



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
***ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' Ηλικιακού κύκλου (13-18 χρονών)***

Διπλωματική εργασία

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΤΑΣΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ**  
**ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ**

ΤΟΥ

Βενάρδου Παντελή, ΑΕΜ 00961

Επιβλέπων καθηγητής:

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Εξεταστές:

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Παπαδόπουλος Ιωάννης

Φλώρινα, 2022

Στα παιδιά μου Μελίνα Βενάρδου και Χάρη Βενάρδο

## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	6
ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....	8
1. Επίλυση προβλήματος .....	8
1.1 Πεποιθήσεις για την επίλυση προβλήματος.....	16
1.2 Αξιολόγηση και ΕΠ .....	18
1.3 Τι είναι επίλυση προβλήματος;.....	20
1.4 Διδάσκεται η επίλυση προβλήματος ή όχι; .....	20
2. Επαγγελματική ανάπτυξη.....	21
2.1 Επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και Επίλυση Προβλήματος.....	23
2.2 ΕΑ και αλλαγή στην ταυτότητα του δασκάλου .....	25
2.3 Πρώτη συνεδρία ενός επαγγελματία σε Εργαστήριο Ανάπτυξης με ΕΠ .....	26
2.4 Καθοδήγηση Εκπαιδευτικών στα Μαθήματα επίλυσης Μαθηματικών προβλημάτων .....	32
2.5 Μαθήματα επίλυσης προβλημάτων .....	34
2.6 Προώθηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.....	36
2.7 Εξειδικευμένη Γνώση Καθηγητών Μαθηματικών στη Διαχείριση εργασιών Επίλυσης Προβλημάτων στην τάξη.....	40
2.8 Γνώσεις Εκπαιδευτικού και Επαγγελματική Πρακτική .....	42
3. Όψεις της Επαγγελματικής Ανάπτυξης Εκπαιδευτικών και Επίλυση προβλήματος .....	49
3.1 Ερωτήσεις δασκάλων στην επίλυση προβλημάτων στις Τάξεις Άλγεβρας .....	49
3.2 Ερωτήσεις σε Αίθουσες Μαθηματικών Μεταδευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης .....	52
3.3 Χάος, Έλεγχος και Ανάγκη: Επιτυχία και Βιωσιμότητα της Επαγγελματικής Ανάπτυξης στην Επίλυση Προβλημάτων .....	57
3.4 ΕΑ και Αλλαγή στην Ταυτότητα του Δάσκαλου των Μαθηματικών .....	60
3.5 Μαθηματικές εντάσεις δασκάλων στο εργαστήριο ΕΑ επίλυσης προβλημάτων ..	64
3.6 Ανάλυση Μαθηματικών εντάσεων .....	70
3.6.1. Ανάπτυξη Ικανοτήτων έναντι Μάθησης για Ικανότητες .....	71
3.6.2. Προβλήματα για εκπαιδευτικούς έναντι προβλημάτων για μαθητές.....	72
3.6.3. Προκλητικά προβλήματα έναντι των ασκήσεων και των λεκτικών προβλημάτων .....	72
3.6.4. Δεν είμαι σε θέση έναντι θα έπρεπε να είμαι σε θέση .....	74
3.6.5. Μαθηματικές Ιδέες έναντι Μαθηματικής Τυποποίησης .....	76
3.7 Συζήτηση .....	77
ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: Η ΕΡΕΥΝΑ .....	79
4. Μεθοδολογία .....	79

4.1	Στόχος .....	80
4.2	Ερωτήματα της έρευνας.....	80
4.3	Διαδικασία.....	81
4.4	Δείγμα.....	81
4.5	Εργαλείο συλλογής ερευνητικών δεδομένων και μέθοδος επεξεργασίας .....	82
5.	Αποτελέσματα .....	84
5.1.	Αποτελέσματα από τις ερωτήσεις τις σχετικές με την 'ένταση' .....	84
5.1.1	Ανάλυση του ερωτηματολογίου ανά άξονα .....	113
	Άποψη για τη σημαντικότητα της ΕΠ.....	113
	Διδακτικές πρακτικές στην ΕΠ στην τάξη.....	114
	Επαγγελματική συνεργασία .....	118
	Συναισθήματα -Προσωπική στάση .....	120
5.2.	Αποτελέσματα σχετικά με την επίδοση στη λύση προβλήματος .....	122
	Παρουσίαση ανά πρόβλημα .....	122
5.3	Αντιπαραβολή επιδόσεων στην ΕΠ και απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο .....	125
	ΟΜΑΔΑ Υ .....	125
	ΟΜΑΔΑ Μ.....	126
	ΟΜΑΔΑ Χ.....	127
6.	ΤΕΛΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ.....	127
	ΕΕ1 .....	127
	ΕΕ2 .....	128
	ΕΕ3 .....	133
	ΕΕ4 .....	134
	ΕΕ5 .....	137
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	139
	ΑΝΑΦΟΡΕΣ .....	141
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	147
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι - Συνέντευξη και Ερωτηματολόγιο.....	147
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	148

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Έχει παρατηρηθεί σε εργαστήρια επαγγελματικής ανάπτυξης για επίλυση προβλημάτων, η δημιουργία έντασης σε εκπαιδευτικούς όταν αποτυγχάνουν στην επίλυση ενός προβλήματος που οι ίδιοι θεωρούσαν εντός των δυνατοτήτων τους. Η ένταση εμφανίζεται στο δείγμα μας και διερευνούμε πως την διαχειρίζονται, κατά πόσο προσφεύγουν σε συνεργασίες όταν τους συμβεί, τι συναισθήματα βιώνουν και πως τα αντιμετωπίζουν. Τέλος αν σχετίζονται οι συμπεριφορές των εκπαιδευτικών με τις επιδόσεις τους στην Επίλυση Προβλημάτων. Οι εκπαιδευτικοί δείχνουν παρά τα έντονα αρνητικά συναισθήματα ενός μαθηματικού που δεν μπορεί να λύσει, έχοντας βρεθεί πολύ συχνά στην κατάσταση αυτή, να αναδιοργανώνονται επιχειρώντας και πάλι επίλυση. Για τον σκοπό αυτό συνεργάζονται με συναδέλφους και με την τάξη. Όσοι επιδεικνύουν πιο υψηλή ικανότητα επίλυσης δείχνουν πιο συστηματικοί σε αυτήν την αναδιοργάνωση.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικές εντάσεις, επίλυση προβλήματος

### Abstract

It has been observed in professional development laboratories for problem solving, the creation of tension in teachers when they fail to solve a problem that they considered within their capabilities. The tension appears in our sample and we investigate how they manage it, whether they resort to collaborations when it happens to them, what emotions they experience and how they deal with them. Finally, whether or not the behaviors of teachers are related to their performance in Problem Solving. Teachers seem, despite the strong negative feelings of a mathematician who cannot solve, having very often found themselves in this situation, to reorganize by trying to solve again. To this end, they work with colleagues as well as the class. Those who exhibit a higher problem-solving ability, appear to be more systematic in this reorganization.

Keywords: mathematical tensions, problem solving

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα έρευνα προέκυψε από την ανάγνωση της βιβλιογραφίας και το φαινόμενο που αναφέρεται σε αυτήν της έντασης που παρουσιάζεται, κατά τα εργαστήρια επαγγελματικής ανάπτυξης για επίλυση προβλημάτων, σε εκπαιδευτικούς να μην είναι σε θέση να λύσουν ένα πρόβλημα ενώ θεωρούν ότι θα έπρεπε να είναι σε αυτή την θέση.

Σε πρώτη φάση οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να επιλύσουν κάποια προβλήματα κλιμακούμενης δυσκολίας ώστε κάποιοι να βρεθούν στη θέση αυτή. Κατόπιν τους δόθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο προσπάθησε να διερευνήσει καταστάσεις τέτοιου είδους.

Διερευνήσαμε πέντε ερωτήματα. Την άποψη τους για την Επίλυση προβλήματος, αν η ένταση που αναφέραμε εμφανίζεται σε αυτούς και πως την διαχειρίζονται, κατά πόσο προσφεύγουν σε συνεργασίες όταν τους συμβεί, τι συναισθήματα βιώνουν και πως τα αντιμετωπίζουν και τέλος αν όσα αναφέραμε σχετίζονται με τις επιδόσεις τους στην Επίλυση Προβλημάτων.

Οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν υπέρ της σημαντικότητας της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών θα λέγαμε καθολικά. Δεν λείπουν βέβαια οι ενστάσεις για το πώς μπορεί να εφαρμοστεί πρακτικά. Θεωρούν ότι προάγει την κριτική σκέψη και συνδέει τα μαθηματικά με πραγματικές καταστάσεις. Η ΕΠ για αυτούς είναι μια διαδικασία γεμάτη με κρίσιμα σημεία αποφάσεων μέσα σε περιβάλλον αβεβαιότητας και χωρίς την θαλπωρή των έτοιμων λύσεων. Αυτό συνιστά ένα πλαίσιο ανάπτυξης τους κριτικής σκέψης. Είναι επίσης γόνιμη καθώς ο λύτης αναπτύσσει νέους τρόπους σκέψης. Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθητές σε πραγματικά προβλήματα αναδεικνύει την ισχύ αυτών των εννοιών που μέσα στο φορμαλιστικό πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών είναι απλά θεωρητικές κατασκευές.

Παίρνει το ρίσκο ο εκπαιδευτικός βάζοντας στην τάξη προβλήματα που δεν έχει λύσει πριν; Οι μισοί απαντάνε ότι το κάνουν. Προτείνουν επίσης δεύτερη ανάγνωση χωρίς να αναφέρουν κάποια δυσφορία όταν προκύπτει μη επίλυση μέσα στην τάξη. Συνεπώς διδάσκουν την δεύτερη ανάγνωση και την επαναπροσπάθεια σαν δομική πέτρα της μαθηματικής διαδικασίας. Φαίνεται, επίσης, να επεκτείνουν με νέα ερωτήματα προβλήματα που ήδη έχουν λυθεί και μάλιστα πλέοντας άφοβα και σε αχαρτογράφητα

νερά. Επιλέγουν συντριπτικά πλειοψηφικά μέτριας δυσκολίας προβλήματα. Σε μεγάλο ποσοστό διαλέγουν προβλήματα εκτός βιβλίου. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί του δείγματος λύνουν ατομικά ή στην τάξη πρόβλημα που θα φέρει κάποιος μαθητής χωρίς και πάλι να δείχνουν ανασφάλειες. Στην περίπτωση που κολλάει η επίλυση του προβλήματος στην τάξη διαπιστώνεται μια ψύχραιμη στάση των εκπαιδευτικών. Είναι ενδιαφέρον να δούμε αν υπάρχει αντιδιαστολή ανάμεσα στο πως νιώθουν και πως πράττουν. Διερευνούν την ερώτηση που προκύπτει και αναβάλουν την απάντηση όταν δεν έχουν τεκμηρίωση εκείνη την στιγμή.

Τελικά, διαπιστώσαμε την εμφάνιση της έντασης που εξετάζουμε στο δείγμα και προκύπτει από τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που όλες αφορούσαν την συμπεριφορά των εκπαιδευτικών σε ποικίλες μορφές της δυσάρεστης κατάστασης να μην μπορούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Οι απαντήσεις τους δείχνουν ότι διαχειρίζονται με επαγγελματισμό αυτή την ένταση, ώστε να ωφεληθούν οι μαθητές, αν και τα συναισθήματα που νιώθουν όπως φαίνεται από επόμενο άξονα είναι έντονα αρνητικά.

Οι εκπαιδευτικοί δείχνουν να επιζητούν την συνεργασία με συναδέλφους όταν δυσκολεύονται να λύσουν. Οι δηλώσεις αυτάρκειας είναι ασήμαντες στατιστικά.

Τι συναισθήματα προκαλεί η δυσκολότερη στιγμή σε ένα μαθηματικό, όταν δηλαδή αδυνατεί να λύσει; Σε κάτι λιγότερο από τους μισούς αναδύεται μια επιμονή για λύση. Στις απαντήσεις τους εκφράζουν και τα αρνητικά συναισθήματα τους. Και ενώ δηλώνουν πως είναι στη φύση των μαθηματικών κάποια στιγμή να μην μπορείς να λύσεις δεν παύει να είναι δυσάρεστη κατάσταση. Επειδή όμως είναι επαναλαμβανόμενη κατάσταση για έναν μαθηματικό, περνάνε και σε επόμενες προσπάθειες.

Τέλος αντιπαραβάλλοντας επιδόσεις και απόψεις διαπιστώσαμε ότι οι καλοί λύτες διαχειρίζονται την ένταση δημιουργικά με συνεργασία, περίσκεψη και αναδιοργάνωση. Δεν αποκλείεται εκεί να οφείλονται και οι αυξημένες ικανότητες επίλυσης. Οι μέτριοι ή χειρότεροι λύτες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ανομοιομορφία στη συμπεριφορά καθώς και πιο έντονα αρνητικά συναισθήματα.

## 1. Επίλυση προβλήματος

«Το πρόβλημά σας μπορεί να είναι μέτριο, αλλά αν προκαλεί την περιέργειά σας και θέτει σε εφαρμογή τις εφευρετικές ικανότητές σας, και αν το λύσετε με τα δικά σας μέσα, μπορεί να νιώσετε την ένταση και να απολαύσετε τον θρίαμβο της ανακάλυψης. Τέτοιες εμπειρίες σε ευαίσθητη ηλικία μπορεί να δημιουργήσουν μια γεύση για την διανοητική εργασία και να αφήσουν το αποτύπωμά τους στο μυαλό και τον χαρακτήρα για μια ζωή.»

Αυτό το κείμενο του Polya συναντά κανείς στην προμετωπίδα του κειμένου για την επίλυση προβλημάτων του University of Georgia. Αποπνέει μια απόλυτη θρησκευτική πίστη όσον αφορά την αξία της ενασχόλησης με την επίλυση προβλημάτων. Προφανώς, η ζωή μαθηματικών και μη έχει να διηγηθεί συναντήσεις με προβλήματα που επιζητούσαν λύση, χρήσιμα ή για διασκέδαση. Προβλήματα *passa tempo* είτε περισσότερο ή λιγότερο κρίσιμα ή χρήσιμα. Η παραπάνω παράγραφος θέτει κάποιους όρους γενικής αποδοχής για την δραστηριότητα της επίλυσης προβλημάτων αλλά τίποτα για την διδασκαλία της ή για την διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων.

Ας ξεκινήσουμε, πρώτα, από το ότι ένα πρόβλημα πρέπει να προκαλεί την περιέργεια του λύτη. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε γιατί εντάσσεται σε πλαίσιο ενδιαφερόντων του, είτε γιατί παρότι αχαρτογράφητης περιοχής για αυτόν, ωστόσο τον προκαλεί. Έχουμε στις σχολικές τάξεις συναντήσει τον αδιάφορο μαθητή που ένα πρόβλημα τον κινητοποίησε και κάποιες φορές ήταν αυτός που το έλυσε. Δεύτερο, ο Polya θεωρεί μάλλον ανεξάρτητη την κινητοποίηση της εφευρετικότητας από το αν είναι ενδιαφέρον ένα πρόβλημα. Τρίτο, και μάλλον σημαντικότερο, παράγοντα θεωρεί να λύσει κάποιος το πρόβλημα με δικά του μέσα. Αυτό βέβαια στην ελληνική πραγματικότητα σημαίνει επαρκή χρόνο και «αποφροντιστηριοποίηση», που με τη σειρά της εδράστηκε στο «αξιολογοκεντρικό», βαθμοθηρικό ελληνικό σχολείο. Το βασικότερο στην διαδικασία επίλυσης προβλήματος είναι προφανώς να μην σου απαντάει κάποιος πριν καν αναρωτηθείς ή έστω ενδιαφερθείς για ένα πρόβλημα.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η επίλυση προβλήματος είναι μια περιπέτεια που, για τον Polya, προκαλεί ένταση και στο τέλος την απόλαυση του θριάμβου της



ανακάλυψης. Και η διαδικασία αφήνει τα αποτυπώματα της για μια ζωή. Θα ήταν βέβαια χρήσιμο να συζητούσαμε και για την απογοήτευση μιας αποτυχίας που επίσης μπορεί να είναι καθοριστική. Η μυθιστορηματική αυτή περιγραφή αναδεικνύει τη γοητεία της ενασχόλησης με την επίλυση προβλημάτων. Πέρα όμως από αυτήν την γοητεία η ένταξη της στη διδασκαλία οδηγεί σε πλήθος ερωτημάτων και ζητημάτων καθώς φωτίζονται οι διάφορες όψεις της. Η εκμάθηση επίλυσης προβλημάτων είναι ο κύριος λόγος για τη μελέτη των μαθηματικών, σύμφωνα με το National Council of Supervisors of Mathematics.

Τι ακριβώς είναι η επίλυση προβλημάτων; Για τους μαθηματικά γραμματισμένους ταυτίζεται ίσως με τα μαθηματικά. Να λύνω λεκτικά προβλήματα, να βρίσκω μοτίβα, να ερμηνεύω σχήματα, να πραγματοποιώ γεωμετρικές κατασκευές, να αποδεικνύω θεωρήματα κτλ. Οι υπόλοιποι περιγράφουν οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα σαν επίλυση προβλήματος. Ο Reitman<sup>1</sup> περιέγραψε έναν επιτυχή προβλημάτων ως άτομο που αντιλαμβάνεται και αποδέχεται έναν στόχο χωρίς άμεσο μέσο επίτευξης του στόχου. Οι Henderson και Pingry<sup>2</sup> έγραψαν ότι για την επίλυση προβλημάτων πρέπει να υπάρχει ένας στόχος και η αποδοχή αυτού του στόχου από το άτομο. Αυτό που είναι πρόβλημα για έναν μαθητή μπορεί να μην είναι πρόβλημα για έναν άλλο - είτε επειδή δεν υπάρχει μπλοκάρισμα ή καμία αποδοχή του στόχου. Ο Schoenfeld<sup>3</sup> επεσήμανε επίσης ότι ο ορισμός του προβλήματος σχετίζεται πάντα με το άτομο.

Οι περισσότερες διατυπώσεις πλαισίου επίλυσης προβλημάτων βασίζονται στα στάδια επίλυσης προβλημάτων του Polya. Πολλές φορές βέβαια με παραμορφωτική ορθοδοξία. Αυτά τα στάδια έχουν περιγραφεί ως κατανόηση του προβλήματος, δημιουργία σχεδίου, εκτέλεση του σχεδίου και αναδρομή. Για τον Polya είναι πρωταρχικής σημασίας να διδάξουμε τους μαθητές να σκέφτονται. Η εκπαίδευση ωστόσο δεν συνίσταται από προθέσεις. Οι προσπάθειες να διδάξουμε το πώς να σκέφτονται μετατρέπονται συχνά σε εγχειρίδιο οδηγιών προς «μαθηματικομένους». Και τελικά η κατάσταση γέρνει προς την διαδικαστική γνώση, που φαίνεται μια ευκολία με άμεσα αποτελέσματα στην επίλυση συγκεκριμένων κατηγοριών προβλημάτων, αλλά εξαιρετικά περιοριστικών όσον αφορά την μαθηματική σκέψη.

---

<sup>1</sup> Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought*. New York: Wiley.

<sup>2</sup> Henderson, K. B. & Pingry, R. E. (1953). *Problem solving in mathematics*. In H. F. Fehr (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (21st Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

<sup>3</sup> Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Η γραμμική φύση των μοντέλων που χρησιμοποιούνται σε πολλά εγχειρίδια για την επίλυση προβλημάτων δεν προάγει το πνεύμα των σταδίων του Polya και τον στόχο του να διδάξει στους μαθητές να σκέφτονται. Από τη φύση τους, όλα αυτά τα παραδοσιακά μοντέλα έχουν τα ακόλουθα ελαττώματα:

1. Απεικονίζουν την επίλυση προβλημάτων ως γραμμική διαδικασία.
2. Παρουσιάζουν την επίλυση προβλημάτων ως μια σειρά βημάτων.
3. Υπονοούν ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία που πρέπει να απομνημονευθεί, να εξασκηθεί και να εξοικειωθεί κάποιος με αυτήν.
4. Οδηγούν σε έμφαση στη λήψη απαντήσεων.

Αυτές οι γραμμικές διατυπώσεις δεν είναι πολύ συνεπείς με την πραγματική δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο, μπορεί να είναι συνεπείς με το πώς οι έμπειροι λύτες προβλημάτων παρουσιάζουν τις απαντήσεις τους μετά την ολοκλήρωση της επίλυσης προβλημάτων. Με ανάλογο τρόπο, οι μαθηματικοί παρουσιάζουν τις αποδείξεις τους με πολύ συνοπτικούς όρους, αλλά οι πιο κομψές αποδείξεις μπορεί να αποτύχουν να μεταφέρουν τη δυναμική έρευνα που συνέβη κατά την κατασκευή της απόδειξης.

Για να γίνει κάποιος καλός λύτης προβλημάτων στα μαθηματικά, πρέπει να αναπτύξει μια βάση μαθηματικών γνώσεων. Το πόσο αποτελεσματικός είναι κανείς στην οργάνωση αυτής της γνώσης συμβάλλει επίσης στην επιτυχή επίλυση προβλημάτων. Ο Kantowski διαπίστωσε ότι οι μαθητές με καλή βάση γνώσεων ήταν πιο ικανοί να χρησιμοποιήσουν τα ευρετικά (heuristics) στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Οι Schoenfeld και Herrmann διαπίστωσαν ότι οι αρχάριοι παρακολούθησαν επιφανειακά χαρακτηριστικά των προβλημάτων, ενώ οι προχωρημένοι ταξινόμησαν τα προβλήματα βάσει των βασικών αρχών που εμπλέκονται.

Ένας αλγόριθμος είναι μια διαδικασία, εφαρμόσιμη σε έναν συγκεκριμένο τύπο άσκησης, η οποία, εάν ακολουθηθεί σωστά, εγγυάται ότι θα σας δώσει την απάντηση στην άσκηση. Οι αλγόριθμοι είναι σημαντικοί στα μαθηματικά και οι οδηγίες μας πρέπει να τους αναπτύξουν, αλλά **η διαδικασία εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, ακόμη και περίπλοκου, δεν είναι επίλυση προβλημάτων. Η διαδικασία δημιουργίας ενός**

**αλγορίθμου, ωστόσο, και η γενίκευσή του σε ένα συγκεκριμένο σύνολο εφαρμογών μπορεί να είναι επίλυση προβλημάτων.**

Η διδασκαλία των μαθηματικών που τονίζει τις ευρετικές διαδικασίες αποτέλεσε το επίκεντρο πολλών μελετών. Ο Kantowski<sup>4</sup> χρησιμοποίησε ευρετικές οδηγίες για να βελτιώσει την απόδοση επίλυσης προβλημάτων γεωμετρίας μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο Wilson<sup>5</sup> και ο Smith<sup>6</sup> εξέτασαν τις αντιθέσεις γενικών και ειδικών ευρετικών. Αυτές οι μελέτες αποκάλυψαν ότι η διδασκαλία με ειδικά ευρετικά ήταν πιο αποτελεσματική από αυτή με γενικά ευρετικά.

Μια εκτεταμένη βάση γνώσεων συγκεκριμένων τομέων πληροφοριών, αλγορίθμων και ρεπερτορίου ευρετικών δεν επαρκεί κατά την επίλυση προβλημάτων. Ο μαθητής πρέπει επίσης να κατασκευάσει κάποιο μηχανισμό λήψης αποφάσεων για να επιλέξει μεταξύ των διαθέσιμων ευρετικών ή για να αναπτύξει νέα, καθώς αντιμετωπίζονται προβληματικές καταστάσεις. Ένα σημαντικό θέμα για τον Polya ήταν οι μαθητές να κάνουν μαθηματικά, να προβληματιστούν για τα προβλήματα που επιλύθηκαν ή επιχειρήθηκαν, και να σκεφτούν. Σίγουρα ο Polya περίμενε τους μαθητές να συμμετάσχουν με το να σκεφτούν τις διάφορες τακτικές, μοτίβα, τεχνικές και στρατηγικές που έχουν στη διάθεσή τους. Για να οικοδομήσουμε μια θεωρία επίλυσης προβλημάτων που προσεγγίζει το μοντέλο του Polya, πρέπει να ενσωματωθεί στο σύστημα μια λειτουργία διαχειριστή. Πριν από πολύ καιρό, ο Dewey<sup>7</sup>, στο *How We Think*, τόνισε τον αυτο-προβληματισμό στην επίλυση προβλημάτων.

Η πρόσφατη έρευνα ήταν πολύ πιο σαφής όσον αφορά την επίλυση αυτής της πτυχής της επίλυσης προβλημάτων και την εκμάθηση των μαθηματικών. Το πεδίο της μεταγνώσης (metacognition) αφορά τη σκέψη για την γνώση κάποιου. Η θεωρία της μεταγνώσης υποστηρίζει ότι μια τέτοια σκέψη μπορεί να παρακολουθεί, να κατευθύνει

---

<sup>4</sup> Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 163-180.

<sup>5</sup> Wilson, J. W. (1967). Generality of heuristics as an instructional variable. Unpublished Doctoral Dissertation, Stanford University, San Jose, CA.

<sup>6</sup> Smith, J. P. (1974). The effects of general versus specific heuristics in mathematical problem-solving tasks (Columbia University, 1973). *Dissertation Abstracts International*, 34, 2400A.

<sup>7</sup> Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: Heath.

και να ελέγχει τις γνωστικές διαδικασίες κάποιου<sup>8 9</sup>. Ο Schoenfeld<sup>10</sup> περιέγραψε και έδειξε ένα όργανο εκτελεστικό ή παρακολούθησης στη θεωρία επίλυσης προβλημάτων. Τα μαθήματα επίλυσης προβλημάτων περιλάμβαναν ρητή προσοχή σε ένα σύνολο οδηγιών για προβληματισμό σχετικά με τις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στις οποίες συμμετείχαν οι μαθητές. Σαφώς, η αποτελεσματική οδηγία επίλυσης προβλημάτων πρέπει να παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να προβληματιστούν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων επίλυσης προβλημάτων με συστηματικό και επικοινωνιακό τρόπο.

Το να κοιτάς πίσω, ή αλλιώς η αναδρομή, μπορεί να είναι το πιο σημαντικό μέρος της επίλυσης προβλημάτων. Είναι το σύνολο των δραστηριοτήτων που παρέχει την κύρια ευκαιρία για τους μαθητές να μάθουν από το πρόβλημα. Η φάση προσδιορίστηκε από τον Polya<sup>11</sup> με συμβουλές για την εξέταση της λύσης με δραστηριότητες όπως ο έλεγχος του αποτελέσματος, ο έλεγχος του επιχειρήματος, η εξαγωγή του αποτελέσματος διαφορετικά, η χρήση του αποτελέσματος ή της μεθόδου, για κάποιο άλλο πρόβλημα, επανερμηνεία του προβλήματος, ερμηνεία του αποτελέσματος, ή δηλώνοντας ένα νέο πρόβλημα προς επίλυση.

Οι καθηγητές και οι ερευνητές αναφέρουν, ωστόσο, ότι η ανάπτυξη της διάθεσης να κοιτάς πίσω είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί από τους μαθητές. Ο Kantowski<sup>12</sup> βρήκε λίγα στοιχεία στους μαθητές ότι κοιτούσαν πίσω, παρόλο που η οδηγία το είχε τονίσει. Ο Wilson<sup>13</sup> πραγματοποίησε ένα ετήσιο μάθημα επίλυσης προβλημάτων μαθηματικών για τους δευτεροβάθμιους εκπαιδευτικούς, στο οποίο κάθε συμμετέχων ανέπτυξε υλικό για να εφαρμόσει κάποια πτυχή της επίλυσης

---

<sup>8</sup> Campione, J. C., Brown, A. L., & Connell, M. L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 93-114). Reston, VA: Lawrence Erlbaum, National Council of Teachers of Mathematics.

<sup>9</sup> Silver, E. A., Branca, N., & Adams, V. (1980). Metacognition: The missing link in problem solving? In R. Karplus, (Ed.), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*. Berkeley, CA: PME.

<sup>10</sup> Schoenfeld, A. H., (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver, *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

<sup>11</sup> Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (Originally copyrighted in 1945).

<sup>12</sup> Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 163-180.

<sup>13</sup> Wilson, J. W. (1990) Report of the Georgia Plan problem solving workshop, 1989-90. Unpublished document, The University of Georgia, Athens.

προβλημάτων στη τρέχουσα διδακτική του εργασία. Κατά τη διάρκεια της συνεννόησης στην τελική συνάντηση, ένας δάσκαλος το έθεσε συνοπτικά: "Στα σχολεία, δεν υπάρχει καμία αναδρομή". Η συζήτηση υπογράμμισε τη συμφωνία όλων των συμμετεχόντων ότι ήταν δύσκολο να εμπλέξουν τους μαθητές σε δραστηριότητες αναδρομής. Μερικοί από τους λόγους που αναφέρθηκαν ήταν παγιωμένες πεποιθήσεις ότι η επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά είναι η απάντηση, η πίεση για κάλυψη ενός καθορισμένου προγράμματος σπουδών, τα τεστ (ή η απουσία τεστ που μετρούν τις διαδικασίες) και η απογοήτευση των μαθητών.

Το *problem posing*<sup>14</sup> και η διατύπωση προβλημάτων<sup>15</sup> είναι λογικά και φιλοσοφικά ελκυστικές έννοιες για τους εκπαιδευτικούς και τους δασκάλους των μαθηματικών. Οι Brown και Walter παρέχουν προτάσεις για την εφαρμογή αυτών των ιδεών. Συγκεκριμένα, συζητούν τη στρατηγική *problem posing* «Τι-εάν-όχι» που ενθαρρύνει τη δημιουργία νέων προβλημάτων αλλάζοντας τις συνθήκες ενός τρέχοντος προβλήματος. Για παράδειγμα, με δεδομένο ένα θεώρημα ή κανόνα μαθηματικών, οι μαθητές μπορούν να κληθούν να αναφέρουν τα χαρακτηριστικά του. Μετά από μια συζήτηση για τα χαρακτηριστικά, ο δάσκαλος μπορεί να ρωτήσει "τι εάν ορισμένα ή όλα τα δεδομένα χαρακτηριστικά δεν είναι αλήθεια;" Μέσω αυτής της συζήτησης, οι μαθητές δημιουργούν νέα προβλήματα.

Τι είναι μαθηματικά, αναρωτιόμαστε συχνά. Εάν η απάντησή μας σε αυτήν την ερώτηση χρησιμοποιεί λέξεις όπως εξερεύνηση, έρευνα, ανακάλυψη, εύλογη λογική ή επίλυση προβλημάτων, τότε παρακολουθούμε τις διαδικασίες των μαθηματικών. Οι περισσότεροι από εμάς θα έκαναν επίσης μια λίστα περιεχομένου όπως άλγεβρα, γεωμετρία, αριθμός, πιθανότητα, στατιστικά στοιχεία ή λογισμός. Οι συστάσεις του Εθνικού Συμβουλίου των Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (NCTM) για την επίλυση προβλημάτων στο επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών έθεσαν θεμελιώδη ζητήματα σχετικά με τη φύση των σχολικών μαθηματικών. Η τέχνη της επίλυσης προβλημάτων είναι η καρδιά των μαθηματικών. Έτσι, η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να σχεδιαστεί ώστε οι μαθητές να βιώσουν τα μαθηματικά ως επίλυση προβλημάτων.

---

<sup>14</sup> Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

<sup>15</sup> Kilpatrick, J. (1987). *Problem formulating: Where do good problems come from?* In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Το NCTM<sup>16</sup> <sup>17</sup>έχει υποστηρίξει έντονα τη συμπερίληψη της επίλυσης προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για αυτό:

- **Πρώτον**, η επίλυση προβλημάτων είναι ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών. Είναι το άθροισμα και η ουσία του κλάδου μας και το να μειώσουμε τον κλάδο σε ένα σύνολο ασκήσεων και δεξιοτήτων χωρίς επίλυση προβλημάτων είναι η εσφαλμένη παρουσίαση των μαθηματικών ως κλάδου και βραχυκυκλώνει τους μαθητές.
- **Δεύτερον**, τα μαθηματικά έχουν πολλές εφαρμογές και συχνά αυτές οι εφαρμογές αντιπροσωπεύουν σημαντικά προβλήματα στα μαθηματικά. Το θέμα μας χρησιμοποιείται στην εργασία, την κατανόηση και την επικοινωνία σε άλλους κλάδους.
- **Τρίτον**, υπάρχει ένα εγγενές κίνητρο ενσωματωμένο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Περιλαμβάνουμε την επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά του σχολείου, διότι μπορεί να διεγείρει το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό των μαθητών.
- **Τέταρτον**, η επίλυση προβλημάτων μπορεί να είναι διασκεδαστική. Πολλοί από εμάς κάνουν μαθηματικά προβλήματα για αναψυχή.
- **Τέλος**, η επίλυση προβλημάτων πρέπει να υπάρχει στο σχολικό πρόγραμμα μαθηματικών για να επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν την τέχνη της επίλυσης προβλημάτων. Αυτή η τέχνη είναι τόσο σημαντική για την κατανόηση των μαθηματικών και την εκτίμηση των μαθηματικών που πρέπει να είναι ένας εκπαιδευτικός στόχος.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά επικαλούνται ισχυρούς λόγους για το ότι δεν συμπεριλαμβάνουν δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στην διδασκαλία μαθηματικών στα σχολεία. Τα συνήθη επιχειρήματα είναι ότι η επίλυση προβλημάτων είναι πολύ δύσκολη, απαιτεί πολύ χρόνο, το σχολικό πρόγραμμα είναι πολύ γεμάτο και δεν υπάρχει χώρος, η επίλυση προβλημάτων δεν θα μετρηθεί και δεν θα ελεγχθεί, τα μαθηματικά είναι διαδοχικά και οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν τα γεγονότα, διαδικασίες και αλγόριθμους, τα κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα δεν είναι

---

<sup>16</sup> National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s. Reston, VA: The Author.

<sup>17</sup> National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: The Author.

διαθέσιμα, η επίλυση προβλημάτων δεν υπάρχει στα εγχειρίδια και τα βασικά γεγονότα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μέσω ασκήσεων και πρακτικής πριν επιχειρήσετε τη χρήση της επίλυσης προβλημάτων.

Επίσης, πρέπει να προσέξουμε να μην υπογραμμίσουμε την επίλυση προβλημάτων, ενώ στην πραγματικότητα η έμφαση δίνεται στις ασκήσεις ρουτίνας. Από διάφορες μελέτες που περιλαμβάνουν οδηγίες επίλυσης προβλημάτων, ο Suydam<sup>18</sup> κατέληξε στο συμπέρασμα: Εάν η επίλυση προβλημάτων αντιμετωπίζεται ως "εφαρμόστε τη διαδικασία", τότε οι μαθητές προσπαθούν να ακολουθήσουν τους κανόνες σε επόμενα προβλήματα. Εάν διδάξετε την επίλυση προβλημάτων ως προσέγγιση, όπου πρέπει να σκεφτείτε και να εφαρμόσετε οτιδήποτε λειτουργεί, τότε οι μαθητές είναι πιθανό να είναι λιγότερο άκαμπτοι.

Η επίλυση προβλημάτων ως μέθοδος διδασκαλίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη των εκπαιδευτικών στόχων της εκμάθησης βασικών γεγονότων, εννοιών και διαδικασιών, καθώς και στόχων για την επίλυση προβλημάτων μέσα σε πλαίσια προβλημάτων. Για παράδειγμα, εάν οι μαθητές ερευνήσουν τις περιοχές όλων των τριγώνων που έχουν σταθερή περίμετρο 60 μονάδων, οι δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων πρέπει να παρέχουν άφθονη πρακτική στις υπολογιστικές δεξιότητες και τη χρήση τύπων και διαδικασιών, καθώς και ευκαιρίες για την εννοιολογική ανάπτυξη των σχέσεων μεταξύ του εμβαδού και της περιμέτρου. Το "πρόβλημα" μπορεί να είναι να βρείτε το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν, τα εμβαδά των τριγώνων με ακέραιες πλευρές, ή ένα τρίγωνο με εμβαδόν αριθμητικά ίσο με την περίμετρο. Έτσι, η επίλυση προβλημάτων ως μέθοδος διδασκαλίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή εννοιών μέσω μαθημάτων που περιλαμβάνουν εξερεύνηση και ανακάλυψη.

Πολλοί καθηγητές στα εργαστήριά αναφέρουν σαν πετυχημένη τη στρατηγική «πρόβλημα της εβδομάδας». Αυτό συνδέεται συχνά με έναν πίνακα ανακοινώσεων στον οποίο παρουσιάζεται τακτικά ένα πρόβλημα πρόκλησης. Η ιδέα είναι να αξιοποιήσουμε τα εγγενή κίνητρα και τα επιτεύγματα, να χρησιμοποιήσουμε τον ανταγωνισμό με εποικοδομητικό τρόπο **και να επεκτείνουμε το πρόγραμμα σπουδών**. Μερικοί δάσκαλοι έχουν χρησιμοποιήσει σχέδια για τη χορήγηση "επιπλέον

---

<sup>18</sup> Suydam, M. (1987). Indications from research on problem solving. In F. R. Curcio (Ed.), Teaching and learning: A problem solving focus. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

πίσωσης" σε επιτυχημένους μαθητές. Το μηνιαίο ημερολόγιο που βρίσκεται σε κάθε τεύχος του *The Mathematics Teacher* είναι μια εξαιρετική πηγή προβλημάτων.

Το αν οι μαθητές αντιμετωπίζουν καλά μαθηματικά προβλήματα εξαρτάται από την ικανότητα του δασκάλου να ενσωματώνει προβλήματα από διάφορες πηγές (συχνά όχι από εγχειρίδια). Καλά προβλήματα μπορούν να βρεθούν στα υλικά *Applications in Mathematics (AIM Project)*<sup>19</sup> που δημοσιεύονται από το *Mathematical Association of America*. Αυτά τα προβλήματα μπορούν συχνά να επεκταθούν ή να τροποποιηθούν από καθηγητές και μαθητές για να τονίσουν τα ενδιαφέροντά τους. Προβλήματα ενδιαφέροντος για τους δασκάλους και τους μαθητές τους μπορούν επίσης να αναπτυχθούν μέσω της χρήσης του **The Challenge of the Unknown**<sup>20</sup> που αναπτύχθηκε από την Αμερικανική Ένωση για την Πρόοδο της Επιστήμης. Αυτά τα υλικά παρέχουν πραγματικές καταστάσεις από τις οποίες προκύπτουν μαθηματικά προβλήματα και ένα εγχειρίδιο ιδεών και δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία άλλων προβλημάτων.

### 1.1 Πεποιθήσεις για την επίλυση προβλήματος

Η σημασία των πεποιθήσεων των μαθητών και των δασκάλων για την επίλυση προβλημάτων των μαθηματικών έγκειται στην υπόθεση ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ πεποιθήσεων και συμπεριφοράς. Έτσι, υποστηρίζεται ότι, οι πεποιθήσεις των μαθητών μαθηματικών, των καθηγητών μαθηματικών, των γονέων, των υπευθύνων χάραξης πολιτικής και του κοινού σχετικά με τους ρόλους της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά καθίστανται προαπαιτούμενες ή απαραίτητες για την ανάπτυξη της επίλυσης προβλημάτων. Τα **Curriculum and Evaluation Standards** (Πρότυπα Σπουδών και Αξιολόγησης) επισημαίνουν ότι «οι μαθητές πρέπει να δουν τον εαυτό τους ως ικανό να χρησιμοποιήσουν τις αυξανόμενες μαθηματικές γνώσεις τους για να κατανοήσουν τις νέες προβληματικές καταστάσεις στον κόσμο γύρω τους»<sup>21</sup>.

---

<sup>19</sup> Mathematical Association of America. (1986). *Applications in mathematics (AIM Project materials)*. Washington, DC: The Author.

<sup>20</sup> American Association for the Advancement of Science. (1986). *The challenge of the unknown*. New York: Norton.

<sup>21</sup> National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.



Χρειάζεται λοιπόν να αναπτύξουμε μια αίσθηση «μπορώ να το κάνω» στους μαθητές μας καθώς αντιμετωπίζουν μαθηματικά προβλήματα.

Ο Schoenfeld<sup>22 23</sup> ανέφερε αποτελέσματα από μια μελέτη διάρκειας ενός έτους λεπτομερών παρατηρήσεων, ανάλυσης βιντεοσκοπημένων οδηγιών και δεδομένων ερωτηματολογίων παρακολούθησης από δύο τάξεις γεωμετρίας 10ης τάξης. Αυτά τα μαθήματα ήταν σε επιλεγμένα γυμνάσια και τα μαθήματα ήταν ιδιαίτερα επιτυχημένα, όπως διαπιστώθηκε από την απόδοση των μαθητών στην εξέταση του New York State Regent. Οι μαθητές ανέφεραν πεποιθήσεις ότι τα μαθηματικά τους βοηθούν να σκέφτονται καθαρά και μπορούν να είναι δημιουργικοί στα μαθηματικά, ωστόσο, ισχυρίστηκαν επίσης ότι τα μαθηματικά μαθαίνονται καλύτερα με την απομνημόνευση. Παρόμοιες αντιθέσεις έχουν αναφερθεί για την Εθνική Αξιολόγηση (National Assessment)<sup>24</sup>. Πράγματι, οι συνομιλίες μας με τους δασκάλους και οι παρατηρήσεις απεικονίζουν μια συντριπτική προδιάθεση των μαθητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να βλέπουν την επίλυση προβλημάτων ως απάντηση, να βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο κανόνων και να προσανατολίζονται στο να παίρνουν υψηλό βαθμό στα τεστ.

Η ρητορική της επίλυσης προβλημάτων έχει γίνει γνωστή την τελευταία δεκαετία. Αυτή η ρητορική ακούστηκε συχνά στις τάξεις που παρατηρήσαμε - αλλά η πραγματικότητα αυτών των τάξεων είναι ότι τα πραγματικά προβλήματα ήταν λίγα. Σχεδόν όλα τα προβλήματα που ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν ήταν ασκήσεις που είχαν σχεδιαστεί για να επιτύχουν την κυριαρχία των θεμάτων: οι εξαιρέσεις ήταν σαφώς περιφερειακά καθήκοντα που οι μαθητές βρήκαν ευχάριστα, αλλά θεωρούσαν αναψυχές ή ανταμοιβές και όχι την ουσία που αναμενόταν, να μάθουν δηλαδή τις εξελίξεις στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Έχουμε γενικά αποκτήσει πιο ξεκάθαρους στόχους, αλλά τελικά οδηγούμε τους μαθητές να πάρουν μεν τη ρητορική - αλλά όχι την ουσία - που σχετίζεται με αυτούς τους στόχους.<sup>25</sup>

---

<sup>22</sup> Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychologist*, 23, 145-166.

<sup>23</sup> Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-355.

<sup>24</sup> Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 76 (9), 652-659.

<sup>25</sup> Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-355.

## 1.2 Αξιολόγηση και ΕΠ

Καθώς η έμφαση στην επίλυση προβλημάτων στις τάξεις των μαθηματικών αυξάνεται, η ανάγκη αξιολόγησης της προόδου και της διδασκαλίας στην επίλυση προβλημάτων γίνεται πιο επιτακτική. Δεν αρκεί πλέον να γνωρίζουμε ποια είδη προβλημάτων επιλύονται σωστά και εσφαλμένα από τους μαθητές. Όπως περιγράφει ο Schoenfeld<sup>26</sup> : Πολύ συχνά εστιάζουμε σε μια στενή συλλογή καλά καθορισμένων εργασιών και εκπαιδεύουμε τους μαθητές να εκτελούν αυτές τις εργασίες σε μια ρουτίνα, με αλγοριθμικό τρόπο. Στη συνέχεια, δοκιμάζουμε τους μαθητές σε εργασίες που είναι πολύ κοντά σε αυτές που έχουν διδαχθεί. Εάν επιτύχουν σε αυτά τα προβλήματα, εμείς συγχαίρουμε ο ένας τον άλλον για το γεγονός ότι έχουν μάθει μερικές ισχυρές μαθηματικές τεχνικές. Στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τέτοιες τεχνικές μηχανικά, ενώ δεν διαθέτουν κάποιες στοιχειώδεις δεξιότητες σκέψης. Το να τους επιτρέψουμε, και στους εαυτούς μας επίσης, να πιστεύουμε ότι "κατανοούν" τα μαθηματικά είναι παραπλανητικό και δόλιο.

Ο Schoenfeld<sup>27</sup> υποδεικνύει ότι οι ικανοί μαθητές μαθηματικών όταν απομακρύνονται από το πλαίσιο των μαθημάτων δυσκολεύονται να κάνουν ό,τι μπορούν να θεωρηθούν στοιχειώδη μαθηματικά για το επίπεδο τους. Πρέπει να επικεντρωθούμε στη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών και, με τη σειρά της, στην επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας μια ολιστική προσέγγιση. Όπως προτείνεται στο An Agenda for Action του NCTM <sup>28</sup>, "η επιτυχία των μαθηματικών προγραμμάτων και της μάθησης των μαθητών [πρέπει] να αξιολογηθεί από ένα ευρύτερο φάσμα μέτρων από τις συμβατικές δοκιμές". Αν και αυτή η σύσταση είναι ευρέως αποδεκτή μεταξύ των εκπαιδευτικών μαθηματικών, υπάρχει ένας περιορισμένος αριθμός ερευνών που ασχολούνται με την αξιολόγηση της επίλυσης προβλημάτων μέσα στο περιβάλλον της τάξης.

---

<sup>26</sup> Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychologist*, 23, 145-166.

<sup>27</sup> Schoenfeld, A. H. (1979). Can heuristics be taught? In J. Lockhead, *Cognitive process instruction*. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

<sup>28</sup> National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s*. Reston, VA: The Author.

Τα τεστ, δυστυχώς, οδηγούν συχνά τα προγράμματα μαθηματικών. Τα περισσότερα τεστ με αναφορά κριτηρίου και τα περισσότερα τεστ με αναφορά σε κανόνα είναι αντιθετικά στην επίλυση προβλημάτων. Τέτοια τεστ υπογραμμίζουν τη λήψη απαντήσεων. Αυτό οδηγεί σε πίεση για «κάλυψη» πολλών υλικών και οι εκπαιδευτικοί αισθάνονται πιεσμένοι να παραιτηθούν από την επίλυση προβλημάτων. Μπορεί να γνωρίζουν ότι η επίλυση προβλημάτων είναι επιθυμητή και η ανάπτυξη κατανόησης και η χρήση κατάλληλης τεχνολογίας αξίζει τον κόπο, αλλά ... δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για όλα αυτά και πρέπει να προετοιμάσουν τους μαθητές για τα τεστ. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί που είναι αφιερωμένοι στην επίλυση προβλημάτων ήταν σε θέση να ενσωματώσουν την επίλυση προβλημάτων στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών τους χωρίς να μειώσουν τις βαθμολογίες των μαθητών σε τυποποιημένα τεστ. Δεσμευόμενοι για την επίλυση προβλημάτων στις τάξεις μας, θα τονίσουμε περαιτέρω την ανάγκη για αλλαγές στις πρακτικές των τεστ παρέχοντας στους μαθητές μας πολύτιμες μαθηματικές εμπειρίες.

Είναι εντυπωσιακή η αντίφαση ότι υπάρχει μια τεράστια βιβλιογραφία για την επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά και, ωστόσο, υπάρχει ένα πλήθος ζητημάτων που πρέπει να μελετηθούν, να αναπτυχθούν και να αποτυπωθούν για να καταστούν οι πραγματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών. Επιπλέον, παρόλο που πολλοί μπορεί να το θεωρήσουν ως πρωταρχικό ζήτημα ενός προγράμματος σπουδών, και ως εκ τούτου απαιτούν αναδιαρθρωμένα εγχειρίδια και υλικά, είναι ο καθηγητής μαθηματικών που πρέπει να δημιουργήσει το πλαίσιο για την άνθηση της επίλυσης προβλημάτων ώστε οι μαθητές να γίνουν λύτες προβλημάτων. Ο πρώτος στην τάξη που θα πρέπει να γίνει λύτης προβλημάτων είναι ο δάσκαλος.

Ο πρωταρχικός στόχος των περισσότερων μαθητών στις τάξεις μαθηματικών είναι να δουν έναν αλγόριθμο που θα τους δώσει την απάντηση γρήγορα. Οι μαθητές και οι γονείς αγωνίζονται με (και μερικές φορές εναντίον) την ιδέα ότι η τάξη των μαθηματικών μπορεί και πρέπει να περιλαμβάνει εξερεύνηση, εικασία και σκέψη. Όταν οι μαθητές παλεύουν με ένα πρόβλημα, οι γονείς συχνά τους κατηγορούν ότι δεν δίνουν προσοχή στην τάξη. "Σίγουρα ο δάσκαλος σου έδειξε πώς να δουλέψεις το πρόβλημα!" Πώς μπορούν οι γονείς, οι μαθητές, οι συνάδελφοι και το κοινό να ενημερωθούν περισσότερο για την πραγματική επίλυση προβλημάτων; Πώς μπορώ ως εκπαιδευτικός μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση να βοηθήσω τους μαθητές και τους

γονείς τους να καταλάβουν τι είναι η πραγματική μάθηση των μαθηματικών; Αυτή η σειρά ερωτημάτων απασχολεί τους εκπαιδευτικούς που αγωνιούν για την μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών τους.

### 1.3 Τι είναι επίλυση προβλήματος;

Συναντά κανείς διάφορους ορισμούς με κοινά σημεία. Ένας ορισμός που τα περιλαμβάνει είναι ο ακόλουθος:

“Η επίλυση προβλήματος είναι η νοητική διαδικασία που χρησιμοποιούμε για να καταλήξουμε σε μια «πολύ καλή» απάντηση σε μια άγνωστη απόφαση, που υπόκειται σε ένα σύνολο περιορισμών. **Προβληματική κατάσταση δεν είναι αυτή που έχει συναντηθεί στο παρελθόν: Δεν μπορούμε να θυμηθούμε από τη μνήμη μια διαδικασία ή μια λύση από την προηγούμενη εμπειρία.** Πρέπει να προσπαθήσουμε πολύ για να βρούμε μια «πολύ καλή» απάντηση.”<sup>29</sup>

### 1.4 Διδάσκεται η επίλυση προβλήματος ή όχι;

Οι απαντήσεις στη βιβλιογραφία συνιστούν δυο αντιθετικές ομάδες:

Οι μεν υποστηρίζουν ότι η επίλυση προβλήματος δεν μπορεί να διδαχθεί. Θεωρούν ότι οι μαθητές θυσιάζουν τις βασικές τους δεξιότητες, αν οι εκπαιδευτικοί επικεντρωθούν στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Εκτιμούν ότι δεν είναι γνωστός, ακόμη τουλάχιστον, ο καταλληλότερος τρόπος διδασκαλίας, ώστε να γίνουν οι μαθητές καλύτεροι λύτες προβλημάτων. Πιστεύουν ότι η επίλυση προβλημάτων δε θα πρέπει να διδάσκεται ως ξεχωριστό θέμα στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Η καθοδήγηση των μαθητών στη χρήση γενικών στρατηγικών επίλυσης έχει μικρή επίδραση στην επιτυχία τους ως λυτών προβλημάτων.

---

<sup>29</sup> Woods, D. R. (1987). How might I teach problem solving? New directions for teaching and learning, 1987(30), 55-71.

Συνήθης τρόπος διδασκαλίας της επίλυσης προβλήματος είναι η διδασκαλία μεθόδων λύσης για συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων, υποδείξεις, προτάσεις, καθοδήγηση τρόπου επίλυσης προβλημάτων, ανάκληση από μνήμης διαδικασιών επίλυσης, επίλυση πολλών προβλημάτων και λυμένα παραδείγματα, ακατάλληλα προβλήματα για ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, άγνοια ατομικών διαφορών σχετικά με το μαθησιακό στυλ.

