ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Δυσκολίες κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής στην άλγεβρα. Φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων»

Σοφία Μωυσιάδου

ΑΕΜ: 944

Θεσσαλονίκη, 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στο πλαίσιο του

διιδρυματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών:

«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 26η Φεβρουαρίου 2022 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο		Υπογραφή
1. Κωνσταντίνος Π. Χρήστου (επιβλέπων καθηγητής)	Επίκουρος καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	………………
2. Χαράλαμπος Ε. Λεμονίδης	Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	………………..
3. Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης	Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	….……………..

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Χρήστου για την επιστημονική καθοδήγηση, την αμέριστη υποστήριξη και βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας. Οι παρατηρήσεις και οι προτάσεις του ήταν πάντοτε ακριβείς και στοχευμένες.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τη διευθύντρια και τους συναδέλφους του σχολείου μου -4ο Γυμνάσιο Κοζάνης- για τη συνεργασία και τη δυνατότητα που μου έδωσαν να ολοκληρώσω αυτή την έρευνα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή, το ενδιαφέρον και η προθυμία τους για την υλοποίησή της ήταν συγκινητικό, καθώς και στους γονείς τους για τη συνεργασία μας.

Πολλά ευχαριστώ και στον συνάδερφο Παναγιώτη Μπλίτσα για τη βοήθεια που μου παρείχε στη στατιστική ανάλυση.

Να ευχαριστήσω επίσης όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού που με βοήθησαν να κατανοήσω και να δω την εκπαίδευση των Μαθηματικών και από την ερευνητική ματιά.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου, τον άντρα μου Θόδωρο που πάντα πίστευε σε μένα, καθώς και στα παιδιά μου Μαριάνθη και Χρυσόστομο για την κατανόηση και την υποστήριξή τους όλο αυτό διάστημα.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η έρευνα αυτή επικεντρώθηκε στη μελέτη του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων και συγκεκριμένα, στο πρόσημο των αριθμών που οι μαθητές γυμνασίου θεωρούν ότι μπορεί να αποδοθούν σε αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν φαινομενικά θετικό ή αρνητικό πρόσημο, καθώς και όταν οι παραστάσεις δεν έχουν κάποιο εμφανές φαινομενικό πρόσημο. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι οι μεταβλητές είναι σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς ακόμη και όταν αυτό δεν ισχύει, λόγω της τάσης τους να εφαρμόζουν τη προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς σε καταστάσεις που αυτή δεν εφαρμόζεται –γνωστή ως «προκατάληψη του φυσικού αριθμού». Αποτέλεσμα αυτού είναι να θεωρούν ότι μια αλγεβρική παράσταση στην οποία εμφανίζονται μόνο θετικά πρόσημα θα αναπαριστά μόνο θετικούς αριθμούς και αντίστοιχα μία παράσταση που στους όρους της έχει μόνο αρνητικά πρόσημα θα αναπαριστά μόνο αρνητικούς αριθμούς. Στους συμμετέχοντες (178 μαθητές από την Α΄ τάξη γυμνασίου έως τη Γ΄ τάξη γυμνασίου) δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο και τους ζητήθηκε να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν με καθεμιά από τις 36 δηλώσεις σχετικά με τις τιμές (θετικές ή αρνητικές) που είχαν αποδοθεί στις συγκεκριμένες παραστάσεις. Οι παραστάσεις ήταν: φαινομενικά θετικές (π.χ. $8x+4$), όπου όλοι οι όροι τους είχαν θετικό πρόσημο, φαινομενικά αρνητικές (π.χ. $-x-4$), όπου όλοι οι όροι τους είχαν αρνητικό πρόσημο και ουδέτερες ως προς το φαινομενικό πρόσημο (π.χ. $8x-4$), όπου στους όρους τους εμφανίζονταν και το αρνητικό και το θετικό πρόσημο. Λαμβάνοντας υπόψη τις ερωτήσεις στις οποίες οι αλγεβρικές εκφράσεις είχαν εμφανές θετικό ή αρνητικό πρόσημο, τα αποτελέσματα υποστήριξαν την κύρια υπόθεση της μελέτης, δείχνοντας ότι οι μαθητές είχαν σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στις ερωτήσεις που ήταν σύμφωνες με τη διαισθητική τους πεποίθηση, ότι μόνο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό της κάθε παράστασης μπορεί να συνδέονται με την αλγεβρική παράσταση, παρά με τις ερωτήσεις που ήτανε αντίθετες σε αυτή την πεποίθηση. Στις παραστάσεις που δεν είχαν εμφανές φαινομενικό πρόσημο, οι μαθητές έτειναν να θεωρούν ότι το πρόσημο των τιμών που μπορούν να αποδοθούν στις παραστάσεις, ταυτίζονταν άλλοτε με το πρόσημο του μονωνύμου ή το πρόσημο του όρου με τον μεγαλύτερο αριθμητικό συντελεστή, ή το πρόσημο του πρώτου όρου. Θεωρητικές και διδακτικές προεκτάσεις συζητιούνται.

Λέξεις κλειδιά: μεταβλητή, εννοιολογική αλλαγή, προκατάληψη φυσικού αριθμού, φαινομενικό πρόσημο, άλγεβρα.

Abstract

This study focused on studying the phenomenal sign of algebraic expressions and specifically to test students' numbers associations to algebraic expressions that have a salient positive or negative phenomenal sign and also when the expression does not have a salient phenomenal sign. Previous studies have shown that students tend to believe that variables are symbols that represent only natural numbers even when this is not the case, due to their tendency to apply pre-existing knowledge about natural numbers to situations where it does not apply - known as " the natural number bias phenomenon ". As a byproduct, they would tend to think that positive-like algebraic expression would stand for positive numbers only, and negative-like expressions would stand only for negative numbers. The participants (178 students from 7th to 9th grade) were given a questionnaire and were asked to agree or disagree with each of 36 statements about the numbers (either positive or negative) that were assigned to the given expressions. The expressions were: positive-like (e.g., 8x+4), where only positive signed components were involved; negative-like (e.g., -x-4) where only negative signed components involved; sign-neutral (e.g., 8x-4), where positive together with negative signed components were involved. Considering the tasks with algebraic expressions that had a salient positive or negative phenomenal sign, preliminary results supported the main hypothesis of the study, showing that students performed significantly higher in the tasks that were in-line with their intuitions that only numbers with the same sign as the phenomenal sign of each expression may be associated with the algebraic expression, than in the tasks that were against this belief. In the expressions that did not have an obvious apparent sign, the students tended to consider that the sign of the values that can be attributed to the representations was sometimes identified with the sign of the mononym or the sign of the term with the largest numerical factor, or with the sign of the first term. Theoretical and teaching extensions are discussed.

Keywords: variable, conceptual change, natural number bias, phenomenal sign, algebra.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της μεταβλητής αποτελεί βασική δομική συνιστώσα στη διδασκαλία των μαθηματικών γενικά, και ειδικότερα στην άλγεβρα. Σύμφωνα με τους Arcavi, Argün, Dede, Schoenfeld, Trigueros και Ursini, «*η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και η στήριξή της σε ισχυρά εννοιολογικά θεμέλια είναι υποχρεωτική για να μάθει κανείς άλγεβρα και τις μαθηματικές έννοιες υψηλού επιπέδου*» (στο Sahin και Soylu, 2011, σ. 3323). Οι διαφορετικές όμως τιμές που μπορεί να πάρουν οι μεταβλητές δημιουργούν δυσκολίες στην κατανόησή τους. Σύμφωνα με τους Argün και Dede «*τα γράμματα που αντιπροσωπεύουν μεταβλητές μπορούν να αποκτήσουν διαφορετικές έννοιες ανάλογα με το περιεχόμενό τους και αυτή η κατάσταση προκαλεί δυσκολίες και εννοιολογικές παρερμηνείες στη διδασκαλία της μεταβλητής»* (στο Sahin και Soylu, 2011, σ. 3323). Οι ίδιοι, αναφερόμενοι σε προηγούμενες έρευνες των Baykul (1999) και Avcu & Yenilmez (2009) και παρατηρώντας τις δυσκολίες μαθητών δημοτικού κατά τη μετάβασή τους από τα αριθμητικά στα πιο γενικά και αφηρημένα σύμβολα οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι ένας λόγος για τον οποίο οι άνθρωποι έχουν αρνητικές προκαταλήψεις απέναντι στα μαθηματικά και δεν κάνουν προσπάθεια στην εκμάθησή τους είναι ότι τα αντιλαμβάνονται ως μάθημα που αποτελείται από εντελώς αφηρημένες έννοιες (στο Sahin και Soylu, 2011). Δεδομένου ότι η έννοια της μεταβλητής απαιτεί αφηρημένη σκέψη και λόγω των δυσκολιών στη διδασκαλία αυτής της αντίληψης και των προσεγγίσεων των μαθητών προς την έννοια της μεταβλητής, εμφανίζονται παρανοήσεις και λάθη στη διδασκαλία αυτής της έννοιας.

Λαμβάνοντας υπόψη μια προοπτική εννοιολογικής αλλαγής στη μελέτη της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού, πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι από πολύ νωρίς ηλικιακά, τα παιδιά αποκτούν μια αρχική κατανόηση του αριθμού που συνδέεται με τις γνώσεις και εμπειρίες τους με του φυσικούς αριθμούς (Vosniadou et al., 2008). Αυτή η αρχική θεωρία πλαισίου των αριθμών επηρεάζει τη συλλογιστική τους σε μια ποικιλία εργασιών με μη φυσικούς αριθμούς. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις σε έργα συμβατά με τη γνώση φυσικών αριθμών, παρά με μη συμβατά, αυτό το φαινόμενο έχει ονομαστεί «προκατάληψη φυσικού αριθμού» (Van Hoof et al., 2015). Ένα αποτέλεσμα της προκατάληψης του φυσικού αριθμού είναι η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές στην άλγεβρα παίρνουν μόνο φυσικούς αριθμούς και όχι οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, όπως διδάσκονται στο σχολείο (Christou & Vosniadou, 2012). Αποτέλεσμα αυτής της τάσης είναι οι μαθητές να πιστεύουν ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές αντιπροσωπεύουν μόνο αριθμούς με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης (π.χ. ο -β παριστάνει μόνο αρνητικούς αριθμούς και ο κ+3 μόνο θετικούς). Ωστόσο, οι προηγούμενες μελέτες δεν επικεντρώθηκαν στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ερμηνεύουν το πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων.

Η παρούσα μελέτη έχει ως στόχο να εξετάσει το πρόσημο των αριθμών που τείνουν οι μαθητές να θεωρούν ότι μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν εμφανές θετικό ή αρνητικό πρόσημο, καθώς και όταν η παράσταση δεν έχει εμφανές φαινομενικό πρόσημο. Έγινε υπόθεση ότι οι μαθητές θα είχαν υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που συμφωνούν με τη διαισθητική τους αντίληψη -ότι μόνο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης μπορεί να είναι τιμές της, παρά στα έργα που είναι αντίθετα με αυτή την αντίληψη. Εξετάστηκε επίσης το πρόσημο των τιμών που αποδίδονται στις φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις.

Έχοντας ως βάσει τα παραπάνω η εργασία αναπτύσσεται ως εξής:

Στα δύο πρώτα κεφάλαια παρουσιάζεται η σχετική βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα:

Στο 1^{o} κεφάλαιο παρουσιάζεται, μέσα από σχετικές έρευνες, η μορφή και η χρήση των μεταβλητών στην άλγεβρα και εξετάζονται ο τρόπος κατανόησής τους από τους μαθητές, καθώς και τα συνηθέστερα λάθη των μαθητών που παρατηρούνται από την χρήση τους ή/και την αντίληψη τους. Στο 2^{o} κεφάλαιο, μέσα από τη βιβλιογραφία για την «προκατάληψη του φυσικού αριθμού», γίνεται λόγος για την εννοιολογική αλλαγή που επέρχεται στους μαθητές κατά τη μετάβασή τους από την αριθμητική στην άλγεβρα, πώς δηλαδή, η προκατάληψη που έχουν οι μαθητές απέναντι στους αριθμούς -θεωρώντας τους ως φυσικούς- δημιουργεί διάφορες παρερμηνείες, μία από τις οποίες είναι και αυτή του φαινομενικού προσήμου, στην οποία θα εστιάσει και η συγκεκριμένη έρευνα.

Στη συνέχεια ακολουθεί το εμπειρικό μέρος της εργασίας.

Στο 3^{o} κεφάλαιο περιγράφονται ο στόχος της παρούσας έρευνας, το ερευνητικό ερώτημα και η μεθοδολογία της έρευνας, δηλαδή, οι συμμετέχοντες, τα ερευνητικά εργαλεία και ο τρόπος συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων. Στο 4ο κεφάλαιο περιγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας. Τέλος, στο 5^{o} κεφάλαιο ακολουθούν τα συμπεράσματα και η συζήτηση σχετικά με τα ευρήματα της έρευνας μαζί με τους περιορισμούς και τις προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με τη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε και το παράρτημα με το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει την χρήση εν γένει των μεταβλητών στην άλγεβρα, και εξετάζει τα συνηθέστερα λάθη που παρατηρούνται από την χρήση τους ή/και την αντίληψη τους από τους μαθητές.

1.1 Η έννοια της μεταβλητής στην Άλγεβρα

Η Άλγεβρα είναι ο κλάδος των μαθηματικών που παρέχει τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για την αναπαράσταση ποσοτικών σχέσεων, μοντελοποίηση καταστάσεων και λύση προβλημάτων στις διάφορες περιοχές των μαθηματικών (Kaput, 1998; Moses & Cobb, 2001; National Research Council, 1998). Θεωρείται ότι αποτελεί το πέρασμα από την αριθμητική στα ανώτερα μαθηματικά (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), γι' αυτό και η θέση της στα σχολικά προγράμματα σπουδών είναι πολύ σημαντική. Ορίζεται ως η μελέτη της χρήσης των ιδιοτήτων των μεταβλητών (Usiskin, 1988). Η εμπειρία των εκπαιδευτικών και αρκετές πειραματικές μελέτες, έδειξαν ότι οι μαθητές έχουν διαφορετικές αντιλήψεις στην κατανόηση των ιδιοτήτων της άλγεβρας με σημαντικά εννοιολογικά εμπόδια στις λειτουργίες της (Hercovics & Linchevski, 1996; MacGregor & Stacey, 1997; Tall & Thomas, 1991). Μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες της άλγεβρας είναι η αποτυχία στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, η οποία αποτελεί και τη βασική της έννοια. Ο Skemp (1986) τόνισε ότι «*μια μεταβλητή είναι στην πραγματικότητα η βασική έννοια στην άλγεβρα*» (σ.213) και στη συνέχεια την περιγράφει ως «*ένα μη καθορισμένο στοιχείο ενός δοσμένου συνόλου*» (σ. 214). Η χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα γίνεται με πολλούς τρόπους, ανάλογα με το αλγεβρικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται. Ο Usiskin (1988) πρότεινε την ταξινόμηση των μεταβλητών σε κατηγορίες, ανάλογα με τις χρήσεις και τις διαφορετικές προσεγγίσεις τους, καθώς και της σχέσης τους με την αριθμητική:

- *Γενικευμένη αριθμητική:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί για να εκφράσουν σχέσεις, όπως η αντιμεταθετική ιδιότητα $α+β=β+α$.
- *Μελέτη των διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές αναπαριστούν τον άγνωστο σε μια εξίσωση και οι τιμές τους είναι οι συγκεκριμένοι αριθμοί που την επαληθεύουν (π.χ. στην εξίσωση $2x+5=13$ η τιμή του x είναι 4)
- *Μελέτη των σχέσεων διαφόρων ποσοτήτων:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν συναρτησιακές σχέσεις, όπως τη συμμεταβολή μεταξύ δύο μεταβλητών (π.χ. στη σχέση $y= 3x$, η x αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ενώ η y εξαρτάται από την τιμή της x).
- *Μελέτη των μαθηματικών δομών:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές αποτελούν μη καθορισμένα αντικείμενα σε μια μαθηματική δομή, όπως είναι οι ομάδες, τα σώματα, οι δακτύλιοι και λειτουργούν κάτω από συγκεκριμένους κανόνες.

