ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συμπεριφορές των μαθητών της Γ' Λυκείου στους άρρητους αριθμούς

High school students behaviours in irrational numbers

ΘΕΟΥ Κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΑ

Επιβλέπων: Λεμονίδης Χαράλαμπος

Καθηγητής ΠΔΜ

Θεσσαλονίκη, 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …………………..…...από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. Λεμονίδης Χαράλαμπος. (Επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	
2. Νικολαντωνάκης Κων/νος	Αναπληρωτής Καθηγητής	
3. Βαμβακούση Ξένια	Επίκουρη Καθηγήτρια	

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθούν οι συμπεριφορές των μαθητών της Γ' Λυκείου στους άρρητους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα θα διερευνηθούν οι γνώσεις των μαθητών που σχετίζονται με την ικανότητά των μαθητών να ταξινομούν τους αριθμούς σε ρητούς και άρρητους, με τον ορισμό ρητών και άρρητων αριθμών, με το πλήθος των άρρητων, την πυκνότητα και την συνύπαρξη ρητών και άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και τέλος με την κατηγοριοποίηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ άρρητων αριθμών, σε ρητά ή άρρητα.

Οι συμμετέχοντες σε αυτή τη μελέτη ήταν 60 μαθητές της Γ' Λυκείου από δυο σχολεία της Λάρισας και η συλλογή δεδομένων έγινε μέσω ερωτηματολογίων. Σύμφωνα με τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας, οι μαθητές αποτυγχάνουν στο να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους. Σε μεγάλο βαθμό δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ των συνόλων που συγκροτούν τους πραγματικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στην ταξινόμηση. Επιπλέον, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας καθώς και στο να καθορίσουν αν τα αποτελέσματα των πράξεων (πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού) μεταξύ άρρητων είναι ρητά ή άρρητα.

Λέξεις κλειδιά: ορισμός, ρητοί αριθμοί, άρρητοι αριθμοί, πραγματικοί αριθμοί, πυκνότητα

ABSTRACT

In this paper we aim to explore the high school students (seniors) perspectives on rational and irrational numbers. We focus on students' knowledge related on their ability of classifying the real numbers to rational and irrational numbers. This classification was made under four different options: based on the definition, based on the irrational numbers' multitude, based on the richness, density and coexistence of rational and irrational numbers on the real number line and based on the results while adding and multiplying irrational numbers, to a rational or irrational sum and product.

A questionnaire was send at two schools at Larissa region (Greece) and filled out by 60 high school students who were attended the final high school year. According to the main results, the students fail to define the rational and the irrational numbers. They find it very difficult to understand the differences between these two subsets which make up the set of real numbers, and this seems to be the reason why they have a difficulty to classify the corresponding numbers. In addition, the results of this research showed that students face significant difficulties in understanding the density as well as in determining whether the results of adding and multiplying only irrational numbers are rational or irrational numbers.

Keywords: definition, rational numbers, irrational numbers, real numbers, density, richness

Περιεχόμενα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ... 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ... 9

ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ... 9

1.1 Η ΠΡΩΤΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ... 10

1.1.1. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ... 11

1.1.2. Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ Ή ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ... 14

1.1.3. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ 2 ... 19

1.1.4. ΟΙ ΛΟΓΟΙ ΤΟΥ ΕΥΔΟΞΟΥ ... 21

1.2. Η ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ... 23

1.2.1. Η ΤΟΜΗ ΤΟΥ ΝΤΕΝΤΕΚΙΝΤ ... 24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ... 27

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΣΙΟ ... 27

2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΛΛΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ ... 27

2.2 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ... 31

2.3ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ... 33

2.4 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ... 34

2.5ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΩΣ ΑΥΤΕΣ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ... 35

2.5.1. Η ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΑΡΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ... 36

2.5.2. Η ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΩΣ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ... 39

2.5.3. Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΜΕΓΕΘΗ ... 41

2.6Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ... 42

2.7ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΡΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ... 43

2.8Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ ... 44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ... 46

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ... 46

3.1. Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ... 46

3.2. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ... 49

3.3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ... 53

3.4 ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ... 54

3.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ ... 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 64
4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΠΙΣΗΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ 64
4.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ 64
4.1.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΣΥΝΟΛΑ 68
4.1.3 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ 73
4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ 74
4.2.1 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ 75
4.2.2 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΡΗΤΩΝ 76
4.2.3 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ 82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 87
ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 87
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 87
ΣΥΖΗΤΗΣΗ 89
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ-ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ 91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 92
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 95

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1. Απαντήσεις στον ορισμό των ρητών 64
Πίνακας 2. Απαντήσεις στον ορισμό των άρρητων 65
Πίνακας 3. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας στον ορισμό ρητών και άρρητων αριθμών........ 66
Πίνακας 4. Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στον ορισμό μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών (z-test) 67
Πίνακας 5. Συχνότητες και ποσοστά (n=60) των σωστών απαντήσεων στην αντιστοίχηση των αριθμών ως ρητών ή άρρητων 68
Πίνακας 6. Αποτελέσματα σχετικά με την αναγνώριση του συνόλου των πραγματικών. 71
Πίνακας 7. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα 71
Πίνακας 8. Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων αριθμών (z-test) 72
Πίνακας 9. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση μεταξύ επιτυχίας ορισμού και ταξινόμησης ρητών αριθμών 73
Πίνακας 10. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση μεταξύ επιτυχίας ορισμού και ταξινόμησης άρρητων αριθμών 74
Πίνακας 11. Απαντήσεις σχετικά με το πλήθος ρητών και άρρητων 76
Πίνακας 12. Ύπαρξη ρητών ανάμεσα στο 3/5 και 4/6 78
Πίνακας 13. Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του √10 και του √20. 79
Πίνακας 14. Ύπαρξη ρητών μεταξύ του √2 και του √3. 80
Πίνακας 15. Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του 0 και του 1 81
Πίνακας 16. Συνολική επιτυχία στην πυκνότητα........ 81
Πίνακας 17. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας μεταξύ της ικανότητας ταξινόμησης και της κατανόησης της πυκνότητας........ 82
Πίνακας 18. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Η πρόσθεση θετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα........ 83
Πίνακας 19. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Ο πολλαπλασιασμός δυο διαφορετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα 84
Πίνακας 20. Επιτυχία στον καθορισμό των αποτελεσμάτων των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού........ 85
Πίνακας 21. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση απαντήσεων για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό άρρητων αριθμών........ 85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών αποτελεί αδιαμφισβήτητα κομβική στιγμή για την ιστορία των μαθηματικών, αποτέλεσε πνευματικό σοκ για τους ανθρώπους της εποχής και χρονολογείται σύμφωνα με τον Eves (1980) τον πέμπτο ή τον έκτο αιώνα π.Χ. μεταξύ των τάξεων του της αδελφότητας των Πυθαγορείων.

Καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας, δεν ήταν εύκολο να εντοπιστούν τα διακριτά χαρακτηριστικά των άρρητων αριθμών. Εκτός από τη σύνθετη φύση τους, πρέπει να σημειωθεί ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι βασικοί για την κατανόηση ανώτερων μαθηματικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός π, ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως στα μαθηματικά, ο αριθμός του Euler e (2.7182818 ...) και ο χρυσός λόγος που συναντάμε τόσο στην καθημερινότητά μας όσο και στη φύση (1.6180339887 ...) είναι όλοι άρρητοι αριθμοί (Yilmaz, 2018). Στις αρχές του 16ου αιώνα, οι Cardano, Tartaglia, Ferrari κ.α. βρέθηκαν αντιμέτωποι με τους άρρητους αριθμούς, όχι μέσω της γεωμετρίας όπως οι Πυθαγόρειοι, αλλά καθώς έλυναν εξισώσεις. Ασχολήθηκαν με αυτό που αποκαλούμε σήμερα οι «αλγεβρικοί άρρητοι αριθμοί». Αυτοί οι άρρητοι αριθμοί δεν είχαν έως τότε οριστεί πλήρως, για αυτό σε μεγάλο βαθμό έμειναν σε συμβολική μορφή (Eves, 1989).

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν μεταξύ άλλων τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το μεγαλύτερο γνωστό σύνολο αριθμών, αποτελείται από ένα συνδυασμό του συνόλου των ρητών και των άρρητων αριθμών. Το σύνολο των άρρητων αριθμών ορίζεται ως «όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί, με άλλα λόγια οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή a / b όπου $a \in Z$, $b \in Z$ και $b \neq 0$.». Οι άρρητοι αριθμοί περιγράφονται μέσω αυτού του τυπικού ορισμού, ωστόσο, είναι επίσης γνωστοί ως «αριθμοί που δεν έχουν επαναλαμβανόμενη ή πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση». Η κατανόηση των άρρητων αριθμών, εντός του πεδίου του συνόλου των πραγματικών αριθμών, συνεπάγεται μια πολύπλοκη διαδικασία, ακριβώς όπως ήταν και η ανακάλυψή τους στην ιστορία των μαθηματικών. Έτσι και στην εκπαιδευτική πράξη συναντάμε την ιδιαίτερη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στην κατανόηση των αριθμών αυτών.

1.1 Η ΠΡΩΤΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ

Η αρίθμηση είναι μια δεξιότητα των ανθρώπων βαθιά συνδεδεμένη με τη φύση μας, καθώς χρονολογείται από την εποχή των προανθρώπινων προγόνων μας (Calvin, 2005). Μέσω της μελέτης των αριθμών ξεδιπλώνει κανείς ένα μικρόκοσμο της ιστορίας της ανθρωπότητας. Οι φυσικοί αριθμοί ήταν οι πρώτοι αριθμοί που ανακάλυψαν οι άνθρωποι και είναι στενά συνυφασμένοι με τον πολιτισμό μας. Χρησιμοποιούνταν κυρίως για την καταγραφή των υπαρχόντων μέσω του υπολογισμού του πληθικού αριθμού ενός συνόλου αντικειμένων. Όταν άρχισε να αναπτύσσεται η γεωργία και σχηματίστηκαν οι πόλεις, οι πρόγονοί μας αντιμετώπισαν νέα προβλήματα. Έπρεπε να φτιάχνουν ημερολόγια για να μετρούν τις ημέρες, να μετρούν τα χωράφια για να φυτεύουν, να υπολογίζουν τις ποσότητες της μπίρας, του κριθαριού και με κάποιον τρόπο όλα αυτά να καταγραφούν (Calvin, 2005).

Καθώς οι υπολογιστικές ανάγκες των ανθρώπων αυξήθηκαν μέσω της ιστορίας, νέοι κόσμοι αριθμών προέκυψαν. Εφευρέθηκε η γραφή, εξελίχθηκαν τα συστήματα αριθμών, δημιουργήθηκαν τα κλάσματα, εμφανίστηκε η πρακτική άλγεβρα και η γεωμετρία. Για παράδειγμα, στον κόσμο των φυσικών αριθμών η ανάγκη να αφαιρεθεί ένας μεγαλύτερος αριθμός από έναν μικρότερο δεν μπορούσε να ικανοποιηθεί, με συνέπεια ο κόσμος των αριθμών να οδηγηθεί σε επέκταση και να συμπεριλάβει τους αρνητικούς ακεραίους. Είναι άξιο να αναφερθεί ότι η ανακάλυψη των αρνητικών είναι μεταγενέστερη σε σχέση με αυτή των άρρητων αριθμών. Ωστόσο, με την επέκταση από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ακεραίων, δεν παρουσιάστηκε κάποιο πρόβλημα στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού σε αντίθεση με την πράξη της διαίρεσης.

Οι ατελείς διαιρέσεις ανάγκασαν την επέκταση των αριθμών να συμπεριλάβει τους ρητούς αριθμούς. Εξετάζοντας την πρόοδο της επιστήμης των αριθμών από την προϊστορική εποχή μέχρι περίπου το 1000 μ.Χ., βλέπει κανείς την επέκταση της έννοιας του αριθμού ώστε να συμπεριληφθούν τα μοναδιαία κλάσματα (της μορφής 1/ν)των Αιγυπτίων και τα εξηκονταδικά κλάσματα (της μορφής ν/60) των Βαβυλωνίων, καθώς επίσης και τους αρνητικούς αριθμούς των Κινέζων. Στην διπλωματική αυτή θα σταθούμε στη συμβολή των αρχαίων Ελλήνων στην εξέλιξη της επιστήμης των αριθμών (Calvin, 2005).

1.1.1. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Πάνω από τετρακόσια χρόνια π.Χ., ένας Έλληνας ο Φιλόλαος από τον Τάραντα, είπε ότι καθετί που μπορούμε να γνωρίσουμε έχει κάποιον αριθμό, γιατί, χωρίς αυτόν είναι αδύνατον να συλλάβουμε με το νου ή να γνωρίσουμε οτιδήποτε (Calvin, 2005). Ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος, ο Πλάτων, δίδασκε ότι οι αριθμοί όχι μόνον έχουν ουσιαστικό ρόλο στον κόσμο μας, αλλά μας οδηγούν σε αυτή καθαυτή την αλήθεια. Σ' έναν διάλογο του Πλάτωνα με τον μέντορα του τον Σωκράτη και έναν φίλο του τον Γλαύκωνα, ο Πλάτων σχολιάζει τους αριθμούς και αναφέρει ότι όλη η αριθμητική και οι υπολογισμοί σχετίζονται με τους αριθμούς και φαίνεται να οδηγούν, με έναν τρόπο θαυμάσιο, το νου προς την αλήθεια.

Οι Έλληνες προσδιόρισαν της επιστήμη, τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά και έθεσαν κανόνες για αυτούς τους επιστημονικούς κλάδους, οι οποίοι συνέχισαν να ισχύουν για δυο χιλιετίες (Calvin, 2005). Τα επιτεύγματα των Ελλήνων, περίπου από το 600 π.Χ. έως το 300 μ.Χ. επισκιάζουν όλα τα πνευματικά επιτεύγματα των επόμενων χιλίων πεντακοσίων ετών. Φυσικά οι αρχαίοι Έλληνες δεν λειτούργησαν απομονωμένοι, χωρίς να στηριχθούν στις παλαιότερες αρχαίες κοινωνίες. Είναι σίγουρο ότι στηρίχθηκαν τόσο στους Αιγύπτιους όσο και στους Βαβυλώνιους. Ωστόσο, από πολλές απόψεις, αυτά που κατάφεραν ήταν εξαιρετικά σημαντικά (Calvin, 2005).

Γύρω στο 430π.Χ. η Αθήνα ήταν κεφαλή της Ελληνικής υπερδύναμης, κέντρο ενός νέου και εντυπωσιακού πολιτισμού: του Χρυσού Αιώνα της Ελλάδας (Struik, 1993). Την εποχή εκείνη, μια ομάδα ανθρώπων με κριτικό μυαλό, οι λεγόμενοι «σοφιστές», προσέγγισαν προβλήματα μαθηματικής φύσης με βασικό στόχο την κατανόηση εννοιών, ανεξάρτητα αν αυτές θα είχαν πρακτική χρησιμότητα.

Παράλληλα με την ομάδα των σοφιστών, η οποία συνδεόταν με το δημοκρατικό κίνημα, υπήρχε και μια άλλη ομάδα φιλοσόφων με μαθηματικά ενδιαφέροντα, η οποία όμως σχετίζονταν με τις αριστοκρατικές μερίδες. Τους ονόμασαν Πυθαγόρειους από τον ιδρυτή της σχολής τους τον Πυθαγόρα, ο οποίος πιθανολογείται να είναι και μυθικό πρόσωπο (Struik, 1993). Ο Πυθαγόρας υπήρξε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς όλων των εποχών και στο πρόσωπό του συγκλίνανε οι ιδιότητες του μυστικιστή, του επιστήμονα και του αριστοκρατικού πολιτισμού (Struik, 1993). Διάφορες ημερομηνίες δίνονται για τη γέννηση και τον θάνατό του, αλλά μια καλή προσέγγιση της εποχής που έζησε θα ήταν ανάμεσα στο 580 και το 500 π.Χ. Ο Πυθαγόρας ακολουθώντας το παράδειγμα του Θαλή, ίδρυσε μια σχολή στον Κρότωνα, στη Μεγάλη Ελλάδα (νότια Ιταλία) (Calvin, 2005). Η Πυθαγόρειος σχολή ήταν κάτι περισσότερο από μια σχολή, επρόκειτο για μια θρησκευτική κοινότητα όπου λάμβαναν χώρα μυσταγωγίες οι οποίες είχαν σχέση με τα μαθηματικά. Οι μαθητές του ήταν χωρισμένοι σε δύο ομάδες , τον εσωτερικό κύκλο ή μαθηματικούς (εξ' ου και η δική μας λέξη <<μαθηματικά>>) οι οποίοι γνώριζαν τις πιο κρυφές αλήθειες του δασκάλου τους και στον εξωτερικό κύκλο ή ακουσματικούς οι οποίοι διδάσκονταν μόνο τους κανόνες συμπεριφοράς της κοινότητας (Calvin, 2005). Ο πιο ονομαστός ηγέτης των Πυθαγορείων λέγεται πως ήταν ο Αρχύτας ο Ταραντίνος, ο οποίος έζησε γύρω στο 400 π.Χ. και τότε δημιουργήθηκε το μεγαλύτερο μέρος από τον πυθαγόρειο κλάδο των μαθηματικών (Struik, 1993).

Η αριθμητική των Πυθαγορείων είχε φτάσει στο ύψος θεωρητικής επιστήμης και παρουσίαζε ελάχιστα κοινά σημεία με τις υπολογιστικές τεχνικές των Βαβυλωνίων (Struik, 1993). Όπως φαίνεται από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, οι Πυθαγόρειοι είχαν σαγηνευτεί από τη θεωρία των αριθμών, η οποία μπορεί να ξεκίνησε από μια και μόνο ανακάλυψη που έκανε ο ίδιος ο Πυθαγόρας. Ανακάλυψε την σχέση μεταξύ του μήκους μιας τεντωμένης και του τόνου που παράγει όταν την χτυπήσουμε και συμπέρανε ότι παραγόμενες αρμονίες είναι αποτέλεσμα των λόγων ορισμένων αριθμών. Αξιοσημείωτο είναι ότι παρότι οι Πυθαγόρειοι έδειχναν τεράστιο ενδιαφέρον για τη μελέτη των σχέσεων των αριθμών, θεωρούσαν αριθμούς μόνο τους φυσικούς. Τα κλάσματα λοιπόν δεν τα θεωρούσαν πραγματικούς αριθμούς, αφήνοντας στην άκρη τα μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων, διότι δεν είναι σχέσεις μεταξύ ακεραίων (Calvin, 2005).

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του κατάφεραν να κάνουν δημοφιλή την μελέτη της επιστήμης και ειδικά των μαθηματικών, στους πλούσιους Έλληνες. Ισχυρές οικογένειες Ελλήνων ήθελαν να στέλνουν τους γιούς τους στα σχολεία των εκλεκτών ώστε να διδαχθούν τις ανακαλύψεις του Θαλή και του Πυθαγόρα. Έτσι λοιπόν, στον περίφημο χρυσό αιώνα των Ελλήνων κορυφώθηκε η επιστημονική και φιλοσοφική σκέψη. Οι φιλοσοφικές ιδέες των Πυθαγορείων επηρέασαν και μεταγενέστερους στοχαστές και ιδιαίτερα των Πλάτωνα, ο οποίος θεωρείται ο πατέρας του ιδεαλισμού(Calvin, 2005).