Οι τακτικές αυτές έχουν συνέπειες. Δημιουργούνται καλοί λύτες σε συγκεκριμένη περιοχή προβλημάτων, επίσης λύτες ασκήσεων και όχι προβλημάτων. Παρατηρείται αδυναμία επίλυσης ελαφρώς διαφοροποιημένων προβλημάτων, όπως και αποτυχία στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Και το βασικότερο καλλιεργείται, λανθασμένα, η πεποίθηση ότι η επίλυση πολλών ασκήσεων οδηγεί στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Συνήθεις πρακτικές βελτίωσης της επίδοσης στην επίλυση προβλήματος είναι η μείωση του άγχους, το βίωμα όλων των συναισθημάτων, η αύξηση αυτό-αποτελεσματικότητας, το κίνητρο, η εξάσκηση σε ευρεία γκάμα προβλημάτων, το βίωμα ενός παραγωγικού κύκλου αποτυχίας.

Κατά την αντιθετική ομάδα η επίλυση προβλήματος μπορεί να διδαχθεί. Η εστίαση στην επίλυση προβλημάτων δεν επηρεάζει την ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης των μαθητών, αλλά ενισχύει θετικές στάσεις. Η διδασκαλία των μαθηματικών με την προοπτική επίλυσης προβλημάτων βελτιώνει σημαντικά την επίδοση των μαθητών στην επίλυση και την εννοιολογική κατανόηση, ενώ παράλληλα έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση των βασικών υπολογιστικών και άλλων διαδικαστικών δεξιοτήτων τους. Η επίλυση προβλημάτων πρέπει να διδάσκεται ως αναπόσπαστο κομμάτι της μάθησης των μαθηματικών

## 2. Επαγγελματική ανάπτυξη

Υπάρχει άφθονη βιβλιογραφία που δείχνει σημαντικές πτυχές που πρέπει να ληφθούν υπόψη στη μαθηματική προετοιμασία αλλά και την συνεχή επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, βοηθώντας τους να εμπλουτίσουν την προσωπική τους απάντηση στο ερώτημα τι είναι τα μαθηματικά. Το να δίνεις μια αφήγηση ενός μικρού

μαθηματικού ταξιδιού, με σκοπό να δώσει στον αναγνώστη μια απτή και αυθεντική και επίσης προσβάσιμη εικόνα του τι σημαίνει να κάνεις μαθηματικά. (Bass, 2011, σελ. 4)

Πέντε από τις περισσότερο σημαντικές πτυχές των μαθηματικών στα μαθήματα που αφορούν ειδικά τους εκπαιδευτικούς είναι οι ακόλουθες:

#### **Κατανόηση ή προσπάθεια κατανόησης διαδικασιών και αντικειμένων.**

Αυτό είναι εν μέρει σε αντίθεση με τα μαθηματικά σαν αριθμούς, τα μαθηματικά σαν μοτίβα και τα μαθηματικά σαν μαθηματικούς τύπους. Στόχος είναι να εμπλέξουμε τους μαθητές σε κάποια μαθηματική δραστηριότητα που θα περιλαμβάνει, κοιτάζοντας μια μέθοδο ή έναν τρόπο να κάνετε κάτι (π.χ. χρωματισμός χάρτη ή κερδίζοντας ένα παιχνίδι) - το οποίο συνήθως θα έχει βρεθεί από τους μαθητές - και προσπαθούν να το καταλάβουν. Τι συμβαίνει? Εξετάζουμε τη μέθοδο, κατά τη διαδικασία. Μπορούμε επίσης να ξεκινήσουμε με ένα αντικείμενο, για παράδειγμα έναν παντογράφο (που θα μπορούσε να είναι εικονικό), και να προσπαθήσουμε να καταλάβουμε πώς λειτουργεί, μοντελοποιώντας το μαθηματικά.

**Εξαγωγή χαρακτηριστικών και ορισμός τους.** Η αναγνώριση βασικών χαρακτηριστικών και η ανάγκη να γίνει σταδιακά πιο ακριβής για το τι παρατηρούμε ή για το τι εμείς θέλουμε να περιγράψουμε, είναι ζωτικής σημασίας στα μαθηματικά. Η ανάγκη να γίνει αυτό μπορεί να προκύψει από μαθηματική επίλυση προβλημάτων και από διάφορες δραστηριότητες.

**Εύρεση μοτίβων και δομών.** Αυτό θεωρείται συχνά ως σημαντικό μέρος των μαθηματικών, ωστόσο, οι μαθητές δεν είναι τόσο συχνά σε θέση πραγματικά να το κάνουν μόνοι τους. Στην παραδοσιακή διδασκαλία, τα σχέδια και η δομή περιγράφονται με αποτελεσματικό τρόπο, όμως οι μαθητές μπορεί να μην είναι ποτέ σε θέση να τα βρίσκουν μόνοι τους.

**Αναπαράσταση.** Αυτό είναι ένα τεράστιο έδαφος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι αναπαράστασης μιας μαθηματικής κατάστασης. Μπορεί κανείς να σκεφτεί κλασικές διακρίσεις (π.χ. γραφικά, αλγεβρικά, και γεωμετρικά), αλλά υπάρχουν επίσης διαφορετικοί τρόποι αναπαραγωγής εντός ενός συγκεκριμένου τύπου εκπροσώπησης. Αυτό μπορεί επίσης να περιλαμβάνει αναλογίες, φυσική μοντελοποίηση ή αναπαραστάσεις που βοηθούν στην προώθηση της διαίσθησης και της κατανόησης.

**Επικοινωνία για την κατανόησή μας.** Για τους μαθητές των μαθηματικών, το να επικοινωνούν συχνά με άλλους είναι ευνοϊκό για τη βελτίωση της κατανόησης. Τους φέρνει σε επαφή με την κατανόηση άλλων, αποκαλύπτοντας συχνά την πολύπλευρη φύση των μαθηματικών. Συμβάλλει επίσης σε μια βελτιωμένη προσωπική κατανόηση της σημασίας σαφών ορισμών και σαφών συμβολισμών. Ορισμένες δραστηριότητες θα πρέπει να βοηθήσουν να βιώσετε το γεγονός ότι η κοινή χρήση και η αλληλεπίδραση με άλλους μπορούν να βοηθήσουν στην επίτευξη αυτού που θέλετε να κάνετε. Εάν μια εργασία ή πρόβλημα είναι αρκετά πλούσιο ή δύσκολο, υπάρχουν πολλά να κερδίσετε από την πραγματική εργασία με άλλους. Μπορεί να προκύψουν διαφορετικές προσεγγίσεις και από τους πολλαπλούς τρόπους ανάλυσης ή βλέποντας ένα πρόβλημα, μπορεί να σημειωθεί πρόοδος εκεί που μπορεί να έχει κολλήσει ένα άτομο.

Προκειμένου να εμπλακούν πλήρως οι μαθητές στην άσκηση των μαθηματικών, και συγκεκριμένα στην μαθηματική επίλυση προβλημάτων είναι κρίσιμο να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην κουλτούρα της τάξης. Υπάρχουν συγκεκριμένες παιδαγωγικές προσεγγίσεις που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη μιας κουλτούρας όπου η πραγματική επίλυση προβλημάτων θα έχει περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας.

Κάθε «πρόβλημα» που αποδεικνύεται ότι είναι μια άσκηση ρουτίνας για έναν μαθητή δεν αποτελεί για αυτόν «πρόβλημα»: το να θέσουμε περισσότερες ερωτήσεις ή να επεκτείνουμε την ερώτηση μπορεί να οδηγήσει σε προκλητική δουλειά, αλλά, αν όχι, ο μαθητής να ενθαρρύνεται να κοιτάξει για άλλα προβλήματα.

## 2.1 Επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και Επίλυση Προβλήματος

Πολλά προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης (ΕΑ) σκοπεύουν οι εκπαιδευτικοί να ενσωματώνουν περισσότερη επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών τους, αλλά η έρευνα που στοχεύει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί διατηρούν αυτήν την αλλαγή είναι συγκριτικά λιγότερο ανεπτυγμένη. Στην περίπτωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα προγράμματα ΕΑ σε όλο τον κόσμο προωθούν συχνά μια συνεργατική, μαθητοκεντρική, βασισμένη στην ΕΠ παιδαγωγική (Koellner, Jacobs & Borko, 2011; Sztajn, Borko, & Smith, 2017).

Η παιδαγωγική επίλυσης προβλημάτων απαιτεί σημαντικές αλλαγές για τους εκπαιδευτικούς (βλέπε επίσης Cavanagh, 2006; Ponte, Matos, Guimaraes, Leal, & Canavarro, 1994); Ενδέχεται να αντιμετωπίσουν συγκρούσεις ταυτότητας κατά τη διάρκεια ΕΑ όταν η πρακτική τους εκτίθεται σε έλεγχο και πρέπει να τροποποιούν μέθοδοι διδασκαλίας που πιστεύουν ότι έχει αποδειχθεί ότι λειτουργούν (Avalos & de Los Rios, 2013). Στη Χιλή π.χ. το πρόγραμμα ARPA (Activating Problem Solving in the Classroom) παρείχε ΕΑ στους εκπαιδευτικούς για διδασκαλία συνεργατικής, επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων μη ρουτίνας. Μελέτες έδειξαν ότι οι αλλαγές που προκύπτουν από την ενσωμάτωση νέας παιδαγωγικής στη διδακτική των εκπαιδευτικών δύσκολα διατηρούνται. Στην εκπαίδευση των μαθηματικών υπάρχει έλλειψη έρευνας που εξετάζει τη βιωσιμότητα της ΕΑ (Tirosh, Tsamir, & Levenson, 2015; Whitcomb, Borko, & Liston, 2009). Συχνά πραγματοποιούνται αξιολογήσεις του αντίκτυπου κάθε προγράμματος κατά τη διάρκεια ή στο τέλος ενός έργου και ως εκ τούτου παρέχουν μόνο αποτελέσματα που μιλούν για τα βραχυπρόθεσμα αποτελέσματα (Zehetmeir, 2015). Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντική αλλαγή που απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς, είναι σίγουρα σημαντικό να προσέξουμε πώς εξελίσσεται η ανάπτυξή τους για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Η διδασκαλία των μαθηματικών σε πολλές χώρες χαρακτηρίζεται από μια χαρακτηριστική προσέγγιση με επίκεντρο τον εκπαιδευτικό που περιγράφεται από διάφορες βιβλιογραφίες ως «παραδοσιακή» (Boaler & Greeno, 2000) ή μεταδοτική (transmissive) (Maaß & Artigue, 2013) διδασκαλία. Σε μια τέτοια προσέγγιση, οι εκπαιδευτικοί διατηρούν τον έλεγχο της μάθησης των μαθηματικών με διαλέξεις, παρέχοντας σημειώσεις και παραδείγματα και δείχνοντας στους μαθητές πώς να λύνουν ασκήσεις πριν τους επιτρέψουν να επιχειρήσουν ένα παρόμοιο παράδειγμα από μόνοι τους. Αυτό είναι ένα τυπικό στυλ διδασκαλίας σε πολλούς χώρες του κόσμου (Maaß & Artigue, 2013). Σε μια μελέτη βίντεο της διδασκαλίας των μαθηματικών στη Χιλή, η Araya και ο Dartnell (2008) βρήκαν αμελητέα συμμετοχή μαθητών με λίγη ανάκριση και σπάνια χρήση βιβλίων. Αυτή η έλλειψη χρήσης βιβλίου σημαίνει ακόμη μεγαλύτερο έλεγχο των μαθηματικών από τον εκπαιδευτικό. Οι Χιλιανοί δάσκαλοι δεν έχουν συνηθίσει να παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να συμμετέχουν σε δραστηριότητες επίλυσης μη-συνηθισμένων προβλημάτων (Felmer et al., 2014; Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas, Randolph & Cea, 2013).



## 2.2 ΕΑ και αλλαγή στην ταυτότητα του δασκάλου

Προκειμένου να κατανοήσουμε την αλλαγή ταυτότητας στους εκπαιδευτικούς, πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικά το πλαίσιο. Το περιβάλλον είναι κάτι παραπάνω από απλή ρύθμιση για την αλλαγή μετά τη συμμετοχή στην ΕΑ. Συμμετέχει πολύ σημαντικά στην αναπαραγωγή της ταυτότητας του δασκάλου. Να σημειώσουμε ότι αποδεικνύεται η πιθανή επιτυχία της ΕΑ, παρά τους περιορισμούς, και ταυτόχρονα ότι η ατομική προθυμία για αλλαγή δεν είναι από μόνη της αρκετή για να διατηρήσει την αλλαγή στην πράξη μακροπρόθεσμα.

Ο Liljedahl's (2014) επισημαίνει ότι ο δάσκαλος αλλάζει άποψη για την ικανότητα των μαθητών με την ΕΠ. Όσο για το ζήτημα της αλλαγής ταυτότητας του δασκάλου το κρίσιμο δεν είναι η αλλαγή αλλά κατά πόσο ή όχι γίνεται αποδεκτή στην πρακτική ενός δασκάλου μακροπερίοδα. Άλλο η αλλαγή και άλλο η αποδοχή. Σημαντικό είναι το αν ο εκπαιδευτικός νιώθει την ανάγκη για αλλαγές.

Η ατομική αλλαγή συμβαίνει σε συγκεκριμένες κουλτούρες. Το τι σημαίνει να είσαι «καλός» δάσκαλος διαμορφώνεται, ιδίως, σε τοπικά πλαίσια, συμπεριλαμβανομένων των θεσμικών κανόνων και προσδοκιών, καθώς και των κοινωνικών κανόνων και των τυπικών πρακτικών. Η επίδραση των θεσμικών πλαισίων στην ανάπτυξη ταυτότητας των εκπαιδευτικών τεκμηριώνεται στη βιβλιογραφία (e.g. Gellert et al., 2013; Gresalfi & Cobb, 2011). Αυτά τα αποτελέσματα έχουν επιπτώσεις στα προγράμματα ΕΑ. Συγκεκριμένα, υπογραμμίζεται η σημασία της προσαρμογής μεταξύ ΕΑ και θεσμικά καθορισμένων αναγκών. Π.χ. ο προσανατολισμός του ελληνικού σχολείου προς την τελική δοκιμασία των πανελλαδικών εξετάσεων καθορίζει και τις πλειοψηφικές εκπαιδευτικές ανάγκες σε βαθμό που οτιδήποτε άλλο να φαντάζει εξωτικό ή περιττό.

Προτείνουμε ότι εκτός από τη σημείωση των επιπτώσεων των συμφραζόμενων στην ταυτότητα και την επιτυχία της ΕΑ (Collory, 2003; Gellert et al., 2013; Gresalfi & Cobb, 2011), η προσοχή πρέπει να καταβάλλεται στις αντιληπτές ανάγκες των εκπαιδευτικών και πώς αυτές υποστηρίζονται θεσμικά. Μια καλή λύση είναι αυτός που επιμορφώνεται να γίνεται μέντορας.

Αν ένα πρόγραμμα ΕΑ στοχεύει στην αλλαγή πολιτιστικών και θεσμικών πρακτικών (π.χ. για να επιτρέπεται το χάος στην τάξη προκειμένου να παρέχονται στους μαθητές αυθεντικές ευκαιρίες να μάθουν), χρειάζονται μεγαλύτερες επενδύσεις για αλλαγή. Οι ερευνητές υποθέτουν ότι για να κάνουν το ARPA ή άλλο ανατρεπτικό

πρόγραμμα ΕΑ επιτυχημένα σε σχολεία, το πρόγραμμα πρέπει να υποστηρίζεται είτε από αλλαγές στα προγράμματα σπουδών και την αξιολόγηση συστημάτων ή με ισχυρή υποστήριξη για τις κοινότητες των εκπαιδευτικών.

Η υποστήριξη είναι ιδιαίτερα αναγκαία όταν γίνονται αντιληπτές οι πολλοί περιορισμοί κατά την εφαρμογή ενός προγράμματος ΕΑ. Για παράδειγμα, δυσκολίες σε σχέση με περιορισμούς χρόνου και σπουδών και με τα χαρακτηριστικά των μαθητών και τη σχέση τους με δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων απαιτούν πολλούς πόρους στους οποίους πρέπει να έχουν πρόσβαση οι εκπαιδευτικοί.

Είδαμε και πριν, ότι ίσως δεν είναι αρκετό για τους εκπαιδευτικούς να δείξουν προθυμία και ικανότητα να αλλάξουν την πρακτική τους. Πρέπει να αποδεχτούν αυτές τις αλλαγές στην πρακτική τους μακροπρόθεσμα και να θεσπίσουν έναν δάσκαλο με ταυτότητα που ενσωματώνει τη νέα παιδαγωγική. Για να είναι επιτυχημένη η ΕΑ είναι βασικός όρος, ότι πρέπει να ικανοποιεί τις ανάγκες των εκπαιδευτικών στο ατομικό τους πλαίσιο.

### 2.3 Πρώτη συνεδρία ενός επαγγελματία σε Εργαστήριο Ανάπτυξης με ΕΠ

Όταν οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν σε εργαστήριο επαγγελματικής ανάπτυξης συζητούν τις εμπειρίες τους κατά τη διάρκεια μιας συνεδρίασης επίλυσης προβλημάτων, και μερικές φορές εκφράζουν μια αίσθηση ανισορροπίας ή δυσφορίας που βασίζεται στην αντίθεση μεταξύ αυτών των εμπειριών, τις ικανότητές τους και τις προηγούμενες μαθηματικές αντιλήψεις, πεποιθήσεις και γνώσεις τους.

Οι αλλαγές μέσα στην τάξη εμφανίζονται ως πολύπλοκες διαδικασίες, οι οποίες έχουν συχνά ξεκινήσει από προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης. Αυτά τα προγράμματα επιδιώκουν αλλαγές, είτε στις πεποιθήσεις, στη γνώση, είτε στις πρακτικές των εκπαιδευτικών, και αυτά που έχουν διαπιστωθεί σαν αποτελεσματικά (Desimone, Porter, Garet, Yoon & Birman, 2002) αναζητούν επίσης αλλαγές στη μάθηση του μαθητή. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί γίνονται οι παράγοντες αλλαγής στην τάξη, και αυτός ο ρόλος τους κάνει να αισθάνονται ένταση. Όπως παρατηρήθηκε από την Adler (1998) στην πρωτοποριακή της εργασία, «οι εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευτικοί των εκπαιδευτικών αντιμετωπίζουν την ένταση του να είναι ταυτόχρονα οι πράκτορες και τα αντικείμενα της αλλαγής»

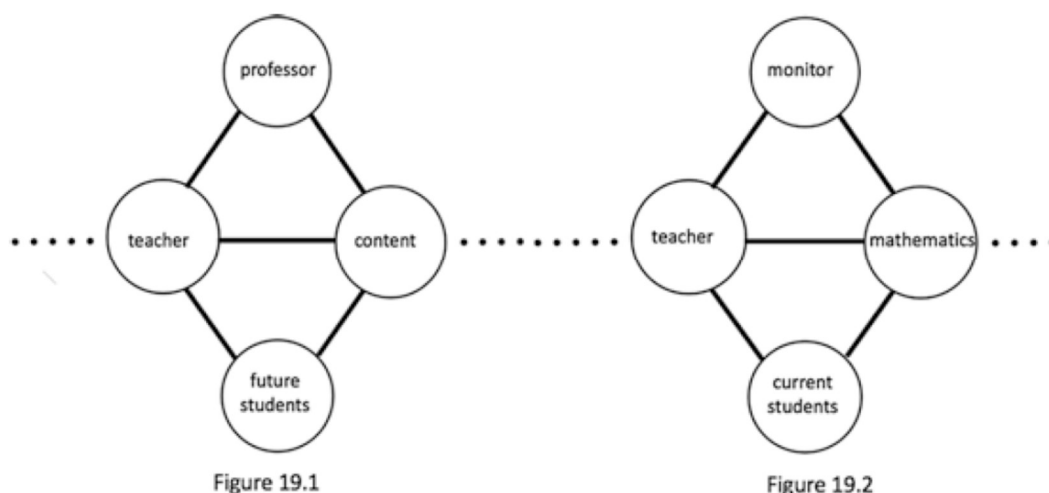
Μια ανάλυση της έρευνας για τις εντάσεις στον εκπαιδευτικό τομέα επιτρέπει τον προσδιορισμό δύο διαφορετικών προοπτικών. Από τη μία πλευρά, υπάρχει μια ερευνητική γραμμή για τις εντάσεις ως το συναίσθημα που εμφανίζεται όταν το άτομο αντιμετωπίζει ένα δίλημμα. Αυτά τα έργα επικεντρώνονται στη φιγούρα του δασκάλου και αναφέρονται στις εντάσεις ως συναισθήματα που αναδύονται όταν οι εκπαιδευτικοί πρέπει να πάρουν μια απόφαση που αντιμετωπίζει μια κατάσταση όπου η λύση δεν είναι μοναδική όπως όταν αποφασίζετε ποια παιδαγωγική προσέγγιση θα χρησιμοποιήσετε (π.χ. Lampert, 1985; Rouleau, 2017). Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν έρευνες που εξετάζουν τις εντάσεις ως συναισθήματα που προκαλούνται από διαταραχή ή ανισορροπία μεταξύ των εμπειριών, γνώσεων και πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και την εμπειρία που έχουν σε ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης (π.χ., Nipper et al., 2011).

Κάποια προγράμματα ΕΑ προορίζονται για εκπαιδευτικούς με σκοπό να λύσουν προβλήματα και να βιώσουν την εμπειρία, τα συναισθήματα και τις εντάσεις που μπορεί να βιώσουν οι μαθητές τους κατά την επίλυση προβλημάτων. Η βιβλιογραφία αποδεικνύει ότι ορισμένα από τα χαρακτηριστικά που έχουν θετικά αποτελέσματα στη βελτίωση των γνώσεων των εκπαιδευτικών, των δεξιοτήτων τους και των αλλαγών στην πρακτική στην τάξη είναι ο βαθμός στον οποίο η δραστηριότητα: (α) επικεντρώνεται στην βελτίωση και εμπάθυνση της γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών (β) εστιάζει σε συγκεκριμένες εκπαιδευτικές πρακτικές (γ) προσφέρει στους εκπαιδευτικούς ευκαιρίες να συμμετέχουν ενεργά σε μια ουσιαστική ανάλυση της διδασκαλίας και της μάθησης, για παράδειγμα, από τον έλεγχο της εργασίας των μαθητών ή τη λήψη σχολίων για τη διδασκαλία τους και (δ) προωθεί την συνεχιζόμενη επαγγελματική επικοινωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών (Desimone et al., 2002; Garet et al., 2001; Swan, 2007).

Είναι γνωστό ότι οι συμμετέχοντες σε μια εκπαιδευτική δραστηριότητα ΕΑ βιώνουν μια αίσθηση δυσφορίας ή ανισορροπίας όταν αντιμετωπίζουν προηγούμενες πεποιθήσεις, γνώσεις ή πρακτικές. Αυτά τα συναισθήματα έχουν αναγνωριστεί στη βιβλιογραφία ως εντάσεις, και μπορούν να τις βιώσουν ο μαθητευόμενος ή ο δάσκαλος. Οι εντάσεις συμβαίνουν όταν οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν διλήμματα, δηλαδή, προβλήματα με διαφορετικές λύσεις, και πρέπει να κάνουν κάτι για αυτό. Σε μια πιο πρόσφατη δουλειά, οι Rouleau και Liljedahl (2016) χρησιμοποίησαν το σχέδιο έντασης που προτείνεται από την Berry (2007) για να μελετήσουν τις εντάσεις που προκύπτουν

όταν οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν μαθηματικά στην τάξη (βλ. επίσης Rouleau, 2017). Για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί μπορεί να έχουν το δίλημμα της επιλογής μεταξύ του τι θέλουν να κάνουν και του τι τους ζητείται να κάνουν, ή ίσως μεταξύ του τι θέλουν να κάνουν και του τι ξέρουν να κάνουν. Αυτά τα διλήμματα πρέπει να αντιμετωπιστούν, αλλά όχι απαραίτητα να επιλυθούν με συγκεκριμένο τρόπο, υπό την έννοια του Lampert (1985).

Μελετώντας ένα θερινό σχολείο ΕΑ διάρκειας μιας εβδομάδας οι Nipper et als. (2011) διαπίστωσαν ότι οι εντάσεις προκύπτουν όταν οι προσδοκίες των εκπαιδευτικών δεν ταιριάζουν με την εμπειρία τους. Λαμβάνοντας υπόψη την ιδέα των εντάσεων, σαν δυνάμεων με αντίθετες κατευθύνσεις οι Berry (2007), Nipper et als. (2011) τονίζουν τις σχέσεις στις οποίες αυτές οι εντάσεις εμφανίζονται και χρησιμοποιούν τον εκπαιδευτικό ρόμβο για να συλλάβουν αυτές τις σχέσεις (δες Fig. 19.1).



Στην ερμηνεία των Nipper και Sztajn (2008), το άνω τρίγωνο αντιπροσωπεύει το εκπαιδευτικό τρίγωνο στο πλαίσιο ενός εργαστήριου ΕΑ, όπου ο εκπαιδευτικός είναι μαθητευόμενος, ενώ το κάτω τρίγωνο αντιπροσωπεύει το εκπαιδευτικό τρίγωνο που προβάλλεται στην τάξη του δασκάλου.

Η ένταση είναι ένα αίσθημα ανισορροπίας ή δυσφορίας, ένα προϊόν της αντίθεσης μεταξύ των εμπειριών ενός δασκάλου κατά τη διάρκεια του εργαστήριου ΕΑ και αυτού που φέρνει ο δάσκαλος μαζί του: πεποιθήσεις, προσδοκίες, εμπειρίες και αντιλήψεις. Στους δασκάλους τέθηκαν ερωτήσεις όπως: Πώς ένιωσες κατά την επίλυση προβλημάτων; Αισθάνθηκες χαρούμενος όταν έφτασες στη λύση; Σου αρέσει να εργάζεστε σε ομάδες; Αναλύοντας τα αντίγραφα της συζήτησης στην ολομέλεια, οι ερευνητές εντόπισαν 33 επεισόδια μαθηματικών εντάσεων, δηλαδή, εντάσεις που

σχετίζονται με τη σχέση δασκάλου-μαθηματικών. Αυτά τα επεισόδια τοποθετήθηκαν στη συνέχεια σε πέντε κατηγορίες: Τρεις σχετίζονται με τις εντάσεις που έχουν ήδη εντοπιστεί στη βιβλιογραφία και δύο νέες εντάσεις. Οι τρεις πρώτες εντάσεις είναι (i) ανάπτυξη ικανοτήτων εναντίον εκμάθησης ικανοτήτων, (ii) προβλήματα για δασκάλους εναντίον προβλημάτων για μαθητές και (iii) προβλήματα πρόκλησης εναντίον ασκήσεων και λεκτικών προβλημάτων. Οι άλλες δύο εντάσεις είναι (iv) δεν είμαι σε θέση εναντίον του θα πρέπει να είμαι ικανός και (v) μαθηματικές ιδέες εναντίον μαθηματικού φορμαλισμού.

Οι δάσκαλοι περίμεναν ότι το εργαστήριο θα τους έδινε μια σειρά περιεχομένων για την επίλυση προβλημάτων με σαφείς οδηγίες για το πώς να διδαχθούν στους μαθητές. Όταν όμως καλούνται οι ίδιοι να μπουν σε διαδικασίες ΕΠ δημιουργούνται θέματα όταν δεν μπορούν να λύσουν κάποια προβλήματα. Νιώθουν άγχος ή απογοήτευση, και αφού διδάσκουν μαθηματικά, πιστεύουν ότι πρέπει να είναι σε θέση να λύσουν τα προβλήματα.

Έχει σχέση με «ασφάλεια εναντίον πρόκλησης», μια ένταση που αναφέρθηκε από την Berry (2007), η οποία εμφανίζεται όταν ο εκπαιδευτής εκπαιδευτικών σε ένα μάθημα ΕΑ αποφασίζει ποια προβλήματα θα θέσει στους δασκάλους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο εκπαιδευτής εκπαιδευτικών πρέπει να επιλέξει προσβάσιμες προκλήσεις που δεν είναι ούτε πολύ δύσκολες ούτε πολύ εύκολες. Αυτή είναι μια ένταση που βιώνει ο εκπαιδευτής δασκάλων πριν από τη δραστηριότητα με τους εκπαιδευτικούς. Ωστόσο, ένταση βιώνουν και οι μαθητεύομενοι εκπαιδευτικοί, που εμφανίζεται όταν λύνουν προβλήματα κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου. Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται αυτή η ένταση βασίζεται στην πεποίθηση ότι οι καλοί λύτες προβλημάτων στα μαθηματικά πρέπει να είναι γρήγοροι.

Ποια είναι η σωστή διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος; Αυτή είναι μια επαναλαμβανόμενη ερώτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών που προκύπτει, σύμφωνα με τους ερευνητές, κατά την πρώτη συνεδρία του εργαστηρίου. Σε οποιοδήποτε δεδομένο πρόβλημα, θα υπάρχουν πιθανώς διάφοροι τρόποι για την επίλυσή του. Μερικές λύσεις θα έρθουν απευθείας από τα μαθηματικά του ατόμου ή τη γνώση προβλημάτων, όπως ένας τύπος για το εμβαδόν σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα ή μια εξίσωση σε ένα πρόβλημα τιμής και ποσότητας. Εδώ, το άτομο ξέρει τι να κάνει. Έχει μια μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος, κατάσταση που είναι πιο κοντά σε μια άσκηση παρά σε ένα πρόβλημα. Αυτός ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων, που

μπορούμε να ονομάσουμε μαθηματική τυποποίηση, μερικές φορές θεωρείται σωστός τρόπος. Από την άλλη πλευρά, όταν αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα με την πραγματική έννοια, δηλαδή, ένα πρόβλημα που το άτομο δεν ξέρει πώς να λύσει, πρέπει να δοκιμάσει διαφορετικά τρόπους, είτε χρησιμοποιήσει τη φαντασία του, την εμπειρία του με άλλα προβλήματα ή τη δοκιμή και λάθος. Εδώ, λέμε ότι το άτομο χρησιμοποιεί μαθηματικές ιδέες.

Μια έκφραση αυτής της έντασης εμφανίζεται όταν οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικά εργαλεία όπως εξισώσεις και τύπους, ακόμη και όταν το πρόβλημα δεν τους το ζητά ή όταν μια μη αλγεβρική προσέγγιση θα ήταν ένας απλούστερος τρόπος για να βρεθεί μια λύση. Αυτή η ένταση εμφανίζεται σε σχέση με τους τύπους, και προκύπτει με δύο τρόπους: (α) επειδή κάποιος χρειάζεται έναν τύπο ή (β) όταν έχει λύσει το πρόβλημα, υπάρχει η αίσθηση ότι χωρίς έναν τύπο το πρόβλημα δεν έχει λυθεί εντελώς. Η ένταση εμφανίζεται εδώ από την ανάγκη εξεύρεσης ενός τύπου για την επίλυση του προβλήματος, ότι ονομάζουμε μαθηματική τυποποίηση, σε σύγκριση με τη χρήση μαθηματικών ιδεών για επίλυση. Είναι η πεποίθηση για τη φύση των μαθηματικών που προκαλεί την ένταση.

Έχει διαπιστωθεί ότι χρήση σχεδίων κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος δεν είναι κατάλληλη τακτική για μαθητές ή καθηγητές σε υψηλότερες βαθμίδες. Σε γενικές γραμμές, εντάσεις εμφανίζονται όταν οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν ιδέες, προβλήματα, διαδικασίες και στρατηγικές που δεν ταιριάζουν με το σύστημα γνώσεων, πεποιθήσεων, και πρακτικών τους. Οι δάσκαλοι, με φυσικό τρόπο, συγκρίνουν τι παρουσιάζεται στο εργαστήριο ΕΑ με το τι ξέρουν, πιστεύουν ή κάνουν (Nipper et al., 2011).

Οι ερευνητές έχουν εντοπίσει πέντε μαθηματικές εντάσεις κατά τη διάρκεια των συζητήσεων στην ολομέλεια των εργαστηρίων. Η πρώτη από τις τρεις εντάσεις μπορούν να συσχετιστούν με τις εντάσεις που αναφέρθηκαν από τους Nipper et al. (2011) και συνδέονται με τις προσδοκίες των εκπαιδευτικών πριν ξεκινήσουν το εργαστήριο. Η «ανάπτυξη ικανοτήτων εναντίον της μάθησης σχετικά με τις ικανότητες» σχετίζεται με αυτό που οι Nipper et al. (2011) αποκαλούν πραγματική παιδαγωγική ένταση και συνέβη επειδή οι εκπαιδευτικοί περίμεναν μια παιδαγωγική προσέγγιση που διέφερε από την πραγματική προσέγγιση. Η ένταση «προβλήματα για εκπαιδευτικούς εναντίον των προβλημάτων για μαθητές» σχετίζεται με αυτό που

Nipper et al. (2011) αποκαλούν πραγματικές εντάσεις μαθηματικού περιεχομένου και συνέβη επειδή οι εκπαιδευτικοί περίμεναν ότι αυτό το εργαστήριο θα περιλαμβάνει προβλήματα στο επίπεδο των μαθητών τους, όταν στην πραγματικότητα ήταν πολύ πιο δύσκολο. Η τρίτη ένταση είναι «προκλητικά προβλήματα εναντίον ασκήσεων και λεκτικών προβλημάτων», που προέκυψαν λόγω των προσδοκιών των εκπαιδευτικών σχετικά με το υλικό που θα χρησιμοποιούσαν στο εργαστήριο. Περίμεναν τα προβλήματα που θα χρησιμοποιούνταν στο εργαστήριο να είναι άμεσα εφαρμόσιμα στους μαθητές τους, έτσι η ένταση είναι παρόμοια με τις εντάσεις εφαρμοσμένου μαθηματικού περιεχομένου που προσδιορίζονται από τον Nipper et al. (2011).

Οι δύο τελευταίες εντάσεις έχουν σχέση με μια πιο οικεία σχέση μεταξύ καθηγητών και μαθηματικών, καθώς σχετίζονται με τις πεποιθήσεις τους για τα προβλήματα, την ικανότητά τους, και τη γνώση τους για την επίλυσή τους, και τον τρόπο που πιστεύουν ότι το πρόβλημα πρέπει να λυθεί. Η ένταση προκύπτει επειδή οι εκπαιδευτικοί συνειδητοποιούν ότι δεν είναι σε θέση να λύσουν μερικά από τα προβλήματα, ενώ πιστεύουν ότι πρέπει να είναι σε θέση να λύσουν όλα τους επειδή είναι δάσκαλοι, προκαλώντας την ένταση «δεν είμαι σε θέση εναντίον είμαι ικανός». Σε μια άλλη κατεύθυνση, μια κοινή πεποίθηση μεταξύ των εκπαιδευτικών είναι ότι κάθε πρόβλημα έχει μια σωστή λύση, ενώ στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχουν πολλές. Ένας τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος είναι χρησιμοποιώντας έναν τύπο ή μια εξίσωση, την οποία ονομάζουμε «χρησιμοποιώντας μαθηματικούς τύπους». Ένας άλλος τρόπος είναι η χρήση σχεδίων, η δοκιμή και το σφάλμα, η εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών, κάνοντας λάθη ή χρησιμοποιώντας φαντασία ή εμπειρία, τις οποίες ονομάζουμε με μαθηματικές ιδέες. Όταν οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν προβλήματα, δημιουργείται η συζήτηση για αυτούς τους δύο τρόπους προσέγγισης ενός προβλήματος «τις μαθηματικές ιδέες εναντίον της μαθηματικής διατύπωσης».

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τρεις διαφορετικές πεποιθήσεις και πρακτικές εκπαιδευτικών που εκφράστηκαν στη συζήτηση: (i) οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι πρέπει να είναι γρήγοροι στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, (ii) οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι τα σχέδια και οι εικόνες δεν είναι «κατάλληλοι» τρόποι επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων για δασκάλους και μαθητές στο γυμνάσιο ή και αργότερα και αντί αυτού θα πρέπει να χρησιμοποιούν τύπους και εξισώσεις, και (iii) τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να είναι ορισμένα σε περιβάλλον έτσι ώστε τα

παιδιά να μπορούν να τα λύσουν, όπου το περιβάλλον σημαίνει πραγματική ζωή ή το τρέχον περιεχόμενο που μελετάται.

## 2.4 Καθοδήγηση Εκπαιδευτικών στα Μαθήματα επίλυσης Μαθηματικών προβλημάτων

Κατά την εφαρμογή ενός μαθήματος επίλυσης προβλημάτων, ο δάσκαλος πρέπει να παρέχει κατάλληλη καθοδήγηση των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων. Αυτό το απαιτητικό έργο προϋποθέτει την κατανόηση της εργασίας των μαθητών σε εξέλιξη και την παροχή της απαραίτητης βοήθειας χωρίς να περιορίζεται η σκέψη τους. Βρήκαμε δύο θέματα σχετικά με την καθοδήγηση των δασκάλων κατά την δραστηριότητα της επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές: εστίαση της σκέψης των μαθητών σε κάτι και έμφαση στη δικαιολόγηση. Στο πρώτο θέμα, οι τρόποι των δασκάλων να καθοδηγούν τους μαθητές διέφεραν ανάλογα με το πόσο χώρο επέτρεπαν στη σκέψη των μαθητών και πόσο πράγματι βοήθησε η καθοδήγησή τους τους μαθητές να επικεντρωθούν στον στόχο. Στο δεύτερο θέμα, εντοπίσαμε δύο μοτίβα: να ζητάμε επανειλημμένα αιτιολόγηση και βοηθώντας στην οικοδόμηση μιας αιτιολόγησης.

Μας ενδιαφέρουν προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης που ασχολούνται με το πώς οι δάσκαλοι μπορούν να καθοδηγήσουν την επίλυση προβλημάτων των μαθητών στα μαθηματικά στις αίθουσες διδασκαλίας. Η επίλυση προβλημάτων είναι μια κεντρική πτυχή της μεταρρύθμισης στη μαθηματική εκπαίδευση (Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών [NCTM], 2000). Μαθηματικά οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να διδάξουν μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Αυτό είναι μια εκπαιδευτική προσέγγιση όπου οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες καθώς διερευνούν και λύνουν μαθηματικά προβλήματα αντί οι δάσκαλοι απλά να τους λένε ή να τους δείχνουν τι να κάνουν, ζητώντας τους να το εξασκήσουν. Υπάρχει μια γενική συναίνεση στην ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης ότι η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλημάτων ή η έρευνα βοηθά στην προώθηση της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών. Σε μια προσπάθεια υποστήριξης των καθηγητών μαθηματικών στην εφαρμογή τέτοιου τύπου εκπαίδευσης, επαγγελματικές οργανώσεις όπως το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών έχουν χρηματοδοτήσει την ανάπτυξη των λεγόμενων προγραμμάτων σπουδών που



βασίζονται σε πρότυπα που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι στις τάξεις μαθηματικών (βλ., π.χ., TERC, 1998).

Αυτά τα προγράμματα σπουδών συνήθως παρέχουν στους εκπαιδευτικούς στοχαστικές και γνωστικές δυνατότητες και απαιτητικές μαθηματικές εργασίες που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι στις τάξεις των μαθηματικών μαζί με λεπτομερείς περιγραφές των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις εργασίες, το πώς οι μαθητές μαθαίνουν και κάποιες οδηγίες για το πώς να εφαρμόσουν το μάθημα (Cengiz, Kline, & Grant, 2011). Συχνά προσφέρονται προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης σε εκπαιδευτικούς για να τους βοηθήσουν να εφαρμόσουν αποτελεσματικά αυτά τα προγράμματα σπουδών (βλ. Goldsmith, Doerr, & Lewis, 2014).

Παρά τις προσπάθειες που προαναφέρθηκαν, υπάρχουν στοιχεία ότι οι καθηγητές μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα της τάξης αγωνίζονται να διδάξουν μέσω της επίλυσης προβλημάτων και, κατά συνέπεια, να εμπλέξουν τους μαθητές σε στοχαστική μαθηματική δραστηριότητα στις αίθουσες διδασκαλίας (Cengiz et al., 2011). Αυτό υποδηλώνει την ανάγκη για περισσότερες μελέτες για το πώς οι καθηγητές μαθηματικών εφαρμόζουν μαθήματα επίλυσης προβλημάτων για την καλύτερη κατανόηση τις προκλήσεων που αντιμετωπίζουν όταν το κάνουν. Η μελέτη των Hahkioniemi and Francisco (2019) αντιμετωπίζει αυτό το ζήτημα αναφέροντας τις παρατηρήσεις από καθηγητές μαθηματικών που προσπαθούν να εφαρμόσουν τέτοια μαθήματα στο πλαίσιο δύο προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης: το έργο Informal Mathematical Learning (IML) στις ΗΠΑ και το ερευνητικό πρόγραμμα Based Mathematics Teaching (IBMT) στη Φινλανδία. Εξέτασαν τη βάση δεδομένων βίντεο των δύο προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης και προσπάθησαν να περιγράψουν το πώς οι δάσκαλοι διευκόλυναν ή καθοδήγησαν τη δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, τις προκλήσεις που αντιμετώπισαν και πώς εξήγησαν τις παρεμβάσεις τους. Γνώριζαν τα διαφορετικά πλαίσια των δύο προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης. Επομένως, ο στόχος τους δεν ήταν τόσο η σύγκριση ή η αντιπαράθεση των ενεργειών των δασκάλων αλλά μάλλον να έχουν μια μεγαλύτερη βάση δεδομένων από όπου θα μπορούσαν να αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση για το πώς οι καθηγητές μαθηματικών εφαρμόζουν δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στις αίθουσες διδασκαλίας.

## 2.5 Μαθήματα επίλυσης προβλημάτων

Ένα μάθημα επίλυσης προβλημάτων ή διερεύνησης έχει μια τυπική δομή που αποτελείται από τρία κύρια μέρη ή φάσεις (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008; Van de Walle, 2004):

- **Στο πρώτο μέρος**, ο δάσκαλος παρουσιάζει ένα μαθηματικό πρόβλημα για να το δουλέψουν οι μαθητές. Το πρόβλημα πρέπει να είναι προκλητικό για τους μαθητές για να τονώσει τη μαθηματική τους σκέψη. Έχουν αναπτυχθεί αρκετά κριτήρια για το τι θεωρείται καλό πρόβλημα και υπάρχει ευρύτερη συμφωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών μαθηματικών σε τέσσερα από τα κριτήρια (Cai & Lester, 2010). Το πρώτο είναι ότι το πρόβλημα πρέπει να περιέχει σημαντικά, χρήσιμα μαθηματικά. Αυτές είναι συνήθως οι μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες που αναμένεται να μάθουν οι μαθητές από την εργασία στο πρόβλημα. Τα άλλα τρία κριτήρια είναι ότι το πρόβλημα πρέπει να απαιτεί υψηλό επίπεδο σκέψης, να συμβάλλει στην εννοιολογική ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών και να παρέχει ευκαιρίες στον δάσκαλο να αξιολογήσει τι μαθαίνουν οι μαθητές και που μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Προγράμματα σπουδών βασισμένα σε πρότυπα συνήθως παρέχουν τέτοια καθήκοντα στους δασκάλους. Ωστόσο, οι δάσκαλοι μπορούν επίσης να καταλήξουν με τις δικές τους εργασίες ή να τροποποιήσουν τις υπάρχουσες εργασίες ώστε να πληρούν τα κριτήρια (Cai & Lester, 2010).
- **Στη δεύτερη φάση ή μέρος** ενός μαθήματος επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές εργάζονται στο μαθηματικό πρόβλημα, ατομικά ή συλλογικά. Ο δάσκαλος παρέχει καθοδήγηση στους μαθητές καθώς εργάζονται πάνω στο πρόβλημα χωρίς να υπονομεύει την πνευματική αυτονομία του μαθητή.
- **Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο**, ο δάσκαλος εμπλέκει τους μαθητές σε συλλογική συζήτηση και προβληματισμό για τη μαθηματική τους δραστηριότητα για να τους βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν και να καταστήσουν σαφείς τις μαθηματικές ιδέες που υποτίθεται ότι θα διδαχθούν από τη δραστηριότητα.

Τα μαθήματα επίλυσης προβλημάτων συνδέονται συχνά με προσπάθειες εφαρμογής διδασκαλίας που είναι συνεπής με μια κονστρουκτιβιστική προοπτική για τη μάθηση, που δηλώνει ότι οι εκπαιδευόμενοι οικοδομούν ή κατασκευάζουν τη γνώση τους με στοχαστική αφαίρεση και αναδιοργάνωση κατά την μαθηματική δραστηριότητα (von Glasersfeld, 1995). Αυτή η προοπτική οδήγησε σε μια αναδιατύπωση του ρόλου του εκπαιδευτικού προς όφελος των διδακτικών ενεργειών «με επίκεντρο την ακρόαση των μαθητών και την προσοχή στη συλλογιστική τους» (Nelson, 2001). Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι αυτό έχει οδηγήσει σε μια σειρά λανθασμένων αντιλήψεων σχετικά με τον κονστρουκτιβισμό (Fraivillig, Murphy, & Fuson, 1999; Lobato, Clarke, & Ellis, 2005).

Για παράδειγμα, ένα ζήτημα που εμφανίζεται συχνά σε συζητήσεις σχετικά με τα μαθήματα που βασίζονται στην έρευνα είναι ότι οι δάσκαλοι δεν πρέπει να παρεμβαίνουν στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών ή αν το κάνουν, θα πρέπει να αποφεύγουν να λένε ή να δείχνουν στους μαθητές τι να κάνουν ή πώς να σκέφτονται. Οι ερευνητές έχουν επισημάνει ότι πρόκειται για παρανόηση του κονστρουκτιβισμού καθώς υποστηρίζουν ότι στα διερευνητικά μαθήματα οι δάσκαλοι μπορούν και πρέπει να επέμβουν για να προχωρήσουν την σκέψη των παιδιών. Επομένως, το ερώτημα δεν είναι αν, αλλά μάλλον το πώς οι δάσκαλοι μπορούν να παρέμβουν πιο αποτελεσματικά για να προωθήσουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών χωρίς να υπονομεύουν την πνευματική αυτονομία των παιδιών.

Αυτό είναι που κάνει τα μαθήματα διερεύνησης πρόκληση για τους δασκάλους γιατί τείνει να αποκλείει τις παραδοσιακές μεθόδους καθοδήγησης που βασίζονται απλώς στο να λέμε ή να δείχνουμε στους μαθητές τι να κάνουν. Υπήρξε έρευνα για εκπαιδευτικές πρακτικές που παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες και να χτίσουν τις δικές τους μαθηματικές έννοιες (Fraivillig et al., 1999). Ωστόσο, η μελέτη επικεντρώθηκε σε δασκάλους που ήταν επίσης ερευνητές ή δάσκαλοι στην τάξη με ουσιαστική καθημερινή υποστήριξη από ερευνητές. Αν και αυτή η έρευνα έδωσε σημαντικά αποτελέσματα, δεν συνέβαλε τόσο πολύ σε γνώσεις για τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί, χωρίς μεγάλη υποστήριξη, μαθήματα επίλυσης προβλημάτων και τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν όταν το κάνουν (Cengiz et al., 2011). Σκοπός της έρευνας ήταν να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση του ζητήματος εξετάζοντας πώς μια ομάδα καθηγητών μαθηματικών

εφάρμοσε τέτοια μαθήματα που προσπάθησαν να προωθήσουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών χωρίς να υπονομεύουν την πνευματική αυτονομία των μαθητών.

## 2.6 Προώθηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών

Πολλά θεωρητικά πλαίσια έχουν αναπτυχθεί για να μοντελοποιήσουν τις διδακτικές παρεμβάσεις ή ενέργειες που υποστηρίζουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών (βλ., π.χ., Franke et al., 2009; Fraivillig et al., 1999; Lobato et al., 2005; Staples, 2007). Οι Fraivillig et al. ανέπτυξαν το Advancing Children's Thinking (ACT) ως μέρος ενός πενταετούς διαχρονικού προγράμματος μελέτης. Το πλαίσιο ACT διακρίνει τρεις τύπους διδακτικών δράσεων που μπορούν να βοηθήσουν στην προώθηση της σκέψης των μαθητών: επεκτείνει τη μαθηματική σκέψη και τις μεθόδους των μαθητών, υποστηρίζοντας την εννοιολογική κατανόηση τους. Οι στρατηγικές ανάδειξης και υποστήριξης επικεντρώνονται στην «πρόσβαση και διευκόλυνση της σκέψης των παιδιών σχετικά με τις μεθόδους λύσης με τις οποίες έχουν ήδη οικειότητα» (σελ. 160). Η επέκταση της σκέψης των μαθητών, από την άλλη πλευρά, περιλαμβάνει πρόκληση και περαιτέρω ανάπτυξη της σκέψης τους. Ένα σημαντικό εύρημα της μελέτης τους ήταν ότι οι δάσκαλοι ασχολήθηκαν πολύ λιγότερο με την εκμάθηση και την επέκταση από ότι με την υποστήριξη της σκέψης των μαθητών. Οι Fraivillig et al. ισχυρίζονται ότι «μια μερική εξήγηση για αυτές τις διαφορές βρίσκεται στα είδη των παιδαγωγικών δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες για την εκμάθηση, υποστήριξη, και επέκταση» (σελ. 167).

Ισχυρίζονται ότι η υποστήριξη της σκέψης των μαθητών περιλαμβάνει δεξιότητες με τις οποίες οι περισσότεροι δάσκαλοι είναι συνήθως άνετοι επειδή αυτές οι δεξιότητες είναι παρόμοιες με πιο κοινές παραδοσιακές έννοιες της διδασκαλίας. Το να εκκινήσεις και να επεκτείνεις την σκέψη των μαθητών, από την άλλη πλευρά, είναι πιο σύνθετα καθήκοντα. Η διέγερση της μαθηματικής σκέψης του μαθητή είναι χρονοβόρα και απαιτεί υπομονή, δεξιότητες και υψηλά επίπεδα γνώσεων για μεμονωμένα παιδιά και για τυπικές μεθόδους λύσης σε βασικούς μαθηματικούς τομείς. Απαιτεί επίσης αποτελεσματική διαχείριση της τάξης για να βεβαιωθείτε ότι όλοι οι μαθητές συμμετέχουν στις συζητήσεις και την προθυμία και την ικανότητα να χαλαρώσουν τον διανοητικό έλεγχο επαρκώς ώστε τα παιδιά να ανταποκρίνονται με

τις δικές τους μεθόδους λύσης. Ομοίως, η επέκταση της σκέψης των μαθητών απαιτεί πληροφορίες για την ιστορία μάθησης του κάθε παιδιού και μια ρεαλιστική αλλά ελπιδοφόρα άποψη για τις δυνατότητες κάθε παιδιού. Οι Fraivillig και al. υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται καθοδήγηση με αυτές τις διαδικασίες και κάνουν αρκετές προτάσεις για να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στη μελέτη τους.

Οι Cengiz et al. (2011) πρότειναν το Επέκταση του Πλαισίου Σκέψης Μαθητών (Extending Student Thinking-EST), το οποίο σχετίζεται με την εξαγωγή, την υποστήριξη, και εξέλιξη των δράσεων με διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να βοηθήσουν στην επέκταση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Συνολικά, τα ευρήματά τους ήταν παρόμοια με εκείνα στο Fraivillig και al. Οι Conner, Singletary, Smith, Wagner και Francisco (2014) πρότειναν το Υποστήριξη Συλλογικής Επιχειρηματολογίας (Support of Collective argumentation), ένα πλαίσιο που εστιάζει ειδικά στην προώθηση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας.