.

1.2 Η χρήση των μεταβλητών στην άλγεβρα

Οι μεταβλητές είναι κρίσιμης σημασίας στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ο Felix Klein έγραψε το 1908 ότι «*κάποιος μπορεί κάλλιστα να δηλώσει ότι τα πραγματικά μαθηματικά ξεκινούν με πράξεις με γράμματα*» (στο Anderson, 2014, σ.398) και ο Alfred Tarski έγραψε το 1941 ότι «*η εφεύρεση των μεταβλητών αντικατοπτρίζει το σημείο στροφής στην ιστορία των μαθηματικών*» (στο Anderson, 2014, σ.398). Το 1911, ο Whitehead συνέδεσε ρητά τις έννοιες των μεταβλητών και της ποσοτικοποίησης με τις εκφράσεις τους στα άτυπα αγγλικά όταν έγραψε: «*Οι ιδέες «οποιουδήποτε» και «μερικών» εισάγονται στην άλγεβρα με τη χρήση γραμμάτων… δεν είναι κατανοητό μέχρι τα τελευταία χρόνια*[1] *πόσο θεμελιώδεις ήταν οι έννοιες αυτές στη φύση των μαθηματικών*» (στο Anderson, 2014, σ.399). Υπάρχει, ωστόσο, μια ερώτηση σχετικά με τον τρόπο περιγραφής της χρήσης μεταβλητών στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι περισσότεροι μαθηματικοί, φαίνεται γενικά να συμφωνούν ότι οι μεταβλητές κατανοούνται καλύτερα ως σύμβολα κράτησης θέσης. Για παράδειγμα, ο Frege έγραψε το 1893, «*Το γράμμα «x» χρησιμεύει μόνο για να κρατήσει ανοιχτές θέσεις για έναν αριθμό που να συμπληρώσει την έκφραση*

[1] σ.σ: εννοώντας την εποχή που αποδίδεται η συγκεκριμένη έκφραση.

... Αυτό το άνοιγμα πρέπει να γίνει κατανοητό ως εξής: όλα τα μέρη στα οποία υφίσταται ένα ερωτηματικό πρέπει να σημειώνονται πάντα με το ίδιο σύμβολο [σ.σ. γράμμα] και ποτέ από διαφορετικά» (στο Anderson, 2014, p.399). Ο Quine (1982) δήλωσε ότι, «*Οι μεταβλητές παραμένουν απλές αντωνυμίες, για παραπομπή, όπως ακριβώς το «x» στις επαναλήψεις του συνήθως μπορεί να αποδοθεί σε «κάτι» στις λεκτικές μεταφράσεις των αλγεβρικών σχέσεων, έτσι οι διακριτικές μεταβλητές «x», «y», «z» κ.λπ. αντιστοιχούν στις διακριτικές αντωνυμίες «προηγούμενο» και «επόμενο» , ή «πρώτο», «δεύτερο» και «τρίτο», κλπ.* » (p.98).

Παρακάτω θα δούμε κάποιες από τις χρήσεις της μεταβλητής.

Χρήση μεταβλητών για την έκφραση άγνωστων ποσοτήτων

Στις πρώτες τάξεις, οι μαθητές αντιμετωπίζουν μερικές φορές προβλήματα όπως το εξής (Philipp, 1992, p.560):

Βρείτε έναν αριθμό για να τοποθετήσετε στο κενό έτσι ώστε 3+ … = 10.

Αργότερα, ωστόσο, όταν εισάγεται η άλγεβρα, στην θέση του κενού πλαισίου εισέρχεται ένας χαρακτήρας γράμματος, συνήθως x, με στόχο την εκμάθηση του χειρισμού εξισώσεων και του υπολογισμού της τιμής της μεταβλητής. Ωστόσο, πολλές φορές, η έννοια της λειτουργίας «*Επίλυση της εξίσωσης για το x*» μπορεί να είναι θολή, με τους μαθητές να καταλήγουν να βλέπουν το γράμμα «x» ως ένα μυστηριώδες αντικείμενο χωρίς σχέση με τον κόσμο που γνωρίζουν. Επισημαίνοντας ότι το «x» κρατά απλά «ανοιχτή» τη θέση για την άγνωστη ποσότητα - ίσως περιστασιακά χρησιμοποιώντας τη σημείωση του κενού πλαισίου ακόμα και μετά την εισαγωγή μεταβλητών - μπορεί να εξουδετερωθεί η αίσθηση των μαθητών ότι η έννοια του «x» είναι πέρα από την κατανόησή τους (Philipp, 1992).

Η επίλυση μιας εξίσωσης ως προς «x» (σ.σ. την μεταβλητή) σημαίνει απλώς την εύρεση όλων των αριθμών (εάν υπάρχουν) που μπορούν να αντικατασταθούν στη θέση του «x» έτσι ώστε η αριστερή πλευρά της εξίσωσης να είναι ίση με τη δεξιά πλευρά. Εν γένει, ειδικότερα στις μικρότερες τάξεις σημαντικός αριθμός των μαθητών δεν είναι εξοικειωμένος με αυτόν τον τρόπο σκέψης (Philipp, 1992).

Μεταβλητές χρησιμοποιούμενες σε συναρτησιακές σχέσεις

Στις μεγαλύτερες τάξεις, η κατανόηση της χρήσης μεταβλητών στον καθορισμό των συναρτήσεων είναι εξαιρετικά σημαντική για τους μαθητές ώστε να μεταφέρουν τη μελέτη των μαθηματικών σε ανώτερο επίπεδο. Σε αυτή την περίπτωση εισέρχεται και μια σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο π.χ. μέσω της Φυσικής : «*καθώς οδηγούμε κατά μήκος μιας διαδρομής, η απόστασή μας μεταβάλλεται με το χρόνο που διανύσαμε*». Έτσι, αν αντιπροσωπευτεί η απόσταση με d και ο χρόνος με t, μπορεί να φαίνεται φυσικό το να περιγραφεί η σχέση των δύο λέγοντας ότι για κάθε αλλαγή στο t υπάρχει μια αντίστοιχη αλλαγή στο d. Αυτή η γλωσσική αποτύπωση οδηγεί πολλούς μαθητές στο να σκεφτούν τις μεταβλητές ως αντικείμενα με την ικανότητα να αλλάζουν. Πράγματι, η ίδια η λέξη «μεταβλητή» εμπεριέχει μια τέτοια περιγραφή (Papick, 2011; Star et al., 2015; Witzel, 2015).

Πολλές φορές οι μαθητές που γράφουν ότι :«α είναι μήλα και β αχλάδια», διορθώνονται ώστε να γράφουν: «*α είναι ο αριθμός των μήλων και β ο αριθμός των αχλαδιών*». Παρομοίως, στην φυσική σχέση της απόστασης που αναφέρθηκε παραπάνω, το t δεν αντιπροσωπεύει πραγματικά τον χρόνο, αλλά κρατά ανοιχτό ένα μέρος για να αντικατασταθεί ο αριθμός των ωρών, ενώ το d δεν αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα την απόσταση αλλά κρατά ανοιχτό ένα μέρος για την αντικατάσταση του αντίστοιχου αριθμού χιλιομέτρων, ή μιλίων που διανύθηκαν κατά τη διάρκεια της περιόδου που περιγράφεται με το t. Άρα δεν αλλάζει το t ή το d, είναι οι τιμές (αριθμός ωρών ή αριθμός χιλιομέτρων) που μπορούν να τοποθετηθούν στις θέσεις τους που πρακτικά αλλάζουν. Ωστόσο, αυτή είναι μια διάκριση που οι καθηγητές μαθηματικών σπάνια δίνουν έμφαση(Papick, 2011; Star et al., 2015; Witzel, 2015).

Μεταβλητές σε χρήση για την έκφραση γενικευμένων ποσοτήτων

Ένα διαφορετικό πρόβλημα προκύπτει όταν η παράλειψη αριθμητικών ποσοτήτων δικαιολογείται περιγράφοντας τα a, b, και c ως «γενικευμένους αριθμούς», ιδιαίτερα στην περιγραφή ιδιοτήτων (όπως η επιμεριστική ιδιότητα), διότι αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει μια κατηγορία αριθμών εκτός από τους συνηθισμένους αριθμούς με τους οποίους είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές. Για όσους έχουν μια ασφαλή αίσθηση του τρόπου λειτουργίας των a, b, και c ως σημείων θέσης, αυτή η ορολογία δεν είναι παραπλανητική, αλλά οι μαθητές με μια πιο αόριστη αίσθηση της έννοιας της μεταβλητής μπορεί να φανταστούν ότι είναι μυστηριώδη μαθηματικά αντικείμενα των οποίων η ύπαρξη τους δημιουργεί προβλήματα. Αντίθετα, εάν η επιμεριστική ιδιότητα περιγραφεί απλώς ως πρότυπο στο οποίο μπορούν να τοποθετηθούν πραγματικοί αριθμοί (ή εκφράσεις με πραγματικές τιμές αριθμών), το μυστήριο εξαφανίζεται και οι μαθητές οδηγούνται στη δυνατότητα εφαρμογής της ιδιότητας (Papick, 2011; Star et al., 2015; Witzel, 2015).

Μεταβλητές στην χρήση ορισμών, τύπων, αριθμών

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της χρήσης είναι ο ορισμός των άρτιων και των περιττών ακέραιων ως εξής (Papick, 2011, Star et al., 2015):

Για να είναι ένας ακέραιος άρτιος σημαίνει ότι ισούται με 2k, για κάποιο ακέραιο k.

Για να είναι ένας ακέραιος περιττός σημαίνει ότι ισούται με 2k + 1, για κάποιο ακέραιο k.

Μετά από μια τέτοια εισαγωγή, πολλοί μαθητές καλούνται να αποδείξουν ότι το άθροισμα οποιουδήποτε περιττού και άρτιου ακέραιου είναι άρτιος ξεκινώντας το επιχείρημά τους ως εξής:
Ας υποθέσουμε ότι το m είναι ένας οποιοσδήποτε άρτιος ακέραιος και το n είναι οποιοσδήποτε περιττός ακέραιος, τότε m = 2 k και n = 2 k +1 ....

Για να αποφευχθούν τα λάθη, οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι το σύμβολο k είναι απλώς ένα σύμβολο κράτησης θέσης, χωρίς ανεξάρτητη ύπαρξη.

1.3 Κατανόηση των μεταβλητών από τους μαθητές- Συνήθη λάθη

Ερευνητικές μελέτες (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007; Kuchemann, 1978, 1981; Lucariello, Tine & Ganley, 2014; MacGregor & Stacey, 1997; Philipp, 1992) έχουν δείξει ότι η πλειονότητα των μαθητών ηλικίας έως 15 ετών, φαίνεται ότι δεν μπορεί να ερμηνεύσει τις μεταβλητές ως γενικευμένους αριθμούς ή ως συγκεκριμένες τιμές σε άγνωστους εξίσωσης. Αντίθετα, άλλοτε τις αγνοούν ή τις ερμηνεύουν ως συντομογραφίες ή ετικέτες αντικειμένων και άλλοτε τις αντικαθιστούν με συγκεκριμένους αριθμούς, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο λάθη και παρανοήσεις σχετικά με την αριθμητική αξία τους. Πράγματι, σε μία έρευνα των MacGregor & Stacey (1997) καθώς και της Wagner (1981), η ερμηνεία των μεταβλητών ως ετικέτες αντικειμένων, φάνηκε να δημιουργεί παρανοήσεις σχετικά με την αριθμητική αξία των συμβόλων που χρησιμοποιήθηκαν σε συγκεκριμένα προβλήματα. Για παράδειγμα, σε μελέτη με 2000 μαθητές των πρώτων, παρατηρήθηκε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι μαθητές αντιστοίχιζαν τις μεταβλητές με τη θέση τους ως σύμβολα στο αλφάβητο προκειμένου να τους αποδώσουν μια αριθμητική τιμή (π.χ. $h + 10 = 18$, αφού το h είναι το $8^{ο}$ γράμμα της αλφαβήτου).

Επίσης, η Booth (1984) και αργότερα η Asquith και οι συνεργάτες της (2007), παρατήρησαν ότι οι μαθητές δίνουν στις μεταβλητές συγκεκριμένες τιμές και μάλιστα τις περισσότερες φορές μονοψήφιους αριθμούς, δηλαδή από το 0 έως το 9. Η συγκεκριμένη παρανόηση φαίνεται να είναι αρκετά συχνό φαινόμενο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Blanton, 2008; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006; MacGregor & Stacey, 1997; Lucariello et al., 2014). Μάλιστα η Lucariello και οι συνεργάτες της (2014) κατέταξαν την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών ως τη δεύτερη πιο συνηθισμένη, μετά την πεποίθηση ότι τα γράμματα συμβολίζουν συντομογραφίες ή ετικέτες αντικειμένων. Η κύρια εξήγηση που δίνεται από τη βιβλιογραφία γι’ αυτού του είδους των παρανοήσεων είναι το επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών.

Ο Küchemann (1978, 1981), ταξινόμησε τις μεταβλητές σε έξι κατηγορίες, σύμφωνα με τις ερμηνείες που αποδίδουν σε αυτές οι μαθητές:

- *Η μεταβλητή παίρνει μια αριθμητική τιμή από κάποιο σύνολο*: π.χ. οι μαθητές στην παράσταση $x+5$ θέτουν $x=3$ και χρησιμοποιούν το αποτέλεσμα.
- *Η μεταβλητή παραλείπεται*: π.χ. $4x+9x=13$, $5x+4=9$ οι μαθητές αγνοούν την ύπαρξη της μεταβλητής, ή $2x+3y+7x=12xy$ θεωρούν τις διαφορετικές μεταβλητές ως μια.
- *Η μεταβλητή χρησιμοποιείται ως συντομογραφία-ετικέτα ενός αντικειμένου*: π.χ. στην έκφραση 2τ+3β θεωρούν ότι συμβολίζει 2 τετράδια και 3 βιβλία.
- *Η μεταβλητή χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός*: π.χ., οι μαθητές θεωρούν ότι $x+y+z \neq x+v+z$, αφού $y \neq v$.
- *Η μεταβλητή χρησιμοποιείται ως γενικευμένος αριθμός:* π.χ στην παράσταση $c+d=10$, οι μεταβλητές μπορεί να πάρουν περισσότερες από μία τιμές ώστε να δώσουν το συγκεκριμένο αποτέλεσμα όπως 4+6, 3+7, 2+8 κλπ.

- *Η μεταβλητή χρησιμοποιείται ως μεταβαλλόμενη ποσότητα:* π.χ οι μαθητές αναγνωρίζουν τις συμμεταβολές μεταξύ των μεταβλητών, όπως σε εκφράσεις του τύπου y=2x+3, όπου αντικαθιστώντας τη μια από αυτές με έναν αριθμό π.χ. x=1 παίρνουν την τιμή y=5 (κάνοντας τις πράξεις), ή λίγο πιο σύνθετα δίνοντας y=5, έχουν να λύσουν την εξίσωση 2x+3=5.

