ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική Εργασία

Η διδασκαλία της ομοιότητας τριγώνων με ιστορική προοπτική.

Ανδρεάδου Πολύμνια, ΑΕΜ : 00959

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής.
Βαθμολογητές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής.
Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια.

Θεσσαλονίκη 2021

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ....

Ο συγγραφέας .... βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της εργασίας.

- Την καθηγήτρια κα. Τζεκάκη Μαριάννα και τον καθηγητή κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

- Όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού τμήματος.

- Τους συμφοιτητές μου για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια των σπουδών.

- Την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράστασή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά μια έρευνα διδακτικού σχεδιασμού που πραγματοποιήθηκε σε 21 μαθητές της Γ' Γυμνασίου κατά το σχολικό έτος 2020 – 2021 στη διδακτική ενότητα «Όμοια τρίγωνα». Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης έγινε υπό το πρίσμα του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας για τη Γεωμετρία ($\text{ΜΧΕ}_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$). Χρησιμοποιήθηκαν επτά φύλλα εργασίας με πηγές και προβλήματα από την Ιστορία των Μαθηματικών και ένα τελικό γνωστικό τεστ. Επίσης, οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά, κατασκεύασαν το ιστορικό εργαλείο του Errard και το χρησιμοποίησαν για την μέτρηση μιας απρόσιτης απόστασης. Σκοπός ήταν να μελετηθεί πώς η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών, στα πλαίσια του $\text{ΜΧΕ}_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$, επηρεάζει τον βαθμό κατανόησης της έννοιας των όμοιων τριγώνων από τους μαθητές.

Έπειτα από την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών διαπιστώθηκε ότι η ενσωμάτωση στην διδασκαλία ιστορικών προβλημάτων βοήθησε στην ενεργοποίησή τους, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός θετικού κλίματος απέναντι στις απαιτήσεις του μαθήματος. Επίσης, ο εμπλουτισμός του προσωπικού χώρου εργασίας των μαθητών τους έδωσε την ευκαιρία να καλλιεργήσουν μια συλλογιστική διάσταση κατά την επίλυση των προβλημάτων, κάτι που δεν υποστηρίζεται από τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου.

Λέξεις Κλειδιά: Όμοια τρίγωνα, Μαθηματικός Χώρος Εργασίας, Ιστορικά προβλήματα, Ιστορικό εργαλείο, Αναλογία, Απρόσιτη απόσταση.

Abstract

This study is design research regarding the "Similar triangles". It was implemented in the 2020-2021 academic year to 21 third grade students. The design and planning of this didactical intervention took under consideration the Mathematical Working Space in Geometry. Students used seven different worksheets based on historical resources and problems and a final cognitive test. They also formed groups in order to construct the historical Errard instrument and implemented it in order to measure an inaccessible length. Our objective was to explore the extend in which the use of the History of Mathematics, under the Mathematical Working Space in Geometry perspective, affects the understanding of the concept of similar triangles by the students.

After analyzing students' answers, it was found that the integration of historical problems in the teaching process, helped significantly in motivating them and thus increasing their interest in the subject. Furthermore, the enhancement of the personal working space of the students gave them the chance to cultivate a discursive approach in problem solving, something that is not encouraged by the textbook activities.

Key Words: Similar triangles, Mathematical Working Space, Historical problems, Historical tool, Proportion, Inaccessible distance.3

Εισαγωγή

Ο Piaget (1971) αναφέρει ότι τα παιδιά έχουν έμφυτη την αντίληψη της σταθερότητας της μορφής ενός σχήματος παρά την αλλαγή στο μέγεθος των πλευρών. Πράγματι, μπορούμε να συναντήσουμε την ομοιότητα των σχημάτων σε αρκετές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής, οπότε τα παιδιά από νωρίς εξοικειώνονται με αυτήν. Η μεγέθυνση ή η σμίκρυνση σχημάτων, οι διάφορες κατασκευές που γίνονται υπό κλίμακα, η μέτρηση μηκών απρόσιτων αποστάσεων ή ακόμα η προοπτική κατασκευή που χρησιμοποιείται από ζωγράφους ή σχεδιαστές ώστε να απεικονίσει ένα τρισδιάστατο αντικείμενο στο επίπεδο, είναι μερικά παραδείγματα εφαρμογής της έννοιας της ομοιότητας.

Είναι όμως επίσης γεγονός, ότι η έννοια της ομοιότητας των σχημάτων και ιδιαίτερα των τριγώνων θεωρείται δυσνόητη για τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου. Πολλές φορές συγχέουν την ομοιότητα των τριγώνων με την ισότητα και δεν κατανοούν τον δυναμικό της χαρακτήρα δηλαδή ότι ενώ οι γωνίες παραμένουν σταθερές οι πλευρές αλλάζουν με έναν συγκεκριμένο λόγο (Mastrogiannis και Kordaki , 2006).

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μια προσπάθεια να προσεγγιστεί η έννοια της ομοιότητας των τριγώνων με ιστορική προοπτική. Σκοπός είναι να γνωρίσουν οι μαθητές τη σημασία της έννοιας και την χρησιμότητά της, αλλά και να κατανοήσουν τη σταθερότητα του λόγου των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων. Θα επιλύσουν ιστορικά προβλήματα στα πλαίσια του $\text{ΜΧΕ}_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ και θα κατασκευάσουν ένα ιστορικό εργαλείο μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων ώστε να βιώσουν οι ίδιοι τον συγκεκριμένο προβληματισμό.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται σε τρία κεφάλαια το θεωρητικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια της ομοιότητας των σχημάτων και ιδιαίτερα της ομοιότητας των τριγώνων. Αναφέρονται έρευνες που έγιναν με σκοπό την ανάδειξη των δυσκολιών και παρανοήσεων των μαθητών στην παραπάνω ενότητα, αλλά και έρευνες που στόχο είχαν την μελέτη της αποτελεσματικότητας στην διδασκαλίας της έννοιας της ομοιότητας της χρήσης ψηφιακών ή χειραπτικών εργαλείων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (ΜΧΕ) για την Γεωμετρία. Ο $\text{ΜΧΕ}_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ είναι το πλαίσιο μέσα στο οποίο κατασκευάστηκαν οι δραστηριότητες με τις οποίες θα ασχοληθούν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας. Αρχικά αναπτύσσονται οι τρεις στοιχειώδεις Γεωμετρίες, η Φυσική Γεωμετρία, η Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία και η Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία. Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση οι μαθητές θα κινηθούν μεταξύ της Φυσικής

Γεωμετρίας και της Φυσικής Αξιωματικής γεωμετρίας. Έπειτα παρουσιάζονται τα τρία είδη του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$, δηλαδή ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ αναφοράς, ο κατάλληλος ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ και ο προσωπικός ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στα δύο επίπεδα από τα οποία αποτελείται ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$, το επιστημολογικό και το γνωστικό καθώς και στις γενέσεις που σχηματίζονται μεταξύ των παραπάνω επιπέδων. Το κεφάλαιο τελειώνει με την περιγραφή των τριών κατακόρυφων επιπέδων που δημιουργούνται με τον συνδυασμό των τριών γενέσεων, της σημειωτικής, της εργαλειακής και της λεκτικής. Εδώ φαίνεται ο δυναμικός χαρακτήρας του παραπάνω μοντέλου και η ανάγκη για ένα πέρασμα από όλα τα κατακόρυφα επίπεδα.

Το τρίτο κεφάλαιο έχει να κάνει με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία. Η διδακτική παρέμβαση στηρίζεται στην χρήση ιστορικών προβλημάτων αλλά και πηγών και ενός ιστορικού εργαλείου για την προσπάθεια προσέγγισης της έννοιας της ομοιότητας. Αναλύονται τα επιχειρήματα που συνηγορούν στη χρήση «στιγμών» από την ιστορία στην διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά και οι τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να γίνει αυτή η ενσωμάτωση. Επίσης, αποσαφηνίζεται ο ρόλος των ιστορικών πηγών στην διδασκαλία, καθώς και ο αντίστοιχος ρόλος των ιστορικών εργαλείων. Τελειώνοντας το πρώτο μέρος, στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται η ιστορική αναδρομή της έννοιας της ομοιότητας.

Αμέσως μετά ξεκινάει το δεύτερο μέρος της εργασίας που αναφέρεται στη μεθοδολογία της έρευνας. Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται η χρησιμότητα της έρευνας και παρουσιάζονται ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα. Επίσης αναφέρονται το δείγμα, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την συλλογή των δεδομένων αλλά και οι προϋποθέσεις αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας.

Στο έκτο κεφάλαιο αναπτύσσεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης. Αναφέρεται ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ αναφοράς των μαθητών δηλαδή το μέρος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών αλλά και του σχολικού βιβλίου που αφορούν την ομοιότητα των τριγώνων. Έπειτα περιγράφεται ο κατάλληλος ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ των μαθητών δηλαδή οι δραστηριότητες και τα φύλλα εργασίας που αποτελούν την διδακτική παρέμβαση. Επίσης, γίνεται ανάλυση του συνόλου των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης με βάση το μοντέλο του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$.

Η εργασία τελειώνει με το κεφάλαιο των αποτελεσμάτων. Τα δεδομένα που συλλέγονται από τα ερευνητικά εργαλεία αναλύονται με βάση τις απαιτήσεις του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$. Στην ενότητα των συμπερασμάτων δίνονται οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα και αμέσως μετά προσδιορίζονται οι περιορισμοί της έρευνας.

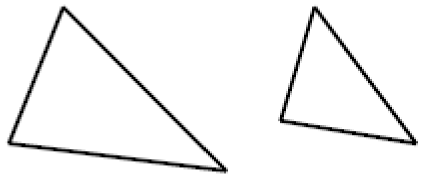
1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση για την έννοια της ομοιότητας.

Στο βιβλίο του «Child's Conception of Space», ο Piaget (1971) αναφέρει ότι μελετώντας κανείς την εξέλιξη της σκέψης των παιδιών, αντιμετωπίζει συχνά το πρόβλημα της κατανόησης από αυτά των αναλογιών και ιδιαίτερα των αναλογιών που αναφέρονται στη γεωμετρία. Οι τελευταίες όπως υποστηρίζει παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον για δύο λόγους. Πρώτον γιατί έχουμε την ευκαιρία να μελετήσουμε την σκέψη των μαθητών, καθώς αντιλαμβάνονται την ομοιότητα των σχημάτων με βάση την παραλληλία των πλευρών αρχικά, και μετά προχωρούν στην ισότητα των γωνιών τους. Ο άλλος λόγος για τον οποίο είναι σημαντικό να ασχοληθούμε με τις αναλογίες που εμφανίζονται σε γεωμετρικά προβλήματα είναι, όπως αναφέρει ο Piaget, ότι τα παιδιά αρκετό καιρό πριν σκεφτούν σχετικά με τα όμοια σχήματα μπορούν να καταλάβουν πότε τα σχήματα διαφορετικών διαστάσεων έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Έχουν δηλαδή έμφυτη την αντίληψη της σταθερότητας της μορφής του σχήματος παρά την αλλαγή στο μέγεθος των πλευρών.

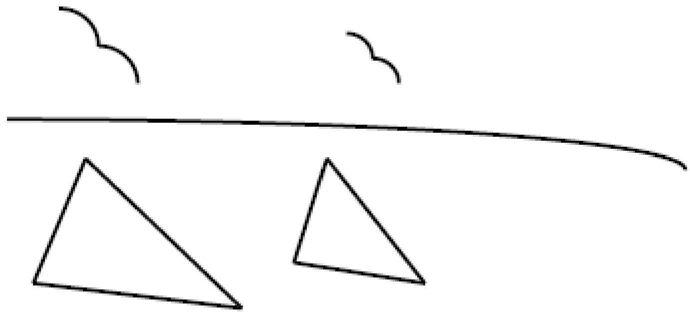
Με αφορμή τα παραπάνω συμπεράσματα του Piaget, οι Kospentaris και Spirou (2005), έκαναν μια έρευνα με σκοπό να μελετήσουν αν η εκπαιδευτική εμπειρία των μαθητών παίζει ρόλο στην «κατασκευή» της έννοιας της ομοιότητας από αυτούς και να εκτιμήσουν πόσο τους επηρεάζει στην επίδοσή τους σε συγκεκριμένες οπτικές δραστηριότητες με όμοια σχήματα. Στην παραπάνω έρευνα πήραν μέρος μαθητές και φοιτητές ηλικίας 17-25 ετών και απάντησαν σε δύο δραστηριότητες. Η πρώτη δραστηριότητα μπορούσε να απαντηθεί και αντιληπτικά εκτός από τον υπολογισμό των αναλογιών, αλλά στην δεύτερη ήταν σχεδόν αδύνατη η αντιληπτική προσέγγιση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες δεν συνδύασαν την μεγέθυνση ή σμίκρυνση των σχημάτων με τον σταθερό λόγο των πλευρών τους. Έτσι η έννοια της ομοιότητας παρέμεινε στο αντιληπτικό επίπεδο, παρά την προηγούμενη εκπαιδευτική εμπειρία της ομάδας. Δεν κατόρθωσαν, δηλαδή, οι μαθητές μέσω των δραστηριοτήτων να « χτίσουν » την έννοια της ομοιότητας.

Ακόμα, στην έρευνα του Piaget (1971) έχουν ιδιαίτερο ρόλο οι μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται και στον δημώδη λόγο. Οι έννοιες της ομοιότητας και των όμοιων σχημάτων χρησιμοποιούνται από τον Piaget ως όροι της καθομιλουμένης που έχουν εφαρμογή στα μαθηματικά, όπως αναφέρει ο Vollrath H.J. (1977). Μάλιστα ο ίδιος έχει κάνει μια έρευνα σχετικά με το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον όρο «όμοιος» που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα όταν χρειάζεται να εφαρμοστεί στα μαθηματικά. Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές από σχολεία της Βαυαρίας ηλικίας 8-19 ετών. Στην πρώτη περίπτωση οι μαθητές έπρεπε να τοποθετήσουν μαζί τα όμοια σχήματα, στην δεύτερη αυτά που είχαν το ίδιο σχήμα και στην τρίτη να ξεχωρίσουν και πάλι τα όμοια σχήματα. Από τις απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν πολλές διαφορετικές λύσεις που έχουν να κάνουν με το γεγονός ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν διαφορετικά την έννοια της ομοιότητας και δεν στηρίχτηκαν στον μαθηματικό ορισμό. Παρατηρήθηκε επίσης, ότι όταν οι συμμετέχοντες είχαν να κάνουν με τον όρο ομοιότητα οδηγήθηκαν περισσότερο στις ιδιότητες των σχημάτων, ενώ όταν τους ζητήθηκε να ξεχωρίσουν τα ίδια σχήματα θεώρησαν το σχήμα ως ολότητα.

Όπως γνωρίζουμε με τον μετασχηματισμό της ομοιότητας τα σχήματα μένουν αναλλοίωτα, καθώς μας ενδιαφέρει η σταθερότητα του λόγου και όχι το μήκος των σχημάτων. Κάποιες αναπαραστάσεις όμως όμοιων σχημάτων όπως αυτών που δείχνουν την προοπτική είναι περίπλοκες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα όμοια τρίγωνα της Εικόνας 1 που είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο. Αν σε αυτό το σχήμα προσθέσουμε την γραμμή του ορίζοντα τότε αυτά φαίνονται να έχουν το ίδιο μέγεθος μεταξύ τους απλά το ένα να είναι πιο μακριά από το άλλο (Εικ. 2), δηλαδή βλέπουμε τα δύο τρίγωνα με την αίσθηση του «βάθους».

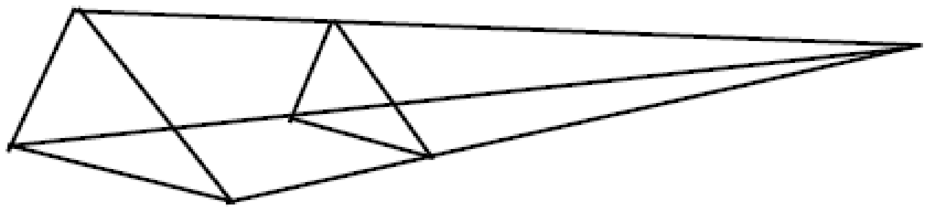


Εικ.1



Εικ.2

Σε αυτή την περίπτωση, εάν ενώσουμε τις κορυφές των δύο τριγώνων (Εικ. 3), τότε θα έχουμε την αναπαράσταση στο χώρο δύο όμοιων σχημάτων του επιπέδου (Lemonidis, 1997).



Εικ.3

Όπως αναφέρουν οι Gualdrón et al., (2015) ο Lemonidis (1991) υποστηρίζει ότι κατά την διδασκαλία της ομοιότητας πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1. Η ενδοσχηματική σχέση, στην οποία επισημαίνεται η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων ενός σχήματος και των στοιχείων ενός όμοιου σχήματος, αλλά χωρίς να εξετάζεται η ιδέα του μετασχηματισμού των δύο αυτών σχημάτων. Σε αυτήν την προσέγγιση μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: όταν τα σχήματα χρησιμοποιούνται στο Θεώρημα του Θαλή όπου η ομοιοθεσία λογίζεται με επαρκής λόγους και όταν τα σχήματα εμφανίζονται χωριστά το ένα από το άλλο.
2. Ο Γεωμετρικός μετασχηματισμός ως εργαλείο. Εδώ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός γίνεται αντιληπτός ως εφαρμογή από ένα σύνολο σημείων στο ίδιο το επίπεδο. Αυτή η προσέγγιση είναι χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων τριγωνομετρίας ή λογισμού.
3. Ο Γεωμετρικός μετασχηματισμός ως μαθηματικό αντικείμενο. Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από μια αλγεβρική προσέγγιση σκοπός

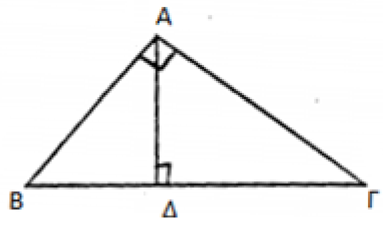
της οποίας είναι να βρεθεί ο μετασχηματισμός που δημιουργείται από την σύνθεση δύο ή περισσότερων μετασχηματισμών.

Σε μια έρευνα, των Mattheou και Spyrou (2009) μελετήθηκε αν φοιτητές ενός Παιδαγωγικού τμήματος κατανοούν την έννοια της ομοιότητας και κατά πόσο η διαίσθησή τους επηρεάζει αυτήν την γνώση. 85 φοιτητές απάντησαν σε ένα τεστ που σχετιζόταν με βασικές γεωμετρικές έννοιες, με τον ορισμό της ομοιότητας αλλά και την αναγνώριση όμοιων σχημάτων. Το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών δεν μπόρεσε να ορίσει σωστά την ομοιότητα των σχημάτων και οι απαντήσεις τους ήταν εμφανώς επηρεασμένες από την διαίσθησή τους. Βέβαια, μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν σωστά τις σχέσεις ομοιότητας των τριγώνων, αφού τις διδάχθηκαν στο σχολείο. Από την έρευνα προέκυψε ότι η περιορισμένη γνώση των ορισμών οδηγεί τους φοιτητές σε λανθασμένες νοητικές αναπαραστάσεις οι οποίες επηρεάζονται σημαντικά από την διαίσθηση.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω η ομοιότητα είναι μια έννοια με την οποία τα παιδιά έρχονται σε επαφή πριν γνωρίσουν τον αυστηρό ορισμό της που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά. Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της ομοιότητας καθώς την συναντούν σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινότητάς τους. Παρόλα αυτά, όταν μελετούν τα όμοια σχήματα στα μαθηματικά συναντούν σημαντικές δυσκολίες. Για πολλούς μαθητές είναι δύσκολο να ορίσουν την ομοιότητα των σχημάτων (Mattheou και Spirou,2009). Υπάρχουν βέβαια και κάποιοι μαθητές που απομνημονεύουν τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών των όμοιων σχημάτων χωρίς να έχουν κατανοήσει την έννοια της ομοιότητας (Mainali,2018). Μια ακόμη παρανόηση σχετικά με την ομοιότητα είναι ότι χρησιμοποιείται ο ίδιος λόγος ομοιότητας ακόμα και όταν γίνεται αναφορά στο εμβαδόν ή τον όγκο όμοιων σχημάτων (Fernadez,2019, Chazan 1988). Τέλος, αρκετοί μαθητές δεν κατανοούν την διαδικασία μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης ενός σχήματος σε άλλο όμοιο με το αρχικό (Fernadez,2019).

Σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας συγκεκριμένα στα τρίγωνα, στη βιβλιογραφία αναφέρονται διάφορες δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών. Οι Gal and Linchevski (2010) αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν όμοια τρίγωνα όταν το σχήμα που έχουν είναι απαιτητικό ως προς την γνωστική προσπάθεια που πρέπει να καταβάλουν (Ubah & Bannsilal, 2019, Poon & Wong, 2017). Πολλές φορές εξάλλου, η ανάλυση από τους μαθητές της ομοιότητας δύο τριγώνων με βάση τα κύρια στοιχεία τους φαίνεται να είναι πιο δύσκολη από την ανάλυση της ισότητας των τριγώνων (Parastuti et al., 2018, Τσιανάκα, 2017). Ο Fernadez, (2019), αναφέρει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν λάθος κριτήρια ομοιότητας. Επίσης, η έννοια της αναλογίας των πλευρών των όμοιων τριγώνων φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές στην εφαρμογή της, κυρίως όταν τα τρίγωνα έχουν μια κοινή γωνία (Τσιανάκα,2017).

Μια σημαντική ακόμη παρανόηση των μαθητών σχετικά με τα όμοια τρίγωνα είναι αυτή που σχετίζεται με την χρήση προσθετικών στρατηγικών αντί πολλαπλασιαστικών. Φαίνεται δηλαδή ότι οι μαθητές θεωρούν πως μεγαλώνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου κατά το ίδιο μήκος την κάθε μία το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι όμοιο με το αρχικό (Chazan, 1988˙ Τσικοπούλου & Φερεντίνος, 2018). Ο Chazan, (1988) αναφέρει και μία ακόμη δυσκολία των μαθητών που έχει να κάνει με την δυσκολία εύρεσης σωστών αναλογιών σε ορθογώνια τρίγωνα που έχουν σχηματισμένο το ύψος από την ορθή γωνία.



Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές, παρόλο που γνωρίζουν την έννοια της ομοιότητας, δυσκολεύονται να εντοπίσουν τα όμοια τρίγωνα του σχήματος και τις ομόλογες πλευρές. Η δυσκολία είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι οι μαθητές θα πρέπει να αναστρέψουν νοητά το σχήμα ώστε να είναι οι πλευρές των όμοιων τριγώνων ευθυγραμμισμένες κάτι που είναι γι' αυτούς περίπλοκο.

Ακόμα, έχουν γίνει αρκετές έρευνες που σχετίζονται με την χρήση ψηφιακών εργαλείων στην διδασκαλία κυρίως των όμοιων τριγώνων.

Σε ένα σετ τέτοιων προκατασκευασμένων εργαλείων στηρίχτηκε η έρευνα που έγινε από τους Poon & Wong (2017), σε μαθητές διαφόρων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στόχος της έρευνας ήταν να βελτιωθεί η οπτική αντίληψη των μαθητών αλλά και να ενθαρρυνθούν να ερευνήσουν ψηφιακά τις σχέσεις των πλευρών των όμοιων τριγώνων. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι οι μαθητές κινητοποιήθηκαν αλλάζοντας τον τρόπο σκέψης τους. Επίσης, ενισχύθηκε η επικοινωνία μεταξύ μαθητών και καθηγητή. Βέβαια, πολλοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να μεταφράσουν την ψηφιακή εικόνα σε αλγεβρική σχέση και αντίστροφα, κάτι που δείχνει ότι η αλλαγή μεταξύ δύο σημειωτικών αναπαραστάσεων, απαιτεί περισσότερη εξάσκηση (Duval, 2006), όπως αναφέρουν οι Poon & Wong (2017).

Για τον ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων στην ομοιότητα τριγώνων, έγινε μια έρευνα από τους Ubah και Bansilal (2019) σε τελειόφοιτους δασκάλους μαθηματικών. Ο σκοπός της έρευνας ήταν να φανεί πώς οι φοιτητές χρησιμοποιούν σημειωτικές αναπαραστάσεις στο συλλογισμό σχετικά με τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων. Πήραν μέρος 65 φοιτητές, έδωσαν απαντήσεις σε ένα τεστ όπου τους ζητήθηκε να ονομάσουν τα όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από διαφορετικά σχήματα αλλά έγιναν και συνεντεύξεις σε 13 από αυτούς σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν τα ζευγάρια των όμοιων τριγώνων και η γνώση τους για τις ιδιότητες των σχημάτων ήταν περιορισμένη.

Άλλη μια έρευνα που έγινε από τους Mastrogiannis και Kordaki (2006) είχε σκοπό να αναδείξει τον σημαντικό ρόλο που παίζει ένα καλά οργανωμένο λογισμικό στην «κατασκευή» της έννοιας της ομοιότητας από τους μαθητές. Στη δραστηριότητα που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν όσα περισσότερα ζευγάρια όμοιων τριγώνων μπορούσαν με τη βοήθεια ενός ψηφιακού εργαλείου και να δικαιολογήσουν την στρατηγική που ακολούθησαν. Λόγω της δυναμικότητας του περιβάλλοντος οι μαθητές παρουσίασαν 17 διαφορετικές λύσεις και κατόρθωσαν να συνδυάσουν την έννοια της ομοιότητας με άλλες γεωμετρικές έννοιες όπως για παράδειγμα τα κανονικά πολύγωνα, τα διαφορετικά είδη τριγώνων, τις γωνίες, τις παράλληλες και κάθετες πλευρές.

Ακόμα, ο Mainali B. (2018), έκανε μια πρόταση διδασκαλίας της ομοιότητας των τριγώνων που συσχετίζει το ψηφιακό περιβάλλον του Geogebra με τα χειραπτικά υλικά AngLegs. Χρησιμοποιώντας τα AngLegs οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εξερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές των όμοιων τριγώνων φτάνοντας έτσι στην εννοιολογική κατανόηση της ομοιότητας. Επιπρόσθετα θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν το δυναμικό περιβάλλον του Geogebra όπου ο πειραματισμός των μαθητών γίνεται πιο διαδραστικός. Αυτό οδηγεί σε πιο βαθιά κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας καθώς συνδυάζει πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Σε μια άλλη πιο εξειδικευμένη έρευνα μελετήθηκαν τα λάθη των μαθητών όταν γράφουν τις αντίστοιχες γωνίες στα όμοια τρίγωνα (Parastuti et al., 2018). Η έρευνα έγινε με τρεις μαθητές της έκτης τάξης ενός σχολείου της Ιάβας στην Ινδονησία. Ο πρώτος με άριστη επίδοση σε ένα τεστ που έγραψαν σχετικά με την ισότητα και ομοιότητα των τριγώνων, ο δεύτερος με μέτρια επίδοση και ο τρίτος με χαμηλή επίδοση. Από τις συνεντεύξεις σχετικά με τις λύσεις των μαθητών στα προβλήματα που τους δόθηκαν το συμπέρασμα είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην μεταφορά και ανάλυση των δεδομένων του προβλήματος, κι έτσι εμφανίζονται λάθη που αφορούν τις γωνίες των τριγώνων.

Μια άλλη μελέτη που έγινε από τους Lufti και Jupri (2019), σκοπό είχε να ερευνήσει την χωρική ικανότητα των μαθητών με βάση τα επίπεδα Van Hiele, στο θέμα των όμοιων τριγώνων. Για να γίνει αυτό δόθηκε ένα γραπτό τεστ σχετικά με την ομοιότητα των τριγώνων, σε 25 μαθητές της έκτης τάξης του Γυμνασίου στην Μπαντούγκ της Ινδονησίας. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο γκρουπ ανάλογα με την επίδοσή τους στο τεστ και μετά έγιναν επιπλέον και κάποιες συνεντεύξεις σε μαθητές και των δύο γκρουπ. Τα αποτελέσματα έδειξαν διαφοροποίηση ως προς τις χωρικές ικανότητες των μαθητών των δύο γκρουπ αλλά κανένας μαθητής δεν ξεπέρασε το επίπεδο 2 στην κατηγοριοποίηση του Van Heile.

2. Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (ΜΧΕ)

2.1.Γεωμετρικά Παραδείγματα – Τρεις Στοιχειώδεις Γεωμετρίες.

Η προσέγγιση της γεωμετρίας στην διδασκαλία, στις μέρες μας, γίνεται μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών. Η πρώτη έχει να κάνει με την γεωμετρία που αναφέρεται σε πρακτικές γνώσεις του χώρου και βασίζεται στον φυσικό κόσμο, ενώ η δεύτερη είναι μια περισσότερο αφηρημένη προσέγγιση της γεωμετρίας που στηρίζεται στην καλά δομημένη λογική σκέψη (Kuzniak A., 2015). Πολλές φορές, όμως, οι μαθητές μπερδεύονται με τις διαφορετικές προσεγγίσεις, οπότε είναι σημαντικό να υπάρχει ένα διδακτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο να τοποθετήσουν την προσπάθειά τους για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Συνδυάζοντας επιστημολογικές, διδακτικές και ιστορικές απόψεις οι Houdement και Kuzniak (2003),ανέπτυξαν τρία γεωμετρικά παραδείγματα:

1. Η Φυσική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 1 (GI), στην οποία τα επιχειρήματα βασίζονται στο πείραμα, την διαίσθηση και στον συλλογισμό που ακολουθεί. Το σημαντικότερο είναι να βρεθούν επιχειρήματα που να πείθουν για την ορθότητά τους. Οι αποδείξεις μπορούν να στηριχτούν στα σχήματα ή στις παρατηρήσεις που γίνονται με εργαλεία όπως ο χάρακας, η πυξίδα ή το μοιρογνωμόνιο. Η εξέλιξη της Φυσικής Γεωμετρίας παρακινήθηκε ιστορικά από την προσπάθεια επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Η πηγή της επικύρωσής της είναι ο πραγματικός κόσμος.

2. Η Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 2 (GII),της οποίας αρχέτυπο είναι η Ευκλείδεια γεωμετρία και η πηγή της επικύρωσής της είναι οι υποθετικοί, απαγωγικοί νόμοι μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Το μοντέλο αυτό πλησιάζει την πραγματικότητα καθώς τα σχήματα υπάρχουν μόνο μέσα από ορισμούς, οι οποίοι στηρίζονται σε χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων.

3. Η Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 3 (GIII), στην οποία το σύστημα αξιωμάτων είναι δομημένο και ολοκληρωμένο και δεν έχει καμία εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο. Το μοναδικό κριτήριο αλήθειας είναι η συνοχή. Την Γεωμετρία 3 σχεδόν δεν την συναντάμε στην σχολική εκπαίδευση παρά μόνο σε πανεπιστημιακά μαθήματα.

2.2. Τα είδη του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας

Η Γεωμετρία, όμως, είναι κυρίως μια ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι ένα σύνολο από ιδιότητες και αντικείμενα περιορισμένη σε φορμαλιστικά συστήματα. Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας για την γεωμετρία είναι ο χώρος που έχει οργανωθεί έτσι ώστε να είναι εφικτή από έναν μαθητή, εκπαιδευτικό ή φοιτητή η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Εξάλλου τα προβλήματα δικαιολογούν την ύπαρξή του (Kuzniak A. et al, 2016).

Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τύποι Μαθηματικού Χώρου Εργασίας:

- Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας Αναφοράς που έχει να κάνει με την μαθηματική γνώση που προκύπτει από τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών ή από διάφορες έρευνες ή άρθρα γραμμένα από μαθηματικούς. Συνήθως ορίζεται με βάση μαθηματικά κριτήρια αλλά πολλές φορές εμπλέκονται στον σχηματισμό του οικονομικά και πολιτικά κριτήρια.

- Ο Κατάλληλος Μαθηματικός Χώρος Εργασίας που σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα της τάξης ο οποίος επιλέγει τις κατάλληλες δραστηριότητες ώστε να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να εργαστούν σε αυτές με τον κατάλληλο τρόπο. Φυσικά, ο σχεδιασμός αυτός βασίζεται στο πρόγραμμα σπουδών αλλά και στο επίπεδο και τις επιδόσεις των μαθητών. Επίσης. ο κατάλληλος ΜΧΕ δεν είναι σταθερός αλλά διαφοροποιείται με τις αντιδράσεις των μαθητών καθώς αντιμετωπίζουν την μαθηματική τους εργασία.

- Ο Προσωπικός Μαθηματικός Χώρος Εργασίας που σχετίζεται με τον κάθε χρήστη του και ορίζεται από τον τρόπο που αυτός χειρίζεται τα μαθηματικά προβλήματα, αλλά και το γνωστικό του επίπεδο.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών Χώρων Εργασίας είναι σημαντική για την επιτυχία μιας διδασκαλίας. Τα μαθηματικά των αναλυτικών προγραμμάτων, που βρίσκονται στον Μαθηματικό Χώρο Εργασίας Αναφοράς, προσαρμόζονται από τον διδάσκοντα στον Κατάλληλο Μαθηματικό Χώρο Εργασίας ώστε να είναι εφικτό στους μαθητές να εργαστούν αποτελεσματικά στον προσωπικό τους Μαθηματικό Χώρο Εργασίας (Kuzniak A. et al, 2016).

