ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' Ηλικιακού κύκλου (13-18 χρονών)

Διπλωματική Εργασία

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων 60 ετών

του

Αθανάσιου Μάγκου, Α.Ε.Μ. 923

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Εξεταστές:

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, Ιούνιος 2021

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για την καθοδήγηση και την βοήθεια που μου παρέσχε καθ’ όλη τη διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης τον Χαράλαμπο Λεμονίδη και Κωνσταντίνο Χρήστου για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Στον δρ. Ιωάννη Θωμαΐδη οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για όλη τη συμβολή του στην εκπόνηση της εργασίας. Τον ευχαριστώ ειλικρινά για όλες τις γόνιμες συνομιλίες μας, τη βοήθεια σε θέματα βιβλιογραφίας και το εν γένει ενδιαφέρον του.

Ευχαριστώ τον φίλο μου Θεόφιλο Τραπεζανλίδη, δίχως την παρότρυνση του οποίου δεν θα είχε ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία.

Τέλος, οφείλω ευχαριστίες στα μέλη του διαδικτυακού φόρουμ www.mathematica.gr και ιδιαιτέρως στους Αλέξανδρο Κουτσουρίδη, Ιωάννη Θωμαΐδη και Γιώργο Ρίζο, καθώς η ιδέα της συγγραφής της παρούσας εργασίας προήλθε από συζητήσεις που έλαβαν χώρα στον ιστότοπο αυτό.

School is an ill-fated utopia in the heart of society.

Yves Chevallard

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσα από διάφορα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων έξι δεκαετιών. Με αφετηρία την έννοια του διδακτικού μετασχηματισμού του Yves Chevallard, εξετάζουμε αρχικά την ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, μέχρι τις σύγχρονες αξιωματικές θεωρίες και παρατηρούμε πώς αυτές επηρέασαν τη συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων, με σημείο αναφοράς την πρόταση που αναφέρεται στη τομή δύο κύκλων στο επίπεδο. Τέλος, καταθέτουμε μια πρόταση ως προς τον τρόπο παρουσίασης σε σχολικά εγχειρίδια, της απόδειξης της ικανής και αναγκαίας συνθήκης, ώστε δύο κύκλοι να τέμνονται.

Λέξεις-κλειδιά: διδακτικός μετασχηματισμός, γεωμετρία, απόδειξη

Abstract

The present dissertation examines the teaching of Euclidean Geometry in secondary education, through various textbooks of the past six decades. Starting from the concept of didactic transformation, introduced by Yves Chevallard, we first examine the historical evolution of Geometry from Euclid's "Elements" to modern axiomatic systems and observe how they influenced the writing of school textbooks. Throughout we use as a reference, the theorem regarding the intersection of two circles in the plane. Finally, we submit a proposal on how it could be presented in school textbooks, the proof of the necessary and sufficient condition, in order that two circles intersect.

Keywords: didactic transposition, geometry, proof

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η Γεωμετρία, πριν ακόμα φτάσει να αποτελέσει έναν αυτοτελή επιστημονικό κλάδο, δεν ήταν παρά ένα σύνολο εμπειρικών κανόνων τους οποίους χρησιμοποιούσαν αρχαίοι πολιτισμοί όπως οι Αιγύπτιοι, με σκοπό την εκπλήρωση καθημερινών πρακτικών αναγκών, όπως η άρδευση, η μέτρηση της γης και η κατασκευή κτισμάτων. Στη συνέχεια, οι κανόνες αυτοί εμπλουτίστηκαν και εξελίχθηκαν από τους αρχαίους έλληνες κατά την περίοδο 700 π.Χ.-300 π.Χ με σημαντικές μορφές της περιόδου αυτής να αποτελούν ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος. Ωστόσο, μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές των αρχαίων ελλήνων στα Μαθηματικά και γενικότερα στην επιστήμη, ήταν η απόπειρα να δομηθεί όλη η προϋπάρχουσα γεωμετρική γνώση σε ένα στέρεο λογικό οικοδόμημα με βάση μια σειρά από κοινές παραδοχές, που σήμερα ονομάζουμε αξιώματα. Πατέρας αυτού του εγχειρήματος ήταν ο Ευκλείδης με το έργο του «Στοιχεία». Ένα έργο που για μια περίοδο περίπου 2000 ετών ήταν συνώνυμο με τα Μαθηματικά και που, αν και γράφτηκε περίπου το 300 π.Χ., εξακολουθούσε να αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο μέχρι και τον 20^{ο} αιώνα.

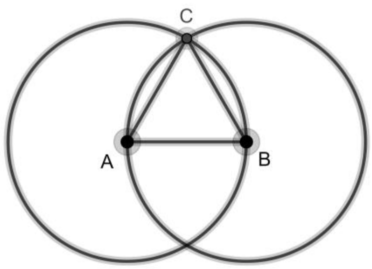
Σήμερα η διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι καθιερωμένη σε όλο τον κόσμο, καθώς είναι κοινή πεποίθηση ότι μέσα από αυτήν μπορεί εύστοχα να διδαχθεί η θεμελιώδης έννοια της απόδειξης, και μάλιστα με χρήση ενός αξιωματικού συστήματος. Βέβαια, αν και τα «Στοιχεία» δεν αποτελούν πλέον σχεδόν πουθενά διδακτικό εγχειρίδιο Γεωμετρίας, η δομή ενός τέτοιου μαθήματος ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό τη μορφή των «Στοιχείων». Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι στα «Στοιχεία» δεν εντοπίζονται προβληματικά σημεία, πράγμα το οποίο αν και άργησε να φανεί, έγινε φανερό κατά τον 19^{ο} αιώνα, κυρίως μέσω της ενασχόλησης των μελετητών με το αίτημα των παραλλήλων.

Το πρώτο βιβλίο του έργου του Ευκλείδη ξεκινάει με την παράθεση 23 ορισμών (Όροι), 5 αιτημάτων και 5 αξιωμάτων (Κοιναὶ Ἔννοιαι). Στη συνέχεια παρατίθενται 48 Προτάσεις, η πρώτη εκ των οποίων αναφέρεται στην κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου με δεδομένη πλευρά ΑΒ:

Πρόταση Ι.1

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Η κατασκευή γίνεται σε τρία βήματα:



1. Γράφουμε κύκλο με κέντρο A και ακτίνα AB.
2. Γράφουμε κύκλο με κέντρο B και ακτίνα AB.
3. Φέρουμε τα τμήματα από τα σημεία A,B προς το σημείο τομής C των κύκλων

Επειδή $AB = BC = AC$ ως ακτίνες ίσων κύκλων, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

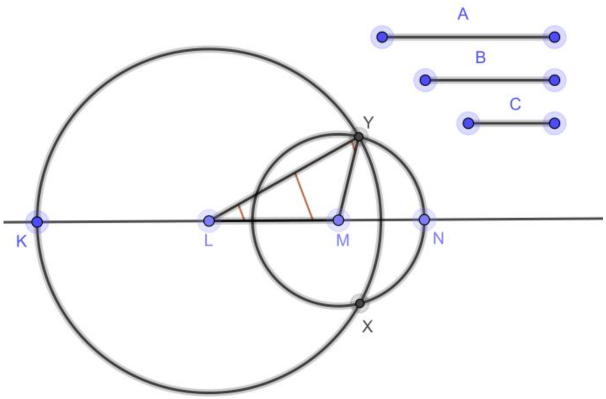
Παρατηρώντας προσεκτικότερα την κατασκευή αυτή θα διαπιστώσουμε ότι ο Ευκλείδης ισχυρίζεται ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται, χωρίς να έχει αναφέρει προηγουμένως αξίωμα σχετικά με την τομή κύκλων, οπότε η ύπαρξη του σημείου C τίθεται εν αμφιβόλω.

Η παραπάνω προβληματική κατάσταση, η διολίσθηση στην διαίσθηση και την εποπτεία, εμφανίζεται σε πολλά σημεία των «Στοιχείων» και ως εκ τούτου ο Ευκλείδης δεν τηρεί πάντοτε την αυστηρή αξιωματική μέθοδο, όπως θα περίμενε κανείς. Είναι αναμενόμενο, η ίδια προβληματική κατάσταση να παρουσιάζεται και στην πρόταση, η οποία αναφέρεται στην κατασκευή τριγώνου με πλευρές τρία δοθέντα τμήματα:

Πρόταση Ι.22

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ας είναι A, B, C τα δοθέντα τμήματα. Υποθέτουμε ότι $A + B > C, B + C > A, C + A > B$. Θεωρούμε ευθεία (ε) και πάνω σε αυτή λαμβάνουμε διαδοχικά τα σημεία K, L, M, N, ώστε $KL = A$, $LM = B$, $MN = C$.



Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο L και ακτίνα LK και τον κύκλο με κέντρο M και ακτίνα MN. Οι κύκλοι τέμνονται στα σημεία X, Y. Το ζητούμενο τρίγωνο είναι το LMY.

Όπως και στην προηγούμενη πρόταση, έτσι και εδώ, ο Ευκλείδης δεν αιτιολογεί γιατί οι κύκλοι της κατασκευής τέμνονται. Εξάλλου, αν και στην πρόταση υπάρχει η προϋπόθεση αυτού που αποκαλούμε σήμερα συνθήκη της τριγωνικής ανισότητας, ο Ευκλείδης δεν αποδεικνύει ότι η συνθήκη αυτή, εκτός από αναγκαία, είναι και ικανή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η παρατήρηση είναι κεντρικής σημασίας όταν θα αναφερθούμε στη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται, ώστε δύο κύκλοι με ακτίνες R, r να τέμνονται.

Από τις παραπάνω προτάσεις γίνεται φανερό ότι τελικά η αξιωματική θεωρία στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη δεν ανταποκρίνεται πλήρως στα σημερινά κριτήρια λογικής αυστηρότητας μιας αξιωματικής θεωρίας. Οι αδυναμίες της ευκλείδειας αξιωματικής θεωρίας αν και είχαν επισημανθεί από την αρχαιότητα, λ.χ. από τον Πρόκλο, εξετάστηκαν συστηματικά κατά τον $19^{ο}$ αιώνα, όταν αρκετοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τα λογικά θεμέλια της Γεωμετρίας. Τότε έγινε φανερή η ανάγκη για μια καινούρια αξιωματική θεωρία η οποία θα πληρούσε τα σύγχρονα κριτήρια αυστηρότητας . Η λύση στο πρόβλημα αυτό δόθηκε το 1899 από τον David Hilbert στο έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie). Με τα Θεμέλιά του ο Hilbert ήταν ο πρώτος που πέτυχε να θέσει μια στέρεα βάση, πάνω στην οποία οικοδομείται η Γεωμετρία. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι στη συνέχεια υπήρξαν και άλλοι μαθηματικοί που πέτυχαν διαφορετικού είδους αξιωματικές θεμελιώσεις της γεωμετρίας, όπως ο George D. Birkhoff, του οποίου τα αξιώματα βασίζονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και θα τα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Δεδομένου ότι η Γεωμετρία αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας στο σχολείο και μάλιστα, σε πολλές χώρες, στις τελευταίες τάξεις του σχολείου διδάσκεται ως παράδειγμα αξιωματικής θεωρίας, τίθεται το ζήτημα ποια προσέγγιση είναι η καταλληλότερη από διδακτικής άποψης. Με άλλα λόγια, η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση βρίσκεται αντιμέτωπη με το πρόβλημα να συμβιβάσει τη λογική αυστηρότητα με τα στοιχεία της εποπτείας που είναι αναγκαία για την κατανόηση των θεωρητικών προτάσεων και αποδείξεων από τους μαθητές. Το πρόβλημα αυτό εντάσσεται στο θεωρητικό πλαίσιο του «διδακτικού μετασχηματισμού» της επιστημονικής γνώσης σε διδάξιμη και έχει μελετηθεί σε πολλές έρευνες της διδακτικής των Μαθηματικών.

Σε διάφορες χώρες της Ευρώπης έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί πολλά μοντέλα. Άλλα ήταν περισσότερο συνεπή με την μαθηματική αυστηρότητα, ενώ άλλα έδιναν μεγαλύτερη σημασία στην εποπτεία και τη διαισθητική κατανόηση. Στην Ελλάδα η κατάσταση είναι παρόμοια. Τα τελευταία εξήντα χρόνια έχουν περάσει από τις αίθουσες του δημόσιου σχολείου έξι διαφορετικά διδακτικά εγχειρίδια Γεωμετρίας, τα οποία παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους.

Στην παρούσα εργασία, αφού αναλύσουμε συγκεκριμένα προβληματικά σημεία στα «Στοιχεία» θα εξετάσουμε ένα ειδικό, αλλά θεμελιακό πρόβλημα, εκείνο της συνθήκης τομής δύο κύκλων στο επίπεδο. Αρχικά θα εξετάσουμε το πρόβλημα από μαθηματική σκοπιά, ενώ στη συνέχεια θα το εξετάσουμε υπό το πρίσμα διαφορετικών αξιωματικών προσεγγίσεων, οι οποίες έχουν υιοθετηθεί σε σχολικά εγχειρίδια. Τέτοιες προσεγγίσεις είναι του Aleksei Pogorelov, αλλά και παραλλαγές των θεμελίων του Hilbert.

Όπως είναι αναμενόμενο, ανάλογα με την αφετηρία από την οποία ξεκινάει ένα διδακτικό εγχειρίδιο και σε συνδυασμό με τους στόχους του εκάστοτε αναλυτικού προγράμματος διδασκαλίας, η κατανόηση της Γεωμετρίας εκ μέρους των μαθητών, αλλά και η διαδρομή της διδασκαλίας εκ μέρους του διδάσκοντος θα αποδειχθεί μερικές φορές απρόβλεπτη. Με βάση τα παραπάνω, στόχος της εργασίας αυτής είναι να απαντηθούν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1) Πώς διαχειρίζονται τα προγράμματα σπουδών και τα διδακτικά εγχειρίδια[1] το συνδυασμό λογικής αυστηρότητας και εποπτείας κατά το διδακτικό μετασχηματισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

2) Ποια προβλήματα, στο ζήτημα του συνδυασμού λογικής αυστηρότητας και εποπτείας, εντοπίζονται στα διδακτικά εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας τα τελευταία εξήντα χρόνια;

3) Ως προς την επιλογή της παρουσίασής του, ποιος αποτελεί έναν ρεαλιστικό τρόπο διδασκαλίας της Γεωμετρίας, ο οποίος δεν παραβιάζει την λογική αυστηρότητα από την οποία διέπεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία;

[1] Με τον όρο διδακτικό εγχειρίδιο εννοούμε βασικά το μοναδικό εγκεκριμένο βιβλίο που παρέχει η πολιτεία στους μαθητές. Παράλληλα, ο ορός αυτός θα αναφέρεται στη συνέχεια και στα πολυάριθμα βιβλία που κυκλοφορούν ως «εξωσχολικά βοηθήματα». Ιδιαίτερα κατά τις δεκαετίες 1960-1980, δηλαδή την περίοδο κατά την οποία η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελούσε εξεταζόμενο μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. ορισμένα από αυτά ήταν πολύ υψηλού επιπέδου και για τις ανάγκες της έρευνας θα γίνει ανάλυση ορισμένων από αυτά στη συνέχεια

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Η Ευκλείδεια Γεωμετρία από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας έχει αποτελέσει εδώ και δεκαετίες αντικείμενο εξέτασης από πολλούς ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Εκτός από μερικά χαρακτηριστικά που συναντάμε και σε άλλες ενότητες των Μαθηματικών, όπως είναι η αφηρημένη σκέψη, η αποδεικτική διαδικασία, η κατανόηση των ορισμών κ.α., η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει την ιδιαιτερότητα να είναι η μόνη αξιωματική θεωρία με την οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές και πολλές μελέτες έχουν αναδείξει τις δυσκολίες που συναντάνε οι μαθητές με την κατανόησή της.

Σύμφωνα με τις Παπαγεωργίου και Τζεκάκη (2017) «Οι μαθητές στην αρχή του Λυκείου δεν εμφανίζονται να κατανοούν τη φύση και το ρόλο των ορισμών και των αξιωμάτων, στοιχεία που είναι αναντίρρητα απαραίτητα για την απόκτηση επίγνωσης του περιεχομένου και της λειτουργίας των Μαθηματικών όπως και για την ανάπτυξη μαθηματικού τρόπου απόδειξης και επεξεργασίας». Στην εργασία τους, εξετάζοντας 43 μαθητές της Α' Λυκείου, διαπιστώνουν ότι μόλις πέντε από αυτούς ήταν σε θέση να κατανοήσουν τι είναι το αξίωμα.

Η παραπάνω διαπίστωση έρχεται να επιβεβαιώσει αντίστοιχα συμπεράσματα πολλών εμπειρικών ερευνών. Όπως αναφέρει ο Θωμαΐδης (1996), η κριτική που έχει ασκηθεί από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών στην παραδοσιακή διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι σχεδόν κατηγορηματική: Ελάχιστοι μόνο μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την παραγωγική δομή του μαθήματος, δηλαδή τον ρόλο των αξιωμάτων, των αφηρημένων ορισμών και των θεωρημάτων, να διακρίνουν ανάμεσα σε ικανές και αναγκαίες συνθήκες, να ταξινομήσουν ιεραρχικά τα γεωμετρικά σχήματα σύμφωνα με τις ιδιότητές τους και ιδιαίτερα, να επινοήσουν αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων κατασκευάζοντας μια ακολουθία συλλογισμών από τα δεδομένα προς τα ζητούμενα.

Ειδικότερα σύμφωνα με τους Balacheff (1987), Freudenthal (1971), Schoenfeld (1986), στην παραδοσιακή προσέγγιση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, η διαδικασία της επαγωγικής ανακάλυψης, στη μορφή υποθέσεων, είχε σχεδόν παραμεληθεί. Αυτό ήταν αποτέλεσμα της κλασικής διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως τυπικού παραδείγματος ενός παραγωγικού συστήματος, μια αντίληψη η οποία έχει υποστεί έντονη κριτική. Μάλιστα, σύμφωνα με τον Freudenthal, η παραγωγική δομή της παραδοσιακής Γεωμετρίας ποτέ δεν είχε μια πειστική διδακτική επιτυχία… Απέτυχε γιατί ο παραγωγικός χαρακτήρας της δεν μπορούσε να επινοηθεί εκ νέου από τον μαθητή, αλλά μόνο να επιβληθεί σε αυτόν (Θωμαϊδης, 1996).

Μια άλλη εξήγηση του φαινομένου της αποτυχίας της κατανόησης της γεωμετρικής αξιωματικής θεωρίας δόθηκε με βάση την κατάταξη της γεωμετρικής σκέψης στα επίπεδα van Hiele. Σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele, μπορούμε να κατατάξουμε τη γεωμετρική σκέψη στα ακόλουθα πέντε επίπεδα:

1ο επίπεδο: Αναγνώριση ή σκέψη μέσω οπτικών εικόνων.

Ο μαθητής αναγνωρίζει τις γεωμετρικές έννοιες με όρους της φυσικής τους εμφάνισης. Τα σχήματα αναγνωρίζονται από το περίγραμμά τους ως ενιαίο σύνολο, αλλά όχι από τις ιδιότητές τους.

2ο επίπεδο: Ανάλυση.

Ο μαθητής είναι σε θέση να αναλύει τις ιδιότητες των σχημάτων και μπορεί να αναγνωρίσει σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους.

3ο επίπεδο: Διάταξη.

Ο μαθητής μπορεί να κατατάσσει λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, αλλά δεν είναι σε θέση να ενεργεί στο πλαίσιο ενός μαθηματικού συστήματος.

Μπορεί να ακολουθήσει τον απλό παραγωγικό συλλογισμό, αλλά χωρίς να μπορεί να κατανοήσει μια πλήρη απόδειξη.

4ο επίπεδο: Παραγωγή (απόδειξη)

Ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και το ρόλο των διαφορετικών στοιχείων στην παραγωγική δομή. Έτσι, οι αποδείξεις μπορούν να επινοηθούν εκ νέου από τον μαθητή ή τουλάχιστον να γίνουν πλήρως κατανοητές.

5ο επίπεδο: Αυστηρότητα

Ο μαθητής είναι σε θέση να εργάζεται σε διάφορα αξιωματικά συστήματα και είναι σε θέση να κάνει αφηρημένες αποδείξεις. Για παράδειγμα, είναι σε θέση να κατανοήσει μη-ευκλείδειες Γεωμετρίες. Δεδομένου ότι στο επίπεδο αυτό είναι απαραίτητη η αφαιρετική ικανότητα υψηλού επιπέδου, στο επίπεδο αυτό δεν κατατάσσονται μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Σύμφωνα με τα επίπεδα αυτά, θα περιμέναμε οι μαθητές των ελληνικών σχολείων που πρόκειται να διδαχθούν την Ευκλείδεια Γεωμετρία αξιωματικά, για να μπορέσουν να αντεπεξέλθουν, να έχουν κατακτήσει το τέταρτο επίπεδο. Ωστόσο, όπως καταδεικνύουν διάφορες έρευνες, η κατάσταση είναι μάλλον αποκαρδιωτική. Αυτό που παρατηρείται στην πραγματικότητα είναι ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών φτάνει στην Α' Λυκείου χωρίς να διαθέτει το γνωστικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Όμως, ακόμα και μετά από ένα χρόνο διδασκαλίας, μόνο το ένα τέταρτο περίπου των μαθητών είναι σε θέση να διατυπώσει ορθές αποδείξεις απλών γεωμετρικών προτάσεων (Ζάχος, 2000).
Όπως παρατηρεί ο Θωμαΐδης (1998)
«(α) Οι μαθητές αρκούνται στην οπτική αντίληψη (δηλαδή στηρίζονται στο σχήμα και όχι σε γεωμετρικές προτάσεις που συνδέονται με ζητούμενα το προβλήματος)
(β) Οι δυνατότητες δράσης τους (μεθοδολογία) είναι σχετικά χαμηλές

(γ) Οι δυνατότητες σωστής διατύπωσης και επικύρωσης αφορούν μικρό σχετικά μέρος από το σύνολο των μαθητών
(δ) Συγχέουν έννοιες κατάλληλες για άλλο τύπο προβλημάτων που δεν λειτουργούν στη συγκεκριμένη περίπτωση και τις χρησιμοποιούν απλά και μόνο για να δώσουν μια απάντηση. Πρόκειται για το γνωστό φαινόμενο της 'παράλογης' μαθηματικής συμπεριφοράς, που επιζητά 'πάση θυσία' μια απάντηση…»
Επίσης, όπως επισημαίνει η Hershkowitz (1990), υπάρχει μια συμφωνία ότι η αποτυχία των μαθητών να επινοήσουν εκ νέου αποδείξεις (4ο επίπεδο van Hiele), ή ακόμα μεγαλύτερα τμήματα ενός παραγωγικού συστήματος, έχει δύο βασικές αιτίες: α) Το λογικό σύστημα με τον τρόπο που συνήθως διδάσκεται δίνει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και αποτυγχάνει να προκαλέσει στον μαθητή εκείνες τις διαδικασίες με τις οποίες γίνονται οι μαθηματικές ανακαλύψεις και β) ο μαθητής δεν έχει τη λογική ωριμότητα για αποδείξεις ή τη συναίσθηση της αναγκαιότητας των αποδείξεων.

Παρόμοιες διαπιστώσεις κάνει και ο Tall (1992) βασιζόμενος σε μια μεγάλη έρευνα της Senk (1985). Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 1520 μαθητές, κατά μέσο όρο της 10ης τάξης (αντίστοιχη της ελληνικής Β' Λυκείου), από εβδομήντα τέσσερα διαφορετικά τμήματα, έντεκα διαφορετικών σχολείων σε πέντε πολιτείες των Η.Π.Α. Οι συμμετέχοντες είχαν ήδη παρακολουθήσει ένα ετήσιο μάθημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο οποίο, μεταξύ άλλων, είχαν διδαχθεί την απόδειξη. Από τους μαθητές ζητήθηκε να αποδείξουν διάφορες γεωμετρικές προτάσεις μικρής δυσκολίας, μέσω μιας απλής σύγκρισης τριγώνων, όπως π.χ. ότι οι διαγώνιες κάθε ορθογωνίου είναι ίσες. Παρά την απλότητα και την ευκολία των θεμάτων, το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε 100% επιτυχία δεν ξεπέρασε το 3%.

Καταλήγει λοιπόν ο Tall: «Η Senk (1985) έδειξε ότι μόνο το 30% των μαθητών που παρακολουθούν μια πλήρη ετήσια διδασκαλία της γεωμετρίας επιτυγχάνουν ένα ποσοστό 75% επιτυχίας σε μια επιλογή έξι γεωμετρικών προβλημάτων απόδειξης.

Η Ευκλείδεια απόδειξη είναι όχι μόνο δύσκολη, αλλά αποτυγχάνει να ικανοποιήσει τα κριτήρια της σύγχρονης μαθηματικής αυστηρότητας επειδή εξαρτάται από λεπτές διαισθητικές ιδέες για το χώρο. Όπως το έθεσε πιο συνοπτικά ο Hilbert, "Πρέπει κάποιος να είναι πάντοτε σε θέση – αντί για σημεία, ευθείες και επίπεδα – να λέει τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας" (Encyclopaedia Britannica, 1974, p.1101).
Η απόδειξη όμως με τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας απαιτεί ένα μεγάλο βαθμό επιτήδευσης που δεν είναι διαθέσιμη στους νεώτερους σπουδαστές. Η μαθηματική απόδειξη ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα απαιτεί όχι μόνο κατανόηση του ορισμού των εννοιών και των λογικών διαδικασιών, αλλά επίσης διαίσθηση για το πώς και γιατί δουλεύει».

1.2 Θεωρητικό πλαίσιο

Η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι ένα εξαιρετικά σύνθετο φαινόμενο, το οποίο επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες. Ένας από αυτούς είναι ότι η μαθηματική γνώση την οποία καλείται να διδαχθεί ο μαθητής δεν επινοήθηκε με προορισμό της τη διδασκαλία. Πράγματι, συνήθως πρόκειται για μια επιστημονική γνώση που σχετίζεται περισσότερο με την Μαθηματική έρευνα και ως εκ τούτου σκοπός της δεν είναι να διδαχθεί, αλλά να χρησιμοποιηθεί. Είναι λοιπόν αναμενόμενο η επιστημονική γνώση να μην διδάσκεται αυτούσια στις διάφορες σχολικές βαθμίδες. Όπως είναι φυσιολογικό μεγαλύτερη συνάφεια έχει η επιστημονική γνώση με εκείνη που διδάσκεται σε πανεπιστημιακές σχολές. Ωστόσο, όταν αναφερόμαστε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η κατάσταση είναι ριζικά διαφορετική. Εδώ είναι αυτονόητο ότι πρέπει να υπάρξει ένα είδος μετασχηματισμού αυτής της γνώσης, ώστε να καταστεί προσβάσιμη από τους εκάστοτε μαθητές.

