ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Η ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως εργαλείο για την αναβάθμιση της διδασκαλίας του μαθήματος. Μία διερεύνηση των στάσεων των μαθητών»

της Χριστοφόρη Δέσποινας

Α.Ε.Μ.994

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστική επιτροπή: Τζανάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια

Θεσσαλονίκη 2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 3
ΠΕΡΙΛΗΨΗ 4
ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6
1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ 11
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 11
1.1. Η ιστορία ως εργαλείο 11
1.2. Η ιστορία ως στόχος 12
1.3. Επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ΙτΜ στη διδασκαλία τους («Γιατί») 13
1.4. Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους («Πώς») 15
1.5. Αντιρρήσεις ως προς την ενσωμάτωση της Ιστορίας των μαθηματικών 18
1.6. Απόψεις μαθητών και εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία των μαθηματικών με τη χρήση ιστορικών πηγών 19
2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 23
2.1. Η υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την έλευση των «μοντέρνων» μαθηματικών 24
2.1.1. Γιατί η Γεωμετρία του Ευκλείδη έχασε έδαφος ως επιστήμη; 24
2.1.2. Λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος 25
2.2. Αξιοποίηση της Ιστορίας της Γεωμετρίας για την αναβάθμιση του μαθήματος 36
2.2.1. Η χρήση της Ιστορίας στην αποδεικτική διαδικασία 36
2.2.2. Η χρήση της Ιστορίας στις γεωμετρικές κατασκευές 39
2.2.3. Η χρήση της Ιστορίας στη σύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με άλλους κλάδους των μαθηματικών 40
2.3. Τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας 47
2.3.1. Αναφορά στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας παρελθόντων ετών 47
2.3.2. Υποδείξεις ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 53
2.3.3. Οι στόχοι των εισαγωγικών ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας 55
2.3.4. Ποιος ο ρόλος των ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 59
2.3.5. Επαναλαμβανόμενα λάθη που συναντάμε στα ιστορικά σημειώματα 64
2.3.6. Το βιβλίο του καθηγητή ως οδηγός ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων στη διδακτική προσέγγιση 67
3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 69
3.1. Περιγραφή της έρευνας 69
3.2. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα 69

3.3. Δείγμα....70
3.4. Το εργαλείο της έρευνας....70
3.5. Ερευνητική διαδικασία....72
3.5.1. 1η Διδακτική παρέμβαση (8ΟΚεφάλαιο – Μέτρηση απρόσιτων....74
αποστάσεων)....74
3.5.2. 2η Διδακτική παρέμβαση (9ΟΚεφάλαιο – Μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα – Πυθαγόρειο Θεώρημα)....79
3.5.3 3η Διδακτική παρέμβαση (Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος –....84
Πυθαγόρειες τριάδες)....84
4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ....88
4.1. Παρατηρήσεις κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών παρεμβάσεων....88
4.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων της έρευνας....90
4.3. Συμπεράσματα....99
4.4. Συζήτηση....102
4.5. Περιορισμοί και Επεκτάσεις της έρευνας....106
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ....108
ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ....110
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι....115
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ....128
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ....131

Συντομογραφίες: ΙτΜ =Ιστορία των Μαθηματικών

ΙτΓ = Ιστορία της Γεωμετρίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον κ. Γιάννη Θωμαΐδη για τη συμβολή, την επιστημονική καθοδήγηση και την συμπαράσταση που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας μου.

Ευχαριστώ τον κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη, αναπληρωτή καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, ο οποίος ως επιβλέπων της διπλωματικής μου με καθοδήγησε κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Ευχαριστώ την καθηγήτρια κ. Μαριάννα Τζεκάκη και τον καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Τζανάκη για την τιμή που μου κάνανε να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή, καθώς και τους υπόλοιπους καθηγητές του ΔΠΜΣ για τις νέες γνώσεις και εμπειρίες που μου προσέφεραν, συμβάλλοντας στην επαγγελματική μου εξέλιξη,

Ευχαριστώ τη φίλη και συνάδελφό μου Ματίνα για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε για τη φιλολογική επιμέλεια της εργασίας μου. Την ευχαριστώ για την ψυχολογική αλλά και την ουσιαστική της υποστήριξη.

Ευχαριστώ τις φίλες, συναδέλφους και συμφοιτήτριες Έλσα και Ντίνα, για την κοινή πορεία, την άριστη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού και για την ανταλλαγή απόψεων αναφορικά με το θέμα της διπλωματικής.

Θα ήθελα, ακόμη, να ευχαριστήσω τη Διευθύντρια του Λυκείου κ. Ευφροσύνη Βλάχου για τη διευκόλυνση της έρευνας, τους μαθητές και τις μαθήτριές μου που συμμετείχαν στην εκπόνησή της καθώς και τους γονείς τους που έδωσαν τη συγκατάθεση για τη συμμετοχή των παιδιών τους.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους δικούς μου ανθρώπους για την υπομονή και τη στήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική κοινότητα παρατηρείται έντονος προβληματισμός ως προς τη θέση που κατέχει το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσα στην Ελληνική Εκπαίδευση. Θεωρείται, επομένως, σημαντική η αναζήτηση νέων διδακτικών προσεγγίσεων. Μία προσεκτική μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών γενικότερα, μπορεί να οδηγήσει σε νέες δυνατότητες κατανόησης για το πως δημιουργούνται τα Μαθηματικά. Στην παρούσα έρευνα αναπτύσσεται ο ρόλος που θα μπορούσε να παίξει η ιστορία της Γεωμετρίας, μέσα από ιστορικά σημειώματα σχολικών εγχειριδίων και από διδακτικές παρεμβάσεις, με κύριο χαρακτηριστικό της έρευνας, την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων, ώστε να αναδειχθεί το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η έρευνα διεξήχθη σε 66 μαθητές της Β' τάξης ενός Γενικού Λυκείου του Νομού Χαλκιδικής και ανέδειξε μια θετική στάση των μαθητών/τριών απέναντι στη διδασκαλία των μαθηματικών με την ενσωμάτωση των ιστορικών σημειωμάτων. Σε μεγάλο ποσοστό οι μαθητές/τριες δηλώνουν ικανοποιημένοι από τη χρήση της Ιστορίας της Γεωμετρίας, κατανοούν καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων και αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε προβλήματα καθημερινής ζωής.

Λέξεις κλειδιά: Ευκλείδεια Γεωμετρία, Ιστορία των Μαθηματικών, Στάσεις μαθητών

ABSTRACT

In recent years, the Greek mathematical community has been deeply concerned about the role of the Euclidean Geometry course in Greek Education. The search for new didactic approaches is therefore considered crucial. A thorough study of the historical evolution of mathematics in general, can lead to alternative ways of understanding Mathematical development. This research focuses on the role that the history of Geometry could play, through the analyses of old school textbook notes and didactic interventions, stressing on the integration of historical data, in order to highlight the course of Euclidean Geometry. The research sample consists of 66 students of a secondary education public school in the prefecture of Chalkidiki, and revealed a positive attitude of students towards the teaching of mathematics when applying the integration of historical data. A high percentage of students expressed satisfaction when utilizing the History of Geometry, better understanding the proofs of the theorems and realizing the usefulness of Euclidean Geometry in solving everyday problems.

Keywords: Euclidean Geometry, History of Mathematics, Student attitudes

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο εικοστός αιώνας γνώρισε σημαντικές αναταράξεις σχετικά με τη μαθηματική γνώση. Με την πρωτοβουλία μιας ομάδας Γάλλων μαθηματικών, που συστάθηκε το 1933 υπό την επωνυμία Nicolas Bourbaki, καθορίστηκαν νέες προτεραιότητες, υιοθετήθηκε μια νέα γλώσσα και σταδιακά, κάποια προβλήματα που έμοιαζαν απρόσιτα άρχισαν να επιλύονται. Το κύριο προϊόν της σχολής Bourbaki είναι ένα σύνολο τόμων, τα στοιχεία των Μαθηματικών (Eléments de mathématique), που εκδόθηκε το 1939 και τώρα ανέρχεται σε περισσότερους από 30 τόμους. Ο τίτλος δόθηκε αναμφίβολα ως αναφορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη (Euclid's Elements), που αποτελούσε την πρώτη προσπάθεια να συνοψιστούν όλες οι μαθηματικές γνώσεις (Franceschetti, 2020).

Στο συνέδριο που οργάνωσε τον Νοέμβριο του 1959 στο Παρίσι ο Ευρωπαϊκός Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία, με αντικείμενο την αναμόρφωση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τα Μαθηματικά στη μέση εκπαίδευση, κεντρικό ρόλο διαδραμάτισε η μεταρρύθμιση των «Μοντέρνων Μαθηματικών» γεγονός που επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία των μαθηματικών και πολύ περισσότερο την ίδια την ύπαρξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μάθημα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonné, ιδρυτικό μέλος της ομάδας Bourbaki και κυρίαρχη μορφή της μαθηματικής σκέψης του 20ού αιώνα με την ομιλία του, με τίτλο «New Thinking in School Mathematics» παρουσίασε μία ενότητα με τίτλο «Euclid must go» (Ο Ευκλείδης πρέπει να φύγει),η οποία επέδρασε καταλυτικά στη διαμόρφωση των σχολικών Μαθηματικών στον δυτικό κόσμο.

... αν θα έπρεπε να συνοψίσω ολόκληρο το πρόγραμμα που έχω κατά νου σε ένα σύνθημα, αυτό θα ήταν: Ο Ευκλείδης πρέπει να φύγει! Αυτή η δήλωση ίσως σοκάρει μερικούς από εσάς, αλλά θα ήθελα να σας δείξω με κάποια λεπτομέρεια τα ισχυρά επιχειρήματα υπέρ αυτής. Αρχικά ας αναφέρω ότι τρέφω βαθύτατο θαυμασμό για τα επιτεύγματα των Ελλήνων στα Μαθηματικά: Θεωρώ τη δική τους δημιουργία της γεωμετρίας ίσως ένα από τα πιο εντυπωσιακά διανοητικά επιτεύγματα που πραγματοποίησε η ανθρωπότητα. Στους Έλληνες οφείλεται ότι μπορέσαμε να κτίσουμε το πανύψηλο οικοδόμημα της σύγχρονης επιστήμης.

[...]

Τι θα μπορούσε να πάρει τη θέση του Ευκλείδη;

Αν επιτέλους είχαμε ένα πρόγραμμα σπουδών απαλλαγμένο από το βάρος της καθαρής γεωμετρίας , με τί θα την αντικαθιστούσαμε; Έχω αναφέρει ήδη εν συντομία κάποια από τα θέματα που θα αποτελούσαν μία εξαιρετικά πολύτιμη προετοιμασία για θεωρίες υψηλότερου επιπέδου [...]

(Dieudonne, 1961, σσ.35– 41)

Στις περισσότερες χώρες του κόσμου η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει εξοβελιστεί ως αυτόνομο μάθημα από τα προγράμματα σπουδών ενώ διατηρεί την αυτονομία του στην Ελλάδα, και μάλιστα διδασκόμενο σε δύο διαδοχικές τάξεις της Α' και Β' Λυκείου. Κι όμως, ενώ υπάρχει στη διδακτέα ύλη, έχει συρρικνωθεί και υποβαθμιστεί. Το κύριο ερώτημα όμως της παρούσας έρευνας είναι όχι το ποια μαθηματικά αντικείμενα θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα πλαίσια του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, όπως ανέφερε στην ομιλία του ο Jean Dieudonne, αλλά με ποιο τρόπο θα μπορούσε να δοθεί ένα τέλος στην υποβάθμισή της και να αναδειχθεί η μεγάλη διδακτική παιδαγωγική του μαθήματος, αυτή δηλαδή που το διατήρησε στο προσκήνιο για πολλούς αιώνες.

Κρίνεται αναγκαία επομένως η ύπαρξη μαθημάτων με αρχικό στόχο να αποφευχθούν σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με το μάθημα της Γεωμετρίας και κατά συνέπεια η υποβάθμιση του ίδιου του μαθήματος. Δυσκολίες, όπως η κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας, η αναγνώριση προτάσεων και θεωρημάτων μέσα στα διάφορα γεωμετρικά σχήματα και η μύηση στις γεωμετρικές κατασκευές αποτελούν βασικά εμπόδια στην κατάκτηση της ύλης της Γεωμετρίας από μαθητές των πρώτων τάξεων του Λυκείου. Για να ξεπεραστούν τα παραπάνω εμπόδια είναι χρήσιμο να προταθούν εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας.

Στο άρθρο των Dreyfus & Hadas (1987) «Euclid may stay and even be taught» έχει προταθεί πληθώρα εναλλακτικών τρόπων διδακτικών προσεγγίσεων των εννοιών της γεωμετρίας. Πολλοί επιφανείς μαθηματικοί και έμπειροι εκπαιδευτικοί μαθηματικών έχουν συνεισφέρει στη συζήτηση. Προκειμένου, για παράδειγμα, να κατανοήσουν οι μαθητές τη σημασία της αποδεικτικής διαδικασίας δεν αρκούν μόνο οι γνώσεις γενικών μαθηματικών περιοχών. Η συμβολή της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κρίνεται απαραίτητη. Στο ίδιο άρθρο δίνεται μία σειρά «Διδακτικών αρχών» ως προς την απόδειξη θεωρημάτων και προτάσεων.

1) Ένα θεώρημα δεν έχει καμία εξαίρεση. Μια μαθηματική πρόταση λέγεται ότι είναι σωστή μόνο εάν είναι σωστή σε κάθε πιθανή περίπτωση.

2) Ακόμη και προφανείς προτάσεις πρέπει να αποδειχθούν. Συγκεκριμένα, μια απόδειξη δεν μπορεί να βασιστεί στα προφανή χαρακτηριστικά ενός σχήματος.

3) Η απόδειξη πρέπει να είναι γενική. Μία ή περισσότερες συγκεκριμένες περιπτώσεις δεν μπορούν να αποδείξουν μια γενικότερη πρόταση . Ωστόσο, ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό για να το αντικρούσει.

4) Οι υποθέσεις ενός θεωρήματος πρέπει να προσδιορίζονται σαφώς και να διακρίνονται από τα συμπεράσματα.

5) Το αντίστροφο μιας σωστής πρότασης δεν είναι απαραίτητα σωστό.

6) Τα σύνθετα σχήματα αποτελούνται από βασικά στοιχεία των οποίων η αναγνώριση μπορεί να είναι απαραίτητη σε μια απόδειξη.

Πρόκειται για βασικές αρχές που απαντώνται σε κάθε μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε οποιοδήποτε επίπεδο ικανότητας των μαθητών.

Στα 300 χρόνια που μεσολάβησαν από τον Τρωικό πόλεμο ως τον Όμηρο διάφοροι αοιδοί τραγουδούσαν τα έπη. Ο Όμηρος όμως ήταν εκείνος που τα συνέθεσε και δημιούργησε τα Ομηρικά Έπη. Το ανάλογο του Ομήρου στα μαθηματικά είναι ο Ευκλείδης. 300 χρόνια μετά τον Όμηρο, ο Ευκλείδης συγκέντρωσε όλες τις γνώσεις των μαθηματικών από τους Βαβυλώνιους μέχρι τον Θαλή και τον Πυθαγόρα και συνέθεσε τα «Στοιχεία» του (Μπαλής, 2008).

Μια απάντηση στο «Euclid must go» θα μπορούσε να βρίσκεται στην ίδια την ιστορική εξέλιξη της επιστήμης της Γεωμετρίας και η ενσωμάτωση αυτής στις διδακτικές προσεγγίσεις γεωμετρικών εννοιών.

Για πολλά χρόνια, πολλοί εμπλεκόμενοι με τη μαθηματική εκπαίδευση αναζητούσαν νέες διδακτικές προσεγγίσεις και συμφώνησαν ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να παίξει ένα σημαντικό ρόλο στη βελτίωση της διδασκαλίας τους. Μία προσεκτική ανάγνωση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών γενικότερα μπορεί να οδηγήσει σε νέες δυνατότητες κατανόησης με φυσικό τρόπο για το πώς δημιουργούνται τα μαθηματικά (Tzanakis & Thomaidis, 2000)

Τα μαθηματικά είναι κείμενο, επιγραφές, όργανα, βιβλία και τεχνικές κατασκευές οι οποίες παρήχθησαν σε διαφορετικά σημεία σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους για ιδιαίτερους λόγους και η κατανόηση των λόγων αυτών βοηθάει στη σύνδεση μαθηματικών ιδεών με το άμεσο περιβάλλον τους (Fauvel & VanMaanen, 2000).

Το θεωρητικό πλαίσιο που υιοθετείται στη συγκεκριμένη έρευνα αφορά στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών (ΙτΜ), όπως αυτή έχει αποτυπωθεί στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία αλλά και σε παρόμοιες έρευνες που ήδη έχουν διεξαχθεί στα πλαίσια μεταπτυχιακών διπλωματικών εργασιών του συγκεκριμένου προγράμματος. Αυτό περιλαμβάνει τους τρόπους ενσωμάτωσης της ΙτΜ στη διδασκαλία, τα επιχειρήματα υπέρ αλλά και κατά της ενσωμάτωσης αυτής καθώς και τις αντιλήψεις μαθητών και εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη χρήση

ιστορικών πηγών.

Σε επόμενα κεφάλαια εξειδικεύεται η αναζήτηση τρόπων ενσωμάτωσης της ΙτΜ στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μια προσπάθεια να δοθούν απαντήσεις σε γενικά ερωτήματα όπως: Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της υποβάθμισης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο; Ποιος είναι ο ρόλος των ιστορικών σημειωμάτων στα διδακτικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας; Μπορεί η ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να αξιοποιηθεί για την αναβάθμιση της διδασκαλίας του μαθήματος; Πως μπορούν να ενσωματωθούν στη διδακτική πράξη ορισμένα στοιχεία από την ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας; Για τα συγκεκριμένα ερωτήματα διατυπώνονται μετά τα συμπεράσματα της εμπειρικής έρευνας κάποια σχόλια ως προτάσεις για μελλοντικές έρευνες. Τα ερευνητικά ερωτήματα που αφορούν σε στάσεις μαθητών/τριών διατυπώνονται στην ενότητα 3.3 κατά την εκτενέστερη ανάλυση της εμπειρικής έρευνας. Αναλυτικότερα:

Στο 1ο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας με την παρουσίαση στοιχείων της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών (ΙτΜ) γενικότερα, δηλαδή τα επιχειρήματα υπέρ μιας τέτοιου είδους ενσωμάτωσης στις διδακτικές προσεγγίσεις, οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί αλλά και οι αντιρρήσεις που προβάλλονται μέσω διαφόρων ερευνών ως προς αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας. Το κεφάλαιο κλείνει με αναφορά σε ήδη υπάρχουσες έρευνες που αφορούν σε αντιλήψεις μαθητών/τριών αλλά και εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία με χρήση ιστορικών πηγών και σημειωμάτων.

Στο 2ο κεφάλαιο η έρευνα εξειδικεύεται στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά και οι λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος στην Ελλάδα τα τελευταία 30 περίπου χρόνια αλλά και τρόποι αξιοποίησης της Ιστορίας της Γεωμετρίας (ΙτΓ) με σκοπό την αναβάθμισή της. Γίνεται αναφορά σε σχολικά εγχειρίδια του μαθήματος παρελθόντων ετών, στις υποδείξεις του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών που αφορούσαν στην ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων σ' αυτά, στο ρόλο των ιστορικών σημειωμάτων που υπήρχαν και υπάρχουν αλλά και στο βιβλίο του καθηγητή που δίνεται ως οδηγός ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων κατά τη διδασκαλία.

Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εμπειρική έρευνα με ανάλυση των διδακτικών παρεμβάσεων που πραγματοποιήθηκαν και στη μεθοδολογία εκτενέστερα που χρησιμοποιήθηκε ώστε να διερευνηθούν οι στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με χρήση της Ιστορίας της.

Ακολουθεί το 4ο κεφάλαιο με συζήτηση και σχόλια γύρω από τα αποτελέσματα

και επεκτάσεις που θα μπορούσαν να μελετηθούν σε μελλοντικές έρευνες. Η εργασία ολοκληρώνεται με παρουσίαση των βιβλιογραφικών αναφορών και με τα παραρτήματα που αφορούν στα φύλλα εργασίας της διδακτικής παρέμβασης.

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πώς θα μπορούσαν να γίνουν τα μαθηματικά περισσότερο φιλικά προς τους μαθητές; Πώς να συνδεθεί ο ρόλος τους με τον άνθρωπο και την κοινωνία και πώς θα τους δοθεί ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο; Η πιο συχνή ερώτηση που ακούγεται στη μαθηματική τάξη είναι: «Κύριε/ Κυρία γιατί μαθαίνουμε μαθηματικά;» Η απάντηση όμως έρχεται από την ίδια την ιστορία των Μαθηματικών, από την ίδια την ιστορική εξέλιξη όλων αυτών των εννοιών που έχουν φτάσει στις μέρες μας να δίνονται στους μαθητές με έναν σίγουρα αυστηρό τρόπο, χάνοντας όμως έτσι αρκετή από τη γοητεία και την ομορφιά τους.

Στις τάξεις αντιμετωπίζουμε συχνά τα μαθηματικά σαν να τα διδασκόμαστε σε ένα δικό τους νησί, αποκομμένα από άλλα πεδία μάθησης, Ταξιδεύουμε σε αυτό το νησί μία φορά την ημέρα για τα μαθηματικά τα ερευνούμε θεωρώντας τα κλειστά, νεκρά, χωρίς συναίσθημα. Θεωρώντας πως όλα ήδη ανακαλύφθηκαν. Ενσωματώνοντας την ιστορία των μαθηματικών, μπορούμε να σώσουμε τους μαθητές από το νησί των μαθηματικών πείθοντάς τους ότι είναι ανοιχτά, ζωντανά, γεμάτα συναισθήματα και πάντα ενδιαφέροντα (Wilson & Chauvot, 2000).

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους αποτελεί αντικείμενο προς μελέτη και διερεύνηση από τις αρχές του 20ου αιώνα. Σε μία σειρά μαθημάτων που γίνανε στην Ιρλανδία σε τάξη δεκαεξάχρονων και δεκαεφτάχρονων μαθητριών μόνο, με ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων, η αντίδραση μιας μαθήτριας ήταν: «και μετά από αυτά τα μαθήματα μπορούμε να συνεχίσουμε ανακαλύπτοντας νέα μαθηματικά». Μπορεί να μην γίνει κάτι τέτοιο αλλά η στάση της συγκεκριμένης μαθήτριας ήταν αρκετά ενθαρρυντική (Barwell, 1913).

Η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως προς τον τρόπο με τον οποίο αυτή ενσωματώνεται στη διδασκαλία διαχωρίζεται στην "Ιστορία ως εργαλείο" και την "Ιστορία ως στόχο" .

1.1.Η ιστορία ως εργαλείο

Η "Ιστορία ως εργαλείο" θα μπορούσε να λειτουργήσει ως ένας παράγοντας κινητοποίησης βοηθώντας στη διατήρηση του ενδιαφέροντος και του ενθουσιασμού των

μαθητών (Farmaki & Paschos, Taimina in Jankvist, 2009). Επιπλέον, δίνει στα μαθηματικά ένα ανθρώπινο πρόσωπο, πιο φιλικό (Russ, in Jankvist, 2009) και βελτιώνει τη μάθηση προβάλλοντας μια διαφορετική μορφή παρουσίασης. Προσδιορίζει τα εμπόδια και βοηθάει στην αποφυγή τους.

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως γνωστικό εργαλείο χρήσιμο στη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών αφού παρέχει μία διαφορετική άποψη και έναν διαφορετικό τρόπο παρουσίασής τους , όπως για παράδειγμα η παρουσίαση διαφορετικών εκδοχών υπολογισμού παραγώγων από τους Newton και Leibniz (Kleiner, 2001).

Μια ειδική χρήση της ιστορίας ως γνωστικό εργαλείο εμφανίζεται στον εντοπισμό των επιστημολογικών εμποδίων, όπως εισήχθη από τον Bachelard (1934). Οι δυσκολίες των μαθητών μπορούν να ομαδοποιηθούν γύρω από εμπόδια που πιστοποιούνται από την ιστορία (Brousseau,1997) και η ιστορία δεν μπορεί μόνο να βοηθήσει στον εντοπισμό αυτών των εμποδίων, αλλά μπορεί επίσης να βοηθήσει να ξεπεραστούν.

Πολλές μελέτες της ιστορίας ως εργαλείο ασχολούνται κυρίως με την εκμάθηση των εσωτερικών θεμάτων των μαθηματικών όπως μαθηματικές έννοιες, θεωρίες, μέθοδοι και τύποι. Αυτά τα ζητήματα συχνά μπορούν να αναλυθούν μέσω ιστορικών ταινιών, ιστοριών ζωής, γνωστών προβλημάτων, ονομάτων μαθηματικών, ανέκδοτα αρχεία και έργα ζωής μεγάλων μαθηματικών. Ο στόχος μιας τέτοιου είδους προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι να τονώσει την περιέργεια και να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, εμπλουτίζοντας παράλληλα το ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών με την ενίσχυση της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου (Abah, 2017)

1.2.Η ιστορία ως στόχος

Όταν η ίδια η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί στόχο της διδασκαλίας και όχι απλά ένα μέσο βαθύτερης κατανόησης των προς μελέτη νέων εννοιών, τότε η χρήση της είναι εύκολο να παρερμηνευτεί ως ανεξάρτητο θέμα από αυτό της διδακτικής προσέγγισης των μαθηματικών.

Η Ιστορία των μαθηματικών λειτουργεί θετικά αφού επικεντρώνεται στις αναπτυξιακές και εξελικτικές πτυχές των μαθηματικών όπως αναφέρει ο Jankvist (2009). Έχει ως στόχο να δείξει στους μαθητές ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται

στο χώρο και στο χρόνο (Tzanakis & Thomaidis , 2000) και ότι οι άνθρωποι έχουν ενεργό ρόλο σ' αυτή την εξέλιξη (Thomaidis & Tzanakis , 2007).

Μία άλλη περιγραφή της χρήσης της ιστορίας ως στόχο είναι η εκμάθηση ζητημάτων όπως για παράδειγμα το πώς εξελίσσονται τα μαθηματικά με την πάροδο του χρόνου, ποιες δυνάμεις και ποιοι μηχανισμοί μπορούν να συμβάλουν στην εξέλιξη αλλά και το αν επηρεάζουν η κοινωνία και οι πολιτιστικές συνθήκες αυτή την εξέλιξή τους. Εξαρτώνται τα μαθηματικά από τον πολιτισμό και την κοινωνία, από τον τόπο και το χρόνο; Τα παλιά μαθηματικά είναι ξεπερασμένα μαθηματικά; (Jankvist, 2009).

Στο θεωρητικό πλαίσιο πολλών ερευνών, κεντρικό ρόλο έχουν δύο άξονες που αφορούν στη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών. Το «Γιατί» και το «Πώς». Δηλαδή, γιατί κρίνεται χρήσιμη η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και θεμάτων αλλά και το με ποιο τρόπο προσεγγίζονται τέτοιου είδους διδασκαλίες.

1.3.Επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ΙτΜ στη διδασκαλία τους («Γιατί»)

Στον άξονα του «Γιατί», οι Gulikers & Blom (2001) διαχωρίζουν τα εννοιολογικά επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών σ' αυτά που σχετίζονται με τους εκπαιδευτικούς και σ' αυτά που επικεντρώνονται στον μαθητή. Ως προς τους εκπαιδευτικούς, αναφέρεται ότι η ιστορία των μαθηματικών δεν μπορεί να υπαγορεύσει απολύτως τις απαραίτητες ενέργειες προκειμένου να διδαχθούν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες. Παρέχεται όμως μία γενετική επιστημολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών για ψυχολογικούς και διδακτικούς σκοπούς (Ernest in Gulikers & Blom, 2001)). Επιπλέον, η Ιστορία εμπλουτίζει το διδακτικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών. Μια ματιά στις παλιές μεθόδους μπορεί να βοηθήσει εκπαιδευτικούς και μαθητές να αξιολογήσουν τα δεδομένα τους, να απομακρυνθούν για λίγο από το "απλώς κάνω μαθηματικά", να σκεφτούν και να συζητήσουν αυτό που κάνουν κι έπειτα να επιστρέψουν και να το κάνουν με συγκεκριμένο σκοπό (Van Maanen, 1997).

Ο Fauvel (1991) επιχειρηματολογεί ως προς τα πλεονεκτήματα της χρήσης της ιστορίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών αναφέροντας ότι η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία τους :

- Βοηθά στην αύξηση του κινήτρου για μάθηση και δίνει στα μαθηματικά ένα ανθρώπινο πρόσωπο.

- Η ιστορική εξέλιξη βοηθά στην παρουσίαση των θεμάτων στο πρόγραμμα σπουδών.
- Παρουσιάζει στους μαθητές το πώς έχουν αναπτυχθεί οι έννοιες και βοηθάει την κατανόησή τους, αλλάζοντας τις αντιλήψεις τους απέναντι στα μαθηματικά.
- Αντιπαραβάλλοντας την αρχαία και τη σύγχρονη ιστορία των Μαθηματικών καθιερώνεται η αξία σύγχρονων τεχνικών.
- Βοηθά στην ανάπτυξη μιας πολυπολιτισμικής προσέγγισης.
- Παρέχει ευκαιρίες για έρευνα.
- Εμπόδια του παρελθόντος στην ανάπτυξη συμβάλλουν στην εξήγηση του τι βρίσκουν δύσκολο οι μαθητές του σήμερα.
- Οι μαθητές ενθαρρύνονται από την συνειδητοποίηση ότι δεν είναι οι μόνοι με προβλήματα.
- Ενθαρρύνει τους μαθητές που μαθαίνουν ταχύτερα να εμβαθύνουν.
- Βοηθάει στην εξήγηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία, κάνοντας τα μαθηματικά περισσότερο φιλικά προς τους μαθητές.
- Η εξερεύνηση της ιστορίας βοηθά στη διατήρηση του ενδιαφέροντος και του ενθουσιασμού στα μαθηματικά.
- Παρέχει την ευκαιρία για διαθεματική προσέγγιση με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Οι παραπάνω λόγοι της λίστας του Fauvel λειτουργούν ως βάση για τον Liu (2003), ο οποίος επικεντρώνεται σε συγκεκριμένους όπως:

- Η ιστορία μπορεί να βοηθήσει στην αύξηση κινήτρων και αναπτύσσει θετική στάση απέναντι στη μάθηση.
- Παλιά εμπόδια στην ανάπτυξη μαθηματικών βοηθάνε στο να εξηγήσουν τις σημερινές δυσκολίες των μαθητών.
- Τα ιστορικά προβλήματα βοηθούν τους μαθητές να σκεφτούν
- Η ιστορία αποκαλύπτει τις ανθρώπινες πτυχές της μαθηματικής γνώσης

- Η ιστορία δίνει στους εκπαιδευτικούς έναν οδηγό διδασκαλίας

Όλα τα παραπάνω επιχειρήματα συγκεντρώνονται κατά τον Jankvist (2009) στην ICMI study (Tzanakis in Junkvist, 2009) και κατηγοριοποιούνται σε 5 βασικές περιοχές:

Α) Στην εκμάθηση των μαθηματικών

Προτείνεται η χρήση της Ιστορίας ως εργαλείο, ως πόρος μεθόδου διδασκαλίας που έχει τη δυνατότητα να παρακινήσει και να εμπλέξει τους εκπαιδευόμενους (Tzanakis & Arcavi, 2000). Επιπλέον κατά τη χρήση της ως στόχος, ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να δείξει ότι οι μαθηματικές δημιουργίες είναι συχνά "απόγονοι" των προβλημάτων που εμφανίζονται σε άλλους τομείς της επιστήμης.

Β) Στη φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας

Με τη βοήθεια του πρωτογενούς υλικού ή ακόμα και αποσπάσματα από αυτό, τόσο ο δάσκαλος όσο και ο εκπαιδευόμενος μπορούν να αντιληφθούν τα πλεονεκτήματα ή / και τα μειονεκτήματα των σύγχρονων μορφών των μαθηματικών (Tzanakis &Arcavi, 2000).

Γ) Στο διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών

Οι εκπαιδευτικοί μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας αποκτούν επίγνωση της δημιουργικής διαδικασίας της διδασκαλίας των μαθηματικών και, επομένως, είναι σε θέση να εμπλουτίσουν το μαθηματικό αλφαβητισμό τους και να εκτιμήσουν καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας.

Δ) Στη συναισθηματική προδιάθεση απέναντι στα Μαθηματικά

Λέγεται ότι η Ιστορία μπορεί να διδάξει στους μαθητές να μην αποθαρρύνονται από την αποτυχία, τα λάθη, τις αβεβαιότητες ή τις παρανοήσεις (Tzanakis &Arcavi, 2000).

Ε) Στην αποδοχή των Μαθηματικών ως μία πολιτισμική και ανθρώπινη προσπάθεια.

Μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας , μαθητές και εκπαιδευτικοί μαθαίνουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών που εμφανίστηκαν στα πλαίσια διαφόρων πολιτισμών (Tzanakis &Arcavi, 2000).

1.4. Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους («Πώς»)

Το «πώς» επιτυγχάνεται η αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι ο δεύτερος άξονας στον οποίο επικεντρώνονται αρκετές

έρευνες. Δίνονται προτάσεις, ιδέες, διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις που υποστηρίζουν στην εκπαιδευτική πράξη την ένταξη της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Σύμφωνα με τον Bidwell (1993), διερευνώνται τρεις τρόποι χρήσης της ιστορίας μέσα στην μαθηματική τάξη. Ο πρώτος είναι η προβολή φωτογραφιών σπουδαίων μαθηματικών ή πίνακες με ημερομηνίες γέννησης (το οποίο αναφέρεται και από τον Fried, 2001, ως παθητική στρατηγική). Ωστόσο, κατά τον Bidwell τα παραπάνω μπορούν να προσελκύσουν την προσοχή των μαθητών και να προκαλέσουν το ενδιαφέρον τους, αφού αποτελούν το πρώτο βήμα που οδηγεί στη συνέχιση της διαδικασίας εκτός του αναλυτικού προγράμματος. Δεύτερος τρόπος είναι η παροχή εμβόλιμων ιστορικών πληροφοριών κατά τη διάρκεια παρουσίασης του μαθήματος, τρόπος που προσθέτει ένα "καρύκευμα" στη συζήτηση μέσα στην τάξη και δημιουργεί την αίσθηση της διαχρονικής εξέλιξης αλλά της σύνδεσης ανθρώπινων δραστηριοτήτων με τα μαθηματικά. Ο τρίτος τρόπος είναι να γίνουν οι ακριβείς ιστορικές εξελίξεις μέρος της διδακτικής πορείας πχ. εισαγωγή της έννοιας του μιγαδικού αριθμού με τη χρήση του συστήματος του Girolamo Cardano (1501-1576): να βρεθούν οι x , y ώστε x+y=10 και xy=40.

Όπως αναφέρεται από την Μιόγλου (2017), η Furinghetti το 2000 πρότεινε ένα μοντέλο για τα κύρια επίπεδα στη διαδικασία ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Θεωρεί τα επίπεδα αυτά, ως εξής : α) γνώση των πηγών, β) επιλογή θεμάτων κατάλληλων για την τάξη, γ) ανάλυση των αναγκών της τάξης, δ) σχεδιασμός της δραστηριότητας στην τάξη, με βάση την καταλληλότητα των μέσων, τους στόχους, και το πλαίσιο της δραστηριότητας, ε) πραγματοποίηση του project, και στ) αξιολόγηση της δραστηριότητας.

Κατά τον Fried (2001) υπάρχουν δύο βασικές στρατηγικές διδακτικών προσεγγίσεων. Η πρώτη είναι η **στρατηγική της «προσθήκης»** (**strategy of addition**: μέθοδος που «προσθέτει» στη διαδικασία της μάθησης, εμπλουτίζει τη διδασκαλία) αφού δεν κάνει κάτι παραπάνω στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών από το να το μεγεθύνει. Περιλαμβάνει παρουσίαση ιστορικών ανεκδότων, βιογραφιών ή μεμονωμένων προβλημάτων Πρόκειται ωστόσο για μία παθητική στρατηγική πχ. όταν οι εκπαιδευτικοί δείχνουν στους μαθητές τους φωτογραφίες σπουδαίων μαθηματικών του παρελθόντος. Από την άλλη, τα ιστορικά προβλήματα μπορούν να αποτελέσουν το επίκεντρο ενός μαθήματος αλλά είναι πιο αποτελεσματικά όταν δίνονται ως εργασία μέσα στην τάξη ή και εκτός αυτής. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να παρακινήσουν , να

απεικονίσουν ή να διαφωτίσουν τα ίδια τα προς μελέτη θέματα. Η δεύτερη στρατηγική καλείται **στρατηγική της «πλαισίωσης»(strategy of accommodation:** είναι η μέθοδος κατά την οποία το Αναλυτικό πρόγραμμα εδράζεται σε ιστορικές συνθήκες και πλαισιώνεται από ιστορικά μοντέλα). Χρησιμοποιεί, δηλαδή, την ιστορική ανάπτυξη μιας έννοιας σαν οδηγό στη διδασκαλία. Κατά την εμπειρική έρευνα που ακολουθεί στο 3ο κεφάλαιο θα αναφέρονται οι προαναφερθείσες στρατηγικές με την αγγλική ορολογία με την οποία επιτυγχάνεται η πληρέστερη απόδοση του νοήματός τους.

Ο Junkvist (2009) προτείνει τρεις τρόπους ένταξης ιστορικών στοιχείων, τρεις διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας:

1. **Προσεγγίσεις διαφωτισμού (Illumination approaches)**: Η διδασκαλία και η εκμάθηση των μαθηματικών, στην τάξη ή και τα βιβλία που χρησιμοποιούνται, συμπληρώνονται από ιστορικές πληροφορίες που διαφέρουν σε μέγεθος και έμφαση.
2. **Προσέγγιση ενοτήτων (Modules approaches):** Διδακτικές μονάδες αφιερωμένες στην ιστορία και συχνά βασίζονται στη λεπτομερή μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων. Η ιστορία εμφανίζεται σ' αυτού του είδους την προσέγγιση άμεσα.
3. **Ιστορικές προσεγγίσεις (Historical approaches):**Άμεσα εμπνευσμένες ή βασισμένες στην Ιστορία των μαθηματικών. Δεν ασχολούνται με τη μελέτη της Ιστορίας άμεσα, αλλά μάλλον έμμεσα. Η ιστορική ανάπτυξη δεν συζητείται ανοικτά , θέτει όμως τη σειρά και τον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών θεμάτων (Tzanakis & Thomaidis, 2012).

Μεταξύ των διαφορετικών δραστηριοτήτων μέσω των οποίων μπορούν να ενσωματωθούν ιστορικές πτυχές στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι και η μελέτη πρωτογενών πηγών κάτι βέβαια που είναι απαιτητικό και χρονοβόρο. Για τη χρήση μιας πρωτογενούς ιστορικής πηγής απαιτείται αρχικά μια λεπτομερέστερη και βαθύτερη κατανόηση του χρόνου που γράφτηκε και του συνόλου των ιδεών που την πλαισίωναν. Αποτελεί φιλόδοξο εγχείρημα αλλά επιβραβεύεται με την επίτευξη βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (Jahnke et al. , 2002). Πρωτογενές υλικό όπως αποσπάσματα από αυθεντικά μαθηματικά κείμενα παρέχουν μία τεράστια ποσότητα από σχετικά και ενδιαφέροντα προβλήματα.

Επίσης, ανακατασκευές εργαλείων , αφηγήσεις και ερμηνείες (δευτερογενές υλικό) μπορούν να παρουσιαστούν και να εισαχθούν κατά τη διδασκαλία στην τάξη των μαθηματικών όπως για παράδειγμα τα εργαλεία σχεδίασης κωνικών τομών (Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis & Arcavi, 2000).

1.5. Αντιρρήσεις ως προς την ενσωμάτωση της Ιστορίας των μαθηματικών

Υπάρχουν βέβαια και οι αντιρρήσεις ως προς την συνύπαρξη της Ιστορίας των Μαθηματικών με την διδασκαλία αυτών. Σύμφωνα με τους Tzanaki, Arcavi et al (2002) οι αντιρρήσεις που προκύπτουν κατά την άσκηση κριτικής εντοπίζονται σε δύο κυρίως επίπεδα. Το φιλοσοφικό και το πρακτικό επίπεδο.

