναπτυχθεί ακόμα πλήρως από τους μαθητές. Ακόμα, η πλειοψηφία των μαθητών είτε δεν ακολούθησε το 2ο στάδιο, είτε το ακολούθησε αλλά προτείνοντας λανθασμένο σχέδιο λύσης ή χωρίς να δημιουργεί καθόλου σχέδιο λύσης. Αναδεικνύεται, λοιπόν, ότι η ικανότητα κατασκευής ενός σχεδίου λύσης αλλά και η ικανότητα επιλογής κατάλληλης στρατηγικής βρίσκονται ακόμα υπό ανάπτυξη. Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές είναι ικανοί να ολοκληρώνουν σωστά τις αριθμητικές πράξεις που χρειάστηκαν για τη λύση του κλειστού προβλήματος, δεν εμφανίζονται, όμως, καθόλου ικανοί στο να προτείνουν διαφορετικούς τρόπους λύσης. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η ικανότητα δημιουργικής σκέψης δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα από τους συμμετέχοντες. Ακόμα, σχεδόν όλοι όσοι έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα πρότειναν έναν οικονομικό και ποιοτικό τρόπο λύσης. Τέλος, από τις απαντήσεις που δόθηκαν φάνηκε ότι περίπου οι μισοί από τους συμμετέχοντες δεν έχουν αναπτύξει ακόμα την ικανότητα κριτικής σκέψης καθώς πρότειναν μη λογική απάντηση ενώ οι μισοί είναι σε θέση να επαληθεύσουν την ορθότητα της λύσης τους.

Αναφορικά με τις ικανότητες μεταγνωστικής επίγνωσης που εξετάστηκαν, προσεγγίζοντας συνδυαστικά τη δηλωτική γνώση (1η ερώτηση) και την ορθή λύση του κλειστού προβλήματος, διαπιστώνεται ότι σχεδόν τα 2/3 από τους μαθητές που έδωσαν χαμηλό βαθμό δυσκολίας στο πρόβλημα έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Μέσα από την ερώτηση που διερευνούσε τη γνώση υπό όρους (2η ερώτηση), βασικό σημείο δυσκολίας του κλειστού προβλήματος ήταν η δημιουργία σχεδίου λύσης. Επιπλέον, με βάση της απαντήσεις των μαθητών στην 3η ερώτηση διαπιστώνεται ότι οι περισσότεροι φαίνεται να μην έχουν επίγνωση του τι έκαναν για να λύσουν το πρόβλημα. Τέλος, οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση που εξέταζε τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης (4η ερώτηση) έδειξαν ότι αυτή δεν έχει κατακτηθεί πλήρως ακόμα καθώς από όσους δήλωσαν σίγουροι για την απάντησή τους, λιγότεροι από τους μισούς έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα.

5.1.2 Ανοιχτό πρόβλημα

1ο στάδιο

Από το σύνολο των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν στην έρευνα οι 85 συμπλήρωσαν το 1ο στάδιο του ανοιχτού προβλήματος. Η ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων καθώς και η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης των πληροφοριών του προβλήματος εξετάστηκαν με βάση το περιεχόμενο του 1ου σταδίου. Παρατηρείται ότι το πλήθος των μαθητών που εντοπίζουν και καταγράφουν κάποια από τα δεδομένα και τα ζητούμενα (35 μαθητές) και το πλήθος εκείνων που εντοπίζουν όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα (25 μαθητές) κυμαίνονται σε παρόμοια πλαίσια.

Πίνακας 14: Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Εντοπισμός/ καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	15
ΟΧΙ	26
ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	32
ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	3
ΝΑΙ	25
Σύνολο	**100**

Η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης των πληροφοριών εξετάστηκε με βάση το αν οι μαθητές παρέστησαν τις πληροφορίες του προβλήματος. Η πλειοψηφία δεν αναπαράστησε οπτικά το ανοιχτό πρόβλημα ενώ αρκετοί ήταν εκείνοι που κατέγραψαν τις πληροφορίες της εκφώνησης διαχωρίζοντάς τες σε «δεδομένα» και «ζητούμενα» μέσα σε κείμενο ή σημειώνοντάς τες σε εμφανώς διαφορετικό σημείο του «πλαισίου» του 1ου σταδίου (Πίνακας 15).

Πίνακας 15: Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Οπτική αναπαράσταση πληροφοριών

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
ΚΕΝΟ	15
ΟΧΙ	43
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	17
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	5
ΝΑΙ	20
Σύνολο	**100**

2ο στάδιο

Από τους 100 συμμετέχοντες, οι 76 συμπλήρωσαν το 2ο στάδιο. Όπως και στο κλειστό πρόβλημα, οι ικανότητες που εξετάστηκαν σε αυτό το στάδιο ήταν η ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν σχέδιο λύσης με ενδιάμεσους στόχους και η ικανότητα να επιλέγουν την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος. Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 16 και του Πίνακα 17 διαπιστώνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν δημιούργησαν ένα σχέδιο λύσης που θα τους οδηγούσε βήμα-βήμα στην εύρεση του ζητούμενου και επέλεξαν λανθασμένη στρατηγική.

Πίνακας 16: Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	24
ΟΧΙ	45
ΜΕΡΙΚΩΣ	18
ΝΑΙ	13
Σύνολο	**100**

Επίσης, παρατηρείται ότι από τους μαθητές που δημιούργησαν κάποιο σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους (οι «μερικώς» και οι «ναι»), η πλειοψηφία (25 μαθητές) έκανε σωστή επιλογή στρατηγικής.

Πίνακας 17: Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Επιλογή κατάλληλης στρατηγικής

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	24
ΟΧΙ	46
ΝΑΙ	25
ΑΛΛΟ	5
Σύνολο	**100**

3ο στάδιο

Από τους 100 συμμετέχοντες, 90 συμπλήρωσαν το 3ο στάδιο επίλυσης του κλειστού προβλήματος και οι 47 από αυτούς έδωσαν σωστή λύση ενώ οι 43 έδωσαν λανθασμένη λύση. Σε αυτό το στάδιο εξετάστηκαν η ικανότητα πραγματοποίησης σωστών πράξεων και η ικανότητα των μαθητών να προτείνουν παραπάνω από έναν τρόπο λύσης. Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 18 γίνεται αντιληπτό ότι η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων έχει αναπτύξει την ικανότητα πραγματοποίησης σωστών πράξεων.

Πίνακας 18: Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Πραγματοποίηση σωστών πράξεων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	10
ΟΧΙ	7
ΜΕΡΙΚΩΣ	4
ΝΑΙ	79
Σύνολο	**100**

Αναφορικά με την ικανότητα εύρεσης διαφορετικών τρόπων λύσης, από τους 90 μαθητές που έλυσαν το ανοιχτό πρόβλημα οι 10 πρότειναν τουλάχιστον 2 διαφορετικούς τρόπους λύσης σωστές λύσεις που έδιναν σωστή απάντηση, γεγονός που φανερώνει ότι λίγοι είναι οι μαθητές που έχουν αναπτύξει, μέχρι στιγμής, την δημιουργική τους σκέψη.

Όπως και στην περίπτωση του κλειστού προβλήματος, η λύση όσων έλυσαν σωστά το πρόβλημα εξετάστηκε περαιτέρω με σκοπό την διερεύνηση του κατά πόσο ο τρόπος λύσης που επέλεξαν ήταν οικονομικός και ποιοτικός. Διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία επέλεξε έναν οικονομικό τρόπο λύσης (Πίνακας 19) ενώ οι περισσότεροι έλυσαν το πρόβλημα με έναν αρκετά ποιοτικό τρόπο λύσης (Πίνακας 20).

Πίνακας 19: Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει οικονομικό τρόπο λύσης

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΟΧΙ	4
ΜΕΡΙΚΩΣ	1
ΝΑΙ	42
Σύνολο	**47**

Πίνακας 20: Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει ποιοτικό τρόπο λύσης

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΟΧΙ	7
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	5
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	17
ΝΑΙ	18
Σύνολο	**47**

4ο στάδιο

Το τέταρτο στάδιο επίλυσης του κλειστού προβλήματος συμπλήρωσαν 53 από τους 100 συμμετέχοντες. Σε αυτό το στάδιο εξετάστηκε, αρχικά, το αν το αποτέλεσμα της λύσης που έδωσαν οι μαθητές ήταν λογικό μέσα από το περιεχόμενο των απαντήσεων του 3ου και του 4ου σταδίου. Επιπλέον, με βάση το 4ο στάδιο εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να επαληθεύουν την ορθότητα της λύσης τους. Η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε λογική απάντηση, γεγονός που φανερώνει ότι έχει αναπτύξει επαρκώς την ικανότητα κριτικής σκέψης (Πίνακας 21).

Πίνακας 21: Ανοιχτό πρόβλημα. 4ο στάδιο. Δίνει λογικό αποτέλεσμα

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	10
ΟΧΙ	24
ΑΡΚΕΤΑ	6
ΝΑΙ	60
Σύνολο	**100**

Επιπλέον, μεγάλος ήταν ο αριθμός των μαθητών που δεν ακολούθησαν το 4ο στάδιο όμως η πλειοψηφία όσων το ακολούθησαν έλεγξαν όλες τις πράξεις που έκαναν στο 3ο στάδιο έτσι ώστε να επαληθεύσουν την απάντησή τους (Πίνακας 22).

Πίνακας 22: Ανοιχτό πρόβλημα. 4ο στάδιο. Ελέγχει ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	47
ΟΧΙ	2
ΜΕΡΙΚΩΣ	10
ΝΑΙ	36
ΑΛΛΟ	5
Σύνολο	**100**

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Η πρώτη ερώτηση αποσκοπούσε στη διερεύνηση της γνώσης σχετικά με τις ικανότητες του λύτη ρωτώντας τους συμμετέχοντες πόσο δύσκολο τους φάνηκε το πρόβλημα. Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 23, η πλειοψηφία των μαθητών δήλωσε ότι το πρόβλημα ήταν από «καθόλου» έως «λίγο» δύσκολο (64 μαθητές), βαθμός δυσκολίας που συμβαδίζει αρκετά με τον αριθμό των μαθητών που έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα (47 μαθητές). Επομένως, διαπιστώνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές εκτίμησαν σωστά την ικανότητά τους να λύσουν το πρόβλημα.

Πίνακας 23: Ανοιχτό πρόβλημα. 1η ερώτηση: Αν απαντούσες με «πάρα πολύ», «πολύ», «αρκετά», «λίγο» και «καθόλου», πόσο δύσκολο θα έλεγες ότι ήταν το πρόβλημα;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
Πάρα πολύ/ Πολύ	2
Αρκετά	10
Λίγο/ Καθόλου	64
Δεν απάντησαν (Δ.Α.)	24
Σύνολο	**100**

Από τις απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη ερώτηση φαίνεται ότι οι περισσότεροι δεν δυσκολεύτηκαν σε κάτι ενώ περίπου το ¼ των συμμετεχόντων αντιμετώπισε δυσκολία στην δημιουργία σχεδίου λύσης (Πίνακας 24).

Πίνακας 24: Ανοιχτό πρόβλημα. 2η ερώτηση: Σε τι ήταν δύσκολο;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
Όχι αρκετά στοιχεία	1
Το ζητούμενο	2
2ο στάδιο/ πώς θα το λύσω	19
Πράξεις	5
Επαλήθευση	3
Σε τίποτα	34
Άλλο	
α) «Το ότι είχε χαρτον. και των 5€ και των 10€.»	1
β) «Το ότι είχε περιορισμένες λέξεις.»	1
γ) «Σε όλα.»	1
δ) «Στις πράξεις και στα δεδομένα που έδινε.» (1ο και 3ο στάδιο)	1
Δ.Α.	32
Σύνολο	**100**

Αναφορικά με την τρίτη ερώτηση, ανατρέχοντας στον Πίνακα 25 διαπιστώνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν προβληματίζονται σχετικά με το τι έκαναν για να λύσουν το πρόβλημα καθώς λιγότεροι από το ¼ των συμμετεχόντων φάνηκε να επιστρέφει στο 2ο στάδιο για να αναλογιστεί τι έκανε για να λύσει το πρόβλημα. Επομένως, η μεταγνωστική επίγνωση δεν έχει κατακτηθεί ακόμα.