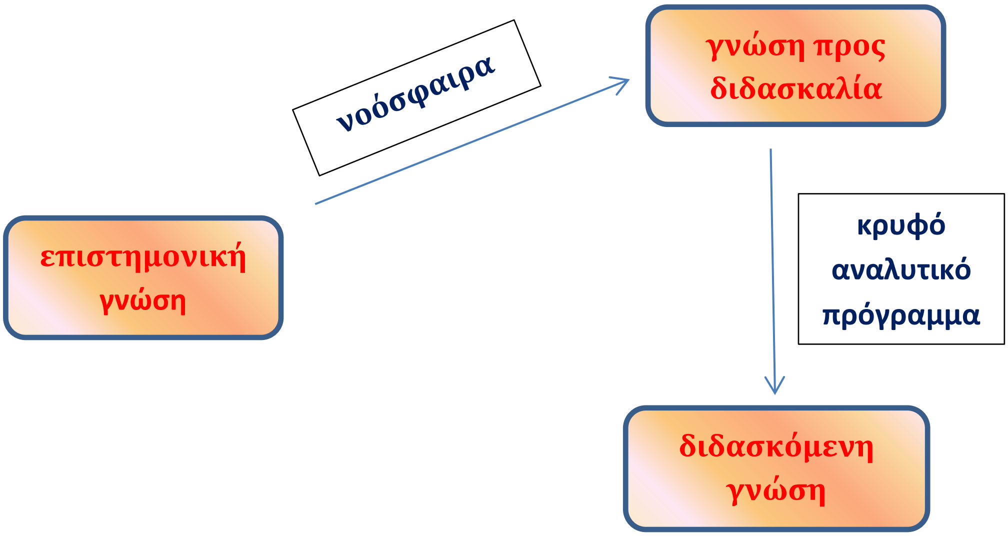
Με βάση την παραπάνω διαπίστωση, το 1985 ο Yves Chevallard, στο βιβλίο του «La transposition didactique- du savoir savant au savoir enseigné» εισάγει και αναλύει την έννοια του διδακτικού μετασχηματισμού (διδακτική μετατόπιση). Για την έννοια αυτή ο Chevallard δίνει τον εξής ορισμό:

«Όταν ένα περιεχόμενο γνώσης επιλεγεί σαν γνώση για διδασκαλία, υφίσταται μια σειρά από μετασχηματισμούς προσαρμογής που θα το κάνουν ικανό να πάρει θέση ανάμεσα στα αντικείμενα της διδασκαλίας. Η ''εργασία'' η οποία καθιστά ένα αντικείμενο γνώσης για διδασκαλία σε αντικείμενο διδασκαλίας, αποκαλείται διδακτικός μετασχηματισμός»

Για τον Chevallard, ο διδάσκων, ο διδασκόμενος, η διδασκόμενη γνώση, καθώς και οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις αποτελούν το λεγόμενο *διδακτικό σύστημα*. Το σύνολο όλων των διδακτικών συστημάτων αποτελεί το λεγόμενο *σύστημα διδασκαλίας*. Ανάμεσα στο σύστημα διδασκαλίας και στο ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον παρεμβάλλεται η *νοόσφαιρα.* Πρόκειται για το σύνολο όλων εκείνων που με κάποιον τρόπο σχετίζονται με τη διδασκαλία, όπως είναι οι γονείς, αυτοί που προγραμματίζουν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, όσοι σχεδιάζουν τα αναλυτικά προγράμματα, συγγράφουν τα σχολικά εγχειρίδια κτλ. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η μετατροπή της επιστημονικής γνώσης σε διδάξιμη, είναι μια πολυσύνθετη διαδικασία, η οποία επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό και από τη νοόσφαιρα. Επομένως, ο διδακτικός μετασχηματισμός δεν αναφέρεται απλώς στην προσαρμογή της επιστημονικής γνώσης στο σχολικό επίπεδο, αλλά είναι συνισταμένη διαφόρων παραμέτρων και κοινωνικής φύσεως.

Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο μετασχηματισμός που υφίσταται η επιστημονική γνώση περνάει από δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, η επιστημονική γνώση υφίσταται έναν ''εξωτερικό'' μετασχηματισμό, μέσω της επίδρασης της νοόσφαιρας για να καταστεί γνώση προς διδασκαλία. Στο δεύτερο στάδιο η γνώση αυτή υφίσταται έναν εσωτερικό μετασχηματισμό, μέσω του διδάσκοντος και γενικότερα μέσω του κρυφού αναλυτικού προγράμματος[2], ώστε να αναχθεί σε διδασκόμενη γνώση.

[2] Ο όρος "κρυφό αναλυτικό πρόγραμμα" καθιερώθηκε από τον Phillip Jackson το 1968 στο βιβλίο του «Life in Classrooms». Αναφέρεται σε εκείνες τις πλευρές μάθησης που είναι ανεπίσημες ή, συχνά, μη συνειδητές. Τέτοιες είναι ο τρόπος οργάνωσης και λειτουργίας του σχολείου, οι κανόνες του, ο καθημερινός ρυθμός του και γενικά όλα όσα γίνονται και εκφράζονται πέραν του αυστηρού τμήματος της διδασκαλίας, αλλά ακόμη και μέσα σε αυτήν. Φορείς του είναι κυρίως οι στάσεις των εκπαιδευτικών αλλά και των μαθητών, των γονέων



Σύμφωνα με τον Chevallard κάθε διδασκόμενη μαθηματική γνώση βρίσκεται αντιμέτωπη με τρεις *παράγοντες συμβατότητας,* οι οποίοι είναι:

α) η επιστημολογική συνάφεια, δηλαδή η διδασκόμενη γνώση να είναι από την κοινωνία κοινώς αποδεκτή ως ωφέλιμη

β) η πολιτιστική συνάφεια, δηλαδή η κατάσταση κατά την οποία η κοινωνία ανιχνεύει στην διδασκόμενη γνώση ορισμένα πολιτιστικά ενδιαφέροντά της

γ) ο βαθμός έκθεσης στην κοινωνίας, δηλαδή, αφενός η διδασκαλία, αφετέρου η ερευνητική δραστηριότητα να μην είναι υπερβολικά εκτεθειμένες στην κοινωνική κριτική.

Ωστόσο, πολλές φορές τα μέλη τις νοόσφαιρας είναι αναγκασμένα να κάνουν μερικές επιλογές, τις οποίες ο Chevallard ονομάζει *συμβιβαστικά σχήματα.*

τους και της "κοινής γνώμης". Ειδικά, όσον αφορά την ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, η κατά γενική ομολογία απαξίωση και υποβάθμιση που έχει υποστεί το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συνδέεται εν μέρει και με ορισμένες επιλογές των διδασκόντων. Συνήθως με τη δικαιολογία ότι στην τελευταία τάξη του Λυκείου δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα για την εισαγωγή σε πανεπιστημιακές σχολές, είναι συχνό το φαινόμενο λ.χ. κατά τη Β' Λυκείου μέρος των ωρών διδασκαλίας της Γεωμετρίας να διατίθεται στη διδασκαλία της Άλγεβρας. Επίσης, συχνά παρατηρείται στα Λύκεια να γίνονται πρώτα οι αναθέσεις της Άλγεβρας και της Ανάλυσης και όταν δεν επαρκούν οι διαθέσιμοι διδάσκοντες (σύνηθες φαινόμενο), η ανάθεση της Γεωμετρίας να παραπέμπεται σε εκείνους που θα τοποθετηθούν στο σχολείο μελλοντικά.

Ουσιαστικά πρόκειται για την εισαγωγή εξωμαθηματικών μοντέλων στη διδασκαλία με σκοπό τη διευκόλυνσή της. Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί ότι μερικές φορές οι επιλογές συγκεκριμένων εξωμαθηματικών μοντέλων, αν και αυτά μπορεί να είναι καθιερωμένα, δεν επιτελούν το σκοπό για τον οποίο υιοθετούνται. Τέτοια καταστάσεις συναντάμε για παράδειγμα κατά τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών, όπου έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν δείξει πως η χρήση μέσων, όπως οι ανελκυστήρες και τα θερμόμετρα, δεν προσφέρουν μεγάλη βοήθεια στην κατανόηση των προσημασμένων αριθμών (Chevallard, 1992).

1.3 Η Γεωμετρία και ο διδακτικός μετασχηματισμός

Συγκεκριμένα, όσον αφορά το θέμα που θα μας απασχολήσει ειδικότερα στη συνέχεια, τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, είναι φανερή η συσχέτιση αυτής με τους παράγοντες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Πράγματι, είναι κοινώς αποδεκτό ότι η διδασκαλία της Γεωμετρίας προκρίνεται ως ωφέλιμη, δεδομένου ότι καλλιεργεί τη σκέψη και διδάσκει την αποδεικτική διαδικασία. Ανεξάρτητα από αυτό, πρόκειται για μια μαθηματική θεωρία της οποίας οι απαρχές εντοπίζονται σε έργα ελλήνων της αρχαιότητας, οπότε η διδασκαλία της ενδείκνυται και για πολιτισμικούς λόγους. Μάλιστα, αυτή η τελευταία παράμετρος είναι ο λόγος για τον οποίο η Ευκλείδεια Γεωμετρία καταλάμβανε διαχρονικά ξεχωριστή θέση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παρουσιάζει χαρακτηριστικά τα οποία γενικά δεν συναντάμε σε εκπαιδευτικά συστήματα άλλων χωρών. Στην εγχώρια εκπαιδευτική πραγματικότητα η Γεωμετρία αποτελεί τις τελευταίες τέσσερεις δεκαετίες διετές μάθημα γενικής παιδείας που απευθύνεται στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού, ακόμα και της τεχνικής εκπαίδευσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατάσταση που επικράτησε κατά την περίοδο κατά την οποία διεθνώς κυριαρχούσε η τάση των μοντέρνων Μαθηματικών και η οποία συνοψίστηκε στην έκφραση του επιφανούς Γάλλου μαθηματικού, ιδρυτικού μέλους της ομάδας Bourbaki, Jean Dieudonné «Να φύγει ο Ευκλείδης». Ο ουσία του σκεπτικού του Dieudonné εξηγείται από τον ίδιο ως εξής (Dieudonné, 1961):

«Ας υποθέσουμε, για χάρη της συζήτησης, ότι κάποιος πρόκειται να διδάξει Ευκλείδεια επιπεδομετρία σε ώριμα μυαλά από έναν άλλο κόσμο που ουδέποτε είχαν ακούσει γι' αυτή, ή έχοντας μόνο υπόψη τις πιθανές εφαρμογές της στη σύγχρονη έρευνα. Τότε ολόκληρο το μάθημα θα μπορούσε, νομίζω, να διεξαχθεί σε δύο ή τρεις ώρες – μία για την περιγραφή του αξιωματικού συστήματος, μία για τις χρήσιμες συνέπειες και πιθανώς μία τρίτη για λίγες κάπως ενδιαφέρουσες ασκήσεις.
Οτιδήποτε άλλο που καλύπτει σήμερα τόμους "στοιχειώδους γεωμετρίας", – και εννοώ, για παράδειγμα, οτιδήποτε αφορά τα τρίγωνα (είναι απολύτως εφικτό και επιθυμητό να περιγραφεί ολόκληρη η θεωρία χωρίς καν να ορίσουμε το τρίγωνο!), σχεδόν οτιδήποτε αφορά την αντιστροφή, τα συστήματα κύκλων, τις κωνικές, κλπ. – έχει τόση σχέση με αυτό που κάνουν σήμερα οι μαθηματικοί (των καθαρών και εφαρμοσμένων) όση και τα μαγικά τετράγωνα ή τα σκακιστικά προβλήματα».

Η εισήγηση αυτή αποτέλεσε την αρχή για μια στροφή στο περιεχόμενο των Μαθηματικών που διδάσκονταν στα σχολεία, σε Ευρώπη και Αμερική. Παραδοσιακές ενότητες των Μαθηματικών, όπως η Ευκλείδεια Γεωμετρία αντικαταστάθηκαν από άλλες, όπως η θεωρία συνόλων και η Γραμμική Άλγεβρα. Αξίζει ωστόσο να επισημανθεί ότι υπήρχαν και αντιρρήσεις ως προς αυτή τη μεταρρύθμιση. Λ.χ. σύμφωνα με τον επιφανή Γερμανό μαθηματικό Detlef Laugwitz (Zeitler, 1990):

«Η Γεωμετρία πρέπει να διασωθεί, γιατί είναι όμορφη. Η Γραμμική Άλγεβρα είναι χρήσιμη, αλλά δεν τη λες όμορφη. Μάλιστα, μόλις την κατανοήσεις, καταντάει βαρετή»

Όταν λοιπόν στην Ελλάδα, στις αρχές της δεκαετίας του 1980 ετέθη το θέμα του αν η Γεωμετρία θα εξακολουθεί να καταλαμβάνει περίοπτη θέση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ή αν θα δώσει τη θέση της στα λεγόμενα μοντέρνα Μαθηματικά, συμβαδίζοντας με τις διεθνείς τάσεις, το ερώτημα ήταν στην πραγματικότητα αν οι Έλληνες ήταν έτοιμοι να απαρνηθούν ένα σημαντικό κομμάτι της πολιτιστικής τους παράδοσης. Ως εκ τούτου, είναι φανερό ότι μερικές φορές οι ρητά διατυπωμένες διδακτικές αρχές όπως π.χ. ότι η διδασκαλία της Γεωμετρίας συμβάλλει στην εξοικείωση με την αποδεικτική διαδικασία, εμπλέκονται με ζητήματα όπως είναι η καλλιέργεια εθνικής συνείδησης, τα οποία φυσικά ανήκουν κυρίως στη σφαίρα της κοινωνιολογίας και της πολιτικής.

Τέλος, ζητούμενο αποτελεί το αντικείμενο της Γεωμετρίας να καταστεί διδάξιμο και τελικά προσβάσιμο σε όλους τους μαθητές, οπότε η σχετική θεωρία οφείλει να είναι προσιτή, απαλλαγμένη από πολλές δυσκολίες και να είναι όσο το δυνατόν ελκυστική.

Ωστόσο, ο τρόπος με τον οποίο θα συντελεστούν οι μετασχηματισμοί δεν είναι καθόλου αυτονόητος. Οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με γεωμετρικά θέματα στο πλαίσιο της λεγόμενης Πρακτικής Γεωμετρίας, η οποία διδάσκεται για μια περίοδο περίπου εννέα ετών της σχολική τους ζωής. Όπως είναι αυτονόητο, μέσα σε αυτό το διάστημα ισχυροποιείται η σημασία της εμπειρικής επιβεβαίωσης και της εποπτείας και όταν αργότερα οι μαθητές θα χρειαστεί να χειριστούν αφηρημένες έννοιες, είναι λογικό ότι θα συναντήσουν δυσκολίες, η κυριότερη εκ των οποίων ίσως είναι η κατανόηση και η διαχείριση του αξιωματικού χαρακτήρα της Γεωμετρίας.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα παραπάνω επιβεβαιώνονται από διάφορες έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Σύμφωνα με την Hershkowitz et al. στην παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ελάχιστοι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την παραγωγική δομή του μαθήματος. Οι μαθητές δηλαδή δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον ρόλο των αξιωμάτων, των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων (Ιγγλέζου, 2014).
Ειδικότερα, σε ό, τι αφορά την ελληνική πραγματικότητα, εκτός όλων των άλλων, έρχεται να προστεθεί και το πρόβλημα της ασυνέχειας από το γυμνάσιο στο λύκειο. Όπως παρατηρεί ο Θωμαΐδης (2014):

«Η οργάνωση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά το πρότυπο ανάπτυξης ενός θεωρητικού μαθηματικού συστήματος, οδηγεί σε μια διδασκαλία από "μηδενική βάση" που εκμηδενίζει την αξία των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών…. Βασικές προϋποθέσεις για την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης (θεωρήματος ή άσκησης) είναι η κατανόηση της εκφώνησης, η διάκριση δεδομένων και ζητουμένων, και η κατασκευή ενός σχήματος. Αυτά τα τρία στοιχεία (υποτίθεται ότι) έχουν συζητηθεί επαρκώς στο Γυμνάσιο και αποτελούν το κύριο προπαιδευτικό υλικό πάνω στο οποίο θα στηριχτεί η διδασκαλία στην Α΄ Λυκείου, ώστε να μυηθούν οι μαθητές στο ρόλο των βοηθητικών γραμμών και στους λεπτούς λογικούς χειρισμούς που απαιτεί η αποδεικτική διαδικασία. Αν, αντίθετα, η διδασκαλία στην Α΄ Λυκείου πρέπει να οικοδομήσει εκ του μηδενός και το προπαιδευτικό υλικό και την αποδεικτική διαδικασία, τότε το αδιέξοδο είναι αναπόφευκτο».

Εξάλλου, με δεδομένο ότι η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας αποτελεί ένα επιστημονικό επίτευγμα και θεωρώντας ως κοινωνία, αυτονόητη την ανάγκη η Γεωμετρία να είναι μέρος του προγράμματος σπουδών, προκύπτει το ερώτημα του τρόπου με τον οποίο θα καταστεί αυτή η θεωρία διδάξιμη και εδώ είναι που υπεισέρχεται ο πολλαπλός ρόλος της νοόσφαιρας, τα μέλη της οποίας θα πάρουν πρωτοβουλίες, θα υποβάλουν προτάσεις μέσα από τις οποίες θα οδηγηθούμε τελικά στον μετασχηματισμό της επιστημονικής γνώσης σε γνώση προς διδασκαλία.

Με βάση τα παραπάνω, στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να εξετάσουμε το θέμα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο ελληνικό σχολείο με γνώμονα το θεωρητικό πλαίσιο της διδακτικής μετατόπισης και να ανιχνεύσουμε πώς αυτό εφαρμόζεται. Ο τρόπος με τον οποίο θα επιχειρηθεί αυτό, είναι μέσω της μελέτης ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού προβλήματος, το οποίο επελέγη λόγω της ιδιαιτερότητάς του να αποτελεί ένα πρόβλημα μέσω του οποίου αναδεικνύονται σημαντικά χαρακτηριστικά της εκάστοτε αξιωματικής θεωρίας.

Καταρχάς, θα εξετάσουμε το πρόβλημα από την ιστορική του σκοπιά. Ξεκινώντας από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη στα οποία πρωτοεμφανίζεται η ιδέα της αξιωματικοποίησης, συνεχίζουμε μέχρι τον 18ο και 19ο αιώνα που η

Γεωμετρία αρχίζει να αποκτά μια περισσότερο στέρεα μορφή ως προς τα χαρακτηριστικά που την καθιστούν διδάξιμη. Τέλος, φτάνουμε στον 20^{ο} αιώνα για να συναντήσουμε νέες απόπειρες αξιωματικής θεμελίωσης.

Παράλληλα με την ιστορική εξέταση του προβλήματος, θα επιχειρήσουμε τη μαθηματική μελέτη του μέσα από την αναλυτική παρουσίαση των τρόπων με τους οποίους μπορεί να αντιμετωπιστεί με βάση την εκάστοτε αξιωματική θεωρία. Ένα ουσιώδες μέρος αυτής της εξέτασης θα γίνει μέσω της ανάλυσης διδακτικών εγχειριδίων που χρησιμοποιήθηκαν στην Ελλάδα κατά τις τελευταίες έξι δεκαετίες. Μάλιστα, δεδομένου ότι συνήθως η δημοσίευση των προγραμμάτων σπουδών επόταν της κυκλοφορίας των αντίστοιχων εγχειριδίων, θα αρκεστούμε σχεδόν εξολοκλήρου σε σχολιασμό των εγχειριδίων.

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Μια κριτική ματιά στα «Στοιχεία»

«*Η αξία των Στοιχείων του Ευκλείδη, ως ένα αριστούργημα της λογικής, έχει υπερτιμηθεί υπερβολικά*». Σε αυτή την άποψη καταλήγει ο επιφανής μαθηματικός και φιλόσοφος Bertrand Russell στο άρθρο του [24], μέσα στο οποίο καταπιάνεται με την εξέταση συγκεκριμένων προτάσεων από τα «Στοιχεία» και την επισήμανση αβλεψιών και παραλείψεων στο ευκλείδειο έργο. Αν και η κρίση αυτή είναι σίγουρα εξαιρετικά αυστηρή, δεν παύει να αποτελεί αδιαμφισβήτητη αλήθεια ότι μέσα στα «Στοιχεία» συχνά βρισκόμαστε ενώπιον προβληματικών καταστάσεων, τις οποίες ο ίδιος ο Ευκλείδης δεν είχε αντιληφθεί. Αυτό θα γίνει στη συνέχεια φανερό, κατά την εξέταση συγκεκριμένων προτάσεων των «Στοιχείων».

Αφετηρία μας αποτελεί το πρόβλημα που αφορά την σχετική θέση δύο κύκλων $(\mathrm{K}, \rho_1), (\Lambda, \rho_2)$ στο επίπεδο. Αν και αυτό δεν περιέχεται στα «Στοιχεία», ωστόσο πρόκειται για ένα θέμα μέσα από το οποίο αναδεικνύονται ορισμένα προβληματικά σημεία της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη, αλλά και επειδή εμφανίζεται σε όλα τα διδακτικά εγχειρίδια Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ορισμένες φορές με αμφιλεγόμενη απόδειξη, δημιουργώντας ως εκ τούτου εμπόδια κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Πρόταση: Δίνονται δύο κύκλοι (K, ρ_1), (Λ, ρ_2) με $\rho_1 > \rho_2$. Αν οι κύκλοι τέμνονται, ισχύει

$$|\rho_1 - \rho_2| < \mathrm{K}\Lambda < \rho_1 + \rho_2$$

και αντιστρόφως.

Η απόδειξη του ευθέος είναι άμεση. Ας υποθέσουμε ότι Μ είναι σημείο τομής των κύκλων, οπότε ορίζεται το τρίγωνο ΚΛΜ. Από την πρόταση Ι. 20 των «Στοιχείων» λαμβάνουμε εύκολα την ζητούμενη συνθήκη.

Στην προσπάθειά του να αποδείξει κανείς το αντίστροφο, συναντάει σημαντικές δυσκολίες, εφόσον παραμείνει πιστός στα ευκλείδεια αιτήματα. Καταρχάς, όπως είναι φανερό, το αντίστροφο είναι άμεσα συνδεδεμένο με τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν τρία ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να αποτελούν πλευρές τριγώνου. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η απόδειξη αυτής της συνθήκης απουσιάζει από τα «Στοιχεία», παρά μόνο εμφανίζεται ως σχόλιο στην πρόταση Ι. 20 χωρίς αιτιολόγηση: «*…δεῖ δή τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας*». Γρήγορα καταλαβαίνουμε όμως, ότι η απόδειξη αυτού δεν είναι εφικτή με δεδομένα τα ευκλείδεια αξιώματα. Το βασικό εμπόδιο που συναντάμε είναι ότι κατά την κατασκευή τριγώνου, με πλευρές τρία δοθέντα τμήματα, γίνεται κατασκευή δύο κύκλων για τους οποίους δεν εξασφαλίζεται η τομή από κανένα ευκλείδειο αίτημα, ούτε και μπορεί να αποδειχθεί. Αυτό αποτελεί μία σοβαρή παράλειψη των «Στοιχείων», η οποία έχει επισημανθεί, ακόμα και από τους αρχαίους σχολιαστές του Ευκλείδη. Είναι λογικό να εικάσουμε ότι ο Ευκλείδης βασίστηκε στο διάγραμμα που συνοδεύει την «απόδειξή» του, κάτι το οποίο γίνεται φανερό και στην απόδειξη άλλων προτάσεων. Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι σε ορισμένα σημεία κάποιων αποδείξεων, η επιχειρηματολογία γίνεται βάσει της εποπτείας που προσφέρει ένα σχήμα και όχι με βάση τα αξιώματα. Φυσικά, αυτό, με τις σημερινές προδιαγραφές αυστηρότητας που υποχρεούται να φέρει μια αξιωματική θεωρία κρίνεται απαράδεκτο. Τα βήματα μιας λογικής απόδειξης οφείλουν να είναι ανεξάρτητα από ένα ενδεχόμενο διάγραμμα που συνοδεύει την απόδειξη και ως εκ τούτου κανένας ισχυρισμός της απόδειξης δεν μπορεί να προκύπτει από το σχήμα.

Τα βασικά γεωμετρικά αντικείμενα στο ευκλείδειο σύμπαν είναι οι ευθείες και οι κύκλοι. Η ύπαρξη ευθειών που διέρχονται από δύο σημεία εξασφαλίζεται από το Αίτημα 1., ενώ το Αίτημα 5. παρέχει συνθήκη υπό την οποία δύο ευθείες τέμνονται και δημιουργούν νέο σημείο από την τομή τους.

Ο κύκλος ορίζεται πολύ προσεκτικά στα «Στοιχεία» στον Ορισμό 15., αν και διαφέρει από τον σύγχρονο ορισμό. Ο ορισμός περιγράφει τι είναι ένας κύκλος, αλλά δεν εξασφαλίζει την ύπαρξή του. Αυτό γίνεται με το Αίτημα 3. Το ότι κάθε κύκλος έχει μοναδικό κέντρο δεν εξυπακούεται, αλλά αποδεικνύεται στην Πρόταση III.1.

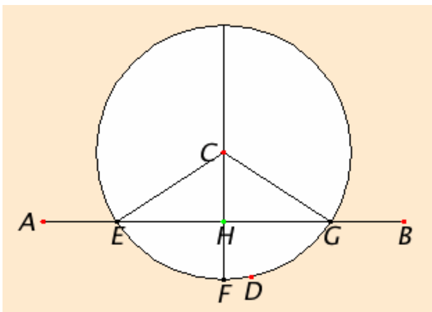
Από εκεί και πέρα, δεδομένου ότι όλες οι κατασκευές γίνονται από προϋπάρχοντα σημεία και κύκλους και τα καινούρια σημεία δημιουργούνται μέσω

- της τομής δύο ευθειών,
- της τομής ευθείας και κύκλου,
- της τομής δύο κύκλων,

θα έπρεπε να περιέχονται Αιτήματα, τα οποία εξασφαλίζουν την τομή σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις. Όμως, αυτό συμβαίνει μόνο για την πρώτη. Παρόμοια προβλήματα συναντάμε και σε άλλες προτάσεις των «Στοιχείων» και για να ξεπεραστούν, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι απαραίτητη η εισαγωγή κάποιου *αξιώματος συνέχειας*.

Αυτό ίσως δεν είναι εμφανές άμεσα, αλλά αν αναλογιστούμε ότι σε καθημερινό επίπεδο χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις άρρητων αριθμών, π.χ. $\sqrt{2} = 1{,}414$ και $\pi = 3{,}14$, συμπεραίνουμε ότι η καθημερινή εμπειρία μάς υπαγορεύει τη χρήση του διατεταγμένου ζεύγους $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, δηλαδή το σύνολο των σημείων του επιπέδου με ρητές συντεταγμένες.

Παρόμοια κατάσταση διαπιστώνουμε και κατά την απόδειξη της πρότασης I.12:



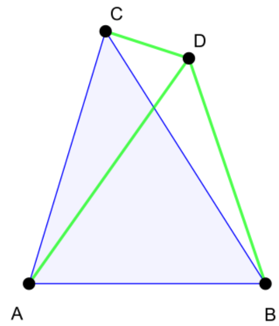
«Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν».

Ο Ευκλείδης επιλέγει ένα σημείο D, το οποίο βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο από αυτό στο οποίο βρίσκεται το κέντρο του κύκλου C, γράφει τον κύκλο με κέντρο το C και ακτίνα την CD και ισχυρίζεται ότι ο κύκλος θα τμήσει την ευθεία, πράγμα το οποίο δεν εξασφαλίζεται από τα αξιώματα που έχει θέσει.

Μάλιστα, στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την ήδη αποδεδειγμένη πρόταση Ι.7, σύμφωνα με την οποία:

«Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις».

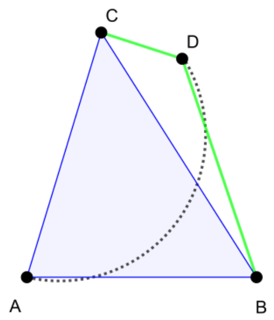
Η απόδειξη πάει ως εξής: Επειδή ισχύει $AC = AD$, το τρίγωνο ACD είναι ισοσκελές, οπότε από την πρόταση Ι.5 προκύπτει ότι $\angle ACD = \angle ADC$. Ομοίως, επειδή $BC = BD$, το τρίγωνο BCD είναι ισοσκελές, οπότε $\angle BCD = \angle BDC$. Τότε όμως έχουμε



$$\angle BCD < \angle ACD = \angle ADC < \angle BDC,$$

το οποίο είναι αδύνατον, αφού $\angle BCD = \angle BDC$.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη βασίζεται στο τρόπο με τον οποίο τα ευθύγραμμα τμήματα AC, AD, BC, BD τέμνονται στα σημεία C, D. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι το τμήμα AD έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος, τότε είναι

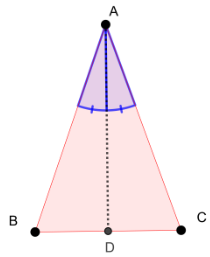


$$\angle BCD < \angle ACD, \qquad \angle BDC < \angle ADC$$

και δεν προκύπτει καμία αντίφαση!