Υποστηρίζουν ότι οι δάσκαλοι μπορούν να υποστηρίξουν την συλλογική επιχειρηματολογία με τρεις κύριους τρόπους: παροχή τμημάτων ή συστατικών ενός επιχειρήματος, δηλαδή άμεσες εισφορές από τον δάσκαλο στους μαθητές, θέτοντας ερωτήσεις που προκαλούν τμήματα επιχειρημάτων από τους μαθητές ή μέσω άλλων υποστηρικτικών ενεργειών εκτός από ερωτήσεις ή άμεσες συνεισφορές.

Βρέθηκε ότι όταν οι δάσκαλοι εστίαζαν τη σκέψη των μαθητών σε κάτι, υπήρχε διαφοροποίηση για το πόσο η καθοδήγηση των δασκάλων βοήθησε πραγματικά τους μαθητές να επικεντρωθούν σε κάποια σκέψη. Μαζί με την προσφορά βοήθειας, οι δάσκαλοι έδωσαν περισσότερο ή λιγότερο χώρο για την σκέψη των μαθητών. Είναι γνωστό ότι οι εκπαιδευτικοί στην καθημερινή τους εργασία πρέπει βρουν μια ισορροπία ανάμεσα στην προσφορά βοήθειας και στο να αφήσουν τους μαθητές να καταλάβουν.

Φυσικά, όταν ένας δάσκαλος καθοδηγεί ισχυρά, οι μαθητές μπορεί να είναι σε θέση να παρατηρήσουν κάτι, αλλά η ισχυρή καθοδήγηση μπορεί να μειώσει πάρα πολύ τη γνωστική πρόκληση, πράγμα που δεν είναι ο σκοπός στην επίλυση προβλημάτων (Cai & Lester, 2010; Stein, Grover, & Henningsen, 1996). Από την άλλη πλευρά, η μελέτη δείχνει ότι είναι επίσης πιθανό όταν προσπαθεί να δώσει χώρο στη σκέψη των μαθητών, ένας δάσκαλος μπορεί να μην τα καταφέρει να βοηθήσει τους μαθητές να παρατηρήσουν ένα πρόβλημα. Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν τη σημασία της

παρατήρησης και της ερμηνείας των ιδεών των μαθητών καθώς και της προώθησης της σκέψης τους με βάση τις ιδέες τους (π.χ. Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010).

Στην περίπτωση ενός δασκάλου, αν και μπορεί να εκμαιεύσει τις ιδέες των μαθητών διεξοδικά, μπορεί ακόμα να δυσκολεύεται να κατανοήσει τις ιδέες των μαθητών, κάτι που επηρεάζει το πόσο χρήσιμη είναι η καθοδήγηση του δασκάλου για τους μαθητές. Στο καλύτερο σενάριο, η καθοδήγηση του δασκάλου θα πρέπει βοηθήσει τους μαθητές, αλλά ταυτόχρονα να αφήνει χώρο στη σκέψη των μαθητών. Με άλλα λόγια, η καθοδήγηση των δασκάλων ή οι σκαλωσιές θα πρέπει να ξεθωριάσουν έτσι ώστε όταν οι μαθητές μπορούν να κάνουν κάτι μόνοι τους, ο δάσκαλος δεν παρέχει πλέον βοήθεια. Σύμφωνα με τους Van de Pol, Volman και Beishuizen (2010), αυτή είναι μια από τις βασικές αρχές για τη σκαλωσιά.

Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν ξεκινούν συχνά αυθόρμητα να δημιουργήσουν αιτιολόγηση που είναι πιο μαθηματική εάν έχουν ήδη μια εμπειρική επιβεβαίωση (Χρήστου, Μουσουλίδης, Πιταλής, & Πίττα-Πανταζή, 2004; Μαρτίνο & Maher, 1999). Επομένως, είναι σημαντικό οι δάσκαλοι να ωθούν τους μαθητές να οικοδομήσουν μαθηματικές αιτιολογήσεις. Οι δάσκαλοι στη μελέτη<sup>30</sup> το έκαναν αυτό θέτοντας ερωτήσεις στους μαθητές που τόνιζαν την ανάγκη για αιτιολόγηση. Ωστόσο, σύμφωνα με τα αποτελέσματά της έρευνας, αυτό μπορεί να μην είναι αρκετό για την προώθηση της αιτιολόγησης. Η περίπτωση ενός δασκάλου δείχνει ότι ο δάσκαλος μπορεί να ζητά αιτιολόγηση, αλλά να μην βρίσκει τρόπους να βοηθήσει τους μαθητές να ξεκινήσουν να χτίζουν αιτιολογήσεις. Επιπλέον, η ανάλυση του προβληματισμού του δασκάλου δείχνει ότι είχε επίγνωση της σημασίας να κάνει τους μαθητές να δικαιολογήσουν και της αδυναμίας να το πράξει. Αυτή τη συνειδητοποίηση θεωρούν οι ερευνητές ως ένα πρώτο βήμα στην ανάπτυξη των εκπαιδευτικών.

Σε άλλο επεισόδιο, η μελέτη αυτή διαπιστώνει ότι εκτός από το να ζητήσει δικαιολογία αρκετές φορές, ένας δάσκαλος βοήθησε τον μαθητή να δημιουργήσει μια αιτιολόγηση. Το έκανε αυτό διατυπώνοντας πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις σχετικά με την κατάσταση, παρά γενικές ερωτήσεις. Έτσι, αυτή η μελέτη υποστηρίζει τα

---

<sup>30</sup> Hähkiöniemi, M., & Francisco, J. (2019). Teacher Guidance in Mathematical Problem-Solving Lessons : Insights from Two Professional Development Programs. In P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 279-296). Springer. Research in Mathematics Education. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_15)

αποτελέσματα των Franke και al. (2009) ότι η σειρά συγκεκριμένων ερωτήσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δώσουν καλύτερες εξηγήσεις παρά η γενική ερώτηση.

Το ζήτημα της εξεύρεσης ισορροπίας μεταξύ του να βοήσουμε τους μαθητές και του να αφήσουμε χώρο για την δική τους σκέψη προέκυψε και στα δύο θέματα. Η περίπτωση ενός δασκάλου δείχνει ότι μπορεί να έχει επίγνωση της σημασίας του να δίνει χώρο στους μαθητές να σκέφτονται αλλά, ταυτόχρονα, μπορεί να μην είναι σε θέση να προσφέρει βοήθεια στους μαθητές. Από την άλλη, η περίπτωση άλλου δασκάλου δείχνει ότι μπορεί να είναι σε θέση να βοηθήσει μαθητές αλλά, ταυτόχρονα, να μην γνωρίζει ότι δεν δίνει πολύ χώρο για τη σκέψη των μαθητών. Αυτό υποδηλώνει ότι και οι δύο συνειδητοποιούν τη σημασία του να δώσουν χώρο στη σκέψη των ίδιων των μαθητών και να βοηθήσουν ουσιαστικά τους μαθητές χωρίς περιορισμό της σκέψης τους και αυτά είναι ζητήματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τον σχεδιασμό προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών. Αυτό είναι επίσης σημαντικό στην αποτροπή της λανθασμένης αντίληψης ότι ο δάσκαλος δεν πρέπει να παρεμβαίνει στην σκέψη των μαθητών. Επίσης, όταν διδάσκουν μέσω της επίλυσης προβλημάτων, οι δάσκαλοι θα πρέπει να καθοδηγούν την σκέψη των παιδιών (Fraivillig et al., 1999; Lobato et al., 2005).

Ο σκοπός τους σε αυτή τη μελέτη δεν ήταν να συγκρίνουν τα δύο προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης. Ωστόσο, θα ήθελαν να κάνουν εικασίες για το θέμα που έχει να κάνει με το πώς θα πρέπει να παρέχεται βοήθεια στους μαθητές. Τα μαθήματα IBMT ήταν συνηθισμένα σχολικά μαθήματα όπου συνήθως μόνο περιορισμένος χρόνος είναι διαθέσιμος για αυτή τη μακρά δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων. Τα μαθήματα IML, από την άλλη πλευρά, ήταν μέρος ενός προγράμματος μετά το σχολείο όπου πολλά μαθήματα μπορούν να αφιερωθούν στην αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος αν αυτό απαιτείται. Αυτή η πρακτική διαφορά μπορεί να εξηγήσει γιατί οι δάσκαλοι IBMT στόχευαν στο κλείσιμο μέσα σε ένα μάθημα ενώ οι δάσκαλοι IML συχνά τελείωναν τα μαθήματα χωρίς να το έχουν φτάσει στο κλείσιμο. Αυτό φαίνεται, για παράδειγμα, στο γεγονός ότι οι καθηγητές IML ζήτησαν μόνο αιτιολόγηση, ενώ οι δάσκαλοι του IBMT πρόσφεραν καθοδήγηση στους μαθητές στην οικοδόμηση αιτιολόγησης. Αυτή η διαφορά χρονικής κλίμακας μπορεί επίσης να παρέχει ορισμένες δυνατότητες και περιορισμούς για τα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης. Όταν οι δάσκαλοι μαθαίνουν να δίνουν χώρο στη σκέψη των μαθητών, το περιβάλλον μετά το σχολείο μπορεί να προσφέρει στους δασκάλους περισσότερο χρόνο. Από την άλλη

πλευρά, στις πραγματικές τάξεις υπάρχουν χρονικοί περιορισμοί, και οι δάσκαλοι πρέπει να μάθουν να υποστηρίζουν τους μαθητές μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

## 2.7 Εξειδικευμένη Γνώση Καθηγητών Μαθηματικών στη Διαχείριση εργασιών Επίλυσης Προβλημάτων στην τάξη

Η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στον πυρήνα των μεθοδολογικών απαιτήσεων στις αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών, καθώς ο κύριος σκοπός της είναι να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να ασχολούνται με πλούσιες μαθησιακές εργασίες. Όταν προγραμματίζουν, σχεδιάζουν και/ή επιλέγουν προβλήματα, οι δάσκαλοι και οι ερευνητές αντιμετωπίζουν πολλά ερωτήματα: Γιατί να βάλω στους μαθητές μου αυτό το πρόβλημα; Πώς; Είναι ενδιαφέρον αυτό το πλαίσιο για αυτούς; Είναι πρόβλημα ώστε οι μαθητές μου να εφαρμόσουν όσα έχουν ήδη μάθει ή θα χτίσουν νέες γνώσεις; Ποιες λύσεις υπάρχουν και πόσοι τρόποι αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος; Πώς θα το λύσουν οι μαθητές μου; Τι είδους δυσκολίες θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές μου; Θα είναι ίδιες για όλους; Πώς μπορώ να διαχειριστώ αυτές τις δυσκολίες; Τι είδους βοήθεια πρέπει να τους δώσω; Ίσως είναι δυνατόν να επεκταθεί το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας μια στρατηγική «τι θα γινόταν αν...» για παράδειγμα; Τι γνώσεις είναι πιθανό να χρειαστώ στην πορεία επίλυσης αυτού του προβλήματος;

Ο προβληματισμός πάνω σε αυτά τα ερωτήματα μας οδηγεί στη γνώση του δασκάλου. Σε αυτή τη μελέτη<sup>31</sup> οι ερευνητές επικεντρώθηκαν στο είδος της γνώσης του δασκάλου που έχει νόημα, είναι χρήσιμο και είναι ειδικά για καθηγητές μαθηματικών: εξειδικευμένες γνώσεις καθηγητών μαθηματικών (mathematics teachers' specialised knowledge-MTSK). Έδειξαν ότι αυτή η γνώση αναπτύσσεται σε ένα μάθημα επιπέδου δευτεροβάθμιας για τη διαχείριση ενός μαθηματικού

---

<sup>31</sup> José Carrillo-Yañez, Nuria Climent, Miguel Montes, Luis C. Contreras, Eric Flores-Medrano, Dinazar Escudero-Ávila, Diana Vasco, Niélka Rojas, Pablo Flores, Álvaro Aguilar-González, Miguel Ribeiro & M. Cinta Muñoz-Catalán (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model\*, *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981



προβλήματος. Το MTSK είναι απαραίτητο για την αναγνώριση και αξιοποίηση των ευκαιριών μάθησης, ιδιαίτερα την βελτίωση της δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών.

Η ερευνητική βιβλιογραφία προσφέρει διάφορους ορισμούς για το τι συνιστά πρόβλημα και τι μπορεί να θεωρηθεί επίλυση προβλημάτων, αλλά στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, μπορούμε να πούμε ότι ένα απαραίτητο χαρακτηριστικό για να θεωρείται μια εργασία πρόβλημα είναι ότι ο μαθητής δεν έχει έναν άμεσο κανόνα ή αλγόριθμο για να το λύσει (Kantowski, 1981) και αναγκάζεται αντ' αυτού να εφαρμόσει την υπάρχουσα γνώση του σε μια νέα και άγνωστη κατάσταση (Carl, 1989). Το ίδιο το πρόβλημα θα πρέπει να περιλαμβάνει ένα στοιχείο πνευματικής πρόκλησης και θα πρέπει να σχεδιάζεται έτσι ώστε να μην παρουσιάζει καμία εύκολη λύση, αλλά να ωθεί τον μαθητή να σκεφτεί πώς να βρει μια.

Η επίλυση προβλημάτων είναι μια ουσιαστικά μαθηματική δραστηριότητα, και ως τέτοια θα έπρεπε να είναι μια από τις σημαντικότερες δραστηριότητες στην τάξη των μαθηματικών. Αν ο ρόλος του δασκάλου είναι θεμελιώδης σε κάθε πλαίσιο διδασκαλίας-μάθησης, τότε είναι ακόμη πιο ιδιαίτερος όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Η έρευνα έχει δώσει στοιχεία ότι όταν ο δάσκαλος επιλέγει προσεκτικά εργασίες που εμπλέκουν τους μαθητές στην επίλυση προβλήματος, ενθαρρύνοντας τους να διατυπώσουν τη σκέψη τους μέσω ερωτήσεων, και διεγείροντας τον στοχασμό τους, τότε οι μαθητές κερδίζουν σημαντικά στην κατανόησή τους στα μαθηματικών (Rigelman, 2007).

Ο δάσκαλος αντιμετωπίζει το δύσκολο έργο να διατηρήσει μια ισορροπία μεταξύ της διασφάλισης ότι το πρόβλημα συνεχίζει να αποτελεί πρόκληση σε όλα τα στάδια της επίλυσής του (χωρίς οποιαδήποτε μείωση των γνωστικών του απαιτήσεων) (Smith & Stein, 2011) και επίσης ότι είναι εφικτό, ειδικά με τη βοήθεια υποδείξεων και άλλων έγκαιρων εισροών από τον δάσκαλο όταν η πρόοδος σταματά. Είναι επίσης σημαντικό ο δάσκαλος να καθοδηγεί τους μαθητές πώς να προσεγγίζουν τα προβλήματα και τις δυσκολίες που συνεπάγονται, π.χ. ενθαρρύνοντάς τους να διατυπώσουν μεταγνωστικές ερωτήσεις (Schoenfeld, 1992). Όπως είναι σημαντικό το ερώτημα του πώς οι μαθητές προσεγγίζουν τα προβλήματα είναι και ζητούμενο το πώς τα επιλέγει ο δάσκαλος και σχεδιάζει τη χρήση τους: εάν το πρόβλημα είναι πιθανό να εμπλέξει τους μαθητές, αν είναι εφικτό από αυτούς, τις λύσεις που προσφέρει και από

αυτές ποιες αναμένεται να επιτύχουν οι μαθητές, οι δυσκολίες που θα μπορούσαν να προκύψουν και τα διαθέσιμα εργαλεία για την αντιμετώπισή τους, τα μαθησιακά αποτελέσματα (όσον αφορά τόσο στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων όσο και άλλο μαθηματικό περιεχόμενο) και τρόπους για να επεκταθεί ή να προσαρμοστεί το πρόβλημα.

Για να είναι ο δάσκαλος πλήρως καθοριστικός στον ρόλο του, η επαγγελματική γνώση των μαθηματικών του και της επίλυσης προβλημάτων είναι καθοριστικής σημασίας. Η εγγενής φύση της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλημάτων, δίνοντας μεγαλύτερη αξία στην αυτονομία του μαθητή, κάνει την τάξη των μαθηματικών μια απρόβλεπτη αρένα, και είναι το απόθεμα γνώσεων του δασκάλου που θα του επιτρέψει να αναδιαμορφώσει τα σενάρια τους (Schoenfeld, Minstrell, & van Zee, 2000).

## 2.8 Γνώσεις Εκπαιδευτικού και Επαγγελματική Πρακτική

Είναι ευρέως αναγνωρισμένο από την κοινότητα των εκπαιδευτικών μαθηματικών ότι η γνώση του περιεχόμενου που θα διδαχθεί, στην προκειμένη περίπτωση το μαθηματικό περιεχόμενο, είναι απαραίτητη αλλά ανεπαρκής συνθήκη της διδασκαλίας του. Ο Shulman (1986, 1987) μπορεί να θεωρηθεί ο δημιουργός αυτής της αρχής με το έργο του στον καθορισμό των διαφορετικών χαρακτηριστικών της γνώσης των δασκάλων, και έκτοτε έχουν γίνει πολλές μελέτες για αυτό το θέμα στην περιοχή των γνώσεων των καθηγητών μαθηματικών (βλ. Rowland & Ruthven, 2011).

Ας φανταστούμε έναν δάσκαλο που θα ήθελε να ασχοληθεί με τη διαίρεση των κλασμάτων με τους μαθητές τους στην έκτη χρονιά του Δημοτικού Σχολείου. Από μια διαδικαστική άποψη της εκπαίδευσης (Kuhls & Ball, 1986), μπορεί να θεωρήσουμε ότι είναι επαρκές να παρουσιάσει τον αλγόριθμο για τη διαίρεση ως προς τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό γινόμενου, με βάση ότι η διαίρεση με έναν δεδομένο αριθμό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με το αντίστροφό του. Είναι πιθανό ότι μέχρι το τέλος αυτής της διαδικασίας οι μαθητές θα καταλάβουν το νόημα του αλγορίθμου και θα είναι σε θέση να τον χρησιμοποιήσουν, αλλά δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι θα είναι σε θέση να εφαρμόσουν την έννοια σε καθήκοντα επίλυσης προβλημάτων.

Συχνά βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δύο τρόπους για να συλλάβουμε τι είναι τα μαθηματικά και ποιες είναι οι διαδικασίες διδασκαλίας και εκμάθησής τους (σύμφωνα με τη διάκριση που καθιερώθηκε από τον Skemp (1978) μεταξύ της σχεσιακής κατανόησης και της εργαλειακής κατανόησης των μαθηματικών).

Το μοντέλο Εξειδικευμένης Γνώσης του Καθηγητή Μαθηματικών (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK*) (Carrillo et al., 2018; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013) είναι δομημένο σύμφωνα με μια κοινή προσέγγιση από πάνω προς τα κάτω και από κάτω προς τα πάνω (Grbich, 2013). Αναπτύχθηκε με την πάροδο του χρόνου από την ανάλυση της πρακτικής των καθηγητών μαθηματικών (σε ποικίλα εκπαιδευτικά επίπεδα και σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια) και από μια διεξοδική διερεύνηση των γνώσεων τους μέσω τυπικών οργάνων συλλογής δεδομένων όπως κλινικές συνεντεύξεις, γνώσεις για τις οποίες εξετάστηκαν παράλληλα με τις τεκμηριωμένες θεωρητικές πηγές. Από αυτή την άποψη, το μοντέλο είναι αναλυτικό, βασισμένο στην προϋπόθεση ότι οι μαθηματικές γνώσεις του δασκάλου ενσωματώνονται και κατανέμονται σε τρεις τομείς: μαθηματική γνώση (*mathematical knowledge-MK*), γνώση παιδαγωγικού περιεχόμενου (*pedagogical content knowledge-PCK*) και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία και τη μάθησή τους, τα δύο πρώτα από τα οποία προέρχονται από το έργο του Shulman (1986, 1987). Το μοντέλο είναι έτσι δομημένο ώστε να αναγνωρίζει ότι στους δύο πρώτους τομείς διεισδύουν σε βάθος τα περιεχόμενα του τρίτου, δηλαδή οι πεποιθήσεις και οι αντιλήψεις του δασκάλου. Εδώ εξετάζονται οι δύο τομείς γνώσης, MK και PCK.

Το PCK υποδιαιρείται σε τρεις υποτομείς: γνώση των πρότυπων μαθηματικής μάθησης (*knowledge of mathematical learning standards-KMLS*), το οποίο περιέχει γνώσεις σχετικά με τους θεσμικούς μαθησιακούς στόχους, τα επίπεδα εννοιολογικής και διαδικαστικής ανάπτυξης που απαιτούνται σε κάθε εκπαιδευτικό στάδιο και τη σειρά με την οποία πρέπει να διδάσκονται τα θέματα του αναλυτικού προγράμματος. Η γνώση των χαρακτηριστικών της εκμάθησης των μαθηματικών (*knowledge of the features of learning mathematics-KFLM*), στα οποία εντοπίζεται η γνώση σχετικά με τομείς πιθανών αδυναμιών που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές σε κάθε συγκεκριμένο στοιχείο περιεχομένου, τους τρόπους αλληλεπίδρασης των μαθητών με το μαθηματικό περιεχόμενο, προσωπικές ή ακαδημαϊκές θεωρίες μάθησης και τα (μαθηματικά) ενδιαφέροντα και τις προσδοκίες των ίδιων των μαθητών. Και γνώση

διδασκαλίας μαθηματικών (knowledge of mathematics teaching-KMT), η οποία συγκεντρώνει γνώσεις σχετικά με τις θεωρίες της διδασκαλίας μαθηματικού περιεχομένου, προσωπικού ή επίσημου, και τις δυνατότητες και τους περιορισμούς διαφορετικών ειδών πόρων για την αντιμετώπιση διαφορετικών ειδών περιεχομένου, μαζί με το εύρος των στρατηγικών, τεχνικών, εργασιών και παραδειγμάτων που είναι διαθέσιμα.

Ο τομέας των μαθηματικών γνώσεων (MK) αποτελείται επίσης από τρεις υποτομείς: γνώση θεμάτων (knowledge of topics-KoT), η οποία περιλαμβάνει τα πλαίσια και τα φαινόμενα απεικονίζοντας τις πρακτικές εφαρμογές του περιεχομένου, τα μητρώα εκπροσώπησης, μαθηματικές διαδικασίες και ορισμούς, ιδιότητες και τα θεμέλιά τους. Γνώση της δομής των μαθηματικών (knowledge of the structure of mathematics-KSM), που διέπει τις συνδέσεις μεταξύ οποιωνδήποτε στοιχείων γνώσης μέσα στο μοντέλο, αυτά παίρνουν τη μορφή ενός από τους τέσσερις τύπους, απλοποίηση, πολυπλοκοποίηση, εγκάρσια και βοηθητική (Montes, Ribeiro, Carrillo, & Kilpatrick, 2016); και γνώση πρακτικών στα μαθηματικά, που αφορά τα συντακτικά θεμέλια στα οποία στηρίζονται τα μαθηματικά (π.χ. τα χαρακτηριστικά των ορισμών, των αποδείξεων και των διαδικασιών που σχετίζονται με επίλυση προβλήματος).

Οι σχέσεις μεταξύ αυτών των διαφορετικών υποτομέων μπορούν να φανούν καλύτερα όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο για να αναλύσουν τη γνώση που τίθεται σε εφαρμογή σε πραγματικά σενάρια στην τάξη, ή το εφαρμόζουν σε μεταγραφές συνεντεύξεων με δασκάλους που διερευνούν στοιχεία των γνώσεων τους στην πράξη, όπως προσδιορίζονται κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων του μαθήματος. Τέτοιες αναλύσεις τους επέτρεψαν να υποθέσουν τους λόγους για τους οποίους ένας δάσκαλος πήρε συγκεκριμένες αποφάσεις.

Η διαχείριση της μάθησης προσανατολισμένης στην επίλυση προβλημάτων απαιτεί από τον δάσκαλο να κινητοποιεί συνεχώς διαφορετικά στοιχεία εξειδικευμένης γνώσης. Προφανώς, ο δάσκαλος πρέπει να είναι ικανός στα μαθηματικά (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008) και να κατέχει βαθιά κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών (Ma, 1999) ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει τόσο προβλέψιμες όσο και απρόβλεπτες καταστάσεις. Ως εκ τούτου, ο δάσκαλος μπορεί να ανακατευθύνει τη μαθηματική εργασία που γίνεται σε ένα μάθημα ως απάντηση σε μια αναδυόμενη συζήτηση, και αυτό θα απαιτούσε τις εξειδικευμένες γνώσεις του να είναι σε θέση να κάνει τη

σύνδεση από το προγραμματισμένο περιεχόμενο σε οποιοδήποτε άλλο προέκυψε ενώ παρέμεινε εντός των παραμέτρων των προτύπων εκμάθησης των μαθηματικών κατάλληλο για το εκάστοτε εκπαιδευτικό στάδιο.

Ταυτόχρονα, θα πρέπει να διαθέτει επαρκείς γνώσεις παιδαγωγικού περιεχομένου, να είναι σε θέση να διαχειριστεί την κατασκευή της γνώσης των μαθητών του μέσω της χρήσης στρατηγικών και πόρων μάθησης που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων, επίσης να λαμβάνει υπόψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθησιακών προσεγγίσεων των μαθητών του και της αλληλεπίδρασή τους με τα μαθηματικά με σεβασμό όχι μόνο στο συγκεκριμένο περιεχόμενο αλλά και στην ίδια τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.

Η εργασία των δασκάλων στην τάξη θα επηρεαστεί από προσωπικές θεωρίες διδασκαλίας και μάθησης μαθηματικών με διάφορους βαθμούς ανάπτυξης και συνοχής και αντλώντας από μεμονωμένες ή (πιο τυπικά) σύνθετες πηγές, η κυριότερη από τις οποίες είναι οι πεποιθήσεις του ίδιου του δασκάλου, οι θεωρίες που μοιράζονται με άλλους δασκάλους (όπως η σκαλωσιά-scaffolding of mathematical tasks- των μαθηματικών εργασιών που περιγράφονται από τους Slavit και Nelson (2010)) και η επαγγελματική βιβλιογραφία και εξειδικευμένες πηγές (π.χ. η εργασία για τις αρχές της επίλυσης προβλημάτων από τον μαθηματικό George Polya).

Προηγούμενες μελέτες έχουν εξετάσει το είδος της γνώσης που πρέπει να έχει ένας δάσκαλος ώστε να μπορεί να υιοθετήσει μια προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων στην εργασία του. Έτσι, οι Foster, Wake, και Swan (2014) εντοπίζουν στοιχεία της γνώσης των εκπαιδευτικών για τις διαδικασίες που δεν λαμβάνονται επαρκώς υπόψη από τα υπάρχοντα μοντέλα. Για αυτούς, η γνώση των διαδικασιών σχετίζεται άμεσα με τη γνώση των μαθηματικών για την διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων και ενσωματώνει τα ακόλουθα στοιχεία: γνώση των διαδικασιών και των μαθητών, γνώση των διαδικασιών και της διδασκαλίας, και γνώση των διαδικασιών και το πρόγραμμα σπουδών. Οι συγγραφείς υπογραμμίζουν τη διαπίστωση ότι η γνώση των διαδικασιών και η διδασκαλία είναι ιδιαίτερα ανεπαρκώς ανεπτυγμένη στους εκπαιδευτικούς που συμμετέχουν στη μελέτη τους. Ιδιαίτερη σημασία έχει επίσης το έργο του Charman (2015), το οποίο αναλύει το είδος της γνώσης που πρέπει να προωθήσει ο δάσκαλος στους μαθητές του για την ανάπτυξη της επάρκειας επίλυσης προβλημάτων (με βάση την ιδέα της μαθηματικής επάρκειας στο Kilpatrick, Swafford και Findell (2001)). Η

μελέτη προσδιορίζει έξι βασικά συστατικά αυτής της ικανότητας: γνώση των προβλημάτων (συμπεριλαμβανομένης της γνώσης τόσο του τι είναι πρόβλημα όσο και της δομής, των στόχων και των πιθανών δυσκολιών που συνδέονται με τα χαρακτηριστικά ενός προβλήματος), γνώση επίλυσης προβλημάτων (η οποία, εκτός από την επάρκεια επίλυσης προβλημάτων, περιλαμβάνει την κατανόηση της φύσης και των μοντέλων της επίλυσης προβλημάτων), γνώση του problem posing, γνώση των μαθητών σαν λύτες προβλημάτων (δυσκολίες, χαρακτηριστικά ενός καλού λύτη προβλημάτων και πώς οι μαθητές σκέφτονται ενώ λύνουν προβλήματα), γνώση της διδασκαλίας επίλυσης προβλημάτων, και συναισθηματικούς παράγοντες και πεποιθήσεις (που περιλαμβάνει γνώση της επιρροής με την οποία αυτά τα στοιχεία βαρύνουν την διδασκαλία και μάθηση της επίλυσης προβλημάτων).

Άλλες μελέτες έχουν υπογραμμίσει την επιρροή διαφορετικών πτυχών των γνώσεων του δασκάλου για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων. Οι Van Dooren, Verschaffel και Onghena (2002), για παράδειγμα, έχουν δείξει ότι οι γνώσεις του περιεχομένου από τον δάσκαλο επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο αξιολογεί τις στρατηγικές των μαθητών στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Αλλού, οι Foong, Yap και Koay (1996) τονίζουν τη σημασία της επάρκειας του δασκάλου στην επίλυση προβλημάτων παράλληλα με τις αντιλήψεις του για την δική του ικανότητα σαν λύτη προβλημάτων. Και τέλος, οι Carpenter, Fennema, Peterson και Carey (1988) βρίσκουν μια σημαντική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας των εκπαιδευτικών να προβλέπουν την επιτυχία των μαθητών τους και των πραγματικών αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση των μαθημάτων αναδεικνύει στρατηγικά στοιχεία της εξειδικευμένης γνώσης του εκπαιδευτικού που σχετίζονται με τη διαχείριση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλημάτων και προτείνει εναλλακτικές που μπορεί να ακολουθήσει ο δάσκαλος, μαζί με το είδος της γνώσης που θα είχε κινητοποιηθεί αν είχε γίνει έτσι. Όσον αφορά τόσο τη διαμόρφωση όσο και τη διαχείριση της εργασίας, ο ρόλος της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά είναι προφανής: είναι ίσως η πιο εγγενώς μαθηματική από τις εργασίες, καθώς θέτει προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχουν μηχανικές απαντήσεις και στις οποίες είναι ζωτικής σημασίας να μπορούμε να αξιολογήσουμε τις πληροφορίες που δίνονται (έννοιες σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδασκαλία και τη μάθησή τους, που σχετίζονται με συναισθηματικούς παράγοντες και πεποιθήσεις και γνώση των προβλημάτων. Chapman, 2015).

Ο δάσκαλος καταλαβαίνει πώς πρέπει να αντιμετωπιστεί κάποιο είδος γεωμετρικού προβλήματος και γνωρίζει ότι οι μαθητές έχουν την τάση να βασίζονται υπερβολικά στη γραφική υποστήριξη για τη συλλογιστική τους (KFLM, που σχετίζεται με τη γνώση των μαθητών), που δεν είναι έγκυρο μαθηματικό επιχείρημα (KPM, που σχετίζεται με τη γνώση επίλυσης προβλημάτων). Αυτό που είναι πιο εμφανές, ωστόσο, είναι η γνώση του σχετικά με τις στρατηγικές διδασκαλίας για διαχείριση της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων (KMT που σχετίζεται με τη γνώση των διαδικασιών της επίλυσης προβλημάτων), ιδίως τη χρήση ερωτήσεων για τη δημιουργία συζήτησης σχετικά με τις προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος.

Κατά τα άλλα, ένα μεγάλο μέρος των εξειδικευμένων γνώσεων που επιδεικνύει αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο που σχετίζεται με το πρόβλημα. Από αυτή την άποψη, μπορούμε να σημειώσουμε την δική του γνώση και τη σύνδεση που κάνει μεταξύ αυτής της διαδικασίας και αυτής της σχεδίασης (KoT και KSM). Αξιοσημείωτη είναι επίσης η επίγνωση των δυσκολιών που τείνουν να βιώνουν οι μαθητές του και τις τυπικές (λανθασμένες) αντιλήψεις για το θέμα (KFLM). Αποδεικνύει επίσης την κατανόησή του ότι η ρίζα των φαινομενικά αντιφατικών απαντήσεων από τις διαφορετικές μεθόδους αντιμετώπισης του προβλήματος έγκεινται στους μαθηματικούς περιορισμούς (KoT). Ταυτόχρονα, γνωρίζει ότι η αντίληψη που πολλοί από τους μαθητές του έχουν για το θέμα έρχεται σε αντίθεση με αυτήν την αρχή (KFLM). Γνωρίζει, επίσης, άλλες γενικές δυσκολίες που τείνουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να κατασκευάσουν μαθηματικά επιχειρήματα, όπως η διαφοροποίηση μεταξύ των αναγκαίων και ικανών συνθηκών και εξαγωγή συμπερασμάτων από ορισμένες αριθμητικές αναπαραστάσεις, καθώς και δυσκολίες στα ακόλουθα επιχειρήματα εάν, για παράδειγμα, δεν υπάρχει γραπτή υποστήριξη για να τους βοηθήσει να ακολουθήσουν το σκεπτικό (KFLM). Με βάση το KPM του, φροντίζει να διασφαλίσει ότι θα μάθουν να χτίζουν υγιή μαθηματικά επιχειρήματα. Αναγνωρίζει ότι διάφορα στοιχεία μαθηματικού περιεχομένου μπορεί να είναι χρήσιμα εργαλεία για την επίλυση του προβλήματος και έχοντας επίγνωση της σημασίας της προσεκτικής επιλογής παραδειγμάτων για διδασκαλία, φροντίζει να χρησιμοποιεί μια κατάλληλη ποικιλία (KMT). Ωστόσο, παρόλο που οι εξειδικευμένες γνώσεις του επιτρέπουν να οδηγεί τους μαθητές του προς μια λύση μέσω ορισμένων υψηλών προβληματισμών από την πλευρά τους, η συνολική του διαχείριση των εργασιών εγείρει το ερώτημα για το αν αντλεί βαθύτερα τις γνώσεις του για το πώς οι

μαθητές αντιμετωπίζουν το περιεχόμενο και αν οι τυπικές δυσκολίες και τα λάθη τους μπορεί να τον οδήγησαν να δώσει μεγαλύτερη προσοχή στις πιθανές απαντήσεις των μαθητών του.

Η απόδοση του δασκάλου, ειδικά όσον αφορά τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί για να καθοδηγήσει την συζήτηση για το πώς να λυθεί το πρόβλημα, δείχνει πώς η γνώση του για τις συνδέσεις μεταξύ του εν λόγω θέματος και άλλου μαθηματικού περιεχομένου (η πολυπλοκότητα, απλοποίηση, και οι παρατηρημένες βοηθητικές συνδέσεις) του δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσει το πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους και σαν ειδική περίπτωση άλλων καταστάσεων. Η σημασία αυτού του είδους γνώσης της δομής των μαθηματικών έχει τονιστεί σε άλλες μελέτες ως προϋπόθεση για την ερμηνεία της μαθηματικής σκέψης των μαθητών όταν λύνουν προβλήματα (Fernández, Llinares, & Valls, 2013).

Τα παραπάνω απεικονίζουν επίσης έναν τρόπο κατανόησης των μαθηματικών που πηγαίνει πέρα από την απλή διαδικαστική γνώση. Ο δάσκαλος γνωρίζει ότι η διαδικαστική πτυχή, με μια μηχανική εστίαση στους αλγόριθμους που θα εφαρμοστούν, είναι χαρακτηριστική του είδους της εργασίας που διεξάγεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά γνωρίζει επίσης ότι μια προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων θα μπορούσε να είναι ένα αποτελεσματικό μέσο για την αντιμετώπιση αυτής της τάσης, κυρίως μέσω της παρουσίασης των προβλημάτων που απαιτούν περισσότερα από την εφαρμογή σταθερών διαδικασιών για την εύρεση προκαθορισμένων απαντήσεων και αντ' αυτού ενθαρρύνουν την κατανόηση των μαθηματικών εμπλέκοντας στοιχεία και την παραγωγή νέων ερωτήσεων που δίνουν μια εικόνα για την πραγματική αίσθηση του τι σημαίνει να κάνεις μαθηματικά (γνώση επίλυσης προβλημάτων).

Οι εξειδικευμένες γνώσεις του δασκάλου στον τομέα της επίλυσης προβλημάτων, αποτυπώνονται μέσω του μοντέλου MTSK, το οποίο δίνει ιδιαίτερη έμφαση σε αυτές τις δύο πτυχές, τη δομή των μαθηματικών και των μαθηματικών πρακτικών. Και οι δύο πτυχές είναι ουσιαστικές καθώς προικίζουν τον εκπαιδευτικό με τα κατάλληλα εργαλεία για τη διαχείριση των ευκαιριών διδασκαλίας και μάθησης στην τάξη. Πάνω από όλα, δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να αξιοποιήσουν στο έπακρο τις ενδεχόμενες καταστάσεις που δημιουργούνται από την επίλυση προβλημάτων και έτσι ακονίζουν τις δεξιότητες των μαθητών στην επίλυση



προβλημάτων. Γι' αυτόν τον λόγο πιστεύουμε ότι αξίζει τον κόπο να ερευνήσουμε και να προβληματιστούμε σχετικά με τη γνώση που φέρνουν στην διαδικασία οι δάσκαλοι όταν επικεντρώνονται στην κατασκευή μαθηματικής γνώσης μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Για το σκοπό αυτό, το μοντέλο MTSK, που επινοήθηκε ως εργαλείο για την ανάλυση της γνώσης των εκπαιδευτικών, γίνεται επίσης σημείο αναφοράς για την κατασκευή αυτής της γνώσης, τόσο στο πλαίσιο της προϋπηρεσιακής όσο και της ενδοϋπηρεσιακής εκπαίδευσης. Ως εκ τούτου, μέσω της ανάπτυξης της επίλυσης προβλημάτων, των μαθηματικών διασυνδέσεων, των τρόπων διδασκαλίας των μαθηματικών και της κατανόησης των προσεγγίσεων των μαθητών η εξεύρεση λύσεων μπορεί να βελτιωθεί.

### 3. Όψεις της Επαγγελματικής Ανάπτυξης Εκπαιδευτικών και Επίλυση προβλήματος

#### 3.1 Ερωτήσεις δασκάλων στην επίλυση προβλημάτων στις Τάξεις Άλγεβρας

Σε αυτή την μελέτη<sup>32</sup>, η εστίαση των ερευνητών είναι στους τρόπους με τους οποίους δύο εκπαιδευτικοί εργάστηκαν με μαθητές για να επιδείξουν τη λύση προβλημάτων άλγεβρας με βάση τα συμφραζόμενα στα μαθήματα άλγεβρας. Χρησιμοποιούν δύο επεισόδια στην τάξη για την απεικόνιση του πώς προσπάθησαν να εκμαιεύσουν τις μαθηματικές ιδέες των μαθητών για αλγεβρικά θέματα, παρακολουθώντας κυρίως τις προσεγγίσεις μέσω ερωτήσεων των εκπαιδευτικών. Βρήκαν ότι οι εκπαιδευτές έθεσαν κυρίως ερωτήσεις χαμηλότερων γνωστικών απαιτήσεων και χρησιμοποίησαν ποικίλες προσεγγίσεις για να προκαλέσουν τις μαθηματικές ιδέες των προβλημάτων, όπως η χρήση παραδειγμάτων σχετικά με τους μαθητές και χωρισμός των προβλημάτων σε μικρότερες εργασίες, που μαζί βοηθούν στον εντοπισμό μιας λύσης.

---

<sup>32</sup> Mali, A., Gerami, S., Ullah, A., & Mesa, V. (2019). Teacher Questioning in Problem Solving in Community College Algebra Classrooms. In P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 317-335). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_17)

Περίπου το 43% όλων των προπτυχιακών φοιτητών στις Ηνωμένες Πολιτείες εγγράφονται στα κοινοτικά κολέγια για να συνεχίσουν τη σχολική τους εκπαίδευση (Blair, Kirkman, & Maxwell, 2018). Τα κοινοτικά κολέγια είναι δημόσια μεταδευτεροβάθμια ιδρύματα που προσφέρουν τα πρώτα 2 χρόνια πτυχίου τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, προσελκύοντας ένα σύνολο φυλετικά διαφορετικών φοιτητών που είναι επίσης μεγαλύτεροι, εργαζόμενοι ή με οικογενειακές υποχρεώσεις. Τα προγράμματα μαθημάτων είναι ευέλικτα και τα δίδακτρα είναι χαμηλά σε σύγκριση με τα πανεπιστήμια. Τα κοινοτικά κολέγια προσφέρουν επίσης αποκατάσταση, επαγγελματικής ή συνεχιζόμενης εκπαίδευσης και η δυνατότητα μετεγγραφής σε πανεπιστήμιο 4 ετών για να ολοκληρώσουν προπτυχιακό δίπλωμα.

Στα κοινοτικά κολέγια τα μαθήματα ποικίλλουν από αυτά που έχουν σχεδιαστεί για την προετοιμασία των φοιτητών για μαθηματικά πανεπιστημιακού επιπέδου σε αυτά που απαιτούνται στα πρώτα 2 χρόνια ενός προπτυχιακού τίτλου. Δυστυχώς, τα ποσοστά αποτυχίας σε μαθήματα μαθηματικών, ειδικά στην άλγεβρα, κυμαίνονται από 30% έως 70% (Bahr, 2010), το οποίο μπορεί να είναι επιζήμιο για πολλούς μαθητές καθώς πρέπει να περάσουν τα μαθήματα της άλγεβρας είτε για μετεγγραφή σε πανεπιστήμιο 4 ετών είτε για να αποκτήσουν πιστοποιητικό πτυχίου ή πιστοποιητικό από το κοινοτικό κολέγιο για να ενταχθούν στο εργατικό δυναμικό. Ωστόσο, τα κοινοτικά κολέγια δεν έχουν κερδίσει μεγάλη προσοχή από την ερευνητική κοινότητα τα τελευταία χρόνια (Mesa, 2017), και σημαντικά ερωτήματα σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών παραμένουν: Ποιες διδακτικές πρακτικές θα μπορούσαν να διευκολύνουν την εκκίνηση των μαθηματικών ιδεών; Θα μπορούσε η επίλυση προβλημάτων να βοηθήσει στην αναστροφή των ποσοστών αποτυχίας; Ποια είναι η φύση της επίλυσης προβλημάτων στα κοινοτικά κολέγια;

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι μια σημαντική πτυχή των μαθηματικών και της διδασκαλίας και της μάθησής τους (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Παρόλο που η διδασκαλία και η μάθηση επίλυσης προβλημάτων ήταν ελάχιστα μελετημένα στο πλαίσιο των τάξεων μαθηματικών των κοινοτικών κολεγίων, οι συγγραφείς πιστεύουν ότι η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων είναι ζωτικής σημασίας για τους μαθητές μαθηματικών του κοινοτικού κολεγίου γιατί οι μαθητές μπορεί να συσχετίσουν τα μαθηματικά με τις εμπειρίες τους. Η προώθηση και η εξάσκηση στην επίλυση προβλημάτων είναι ακόμη πιο ζωτικής σημασίας για τους μαθητές στα μαθήματα άλγεβρας, καθώς αυτό μπορεί να είναι το

τελευταίο μάθημα μαθηματικών που παρακολουθούν πριν ενταχθούν στο εργατικό δυναμικό, παρακολουθώντας προγράμματα πιστοποίησης ή μεταβαίνοντας σε τετραετή ιδρύματα, και όλοι τους χρειάζονται δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων για να διακριθούν.

Στο πλαίσιο του μεγάλου ομοσπονδιακού χρηματοδοτούμενου έργου, Algebra Instruction at Community Colleges (AI@CC, Watkins et al., 2016), αναζητήσαν περιπτώσεις επίλυσης προβλημάτων από όλη την τάξη, όπου ο εκπαιδευτής και οι μαθητές ασχολήθηκαν με την επίλυση μη διαδικαστικών προβλημάτων που συνεπάγονται αβεβαιότητα. Το πρόβλημα περιλαμβάνει μια κατάσταση για την οποία οι λύτες δεν έχουν έτοιμη απάντηση που βασίζεται σε γνωστές διαδικασίες (π.χ. Perkins, 2000; Resnick & Glaser, 1976; Schoenfeld, 1992). Μια τέτοια κατάσταση μπορεί να περιγραφεί με τους όρους επίλυσης προβλημάτων του Schoenfeld (1992): οι λύτες οποιουδήποτε επιπέδου τεχνογνωσίας βιώνουν αβεβαιότητα και μπορούν να διερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δοκιμαστικές προσεγγίσεις και συναφή μαθηματικά παραδείγματα. Στο πλαίσιο αυτό, οι εκπαιδευτές έμπλεκαν τους μαθητές στα μαθηματικά του μαθήματος κυρίως κάνοντας μαθηματικές ερωτήσεις και περιστασιακά με επίλυση προβλημάτων.

Για αυτά τα προβλήματα, η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ξεκίνησε με τον εκπαιδευτή και τους μαθητές να διερευνούν προσεγγίσεις για να κατανοήσουν τις υποκείμενες μαθηματικές ιδέες και να προτείνουν μια ρητή έκφραση που μοντελοποιεί την κατάσταση. Οι ερευνητές παρατήρησαν τον βασικό ρόλο των ερωτήσεων των δασκάλων στην εμπλοκή των μαθητών στα μαθηματικά και στην εκμείωση των μαθηματικών τους ιδεών που σχετίζονται με τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Τα ερωτήματα που έθεσαν ήταν: Ποια είναι η γνωστική απαίτηση των μαθηματικών ερωτημάτων που θέτουν οι εκπαιδευτικοί κατά την επίλυση προβλημάτων; Πώς εξάγονται οι μαθηματικές ιδέες μέσα από αυτές τις μαθηματικές ερωτήσεις;

Επιλέξανε σκόπιμα επεισόδια επίλυσης προβλημάτων που εμπεριέχουν προβλήματα με βάση αυτά που ταυτόχρονα διδάσκονταν στις τάξεις. Θεώρησαν ότι προβλήματα με το πλαίσιο από την καθημερινή ζωή είναι πιο ελκυστικά για τους μαθητές, καθώς είναι κοντά στη ζωή των περισσότερων μαθητών και μπορεί να περιλαμβάνουν δεξιότητες και γνώσεις που φέρνουν οι μαθητές στην τάξη. Τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου έχουν σκοπό να προετοιμάσουν τους μαθητές

για τη ζωή πέρα από όρια των τάξεων των μαθηματικών (American Mathematical Association of Two-year Colleges, 2018; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Μερικοί μελετητές (π.χ., Brown, Collins, & Duguid, 1989) έχουν υποστηρίξει ότι τα μαθηματικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, γνωστά και ως λεκτικά προβλήματα, είναι αυθεντικά ή «κατασκευάζονται» (Boaler, 1993, σελ. 14). Τα προβλήματα παρουσιάζουν ειλικρινείς προσπάθειες από τους εκπαιδευτές για να εμπλέξουν τους μαθητές τους σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων που είναι πιο κοντά στην καθημερινή ζωή των μαθητών παρά προβλήματα φορμαλιστικά (π.χ. "λύστε ως προς x"). Το πλαίσιο αυτών των προβλημάτων ωστόσο είναι αυτό που χρησιμοποιείται και μπορεί να μην αντανάκλουν προβλήματα του «πραγματικού κόσμου». Επιπλέον, τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν ταιριάζουν με τους όρους επίλυσης προβλημάτων Schoenfeld (1992) καθώς δεν είχαν διαδικαστικό χαρακτήρα (οι μαθητές δεν αναμενόταν να περάσουν από ένα σύνολο βημάτων για την επίλυσή τους), φάνηκαν οι μαθητές να βιώνουν κάποιο επίπεδο αβεβαιότητας και θα μπορούσαν να εξερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δοκιμαστικές προσεγγίσεις.

### 3.2 Ερωτήσεις σε Αίθουσες Μαθηματικών Μεταδευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Η μελέτη πρακτικών επίλυσης προβλημάτων με έμφαση στις ερωτήσεις του δασκάλου είναι μια περιοχή που αξίζει να διερευνηθεί γιατί ανοίγει ευκαιρίες για να κατανοηθεί πώς να υποστηριχτούν οι εκπαιδευτές στη χρήση πρακτικών που εστιάζουν στην εκμάθηση των μαθηματικών ιδεών των μαθητών ενθαρρύνοντας τη συμμετοχή των μαθητών στην αλληλεπίδραση στην τάξη.

Στο πλαίσιο των πανεπιστημίων, ο Viirman (2015) κατηγοριοποίησε τις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών στον λογισμό, την άλγεβρα και την αφηρημένη άλγεβρα επτά καθηγητών μαθηματικών σε τρία Σουηδικά πανεπιστήμια. Βρήκε ότι ενώ οι «ρητορικές» και οι «ελέγχου ή κατανόησης» ερωτήσεις —όπως «ακολουθείτε;»—ήταν συνηθισμένες, δεν ήταν «γνήσιες ερωτήσεις» που απαιτούν υψηλότερη γνωστική απαίτηση. Ο Viirman (2015) εξήγησε ότι αυτές οι ερωτήσεις απέτυχαν να εξετάσουν τη γνώση των φοιτητών με σκοπό τη «μοντελοποίηση γενικών πρότυπων μαθηματικού λόγου», στερώντας από τους φοιτητές την ευκαιρία να παρατηρήσουν πώς γίνονται τα μαθηματικά και ποιες ερωτήσεις τίθενται κατά την επίλυση μαθηματικού

προβλήματος. Όμοια, οι Paoletti και al. (2018) μελέτησαν τις ερωτήσεις δασκάλων σε προχωρημένα μαθήματα μαθηματικών (π.χ. θεωρία αριθμών, γραμμική άλγεβρα, πραγματική ανάλυση) σε 11 αμερικανικά πανεπιστήμια και βρήκαν ανάλογα αποτελέσματα όπως ο Viirman (2015), παρόλο που οι ερωτήσεις των καθηγητών διέφεραν ως προς τη συχνότητα και τον τύπο από καθηγητή σε καθηγητή, «η πλειοψηφία των ερωτήσεων ζητούσαν από τους φοιτητές να ανακαλέσουν πληροφορίες ή διαδικασίες (Fact) ή παρείχαν το επόμενο βήμα σε έναν υπολογισμό ή απόδειξη (Next step)» (σελ. 9) που απαιτεί χαμηλότερα επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων. Οι Paoletti και al. (2018) συμπέραναν ότι οι δάσκαλοι κάνουν πιο εύκολες ερωτήσεις επειδή τείνουν να πιστεύουν ότι οι μαθητές είναι περισσότερο ικανοί να απαντήσουν σε αυτές. Προσπάθησαν επίσης να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι ερωτήσεις υποστήριζαν την απόσπαση μαθηματικών ιδεών. Ταξινόμησαν τις συνεισφορές των φοιτητών σε μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ. ιδιότητες, ορισμοί, ένα βήμα διαδικασίας) και τρόπους συλλογισμού (π.χ. πώς να προσεγγίσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα). Σε μια άλλη μελέτη, οι Jaworski, Mali, και Petropoulou (2017) εστίασαν σε ένα σύνολο μελετών παρατήρησης που χαρακτηρίζουν τη διδασκαλία των πανεπιστημιακών μαθηματικών στις διαλέξεις και μαθήματα σε μια μικρή ομάδα φοιτητών. Σε μια από τις μελέτες, ένας καθηγητής συνεργάστηκε με έναν ερευνητή για την ανάπτυξη τρόπων για την απόσπαση της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος των φοιτητών στις τάξεις μαθηματικών του πρώτου έτους. Η μέσω ερωτήσεων του δασκάλου προσέγγιση προέκυψε ως ένας από αυτούς τους τρόπους (ο δάσκαλος θεωρείται ως ο εκπαιδευτής σε αυτή η μελέτη). Αντί να παρουσιάζει τα μαθηματικά στον φοιτητή απευθείας, ο καθηγητής ανέπτυξε μια προσέγγιση ερωτήσεων χρησιμοποιώντας δύο βασικούς τύπους ερωτήσεων: «ερωτήσεις νοήματος» που ζητούσαν από τους μαθητές να αρθρώσουν το μαθηματικό νόημα (π.χ. «Μπορείς να πεις γιατί;») και «ερωτήσεις πρόσκλησης» που ζητούσαν όλη η τάξη ή συγκεκριμένοι φοιτητές να δώσουν μια μαθηματική απάντηση.