2.3.Τα επίπεδα του ΜΧΕ

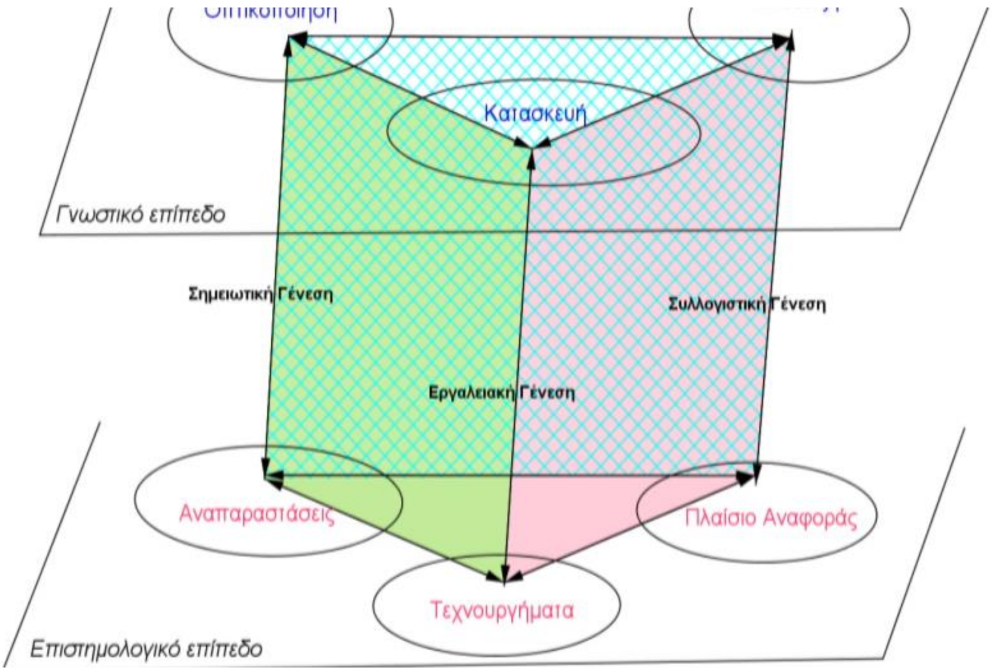
Ο κάθε Μαθηματικός Χώρος Εργασίας αποτελείται από δύο οριζόντια επίπεδα: το επιστημολογικό και το γνωστικό (Εικ. 4).

Το επιστημολογικό επίπεδο συνδέεται άμεσα με το μαθηματικό περιεχόμενο της κάθε ενότητας. Σε αυτό αλληλοεπιδρούν τρία χαρακτηριστικά συστατικά της μαθηματικής δραστηριότητας: ένας πραγματικός και τοπικός χώρος με διακριτά και ξεκάθαρα αντικείμενα, ένα σύνολο από τεχνουργήματα και ένα θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς βασισμένο σε ορισμούς και ιδιότητες. Τα παραπάνω συστατικά πρέπει να οργανωθούν σύμφωνα με προκαθορισμένους στόχους που εξαρτώνται από το μαθηματικό πεδίο και τις προτεινόμενες δραστηριότητες.

Για το πρώτο δομικό στοιχείο του επιστημολογικού επιπέδου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο μαθηματικό σημείο ή αναπαράσταση. Τα μαθηματικά σημεία μπορεί να είναι γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα, γραφήματα, ή φωτογραφίες σε προβλήματα μοντελοποίησης (Kuzniak A. et al, 2016). Με τον όρο τεχνουργήματα εννοούμε τα παραδοσιακά εργαλεία όπως χάρακες ή τριγωνομετρικούς πίνακες ή τις τεχνικές υπολογισμού και κατασκευών. Τέλος, αυτό που αποκαλούμε θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς αποτελείται από ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα, αξιώματα.

Το γνωστικό επίπεδο αποτελείται από τρείς γνωστικές διαδικασίες που όπως αναφέρει ο Kuzniak A. (2015) έχουν χρησιμοποιηθεί αρχικά από τον Duval (2005): μια διαδικασία οπτικοποίησης, την διαδικασία της κατασκευής χρησιμοποιώντας τα τεχνουργήματα και την διαδικασία της συλλογιστικής που αναφέρεται στην απόδειξη με βάση το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς.

Η οπτικοποίηση είναι κάτι περισσότερο από μια απλή εικόνα ή οπτική αντίληψη των μαθηματικών σημείων. Αναφέρεται στην αποκρυπτογράφηση, ερμηνεία και δημιουργία σχέσεων μεταξύ των σημείων. Η διαδικασία της κατασκευής περιλαμβάνει την κατασκευή, με τη βοήθεια τεχνουργημάτων, χειροπιαστών αντικειμένων όπως γραφήματα ή γεωμετρικά σχήματα αλλά και την εξερεύνηση και τον πειραματισμό. Ακόμα, η διαδικασία της επικύρωσης μιας λεκτικής απόδειξης γίνεται με βάση το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.



Εικ. 4

2.4. Οι γενέσεις του ΜΧΕ – Τα τρία κατακόρυφα επίπεδα.

Επειδή όμως η γεωμετρική εργασία είναι μια διαδικασία δημιουργίας, ανάπτυξης και μετασχηματισμού ο Kuzniak (2015), χρησιμοποιεί την έννοια της γένεσης για να περιγράψει την αλληλεπίδραση των μετασχηματισμών μεταξύ του επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου ώστε να δημιουργηθεί ένα συνεκτικό και ολοκληρωμένο περιβάλλον εργασίας.

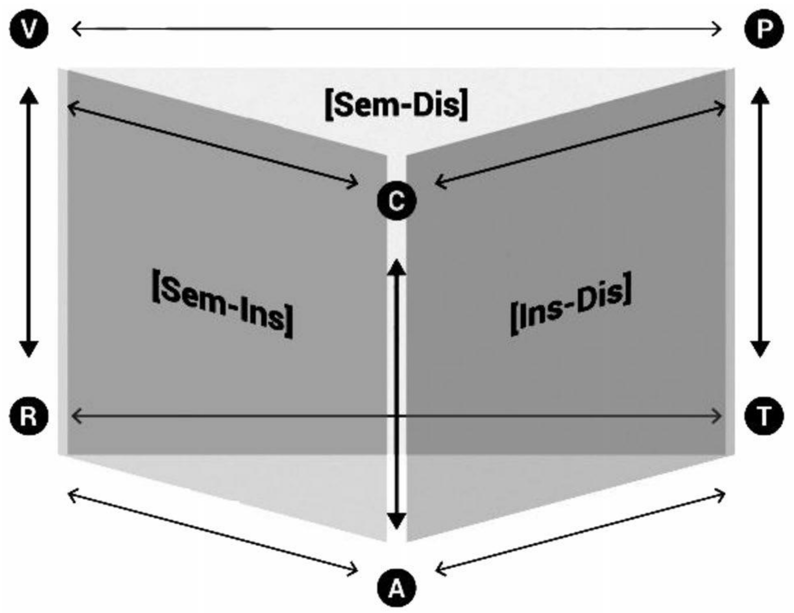
Οι γενέσεις που δημιουργούνται είναι τρεις:

1. *Η εργαλειακή γένεση* στην οποία τα τεχνουργήματα μετασχηματίζονται σε εργαλεία με την διαδικασία της κατασκευής (instrumentation). Επίσης, αντίστροφα, η σωστή επιλογή των εργαλείων για την κατασκευή των σχημάτων εντάσσεται στην εργαλειακή γένεση (instrumentalization).

2. *Η σχηματική - σημειωτική γένεση* όπου τα αντικείμενα του χώρου μετατρέπονται σε γεωμετρικά αντικείμενα και αντιστρόφως.

3. *Η λεκτική -συλλογιστική γένεση* η οποία χρησιμοποιεί τους ορισμούς και τις ιδιότητες για μια πειστική λεκτική απόδειξη και αντίστροφα χρησιμοποιείται για να εξακριβωθεί η εγκυρότητα μιας απόδειξης με βάση τους ορισμούς και τις ιδιότητες αλλά και για την ανάδυση νέων ορισμών και ιδιοτήτων. (Kuzniak A., et al, 2016).

Με σκοπό να γίνουν κατανοητές οι αλληλεπιδράσεις που συμβαίνουν μεταξύ των τριών γενέσεων κατά την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος οι Coutat and Richard (2011) όρισαν τρία κατακόρυφα επίπεδα όπως φαίνεται στην Εικ. 5 (Kuzniak A., et al, 2016).



Εικ. 5

Το πρώτο κατακόρυφο επίπεδο συνδυάζει την σημειωτική και την λεκτική γένεση. Κάποιες φορές δίνεται προτεραιότητα στη σημειωτική γένεση όπως όταν αναπτύσσεται μια γεωμετρική απόδειξη μέσω μετασχηματισμών και ανακατανομής των σχημάτων, ενώ στις περιπτώσεις που έχουμε μια φορμαλιστική απόδειξη που βασίζεται σε ιδιότητες και θεωρήματα και γίνεται με τη βοήθεια μιας ευρετικής προσέγγισης χρησιμοποιώντας σύμβολα τότε η προτεραιότητα δίνεται στην λεκτική γένεση.

Το δεύτερο κατακόρυφο επίπεδο είναι αυτό που συσχετίζει την εργαλειακή με την λεκτική γένεση. Αν τα συμπεράσματα που προκύπτουν βασίζονται σε μετρήσεις με εργαλεία και οδηγούν σε μια εμπειρική απόδειξη τότε το βάρος τη δραστηριότητας μετατοπίζεται στην εργαλειακή γένεση. Αν όμως έχουμε έναν παραγωγικό συλλογισμό που βασίζεται σε επεξηγήσεις μέσω των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την χρήση των εργαλείων τότε προτεραιότητα έχει η λεκτική γένεση.

Το τρίτο κατακόρυφο επίπεδο συνδυάζει την σημειωτική με την εργαλειακή γένεση. Οι μετρήσεις με χάρακα ή μοιρογνωμόνιο σχημάτων συμβάλλουν στην εργαλειακή γένεση αλλά συγχρόνως αναγνωρίζουν τα στοιχεία ενός σχήματος και πλησιάζουν έτσι στην σημειωτική γένεση.

Τα τρία προηγούμενα επίπεδα είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των γενέσεων και την αναγνώριση και περιγραφή των διάφορων φάσεων και αλλαγών που ανακύπτουν κατά την επίλυση ενός προβλήματος.

Πολλές φορές για την επίλυση μιας δραστηριότητας χρειάζεται να μετακινηθούμε από το αρχικό μαθηματικό πεδίο σε κάποιο άλλο. Έτσι ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας μπορεί να ονομαστεί ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ ή ΜΧΕ$_{\text{ΑΛΓΕΒΡΑ}}$ ή ΜΧΕ$_{\text{ΑΝΑΛΥΣΗ}}$ ή ακόμα πιο εξιδεικευμένα ΜΧΕ$_{\text{ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ}}$ ή ΜΧΕ$_{\text{ΘΑΛΗΣ}}$ κτλ. Στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση θα κινηθούμε στον ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ και ΜΧΕ$_{\text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ}}$.

3. Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση

Στις αρχές περίπου του 20ου αιώνα έγινε μια μεταφορά του «βιογενετικού νόμου» του Haeckel (1834 – 1919) στη μαθηματική εκπαίδευση με σκοπό την βελτίωση της διδασκαλίας. Με βάση τον παραπάνω νόμο η οντογένεση, δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού, είναι μια ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης, δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους. Έτσι και στα μαθηματικά αν η γνωστική ανάπτυξη του μαθητή ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους τότε η διδασκαλία θα πρέπει να ακολουθεί την ιστορική πορεία της εξέλιξης των διαφόρων εννοιών (Θωμαΐδης, 2014). Παρακάτω παρουσιάζονται τρεις θεωρίες μάθησης που οριοθετούν η καθεμία έναν συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία.

Ο Piaget ενδιαφέρθηκε για την διαδικασία σχηματισμού της γνώσης και θεώρησε ότι αυτή μπορεί να περιγραφεί σε επίπεδα, ξεκινώντας από το αρχικό και περνώντας στο επόμενο πιο σύνθετο κάθε φορά. Έτσι, αυτός και ο Garcia, αντλώντας ιδέες από την θεωρία της βιολογικής προσαρμογής, ανέπτυξαν την έννοια της γενετικής εξέλιξης (Furinghetti , Radford , 2002). Σύμφωνα με την θεωρία τους, η απόκτηση γνώσεων και η ανάπτυξη της σκέψης εξελίσσεται σε τέσσερα διαδοχικά στάδια από την βρεφική μέχρι την εφηβική ηλικία. Τα παιδιά αλληλοεπιδρούν με το περιβάλλον και προσαρμόζονται σε αυτό με τους μηχανισμούς της «αφομοίωσης» και της «συμμόρφωσης». Οι διαδικασίες του ενός σταδίου μετασχηματίζονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο με τον μηχανισμό της «αναστοχαστικής αφαίρεσης». Αυτά τα στάδια ανάπτυξης της θεωρίας του Piaget μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως εργαλεία επιστημολογικής ανάλυσης και να εντοπιστούν στην ιστορία των μαθηματικών. Η μετάβαση, δηλαδή, από την μια ιστορική περίοδο στην επόμενη χρησιμοποιεί μηχανισμούς όμοιους με εκείνους που παρατηρήθηκαν στις έρευνες της νοητικής ανάπτυξης (Θωμαΐδης, 2014).

Ο Freudenthal ανέπτυξε μια άλλη θεωρία για την μάθηση των μαθηματικών που εντάσσεται στα πλαίσια της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης», με βασικό της αξίωμα την «αρχή της εκ νέου επινόησης». Με βάση τη θεωρία αυτή η πρωτότυπη διαδικασία της επινόησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο και η ιστορία των μαθηματικών να παίξει τον ρόλο της «δεξαμενής» από όπου αντλούνται διδακτικές ιδέες. Δίνεται δηλαδή στους μαθητές η ευκαιρία, μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες, να γνωρίσουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες επινοήθηκε μια μαθηματική έννοια (Θωμαΐδης, 2014).

Η θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Guy Brousseau είναι μια ακόμη θεωρία μάθησης που χρησιμοποιεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο την Ιστορία των Μαθηματικών. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία ο μαθητής μαθαίνει μέσα από μια διαδικασία αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον ή καλύτερα από μια διαδρομή που αποτελείται από την «αφομοίωση» και τη «συμμόρφωση» όπως περιγράφει ο Piaget. Στην ουσία προσαρμόζει τον εαυτό του σε ένα περιβάλλον που γεννά αντιθέσεις, δυσκολίες και ανισορροπία (Brousseau , 2000).

Ο δάσκαλος βέβαια είναι υπεύθυνος να εγείρει την αναμενόμενη προσαρμογή των μαθητών διαλέγοντας κατάλληλα προβλήματα, με τα οποία θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν, να σκεφτούν, να δράσουν, να κινητοποιηθούν. Στη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ο δάσκαλος πρέπει να αποφύγει να παρέμβει.. Τελικά η κατάκτηση της γνώσης από τον μαθητή γίνεται μόνο όταν αυτός καταφέρει να την χρησιμοποιήσει σε καταστάσεις έξω από κάθε διδακτικό πλαίσιο. Τέτοιες καταστάσεις ονομάζονται αδιδακτικές καταστάσεις. Φυσικά, επειδή ο μαθητής δεν μπορεί να διαχειριστεί κάθε αδιδακτική κατάσταση, τίθεται στην επιλογή του δασκάλου να καθορίσει ποια μπορεί ο μαθητής να επεξεργαστεί. Ο δάσκαλος επικοινωνεί με τον μαθητή μέσω ερωτήσεων, διδακτικών μεθόδων ή ευρετικών πρακτικών κτλ. ή επιλέγει να απέχει από την επικοινωνία. Έτσι εμπλέκεται σε ένα παιχνίδι μεταξύ του συστήματος αλληλεπίδρασης του μαθητή με τα προβλήματα που του δίνονται, το οποίο αποτελεί τις διδακτικές καταστάσεις. Οι κανόνες αυτού του παιχνιδιού και η στρατηγική της διδακτικής κατάστασης συνιστούν το διδακτικό συμβόλαιο μεταξύ δασκάλου και μαθητή (Brousseau, 2000).

Ένα σημαντικό σημείο της θεωρίας του Brousseau είναι η αναφορά στην έννοια του «επιστημολογικού εμποδίου». Αρχικά ο Bachelard εισήγαγε την έννοια του «εμποδίου» στις μελέτες του για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης, στις οποίες αναφέρει ότι η εξέλιξη αυτή δεν είναι αθροιστική αλλά συναντά αδιέξοδα και ρήξεις. Ο Brousseau υποστήριξε ότι η μάθηση με προσαρμογή στο περιβάλλον συνοδεύεται από γνωστικές ρήξεις (Θωμαΐδης , 2014). Τα λάθη των μαθητών δεν είναι μόνο αποτέλεσμα σύμπτωσης ή άγνοιας αλλά είναι το αποτέλεσμα της σύγκρουσης μιας παλαιότερης γνώσης που ήταν επιτυχημένη αλλά τώρα είναι μη αποδεκτή (Brousseau , 2000). Η σύγκρουση αυτή και η αντικατάσταση της παλιάς γνώσης με την νεότερη αποτελεί το λεγόμενο «επιστημολογικό εμπόδιο».

Σύμφωνα με τον Brousseau όπως αναφέρει ο Θωμαΐδης (2014) ο ρόλος των ερευνητών της ιστορίας και διδακτικής των μαθηματικών είναι : «α) να εντοπίζουν τα επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις, β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών και γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους» (Brousseau 1989/1997: 99).

3.1. *Επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία*

Πολλοί ερευνητές έχουν αναφερθεί στα οφέλη της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Οι λόγοι για τους οποίους είναι χρήσιμη η ενσωμάτωση της ιστορίας έχουν κατηγοριοποιηθεί κατά καιρούς και παρουσιάζονται σε διάφορα άρθρα. Τα επιχειρήματα αυτά χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: η ιστορία ως εργαλείο και η ιστορία ως σκοπός (Jankvist, 2009).

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν επιχειρήματα όπως ότι η ιστορία κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών ή ότι προσδίδει στα μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο. Επίσης, η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα ισχυρό γνωστικό εργαλείο που βελτιώνει την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών από τη μία ή αναγνωρίζοντας τα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία αναφέρθηκαν παραπάνω. Σε αυτήν την κατηγορία εντάσσεται και το επιχείρημα της σύνδεσης της οντογένεσης με την φυλογένεση.

Στην δεύτερη κατηγορία, που αναφέρεται στην ιστορία ως σκοπό, τα επιχειρήματα έχουν να κάνουν με το εξελικτικό κομμάτι της επιστήμης των μαθηματικών. Αναφέρονται, δηλαδή, στην εξέλιξη των μαθηματικών μέσα σε διαφορετικούς πολιτισμούς και την επίδραση που είχε ο καθένας από αυτούς στην επιστήμη (Jankvist, 2009).

Πιο αναλυτικά ο Fauvel (1991) παρουσιάζει δεκαπέντε λόγους υπέρ της χρήσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση:

- «Βοηθάει στην αύξηση του κινήτρου για μάθηση.
- Δίνει στα μαθηματικά ένα ανθρώπινο πρόσωπο.
- Η ιστορική εξέλιξη των διαφόρων εννοιών βοηθάει στην παρουσίασή τους με τη σειρά στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.
- Δείχνοντας στους μαθητές πώς εξελίχθηκαν οι έννοιες τους βοηθάει στην κατανόησή τους.
- Αλλάζει η αντίληψη των μαθητών για τα μαθηματικά.
- Η σύγκριση αρχαίας και νέας ιστορίας δίνει αξία σε νέες τεχνικές.

- Βοηθάει στην δημιουργία πολυπολιτισμικής κουλτούρας.
- Παρέχει ευκαιρίες για έρευνα.
- Παλιότερα εμπόδια στην ανάπτυξη βοηθούν στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σήμερα.
- Οι μαθητές ενθαρρύνονται καθώς νιώθουν πως δεν είναι οι μόνοι που έχουν δυσκολίες.
- Βοηθάει τους ταχύτερους μαθητές να εμβαθύνουν.
- Βοηθάει στην εξήγηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία.
- Κάνει τα μαθηματικά λιγότερο τρομακτικά.
- Βοηθάει στην διατήρηση του προσωπικού ενδιαφέροντος και ενθουσιασμού για τα μαθηματικά.
- Προσφέρει ευκαιρία για διαθεματική προσέγγιση με άλλους δασκάλους».

Αργότερα ο Fried (2001) συνόψισε τους παραπάνω λόγους του Fauvel σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη έχει να κάνει με το γεγονός ότι η ιστορία των μαθηματικών κάνει τα μαθηματικά περισσότερο ανθρώπινα, συνδέοντας την μελέτη των μαθηματικών με ανθρώπινα κίνητρα. Η δεύτερη με το ότι τονώνει το ενδιαφέρον των μαθητών δίνοντας ποικιλία στην προσέγγιση διαφόρων εννοιών και δείχνοντας τον ρόλο των μαθηματικών στην κοινωνία. Η τρίτη κατηγορία αναφέρεται στο ότι η ιστορία προσφέρει γνώση πάνω στις έννοιες, τα προβλήματα και την επίλυσή των προβλημάτων.

Βέβαια, για τα παραπάνω επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία υπάρχει κάποια κριτική. Κάποιοι θεωρούν ότι η ιστορία δεν είναι σημαντική καθώς δεν είναι μαθηματικά και ότι πρέπει πρώτα οι μαθητές να διδάσκονται τα μαθηματικά μόνα τους και μετά την ιστορία. Κάποιοι άλλοι υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία της ιστορίας είναι δύσκολη αφού απαιτεί περισσότερο χρόνο, περισσότερες διαθέσιμες πηγές και φυσικά εξειδίκευση από τους εκπαιδευτικούς. Επίσης θεωρούν ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν γνώση της γενικής ιστορίας ώστε να μην παρατηρηθούν φαινόμενα σωβινισμού (Jankvist, 2009).

3.2.*Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία.*

Οι Tzanakis και Thomaidis (2000) διακρίνουν τρεις τρόπους ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι παρακάτω τρόποι αν και είναι διαφορετικοί αλληλοσυμπληρώνονται καθώς ο καθένας από μόνος του δεν καλύπτει την πολύπλοκη επίδραση της Ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση.

1. Παρέχοντας άμεσα ιστορικές πληροφορίες.

Ο ρόλος της ιστορίας σε αυτήν την περίπτωση είναι να δώσει στους μαθητές πληροφορίες για ονόματα, ημερομηνίες, γεγονότα, την ιστορική σειρά εμφάνισης των εννοιών και προβλημάτων. Επίσης, σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν ανέκδοτα και ιστορίες (Jankvist, 2009). Αυτή είναι μια προσέγγιση που από τη μια παρουσιάζει τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα αλλά από την άλλη δίνει περισσότερο έμφαση στα ιστορικά γεγονότα παρά στην ίδια την επιστήμη.

2. Χρησιμοποιώντας αυθεντικές ή δευτερεύουσες πηγές.

Ένα θέμα μπορεί να διδαχθεί αποκλειστικά βασισμένο σε ιστορικές πηγές ή συμπεριλαμβάνοντας μικρά ιστορικά αποσπάσματα στα φύλλα εργασίας των μαθητών. Χρησιμοποιώντας αυτές τις πηγές οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν τα προβλήματα και τα ερωτήματα που οδήγησαν στην εξέλιξη ενός συγκεκριμένου μαθηματικού πεδίου. Μπορούν επίσης να κατανοήσουν την εξέλιξη της επιστήμης ως προς τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται, την μεθοδολογία και να τις συγκρίνουν με τις σύγχρονες. Έτσι οι μαθητές είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως μια επιστήμη που εξελίσσεται αναγνωρίζοντας τους παράγοντες που συμβάλλουν στην εξέλιξη αυτή.

3. Ακολουθώντας μια προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία.

Η προσέγγιση αυτή δεν είναι αμιγώς επαγωγική αλλά ούτε και αμιγώς ιστορική. Βασική προϋπόθεση αυτής της προσέγγισης είναι ο μαθητής να έχει κινητοποιηθεί αρχικά πριν γίνει οποιαδήποτε μελέτη ενός θέματος. Αυτό σημαίνει ότι τα προβλήματα και τα ερωτηματικά με τα οποία αναμετρήθηκε το συγκεκριμένο θέμα που θα παρουσιαστεί θα πρέπει να έχουν πλήρως αποσαφηνιστεί. Έτσι, όπως αναφέρουν οι Tzanakis και Thomaidis (2000), η ιστορία προσφέρει βαθύτερη και σφαιρικότερη κατανόηση ενός θέματος σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα (Tzanakis, 1996):

- Ο δάσκαλος έχει βασικές γνώσεις σχετικά με την ιστορική εξέλιξη ενός θέματος.
- Τα κρίσιμα σημεία αυτής της εξέλιξης εντοπίζονται στις ιδέες κλειδιά, στα προβλήματα και στα ερωτηματικά που παρέχουν νέες ερευνητικές προοπτικές.
- Τα κρίσιμα αυτά σημεία ανακατασκευάζονται σε ένα σύγχρονο πλαίσιο ώστε να γίνουν κατάλληλα διδακτικά.
- Τα παραπάνω ανακατασκευασμένα κρίσιμα σημεία δίνονται ως μία ακολουθία προβλημάτων με αυξανόμενη δυσκολία έτσι ώστε το καθένα να χτίζεται πάνω στο προηγούμενο.

3.3. *Οι ιστορικές πηγές στην διδασκαλία των μαθηματικών.*

Η ενσωμάτωση των αυθεντικών ιστορικών πηγών στην εκπαιδευτική διαδικασία προσφέρει θετικά ή αρνητικά αποτελέσματα ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται. Έχει να κάνει με το είδος της ομάδας των διδασκόμενων, με το είδος της πηγής αλλά και με την διδακτική μεθοδολογία που θα επιλεχθεί (Jahnke, 2000).

Σύμφωνα με τους Jahnke et al. (2000) τρεις έννοιες περιγράφουν καλύτερα την επίδραση στην διδασκαλία της αξιοποίησης των αυθεντικών πηγών. Η έννοια της αντικατάστασης, η έννοια του αναπροσανατολισμού και η έννοια της πολιτισμικής κατανόησης.

Στην πρώτη περίπτωση η ενσωμάτωση της ιστορίας προσφέρει κάτι διαφορετικό από τα συνηθισμένα καθώς τα μαθηματικά φαίνονται ως μια διανοητική δραστηριότητα και όχι σαν ένα σώμα από γνώσεις και τεχνικές. Με την έννοια του αναπροσανατολισμού, κατανοώντας ένα ιστορικό κείμενο, θυμόμαστε ότι οι έννοιες επινοήθηκαν και δεν προέκυψαν αόριστα. Σύμφωνα με την πολιτισμική κατανόηση τα μαθηματικά τοποθετούνται σε ένα συγκεκριμένο επιστημονικό και τεχνολογικό πλαίσιο της ιστορίας των ιδεών και των κοινωνιών.

Επίσης, οι Tzanakis και Thomaidis (2000) αναφέρουν σχετικά με την αξιοποίηση πρωτότυπων πηγών στην διδασκαλία ότι προσφέρει την κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο αλλά και ως προς τον συμβολισμό, την ορολογία, τις υπολογιστικές μεθόδους, τις αναπαραστάσεις. Ακόμα, θα μπορεί ο μαθητής να γνωρίσει τις δυσκολίες και τα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί κατά την εξέλιξη μιας έννοιας. Βέβαια, χρειάζεται μια προσεκτική επεξεργασία των αυθεντικών πηγών καθώς το περιεχόμενό τους διαφέρει αρκετά από την σύγχρονη μορφή τους. Η εισαγωγή τους στην διδασκαλία μπορεί να γίνει άμεσα χωρίς προηγούμενη προετοιμασία ή έμμεσα μετά από την επίλυση κάποιων προβλημάτων (Αναστασιάδης, Νικολαντωνάκης, 2016). Έτσι, είναι απαραίτητο να δοθεί αρκετός χρόνος στον μαθητή ώστε να κατανοήσει τις έννοιες και τις μεθόδους που παρουσιάζονται (Tzanakis και Thomaidis, 2000). Σίγουρα παίζει μεγάλο ρόλο αν η αυθεντική πηγή μελετάται από μαθητές ή από φοιτητές, οπότε θα πρέπει να είναι κατάλληλα προσαρμοσμένη στις ιδιαίτερες ανάγκες της κάθε εκπαιδευτικής ομάδας. Είναι σημαντικό ακόμα οι πηγές να σχετίζονται με τα ενδιαφέροντα των μαθητών και να υπάρχουν διαθέσιμες στην μητρική τους γλώσσα (Jahnke, 2000).

3.4. *Τα ιστορικά εργαλεία και ο ρόλος τους στην διδασκαλία.*

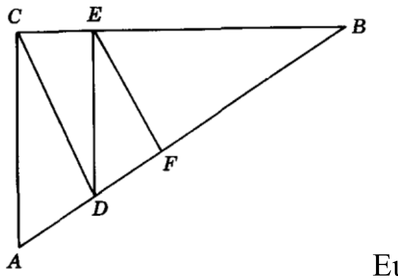
Όπως αναφέρουν οι Kuzniak et al. (2016), για τους αρχαιολόγους ένα τεχνούργημα (artifact) είναι ένα υλικό αντικείμενο που κατασκευάστηκε από τους ανθρώπους για κάποιο σκοπό. Ο Rabardel (1995:49) αναφέρει για τα τεχνουργήματα : « Το τεχνούργημα εργαλειοποιεί μια λύση σε ένα πρόβλημα ή σε μια ομάδα από προβλήματα που θέτει η κοινωνία» (Barbin, 2016).

Ο όρος όργανο (instrument) αναφέρεται στην επιστήμη ως ένα αντικείμενο που φτιάχτηκε για να εξυπηρετήσει σε μια τεχνική εργασία ή να κάνει κάποιες μετρήσεις (Kuzniak et al. , 2016). Ένα όργανο στα μαθηματικά είναι το αποτέλεσμα μιας εφεύρεσης και η χρήση του μπορεί σίγουρα να δώσει περισσότερη γνώση γι' αυτό απ' ότι μια απλή περιγραφή του με λόγια (Barbin, 2016). Εξάλλου όλα τα εργαλεία της αρχαίας αλλά και της σύγχρονης τεχνολογίας ενσωματώνουν σοβαρή μαθηματική γνώση (Bussi , 2000).

Ένα εργαλείο είναι πάντα το αποτέλεσμα μιας πολιτισμικής εξέλιξης, κάτι το οποίο έχει μεγάλη σημασία για την χρήση του στην διδακτική πρακτική καθώς έχει να κάνει με τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε. Μάλιστα, η εισαγωγή στην τάξη πολιτισμικών τεχνουργημάτων ενισχύει την διασύνδεση των σχολικών μαθηματικών με την γνώση της καθημερινής ζωής. Οι μαθητές μελετώντας ιστορικές πηγές μπορούν να ανακατασκευάσουν αντίγραφα αρχαίων εργαλείων και άλλων τεχνουργημάτων ή να τα γνωρίσουν επισκεπτόμενοι κάποιο μουσείο ή εικονικά μέσω του διαδικτύου (Bussi , 2000). Επίσης, είναι σημαντικό, ότι η κατασκευή τεχνουργημάτων βοηθάει στην αλληλεπίδραση και επικοινωνία των μαθητών που δουλεύουν ομαδικά για την επίτευξη του στόχου (Bussi et al., 2014). Σίγουρα η επαφή τους με τα φυσικά αντικείμενα είναι πιο κοντά στις καθημερινές τους εμπειρίες από ότι τα αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα κάτι που ενισχύει το ενδιαφέρον τους και κινητοποιεί ακόμη και όσους δεν αγαπούν τα μαθηματικά.

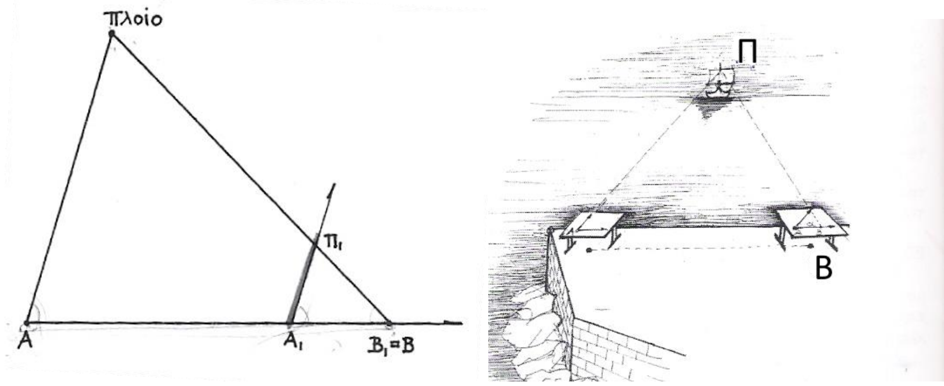
4. Ιστορική αναδρομή της έννοιας της ομοιότητας

Από το πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι είχαν κάποιες γνώσεις σχετικά με ην ομοιότητα των τριγώνων που τις χρησιμοποιούσαν για την διατήρηση σταθερής κλίσης στην κατασκευή μιας πυραμίδας. Ακόμα όμως και οι Βαβυλώνιοι είχαν μια οικειότητα με τα όμοια σχήματα καθώς σε πολλές πλάκες σφηνοειδούς γραφής φαίνεται να αναφέρεται η έννοια της ομοιότητας (Merzbach, Boyer, 1991). Σε μία πλάκα μάλιστα του μουσείου της Βαγδάτης υπάρχει ένα ορθογώνιο τρίγωνο (Εικ. 6) με γνωστά μήκη πλευρών, το οποίο χωρίζεται σε μικρότερα τρίγωνα με γνωστά εμβαδά. Φαίνεται πως από αυτές τις τιμές ο γραφέας χρησιμοποιώντας κάποιον «κανόνα» ομοιότητας υπολογίζει το μήκος του τμήματος AD.