Γίνεται λοιπόν φανερό, ότι η απόδειξη βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο σχήμα που χρησιμοποιείται, και στην πραγματικότητα γίνεται χρήση του γεγονότος ότι το τμήμα AD βρίσκεται στο <u>εσωτερικό</u> της γωνίας CDB. Ωστόσο, δεν έχει προηγηθεί ορισμός τέτοιων εννοιών. Παρόμοια κατάσταση συναντάμε κατά την απόδειξη της πρότασης Ι.5, η οποία αναφέρεται στις γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου, που είναι γνωστή ως *Pons asinorum*. Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι πολύπλοκη. Ήδη από την αρχαιότητα βρέθηκαν απλούστερες. Για παράδειγμα ο Πάππος, βασιζόμενος στην πρόταση Ι.4 (το γνωστό μας κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Γ-Π), αποδεικνύει το ζητούμενο, συγκρίνοντας το τρίγωνο με τον εαυτό του. Για παιδαγωγικούς λόγους, σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια, η απόδειξη της πρότασης αυτής γίνεται ως εξής:

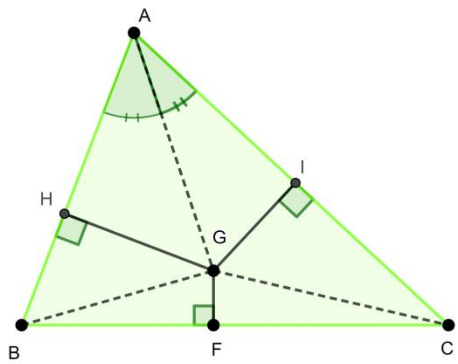
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας A και ας είναι D το σημείο που θα τμήσει την πλευρά BC. Τότε, για τα τρίγωνα ABD, ACD ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της πρότασης Ι.4, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα και προκύπτει το ζητούμενο.



Ωστόσο, εγείρονται τα εξής λογικά ερωτήματα. Γιατί η ευθεία AD θα τμήσει την BC και κατά μείζονα λόγο, πώς είμαστε σίγουροι ότι το σημείο τομής τους θα είναι ένα σημείο <u>ανάμεσα</u> στα B, C. Ο Ευκλείδης δεν ορίζει την έννοια του «ανάμεσα» και απλώς βασίζεται στο σχήμα για το συμπεράνει αυτό. Είναι φανερό ότι αυτό εγκυμονεί κινδύνους και η αιτιολόγηση με βάση διαγράμματα πρέπει να αποφεύγεται. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η παρακάτω ¨απόδειξη¨ που οφείλεται στο βρετανό μαθηματικό W.W. Rouse Ball:

(Ψευδο) Θεώρημα: Όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

Απόδειξη: Στο διπλανό σχήμα, η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη μεσοκάθετο της πλευράς BC στο σημείο G και είναι $GH \perp AB, GI \perp AC$. Με χρήση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων, αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει $BH = CI$ και $HA = IA$, οπότε τελικά προκύπτει $AB = AC$.



2.2 Τα «Στοιχεία Γεωμετρίας» του Legendre

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη κυριάρχησαν για μία περίοδο δύο χιλιάδων ετών ως το απόλυτο εγχειρίδιο Γεωμετρίας, παρά τις ελλείψεις και τα κενά που περιείχαν και που είχαν επισημανθεί ήδη από την αρχαιότητα. Μέσα στο πέρασμα τόσων αιώνων, τα «Στοιχεία» μεταφράστηκαν σε πολλές γλώσσες και συνέβαλαν στην εξάπλωση της γεωμετρικής γνώσης σε πολλά μέρη του κόσμου. Είναι πράγματι ενδιαφέρον ότι μέχρι τον 18ο αιώνα η εκμάθηση της γεωμετρίας γινόταν ακόμα με βάση τα ευκλείδεια «Στοιχεία». Η πρώτη ανανέωση σε αυτή την κατεύθυνση συνέβη από τον γάλλο μαθηματικό Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Ο Legendre έμεινε γνωστός για τη συμβολή του σε διάφορα θέματα των μαθηματικών, μεταξύ των οποίων και η γεωμετρία. Το 1794 δημοσιεύεται το έργο του Éléments de Géométrie, το οποίο εκδόθηκε πολλές φορές και μέσα σε αυτές καταγράφονται οι διαρκείς προσπάθειές του να αποδείξει το αξίωμα των παραλλήλων. Εκτός αυτού, στο βιβλίο αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά απόδειξη της αρρητότητας του π και του π^2, καθώς και η διατύπωση της εικασίας ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός. Ο Legendre δεν ακολούθησε το ύφος του Ευκλείδη και δεν δίστασε να εισαγάγει και αλγεβρικά μέσα για να αντιμετωπίσει γεωμετρικά θέματα, κάτι για το οποίο του ασκήθηκε κριτική. Ωστόσο, ο λόγος για τον οποίο τα «Στοιχεία» του Legendre είναι ιδιαίτερης σημασίας, είναι ότι αποτέλεσαν ουσιαστικά το πρώτο σύγγραμμα μετά τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, στο οποίο η Γεωμετρία παρουσιάζεται αναδιοργανωμένη και στο οποίο ο συγγραφέας απλοποίησε πολλές προτάσεις των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα περισσότερο εύχρηστο εγχειρίδιο γεωμετρίας. Ως συνέπεια αυτού, τα στοιχεία του Legendre μεταφράστηκαν σε πολλές γλώσσες, σταδιακά αντικατέστησαν εκείνα του Ευκλείδη ως ένα σύγγραμμα αναφοράς για περίπου έναν αιώνα και ως εκ τούτου επηρέασαν σε μεγάλο βαθμό τα κατοπινά βιβλία γεωμετρίας. Το βιβλίο μεταφράστηκε και στην ελληνική γλώσσα, για πρώτη φορά το 1829 από τον Ιωάννη Καραντηνό και γνώρισε ακόμα τρεις μεταφράσεις.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με το οποίο πραγματεύεται ο Legendre το γεωμετρικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, εκείνο που αναφέρεται στην τομή δυο κύκλων στο επίπεδο. Καταρχάς, ας παρατηρηθεί ότι ο Legendre, σε αντίθεση με τον Ευκλείδη που το αποδεικνύει στην πρόταση I.20, δίνει από την αρχή στην ευθεία γεωδαισιακό χαρακτήρα και ορίζει την ευθεία να αποτελεί τον συντομότερο δρόμο μεταξύ δύο σημείων [48, σελ.1],

8. *Εὐθεῖα* γραμμὴ καλεῖται ἀπροσδιόριστός τις γραμμή, ἥτις εἶναι συντομωτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἑνονούσης δύο ὁποιαδήποτε τῶν σημείων αὐτῆς.

Με βάση αυτό αποδεικνύεται άμεσα η ανισότητα που ικανοποιούν οι πλευρές ενός τριγώνου. Στη συνέχεια Legendre παραθέτει τις πέντε σχετικές θέσεις δύο κύκλων στο επίπεδο και αποδεικνύει τις σχέσεις που πληρούν οι ακτίνες αυτών σε σχέση με την απόσταση των κέντρων σε κάθε περίπτωση.

Σχόλιον. Αἱ πρὸς ἀλλήλας διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς πέντε·

Ἐσωτερικαί, ὅταν ἡ μία κῆται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἐξωτερικαί, ὅταν ἡ μία κῆται ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

Ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἦναι ἐσωτερικαί.

Ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἦναι ἐξωτερικαί.

Τεμνόμεναι, ὅταν τέμνωνται.

Δι' ἑκάστην δὲ τῶν ἀνωτέρω πέντε διαφόρων πρὸς ἀλλήλας τῶν περιφερειῶν θέσεων ὑπάρχει ἰδιαιτέρα τις σχέσις μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν, ἃς ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων.

Ενδιαφέρον είναι ότι στο τέλος επιχειρείται και η τεκμηρίωση της τριγωνικής ανισότητας ως ικανής συνθήκης τομής δύο κύκλων, με την απαρίθμηση των πέντε δυνατών περιπτώσεων, η οποία καθιερώθηκε έκτοτε σε όλα τα τότε διδακτικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

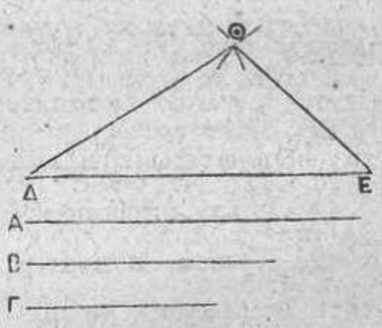
Σχόλιον. Αἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθεισῶν πέντε προτάσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ἀποδεικνύονται ὅλαι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ἑξῆς· Ἂν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι θέλουσιν εἶναι τεμνόμεναι. Διότι, ἂν ἦσαν ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαί, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, ἂν δ᾽ ἦσαν ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.

Ο Legendre δηλαδή, αποδεικνύει ότι οι κύκλοι τέμνονται, αν για τη διάκεντρο δ και τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 ισχύει $|\rho_1 - \rho_2| < \delta < \rho_1 + \rho_2$, με το να εξετάσει και να απορρίψει τις υπόλοιπες τέσσερις περιπτώσεις. Κατά συνέπεια, πετυχαίνει να κατασκευάσει τρίγωνο που έχει ως πλευρές τρία δοσμένα τμήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἐπὶ τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΕ = τῇ πλευρᾷ Α, ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ πλευρᾷ Β γράφομεν τόξον, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ γράφομεν ἕτερον τόξον, ὅπερ θέλει τμήσει τὸ πρῶτον εἴς τι σημεῖον Θ. Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΘ, ΘΕ καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΘΔΕ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.



Σχόλιον. Διὰ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει αἱ ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας ἀμοιβαίως μὲ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς γραφόμεναι περιφέρειαι νὰ τέμνωνται, καὶ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΔΕ, τουτέστιν ἡ μία τῶν δεδομένων πλευρῶν, νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν (πρότ. 16).

Ωστόσο, αξίζει να επισημανθεί ότι την εποχή εκείνη κυκλοφορούν και διδακτικά εγχειρίδια που διαφοροποιούνται ως προς την αντιμετώπιση αυτού του θέματος. Παράδειγμα αποτελεί η «Στοιχειώδης Γεωμετρία» του Ι. Χατζιδάκη [56], στην οποία ο συγγραφέας δεν υιοθετεί την απόδειξη του Legendre.

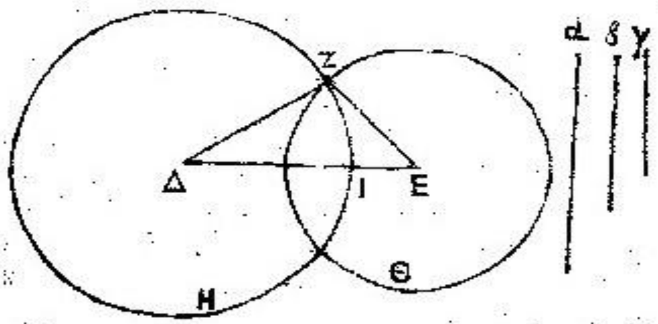
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8ον

112. *Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ α, β, γ· πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς εὐθείας ταύτας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἀνάγκη ἑκάστη τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διὰ νὰ λύηται τὸ πρόβλημα.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Λαμβάνομεν ἐπί τινος εὐθείας ἓν μέρος ΔΕ ἴσον μὲ τὴν μεγίστην ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, τὴν α, καὶ γράφομεν δύο περιφερείας ἐχούσας κέντρα μὲν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἀκτῖνας δὲ τὰς δύο ἄλλας εὐθείας β καὶ γ. λέγω ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται



τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ ἂν φέρωμεν εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς Ζ τὰς ἀκτῖνας ΔΖ, ΕΖ, γίνεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΖ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἡ μεγαλητέρα περιφέρεια Δ (ὑποθέτομεν $\beta > \gamma$) εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς μικροτέρας· διότι τὸ σημεῖον Ι, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΔΕ (διότι ἡ ΔΕ ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα β), εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς μικροτέρας περιφερείας Ε· διότι ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς Ε ὀλιγώτερον μιᾶς ἀκτῖνος, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha < + \gamma$ προκύπτει ἂν ἀφαιρέσωμεν β,

$\alpha - \beta < \gamma$ ἤτοι $\Delta E - \Delta I < \gamma$

τουτέστι $EI < \gamma$ ὥστε τὸ Ι θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μεγαλητέρα περιφέρεια ἐμβαίνει ἐντὸς τῆς μικροτέρας, δὲν δύναται ὅμως νὰ κεῖται ὅλη ἐντὸς αὐτῆς, συμπεραίνομεν ὅτι θὰ ἐξέρχηται ἐξ αὐτῆς καὶ θὰ τέμνῃ αὐτὴν εἴς τι σημεῖον Ζ.

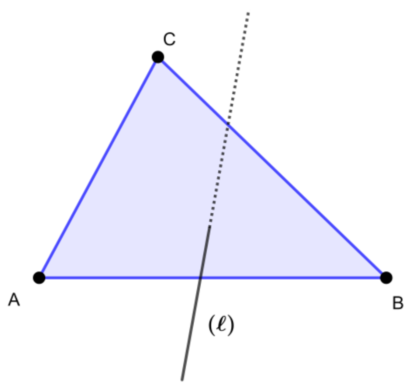
Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει πλευρὰς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας. Ἄλλο δὲ τρίγωνον διάφορον τούτου δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν αὐτῶν πλευρῶν α, β, γ. διότι δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς αὐτὰς πλευράς, εἶνε ἴσα (ἐδ. 70).

Όπως φαίνεται στην απόδειξη, ενδιαφέρον είναι ότι ο Χατζιδάκης δεν χρησιμοποιεί την καθιερωμένη εκείνη την περίοδο μέθοδο απαγωγής σε άτοπο, αλλά αποδεικνύει την ύπαρξη ενός σημείου του πρώτου κύκλου στο εσωτερικό του δεύτερου και ενός στο εξωτερικό του, και από το γεγονός αυτό συμπεραίνει την ύπαρξη ενός κοινού σημείου των δύο κύκλων. Αν και οπωσδήποτε το επιχείρημα αυτό στερείται αυστηρότητας, ουσιαστικά πρόκειται για ένα τύπο «αξιώματος συνέχειας». Βέβαια ο συγγραφέας αποφεύγει να το αποκαλέσει έτσι, αλλά η ορολογία την οποία επιλέγει να χρησιμοποιήσει: «*… η μεγαλυτέρα περιφέρεια εισέρχεται εντός της μικροτέρας, … συμπεραίνουμε ότι θα εξέρχηται εξ αυτής*», παραπέμπει σε κίνηση, πράγμα το οποίο προσομοιάζει τις διατυπώσεις των Γερμανών Μαθηματικών της εποχής εκείνης, οι οποίοι ασχολήθηκαν με το ζήτημα αυτό και στο οποίο θα αναφερθούμε στη συνέχεια. Ίσως αυτό να οφείλεται στο ότι ο Χατζιδάκης κατά την δεκαετία του 1870 πραγματοποιούσε σπουδές στη Γερμανία.

Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε ότι στο μεταγενέστερο βιβλίο του ίδιου συγγραφέα «Στοιχεία Γεωμετρίας» του 1904, γίνεται χρήση της απόδειξης με εις άτοπον απαγωγή με βάση τις πέντε περιπτώσεις, όπως έκανε και ο Legendre.

2.3 Τα αξιώματα της έννοιας «μεταξύ»

Προβλήματα σχετικά με την έννοια «μεταξύ» εμφανίζονται σε διάφορα σημεία των «Στοιχείων». Πρόκειται για μια έννοια που πρέπει να εξετασθεί προσεκτικά και πράγματι, στο παρελθόν, πολλοί μαθηματικοί διαπίστωσαν ότι υπήρχε η ανάγκη να συμπεριληφθούν αξιώματα που να τακτοποιούν αυτές τις παραλείψεις, μεταξύ των οποίων και ο Carl Friedrich Gauß το 1831, σε αλληλογραφία του με τον Farkas Bolyai. Ωστόσο, ο Gauß δεν επιχείρησε να διατυπώσει τα απαραίτητα αξιώματα. Αυτό συνέβη για πρώτη φορά από τον γερμανό μαθηματικό Moritz Pasch, ο οποίος το 1882 με το βιβλίο του Vorlesungen über neuere Geometrie επεσήμανε πολλές έμμεσες παραδοχές στο ευκλείδειο έργο, οι οποίες ήταν ασύμβατες με τον αξιωματικό χαρακτήρα του. Κατά τον Pasch, δεν είναι δυνατόν να αποτελεί μέρος μιας μαθηματικής θεωρίας η επίκληση στη φύση των αντικειμένων που αυτή πραγματεύεται, όπως επίσης δεν είναι δυνατόν μία απόδειξη να βασίζεται σε διαγράμματα. Οι μόνες αποδεκτές ενέργειες, είναι τα λογικά συμπεράσματα που απορρέουν από τα αξιώματα που διαθέτει η θεωρία. Ως εκ τούτου, ο Pasch δικαίως θεωρείται ότι έθεσε τη γεωμετρία σε καινούρια επίπεδα αυστηρότητας. Σύμφωνα με τον μαθηματικό, ιστορικό και ερευνητή της διδακτικής των Μαθηματικών Hans Freudenthal, ο Pasch είναι «ο πατέρας της αυστηρότητας στη γεωμετρίας». Αυτό μπορεί να φανεί, αν ανατρέξουμε στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισε ο Pasch γεωμετρικές έννοιες και καταστάσεις, τις οποίες ο ίδιος ο Ευκλείδης προσπέρασε ως διαισθητικά προφανείς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η παρακάτω πρόταση την οποία, όπως διαπίστωσε ο Pasch, ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε χωρίς απόδειξη:



Αν A, B, C είναι τρία, διαφορετικά ανά δύο, μη συνευθειακά σημεία και (ℓ) μια ευθεία που τέμνει την ευθεία AB σε σημείο που βρίσκεται ανάμεσα στα A, B, τότε η ευθεία (ℓ) τέμνει είτε την ευθεία AC, είτε την ευθεία BC. Μάλιστα, αν το σημείο C δεν ανήκει στην ευθεία (ℓ), η ευθεία τέμνει μόνο την AC ή μόνο την BC.

Μιλώντας διαισθητικά, η πρόταση αυτή μας λέει ότι αν μια ευθεία «μπαίνει» σε ένα τρίγωνο από μια πλευρά του, τότε πρέπει να «βγαίνει» από το τρίγωνο από κάποια άλλη πλευρά του.

Η πρόταση αυτή σήμερα, ανάλογα με τη αξιωματική θεωρία την οποία εξετάζουμε, αποτελεί αξίωμα ή θεώρημα και φέρει το όνομα του Pasch. Μάλιστα, στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, την οποία θα αναφέρουμε σε επόμενη ενότητα, η πρόταση αυτή αποτελεί αξίωμα.

Άλλα αξιώματα που αναφέρονται στην έννοια του «μεταξύ» και δεν αναφέρονται στον Ευκλείδη είναι τα ακόλουθα:

- Αν το σημείο B βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία A, C, τότε τα σημεία A, B, C είναι τρία διαφορετικά ανά δύο σημεία που βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία και μάλιστα, το σημείο B βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία C, A.
- Αν τα σημεία A, B, C είναι τρία διαφορετικά ανά δύο σημεία που βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, τότε ακριβώς ένα από αυτά βρίσκεται ανάμεσα στα άλλα δύο.

Για παράδειγμα, το προηγούμενο αξίωμα εξασφαλίζει ότι μία ευθεία δεν μπορεί να έχει το σχήμα μιας κλειστής γραμμής, όπως είναι ο κύκλος.

2.4 Τα αξιώματα συνέχειας

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, εκτός από τα προβλήματα με την έννοια του «ανάμεσα» , ελλείψεις συναντάει κανείς και σε θέματα που σχετίζονται με την τομή ευθειών και κύκλων. Για να ξεπεραστούν αυτές οι παραλείψεις θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε κατάλληλα αξιώματα συνέχειας, τα οποία θα εξασφαλίζουν την τομή των εκάστοτε γραμμών. Συνεπώς, για την περίπτωση της τομής κύκλων θα μπορούσαμε να έχουμε το ακόλουθο:

Αξίωμα συνέχειας κύκλων: Αν ένας κύκλος (c_1) έχει ένα σημείο Α στο εσωτερικό και ένα σημείο Β στο εξωτερικό ενός κύκλου (c_2), τότε οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

Για την περίπτωση της τομής ευθείας και κύκλου απαιτείται ένα αξίωμα συνέχειας όπως το ακόλουθο:

Αξίωμα συνέχειας κύκλου και ευθείας: Αν μια ευθεία διέρχεται από σημείο το οποίο είναι στο εσωτερικό ενός κύκλου, τότε η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

Παραλλαγή του αξιώματος αυτού αποτελεί το

Αξίωμα κύκλου και ευθύγραμμου τμήματος: Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το ένα άκρο του στο εσωτερικό ενός κύκλου και το άλλο άκρο του στο εξωτερικό του κύκλου, τότε το ευθύγραμμο τμήμα τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο.

Όπως είναι αυτονόητο, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να διατυπωθούν τα παραπάνω αξιώματα και στη βιβλιογραφία συναντά κανείς διαφορετικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, το 1898 ο Wilhelm Killing στο έργο του «Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Zweiter Band)» προτείνει τις ακόλουθες μορφές αξιωμάτων συνέχειας, οι οποίες όπως αποδεικνύεται είναι επαρκείς στις περισσότερες περιπτώσεις:

(α) Υποθέτουμε ότι μια ευθεία ανήκει εξολοκλήρου σε ένα σχήμα, το οποίο αποτελείται από δύο μέρη. Αν η ευθεία έχει ένα τουλάχιστον σημείο της σε κάθε ένα από τα δύο μέρη, τότε η ευθεία έχει κοινό σημείο με το σύνορο μεταξύ των δύο μερών.

(β) Αν ένα σημείο κινείται επί ενός σχήματος, το οποίο είναι χωρισμένο σε δύο μέρη, και στην αρχή της κίνησης βρίσκεται στο ένα μέρος, ενώ στο τέλος της κίνησης βρίσκεται στο δεύτερο μέρος, πρέπει κατά τη διάρκεια της κίνησης να περνάει από το σύνορο των δύο μερών.

Τα αξιώματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι στην πραγματικότητα ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου αξιώματος του Dedekind.

Αξίωμα Dedekind: Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{\ell\}$ όλων των σημείων μιας ευθείας ℓ είναι η ένωση δύο μη κενών, ξένων μεταξύ τους συνόλων Σ_1, Σ_2. Υποθέτουμε ακόμα ότι δεν υπάρχει σημείο του ενός συνόλου, που βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου συνόλου. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $O \in \ell$, τέτοιο, ώστε ένα από τα σύνολα Σ_1, Σ_2 να είναι ημιευθεία με αρχή O της ευθείας ℓ και το άλλο σύνολο να είναι το συμπλήρωμα της ημιευθείας ως προς την ευθεία ℓ.

Το αξίωμα αυτό διατυπώθηκε το 1872 από τον Richard Dedekind στην εργασία του «Συνέχεια και Άρρητοι Αριθμοί» (Stetigkeit und irrationale Zahlen). Στην εργασία αυτή ορίζεται αυτό που σήμερα ονομάζεται Τομή Dedekind, το οποίο επέτρεψε την αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Στο παραπάνω αξίωμα λέμε ότι το ζεύγος των συνόλων Σ_1, Σ_2 αποτελεί μια τομή Dedekind της ευθείας ℓ. Η τεράστια σημασία του αξιώματος Dedekind γίνεται αντιληπτή, αν αναλογιστούμε ότι, μεταξύ άλλων, εξασφαλίζει ότι οι ακολουθίες Cauchy είναι συγκλίνουσες, οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών και ότι υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το αξίωμα Dedekind για να δώσουμε μία απόδειξη της πρότασης σχετικά με την τομή δύο κύκλων. Όπως επισημάνθηκε και προηγουμένως το ζητούμενο είναι ουσιαστικά να αποδειχθεί ότι οι εν λόγω κύκλοι τέμνονται. Ακολουθώντας τον Heath [15] θα αποδείξουμε το

Θεώρημα: Έστω ένας κύκλος C στο επίπεδο και δύο σημεία του X, Y. Αν το X βρίσκεται στο εσωτερικό και το Y στο εξωτερικό κύκλου C', τότε οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

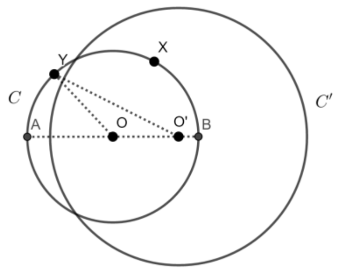
Αρχικά θα αποδείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα: Αν O, O' είναι τα κέντρα δύο κύκλων C, C' και R, R' οι ακτίνες τους αντίστοιχα, η ευθεία OO' τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία A, B, ένα εκ των οποίων βρίσκεται στο εσωτερικό του C' και το άλλο στο εξωτερικό του.

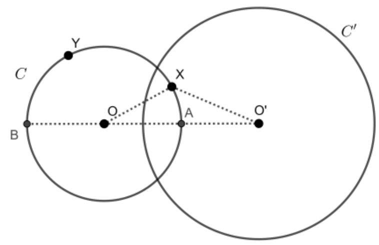
Απόδειξη λήμματος: Θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Το σημείο A βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος OO' προς το O. Τότε έχουμε

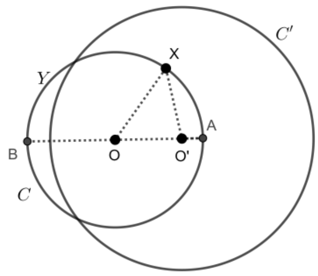
$$\mathrm{AO}' = \mathrm{AO} + \mathrm{OO}' = \mathrm{R} + \mathrm{OO}' \quad (1)$$



Από το τρίγωνο $\mathrm{OO'Y}$ έχουμε $\mathrm{O'Y} < \mathrm{OY} + \mathrm{OO}'$, και επειδή ισχύει $\mathrm{O'Y} > \mathrm{R}', \mathrm{OY} = \mathrm{R}$, προκύπτει $\mathrm{R}' < \mathrm{R} + \mathrm{OO}'$. Τότε, από την σχέση (1) λαμβάνουμε $\mathrm{AO}' > \mathrm{R}'$. Επομένως το σημείο A βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου C'.



2η περίπτωση: Το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος OO'. Τότε έχουμε $\mathrm{OO}' = \mathrm{OA} + \mathrm{AO}' = \mathrm{R} + \mathrm{AO}' \quad (2)$. Από το τρίγωνο $\mathrm{OO'X}$ είναι $\mathrm{OO}' < \mathrm{OX} + \mathrm{O'X}$, και επειδή ισχύει $\mathrm{OX} = \mathrm{R}, \mathrm{O'X} < \mathrm{R}'$ έπεται ότι $\mathrm{OO}' < \mathrm{R} + \mathrm{R}'$, οπότε λόγω της (2) λαμβάνουμε $\mathrm{AO}' < \mathrm{R}'$. Άρα το σημείο A βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C'.



3η περίπτωση: Το σημείο A βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος OO' προς το O'. Τότε έχουμε $\mathrm{R} = \mathrm{OA} = \mathrm{OO}' + \mathrm{O'A}$ (3). Στο τρίγωνο $\mathrm{OO'X}$ έχουμε $\mathrm{OX} < \mathrm{OO}' + \mathrm{O'X}$, δηλαδή $\mathrm{R} < \mathrm{OO}' + \mathrm{O'X}$. Λόγω της (3) προκύπτει $\mathrm{OO}' + \mathrm{O'A} < \mathrm{OO}' + \mathrm{O'X}$, οπότε $O'A < O'X$. Άρα το σημείο A βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C'.

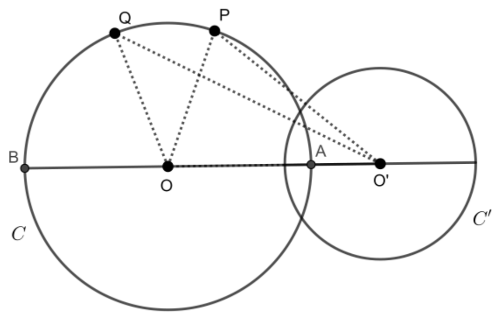
Ας παρατηρήσουμε ότι ένα εκ των δύο σημείων A, B βρίσκεται στη θέση της 1ης περίπτωσης και το δεύτερο σημείο βρίσκεται στη θέση της 2ης ή 3ης περίπτωσης. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι το ένα σημείο είναι εσωτερικό και το άλλο εξωτερικό του κύκλου C'.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα. Όπως θα γίνει φανερό, θα γίνει χρήση του αξιώματος του Dedekind για ημικύκλια, της ανισότητας του τριγώνου, καθώς και της πρότασης ότι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις κάθετες πλευρές.