Διαπιστώθηκε επίσης, ότι οι μαθητές ενώ στα πρώτα χρόνια τους θεωρούν τις μεταβλητές ως ετικέτες αντικειμένων, στη μετέπειτα πορεία τους τις κατανοούν καλύτερα αντικαθιστώντας τες με κάποιους αριθμούς, στην αρχή συγκεκριμένους από ένα σύνολο αριθμών και αργότερα ως γενικευμένους, δηλαδή σύμβολα που αναπαριστούν παραπάνω από έναν αριθμούς (Booth, 1984; Collis, 1975; Kuchemann, 1978, 1981).

Παρατηρείται συνεπώς μια άρρηκτη σχέση μεταξύ μεταβλητής και αριθμού, η οποία όμως δεν είναι πάντα εύκολη στην κατανόησή της, εξαιτίας των αρχικών γνώσεων των μαθητών για τα σύνολα των αριθμών. Κάποια από τα λάθη που σχετίζονται με τις μεταβλητές, θα αναλυθούν παρακάτω μέσα από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας για την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι μαθητές, ενώ φαίνεται να κατανοούν τις μεταβλητές ως γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή ως σύμβολα που αναπαριστούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, στην πράξη περιορίζονται σε συγκεκριμένους αριθμούς. Ποιοι είναι όμως αυτοί οι αριθμοί; Στη διεθνή βιβλιογραφία δεν αναφέρονται μελέτες που να εστιάζουν στο τι είδους τιμές αποδίδουν οι μαθητές στα γράμματα - με εξαίρεση μια μικρή αναφορά της Booth (1984) για φυσικούς αριθμούς. Ο Χρήστου (2009), σε μια σειρά εμπειρικών μελετών του, επιχείρησε να εξετάσει τι είδους αριθμούς δίνουν οι μαθητές στα γράμματα όταν αυτά χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Συνοπτικά, τα αποτελέσματα των πειραμάτων του έδειξαν ότι το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από τον φυσικό αριθμό, επιβάλει οι μαθητές να θεωρούν ότι α) τα γράμματα αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς και όχι κλάσματα ή δεκαδικούς και β) το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης να είναι το πραγματικό πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει. Αυτή η τάση των μαθητών φαίνεται να ευθύνεται για μια ποικιλία λαθών και παρανοήσεων σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών (Christou & Vosniadou, 2012; Christou, 2015· 2017; Fishbein et al., 1985; Nesher & Peled, 1986; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει, μέσα από τη βιβλιογραφία για την «προκατάληψη φυσικού», τα λάθη και παρερμηνείες των μαθητών απέναντι στις μεταβλητές, μία από τις οποίες είναι και αυτή του φαινομενικού προσήμου.

2.1 Η εννοιολογική αλλαγή στην κατανόηση της μεταβλητής

Η σημαντική θέση της μεταβλητής στην άλγεβρα και κατ' επέκταση στα μαθηματικά, έκανε απαραίτητη την ενδελεχή μελέτη της από την ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία συνέδεσε ορισμένες από τις παρερμηνείες και τα λάθη στη μεταβλητή, με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών με τους αριθμούς (Booth, 1984; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992; Lucariello et al., 2014; MacGregor & Stacey, 1997). Παρανοήσεις που δημιουργούνται λόγω της προηγούμενης γνώσης των μαθητών, φαίνεται όχι μόνο να επηρεάζουν τις επιδόσεις τους, αλλά και να αποτελούν εμπόδιο για την περεταίρω εξέλιξή τους στην μαθηματική εκπαίδευση (MacNeil & Alibali, 2005). Σύμφωνα με τους Ausubel (1963) και Bruner (1961), οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, είτε αποτελούν την βάση για τη δόμηση της νέας γνώσης, είτε, αν αυτές δεν είναι επαρκείς, δημιουργούν κενά και δεν επιτρέπουν τη θεμελίωση της νέας (στο Χρήστου, 2009). Η μελέτη του τρόπου που αλληλεπιδρά η προϋπάρχουσα γνώση με τη νέα, εντάσσεται στο θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, σύμφωνα με το οποίο η μάθηση απαιτεί πολλές φορές αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Οι μαθητές, κατά τη μετάβασή τους από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των ρητών και από τις αριθμητικές παραστάσεις, στις αλγεβρικές παραστάσεις -με μεταβλητές- βρίσκονται ήδη μπροστά σε μια εννοιολογική αλλαγή, την οποία και προσπαθούν να διαχειριστούν.

Κατά την είσοδό τους οι μαθητές στο σύνολο των ρητών αριθμών, διαπιστώνεται ότι συναντούν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση των ιδιοτήτων τους, οι οποίες φαίνονται να συνδέονται με την προηγούμενη γνώση και εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς. Οι Vamvakoussi και Vosniadou, (2010) υποστηρίζουν ότι μπορούν να εξηγήσουν την κατανόηση των ρητών αριθμών από τους μαθητές δια της «θεωρίας πλαισίου» (framework theory) ως προσέγγιση στην εννοιολογική αλλαγή. Από την έρευνά τους φαίνεται ότι οι μαθητές πολύ πριν εκτεθούν στη διδασκαλία των ρητών αριθμών, έχουν ήδη σχηματίσει ένα μάλλον συνεκτικό επεξηγηματικό πλαίσιο του αριθμού ως *αριθμός καταμέτρησης*, ο οποίος με τους όρους του θεωρητικού πλαισίου που προτείνουν οι παραπάνω συγγραφείς, αποτελεί μια αρχική θεωρία πλαισίου για τον αριθμό. Όταν οι μη-φυσικοί αριθμοί εισάγονται στο πρόγραμμα σπουδών με τη μορφή των δεκαδικών και των κλασμάτων, αν και έχουν την ταμπέλα ως αριθμοί, δεν είναι αριθμοί με την ίδια έννοια όπως οι αριθμοί του υπάρχοντος πλαισίου θεωρίας του αριθμού. Ο Christou (2017) με βάση την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008) αναφέρει ότι «*όταν οι μαθητές εισαχθούν στην έννοια της πραγματικής μεταβλητής, θα είναι απρόθυμοι να δεχτούν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό ως πιθανό υποκατάστατο των κυριολεκτικών συμβόλων, λόγω των βαθιά ριζωμένων περιορισμών της προηγούμενης γνώσης αριθμών στην αριθμητική. Με άλλα λόγια, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα επηρέαζε τις αντικαταστάσεις των γραμμάτων από τους μαθητές στην άλγεβρα, προκαλώντας περαιτέρω δυσκολίες, ακόμη και αφού έχει επιτευχθεί η έννοια του γενικευμένου αριθμού*» (σ.163).

Σημαντική πηγή των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές με την κατανόηση των ρητών αριθμών είναι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Ένα ενεργό πεδίο έρευνας επικεντρώθηκε σε αυτό το φαινόμενο (Vamvakoussi, et al, 2011 · 2012; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

2.2. Η προκατάληψη φυσικού αριθμού και οι πτυχές της

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού περιγράφεται ως η τάση των μαθητών να αποδίδουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους μη φυσικούς αριθμούς (Ni & Shou, 2005).

Οι μαθητές για πολλά χρόνια στο δημοτικό σχολείο διδάσκονται τους φυσικούς αριθμούς. Ως αποτέλεσμα, η έννοια των φυσικών αριθμών, τόσο μέσα στο σχολείο, όσο και έξω με τις διάφορες δραστηριότητες, να εγκαθίσταται και να κυριαρχεί στην αριθμητική λογική των μαθητών (Van Hoof et al., 2015). Στις καθημερινές εμπειρίες τους, τα παιδιά συναντούν φυσικούς αριθμούς πολύ πιο συχνά από τους ρητούς αριθμούς (παράδειγμα είναι η καταμέτρηση των δακτύλων, η μέτρηση σε επιτραπέζια παιχνίδια κλπ). Αυτή η διαισθητική ιδέα των αριθμών ως φυσικών αριθμών επιβεβαιώνεται και συστηματοποιείται από τα πρώτα έτη μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών (Greer, 2004). Όταν οι ρητοί αριθμοί εισάγονται στη συνέχεια στην τάξη (κυρίως στα μεσαία έτη της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης), οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των φυσικών αριθμών δεν ισχύουν πάντα. Όταν συμβαίνει αυτό, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι κάνουν συστηματικά λάθη ειδικά σε εργασίες, όπου η συλλογιστική καθαρά ως προς τους φυσικούς αριθμούς οδηγεί σε λανθασμένη λύση. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς, οι φυσικοί είναι πάντα θετικοί, έτσι σε εργασίες με ρητούς αριθμούς που δηλώνονται με γράμμα, μπορεί να υπάρχει παρανόηση του προσήμου τους από την πλευρά των μαθητών (Van Hoof et al., 2015).

Στη βιβλιογραφία, διακρίνονται τρεις βασικές πτυχές στις οποίες οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών εφαρμόζονται ακατάλληλα στους ρητούς αριθμούς: α) η πυκνή τους δομή, β) το αριθμητικό τους μέγεθος και γ) το αποτέλεσμα των πράξεων.

- Η πρώτη πτυχή αφορά τη δομή των φυσικών και των ρητών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από διακριτικότητα: Μπορεί πάντα να επισημανθεί ο διάδοχος αριθμός οποιουδήποτε δεδομένου φυσικού αριθμού (για παράδειγμα, μετά το 4 έρχεται το 5). Οι ρητοί αριθμοί, αντίθετα, χαρακτηρίζονται από μια πυκνή δομή: Δεν υπάρχει ένας και μοναδικός διάδοχος ενός δεδομένου ρητού αριθμού, καθώς υπάρχουν πάντα απεριόριστοι αριθμοί μεταξύ δύο ρητών αριθμών. Σε μελέτη της Vamvakoussi και των συνεργατών της (2011), περισσότεροι από τους μισούς μαθητές δήλωσαν ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός μεταξύ 3/8 και 5/8.
- Η δεύτερη πτυχή σχετίζεται με το αριθμητικό μέγεθος των ρητών αριθμών. Όπως δηλώνεται από την Gabriel και τους συνεργάτες της (2013), ο λανθασμένος συλλογισμός των μαθητών για το μέγεθος των ρητών αριθμών μπορεί να αποδοθεί συχνότερα στην (λάθος) αντίληψη, ότι εάν οι (φυσικοί) αριθμοί στη συμβολική αναπαράσταση είναι μεγαλύτεροι, το μέγεθος του ρητού αριθμού είναι επίσης μεγαλύτερο. Μια κοινή εκδήλωση αυτής της ιδέας συμβαίνει σε εργασίες σύγκρισης δεκαδικών αριθμών, όπου οι μαθητές έχουν τη λανθασμένη αντίληψη ότι, όπως συμβαίνει με τους φυσικούς αριθμούς, «*τα μεγαλύτερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερα*» και «*τα μικρότερα δεκαδικά ψηφία είναι μικρότερα*» (Resnick et al., 1989, σ.2). Για παράδειγμα, σε μια μελέτη του Smith και των συνεργατών του, (2005), συνηθισμένα λάθη ήταν, ότι οι μαθητές υπέθεταν λανθασμένα ότι το 0,65 ήταν μεγαλύτερο από 0,8, επειδή το 65 είναι μεγαλύτερο από το 8, και ότι το 2,09 ήταν μεγαλύτερο από το 2,9 επειδή το 209 είναι μεγαλύτερο από το 29 (ενώ άλλοι μαθητές υποστήριξαν ότι και οι δύο αριθμοί είναι ίσοι επειδή το μηδέν δεν έχει σημασία). Επίσης σε εργασίες σύγκρισης κλασμάτων, εμφανίζονται λανθασμένες απαντήσεις επειδή οι μαθητές συνήθως υποθέτουν λανθασμένα ότι η αριθμητική τιμή ενός κλάσματος αυξάνεται όταν ο παρονομαστής, ο αριθμητής ή και τα δύο αυξάνονται (Meert, Grégoire, & Noël, 2010). Σε μια άλλη μελέτη των Clarke και Roche (2009), το ποσοστό των μαθητών που απάντησε σωστά στο ερώτημα «Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός: το 3/8 ή το 7/8;» ήτανε πολύ μεγαλύτερο από

αυτό στην ερώτηση: «Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός: το 4/7 ή το 4/5;». Η μελέτη τους έδειξε ξεκάθαρα ότι πολλοί μαθητές επικεντρώνονται σε κάθε μέρος ενός κλάσματος ξεχωριστά για να αποφασίσουν ποιο κλάσμα είναι το μεγαλύτερο αντί να εστιάζουν σε ολόκληρη την αριθμητική τιμή του κλάσματος (Stafilidou & Vosniadou, 2004).

- Μία τρίτη πτυχή της προκατάληψης φυσικού αριθμού αφορά το αποτέλεσμα των αριθμητικών πράξεων. Ορισμένα χαρακτηριστικά πράξεων με φυσικούς αριθμούς δεν ισχύουν πλέον στην περίπτωση ρητών αριθμών. Πράγματι, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με τους φυσικούς αριθμούς θα οδηγούν πάντα σε κάτι μεγαλύτερο, ενώ η διαίρεση και η αφαίρεση θα οδηγούν πάντα σε κάτι μικρότερο. Ωστόσο, αυτοί οι κανόνες δεν ισχύουν πλέον απαραίτητα στην περίπτωση των ρητών αριθμών (π.χ. το 0,4 * 9 θα οδηγήσει σε αποτέλεσμα μικρότερο από 9), αλλά οι μαθητές εξακολουθούν να πιστεύουν το αντίθετο (Vamvakoussi et al., 2012). Ο Christou (2015), σε μια αντίστοιχη μελέτη εξέτασε την επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην εκτέλεση πράξεων, τα αποτελέσματα της οποίας υποστήριξαν την κύρια υπόθεση του συγγραφέα, ότι δηλαδή στην περίπτωση των πράξεων μεταξύ αριθμών, το αποτέλεσμα πρέπει να είναι αριθμός ίδιου είδους με τους όρους της πράξεις (ιδιότητα που σαφώς ισχύει στους φυσικούς αριθμούς, με εξαίρεση την πράξη της διαίρεσης), επιβεβαιώνοντας ότι η προκατάληψη φυσικού αριθμού κυριαρχεί στη σκέψη των μαθητών.

Ενώ το ζήτημα της προκατάληψης φυσικού αριθμού εξακολουθεί να αποτελεί αντικείμενο συζήτησης, υπάρχει μεγάλη συναίνεση στη βιβλιογραφία ότι πριν τα παιδιά εισαχθούν στους ρητούς αριθμούς, έχουν ήδη διαμορφώσει μια διαισθητική ιδέα για το τι είναι ένας αριθμός, η οποία βασίζεται στους φυσικούς αριθμούς (Smith, Solomon & Carey, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Έτσι όταν η νέα γνώση δεν είναι συμβατή με την προϋπάρχουσα, τότε προκαλείται εσωτερική ασυνέπεια και παρανοήσεις (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Από τα παραπάνω παραδείγματα είδαμε ότι οι μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι οι αριθμοί είναι γενικά διακριτοί - δηλαδή κάθε αριθμός έχει έναν μοναδικό διάδοχο και μπορούν να ταξινομηθούν με τη θέση τους στον κατάλογο καταμέτρησης, ότι τα περισσότερα ψηφία αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες αριθμητικές τιμές και ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα, ιδιότητες που ισχύουν μόνο στους φυσικούς αριθμούς και όχι στους ρητούς ή πραγματικούς (Van Hoof et al., 2015, 2017).