Το πιο σημαντικό έργο των Πυθαγορείων είναι σίγουρα το γνωστό σε όλους μας *πυθαγόρειο θεώρημα,* ένα θεώρημα πολύ απλό αλλά η σημασία του για τη μεταγενέστερη σκέψη είναι δυσανάλογη με την απλότητά του (Calvin, 2005). Το θεώρημα λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Οι Πυθαγόρειοι διατείνονταν πως η ανακάλυψή του οφειλόταν στον δάσκαλό τους, ο οποίος υποτίθεται ότι είχε θυσιάσει στους θεούς εκατό βόδια σε ένδειξη ευγνωμοσύνης (Struik, 1993). Από παλαιότερο υλικό γνωρίζουμε ότι οι πυθαγόρειοι αριθμοί (δηλαδή τρία μήκη που μπορούν να αποτελέσουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου) ήταν γνωστοί και σε παλαιότερες κοινωνίες. Το θεώρημα ήταν ήδη γνωστό στη Βαβυλώνα του Χαμμουραμπί (Struik, 1993). Επίσης, οι Αιγύπτιοι τοπογράφοι γνώριζαν ότι αν χωρίσουμε ένα σχοινί σε μήκη τρία, τέσσερα και πέντε, τότε θα προκύψει ορθογώνιο τρίγωνο. Πιθανολογείται όμως ότι οι Αιγύπτιοι δεν γνώριζαν όμως το γενικό θεώρημα (Calvin, 2005). Επιπλέον και οι Κινέζοι γνώριζαν το θεώρημα πριν από τους Έλληνες αλλά δεν γνώριζαν όπως και όλοι οι υπόλοιποι τον τρόπο απόδειξής του. Συνεπώς, παρότι και άλλοι πολιτισμοί γνώριζαν τον γενικό κανόνα του Πυθαγορείου θεωρήματος, δεν μπορούσαν να αποδείξουν ότι ισχύει πάντα.

Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας υπήρξε ο πρώτος Ευρωπαίος που ήθελε τα δεδομένα να προτίθενται στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας και την εξέλιξη να βασίζεται σε εφαρμογές του κλειστού απαγωγικού συλλογισμού πάνω στα δεδομένα. Ο Θαλής είχε πρώτος εισάγει την έννοια της απόδειξης, την οποία όμως ο Πυθαγόρας συστηματοποίησε, βελτίωσε και έθεσε την έννοια των αρχικών όρων και των αρχικών προτάσεων. Θεωρείται λοιπόν το μεγαλύτερο επίτευγμα του Πυθαγόρα το οποίο θεμελίωσε επιστημονικά την Γεωμετρία, η οποία έως τότε αποτελούσε μια συλλογή εμπειρικών κανόνων χωρίς ξεκάθαρη ένδειξη των αλληλεπιδράσεων. Από τότε έως και σήμερα η «απόδειξη» θεωρείται αναπόσπαστο και ουσιώδες μέρος των Μαθηματικών (Eves, 1989).

Η μεγαλοφυΐα των Ελλήνων λοιπόν, έγκειται στο γεγονός ότι γνώριζαν τον γενικό κανόνα και μπορούσαν να τον αποδείξουν προσδίδοντας έτσι σε έναν κανόνα το κύρος ενός θεωρήματος. Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ένα κόσμημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας και διδάσκεται εδώ και χιλιάδες χρόνια σε όλα τα σχολεία παγκοσμίως.

1.1.2. Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ Ή ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Η εκπληκτική συνεισφορά των Πυθαγορείων ήταν η ανακάλυψη ότι οι φυσικοί αριθμοί ήταν ανεπαρκείς για την κατασκευή των Μαθηματικών. Μέχρι την ανακάλυψη αυτή είχαν κηρύξει ότι όλη η Φύση, όλο το Σύμπαν, τα πάντα οικοδομούνται πάνω στο διακριτό μοντέλο των φυσικών αριθμών. Χαρακτηριστικό ρητό των Πυθαγορείων είναι το: <<Αριθμόν είναι την ουσίαν των απάντων>> και θεωρούνται από την άποψη αυτή ως πρόδρομοι της Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Μάλιστα, ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος έγραφε: <<Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό(φυσικό), διαφορετικά θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με την λογική>>. Μερικές από τις αξίες που πρέσβευαν οι Πυθαγόρειοι σχετικά με τους αριθμούς είναι ότι το ένα είναι η αρχή του παντός, οι αριθμοί είναι πραγματικότητες με ηθικές ιδιότητες καθώς και ότι οι αριθμοί είναι ένας κόσμος πνευματικών ουσιών που αποτελούν βασίλειο αμετάβλητο και αιώνιο (Eves, 1989).

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα μεγέθη, ότι δηλαδή υπάρχει πάντα μια κοινή μονάδα μέτρησής τους. Με βάση αυτή την αρχή οι Πυθαγόρειοι στήριξαν όλη τη Γεωμετρία που είχαν δημιουργήσει, όπου σε κάθε θεώρημα η απόδειξη δινόταν πάντα σε σχέση με τα προηγούμενα θεωρήματα. Έτσι λοιπόν, οι αριθμοί που γνώριζαν μέχρι την ανακάλυψη των άρρητων, ήταν σύμμετροι προς τον αριθμό 1 και σύμμετροι μεταξύ τους (Eves, 1989).

Ας θεωρήσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα το α και το β. Λέμε ότι το α είναι σύμμετρο προς το β αν υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα έστω το ε του οποίου και το α και το β είναι ακέραια πολλαπλάσια. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο (θετικοί) ακέραιοι, έστω οι μ και ν για τους οποίους ισχύει $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta = \nu \cdot \varepsilon$. Το ε λέγεται κοινό μέτρο των α και β. Τα α, β μπορούν να μετρηθούν σε αυτήν την περίπτωση με ακέραιους αριθμούς αν το ε ληφθεί ως μονάδα μετρήσεως των μηκών. Το ε μετρά, δηλαδή διαιρεί ακριβώς και τα δύο τμήματα. Για αυτόν το λόγο λέμε ότι τα δύο τμήματα έχουν κοινό μέτρο ή συμμετρούνται και τα καλούμε σύμμετρα μεταξύ τους.

Αν τα α, β είναι σύμμετρα μεταξύ τους, δηλαδή αν $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta = \nu \cdot \varepsilon$ με μ και ν θετικούς ακέραιους όπου ε ευθύγραμμο τμήμα, τότε:

1. Το ε είναι μικρότερο ή ίσο του α και μικρότερο ή ίσο του β.

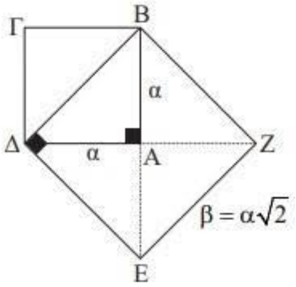
2. $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\beta}{\nu} = \varepsilon$

3. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ και ο λόγος των δύο τμημάτων α και β είναι ρητός ή αλλιώς σύμμετρος αριθμός.

Οι ρητοί αριθμοί ονομάζονται και σύμμετροι, ως αριθμοί σύμμετροι προς τον αριθμό 1, ή ακόμη ως λόγος μεγεθών σύμμετρων μεταξύ τους επειδή ισχύει όπως είδαμε ότι οι λόγοι σύμμετρων μεγεθών είναι ρητοί αριθμοί και επειδή ακόμη ισχύει ότι αν ο λόγος δύο μεγεθών είναι ρητός αριθμός τότε τα δύο τμήματα είναι σύμμετρα μεταξύ τους. Πράγματι, αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ τότε $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\beta}{\nu}$ (μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι) και αν ονομάσουμε ε τα ίσα τμήματα $\frac{\alpha}{\mu}$ και $\frac{\beta}{\nu}$ θα έχουμε $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta = \nu \cdot \varepsilon$, με μ και ν θετικούς ακέραιους.

Αυτό όμως σημαίνει ότι αν υπάρχουν τμήματα μη σύμμετρα ή αλλιώς ασύμμετρα μεταξύ τους, τότε ο λόγος τους δεν είναι σύμμετρος ή αλλιώς ρητός αριθμός. Θα είναι αριθμός άρρητος (μη ρητός) ή αλλιώς ασύμμετρος (μη σύμμετρος). Ισοδύναμα αν το ένα από τα δύο αυτά τμήματα ληφθεί ως μονάδα μέτρησης των μηκών τότε το μήκος του άλλου τμήματος μετρημένο με αυτήν τη μονάδα δεν θα ισούται με κάποιον ρητό ή αλλιώς σύμμετρο αριθμό.

Οι Πυθαγόρειοι αντιμετώπισαν το εξής γεωμετρικό πρόβλημα: «Αν δοθεί ένα τετράγωνο πλευράς α, να κατασκευαστεί τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν προς το δοθέν»



Με την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ, βρήκαν ότι η διαγώνιος ΒΔ έχει μήκος $\alpha\sqrt{2}$ και συνεπώς το τετράγωνο με πλευρά τη ΒΔ θα έχει εμβαδόν $2\alpha^2$, το διπλάσιο δηλαδή το δοθέντος τετραγώνου.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι παρότι έλυσαν το πρόβλημα γεωμετρικά δεν μπορούσαν να προσδιορίσουν αριθμητικά την τιμή της διαγωνίου. Το πρόβλημα ουσιαστικά ήταν ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας του 2. Αρχικά αναζητήθηκε η εύρεση μιας κλασματικής αριθμητικής έκφρασης η οποία αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό της, να δίνει τον αριθμό 2. Έπειτα από πολλές αναζητήσεις, οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν ότι το ζητούμενο μέγεθος της διαγωνίου είναι ασύμμετρο ως προς την πλευρά του τετραγώνου. Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποίησαν για τους αριθμούς που γέννησε η ασυμμετρία τους όρους «άλογος» (χωρίς λογική) και «άρρητος» (δηλαδή άγνωστος). Ο όρος «άλογος» υπογραμμίζει το ότι η ασυμμετρία είναι αταίριαστη με τη μαθηματική λογική των Πυθαγορείων ενώ ο όρος «άρρητος» υπογραμμίζει την τάση να μείνει αυτή η ανακάλυψη μυστική.

Στο βιβλίο του Eves (1989) αναφέρεται ότι η ανακάλυψη των άρρητων επιτεύχθηκε με την απόδειξη της ύπαρξης ευθυγράμμων τμημάτων που δεν έχουν κοινό μέτρο. Πιθανολογείται το κίνητρο για αυτή την ανακάλυψη να ήταν το ενδιαφέρον τους για το γεωμετρικό μέσο (α:β=β:γ), που για την εποχή θεωρούνταν σύμβολο της αριστοκρατίας. Το ερώτημα για το ποιος είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο ιερών συμβόλων 1 και 2 οδήγησε τους Πυθαγόρειους στη μελέτη του λόγου της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου. Ανακάλυψαν ότι ο λόγος αυτός δεν μπορεί να εκφραστεί με τους αριθμούς που ήταν γνωστοί έως τότε, αυτούς που σήμερα αποκαλούμε ρητούς (Eves, 1989).

Η σπουδαία ανακάλυψη των άρρητων έγινε, μάλλον, στις τελευταίες δεκαετίες του 5ου αιώνα π.Χ. και ανέτρεψε την άνετη έως τότε αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία. Στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και την φύση. Τα ασύμμετρα μεγέθη παρότι ήταν πλήρως κατανοητά κατά την εφαρμογή τους στον υπολογισμό διαγωνίων σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, σε ύψη ισόπλευρων τριγώνων και σε άλλα μήκη δεν εκφραζόταν με τους τότε γνωστούς αριθμούς. Αυτό το αδιέξοδο προκάλεσε πλήθος συζητήσεων μεταξύ των Πυθαγορείων αλλά και μια τόσο μεγάλη αμηχανία που τελικά είχε ως αποτέλεσμα τη διάλυση της σχολής τους. Οι Πυθαγόρειοι δεν ήθελαν να αποκαλύψουν την ύπαρξη αυτών των <<ατελών όντων>>, αφού θα έπρεπε ξαφνικά να απορρίψουν ένα μεγάλο μέρος της γεωμετρίας που θεωρούσαν ότι είχαν έως τότε κατοχυρώσει (Eves, 1989). Προξένησε μεγαλύτερη αίσθηση και από τα επιχειρήματα περί της ύπαρξης ή μη της μεταβολής, που αποδίδονται στον Ζήνωνα (γύρω στο 450 π.Χ.). Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών λέγεται ότι έγινε από τον Ίππασο τον Μεταποντίνο, όταν κατασκεύαζε το κανονικό δωδεκάεδρο, προκαλώντας μεγάλη αναστάτωση καθώς κλόνισε τις έως τότε δοξασίες περί έκφρασης των πάντων μέσω των αριθμών (Calvin, 2005). Μια ιστορία λέει ότι ο Ίππασος αποκάλυψε την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών σε μη μέλη της κοινότητας, παραβιάζοντας έτσι τον κανόνα της μυστικότητας (Calvin, 2005). Λέγεται λοιπόν ότι μετά την ανακοίνωση της ανακάλυψής του ο Ίππασος είτε τιμωρήθηκε από του θεούς με πνιγμό στη θάλασσα για την προδοσία του είτε εξορίστηκε από την κοινότητα των Πυθαγορείων και στήθηκε ένα μνήμα σαν να είχε πεθάνει (Eves, 1989). Μια άλλη ιστορία λέει είτε ότι τον έπνιξαν οι Πυθαγόρειοι σε μία λίμνη είτε ότι τον πέταξαν από ένα πλοίο στη θάλασσα (Calvin, 2005). Όλες αυτές οι εκδοχές αποδεικνύουν πόσο καταστρεπτική ήταν αυτή η ανακάλυψη για την πυθαγόρεια άποψη περί αριθμών.

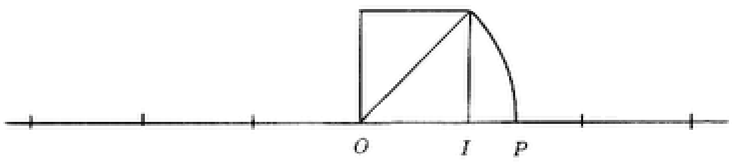
Έτσι η ανακάλυψη της ύπαρξης άρρητων αριθμών ανέτρεψε άλλη μια πίστη των αρχαίων Ελλήνων. Δεδομένων δύο ευθύγραμμων τμημάτων η κοινή λογική οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχει ένα τρίτο ευθύγραμμο τμήμα, ίσως πολύ μικρό, που να χωράει ακέραιες φορές σε καθένα από τα δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα. Αν πάρουμε σαν ευθύγραμμα τμήματα την πλευρά α και μια διαγώνιο δ ενός τετραγώνου, τότε θα υπάρχει ένα τρίτο ευθύγραμμο τμήμα μ που να χωράειακέραιες φορές στα α και δ και θα έχουμε: $α = qμ$ και $δ = pμ$, όπου p και qθετικοί αριθμοί. Αλλά $δ = \sqrt{2}\, α$, οπότε $pμ = qμ\sqrt{2}$. Δηλαδή $ρ = q\sqrt{2}$, οπότε ο $\sqrt{2} = ρ/q$ είναι ρητός αριθμός. Συνεπώς σε αντίθεση με τη διαίσθηση υπάρχουν ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή ευθύγραμμα τμήματα που δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης.

Με την ανακάλυψη ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί, επομένως ασύμμετρα μεγέθη, ανέτειλε μια πραγματικά μεγάλη στιγμή των μαθηματικών, αποτέλεσε την πρώτη κρίση στα μαθηματικά και ξεπεράστηκε με τη θεωρία περί αναλογιών του Εύδοξου. Με την ακαδημία του Πλάτωνα συνδεόταν τρείς τουλάχιστον μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής: ο Αρχύτας, ο Θεαίτητος και ο Εύδοξος (Struik, 1993). Στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, παρουσιάζεται η θεωρία των αρρήτων και αποδίδεται στον Θεαίτητο (Struik, 1993). Το όνομα του Ευδόξου συνδυάστηκε με την θεωρία των λόγων, η οποία παρουσιάζεται στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, καθώς και με την αποκαλούμενη «μέθοδος της εξάντλησης (Struik, 1993). Στον Εύδοξο οφείλεται λοιπόν το ξεπέρασμα αυτής της πρώτης κρίσης στα ελληνικά μαθηματικά. Οι αυστηρές διατυπώσεις του Ευδόξου συνετέλεσαν στην ανάπτυξη της ελληνικής αξιωματικής μεθόδου και των μαθηματικών γενικότερα. Η θεωρία των Πυθαγορείων εφαρμοζόταν μόνο σε σύμμετρα μεγέθη σε αντίθεση με αυτή του Ευδόξου.

Η ανακάλυψη αρρήτων δε σταμάτησε όμως μόνο σε ένα ασύμμετρο μήκος, η τετραγωνική ρίζα του 2 ήταν μόνο η αρχή. Γύρω στο 400 π.Χ. ο Θεαίτητος, μαθητής του Πλάτωνα, απέδειξε ότι κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου είναι ασύμμετρο ως προς το 1 (Calvin, 2005). Έτσι, όλα τα μεγέθη που σήμερα συμβολίζονται ως $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$κ.τ.λ. είναι ασύμμετρα ως προς το 1. Ο Πυθαγόρας είχε ανακαλύψει τη σχέση των λόγων των ακεραίων αριθμών του μήκους των χορδών ως προς τις μουσικές νότες και την αρμονία και πίστευε ότι όλα βασίζονται σε λόγους ακεραίων. Το πλήγμα της απόδειξης ύπαρξης γεωμετρικών μηκών που δεν αντιστοιχούν σε λόγους ακεραίων, έφερε τους Έλληνες στα πρόθυρα της ανακάλυψης νέων αριθμών που σήμερα ονομάζουμε άρρητους. Ενώ λοιπόν οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν την ενότητα των αριθμών και της γεωμετρικής επέκτασης, οι μεταγενέστεροι Έλληνες την απέρριψαν ως εσφαλμένη (Calvin, 2005).Αφού λοιπόν πίστεψαν ότι οι αριθμοί δεν μπορούν να συσχετιστούν με μήκη οδηγήθηκαν ατυχώς σε διαχωρισμό των επιστημονικών κλάδων της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας (Calvin, 2005). Ο εν λόγω διαχωρισμός διήρκησε χιλιάδες χρόνια, ώσπου τελικά ο Ρενέ Ντεκάρτ (Καρτέσιος) τους ένωσε εκ' νέου στην επονομαζόμενη Αναλυτική Γεωμετρία.

1.1.3. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ 2

Πρέπει να αποτέλεσε ένα αδιαμφισβήτητα πραγματικό πνευματικό σοκ για τους μαθηματικούς της εποχής των Πυθαγορείων η γνώση ότι υπάρχουν σημεία στην ευθεία των αριθμών που δεν αντιστοιχούν σε κανένα ρητό αριθμό. Οι Πυθαγόρειοι, πιο συγκεκριμένα, ανακάλυψαν ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να αντιστοιχεί στο σημείο P της ευθείας των αριθμών (βλ. σχήμα 2), όπου η απόσταση OP είναι ίση με τη διαγώνιο τετραγώνου, πλευράς ίσης με τη μονάδα. Αργότερα βρέθηκαν κι άλλα σημεία της ευθείας των αριθμών που δεν αντιστοιχούσαν σε ρητούς αριθμούς. Έπρεπε λοιπόν να επινοηθούν νέοι αριθμοί που να αντιστοιχούν σ' αυτά τα σημεία και αφού αυτοί οι αριθμοί δεν μπορούσαν να είναι ρητοί ονομάστηκαν άρρητοι αριθμοί.



Επειδή, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με τη μονάδα είναι $\sqrt{2}$, για να αποδείξουμε ότι το παραπάνω σημείο P δεν παριστάνεται από ρητό αριθμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Η απόδειξη που έδωσαν οι Πυθαγόρειοι για την αρρητότητα του$\sqrt{2}$, όπως αναφέρεται από τον Αριστοτέλη, είναι η ακόλουθη (Eves, 1989).