Τρεις μελέτες έχουν διερευνήσει ρητά τη χρήση των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών στις αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών σε κοινοτικά κολέγια στις Ηνωμένες Πολιτείες. Σε μια διερευνητική μελέτη, η Mesa (2010) παρατήρησε επτά καθηγητές κοινοτικών κολεγίων και κατηγοριοποίησε τις ερωτήσεις του δασκάλου με βάση τις γνωστικές απαιτήσεις των ερωτήσεων των δασκάλων. Η ανάλυσή της έδειξε ότι «οι μαθητές σε αυτές τις τάξεις είχαν χαμηλά επίπεδα λεξιλογικής και γνωστικής πολυπλοκότητας». Σε άλλη μελέτη, οι Mesa and Lande (2014) διερεύνησαν τις

ερωτήσεις των εκπαιδευτικών σε μαθήματα τριγωνομετρίας σε κοινοτικά κολέγια. Χρησιμοποιώντας τον φακό των γνωστικών απαιτήσεων, όρισαν σαν καινοτόμες ερωτήσεις τις ερωτήσεις που τέθηκαν χωρίς να αναμένεται από τους μαθητές να γνωρίζουν την απάντηση ή τη διαδικασία για να βρουν την απάντηση. Διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτές είτε απάντησαν τις νέες ερωτήσεις τους ή τις επαναδιατύπωσαν για να μειώσουν το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που είχαν θέσει στις αρχικές τους ερωτήσεις. Σε μια παρόμοια μελέτη με έξι εκπαιδευτές άλγεβρας από τρία διαφορετικά κοινοτικά κολέγια, οι Mesa, Ullah, Mali και Diaz (2018) χρησιμοποίησαν μια αναθεωρημένη ταξινόμηση των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών, με βάση το αν η ερώτηση προκαλούσε την απόκριση του μαθητή: πραγματοποιημένες μαθηματικές ερωτήσεις (που είχαν απαντηθεί από τους μαθητές ή που είχαν χρόνο αναμονής τουλάχιστον 5 δευτερολέπτων), μαθηματικές ερωτήσεις που δεν είχαν απάντηση μαθητή και μη μαθηματικές ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις κωδικοποιήθηκαν επίσης σε σχέση με τις γνωστικές τους απαιτήσεις: αυθεντικές (ερωτήσεις ανοιχτού τύπου που απαιτούν πληροφορίες στις οποίες δεν έχουν εκτεθεί οι μαθητές), οιονεί αυθεντικές (ερωτήσεις που απαιτούν την εφαρμογή γνωστής ή μερικώς γνωστής διαδικασίας), και μη αυθεντικές (ερωτήσεις που απαιτούν ανάκληση πληροφοριών που είναι γνωστές στους μαθητές). Χρησιμοποιώντας αυτές τις κατηγοριοποιήσεις, οι Mesa et al. (2018) διαπίστωσαν ότι το 62% των ερωτήσεων του εκπαιδευτή ήταν πραγματοποιημένες μαθηματικές ερωτήσεις, ενώ το 14% ήταν απραγματοποίητες μαθηματικές ερωτήσεις. Είναι ενδιαφέρον ότι βρέθηκε μια στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων και του αν η ερώτηση πραγματοποιήθηκε ή όχι, υποδηλώνοντας ότι αυτοί οι εκπαιδευτές παρείχαν περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές να απαντήσουν μη αυθεντικές ερωτήσεις αντί για αυθεντικές ή οιονεί αυθεντικές ερωτήσεις.

Η πλειονότητα των μελετών που εξέτασαν οι ερευνητές αφορούσαν κυρίως την κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων των δασκάλων—είτε βασίζονται σε γνωστική απαίτηση είτε βασίζονται σε τρόπους εκμάθησης μαθηματικών ιδεών, συγκρίνοντας τις σχετικές συχνότητες κάθε κατηγορίας, και προσφέροντας διάφορες εξηγήσεις για το γιατί οι δάσκαλοι κάνουν αυτές τις μαθηματικές ερωτήσεις με τον τρόπο που το κάνουν. Αυτές οι μελέτες δείχνουν ότι οι δάσκαλοι συνήθως κάνουν ερωτήσεις σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, όπως γεγονότα και επόμενο βήμα των διαδικασιών, παρά ερωτήσεις με υψηλότερη γνωστική απαίτηση που προκαλούν τρόπους να κάνουμε και συλλογιστικά μαθηματικά. Οι συγγραφείς διερευνούν το επίπεδο της

γνωστικής απαίτησης των ερωτήσεων των δασκάλων σε μια κατάσταση επίλυσης προβλημάτων για να προσφέρουν γνώσεις σχετικά με το εάν ένα πλαίσιο σχετικό με τις εμπειρίες των μαθητών μπορεί ενδεχομένως να βοηθήσει τους δασκάλους να κάνουν ερωτήσεις που προκαλούν τις μαθηματικές ιδέες των μαθητών, υπερβαίνοντας τα γεγονότα και το επόμενο βήμα των διαδικασιών.

Η διδασκαλία και η μάθηση στην τάξη είναι κοινωνικά φαινόμενα μεταξύ των εμπλεκόμενων ανθρώπων που υποδύονται δύο ρόλους, αυτόν του δασκάλου ή του μαθητή. Αυτοί οι δύο ρόλοι είναι αισθητά διαφορετικοί. Οι άνθρωποι στο ρόλο των δασκάλων είναι αυτοί που είναι υπεύθυνοι για την οργάνωση των δραστηριοτήτων που θα δημιουργήσει ευκαιρίες για να μάθουν οι μαθητές το περιεχόμενο, ενώ οι άνθρωποι στο ρόλο των μαθητών είναι υπεύθυνοι για τη συμμετοχή στις δραστηριότητες που προτείνουν οι εκπαιδευτικοί. Σύμφωνα με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (TDS, Brousseau, 1997), το «οι τριών τρόπων αλληλεπιδράσεις μεταξύ του δασκάλου, του μαθητή και του αντικειμένου σπουδών» ρυθμίζεται από «σιωπηρούς κανόνες που λειτουργούν σαν σύμβαση» (Herbst, 2003, σ. 204). Αυτές οι νόρμες θεσπίζουν βασικούς κανόνες δέσμευσης μεταξύ των δασκάλων, των μαθητών και του περιεχομένου κατά τη διάρκεια του μαθήματος (Herbst & Chazan, 2011). Επικεντρώνοντας την έρευνα στις υποθέσεις της διδασκαλίας που σχετίζεται με τους δασκάλους που επιδεικνύουν παραδείγματα (δηλ. παρουσιάζοντας στους μαθητές μια διαδικασία που θα μπορούσε να ακολουθηθεί για να βρεθεί λύση σε ένα πρόβλημα σχολικού βιβλίου ή δείχνοντας στους μαθητές πώς λειτουργεί ένα θεώρημα ή ένας ορισμός) στους μαθητές των μαθηματικών του κοινοτικού κολεγίου (Mesa & Herbst, 2011) οι Mesa και Herbst έχουν υποθέσει διάφορους κανόνες που ρυθμίζουν αυτό το έργο.

Κανείς δεν είναι υπεύθυνος για την αιτιολόγηση των βημάτων σε ένα παράδειγμα ή για την εξήγηση του γιατί μια απάντηση έχει νόημα. Οι δάσκαλοι εμπλέκουν τους μαθητές θέτοντας ερωτήσεις σχετικά με τον τρόπο εφαρμογής γνωστών διαδικασιών παρά τους ζητούν να αποφασίσουν ποια διαδικασία θα εφαρμόσουν. Οι δάσκαλοι προσφέρουν ως παραδείγματα προβλήματα που περιέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που παράγουν μόνο μία λύση. Οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν για να δείξουν την ενασχόλησή τους με το μάθημα, και η συμμετοχή τους περιορίζεται στην εκτέλεση [δεδομένων] βημάτων.

Ενώ η διαμόρφωση των κανόνων βοηθά στην κατανόηση του καταμερισμού της εργασίας δασκάλου-μαθητή σε τάξεις κοινοτικών κολεγίων, υπολείπεται στο να εκτιμήσει τη γνωστική εργασία που αναμένεται να επιδιώξουν οι μαθητές όταν τους ζητηθεί να εκπληρώσουν τον ρόλο τους ως μαθητές σε αυτήν την εκπαιδευτική κατάσταση. Για την αντιμετώπιση αυτής της έλλειψης, οι συγγραφείς παρακολουθούν τη γνωστική απαίτηση που υπονοείται στα ερωτήματα που θέτουν οι δάσκαλοι στη διαδικασία για να καταλήξουν στη λύση ενός προβλήματος. Χρησιμοποιώντας την αναθεωρημένη έκδοση της ταξινόμησης στόχων του Bloom (Anderson και al., 2001), προτείνουν μια κατηγοριοποίηση των μαθηματικών ερωτήσεων, με βάση το έργο της Mesa και των συναδέλφων της (Mesa, 2010; Mesa, Celis, & Lande, 2014; Mesa & Lande, 2014) είτε ως αυθεντικές, είτε ως σχεδόν αυθεντικές είτε ως μη αυθεντικές, που ζητούνται στις τάξεις των κοινοτικών κολεγίων και που βοηθούν στην περιγραφή του επιπέδου της γνωστικής ζήτησης που προσφέρεται στους μαθητές.

Τα μαθηματικά προβλήματα που τίθενται σε ένα πραγματικό πλαίσιο έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν στους φοιτητές σημαντικές συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών γνώσεων και των προσωπικών τους εμπειριών. Τέτοια προβλήματα μπορούν να παρέχουν στους εκπαιδευτικούς ευκαιρίες να κάνουν ερωτήσεις που εμπλέκουν τους μαθητές με πιο απαιτητική γνωστική εργασία με τα μαθηματικά. Ακόμα κι αν το πρόγραμμα σπουδών δεν προσφέρει προβλήματα που έχουν ισχύ εκτός της σχολικής ζωής, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τροποποιήσουν τα προβλήματα προκειμένου να αξιοποιήσουν τις εμπειρίες των μαθητών προκειμένου να διευκολύνουν την εκκίνηση των μαθηματικών ιδεών κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Περισσότερες εργασίες πρέπει να γίνουν για την υποστήριξη των εκπαιδευτών ώστε να γίνουν ικανοί στην κεφαλαιοποίηση αυτών των πόρων. Για παράδειγμα, παρατηρήθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την τάση να δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να απαντήσουν σε αυθεντικές και οιονεί αυθεντικές ερωτήσεις κατά την επίλυση προβλημάτων. Έτσι, προγράμματα επαγγελματικής εξέλιξης μπορούν να υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς προς αυτή την κατεύθυνση.

Οι ερευνητές προσφέρουν διάφορους τρόπους που οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να προκαλέσουν μαθηματικές ιδέες. Φροντίζοντας οι μαθητές να έχουν χρόνο να σκεφτούν μια απάντηση δίνοντας χρόνο αναμονής τουλάχιστον 5 δευτερολέπτων μπορούν να αυξήσουν τις ευκαιρίες για τους μαθητές να συμμετάσχουν στη λύση ενός προβλήματος. Προσκαλώντας τους μαθητές στον διάλογο της τάξης



χρησιμοποιώντας τα ονόματα των μαθητών (βλ. Jaworski et al., 2017) μπορεί να προτρέψουν τους μαθητές, οι οποίοι συνήθως δεν μιλούν, να αισθάνονται ότι συμμετέχουν στην εργασία της τάξης και να προσφέρουν τις σκέψεις τους. Επιπλέον, τροποποιώντας μαθηματικά παραδείγματα ώστε να είναι σχετικά με τις εμπειρίες των μαθητών μπορεί να τους επιτρέψει να συνδέσουν τις προηγούμενες γνώσεις τους με αυτό που τους ζητείται σε νέες καταστάσεις. Τέλος, διαχωρίζοντας το μαθηματικό πρόβλημα σε μικρότερα, πιο διαχειρίσιμα, καθήκοντα μπορεί να αναλύσουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος και να βοηθήσουν τους μαθητές στην κατανόηση του προβλήματος και στην εξεύρεση νέων τρόπων επίλυσής του.

Τα μαθήματα μαθηματικών στα κοινοτικά κολέγια τείνουν να έχουν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας (Blair et al., 2018). Οι τρόποι με τους οποίους οι εκπαιδευτές συνεργάζονται με τους μαθητές για να επιδείξουν τα μαθηματικά και να διατηρήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τις μαθηματικές ιδέες αξίζουν προσοχής. Ο σχεδιασμός και η χρήση προβλημάτων με πλαίσιο από την πραγματική ζωή έχει τη δυνατότητα να εμπλέκει περισσότερους μαθητές στις τάξεις τους. Οι ερευνητές βρίσκουν χαμηλή συχνότητα αυθεντικών και οιονεί αυθεντικών ερωτήσεων που τίθενται στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων. Συμπεριλαμβάνοντας ερωτήσεις διαφόρων επιπέδων γνωστικής ζήτησης στη διδασκαλία είναι σημαντικό, καθώς διαφορετικοί τύποι ερωτήσεων εξυπηρετούν διαφορετικούς σκοπούς κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (βλ. Mesa & Lande, 2014; Temple & Doerr, 2012). Η οπτική των μαθητών για την εργασία τους με τα προβλήματα χρειάζονται επίσης προσοχή. Εξερευνώντας τις αναμνήσεις των μαθητών για καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων στην τάξη και τις ευκαιρίες τους για πρόσβαση στις μαθηματικές ιδέες μέσω των προσεγγίσεων με ερωτήσεις των εκπαιδευτικών τους μπορεί να προσφέρει πληροφορίες για τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προσεγγίσουν τους μαθητές και να τους εμπλέξουν στις μαθηματικά που διακυβεύονται.

### 3.3 Χάος, Έλεγχος και Ανάγκη: Επιτυχία και Βιωσιμότητα της Επαγγελματικής Ανάπτυξης στην Επίλυση Προβλημάτων

Πολλά προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης (ΕΑ) στοχεύουν οι εκπαιδευτικοί να ενσωματώνουν περισσότερη επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία

τους των μαθηματικών, αλλά η έρευνα που στοχεύει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι δάσκαλοι διατηρούν αυτή την αλλαγή είναι συγκριτικά λιγότερο αναπτυγμένη. Σε αυτή την έρευνα<sup>33</sup> παρουσιάζουν μερικά αποτελέσματα για τις εμπειρίες των εκπαιδευτικών στους 18 μήνες μετά την ολοκλήρωση της ΕΑ στη διδασκαλία συνεργατικής επίλυσης μη συνηθισμένων προβλημάτων. Δεκαπέντε καθηγητές που ολοκλήρωσαν το μάθημα το 2015 προσφέρθηκαν εθελοντικά να συμμετέχουν σε έρευνα που περιλάμβανε την απάντηση σε μια σειρά από μηνύματα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου όλο το 2016, μια ημιδομημένη συνέντευξη το 2017 και δύο παρατηρήσεις στην τάξη. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν την περίπτωση ενός εκπαιδευτικού που αρχικά έκανε επίδειξη πολύ καλής εφαρμογής της δραστηριότητας επίλυσης προβλημάτων και ξεπέρασε πολλούς από τους περιορισμούς που διατυπώνονται από άλλους εκπαιδευτικούς. Κατά τον πρώτο χρόνο μετά την ΕΑ, είχε μια ταυτότητα «επαγγελματία-μαθητή». Ήταν πρόθυμη να βελτιώσει την πρακτική της και την έκδηλη δέσμευσή της για την ενσωμάτωση δραστηριοτήτων επίλυσης προβλημάτων για το σκοπό αυτό. Ωστόσο, σε μια μεταγενέστερη παρατήρηση, η διδασκαλία της ήταν δραματικά διαφορετική, δείχνοντας αυστηρό έλεγχο των ενεργειών των μαθητών και του χρόνου των δραστηριοτήτων στην τάξη. Όταν συλλογίστηκε αυτές τις αλλαγές, έκανε και πάλι αλλαγή επαγγελματικής ταυτότητας, αλλά επεξεργάστηκε αυτόν τον επαγγελματισμό μέσω ενός εναλλακτικού προγράμματος ΕΑ. Το θέμα αφορά στις αντιθέσεις και τις συγκρούσεις μεταξύ χάους και ελέγχου κατά την διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων και τον ρόλο που οι θεσμικές ανάγκες και σκοποί, όπως και των εκπαιδευτικών, παίζουν στην ΕΑ.

Ξοδεύεται πολλή ενέργεια σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης (ΕΑ) με στόχο την αλλαγή της πρακτικής των εκπαιδευτικών. Στην περίπτωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, προγράμματα ΕΑ σε όλο τον κόσμο συχνά προωθούν την συνεργατική, μαθητοκεντρική, με βάση την επίλυση προβλήματος παιδαγωγική (Koellner, Jacobs, & Borko, 2011; Sztajn, Borko, & Smith, 2017). Οι τρέχουσες προσεγγίσεις στη μάθηση απαιτούν σημαντική απόκλιση από την «παραδοσιακή» δασκαλοκεντρική παιδαγωγική όπου η μαθηματική αυθεντία εδρεύει αποκλειστικά στον δάσκαλο (Boaler & Greeno, 2000). Ωστόσο, αυτή η τελευταία παιδαγωγική παραμένει μια ευρέως διαδεδομένη πρακτική (Maaß & Artigue, 2013). Η παιδαγωγική

---

<sup>33</sup> Darragh, Lisa & Radovic, Darinka. (2019). Chaos, Control, and Need: Success and Sustainability of Professional Development in Problem Solving. 10.1007/978-3-030-29215-7\_18.

επίλυσης προβλημάτων απαιτεί σημαντικές αλλαγές για τους δασκάλους (βλ. επίσης Cavanagh, 2006, Ponte, Matos, Guimaraes, Leal, & Canavarro, 1994). Μπορεί να αντιμετωπίσουν συγκρούσεις ταυτότητας κατά τη διάρκεια της ΕΑ όταν η πρακτική τους είναι εκτεθειμένη σε έλεγχο και καλούνται να τροποποιήσουν μεθόδους διδασκαλίας που πιστεύουν ότι έχουν αποδειχθεί ότι λειτουργούν (Avalos & de Los Rios, 2013).

Η αλλαγή που επιθυμούσαν οι καθηγητές μαθηματικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα ΕΑ που αναπτύχθηκε στο Σαντιάγο της Χιλής, ήταν σημαντική. Το πρόγραμμα, ονομάζεται ARPA (ισπανικό ακρωνύμιο για την Ενεργοποίηση της Επίλυσης Προβλημάτων στην Τάξη-Activating Problem Solving in the Classroom), παρείχε ΕΑ σε εκπαιδευτικούς για συνεργατική διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων όχι ρουτίνας. Μια σειρά μέτρων ελήφθησαν για να εκτιμηθεί η άμεση επιτυχία του προγράμματος (βλ. Cerda et al., 2017; Espinoza, Darragh, & Peri, 2016; Felmer & Perdomo-Díaz, 2017). Η μελέτη είχε ως στόχο να διερευνήσει τους περιορισμούς και τις δυνατότητες που αντιλήφθηκαν οι εκπαιδευτικοί ότι επηρέασαν τη χρήση της νέας παιδαγωγικής και η συνεχής ανάπτυξή τους στα χρόνια που ακολούθησαν την ΕΑ. Συγκεκριμένα, η μελέτη εξέτασε την αναγνωρισμένη ταυτότητα διδασκαλίας των μαθηματικών των δασκάλων καθώς ενσωμάτωσαν τη νέα παιδαγωγική στην πρακτική τους. Βρέθηκε ότι για τους 15 δασκάλους που συμμετείχαν στη μελέτη, η αλλαγή ήταν πράγματι δύσκολο να διατηρηθεί.

Στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης υπάρχει έλλειψη έρευνας που εξετάζει τη διατήρηση της ικανότητας της ΕΑ (Tirosh, Tsamir, & Levenson, 2015; Whitcomb, Borko, & Liston, 2009). Συχνά, αξιολογήσεις του αντίκτυπου του προγράμματος πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια ή στο τέλος ενός έργου και ως εκ τούτου παρέχουν μόνο αποτελέσματα που μιλούν για τις βραχυπρόθεσμες επιπτώσεις (Zehetmeir, 2015). Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντική αλλαγή που απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς, είναι σίγουρα σημαντικό να παρακολουθούμε πώς εξελίσσεται η ανάπτυξή τους σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Η διδασκαλία των μαθηματικών σε πολλές χώρες χαρακτηρίζεται από μια δασκαλοκεντρική προσέγγιση, τυπικό αυτού που περιγράφεται από διάφορες βιβλιογραφία ως «παραδοσιακή» (Boaler & Greeno, 2000) ή μεταδοτικό (Maaß & Artigue, 2013) διδασκαλία. Σε μια τέτοια προσέγγιση, οι δάσκαλοι διατηρούν τον

έλεγχο της εκμάθησης των μαθηματικών δίνοντας διαλέξεις, παρέχοντας σημειώσεις και παραδείγματα και επιδεικνύοντας τους τρόπους επίλυσης ασκήσεων πριν επιτρέψουν στους μαθητές να επιχειρήσουν ένα παρόμοιο παράδειγμα μόνοι τους. Αυτό είναι ένα τυπικό στυλ διδασκαλίας σε πολλές χώρες του κόσμου (Maab & Artigue, 2013).

### 3.4 ΕΑ και Αλλαγή στην Ταυτότητα του Δάσκαλου των Μαθηματικών

Ενώ η παιδαγωγική αλλαγή από τα προγράμματα του ΕΑ δεν είναι εύκολη (Guskey, 2002), υπάρχει μια ποικιλία μοντέλων για την εξέταση αυτής της διαδικασίας αλλαγής. Αυτά περιλαμβάνουν αλλαγή πρακτικής που προέρχεται πρώτα από αλλαγμένες πεποιθήσεις ή το αντίστροφο (Guskey, 2002), ή μια πιο σύνθετη και επαναληπτική διαδικασία στην οποία μια βασική πτυχή είναι ο δάσκαλος σαν αντιπρόσωπος στη διαδικασία αλλαγής (Clarke & Hollingsworth, 2002). Οι εκπαιδευτικοί ως ενεργοί παράγοντες για την αλλαγή έχουν επίσης συνδεθεί με τη διαδικασία του προβληματισμού και της ταυτότητας και της αλλαγής πεποιθήσεων (Hodgen & Johnson, 2004; Ponte et al., 1994).

Ενώ υπάρχει γενική συμφωνία ότι τα επιτυχημένα προγράμματα ΕΑ απαιτούν σημαντικό χρόνο για να προκαλέσουν αλλαγή (Desimone, 2009; Garet et al., 2001; Sztajn et al., 2017), ο Liljedahl (2010), αντίθετα, υποστηρίζει ότι είναι δυνατή η «ταχεία και βαθιά» αλλαγή, αν και σπάνιο. Ο μηχανισμός με τον οποίο λειτουργεί η αλλαγή μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές. Είναι πιθανό ότι η πιθανότητα αλλαγής είναι επίσης δεσμευμένη από τις ανάγκες και τα θέλω που φέρνουν οι εκπαιδευτικοί σε προγράμματα ΕΑ. Ο Liljedahl (2014) κατηγοριοποιεί αυτά τα «θέλω» ως «αντίσταση», «μην ενοχλείτε», «πρόθυμοι να αναδιοργανωθούν», «πρόθυμος να ξανασκεφτεί», «εκτός από το παλιό» και «διερεύνηση». Αυτή η λίστα προσφέρει κάτι σαν μια ιεραρχία ανοίγματος στην αλλαγή και μπορεί να υποδηλώνει το επίπεδο δέσμευσης με το πρόγραμμα. Οι τρεις υψηλότερες κατηγορίες είναι εκείνες στις οποίες οι επιθυμίες των εκπαιδευτικών είναι περισσότερο ανοιχτές στην αλλαγή. Στο «πρόθυμοι να ξανασκεφτούν», ο δάσκαλος αναγνωρίζει κάτι στις δικές του πρακτικές που θέλουν ενίσχυση. Υπάρχει κάτι ευρύ που οι δάσκαλοι θέλουν να σκεφτούν και να αλλάξουν. «Έξω με τα παλιά» είναι όταν τα θέλω χαρακτηρίζονται από την απόρριψη σημαντικών

πτυχών της διδακτικής τους πρακτικής και ο δάσκαλος είναι πρόθυμος να βρει κάτι για να καλύψει το κενό. Τέλος, «έρευνα» είναι όταν οι δάσκαλοι δεν έχουν κάτι συγκεκριμένο να σκεφτούν, αλλά υπάρχει μια γενική επιθυμία να σκεφτούμε και να μάθουν νέες γνώσεις και ιδέες σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση. Η έννοια του Liljedahl των «θέλω» μπορεί να θεωρηθεί συμπληρωματική προς την έννοια της ταυτότητας του εκπαιδευτικού, η οποία έχει βρεθεί μια χρήσιμη έννοια κατά την εξέταση της επιτυχίας της ΕΑ. Αν η ΕΑ είναι πετυχημένη μακροπρόθεσμα, είναι πιθανό να δούμε δασκάλους να θεσπίζουν όλο και περισσότερο μια ταυτότητα δασκάλου μαθηματικών που λαμβάνει υπόψη βασικές πτυχές της προωθούμενης παιδαγωγικής. Για να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία του Liljedahl, μπορούν να θεσπίσουν αλλαγή ταυτότητας πρώτα δείχνοντας μια «προθυμία να ξανασκεφτώ» ή «έξω με το παλιό» και αργότερα μια προσέγγιση «έρευνα» στη διδασκαλία τους.

Η έρευνα ταυτότητας βασίζεται και επεκτείνει την προηγούμενη εργασία που αφορούσε τις πεποιθήσεις του δασκάλου εξίσου σημαντικές στη διαδικασία αλλαγής (π.χ. Cavanagh, 2006; Ponte et al., 1994). Η ταυτότητα, αντίθετα, ενσωματώνει τόσο το ατομικό όσο και το κοινωνικό πλαίσιο (Battey & Franke, 2008; Gellert et al., 2013; Graven, 2012; Gresalfi & Cobb, 2011). Η ταυτότητα θεωρείται μια βασική ενέργεια διαμεσολάβησης πόρων (Battey & Franke, 2008) – συχνά καθορίζει την επιτυχία της ΕΑ (π.χ. Collory, 2003). Για να κατανοηθεί αυτή η επιτυχία ή η αποτυχία, η ταυτότητα πρέπει να γίνει κατανοητή ως διαμορφωμένη εντός του θεσμικού πλαισίου (Gresalfi & Cobb), τοπικές κοινότητες πρακτικής (Battey & Franke, 2008; Graven, 2012) και ευρύτερες πολιτικές δομές (Gellert et al., 2013). Αυτό σημαίνει ότι για να κατανοήσουμε την αλλαγή ταυτότητας στους εκπαιδευτικούς, πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικά το πλαίσιο. Το πλαίσιο είναι κάτι περισσότερο από απλώς η ρύθμιση για αλλαγή μετά από συμμετοχή σε ΕΑ. Εμπλέκεται επίσης βαθιά στην αναπαραγωγή της ταυτότητας του δασκάλου.

Ορίζουμε την ταυτότητα του δασκάλου των μαθηματικών ως «ένα κοινωνικά παραγόμενο τρόπο ύπαρξης, καθώς θεσπίστηκε και αναγνωρίστηκε σε σχέση με τη [διδασκαλία] των μαθηματικών» (από το Darragh & Radovic, 2018). Εδώ, το «κοινωνικό» αναφέρεται στο κοινωνικό και πολιτικό πλαίσιο καθώς και το τοπικό θεσμικό πλαίσιο. Επιπλέον, η έννοια του κοινωνικού θεωρεί συζητήσεις για το τι σημαίνει να είσαι δάσκαλος – όπως παράγεται στο πλαίσιο (βλ Heyd-Metzuyanin & Shabtay, 2018). Για παράδειγμα, σε αυτή την περίπτωση, οι έννοιες της καλής

διδασκαλίας παράγεται εν μέρει στο πλαίσιο ημι-ιδιωτικοποιημένων ιδρυμάτων στη Χιλή, στο συγκεκριμένο σχολείο που εργαζόταν ο δάσκαλος, στα πλαίσια προγραμμάτων ΕΑ, και στο συγκεκριμένο ΕΑ όπου επικεντρώθηκε αυτή η μελέτη. Χρησιμοποιούν τον όρο «θεσπίστηκε» για να αναφερθούν στην ταυτότητα ως ρευστή διαδικασία, ως ρήμα, παρά ως μια στατική πτυχή για την περιγραφή του ατόμου. Η ταυτότητα μπορεί να θεσπιστεί κατά τη διάρκεια μιας ερευνητικής συνέντευξης ή κατά τη διάρκεια της ίδιας της διαδικασίας διδασκαλίας. Τέλος, η ταυτότητα «αναγνωρίζεται» από άλλους, συμπεριλαμβανομένων των συνομήλικων δασκάλων και των ερευνητών. Το να αναγνωρίζεται από άλλους και να ανταποκρίνεται σε (ή να προβλέπει) ταυτοποιήσεις είναι θεμελιώδες μέρος της διαδικασίας ταυτότητας.

Οι ερευνητές εφαρμόζουν την ταυτότητα του δασκάλου των μαθηματικών εδώ τόσο στη θέσπιση της διδασκαλίας μαθηματικών και σε αφηγήσεις συνεντεύξεων, και αντίστοιχα, παρατήρησαν δασκάλους και τους πήραν συνεντεύξεις για τους εαυτούς τους ως δασκάλους. Θεωρούν επίσης ότι η αναγνώριση της ταυτότητάς αποτελεί μέρος αυτής της λειτουργικότητας. Στην παρουσίασή των δεδομένων τους, έχουν δημιουργήσει αφηγήσεις – ιστορίες και χρονογραφήματα, τα οποία χρησιμοποιούν για να εκφράσουν τις ταυτότητες των εκπαιδευτικών που προέκυψαν από τα δεδομένα. Η μελέτη τους είχε στόχο να απαντήσει στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα: «Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τους περιορισμούς και τις δυνατότητες στη διδασκαλία τους της επίλυσης προβλημάτων με επίκεντρο τον μαθητή;» «Πώς θεσπίζουν οι δάσκαλοι ταυτότητες ως καθηγητές μαθηματικών μετά από ΕΑ στη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων με επίκεντρο τον μαθητή;

Οι ερευνητές βλέπουν περιορισμούς στο πρόγραμμα σπουδών και στο χρόνο. Υπάρχουν πάρα πολλά μαθηματικά θέματα για να καλυφθούν ώστε να μπορεί να αφιερωθεί χρόνος σε ένα μόνο πρόβλημα. Οι δάσκαλοι κάνουν παρόμοια σχόλια και βασίζονται σε θέματα πόρων και τους ίδιους τους μαθητές ως προβληματικούς (Darragh, 2019; Darragh & Valoyes-Chávez, 2019). Οι δάσκαλοι από όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου όμοια κατασκεύασαν τους μαθητές τους ως προβλήματα, τους οποίους έβλεπαν ως σημαντικό περιορισμό για την διδασκαλία τους. Οι μαθητές θεωρήθηκαν «προβληματικοί» ως προς την ακαδημαϊκή τους ικανότητα, την αυτοεκτίμηση ή την επιμονή τους και την εμπειρία τους από συνεργατικές ομάδες.

Παρά τους αντιληπτούς περιορισμούς, αυτοί οι δάσκαλοι επέδειξαν επίσης κάποια προθυμία να κάνουν αλλαγές στην παιδαγωγική τους. Αναμφισβήτητα, το γεγονός ότι προσφέρθηκαν εθελοντικά για την μετέπειτα μελέτη ήταν από μόνη της ενδεικτική της προθυμίας να συνεχίσουν να μαθαίνουν παιδαγωγική επίλυσης προβλημάτων. Κατά τη διάρκεια του έτους που ακολούθησε τη συμμετοχή στην ΕΑ, όλοι προσπάθησαν να εφαρμόσουν τη νέα παιδαγωγική στην πρακτική τους, αλλά αυτό ήταν συνήθως με περιορισμένο τρόπο. Αναφερόμενοι στους διάφορους περιορισμούς που συζητήθηκαν παραπάνω, οι περισσότεροι δάσκαλοι απέδειξαν ότι δεν είχαν ενσωματώσει τη νέα μάθηση στην κανονική τους μαθηματική διδασκαλία ούτε στις ταυτότητες τους της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τρεις από τους δασκάλους, ωστόσο, ενέκριναν με μεγαλύτερη συνέπεια αυτό που ονομάσαμε «ταυτότητα επαγγελματία-μαθητή». Οι ερευνητές αναγνώρισαν αυτή την ταυτότητα μέσα από στοιχεία του στοχασμού τους στην πρακτική και την αναζήτηση τρόπων για να ξεπεραστούν τυχόν περιορισμοί προκειμένου να ενσωματώσουν συνεργατικές μεθοδολογίες επίλυσης προβλημάτων πιο τακτικά στην πρακτική τους.

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η περίπτωση που καταδεικνύει την πιθανή επιτυχία του ΕΑ, παρά τους περιορισμούς, και ταυτόχρονα ότι η ατομική προθυμία για αλλαγή δεν αρκεί από μόνη της για να διατηρήσει την αλλαγή στην πράξη μακροπρόθεσμα. Ενώ το πρόγραμμα σπουδών του σχολείου δεν αφήνει χρόνο ούτε χώρο για επίλυση μη συνηθισμένων προβλημάτων εντός της τάξης των μαθηματικών, ο δάσκαλος μπορεί να κανονίσει αυτή τη δραστηριότητα σε διαφορετικό χρόνο – «εργαστήριο» – και χρησιμοποιεί βοηθούς δασκάλων για να χωρίσει την τάξη.

Σε μια περίπτωση μια δασκάλα εξηγεί ότι δεν είχε κάνει «εργαστήρια» φέτος γιατί η τάξη ήταν πίσω από το σημείο που έπρεπε να είναι στο πρόγραμμα σπουδών [του σχολείου] – δεν υπήρχε καιρός να παρεκκλίνει από το σενάριο. Έπρεπε να δουλέψει «εναντίον» του σχολικού προγράμματος σπουδών (χρησιμοποιώντας το «εργαστήριο» για να κάνει κάτι διαφορετικό από την κανονική τάξη).

Μπορούμε να εξερευνήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κατανοήσουμε την επιτυχία ενός προγράμματος ΕΑ που βασίζεται σε μεγαλύτερη ενσωμάτωση στην μαθηματική ταυτότητα του καθηγητή; Οι ερευνητές προτείνουν ότι εκτός από την επισήμανση των επιπτώσεων στην ταυτότητα και την επιτυχία της ΕΑ (βλ επίσης Collory, 2003; Gellert et al., 2013; Gresalfi & Cobb, 2011), πρέπει να δοθεί

προσοχή στις ανάγκες των εκπαιδευτικών και πώς αυτές υποστηρίζονται θεσμικά. Ένας δάσκαλος θα μπορούσε να ξεκινήσει μια θεσμική διαδικασία αλλαγής, να γίνει μέντορας του προγράμματος ΕΑ εντός του σχολείου.

Αν ένα πρόγραμμα ΕΑ στοχεύει στην αλλαγή πολιτιστικών και θεσμικών πρακτικών (π.χ. να επιτραπεί το χάος στην τάξη προκειμένου να παρέχονται στους μαθητές αυθεντικές ευκαιρίες μάθησης), χρειάζονται μεγαλύτερες επενδύσεις για αλλαγή. Υποθέτουμε ότι για να γίνει η ARPA, ή άλλα ανατρεπτικά Προγράμματα ΕΑ, επιτυχημένα σε σχολεία παρόμοια με αυτά που παρουσιάζονται σε αυτήν την περίπτωση, το πρόγραμμα πρέπει να υποστηριχθεί είτε με αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα και τα συστήματα αξιολόγησης ή με ισχυρή υποστήριξη στις κοινότητες των εκπαιδευτικών. Η υποστήριξη είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν γίνονται αντιληπτοί οι πολλοί περιορισμοί για την εφαρμογή ενός προγράμματος ΕΑ. Για παράδειγμα, δυσκολίες σε σχέση με χρονικούς και σχολικούς περιορισμούς και με τα χαρακτηριστικά των μαθητών και τη σχέση τους με τις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων απαιτούν αρκετούς πόρους στους οποίους πρέπει να έχουν πρόσβαση οι εκπαιδευτικοί.

Ίσως δεν είναι αρκετό να δείξουν οι εκπαιδευτικοί προθυμία και ικανότητα να αλλάξουν την πρακτική τους. Χρειάζονται να αποδεχτούν αυτές τις αλλαγές στην κανονική τους πρακτική μακροπρόθεσμα και να θεσπίσουν μια ταυτότητα δασκάλου που ενσωματώνει τη νέα παιδαγωγική. Για να έχει μεγάλη επιτυχία η ΕΑ μακροπρόθεσμα, πρέπει να καλύπτει τις ανάγκες του εκπαιδευτικού στο ατομικό τους πλαίσιο.

### 3.5 Μαθηματικές εντάσεις δασκάλων στο εργαστήριο ΕΑ επίλυσης προβλημάτων

Όταν οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν σε εργαστήριο ΕΑ συζητούν τις εμπειρίες τους κατά τη διάρκεια μιας συνεδρίας επίλυσης προβλημάτων, μερικές φορές εκφράζουν μια αίσθηση ανισορροπίας ή δυσφορίας που έχει τις ρίζες της στην αντίθεση μεταξύ αυτών των εμπειριών, των ικανοτήτων τους και των προηγούμενων μαθηματικών αντιλήψεων, πεποιθήσεων και γνώσεων τους.



Οι αλλαγές μέσα στην τάξη συμβαίνουν ως πολύπλοκες διαδικασίες, οι οποίες συχνά ξεκινούν από προγράμματα ΕΑ. Αυτά τα προγράμματα αναζητούν αλλαγές, είτε στις πεποιθήσεις, στη γνώση ή στις πρακτικές των δασκάλων, και αυτές που θεωρούνται αποτελεσματικές (Desimone, Porter, Garet, Yoon & Birman, 2002) αναζητούν επίσης αλλαγές στη μάθηση του μαθητή. Έτσι, οι δάσκαλοι γίνονται οι παράγοντες αλλαγής στην τάξη και αυτός ο ρόλος τους προκαλεί να αισθάνονται ένταση. Όπως παρατήρησε η Adler (1998) στην πρωτοποριακή της εργασία, «δάσκαλοι και εκπαιδευτές δασκάλων αντιμετωπίζουν την ένταση του να είναι ταυτόχρονα οι φορείς και τα αντικείμενα της αλλαγής».

Στην μελέτη αυτή<sup>34</sup> τους ενδιαφέρει να εξερευνήσουν μαθηματικές εντάσεις που βιώνουν οι εκπαιδευτικοί κατά την επίλυση προβλημάτων. Η ανάλυση της έρευνας για τις εντάσεις στον εκπαιδευτικό τομέα επιτρέπει την ταυτοποίηση δύο διαφορετικών οπτικών. Από τη μία πλευρά, υπάρχει μια ερευνητική γραμμή για τις εντάσεις ως το συναίσθημα που εμφανίζεται όταν το άτομο αντιμετωπίζει ένα δίλημμα. Αυτά τα έργα επικεντρώνονται στη φιγούρα του δασκάλου και αναφέρονται στις εντάσεις ως συναισθήματα που αναδύονται όταν οι δάσκαλοι πρέπει να πάρουν μια απόφαση αντιμετωπίζοντας μια κατάσταση όπου η λύση δεν είναι μοναδική, όπως όταν αποφασίζετε ποια παιδαγωγική προσέγγιση θα χρησιμοποιήσετε (π.χ. Lampert, 1985; Rouleau, 2017). Από την άλλη, υπάρχουν έρευνες που εξετάζουν τις εντάσεις ως συναισθήματα που προκαλούνται από μια διαταραχή ή ανισορροπία μεταξύ της εμπειρίας, των γνώσεων και των πεποιθήσεων των δασκάλων και την εμπειρία που έχουν σε ένα ακαδημαϊκό περιβάλλον, όπως ένα μάθημα επαγγελματικής ανάπτυξης (π.χ., Nipper et al., 2011).

Οι εντάσεις αυτού του δεύτερου τύπου είναι αυτές που παρουσιάζονται στη μελέτη αυτή. Τέτοιες εντάσεις είναι υγιή σημάδια για το εργαστήριο που σχετίζεται με τη μάθηση (Ball & Cohen, 1999), αλλά επίσης πολλές εντάσεις, ή εντάσεις που είναι πολύ έντονες, είναι ανεπιθύμητες, καθώς μπορεί να προκαλέσουν αισθήματα απόγνωσης ή ακόμα και θυμού στους δασκάλους (Garet, Porter, Desimone, Birman, & Suk Yoon, 2001; Grant, Peterson & Shojgreen-Downer, 1996).

---

<sup>34</sup> Perdomo Díaz, Josefa & Felmer, Patricio & Rojas, Cristóbal. (2019). Teachers' Mathematical Tensions Surfacing During the First Session of a Problem-Solving Professional Development Workshop. 10.1007/978-3-030-29215-7\_19.

Το εργαστήριο PSClassroom στοχεύει να δημιουργήσει αλλαγές στις πρακτικές των δασκάλων και, ως συνέπεια, αλλαγές στη μάθηση των μαθητών. Είναι σχεδιασμένο να διαρκεί για 1 ακαδημαϊκό έτος, συμπεριλαμβανομένων περίπου 30 ωρών συνεδριών χωρισμένες σε οκτώ συνεδρίες 3 ωρών ανά μήνα και μία αρχική συνεδρία 6 ωρών. Αυτές οι οκτώ συνεδρίες καθοδηγούνται από μια οθόνη, και σε κάθε συνεδρία, από τη δεύτερη έως την έβδομη, οι δάσκαλοι συνεργάζονται για να σχεδιάσουν ένα μάθημα που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων. Στην επόμενη συνεδρία, οι εκπαιδευτικοί συζητούν και αξιολογούν το τελευταίο μάθημα επίλυσης προβλημάτων, τις επιδόσεις τους και την δουλειά των μαθητών τους. Ο κύκλος ολοκληρώνεται όταν προγραμματίσουν το επόμενο μάθημα (Felmer et al., 2019; Koellner et al., 2007). Κάθε συνεδρία έχει μια σαφή εστίαση, καλύπτοντας τα διαφορετικά στάδια του μαθήματος, την συζήτηση στην ολομέλεια, την δημιουργία προβλημάτων και την συνεχή βελτίωση.

Ο σχεδιασμός της πρώτης συνεδρίας του εργαστηρίου PSClassroom είναι αρκετά διαφορετικός από τους άλλους. Σκοπεύει οι εκπαιδευτικοί να λύσουν προβλήματα και να βιώσουν τα συναισθήματα και εντάσεις που μπορεί να βιώσουν οι μαθητές τους όταν λύνουν προβλήματα. Ο δάσκαλος που παρακολουθεί θεωρείται πρότυπο για την αλληλεπίδραση στην τάξη και έχει νόημα επίσης να βάλουν τους δασκάλους να αμφισβητήσουν τις δικές τους πρακτικές. Στο τέλος του πρώτου μέρους της συνεδρίας, συζητούνται διάφορες στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων. Στο τέλος του δεύτερου μέρους, οι δάσκαλοι μοιράζονται τα συναισθήματά τους. Οι κύριοι στόχοι αυτής της συνεδρίας είναι να προκαλέσουν τον προβληματισμό των εκπαιδευτικών σχετικά με τις δικές τους αντιλήψεις για τα μαθηματικά προβλήματα και τη συμβολή τους στην εκμάθηση των μαθηματικών και να ενεργοποιήσουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των εκπαιδευτικών.

Η βιβλιογραφία διαπιστώνει ορισμένα χαρακτηριστικά που έχουν θετικές επιπτώσεις στη βελτίωση των γνώσεων των εκπαιδευτικών, στις δεξιότητες και τις αλλαγές στην πρακτική στην τάξη όπως είναι ο βαθμός στον οποίο η δραστηριότητα (α) επικεντρώνεται στη βελτίωση και την εμπάθυνση της γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών (β) εστιάζει σε συγκεκριμένες εκπαιδευτικές πρακτικές (γ) προσφέρει στους δασκάλους ευκαιρίες να γίνουν ενεργά συμμετοχοί σε μια ουσιαστική ανάλυση της διδασκαλίας και της μάθησης, για παράδειγμα, επανεξετάζοντας την εργασία των μαθητών ή λαμβάνοντας ανατροφοδότηση σχετικά με τη διδασκαλία τους και (δ)

προωθεί την συνεχή επαγγελματική επικοινωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών (Desimone et al., 2002; Garet et al., 2001; Swan, 2007).

Ενώ οι εντάσεις μπορεί να συνδέονται με τις διαφορετικές σχέσεις που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της συνόδου (Nirper et al., 2011), εδώ μας ενδιαφέρουν μόνο οι εντάσεις που εμφανίζονται στη σχέση μεταξύ δασκάλων και μαθηματικών. Τα δεδομένα για αυτή τη μελέτη προέρχονται από τη βιντεοσκόπηση των συζητήσεων της ολομέλειας από οκτώ διαφορετικές εκδόσεις του εργαστηρίου. Χρησιμοποιώντας μεταγραφές των οπτικοακουστικών εγγραφών, αναζητούνται οι μαθηματικές εντάσεις των δασκάλων για να απαντηθεί το παρακάτω ερευνητικό ερώτημα: Ποιες είναι οι εντάσεις που εκφράζουν οι εκπαιδευτικοί κατά την συζήτηση στην ολομέλεια στο τέλος της πρώτης συνεδρίας ενός εργαστηρίου επαγγελματικής ανάπτυξης οκτώ συνεδριών;

Οι μαθηματικές εντάσεις που αναφέρονται εδώ εκφράζουν τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αντιδρούν στην επίλυση προβλήματος δουλεύοντας σε τυχαίες ομάδες (Liljedahl, 2014). Αυτές οι εντάσεις μπορεί να επιτρέψουν να γίνει καλύτερα κατανοητή η προθυμία των εκπαιδευτικών να συνεχίσουν με το πρόγραμμα κατά τη διάρκεια του έτους. Μπορούν επίσης να βοηθήσουν στην κατανόηση της πραγματικής σχέσης μεταξύ των δασκάλων και των μαθηματικών όπως και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αυτές οι πληροφορίες είναι σίγουρα χρήσιμες για τους διοργανωτές PSCclassroom και επίσης σε ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίοι ενδιαφέρονται για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αλλάξει.

Είναι συνηθισμένο οι συμμετέχοντες σε μια εκπαιδευτική δραστηριότητα να βιώνουν ένα αίσθημα δυσφορίας ή ανισορροπίας όταν έρχονται αντιμέτωποι με προηγούμενες πεποιθήσεις, γνώσεις, ή πρακτικές. Αυτά τα συναισθήματα έχουν αναγνωριστεί στη βιβλιογραφία σαν εντάσεις, και μπορεί να τα βιώσει ο μαθητευόμενος ή ο επιμορφωτής.

Ανασκοπώντας τη βιβλιογραφία, ξεκινάμε με το έργο της Adler (1998) που ενδιαφέρεται να κατανοήσει την πολυπλοκότητα των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας πολύγλωσσης αίθουσας διδασκαλίας και όπου εισάγει τη γλώσσα των διλημμάτων ως ισχυρό επεξηγηματικό και αναλυτικό εργαλείο. Σε παλαιότερη μελέτη σχετικά με τις εντάσεις που πραγματοποιήθηκε από την Lampert (1985), η συγγραφέας

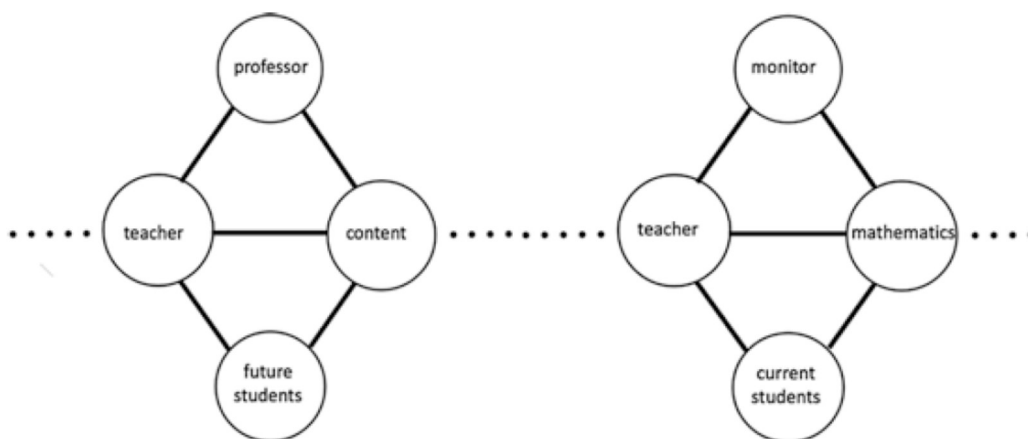
τοποθέτησε τον εαυτό της στη θέση της δασκάλας. Η Lampert διενεργεί μελέτη δύο περιπτώσεων, περιγράφοντας την εμπειρία της στην τάξη και αυτήν ενός συναδέλφου. Η συγγραφέας παρατηρεί ότι οι εντάσεις εμφανίζονται όταν οι δάσκαλοι αντιμετωπίζουν διλήμματα, δηλαδή προβλήματα με διαφορετικές λύσεις και κάτι πρέπει να κάνουν με αυτά.

Η Berry (2007) επεξεργάστηκε τα έργα των Adler και Lampert. Μελέτησε τις εντάσεις από τη σκοπιά των εκπαιδευτών εκπαιδευτικών μέσω της αυτοπαρατήρησης της δικής της πρακτικής, με στόχο τη βελτίωση της από την κατανόηση της διαδικασίας της διδασκαλίας των δασκάλων. Η αντίληψή της για την ένταση στοχεύει να συλλάβει τα συναισθήματα εσωτερικών αμφιβολιών που βιώνουν πολλοί εκπαιδευτές εκπαιδευτικών στη διδασκαλία της διδασκαλίας τους, όταν ωθούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις, και όταν αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες της αναγνώρισης και τη διαχείριση αυτών των αντίπαλων δυνάμεων (Berry, 2007). Η Berry δημιούργησε ένα πλαίσιο για να εντοπίσει, να κατανοήσει και να χρησιμοποιήσει τις εντάσεις που είναι εγγενείς στη διδασκαλία.

Σε μια πιο πρόσφατη εργασία, οι Rouleau και Liljedahl (2016) χρησιμοποίησαν το σχήμα έντασης που προτάθηκε από την Berry (2007) για τη μελέτη των εντάσεων που προκύπτουν όταν οι δάσκαλοι διδάσκουν μαθηματικά στην τάξη (βλ. επίσης Rouleau, 2017). Για παράδειγμα, οι δάσκαλοι μπορεί να έχουν το δίλημμα της επιλογής μεταξύ του τι θέλουν να κάνουν και τι τους ζητείται να κάνουν, ή ίσως μεταξύ αυτού που θέλουν να κάνουν και αυτού που ξέρουν να κάνουν. Αυτά τα διλήμματα πρέπει να αντιμετωπιστούν, αλλά όχι απαραίτητα να επιλυθούν με συγκεκριμένο τρόπο, κατά την έννοια του Lampert (1985).