Ως προς το φιλοσοφικό επίπεδο:

- Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά. Αν πρέπει να διδαχθεί η ιστορία τους πρέπει πρώτα να διδαχθούν τα θέματα των μαθηματικών και έπειτα η ιστορική τους εξέλιξη.
- Η ιστορία μπορεί εύκολα να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές αντί να τους διαφωτίσει. (Fauvel, 1991).
- Η ελλιπής αίσθηση της ιστορίας από τους μαθητές καθιστά αδύνατη την ιστορική πλαισιοποίηση των μαθηματικών (Fauvel, 1991).
- Η έλλειψη ενδιαφέροντος των μαθητών για το μάθημα της ιστορίας μετατρέπεται σε έλλειψη ενδιαφέροντος για την ιστορία των μαθηματικών και κατά συνέπεια οδηγεί σε αρνητικά αποτελέσματα.
- Η πρόοδος στα μαθηματικά μετατρέπει δύσκολα προβλήματα σε προβλήματα ρουτίνας άρα δεν υπάρχει λόγος να επιστρέφουμε στο παρελθόν
- Η ιστορία μπορεί να αναπαράγει πολιτισμικό σωβινισμό.

Ενστάσεις όμως αναφέρονται και σε πρακτικό επίπεδο, όπως:

- η διδασκαλία με ενσωμάτωση της Ιστορίας απαιτεί χρόνο
- παρατηρείται έλλειψη πηγών στη σχολική τάξη
- έλλειψη ειδικευμένης γνώσης στην πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που οδηγεί σε απουσία αυτοπεποίθησης
- δεν υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος αξιολόγησης, και συνήθως ότι δεν αξιολογείται δεν προσελκύει το ενδιαφέρον (Fauvel, 1991)

Από τα παραπάνω, στις ενστάσεις που αναφέρονται σε πρακτικό επίπεδο, κυρίαρχη επίδραση ασκεί ο ρόλος των εκπαιδευτικών ως προς την ειδικευμένη γνώση που απαιτείται για την ένταξη ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία τους. Η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί μία χρήσιμη πηγή για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης

και τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η κατανόηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων μέσα στη σχολική τάξη. Ακολουθώντας αυτό το πνεύμα, τις τελευταίες δεκαετίες πολλοί μαθηματικοί προσφεύγουν στην ιστορία των μαθηματικών. Βέβαια, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διαθέτουν ένα σαφές και πλούσιο θεωρητικό υπόβαθρο ώστε να επιτευχθεί το παραπάνω έργο (Radford, 2000a). Μέσω των προγραμμάτων σπουδών που ακολουθούν έχουν τη δυνατότητα να καλλιεργούν την ανώτερη μαθηματική σκέψη ώστε να προσαρμόζουν και να αναλύουν τη γνώση με σκοπό να γίνεται κατανοητή από τους μαθητές χωρίς όμως να διαθέτουν ένα στέρεο γνωστικό υπόβαθρο που σχετίζεται με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών που αναλύουν. Σύμφωνα με τους Gulikers και Blom (2001), ως προς την ιστορική εξέλιξη ενός υπό μελέτη θέματος, μία εκτεταμένη περιγραφή ήρθε στα τέλη του 19ου με αρχές 20ου αιώνα από τη βιολογία, με τον βιογενετικό νόμο του Haeckel « η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση» (Schubring in Gulikers & Blom, 2001), που αναφέρει ότι σε σύντομο χρονικό διάστημα η ανάπτυξη του εμβρύου ενός ζώου ανακεφαλαιώνει την ιστορική εξέλιξη των προγόνων του. Στη σφαίρα της παιδαγωγικής ο νόμος υποδηλώνει ότι η γνώση ακολουθεί την ίδια πορεία. Η ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης ενός ατόμου ακολουθεί τις ιστορικές εξελίξεις των μαθηματικών ιδεών. Το έργο της εκπαίδευσης επικεντρώνεται στο να κάνει το μαθητή να βιώσει ό,τι πέρασαν οι προηγούμενες γενιές και να περάσει γρήγορα σε βασικά στάδια χωρίς να παραλείψει κανένα. Είναι ο πιο φυσικός τρόπος να μάθουν οι μαθητές τα μαθηματικά.

Η έλλειψη όμως των απαραίτητων γνώσεων σε συνδυασμό με την απουσία της κατάλληλης επιμόρφωσης, οδηγεί σε χαμηλά επίπεδα αυτοπεποίθησης τους εκπαιδευτικούς που είναι αναγκαία ωστόσο για την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al, 2002). Στο παραπάνω πλαίσιο, ένας εκπαιδευτικός, με το κατάλληλο γνωστικό υπόβαθρο στην Ιστορία της Επιστήμης του, γίνεται φορέας μετάδοσης του αντικειμένου με τρόπο ώστε να έλκει το ενδιαφέρον των μαθητών δημιουργώντας κίνητρα για δημιουργική απασχόληση. Όταν το υπόβαθρο αυτό απουσιάζει προκαλεί τα ακριβώς αντίθετα αποτελέσματα.

1.6. Απόψεις μαθητών και εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία των μαθηματικών με τη χρήση ιστορικών πηγών

Πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών χρησιμοποιώντας την ίδια την ιστορία τους και τη διαχρονική τους εξέλιξη, είτε σε

εκπαιδευτικούς είτε σε μαθητές.

Από τους L.K. Kapofu, W. Kapofu (2020) παρουσιάζεται μία έρευνα σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της 11ης τάξης (grade11) που αντιστοιχεί στις πρώτες τάξεις του Λυκείου στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Έπειτα από διδακτική παρέμβαση κατά την οποία ενσωματώθηκαν ιστορικά στοιχεία γύρω από την απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος , αναλύθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών. Από την ανάλυση αυτή προέκυψε ότι, μετά την ένταξη της Ιστορίας στα μαθήματά τους, μολονότι εξακολουθούσαν να λαμβάνουν υπόψη τους τα μαθηματικά ως ένα μάθημα που απαιτούσε χρόνο και συγκέντρωση, φαινόταν να τα βρίσκουν τώρα περισσότερο φωτεινά. Οι συμμετέχοντες θεωρούσαν τώρα τη σκληρή δουλειά ως επένδυση και την απολάμβαναν χωρίς αρνητικότητα. Διά μέσου ιστορικών αφηγήσεων, οι μαθητές έβλεπαν τους σπουδαίους μαθηματικούς που μελετούσαν ως πρότυπα. Αυτή η πτυχή τους ενθάρρυνε να εργαστούν σκληρά ενόψει της δυσκολίας. Δεν είχαν πλέον αρνητική εικόνα για τις αποδείξεις, αλλά απολάμβαναν το να κάνουν τις δικές τους ανακαλύψεις αποδεικνύοντας το Θεώρημα του Πυθαγόρα.

Σε ανάλογη έρευνα, στην Γ' τάξη ενός Γυμνασίου του Περιστερίου έγινε σύμπραξη φιλολόγου και μαθηματικού για την ιστορική προσέγγιση της ανάπτυξης του πολιτισμού και των μαθηματικών στη Σάμο του 6ου-5ου αι. π.Χ. Στο Πυθαγόρειο θεώρημα και στην απόδειξή του αφιερώθηκε ένα μεγάλο μέρος της δραστηριότητας. Η πλειοψηφία των μαθητών παρουσίασε μία αξιόλογη ερευνητική δραστηριότητα, συνειδητοποίησαν ότι τα διάφορα επιστημονικά πεδία δεν είναι ανεξάρτητα και άσχετα μεταξύ τους αφού η έρευνα έφερε στο προσκήνιο την άμεση αλληλεπίδραση της επιστήμης των μαθηματικών, της φιλοσοφίας, των τεχνών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Τα μαθηματικά αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές ως πολιτισμικό αγαθό, ενδιαφέρθηκαν να μάθουν για τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, αποδέχτηκαν την αναγκαιότητα των αποδείξεων και γενικότερα παρατηρήθηκε αλλαγή της στάσης τους απέναντι στο μάθημα (Πάσχος, 2003).

Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Goktepe και Ozdemir (2013) σε 21 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ενός ιδιωτικού σχολείου στην Κωνσταντινούπολη, έγινε διδακτική παρέμβαση που περιλάμβανε αλγορίθμους υπολογισμού τετραγωνικών ριζών με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών . Κατασκευάστηκαν φύλλα εργασίας πάνω στα οποία εργάστηκαν οι μαθητές και ζητήθηκε η άποψή τους γύρω από τέτοιου είδους δραστηριότητες. Χαρακτηριστικά είναι τα αποτελέσματα που συλλέχθηκαν από τη συγκεκριμένη έρευνα αφού το 82% των μαθητών δήλωσαν ευχαριστημένοι από τη

δραστηριότητα και πρόθυμοι να παρακολουθούν μαθηματικά με ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων. Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν για τα οφέλη της δραστηριότητας , οι απαντήσεις τους είχαν ως εξής: ενίσχυση του θέματος, ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων, εκμάθηση νέων γνώσεων, απόκτηση πληροφοριών από την ιστορία, ικανότητα σύγκρισης.
Έρευνα, στην οποία εξετάστηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και όχι μαθητών ως προς την ένταξη της Ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών, έδειξε ότι στην πλειοψηφία τους συμφωνούν στο ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και η ετυμολογική ανάλυση βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες. Δηλώνουν επιπλέον πως χρησιμοποιούν την ιστορία των μαθηματικών κυρίως μέσω των ιστορικών σημειωμάτων του βιβλίου. Γενικότερα οι εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι χρήσιμη στην εκπαιδευτική διαδικασία γιατί κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών . Κοινή παραδοχή αποτέλεσε το ότι τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών είναι χρήσιμα αφού δίνουν κίνητρα στους μαθητές για την ενασχόληση τους με τις μαθηματικές έννοιες (Τζεβελέκης, 2019).

Έρευνα που έγινε σε 39 εκπαιδευτικούς που δίδασκαν σε ιδιωτικά και δημόσια σχολεία της Αυστραλίας (Fraser & Koop, 1978) ως προς τις απόψεις τους γύρω από την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων με τη μορφή παιχνιδιού στην τάξη των μαθηματικών, έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί θεώρησαν σε γενικές γραμμές θετικό τον συγκεκριμένο τρόπο διδασκαλίας. Εξέφρασαν βέβαια την ανησυχία τους ως προς τον χρόνο που πρέπει να αφιερωθεί αλλά και ως προς τις δεξιότητες που πρέπει να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός ώστε να ανταπεξέλθει στο συγκεκριμένο εγχείρημα τονίζοντας ότι πρόκειται για δεξιότητες τις οποίες δυστυχώς δεν διαθέτει ένας μέσος μαθηματικός.

Η έρευνα που ακολουθεί στην παρούσα εργασία και αναλύεται εκτενέστερα στο 3ο Κεφάλαιο, σχεδιάστηκε αξιοποιώντας τις πτυχές που αναπτύχθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα, οι διδακτικές παρεμβάσεις έγιναν με οδηγό τους τρόπους ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων κατά τον Fried (2001) με τη στρατηγική της «προσθήκης» αλλά κυρίως της «πλαισίωσης», κατά τον Bidwell (1993) με την προβολή και παρουσίαση ιστορικών στοιχείων και εργαλείων αλλά και με τη σειρά που προτείνει η Furinghetti (2000), εφόσον προσαρμόστηκαν στις απαιτήσεις του σημερινού Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών της Β’ Λυκείου.

Αναφορικά με την έρευνα με στόχο την ανάλυση των στάσεων των μαθητών της Β’ Λυκείου απέναντι στις διδακτικές παρεμβάσεις με χρήση της Ιστορίας, εξετάστηκε η θετική ή η αρνητική εικόνα που σχημάτισαν οι μαθητές και η ενθάρρυνση που επετεύχθη ως προς την αποδεικτική διαδικασία όπως συνέβη με την αντίστοιχη έρευνα των Kapofu

& Kapofu (2020). Επιπλέον, έγινε μία προσπάθεια μέτρησης του ενδιαφέροντος που τους προκάλεσε ως προς τη σύνδεση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τις τέχνες, τον πολιτισμό και τα προβλήματα της καθημερινής ζωής κάτι που εντοπίστηκε και στην έρευνα του Πάσχου (2003).

Ένα μέρος της έρευνας αποτέλεσαν και οι αντιρρήσεις που αναλύθηκαν παραπάνω ως προς την ένταξη της Ιστορίας στη Γεωμετρία, όπως η σύγχυση που μπορεί να προκληθεί στους μαθητές, η σύνδεση έλλειψης ενδιαφέροντος προς το μάθημα της Ιστορίας με την αντίστοιχη αποστροφή προς την Ιστορία της Γεωμετρίας αλλά και ο βαθμός αναπαραγωγής πολιτισμικού σοβινισμού έπειτα από τέτοιου είδους διδασκαλίες.

2º ΚΕΦΑΛΑΙΟ - Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η γεωμετρία έχει δυο μεγάλους θησαυρούς: ο ένας είναι το θεώρημα του Πυθαγόρα και ο άλλος η διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Το πρώτο μπορεί να συγκριθεί με μια μάζα χρυσού, το δεύτερο μπορούμε να το αποκαλέσουμε ένα πολύτιμο κόσμημα.

Γιοχάνες Κέπλερ (1571-1630 μ.Χ.))

Η Γεωμετρία αλληλοεπιδρώντας με το κοινωνικοπολιτισμικό γίγνεσθαι κάθε εποχής αποτελεί τον μοναδικό κλάδο ανθρώπινης δημιουργίας που περνά από μεγάλες αλλαγές τόσο στο περιεχόμενό της όσο και σε μεθόδους. Κι αυτό γιατί διαπερνά τρεις πολιτισμικές αιχμές της ανθρωπότητας , από την Αρχαία Ελλάδα έως την Αναγέννηση και από την Αναγέννηση ως τη Βιομηχανική επανάσταση και από τη Βιομηχανική επανάσταση έως σήμερα (Στράντζαλος, 2010). Βέβαια η Γεωμετρία ως εμπειρική μέθοδος μέτρησης της Γης κάνει την εμφάνισή της αιώνες πριν τους αρχαίους Έλληνες.

Συμφώνως πρός τάς μαρτυρίας, τάς ὁποίας μᾶς παρέχει ὁ Ἡρόδοτος, ὁ Εὔδημος, ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς και ἄλλοι παλαιοί συγγραφεῖς, ἡ γεωμετρία εἶναι δημιούργημα τῶν Αἰγυπτίων. Κατά τους συγγραφεῖς τούτους οἱ Αἰγύπτιοι ἤχθησαν εἰς την ἀνακάλυψίν της, ἀπό την ἀνάγκην μετρήσεως τῆς παρά τάς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ Νείλου γῆς, ἡ ὁποία μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ ποταμοῦ και ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων ἔπρεπε πάντοτε να μετρῆται ἐκ νέου διά λόγους κτηματολογικούς και φορολογικούς. Το παλαιότερον τεκμήριον, μέχρι σήμερον τοὐλάχιστον, ἐξοῦ βεβαιούμεθα, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐδημιούργησαν την γεωμετρίαν, εἶναι ὁ πρό ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθείς πάπυρος τοῦ Rhind (Βρεττανικόν Μουσεῖον), ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῆ περί τό 1700 π.Χ. περίπου, ὑπό τοῦ Ahmes. Ἐξόλων ὅμως τῶν ὑπαρχόντων τεκμηρίων συνάγεται, ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Αἰγυπτίων ἦτο καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς, δηλ. τέχνη προκύψασα ἐκ τῆς πείρας κατά τάς μετρήσεις τῆς γῆς. Οὐδαμοῦ εἰς την αἰγυπτιακήν γεωμετρίαν ἀναφαίνεται ἤ ἔτσω ὑποδηλοῦται ἀπόδειξις γεωμετρικῆς τινος προτάσεως.

[…]

Ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης προς ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, εἶναι ἀποκλειστικόν ἔργον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Αἱ ἑλληνικαί ἐν προκειμένῳ εἰδήσεις προερχόμεναι ἐκ συγγραφέων μεταγενεστέρων τοῦ Ἡροδότου, ἀποδίδουν την θεμελίωσιν τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης εἰς τον συγκαταλεγόμενον μεταξύ τῶν ἑπτά σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος Θαλῆν τον Μιλήσιον.

(Σταμάτης, 1975, Εισαγωγή)

Η Γεωμετρία, επομένως, πριν τους Αρχαίους Έλληνες αποτελούσε μία συλλογή κανόνων που είχαν τις ρίζες τους στην εμπειρία και στην παρατήρηση. Με τους αρχαίους Έλληνες συγκροτήθηκε ως επιστήμη και τεκμηριώθηκε μέσω των αποδεικτικών διαδικασιών.

Η τεκμηρίωση αυτή τίθεται ως στόχος να κατανοηθεί από τον μαθητή. Να βιώσει δηλαδή την εμπειρία του χώρου γύρω του και της γεωμετρικής κατασκευής. Από τα μαθηματικά αντικείμενα που διδάσκονται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση επιλέγεται στη συγκεκριμένη έρευνα η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως έναν κλάδος «πολυπαθής» μέσα στην ιστορία της εκπαίδευσης. Η Γεωμετρία γενικότερα υπάρχει με τη μορφή ενοτήτων και διδάσκεται ως ένα μέρος των μαθηματικών στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Περιλαμβάνει βασικά στοιχεία της Ευκλείδειας αλλά οι αποδείξεις και η θεμελίωση αυτής γίνεται με καθαρά διαισθητικό τρόπο. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία όμως, σαν αυτόνομο μάθημα, διδάσκεται στα ελληνικά σχολεία κατά τις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Αποτελεί το πέρασμα των μαθητών από τη διαισθητική αντίληψη των σχημάτων σε μία καθαρά αποδεικτική και τεκμηριωμένη μορφή γεωμετρίας.

Πιο συγκεκριμένα, ενώ στο Γυμνάσιο διδάσκεται κυρίως πρακτική Γεωμετρία δηλαδή παρατήρηση των σχημάτων και μετρήσεις, στο Λύκειο οι μαθητές/τριες διδάσκονται την Θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία βασισμένη σε λογικές αποδείξεις και αξιώματα, γεγονός που κάνει πιο δύσκολη τη μετάβαση και την πλαισιοποίηση όσων έχουν διδαχθεί έως τώρα στην καθαρά τεκμηριωμένη μορφή της Γεωμετρίας.

2.1. Η υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την έλευση των «μοντέρνων» μαθηματικών

2.1.1. *Γιατί η Γεωμετρία του Ευκλείδη έχασε έδαφος ως επιστήμη;*

Σύμφωνα με τους Davis και Hersh (1980, σ.300-301) στο βιβλίο τους *Η Μαθηματική Εμπειρία*, κατά τον τελευταίο ενάμιση αιώνα υπήρξε μία σταθερή υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Κάποιες εξηγήσεις που θα μπορούσαν να δοθούν και να δικαιολογήσουν τη φθορά αυτή είναι α) η επίδραση που είχε το βιβλίο του Decartes *La Geometrie*, όπου η Γεωμετρία αναγόταν σε άλγεβρα, β) η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, γ) οι περιορισμοί των δύο ή τριών φυσικών διαστάσεων , δ) η κατάρρευση στα μέσα του 19^{ου} αιώνα της άποψης ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είχε μία a priori αλήθεια για το σύμπαν, ε) η επίδραση στα τέλη του 19^{ου} αιώνα του

προγράμματος Felix Klein για να ενοποιηθούν οι γεωμετρίες και στ) η έλλειψη πληρότητας που χαρακτήριζε τη λογική δομή της κλασικής γεωμετρίας του Ευκλείδη η οποία αποκαταστάθηκε από τον Hilbert και άλλους με την εισαγωγή κατάλληλων αξιωμάτων που καθιστούν περιττή την προσφυγή στην εποπτεία των σχημάτων κατά τις αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων.

Ως αποτέλεσμα όλων των παραπάνω ήταν η μεταρρύθμιση της μαθηματικής παιδείας κατά τα μέσα του 20ου αιώνα να καταργήσει στις περισσότερες χώρες τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αυτόνομο μάθημα γεγονός που έμεινε αμετάβλητο ακόμη και μετά την κατάρρευση της μεταρρύθμισης αυτής.

Στον αντίποδα του φαινομένου παραγκωνισμού της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σύμφωνα με τον Rene Thom, στο άρθρο του «Μοντέρνα Μαθηματικά: Ένα Εκπαιδευτικό και Φιλοσοφικό Λάθος;» (1971, σ. 696) αναφέρεται:

> *«…μόνο εκείνα τα θέματα που έχουν μια ποιότητα «παιχνιδιού», έχουν εκπαιδευτική αξία, και απ' όλα αυτά τα παιχνίδια, η Ευκλείδεια Γεωμετρία με τις συνεχείς αναφορές σε θεμελιώδεις, διαισθητικά αντιληπτικές αρχές, είναι το λιγότερο ανωφελές και το πληθωρικότερο σε σημασία».*

Η γεωμετρία αποτελεί τον φυσικό και πιθανότατα αναντικατάστατο μεσάζοντα ανάμεσα στη καθημερινή γλώσσα και τον μαθηματικό φορμαλισμό και η εκπαιδευτική διαδικασία είναι αδύνατο να παραλείψει από αυτήν το στάδιο της γεωμετρικής σκέψης , καθώς είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με την εξέλιξη της λογικής δραστηριότητας του ατόμου (Παπαδοπούλου, 2016).

2.1.2. Λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος

Ποιες είναι όμως οι κύριες αιτίες υποβάθμισης του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που παρατηρούνται τα τελευταία χρόνια στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα; Γιατί οι μαθητές/τριες θεωρούν εξαιρετικά δύσκολο αλλά και βαρετό κατά την πλειοψηφία τους το μάθημα της Γεωμετρίας; Γιατί οι εκπαιδευτικοί αποφεύγουν να αναλάβουν το συγκεκριμένο μάθημα στις τάξεις της Α' και της Β' Λυκείου; Γιατί παρόλη την προσπάθεια αναβάθμισης του μαθήματος μέσα από τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) δεν επιτυγχάνεται κάτι τέτοιο;

Σύμφωνα με τους Γρίδο & Αυγερινό (2019), τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας παρατηρείται μία πολυδιάστατη υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας

Γεωμετρίας, η οποία οφείλεται πρωτίστως στο ότι δεν εξετάζεται στις Πανελλήνιες Εξετάσεις αλλά και σε κακές διδακτικές πρακτικές, δύο εκ των οποίων είναι α) ο καθαρά θεωρητικός της χαρακτήρας που παραγκωνίζει το ρόλο των γεωμετρικών κατασκευών μειώνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την ποιότητα του μαθήματος και εγκλωβίζοντας τη σκέψη των μαθητών και β) η παρουσίαση του μαθήματος ως ξεχωριστού και αυτόνομου κλάδου αποφεύγοντας τις συνδέσεις με άλλους κλάδους των μαθηματικών.

Η θέση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο σχολικό πρόγραμμα έχει κλονιστεί. Έρευνες έχουν δείξει ότι η μεγάλη πλειοψηφία των σημερινών μαθητών που αρχίζουν να διδάσκονται την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε ηλικία 15–16 ετών, δεν διαθέτει τα γνωστικά εφόδια που απαιτούνται για την κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και της αποδεικτικής διαδικασίας (Θωμαΐδης, 2014). Η αναζήτηση χαρακτηριστικών των σχημάτων και η διατύπωση των ορισμών προϋποθέτουν αναλυτική σκέψη και όχι απομνημόνευση. Επομένως, για να γίνει κατανοητή η έννοια της απόδειξης χρειάζονται ριζικές αλλαγές στον τρόπο διδασκαλίας της Γεωμετρίας (Θωμαΐδης, 1996). Η μη επάρκεια διδακτικών προσεγγίσεων χρήσιμων για τη βαθύτερη κατανόηση αποδείξεων θεωρημάτων και προτάσεων αλλά και γεωμετρικών κατασκευών οδηγούν στην υποβάθμιση του μαθήματος. Σε μια προσπάθεια να συγκεντρωθούν οι παραπάνω λόγοι που οδηγούν στην παραγκώνιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δίνονται αναλυτικότερα τα παρακάτω:

Έλλειψη σταθερού υπόβαθρου διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας λόγω απουσίας υποχρεωτικών μαθημάτων στα προγράμματα σπουδών τριτοβάθμιας εκπαίδευσης

Σε ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό εκπαιδευτικών παρατηρείται έλλειψη παιδαγωγικού υπόβαθρου για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και της οργάνωσης των διδακτικών τους προσεγγίσεων έχοντας ως στόχο την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και της αποδεικτικής διαδικασίας που αναδεικνύεται μέσα από τη Γεωμετρία αλλά και την αξία και χρησιμότητά της τόσο στα πλαίσια της ίδιας της Γεωμετρίας όσο και στους υπόλοιπους κλάδους της ίδιας της μαθηματικής επιστήμης. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν διδάσκεται στα Ελληνικά Πανεπιστήμια ως αυτόνομο μάθημα αλλά σε συνδυασμό πάντα με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και μάλιστα ως μάθημα επιλογής, γεγονός που δρα αρνητικά στην ανάδειξη της σημασίας του και στην αναβάθμισή του.

Από τα προγράμματα Σπουδών συγκεκριμένων Πανεπιστημίων διαπιστώνουμε ότι:

- Στο Μαθηματικό τμήμα των Αθηνών υπάρχει στην Ομάδα Φιλοσοφίας και Ιστορίας των Μαθηματικών στον τομέα της Διδακτικής το μάθημα της θεμελίωσης της Γεωμετρίας (5^{ο} αίτημα, Η Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου ως γεωμετρία μετασχηματισμών, το αξιωματικό σύστημα του Hilbert).
- Στο Μαθηματικό του Πανεπιστημίου Αιγαίου (Σάμου) υπάρχουν τα μαθήματα της διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της Ιστορίας Ευκλείδειας και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών τα οποία χαρακτηρίζονται ως Καθ' επιλογήν Υποχρεωτικά Μαθήματα (οι φοιτητές είναι υποχρεωμένοι να επιλέξουν 10 από αυτά που υπάρχουν).
- Στο Μαθηματικό τμήμα του Αριστοτελείου Παν/μίου Θεσσαλονίκης ως μάθημα υπάρχει η Αναλυτική και η Διαφορική Γεωμετρία.
- Στο Μαθηματικό Ιωαννίνων υπάρχουν η Αναλυτική, η Διαφορική Γεωμετρία και το μάθημα Ευκλείδεια και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες με βασικό στόχο να εξηγήσει πώς οι προσπάθειες για την απόδειξη του περίφημου πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (αιτήματος παραλληλίας) οδήγησαν στην επινόηση των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.
- Στο Μαθηματικό Κρήτης εκτός της Αναλυτικής και Διαφορικής Γεωμετρίας υπάρχει το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε συνδυασμό με τη διδακτική της ως μάθημα επιλογής.
- Ομοίως, στο Μαθηματικό Πατρών υπάρχει το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της διδασκαλίας της ως μάθημα επιλογής.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία συλλέχθηκαν από τους οδηγούς σπουδών των επιμέρους σχολών. Παρατηρείται ότι ως υποχρεωτικό μάθημα η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν εμφανίζεται σε καμία σχολή. Επομένως μένει στον κάθε φοιτητή/τρια και μελλοντικό/ή εκπαιδευτικό να αποφασίσει αν επιθυμεί να ασχοληθεί με το μάθημα της Γεωμετρίας και τη διδασκαλία της. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι φοιτητές/τριες σήμερα προέρχονται από το παρόν εκπαιδευτικό σύστημα στο οποίο η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει παραγκωνιστεί. Ξεκινάνε, επομένως, τις σπουδές τους στη Μαθηματική Επιστήμη με ήδη διαμορφωμένες τις αντιλήψεις και τις στάσεις τους απέναντι στο συγκεκριμένο μάθημα.

Μη εξεταζόμενο μάθημα τόσο σε πανελλαδικό επίπεδο για εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση όσο και στις προαγωγικές εξετάσεις της Β' Λυκείου

Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν εξετάζεται πανελλαδικώς για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και σύμφωνα με τις συνθήκες εκπαίδευσης που έχουν διαμορφωθεί, οτιδήποτε δεν εξετάζεται δεν προκαλεί και το ενδιαφέρον. Επιπλέον, η Γεωμετρία, αν και διδάσκεται στην τάξη της Β' Λυκείου, δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα στις προαγωγικές εξετάσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μετατραπεί σε μάθημα μειωμένης βαρύτητας δημιουργώντας την αίσθηση στους μαθητές/τριες ότι δεν αποτελεί χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση και κατανόηση των υπόλοιπων μαθηματικών αντικειμένων.

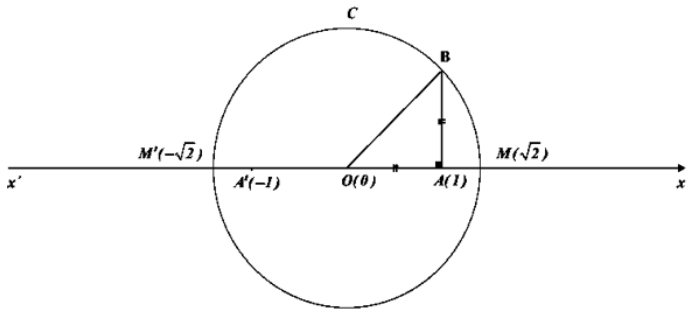
Έλλειψη σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με άλλα μαθηματικά αντικείμενα

Στα σχολικά εγχειρίδια της Άλγεβρας Α' και Β' Λυκείου και της Ανάλυσης της Γ' Λυκείου ελάχιστες είναι οι ασκήσεις και οι περιπτώσεις στις οποίες κρίνεται αναγκαία η χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ενδεικτικά αναφέρονται περιπτώσεις ασκήσεων που έχουν αντληθεί από τα παραπάνω βιβλία, όπου για να λυθούν απαιτείται γνώση Γεωμετρικών εννοιών.

- Στο βιβλίο *Άλγεβρα Α' Λυκείου* (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 1998)

1) Γίνεται η απόδειξη της πρότασης : « ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός» χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο και στο τέλος δίνεται η γεωμετρική κατασκευή του χωρίς όμως να γίνεται αναφορά σε γεωμετρικές έννοιες και θεωρήματα στα οποία στηρίζεται (σχ. 2.1).

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ **δεν είναι ανάγωγο** (άτοπο).



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ = $\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

Σχήμα 2.1: Άλγεβρα Α' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 1998)

2) Ακολουθούν κάποιες ασκήσεις του ίδιου σχολικού εγχειριδίου που αναφέρονται σε γεωμετρικές έννοιες στις οποίες για να ανταποκριθεί ο μαθητής αρκούν οι γνώσεις των εμβαδών που έχει από το Γυμνάσιο και όχι η θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία (σχ. 2.2).

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

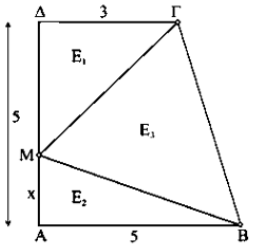
ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

(στην ενότητα της διάταξης πραγματικών αριθμών)

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΑΔ ώστε για τα εμβαδά

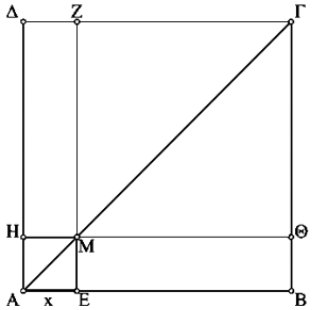
$E_1 = (M\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma)$, $E_2 = (M\overset{\Delta}{A}B)$ και $E_3 = (M\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ **ii)** $E_1 = E_2$.



(στην ενότητα των εξισώσεων α' βαθμού)

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.

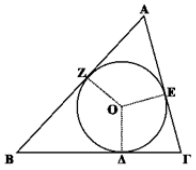


(στην ενότητα των ανισώσεων)

Σχήμα 2.2: Άλγεβρα Α' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 1998)

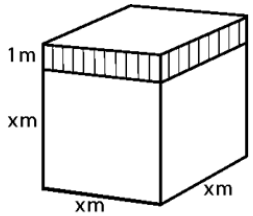
- Στο βιβλίο *Άλγεβρα Β' Λυκείου* (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α., 2012), σε ασκήσεις στην ενότητα γραμμικών συστημάτων και στην ενότητα πολυωνυμικών εξισώσεων απαιτούνται γνώσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας (σχ.2.3).

10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών στα σημεία Δ, Ε και Ζ. Να υπολογίσετε τα τμήματα $AZ = x$, $B\Delta = y$ και $\Gamma E = z$, συναρτήσει των πλευρών α , β και γ.



(στην ενότητα των γραμμικών συστημάτων)

8. Αν ο όγκος του διπλανού σχήματος είναι $36m^3$, να βρείτε το x.



(στην ενότητα των πολυωνυμικών εξισώσεων)

Σχήμα 2.3: Άλγεβρα Β' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 2012)

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο στο κεφάλαιο της τριγωνομετρίας υπάρχουν ασκήσεις γεωμετρικού τύπου οι οποίες όμως λύνονται με τριγωνομετρικές μεθόδους χωρίς να απαιτείται από τον μαθητή γνώση Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αν και σε ιστορικά σημειώματα υπάρχουν αναφορές τις οποίες ο εκάστοτε εκπαιδευτικός θα είχε τη δυνατότητα να αξιοποιήσει στη διδασκαλία του και να κάνει τη σύνδεση του μαθήματος της Γεωμετρίας με αυτό της Τριγωνομετρίας. Σε τέτοιου είδους σημειώματα θα γίνει αναφορά σε παρακάτω ενότητες.

- Στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου, στην Ανάλυση, είναι πιο σπάνια η εμφάνιση ασκήσεων που αναφέρονται σε καθαρά γεωμετρικά προβλήματα (σχ. 2.4). Εξαιρούνται βέβαια οι γεωμετρικές ερμηνείες Θεωρημάτων του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού οι οποίες γίνονται στα πλαίσια χάραξης και διερεύνησης των γραφικών τους παραστάσεων και όχι με τη βοήθεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

5. Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(20 - x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

(στην έννοια της συνάρτησης)

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

(στο ρυθμό μεταβολής)

Σχήμα 2.4: Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 1998)

Όλα τα παραπάνω δηλώνουν την έλλειψη διαύλων επικοινωνίας ανάμεσα σε Ευκλείδεια Γεωμετρία και Άλγεβρα που διδάσκονται ως χωριστοί κλάδοι στην Α΄ και Β΄ Λυκείου (Θωμαΐδης, 2015) με διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης αλλά και αξιολόγησης

αλλά και ανάμεσα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στον Απειροστικό Λογισμό. Επιπλέον, παρατηρείται ότι για να ανταποκριθεί ένας μαθητής στις τελικές εξετάσεις για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, σύμφωνα με τα σχολικά εγχειρίδια, αρκούν οι γνώσεις που έχει από την Πρακτική Γεωμετρία που έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Αποτέλεσμα αυτού είναι να υποβαθμίζεται το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τόσο από τους μαθητές/τριες που δεν το βρίσκουν «χρήσιμο» όσο κι από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς οι οποίοι για να ανταπεξέλθουν στον όγκο της εξεταστέας ύλης παραγκωνίζουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία χωρίς να κάνουν αναφορές στις παραπάνω συνδέσεις.

Ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και σ' αυτή του Λυκείου (η περίπτωση της αποδεικτικής διαδικασίας)

Ένας επιπλέον λόγος υποβάθμισης της Γεωμετρίας είναι η ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (2015) η οργάνωση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά το πρότυπο ανάπτυξης ενός θεωρητικού μαθηματικού συστήματος, οδηγεί σε μια διδασκαλία από "μηδενική βάση" που εκμηδενίζει την αξία των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών.

Το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) με έγγραφο οδηγιών διδασκαλίας που εξέδωσε το 2018 θέτει ως στόχο κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας το πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν έρθει αντιμέτωποι με ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ Λυκείου, αυτή η εμπειρία των μαθητών πρέπει να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης (ΙΕΠ, 2018).

Θεωρώντας ο εκπαιδευτικός ότι δεν υπάρχει κατάλληλο γεωμετρικό υπόβαθρο από την πλευρά των μαθητών, το οποίο θα έπρεπε να έχουν αποκτήσει από τις τάξεις του Γυμνασίου, ξεκινά εκ νέου την μύησή τους στη διαδικασία των αποδείξεων κάτι που οδηγεί σε αδιέξοδο χρόνου και διδακτέας ύλης που πρέπει να καλυφθεί.

Αναφορικά με τις γεωμετρικές αποδείξεις οι μαθητές θεωρούν ότι ο ρόλος τους για τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η απομνημόνευση της απόδειξης, όπως την παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός στη σχολική τάξη ή όπως αυτές δίνονται στο σχολικό βιβλίο. Τρεις είναι οι βασικές προϋποθέσεις (προαπαιτούμενες γνώσεις) ώστε να μυηθούν οι μαθητές στην κατασκευή γεωμετρικών αποδείξεων.

α) η κατανόηση της εκφώνησης

β) η διάκριση δεδομένων και ζητούμενων

γ) η κατασκευή κατάλληλου σχήματος

Οι μαθητές δεν φαίνεται να κατέχουν έστω και διαισθητικά βασικούς νόμους της λογικής και χωρίς αυτούς δεν μπορούν να αποδώσουν καλά στους στόχους που περιλαμβάνουν μαθηματικές αποδείξεις, κάτι που επιβεβαιώνεται από έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές από τους Thompson (1996) και Furingetti & Domingo (1996)όπως αναφέρει ο Μπαραλός (2003).

Τις παραπάνω δεξιότητες κρίνεται αναγκαίο οι μαθητές να τις έχουν κατακτήσει με τη μελέτη της Πρακτικής Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο. Άλλωστε, στο δεύτερο μέρος του βιβλίου της Γ Γυμνασίου , η αποδεικτική διαδικασία παίζει κεντρικό ρόλο. Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία της απόδειξης και να καλύψουν μ' αυτόν τον τρόπο τις τρεις προϋποθέσεις. Σε αντίθετη περίπτωση ο εκπαιδευτικός του Λυκείου αναγκάζεται να ξεκινήσει από το «μηδέν» ώστε να καλύψει τις συγκεκριμένες δεξιότητες, αφαιρώντας χρόνο από την εξοικείωση των μαθητών με τον αποδεικτικό συλλογισμό.

Ο παραγκωνισμός των γεωμετρικών κατασκευών κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Ειδικότερα, η παράλειψη εξοικείωσης των μαθητών με τη διαδικασία των γεωμετρικών κατασκευών αποτελεί έναν ξεχωριστό λόγο υποβάθμισης του μαθήματος . Η παιδαγωγική και διδακτική αξία των γεωμετρικών κατασκευών και της γεωμετρίας γενικότερα, είναι αδιαμφισβήτητη. Χαρακτηριστικό είναι ότι στη μοναδική «διδασκαλία Μαθηματικών» που μεταφέρθηκε σ' εμάς από την αρχαιότητα, μέσα από το έργο του Πλάτωνα «Μένων», είναι η διδασκαλία του Σωκράτη σε έναν δούλο του άρχοντα Μένωνα. Ο Σωκράτης διδάσκει Γεωμετρία και συγκεκριμένα την κατασκευή ενός τετραγώνου με επιφάνεια διπλάσια απ' αυτή των τεσσάρων τετραγωνικών μονάδων, ενός μικρότερου τετραγώνου, μέσα από μία γεωμετρική κατασκευή.

Οι γεωμετρικές κατασκευές:

- Δίνουν σαφείς γεωμετρικές αναπαραστάσεις ακόμη και για έννοιες Μαθηματικών τις οποίες χειριζόμαστε αποκλειστικά με αλγεβρικό τρόπο, πχ. στην ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$.

- Σχετίζονται με διάφορα γεωμετρικά παράδοξα, για πολλά εκ των οποίων δίνουν πειστικές ερμηνείες.
- Εξοικειώνουν τους μαθητές σε μία λογική αλληλουχία βημάτων που ακολουθούν προς την επίτευξη του στόχου.
- Αποτελούν τυπική διαδικασία κατανόησης αδύνατων προβλημάτων, όπως αυτού της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας (Πούλος, 2010).

Σύμφωνα με τις οδηγίες του ΙΕΠ(2018) στις ενότητες που αφορούν στις γεωμετρικές κατασκευές του σχολικού εγχειριδίου της Α' Λυκείου η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Παρόλη όμως τη σημασία της κατανόησης των κατασκευών προτείνεται να αφιερωθεί μόνο μία διδακτική ώρα στο σύνολο των διδακτικών ωρών του μαθήματος, γεγονός που παραγκωνίζει τη διαδικασία της κατασκευής. Επιπλέον, η ενότητα του 6^{ου} Κεφαλαίου (Εγγεγραμμένα σχήματα) του σημερινού σχολικού εγχειριδίου που αναφέρεται στους γεωμετρικούς τόπους και στις γεωμετρικές κατασκευές με τη χρήση αυτών έχει παραλειφθεί από τη διδακτέα ύλη.

Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί ότι σε ασκήσεις και θέματα εξετάσεων τις περισσότερες φορές το γεωμετρικό σχήμα δίνεται έτοιμο στους μαθητές υποβαθμίζοντας πλήρως ένα βασικό προκαταρκτικό στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας που συνδέεται στενά με την κατανόηση του κειμένου και τη σαφή διάκριση δεδομένων και ζητούμενων. Κατά τα παρελθόντα έτη, η Ευκλείδεια Γεωμετρία κατείχε ξεχωριστή θέση στη εκπαίδευση, εξεταζόταν σε πανελλαδικό επίπεδο για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και οι γεωμετρικές κατασκευές αποτελούσαν συχνό θέμα. Ενδεικτικά αναφέρονται θέματα αυτής της μορφής που έχουν αντληθεί από το διαδίκτυο και το Ευρετήριο Θεμάτων Εισαγωγικών Εξετάσεων.

(https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?t=37654)

(Εξετάσεις 1962, για σχολή Ευέλπιδων)

Να κατασκευαστεί κύκλος διερχόμενος από δοθέν σημείο Α που να τέμνει δυο άλλους κύκλους (Κ,R), (Λ,ρ), τον μεν πρώτο ορθογώνια και τον δε δεύτερο κατά διάμετρο.

(Εξετάσεις 1972, για σχολή Ναυτικών δοκίμων)

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζουμε την πλευρά ΑΓ=β , την διχοτόμο ΑΔ της

γωνίας $\hat{A}$ και ότι η διαφορά $\hat{B}$-$\hat{\Gamma}$=90°

(Εξετάσεις 1979, για σχολή Ναυτικών Δοκίμων)

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ επιπέδου (π), των οποίων οι αποστάσεις ΜΑ και ΜΒ από δυο δοθέντα σημεία Α και Β έχουν λόγο ίσον προς $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$. Έστω μ>ν.

Μη επαρκής διδακτικός χρόνος για κάλυψη ολόκληρης της ύλης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Με δεδομένη την αναγκαιότητα κάλυψης βασικών τμημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και τον μεγάλο όγκο αυτών, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν μια πληρέστερη εικόνα του μαθήματος, παρατηρείται ανεπάρκεια διδακτικών ωρών για την επίτευξη αυτού του στόχου. Λόγω έλλειψης επαρκούς χρόνου η γεωμετρία συρρικνώνεται με αποτέλεσμα να πλήττεται τόσο η ίδια η επιστήμη όσο και ο κλάδος όλων των Μαθηματικών αλλά και της Μηχανικής, της Φυσικής , της Ιατρικής, της Αρχιτεκτονικής κ.α. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της στερεομετρίας η οποία αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση γνώσης σε όλες τις παραπάνω επιστήμες. Παρά ταύτα, υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια ως τελευταίο κεφάλαιο και ως εκ τούτου δεν επαρκεί ο χρόνος για τη διδασκαλία της. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται όχι μόνο στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο αλλά και στα μαθηματικά του Γυμνασίου. Η στερεομετρία ουσιαστικά έχει καταργηθεί. Δεν διδάσκεται καθόλου ή ακόμη και όταν ο χρόνος επαρκεί διδάσκεται σύντομα και περιληπτικά. Το κοινό υπόβαθρο της ανθρώπινης εμπειρίας, που είναι η αίσθηση του χώρου, δεν καταφέρνουμε να διδάσκεται κάτι που μας καθιστά υπεύθυνους ως μαθηματική κοινότητα (Σκούρας, 2010).

Η μείωση του διδακτικού χρόνου που αφιερώνεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν επιδρά αρνητικά όμως μόνο στην ενότητα της Στερεομετρίας αλλά και στο ίδιο το μάθημα, μη επιτρέποντας στους εκπαιδευτικούς να οργανώσουν κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις με στόχο τη βαθύτερη κατανόηση των μαθητών, την εξοικείωσή τους με το αντικείμενο της Γεωμετρίας και τελικά με την πρόκληση ενδιαφέροντος γύρω από αυτό.

Η γλωσσική ανεπάρκεια των μαθητών ως ένας γενικότερος παράγοντας που οδηγεί στην υποβάθμιση του μαθήματος.

Η γλωσσική ανεπάρκεια των μαθητών θεωρείται ένας από τους βασικούς λόγους της

δυσκολίας των μαθηματικών, οφείλεται στην κατανόηση εκ μέρους των μαθητών, των αποχρώσεων της μαθηματικής γλώσσας, αφού η έννοια των λέξεων γίνεται συχνά στενή και ακριβής (Warren E., 2006).

Τα σχολικά μαθηματικά έχουν ένα εξειδικευμένο λεξιλόγιο. Οι λέξεις που χρησιμοποιούνται είτε στα σχολικά εγχειρίδια των διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων και στη συγκεκριμένη περίπτωση στη Γεωμετρία, είτε προφορικά από τον εκπαιδευτικό στη διάρκεια της διδασκαλίας επαναπροσδιορίζονται από την καθημερινή μας γλώσσα. Λέξεις, για παράδειγμα, όπως « έστω», «δείξε», «μέσο» στο πλαίσιο του μαθήματος αντιστοιχούν σε « υποθέσεις», «εντολή για απόδειξη ή αιτιολόγηση», «συγκεκριμένο σημείο με όλες τις ιδιότητες που παρουσιάζει» παρά την καθημερινή και μη μαθηματική έννοιά τους. Η αδυναμία, επομένως των μαθητών, στην ερμηνεία της μαθηματικής γλώσσας και της πλαισίωσης της φυσικής τους γλώσσας σε συνθήκες γεωμετρίας, αποτελεί παράγοντα δυσκολίας στην αντιμετώπιση του μαθήματος και κατά συνέπεια στην απαξίωσή του.

Συνοψίζοντας, επομένως, τους λόγους που έχουν οδηγήσει τα τελευταία χρόνια στην υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αναζητώντας νέους τρόπους προς αποφυγήν αυτής της υποβάθμισης, μπορούμε να πούμε ότι πρόκειται για έλλειψη σταθερού υπόβαθρου διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας λόγω απουσίας υποχρεωτικών μαθημάτων στα προγράμματα σπουδών τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα ούτε σε πανελλαδικό επίπεδο για εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση αλλά ούτε και στις προαγωγικές εξετάσεις της Β Λυκείου. Υπάρχει εμφανής έλλειψη σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με άλλα μαθηματικά αντικείμενα, όπως η Άλγεβρα, η Τριγωνομετρία και η Ανάλυση που διδάσκεται κυρίως στην Γ Λυκείου. Επιπλέον, παρατηρείται ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και σ' αυτή του Λυκείου και συγκεκριμένα στην περίπτωση της αποδεικτικής διαδικασίας. Η διαδικασία των γεωμετρικών κατασκευών κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει παραγκωνιστεί και ο διδακτικός χρόνος δεν επαρκεί για την κάλυψη ολόκληρης της ύλης αφήνοντας στο περιθώριο σημαντικά τμήματα όπως τη Στερεομετρία. Επιπλέον, ένας γενικότερος παράγοντας υποβάθμισης του μαθήματος είναι και η γλωσσική ανεπάρκεια των μαθητών αναφορικά με την αδυναμία «μετάφρασης» λέξεων της φυσικής τους γλώσσας όταν αυτές χρησιμοποιούνται σε γεωμετρικά και γενικότερα μαθηματικά προβλήματα.

2.2. Αξιοποίηση της Ιστορίας της Γεωμετρίας για την αναβάθμιση του μαθήματος

Η απάντηση στους παραπάνω λόγους υποβάθμισης του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θα μπορούσε να πηγάζει από την ίδια την Ιστορία της Επιστήμης της Γεωμετρίας. Το πλούσιο υλικό ιστορικών αναφορών, σημειωμάτων, προβλημάτων και πηγών θα αποτελούσε χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και στην οργάνωση των διδακτικών τους προσεγγίσεων ώστε το μάθημα να παρουσιάσει σημάδια αναβάθμισης αλλάζοντας τη στάση τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών απέναντι στη διδασκαλία του.

Τα επιχειρήματα υπέρ της ένταξης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους έχουν αναλυθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μπορεί όμως να δράσει η ενσωμάτωση αυτή με τρόπο ώστε να αρθούν οι λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος; Εξαιρώντας τους λόγους που αναφέρονται στις περιπτώσεις που ορίζονται από το σύστημα εκπαίδευσης στο Λύκειο και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, το ότι δηλαδή η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο αντικείμενο ούτε για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση αλλά και ούτε στις προαγωγικές της Β΄ Λυκείου και την ανεπάρκεια διδακτικού χρόνου ώστε να καλύπτεται ένα σημαντικό μέρος των Στοιχείων, θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι η Ιστορία της Γεωμετρίας εντασσόμενη στη διδακτική της προσέγγιση λειτουργεί θετικά στη διδασκαλία.

Παρέχεται επιπλέον άφθονο υλικό για τη δημιουργία δραστηριοτήτων και την παρουσίαση ιστορικών σημειωμάτων και πηγών ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν μία πληρέστερη εικόνα γύρω από τις έννοιες με τις οποίες καλούνται να ασχοληθούν.

2.2.1. Η χρήση της Ιστορίας στην αποδεικτική διαδικασία

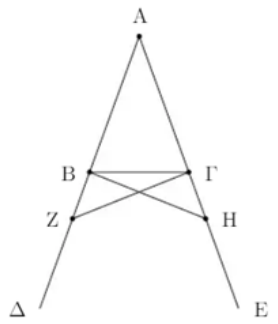
Αναφορικά με τη διδασκαλία της απόδειξης ένα βασικό επιστημολογικό χαρακτηριστικό της είναι ότι η ανάγκη για επίλυση ενός προβλήματος δίνει πραγματικά νόημα στην ίδια την απόδειξη. Ως παράδειγμα μπορούμε να σημειώσουμε τον κρίσιμο ιστορικό ρόλο που έπαιξε η ανάγκη για επίλυση του προβλήματος της ασυμμετρίας (ύπαρξη άρρητων αριθμών), εφόσον μάλλον υπήρξε αφορμή για να αρχίσει να χρησιμοποιείται η έμμεση απόδειξη. Σύμφωνα με την κατάσταση που επικρατεί σήμερα στην εκπαίδευση , η παραδοσιακή διδασκαλία παρουσιάζει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης παραμελώντας τις εικασίες που σχετίζονται με την επαγωγική σκέψη (Freudental 1971, Schoenfeld 1986). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να

μην αντιλαμβάνονται την ανάγκη που οδήγησε στην απόδειξη θεωρημάτων κάτι που σταδιακά οδηγεί στην αδιαφορία για την ίδια τη διδασκαλία τους. Ένας τρόπος με τον οποίο θα ήταν εφικτή η άρση αυτού του αδιεξόδου είναι η πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών με την ένταξη στη διδασκαλία ιστορικών στοιχείων και πηγών που φανερώνουν τις αιτίες της γέννησης και της ιστορικής εξέλιξης κρίσιμων εννοιών, θεωρημάτων και προτάσεων.

Σημαντικά θεωρήματα και προτάσεις-σταθμοί στην ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θα μπορούσαν να αποτελέσουν δραστηριότητες αφόρμησης ώστε να δοθεί κίνητρο στους μαθητές να ασχοληθούν με την αποδεικτική διαδικασία. Για παράδειγμα, από τον Deakin (1990) περιγράφεται η ιστορία των αποδείξεων του θεωρήματος για την ισότητα των προσκείμενων στη βάση γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου. Με εκκίνηση την απόδειξη του Ευκλείδη (όπως υπάρχει στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του) καταλήγει σε πιο σύγχρονες αποδείξεις παρουσιάζοντας μία ιστορική συνέχεια αποδείξεων.

Πρόκειται για την 5η κατά σειρά πρόταση στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη η οποία ακολουθεί την 4η πρόταση του κριτηρίου ισότητας τριγώνων Π-Γ-Π πάνω στην οποία στηρίζεται.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ προς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπό τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Σχήμα 2.5

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελές το ΑΒΓ ἴσην ἔχον τήν ΑΒ πλευράν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, και προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ΄εὐθείας ταῖς ΑΒ,ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ,ΓΕ (σχ. 2.5) λέγω, ὅτι ἡ μέν ὑπό ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπό ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δε ὑπό ΓΒΔ τῇ ὑπό ΒΓΕ.

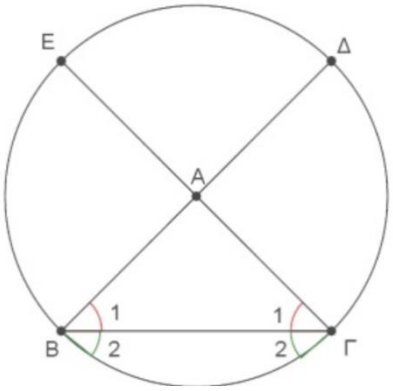
Εἰλήφθω γάρ ἐπί τῆς ΒΔ τυχόν σημεῖον το Ζ, και ἀφῃρήσθω ἀπό τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ. και ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεί οὖν ἴση ἐστίν ἡ μέν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δέ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσί ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσίν ἑκατέρᾳ και γωνίαν κοινήν περιέχουσι τήν ὑπό ΖΑΗ βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καί το ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ

τριγώνῳ ἴσον ἔσται, και αἱ λοιπαί γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραί ὑποτείνουσιν, ἡ μέν ὑπό ΑΓΖ τῇ ὑπό ΑΒΗ, ἡ δε ὑπό ΑΖΓ τῇ ὑπό ΑΗΒ, και ἐπεί ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπή ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δε καί ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση δύο δή αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσί ταῖς ΓΗ,ΗΒ ἴσαι εἰσίν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ καί γωνία ἡ ὑπό ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπό ΓΗΒ ἴση, καί βάσις αὐτῶν κοινή ἡ ΒΓ καίτό ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, και αἱ λοιπαί γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραί ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἐστίν ἡ μέν ὑπό ΖΒΓ τῇ ὑπό ΗΓΒ ἡ δε ὑπό ΒΓΖ τῇ ὑπό ΓΒΗ, ἐπεί οὖν ὅλη ἡ ὑπό ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπό ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπό ΓΒΗ τῇ ὑπό ΒΓΖ ἴση, λοιπή ἄρα ἡ ὑπό ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπό ΑΓΒ ἐστιν ἴση και εἰσι πρός τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δε καί ἡ ὑπό ΖΒΓ τῇ ὑπό ΗΓΒ ἴση και εἰσιν ὑπό τήν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ προς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπό τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

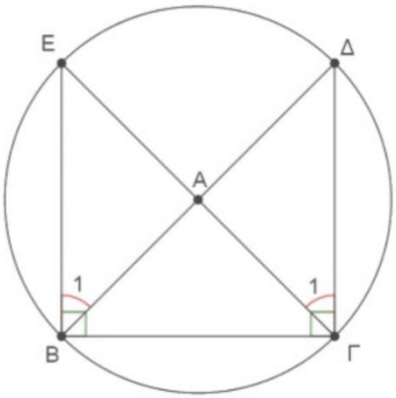
Δύο ακόμη αποδείξεις που αναφέρονται από τον Αριστοτέλη στα «Αναλυτικά Πρότερα» και αποδίδονται ίσως η μεν πρώτη στον Θαλή η δε δεύτερη σε ανακατασκευή της απόδειξης του Θαλή:



Σχήμα 2.6

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο και φέρουμε τις διαμέτρους ΒΔ και ΓΕ.(σχ. 2..6) Αποδεικνύεται η ισότητα των γωνιών Β1 και Γ1 μέσω της ισότητας των μικτόγραμμων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ (μεταξύ της ακτίνας ΑΒ και του τόξου ΒΓ και της ακτίνας ΑΓ και του τόξου ΓΒ)

Και η δεύτερη απόδειξη



Σχήμα 2.7

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο και φέρουμε τις διαμέτρους ΒΔ και ΓΕ και τις χορδές ΒΕ και ΓΔ.(σχ. 2.7) Αποδεικνύεται η ισότητα των ζητούμενων γωνιών μέσω της ισότητας των γωνιών ΕΒΓ και ΔΓΒ (=ορθές , αφού είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο) και των $Β_1$=$Γ_1$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Από τα χρόνια του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη η αποδεικτική διαδικασία αποτελούσε το επιστέγασμα κάθε μαθηματικής δημιουργίας . Η συμπερίληψη της

μαθηματικής απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών γενικότερα παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να έρθουν σε επαφή με τη δημιουργία των μαθηματικών και να συνειδητοποιήσουν το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα που βρίσκεται σε συνεχή εξέλιξη (Παναούρα και Φιλίππου, 2002). Ο ισχυρισμός αυτός περνάει στους μαθητές μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση. Η παράθεση διαδοχικών ιστορικών αποδείξεων ανατρέπει την αντίληψη που επικρατεί απέναντι στη μαθηματική γνώση και που προκαλείται από την εμφάνισή της στα σχολικά βιβλία. Ότι δηλαδή οι μαθηματικές αλήθειες είναι αιώνιες και αμετάβλητες που δεν επιδέχονται καμιά αμφισβήτηση. Με την παρουσίαση θεωρημάτων και προτάσεων χρησιμοποιώντας την ιστορική εξέλιξη των αποδείξεών τους δημιουργούμε ισχυρό κίνητρο για την ενασχόληση των μαθητών.

Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια είναι ο προσεκτικός σχεδιασμός μιας τέτοιου είδους διδακτικής παρέμβασης έτσι ώστε να είναι περιορισμένες σε αριθμό και να μην οδηγούν απλά σε μία ανεξέλεγκτη διεύρυνση του όγκου της ύλης. Σε αντίθετη περίπτωση, αυξάνοντας την ύλη που διδάσκονται οι μαθητές οδηγεί επικίνδυνα σε απέχθεια αυτών προς το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

2.2.2. Η χρήση της Ιστορίας στις γεωμετρικές κατασκευές

Σύμφωνα με τον Cheung (2011) , ένα από τα σημαντικά χαρακτηριστικά των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι η κατασκευαστική του προσέγγιση στη γεωμετρία. Πολλές από τις προτάσεις του δεν είναι θεωρήματα με τη συνήθη έννοια (Hartshorne, 2000), μάλλον είναι κατασκευαστικά προβλήματα. «Αυτή η κατασκευαστική προσέγγιση διαπερνά τα στοιχεία του Ευκλείδη ». Στη διατύπωση των αξιωμάτων ο Ευκλείδης ουσιαστικά “αιτείται” η δυνατότητα κατασκευής ορισμένων βασικών γεωμετρικών σχημάτων, η χρήση βοηθητικών γραμμών στις διάφορες αποδείξεις γίνεται εφόσον έχει εξασφαλιστεί προηγουμένως η δυνατότητα κατασκευής τους, ενώ η έκθεση της θεωρίας στα διάφορα βιβλία των Στοιχείων συγκλίνει προς την επίτευξη κάποιας σημαντικής κατασκευής (Θωμαΐδης, 2015). Οι γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να εμπλουτίσουν την οπτικοποίηση και την κατανόηση των μαθητών στη γεωμετρία, θέτουν τις βάσεις για ανάλυση και αφαιρετική απόδειξη, παρέχουν ευκαιρίες για τους εκπαιδευτικούς να αντιμετωπίσουν πολλαπλές νοημοσύνες και να επιτρέπουν στους μαθητές να εφαρμόσουν τη δημιουργικότητά τους (Sanders, 1998).

Σε έρευνα που έγινε από τους Actas και Mumcu (2019) σε εκπαιδευτικούς που βρίσκονται σε προπαρασκευαστική διαδικασία πρακτικής άσκησης προέκυψε ότι ένα μεγάλο ποσοστό δεν έδειξε να έχει εμπειρία σε δραστηριότητες γεωμετρικών κατασκευών με αποτέλεσμα η διαδικασία κατασκευής, η οποία είναι ένα σημαντικό συστατικό στη διαδικασία εκμάθησης γεωμετρίας (Duval, 1998) να λείπει και να μην λαμβάνει την απαραίτητη προσοχή στα μαθηματικά (Pandiscio, 2002). Αν και υπάρχουν οφέλη από τη γεωμετρική κατασκευή σε δραστηριότητες σε διάφορα επίπεδα του εκπαιδευτικού συστήματος, είναι απαραίτητο να αναγνωρίσουν οι εκπαιδευτικοί τον ρόλο αυτών των δραστηριοτήτων στη μάθηση της γεωμετρίας και να σχεδιάζουν τα μαθήματά τους λαμβάνοντας τον απαραίτητο και επαρκές χρόνο για αυτές τις δραστηριότητες.

Η ίδια η ιστορία λοιπόν της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσω των γεωμετρικών κατασκευών αποτελεί μέσο δημιουργίας κινήτρων για την απασχόληση και την εμπλοκή των μαθητών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στα σχολικά βιβλία των τελευταίων 20 περίπου χρόνων υπάρχουν με τη μορφή ιστορικών σημειωμάτων αναφορές σε γεωμετρικές κατασκευές και σε γεωμετρικούς τόπους που θα μπορούσαν, με τον κατάλληλο σχεδιασμό, να αποτελέσουν χρήσιμο υλικό για την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία του μαθήματος. Παράδειγμα τέτοιου είδους ενσωμάτωσης είναι η αναφορά σε «άλυτα προβλήματα» κατασκευής με κανόνα και διαβήτη όπως αυτό της τριχοτόμησης γωνίας και του διπλασιασμού του κύβου τα οποία υπάρχουν με τη μορφή ιστορικών σημειωμάτων στο σχολικό εγχειρίδιο και με κατάλληλο σχεδιασμό θα αποτελούσαν αντικείμενα συζήτησης και διαπραγμάτευσης μέσα στη σχολική τάξη.

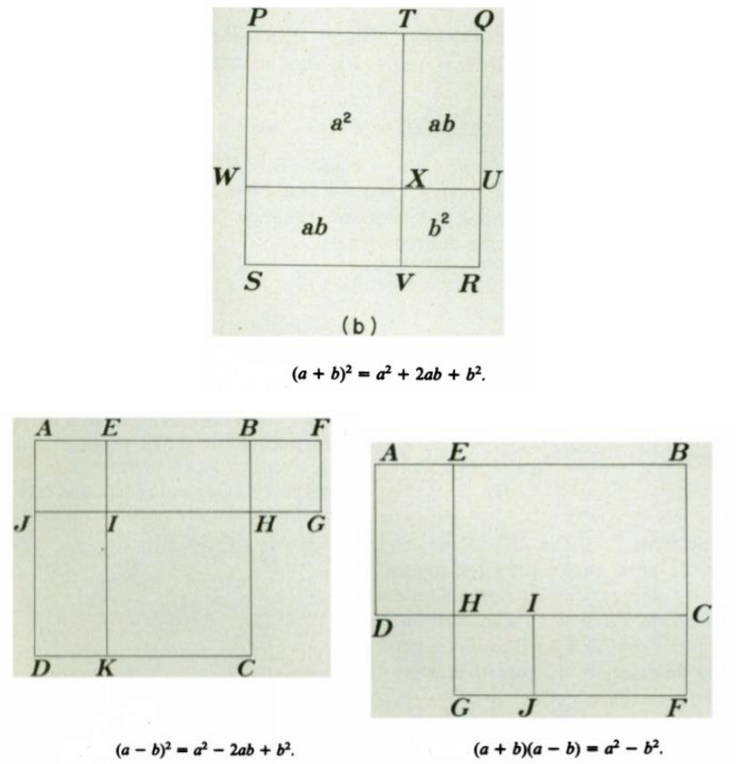
2.2.3. Η χρήση της Ιστορίας στη σύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με άλλους κλάδους των μαθηματικών

Α) Γεωμετρική απόδειξη αλγεβρικών ταυτοτήτων

Μια χρήσιμη παρέμβαση σε μαθητές της Β’ Λυκείου, με βασικό διδακτικό στόχο τη σύνδεση του πεδίου της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα, αποτελεί η παρακάτω ανάλυση που συνδέει το κεφάλαιο των εμβαδών επιπέδων σχημάτων με αυτό των αλγεβρικών ταυτοτήτων.

Οι Horak και Horak(1981) παρουσίασαν τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες χειρίστηκαν γεωμετρικά σχήματα, για να εκτελέσουν αλγεβρικές πράξεις και να αποδείξουν κάποιες αλγεβρικές ταυτότητες. Βέβαια, οι αρχαίοι Έλληνες δεν διέθεταν τον

αλγεβρικό λογισμό και συμβολισμό που γνωρίζουμε σήμερα και επομένως δεν εκτελούσαν αλγεβρικές πράξεις. Θα μπορούσε όμως να χρησιμοποιηθεί η έρευνα των Horak και Horak ως μία διδακτική πρόταση κατά την οποία θα αξιοποιηθούν γεωμετρικές προτάσεις των Στοιχείων του Ευκλείδη ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές τη γεωμετρική ερμηνεία των αλγεβρικών ταυτοτήτων . Εκτός των μαθητών της Β' Λυκείου, η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση δύναται να γίνει και στα μαθηματικά της Γ Γυμνασίου αλλά και στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου. Ξεκινώντας από την ιστορική απόδειξη της $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ την οποία δίνουν ως δραστηριότητα αφόρμησης, καταλήγουν σε κινητοποίηση των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τέτοιους είδους τεχνικές για να αποδείξουν και τις υπόλοιπες ταυτότητες. Αξίζει να τονιστεί στους μαθητές ότι στο βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων του Ευκλείδη δίνονται γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες παραπέμπουν στις σημερινές αλγεβρικές ταυτότητες (σχ. 2.8).



Σχήμα 2.8: Γεωμετρικές κατασκευές αλγεβρικών ταυτοτήτων (Katz, V. J. 2013, Ιστορία των Μαθηματικών)

Β) Γεωμετρική κατασκευή λύσεων δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Στο 9ο κεφάλαιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Β' Λυκείου εφικτή θα ήταν και η σύνδεση αλγεβρικής και γεωμετρικής κατασκευής των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί την αλγεβρική λύση στην τάξη της Α' Λυκείου στο μάθημα της Άλγεβρας. Πώς όμως θα καταφέρουν να κατασκευάσουν γεωμετρικά τη

λύση; Βασική προϋπόθεση είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι γεωμετρικά επιλύσιμο είναι ένα πρόβλημα όταν δύναται να κατασκευαστεί με τη χρήση κανόνα και διαβήτη.

Σύμφωνα με τον Katz(2013), ο Ευκλείδης αρχίζει από το Βιβλίο ΙΙ με τον ορισμό:

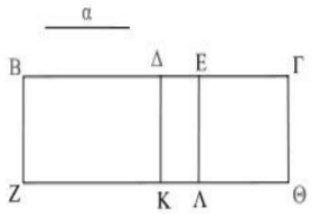
Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται ότι περιέχεται από τις δύο πλευρές του που σχηματίζουν την ορθή γωνία.

Δεν σημαίνει βέβαια ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος του. Ο Ευκλείδης δεν πολλαπλασιάζει ποτέ δύο μήκη, γιατί δεν έχει τον τρόπο να ορίσει μία τέτοια διαδικασία. Δεν υπάρχουν στα στοιχεία του Ευκλείδη τύποι εμβαδού αλλά σχέσεις που προκύπτουν από τη σύγκριση διαφορετικών επιφανειών.

Στις προτάσεις που ακολουθούν, οι αλγεβρικές σχέσεις που υπάρχουν δίπλα στα σχήματα δεν υπάρχουν στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Πρόκειται για δικές μας αναπαραστάσεις για να αποδοθεί μία γεωμετρική ερμηνεία στις αλγεβρικές ταυτότητες.

Πρόταση ΙΙ.1

Έστωσαν δύο ευθύγραμμα τμήματα από τα οποία το ένα υποδιαιρείται σε έναν αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων (σχ. 2.9)Τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ισούται με το άθροισμα των ορθογωνίων που περιέχονται από το ευθύγραμμο τμήμα που δεν υποδιαιρέθηκε και καθενός από τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία υποδιαιρέθηκε το άλλο.



α(β+γ+…)= αβ+αγ+…
όπου α το μήκος του ενός τμήματος και
ΒΓ=β+γ+…

Σχήμα 2.9:Πρόταση ΙΙ.1 των Στοιχείων του Ευκλείδη (Katz, V. J. 2013, Ιστορία των Μαθηματικών)

Ακολουθούν οι προτάσεις ΙΙ.2, ΙΙ.3, ΙΙ.4που δίνονται ειδικές περιπτώσεις της ΙΙ.1 καθώς και οι γεωμετρικές μορφές των ταυτοτήτων $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Πρόταση ΙΙ.5

Αν τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.

Πρόταση ΙΙ.6

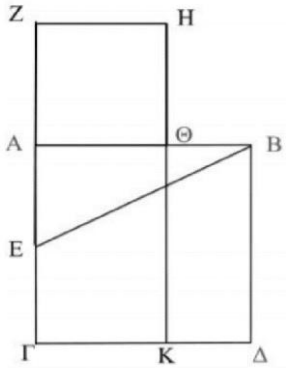
Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα τμηθεί στο μέσον και προεκταθεί κατά κάποιο ευθύγραμμο τμήμα, το ορθογώνιο που περιέχεται από την προέκταση και το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και την προέκταση, μαζί με το τετράγωνο με πλευρά το μισό του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος, ισούται με το τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από το μισό του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και την προέκταση.

Η Πρόταση ΙΙ.6 χρησιμοποιείται στην απόδειξη της πρότασης ΙΙ.11

Πρόταση ΙΙ.11

Να διαιρεθεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα έτσι ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από αυτό και ένα από τα τμήματα της υποδιαίρεσης να ισούται με το τετράγωνο με πλευρά το άλλο τμήμα της υποδιαίρεσης (σχ. 2.10).

Πρόκειται δηλαδή για την γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης $\alpha(\alpha-x)=x^2$ ή $x^2+\alpha x=\alpha^2$



Σχήμα 2.10:Πρόταση ΙΙ.1 των Στοιχείων του Ευκλείδη (Katz, V. J. 2013, Ιστορία των Μαθηματικών)

Θέλουμε να βρούμε τη θέση του σημείου Θ του ΑΒ, ώστε $ΑΒ\cdot ΘΒ=ΑΘ^2$. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΔΓ και το μέσο Ε του ΑΓ. Φέρνουμε την ΒΕ και στην προέκταση του ΓΑ παίρνουμε ΕΖ=ΕΒ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΖΗΘ. Θα αποδείξουμε ότι το Θ είναι το ζητούμενο σημείο. Προεκτείνουμε την ΗΘ, η οποία τέμνει τη ΓΔ στο Κ. Σύμφωνα με την πρόταση ΙΙ.6, το ορθογώνιο που ορίζουν οι ΓΖ, ΖΑ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΑΕ θα είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΕΖ, δηλαδή:

$ΓΖ·ΖΑ+ΑΕ^2=ΕΖ^2$ ή $ΓΖ·ΖΑ+ΑΕ^2=ΕΒ^2$
Αλλά από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $ΕΒ^2=ΑΕ^2+ΑΒ^2$, άρα $ΓΖ·ΖΑ+ΑΕ^2=$
$ΑΕ^2+ΑΒ^2$
Δηλαδή $ΓΖ·ΖΑ= ΑΒ^2$ που με τη βοήθεια εμβαδών γίνεται
$Ε_{ΖΗΚΓ}=Ε_{ΑΒΔΓ}$ και αφαιρώντας από τα δύο μέλη το εμβαδόν του ΑΘΚΓ προκύπτει
$Ε_{ΖΗΘΑ}=Ε_{ΘΒΔΚ}$ δηλαδή $ΑΘ^2=ΑΒ·ΒΘ$. Το Θ είναι το ζητούμενο σημείο.
Αν θέσουμε ΑΒ=α και ΑΘ=x τότε προκύπτει η εξίσωση: $α(α−x)=x^2$ δηλαδή

Η πρόταση ΙΙ.11 αποτελεί τη γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας

Τα παραπάνω αποτελούν τον ζητούμενο διδακτικό στόχο της σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το χώρο της Άλγεβρας. Είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού και μία ενδιαφέρουσα πρόταση που θα μπορούσε να οργανωθεί στην τάξη στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος. Μέσα στα Στοιχεία του Ευκλείδη διακρίνονται πρώιμες μορφές των αλγεβρικών ταυτοτήτων κάτι που θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά, κυρίως στις πρώτες δύο τάξεις του Λυκείου όταν οι μαθητές έχουν μυηθεί ήδη στην αποδεικτική διαδικασία.

Γ) Το θεώρημα του Πτολεμαίου σε σύνδεση με την τριγωνομετρία

Ένα επιπλέον παράδειγμα ενσωμάτωσης της Ιστορίας ώστε να γίνει εφικτή η σύνδεση με το αντικείμενο της Τριγωνομετρίας είναι το Θεώρημα του Πτολεμαίου. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το Θεώρημα του Πτολεμαίου μας δίνει τη σχέση των πλευρών ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου με τις διαγώνιές του. Το διατύπωσε ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος (2ος αι. μ.Χ.) και το χρησιμοποίησε για τη δημιουργία του "Πίνακα των χορδών", ενός τριγωνομετρικού πίνακα για αστρονομικούς υπολογισμούς. Σύμφωνα με ιστορικό σημείωμα στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β' Λυκείου (σχ. 2.11) στο κεφάλαιο της τριγωνομετρίας , στο βιβλίο Α της Αλμαγέστης περιέχονται όλα τα αναγκαία θεωρήματα για την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων και συνημιτόνων. Μεταξύ αυτών και το Θεώρημα του Πτολεμαίου:

«Έστω ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε ισχύει: $ΑΒ \cdot ΓΔ + ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΒΔ$ *».*

Στο θεώρημα αυτό στηρίχτηκε και ο Πτολεμαίος για να βρει διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους μεταξύ των οποίων και αυτού που σήμερα εκφράζουμε ως

$$ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - συνα \cdot ημβ$$

Η Αλμαγέστη έκανε για την τριγωνομετρία ότι έκαναν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» για τη Γεωμετρία: Τη διετύπωσαν στη μορφή που παρέμεινε για τα επόμενα 1000 χρόνια.

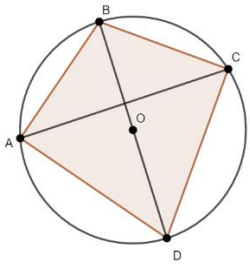
Σχήμα 2.11:Ιστορικό σημείωμα στο σχολικό εγχειρίδιο : Άλγεβρα Β' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α. , 2012)

Με αφορμή επομένως το ιστορικό αυτό σημείωμα δίνεται η δυνατότητα να γίνει η σύνδεση της Γεωμετρίας με την τριγωνομετρία και να σχεδιαστεί κατάλληλη δραστηριότητα για τους μαθητές από τους οποίους θα ζητείται η απόδειξη και η κατανόηση στο πως καταλήγουμε στον τριγωνομετρικό τύπο ημιτόνου διαφοράς.

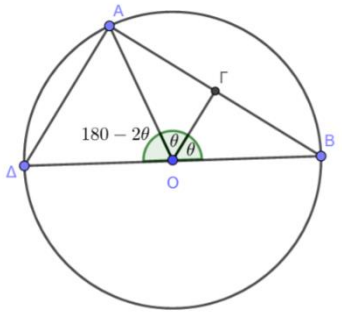
Ο Πτολεμαίος (100-178 μ.Χ.) στην εισαγωγή της Μεγίστης ή Αλμαγέστης ισχυρίζεται ότι η Φυσική και η Θεολογία είναι εικοτολογικές, επιστήμες δηλαδή που στηρίζονται σε εικασίες και υποθέσεις και ότι μόνο τα Μαθηματικά παρέχουν αναμφισβήτητη γνώση.

...ἐξ ὧν διανοηθέντες, ὅτι τὰ μὲν
ἄλλα δύο γένη τοῦ θεωρητικοῦ μᾶλλον ἄν τις εἰκασίαν
ἢ κατάληψιν ἐπιστημονικὴν εἴποι, τὸ μὲν θεολογικὸν
διὰ τὸ παντελῶς ἀφανὲς αὐτοῦ καὶ ἀνεπίληπτον, τὸ
δὲ φυσικὸν διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον καὶ ἄδηλον, ὡς
διὰ τοῦτο μηδέποτε ἂν ἐλπίσαι περὶ αὐτῶν ὁμονοῆσαι
τοὺς φιλοσοφοῦντας, μόνον δὲ τὸ μαθηματικόν, εἴ τις
ἐξεταστικῶς αὐτῷ προσέρχοιτο, βεβαίαν καὶ ἀμετάπιστον
τοῖς μεταχειριζομένοις τὴν εἴδησιν παράσχοι ὡς ἂν
τῆς ἀποδείξεως δι' ἀναμφισβητήτων ὁδῶν γιγνομένης,
ἀριθμητικῆς τε καὶ γεωμετρίας, προήχθημεν ἐπιμελη-
θῆναι μάλιστα πάσης μὲν κατὰ δύναμιν τῆς τοιαύτης
θεωρίας,...

Συνεχίζει με αυστηρώς μαθηματική ύλη όπου αναπτύσσει λεπτομερώς την επίπεδη και τη σφαιρική τριγωνομετρία που απαιτείται για τον υπολογισμό των πλανητικών θέσεων (Katz, 2013).



$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$
$BC = (AC \cdot BD - AB \cdot CD) / AD$



Σχήμα 2.12

Επειδή ήθελε να εκφράσει τα μήκη των χορδών στο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης, διαιρεί την ακτίνα σε 60 τμήματα (60τ) , κάθε τμήμα σε 60 πρώτα λεπτά (60') και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (60''). Επομένως, η χορδή ενός τόξου 60º (πλευρά εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου και ίση με την ακτίνα) έχει μήκος 60τ.
Μ' αυτόν τον τρόπο καταλήγει ότι το ημίτονο ενός τόξου είναι ίσο με το 1/120 της χορδής του διπλασίου τόξου και το συνημίτονό του είναι το 1/120 της χορδής του παραπληρωματικού του διπλασίου τόξου.

ημθ= ΑΓ/ΟΑ = (2ΑΓ)/(2ΟΑ)= ΑΒ/(2·60)= (χορδ 2θ)/120 (σχ. 2.12)

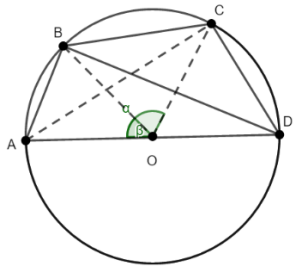
συνθ= ΟΓ/ΟΑ = (2ΟΓ)/(2ΟΑ)= ΑΔ/(2·60)= (χορδ (180-2θ))/120

(Θωμαϊδης, 1981)

Για να εξαγάγει τον τύπο για τη χορδή της διαφοράς δύο τόξων α,β, ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε το θεώρημα για δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα, ΑC=χρδ α και ΑΒ= χρδ β και πήρε

Στο διπλανό σχήμα (σχ. 2.13)
120 χρδ(α-β)=χρδ α · χρδ(180-β) – χρδ β · χρδ(180-α)
ο οποίος τύπος μετατρέπεται στον σύγχρονο τύπο
ημ(α-β)=ημα · συνβ + ημβ· συνα

(Katz, 2013)



Σχήμα 2.13

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω υπάρχει άφθονο υλικό που παρέχεται μέσω της Ιστορίας της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα στους εκπαιδευτικούς ώστε να αρθεί ως έναν βαθμό η υποβάθμιση του μαθήματος και να βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση τόσο των γεωμετρικών εννοιών και κατασκευών από τους μαθητές όσο και της συνύπαρξης όλων των κλάδων των μαθηματικών αφού η ίδια η ιστορία είναι αυτή που τα συνδέει μέσω κοινωνικοπολιτισμικών αναγκών της εκάστοτε εποχής.

2.3. Τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας

Η πρώτη και ίσως η μόνη επαφή που έχουν οι μαθητές/τριες με την ιστορία των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται είναι τα ίδια τα ιστορικά σημειώματα, κείμενα, πηγές που υπάρχουν, τα τελευταία κυρίως χρόνια, στα σχολικά εγχειρίδια. Πρόκειται είτε για βιογραφικές αναφορές σπουδαίων μαθηματικών της αρχαιότητας αλλά και μεταγενέστερων ετών είτε για στοιχεία από το έργο τους, μαθηματικά προβλήματα και αποδείξεις που δόθηκαν στα πλαίσια της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών που διαπραγματεύεται η εκάστοτε ενότητα. Παρακάτω θα γίνει μία σύντομη αναφορά στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας που αποτέλεσαν τη βάση της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο συγκεκριμένο μάθημα, στις υποδείξεις ενσωμάτωσης της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση σύμφωνα με το Αναλυτικό πρόγραμμα Σπουδών, στο ρόλο των εισαγωγικών ιστορικών σημειωμάτων αλλά και των σημειωμάτων που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία, στα επαναλαμβανόμενα λάθη αυτών και τέλος θα γίνει μία σύντομη ανάλυση στο ρόλο των βιβλίων του καθηγητή, που συνοδεύουν τις εκδόσεις των σχολικών εγχειριδίων, ως οδηγός διδασκαλίας στη σύνδεση αυτής με τις ιστορικές πηγές.

2.3.1. Αναφορά στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας παρελθόντων ετών

Ανάλογα με τις κοινωνικοπολιτισμικές συνθήκες κάθε εποχής αλλά και το πολιτικό γίγνεσθαι, τα σχολικά εγχειρίδια συμπληρωνόταν από τους ίδιους ή από άλλους συγγραφείς ή αντικαθίσταται από εντελώς νέες εκδόσεις .