2.3 Προκατάληψη φυσικού και αντικατάσταση μεταβλητής

Μια μελέτη του Switzer (2018), σε μαθητές της 4ης-6ης τάξης των Η.Π.Α. μέσα από δύο ημιδομημένες συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα που είχαν σχεδιαστεί για να διερευνήσουν την αντίληψη των μαθητών για το είδος των αριθμών που αναπαριστούν οι μεταβλητές, έδειξε ότι οι μαθητές είχαν την τάση να χρησιμοποιούν θετικούς ακέραιους για να αναπαραστήσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης με άγνωστες ποσότητες όπου το αποτέλεσμα ήταν δοσμένο. Ακόμη και όταν οι συμμετέχοντες δήλωναν ότι μπορούσαν να αντικαταστήσουν τους αγνώστους με οποιοδήποτε ρητό αριθμό, πάλι στην πράξη κατέληγαν να χρησιμοποιούν αποκλειστικά τους θετικούς ακέραιους, αποδεικνύοντας την έντονη επιρροή των φυσικών αριθμών η οποία δυσκολεύει την κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων όπως η μεταβλητή και κατά συνέπεια τη μετέπειτα εξέλιξή τους στα μαθηματικά.

Επίσης κατά την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στη διδασκαλία των αριθμών, τα λάθη στις πράξεις των αριθμητικών παραστάσεων αυξήθηκαν (Glaeser, 1981; Gallardo & Romero, 1999; Gallardo, 2002; Vlassis, 2002; Vlassis, 2004). Ένδειξη ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αφομοιώσουν τα νέα δεδομένα των αριθμών -αρνητικούς - στις ήδη προϋπάρχουσες γνώσεις και διαισθήσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό διευρύνεται και στην εκτέλεση των πράξεων μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων. Η Vlassis (2004) αναφέρει ότι κατά την αναγωγή ομοίων όρων σε πολυώνυμα πρώτου βαθμού με συντελεστές τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς ακεραίους αριθμούς, οι μαθητές χρησιμοποιούσαν λανθασμένα διαδικασίες που έχουν εφαρμογή στους φυσικούς αριθμούς και καταλήγει στην αδυναμία απόδοσης νοήματος από τους μαθητές (φυσικό και λεκτικό) στο συμβολισμό των αρνητικών αριθμών σε πολυωνυμικές παραστάσεις (στο Κύρβεη, 2020).

Ο Χρήστου, σε μια σειρά μελετών (2007, 2009, 2012), υιοθετώντας το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, εξέτασε τι τιμές αποδίδουν οι μαθητές στα γράμματα -μεταβλητές. Αρχικά, με ανοιχτά ερωτηματολόγια, στα οποία ζητούνταν από τους μαθητές να δώσουν αριθμούς που θα μπορούσαν ή που δεν θα μπορούσαν να πάρουν μια σειρά αλγεβρικών παραστάσεων που περιείχαν μεταβλητές, φάνηκε η έντονη τάση των μαθητών να αντικαθιστούν τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς και στα πλαίσια της λανθασμένης τους πεποίθησης ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, να αποκλείουν άλλους αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις. Φάνηκε επίσης πως οι αριθμοί που έτειναν να δίνουν στα γράμματα επηρεάζονταν από το *φαινομενικό πρόσημο* των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων του ερωτηματολογίου. Στη συνέχεια με ερωτηματολόγια κλειστού τύπου, από ένα δοσμένο σύνολο φυσικών και μη φυσικών αριθμών τους ζητούνταν να αποκλείσουν αριθμούς για τις ίδιες παραστάσεις του ανοιχτού ερωτηματολογίου. Οι αποκλεισμοί των αριθμών έγιναν και πάλι με βάση της τάσης τους να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών και της ερμηνείας του φαινομενικού προσήμου μιας παράστασης ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται αυτή να πάρει.

Επίσης, ο Χρήστου μαζί με τη Δημητρακοπούλου (2018), μέσα από δύο μελέτες, συνεξέτασαν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές ερμηνεύουν τις μεταβλητές και αν έχουν την τάση να τις αντικαθιστούν με φυσικούς αριθμούς, καθώς και με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών Γυμνασίου και τι αριθμητικές τιμές τους αποδίδονται. Τα αποτελέσματα από την πρώτη μελέτη έδειξαν για μια ακόμη φορά ότι υπάρχει έντονη *η προκατάληψη του φυσικού αριθμού*, η οποία πολύ δύσκολα μπορεί να αλλάξει αφού στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου, παρά τις υποβοηθήσεις που τους δόθηκαν, αρκετοί μαθητές συνέχιζαν να αποδίδουν τιμές μόνο φυσικών αριθμών στις μεταβλητές. Η δεύτερη μελέτη έδειξε ότι στα σχολικά βιβλία οι μεταβλητές εμφανίζονται με τη μορφή *γενικευμένου αριθμού* και όταν αντικαθίστανται από αριθμούς, τότε τις αποδίδονται τιμές *μη φυσικών* και *φυσικών* αριθμών περίπου στο ίδιο ποσοστό και ανάδειξε την αναγκαιότητα να μελετηθεί περαιτέρω, κατά πόσο και με ποιο τρόπο τα σχολικά βιβλία επιδρούν στη γνώση των μαθητών.

Όλα αυτά υποστηρίζουν την υπόθεση ότι η *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* δημιουργεί εμπόδια στην κατάκτηση της νέας γνώσης των αρνητικών αριθμών και των αλγεβρικών παραστάσεων από τους μαθητές και συντελεί στην *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* των αλγεβρικών παραστάσεων.

2.4 Το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης και η παρερμηνεία του

Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στις διάφορες αλγεβρικές παραστάσεις μπορεί να πάρουν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, εκτός αν έχει οριστεί ένα πεδίο ορισμού τους που αποκλείει συγκεκριμένες τιμές. Παρόλα αυτά, αν και οι μαθητές φαίνονται πρόθυμοι να δεχτούν μη φυσικούς αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις των μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες περιέχουν πραγματικούς αριθμούς, στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτοί οι αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών αυτών παραστάσεων.

Σύμφωνα με τον Χρήστου (2009), ως *φαινομενικό πρόσημο* ορίζεται το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια μεταβλητή και μια αλγεβρική παράσταση. Για παράδειγμα η μεταβλητή «α» φαίνεται να έχει πρόσημο θετικό αφού ως γνωστό στα μαθηματικά η απουσία προσήμου υποδηλώνει θετική αξία (π.χ. το 2 ή το +2), ενώ αντίθετα η μεταβλητή «–α» φαίνεται να φέρει αρνητικό πρόσημο, αφού η ύπαρξη αρνητικού προσήμου μπροστά από έναν αριθμό υποδηλώνει αρνητική αξία (π.χ. -2). Γνωρίζουμε όμως ότι το φαινομενικά θετικό πρόσημο μιας μεταβλητής δεν επηρεάζει τις τιμές που αυτή μπορεί να πάρει, αφού από τον ορισμό της η μεταβλητή αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Όπως στις μεταβλητές, έτσι και στις αλγεβρικές παραστάσεις, αφού περιέχουν μεταβλητές, έχουμε φαινομενικό πρόσημο, το οποίο μπορεί να μην είναι ίδιο με το πρόσημο της τιμής που αυτές μπορούν να αναπαραστήσουν. Αν για παράδειγμα η αλγεβρική παράσταση έχει τη μορφή ενός μονωνύμου όπως το 5x έχει θετικό φαινομενικό πρόσημο, αλλά η τιμή που αναπαριστά μπορεί να είναι είτε θετική (αν ο x είναι θετικός αριθμός), είτε αρνητική (αν ο x είναι αρνητικός αριθμός). Ανάλογα το μονώνυμο -5x έχει αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, του οποίου όμως οι τιμές που αναπαριστά μπορεί να είναι επίσης θετικές (αν ο x είναι αρνητικός), ή αρνητικές (αν ο x είναι θετικός). Παρατηρούμε επομένως ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης μπορεί να διαφέρει από το πρόσημο της τιμής που αναπαριστά, όταν η τιμή της μεταβλητής δεν είναι θετικός αριθμός. Η *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* απασχόλησε πολλούς ερευνητές (Chiarugi et al., 1990; Christou & Vosniadou, 2012; Crowley et al., 1994; Gallardo, 2002; Vlassis, 2004), ορίζεται ως μια τάση των μαθητών να θεωρούν το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών ή των αλγεβρικών παραστάσεων ως το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορούν αυτές να αναπαριστούν και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι είναι προϊόν της προκατάληψης φυσικού αριθμού.

Πράγματι, στην έρευνα του Χρήστου (2009), οι μαθητές έτειναν να αντικαθιστούν αλγεβρικές εκφράσεις της μορφής «-β» μόνο με αρνητικούς ακεραίους, ενώ εκφράσεις που δεν περιείχαν το αρνητικό πρόσημο θεωρήθηκε ότι μπορούσαν να αναπαριστούν μόνο θετικές τιμές. Αντιθέτως, όταν ρωτήθηκαν για τις τιμές που δεν μπορεί να πάρει η έκφραση «-β», πολλοί ήταν οι μαθητές που απάντησαν με ακέραιες τιμές διαφορετικού προσήμου από το φαινομενικό πρόσημο της έκφρασης (Χρήστου, 2009).

Η επίδραση του φαινομενικού προσήμου έχει επιπτώσεις σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών, όπως είναι η επίλυση ανισώσεων, εξισώσεων με απόλυτες τιμές, γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αλλά και πεδίο ορισμού συναρτήσεων μέσα σε τετραγωνικές ρίζες.

Ο Χρήστου σε δύο έρευνες (2009, 2012) μέσα από πειράματα σε συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια (διαδικασία επίλυσης ανισώσεων, συμπλήρωση πίνακα τιμών συνάρτησης, πεδίο ορισμού σε συναρτήσεις μέσα σε τετραγωνική ρίζα) θέλησε να εξετάσει αν οι μαθητές ερμηνεύουν τις μεταβλητές με βάση το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από τον φυσικό αριθμό. Επίσης, με βάση τα αποτελέσματα των πειραμάτων του, προχώρησε στο σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων, λαμβάνοντας υπόψη του την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών καθώς και τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους σε σχέση με τη χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα. Χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές της άμεσης διδασκαλίας και κάποιες διδακτικές στρατηγικές γνωστικής σύγκρουσης με τις λανθασμένες αντιλήψεις τους, είχε ως στόχο να βοηθήσει το δείγμα των μαθητών της έρευνας να διορθώσει την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Η διδακτικές αυτές παρεμβάσεις, δεν είχανε την ίδια απήχηση στους μαθητές και τα αποτελέσματά τους δεν διατηρούνταν για αρκετό διάστημα, γεγονός που τόνισε ότι το ζήτημα της *παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου* είναι βαθιά ριζωμένο στις πεποιθήσεις των μαθητών και απαιτείται πιο οργανωμένη και συνεχιζόμενη διδακτική παρέμβασης, ήδη από τις μικρότερες ηλικιακά ομάδες μαθητών.

Συγκεκριμένα, στη μελέτη που έκανε σε 60 μαθητές γυμνασίου το 2012, εξέτασε την επίδραση που είχε η χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων εκπαιδευτικών παρεμβάσεων στην αντιμετώπιση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Το εργαλείο έρευνας ήταν διαμορφωμένο σε τρία μέρη, καθένα από τα οποία εξέταζε και μια συγκεκριμένη πτυχή. Το πρώτο μέρος εξέταζε το πρόσημο στην περίπτωση συναρτήσεων που περιελάμβαναν ρίζες αριθμών, και οι μαθητές κλήθηκαν να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν με μια δεδομένη έκφραση, π.χ. «*το* $f(x) = \sqrt{-2x-1}$ δε*ν ορίζεται για κανένα πραγματικό αριθμό που αντικαθίσταται στην θέση του x διότι το -2x-1 είναι πάντα αρνητικό.*». Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου περιελάμβανε ερωτήσεις που αφορούσαν αλγεβρικές ανισότητες, και στον κανόνα ότι αν διαιρεθούν ή πολλαπλασιαστούν με μια αρνητική ποσότητα, η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει. Το τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου αφορούσε τις απόλυτες τιμές, με τους μαθητές να καλούνται να αξιολογήσουν αλγεβρικές εκφράσεις που μπορεί να είχαν είτε θετικό είτε αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, π.χ. «|-

7x-1|=7x+1, *διότι το -7x-1 είναι θετικό αλλά το 7x+1 είναι θετικό για κάθε αριθμό που θα τοποθετηθεί στην θέση του x*». Τα παραπάνω έργα, για να διαπιστωθεί ότι τα λάθη των μαθητών οφείλονταν στην προκατάληψη φυσικού και όχι στην ανεπαρκή γνώση τους πάνω στους κανόνες και ορισμούς των εξεταζόμενων εννοιών, δόθηκαν στους μαθητές με τη μορφή οδηγιών-κανόνων που εμφανίζονταν πριν από τις ερωτήσεις. Αρχικά οι μαθητές εξετάστηκαν σε ένα ερωτηματολόγιο Pre-test και στη συνέχεια στους 20 από τους 60 μαθητές πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση 25΄, με το να ξαναδιδαχθούν την έννοια της μεταβλητής με τους κανόνες που την διέπουν, αλλά και με μια σειρά παραδειγμάτων αντικατάστασής της με διάφορους αριθμούς (αρχικά φυσικούς και στη συνέχεια θετικούς και αρνητικούς, ακέραιους και μη). Ακολούθησε συζήτηση με τους μαθητές και έγινε σαφές, μέσα από παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, ότι ενώ στην αριθμητική η παρουσία του αρνητικού συμβόλου μπροστά από έναν αριθμό δηλώνει ότι είναι αρνητικός, στην άλγεβρα δεν συμβαίνει αυτό. Δηλαδή η παρουσία του προσήμου μπροστά από μία μεταβλητή θα την δήλωνε ως αρνητικό αριθμό, μόνο αν οι τιμές που έπαιρνε ήταν φυσικοί αριθμοί. Αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση, δόθηκε στους μαθητές αυτούς -ομάδα ελέγχου- ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο ανάλογο με αυτό που τους είχε δοθεί αρχικά, το οποίο τους ξαναδόθηκε να συμπληρώσουν ένα μήνα μετά, ώστε να εξεταστεί αν και κατά πόσο διατηρήθηκαν οι γνώσεις που είχαν λάβει από την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η σχεδιαζόμενη διδακτική παρέμβαση είχε εν γένει θετική επιρροή στην επίδοση των μαθητών. Επίσης, οι θετικές επιδόσεις της ομάδας ελέγχου, επιβεβαίωσαν την ελλιπή αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το φαινομενικό πρόσημο. Πράγματι, σε όλα τα έργα ήταν εμφανής η εφαρμογή της προϋπάρχουσας γνώσης. Οι μαθητές όχι μόνο είχαν την τάση να αποδίδουν στις μεταβλητές φυσικούς αριθμούς, αλλά θεωρούσαν και το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών, ως το πραγματικό τους πρόσημο. Μάλιστα η *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* στο συγκεκριμένο πείραμα ήταν σε μεγαλύτερο βαθμό όταν το πρόσημο ήταν αρνητικό παρά θετικό.

Ανάλογες έρευνες πραγματοποιήθηκαν και μετέπειτα από τον Χρήστου (2017) και όλες ενισχύουν την ελλιπή αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το φαινομενικό πρόσημο.