Ο κύκλος C διαιρείται από τα σημεία A, B σε δύο ημικύκλια. Θεωρούμε το ένα από τα δύο και ας υποθέσουμε ότι αυτό ορίζεται από την τροχιά που διαγράφει ένα σημείο κινούμενο από το σημείο A στο σημείο B. Θεωρούμε δύο σημεία P, Q στο ημικύκλιο και ας υποθέσουμε ότι το P προηγείται του Q, με την έννοια ότι το σημείο P είναι πλησιέστερα στο A. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $OO'P$ και $OO'Q$. Αυτά έχουν κοινή την πλευρά OO'. Επίσης είναι

$$OP = OQ, \qquad \angle POO' < \angle QOO'.$$

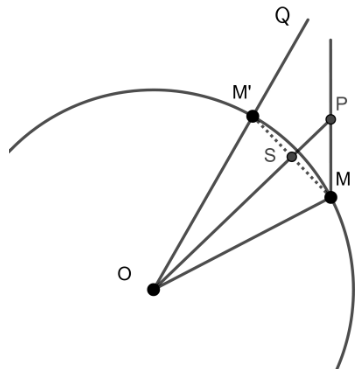
Επομένως είναι $O'P < O'Q$.



Τώρα, θεωρούμε ότι το ημικύκλιο APQB χωρίζεται σε δύο μέρη, ώστε τα σημεία του πρώτου μέρους να είναι τα εσωτερικά του κύκλου C' και του δεύτερου μέρους να είναι, είτε τα σημεία της περιφέρειας C', είτε εξωτερικά του C'. Τότε, παρατηρούμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος του Dedekind. Επομένως υπάρχει ένα σημείο M, το οποίο «χωρίζει» τα δύο μέρη. Ισχυριζόμαστε ότι $O'M = R'$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $O'M < R'$. Ας είναι σ η διαφορά των $R', O'M$. Τότε υπάρχει σημείο M' στο ημικύκλιο, που έπεται του M, τέτοιο, ώστε η χορδή MM' να μην είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά σ. Τότε, από το τρίγωνο $O'MM'$ έχουμε

$$O'M' < O'M + MM' < O'M + \sigma$$

οπότε $O'M < R'$. Επομένως το σημείο M', το οποίο ανήκει στο τόξο MB, βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C'. Αυτό είναι προφανώς άτοπο. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $O'M \leq R'$. Επομένως είναι $O'M = R'$.



Το ότι πάντοτε μπορεί να βρεθεί τέτοιο σημείο M' δικαιολογείται ως ακολούθως: Φέρουμε από το M ευθεία MP, διαφορετική της OM και πάνω σε αυτήν θεωρούμε τμήμα MP ίσο με $\sigma/2$. Φέρουμε το τμήμα OP και μια ακτίνα OQ τέτοια, ώστε να ισχύει $\angle POQ = \angle MOP$. Ας είναι M' η τομή της ευθείας OQ με τον κύκλο. Το σημείο αυτό M' είναι το ζητούμενο. Πράγματι, το MM' τέμνει καθέτως την OP. Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο MSP ισχύει $MS \leq MP$ και μάλιστα $MS < MP$, εκτός από την περίπτωση που τα MP, MS συμπίπτουν, οπότε είναι ίσα. Επομένως είναι $MS \leq \frac{\sigma}{2}$, οπότε $MM' \leq \sigma$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι στην προηγούμενη απόδειξη όλα τα επιχειρήματα στηρίζονται στους ορισμούς τους εννοιών του εσωτερικού και εξωτερικού σημείου ενός κύκλου και στο αξίωμα του Dedekind. Τα συμπεράσματα εξάγονται με χρήση του λογισμού των ανισοτήτων. Η εποπτεία των σχημάτων δεν χρησιμοποιείται για τη στήριξη των επιχειρημάτων, χωρίς βέβαια αυτό να μειώνει το κρίσιμο ρόλο της στη παρακολούθηση και κατανόηση της απόδειξης.

2.5 Η αξιωματική θεμελίωση του Hilbert

Ο David Hilbert (1864-1943) ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του, με επιστημονικό έργο που κάλυπτε πολλούς τομείς των μαθηματικών. Κατά την περίοδο που διετέλεσε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Göttingen, το ανέδειξε σε παγκόσμιο κέντρο της μαθηματικής έρευνας. Ένα από τα πεδία με τα οποία ασχολήθηκε ήταν τα θεμέλια των Μαθηματικών και ειδικότερα τα θεμέλια της Γεωμετρίας. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, τον 19ο αιώνα ήταν πολλοί οι μαθηματικοί που καταπιάστηκαν με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη με σκοπό την αυστηρή αξιωματική θεμελίωσή τους, όπως οι

- Moritz Pasch (1882) Vorlesungen über neuere Geometrie.
- Giuseppe Peano (1889), I principii di geometria: logicamente esposti,
- Giuseppe Veronese (1891) Fondamenti della geometria,

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός, ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, αφορμή για την ενδελεχή εξέταση των θεμελίων της Γεωμετρίας αποτέλεσε το αυξανόμενο ενδιαφέρον γύρω από το Αίτημα των Παραλλήλων του Ευκλείδη και η ενασχόληση με τις Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες που μόλις είχαν ανακαλυφθεί.

Η πρώτη ολοκληρωμένη αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έγινε από τον Hilbert το 1899 στο μνημειώδες έργο του Grundlagen der Geometrie. Αν και το σύστημα του Hilbert αποτελείται, όπως θα διαπιστώσουμε, από σχετικά μεγάλο αριθμό αξιωμάτων, είναι αρκετά κοντά στο πνεύμα του Ευκλείδη και χαρακτηρίζεται από απλότητα.

Ο Hilbert ξεκινάει θεωρώντας τρία διαφορετικά συστήματα από «όντα», τα σημεία, τις ευθείες, τα επίπεδα. Τα σημεία τα συμβολίζουμε με $A, B, C, \dots$, τις ευθείες με $a, b, c, \dots$ και τα επίπεδα με $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.Έχει σημασία να παρατηρήσουμε ότι δεν ενδιαφερόμαστε καθόλου για τη φύση αυτών των όντων παρά μόνο οι μεταξύ τους συσχετισμοί, οι οποίοι καθορίζονται από τα αξιώματα που θα αναφερθούν στη συνέχεια. Στη θέση των λέξεων σημείο, ευθεία, επίπεδο θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις λέξεις έρωτας, νόμος, καθαριστής καμινάδων[3]. Τα «όντα» αυτά μαζί με τις πρωταρχικές έννοιες

- κείται επί (βρίσκεται)
- μεταξύ (ανάμεσα)
- ισότητα (Kongruenz)

βρίσκονται σε αμοιβαίες σχέσεις, η πλήρης περιγραφή των οποίων γίνεται από τα είκοσι *Αξιώματα της Γεωμετρίας*.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημανθεί ότι η απόδοση του γερμανικού όρου Kongruenz ως ισότητα, ίσως δεν είναι η πλέον ενδεδειγμένη, Σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1989), μία προτιμότερη απόδοση είναι η λέξη «συμφωνία» και το εξηγεί ως εξής: « … η «συμφωνία» θα παίξει το ρόλο της έννοιας που θα μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν δύο (συνήθως «ευθύγραμμα») σχήματα είναι «ίσα» ή όχι. Δεν χρησιμοποιείται ο όρος «ισότητα», για να μη δημιουργηθεί η εσφαλμένη εντύπωση ότι περιορίζεται απλώς στην έννοια της «ταυτότητας»». Φαίνεται δηλαδή ότι η έννοια της ισότητας, στην περίπτωση αυτή, συγγενεύει περισσότερο με την έννοια της ισοτιμίας σε μια σχέση ισοδυναμίας, παρά με την «επανάληψη του ίδιου αντικειμένου».

Τα Αξιώματα της Γεωμετρίας μπορούμε να τα διαχωρίσουμε, ανάλογα με το ρόλο τους, σε πέντε ομάδες:

[3] Sie sagen meine Begriffe z.B. "Punkt", "zwischen" seien nicht eindeutig festgelegt; z.B. S. 20 sei "zwischen" anders gefasst und dort sei der Punkt ein Zahlenpaar. -Ja, es ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren nothwendigen Beziehungen zu einander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger … , denke und dann nur meine sämmtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras auch von diesen Dingen.
Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges, Meiner (1980)

I. Αξιώματα συνδέσεως (οκτώ)
II. Αξιώματα διατάξεως (τέσσερα)
III. Αξιώματα ισότητας (πέντε)
IV. Αξίωμα παραλληλίας
V. Αξιώματα συνέχειας (δύο)

I. Αξιώματα σύνδεσης

Με τα αξιώματα αυτά συνδέουμε τα «όντα» σημείο, ευθεία και επίπεδο, δηλαδή καθορίζουν τις μεταξύ των σχέσεις.

I.1 Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει πάντοτε μία ευθεία (ℓ) που τα περιέχει.

I.2 Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει μόνον μία ευθεία που τα περιέχει.

I.3 Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία.

I.4 Τρία διαφορετικά σημεία A, B, C, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία, ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει.

I.5 Για οποιαδήποτε τρία σημεία A, B, C που δεν κείνται πάνω στην ίδια ευθεία, υπάρχει μοναδικό επίπεδο (π) που τα περιέχει.

I.6 Αν δύο σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο, τότε και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο.

I.7 Αν δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο.

I.8 Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία που δεν κείνται στο ίδιο επίπεδο.

II. Αξιώματα διάταξης

Τα αξιώματα αυτής της κατηγορίας καθορίζουν την έννοια του μεταξύ, μέσω της
οποίας μπορεί να εισαχθεί μια έννοια διάταξης ανάμεσα στα σημεία μιας ευθείας, ενός επιπέδου ή του χώρου.

II.1 Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ των A και C, τότε τα A, B, C είναι διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας και το B βρίσκεται επίσης μεταξύ των C και A.

II.2 Για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία A, C, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα σημείο B, που βρίσκεται μεταξύ των A και C.

II.3 Αν A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας, τότε μόνον ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

Το επόμενο αξίωμα είναι το αξίωμα του Pasch που αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα. Για τη διατύπωσή του χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε την έννοια του ευθύγραμμου τμήματος: Έστω A, B δύο σημεία επάνω σε ευθεία (ℓ). Το σύνολο των σημείων που βρίσκονται μεταξύ των A, B το ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα και το συμβολίζουμε με AB ή BA.

II.4 Έστω ότι A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και (ℓ) είναι μία ευθεία που δεν περιέχει κανένα από τα προηγούμενα σημεία. Αν η (ℓ) διέρχεται από ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος AB, τότε αυτή διέρχεται επίσης, είτε από ένα σημείο του τμήματος AC, είτε από ένα σημείο του τμήματος BC.

III. Αξιώματα ισότητας

Σε αντίθεση με την ισότητα, όπως αυτή εμφανίζεται στον Ευκλείδη, μέσω μετατόπισης και συνταύτισης, ο Hilbert δεν ορίζει την ισότητα με άμεσο τρόπο, αλλά εμμέσως από τα αξιώματα που ακολουθούν.

III. 1 Αν Α και Β είναι δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία (ℓ) και Α' είναι ένα σημείο της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας (ℓ'), τότε μπορεί πάντοτε να βρεθεί σημείο Β' που βρίσκεται στο δεδομένο από το σημείο Α ' μέρος της ευθείας (ℓ'), τέτοιο, ώστε το τμήμα ΑΒ να είναι ίσο με το τμήμα Α' Β'.

III. 2 Αν δύο τμήματα είναι ίσα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ίσα.

III. 3 Έστω AB και BC δύο τμήματα της ευθείας (ℓ) που δεν έχουν κοινό σημείο και έστω επίσης $A'\,B'$ και $B'C'$ δύο τμήματα της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας (ℓ') που επίσης δεν έχουν κοινό σημείο. Αν ισχύει $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'C'$, τότε και $A\Gamma = A'C'$.

Για τα επόμενα αξιώματα χρειαζόμαστε τον ορισμό της γωνίας και του τριγώνου:

- Έστω m, n δύο διαφορετικές ημιευθείες ενός επιπέδου (π), που έχουν κοινή αρχή ένα σημείο O και ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες. Το σύστημα αυτών των ημιευθειών το ονομάζουμε γωνία και το συμβολίζουμε ως $\sphericalangle(m,n)$. Οι ημιευθείες ονομάζονται πλευρές και το σημείο O κορυφή της γωνίας.

- Αν A, B, C είναι τρία διακεκριμένα που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε το σύστημα των τριών ευθύγραμμων τμημάτων AB, BC, CA μαζί με τα άκρα τους ονομάζεται τρίγωνο ABC. Τα τμήματα AB, BC, CA ονομάζονται πλευρές του τριγώνου και τα σημεία A, B, C ονομάζονται κορυφές του τριγώνου.

III. 4 Κάθε γωνία μπορεί, σε μια δεδομένη μεριά ενός επιπέδου ως προς μια δεδομένη ημιευθεία του, κατά έναν μονοσήμαντο τρόπο, να τοποθετηθεί.

III. 5 Αν σε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ ισχύουν οι ισότητες

$$AB = A'B', AC = A'C', \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$$

τότε ισχύει και $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$.

IV. Το αξίωμα παραλληλίας

Έστω (ℓ) τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ℓ) και το σημείο Α υπάρχει το πολύ μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και δεν τέμνει την ευθεία (ℓ).

Σχόλιο: Ο Hilbert, για να αναφερθεί στην παραλληλία, αντί να χρησιμοποιήσει το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, επιλέγει την ισοδύναμη πρόταση που είναι γνωστή ως αξίωμα του Playfair.

V. Τα αξιώματα συνέχειας

V.1 (Αρχιμήδειο Αξίωμα) Έστω AB και CD δύο ευθύγραμμα τμήματα. Τότε στην ευθεία AB υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων $A_1, A_2, \dots, A_{\nu-1}, A_\nu$, τέτοιων ώστε τα τμήματα $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{\nu-1}A_\nu$ να είναι ίσα με το τμήμα CD και το σημείο Β να βρίσκεται μεταξύ $A_{\nu-1}$ και A_ν.

Για το επόμενο αξίωμα θα χρειαστούμε ένα θεώρημα που αποδεικνύεται με τη βοήθεια των αξιωμάτων σύνδεσης και διάταξης:

Αν πάνω σε μια ευθεία έχει δοθεί ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε μπορούμε να τα επισημάνουμε στη σειρά με $A, B, C, D, E, \dots, K$, με τρόπο ώστε το σημείο με την επισήμανση B να κείται μεταξύ του A από τη μια μεριά και των $B, C, D, E, \dots, K$ από την άλλη. Ομοίως το C να κείται μεταξύ των A, B από την μια και των $D, E, \dots, K$ από την άλλη κ.ο.κ. Εκτός από τον αναφερόμενο τρόπο υπάρχει ακόμα μόνο ο αντίστροφος επισήμανσης $K, \ldots, E, D, C, B, A$, που είναι της ίδιας (με τον παραπάνω) εσωτερικής υφής.

V.2 (Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας) Τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν σύστημα, το οποίο, τηρούμενης της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος ισότητας και του Αρχιμήδειου αξιώματος δεν είναι επεκτάσιμο, δηλαδή σε αυτό το σύστημα σημείων δεν είναι δυνατόν να προστεθεί ένα ακόμα σημείο, έτσι ώστε στο επεκτεταμένο σύστημα που αποτελείται από το αρχικό σύστημα και το συμπληρωματικό σημείο να ικανοποιούνται τα αναφερθέντα αξιώματα.

Σχόλιο: Τα παραπάνω δύο αξιώματα μπορούν να αντικατασταθούν από το αξίωμα συνέχειας του Dedekind που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.

2.6 Η αξιωματική θεμελίωση του Birkhoff

Ο George David Birkhoff (1884 –1944) ήταν ένας αμερικανός μαθηματικός, καθηγητής του πανεπιστημίου του Harvard, ο οποίος εθεωρείτο ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής του. Το 1932, με την εργασία του «A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor» που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Annals of Mathematics, πρότεινε ένα αξιωματικό σύστημα για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας, το οποίο αποτελείτο από μόλις τέσσερα αξιώματα και ήταν αρκετά διαφορετικό σε σχέση με εκείνο του Hilbert, καθώς βασιζόταν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ως αρχικές έννοιες έχουμε τα σημεία $\mathrm{A, B, C, \ldots}$, τις ευθείες $\ell, \mathrm{m, n}, \ldots$, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\mathrm{d(A, B)}$ που είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, ώστε $\mathrm{d(A, B) = d(B, A)}$, και την γωνία $\angle\mathrm{AOB}$ που ορίζεται από τρία διατεταγμένα σημεία $\mathrm{A, O, B}$ $\mathrm{O \neq A, O \neq B}$, και που είναι ένας πραγματικός αριθμός (mod 2π). Το Ο ονομάζεται κορυφή της γωνίας.

Το πρώτο αξίωμα είναι το αξίωμα του μέτρου ευθείας:

Αξίωμα I. Τα σημεία $\mathrm{A, B, \ldots}$ κάθε ευθείας ℓ μπορούν να μπουν σε 1-1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς x, ώστε $|\mathrm{x_B - x_A}| = \mathrm{d(A, B)}$ για όλα τα σημεία $\mathrm{A, B}$.

Είναι φανερό ότι ο αριθμημένος χάρακας πληροί αυτό το αξίωμα. Άμεσες συνέπειες του αξιώματος είναι ότι:

a) $\mathrm{d(A, B) = 0}$ αν και μόνο αν $\mathrm{A = B}$
b) αν $\mathrm{A, B, C}$ είναι τρία διακεκριμένα σημεία, ισχύει $\mathrm{d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)}$ όταν αυτά είναι διατεταγμένα ως $\mathrm{A, B, C}$ ή ως $\mathrm{C, B, A}$, και μόνον τότε.
c) Εάν x' δηλώνει ένα άλλο σύστημα αρίθμησης της ευθείας ℓ, τότε για κάθε σημείο A της ℓ ισχύει $x'_A = x_A + d$ ή $x'_A = -x_A + d$, όπου d κάποια σταθερά. Κατά συνέπεια, η μέτρηση στον χάρακα καθορίζεται πλήρως από το σημείο που επιλέγουμε ως αρχή και από την κατεύθυνση που επιλέγουμε ως θετική.

Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τώρα τις έννοιες *μεταξύ, ευθύγραμμο τμήμα, μέσον ευθύγραμμου τμήματος, ημιευθεία και τρίγωνο.*

Αξίωμα ΙΙ. Αν P, Q δύο σημεία, με $P \neq Q$, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία.
Με βάση το αξίωμα αυτό δίνεται ο ορισμός των τεμνόμενων και των παράλληλων ευθειών.
Αξίωμα ΙΙΙ. Οι ευθείες $\ell, m, \ldots$ με αρχή το σημείο O μπορούν να μπουν σε 1-1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς $a(mod\, 2\pi)$, έτσι ώστε, αν $A \neq O, B \neq O$ είναι σημεία των ℓ, m, αντίστοιχα, να ισχύει

$$a_m - a_\ell (mod\, 2\pi) = \angle AOB.$$

Επίσης, αν το σημείο B της ευθείας m διατρέχει μια ευθεία r, η οποία δεν διέρχεται από το O, τότε ο αριθμός a_m παίρνει συνεχείς τιμές.
Γίνεται φανερό ότι το μοιρογνωμόνιο πληροί τα χαρακτηριστικά αυτού του αξιώματος. Επίσης, με βάση αυτό το αξίωμα μπορούν να οριστούν οι έννοιες *ευθεία γωνία, ορθή γωνία και η καθετότητα*.
Αξίωμα IV. Αν για δύο τρίγωνα $ABC, A'B'C'$ ισχύει

$$d(A', B') = kd(A, B), \qquad d(A', C') = kd(A, C), \qquad \angle B'A'C' = \pm\angle BAC$$

τότε ισχύει

$$d(B', C') = kd(B, C), \qquad \angle C'B'A' = \pm\angle CBA, \qquad \angle A'C'B' = \pm ACB.$$

Στη συνέχεια ο Birkhoff αποδεικνύει δέκα χαρακτηριστικά γεωμετρικά θεωρήματα, όπως ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου ισούται με π, την ύπαρξη μοναδικής καθέτου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Αξιοσημείωτο της θεμελίωσης αυτής είναι ότι η απόδειξη πως από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία, αποτελεί θεώρημα, σε αντίθεση με τις περισσότερες αξιωματικές θεωρίες στις οποίες αποτελεί βασικό αξίωμα.
Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι ο Birkhoff, σε συνεργασία με τον συνάδελφό του Ralph Beatley δημοσίευσαν το 1940 το βιβλίο τους Basic Geometry, το οποίο έμελε να αποτελέσει για μερικά χρόνια το διδακτικό εγχειρίδιο γεωμετρίας σε ορισμένα σχολεία των Η.Π.Α. και το οποίο ήταν βασισμένο

ακριβώς στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας από τον Birkhoff. Όπως είναι λογικό, για να είναι προσιτό στους μαθητές, το αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν ακριβώς εκείνο που αναφέραμε παραπάνω (χρησιμοποιούνται, αντί για τέσσερα, επτά αξιώματα), χωρίς όμως να αλλάζει η κεντρική ιδέα του συστήματος, που ήταν η θεμελίωση με βάση τους πραγματικούς αριθμούς, με τους οποίους, οι συγγραφείς θεωρούνε, είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές. Μάλιστα, στη συνέχεια κυκλοφόρησε και το Basic Geometry- Manual for Teachers, ένα αναλυτικότατο συνοδευτικό εγχειρίδιο για τους διδάσκοντες.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, το αξιωματικό σύστημα του Birkhoff χρησιμοποιήθηκε εκ νέου ως βάση για την δημιουργία ενός συστήματος αξιωμάτων για ευρύτερη χρήση στα αμερικάνικα σχολεία από την ομάδα School Mathematics Study Group (SMSG), ως μέρος μιας προσπάθειας να ενταχθούν στα σχολεία τα «Νέα Μαθηματικά», με σκοπό την αναβάθμιση της διδασκαλίας τους και τη βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών. Αυτό ήταν μια αντίδραση των Η.Π.Α. στην επιτυχημένη προσπάθεια της Σοβιετικής Ένωσης να θέσει σε τροχιά γύρω από τη γη τον δορυφόρο Sputnik 1. Το καινούριο αυτό σύστημα ήταν πολύ εκτενέστερο, αφού αντί τεσσάρων αξιωμάτων, χρησιμοποιούσε είκοσι δύο, με στόχο τη διευκόλυνση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Ο μεγάλος αριθμός αξιωμάτων το καθιστούσε μη ανεξάρτητο, με την έννοια ότι περιείχε αξιώματα τα οποία στην πραγματικότητα μπορούσαν να αποδειχθούν από τα υπόλοιπα. Αυτό βέβαια είναι σύνηθες στα σχολικά εγχειρίδια γεωμετρίας, αλλά δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να μη εγκλωβίζονται σε ιδιαίτερα μακροσκελείς αποδείξεις προφανών προτάσεων και να αποκτούν σχετικά γρήγορα πρόσβαση σε πιο ενδιαφέροντα γεωμετρικά θέματα.

Κεφάλαιο 3ο

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε διάφορα διδακτικά εγχειρίδια, σχολικά και μη, που χρησιμοποιήθηκαν από τη δεκαετία του 1960 και μετά. Αφενός θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην αξιωματική προσέγγιση που υιοθετεί το κάθε ένα από αυτά και αφετέρου θα εξετάσουμε ειδικότερα τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα που αναφέρεται στην τομή δύο κύκλων στο επίπεδο.

Τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο αυτή, με χρονολογική σειρά, είναι τα ακόλουθα:

I. Θεωρητική Γεωμετρία, του Νικόλαου Δ. Νικολάου (1950-1968 και 1969-1975)
II. Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου - Τόμος Δεύτερος, του Ιωάννη Ιωαννίδη (1968-1969)
III. Ευκλείδειος Γεωμετρία – Γ', Δ', Ε', Στ' Γυμνασίου, του Χρήστου Παπανικολάου (1975-1985)
IV. Θεωρητική Γεωμετρία, Τεύχος Πρώτο, Α' Λυκείου των Δ. Παπαμιχαήλ και Α. Σκιαδά (1977-1989)
V. Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου των Αν Αλιμπινίση, Γ. Δημάκου, Θ. Εξαρχάκου, Δ. Κοντογιάννη και Γ. Τασσόπουλου (1990-1999)
VI. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου των Γ. Θωμαΐδη, Θ. Ξένου, Γ. Παντελίδη, Α. Πούλου και Γ. Στάμου (1999-2001)
VII. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου των Η. Αργυρόπουλου, Π. Βλάμου, Γ. Κατσούλη, Σ. Μαρκάτη και Π. Σίδερη (2003-σήμερα)

Όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια, είναι δυνατόν να χωρίσουμε τα παραπάνω βιβλία σε τέσσερεις κατηγορίες. Ο διαχωρισμός γίνεται αφενός με χρονολογικά κριτήρια, αλλά κυρίως με βάση το πνεύμα από το οποίο διακατέχονται ως προς τον τρόπο προσέγγισης της Γεωμετρίας. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα I, III, στην δεύτερη τα II, IV στην Τρίτη το V και στην τέταρτη τα VI, VII.

Τέλος, από τα εξωσχολικά βιβλία της περιόδου 1960-1970, κατά την οποία η Γεωμετρία ήταν εξεταζόμενο μάθημα για την εισαγωγή σε πανεπιστημιακές σχολές, θα αναφερθούμε και σε δύο κλασικά «φροντιστηριακά» βιβλία:

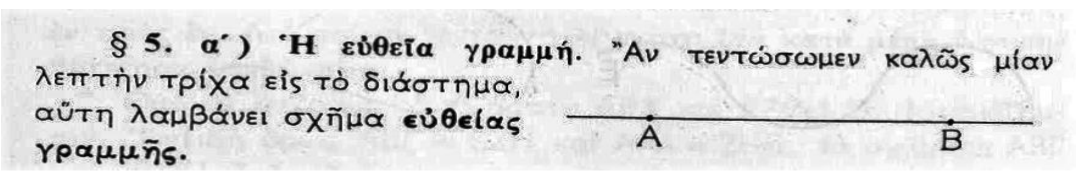
VIII. Γεωμετρία – Επιπεδομετρία - Αποδεικτικαί Προτάσεις του Γ. Τσίντσιφα.
IX. Ευκλείδειος Γεωμετρία – Επίπεδος του Σπ. Κανέλλου.