Τυχόν αλλαγές στο υλικό του προγράμματος σπουδών απαιτεί περαιτέρω κατανόηση και εξέταση των πολιτιστικών πλαισίων. Τα εγχειρίδια καθίστανται απαραίτητα για την περαιτέρω κατανόηση των πιθανών πολιτιστικών και κοινωνικών αλλαγών (Li, 2007).

Μολονότι το σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας υπέστη αλλαγές, διορθώσεις ή και αντικαταστάσεις, ο τρόπος ένταξης των ιστορικών σημειωμάτων σ’ αυτά παρέμενε σχεδόν ο ίδιος. Περιοριζόταν σε μία εισαγωγική ιστορική αναφορά και παραθέσεις είτε στο τέλος των επιμέρους ενοτήτων είτε με τη μορφή υποσημειώσεων . Οι ιστορικές πληροφορίες που ενσωματώνονταν πολλές φορές επαναλαμβανόταν στις επόμενες εκδόσεις χωρίς διορθώσεις ή κατάλληλο εμπλουτισμό. Παρά τις αλλαγές στο εκάστοτε

μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου, ο ρόλος της ιστορίας σ' αυτά παρέμενε περιθωριακός. Ακόμη και λάθη που συναντούσε κανείς σε παλιότερα βιβλία μεταβιβάζονταν απλά στα επόμενα. Τα επαναλαμβανόμενα αυτά λάθη αναλύονται εκτενέστερα σε παρακάτω ενότητα της παρούσας εργασίας.

Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν στην ελληνική εκπαίδευση σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους εξέλιξης της Ελλάδας και του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος αλλά και ο βαθμός στον οποίο ενσωματώνεται η ιστορία της επιστήμης στα σχολικά αυτά βιβλία.

- *Χ. Μπαρμπαστάθης: Θεωρητική Γεωμετρία Ο.Ε.Σ.Β. 1940-1945 Δ΄, Ε΄ ΣΤ΄ Τάξιν των Γυμνασίων*
- *Χ. Μπαρμπαστάθης: Θεωρητική Γεωμετρία Ο.Ε.Σ.Β. 1945-1949 διά τας Ανωτέρας Τάξεις των Γυμνασίων*

Στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο απαντάται μία μόνο ελάχιστη ιστορική αναφορά στις πρώτες του σελίδες όπου με τη μορφή υποσημείωσης δίνονται στοιχεία του Ηροδότου για τη γέννηση της Γεωμετρίας.

- *Ν.Νικολάου: Θεωρητική Γεωμετρία Ο.Ε.Σ.Β. \ Ο.Ε.Δ.Β. 1950-51, ... , 1969-70 διά τας Ανωτέρας Τάξεις των Γυμνασίων*

Στο βιβλίο του Νικολάου δίνεται εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα για την επιστήμη της Γεωμετρίας και ελάχιστες αναφορές στον Ευκλείδη, στον Θαλή και σε προβλήματα όπως αυτό της χρυσής τομής οι οποίες παρουσιάζονται με τη μορφή υποσημειώσεων .

- *Ι. Ιωαννίδης: Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Τόμος 2ος (Γεωμετρία). 1968*

Στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου υπάρχει εκτενέστερο των προηγουμένων βιβλίων εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα χωρίς άλλη ιστορική αναφορά στις σελίδες του βιβλίου. Το εισαγωγικό αυτό σημείωμα δεν επαναλαμβάνεται στο επόμενο εγχειρίδιο του Ιωαννίδη για τους μαθητές της Δ' τάξης του Γυμνασίου.

Σύντομη αναφορά υπάρχει για τον Απολλώνιο τον Περγαίο στην ενότητα των γεωμετρικών κατασκευών (σ. 63) με τη μορφή υποσημείωσης καθώς επίσης και στον Πυθαγόρα (σ. 71).

- *Ι. Πανάκη: Μαθηματικά Ε' Γυμνασίου (Θετικής Κατεύθυνσης) Τόμος 2ος (Γεωμετρία). 1968*

Το εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα ομοίως δεν επαναλαμβάνεται και στην Ε' τάξη, δίνεται ωστόσο μια μικρή ιστορική αναφορά στο πρόβλημα της χρυσής τομής κυρίως σε ότι αφορά στην ονοματολογία του συγκεκριμένου προβλήματος (σ. 23) και στη ζωή και στο έργο του Απολλώνιου (σ. 28). Στο ίδιο βιβλίο με τον τίτλο *Ιστορικό σημείωμα (σ. 70)* δίνονται πληροφορίες για τον αριθμό π με αφορμή την παρουσίαση της μεθόδου των περιμέτρων κυρτών κανονικών πολυγώνων. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν, σε μεγάλο βαθμό, στις γεωμετρικές κατασκευές και αυτές των ριζών δευτεροβάθμιων εξισώσεων αλλά και συστημάτων εξισώσεων συνδέοντας την Ευκλείδεια Γεωμετρία με την αλγεβρική επίλυση αυτών.

- *Γ. Γραφάκου, κ.α.: Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Αριθμητική και Άλγεβρα-Γεωμετρία. 1969*
- *Π. Λαδόπουλου: Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας Ε'-ΣΤ' Γυμνασίου. 1969*

Με ανάλυση και διαπραγμάτευση θεμάτων μόνο παραστατικής Γεωμετρίας χωρίς να γίνεται καμία αναφορά σε ιστορικά στοιχεία ή ιστορικές πηγές.

- *Χ. Παπανικολάου: Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ΄ Γυμνασίου και Δ΄, Ε΄ ΣΤ΄ Γυμνασίου Θεωρητικής Κατευθύνσεως. Ο.Ε.Δ.Β., 1975*

Υπάρχει εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα το οποίο ξεκινά από τη μέτρηση της Γης την εποχή των Αιγυπτίων και φτάνει ως και την γέννηση άλλων κλάδων της Γεωμετρίας όπως η διαφορική, η παραστατική, η προβολική Γεωμετρία. Γίνεται σύνδεση αυτών με αναφορές στον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο δίνοντας έμφαση στα Στοιχεία του Ευκλείδη, στους Αλεξανδρινούς Μενέλαο, Πτολεμαίο και Πάππο, στην Αναγέννηση με τον Καρτέσιο και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας και στη συμβολή της απειροστικής ανάλυσης τον 17^{ο} αιώνα στην περαιτέρω ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Ιστορικές αναφορές υπάρχουν και στη συνέχεια του εγχειριδίου στα επιμέρους κεφάλαια. Για παράδειγμα σημειώνεται κατά την παρουσίαση του Ευκλείδειου Αιτήματος ότι η μη παραδοχή αυτού οδήγησε στη δημιουργία μη Ευκλείδειων Γεωμετριών από τον Ρώσο Lobachevski και τον Γερμανό Riemann (σ. 50,51).

Ενδιαφέρουσα είναι επίσης η έντονη παρουσίαση των γεωμετρικών κατασκευών και η σύνδεση αυτών με την άλγεβρα. Μετά την έννοια του εμβαδού, το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων μετατρέπεται σε γεωμετρικό μέγεθος και όχι απλά γινόμενο των μέτρων τους και με τη βοήθεια αυτού παρουσιάζονται γεωμετρικά αλγεβρικές σχέσεις όπως αυτές των ταυτοτήτων (όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα ότι υπάρχουν στα Στοιχεία του Ευκλείδη). Εκτενής αναφορά υπάρχει επίσης στην ιστορική προσέγγιση του αριθμού π (σ. 268-270).

- *Σ. Κανέλλος: Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ΄, Ε΄ ΣΤ΄ Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως. Ο.Ε.Δ.Β., 1975*

Δεν υπάρχει εισαγωγικό σημείωμα ώστε να εξηγεί την εξέλιξη της Γεωμετρίας. Μολονότι το συγκεκριμένο βιβλίο του Κανέλλου είναι χωρισμένο σε 429 παραγράφους και καλύπτει τεράστια ύλη του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δύο μόνο από αυτές τις παραγράφους αναφέρονται σε ιστορικά στοιχεία αν και δίνεται επίσης έμφαση σε πληθώρα γεωμετρικών κατασκευών. Η μία αναφέρεται στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων με κανόνα και διαβήτη και η δεύτερη στην ιστορική εξέλιξη του αριθμού π.

- *Δ. Παπαμιχαήλ & Α. Σκιαδάς: Θεωρητική Γεωμετρία, Α΄ Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1979.*

Εκτός του συνοπτικού εισαγωγικού σημειώματος με ιστορικό περιεχόμενο, σε ένα μόνο σημείο κατά την παρουσίαση του Αιτήματος του Ευκλείδη δίνονται ιστορικά στοιχεία με τη μορφή υποσημείωσης.

- *Ν. Βαρουχάκης, Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Αλιμπινίσης& Δ. Κοντογιάννης: Θεωρητική Γεωμετρία Β΄ Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1986.*

Στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο υπάρχουν μόνο βιογραφικές ιστορικές αναφορές σε σπουδαίους μαθηματικούς της αρχαιότητας όπως του Αρχιμήδη, του Πλάτωνα, του Πυθαγόρα, της Υπατίας κ.α. στην αρχή κάθε ενότητας ανάλογα με το περιεχόμενό της.

- *Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Θ. Εξαρχάκος, Δ. Κοντογιάννης & Γ. Τασόπουλος: Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1990.*

Γίνεται στην εισαγωγή μία εκτενής ιστορική αναδρομή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παραθέτοντας αποσπάσματα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη (πρωτότυπο και μεταφρασμένο). Υπάρχουν επιπλέον σημεία, καθώς εναλλάσσονται τα κεφάλαια, στα οποία γίνεται η σύνδεση της Γεωμετρίας με προβλήματα καθημερινής ζωής όπως η αναφορά στους «αρπεδονάπτες» , οι οποίοι μετρούσαν και οριοθετούσαν τους αγρούς στην Αρχαία Αίγυπτο αλλά και η αναφορά στη μέθοδο των Αρχαίων Ελλήνων για τη μέτρηση των αποστάσεων απρόσιτων σημείων με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων και βασιζόμενοι στις αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αναφορές επίσης υπάρχουν εκτός από τις βιογραφίες σπουδαίων μαθηματικών και στα λεγόμενα «άλυτα» προβλήματα της αρχαιότητας όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου ή η τριχοτόμηση γωνίας.

- *Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Π. Δρακόπουλος, Α. Κυριαζής & Γ. Τασσόπουλος: Θεωρητική Γεωμετρία Β΄ Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1991*

Στο αντίστοιχο βιβλίο της Β' Λυκείου των Αλιμπινίση κ.α. συναντώνται ιστορικά σημειώματα στο τέλος κάθε κεφαλαίου όπως οι αποδείξεις που δόθηκαν από τους Αρχιμήδη και Πάππο για την τριχοτόμηση γωνίας, στην απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος που περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, στην γενίκευση αυτού από τον Πάππο τον Αλεξανδρινό, στην έννοια του «παραδόξου» στη Γεωμετρία, στα Πλατωνικά στερεά, στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών όπου συμπεριλαμβάνεται και ένα απόσπασμα του Πλατωνικού διαλόγου «Θεαίτητος» μεταξύ του Σωκράτη και του Θεαίτητου του Αθηναίου (πρωτότυπο και μεταφρασμένο).

- *Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Γ. Παντελίδης, Α. Πούλος & Γ. Στάμου: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.*

Το βιβλίο αυτό εκδόθηκε έπειτα από διαγωνισμό που προκηρύχθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο κατά τον οποίο απαιτούνταν συγκεκριμένες προϋποθέσεις οι οποίες θα αναλυθούν σε επόμενη ενότητα. Στο σημείο αυτό αρκεί να αναφερθεί ότι πρόκειται για ένα εγχειρίδιο που περιέχει πλούσιο ιστορικό υλικό τόσο στο εισαγωγικό κεφάλαιο με μία εκτενή ιστορική αναδρομή στην γέννηση και ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην οποία συμπεριλαμβάνονται σε αρχαία ελληνική γλώσσα τα «αιτήματα» και οι «κοινές έννοιες» που υπάρχουν στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη όσο και στα επόμενα κεφάλαια με τη μορφή Ιστορικών σχολίων ανά ενότητα αλλά και σημειωμάτων στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Συνοδευόταν από το αντίστοιχο βιβλίο του καθηγητή το οποίο περιείχε οδηγίες διαπραγμάτευσης των θεμάτων στην σχολική τάξη με τη βοήθεια της ενσωμάτωσης της Ιστορίας της Γεωμετρίας με έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές και στη σύνδεση του μαθήματος με άλλα αντίστοιχα όπως αυτό της Άλγεβρας και της Τριγωνομετρίας. Αξιοσημείωτες είναι οι ιδέες στα πλαίσια της Ιστορίας που προσφέρονται στον εκπαιδευτικό ώστε να τις εκμεταλλευτεί κατά τη διδασκαλία και να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών δημιουργώντας τους ταυτόχρονα κίνητρα για την εμπλοκή τους στη διαδικασία.

- *Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης& Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 2001.*

Ένα βιβλίο με επίσης πλούσιο ιστορικό υλικό όπως και το προηγούμενο των Θωμαΐδη κ.α. που συνοδεύεται από το αντίστοιχο βιβλίο του καθηγητή. Στο βιβλίο του καθηγητή υπάρχει εκτενής περιγραφή της ιστορικής εξέλιξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των γεωμετρικών εννοιών κάτι που αποτελεί πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό ώστε να εντάξει την Ιστορία της επιστήμης του στις διδακτικές του προσεγγίσεις. Γίνονται αναφορές τόσο βιογραφικές σπουδαίων μαθηματικών όσο και στην ιστορική εξελικτική πορεία σημαντικών θεωρημάτων και γεωμετρικών κατασκευών. Με τη μορφή φύλλων εργασίας γίνεται η παροχή ιδεών στον εκπαιδευτικό σε κάθε ενότητα. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι στα φύλλα αυτά εργασίας δεν συναντάμε έντονη ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων παρά μόνο την προσέγγιση της ενότητας με τη βοήθεια εφαρμογών και ασκήσεων του αντίστοιχου βιβλίου του μαθητή. Υπάρχουν ως υλικό στην εισαγωγή του βιβλίου, δεν δίνονται όμως στον μαθητή προς

διαπραγμάτευση. Μένει στον ίδιο τον εκπαιδευτικό να σχεδιάσει το πλάνο της διδασκαλίας του ενσωματώνοντας ιστορικό υλικό και πηγές που του προσφέρονται.

2.3.2. Υποδείξεις ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Στα τέλη της δεκαετίας του 1990 και συγκεκριμένα το 1997 στα πλαίσια μιας ευρύτερης μεταρρύθμισης που αφορούσε στη βαθμίδα του Λυκείου με το Νόμο 2525/1997 (*Ενιαίο Λύκειο, πρόσβαση των αποφοίτων του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και άλλες διατάξεις)* γίνεται και η μεταρρύθμιση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών αλλά και στα σχολικά βιβλία του Λυκείου. Ακολουθεί η αντίστοιχη μεταρρύθμιση στην Τεχνολογική Επαγγελματική Εκπαίδευση (Τ.Ε.Ε.) σύμφωνα με το Νόμο 2640/1998.

Σύμφωνα με το άρθρο 7 του ν.2545/1997 στους βασικούς συντελεστές της εκπαίδευσης εκτός του προσωπικού όλων των κλάδων και των βαθμίδων της εκπαίδευσης, τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία, την εξασφάλιση αναγκαίων προϋποθέσεων για την εύρυθμη λειτουργία των σχολείων κ.α. (όπως είχαν οριστεί σύμφωνα με το ν. 1566/1985) προστίθεται και το Ε.Π.Π.Σ. (Ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών) το οποίο προσδιορίζει τους στόχους διδασκαλίας από το δημοτικό έως και το Λύκειο και προδιαγράφει τα πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύσσεται το περιεχόμενο των Αναλυτικών Προγραμμάτων. Το Ε.Π.Π.Σ καταρτίζεται σύμφωνα με τη γνώμη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Στο ίδιο άρθρο στην παρ. 2 αναφέρεται ότι τα διδακτικά βιβλία γράφονται σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα και τα προγράμματα σπουδών και η συγγραφή τους γίνεται είτε με προκήρυξη διαγωνισμού είτε με απευθείας ανάθεση σε έναν ή περισσότερους συγγραφείς ή σε νομικά πρόσωπα.

Με οδηγό, επομένως, τον παραπάνω νόμο προκηρύσσεται το 1999 διαγωνισμός συγγραφής των σχολικών εγχειριδίων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Χαρακτηριστικό αυτού του διαγωνισμού ήταν ότι **για πρώτη φορά οι υποδείξεις προς τους συγγραφείς περιείχαν σε πολύ μεγάλο βαθμό την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών**. Πιο συγκεκριμένα, οι οδηγίες ανάλογα με τους στόχους που έθετε το Πρόγραμμα Σπουδών(ΠΣ) (ΦΕΚ Β’ 1342, 30-6-1999) ήταν οι εξής:

1. Στην εισαγωγή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ένας από τους στόχους ήταν το να γνωρίσουν οι μαθητές τον τρόπο θεμελίωσης και ανάπτυξης της Γεωμετρίας με την αντίστοιχη οδηγία η εισαγωγή αυτή να είναι σύντομη και να αναφέρεται:
   – στο αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
   – στη διαφοροποίησή της από την πρακτική Γεωμετρία.
   – σε μία σύντομη **ιστορική αναδρομή** στη γέννηση και ανάπτυξή της.
2. Θα επισημανθεί η αξία της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη και να αναφερθούν **ιστορικά στοιχεία** σχετικά με τη μέθοδο αυτή. Στο ΠΣ τέθηκε ως στόχος το να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής με κανόνα και διαβήτη και μ' αυτή τη μέθοδο να παρουσιαστούν κατασκευές όπως του ευθυγράμμου τμήματος ίσου προς δοθέν, γωνίας ίσης προς δοθείσα και τόξου ίσου προς δοθέν.
3. Θα γίνει σύντομη **ιστορική αναφορά** στο 5^{ο} αίτημα του Ευκλείδη και να τονιστεί η ισοδυναμία του με το αξίωμα παραλληλίας. Οι οδηγίες του ΠΣ ανέφεραν ότι θα έπρεπε να γίνει και σχολιασμός του 5^{ου} αιτήματος.
4. Θα γίνει σύντομη **ιστορική αναφορά** στη μέτρηση και να αναφερθεί το αξίωμα Αρχιμήδου – Ευδόξου που κατοχυρώνει την ύπαρξη του μέτρου ενός τμήματος. Σύμφωνα με το ΠΣ, ο στόχος ήταν το να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια των ανάλογων τμημάτων.
5. Θα γίνει σύντομη **ιστορική αναφορά** στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και να αποδειχθεί η πρόταση : «ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την κάθετη πλευρά του δεν είναι ρητός αριθμός». Ο στόχος που τέθηκε ήταν να είναι σε θέση οι μαθητές να κατασκευάζουν τμήματα ίσα με $α\sqrt{2}$, $α\sqrt{3}$, $α\sqrt{5}$, όπου α δοθέν τμήμα.
6. Θα γίνει **ιστορική αναφορά** στο πρόβλημα της χρυσής τομής, ώστε να μπορούν οι μαθητές να διαιρούν ένα τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο.
7. Θα γίνει κατασκευή του ισοδύναμου προς το δοθέν πολύγωνο, τετραγώνου, και σύντομη **ιστορική αναφορά** στην απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος με τη βοήθεια εμβαδών. Ως στόχος του ΠΣ στο σημείο αυτό τέθηκε το να κατανοήσουν οι μαθητές το πρόβλημα τετραγωνισμού ενός κυρτού πολυγώνου.
8. Θα γίνει **ιστορική αναφορά** στη μέτρηση και στον τετραγωνισμό του κύκλου και σε άλλα άλυτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών της Αρχαιότητας. Ως

δραστηριότητα στις αντίστοιχες οδηγίες του ΠΣ υπήρξε το να γίνει διαπραγμάτευση κλασικών προβλημάτων τετραγωνισμού μικτόγραμμου σχήματος π.χ. μηνίσκοι του Ιπποκράτη.

9. Θα γίνει **ιστορική αναφορά** στα κανονικά στερεά.

Παρατηρείται έντονο το στοιχείο ένταξης της Ιστορίας στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δίνοντας τη δυνατότητα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές μιας διαφορετικής διδακτικής προσέγγισης. Τα βιβλία που γράφτηκαν βάσει των παραπάνω οδηγιών ήταν τα παρακάτω, τα οποία αποτελούνταν από το βιβλίο του μαθητή και το βιβλίο του καθηγητή και έχουν παρουσιαστεί στην προηγούμενη ενότητα ως προς το βαθμό ενσωμάτωσης των ιστορικών τους στοιχείων.

- Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Γ. Παντελίδης, Α. Πούλος & Γ. Στάμου: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.
- Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Γ. Παντελίδης, Α. Πούλος & Γ. Στάμου: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Βιβλίο του Καθηγητή. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.
- Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης& Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., 2001.
- Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης& Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Βιβλίο του Καθηγητή. Ο.Ε.Δ.Β., 2001.

2.3.3. Οι στόχοι των εισαγωγικών ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας

Στην πλειοψηφία των σχολικών εγχειριδίων που αναφέρθηκαν παραπάνω υπάρχει εισαγωγικό σημείωμα που εμπεριέχει ιστορικά στοιχεία εξέλιξης της επιστήμης της Γεωμετρίας, άλλοτε ως εκτενή αναφορά και άλλοτε ως σύντομη. Σύμφωνα με τις οδηγίες που έχουν δοθεί από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) τα τελευταία χρόνια για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α' Λυκείου, στόχος του εισαγωγικού κεφαλαίου είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής

Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιοπιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων. Όλα τα παραπάνω θα μπορούσαν να αναδειχθούν με τη βοήθεια της Ιστορίας αφού πρόκειται για διαχρονική εξέλιξη των παραπάνω μετρήσεων που φανερώνει την ιστορική πορεία των γεωμετρικών εννοιών (ΙΕΠ, 2018).

Οι υποδείξεις του ΙΕΠ συνεχίζουν :

[…]*Για να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.*

Σύμφωνα με τον Simmons (2016, σ.19) υπάρχει ένα παλιό ρητό της Αρμενίας που λέει ότι «Αυτός που δεν έχει την αίσθηση του παρελθόντος είναι καταδικασμένος να ζει μέσα στο στενό του σκοτάδι της δικής του γενιάς ». Τα μαθηματικά χωρίς ιστορία είναι τα μαθηματικά απογυμνωμένα από το ίδιο το μεγαλείο τους, γιατί, όπως και οι άλλες τέχνες και τα μαθηματικά είναι μία από τις ανώτατες τέχνες του πολιτισμού και αντλούν το μεγαλείο τους από το γεγονός ότι είναι μια ανθρώπινη δημιουργία.

Αυτή την αίσθηση του παρελθόντος των γεωμετρικών εννοιών καλούνται να καλύψουν τα εισαγωγικά σημειώματα αφού αποτελούν την πρώτη επαφή των μαθητών με το αντικείμενο που διαπραγματεύεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Σήμερα, χρησιμοποιείται συνήθως από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές ως ελεύθερο ανάγνωσμα. Στόχος όμως θα ήταν να αποτελέσει μέσο προτροπής των μαθητών ώστε να αναζητήσουν περαιτέρω πληροφορίες από διάφορες πηγές γύρω από τη συγκεκριμένη επιστήμη.

Τα σχολικά εγχειρίδια εμπεριέχουν γνώσεις, έννοιες, αντιλήψεις, αξίες και πρότυπα συμπεριφοράς που θεωρούνται στην εκάστοτε κοινωνία και εποχή απαραίτητα στοιχεία της διαπαιδαγώγησης του αυριανού πολίτη. Αποτελούν δείκτη του τύπου των γνώσεων και της ιδεολογίας που κυριαρχούν. Κοινωνικές και πολιτικές δυνάμεις επιδιώκοντας να ορίζουν τις διαδικασίες και τα πρότυπα κοινωνικοποίησης της νέας γενιάς προσπαθούν να ελέγχουν το σχολείο και κατ' επέκταση τη διαδικασία παραγωγής και συγγραφής τους (Βεντούρα, 1992).

Είναι επιπλέον φανερό ότι τα εισαγωγικά σημειώματα στα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζονται από τις τρέχουσες κοινωνικοπολιτισμικές και ταυτόχρονα πολιτικές

συνθήκες όπως αναφέραμε παραπάνω ότι συμβαίνει με τη συγγραφή όλων των βιβλίων και επηρεάζουν τη στάση των μαθητών και των εκπαιδευτικών απέναντι στη διδασκαλία του μαθήματος.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του βιβλίου του Νικολάου που πρωτοεκδόθηκε το 1950 μετά τον Εμφύλιο Πόλεμο όταν η Ελλάδα είχε ανάγκη την επανασύσταση και την ανάπτυξη. Το παρακάτω απόσπασμα (σχ. 2.14) του εισαγωγικού του σημειώματος αναφέρεται ακριβώς στην επαναμέτρηση της Γης από τους Αιγύπτιους και την ανακατανομή αυτής με σκοπό την ανάπτυξη του πολιτισμού τους.

Ὁσάκις ὁ Νεῖλος ἐκάλυπτε μέρος τῶν ἀγρῶν τῶν Αἰγυπτίων, ὁ Βασιλεὺς ἀπεστέλλε τοὺς μετρητάς, διὰ νὰ κανονίζωσι τὸν πληρωτέον φόρον ἀναλόγως πρὸς τὴν ὑπολειφθεῖσαν ἔκτασιν τοῦ ἀγροῦ ἑκάστου. Κατ' ἄλλας μαρτυρίας, οἱ μετρηταὶ ἠσχολοῦντο νὰ ὁρίζωσιν ἐκ νέου τὰ ὅρια τῶν ἀγρῶν τῶν Αἰγυπτίων μετὰ τὴν ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου.

Ἀπὸ τὴν ἀνάγκην αὐτήν, καθ' οἱανδήποτε ἔκδοχήν, ἐξεπήδησαν αἱ πρῶται πρακτικαὶ γνώσεις τῆς Γεωμετρίας.

Σχήμα 2.14:Απόσπασμα εισαγωγικού σημειώματος σχολικού εγχειριδίου Ν. Νικολάου: Θεωρητική Γεωμετρία 1950)

Η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1964 με το νομοθετικό διάταγμα 4379/1964 είχε ως σκοπό την αλλαγή του πνεύματος που επικρατούσε στην εκπαίδευση από τον 19^{ο} αιώνα με δωρεάν παιδεία, επέκταση της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, ακαδημαϊκό απολυτήριο, καθιέρωση της δημοτικής, διδασκαλία των αρχαίων από μετάφραση κ.α. Στα χρόνια της δικτατορίας, οι περισσότερες, αν όχι όλες, οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις του 1964 καταργήθηκαν. Επανήλθαν παλιά παιδαγωγικά συστήματα, η Δημοτική που ονομαζόταν «μητρική γλώσσα» διδασκόταν μόνο στις τρεις πρώτες τάξεις και από κει κι έπειτα διδασκόταν η Καθαρεύουσα που ονομαζόταν «Ελληνική Γλώσσα» (Γκλαβάς, 2010).

Το 1968 , στις αρχές της δικτατορίας, εκδίδεται το βιβλίο του Ιωαννίδη. Το εισαγωγικό του σημείωμα είναι εμφανώς εκτενέστερο του προηγούμενου (σχ. 2.15). Όταν η πολιτική που ακολουθείται την περίοδο αυτή είναι η ανύψωση του εθνικού φρονήματος υπάρχουν σημεία στα οποία διαφαίνεται η προσπάθεια του συγγραφέα να αναδείξει τη συμβολή του Ευκλείδη στην εξέλιξη της επιστήμης έναντι των άλλων λαών οι οποίοι στην προσπάθειά τους να την μελετήσουν και να αποδείξουν το 5^{ο} αίτημα κατάφεραν να το δεχθούν ως αξίωμα και να θεμελιώσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε σταθερή βάση.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀνωτέρω ε' ἀξιώματος ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς «α ἴ τ η μ α» καὶ οὐχὶ ὡς θεώρημα, ὅπως τὸ ἐθεώρησαν οἱ ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ματαίως προσπαθήσαντες νὰ τὸ ἀποδείξουν Μαθηματικοί.

Μόλις κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα διαπιστοῦται ὅτι ἂν ἤθελεν ἐπιχειρηθῇ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, οὐδεμία ἀντίφασις πρὸς τὰς εἰσαχθείσας προτάσεις προέρχεται.

Ἐκ τῆς διαπιστώσεως αὐτῆς δημιουργοῦνται αἱ προϋποθέσεις ἱδρύσεως τῶν ἀνωτέρω νέων Γεωμετριῶν. Ἑκάστη τούτων εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, Γεωμετρία ἑνὸς ἄλλου Χώρου, διαφόρου τοῦ Εὐκλειδείου. Δὲν ἔχει κατὰ ταῦτα νόημα ἡ ἐρώτησις : Ποία Γεωμετρία εἶναι ἡ ὀρθοτέρα. Καὶ αἱ δύο νεώτεραι Γεωμετρίαι εἶναι ὀρθαὶ ὅπως καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ «Προβολικὴ Γεωμετρία», τὴν ὁποίαν θὰ σπουδάσωμεν πολὺ ἀργότερον, περιέχει καὶ τὰς τρεῖς ὡς ἄνω Γεωμετρίας ὡς μερικάς, οὕτως εἰπεῖν, περιπτώσεις αὐτῆς.

Μετὰ τοὺς N. I. Labatchewsky καὶ B. Riemann ὁ D. Hilbert (1862-1943), ἀποβλέπων εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἐπὶ σταθερᾶς βάσεως, παρουσίασεν ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται πλήρως ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ σήμερον τὴν βάσιν τῆς ἀναπτύξεως τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας εἰς τὸ Σχολεῖον.

- *Σχήμα 2.15:Απόσπασμα εισαγωγικού σημειώματος σχολικού εγχειριδίου Ι. Ιωαννίδη: Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου (Θετικής Κατεύθυνσης) Τόμος 2ος (Γεωμετρία). 1968)*

Αυτό που επιπλέον παρατηρείται στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο του Ιωαννίδη είναι η εκπαιδευτική πολιτική που έχει ως στόχο την πατριδοκεντρική αντίληψη την οποία επιβάλλεται να αποκτήσουν οι μαθητές για το μεγαλείο του Ελληνικού έθνους και των Αρχαίων Ελλήνων. Βασικός σκοπός δε της μελέτης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μύηση των μαθητών σε έναν πειθαρχημένο και μονοσήμαντο τρόπο σκέψης, όπως φαίνεται από την αυστηρότητα της παρουσίασης πρωταρχικών γεωμετρικών εννοιών και αξιωμάτων.

Συνοψίζοντας, οι βασικοί στόχοι που εξυπηρετούνται με την παράθεση εισαγωγικών ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια είναι:

- Η δημιουργία συνδέσμων ανάμεσα στην Πρακτική Γεωμετρία του Γυμνασίου και στη Θεωρητική Γεωμετρία των τάξεων του Λυκείου.
- Η ανάπτυξη μιας αίσθησης του παρελθόντος της επιστήμης στους μαθητές δείχνοντάς τους πως τα μαθηματικά και ειδικότερα η Ευκλείδεια γεωμετρία που θα διδαχθούν είναι αποτέλεσμα μιας πλούσιας ιστορικής εξέλιξης και ανάπτυξης στο πέρασμα των αιώνων.
- Δίνουν μέσω της ιστορικής εξέλιξης ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα καταφέρουν οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με τις βασικές αρχές που διέπουν την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

2.3.4. Ποιος ο ρόλος των ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Εκτός των εισαγωγικών ιστορικών σημειωμάτων που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και γράφτηκαν για να εξυπηρετήσουν τους στόχους που αναφέρθηκαν παραπάνω, σημαντικό ρόλο παίζουν και τα ιστορικά σημειώματα που απαντώνται στις υπόλοιπες σελίδες του βιβλίου και δίνονται είτε στην αρχή των κεφαλαίων, είτε στο τέλος (συνηθέστερη μορφή) είτε ως ιστορικά σχόλια στις επιμέρους ενότητες εξυπηρετώντας τους ίδιους σκοπούς με την εισαγωγή. Επιπλέον όμως αποτελούν πηγή χρήσιμου υλικού ώστε ο εκπαιδευτικός με κατάλληλο σχεδιασμό να κάνει τη σύνδεση της ιστορικής εξέλιξης με την επαφή των μαθητών με το νέο γνωστικό αντικείμενο που πρόκειται να αντιμετωπίσουν. Πρόκειται για ιστορικές πηγές με τη μορφή βιογραφικών στοιχείων, φωτογραφιών ή και προβλημάτων που απασχόλησαν την ανθρωπότητα.

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν έχει επαρκείς γνώσεις ιστορίας των Μαθηματικών εφόσον στα Πανεπιστήμια δεν υπάρχει ως αυτόνομο μάθημα. Το αποτέλεσμα είναι όχι μόνο οι μαθητές αλλά και οι εκπαιδευτικοί να θεωρούν τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια ως απλά διακοσμητικά στοιχεία. (Θωμαϊδης, 1990).

Τα ιστορικά σημειώματα διαφέρουν στα σχολικά εγχειρίδια ως προς την θέση τους (πριν, ενδιάμεσα ή και μετά την παρουσίαση του νέου γνωστικού αντικειμένου), ως προς το περιεχόμενό τους (αν περιέχουν βιογραφικά στοιχεία ή εικόνες, αν πρόκειται για ιστορικά προβλήματα ή κατασκευές) και ως προς τον τρόπο που παρουσιάζουν την πορεία της ιστορικής εξέλιξης αν για παράδειγμα δίνονται ως μαθηματικοί προβληματισμοί στο πέρασμα των αιώνων και αδιέξοδα. Επιπλέον κάποια ιστορικά σημειώματα δίνονται ως απλές παραθέσεις προς ανάγνωση από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές ενώ άλλα έχουν καθαρά διδακτικό λόγο όπως ένα ιστορικό πρόβλημα που θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να λυθεί. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποια ιστορικά σημειώματα στα παραπάνω σχολικά εγχειρίδια που έχουν μελετηθεί. Στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1986) τα ιστορικά σημειώματα δίνονται στην αρχή των επιμέρους ενοτήτων και είναι κυρίως βιογραφικά στοιχεία που αποτελούν μία απλή παράθεση της ιστορίας που παρέχεται προς ανάγνωση. Ένα παράδειγμα αυτών η εικόνα (σχ.2.16) και τα βιογραφικά στοιχεία που δίνονται για την Αλεξανδρινή μαθηματικό και φιλόσοφο Υπατία (σχ.2.17) στην αρχή του κεφαλαίου της ομοιότητας.

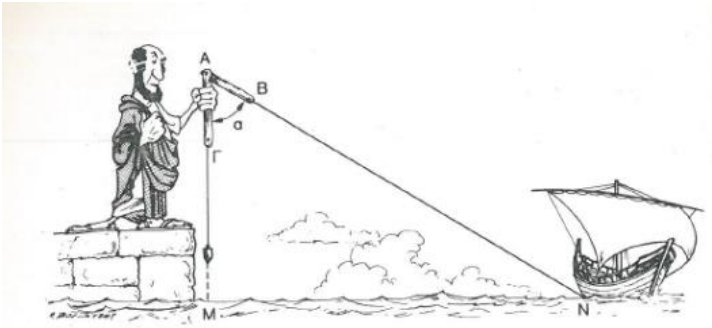
Σχήμα 2.16:Εικόνα Υπατίας Αλεξανδρινής από το σχολικό εγχειρίδιο Βαρουχάκη κ.α. (1986)

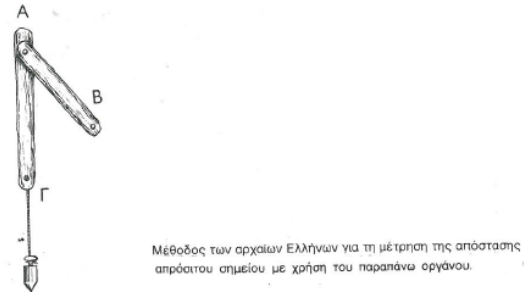
Υπατία

Μαθηματικός και φιλόσοφος, κόρη του Αλεξανδρινού μαθηματικού Θέωνα. Γεννήθηκε το 375 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια και μετά από τις σπουδές που έκανε εκεί πήγε στην Αθήνα όπου φοίτησε στη νεοπλατωνική Σχολή του Πρόκλου και του Ιεροκλή. Όταν γύρισε στην πατρίδα της ίδρυσε Σχολή και δίδασκε νεοπλατωνική φιλοσοφία, Μαθηματικά και Αστρονομία. Στις θρησκευτικές διαμάχες της εποχής εκείνης κράτησε προοδευτική στάση και αυτό στάθηκε η αιτία να συκοφαντηθεί και να βρεί μαρτυρικό θάνατο το 415 μ.Χ.

Σχήμα 2.17: Βιογραφικά στοιχεία της Υπατίας της Αλεξανδρινής από το σχολικό εγχειρίδιοΒαρουχάκη κ.α. (1986)

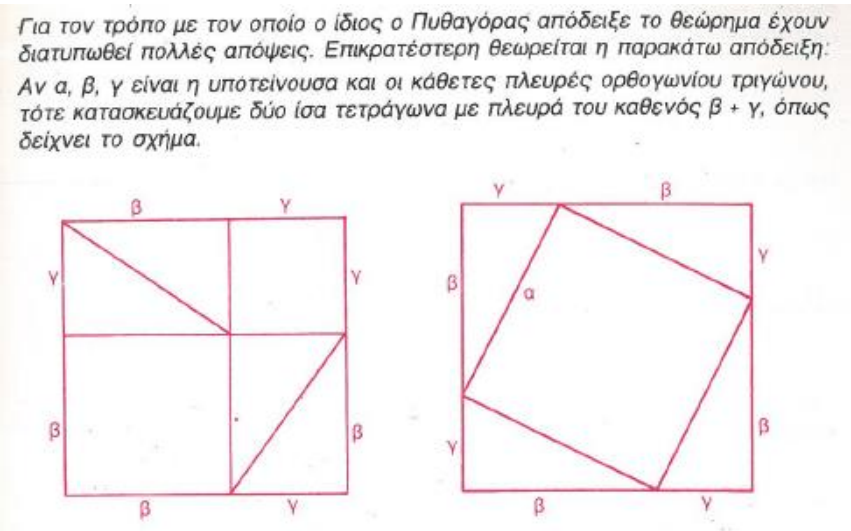
Στο βιβλίο των Αλιμπινίση κ.α. (1996) περιγράφεται με σκίτσα και σχήματα η μέθοδος μέτρησης απρόσιτων σημείων, σημείωμα το οποίο περιέχεται ενδιάμεσα του κεφαλαίου της ισότητας τριγώνων (σχ. 2.19). Η μέθοδος θα μπορούσε να συζητηθεί στην τάξη και να προτρέψει τους μαθητές να σκεφτούν τον τρόπο υπολογισμού και μέτρησης που παρουσιάζεται.





Σχήμα 2.19:Εικόνα από το σχολικό εγχειρίδιοΑλιμπινίση κ.α. (1996)

Στο ίδιο βιβλίο, στο τέλος του 4^{ου} κεφαλαίου δίνονται βιογραφικά στοιχεία για τη ζωή και το έργο του Θαλή. Γίνεται επίσης μία ιστορική αναφορά σε διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος (σχ. 2.20). Το συγκεκριμένο σημείωμα επιτρέπει, με κατάλληλο διδακτικό πλάνο από τον εκπαιδευτικό, την εμπλοκή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία αφού η ενότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος προσφέρεται για μελέτη και απασχόληση αυτών με τη μέθοδο της απόδειξης τόσο στην αξιωματική της μορφή όπως υπάρχει στα Στοιχεία του Ευκλείδη όσο και σε οπτικές – αντιληπτικές αποδείξεις όπως αυτή του Ινδού Bahskara (περίπου 1150 μ.Χ).



Σχήμα 2.20:Εικόνα από το σχολικό εγχειρίδιοΑλιμπινίση κ.α. (1996)

Στο σχολικό εγχειρίδιο που γράφτηκε το 1999 από τους Θωμαΐδη κ.α., στο οποίο γίνεται έντονη η ενσωμάτωση της ιστορίας και των σημειωμάτων, συναντάμε πλούσιο υλικό το οποίο με τη βοήθεια του αντίστοιχου βιβλίου του καθηγητή αποτελεί χρήσιμο

εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού. Ενδεικτικά θα μπορούσε να αναφερθεί το ιστορικό σημείωμα του 4ου Κεφαλαίου, στις Παράλληλες ευθείες, που αφορά στο 5ο αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη (σχ. 2.21)

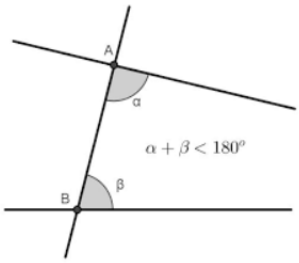
Καί ἐάν δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἅ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

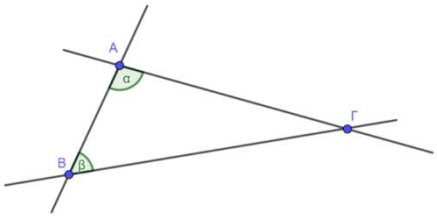
Σχήμα 2.21:Εικόνα από το σχολικό εγχειρίδιο Θωμαΐδη κ.α. (1999)

(Εάν ευθεία τέμνουσα δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες των δύο ορθών, τότε αν οι δύο ευθείες επεκταθούν επ' άπειρον, θα τέμνονται προς τα μέρη όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες).