Με τη μελέτη ενός καλοκαιρινού σχολείου επαγγελματικής ανάπτυξης που διαρκεί μια εβδομάδα, οι Nipper et al. (2011) διαπίστωσαν ότι οι εντάσεις προκύπτουν όταν οι προσδοκίες των δασκάλων δεν ταιριάζουν με την εμπειρία τους. Αυτές οι εντάσεις δεν προκαλούνται απαραίτητα από διλήμματα, όπου οι δάσκαλοι πρέπει να λάβουν αποφάσεις, αλλά παράγουν μια αίσθηση δυσφορίας ή ανισορροπίας που μπορεί να εξαφανιστεί αργότερα μέσα στην εβδομάδα ή μπορεί να παραμείνει περισσότερο (Nipper et al., 2011). Λαμβάνοντας υπόψη την ιδέα των εντάσεων όπως οι δυνάμεις σε αντίθετες κατευθύνσεις από την Berry (2007), οι Nipper et al. (2011) τονίζουν τις

σχέσεις στις οποίες αυτές οι εντάσεις εμφανίζονται και χρησιμοποιούν τον διδακτικό ρόμβο για να συλλάβουν αυτές τις σχέσεις.



Στην ερμηνεία των Nipper και Sztajn (2008), το πάνω τρίγωνο αντιπροσωπεύει το εκπαιδευτικό τρίγωνο που ενσωματώνεται σε ένα εργαστήριο επαγγελματικής ανάπτυξης, όπου ο δάσκαλος είναι ο μαθητευόμενος, ενώ το κάτω τρίγωνο αναπαριστά το διδακτικό τρίγωνο που προβάλλεται στην τάξη του δασκάλου. Εδώ ο δάσκαλος σχετίζεται με τους μελλοντικούς μαθητές τους και τα περιεχόμενα του εργαστηρίου που μπορούν να εφαρμοστούν στην σχολική αίθουσα. Η παρατήρηση της Adler (1998) που αναφέρεται πιο πάνω μπορεί να φαίνεται στον εκπαιδευτικό ρόμβο, όπου ο δάσκαλος είναι ταυτόχρονα ο παράγοντας και το αντικείμενο της αλλαγής. Όπως περιγράφεται στο Perdomo-Díaz and Felmer (2017), στην πρώτη συνεδρία του PSClassroom, η σχέση δασκάλου-μαθηματικών μπορεί να ερμηνευτεί ως σχέση των δασκάλων και των μαθηματικών προβλημάτων που τους δόθηκαν διαδοχικά. Δεδομένου ότι το εργαστήριο PSClassroom λειτουργεί όλο το χρόνο, ενώ οι δάσκαλοι διδάσκουν μαθηματικά στις τάξεις τους, αντί να έχουν μελλοντικούς μαθητές, έχουν τρέχοντες μαθητές όπως στο δεξί σχήμα. Χρησιμοποιούμε επίσης τον όρο παρακολουθητή (monitor) στη θέση του καθηγητή στην περίπτωση μας, άρα αυτό το εργαστήριο επαγγελματικής ανάπτυξης αντιπροσωπεύεται καλύτερα από το δεξί σχήμα.

Στη μελέτη του καλοκαιρινού ινστιτούτου, οι Nipper et al. (2011) παρατήρησαν εντάσεις που εμφανίζεται σε δύο βασικούς τομείς: παιδαγωγικές εντάσεις και εντάσεις περιεχομένου. Και στις δύο περιπτώσεις, προέκυψαν εντάσεις λόγω των προσδοκιών των εκπαιδευτικών που δεν ταίριαζαν με το εργαστήριο. Όσον αφορά την παιδαγωγική, οι συγγραφείς προσδιόρισαν πραγματικές παιδαγωγικές εντάσεις γιατί οι δάσκαλοι

περίμεναν μια διερευνητική παιδαγωγική μέθοδο αλλά έζησαν μια παραδοσιακή διδασκαλία. Ενώ αυτή η ένταση εξαφανίστηκε κατά τη διάρκεια της εβδομάδας καθώς η παιδαγωγική μέθοδος άλλαξε σε διερευνητική, εμφανίστηκαν παιδαγωγικές εντάσεις σε σχέση με την εφαρμογή, όταν οι δάσκαλοι θεώρησαν ότι η ανοιχτή παιδαγωγική προσέγγιση που τους άρεσε στο θερινό ινστιτούτο δεν θα λειτουργούσε με τους μελλοντικούς μαθητές τους. Όσον αφορά τις εντάσεις περιεχομένου, οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν ότι το μαθηματικό περιεχόμενο ήταν πολύ προχωρημένο για αυτούς και ότι δεν ένιωθαν αρκετά ικανοί για το υλικό, προκαλώντας πραγματικές μαθηματικές εντάσεις. Από την άλλη οι δάσκαλοι ανέμεναν να πάρουν ένα πακέτο «έτοιμου προς χρήση» υλικού κατά τη διάρκεια της εβδομάδας, αλλά το υλικό ήταν πραγματικά προετοιμασμένο για την αύξηση των μαθηματικών τους γνώσεων, έτσι εμφανίστηκαν και μαθηματικές εντάσεις εφαρμογής. Είναι στο πλαίσιο της μελέτης των Nürper και al. (2011) το ότι προσεγγίζουμε την παρατήρηση των εντάσεων εδώ.

Για να ολοκληρωθεί αυτή η ενότητα, εισάγεται ένας ορισμός της έντασης στο πλαίσιο της σχέσης δασκάλου-μαθηματικών και σε συνοχή με το πλαίσιο των Berry (2007) και Nürper και al. (2011). Η ένταση είναι ένα αίσθημα ανισορροπίας ή δυσφορίας, προϊόν της αντίθεσης μεταξύ των εμπειριών ενός δασκάλου κατά το εργαστήριο επαγγελματικής ανάπτυξης και με ότι φέρνει ο δάσκαλος μαζί του: πεποιθήσεις, προσδοκίες, εμπειρίες και αντιλήψεις. Αυτές οι πτυχές ποικίλλουν από τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται στην τάξη ως τις προσδοκίες του δασκάλου για τους μαθητές τους. Εδώ οι ερευνητές επικεντρώνονται σε μαθηματικές εντάσεις, ένα αίσθημα ανισορροπίας ή δυσφορίας που προκαλείται από την αντίθεση μεταξύ των εμπειριών των δασκάλων στο εργαστήριο και τις ικανότητές τους και τις προηγούμενες μαθηματικές αυτοαντιλήψεις, πεποιθήσεις και γνώσεις.

### 3.6 Ανάλυση Μαθηματικών εντάσεων

Η συζήτηση στην ολομέλεια στο εργαστήριο έδωσε πολλές ευκαιρίες στους εκπαιδευτικούς να εκφράσουν τα συναισθήματά τους για την εμπειρία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που είχαν κατά τη διάρκεια της ημέρας. Αυτή η συζήτηση ήταν αρκετά ανοιχτή γιατί οι δάσκαλοι ήταν άνετα μεταξύ τους, αφού δούλευαν μαζί για περίπου 5 ώρες, ακόμα κι αν δεν είχαν συναντηθεί ποτέ πριν. Με τη συνεχή

ενθάρρυνση του μόνιτορ, οι καθηγητές μίλησαν για τη δυσκολία των προβλημάτων, τις πεποιθήσεις τους, την ικανότητά τους να λύνουν τα προβλήματα, τις γνώσεις τους στα μαθηματικά, τις προσδοκίες τους για τη συνεδρία και άλλα θέματα.

Αναλύοντας τις μεταγραφές της συζήτησης στην ολομέλεια, οι ερευνητές εντόπισαν 33 επεισόδια μαθηματικών εντάσεων, δηλαδή εντάσεις που σχετίζονται με τη σχέση δασκάλου-μαθηματικών. Αυτά τα επεισόδια στη συνέχεια χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες: τρεις σχετίζονται με εντάσεις που έχουν ήδη εντοπιστεί στη βιβλιογραφία και δύο νέες εντάσεις. Οι τρεις πρώτες εντάσεις είναι (i) ανάπτυξη ικανοτήτων έναντι μάθησης για τις ικανότητες, (ii) προβλήματα για δασκάλους έναντι προβλημάτων για μαθητές, και (iii) προκλητικά προβλήματα εναντίον ασκήσεων και λεκτικών προβλημάτων. Οι άλλες δύο εντάσεις είναι (iv) δεν είμαι σε θέση έναντι πρέπει να είμαι σε θέση και (v) μαθηματικές ιδέες έναντι μαθηματικού φορμαλισμού (τυποποίησης).

Ακόλουθα αναλύουν κάθε μια από τις εντάσεις των δασκάλων για να κατανοήσουν καλύτερα πώς δημιουργούνται αυτές. Η αναγνώριση των εντάσεων δεν είναι εύκολη υπόθεση, αφού δεν εμφανίζονται σε καθαρή μορφή. Μπορεί να εμφανίζονται σε σχέση με άλλες εντάσεις, μπορεί να είναι διαφορούμενες στα λόγια των δασκάλων, μπορεί να εξαφανιστούν κατά τη διάρκεια της συνεδρίας ή μπορεί να είναι χαμηλής έντασης. Η συζήτηση που ακολουθεί είναι μέρος της ερμηνείας κάθε έντασης.

### 3.6.1. Ανάπτυξη Ικανοτήτων έναντι Μάθησης για Ικανότητες

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην πρώτη συνεδρία του εργαστηρίου συνέκριναν τις προσδοκίες τους με το τι πραγματικά συνέβη κατά τη διάρκεια της συνεδρίας. Περίμεναν ότι το εργαστήριο θα τους έδινε ένα σύνολο περιεχομένων σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με σαφείς οδηγίες για το πώς να τα διδάξουν. Αντί για αυτό, συνάντησαν φύλλα με προβλήματα που έπρεπε να λύσουν, μόνοι τους, θέτοντας σε κίνδυνο τις μαθηματικές τους ικανότητες. Αυτή η κατάσταση προκάλεσε μια ένταση που μπορεί να ονομάσουμε ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων έναντι μάθησης σχετικά με τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων ή την ανάπτυξη ικανοτήτων έναντι της μάθησης για τις ικανότητες.

Η ανάπτυξη ικανοτήτων έναντι της εκμάθησης για τις ικανότητες ανήκει σε μια κατηγορία εντάσεων που αναφέρεται από τους Nipper et al. (2011) στο πλαίσιο ενός θερινού σχολείου μιας εβδομάδας, που αναφέρονται ως πραγματικές παιδαγωγικές εντάσεις. Εκεί, δημιουργείται ένταση γιατί η προσδοκία των δασκάλων ήταν να βιώσουν ένα διερευνητικό παιδαγωγικό στυλ, αλλά το η εβδομάδα ξεκίνησε με απευθείας οδηγίες. Ενώ εδώ, οι δάσκαλοι περίμεναν το αντίθετο: περίμεναν να διδαχθούν ρητά ορισμένες στρατηγικές και εργαλεία προβλημάτων που θα έπρεπε να εφαρμόσουν με μαθητές, αλλά αντίθετα βρήκαν πρακτικές δραστηριότητες για την επίλυση προβλημάτων.

### 3.6.2. Προβλήματα για εκπαιδευτικούς έναντι προβλημάτων για μαθητές

Η πρώτη συνεδρία του εργαστηρίου ήταν αφιερωμένη στην εισαγωγή των εκπαιδευτικών στην εμπειρία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ετοιμάστηκε μια σειρά προβλημάτων για να συνεχίσουν να εργάζονται σε τυχαίες ομάδες με τον δικό τους ρυθμό. Προβλήματα που προσφέρονται κατά τη διάρκεια του πρωινού ήταν πιο απλά από αυτά που προσφέρονται το απόγευμα, αλλά και στις δύο περιπτώσεις, προορίζονταν για δασκάλους. Δεν ήταν απαραίτητα μαθητικά προβλήματα. Με αυτόν τον τρόπο βρέθηκαν αντιμέτωποι οι δάσκαλοι με τις δικές τους ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, να πρέπει να εργαστούν μόνοι τους και να κάνουν έκκληση στις γνώσεις, την ικανότητα και τη δημιουργικότητά τους να επιλύουν προβλήματα που μπορεί να έχουν βρει δύσκολα. Εδώ εμφανίζεται μια ένταση αφού οι δάσκαλοι νομίζουν ότι σε εργαστήριο ΕΠ θα πρέπει να λάβουν προβλήματα για να τα χρησιμοποιήσουν με τους μαθητές τους, ενώ λαμβάνουν πραγματικά δυσκολότερα προβλήματα που πρέπει να λύσουν. Αυτό οι ερευνητές το ονομάζουν προβλήματα για τους εκπαιδευτικούς έναντι προβλημάτων για μαθητές.

### 3.6.3. Προκλητικά προβλήματα έναντι των ασκήσεων και των λεκτικών προβλημάτων

Κατά τη διάρκεια της πρώτης συνεδρίας του εργαστηρίου, οι δάσκαλοι ορίστηκαν για να λύσουν προβλήματα σε τυχαίες ομάδες. Μόλις μια ομάδα έλυσε ένα



πρόβλημα, η οθόνη τους έδινε ένα νέο, σε μια προκαθορισμένη σειρά. Τα προβλήματα επιλέχθηκαν για να συμπεριλάβουν τα διαφορετικά μαθηματικά περιεχόμενα από το πρόγραμμα σπουδών του σχολείου, ώστε να μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές και να μπορούν να προσαρμοστούν σε απλούστερες ή πιο σύνθετες εκδόσεις. Τα προβλήματα διατάχθηκαν με τέτοιο τρόπο που, στην αρχή και στο τέλος της συνεδρίας, ήταν προκλητικά και μπορούσαν να λυθούν με δοκιμή και λάθος ή χρησιμοποιώντας σχήμα, επομένως προσιτά για όλους τους συμμετέχοντες. Στη μέση της συνεδρίας, τα προβλήματα που έπρεπε να επιλυθούν απαιτούσαν λίγο πιο περίπλοκες στρατηγικές, οπότε ήταν λίγο πιο δύσκολα. Αυτή η οργάνωση των προβλημάτων επιδίωκε, αφενός, οι δάσκαλοι να νιώθουν ότι προκαλούνται και ταυτόχρονα να είναι ικανοί να προσεγγίσουν τις καταστάσεις και, από την άλλη, τα προβλήματα δεν μπορούσαν συσχετίζονται με μια συγκεκριμένη μαθηματική στρατηγική ή αλγόριθμο προς επίλυση.

Μερικοί δάσκαλοι επεσήμαναν ότι αυτά τα προκλητικά προβλήματα έρχονται σε αντίθεση με τα προβλήματα που οι δάσκαλοι συνήθως δίνουν τους μαθητές τους, τα οποία συνήθως συνδέονται με συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο που αυτοί έχουν δει πρόσφατα. Επίσης, ορισμένοι συμμετέχοντες πιστεύουν ότι τα προβλήματα περιέχουν λέξεις που τα παιδιά δεν καταλαβαίνουν ή δεν ανήκουν στο πλαίσιο της «καθημερινής ζωής». Τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων του εργαστηρίου είναι κατά κάποιο τρόπο μακριά από αυτά που δίνουν οι δάσκαλοι στους μαθητές τους. Έτσι, έχουμε εδώ μια άλλη ένταση που οι ερευνητές ονομάζουν προκλητικά προβλήματα έναντι ασκήσεων και λεκτικών προβλημάτων. Αν και αυτή η ένταση σχετίζεται με μαθηματικά προβλήματα, είναι αρκετά διαφορετική από τα προβλήματα για δασκάλους εναντίον προβλημάτων για μαθητές, αφού εδώ δεν είναι η δυσκολία των προβλημάτων για τους εκπαιδευτικούς που έχει σημασία αλλά ο τρόπος που παρουσιάζονται τα προβλήματα στους μαθητές, με όρους του περιεχομένου, της δομής και της γραφής τους.

Κάποια προβλήματα κατά τη διάρκεια της συνεδρίας ήταν καθαρά μαθηματικά, ενώ άλλα τοποθετήθηκαν σε έναν πλαίσιο ενήλικα ή σε περιβάλλοντα που οι μαθητές μπορεί να μην κατανοούν πλήρως. Από την άλλη, οι δάσκαλοι πιστεύουν ότι όταν δίνουν ένα σύνολο προβλημάτων στους μαθητές, τα προβλήματα πρέπει να είναι του ίδιου είδους, του ίδιου περιεχομένου. Αυτό είναι κοντά στην ιδέα της άσκησης για εξάσκηση του μαθηματικού περιεχομένου και παράγει επίσης ένταση, αφού τα

προβλήματα στο εργαστήριο άλλαζαν συνεχώς ως προς το περιεχόμενο, τη δυσκολία, πλαίσιο κ.λπ., καθώς οι δάσκαλοι περνούσαν από το ένα στο άλλο

Μια άλλη δασκάλα εξηγεί ότι παρόλο που το πρόβλημα είναι κατάλληλο για έβδομη ή όγδοη τάξη, πιστεύει ότι δεν είναι κατάλληλο για μαθητές στην ένατη ή δέκατη τάξη. Αυτό οφείλεται στο πλαίσιο της ύλης στην ένατη ή δέκατη τάξη. Οι μαθητές μελετούν τις εξισώσεις και έτσι θα προσπαθήσουν να βρουν μια εξίσωση για την επίλυση του προβλήματος, οπότε θα αποτύχουν. Επιμένει στην ιδέα ότι, όταν δίνεται ένα πρόβλημα, οι μαθητές συνήθως παίρνουν το εργαλείο ή τη διαδικασία για να το λύσουν, όχι από το πρόβλημα αλλά από το περιεχόμενο που μελετούν τη στιγμή που τους δίνεται το πρόβλημα.

Αυτή η ένταση εμφανίζεται επειδή οι δάσκαλοι περίμεναν ότι τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στο εργαστήριο θα ήταν άμεσα εφαρμόσιμα στις τάξεις τους, οπότε η ένταση ανήκει στην κατηγορία των εντάσεων εφαρμογής μαθηματικού περιεχομένου όπως προσδιορίζονται από τους Nipper et al. (2011). Οι ερευνητές προτιμούν να δώσουν νέο όνομα σε αυτή την ένταση, γιατί κάνουν τις αντίθετες έννοιες να είναι πιο σαφείς και διασφαλίζουν ότι η εστίαση είναι στην επίλυση προβλημάτων.

#### 3.6.4. Δεν είμαι σε θέση έναντι θα έπρεπε να είμαι σε θέση

Σχεδιαστικά, κατά την πρώτη συνεδρία του εργαστηρίου, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να λύσουν προβλήματα όπου πρέπει να χρησιμοποιήσουν την συνδυασμένη γνώση, τις ικανότητες και τη δημιουργικότητά τους. Επιπλέον, οι δάσκαλοι μπορεί να μην είναι συνηθισμένοι στην επίλυση προβλημάτων ή ορισμένα προβλήματα μπορεί να είναι πολύ δύσκολα για αυτούς, παρόλο που τα ίδια τα προβλήματα δεν απαιτούν προχωρημένη γνώση. Οι δάσκαλοι δεν είναι αδιάφοροι σε αυτό. Νιώθουν άγχος ή απογοήτευση, και αφού διδάσκουν μαθηματικά, πιστεύουν ότι θα έπρεπε να μπορούν να λύσουν τα προβλήματα. Οι συγγραφείς το προσδιορίζουν σαν μια ένταση που ονομάζουν δεν είμαι σε θέση εναντίον θα έπρεπε να μπορώ, κάτι που παρατηρήθηκε σε δέκα επεισόδια κατά τις συζητήσεις στην ολομέλεια.

Δηλώνουν ότι δεν έχουν δει αυτή την ένταση να αναφέρεται στη βιβλιογραφία. Έχει σχέση με την Ασφάλεια εναντίον Πρόκλησης, μια ένταση που αναφέρεται από

την Berry (2007), η οποία εμφανίζεται όταν ο εκπαιδευτής δασκάλων σε ένα μάθημα επαγγελματικής ανάπτυξης αποφασίζει ποια προβλήματα να θέσει στους δασκάλους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο εκπαιδευτής πρέπει να επιλέξει προσιτές προκλήσεις που δεν είναι ούτε πολύ δύσκολες ούτε πολύ εύκολες. Αυτή είναι μια ένταση που ο εκπαιδευτής δασκάλων βιώνει πριν από τη δραστηριότητα με τους δασκάλους. Ωστόσο, η ένταση εδώ βιώνεται από τους δασκάλους (μαθητευόμενους), και εμφανίζεται όταν λύνουν προβλήματα κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου.

Από τα δέκα επεισόδια που έχουν εντοπιστεί για αυτή την ένταση, έχουν επιλέξει ορισμένες συγκεκριμένες περιπτώσεις για να απεικονίσουν τις διάφορες μορφές με τις οποίες αυτή εμφανίζεται. Έχοντας αντιμετωπίσει δυσκολίες στην επίλυση των προβλημάτων, ορισμένοι δάσκαλοι νόμιζαν ότι πέτυχαν μόνο επειδή ένα μέλος της ομάδας τους είχε βοηθήσει. Οι δάσκαλοι ένιωσαν ότι δεν ήταν σε θέση να λύσουν το πρόβλημα, αλλά πιστεύουν ότι θα έπρεπε να ήταν σε θέση, και συμπερασματικά, πρέπει να εργαστούν και να βελτιωθούν.

Σε ένα επεισόδιο, απαντώντας σε ερώτηση, μια δασκάλα είπε: «η αλήθεια είναι ότι... δεν κάνω μαθηματικά». Αυτό ανοίγει έναν άλλο τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται η ένταση, όπου οι δάσκαλοι εξήγησαν ότι δεν μπορούσαν να κάνουν κάποια από τα προβλήματα αφού δεν ήξεραν μαθηματικά, δεν δίδαξαν μαθηματικά ή δεν ήταν μαθηματικοί. Αυτές οι εξηγήσεις προκύπτουν επειδή πιστεύουν ότι πρέπει να μπορούν λύνουν τα προβλήματα που τους δίνονται. Κι άλλοι δάσκαλοι δεν ένιωθαν καλά ειδικά για τη συμμετοχή τους στη συνεδρία σχετικά με την απόδοσή τους στα προβλήματα. Σε άλλο επεισόδιο, βλέπουμε την ένταση καθώς ένας δάσκαλος προσπάθησε και ξαναπροσπάθησε να λύσει ένα πρόβλημα που φαινόταν εύκολο. Όχι μόνο εγκατέλειψε αυτό το πρόβλημα, αλλά και όταν χρειάστηκε κάποια συζήτηση στην ομάδα, ένιωσε ότι δεν συνέβαλε αρκετά.

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται αυτή η ένταση βασίζεται στην πεποίθηση ότι οι καλοί λύτες προβλημάτων στα μαθηματικά πρέπει να είναι γρήγοροι. Κατά συνέπεια, οι δάσκαλοι πιστεύουν ότι κατά τη διάρκεια της συνεδρίας του εργαστηρίου θα πρέπει να είναι σε θέση να λύνουν τα προβλήματα γρήγορα και αν όχι αυτό σημαίνει αποτυχία.

Συνοψίζοντας, η ένταση δεν είμαι σε θέση έναντι του θα έπρεπε να μπορώ είναι μια μαθηματική ένταση που παράγεται από την πεποίθηση ότι οι δάσκαλοι, επειδή

διδάσκουν μαθηματικά, πρέπει να είναι σε θέση να λύνουν τα προβλήματα που δόθηκαν στην πρώτη συνεδρία, είτε λόγω ταχύτητας είτε λόγω γνώσης. Και στις δύο περιπτώσεις, οι δάσκαλοι ένιωσαν μια δυσφορία όταν οι δικές τους πεποιθήσεις έρχονταν αντιμέτωπες με το τι συνέβαινε κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου.

### 3.6.5. Μαθηματικές Ιδέες έναντι Μαθηματικής Τυποποίησης

Ποια είναι η σωστή διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος; Αυτή είναι μια επαναλαμβανόμενη ερώτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών που προέκυψε κατά την πρώτη συνεδρία του εργαστηρίου. Για κάθε δεδομένο πρόβλημα θα υπάρχουν ίσως πολλοί τρόποι για να το λύσετε. Θα έρχονταν κάποιες λύσεις απευθείας από τις γνώσεις μαθηματικών ή προβλημάτων του ατόμου, όπως ένας τύπος για ένα εμβαδόν σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα ή μια εξίσωση σε ένα πρόβλημα τιμής και ποσότητας; Εδώ, το άτομο ξέρει τι να κάνει. Έχει μια μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος μια κατάσταση πιο κοντά σε μια άσκηση παρά σε ένα πρόβλημα. Αυτός ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων, που μπορούμε να ονομάσουμε μαθηματική τυποποίηση, μερικές φορές θεωρείται ο σωστός τρόπος. Από την άλλη, όταν κάποιος έρχεται αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα με την πραγματική έννοια, δηλαδή πρόβλημα που το άτομο δεν ξέρει πώς να το λύσει, το άτομο πρέπει να δοκιμάσει διαφορετικούς τρόπους, είτε χρησιμοποιώντας τη φαντασία του, την εμπειρία του με άλλα προβλήματα ή δοκιμή και σφάλμα. Εδώ, λέμε ότι το άτομο χρησιμοποιεί μαθηματικές ιδέες. Όταν οι δάσκαλοι είναι αντιμέτωποι με προβλήματα στο εργαστήριο, η συζήτηση σχετικά με τον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος, ακόμη και όταν έχει ήδη λυθεί, δημιουργεί μια ένταση που ονομάζουμε μαθηματικές ιδέες εναντίον μαθηματικής τυποποίησης.

Μια έκφραση αυτής της έντασης εμφανίζεται όταν οι δάσκαλοι προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικά εργαλεία όπως εξισώσεις και τύπους, ακόμη και όταν το πρόβλημα δεν τους απαιτεί ή όταν μια μη αλγεβρική προσέγγιση θα ήταν ένας απλούστερος τρόπος για να βρεθεί μια λύση. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ένα περιστατικό από βαθμολογικό κέντρο Πανελλήνιων εξετάσεων όπου συνάδερφος δεν μπορούσε να αποδεχτεί λύση με απλή μέθοδο των τριών που ξέφευγε προφανώς από ότι θεωρούσε «μαθηματική λύση».

Η ένταση εμφανίζεται εδώ επειδή οι δάσκαλοι σκοπεύουν να χρησιμοποιήσουν εξισώσεις, δηλαδή μαθηματική τυποποίηση, ενώ μια πιο ανοιχτή προσέγγιση, με σχέδια ή εμφάνιση δεδομένων, μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα. Αυτή η τάση εμφανίζεται σε σχέση με τύπους, όπου η ένταση προκύπτει με δύο τρόπους: (α) επειδή χρειάζεται κάποιος τύπος ή (β) αφού έχει λύσει το πρόβλημα, υπάρχει η αίσθηση ότι χωρίς τύπο το πρόβλημα δεν έχει λυθεί πλήρως. Κάποιοι δάσκαλοι υποστηρίζουν ότι η χρήση σχεδίων κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος δεν είναι κατάλληλο εργαλείο για μαθητές ή καθηγητές ανώτερων τάξεων.

### 3.7 Συζήτηση

Στο πλαίσιο των Nipper και Sztajn (2008), οι εντάσεις συνδέονται με την σχέση μεταξύ των δασκάλων και του παρακολουθητή, των δασκάλων και των μαθηματικών ή των δασκάλων και των μαθητών τους. Εξετάστηκαν εδώ μαθηματικές εντάσεις, δηλαδή εντάσεις στη σχέση μεταξύ δασκάλων και μαθηματικών. Σε γενικές γραμμές, εντάσεις εμφανίζονται όταν οι δάσκαλοι αντιμετωπίζουν ιδέες, προβλήματα, διαδικασίες και στρατηγικές που δεν ταιριάζουν με το σύστημα γνώσεων, πεποιθήσεων και πρακτικών τους. Αυτές οι εντάσεις είναι απαραίτητες για την αλλαγή (Ball & Cohen, 1999), έτσι οποιοσδήποτε σχεδιαστής προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης θα πρέπει να τις λάβει υπόψη κατά το στάδιο του σχεδιασμού. Στην περίπτωση του εργαστηρίου PSClassroom, η πρώτη συνεδρία επιδιώκει, αφενός, να δείξει ένα μοντέλο για εργασία στην τάξη στην επίλυση προβλημάτων και, αφετέρου, για να αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί τα χαρακτηριστικά του μοντέλου και τις διάφορες πρακτικές με την τάξη τους. Έτσι, είναι φυσικό να βλέπουμε εντάσεις να εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της συνεδρίας. Οι δάσκαλοι, με φυσικό τρόπο, συγκρίνουν αυτό που τους παρουσιάζεται στο εργαστήριο με ό τι γνωρίζουν, πιστεύουν ή κάνουν (Nipper et al., 2011).

Οι εντάσεις μπορεί να έχουν πολλά χαρακτηριστικά, όπως το εύρος, την ένταση και την προέλευση. Σε όρους χρονικής διάρκειας, κάποιες εντάσεις εμφανίζονται κατά την συνεδρία και εξαφανίζονται πριν τελειώσει, ενώ κάποιες άλλες μεταφέρονται στο σπίτι και εξαφανίζονται αργότερα. Μπορεί να υπάρξουν ακόμη και εντάσεις αισθητές σε όλη την εμπειρία του εργαστηρίου, κάτι που θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να

περιγραφεί. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των εντάσεων είναι η δύναμη της δυσφορίας ή της ανισορροπίας. Η προέλευση της έντασης είναι επίσης πολύ σημαντική δηλαδή εάν προέρχεται από πεποιθήσεις, γνώσεις ή πρακτικές. Εδώ συζητήθηκε η προέλευση, αλλά θα ήταν ενδιαφέρον να εμβαθύνουμε ακόμη σε αυτήν την κατεύθυνση, και μπορούμε να πούμε το ίδιο για τα άλλα χαρακτηριστικά, μήκος και ένταση.

Ενώ η εμφάνιση εντάσεων σε ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης είναι κάτι το επιθυμητό, αυτές οι εντάσεις θα πρέπει τελικά να διαλυθούν, γιατί αντίθετα, αν συνεχιστούν ή αυξήσουν την έντασή τους, μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο για την αλλαγή ή ακόμη και να αποτελέσουν παράγοντα λιποταξίας. Ακριβώς όπως υπάρχουν εντάσεις που προάγουν την αλλαγή, μπορεί να υπάρχουν εντάσεις που προωθούν την επιβράδυνση στην αλλαγή και ακόμη την αποτροπή της. Αυτά τα χαρακτηριστικά κάνουν τις εντάσεις ένα σημαντικό αντικείμενο μελέτης με σκοπό τελικά τον έλεγχο ή τη χρήση τους ως ερέθισμα για αλλαγή.

Οι δάσκαλοι που συμμετείχαν σε αυτό το ερευνητικό έργο, ενδεχομένως, δεν είχαν συμμετάσχει στο παρελθόν σε μια συνεδρία επίλυσης προβλημάτων όπως αυτή στο PSClassroom. Αυτή ήταν μια πολύ διαφορετική εμπειρία για τους περισσότερους από αυτούς, και έτσι προέκυψαν τόσες πολλές εντάσεις. Στην μελέτη αυτή οι ερευνητές έχουν συζητήσει μόνο εντάσεις που σχετίζονται με τα μαθηματικά, αλλά υπάρχουν άλλες εντάσεις που σχετίζονται με άλλες σχέσεις στον εκπαιδευτικό ρόμβο που συζητήθηκαν προκαταρκτικά στο Perdomo-Díaz, Rojas και Felmer (2018).

Θα μπορούσαν να τεθούν ερωτήσεις μελέτης όπως οι εξής: Ποιες άλλες εντάσεις εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια του έτους; Τι εντάσεις εμφανίστηκαν όταν οι δάσκαλοι έπρεπε να σχεδιάσουν μια δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων σε μια τάξη; Συνεχίζονται οι εντάσεις που εμφανίστηκαν στην πρώτη συνεδρία όλο το χρόνο; Υπάρχουν κάποιες που διαλύονται κατά τη διάρκεια του έτους; Ποιες από όλες;

Μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας να ρίχνουν φως στις πεποιθήσεις των δασκάλων όσον αφορά τη φύση των μαθηματικών, τον τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησής τους και επίσης τι σημαίνει να κατέχεις τα μαθηματικά σε διαφορετικά επίπεδα. Η πληροφορία που λήφθηκε στη συζήτηση της ολομέλειας είναι αρκετά γνήσια επειδή προέρχεται από δασκάλους που δούλεψαν μαζί πάνω σε μαθηματικά προβλήματα για αρκετές ώρες, σε τυχαίες ομάδες. Αυτοί οι δάσκαλοι ήταν

έτοιμοι να συζητήσουν και να εκφράσουν ανοιχτά τι σκέφτηκαν και δίνουν τις γνήσιες σκέψεις τους χωρίς κοινωνικό έλεγχο.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τρεις διαφορετικές πεποιθήσεις και πρακτικές των δασκάλων που εκφράζονται στη συζήτηση: (i) οι δάσκαλοι πιστεύουν ότι πρέπει να είναι γρήγοροι στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, (ii) οι δάσκαλοι πιστεύουν ότι τα σχέδια και οι εικόνες δεν είναι «σωστοί» τρόποι επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων για δασκάλους και μαθητές γυμνασίου ή τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και ότι αντ' αυτού θα πρέπει να χρησιμοποιούν τύπους και εξισώσεις, και (iii) τα μαθηματικά προβλήματα θα πρέπει να είναι σε ένα πλαίσιο, ώστε τα παιδιά να μπορούν να τα λύσουν, όπου το πλαίσιο σημαίνει πραγματική ζωή ή το τρέχον περιεχόμενο που μελετάται στο σχολείο.

## ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: Η ΕΡΕΥΝΑ

### 4. Μεθοδολογία

Η έρευνα αυτή γίνεται με σκοπό να διερευνηθεί η ένταση δεν είμαι σε θέση να λύσω ενώ πρέπει να είμαι σε θέση να λύσω που έχει παρατηρηθεί σε εργαστήρια ΕΑ όταν οι δάσκαλοι καλούνται να λύσουν προβλήματα όχι εύκολα για αυτούς και αυτό τους προκαλεί συναισθήματα αντίστοιχα με αυτά των μαθητών όταν τους εμπλέκουν σε ΕΠ.

Η έρευνα έγινε σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας με χρόνια εργασίας που τους κατατάσσει στους έμπειρους εκπαιδευτικούς. Η μέθοδος της είναι ποιοτική, με στόχο την διερεύνηση και κατανόηση των απαντήσεων που δόθηκαν κατά τις συζητήσεις που γίνανε. Σκοπός να μελετηθεί και να γίνει κατανοητή η σχέση των εκπαιδευτικών με την ΕΠ με βάση τις απαντήσεις στις ερωτήσεις και τις διηγήσεις των υποκειμένων, στην ακραία κατάσταση όπου αδυνατούν ή δυσκολεύονται να λύσουν ή να ολοκληρώσουν μια λύση κατά την ΕΠ στην τάξη. Το κύριο βάρος δόθηκε στην ποικιλία των απόψεων. Η συζήτηση επιδίωξε την ελεύθερη έκφραση απαλλαγμένη από άγχη αξιολόγησης φροντίζοντας να μην υπάρχουν σχέσεις εξάρτησης με τα υποκείμενα (π.χ. ΠΕΚΕΣ στο οποίο εργάζομαι).

Η εγκυρότητα της ποιοτικής έρευνας διασφαλίζεται με τις επαρκείς πηγές, την επιλογή κατάλληλου ερευνητικού εργαλείου και την χρήση αντιπροσωπευτικού δείγματος (Cohen, Lawrence & Morrison, 2008. Robson, 2010). Η συνέντευξη είχε καθοδήγηση από συγκεκριμένες ερωτήσεις, που ιχνηλατούσαν απαντήσεις στις ερευνητικές υποθέσεις, αλλά άφησε και χώρο για περισσότερη ελευθερία στη συζήτηση. Η διασφάλιση της αξιοπιστίας αυτής της έρευνας εδράζεται στο γεγονός ότι μελετά μια ένταση που ήδη έχουν διαπιστώσει μελέτες. Ερευνούμε αντίστοιχα σε σχέση με την ελληνική πραγματικότητα. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης και τα προβλήματα επιλέχθηκαν ώστε να απαντούν στις ερευνητικές υποθέσεις.

#### 4.1 Στόχος

Στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί η ένταση «δεν είμαι σε θέση να λύσω ενώ θα έπρεπε να είμαι σε θέση να λύσω» κατά την επίλυση προβλημάτων από έμπειρους μαθηματικούς στην Ελλάδα. Θα διερευνήσουμε τις αντιδράσεις τους όταν τα προβλήματα αντιστέκονται στο να λυθούν ή λύνονται όχι ολοκληρωμένα.

#### 4.2 Ερωτήματα της έρευνας

**EE1:** Αποδέχονται οι εκπαιδευτικοί την σημαντικότητα της ΕΠ στη διδασκαλία των μαθηματικών και αν ναι γιατί;

**EE2:** Εμφανίζεται στους εκπαιδευτικούς, και αν ναι πότε, η ένταση «θέλω αλλά δεν μπορώ να λύσω» στην τάξη και πως την διαχειρίζονται;

**EE3:** Προσφεύγουν οι εκπαιδευτικοί σε βοήθεια όταν δεν μπορούν να λύσουν σε ιστοσελίδες ή συναδέλφους τους;

**EE4:** Ποια συναισθήματα βιώνουν οι εκπαιδευτικοί όταν δεν μπορούν να λύσουν και ποια η προσωπική τους στάση;

**EE5:** Σχετίζεται η επίδοση των καθηγητών στην επίλυση προβλήματος με τις απόψεις και τις πρακτικές στην ΕΠ τους όταν εμφανίζεται η ένταση «θέλω αλλά δεν μπορώ να λύσω»;



### 4.3 Διαδικασία

Η έρευνα έγινε σε δυο φάσεις: **1<sup>η</sup> φάση:** στα υποκείμενα στάλθηκαν τα προβλήματα ώστε να τα λύσουν ή και όχι αν κάποια δεν κατάφεραν να τα λύσουν σε εύλογο χρόνο και τους ζητήθηκε να επιστρέψουν τις λύσεις.

**2<sup>η</sup> φάση:** με συνάντηση ερευνητή και υποκείμενων, φυσική ή ηλεκτρονική με τηλεδιάσκεψη λόγω και των τόπων διαμονής κάποιων υποκειμένων. Πραγματοποιήθηκε τον μήνα Ιανουάριο 2022. Κάθε συνέντευξη είχε διάρκεια γύρω στη 1 ώρα. Γνώριζαν ότι η συνέντευξη δινόταν στα πλαίσια της μεταπτυχιακής μου εργασίας με θέμα γύρω από την επίλυση προβλημάτων στην τάξη. Παρουσιάσαμε τον σκοπό της έρευνας και ζητήσαμε άδεια για εγγραφή της συζήτησης. Η άρνηση ήταν σχεδόν καθολική και δεν επιμείναμε οπότε κρατούσαμε σημειώσεις. Πήραν διαβεβαίωση για την ανωνυμία στις αναφορές στα λεγόμενα τους. Προσπαθήσαμε να πάρουμε από τα υποκείμενα πληροφορίες σχετικά με το αντικείμενο της έρευνας και τις απόψεις τους (Παρασκευοπούλου, Κόλλια, 2008).

### 4.4 Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν 10 μαθηματικοί δευτεροβάθμιας που δουλεύουν σε γυμνάσια και λύκεια σε διάφορους νομούς της χώρας (Δωδεκάνησα, Ήπειρο, Χαλκιδική, Θεσσαλονίκη, Πελοπόννησο, Αττική, Ανατολική Μακεδονία), αποφεύγοντας τους τρεις νομούς επιστημονικής ευθύνης μου (Ημαθία, Πέλλα, Πιερία), για να μην μπαίνουν ζητήματα μελλοντικής αξιολόγησης. Ανάμεσα τους και ένας μαθηματικός που μόλις βγήκε στη σύνταξη. Έγινε βολική δειγματοληψία με κριτήρια: να είναι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν ή κάποιοι έχουν διδάξει σε σχολεία και να έχουν εμπλακεί σε επίλυση προβλημάτων μέσα στην τάξη. Λίγοι ήταν ηλικιακά στην κατηγορία 35-50 ενώ η πλειοψηφία στην κατηγορία 50-60. Η δειγματοληψία κριτηρίων έγινε με βάση α) να διδάσκουν ή να έχουν διδάξει αρκετά χρόνια, β) να έχουν το δυνατόν απεμπλακεί, λόγω εμπειρίας, από την φροντιστηριακή λογική «μπορώ να λύσω τα πάντα και αυτό είναι μαθηματικά».

#### E1. Χρόνια διδασκαλίας

Χρόνια διδασκαλίας	N	%
--------------------	---	---

0-10	2	20
11-20	6	60
21-30	1	10
30-	1	10
ΣΥΝΟΛΟ	10	

Από τους 10 οι γυναίκες ήταν 4 και οι άντρες 6. Εκτός από έναν πρόσφατα συνταξιούχο, οι υπόλοιποι είναι ενεργοί μόνιμοι εκπαιδευτικοί σε δημόσια γυμνάσια και λύκεια στην Ήπειρο, Ανατολική Μακεδονία, Κρήτη, Δωδεκάνησα, Θεσσαλονίκη, Θεσσαλία, Αττική και Πελοπόννησο. Μέσος όρος ηλικίας 50,5 με ακραίες τιμές 35 και 65. Μέσος όρος χρόνων διδασκαλίας 18,9 με ακραίες τιμές 7 και 35.

Να σημειώσουμε ότι κάποιος δεν θέλησαν να συμμετέχουν αναφέροντας λόγους υποχρεώσεων κτλ. κυρίως. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, όμως, είναι συνάδερφος που είπε: "Δεν μπαίνω στη διαδικασία γιατί το πιθανότερο είναι να απογοητευτώ πάρα πολύ. Μετά από πολλά χρόνια στα φροντιστήρια και το δημόσιο σχολείο, κάνοντας κυρίως Γ' Λυκείου έχω αποκτήσει υπερβολική άνεση σε αυτές τις ασκήσεις, τόσο που λύνω αυτόματα σχεδόν και τις πιο δύσκολες και καινούριες που συναντάω. Στο πεδίο αυτό έχω δουλέψει χρόνια κι αυτό μου δίνει μεγάλη αυτοπεποίθηση. Αν βγω από αυτό το πεδίο και δεν τα καταφέρω, που το θεωρώ πολύ πιθανό σε κάποια προβλήματα, τότε θα έχω διπλή και όχι απλή απογοήτευση." Θεωρούμε ότι δεν είναι μια δήλωση ανασφάλειας αλλά κάτι πιο ουσιαστικό. Ότι τα προβλήματα στα μαθηματικά δεν μπορούν να αντιμετωπίζονται γενικά. Χρειάζεται κανείς να έχει δουλέψει σε έναν τομέα, όπως κι αυτός των ανοιχτών προβλημάτων, για να είναι αποτελεσματικός.

#### 4.5 Εργαλείο συλλογής ερευνητικών δεδομένων και μέθοδος επεξεργασίας

Για να ερευνηθούν οι υποθέσεις που αναφέραμε επιλέξαμε σαν ερευνητική μέθοδο:Α) την συνέντευξη, από τα βασικότερα εργαλεία μιας ποιοτικής έρευνας (Παρασκευοπούλου-Κόλλια, 2008).

B) ερωτηματολόγιο που περιείχε 7 έργα που πήραμε από έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο παρελθόν<sup>35</sup>.

Η συνέντευξη περιείχε κάποιες προεπιλεγμένες ερωτήσεις αλλά και τμήμα όχι καθοδηγούμενης από ερωτήσεις έκφρασης ανάλογα με την εξέλιξη κάθε συνέντευξης.

Η έρευνα δεν είχε καμία αξιολογική για κάθε άτομο πρόθεση, όπως άλλωστε έγινε καθαρό στο κάθε υποκείμενο από την αρχή. Αυτό που ερευνήθηκε είναι το πώς βιώνει το υποκείμενο την ένταση να θέλει αλλά να μην μπορεί να λύσει ή να ολοκληρώσει την λύση ενός προβλήματος μέσα στην τάξη. Οι προεπιλεγμένες ερωτήσεις είναι 14. πληροφορίες από την εμπειρία του κάθε υποκείμενου πάνω στο αντικείμενο της έρευνας, τα συναισθήματα που προκαλεί η ένταση που μελετάμε.

Οι δυο πρώτες ερωτήσεις είναι πιο γενικές και εισαγωγικές στο θέμα. Η πρώτη ερώτηση αφορά τα χρόνια διδασκαλίας του καθενός. Η δεύτερη κατά πόσο εκτιμάνε γενικά ότι η επίλυση προβλημάτων στην τάξη συμβάλει στην κατανόηση των μαθηματικών.

Οι επόμενες 6 ερωτήσεις αφορούν στο πως διαχειρίζεται την ΕΠ μέσα στην τάξη. Αν βάζει μόνο προβλήματα που έχει πάντα λύσει πιο πριν ή αν ρισκάρει με πλοήγηση και σε αχαρτογράφητα νερά δίνοντας στους μαθητές μια έστω τεχνητή γεύση της μαθηματικής περιπέτειας. Τι κάνει λοιπόν όταν φτάνει σε αδιέξοδο και δεν μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα; Προσπαθεί να διαφύγει με τρόπο ώστε να μην εκτεθεί ή εισάγει τους μαθητές στις δεύτερες αναγνώσεις; Επιλέγει λοιπόν τι επιπέδου δυσκολίας προβλήματα; Επεκτείνει επί τόπου προβλήματα που λύθηκαν προς άγνωστες πλευρές τους; Μήπως βάζει προβλήματα απλά προσαρμόζοντας σχολικές ασκήσεις; Όταν οι μαθητές φέρνουν δικά τους προβλήματα μπαίνει σε διαδικασία λύσης εν θερμώ ατομικά ή μπροστά στην τάξη;

Πέρα από το αν εκθέτει ή όχι την αδυναμία να λύσει στους μαθητές του η θέση στην οποία έρχεται τον αναγκάζει να ψάξει για λύσεις. Στο διαδίκτυο, σε ειδικά forum που μπορεί να ανεβάσει το πρόβλημα ώστε να προσπαθήσουν την λύση κι άλλοι μαθηματικοί ή να απευθυνθεί στους συναδέλφους στο χώρο εργασίας του. Και εδώ όμως μπαίνουν ζητήματα της διαχείρισης της κατάστασης όπου αδυνατώ να βρω λύση ή ολοκληρωμένη λύση. Η συμπεριφορά στα forum αυτά δεν είναι πάντα η καλύτερη

ούτε και η συμπεριφορά πάντα των συναδέρφων στον χώρο εργασίας. Το άγχος αυτό επιτείνεται στη χώρα από την λάθος εικόνα του μαθηματικού που τα λύνει όλα σε αντίθεση με την αληθινή περιπέτεια των μαθηματικών όπου η αποτυχία είναι σύμφυτο και όχι ζιζάνιο.

Οι επόμενες ερωτήσεις αφορούν την συναισθηματική διαχείριση της αδυναμίας λύσης. Πως νιώθουν όταν έρχονται αντιμέτωποι με μια τέτοια κατάσταση ειδικά επαγγελματίες με πολλά χρόνια υπηρεσίας και πολλές ώρες πτήσης; Λογικά σε νεαρότερες ηλικίες θα ήταν πιο ανεκτό συναίσθημα λόγω απειρίας. Τους αποτρέπουν αυτές οι αδυναμίες να ασχολούνται με ΕΠ και επέκταση γνωστών προβλημάτων; Νιώθουν αποτυχία όταν λύνουν αργά και μετά από περιπλάνηση σε αποτυχημένες προσπάθειες;

Τέλος δόθηκε η ευκαιρία στον καθένα για δηλώσεις, παρατηρήσεις, συμπληρώσεις μήπως προκύψει οτιδήποτε απρόβλεπτο και χρήσιμο σε σχέση με την έρευνα.

Η μέθοδος ανάλυσης και επεξεργασίας των δεδομένων που προέκυψαν είναι η ανάλυση περιεχομένου. Μέσα από τις σημειώσεις της συνέντευξης αναλύθηκαν οι προσωπικές απαντήσεις και έγινε προσπάθεια να διαπιστωθεί η συμπεριφορά και εμπειρία τους. Εδώ εδράζονται και τα συμπεράσματα. Έγινε απόπειρα ταξινόμησης των απόψεων (Cohen και al., 2008, Ίσαρη & Πουρκός,2015, Τσιώλης, 2018). Η ταξινόμηση έγινε με βάση τα συναισθήματα και την διαχείριση τους.

## 5. Αποτελέσματα

### 5.1. Αποτελέσματα από τις ερωτήσεις τις σχετικές με την 'ένταση'

ΑΠΟΨΗ

Πίνακας 1. Ανάλυση ερώτησης E2

<b>Θεωρείς ότι η ΕΠ είναι σημαντική στη διδασκαλία των μαθηματικών;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Σημαντική η ΕΠ στην διδασκαλία	9 (90,0%)

Ενισχύει την κριτική σκέψη	3 (30,0%)
Συνδέει τα μαθηματικά με την πραγματικότητα	3 (30,0%)
Κινητοποιεί αδιάφορους μαθητές	1 (10,0%)
Χρονοβόρα η ΕΠ	1 (10,0%)
Η ΕΠ δεν είναι άμεσα αποτελεσματική γνωστικά	1 (10,0%)
Καλλιεργεί την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων	1 (10,0%)
Αξιοποιούν τις γνώσεις τους	1 (10,0%)
Η ΕΠ οργανώνει την σκέψη	1 (10,0%)
Η διαδικαστική γνώση πιο δημοφιλής μάλλον	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Σημαντική η ΕΠ στην διδασκαλία», συμπληρώνοντας 9 αναφορές με ποσοστό 90,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M6: «Ναι, γιατί ενισχύει την κριτική σκέψη των μαθητών και τους βοηθάει να αντιληφθούν πρακτικά τη σπουδαιότητα των μαθηματικών στην αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινότητας. Καθώς οι μαθητές αναζητούν τη λύση ενός προβλήματος ή καθώς διδάσκονται τρόπους επίλυσης προβλημάτων, ενεργοποιούνται αμεσότερα στο να αξιοποιούν γνώσεις του παρελθόντος ή οδηγούνται σε νέους τρόπους ανάπτυξης της σκέψης τους».

Ακολούθησε η «Ενισχύει την κριτική σκέψη» ως ένα από τα οφέλη της διδασκαλίας ΕΠ, σύμφωνα με τις 3 αναφορές των εκπαιδευτικών με ποσοστό 30,0%. Σχετικές απαντήσεις:

M5: «Ναι για να οξύνει το πνεύμα αντίληψης της εφαρμογής των μαθηματικών στην δυνατότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, πολλές φορές έξω από το αυστηρό νομοθετικό πλαίσιο διδασκαλίας».,

Εξίσου σημαντική σημειώθηκε από 3 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 30,0% η «Συνδέει τα μαθηματικά με την πραγματικότητα» ως ένα πλεονέκτημα που αποκομίζουν οι μαθητές στα Μαθηματικά κατά την διδασκαλία ΕΠ. Σχετικά αποσπάσματα:

M1: «Είναι σημαντική για τη σύνδεση των μαθηματικών με προβλήματα της καθημερινότητας και την εφαρμογή αφηρημένων εννοιών»,

Ένα επίσης σημαντικό πλεονέκτημα της διδασκαλίας ΕΠ, ότι «Κινητοποιεί αδιάφορους μαθητές», αναφέρθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησαν και αρνητικές τοποθετήσεις όπως «Χρονοβόρα η ΕΠ» πράγμα που δυσκολεύει την εφαρμογή της, σημειώνοντας 1 αναφορά εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%.