Πίνακας 25: Ανοιχτό πρόβλημα. 3η ερώτηση: Τι έκανες για να το λύσεις;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών

Ανάγνωση πολλές φορές	2
2ο στάδιο συνοπτικά	18
Ποιες πράξεις (ονομαστικά)	50
Ξαναέλυσε το πρόβλημα	5
Άλλο	
α) «Έκανα 3 από/ όλες τις πιθανές απαντήσεις.»	2
β) «Βοηθήθηκα από το σχέδιο λύσης.»	1
γ) «Ακολούθησα τα βήματα.»	1
Δ.Α.	21
Σύνολο	**100**

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν αν η λύση που έδωσαν ήταν σωστή και φάνηκε ότι η πλειοψηφία αυτών που απάντησαν καταφατικά δικαιολόγησαν την απάντησή τους μέσω της επαλήθευσης που έκαναν στο 4ο στάδιο. Από τους 55 μαθητές που είπαν ότι η λύση τους είναι σωστή, οι 32 έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα.

Πίνακας 26: Ανοιχτό πρόβλημα. 4η ερώτηση: Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση; Αν ναι, πώς το ξέρεις;

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	20
Όχι (δεν ξέρω)	25
Ναι	
α) χωρίς αιτιολόγηση	7
β) το πρόβλημα ήταν εύκολο	5
γ) το σκέφτηκα	1
δ) έκανα σωστές πράξεις	2
ε) ναι για το αποτέλεσμα, όχι για τον τρόπο λύσης	2
στ) έκανα επαλήθευση	35
ζ) Άλλο	
ζ1) παραθέτει το σχέδιο λύσης	1
ζ2) «Έκανα διαίρεση που είναι ακριβής πράξη.»	1
ζ3) «Έπρεπε να κάνω πρόσθεση.»	1
Σύνολο	**100**

Γενικές παρατηρήσεις για το ανοιχτό πρόβλημα

Αναφορικά με τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος που εξετάστηκαν, παρατηρείται ότι η ικανότητα εντοπισμού των δεδομένων και των ζητούμενων έχει κατακτηθεί από τους περισσότερους μαθητές ως έναν βαθμό. Αντίθετα, ο αριθμός των μαθητών που φάνηκε να μην είναι σε θέση να αναπαραστήσει οπτικά το ανοιχτό πρόβλημα ήταν ο διπλάσιος από αυτόν που το παρέστησαν. Η πλειοψηφία των μαθητών παρουσίασε δυσκολία στη δημιουργία σχεδίου λύσης και στην επιλογή σωστής στρατηγικής, αναδεικνύοντας, ενδεχομένως, ότι οι μαθητές οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει να αφιερώνουν χρόνο στο να σκεφτούν πώς θα λύσουν το πρόβλημα πριν περάσουν στη λύση του. Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές είναι ικανοί να ολοκληρώνουν σωστά τις αριθμητικές πράξεις που χρειάστηκαν για τη λύση του ανοιχτού προβλήματος, αλλά λίγοι ήταν εκείνοι που φάνηκε να έχουν αναπτύξει αρκετά τη δημιουργική τους σκέψη ώστε να προτείνουν διαφορετικούς τρόπους λύσης. Ακόμα, σχεδόν όλοι όσοι έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα πρότειναν έναν οικονομικό τρόπο λύσης χωρίς, όμως, αυτός να είναι πάντα αρκετά ποιοτικός. Επιπρόσθετα, φάνηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν αναπτύξει αρκετά την κριτική τους σκέψη καθώς έδωσαν λογικές απαντήσεις. Τέλος, σχεδόν οι μισοί μαθητές παρέλειψαν το 4^{ο} στάδιο, γεγονός που δείχνει ότι δεν έχουν συνειδητοποιήσει τη σημασία της επαλήθευσης, όμως οι περισσότεροι από αυτούς που το ακολουθήσαν επαλήθευσαν την απάντησή τους.

Αναφορικά με τις ικανότητες μεταγνωστικής επίγνωσης που εξετάστηκαν, προσεγγίζοντας συνδυαστικά τη δηλωτική γνώση (1^{η} ερώτηση) και την ορθή λύση του κλειστού προβλήματος, διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών που έδωσαν χαμηλό βαθμό δυσκολίας στο ανοιχτό πρόβλημα έλυσε, πράγματι, σωστά το πρόβλημα. Ακόμα, μέσα από την ερώτηση που διερευνούσε τη γνώση υπό όρους (2^{η} ερώτηση), βασικό σημείο δυσκολίας του ανοιχτού προβλήματος ήταν η δημιουργία σχεδίου λύσης. Επίσης, οι περισσότεροι δεν ανέφεραν τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος όταν ρωτήθηκαν τι έκαναν για να το λύσουν (3^{η} ερώτηση). Τέλος, οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση που εξέταζε τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης (4^{η} ερώτηση) έδειξαν ότι αυτή δεν έχει κατακτηθεί ακόμα απόλυτα καθώς από όσους δήλωσαν σίγουροι για την απάντησή τους, οι περισσότεροι έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα.

5.1.3 Σύγκριση ποσοτικών δεδομένων κλειστού και ανοιχτού προβλήματος

Αναφορικά με τη συμμετοχή των μαθητών σε κάθε στάδιο, και στα δύο προβλήματα μικρότερη ήταν η συμμετοχή στη συμπλήρωση του τέταρτου σταδίου, στη συνέχεια, του δεύτερου κι έπειτα του πρώτου. Έτσι, το στάδιο που συμπληρώθηκε από τους περισσότερους συμμετέχοντες τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα ήταν το τρίτο. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει να περνάνε στη λύση του προβλήματος αμέσως μετά την ολοκλήρωση της ανάγνωσης της εκφώνησης ή να καταγράφουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος κι έπειτα στη λύση του.

1ο στάδιο

Ανατρέχοντας συγκριτικά στα δεδομένα που προκύπτουν εξετάζοντας τον τρόπο προσέγγισης του 1ου σταδίου από τους συμμετέχοντες, παρατηρείται ότι τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα οι περισσότεροι καταγράφουν κάποιες από τις πληροφορίες του προβλήματος (Πίνακας 27). Παρόλα αυτά, ο αριθμός όσων κατέγραψαν όλα τα δεδομένα και το ζητούμενο είναι αισθητά μεγαλύτερος για το ανοιχτό πρόβλημα από ότι για το κλειστό, παρά το γεγονός ότι και τα δύο προβλήματα είχαν τον ίδιο αριθμό δεδομένων και ζητούμενων.

Πίνακας 27: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Εντοπισμός/ καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	11	ΚΕΝΟ	15
ΌΧΙ	21	ΌΧΙ	26
ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	43	ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	32
ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	15	ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	3
ΝΑΙ	10	ΝΑΙ	25
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

Αντίθετα, από τον Πίνακα 28 γίνεται αντιληπτό ότι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην οπτική αναπαράσταση του ανοιχτού προβλήματος παρά του κλειστού, έχοντας, όμως, υπόψη ότι και στις δύο περιπτώσεις προβλημάτων οι μαθητές διαχειρίστηκαν τις πληροφορίες της εκφώνησης με τρόπο που φανερώνει ότι η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης αυτών δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα πλήρως.

Πίνακας 28: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Οπτική αναπαράσταση πληροφοριών

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	11	ΚΕΝΟ	15
ΌΧΙ	31	ΌΧΙ	43
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	33	ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	17
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	5	ΜΕΙΚΩΣ (+)	5
ΝΑΙ	20	ΝΑΙ	20

ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

2ο στάδιο

Ο τρόπος προσέγγισης του 2ου σταδίου εμφανίζει μεγάλη συνοχή για το κλειστό και το ανοιχτό πρόβλημα με σχεδόν τον ίδιο αριθμό μαθητών να μην το ακολουθούν και την πλειοψηφία των συμμετεχόντων να εμφανίζουν έλλειψη ικανότητας δημιουργίας σχεδίου λύσης και επιλογής κατάλληλης στρατηγικής (Πίνακας 29 και Πίνακας 30).

Πίνακας 29: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	22	ΚΕΝΟ	24
ΌΧΙ	40	ΌΧΙ	45
ΜΕΡΙΚΩΣ	17	ΜΕΡΙΚΩΣ	18
ΝΑΙ	21	ΝΑΙ	13
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

Πίνακας 30: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Επιλέγει κατάλληλη στρατηγική

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	22	ΚΕΝΟ	24
ΌΧΙ	48	ΌΧΙ	46
ΝΑΙ	17	ΝΑΙ	25
ΑΛΛΟ	13	ΑΛΛΟ	5
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

3ο στάδιο

Το 3ο στάδιο ήταν αυτό που ακολουθήθηκε από τους περισσότερους συμμετέχοντες και για τα δύο προβλήματα. Τόσο το κλειστό όσο και το ανοιχτό πρόβλημα απαιτούσαν την πραγματοποίηση πολλαπλασιασμών και προσθέσεων για τη λύση τους – αν και το ανοιχτό μπορούσε να λυθεί και με τρόπους που εμπλέκουν κι άλλες πράξεις – και διαπιστώθηκε ότι ο αριθμός των μαθητών που πραγματοποίησαν σωστά όλες τις πράξεις ήταν ιδιαίτερα μεγάλος και ο ίδιος και για τα δύο προβλήματα (Πίνακας 31).

Πίνακας 31: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Πραγματοποίηση σωστών πράξεων

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	5	ΚΕΝΟ	10
ΌΧΙ	5	ΌΧΙ	7
ΜΕΡΙΚΩΣ	10	ΜΕΡΙΚΩΣ	4
ΝΑΙ	79	ΝΑΙ	79
ΑΛΛΟ	1		
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

Παρόλα αυτά, ένα ενδιαφέρον σημείο διαφοροποίησης ανάμεσα στα δύο προβλήματα είναι εκείνο της ικανότητας δημιουργικής σκέψης. Πιο συγκεκριμένα, μόνο 1 από τους 95 μαθητές που έλυσαν το κλειστό πρόβλημα πρότεινε κι έναν δεύτερο τρόπο λύσης για την εύρεση του ζητούμενου, ενώ 10 από τους 90 μαθητές που έλυσαν το ανοιχτό πρόβλημα πρότειναν τουλάχιστον δύο διαφορετικούς πιθανούς συνδυασμούς/ απαντήσεις. Ακόμα, εξετάζοντας τους τρόπους λύσης όσων έλυσαν σωστά το κλειστό και όσων έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα, παρατηρείται ότι το 83,8% των πρώτων και το 89,4% των δεύτερων επέλεξαν έναν από τους πιο οικονομικούς τρόπους λύσης ενώ το 89,2% των πρώτων και το 38,3% των δεύτερων επέλεξαν ποιοτικό τρόπο λύσης (Πίνακας 32 και Πίνακας 33). Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι η φύση τους ανοιχτού προβλήματος ευνόησε τη δημιουργική σκέψη των μαθητών αλλά οδήγησε, σε κάποιες περιπτώσεις, στη λύση του προβλήματος με έναν όχι ιδιαίτερα ποιοτικό τρόπο.