Παρουσιάζεται επιπλέον η επίμονη προσπάθεια απόδειξης του παραπάνω αιτήματος στους αιώνες αλλά και η εύκολη σχετικά απόδειξη του αντιστρόφου του που αποτελεί τη 17η πρόταση στα Στοιχεία.

Ο Πρόκλος στο κύριο μαθηματικό του έργο "Σχόλια στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη". παρατήρησε ότι η πρόταση του 5ου αιτήματος των Στοιχείων του Ευκλείδη και η 17η πρόταση που αναφέρει « Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο από 2 ορθές» είναι μεταξύ τους αντίστροφες (σχ. 2.22)





Το 5ο αίτημα
*Υπόθεση:*α+β<180ο
Συμπέρασμα: οι δύο ευθείες θα τέμνονται στο άπειρο

Η 17η πρόταση
Υπόθεση: οι δύο ευθείες θα τέμνονται στο άπειρο, έστω στο σημείο Γ
*Συμπέρασμα:*α+β<180ο

Σχήμα 2.22

Υποθέτοντας ότι οι δύο ευθείες που τέμνονται από την ΑΒ τέμνονται, έστω στο Γ και σχηματίζουν το τρίγωνο ΑΒΓ αποδεικνύεται ότι οι γωνίες Α και Β έχουν άθροισμα

μικρότερο των 180°.

Σύμφωνα με το βιβλίο του καθηγητή γύρω από το συγκεκριμένο σημείωμα, με την κατάλληλη παρέμβαση του διδάσκοντα, η αναφορά στις προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος και τη Γεωμετρία των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών μπορεί να καλλιεργήσει ευνοϊκό κλίμα συζήτησης γύρω από το ρόλο των αξιωμάτων και τη σημασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως επιστήμης που μελετά το χώρο.

Στο έκτο κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου, στην ενότητα που παρουσιάζεται η χρήση γεωμετρικών τόπων στις γεωμετρικές κατασκευές περιγράφεται αρχικά η μέθοδος της Ανάλυσης και Σύνθεσης, μέθοδος που όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται χρησιμοποιούσαν οι μεγάλοι Έλληνες Γεωμέτρες. Γίνεται επομένως μία ιστορική αναδρομή της μεθόδου αυτής που με την κατάλληλη οργάνωση του εκπαιδευτικού θα μπορούσε να προκαλέσει το ενδιαφέρον και την εμπλοκή των μαθητών δίνοντάς τους προς κατασκευή διάφορα γεωμετρικά προβλήματα. Στο αντίστοιχο βιβλίο του καθηγητή παρουσιάζονται οδηγίες για τη συγκεκριμένη ενότητα και δίνεται επιπλέον υλικό αφού, όπως αναφέρεται, με όσο περισσότερα γεωμετρικά προβλήματα εμπλακεί ο μαθητής τόσο αυξάνεται και ο βαθμός κατανόησης της μεθόδου.

Στην ενότητα *Αξιοποίηση της Ιστορίας της Γεωμετρίας για την αναβάθμιση του μαθήματος* της παρούσας εργασίας αναφέρθηκε ο ρόλος της ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων στην Γεωμετρία με σκοπό την ανάδειξη της σχέσης μεταξύ της Γεωμετρίας και των υπολοίπων κλάδων των μαθηματικών, όπως αυτόν της Άλγεβρας. Δόθηκε για το σκοπό αυτό το παράδειγμα γεωμετρικής επίλυσης εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Η σύνδεση αυτή παρουσιάζεται τόσο στο βιβλίο του καθηγητή των Θωμαϊδη κ.α. (1999) όσο και στο βιβλίο του μαθητή των Αργυρόπουλου κ.α. (2001) πριν από την παρουσίαση της «χρυσής τομής».

Στο βιβλίο του καθηγητή των Αργυρόπουλου κ.α. (2001) υπάρχει εκτενές εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα με πληροφορίες που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό κατά το σχεδιασμό των διδακτικών του παρεμβάσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η σύνδεση, που προτείνεται να γίνει , μεταξύ του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του θεωρήματος του Fermat αλλά και της ύπαρξης των άρρητων αριθμών (σχ. 2.23).

Το Μεγάλο Θεώρημα του Φερμά. Όπως αναζητήσαμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

είναι φυσικό να τεθεί το αντίστοιχο ερώτημα για ανάλογες εξισώσεις ανώτερου βαθμού, όπως

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$x^4 + y^4 = z^4$$

.....

και γενικά $x^\nu + y^\nu = z^\nu$.

Στη σκέψη αυτή οδηγήθηκε το 1637 ο Γάλλος μαθηματικός Πιέρ Φερμά. Μελετώντας το όγδοο πρόβλημα του Βιβλίου ΙΙ της «Αριθμητικής» του Διόφαντου το οποίο ζητά να αναλυθεί δεδομένος τετράγωνος αριθμός α^2 σε άθροισμα δύο τετραγώνων, ο Φερμά διατύπωσε την εξής υπόθεση:

Πιέρ Φερμά (1608-1665

Δεν είναι δυνατόν να αναλυθεί ούτε κύβος σε δύο κύβους ούτε διτετράγωνος σε δύο διτετράγωνους ούτε εν γένει βαθμός άνω του τετραγώνου σε δύο βαθμούς με τον ίδιο εκθέτη. Ανακάλυψα γι' αυτό μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αλλά δε μου φτάνει το περιθώριο να τη γράψω.

Σχήμα 2.23: Απόσπασμα από το βιβλίο του καθηγητή Αργυρόπουλου κ.α. (2001)

Η ανάλυση των προγραμμάτων σπουδών και βιβλίων που προηγήθηκε μας επιτρέπει να δώσουμε μια απάντηση σχετικά με το ρόλο των ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

2.3.5. *Επαναλαμβανόμενα λάθη που συναντάμε στα ιστορικά σημειώματα*

Κατά τη μελέτη όλων των παραπάνω σχολικών εγχειριδίων ως προς την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στην εισαγωγή τους αλλά και στα επιμέρους κεφάλαια με τη μορφή πηγών και σημειωμάτων παρατηρείται επανάληψη αυτών και πολλές φορές «λάθη» που υπάρχουν σε μία έκδοση μεταφέρονται χωρίς καμία διόρθωση και σε επόμενες εκδόσεις.

Ενδεικτικές περιπτώσεις τέτοιων λαθών δίνονται παρακάτω:

Στο βιβλίο του Πάλλα (1945):Μεγάλη Γεωμετρία αναφέρονται τα:

Ὁ ἀριθμὸς π ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι ἀσύμμετρος ὑπερβατικός, ἤτοι ἀσύμμετρος χωρὶς νὰ εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Ὁ πρῶτος ὑπολογίσας τὸν ἀριθμὸν π εἶναι ὁ μέγας Ἕλλην μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης (287—212 π.Χ.) καὶ εὗρεν ὡς τιμὴν αὐτοῦ τὴν $\frac{22}{7}$=3,1428, ἡ ὁποία διαφέρει τῆς ἀληθοῦς τιμῆς 3,141592653··· ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

Ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ἀπέδειξε πρῶτος ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος.

Στο παραπάνω σημείωμα μπορούμε να κάνουμε δύο παρατηρήσεις. Στην πρώτη πρόκειται για την προσέγγιση του αριθμού π η οποία είναι μεν σωστή αλλά θα μπορούσε να δοθεί ως 3,1428571428571… που προκύπτει από το 22/7 ώστε να φαίνεται η περιοδικότητα.

Επιπλέον, ο αριθμός π χαρακτηρίζεται ως **ασύμμετρος** και όχι ως **υπερβατικός** αριθμός δηλαδή ως αριθμός που δεν μπορεί να είναι ρίζα κάποιας μη μηδενικής πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές.

Ο Lambert, το 1766, στο έργο του *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen* και το 1767 στο έργο του *Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables des Quantités Transcendentes Circulaires et Logarithmiques* δημοσίευσε την απόδειξή του για την αρρητότητα του π. Αργότερα, το 1882, ο F. Lindemann δημοσίευσε στο *Mathematische Annalen,* το άρθρο του *Über die Zahl π*. Στο άρθρο αυτό απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός (Αρώνη, 2008)

Τα παραπάνω επαναλαμβάνονται σε επόμενα βιβλία χωρίς να διορθωθούν, όπως και στο βιβλίο του Τόγκα (1950).

Ὁ Ἀρχιμήδης, ἀναχωρήσας ἀπὸ ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ σταματήσας εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα περὶ κύκλον μὲ 96 πλευρὰς ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ π περιλαμβάνεται μεταξὺ $3\frac{10}{71}$ καὶ $3\frac{10}{70}$. Ἡ τιμὴ $3\frac{10}{70}$ ἢ $\frac{22}{7} = 3{,}1428$ διαφέρει τῆς ἀληθοῦς τιμῆς διαφορὰν μικροτέραν τοῦ 0,001.

Αἱ τιμαὶ τοῦ π, τὰς ὁποίας εὑρῆκαν οἱ ἀνωτέρω σοφοὶ εἶναι τιμαὶ πλησιάζουσαι τοῦ π καὶ ὄχι ὀκριβεῖς, διότι ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Το 1968 στο βιβλίο του Πανάκη: *Μαθηματικά Ε' Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)*, διορθώνεται η αναφορά στον Lindemann με αυτή του Lambert αλλά για την τιμή του π παραμένει η ίδια προσέγγιση.

*** 74. Ἱστορικὸν σημείωμα.** Ἡ σταθερότης τοῦ λόγου τοῦ μήκους κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Ὁ μέγιστος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ κόσμου **Ἀρχιμήδης** (287 – 211 π.Χ.) ἐφήρμοσε πρῶτος τὴν μέθοδον τῶν περιμέτρων καὶ εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὸ κλάσμα :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3{,}1428, \text{ ἀκριβῶς δέ : } 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Κατὰ τὸ ἔτος 1958 μὲ τὸν ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν IBM 704 ὑπελογίσθησαν τὰ 10 000 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

Πρῶτος ὁ Ἑλβετὸς Μαθηματικὸς **Lambert** (1761 μ.Χ.) ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι **ἀσύμμετρος** ἀριθμός.

Βραδύτερον, κατὰ τὸ ἔτος 1882, ὁ Γερμανὸς Μαθηματικὸς **Lindemann** ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι καὶ **ὑπερβατικὸς** ἀριθμός. Δηλαδὴ ὁ π δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς.

Αυτό που παρατηρείται ως λανθασμένη αναφορά στο παραπάνω σημείωμα είναι ότι «ο π δεν είναι ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως με **πραγματικούς** συντελεστάς», αντί ρητών συντελεστών.

Στο σχολικό εγχειρίδιο του Ν. Νικολάου: Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. Ο.Ε.Δ.Β. (1970) φαίνεται να παραμένει διορθωμένη η αναφορά στην απόδειξη του Lindemann μ' αυτή του Lambert αλλά στην ενότητα της μέτρησης περιφέρειας δίνεται προσεγγιστικά η τιμή του π με τον ίδιο τρόπο.

*Ἱστορικὴ σημείωσις περὶ τοῦ π. Κατὰ τὸ 1761 ὁ μαθηματικὸς Lambert ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Πρῶτος ὅμως ὁ μέγας τῆς ἀρχαιότητος μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης ὥρισε κατὰ προσέγγισιν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{22}{7} = 3{,}1428$ ἀκριβῶς $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Η τιμή του π από τον Αρχιμήδη δίνεται με ορθό τρόπο στο βιβλίο του Παπανικολάου (1975), όπου χρησιμοποιείται το σύμβολο της προσέγγισης και όχι της ισότητας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἱπποκράτους φαίνεται ὅτι ἦτο γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς π ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἰκάζετο δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἔδωσε τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = \frac{22}{7} \simeq 3{,}1428$ διαφέρουσαν περίπου κατὰ $\frac{1}{1000}$ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ π.

Παρατηρούμε, επομένως ότι για δεκαετίες τα ιστορικά σημειώματα απλά υπήρχαν στα σχολικά εγχειρίδια επαναλαμβανόμενα από προηγούμενες εκδόσεις χωρίς να γίνεται ιδιαίτερος έλεγχος της ορθότητας των πληροφοριών τους.

2.3.6. Το βιβλίο του καθηγητή ως οδηγός ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων στη διδακτική προσέγγιση

Το κύριο χαρακτηριστικό του ιστορικού υλικού που υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια είναι η μεγάλη ποσότητα πληροφοριών και η πλούσια εικονογράφηση, χωρίς ωστόσο να παρουσιάζονται κάποιες μεθοδολογικές οδηγίες για το πώς να επωφεληθούν εκπαιδευτικοί και μαθητές διδακτικά από αυτό. Ωστόσο, οι αντίστοιχες προτάσεις και οδηγίες που υπάρχουν στο βιβλίο του καθηγητή τονίζουν τη θετική συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών με τρόπο ώστε να αφήνεται η πρωτοβουλία και οι ιδέες του εκπαιδευτικού, με αναφορά στη σχετική βιβλιογραφία.

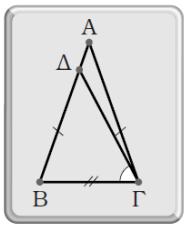
Οδηγός, επομένως, στην προσπάθεια ένταξης ιστορικών στοιχείων κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας αποτελεί το βιβλίο του καθηγητή, το οποίο, κάνει την εμφάνισή του τις δύο τελευταίες δεκαετίες ως συνοδευτικές εκδόσεις στα εγχειρίδια των Θωμαΐδη κ.α. (1999) και των Αργυρόπουλου κ.α. (2001).

Με την απαιτούμενη ενσωμάτωση ιστορικών αναφορών σ' αυτά σύμφωνα με τις οδηγίες του ΑΠΣ του 1999, παρατηρούμε ότι τα δύο βιβλία που προαναφέρθηκαν δίνουν όχι μόνο οδηγίες για την θεωρητική κάλυψη των επιμέρους ενοτήτων και πρακτική βοήθεια στον εκπαιδευτικό με τη μορφή σχεδίων μαθήματος αλλά προτείνουν ταυτόχρονα επιπλέον υλικό, βιβλιογραφικές πηγές και σημειώματα που δύνανται οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιήσουν προκειμένου να σχεδιάσουν τις διδακτικές τους παρεμβάσεις με σκοπό την βαθύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές.

Πιο συγκεκριμένα, στο βιβλίο των Θωμαΐδη κ.α. (1999) παρουσιάζεται σε κάθε κεφάλαιο ενδεικτικό υλικό αξιοποίησης, όπως για παράδειγμα, στο 3^{ο} κεφάλαιο όπου στην προσπάθεια του εκπαιδευτικού να γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι το αντίστροφο των θεωρημάτων δεν θεωρούνται «αυτονόητα» αλλά απαιτούν την αποδεικτική διαδικασία, προτείνεται να αναλυθεί κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος: «Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες», η απόδειξη του αντιστρόφου του δηλαδή « Αν σε ένα τρίγωνο δύο γωνίες είναι ίσες, τότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές» (σχ. 2.24)

Παραθέτουμε ενδεικτικά την απόδειξη που έδωσε ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία»:

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Υποθέτουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι άνισες, π.χ. $AB > A\Gamma$. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $\Delta B = A\Gamma$. Από τα παραπάνω προκύπτει, σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ισότητας, ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ, δηλαδή το μικρότερο τρίγωνο είναι ίσο προς το μεγαλύτερο. Αυτό, όμως, είναι άτοπο. Επομένως, οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ δεν μπορεί να είναι άνισες· άρα, είναι ίσες.



Ευκλείδης: *Στοιχεία*, Βιβλίο Ι, Πρόταση 6.

Σχήμα 2.24: Απόσπασμα από το βιβλίο του καθηγητή των Θωμαΐδη κ.α. (1999)

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού των Αργυρόπουλου κ.α. (2001) , πρωτεύουσα θέση έχουν τα σχέδια μαθήματος και τα φύλλα εργασίας που προτείνονται σε κάθε ενότητα. Στο εκτενές όμως εισαγωγικό ιστορικό σημείωμα παρατίθεται υλικό που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί επιπλέον, σε μια προσπάθεια ιστορικής σύνδεσης των ενοτήτων με την εξέλιξη των εννοιών που διαπραγματεύονται μέσα στους αιώνες. Παράδειγμα της σύνδεσης αυτής αποτελεί η πρόταση που παρουσιάστηκε παραπάνω για την αξιοποίηση του Πυθαγορείου θεωρήματος στο «πέρασμα» στο Θεώρημα του Fermat.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Περιγραφή της έρευνας

Στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας αυτής έγινε μία προσπάθεια ανάδειξης της Ιστορίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως εργαλείο για την αναβάθμιση του μαθήματος εφόσον, όπως αναφέρθηκε και μελετήθηκε στις προηγούμενες ενότητες, το μάθημα ολοένα «χάνει έδαφος» σε σχέση με τα υπόλοιπα μαθηματικά αντικείμενα που διδάσκονται στις τρεις τάξεις του Λυκείου. Ενδιαφέρον, επομένως, θα παρουσίαζε η γνώση των απόψεων όλων των εμπλεκόμενων με το μάθημα, εκπαιδευτικών και μαθητών, όπως και οι έρευνες οι οποίες παρουσιάστηκαν εκτενέστερα και αφορούσαν όχι μόνο στην περιοχή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά και στις υπόλοιπες μαθηματικές περιοχές. Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν οι στάσεις των μαθητών/τριών της Β' Λυκείου απέναντι στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τη χρήση της Ιστορίας δηλαδή με προσέγγιση μέσω ιστορικών πηγών, στοιχείων, σημειωμάτων αλλά και μέσω παρουσίασης ιστορικών εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση γωνιών και αποστάσεων. Η παραπάνω προσέγγιση έγινε έπειτα από κατάλληλο διδακτικό σχεδιασμό ο οποίος περιλάμβανε κυρίως μία σειρά διδακτικών παρεμβάσεων και την διερεύνηση των στάσεων των μαθητών απέναντι σ' αυτές. Η έρευνα, επομένως, χωρίστηκε σε δύο κύριες φάσεις. Στην πρώτη φάση διεξήχθησαν οι διδακτικές παρεμβάσεις και στη δεύτερη φάση συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν οι απόψεις των μαθητών/τριών.

3.2. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της έρευνας είναι να διερευνηθεί αν η ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επηρεάζει τους μαθητές/τριες στον τρόπο που προσεγγίζουν το μάθημα και παράλληλα να αναδειχθεί η Ιστορία ως εργαλείο αναβάθμισης του μαθήματος αναφορικά με τη σημασία και τη χρησιμότητά του. Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις είναι τα εξής:

- Πώς αντιμετωπίζεται το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τους μαθητές/τριες που φοιτούν στο Λύκειο;
- Πώς προσδιορίζουν οι μαθητές/τριες την έως τώρα ενασχόλησή τους με τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια;

- Πως επιδρά η ενσωμάτωση της ΙτΓ στην αντιμετώπιση του μαθήματος από τους μαθητές/τριες;

3.3. Δείγμα

Οι 66 από τους 69 μαθητές και μαθήτριες της Β' τάξης ενός Γενικού Λυκείου του Νομού Χαλκιδικής αποτέλεσαν το δείγμα της παρούσας έρευνας. Οι παραπάνω μαθητές χωρισμένοι σε τρία τμήματα παρακολούθησαν στα πλαίσια του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εστιάζοντας σε συγκεκριμένες ενότητες που θα αναλυθούν εκτενέστερα παρακάτω. Συμμετείχαν ενεργά στην ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων με σκοπό τη βαθύτερη κατανόηση τόσο της χρησιμότητας του μαθήματος σε προβλήματα καθημερινής ζωής όσο και της αποδεικτικής διαδικασίας. Μιας διαδικασίας που αποτελεί βάση όχι μόνο στο συγκεκριμένο μάθημα αλλά και σε όλα τα υπόλοιπα μαθηματικά πεδία όπως της Άλγεβρας και της Ανάλυσης.

3.4. Το εργαλείο της έρευνας

Με τον όρο στάσεις αποδίδεται στα Ελληνικά ο αγγλικός όρος attitudes. Οι στάσεις των μαθητών σχετίζονται με την επίδοσή τους, με τη μάθηση και την επιμονή που επιδεικνύουν, ενώ διαμορφώνουν και την ευρετική-επιλυτική συμπεριφορά τους (Relichetal., 1994; Ernest, 1989). Για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, η έννοια της στάσης καθορίζεται ως η συναισθηματική τάση ενός ατόμου να αντιδρά θετικά ή αρνητικά απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών (Freedman, 1997; Koballa, 1988). Κρίθηκε, επομένως απαραίτητη η σύνταξη ενός ερωτηματολογίου που θα κάλυπτε όσο το δυνατόν ικανοποιητικότερα ολόκληρο το φάσμα των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν στην αρχή της έρευνας. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο το ερωτηματολόγιο αποτελείται από διατυπώσεις μέσω των οποίων ελέγχεται η θετική ή αρνητική στάση των μαθητών/τριών απέναντι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία γενικά και ειδικότερα απέναντι στην ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία της.

Οι ερωτήσεις που περιείχε το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο ήταν τόσο κλειστού τύπου κλίμακας Likert αλλά και ανοικτού τύπου ώστε να περιγράψουν με όποιον τρόπο επιθυμούν τα συναισθήματα και τις συμπεριφορές τους. Το ερωτηματολόγιο χωρίστηκε

σε τέσσερα μέρη.

Στο Α' μέρος του ερωτηματολογίου συγκεντρώθηκαν γενικά στοιχεία κυρίως σε ότι αφορούσε το φύλο, την ηλικία και την ομάδα προσανατολισμού που ανήκαν οι μαθητές . Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι ενώ υπήρχε ερώτημα ηλικίας δεν θα μπορούσαν να εξαχθούν ιδιαίτερα συμπεράσματα στην έρευνα αφού ο πληθυσμός μας είναι μαθητές της ίδιας τάξης άρα και παρόμοιας ηλικίας (16-17 ετών) .

Το Β' μέρος επιχειρεί να διερευνήσει τις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δόθηκαν 10 διατυπώσεις στις οποίες οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να επιλέξουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν σε μία πεντάβαθμη κλίμακα Likert (Καθόλου – Πάρα πολύ). Οι διατυπώσεις που διερευνούν τις στάσεις είναι οι ακόλουθες:

- Η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με ευχαριστεί.
- Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορώ να χρησιμοποιώ δικές μου ιδέες
- Η Γεωμετρία είναι δυσκολότερη από όλα τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα
- Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη σε προβλήματα της καθημερινής ζωής
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι δύσκολες στην κατανόηση
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων με βοηθούν να λύσω τις ασκήσεις
- Δυσκολεύομαι στην κατασκευή των κατάλληλων γεωμετρικών σχημάτων
- Θα μου είναι χρήσιμη η γνώση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα μαθηματικά της Γ Λυκείου
- Συνήθως αισθάνομαι άνετα κατά τη διάρκεια των διαγωνισμάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία
- Αφιερώνω χρόνο στη μελέτη των αποδείξεων των θεωρημάτων και των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το Γ' μέρος αφορούσε τις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στη μελέτη των ιστορικών σημειωμάτων του σχολικού εγχειριδίου και στη διδασκαλία του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με χρήση της Ιστορίας της. Δόθηκαν 11 διατυπώσεις στις οποίες οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να επιλέξουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν σε μία πεντάβαθμη κλίμακα Likert (Καθόλου – Πάρα πολύ). Οι διατυπώσεις που διερευνούν τις στάσεις είναι οι ακόλουθες:

- Βρίσκω ενδιαφέρον το μάθημα της Ιστορίας.
- Θα μ' ενδιέφερε να μάθω την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών.
- Αφιερώνω χρόνο διαβάζοντας τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών.
- Βρίσκω ενδιαφέρουσα την Ιστορία της Γεωμετρίας.
- Το μάθημα της Γεωμετρίας έγινε πιο κατανοητό με τη χρήση της Ιστορίας.

- Μπερδεύτηκα περισσότερο από τη σύνδεση της Γεωμετρίας με την Ιστορία της.
- Τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου της Γεωμετρίας με αφήνουν αδιάφορο/η.
- Με την ενσωμάτωση της ΙτΓ στη διδασκαλία συνεργάστηκα καλύτερα με τους συμμαθητές μου.
- Κατανόησα καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων που διαπραγματευτήκαμε με τη χρήση της ΙτΓ.
- Τα Ιστορικά σημειώματα με βοήθησαν να κατανοήσω τη διαχρονική και πολυπολιτισμική εξέλιξη της Γεωμετρίας.
- Η ενασχόληση διαφόρων λαών με τη Γεωμετρία μου έδωσαν κίνητρο να ασχοληθώ περισσότερο με τις αποδείξεις του μαθήματος.

Στο Δ' μέρος του ερωτηματολογίου υπήρχαν 3 ερωτήσεις ανοιχτού τύπου. Οι ερωτήσεις αυτές ήταν οι εξής:

- Είχατε παλαιότερη εμπειρία από διδασκαλία Μαθηματικών με τη χρήση Ιστορικών σημειωμάτων ή αναφορές σε ιστορικά γεγονότα της Μαθηματικής επιστήμης;
  Αν απαντήσατε Ναι, ποιο αντικείμενο των μαθηματικών αφορούσαν;
- Περιγράψτε με λίγα λόγια τις εντυπώσεις σας από τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω της Ιστορίας του.
- Προτείνετε αλλαγές που θα μπορούσαν να γίνουν στο μάθημα της Γεωμετρίας ώστε να γίνει πιο ενδιαφέρον και κατανοητό.

3.5. Ερευνητική διαδικασία

Για να γίνει η διερεύνηση των στάσεων των μαθητών/τριών απέναντι στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσω της Ιστορίας της και των ιστορικών σημειωμάτων που αναφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια, κρίθηκε σκόπιμη η πραγματοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων αυτής της μορφής. Μεταξύ των περιοχών και των ενοτήτων των Μαθηματικών υπάρχουν κάποιες που προσφέρονται για διδακτική προσέγγιση με χρήση ιστορικών στοιχείων. Σύμφωνα με τους Tzanakis, Arcavi et al, (2002) υπάρχουν προβλήματα με έξυπνες, εναλλακτικές ή υποδειγματικές λύσεις όπως:

(α) Πολλές απλές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος, οι οποίες εμφανίστηκαν σε διαφορετικούς πολιτισμούς

(β) Απόδειξη του Γάλλου μαθηματικού Dandelin για τον χαρακτηρισμό των κωνικών

τομών ως γεωμετρικό τόπο σημείων, χρησιμοποιώντας δύο σφαίρες εφαπτόμενες τον κώνο και το επίπεδο.

(γ) Διάφορες αποδείξεις του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας και πιο εποικοδομητικές και αναλυτικές αποδείξεις βάσει της στοιχειώδους θεωρίας αναλυτικών συναρτήσεων . Αποδείξεις δηλαδή που χρησιμοποιούν την ανάλυση και την τοπολογική έννοια της συνέχειας των πραγματικών αριθμών ή των μιγαδικών συναρτήσεων.

Στα πλαίσια επομένως του Αναλυτικού προγράμματος για τη Β' Λυκείου οι ενότητες που επιλέχθηκαν είναι η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων (μετά τη διδασκαλία 7ου και 8ου κεφαλαίου που αναφέρονται στο θεώρημα του Θαλή και στην ομοιότητα τριγώνων αντίστοιχα) και οι Μετρικές σχέσεις στα ορθογώνια τρίγωνα και συγκεκριμένα η παρουσίαση του Πυθαγορείου θεωρήματος (στο 9ο κεφάλαιο). Ως προς τη δεύτερη διδακτική παρέμβαση, η απόδειξη που αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο γίνεται με τη χρήση της ομοιότητας τριγώνων, την οποία έχουν διδαχθεί οι μαθητές/τριες στο αμέσως προηγούμενο κεφάλαιο. Χρησιμοποιώντας όμως την Ιστορία της Γεωμετρίας παρουσιάστηκε στους μαθητές η ύπαρξη άλλων τριών αποδείξεων αυτού, που γίνονται με τη χρήση των εμβαδών επιπέδων βασικών σχημάτων (του Ευκλείδη, του Bahskara και του Garfield). Επιλέχθηκε οι διδακτικές παρεμβάσεις να γίνουν στο τέλος του σχολικού έτους εφόσον καλύπτουν μεγάλο και σημαντικό μέρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπως η ισότητα και ομοιότητα τριγώνων, παράλληλες ευθείες, γωνίες με πλευρές κάθετες, εμβαδά βασικών σχημάτων και ισοδύναμα σχήματα. Για το λόγο αυτό αφιερώθηκε μία διδακτική ώρα για την επανάληψη των παραπάνω εννοιών και ζητήθηκε από τους μαθητές να ανατρέξουν στα σχολικά εγχειρίδια της Α' και Β' τάξης του Λυκείου. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες 3 ή 4 ατόμων συμπληρώνοντας ένα κατάλληλα σχεδιασμένο φύλλο εργασίας επαναληπτικού χαρακτήρα.

Στην κατασκευή των φύλλων εργασίας των διδακτικών παρεμβάσεων περιλήφθηκαν δραστηριότητες βάσει των οποίων μπορούν να διερευνηθούν τα ερωτήματα της παρούσας έρευνας. Εφαρμόστηκαν πιλοτικά οι διδακτικές παρεμβάσεις και το ερωτηματολόγιο σε ένα μικρό δείγμα 10 μαθητών ενός Γενικού Λυκείου της Θεσσαλονίκης ώστε να διορθωθούν και να συμπληρωθούν τυχόν παραλείψεις ως προς τη ροή των παρεμβάσεων και ως προς το περιεχόμενο του ερωτηματολογίου. Οι παραπάνω ενέργειες γίνανε ώστε να διασφαλιστεί η αξιοπιστία και η εγκυρότητα της παρούσας μελέτης.

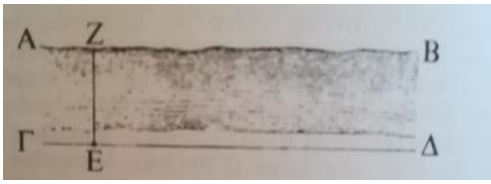
Λόγω του ότι το ερωτηματολόγιο απευθύνθηκε σε ανήλικους μαθητές και στα πλαίσια της δεοντολογίας ζητήθηκε από τους κηδεμόνες τους ενυπόγραφη άδεια προς

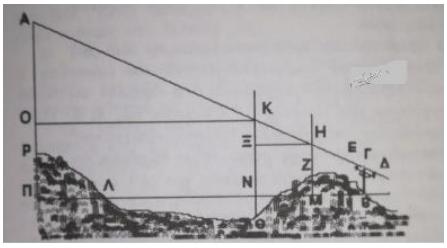
την ερευνήτρια προκειμένου να προχωρήσει στην συλλογή και καταχώρηση των απόψεων και στάσεων. Μοιράστηκε επομένως στους κηδεμόνες κείμενο (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ) μέσω του οποίου παρουσιάστηκε ο σκοπός της έρευνας αλλά και η διαβεβαίωση ότι τα στοιχεία θα συλλεχθούν και θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τις ανάγκες της έρευνας αλλά και δεν θα αποτελέσουν κριτήριο αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Από τους γονείς και κηδεμόνες των 69 μαθητών/τριών συλλέχθηκαν 66 συναινέσεις. Για τους 3 μαθητές που υπολείπονταν σημειώνεται ότι παρακολούθησαν κανονικά τις διδακτικές παρεμβάσεις, συμμετείχαν ενεργά αλλά δεν τους δόθηκε το ερωτηματολόγιο της έρευνας εφόσον δεν υπήρχε η έγκριση των γονέων τους.

Στους μαθητές κάθε τμήματος της Β' Λυκείου δόθηκε το φυλλάδιο του ερωτηματολογίου (Παράρτημα ΙΙ) στάσεων και διατέθηκε μία διδακτική ώρα για την συμπλήρωσή του, παρουσία του εκπαιδευτικού. Ζητήθηκε από τους μαθητές να μην αναγράψουν το όνομά τους στο φυλλάδιο για να εξασφαλιστεί η ανωνυμία. Διευκρινίστηκε δε στους μαθητές ότι πρόκειται για ένα ερωτηματολόγιο που θα βοηθήσει να κατανοήσουμε πως αισθάνονται απέναντι στη χρήση της Ιστορίας της Γεωμετρίας ως εργαλείο στη διδασκαλία της.

3.5.1. 1η Διδακτική παρέμβαση (8ο Κεφάλαιο – Μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων)

Στο έργο του Ήρωνα *Περί Διόπτρας* περιγράφονται τρόποι υπολογισμού απρόσιτων αποστάσεων όπως ύψη βουνών, πλάτος ποταμών (σχ. 3.1). Προβλήματα που σήμερα επιλύονται με κατάλληλα όργανα, όμως βρίσκουν σ' αυτά εφαρμογή προτάσεις της Ευκλείδειας αλλά και της πρακτικής Γεωμετρίας, όπως το Θεώρημα του Θαλή, τα όμοια τρίγωνα, ιδιότητες αναλογιών.





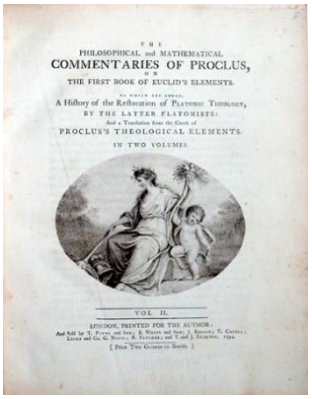
Σχήμα 3.1: Εικόνες από το βιβλίο «Ήρωνος Αλεξανδρέως Περί Διόπτρας», Βιβλιοθήκη των Ελλήνων, Αθήνα 1997)

Πιο συγκεκριμένα, ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς εξηγεί με ποιο τρόπο ο μηχανικός Ευπαλίνος από τα Μέγαρα χάραξε το γνωστό Ευπαλίνειο όρυγμα στο σημερινό Πυθαγόρειο της Σάμου, το 520 π.Χ.

Ως αφορμή για την παρέμβαση και την ενασχόληση των μαθητών/τριών με την μέτρηση δίνονται οι αναφορές στη μέτρηση του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή, από τον σχολιαστή των Στοιχείων του Ευκλείδη, Πρόκλο αλλά και του Πλουτάρχου στα Ηθικά.

Το κύριο μαθηματικό έργο του Πρόκλου είναι τα *"Σχόλια στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη"* (σχ. 3.2). Εκεί, πέραν των εκτεταμένων σχολίων (700 σελίδες περίπου), παραθέτει στην εισαγωγή ένα ιστορικό σημείωμα των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών. Ξεκινώντας από την εποχή του Θαλή φτάνει μέχρι την εποχή του Ευκλείδη, διατρέχοντας μια χρονική περίοδο περίπου τριακοσίων ετών, και αναφέρει 24 γεωμέτρες καθώς και τη συμβολή κάθε ενός στη γεωμετρία.

Στο έργο αυτό ο Πρόκλος αναφέρει τη μέτρηση του ύψους πυραμίδας της Αιγύπτου από τον Θαλή.


THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
A History of the Restoration of Platonic Theology,
BY THE LATTER PLATONISTS:
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.
VOL. II.
LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR.

Σχήμα 3.2: Εξώφυλλο στο βιβλίο «Σχόλια στο Πρώτο Βιβλίο του Ευκλείδη», έκδοση 1791

Στο έργο *«Ηθικά»* του Πλούταρχου (1ος - 2ος αιώνας μ.Χ.) γίνεται επίσης αναφορά στη μέτρηση αυτή από τον Θαλή.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος με τις αστρονομικές του γνώσεις ήξερε ότι στη περιοχή της Γκίζας μια συγκεκριμένη μεσημβρία οι ακτίνες του ήλιου σχημάτιζαν γωνία 45° με το επίπεδο του εδάφους (και διερχόταν από τον άξονα της μεγάλης πυραμίδας). Στάθηκε μπροστά στη πυραμίδα, χάραξε με το ραβδί του ένα τόξο με ακτίνα το ύψος του και

περίμενε τη στιγμή που η σκιά του άγγιξε το τόξο. Τότε όπως το μήκος της σκιάς του ήταν ίσο με το ύψος του, έτσι και το ύψος της πυραμίδας ήταν ίσο με το μήκος της σκιάς της. Δηλαδή το ύψος της ήταν ίσο με το άθροισμα του μισού της πλευράς της βάσης της και του μήκους της προεξέχουσας σκιάς της.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στους μαθητές/τριες με σκοπό να έρθουν σε μία πρώτη επαφή με τη μέτρηση που θα ακολουθήσει στο φύλλο εργασίας που περιέχει τις δραστηριότητες ενασχόλησής τους.

Διδακτικοί στόχοι : Οι μαθητές/τριες πρέπει:

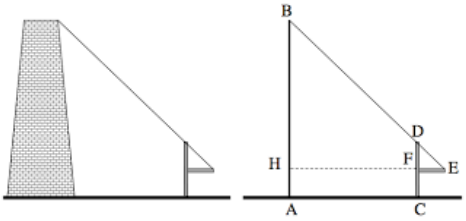
1) Να γνωρίσουν ιστορικά στοιχεία που αφορούν στον Θαλή τον Μιλήσιο και στον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό συνδέοντας αυτούς με την αναφορά τους στα Στοιχεία του Ευκλείδη.
2) Να γνωρίσουν και να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν εργαλεία μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων όπως το εργαλείο του Gerbert d' Aurillac του $10^{ου}$ αιώνα μ.Χ.
3) Να κατανοήσουν βαθύτερα τη χρήση της ομοιότητας τριγώνων και των αναλογιών σε προβλήματα καθημερινής ζωής.

Η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε τρεις φάσεις.

<u>1η Φάση</u>: (1η διδακτική ώρα) Οι μαθητές/τριες χωρίστηκαν σε ομάδες των 4 ατόμων . Ζητήθηκε από κάθε ομάδα σε προηγούμενη διδακτική ώρα να συγκεντρώσει ιστορικά στοιχεία γύρω από τη ζωή και το έργο του Θαλή και του Ήρωνα και να τα παρουσιάσουν με όποιον τρόπο επιθυμούν στην ολομέλεια της τάξης.

<u>2η Φάση</u>: (2η διδακτική ώρα) Έγινε παρουσίαση σε βιντεοπροβολέα ιστορικών πηγών και σημειωμάτων που αναδεικνύουν τη σπουδαιότητα του έργου των Θαλή και Ήρωνα. Ταυτόχρονα παρουσιάστηκε η κατασκευή εργαλείου του Gerbert d' Aurillac που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση απρόσιτων υψών κατά τον $10^{ο}$ αιώνα π.Χ. (σχ. 3.3)

Σχήμα 3.3: Ανακατασκευή εργαλείου του Gerbertd' Aurillac



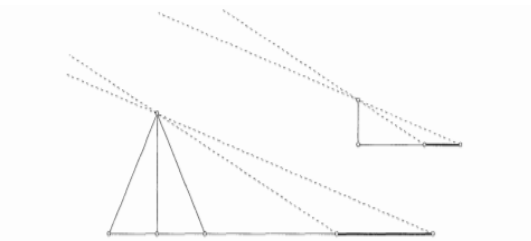
Σχήμα 3.4: Λειτουργία του εργαλείου του Gerbertd'Aurillac

Ακολούθησε συζήτηση με τους μαθητές γύρω από τα τμήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας πάνω στα οποία στηρίζεται η λειτουργία του παραπάνω εργαλείου για τη μέτρηση του απρόσιτου ύψους (σχ. 3.4).

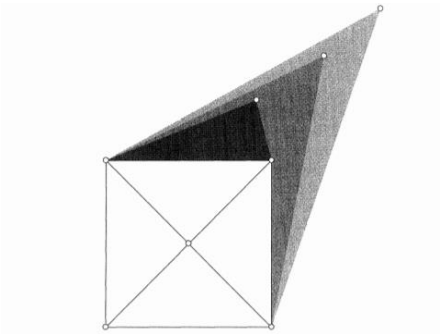
<u>3η Φάση</u>: (3η και 4η διδακτική ώρα) Μοιράστηκε στις ομάδες των μαθητών/τριών από ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Ι) με τη βοήθεια του οποίου προσπάθησαν να σκεφτούν τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να είχε σκεφτεί και ο Θαλής ο Μιλήσιος ώστε να υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας που του ζητήθηκε.