Αρχικά χρησιμοποιήθηκε η πρόταση: «Ο α είναι άρτιος, αν και μόνο αν ο α^2 είναι άρτιος». Ας υποθέσουμε τώρα, για το σκοπό της απόδειξης, ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, δηλαδή ότι $\sqrt{2} = p/q$, όπου ρ και q πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι. Τότε:

$p = q\sqrt{2}$, ή

$p^2 = 2q^2$.

Αφού ο p^2 είναι το διπλάσιο ενός ακεραίου, συμπεραίνουμε ότι ο p^2 και συνεπώς και ο p πρέπει να είναι άρτιος. Έστω λοιπόν $p = 2v$.

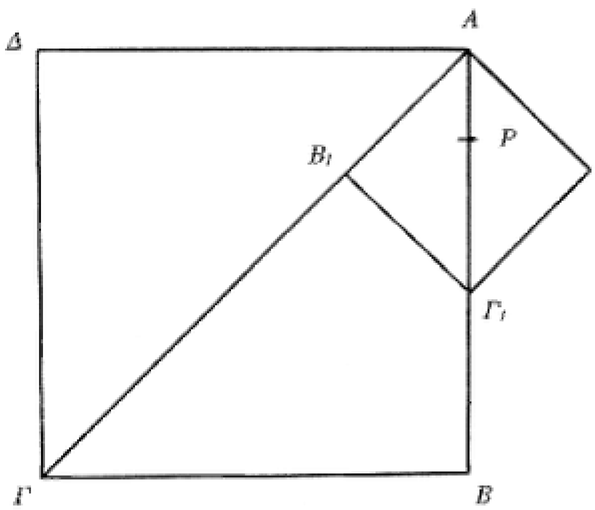
Τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$4v^2= 2q^2$, ή

$2v^2 = q^2$

από την οποία καταλήγουμε ότι το q^2 και συνεπώς και ο q πρέπει να είναι άρτιος. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού υποθέσαμε ότι οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έτσι η υπόθεση ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός μας οδήγησε σε μια αδύνατη κατάσταση και συνεπώς η υπόθεση πρέπει να απορριφθεί. Αυτή η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος είναι ουσιαστικά αυτή που αναφέρεται στον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Σύμφωνα με τον Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) μετά την απόδειξη αυτή ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (περίπου 425 π.Χ.) απέδειξε ότι και οι $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{17}$είναι επίσης άρρητοι (Eves, 1989).

Ας δώσουμε μια άλλη, γεωμετρική, απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, δείχνοντας ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε, σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΡ (βλ. σχήμα 3) τέτοιο ώστε και η διαγώνιος ΑΓ και η πλευρά ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ να είναι ακέραια πολλαπλάσια του ΑΡ δηλαδή τα ΑΓ και ΑΒ να είναι ασύμμετρα ως προς ΑΡ. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα $ΓΒ_1 = ΑΒ$ και φέρνουμε την $Β_1Γ_1$κάθετη στην ΓΑ. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι $Γ_1Β = Γ_1Β_1 = ΑΒ_1$, οπότε το $ΑΓ_1 = ΑΒ - ΑΒ_1$ και το $ΑΒ_1$ είναι σύμμετρα ως προς ΑΡ. Αλλά τα $ΑΓ_1$ και $ΑΒ_1$ είναι η διαγώνιος και η πλευρά ενός τετραγώνου με πλευρά μικρότερη από το μισό της πλευράς του αρχικού τετραγώνου. Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή αρκετές φορές θα προκύψει τελικά ένα τετράγωνο του οποίου η διαγώνιος ΑΓν και η πλευρά ΑΒν θα είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα ως προς το ΑΡ και ΑΓν< ΑΡ. Αυτό όμως είναι άτοπο κι έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα.



Διαπιστώνουμε ότι όλοι οι παραπάνω συλλογισμοί που αποδείχνουν ότι ο$\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός χρησιμοποιούν την έμμεση μέθοδο απόδειξης ή εις άτοπο απαγωγή.

1.1.4. ΟΙ ΛΟΓΟΙ ΤΟΥ ΕΥΔΟΞΟΥ

Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (περίπου 400-350π.Χ.) ήταν μαθητής του Πλάτωνα και ένας από τους σπουδαιότερους Έλληνες μαθηματικούς. Ήταν ακόμη γιατρός αλλά και αστρονόμος και του αποδίδεται η θεωρία των ομόκεντρων σφαιρών, η οποία εξηγεί τις φαινομενικές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων (Calvin, 2005).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η ανακάλυψη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$, προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση στους Έλληνες Μαθηματικούς και οδήγησε στο διαχωρισμό της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας καθώς όλα τα αντικείμενα δεν μπορούσαν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά. Παρά το διαχωρισμό τα προβλήματα παρέμεναν με κυριότερο την αντίληψη που είχαν έως τότε, ότι τα γεωμετρικά μεγέθη (μήκη, εμβαδά, όγκοι) είναι συγκρίσιμα. Μετά την ανακάλυψη όμως γνώριζαν ότι κάποια μεγέθη είναι ασύμμετρα, μη γνωρίζοντας αν αυτά τα μήκη ήταν συγκρίσιμα. Ήταν πλέον επιτακτική η ανάγκη να θεμελιωθεί μια θεωρία για τα σύμμετρα μήκη (Calvin, 2005).

Ο Εύδοξος προσπαθώντας να εξηγήσει πως τα ασύμμετρα μεγέθη μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη γεωμετρία πρότεινε μια θεωρία των αναλογιών. Η θεωρία αυτή διασώθηκε στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, μια θεωρία δύσκολη η οποία αντανακλά τον πραγματικό μόχθο που κατέβαλαν οι Έλληνες προκειμένου να εξηγήσουν την ασυμμετρία Πρόκειται για μια καθαρά γεωμετρική θεωρία, δοσμένη με μια αυστηρά αξιωματική μορφή και όπως είναι προφανές καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη. Όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Struik (1993), τυπικό δείγμα της θεωρίας του Ευδόξου αποτελεί ο Ορισμός 5 από το πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη:

«Λέμε για τα μεγέθη ότι έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν όποιο ισοπολλαπλάσιο και αν πάρουμε του πρώτου και του τρίτου και όποιο επίσης ισοπολλαπλάσιο και αν πάρουμε του δεύτερου και του τέταρτου, το πρώτο από τα νέα μεγέθη είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το δεύτερο, μόνο αν το ίδιο συμβαίνει, αντίστοιχα, με τα άλλα δύο μεγέθη»

Με σημερινούς συμβολισμούς ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι:

$\alpha: \beta = \gamma: \delta$ αν $ma > n\beta => m\gamma > n\delta$, $ma = n\beta => m\gamma = n\delta$ και $ma < n\beta => m\gamma < n\delta$, όπου m, n είναι ακέραιοι (Struik, 1993).

Πρόκειται για μια καθαρά γεωμετρική θεωρία, δοσμένη με μια αυστηρά αξιωματική μορφή και όπως είναι προφανές καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη. Όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Struik (1993), τυπικό δείγμα της θεωρίας του Ευδόξου αποτελεί ο Ορισμός 5 από το πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη:

Στην προσπάθεια να κατανοήσει κανείς την θεωρία του Ευδόξου, δεν θα πρέπει να παραβλέψει το γεγονός ότι οι Έλληνες δεν είχαν κλάσματα αλλά λόγους αριθμών και λόγους μεγεθών. Στην γεωμετρία χρειαζόταν τους λόγους μεγεθών και γνώριζαν για παράδειγμα ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (Calvin, 2005). Οι Έλληνες έπρεπε να σιγουρευτούν ότι οι λόγοι μεγεθών δεν αποκλείουν τα ασύμμετρα μεγέθη και ταυτόχρονα ισχύουν οι σχέσεις διάταξης.

Μέσω ενός παραδείγματος στο βιβλίο του ο Calvin (2005) εξηγεί τη θεωρία λόγων του Ευδόξου.

Ας θεωρήσουμε ότι τα τέσσερα μεγέθη έχουν μήκη $3: 6 = 7: 14$, για τα οποία ισχύει:$3 < 6$ και $7 < 14$.

- Σύμφωνα με τη θεωρία του Ευδόξου αν πολλαπλασιάσουμε το 3 και το 7 με κάποιο μέγεθος Α και το 6 και το 14 με κάποιο μέγεθος Β, τότε η σχέση διάταξης ανάμεσα στα τροποποιημένα 3 και 6 θα είναι ίδια με τη σχέση διάταξης ανάμεσα στα τροποποιημένα 7 και 14. Δηλαδή:$A \cdot 3: B \cdot 6 = A \cdot 7: B \cdot 14$ (σχέση 1)
- Έστω ότι $A = 5$ και $B = 2$ τότε αντικαθιστώντας στη σχέση 1 έχουμε ότι $15: 12 = 35: 28$, όπου πραγματικά ισχύει ότι $15 > 12$ και $35 > 28$. Κατά συνέπεια ο πολλαπλασιασμός με τα Α και Β διατήρησε τη διάταξη των δύο λόγων.

Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευδόξου, για να είναι ίσοι δύο λόγοι θα πρέπει όλες οι τιμές των Α και Β να διατηρούν τη διάταξη ανάμεσα στα αντίστοιχα μεγέθη (Calvin, 2005). Έτσι οι Έλληνες κατέληξαν στον ορισμό των λόγων των μεγεθών που απαιτούνταν για τις διάφορες αποδείξεις που στηριζόταν στις αναλογίες. Τα μεγέθη όμως δεν ήταν αριθμοί και η απαίτηση όλες οι τιμές των Α και Β να ικανοποιούν τον ορισμό εισήγαγε από την πίσω πόρτα την έννοια του απείρου (Calvin, 2005). Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι το πολύ σημαντικό έργο του Ευδόξου ικανοποιούσε τις ανάγκες των γεωμετρών αλλά εξακολουθούσε να μην επαρκεί για την κάλυψη των αναγκών της άλγεβρας και τη στήριξη των άρρητων σε μια γερή θεωρητική βάση.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, η τωρινή θεωρία των ασύμμετρων αριθμών, που αναπτύχθηκε από τους Dedekind και Weierstrass, ακολουθεί σχεδόν κατά βήμα του τρόπο σκέψης του Ευδόξου χρησιμοποιώντας όμως σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους και ανοίγοντας έτσι ευρύτερες προοπτικές (Struik, 1993).

1.2. Η ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ

Εκτός από τους Έλληνες μαθηματικούς και πολλοί άλλοι ασχολήθηκαν και αποδέχτηκαν τους άρρητους αριθμούς. Στο μεγαλύτερο διάστημα του Μεσαίωνα, οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί αποδεχόταν μόνο τους φυσικούς και τα κλάσματα ως λύσεις εξισώσεων. Σε αντίθεση, οι Ινδουιστές αποδεχόταν τις άρρητες ρίζες ως λύσεις εξισώσεων και προβλημάτων (Calvin, 2005). Ο πασίγνωστος μαθηματικός Ομάρ Καγιάμ (περίπου 1050-1123), γνωστός στη Δύση ως ποιητής ασχολήθηκε με τον ορισμό των άρρητων αριθμών. Ενώ οι Έλληνες για να επιλύσουν εξισώσεις χρησιμοποιούσαν γεωμετρικές μεθόδους και αντιμετώπιζαν τις λύσεις τους ως μήκη, ο Καγιάμ θεωρούσε τις λύσεις ως αριθμούς (Calvin, 2005).

Καθώς η συμβολική φύση της άλγεβρας εξελίχθηκε πολλά προβλήματα έγιναν παρελθόν. Οι λέξεις αντικαταστάθηκαν με σύμβολα και έτσι οι αρνητικοί και οι άρρητοι άρχισαν να εμφανίζονται ως λύσεις. Ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους (1777-1855) ήταν αυτός που προώθησε την αποδοχή των άρρητων αριθμών. Ο Γκάους απέδειξε σε μια διατριβή του αυτό που έπειτα έγινε «Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας» (Calvin, 2005). Το θεώρημα με την αξιοσημείωτη διάκριση λέει ότι: Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με έναν άγνωστο έχει μια τουλάχιστον λύση ή ρίζα. Πόρισμα του συγκεκριμένου θεωρήματος σημειώνει ότι υπάρχουν τόσες λύσεις όσες δείχνει ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου. Σημαντικό σημείο, σχετικό με το θέμα της συγκεκριμένης διπλωματικής, είναι το ότι ο Γκάους αποδέχεται τους άρρητους ως λύσεις εξισώσεων και λύνει εξισώσεις της μορφής $x^2 - 2 = 0$.

Η συμβολή του Γκάους είναι ιδιαιτέρως σημαντική καθώς τόσο το θεώρημά του όσο και οι επιστημονικές του δημοσιεύσεις, ωθούσαν την επιστημονική κοινότητα στην αναζήτηση ενός κατανοητού ορισμού των αρρήτων.

1.2.1. Η ΤΟΜΗ ΤΟΥ ΝΤΕΝΤΕΚΙΝΤ

Στην πορεία για τη αναζήτηση ενός κατανοητού ορισμού των άρρητων αριθμών συναντάμε τον ΚάρλΦρίντιχΓκάους (1777-1855). Γεννήθηκε σε μια εργατική οικογένεια, ήταν παιδί-θαύμα και ήταν αυτός που προώθησε την αποδοχή των άρρητων αριθμών. Σε μια μικρή διατριβή για τις απαιτήσεις του πτυχίου του, η οποία εκδόθηκε όταν ο Γκάους ήταν είκοσι δύο ετών, απέδειξε «Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας» (Calvin, 2005).

Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα, κάθε πολυωνυμική εξίσωση με έναν άγνωστο έχει μία τουλάχιστον λύση. Ένα πόρισμα του θεωρήματος αναφέρει ότι υπάρχουν τόσες λύσεις όσες δείχνει ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου. Επομένως, η πολυωνυμική εξίσωση:

$A_0x^\nu + A_1x^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-2}x^2 + A_{\nu-1}x + A_\nu = 0$, έχει ακριβώς ν λύσεις. Σημαντικό σημείο του θεωρήματος αποτελεί ο ισχυρισμός ότι η εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Οι δύο αυτές λύσεις είναι στην πραγματικότητα οι αριθμοί $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, οι οποίοι και οι δύο είναι άρρητοι αριθμοί. Με την απόδειξη λοιπόν του θεμελιώδους θεωρήματος , ο Γκάους αναγκάστηκε να αποδεχθεί τους άρρητους ως λύσεις εξισώσεων (Calvin, 2005). Με την συμβολή του Γκάους ξεκίνησε λοιπόν στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα η αναζήτηση ενός κατανοητού ορισμού των άρρητων αριθμων.

Ο ορισμός των άρρητων δόθηκε από έναν Γερμανό μαθηματικό, τον Ρίτσαρντ Ντέντεκιντ (1831-1916), στο έργο του με τίτλο Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί. Ο Ντέντεκιντ ξεκίνησε ορίζοντας το σύνολο των ρητών αριθμών ως σύστημα Q. Σύμφωνα με τον ορισμό στο σύνολο Q ισχύουν οι παρακάτω νόμοι:

1. Αν α>β και β>γ τότε α>γ. Κάθε φορά που οι α,γ είναι δυο διαφορετικοί αριθμοί και ο β είναι μεγαλύτερος από τον έναν και μικρότερος από τον άλλον, αυτό θα το εκφράζουμε σύντομα χωρίς να εμπλέκονται γεωμετρικές έννοιες, λέγοντας ότι ο β βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς α και γ.
2. Αν οι αριθμοί α και γ είναι διαφορετικοί, υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ τους.
3. Αν α είναι οποιοσδήποτε συγκεκριμένος αριθμός, τότε όλοι οι αριθμοί του συνόλου Q διαιρούνται σε δύο κλάσεις, τις A_1και A_2, η καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει άπειρους αριθμούς. Η πρώτη κλάση A_1αποτελείται από όλους τους αριθμούς α_1που είναι <α και η δεύτερη κλάση A_2αποτελείται από όλους τους

αριθμούς α_2που είναι >α. Σχετικά με τον αριθμό α, να σημειωθεί ότι μπορεί να εκχωρηθεί ελεύθερα στην πρώτη ή στη δεύτερη κλάση, αφού είναι αντιστοίχως ο μεγαλύτερος αριθμός της πρώτης κλάσης και ο μικρότερος της δεύτερης κλάσης. Σε κάθε περίπτωση ο διαχωρισμός του συστήματοςQ είναι τέτοιος ώστε κάθε αριθμός της πρώτης κλάσης να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της δεύτερης κλάσης (Calvin, 2005).

Αναλύοντας τους νόμους του Ντέντεκιντ αντιλαμβανόμαστε ότι ο πρώτος νομός αναφέρεται στο ότι οι ρητοί αριθμοί είναι διατεταγμένοι και ο δεύτερος νόμος στο ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Ο τρίτος νόμος, ο οποίος αποτελεί και την ουσία της ιδέας του, λέει ότι κάθε ρητός διαιρεί όλους τους ρητούς σε δύο κλάσεις όπου όλοι οι αριθμοί της πρώτης κλάσης είναι μικρότεροι από αυτούς της δεύτερης κλάσης. Ο αριθμός που θα χρησιμοποιηθεί για να γίνει ο διαχωρισμός μπορεί να συμπεριληφθεί είτε στη μία είτε στην άλλη κλάση. Μπορεί να είναι ο μεγαλύτερος αριθμός της κλάσης A_1 ή ο μικρότερος της κλάσης A_2.

Ορίζοντας ο Ντέντεκιντ τους ρητούς είχε φτάσει στο σημείο να μπορεί να ορίσει τους άρρητους. Παραλείποντας λοιπόν τον τρίτο νόμο, δήλωσε ότι: «αν λοιπόν θεωρήσουμε δεδομένο οποιονδήποτε διαχωρισμό του συστήματος Q σε δύο κλάσεις A_1και A_2, ο οποίος έχει μόνο αυτήν τη χαρακτηριστική ιδιότητα, ότι, δηλαδή, κάθε αριθμός α_1της A_1 είναι μικρότερος από κάθε αριθμόα_2της A_2, τότε μπορούμε να ονομάσουμε αυτό τον αριθμό τομή». Ο Ντέντεκιντ εισήγαγε αυτόν τον νέο όρο καθώς, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ήθελε να διαχωρίσει την έννοια των άρρητων αριθμών από τις γεωμετρικές αντιλήψεις. Όρισε λοιπόν την τομή με βάση δύο κλάσεις αριθμών, όπου κάθε αριθμός της πρώτης είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της δεύτερης, αποφεύγοντας με αυτόν τον τρόπο οποιαδήποτε αναφορά σε ευθείες και σημεία. Ο τρόπος με τον οποίο δημιούργησε ο Ντέντεκιντ τέτοιες τομές οδηγεί στον ορισμό των άρρητων αριθμών. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο που αναφέραμε παραπάνω αντιλαμβανόμαστε τον τρόπο δημιουργίας τομών χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε ρητό αριθμό. Ο Ντέντεκιντ έδειξε με έναν πολύ κατανοητό τρόπο πως υπάρχουν άπειρες τομές οι οποίες όμως δεν δημιουργούνται από ρητούς αριθμούς.