Από όλες όμως τις μελέτες που πραγματοποιήθηκαν πάνω στο φαινομενικό πρόσημο, καμία από αυτές δεν εστίασε μόνο στην κατανόηση του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές. Οι παραστάσεις που είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες, είχαν εμφανές φαινομενικό πρόσημο και οι περισσότερες θετικό. Επίσης καμία από αυτές δεν εξέτασε τι πρόσημο αποδίδουν οι μαθητές στις τιμές των παραστάσεων που δεν έχουν εμφανές κυρίαρχο πρόσημο, όπως στην παράσταση 2x-7 (φαινομενικά ουδέτερη), κάτι το οποίο θα επιδιώξουμε να ερευνήσουμε στην παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η έρευνα

3.1 Η αναγκαιότητα της έρευνας

Με την παρούσα έρευνα θα επιχειρήσουμε να επανεξετάσουμε τα υπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με την *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* στην ερμηνεία των μεταβλητών, καθώς επίσης και την *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* τόσο σε παραστάσεις με εμφανές πρόσημο, όσο και σε αυτές με ουδέτερο φαινομενικά πρόσημο.

Οι προηγούμενες σχετικές έρευνες ανέδειξαν τη δυσκολία κατανόησης των μεταβλητών ως σύμβολα που μπορούν να πάρουν μία συγκεκριμένη τιμή ενός συνόλου, αλλά και ως σύμβολα που μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Τόνισαν επίσης, τη διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στον τρόπο που οι μαθητές ερμηνεύουν τις μεταβλητές, θεωρώντας τες ως αριθμούς φυσικούς, καθώς και στον τρόπο που ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο ως πραγματικό, θεωρώντας ότι το πρόσημο που μπορεί να πάρει η τιμή μιας μεταβλητής ή παράστασης είναι ίδιο με το πρόσημο που φαίνεται να έχει.

Λόγω του ότι δεν έχουν γίνει μελέτες που αφορούν τα λάθη των μαθητών πάνω στο φαινομενικό πρόσημο πολύπλοκων αλγεβρικών παραστάσεων και όσες έρευνες έγιναν αναφέρονται σε παρανοήσεις πρόσημου σε γράμματα ή απλές αλγεβρικές εκφράσεις, η παρούσα έρευνα στοχεύει να διερευνήσει περισσότερο την αντίληψη που έχουν οι μαθητές όσο αφορά το πρόσημο της τιμής που μπορούν να πάρουν οι απλές αλγεβρικές παραστάσεις που είτε έχουν το ίδιο πρόσημο σε όλους τους όρους τους, είτε διαφορετικό μεταξύ του σταθερού όρου και του μονώνυμου, αλλά και να εξετάσει αν τα λάθη που κάνουν εμφανίζονται στον ίδιο βαθμό σε όλα τα είδη των παραστάσεων, καθώς και αν αλλάζουν οι επιδόσεις ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούν οι μαθητές.

3.2 Ο σκοπός της έρευνας

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές το πρόσημο της τιμής των αλγεβρικών παραστάσεων όταν αυτές φαινομενικά είναι αρνητικές, πώς όταν φαινομενικά είναι θετικές και πώς όταν δεν κυριαρχεί κανένα εμφανές κυρίαρχο πρόσημο. Έχουν την τάση οι μαθητές να αντικαθιστούν τις μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς; Αν ναι, αυτό συμβαίνει πάντα ή εξαρτάται από τη μορφή των παραστάσεων;

Στηριζόμενοι στη μελέτη του Christou (2017) και σε ένα από τα συμπεράσματά της, ότι η Προκατάληψη Φυσικού Αριθμού σχετίζεται με την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων με το πραγματικό πρόσημο των αριθμητικών τιμών που μπορεί να αντιπροσωπεύουν, η μελέτη αυτή στοχεύει:

- Να ελέγξει τι αριθμούς θεωρούν οι μαθητές ότι μπορούν να αναπαραστήσουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν εμφανές θετικό ή αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, καθώς και όταν η παράσταση δεν έχει εμφανές φαινομενικό πρόσημο.
- Να εξετάσει με ποιον τρόπο οι μαθητές προσεγγίζουν το πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει μια αλγεβρική παράσταση που δεν έχει εμφανές κυρίαρχο πρόσημο.
- και τέλος να ελέγξει αν οι παρανοήσεις που προκύπτουν είναι ίδιες και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.

3.3 Ερευνητική υπόθεση

Η υπόθεση της έρευνας είναι, πως η πλειοψηφία των μαθητών θα θεωρήσει αρνητικό το πρόσημο της παράστασης που είναι φαινομενικά αρνητική, δηλαδή αυτή που έχει σε όλους τους όρους της (-) και αντίστοιχα θετική την παράσταση που έχει σε όλους τους όρους της το (+). Δηλαδή ότι οι μαθητές θα είχαν υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που συμφωνούν με τη διαίσθησή τους -ότι μόνο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης μπορεί να αποδίδονται σ' αυτή- παρά στα έργα που είναι αντίθετες με αυτή την πεποίθηση. Δεν μπορεί να γίνει κάποια συγκεκριμένη υπόθεση για το πώς ερμηνεύουν οι μαθητές το πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης στην οποία δεν κυριαρχεί κανένα πρόσημο, δηλαδή τι συμβαίνει με τις φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις.

3.4. Ερευνητικό ερώτημα

Πώς ερμηνεύουν οι μαθητές το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων και κατά πόσο διαφοροποιούνται οι πεποιθήσεις των μαθητών ανά τάξη; Έχουν την τάση οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τις φαινομενικά θετικές παραστάσεις ως θετικές, τις φαινομενικά αρνητικές ως αρνητικές; Τι συμβαίνει όταν δεν επικρατεί κάποιο από τα δύο πρόσημα;

3.5 Συμμετέχοντες

Για να απαντηθούν τα ερωτήματα της υπάρχουσας έρευνας, συλλέχθηκαν ποσοτικά δεδομένα - μέσα από ερωτηματολόγιο ερωτήσεων κλειστού τύπου- από 178 μαθητές και των τριών τάξεων ενός Γυμνασίου της Κοζάνης και ποιοτικά δεδομένα - μέσα από τη συνέντευξη 10 μαθητών από αυτούς που συμπληρώσανε το ερωτηματολόγιο. Το δείγμα ήταν ευκολίας και απευθύνθηκε σε τμήματα που είχε πρόσβαση η ερευνήτρια, η δε συνέντευξη πάρθηκε από μαθητές που εκδήλωσαν το ενδιαφέρον τους και κατόπιν έγκρισης των γονέων τους.

Το δείγμα ήταν σχεδόν εξίσου χωρισμένο σε αγόρια και κορίτσια (85 κορίτσια και 93 αγόρια) καθώς και τάξη φοίτησης, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 1:

Πίνακας 1. Το δείγμα των μαθητών

	Α΄ τάξη	Β΄ τάξη	Γ΄ τάξη	Σύνολο
Κορίτσια	29	24	32	85
Αγόρια	28	32	33	93
Σύνολο	57	56	65	178

Για να μπορέσει να απαντηθεί το ερωτηματολόγιο και από τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου το κεφάλαιο με τους αρνητικούς αριθμούς (7^o) του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών διδάχθηκε πιο νωρίς απ' ό,τι προβλέπεται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, οι μαθητές τις Α΄ Γυμνασίου εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και στην επίλυση απλών εξισώσεων στα μισά του σχολικού έτους, ενώ γνωρίζουν τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ τους στο τέλος του σχολικού έτους και στις αρχές του επόμενου στην Β΄ τάξη. Να σημειώσουμε ότι ενώ την έννοια της μεταβλητής-γράμμα οι μαθητές τη γνωρίζουν ήδη από το Δημοτικό, τους αρνητικούς τους βλέπουν πρώτη φορά στο τέλος της Α΄ Γυμνασίου.

3.6 Ερευνητικό εργαλείο

Για την κατασκευή του ερωτηματολογίου, επιλέχθηκαν απλές αλγεβρικές παραστάσεις: μονώνυμα ή διώνυμα (με σταθερό όρο και ένα μονώνυμο) μιας μεταβλητής. Στόχος ήταν να φαίνονται πολύ απλές στους μαθητές και να μη λειτουργήσουν αποτρεπτικά για την εκτίμηση της τιμής που αυτές μπορεί να πάρουν ή να μην πάρουν, αλλά και να μπορέσουμε να ελέγξουμε αν οι λάθος απαντήσεις τους οφείλονταν στην λανθασμένη διαίσθησή τους για το πρόσημο της τιμής των παραστάσεων και όχι στη δυσκολία εκτέλεσης των πράξεων. Πιο συγκεκριμένα, το ερωτηματολόγιο που δόθηκε είχε 36 ερωτήσεις κλειστού τύπου, στις οποίες οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν αν Συμφωνούν ή Διαφωνούν με την αριθμητική τιμή που μπορεί ή δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση.

Οι ερωτήσεις αυτές χωρίστηκαν σε τρεις κύριες κατηγορίες, και δόθηκαν σε τυχαία σειρά. Οι κατηγορίες αυτές ήταν:

i) 12 φαινομενικά θετικές παραστάσεις, όπου το πρόσημο όλων των όρων ήταν θετικό (π.χ. 8x+4, 2y+6)
ii) 12 φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις, όπου μόνο αρνητικά πρόσημα υπήρχαν στους όρους (π.χ. –x-4, -5y)
iii) και 12 φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις, όπου στους όρους τους υπήρχαν και αρνητικά και θετικά πρόσημα (π.χ. 8x-4, -3x+5, 4-8x).

Κάθε αλγεβρική παράσταση αντιστοιχίστηκε σε διαφορετικό ακέραιο αριθμό, είτε θετικό είτε αρνητικό, ο οποίος όμως δεν επαλήθευε την αλγεβρική έκφραση για ακέραια τιμή της μεταβλητής και αυτό για να μην μπορούν οι μαθητές να κάνουν την επαλήθευσή του αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς, εξετάζοντας με αυτό τον τρόπο από την πλευρά μας μόνο το πρόσημο που αποδίδανε στις μεταβλητές και όχι το είδος των αριθμών.

Σε κάθε ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν με τη δεδομένη δήλωση. Οι μισές δηλώσεις δόθηκαν με καταφατική μορφή (π.χ. Θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή 8) με σωστή την απάντηση «Συμφωνώ» και οι άλλες μισές με αρνητική μορφή (π.χ. Δε θα μπορούσε το -3x+5 να πάρει την τιμή -14), με σωστή απάντηση το «Διαφωνώ».

Από τις δύο πρώτες κατηγορίες (δηλώσεις με φαινομενικά θετικό ή αρνητικό πρόσημο) οι τιμές που δόθηκαν ήταν οι μισές συμβατές με την πεποίθηση ότι οι τιμές έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων και οι άλλες μισές μη συμβατές μ’ αυτό.

Συμβατές ήταν οι δηλώσεις στις οποίες η τιμή που αποδίδονταν στην αλγεβρική παράσταση είχε το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης και οι μη συμβατές ήταν αυτές στις οποίες η τιμή που αποδίδονταν στην αλγεβρική παράσταση είχε διαφορετικό πρόσημο με το φαινομενικό της πρόσημο. Στους Πίνακες 2 και 3, παρουσιάζονται παραδείγματα συμβατών και μη συμβατών παραστάσεων και στις δύο μορφές (καταφατική και αρνητική) στις φαινομενικά θετικές και φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις αντίστοιχα.

Συμβατές (ΦΘ_Συμβ)	Μη συμβατές (ΦΘ_ΜηΣυμβ)
Θα μπορούσε το 8x+4να πάρει την τιμή 21	Θα μπορούσε το 5x να πάρει την τιμή -13
Δεν θα μπορούσε το 2y+6 να πάρει την τιμή -9	Δεν θα μπορούσε το x+3 να πάρει την τιμή 1

Πίνακας 2. Φαινομενικά θετικές παραστάσεις

Συμβατές (ΦΑ_Συμβ)	Μη συμβατές (ΦΑ_ΜηΣυμβ)
Θα μπορούσε το -x-4 να πάρει την τιμή -2	Θα μπορούσε το -7y-9 να πάρει την τιμή 6
Δεν θα μπορούσε το -5y να πάρει την τιμή 2	Δεν θα μπορούσε το -y-4 να πάρει την τιμή -3

Πίνακας 3. Φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις

Όσο αφορά τις φαινομενικά ουδέτερες δηλώσεις, στόχος μας ήταν να εξετάσουμε πώς σκέφτονται οι μαθητές και αν κυριαρχεί:

- το πρόσημο του μονωνύμου

- το πρόσημο του μεγαλύτερου -κατά απόλυτη τιμή- αριθμού
- το πρόσημο που υπάρχει στην αρχή της παράστασης ή αν αναζητούν την τιμή τους λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση.

Έτσι χωρίσαμε τα έργα με τις ουδέτερες δηλώσεις σε τρεις ισοπληθείς κατηγορίες, εξετάζοντας αν το πρόσημο της τιμής που αποδίδονταν στην παράσταση ήταν ίδιο ή αντίθετο με:

α) το φαινομενικό πρόσημο του μονωνύμου

β) το φαινομενικό πρόσημο του μεγαλύτερου -κατά απόλυτη τιμή- αριθμού, είτε αυτός ήταν συντελεστής μονωνύμου, είτε σταθερός όρος και

γ) το φαινομενικό πρόσημο του αριθμού που εμφανίζεται στην αρχή της παράστασης .

Στους Πίνακες 4, 5 και 6, παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα από τα έργα των παραπάνω κατηγοριών, αποδίδοντάς τα και στις δύο μορφές (καταφατική και αρνητική) στις φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις.

Ίδιο πρόσημο με του μονωνύμου	Ίδιο πρόσημο με της σταθεράς
Θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή 8	Θα μπορούσε το 5-3x να πάρει την τιμή 15
Δεν θα μπορούσε το 7x-3 να πάρει την τιμή -5	Δεν θα μπορούσε το 5x-3 να πάρει την τιμή 11

Πίνακας 4. Πρόσημο τιμής παράστασης σε σχέση με το φαινομενικό πρόσημο του μονωνύμου

Ίδιο πρόσημο με του μεγαλύτερου αριθμού	Ίδιο πρόσημο με του μικρότερου αριθμού
Θα μπορούσε το 5-3x να πάρει την τιμή 15	Θα μπορούσε το 2x-5 να πάρει την τιμή 4
Δεν θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή -2	Δεν θα μπορούσε το 7x-3 να πάρει την τιμή -5

Πίνακας 5. Πρόσημο τιμής παράστασης σε σχέση με το φαινομενικό πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού

Ίδιο πρόσημο με του αριθμού στην αρχή	Ίδιο πρόσημο με του αριθμού στο τέλος
Θα μπορούσε το -3y+7 να πάρει την τιμή -4	Θα μπορούσε το 2x-1 να πάρει την τιμή -2
Δεν θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή -2	Δεν θα μπορούσε το 4-8x να πάρει την τιμή 5

Πίνακας 6. Πρόσημο τιμής παράστασης σε σχέση με το φαινομενικό πρόσημο του αριθμού στην αρχή

3.7 Ερευνητική διαδικασία

Η μελέτη πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς 2019-20.

Η ερευνητική διαδικασία διήρκησε συνολικά από τον Δεκέμβριου του 2019 μέχρι και τον Φεβρουάριο του 2020 και σ' αυτήν συμμετείχαν 178 μαθητές που φοιτούσαν και στις τρεις τάξεις ενός Γυμνασίου της περιφέρειας. Στους μαθητές δόθηκε το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Α) με τις 36 ερωτήσεις κλειστού τύπου στις αίθουσες διδασκαλίας τους κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας (45 λεπτά) από το διδάσκοντα της τάξης και παρουσία της ερευνήτριας, στο οποίο καλούνταν να απαντήσουν αν «Συμφωνούν» ή «Διαφωνούν» με τη δοσμένη τιμή ως τιμή της παράστασης. Η ερευνήτρια έδωσε αρχικά οδηγίες για τον τρόπο συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου και στην πορεία καμία άλλη διευκρίνιση ή βοήθεια.