Προς συζήτηση, στο τέλος της 3ης ώρας της διδακτικής παρέμβασης, τέθηκε και η περίπτωση της μέτρησης από το Θαλή να μην αληθεύει. Δόθηκε το εξής δίλημμα στους μαθητές/τριες: Πού θα μπορούσαμε να στηρίξουμε την αμφισβήτηση της παραπάνω μέτρησης του ύψους της πυραμίδας. Σκοπός του ερωτήματος ήταν να έρθουν στην επιφάνεια αντιρρήσεις που έχουν δοθεί κατά καιρούς, όπως το αν στην πραγματικότητα χρησιμοποιήθηκε μία ράβδος από τον Θαλή , η πυραμίδα δεν είναι ραβδί άρα το μεγαλύτερο μέρος της σκιάς της θα βρισκόταν κάτω από τη βάση της με δεδομένη τη δυσκολία της μέτρησης του μήκους της. Σύμφωνα με τον Loria (όπως αναφ. στον Πρίντεζη, 2019) κάποιοι συγγραφείς παρακάμπτουν αυτή τη δυσκολία αναφέροντας ότι ο Θαλής δεν μέτρησε ύψος πυραμίδας αλλά ενός οβελίσκου.

Με ποιο τρόπο ο Θαλής κατάφερε να ξεπεράσει το πρόβλημα της σκιάς; Ένας τρόπος περιγράφεται από τους Redlin, Viet καιWatson (2000) (σχ. 3.5) όπου αναφέρεται πως ο Θαλής πρέπει να επισκέφθηκε την πυραμίδα σε μια στιγμή που η άκρη της σκιάς βρισκόταν μακριά από τη βάση της πυραμίδας και να σημείωσε τη θέση της άκρης της σκιάς. Στη συνέχεια, πρέπει να περίμενε τη επιμήκυνση της σκιάς. Αυτή η μέθοδος φαίνεται να επιλύει το πρόβλημα υπολογισμού του μήκους της σκιάς αφού δεν υπάρχει τμήμα αυτής κάτω από τη βάση της πυραμίδας αλλά φέρνει στην επιφάνεια ένα δεύτερο πρόβλημα εφόσον η σκιά δεν επιμηκύνεται απλά, αλλά αλλάζει και θέση (σχ. 3.6)

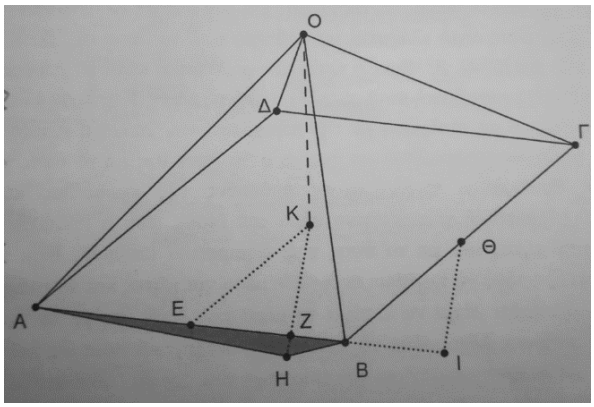


Σχήμα 3.5: Εικόνα επιμήκυνσης της σκιάς, Redlin,Viet&Watson,2000



Σχήμα 3.6: Εικόνα επιμήκυνσης της σκιάς-κάτοψη, Redlin, Viet&Watson,2000

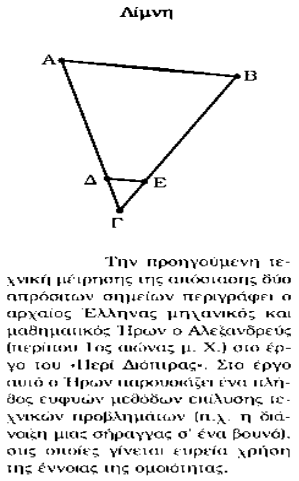
Ένας δεύτερος τρόπος περιγράφεται παρακάτω (σχ. 3.7) όπου η δυσκολία έγκειται στον υπολογισμό του μήκους του ΚΖ και μετατοπίζεται μέσω των ίσων τριγώνων ΚΖΕ και ΘΙΒ στον υπολογισμό του ΘΙ (Πρίντεζης, 2019)



Σχήμα 3.7:Εικόνα από την εργασία του Πρίντεζη, 2019

Η αναφορά σε τέτοιου είδους αντιρρήσεις ως προς την αλήθεια του ισχυρισμού της μέτρησης από τον Θαλή εξηγεί δυσκολίες που συχνά αντιμετωπίζουν και οι μαθητές κατά τη μέτρηση διαφόρων μηκών.

Με αφορμή ένα ιστορικό σημείωμα (σχ. 3.8) του σχολικού εγχειριδίου των Θωμαϊδη κ.α. (1999) όπου αναφέρεται ο τρόπος που περιγράφει ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς στο έργο του «Περί Διόπτρας» για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων ζητήθηκε να εντοπιστεί η μέθοδος που θα ακολουθήσουν ώστε να υπολογιστεί το πλάτος της λίμνης ΑΒ με δεδομένες τις αποστάσεις ΓΑ και ΓΒ του παρατηρητή από τα σημεία Α και Β που βρίσκονται εκατέρωθεν της λίμνης. Σαν εφαρμογή των παραπάνω δόθηκαν δύο καταστάσεις προβληματισμού (υπολογισμού ύψους ενός δένδρου και υπολογισμός απόστασης πλοίου από τη στεριά).



Σχήμα 3.8: Εικόνα ιστορικού σημειώματος σχολικού εγχειριδίου των Θωμαϊδη κ.α. (1999)

Το παραπάνω πρόβλημα ήταν ανοικτού τύπου αφού ζητήθηκε από τους μαθητές να προσδιορίσουν κατάλληλες μεθόδους υπολογισμού.

Κάθε ομάδα παρουσίασε τον τρόπο που εργάστηκε ώστε να συμπληρώσει το φύλλο εργασίας στην ολομέλεια της τάξης. Αναφορά στις παρουσιάσεις των μαθητών του παραπάνω προβλήματος γίνεται παρακάτω, στην ενότητα 4.3 «Συμπεράσματα».

3.5.2. 2η Διδακτική παρέμβαση (9ο Κεφάλαιο – Μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα – Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σύμφωνα με τους Γρίδο και Αυγερινό (2019), η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί μία από τις περιοχές των μαθηματικών που προσφέρεται για ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας αφού παρέχει ευκαιρίες διερεύνησης και απόδειξης δραστηριοτήτων που μοιάζουν με το έργο μεγάλων μαθηματικών (Herbst, 2002). Συνδυάζει την αναγκαιότητα οπτικών δεξιοτήτων (Clements & Battista, 1992) με την απαίτηση αφηρημένων και λογικών συλλογισμών. Τα προβλήματα που υπάρχουν στο σχολικό εγχειρίδιο μετατρέπονται σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων (Levav-Waynberg & Leikin, 2013) που επιτρέπουν την επίτευξη ποικίλων λύσεων βασισμένων σε έννοιες και ιδιότητες μέσα από το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών χωρίς να απαιτούν εξωσχολικές γνώσεις. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα το οποίο επιλέχθηκε στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση.

Διδακτικοί στόχοι : Οι μαθητές/τριες πρέπει:

1) να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω ιστορικών σημειωμάτων
2) να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με τη βοήθεια της Ιστορίας της Γεωμετρίας

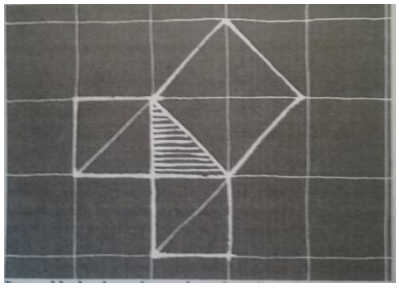
Η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε τρεις φάσεις.

<u>1η Φάση</u>: (1η διδακτική ώρα) Οι μαθητές/τριες χωρίστηκαν σε ομάδες των 4 ατόμων . Ζητήθηκε από κάθε ομάδα σε προηγούμενη διδακτική ώρα να συγκεντρώσει ιστορικά στοιχεία γύρω από τη ζωή του Ευκλείδη, του Πυθαγόρα και το έργο τους τα οποία και παρουσιάσανε με διάφορους τρόπους στην ολομέλεια της τάξης.

<u>2η Φάση</u>: (2η διδακτική ώρα) Έγινε παρουσίαση σε βιντεοπροβολέα βασικών ιστορικών

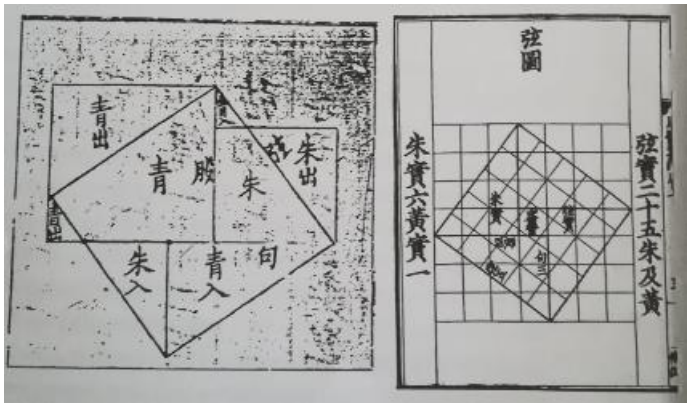
σημειωμάτων που αναδεικνύουν τη σπουδαιότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος. Τονίστηκε ιδιαίτερα ότι το συγκεκριμένο θεώρημα φαίνεται να ήταν ήδη γνωστό πριν την εποχή του Πυθαγόρα χωρίς όμως να έχει αποδειχθεί. Στη συγκεκριμένη παρουσίαση δόθηκαν στοιχεία της ζωής και του έργου του Πυθαγόρα και της Πυθαγόρειας Σχολής και η ενασχόλησή τους με την Αριθμολογία και τις Πυθαγόρειες τριάδες. Επιπλέον, τονίστηκε η ύπαρξη 370 και άνω αποδείξεων του θεωρήματος από τις οποίες επιλέχθηκαν τέσσερις με τις οποίες ασχολήθηκαν οι μαθητές/τριες στις επόμενες διδακτικές ώρες.

Ως κίνητρο δόθηκε η περίπτωση αναγνώρισης μιας απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσα από μία εικόνα πατώματος στρωμένου με τετράγωνα πλακάκια ίσης πλευράς (σχ. 3.9). Το ερώτημα που υποκίνησε τους μαθητές είναι:



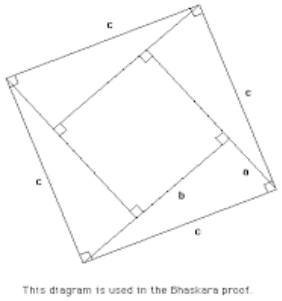
Σχήμα 3.9: Εικόνα από Reid, 1963 A long way from Euclid.

«Πως μπορεί ο τεχνικός του πατώματος να αναγνωρίσει το Πυθαγόρειο Θεώρημα σ' αυτό αν δεν έχει τις στοιχειώδεις γνώσεις των μαθηματικών και της γεωμετρίας;»



Σχήμα 3.10: Οπτική απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος αρχαίων Κινέζων Μαθηματικών Zhao Shuang και Liu Hui (3ο αι. πΧ)

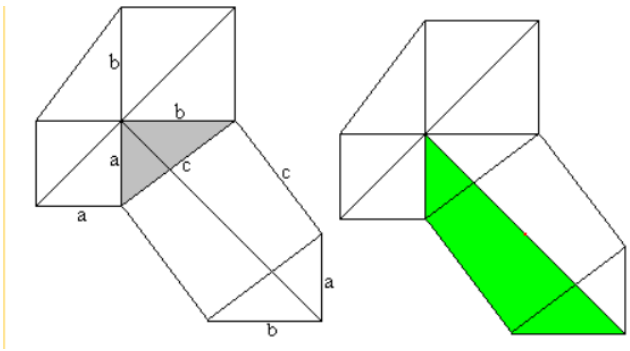
Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι γεωμετρική πρόταση που ήταν γνωστή σε πολλούς αρχαίους πολιτισμούς και η αλήθεια της τεκμηριώθηκε με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη έχει αποδειχθεί ως λογική συνέπεια των πρώτων 46 προτάσεων του Βιβλίου Ι (Horng, 2001).



Σχήμα 3.11: Οπτική απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος του Ινδού Bahskara (περίπου 1150 μ.Χ)

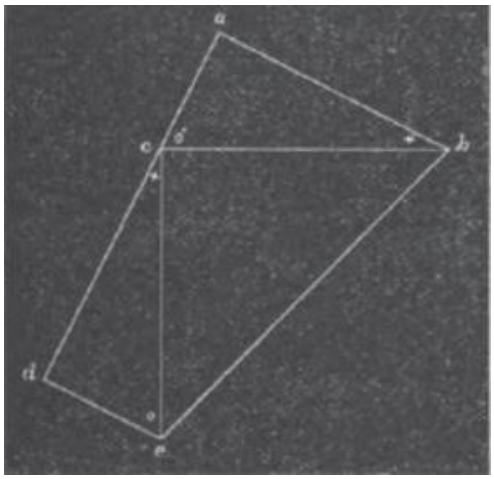
Οι αποδείξεις που έχουν δοθεί κατά την ιστορική πορεία του Πυθαγορείου θεωρήματος διακρίνονται σε οπτικές αφού δεν υπάρχει αξιωματική και θεωρητική θεμελίωση αυτών αλλά μόνο το σχήμα που παραπέμπει στο συμπέρασμα, σε αλγεβρικές αποδείξεις που στηρίζονται σε αλγεβρικούς κανόνες ώστε να προκύψει το ζητούμενο και σε καθαρά γεωμετρικές αποδείξεις με τη χρήση γεωμετρικών προτάσεων αλλά και θεωρημάτων ήδη αποδεδειγμένων.

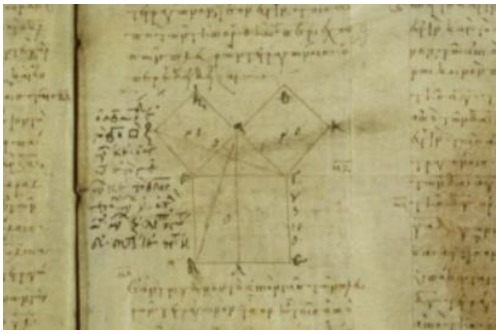
Υπάρχουν βέβαια και αποδείξεις με ανακατανομή του σχήματος. Αποδείξεις οπτικές όπως των αρχαίων Κινέζων Μαθηματικών Zhao Shuang και Liu Hui (3^{ο} αι. πΧ) (σχ.3.10) και του Ινδού Bahskara (περίπου 1150 μ.Χ) (σχ. 3.11), αλγεβρικές όπως του Leonardo da Vinci (1452-1519) (σχ. 3.12) και του James Abram Garfield (1831-1881) (σχ. 3.13) αλλά και καθαρά γεωμετρικές και αξιωματικά τεκμηριωμένες όπως του Ευκλείδη (σχ. 3.14) και αυτή που υπάρχει στο σχολικό εγχειρίδιο και συνδέεται άμεσα με την ομοιότητα τριγώνων (σχ. 3.15).



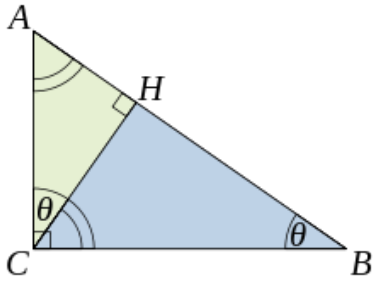
Σχήμα 3.12: Απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος από τον Leonardo da Vinci (1452-1519)

Σχήμα 3.13: Απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος από τον James Abram Garfield (1831-1881)





Σχήμα 3.14: Απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος όπως περιγράφεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη



Σχήμα 3.15: Απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος με χρήση ομοιότητας τριγώνων

Όλα τα παραπάνω παρουσιάστηκαν στους μαθητές/ τριες πριν την ενασχόλησή τους με τα φύλλα εργασίας. Κατά τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος εφαρμόστηκε η στρατηγική της «πλαισίωσης» (strategy of accommodation σύμφωνα με τον Fried (2001)) προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις του Αναλυτικού προγράμματος. Δηλαδή, δόθηκαν στους μαθητές/τριες αποσπάσματα της ιστορικής εξέλιξης των αποδείξεών του ενθαρρύνοντας κατ' αυτό τον τρόπο την ενεργό εμπλοκή και την εμβάθυνση τους.

<u>3η Φάση</u>: (3η και 4η διδακτική ώρα) Μοιράστηκε στις ομάδες των μαθητών/τριών από ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Ι) με τη βοήθεια του οποίου ανακάλυψαν μία από τις τέσσερις βασικές αποδείξεις για τις οποίες είχαν προετοιμαστεί μέσω της παρουσίασης της 2ης φάσης της παρέμβασης.

Η απόδειξη του Ευκλείδη χωρίστηκε σε δύο τμήματα έτσι ώστε οι μισοί μαθητές να καταλήξουν σε συμπέρασμα που αφορά στο τετράγωνο της μιας κάθετης πλευράς του ορθογωνίου τριγώνου και οι άλλοι μισοί στο αντίστοιχο συμπέρασμα της άλλης κάθετης

πλευράς. Στο τέλος παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα στον πίνακα και ζητήθηκε από την ολομέλεια της τάξης να επικυρώσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Μετά την απόδειξη του Ευκλείδη ζητήθηκε από όλες τις ομάδες να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας που αναφερόταν στην απόδειξη του σχολικού εγχειριδίου. Δόθηκε , μ αυτόν τον τρόπο, η ευκαιρία σύγκρισης και σχολιασμού των δύο αποδείξεων.

Σύμφωνα με τους Zazkis & Zazkis (2016) , οι αποδείξεις θεωρημάτων και γενικότερα η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί συνήθη μέθοδο αξιολόγησης. Αυτή η μέθοδος εστιάζει συχνά στην εκμάθηση και την απομνημόνευση των μαθητών και όχι στην βαθύτερη κατανόηση ενός θεωρήματος (Conradie & Frith, 2000). Για να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα, οι Conradie & Frith (2000) εισήγαγαν ένα «τεστ κατανόησης», μια μέθοδο κατά την οποία δίνεται στους μαθητές μια απόδειξη ενός θεωρήματος και καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις που σχετίζονται με συγκεκριμένους ισχυρισμούς εντός της παρουσιαζόμενης απόδειξης.

Αυτή η μορφή της κατανόησης και οδήγησης των μαθητών προς το συμπέρασμα του θεωρήματος ακολουθήθηκε σε συγκεκριμένα σημεία των φύλλων εργασίας της ενότητας. Κάποιες ερωτήσεις δόθηκαν ως ισχυρισμοί και ζητήθηκε από τους μαθητές να τους αιτιολογήσουν και να τους επαληθεύσουν.

Για παράδειγμα, στο φύλλο εργασίας της απόδειξης του Ινδού Bahskara τους δίνεται ο ισχυρισμός:

« Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Πως μπορείτε να το αιτιολογήσετε;»

Ομοίως στο φύλλο εργασίας της απόδειξης του Ευκλείδη δίνεται:

« Τα τρίγωνα ΖΓΒ και ΑΓΔ είναι ίσα. Πως μπορείτε να το αιτιολογήσετε;»

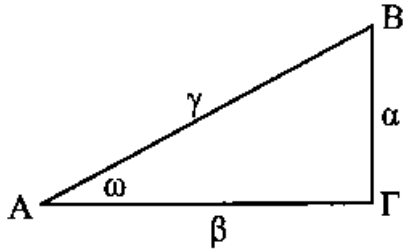
Στο φύλλο εργασίας του Garfield:

«Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι ίσα. Γιατί;»

Στη συνέχεια στις μισές ομάδες του τμήματος δόθηκε το φύλλο εργασίας με την απόδειξη του Ινδού Bahskara και στις υπόλοιπες μισές το αντίστοιχο φύλλο εργασίας με την απόδειξη του Garfield. Με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού παρουσιάστηκαν στην ολομέλεια της τάξης τα συμπεράσματά τους στο τέλος της παρέμβασης. Το τελευταίο αποτέλεσε έναν έμμεσο τρόπο αξιολόγησης επίτευξης του διδακτικού στόχου.

Υπάρχουν πολλαπλές ενδείξεις ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών του Λυκείου σήμερα αγνοεί και τις πλέον στοιχειώδεις όψεις της έννοιας «μαθηματική απόδειξη» (Θωμαϊδης. 2009). Σε έρευνα που έγινε σε 134 μαθητές της Γ’ Λυκείου, 84 της Θετικής

και 50 της Θεωρητικής κατεύθυνσης ζητήθηκε να εντοπίσουν τον αποδεικτικό κύκλο και τη μη εγκυρότητα της παρακάτω απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος (Μπαραλός, 2003).



$\alpha = \gamma \cdot \eta\mu\omega \Rightarrow \alpha^2 = \gamma^2 \cdot \eta\mu^2\omega$
$\beta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \alpha^2 = \gamma^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$
άρα, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \cdot (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \gamma^2 \cdot 1 = \gamma^2$

Η παραπάνω απόδειξη εμπεριέχει τη χρήση του συμπεράσματος του Πυθαγορείου Θεωρήματος αφού η τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ γίνεται με τη βοήθεια αυτού. Έχει όμως ταυτόχρονα και τελικό στόχο να αποδείξει ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα τη μη εγκυρότητά της.

Τα αποτελέσματα δείξανε ότι το 98% των μαθητών δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το «λάθος» στην παραπάνω απόδειξη. Βέβαια, σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (2009) αυτό που ήταν ιδιαιτέρως εντυπωσιακό ήταν το γεγονός ότι υπήρξαν τρεις μαθητές που κατάφεραν να εντοπίσουν τον αποδεικτικό κύκλο και να αιτιολογήσουν την μη εγκυρότητα της απόδειξης.

Με αφορμή, επομένως, την παραπάνω έρευνα, ως επέκταση στην διδακτική παρέμβαση και σε επόμενη διδακτική ώρα τέθηκε προς συζήτηση με τους μαθητές η ίδια απόδειξη. Βοήθησε βέβαια και το γεγονός ότι η διδασκαλία της Τριγωνομετρίας στο μάθημα της Άλγεβρας είχε προηγηθεί .

3.5.3 3η Διδακτική παρέμβαση (Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος – Πυθαγόρειες τριάδες)

Μετά το τέλος της παραπάνω διδακτικής παρέμβασης και κατά την επόμενη διδακτική ώρα έγινε αναφορά και στο Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος που είχαν ήδη διδαχθεί οι μαθητές σύμφωνα με τις οδηγίες του Αναλυτικού προγράμματος και το σχολικό εγχειρίδιο.

Διδακτικοί στόχοι : Οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν

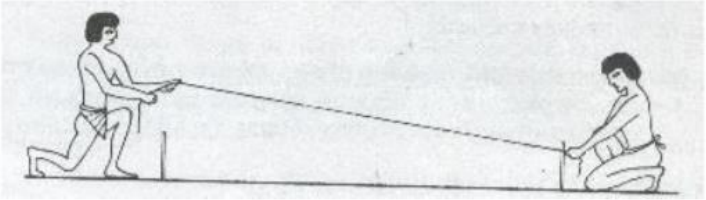
1) τη χρησιμότητα του Αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω χρήσης ανακατασκευασμένης αρπεδόνης
2) τη σύνδεση του Πυθαγορείου θεωρήματος με την έννοια του άρρητου αριθμού

και γενικότερα με το αντικείμενο της Άλγεβρας.

Παρουσιάστηκαν ιστορικά στοιχεία που αφορούσαν στους αρπεδονάπτες ως προς τη χρήση της αρπεδόνης με σκοπό την εξακρίβωση του είδους ενός τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Ο Τσαμάτος (2017) αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα, τον Διόδωρο τον Σικελιώτη και άλλους αρχαίους συγγραφείς, οι ρίζες της γεωμετρίας πρέπει να αναζητηθούν, κυρίως, στην Αίγυπτο. Η ανάπτυξη της γεωμετρίας προέκυψε εκεί από μια άμεση βιοτική ανάγκη. Μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, οι αγροτικές εκτάσεις έπρεπε να αναδιανέμονται, για να αποδίδονται με δικαιοσύνη και πάλι στους καλλιεργητές.

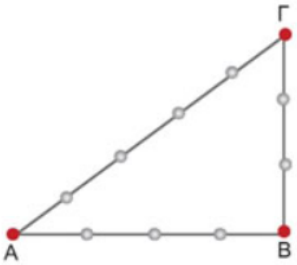
Για το σκοπό αυτό οι Αιγύπτιοι είχαν συστήσει ένα είδος τοπογραφικής υπηρεσίας, το σώμα των «αρπεδοναπτών» (σχ. 3.16).



Σχήμα 3.16:Εικόνα χρήσης της αρπεδόνης από τους αρπεδονάπτες
http://eisatopon.blogspot.com/2015/09/blog-post_5.html

Οι αρπεδονάπτες ήταν μετρητές της γης, από όπου και ο όρος "γεωμετρία". Σε πολλά ταφικά και άλλα αρχαία αιγυπτιακά μνημεία υπάρχουν σχετικές παραστάσεις συνεργείων αρπεδοναπτών «επί το έργον». Αρπεδονάπτης είναι αυτός που κρατάει την αρπεδόνη, ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά όργανα.

Η αρπεδόνη ήταν ένα σχοινί δίχως άκρα, διαιρεμένο με κόμβους σε δώδεκα ίσα μέρη (σχ. 3.17).



Σχήμα 3.17:Εικόνα αρπεδόνης στο σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Β'Γυμνασίου, Βλάμος κ.α.

Τεντωμένο και κρατημένο σταθερά στον 1ο , 4ο και 8ο κόμβο, σχημάτιζε ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5, τρίγωνο, το οποίο, λόγω των μηκών των πλευρών του, είναι ορθογώνιο. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούσαν χωράφια με ορθές γωνίες, δηλαδή ορθογώνια παραλληλόγραμμα, εύκολα στον υπολογισμό του εμβαδού τους. Η πανάρχαια αυτή μέθοδος χάραξης ορθών γωνιών στο έδαφος, μένει μέχρι σήμερα ζωντανή. Οι σημερινοί τεχνίτες την ονομάζουν «γώνιασμα» και η αρπεδόνη έχει αντικατασταθεί πια από την μετροταινία.

Στα πλαίσια επομένως της παρέμβασης ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να εξετάσουν την καθετότητα σε διάφορα σημεία του χώρου του σχολικού κτιρίου χρησιμοποιώντας μία αρπεδόνη ανακατασκευασμένη από την εκπαιδευτικό (σχ. 3.18).

Σχήμα 3.18: Φωτογραφία αρπεδόνης ανακατασκευασμένης από την εκπαιδευτικό

Η παραπάνω παρέμβαση έγινε σύμφωνα με την τεχνική ενσωμάτωσης της ΙτΜ του Fried (2001) strategy of addition (στρατηγική της «προσθήκης») χωρίς όμως να περιορίζεται αποκλειστικά σε πρόσθετες πληροφορίες που στοχεύουν απλά και μόνο στη διεύρυνση του ΑΠΣ. Αντιθέτως εντάχθηκε με σκοπό την ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη χρήση του εργαλείου της αρπεδόνης και στην κατανόησή της χρησιμότητας του Αντιστρόφου του θεωρήματος.

Η αρπεδόνη, όπως και το εργαλείο μέτρησης του Gerbert d'Aurillac είναι εργαλεία πρακτικών εφαρμογών και δεν περιλαμβάνονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Χρησιμοποιήθηκαν όμως με σκοπό την κατανόηση προτάσεων και θεωρημάτων που αναφέρονται στα Στοιχεία όπως της ομοιότητας τριγώνων για τη μέτρηση αποστάσεων και του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Η αναφορά στην αρπεδόνη λειτούργησε ως αφορμή για την παρουσίαση της ύπαρξης και της ενασχόλησης πολλών μαθηματικών διαφόρων λαών με τις Πυθαγόρειες τριάδες.

Σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο των Θωμαΐδη κ.α. (1999), ανάμεσα στα ερωτήματα που σχετίζονται με το Πυθαγόρειο Θεώρημα ήταν κι αυτό της ανακάλυψης των Πυθαγόρειων τριάδων. Γίνεται αναφορά σε τύπους που ανακαλύφθηκαν σε

διαφορετικές χρονικές περιόδους όπως τον τύπο που ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι ($\mu,\frac{\mu^2-1}{2}, \frac{\mu^2+1}{2}$) , όπου μ περιττός αριθμός, τον τύπο του Πλάτωνα (5ος αι. π.Χ), ($\mu,\frac{\mu^2}{4} - 1, \frac{\mu^2}{4} +1$), όπου μ άρτιος αριθμός αλλά και την αναφορά στην ενασχόληση με τις Πυθαγόρειες τριάδες του Διόφαντου (3ος αι. μ.Χ.) με τη λύση της εξίσωσης $x^2+y^2=\omega^2$, όπυx,y και ω οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί. Οι παραπάνω πληροφορίες παρουσιάστηκαν στην τάξη ζητώντας από τους μαθητές να τις επιβεβαιώσουν αλγεβρικά. Επιπλέον έγινε σύνδεση με την ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων των οποίων οι πλευρές δεν είναι ρητοί αριθμοί αλλά άρρητοι όπως π.χ. $\sqrt{2}$ και στον τρόπο με τον οποίο ανακαλύφθηκαν οι άρρητοι από τους Πυθαγόρειους (σύνδεση με την περιοχή της Άλγεβρας).

Στην ενότητα 4.3. «Συμπεράσματα» θα γίνει σύντομη ανακεφαλαίωση και περιγραφή των αποτελεσμάτων της συζήτησης με τους μαθητές/τριες σχετικά με τα θέματα που διαπραγματεύτηκαν στις παραπάνω διδακτικές παρεμβάσεις.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1. Παρατηρήσεις κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών παρεμβάσεων

Κατά τη διεξαγωγή των παραπάνω διδακτικών παρεμβάσεων καταγράφηκαν συγκεκριμένες συμπεριφορές και αντιδράσεις των μαθητών/τριών από την ερευνήτρια.Οι παρατηρήσεις αφορούν τα εξής:

- Κατά την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων ρωτήθηκαν οι μαθητές αν αφιέρωσαν ποτέ χρόνο από τη μελέτη τους για τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Κάποιες από τις απαντήσεις που πήρε η διδάσκουσα-ερευνήτρια ήταν:
  «Διαβάζω πότε πότε αλλά δεν καταλαβαίνω πολλά πράγματα»
  «Γιατί να τα διαβάσουμε κυρία; Θα εξεταστούμε σ' αυτά;»
  «Θα τα διάβαζα αν κάποιος μας το ζητούσε»
- Έδειξαν έντονο ενδιαφέρον στο να συγκεντρώσουν στοιχεία και πληροφορίες γύρω από τη ζωή και το έργο του Θαλή, του Ήρωνα και του Πυθαγόρα. Ακόμη και μαθητές με χαμηλότερη επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών και ειδικότερα της Γεωμετρίας συνέλλεξαν ιστορικές πληροφορίες και πηγές γύρω από το ζητούμενο θέμα. Εντύπωση προκαλεί επιπλέον η εμπλοκή τους στη συζήτηση που ακολούθησε και η προσοχή που δώσανε στις εργασίες που παρουσίασαν οι συμμαθητές τους.
- Αν και στα τμήματα που διεξήχθησαν οι διδακτικές παρεμβάσεις αρκετοί είναι οι μαθητές ξένης υπηκοότητας, δεν παρατηρήθηκε κανενός ίχνους σωβινισμός. Επικεντρώθηκαν κυρίως στη συμβολή της Ιστορίας στην επιστήμη της Γεωμετρίας και όχι στην καταγωγή των σπουδαίων επιστημόνων της αρχαιότητας.
- Ενώ τους ζητήθηκε να συγκεντρώσουν πληροφορίες δουλεύοντας ομαδικά ώστε να μειωθεί το άγχος που έχουν για το μάθημα της Γεωμετρίας, και να δραστηριοποιηθούν όλοι, ακόμη και οι πιο συνεσταλμένοι και αυτοί με χαμηλότερη επίδοση, οι μαθητές υψηλότερων επιδόσεων ήταν αυτοί που αντέδρασαν εντονότερα ζητώντας να εργαστούν ατομικά. Έπειτα όμως από συζήτηση με την εκπαιδευτικό πείστηκαν για τα πλεονεκτήματα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου. Η παραπάνω αλλαγή στη συμπεριφορά τους οφείλεται ίσως στο ότι ανέλαβαν έναν συγκεκριμένο ρόλο , αυτόν της μύησης όλων των μαθητών της ομάδας που ανήκαν στην εμπλοκή τους με τη Γεωμετρία.

- Λίγοι μαθητές συνάντησαν δυσκολίες με την κατασκευή των σχημάτων στα φύλλα εργασίας κάτι που ξεπεράστηκε με την βοήθεια είτε των συμμαθητών της ομάδας τους είτε με την παρέμβαση της εκπαιδευτικού.
- Αναφορικά με τις αποδείξεις που ζητήθηκαν στα φύλλα εργασίας αρκετοί ήταν αυτοί που αναζήτησαν αλγεβρικές μεθόδους , αφού η άλγεβρα αποτελεί ένα πεδίο με το οποίο ήταν πιο εξοικειωμένοι. Εντύπωση προκάλεσε η αναζήτηση της απόδειξης από μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων με τη βοήθεια ανακατασκευής των σχημάτων κάτι που φανέρωσε μια βαθύτερη κατανόηση της χρησιμότητας των μεθόδων μέτρησης απρόσιτων σημείων αλλά και του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στην πρώτη περίπτωση και στο πρόβλημα που δόθηκε με αφετηρία την εικόνα του Ήρωνα εντοπίσανε τα τρίγωνα που μπορούν να σχηματιστούν και τα σχεδιάσανε χωριστά αναζητώντας τη σχέση που μπορεί να έχουν μεταξύ τους. Αναφορικά με τις αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος και συγκεκριμένα σ' αυτές του Garfield και του Bahskara χωρίσανε τα σχήματα που εμφανίζονται ώστε να εντοπίσουν τις διαστάσεις τους με ευκολότερο τρόπο.
- Έντονο επίσης ενδιαφέρον παρατηρήθηκε ως προς τη χρήση των γεωμετρικών εργαλείων που παρουσιάστηκαν (του Gerbert d'Aurillac που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση απρόσιτων υψών κατά τον 10^{ο} αιώνα μ.Χ. αλλά και της αρπεδόνης ως μεθόδου χρήσης του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος). Τους δόθηκε η ευκαιρία να ξεφύγουν από το μολύβι και το χαρτί και να κατανοήσουν την ανάγκη χρήσης των θεωρημάτων και των προτάσεων που παρουσιάζονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη.
- Οι μαθητές και μαθήτριες που ανήκουν στην Ομάδα Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών δείξανε να ενδιαφέρονται αρκετά για την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων αφού το βρήκαν πολύ πιο κοντά στα μαθήματα της κατεύθυνσής τους ως πιο εξοικειωμένοι σε τέτοιου είδους διδασκαλίες. Εξέφρασαν μάλιστα την επιθυμία να ενταχθεί η ιστορία των μαθηματικών και στη διδασκαλία ενοτήτων του πεδίου της Άλγεβρας.
- Μετά τη διδακτική παρέμβαση του Πυθαγορείου θεωρήματος και κατά την παρουσίαση του αποδεικτικού κύκλου που εμφανίζεται στην απόδειξη με χρήση τριγωνομετρικής ταυτότητας, οι 2 από τους 69 μαθητές εντόπισαν την ιδιαιτερότητα και το λάθος στην συγκεκριμένη διαδικασία. Το 2,9% των μαθητών, δηλαδή, κατάφεραν να αιτιολογήσουν τη μη εγκυρότητα της απόδειξης.

4.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων της έρευνας

Αναφορικά με το Α' μέρος του ερωτηματολογίου συλλέχθηκαν πληροφορίες κυρίως ως προς το φύλο των συμμετεχόντων μαθητών/τριών και ως προς την ομάδα προσανατολισμού που έχουν επιλέξει (σχ. 4.1)

		Ομάδα προσανατολισμού	
		Θετικών Σπουδών	Ανθρωπιστικών Σπουδών
Φύλο	Αγόρι	20	3
	Κορίτσι	25	18

Σχήμα 4.1 : Πίνακας δημογραφικών στοιχείων ως προς το φύλο και την ομάδα προσανατολισμού των μαθητών/τριών του δείγματος

Συμμετείχαν 23 αγόρια (34,8%) και 43 κορίτσια (65,2%) εκ των οποίων 45 μαθητές/τριες (68,2%) ανήκουν στην ομάδα Θετικών σπουδών και οι υπόλοιποι (31,8%) στην ομάδα των Ανθρωπιστικών Σπουδών.

Στο μέρος αυτό, όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω υπήρχε και το ερώτημα της ηλικίας από το οποίο δεν προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα αφού πρόκειται για μαθητές της ίδιας τάξης (16-17 ετών).

Κατά την ανάλυση του δεύτερου άξονα των διερευνητικών ερωτημάτων που αφορά στις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι ερωτήσεις ελέγχθηκαν ως προς την αξιοπιστία τους και βγήκαν αρκετά ικανοποιητικά (για τις ερωτήσεις 3 κι 5 ο Cronbach's Alpha = 0,702 που αναφέρονται στη δυσκολία με την οποία αντιμετωπίζουν οι μαθητές και για τις ερωτήσεις 1,2,4,6,8,9,και 10 που αφορούν στη γενικότερη στάση τους απέναντι στη Γεωμετρία, στις γεωμετρικές κατασκευές και στις αποδείξεις των θεωρημάτων ο Cronbach's Alpha = 0,765).

Τα ποσοστά απαντήσεων που δόθηκαν πάνω στην κλίμακα Likert εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (σχ. 4.2)

Ερωτήσεις	Καθόλου (%)	Λίγο (%)	Αρκετά (%)	Πολύ (%)	Πάρα πολύ (%)
1. Η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με ευχαριστεί	10,6	43,9	28,8	12,1	4,5
2. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορώ να χρησιμοποιώ δικές μου ιδέες	27,3	30,3	30,3	9,1	3,0
3. Η Γεωμετρία είναι δυσκολότερη από όλα τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα	36,4	30,3	13,6	13,6	6,1
4. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη σε προβλήματα της καθημερινής ζωής	21,2	42,4	24,2	7,6	4,5
5. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι δύσκολες στην κατανόηση	12,1	48,5	18,2	16,7	4,5
6. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων με βοηθούν να λύσω τις ασκήσεις	16,7	25,8	22,7	21,2	13,6
7. Δυσκολεύομαι στην κατασκευή των κατάλληλων γεωμετρικών σχημάτων	45,5	30,3	9,1	9,1	6,1
8. Θα μου είναι χρήσιμη η γνώση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα μαθηματικά της Γ Λυκείου	36,4	30,3	15,2	9,1	9,1
9. Συνήθως αισθάνομαι άνετα κατά τη διάρκεια των διαγωνισμάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία	34,8	19,7	21,2	15,2	9,1
10. Αφιερώνω χρόνο στη μελέτη των αποδείξεων των θεωρημάτων και των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας	19,7	51,5	15,2	7,6	6,1

Σχήμα 4.2: Πίνακας ποσοστών (%) των απαντήσεων για τις ερωτήσεις του Β' μέρους του ερωτηματολογίου

Οι μισοί περίπου μαθητές (53,9%) δηλώνουν ότι δεν τους ευχαριστεί η προετοιμασία για το μάθημα της Γεωμετρίας μολονότι το 66,7% απαντά ότι δεν τη

βρίσκουν δυσκολότερη από τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Επιπλέον, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές δεν βρίσκουν τις αποδείξεις δύσκολες στην κατανόησή τους. Μόνο το 12,1% (7,6+4,5) δηλώνει ότι βρίσκει τη Γεωμετρία χρήσιμη σε προβλήματα καθημερινής ζωής γεγονός που αποτέλεσμα της μη σύνδεσης του μαθήματος με τον πρακτικό του χαρακτήρα αλλά και με άλλους επιστημονικούς και τεχνολογικούς τομείς.

Το 75,8 % απαντά ότι δεν δυσκολεύεται καθόλου ή δυσκολεύονται λίγο μόνο με την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων κάτι που έχει ήδη εντοπιστεί κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Οι λίγοι μαθητές που παρουσίασαν δυσκολίες δέχθηκαν τη βοήθεια των συμμαθητών της ομάδας τους ή την παρέμβαση της διδάσκουσας.