Επιπρόσθετα αρνητική η τοποθέτηση, με τον ίδιο αριθμό αναφορών, 1, με ποσοστό 10,0% «Η ΕΠ δεν είναι άμεσα αποτελεσματική γνωστικά».

Η αξία της ΕΠ στην μαθηματική συγκρότηση ενός μαθητή καθώς «Καλλιεργεί την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων» είναι επίσης ένα πλεονέκτημα της, καθώς σε αυτήν καταγράφηκε 1 αναφορά από τους εκπαιδευτικούς με ποσοστό 10,0%.

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, σημειώθηκε η «Αξιοποιούν τις γνώσεις τους» κατά την ΕΠ, με 1 αναφορά και ποσοστό 10,0%.

Θετική αναφορά για την προσφορά της ΕΠ, ότι «Η ΕΠ οργανώνει την σκέψη», με 1 αναφορά και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, η μη δημοφιλής ΕΠ σχετικά με την διαδικαστική γνώση «Η διαδικαστική γνώση πιο δημοφιλής μάλλον».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην Ε2*

Οι απαντήσεις παρουσιάζουν συντριπτική πλειοψηφία υπέρ της σημαντικότητας της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτό να σημειώσω είναι και η εμπειρία μου συζητώντας με σχεδόν όλους τους εκπαιδευτικούς σε 3 νομούς πέρα από τα αποτελέσματα στο δείγμα αυτό. Οι εκπαιδευτικοί δεν αρκούνται σε μια απλή απάντηση αλλά αιτιολογούν την επιλογή τους. Θεωρούν ότι προάγει την κριτική σκέψη και συνδέει τα μαθηματικά με πραγματικές καταστάσεις.

Τονίζουν αυτά τα χαρακτηριστικά της ΕΠ σε σχέση, θεωρούμε, με την απλή εκτέλεση αλγορίθμων. Η ΕΠ είναι μια διαδικασία γεμάτη με κρίσιμα σημεία αποφάσεων μέσα σε περιβάλλον αβεβαιότητας και χωρίς την θαλπωρή των έτοιμων λύσεων. Αυτό συνιστά ένα πλαίσιο ανάπτυξης της κριτικής σκέψης.

Τα σχολικά μαθηματικά, ειδικά στη χώρα μας, παρουσιάζονται φορμαλιστικά διαφέροντας πολλές φορές ελάχιστα σε τρόπο παρουσίασης από την αντίστοιχη μαθηματική παρουσίαση των θεμάτων. Όλο το εκπαιδευτικό σύστημα έχει μια εξετασιοτροπική συμπεριφορά που καθορίζει όλες τις τάξεις. Η επικρατούσα αυτή τάση περιθωριοποιεί την ΕΠ. Αποτέλεσμα λίγες φορές οι μαθητές να συνδέουν το σώμα μαθηματικών που μαθαίνουν με τα προβλήματα της πραγματικής ζωής. Σχηματικά είναι σαν να έχουν εξοριστεί τα μαθηματικά για μηχανικούς και να επικρατούν τα μαθηματικά για μαθηματικούς. Οι σχετικές απαντήσεις δείχνουν αυτή την δίψα των εκπαιδευτικών για αποφορμαλισμό των σχολικών μαθηματικών. Μια ματιά στα αναλυτικά των άλλων χωρών θα ήταν πολύ χρήσιμη.

Ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζουν και οι λιγότερο δημοφιλείς απόψεις που διατυπώνονται παρουσιάζοντας μια σειρά από χαρακτηριστικά της ΕΠ. Είναι μια διαδικασία ανακαλυπτική και όχι εκτελεστική. Ωθεί τους μαθητές σε οργάνωση της σκέψης τους και συστηματική διερεύνηση. Είναι επίσης γόνιμη καθώς ο λύτης αναπτύσσει νέους τρόπους σκέψης. Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθητές σε πραγματικά προβλήματα αναδεικνύει την ισχύ αυτών των εννοιών που μέσα στο φορμαλιστικό πλαίσιο είναι απλά θεωρητικές κατασκευές.

Τέλος η άρνηση της σημασίας της ΕΠ στη διδασκαλία φαίνεται να έχει σχέση με την άποψη για συγκριτικά μικρή αποτελεσματικότητα σε σχέση με την εκτέλεση αλγορίθμων και τον διδακτικό χρόνο που απαιτεί. Η χρονοβόρα ΕΠ είναι, να σημειώσουμε, αντεπιχείρημα που παρουσιάζεται σε έρευνες συχνά.

#### *ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ*

*Πίνακας 2. Ανάλυση ερώτησης Ε3*

--

Βάζεις ή έχεις βάλει προβλήματα στην τάξη που δεν έχεις λύσει πιο πριν;	
Κωδικοί	Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)
Βάζω	5 (50,0%)
Σπάνια	3 (30,0%)
Δεν βάζω	2 (20,0%)
Αντίδοτο στην ανία η πρόκληση των άγνωστων προβλημάτων	2 (20,0%)
Η ανασφάλεια στα πρώτα επαγγελματικά χρόνια οδηγεί σε απόλυτα προγραμματισμένο μάθημα	2 (20,0%)
Η διαδικασία επίλυσης του άγνωστου προβλήματος δείχνει την αληθινή μαθηματική διαδικασία	1 (10,0%)
Το άγνωστο πρόβλημα αναιρεί το καλά προσχεδιασμένο μάθημα	1 (10,0%)
Βάζω όταν είναι πρόβλημα μαθητή	1 (10,0%)
Η πίεση χρόνου και οι ανάγκες των μαθητών καθιστούν σπάνιο το άγνωστο πρόβλημα	1 (10,0%)
Οι μαθητές είναι διστακτικοί απέναντι στα προβλήματα	1 (10,0%)
Η εμπειρία επιτρέπει τα προβλήματα χωρίς προετοιμασία	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Βάζω», συμπληρώνοντας 5 αναφορές με ποσοστό 50,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Ναι είναι κάτι που ήρθε με τα χρόνια δουλειάς.».

Ακολούθησε η «Σπάνια», με 3 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 30,0%. Σχετική απάντηση:

M1: «Σπάνια γιατί θέλω να ξέρω την δυσκολία τους για τους μαθητές ,τη συνάφεια με το διδακτικό αντικείμενο και για να είμαι προετοιμασμένη»,

Εξίσου σημαντική που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0% η «Αντίδοτο στην ανία η πρόκληση των άγνωστων προβλημάτων» παράγοντας για την αύξηση του ενδιαφέροντος για μαθητές και καθηγητές. Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Τώρα πλέον το επιδιώκω γιατί είναι ανιαρό να λύνεις συνέχεια τα γνωστά.».



Μια επίσης σημαντική άποψη είναι και ότι «Η ανασφάλεια στα πρώτα επαγγελματικά χρόνια οδηγεί σε απόλυτα προγραμματισμένο μάθημα», καθώς σε αυτήν αναφέρθηκαν 2 εκπαιδευτικοί με ποσοστό 20,0%. Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Ναι είναι κάτι που ήρθε με τα χρόνια δουλειάς. Δεν ήταν έτσι από την αρχή. Παλιά προετοιμαζόμουν για κάθε μάθημα με λεπτομέρεια και ένιωθα ανασφάλεια να ξεφύγω»,

Ακολούθησαν και αρνητικές τοποθετήσεις όπως «Δεν βάζω», σημειώνοντας 2 αναφορές εκπαιδευτικών με ποσοστό 20,0%. Σχετική απάντηση:

M8: «Όχι, δεν έχω βάλει προβλήματα τα οποία δεν έχω λύσει»,

Η αξία των εντελώς άγνωστων προβλημάτων βρίσκεται στην προσομοίωση της πραγματικής μαθηματικής διαδικασίας καθώς «Η διαδικασία επίλυσης του άγνωστου προβλήματος δείχνει την αληθινή μαθηματική διαδικασία» καταγράφηκε σε 1 αναφορά από τους εκπαιδευτικούς με ποσοστό 10,0%.

Με το αχαρτογράφητο πρόβλημα εμφανίζεται το ρίσκο ανατροπής σε βασικά στοιχεία σχεδιασμού του μαθήματος όπως επίπεδο δυσκολίας για τους μαθητές, συνάφεια με το διδακτικό αντικείμενο, προετοιμασία εκπαιδευτικού, όπως αναφέρεται 1 φορά, με ποσοστό 10,0% για το «Το άγνωστο πρόβλημα αναιρεί το καλά προσχεδιασμένο μάθημα».

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, σημειώθηκε η «Βάζω όταν είναι πρόβλημα μαθητή» κατά την ΕΠ, με 1 αναφορά και ποσοστό 10,0%.

Η κατηγορία «Η πίεση χρόνου και οι ανάγκες των μαθητών καθιστούν σπάνιο το άγνωστο πρόβλημα», έχει 1 αναφορά και ποσοστό 10,0%.

Διατυπώνεται επίσης ότι «Οι μαθητές είναι διστακτικοί απέναντι στα προβλήματα», με 1 αναφορά και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, η εμπειρία αλλάζει την συμπεριφορά απέναντι στα εντελώς άγνωστα προβλήματα καθώς «Η εμπειρία επιτρέπει τα προβλήματα χωρίς προετοιμασία

Η ερώτηση αφορούσε το ρίσκο που παίρνει ο εκπαιδευτικός όταν βάζει στην τάξη προβλήματα που δεν έχει λύσει πριν. Οι μισοί απαντάνε ότι το κάνουν. Είναι πού πιθανό το αποτέλεσμα αυτό να συνδέεται με τα πολλά χρόνια υπηρεσίας των περισσότερων εκπαιδευτικών του δείγματος. Πάντως ότι δεν είναι συντριπτικά πλειοψηφική στάση σε ένα τέτοιου είδους δείγμα δείχνει ότι οι επιφυλάξεις για άγνωστα προβλήματα δεν φεύγουν εντελώς με την εμπειρία. Κάποιοι λόγοι που αναφέρονται για τους οποίους βάζουν άγνωστες ασκήσεις φαίνεται να είναι η ανία μετά από χρόνια αλλά και ότι έχει ξεπεραστεί η ανασφάλεια στις αρχές της επαγγελματικής τους ζωής. Αναφέρεται επίσης ότι αυτού του είδους τα προβλήματα αναπτύσσουν μπροστά στους μαθητές το πώς πραγματικά σκέφτεται κανείς μαθηματικά καθώς αντιμετωπίζει το άγνωστο ή έστω κάποια μορφή του αγνώστου. Πάντως δεν φαίνεται το δείγμα να κυριεύεται από ανασφάλειες.

Ένα σημαντικό τμήμα του δείγματος εμφανίζεται να έχει σπάνια τέτοια πρακτική. Αιτιολογεί ότι θέλει να αποφύγει τον αιφνιδιασμό των μαθητών με δύσκολα προβλήματα που απλά θα τους απογοητεύσουν, θέλει καλά σχεδιασμένο μάθημα και πρόβλημα που να έχει συνάφεια με το αντικείμενο. Στην ουσία αυτοί οι εκπαιδευτικοί φωτίζουν τις αρνητικές όψεις της πρακτικής αυτής. Οι ολικοί αρνητές της πρακτικής εκφράζονται απόλυτα και χωρίς αιτιολόγηση. Πως μπορεί κανείς να υποθέσει τους λόγους. Φαίνεται να αφορούν σχετικά λίγα χρόνια διδασκαλίας και ίσως ανασφάλειες έκθεσης στους μαθητές.

Πίνακας 3. Ανάλυση E4

<b>Σε περίπτωση αδυναμίας λύσης και από πλευράς σου το κρύβεις με τρόπο ή λες στους μαθητές ότι θέλει και δεύτερη ανάγνωση;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Δεύτερη ανάγνωση	9 (90,0%)
Οι δεύτερες αναγνώσεις δομικό στοιχείο της μαθηματικής διαδικασίας	4 (40,0%)
Παιδαγωγικό συμβόλαιο	3 (30,0%)
Συμπεριφορά ανάλογα με το κοινό	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Δεύτερη ανάγνωση», συμπληρώνοντας 9 αναφορές με ποσοστό 90,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M6: «Σε περίπτωση που για κάποιο λόγο αδυνατώ να επιλύσω κάποιο πρόβλημα, δεν έχω κανένα θέμα να το αναφέρω στους μαθητές προτρέποντάς τους να με “βοηθήσουν”, αλλά το σίγουρο είναι πως ενθαρρύνω την τάξη να ξαναδεί το πρόβλημα και να το δουλέψουμε σε επόμενο μάθημα μαζί»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Οι δεύτερες αναγνώσεις δομικό στοιχείο της μαθηματικής διαδικασίας», με 4 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 40,0%.  
Σχετική απάντηση:

M10: «Ο Ευκλείδης το είπε από αιώνες: δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία. Αν υπήρχε δεν θα είχαμε άλυτα προβλήματα εδώ και χρόνια αλλά και αιώνες. Να μάθουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι στρατηγική κι ίσως κάποιες μάχες χαθούν.»

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 3 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 30,0%, είναι η «Παιδαγωγικό συμβόλαιο» το οποίο προσυμφωνεί με τους μαθητές ότι οι δύσκολες στιγμές είναι μέρος του κάνουμε μαθηματικά. Σχετικό απόσπασμα:

M3: «άλλωστε από την αρχή τους εξηγώ ότι μπορεί να υπάρξουν στιγμές που μπορεί να μην μπορώ να δω κάτι σε μια άσκηση αμέσως»,

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, δεν μπορούμε παρά να έχουμε «Συμπεριφορά ανάλογα με το κοινό».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην Ε4*

Παρατηρούμε στις απαντήσεις αυτής της ερώτησης μια ακομπλεζάριστη στάση των εκπαιδευτικών που συνδέεται, θεωρούμε, με την αυξημένη τους εμπειρία. Απαντούν χωρίς αμφιβολία ότι προτείνουν δεύτερη ανάγνωση χωρίς να αναφέρουν κάποια δυσφορία που προκύπτει από αυτή την κατάσταση. Σχεδόν οι μισοί αιτιολογούν αυτήν τους την στάση. Παρουσιάζεται μάλιστα και άποψη ότι μπορεί να χρειαστούν και διαδοχικές αναγνώσεις χωρίς και πάλι να μπαίνει ζήτημα ακύρωσης του εκπαιδευτικού.

Το συμβάν παρουσιάζεται σαν μια καλή ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές πως αναπτύσσονται πραγματικά τα μαθηματικά. Τα άλυστα για αιώνες προβλήματα το αποδεικνύουν, όπως υποστηρίζεται. Η περίφημη «βασιλική οδός» που δεν υπάρχει, αν και έρευνες δείχνουν διαφορές που προκύπτουν από κοινωνικές ανισότητες, χρησιμοποιείται σαν επιχείρημα ότι η δεύτερη ανάγνωση είναι αναπόφευκτη ειδικά στα δύσκολα προβλήματα. Επισημαίνεται σχηματικά πως η επίλυση προβλημάτων είναι ένας «πόλεμος» όπου μπορεί να χαθούν μάχες αλλά το σημαντικό είναι η στρατηγική συμπεριφορά κι αυτή εμπεριέχει επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος.

Στις απαντήσεις κάνει την εμφάνιση του και ένα παιδαγωγικό συμβόλαιο. Οι μαθηματικοί εξηγούν από την αρχή στους μαθητές ότι δεν λύνονται όλα με την πρώτη στα μαθηματικά. Τους προειδοποιούν ότι τα μαθηματικά σε φέρνουν σε αυτή την θέση χωρίς να σημαίνει ότι είσαι ανίκανος λύτης. Και ότι το βασικό είναι να μαθαίνεις ότι οι δεύτερες αναγνώσεις που ακολουθούν μια αποτυχημένη προσπάθεια μπορεί να είναι αποτελεσματικές. Μάλιστα το θεωρούν και μάθημα για την πραγματική ζωή σε πολλές περιπτώσεις όπου κανείς αντιμετωπίζει αδιέξοδα. Συνεπώς διδάσκουν την δεύτερη ανάγνωση και την επαναπροσπάθεια σαν δομική πέτρα της μαθηματικής διαδικασίας.

Κλείνοντας, να αναφέρουμε και την άποψη της συμπεριφοράς ανάλογα με το κοινό της τάξης που δεν παύει να είναι κρίσιμος παράγοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία.

*Πίνακας 4. Ανάλυση E5*

<b>Επεκτείνεις ποτέ προβλήματα που λύθηκαν με πρόσθετες ερωτήσεις, σε αχαρτογράφητα νερά;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Επέκταση προβλημάτων στην τάξη	5 (50,0%)
Σπάνια επέκταση προβλημάτων στην τάξη	4 (40,0%)
Επέκταση σαν μέσο διαπίστωσης των δυνατοτήτων επίλυσης άγνωστου ερωτήματος	2 (20,0%)
Επέκταση σαν μοχλός κινητοποίησης των μαθητών	2 (20,0%)
Σχεδιασμένο μάθημα με στόχο, νόημα για μαθητές και ενθαρρυντικό	1 (10,0%)

Μαθηματικά σαν περιπέτεια	1 (10,0%)
Επέκταση για διασάφηση σημείων μιας ύλης	1 (10,0%)
Αποφυγή επέκτασης προβλημάτων στην τάξη	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Επέκταση προβλημάτων στην τάξη», συμπληρώνοντας 5 αναφορές με ποσοστό 50,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M6: «Ναι, το κάνω αρκετές φορές, επιδιώκοντας να διαπιστώσω την αυθόρμητη ανταπόκριση των μαθητών στην εύρεση λύσης ενός νέου ερωτήματος, σχετικού με το πρόβλημα»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Σπάνια επέκταση προβλημάτων στην τάξη», με 4 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 40,0%. Σχετική απάντηση:

M1: «Σπάνια γιατί θέλω να ξέρω που οδηγούν και αν έχει νόημα για τους μαθητές και να μην τους αποθαρρύνει»,

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Επέκταση σαν μέσο διαπίστωσης των δυνατοτήτων επίλυσης άγνωστου ερωτήματος». Σχετικό απόσπασμα:

M3: «Ναι. Επεκτείνω προβλήματα που λύθηκαν με πρόσθετες ερωτήσεις, σε αχαρτογράφητα νερά. Είναι ένας τρόπος να ξεχωρίσω τα ιδιαίτερα μυαλά.»,

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Επέκταση σαν μοχλός κινητοποίησης των μαθητών». Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Αν το μάθημα δεν έχει ενδιαφέρον για μένα αποκλείεται να κινήσω το ενδιαφέρον των μαθητών. Όταν λοιπόν "δώσω σήμα" για το άγνωστο τσιμπάνε περισσότερο. Ίσως και γιατί έχουν ξαναδεί το γνωστό στο φροντιστήριο και πια είναι βαρετό.»,

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Σχεδιασμένο μάθημα με στόχο, νόημα για μαθητές και ενθαρρυντικό».

Εξίσου σημαντική κατηγορία για το πώς βλέπουν τα μαθηματικά κάποιοι εκπαιδευτικοί που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Μαθηματικά σαν περιπέτεια».

Κατηγορία που σημειώθηκε επίσης από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Επέκταση για διασάφηση σημείων μιας ύλης».

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Αποφυγή επέκτασης προβλημάτων στην τάξη».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην Ε5*

Οι μισοί μαθηματικοί του δείγματος επεκτείνουν με νέα ερωτήματα προβλήματα που ήδη έχουν λυθεί και μάλιστα πλέοντας και σε αχαρτογράφητα νερά. Το ποσοστό και πάλι δεν πρέπει να είναι ασυνάρτητο, κατά την άποψη μας, με την εμπειρία όσων συμμετέχουν στο δείγμα.

Κατά τα λεγόμενα, είναι μια διαδικασία όπου μπορεί κανείς να διαπιστώσει τις δυνατότητες των μαθητών στην επίλυση άγνωστων προβλημάτων για τα οποία δεν έχουν προετοιμασία. Επίσης οι μαθητές δείχνουν να κινητοποιούνται από την πρόκληση του άγνωστου περισσότερο από ότι στο συνηθισμένο ασφαλές μάθημα. Κανείς εκπαιδευτικός όμως δεν ανέφερε το φαινόμενο που καταγράφεται στη βιβλιογραφία της ανασφάλειας των καλών μαθητών που φοβούνται να απαντήσουν σε τέτοιες ερωτήσεις για λόγους κύρους αλλά νιώθουν και την μεγαλύτερη αμηχανία όταν το αποτελεσματικό οπλοστάσιο τους δείξει σημεία ανεπάρκειας κατά την επίλυση. Επίσης αναφέρεται ότι το άγνωστο αναδεικνύει και την περιπετειώδη φύση των μαθηματικών.

Είναι όμως σημαντικό και το ποσοστό των εκπαιδευτικών που σπάνια χρησιμοποιεί αυτή την τακτική. Κάποιες αιτιάσεις έχουν να κάνουν όχι με ανασφάλειες αλλά με την πρόθεση για καλά σχεδιασμένο μάθημα με στοχοθεσία, με προβλήματα που δεν οδηγούν σε αδιευκρίνιστα από την αρχή μαθηματικά πεδία και το κυριότερο δεν εμπεριέχουν το ρίσκο να είναι πολύ αποθαρρυντικά για τους μαθητές. Αναφέρεται επίσης να μπαίνουν στην διαδικασία μόνο αν τους προκύψει μια αξιόλογη ιδέα ή αν θέλουν να αποσαφηνίσουν σκοτεινές πλευρές της ύλης που διδάσκεται.

Θα πρέπει να αναφέρουμε και την μειοψηφική στάση όπου ποτέ δεν ακολουθούν τέτοια πρακτική γιατί θέλουν να δίνουν ξεκάθαρες απαντήσεις. Η στάση αυτή ίσως είναι απόρροια της μικρότερης εμπειρίας, ίσως και του μεγάλου τμήματος αυτής της εμπειρίας στην φροντιστηριακή εκπαίδευση που δεν αφήνει περιθώρια σε έναν καθηγητή να μην ξέρει ή να οδηγεί τους μαθητές σε αβεβαιότητες. Αυτό είναι και ένα ιδιότυπο άγραφο συμβόλαιο αυτού του είδους εκπαίδευσης που στρεβλώνει την άποψη για την μαθηματική διαδικασία. Το δείγμα δείχνει να απεκδύεται αυτή την άποψη με τα χρόνια δεδομένου ότι όλοι οι Έλληνες μαθηματικοί σχεδόν έχουν μεγάλο τμήμα της επαγγελματικής ζωής τους σε αυτό το είδος εκπαίδευσης.

Πίνακας 5 Ανάλυση Ε6

<b>Επιλέγεις προβλήματα για την τάξη που να μην είναι ούτε εύκολα ούτε δύσκολα;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Επιλογή μέτριων προβλημάτων	7 (70,0%)
Εξάρτηση από το επίπεδο της τάξης	4 (40,0%)
Κλιμάκωση δυσκολίας προβλημάτων	2 (20,0%)
Λάθος παιδαγωγικό και τα δυο άκρα	2 (20,0%)
Κάποιες επεκτάσεις μπορεί να οδηγήσουν σε δύσκολες λύσεις	1 (10,0%)
Ανυπαρξία κανόνα	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Επιλογή μέτριων προβλημάτων», συμπληρώνοντας 7 αναφορές με ποσοστό 70,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Ναι. Ποιος ωφελείται αν λύνει συνέχεια εύκολα; Δεν βελτιώνεται καθόλου. Τα δύσκολα πάλι είναι για τη φάση που κάποιος έχει ανέβει επίπεδο. Μέσα στην τάξη πιο πολύ θα προκαλέσεις απογοήτευση και θα χάσεις και μέτριους μαθητές»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Εξάρτηση από το επίπεδο της τάξης», με 4 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 40,0%. Σχετική απάντηση:

M1: «Επιλέγω προβλήματα αρχικά μέτριας δυσκολίας και μετά πιο σύνθετα, ανάλογα με την ανταπόκριση από τους μαθητές.»

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Κλιμάκωση δυσκολίας προβλημάτων». Σχετικό απόσπασμα:

M6: «Σεβόμενη πάντα το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών, επιλέγω αρχικά, προβλήματα στα οποία θεωρώ πως οι μαθητές μου έχουν τη δυνατότητα να ανταποκριθούν αποτελεσματικά. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές αισθάνονται ικανοποίηση όταν καταφέρνουν να λύσουν τα προβλήματα και αντιμετωπίζουν με λιγότερη δυσπιστία προβλήματα με αυξανόμενη δυσκολία επίλυσης»

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Λάθος παιδαγωγικό και τα δυο άκρα». Σχετικό απόσπασμα:

M2: «Δεν θέλω να νιώθουν οι μαθητές ότι τους κοροϊδεύω βάζοντας αστεία προβλήματα αλλά ούτε και να τους απογοητεύω με τρελά προβλήματα που δεν μπορεί να λύσει κανείς»

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Κάποιες επεκτάσεις μπορεί να οδηγήσουν σε δύσκολες λύσεις».

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Ανυπαρξία κανόνα

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην Ε6*

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να διαλέγει μέτριας δυσκολίας προβλήματα και κάποιοι αιτιολογούν αυτή την στάση τους. Σχεδόν όμως οι μισοί τονίζουν πως παίρνουν υπόψη τους το επίπεδο της τάξης. Δεν μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα από αυτόν τον καθοριστικό παράγοντα. Τα προβλήματα μέτριας δυσκολίας παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, υποστηρίζουν οι μαθηματικοί. Οι μαθητές δεν νιώθουν να εμπαίζονται με πολύ απλά προβλήματα ούτε όμως έχουν ένα μάθημα γεμάτο διαδοχικές απογοητεύσεις που σφραγίζει μια για πάντα μια αρνητική



σχέση με τα μαθηματικά. Διακρίνει κανείς εύκολα ότι οι εκπαιδευτικοί έρχονται συχνά αντιμέτωποι με την μαθηματικοφοβία των μαθητών κι αυτό διαμορφώνει τις διδακτικές πρακτικές τους. Θέλουν οι απαιτήσεις τους στην επίλυση προβλημάτων να προάγουν το κλίμα εμπιστοσύνης ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές. Είναι αξιοσημείωτο, ότι στις απαντήσεις αυτής της ερώτησης πουθενά δεν γίνεται νύξη για την δική τους «διδακτική ασφάλεια», σε σιωπηλή συμφωνία με προηγούμενη ερώτηση.

Στις απαντήσεις βρίσκουμε και την τακτική της κλιμάκωσης της δυσκολίας των προβλημάτων. Οι μαθητές, υποστηρίζεται, έχοντας λύσει μέτρια προβλήματα αποδέχονται με μειωμένη δυσπιστία δυσκολότερα προβλήματα. Για αυτό τον λόγο ο εκπαιδευτικός πρέπει πρώτα από όλα να «σέβεται» το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών. Τα δύσκολα προβλήματα διώχνουν κυρίως, και όχι μόνο, μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί του δείγματος δείχνουν να δουλεύουν προσεκτικά με αυτή την πρακτική και πάλι θεωρούμε ότι είναι συνάρτηση του πολύχρονου εργασιακού βίου τους στον οποίο η πράξη ακύρωσε άλλες τακτικές.

Πίνακας 6 Ανάλυση Ε7

<b>Από τα ανοιχτά προβλήματα προτιμάς να βάζεις στην τάξη προσαρμοσμένες ασκήσεις του βιβλίου για λόγους ασφάλειας σου;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Εκτός βιβλίου	6 (60,0%)
Από το βιβλίο	3 (30,0%)
Από το βιβλίο αλλά για την ασφάλεια των παιδιών	2 (20,0%)
Και εντός και εκτός	1 (10,0%)
Τα εντός μόνο αν δεν τα λύσουν	1 (10,0%)
Όταν υπάρχει ψηλό επίπεδο τότε και εκτός βιβλίου	1 (10,0%)
Το σχολικό βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Εκτός βιβλίου», συμπληρώνοντας 6 αναφορές με ποσοστό 60,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Όχι γιατί το βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα.»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Από το βιβλίο», με 3 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 30,0%. Σχετική απάντηση:

M3: «Θεωρώ πως τέτοιου ύφους ασκήσεις είναι πιο προσιτές στα παιδιά..»,

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Από το βιβλίο αλλά για την ασφάλεια των παιδιών». Σχετικό απόσπασμα:

M9: «Ναι, όμως όχι για δική μου ασφάλεια αλλά για των παιδιών»,

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό 10,0%, είναι η «Και εντός και εκτός».

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Τα εντός μόνο αν δεν τα λύσουν».

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Όταν υπάρχει ψηλό επίπεδο τότε και εκτός βιβλίου».

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, «Το σχολικό βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E7*

Τα 2/3 περίπου των εκπαιδευτικών διαλέγουν προβλήματα εκτός βιβλίου και οι υπόλοιποι από το βιβλίο. Όσοι επιλέγουν εκτός υποστηρίζουν ότι το σχολικό βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα αλλά πρέπει τα εκτός να συμφωνούν με την διδακτέα ύλη. Αυτοί που επιλέγουν το βιβλίο φαίνεται να το κάνουν για την ασφάλεια των μαθητών και όχι τη δική τους. Το ύφος των ασκήσεων του βιβλίου είναι πιο προσιτό στα παιδιά.

Η εικόνα που παρουσιάζεται από τις απαντήσεις δεν είναι στατική. Για λόγους που θα έπρεπε να διερευνηθούν περισσότερο οι εκπαιδευτικοί ξεφεύγουν από το σχολικό βιβλίο «ευαγγέλιο» έστω και στον τομέα των προβλημάτων που βάζουν στη σχολική τάξη. Έτσι η «τσιμενταρισμένη γνώση» του ενός και μοναδικού εγχειρίδιου φαίνεται να «σπάει» από τις πρακτικές ενός δείγματος κυρίως έμπειρων

εκπαιδευτικών, θα επιμείνουμε στην επισήμανση με σεβασμό στις παραμέτρους του συγκεκριμένου δείγματος.

Πίνακας 7. Ανάλυση Ε8

<b>Τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται το φαινόμενο οι μαθητές να φέρνουν ασκήσεις από τα φροντιστήρια που δεν μπορούν να λύσουν στον καθηγητή του σχολείου. Όταν ζητάνε βοήθεια μπαίνουν στη διαδικασία επίλυσης ατομικά ή στην τάξη όταν η λύση της άσκησης σου είναι άγνωστη;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Επίλυση ατομικά ή στην τάξη	5 (50,0%)
Επίλυση ατομικά ή στην τάξη υπό προϋποθέσεις	2 (20,0%)
Ατομική επίλυση	2 (20,0%)
Ατομική επίλυση υπό προϋποθέσεις	1 (10,0%)
Δεν μπαίνω στη διαδικασία	1 (10,0%)
Αναβολή επίλυσης	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Επίλυση ατομικά ή στην τάξη», συμπληρώνοντας 5 αναφορές με ποσοστό 50,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Εξαρτάται αν τα προβλήματα είναι συμβατά με τη διδακτική ενότητα αλλιώς ατομικά»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Επίλυση ατομικά ή στην τάξη υπό προϋποθέσεις», με 2 αναφορές των εκπαιδευτικών και ποσοστό 20,0%. Σχετική απάντηση:

M5: «Αν πρόκειται για ασκήσεις που έπονται της ύλης που διδάσκω στα διαλείμματα ,διαφορετικά τις λύνουμε στην τάξη ,αν και εφόσον υπάρχει ο χρόνος.»,

Εξίσου σημαντική κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Ατομική επίλυση». Σχετικό απόσπασμα:

M9: «Πάντα μόνο ατομικά»,

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Ατομική επίλυση υπό προϋποθέσεις».

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Δεν μπαίνω στη διαδικασία».

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Αναβολή επίλυσης».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E8*

Φαινόμενο των καιρών κι αυτό θα παρατηρήσετε ότι η ερώτηση ξενίζει έναν μόνο εκπαιδευτικό. Πριν από χρόνια το φαινόμενο ήταν ανύπαρκτο, ο καθηγητής του σχολείου έβαζε τα προβλήματα και οι φροντιστές ακολουθούσαν «τρέχοντας». Το φαινόμενο της φροντιστηριακής εκπαίδευσης στη χώρα θα πρέπει να ερευνηθεί σε όλες τις όψεις του γιατί έχει ενδιαφέρουσες πλευρές και δεν αποτελεί σε αυτόν τον βαθμό χαρακτηριστικό όλων των χωρών.

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί του δείγματος λύνουν ατομικά ή στην τάξη το πρόβλημα χωρίς και πάλι να δείχνουν ανασφάλειες. Το αν και πως το κάνουν στηρίζεται σε άλλα κριτήρια. Τα προβλήματα αν έχουν κάτι να προσφέρουν και είναι συμβατά με την διδακτική ενότητα τα λύνουν στην τάξη αλλιώς ατομικά. Αλλιώς ατομικά στο διάλειμμα. Κάποιοι αρνούνται να τα εντάξουν έτσι κι αλλιώς στο μάθημα και λύνουν μόνο ατομικά. Επίσης παρουσιάζεται και η αναβολή σαν τακτική αν και την διαπιστώσαμε σε νεότερους εκπαιδευτικούς. Οι πιο έμπειροι δείχνουν μια άνεση σε όλες τις ερωτήσεις που ερευνούν την συμπεριφορά τους στις δύσκολες, γνωστικά, στιγμές της διδασκαλίας τους.

#### *Πίνακας 8. Ανάλυση E14*

**Αν κατά την επίλυση ενός προβλήματος που γνωρίζεις τη λύση εμφανιστούν ερωτήσεις από τους μαθητές ή πλευρές του προβλήματος στις οποίες δεν έχεις προβλέψει και δυσκολεύεσαι να απαντήσεις τι κάνεις;**

<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Διερεύνηση της ερώτησης και αναβολή της απάντησης	9 (90,0%)
Ποτέ πρόχειρη απάντηση	1 (10,0%)
Σπανιότητα διατύπωσης ερωτήσεων λόγω χαμηλού επιπέδου και λόγω φροντιστηριακής ασκησιολογίας	1 (10,0%)
Ενθουσιασμός λόγω σπανιότητας του φαινομένου	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Διερεύνηση της ερώτησης και αναβολή της απάντησης», συμπληρώνοντας 9 αναφορές με ποσοστό 90,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Τις σκέφτομαι και είτε απαντώ είτε το βλέπω αργότερα και απαντώ την επόμενη φορά ζητώντας και από τους μαθητές να το δουλέψουν για την επόμενη φορά.»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Ποτέ πρόχειρη απάντηση», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Σπανιότητα διατύπωσης ερωτήσεων λόγω χαμηλού επιπέδου και λόγω φροντιστηριακής ασκησιολογίας».

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Ενθουσιασμός λόγω σπανιότητας του φαινομένου».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E14*

Ψηλαφώντας τις απαντήσεις και σε αυτή την ερώτηση θα αντιμετωπίσουμε μια ψύχραιμη στάση των εκπαιδευτικών. Παρακάτω θα δούμε αν υπάρχει αντιδιαστολή ανάμεσα στο πως νιώθουν και πως πράττουν. Συντριπτικά πλειοψηφικά θα διερευνήσουν την ερώτηση που προκύπτει και θα αναβάλουν την απάντηση όταν δεν έχουν τεκμηρίωση εκείνη την στιγμή. Ζητάνε όμως και τη συμβολή των μαθητών σε αυτή την διαδικασία βάζοντας τους στα πλαίσια της μαθηματικής διεργασίας όπως αυτή αναπτύσσεται με όρους πραγματικότητας.

Δεν συμβαίνει όμως με όλους. Η μεγάλη πάλι πλειοψηφία όσων αναβάλουν την απάντηση, θεωρώντας ευθύνη τους να δώσουν την απάντηση την χρεώνονται χωρίς να βάλουν συμμετόχους τους μαθητές τους. Ένας λόγος επίσης είναι πως μάλλον θεωρούν ότι οι μαθητές δεν θα καταφέρουν κάτι με την δεύτερη ανάγνωση αφού δεν το κατάφεραν με την πρώτη. Φαίνεται ότι δεν θέλουν, πάντως, να δίνουν ανεύθυνα πρόχειρες απαντήσεις μόνο και μόνο για να μην φανεί η αδυναμία τους.

Τέλος να σημειώσουμε ότι για κάποιους εκπαιδευτικού αποτελεί έκπληξη η διατύπωση δύσκολων ερωτημάτων από τους μαθητές με έναν από αυτούς να θεωρεί αιτίες το γενικά χαμηλό μέσο επίπεδο των μαθητών αλλά επίσης υπεύθυνη την φροντιστηριακή εκπαίδευση με την ασκησιολογία που προτείνει η οποία είναι επιβαρυντική και δεν προάγει την μαθηματική σκέψη των μαθητών.

## ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

Πίνακας 9. Ανάλυση Ε9

<b>Σήμερα υπάρχουν ιστοσελίδες forum που μπορείς να ανεβάσεις ένα πρόβλημα και να το λύσουν ή να σε βοηθήσουν διάφοροι συνάδερφοι σου. Θεωρείς ότι εκτίθεσαι αν το κάνεις επώνυμα δηλώνοντας την αδυναμία λύσης ή ζητήσεις επιβεβαίωση στη λύση σου;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Δεν θεωρώ ότι με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια	6 (60,0%)
Ίσως με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια	2 (20,0%)
Προσφυγή στη βοήθεια έμπιστων συναδέλφων	1 (10,0%)
Δεν ασχολούμαι με ιστοσελίδες	1 (10,0%)
Αλληλοβοήθεια στην επίλυση προβλημάτων	1 (10,0%)
Άσχημη αντιμετώπιση σε κάποιες ιστοσελίδες	1 (10,0%)
Η συνεργασία πιο αποτελεσματική στην ΕΠ	1 (10,0%)
Δεν υπάρχει μαθηματική αυθεντία	1 (10,0%)
Ίσως με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια	1 (10,0%)
Με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια	1 (10,0%)
Η επικοινωνία με συναδέρφους σε βελτιώνει	1 (10,0%)
Η μελέτη σε βελτιώνει	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Δεν θεωρώ ότι με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια», συμπληρώνοντας 6 αναφορές με ποσοστό 60,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M5: «Η συνεργασία μεταξύ συναδέλφων προάγει συνήθως την εξεύρεση καλύτερης λύσης από αυτήν που έχεις προτείνει.»

Ακολούθησε η κατηγορία «Ίσως με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια», με 2 αναφορές εκπαιδευτικών και ποσοστό 20,0%. Σχετική απάντηση:

M2: «Όχι απαραίτητα»,

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Προσφυγή στη βοήθεια έμπιστων συναδέλφων».

Ακολούθησε η κατηγορία «Δεν ασχολούμαι με ιστοσελίδες», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Αλληλοβοήθεια στην επίλυση προβλημάτων», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Άσχημη αντιμετώπιση σε κάποιες ιστοσελίδες», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η συνεργασία πιο αποτελεσματική στην ΕΠ», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Δεν υπάρχει μαθηματική αυθεντία», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Ίσως με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Με εκθέτει όταν ζητάω βοήθεια», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η επικοινωνία με συναδέλφους σε βελτιώνει», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Η μελέτη σε βελτιώνει».

Το ζήτημα της επαγγελματικής συνεργασίας όταν ειδικά ο εκπαιδευτικός δυσκολεύεται το τοποθετήσαμε σε δυο ερωτήσεις διαχωρίζοντας την ηλεκτρονική , το νέο φρούτο των τελευταίων χρόνων, από την ζωντανή αλληλοβοήθεια.

Πάνω από τους μισούς, δηλωμένα, δεν φοβούνται την δημόσια έκθεση τους διατυπώνοντας απορίες σε μαθηματικά θέματα σε ιστοσελίδες ώστε να βρουν λύση στο δύσκολο πρόβλημα τους. Ενώ υπάρχουν και οι εκπαιδευτικοί που δηλώνουν επιφυλάξεις αλλά το κάνουν και δεν είναι πολύ λίγοι.

Στην ερώτηση αυτή έχουμε μια ενδιαφέρουσα ποικιλία σε όψεις του θέματος. Φαίνεται κάποιο να προτιμούν την άμεση συζήτηση με τους συναδέλφους τους με εμπιστοσύνη και κάποιοι δηλώνουν ότι δεν ασχολούνται με τέτοιες ιστοσελίδες. Άλλοι έχουν ενεργή συμμετοχή λύνοντας και αυτοί απορίες άλλων ηλεκτρονικά. Η συμμετοχή επίσης φαίνεται κάποιες φορές να παράγει αρνητικά συναισθήματα επειδή κάποιοι μαθηματικοί στις ιστοσελίδες είναι δηκτικοί απέναντι σε λάθη και παραλείψεις. Δυστυχώς είναι φαινόμενο που διαπιστώσαμε καθώς διαβάζουμε συχνά το περιεχόμενο τέτοιων forum.

Η συνεργασία με άλλους έχει κάποιες φορές αποτέλεσμα να δεις καλύτερη λύση από αυτήν που προτείνεις. Παρουσιάζουν εδώ την γονιμότητα των συνεργατικών προσπαθειών λύσης. Κάποιοι δεν θεωρούν τον εαυτό τους αυθεντία για αυτό και θεωρούν ότι πάντα μαθαίνεις από την μελέτη και την συνεργασία με συναδέλφους.

Στο δείγμα εκφράζεται και ένα τμήμα μαθηματικών που είναι πολύ επιφυλακτικοί και το αποφεύγουν ή δεν το κάνουν καθόλου. Ίσως, θεωρούμε, έχει να κάνει και με τον ανταγωνισμό που συχνά οδηγεί σε αντισυναδερφικές συμπεριφορές στις ιστοσελίδες και την αλαζονεία που εκφράζουν κάποιοι μαθηματικοί ως μέλη ενός σταρ σύστημα υπερλυτών.



Πίνακας 10. Ανάλυση E10

<b>Έχεις ζητήσει κάτι παρόμοιο από συνάδερφο σου στο σχολείο;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Προσφυγή στη βοήθεια συναδέλφων	8 (80,0%)
Δήλωση αυτάρκειας	2 (20,0%)
Συνεργατική επίλυση	2 (20,0%)
Επιφυλάξεις στην επαγγελματική εκκίνηση	1 (10,0%)
Διαχρονική προσφυγή σε συναδέρφους	1 (10,0%)
Εποικοδομητική για νέους συναδέρφους	1 (10,0%)
Η προσφυγή εμπλουτίζει σκέψεις και λύσεις	1 (10,0%)
Αποφυγή όταν δεν είναι καλή η συνεργασία	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Προσφυγή στη βοήθεια συναδέλφων», συμπληρώνοντας 8 αναφορές με ποσοστό 80,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M3: «Ναι. Πολλές φορές καθόμαστε 2 ή και περισσότεροι συνάδελφοι και λύνουμε κάτι στο οποίο κάποιος από όλους μας βρήκε»

Κατηγορία που σημειώθηκε από 2 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 20,0%, είναι η «Συνεργατική επίλυση». Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Ναι έχουμε συζητήσει και προσπαθήσει μαζί»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Δεν ασχολούμαι με ιστοσελίδες», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Επιφυλάξεις στην επαγγελματική εκκίνηση», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Διαχρονική προσφυγή σε συναδέρφους», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Εποικοδομητική για νέους συναδέρφους», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η προσφυγή εμπλουτίζει σκέψεις και λύσεις», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Αποφυγή όταν δεν είναι καλή η συνεργασία».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην Ε10*

Η δεύτερη ερώτηση που αφορούσε την επαγγελματική συνεργασία ήταν για την άμεση συνεργασία μεταξύ συναδέρφων. Εδώ οι εκπαιδευτικοί αντιδρούν ακόμη πιο θετικά, με συντριπτική πλειοψηφία. Αναδεικνύουν την αμφίδρομη σχέση της συνεργατικής επίλυσης κυρίως. Ομολογούν τις επιφυλάξεις τους κατά την επαγγελματική εκκίνηση να το κάνουν αν και άλλαξαν στάση με την πάροδο του χρόνου, Άλλοι αναφέρουν ότι δεν είχαν θέμα να ζητάνε βοήθεια από την επαγγελματική τους εκκίνηση και ότι διαχρονικά εναλλάσσονται στους ρόλους βοηθού και βοηθούμενου. Θεωρούν μεγάλη την χρησιμότητα ειδικά στα πρώτα χρόνια δουλειάς.

Υπάρχουν βέβαια και δηλώσεις αυτάρκειας. Ίσως δείγμα από μοναχικές πορείες σε μια επαγγελματική ζωή, όπως αυτή του μαθητικού, που συναντάς αναπόφευκτα σκληροπυρηνικές δυσκολίες. Κατά την άποψη μας οι απόψεις αυτές δηλώνουν ανομολόγητη ανασφάλεια.

#### *ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ -ΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΣΤΑΣΗ*

*Πίνακας 11 Ανάλυση Ε11*

<b>Πως νιώθεις όταν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Επιμονή για να λυθεί	4 (40,0%)
Ανασφάλεια σε σχέση με τις ικανότητες	3 (30,0%)
Άβολα αλλά με αποδοχή της σκληρής φύσης του αντικειμένου	2 (20,0%)
Μεγάλη ένταση	2 (20,0%)

Μείωση της ικανότητας επίλυσης μετά από πολλά χρόνια	1 (10,0%)
Τα μαθηματικά απαιτούν συνεχή μελέτη χωρίς τέλος	1 (10,0%)
Υποβάθμιση	1 (10,0%)
Ατυχία	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Επιμονή για να λυθεί», συμπληρώνοντας 4 αναφορές με ποσοστό 40,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M5: «Με απασχολεί μέχρι να το λύσω»

Κατηγορία που σημειώθηκε από 3 εκπαιδευτικούς με ποσοστό επίσης 30,0%, είναι η «Ανασφάλεια σε σχέση με τις ικανότητες». Σχετικό απόσπασμα:

M2: «Προβληματισμένος. Αναρωτιέμαι αν τυχαία κάτι δεν πήγε καλά ή έχω αρχίσει να μην λύνω τόσο καλά όπως παλιά.»

Ακολούθησε η κατηγορία «Άβολα αλλά με αποδοχή της σκληρής φύσης του αντικειμένου», με 2 αναφορές εκπαιδευτικών και ποσοστό 20,0%. Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Άβολα αλλά το θεωρώ φυσιολογικό, δε θεωρώ ότι τα μαθηματικά είναι εξ ολοκλήρου κατακτημένα από όλους και πάντα πρέπει να μορφώνεσαι και να μελετάς.»

Ακολούθησε η κατηγορία «Μεγάλη ένταση», με 2 αναφορές εκπαιδευτικών και ποσοστό 10,0%. Σχετική απάντηση:

M3: «Λύσσα»

Ακολούθησε η κατηγορία «Μείωση της ικανότητας επίλυσης μετά από πολλά χρόνια», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Τα μαθηματικά απαιτούν συνεχή μελέτη χωρίς τέλος», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Υποβάθμιση», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Ατυχία».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E11*

Τι συναισθήματα προκαλεί η δυσκολότερη στιγμή σε ένα μαθηματικό, όταν δηλαδή αδυνατεί να λύσει; Σε κάτι λιγότερο από τους μισούς αναδύεται μια επιμονή για λύση. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται μαζί με πείσμα κάποιες φορές. Όπως έχει φανεί από προηγούμενες ερωτήσεις γνωρίζουν για την μαθηματική διαδικασία ότι δεν έχει γραμμικά χαρακτηριστικά παρά μόνο στα εγχειρίδια. Δεν ξέρουν αν θα βρουν λύση, αν και είναι πεισμένοι για σχολικού επιπέδου προβλήματα ότι υπάρχει και είναι εφικτή. Η στάση εμπεριέχει και στοιχεία εγωισμού και κύρους ανεξάρτητα πόσο αναδεικνύονται από το δείγμα. Η μαθηματική πρόκληση είναι το «ψωμί» βέβαια ενός μαθηματικού. Δεν πρέπει επίσης να παραβλέψουμε ότι η μακρά πείρα των Ελλήνων μαθηματικών στα φροντιστήρια τους έχει εκπαιδεύσει στη διαδικασία της επιμονής για λύση και για επαγγελματικούς λόγους που αποτελεί ένα σημαντικό κίνητρο για την διαμόρφωση συμπεριφορών.

Είναι όμως σημαντικό και το ποσοστό όσων βιώνουν αρνητικά συναισθήματα. Κάποιοι νιώθουν ανασφάλεια σε σχέση με τις ικανότητες η οποία παρουσιάζεται με διάφορους βαθμούς έντασης. Αναρωτιούνται μήπως απλά είναι τυχαίο το γεγονός ή πλέον δεν μπορούν να λύσουν εξίσου καλά όπως στο παρελθόν; Επιστρέφουν πίσω νιώθοντας μαθητές συναίσθημα που εμπεριέχει μια ανύχραιμη και μηδενιστική ακύρωση της επαγγελματικής ενασχόλησης με τα μαθηματικά.

Κάποιοι άλλοι αισθάνονται άβολα αλλά δηλώνουν ότι γνωρίζουν πως είναι στη φύση των μαθηματικών διαδικασιών αυτά τα συμβάντα. Τα μαθηματικά απαιτούν συνεχή ενασχόληση και μελέτη. Η αντιφατική αυτή άποψη δείχνει ότι η δουλειά με τα μαθηματικά συνεχίζει να συνοδεύεται με βάρος στην αξιολόγηση με μανιχαιστικό τρόπο. Στο δείγμα εμφανίζονται και μεγάλες εντάσεις. Δεν είναι πολλές αλλά όχι και ασήμαντες αριθμητικά.

Αν προσέξουμε τις απαντήσεις που διατυπώνονται μάλλον θα καταλήξουμε ότι τα αρνητικά συναισθήματα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο επικρατούν. Οι αιτίες μπορεί να είναι πολλές και αξίζουν έρευνας. Ενδέχεται να πηγάζουν από τον κοινωνικά

διαμορφωμένο ρόλο ότι είμαι αυτός που λύνει σχεδόν πάντα και πολύ καλύτερα από τους άλλους κι αυτό είναι χαρακτηριστικό του επαγγέλματος. Πάντως σε κάθε περίπτωση υπάρχει δυσανεξία όταν δεν μπορούν να λύσουν. Όπως δείχνει όμως η ανάλυση των προηγούμενων ερωτήσεων διαχειρίζονται αυτά τα αρνητικά συναισθήματα, που δεν είναι ότι καλύτερο, και δείχνουν στους μαθητές την πραγματική μαθηματική διαδικασία.

Πίνακας 12. Ανάλυση E12

<b>Η αποτυχία επίλυσης προβλήματος ή επέκτασης του στην τάξη σε έχει αποτρέψει από το να το επιχειρήσεις ξανά;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Επιχειρώ και πάλι μετά την αποτυχία	8 (80,0%)
Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης	1 (10,0%)
Δεν είναι ωραίο να μένουν εκκρεμότητες στην τάξη	1 (10,0%)
Η αποτυχία είναι μέρος του κάνω μαθηματικά	1 (10,0%)
Η αλλαγή στρατηγικής μπορεί να φέρει αποτέλεσμα	1 (10,0%)
Η επιτυχία επίλυσης είναι θέμα προσέγγισης	1 (10,0%)
Η μαθηματική σκέψη προάγεται από την προσπάθεια επίλυσης ανεξάρτητα από την αποτελεσματικότητα	1 (10,0%)
Ατομικό στοίχημα	1 (10,0%)
Όχι σταθερή αντιμετώπιση	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Επιχειρώ και πάλι μετά την αποτυχία», συμπληρώνοντας 8 αναφορές με ποσοστό 80,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Όχι. Με πεισμώνει πιο πολύ να βγάλω κάτι που δεν βγαίνει με τη μια»

Κατηγορία που σημειώθηκε από 1 εκπαιδευτικό με ποσοστό επίσης 10,0%, είναι η «Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης».