Στη συνέχεια, σε άλλη μέρα εκτός του ωρολόγιου προγράμματος, στο χώρο του σχολείου, η ερευνήτρια πραγματοποίησε προσωπικές συνεντεύξεις, με 10 από τους μαθητές που συμμετείχαν στη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου (και από τις τρεις τάξεις). Οι μαθητές επιλέχθηκαν ύστερα από την επιθυμία τους να συμμετάσχουν σ' αυτή τη συνέντευξη και με τη σύμφωνη γνώμη των κηδεμόνων τους. Στις συνεντεύξεις αυτές, ο κάθε μαθητής ξεχωριστά, ζητούνταν να απαντήσει για τον τρόπο που σκέφτηκε και το κριτήριο με το οποίο απάντησε σε συγκεκριμένες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου. Οι ερωτήσεις που επιλέχτηκαν για αιτιολόγηση δεν ήτανε ίδιες σε όλους τους μαθητές, αλλά διαφοροποιούνταν ανάλογα με τον τρόπο που είχαν απαντήσει το ερωτηματολόγιο. Δεν υπήρχε χρονικό όριο μέσα στο οποίο έπρεπε να απαντήσουν. Ωστόσο η διάρκεια της κάθε συνέντευξης ήτανε μεταξύ 10 έως 15 λεπτά.

Όλες οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν με την άδεια των συμμετεχόντων και των γονέων τους και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν ώστε να μελετηθούν.

3.8 Στατιστικές αναλύσεις

Οι απαντήσεις των μαθητών ποσοτικοποιήθηκαν θέτοντας στις Σωστές τον αριθμό 1 και στις Λανθασμένες το 0 και υπολογίστηκαν οι συχνότητες χρήσεις της κάθε κατηγορίας με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος SPSS for Windows ver 24.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Αποτελέσματα

Για την μέτρηση της αξιοπιστίας της εσωτερικής συνέπειας, χρησιμοποιήθηκε ο δείκτης Cronbach’s Alpha. Τιμές του δείκτη άνω του 0,7 θεωρούνται αποδεκτές (Eisinga, Grotenhuis & Pelzer, 2012). Στην παρούσα έρευνα, αξιολογήθηκε η συνολική αξιοπιστία του ερωτηματολογίου η οποία θεωρείται αποδεκτή (0.885).

Υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές σε κάθε μία από τις 4 κατηγορίες των παραστάσεων: α) τα έργα που ήταν συμβατά με την πεποίθηση ότι το πρόσημο της τιμής και η αλγεβρική παράσταση ήταν φαινομενικά θετικό (ΦΘ_Συμβ), β) τα έργα που δεν ήταν συμβατά με την πεποίθηση ότι το πρόσημο της τιμής και η αλγεβρική παράσταση ήταν φαινομενικά θετικό (ΦΘ_ΜηΣυμβ), γ) φαινομενικά αρνητικές συμβατές με το πρόσημο της τιμής τους (ΦΑ_Συμβ) και δ) φαινομενικά αρνητικές, μη συμβατές με το πρόσημο της τιμής τους (ΦΑ _ΜηΣυμβ). Οι μέσοι όροι ανά κατηγορία απαντήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7, τα συμβατά έργα με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για το πρόσημο των παραστάσεων εμφάνισαν υψηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τα μη συμβατά, τόσο στις φαινομενικά θετικές όσο και στις φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις.

Κατηγορίες Έργων	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέσος όρος (Μ.Ο.)	Τυπικό σφάλμα (Τ.Σ.)
ΦΘ_Συμβ	0	1	0,53	0,022
ΦΘ_ΜηΣυμβ	0	1	0,46	0,020
ΦΑ_Συμβ	0	1	0,53	0,021
ΦΑ_ΜηΣυμβ	0	1	0,47	0,021

Πίνακας 7. Στατιστικά αποτελέσματα έργων με φαινομενικά θετικές και αρνητικές παραστάσεις

Τα αποτελέσματα με ανάλυση διακύμανσης δύο παραγόντων (φαινομενικό πρόσημο και συμβατότητα) επαναλαμβανόμενων μετρήσεων έδειξαν στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς τη συμβατότητα [$F(1,175)=21.783$, $p<0.001$], αλλά όχι ως προς το φαινομενικό πρόσημο [$F(1,175)=0.295$, $p=0.588$]. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές απέδωσαν πολύ καλύτερα σε εκείνα τα έργα που ήταν σύμφωνα με τη διαισθητική τους πεποίθηση, ότι οι αριθμοί δηλαδή που μπορούν να αποδοθούν σε μια αλγεβρική παράσταση πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό της πρόσημο, παρά με εκείνα που συγκρούονταν με αυτή την πεποίθηση. Αυτό παρατηρήθηκε τόσο στις φαινομενικά θετικές, όσο και στις φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις, γεγονός που συνάδει με την κύρια υπόθεση της συγκεκριμένης μελέτης. Επιπλέον, δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση της τάξης στα έργα που ήταν συμβατά και μη συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών [$F(1,175)=2.385$, $p=0.095$]. Αντίθετα, υπήρχε σημαντική αλληλεπίδραση ανάμεσα στην τάξη και το φαινομενικό πρόσημο των έργων [$F(1,175)=3.557$, $p=0.031$], δηλαδή υπήρχαν διαφορές ανά τάξη ανάμεσα στα φαινομενικά θετικά και φαινομενικά αρνητικά έργα.

Για να εξετάσουμε πόσο επιδρά η τάξη, αλλά και το φύλο των μαθητών στον τρόπο απάντησης του συγκεκριμένου ερωτηματολόγιου εφαρμόσαμε το στατιστικό κριτήριο ANOVA και Post-Hoc ανάλυση (κριτήριο Bonferroni).

Το φύλο δεν επηρέασε την επίδοση των μαθητών/τριών σε κανένα από τα έργα του ερωτηματολογίου [$F=2.520$, $p=0.083$].

Υπήρχαν όμως, στατιστικά σημαντικές διαφορές ανά τάξη [$F(1,175)=9.564$, $p<0.01$], με τη Β΄ τάξη να σημειώνει υψηλότερες επιδόσεις από τις δύο άλλες τάξεις σε όλες τις κατηγορίες των έργων όπως φαίνεται και στον Πίνακα 8, στον οποίο παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιδόσεων των μαθητών σε κάθε τάξη, σε όλες τις κατηγορίες των έργων.

Κατηγορίες Έργων	Τάξη	Min	Max	Μέσος όρος (Μ.Ο.)	Τυπικό Σφάλμα (Τ.Σ.)
ΦΘ_Συμβ	Α	0	1	0.42	0.038
	Β	0	1	0.66	0.037
	Γ	0	1	0.53	0.034
ΦΘ_ΜηΣυμβ	Α	0	1	0.35	0.033
	Β	0	1	0.56	0.039
	Γ	0	1	0.48	0.030
ΦΑ_Συμβ	Α	0	1	0.48	0.036
	Β	0	1	0.64	0.036
	Γ	0	1	0.49	0.033
ΦΑ_ΜηΣυμβ	Α	0	1	0.41	0.036
	Β	0	1	0.53	0.041
	Γ	0	1	0.48	0.032

Πίνακας 8. Στατιστικά αποτελέσματα επίδοσης της τάξης ανά κατηγορία έργων

Αποτελέσματα στις φαινομενικά ουδέτερες

Στις φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις, όπου υπάρχει και το θετικό και το αρνητικό πρόσημο, οι τρεις κατηγορίες έργων ήταν:

- Η πρώτη κατηγορία, εξέταζε αν είναι ίδιο ή αντίθετο το πρόσημο της τιμής που αποδίδονταν στη παράσταση με το φαινομενικό πρόσημο του μονωνύμου. Εδώ στα 8 έργα το πρόσημο του μονωνύμου ήταν ίδιο με του αριθμού που αποδίδονταν στην παράσταση (ΙδιοΠροσ_Μονώνυμο) και στα άλλα 4 αντίθετο (ΑντίθετοΠροσ_ Μονώνυμο).
- Η δεύτερη κατηγορία, εξέταζε αν είναι ίδιο ή αντίθετο το πρόσημο της τιμής που αποδίδονταν στη παράσταση με το πρόσημο του μεγαλύτερου (κατά απόλυτη τιμή αριθμού), είτε αυτός ήταν συντελεστής είτε σταθερός όρος. Εδώ στα 5 έργα η τιμή που

αποδίδονταν στην παράσταση είχε ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού (ΙδιοΠροσ_Max) και στα άλλα 7 μη συμβατό (ΑντίθετοΠροσ_Max).

- Και η τρίτη κατηγορία, εξέταζε αν είναι ίδιο ή αντίθετο το πρόσημο της τιμής που αποδίδονταν στην παράσταση με το πρόσημο του αριθμού που εμφανίζεται στην αρχή της παράστασης. Τα 8 έργα είχαν ίδιο πρόσημο με τον αριθμό μπροστά (ΙδιοΠροσ_Αρχή), και τα άλλα 4 μη συμβατό (ΑντίθετοΠροσ_Αρχή).

Για κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες, επειδή το πλήθος των έργων με ίδιο ή αντίθετο πρόσημο δεν ήταν το ίδιο, υπολογίσαμε τη σχετική συχνότητα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων (ποσοστό %), ως προς το σύνολο των απαντήσεων (178), αντί για τις συχνότητές τους.

Στον Πίνακα 9 βλέπουμε τα ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της 1ης κατηγορίας και δεν εμφανίζεται μια καθαρή τάση των μαθητών να αποφασίζουν για το πρόσημο της παράστασης με βάση το πρόσημο του μονωνύμου, γιατί οι επιδόσεις τους στα έργα όπου το πρόσημο του μονωνύμου ταυτίζεται με το πρόσημο που αποδίδεται στην παράσταση και σε αυτές που είναι αντίθετο είναι παραπλήσιες.

Κατηγορία έργου με ουδέτερο φαινομενικό πρόσημο (πλήθος έργων στην κατηγορία)	Ποσοστό (%) σωστών απαντήσεων	Ποσοστό (%) λανθασμένων απαντήσεων
ΙδιοΠροσ_Μονώνυμο (8)	53,58%	46,42%
ΑντίθετοΠροσ_Μονώνυμο (4)	56,88%	43,12%

Πίνακας 9. Ποσοστό επίδοσης στις ουδέτερες παραστάσεις, με το πρόσημο της μονωνύμου να είναι ίδιο ή αντίθετο με του αριθμού που αποδίδεται

Για τη 2η κατηγορία των ουδέτερων φαινομενικά παραστάσεων, τα ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων φαίνονται στον Πίνακα 10, στα οποία οι μαθητές δεν δείχνουν να επιλέγουν με συστηματικό τρόπο το πρόσημο του μεγαλύτερου (κατά απόλυτη τιμή) αριθμού, ως πρόσημο συνολικά για την τιμή της παράστασης, γιατί και εδώ οι επιδόσεις τους στα έργα με ίδιο ή αντίθετο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού είναι παραπλήσιες.

Κατηγορία έργου με ουδέτερο φαινομενικό πρόσημο (πλήθος έργων στην κατηγορία)	Ποσοστό (%) σωστών απαντήσεων	Ποσοστό (%) λανθασμένων απαντήσεων

ΙδιοΠροσ_Max (5)	54,16%	45,84%
ΑντίθετοΠροσ_Max (7)	55,06%	44,94%

Πίνακας 10. Ποσοστό επίδοσης στις ουδέτερες παραστάσεις, με το πρόσημο του μεγαλύτερου (κατά απόλυτη τιμή αριθμού) να είναι ίδιο ή αντίθετο με του αριθμού που αποδίδεται

Τέλος στον Πίνακα 11, έχουμε μία ανάλογη ένδειξη με τις προηγούμενες περιπτώσεις, ότι δηλαδή, η προτίμηση των μαθητών για το πρόσημο της τιμής της παράστασης δεν είναι ξεκάθαρα ο αριθμός (συντελεστής μεταβλητής, ή σταθερός όρος) που βρίσκεται στην αρχή της παράστασης.

Κατηγορία έργου με ουδέτερο φαινομενικό πρόσημο (πλήθος έργων στην κατηγορία)	Ποσοστό (%) σωστών απαντήσεων	Ποσοστό (%) λανθασμένων απαντήσεων
ΙδιοΠροσ_Αρχή (8)	54,92%	45,08%
ΑντιθετοΠροσ_Αρχη (4)	54,21%	45,79%

Πίνακας 11. Ποσοστό επίδοσης στις ουδέτερες παραστάσεις, με το πρόσημο που εμφανίζεται στην αρχή να είναι ίδιο ή αντίθετο με του αριθμού που αποδίδεται

Διαπιστώνουμε επομένως ότι δεν υπάρχουν διαφορές στα ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων σε κάθε κατηγορία έργου (πίνακα), αλλά και ούτε μέσα σ' αυτόν.

4.2 Αποτελέσματα συνεντεύξεων ανά κατηγορία

Οι συνεντεύξεις αναλύθηκαν, εστιάζοντας στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να απαντήσουν στο ερωτηματολόγιο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές ρωτήθηκαν με βάση τις απαντήσεις τους σε συγκεκριμένα έργα, ώστε να διαπιστωθεί αν είχαν συστηματικό τρόπο σκέψης, αν αλλάζανε τακτική με τα διαφορετικά έργα, ή ακόμη και αν απαντούσανε τυχαία. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδειξαν τρεις βασικές κατηγορίες απάντησης που παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω και με παραδείγματα από απαντήσεις των ίδιων των μαθητών.

Μαθητές που λύνουν την εξίσωση

Από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι μια στρατηγική για να απαντηθούν οι ερωτήσεις ήταν να λύσουν τις εξισώσεις. Τόσο οι μαθητές της Α΄ τάξης , όσο και των δύο άλλων τάξεων Β΄, Γ΄ μίλησαν για αυτό.

Για παράδειγμα η μία μαθήτρια της Α΄ τάξης (ΚΑ1), για να εξετάσει αν η παράσταση μπορούσε να πάρει την τιμή που δίνονταν, έλυνε κάθε φορά την αντίστοιχη εξίσωση της παράστασης με τη συγκεκριμένη τιμή και αν η λύση ήτανε ακέραιος αριθμός ή δεκαδικός με το πολύ δύο δεκαδικά ψηφία, τότε έδινε την απάντηση «Συμφωνώ». Παρακάτω παρουσιάζεται μέρος της συνέντευξής της:

> Ερευνήτρια (Ε): *Πώς σκέφτηκες και απάντησες «Συμφωνώ» στο ότι το «5x μπορεί να πάρει την τιμή -13»;*
>
> ΚΑ1: *Είπα, 5x ίσο με -13 και για να βρούμε την τιμή του x έκανα -13:5 και βρήκα -2,6. Άρα υπάρχει τέτοιο x που το κάνει ίσο με -13.*
>
> ……………………….
>
> Ε: *Σε όλες τις ερωτήσεις σκέφτηκες με τον ίδιο τρόπο; Δηλαδή έλυνες κάθε φορά την αντίστοιχη εξίσωση;*
>
> ΚΑ1: *Ναι. Έκανα πάντα τη διαίρεση και αν αυτή έβγαινε ατελής (δηλαδή πάνω από δύο δεκαδικά) έλεγα «Διαφωνώ», ενώ αν έβγαινε τέλεια* (και εννοεί ότι τα δεκαδικά ψηφία δεν υπερβαίνουν τα δύο), *έλεγα «Συμφωνώ».*

Το ενδιαφέρον με αυτές τις απαντήσεις ήταν ότι οι μαθητές έδειχναν να δέχονται ακόμη και μη ακέραιες τιμές στις μεταβλητές των παραστάσεων, αλλά όχι οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Αν ο αριθμός είχε περισσότερα δεκαδικά ψηφία από αυτά που θα μπορούσαν να δεχθούν, λέγανε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός που θα μπορούσε να αποδοθεί στη μεταβλητή ώστε να δώσει τη συγκεκριμένη τιμή της παράστασης.