Το 34,8% δεν αισθάνονται άνετα κατά τη διάρκεια διαγωνισμάτων του μαθήματος. Θα μπορούσαμε όμως να ισχυριστούμε ότι αυτό συνδέεται άμεσα και με τις απαντήσεις που δηλώθηκαν στο ερώτημα 10 που αναφέρεται στον χρόνο που αφιερώνουν οι μαθητές για τη μελέτη των αποδείξεων θεωρημάτων και προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μόνο το 13,7% απαντά ότι αφιερώνει πολύ ή πάρα πολύ χρόνο σ' αυτή τη μελέτη.

Αν και η πλειοψηφία των μαθητών ανήκει στην ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών, το 66,7% δηλώνει ότι η γνώση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν θα είναι χρήσιμη (καθόλου ή λίγο χρήσιμη) στα μαθηματικά της Γ' Λυκείου. Η παραπάνω μέτρηση αποτελεί σημαντικό εύρημα της έρευνας κάτι που θα μπορούσε να οφείλεται στην έλλειψη σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα και κυρίως με τον κλάδο της Ανάλυσης που διδάσκεται στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου. Εκτός των γεωμετρικών ερμηνειών που δίνονται σε θεωρήματα της Ανάλυσης, η Ευκλείδεια Γεωμετρία απουσιάζει από ασκήσεις και από πιθανά εξεταζόμενα θέματα. Δεν είναι τυχαία τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών στις εξετάσεις Πανελλαδικού επιπέδου και κυρίως σε θέματα που χρήζουν γεωμετρικών γνώσεων για την επίλυσή τους.

Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί ότι το 60,6% πιστεύει ότι ο βαθμός στον οποίο το μάθημα της Γεωμετρίας προσφέρεται για τη χρήση των δικών τους ιδεών κινείται μεταξύ του «Λίγο» και του «Αρκετά» δηλαδή μεταξύ μικρού και μέτριου βαθμού.

Κατά την ανάλυση του τρίτου άξονα των διερευνητικών ερωτημάτων που αφορά στις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων, οι ερωτήσεις ελέγχθηκαν ως προς την αξιοπιστία

τους και βγήκαν πολύ ικανοποιητικά (για τις ερωτήσεις 1,2,3,4,5,8,9,10 και 11οι οποίες μετρούσαν τη στάση των μαθητών απέναντι στην ένταξη της ΙτΓ κατά τη διδασκαλία της ο Cronbach's Alpha = 0,867).

Μελετώντας τις σχετικές συχνότητες (%) των απαντήσεων στο Γ' μέρος (τρίτο άξονα) (σχ. 4.3) προκύπτει ότι το 57,2% των μαθητών βρίσκουν αρκετά, πολύ ή πάρα πολύ ενδιαφέρον το μάθημα της Ιστορίας γενικότερα, ποσοστό όμως το οποίο αυξάνεται στο 65,2% στην αντίστοιχη ερώτηση που αφορά την ειδικότερη περίπτωση της Ιστορίας της Γεωμετρίας.

Ερωτήσεις	**Καθόλου**	**Λίγο**	**Αρκετά**	**Πολύ**	**Πάρα πολύ**
1. Βρίσκω ενδιαφέρον το μάθημα της Ιστορίας.	22,7	19,7	25,8	13,6	18,2
2. Θα μ' ενδιέφερε να μάθω την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών.	13,6	30,3	37,9	4,5	13,6
3. Αφιερώνω χρόνο διαβάζοντας τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών.	59,1	30,3	6,1	3,0	1,5
4. Βρίσκω ενδιαφέρουσα την Ιστορία της Γεωμετρίας.	7,6	27,3	40,9	16,7	7,6
5. Το μάθημα της Γεωμετρίας έγινε πιο κατανοητό με τη χρήση της Ιστορίας.	16,7	21,2	27,3	27,3	7,6
6. Μπερδεύτηκα περισσότερο από τη σύνδεση της Γεωμετρίας με την Ιστορία της.	69,7	18,2	6,1	6,1	
7. Τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου της Γεωμετρίας με αφήνουν αδιάφορο/η.	27,3	39,4	10,6	10,6	12,1
8. Με την ενσωμάτωση της ΙτΓ στη διδασκαλία συνεργάστηκα καλύτερα με τους συμμαθητές μου.	16,7	18,2	25,8	13,6	25,8
9. Κατανόησα καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων που διαπραγματευτήκαμε με τη χρήση της ΙτΓ.	12,1	22,7	21,2	30,3	13,6

10. Τα Ιστορικά σημειώματα με βοήθησαν να κατανοήσω τη διαχρονική και πολυπολιτισμική εξέλιξη της Γεωμετρίας.	13,6	31,8	36,4	10,6	7,6
11. Η ενασχόληση διαφόρων λαών με τη Γεωμετρία μου έδωσαν κίνητρο να ασχοληθώ περισσότερο με τις αποδείξεις του μαθήματος.	45,5	25,8	13,6	7,6	7,6

Σχήμα 4.3: Πίνακας ποσοστών (%) των απαντήσεων για τις ερωτήσεις του Γ' μέρους του ερωτηματολογίου

Ένα αντίστοιχο ποσοστό που φτάνει στο 56% δηλώνει ότι θα ενδιαφερόταν για την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών κάτι όμως που έρχεται σε αντίθεση με το 89,4% που δηλώνουν ότι δεν αφιερώνουν καθόλου ή αφιερώνουν λίγο μόνο χρόνο διαβάζοντας τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών.

Σε ανάλογη ερώτηση του τρίτου άξονα που αφορούσε στο πόσο αδιάφορους τους αφήνουν τα ιστορικά σημειώματα των εγχειριδίων, τα αποτελέσματα ήταν λίγο διαφορετικά. Το 27,3% δηλώνει ότι δεν τους αφήνουν καθόλου αδιάφορους.

Το 62,2% των μαθητών, δηλαδή 41 μαθητές από τους 66 απάντησαν ότι το μάθημα της Γεωμετρίας έγινε πιο κατανοητό με τη χρήση της Ιστορίας της και ταυτόχρονα το 87,9% απαντούν ότι δεν μπερδεύτηκαν καθόλου ή δυσκολεύτηκαν λίγο μόνο με τη σύνδεση της Γεωμετρίας με την ιστορία της.

Αρκετά σημαντική ήταν η θετική αλληλεπίδραση των μαθητών μέσα στις ομάδες που δημιουργήθηκαν για τις συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις αφού το 65,2% δηλώνει ότι συνεργάστηκαν καλύτερα με τους συμμαθητές της ομάδας τους.

Αναφορικά με την καλύτερη κατανόηση των αποδείξεων των θεωρημάτων που τέθηκαν στις διδακτικές παρεμβάσεις, το 87,8% απάντησε ότι επιτεύχθηκε σε ικανοποιητικό έως και σε πολύ μεγάλο βαθμό (απαντώντας αντίστοιχα Λίγο, Αρκετά, Πολύ ή Πάρα Πολύ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι το 18,2% απάντησαν θετικά (πολύ ή πάρα πολύ) στο ρόλο που παίξανε τα ιστορικά σημειώματα στην κατανόηση της διαχρονικής και πολυπολιτισμικής εξέλιξης της Γεωμετρίας . Ένα επίσης σημαντικό ποσοστό (78,2%)

δώσανε στην ίδια ερώτηση μέτριου βαθμού απαντήσεις (Λίγο ή Αρκετά). Κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων δηλώσανε στην διδάσκουσα-ερευνήτρια ότι δεν ήταν τόσο τα ιστορικά σημειώματα όσο η παρουσίαση και η πρακτική ενασχόλησή τους μ' αυτά, φανερώνοντας μ' αυτόν τον τρόπο την ελλιπή σύνδεση, που επιτυγχάνεται μέσω της διδασκαλίας, του χαρακτήρα της Γεωμετρίας με τα ιστορικά δρώμενα κάθε εποχής.

Στο Δ' μέρος του ερωτηματολογίου όπου οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να απαντήσουν αρχικά αν είχαν παλιότερη εμπειρία από τέτοιου είδους διδακτικές προσεγγίσεις, οι 47 από τους 66 μαθητές, δηλαδή ποσοστό περίπου 71%, δήλωσε ότι δεν είχαν ποτέ τέτοια εμπειρία και οι υπόλοιποι 19 μαθητές ότι είχαν και συγκεκριμένα σε τάξη του Γυμνασίου αναφορικά με τις Πυθαγόρειες τριάδες. Εφόσον πρόκειται για μαθητές του ίδιου Λυκείου που προέρχονται από την ίδια Γυμνασιακή μονάδα, προφανώς, οι 19 αυτοί μαθητές ανήκαν στο ίδιο τμήμα και είχαν την ίδια εμπειρία.

Ως προς τις εντυπώσεις που τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν γύρω από την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και συγκεκριμένα για την προσέγγισή του μέσω διαφορετικών ιστορικών αποδείξεων που δόθηκαν στους αιώνες, η άποψη που επικράτησε στις απαντήσεις τους ήταν το πόσο εντυπωσιακό και ενδιαφέρον τους φάνηκε τώρα το μάθημα. Κάτι που εξέφρασαν και προφορικά όπως προαναφέρθηκε στις παρατηρήσεις επί των παρεμβάσεων λέγοντας ότι δεν περίμεναν ποτέ η Γεωμετρία να έχει τόσο ενδιαφέρον.

Αναφέρονται παρακάτω κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών:

«Η χρήση ιστορικών στοιχείων με βοήθησαν στο να πάρω μία ιδέα για τις χρήσεις και τα κίνητρα που οδήγησαν στη δημιουργία των θεωρημάτων που μαθαίνουμε»

«Ήταν αρκετά ξεχωριστό μάθημα, διαφορετικό από τις άλλες παραδόσεις μαθημάτων»

«Μου άρεσε πολύ! Με βοήθησε αρκετά να κατανοήσω καλύτερα το θεώρημα αλλά και να αντιληφθώ τη χρησιμότητά του στην καθημερινή μου ζωή»

«Μου φάνηκε ενδιαφέρον το γεγονός ότι τόσοι πολλοί διαφορετικοί λαοί έδωσαν τόσες πολλές διαφορετικές λύσεις και αποδείξεις σε ένα μόνο θεώρημα»

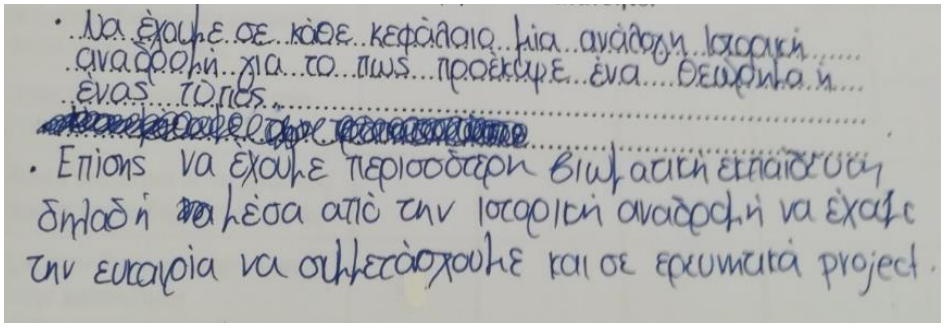
«Η προσέγγιση αυτή στο μάθημα της Γεωμετρίας είναι ενδιαφέρουσα και βοήθησε στην κατανόηση του μαθήματος. Δεν ήταν πληκτική, βοήθησε να δούμε διαφορετικές οπτικές και απόψεις για το ίδιο αποτέλεσμα»

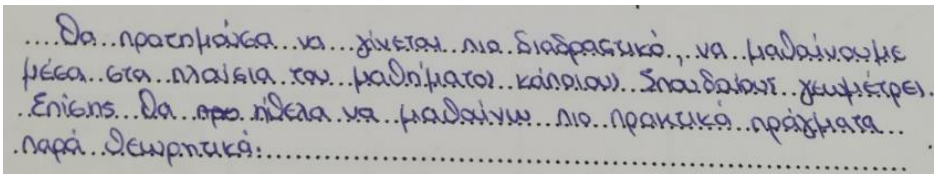
Ανάμεσα στις απαντήσεις υπήρχε και η *«Με δυσκόλεψε στην κατανόησή της γιατί δεν είμαι καλή στην κατανόηση της ιστορίας»* η οποία φανερώνει το κατά πόσο οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στο μάθημα της ιστορίας οδηγεί σε δυσκολίες

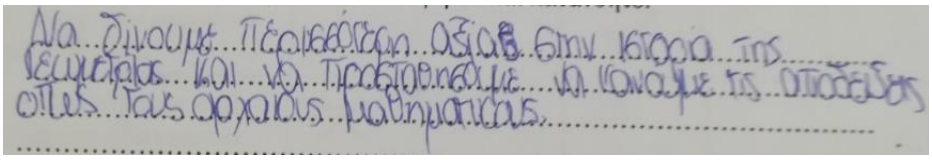
κατανόησης της χρήσης ιστορικών σημειωμάτων και των ιστορικών προσεγγίσεων της Γεωμετρίας.

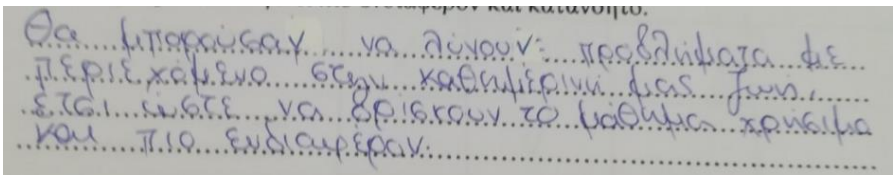
Στην τελευταία ερώτηση του Δ' μέρους του ερωτηματολογίου ζητήθηκε από τους μαθητές να διατυπώσουν δικές τους προτάσεις ώστε το μάθημα της τη Ευκλείδειας να γίνει πιο κατανοητό. Οι απαντήσεις που δόθηκαν στη συγκεκριμένη ερώτηση αφορούσαν κυρίως σε δύο προτάσεις. Διδακτικές προσεγγίσεις με φύλλα εργασίας πρακτικού χαρακτήρα που θα στηρίζονται σε προβλήματα καθημερινής ζωής και ενσωμάτωση ιστορικών αναφορών σ' αυτές ώστε να κατανοήσουν το «γιατί», τον στόχο δηλαδή του συγκεκριμένου μαθήματος.

Ενδεικτικά παρατίθενται κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών όπως οι μαθητές/τριες τις εξέφρασαν απαντώντας στη ερώτηση αυτή.


· Να έχουμε σε κάθε κεφάλαιο μια ανάδρομη ιστορική αναδρομή για το πως προέκυψε ένα θεώρημα ή ένας τόπος.
· Επίσης να έχουμε περισσότερη βιωματική εκπαίδευση δηλαδή μέσα από την ιστορική αναδρομή να έχαμε την ευκαιρία να συμμετάσχουμε και σε ερευνητικά project.


Θα προτιμούσα να γίνεται πιο διαδραστικό, να μαθαίνουμε μέσα στα πλαίσια των μαθημάτων κάποιων δραστηριοτήτων χωμετρίας. Επίσης θα ήθελα να μαθαίνω πιο πρακτικά πράγματα παρά θεωρητικά.


Να δίνουμε περισσότερη αξία στην ιστορία της γεωμετρίας και να προσπαθήσουμε να κάνουμε τις αποδείξεις όπως τους αρχαίους μαθηματικούς.


Θα μπορούσαν να δίνουν προβλήματα σε περιεχόμενο στην καθημερινή μας ζωή, έτσι ώστε να δρίσκουν το μαθήμα χρήσιμο και πιο ενδιαφέρον.

Στους δύο επόμενους πίνακες περιγράφονται οι απαντήσεις που δόθηκαν στα

ερωτήματα του Γ' μέρους αναφορικά με το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών για το μάθημα της Ιστορίας και την Ιστορία της Γεωμετρίας. Παρατηρούνται υψηλότερα ποσοστά ενδιαφέροντος (Αρκετά, πολύ, πάρα πολύ) για την Ιστορία από μαθητές Ανθρωπιστικών Σπουδών (81%) (σχ. 4.4) έναντι των αντίστοιχων ποσοστών για τους μαθητές θετικών σπουδών (46,7%) κάτι που αλλάζει στον δεύτερο πίνακα που αναφέρεται στην Ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. (σχ. 4.5)

Ενδιαφέρον για το μάθημα της Ιστορίας ανάλογα με την ομάδα προσανατολισμού (ΟΠ) των μαθητών/τριών

			Καθόλου	Λίγο	Αρκετά	Πολύ	Πάρα πολύ	Σύνολο
ΟΠ	Θετικών	n	15	9	14	3	4	45
		(%)	33,3	20,0	31,1	6,7	8,9	100,0
	Ανθρωπιστικών	n	0	4	3	6	8	21
		(%)	0,0	19,0	14,3	28,6	38,1	100,0
	Σύνολο	n	15	13	17	9	12	66
		(%)	22,7	19,7	25,8	13,6	18,2	100,0

Σχήμα 4.4. :Πίνακας διπλής εισόδου Ομάδας Προσανατολισμού και ενδιαφέροντος για το μάθημα της Ιστορίας

Οι μαθητές των θετικών σπουδών δηλώνουν ότι ενδιαφέρονται (αρκετά, πολύ ή πάρα πολύ) σε ποσοστό 68,7% , εμφανώς αυξημένο ποσοστό σε σχέση με την προηγούμενη ερώτηση ενώ το αντίστοιχο ποσοστό στις Ανθρωπιστικές Σπουδές εμφανίζει μία μείωση στο 57,2%.

Ενδιαφέρον για την Ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ανάλογα με την ομάδα προσανατολισμού (ΟΠ) των μαθητών/τριών

			Καθόλου	Λίγο	Αρκετά	Πολύ	Πάρα πολύ	Σύνολο
ΟΠ	Θετικών	n	3	11	18	10	3	45
		(%)	6,7	24,4	40,0	22,2	6,7	100,0
	Ανθρωπιστικών	n	2	7	9	1	2	21
		(%)	9,5	33,3	42,9	4,8	9,5	100,0
	Σύνολο	n	5	18	27	11	5	66
		(%)	7,6	27,3	40,9	16,7	7,6	100,0

Σχήμα 4.5.:Πίνακας διπλής εισόδου Ομάδας Προσανατολισμού και ενδιαφέροντος για την Ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Αξιοσημείωτες συσχετίσεις προέκυψαν μεταξύ των μεταβλητών στο SPSSοι οποίες αφορούσαν στο ερώτημα Β1 του Β μέρους και κάποιων ερωτημάτων του Γ

μέρους του ερωτηματολογίου. Χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης Spearman και βρέθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα: :

Θεωρώντας ως μεταβλητές των προς μελέτη συσχετίσεων τις

Β1: Η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με ευχαριστεί

Γ2: Θα μ' ενδιέφερε να μάθω την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών.

Γ3: Αφιερώνω χρόνο διαβάζοντας τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών.

Γ4: Βρίσκω ενδιαφέρουσα την Ιστορία της Γεωμετρίας.

Γ5: Το μάθημα της Γεωμετρίας έγινε πιο κατανοητό με τη χρήση της Ιστορίας.

Γ8: Με την ενσωμάτωση της ΙτΓ στη διδασκαλία συνεργάστηκα καλύτερα με τους συμμαθητές μου.

Γ9: Κατανόησα καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων που διαπραγματευτήκαμε με τη χρήση της ΙτΓ.

προέκυψαν τα παρακάτω:

Μεταξύ των Β1 και Γ2 ο συντελεστής Spearman ($\rho(66)=0,474$, $p=0.000<0,01$) δείχνει μέτρια θετική συσχέτιση, οι μαθητές/τριες δηλαδή που τείνουν να τους ευχαριστεί η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τάσσονται υπέρ της μάθησης της ιστορικής εξέλιξης των γεωμετρικών εννοιών. Για τις Β1 και Γ3 επίσης έχουμε μέτρια θετική συσχέτιση ($\rho(66)=0,505$, $p=0,000$) που σημαίνει ότι όσοι αισθάνονται άνετα με την προετοιμασία του μαθήματος της Γεωμετρίας αφιερώνουν χρόνο και στη μελέτη ιστορικών σημειωμάτων. Μέτρια θετική συσχέτιση μεταξύ των Β1 και Γ4 αλλά και των Β1 και Γ5 με ($\rho(66)=0,468$, $p=0,000$) και ($\rho(66)=0,456$, $p=0,000$) αντιστοίχως. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές που απαντάνε θετικά στο ερώτημα Β1 τείνουν να απαντήσουν θετικά και στα ερωτήματα που αφορούν στο αν βρίσκουν ενδιαφέρουσα την Ιστορία της Γεωμετρίας και το μάθημα με την ενσωμάτωση των ιστορικών στοιχείων τους ήταν πιο κατανοητό.

Ισχυρή θετική συσχέτιση ($\rho(66)=0,720$, $p=0,000$) προκύπτει μεταξύ των μεταβλητών Γ8 και Γ9 δηλαδή οι μαθητές/τριες που απάντησαν θετικά ως προς τη συνεργασία με τους συμμαθητές της ομάδας τους είχαν την τάση να απαντήσουν θετικά και ως προς την καλύτερη κατανόηση των αποδείξεων των θεωρημάτων με τη χρήση της ΙτΓ.

4.3. Συμπεράσματα

Η μελέτη των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές/τριες αναφορικά με τον τρόπο που αντιμετωπίζουν το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας καταδεικνύει ότι κρατάνε μία ουδέτερη ή μία ασθενώς θετική στάση. Κατά ένα μεγάλο ποσοστό δεν τη βρίσκουν δυσκολότερη από τα υπόλοιπα μαθηματικά αντικείμενα αλλά ταυτόχρονα δεν τη βρίσκουν και χρήσιμη σε προβλήματα καθημερινής ζωής. Φαίνεται να μην έχουν κατανοήσει τη σύνδεση της Γεωμετρίας με προβλήματα καθημερινότητας αλλά και με άλλους επιστημονικούς τομείς. Μεγάλο επίσης είναι το ποσοστό των μαθητών που δηλώνουν ότι δεν βρίσκουν καμία χρησιμότητα της Γεωμετρίας για τα μαθηματικά της Γ' Λυκείου, κάτι που αποτελεί και έναν από τους βασικούς λόγους υποβάθμισης του μαθήματος.

Δεν δυσκολεύονται στην κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων ενώ ταυτόχρονα λίγοι είναι αυτοί που αφιερώνουν πολύ ή πάρα πολύ χρόνο στη μελέτη των αποδείξεων των θεωρημάτων αφού, όπως δηλώνουν, η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ευχαριστεί περίπου μόνο τους μισούς. Μια σχετικά αρνητική στάση προκύπτει ότι έχουν οι μαθητές απέναντι στη διαδικασία της απόδειξης των θεωρημάτων τις οποίες ενώ βρίσκουν χρήσιμες για την επίλυση των ασκήσεων, τις θεωρούν ταυτόχρονα σε ένα μεγάλο ποσοστό δύσκολες στην κατανόηση.

Αναφορικά με τον τρόπο που προσδιορίζουν την έως τώρα ενασχόλησή τους με τα ιστορικά σημειώματα προκύπτει ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του δείγματος δεν αφιερώνουν καθόλου χρόνο στη μελέτη των ιστορικών σημειωμάτων που υπάρχουν στο σχολικό εγχειρίδιο ή αφιερώνουν ελάχιστο μόνο χρόνο μελέτης.

Επιπλέον, από τις απαντήσεις που συλλέχθηκαν στο Δ' μέρους του ερωτηματολογίου, ένα επίσης μεγάλο ποσοστό δεν είχαν καμία παλαιότερη εμπειρία από ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στο μάθημα της Γεωμετρίας αλλά και των Μαθηματικών γενικότερα. Δεν είχαν το κατάλληλο κίνητρο ενασχόλησής τους με τα ιστορικά σημειώματα.

Λίγοι μόνο από τους μαθητές δήλωσαν ότι είχαν εμπειρία από τη μελέτη ιστορικών στοιχείων σε τάξη του Γυμνασίου αναφορικά με τις Πυθαγόρειες τριάδες. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να μην καταφέρουν να κατανοήσουν έως τώρα την σύνδεση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονταν με την ιστορική εξέλιξή τους, τη χρησιμότητάς τους στην καθημερινή ζωή αλλά και την αναγκαιότητα εξέλιξης όλων αυτών των εννοιών στο εκάστοτε κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο.

Από τις απαντήσεις που πήρε η διδάσκουσα - ερευνήτρια κατά την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων ως προς το αν έχουν ποτέ ασχοληθεί με τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων φαίνεται ότι αυτό που απαιτούνταν ήταν το κίνητρο. Κίνητρο δηλαδή ενασχόλησής τους από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό ώστε να κατανοήσουν την χρησιμότητά τους και να εμβαθύνουν στην έννοια που διαπραγματεύονται. Τίθεται, επομένως, και ένας γενικότερος προβληματισμός ως προς τη σκοπιμότητα ένταξης των ιστορικών σημειωμάτων στη διδακτική διαδικασία θεωρώντας δεδομένη τη μη αξιοποίησή τους ή την αξιοποίησή τους σε ελάχιστο βαθμό από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς.

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα που διερευνά την επίδραση της ενσωμάτωσης της ΙτΓ στην αντιμετώπιση του μαθήματος από τους μαθητές φαίνεται ότι είναι διακείμενοι θετικά απέναντι στις διδακτικές παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν με χρήση της Ιστορίας. Δηλώνουν ότι ενδιαφέρονται να μάθουν την ιστορική εξέλιξη των Γεωμετρικών εννοιών. Σε μεγάλο ποσοστό των απαντήσεών τους δείχνουν ικανοποιημένοι από το μάθημα της Γεωμετρίας με χρήση της Ιστορίας της, βρήκαν το μάθημα πιο κατανοητό χωρίς να δυσκολευτούν με την παραπάνω ενσωμάτωση.

Ενδιαφέρον παρουσίασε η μεγαλύτερη συμμετοχή εκείνων των μαθητών οι οποίοι σε ένα συνηθισμένο μάθημα παραμένουν αδρανείς αλλά και αδιάφοροι. Μελέτησαν πηγές εκτός του σχολικού βιβλίου με μεγάλη προθυμία, συνεργάστηκαν με τους συμμαθητές της ομάδας τους συμβάλλοντας στη διαμόρφωση συνεργατικού κλίματος στην τάξη, φαινόμενο που εμφανίζεται σπάνια κατά τη διάρκεια συμβατικών διδασκαλιών. Παρατηρήθηκε από τη διδάσκουσα – ερευνήτρια η αυξημένη κατά ένα μεγάλο ποσοστό εμπλοκή τους στη διδακτική διαδικασία.

Ένα επίσης μεγάλο ποσοστό απαντάνε ότι κατανόησαν καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων που τέθηκαν στις διδακτικές παρεμβάσεις. Αν οι περισσότεροι δεν είχαν παλαιότερη εμπειρία από τέτοιου είδους διδασκαλίες στα μαθηματικά, δήλωσαν ενθουσιασμένοι από τον τρόπο παρουσίασης του μαθήματος και αντιλήφθηκαν τη χρησιμότητά τους σε προβλήματα καθημερινής ζωής.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη έρευνα θα ήταν δίκαιο να θεωρηθεί συμπλήρωμα, των ερευνών που μελετήθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναφορικά με τις απόψεις των μαθητών απέναντι σε διδακτικές παρεμβάσεις μαθηματικών εννοιών με ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων. Πρόκειται για παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν στην έρευνα των Kapofu & Kapofu (2020). Οι μαθητές/τριες μολονότι εξακολουθούν να πιστεύουν

ότι η Γεωμετρία αποτελεί ένα αυστηρά θεωρητικό αντικείμενο, δεν έχουν πλέον αρνητική εικόνα ως προς τις αποδείξεις των θεωρημάτων. Με τη χρήση της ΙτΓ απολάμβαναν το μάθημα, βρήκαν κίνητρο εμπλοκής στη μαθησιακή διαδικασία και συνεργάστηκαν καλύτερα με τους/τις συμμαθητές/τριες τους.

Κατά τη συγκέντρωση ιστορικών στοιχείων και πληροφοριών που ζητήθηκε από τους μαθητές πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις φάνηκαν στην πλειοψηφία τους πρόθυμοι να συμμετέχουν. Ακόμη και οι μαθητές που δεν έδειχναν κανένα ενδιαφέρον για το μάθημα έδειξαν να συνειδητοποιούν τη χρησιμότητά του και να εμπλέκονται πολύ πιο ενεργά. Παρουσίασαν, όπως και στην ανάλογη έρευνα σε μαθητές Γυμνασίου του Περιστερίου (Πάσχος, 2003) αξιόλογη ερευνητική δραστηριότητα και προσπάθησαν να συνδέσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία με άλλα μαθηματικά αντικείμενα (Άλγεβρα, Τριγωνομετρία) αλλά και με άλλους επιστημονικούς τομείς (Αρχιτεκτονική, Φυσική).

Στην αντίστοιχη έρευνα των Goktepe & Ozdemir (2013) , το 82% των μαθητών δήλωσαν πρόθυμοι να παρακολουθούν μαθηματικά με ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων κάτι που επίσης παρατηρήθηκε και στη συγκεκριμένη έρευνα.

Κατά την 1η διδακτική παρέμβαση, όταν έγινε η παρουσίαση του εργαλείου μέτρησης του Gerbert d'Aurillac του 10ου π.Χ. αιώνα, αρκετές ήταν οι ομάδες μαθητών που κατάφεραν να εντοπίσουν τα τμήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας πάνω στα οποία στηρίζεται η λειτουργία του. Στην πρακτική χρήση του ανακατασκευασμένου εργαλείου συμμετείχαν με ενθουσιασμό κάνοντας μετρήσεις στον περιβάλλοντα χώρο του σχολικού συγκροτήματος. Αντίθετα, παρατηρήθηκε ιδιαίτερη δυσκολία κατανόησης όταν τέθηκε ο προβληματισμός ως προς την αλήθεια του ισχυρισμού μέτρησης του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή, κάτι που οφείλεται στη μη ενασχόλησή τους με προβλήματα σκιάς και σχημάτων-αναπαραστάσεων αυτής της μορφής. Η παραπάνω δυσκολία αντιμετωπίστηκε με την παρέμβαση της διδάσκουσας-ερευνήτριας και τη μεταφορά του προβλήματος σε ισότητα τριγώνων και αντίστοιχα ισότητα τμημάτων (σχ.3.7).

Στο πρόβλημα ανοικτού τύπου που δόθηκε με αφορμή την εικόνα του ιστορικού σημειώματος του σχολικού εγχειριδίου των Θωμαΐδη κ.α.(1999) (σχ. 3.8), οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες και παρουσίασαν τον τρόπο που εργάστηκαν στην ολομέλεια της τάξης. Οι πλειοψηφία των ομάδων εργάστηκαν θέτοντας τα σημεία Δ και Ε σε συγκεκριμένη «βολική» θέση πάνω στις ΑΓ και ΓΒ (π.χ. στο μέσο αυτών ή σε σημείο ώστε να προκύπτει αναλογία και να είναι πλησιέστερα στη θέση Γ που βρισκόταν ο παρατηρητής). Κατέληξαν μ' αυτόν τον τρόπο στις αναλογίες που απαιτούνταν

εφάρμοσαν τα συμπεράσματα της ομοιότητας των τριγώνων για να υπολογίσουν το ζητούμενο απρόσιτο μήκος της ΑΒ. Λιγότερες ήταν οι ομάδες που χρησιμοποίησαν μεταβλητή λ ώστε να ορίσουν την αναλογία των τμημάτων και να καταλήξουν σε γενικότερο συμπέρασμα. Αξιοσημείωτη υπήρξε και η προσπάθεια ανασχηματισμού από μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων αφού χώρισαν τα τρίγωνα που εντοπίσανε στο σχήμα ανακαλύπτοντας κοινές γωνίες και αναζητώντας τη σχέση μεταξύ των τμημάτων. Σε κάθε περίπτωση βέβαια παρατηρήθηκε ενεργός εμπλοκή όλων των μαθητών των τμημάτων.

Στην 2η διδακτική παρέμβαση, όπου παρουσιάστηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και οι αποδείξεις του, το ενδιαφέρον των μαθητών αυξήθηκε τόσο ως προς την εμπλοκή τους στην διαδικασία των διαφορετικών αποδείξεων όσο και ως προς την ιστορία του και την ενασχόληση πολλών λαών και πολιτισμών με το ίδιο αντικείμενο, κάτι που φανερώνει την βαθύτερη κατανόηση της χρησιμότητάς του στην καθημερινή ζωή. Η ερώτηση που τέθηκε ως κίνητρο (σχ.3.9) λειτούργησε θετικά στην άμεση εμπλοκή τους στη διαδικασία της διδασκαλίας. Όλες ανεξαιρέτως οι ομάδες εντόπισαν τον ζητούμενο τρόπο αναγνώρισης του Πυθαγορείου θεωρήματος στο σχήμα που τους δόθηκε.

Αναφορικά με τις αποδείξεις που ζητήθηκαν στα φύλλα εργασίας, η απόδειξη του Ευκλείδη ήταν αυτή που τους δυσκόλεψε, κυρίως στον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ των εμβαδών τριγώνων και ορθογωνίων που είχαν υπολογίσει. Με τον τρόπο με τον οποίο δόθηκαν όμως κάποιες ερωτήσεις στα συγκεκριμένα φύλλα εργασίας (ως ισχυρισμοί που έπρεπε να αιτιολογήσουν) κατάφεραν να ξεπεράσουν πιο εύκολα τα εμπόδια και να οδηγηθούν στα σωστά συμπεράσματα.

Στα φύλλα εργασίας που αφορούσαν τις αποδείξεις του Bahskara και του Garfield αρκετοί μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων, εφόσον είχαν κατασκευάσει σωστά το σχήμα, προσπάθησαν να κόψουν ένα κομμάτι χαρτί σε επιμέρους επιφάνειες (τρίγωνα και τετράγωνα) ώστε να εντοπίσουν τις ζητούμενες διαστάσεις τους και στη συνέχεια να υπολογίσουν τα απαιτούμενα εμβαδά. Στην απόδειξη του Bahskara δεν τους βοήθησε αρκετά ο παραπάνω τρόπος, ήταν όμως μία απόδειξη ενεργής συμμετοχής τους και εντονότερου ενδιαφέροντος για το μάθημα, κάτι που δεν είχε παρατηρηθεί από τη διδάσκουσα κατά τη χρήση συμβατικών τρόπων διδασκαλίας.

4.4. Συζήτηση

Συνοψίζοντας τα στοιχεία της μελέτης ερευνών, διεθνούς και ελληνικής

βιβλιογραφίας απαντώνται ορισμένα γενικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της συγκεκριμένης εργασίας. Ποιοι επομένως είναι πιθανόν οι λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που παρατηρείται τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα;

α) Έλλειψη σταθερού υπόβαθρου διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας λόγω απουσίας υποχρεωτικών μαθημάτων στα προγράμματα σπουδών τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

β) Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα τόσο σε πανελλαδικό επίπεδο για εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση όσο και στις προαγωγικές εξετάσεις της Β' τάξης του Λυκείου.

γ) Έλλειψη σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με άλλα μαθηματικά αντικείμενα.

δ) Ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και σ' αυτή του Λυκείου και συγκεκριμένα στην περίπτωση της αποδεικτικής διαδικασίας.

ε) Ο παραγκωνισμός των γεωμετρικών κατασκευών κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

στ) Μη επαρκής διδακτικός χρόνος για κάλυψη ολόκληρης της ύλης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ζ) Η γλωσσική ανεπάρκεια των μαθητών που οδηγεί σε δυσκολία κατανόησης και κατά συνέπεια σε υποβάθμιση και απαξίωση του μαθήματος. Ο συγκεκριμένος λόγος υποβάθμισης αποτελεί έναν γενικότερο παράγοντα δυσκολίας κατανόησης μαθηματικών προβλημάτων και δεν αφορά μόνο στο αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Θα μπορούσε η Ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού ώστε να αναβαθμιστεί το μάθημα και να πάρει τη θέση που του αξίζει στην Ελληνική Εκπαίδευση; Σημαντικό ρόλο στη μετάβαση από την Ιστορία στην κατανόηση των Γεωμετρικών εννοιών παίζουν τα ιστορικά σημειώματα και οι ιστορικές πηγές που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια. Είναι γνωστό ότι οι ιστορικές πηγές δεν αποτελούν διδακτέα ή εξεταστέα ύλη. Μπορούν όμως από αυτά να αντληθούν θέματα δημιουργικών εργασιών και δραστηριοτήτων. Δεν υπάρχουν απλά για να εμπλουτίζουν τα κεφάλαια της Γεωμετρίας με επιπλέον πληροφορίες αλλά αποτελούν την αφετηρία μιας παραγωγικής διδακτικής διαδικασίας κατά την οποία τόσο ο εκάστοτε εκπαιδευτικός όσο και οι μαθητές/ τριες εμπλέκονται ενεργά, κατανοώντας αρχικά τη ιστορική εξέλιξη και το «γιατί» της ανακάλυψης της γνώσης που τους παρέχεται.

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Α' Λυκείου του 2011, για την επιτυχία ανάπτυξης βασικών ικανοτήτων των μαθητών στις σύγχρονες πολύπλοκες

κοινωνικές , οικονομικές και πολιτισμικές συνθήκες είναι αναγκαία η ανάπτυξη γενικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων που σχετίζονται με τα γνωστικά αντικείμενα, όπως η ικανότητα αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες και η ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων. Επιπλέον, η διαμόρφωση θετικής διάθεσης/στάσης απέναντι στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών αποτελεί βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη δημιουργικής, αναστοχαστικής και κριτικής σκέψης. Ο δάσκαλος των μαθηματικών έχει χρέος να βοηθήσει τους μαθητές του να περάσουν από τις άτυπες διαισθητικές τους συλλογιστικές διαδικασίες σε μια τυποποιημένη μορφή συλλογισμού.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν στοιχεία αποτελεσματικότητας ως προς την ποιότητα διδασκαλιών αλλά και στοιχεία αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού, ο οποίος λαμβάνοντας υπόψη κριτήρια ποιότητας της διδασκαλίας του, πρέπει να την διαμορφώνει ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης, να την εξελίσσει αλλά και να εξελίσσεται ο ίδιος στα πλαίσια της επαγγελματικής του ανάπτυξης.

Με αφορμή την αναφορά σε ιστορικές πηγές στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δημιουργείται θετικό κλίμα στη σχολική τάξη που έχει ως αποτέλεσμα την βαθύτερη κατανόηση περιεχομένου, την ανάλυση και έρευνα εκ μέρους των μαθητών/τριών, την καλύτερη ποιότητα ανατροφοδότησης εκ μέρους του εκπαιδευτικού αλλά και την καλλιέργεια ενός εκπαιδευτικού διαλόγου προκαλώντας τη σκέψη του μαθητή και όχι μόνο την παθητική μελέτη του θέματος που διαπραγματεύονται.

Είναι εφικτή επομένως η αναβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την ίδια την ιστορία της; Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο 2ο κεφάλαιο της παρούσας έρευνας υπάρχει άφθονο υλικό που παρέχεται μέσω της Ιστορίας της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα στους εκπαιδευτικούς ώστε να αρθεί ως έναν βαθμό η υποβάθμιση του μαθήματος και να βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση τόσο των γεωμετρικών εννοιών και κατασκευών από τους μαθητές όσο και της συνύπαρξης όλων των κλάδων των μαθηματικών αφού η ίδια η ιστορία είναι αυτή που τα συνδέει μέσω κοινωνικοπολιτισμικών αναγκών της εκάστοτε εποχής.

Αναφορικά με τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να ενσωματωθούν στη διδακτική πράξη ορισμένα στοιχεία από την Ιστορία της Γεωμετρίας έχουν παρουσιαστεί εκτενέστερα στο 1ο και στο 2ο κεφάλαιο. Με την Ιστορία ως εργαλείο αλλά και την Ιστορία ως στόχο στην εκάστοτε διδασκαλία ακολουθώντας στρατηγικές όπως αυτές που προτείνει ο Junkvist (2009) , προσεγγίσεις διαφωτισμού, προσεγγίσεις ενοτήτων ή

ιστορικές προσεγγίσεις. Με τη χρήση των στρατηγικών του Fried (2001) (strategy of addition, strategy of accommodation) αλλά και με τη χρήση πρωτογενούς ή δευτερογενούς υλικού όπως αυτά έχουν αναλυθεί σε προηγούμενα κεφάλαια.