Ακολούθησε η κατηγορία «Δεν είναι ωραίο να μένουν εκκρεμότητες στην τάξη», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η αποτυχία είναι μέρος του κάνω μαθηματικά», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η αλλαγή στρατηγικής μπορεί να φέρει αποτέλεσμα», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η επιτυχία επίλυσης είναι θέμα προσέγγισης», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Η μαθηματική σκέψη προάγεται από την προσπάθεια επίλυσης ανεξάρτητα από την αποτελεσματικότητα», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Ατομικό στοίχημα», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Όχι σταθερή αντιμετώπιση».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E12*

Είναι αδιαμφισβήτητο δεδομένο σύμφωνα με το δείγμα ότι οι μαθηματικοί επιστρέφουν χωρίς δεύτερη συζήτηση στο πρόβλημα που δεν λύθηκε. Επαναδιατυπώνεται η άποψη που ξανασυναντήσαμε ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν πως είναι πραγματικά να κάνεις μαθηματικά. Η προσέγγιση κάθε φορά ενός προβλήματος μπορεί να γίνει από διαφορετικό δρόμο που ενδέχεται να αποδειχτεί πετυχημένη ή όχι επιλογή. Συμβαίνει ακόμη κι όταν έχεις λύσει παλιότερα ένα πρόβλημα.

Τονίζουν ότι ακόμη και ιστορικά προβλήματα που δεν λύθηκαν αποδείχτηκαν γόνιμα για την προαγωγή της μαθηματικής σκέψης. Η αναγωγή ίσως είναι υπερβολική γιατί τα ιστορικά προβλήματα ερευνώνται με άλλους όρους από έμπειρους μαθηματικούς πχ, παρόλα αυτά εκείνο που προσπαθεί να τονίσει η άποψη είναι ότι η

αποτυχία επίλυσης είναι οργανικό μέρος της μαθηματικής διαδικασίας. Και για αυτό προτείνουν ψύχραιμη αντιμετώπιση της δυσάρεστης αυτής κατάστασης.

Τέλος υπάρχουν και πρακτικές που δηλώνουν εξάρτηση από το επίπεδο της τάξης παρότι δεν θέλουν να αφήνουν αναπάντητες ερωτήσεις και άλλες χωρίς σταθερή απάντηση στο φαινόμενο.

Πίνακας 13. Ανάλυση E13

<b>Η αργή επίλυση σου έχει δημιουργήσει άγχος ανικανότητας σαν λύτη;</b>	
<b>Κωδικοί</b>	<b>Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)</b>
Κανένα άγχος	6 (60,0%)
Μαθηματικά δεν είναι γρήγορη λύση	4 (40,0%)
Πρόκληση άγχους μερικές φορές	2 (20,0%)
Πρόκληση άγχους	2 (20,0%)
Πρόκληση άγχους από την λανθασμένη αντιμετώπιση από τους μαθητές	1 (10,0%)
Αργή ταχύτητα για καλύτερη παρουσίαση της λύσης	1 (10,0%)
Απαλλαγή από το άγχος με τα χρόνια	1 (10,0%)
Η κούραση οδηγεί συχνά σε αργή επίλυση	1 (10,0%)

Δεσπόζουσα κατηγορία της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών είναι η «Κανένα άγχος», συμπληρώνοντας 6 αναφορές με ποσοστό 60,0% όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Σχετικό απόσπασμα:

M4: «Όχι. Πολλές φορές χρειάζεται να σκεφτείς παραπάνω για να λύσεις πιο δύσκολα προβλήματα»

Κατηγορία που σημειώθηκε με 4 αναφορές εκπαιδευτικών με ποσοστό επίσης 40,0%, είναι η «Μαθηματικά δεν είναι γρήγορη λύση». Σχετικό απόσπασμα:

M10: «Αυτοί που νομίζουν ότι όλα λύνονται γρήγορα δεν ξέρουν τι είναι μαθηματικά»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Πρόκληση άγχους μερικές φορές», με 2 αναφορές εκπαιδευτικών και ποσοστό 20,0%. Σχετικό απόσπασμα:

M1: «Μερικές φορές, γιατί σε κανένα δεν αρέσει να εκτίθεται»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Πρόκληση άγχους», με 2 αναφορές εκπαιδευτικών και ποσοστό 20,0%. Σχετικό απόσπασμα:

M8: «Ναι μου προκαλεί άγχος όταν δεν βγαίνουν τα νούμερα»,

Ακολούθησε η κατηγορία «Πρόκληση άγχους από την λανθασμένη αντιμετώπιση από τους μαθητές», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Αργή ταχύτητα για καλύτερη παρουσίαση της λύσης», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Ακολούθησε η κατηγορία «Απαλλαγή από το άγχος με τα χρόνια», με 1 αναφορά εκπαιδευτικού και ποσοστό 10,0%.

Τέλος, σύμφωνα με την απάντηση ενός εκπαιδευτικού με ποσοστό 10,0%, λειτουργεί με «Η κούραση οδηγεί συχνά σε αργή επίλυση».

#### *Αποτελέσματα των απαντήσεων στην E13*

Η τελευταία ερώτηση σχετική με τα συναισθήματα αφορά την ταχύτητα επίλυσης και επιλέχθηκε γιατί είναι μια άποψη που διατυπώνεται από μαθηματικούς και προς τους μαθητές και παρουσιάζεται σαν βασικό προτέρημα του λύτη. Κανένα άγχος δηλώνει σχεδόν τα 2/3 του δείγματος. Δεν είναι δυνατόν σε όλα τα προβλήματα να λύσει κανείς γρήγορα. Μαθηματικά δεν σημαίνει λύνω γρήγορα αλλά κυρίως λύνω αποτελεσματικά. Διακρίνουμε στο δείγμα ότι υπάρχει άγχος σε πιο νέους συναδέλφους ενώ παλιότεροι ομολογούν ότι ξεκίνησαν έτσι αλλά με τα χρόνια σταμάτησαν να νιώθουν άγχος για αυτό.

Κάποιες φορές άγχος, διατυπώνουν κάποιοι εκπαιδευτικοί, δεν τους αρέσει να σχηματίζουν αρνητική εικόνα για αυτούς οι μαθητές τους, παρότι οι ίδιοι ξέρουν ότι η αργή λύση είναι κάτι απόλυτα φυσικό για την μαθηματική διαδικασία. Υπάρχουν επίσης και δηλώσεις άγχους αν και στο δείγμα παρουσιάζονται σε πιο νέους εκπαιδευτικούς. Δηλώνεται επίσης ότι το άγχος είναι συνοδό φαινόμενο της σωματικής και διανοητικής κούρασης.



### 5.1.1 Ανάλυση του ερωτηματολογίου ανά άξονα

#### Άποψη για τη σημαντικότητα της ΕΠ

Μια και μοναδική ερώτηση του ερωτηματολογίου αφορούσε την άποψη των εκπαιδευτικών για την σημαντικότητα της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν υπέρ της σημαντικότητας της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών. Δεν αρκούνται σε μια απλή απάντηση αλλά αιτιολογούν την επιλογή τους. Θεωρούν ότι προάγει την κριτική σκέψη και συνδέει τα μαθηματικά με πραγματικές καταστάσεις. Τονίζουν αυτά τα χαρακτηριστικά της ΕΠ σε σχέση με την απλή εκτέλεση αλγορίθμων. Η ΕΠ είναι μια διαδικασία γεμάτη με κρίσιμα σημεία αποφάσεων μέσα σε περιβάλλον αβεβαιότητας και χωρίς την θαλπωρή των έτοιμων λύσεων. Αυτό συνιστά ένα πλαίσιο ανάπτυξης της κριτικής σκέψης.

Τα σχολικά μαθηματικά, ειδικά στη χώρα μας, παρουσιάζονται φορμαλιστικά διαφέροντας πολλές φορές ελάχιστα σε τρόπο παρουσίασης από την αντίστοιχη μαθηματική παρουσίαση των θεμάτων. Όλο το εκπαιδευτικό σύστημα έχει μια εξετασιοτροπική συμπεριφορά που καθορίζει όλες τις τάξεις. Η επικρατούσα αυτή τάση περιθωριοποιεί την ΕΠ. Αποτέλεσμα λίγες φορές οι μαθητές να συνδέουν το σώμα μαθηματικών που μαθαίνουν με τα προβλήματα της πραγματικής ζωής. Σχηματικά είναι σαν να έχουν εξοριστεί τα μαθηματικά για μηχανικούς και να επικρατούν τα μαθηματικά για μαθηματικούς. Οι σχετικές απαντήσεις δείχνουν αυτή την δίψα των εκπαιδευτικών για αποφορμαλισμό των σχολικών μαθηματικών. Μια ματιά στα αναλυτικά των άλλων χωρών θα ήταν πολύ χρήσιμη.

Ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζουν και οι λιγότερο δημοφιλείς απόψεις που διατυπώνονται παρουσιάζοντας μια σειρά από χαρακτηριστικά της ΕΠ. Είναι μια διαδικασία ανακαλυπτική και όχι εκτελεστική. Ωθεί τους μαθητές σε οργάνωση της σκέψης τους και συστηματική διερεύνηση. Είναι επίσης γόνιμη καθώς ο λύτης αναπτύσσει νέους τρόπους σκέψης. Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθητές σε πραγματικά προβλήματα αναδεικνύει την ισχύ αυτών των εννοιών που μέσα στο φορμαλιστικό πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών είναι απλά θεωρητικές κατασκευές.

Τέλος η άρνηση της σημασίας της ΕΠ στη διδασκαλία φαίνεται να έχει σχέση με την άποψη για συγκριτικά μικρή αποτελεσματικότητα σε σχέση με την εκτέλεση

αλγορίθμων και τον διδακτικό χρόνο που απαιτεί. Η χρονοβόρα ΕΠ είναι, να σημειώσουμε, αντεπιχείρημα που παρουσιάζεται σε έρευνες συχνά.

#### Διδακτικές πρακτικές στην ΕΠ στην τάξη

Η επόμενη ενότητα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου αφορούσε τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών στην ΕΠ στην τάξη. Οι ερωτήσεις ψηλαφούν άμεσα και έμμεσα την ένταση του να πρέπει αλλά να μην μπορώ να λύσω.

Παίρνει το ρίσκο ο εκπαιδευτικός βάζοντας στην τάξη προβλήματα που δεν έχει λύσει πριν; Οι μισοί απαντάνε ότι το κάνουν. Είναι πολύ πιθανό το αποτέλεσμα αυτό να συνδέεται με τα πολλά χρόνια υπηρεσίας των περισσότερων εκπαιδευτικών του δείγματος. Πάντως ότι δεν είναι συντριπτικά πλειοψηφική στάση σε ένα τέτοιου είδους δείγμα δείχνει ότι οι επιφυλάξεις για τα άγνωστα προβλήματα δεν φεύγουν εντελώς με την εμπειρία. Κάποιοι λόγοι που αναφέρονται για τους οποίους βάζουν άγνωστες ασκήσεις φαίνεται να είναι η ανία μετά από χρόνια διδασκαλίας αλλά και ότι έχει ξεπεραστεί η ανασφάλεια που είχαν στις αρχές της επαγγελματικής τους ζωής. Αναφέρεται επίσης ότι αυτού του είδους τα προβλήματα αναπτύσσουν μπροστά στους μαθητές την διαδικασία του πως πραγματικά σκέφτεται κανείς μαθηματικά καθώς αντιμετωπίζει το άγνωστο ή έστω κάποια μορφή του αγνώστου. Πάντως δεν φαίνεται το δείγμα να κυριεύεται από ανασφάλειες.

Ένα σημαντικό τμήμα του δείγματος εμφανίζεται να έχει σπάνια τέτοια πρακτική. Αιτιολογεί ότι θέλει να αποφύγει τον αιφνιδιασμό των μαθητών με δύσκολα προβλήματα που απλά θα τους απογοητεύσουν, θέλει καλά σχεδιασμένο μάθημα και πρόβλημα που να έχει συνάφεια με το αντικείμενο. Στην ουσία αυτοί οι εκπαιδευτικοί φωτίζουν τις αρνητικές όψεις της πρακτικής αυτής. Οι ολικοί αρνητές της πρακτικής εκφράζονται απόλυτα και χωρίς αιτιολόγηση. Πώς μπορεί κανείς να υποθέσει τους λόγους; Φαίνεται, με μια πρώτη ματιά, να αφορούν σχετικά λίγα χρόνια διδασκαλίας και ίσως ανασφάλειες έκθεσης στους μαθητές.

Παρατηρούμε μια ακομπλεξάριστη στάση των εκπαιδευτικών που συνδέεται, θεωρούμε, με την αυξημένη τους εμπειρία. Απαντούν χωρίς αμφιβολία ότι προτείνουν δεύτερη ανάγνωση χωρίς να αναφέρουν κάποια δυσφορία όταν προκύπτει

μη επίλυση μέσα στην τάξη. Σχεδόν οι μισοί αιτιολογούν αυτήν τους την στάση. Παρουσιάζεται μάλιστα και άποψη ότι μπορεί να χρειαστούν και διαδοχικές αναγνώσεις χωρίς και πάλι να μπαίνει ζήτημα ακύρωσης του εκπαιδευτικού.

Το συμβάν της μη επίλυσης παρουσιάζεται σαν μια καλή ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές πως αναπτύσσονται πραγματικά τα μαθηματικά. Τα άλυστα για αιώνες προβλήματα το αποδεικνύουν, όπως υποστηρίζεται. Η περίφημη «βασιλική οδός» που δεν υπάρχει, αν και έρευνες δείχνουν διαφορές που προκύπτουν από κοινωνικές ανισότητες, χρησιμοποιείται σαν επιχείρημα ότι η δεύτερη ανάγνωση είναι αναπόφευκτη ειδικά στα δύσκολα προβλήματα. Επισημαίνεται σχηματικά πως η επίλυση προβλημάτων είναι ένας «πόλεμος» όπου μπορεί να χαθούν μάχες αλλά το σημαντικό είναι η στρατηγική συμπεριφορά κι αυτή εμπεριέχει επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος σε περίπτωση αποτυχίας.

Στις απαντήσεις κάνει την εμφάνιση του και ένα παιδαγωγικό συμβόλαιο. Οι μαθηματικοί εξηγούν από την αρχή στους μαθητές ότι δεν λύνονται όλα με την πρώτη στα μαθηματικά. Τους προειδοποιούν ότι τα μαθηματικά σε φέρνουν σε αυτή την θέση χωρίς να σημαίνει ότι είσαι ανίκανος λύτης. Και ότι το βασικό είναι να μαθαίνεις ότι οι δεύτερες αναγνώσεις που ακολουθούν μια αποτυχημένη προσπάθεια μπορεί να είναι αποτελεσματικές. Μάλιστα το θεωρούν και μάθημα για την πραγματική ζωή σε πολλές περιπτώσεις όπου κανείς αντιμετωπίζει αδιέξοδα. Συνεπώς διδάσκουν την δεύτερη ανάγνωση και την επαναπροσπάθεια σαν δομική πέτρα της μαθηματικής διαδικασίας. Να αναφέρουμε, επίσης, και την άποψη της συμπεριφοράς ανάλογα με το κοινό της τάξης που δεν παύει να είναι κρίσιμος παράγοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Οι μισοί μαθηματικοί του δείγματος επεκτείνουν με νέα ερωτήματα προβλήματα που ήδη έχουν λυθεί και μάλιστα πλέοντας άφοβα και σε αχαρτογράφητα νερά. Το ποσοστό και πάλι δεν πρέπει να είναι ασυνάρτητο, κατά την άποψη μας, με την εμπειρία όσων συμμετέχουν στο δείγμα.

Κατά τα λεγόμενα, είναι μια διαδικασία όπου μπορεί κανείς να διαπιστώσει τις δυνατότητες των μαθητών στην επίλυση άγνωστων προβλημάτων για τα οποία δεν έχουν προετοιμασία. Επίσης οι μαθητές δείχνουν να κινητοποιούνται από την πρόκληση του άγνωστου περισσότερο από ότι στο συνηθισμένο ασφαλές μάθημα. Κανείς εκπαιδευτικός όμως δεν ανέφερε το φαινόμενο που καταγράφεται στη βιβλιογραφία της ανασφάλειας των καλών μαθητών που φοβούνται να απαντήσουν σε

τέτοιες ερωτήσεις για λόγους κύρους αλλά νιώθουν και την μεγαλύτερη αμηχανία όταν το αποτελεσματικό οπλοστάσιο τους δείξει σημεία ανεπάρκειας κατά την επίλυση. Επίσης αναφέρεται ότι το άγνωστο αναδεικνύει και την περιπετειώδη φύση των μαθηματικών.

Είναι όμως σημαντικό και το ποσοστό των εκπαιδευτικών που σπάνια χρησιμοποιεί αυτή την τακτική. Κάποιες αιτιάσεις έχουν να κάνουν όχι με ανασφάλειες αλλά με την πρόθεση για καλά σχεδιασμένο μάθημα με στοχοθεσία, με προβλήματα που δεν οδηγούν σε αδιευκρίνιστα από την αρχή μαθηματικά πεδία και το κυριότερο δεν εμπεριέχουν το ρίσκο να είναι πολύ αποθαρρυντικά για τους μαθητές. Αναφέρεται επίσης να μπαίνουν στην διαδικασία μόνο αν τους προκύψει μια αξιόλογη ιδέα ή αν θέλουν να αποσαφηνίσουν σκοτεινές πλευρές της ύλης που διδάσκεται.

Θα πρέπει να αναφέρουμε και την μειοψηφική στάση όπου ποτέ δεν ακολουθούν τέτοια πρακτική γιατί θέλουν να δίνουν ξεκάθαρες απαντήσεις. Η στάση αυτή ίσως είναι απόρροια της μικρότερης εμπειρίας, ίσως και του μεγάλου τμήματος αυτής της εμπειρίας στην φροντιστηριακή εκπαίδευση που δεν αφήνει περιθώρια σε έναν καθηγητή να μην ξέρει ή να οδηγεί τους μαθητές σε αβεβαιότητες. Αυτό αποτελεί και ένα ιδιότυπο άγραφο συμβόλαιο αυτού του είδους εκπαίδευσης που στρεβλώνει την άποψη για την μαθηματική διαδικασία. Το δείγμα δείχνει να απεκδύεται αυτή την άποψη με τα χρόνια δεδομένου ότι όλοι οι Έλληνες μαθηματικοί σχεδόν έχουν μεγάλο τμήμα της επαγγελματικής ζωής τους σε αυτό το είδος εκπαίδευσης.

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να διαλέγει μέτριας δυσκολίας προβλήματα και κάποιοι αιτιολογούν αυτή την στάση τους. Σχεδόν όμως οι μισοί τονίζουν πως παίρνουν υπόψη τους το επίπεδο της τάξης. Δεν μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα από αυτόν τον καθοριστικό παράγοντα. Τα προβλήματα μέτριας δυσκολίας παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, υποστηρίζουν οι μαθηματικοί. Οι μαθητές δεν νιώθουν να εμπαίζονται με πολύ απλά προβλήματα ούτε όμως έχουν ένα μάθημα γεμάτο διαδοχικές απογοητεύσεις που σφραγίζει μια για πάντα μια αρνητική σχέση με τα μαθηματικά. Διακρίνει κανείς εύκολα ότι οι εκπαιδευτικοί έρχονται συχνά αντιμέτωποι με την μαθηματικοφοβία των μαθητών κι αυτό διαμορφώνει τις διδακτικές πρακτικές τους. Θέλουν οι απαιτήσεις τους στην επίλυση προβλημάτων να προάγουν το κλίμα εμπιστοσύνης ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές. Είναι αξιοσημείωτο, ότι στις απαντήσεις αυτής της ερώτησης πουθενά δεν γίνεται νύξη για την δική τους

«διδασκαλία ασφάλεια», σε σιωπηλή συμφωνία με προηγούμενη ερώτηση για το αν θέτουν στην τάξη προβλήματα που δεν έχουν λύσει.

Στις απαντήσεις βρίσκουμε και την τακτική της κλιμάκωσης της δυσκολίας των προβλημάτων. Οι μαθητές, υποστηρίζεται, έχοντας λύσει μέτρια προβλήματα αποδέχονται με μειωμένη δυσπιστία δυσκολότερα προβλήματα. Για αυτό τον λόγο ο εκπαιδευτικός πρέπει πρώτα από όλα να «σέβεται» το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών. Τα δύσκολα προβλήματα διώχνουν κυρίως, και όχι μόνο, μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί του δείγματος δείχνουν να δουλεύουν προσεκτικά με αυτή την πρακτική και πάλι θεωρούμε ότι είναι συνάρτηση του πολύχρονου εργασιακού βίου τους στον οποίο η πράξη ακύρωσε άλλες τακτικές.

Τα 2/3 περίπου των εκπαιδευτικών διαλέγουν προβλήματα εκτός βιβλίου και οι υπόλοιποι από το βιβλίο. Όσοι επιλέγουν εκτός υποστηρίζουν ότι το σχολικό βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα αλλά πρέπει τα εκτός να συμφωνούν με την διδακτέα ύλη. Αυτοί που επιλέγουν το βιβλίο φαίνεται να το κάνουν για την ασφάλεια των μαθητών και όχι τη δική τους. Το ύφος των ασκήσεων του βιβλίου είναι πιο προσιτό στα παιδιά όπως υποστηρίζουν.

Η εικόνα που παρουσιάζεται από τις απαντήσεις δεν είναι στατική. Για λόγους που θα έπρεπε να διερευνηθούν περισσότερο οι εκπαιδευτικοί ξεφεύγουν από το σχολικό βιβλίο «ευαγγέλιο» έστω και στον τομέα των προβλημάτων που βάζουν στη σχολική τάξη. Έτσι η «τσιμενταρισμένη γνώση» του ενός και μοναδικού εγχειρίδιου φαίνεται να «σπάει» από τις πρακτικές ενός δείγματος κυρίως έμπειρων εκπαιδευτικών και επιμένουμε στην επισήμανση αυτή με σεβασμό στις παραμέτρους του συγκεκριμένου δείγματος. Οι εκπαιδευτικοί που οι γενικές συζητήσεις τους θέλουν προσηλωμένους στο σχολικό βιβλίο-ευαγγέλιο δείχνουν να το χρειάζονται και σαν παράδειγμα προς αποφυγή ή αλλιώς σαν βάση για κριτική και επαναδιατύπωση.

Φαινόμενο των καιρών είναι να φέρνουν οι μαθητές τις ασκήσεις του φροντιστηρίου στον μαθηματικό του σχολείου και θα παρατηρήσετε ότι η ερώτηση ξενίζει έναν μόνο εκπαιδευτικό. Πριν από χρόνια το φαινόμενο ήταν ανύπαρκτο, ο καθηγητής του σχολείου έβαζε τα προβλήματα και οι φροντιστές ακολουθούσαν «τρέχοντας». Το φαινόμενο της φροντιστηριακής εκπαίδευσης στη χώρα θα πρέπει να ερευνηθεί σε όλες τις όψεις του γιατί έχει ενδιαφέρουσες πλευρές και δεν αποτελεί σε αυτόν τον βαθμό χαρακτηριστικό όλων των χωρών.

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί του δείγματος λύνουν ατομικά ή στην τάξη το πρόβλημα χωρίς και πάλι να δείχνουν ανασφάλειες. Το αν και πως το κάνουν στηρίζεται σε άλλα κριτήρια. Τα προβλήματα αν έχουν κάτι να προσφέρουν και είναι συμβατά με την διδακτική ενότητα τα λύνουν στην τάξη αλλιώς ατομικά. Αλλιώς ατομικά στο διάλειμμα. Κάποιοι αρνούνται να τα εντάξουν έτσι κι αλλιώς στο μάθημα και λύνουν μόνο ατομικά. Επίσης παρουσιάζεται και η αναβολή σαν τακτική αν και την διαπιστώσαμε σε νεότερους εκπαιδευτικούς. Οι πιο έμπειροι δείχνουν μια άνεση αντιμετώπισης των δύσκολων στιγμών της διδασκαλίας σε όλες τις ερωτήσεις που ερευνούν την συμπεριφορά τους που τις αφορούν.

Στην περίπτωση που κολλάει η επίλυση ενός προβλήματος στην τάξη διαπιστώνουμε μια ψύχραιμη στάση των εκπαιδευτικών. Παρακάτω θα δούμε αν υπάρχει αντιδιαστολή ανάμεσα στο πως νιώθουν και πως πράττουν. Συντριπτικά πλειοψηφικά θα διερευνήσουν την ερώτηση που προκύπτει και θα αναβάλουν την απάντηση όταν δεν έχουν τεκμηρίωση εκείνη την στιγμή. Ζητάνε όμως και τη συμβολή των μαθητών σε αυτή την διαδικασία βάζοντας τους στα πλαίσια της μαθηματικής διεργασίας όπως αυτή αναπτύσσεται με όρους πραγματικότητας.

Δεν συμβαίνει όμως με όλους. Η μεγάλη πάλι πλειοψηφία όσων αναβάλουν την απάντηση, θεωρώντας ευθύνη τους να δώσουν την απάντηση την χρεώνονται χωρίς να βάλουν συμμετοχούς τους μαθητές τους στην διερεύνηση της. Ένας λόγος επίσης είναι πως μάλλον θεωρούν ότι οι μαθητές δεν θα καταφέρουν κάτι με την δεύτερη ανάγνωση αφού δεν το κατάφεραν με την πρώτη. Φαίνεται ότι δεν θέλουν, πάντως, να δίνουν ανεύθυνα πρόχειρες απαντήσεις μόνο και μόνο για να μην φανεί η αδυναμία τους.

Τέλος να σημειώσουμε ότι για κάποιους εκπαιδευτικούς αποτελεί έκπληξη η διατύπωση δύσκολων ερωτημάτων από τους μαθητές με έναν από αυτούς να θεωρεί αιτίες το γενικά χαμηλό μέσο επίπεδο των μαθητών αλλά επίσης υπεύθυνη και την φροντιστηριακή εκπαίδευση με την ασκησιολογία που προτείνει η οποία είναι επιβαρυντική και δεν προάγει την μαθηματική σκέψη των μαθητών.

#### Επαγγελματική συνεργασία

Το ζήτημα της επαγγελματικής συνεργασίας όταν ειδικά ο εκπαιδευτικός δυσκολεύεται να λύσει ένα πρόβλημα το τοποθετήσαμε σε δυο ερωτήσεις

διαχωρίζοντας την ηλεκτρονική , το νέο φρούτο των τελευταίων χρόνων, από την ζωντανή αλληλοβοήθεια.

Πάνω από τους μισούς, δηλωμένα, δεν φοβούνται την δημόσια έκθεση τους διατυπώνοντας απορίες για μαθηματικά θέματα σε ιστοσελίδες ώστε να βρουν λύση στο δύσκολο πρόβλημα τους. Ενώ υπάρχουν και οι εκπαιδευτικοί που δηλώνουν επιφυλάξεις αλλά το κάνουν και δεν είναι πολύ λίγοι.

Στην ερώτηση αυτή έχουμε μια ενδιαφέρουσα ποικιλία σε όψεις του θέματος. Φαίνεται κάποιιοι να προτιμούν την άμεση συζήτηση με τους συναδέλφους τους με εμπιστοσύνη και κάποιιοι δηλώνουν ότι δεν ασχολούνται με τέτοιες ιστοσελίδες. Άλλοι έχουν ενεργή συμμετοχή λύνοντας και αυτοί απορίες άλλων ηλεκτρονικά. Η συμμετοχή επίσης φαίνεται κάποιες φορές να παράγει αρνητικά συναισθήματα επειδή κάποιιοι μαθηματικοί στις ιστοσελίδες είναι δηκτικοί απέναντι σε λάθη και παραλείψεις. Δυστυχώς είναι φαινόμενο που διαπιστώσαμε καθώς διαβάζουμε συχνά το περιεχόμενο τέτοιων forum.

Η συνεργασία με άλλους έχει κάποιες φορές αποτέλεσμα να δεις καλύτερη λύση από αυτήν που προτείνεις, όπως υποστηρίζουν. Παρουσιάζουν εδώ την γονιμότητα των συνεργατικών προσπαθειών λύσης. Κάποιιοι δεν θεωρούν τον εαυτό τους αυθεντία για αυτό και θεωρούν ότι πάντα μαθαίνεις από την μελέτη και την συνεργασία με συναδέλφους. Η στάση τους απέναντι στην συνεργασία δείχνει ακομπλεξάριστη και πάλι προϊόν, θεωρούμε, της επαγγελματικής τους ωριμότητας.

Στο δείγμα εκφράζεται και ένα τμήμα μαθηματικών που είναι πολύ επιφυλακτικοί και το αποφεύγουν ή δεν το κάνουν καθόλου. Ίσως, θεωρούμε, έχει να κάνει και με τον ανταγωνισμό που συχνά οδηγεί σε αντισυναδερφικές συμπεριφορές στις ιστοσελίδες και την αλαζονεία που εκφράζουν κάποιιοι μαθηματικοί ως μέλη ενός σταρ σύστημ υπερλυτών.

Η δεύτερη ερώτηση που αφορούσε την επαγγελματική συνεργασία ήταν για την άμεση συνεργασία μεταξύ συναδέλφων. Εδώ οι εκπαιδευτικοί αντιδρούν ακόμη πιο θετικά, με συντριπτική πλειοψηφία. Αναδεικνύουν την αμφίδρομη σχέση της συνεργατικής επίλυσης κυρίως. Ομολογούν τις επιφυλάξεις τους κατά την επαγγελματική εκκίνηση να το κάνουν αν και άλλαξαν στάση με την πάροδο του χρόνου. Άλλοι αναφέρουν ότι δεν είχαν θέμα να ζητάνε βοήθεια από την επαγγελματική τους εκκίνηση και ότι διαχρονικά εναλλάσσονται στους ρόλους βοηθού

και βοηθούμενου. Θεωρούν μεγάλη την χρησιμότητα αυτού του είδους συμπαράστασης, ειδικά στα πρώτα χρόνια δουλειάς.

Υπάρχουν βέβαια και δηλώσεις αυτάρκειας. Ίσως δείγμα από μοναχικές πορείες σε μια επαγγελματική ζωή, όπως αυτή του μαθητικού, που συναντάς αναπόφευκτα σκληροπυρηνικές δυσκολίες. Κατά την άποψη μας οι απόψεις αυτές δηλώνουν ανομολόγητη ανασφάλεια.

#### Συναισθήματα -Προσωπική στάση

Τι συναισθήματα προκαλεί η δυσκολότερη στιγμή σε ένα μαθηματικό, όταν δηλαδή αδυνατεί να λύσει; Σε κάτι λιγότερο από τους μισούς αναδύεται μια επιμονή για λύση. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται μαζί με πείσμα κάποιες φορές. Όπως έχει φανεί από προηγούμενες ερωτήσεις γνωρίζουν για την μαθηματική διαδικασία ότι δεν έχει γραμμικά χαρακτηριστικά παρά μόνο στα εγχειρίδια. Δεν ξέρουν αν θα βρουν λύση, αν και είναι πεισμένοι για σχολικού επιπέδου προβλήματα ότι υπάρχει και είναι εφικτή. Η στάση εμπεριέχει και στοιχεία εγωισμού και κύρους ανεξάρτητα πόσο αναδεικνύονται από το δείγμα. Η μαθηματική πρόκληση είναι το «ψωμί» βέβαια ενός μαθηματικού. Δεν πρέπει επίσης να παραβλέψουμε ότι η μακρά πείρα των Ελλήνων μαθηματικών στα φροντιστήρια τους έχει εκπαιδεύσει στη διαδικασία της επιμονής για λύση και για επαγγελματικούς λόγους που αποτελεί ένα σημαντικό κίνητρο για την διαμόρφωση συμπεριφορών.

Είναι όμως σημαντικό και το ποσοστό όσων βιώνουν αρνητικά συναισθήματα. Κάποιοι νιώθουν ανασφάλεια σε σχέση με τις ικανότητες η οποία παρουσιάζεται με διάφορους βαθμούς έντασης. Αναρωτιούνται μήπως απλά είναι τυχαίο το γεγονός ότι δεν έλυσαν ή πλέον δεν μπορούν να λύσουν εξίσου καλά όπως στο παρελθόν. Επιστρέφουν στο παρελθόν νιώθοντας μαθητές συναίσθημα που εμπεριέχει μια αφύχραιμη και μηδενιστική ακύρωση της επαγγελματικής ενασχόλησης με τα μαθηματικά.

Κάποιοι άλλοι αισθάνονται άβολα αλλά δηλώνουν ότι γνωρίζουν πως είναι στη φύση των μαθηματικών διαδικασιών αυτά τα συμβάντα. Τα μαθηματικά απαιτούν συνεχή ενασχόληση και μελέτη. Η αντιφατική αυτή άποψη δείχνει ότι η δουλειά με τα μαθηματικά συνεχίζει να συνοδεύεται με βάρος στην αξιολόγηση με μανιχαιστικό



τρόπο. Στο δείγμα εμφανίζονται και μεγάλες εντάσεις. Δεν είναι πολλές αλλά όχι και ασήμαντες αριθμητικά.

Αν προσέξουμε τις απαντήσεις που διατυπώνονται μάλλον θα καταλήξουμε ότι τα αρνητικά συναισθήματα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο επικρατούν. Οι αιτίες μπορεί να είναι πολλές και αξίζουν έρευνας. Ενδέχεται να πηγάζουν από τον κοινωνικά διαμορφωμένο ρόλο ότι είμαι αυτός που λύνει σχεδόν πάντα και πολύ καλύτερα από τους άλλους κι αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό του επαγγέλματος. Πάντως σε κάθε περίπτωση υπάρχει δυσανεξία όταν δεν μπορούν να λύσουν. Όπως δείχνει όμως η ανάλυση των προηγούμενων ερωτήσεων διαχειρίζονται αυτά τα αρνητικά συναισθήματα, που δεν είναι και ότι καλύτερο, και δείχνουν στους μαθητές την πραγματική μαθηματική διαδικασία.

Είναι αδιαμφισβήτητο δεδομένο σύμφωνα με το δείγμα ότι οι μαθηματικοί επιστρέφουν χωρίς δεύτερη συζήτηση στο πρόβλημα που δεν λύθηκε. Επαναδιατυπώνεται η άποψη που ξανασυναντήσαμε ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν πως είναι πραγματικά να κάνεις μαθηματικά. Η προσέγγιση κάθε φορά ενός προβλήματος μπορεί να γίνει από διαφορετικό δρόμο που ενδέχεται να αποδειχτεί πετυχημένη ή όχι επιλογή. Συμβαίνει ακόμη κι όταν έχεις λύσει παλιότερα ένα πρόβλημα.

Η χρησιμότητα ενός προβλήματος στα μαθηματικά δεν βρίσκεται μόνο στην λύση του, όπως υποστηρίζουν. Τονίζουν ότι ακόμη και ιστορικά προβλήματα που δεν λύθηκαν αποδείχτηκαν γόνιμα για την προαγωγή της μαθηματικής σκέψη. Η αναγωγή ίσως είναι υπερβολική γιατί τα ιστορικά προβλήματα ερευνώνται με άλλους όρους από έμπειρους στην έρευνα μαθηματικούς πχ, παρόλα αυτά εκείνο που προσπαθεί να τονίσει η άποψη είναι ότι η αποτυχία επίλυσης είναι οργανικό μέρος της μαθηματικής διαδικασίας. Και για αυτό προτείνουν ψύχραιμη αντιμετώπιση της δυσάρεστης αυτής κατάστασης.

Τέλος υπάρχουν και πρακτικές που δηλώνουν εξάρτηση από το επίπεδο της τάξης παρότι δεν θέλουν να αφήνουν αναπάντητες ερωτήσεις και άλλες πρακτικές χωρίς σταθερή απάντηση στο φαινόμενο.

Η τελευταία ερώτηση σχετική με τα συναισθήματα αφορά την ταχύτητα επίλυσης και επιλέχτηκε γιατί είναι μια άποψη που διατυπώνεται από μαθηματικούς και προς τους μαθητές και παρουσιάζεται σαν βασικό προτέρημα του λύτη. Κανένα

άγχος δηλώνει σχεδόν τα 2/3 του δείγματος. Δεν είναι δυνατόν σε όλα τα προβλήματα να λύσει κανείς γρήγορα. Μαθηματικά δεν σημαίνει λύνω γρήγορα αλλά κυρίως λύνω αποτελεσματικά. Διακρίνουμε στο δείγμα ότι υπάρχει άγχος σε πιο νέους συναδέρφους ενώ παλιότεροι ομολογούν ότι ξεκίνησαν έτσι αλλά με τα χρόνια σταμάτησαν να νιώθουν άγχος για αυτό.

Κάποιες φορές άγχος, διατυπώνουν κάποιοι εκπαιδευτικοί, γιατί δεν τους αρέσει να σχηματίζουν αρνητική εικόνα για αυτούς οι μαθητές τους, παρότι οι ίδιοι ξέρουν ότι η αργή λύση είναι κάτι απόλυτα φυσικό για την μαθηματική διαδικασία. Υπάρχουν επίσης και καθαρές δηλώσεις άγχους αν και στο δείγμα παρουσιάζονται σε πιο νέους εκπαιδευτικούς. Δηλώνεται επίσης ότι το άγχος είναι συνοδό φαινόμενο της σωματικής και διανοητικής κούρασης.

## 5.2. Αποτελέσματα σχετικά με την επίδοση στη λύση προβλήματος

Παρουσίαση ανά πρόβλημα

### Π1.

Φάνηκε εύκολο σε όλους. Παρότι όλοι δούλεψαν βρίσκοντας τον μαθηματικό τύπο (μοτίβο) κανείς δεν έκανε επαγωγή θεωρώντας ότι δεν ήταν απαραίτητο γιατί έτσι κι αλλιώς είχαν λύσει το πρόβλημα.

### Π2.

Δυσκόλεψε κάποιους εκπαιδευτικούς κυρίως στο ερώτημα αν γίνεται με δυο ζυγίσεις.

### Π3.

Οι περισσότεροι το έλυσαν με δοκιμές και βρήκαν το 3 και 4. Κάποιοι βάζοντας  $\alpha$  και  $\beta$  στους παρονομαστές πήραν  $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{12}$  και βρήκαν αριθμούς με άθροισμα 7 και γινόμενο 12. Όλοι το 3 και το 4. Ένας έκανε αυτό το βήμα και παρατήρησε ότι αν το αριστερό κλάσμα είχε όρους  $7n$  και  $12n$  με  $n$  ακέραιο, η εξίσωση δεύτερου βαθμού με άθροισμα ριζών  $7n$  και γινόμενο ριζών  $12n$  θα έχει διάφορες λύσεις και θα ήταν ενδιαφέρον να βρούμε τις θετικές ακέραιες. Και σταμάτησε εκεί.

#### Π4.

Το πρόβλημα είχε 100% επιτυχία. Όλοι το έλυσαν με εξίσωση. Υπάρχει και στα ελληνικά σχολικά βιβλία αλλά είναι και μέσα στην κουλτούρα των Ελλήνων μαθηματικών. Κανείς δεν το έλυσε εμπειρικά. Οι περισσότεροι έλυσαν την εξίσωση  $x(x+1)=1190$  και κράτησαν τη θετική λύση 34. Κάποιοι σκέφτηκαν, κατόπιν, ότι είναι αριθμός ανάμεσα στο 30 και το 40 και τον βρήκαν και με δοκιμές. Ένας, στον ίδιο δρόμο, σκέφτηκε ότι το 1190 τελειώνει σε 0 και άρα τα δύο τελευταία ψηφία πρέπει να έχουν γινόμενο με τελευταίο ψηφίο 0. Έτσι έψαξε 30.31, 34.35 και το βρήκε.

#### Π5.

Το πρόβλημα αυτό δυσκόλεψε πολύ. Όλοι προσπάθησαν να καταστρώσουν εξίσωση. Φάνηκε εξαιρετικά πολύπλοκο. Κατάφεραν να λύσουν κάποιοι αφού παρατήρησαν ότι πριν συναντήσει τον τελευταίο φίλο του είχε αναγκαστικά 2 αυτοκόλλητα αφού αν είχε  $x$  τότε  $\frac{x}{2} + 1 = x$  και άρα  $x = 2$ . Πάρα πολλοί το βρήκαν υπερβολικά πολύπλοκο, αλλά ένας μόνο το παράτησε, γιατί θεωρούσαν ζήτημα "τιμής" να λυθεί πρόβλημα που λύνεται με εξίσωση. Οι αστοχίες ίσως οφείλονται σε βιαστική επίλυση.

#### Π6.

Εμφανίστηκαν οι παρακάτω λύσεις όλες βγαλμένες εμπειρικά, όπως ανέφεραν οι εκπαιδευτικοί. Κι αυτό γιατί ενώ έγραψαν το σύστημα αυτό ήταν αόριστο με 8 αγνώστους, 5 εξισώσεις και 8 περιορισμούς άρα φαινόταν χρονοβόρο και πολύπλοκο. Το πρόβλημα όμως ξάφνιασε πολύ και ήταν το χειρότερο σε επιδόσεις. Σοκάρει το γεγονός ότι παρότι λείπει μονάδα ο έλεγχος δίνει το ίδιο πλήθος μονάδων, μιας και ο έλεγχος έχει λάθος κριτήριο αλλά δύσκολα αναγνώσιμο. Μερικές από τις λύσεις, που είναι πολλές, εμφανίστηκαν:

2	3	4
1		3
6	1	2

5	3	1
2		7
2	6	1

4	3	2
3		6
2	6	1

1	2	6
4		2
4	4	1

## Π7.

Το πρόβλημα επιχείρησαν οι περισσότεροι με λύση ωμής βίας που έδειχνε όμως ότι οι περιπτώσεις ήταν πάρα πολλές. Πράγματι οι διαμερίσεις του 23 σε 6 θετικούς ακέραιους είναι 163. Βέβαια οι λύσεις, δηλαδή οι διαμερίσεις σε διαφορετικούς ανά δύο θετικούς ακέραιους είναι μόνο δύο. Οι 8, 5, 4, 3, 2, 1 και 7, 6, 4, 3, 2, 1. Λίγοι βρήκαν εμπειρικά την πρώτη, κάποιιοι τη δεύτερη και κάποιιοι και τις δύο. Δήλωσαν, όσοι βρήκαν μία, απορία για το αν η λύση είναι μοναδική πράγμα που θεωρούσαν ότι έπρεπε να απαντηθεί για να θεωρηθεί η λύση ολοκληρωμένη.

Πίνακας 14 Επιτυχής απάντηση προβλημάτων

Προβλήματα	Συχνότητα εμφάνισης (ποσοστό)
	10 (100,0%)
	7 (70,0%)
	10 (100,0%) όχι όλες οι λύσεις
	10 (100,0%)
	4 (40,0%)
	3 (30,0%) όχι όλες οι λύσεις
	9 (90,0%) όχι όλες οι λύσεις

Πίνακας 15 Επιτυχής απάντηση ανά πρόβλημα και μαθηματικό

ΕΠΙΤΥΧΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ								
Κωδικοί	Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7	ΣΥΝΟΛΟ
M1	1	1	1	1	1	0	1	6
M2	1	1	1	1	1	1	1	7

<b>M3</b>	1	0	1	1	0	0	0	<b>3</b>
<b>M4</b>	1	1	1	1	1	1	1	<b>7</b>
<b>M5</b>	1	0	1	1	0	1	1	<b>5</b>
<b>M6</b>	1	0	1	1	0	0	1	<b>4</b>
<b>M7</b>	1	1	1	1	0	0	1	<b>5</b>
<b>M8</b>	1	1	1	1	0	0	1	<b>5</b>
<b>M9</b>	1	1	1	1	0	0	1	<b>5</b>
<b>M10</b>	1	1	1	1	1	0	1	<b>6</b>
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>10</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	

Διαχωρίζουμε 3 προφίλ μαθηματικών ως προς την ικανότητα λύσης προβλημάτων. Τέσσερεις με υψηλή (Υ:6-7), τέσσερεις με μεσαία (Μ:5) και δυο με χαμηλή (Χ:3-4) ικανότητα λύσης.

### 5.3 Αντιπαραβολή επιδόσεων στην ΕΠ και απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο

#### ΟΜΑΔΑ Υ

Η ομάδα είναι θετική στη σημαντικότητα της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Βάζουν προβλήματα που δεν έχουν πριν λύσει αν και ο ένας απαιτεί καλά σχεδιασμένο μάθημα με στοχοθεσία που άρα επιτρέπει σπάνια αυτή την πρακτική. Είναι υπέρ των δευτέρων αναγνώσεων που είναι αναγκαίες ακόμη κι αν το δούμε ιστορικά. Οι μισοί βάζουν την τάξη σε αχαρτογράφητα νερά και οι άλλοι μόνο όταν έχουν αξιόλογη ιδέα ή σπάνια με κριτήρια για αυτόν που θέλει καλά σχεδιασμένο μάθημα. Η πλειοψηφία κινείται σε μέτρια προβλήματα θεωρώντας τα ακραία προβληματικά για την τάξη, ενώ ο ένας ξεκινάει με μέτρια και κλιμακώνει παίρνοντας υπόψη του την ανταπόκριση των μαθητών. Κινούνται όλοι με ανοιχτά προβλήματα εκτός βιβλίου. Όλοι τους λύνουν ασκήσεις που φέρνουν οι μαθητές στην τάξη ή ατομικά. Όταν δυσκολεύονται να απαντήσουν παίρνουν χρόνο και επανέρχονται. Δεν δίνουν βιαστικές και ατεκμηρίωτες απαντήσεις.

Οι μισοί δεν θεωρούν ότι εκτίθενται όταν ζητάνε βοήθεια σε ιστοσελίδες, ο ένας ίσως και ο ένας δεν ασχολείται και προτιμά τους συναδέλφους για να συζητήσουν. Όλοι τους είναι απόλυτα θετικοί στην συνεργασία με συναδέλφους.

Τα συναισθήματα που δηλώνουν, όταν δεν μπορούν να λύσουν, παρουσιάζουν ποικιλία. Ένας νιώθει άβολα αλλά ξέρει ότι αυτό είναι μαθηματικά. Δυο δείχνουν προβληματισμένοι με αυτό που συνέβη. Ο ένας δείχνει να βιώνει απογοήτευση. Η αποτυχία επίλυσης δεν τους αποτρέπει από το να προσπαθήσουν ξανά. Δεν τους ανησυχεί η αργή επίλυση, την θεωρούν φυσιολογική ειδικά σε δύσκολα προβλήματα ενώ σε μια περίπτωση εκφράζεται άγχος σε σχέση με την άποψη που διαμορφώνουν οι μαθητές.

#### ΟΜΑΔΑ Μ

Όλοι τους θεωρούν σημαντική την ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Η πλειοψηφία τους δεν βάζει προβλήματα που δεν έχει λύσει πριν. Ο ένας μόνο αν το φέρει μαθητής. Οι μισοί προτείνουν δεύτερη ανάγνωση. Ο ένας λύνει στο διάλειμμα και άλλος εξαρτά την συμπεριφορά του από το κοινό που έχει. Ο ένας δεν μπαίνει ποτέ σε αχαρτογράφητα νερά μέσα στην τάξη και οι άλλοι τρεις σπάνια και για συγκεκριμένους λόγους. Η πλειοψηφία τους διαλέγει μέτριας δυσκολίας προβλήματα και ο ένας δηλώνει εξάρτηση από την τάξη, το τμήμα, τη χρονιά κάθε φορά. Οι μισοί επιλέγουν προβλήματα του βιβλίου, ένας έχει διπλή συμπεριφορά και ο ένας κινείται εκτός σχολικού βιβλίου. Δυο από αυτούς, υπό προϋποθέσεις λύνουν ασκήσεις που φέρνουν οι μαθητές από φροντιστήρια, ο ένα πάντα ατομικά και ένας το αποφεύγει ρητά. Όταν προκύψει δυσκολία επίλυσης επανέρχονται. Ο ένας ενθουσιάζεται καθώς το φαινόμενο σπανίζει και ο ένας συμφωνεί με την σπανιότητα θεωρώντας ότι το χαμηλό επίπεδο και η φροντιστηριοποίηση ευθύνεται για αυτό.

Οι μισοί δεν θεωρούν ότι εκτίθενται με την ηλεκτρονική βοήθεια, ο ένας ίσως και ένας την αποφεύγει επώνυμα. Λίγο ή πολύ όμως δηλώνουν ότι προσφεύγουν σε συναδέλφους αν και ο ένας δηλώνει αυτάρκεια.

Φαίνεται να νιώθουν ανομοιόμορφα συναισθήματα όταν δεν λύνουν. Κυρίως επιμονή για λύση αλλά και άβολα και μεγάλη ένταση. Η αποτυχία επίλυσης στην τάξη δεν τους αποτρέπει να το ξαναεπιχειρήσουν εκτός από έναν που δεν έχει σταθερή στάση. Στους τρεις δεν δημιουργεί άγχος η αργή επίλυση ενώ ο ένας από αυτούς δηλώνει πως το ξεπέρασε με τα χρόνια. Ο ένας δηλώνει ότι τον αγχώνει.

## ΟΜΑΔΑ Χ

Η ομάδα είναι διχασμένη ως προς την σημαντικότητα της ΕΠ στην διδασκαλία. Να σημειώσουμε βέβαια ότι εδώ παρουσιάζεται η μόνη αρνητική άποψη.

Διχασμένοι και στο αν βάζουν ασκήσεις που δεν έχουν λύσει πριν. Προτείνουν δεύτερη ανάγνωση όταν το πρόβλημα δεν λύνεται. Επίσης επεκτείνουν προβλήματα στην τάξη. Διαλέγουν μέτριας δυσκολίας προβλήματα για την τάξη. Βάζουν προβλήματα από το βιβλίο ή έξω χωρίς να ξεχωρίζει τάση. Λύνουν ασκήσεις φροντιστηρίου που φέρνουν οι μαθητές υπό προϋποθέσεις. Όταν δυσκολεύονται να απαντήσουν αναβάλουν την απάντηση και διερευνούν το ερώτημα.

Ο ένας δεν έχει πρόβλημα να ζητήσει βοήθεια σε ιστοσελίδες και από συναδέλφους ενώ ο άλλος δηλώνει αυτάρκεια αλλά αν του συνέβαινε θα ζητούσε βοήθεια.

Μεγάλη ένταση και αμηχανία δηλώνουν όταν δεν λύνουν ένα πρόβλημα, επιμένουν όμως να βρουν λύση. Επίσης δεν έχουν πρόβλημα να επαναφέρουν στην τάξη ένα πρόβλημα που δεν είχε λυθεί. Ο ένας δηλώνει άγχος κυρίως από κούραση ενώ ο άλλος εκπαιδευτικός θεωρεί ότι πηγαίνοντας αργά σκέφτεται πιο ολοκληρωμένα.

## 6. ΤΕΛΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

ΕΕ1

**ΕΕ1: Αποδέχονται οι εκπαιδευτικοί την σημαντικότητα της ΕΠ στη διδασκαλία των μαθηματικών και αν ναι γιατί;**

Ο πρώτος άξονας της έρευνας αφορούσε την εκτίμηση των εκπαιδευτικών για την σημαντικότητα της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν υπέρ της σημαντικότητας της ΕΠ στην διδασκαλία των μαθηματικών καθολικά. Το δείγμα συμφωνεί και με το εμπειρικό δεδομένο από την εργασία μου με τους μαθηματικούς τριών νομών. Η αποδοχή της ΕΠ είναι πρακτικά καθολική χωρίς να λείπουν οι ενστάσεις για το πώς μπορεί να εφαρμοστεί πρακτικά. Οι εκπαιδευτικοί

δεν αρκούνται σε μια απλή απάντηση αλλά αιτιολογούν την επιλογή τους. Θεωρούν ότι προάγει την κριτική σκέψη και συνδέει τα μαθηματικά με πραγματικές καταστάσεις. Τονίζουν αυτά τα χαρακτηριστικά τους ΕΠ σε σχέση με την απλή εκτέλεση αλγορίθμων. Η ΕΠ είναι μια διαδικασία γεμάτη με κρίσιμα σημεία αποφάσεων μέσα σε περιβάλλον αβεβαιότητας και χωρίς την θαλπωρή των έτοιμων λύσεων. Αυτό συνιστά ένα πλαίσιο ανάπτυξης τους κριτικής σκέψης.