Εικ. 6

Γύρω στο 600 π. Χ. ο Θαλής ο Μιλήσιος (624- 547 π.Χ.) ασχολείται με διάφορα γεωμετρικά θέματα. Ανάμεσα σε άλλα λέγεται ότι μέτρησε την απόσταση ενός πλοίου από την ακτή χρησιμοποιώντας την αναλογία των πλευρών των όμοιων τριγώνων (Katz, 1998), (Εικ. 7).

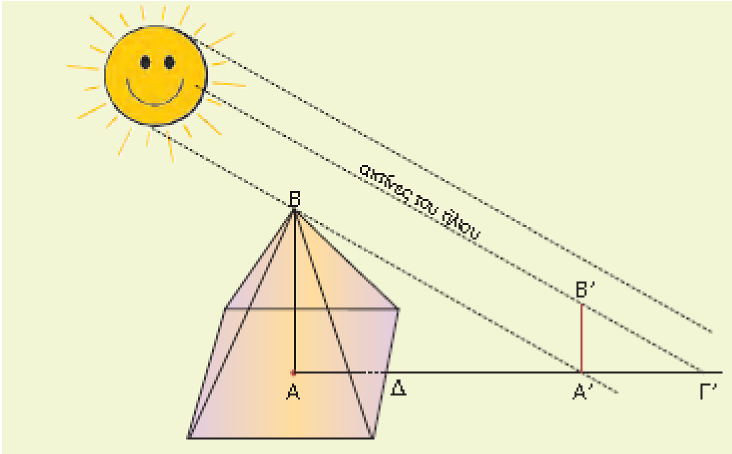


Εικ.7

Για να κάνει αυτήν την μέτρηση ο Θαλής είχε δύο σημεία παρατήρησης το Α και Β όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Από αυτά έκανε δύο σκοπεύσεις προς τις διευθύνσεις ΑΠ και ΒΠ αντίστοιχα. Κατόπιν επάνω στην διεύθυνση ΑΒ πήρε μήκος $Α_1Β_1$=1/ν ΑΒ και από το σημείο $Α_1$ πήρε το τμήμα $Α_1Π_1$ παράλληλο με το ΑΠ. Έτσι τα τρίγωνα ΑΠΒ και $Α_1Π_1Β_1$ είναι όμοια και αφού μπορούσε να μετρήσει εύκολα την απόσταση $Α_1Π_1$επάνω στο σχέδιο, τότε λόγω του σταθερού λόγου των πλευρών η ζητούμενη απόσταση ΑΠ θα ήταν ν$Α_1Π_1$.

Επίσης, στον Θαλή αποδίδεται η μέτρηση του ύψους μιας πυραμίδας στην Αίγυπτο με τη βοήθεια μιας ράβδου και των σκιών τους. Η πρώτη εκδοχή, του Ιερώνυμου, λέει ότι ο Θαλής προσδιόρισε το ύψος της πυραμίδας μετρώντας τη σκιά της τη στιγμή που η σκιά της ράβδου ήταν ίση με το μήκος της. Η άλλη εκδοχή, που διατυπώθηκε αργότερα από τον Πλούταρχο, λέει ότι για να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων ο Θαλής έκανε χρήση των όμοιων τριγώνων που σχημάτιζαν οι σκιές με την πυραμίδα και την ράβδο αντίστοιχα (Eves,1989), Εικ. 8. Μάλιστα λέγεται ότι η ενασχόληση του Θαλή με τους γνώμονες και τις σκιές τους τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι πολλαπλάσιοι γνώμονες ρίχνουν ομοίως πολλαπλάσια τις σκιές τους (Τσιμπουράκης, 2002).

Έτσι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο Θαλής χρησιμοποίησε την ισότητα των λόγων ($\frac{AB}{A'B'} = \frac{AA'}{A'\Gamma'}$) που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΑ΄ και Α΄Β΄Γ΄ για να μετρήσει το ύψος ΑΒ της πυραμίδας. Στην προηγούμενη ισότητα το μόνο άγνωστο μέγεθος είναι το ΑΒ, καθώς το μήκος της ράβδου αλλά και τα μήκη των πλευρών Α΄Γ΄ και ΑΑ΄ μπορούν να μετρηθούν.



Εικ.8

Επίσης, είναι αποδεκτό ότι και οι Πυθαγόρειοι είχαν γνώσεις για την ομοιότητα καθώς υπάρχουν αναφορές για διάφορες πτυχές της ομοιότητας στον πέμπτο αιώνα π.Χ. Αυτός όμως που έδωσε στέρεα θεμελίωση της γεωμετρικής θεωρίας της ομοιότητας, που παρουσιάζεται στο βιβλίο VI από τα στοιχεία του Ευκλείδη, ήταν ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.). Ο Εύδοξος όρισε τον ίσο λόγο και την αναλογία και με τη βοήθειά τους απέδειξε τα διάφορα θεωρήματα για τις αναλογίες τα οποία βρίσκονται στο βιβλίο V από τα Στοιχεία του Ευκλείδη (Katz, 2013). Σε αυτό το βιβλίο δόθηκε ο ορισμός του λόγου από τον Ευκλείδη ως :

Λόγος εστί δύο μεγεθών ομογενών η κατά πηλικότητά ποια σχέσις (Katz, 2013).

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο Ευκλείδης ασχολήθηκε με αναλογίες μεγεθών στο βιβλίο V, ενώ το βιβλίο VII αφορά τη θεωρία λόγων των αριθμών, καθώς δεν ήταν εφικτό από αυτόν να συμπεριλάβει την δεύτερη θεωρία στην πρώτη. Στην περίοδο αυτήν διαφοροποιείται ο σχηματικός από τον αριθμητικό λόγο. Στο V βιβλίο ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον λόγο των μεγεθών ενώ στο VII τον αριθμητικό λόγο . Η ομοιότητα δεν υπάρχει ως μετασχηματισμός, αλλά τα όμοια σχήματα παρουσιάζονται με έναν συσχετισμό των στοιχείων τους (Λεμονίδης, 1990).

Στο βιβλίο VI των Στοιχείων ο πρώτος ορισμός που παρουσιάζεται είναι αυτός των όμοιων σχημάτων:

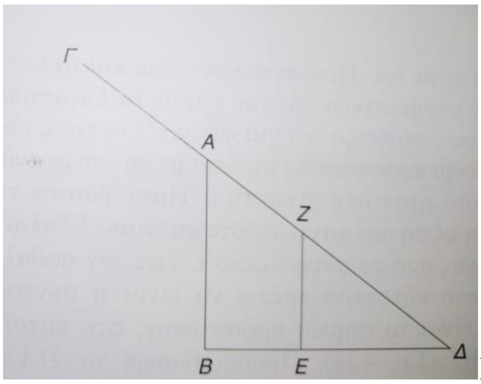
Όμοια ευθύγραμμα σχήματα εστίν, όσα τας τε γωνίας ίσας έχει κατά μίαν και τας περί τας ίσας γωνίας πλευράς ανάλογον (Katz, 2013).

Στο ίδιο βιβλίο αναφέρεται και το πρώτο από τα τρία κριτήρια ομοιότητας.

Των ισογωνίων τριγώνων ανάλογον εισίν αι πλευραί αι περί τας ίσας γωνίας και ομόλογοι αι υπό τας ίσας γωνίας υποτείνουσαι.

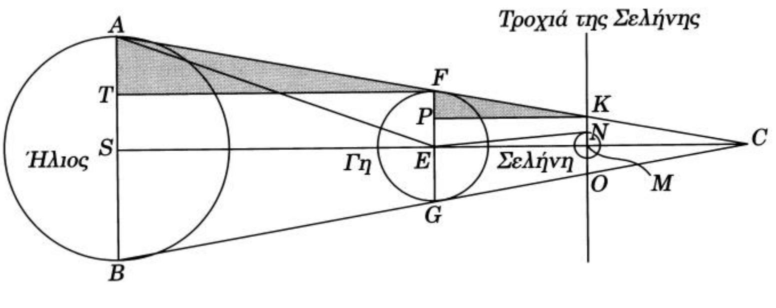
Στο παραπάνω βιβλίο περιλαμβάνονται πέντε ορισμοί και τριάντα τρεις προτάσεις. Μεταξύ αυτών υπάρχει και μια γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος η απόδειξη του οποίου γίνεται χωρίς να εμπλακούν σε αυτήν αναλογίες ή όμοια ευθύγραμμα σχήματα (ΚΕΕΠΕΚ, 2001). Στο βιβλίο VI, ο Ευκλείδης ασχολείται βασικά με τα όμοια σχήματα βασιζόμενος στην θεωρία των αναλογιών του V βιβλίου. Τα όμοια σχήματα μάλιστα παρουσιάζονται με τρόπο «ενδοσχηματικό», καθώς απλά συσχετίζονται τα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων χωρίς να φαίνεται ο δυναμικός χαρακτήρας της ομοιότητας (Λεμονίδης, 1990).

Ένα άλλο έργο του Ευκλείδη στο οποίο περιλαμβάνεται εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τις ιδιότητες των όμοιων σχημάτων είναι τα Οπτικά. Η πραγματεία αυτή αναφέρεται στις βασικές γεωμετρικές αρχές της όρασης και ο Ευκλείδης συμπεριλαμβάνει σε αυτήν αρκετά αποτελέσματα έμμεσης μέτρησης (Katz, 2013). Για παράδειγμα σε μια πρόταση που ζητά να υπολογιστεί το ύψος ενός πύργου όταν είναι γνωστή η σκιά του, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί βοηθητικά ένα αντικείμενο γνωστού ύψους και εφαρμόζει τις ιδιότητες της ομοιότητας των τριγώνων. Όταν ο ήλιος είναι στο Γ θέλει να υπολογίσει το ύψος ΑΒ του οποίου η σκιά είναι το ΒΔ. Για το σκοπό αυτό τοποθετεί μπροστά ένα άλλο αντικείμενο γνωστού ύψους του οποίου η σκιά καταλήγει επίσης στο Δ. Έτσι προκύπτουν δύο όμοια τρίγωνα τα ΔΖΕ και ΔΑΒ και από την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών υπολογίζει το ύψος ΒΑ.



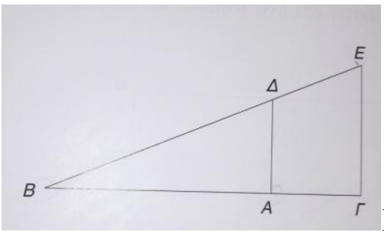
Εικ.9

Περίπου την ίδια εποχή, ένας άλλος μαθηματικός και αστρονόμος, ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (320-250 π. Χ.) χρησιμοποίησε την έννοια της ομοιότητας των τριγώνων για να υπολογίσει λόγους αποστάσεων γης-σελήνης και γης - ήλιου, χωρίς να έχει μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς του (Τσιμπουράκης, 2002),Εικ.10. Έδειξε χρησιμοποιώντας κάποιες αυθαίρετες παραδοχές ότι ο Ήλιος απέχει από την Γη δεκαεννέα φορές περισσότερο από ότι η Σελήνη. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποίησε την ομοιότητα των τριγώνων ATF και FPK αλλά και του ζεύγους ASE και ENM.



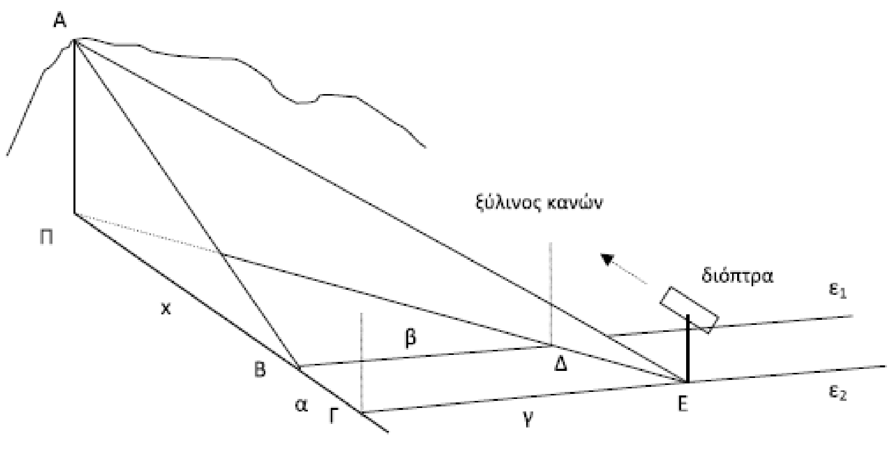
Εικ.10

Αυτός που επίσης ασχολήθηκε με έμμεσες μετρήσεις απόστασης και ύψους ήταν ο Ἥρων από την Αλεξάνδρεια ($1^{ος}$ αι. μ. Χ.). Στο έργο του "Περί Διόπτρας" βρίσκουμε λεπτομέρειες για τις έμμεσες μετρήσεις, στις οποίες χρησιμοποιεί τα όμοια τρίγωνα. Έχει υπολογισμούς για το ύψος ενός πύργου, τον προσδιορισμό της απόστασης μεταξύ δύο απρόσιτων σημείων και του βάθους μιας κοιλάδας (Katz, 2013). Στην Εικ.11 φαίνεται πώς ο Ήρων υπολογίζει την απόσταση μεταξύ ενός παρατηρητή που βρίσκεται στο Α και ενός απρόσιτου σημείου Β. Αρχικά επιλέγει ένα σημείο Γ ώστε να είναι συνευθειακό των Α και Β και φέρνει την κάθετο ΓΕ στην ΓΑΒ. Σκοπεύοντας το Β από το Ε ορίζει σημείο Δ πάνω στην ΒΕ ώστε το ΑΔ να είναι κάθετο στο ΓΑΒ. Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται έχουμε:$\frac{ΓΕ}{ΑΔ} = \frac{ΓΒ}{ΒΑ,}, άρα\ \frac{ΓΕ}{ΑΔ} = \frac{ΓΑ+ΒΑ}{ΒΑ}$, όπου το μόνο άγνωστο μέγεθος είναι το ζητούμενο μήκος ΑΒ.



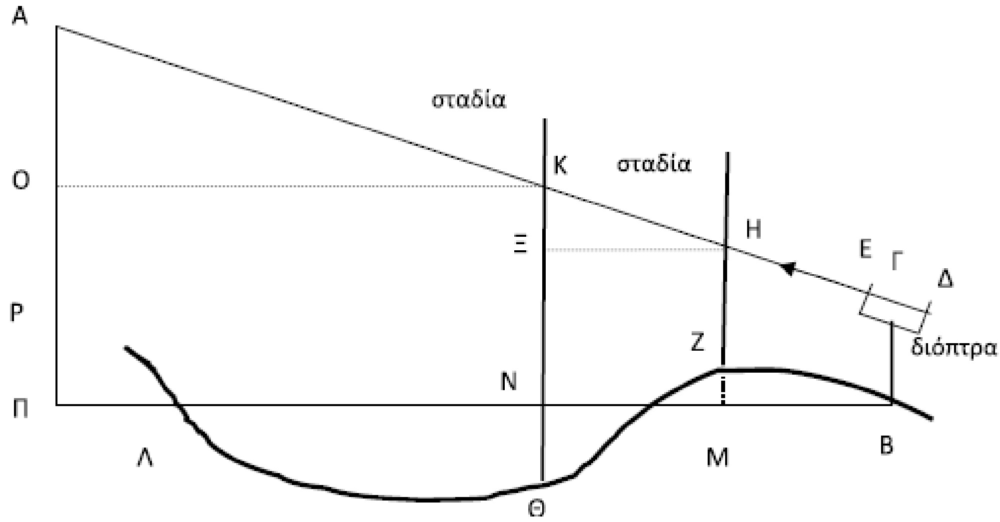
Εικ.11

Ένα όργανο που έμοιαζε πολύ με την διόπτρα του Ήρωνα χρησιμοποιούνταν ήδη από τον $3^ο$-$2^ο$ αιώνα π. Χ., ώστε να μετρηθούν με καλή ακρίβεια οριζόντιες αποστάσεις μικρού μεγέθους και με τη βοήθεια των όμοιων τριγώνων να βρεθούν οριζόντιες αποστάσεις μεγάλου μήκους. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα είναι ζητούμενο ο υπολογισμός της οριζόντιας απόστασης ΒΠ. Με την διόπτρα που τοποθετείται στο σημείο Β σκοπεύουμε το απρόσιτο σημείο Α και ορίζουμε την ευθεία Π-Β-Γ. Οπότε η απόσταση ΒΓ μπορεί να μετρηθεί με την βοήθεια κανόνα διότι είναι μικρή. Κατόπιν πάλι με την διόπτρα στο Β ορίζουμε την διεύθυνση Β-Δ κάθετη στην Π-Β-Γ. Μετά μεταφέρουμε την διόπτρα στο σημείο Γ και με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε την διεύθυνση Γ-Ε κάθετη στην Π-Β-Γ. Αφού τις αποστάσεις ΒΔ και ΓΕ μπορούμε να τις μετρήσουμε, με την βοήθεια των όμοιων ορθογωνίων τριγώνων ΠΒΔ και ΠΓΕ μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΠΒ. Δηλαδή : $\frac{χ}{β} = \frac{χ+α}{γ}$ άρα χ=$\frac{αβ}{γ-β}$ (Fotiou, 2015).



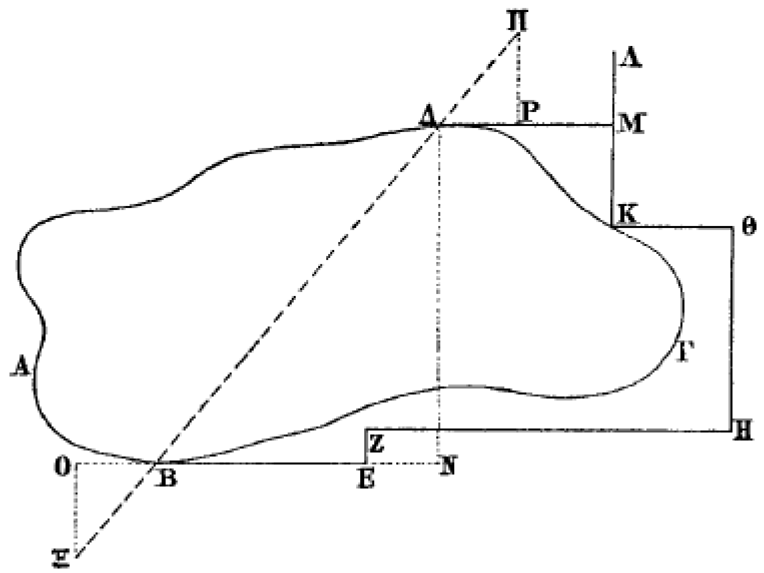
Εικ.12

Επίσης, κάτι ακόμα αξιοσημείωτο είναι ότι με ξύλινους κανόνες γίνονταν μετρήσεις κατακόρυφων αποστάσεων και σε συνδυασμό με τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονταν υπολόγιζαν μεγάλου μεγέθους υψομετρικές διαφορές (Fotiou, 2015). Μάλιστα την ίδια εποχή ο Ξεναγόρας κατάφερε να μετρήσει με μεγάλη ακρίβεια την υψομετρική διαφορά από τον ναό του Πυθίου Απόλλωνα προς την Κορυφή Φλάμπουρο του δυτικού Ολύμπου (Εικ.13). Εδώ αφού έχουν μετρηθεί με την βοήθεια της διόπτρας τα μήκη ΚΞ, ΞΗ, ΟΚ και ΚΝ από τα όμοια τρίγωνα ΑΟΞ και ΚΞΗ υπολογίζεται το ΑΟ ($\frac{AO}{OK} = \frac{\Xi K}{\Xi H} άρα\ AO = \frac{OK \cdot \Xi K}{\Xi H}$), και κατά συνέπεια η υψομετρική διαφορά ΑΠ.



Εικ.13

Μια ακόμη πολύ σημαντική κατασκευή στην οποία εφαρμόστηκαν οι ιδιότητες των όμοιων τριγώνων είναι αυτή του υδραγωγείου της Σάμου που πραγματοποιήθηκε από τον αρχιτέκτονα Ευπαλίνο μεταξύ 530 – 520 π. Χ. Η εκσκαφή της σήραγγας του υδραγωγείου έγινε συγχρόνως και από τις δύο μεριές του βουνού και η κλίση της έπρεπε να είναι σταθερή. Ο προσδιορισμός της διεύθυνσης της οριζόντιας σήραγγας έγινε με την χρήση μιας διόπτρας και η μέτρηση του μήκους της έγινε με την βοήθεια των όμοιων τριγώνων που σχηματίστηκαν (Τσιμπουράκης, 2002), (Εικ.14).

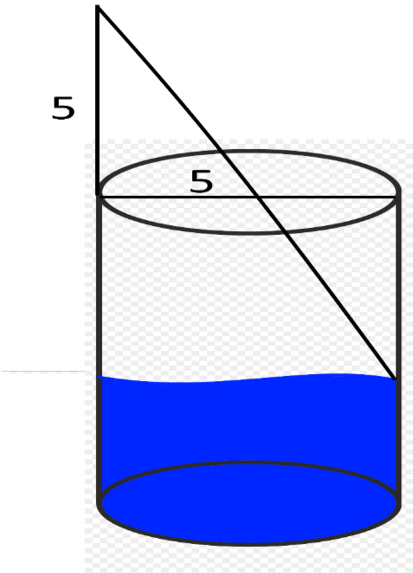


Εικ.14

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα μετρώντας τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΚ, ΘΗ και ΖΕ μπορούσαν να υπολογίσουν το μήκος της ΔΝ. Με τον ίδιο τρόπο, μετρώντας τα τμήματα ΒΕ και ΕΝ βρήκαν το μήκος της ΒΝ. Έτσι σχηματίστηκε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το ΔΝΒ στο οποίο γνώριζαν το μήκος των δύο κάθετων πλευρών. Κατόπιν, στην διεύθυνση του ΔΜ χάραξαν ένα τμήμα υποπολλαπλάσιο σε μήκος του ΒΝ το ΔΡ και μετά κάθετα σε αυτό ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα υποπολλαπλάσιο του ΔΝ (με τον ίδιο λόγο που χρησιμοποίησαν για το ΔΡ) το ΠΡ. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκε το τρίγωνο ΔΠΡ που ήταν όμοιο του ΔΝΒ. Ακριβώς έτσι δημιουργήθηκε και το τρίγωνο ΒΟΞ όμοιο και αυτό με το ΔΝΒ. Αφού μπορούσαν πλέον να μετρήσουν την απόσταση ΔΠ ή την ΞΒ, χρησιμοποιώντας την σταθερότητα του λόγου των πλευρών των όμοιων τριγώνων μπορούσαν να υπολογίσουν και το μήκος της σήραγγας ΒΔ. Επιπλέον για την ταυτόχρονη χάραξή της και από τις δύο πλευρές κινήθηκαν στις διευθύνσεις ΔΠ και ΒΞ.

Μετά από αρκετά χρόνια στην Κίνα γράφτηκε η πρώτη πραγματεία για τα μαθηματικά, για αστρονομικούς και ημερολογιακούς σκοπούς. Η πραγματεία αυτή ονομάστηκε ‘Mathematical Classic of the Zhou Gnomon’ (Zhoubisuanjiing) και γράφτηκε περίπου μεταξύ 100 π. Χ. και 100 μ. Χ. Το έργο αυτό περιέχει αποτελέσματα σχετικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά και μετρήσεις με διάφορα όργανα που χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αναλογιών των όμοιων τριγώνων προσδιορίζονται απρόσιτες αποστάσεις (Loder, 2010).

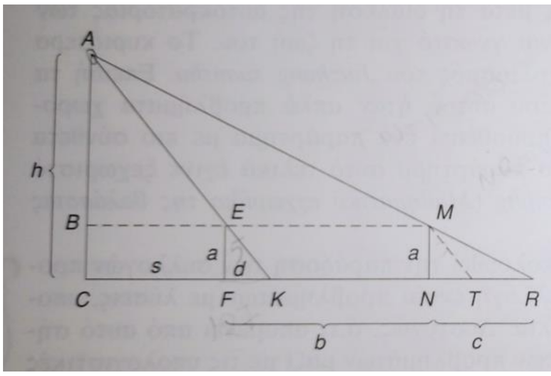
Ένα πρόβλημα που περιλαμβάνεται σε αυτό το βιβλίο είναι αυτό του υπολογισμού του βάθους ενός πηγαδιού (μετρώντας από την επιφάνεια του νερού) με γνωστή διάμετρο, και με την βοήθεια της ύψωσης μιας ράβδου στο χείλος του πηγαδιού (Εικ.15). Κι εδώ σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα και από την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών υπολογίζεται το βάθος του πηγαδιού (Katz, 2013).



Εικ.15

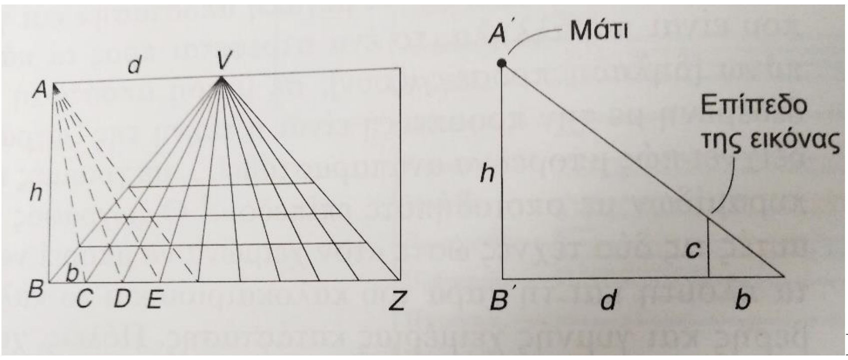
Ένα άλλο βιβλίο που ονομάστηκε ‘The Nine Chapters on the Mathematical Art’ περιλάμβανε 246 προβλήματα με κλάσματα, με το Πυθαγόρειο θεώρημα και απλά προβλήματα χωρομέτρησης. Τον 3ο αιώνα μ. Χ. ο Liu Hui πρόσθεσε ένα παράρτημα σε αυτό το βιβλίο με πιο σύνθετα προβλήματα, το οποίο τελικά έγινε ξεχωριστό μαθηματικό έργο με την ονομασία ‘ Μαθηματικό εγχειρίδιο της θάλασσας’ (Katz, 2013). Αποτελείται από εννιά προβλήματα σε ένα από τα οποία υπολογίζεται το ύψος και η απόσταση ενός νησιού, σε άλλο το ύψος ενός δέντρου και το πλάτος ενός ποταμού. Για την επίλυση των προβλημάτων χρησιμοποιούνται υπολογισμοί με βάση τα όμοια τρίγωνα.

Στο πρώτο από τα εννιά προβλήματα ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του ύψους αλλά και της απόστασης ενός νησιού. Όπως φαίνεται στην Εικ.16 για να γίνει η μέτρηση του ύψους πρέπει να τοποθετηθούν δύο στύλοι με ίδιο ύψος και γνωστή την μεταξύ τους απόσταση (MN = EF). Επίσης, θα πρέπει να γίνουν δύο σκοπεύσεις προς το A, μία από το K σημείο και μία από το σημείο R. Έτσι τα τρίγωνα AEM και MTr είναι όμοια, όπως και τα τρίγωνα ABM με το MNR. Οπότε: $\frac{ME}{TR} = \frac{AM}{MR} = \frac{AB}{MN}$ $.Επομένως, AB = \frac{ME \cdot MN}{TR} = \frac{FN \cdot EF}{TR}$ άρα h=$\frac{FN \cdot EF}{TR} + EF.$



Εικ.16

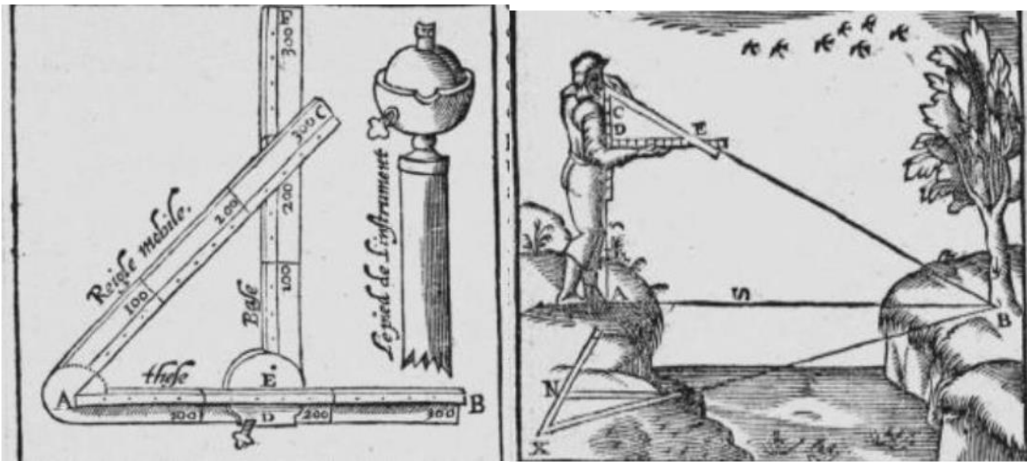
Ο επόμενος σταθμός στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας της ομοιότητας είναι η περίοδος της Αναγέννησης με την ανάπτυξη της προοπτικής. Αυτός που μελέτησε πρώτος, σε σοβαρή βάση, την γεωμετρία της προοπτικής ήταν ο Ιταλός καλλιτέχνης Filippo Brunelleschi (1377 – 1446). Το πρώτο κείμενο όμως σχετικά με αυτό το θέμα γράφτηκε από τον Leon Battista Alberti (1404 – 1472). Στο έργο του "Della Pittura" δείχνει πώς ένα σύνολο τετραγώνων στο έδαφος μπορεί να αναπαρασταθεί στον καμβά (Εικ.17). Για την κατασκευή αυτή ο Alberti δεν έχει κάνει κάποια απόδειξη αλλά για να αποδειχθεί είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας των όμοιων τριγώνων (Katz, 2013).



Εικ.17

Αυτός που επίσης ασχολήθηκε με την προοπτική ήταν ο Piero de la Francesca (1420 – 1492), ο οποίος στο έργο του "De prospective pingendi" περιγράφει τον σχεδιασμό δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων με εστιακή προοπτική. Ο Durer (1471 – 1528) ακόμα στο έργο του "Underweysung der Messung" δείχνει πώς οι γεωμετρικές αρχές εφαρμόζονται στην αναπαράσταση αντικειμένων στην ζωγραφική.

Ένας άλλος τομέας πέρα από την τέχνη όπου χρησιμοποιήθηκε η έννοια της ομοιότητας ήταν αυτός της κατασκευής οργάνων που χρησιμοποιούνταν για σκοπεύσεις ώστε να προσδιοριστούν απρόσιτες αποστάσεις. Ο Jean Errard de Bar – le – Duc (1554 – 1610) Γάλλος μηχανικός εξέδωσε το 1594 το έργο: «*La géométrie et pratique générale d'icelle*». Στο έργο περιγράφεται η κατασκευή ενός οργάνου για την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων καθώς και πώς γίνονται οι μετρήσεις σε μια επίπεδη επιφάνεια. Η μέτρηση των αποστάσεων με αυτό το όργανο γίνεται μέσω της ομοιότητας δύο ορθογώνιων τριγώνων (Εικ.18). Όπως φαίνεται από τις εικόνες καθώς πραγματοποιείται η σκόπευση σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα, ένα από το ίδιο το όργανο και ένα νοητό. Από την ισότητα των λόγων των πλευρών των όμοιων τριγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε την απρόσιτη απόσταση της εικόνας.



Εικ.18

Αργότερα, στις αρχές του 17ου αιώνα, δημοσιεύτηκαν δύο έργα που άνοιξαν τον δρόμο για μια προβολική θεώρηση που μελετήθηκε από τον Γάλλο αρχιτέκτονα Gerard Desargues (1591 – 1661). Το πρώτο το “Perspectivae Libri Sex”, του Guido Ubaldo del Monte ένα έργο καθαρά γεωμετρικό που στηρίζεται στην Ευκλείδεια παράδοση παρουσίασης και το δεύτερο το “Σκηνογραφία” του Stevin μια πραγματεία της οπτικής στην οποία ορίζεται η έννοια του σημείου φυγής. Το 1777 ο Euler είναι ο πρώτος που ορίζει το κέντρο ομοιότητας καθώς στα πλαίσια της προοπτικής γεωμετρίας η ομοιότητα εκφράζεται με την προβολή του ενός σχήματος στο άλλο. Η ομοιότητα πλέον εκφράζεται με έναν λειτουργικό τρόπο και παίρνει τον χαρακτήρα του μετασχηματισμού.

Στην περίοδο κατά τις αρχές του 19ου αιώνα αναπτύχθηκε η σφαιρική γεωμετρία στην οποία δεν έχει νόημα η έννοια των όμοιων τριγώνων, ενώ στην προσανατολισμένη γεωμετρία βρίσκουμε έναν ορισμό της ομοιοθεσίας (Λεμονίδης, 1990).

5. Μεθοδολογία της έρευνας.

5.1. Χρησιμότητα της έρευνας.

Στην συγκεκριμένη έρευνα η προσέγγιση της έννοιας της ομοιότητας των τριγώνων έγινε με την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία. Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να γνωρίσουν την εφαρμογή της σταθερότητας του λόγου των πλευρών των όμοιων τριγώνων, σε κάποιες πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας, και να πειστούν για την χρησιμότητα της γνώσης του. Στο σχολικό βιβλίο υπάρχει μόνο μια μικρή αναφορά στο τέλος της ενότητας στην μέτρηση του ύψους της πυραμίδας, παρόλο που στο αναλυτικό πρόγραμμα προτείνεται να παρουσιαστούν κάποια σημαντικά τεχνικά έργα ή μετρήσεις αποστάσεων στο διάστημα όπου χρησιμοποιήθηκε η ομοιότητα των τριγώνων (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ,2003, ΣΕΛ.303). Μάλιστα από την μελέτη της βιβλιογραφίας φαίνεται ότι δεν υπάρχουν εμπειρικές έρευνες που να προσεγγίζουν την έννοια της ομοιότητας με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών.