Πίνακας 32: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει οικονομικό τρόπο λύσης

ΚΛΕΙΣΤΟ		**ΑΝΟΙΧΤΟ**	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΌΧΙ	3	ΌΧΙ	4
ΜΕΡΙΚΩΣ	3	ΜΕΡΙΚΩΣ	1
ΝΑΙ	31	ΝΑΙ	42
ΣΥΝΟΛΟ	**37**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**47**

Πίνακας 33: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Επιλέγει ποιοτικό τρόπο λύσης

ΚΛΕΙΣΤΟ		ΑΝΟΙΧΤΟ	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΌΧΙ	3	ΌΧΙ	7
ΜΕΡΙΚΩΣ	1	ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	5
		ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	17
ΝΑΙ	33	ΝΑΙ	18
ΣΥΝΟΛΟ	**37**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**47**

4ο στάδιο

Το 4ο στάδιο ήταν αυτό με τη λιγότερη «συμμετοχή» και για τα δύο προβλήματα. Με βάση βάση τις απαντήσεις που δόθηκαν στο 3ο στάδιο αλλά και τον τρόπο προσέγγισης του 4ου σταδίου από όσους το ακολούθησαν φαίνεται ότι περισσότεροι ήταν οι μαθητές που έδωσαν μη λογική απάντηση στο κλειστό από ότι στο ανοιχτό πρόβλημα, υποδηλώνοντας έλλειψη κριτικής σκέψης, σημειώνοντας ότι και αρκετές από τις λύσεις του ανοιχτού προβλήματος ήταν μη λογικές.

Πίνακας 34: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 4ο στάδιο. Δίνει λογικό αποτέλεσμα

ΚΛΕΙΣΤΟ		ΑΝΟΙΧΤΟ	
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**	**Κατηγοριοποίηση απαντήσεων**	**Αριθμός μαθητών**
ΚΕΝΟ	5	ΚΕΝΟ	10
ΌΧΙ	42	ΌΧΙ	24
ΑΡΚΕΤΑ	13	ΑΡΚΕΤΑ	6
ΝΑΙ	40	ΝΑΙ	60
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

Ακόμα, βλέπουμε ότι τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα η πλειοψηφία των μαθητών έλεγξαν είτε κάποιες είτε όλες τις πράξεις που υλοποίησαν για να λύσουν το πρόβλημα.

Πίνακας 35: Κλειστό και Ανοιχτό πρόβλημα. 4ο στάδιο. Ελέγχει ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό

ΚΛΕΙΣΤΟ		ΑΝΟΙΧΤΟ	
Κατηγοριοποίηση	**Αριθμός**	**Κατηγοριοποίηση**	**Αριθμός**

απαντήσεων	μαθητών	απαντήσεων	μαθητών
ΚΕΝΟ	40	ΚΕΝΟ	47
ΌΧΙ	4	ΌΧΙ	2
ΜΕΡΙΚΩΣ	23	ΜΕΡΙΚΩΣ	10
ΝΑΙ	27	ΝΑΙ	36
ΑΛΛΟ	6	ΑΛΛΟ	5
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**ΣΥΝΟΛΟ**	**100**

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Αναφορικά με την πρώτη ερώτηση που σκοπό είχε τη διερεύνηση της μεταγνωστικής ικανότητας της δηλωτικής γνώσης, προσεγγίζοντας συγκριτικά τον Πίνακες 10 και τον Πίνακα 23, διαπιστώνεται σύμπνοια μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών για την αξιολόγηση του βαθμού δυσκολίας του προβλήματος και την επιτυχή λύση αυτού τόσο για το κλειστό όσο και για το ανοιχτό πρόβλημα. Δηλαδή και στα δύο προβλήματα, η πλειοψηφία αυτών που έδωσαν μικρό βαθμό δυσκολίας έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Επίσης, από τους Πίνακες 11 και 24 αναδεικνύεται ότι σημαντικότερη αιτία δυσκολίας και στα δύο προβλήματα ήταν η δημιουργία σχεδίου λύσης ($2^{ο}$ στάδιο). Επίσης, από τους Πίνακες 12 και 25 γίνεται αντιληπτό ότι η μεταγνωστική επίγνωση σχετικά με τη διαδικασία που ακολούθησαν για να λύσουν το πρόβλημα φάνηκε να λείπει από τους περισσότερους μαθητές ανεξάρτητα από το είδος του προβλήματος. Τέλος, από τους Πίνακες 13 και 26 όπου καταγράφονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη ερώτηση του κλειστού και του ανοιχτού προβλήματος, αντίστοιχα, παρατηρείται μια αισθητή διαφοροποίηση στα δύο προβλήματα. Ειδικότερα, φάνηκε ότι περισσότεροι ήταν εκείνοι που έκριναν σωστά τις ικανότητές τους για την επίλυση του ανοιχτού προβλήματος παρά για του κλειστού. Κι αυτό γιατί παρατηρήθηκε ότι λιγότεροι από τους μισούς που δήλωσαν σίγουροι για την ορθότητα της λύσης τους έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα ενώ οι περισσότεροι από όσους δήλωσαν το ίδιο για το ανοιχτό το έλυσαν όντως σωστά. Επομένως, η μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης φάνηκε ότι δεν έχει κατακτηθεί ακόμα επαρκώς για το κλειστό πρόβλημα.

5.2 Ποιοτική ανάλυση δεδομένων

Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων αναλύθηκαν και ποιοτικά με σκοπό την ανάδειξη των περιπτώσεων προσέγγισης που παρατηρήθηκαν σε κάθε στάδιο και τη μετέπειτα διερεύνησή τους έτσι ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για το ποιες από τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές αλλά και για τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ κλειστού και ανοιχτού προβλήματος σε σχέση με τις ικανότητες.

5.2.1 Κλειστό πρόβλημα

1ο στάδιο

Όπως αναδείχθηκε στην ποσοτική ανάλυση, οι μαθητές φαίνεται πως δεν έχουν αναπτύξει στο έπακρο την ικανότητα να εντοπίζουν/καταγράφουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος. Μάλιστα, διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι (33 μαθητές) κατέγραψαν είτε μόνο κάποια/ όλα τα δεδομένα, είτε μόνο το ζητούμενο. Επίσης, από τους 21 που δεν εντόπισαν τα δεδομένα και το ζητούμενο, οι 15 αντέγραψαν την εκφώνηση του προβλήματος.

Πίνακας 36: Κλειστό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Εντοπισμός/ καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	11
ΟΧΙ	
δεν καταγράφει τα δεδομένα και το ζητούμενο	21
ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	
α) καταγράφει μόνα κάποια/όλα τα δεδομένα ή μόνο το ζητούμενο	33
β) γράφει λέξεις (π.χ. χρήματα, ώρες) ή αριθμούς (π.χ. 5€, 8€, 3 ώρες)	10
ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	
α) καταγράφει κάποια δεδομένα και το ζητούμενο	6
β) καταγράφει κάποια δεδομένα και λάθος ζητούμενο	9
ΝΑΙ	
καταγράφει όλα τα δεδομένα και το ζητούμενο	10
Σύνολο	**100**

Επιπλέον, από τους 20 που αναπαράστησαν οπτικά το πρόβλημα, οι 11 χρησιμοποίησαν πίνακα κατατάσσοντας τις πληροφορίες σε δεδομένα και ζητούμενα και οι 9 κατέγραψαν τα δεδομένα και το ζητούμενο χρησιμοποιώντας αριθμούς και σύμβολο και καταγράφοντάς τα σε διαφορετικά σημείο στον χώρο.

Πίνακας 37: Κλειστό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Οπτική αναπαράσταση πληροφοριών

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**

Δ.Α.	11
ΟΧΙ	
Δεν αναπαριστά το πρόβλημα	31
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	
α) καταγράφει σε παράγραφο διαχωρίζοντας δεδομένα και ζητούμενα χρησιμοποιώντας «ξέρουμε» και «ψάχνουμε»	7
β) καταγράφει κάθετα διαχωρίζοντας τα δεδομένα αλλά και το ζητούμενο αλλάζοντας γραμμή	26
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	
καταγράφει με φράσεις διαχωρίζοντας σε «Δεδομένα» και «Ζητούμενα»	5
ΝΑΙ	
α) καταγράφει δεδομένα και ζητούμενο σε πινακάκι με «Γνωστά-Άγνωστα»	11
β) καταγράφει κάθετα χρησιμοποιώντας κυρίως αριθμούς ή και σύμβολα, διαχωρίζοντας τα δεδομένα αλλά και το ζητούμενο αλλάζοντας γραμμή	9
Σύνολο	**100**

2ο στάδιο

Πέρα από το γεγονός ότι παραπάνω από το ¼ των συμμετεχόντων δεν ακολούθησε το 2ο στάδιο, η πλειοψηφία όσων το ακολούθησαν δε δημιούργησε σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους μέχρι να φτάσει στο ζητούμενο. Μάλιστα, κρίνεται σκόπιμο να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι από αυτούς που δεν έκαναν σχέδιο λύσης (21 μαθητές), είτε ανέφεραν μόνο ονομαστικά ποιες πράξεις θα κάνουν (16 μαθητές), είτε συμπλήρωσαν το 2ο στάδιο με στοιχεία της εκφώνησης (5 μαθητές).

Πίνακας 38: Κλειστό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	22
ΟΧΙ	
α) κάνει σχέδιο λύσης αλλά λανθασμένο (πίνακας μεθόδου των τριών)	6
β) δεν κάνει σχέδιο λύσης	34
ΜΕΡΙΚΩΣ	
α) έμμεσα, καθώς γράφει τις πράξεις που κάνει στο 3ο στάδιο αλλά χωρίς τα αποτελέσματα αυτών (π.χ. 5x3=χ, 8x3=α, χx5=Δ, Δ+α=β€)	8
β) δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας τουλάχιστον έναν ενδιάμεσο στόχο	9
ΝΑΙ	
περιγράφει τι θα κάνει βήμα-βήμα	21
Σύνολο	**100**

Ακόμα, οι μαθητές που κατατάχθηκαν στην κατηγορία «όχι» της ικανότητας επιλογής κατάλληλης στρατηγικής ήταν όσοι αναφέραν ονομαστικά ποιες ή/και πόσες πράξεις θα κάνουν (16 μαθητές), όσοι επέλεξαν στρατηγική που φανερώνει εσφαλμένη θεώρηση αριθμού ημερών ή/και ωρών ή/και χρημάτων ανά ώρα (8 μαθητές), όσοι έδειξαν ή είπαν ποιες πράξεις θα κάνουν και ήταν λανθασμένες (7 μαθητές), όσοι αναφέραν ότι θα λύσουν το πρόβλημα με τη μέθοδο των τριών (6 μαθητές) και όσοι συμπλήρωσαν το 2ο στάδιο καταγράφοντας πληροφορίες της εκφώνησης (5 μαθητές).

Πίνακας 38: Κλειστό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Επιλέγει κατάλληλη στρατηγική

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	22
ΟΧΙ	
α) επιλέγει λανθασμένη στρατηγική	21
β) δεν κάνει σχέδιο λύσης	21
γ) αναφέρει τι πρέπει να/ θα κάνει αλλά όχι με ξεκάθαρο και ολοκληρωμένο τρόπο μέχρι τη λύση	6
ΝΑΙ	
επιλέγει στρατηγική που θα τον οδηγήσει στη σωστή λύση	17
ΑΛΛΟ	
λύνει το πρόβλημα στο 2ο στάδιο	13
Σύνολο	**100**

3ο στάδιο

Από τους 95 μαθητές που συμπλήρωσαν το τρίτο στάδιο, οι 37 έλυσαν σωστά το πρόβλημα και οι υπόλοιποι 58 όχι. Στον Πίνακα 36 παρουσιάζονται οι λόγοι που οδήγησαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Παρατηρείται ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών έκανε τυχαία πράξεις μεταξύ των δεδομένων ή μη λογικές πράξεις γεγονός που φανερώνει ότι είτε δεν κατανόησε το πρόβλημα, είτε δεν ήξερε πώς ακριβώς να το λύσει. Επιπλέον, το γεγονός ότι η πλειοψηφία όσων έλυσαν το πρόβλημα οδηγήθηκε σε λανθασμένο αποτέλεσμα λόγω εσφαλμένης θεώρησης του αριθμού των ωρών ή και των ημερών που δούλεψε η Ναυσικά δείχνει ότι δεν έγινε προσεκτική ανάγνωση της εκφώνησης του προβλήματος.