3.1 Τα εγχειρίδια των Νικολάου και Παπανικολάου

Το σχολικό εγχειρίδιο Γεωμετρίας του Νικολάου χρησιμοποιήθηκε επί σειρά ετών για τη διδασκαλία της θεωρητικής Γεωμετρίας σε πολλές τάξεις του Γυμνασίου για μία περίοδο περίπου τριάντα ετών. Αρχικά θα παραθέσουμε μερικά σημεία του βιβλίου, μέσα από τα οποία θα φανεί το ύφος του συγγραφέα. Όπως και τα άλλα εγχειρίδια της κατηγορίας αυτής, η Θεωρητική Γεωμετρία του Νικολάου είναι σαφώς επηρεασμένη από τα Στοιχεία του Legendre. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της διαπίστωσης είναι ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι έννοιες της γραμμής και του σημείου:

- Τα άκρα μιας επιφάνειας ή ενός μέρους μιας επιφάνειας λέγονται γραμμαί.
- Πάσα γραμμή είναι τομή δύο επιφανειών.
- Τα άκρα των γραμμών ή του μέρους μιας γραμμής λέγονται σημεία.
- Έκαστον σημείον είναι τομή δύο γραμμών.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι ο Νικολάου κρατάει αποστάσεις από τους αντίστοιχους ορισμούς του Ευκλείδη. Μάλιστα, για να ορίσει την έννοια της ευθείας γραμμής καταφεύγει σε αντικείμενα του φυσικού κόσμου:


§ 5. α´) Ἡ εὐθεῖα γραμμή. Ἂν τεντώσωμεν καλῶς μίαν λεπτὴν τρίχα εἰς τὸ διάστημα, αὕτη λαμβάνει σχῆμα **εὐθείας γραμμῆς.**

Επίσης, για τον ορισμό του ευθύγραμμου τμήματος γίνεται χρήση της έννοιας του «μεταξύ»:

Ἂν εἰς μίαν εὐθεῖαν ὁρίσωμεν δύο σημεῖα Α, Β, μεταξὺ αὐτῶν περιέχεται ἓν μέρος ΑΒ τῆς εὐθείας ταύτης.
Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **εὐθύγραμμον τμῆμα.**

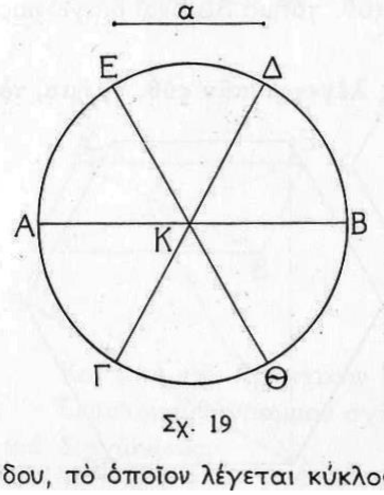
Μάλιστα, παρακάτω αναφέρεται η έννοια του αξιώματος και αναφέρεται, εν είδει παραδείγματος μεταξύ άλλων αξιωμάτων και το

β΄) Πᾶν εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ πᾶσαν ἄλλην γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.
Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι δύο σημεῖα, λέγεται **ἀπόστασις** τῶν σημείων τούτων.

Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι με βάση το παραπάνω, η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος AB και η απόσταση των σημείων A, B ταυτίζονται, πράγμα το οποίο φαίνεται τουλάχιστον περίεργο με βάση τα σημερινά κριτήρια αυστηρότητας που διέπουν τις διατυπώσεις των εννοιών και των ορισμών.

Όσον αφορά την έννοια του κύκλου, από την αρχή ακόμα που παρατίθεται ο ορισμός, ο συγγραφέας σπεύδει να τονίσει ότι βασίζεται σε προηγούμενη γνώση από τη Πρακτική Γεωμετρία, λέγοντας

§ 23. Τί εἶναι κύκλος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν ὅτι:



Σχ. 19

Κύκλος εἶναι ἓν μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται.

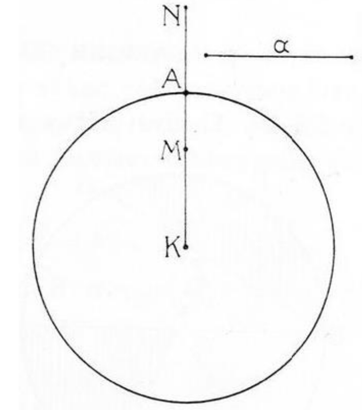
Ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται εἷς κύκλος, λέγεται **περιφέρεια** αὐτοῦ. Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν συνήθως μὲ τὸν διαβήτην. Τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, λέγεται **κέντρον** αὐτοῦ. Οὕτως ἡ γραμμὴ ΑΓΒΕΑ κλείει ἓν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον λέγεται κύκλος (σχ. 19).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, και σε αυτό το σημείο ο ορισμός είναι προβληματικός. Δεν γίνεται λόγος στον ορισμό για γεωμετρικό τόπο, αλλά ο κύκλος ορίζεται ως ένα μέρος του επιπέδου, αυτό που σήμερα ονομάζουμε κυκλικό δίσκο.

Όπως φαίνεται, ο συγγραφέας δέχεται ότι η περιφέρεια του κύκλου έχει «εσωτερικό». Αυτό θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια, κατά τη σύγκριση της ακτίνας κύκλου με την απόσταση σημείου του επιπέδου από το κέντρο του κύκλου:

§ 25. Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου κύκλου ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

α΄) Ἔστω Μ ἓν σημεῖον ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ (σχ. 20). Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΜ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς σημεῖον Α κείμενον πέραν τοῦ Μ. Εἶναι λοιπὸν ΚΜ ⟨ ΚΑ. ἤτοι :



Ενδιαφέρον είναι ότι αρκετές σελίδες παρακάτω καταλήγει στο πόρισμα

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι καμπύλη γραμμή.**

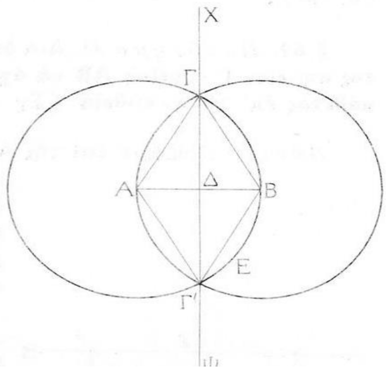
Επίσης, η ιδέα του «εσωτερικού» εμφανίζεται και κατά την απόδειξη του

§ 67. *Θεώρημα (βοηθητικόν).* **Μὲ κέντρα δύο σημεῖα Α,Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΑΒ αὐτῶν γράφομεν δύο περιφερείας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται ἔχουσι δύο μόνον κοινὰ σημεῖα** (σχ. 44).

Ἀπόδειξις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μέσον Δ τῆς ἀκτῖνος ΑΒ τοῦ κύκλου Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου. Ἡ δὲ δι᾽ αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ΧΨ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐξερχομένη τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὸ ἓν μέρος συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Γ.

Τὸ δὲ εὐθ. τμῆμα ΑΓ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΓ = ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΑΓ = ΓΒ (§ 64), ἔπεται ὅτι ΓΒ = ΑΒ, ἤτοι τὸ τμῆμα ΓΒ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Β. Ἕνεκα δὲ τούτου τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Β. Εἶναι λοιπὸν τὸ Γ κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β.



Ειδικά η πρόταση: «…*ευθεία ΧΨ κάθετος επί την ΑΒ <u>εξερχόμενη του κύκλου</u> τούτου <u>από το εν μέρος</u> <u>συναντά την περιφέρεια εις τι σημείο Γ</u>*» περικλείει μερικές βασικές παραδοχές που γίνονται, άλλοτε σιωπηρά, σε σχέση με την ευθεία και τον κύκλο:

- Η περιφέρεια κύκλου χωρίζει το επίπεδο σε δύο τμήματα, το εσωτερικό και το εξωτερικό.
- Κάθε ευθεία του επιπέδου χωρίζει το επίπεδο σε δύο «μέρη».
- Όταν από εσωτερικό σημείο κύκλου άγεται ευθεία, αυτή τέμνει τον κύκλο και μάλιστα σε δύο σημεία.

Ως προς το θέμα της σχετικής θέσης δύο κύκλων στο επίπεδο, ο Νικολάου, αφού αναφέρει τις πέντε δυνατές περιπτώσεις, όπως ακριβώς και ο Legendre,

α΄)	**Δύο κοινὰ σημεῖα.**	Αἱ περιφέρειαι τέμνονται.
β΄)	**Ἕν κοινὸν σημεῖον**	Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτός.
γ΄)		Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός.
δ΄)	**Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον**	Ἕκαστος κύκλος ἐκτὸς τοῦ ἄλλου
ε΄)		Εἷς κύκλος ὅλος ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

αποδεικνύει τη σχέση που έχει η απόσταση των κέντρων των κύκλων με τις ακτίνες, σε κάθε περίπτωση. Έπειτα, με την εις άτοπον απαγωγή, αναφέρει ότι εύκολα αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των προτάσεων αυτών και καταλήγει

«Εκ τούτων και των προηγουμένων έπεται ότι εκάστη από τας αποδειχθείσας σχέσεις είναι αναγκαία και επαρκής συνθήκη, διά να έχωσιν αι περιφέρειαι την αντίστοιχον θέσιν»

Αμέσως μετά, ως εφαρμογή αυτών, παραθέτει την κατασκευή τριγώνου με γνωστές πλευρές και μέσω αυτής διατυπώνει την συνθήκη, ώστε τρεις θετικοί αριθμοί α, β, γ να αποτελούν πλευρές τριγώνου.

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι στο εγχειρίδιο του Νικολάου υπάρχει μια χαλαρή στάση όσον αφορά την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Ο συγγραφέας, αφενός επιχειρεί να θέσει μια σειρά από αξιώματα για την ανάπτυξη του θέματος, αφετέρου δεν αποφεύγει να καταφύγει στην διαίσθηση και την εποπτεία χάριν ευκολίας της παρουσίασης. Μάλιστα, τα αξιώματα που αναφέρονται, εμφανίζονται διάσπαρτα στο βιβλίο και μάλιστα η πρώτη ομάδα αξιωμάτων παρατίθεται ως παράδειγμα για το τι σημαίνει αξίωμα στη Γεωμετρία. Ως προς τις αρχικές έννοιες του σημείου, της ευθείας, του επιπέδου και της επιφάνειας, ο Νικολάου αποφεύγει να δηλώσει ότι είναι έννοιες που δεν ορίζονται, αλλά επιχειρεί να τις ορίσει καταφεύγοντας σε γνωστές έννοιες, είτε από την ήδη διδαχθείσα Πρακτική Γεωμετρία, είτε από τον φυσικό κόσμο.

Από παρόμοιο πνεύμα διακατέχεται και το εγχειρίδιο του Παπανικολάου, αν και από την αρχή φαίνεται ότι επιχειρείται μεγαλύτερη αυστηρότητα. Ο συγγραφέας ξεκαθαρίζει ότι το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο είναι «*έννοιαι μη δυνάμεναι να ορισθούν*» και απλώς επιχειρεί να τις σκιαγραφήσει:

- Το σημείον δεν έχει σχήμα ούτε έκτασιν, αλλά έχει μόνον θέσιν. Λεπτό τεταμένον νήμα δίδει την εικόνα μέρους ευθείας γραμμής. Τέλος η επιφάνεια ηρεμούντος ύδατος (περιωρισμένων διαστάσεων), δύναται να δώση την εικόνα μέρους επιπέδου επιφανείας.

Σπεύδει ωστόσο να καταστήσει σαφές ότι « *Τα ανωτέρω δεν αποτελούν μαθηματικούς ορισμούς των γεωμετρικών τούτων στοιχείων, αλλά αυτά έχουν καθορισμένας ιδιότητας περιγραφομένας υπό των αξιωμάτων*».

Ως προς τα αξιώματα που θα χρησιμοποιηθούν ο συγγραφέας θυμίζει τον Hilbert, καθώς αναφέρει εξ αρχής ότι τα αξιώματα πάνω στα οποία θεμελιώνεται η Γεωμετρία διαιρούνται κυρίως σε τρεις ομάδες, τα αξιώματα θέσεως, τα αξιώματα ισότητας και τα αξιώματα διατάξεως. Συμπληρώνει ωστόσο ότι στην πορεία θα συμπληρωθούν και με άλλα, εκ των οποίων σπουδαιότερο είναι το αξίωμα του Ευκλείδη σχετικά με τις παράλληλες ευθείες. Επίσης, αργότερα αναφέρονται ακόμα δύο αξιώματα, τον μεν πρώτο είναι στην πραγματικότητα αξίωμα συνέχειας

- Αξίωμα: Έστωσαν επί επιπέδου (Π) ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκατέρωθεν αυτής. Πάσα γραμμή (Γ) του επιπέδου (Π) διερχόμενη διά των Α και Β έχει εν τουλάχιστον κοινόν σημείον μετά της ευθείας (ε).

ενώ το δεύτερο αναφέρεται στον γεωδαισιακό χαρακτήρα του ευθύγραμμου τμήματος

- Αξίωμα: Αν Α και Β είναι δύο σημεία, το ευθύγραμμον τμήμα ΑΒ που ορίζουν, έχει μήκος μικρότερον του μήκους πάσης άλλης γραμμής (Γ) με τα αυτά άκρα Α και Β

Με βάση αυτό το αξίωμα συμπεραίνει αργότερα την ανισότητα του τριγώνου και τελικά αποδεικνύει τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα και τη διαφορά των ακτίνων δύο κύκλων στο επίπεδο. Για τα αντίστροφα των προτάσεων αυτών, όπως και ο Νικολάου, η απόδειξη γίνεται με την εις άτοπον απαγωγή.

3.2 Τα εγχειρίδια των Ιωαννίδη και Παπαμιχαήλ-Σκιαδά

Από αυτή την ομάδα εγχειριδίων θα εξετάσουμε αρχικά τη *Θεωρητική Γεωμετρία* των Παπαμιχαήλ - Σκιαδά. Το βιβλίο αυτό διδάχτηκε ως εισαγωγικό στη Γεωμετρία κατά τα έτη 1977-1989 και μάλιστα από το έτος 1979, με τον διαχωρισμό του σχολείου σε Γυμνάσιο και Λύκειο, η διδασκαλία του ξεκινάει στην Α' Λυκείου.

Όπως δηλώνεται από τις πρώτες σελίδες του «*Σήμερα η Ευκλείδειος Γεωμετρία θεμελιώνεται με ένα σύστημα αξιωμάτων που πρότεινε ο μαθηματικός D. Hilbert. Από τα αξιώματα αυτά εδώ θα αναφέρουμε εκείνα που είναι απαραίτητα για ένα σχολικό εγχειρίδιο*» Ως εκ τούτου, οι διαφορές σε σχέση με τα προηγούμενα είναι εμφανείς . Για παράδειγμα, η ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων και τριγώνων στους Νικολάου και Παπανικολάου ορίζεται μέσω μετάτοπισης, ενώ τώρα οι συγγραφείς λένε «Δεχόμαστε ότι στο σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων υπάρχει η έννοια της ισότητας» και μάλιστα την χαρακτηρίζουν σχέση ισοδυναμίας, ενώ για τα τρίγωνα αποτελεί αξίωμα το γνωστό μας κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π. Ενδιαφέρον είναι επίσης ότι προηγείται η μελέτη του κύκλου και με βάση αυτόν ορίζεται η ισότητα γωνιών, όπως επίσης και η αναφορά του αξιώματος συνέχειας ότι «Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που συνδέει ένα εσωτερικό σημείο Β ενός κυκλικού δίσκου (Ο, ρ) με ένα εξωτερικό του σημείο Α έχει ένα και μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (Ο, ρ)».

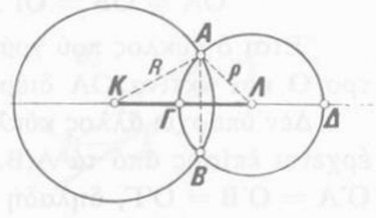
Ωστόσο, είναι χαρακτηριστικό ότι δεν αναφέρονται εξαρχής όλα τα αξιώματα της θεωρίας και μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις παρατίθενται υπό τη μορφή υποσημείωσης τη στιγμή που κρίνονται απαραίτητα. Μάλιστα, αυτό ακριβώς συμβαίνει κατά τη διαπραγμάτευση της τομής δύο κύκλων στο επίπεδο. Εδώ οι συγγραφείς διαφοροποιούνται σημαντικά σε σχέση με τα προηγούμενα βιβλία Γεωμετρίας. Αντί να επικαλεστούν τις πέντε δυνατές σχετικές θέσεις και να αποδείξουν τα αντίστροφά τους με χρήση της εις άτοπον απαγωγής, χρησιμοποιούν το (δοσμένο υπό μορφή υποσημείωσης) αξιώμα συνέχειας κύκλου με κύκλο: «*Δεχόμαστε αξιωματικά ότι κάθε τόξο που συνδέει ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό σημείο ενός κυκλικού δίσκου* (K, R) *έχει με τον κύκλο* (K, ρ) *ένα και μόνο ένα κοινό σημείο*».

ΘΕΩΡΗΜΑ : Δύο κύκλοι τέμνονται, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάκεντρός τους εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους.

Δηλαδή : $R - \rho < K\Lambda < R + \rho.$

Ἀπόδ. Ἄν θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους (Κ,R)) καί (Λ,ρ)) μέ $R > \rho$ καί καλέσουμε Α τό ἕνα κοινό σημεῖο τους, ἀπό τό τρίγωνο ΚΑΛ ἔχουμε $KA - A\Lambda < K\Lambda < KA + A\Lambda$, δηλαδή

$$R - \rho < K\Lambda < R + \rho.$$



Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες αὐτές, θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται. Ἄν καλέσουμε Γ καί Δ τά σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλ. (Λ,ρ) μέ τήν ΚΛ, ἔχουμε (ἐπειδή $K\Gamma = K\Lambda - \rho$ καί $K\Delta = K\Lambda + \rho$):

$K\Lambda < R + \rho \Rightarrow K\Lambda - \rho < R \Rightarrow K\Gamma < R \Rightarrow \Gamma =$ ἐσωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(Κ,ρ). Ἀκόμα: $R - \rho < K\Lambda \Rightarrow R < K\Lambda + \rho \Rightarrow R < K\Delta \Rightarrow \Delta =$ ἐξωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(Κ, R).

Τότε ὅμως κάθε τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ τοῦ κυκλ(Λ,ρ) θά τέμνει τόν κύκλ(Κ,R) καί ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα[1].

Στη συνέχεια εξετάζουμε το εγχειρίδιο του Ιωαννίδη. Χωρίς αμφιβολία πρόκειται για ιδιάζουσα περίπτωση βιβλίου. Εισάγεται το 1969 για να αντικαταστήσει εκείνο του Νικολάου και χρησιμοποιήθηκε μόνο για μια σχολική χρονιά καθώς οι μαθητές, αλλά και οι καθηγητές συνάντησαν ανυπέρβλητες δυσκολίες κατά τη χρήση του. Η ιδιαιτερότητά του έγκειται στο ότι ακολουθεί σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό τη φιλοσοφία και τη δομή των Θεμελίων του Hilbert, κάτι το οποίο ο συγγραφέας καθιστά ξεκάθαρο από τις πρώτες σελίδες του βιβλίου, όταν λέει: «*Ο Γεωμετρικός Χώρος αποτελεί νοητικόν κατασκεύασμα όλως διάφορον του αισθητού χώρου. Η Γεωμετρική ένεκα τούτου εποπτεία προώρισται να μας οδηγήσει εις αληθείας τας οποίας ουδέποτε θα ήτο δυνατόν να γνωρίσωμεν διά της εκ του αισθητού εποπτείας*». Μια βασική διαφοροποίηση από όλα τα προηγούμενα αντίστοιχα συγγράμματα, η οποία αναφέρεται ήδη στην εισαγωγή, είναι ότι δεν θα γίνει χρήση του αξιώματος του αναλλοιώτου σχήματος, αφού «*Η μέθοδος η οποία συνίσταται εις το να αποδείξωμεν τα θεωρήματα της ισότητος χρησιμοποιούντες την έννοια της μετακινήσεως δεν είναι ορθή, ακριβώς διότι η έννοια της μετακινήσεως προϋποθέτει την έννοιαν της ισότητος την οποίαν θέλομεν να ορίσωμεν. Η μέθοδος αυτή προσήκει, βεβαίως, ως αποδεικτική μέθοδος της Εποπτικής γεωμετρίας η οποία διδάσκεται εις τας πρώτας τάξεις του Γυμνασίου»*.

Ουσιαστικά ο Ιωαννίδης χρησιμοποιεί αυτούσια τα αξιώματα των πρώτων τεσσάρων ομάδων του Hilbert, όμως υιοθετεί και πέντε αξιώματα σχετικά με τις έννοιες της φοράς και του προσανατολισμού. Μάλιστα, σε υποσημείωση αναφέρει ότι: «*Η έννοια της φοράς είναι έννοια αρχική μη δυνάμενη να ορισθή εξ άλλων εννοιών. Δύναται να ερμηνευθή διά της συσχετίσεώς της με την έννοια της κίνησης…*».

Κατά την παρουσίαση της ύλης, η εξέταση της έννοιας του κύκλου και των συναφών θεμάτων καθυστερεί αρκετά και εισάγεται μόλις στο έβδομο κεφάλαιο του βιβλίου. Ως εκ τούτου στο πέμπτο κεφάλαιο, το σχετικό, μεταξύ άλλων, με γεωμετρικές κατασκευές η αντιμετώπιση κλασικών θεμάτων, όπως η διχοτόμηση γωνίας, η κατασκευή καθέτου προς ευθεία κτλ. επιτυγχάνονται χωρίς τη χρήση του κύκλου.

Για να καταστεί δυνατή η αντιμετώπιση των θεμάτων τομής κύκλου με ευθεία και τομής δύο κύκλων, εισάγονται, τη στιγμή που είναι απαραίτητα, δύο αξιώματα συνέχειας:

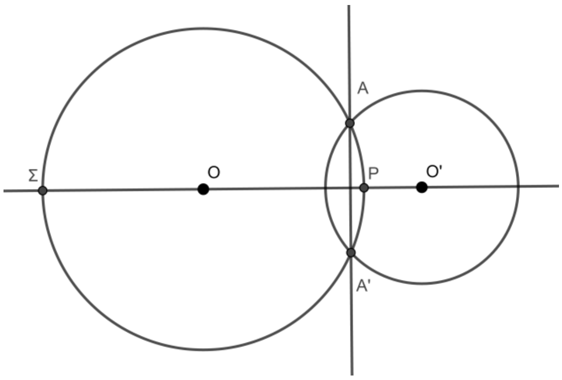
- Αν Α και Β είναι αντιστοίχως ένα εσωτερικόν και ένα εξωτερικόν σημείον κύκλου (Ο), τότε μεταξύ των Α και Β υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείον του (Ο).
- Αν Α και Β είναι αντιστοίχως ένα εσωτερικόν και ένα εξωτερικόν σημείον κύκλου (Ο) και (Γ) ένας κύκλος διερχόμενος διά των Α και Β, υπάρχει επί εκάστου των τόξων ΑΒ του κύκλου (Γ), ένα τουλάχιστον, σημείον του κύκλου (Ο).

Μάλιστα, το δεύτερο δεν χαρακτηρίζεται καν ως αξίωμα, παρά μόνο ο συγγραφέας λέει ότι: «*Εν συνεχεία προς το αξίωμα (246) δεχόμεθα ότι…*».

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον τρόπο αντιμετώπισης της ικανής συνθήκης τομής δύο κύκλων.

Θεώρημα: Θεωρούμεν δύο κύκλους (Ο) και (Ο’) ακτίνων r και r' αντιστοίχως ($\mathrm{r} \geq \mathrm{r}'$) και την απόστασιν $\mathrm{OO}' = \delta$ των κέντρων των.

Αν $\mathrm{r}' - \mathrm{r} < \delta < \mathrm{r}' + \mathrm{r}$, τότε οι κύκλοι τέμνονται.



Έστωσαν Ρ και Σ τα κοινά σημεία του (Ο) με την διάκεντρον ΟΟ’ των κύκλων. (Σ προς το μέρος του Ο προς το οποίον δεν κείται το Ο’). Εκ της $\mathrm{r} \geq \mathrm{r}'$ έπεται ότι $\mathrm{r}' < \delta + \mathrm{r}$, ήτοι ότι $\mathrm{r} < \mathrm{O}'\Sigma$ ή $\mathrm{O}'\Sigma > \mathrm{r}'$. Εξ αυτής έπεται ότι το σημείον Σ είναι εξωτερικόν σημείον του κύκλου (Ο’). Εξάλλου:

- Αν $\delta > r$, το σημείον O' είναι εξωτερικόν σημείον του κύκλου (Ο). Εκ της $\delta < r + r'$ έπεται ότι $\delta - r < r'$ ή $O'P < r'$, ήτοι ότι το Ρ είναι εσωτερικόν σημείον του κύκλου (Ο').
- Αν $\delta = r$, το Ο' είναι σημείον του (Ο), και εκ της $\delta < r + r'$ έπεται ότι $r' > 0$. Αλλά εις την περίπτωσιν αυτήν το σημείον O' συμπίπτει με το Ρ και επειδή είναι $r' > 0$, το Ρ είναι εσωτερικόν σημείον του (Ο').
- Αν $\delta < r$, το Ο' είναι εσωτερικόν σημείον του (Ο). Εκ της $\delta > r - r'$ έπεται ότι $r' > r - \delta$ ή $r - \delta < r'$ ή $O'P < r'$, ήτοι ότι το σημείον Ρ είναι εσωτερικόν σημείον του (Ο').

Ώστε και εις τας τρεις περιπτώσεις, το Ρ είναι εσωτερικόν σημείον του (Ο'), ενώ το Σ είναι εξωτερικόν σημείον αυτού. Εκ τούτου έπεται ότι οι δύο κύκλοι (Ο) και (Ο') έχουν δύο κοινά σημεία Α και Α'. Τα σημεία αυτά δεν κείνται επί της διακέντρου ΟΟ' αυτών. Πράγματι, αν ήσαν σημεία της ΟΟ' δεν θα ήσαν διάφορα των Ρ και Σ. Αλλά τα Ρ και Σ δεν είναι κοινά σημεία των κύκλων, διότι $O'P < r'$ και $O'\Sigma > r'$.

Ο συγγραφέας, μαζί με αυτήν, εξετάζει συνολικά τις πέντε δυνατές περιπτώσεις:

$$\delta > r + r', \quad \delta = r + r', \quad r - r' < \delta < r + r', \quad \delta = r - r', \quad \delta < r - r'.$$

Παρατηρεί στη συνέχεια ότι αυτές είναι οι μοναδικές, αφού δεν υπάρχει άλλη δυνατή σχέση του δ ως προς τα $r - r'$ και $r + r'$. Τέλος, με χρήση της εις άτοπον απαγωγής συμπεραίνει ότι ισχύει και το αντίστροφο των αντίστοιχων προτάσεων, δηλαδή στη δική μας περίπτωση ότι

$$r' - r < \delta < r' + r \Leftrightarrow \text{οι κύκλοι τέμνονται}$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι στο βιβλίο του Ιωαννίδη οι πέντε σχετικές θέσεις δύο κύκλων ταξινομούνται με βάση καθαρά αλγεβρικά κριτήρια. Αντιθέτως ο Νικολάου εξετάζει αρχικά τις περιπτώσεις βασιζόμενος στην εποπτεία και μέσα από αυτές καταλήγει στις αλγεβρικές σχέσεις εκ των υστέρων.

3.3 Το εγχειρίδιο των Αλιμπινίση – Δημάκου - Εξαρχάκου-Κοντογιάννη-Τασσόπουλου

Θα εξετάσουμε τώρα το σχολικό εγχειρίδιο Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου των Αλιμπινίση et al., το οποίο χρησιμοποιήθηκε από το 1990 έως το 1999. Με το βιβλίο αυτό πραγματοποιείται μια στροφή προς την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας βασιζόμενη σε έννοιες της αριθμητικής, όπως είναι το μήκος ευθύγραμμου τμήματος και το μέτρο γωνίας. Βάση αυτού του συστήματος, το οποίο θυμίζει σε μερικά σημεία εκείνο του Birkhoff, αποτέλεσε η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Aleksei Pogorelov, ο οποίος επιχείρησε να θέσει σε στέρεα θεμέλια τη γεωμετρία του Kiselev, η οποία διδασκόταν από το 1892, αρχικά στην τσαρική Ρωσία και έπειτα στα σοβιετικά σχολεία επί δεκαετίες.

Τα αξιώματα που εμφανίζονται συνολικά είναι δέκα: Τρία αξιώματα θέσης, δύο αξιώματα που αναφέρονται στην έννοια «μεταξύ», το αξίωμα του μήκους ευθύγραμμου τμήματος, το αξίωμα του μέτρου γωνίας, το αξίωμα ύπαρξης τμήματος με δοθέν μήκος, το αξίωμα ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) και τέλος το αξίωμα μοναδικότητας της παραλλήλου.

1. Σε κάθε ευθεία ανήκουν δύο τουλάχιστον διαφορετικά σημεία.

2. Από δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου διέρχεται μόνο μία ευθεία και η ευθεία αυτή περιέχεται στο επίπεδο.

3. Σε κάθε επίπεδο ανήκουν τρία τουλάχιστον μη συνευθειακά σημεία.