Κάτι ακόμα σημαντικό σε σχέση με την συγκεκριμένη έρευνα είναι ότι ανταποκρίνεται σε έναν από τους γενικούς σκοπούς του αναλυτικού προγράμματος για την διδασκαλία των μαθηματικών, δηλαδή στην ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και της πρακτικής χρήσης των μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας και της σημασίας τους ως απαραίτητου εργαλείου των ανθρώπινων δραστηριοτήτων (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΠΣ, 2003, σελ.275). Στην διδακτική παρέμβαση παρουσιάζονται ιστορικά προβλήματα από διάφορες χρονολογικές περιόδους κάτι που δείχνει την δυναμική διάσταση της μαθηματικής επιστήμης αλλά και την εξέλιξή της.

Εκτός όμως από τα παραπάνω ένα στοιχείο που συνηγορεί στην χρησιμότητα της παρούσας έρευνας είναι η προετοιμασία της παρέμβασης υπό το πρίσμα της θεωρίας του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$. Ο κατάλληλος χώρος εργασίας των μαθητών εμπλουτίστηκε με την χρήση εργαλείων (ψηφιακών ή χειραπτικών) αλλά και με την ενθάρρυνση για ανάπτυξη συλλογισμών με σκοπό να καλλιεργηθεί η μαθηματική γλώσσα στην περιγραφή διαφόρων καταστάσεων και να επιτευχθεί η δημιουργία μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά. Όπως διαπιστώθηκε από την βιβλιογραφία η θεωρία του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης σχετικά με την έννοια της ομοιότητας τριγώνων. Συνεπώς, η παρούσα έρευνα θα μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες για τα αποτελέσματα της εφαρμογής της θεωρίας του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ στην διδασκαλία της παραπάνω έννοιας.

5.2. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα.

Η συγκεκριμένη είναι μια έρευνα διδακτικού σχεδιασμού και τα αποτελέσματά της θα αναλυθούν ποιοτικά. Μας ενδιαφέρει να ερευνήσουμε με ποιον τρόπο απαντούν οι μαθητές και πώς σκέφτονται, περισσότερο από το πόσοι από αυτούς απαντούν σωστά. Σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει πώς η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία των όμοιων τριγώνων, στα πλαίσια του Μ.Χ.Ε. για τη γεωμετρία, επηρεάζει τον βαθμό κατανόησης της έννοιας από τους μαθητές.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν είναι τα ακόλουθα:

1. Με ποιον τρόπο η κατασκευή και χρήση από τους μαθητές ενός ιστορικού εργαλείου αλλά και η επίλυση ιστορικών προβλημάτων κατασκευών από διάφορες ιστορικές περιόδους, επιδρούν στον βαθμό κατανόησης της έννοιας των όμοιων τριγώνων αλλά και του κριτηρίου ομοιότητας.

2. Κατά πόσο οι μαθητές στον προσωπικό τους μαθηματικό χώρο εργασίας ανταποκρίνονται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών κατακόρυφων γενέσεων του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του σχολικού βιβλίου : « Δύο τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες». Επίσης,: «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια».

Για να καταφέρουν να φτάσουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας τριγώνων θα πρέπει αρχικά να γνωρίσουν γιατί η έννοια αυτή είναι σημαντική και ποια είναι η χρησιμότητά της στην καθημερινότητα. Παράλληλα, πρέπει να ξεκαθαρίσουν ότι στα όμοια τρίγωνα ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι σταθερός και οι αντίστοιχες γωνίες ίσες. Επίσης, να συνδυάσουν τη μεγέθυνση και σμίκρυνση με τον σταθερό λόγο και να μάθουν ότι ο λόγος των πλευρών παραμένει σταθερός ανεξάρτητα από τη θέση των τριγώνων στο επίπεδο ή στον χώρο. Ακόμα, πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν το κριτήριο ομοιότητας που αναφέρεται παραπάνω, ώστε να επιλύουν σχετικά προβλήματα. Είναι σημαντικό επίσης να μπορούν να χρησιμοποιούν την μαθηματική γλώσσα ώστε να αναπτύσσουν συλλογισμούς για την δικαιολόγηση της χρήσης της θεωρίας των όμοιων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος πρέπει να μπορούν να διαχωρίζουν την έννοια της ομοιότητας από την έννοια της ισότητας των τριγώνων.

Ο ΜΧΕ_{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ} είναι ένας χώρος εργασίας οργανωμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να δώσει την ευκαιρία στον μαθητή να επιλύσει γεωμετρικά προβλήματα. Αποτελείται από δύο οριζόντια επίπεδα, το επιστημολογικό και το γνωστικό, αλλά και από τρεις κατακόρυφες γενέσεις που τα συνδέουν, την εργαλειακή γένεση την σημειωτική και την συλλογιστική, και σχηματίζουν τα τρία κατακόρυφα επίπεδα. Οι δραστηριότητες που θα χρησιμοποιηθούν κατά την διάρκεια της παρέμβασης είναι σχεδιασμένες ώστε να επιτυγχάνεται μια περιφορά μεταξύ των τριών αυτών επιπέδων. Οι μαθητές, δηλαδή, θα πρέπει να περνούν από τη μία γένεση στην άλλη και αν χρειάζεται να επανέρχονται ανάλογα με την πορεία επίλυσης του προβλήματος.

5.3. *Δείγμα.*

Στην έρευνα συμμετείχαν 21 μαθητές της Γ’ Γυμνασίου ενός Γυμνασίου της Βέροιας. Από αυτούς οι έντεκα είναι κορίτσια και οι δέκα αγόρια. Το παραπάνω δείγμα είναι βολικό καθώς αποτελεί τμήμα στο οποίο διδάσκει η ερευνήτρια.

5.4. *Ερευνητικά εργαλεία.*

Η συλλογή των δεδομένων έγινε από τα επτά φύλλα εργασίας (Παράρτημα), από παρατηρήσεις κατά την διάρκεια της παρέμβασης και από ένα τελικό τεστ για τον έλεγχο της εμπέδωσης από τους μαθητές της νέας γνώσης. Τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν υπό το πρίσμα της θεωρίας του ΜΧΕ_{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ} ώστε να εμπλουτιστεί ο κατάλληλος χώρος εργασίας των μαθητών και να δοθεί η ευκαιρία για αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων επιπέδων. Επιπρόσθετα, σε όλα τα φύλλα εργασίας ενσωματώθηκαν προβλήματα από την ιστορία των μαθηματικών σχετικά με την ομοιότητα των τριγώνων ώστε να ερευνηθεί αν αυτό παίζει ρόλο στην κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές.

Το πρώτο φύλλο εργασίας αποτελείται από δύο δραστηριότητες. Η πρώτη ξεκινάει με την παρουσίαση ενός κειμένου σχετικά με το συμπέρασμα του Θαλή ότι πολλαπλάσιοι γνώμονες δημιουργούν ομοίως πολλαπλάσιες σκιές. Με αυτήν την δραστηριότητα αναφερόμαστε στην κατανόηση από τους μαθητές του ορισμού της ομοιότητας τριγώνων δηλαδή στην σταθερότητα του λόγου και την ισότητα των γωνιών. Η δραστηριότητα κινείται στο σημειωτικό - εργαλειακό επίπεδο με μια τάση προς την εργαλειακή γένεση.

Με την δεύτερη δραστηριότητα θα ερευνήσουμε αν οι μαθητές μπορούν να ξεχωρίσουν τα ίσα από τα όμοια τρίγωνα. Επίσης, οι μαθητές θα πρέπει να σχεδιάσουν ένα όμοιο και ένα ίσο τρίγωνο με δοσμένο ώστε να δούμε κατά πόσο μπορούν να συνδυάσουν την σμίκρυνση ή τη μεγέθυνση ενός τριγώνου με την σταθερότητα του λόγου. Εδώ κινούμαστε μεταξύ δύο επιπέδων, του λεκτικού – εργαλειακού και του εργαλειακού – σημειωτικού.

Το δεύτερο φύλλο εργασίας αποτελείται από δύο δραστηριότητες. Με την πρώτη δραστηριότητα καλούνται οι μαθητές να ξεκαθαρίσουν ότι ο λόγος ομοιότητας παραμένει σταθερός ανεξάρτητα από την θέση των σχημάτων στο επίπεδο ή τον χώρο. Η κίνηση εδώ είναι μεταξύ σημειωτικής και λεκτικής γένεσης.

Η δεύτερη δραστηριότητα αναφέρεται στο κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων και ξεκινάει και πάλι με το παραπάνω συμπέρασμα του Θαλή σχετικά με τους γνώμονες και τις σκιές τους. Εδώ οι μαθητές θα εργαστούν στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο και θα καταλήξουν στην λεκτική γένεση.

Στο τρίτο φύλλο εργασίας ζητείται από τους μαθητές να ασχοληθούν με το ιστορικό πρόβλημα μέτρησης του ύψους της πυραμίδας, ώστε να γνωρίσουν την χρησιμότητα των όμοιων τριγώνων στην μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων αλλά και να χρησιμοποιήσουν το κριτήριο ομοιότητας και τον σταθερό λόγο για να το υπολογίσουν. Θα εργαστούν στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο με μια προσφυγή στην εργαλειακή γένεση.

Με το τέταρτο φύλλο εργασίας οι μαθητές θα γνωρίσουν έναν άλλο τρόπο μέτρησης μιας απρόσιτης απόστασης, μεταγενέστερο από την μέτρηση του ύψους της πυραμίδα, μέσα από μια αυθεντική ιστορική πηγή. Έτσι θα διαπιστώσουμε αν έχουν καταλάβει την εξέλιξη της έννοιας των όμοιων τριγώνων και την χρησιμότητά της στην καθημερινότητα. Η εργασία τους θα κινηθεί από την σημειωτική γένεση στην εργαλειακή και αντίστροφα.

Στο πέμπτο φύλλο εργασίας δίνονται οδηγίες στους μαθητές για να κατασκευάσουν το δικό τους εργαλείο μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων, σε συνέχεια του σχεδίου που έκαναν στο τέταρτο φύλλο εργασίας. Εδώ η εργασία θα κινηθεί και πάλι στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο.

Στο έκτο φύλλο εργασίας οι μαθητές θα ασχοληθούν με την μέτρηση μιας απρόσιτης απόστασης. Σκοπός εδώ είναι να ερευνήσουμε αν μπορούν οι μαθητές να μεταφέρουν μια πραγματική κατάσταση στο χαρτί και αν μπορούν χρησιμοποιώντας το κριτήριο ομοιότητας αλλά και την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των τριγώνων να υπολογίσουν τη ζητούμενη απόσταση. Στην περίπτωση αυτή αρχικά υπάρχει μια κίνηση από το εργαλειακό στο σημειωτικό επίπεδο και αμέσως μετά από το σημειωτικό στο λεκτικό με μια ροπή προς την εργαλειακή γένεση.

Το έβδομο φύλλο εργασίας περιέχει τρία ιστορικά προβλήματα. Το πρώτο αναφέρεται στην μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι από τον Θαλή. Με αυτό το πρόβλημα θα ερευνηθεί αν οι μαθητές έχουν αφομοιώσει την σταθερότητα του λόγου των πλευρών των όμοιων τριγώνων και μπορούν να την χρησιμοποιήσουν για να βρουν τη ζητούμενη απόσταση.

Με το δεύτερο πρόβλημα, δηλαδή τη μέτρηση του βάθους ενός πηγαδιού, θα ερευνήσουμε αν οι μαθητές γνωρίζουν το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων αλλά και την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών..

Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται στην κατασκευή της σήραγγας του Ευπαλίνου όπου θα δούμε αν οι μαθητές καταλαβαίνουν την χρησιμότητα της θεωρίας των όμοιων τριγώνων και αν μπορούν χρησιμοποιώντας την να βρούνε το ζητούμενο μήκος.

Και στα τρία προηγούμενα προβλήματα η κίνηση είναι από την σημειωτική στη λεκτική γένεση με μια τάση προς την εργαλειακή.

Με το τέλος της διδακτικής παρέμβασης θα δοθεί στους μαθητές ένα τεστ με τέσσερα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα σκοπός είναι να ερευνήσουμε κατά πόσο είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν σωστά το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων αλλά και την ισότητα των λόγων που προκύπτει. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα γίνεται μια κίνηση από τη σημειωτική γένεση προς τη λεκτική με μια προσφυγή στην εργαλειακή γένεση.

Στο δεύτερο πρόβλημα του τεστ στόχος είναι να ερευνήσουμε αφενός αν οι μαθητές έχουν καταλάβει με ποιον τρόπο χρησιμοποιείται η ομοιότητα τριγώνων στη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων και αφετέρου αν μπορούν να εφαρμόσουν την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των τριγώνων ώστε να υπολογίσουν την απόσταση. Εδώ η κίνηση είναι στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο με βαρύτητα στην συλλογιστική διάσταση. Παράλληλα έχουμε μια τάση προς την εργαλειακή γένεση.

Με το τρίτο πρόβλημα θα ερευνηθεί αν οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν έναν άλλο τρόπο μέτρησης μιας απρόσιτης απόστασης και αν μπορούν να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας και την ισότητα των λόγων ώστε να υπολογίσουν το άγνωστο μήκος. Κι εδώ θα πρέπει να κινηθούν στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο με μια προσφυγή στην εργαλειακή γένεση.

Με το τελευταίο πρόβλημα θα ερευνηθεί αν μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίσουν ένα ζεύγος όμοιων τριγώνων στο επίπεδο και αν μπορούν να χρησιμοποιήσουν το κριτήριο ομοιότητας στην δικαιολόγησή τους και την σταθερότητα του λόγου των ομόλογων πλευρών για των υπολογισμό των άγνωστων μηκών. Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να κινηθούν μεταξύ των τριών γενέσεων ξεκινώντας από την σημειωτική, πηγαίνοντας στην λεκτική και τέλος στην εργαλειακή.

5.4 Αξιοπιστία και εγκυρότητα της έρευνας.

Στην παρούσα έρευνα η συλλογή των δεδομένων έγινε με τρεις διαφορετικούς τρόπους δηλαδή με την χρήση επτά φύλλων εργασίας, ενός τεστ αλλά και καταγραφής παρατηρήσεων που αφορούν την πορεία της παρέμβασης από την ερευνήτρια στο τέλος κάθε διδακτικής ώρας. Όλα τα φύλλα εργασίας συμπληρώθηκαν από τους μαθητές παρουσία της ερευνήτριας.

Επίσης στα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, υπάρχει άμεση σύνδεση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην έρευνα.

Ακόμα, τα επτά φύλλα εργασίας και το τεστ σχεδιάστηκαν με βάση τη θεωρία του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας, ένα θεωρητικό και μεθοδολογικό μοντέλο που απασχόλησε πολλούς ερευνητές για περίπου μία δεκαετία (Kuzniak et al., 2016). Μέσα σε αυτά χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπες ιστορικές πηγές καθώς και ιστορικά προβλήματα καταγεγραμμένα στην βιβλιογραφία.

6. **Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης.**

6.1. Ο ΜΧΕ αναφοράς των μαθητών.

Ένας από τους τρεις τύπους του ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ είναι ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ αναφοράς των μαθητών. Ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ αναφοράς καθορίζεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών το οποίο δημιουργείται με μαθηματικά κριτήρια αλλά και πολλές φορές με οικονομικά ή πολιτικά (Kuzniak et al., 2016). Στο ελληνικό σχολείο ο ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ αναφοράς μπορεί να προσδιοριστεί από τις οδηγίες που δίνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αλλά και από την παρουσίαση της κάθε μαθηματικής έννοιας στο σχολικό εγχειρίδιο.

Όπως αναφέρεται στο τωρινό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών οι σκοποί που επιδιώκονται με την διδασκαλία των μαθηματικών στο γυμνάσιο είναι:

- Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
- Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.

- Η σταδιακή κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της δομής των Μαθηματικών. Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.
- Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες
- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
- Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.

Συγκεκριμένα για την έννοια της ομοιότητας τριγώνων οι στόχοι που αναφέρονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών είναι (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΠΣ, 2003,σελ.301):

- Να γνωρίζουν ότι δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν το ένα από αυτά είναι μεγέθυνση του άλλου.
- Να γνωρίζουν (χωρίς απόδειξη) ότι σε δυο όμοια ευθύγραμμα σχήματα οι ομόλογες γωνίες είναι ίσες και οι ομόλογες πλευρές είναι ανάλογες.
- Να αναγνωρίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά των όμοιων τριγώνων και να εντοπίζουν τις πιθανές διαφορές τους.
- Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δυο γωνίες ίσες.

Επιπροσθέτως, προτείνονται κάποιες διαθεματικές προσεγγίσεις της έννοιας της ομοιότητας σε σχέση με μετρήσεις αποστάσεων στο διάστημα ή αναφορά σε κάποια σημαντικά τεχνικά έργα όπως ο Λύδος ποταμός ή το Ευπαλίνειο όρυγμα, κάποιες διώρυγες κ.α. (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ,2003, ΣΕΛ.303).

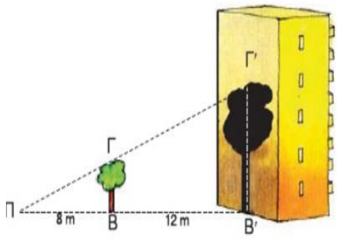
Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω στοχοθεσία οι δύο πρώτοι στόχοι αναφέρονται γενικά σε όμοια πολύγωνα. Αυτό γίνεται γιατί στο σχολικό βιβλίο η ενότητα της έννοιας της ομοιότητας ξεκινάει με τον ορισμό των όμοιων πολυγώνων και σε μια δεύτερη παράγραφο αναφέρει τον ορισμό των όμοιων τριγώνων ως απόρροια του πρώτου ορισμού. Στην αρχή της παραγράφου 1.5 στην σελίδα 215 του βιβλίου αναφέρει ότι :

«Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια». Ως επακόλουθο αυτού του ορισμού παρακάτω αναφέρει ότι: « *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες»*.

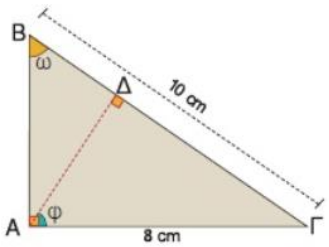
Αμέσως μετά αναφέρεται ως ιδιότητα το κριτήριο ομοιότητας δύο τριγώνων που έχει να κάνει με την ισότητα δύο γωνιών, δηλαδή: «*Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια»*.

Παρακάτω, υπάρχουν δύο λυμένες εφαρμογές (Εικ.19) στις οποίες ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το παραπάνω κριτήριο ομοιότητας σε ένα ζευγάρι ορθογωνίων τριγώνων και μετά να υπολογίσουν κάποια άγνωστη πλευρά χρησιμοποιώντας την ισότητα λόγων που προκύπτει. Σε αυτές τις εφαρμογές ουσιαστικά ο μαθητής καθοδηγείται να αιτιολογήσει την ομοιότητα δύο δεδομένων τριγώνων. Ειδικά στην δεύτερη εφαρμογή όπου υπάρχει ένα σχήμα που δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές στην εύρεση όμοιων τριγώνων, όπως αναφέρει ο Chazan (1988), από την εκφώνηση φαίνεται ήδη ποια τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους και απλώς ζητείται μια αιτιολόγηση. Στην πραγματικότητα δεν ενθαρρύνονται οι μαθητές να αναρωτηθούν για ζευγάρια όμοιων τριγώνων ώστε να κάνουν μόνοι τις απαραίτητες νοητικές διεργασίες.

1 Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο ΒΓ. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.



2 Σ΄ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.



Εικ.19

Στις οχτώ προτεινόμενες ασκήσεις που ακολουθούν φαίνεται πως δίνεται και πάλι έμφαση στην εφαρμογή του κριτηρίου ομοιότητας και στον υπολογισμό μιας άγνωστης πλευράς ενός ζεύγους όμοιων τριγώνων. Στις δύο από αυτές ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το σχήμα ενώ στις υπόλοιπες το σχήμα είναι έτοιμο. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι στις περισσότερες ασκήσεις υπάρχει μια βαρύτητα στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο και μάλιστα στις περισσότερες χρησιμοποιούνται μόνο θεωρητικά εργαλεία. Παραγκωνίζεται επομένως η συλλογιστική διάσταση στην κατανόηση της ομοιότητας.

Στις πέντε ερωτήσεις κατανόησης της παραγράφου ζητείται να δικαιολογήσουν οι μαθητές την ομοιότητα δύο τριγώνων αλλά και να γράψουν τους ίσους λόγους.

Γενικά, παρατηρούμε ότι με τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου δεν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να περιγράψουν καταστάσεις και να εξοικειωθούν με την παραγωγή συλλογισμών. Οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου δεν εστιάζουν στην κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας, όπως περιεγράφηκε παραπάνω, αλλά επικεντρώνονται στην χρήση του κριτηρίου ομοιότητας για την εύρεση κάποιου άγνωστου μήκους. Επίσης, δεν δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να γνωρίσουν την εφαρμοσιμότητα και την πρακτική χρήση της ομοιότητας των τριγώνων, παρόλο που αυτό αποτελεί ένα από τους γενικούς σκοπούς της διδασκαλίας στο γυμνάσιο (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΠΣ, 2003,σελ.275).

Η μοναδική ευκαιρία που έχουν οι μαθητές για την ανάπτυξη αναλογικής σκέψης και επιχειρηματολογίας είναι στο τέλος της παραγράφου όπου παρουσιάζεται το πρόβλημα της μέτρησης του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή και ζητείται από αυτούς να περιγράψουν την διαδικασία που θεωρούν ότι ακολούθησε για τη μέτρηση.

6.2. Ο κατάλληλος ΜΧΕ- Διδακτική παρέμβαση

Ο κατάλληλος ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ θα σχεδιαστεί από την διδάσκουσα με βάση τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος που παρουσιάστηκαν παραπάνω και τις δυνατότητες των μαθητών, ώστε να τους δοθεί η ευκαιρία να εργαστούν σε συγκεκριμένες δραστηριότητες και έτσι να επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί. Βέβαια ο κατάλληλος ΜΧΕ$_{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}}$ δεν είναι σταθερός αλλά μπορεί να αλλάζει σταδιακά καθώς οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις δραστηριότητες και τα προβλήματα (Kuzniak et al., 2016).

Βασικός σκοπός της διδακτικής παρέμβασης είναι να ερευνηθεί πώς επηρεάζει την προσπάθεια κατανόησης από τους μαθητές της ομοιότητας των τριγώνων. Έχει σχεδιαστεί ώστε να διαρκέσει οχτώ διδακτικές ώρες και για τον σκοπό αυτό θα δοθούν στους μαθητές 7 φύλλα εργασίας με τα οποία θα ασχοληθούν μέσα στην τάξη και ένα τελικό τεστ.

Σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης παίζει η ενσωμάτωση σε αυτή ιστορικών πηγών. Άλλωστε στο αναλυτικό πρόγραμμα προτείνεται η αναφορά στην ιστορία των μαθηματικών για την διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας (ΔΕΠΠΣ- ΑΠΣ, 2003,σελ.304)

Συγκεκριμένα, για την εισαγωγή του ορισμού της ομοιότητας αλλά και του κριτηρίου ομοιότητας θα γίνει αναφορά στο συμπέρασμα του Θαλή σχετικά με τους γνώμονες και τις σκιές τους: *'Πολλαπλάσιοι γνώμονες την ίδια στιγμή της μέρας ρίχνουν ισάκις πολλαπλάσιες σκιές'*. Κατόπιν, για την ανάδειξη της πρακτικής χρήσης των μαθηματικών θα γίνει αναφορά στο έργο «*La géométrie et pratique générale d'icelle*» του Γάλλου μηχανικού του 16ου αιώνα Jean Errard. Εδώ οι μαθητές θα κληθούν να κατασκευάσουν ένα όργανο μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων κάτι που αναμένεται να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον όλων. Τέλος, οι μαθητές θα ασχοληθούν με την επίλυση τριών ιστορικών προβλημάτων που δείχνουν την δυναμική διάσταση των μαθηματικών αφού αναφέρονται σε διαφορετικές εποχές και διαφορετικές ανθρώπινες ανάγκες.

Η διδακτική παρέμβαση θα γίνει πριν οι μαθητές διδαχθούν την ομοιότητα πολυγώνων, ώστε να μην επηρεαστεί η σκέψη τους από τον τρόπο εργασίας στα όμοια πολύγωνα. Η εισαγωγή της έννοιας της ομοιότητας τριγώνων θα γίνει με την οπτική του ΜΧΕ$_{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ}$ με σκοπό ο κατάλληλος ΜΧΕ να εμπλουτίσει τον προσωπικό ΜΧΕ των μαθητών και να τους βοηθήσει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Οι δραστηριότητες θα σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται σε κάθε φύλλο εργασίας μια περιφορά από τα τρία κατακόρυφα και τα δύο οριζόντια επίπεδα.

Ο ρόλος της διδάσκουσας σε όλη την διάρκεια της παρέμβασης θα είναι καθοδηγητικός - υποστηρικτικός και θα ενθαρρύνει τους μαθητές όπου συναντούν δυσκολίες.

1ο μάθημα-1ο φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Στο πρώτο φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.81) θα δοθούν στους μαθητές δύο δραστηριότητες.

1η δραστηριότητα:

Στο αρχείο Ηλιος1.ggb μπορούμε να παρατηρήσουμε το παραπάνω συμπέρασμα του Θαλή.

Στο σχήμα που βλέπετε υπάρχουν δύο γνώμονες, ο ΞΛ και ο ΟΜ καθώς και οι σκιές τους ΛΔ και ΜΔ αντίστοιχα. Τι πρέπει να υπολογίσουμε ώστε να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό του Θαλή;

Στα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΔΛΞ και ΔΜΟ που σχηματίζονται να υπολογίσετε τους λόγους : $\frac{ΟΜ}{ΞΛ} =$ $\quad$, $\frac{ΜΔ}{ΛΔ} =$ $\quad$, $\frac{ΟΔ}{ΞΔ} =$

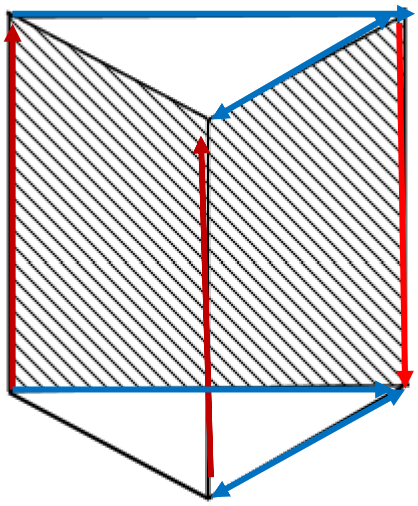
Τι παρατηρείτε;

Αν μετακινήσετε το ΞΛ σε μια τυχαία θέση και υπολογίσετε ξανά τους παραπάνω λόγους τότε τι παρατηρείτε;

Τι σχέση έχουν οι γωνίες των δύο τριγώνων μεταξύ τους;

Η πρώτη δραστηριότητα είναι εισαγωγική και στόχο έχει την ενεργοποίηση των μαθητών και την επισημοποίηση της νέας έννοιας. Γι’ αυτό το λόγο θα χρησιμοποιηθεί ένα παράδειγμα από την ιστορία των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα ασχοληθούν με το συμπέρασμα του Θαλή σχετικά με τους γνώμονες και τις σκιές τους, με σκοπό να επιχειρηθεί μια πρώτη επαφή τους με τον σταθερό λόγο. Σκοπός είναι να κατανοήσουν τι σημαίνει σταθερότητα του λόγου των ομόλογων πλευρών και ισότητα των αντίστοιχων γωνιών. Αφού διαβάσουν οι μαθητές λίγα λόγια σχετικά με το συμπέρασμα του Θαλή θα εργαστούν σε ζευγάρια, σε ένα αρχείο GeoGebra. Επειδή δεν υπάρχει η δυνατότητα να έχει κάθε μαθητής τον δικό του υπολογιστή το αρχείο θα προβληθεί μέσω βιντεοπροβολέα στον πίνακα από την διδάσκουσα. Εκμεταλλευόμενοι τον δυναμικό χαρακτήρα του αρχείου οι μαθητές θα υπολογίσουν τους λόγους του γνώμονα προς την σκιά του σε δύο διαφορετικές θέσεις ώστε να καταλήξουν στην ισότητά τους. Επίσης, στα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται σε κάθε περίπτωση θα τους ζητηθεί να συγκρίνουν τις γωνίες τους. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα από τα δύο παραπάνω ερωτήματα θα γίνει η επισημοποίηση του ορισμού της ομοιότητας των τριγώνων.

Στην παραπάνω δραστηριότητα το αρχείο GeoGebra θα γίνει το εργαλείο ώστε να αναδυθεί ο ορισμός των όμοιων τριγώνων. Η εισαγωγή της δραστηριότητας κινείται στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο. Οι μαθητές θα αναπτύξουν το συλλογισμό τους βασιζόμενοι στο σχήμα που βλέπουν. Αμέσως μετά, κατά την διάρκεια του πειραματισμού, μετακινούμαστε στην εργαλειακή διάσταση, και τέλος στη λεκτική διάσταση με την διατύπωση του ορισμού. Εδώ οι μαθητές θα δουλέψουν στο παράδειγμα GII.

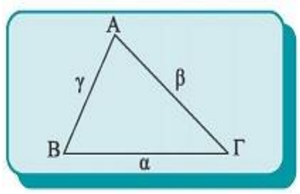


2η δραστηριότητα

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ δύο όμοιων και δύο ίσων τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους;

Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ίσο και ένα όμοιο τρίγωνο με το παρακάτω;

Πρώτα περιγράψτε πώς θα κάνετε την κατασκευή με λόγια.

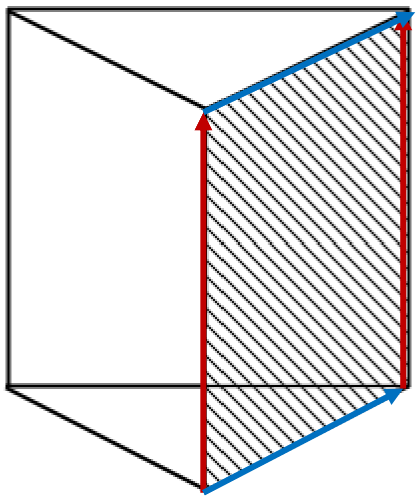


Εικ.20

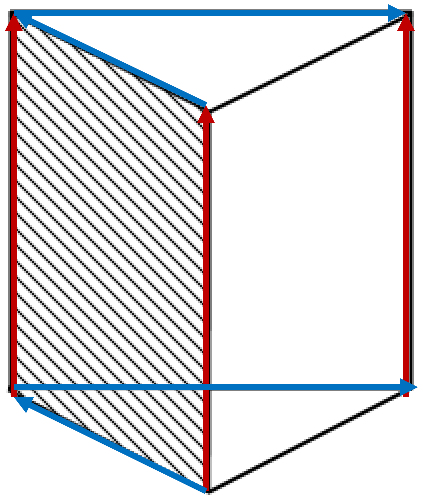
Στόχος της δεύτερης δραστηριότητας είναι να ξεκαθαρίσουν οι μαθητές τις διαφορές ίσων και όμοιων τριγώνων, καθώς πολλές φορές διακρίνουν πιο εύκολα την ισότητα από την ομοιότητα των τριγώνων (Parastuti et al., 2018, Τσιανάκα, 2017). Για το σκοπό αυτό θα τους ζητηθεί να ενεργοποιήσουν την κριτική τους σκέψη και να γράψουν αυτές τις διαφορές. Αναμένεται να θυμούνται τον ορισμό των ίσων τριγώνων καθώς με αυτό ασχολήθηκαν στα προηγούμενα μαθήματα .

Επίσης θα πρέπει να κατασκευάσουν, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα, ένα όμοιο και ένα ίσο με ένα σκαληνό τρίγωνο που τους δίνεται. Το δοσμένο τρίγωνο είναι σκαληνό γιατί είναι σημαντικό να μην συνδέσουν οι μαθητές την έννοια της ομοιότητας μόνο με ορθογώνια τρίγωνα. Με αυτή την δραστηριότητα θα γίνει μια πρώτη προσέγγιση της ομοιότητας ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση, ώστε να μπορέσουν να συνδέσουν οι μαθητές τις παραπάνω έννοιες με την σταθερότητα του λόγου των πλευρών.

Το πρώτο μέρος της δραστηριότητας ανήκει στο λεκτικό - εργαλειακό επίπεδο καθώς οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς των όμοιων και ίσων τριγώνων ως εργαλείο για να απαντήσουν. Η βαρύτητα εδώ δίνεται στην συλλογιστική διάσταση.



Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας οι μαθητές θα κινηθούν στο εργαλειακό - σημειωτικό επίπεδο. Γεωμετρικά όργανα της επιλογής τους θα χρησιμοποιηθούν ως τεχνουργήματα και θα τους βοηθήσουν στην κατασκευή των δύο σχημάτων. Επίσης, θα έχουμε μια προσφυγή στην συλλογιστική διάσταση καθώς θα χρειαστεί να περιγράψουν την διαδικασία κατασκευής των σχημάτων. Εδώ είμαστε στο παράδειγμα GI.



2ο μάθημα- 2ο φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.83) οι μαθητές συνεχίζουν να δουλεύουν σε ζευγάρια. Αποτελείται από δύο δραστηριότητες και αναμένεται να ολοκληρωθεί σε μία διδακτική ώρα.