Πίνακας 39: Κλειστό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Λόγοι που δε λύθηκε σωστά

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
α) επιλέγει τρόπο λύσης που φανερώνει απουσία κατανόησης (π.χ. μέθοδος των τριών/ τυχαίες πράξεις μεταξύ δεδομένων κ.ά.)	22
β) κάνει πράξεις που δείχνουν απουσία κατανόησης και δε δίνει απάντηση (π.χ. "3x5=15, 8x5=40")	4
γ) επιλέγει στρατηγική που φανερώνει εσφαλμένη θεώρηση αριθμού ημερών ή/και ωρών ή/και χρημάτων ανά ώρα	29
δ) δε συμπληρώνει κανένα στάδιο και δίνει απάντηση έναν αριθμό χωρίς να τεκμηριώσει	1
ε) επιλέγει σωστό τρόπο αλλά κάνει αριθμητικό λάθος	2
Σύνολο	**58**

Επιπλέον, όπως αναδείχθηκε στην ποσοτική ανάλυση, η συντριπτική πλειοψηφία έχει αναπτύξει την ικανότητα σωστής ολοκλήρωσης πράξεων, μία από τις βασικές ικανότητες επίλυσης ενός προβλήματος. Μάλιστα, σχεδόν όλοι όσοι δεν πραγματοποίησαν ορθά όλες τις πράξεις έκαναν ένα ή δύο αριθμητικά λάθη και μόνο ένας έκανε πάνω από δύο. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι στην ηλικία των 11-12 ετών οι μαθητές έχουν αναπτύξει την ικανότητα να εκτελούν σωστά αριθμητικούς υπολογισμούς. Στα πλαίσια διερεύνησης της ικανότητας προσέγγισης του προβλήματος με περισσότερους από έναν τρόπο λύσης έγινε αντιληπτό ότι η δημιουργική σκέψη δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα καθώς μόνο ένας μαθητής πρότεινε έναν δεύτερο τρόπο λύσης. Επιπλέον, αναφορικά με την εξέταση του τρόπου λύσης όσων έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα, οικονομικός κρίθηκε ο τρόπος που δεν περιείχε περιττές πράξεις και αυτόν ακολούθησαν οι 31 από τους 37 που έδωσαν σωστή λύση ενώ μόνο 3 έκαναν μία περιττή πράξη. Ποιοτικός κρίθηκε ο τρόπος που δεν περιείχε περιττές πράξεις ή έντονη παρουσία κειμένου σε συνδυασμό με τις απαραίτητες πράξης και ένας τέτοιος τρόπος επιλέχθηκε από 33 από τους 37 μαθητές που έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα.

4^{ο} στάδιο

Κύριος σκοπός της διερεύνησης του τρόπου που οι μαθητές προσέγγισαν το τέταρτο στάδιο ήταν η εξέταση της ικανότητας κριτικής σκέψης. Οι 42 από τους 100 μαθητές δεν έδωσαν λογική απάντηση με 5 να μη δίνουν συγκεκριμένη απάντηση, 28 να δηλώνουν ότι τα χρήματα που συγκέντρωσε η Ναυσικά στο τέλος της εβδομάδας ήταν λιγότερα από 50€ – ενώ η σωστή απάντηση ήταν 99€ – και 9 να δίνουν αποτέλεσμα μεγαλύτερο των 150€. Επιπλέον, από τους 27 μαθητές που έλεγξαν την ορθότητα της λύσης τους, οι 13 πραγματοποίησαν επαλήθευση κάνοντας τις αντίστροφες πράξεις από αυτές που έκαναν στο 3^{ο} στάδιο, οι 12 επαναλαμβάνοντάς τες, 1 ακολουθώντας και τις δύο τακτικές ενώ 1 άτομο φάνηκε να αναστοχάζεται σχετικά με τη λύση που έδωσε και πρότεινε διαφορετική λύση στο 4^{ο} στάδιο (και τόσο αυτή όσο και η αρχική ήταν λανθασμένες).

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Αναφορικά με τις ερωτήσεις που σκοπό είχαν να εξετάσουν ορισμένες ικανότητες μεταγνωστικής επίγνωσης, διερευνώντας τη δηλωτική γνώση διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι από αυτούς που έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα είχαν αποδώσει σε αυτό βαθμό δυσκολίας από «καθόλου» ως «λίγο» .

Ακόμα, η ερώτηση που εξέταζε τη γνώση υπό όρους (2η ερώτηση) έδειξε ότι από τους 73 μαθητές που την απάντησαν, οι 15 αναγνώρισαν ως σημείο δυσκολίας του προβλήματος το 2ο στάδιο (δηλαδή την εύρεση του πώς θα λύσουν το πρόβλημα), οι 9 την κατανόηση του προβλήματος ενώ οι πράξεις και η επαλήθευση φάνηκε να δυσκολεύουν τον ίδιο αριθμό μαθητών (7 μαθητές). Επίσης από τους 3 μαθητές που κατηγοριοποιήθηκαν ως «άλλο», οι 2 ανέφεραν ότι τους δυσκόλεψε το 2ο και το 4ο στάδιο ενώ τον 1 το 1ο και το 2ο στάδιο. Ακόμα, η τρίτη ερώτηση που αποσκοπούσε στη διερεύνηση της ύπαρξης μεταγνωστικής επίγνωσης έκανε αισθητή την τάση των μαθητών να αποδίδουν περισσότερη σημασία στις πράξεις παρά στο σχέδιο λύσης του προβλήματος. Τέλος, αναφορικά με την ερώτηση που εξέταζε τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης (4η ερώτηση), οι μισοί από τους συμμετέχοντες δήλωσαν βεβαιότητα για την απάντησή τους την οποία οι 31 απέδωσαν στο ότι έκαναν επαλήθευση, οι 5 δεν αιτιολόγησαν, οι 4 ανέφεραν ως αιτιολόγηση ότι «το πρόβλημα ήταν εύκολο», από 2 μαθητές ότι το σκέφτηκαν και ότι επέλεξαν ωραίο τρόπο, ενώ οι 4 έδωσαν απροσδιόριστη απάντηση («άλλο»), όπως «Έγραψα τα ζητούμενα τα οποία με βοήθησαν.» ή «Αυτή την εβδομάδα δούλεψε 3 ώρες άρα και περισσότερα χρήματα.».

5.2.2 Ανοιχτό πρόβλημα

1ο στάδιο

Αναφορικά με την ικανότητα εντοπισμού των δεδομένων και των ζητούμενων, όπως αναδείχθηκε στην ποσοτική ανάλυση δεδομένων, οι μαθητές φαίνεται πως δεν εντοπίζουν όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα καθώς οι 35 από τους 100 μαθητές κατατάχθηκαν στην ευρύτερη κατηγορία «ελλιπούς» καταγραφής καθώς οι 32 είτε κατέγραψαν μόνο κάποια/όλα τα δεδομένα, είτε μόνο το ζητούμενο και οι 3 εντόπισαν κάποια από τα δεδομένα και το ζητούμενο. Επίσης, από τους 26 που δεν εντόπισαν τα δεδομένα και το ζητούμενο, οι 16 αντέγραψαν την εκφώνηση του προβλήματος.

Πίνακας 40: Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Εντοπισμός/ καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	15
ΟΧΙ	
δεν καταγράφει τα δεδομένα και το ζητούμενο	26
ΕΛΛΙΠΩΣ (-)	

καταγράφει μόνα κάποια/όλα τα δεδομένα ή μόνο το ζητούμενο	32
ΕΛΛΙΠΩΣ (+)	
καταγράφει κάποια δεδομένα και το ζητούμενο	3
ΝΑΙ	
καταγράφει όλα τα δεδομένα και το ζητούμενο	25
Σύνολο	**100**

Επιπλέον, 11 από τους μαθητές που αναπαράστησαν οπτικά το πρόβλημα χρησιμοποίησαν πίνακα με «γνωστά-άγνωστα», 7 κατέγραψαν τα δεδομένα και το ζητούμενο χρησιμοποιώντας αριθμούς και σύμβολο και καταγράφοντάς τα σε διαφορετικά σημείο στον χώρο ενώ 2 παράστησαν τις πληροφορίες της εκφώνησης με τρόπο που να απεικονίζονται οι σχέσεις που τις συνδέουν.

Πίνακας 41: Ανοιχτό πρόβλημα. 1ο στάδιο. Οπτική αναπαράσταση πληροφοριών

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	Αριθμός μαθητών
Δ.Α.	15
ΟΧΙ	
Δεν αναπαριστά το πρόβλημα	43
ΜΕΡΙΚΩΣ (-)	
α) καταγράφει σε παράγραφο διαχωρίζοντας δεδομένα και ζητούμενα χρησιμοποιώντας «ξέρουμε» και «ψάχνουμε»	6
β) καταγράφει κάθετα διαχωρίζοντας τα δεδομένα αλλά και το ζητούμενο αλλάζοντας γραμμή	11
ΜΕΡΙΚΩΣ (+)	
καταγράφει με φράσεις διαχωρίζοντας σε «Δεδομένα» και «Ζητούμενα»	5
ΝΑΙ	
α) καταγράφει δεδομένα και ζητούμενο σε πινακάκι με «Γνωστά-Άγνωστα»	11
β) καταγράφει κάθετα χρησιμοποιώντας κυρίως αριθμούς ή και σύμβολα, διαχωρίζοντας τα δεδομένα αλλά και το ζητούμενο αλλάζοντας γραμμή	7
γ) καταγράφει τις πληροφορίες της εκφώνησης με τρόπο που να απεικονίζονται οι σχέσεις που τις συνδέουν	2
Σύνολο	**100**

2ο στάδιο

Το 2ο στάδιο φάνηκε να δυσκολεύει αρκετούς μαθητές και στην περίπτωση του ανοιχτού προβλήματος καθώς 45 από τους 100 μαθητές δεν κατασκεύασαν ένα σχέδιο βήμα προς βήμα μέχρι να φτάσουν στη λύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι 24 αναφέραν μόνο ονομαστικά ποιες/ πόσες πράξεις θα κάνουν (π.χ. πρόσθεση), οι 12 έλυσαν το πρόβλημα σε αυτό το στάδιο αντί για το 3ο, οι 5 έγραψαν πληροφορίες της εκφώνησης, οι 3 είπαν ότι υπάρχουν πολλοί πιθανοί συνδυασμοί ενώ 1 αναφέρει ότι θα βρει «ποιος πολλαπλασιασμός χρειάζεται για να φτάσει στο 120 με 5ευρα και 10ευρα».

Πίνακας 42: Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Δημιουργεί σχέδιο λύσης θέτοντας ενδιάμεσους στόχους

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	24
ΟΧΙ	
δεν κάνει σχέδιο λύσης	45
ΜΕΡΙΚΩΣ	
α) έμμεσα, καθώς γράφει τις πράξεις που κάνει στο 3ο στάδιο αλλά χωρίς τα αποτελέσματα αυτών	17
β) λέει ότι πρώτα θα υπολογίσει πόσα 5€ και μετά πόσα 10€ έχει ο κουμπαράς	1
ΝΑΙ	
περιγράφει τι θα κάνει βήμα-βήμα	13
Σύνολο	**100**

Επιπλέον, από τους 45 μαθητές που δεν επέλεξαν σωστή στρατηγική, οι περισσότεροι είτε ανέφεραν ονομαστικά μόνο ποιες πράξεις θα κάνουν (21 μαθητές), είτε επέλεξαν στρατηγική που φανερώνει πως θεώρησαν ότι υπάρχουν μόνο 5ευρα ή/και μόνο 10ευρα στον κουμπαρά (13 μαθητές).