4. Αν τρία διαφορετικά σημεία ανήκουν σε μία ευθεία, τότε ένα μόνο βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

5. Κάθε ευθεία ε ορίζει στο επίπεδο δύο σχήματα P_1 και P_2 με τις εξής ιδιότητες:

a. Κάθε σημείο που δεν ανήκει στην ε ανήκει σε ένα μόνο από τα P_1 και P_2.

b. Αν τα σημεία A, B ανήκουν και τα δύο στο P_1, ή και τα δύο στο P_2, τότε η ε δεν έχει κοινά σημεία με το τμήμα AB.

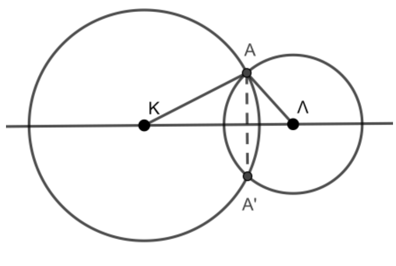
c. Αν το σημείο Γ ανήκει στο P_1 και το Δ στο P_2, τότε η ε τέμνει το τμήμα ΓΔ.
6. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μοναδικό μήκος που είναι ένας μη αρνητικός αριθμός. Το μήκος ενός τμήματος είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των τμημάτων στα οποία αυτό διαιρείται από οποιοδήποτε σημείο. Τέλος, ένα τμήμα είναι μηδενικό, αν και μόνο αν έχει μήκος μηδέν.

7. Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο, που είναι ένα αριθμός μ, με $0 \leq \mu \leq 180$. Το μέτρο μίας γωνίας είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των γωνιών στις οποίες διαιρεί τη γωνία οποιαδήποτε ημιευθεία. Το μέτρο της ευθείας γωνίας είναι 180.

8. Σε κάθε ημιευθεία Οx υπάρχει μοναδικό σημείο Μ τέτοιο, ώστε το τμήμα ΟΜ να έχει μήκος ένα μη αρνητικό αριθμό α.
9. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
10. Η παράλληλη προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής είναι μοναδική.
Όπως είναι λογικό, η σειρά με την οποία εξετάζονται οι διάφορες έννοιες διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα εγχειρίδια. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το κεφάλαιο του κύκλου είναι το τελευταίο του βιβλίου και εξετάζεται μετά από το θεώρημα του Θαλή και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Βασικές γεωμετρικές κατασκευές, όπως της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και διχοτόμου γωνίας εμφανίζονται για πρώτη φορά στο τέλος σχεδόν του βιβλίου.

Ως προς το θεώρημα που σχετίζεται με την τομή κύκλων, οι συγγραφείς το αντιμετωπίζουν με τον ακόλουθο τρόπο:

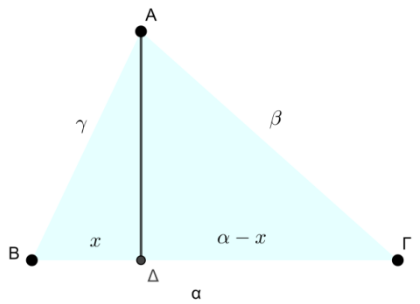
Θεώρημα: Αν για δύο κύκλους $(\mathrm{K}, \mathrm{R}), (\Lambda, \rho)$ με $\mathrm{R} > \rho$ και $\mathrm{K}\Lambda = \delta$ ισχύει $\mathrm{R} - \rho < \delta < \mathrm{R} + \rho$, τότε οι κύκλοι έχουν δύο μόνο κοινά σημεία, συμμετρικά ως προς την ευθεία ΚΛ.



Απόδειξη: Από τις σχέσεις $\mathrm{R} - \rho < \delta < \mathrm{R} + \rho$ προκύπτει ότι υπάρχει τρίγωνο ΚΛΑ με $\mathrm{K}\Lambda = \delta$, $\mathrm{KA} = \mathrm{R}$, $\Lambda\mathrm{A} = \rho$. Επομένως το Α είναι κοινό σημείο των κύκλων. Ακόμη αν Α' είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ΚΛ, θα είναι $ΚΑ' = ΚΑ = R, ΛΑ' = ΛΑ = ρ$ και επομένως και το Α' είναι κοινό σημείο των κύκλων. Οι κύκλοι $(Κ, R), (Λ, ρ)$ δεν ταυτίζονται, αφού έχουν διαφορετικά κέντρα και επομένως δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.

Το ότι από τις σχέσεις $R - ρ < δ < R + ρ$ προκύπτει ότι υπάρχει τρίγωνο ΚΛΑ με $ΚΛ = δ$, $ΚΑ = R$, $ΛΑ = ρ$ δεν απορρέει βέβαια από τα προηγούμενα θεωρήματα και οι συγγραφείς παραθέτουν μια απόδειξη αυτού σε υποσημείωση[4] ως εξής:

Γενικά αποδεικνύεται ότι αν $α, β, γ$ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα με $γ \leq β \leq α < β + γ$, τότε υπάρχει τρίγωνο με πλευρές $α, β, γ$.



Πράγματι, αν πάρουμε τμήμα $ΒΓ = α$, επειδή η ΒΓ θα είναι η μεγαλύτερη πλευρά, η προβολή της τρίτης κορυφής Α πάνω στην ΒΓ θα είναι σημείο Δ μεταξύ των $Β, Γ$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο Δ μεταξύ των $Β, Γ$ με $ΒΔ = x$ και στην κάθετη της ΒΓ στο Δ ότι υπάρχει σημείο Α με $ΑΔ = y$, ώστε να είναι $ΑΒ = γ$ και $ΑΓ = β$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουμε $x^2 + y^2 = γ^2$ και $y^2 + (α - x)^2 = β^2$ αντιστοίχως. Έτσι, αρκεί να έχει λύση το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = γ^2 \\ y^2 + (α - x)^2 = β^2 \end{cases}$$

το οποίο γράφεται

$$\begin{cases} y^2 = γ^2 - x^2 \\ x = \dfrac{α^2 + γ^2 - β^2}{2α} \end{cases}$$

Για να έχει όμως λύση το σύστημα αυτό, πρέπει και αρκεί να ισχύει

[4] Σε μεταγενέστερες εκδόσεις του βιβλίου, η απόδειξη αυτή τοποθετείται σε παράρτημα στο τέλος του βιβλίου, στην ενότητα «Συμπληρωματικές αποδείξεις», μαζί με την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή.

$$0 < \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} < \gamma$$

(αφού $\gamma < \alpha$). Πράγματι είναι $\alpha \geq \beta > 0$, οπότε $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ και άρα

$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} > 0.$$

Εξάλλου

$$\gamma - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} = \frac{2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2\alpha} = \frac{\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \alpha - \gamma)}{2\alpha} > 0,$$

αφού $\beta + \gamma > \alpha$ και $\beta \geq \gamma$, οπότε $\beta + \alpha > \gamma$.

Το σύστημα λοιπόν έχει λύση και άρα υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β, γ.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συγγραφείς επιδίδονται σε ακραία αλγεβροποίηση για να αντιμετωπίσουν δύο αμιγώς γεωμετρικές προτάσεις: Αρχικά την ύπαρξη τριγώνου με πλευρές τρία δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα και μέσω αυτής, την ικανή συνθήκη τομής δύο κύκλων. Ως εκ τούτου, τίθεται εύλογα ο προβληματισμός μήπως είναι προτιμότερο σε αυτή την περίπτωση να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα με εργαλεία της αναλυτικής γεωμετρίας. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στο 4ο κεφάλαιο της εργασίας.

Μαζί με αυτό το θεώρημα οι συγγραφείς αποδεικνύουν και τα θεωρήματα:

- Αν για δύο κύκλους $(\mathrm{K}, \mathrm{R}), (\Lambda, \rho)$ με $\mathrm{R} > \rho$ και $\mathrm{K}\Lambda = \delta$ ισχύει $\delta = \mathrm{R} + \rho$ ή $\delta = \mathrm{R} - \rho$, τότε οι κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν για δύο κύκλους $(\mathrm{K}, \mathrm{R}), (\Lambda, \rho)$ που έχουν διαφορετικά κέντρα, $\mathrm{R} > \rho$ και $\mathrm{K}\Lambda = \delta$, ισχύει $\delta > \mathrm{R} + \rho$ ή $\delta < \mathrm{R} - \rho$, τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία.

Έτσι πλέον είναι σε θέση να αποδείξουν τα αντίστροφα των θεωρημάτων αυτών με εις άτοπον απαγωγή. Παρατηρούμε δηλαδή ότι σε αυτό το εγχειρίδιο ακολουθείται αντίστροφη πορεία σε σχέση με όλα τα προηγούμενα.

Πρώτα αποδεικνύεται ότι η συνθήκη $R - \rho < \delta < R + \rho$ είναι ικανή για να τέμνονται οι κύκλοι και έπειτα το αντίστροφο.

3.4 Τα εγχειρίδια των Θωμαΐδη – Ξένου – Παντελίδη – Πούλου - Στάμου και Αργυρόπουλου – Βλάμου – Κατσούλη – Μαρκάτη - Σιδέρη

Με τα βιβλία αυτά η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο ελληνικό σχολείο εισέρχεται στον 21ο αιώνα ριζικά αλλαγμένη. Μετά από μια δεκαετία χρήσης του αξιωματικού συστήματος του Pogorelov, τα σχολικά εγχειρίδια αποκτούν τελείως διαφορετικό ύφος και φιλοσοφία. Αυτό σημαίνει ότι η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας δεν είναι πλέον το ζητούμενο, αλλά προτεραιότητα δίνεται στην εποπτεία και τη διαισθητική επιβεβαίωση. Στην απόφαση αυτή οδηγήθηκαν τα στελέχη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, ύστερα από πολλές συζητήσεις για τη δυνατότητα των μαθητών της Α΄ Λυκείου να κατανοήσουν το νόημα της αξιωματικής θεμελίωσης. Το νέο πλαίσιο διδασκαλίας αποτυπώθηκε στο πρόγραμμα σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας που δημοσιεύτηκε το 1999 και τις οδηγίες για τη συγγραφή:

«*Η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση που χαρακτηρίζει τα διδακτικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τις τελευταίες δεκαετίες δημιουργεί σοβαρές δυσχέρειες στη διδακτική πράξη. Ιδιαίτερα μάλιστα όταν δεν είναι προφανής από την εποπτεία η αναγκαιότητα που επιβάλλει την επιλογή των επιμέρους αξιωμάτων. Γι' αυτό σήμερα υπάρχει διεθνώς μία τάση εγκατάλειψης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ενός «αξιωματικά δομημένου» συστήματος και δίνεται έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία και όχι στην άκριτη αυστηρή θεμελίωση.*»

Με γνώμονα λοιπόν, αυτές τις κατευθυντήριες γραμμές, το βιβλίο των Αλιμπινίση et al. αντικαταστάθηκε από εκείνο των Θωμαΐδη et al. το οποίο χρησιμοποιήθηκε για δύο μόλις χρόνια (1999-2001). Σε γενικές γραμμές η αξιωματική προσέγγιση βρίσκεται κοντά στα Στοιχεία του Legendre και ως τέτοια, θυμίζει αρκετά τα συγγράμματα του Νικολάου και του Παπανικολάου.

Για παράδειγμα, η ισότητα γεωμετρικών σχημάτων ορίζεται μέσω της μετατόπισης και σύμπτωσης σχημάτων, αν και απουσιάζει αναφορά του σχετικού αξιώματος. Γενικότερα, ο τρόπος με τον οποίο δομείται τώρα η Γεωμετρία έχει σαφείς αναφορές στις αισθήσεις και την εποπτική εμπειρία των μαθητών, προφανώς με σκοπό την διευκόλυνση της διδασκαλίας.

Συνολικά χρησιμοποιούνται δέκα αξιώματα για τη θεμελίωση της Επιπεδομετρίας, ορισμένα εκ των οποίων δεν αναφέρονται ξεχωριστά, παρά μόνο στο ρέον κείμενο συναντάμε τη φράση «*δεχόμαστε ως αξίωμα ότι…*». Τα αξιώματα είναι τα ακόλουθα:

1. Από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία.

2. Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτήν.

3. Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς κενά.

4. Αν A, B είναι δύο σημεία μίας ευθείας τότε υπάρχουν τρία σημεία K, Λ, M διαφορετικά από τα A και B από τα οποία το Λ ανήκει τόσο στην ημιευθεία AB, όσο και στην ημιευθεία BA, το K ανήκει στην αντικείμενη ημιευθεία της ημιευθείας AB και τέλος το M ανήκει στην αντικείμενη ημιευθεία της ημιευθείας BA. Το σημείο Λ ονομάζεται ενδιάμεσο σημείο των A και B ή λέμε ότι είναι ανάμεσά τους.

5. Αν ε είναι μια ευθεία του επιπέδου και P, T είναι δύο σημεία που ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα με ακμή την ε, τότε υπάρχει ενδιάμεσο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος PT που ανήκει στην ευθεία.

6. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μόνο ένα μέσο.

7. Για τις πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων που ορίσαμε παραπάνω ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων μεταξύ αριθμών, όπως για παράδειγμα:

- Αν σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα προσθέσουμε ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τότε προκύπτουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα.
- Αν από ίσα ευθύγραμμα τμήματα αφαιρέσουμε ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τότε προκύπτουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα κ.ο.κ.

8. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι κάθε γωνία έχει μόνο μία διχοτόμο.

9. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι το εσωτερικό του κύκλου είναι ένα κυρτό σύνολο και ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά.

10. Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μία παράλληλη προς αυτήν την ευθεία.

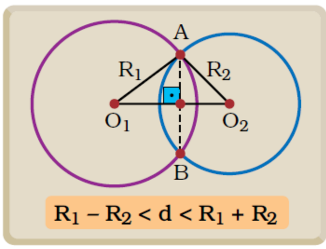
Ως προς το πώς αντιμετωπίζεται η σχετική θέση δύο κύκλων στο επίπεδο, το βιβλίο περιορίζεται απλώς στην παράθεση των σχετικών αποτελεσμάτων, χωρίς μάλιστα να αναφέρεται καν ότι η εκάστοτε συνθήκη μεταξύ της διακέντρου και των ακτινών των κύκλων, εκτός από αναγκαία, είναι και ικανή. Αυτό είναι συνέπεια του Προγράμματος Σπουδών σύμφωνα με το οποίο γράφτηκαν τα βιβλία που εξετάζονται σε αυτή την ενότητα. Στο πρόγραμμα αυτό (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342, 30-6-1999, διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του Εθνικού Τυπογραφείου) αναφέρεται για το συγκεκριμένο ζήτημα ότι: «Οι σχέσεις μεταξύ της διακέντρου και των ακτίνων δύο κύκλων θα διαπιστωθούν εποπτικά».

Ειδικότερα για την περίπτωση των τεμνόμενων κύκλων αναφέρεται μόνο η ακόλουθη παράγραφος:

Τεμνόμενοι κύκλοι

Όταν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τότε ονομάζονται **τεμνόμενοι** και το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κοινά τους σημεία **κοινή χορδή**. Στην περίπτωση αυτή, ένα μέρος κάθε κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό και ένα μέρος στο εξωτερικό του άλλου και ισχύει

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2.$$



Περιέργως, στην ενότητα των γεωμετρικών κατασκευών, όταν ζητείται η κατασκευή τριγώνου, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του, αφού παρατεθεί η γνωστή διαδικασία που αποτελείται από τα βήματα Ανάλυση – Σύνθεση –

Απόδειξη, στη Διερεύνηση αναφέρεται ότι «*Για να έχει λύση το πρόβλημα, θα πρέπει οι κύκλοι* (B,γ) *και* (Γ,β) *να τέμνονται, δηλαδή για τη διάκεντρό τους* $B\Gamma = \alpha$ *να ισχύει* $|\beta-\gamma| < \alpha < \beta+\gamma$ *»*. Ωστόσο, προηγουμένως σε κανένα σημείο του βιβλίου δεν αναφέρεται ότι η συνθήκη αυτή είναι όντως ικανή.

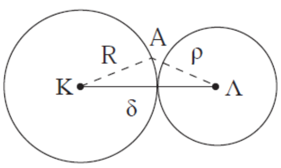
Παρόμοιας φιλοσοφίας είναι και το βιβλίο των Αργυρόπουλος et al. το οποίο διαδέχτηκε το παραπάνω και που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα. Αν και μπορεί να εντοπίσει κανείς μικρές διαφορές στα αξιώματα που χρησιμοποιούνται, σε γενικές γραμμές ο τρόπος παρουσίασης της θεωρίας και η επίκληση στην διαίσθηση και την εποπτεία αποτελούν χαρακτηριστικό γνώρισμα του βιβλίου. Ενδεικτικό αυτής της διαπίστωσης είναι και ο τρόπος με τον οποίο ξεκινάει η παράγραφος με τίτλο «Σχετικές θέσεις δύο κύκλων»

3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).

Ωστόσο, το 2011 το Πρόγραμμα Σπουδών αναθεωρήθηκε και για το ζήτημα αυτό αναφέρεται ότι: «Οι μαθητές προσδιορίζουν και <u>αιτιολογούν</u> τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων» (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, 8-6-2011). Το σχολικό βιβλίο όμως δεν άλλαξε με αποτέλεσμα ο στόχος της αιτιολόγησης να παραμένει ανενεργός. Αυτό το γεγονός παρέχει ένα ισχυρό επιχείρημα για την αναγκαιότητα μιας νέας διδακτικής πρότασης, η οποία θα συζητηθεί στο 4ο κεφάλαιο της εργασίας.

Στη συνέχεια παρατίθενται οι πέντε δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε μια από αυτές αναφέρεται χωρίς καμία επιπλέον αιτιολόγηση ότι η αναγραφόμενη συνθήκη μεταξύ της διακέντρου και των ακτινών των κύκλων είναι ικανή και αναγκαία.



► Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $\mathbf{R - \rho < \delta < R + \rho}$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Στη συνέχεια, κατά την κατασκευή τριγώνου με δεδομένες πλευρές α, β, γ, το βιβλίο μας πληροφορεί ότι

«*Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι* (B, γ) *και* (Γ, β) *να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν* $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ *(αν* $\beta > \gamma$*)* »

και κλείνει με την

«*Σημαντική Παρατήρηση: Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα* α*,* β*,* γ *είναι πλευρές τριγώνου αν, και μόνο αν, ισχύει* $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ *(αν* $\beta \geq \gamma$*)*»

3.5 Τα εγχειρίδια των Τσίντσιφα και Κανέλλου

Η ανάλυση που επιχειρήθηκε στις προηγούμενες ενότητες αφορούσε τα επίσημα διδακτικά εγχειρίδια που γράφονται με προκήρυξη και εποπτεία του Υπουργείου Παιδείας. Τα βιβλία αυτά περιλαμβάνουν την ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που προβλέπεται να διδαχθεί στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για μια ορισμένη χρονική περίοδο και προσδιορίζουν τον αντίστοιχο τρόπο της διδασκαλίας σε αυτά. Παράλληλα όμως, την περίοδο που η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελούσε εξεταζόμενο μάθημα για την εισαγωγή στα πανεπιστημιακά τμήματα., κυκλοφορούσε ένας μεγάλος αριθμός εξωσχολικών διδακτικών εγχειριδίων, το περιεχόμενο και η έκταση των οποίων καθορίζονταν κυρίως από τη θεματολογία των εισαγωγικών εξετάσεων και υπερέβαιναν κατά πολύ το περιεχόμενο και την έκταση των αντίστοιχων σχολικών. Η υπέρβαση οφείλονταν στην ένταξη μεγάλου αριθμού ασκήσεων και μεθοδολογικών κανόνων για την επίλυσή τους, αλλά ορισμένα από αυτά επεκτείνονταν και σε ενδιαφέροντα θεωρητικά ζητήματα.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε δύο κλασικά βιβλία Γεωμετρίας της δεκαετίας του 1970, των Τσίντσιφα και Κανέλλου, που κυκλοφορούσαν στη Θεσσαλονίκη και στην Αθήνα αντίστοιχα και που αναδεικνύουν το υψηλό επίπεδο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην Ελλάδα εκείνη την περίοδο.

Πρόκειται για δύο εξαιρετικά συγγράμματα που κοσμούν την ελληνόγλωσση βιβλιογραφία και που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιούνται από τους λάτρεις της Γεωμετρίας. Αν και ο προορισμός τους ήταν να αποτελέσουν βοήθημα των μαθητών για την εισαγωγή τους σε πανεπιστημιακές σχολές την εποχή που αυτοί εξετάζονταν, μεταξύ άλλων μαθημάτων, και στη Γεωμετρία, το επίπεδο των βιβλίων αυτών είναι αναμφίβολα υψηλότατο.

Ο Γεωμετρία του Τσίντσιφα περιέχει μεγάλη πληθώρα θεμάτων και κλείνει με ένα παράρτημα στο οποίο αναφέρεται ότι:

«*Εις το ανά χείρας βιβλίον ηκολουθήσαμεν εις πολύ γενικάς γραμμάς το σύστημα των αξιωμάτων του Hilbert. Απευθυνόμενοι προς τον μαθητήν της ηλικίας δεκαεπτά, δεκαοκτώ ετών ηναγκάσθημεν πολλάς φοράς να επιτρέψωμεν τα απαραίτητα στοιχεία διαισθήσεως να εισέλθουν κατά την ανάπτυξιν της θεωρίας. Δι' ωρισμένους μαθητάς, δι' αυτούς τους μαθητάς που αγαπούν ιδιαίτερα τα μαθηματικά, αφιερώσαμεν το παράρτημα εις το οποίον αναφέρομεν το σύστημα των αξιωμάτων του Hilbert και τας αποδείξεις τεσσάρων εξαιρετικά ευαίσθητων θεωρημάτων της Γεωμετρίας*»

Ένα από τα «*εξαιρετικά ευαίσθητα θεωρήματα*» είναι εκείνο που αναφέρεται στην απόδειξη της συνθήκης που είναι ικανή, ώστε δύο κύκλοι να τέμνονται.

Θεώρημα: Εάν για τους κύκλους (O,R) και $(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ ισχύει η σχέση

$$|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{OO}'<\mathrm{R}+\mathrm{R}' \quad (1)$$

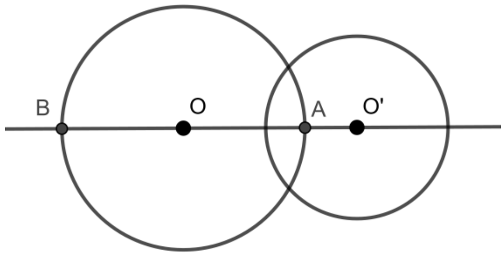
τότε οι περιφέρειές τους έχουν δύο κοινά σημεία

Για την απόδειξη είναι απαραίτητο να προηγηθούν τρία λήμματα.

1ο Λήμμα: Αν ισχύει η σχέση (1), ο κύκλος (O,R) περιέχει ένα εσωτερικό σημείο Α του κύκλου $(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ και ένα εξωτερικό σημείο Β του ίδιου κύκλου.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\mathrm{R}\geq\mathrm{R}'$, οπότε η (1) γράφεται ως $\mathrm{R}-\mathrm{R}'<\mathrm{OO}'<\mathrm{R}+\mathrm{R}' \quad (2)$.

Έστω Α και Β τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{OO'}$ με τον κύκλο (O, R). Θεωρούμε ότι η διάταξη των σημείων είναι η $\mathrm{B}-\mathrm{O}-\mathrm{A}-\mathrm{O'}$. Από τη σχέση $\mathrm{R} \geq \mathrm{R'}$ έπεται $\mathrm{R}+\mathrm{OO'} > \mathrm{R'}$, δηλαδή $\mathrm{O'B} > \mathrm{R'}$, άρα το σημείο Β είναι εξωτερικό του κύκλου $(\mathrm{O'}, \mathrm{R'})$.



Τώρα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

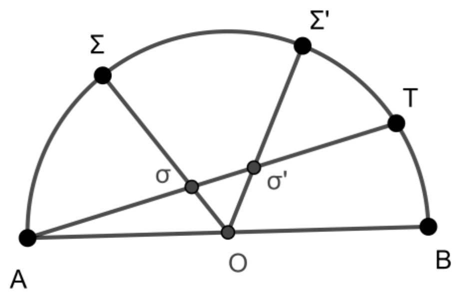
I. Έστω $\mathrm{OO'} > \mathrm{R}$. Τότε το $\mathrm{O'}$ είναι εξωτερικό του κύκλου (O, R). Από την $\mathrm{OO'} < \mathrm{R}+\mathrm{R'}$ λαμβάνουμε $\mathrm{OO'}-\mathrm{R} < \mathrm{R'}$, οπότε $\mathrm{O'A} < \mathrm{R'}$, άρα το σημείο Α εσωτερικό του $(\mathrm{O'}, \mathrm{R'})$.

II. Έστω $\mathrm{OO'} = \mathrm{R}$. Τότε ο κύκλος (O, R) διέρχεται από τον O', οπότε $\mathrm{O'} \equiv \mathrm{A}$ και φυσικά το Α θα είναι εσωτερικό σημείο του $(\mathrm{O'}, \mathrm{R'})$.

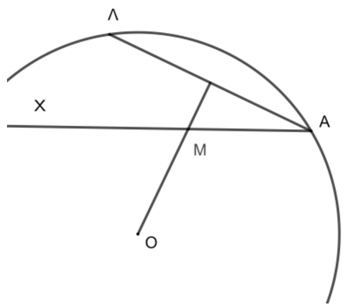
III. Έστω $\mathrm{OO'} < \mathrm{R}$. Το σημείο $\mathrm{O'}$ θα είναι εσωτερικό του (O, R). Από την σχέση $\mathrm{R}-\mathrm{R'} < \mathrm{OO'}$ έπεται ότι $\mathrm{R}-\mathrm{OO'} < \mathrm{R'}$, άρα $\mathrm{O'A} < \mathrm{R'}$. Επομένως το Α είναι εσωτερικό σημείο του $(\mathrm{O'}, \mathrm{R'})$.

2ο Λήμμα: Αν τα σημεία ημιπεριφέρειας (Ο) διαμέτρου ΑΒ, τα διάφορα των Α, Β διαιρεθούν σε δύο σύνολα G και $\mathrm{G'}$, ώστε αν $\Sigma \in \mathrm{G}$ και $\Sigma' \in \mathrm{G'}$ είναι $\angle \mathrm{A}\mathrm{O}\Sigma < \angle \mathrm{A}\mathrm{O}\Sigma'$, τότε υπάρχει σημείο Λ της ημιπεριφέρειας, ώστε για κάθε σημείο $\Sigma \in \mathrm{G}$ και κάθε σημείο $\Sigma' \in \mathrm{G'}$ να είναι $\angle \mathrm{A}\mathrm{O}\Sigma \leq \angle \mathrm{A}\mathrm{O}\Lambda \leq \angle \mathrm{A}\mathrm{O}\Sigma'$.

Απόδειξη: Έστω $T \in G'$. Η ευθεία που συνδέει το O με τυχαίο σημείο $\Sigma \in G$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AT στο σημείο σ. Η ευθεία που συνδέει το O με τυχαίο σημείο $\Sigma' \in G'$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AT στο σ'. Θέτουμε g και g' τα σύνολα των σημείων σ και σ' αντιστοίχως. Με εφαρμογή του γραμμικού αξιώματος συνέχειας για τα σύνολα g και g' προκύπτει το ζητούμενο.

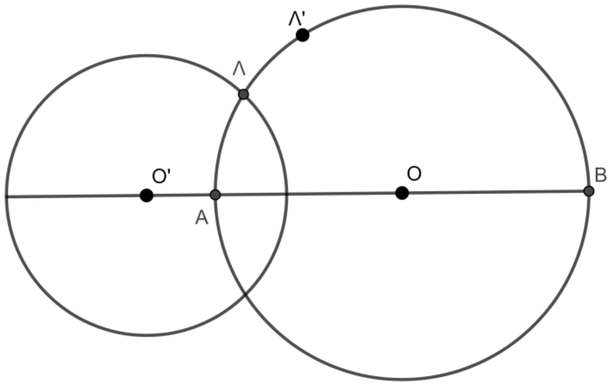


3ο Λήμμα: Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και σημείο Α της περιφέρειάς του. Τότε μπορούμε να βρούμε σημείο Λ της περιφέρειάς του, ώστε η χορδή ΑΛ να είναι μικρότερη από δοθέν ευθύγραμμο τμήμα η.