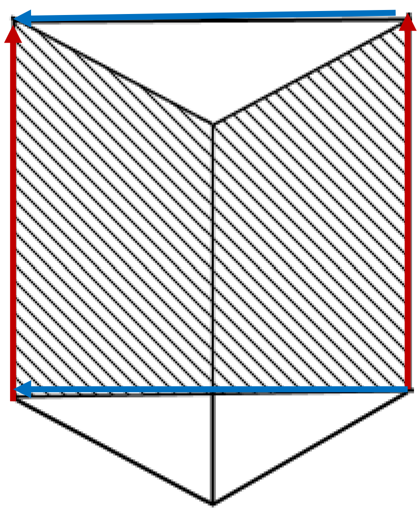
1η δραστηριότητα

Νομίζετε ότι είναι απαραίτητο όταν έχουμε δύο όμοια τρίγωνα να περιέχεται το ένα στο άλλο; Πώς μπορεί να είναι η θέση τους στο επίπεδο ή στον χώρο; Μπορείτε να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα;

Στόχος της πρώτης δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές καλύτερα τον ορισμό της ομοιότητας των τριγώνων. Να καταλάβουν δηλαδή ότι στην ομοιότητα δεν παίζει ρόλο η τοποθέτηση των τριγώνων στο επίπεδο ή στο χώρο αλλά η αναλογία των πλευρών τους και η ισότητα των γωνιών τους.

Στο δεύτερο ερώτημα της ίδιας δραστηριότητας ζητείται από τους μαθητές να προβληματιστούν σχετικά με την θέση που θα μπορούσαν να έχουν δύο όμοια τρίγωνα στο επίπεδο ή στον χώρο και να κάνουν ένα πρόχειρο σχήμα.

Σε αυτήν την δραστηριότητα η κίνηση είναι στο λεκτικό - σημειωτικό επίπεδο. Το κέντρο βάρους είναι στην σημειωτική διάσταση καθώς οι μαθητές χωρίς χρήση γεωμετρικών οργάνων αλλά χρησιμοποιώντας την διαίσθησή τους αλλά και την γνώση του ορισμού θα σχεδιάσουν τα σχήματα στο χαρτί.



2η δραστηριότητα

Στο αρχείο [ΗλιοςΙΙ.ggb] μπορείτε να βρείτε τους λόγους των πλευρών $\frac{OM}{\Pi N} =$ $,\frac{MK}{NI} =$ $\frac{OK}{\Pi I} =$ *των τριγώνων ΠΝΙ και ΜΚΟ; Τι ισχύει για τις γωνίες τους; (Ο Θαλής ήδη γνώριζε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με το έδαφος είναι η ίδια σε όλους τους γνώμονες).*

Επομένως τι τρίγωνα είναι τα παραπάνω;

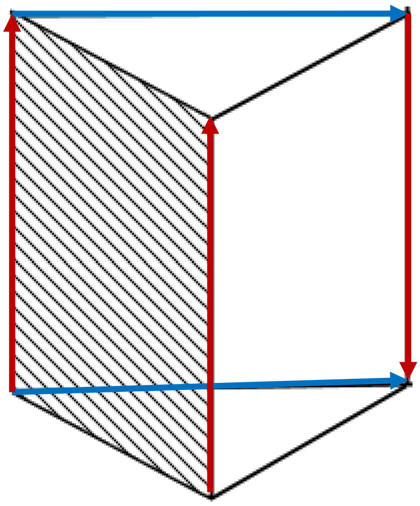
Αν μετακινήσετε το σημείο Κ ή το Π θα συνεχίσουν τα τρίγωνα να είναι όμοια; Γιατί;

Ποια στοιχεία των δύο τριγώνων δεν θα μεταβληθούν ακόμα και αν μετακινήσουμε το Κ ή το Π;

Άρα, μπορούμε να πούμε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους …………… μία προς μία τότε είναι όμοια.

Με την δεύτερη δραστηριότητα στόχος είναι να γνωρίσουν οι μαθητές το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων που περιέχεται στο σχολικό βιβλίο: «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια», ώστε να μπορούν να ελέγχουν αν δύο τρίγωνα είναι όμοια. Για την επίτευξη αυτού του στόχου θα χρησιμοποιηθεί ένα αρχείο GeoGebra που θα προβάλλεται από τον βιντεοπροβολέα στον πίνακα. Στο αρχείο αυτό θα γίνει πάλι ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία με την αναφορά στους γνώμονες και τις σκιές τους, αυτή την φορά τοποθετημένες στο χώρο με μια προοπτική διάσταση. Χρησιμοποιώντας την δυναμικότητα του εργαλείου και το πλεονέκτημα της επανάληψης κάποιων περιπτώσεων οι μαθητές θα είναι σε θέση να εξαγάγουν το συμπέρασμα του κριτηρίου ομοιότητας του σχολικού βιβλίου. Αφού διαπιστώσουν ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους, καθώς έχουν πλευρές ανάλογες και γωνίες ίσες, θα παρατηρήσουν ότι οι γωνίες των δύο τριγώνων παραμένουν ίσες κάτι που θα τους οδηγήσει στο ζητούμενο κριτήριο.

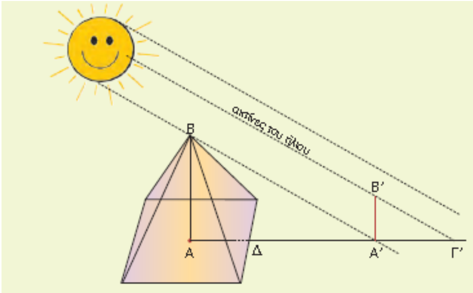
Οι μαθητές θα πειραματιστούν ξανά σε ένα αρχείο GeoGebra και θα το χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο για να διατυπώσουν το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων. Θα κινηθούν αρχικά στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο και θα καταλήξουν στην λεκτική γένεση με την διατύπωση του κριτηρίου. Εδώ ξεκινάμε από το GI και με την ανάδυση του κριτηρίου μεταφερόμαστε στο GII.



3ο μάθημα- 3ο φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Στο τρίτο φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.84) θα γίνει ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία επιλέγοντας ένα απόσπασμα από το έργο του Πλούταρχου «Τῶν ἑπτὰ σοφῶν συμπόσιον» σχετικά με την μέτρηση από τον Θαλή του ύψους της πυραμίδας. Οι μαθητές θα διαβάσουν το κείμενο και μετά θα κληθούν να απαντήσουν στις ερωτήσεις της δραστηριότητας ατομικά. Αρχικά χρειάζεται να θυμηθούν το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων για να δικαιολογήσουν ότι τα τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ και ΑΑ΄Β είναι όμοια και μετά να χρησιμοποιήσουν την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων, δηλαδή την $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AA'}{A'\Gamma'}$, για να υπολογίσουν το άγνωστο ύψος. Η εκπαιδευτικός εδώ θα δώσει, αν χρειαστεί, διευκρινήσεις σχετικά με το κείμενο μόνο. Η δραστηριότητα αυτή αναμένεται να διαρκέσει μία ώρα.

Δραστηριότητα

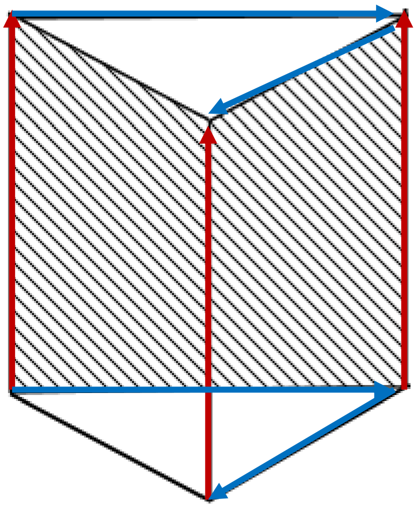


Εικ.21

Εξηγήστε στο παραπάνω σχήμα πώς ο Θαλής κατάφερε να μετρήσει το ύψος ΒΑ της πυραμίδας. Ποια τρίγωνα χρησιμοποίησε και τι σχέση έχουν αυτά μεταξύ τους; Αν η ράβδος είναι 3,5m, ΑΑ΄=320m και Α΄Γ΄=7,5m να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας ΒΑ.

Στόχοι της δραστηριότητας αυτής είναι, αφενός να γνωρίσουν οι μαθητές την χρησιμότητα της θεωρίας των όμοιων τριγώνων στην μέτρηση απρόσιτων υψών και αφετέρου, να μπορέσουν να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας που έμαθαν στο προηγούμενο μάθημα αλλά και την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των τριγώνων. Οι μαθητές θα εργαστούν ατομικά σε αυτήν την δραστηριότητα καθώς είναι σημαντικό να δούμε αν ο καθένας έχει αφομοιώσει το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων.

Στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν εργαζόμενοι στο σχήμα που έχουν μπροστά τους. Έτσι θα ξεκινήσουν από την σημειωτική γένεση και θα κινηθούν προς την λεκτική καθώς πρέπει να αιτιολογήσουν την ομοιότητα των τριγώνων. Θα κινηθούν επομένως στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο με το βάρος να μετατοπίζεται από την σημειωτική γένεση στην συλλογιστική αφού χρειάζεται να απαντήσουν με μια λεκτική απόδειξη που βασίζεται στο κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων. Φαίνεται, επίσης, πως υπάρχει μια τάση προς την εργαλειακή γένεση αφού οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων ως εργαλείο για να υπολογίσουν το άγνωστο ύψος. Εδώ οι μαθητές κινούνται στο παράδειγμα GII.



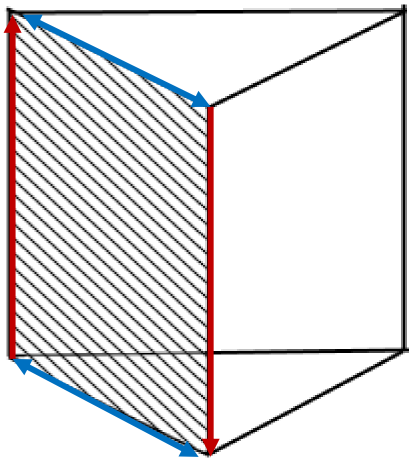
4ο μάθημα- 4ο φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Σε αυτό το φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.85) θα δοθεί στους μαθητές ένα απόσπασμα από το βιβλίο του Errard: «*La géométrie et pratique générale d'icelle*» και παράλληλα θα προβληθούν στον πίνακα εικόνες από το βιβλίο αλλά και το πρωτότυπο κείμενο. Επίσης θα προβληθούν κάποιες βιογραφικές πληροφορίες για τον Errard. Το απόσπασμα αναφέρεται σε μια περιγραφή του οργάνου του Errard για την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων αλλά και σε έναν προβληματισμό του συγγραφέα σχετικά με τις μετρήσεις αποστάσεων προσιτών ή απρόσιτων.

Το κείμενο θα διαβαστεί από κάποιον μαθητή δυνατά και αφού γίνει συζήτηση στην τάξη σχετικά με το παραπάνω απόσπασμα οι μαθητές θα απαντήσουν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας δουλεύοντας πάλι σε ζεύγη. Οι δύο ερωτήσεις έχουν να κάνουν με την ερμηνεία όσων θα διαβάσουν οι μαθητές στο πρωτότυπο κείμενο.

Η χρησιμοποίηση αυτού του ιστορικού κειμένου στην διδασκαλία έχει ως στόχο να γνωρίσουν έναν άλλο τρόπο μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων, μεταγενέστερο αυτού της μέτρησης του ύψους της πυραμίδας, και να αναρωτηθούν πώς χρησιμοποιείται η ομοιότητα τριγώνων για τον σκοπό αυτό. Να σκεφτούν πτυχές της καθημερινότητας, κυρίως μελετώντας τις φωτογραφίες του βιβλίου, στις οποίες θα μπορούσε αυτό να έχει εφαρμογή αλλά και να προβληματιστούν πάνω στην κατασκευή ενός οργάνου που να δίνει λύση σε αυτό το πρόβλημα.

Εδώ είμαστε στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο. Οι μαθητές διαβάζουν το κείμενο και με βάση αυτό απαντούν την πρώτη ερώτηση. Αμέσως μετά, από την σημειωτική γένεση περνάμε στη εργαλειακή αφού σχεδιάζουν ένα όργανο για την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων και επιστρέφουμε στην σημειωτική με την περιγραφή της λειτουργίας του οργάνου.



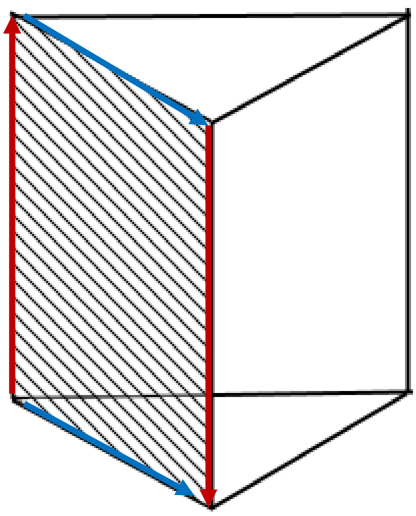
5ο μάθημα- 5ο φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Σε συνέχεια της προηγούμενης διδακτικής ώρας θα δοθεί στους μαθητές το πέμπτο φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.87) με οδηγίες για την κατασκευή του εργαλείου του Errard. Επίσης, η εκπαιδευτικός θα τους μοιράσει όλα τα απαραίτητα υλικά για την κατασκευή. Τα υλικά αυτά είναι: μακετόχαρτο κομμένο σε λωρίδες μήκους 30 cm η καθεμία, μία βίδα με παξιμάδι, ένας χάρακα, ένα πλαστικό σκόπευτρο και μία πινέζα.

Εδώ οι μαθητές θα εργαστούν ομαδικά. Θα χωριστούν σε τέσσερις ομάδες των τεσσάρων ατόμων και μία ομάδα των πέντε ατόμων. Η πρωτοβουλία για τον χωρισμό των ομάδων θα ανήκει στους ίδιους. Αφού κατασκευάσει η κάθε ομάδα το εργαλείο της θα προσπαθήσουν τα μέλη της να συζητήσουν μεταξύ τους για την λειτουργία του ώστε να είναι έτοιμοι για τις μετρήσεις που θα πραγματοποιήσουν την επόμενη διδακτική ώρα.

Στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να ακολουθήσουν σωστά τις οδηγίες και ενεργοποιώντας την δημιουργικότητά τους να κατασκευάσουν το εργαλείο του Errard.

Συνεχίζουμε στο ίδιο κάθετο επίπεδο με την δραστηριότητα της προηγούμενης ώρας. Οι μαθητές ακολουθούν τις οδηγίες και κατασκευάζουν το εργαλείο του Errard. Εδώ θα κινηθούν στο παράδειγμα GI.



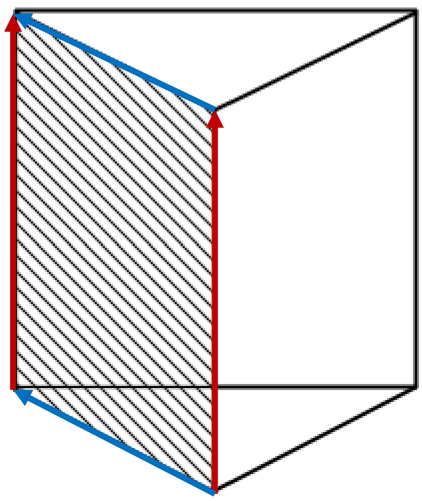
6^{ο} μάθημα- 6^{ο} φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Στόχος της δραστηριότητας σε αυτό το φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.89) είναι να κατανοήσουν οι μαθητές πώς γίνεται η μέτρηση μιας απρόσιτης απόστασης με τη βοήθεια του οργάνου που κατασκεύασαν την προηγούμενη διδακτική ώρα και να συνειδητοποιήσουν με ποιον τρόπο χρησιμοποιείται στην πράξη η ομοιότητα των τριγώνων.

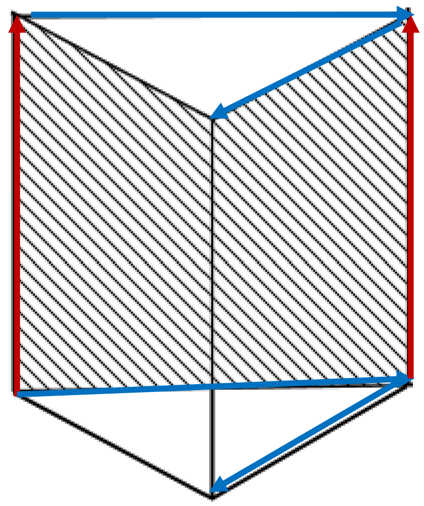
Αρχικά το κάθε μέλος της ομάδας θα πρέπει να αναλάβει έναν συγκεκριμένο ρόλο. Κάποιος θα κάνει την σκόπευση, κάποιος θα εξασφαλίζει την καθετότητα του εργαλείου, κάποιος θα κάνει τις μετρήσεις με μετροταινία καθώς και τις μετρήσεις στο ίδιο το όργανο και κάποιος θα σημειώνει τις μετρήσεις στο χαρτί, όπου θα έχει κατασκευάσει ένα πρόχειρο σχήμα.

Αφού οι ομάδες τελειώσουν με τις μετρήσεις και καταγράψουν τα δεδομένα θα τους ζητηθεί να σχεδιάσουν το σχήμα του προβλήματος στο χαρτί τους, και να υπολογίσουν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων το απρόσιτο ύψος που επέλεξαν.

Αρχικά βρισκόμαστε στο εργαλειακό - σημειωτικό επίπεδο. Οι μαθητές θα μετρήσουν με το εργαλείο απρόσιτες αποστάσεις και μετά θα μεταφέρουν μια πραγματική κατάσταση στο χαρτί κατασκευάζοντας το σχήμα που προσομοιώνει το πραγματικό πεδίο μέτρησης.



Αμέσως μετά θα περάσουμε στο σημειωτικό - λεκτικό επίπεδο καθώς οι μαθητές θα υπολογίσουν το ζητούμενο ύψος. Βέβαια θα χρησιμοποιήσουν ως θεωρητικό εργαλείο την ιδιότητα των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων οπότε φαίνεται μια ροπή προς τη εργαλειακή γένεση. Εδώ μεταφερόμαστε από το GI στο GII καθώς θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο ομοιότητας αλλά και η σχέση αναλογίας για να υπολογιστεί το ζητούμενο ύψος.



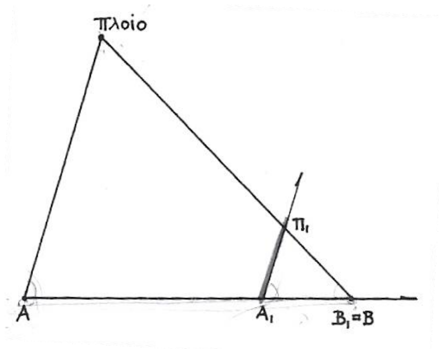
7^{ο} μάθημα- 7^{ο} φύλλο εργασίας (μία διδακτική ώρα)

Αφού οι μαθητές έχουν μετρήσει με το εργαλείο που κατασκεύασαν ένα απρόσιτο ύψος, θα τους δοθεί το έβδομο φύλλο εργασίας (Παράρτημα, σελ.90) με τρία ιστορικά προβλήματα μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων. Στόχος εδώ είναι να εξασκηθούν οι μαθητές στην εφαρμογή του κριτηρίου ομοιότητας αλλά και της σχέσης αναλογίας των πλευρών. Επιπρόσθετα θα μπορέσουν να κατανοήσουν τη σημασία της έννοιας των όμοιων τριγώνων στην καθημερινότητα των ανθρώπων διαφορετικών πολιτισμών και διαφορετικών χρονικών περιόδων.

Οι μαθητές θα δουλέψουν ατομικά και αναμένεται να επιλύσουν τα προβλήματα σε μία διδακτική ώρα. Σε όλα τα προβλήματα τα σχήματα θα είναι ήδη έτοιμα γιατί είναι δύσκολο να κατασκευαστούν από τους ίδιους.

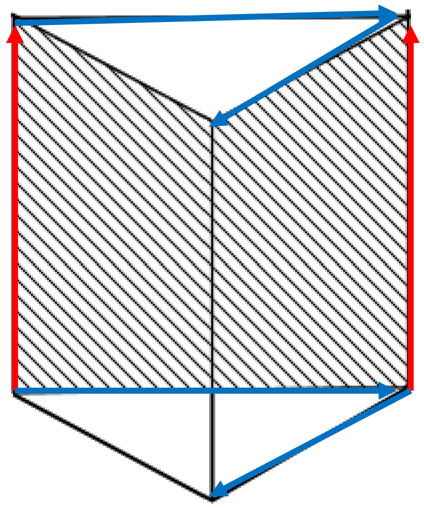
Το πρώτο αναφέρεται στη μέτρηση της απόστασης από τον Θαλή ενός πλοίου από το λιμάνι. Εδώ οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν το σχήμα που τους δίνεται και σε συνδυασμό με τα δεδομένα που δίνονται πιο πριν να καταλήξουν στην ομοιότητα των δύο τριγώνων. Αμέσως μετά χρειάζεται να μετρήσουν την απόσταση $Α_1Π_1$ στο δοσμένο σχήμα και με την ισότητα των λόγων που προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα να υπολογίσουν την ζητούμενη απόσταση.

Η επιλογή του συγκεκριμένου προβλήματος έχει ως στόχο να ξαναθυμηθούν οι μαθητές την σταθερότητα του λόγου των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων και να την χρησιμοποιήσουν για τον υπολογισμό της απόστασης.

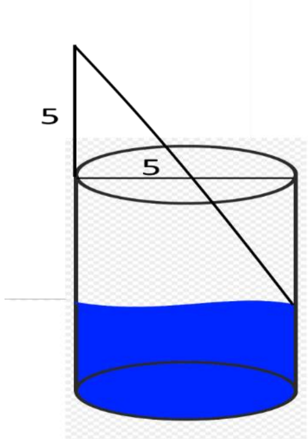


Εικ.22

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές θα εργαστούν στην σημειωτική διάσταση, ερμηνεύοντας το δοσμένο σχήμα αρχικά, και θα περάσουν στην συλλογιστική δικαιολογώντας το πώς έγινε ο υπολογισμός της απόστασης. Αμέσως μετά θα χρησιμοποιήσουν τον χάρακα αλλά και την ιδιότητα των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων ως εργαλεία για να υπολογίσουν την απόσταση. Έχουμε δηλαδή μια τάση προς την εργαλειακή γένεση.

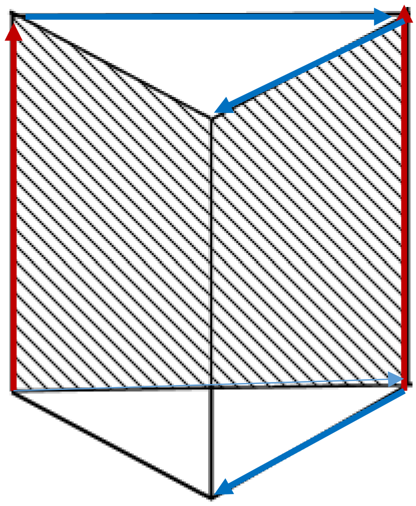


Το δεύτερο αναφέρεται στη μέτρηση του βάθους ενός πηγαδιού. Στόχος εδώ είναι να πετύχουν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών να υπολογίσουν τη ζητούμενη απόσταση.

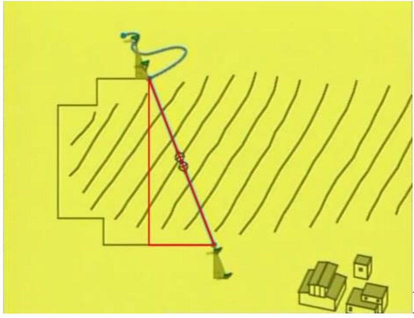


Εικ.23

Η κίνηση εδώ είναι στο σημειωτικό - λεκτικό επίπεδο με μια τάση προς την εργαλειακή γένεση. Θα χρησιμοποιήσουν το κριτήριο ομοιότητας αλλά και την ισότητα των λόγων ως εργαλεία για να επιλύσουν το πρόβλημα.

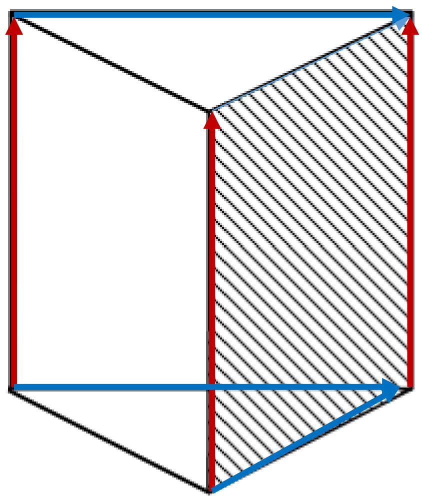


Το τελευταίο πρόβλημα αναφέρεται στο Ευπαλίνειο Όρυγμα και συγκεκριμένα στο σημείο όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες των όμοιων τριγώνων κατά την κατασκευή του. Το πρόβλημα αυτό θα το επιλύσουν οι μαθητές αφού παρακολουθήσουν ένα βίντεο. Επειδή το βίντεο δεν διαθέτει υπότιτλους θα γίνει παράλληλα η μετάφραση από την διδάσκουσα. Στο βίντεο φαίνεται ο λόγος που οδήγησε στην κατασκευή του τούνελ αλλά και πώς κατάφεραν να μετρήσουν το μήκος του. Στόχος εδώ είναι να γνωρίσουν οι μαθητές μία ακόμη περίπτωση χρησιμότητας της ομοιότητας των τριγώνων αλλά και να καταφέρουν να απαντήσουν χρησιμοποιώντας την γνώση του σταθερού λόγου των ομόλογων πλευρών των όμοιων τριγώνων.


Εικ.24

Εδώ συνεχίζουμε στο εργαλειακό - λεκτικό επίπεδο. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το βίντεο ως ψηφιακό εργαλείο για να απαντήσουν στην πρώτη ερώτηση, ενώ για την δεύτερη ερώτηση η απάντηση θα έρθει μέσα από την συλλογιστική διάσταση. Θα κινηθούν στο σημειωτικό - λεκτικό επίπεδο καθώς θα ερμηνεύσουν το σχήμα που τους δίνεται και θα χρησιμοποιήσουν το κριτήριο ομοιότητας και την αναλογία των πλευρών για δώσουν μια λεκτική απόδειξη στο δεύτερο ερώτημα.

Στα τρία προβλήματα κινούμαστε προς το παράδειγμα GII.



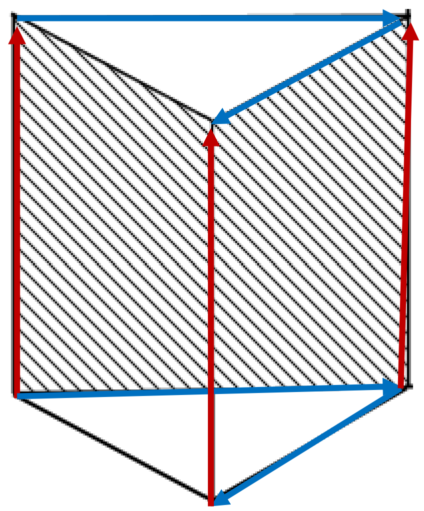
Τελικό τεστ

Το τεστ (Παράρτημα σελ.92) θα δοθεί στους μαθητές μετά το τέλος της παρέμβασης και θα ασχοληθεί με αυτό ο καθένας ατομικά. Εδώ η διδάσκουσα δεν θα επέμβει καθόλου αφού σκοπός του τεστ είναι να φανεί ο βαθμός αφομοίωσης από τους μαθητές της νέας γνώσης.

Αποτελείται από τέσσερις ασκήσεις. Στις δύο από αυτές (στις 1 και 4) οι μαθητές πρέπει να θυμηθούν το κριτήριο της ομοιότητας αλλά και τους ίσους λόγους μεταξύ των ομόλογων πλευρών. Στις άλλες δύο γίνεται μια προσομοίωση μέτρησης μιας απρόσιτης απόστασης. Οι μαθητές χρειάζεται να περιγράψουν την διαδικασία και μετά να υπολογίσουν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων την απόσταση αυτή.

Στο πρώτο πρόβλημα στόχος είναι να ερευνήσουμε αν με το πέρας της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές είναι σε θέση να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων αλλά και αν καταφέρουν να χρησιμοποιήσουν την ισότητα των λόγων για να υπολογίσουν το άγνωστο μήκος.

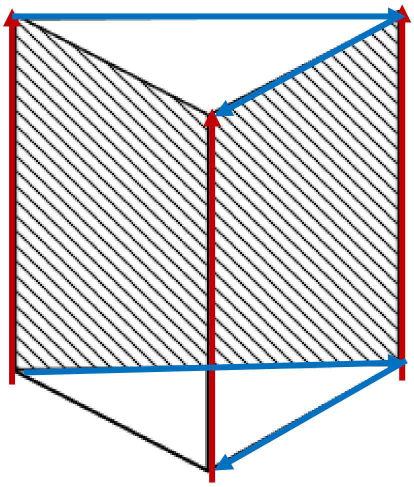
Η εργασία των μαθητών θα κινηθεί στο σημειωτικό - λεκτικό επίπεδο, με μια προσφυγή στην εργαλειακή γένεση καθώς θα χρησιμοποιήσουν την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών για να υπολογίσουν το ζητούμενο.



Στο δεύτερο πρόβλημα συνεχίζουμε στο ίδιο επίπεδο με μια βαρύτητα στην συλλογιστική διάσταση καθώς θα χρειαστεί να αιτιολογήσουν πώς έγινε η μέτρηση του απρόσιτου ύψους. Μετά έχουμε μια τάση προς την εργαλειακή γένεση αφού η σχέση αναλογίας των πλευρών χρησιμοποιείται ως εργαλείο για τον υπολογισμό του ύψους.

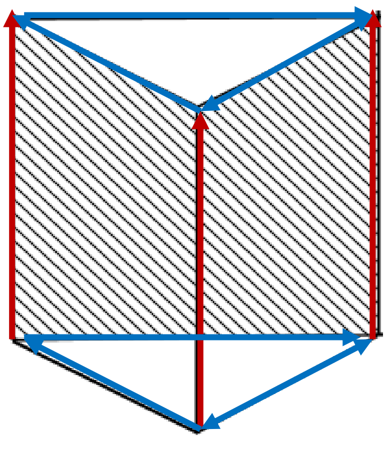
Με το συγκεκριμένο πρόβλημα στόχος είναι να ερευνήσουμε αν οι μαθητές έχουν καταλάβει με ποιο τρόπο γίνεται η μέτρηση μιας απρόσιτης απόστασης με την χρήση της ομοιότητας τριγώνων, αλλά και αν μπορούν να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας αλλά και την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών για να υπολογίσουν το ζητούμενο.

Ίδιος είναι ο στόχος και του τρίτου προβλήματος, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν έναν άλλον τρόπο μέτρησης μιας απρόσιτης απόστασης και μετά να την υπολογίσουν με την βοήθεια των όμοιων τριγώνων. Και πάλι εδώ η κίνηση είναι από την σημειωτική γένεση στην λεκτική με βαρύτητα στην συλλογιστική διάσταση. Επίσης, υπάρχει μια προσφυγή προς την εργαλειακή γένεση με την χρήση του κριτηρίου ομοιότητας και της του σταθερού λόγου ως θεωρητικών εργαλείων για τον υπολογισμό της απόστασης.



Στο τελευταίο πρόβλημα του τεστ στόχος είναι να ελέγξουμε αν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν ένα ζευγάρι όμοιων τριγώνων και να εφαρμόσουν το κριτήριο ομοιότητας στην δικαιολόγησή τους. Επίσης να δούμε αν μπορούν να γράψουν την σωστή ισότητα λόγων και να υπολογίσουν τα ζητούμενα μήκη.

Σε αυτήν την περίπτωση γίνεται μια περιφορά μεταξύ των τριών γενέσεων. Οι μαθητές ξεκινούν, με την «ανάγνωση» του σχήματος, από τη σημειωτική γένεση και κινούνται προς την λεκτική ώστε να δικαιολογήσουν την ομοιότητα των τριγώνων. Παράλληλα όμως προσφεύγουν προς την εργαλειακή γένεση καθώς χρησιμοποιούν το κριτήριο ομοιότητας ως θεωρητικό εργαλείο. Κατόπιν χρησιμοποιώντας την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών ως εργαλείο υπολογίζουν το ζητούμενο μήκος.



Στα τέσσερα προβλήματα του τεστ οι μαθητές θα κινηθούν στο παράδειγμα GII.

7. **Αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης.**

Μάθημα 1ο

Στους μαθητές δόθηκε από ένα φύλλο εργασίας το οποίο έπρεπε να το συμπληρώσουν δουλεύοντας σε ζευγάρια όπως είναι ήδη στα θρανία τους. Έγιναν εννιά ζευγάρια και μία τριάδα μαθητών.

Η διδάσκουσα ζήτησε από τους μαθητές να διαβάσουν τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας και να ξεκινήσουν να εργάζονται πάνω σε αυτές. Αρχικά υπήρξε μια αμηχανία από τους μαθητές για τον νέο τρόπο προσέγγισης μιας καινούριας έννοιας και έγιναν κάποιες ερωτήσεις προς την διδάσκουσα όπως: «αν θα τελειώσουν όλο το φύλλο εργασίας και μετά θα το απαντήσουν όλοι μαζί στην τάξη» ή «αν θα θεωρηθεί ως τεστ και αν θα μπορούν να κάνουν ερωτήσεις όσο το συμπληρώνουν». Αφού η διδάσκουσα απάντησε στις ανησυχίες των μαθητών και τους ξεκαθάρισε ότι δεν είναι κάτι που θα σχετίζεται με τον βαθμό τους, ξεκίνησε η συμπλήρωση του φύλλου εργασίας. Εδώ ο ρόλος της διδάσκουσας ήταν συμβουλευτικός και ενθαρρυντικός περισσότερο.