Πίνακας 43: Ανοιχτό πρόβλημα. 2ο στάδιο. Επιλέγει κατάλληλη στρατηγική

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
Δ.Α.	24
ΟΧΙ	
α) επιλέγει λανθασμένη στρατηγική	17
β) δεν κάνει σχέδιο λύσης	28
γ) αναφέρει τι σκέφτεται να κάνει χωρίς να λέει πώς	1
ΝΑΙ	
α) επιλέγει στρατηγική που θα τον οδηγήσει σε μία από τις λύσεις	19
β) εκφράζει συλλογισμό/ στρατηγική που μπορεί να τον οδηγήσει στην εύρεση πολλών λύσεων	6
ΑΛΛΟ	
λύνει το πρόβλημα στο 2ο στάδιο	5
Σύνολο	**100**

3ο στάδιο

Από τους 90 μαθητές που συμπλήρωσαν το 3ο στάδιο, οι 47 έλυσαν σωστά το πρόβλημα και οι υπόλοιποι 43 όχι. Στον Πίνακα 44 παρουσιάζονται οι λόγοι που οδήγησαν σε εσφαλμένη λύση. Παρατηρείται ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών έκανε πράξεις που φανερώνουν απουσία κατανόησης, εσφαλμένη κατανόηση ή αδυναμία εύρεσης του πώς να λύσουν το πρόβλημα.. Επιπλέον, το γεγονός ότι η πλειοψηφία όσων δεν έλυσαν σωστά το πρόβλημα πρότειναν συνδυασμούς μόνο με πεντάευρα ή/και μόνο με δεκάευρα δείχνει ότι δεν έγινε προσεκτική ανάγνωση της εκφώνησης του προβλήματος.

Πίνακας 44: Ανοιχτό πρόβλημα. 3ο στάδιο. Λόγοι που δε λύθηκε σωστά

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων	**Αριθμός μαθητών**
α) επιλέγει λανθασμένη στρατηγική (π.χ. "120:10=12, 120:5=24, 12x24=…", "5+10+120=135" κ.ά.)	11
β) προτείνει συνδυασμούς 5ευρων και 10ευρων που δεν έχουν άθροισμα 120€	4
γ) προτείνει συνδυασμούς μόνο με 5ευρα ή/και μόνο με 10ευρα	24
δ) λύνει με τη μέθοδο των τριών	2
ε) δε δίνει ξεκάθαρη απάντηση (π.χ. "120-20=100€, τόσα 10€ και 120-100=20€, τόσα 5€" ή "5+10=15, 120:15=8 τόσα 5€ και 10€")	2
Σύνολο	**43**

Επιπλέον, όπως αναδείχθηκε στην ποσοτική ανάλυση, η συντριπτική πλειοψηφία έχει αναπτύξει την ικανότητα σωστής ολοκλήρωσης πράξεων, μία από τις βασικές ικανότητες επίλυσης ενός προβλήματος. Μάλιστα, σχεδόν όλοι όσοι δεν πραγματοποίησαν ορθά όλες τις πράξεις έκαναν ένα ή δύο αριθμητικά λάθη και τέσσερις πρότειναν συνδυασμούς 5ευρων και 10ευρων που δεν είχαν άθροισμα 120€. Επιπρόσθετα, φάνηκε ότι δημιουργική σκέψη ευνοήθηκε αισθητά από τη φύση του ανοιχτού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, από τους 90 μαθητές που έλυσαν το ανοιχτό πρόβλημα οι 4 πρότειναν τρεις σωστούς συνδυασμούς, οι 3 δύο σωστούς συνδυασμούς, 1 πρότεινε πέντε σωστούς συνδυασμούς, 1 εννέα σωστούς συνδυασμούς ενώ 1 πρότεινε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς. Επιπλέον, 4 μαθητές πρότειναν παραπάνω από έναν συνδυασμό αλλά τουλάχιστον ένας από αυτούς ήταν λανθασμένος και 1 πρότεινε έναν σωστό συνδυασμό στον οποίο κατέληξε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μαθητής που έδωσε όλες τις πιθανές λύσεις έκανε «120:10=12, 120:5=24» κι έπειτα έφτιαχνε το άθροισμα των 120€ με συστηματικό τρόπο, δηλαδή έκανε: «1 των 10€ και 22 των 5€ ή 2 των 10€ και 20 των 5€ κ.ο.κ.» μέχρι να σχηματίσει και τους 11 πιθανούς συνδυασμούς πεντάευρων και δεκάευρων με άθροισμα 120.

Επιπλέον, αναφορικά με την εξέταση του τρόπου λύσης όσων έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα, οικονομικός κρίθηκε ο τρόπος που δεν περιείχε περιττές πράξεις και αυτόν ακολούθησαν οι 42 από τους 47 μαθητές που έδωσαν σωστή λύση. Για το ανοιχτό πρόβλημα, ποιοτικοί κρίθηκαν οι τρόποι λύσης που είτε έδιναν ολοκληρωμένη απάντηση στο τέλος, είτε ήταν ακολουθούσαν συστηματική προσέγγιση για την εύρεση των πιθανών απαντήσεων, είτε πρότειναν τουλάχιστον έναν σωστό συνδυασμό, αναφέροντας, όμως, ότι υπάρχουν πολλοί ακόμα. Οι 18 από τους 47 μαθητές που έλυσαν σωστά το ανοιχτό πρόβλημα ακολούθησαν έναν ποιοτικό τρόπο λύσης.

4^{o} στάδιο

Οι 24 από τους 100 μαθητές δεν έδωσαν λογική απάντηση καθώς 15 έδωσαν ως απάντηση έναν μόνο αριθμό, 5 δύο αριθμούς που αν πολλαπλασιαστούν με το 5 και το 10, αντίστοιχα, ο καθένας δίνει γινόμενο διαφορετικό του 120 και 4 δύο αριθμούς που αν πολλαπλασιαστούν με το 5 και το 10, αντίστοιχα, και προστεθούν, έχουν άθροισμα διαφορετικό του 120. Επιπλέον, από τους 36 μαθητές που έλεγξαν την ορθότητα της λύσης τους, οι 23 πραγματοποίησαν επαλήθευση κάνοντας τις αντίστροφες πράξεις από αυτές που έκαναν στο 3^{o} στάδιο, οι 12 επαναλαμβάνοντάς τες και 1 επαναλαμβάνοντάς τη αλλά με άλλο τρόπο αφού κατά τη λύση έκανε πολλαπλασιασμό (12x10=120) και κατά τον έλεγχο πρόσθεση [10+10+…+10 (12 φορές)=120].

Επιπρόσθετα, όπως προαναφέρθηκε, μελετώντας τον τρόπο προσέγγισης του ανοιχτού προβλήματος από τους μαθητές διερευνήθηκε το αν οι συμμετέχοντες φάνηκε να διαπιστώνουν ότι αυτό έχει παραπάνω από μία σωστή λύση σε αντίθεση με το κλειστό. Παρατηρήθηκε ότι συνολικά 16 μαθητές συνειδητοποίησαν ότι δεν υπάρχει μόνο μία σωστή λύση καθώς είτε πρότειναν παραπάνω από μία λύση στο 3^{o} στάδιο, είτε ανέφεραν στο 2^{o} ή/και στο 3^{o} στάδιο ότι υπάρχουν πολλές σωστές λύσεις. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι 1 από αυτούς που ανέφεραν στο 2^{o} στάδιο ότι υπάρχουν πολλές λύσεις έδωσε μία μόνο λύση στο 3^{o} στάδιο, αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο κάποιοι από όσους έδωσαν μία μόνο λύση να είχαν διαπιστώσει ότι δεν ήταν η μοναδική.

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Η πρώτη ερώτηση αποσκοπούσε στη διερεύνηση της γνώσης σχετικά με τις ικανότητες του λύτη (δηλωτική γνώση) και διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι από αυτούς που έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα είχαν αποδώσει σε αυτό βαθμό δυσκολίας από «καθόλου» ως «λίγο». Επιπλέον, αναφορικά με την ερώτηση που ζητούσε από τους μαθητές να αναφέρουν σε τι δυσκολεύτηκαν, από τους 68 που την απάντησαν οι 19 αναγνώρισαν ως σημείο δυσκολίας του προβλήματος το 2^{o} στάδιο (δηλαδή την εύρεση του πώς θα λύσουν το πρόβλημα), οι 5 τις πράξεις, οι 3 την επαλήθευση, οι 2 το ζητούμενο και 1 το ότι δε δίνονταν αρκετά στοιχεία (1^{o} στάδιο). Επίσης 4 μαθητές κατηγοριοποιήθηκαν ως «άλλο» υποδεικνύοντας ως πηγή δυσκολίας όπως το ότι «Είχε χαρτονομίσματα και των 5€ και των 10€.» (1 μαθητής) ή το 1ο και το 3ο στάδιο («Δυσκολεύτηκα στις πράξεις και στα δεδομένα που έδινε.»). Ακόμα, η τρίτη ερώτηση φανέρωσε την έλλειψη μεταγνωστικής επίγνωσης και την ιδιαίτερη σημασία που αποδίδουν οι μαθητές στις πράξεις που απαιτούνται για τη λύση ενός προβλήματος παρά στη δημιουργία σχεδίου λύσης με σκοπό την εύρεση του ζητούμενου. Τέλος, αναφορικά με την ερώτηση που εξέταζε τη μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης (4η ερώτηση), περίπου οι μισοί από τους συμμετέχοντες δήλωσαν βεβαιότητα για την απάντησή τους την οποία οι 35 απέδωσαν στο ότι έκαναν επαλήθευση, οι 7 δεν αιτιολόγησαν, οι 5 ανέφεραν ως αιτιολόγηση ότι «το πρόβλημα ήταν εύκολο», από 2 μαθητές ότι έκαναν σωστές πράξεις και ότι ήταν σίγουροί για τη λύση αλλά όχι για τον τρόπο λύσης, 1 ότι το σκέφτηκε, ενώ οι 3 έδωσαν απροσδιόριστη απάντηση («άλλο»), όπως «Έκανα διαίρεση που είναι ακριβής πράξη.».

5.2.3 Σύγκριση ποιοτικών δεδομένων κλειστού και ανοιχτού προβλήματος

1ο στάδιο

Ανατρέχοντας συγκριτικά στα ποιοτικά δεδομένα που προέκυψαν εξετάζοντας τον τρόπο προσέγγισης του 1ου σταδίου από τους συμμετέχοντες, παρατηρείται ότι τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα οι περισσότεροι καταγράφουν κάποιες από τις πληροφορίες του προβλήματος. Παρόλα αυτά το γεγονός ότι περισσότεροι κατέγραψαν όλα τα δεδομένα και το ζητούμενο στο ανοιχτό από ότι στο κλειστό πρόβλημα – παρά το ότι και τα δύο προβλήματα είχαν τον ίδιο αριθμό δεδομένων και ζητούμενων – οφείλεται, ενδεχομένως στις περισσότερες αντιστοιχίες μεταξύ των δεδομένων στο κλειστό (5€/ώρα → καθημερινές, 8€/ώρα → Σάββατο ≠ πεντάευρα και δεκάευρα → σύνολο 120€). Αναφορικά με την οπτική αναπαράσταση, η προσέγγιση των μαθητών και στα δύο προβλήματα ανέδειξε ότι μόνο το ¼ των συμμετεχόντων έχει αναπτύξει την ικανότητα να αναπαριστά οπτικά το πρόβλημα ενώ οι τρόποι παράστασης που επιλέχθηκαν ήταν ίδιοι και για τα δύο προβλήματα.

2ο στάδιο

Διαπιστώνεται ομοιότητα στον τρόπο προσέγγισης του 2ου σταδίου του κλειστού και του ανοιχτού προβλήματος καθώς η πλειοψηφία αντί να κατασκευάσει σχέδιο λύσης, αναφέρει απλά ποιες πράξεις θα κάνει (ονομαστικά) ή λύνει το πρόβλημα σε αυτό το στάδιο, ξαναλύνοντάς το και στο 3ο στάδιο, το οποίο προοριζόταν για αυτό τον σκοπό, πράγμα που δηλωνόταν ξεκάθαρα και από τον βοηθητικό «τίτλο» του 3ου σταδίου («Γράψε τη λύση του προβλήματος»).