Απόδειξη: Σε τυχούσα ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Μ, ώστε $\mathrm{AM} < \frac{1}{2}\eta$. Φέρουμε την ΟΜ και από το Α την κάθετο ΑΛ στην ΟΜ. Η χορδή ΑΛ είναι η ζητούμενη, γιατί $\mathrm{A\Lambda} < 2\mathrm{AM}$, οπότε $\mathrm{A\Lambda} < 2 \cdot \frac{1}{2}\eta = \eta$.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.



Από το 1ο λήμμα διαπιστώνουμε ότι ο κύκλος (Ο) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Α του (Ο′) και από το εξωτερικό του σημείο Β. Έστω G το σύνολο των σημείων (Σ) της περιφέρειας του (Ο) τα οποία περιέχονται στο εσωτερικό του κύκλου (Ο′) και G′ το σύνολο των σημείων Σ′ της περιφέρειας (Ο) τα οποία βρίσκονται στο εξωτερικό του (Ο′). Θα είναι $\angle \mathrm{AO\Sigma} < \angle \mathrm{AO\Sigma'}$. Άρα υπάρχει σημείο Λ της περιφέρειας (Ο), ώστε για κάθε $\Sigma \in G$ και κάθε $\Sigma' \in G'$ να ισχύει $\angle \mathrm{AO\Sigma} \leq \angle \mathrm{AO\Lambda} \leq \angle \mathrm{AO\Sigma'}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{O'\Lambda} = \mathrm{R'}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\mathrm{O'\Lambda} < \mathrm{R'}$. Θέτουμε $\mathrm{R'} - \mathrm{O'\Lambda} = \eta$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΟΛ και το οποίο δεν περιέχει το σημείο Ο′ βρίσκουμε επί της ημιπεριφέρειας διαμέτρου ΑΒ σημείο Λ′ ώστε $\mathrm{\Lambda\Lambda'} = \eta$. Θα είναι προφανώς $\angle \mathrm{AO\Lambda'} > \angle \mathrm{AO\Lambda}$, οπότε $\Lambda' \in G'$. Όμως, για τα σημεία Ο′, Λ, Λ′ έχουμε

$$\mathrm{O'\Lambda'} \leq \mathrm{O'\Lambda} + \mathrm{\Lambda\Lambda'} = \mathrm{O'\Lambda} + \eta = \mathrm{R'}.$$

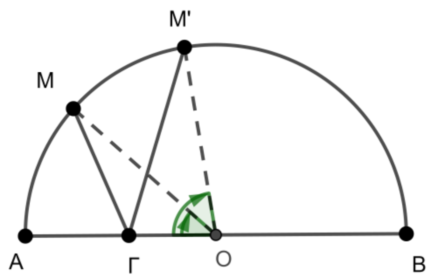
Αν ισχύει η ισότητα, το σημείο Λ′ είναι το σημείο τομής των δύο περιφερειών. Αν η ανισότητα είναι αυστηρή, προκύπτει $\Lambda' \in G$, που είναι άτοπο. Με όμοιο τρόπο αποκλείουμε και την περίπτωση $O'\Lambda > R'$. Άρα οι περιφέρειες των δύο κύκλων έχουν κοινό σημείο το Λ και, ως γνωστόν, το συμμετρικό του ως προς OO'.

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει την ύπαρξη τριγώνου με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, όταν ισχύει $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό ο Κανέλλος στο [44], όπου η θεωρία αναπτύσσεται με βάση ένα αξιωματικό σύστημα που αποτελεί μία παραλλαγή του συστήματος αξιωμάτων του Hilbert (που δημιούργησε πιθανώς ο ίδιος ο Κανέλλος). Η βασική παρέμβαση του Κανέλλου γίνεται στην ομάδα αξιωμάτων ΙΙΙ (αξιώματα ισότητας), όπου δίνει έμφαση (προφανώς για διδακτικούς λόγους) στην έννοια της κίνησης και της μετατόπισης των σχημάτων μέσω της οποίας ορίζεται η έννοια της ισότητας. Η γεωμετρία του βασίζεται σε είκοσι τρία αξιώματα: οκτώ αξιώματα σύνδεσης, πέντε αξιώματα διάταξης, επτά αξιώματα κίνησης (μετατόπισης), δύο αξιώματα συνέχειας και το αξίωμα των παραλλήλων.

Όπως συνέβη και στο σχολικό βιβλίο των Αλιμπινίση et al., θα προηγηθεί η απόδειξη της πρότασης ότι δοθέντων τριών τμημάτων α, β, γ καθένα εκ των οποίων είναι μικρότερο του αθροίσματος των άλλων δύο, υπάρχει τρίγωνο με πλευρές τα α, β, γ. Αρχικά αποδεικνύουμε τρεις βοηθητικές προτάσεις.

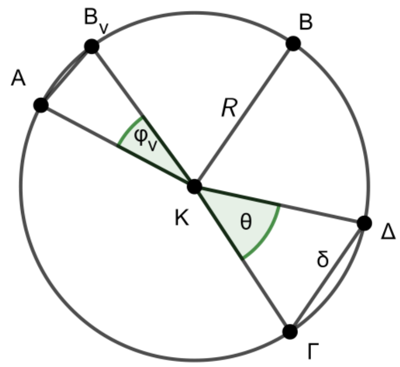
1$^{\text{ο}}$ Λήμμα: Δίνεται ημιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ και σημείο Γ επί της ευθείας ΑΒ, ώστε $\Gamma A < \Gamma B$. Θεωρούμε μεταβλητό τόξο ΑΜ της ημιπεριφέρειας. Τότε, καθώς αυξάνεται το τόξο ΑΜ, αυξάνεται και η απόσταση ΓΜ, και αντιστρόφως.



Απόδειξη: Ας είναι Ο το κέντρο της ημιπεριφέρειας. Αν είναι $\text{τοξ.} AM < \text{τοξ}\, AM'$, από προηγούμενη πρόταση θα ισχύει $\angle AOM < \angle AOM'$. Τότε, τα τρίγωνα $\Gamma M O, \Gamma M' O$ έχουν δύο πλευρές ίσες $(\Gamma O = \Gamma O,\ OM = OM')$ και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες άνισες. Άρα θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους άνισες και μάλιστα είναι $\Gamma\text{M} < \Gamma\text{M}'$. Ώστε αποδείξαμε ότι $\text{τοξ.}\,\text{AM} < \text{τοξ.}\,\text{AM}' \Longrightarrow \Gamma\text{M} < \Gamma\text{M}'$. Αν το Γ κείται στην προέκταση του ΑΒ προς το Α, η απόδειξη εξακολουθεί να ισχύει. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

2ο Λήμμα: Εάν ένα τόξο υποδιπλασιάζεται συνεχώς, τότε από ένα σημείο και μετά η χορδή του γίνεται μικρότερη από οποιοδήποτε δοθέν τμήμα (οσοδήποτε μικρό).

Απόδειξη: Έστω τόξο ΑΒ το οποίο διχοτομείται ν φορές, οπότε προκύπτει το $\text{τοξ.}\,\text{AB}_\nu = \frac{\text{τοξ.AB}}{2^\nu}$ και ας είναι δ δοθέν τμήμα μικρότερο της διαμέτρου. Είναι γνωστό ότι υπάρχει χορδή $\Gamma\Delta = \delta$. Ας είναι θ το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $\angle\Gamma\text{K}\Delta$. Αν $(\text{τοξ.}\,\text{AB})$ είναι το μέτρο του τόξου ΑΒ, τότε το μέτρο του $\text{τοξ.}\,\text{AB}_\nu$ είναι ίσο με $\frac{(\text{τοξ.AB})}{2^\nu}$. Αλλά όταν το ν αυξηθεί αρκούντως, το κλάσμα αυτό γίνεται μικρότερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό, άρα και του θ. Οπότε από κάποια τιμή του ν και έπειτα θα έχουμε $\frac{(\text{τοξ.AB})}{2^\nu} < \theta$, δηλαδή



$$\text{μέτρο της } \angle\text{AKB}_\nu < \text{μέτρο της } \angle\Gamma\text{K}\Delta \Longrightarrow \text{τοξ.}\,\text{AKB}_\nu < \text{τοξ.}\,\Gamma\text{K}\Delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{AB}_\nu < \Gamma\Delta = \delta.$$

Εννοείται ότι αν $\delta \geq 2\text{R}$, το θεώρημα προφανώς ισχύει.

Θεώρημα: Αν δοθεί ημιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ, σημείο Γ της ευθείας ΑΒ, ώστε $\Gamma\text{A} < \Gamma\text{B}$ και τμήμα ρ τέτοιο, ώστε $\Gamma\text{A} < \rho < \Gamma\text{B}$, τότε υπάρχει επί της ημιπεριφέρειας ακριβώς ένα σημείο Σ τέτοιο, ώστε $\Gamma\Sigma = \rho$.

Δηλαδή, η ημιπεριφέρεια τέμνεται σε ένα σημείο από κάθε περιφέρεια που έχει κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα μεγαλύτερη του ΓΑ, αλλά μικρότερη του ΓΒ.

Απόδειξη: Η ημιπεριφέρεια μπορεί να διαιρεθεί σε $2,4,8,16,\ldots,2^{\nu},\ldots$ ίσα τόξα. Αν μετά από αυτή τη διαίρεση δημιουργηθεί σημείο που απέχει από το Γ απόσταση ίση με ρ έχουμε τελειώσει. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δεν δημιουργείται τέτοιο σημείο σε κανένα βήμα των διαδοχικών διχοτομήσεων. Θεωρούμε μια υποδιαίρεση της ημιπεριφέρειας σε 2^{ν} ίσα τμήματα και ας είναι $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3,\ldots,\mathrm{M}_{\kappa}$ τα αντίστοιχα σημεία, όπου

$$\text{τοξ.}\,\mathrm{AM}_1=\text{τοξ.}\,\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=\cdots=\text{τοξ.}\,\mathrm{M}_{\kappa}\mathrm{B}=\frac{\text{τοξ.}\,\mathrm{AB}}{2^{\nu}}.$$

Οι αποστάσεις $\Gamma\mathrm{A},\Gamma\mathrm{M}_1,\Gamma\mathrm{M}_2,\ldots,\Gamma\mathrm{B}$, σύμφωνα με προηγούμενο λήμμα, αυξάνονται, από ΓΑ, το οποίο είναι $<\rho$, μέχρι ΓΒ που είναι $>\rho$.

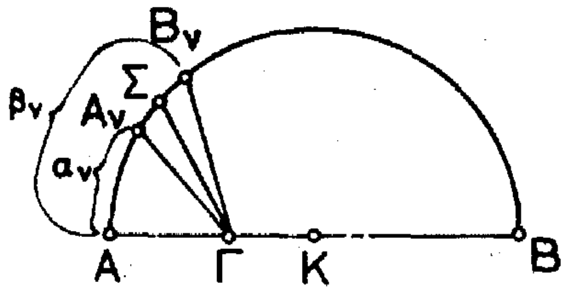
Τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_{\kappa},\mathrm{B}$ ανήκουν σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατατάσσουμε τα σημεία που απέχουν από το Γ λιγότερο από ρ (όπως π.χ. το Α) και στην δεύτερη εκείνα που απέχουν από το Γ περισσότερο από ρ (όπως π.χ. το Β). Διατρέχουμε τα σημεία της πρώτης κατηγορίας ξεκινώντας από το Α, μέχρι να τα εξαντλήσουμε. Ας ονομάσουμε B_{ν} το πρώτο σημείο της δεύτερης κατηγορίας που συναντάμε, δηλαδή για το οποίο είναι $\Gamma\mathrm{B}_{\nu}>\rho$. Το αμέσως προηγούμενό του σημείο, ας το ονομάσουμε A_{ν}, θα ανήκει προφανώς στην πρώτη κατηγορία, θα είναι δηλαδή $\Gamma\mathrm{A}_{\nu}<\rho$. (Το Γ είναι δυνατόν να κείται στην προέκταση του ΑΒ). Έτσι για κάθε φυσικό αριθμό ν βρίσκουμε τόξο $\mathrm{A}_{\nu}\mathrm{B}_{\nu}$ τέτοιο, ώστε

$$\text{τοξ.}\,\mathrm{A}_{\nu}\mathrm{B}_{\nu}=\frac{\text{τοξ.}\,\mathrm{AB}}{2^{\nu}},\Gamma\mathrm{A}_{\nu}<\rho,\Gamma\mathrm{B}_{\nu}>\rho.$$

Ας παραστήσουμε με α_{ν} το μέτρο του τόξου AA_{ν} και με β_{ν} του τόξου AB_{ν}. Από τον τρόπο κατασκευής των σημείων A_{ν} και B_{ν} έπεται ότι όταν το ν γίνει $\nu+1$ τότε το τόξο $\mathrm{A}_{\nu}\mathrm{B}_{\nu}$ διχοτομείται και αν μεν το μέσον του Μ ανήκει στην πρώτη κατηγορία, το A_{ν} μεταβαίνει στο $\mathrm{M}\equiv\mathrm{A}_{\nu+1}$, αν δε το Μ ανήκει στη δεύτερη κατηγορία, το A_{ν} παραμένει ως τελευταίο σημείο της πρώτης κατηγορίας, δηλαδή $A_{\nu+1} \equiv A_\nu$. Έχουμε δηλαδή $\text{τοξ.}\, AA_{\nu+1} \geq \text{τοξ.}\, AA_\nu$, οπότε τα τόξα AA_ν $(\nu = 1,2,3,\dots)$ αποτελούν αύξουσα ακολουθία (υπό την ευρεία έννοια). Ομοίως βλέπουμε ότι τα τόξα AB_ν αποτελούν φθίνουσα ακολουθία, δηλαδή $\text{τοξ.}\, AB_\nu \geq \text{τοξ.}\, AB_{\nu+1}$. Άρα και τα μέτρα τους α_ν, β_ν αποτελούν ακολουθίες με το ίδιο είδος μονοτονίας. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

I. η ακολουθία $\{\alpha_\nu\}$ είναι μη φθίνουσα
II. η ακολουθία $\{\beta_\nu\}$ είναι μη αύξουσα
III. $\alpha_\nu < \beta_\nu$ για κάθε $\nu = 1,2,3,\dots$
IV. η διαφορά $\beta_\nu - \alpha_\nu = (\text{τοξ.}\, A_\nu B_\nu) = \frac{(\text{τοξ.}AB)}{2^\nu}$ τείνει στο μηδέν όταν $\nu \to \infty$

Επομένως οι ακολουθίες $\{\alpha_\nu\}, \{\beta_\nu\}$ αποτελούν εγκιβωτισμό και έχουν κοινό όριο φ τέτοιο, ώστε $\alpha_\nu < \varphi < \beta_\nu$, $\nu = 1,2,3,\dots$



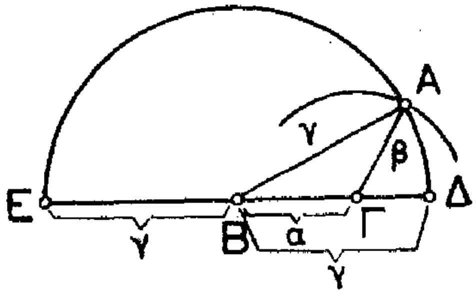
Θεωρούμε τώρα τόξο ΑΣ της ημιπεριφέρειας, το οποίο έχει μέτρο φ. Θα δείξουμε ότι $\Gamma\Sigma = \rho$. Πράγματι, αν ήταν $\Gamma\Sigma > \rho$, από την προφανή ανισότητα $\Gamma\Sigma < \Gamma A_\nu + A_\nu\Sigma$, επειδή για κάθε ν είναι $\Gamma A_\nu < \rho$, θα είχαμε $\Gamma\Sigma < \rho + A_\nu\Sigma$, άρα $A_\nu\Sigma > \Gamma\Sigma - \rho$, οπότε και $A_\nu B_\nu > \Gamma\Sigma - \rho$ για κάθε ν. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, γιατί καθώς αυξάνεται το ν, η χορδή $A_\nu B_\nu$ γίνεται, από μια τιμή του ν και μετά, μικρότερη από οποιοδήποτε τμήμα, άρα και από το $\Gamma\Sigma - \rho$. Επομένως αποκλείεται η περίπτωση $\Gamma\Sigma > \rho$.

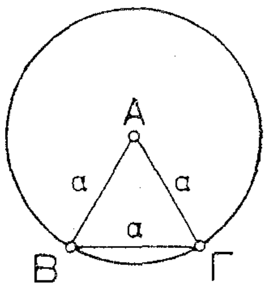
Αν πάλι ήταν $\Gamma\Sigma < \rho$, θα είχαμε $\Gamma B_\nu < \Gamma\Sigma + \Sigma B_\nu \Rightarrow \rho < \Gamma\Sigma + \Sigma B_\nu$, αφού $\rho < \Gamma B_\nu$, άρα $\Sigma B_\nu > \rho - \Gamma\Sigma$ και επομένως $A_\nu B_\nu > \rho - \Gamma\Sigma$ για κάθε ν, το οποίο είναι αδύνατον. Ώστε αποκλείεται και η περίπτωση $\Gamma\Sigma < \rho$. Επομένως είναι $\Gamma\Sigma = \rho$. Το Σ είναι το σημείο του οποίου θέλαμε να αποδείξουμε την ύπαρξη.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα: Δοθέντων τριών τμημάτων α, β, γ καθένα εκ των οποίων είναι μικρότερο του αθροίσματος των άλλων δύο, υπάρχει τρίγωνο με πλευρές τα α, β, γ.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι τα τμήματα δεν είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Ας είναι α το μικρότερο. Γράφουμε ημιπεριφέρεια ΕΔ κέντρου Β και ακτίνας γ. Επί της ακτίνας $ΒΔ = \gamma$ λαμβάνουμε το μικρότερο αυτής τμήμα $ΒΓ = \alpha$. Τότε είναι $ΓΔ = \gamma - \alpha$ και $ΓΕ = \alpha + \gamma$. Εξ υποθέσεως είναι $\beta < \alpha + \gamma$, δηλαδή $\beta < ΓΕ$ (1). Επίσης, από την υπόθεση $\gamma < \alpha + \beta$ προκύπτει $\beta > \gamma - \alpha$, άρα $\beta > ΓΔ$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) και λόγω του θεωρήματος που αποδείχθηκε προηγουμένως, υπάρχει επί της ημιπεριφέρειας ΕΔ μοναδικό σημείο Α που απέχει από το Γ απόσταση ίση με β τέτοια, ώστε $ΓΔ < \beta < ΓΕ$. Δηλαδή η περιφέρεια $(Γ, \beta)$, με ακτίνα β, που περιέχεται μεταξύ ΓΔ και ΓΕ, τέμνει την ημιπεριφέρεια σε σημείο Α, προφανώς διάφορο των Δ και Ε και επομένως το Α δεν κείται επί της ευθείας ΒΓ. Τα τρία σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο με πλευρές $ΒΓ = \alpha, ΓΑ = \beta, ΑΒ = \gamma$.





Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα τρία τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους, ίσα με α. Τότε αν κατασκευάσουμε περιφέρεια $(Α, \alpha)$, από γνωστό θεώρημα, υπάρχει χορδή αυτής $ΒΓ = \alpha$ και επομένως υπάρχει τρίγωνο με πλευρές ίσες με α.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το

Θεώρημα: Αν από τρία τμήματα, το ένα είναι μικρότερο του αθροίσματος των άλλων δύο και μεγαλύτερο της διαφοράς τους, τότε υπάρχει τρίγωνο με πλευρές ίσες με αυτά τα τμήματα.

Φτάσαμε τώρα στην συνθήκη τομής κύκλων .

Θεωρούμε δύο μη ομόκεντρους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ). Θεωρούμε ακόμα τα τμήματα $R+\rho$, $|R-\rho|$, $K\Lambda$. Οι δυνατές σχέσεις μεγέθους προς τα άνισα τμήματα $R+\rho$, $|R-\rho|$ είναι πέντε:

1. $K\Lambda > R+\rho > |R-\rho|$
2. $K\Lambda = R+\rho > |R-\rho|$
3. $R+\rho > K\Lambda > |R-\rho|$
4. $R+\rho > |R-\rho| = K\Lambda$
5. $R+\rho > |R-\rho| > K\Lambda$.

Κάθε μία από αυτές τις συνθήκες συνεπάγεται και μία διαφορετική θέση των δύο κύκλων, όποτε κάθε μία από αυτές τις συνθήκες αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την εκάστοτε θέση των κύκλων. Θα αποδείξουμε το

Θεώρημα: Αν το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα δύο κύκλων είναι μικρότερο από το άθροισμα των ακτίνων και μεγαλύτερο της διαφοράς τους, οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, έστω Σ και Σ', συμμετρικά ως προς την ευθεία των κέντρων.

Απόδειξη: Θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ). Επειδή ισχύει $R+\rho > K\Lambda > |R-\rho|$, υπάρχει τρίγωνο $K\Sigma\Lambda$ με πλευρές $K\Lambda$, $K\Sigma = R$, $\Lambda\Sigma = \rho$. Προφανώς η κορυφή Σ του τριγώνου αυτού ανήκει και στους δύο κύκλους. Αν θεωρήσουμε και το συμμετρικό ως προς την ευθεία $K\Lambda$ του τριγώνου $K\Sigma\Lambda$, ας το ονομάσουμε $K\Sigma'\Lambda$, τότε προφανώς και το Σ' ανήκει στους δύο κύκλους. Τρίτο κοινό σημείο δεν έχουν οι κύκλοι, αφού τότε θα έπρεπε να ταυτίζονται, πράγμα αδύνατο, δεδομένου ότι $K\Lambda \neq 0$.

Κεφάλαιο 4ο

4.1 Συμπεράσματα-Προτάσεις

Ξεκινώντας με το πρώτο ερώτημα που θέσαμε στην εισαγωγή, θα εξετάσουμε αρχικά με ποιον τρόπο διαχειρίζονται τα προγράμματα σπουδών και τα διδακτικά εγχειρίδια το συνδυασμό λογικής αυστηρότητας και εποπτείας. Καταρχάς, διαχρονικά, σύμφωνα με όλα τα προγράμματα σπουδών των τελευταίων δεκαετιών, αναφέρεται ρητά ότι ένας από τους σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι «Να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να του αναπτύξει μαθηματική σκέψη». Δεδομένου ότι συνήθως η δημοσίευση των προγραμμάτων αυτών επόταν της κυκλοφορίας των αντίστοιχων εγχειριδίων, θα αρκεστούμε σχεδόν εξολοκλήρου σε σχολιασμό των εγχειριδίων.

Ως γενική παρατήρηση, η οποία αρμόζει σε άλλο εγχειρίδιο περισσότερο και σε άλλο λιγότερο, μπορούμε να πούμε ότι μέχρι και το 2000, η αυστηρότητα ήταν ένα εμφανές ζητούμενο κάθε εγχειριδίου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι απουσίαζαν σημεία που η αιτιολόγηση βασιζόταν στην εποπτεία. Μάλιστα, εκείνα που ακολούθησαν το ύφος της Γεωμετρίας του Legendre, όπως φάνηκε στο 3ο Κεφάλαιο, δεν δίστασαν σε ορισμένα σημεία να επικαλεστούν την εποπτεία, κυρίως για να περιγράψουν θεμελιώδεις έννοιες, όπως η ευθεία και ο κύκλος, και αυτό χάριν της διευκόλυνσης της διδασκαλίας. Ωστόσο, τα εγχειρίδια των Παπαμιχαήλ και Σκιαδά και κυρίως εκείνο του Ιωαννίδη, τα οποία είναι επηρεασμένα από τον Hilbert ξεκαθαρίζουν ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι «…(αντικείμενα) *μη έχοντα σχέσιν με την εκ του αισθητού εμπειρίαν* »(Ιωαννίδης, 1969). Τέλος, η Γεωμετρία των Κοντογιάννη κ.α., ως προς το επίπεδο αυστηρότητας, έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με τα προηγούμενα εγχειρίδια. Όμως η κατάσταση αλλάζει δραματικά από το 2000 και μετά. Όπως επισημάνθηκε στο τρίτο κεφάλαιο, τα δύο τελευταία εγχειρίδια που κυκλοφόρησαν έχουν παρόμοια φιλοσοφία, η οποία πηγάζει από τη στροφή που σημειώθηκε ως προς τους στόχους της διδασκαλίας της

Γεωμετρίας τα τελευταία είκοσι χρόνια. Το πρόγραμμα σπουδών του έτους 2011, είναι αρκετά κατατοπιστικό ως προς αυτό. Αν και ξεκινάει με τη διακήρυξη ότι

«Η ενότητα «Γεωμετρία» αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών στη Θεωρητική Γεωμετρία, η οποία είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Παράλληλα μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Γεωμετρίας οι μαθητές αναγνωρίζουν το ρόλο του σχήματος στη Γεωμετρία ως στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη γεωμετρική σκέψη. (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674)»,

περιέχει ρητή αναφορά στη χρήση της Τεχνολογίας των Πληροφοριών και Επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.):

«Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας και ιδιαίτερα τα παρεχόμενα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση τέτοιων λογισμικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διερευνούν, να δημιουργούν εικασίες και γενικότερα στην κατανόηση της Γεωμετρίας και στην ικανότητα ανάπτυξης μαθηματικών συλλογισμών. Ωστόσο, η επιλογή από τον καθηγητή του τρόπου εφαρμογής των δυναμικών εργαλείων στην τάξη, καθώς και η επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, καθορίζει την αποτελεσματικότητα αυτών των εργαλείων στη μάθηση».

Φυσικά αυτό είναι αυτονόητο στο σύγχρονο ψηφιακό κόσμο. Ωστόσο, το πρόβλημα εντοπίζεται στο ότι το αντίστοιχο εγχειρίδιο είναι γραμμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να θυσιάζεται συχνά η αυστηρότητα και να αντικαθίσταται από εμπειρική επιβεβαίωση με διάφορα ψηφιακά μέσα. Κλασική περίπτωση αυτού αποτελεί το πρόβλημα που αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια, της τομής δύο κύκλων. Αλλά και σε άλλα σημεία εντοπίζονται παρόμοιες υπερβάσεις:

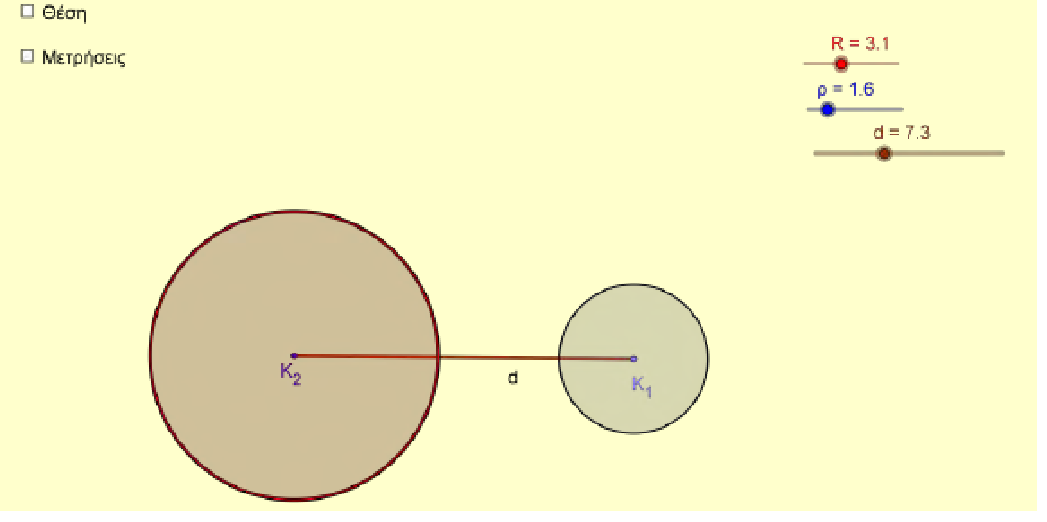
- αφαιρούνται από τη διδακτέα ύλη σχεδόν όλες οι αποδείξεις του 3ου κεφαλαίου, μεταξύ των οποίων και η απόδειξη της λεγόμενης Τριγωνικής Ανισότητας. Μάλιστα, σύμφωνα με της οδηγίες διδασκαλίας «Να επισημανθεί στους μαθητές ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί *κριτήριο* για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου».
- Οι σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου θεωρούνται γνωστές από το Γυμνάσιο και η αιτιολόγηση που περιέχεται βασίζεται αποκλειστικά στην εποπτεία.