Η μέθοδος απόδειξης τομών που δεν δημιουργούνται από ρητούς, ξεκινάει με έναν αριθμό Δ ο οποίος είναι θετικός ακέραιος αλλά όχι τετράγωνο ακεραίου. Τότε θα υπάρχει ένας θετικός ακέραιος λ, τέτοιος ώστε: $\lambda^2 < \Delta < (\lambda + 1)^2$. Αν στην δεύτερη κλάση A_2 εκχωρήσουμε κάθε θετικό ρητό αριθμό α_2 που το τετράγωνό του είναι >Δ και στην πρώτη κλάση A_1 όλους τους άλλους ρητούς αριθμούς α_1τότε αυτός ο διαχωρισμός σχηματίζει μια τομή (A_1, A_2). Στην τομή αυτή κάθε αριθμός α_1 είναι μικρότερος από κάθε αριθμό α_2 και το πιο σημαντικό είναι ότι η τομή αυτή δεν δημιουργείται από κάποιο ρητό αριθμό. Στην ουσία λοιπόν, για κάθε ακέραιο Δ, που ο ίδιος δεν είναι τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού, αυτός ο Δ βρίσκεται μεταξύ δύο άλλων τετραγώνων, οι τετραγωνικές ρίζες των οποίων είναι ακέραιοι αριθμοί που διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια μονάδα (για παράδειγμα, το 5 βρίσκεται μεταξύ του 4 (2^2) και του 9 (3^2)). Στη συνέχεια η τομή επιλέγεται έτσι ώστε το A_2 να είναι το σύνολο όλων των αριθμών των οποίων τα τετράγωνα είναι μεγαλύτερα από το 5. Με αυτή την πολύ έξυπνη προσέγγιση ο Ντέντεκιντ κάνει μια τομή με την οποία ορίζει το $\sqrt{5}$, που είναι είναι ένας άρρητος αριθμός αλλά χρησιμοποιεί μόνο ρητούς για να ορίσει την τομή αυτή. Έτσι λοιπόν με ένα εξαιρετικό τέχνασμα ο Ντέντεκιντ όρισε τους άρρητους, χρησιμοποιώντας μόνο ρητούς για τη δημιουργία τομών που διαχωρίζουν τους ρητούς.

Ο Ντέντεκιντ όρισε όλους τους πραγματικούς αριθμούς με τομές, δηλαδή με σύνολα απείρων ρητών αριθμών. Όρισε ουσιαστικά τους αριθμούς με απειροσύνολα και ουσιαστικά το σύστημα των αριθμών εξαρτάται από την έννοια του απείρου, μια έννοια η οποία καθιστά τη θεμελίωση ασφαλή. Στην συνέχεια, προχώρησε στον ορισμό της πράξης της πρόσθεσης για όλους τους πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τις τομές και ακολούθησαν οι ορισμοί και των υπολοίπων πράξεων. Ορίστηκε λοιπόν η κλειστότητα του συνόλου των πραγματικών, καθώς όταν χρησιμοποιούμε τους πραγματικούς αριθμούς στις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, το αποτέλεσμα θα είναι πάντα ένας άλλος πραγματικός αριθμός (εξαιρώντας την διαίρεση με το μηδέν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΣΙΟ

2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΛΛΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ

Σε αυτό το μέρος της εργασίας παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των άρθρων και των ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών που σχετίζονται με τις διάφορες δυσκολίες που μπορούν να προκύψουν κατά τη διαδικασία της κατανόησης της δομής του συνόλου των άρρητων αριθμών από μαθητές, δασκάλους αλλά και καθηγητές μαθηματικών.

Οι μαθητές κατανοούν τους φυσικούς και τους ακεραίους αριθμούς μέσα από μοντέλα και αναπαραστάσεις του πραγματικού κόσμου. Ωστόσο, δεν μπορούν να προσφερθούν τέτοιες αναπαραστάσεις για την κατανόηση των άρρητων αριθμών, δεδομένου ότι αυτοί οι αριθμοί είναι πιο αφηρημένοι από τη φύση τους. Κατά συνέπεια, οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια ποικιλία δυσκολιών σχετικά με τους άρρητους αριθμούς. Η κατανόηση των άρρητων θεωρείται καταλυτικής σημασίας καθώς είναι ουσιώδης για τη κατανόηση της δόμησης του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η αντίληψή τους όμως συνεπάγεται μια πολύ περίπλοκη διαδικασία, γεγονός που έχει ωθήσει ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών να διεξάγουν περισσότερες έρευνες για το θέμα. Μια ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας δείχνει ότι οι περισσότερες μελέτες που έχουν διεξαχθεί αφορούν καθηγητές εν ενεργεία και υποψήφιους δασκάλους. Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει μεγάλη έρευνα σχετικά με την κατανόηση των άρρητων αριθμών από μαθητές, σε αντίθεση με την πληθώρα ερευνών που μελετούν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αποκτούν τη γνώση των ρητών αριθμών. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο άρρητος αριθμός ορίζεται στα σχολικά μαθηματικά ως ένας αριθμός που δεν είναι ρητός, είναι σαφές ότι η κατανόηση της αρρητότητας δεν μπορεί να διερευνηθεί ελλείψει των ρητών αριθμητικών αναφορών.

Στην έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007α), εξετάζονται οι γνώσεις, οι διαισθήσεις και οι πεποιθήσεις των συμμετεχόντων (μελλοντικοί καθηγητές μαθηματικών), σε σχέση με τα σύνολα των ρητών και των άρρητων αριθμών. Η έρευνα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια εξερεύνηση των «έξυπνων» τρόπων με τους οποίους οι συμμετέχοντες προσπαθούν να εναρμονίσουν τις διαισθήσεις τους με αυτό που τυπικά γνωρίζουν ότι είναι αλήθεια. Για το σκοπό αυτής της μελέτης, υιοθέτησαν το εννοιολογικό πλαίσιο από τους Tiroshet. al. (1998) σχετικά με τη μελέτη της κατανόησης των ρητών αριθμών από εκπαιδευτικούς. Ανάλυσαν την γνώση ως ένα πλαίσιο που ενσωματώνει ένα σύνολο συνδέσεων μεταξύ ***αλγοριθμικών***, ***διαισθητικών*** και ***επίσημων-τυπικών*** διαστάσεων της γνώσης (Sirotic&Zazkis, 2007α).

Η ***αλγοριθμική διάσταση*** είναι διαδικαστικής φύσης, συνίσταται στη γνώση κανόνων και προδιαγραφών σε σχέση με έναν συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα και περιλαμβάνει μια ικανότητα του μαθητευόμενου να εξηγήσει τα διαδοχικά βήματα που εμπλέκονται σε διάφορες τυποποιημένες λειτουργίες (Sirotic και Zazkis, 2007α). Η ***επίσημη διάσταση*** αντιπροσωπεύεται από τους ορισμούς των εννοιών και των δομών που σχετίζονται με συγκεκριμένο τομέα περιεχομένου καθώς και από τα θεωρήματα και τις αποδείξεις τους. Στην συγκεκριμένη διάσταση, οι μαθητές έχουν την ικανότητα ανάκλησης και εφαρμογής ορισμών και θεωρημάτων κατά την επίλυση ενός προβλήματος.

Η ***διαισθητική διάσταση*** της γνώσης (που επίσης αναφέρεται ως διαισθητική γνώση) αποτελείται από τις διαισθήσεις, τις ιδέες και τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες και περιλαμβάνει διανοητικά μοντέλα που αντιπροσωπεύουν αριθμητικές έννοιες και λειτουργίες. Χαρακτηρίζεται σύμφωνα με τους Fischbein, Jehian και Cohen (1995), ως ο τύπος της γνώσης που έχουμε την τάση να δεχόμαστε άμεσα και με αυτοπεποίθηση, ως αυτονόητη και ψυχολογικά ανθεκτική. Στόχος λοιπόν των Sirotic και Zazkis (2007α) ήταν να παρουσιαστεί η λεπτή διάκριση ανάμεσα στις διαισθήσεις, τις πεποιθήσεις και τις τυπικές γνώσεις, σχετικά με τους άρρητους. Αναφορικά με τους όρους «διαισθητική» και «διαισθητική αποδοχή», κρίνεται αναγκαία η παρατήρηση ότι ως «διαισθητική» αναφέρεται μια γνωστική έννοια που είναι αποδεκτή από ένα άτομο, υποκειμενικά, ως αυτονόητη, εγγενώς αναγκαία και ψυχολογικά σταθερή. Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι ο διαισθητικός χαρακτήρας ορισμένων εννοιών εξαρτώνται από την ηλικία, την προσωπική εμπειρία και τις κοινωνικοπολιτισμικές επιρροές. Οι διαισθήσεις είναι αναπτυξιακά φαινόμενα, τα οποία όταν καθιερωθούν, τείνουν να δημιουργούν οργανωμένες, συνεκτικές και σταθερές δομές (Fischbein et. al., 1995). Οι άρρητοι δεν ταιριάζουν με το βασικό διαισθητικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο προέκυψαν οι αριθμοί. Οι Courant και Robbins (όπως αναφέρεται στο Fischbein et.al. 1995) αναφέρουν ότι: «Στο μυαλό των μαθητών, πρέπει σίγουρα να φαίνεται πολύ παράξενο και παράδοξο ότι ενώ το σύνολο των ρητών αριθμών είναι παντού πυκνό, τα ρητά σημεία δεν καλύπτουν ολόκληρη την ευθεία των αριθμών, καθώς τίποτα στη διαίσθησή μας δεν μπορεί να μας βοηθήσει να αντιληφθούμε τα άρρητα σημεία ξεχωριστά από τα ρητά».

Μια από τις μεγαλύτερες μελέτες η οποία αναφέρεται αποκλειστικά στην κατανόηση των άρρητων είναι αυτή των Fischbein, Jehiarn, και Cohen (1995). Ο κύριος στόχος της μελέτης των Fischbein, Jehiarn, και Cohen (1995) ήταν να εξετάσει τις γνώσεις των μαθητών Λυκείου και των μελλοντικών δασκάλων σχετικά με τους άρρητους. Η μελέτη αυτή υποθέτει ότι υπάρχουν διαισθητικά εμπόδια στην κατανόηση των εννοιών της μη μετρησιμότητας μεγεθών καθώς και της μη αριθμησιμότητας του συνόλου των άρρητων, τα οποία οδηγούν στη δυσκολία της ευρύτερης κατανόησης του συνόλου των άρρητων. Μέσα από ερωτηματολόγια αλλά και προσωπικές συνεντεύξεις σε μαθητές Λυκείου και φοιτητές, οι Fischbein, Jehian και Cohen (1995) διερεύνησαν τις επίσημες μαθηματικές γνώσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αλλά και τις αντιδράσεις των υποκειμένων σε ερωτήσεις διαισθητικού χαρακτήρα. Βασικό σημείο που ενέπνευσε την έρευνα των Fischbein, Jehian και Cohen (1995), είναι η κατανόηση της ύπαρξης δυο απειροσυνόλων μέσα σε ένα διάστημα και πως αυτή επηρεάζεται από την ηλικία και το μαθηματικό υπόβαθρο. Αναφορικά με τη δυσκολία στην κατανόηση της ύπαρξης δυο απειροσυνόλων μέσα σε ένα διάστημα και τις διαισθητικές δυσκολίες που υπέθεσαν οι ερευνητές, αυτές δε φαίνεται να επιβεβαιώνονται (Fischbein, Jehian και Cohen ,1995). Αναδεικνύονται όμως δυσκολίες και σχετικές παρανοήσεις καθώς τα άτομα όλων των επιπέδων δεν ήταν σε θέση να ορίσουν ορθά τις έννοιες των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών αριθμών και να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ αυτών. Συγκρίνοντας το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των ρητών και των άρρητων, αξίζει να αναφερθεί ότι μόνο τα 2/3 των φοιτητών γνώριζαν ότι το σύνολο των άρρητων περιέχει περισσότερα στοιχεία (Fischbein, Jehian και Cohen ,1995). Στο ίδιο πλαίσιο με τους Fischbein, Jehian και Cohen (1995) κινήθηκε και η έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007α), οι οποίοι εξέτασαν με ερωτηματολόγιο και προσωπική συνέντευξη μελλοντικούς δασκάλους μαθηματικών. Στην ερώτηση ποιο σύνολο(των ρητών ή των άρρητων) περιέχει περισσότερα στοιχεία, σχεδόν οι μισοί απάντησαν ορθά. Ελάχιστοι όμως από αυτούς γνωρίζανε την επίσημη μαθηματική γνώση, ότι το σύνολο των άρρητων είναι μη μετρήσιμο και γι’ αυτό περιέχει περισσότερα στοιχεία.

Στο έργο τους σχετικά με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών για το σχεδιασμό εκπαιδευτικού υλικού οι Arcavi, Bruckheimer και Ben-Zvi (1987) αναφέρουν αρκετά ευρήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, τα οποία σχετίζονται με γνώσεις, αντιλήψεις και παρανοήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τους άρρητους αριθμούς. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι υπάρχει μια διαδεδομένη πεποίθηση μεταξύ των εκπαιδευτικών ότι η αρρητότητα ενός αριθμού σχετίζεται μόνο με τα δεκαδικά του ψηφία. Η μελέτη αυτή διεξήχθη σε 84 εν ενεργεία καθηγητές που παρακολούθησαν ένα θερινό πρόγραμμα κατάρτισης εκπαιδευτικών που σχετιζόταν με ένα εθνικό μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών για τα γυμνάσια του Ισραήλ. Οι Arcavi et.al. (1987) αναφέρουν ότι ενώ η πλειοψηφία των δασκάλων γνώριζε «πώς» πρόκυψε η έννοια της αρρητότητας, πολύ λίγοι ήξεραν «πότε» προέκυψε. Αυτό έγινε ιδιαίτερα εμφανές όταν τους ζητήθηκε να κατατάξουν χρονολογικά την εμφάνιση των τριών εννοιών: αρνητικοί αριθμοί, δεκαδικά κλάσματα και άρρητοι. Το 55% των εκπαιδευτικών (και το επιπλέον 10% δεν απάντησαν) θεωρούν ότι τα δεκαδικά κλάσματα προηγήθηκαν των άρρητων κατά την ιστορική εξέλιξη. Οι συγγραφείς κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το γεγονός αυτό όχι μόνο έδειξε την έλλειψη γνώσης σχετικά με τη μεταγενέστερη ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών, αλλά το πιο σημαντικό που αναφέρεται είναι ότι η προέλευση της έννοιας της αρρητότητας, αν και συνδέεται με τους Έλληνες, θεωρείται από τους εκπαιδευτικούς ότι στηρίζεται στους δεκαδικούς αριθμούς και όχι στη γεωμετρία όπως συνέβη ιστορικά (μη-μετρήσιμα μήκη). Τέλος, οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι η ιστορική προέλευση των άρρητων γενικότερα και η σύνδεση με τη γεωμετρία συγκεκριμένα, μπορούν να βοηθήσουν στην βαθύτερη κατανόηση των άρρητων. Έτσι, θεωρούν ότι ένα πλάνο μαθήματος με ιστορική αναφορά στην εισαγωγή των άρρητων θα λειτουργούσε ιδιαιτέρως υποστηρικτικά στην κατανόηση των νέων εννοιών. Σε συνέχεια των παραπάνω, αξίζει να αναφερθεί ότι οι τρεις έννοιες οι οποίες αναφέρθηκαν στο κείμενο των Arcavi et.al., εισάγονται στους μαθητές με την αντίστροφη σειρά σε σχέση με το πώς αυτές αναπτύχθηκαν ιστορικά. Η έννοια της αρρητότητας εμφανίστηκε πρώτη από τον Εύδοξο γύρω στο 400 π.Χ. και παρουσιάζεται στα στοιχεία του Ευκλείδη (Eves, 1990). Οι δεκαδικοί αριθμοί εισήχθησαν από τον Simon Stevin στο De Thiende του το 1585. Ιστορικά, η πρώτη επίσημη εισαγωγή σε αρνητικούς αριθμούς εμφανίζεται στην εισαγωγή στην Άλγεβρα από τον LeonardEuler το 1770.

Οι περισσότερες έρευνες συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών δεν αφιερώνουν τον απαιτούμενο χρόνο στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των άρρητων αλλά παρουσιάζουν μεμονωμένα παραδείγματα όπως το π και κάποιες τετραγωνικές ρίζες μικρών αριθμών. Αποτέλεσμα είναι πολλοί μαθητές αλλά και μελλοντικοί δάσκαλοι να μην μπορούν να ορίσουν πλήρως τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών όπως επίσης να μην μπορούν να κατηγοριοποιήσουν ορθά συγκεκριμένα παραδείγματα αριθμών, σε ακεραίους, ρητούς, άρρητους και πραγματικούς αριθμούς. Η έννοια των άρρητων φαίνεται να είναι ιδιαίτερα συγκεχυμένη στο μυαλό πολλών μαθητών και φοιτητών. Ο όρος «άρρητος» θεωρείται ισοδύναμος με αριθμούς «μη ολόκληρους», με αριθμούς που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, μερικές φορές με αρνητικούς αριθμούς κ.λπ. (Fischbein, Jehian και Cohen ,1995). Πολλοί μαθητές δεν γνωρίζουν την ουσιαστική διάκριση μεταξύ περιοδικών (επαναλαμβανόμενων) και μη περιοδικών δεκαδικών αριθμών. Τέτοιες συγχύσεις ίσως δημιουργούνται και από την ερμηνεία του όρου «άρρρητος» υπό το φως της καθημερινής του σημασίας. Οι Fischbein, Jehian και Cohen (1995), αναφέρουν ότι εμπόδιο για τη μη ολοκλήρωση της εννοιολογικής δομής του συνόλου των πραγματικών, αποτελεί η μη ακριβής κατανόηση του ορισμού των άρρητων. Οι κατηγορίες των αριθμών θα μπορέσουν να κατανοηθούν μόνο αν διδαχθούν ως συστατικά του ίδιου εννοιολογικού συστήματος (Fischbein, Jehian και Cohen ,1995).

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται κατηγοριοποιημένες οι συνηθέστερες δυσκολίες και παρανοήσεις που εμφανίζονται σε μαθητές και καθηγητές σχετικά με τους άρρητους, όπως προέκυψε από μελέτη των σχετικών με το θέμα ερευνών.

2.2 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Από την συνολική ανάλυση των μελετών προκύπτει ότι οι συμμετέχοντες αποτυγχάνουν να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα προτείνουν ορισμούς οι οποίοι απέχουν πολύ από το να είναι επίσημοι και συνήθως βασίζονται σε αναπαραστάσεις και διαισθήσεις. Εφόσον ο ορισμός του άρρητου προϋποθέτει τη γνώση και την κατανόηση του ορισμού του ρητού είναι λογικό να μεταφέρονται αδυναμίες και παρανοήσεις από το ένα αριθμητικό σύνολο στο άλλο. Πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στους ρητούς πριν εισαχθούν στους άρρητους. Η καταχρηστική μεταφορά γνώσεων από τους φυσικούς στο πεδίο των ρητών αριθμών έχει καταγραφεί ως ένας από τους πιο σημαντικούς λόγους προς τη κατεύθυνση αυτή (Βαμβακούση&Βοσνιάδου, 2007).

Στη μελέτη των Fischbein, Jehiam&Cohen (1995), οι μαθητές ($9^{ης}$ και $10^{ης}$ τάξης) κλήθηκαν να ορίσουν τους ρητούς, τους άρρητους και τους πραγματικούς αριθμούς. Κατά μέσο όρο περίπου το 20% των μαθητών έδωσαν σωστούς ορισμούς τόσο για τους ρητούς όσο και για τους άρρητους. Ο συνηθέστερος λανθασμένος ορισμός για τους άρρητους παραλείπει τη μη περιοδικότητα του δεκαδικού τους μέρους ορίζοντας έτσι τους άρρητους ως του αριθμούς που αποτελούνται από άπειρα δεκαδικά ψηφία. Λίγο λιγότεροι από το 1/3 των μαθητών της $9^{ης}$ τάξης θεωρούν ότι άρρητοι είναι όσοι αριθμοί δεν είναι ακέραιοι, ταυτίζοντας με αυτό το σκεπτικό τα άπειρα δεκαδικά ψηφία με την αρρητότητα (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Σε γενικότερο σχόλιο των ερευνητών αναφέρεται ότι οι μαθητές συγχέουν τους άρρητους είτε με τους αρνητικούς είτε με τους αριθμούς απείρων δεκαδικών ψηφίων ή μη ακεραίων (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Η έρευνα των Yilmaz&Ay (2018) επιβεβαιώνει τα παραπάνω καθώς οι μαθητές που συμμετείχαν φάνηκαν να αντιμετωπίζουν παρόμοιες δυσκολίες στον ορισμό των άρρητων και στην επεξήγηση των διαφορών μεταξύ των δύο συνόλων (ρητών και άρρητων). Η ερώτηση που επιλέχθηκε από τους Yilmaz&Ay(2018) σχετικά με την διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να ορίσουν τους άρρητους ήταν: << Τι σκέφτεσαι όταν ακούς την λέξη άρρητος; Μπορείς να δώσεις έναν ορισμό για τους αριθμούς αυτούς;>> Μόνο οι μισοί εκ των ερωτηθέντων μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση (άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή διάφορο του μηδενός), ενώ οι υπόλοιποι έδωσαν ημιτελείς ή λανθασμένες απαντήσεις όπως ότι: άρρητοι είναι οι αριθμοί των οποίων το δεκαδικό μέρος αποτελείται με άπειρα δεκαδικά ψηφία, αγνοώντας την μη περιοδικότητα.