Υιοθετώντας την παραπάνω τακτική, και στα δύο προβλήματα λίγοι ήταν εκείνοι που αξιοποίησαν αυτό το στάδιο για την εύρεση της στρατηγικής που θα ακολουθήσουν.

$3^{ο}$ στάδιο

Το $3^{ο}$ στάδιο ήταν αυτό που ακολουθήθηκε από τους περισσότερους συμμετέχοντες και για τα δύο προβλήματα και φάνηκε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών μπορεί να κάνει σωστούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Μελετώντας συγκριτικά τους λόγους που οδήγησαν σε λανθασμένη απάντηση, γίνεται αντιληπτό ότι η κύρια αιτία και για τα δύο προβλήματα ήταν η μη προσεκτική ανάγνωση της εκφώνησης. Επιπλέον, το γεγονός ότι το ανοιχτό πρόβλημα δεν είχε μόνο μία σωστή απάντηση φάνηκε να ευνοεί τη δημιουργική σκέψη των μαθητών καθώς 15 μαθητές έδωσαν τουλάχιστον δύο σωστούς τρόπους λύσης στο ανοιχτό πρόβλημα ενώ μόνο 1 έδωσε δύο τρόπους λύσης στο κλειστό πρόβλημα. Ακόμα, τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα οι περισσότεροι που έδωσαν σωστή λύση ακολούθησαν έναν οικονομικό τρόπο λύσης, αλλά φάνηκε ότι το γεγονός ότι το ανοιχτό πρόβλημα ως προς τη διαδικασία λύσης του ευνόησε την εμφάνιση περισσότερων όχι ιδιαίτερα ποιοτικών λύσεων σε σχέση με το κλειστό.

$4^{ο}$ στάδιο

Τέλος, αν και οφείλει να επισημανθεί ότι το κριτήριο αναφορικά με το αν η λύση είναι λογική δεν ήταν ακριβώς το ίδιο για το κλειστό και για το ανοιχτό πρόβλημα, περισσότεροι ήταν οι μαθητές που έδωσαν μη λογική απάντηση στο κλειστό από ότι στο ανοιχτό πρόβλημα, υποδηλώνοντας ότι η ικανότητα κριτικής σκέψης δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα πλήρως. Επιπρόσθετα, παρατηρείται ότι τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα, ένας μεγάλος αριθμός μαθητών δεν ακολούθησε αυτό το στάδιο φανερώνοντας ότι ανεξάρτητα με το είδος του προβλήματος, οι μαθητές δεν έχουν διαπιστώσει ακόμα τη σημασία του να ελέγξουν την απάντησή τους. Παρόλα αυτά, οι τρόποι επαλήθευσης που αξιοποίησαν όσοι ακολούθησαν το $4^{ο}$ στάδιο ήταν οι ίδιοι για το κλειστό και για το ανοιχτό πρόβλημα, και συγκεκριμένα η επανάληψη των πράξεων του $3^{ου}$ σταδίου ή η πραγματοποίηση των αντίστροφων πράξεων από αυτές.

Ερωτήσεις για τη διερεύνηση μεταγνωστικών ικανοτήτων

Όπως αναδείχθηκε και από τη σύγκριση των ποσοτικών δεδομένων που προέκυψαν από τις ερωτήσεις που διερευνούσαν ορισμένες μεταγνωστικές ικανότητες, διαπιστώνεται ότι αρκετοί είναι οι μαθητές που έχουν αναπτύξει τη μεταγνωστική ικανότητα της δηλωτικής γνώσης καθώς και στα δύο προβλήματα, η πλειοψηφία αυτών που έδωσαν μικρό βαθμό δυσκολίας έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Επιπλέον, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθεί ότι η πλειοψηφία των μαθητών θεώρησε «καθόλου» ή «λίγο» δύσκολα και τα δύο προβλήματα. Επίσης, σημαντικότερη πηγή δυσκολίας και για το κλειστό και για το ανοιχτό πρόβλημα αναδείχθηκε η δημιουργία σχεδίου λύσης (2^{ο} στάδιο). Ακόμα, οι απαντήσεις που έδωσαν οι συμμετέχοντες στην τρίτη ερώτηση τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα φανέρωσαν ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν έχει ακόμα μεταγνωστική επίγνωση των όσων κάνει για να λύσει ένα πρόβλημα, όμως περισσότεροι ήταν εκείνοι που έδειξαν να έχουν επίγνωση του τι έκαναν για να λύσουν το κλειστό πρόβλημα (27 μαθητές) παρά το ανοιχτό (18 μαθητές). Αισθητή διαφοροποίηση παρατηρείται από τα δεδομένα αναφορικά με την ερώτηση που διερευνούσε την μεταγνωστική ικανότητα αξιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα, περισσότεροι ήταν εκείνοι που εκτίμησαν σωστά τις ικανότητές τους για την επίλυση του ανοιχτού προβλήματος παρά του κλειστού προβλήματος. Και για τα δύο προβλήματα, η πλειοψηφία όσων δήλωσαν βεβαιότητα για τη λύση τους την αιτιολόγησε στο ότι έκανε επαλήθευση. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι αναφορικά με το ανοιχτό πρόβλημα, 2 μαθητές δήλωσαν βεβαιότητα για την ορθότητα του αποτελέσματος αλλά όχι για τον τρόπο λύσης, απάντηση που δεν δόθηκε από κανέναν για το κλειστό πρόβλημα. Αυτό οφείλεται, ενδεχομένως, στο ότι η φύση του ανοιχτού προβλήματος επιζητούσε μια προσέγγιση διαφορετική από αυτή που έχουν συνηθίσει να ακολουθούν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων που έχουν συναντήσει στα σχολικά βιβλία.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκαν ορισμένες από τις ικανότητες που είναι απαραίτητες για την επιτυχή επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, δόθηκαν ένα κλειστό κι ένα ανοιχτό πρόβλημα σε 100 μαθητές ηλικίας 11-12 ετών καθένα από τα οποία ήταν χωρισμένο στα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος. Ο τρόπος προσέγγισης κάθε σταδίου και οι ικανότητες που επιλέχθηκε να εξεταστούν διερευνήθηκαν μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και καθένα από αυτά. Μελετώντας την ενασχόληση των συμμετεχόντων σε κάθε στάδιο επίλυσης παρατηρήθηκε ότι το 3^{ο} στάδιο (εκτέλεση σχεδίου λύσης/ λύση), ήταν αυτό που συμπληρώθηκε από τους περισσότερους, με αμέσως επόμενο το 1^{ο} στάδιο (καταγραφή δεδομένων και ζητούμενων), έπειτα το $2^{ο}$ (δημιουργία σχεδίου λύσης) και τέλος το $4^{ο}$ στάδιο (έλεγχος της ορθότητας της λύσης). Αναφορικά με το $1^{ο}$ στάδιο, διαπιστώθηκε ότι η ικανότητα εντοπισμού δεδομένων και ζητούμενων έχει αναπτυχθεί ως ένα βαθμό καθώς και στα δύο προβλήματα αφού αρκετοί μαθητές εντόπισαν κάποια από τα δεδομένα και τα ζητούμενα αλλά όχι με συνέπεια, γεγονός που βρίσκεται σε σύμπλευση με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών όπου αναδείχθηκε ότι πολλοί είναι οι λύτες που κάνουν λάθη λόγω της εσφαλμένης κατανόησης των εκφωνήσεων (Sepeng & Madzorera, 2014 · Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020). Παρόλα αυτά, αξίζει να σημειωθεί πως κάποιοι από τους μαθητές που στο $1^{ο}$ στάδιο δεν εντόπισαν όλες τα δεδομένα και τα ζητούμενα έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει ότι δεν προσέγγισαν όλοι οι συμμετέχοντες προσεκτικά κάθε στάδιο επίλυσης και κάποιες φορές φάνηκε ότι ουσιαστικά ακολούθησαν το $1^{ο}$ στάδιο νοητά όταν έφτασαν στο $3^{ο}$ (εκτέλεση σχεδίου λύσης/ λύση). Η ικανότητα οπτικής αναπαράστασης του προβλήματος δεν έχουν αναπτυχθεί ακόμα σε μεγάλο βαθμό καθώς η μειοψηφία των μαθητών αναπαράστησε με κάποιον τρόπο οπτικά τα δύο προβλήματα και επιβεβαιώθηκε ότι η λανθασμένη ή μερική αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ των διαφορετικών μεταβλητών και της αξίας τους μπορεί να επηρεάσει τη λύση του προβλήματος (Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998). Φάνηκε, μάλιστα, ότι περισσότεροι ήταν εκείνοι που προσέγγισαν προσεκτικά το $1^{ο}$ στάδιο του ανοιχτού προβλήματος σε σχέση με το κλειστό αναφορικά με τον εντοπισμό δεδομένων και ζητούμενων ενώ το αντίθετο προέκυψε σχετικά με την οπτική αναπαράσταση του προβλήματος. Από το $2^{ο}$ στάδιο αναδείχθηκε ότι η ικανότητα δημιουργίας σχεδίου λύσης που είναι αναγκαία για την επιτυχή λύση κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων δεν έχει κατακτηθεί ακόμα και, κατ' επέκταση, λίγοι ήταν οι μαθητές που φάνηκε να επέλεξαν στο συγκεκριμένο στάδιο τη στρατηγική με την οποία θα λύσουν τα δύο προβλήματα. Αυτή η διαπίστωση έρχεται σε σύγκρουση με ευρήματα προηγούμενων ερευνών όπου φάνηκε ότι κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων συνεργατικά, οι μαθητές είναι σε θέση να δημιουργούν σχέδιο λύσης (Lioe, Fai, & Hedberg, 2006 · Gu, Chen, Zhu, & Lin, 2015). Φαίνεται, λοιπόν, ότι η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων προσφέρεται περισσότερο για ενασχόληση ανά δύο ή σε ομάδες, αναφορικά με την ανάπτυξη της ικανότητας δημιουργίας σχεδίου λύσης. Στο $3^{ο}$ στάδιο οι μαθητές φάνηκαν ιδιαίτερα ικανοί στην πραγματοποίηση σωστών υπολογισμών ενώ τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών αναδεικνύουν ότι η ικανότητα σωστής εκτέλεσης πράξεων λείπει από πολλούς μαθητές (Davenport, 1999 · Pomalato, La Ili, Fadhilaturrahmi, & Primayana, 2020). Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι στη χώρα μας δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην πραγματοποίηση σωστών αριθμητικών υπολογισμών αλλά όχι ισάξια στη διαδικασία κατασκευής σχεδίου που θα οδηγήσει στη λύση του εκάστοτε προβλήματος. Ακόμα, οι περισσότεροι από όσους έλυσαν σωστά είτε το κλειστό, είτε το ανοιχτό πρόβλημα, είτε και τα δύο, ακολούθησαν έναν οικονομικό τρόπο λύσης. Επίσης, παρατηρήθηκε αισθητά μεγαλύτερη εμφάνιση λύσεων χαμηλής ποιότητας στο ανοιχτό πρόβλημα, γεγονός που δεν προκαλεί ιδιαίτερη εντύπωση καθώς η διαδικασία λύσης του ήταν ανοιχτή κι όχι τόσο «αυστηρά» ορισμένη όσο του κλειστού. Μάλιστα, αναφορικά με τη δημιουργική σκέψη η οποία είναι σημαντική για την επίλυση κλειστών προβλημάτων αλλά αναγκαία για την επίλυση ανοιχτών, έγινε αντιληπτό ότι το γεγονός ότι δεν υπήρχε μία μόνο σωστή λύση για το ανοιχτό πρόβλημα οδήγησε αρκετούς μαθητές να προτείνουν παραπάνω από έναν τρόπο λύσης στο ανοιχτό πρόβλημα, επαληθεύοντας ότι η φύση των ανοιχτών προβλημάτων προωθεί την δημιουργικότητα (Yee, 2002 · Klavir & Hershkovitz, 2008 · Kosyvas, 2016 · Kholil, 2020 · Lely, Putra, & Syahrilfuddin, 2020). Τέλος, το 4^{ο} στάδιο αγνοήθηκε από αρκετούς μαθητές και στα δύο προβλήματα αλλά οι περισσότεροι από όσους το ακολούθησαν επαλήθευσαν επαρκώς την ορθότητα της λύσης τους αναδεικνύοντας ότι οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού γνωρίζουν πώς να ελέγξουν το αποτέλεσμα που βρήκαν. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι παρά τον μικρό αριθμό των συμμετεχόντων που ακολούθησαν το 4^{ο} στάδιο, οι περισσότεροι από αυτούς έχουν διδαχθεί τρόπους επαλήθευσης της ορθότητας της λύσης τους. Ακόμα, το γεγονός ότι τα δύο προβλήματα απαιτούσαν διαφορετικού είδους απάντηση κι επομένως διαφορετικά κριτήρια για το πότε αυτή θεωρείται λογική, δε μας οδηγεί σε απολύτως ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με το αν οι μαθητές έχουν αναπτύξει την ικανότητα κριτικής σκέψης. Παρόλα αυτά, περισσότεροι ήταν εκείνοι που έδωσαν λογική απάντηση στο ανοιχτό πρόβλημα. Τέλος, οι ερωτήσεις που αξιοποιήθηκαν για τη διερεύνηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων ανέδειξαν ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν αναπτύξει τη μεταγνωστική ικανότητα της δηλωτικής γνώσης καθώς και στα δύο προβλήματα, η πλειοψηφία αυτών που έδωσαν μικρό βαθμό δυσκολίας έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Επίσης, έχουν αναπτύξει την ικανότητα γνώσης υπό όρους αφού τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές υπέδειξαν ως σημαντικότερη αιτία δυσκολίας τη δημιουργία σχεδίου λύσης, κάτι που επιβεβαιώνεται και από τη μελέτη του κατά πόσο έχουν αναπτυχθεί οι ικανότητες που απαιτούνται κατά το $2^{ο}$ στάδιο επίλυσης του προβλήματος. Η τρίτη ερώτηση έπειτα από την προσαρμογή που υπέστη δεν έδωσε στοιχεία σχετικά με τη διαδικαστική γνώση αλλά φανέρωσε ότι λίγοι είναι οι μαθητές που επέστρεψαν τόσο στο κλειστό όσο και στο ανοιχτό πρόβλημα και αναλογίστηκαν σχετικά με το πώς το προσέγγισαν. Ακόμα, παρατηρήθηκε ότι λιγότεροι από τους μισούς μαθητές που δήλωσαν σίγουροι για την ορθότητα της λύσης τους έλυσαν σωστά το κλειστό πρόβλημα ενώ οι περισσότεροι από όσους δήλωσαν το ίδιο για το ανοιχτό το έλυσαν όντως σωστά, γεγονός που υποδεικνύει ότι δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα επαρκώς η μεταγνωστική ικανότητα αξιολόγησης των μαθητών σχετικά με τις ικανότητές τους. Σε γενικές γραμμές, γίνεται αντιληπτό, σε συνάφεια και με προηγούμενη έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην Ελλάδα (Βισσαρίου & Δεσλή, 2019), ότι οι μεταγνωστικές ικανότητες δεν έχουν κατακτηθεί ακόμα στο σύνολό τους από τους μαθητές ηλικίας 11-12 ετών.