Ανάλογη είναι η κατάσταση και στο τελευταίο πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών Λυκείου του 2015 (ΦΕΚ Β' 162, 22-1-2015) που δημοσιεύτηκε αλλά δεν εφαρμόστηκε, όπου προτείνεται το αινιγματικό:
«Ως εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας, να *διερευνηθούν* οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Για την παραπάνω *διερεύνηση* προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας».
Ενδιαφέρον είναι ότι νωρίτερα, στις γενικές επισημάνσεις και τους γενικούς στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών, στο πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται επί λέξει:
«Πρέπει να υπογραμμισθεί όμως ότι η χρήση της τεχνολογίας δεν πρέπει να επηρεάζει τους βασικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε ότι αφορά τις επιδιωκόμενες ικανότητες».
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι τα τελευταία χρόνια έχει επέλθει μια ουσιαστική στροφή προς τη διαίσθηση και την πειραματική επιβεβαίωση, εις βάρος φυσικά της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης. Αυτό επιτείνεται ακόμα περισσότερο με τη χρήση προγραμμάτων δυναμικής Γεωμετρίας. Αν και ο ρόλος αυτών των προγραμμάτων θα μπορούσε να είναι επικουρικός στην ανακάλυψη προτάσεων και στη διατύπωση εικασιών, φαίνεται ότι σταδιακά λειτουργεί ως μέσω επαλήθευσης θεωρημάτων, των οποίων η αυστηρή

απόδειξη μπορεί να παραλείπεται. Με την ίδια φιλοσοφία μάλιστα έχει γίνει η συγγραφή του βιβλίου Μαθηματικών στην Κύπρο [31]. Στην παράγραφο που αναφέρεται στην τομή κύκλων, προτείνεται να γίνει διερεύνηση του προβλήματος με χρήση του λογισμικού GeoGebra και στη συνέχεια διατυπώνεται ο σχετικός κανόνας. Πρόκειται δηλαδή για απλό πειραματισμό σε ψηφιακό περιβάλλον εξετάζοντας εποπτικά όλες τις δυνατές σχετικές θέσεις δύο κύκλων και μάλιστα, η διατύπωση του κανόνα που ακολουθεί προκύπτει αποκλειστικά από τις παρατηρήσεις που έχουν γίνει με το λογισμικό.

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En03_Thesis2Kyklon.ggb»*.



- Να μετακινήσετε τον δρομέα *«d»*, για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, έτσι ώστε οι κύκλοι:
  (α) να έχουν δύο κοινά σημεία
  (β) να έχουν ένα κοινό σημείο
  (γ) να μην έχουν σημεία τομής.
- Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτίνων σε κάθε περίπτωση;

Για τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μηκος της διακέντρου των δύο κύκλων με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους.

Από τις προηγούμενες επισημάνσεις διαφαίνεται ότι διαχρονικά τα διδακτικά εγχειρίδια παρουσίαζαν αδυναμίες, στο ζήτημα του συνδυασμού λογικής αυστηρότητας και εποπτείας. Το ζήτημα της ισορροπίας μεταξύ αυτών των παραμέτρων είναι δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς συνήθως υπερισχύει η μία έναντι της άλλης. Στα συγγράμματα που εξετάσαμε στο 3ο κεφάλαιο συναντήσαμε περιπτώσεις κατά τις οποίες η λογική αυστηρότητα καταστρατηγείται εμφανώς και ως εκ τούτου τίθεται εν αμφιβόλω ολόκληρη η ουσία της διδασκαλίας. Δεδομένου ότι θεωρείται αυτονόητο ότι οι μαθητές θα διδαχθούν αυτή την αξιωματική θεωρία, θα έπρεπε να είναι αυτονόητο πως η διδασκαλία της θα γίνει μέσα στο επιστημονικό πλαίσιο που αυτή οριοθετείται, ασφαλώς μέσω μιας διαδικασίας διδακτικού μετασχηματισμού, ώστε να καταστεί διδάξιμη. Με άλλα λόγια, είναι μάλλον ανούσιο να επιμένουμε να αποτελεί η Γεωμετρία ένα μάθημα γενικής παιδείας, στο οποίο κάθε φορά που βρισκόμαστε ενώπιον ενός απαιτητικού προβλήματος, το οποίο η αξιωματική θεωρία την οποία υποτίθεται εφαρμόζουμε, αδυνατεί να αντιμετωπίσει με συνοπτικές διαδικασίες, να καταφεύγουμε στη διαίσθηση και την εποπτεία. Είναι φανερό ότι με αυτόν τον τρόπο δεν υπηρετείται η ουσία του μαθήματος και απλώς εφαρμόζονται μέθοδοι της Πρακτικής Γεωμετρίας.

Ακόμα και στα εγχειρίδια που όπως φάνηκε υπηρέτησαν τον αξιωματικό χαρακτήρα της Γεωμετρίας στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό, απεδείχθη ότι η ακραία αυστηρότητα έπληξε όχι την ουσία της Γεωμετρίας, αλλά τη διδασκαλία της. Από τα σχολικά εγχειρίδια που εξετάσαμε, εκείνο που διακρίθηκε για την άκρως αξιωματική αντιμετώπιση του θέματος ήταν του Ιωαννίδη. Ωστόσο είναι εμφανείς και σε αυτό σοβαρές αδυναμίες. Πέρα από τις δυσκολίες που προξένησε σε διδάσκοντες και διδασκόμενους, ο συγγραφέας αποφεύγει να παραθέσει από την αρχή το σύνολο των αξιωμάτων που θα χρησιμοποιήσει κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, αλλά αναφέρει εμβόλιμα αξιώματα τη στιγμή που κρίνονται απαραίτητα. Με αυτόν τον τρόπο είναι λογικό να δημιουργηθεί η εντύπωση σε έναν μαθητή ότι τα αξιώματα είναι βοηθητικές προτάσεις που επικαλούμαστε όταν φτάνουμε σε αδιέξοδες καταστάσεις. Παρόμοιες πρακτικές εφαρμόζουν στην πραγματικότητα όλα τα εγχειρίδια. Επομένως τίθεται εύλογα το ερώτημα του ποια πορεία θα μπορούσε να ακολουθηθεί, η οποία να προκρίνεται ως προσιτή για διδασκαλία και η οποία να σέβεται τον αξιωματικό χαρακτήρα της Γεωμετρίας.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να γίνει μια επισήμανση όσον αφορά την «καθαρότητα» από την οποία θεωρούμε ότι οφείλει να χαρακτηρίζεται η διδασκαλία της Γεωμετρίας. Σε αντίθεση με την Άλγεβρα, στην οποία είναι ζητούμενο μερικές φορές να ενσωματώνει γεωμετρικά επιχειρήματα, η Γεωμετρία θεωρείται ότι οφείλει να αποφεύγει τη χρήση αλγεβρικών ή τριγωνομετρικών εργαλείων. Ας υποθέσουμε ότι σε μια σχολική τάξη θέτουμε το ερώτημα:

- Αν $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{k}, \ell, \mathrm{m}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, πόσες, το πολύ, λύσεις έχει το σύστημα

$$\begin{cases} \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{ax} + \mathrm{by} - \mathrm{c}^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + \mathrm{kx} + \ell \mathrm{y} - \mathrm{m}^2 = 1. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η αμιγώς αλγεβρική λύση περνάει μέσα από σχετικά πολύπλοκούς υπολογισμούς. Ωστόσο, αν ερμηνευθεί το πρόβλημα γεωμετρικά η απάντηση είναι άμεση. Όμως, όσον αφορά τη Γεωμετρία τα πράγματα είναι διαφορετικά. Όπως παρατηρεί ο Θωμαΐδης (2014):

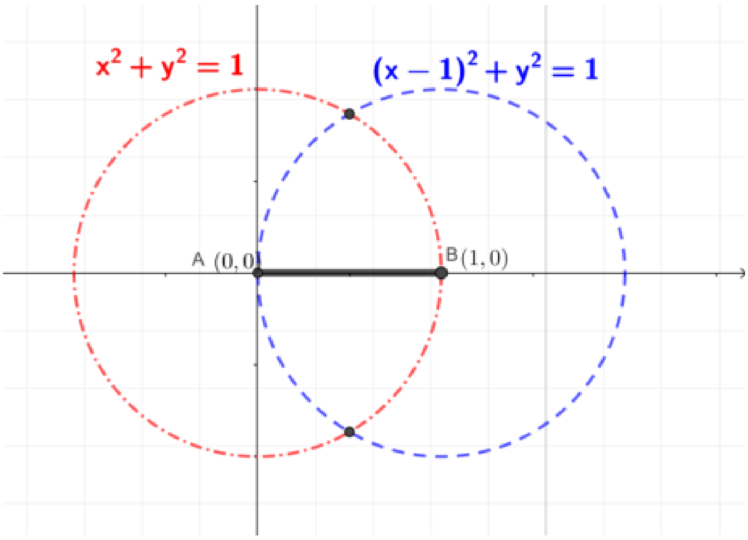
- η επιδίωξη της "καθαρότητας" στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, συνδυαζόμενη και με τις απαιτήσεις εσωτερικής συνέπειας και λογικής αλληλουχίας των προτάσεων, έχει σημαντικό μερίδιο στην αποκοπή του μαθήματος από τον πραγματικό κόσμο και τις εμπειρίες των μαθητών.
- Με την ενσωμάτωση στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ορισμένων κατάλληλων εφαρμογών μπορούν να αναδειχθούν, αφενός οι δυνατότητες των γεωμετρικών προτάσεων ως εργαλείων διερεύνησης

και ερμηνείας και αφετέρου να κατανοηθούν βαθύτερα ορισμένες λεπτές αλγεβρικές έννοιες, όπως αυτή του άρρητου αριθμού και των δεκαδικών προσεγγίσεων του.

Ένα παράδειγμα με το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα ο προηγούμενος ισχυρισμός και το οποίο σχετίζεται με το πρόβλημα της τομής κύκλων είναι το εξής:

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο σύνολο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ των διατεταγμένων ρητών. Τότε, αν θεωρήσουμε τους κύκλους με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$



οι κύκλοι δεν τέμνονται, δεδομένου ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

έχει ως λύσεις τις

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

Φαίνεται δηλαδή ότι το σύνολο των ρητών, αν και είναι πυκνό σύνολο, με την έννοια ότι μεταξύ δύο ρητών υπάρχουν άπειροι άλλοι ρητοί, δεν επαρκεί για να εξασφαλιστεί η τομή των κύκλων. Με αυτό το παράδειγμα μπορούν να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το πρόβλημα της τομής κύκλων ιδωμένο αλγεβρικά, είναι σε άμεση σχέση με τη φύση των πραγματικών αριθμών.

Με βάση τις προηγούμενες διαπιστώσεις, θεωρούμε ως μια ρεαλιστική πρόταση διδασκαλίας, να αποδειχθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να τέμνονται δύο κύκλοι

- είτε με την εις άτοπον απαγωγή, αναφέροντας τις πέντε δυνατές περιπτώσεις, όπως ακριβώς περιγράφει ο Legendre στο [48, σελ. 45]
- είτε με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. Ουσιαστικά πρόκειται για αλγεβροποίηση της απόδειξης, με όφελος την ταχύτητα και την ευκολία. Φυσικά, η πρόταση αυτή δεν είναι καινούρια. Τη συναντάμε στη Γεωμετρία του Pogorelov (1987). Αφού γίνει η απαραίτητη προεργασία όσον αφορά τις εξισώσεις των κύκλων, η απόδειξη είναι σχεδόν άμεση, χωρίς τεχνικές δυσκολίες, χωρίς την επίκληση σε νέα αξιώματα και χωρίς καταφυγή στην διαίσθηση και την εποπτεία.

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους με ακτίνες $a, b > 0$ και ας υποθέσουμε ότι τα κέντρα τους βρίσκονται σε απόσταση $c > 0$. Ας είναι A, B τα κέντρα των κύκλων, αντίστοιχα. Θεωρούμε το A ως την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και την ημιευθεία AB ως τον θετικό ημιάξονα. Οι εξισώσεις των κύκλων είναι

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 = b^2 \qquad\qquad (*)$$

Αν οι κύκλοι τέμνονται, οι συντεταγμένες x, y ικανοποιούν τις εξισώσεις $(*)$ και αντιστρόφως. Επομένως το πλήθος των σημείων τομής των δύο κύκλων ισούται με το πλήθος λύσεων του συστήματος των εξισώσεων $(*)$. Το σύστημα είναι εύκολο να λυθεί. Με αφαίρεση των εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε $2cx = c^2 + a^2 - b^2$, οπότε

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2,$$

οπότε

$$y^2=a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2=\left(a-\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)\left(a+\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{b^2-(a-c)^2}{2c}\cdot\frac{(c+a)^2-b^2}{2c}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Από εδώ φαίνεται ότι αν ισχύει $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$y=\pm\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2c}$$

και ως εκ τούτου και το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε τότε οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

Αν ισχύει $a+b=c\ \vee\ b+c=a\ \vee\ c+a=b$, το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως οι κύκλοι έχουν μοναδικό κοινό σημείο, δηλαδή εφάπτονται.

Αν ένας ακριβώς από τους παράγοντες $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ είναι αρνητικός, το σύστημα δεν έχει καμία λύση, οπότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο. Ας παρατηρήσουμε ότι δεν είναι δυνατόν να είναι δύο από τους παραπάνω παράγοντες αρνητικοί, αφού αν ισχύει π.χ.

$$a+b-c<0,\ \ b+c-a<0$$

με πρόσθεση θα είχαμε $2b<0$, που είναι αδύνατον.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

- αν ένας εκ των a, b, c είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα των άλλων δύο, οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο.
- αν ένας εκ των a, b, c ισούται με άθροισμα των άλλων δύο, οι κύκλοι εφάπτονται.

- αν ένας εκ των a, b, c είναι μικρότερος από το άθροισμα των άλλων δύο, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

Άμεση συνέπεια των προηγούμενων είναι η συνθήκη, ώστε να κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές a, b, c. Αρκεί ο μεγαλύτερος εξ αυτών να είναι μικρότερος από το άθροισμα των άλλων δύο.

Ίσως η παραπάνω πρόταση να θεωρείται από ορισμένους ότι αποκλίνει από το πνεύμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεδομένου ότι η εισαγωγή αλγεβρικών εργαλείων και η αριθμητικοποίηση δεν αποτελούν παραδοσιακά χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας. Ας αναλογιστούμε ωστόσο, ότι και στο παρελθόν χρησιμοποιήθηκαν διδακτικά εγχειρίδια τα οποία απέκλιναν σημαντικά από το ύφος των «Στοιχείων», αφού λ.χ. θέματα γεωμετρικών μετασχηματισμών δεν εντάσσονται στην κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ως εκ τούτου, η παραπάνω πρόταση διδασκαλίας και εν γένει η επιλεκτική αλγεβροποίηση ορισμένων σημείων της Γεωμετρίας κρίνεται θεμιτή, εφόσον υπηρετεί συγκεκριμένους στόχους, όπως η διευκόλυνση της διδασκαλίας της και η αποφυγή της σχεδόν πλήρους παράδοσης της διδασκαλίας στην διαίσθηση και την εποπτεία.

4.2 Επίλογος

Η πορεία του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα τα τελευταία 40-50 χρόνια παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον από την οπτική γωνία της θεωρίας του διδακτικού μετασχηματισμού. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό αντιληπτό είναι να αναλογιστεί κανείς τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μέλη της νοόσφαιρας, καθώς και τους διάφορους παράγοντες που αλληλεπιδρούν και επηρεάζουν αυτή την πορεία, έχοντας ως τελική συνισταμένη τη βαθμιαία υποβάθμιση και το σημερινό αδιέξοδο που ομολογούν οι πάντες.

Ειδικά όσον αφορά την επίδραση των μελών της νοόσφαιρας, εύκολα εντοπίζει κανείς λ.χ. τις θέσεις των πανεπιστημιακών για την παιδαγωγική και διδακτική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

Σ. Ζερβός: Πρόλογος στο βιβλίο *Γεωμετρικά Θέματα* του Μ. Μαραγκάκη (1978).

«Η καθαρή Γεωμετρία, ανεπανάληπτα συνδυάζοντας την παραστατικότητα με την ανάγκη από άψογους συλλογισμούς, αποτελεί και παντοτινά θα αποτελεί το άριστο σχολειό για τη μαθηματική σκέψη.

Ο «πόλεμος» που γίνεται στην καθαρή Γεωμετρία, ακόμα και όταν προέρχεται από δικαιολογημένες αφορμές όπως η κατάχρηση σε πολύπλοκες ασκήσεις έξω από το κλίμα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, όμως τελικά εξυπηρετεί κάτι άλλο: τη γενικότερη προσπάθεια που καταβάλλει η καταναλωτική κοινωνία να πνίξει την πρωτόβουλη σκέψη και να μας μηχανοποιήσει.»

Σ. Νεγρεπόντης: Συνέντευξη στον Β. Βισκαδουράκη. *Το φ* 1, 97–112 (2004).

«Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ασφαλώς θα πρέπει να είναι ένα από τα βασικά μαθήματα μαθηματικής παιδείας στα σχολεία. Με την υποβάθμιση της διδασκαλίας της γεωμετρίας στα σχολεία πρέπει να συσχετίζεται άμεσα η με ανησυχία παρατηρούμενη διάβρωση και ήδη αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν τι σημαίνει απόδειξη, χωρίς την οποία πολύ δύσκολα μπορεί να υπάρχει Μαθηματική Επιστήμη. Είμαι απόλυτα πεπεισμένος ότι η αβίαστη και ελεύθερη κατανόηση της διαδικασίας της απόδειξης είναι άρρηκτα συνδεμένη με Ευκλείδειες γεωμετρικές αποδείξεις, όπου η μαθηματική ακρίβεια συμβαδίζει με μοναδικό τρόπο με την γεωμετρική εποπτεία.»

Ανακοίνωση της 1ης συνόδου των προέδρων των Μαθηματικών τμημάτων (17-11-2018):

«Αλλά και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση υποβαθμίζεται συνεχώς η παρεχόμενη μαθηματική παιδεία: σημαντικές μαθηματικές ενότητες έχουν περικοπεί από τη διδασκαλία ή δεν υπάγονται στην εξεταστέα ύλη των προαγωγικών ή πανελλαδικών εξετάσεων. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της υποβάθμισης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενός μαθήματος που έχει παίξει καθοριστικό ρόλο στην ιστορία της ελληνικής και παγκόσμιας εκπαίδευσης και που, κατά κύριο λόγο, προάγει την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της λογικής τεκμηρίωσης, με τον μαθητή να βιώνει την εμπειρία του χώρου και της γεωμετρικής κατασκευής.»

Οι παραπάνω θέσεις μελών των ανώτερων στρωμάτων της νοόσφαιρας είναι λογικό να δημιουργούν ένα αντίστοιχο κλίμα που επηρεάζει τους θεσμικούς φορείς και τους συντάκτες των προγραμμάτων σπουδών. Οι επιλογές των τελευταίων δεσμεύουν τους συγγραφείς των διδακτικών βιβλίων, τα οποία με τη σειρά τους επηρεάζουν άμεσα τους διδάσκοντες. Όλα τα προηγούμενα δοκιμάζονται στην πράξη μέσα στις ιδιαίτερες συνθήκες και τους περιορισμούς που επικρατούν στο χώρο της διδασκαλίας, όπως είναι η έλλειψη επιμόρφωσης, η ανομοιομορφία των τμημάτων, η αναντιστοιχία της ύλης με τις διαθέσιμες ώρες και οι προτεραιότητες που θέτουν οι διδάσκοντες (π.χ. η ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων επιβάλλει την απόλυτη προτεραιότητα του αλγεβρικού λογισμού). Τα προβλήματα που προκύπτουν, με πιο χαρακτηριστικό την αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης, οδηγούν σε μια αντίστροφη πορεία αναπροσαρμογών που υλοποιούνται μέσα από τις οδηγίες διδασκαλίας των θεσμικών οργάνων της εκπαίδευσης. Οι συχνότερες αφορούν περικοπές της ύλης, εκπτώσεις στον τρόπο εξέτασης του μαθήματος, έμφαση στην εποπτεία με αντίστοιχη υποβάθμιση της θεωρητικής προσέγγισης. Όλα αυτά διαμορφώνουν ένα κλίμα υποβάθμισης και απαξίωσης του μαθήματος, οδηγούν σε αντιδράσεις (έχουν γίνει μέχρι και επερωτήσεις στη Βουλή) και ανοίγουν εκ νέου τον κύκλο συζητήσεων και παρεμβάσεων.

Ίσως τα παραπάνω να δίνουν την εικόνα μια ζοφερής εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Αποτελεί όμως υπόθεση όλων μας [30, σελ. 505] «*να συμμετάσχουμε στην προσπάθεια, η επόμενη γενιά καθηγητών και δασκάλων των Μαθηματικών να χειραφετηθεί και να απαλλαγεί από παλαιές προκαταλήψεις και σύνδρομα εθνικής ταυτότητας, ώστε να επιτύχει την αναγκαία μεταρρύθμιση*».

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

1. Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 258-272.
2. Birkhoff, G. (1932). A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor, *The Annals of Mathematics*, vol.33: pp. 329-345.
3. Birkhoff, G., Beatley R. (1959). *Basic Geometry*, Chelsea Public Company.
4. Birkhoff, G., Beatley R. (1959). *Basic Geometry- Manual for Teachers*, New York: AMS Chelsea Public Company.
5. Cedeberg, J. (2001). *A Course in Modern Geometries*, New York: Springer Verlag.
6. Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique- du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La Pensée Sauvage
7. Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes, *Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education,* Bratislava, pp. 51-62
8. Chevallard, Y. (1992). A Theoretical Approach to Curricula. . *Journal für Mathematik-Didaktik* **13,** 215–230
9. Chevallard, Y. & Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique _ La notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, (3), 2, 157-239
10. Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Vieweg.
11. Dieudonné, J.A. (1961). 'New Thinking in School Mathematics', *New Thinking in School Mathematics*, Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris.
12. Freudenthal, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* **3,** 413–435.

13. Greenberg, M. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries-Development and History*, W.H. Freeman and Company.
14. Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*, New York- Berlin - Heidelberg: Springer Verlag.
15. Heath, T. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York: Dover Publications.
16. Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1990), Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: England.
17. Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry*, (translated by E.J. Townsend), Illinois: The Open Court Publishing Company.
18. Jackson, Philip (1968) W. *Life in Classrooms.* New York: Holt, Rinehart and Winston.
19. Killing, W. (1898). *Einführung in die Grundlagen der Geometrie II,* Paderborn: Schöningh.
20. Kiselev, A. (2006). *Geometry Book I. Planimetry*, (translated by Alexander Givental), California: Sumizdat.
21. Legendre, A.M. (1867). *Elements of Geometry*, (translated by Francis H. Smith), Baltimore: Kelly & Piet Publishers.
22. Menghini, M. (2008) The Eléments De Géométrie of A. M. Legendre: An analysis of some proofs from yesterday and today's point of view, *History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 5th European Summer University,* σελ. 743-754, Plzeň: Vydavatelský servis
23. Patronis, T., Thomaidis, Y. (1997) On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics. *Science & Education* **6,** 273–290.
24. Pogorelov, A. (1987). *Geometry,* Moscow: Mir Publishers
25. Russel, B. (1902) The teaching of Euclid, *The Mathematical Gazette* 2 vol.33: pp.165-167.

26. Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (p. 225–264). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
27. Senk, S. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs?. *The Mathematics Teacher,* Vol. 78, No. 6 (September 1985), pp. 448-456
28. Sträßer, R. (1992) Didaktische Transposition — eine „Fallstudie" anhand des Geometrie-Unterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik* **13,** 231–252
29. Tall, D. (1992) The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp.495–511. National Council of Teachers of Mathematics & Macmillan, New York,
30. Toumasis, Ch. (1990). 'The Epos of Euclidean Geometry in Greek Secondary Education (1835–1985): Pressure for Change and Resistance, *Educational Studies in Mathematics* **21**, 491–508
31. Zeitler, H. (1990). Axiomatics of Geometry in School and in Science. *For the Learning of Mathematics, 10*(2), 17-24.

Ελληνική βιβλιογραφία

32. Αθανασίου, Α. et al. (2020). Μαθηματικά Α΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Α΄ Τεύχος. Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.
33. Αλιμπινίσης, Α., Δημάκος, Γ., Εξαρχάκος, Θ., Κοντογιάννης, Δ., Τασόπουλος, Γ. (1991). *Θεωρητική γεωμετρία Α' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
34. Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σιδέρης, Π. (2007). *Ευκλείδεια γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

35. Ζάχος, Ι. (2000). Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β τάξης του Λυκείου. *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV*, σελ.161-179, Αθήνα: Gutenberg.
36. Θωμαΐδης, Γ. (1991) Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 61, σελ. 27-38
37. Θωμαΐδης, Γ. (1995) *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης. (η περίπτωση της απόλυτης τιμής)*, (Διδακτορική εργασία) Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ.
38. Θωμαΐδης, Γ. (1996) Η διδασκαλία της θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 1, σελ. 72-92.
39. Θωμαΐδης, Γ. (1998). Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Θεωρητικής Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [Επιμ.]. *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ. 119-127. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).
40. Θωμαΐδης, Γ., Ξένος, Θ., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α., Στάμου, Γ. (1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
41. Θωμαΐδης, Γ. (2000). Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [Επιμ.]. *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ.127-136. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).
42. Θωμαΐδης, Γ. (2014) Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εισήγηση Στρογγυλού Τραπεζιού με θέμα: «Το πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας: Υπάρχει λύση;» 4η Ημερίδα Μαθηματικών Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί. 15 Μαρτίου 2015, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στη διαδικτυακή διεύθυνση:

http://www.kalamari.gr/images/stories/hmerida_mathimatikwn/4hmeridamathimatikwn/thomaidis.pdf

43. Ιγγλέζου, Α. (2014). *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα*. (Διπλωματική Εργασία, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών)
44. Ιωαννίδης, Ι. (1969). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
45. Κανέλλος, Σπ. (1970). *Ευκλείδειος Γεωμετρία Επίπεδος*. Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Παπαδημητρόπουλου.
46. Καστάνης, Ν. (1986). «Να φύγει ο Ευκλείδης» - «Δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες» Μια ιστορικο-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τεύχος 31, σελ. 3-18.
47. Κοντογιάννης, Δ., & Ντζιαχρήστος, Β. (1994). Η Φιλοσοφία των αξιωματικών συστημάτων. Τα αξιωματικά συστήματα H. Weyl, N. Kolmogorov, A.V. Pogorelov. *Πρακτικά του 11ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας - Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και στην Τεχνολογία*, σ. 249-259. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
48. Λέγενδρος, Α.Μ. (1870). *Στοιχεία Γεωμετρίας*, (μετάφραση υπό Α. Δαμασκηνού). Αθήνα: Τυπογραφείο Αγγελόπουλου
49. Λέκκας, Δ.Α. (2019). Κριτική θεώρηση των αξιωματικών συστημάτων των σχολικών εγχειριδίων της Γεωμετρίας του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος 1888-2015 (Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών)
50. Νικολάου, Ν. Δ. (1970). *Θεωρητική Γεωμετρία*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
51. Παπαγεωργίου, Μ., Τζεκάκη, Μ. (2017) Κατανόηση μαθητών Α΄ Λυκείου για το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών στη Γεωμετρία, Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ., Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
52. Παπαμιχαήλ, Δ., Σκιαδάς, Α. (1977). *Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

53. Παπανικολάου, Χ. Γ. (1975). *Ευκλείδειος Γεωμετρία.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
54. Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος «Μαθηματικά» της Α΄ και Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου (2015) Φ.Ε.Κ. 162
55. Στράντζαλος, Χ. (1989). *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.* Αθήνα: Καρδαμίτσα.
56. Τσίντσιφας, Γ. (1976). *Γεωμετρία, Τεύχος 1*. Θεσσαλονίκη: Σύγχρονο Βιβλιοπωλείο.
57. Χατζιδάκης, Ι. (1888). *Στοιχειώδης Γεωμετρία*. Αθήνα: Τυπογραφείο Κωνσταντινίδη
58. Χατζιδάκης, Ι. (1904). *Στοιχεία Γεωμετρίας*. Αθήνα: Τύποις Σακελλαρίου