Επίσης διατυπώνονται μια σειρά από χαρακτηριστικά της ΕΠ. Είναι μια διαδικασία ανακαλυπτική και όχι εκτελεστική. Ωθεί τους μαθητές σε οργάνωση της σκέψης τους και συστηματική διερεύνηση. Είναι επίσης γόνιμη καθώς ο λύτης αναπτύσσει νέους τρόπους σκέψης. Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθητές σε πραγματικά προβλήματα αναδεικνύει την ισχύ αυτών των εννοιών που μέσα στο φορμαλιστικό πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών είναι απλά θεωρητικές κατασκευές.

Τέλος η άρνηση της σημασίας της ΕΠ στη διδασκαλία, που παρουσιάζεται σε μια απάντηση, φαίνεται να έχει σχέση με την άποψη για συγκριτικά μικρή αποτελεσματικότητα σε σχέση με την εκτέλεση αλγορίθμων και τον διδακτικό χρόνο που απαιτεί. Η χρονοβόρα ΕΠ είναι, να σημειώσουμε, αντεπιχείρημα που παρουσιάζεται σε έρευνες συχνά.

## ΕΕ2

**ΕΕ2: Εμφανίζεται στους εκπαιδευτικούς, και αν ναι πότε, η ένταση «θέλω αλλά δεν μπορώ να λύσω στην τάξη» και πως την διαχειρίζονται;**

Ο δεύτερος άξονας της έρευνας αφορούσε τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών στην ΕΠ στην τάξη. Οι ερωτήσεις προσπάθησαν να ψηλαφήσουν άμεσα και έμμεσα την ένταση του να πρέπει αλλά να μην μπορώ να λύσω.

Παίρνει το ρίσκο ο εκπαιδευτικός βάζοντας στην τάξη προβλήματα που δεν έχει λύσει πριν; Οι μισοί απαντάνε ότι το κάνουν. Πάντως ότι δεν είναι συντριπτικά πλειοψηφική στάση σε ένα τέτοιου είδους δείγμα δείχνει ότι οι επιφυλάξεις για τα άγνωστα προβλήματα δεν φεύγουν εντελώς με την εμπειρία. Κάποιοι λόγοι που αναφέρονται για τους οποίους βάζουν άγνωστες ασκήσεις φαίνεται να είναι η ανία μετά από χρόνια διδασκαλίας αλλά και ότι έχει ξεπεραστεί η ανασφάλεια που είχαν στις



αρχές της επαγγελματικής τους ζωής. Αναφέρεται ότι αυτού του είδους τα προβλήματα αναπτύσσουν μπροστά στους μαθητές την διαδικασία του πως πραγματικά σκέφτεται και πράττει κανείς μαθηματικά καθώς αντιμετωπίζει το άγνωστο ή έστω κάποια μορφή του αγνώστου. Πάντως είναι αξιοσημείωτο ότι δεν φαίνεται το δείγμα να κυριεύεται από ανασφάλειες.

Ένα σημαντικό τμήμα του εμφανίζεται να έχει σπάνια τέτοια πρακτική. Αιτιολογεί ότι θέλει να αποφύγει τον αιφνιδιασμό των μαθητών με δύσκολα προβλήματα που απλά θα τους απογοητεύσουν, θέλει καλά σχεδιασμένο μάθημα και πρόβλημα που να έχει συνάφεια με το αντικείμενο. Στην ουσία αυτοί οι εκπαιδευτικοί φωτίζουν τις αρνητικές όψεις αυτής της πρακτικής που δεν πρέπει να εφαρμόζεται χωρίς κριτήρια και σχεδιασμό.

Οι ολικοί αρνητές της πρακτικής εκφράζονται απόλυτα και χωρίς αιτιολόγηση. Φαίνεται, με μια πρώτη ματιά, να αφορούν σχετικά λίγα χρόνια διδασκαλίας και ίσως ανασφάλειες έκθεσης στους μαθητές.

Παρατηρούμε μια αυθόρμητη στάση των εκπαιδευτικών που συνδέεται, θεωρούμε, με την αυξημένη τους εμπειρία. Απαντούν χωρίς αμφιβολία ότι προτείνουν δεύτερη ανάγνωση χωρίς να αναφέρουν κάποια δυσφορία όταν προκύπτει μη επίλυση μέσα στην τάξη. Σχεδόν οι μισοί αιτιολογούν αυτήν τους την στάση. Παρουσιάζεται μάλιστα και η άποψη ότι μπορεί να χρειαστούν και διαδοχικές αναγνώσεις χωρίς και πάλι να μπαίνει ζήτημα ακύρωσης του εκπαιδευτικού.

Το συμβάν της μη επίλυσης παρουσιάζεται σαν μια καλή ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές πως αναπτύσσονται πραγματικά τα μαθηματικά. Τα άλματα για αιώνες προβλήματα το αποδεικνύουν, όπως υποστηρίζεται. Η περίφημη «βασιλική οδός» που δεν υπάρχει, αν και έρευνες δείχνουν διαφορές που προκύπτουν από κοινωνικές ανισότητες, χρησιμοποιείται σαν επιχείρημα ότι η δεύτερη ανάγνωση είναι αναπόφευκτη ειδικά στα δύσκολα προβλήματα. Επισημαίνεται σχηματικά πως η επίλυση προβλημάτων είναι «πόλεμος» όπου μπορεί να χαθούν μάχες αλλά το σημαντικό είναι η στρατηγική συμπεριφορά κι αυτή εμπεριέχει επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος σε περίπτωση αποτυχίας.

Στις απαντήσεις τους κάνει την εμφάνιση του και ένα παιδαγωγικό συμβόλαιο. Οι μαθηματικοί εξηγούν από την αρχή στους μαθητές ότι δεν λύνονται όλα με την πρώτη στα μαθηματικά. Τους προειδοποιούν ότι τα μαθηματικά σε φέρνουν σε

δύσκολη, κάποιες φορές, θέση να μην μπορείς να λύσεις χωρίς να σημαίνει ότι είσαι ανίκανος λύτης. Και ότι το βασικό είναι να μαθαίνεις πως οι δεύτερες αναγνώσεις που ακολουθούν μια αποτυχημένη προσπάθεια μπορεί να είναι αποτελεσματικές. Μάλιστα αυτό το θεωρούν και μάθημα για την πραγματική ζωή σε περιπτώσεις όπου κανείς αντιμετωπίζει αδιέξοδα. Συνεπώς διδάσκουν την δεύτερη ανάγνωση και την επαναπροσπάθεια σαν δομική πέτρα τους μαθηματικής διαδικασίας. Να αναφέρουμε, και την άποψη της συμπεριφοράς ανάλογα με το κοινό τους τάξης που δεν παύει ποτέ να είναι κρίσιμος παράγοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Οι μισοί μαθηματικοί του δείγματος επεκτείνουν με νέα ερωτήματα προβλήματα που ήδη έχουν λυθεί και μάλιστα πλέοντας άφοβα και σε αχαρτογράφητα νερά. Το ποσοστό και πάλι δεν πρέπει να είναι ασυνάρτητο, κατά την άποψη μας, με την εμπειρία όσων συμμετέχουν στο δείγμα. Κατά τα λεγόμενα τους, είναι μια διαδικασία όπου μπορεί κανείς να διαπιστώσει τις δυνατότητες των μαθητών στην επίλυση άγνωστων προβλημάτων για τα οποία δεν έχουν προετοιμασία. Οι μαθητές δείχνουν να κινητοποιούνται από την πρόκληση του άγνωστου περισσότερο από ότι στο συνηθισμένο ασφαλές μάθημα. Κανείς εκπαιδευτικός δεν ανέφερε το φαινόμενο της ανασφάλειας των καλών μαθητών που φοβούνται να απαντήσουν σε τέτοιες ερωτήσεις για λόγους κύρους αλλά νιώθουν και την μεγαλύτερη αμηχανία όταν το αποτελεσματικό οπλοστάσιο τους δείξει σημεία ανεπάρκειας κατά την επίλυση. Επίσης αναφέρεται ότι το άγνωστο αναδεικνύει και την περιπετειώδη φύση των μαθηματικών.

Είναι σημαντικό και το ποσοστό των εκπαιδευτικών που σπάνια χρησιμοποιεί αυτή την τακτική. Κάποιες αιτιάσεις έχουν να κάνουν όχι με ανασφάλειες αλλά με την πρόθεση για καλά σχεδιασμένο μάθημα με στοχοθεσία, με προβλήματα που δεν οδηγούν σε αδιευκρίνιστα από την αρχή μαθηματικά πεδία και το κυριότερο δεν εμπεριέχουν το ρίσκο οι επεκτάσεις να είναι πολύ αποθαρρυντικές για τους μαθητές. Αναφέρεται ότι μπαίνουν στην διαδικασία μόνο αν τους προκύψει μια αξιόλογη ιδέα ή αν θέλουν να αποσαφηνίσουν σκοτεινές πλευρές τους ύλης που διδάσκεται.

Θα πρέπει να αναφέρουμε και την μειοψηφική στάση όπου ποτέ δεν ακολουθούν τέτοια πρακτική γιατί θέλουν να δίνουν ξεκάθαρες απαντήσεις στους μαθητές. Η στάση αυτή ίσως είναι απόρροια της μικρότερης εμπειρίας, ίσως και του μεγάλου τμήματος της εμπειρίας στην φροντιστηριακή εκπαίδευση που δεν αφήνει περιθώρια σε έναν καθηγητή να μην ξέρει ή να οδηγεί τους μαθητές σε αβεβαιότητες.

Αυτό αποτελεί και ένα ιδιότυπο άγραφο συμβόλαιο αυτού του είδους εκπαίδευσης που στρεβλώνει την άποψη για την μαθηματική διαδικασία. Το δείγμα δείχνει να απεκδύεται αυτή την άποψη με τα χρόνια δεδομένου ότι όλοι οι Έλληνες μαθηματικοί σχεδόν έχουν μεγάλο τμήμα της επαγγελματικής ζωής τους σε αυτό το είδος εκπαίδευσης.

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να διαλέγει μέτριας δυσκολίας προβλήματα και κάποιοι αιτιολογούν αυτή την στάση τους. Σχεδόν οι μισοί τονίζουν πως παίρνουν υπόψη τους το επίπεδο της τάξης. Δεν μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα από αυτόν τον καθοριστικό παράγοντα. Τα προβλήματα μέτριας δυσκολίας παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, υποστηρίζουν οι μαθηματικοί. Οι μαθητές δεν νιώθουν να εμπαιζονται με πολύ απλά προβλήματα ούτε έχουν ένα μάθημα γεμάτο διαδοχικές απογοητεύσεις που σφραγίζει μια για πάντα μια αρνητική σχέση με τα μαθηματικά. Διακρίνει κανείς έμμεσα, αλλά εύκολα, από τις απαντήσεις τους ότι οι εκπαιδευτικοί έρχονται συχνά αντιμέτωποι με την μαθηματικοφοβία των μαθητών κι αυτό διαμορφώνει τις διδακτικές πρακτικές τους. Θέλουν οι απαιτήσεις τους στην επίλυση προβλημάτων να προάγουν το κλίμα εμπιστοσύνης ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές. Είναι αξιοσημείωτο, ότι στις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις πουθενά δεν γίνεται νύξη για την δική τους «διδασκτική ασφάλεια», σε σιωπηλή συμφωνία με προηγούμενη ερώτηση για το αν θέτουν στην τάξη προβλήματα που δεν έχουν λύσει.

Στις απαντήσεις τους βρίσκουμε και την τακτική της κλιμάκωσης της δυσκολίας των προβλημάτων. Οι μαθητές, υποστηρίζεται, έχοντας λύσει μέτρια προβλήματα αποδέχονται με μειωμένη δυσπιστία δυσκολότερα προβλήματα. Για αυτό τον λόγο ο εκπαιδευτικός πρέπει πρώτα από όλα να «σέβεται» το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών. Τα δύσκολα προβλήματα διώχνουν κυρίως, και όχι μόνο, μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί του δείγματος δείχνουν να δουλεύουν προσεκτικά με αυτή την πρακτική και πάλι θεωρούμε ότι είναι συνάρτηση του πολύχρονου εργασιακού βίου τους κατά την διάρκεια του οποίου η πράξη ακύρωσε σταδιακά διδακτικές αστοχίες και υπερβολές.

Τα 2/3 περίπου των εκπαιδευτικών διαλέγουν προβλήματα εκτός βιβλίου και οι υπόλοιποι από το βιβλίο. Όσοι επιλέγουν εκτός υποστηρίζουν ότι το σχολικό βιβλίο δεν έχει ικανοποιητικά προβλήματα αλλά πρέπει τα εκτός να συμφωνούν με την διδακτέα ύλη. Αυτοί που επιλέγουν το βιβλίο φαίνεται να το κάνουν για την ασφάλεια

των μαθητών και όχι τη δική τους. Το ύφος των ασκήσεων του βιβλίου είναι πιο προσιτό στα παιδιά όπως υποστηρίζουν.

Η εικόνα που παρουσιάζεται από τις απαντήσεις δεν είναι στατική. Για λόγους που θα έπρεπε να διερευνηθούν περισσότερο οι εκπαιδευτικοί ξεφεύγουν από το σχολικό βιβλίο «ευαγγέλιο» έστω και στον τομέα των προβλημάτων που βάζουν στη σχολική τάξη. Έτσι η «τσιμενταρισμένη γνώση» του ενός και μοναδικού εγχειρίδιου φαίνεται να «σπάει» από τις πρακτικές τους δείγματα κυρίως έμπειρων εκπαιδευτικών και επιμένουμε στην επισήμανση αυτή με σεβασμό στις παραμέτρους του συγκεκριμένου δείγματος. Οι εκπαιδευτικοί που οι γενικές συζητήσεις τους θέλουν προσηλωμένους στο σχολικό βιβλίο-ευαγγέλιο δείχνουν να το χρειάζονται και σαν παράδειγμα προς αποφυγή ή αλλιώς σαν βάση για κριτική και επαναδιατύπωση.

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί του δείγματος λύνουν ατομικά ή στην τάξη το πρόβλημα χωρίς και πάλι να δείχνουν ανασφάλειες. Το αν και πως το κάνουν στηρίζεται σε κάποια κριτήρια. Τα προβλήματα αν έχουν κάτι να προσφέρουν και είναι συμβατά με την διδακτική ενότητα τα λύνουν στην τάξη αλλιώς ατομικά. Αλλιώς ατομικά στο διάλειμμα. Κάποιοι αρνούνται να τα εντάξουν έτσι κι αλλιώς στο μάθημα και λύνουν μόνο ατομικά. Στο δείγμα παρουσιάζεται και η αναβολή σαν τακτική αν και την διαπιστώσαμε σε νεότερους εκπαιδευτικούς. Οι πιο έμπειροι δείχνουν μια άνεση αντιμετώπισης των δύσκολων στιγμών της διδασκαλίας τους στις ερωτήσεις που ερευνούν την συμπεριφορά τους.

Στην περίπτωση που κολλάει η επίλυση τους προβλήματος στην τάξη διαπιστώνουμε μια ψύχραιμη στάση των εκπαιδευτικών. Παρακάτω θα δούμε αν υπάρχει αντιδιαστολή ανάμεσα στο πως νιώθουν και πως πράττουν. Συντριπτικά πλειοψηφικά θα διερευνήσουν την ερώτηση που προκύπτει και θα αναβάλουν την απάντηση όταν δεν έχουν τεκμηρίωση εκείνη την στιγμή. Κάποιο ζητάνε και τη συμβολή των μαθητών σε αυτή την διαδικασία βάζοντας τους στα πλαίσια της μαθηματικής διεργασίας όπως αυτή αναπτύσσεται με όρους πραγματικότητας.

Δεν συμβαίνει όμως με όλους. Η μεγάλη πάλι πλειοψηφία όσων αναβάλουν την απάντηση, θεωρώντας ευθύνη τους να δώσουν την απάντηση την χρεώνονται χωρίς να βάλουν συμμετόχους τους μαθητές τους στην διερεύνηση. Ίσως λόγος να είναι πως μάλλον θεωρούν ότι οι μαθητές δεν θα καταφέρουν κάτι με την δεύτερη ανάγνωση

αφού δεν το κατάφεραν με την πρώτη. Φαίνεται ότι δεν θέλουν, πάντως, να δίνουν ανεύθυνα πρόχειρες απαντήσεις μόνο και μόνο για να μην φανεί η αδυναμία τους.

Τέλος να σημειώσουμε ότι για κάποιους εκπαιδευτικούς αποτελεί έκπληξη η διατύπωση δύσκολων ερωτημάτων από τους μαθητές με έναν από αυτούς να θεωρεί αιτίες το γενικά χαμηλό μέσο επίπεδο των μαθητών αλλά υπεύθυνη και την φροντιστηριακή εκπαίδευση με την ασκησιολογία που προτείνει η οποία είναι επιβαρυντική και δεν προάγει την μαθηματική σκέψη των μαθητών.

Τελικά, είναι προφανής η εμφάνιση της έντασης που εξετάζουμε στο δείγμα και προκύπτει από τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που όλες αφορούσαν την συμπεριφορά των εκπαιδευτικών σε ποικίλες μορφές της δυσάρεστης κατάστασης να μην μπορούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Οι απαντήσεις τους δείχνουν ότι διαχειρίζονται με επαγγελματισμό αυτή την ένταση, ώστε να ωφεληθούν οι μαθητές, αν και τα συναισθήματα που νιώθουν όπως φαίνεται από επόμενο άξονα είναι έντονα αρνητικά.

ΕΕ3

### **ΕΕ3: Προσφεύγουν οι εκπαιδευτικοί σε βοήθεια όταν δεν μπορούν να λύσουν σε ιστοσελίδες ή συναδέρφους τους;**

Το ζήτημα της επαγγελματικής συνεργασίας όταν ειδικά ο εκπαιδευτικός δυσκολεύεται να λύσει ένα πρόβλημα το τοποθετήσαμε σε δυο ερωτήσεις διαχωρίζοντας την ηλεκτρονική, από την ζωντανή αλληλοβοήθεια.

Πάνω από τους μισούς, δηλωμένα, δεν φοβούνται την δημόσια έκθεση τους διατυπώνοντας απορίες για μαθηματικά θέματα σε ιστοσελίδες ώστε να βρουν λύση στο δύσκολο πρόβλημα τους. Ενώ υπάρχουν και οι εκπαιδευτικοί που δηλώνουν επιφυλάξεις αλλά το κάνουν και δεν είναι πολύ λίγοι.

Στην ερώτηση αυτή έχουμε μια ενδιαφέρουσα ποικιλία σε όψεις του θέματος. Φαίνεται κάποιοι να προτιμούν την άμεση συζήτηση με τους συναδέρφους τους με εμπιστοσύνη και κάποιοι δηλώνουν ότι δεν ασχολούνται με τέτοιες ιστοσελίδες. Άλλοι έχουν ενεργή συμμετοχή λύνοντας και αυτοί απορίες άλλων ηλεκτρονικά. Η συμμετοχή επίσης φαίνεται κάποιες φορές να παράγει αρνητικά συναισθήματα επειδή κάποιοι μαθηματικοί στις ιστοσελίδες είναι δηκτικοί απέναντι σε λάθη και παραλείψεις ή αδυναμίες επίλυσης. Δυστυχώς είναι φαινόμενο που διαπιστώνει κανείς παρακολουθώντας αναρτήσεις και συζητήσεις σε forum για μαθηματικούς.

Η συνεργασία με άλλους έχει κάποιες φορές αποτέλεσμα να δεις καλύτερη λύση από αυτήν που προτείνεις, όπως υποστηρίζουν. Παρουσιάζουν εδώ την γονιμότητα των συνεργατικών προσπαθειών λύσης. Κάποιοι δεν θεωρούν τον εαυτό τους αυθεντία για αυτό και θεωρούν ότι πάντα μαθαίνεις από την μελέτη και την συνεργασία με συναδέλφους. Η στάση τους απέναντι στην συνεργασία δείχνει να γίνεται χωρίς κόμπλεξ και θεωρούμε ότι αυτό είναι αποτέλεσμα της επαγγελματικής τους ωριμότητας.

Στο δείγμα εκφράζεται και ένα τμήμα εκπαιδευτικών που είναι πολύ επιφυλακτικοί και το αποφεύγουν ή δεν το κάνουν καθόλου. Ίσως, θεωρούμε, έχει να κάνει και με τον ανταγωνισμό που συχνά οδηγεί σε αντισυναδερφικές συμπεριφορές στις ιστοσελίδες και την αλαζονεία που εκφράζουν κάποιοι μαθηματικοί ως μέλη ενός σταρ σύστημα υπερλυτών.

Η δεύτερη ερώτηση που αφορούσε την επαγγελματική συνεργασία ήταν για την άμεση συνεργασία μεταξύ συναδέλφων. Εδώ οι εκπαιδευτικοί αντιδρούν ακόμη πιο θετικά, με συντριπτική πλειοψηφία. Αναδεικνύουν την αμφίδρομη σχέση της συνεργατικής επίλυσης κυρίως. Ομολογούν τις επιφυλάξεις τους κατά την επαγγελματική εκκίνηση να το κάνουν αν και άλλαξαν στάση με την πάροδο του χρόνου, Άλλοι αναφέρουν ότι δεν είχαν θέμα να ζητάνε βοήθεια από την επαγγελματική τους εκκίνηση και ότι διαχρονικά εναλλάσσονται στους ρόλους βοηθού και βοηθούμενου. Θεωρούν μεγάλη την χρησιμότητα αυτού του είδους συμπαράστασης, ειδικά στα πρώτα χρόνια δουλειάς ενός εκπαιδευτικού.

Υπάρχουν βέβαια και δηλώσεις αυτάρκειας που θα ήταν χρήσιμο να ερευνούσαμε τις αιτίες. Κατά την άποψη μας οι απόψεις αυτές δηλώνουν ανομολόγητη ανασφάλεια.

Συνολικά οι εκπαιδευτικοί δείχνουν να προσφεύγουν σε βοήθεια και να συνεργάζονται με τους συναδέλφους τους στις δύσκολες στιγμές τους.

EE4

**EE4: Ποια συναισθήματα βιώνουν οι εκπαιδευτικοί όταν δεν μπορούν να λύσουν και ποια η προσωπική τους στάση;**

Τι συναισθήματα προκαλεί η δυσκολότερη στιγμή σε ένα μαθηματικό, όταν δηλαδή αδυνατεί να λύσει; Σε κάτι λιγότερο από τους μισούς αναδύεται μια επιμονή για λύση. Η συμπεριφορά αυτή αναφέρεται μαζί με πείσμα κάποιες φορές. Όπως έχει φανεί από προηγούμενες ερωτήσεις γνωρίζουν για την μαθηματική διαδικασία ότι δεν έχει γραμμικά χαρακτηριστικά παρά μόνο στα εγχειρίδια. Δεν ξέρουν αν θα βρουν λύση, αν και είναι πεισμένοι για σχολικού επιπέδου προβλήματα ότι υπάρχει και είναι εφικτή. Η στάση εμπεριέχει και στοιχεία εγωισμού και κύρους ανεξάρτητα πόσο αναδεικνύονται από το δείγμα. Η μαθηματική πρόκληση είναι το «ψωμί» βέβαια ενός μαθηματικού. Δεν πρέπει επίσης να παραβλέψουμε ότι η μακρά πείρα των Ελλήνων μαθηματικών στα φροντιστήρια τους έχει εκπαιδεύσει στη διαδικασία της επιμονής για λύση και για επαγγελματικούς λόγους που αποτελεί ένα σημαντικό κίνητρο για την διαμόρφωση συμπεριφορών.

Είναι όμως σημαντικό και το ποσοστό όσων βιώνουν αρνητικά συναισθήματα. Κάποιοι νιώθουν ανασφάλεια σε σχέση με τις ικανότητες η οποία παρουσιάζεται με διάφορους βαθμούς έντασης. Αναρωτιούνται μήπως απλά είναι τυχαίο το γεγονός ότι δεν έλυσαν ή πλέον δεν μπορούν να λύσουν εξίσου καλά όπως στο παρελθόν. Επιστρέφουν στο παρελθόν νιώθοντας μαθητές, συναίσθημα που εμπεριέχει μια μη ψύχραιμη και μηδενιστική ακύρωση της επαγγελματικής ενασχόλησης με τα μαθηματικά.

Κάποιοι άλλοι αισθάνονται άβολα αλλά δηλώνουν ότι γνωρίζουν πως είναι στη φύση των μαθηματικών διαδικασιών αυτά τα συμβάντα. Τα μαθηματικά απαιτούν συνεχή ενασχόληση και μελέτη. Η «αντιφατική» αυτή άποψη δείχνει ότι η δουλειά με τα μαθηματικά συνεχίζει να συνοδεύεται με βάρος στην αξιολόγηση με μανιχαιστικό τρόπο. Στο δείγμα εμφανίζονται και μεγάλες εντάσεις. Δεν είναι πολλές αλλά όχι και ασήμαντες αριθμητικά.

Αν προσέξουμε τις απαντήσεις που διατυπώνονται μάλλον θα καταλήξουμε ότι τα αρνητικά συναισθήματα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο επικρατούν. Οι αιτίες μπορεί να είναι πολλές και αξίζουν έρευνας. Ενδέχεται να πηγάζουν από τον κοινωνικά διαμορφωμένο ρόλο ότι είμαι αυτός που λύνει σχεδόν πάντα και πολύ καλύτερα από τους άλλους κι αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό του επαγγέλματος. Πάντως σε κάθε περίπτωση υπάρχει δυσανεξία όταν δεν μπορούν να λύσουν. Όπως δείχνει όμως η ανάλυση των προηγούμενων ερωτήσεων διαχειρίζονται αυτά τα αρνητικά

συναισθήματα, που δεν είναι και ότι καλύτερο, και δείχνουν στους μαθητές την πραγματική μαθηματική διαδικασία. Από το δείγμα φαίνεται να αξιοποιούν θετικά τα αρνητικά αυτά συναισθήματα τους.

Είναι αδιαμφισβήτητα δεδομένο σύμφωνα με το δείγμα ότι οι μαθηματικοί επιστρέφουν χωρίς δεύτερη συζήτηση στο πρόβλημα που δεν λύθηκε. Επαναδιατυπώνεται η άποψη που ξανασυναντήσαμε ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν πως είναι πραγματικά να κάνεις μαθηματικά. Η προσέγγιση κάθε φορά ενός προβλήματος μπορεί να γίνει από διαφορετικό δρόμο που ενδέχεται να αποδειχτεί πετυχημένη ή όχι επιλογή. Συμβαίνει ακόμη κι όταν έχεις λύσει παλιότερα ένα πρόβλημα η επιλογή δρόμου επίλυσης να καθορίσει την αποτελεσματικότητα.

Η χρησιμότητα ενός προβλήματος στα μαθηματικά δεν βρίσκεται μόνο στην λύση του, όπως υποστηρίζουν. Τονίζουν ότι ακόμη και ιστορικά προβλήματα που δεν λύθηκαν αποδείχθηκαν γόνιμα για την προαγωγή της μαθηματικής σκέψη. Η αναγωγή ίσως είναι υπερβολική γιατί τα ιστορικά προβλήματα ερευνώνται με άλλους όρους από έμπειρους στην έρευνα μαθηματικούς, παρόλα αυτά εκείνο που προσπαθεί να τονίσει η άποψη αυτή είναι ότι η αποτυχία επίλυσης είναι οργανικό μέρος της μαθηματικής διαδικασίας. Και για αυτό προτείνουν ψύχραιμη αντιμετώπιση της δυσάρεστης αυτής κατάστασης. Τέλος υπάρχουν και πρακτικές που δηλώνουν εξάρτηση από το επίπεδο της τάξης παρότι δεν θέλουν να αφήνουν αναπάντητες ερωτήσεις και επίσης άλλες πρακτικές χωρίς σταθερή απάντηση στο φαινόμενο.

Η τελευταία ερώτηση η σχετική με τα συναισθήματα αφορά την ταχύτητα επίλυσης και επιλέχτηκε γιατί είναι μια άποψη που διατυπώνεται από μαθηματικούς και προς τους μαθητές και παρουσιάζεται σαν βασικό προτέρημα του λύτη. Κανένα άγχος δηλώνει σχεδόν τα 2/3 του δείγματος. Δεν είναι δυνατόν όλα τα προβλήματα να τα λύνει κανείς γρήγορα. Υποστηρίζουν ότι μαθηματικά δεν σημαίνει λύνω γρήγορα αλλά κυρίως λύνω αποτελεσματικά. Διακρίνουμε στο δείγμα ότι υπάρχει άγχος σε πιο νέους συναδέλφους ενώ παλιότεροι ομολογούν ότι ξεκίνησαν έτσι αλλά με τα χρόνια σταμάτησαν να νιώθουν άγχος για αυτό.

Κάποιες φορές άγχος, διατυπώνουν κάποιοι εκπαιδευτικοί, γιατί δεν τους αρέσει να σχηματίζουν αρνητική εικόνα για αυτούς οι μαθητές τους, παρότι οι ίδιοι ξέρουν ότι η αργή λύση είναι κάτι απόλυτα φυσικό για την μαθηματική διαδικασία. Υπάρχουν επίσης και καθαρές δηλώσεις άγχους αν και στο δείγμα παρουσιάζονται σε



πιο νέους εκπαιδευτικούς. Δηλώνεται επίσης ότι το άγχος είναι συνοδό φαινόμενο της σωματικής και διανοητικής κούρασης.

Συμπερασματικά, μπορούν να αναγνωσθούν στις απαντήσεις αρνητικά συναισθήματα. Δύσκολα οι μαθηματικοί αποδέχονται την μη επίλυση από μέρους τους. Τα συναισθήματα αυτά δείχνουν να τα διαχειρίζονται οι εκπαιδευτικοί προς όφελος των μαθητών τελικά.

EE5

**EE5: Σχετίζεται η επίδοση των καθηγητών στην επίλυση προβλήματος με τις απόψεις και τις πρακτικές στην ΕΠ τους όταν εμφανίζεται η ένταση «θέλω αλλά δεν μπορώ να λύσω»;**

Όλοι θεωρούν σημαντική την ΕΠ εκτός ενός στην ομάδα X. Πρόκειται για καθολική αποδοχή της χρησιμότητας της στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι Y (ομάδα μαθηματικών με υψηλή επίδοση στη λύση προβλημάτων) κυρίως βάζουν προβλήματα που δεν έχουν λύσει, οι M (ομάδα μαθηματικών με μεσαία επίδοση στη λύση προβλημάτων) συνήθως όχι και οι X (ομάδα μαθηματικών με χαμηλή επίδοση στη λύση προβλημάτων) δεν παρουσιάζουν ομοιόμορφη στάση. Η δυνατότητα επίλυσης φαίνεται να μειώνει τις επιφυλάξεις για «ξαφνικά» προβλήματα στην τάξη. Ενώ Y και X προτείνουν δεύτερη ανάγνωση, οι M είναι διχασμένη ομάδα εδώ. Φαίνεται όμως ότι η πρόταση για δεύτερη ανάγνωση επικρατεί. Οι Y μπαίνουν οι μισοί στα αχαρτογράφητα, οι M το κάνουν σπάνια, οι X πάντα. Εδώ παρατηρούμε μια αντίφαση. Οι Y που βάζουν προβλήματα που δεν έχουν λύσει, δεν μπαίνουν σε αχαρτογράφητα νερά. Δεν την αντιμετωπίζουμε σαν αντίφαση. Θεωρούμε ότι κατανοούν την φράση αχαρτογράφητα νερά σαν πεδίο όπου μπορεί να προκύψουν θεωρητικά ζητήματα σοβαρά και ίσως ακατανόητα από τους μαθητές. Ενώ το να βάλω πρόβλημα που δεν έχω λύσει αλλά που φαίνεται να κινείται στα πλαίσια του μαθήματος είναι διαφορετική κατάσταση. Οι Y επιλέγουν μέτρια προβλήματα, αλλά και κλιμακώνουν, οι περισσότεροι M επίσης και όλοι οι X. Η κλιμάκωση και πάλι φαίνεται να σχετίζεται με τους Y και δείχνει την άνετη κίνηση τους στην πραγματική μαθηματική διαδικασία της οποίας η κλιμάκωση της δυσκολίας των προβλημάτων είναι οργανικό χαρακτηριστικό. Οι Y προτιμούν ασκήσεις εκτός βιβλίου, οι M κινούνται ποικίλα όπως και οι X. Και εδώ διαφαίνεται σχέση επίδοσης και

συμπεριφοράς. Οι Υ λύνουν τις ασκήσεις που φέρνουν μαθητές, στους Μ έχουμε ποικιλία και οι Χ λύνουν με προϋποθέσεις. Η σχέση επίδοσης και συμπεριφοράς. Οι Υ επανέρχονται όταν κάτι δεν λύνεται με τεκμηριωμένες απαντήσεις, οι Μ επίσης επανέρχονται και οι Χ επίσης. Παρατηρείται λοιπόν στο δείγμα εξάρτηση κάποιων πρακτικών από την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Όχι όμως σε όλες.

Οι Υ είναι θετικοί στην προσφυγή σε βοήθεια και συνεργασία, όμως ένας προτιμά μόνο συναδέρφων και όχι ηλεκτρονικά. Ένας φαίνεται ότι νιώθει να εκτίθεται. Στους Μ ο ένας αποφεύγει την δημόσια έκθεση αλλά λίγο πολύ όλοι συμφωνούν με την συνεργασία μεταξύ συναδέρφων. Στους Χ υπάρχει μια δήλωση αυτάρκειας. Άρα από το δείγμα δεν φαίνονται διαφορές όσον αφορά τις απόψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών όσον αφορά την αλληλοβοήθεια σε δύσκολα προβλήματα.

Οι Υ όταν δεν λύνουν προσπαθούν να αναλύσουν το γιατί, οι Μ έχουν ανομοιόμορφη στάση από μεγάλη ένταση ή μικρή ή επιμονή για λύση, οι Χ βιώνουν μεγάλη ένταση και αμηχανία αλλά προσπαθούν ξανά. Και στις τρεις ομάδες επαναφέρουν προβλήματα που δεν έχουν λυθεί αν και ένας Μ όχι πάντα. Οι Υ θεωρούν την αργή λύση φυσιολογικό φαινόμενο στα μαθηματικά, εκφράζοντας μόνο μια ανησυχία για την γνώμη των μαθητών, στους Μ ο ένας δηλώνει άγχος, το ίδιο και στους Χ. Συμπερασματικά, Οι Υ αναλύουν τις αποτυχίες δημιουργικά γεγονός που δεν αποκλείεται να συμβάλει στην αυξημένη ικανότητα τους να λύνουν προβλήματα. Οι υπόλοιποι δείχνουν να βιώνουν εντονότερα συναισθήματα αλλά όλοι προσπαθούν ξανά.

Δεν φαίνεται, από το δείγμα, να υπάρχει μαθηματικός που να σταματάει με την πρώτη αποτυχία χωρίς να ψάχνει διέξοδο για την επίλυση του προβλήματος που δεν μπορούσε να λύσει. Η διέξοδος μπορεί να είναι μελέτη, προσφυγή σε συναδέρφους ή σε ιστοσελίδες. Οι Υ όμως φαίνεται να αναδιοργανώνουν την τακτική τους μετά από ανάλυση της αποτυχίας.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι Josefa Perdomo-Diaz, Patricio Felmer, και Cristobal Rojas ανέφεραν στο Teachers' Mathematical Tensions Surfacing During the First Session of a Problem-Solving Professional Development Workshop την ένταση που ονόμασαν I Am Not Able Versus I Should Be Able. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να λύσουν προβλήματα όπου πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη συνδυασμένη γνώση, τις ικανότητες και τη δημιουργικότητά τους. Μπορεί να μην είναι συνηθισμένοι στην επίλυση προβλημάτων ή ορισμένων προβλημάτων και επίσης μπορεί να είναι πολύ δύσκολο για αυτούς, παρόλο που τα ίδια τα προβλήματα δεν απαιτούν προχωρημένη γνώση. Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι αδιάφοροι σε αυτό. Νιώθουν άγχος ή απογοήτευση, και αφού διδάσκουν μαθηματικά, πιστεύουν ότι θα έπρεπε να μπορούν να λύσουν τα προβλήματα. Η ένταση εμφανίζεται με διάφορες μορφές. Έχοντας αντιμετωπίσει δυσκολίες στην επίλυση των προβλημάτων, ορισμένοι δάσκαλοι νόμιζαν ότι πέτυχαν μόνο επειδή ένα μέλος της ομάδας τους είχε βοηθήσει. Συμπέραναν ότι πρέπει να εργαστούν και να βελτιωθούν. Ένωσαν όμως καλά με την συνεργασία με τους συναδέλφους τους. Κάποιοι απογοητεύτηκαν όταν παρά τις επανειλημμένες προσπάθειες δεν τα κατάφεραν σε κάποια προβλήματα και απλά παραιτήθηκαν. Και τέλος μια άλλη μορφή της έντασης ήταν ότι δεν ήταν τόσο γρήγοροι λύτες, προσόντων καλών λυτών κατά την άποψη τους.

Συνοψίζοντας, η ένταση δεν είμαι σε θέση έναντι του θα έπρεπε να μπορώ είναι μια μαθηματική ένταση που, σύμφωνα με τους ερευνητές, παράγεται από την πεποίθηση ότι οι δάσκαλοι, επειδή διδάσκουν μαθηματικά, πρέπει να είναι σε θέση να λύσουν τα προβλήματα που τους δόθηκαν, είτε λόγω ταχύτητας είτε λόγω γνώσης. Και στις δύο περιπτώσεις, οι δάσκαλοι ένιωσαν μια δυσφορία όταν αντιμετώπιζαν τους δικές τους πεποιθήσεις και τι συνέβαινε κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου.

Οι εκπαιδευτικοί του δείγματος μας αφού ασχολήθηκαν πρώτα με τα ίδια προβλήματα κλήθηκαν κατόπι να απαντήσουν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας με το οποίο προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε την ένταση αυτή. Και στο δείγμα μας οι εκπαιδευτικοί βιώνουν αρνητικά συναισθήματα όταν δεν λύνουν. Δείχνουν όμως να τα διαχειρίζονται θετικά έχοντας γνώση ότι παρόλο που είναι δυσάρεστη αυτή η

κατάσταση είναι ωστόσο οργανικό τμήμα της μαθηματικής διαδικασίας. Προκειμένου να βρουν λύση προσφεύγουν σε συνεργασία με συναδέλφους, μελέτη, ανάλυση της αποτυχίας. Θεωρούν ότι χρειάζεται δεύτερη ανάγνωση. Η διερεύνηση της διαχείρισης από μέρους τους της έντασης και η αντιπαραβολή απαντήσεων και επιδόσεων στην επίλυση είναι οι προεκτάσεις της παραπάνω έρευνας που επιχειρήσαμε.

Παρατηρούμε, σε αντιδιαστολή με την αναφερόμενη έρευνα, ότι οι εκπαιδευτικοί με τους οποίους εργαστήκαμε δεν αντιμετωπίζουν ενοχικά την αργή επίλυση. Την θεωρούν επίσης συνηθισμένο συμβάν όταν κάνεις μαθηματικά.

Τέλος, η αντιπαραβολή επιδόσεων και απαντήσεων έδειξε πως οι αποτελεσματικοί λύτες αντιδρούν στην επικράτηση των αρνητικών συναισθημάτων που νιώθουν με αναδιοργάνωση, μελέτη και συνεργασία περισσότερο από τους μέτριας και χαμηλής ικανότητας λύτες.

Το περιορισμένο δείγμα της ποιοτικής αυτής έρευνας μας οδηγεί στην ανάγκη για πιο εκτεταμένη έρευνα στο θέμα που να αφορά και μεγαλύτερο δείγμα αλλά και ομοιόμορφη κατανομή στις ηλικίες. Το θέμα της έρευνας είναι δύσκολο, πολύ περισσότερο για τα ελληνικά δεδομένα, για αυτό και αποφύγαμε δειγματοληψία στην περιοχή εργασίας μας που θα έθετε έστω και έμμεσα θέματα μελλοντικής αξιολόγησης, γεγονός που ίσως επηρέαζε τις απαντήσεις καθοριστικά. Το βολικό δείγμα είχε και την παράμετρο να επιλεγούν εκπαιδευτικοί που κυρίως λόγω σχέσης θα είχαν την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη άνεση να μιλήσουν ανοιχτά για αυτήν την γεύση της αποτυχίας στην επίλυση πράγμα καθόλου εύκολο για έναν μαθηματικό, ειδικά μετά από πολλά χρόνια εργασίας. Θα ήταν χρήσιμο να ερευνηθεί στην χώρα αυτή η άποψη του τα λύνω όλα εναντίον του προσπαθώ να λύσω έστω και με αποτυχίες αλλά και συνεργασία και πόσο επηρεάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- American Association for the Advancement of Science. (1986). *The challenge of the unknown*. New York: Norton.
- Anne Gregory, Teacher learning on problem-solving teams, *Teaching and Teacher Education* 26 (2010) 608–615
- Barojas, J. (2004). Teacher Training as Collaborative Problem Solving. *Educational Technology & Society*, 7 (1), 21-28.
- Bridges, S. M. (2019). Problem-Based Learning in Teacher Education. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 13(1). Available at: <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1866>
- Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Campione, J. C., Brown, A. L., & Connell, M. L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 93-114). Reston, VA: Lawrence Erlbaum, National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 76 (9), 652-659.
- Carreira, S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (2014). *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*. Faro, Portugal: Universidade do Algarve. <http://hdl.handle.net/10400.1/3750>.
- Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web project*. Cham, CH: Springer.
- Caswell, C. A. (2017). Design and Facilitation of Problem-Based Learning in Graduate Teacher Education: An MA TESOL Case. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 11(1). Available at: <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1623>

Cazzola, M. (2018). Problem-Based Learning and Teacher Training in Mathematics: How to Design a Math Laboratory. In INTED2018 Proceedings (pp.9038-9043). IATED. (ISBN: 978-84-697-9480-7)

Darragh, Lisa & Radovic, Darinka. (2019). Chaos, Control, and Need: Success and Sustainability of Professional Development in Problem Solving. 10.1007/978-3-030-29215-7\_18.

Dewey, J. (1933). How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. Boston: Heath.

E Villegas-Reimers, Teacher professional development: an international review of the literature, UNESCO 2003

Foshay, R., Kirkley, J. (1998). Principles for Teaching Problem Solving. [http://www.plato.com/pdf/04\\_principles.pdf](http://www.plato.com/pdf/04_principles.pdf)

Goodin, T. L., Caukin, N. G., & Dillard, H. K. (2019). Developing Clinical Reasoning Skills in Teacher Candidates Using a Problem-Based Learning Approach. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 13(1). Available at:

Goodnough, K. C. , & Hung, W. (2008). Engaging Teachers' Pedagogical Content Knowledge: Adopting a Nine-Step Problem-Based Learning Model. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 2(2). Available at: <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1082>

Gunes Yavuz, Hatice Nur Erbay, The analysis of pre-service teachers' beliefs about mathematical problem solving, *Social and Behavioral Sciences* 174 ( 2015 ) 2687 – 2692

G Cerda, C Pérez, V Giacconi, J Perdomo Díaz, Cristián Reyes & Patricio Felmer, The effect of a professional development program workshop about problem solving on mathematics teachers' ideas about the nature of mathematics, achievements in mathematics, and learning in mathematics, *Psychology, Society, & Education*, 2017. Vol. 9(1), pp. 11-26 ISSN 2171-2085 (print) / ISSN 1989-709X(online)

Hähkiöniemi, M., & Francisco, J. (2019). Teacher Guidance in Mathematical Problem-Solving Lessons : Insights from Two Professional Development Programs. In P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics*

Instruction and Teacher Professional Development (pp. 279-296). Springer. Research in Mathematics Education. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_15)

Hayes, J.R. (1989). *The Complete Problem Solver*. 2nd Edition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Henderson, K. B. & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. In H. F. Fehr (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (21st Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hilda Borko (Author), Jennifer Jacobs (Author), Karen Koellner (Author), Lyn E. Swackhamer (Author), *Mathematics Professional Development: Improving Teaching Using the Problem-Solving Cycle and Leadership Preparation Models* (the series on school reform), 2015

Iuliana Zsoldos-Marchis, Changing pre-service primary-school teachers' attitude towards Mathematics by collaborative problem solving, *Social and Behavioral Sciences* 186 ( 2015 ) 174 – 182

I Peled, S HersHKovitz, Evolving research of mathematics teacher educators: The case of non-standard issues in solving standard problems, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2004

Jennifer Krawec and Marjorie Montague, The Role of Teacher Training in Cognitive Strategy Instruction to Improve Math Problem Solving, *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(3), 126–134, 2014

José Carrillo-Yañez, Nuria Climent, Miguel Montes, Luis C. Contreras, Eric Flores-Medrano, Dinazar Escudero-Ávila, Diana Vasco, Nielka Rojas, Pablo Flores, Álvaro Aguilar-González, Miguel Ribeiro & M. Cinta Muñoz-Catalán (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model\*, *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 163-180.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Liljedahl, Peter (2014) "Approaching Professional Learning: what teachers want," *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 11: No. 1, Article 7.

Major, T. , & Mulvihill, T. M. Dr. (2018). Problem-Based Learning Pedagogies in Teacher Education: The Case of Botswana. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 12(1). Available at: <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1543>

Mali, A., Gerami, S., Ullah, A., & Mesa, V. (2019). Teacher Questioning in Problem Solving in Community College Algebra Classrooms. In P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 317-335). Springer International Publishing.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_17)

Masingila J.O., Olanoff D., Kimani P.M., Mathematical knowledge for teaching teachers: knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving (2018) *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21 (5) , pp. 429-450.

Mathematical Association of America. (1986). *Applications in mathematics* (AIM Project materials). Washington, DC: The Author.

Näykki & Teemu Valtonen (2016): Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP 21): a framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills, *Teachers and Teaching*, DOI: 10.1080/13540602.2016.1203772

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2013a). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: OECD Publishing.



Orgoványi-Gajdos, Judit. (2016). Teachers' professional development on problem solving: Theory and practice for teachers and teacher educators.

Päivi Häkkinen, Sanna Järvelä, Kati Mäkitalo-Siegl, Arto Ahonen, Piia

Patricio Felmer (Editor), Peter Liljedahl (Editor), Boris Koichu (Editor), Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development (Research in Mathematics Education) Hardcover, 2019

Polya, G. (1973). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

(Originally copyrighted in 1945).

Perdomo Díaz, Josefa & Felmer, Patricio & Rojas, Cristóbal. (2019). Teachers' Mathematical Tensions Surfacing During the First Session of a Problem-Solving Professional Development Workshop. 10.1007/978-3-030-29215-7\_19.

Rillero, P., & Camposeco, L. (2018). The Iterative Development and Use of an Online Problem-Based Learning Module for Preservice and Inservice Teachers.

Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning, 12(1). Available at:

<https://doi.org/10.7771/1541-5015.1729>

Reitman, W. R. (1965). Cognition and thought. New York: Wiley.

Sare SENGUL, Yasemin KATRANCI, Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the 'sets' subject, Social and Behavioral Sciences 69 ( 2012 ) 1650 – 1655

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. Educational Psychologist, 23, 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H., (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1979). Can heuristics be taught? In J. Lockhead, Cognitive process instruction. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

- Silver, E. A., Branca, N., & Adams, V. (1980). Metacognition: The missing link in problem solving? In R. Karplus, (Ed.), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*. Berkeley, CA: PME.
- Smith, J. P. (1974). *The effects of general versus specific heuristics in mathematical problem-solving tasks* (Columbia University, 1973). *Dissertation Abstracts International*, 34, 2400A.
- Suydam, M. (1987). *Indications from research on problem solving*. In F. R. Curcio (Ed.), *Teaching and learning: A problem solving focus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- T. Steuart Watson and Jack J. Kramer, *Teaching Problem Solving Skills to Teachers-In-Training: An Analogue Experimental Analysis of Three Methods*, *Journal of Behavioral Education*, September, 1995, Vol. 5, No. 3 (September, 1995), pp. 281-293
- Wilson, J. W. (1967). *Generality of heuristics as an instructional variable*. Unpublished Doctoral Dissertation, Stanford University, San Jose, CA.
- Wilson, J. W. (1990) *Report of the Georgia Plan problem solving workshop, 1989-90*. Unpublished document, The University of Georgia, Athens.
- Woods, D.R., Wright, J.D., Hoffman, T.W., Swartman, R.K., Doig, I.D. (1975). *Teaching Problem solving Skills*. *Engineering Education*. Vol 1, No. 1. p. 238. Washington, DC: The American Society for Engineering Education.
- Woods, D. R. (1987). *How might I teach problem solving? New directions for teaching and learning*, 1987(30), 55-71.
- Zhang, M. , Lundeberg, M. , McConnell, T. J. , Koehler, M. J. , & Eberhardt, J. (2010). *Using Questioning to Facilitate Discussion of Science Teaching Problems in Teacher Professional Development*. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 4(1). Available at: <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1097>

Τα χρόνια διδασκαλίας του καθενός

Θεωρείς ότι η ΕΠ είναι σημαντική στη διδασκαλία των μαθηματικών;

Βάζεις ή έχεις βάλει προβλήματα στην τάξη που δεν έχεις λύσει πιο πριν;

Σε περίπτωση αδυναμίας λύσης και από πλευράς σου το κρύβεις με τρόπο ή λες στους μαθητές ότι θέλει και δεύτερη ανάγνωση;

Επεκτείνεις ποτέ προβλήματα που λύθηκαν με πρόσθετες ερωτήσεις, σε αχαρτογράφητα νερά;

Επιλέγεις προβλήματα για την τάξη που να μην είναι ούτε εύκολα ούτε δύσκολα;

Από τα ανοιχτά προβλήματα προτιμάς να βάζεις στην τάξη προσαρμοσμένες ασκήσεις του βιβλίου για λόγους ασφάλειας σου;

Τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται το φαινόμενο οι μαθητές να φέρνουν ασκήσεις από τα φροντιστήρια που δεν μπορούν να λύσουν στον καθηγητή του σχολείου. Όταν ζητάνε βοήθεια μπαίνεις στη διαδικασία επίλυσης ατομικά ή στην τάξη όταν η λύση της άσκησης σου είναι άγνωστη;

Σήμερα υπάρχουν ιστοσελίδες forum που μπορείς να ανεβάσεις ένα πρόβλημα και να το λύσουν ή να σε βοηθήσουν διάφοροι συνάδερφοι σου. Θεωρείς ότι εκτίθεσαι αν το κάνεις επώνυμα δηλώνοντας την αδυναμία λύσης ή ζητήσεις επιβεβαίωση στη λύση σου;

Έχεις ζητήσει κάτι παρόμοιο από συνάδερφο σου στο σχολείο;

Πως νιώθεις όταν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα;

Η αποτυχία επίλυσης προβλήματος ή επέκτασης του στην τάξη σε έχει αποτρέψει από το να το επιχειρήσεις ξανά;

Η αργή επίλυση σου έχει δημιουργήσει άγχος ανικανότητας σαν λύτη;

Αν κατά την επίλυση ενός προβλήματος που γνωρίζεις τη λύση εμφανιστούν ερωτήσεις από τους μαθητές ή πλευρές του προβλήματος στις οποίες δεν έχεις προβλέψει και δυσκολεύεσαι να απαντήσεις τι κάνεις;