Σε έρευνά τους οι Arcavi, Bruckheimer, Ben-Zvi (1987) εξέτασαν εν' ενεργεία καθηγητές μαθηματικών του Ισραήλ με μια από τις ερωτήσεις να αφορά τον ορισμό των άρρητων. Οι απαντήσεις που έγιναν δεκτές και δόθηκαν από τα δύο τρίτα του δείγματος είναι οι σχολικοί ορισμοί: «Άρρητος είναι ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί σαν πηλίκο ακεραίων (με παρονομαστή διάφορο του μηδενός)» ή «Άρρητος ονομάζεται κάθε δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται με μη περιοδικό τρόπο» ,ενώ όπως αναφέρεται στην μελέτη μόνο δύο καθηγητές έδωσαν αυστηρό μαθηματικό ορισμό μέσω των τομών του Dedekind.

2.3ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σύμφωνα με την μελέτη των Fischbein, Jehiam&Cohen (1995), διαπιστώθηκε ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνα (μαθητές 9ης-10ης τάξης και μελλοντικοί δάσκαλοι) δυσκολεύονται να κατηγοριοποιήσουν τους αριθμούς σε ρητούς και άρρητους. Είναι πραγματικά εκπληκτικό, όπως αναφέρουν οι ερευνητές, ότι οι μαθητές όχι μόνο δεν κατανοούν την αρρητότητα του π, αλλά πολλοί από αυτούς δεν τον αναγνωρίζουν ούτε ως αριθμό. Οι μισοί από τους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα δεν κατέταξαν τον αριθμό 0,05555…. στους ρητούς (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995).. Αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών δεν κατατάσσει τον αριθμό $\sqrt{16}$στους ρητούς (όχι όμως και στους άρρητους). Στο ίδιο πλαίσιο, πολλοί μαθητές θεωρούν ότι ο αριθμός 34,2727…. είναι ταυτόχρονα ρητός και άρρητος (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Στην έρευνα των Merenluoto&Lehtinen (2002) που πραγματοποιήθηκε σε πάνω από 500 μαθητές Λυκείου φάνηκε επίσης η δυσκολία των μαθητών να κατατάξουν συγκεκριμένους αριθμούς $(12, \sqrt{81}, -5, \frac{22}{7}, \ 2.5\ , 2.3131\ , 3\sqrt{8}, \pi)$ στα αντίστοιχα αριθμητικά σύνολα που ανήκουν. Κάτω από το 10% των μαθητών ιεράρχησαν πλήρως όλους τους αριθμούς, ενώ παράλληλα μόνο το ¼ του συνόλου των μαθητών απάντησαν ορθά ότι όλοι οι δοθέντες αριθμοί είναι πραγματικοί. Η αναγνώριση των άρρητων αριθμών φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές, όπως αναφέρουν οι ερευνητές, καθώς περίπου το ¼ δεν αντιστοίχησε τον αριθμό π στο σύνολο των άρρητων και παράλληλα το ίδιο ποσοστό μαθητών απάντησε λανθασμένα ότι ο αριθμός 2,3131 είναι άρρητος (Merenluoto&Lehtinen, 2002).

2.4 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Είναι ένα κοινό φαινόμενο στην ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στην ανάπτυξη του ατόμου, ότι σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ορισμένα γεγονότα διατηρούν την αλήθεια αλλά καταρρέουν όταν διευρύνεται το πλαίσιο. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι ένα υποσύνολο ενός συνόλου έχει μικρότερο αριθμό στοιχείων ισχύει για τα πεπερασμένα σύνολα, αλλά καταρρέει στην περίπτωση των απειροσυνόλων. Προσδοκίες που βασίζονται στην εμπειρία με τα πεπερασμένα σύνολα, αποδεικνύονται λανθασμένες όταν εξάγονται ως συμπεράσματα σε άπειρα σύνολα. Σύμφωνα με τον Tall (1980), τέτοιες διαισθήσεις που βασίζονται σε σιωπηρές αλήθειες σε ένα περιορισμένο πλαίσιο μπορούν να προκαλέσουν σοβαρές συγκρούσεις όταν το πλαίσιο διευρύνεται, οι οποίες είναι ακόμα πιο σοβαρές όταν είναι υποσυνείδητες, ανυπότακτες και ως εκ τούτου απαρατήρητες.

Όταν σκεφτόμαστε τους άρρητους αριθμούς, δεν μπορούμε να αποφύγουμε τη σκέψη του απείρου. Ενώ οι Fischbeinet. al.(1995), δηλώνουν ότι ένα άτομο πρέπει να βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο στάδιο γνωστικής ανάπτυξης, ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσει την έννοια της μη αριθμησιμότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών, οιTall&Schwarzenberger (1978) στην έρευνά τους, υποστηρίζουν ότι υπάρχουν γνωστικά εμπόδια στην κατανόηση των διαφορών μεταξύ του «φυσικού απείρου», ένας όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αντιλήψεις των παιδιών για το άπειρο που βασίζεται στις καθημερινές τους εμπειρίες και του «τυπικού απείρου» που προκύπτει επιλέγοντας διαφορετικά θεμελιώδη αξιώματα σχετικά με τις άπειρες έννοιες. Έχει παρατηρηθεί ότι οι άνθρωποι διαισθητικά συλλαμβάνουν την έννοια του αριθμού ως ακατέργαστο είδος μέτρησης και όχι ως μια βασική έννοια.

Στην έρευνα των Fischbeinet.al.(1995), οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν περί της ορθότητας τριών ισχυρισμών: 1. Υπάρχουν περισσότερα στοιχεία στο σύνολο των ρητών σε σχέση με το σύνολο των αρρήτων 2. Υπάρχουν περισσότερα στοιχεία στο σύνολο των άρρητων σε σχέση με το σύνολο των ρητών 3. Τα δύο σύνολα αριθμών αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων. Από την ανάλυση των απαντήσεων προκύπτει ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (περίπου οι μισοί κατά μέσο όρο στις δύο τάξεις) θεωρούν ότι το σύνολο των ρητών και των άρρητων αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Όταν οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν εξηγήσεις σχετικά με τις απαντήσεις τους, φανερώθηκαν πολλές από τις παρανοήσεις τους. Απαντήσεις όπως ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ένας άρρητος, για κάθε ρητό αντιστοιχεί ένας άρρητος καθώς και ότι τα δύο σύνολα αποτελούνται από άπειρα ψηφία αναδεικνύουν τις δυσκολίες των μαθητών να αντιληφθούν ότι το σύνολο των άρρητων έχει σαφώς περισσότερα στοιχεία απ' αυτό των ρητών (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Τα αποτελέσματα της έρευνας των Sirotic&Zaskis (2007a) επιβεβαιώνουν τα παραπάνω καθώς όπως αναφέρεται η πιο συχνή απάντηση στην ερώτηση σχετικά με το πιο σύνολο(των ρητών ή των άρρητων) είναι πιο "πλούσιο" είναι ότι τα δύο σύνολα αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων και στην ερώτηση σχετικά με το ποια είναι η πιθανότητα να επιλέγοντας τυχαία έναν αριθμό από το διάστημα [0,1] να επιλέξω ρητό η συνηθέστερη απάντηση είναι το 50%. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μισοί από τους συμμετέχοντες που απάντησαν ορθά ότι το σύνολο των άρρητων υπερέχει πληθικά, στην ερώτηση περί της πιθανότητας να επιλεγεί ρητός σε δοθέν διάστημα απάντησαν λανθασμένα ότι αυτή είναι 50%. Σύμφωνα με τους Sirotic&Zaskis (2007a) το λάθος αυτό πιθανότατα συνέβη εξαιτίας της ανασφάλειας που προκλήθηκε από τη σύγκρουση μεταξύ των διαισθητικών και των επίσημων διαστάσεων των γνώσεών τους.

2.5ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΩΣ ΑΥΤΕΣ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

Μελέτες σχετικά με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί που βρισκόταν πριν αναλάβουν καθήκοντα αντιμετώπισαν δυσκολίες σε δραστηριότητες που περιελάμβαναν διαφορετικές αναπαραστάσεις, αν και γνώριζαν τόσο τον ορισμό όσο και τις ιδιότητες των άρρητων αριθμών. Επιπλέον, αποκαλύφθηκαν κάποιες ασυνέπειες στις γνώσεις τους σχετικά με την αναπαράσταση των άρρητων αριθμών ως αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία και ως κλάσματα. Δε λάμβαναν υπόψη το γεγονός ότι η δυνατότητα χρήσης της έκφρασης a/b βοηθά κάποιον να διακρίνει ρητούς και άρρητους αριθμούς. Αντ 'αυτού, συνήθως έτειναν να χρησιμοποιούν δεκαδικές αναπαραστάσεις (Zazkis&Sirotic, 2004b).

Στην έρευνά της η Kidron (2016), αναφέρει ότι οι ευρύτερες μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί και αφορούν τις διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις των άρρητων και πως αυτές επηρεάζουν την κατανόηση εστιάζουν σε τρείς διαφορετικές παραστάσεις. Η πρώτη αφορά τη **δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού**, η δεύτερη αφορά την **τοποθέτηση των άρρητων αριθμών ως σημεία στην ευθεία των πραγματικών αριθμών** και η τρίτη αφορά την **σχέση των άρρητων με τα μη μετρήσιμα μεγέθη.** Οι Voskoglou και Kosyvas (2012), σε συνέχεια της έρευνας των Fischbein, Jehian και Cohen (1995), συμφωνούν με το παραπάνω συμπεράσματα, καθώς αναφέρουν ότι ένα βασικό εμπόδιο για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών αφορά τις σημειωτικές τους αναπαραστάσεις τους, δηλαδή τους τρόπους με τους οποίους τους ορίζουμε, τους συμβολίζουμε και τους γράφουμε.

2.5.1. Η ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΑΡΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Στην έρευνα της η Kidron (2016), που πραγματοποίησε σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του Λυκείου και εστίασε στις δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων, έδειξε ότι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές, προσδιορίζουν ως το σύνολο των ρητών, το σύνολο όλων των δεκαδικών (πεπερασμένων και άπειρων). Παρά το γεγονός ότι η πλειονότητα των μαθητών είχαν διδαχθεί τους άρρητους αριθμούς, μικρά ποσοστά αυτών έδειξαν να γνωρίζουν την ύπαρξη αριθμών που στο δεκαδικό τους μέρος τα δεκαδικά ψηφία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά (Kidron, 2016). Τα αποτελέσματα της έρευνας της Kidron (2016), επιβεβαιώνονται και στην προϋπάρχουσα έρευνα των Fischbein, Jehian και Cohen (1995). Στην έρευνα των Fischbein, Jehian και Cohen (1995), διαπιστώθηκε ότι σε μεγάλο ποσοστό, μαθητές και φοιτητές, δεν μπορούν να αναγνωρίσουν ότι ο αριθμός 0,12112…. είναι άρρητος και περίπου οι μισοί μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν ούτε ότι ο αριθμός 0,0555.. είναι ρητός. Ο αριθμός 34,2727 δυσκόλεψε επίσης τους ερωτηθέντες μαθητές και φοιτητές, το 1/3 των φοιτητών απάντησε ότι είναι άρρητος και μόνο το 60% έδωσε σωστή απάντηση.

Στην έρευνά της η Kidron, εστιάζει σε μια απάντηση που δόθηκε από αρκετούς τελειόφοιτους μαθητές Λυκείου, όταν τους ζητήθηκε να αιτιολογήσουν την πεποίθησή τους, ότι κάθε δεκαδικός προκύπτει από τη διαίρεση δυο ακεραίων. Οι μαθητές λοιπόν αυτοί αναφέρουν ότι, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορετικά δεκαδικούς αριθμούς αφού όλοι οι αριθμοί είναι αποτέλεσμα της διαίρεσης δυο ακεραίων. Παρατηρείται εδώ μια πιθανή σύγκρουση μεταξύ της διαίσθησης των μαθητών με την έννοια των τυπικών κανόνων σκέψης του Fischbein (Kidron ,2016).

Αναφορικά λοιπόν με την αντίληψη ότι οι αριθμοί υπάρχουν και δεν έχουμε κανέναν έλεγχο πάνω τους, μπορούμε αρχικά να εστιάσουμε στους φυσικούς αριθμούς και να ορίσουμε τις πράξεις μεταξύ τους. Το μεγαλύτερο σύνολο αριθμών που μπορούν να κατανοήσουν οι μαθητές μέσω αυτής της αντίληψης είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. Η μετάβαση όμως στους πραγματικούς αριθμούς είναι πιο προβληματική. Η σκέψη του ότι ορίζουμε ένα μεγαλύτερο σύνολο αριθμών, αυτό των άρρητων, που περιλαμβάνει το προηγούμενο αλλά διατηρεί τις ιδιότητές του, είναι μια λογική που είναι αντίθετη με τη διαίσθηση ότι οι αριθμοί δεν υπάρχουν χωρίς την παρέμβασή μας.

Τη διάκριση των αναπαραστάσεων σε *διαφανείς (transparent)* και *αδιαφανείς (opaque)*, για να μελετήσουν τους τρόπους με τους οποίους διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις, ρητών και άρρητων αριθμών, επηρεάζουν τις απαντήσεις μελλοντικών καθηγητών των μαθηματικών σχετικά με την αρρητότητά τους, ή μη, χρησιμοποίησαν οι Voskoglou και Kosyvas (2012). Η διαφανής δεκαδική αναπαράσταση συναντάται τόσο σε δεκαδικούς όσο και σε άρρητους. Για παράδειγμα οι ρητοί: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$, $\frac{281849}{99900} = 2{,}821131131\mathbf{131}$...έχουν διαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις αλλά και οι άρρητοι 2.001313**1**13**11**13**111**13**1111**13… και 0.282**2**8**8**2**22**8**88**2**222**8**888**2… παρά τη πολυσύνθετη δομή τους, έχουν διαφανή δεκαδική αναπαράσταση. Οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις συναντώνται συχνά σε ρητούς αριθμούς, στους οποίους η περίοδος αποτελείται από πολλά ψηφία (Voskoglou και Kosyvas, 2012). Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο ρητός $\frac{144}{233} = 0{,}61802575107\ldots$, του οποίου η περίοδος αποτελείται από 232 ψηφία.

Κρίνεται λοιπόν απαραίτητο, οι μαθητές με βάση και τις προηγούμενες εμπειρίες τους να συνειδητοποιήσουν ότι οι περιοδικοί δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι οι ίδιοι αριθμοί γραμμένοι με διαφορετικό τρόπο (δηλαδή το κλάσμα και ο αντίστοιχος δεκαδικός είναι ο ίδιος αριθμός γραμμένος με διαφορετική σημειωτική αναπαράσταση) (Voskoglou&Kosyvas, 2012). Επίσης, πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές ότι ένας δεκαδικός είναι άρρητος, όχι γιατί τα δεκαδικά του ψηφία δεν προκύπτουν με μια συγκεκριμένη διαδικασία (βλέπε 0.282**2**8**8**2**22**8**88**2**222**8**888**2), αλλά επειδή δεν εμφανίζει περιοδικότητα, δηλαδή τα δεκαδικά του ψηφία δεν επαναλαμβάνονται με την ίδια συγκεκριμένη σειρά (Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Οι μαθητές θα πρέπει να ξεκαθαρίσουν, ότι κάθε κλάσμα με όρους ακεραίους και παρονομαστή διαφορετικό του μηδενός, οδηγεί πάντοτε σε σύμμετρο δεκαδικό αριθμό. Οι περισσότερες δεκαδικές αναπαραστάσεις κλασμάτων αποτελούνται από άπειρα δεκαδικά ψηφία, που αναφορικά με την περίοδο τους θα πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης *μ : ν* είναι μικρότερο του ν, κατά την εκτέλεση της διαίρεσης και ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων θαεπανεμφανιστεί κάποια στιγμή το ίδιο υπόλοιπο. (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Σχετικά με τη μικρή πιθανότητα, η δεκαδική αναπαράσταση ενός κλάσματος να είναι τερματιζόμενη, αξίζει να αναφερθεί ότι, αν ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο δυνάμεων του 2 ή του 5, δε μπορεί να γραφεί το κλάσμα ως τερματιζόμενος δεκαδικός. Ενισχύοντας τον ισχυρισμό ότι, κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων με παρονομαστή διάφορο του μηδενός και το αντίστροφο. Για την καλύτερη κατανόηση του ισχυρισμού, προτείνεται να δοθεί έμφαση στη μετατροπή απλών περιοδικών δεκαδικών σε κλάσματα (Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Έχοντας κατανοήσει οι μαθητές ότι στο σύνολο ρητών αριθμών οι σύμμετροι δεκαδικοί προέρχονται από κλάσματα ακεραίων, ένας μαθητής μπορεί να φτάσει στο συμπέρασμα ποιοι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν ως ασύμμετροι δεκαδικοί. Οι ασύμμετροι δεκαδικοί που συναντούν οι μαθητές είναι αρχικά οι τετραγωνικές ρίζες και στη πορεία οι ρίζες όλων των τάξεων. Όταν οι μαθητές κατακτήσουν τις έννοιες αυτές και προκειμένου να αποκτήσουν μια πλήρη θέαση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, προτείνεται να γνωρίσουν τους υπερβατικούς αριθμούς. Υπερβατικοί, ονομάζονται οι άρρητοι αριθμοί, που δεν προκύπτουν ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές, με ποιο γνωστούς το π και τη βάση e των φυσικών λογαρίθμων.

Οι άνθρωποι τείνουν να προσαρμόζουν τη θεωρητική και αλγοριθμική τους γνώση για την προώθηση των συμπερασμάτων τους, που προκύπτουν από τη διαισθητική τους γνώση, πράγμα που πιθανά οφείλεται στην τάση τους για λογική συνέπεια (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Όταν λοιπόν τα συμπεράσματα της διαισθητικής τους γνώσης δεν είναι ξεκάθαρα και ακριβή, όπως συμβαίνει με τις αδιαφανείς αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών, είναι πολύ πιθανό να προκύψουν λάθη και παρερμηνείες (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Παρατηρούνται συχνά τέτοια λάθη, με πολύ χαρακτηριστικό την ταύτιση του π, με τη ρητή προσέγγισή του, το 3,14.