Σημαντικές ευκαιρίες που δίνονται για ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στην ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ώστε να αρθούν οι λόγοι υποβάθμισης του μαθήματος έχουν αντληθεί από ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν ήδη στα σχολικά εγχειρίδια και έχουν αναλυθεί εκτενώς. Πρόκειται για ιστορικό υλικό όπως:

α) η απόδειξη της ιδιότητας του ισοσκελούς τριγώνου που αφορά στην ισότητα των γωνιών της βάσης του, που με τον τρόπο που παρουσιάστηκε υποδηλώνει την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας

β) η παρουσίαση των διδακτικών παρεμβάσεων με θέμα τις διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος

γ) οι γεωμετρικές αποδείξεις των αλγεβρικών ταυτοτήτων, η γεωμετρική κατασκευή των λύσεων δευτεροβάθμιας εξίσωσης, το θεώρημα του Πτολεμαίου που οδηγεί στην γεωμετρική απόδειξη τριγωνομετρικών τύπων. Ιστορικά δηλαδή στοιχεία που καλύπτουν τη σύνδεση του μαθήματος της Γεωμετρίας με άλλα μαθηματικά αντικείμενα

δ) η χρήση ανακατασκευασμένων εργαλείων (όπως περιγράφεται μέσω των διδακτικών παρεμβάσεων) για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων ή τη χρήση του Αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Όλα τα παραπάνω απαιτούν αλλά και υποκινούν ταυτόχρονα την ενεργό συμμετοχή των μαθητών και την εμπλοκή τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Σύμφωνα με τους Ozdemir, Goktepe & Kepceoglu (2012), η ιστορία των μαθηματικών είναι μια ζωντανή επιστήμη που δημιουργεί μια γέφυρα από το παρελθόν στο μέλλον και δείχνει πώς η σύνδεση των παλαιών και των νέων είναι γεγονός στην εξέλιξη των μαθηματικών σήμερα. Ως εκ τούτου, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν πώς οι μαθηματικές ιδέες δημιουργήθηκαν στο παρελθόν (Furinghetti & Somaglia, 1998), και πόσες από τις έννοιες που ασχολούνται στην τάξη και στην καθημερινή ζωή τους, καθώς και διάφορες τεχνικές που χρησιμοποιούν σήμερα στην επίλυση προβλημάτων, υπάρχουν εδώ και πολύ καιρό (Rice, 1998). Τα παραπάνω δίνουν ένα ισχυρό κίνητρο ενσωμάτωσης της ιστορικής εξέλιξης αν λάβουμε υπόψη το πλούσιο υλικό των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Δίνεται κίνητρο στους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν με τη μελέτη και την έρευνα γύρω από την ιστορική εξέλιξη της Επιστήμης της Γεωμετρίας, παρακολουθώντας σχετικά μαθήματα τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό

επίπεδο. Παρακολουθώντας διαλέξεις, σεμινάρια επιμόρφωσης και συνέδρια που έχουν ως κεντρικό θέμα την ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών καλύπτουν σε ένα ικανοποιητικό βαθμό την έλλειψη γνωστικού και παιδαγωγικού υπόβαθρου στα πλαίσια της διδακτικής του μαθήματος με τη βοήθεια της Ιστορίας του.

Ενδεικτικά, αναφέρονται παρακάτω συνέδρια μαθηματικού περιεχομένου που είχαν ως κεντρικό θέμα ή θέμα αναφοράς την ενσωμάτωση Ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους:

- 19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (Κομοτηνή,2002)
- Διήμερη συνάντηση με θέμα «Ιστορία των Μαθηματικών, της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι διδακτικές τους προεκτάσεις (Θεσσαλονίκη, 2006)
- 34ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (Λευκάδα, 2017)
- 36ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (Λάρισα, 2019)

4.5. Περιορισμοί και Επεκτάσεις της έρευνας

Η παρούσα έρευνα αφορά στην υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κυρίως στα πλαίσια του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος Εκπαίδευσης. Ενδιαφέρον βέβαια θα παρουσίαζε μία παρόμοια μελέτη και στα εκπαιδευτικά συστήματα άλλων χωρών κυρίως της Ευρώπης. Πόσο δηλαδή έχει επηρεάσει το κίνημα της Μαθηματικής Μεταρρύθμισης τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε άλλες Ευρωπαϊκές χώρες. Εκτός βέβαια από τη θέση που κατέχει το μάθημα στα διάφορα εκπαιδευτικά συστήματα ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και ο βαθμός ενσωμάτωσης ιστορικών στοιχείων, πηγών και σημειωμάτων της Γεωμετρίας στις διδακτικές προσεγγίσεις των χωρών αυτών, ο τρόπος ενσωμάτωσης της Ιστορίας αλλά και οι στάσεις – αντιλήψεις των μαθητών ως προς το μάθημα και τους συγκεκριμένους τρόπους διδασκαλίας.

Από τις απαντήσεις που συλλέχθηκαν μέσω του ερωτηματολογίου και τη δήλωση μεγάλου ποσοστού μαθητών ότι δεν βρίσκουν το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χρήσιμο για τα μαθηματικά της Γ’ Λυκείου και την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, μια πρόταση μελλοντικής έρευνας είναι και η αναζήτηση εκείνων των φορέων που συμβάλλουν στη διαμόρφωση αυτής της αντίληψης.

Αναφορικά με την έρευνα που διεξήχθη στους μαθητές της Β’ Λυκείου του συγκεκριμένου σχολείου της Χαλκιδικής, ενδιαφέρουσα θα ήταν η επέκταση της ίδιας

έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα σχολείων και μαθητών με διεξαγωγή ταυτόχρονα διδακτικών παρεμβάσεων με χρήση της ΙτΓ. Μια έρευνα μεγαλύτερης διάρκειας με διδασκαλίες που θα κάλυπταν ύλη δύο συνεχόμενων ετών Α και Β Λυκείου και που κύριο χαρακτηριστικό τους θα είχαν την ένταξη των ιστορικών σημειωμάτων των σχολικών εγχειριδίων του μαθήματος.

Είναι άφθονο το ιστορικό υλικό που δίνεται μέσω των εγχειριδίων αλλά και αυτό που υπάρχει στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία ώστε να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του εκάστοτε εκπαιδευτικού.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αρώνη Π.,(2008). Η ιστορία του π ,Διπλωματική εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών". Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Βεντούρα, Λ. (1992). Η νομοθεσία περί διδακτικών βιβλίων. Μια εστία συγκρούσεων εκπαιδευτικού δημοτικισμού και αντιμεταρρυθμιστών (1907-1937), *Μνήμων*,14, σ. 91-114.

Γκλαβάς, Σ., (2010). Επισκόπηση της Ιστορίας της Εκπαίδευσης στο Νεοελληνικό κράτος. Ανακτήθηκε στις 10 Ιανουαρίου 2021 από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/episkopisi.pdf

Γρίδος, Μ., Αυγερινός, Ε.,(2019). Επαναφορά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Εκπαίδευση μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Πρακτικά 36ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 196–205. Ε.Μ.Ε., Λάρισα.

Θωμαΐδης, Γ., (1981). Αρχή και εξέλιξη της τριγωνομετρίας. *Μαθηματική επιθεώρηση*,τ.24, σ. 45-73.

Θωμαϊδης, Γ., (1990). Ιστορικές παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας, *Ευκλείδης γ'*, 7(25), pp 27-41.

Θωμαΐδης Γ. (1996). Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 1, σελ.72-92.

Θωμαϊδης, Γ., (2009). *Μαθηματικά και Εξετάσεις*, Εκδόσεις Ζήτη.

Θωμαΐδης, Γ.(2014). Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εισήγηση Στρογγυλού Τραπεζιού με θέμα: «Το πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας: Υπάρχει λύση;» 4η Ημερίδα Μαθηματικών Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί, 15 Μαρτίου 2015, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στη http://www.kalamari.gr/images/stories/hmerida_mathimatikwn/4hmeridamathimatikwn/thomaidis.pdf

Θωμαΐδης, Γ., (2015). Συνέχειες και ασυνέχειες κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εισήγηση στη συζήτηση Στρογγυλού Τραπεζιού με θέμα: «Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο» 5η Ημερίδα Μαθηματικών Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί. Διαθέσιμο στη διαδικτυακή διεύθυνση:

http://www.kalamari.gr/el/component/content/article/694hmeridamahtimatikwn2015.html

ΙΕΠ (2018).Οδηγίες για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας https://www.minedu.gov.gr/publications/docs2018/01_10_18_%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CE%B9%CE%B5%CF%82%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%89%CE%BD%20%CE%93%CE%95%CE%9B.pdf

Μιόγλου Κ. (2017). Πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού

(Μεταπτυχιακή εργασία), Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη.

Μπαλής, Σ., (2008). «Τα μαθηματικά στην ποίηση και η ποίηση των μαθηματικών» (επιμ. Χασάπης Δ.], 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, Ομάδα έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης, 77-90.

Μπαραλός, Γ. (2003). Μαθηματική απόδειξη και η «υπόθεση της φυσικής διανοητικής ολοκλήρωσης» Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή, Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Βόλος: Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 159-166.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). Προδιαγραφές σχολικών βιβλίων. Αθήνα: Ανακτήθηκε Οκτώβριος 20, 2020 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Παναούρα, Α. & Φιλίππου, Γ. (2002). Η σημασία της ιστορίας στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης. Πρακτικά του Πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας (σελ. 151-162). Ανακτήθηκε Νοέμβριος 1, 2020, από https://eudml.org/doc/236098

Παπαδοπούλου, Α., (2016). Ο «κρυφός» χαρακτήρας της Γεωμετρίας στην ανάπτυξη του μαθηματικώς σκέπτεσθαι: Ερευνητική προσέγγιση των απόψεων και στάσεων των εκπαιδευτικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Πάσχος Θ. (2003). Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πρακτική στο Γυμνάσιο, 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, ΕΚΠΑ, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Πούλος, Α.,(2010). Επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών στην Α' τάξη του Λυκείου, *Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 139–152. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Πρίντεζης, Γ.(2019). Ο Θαλής, η Πυραμίδα και η Γεωμετρία του 6ου π.Χ. αιώνα, Πρακτικά 36ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας 856-867.

Σκούρας, Α., (2010). Οι ακολουθούμενες πολιτικές σε σχέση με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, *Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 153–167. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Σταμάτης, Ε., (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία Ι*. Αθήνα : ΙΤΥΕ - ΟΕΔΒ.

Στράντζαλος, Χ.,(2010), Η Γεωμετρία ως πολιτισμικό αγαθό και ως διδακτικό αντικείμενο στο Λύκειο. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.*Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 169-180. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Τζεβελέκης, Μ., (2019). Η συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών: η περίπτωση του πυθαγορείου θεωρήματος και των άρρητων αριθμών (Μεταπτυχιακή εργασία), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Μαθηματικών, Αθήνα.

Τσαμάτος, Π., (2017), Μεγάλες στιγμές της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αρχαιότητα, Διάλεξη Λέσχης Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Υπουργείο Παιδείας, Διά Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων, *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α' τάξης Γενικού Λυκείου* , ΦΕΚ 1165/2011, 8 Ιουνίου 2011.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abah, J. A. (2017). Viewing basic math through the lens of history: Undergraduates' reflective learning in a history-augmented mathematics classroom. *Waikato Journal of Education*, 22(4), 33-48.

Aktas, M. C., &Mumcu, H. Y. (2019). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Views on Geometric Constructions: Building on the Paper or Interactive Whiteboard?. *Online Journal of Education and Teaching (IOJET)*, 6(3). 598-611.

Bachelard, G.: (1934), *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Barwell, M. E. (1913). The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The Mathematical Gazette*, *7*(104), 72-79.

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *The Mathematics Teacher*, 86(6), 461-464.

Brousseau G., (1997), 'Theory of Didactical Situations in Mathematics', New York: Kluwer Academic Publishers

Cheung, L. H. (2011). Enhancing students' ability and interest in geometry learning through geometric constructions. Yayınlanmamış Doktora Tezi, The University of Hong Kong, Hong Kong, Çin.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464.

Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 225-235.

Davis, P., Hersh, R., (1980), *Η μαθηματική εμπειρία*, (μτφρ. Γιώργος Αναστασιάδης), Αθήνα : Τροχαλία.

Deakin, M.A.B.(1990). 'From Pappus to today, the history of a proof', *The Mathematical Gazette* 74(467), 6–11.

Dieudonné, J. (1961). New thinking in school mathematics. In *New Thinking in School Mathematics* (pp. 31–46). Paris: OEEC.

Dreyfus T., Hadas N. (1988). Euclid May Stay-and Even Be Taught, National Council of Teachers of Mathematics, Year Book, USA, 47-58.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of education for teaching*, 15(1), 13-33.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. For the learning of mathematics, 11(2), 3-6.

Fauvel, J. and van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer

Franceschetti, R.,D., (2020). "The Bourbaki School of Mathematics ." *Science and Its Times: Understanding the Social Significance of Scientific Discovery*. Retrieved October 16,2020 from Encyclopedia.com: https://www.encyclopedia.com/science/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/bourbaki-school-mathematics

Fraser, B. J., & Koop, A. J. (1978). Teachers' opinions about some teaching material involving history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 9(2), 147-151.

Freedman. M. P. (1997). Relationship among laboratory instruction, attitude toward science, and achievement in science knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 34(4), 343-357.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational studies in mathematics*, 3(3-4), 413-435.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics oexist?. *Science & Education*, 10(4), 391-408.

Furinghetti , F., Somaglia, A. (1998).History of mathematics in school across disciplines.*Mathematics in School*, 2(4),48-51.

Furinghetti, F. (2000). The long tradition of history in mathematics teaching. [eds.] V. Katz. Using history to teach mathmatics: An international perspective. Washington, D.C. : *The Mathematical Association of America*, pp. 49-58.

Goktepe, S., &Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1(3), 125-136.

Gulikers, I., &Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 223-258.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176-203.

Horak, V.M. and Horak W.J. (1981). ‘Geometric proofs of algebraic identities’, *Mathematics Teacher* 74(3), 212–216.

Horng, W. S. (2001). Intrinsic cognitive dimension of the HPM: Text versus context. In *The Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics Education*.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., ... & Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. In *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 291-328). Springer, Dordrecht.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009). *Using history as a'goal'in mathematics education* (Vol. 464). IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, Roskilde Universitet.

Kapofu, L. K., &Kapofu, W. (2020). “This Maths is better than that Maths”–Exploring Learner Perceptions on the Integration of History of Mathematics in Teaching the Theorem of Pythagoras: A Case Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), 5-15.

Katz, V. J. (2013). *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, (μτφρ. Κώστας Χατζηκυριάκου), Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 137-174.

Koballa, T. R. (1988). Attitude and related concepts in science education. *Science Education*, 72(2), 115-126.

Levav-Waynberg, A., &Leikin, R. (2012). Using multiple solution tasks for the evaluation of students’ problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(4), 311-333.

Li, Y. (2007). Curriculum and culture: An exploratory examination of mathematics curriculum materials in their system and cultural contexts. *The Mathematics Educator*, 10(1), 21-38.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching. *Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.

Ozdemir, A. S., Goktepe, S., &Kepceoglu, I. (2012). Using mathematics history to strengthen geometric proof skills. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46, 1177-1181.

Pandiscio, E. A. (2002). Alternative geometric constructions: Promoting mathematical reasoning. *The Mathematics Teacher*, 95(1), 32-36.

Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI study* (pp. 143–170, Chapter 5). Dordrecht: Kluwer Academic.

Redlin, L., Viet, N., & Watson, S. (2000). Thales' Shadow. *Mathematics Magazine*, *73*(5), 347-353.

Relich, J., Way, J., & Martin, A. (1994, July). Attitudes to teaching mathematics: Further development of a measurement instrument. *Mathematics Education Research Journal*, 6(1), 56-69.

Rice, A. (1998). A Platonic stimulation: Doubling the square or why do I teach maths? *Mathematics in School*, 27(4), 23 24.

Sanders, C. V. (1998). Sharing teaching ideas: Geometric constructions: Visualizing and understanding geometry. The Mathematics Teacher, 91(7), 554-556.

Schoenfeld A.H., (1986). "On having and using geometric knowledge", in *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, in J. Hierbert, Hillsdale, NJ: Erlbaum (eds.), 225- 264.

Simmons, G. F. (2016). Differential equations with applications and historical notes. CRC Press.

Thom, R.: 1971, 'Modern Mathematics: An educational and philosophical error?', *American Scientist* 59, 695–699.

Thomaidis, Y., &Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 165-183.

Thomaidis, Y., &Tzanakis, C. (2010). The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European society for research in mathematics education. Lyon: Service des publications, INRP* (pp. 2801-2810).

Tzanakis, C. ,Arcavi, A. (2000). "Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey". In J. Fauvel& J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study*", (pp. 201 - 240). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., … Siu, M.-K. (2002). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. New ICMI Study Series, 201–240.*

Tzanakis, C., &Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 44-55.

Tzanakis, C., &Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education in B. Sriraman, *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*, 247-294.

Van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics*, 17(2), 39-46.

Warren, E.,(2006). Comparative mathematical language in the elementary school: a longitudinal study. *Educational studies in mathematics* 62, 169-189.

Wilson, P. S., &Chauvot, J. B. (2000). Sound Off!: Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2016). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: Revisiting a proof of the Pythagorean theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 777-803.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

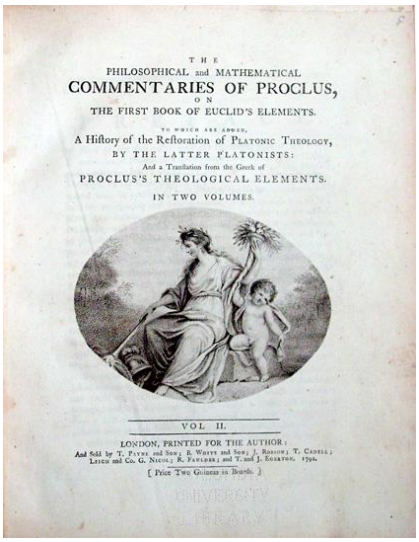
Για την 1η διδακτική παρέμβαση (8ο Κεφάλαιο – Β' Λυκείου)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων)

Ο **Πρόκλος ο Λύκιος**, αποκαλούμενος και **Πρόκλος ο Διάδοχος** (Κωνσταντινούπολη, 8 Φεβρουαρίου 412 – Αθήνα, 17 Απριλίου 485) ήταν νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ένας από τους τελευταίους, σημαντικότερους κλασικούς φιλοσόφους.

Στο έργο αυτό ο Πρόκλος αναφέρει τη μέτρηση του ύψους πυραμίδας της Αιγύπτου από τον Θαλή.

Το κύριο μαθηματικό έργο του Πρόκλου είναι τα "Σχόλια στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη". Εκεί, πέραν των εκτεταμένων σχολίων (700 σελίδες περίπου), παραθέτει στην εισαγωγή ένα ιστορικό σημείωμα των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών. Ξεκινώντας από την εποχή του Θαλή φτάνει μέχρι την εποχή του Ευκλείδη, διατρέχοντας μια χρονική περίοδο περίπου τριακοσίων ετών, και αναφέρει 24 γεωμέτρες καθώς και τη συμβολή κάθε ενός στη γεωμετρία.


THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
To which are added,
A History of the Restoration of Platonic Theology,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Translation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.

VOL II.

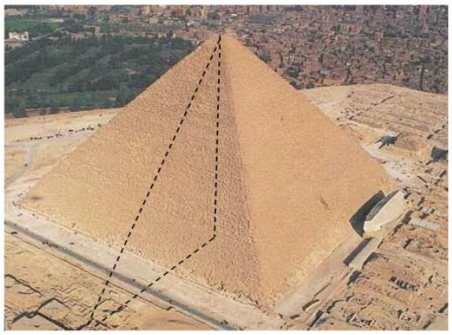
LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR;
And Sold by T. Payne and Son; R. White and Son; J. Robson; T. Cadell; Leigh and Co. G. Nicol; R. Faulder; and T. and J. Egerton. 1792.
[Price Two Guineas in Boards.]

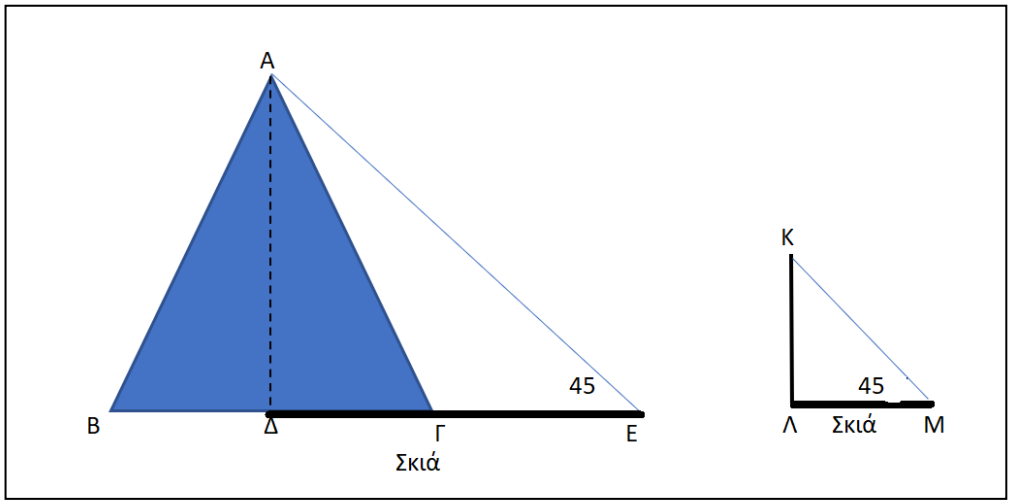
Στο έργο «Ηθικά» του Πλούταρχου (1ος - 2ος αιώνας μ.Χ.) γίνεται επίσης αναφορά στη μέτρηση αυτή από τον Θαλή.

Δραστηριότητα 1

Σύμφωνα με τον Πρόκλο τον Λύκιο στο έργο του «Σχόλια στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» αλλά και τον Πλούταρχο στα «Ηθικά» ζητήθηκε από τον Θαλή να

υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα. Και το έκανε χρησιμοποιώντας τη σκιά της πυραμίδας και τη σκιά μιας ράβδου.





1) Με δεδομένο τη γνώση του Θαλή περί της γωνίας που σχηματίζουν οι ακτίνες του Ήλιου με τη σκιά (=45°) δώστε τα χαρακτηριστικά των δύο τριγώνων ΑΔΕ και ΚΛΜ και υπολογίστε το ύψος ΚΛ του ΚΛΜ
……
……
…….

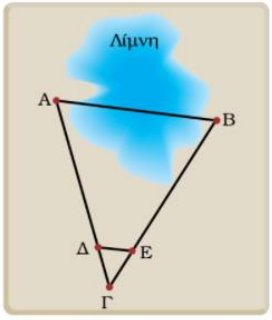
2) Με τί θα ισούται το ύψος ΑΔ της πυραμίδας
……
……
……..

3) Άρα, τελικά, πως υπολόγισε ο Θαλής το ύψος της πυραμίδας;
……
……
……

4) Είναι εφικτή η παραπάνω μέτρηση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
……
……

……
……

Δραστηριότητα 2



ΣΧΟΛΙΟ: Την προηγούμενη τεχνική μέιρησης της απόστασης δύο απρόσιτων σημείων περιγράφει ο αρχαίος Έλληνας μηχανικός και μαθηματικός Ήρων ο Αλεξανδρεύς (περίπου 1ος αιώνας μ. Χ.) στο έργο του «Περί Διόπτρας». Στο έργο αυτό ο Ήρων παρουσιάζει ένα πλήθος ευφυών μεθόδων επίλυσης τεχνικών προβλημάτων (π.χ. η διάνοιξη μιας σήραγγας σ' ένα βουνό), στις οποίες γίνεται ευρεία χρήση της έννοιας της ομοιότητας.

1) Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση των σημείων Α και Β που βρίσκονται εκατέρωθεν της λίμνης με δεδομένες τις αποστάσεις ΓΑ και ΓΒ (των αποστάσεων δηλαδή του σημείου Γ όπου βρίσκεται ο παρατηρητής από τα άκρα Α και Β στις όχθες της λίμνης)

……
……
……
……
……
……
……
……
……

……
……
……
……

Μπορείτε να επινοήσετε προβλήματα παρόμοιου τύπου στα οποία καλούμαστε να υπολογίσουμε απρόσιτα ύψη ή αποστάσεις;

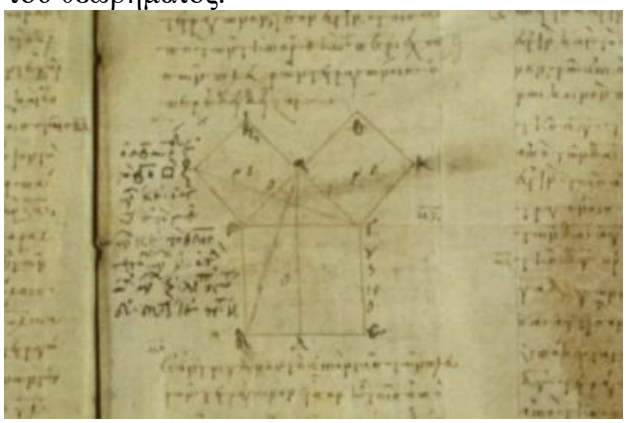
……
……
……
……

(παρουσιάστε τα προβλήματα που εντοπίσατε ή επινοήσατε στην ολομέλεια της τάξης)

Για τη 2η διδακτική παρέμβαση (9ο Κεφάλαιο – Β' Λυκείου)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Ευκλείδης – Α' ομάδα)

Γύρω στα 300 π.Χ., στα **Στοιχεία του Ευκλείδη** παρουσιάζεται η πρώτη εκτενής θεωρητική απόδειξη του θεωρήματος.

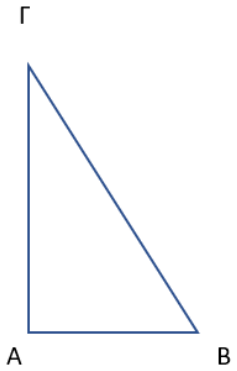


Για την απόδειξη αυτή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τα εμβαδά τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων που εμφανίζονται.Ποια είναι όμως αυτή η απόδειξη;

Οδηγίες κατασκευής σχήματος

Κατασκευάστε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90ο ,**ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ** και εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΑΓΖΗ, ΑΒΙΘ. Φέρουμε τις ΒΖ και ΑΔ.

Χώρος κατασκευής σχήματος



1) Τα τρίγωνα ΖΓΒ και ΑΓΔ είναι μεταξύ τους ίσα. Πως μπορείτε να το αιτιολογήσετε;
……
……
……

……
……

2) Βρείτε τα εμβαδά των ΖΓΒ και ΑΓΔ και τη σχέση μεταξύ τους
(χρησιμοποιείστε ως βάση για το ΖΓΒ τη ΖΓ=β και ως βάση για το ΑΓΔ την ΓΔ)
……
……
……
……
……

3) Καταλήγουμε στο ότι β^2= ……..

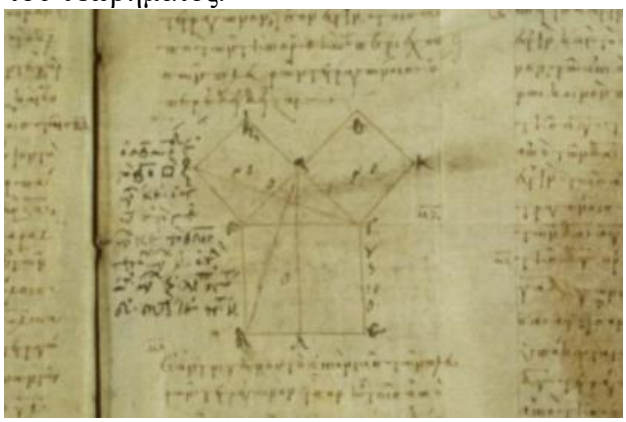
4) Κατασκευάστε στο εσωτερικό του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις την πλευρά α και το ύψος του ΑΓΔ από την κορυφή Α

5) Ομοίως προκύπτει ότι γ^2= …….

6) Πως μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα με τη βοήθεια όσων δείχθηκαν παραπάνω;
……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Ευκλείδης – Β' ομάδα)

Γύρω στα 300 π.Χ., στα **Στοιχεία του Ευκλείδη** παρουσιάζεται η πρώτη εκτενής θεωρητική απόδειξη του θεωρήματος.

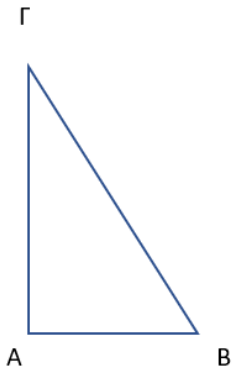


Για την απόδειξη αυτή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τα εμβαδά τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων που εμφανίζονται. Ποια είναι όμως αυτή η απόδειξη;

Οδηγίες κατασκευής σχήματος

Κατασκευάστε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90° ,**ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ** και εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΑΓΖΗ, ΑΒΙΘ. Φέρουμε τις ΒΖ και ΑΔ.

Χώρος κατασκευής σχήματος



1) Τα τρίγωνα ΒΓΙ και ΑΒΕ είναι μεταξύ τους ίσα. Πως μπορείτε να το αιτιολογήσετε;
……
……
……
……
……

2) Βρείτε τα εμβαδά των ΒΓΙ και ΑΒΕ και τη σχέση μεταξύ τους
(χρησιμοποιείστε ως βάση για το ΒΓΙ τη ΒΙ=γ και ως βάση για το ΑΒΕ την ΒΕ)
……
……
……
……
……

3) Καταλήγουμε στο ότι γ^2= ……..

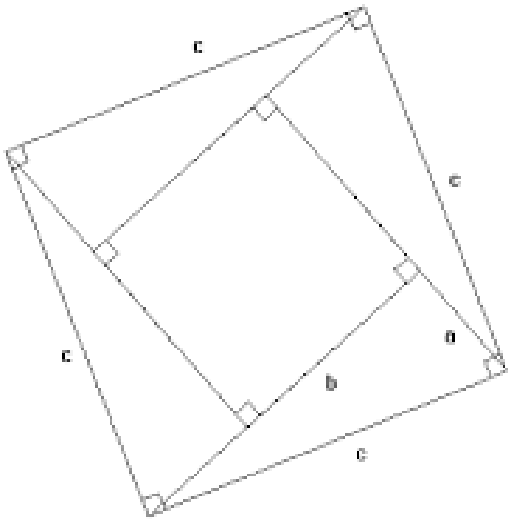
4) Κατασκευάστε στο εσωτερικό του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις την πλευρά α και το ύψος του ΒΓΙ από την κορυφή Α

5) Ομοίως προκύπτει ότι β^2= ……..

6) Πως μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα με τη βοήθεια όσων δείχθηκαν παραπάνω;
……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Bahskara)

Βρισκόμαστε στην Ινδία το 1150 μ.Χ. όταν ο Ινδός μαθηματικός και αστρονόμος Bahskara βασισμένος στα θρησκευτικά κείμενα Σουλβασούτρας δίνει τη δική του απόδειξη για το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο έργο του «Η Κορωνίδα της Επιστήμης» έδωσε μία οπτική απόδειξη. Παρέθεσε το σχήμα με τη λέξη: «Ιδού»..



This diagram is used in the Bhaskara proof.

Μπορούμε να εξηγήσουμε τη σκέψη του Bahskara;

Οδηγίες κατασκευής σχήματος

Κατασκευάστε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς γ και μία ημιευθεία Αχ που τέμνει τη ΒΓ. Φέρτε ΔΚ ⊥ Αχ όπου Κ σημείο στο εσωτερικό του τετραγώνου. Έστω ΑΚ=β και ΔΚ = α. Σχεδιάστε ΓΛ//ΑΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΚ στο Λ. Η κάθετη από το Β στη ΓΛ τέμνει την Αχ στο Ν και την ΓΛ στο Μ.

Χώρος κατασκευής σχήματος

1) Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΔ, ΔΛΓ, ΒΜΓ και ΑΝΒ ως προς την ισότητα και υπολογίστε τις πλευρές τους συναρτήσει των α, β και γ.

……
……
……
…….

2) Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Πως μπορείτε να το αιτιολογήσετε;Βρείτετην πλευρά του συναρτήσει των α, β, γ

……
……
……
…….

3) Υπολογίστε τα εμβαδά του τετραγώνου ΚΛΜΝ και των παραπάνω τριγώνων

……
……
……
…….

4) Υπολογίστε το εμβαδό του ΑΒΓΔ

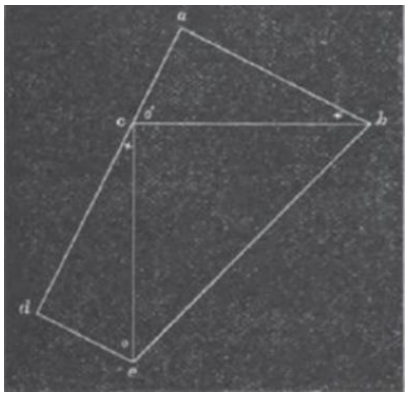
……
……
……
……

5) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τις παραπάνω επιφάνειες

……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Garfield)

Ο James Abram Garfield (1831-1881) υπήρξε ο 20ος πρόεδρος των ΗΠΑ. Πριν αποφασίσει να ασχοληθεί με την πολιτική , το πάθος του για τα μαθηματικά τον οδήγησε στο να δώσει μία απόδειξη για το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
Ποια ήταν αυτή;
Πήρε ένα κομμάτι χαρτί , έκοψε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα και τα τοποθέτησε κατάλληλα ώστε να σχηματιστεί ένα τραπέζιο όπως στο παρακάτω σχήμα.



Γιατί το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι τραπέζιο;

Οδηγίες κατασκευής σχήματος

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90° και πλευρές ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ. Κατασκεύαστε ορθή γωνία ΓΒχ=90° με Βχ στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το σημείο Α. Πάνω στην Βχ παίρνουμε με τη βοήθεια διαβήτη σημείο Δ ώστε ΒΔ=ΒΓ=α. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και φέρουμε ΔΕ κάθετη στην ΑΒ (Ε σημείο της προέκτασης της ΑΒ). Ενώνουμε τα σημεία Γ και Δ

Χώρος κατασκευής σχήματος

1) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι ίσα. Γιατί;

……
……
……
…….

2) Βρείτε τις διαστάσεις των τριγώνων ΑΒΓ, ΒΔΕ, που υπάρχουν στο σχήμα σας, συναρτήσει των α, β και γ.

……
……
……

3) Ποιο είναι το εμβαδό του τραπεζίου ΑΓΕΔ

……
……
……
……
…….

4) Ποιο είναι το εμβαδό των τριγώνων ΑΒΓ, ΒΔΕ, ΓΒΔ

……
……
……
……

5) Μπορείτε να εντοπίστε την ισοδυναμία επιφανειών που προκύπτουν από το σχήμα σας;

……
……
……
……

6) Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε;

……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ που αποδίδεται και στον ΕΙΝΣΤΕΙΝ)

Ο Albert Einstein σε ηλικία 12 μόλις ετών φαίνεται να έδωσε τη δική του απόδειξη για το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας ομοιότητα τριγώνων

Ποια μπορεί να ήταν αυτή;

Οδηγίες κατασκευής σχήματος

Κατασκευάστε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90° ,**ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ** και ΑΔ το ύψος του πάνω στην υποτείνουσα.

Χώρος κατασκευής σχήματος

1) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι όμοια. Γιατί;

   ……
   ……
   ……
   ……

2) Ποια αναλογία πλευρών προκύπτει;

……
……
……
……
……

3) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια. Γιατί;

……
……
……
……
……

4) Ποια αναλογία πλευρών προκύπτει;

……
……
……
……
……

5) Υπολογίστε το άθροισμα $\beta^2+\gamma^2$

……
……
……
……
……

6) Πως θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα του Πυθαγορείου θεωρήματος;

……
……
……
……
……

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Διερεύνηση στάσεων μαθητών/τριών απέναντι στη διδασκαλία της Γεωμετρίας με τη χρήση της Ιστορίας της.

ΜΕΡΟΣ Α' – ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ

Φύλο: ☐ **Αγόρι** ☐ **Κορίτσι**

Ηλικία: _____

Ομάδα Προσανατολισμού: _____

ΜΕΡΟΣ Β' – ΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ερωτήσεις	**Καθόλου**	**Λίγο**	**Αρκετά**	**Πολύ**	**Πάρα πολύ**
1. Η προετοιμασία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με ευχαριστεί					
2. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορώ να χρησιμοποιώ δικές μου ιδέες					
3. Η Γεωμετρία είναι δυσκολότερη από όλα τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα					
4. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη σε προβλήματα της καθημερινής ζωής					
5. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι δύσκολες στην κατανόηση					
6. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων με βοηθούν να λύσω τις ασκήσεις					
7. Δυσκολεύομαι στην κατασκευή των κατάλληλων γεωμετρικών σχημάτων					
8. Θα μου είναι χρήσιμη η γνώση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα μαθηματικά της Γ Λυκείου					
9. Συνήθως αισθάνομαι άνετα κατά τη διάρκεια των διαγωνισμάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία					
10. Αφιερώνω χρόνο στη μελέτη των αποδείξεων των θεωρημάτων και των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας					

ΜΕΡΟΣ Γ' – ΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΗΣ

Ερωτήσεις	**Καθόλου**	**Λίγο**	**Αρκετά**	**Πολύ**	**Πάρα πολύ**
11. Βρίσκω ενδιαφέρον το μάθημα της Ιστορίας.					
12. Θα μ' ενδιέφερε να μάθω την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών.					
13. Αφιερώνω χρόνο διαβάζοντας τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών.					
14. Βρίσκω ενδιαφέρουσα την Ιστορία της Γεωμετρίας.					
15. Το μάθημα της Γεωμετρίας έγινε πιο κατανοητό με τη χρήση της Ιστορίας.					
16. Μπερδεύτηκα περισσότερο από τη σύνδεση της Γεωμετρίας με την Ιστορία της.					
17. Τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου της Γεωμετρίας με αφήνουν αδιάφορο/η.					
18. Με την ενσωμάτωση της ΙτΓ στη διδασκαλία συνεργάστηκα καλύτερα με τους συμμαθητές μου.					
19. Κατανόησα καλύτερα τις αποδείξεις των θεωρημάτων που διαπραγματευτήκαμε με τη χρήση της ΙτΓ.					
20. Τα Ιστορικά σημειώματα με βοήθησαν να κατανοήσω τη διαχρονική και πολυπολιτισμική εξέλιξη της Γεωμετρίας.					
21. Η ενασχόληση διαφόρων λαών με τη Γεωμετρία μου έδωσαν κίνητρο να ασχοληθώ περισσότερο με τις αποδείξεις του μαθήματος.					

ΜΕΡΟΣ Δ' – ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΤΥΠΟΥ (ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΕΝΤΥΠΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ)

22.Είχατε παλαιότερη εμπειρία από διδασκαλία Μαθηματικών με τη χρήση Ιστορικών σημειωμάτων ή αναφορές σε ιστορικά γεγονότα της Μαθηματικής επιστήμης;

- ☐ Ναι
- ☐ Όχι

Αν απαντήσατε Ναι, ποιο αντικείμενο των μαθηματικών αφορούσαν;
……
……

23.Περιγράψτε με λίγα λόγια τις εντυπώσεις σας από τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω της Ιστορίας του.
……
……
……
……
……

24. Προτείνετε αλλαγές που θα μπορούσαν να γίνουν στο μάθημα της Γεωμετρίας ώστε να γίνει πιο ενδιαφέρον και κατανοητό.
……
……
……
……

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

ΣΥΝΑΙΝΕΣΗ ΚΗΔΕΜΟΝΑ ΣΤΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΜΑΘΗΤΉ/ΤΡΙΑΣ ΣΕ ΕΡΕΥΝΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΉΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αγαπητοί γονείς/ κηδεμόνες,

Στα πλαίσια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας με τίτλο:

«Η ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως εργαλείο για την αναβάθμιση της διδασκαλίας του μαθήματος. Μία διερεύνηση των στάσεων των μαθητών»

πρόκειται να διεξαχθεί μία έρευνα με σκοπό τη διερεύνηση των απόψεων των μαθητών/ τριών για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

Η έρευνα χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελείται από διδακτικές παρεμβάσεις στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος του μαθήματος της Γεωμετρίας κατά τις οποίες οι μαθητές/τριες θα κληθούν να εργαστούν μέσα στην τάξη με τη βοήθεια φύλλων εργασίας εμπλουτισμένων με δραστηριότητες που εμπεριέχουν τη διδασκαλία κάποιας θεματικής ενότητας μέσω ιστορικών σημειωμάτων. Κατά το δεύτερο μέρος της έρευνας θα μοιραστεί στους μαθητές/τριες ερωτηματολόγιο αξιολόγησης αυτής της δράσης το οποίο θα συμπληρώσουν εκείνη τη στιγμή.

Τα ερωτηματολόγια είναι ανώνυμα και οι απαντήσεις θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τους σκοπούς της έρευνας. Σε καμία περίπτωση η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου δε συνδέεται με την επίδοση τους στο μάθημα των Μαθηματικών ούτε θα επηρεάσει την αξιολόγησή τους.

Ευχαριστώ, εκ των προτέρων για τη συνεργασία σας.

Δέσποινα Χριστοφόρη
Μαθηματικός
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια
Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας
Παιδαγωγικής σχολής , Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης

Εγώ ο/η …… κηδεμόνας του μαθητή/της μαθήτριας …….. της Β Λυκείου δηλώνω ότι επιτρέπω τη συμμετοχή του/της μαθητή/ τριας ……στην διεξαγωγή της παραπάνω έρευνας.

Ο/Η δηλών/ούσα