Με βάση τόσο τη βιβλιογραφική αναζήτηση όσο και την παρούσα έρευνα, έγινε αντιληπτό ότι κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν και συνεπώς ωθούνται να αναπτύξουν εκείνες τις ικανότητες που απαιτούνται και για την επίλυση ενός κλειστού προβλήματος και ακόμα περισσότερες. Έτσι, τα ανοιχτά προβλήματα θα μπορούσαν να αποκτήσουν θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών τουλάχιστον στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου με σκοπό την ανάπτυξη των ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση τόσο των ανοιχτών όσο και των κλειστών προβλημάτων.

7. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Είναι απαραίτητο να επισημανθεί ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα δίνουν απλά μια εικόνα αναφορικά με τις ικανότητες επίλυσης κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων καθώς υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί στην παρούσα έρευνα. Αρχικά, το δείγμα ήταν βολικό και οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές και μαθήτριες της ευρύτερης περιοχής του Βόλου. Επιπλέον, η κατασκευή και επιλογή των προβλημάτων του ερευνητικού εργαλείου έγινε έτσι ώστε και τα δύο να αναφέρονται σε χρήματα, να έχουν τον ίδιο αριθμό δεδομένων και ζητούμενων και θεωρώντας τα παρόμοια όσον αφορά τον βαθμό δυσκολίας τους. Από την πιλοτική έρευνα φάνηκε ότι το ανοιχτό πρόβλημα ήταν πιο δύσκολο ενώ από την τελική έρευνα φάνηκε ότι το κλειστό δυσκόλεψε λίγο περισσότερο τους συμμετέχοντες. Επομένως, υπάρχει σίγουρα το περιθώριο δημιουργίας καταλληλότερων προβλημάτων τα οποία θα δίνονταν σε περισσότερους μαθητές κατά την πιλοτική έρευνα ώστε να ελεγχθεί αν είναι της ίδιας δυσκολίας. Ακόμα, παρά το γεγονός ότι το εργαλείο επέτρεπε στους συμμετέχοντες να λύσουν το πρόβλημα δίνοντας ανοιχτές «απαντήσεις» σε κάθε στάδιο και ερώτηση, η επιλογή μικρότερου δείγματος θα μπορούσε να επιτρέψει την αξιοποίηση και συνεντεύξεων ως ένα δεύτερο μέσο συλλογής ποιοτικών δεδομένων. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι 1 από αυτούς που ανέφεραν στο 2^{ο} στάδιο ότι υπάρχουν πολλές λύσεις έδωσε μία μόνο λύση στο 3^{ο} στάδιο, αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο κάποιοι από όσους έδωσαν μία μόνο λύση να είχαν διαπιστώσει ότι δεν ήταν η μοναδική, ενδεχόμενο το οποίο θα μπορούσε να διαψευτεί ή να επιβεβαιωθεί μέσω συνέντευξης. Ακόμα, το γεγονός ότι επιλέχθηκαν 4 από της 8 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου του Magno (2009) – έτσι ώστε να μη γίνει το φύλλο εργασίας πολύ κουραστικό – καθώς και το ότι κάποιες από αυτές προσαρμόστηκαν ώστε να απαντηθούν μετά τη λύση κάθε προβλήματος, δεν επιτρέπουν να έχουμε μια συνολική εικόνα για τις μεταγνωστικές ικανότητες καθόλη τη διαδικασία της επίλυσης. Επιπρόσθετα, η απόκτηση μιας όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικής εικόνας για το ποιες ικανότητες επίλυσης κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων έχουν αναπτύξει οι μαθητές οδήγησε στην επιλογή ενός αρκετά μεγάλου δείγματος και, κατά συνέπεια, πλήθους ποιοτικών δεδομένων. Η επιλογή ενός μικρότερου δείγματος και η αξιοποίηση περισσότερων μέσων συλλογής δεδομένων θα μπορούσε να εξασφαλίσει ακόμα καλύτερα την εγκυρότητα και την αξιοπιστία της έρευνας μέσω ελέγχου της αξιοπιστίας με τρόπους όπως η τριγωνοποίηση. Ακόμα, το εύρος του δείγματος δεν επέτρεψε την εξασφάλιση της εγκυρότητας μέσω της επιβεβαίωσης της ορθής ερμηνείας των δεδομένων από τους συμμετέχοντες. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω καθώς και το γεγονός ότι η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων μπορεί να είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη όταν οι μαθητές εργάζονται ανά δύο ή σε ομάδες, μια μελλοντική έρευνα με λιγότερους συμμετέχοντες οι οποίοι θα εργάζονταν σε ομάδες για να λύσουν ένα κλειστό και ένα ανοιχτό πρόβλημα θα ευνοούσε τη διερεύνηση περισσότερων ικανοτήτων (π.χ. επικοινωνιακές ικανότητες, ικανότητες συλλογισμού) και σε μεγαλύτερο βάθος, μέσω και της αξιοποίησης συμπληρωματικών ποιοτικών εργαλείων όπως συνεντεύξεων και φύλλου παρατήρησης.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Afifah, S. A., & Agoestanto, A. (2020). Mathematical Critical Thinking Ability in Solving Open-Ended Questions Viewed from Students' Curiosity. *Unnes Journal of Mathematics Education*, *9*(1), 36-42.

Albab, A. U., & Wangguway, Y. (2020, May). Profile of students' creative and innovative thinking in solving open-ended mathematics problems about the coffee plantation. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1538, No. 1, p. 012071). IOP Publishing.

Alman, A. (2017). The influence of open-ended and STAD method on the mathematical problem-solving skills in terms of learning achievement. *Jurnal Prima Edukasia*, *5*(2), 112-124.

Bahar, A., & Maker, C. J. (2015). Cognitive backgrounds of problem solving: A comparison of open-ended vs. closed mathematics problems. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1531-1546.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593.

Borovik, A., & Gardiner, T. (2007). Mathematical abilities and mathematical skills.

Buchanan, N. K, (1987). Factors contributing to mathematical problem-solving performance: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 18(4),* 399-415.

Burton, L. (1980). The teaching of mathematics to young children using a problem-solving approach. *Educational studies in mathematics*, *11*(1), 43-58.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in Mathematics*, *58*(1), 45-75.

Creswell, J. W. (2011). Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας. *Αθήνα: Έλλην*.

Cornoldi, C., Carretti, B., Drusi, S., & Tencati, C. (2015). Improving problem solving in primary school students: The effect of a training programme focusing on metacognition and working memory. *British Journal of Educational Psychology*, *85*(3), 424-439.

Damayanti, H. T., & Sumardi, S. (2018). Mathematical creative thinking ability of junior high school students in solving open-ended problem. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *3*(1), 36-45.

Davenport, P. (1999). Conceptual gain and successful problem-solving in primary school mathematics. *Educational Studies*, *25*(1), 55-78.

De Corte, E. (1990). Towards powerful learning environments for the acquisition of problem-solving skills. *European Journal of Psychology of Education*, *5*(1), 5-19.

Dendane, A., & Math, U. G. R. U. (2009, April). Skills needed for mathematical problem solving. *In tenth annual research conference, United Arab Emirates University, Al-Ain, United Arab Emirates. Abstract retrieved from http://www. analyzemath. com/math_problems/paper_1. html*.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 605.

Emenaker, C. (1996). A problem-solving based mathematics course and elementary teachers' beliefs. *School Science and Mathematics*, *96*(2), 75-84.

Eric, C. (2005). Using Open-Ended Mathematics Problems A Classroom Experience (Primary). *National Institute of Education, Nanyang Technological University. Singapura*.

Fatah, A., Suryadi, D., & Sabandar, J. (2016). Open-Ended Approach: An Effort in Cultivating Students' Mathematical Creative Thinking Ability and Self-Esteem in Mathematics. *Journal on Mathematics Education*, *7*(1), 11-20.

Fisher, R. (1998). Thinking about thinking: Developing metacognition in children. *Early Child Development and Care*, *141*(1), 1-15.

Foong, P. Y. (1994). Differences in the processes of solving mathematical problems between successful and unsuccessful solvers. *Teaching and Learning*, *14*(2), 61-72.

Gu, X., Chen, S., Zhu, W., & Lin, L. (2015). An intervention framework designed to develop the collaborative problem-solving skills of primary school students. *Educational Technology Research and Development*, *63*(1), 143-159.

Guven, B., Aydin-Guc, F., & Ozmen, Z. M. (2016). Problem types used in math lessons: the relationship between student achievement and teacher preferences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(6), 863-876.