Σε συνέχεια της υπόθεσης ότι οι διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις επηρεάζουν την κατανόηση των άρρητων, η Zaskis (2005), πραγματοποίησε μια ενδιαφέρουσα και ασυνήθιστη έρευνα όπου συνδύασε τους πρώτους και τους άρρητους αριθμούς. Το στοιχείο που θεώρησε έναυσμα αυτού του παραλληλισμού είναι ότι και οι δύο κατηγορίες αριθμών, έχουν ορισμούς που προσδιορίζονται όχι από τις ιδιότητες που έχουν, αλλά από εκείνες που δεν έχουν. Πιο συγκεκριμένα, ως άρρητοι ορίζονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν ως πηλίκο ακεραίων με παρονομαστή διάφορο του μηδενός και πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν ως γινόμενο φυσικών αριθμών μεγαλύτερων της μονάδας. Ένας ισοδύναμος ορισμός για τους άρρητους όπως αναφέρεται είναι, «άρρητοι είναι οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα **μη** επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία», ενώ για τους πρώτους: «πρώτος είναι ο αριθμός που **δεν** έχει άλλους διαιρέτες πέρα από 1 και τον εαυτό του. Στην έρευνα της Zaskis (2005), τέθηκε το ερώτημα σε μελλοντικούς δασκάλους, αν ο αριθμός $\Phi=151\cdot157$ είναι πρώτος. Μόνο τα 2/3 αυτών απάντησαν ορθά ότι ο αριθμός Φ είναι σύνθετος, αλλά πολύ λιγότεροι από αυτούς ήταν ικανοί να αντιληφθούν την προφανή αναπαράσταση, ότι δηλαδή ο δοθέν αριθμός Φ είναι γινόμενο παραγόντων μεγαλύτερων της μονάδας. Συμπερασματικά, οι συμμετέχοντες στην έρευνα, δεν δείχνουν ευέλικτοι στην αξιοποίηση των διαφανών χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων, τόσο σε άρρητους όσο και σε πρώτους αριθμούς. Όπως αναφέρει η Zaskis (2005), αν η διδασκαλία εμπλουτιστεί με πολλά τέτοια παραδείγματα, τότε είναι πιθανό οι μαθητές να κατακτήσουν τις σχετικές έννοιες περί διαφανών ή μη αναπαραστάσεων. Πρόκειται για μια πρόκληση στην εκπαίδευση, αφού έτσι οι μαθητές θα μπορέσουν να κατακτήσουν τις εννοιολογικές δομές, σε αντιπαράθεση με την υπάρχουσα κατάσταση στην εκπαίδευση που βασίζεται κυρίως σε αλγοριθμικές διαδικασίες.

2.5.2. Η ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΩΣ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μελέτες που διερεύνησαν τη γνώση σχετικά με τον εντοπισμό άρρητων αριθμών στην ευθεία των αριθμών κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές είχαν δυσκολία κατά την εύρεση του σημείου που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο ρητό αριθμό όπως και σε έναν άρρητο στην ευθεία των αριθμών. Ήταν επίσης πρόκληση για τους συμμετέχοντες μαθητές να συσχετίζουν άρρητους αριθμούς με την έννοια του γεωμετρικού μήκους. Εκτός αυτού, δεν μπορούσαν να αντιληφθούν ότι οι άρρητοι αριθμοί εκφράζονται ως σημεία στην ευθεία των αριθμών και τείνουν να υποδηλώνουν αυτά τα σημεία με βάση τις διαισθήσεις.

Στην έρευνα των Fischbein et. al. (1995), οι μαθητές ερωτήθηκαν σχετικά με το άπειρο των σημείων που βρίσκονται σε ένα διάστημα. Το ερώτημα τέθηκε ως εξής: «Δοθέντων δύο σημείων Α και Β σε μια ευθεία γραμμή, πόσα σημεία αντιστοιχούν σε ρητούς και πόσα σε άρρητους αριθμούς;». Σχετικά με τους άρρητους αριθμούς περίπου το 65% των μαθητών της 10^{ης} τάξης απάντησε ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια σημεία. Στην προφανέστατη λανθασμένη πρόταση ότι σε κάθε σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένας ρητός αριθμός ανταποκρίθηκαν μη ορθά περίπου οι μισοί μαθητές ενώ ταυτόχρονα οι περισσότεροι από αυτούς απάντησαν σωστά ότι κάθε άρρητος αντιστοιχεί σε ένα σημείο της ευθείας των αριθμών. Παράλληλα πολλοί μαθητές της 10^{ης} τάξης δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι σε κάθε σημείο της ευθείας των αριθμών αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός.

Στην έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007β), ζήτησαν από τους υποψήφιους δασκάλους να τοποθετήσουν το $\sqrt{5}$, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Οι ερευνητές αναφέρουν ότι είναι δύσκολο για κάποιον που δεν έχει ξαναδεί άρρητο σημείο στον πραγματικό άξονα, να φανταστεί ότι υπάρχει τέτοιο, γνωρίζοντας παράλληλα ότι η ευθεία των πραγματικών είναι παντού πυκνή από ρητούς αριθμούς. Στόχος της έρευνάς τους είναι να ανακαλύψουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις, με τις οποίες οι υποψήφιοι δάσκαλοι, θα προσπαθήσουν να δώσουν λύση. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, η γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών ήταν σε μεγάλο βαθμό απούσα από τις εικόνες και τη λογική πολλών συμμετεχόντων. Η κοινή αντίληψη των περισσοτέρων για την ευθεία των πραγματικών αριθμών, φαίνεται να περιορίζεται στη λογική των ρητών αριθμών, ή ακόμα πιο αυστηρά, σε δεκαδικούς αριθμούς όπου μόνο αυτοί με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία μπορούν να λάβουν αναπαράσταση ως σημεία στην πραγματική ευθεία. Πιο συγκεκριμένα, οι απαντήσεις τους, εμπίπτουν σε πέντε ξεχωριστές κατηγορίες: α) μια ακριβής θέση του σημείου χρησιμοποιώντας τη γνώση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος β) περισσότερο ή λιγότερο λεπτή δεκαδική προσέγγιση γ) προσεγγίσεις που σχετίζονται με τη γραφική αναπαράσταση σχετικών συναρτήσεων και δ) οριστικός ισχυρισμός ότι το $\sqrt{5}$, δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν σημείο της πραγματικής ευθείας και ε) δεν γνωρίζω. Μόνο το 20% των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε τη γνώση του Πυθαγορείου θεωρήματος και οι διπλάσιοι χρησιμοποίησαν δεκαδικές προσεγγίσεις στο δέκατο ή στο εκατοστό. Το 13% χρησιμοποίησε αλγεβρικούς χειρισμούς όπως τη χρήση της συνάρτησης: $f(x) = x^2 - 5$ και ένα παρόμοιο ποσοστό έδωσε απάντηση μέσω αυστηρής προσέγγισης δεκαδικού στο διάστημα [2, 3].

Η γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων θα βοηθήσει εκείνους που θεωρούν ότι ένας άρρητος δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός, καθώς δε μπορεί να καταγραφεί πλήρως. Επιπλέον, η γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων μπορεί να αποδειχθεί πολύ ισχυρό και απαραίτητο διδακτικό εργαλείο ενθυλάκωσης μιας διαδικασίας σε ένα αντικείμενο, ειδικά στην περίπτωση όπου ο εκπαιδευόμενος είναι παγιδευμένος στην κατώτερη φάση ανάπτυξης της έννοιας. Επιπλέον η γεωμετρική αναπαράσταση είναι προσιτή στον εκπαιδευόμενο, καθώς απαιτεί μόνο τη γνώση του Πυθαγορείου θεωρήματος και μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τη διαφορά ρητών και άρρητων. Έτσι είναι πιθανό με τον τρόπο αυτό, να γίνουν πιο ευαίσθητοι στη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων καθώς και να αποβάλλουν την ταύτιση των άρρητων με τη δεκαδική τους αναπαράσταση. Βέβαια αυτό απαιτεί οι δάσκαλοι και οι καθηγητές μαθηματικών, να έχουν κατακτήσει τις αντίστοιχες γνώσεις, ώστε να μπορέσουν να τις μεταφέρουν σωστά.

2.5.3. Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΜΕΓΕΘΗ

Η υπόθεση της αδυναμίας σύλληψης της ιδέας της ύπαρξης μη μετρήσιμων μεγεθών, φαίνεται να επιβεβαιώνεται στην έρευνα των Fischbein, Jehian και Cohen (1995). Η ερώτηση, αν είναι πιθανό να βρούμε μήκη που να προέρχονται από το ίδιο σύνολο αριθμών, για την πλευρά και την διαγώνιο ενός τετραγώνου, απαντήθηκε σωστά από λίγους μαθητές και σχεδόν τους μισούς φοιτητές. Φαίνεται ότι η ιδέα των μη μετρήσιμων μεγεθών, ακόμα και αν αναφέρεται σε πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου, είναι μη ξεκάθαρη σε μαθητές και φοιτητές. Η ιδέα των μη μετρήσιμων μεγεθών φαίνεται να μην κατανοείται πλήρως, παρά το γεγονός ότι οι άρρητοι είναι η αριθμητική έκφραση της μη μετρησιμότητας.

Οι περισσότεροι άρρητοι αριθμοί, όπως π.χ. οι $\sqrt[3]{2}$, π, e κλπ., αντιπροσωπεύουν μήκη γεωμετρικών μεγεθών, που δεν είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη. Ωστόσο αντιστοιχούμε και στους αριθμούς αυτούς σημεία του πραγματικού άξονα. Στην έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007β), εξετάστηκε η ικανότητα υποψηφίων καθηγητών, σχετικά με τη γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, η γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών, φάνηκε να απουσιάζει από το σκεπτικό πολλών συμμετεχόντων. Η αντίληψη της γραμμής των πραγματικών αριθμών, φαίνεται να περιορίζεται σε ρητούς δεκαδικούς με πεπερασμένο μάλιστα δεκαδικό μέρος.

2.6Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Με τη δυσκολία στην κατανόηση της ύπαρξης δυο απειροσυνόλων μέσα σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών ασχολήθηκαν στην έρευνα τους οι Fischbein, Jehian και Cohen (1995).Οι ερευνητές υπέθεσαν την ύπαρξη διαισθητικών δυσκολιών στην κατανόηση της ύπαρξης αυτών των απειροσυνόλων, οι οποίες όμως σύμφωνα με τα συμπεράσματα της έρευνας φαίνεται να επιβεβαιώνονται (Fischbein, Jehian και Cohen ,1995).

Στην έρευνα των Merenluoto & Lehtinen (2002) το 1/3 των μαθητών απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση: « Πόσοι ακέραιοι βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς $-5\sqrt{2}$ και $8\sqrt{2}$;», μετρώντας μόνο τους ακεραίους -5 έως 8 και αγνοώντας το $\sqrt{2}$ ως πολλαπλασιαστή. Στην μελέτη του Mamolo (2009) παρατηρείται μια σαφή διάσταση στις αντιλήψεις των προπτυχιακών φοιτητών σχετικά με τα σημεία πάνω στην ευθεία των αριθμών και στους αριθμούς που υπάρχουν σε αυτή. Αναλύοντας την απάντηση των φοιτητών στην ερώτηση: «Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του $\frac{1}{19}$ και του $\frac{1}{17}$;», αναδεικνύονται πολλές παρανοήσεις τους. Κάποιες από τις κλασσικές απαντήσεις είναι ότι οι αριθμοί είναι άπειροι καθώς μπορούμε συνεχώς να προσθέτουμε αριθμούς στους αριθμητές και παρονομαστές των δοθέντων κλασμάτων και να είμαστε βέβαιοι ότι τα κλάσματα που θα προκύψουν θα είναι εντός των ορίων που δόθηκαν όπως επίσης ότι στις δεκαδικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων που δίνονται μπορούμε συνεχώς να προσθέτουμε δεκαδικά ψηφία (Mamolo, 2009). Οι απαντήσεις αυτές όμως εμπεριέχουν δύο κοινά ζητήματα αφού το άπειρο αντιμετωπίζεται ως διαδικασία και επίσης οι αριθμοί που εντοπίζονται είναι όλοι κλάσματα αγνοώντας τους άρρητους μεταξύ τους. Στην ίδια έρευνα είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι οι φοιτητές που θεωρούν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ένα συγκεκριμένο διάστημα ταυτόχρονα υπάρχουν πεπερασμένα σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Και οι Sirotic & Zazkis (2007α) εξέτασαν τις διαστάσεις της γνώσης των συμμετεχόντων σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι ρητοί και οι άρρητοι συνυπάρχουν στην ευθεία των αριθμών, αναλύοντας τις απαντήσεις τους και τις αντίστοιχες επεξηγήσεις στις ακόλουθες προτάσεις: α) Είναι πάντα πιθανό να βρεθεί ένας ρητός αριθμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο άρρητων αριθμών, β) Είναι πάντα πιθανό να βρεθεί ένας άρρητος αριθμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο άρρητων αριθμών γ) Είναι πάντα πιθανό να βρεθεί ένας άρρητος αριθμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο ρητών αριθμών. δ) Είναι πάντα πιθανό να βρεθεί ένας ρητός αριθμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο ρητών αριθμών. Περίπου το ¼ των συμμετεχόντων θεωρούν ότι υπάρχουν κάποιοι άρρητοι οι οποίοι είναι τόσο "κοντά" ώστε κανένας ρητός να μην υπάρχει ανάμεσα.

2.7ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΡΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Μια ανασκόπηση των μελετών σχετικά με τις πράξεις με άρρητους αριθμούς έδειξε ότι οι συμμετέχοντες στις υποκείμενες μελέτες δεν μπορούσαν να

ότι κάθε άρρητος αριθμός είναι στην πραγματικότητα ένας πραγματικός αριθμός. Κατά συνέπεια, είχαν εννοιολογικές δυσκολίες ως προς το τι σημαίνουν αυτοί οι αριθμοί. Οι μελέτες που επικεντρώθηκαν στις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών συνόλων αποκάλυψαν ότι οι συμμετέχοντες δεν μπορούσαν να συλλάβουν τους άρρητους αριθμούς ως πραγματικούς αριθμούς και ως αποτέλεσμα είχαν δυσκολίες να τοποθετήσουν τους άρρητους αριθμούς κάτω από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αντ 'αυτού, θεωρούσαν τους ρητούς αριθμούς ως ένα υποσύνολο των άρρητων και έτσι, ήταν δύσκολο να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των δύο συνόλων (Arbor, 2012, Ercire, et. al., 2016).

Οι δυσκολίες στη κατανόηση των ιδιοτήτων του συνόλου των άρρητων, φαίνεται και από τις απαντήσεις των εμπλεκομένων στην έρευνα των Sirotic και Zazkis (2007α), που αφορούσαν τις πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών. Ο ισχυρισμός: «αν προσθέσω έναν άρρητο με έναν άλλον άρρητο το αποτέλεσμα είναι πάντα άρρητος», απαντήθηκε λανθασμένα από το 42% των μελλοντικών δασκάλων, όπως επίσης λανθασμένα απαντήθηκε με λίγο μικρότερο ποσοστό, ο ισχυρισμός «αν πολλαπλασιάσω έναν άρρητο με έναν άλλον άρρητο το αποτέλεσμα είναι πάντα άρρητος». Καταλήγουν λοιπόν, έπειτα από εκτενή έρευνα οι Sirotic και Zazkis (2007α) ότι, οι υποβόσκουσες διαισθητικές δυσκολίες σχετικά με τους άρρητους, συνδέονται με την ελλιπή γνώση των ιδιοτήτων του συνόλου καθώς και με την ελλιπή εμπειρία σε αλγοριθμικές διαδικασίες στο σύνολο αυτό.

2.8Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ

Η έρευνα στην Ελλάδα σχετικά με τους άρρητους είναι περιορισμένη σε σχέση με το πλήθος των ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με τους ρητούς. Οι Voskoglou & Kosyvas (2011, 2012) πραγματοποίησαν μια μελέτη σε μαθητές Γυμνασίου και σε φοιτητές του Τ.Ε.Ι. (υποψήφιους μηχανικούς και οικονομολόγους) σχετικά με την κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Η μελέτη τους βασίστηκε στις απαντήσεις φοιτητών και μαθητών σε ένα ερωτηματολόγιο καθώς και σε συνεντεύξεις που έγιναν σε αυτούς. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα της έρευνάς τους οι απαντήσεις των σπουδαστών του Τ.Ε.Ι. είναι εμφανώς καλύτερες σε σχέση με αυτές του γυμνασίου. Σύμφωνα με τους Voskoglou & Kosyvas (2011, 2012), αυτή είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι η ηλικία και το εύρος των μαθηματικών γνώσεων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην καλύτερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν δείχνουν επίσης ότι η ικανότητα άνετου χειρισμού πολλών αναπαραστάσεων στους πραγματικούς αριθμούς βοηθά τους μαθητές να τους κατανοήσουν σε βάθος.

Στην έρευνα του Voskoglou (2013) μελετάται η κατανόηση των άρρητων με την εφαρμογή της μεθόδου APOS / ACE. Το APOS / ACE, το οποίο αναπτύχθηκε από μια ομάδα μαθηματικών και δασκάλων μαθηματικών με επικεφαλής τον EdDubinsky (Asiala et. al., 1996 όπ. αναφ. στο Voskoglou, 2013), είναι μια μέθοδος εκμάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών το οποίο παρέχει εξηγήσεις για τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του άρρητων αριθμών και ένα γενικό σχέδιο για τη διδασκαλία τους στο σχολείο. Πρόκειται για ένα γενικό σχέδιο για τη διδασκαλία των άρρητων αριθμών μέσω μιας θεωρητικής ανάλυσης των εννοιών και των όρων που εμπλέκονται καθώς και για τις διανοητικές κατασκευές που πρέπει να αναπτύξει ένας μαθητής ώστε να κατανοήσει τις έννοιες. Στην έρευνα αυτή οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, όπου η μια ομάδα διδάχτηκε τους άρρητους με τον παραδοσιακό τρόπο ενώ η άλλη με την μέθοδο APOS / ACE. Η μέθοδος χρησιμοποιεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών(ρητούς αριθμούς γραμμένους ως κλάσματα και ως περιοδικούς δεκαδικούς, οι άρρητοι αριθμοί θεωρούνται ως μη ρητοί και ως δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που είναι όρια ακολουθιών ρητών αριθμών, γεωμετρικές αναπαραστάσεις, κ.λπ.) και σε ευέλικτους μετασχηματισμούς μεταξύ τους, με στόχο την εννοιολογική κατανόηση. Επίσης, ενσωματώνει στο μάθημα την ιστορία των μαθηματικών, η οποία έχει αποδειχθεί από πολλές έρευνες ότι λειτουργεί ενισχυτικά στη βαθύτερη κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας του Voskoglou (2013), η κατανόηση των πραγματικών αριθμών από τους μαθητές χτυπά εμποδίζεται από δυσκολίες που συνδέονται με την ατελή προηγούμενη κατανόηση των ρητών αριθμών καθώς και με τη φύση των άρρητων αριθμών. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων δίνει μια ισχυρή ένδειξη ότι η εφαρμογή της μεθόδου APOS/ACE για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών γενικά και των άρρητων αριθμών ειδικότερα μπορεί να βοηθήσει αποτελεσματικά τους μαθητές στην οικοδόμηση ενός ισχυρού γνωστικού σχήματος για τα βασικά σύνολα αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα αντικείμενο διδασκαλίας και μάθησης, το οποίο οι μαθητές το συναντούν διαδοχικά στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Η ύπαρξη των άρρητων αριθμών είναι το στοιχείο αυτό που οδηγεί στην επέκταση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Όταν εισάγονται οι άρρητοι αριθμοί, ένα άτομο πρέπει να ανακατασκευάσει την έννοια του αριθμού ώστε να ταιριάξει τα νέα στοιχεία στις υπάρχουσες γνωστικές δομές. Καθώς η ευθεία των αριθμών είναι πυκνή από τους ρητούς αριθμούς, μοιάζει λογικό στη πλειοψηφία των μαθητών να μην υπάρχει χώρος για άλλους αριθμούς. Έτσι όταν οι μαθητές εισάγονται στους άρρητους δυσκολεύονται να δεχτούν ότι στην αριθμογραμμή υπάρχουν και άλλοι και μάλιστα πολλοί περισσότεροι αριθμοί. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι οι άρρητοι υπερέχουν σε πλήθος από τους ρητούς καθώς και να συνειδητοποιήσουν και να αποδεχθούν την “ιδιαίτερη” φύση τους.