Επίσης μία μαθήτρια της Γ΄ τάξης έδωσε σε όλες τις ερωτήσεις τη σωστή απάντηση, εξηγώντας ότι σε κάθε περίπτωση έλυνε την αντίστοιχη εξίσωση.

Μαθητές που κάνουν δοκιμή και λάθος

Άλλοι μαθητές όταν ρωτήθηκαν για το πώς αποφάσιζαν να δώσουν την απάντηση που έδωσαν, είπαν ότι δοκίμαζαν δίνοντας στην μεταβλητή διάφορες τιμές. Για παράδειγμα δύο μαθήτριες από την Α΄ τάξη, δοκίμαζαν τιμές -συνήθως θετικούς ακέραιους- στις μεταβλητές και αν τους δίνανε τη ζητούμενη τιμή σημειώνανε «Συμφωνώ», διαφορετικά «Διαφωνώ». Να σημειώσουμε όμως ότι δεν κάνανε πάντα σωστά τις πράξεις.

Για παράδειγμα στην ερώτηση «Δεν θα μπορούσε το 4-8x να πάρει την τιμή 5» η μία από αυτές απάντησε «Συμφωνώ». Όταν ρωτήθηκε γιατί έδωσε αυτή την απάντηση είπε: «*όταν το x είναι ίσο με 2 τότε 8·2=16 και 16-4=12 που δεν είναι 5*».

Στις παραπάνω απαντήσεις φαίνεται η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην τάση των μαθητών να δοκιμάζουν μόνο φυσικούς ή ακέραιους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών.

Δεν λείπανε όμως και οι περιπτώσεις που οι μαθητές δοκίμαζαν και αρνητικές ακέραιες τιμές, όπως έκανε μία άλλη μαθήτρια της Α΄ τάξης. Υπήρχαν όμως και οι περιπτώσεις του λάθους, είτε γιατί έκαναν λάθος στις πράξεις, είτε γιατί δεν είχανε προσέξει το «Δεν» στην αρχή της δήλωση (δηλώσεις με αρνητική μορφή). Παρακάτω παρατίθεται ένα μέρος από τη συνέντευξη μιας μαθήτριας της Α΄ τάξης:

> <u>Ε</u>: *Πώς σκέφτηκες όταν απάντησες «Συμφωνώ» ότι το 5x δεν μπορεί να πάρει την τιμή -13;*
>
> <u>ΚΑ2:</u> *Επειδή αν το 5 το πολλαπλασιάσω με το -2 θα βγει -10 και όχι -13, ενώ αν το πολλαπλασιάσω με το -3 θα βγει -15.*
>
> <u>Ε</u>: *Μόνο αυτές τις τιμές δοκίμασες στην περίπτωση αυτή;*
>
> <u>ΚΑ2:</u> *Ναι.*
>
> <u>Ε:</u> *Γιατί δεν δοκίμασες και άλλες τιμές;*
>
> <u>ΚΑ2:</u> *Δοκίμασα αρνητικές τιμές για να βγει αρνητικό αποτέλεσμα, αλλά καμία δεν έδινε -13!*
>
> ……………….

Ε: *Στην ερώτηση «Δεν θα μπορούσε το –y-4 να πάρει την τιμή 9» λες «Διαφωνώ». Γιατί;*

ΚΑ2: *Έβαλα στο y το 5, ...ααα έκανα λάθος!!! ....Συμφωνώ! .. δεν πρόσεξα το «Δεν»!*

Ένας άλλος μαθητής από τη Γ΄ τάξη αιτιολόγησε τις απαντήσεις του ως εξής:

«*Έδινα την απάντηση με δοκιμή κάποιων αριθμών*» και στην ερώτηση τι είδους αριθμούς δοκίμαζε είπε: «*θετικούς, αρνητικούς, δεκαδικούς, κλάσματα*». Πράγματι στην ερώτηση του ερωτηματολογίου «Δεν θα μπορούσε το -3x να πάρει την τιμή -1» απάντησε «Διαφωνώ», εξηγώντας ότι «*αν το x πάρει την τιμή* $\frac{1}{3}$ *θα μας δώσει το* -1». Όμως υπήρχε και η περίπτωση της ερώτησης «Δεν θα μπορούσε το -5y να πάρει την τιμή 2» που απάντησε «Συμφωνώ» κατά λάθος, αφού δεν πρόσεξε το «Δεν» της ερώτησης.

Μαθητές που εστιάζουν στο πρόσημο του μονωνύμου

Δεν λείπανε όμως και οι περιπτώσεις που οι μαθητές για την απόδοση της τιμής σε μια φαινομενικά ουδέτερη παράσταση, έλεγχαν το φαινομενικό πρόσημο του μονωνύμου, κοίταζαν δηλαδή τι πρόσημο έχει ο συντελεστής του μονωνύμου και αν το πρόσημό του ήταν ίδιο με την ζητούμενη τιμή, απαντούσαν «Συμφωνώ». Για παράδειγμα στις παραστάσεις όπως 5x-3 ή -3y+7 κυριαρχούσε το πρόσημο του αριθμού που έχει μπροστά η μεταβλητή.

Κάποια παραδείγματα από τις απαντήσεις που έδωσε σ' αυτές τις περιπτώσεις μια μαθήτρια της Β΄ τάξης φαίνονται παρακάτω:

- Στην πρόταση «Δεν θα μπορούσε το 5x-3 να πάρει την τιμή 11» απαντάει «Διαφωνώ»
- Στην πρόταση «Θα μπορούσε το -3y+7 να πάρει την τιμή -4» απαντάει «Συμφωνώ»

Στην ερώτηση, γιατί απάντησε έτσι, είπε: «*Δεν θυμάμαι πώς σκέφτηκα τότε, ...αλλά είδα τι είχε μπροστά το x ή το y*», εννοώντας το πρόσημο.

Επίσης, στην περίπτωση των μονωνύμων π.χ. 5x, 2α, -5y κλπ «Συμφώνησε» ή «Διαφώνησε» λαμβάνοντας υπόψη το φαινομενικό πρόσημό τους.

Οι απαντήσεις αυτής της κατηγορίας δείχνουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου.

Άλλες στρατηγικές

Μια άλλη μαθήτρια που δυσκολεύονταν με δοκιμές να βρει την τιμή που δίνονταν, απέδιδε στην τιμή της παράστασης το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού της. Κάποιο επίσης αγόρι από τη Γ΄ τάξη δεν είχε σταθερότητα στον τρόπο δουλειάς του. Άλλες φορές έλυνε την αντίστοιχη εξίσωση, ελπίζοντας όμως να βρει θετική ακέραια λύση για να αποδεχθεί ή όχι τη συγκεκριμένη τιμή και άλλοτε λάμβανε υπόψη το πρόσημο του πρώτου από αριστερά αριθμού αν ταίριαζε με το πρόσημο της ζητούμενης τιμής – αυτό όταν του ήταν δύσκολη η επίλυση της εξίσωσης.

Το συμπέρασμα από τις συνεντεύξεις που πάρθηκαν τόσο στις φαινομενικά θετικές παραστάσεις, όσο και στις φαινομενικά αρνητικές, ήταν ότι οι μαθητές αποδίδουν σ' αυτές τιμές συμβατές με το φαινομενικό τους πρόσημο, δοκιμάζοντας τις περισσότερες φορές θετικούς αριθμούς (ακέραιους ή όχι) στις μεταβλητές τους. Στις φαινομενικά ουδέτερες παραστάσεις, δηλαδή σ' αυτές που είχαν και θετικό και αρνητικό πρόσημο, άλλοτε αποδίδανε τιμή ομόσημη με το πρόσημο του μονωνύμου της παράστασης, άλλοτε ομόσημη με το πρόσημου του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή αριθμού (είτε αυτός εμφανιζόταν ως συντελεστής, είτε ως σταθερά) και άλλοτε (πιο σπάνια) τιμή ομόσημη με το πρόσημου του αριθμού που βρίσκονταν στην αρχή. Διαπιστώσαμε επίσης, ότι αρκετοί μαθητές προπάντων από τη Γ΄ τάξη, δεν είχανε σταθερό τρόπο σκέψης, αλλά ανάλογα με τη μορφή της παράστασης αλλάζανε και τον τρόπο δουλειάς τους, σε αντίθεση με την Α΄ τάξη που ακολουθούσαν περισσότερο τη στρατηγική της δοκιμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Συμπεράσματα – συζήτηση

Σκοπός αυτής της ερευνητικής εργασίας ήταν να μελετήσει αν οι μαθητές γυμνασίου επηρεάζονται από το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων για την απόδοση μιας τιμής σε αυτές και να εξετάσει αν σε αυτό συντελεί η «προκατάληψη του φυσικού αριθμού», που ωθεί τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς και να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων ως το πραγματικό τους πρόσημο στις αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν φαινομενικά θετικό ή φαινομενικά αρνητικό πρόσημο. Επίσης να εξετάσει τι κάνουν οι μαθητές όταν υπάρχουν στις παραστάσεις και τα δύο πρόσημα. Τέλος, στόχευε να ελέγξει αν οι παραπάνω συμπεριφορές σε σχέση με το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων, αλλά και την προκατάληψη φυσικού αριθμού, διαφέρει στις τρεις τάξεις του γυμνασίου.

Σε σχέση με το ερευνητικό ερώτημα, για το πώς ερμηνεύουν οι μαθητές το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων, τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης έδειξαν ότι οι μαθητές αποδίδουν πολύ καλύτερα σε εκείνα τα έργα που είναι σύμφωνα με τη διαισθητική τους πεποίθηση -ότι οι αριθμοί που μπορούν να αποδοθούν σε μια αλγεβρική παράσταση πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό της πρόσημο, παρά με εκείνα που ήταν αντίθετα με αυτή την πεποίθηση. Αυτό παρατηρήθηκε τόσο στις φαινομενικά θετικές, όσο και στις φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις, γεγονός που συνάδει με την κύρια υπόθεση της συγκεκριμένης μελέτης και υποστηρίζει προηγούμενα ευρήματα (Christou & Vosniadou, 2012). Η τάση να αντιλαμβάνονται τις φαινομενικά θετικές παραστάσεις ως θετικές και τις φαινομενικά αρνητικές ως αρνητικές, φάνηκε ότι ισχύει, καθώς μέσα από την περιγραφική ανάλυση των μέσων όρων στις διάφορες κατηγορίες έργων, φαινομενικά θετικών και αρνητικών παραστάσεων, οι επιδόσεις τους στη μη συμβατότητα ήτανε χαμηλότερες. Αυτό διαπιστώθηκε και από τις συνεντεύξεις που έδωσαν οι 10 μαθητές. Ακόμη και όταν δοκιμάζανε να δώσουν τιμές στις μεταβλητές (όχι κατ' ανάγκη φυσικούς), επιλέγανε πάντα θετικούς και έτσι διατηρούνταν το πρόσημο της παράστασης. Υποστηρίχθηκε επίσης και η ερευνητική μας υπόθεση, ότι οι μαθητές θεωρούν ότι οι τιμές που παίρνουν οι παραστάσεις έχουν ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό τους, δηλαδή αυτή που έχει σε όλους τους όρους της (-) είναι αρνητική και αντίστοιχα θετική, η παράσταση που έχει σε όλους τους όρους της το (+). Πράγματι, οι μαθητές είχαν υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που συμφωνούν με τη διαίσθησή τους -ότι μόνο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης μπορεί να αποδίδονται σ' αυτή- παρά στα έργα που είναι αντίθετα με αυτή την πεποίθηση.

Μεταξύ των φαινομενικά θετικών και φαινομενικά αρνητικών παραστάσεων, τα αποτελέσματα δεν έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα έργα, κάτι που δεν συνάδει με αποτελέσματα προηγούμενων μελετών, που έδειχναν ότι οι μαθητές ήταν πιο διατεθειμένοι να δεχθούν αρνητικές τιμές σε φαινομενικά θετικές παραστάσεις από το να δεχθούν θετικές τιμές σε φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις (Christou & Vosniadou, 2012). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι στις προηγούμενες μελέτες οι φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις που δόθηκαν στους μαθητές ήταν πολύ λιγότερες από τις φαινομενικά θετικές. Υπό αυτή την έννοια τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης είναι μάλλον πιο έγκυρα. Παρόλα αυτά, μελλοντικές μελέτες και με μεγαλύτερο εύρος δείγματος θα μπορούσαν να προσφέρουν ακόμη περισσότερα δεδομένα σε αυτό το ερώτημα.

Για τις παραστάσεις με φαινομενικά ουδέτερο πρόσημο, στις οποίες δεν επικρατεί κάποιο από τα δύο πρόσημα, και τις οποίες χωρίσαμε σε τρεις βασικές κατηγορίες, φάνηκε ότι υπήρχαν διάφορες στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές, άλλοτε να ακολουθούν το πρόσημο του μονωνύμου, άλλοτε του μεγαλύτερου αριθμού και άλλοτε του πρώτου από αριστερά αριθμού, κάτι που υποστηρίχθηκε και από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές. Μελέτες με περισσότερες συνεντεύξεις και με πιο πολλά έργα με διαφορετικές μορφές, θα ήτανε χρήσιμες ώστε να δείξουν καλύτερα τις τάσεις των μαθητών.

Ενδιαφέρον είναι το εύρημα από μια συνέντευξη, που δέχονταν τιμές της μεταβλητής, αριθμούς μέχρι δύο δεκαδικών ψηφίων αλλά όχι παραπάνω. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συνθετική κατανόηση της μεταβλητής ως σύμβολο που μπορεί να αναπαραστήσει και μη φυσικούς αριθμούς, που όμως δεν έχει ολοκληρωθεί ώστε να δεχθεί οποιανδήποτε πραγματικό αριθμό (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Επίσης από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι σπάνια οι μαθητές δοκιμάζουν ρητούς αριθμούς και αυτό επίσης δείχνει προκατάληψη του φυσικού αριθμού και ενισχύει προηγούμενα ευρήματα (Christou & Vosniadou, 2012).

Όσον αφορά το κατά πόσο διαφοροποιούνται οι πεποιθήσεις τους ανά τάξη, είδαμε ότι μεταξύ των τάξεων παρατηρήθηκαν κάποιες στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς τη συμβατότητα. Παρατηρήσαμε ότι στους μαθητές της Α΄ γυμνασίου, η επίδοσή τους ήταν χαμηλή σε όλα τα έργα (συμβατών και μη συμβατών τιμών με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασής τους), το οποίο ήταν και αναμενόμενο, λόγω της μικρής εμπειρίας τους στους αρνητικούς αριθμούς. Όμως η εξίσου χαμηλή επίδοση της Γ΄ τάξης στα έργα των φαινομενικά αρνητικών εκφράσεων, θα μπορούσε να οφείλεται στην απομακρυσμένη εμπειρία τους με τους αρνητικούς αριθμούς, αφού στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα αυτοί εισάγονται στην Α΄ γυμνασίου και συνεχίζονται στην αρχή της Β΄ γυμνασίου, όπου γίνεται επικέντρωση σε αυτούς τους αριθμούς. Αντίθετα στη Γ΄ γυμνασίου εστιάζουν περισσότερο στις αλγεβρικές παραστάσεις παραγοντοποιώντας τες, κάνοντας πράξεις με αυτές και επιλύοντας εξισώσεις, παρά με τον υπολογισμό της τιμής τους για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών τους, χωρίς να επικεντρώνουν ειδικά στους αρνητικούς. Μελλοντικές μελέτες με μεγαλύτερο δείγμα από διαφορετικές περιοχές και περισσότερα ποιοτικά δεδομένα ίσως ρίξουν φως στη αιτία αυτού του αποτελέσματος.