Πριν ξεκινήσουν την πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές διάβασαν το κείμενο σχετικά με τους γνώμονες και τις σκιές τους. Μόνο δύο θυμόντουσαν από πέρυσι τι είναι οι γνώμονες (είχε γίνει σχετική αναφορά κατά την διδασκαλία της τριγωνομετρίας της Β' Γυμνασίου), οπότε έγινε μια συζήτηση σχετικά με αυτό το θέμα ώστε να ξεκαθαρίσουν και οι υπόλοιποι την σημασία τους. Κάποιος μαθητής μάλιστα είπε: «θα είναι ωραία να κάνουμε κάποιο πείραμα με τις ράβδους όπως πέρυσι», και μια μαθήτρια ρώτησε αν θα κατασκευάσουν ράβδους οι ίδιοι για τις ανάγκες του μαθήματος. Επίσης, κάποιοι μαθητές αναρωτήθηκαν πώς ο Θαλής έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα και τι τον οδήγησε να ασχοληθεί με αυτό. Καθώς μιλούσαν μεταξύ τους έδωσαν διάφορες απαντήσεις όπως: «έκανε δοκιμές» ή «μα ήταν μαθηματικός, γι' αυτό ασχολήθηκε με αυτά», ή «έκανε πειράματα». Γενικά αυτή η συζήτηση κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών και ήταν έτοιμοι να ξεκινήσουν.

Για να μπορέσουν να συμπληρώσουν οι μαθητές τους ζητούμενους λόγους του φύλλου εργασίας έπρεπε να μελετήσουν τα δυναμικά δεδομένα ενός αρχείου GeoGebra. Καθώς δεν ήταν εφικτό το κάθε ζευγάρι να έχει τον δικό του υπολογιστή ο χειρισμός του αρχείου έγινε από την διδάσκουσα και προβαλλόταν στον πίνακα με βιντεοπροβολέα. Βέβαια, επειδή η κάθε ομάδα δεν συμπλήρωνε μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας χρειάστηκε πολλές φορές να αλλάξει το σχήμα στο αρχείο εργασίας με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί διδακτικός θόρυβος στην τάξη. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι μαθητές γνώριζαν την έννοια του λόγου καθώς διδάχθηκε σε προηγούμενο μάθημα.

Η διαδικασία αυτή όμως πυροδότησε συζητήσεις μεταξύ κάποιων μαθητών και σύγκριση αποτελεσμάτων. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος (αναφέρεται στην συμπλήρωση των λόγων αφού μετακινηθεί το ΞΛ):

Μηνάς: Πόσο βρήκατε εσείς;

Τατιάνα: 1,3 σε όλα.

Μηνάς: Εμείς 1,64. Ποιο είναι το σωστό κυρία;

Τατιάνα: Αφού είναι σε διαφορετική θέση το ΞΛ….λογικό να βρούμε άλλο.

Μηνάς : Ποιο είναι το σωστό κυρία;

Καθηγήτρια: Οι υπόλοιποι τι λέτε; (Μόνο δύο ομάδες είχαν προλάβει να φτάσουν σε αυτό το σημείο οπότε απάντησαν)

Ηρώ: Εμείς 1,68

Νίκος: Κι εμείς 1,99 και στους τρεις λόγους το ίδιο.

Μηνάς: Όλοι βρήκαμε διαφορετικά αλλά και οι τρεις λόγοι είναι ίσοι κάθε φορά.

Καθηγήτρια: Πολύ σωστά Μηνά…..αλλά ας περιμένουμε να τελειώσουν και οι άλλοι.

Αφού τελείωσαν και οι υπόλοιπες ομάδες ανακοίνωσαν και αυτές τα αποτελέσματά τους. Οι 7 στις 10 είχαν κάνει σωστά την διαδικασία, οι 2 βρήκαν ίσους λόγους στην πρώτη περίπτωση και διαφορετικούς στην δεύτερη και μία ομάδα δεν μπόρεσε να ξεκινήσει καθόλου. Όλες οι ομάδες εκτός από μία απάντησαν σωστά στην ερώτηση με τις γωνίες των τριγώνων.

Εδώ βλέπουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι οι ζητούμενοι λόγοι είναι σταθεροί και οι αντίστοιχες γωνίες ίσες οπότε έγινε ομαλά η μετάβαση στον ορισμό της ομοιότητας τριγώνων.

Σε αυτό το μέρος της δραστηριότητας τα περισσότερα ζευγάρια κατάφεραν να εργαστούν με επιτυχία στο εργαλειακό – λεκτικό επίπεδο. Πειραματίστηκαν, με την βοήθεια της διδάσκουσας, στο ψηφιακό εργαλείο δουλεύοντας έτσι στην εργαλειακή διάσταση. Κατόπιν συμπλήρωσαν τους λόγους των πλευρών με επιτυχία και έφτασαν στην διατύπωση του νέου ορισμού, δουλεύοντας στην λεκτική διάσταση. Στα δύο ζευγάρια που βρήκαν λάθος τους λόγους καθοριστικό ρόλο έπαιξε ότι δεν χειρίζονταν οι ίδιοι το αρχείο οπότε μπερδεύτηκαν στις πράξεις και δεν ολοκλήρωσαν με επιτυχία την μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στην λεκτική.

Οι μαθητές του ζευγαριού που δεν ξεκίνησε καθόλου την δραστηριότητα, μετά την ανακοίνωση του ορισμού των όμοιων τριγώνων, έκαναν στην διδάσκουσα ερωτήσεις σχετικά με την πρώτη δραστηριότητα και κατάφεραν τελικά να ξεκαθαρίσουν πότε δυο τρίγωνα λέγονται όμοια.

Όσον αφορά στην αρχική ερώτηση της πρώτης δραστηριότητας δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές. Μόνο 4/10 έδωσαν την σωστή απάντηση. Ένα ζευγάρι απάντησε ότι «πρέπει να υπολογιστούν οι σκιές και οι γνώμονες», ένα άλλο «κατά πόσο πολλαπλασιάζονται οι ράβδοι», ένα τρίτο « να βρούμε τις σκιές» και τρία ζευγάρια δεν απάντησαν καθόλου. Το ένα από αυτά τα ζευγάρια είναι αυτό που δεν συμπλήρωσε και τους λόγους των πλευρών στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας.

Φαίνεται ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να ερμηνεύσουν σωστά το αρχικό κείμενο και να το συνδυάσουν με το σχήμα που τους δόθηκε στο αρχείο εργασίας. Δεν έφτασαν δηλαδή στο επιθυμητό αποτέλεσμα κατά την διαδικασία της σημειωτικής γένεσης και μετά δυσκολεύτηκαν να περάσουν στην λεκτική γένεση και να αναπτύξουν σωστό συλλογισμό. Εδώ βλέπουμε ότι οι μαθητές δεν έχουν συνειδητοποιήσει ακόμη ότι το ζητούμενο έχει να κάνει με τον σταθερό λόγο των πλευρών.

Στην πρώτη ερώτηση της δεύτερης δραστηριότητας οι μαθητές ανάτρεξαν με επιτυχία στους ορισμούς των ίσων και όμοιων τριγώνων και απάντησαν όλοι σωστά. Κατάφεραν όπως δείχνουν οι απαντήσεις τους να εντοπίσουν τη διαφορά μεταξύ όμοιων και ίσων τριγώνων. Χρησιμοποίησαν τους ορισμούς ως εργαλείο για να δικαιολογήσουν τις ζητούμενες διαφορές, περνώντας έτσι στη συλλογιστική γένεση.

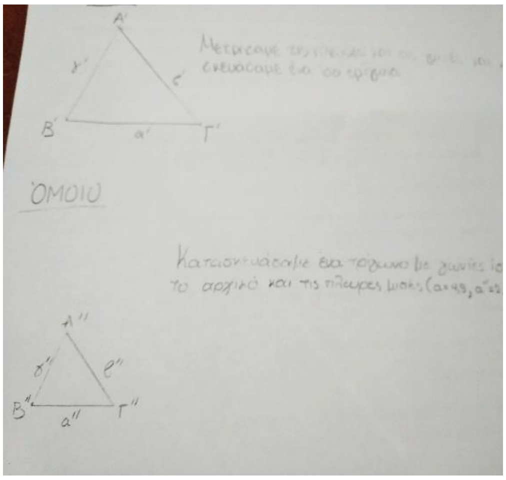
Αμέσως μετά οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο όμοιο και ένα ίσο με ένα δοθέν, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα. Όλα τα ζευγάρια εκτός από ένα έκαναν με ακρίβεια ένα ίσο τρίγωνο με αυτό που δίνονταν. Επίσης, 3 ζευγάρια σχεδίασαν όμοιο τρίγωνο με πλευρές διπλάσιες του αρχικού ενώ 4 ζευγάρια σχεδίασαν όμοιο τρίγωνο με το αρχικό με πλευρές μισές των πλευρών του αρχικού τριγώνου. Ένα ζευγάρι έκανε ένα πρόχειρο σχήμα μόνο για το όμοιο τρίγωνο, χωρίς να χρησιμοποιήσει γεωμετρικά όργανα.

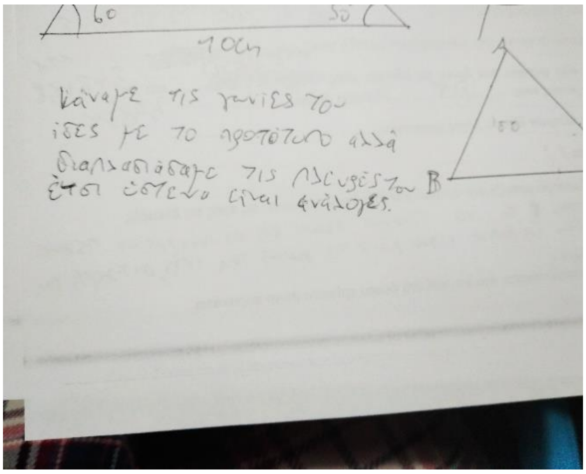
Βλέπουμε ότι οι μαθητές αυτοί συνδύασαν την ομοιότητα με την μεγέθυνση και σμίκρυνση των πλευρών και κράτησαν τη σταθερότητα του λόγου. Χρησιμοποίησαν τα κατάλληλα γεωμετρικά όργανα ως εργαλεία και κατασκεύασαν τα ζητούμενα σχήματα. Κατάφεραν δηλαδή να κινηθούν μεταξύ εργαλειακής και σημειωτικής γένεσης χωρίς προβλήματα.

Τα άλλα δύο ζευγάρια για να κατασκευάσουν όμοιο τρίγωνο με το αρχικό χρησιμοποίησαν την πρόσθεση αντί του πολλαπλασιασμού, δηλαδή το ένα κατασκεύασε ένα τρίγωνο με πλευρές αυξημένες κατά 2 εκατοστά και το άλλο ξεκίνησε να κατασκευάζει ένα τρίγωνο με πλευρές αυξημένες κατά ένα εκατοστό αλλά δεν κατάφερε να το ολοκληρώσει. Εδώ φαίνεται ότι οι μαθητές αυτοί δεν έχουν κατανοήσει τον ορισμό των όμοιων τριγώνων καθώς δεν τήρησαν την σταθερότητα των λόγων.

Τα τρία από τα ζευγάρια που έκαναν με επιτυχία τα σχήματα δεν περιέγραψαν καθόλου την διαδικασία. Μόνο τα έξι ζευγάρια περιέγραψαν πώς κατασκεύασαν τα σχήματα. Σε δική μου ερώτηση σχετικά με τον λόγο που δεν έκαναν την περιγραφή η απάντηση από όλους ήταν ότι δεν μπόρεσαν να βρουν τις κατάλληλες λέξεις ώστε να περιγράψουν αυτό που κατασκεύασαν. Φαίνεται λοιπόν εδώ, ότι η μετάβαση προς την λεκτική γένεση δεν πραγματοποιήθηκε γι’ αυτά τα τρία ζευγάρια καθώς ήταν αδύνατον να αναπτύξουν τον κατάλληλο συλλογισμό.

Κάτι ακόμα που αξίζει να σημειωθεί εδώ είναι ότι δύο από τα ζευγάρια που απάντησαν στην ερώτηση της περιγραφής ανέπτυξαν μια πολύ σύντομη περιγραφή όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες. Δεν έγραψαν αναλυτικά τα βήματα που ακολούθησαν αλλά την γενική τους πορεία. Διαπιστώνουμε, επομένως, ότι ενώ η κατασκευή έγινε σωστά η αποτύπωσή της με λόγια ήταν δύσκολη για τους μαθητές.





Εικ. 25 Εικ. 26

Η δραστηριότητα αυτή έγινε αποκλειστικά από τους μαθητές χωρίς καμία βοήθεια από την διδάσκουσα. Τελικά το φύλλο εργασίας συμπληρώθηκε σε δύο διδακτικές ώρες.

Όπως φαίνεται στο πρώτο μάθημα οι περισσότεροι μαθητές παρόλο που δεν ήταν συνηθισμένοι να δουλεύουν σε τόσο πλούσιο χώρο εργασίας ανταποκρίθηκαν θετικά. Με το ιστορικό απόσπασμα κινητοποιήθηκε η περιέργειά τους, και δεν δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα να κινηθούν μεταξύ των δύο επιπέδων: εργαλειακού-λεκτικού και λεκτικού - σημειωτικού.

Μάθημα 2ο

Στο δεύτερο μάθημα δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας με δύο δραστηριότητες. Συνεχίζουν να δουλεύουν σε ζεύγη όπως στο πρώτο φύλλο εργασίας.

Αφού οι μαθητές διάβασαν την εκφώνηση της πρώτης δραστηριότητας πριν προλάβουν να την απαντήσουν έγινε ο παρακάτω διάλογος:

Αντώνης :Τι εννοείται να περιέχεται;

Ηρώ: Να είναι το ένα μέσα στο άλλο….όπως αυτά με τις σκιές.

Αντώνης: Εκείνα ήταν ορθογώνια. Εδώ θέλετε να κατασκευάσουμε ορθογώνια;

Τατιάνα: Όχι μόνο ορθογώνια.

Καθηγήτρια: Ναι δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογώνια.

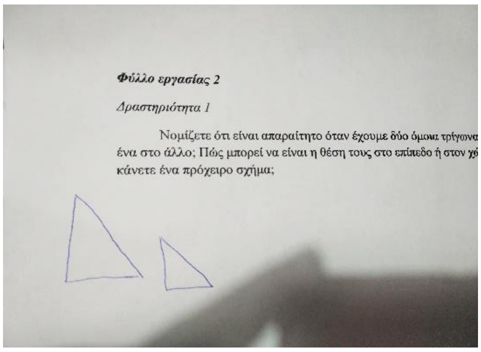
Ηρώ: Ούτε να περιέχεται το ένα στο άλλο.

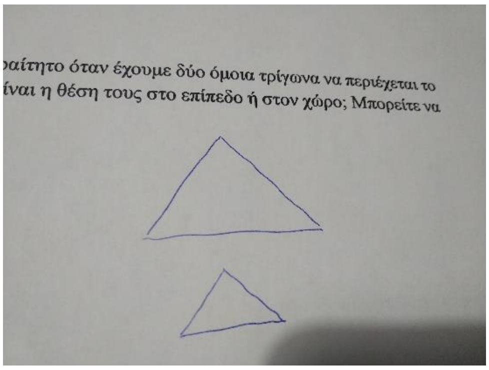
Αντώνης: Πρέπει να περιέχεται για να φαίνεται ότι το ένα είναι μεγαλύτερο.

Ηρώ : Πάλι θα φαίνεται αν είναι διπλάσιες ή τριπλάσιες οι πλευρές.

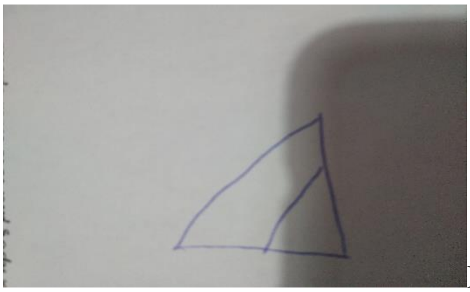
Στο σημείο αυτό δεν συνέχισα τον διάλογο αλλά τους προέτρεψα να σκεφτούν και κάθε ζευγάρι να απαντήσει ότι θεωρεί σωστό. Τελικά τα εφτά ζευγάρια απάντησαν σωστά και έκαναν σωστά σχήματα στο επίπεδο (Εικ.26, Εικ.27). Τα υπόλοιπα τρία ζευγάρια δεν απάντησαν στην ερώτηση απλά έκαναν τα σχήματα στο επίπεδο (Εικ.28, εικ.29, Εικ.30). Αμέσως μετά σηκώθηκαν μαθητές από τρεις διαφορετικές ομάδες και έκαναν τα σχήματά τους στον πίνακα. Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι στα όμοια τρίγωνα δεν παίζει ρόλο η τοποθέτησή τους στο επίπεδο αλλά η σταθερότητα του λόγου.

Εικ.27

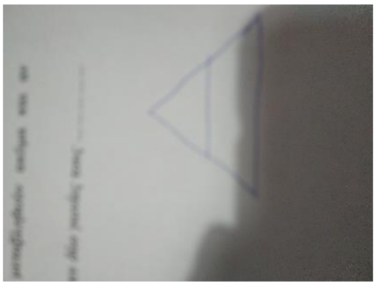




Εικ.28



Εικ.29

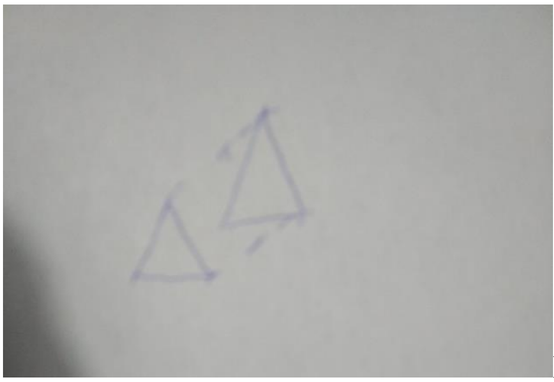


Εικ.30

Εικ.31

Όσον αφορά στην κατασκευή των όμοιων τριγώνων στο χώρο φάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά. Έκαναν ερωτήσεις όπως: « τι εννοείτε στον χώρο;», « το ίδιο δεν θα είναι;» ή « θα το κάνουμε τρισδιάστατο δηλαδή;». Τελικά, μόνο δύο ζευγάρια κατάφεραν να κάνουν το σωστό σχήμα (Εικ.31). Άλλα δύο έκαναν το ίδιο σχήμα με την προηγούμενη ερώτηση. Εδώ φαίνεται ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τα σχήματα στον χώρο ή με την έννοια της προοπτικής αφού η ενασχόλησή τους με αυτά είναι κάποιες λίγες ώρες στο τέλος της Β' γυμνασίου.

Εικ.32



Εικ.33

Παρατηρούμε ότι για τους περισσότερους μαθητές ήταν δύσκολο να δουλέψουν στην σημειωτική γένεση όσον αφορα στο χώρο. Όπως φαίνεται και από τις ερωτήσεις τους δεν μπόρεσαν να σκεφτούν ένα σχήμα και να το αναπαραστήσουν στο χαρτί. Αντίθετα, η εργασία των μαθητών στο επίπεδο έγινε με επιτυχία. Εργάστηκαν στην σημειωτική γένεση και χωρίς γεωμετρικά όργανα, σχεδίασαν το ζητούμενο σχήμα.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να δουλέψουν σε ένα αρχείο GeoGebra το οποίο και πάλι θα προβάλλεται στον πίνακα. Η δραστηριότητα στηρίζεται στο συμπέρασμα του Θαλή σχετικά με τους γνώμονες και τις σκιές τους.

Οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν εδώ. Όλα τα ζευγάρια συμπλήρωσαν τους λόγους και τα εννιά απάντησαν σωστά στις παρακάτω ερωτήσεις. Μάλιστα στην τρίτη ερώτηση, σχετικά με το αν παραμένουν τα τρίγωνα όμοια, τα 7 ζευγάρια απάντησαν διαισθητικά και μετά υπολόγισαν τους λόγους των πλευρών, ενώ τα υπόλοιπα για να απαντήσουν βρήκαν πρώτα τους λόγους των αντίστοιχων πλευρών των τριγώνων. Αφού όλοι τελείωσαν κάποιοι μαθητές απάντησαν φωναχτά στις ερωτήσεις και φτάσαμε στο σημείο στο οποίο αναδύεται το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων.

Εδώ παρατηρούμε ότι ήδη οι μαθητές καταλαβαίνουν την αναγκαιότητα της σταθερότητας του λόγου των ομόλογων πλευρών. Επίσης, χρησιμοποιούν με επιτυχία το ψηφιακό αρχείο ως εργαλείο ώστε να διατυπωθεί το κριτήριο ομοιότητας των τριγώνων. Έγινε εύκολα, επομένως, η μετάβαση από το σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο στην λεκτική γένεση και στην διατύπωση του νέου κριτηρίου.

Αυτό το φύλλο εργασίας συμπληρώθηκε σε μία διδακτική ώρα.

Μάθημα 3^{ο}

Στο 3^{ο} φύλλο εργασίας οι μαθητές ασχολήθηκαν με το γνωστό ιστορικό πρόβλημα της μέτρησης του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή. Ένας μαθητής διάβασε φωναχτά το αρχικό κείμενο και άρχισε ένας έντονος διάλογος μεταξύ κάποιων μαθητών:

Αντώνης: Πάλι ο Θαλής κυρία;

Μηνάς: Δεν το ήξερες; Είναι γνωστό ότι αυτός μέτρησε την πυραμίδα.

Καθηγήτρια: Το ήξερες Μηνά;

Μηνάς: Ναι το είχα ακούσει από τον αδερφό μου αλλά δεν ήξερα πώς το έκανε.

Τατιάνα: Πότε έγινε κυρία;

Καθηγήτρια: Τον 6^{ο} αιώνα π. Χ.

Τατιάνα: Τόσο δύσκολο ήταν; Αφού την έχτισαν δεν ήξεραν το ύψος της;

Καθηγήτρια: Είχε χτιστεί αρκετά χρόνια πριν κάνει την μέτρηση ο Θαλής.

Δημήτρης: Και τι μας ενδιαφέρει εμάς κυρία;

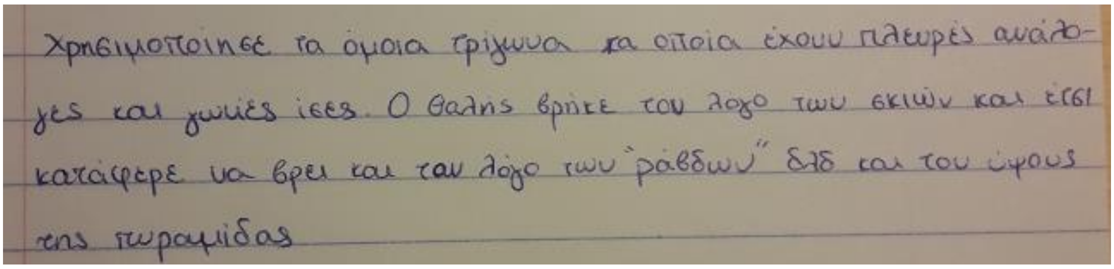
Μηνάς: Σε όλο τον κόσμο το ξέρουν, εμείς να μην το ξέρουμε;

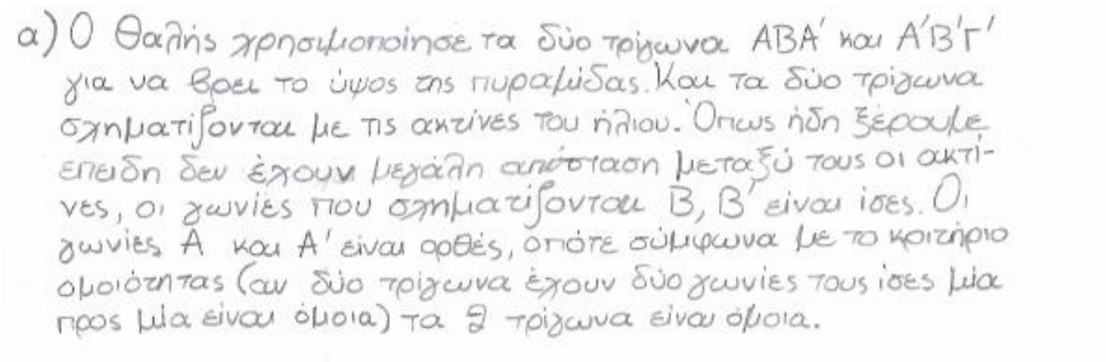
Ελεάννα: Και γιατί τον θαύμαζε ο βασιλιάς;

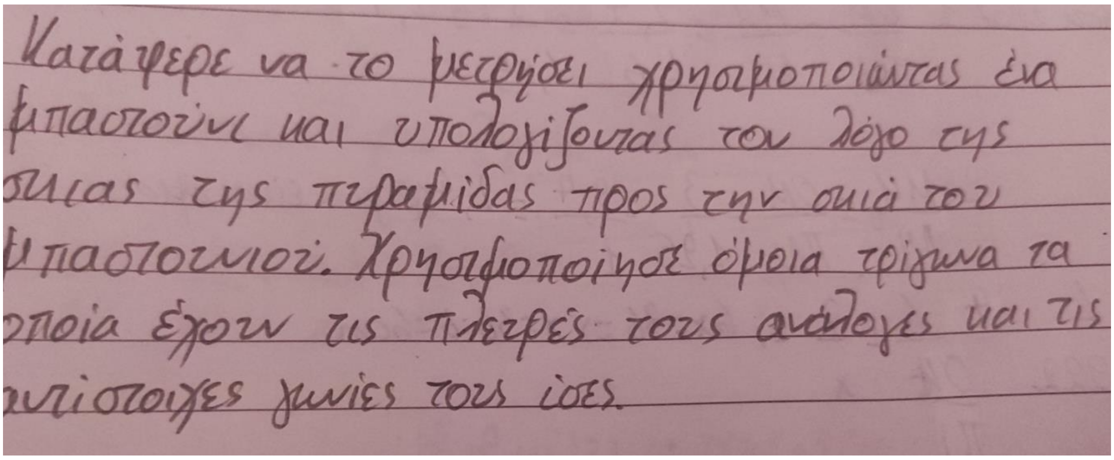
Καθηγήτρια: Ήταν κάτι δύσκολο και πρωτοποριακό για την εποχή του. Δεν μπορούσαν να πλησιάσουν με κάποιο τρόπο και να την μετρήσουν.

Ο διάλογος τόνωσε το ενδιαφέρον των μαθητών σχετικά με την μέτρηση της απρόσιτης απόστασης και ξεκίνησαν να λύσουν την δραστηριότητα. Μάλιστα κάποιοι μαθητές έκαναν συναγωνισμό για το ποιος θα απαντήσει πιο γρήγορα. Τελικά όλοι οι μαθητές κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν την ισότητα των λόγων των πλευρών των όμοιων τριγώνων ΑΑ΄Β και Α΄Β΄Γ΄ για να υπολογίσουν το ύψος της πυραμίδας. Δεκαοχτώ μαθητές χρησιμοποίησαν σωστά το κριτήριο ομοιότητας. Οι 11 όμως μόνο ασχολήθηκαν με το πρώτο ερώτημα όπου έπρεπε να περιγράψουν την διαδικασία. Οι υπόλοιποι 7 δικαιολόγησαν ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια και έκαναν τις πράξεις και οι τελευταίοι 3 κατευθείαν χρησιμοποίησαν την ισότητα $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AA'}{A'\Gamma'}$ και υπολόγισαν το άγνωστο ύψος χωρίς να δικαιολογήσουν πώς προέκυψε η ισότητα αυτή. Σε ερώτηση που έκανα προς αυτούς που δεν ασχολήθηκαν με την περιγραφή πήρα τις εξής απαντήσεις: «αφού φαίνεται από τις πράξεις», «είπαμε ότι είναι όμοια τα τρίγωνα, ήθελε κι άλλο;».

Παρακάτω φαίνονται μερικές περιγραφές μαθητών:


Χρησιμοποίησε τα όμοια τρίγωνα ~~τα~~ τα οποία έχουν πλευρές ανάλο-
γες και γωνίες ίσες. Ο Θαλής βρήκε του λόγο των σκιών και έτσι
κατάφερε να βρει και τον λόγο των "ράβδων" δλδ και του ύψους
της πυραμίδας


α) Ο Θαλής χρησιμοποίησε τα δύο τρίγωνα ΑΒΑ΄ και Α΄Β΄Γ΄
για να βρει το ύψος της πυραμίδας. Και τα δύο τρίγωνα
σχηματίζονται με τις ακτίνες του ήλιου. Όπως ήδη ξέρουμε
επειδή δεν έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους οι ακτί-
νες, οι γωνίες που σχηματίζονται Β, Β΄ είναι ίσες. Οι
γωνίες Α και Α΄ είναι ορθές, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο
ομοιότητας (αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία
προς μία είναι όμοια) τα 2 τρίγωνα είναι όμοια.


Κατάφερε να το μετρήσει χρησιμοποιώντας ένα
μπαστούνι και υπολογίζοντας τον λόγο της
σκιάς της πυραμίδας προς την σκιά του
μπαστουνιού. Χρησιμοποίησε όμοια τρίγωνα τα
οποία έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις
αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Σε αυτήν την δραστηριότητα παρατηρούμε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην συλλογιστική διάσταση. Για τους μισούς περίπου δεν έγινε η μετάβαση από την σημειωτική γένεση στην λεκτική αλλά πέρασαν κατευθείαν στην εργαλειακή. Τους ήταν πιο εύκολο να εφαρμόσουν την ισότητα των λόγων στο δοσμένο σχήμα και να υπολογίσουν το ζητούμενο ύψος. Θεώρησαν ότι αν κάνουν τις πράξεις και υπολογίσουν το άγνωστο ύψος τότε απαντούν και στην πρώτη ερώτηση, Όσοι ασχολήθηκαν με την περιγραφή της διαδικασίας κινήθηκαν με ευκολία στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο και έδωσαν ολοκληρωμένη λεκτική δικαιολόγηση του τρόπου μέτρησης.

Μάθημα 4^{ο}

Στην αρχή του 4^{ου} μαθήματος μοιράστηκαν στους μαθητές οι φωτοτυπίες από το βιβλίο του Errard. Έδειξαν ξαφνιασμένοι που το φύλλο εργασίας δε περιείχε ασκήσεις όπως περίμεναν και ρωτούσαν «Τι θα κάνουμε σήμερα; Δεν θα κάνουμε ασκήσεις;». Αφού τους εξήγησα ότι θα διαβάσουμε απόσπασμα από ένα βιβλίο σχετικά με τις απρόσιτες αποστάσεις όπως το ύψος της πυραμίδας του προηγούμενου μαθήματος, ένας μαθητής ξεκίνησε να διαβάζει δυνατά. Παράλληλα τους έδειχνα τις εικόνες από το βιβλίο στον βιντεοπροβολέα. Τα πρώτα λεπτά της ανάγνωσης οι περισσότεροι μαθητές δεν έδιναν σημασία κάτι που άλλαξε όταν προβλήθηκαν στον πίνακα οι εικόνες του βιβλίου.

Οι εικόνες από το βιβλίο τους εντυπωσίασαν και ρωτούσαν αν είναι το αληθινό βιβλίο και αν σώζεται σε κάποιο μουσείο. Μάλιστα επειδή το συγκεκριμένο τμήμα διδάσκεται τα γαλλικά ως δεύτερη ξένη γλώσσα προσπαθούσαν να αποκρυπτογραφήσουν κάποιες λέξεις. Το κομμάτι που μιλάει για τις αποστάσεις έγινε εύκολα αντιληπτό από τους μαθητές, αλλά η περιγραφή του οργάνου τους κούρασε αρκετά.

Μια ερώτηση με την οποία ξεκίνησε ένας μικρός διάλογος ήταν: *«Δηλαδή με το όργανο αυτό μετρούσαν αποστάσεις που δεν μπορούσαν να φτάσουν;»*

Νίκος: Πόσο μακρινές όμως;

Ευαγγελία: Σίγουρα όχι πολύ γιατί φαίνεται μικρό το όργανο.

Νίκος: Και τι πειράζει;

Ευαγγελία: Δεν είναι και ραντάρ να μετράει αποστάσεις σε χιλιόμετρα.

Τατιάνα: Φαίνεται στην εικόνα. Είναι σχετικά κοντά αλλά είναι το ποτάμι στην μέση και δεν μπορούν να φτάσουν απέναντι.

Καθηγήτρια: Και πως λέτε ότι μέτρησαν την απόσταση σε αυτήν την εικόνα που λες Τατιάνα;

Αντώνης: Με το όργανο που κρατάει.

Καθηγήτρια: Ναι αλλά πως; Με ποιον τρόπο;

Μηνάς: Σχηματίζεται ένα τρίγωνο.

Ηρώ: Δύο τρίγωνα είναι.

Καθηγήτρια: Τι τρίγωνα είναι αυτά;

Ιωάννα: Ορθογώνια.

Καθηγήτρια: Και μεταξύ τους; Τι σχέση έχουν;

Αντώνης: Είναι το ένα μέσα στο άλλο όπως αυτά που κάναμε με τις σκιές.

Ηρώ: Είναι όμοια. Έχουν την επάνω γωνία κοινή.

Καθηγήτρια: Σε τι μας βοηθάει αυτό το συμπέρασμα;

Νίκος: Ξέρουμε τις πλευρές στο μικρό τρίγωνο;

Καθηγήτρια: Τι λέτε; …………..Διαβάστε ξανά την περιγραφή του οργάνου.

Ευαγγελία: Ναι τις ξέρουμε αφού είναι το όργανο…………άρα θα κάνουμε τους λόγους και θα βρούμε την απόσταση.