Μια συλλογική ανασκόπηση όλων των μελετών καταδεικνύει ότι οι μαθητές των Γυμνασίων και των Λυκείων καθώς και οι εν’ ενεργεία και οι εν’ δυνάμει καθηγητές μαθηματικών, αντιμετωπίζουν διάφορες δυσκολίες σχετικά με τους άρρητους αριθμούς (Arbor, 2012, Arcavi, Bruckheimer και Ben-Zvi, 1987, Ercire, et. al., 2016, Fischbein, Jehian και Cohen,1995, Merenluoto & Lehtinen, 2002, Sirotic & Zazkis, 2007α, Tall & Schwarzenberger, 1978, Voskoglou και Kosyvas, 2012, Yilmaz&Ay, 2018, Zaskis, 2005, Kidron, 2016). Είναι φανερό από το σύνολο των σχετικών ερευνών ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να διατυπώσουν έναν τυπικό ορισμό των άρρητων αριθμών (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995, Yilmaz & Ay, 2018, Arcavi, Bruckheimer, Ben-Zvi, 1987, Merenluoto & Lehtinen, 2002), ενώ ταυτόχρονα ένα μεγάλο ποσοστό αυτών τους ταυτίζει με τη δεκαδική τους προσέγγισή (Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Ταξινομούν τους αριθμούς με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία αλλά και κάποιες ρίζες ως άρρητους αριθμούς, αλλά δεν μπορούν να δώσουν επαρκή επεξήγηση. Σε μελέτες για την κατανόηση των πράξεων με άρρητους διαπιστώθηκε ότι ήταν δύσκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν τις πράξεις αυτές (Ercire, 2014). Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου δεν μπορούσαν να θεωρήσουν τους άρρητους αριθμούς ως πραγματικούς αριθμούς και οι γνώσεις τους ήταν απλώς απομνημονευμένες πληροφορίες (Merenluoto & Lehtinen, 2002, Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995)

Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών της Ελλάδας για τα σχολικά μαθηματικά (Παπασταυρίδης, Ζαχαριάδης, 2016), οι μαθητές Λυκείου πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται την ύπαρξη διαφορετικών αριθμητικών συνόλων, να κατανοούν σε βάθος την έννοια του αριθμητικού συνόλου, το πως σχετίζονται τα διαφορετικά αριθμητικά σύνολα και ποιες και εάν οι ιδιότητες του ενός συνόλου μεταφέρονται σαν ιδιότητες και σε κάποιο άλλο αριθμητικό σύνολο. Οι μαθητές του Γυμνασίου εισάγονται στην έννοια των άρρητων και ως εκ' τούτου οι προσδοκίες είναι χαμηλότερες σε σχέση με τους μαθητές του Λυκείου για τους οποίους κρίνεται αναγκαία η κατανόηση της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές του Λυκείου πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίζουν με σαφήνεια τα σύνολα των αριθμών που αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σημεία κλειδιά θεωρούνται η κατανόηση προτάσεων όπως ότι δοθέντος ενός σημείου και μιας μονάδας μέτρησης κάθε σημείο της ευθείας των αριθμών αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντιστρόφως, επίσης ότι οι άρρητοι αριθμοί μπορούν να προσεγγιστούν μέσω κλασμάτων ή μέσω δεκαδικών αριθμών και τέλος κομβικής σημασίας θεωρείται η κατανόηση των διαφορών μεταξύ ρητών και άρρητων.

Για τους μαθητές του Λυκείου οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες στην κατανόηση των αρρήτων είναι πολύ πιθανό να οδηγούν σε προβλήματα κατανόησης βασικών στοιχείων της ανάλυσης (Kidron, 2016). Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία των στοιχείων Ανάλυσης που γίνεται στην Γ΄ Λυκείου προϋποθέτει βαθιά κατανόηση και γνώση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και ιδιαίτερα στα ζητήματα εκείνα που υπερβαίνουν εννοιολογικά το επίπεδο των αριθμητικών πράξεων (όπως είναι π.χ. η διάκριση των δεκαδικών αναπαραστάσεων ρητών και άρρητων αριθμών, οι έννοιες της πυκνότητας και της διαδοχικότητας ή του αριθμήσιμου και του συνεχούς που διαφοροποιούν μεταξύ τους τα βασικά υποσύνολα του R) (Θωμαΐδης, 2018).

Δυο χαρακτηριστικοί στόχοι, της Α' Λυκείου (Παπασταυρίδης, Ζαχαριάδης, 2016), που αναφέρονται ειδικά στη διάκριση των βασικών υποσυνόλων του R είναι οι ακόλουθοι:

- Να μάθουν να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (N, Z, Q, R–Q) που ανήκουν.
- Να μάθουν να διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.

Οι παραπάνω στόχοι του προγράμματος σπουδών που αναφέρονται στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών και εκτέθηκαν παραπάνω, μένουν στο περιθώριο καθώς οι διδάσκοντες δίνουν περισσότερη έμφαση σε βασικά στοιχεία του αλγεβρικού λογισμού. Είναι όμως κατανοητό ότι οι στόχοι αυτοί πρέπει να κατακτηθούν ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν έννοιες όπως «Δύναμη με ρητό και άρρητο εκθέτη» και «Εκθετική συνάρτηση» καθώς και γενικότερα στοιχεία της (πραγματικής) Ανάλυσης που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου (Θωμαΐδης, 2018).

Η διδασκαλία των στοιχείων της (πραγματικής) Ανάλυσης που γίνεται στην Γ΄ Λυκείου απευθύνεται σε μαθητές οι οποίοι έχουν σχεδόν πλήρη άγνοια των κρίσιμων διαφορών ανάμεσα στα διάφορα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών (Θωμαΐδης, 2018). Δεδομένου μάλιστα ότι οι μαθητές ασχολούνται αποκλειστικά με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων είναι επιτακτική η ανάγκη οι μαθητές να κατανοήσουν το θεμελιώδες γεγονός ότι στο ίδιο διάστημα της πραγματικής ευθείας υπάρχουν δύο άπειρα σύνολα αριθμών διαφορετικού είδους. Είναι αδιαμφισβήτητα προαπαιτούμενη η γνώση της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών ώστε να κατανοηθεί η έννοια της συνέχειας μια συνάρτησης καθώς και πολλές ακόμα προτάσεις, όπως ότι μια συνάρτηση μπορεί να μηδενίζεται σε άπειρα, αριθμήσιμου πλήθους σημεία ενός διαστήματος, χωρίς αυτή να είναι σταθερή. Χρειάζεται σε βάθος κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα συμπεράσματα βασικών θεωρημάτων της Ανάλυσης που χρησιμοποιούν στην επίλυση ασκήσεων (όπως π.χ. το θεώρημα Bolzano), δεν ισχύουν αν το θεώρημα εφαρμοστεί στο άπειρο και πυκνό σύνολο των ρητών αριθμών ενός διαστήματος ή ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να μηδενίζεται σε άπειρα, αριθμήσιμου πλήθους σημεία ενός διαστήματος χωρίς η συνάρτηση να είναι σταθερή (Θωμαΐδης, 2018).

Όλα τα παραπάνω αποτέλεσαν έναυσμα για τη παρούσα έρευνα καθώς προέκυψε η ανάγκη να διερευνηθούν οι συμπεριφορές των μαθητών της Γ’ Λυκείου στους άρρητους αριθμούς.

3.2. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθούν οι συμπεριφορές των μαθητών της Γ’ Λυκείου στους άρρητους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα θα διερευνηθούν οι γνώσεις των μαθητών που σχετίζονται:

- με την ικανότητά των μαθητών να ταξινομούν τους αριθμούς στα σύνολα των ρητών, άρρητων και πραγματικών,
- με τον ορισμό ρητών και άρρητων αριθμών,
- με το πλήθος των άρρητων, την πυκνότητα και την συνύπαρξη ρητών και άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών,
- με την κατηγοριοποίηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ άρρητων αριθμών, σε ρητά ή άρρητα.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι, να αναλύσει τον βαθμό κατανόησης των μαθητών Λυκείου σχετικά με το σύνολο των άρρητων αριθμών, να αναδείξει τις συνηθέστερες δυσκολίες, εμπόδια και παρανοήσεις τους και να συγκρίνει τα αποτελέσματα με αυτά της βιβλιογραφίας.

Για το σκοπό αυτό θα διερευνηθούν οι ακόλουθες ερευνητικές υποθέσεις:

- Οι μαθητές δυσκολεύονται να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους.
- Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ των ρητών και των άρρητων, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στην ταξινόμηση.
- Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι το σύνολο των άρρητων αποτελείται από περισσότερα στοιχεία και δεν κατανοούν σε μεγάλο βαθμό την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Οι μαθητές δυσκολεύονται να καθορίσουν αν τα αποτελέσματα των πράξεων (πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού) μεταξύ άρρητων είναι ρητά ή άρρητα.

Οι ερευνητικές υποθέσεις της έρευνάς μας προέκυψαν έπειτα από συστηματική μελέτη των αποτελεσμάτων αντίστοιχων ερευνών. Υποθέτουμε λοιπόν ότι και οι μαθητές της Γ’ Λυκείου στη χώρα μας θα παρουσιάσουν αντίστοιχες δυσκολίες. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε αποτελέσματα άλλων μελετών σε αντιστοίχηση με την κάθε ερευνητική υπόθεση, τα οποία αποτέλεσαν έναυσμα ώστε να δομηθούν η υποθέσεις της έρευνάς μας.

✓ **Οι μαθητές δυσκολεύονται να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους.**

Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), μόνο το 28% των μαθητών Λυκείου (grade 10) διατύπωσαν σωστά έναν ορισμό για τους ρητούς και τους άρρητους. Το 20% των μαθητών της τάξης αυτής, που έλαβαν μέρος στην έρευνα, δίνουν ορισμούς για τους ρητούς όπως: ρητοί είναι οι θετικοί αριθμοί ή ρητοί είναι οι θετικοί αριθμοί. Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα της έρευνας των Fischbein, Jehiam&Cohen (1995) και στην ερώτηση σχετικά με τον ορισμό των άρρητων. Μόνο το 14% των μαθητών του Λυκείου(grade 10) διατύπωσαν έναν σωστό ορισμό για τους άρρητους (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995). Ανάμεσα στις λανθασμένες απαντήσεις είναι : «άρρητοι είναι οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ολόκληροι» ή «άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να εκφραστούν μέχρι το τέλος» κ.α. (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995). Στην έρευνα της Kidron (2016) μόνο το 33% των μαθητών των δυο τελευταίων τάξεων του Λυκείου έδειξαν να κατανοούν την ύπαρξη απειροψήφιων δεκαδικών με μη επαναλαμβανόμενο δεκαδικό μέρος. Στην έρευνα των Yilmaz & Ay(2018) διερευνήθηκε η ικανότητα των μαθητών (grade 8) να ορίσουν τους άρρητους. Μόνο οι μισοί εκ των ερωτηθέντων μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση (άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή διάφορο του μηδενός), ενώ οι υπόλοιποι έδωσαν ημιτελείς ή λανθασμένες απαντήσεις όπως ότι: άρρητοι είναι οι αριθμοί των οποίων το δεκαδικό μέρος αποτελείται με άπειρα δεκαδικά ψηφία, αγνοώντας την μη περιοδικότητα κ.α..

Όπως είναι φανερό από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, οι μαθητές δυσκολεύονται σε μεγάλο βαθμό να ορίσουν τόσο τους ρητούς όσο και τους άρρητους. Υποθέτουμε ότι και οι μαθητές της Γ' Λυκείου της έρευνάς μας θα αντιμετωπίσουν αντίστοιχες δυσκολίες σε αυτούς τους ορισμούς.

✓ **Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ των συνόλων που συγκροτούν τους πραγματικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στην ταξινόμηση.**

Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) αναδείχθηκε η αδυναμία των μαθητών (grade 9-10) στην ταξινόμηση δοθέντων αριθμών στο αντίστοιχο αριθμητικό σύνολο. Κάτω από το 10% των μαθητών ιεράρχησαν πλήρως όλους τους αριθμούς, ενώ παράλληλα μόνο το ¼ του συνόλου των μαθητών απάντησαν ορθά ότι όλοι οι δοθέντες αριθμοί είναι πραγματικοί (Fischbein, Jehiam&Cohen, 1995). Η αναγνώριση των άρρητων αριθμών φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές, όπως αναφέρουν οι ερευνητές (Fischbein, Jehiam &Cohen, 1995, Merenluoto & Lehtinen, 2002). Στην έρευνα των Voskoglou, Kosyvas (2011), αναδεικνύεται η αδυναμία των μαθητών Γυμνασίου να αντιστοιχήσουν αριθμούς στα σύνολα των ρητών, ακεραίων, άρρητων και πραγματικών. Κοινό συμπέρασμα όλων των σχετικών ερευνών είναι το γεγονός ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών αδυνατεί να αντιληφθεί ότι όλοι οι δοθέντες αριθμοί είναι πραγματικοί (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995, Merenluoto & Lehtinen, 2002, Voskoglou, Kosyvas, 2011).

Αναμένουμε ότι και από τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας θα αναδειχθεί η ιδιαίτερη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην ταξινόμηση των αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα. Υποθέτουμε επίσης ότι τα ποσοστά αποτυχίας στην αναγνώριση όλων των αριθμών ως πραγματικών αριθμών θα είναι εξίσου εντυπωσιακά, όπως αυτά της σχετικής βιβλιογραφίας.

- ✓ **Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι το σύνολο των άρρητων αποτελείται από περισσότερα στοιχεία και δεν κατανοούν σε μεγάλο βαθμό την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.**

Στην ανάλυση των αποτελεσμάτων στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) φαίνεται η δυσκολία των μαθητών (grade 9-10) αλλά και των φοιτητών στην κατανόηση του πλήθους των ρητών και των άρρητων. Πιο συγκεκριμένα, μόνο το 34% των φοιτητών γνωρίζουν ότι το σύνολο των άρρητων αποτελείται από περισσότερα στοιχεία ενώ ταυτόχρονα οι περισσότεροι μαθητές αλλά και φοιτητές απαντούν ότι τα δύο σύνολα αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων. Παρόμοια αποτελέσματα έδωσε η αντίστοιχη ερώτηση στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α), στην οποία οι συμμετέχοντες ήταν υποψήφιοι καθηγητές μαθηματικών στο τελευταίο έτος των σπουδών τους. Λιγότεροι από τους μισούς φοιτητές γνωρίζουν ότι το σύνολο των άρρητων είναι πιο «πλούσιο» σε σχέση με αυτό των ρητών (Sirotic & Zazkis, 2007α). Ταυτόχρονα, στην ερώτηση: «Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν αριθμό από το διάστημα [0,1] ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να είναι ρητός;», η απάντηση που υπερισχύει είναι πως η πιθανότητα είναι 50% γεγονός που υποδηλώνει ότι οι φοιτητές θεωρούν ότι τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα σε πλήθος (Sirotic & Zazkis, 2007α)..

Στην έρευνα των Voskoglou, Kosyvas (2011), αποκαλύπτεται η αδυναμία των μαθητών Γυμνασίου στην αντίληψη της πυκνότητας μέσω της αποτυχίας των μαθητών αλλά και των φοιτητών του Τ.Ε.Ι. σε ερωτήσεις όπως: «Να βρεθούν ρητοί και άρρητοι (αν υπάρχουν) μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$ ή μεταξύ του 10 και του 20ή μεταξύ των κλασμάτων $\frac{1}{11}$και του$\frac{1}{10}$». Είναι ολοφάνερη η αδυναμία των μαθητών του Γυμνασίου να αντιληφθούν ότι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι και ομοίως ανάμεσα σε οποιουσδήποτε άρρητους υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι (Voskoglou, Kosyvas, 2011). Η δυσκολία εντείνεται όταν τα άκρα του διαστήματος είναι κλάσματα όπως τα $\frac{1}{11}$ και $\frac{1}{10}$, ενώ φαίνεται ότι οι μαθητές απαντούν ποσοστιαία ορθότερα στην ερώτηση όταν τα άκρα είναι ακέραιοι. Παρόμοια αποτελέσματα εμφανίζονται και στην έρευνα των Merenluoto & Lehtinen (2002), όπου όπως αναφέρουν οι ερευνητές, οι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών και μάλιστα απέχουν πολύ από τη συνειδητοποίηση αυτών των εννοιών καθώς είναι πολύ συγκεχυμένες στο μυαλό τους .

Αναμένουμε ότι και από τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας θα αναδειχθεί η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι πολλοί περισσότεροι από τους ρητούς. Θεωρούμε ότι στο μυαλό των μαθητών οι άρρητοι περιορίζονται σε κάποιες ρίζες και σε κάποιους αριθμούς όπως το π ή το e. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της πυκνότητας στο R.

- ✓ **Οι μαθητές δυσκολεύονται να καθορίσουν αν τα αποτελέσματα των πράξεων (πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού) μεταξύ άρρητων είναι ρητά ή άρρητα.**

Στην έρευνα των Voskoglou, Kosyvas (2011), το 95% των μαθητών Γυμνασίου και το 20% των φοιτητών αδυνατούν να κατανοήσουν ότι το άθροισμα δυο άρρητων είναι δυνατό να δώσει ρητό αποτέλεσμα. Επίσης, στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α) απαντούν λανθασμένα σε ποσοστό σχεδόν 40% ότι το άθροισμα άρρητων είναι άρρητο καθώς επίσης σε ποσοστό 35% ότι το γινόμενο άρρητων είναι άρρητο. Συμπεριλάβαμε λοιπόν τις ίδιες ερωτήσεις με τις έρευνες των

Sirotic & Zazkis (2007α) και τωνVoskoglou, Kosyvas (2011), με σκοπό να αναλύσουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας με αυτές.

3.3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας και για να δοθούν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα διεξήχθη μια έρευνα ποσοτική δειγματοληπτική με χρήση ερωτηματολογίου. Η ποσοτική έρευνα είναι ένα είδος εκπαιδευτικής έρευνας στην οποία αφού ο ερευνητής αποφασίσει τι θα μελετήσει και ποια ερευνητικά ερωτήματα ή ερευνητικές υποθέσεις θα θέσει, συγκεντρώνει τα δεδομένα τα οποία μπορούν να εκφραστούν ποσοτικά και τα αναλύει μέσω στατιστικής επεξεργασίας (Creswell, 2011).

Η επιλογή του δείγματος είναι βολική, καθώς το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε σε μαθητές στους οποίους είχαμε εύκολη πρόσβαση. Οι συμμετέχοντες σε αυτή τη μελέτη είναι 60 μαθητές της Γ' Λυκείου από δυο σχολεία της Λάρισας. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές από δυο τμήματα του 4ου Γ.Ε.Λ. και του 14ου Γ.Ε.Λ.. Ο χρόνος διεξαγωγής της συγκεκριμένης έρευνας ήταν τον Οκτώβριο του 2020. Οι μαθητές αυτοί είχαν επιλέξει την κατεύθυνση θετικών σπουδών με στόχο την εισαγωγή τους σε Πανεπιστημιακά και Τεχνολογικά Ιδρύματα μέσω των Πανελληνίων εξετάσεων. Ο χρόνος που δόθηκε στους μαθητές για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν μια διδακτική ώρα, την ώρα του μαθήματος των μαθηματικών στην κατεύθυνση. Οι μαθητές ενημερώθηκαν πως το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και δεν θα επηρεάσει την βαθμολογία τους στο μάθημα των μαθηματικών καθώς και ότι ο σκοπός του είναι ερευνητικός. Οι μαθητές λοιπόν παρακινήθηκαν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο μόνοι τους και να δώσουν παραδείγματα και αυθόρμητες απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις.