Παιδαγωγικές εφαρμογές

Τα λάθη και η αδυναμία των μαθητών να αποδώσουν στις μεταβλητές των παραστάσεων οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, φαίνεται να οφείλονται στην ισχυρή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα ζήτημα εννοιολογικής αλλαγής. Είναι πολύ σημαντικός ο τρόπος με τον οποίο θα δομηθεί η νέα γνώση (των ρητών αριθμών) στη βάση της προϋπάρχουσας (φυσικών αριθμών), πώς δηλαδή θα γίνει η αξιοποίηση των διαισθητικών πεποιθήσεων των μαθητών ώστε να κατανοηθούν οι νέες έννοιες (Christou, 2009; Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Όπως φάνηκε και από τη μελέτη της βιβλιογραφίας παρανοήσεις που δημιουργούνται λόγω της προηγούμενης γνώσης των μαθητών, φαίνεται όχι μόνο να επηρεάζουν τις επιδόσεις τους, αλλά και να αποτελούν εμπόδιο για την περεταίρω εξέλιξή τους στην μαθηματική εκπαίδευση (MacNeil & Alibali, 2005). Για να γίνει κατανοητή η μαθηματική έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο πραγματικών αριθμών, θα πρέπει οι μαθητές να αλλάξουν την αρχική θεωρία τους για τον αριθμό που είναι οργανωμένη γύρω από τον φυσικό αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και κατά συνέπεια η διόρθωση των διαφόρων παρερμηνειών, όπως αυτή του φαινομενικού προσήμου, δεν γίνεται από τη μια στιγμή στην άλλη, αλλά χρειάζεται οι μαθητές να περάσουν από κάποια ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης, όπως αυτά της άρσης της πεποίθησης ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν ακέραιους αριθμούς (Χρήστου, 2009). Κρίνεται επομένως αναγκαίο να επανεξεταστεί ο τρόπος που επιτυγχάνεται η διδασκαλία της νέας γνώσης, αλλά και το πώς αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια. Χρήσιμες είναι επίσης και διδακτικές παρεμβάσεις, σύμφωνα με τις βασικές αρχές της άμεσης διδασκαλίας και κάποιες διδακτικές στρατηγικές γνωστικής σύγκρουσης με τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για το φαινομενικό πρόσημο, οι οποίες θα βοηθήσουν στη διόρθωση, αλλά και πρόληψη των λαθών που κάνουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής στις αλγεβρικές παραστάσεις. Χρησιμοποιώντας, ακόμη, τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης, χρήσιμο είναι να γίνουν περεταίρω διδακτικές παρεμβάσεις πάνω στο πρόσημο που μπορεί να έχουν οι τιμές μιας μεταβλητής και μιας παράστασης και να εξεταστεί αν μετά από αυτές επέρχεται βελτίωση στον τρόπο σκέψης των μαθητών απέναντι στην απόδοση τιμής στις μεταβλητές.

Καλό είναι επίσης να ενημερώνονται από τα αποτελέσματα των ερευνών τόσο οι εκπαιδευτικοί, όσο και οι σχεδιαστές των σχολικών βιβλίων, ώστε να γνωρίζουν για τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές, για το πώς η προηγούμενη γνώση τους επηρεάζει τη μάθηση της νέας έννοιας, να ερμηνεύουν σωστά τα λάθη τους, με σκοπό την βελτίωση της διδασκαλίας από την πλευρά των εκπαιδευτικών και την καλύτερη απόδοση της νέας γνώσεις στα σχολικά βιβλία.

5.2 Περιορισμοί της έρευνας

Σημαντικό είναι τα τονιστεί πως τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής υπόκεινται σε αρκετούς περιορισμούς. Αρχικά το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε, παρότι είναι ικανοποιητικό, πάρθηκε από ένα μόνο δημόσιο σχολείο και μάλιστα από ένα συγκεκριμένο γεωγραφικό διαμέρισμα, αυτό της Δυτικής Μακεδονίας, κάτι το οποίο δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων για το σύνολο των μαθητών των ηλικιών που μελετήθηκαν.

Ένας ακόμη παράγοντας που περιορίζει τη σημαντική συνεισφορά της παρούσας μελέτης είναι ότι στηρίχθηκε στις απαντήσεις μαθητών Γυμνασίου αποκλειστικά, με αποτέλεσμα να περιορίζεται το δείγμα σε ένα μικρό μέρος των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ένας ακόμη περιορισμός της παρούσας μελέτης, αποτελεί η άντληση πληροφοριών μέσω της χρήσης ποσοτικών μεθόδων και λίγων ποιοτικών (συνεντεύξεις) που δυστυχώς δεν ήτανε ισοκατανεμημένοι στις τάξεις. Μάλιστα, το ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις αποκλειστικά κλειστού τύπου (Συμφωνώ/Διαφωνώ) δεν επέτρεψε την αυθόρμητη απάντηση των ερωτηθέντων σχετικά με το ποιες αριθμητικές τιμές θεωρούν οι ίδιοι ότι μπορούν να αναπαριστούν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις και ποια είδη αριθμητικών τιμών απορρίπτουν. Επιπλέον η χρήση μεθοδολογικών εργαλείων ποιοτικής έρευνας όπως η παρατήρηση του τρόπου σκέψης τους και ο σχεδιασμός ειδικών διδακτικών παρεμβάσεων, θα μπορούσε να ενισχύσει και να συμπληρώσει τα ποσοτικά δεδομένα αλλά και να βοηθήσει στην μελέτη των τρόπων επίλυσης των προβλημάτων που δημιουργεί στους μαθητές η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της μεταβλητής ως ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και κατά συνέπεια στην πεποίθησή τους ότι η τιμή που μπορεί να πάρει μια παράσταση δεν μπορεί να διαφέρει στο πρόσημο από το φαινομενικό της πρόσημο.

Ωστόσο οι αδυναμίες που επισημαίνονται εδώ θα μπορούσαν να αποτελέσουν, όπως και τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης, υλικό για περαιτέρω διερεύνηση και μελλοντική αξιοποίηση.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα έρευνα ενισχύει προηγούμενα ευρήματα της βιβλιογραφίας που θέλει οι μαθητές να είναι πρόθυμοι να αντικαταστήσουν τις τιμές των αλγεβρικών παραστάσεων, με πραγματικούς αριθμούς με το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό τους πρόσημο. Όμως, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στην ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που να μελετούν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων όταν αυτές είναι πιο σύνθετης μορφής και όταν δεν έχουν ένα μόνο πρόσημο στους όρους τους. Η αναζήτηση αν ο τρόπος επιλογής των αριθμητικών τιμών στα ουδέτερα φαινομενικά έργα είναι συστηματικός, πιθανόν να βοηθούσε στην κατανόηση των λαθών τους. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί με τη συλλογή ποσοτικών δεδομένων από μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα, μελετώντας το φαινομενικό πρόσημο όχι μόνο σε διώνυμα αλλά και σε πολυώνυμα, καθώς και με τη συλλογή ποιοτικών δεδομένων από συνεντεύξεις ευρύτερου δείγματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, N. H. (2014). *A functional theory of cognition*. Psychology Press.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249-272.

Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune & Stratton.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor: NEFR-Nelson.

Bruner, J. S. (1961). The act of discovering. *Harvard Educational Review,31* (21-32).

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87-115.

Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME*, *14*, 231-238.

Christou, K. P. (2012). Helping students remedy the phenomenal sign bias: The case of a refutational lecture. In C. Prachalias (Ed.), *Proceedings of the 8th International Conference on Education* (pp. 643-648). Greece: Samos

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education*, 47(5), 747-758. doi: 10.1007/s11858-015-0675-6.

Christou, K. P. (2017). Students' interpretation of variables and the phenomenal sign of algebraic expressions. MENON: *Journal of Educational Research*, 4, 161-175.

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the *Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283297): Elsevier Press.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1-27. doi: 10.1080/10986065.2012.625074.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 127-138. doi: 10. 1 0007/s 1 0649-009-9 1 98.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning.* Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Crowley, L. Thomas, M., & Tall, D. (1994). *Algebra symbols and translation of meaning.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 8th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Lisbon, Portugal.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, 3-17. doi: 10.2307/748969.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4, 1-12. doi: 10.3389/fpsyg.201.

Gallardo, A., & Romero, M. (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Mexico, Vol. I. (pp. 275–282).

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171–192.

Glaeser, G. (1981). Episte´mologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathe´matiques*, 2(37), 303–346.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction*, 14, 54 1-548. doi: 1 0. 1 0 1 6/j. learninstruc.2004.06.

Herscovics, N & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Herscovics, N. & Linchevski, L., (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 39–65.

Kaput, J. (1998): Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *Paper presented at the Algebra Symposium*, Washington, DC, May, 1998.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 390-419), NY: Macmillan Publishing Company.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, *7*(4), 23-26.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*, 11-16 (pp. 102-119). London: Murray.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 30-41.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1–19.

MacNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hiders learning and performance on equations. *Child Development*, 76, 883-899.

Meert, G. J., Grégoire, J., & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12 -year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 244-259.

Moses, R. P., & Cobb, C. E. (2001). *Radical equations*. Boston: Beacon Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council (NRC). (1998). *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum*. Washington, DC: National Academy Press.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. *Educational studies in mathematics*, 17(1), 67-79. doi: 10.1007/bf00302379.

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. doi: 10.1207/s15326985ep4001_3.

Papick, I. J. (2011). Strengthening the mathematical content knowledge of middle and secondary mathematics teachers. *Notices of the AMS*, 58(3), 389-392.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.

Quine, W.V.O. (1982), *Methods of Logic, 4th edn*. Harvard University Press, Cambridge.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 8-27.

Sahin, O. Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of “variable”. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15 (2011) 3322–3327.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., et al. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691-697. doi: 10. 1177/ 0956797612440101.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2nd edition). London: Penguin.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students’understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology* (51), 101-140. doi: 10.1016/j.cogpsych.2005.03.001.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students’ understanding of the numerical value of fractions: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 503–518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015.

Star, J. R., Caronongan, P., Foegen, A. M., Furgeson, J., Keating, B., Larson, M. R., ... & Zbiek, R. M. (2015). Teaching strategies for improving algebra knowledge in middle and high school students. *National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.*

Tall, D. O & Thomas, M. O. J. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K – 12: 1988 yearbook (pp. 8-19). *National Council of Teachers of Mathematics.*

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, 21, 676-685. doi: 1 0. 1 0 1 6/j.learninstruc.20 1 1 .03.005

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 344-355. doi: 10. 1 0 1 6/j.jmathb.20 1 2.02 .00 1.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28, 181-209. doi: 1 0. 1 080/0737000 1 003676603.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, 30, 30-38. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.004.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., Ghesquière, P., & Van Dooren, W. (2017). The natural number bias and its role in rational number understanding in children with dyscalculia. Delay or deficit. *Research in Developmental Disabilities*, 71, 181-190.

Vlassis, J. (2002a). About the flexibility of the minus sign in solving equations. In A. Cockburn, & E.Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Norwich, UK, Vol. IV. (pp. 321–328).

Vlassis, J. (2002b). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341–359.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and instruction*, *14*(5), 469-484.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. Στο S. Vosniadou (Ed.*) International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York, NY: Routledge, 3-34.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variables. *Journal for Research in Mathematics education, 12*, 107-118.

Witzel, B. S. (Ed.). (2015). Bridging the Gap Between Arithmetic & Algebra. *Council for Exceptional Children.*

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2018). Τα Γράμματα-Μεταβλητές: Πως τα κατανοούν οι μαθητές και πως εμφανίζονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 31-52.

Κύρβεη, Δ.Ι.(2020). *Η διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής – Με ποιόν τρόπο επιδρά η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Ανακτήθηκε από https://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/1952.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<u>Ερωτηματολόγιο</u>

Σχολείο:………………………….……… Τάξη: ………. Τμήμα: ……..

Ημ. Γέννησης:………………….……….. Φύλο: αγόρι ☐ κορίτσι ☐

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα (α, β, x, y, …) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς και συνδυασμό αυτών των γραμμάτων (x-3, 2x+5,...) για να αναπαραστήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες για τις διάφορες τιμές των γραμμάτων παίρνουν κάποια τιμή. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε αυτά τα γράμματα με αυτόν τον τρόπο. Διαβάστε προσεκτικά τις παρακάτω προτάσεις. Συμπληρώστε με **Χ** στο αντίστοιχο πλαίσιο, εάν συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

Α/Α		**Συμφωνώ**	**Διαφωνώ**
1	Θα μπορούσε το 5x να πάρει την τιμή -13		
2	Θα μπορούσε το 8x+4 να πάρει την τιμή 21		
3	Δεν θα μπορούσε το -3x+5 να πάρει την τιμή -14		

4	Θα μπορούσε το -x-4 να πάρει την τιμή -2		
5	Θα μπορούσε το 2x+3 να πάρει την τιμή -6		
6	Θα μπορούσε το 2α να πάρει την τιμή -5		
7	Δεν θα μπορούσε το 4-8x να πάρει την τιμή 5		
8	Δεν θα μπορούσε το -y-4 να πάρει την τιμή -3		
9	Θα μπορούσε το -7y-9 να πάρει την τιμή 6		
10	Θα μπορούσε το -4β να πάρει την τιμή -25		
11	Θα μπορούσε το x+3 να πάρει την τιμή -3		
12	Δεν θα μπορούσε το -7x-9 να πάρει την τιμή -6		
13	Δεν θα μπορούσε το 5x-3 να πάρει την τιμή 11		
14	Δεν θα μπορούσε το -5y να πάρει την τιμή 2		
15	Θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή 8		
16	Θα μπορούσε το 5-3x να πάρει την τιμή 15		
17	Δεν θα μπορούσε το 2y+6 να πάρει την τιμή -9		
18	Θα μπορούσε το 8x+4 να πάρει την τιμή -10		
19	Θα μπορούσε το x+3 να πάρει την τιμή 2		
20	Δεν θα μπορούσε το -4β να πάρει την τιμή 25		
21	Θα μπορούσε το -8x-4 να πάρει την τιμή -8		
22	Θα μπορούσε το 5x να πάρει την τιμή 17		
23	Θα μπορούσε το -2x+7 να πάρει την τιμή -2		
24	Δεν θα μπορούσε το 8x-4 να πάρει την τιμή -2		
25	Δεν θα μπορούσε το -y-4 να πάρει την τιμή 9		
26	Δεν θα μπορούσε το 8x+4 να πάρει την τιμή -5		
27	Δεν θα μπορούσε το x+3 να πάρει την τιμή 1		
28	Δεν θα μπορούσε το x-3 να πάρει την τιμή -5		
29	Θα μπορούσε το -x+3 να πάρει την τιμή -2		
30	Θα μπορούσε το -x-4 να πάρει την τιμή 9		
31	Θα μπορούσε το x-4 να πάρει την τιμή 4		
32	Θα μπορούσε το 2x-1 να πάρει την τιμή -2		

33	Θα μπορούσε το -4z να πάρει την τιμή 8		
34	Θα μπορούσε το x+3 να πάρει την τιμή 1		
35	Θα μπορούσε το -3y+7 να πάρει την τιμή -4		
36	Δεν θα μπορούσε το -3x να πάρει την τιμή -1		

Σας ευχαριστούμε για τη συνεργασία!!