Hargrove, R. A., & Nietfeld, J. L. (2015). The impact of metacognitive instruction on creative problem solving. *The Journal of Experimental Education*, *83*(3), 291-318.

Hendriana, H., Johanto, T., & Sumarmo, U. (2018). The Role of Problem-Based Learning to Improve Students' Mathematical Problem-Solving Ability and Self Confidence. *Journal on Mathematics Education*, *9*(2), 291-300.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 524-549.

İncebacak, B. B., & Ersoy, E. (2016). Problem solving skills of secondary school students. *China-USA Business Review*, *15*(6), 275-285.

Insani, S. U., & Akbar, P. (2019, October). Development of Open-Ended Based Mathematics Problem to Measure High-Level Thinking Ability. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1315, No. 1, p. 012047). IOP Publishing.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 8(3),* 163-180.

Kapa, E. (2001). A metacognitive support during the process of problem solving in a computerized environment. *Educational studies in mathematics*, *47*(3), 317-336.

Kholil, M. (2020, February). Students' creative thinking skills in solving mathematical logic problem with open-ended approaches. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1465, p. 012044).

Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating 'open-ended' problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *20*(5), 23.

Kolovou, A., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2011). Non-routine problem-solving tasks in primary school mathematics textbooks–a needle in a haystack. *Mathematical problem solving in primary school*, *8*, 45.

Kosyvas, G. (2016). Levels of arithmetic reasoning in solving an open-ended problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(3), 356-372.

Krutet͡skiĭ, V. A., WIRSZUP, I., & Kilpatrick, J. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Kuzle, A. (2018). Assessing metacognition of grade 2 and grade 4 students using an adaptation of multi-method interview approach during mathematics problem-solving. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(2), 185-207.

Kurniawati, S., & Saputro, D. R. S. (2020, August). Open-ended mathematics module to improve students' higher order thinking skill. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1613, No. 1, p. 012068). IOP Publishing.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51-61.

Leikin, R. (2007, February). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In *the proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339).

Leitze, A. (1999). Assessing problem-solving thought. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4*(5), 305.

Lely, M., Putra, Z. H., & Syahrilfuddin, S. (2020). Fifth Grade Students' Creative Thinking in Solving Open-Ended Mathematical Problems. *JOURNAL OF TEACHING AND LEARNING IN ELEMENTARY EDUCATION (JTLEE)*, *3*(1), 58-68.

Lioe, L. T., Fai, H. K., & Hedberg, J. G. (2006). Students' Metacognitive Problem-Solving Strategies in Solving Open-ended Problems in Pairs. In *Redesigning Pedagogy* (pp. 243-259). Brill Sense.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., & Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: Validation of a comprehensive model. *Contemporary educational psychology*, *23*(3), 257-275.

Magno, C. (2009). Assessing grade school students metacognition in solving mathematical problem. *The Assessment Handbook*, 1-22.

Montague, M., & Bos, C. S. (1990). Cognitive and metacognitive characteristics of eighth grade students' mathematical problem solving. *Learning and individual differences*, *2*(3), 371-388.

Nasution, S. H., Permadi, H., Saraswati, L., & Kuspambudi, S. (2020, April). Profile of mathematical writing communication skills with the open-ended approach. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2215, No. 1, p. 030023). AIP Publishing LLC.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom.

Nohda, N., & Emori, H. (1997). Communication and negotiation through open approach method. *Use of open-ended problems in mathematics classrooms*, 63-72.

Novita, R. (2012). Exploring Primary Student's Problem-Solving Ability by Doing Tasks Like PISA's Question. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *3*(2), 133-150.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 325-340.

O'Neil Jr, H. F., & Brown, R. S. (1998). Differential effects of question formats in math assessment on metacognition and affect. *Applied measurement in Education*, *11*(4), 331-351.

Pajares, F., & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of educational psychology*, *86*(2), 193.

Parkinson, M., & Creswell, C. (2011). Worry and problem-solving skills and beliefs in primary school children. *British Journal of Clinical Psychology, 50*(1), 106-112.

Payadnya, I. P. A. A. (2019, March). Investigation of students' mathematical reasoning ability in solving open-ended problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1200, No. 1, p. 012016). IOP Publishing.

Pehkonen, E. (1997). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom. Research Report 176*. University of Helsinki, Dept. of Teacher Education, PO Box 38 (Ratakatu 6A), Helsinki 00014, Finland.

Pehkonen, E. (1999). Open-ended problems: A method for an educational change. In *Makalah disajikan dalam 4th Pan-Hellenic Conference With International Participation Didactics Of Mathematics & Informatics In Education, di The University of Crete: Department for Primary Education, Department of Computer Science, Department of Mathematics*.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Vol. 85). Princeton university press.

Pomalato, S. W. D., La Ili, B. A. N., Fadhilaturrahmi, A. T. H., & Primayana, K. H. (2020). Student Error Analysis in Solving Mathematical Problems. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(11), 5183-5187.

Pratiwi, K. M., Sudiarta, I. G. P., & Suweken, G. (2020, July). The Effect Of Guided Discovery Learning Model Assisted By Open-Ended Student Worksheets Towards Mathematical Problem Solving Ability Reviewed Of Student's Emotional Intelligence. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1503, No. 1, p. 012014). IOP Publishing.

Rimbatmojo, S., Kusmayadi, T. A., & Riyadi, R. (2017, September). Metacognition Difficulty of Students with Visual-Spatial Intelligence during Solving Open-Ended Problem. In *International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE), OP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* (Vol. 895, p. 012034).

Rudyanto, H. E., Hadi, F. R., Winanto, A., Novianto, A., Hawa, A. M., Sari, Y., ... & Santika, M. (2019, November). Open Ended Mathematical Problem Solving: an Analysis of Elementary Students' Creative Thinking Abilities. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1254, No. 1, p. 012077). IOP Publishing.

Schettino, C. (2003). Transition to a problem-solving curriculum. *MATHEMATICS TEACHER-WASHINGTON THEN RESTON VA-*, *96*(8), 534-537.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). Pólya, problem solving, and education. *Mathematics magazine*, *60*(5), 283-291.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sepeng, P., & Madzorera, A. (2014). Sources of difficulty in comprehending and solving mathematical word problems. *International Journal of Educational Sciences*, *6*(2), 217-225.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *29*(3), 75-80.

Siswono, T. Y. E. (2008). Promoting creativity in learning mathematics using open-ended problems. In *The 3 International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3) Institut Pertanian Bogor, Indonesia* (pp. 5-6).

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 341-350.

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students’ responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics education research journal*, *12*(1), 2-17.

Sullivan, P., Warren, E., White, P., & Suwarsono, S. (1998). Different forms of mathematical questions for different purposes: Comparing student responses to similar closed and open-ended questions. *Teaching Mathematics in New Times*, 572-579.

Surya, E., & Putri, F. A. (2017). Improving Mathematical Problem-Solving Ability and Self-Confidence of High School Students through Contextual Learning Model. *Journal on Mathematics Education*, *8*(1), 85-94.

Szetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership*, *49*(8), 42-45.

Tanjung, D. F., Syahputra, E., & Irvan, I. (2020). Problem Based Learning, Discovery Learning, and Open-Ended Models: An experiment On Mathematical Problem-Solving Ability. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, *4*(1), 9-16.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical thinking and learning*, *1*(3), 195-229.

Viseu, F., & Oliveira, I. B. (2012). Open-ended tasks in the promotion of classroom communication in mathematics. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *4*(2), 287-300.

Widiartana, H. P. I. (2018). The Effect of Open-Ended Approach Towards Students' Mathematical Reasoning. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1028).

Wijaya, A. (2018, March). How do open-ended problems promote mathematical creativity? A reflection of bare mathematics problem and contextual problem. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 983, No. 1, p. 012114). IOP Publishing.

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 115-128.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2014). Defining mathematical problems and problem solving: Prospective primary teachers' beliefs in Cyprus and England. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 279-299.

Yee, F. P. (2002). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding. In *Proceedings of the 4th International Conference on The Humanistic Renaissance in Mathematics Education, Palermo, Italy*.

Yildiz, C., & Hacisalihoglu Karadeniz, M. (2016). Examining the Problem Types in Middle School Mathematics Textbooks in the Context of Presentation, Content and Solution. *Online Submission*.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Βισσαρίου, Α., & Δεσλή, Δ. (2019). *Μεταγνωστικές ικανότητες κατά την επίλυση μη-τυποποιημένου μαθηματικού προβλήματος* (No. IKEECONF-2020-1308, pp. 353-361). Aristotle University of Thessaloniki.

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Οργάνωση, Ταξινόμηση, Ανάλυση και Αξιολόγηση Ποιοτικών Δεδομένων

Καϊμάκη, Σ. (2017). *Μαθητές με διακρίσεις και επίλυση προβλήματος* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg

Μπαμπινιώτης, Γ. Δ. (2002). *Λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας με σχόλια για τη σωστή χρήση των λέξεων: ερμηνευτικό, ετυμολογικό, ορθρογραφικό, συνωνύμων, αντιθέτων, κυρίων ονομάτων, επιστημονικών όρων, ακρωνυμιών*. Κέντρο Λεξικολογίας.

Μώκος, Ε. (2012). Διερεύνηση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές ηλικίας 10–11 ετών (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών. Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού. Τομέας της Διδακτικής των Θετικών Επιστημών και των Νέων Τεχνολογιών).

Συμεού, Λ. (2006). Εγκυρότητα και αξιοπιστία στην ποιοτική εκπαιδευτική έρευνα: Παρουσίαση, αιτιολόγηση και πράξη. *9Ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*.

9. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο Εργασίας

Σχολείο:	Ονοματεπώνυμο:

<u>Πρόβλημα 1</u>

Η Ναυσικά δουλεύει στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς της και παίρνει 5€ την ώρα τις καθημερινές και 8€ την ώρα το Σάββατο. Αν από τη Δευτέρα έως και το Σάββατο δούλεψε για 3 ώρες κάθε μέρα, πόσα χρήματα πήρε αυτή την εβδομάδα;

<u>1ο στάδιο</u> (Γράψε τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος)

<u>2ο στάδιο</u> (Γράψε ένα σχέδιο για τη λύση του προβλήματος)

<u>3^{ο} στάδιο</u> (Γράψε τη λύση του προβλήματος)

<u>4^{ο} στάδιο</u> (Επαλήθευσε την ορθότητα της λύσης)

Ερωτήσεις

1.) Αν απαντούσες με «πάρα πολύ», «πολύ», «αρκετά», «λίγο» και «καθόλου», πόσο δύσκολο θα έλεγες ότι ήταν το πρόβλημα;

2.) Σε τι ήταν δύσκολο;

3.) Τι έκανες για να το λύσεις;

4.) Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση; Αν ναι, πώς το ξέρεις;

Πρόβλημα 2

Μέσα στον κουμπαρά σου έχεις χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και των 10 ευρώ και η συνολική τους αξία είναι 120€. Πόσα πεντάευρα και πόσα δεκάευρα υπάρχουν μέσα στον κουμπαρά;

1ο στάδιο (Γράψε τα δεδομένα και τα ζητούμε του προβλήματος)

2ο στάδιο (Γράψε ένα σχέδιο για τη λύση του προβλήματος)

<u>3^o στάδιο</u> (Γράψε τη λύση του προβλήματος)

<u>4^o στάδιο</u> (Επαλήθευσε την ορθότητα της λύσης)

Ερωτήσεις

1.) Αν απαντούσες με «πάρα πολύ», «πολύ», «αρκετά», «λίγο» και «καθόλου», πόσο δύσκολο θα έλεγες ότι ήταν το πρόβλημα;

2.) Σε τι ήταν δύσκολο;

3.) Τι έκανες για να το λύσεις;

4.) Ξέρεις αν είναι σωστή η λύση; Αν ναι, πώς το ξέρεις;