Καθηγήτρια: Πολύ ωραία παιδιά. Νομίζω καταλάβατε πως δουλεύει. Είστε έτοιμοι να απαντήσετε στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

Οι μαθητές εργάστηκαν και εδώ σε ζευγάρια. Στην πρώτη ερώτηση απάντησαν όλα τα ζευγάρια. Οι απαντήσεις ήταν παρόμοιες, ότι δηλαδή η ανάγκη κατασκευής του οργάνου ήταν η μέτρηση « δύσκολων αποστάσεων» ή «αποστάσεων που δεν έφταναν» ή « μακρινών αποστάσεων» ή «αποστάσεων όπως στην εικόνα γιατί τότε δεν υπήρχε το μέσον για να μετρηθεί αλλιώς».

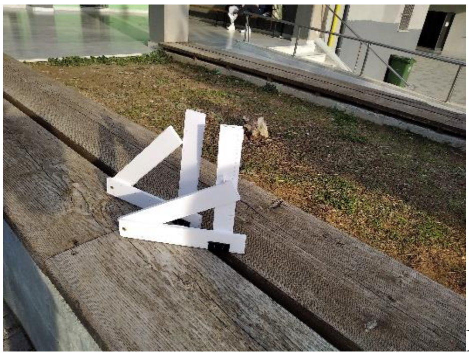
Όσον αφορά στην δεύτερη ερώτηση όλες οι ομάδες έκαναν ένα σχέδιο, δηλαδή στην ουσία έκαναν από ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Μόνο δύο ομάδες πρόσθεσαν στην άκρη ένα σκόπευτρο. Για το πώς θα δουλεύει αυτό το όργανο απάντησαν οι έξι ομάδες. Οι τέσσερις απαντήσεις ήταν σχεδόν μονολεκτικές δηλαδή «όπως στην εικόνα του βιβλίου με τα τρίγωνα». Οι άλλες δύο απαντήσεις ήταν: «θα σκοπεύουμε στην άκρη της απόστασης και θα σχηματίζονται δύο όμοια τρίγωνα και από τους λόγους θα βρούμε την απόσταση», και « θα κοιτάξουμε το στόχο και μετά θα κάνουμε ένα σχήμα με τα δύο όμοια τρίγωνα όπως στο βιβλίο και θα βρούμε την απόσταση». Πριν το τέλος της ώρας ένας μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα, έκανε το σχέδιο του οργάνου και περιέγραψε πώς αυτό θα λειτουργεί. Οι υπόλοιποι κράτησαν κάποιες σημειώσεις, με παρότρυνση της διδάσκουσας, για να είναι έτοιμοι για την μέτρηση που θα κάνουν με το όργανο που θα κατασκευάσουν οι ίδιοι.

Εδώ παρατηρούμε ότι το κείμενο κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών και οι περισσότεροι δούλεψαν με επιτυχία στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο σχεδιάζοντας το εργαλείο. Υπήρχαν βέβαια και τέσσερις ομάδες που δυσκολεύτηκαν να κινηθούν προς την σημειωτική γένεση και να περιγράψουν τη λειτουργία του εργαλείου.

Μάθημα 5ο

Στο 5ο μάθημα έγινε από τους μαθητές η κατασκευή του εργαλείου του Errard. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε πέντε ομάδες και η διδάσκουσα τους μοίρασε τα υλικά και την φωτοτυπία για τις οδηγίες κατασκευής. Το θετικό ήταν ότι ενεργοποιήθηκαν όλοι ακόμα και αυτοί που στα μαθήματα δεν δείχνουν γενικά μεγάλο ενδιαφέρον.

Οι ομάδες ακολούθησαν τις οδηγίες και κατασκεύασαν με ευκολία το εργαλείο (Εικ.31). Απ' ότι φάνηκε ήταν μια ενδιαφέρουσα και τονωτική διαδικασία για τους μαθητές. Κάποιες από τις αντιδράσεις τους ήταν: «πολύ ωραία ιδέα κυρία», « τελικά ήταν πιο εύκολο απ' ότι περίμενα», « άρα με αυτό μπορούμε να μετρήσουμε κι εμείς όπως αυτόν στο βιβλίο», «ανυπομονώ να βγούμε να μετρήσουμε». Στο τέλος, αφού όλες οι ομάδες είχαν κατασκευάσει το εργαλείο τους, το περιεργάστηκαν και σηκώθηκε ένας μαθητής να αναπαραστήσει την μέτρηση, αφού την επόμενη ώρα όλοι θα έπρεπε να μετρήσουν μια απρόσιτη απόσταση. Έτσι έγινε μια συζήτηση για το πώς θα κάνουν την μέτρηση και πως μετά θα υπολογίσουν την απόσταση.


Εικ.34

Η εργασία των μαθητών στο εργαλειακό - σημειωτικό επίπεδο ήταν πετυχημένη αφού όλοι κατάφεραν να κατασκευάσουν το όργανο μέτρησης με ευκολία. Ακόμα και η αναπαράσταση της μέτρησης στον πίνακα δε δυσκόλεψε τους μαθητές γιατί θυμόντουσαν τις εικόνες από το βιβλίο του Errard.

Μάθημα 6ο

Στο 6ο μάθημα οι ομάδες πήγαν στο γυμναστήριο του σχολείου ώστε να μετρήσουν ένα απρόσιτο ύψος της επιλογής τους. Αφού τα άτομα της κάθε ομάδας μοίρασαν τους ρόλους διάλεξαν το ύψος που θα μετρούσαν. Αρχικά προσπάθησαν διαισθητικά να το υπολογίσουν και μετά ξεκίνησαν να κάνουν την σκόπευση.

Αφού χρησιμοποίησαν το εργαλείο για να σκοπεύσουν φάνηκε ότι αμέσως μετά κυριάρχησε σε όλες τις ομάδες μια αναστάτωση καθώς δεν μπορούσαν να θυμηθούν τι ακριβώς έπρεπε να μετρήσουν. Ρωτούσαν συνεχώς ποιο πρέπει να είναι το επόμενο βήμα τους. Εδώ το μόνο που τους ανέφερα είναι να προσπαθήσουν να σχεδιάσουν την πραγματική κατάσταση στο χαρτί. Δεν τους έδωσα καμία άλλη βοήθεια ώστε να δω μέχρι ποιο σημείο θα μπορούσε να φτάσει η κάθε ομάδα. Οι τρεις ομάδες έκαναν κάποιο πρόχειρο σχέδιο αλλά εξακολούθησαν να είναι ιδιαίτερα μπερδεμένες. Οι άλλες δύο δεν μπορούσαν να κάνουν τίποτα και εγκατέλειψαν την προσπάθεια. Καμία από τις ομάδες δεν κατάφερε μέχρι το τέλος της ώρας να κάνει την μέτρηση. Έκαναν όλοι την σκόπευση, αλλά τους ήταν πολύ δύσκολο να σχεδιάσουν το κατάλληλο σχήμα.

Φαίνεται πως οι ομάδες δυσκολεύτηκαν να δουλέψουν στην σημειωτική διάσταση και να μεταφέρουν την πραγματική κατάσταση στο χαρτί. Το σχέδιο που έκαναν οι τρεις ομάδες αφορούσε μόνο ένα ορθογώνιο τρίγωνο και απ' ότι είπαν οι μαθητές ουσιαστικά αυτό ήταν το σχέδιο του οργάνου μόνο. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος από δύο μαθητές της ίδιας ομάδας:

Στέλιος: Μα στην τάξη σε αυτό που κάναμε είχαμε δύο τρίγωνα.

Ηρώ: Ναι όπως στο βιβλίο….αλλά ποιο θα είναι το άλλο;

Στέλιος : Θα είναι και το ύψος σίγουρα…δεν ξέρω.

Ηρώ : Όχι το ύψος το ψάχνουμε. Έπρεπε να έχουμε μπροστά μας το σχήμα από εκείνο το βιβλίο.

Η μεταφορά του πραγματικού χώρου στο χαρτί ήταν τελικά αδύνατη για τους μαθητές. Έτσι δεν έφτασαν στο επίπεδο της οπτικοποίησης και κατά συνέπεια δεν μπόρεσαν να περάσουν στην λεκτική γένεση.

Μάθημα 7ο

Την επόμενη ώρα το μάθημα άρχισε μέσα στην αίθουσα. Οι μαθητές έπρεπε να επεξεργαστούν ξανά το εργαλείο του Errard για να μπορέσουν να επιστρέψουν στον χώρο του γυμναστηρίου και να κάνουν τις μετρήσεις. Έτσι δόθηκε χρόνος στην κάθε ομάδα να ασχοληθεί με το εργαλείο μέσα στην τάξη και να κάνει ένα πρόχειρο σχήμα στο χαρτί ώστε να καταλάβει τι ακριβώς έπρεπε να μετρήσει.

Μεταξύ των ομάδων υπήρχε έντονη αλληλεπίδραση. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος:

Τατιάνα: Πρέπει να έχουμε δύο τρίγωνα……ορθογώνια

Νίκος: Ναι όπως στο βιβλίο…………το γαλλικό.

Σωκράτης: Ναι αλλά εκεί δεν έδειχνε ψηλά το όργανο.

Καθηγήτρια: Θυμηθείτε την τελευταία εικόνα, που είπαμε ότι μοιάζει με αυτό που θα κάνουμε εμείς.

Ηρώ: Α ναι θυμάμαι…….κατάλαβα.

Ηρώ: Πρώτα θα κάνουμε το τρίγωνο από το όργανο………

Μηνάς: Και μετά το μεγάλο………εκεί που κοιτάζει.

Στο σημείο αυτό περνώντας από τα θρανία παρατήρησα ότι όλες οι ομάδες είχαν κάνει τα δύο τρίγωνα αλλά ξεκινούσαν από το έδαφος.

Καθηγήτρια: Θα ξαπλώνει στο έδαφος αυτός που θα μετράει;

Ευαγγελία: Τι εννοείτε κυρία;

Καθηγήτρια: Στο σχήμα σας δεν υπάρχει αυτός που σκοπεύει. Είναι μόνο το όργανο και το τρίγωνο που θα σχηματιστεί στο μυαλό μας.

Νίκος: Α, σωστά πρέπει να μετρήσουμε όπως είπαμε και το ύψος μας……..μέχρι το μάτι.

Καθηγήτρια: Ωραία, άρα τώρα μπορεί κάποιος να μας κάνει ένα πρόχειρο σχήμα στον πίνακα;

Αμέσως μετά ένας μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα και έκανε το ζητούμενο σχήμα. Αφού λοιπόν οι ομάδες ήταν έτοιμες και κατάλαβαν τι ακριβώς χρειαζόταν να μετρήσουν πήγαμε για δεύτερη φορά στο γυμναστήριο του σχολείου. Εκεί η κάθε ομάδα επέλεξε ένα απρόσιτο ύψος και προσπάθησε να κάνει τη διαδικασία για να το υπολογίσει.

Οι ομάδες αυτή τη φορά τα πήγανε καλά. Κατάφεραν όλες να κάνουν τη σκόπευση με σωστό τρόπο και μετά να μεταφέρουν την πραγματική αυτή κατάσταση στο σχέδιο. Οι μετρήσεις έγιναν σωστά τόσο στο όργανο όσο και αυτές με την μετροταινία και υπήρξε μια ικανοποίηση για το αποτέλεσμα από τους μαθητές. Κινήθηκαν από την εργαλειακή γένεση προς την σημειωτική χωρίς κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα.

Κατόπιν όλες οι ομάδες κινήθηκαν με επιτυχία στο σημειωτικό - λεκτικό επίπεδο και υπολόγισαν το απρόσιτο ύψος. Κατάφεραν να μεταφέρουν την πραγματική κατάσταση σε ένα σχήμα στο χαρτί και μετά πέρασαν στην λεκτική – συλλογιστική γένεση υπολογίζοντας το άγνωστο ύψος. Δικαιολόγησαν με επιτυχία την ομοιότητα των τριγώνων χρησιμοποιώντας το κριτήριο ομοιότητας και αμέσως μετά προχώρησαν στην εργαλειακή γένεση καθώς χρησιμοποίησαν την σχέση αναλογίας των ομόλογων πλευρών ως θεωρητικό εργαλείο για τον υπολογισμό του ζητούμενου ύψους.


Εικ.35

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στο τέλος της διδακτικής ώρας οι μαθητές ήταν ενθουσιασμένοι από την διαδικασία. Τόνισαν ότι πρώτη φορά κάνουν κάτι τόσο ενδιαφέρον στα μαθηματικά και ότι θα έπρεπε να γίνονται πιο συχνά τέτοια μαθήματα. Στην ερώτησή μου τι τους εντυπωσίασε περισσότερο πήρα απαντήσεις όπως: «που βγήκαμε από την τάξη» απάντησαν 2 άτομα, «ότι κατασκευάσαμε μόνοι μας αυτό το όργανο» απάντησαν 3 άτομα, «ότι ήμασταν ομάδες και ήταν διασκεδαστικό» απάντησαν 5 άτομα, «δεν κάναμε ασκήσεις» απάντησε 2 άτομα, «κατάλαβα τα όμοια τρίγωνα καλύτερα» απάντησαν 2 άτομα, « ενώ κάναμε για τα τρίγωνα ήταν πιο εύκολο από τις ασκήσεις στην τάξη» απάντησαν 2 άτομα, «δεν κάναμε θεωρία, ήταν πρακτικό» απάντησαν 2 άτομα, «μάθαμε πώς μετρούσαν και ήταν πιο εύκολο από τις ασκήσεις» απάντησε 3 άτομα.

Μάθημα 8ο

Την επόμενη διδακτική ώρα μοιράστηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας με τρία ιστορικά προβλήματα που έχουν να κάνουν με μετρήσεις απρόσιτων αποστάσεων. Το σχήμα δόθηκε και στα τρία προβλήματα καθώς θα ήταν πολύ δύσκολο για τους ίδιους να το κατασκευάσουν. Εδώ ο κάθε μαθητής εργάστηκε μόνος του.

Το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στην μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι. Στην πρώτη ερώτηση σχετικά με την περιγραφή του τρόπου επίλυσης του προβλήματος απάντησαν οι 12/21 μαθητές σωστά. Κινήθηκαν με ευκολία στην σημειωτική - λεκτική γένεση και χρησιμοποιώντας το κριτήριο ομοιότητας δικαιολόγησαν, μέσω της ομοιότητας των τριγώνων, τον υπολογισμό της ζητούμενης απόστασης. Τέσσερις μαθητές περιέγραψαν σωστά την διαδικασία που ακολούθησε ο Θαλής αλλά για να αποδείξουν ότι τα τρίγωνα του σχήματος είναι όμοια είπαν απλά ότι « φαίνεται πως το ένα είναι μεγέθυνση του άλλου». Εδώ βλέπουμε ότι κατανόησαν το σχήμα, αλλά δυσκολεύτηκαν να δώσουν μια σωστή λεκτική απόδειξη με βάση την θεωρία. Η μετάβασή τους στην συλλογιστική γένεση ήταν αποτυχημένη. Ένας μαθητής απάντησε μόνο ότι «Ο Θαλής χρησιμοποίησε όμοια τρίγωνα». Με τον συγκεκριμένο μαθητή μάλιστα έγινε ο παρακάτω διάλογος :

Καθηγήτρια: Τι εννοείς Νίκο;

Νίκος : Τα τρίγωνα είναι όμοια.

Καθηγήτρια: Πώς προκύπτει αυτό;

Νίκος: Μα φαίνεται ότι το ένα είναι μεγαλύτερο.......θα βρούμε τις πλευρές. Θα είναι διπλάσιες ή τριπλάσιες.

Καθηγήτρια : Γνωρίζεις όλες τις πλευρές των δύο τριγώνων;

Νίκος: Όχι, άρα δε γίνεται.

Ο συγκεκριμένος μαθητής φαίνεται να έχει κατανοήσει την σχέση αναλογίας των πλευρών αλλά δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει το κριτήριο ομοιότητας.

Δύο περιέγραψαν την διαδικασία αλλά για να δικαιολογήσουν την ομοιότητα των τριγώνων αναφέρθηκαν μόνο στην κοινή τους γωνία. Οι υπόλοιποι δύο δεν απάντησαν καθόλου.

Στο δεύτερο ερώτημα οι 17 μαθητές μέτρησαν με τον χάρακα την απόσταση $Α_1Β$ και μετά έγραψαν την σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών και βρήκαν το άγνωστο μήκος. Οι τρεις από τους μαθητές που δεν έλυσαν σωστά το πρόβλημα δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν ποια ευθύγραμμα τμήματα θα πρέπει να μετρήσουν οι ίδιοι οπότε μέτρησαν μόνο την απόσταση ΑΠ και έδωσαν αυτήν την μέτρηση ως απάντηση. Ο τελευταίος ενώ δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα είναι όμοια δεν μπόρεσε να γράψει την σωστή ισότητα λόγων. Οι τέσσερις αυτοί μαθητές δεν μπόρεσαν να κινηθούν επιτυχημένα στην εργαλειακή γένεση, αφού δυσκολεύτηκαν να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα τα εργαλεία που θα τους οδηγούσαν στην απάντηση.

Το δεύτερο πρόβλημα αναφέρεται στην μέτρηση του βάθους ενός πηγαδιού. Εδώ οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν. Οι 20/21 έγραψαν την σωστή ισότητα λόγων και υπολόγισαν την απόσταση. Κινήθηκαν με ευκολία στην σημειωτική - λεκτική γένεση και αφού εξήγησαν την ομοιότητα των τριγώνων χρησιμοποίησαν την σχέση αναλογίας ως εργαλείο και έδωσαν την σωστή απάντηση. Ένας μαθητής μόνο δεν έλυσε καθόλου την άσκηση. Έτσι έφτασε το τέλος της διδακτικής ώρας και αφήσαμε το τελευταίο πρόβλημα για την επόμενη φορά.

Στο τρίτο πρόβλημα οι μαθητές παρακολούθησαν αρχικά ένα βίντεο σχετικά με το Ευπαλίνειο Όρυγμα και μετά απάντησαν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Το σημείο του βίντεο που δείχνει πώς ο Ευπαλίνος βρίσκει το μήκος του τούνελ χρειάστηκε να το προβάλλω δύο φορές γιατί τους φάνηκε δυσνόητο.

Στην πρώτη ερώτηση απάντησαν σωστά όλοι. Στην δεύτερη ερώτηση οι περισσότεροι μαθητές δεν θυμόντουσαν αυτό ακριβώς που άκουσαν στο βίντεο. Οπότε, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, προβλήθηκε δύο φορές. Τελικά δεκαεπτά μαθητές περιέγραψαν σωστά τον τρόπο που έγινε ο υπολογισμός. Πέρασαν από την εργαλειακή γένεση στην λεκτική και χρησιμοποιώντας το κριτήριο ομοιότητας εξήγησαν πώς βρήκε ο Ευπαλίνος το μήκος του τούνελ. Οι δύο δεν απάντησαν καθόλου και οι άλλοι δύο απάντησαν ότι χρησιμοποίησε τα όμοια τρίγωνα του σχήματος. Σε αυτές τις απαντήσεις φαίνεται ότι δυσκολεύτηκαν οι μαθητές να αναπτύξουν μια συλλογιστική με βάση την αντίστοιχη θεωρία. Αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι δύο μαθητές είπαν ότι δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν γιατί η άσκηση δεν έδινε συγκεκριμένες διαστάσεις για τα μήκη ώστε να κάνουν πράξεις.

Το τεστ

Στο πρώτο πρόβλημα του τεστ οι 19 μαθητές απάντησαν σωστά. Οι υπόλοιποι δύο ενώ δικαιολόγησαν τη ομοιότητα των τριγώνων έκαναν λάθος στα μήκη, δηλαδή ο ένας δεν υπολόγισε το μήκος ολόκληρου του βατήρα και ο δεύτερος έκανε λάθος στο μήκος της πλευράς του μεγάλου τριγώνου. Από τους 19 οι 12 μαθητές χρησιμοποίησαν την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων που περιέχεται το ένα στο άλλο γιατί τους φάνηκε πιο εύκολο να βρουν τις ίσες γωνίες ενώ οι υπόλοιποι 7 χρησιμοποίησαν το άλλο ζευγάρι ορθογωνίων.

Φαίνεται πως οι μαθητές δούλεψαν με επιτυχία στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο. Ερμήνευσαν σωστά το σχήμα και με βάση την θεωρία που αφορά στα όμοια τρίγωνα κατάφεραν να υπολογίσουν το ζητούμενο μήκος.

Στο δεύτερο πρόβλημα απάντησαν σωστά χρησιμοποιώντας τα όμοια τρίγωνα οι είκοσι μαθητές. Οι τρεις από αυτούς στο τέλος δεν πρόσθεσαν το ύψος του τραπεζιού στο αποτέλεσμα. Επίσης οι 14 από αυτούς δεν έκαναν την περιγραφή της μέτρησης που ζητήθηκε αρχικά.

Βλέπουμε ότι ενώ οι περισσότεροι μαθητές ερμήνευσαν σωστά το σχήμα, δυσκολεύτηκαν να κινηθούν στην συλλογιστική διάσταση. Χρησιμοποίησαν την σχέση αναλογίας ως εργαλείο για να βρουν το αποτέλεσμα χωρίς πριν να περιγράψουν την διαδικασία μέτρησης του απρόσιτου ύψους. Ίσως δεν κατανόησαν ότι το σχήμα αναπαριστά κάποιον τρόπο μέτρησης μιας απρόσιτης απόστασης και το «διάβασαν» μόνο ως το ζευγάρι των τριγώνων που σχηματίζονται.

Το ίδιο συνέβη και στο τρίτο πρόβλημα όπου οι περισσότεροι μαθητές δεν απάντησαν στην περιγραφή που ζητήθηκε. Δεν πέρασαν δηλαδή από την σημειωτική στην λεκτική γένεση με επιτυχία. Επίσης, κάποιοι μαθητές δεν δικαιολόγησαν την ομοιότητα των τριγώνων και χρησιμοποίησαν κατευθείαν την ισότητα των λόγων για να απαντήσουν. Εδώ φαίνεται ότι η δυσκολία τους ήταν να βρουν τις ίσες γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων. Επομένως χρησιμοποίησαν μόνο την ισότητα των λόγων ως θεωρητικό εργαλείο και όχι το κριτήριο ομοιότητας ώστε να κινηθούν στην σημειωτική γένεση και να υπολογίσουν το ζητούμενο ύψος. Οι 15 μαθητές υπολόγισαν σωστά το ύψος ενώ μόνο οι πέντε περιέγραψαν την διαδικασία της μέτρησης.

Στο τελευταίο πρόβλημα απάντησαν οι 19 μαθητές σωστά. Οι δύο μαθητές δεν πρόλαβαν να το ολοκληρώσουν και έγραψαν μόνο ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια. Οι μαθητές πέρασαν εύκολα από την σημειωτική στην λεκτική διάσταση. Αναγνώρισαν και δικαιολόγησαν σωστά την ομοιότητα των τριγώνων και αμέσως μετά μεταπήδησαν στην εργαλειακή διάσταση και υπολόγισαν τα ζητούμενα μήκη, χρησιμοποιώντας την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών ως θεωρητικό εργαλείο.

7.1. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην παραπάνω διδακτική παρέμβαση βασικός ήταν ο ρόλος της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των μαθηματικών. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε η διαπίστωση του Θαλή ότι: *«Πολλαπλάσιοι γνώμονες την ίδια στιγμή της μέρας ρίχνουν ισάκις πολλαπλάσιες σκιές»* με σκοπό να εισαχθεί ο ορισμός της ομοιότητας των τριγώνων αλλά και το κριτήριο ομοιότητας. Κατόπιν οι μαθητές ασχολήθηκαν με την επίλυση ενός προβλήματος μέτρησης απρόσιτης απόστασης, αυτού του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή. Έπειτα μελετώντας μια πρωτότυπη πηγή, ένα απόσπασμα από το βιβλίο «*La géométrie et pratique générale d'icelle*» του Γάλλου μηχανικού του 16ου αιώνα Jean Errard, οι μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν οι ίδιοι ένα εργαλείο μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων και να κάνουν τη δική τους μέτρηση. Τέλος, η διδακτική παρέμβαση εμπλουτίστηκε με τρία ιστορικά προβλήματα που για την επίλυσή τους χρησιμοποιείται η θεωρία των όμοιων τριγώνων: η μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι, η μέτρηση του βάθους ενός πηγαδιού και η μέτρηση του μήκους της σήραγγας στο Ευπαλίνειο όρυγμα.

Είναι αλήθεια ότι ο εμπλουτισμός του κατάλληλου χώρου εργασίας των μαθητών με τις παραπάνω ιστορικές αναφορές τόνωσε το ενδιαφέρον και την περιέργειά τους. Με αφορμή τα ιστορικά γεγονότα ξεκίνησαν διάφοροι εποικοδομητικοί διάλογοι μεταξύ των μαθητών με αποτέλεσμα να λύνονται κάποιες απορίες τους. Απαντώντας λοιπόν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα θα λέγαμε ότι η ενσωμάτωση κομματιών από την ιστορία των μαθηματικών βοήθησε στην συνεργασία μεταξύ τους αλλά και στην δημιουργία ενός θετικού κλίματος σχετικά με την αντιμετώπιση του μαθήματος και των απαιτήσεών του. Μάλιστα το τελευταίο αποτελεί σίγουρα σημαντικό στοιχείο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΠΣ, 2003).

Ιδιαίτερα η κατασκευή από τους μαθητές του εργαλείου του Errard βοήθησε στην αλληλεπίδραση και επικοινωνία μεταξύ τους. Η βιωματική προσέγγιση της έννοιας της ομοιότητας των τριγώνων κινητοποίησε όλους τους μαθητές. Έγιναν πιο ενεργοί διαμορφώνοντας οι ίδιοι την γνωστική τους πραγματικότητα, ώστε να είναι περισσότερο έτοιμοι να αντιμετωπίσουν καταστάσεις της καθημερινότητας (Χρυσαφίδης, 1994). Επίσης συνετέλεσε στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας της αναλογίας των ομόλογων πλευρών των τριγώνων καθώς έπρεπε οι ίδιοι να κάνουν την διαδικασία μέτρησης και σχεδιασμού. Είναι σημαντικό ότι δόθηκε στους μαθητές η ευκαιρία να μεταφέρουν την πραγματική κατάσταση στο χαρτί αφού όπως διαπιστώθηκε κατά τη διδακτική παρέμβαση δεν είναι εξοικειωμένοι με κάτι τέτοιο. Με την κατασκευή αυτή αλλά και με την επίλυση ιστορικών προβλημάτων οι μαθητές κατάλαβαν για ποιο λόγο είναι σημαντική η έννοια της ομοιότητας των τριγώνων αλλά και πού χρησιμοποιείται, κάτι που συμβάλλει θετικά στην κατανόησή της (Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics ,2001).

Όπως διαπιστώθηκε από τα πρώτα δύο φύλλα εργασίας οι μαθητές έχοντας στο νου τους το συμπέρασμα του Θαλή για τους γνώμονες και τις σκιές τους ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στις δραστηριότητες. Κατανόησαν τον ορισμό των όμοιων τριγώνων, συμπλήρωσαν τους λόγους των ομόλογων πλευρών και διέκριναν τα όμοια από τα ίσα τρίγωνα, κάτι που αποτελεί δυσκολία για πολλούς μαθητές (Parastuti et al., 2018, Τσιανάκα, 2017). Ακόμη, στα φύλλα εργασίας που τους δόθηκαν με ιστορικά προβλήματα οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν σωστά την ισότητα των λόγων ώστε να υπολογίσουν το άγνωστο μήκος, δηλαδή εφάρμοσαν το κριτήριο ομοιότητας και την σταθερότητα του λόγου. Εκεί που φάνηκε να δυσκολεύτηκαν αρκετοί ήταν στις ερωτήσεις όπου χρειαζόταν να αναπτύξουν μια λεκτική αιτιολόγηση, όπως στη μέθοδο που ακολούθησε ο Θαλής για την μέτρηση του ύψους της πυραμίδας ή τον τρόπο μέτρησης του μήκους της σήραγγας στο Ευπαλίνειο όρυγμα. Φαίνεται ότι οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο ώστε να εξοικειωθούν με μια τέτοια διαδικασία παραγωγής συλλογισμών.

Από τις απαντήσεις των μαθητών στο τεστ διαπιστώνουμε ότι η ενασχόλησή τους με τα ιστορικά προβλήματα τους βοήθησε σίγουρα στην αφομοίωση της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος με την θεωρία των όμοιων τριγώνων , αφού υπολόγισαν σωστά τα άγνωστα μήκη. Επίσης, κάποιοι από αυτούς κατόρθωσαν, μετά από την εμπειρία τους με την κατασκευή του εργαλείου του Errard, να περιγράψουν σε δύο προβλήματα του τεστ καταστάσεις της καθημερινότητας που στηρίζονται στην ομοιότητα των τριγώνων.

Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης έγινε επίσης με βάση τις αρχές του ΜΧΕ για την γεωμετρία. Οι δραστηριότητες που αποτέλεσαν τον κατάλληλο ΜΧΕ των μαθητών αναπτύχθηκαν έτσι ώστε να περνούν από τις τρεις γενέσεις: την σημειωτική, την εργαλειακή και την λεκτική. Μια αλληλεπίδραση μεταξύ των κατακόρυφων επιπέδων που δημιουργούνται από τις παραπάνω γενέσεις δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να επιλύσουν τα γεωμετρικά προβλήματα που αναφέρονται στην έννοια της ομοιότητας των τριγώνων. Σε κάποιες δραστηριότητες ο χώρος που εργάστηκαν οι μαθητές ήταν η GI ενώ σε κάποιες άλλες η GII ή ακόμα και ο συνδυασμός των παραπάνω γεωμετρικών παραδειγμάτων (GI, GII).

Η πρώτη διδακτική παρέμβαση είχε στόχο την εισαγωγή της νέας έννοιας και το «χτίσιμο» του ορισμού των όμοιων τριγώνων. Οι δύο δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές κινήθηκαν και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα με μια βαρύτητα στην συλλογιστική διάσταση. Με μια ανάγνωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών φάνηκε ότι αρκετοί είχαν αρχικά δυσκολία στην ερμηνεία του σχήματος που τους δόθηκε, δηλαδή δεν έφτασαν στο επιθυμητό αποτέλεσμα της σημειωτικής γένεσης. Αμέσως μετά όμως οι περισσότεροι ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στην εργαλειακή και λεκτική γένεση.

Η δεύτερη διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε και αυτή ώστε να περνάει από τα δύο επίπεδα, το λεκτικό – σημειωτικό και το σημειωτικό – εργαλειακό, με σκοπό την διατύπωση του κριτηρίου ομοιότητας των τριγώνων. Εδώ οι μαθητές κινήθηκαν με επιτυχία μεταξύ των δύο επιπέδων. Η μόνη δυσκολία που αντιμετώπισαν ήταν στην κίνηση στην σημειωτική γένεση όταν τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν δύο όμοια τρίγωνα στον χώρο.

Στην τρίτη διδακτική παρέμβαση έπρεπε οι μαθητές να ξεκινήσουν από την σημειωτική γένεση να κινηθούν προς την λεκτική με μια προσφυγή προς την εργαλειακή. Εδώ απ' ότι φαίνεται οι μισοί περίπου ακολούθησαν αυτήν την πορεία. Για τους υπόλοιπους δεν έγινε η μετάβαση από την σημειωτική γένεση στην λεκτική και κινήθηκαν απευθείας στην εργαλειακή γένεση.

Η τέταρτη διδακτική παρέμβαση κινείται στο σημειωτικό – εργαλειακό επίπεδο με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές το ιστορικό κείμενο και να σχεδιάσουν ένα δικό τους εργαλείο. Πράγματι εδώ με ευκολία ακολούθησαν την πορεία από την σημειωτική γένεση στην εργαλειακή και πάλι στην σημειωτική.

Στην πέμπτη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές ακολουθούν τις οδηγίες του φύλλου εργασίας και χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες κινούνται στο εργαλειακό – σημειωτικό επίπεδο και κατασκευάζουν το ιστορικό εργαλείο του Errard.

Την επόμενη διδακτική ώρα οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο που κατασκεύασαν και να μετρήσουν μια απρόσιτη απόσταση. Αρχικά έπρεπε να δουλέψουν στο εργαλειακό – σημειωτικό επίπεδο και μετά στο σημειωτικό – λεκτικό. Από την «ανάγνωση», των προσωπικών τους χώρων εργασίας φαίνεται ότι δυσκολεύτηκαν αρκετά να δουλέψουν στην σημειωτική γένεση και να περάσουν στη συνέχεια στην λεκτική. Εδώ χρειάστηκε περισσότερος χρόνος για να κατανοήσουν πώς έπρεπε να μεταφέρουν την πραγματική κατάσταση στο χαρτί.

Στην έβδομη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές έλυσαν τρία ιστορικά προβλήματα, τα οποία σχεδιάστηκαν ώστε να υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ και των τριών κατακόρυφων επιπέδων. Εδώ οι περισσότεροι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν περνώντας από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι κάποιοι μαθητές απέτυχαν να κινηθούν στην λεκτική γένεση και να αναπτύξουν έναν συλλογισμό βασισμένο στην θεωρία των όμοιων τριγώνων.

Στο τεστ που δόθηκε στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές κινήθηκαν κυρίως στο σημειωτικό λεκτικό επίπεδο με ροπές προς την εργαλειακή διάσταση. Εδώ παρατηρήθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές δούλεψαν με ευκολία στην σημειωτική και εργαλειακή γένεση δυσκολεύτηκαν όμως να περάσουν στην λεκτική.

Συμπερασματικά και απαντώντας στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα θα λέγαμε ότι οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στις απαιτήσεις ενός νέου γι' αυτούς χώρου εργασίας. Κάποιες φορές φαίνεται να δυσκολεύτηκαν στη σημειωτική γένεση, όπως για παράδειγμα στην μεταφορά της μέτρησης με το εργαλείο του Errard στο χαρτί ή στον σχεδιασμό δύο όμοιων τριγώνων στο χώρο. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο ώστε να μπορέσουν να κατανοήσουν το σχήμα και να το κατασκευάσουν. Κάτι άλλο αξιοσημείωτο, είναι ότι αρκετοί μαθητές απέτυχαν στο κομμάτι των δραστηριοτήτων που απαιτούσε την κίνηση προς την συλλογιστική γένεση. Βέβαια, είναι αλήθεια ότι οι ερωτήσεις που απαιτούν ανάπτυξη συλλογισμών από τους μαθητές είναι κάτι πρωτόγνωρο γι' αυτούς, καθώς οι περισσότερες δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου εξαντλούνται στο εργαλειακό – σημειωτικό επίπεδο.

Εδώ πρέπει να πούμε ότι τα παραπάνω συμπεράσματα έχουν εξαχθεί από ένα πολύ μικρό δείγμα μαθητών. Για να μπορέσουν να γενικευθούν θα ήταν χρήσιμο να γίνει μια μελλοντική έρευνα σε περισσότερους μαθητές της Γ' Γυμνασίου. Επίσης, η παραπάνω διδακτική παρέμβαση θα μπορούσε να γίνει, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, σε μαθητές της Β΄ Λυκείου που διδάσκονται ξανά την έννοια της ομοιότητας των τριγώνων.

7.2.Περιορισμοί

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια χρονιά στην οποία λόγω της πανδημίας τα δεδομένα σχετικά με την δια ζώσης διδασκαλία συνεχώς άλλαζαν. Το γεγονός αυτό επηρέασε την έρευνα από την άποψη του διαθέσιμου χρόνου καθώς έπρεπε να πραγματοποιηθεί την περίοδο που τα σχολεία ήταν ανοιχτά. Επίσης, η πίεση της διδακτέας ύλης της Γ' γυμνασίου περιόρισε αρκετά την ευελιξία στην διαχείριση των απαιτούμενων διδακτικών ωρών για την διδακτική παρέμβαση. Εξάλλου στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών οι ώρες που προτείνονται για την διδασκαλία της ενότητας είναι μόνο έξι και δεν θα μπορούσε η παρέμβαση να υπερβεί κατά πολύ το όριο αυτό.

Ένας ακόμη περιορισμός είναι ότι δεν υπήρξε δυνατότητα να εργαστούν οι μαθητές στο εργαστήριο υπολογιστών, οπότε η ερευνήτρια χειρίστηκε το αρχείο εργασίας. Έτσι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να αξιοποιήσουν στο μέγιστο βαθμό τις δυνατότητες του ψηφιακού εργαλείου ώστε να συμπληρώσουν τα φύλλα εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναστασιάδης, Μ. & Νικολαντωνάκης, Κ. (2014). Ισοπεριμετρικά Σχήματα στο Δημοτικό Σχολείο: Διδασκαλία με την Αξιοποίηση Ιστορικών Πηγών. *Επιστήμες Αγωγής: Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση*, σ. 69-89.

Anfara, V. A., Jr., Brown, K. M. & Mangione, T. L. (2002). Qualitative analysis on stage: Making the research process more public. *Educational Researcher*. *31*(7), 28-38.

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π.,Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. *ΥΠΕΠΘ – ΙΕΠ.*

Barbin E. (2016). L' instrument mathematique comme invention et connaissance en action. *Menon. Online Journal of Educational Research, UOWM.*

Bartolini Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the mathematics classroom. *History in mathematics education: The ICMI study*, 343-351.

Bussi B., Chiappini G., Paola D., Reggiani M., Robbuti O. (2014). Learning Mathematics with tools. *History in mathematics education: The ICMI study*

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in Mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). *New York: Kluwer Academic Publishers.*

Chazan, D. (1988). Similarity: Exploring the Understanding of a Geometric Concept. Technical Report 88-15. *Educational Technology Center, Harvard Graduate e School of Education*

Δ.Ε.Π.Π.Σ – Α.Π.Σ. (2003). ΥΠΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. http://www.pi-schools.gr/programmes/depps/.

Eves H. (1989). Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών έως το 1650. *Εκδόσεις Τροχαλία*

Θωμαΐδης Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους. *Επιστήμες Αγωγής : Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση, σ. 16.*

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fernández, A.T., Villanueva, M.S., n.d. Mejora de una unidad didactica: semejanza geometrica EN 2.º ESO. 78.

Fotiou A. (2015). The first accurate measurement of a mountain's height by Xenagoras at the ancient city Pythion of Olympus in Perrhaebian Tripolitis. *http://www.researchgate.ne/publication/303338690t*

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science &Education*, *10*, 391–408.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. *Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erlbaum, New Jersey,* 631-654

Gualdrón, E., Giménez, J. & Gutierrez, A. (2015). Similarity, Homothety and Thales theorem together for an effective teaching. *Conference: CIEAEM 67*.And *Quaderni Di Ricerca In Didattica (Scienze Matematiche) 25(2),* 143-148.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different paradigms. *Proceedings of CERME. Bellaria, Italy.*

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Jankvist U. T., (2009). 'A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics, 71,* pp. 235 – 261.

Katz V. (2013). Ιστορία των μαθηματικών. Μια εισαγωγή. *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.*

ΚΕΕΠΕΚ (2001). “Ευκλείδη Στοιχεία”. *Τόμος 1, Η Γεωμετρία του επιπέδου. Βιβλία I, II, III, IV, V, VI.*

Kospentaris, G. & Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity proportions and the educational experience. *Mediterranean Congress*, Palermo, 239- 255.

Kuzniak A. Tanguay D., Elia I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education 48:721-737*

Kuzniak, A. (2015). Understanding Geometric Work through its Development and its Transformations. *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (σ. 1-15). *Cham: Springer.*

Kuzniak, A., Nechache A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861-874.

Λεμονίδης Χ. (1990). Ιστορική και επιστημολογική ανάλυση της ομοιοθεσίας. *Τετράδια της διδακτικής Μαθηματικών. Τεύχος 6. Η διδακτική της Γεωμετρίας.*

Lemonidis, Ch. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 30(4),* 2087-2095.

Lodder J. (New Mexico State University), (2010) Proportionality in Similar triangles: A Cross – Cultural Comparison – References. *Convergence. Mathematical A*ssociation of America.

Lutfi, M.K., Jupri, A., (2020). Analysis of junior high school students' spatial ability based on Van Hiele's level of geometrical thinking for the topic of triangle similarity. J. Phys. Conf. Ser. 1521,

Mainali B. (2018). Exploring similarity Using anglegs and Geogebra. *Wisconsin teacher of Mathematics. Issue 2*

Mastrogiannis, A., Kordaki, M. (2006). The concept of similarity in triangles within the context of tools of Cabri-Geometry II. In Proceedings of 4rth Int. Conf. m-ICTE2006, (pp. 641-645), Seville, Spain, 22-25, November, 2006.

Mattheou K., Spyrou P. (2009*).* The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: how the concept of similarity and intuitive knowledge affect student's perception of similar shapes. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon France.*

Merzbach U., Boyer C. (1991). A history of mathematics. *John Wiley & Sons, Inc.*

National Research Council (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. *Washington, DC: The National Academies Press.*

Parastuti, R.H., Usodo, B., Subanti, S. (2018). Student's Error in Writing Mathematical Problem Solving Associated With Corresponding Angles of The Similar Triangles. *Pancaran Pendidikan FKIP. Vol.7 pp. 186-193.*

Piaget, J. & B. Inhelder. (1971): The Child's Conception of Space, *Routledge & Kegan Paul, London , p. 320-374.*

Poon, K.K., Wong, K.L., 2017. Pre-constructed dynamic geometry materials in the classroom – how do they facilitate the learning of 'Similar Triangles'*? Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 48, 735–755*.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 44–55.

Τσιανάκα Β. (2017). Ανάπτυξη εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία της ομοιότητας τριγώνων με εκπαιδευτικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. *Μεταπτυχιακή εργασία*. *Πανεπιστήμιο Πατρών*.

Τσικοπούλου, Σ., Φερεντίνος, Σ. (2018). Υπάρχουν λάθη στα Μαθηματικά που είναι σχεδόν αδύνατο να τα αποφύγουν οι μαθητές: *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών – Επιστημονικών Θεμάτων*, *14*, 32-47.

Τσιμπουράκης Δ. (2002) Μαθηματικές μετρήσεις στην Αρχαία Ελλάδα. *Εκδόσεις Αίολος , Αθήνα.*

Ubah, I., Bansilal, S., 2019. The use of semiotic representations in reasoning about similar triangles in Euclidean geometry. *Pythagoras 40(1), a480*.

Vollrath, H.J. (1977): The understanding of similarity and shape in classifying tests. *Educational Studies in Mathematics* 8, p. 211-224.

Χρυσαφίδης, Κ. (1994). *Βιωματική – Επικοινωνιακή Διδασκαλία. Η εισαγωγή της μεθόδου project στο σχολείο.* Αθήνα: Gutenberg.

https://www.youtube.com/watch?v=Df7JZqO3kus

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (640- 546 π. Χ.) λέγεται ότι αξιοποίησε τις σκιές των γνωμόνων (οι γνώμονες είναι ράβδοι διαφόρων μεγεθών) στην αστρονομία και την γεωμετρία. Η ενασχόλησή του με τους γνώμονες πρέπει να τον είχε οδηγήσει στο εξής συμπέρασμα : 'Πολλαπλάσιοι γνώμονες την ίδια στιγμή της μέρας ρίχνουν ισάκις πολλαπλάσιες σκιές', δηλαδή αν μια ράβδος είναι πολλαπλάσια σε μήκος από την άλλη τότε και οι σκιές τους είναι ομοίως πολλαπλάσιες. Για παράδειγμα αν μια ράβδος είναι διπλάσια της άλλης τότε και η σκιά της πρώτης ράβδου θα είναι διπλάσια της σκιάς της δεύτερης.

Δραστηριότητα 1

Στο αρχείο Ηλιος1.ggb μπορούμε να παρατηρήσουμε το παραπάνω συμπέρασμα του Θαλή.

Στο σχήμα που βλέπετε υπάρχουν δύο γνώμονες, ο ΞΛ και ο ΟΜ καθώς και οι σκιές τους ΛΔ και ΜΔ αντίστοιχα. Τι πρέπει να υπολογίσουμε ώστε να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό του Θαλή;

Στα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΔΛΞ και ΔΜΟ που σχηματίζονται να υπολογίσετε τους λόγους : $\frac{OM}{ΞΛ} =$, $\frac{MΔ}{ΛΔ} =$, $\frac{OΔ}{ΞΔ} =$

Τι παρατηρείτε;

Αν μετακινήσετε το ΞΛ σε μια τυχαία θέση και υπολογίσετε ξανά τους παραπάνω λόγους τότε τι παρατηρείτε;

Τι σχέση έχουν οι γωνίες των δύο τριγώνων μεταξύ τους;

Επομένως, δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ………………………….. και τις αντίστοιχες γωνίες τους………………………. λέγονται όμοια..

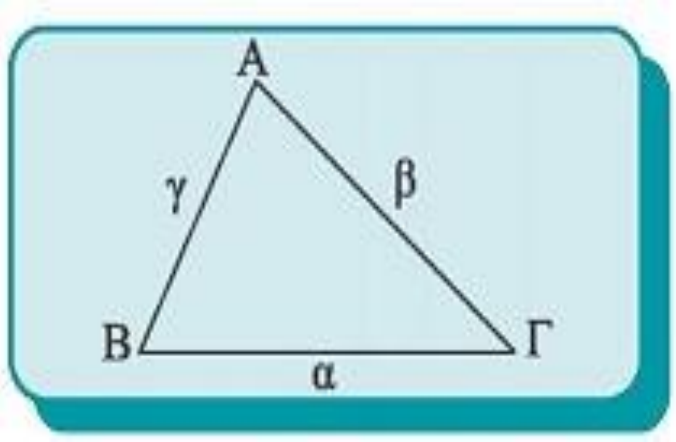
Ο λόγος των πλευρών λέγεται λόγος ομοιότητας.

Δραστηριότητα 2

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ δύο όμοιων και δύο ίσων τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους;

Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ίσο και ένα όμοιο τρίγωνο με το παρακάτω;

Πρώτα περιγράψτε πώς θα κάνετε την κατασκευή με λόγια.



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Δραστηριότητα 1

Νομίζετε ότι είναι απαραίτητο όταν έχουμε δύο όμοια τρίγωνα να περιέχεται το ένα στο άλλο; Πώς μπορεί να είναι η θέση τους στο επίπεδο ή στον χώρο; Μπορείτε να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα;

Δραστηριότητα 2

Στο αρχείο ΗλιοςΙΙ.ggb μπορείτε να βρείτε τους λόγους $\frac{OM}{\Pi N} =$, $\frac{MK}{NI} =$, $\frac{OK}{\Pi I} =$ των πλευρών των τριγώνων ΠΝΙ και ΜΚΟ; Τι ισχύει για τις γωνίες τους;

(Ο Θαλής ήδη γνώριζε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με το έδαφος είναι η ίδια σε όλους τους γνώμονες).

Επομένως τι τρίγωνα είναι τα παραπάνω;

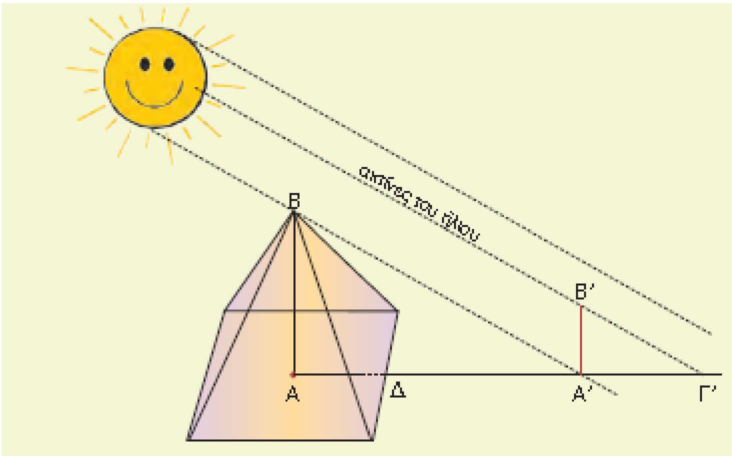
Αν μετακινήσετε το σημείο Κ ή το Π θα συνεχίσουν τα τρίγωνα να είναι όμοια; Γιατί;

Ποια στοιχεία των δύο τριγώνων δεν θα μεταβληθούν ακόμα και αν μετακινήσουμε το Κ ή το Π;

Άρα, μπορούμε να πούμε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους …………… μία προς μία τότε είναι όμοια.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Ο Πλούταρχος στο έργο του «Τῶν ἑπτὰ σοφῶν συμπόσιον», περιγράφει την μέτρηση του ύψους των πυραμίδων της Αιγύπτου από τον Θαλή : «…*Εσένα, πάντως, και για όλα τα άλλα σε θαυμάζει και με τη μέτρηση της πυραμίδας ευχαριστήθηκε πάρα πολύ, που χωρίς πολλά πολλά και δίχως να χρειαστείς κανένα όργανο έστησες μόνο το μπαστούνι σου στην άκρη της σκιάς που έριχνε η πυραμίδα, και αφού με την επαφή της ακτίνας του ήλιου σχηματίσθηκαν δύο τρίγωνα, έδειξες ότι όποιον λόγο είχε η μια σκιά προς την άλλη σκιά, τον ίδιο λόγο είχε και η πυραμίδα προς το μπαστούνι*».



Εξηγήστε στο παραπάνω σχήμα πώς ο Θαλής κατάφερε να μετρήσει το ύψος ΒΑ της πυραμίδας. Ποια τρίγωνα χρησιμοποίησε και τι σχέση έχουν αυτά μεταξύ τους;

Αν η ράβδος είναι 3,5m, ΑΑ΄=320m και Α΄Γ΄=7,5m να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας ΒΑ.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Παρακάτω σας δίνεται ένα απόσπασμα από το έργο του Γάλλου μηχανικού Jean Errard : «*La géométrie et pratique générale d'icelle*» . Στο έργο περιγράφεται η κατασκευή ενός οργάνου για την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων καθώς και πώς γίνονται οι μετρήσεις σε μια επίπεδη επιφάνεια.

Κεφάλαιο I: Από τη μέτρηση ευθείων γραμμών. Και εισαγωγή στη σύνθεση του οργά νου.

Δεδομένου ότι οποιαδήποτε διάσταση αποτελείται από μήκος, ή από μήκος και πλάτος, ή από μήκος, πλάτος και βάθος: θα ξεκινήσουμε από τη διάσταση του μήκους μόνο, και κυρίως των ευθείων γραμμών που είναι το πρώτο, πιο απλό, και από το οποίο εξαρτώνται τα δύο άλλα είδη μέτρησης: και μου φαίνεται ότι είναι κατάλληλο να θέσω πρώτα κάποιο είδος οργάνου, με το οποίο θα μπορούσαμε να έχουμε πιο εύκολα την εισαγωγή στη

Έτσι θα επιθυμούσα η σύνθεση να έχει ως εξής: δύο μπρούτζινοι ράβδοι εντελώς ευθείες να είναι συνδεδεμένοι σε σχήμα διαβήτη ως AB, AC, και με μήκος ο καθένας ενάμιση πόδι περίπου, και με πλάτος μία ίντσα, κινούμενοι και περιστρεφόμενοι στο κέντρο A. Έπειτα στη ράβδο AB (που θα την ονομάζουμε θέση) να υπάρχει μία χάραξη στην οποία θα εφαρμόσει ένας ημιδακτύλιος σημειωμένος εδώ ως D, στον οποίο θα στηρίζεται μια άλλη ράβδος EF (ονομαζόμενη βάση) η οποία θα είναι παρόμοιου μήκους αλλά ίσου πλάτους με τις άλλες, ή λίγο πιο στενή, και η οποία εφαρμόζεται με τον ημιδακτύλιο κατά μήκος της AB, και με τρόπο που στο κέντρο της E (που θα είναι ακριβώς πάνω στην ευθεία γραμμή AB), θα μπορεί να κλείνει και να κάνει την γωνία που θα θέλουμε με τη ράβδο AB, κατά μήκος και ενώνοντας τις επιφάνειες των ράβδων της θέσης και της κινητής ράβδου AC, και στην οποία ωστόσο θα μπορεί να είναι σταθεροποιημένη μέσω κάποιας βίδας εφαρμοσμένης στον λεγόμενο ημιδακτύλιο. Όντας λοιπόν έτσι κατασκευασμένο, και οι διόπτρες όντας εστιασμένες στα σημεία ABC (όπως συνηθίζουμε να κάνουμε σε όλα τα όργανα) κάθε μία από τις ονομαζόμενες τρεις ράβδους θα είναι χωρισμένη σε 300 ίσα μέρη ή σε άλλο αριθμό που θα θέλαμε.

Κεφάλαιο ΙΙ: Πως μετρούνται οι μακρινές ευθείες γραμμές σε μια επίπεδη επιφάνεια

Για να εισέλθουμε λοιπόν στη μέτρηση των ευθείων γραμμών πρέπει να είναι δεδομένο ότι κάποιες είναι ολοκληρωτικά προσβάσιμες, όπως αυτές τις οποίες μπορούμε να μετρήσουμε ολόκληρες και κατά μήκος μηχανικά και χωρίς κανένα εμπόδιο. Άλλες είναι προσβάσιμες μόνο κατά ένα μέρος, όπως όταν αγγίζουμε το ένα άκρο αυτής, και δεν μας επιτρέπεται να περάσουμε στην άλλη. Και άλλες είναι μη προσβάσιμες ολοκληρωτικά, όπως όταν είναι απομακρυσμένες από εμάς με τρόπο που να μη μας είναι δυνατό να τις φτάσουμε ή να προσεγγίσουμε.
Έτσι η μέτρηση των τελευταίων εξαρτάται από τη μέτρηση των ημι-προσβάσιμων, και η μέτρηση των ημι-προσβάσιμων εξαρτάται από τη μέτρηση των ολοκληρωτικά προσβάσιμων. [...]. Και αυτό είναι που θα παρουσιαστεί εύκολα από εδώ και πέρα.

1. Ποιο είναι το πρόβλημα που οδήγησε στην ανάγκη κατασκευής του παραπάνω οργάνου;

2. Μπορείτε να σχεδιάσετε το όργανο που περιγράφετε παραπάνω και να σκεφτείτε πώς περίπου θα δουλεύει;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Οδηγίες για την κατασκευή του εργαλείου μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων Errard.

Δραστηριότητα

Ακολουθείστε τις παρακάτω οδηγίες και προσπαθήστε να κατασκευάσετε το εργαλείο του Errard.

Πριν ξεκινήσετε την κατασκευή σιγουρευτείτε ότι έχετε τα απαιτούμενα υλικά.

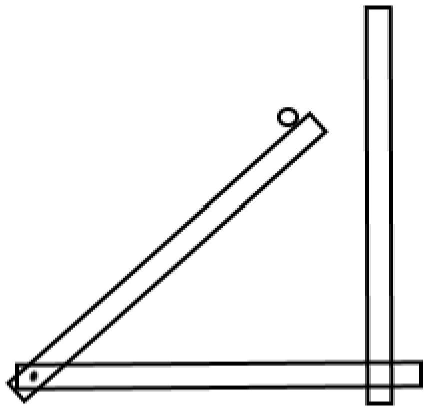
Τα υλικά που θα χρειαστείτε είναι:

- Τρεις ράβδοι των 15cm η καθεμία.
- Ένα πλαστικό σκόπευτρο.
- Μία πινέζα.
- Μία βίδα με ένα παξιμάδι
- Έναν αριθμημένο χάρακα.
- Ένα ‘μανταλάκι’ για χαρτιά.

Βήματα κατασκευής

1. Ξεκινήστε αριθμώντας με την βοήθεια του χάρακα τις δύο από τις τρεις ράβδους.
2. Συνδέστε χρησιμοποιώντας την βίδα με το παξιμάδι την μία από τις αριθμημένες ράβδους με αυτήν που δεν έχετε αριθμήσει. Η σύνδεση θα γίνει στην αρχή της κάθε ράβδου. Για να τρυπήσετε το μακετόχαρτο χρησιμοποιείστε το μολύβι σας.
3. Στο τέλος της μη αριθμημένης ράβδου στερεώστε χρησιμοποιώντας την πινέζα το σκόπευτρο.
4. Η τρίτη ράβδος θα τοποθετηθεί κάθετα στην αριθμημένη ράβδο που έχετε ήδη συνδέσει ,κατά την διάρκεια της μέτρησης. Για να την στερεώσετε θα χρησιμοποιήσετε το μανταλάκι.

Το εργαλείο που θα κατασκευάσετε θα μοιάζει όπως το παρακάτω.



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6

Είμαστε έτοιμοι να μετρήσουμε απρόσιτες αποστάσεις με το εργαλείο του Errard. Η κάθε ομάδα θα διαλέξει για να μετρήσει ένα απρόσιτο ύψος στο γυμναστήριο του σχολείου.

Πριν όμως, το κάθε μέλος της ομάδας θα πρέπει να αναλάβει έναν από τους παρακάτω ρόλους:

1. Αυτός που θα κάνει την σκόπευση.
2. Ο υπεύθυνος για την διατήρηση της καθετότητας του εργαλείου.
3. Αυτός που θα κάνει τις μετρήσεις με την μετροταινία αλλά και επάνω στο εργαλείο.
4. Αυτός που θα καταγράφει τα δεδομένα στο φύλλο εργασίας.

Αφού διαλέξετε το ύψος που θα μετρήσετε να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα και να τοποθετήσετε σε αυτό τα δεδομένα από τις μετρήσεις σας.

Να περιγράψετε πώς θα γίνει ο υπολογισμός του ύψους αυτού τελικά και μετά να το υπολογίσετε.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 7

Κάποια ιστορικά προβλήματα……….

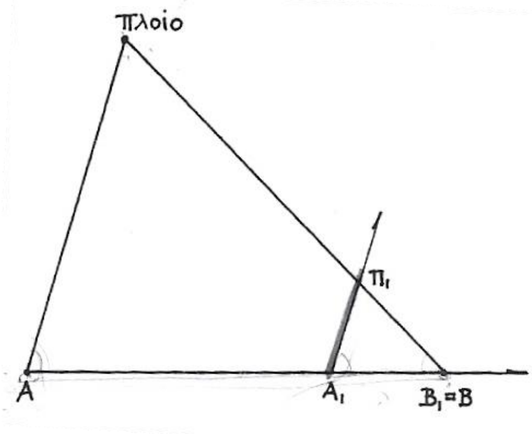
1. *Μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι από τον Θαλή τον Μιλήσιο (640-546 π.Χ.).*

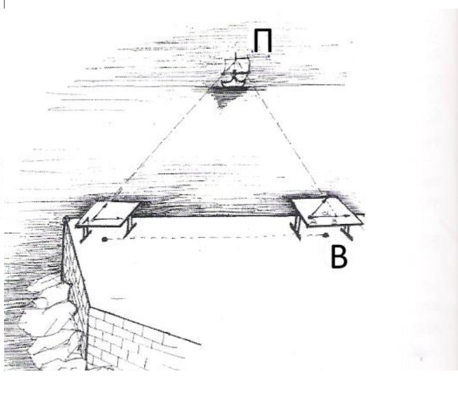
Ο Θαλής κατάφερε να μετρήσει την απόσταση ενός πλοίου από το λιμάνι κάνοντας μετρήσεις από δύο σημεία παρατήρησης του πλοίου από το λιμάνι (Τσιμπουράκης, 2002). Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η μέθοδος που ακολούθησε ο Θαλής.

Από τα σημεία παρατήρησης Α και Β έκανε σκοπεύσεις στις διευθύνσεις Α-Π,Α-Β και Β-Π. Έτσι σχηματίστηκε ένα νοητό τρίγωνο ΑΠΒ. Μετά πήρε στην διεύθυνση ΑΒ ένα μήκος $Α_1Β_1$=1/2000ΑΒ. Κατόπιν, σχημάτισε το τρίγωνο $Α_1Π_1Β$ με $Α_1Π_1$//ΑΠ.

Α) Μπορείτε να εξηγήσετε πώς έγινε από εδώ και πέρα ο υπολογισμός της απόστασης ΑΠ;

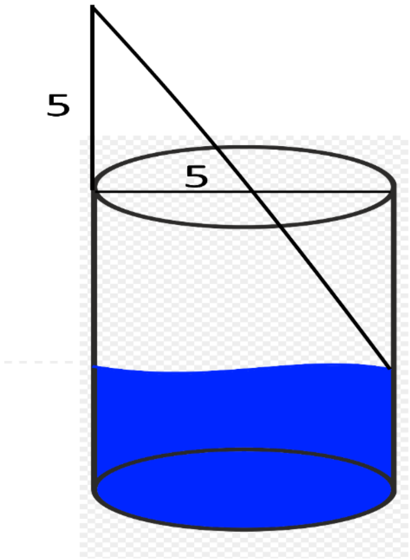
Β) Βρείτε την απόσταση ΑΠ χρησιμοποιώντας στην απόσταση $Α_1Β_1$ την μέτρηση που θα κάνετε οι ίδιοι στο σχήμα.





2. *Μέτρηση του βάθους πηγαδιού. Ένα από τα προβλήματα χωρομέτρησης που περιλαμβάνονται στο κινέζικο βιβλίο Jiuzhang suanshu (Katz, 2013)*

Ζητούμε το βάθος (μετρώντας από την επιφάνεια του νερού) ενός βαθιού πηγαδιού που η διάμετρός του είναι 5 πόδες. Εάν στο χείλος του πηγαδιού υψώσουμε μία ράβδο ύψους 5 ποδών, η γραμμή παρατήρησης από την κορυφή της ράβδου ως την επιφάνεια του νερού περνά από ένα σημείο που απέχει από τον πόδα της ράβδου στο χείλος του πηγαδιού 2,1 πόδια. Ποιο είναι το βάθος του πηγαδιού;



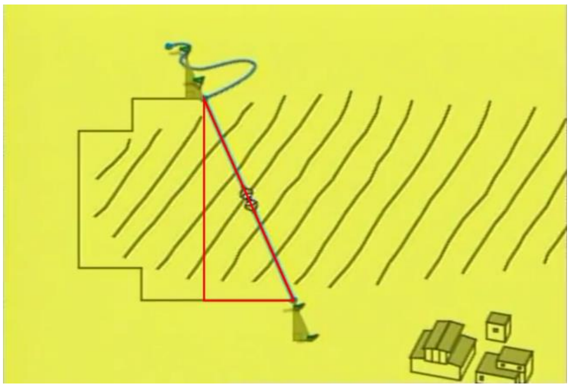
3. *Το Ευπαλίνειο Όρυγμα.*

Μια εφαρμογή της γεωμετρίας στην τοπογραφία είναι η χάραξη της διαδρομής του υδραγωγείου της Σάμου. Η κατασκευή δηλαδή ενός υπόγειου αγωγού που οδηγούσε το νερό από μια πηγή στην πόλη της Σάμου (Τσιμπουράκης, 2002*). Η κατασκευή έγινε από τον Ευπαλίνο κατά το διάστημα 530-520 π. Χ.*

Αφού παρακολουθήσετε το βίντεο απαντήστε:

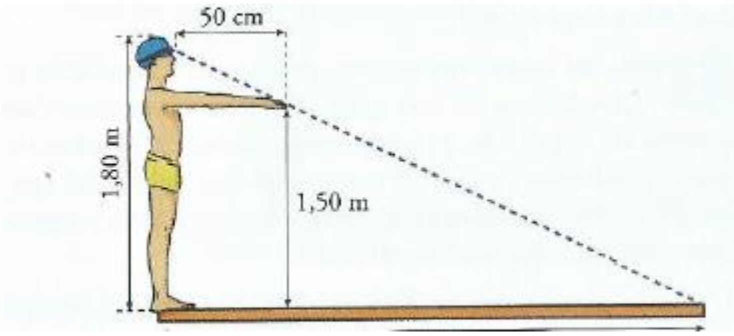
Α) Ποιο ήταν το πρόβλημα που αντιμετώπιζε το νησί της Σάμου στα χρόνια του τύραννου Πολυκράτη; Ποια ήταν η ανάγκη που τους οδήγησε στην κατασκευή του τούνελ;

Β) Πώς κατάφερε ο Ευπαλίνος να μετρήσει το μήκος του τούνελ; (κοιτάξτε το σχήμα που ακολουθεί).

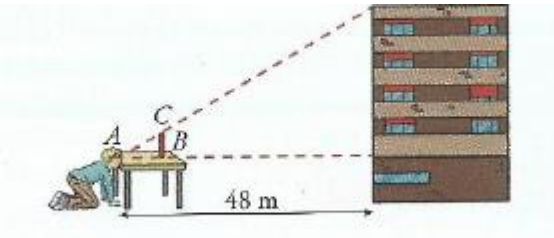


ΤΕΣΤ

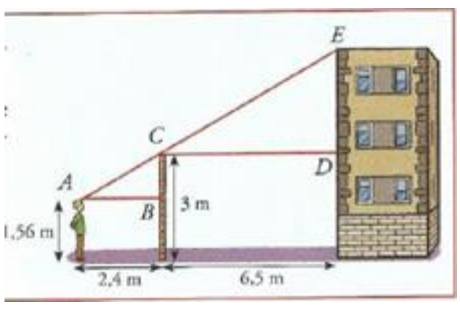
1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του βατήρα.



2. Να περιγράψετε πώς κάποιος θα μπορούσε να μετρήσει το ύψος του κτιρίου και μετά να το υπολογίσετε. Δίνονται: AB=80cm και BC=52cm, CB=50cm.

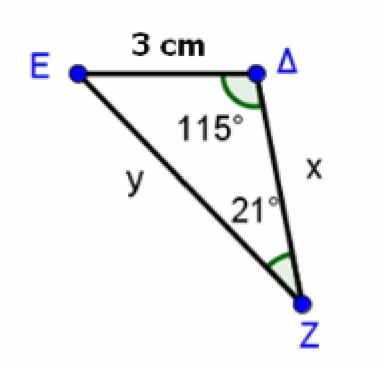


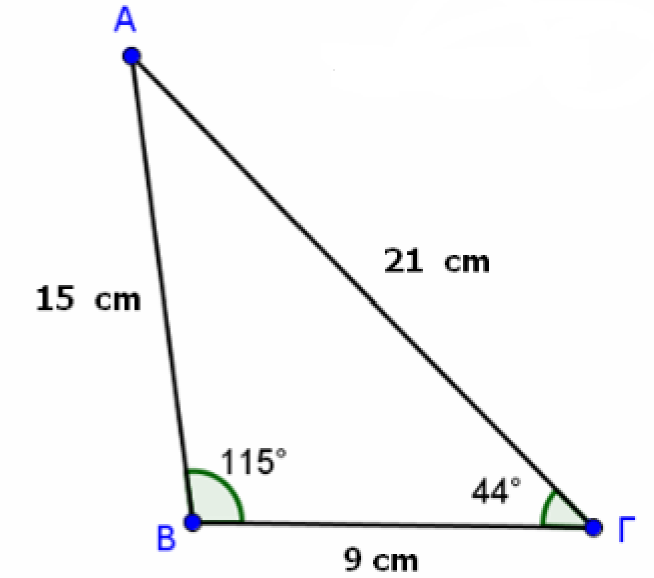
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του ύψους ενός κτιρίου. Να τον περιγράψετε και μετά να το υπολογίσετε.



4. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ στο παρακάτω σχήμα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   Να υπολογίσετε τα χ, y.


3 cm
E
Δ
115°
x
y
21°
Z


A
21 cm
15 cm
115°
44°
B
Γ
9 cm