Επιλέχθηκαν οι μαθητές της Γ' Λυκείου καθώς θεωρήθηκε ότι οι μαθητές στην τάξη αυτή έχουν αντιμετωπίσει άρρητους αριθμούς σε τέσσερις προηγούμενες τάξεις καθώς και στην τάξη που διανύουν και έτσι κρίθηκε ότι το επίπεδο της αλγεβρικής τους σκέψης θα είναι ικανοποιητικό ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της συγκεκριμένης έρευνας. Οι μαθητές της Γ' Λυκείου έχουν διδαχθεί στην τάξη αυτή στοιχεία της πραγματικής ανάλυσης τα οποία προαπαιτούν την γνώση των κρίσιμων διαφορών ανάμεσα στα διάφορα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Έτσι κρίθηκε ότι έχει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν οι σημερινοί μαθητές της Γ΄ Λυκείου έχουν κατανοήσει τη βασική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών ώστε να μπορέσουν να αντιληφθούν δυσκολότερες έννοιες της πραγματικής ανάλυσης και να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των Πανελληνίων εξετάσεων.

3.4 ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα δεδομένα θα συλλεχθούν μέσω γραπτού ερωτηματολογίου. Το ερωτηματολόγιο είναι μια φόρμα που χρησιμοποιείται σε ένα δειγματοληπτικό σχεδιασμό, την οποία οι συμμετέχοντες στη μελέτη συμπληρώνουν και επιστρέφουν στον ερευνητή (Creswell, 2011).

Στην παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο περιλαμβάνει ερωτήσεις συμπλήρωσης, ερωτήσεις ανοιχτού τύπου με αιτιολόγηση καθώς και ερωτήσεις Σωστού –Λάθους με αιτιολόγηση και μια ερώτηση πολλαπλού τύπου.

Προκειμένου να καταλήξουμε στην τελική μορφή του ερωτηματολογίου που μοιράστηκε στο δείγμα μας, επιλέξαμε να πραγματοποιήσουμε μια προ-έρευνα με πιλοτική χρήση του ερωτηματολογίου σε9 μαθητές της Γ' Λυκείου. Οι μαθητές ήταν διαφορετικής επίδοσης στο μάθημα των μαθηματικών (3 μαθητές υψηλής επίδοσης, 3 μαθητές μεσαίας επίδοσης και 3 μαθητές χαμηλής επίδοσης). Η προ-έρευνα έγινε μέσω προσωπικών συνεντεύξεων, οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν. Το ερωτηματολόγιο δόθηκε ξεχωριστά σε κάθε μαθητή σε διαφορετική μέρα και σε διαφορετικό τόπο. Χρειάστηκαν κατά μέσο όρο μισή ώρα ώστε να το συμπληρώσουν και κατευθείαν μετά την ολοκλήρωση του ερωτηματολογίου διενεργήθηκε η προσωπική συνέντευξη. Οι συνεντεύξεις που έγιναν ήταν ημιδομημένες. Αρχικά παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες τα δοκίμια στα οποία είχαν απαντήσει και τους ζητήθηκε να επεξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν ή να εξηγήσουν σημεία στα οποία υπήρχε κάποια ασάφεια. Σε αυτή τη φάση οι συμμετέχοντες μπορούσαν να επεκτείνουν ή να διασαφηνίσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν ή ακόμα και να αλλάξουν κάποιες από τις απαντήσεις που έδωσαν. Κύριος σκοπός της συνέντευξης ήταν να αναγνωριστούν τυχόν διατυπώσεις στις ερωτήσεις οι οποίες θα δυσκόλευαν τους συμμετέχοντες καθώς και τυχόν έργα του ερωτηματολογίου στα οποία δεν θα μπορούσαν να ανταποκριθούν ούτε οι άριστοι μαθητές.

3.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθούν τα έργα που θα τεθούν στους μαθητές.Τα έργα αυτά σχετίζονται με τις συνηθέστερες παρανοήσεις στους άρρητους, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αναλύεται το σκεπτικό με το οποίο έγινε η ένταξη του κάθε έργου, δηλαδή τις πληροφορίες τις οποίες ευελπιστούμε να αντλήσουμε από κάθε ζητούμενο και πώς η επιλογή συσχετίζεται με τα αποτελέσματα των άλλων ερευνών, όπως αυτά έχουν εντοπιστεί στην σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση. Επίσης, παρουσιάζονται οι αποδεκτές ή ιδανικές απαντήσεις.

«Πώς οι μαθητές ορίζουν τους άρρητους;»

ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ

Να δοθεί ο ορισμός των ρητών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΡΗΤΩΝ

Να δοθεί ο ορισμός των άρρητων αριθμών.

Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) που έγινε σε μαθητές Λυκείου και σε υποψηφίους καθηγητές μαθηματικών συναντάμε συνδυαστικά τις παραπάνω ερωτήσεις. Οι απαντήσεις σχετικά με τον ορισμό των ρητών που έγιναν δεκτές στην έρευνα των Fischbein et. al. (1995), είναι οι κλασσικοί ορισμοί που συναντώνται στα σχολικά βιβλία, οι οποίοι θα υιοθετηθούν και από την παρούσα έρευνα και είναι : «Ρητός ονομάζεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί σαν πηλίκο ακεραίων (με παρονομαστή διάφορο του μηδενός) » ή «Ρητός ονομάζεται κάθε δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται με περιοδικό τρόπο». Οι απαντήσεις που έγιναν δεκτές σε άλλες έρευνες και θα γίνουν δεκτές και στην δική μας σχετικά με τον ορισμό των άρρητων είναι: «Άρρητος είναι ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί σαν πηλίκο ακεραίων με παρονομαστή διάφορο του μηδενός» ή «Άρρητος ονομάζεται κάθε δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται με μη περιοδικό τρόπο» (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995;Arcavi, Bruckheimer&Ben-Zvi, 1987).

Το έργο αυτό επιλέχθηκε όχι μόνο επειδή σύμφωνα με την βιβλιογραφία πολλοί μαθητές δίνουν ελλιπείς ορισμούς αλλά για να διαπιστωθεί σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα έργα αν οι μαθητές που ορίζουν σωστά τους ρητούς και τους άρρητους συνειδητοποιούν την έννοια ή απλά αναπαράγουν ορισμούς, όπως αυτοί έχουν απομνημονευτεί από τη διδασκαλία.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΣΥΝΟΛΑ

Να σημειώσετε με Χ στο αντίστοιχο σύνολο που ανήκει ο κάθε αριθμός.

	ΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
0,05755755575… …			
$\sqrt[4]{0{,}0016}$			
$\sqrt{16}$			
$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$			
Το εμβαδόν ενός κύκλου			
Η λύση της εξίσωσης:$2^x = 3$			
$\sqrt[3]{0{,}8}$			
$\sqrt{\frac{12}{25}}$			
0,05555……			
3,14			

Προκειμένου να υπάρξει μια γενικότερη αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών στην αναγνώριση των ρητών και των. Οι ερωτήσεις του συγκεκριμένου έργου επιλέχθηκαν σύμφωνα με τις έρευνες των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995); Arcavi, Bruckheimer&Ben-Zvi, (1987) και της διπλωματικής εργασίας της Sirotic (2004).

Επιλέχθηκε μια σειρά **ρητών αριθμών** προς αναγνώριση και αντιστοίχηση από τους μαθητές, οι οποίοι έχουν συμπεριληφθεί σε διάφορες άλλες σχετικές έρευνες και ο καθένας έχει επιλεχθεί με διαφορετικό σκοπό.

- Όπως ήδη αναφέρθηκε στην ενότητα για την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, υπάρχει μια επίμονη σύγχυση μεταξύ π και της δεκαδικής προσέγγισής του(3,14) και έτσι προστέθηκε η αντίστοιχη ερώτηση (Arcavi et.al., 1987).
- Ο αριθμός 0,05555…με την προφανή περιοδικότητα στο δεκαδικό του μέρος συμπεριλήφθηκε στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), όπου οι μισοί μαθητές απάντησαν ορθά ότι είναι ρητός, ενώ υπήρξε και ένα τέταρτο του συνόλου των μαθητών που συμπεριέλαβε τον αριθμό αυτόν στους άρρητους.

- Ο αριθμός $\sqrt{16}$ συμπεριλήφθηκε στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995). Λιγότεροι από τους μισούς μαθητές αναγνώρισαν ότι είναι ρητός και ένα τέτοιο ποσοστό ορθών απαντήσεων σε πολύ απλούς αριθμούς επιβεβαιώνει το γεγονός ότι έχουν εντελώς συγκεχυμένες τις έννοιες των συνόλων των αριθμών. Αντιλαμβάνονται ότι δίνει ακέραιο αποτέλεσμα, αλλά δεν τον συμπεριλαμβάνουν στο σύνολο των ρητών.
- ο ρητός αριθμός $\sqrt[4]{0{,}0016}$ συμπεριλήφθηκε ώστε να διερευνηθεί η ευελιξία των μαθητών σε κάποιες πράξεις ταυτόχρονα με την κατηγοριοποίηση αυτών στα αντίστοιχα αριθμητικά σύνολα. Σύμφωνα με την Sirotic (2004) η οποία συμπεριέλαβε στην διπλωματική της τον αριθμό αυτό, δεν φάνηκε να δυσκολεύει τους ερωτηθέντες μαθητές που έλαβαν μέρος.

Επιλέχθηκε επίσης μια σειρά **άρρητων αριθμών** προς αναγνώριση και αντιστοίχιση από τους μαθητές. Οι αριθμοί αυτοί έχουν συμπεριληφθεί επίσης σε διάφορες άλλες σχετικές έρευνες και ο καθένας έχει επιλεχθεί με διαφορετικό σκοπό.

- Ο αριθμός 0,05755755575…… εμφανίζει μια κανονικότητα στο δεκαδικό του μέρος αλλά όχι περιοδικότητα και προστέθηκε ώστε να δώσει μια σχετική ένδειξη για το βαθμό στον οποίο κατανοούν οι μαθητές την έννοια της περιοδικότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αντίστοιχη ερώτηση στη διπλωματική της Sirotic (2004) δεν δυσκόλεψε ιδιαιτέρως τους ερωτηθέντες μαθητές καθώς τα 2/3 αυτών απάντησαν ορθά.
- Οι άρρητοι αριθμοί $\sqrt{\frac{12}{25}}$ και $\sqrt[3]{0{,}8}$, συμπεριελήφθησαν επίσης από τη διπλωματική της Sirotic (2004)οι οποίες δεν δυσκόλεψαν ιδιαίτερα τους μαθητές. Φαίνεται ότι τέτοιες ερωτήσεις είναι πιο κοντά σε αλγοριθμικές διαδικασίες για απλοποίηση ριζών και μοιάζουν πιο οικείες σ’ αυτούς.
- Το εμβαδόν ενός κύκλου αποτελεί μια βασική γνώση, με την οποία έρχονται από το Γυμνάσιο αντιμέτωποι οι μαθητές. Δυσκόλεψε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές στην έρευνα της Sirotic (2004) το οποίο αποτέλεσε κίνητρο για προσθήκη και στην παρούσα μελέτη.
- Ο αριθμός $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ συνδυάζεται με το δεύτερο ερώτημα από το έργο 5. Πρόκειται για ένα γινόμενο άρρητων αριθμών που δίνουν ρητό αποτέλεσμα. Έχει

στόχο να ανακαλύψει αν οι μαθητές γνωρίζουν μόνο διαδικαστικά αυτές τις πράξεις ή αν κατανοούν την ουσία τους.

Συνολικά λοιπόν, μέσω του συγκεκριμένου έργου στόχος είναι να διερευνηθούν:

- ✓ ποιες είναι οι ιδιότητες ενός αριθμού που οδηγούν την απόφασή τους για το κατά πόσον ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος.
- ✓ Η ικανότητα των μαθητών να αντιληφθούν ότι κάθε αριθμός της λίστας είναι πραγματικός. Στην έρευνα των Arcavi, Bruckheimer&Ben-Zvi (1987) μόνο το ¼ των μαθητών αναγνώρισε ότι όλοι οι αριθμοί είναι πραγματικοί.
- ✓ Η κατανόηση των μαθητών σχετικά με το ότι το σύνολο των ρητών και των άρρητων είναι μεταξύ τους συμπληρωματικά (δηλαδή το γεγονός ότι είναι αδύνατο ένας αριθμός να είναι ταυτόχρονα ρητός και άρρητος).

ΠΛΗΘΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ

Επέλεξε την σωστή πρόταση από τις ακόλουθες τρείς:

1) Το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των άρρητων.

2) Το σύνολο των άρρητων αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των ρητών.

3) Το σύνολο των ρητών και το σύνολο των άρρητων αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αυτή η πολλαπλού τύπου ερώτηση αυτή χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995). Μεταγενέστερα στην έρευνά τους οι Sirotic (2004) και Zazkis (2007α) συμπεριέλαβαν την ανοιχτού τύπου ερώτηση: «Ποιο σύνολο αριθμών αποτελείται από περισσότερα στοιχεία; Το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των άρρητων;». Όπως είναι λογικό δεν αναμένεται οι μαθητές να γνωρίζουν τις έννοιες της μετρησιμότητας του συνόλου των ρητών και της μη μετρησιμότητας του συνόλου των άρρητων. Στόχος της ερώτησης είναι να διερευνηθούν οι αυθόρμητες απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το πλήθος ρητών και άρρητων καθώς τα παιδιά αναμένεται να απαντήσουν διαισθητικά. Η πιο συχνή απάντηση (το

50% των μαθητών) είναι ότι τα δύο σύνολα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό στοιχείων (Sirotic & Zazkis, 2007α).

«Κατανοούν οι μαθητές την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών;»

Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

1. Υπάρχουν ρητοί αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
2. Υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Υπάρχουν άρρητοί αριθμοί μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
4. Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί μεταξύ των αριθμών 0 και 1;Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Οι ερωτήσεις που έχουν επιλεχθεί σε αυτό το έργο είναι παρόμοιας φιλοσοφίας με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α) και σε αυτή των Guven, Cekmez & Karatas (2011). Παρατίθενται στην συνέχεια οι εν λόγω ερωτήσεις.

- Μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα ρητό μεταξύ δυο άλλων ρητών στην ευθεία των αριθμών;
- Μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα ρητό μεταξύ δυο άρρητων στην ευθεία των αριθμών;
- Μπορούμε πάντοτε να βρούμε έναν άρρητο μεταξύ δυο άλλων άρρητων στην ευθεία των αριθμών;
- Μπορούμε πάντοτε να βρούμε έναν άρρητο μεταξύ δυο ρητών στην ευθεία των αριθμών;

Στη συγκεκριμένη έρευνα έχουν παραλλαχθεί οι παραπάνω ερωτήσεις και έγιναν πιο συγκεκριμένες. Η συγκεκριμένη αλλαγή θεωρήθηκε ότι απλουστεύει τις αρχικές ερωτήσεις. Ευελπιστούμε λοιπόν, μέσω των αριθμητικών παραδειγμάτων να παρακινήσουμε τους μαθητές να απαντήσουν, ώστε να αναδειχθούν οι γνώσεις καθώς και οι τυχόν παρανοήσεις τους στις εμπλεκόμενες έννοιες.

Οι ερωτήσεις της συγκεκριμένης δραστηριότητας έχουν στόχο να εξετάσουν τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με τις έννοιες της πυκνότητας των συνόλων των ρητών και των άρρητων καθώς και του πλήθους των ρητών και των άρρητων. Στην πραγματικότητα, ανάμεσα σε δύο άρρητους, ασχέτως πόσο κοντά βρίσκονται, υπάρχει πάντα ένας άρρητος και μάλιστα οι άρρητοι είναι τόσοι πολλοί που αν επιλέξω στην τύχη έναν αριθμό από την ευθεία των πραγματικών η πιθανότητα να επιλέξω ρητό είναι μηδενική. Μέσω των δραστηριοτήτων λοιπόν, θα διερευνηθούν οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με το «μέγεθος» των δύο απειροσυνόλων (ρητών και άρρητων). Θα εξεταστούν το είδος των νοερών εικόνων που θα χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για την αντιμετώπιση των ερωτήσεων σχετικά με την πυκνότητα και την αφθονία των άρρητων έναντι των ρητών αριθμών.

- Με την ερώτηση 1 ελέγχουμε την κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας στο σύνολο των ρητών. Η συγκεκριμένη ερώτηση έδωσε αξιόλογα αποτελέσματα στην έρευνα των Merenluoto & Lehtinen (2002) κυρίως από την ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων. Οι συγγραφείς καταλήγουν ότι οι μαθητές δεν είναι στο στάδιο εκείνο ώστε να μπορέσουν να απαντήσουν σε μια τέτοια ερώτηση και οι περισσότεροι αιτιολογούν τις απαντήσεις τους μεταφέροντας ιδιότητες από το σύνολο των ακεραίων. Θα έχει ενδιαφέρον να δούμε εάν οι μαθητές που απάντησαν σωστά θα αιτιολογήσουν βρίσκοντας μόνο έναν είτε δημιουργώντας ισοδύναμα κλάσματα είτε δίνοντας σαν απάντηση τον αριθμητικό μέσο των δοθέντων κλασμάτων, όπως παρατηρήθηκε στην έρευνα των Merenluoto & Lehtinen (2002). Οι απαντήσεις αυτές δείχνουν ότι οι μαθητές ψάχνουν τρόπους αιτιολόγησης πιο οικείους σε αυτούς που φανερώνουν μεγαλύτερη ευελιξία σε γνωστικές δομές όπως αυτή των φυσικών(κάθε φυσικός έχει επόμενο) και απέχουν από την συνειδητοποίηση του απείρου στο σύνολο των ρητών. Στην μελέτη του Mamolo (2009) χρησιμοποιήθηκε παρόμοια ερώτηση: «Πόσα κλάσματα υπάρχουν μεταξύ του $\frac{1}{19}$ και του $\frac{1}{17}$;» και επίσης θεωρήθηκε από την ανάλυση των απαντήσεων στην ερώτηση αυτή εξήχθησαν ποικίλα και ενδιαφέροντα συμπεράσματα.
- Με την ερώτηση 3 ελέγχουμε την κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας στο σύνολο των άρρητων. Επιλέχθηκαν οι άρρητοι $\sqrt{10}$ και $\sqrt{20}$ έχει σκοπό να ελέγξουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα χειριστούν τους δύο αριθμούς. Σε αυτή την ερώτηση αποφύγαμε τους άρρητους $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ (που

επιλέχθηκαν για την ερώτηση 2) διότι η βιβλιογραφία δείχνει ότι οι μαθητές καταχρηστικά μεταφέρουν την έννοια της διαδοχικότητας των ακεραίων στους άρρητους. Στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α) οι μαθητές συνήθως είτε χρησιμοποιούσαν τις δεκαδικές προσεγγίσεις των ριζών ώστε να βρουν κάποιον αριθμό ανάμεσα στους δοθέντες είτε απαντούσαν ότι υπάρχει ένας αριθμός (ο αριθμητικός μέσος αυτών). Είναι κοινή η πεποίθηση των μαθητών ότι η πρόσθεση στο σύνολο των άρρητων είναι κλειστή πράξη γι' αυτό απαντούν με αυτό τον τρόπο (Guven, Cekmez & Karatas, 2011).

- Με τις ερωτήσεις 2 και 4 ελέγχουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι ερωτήσεις αυτές αφορούν το κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν την ύπαρξη δυο απειροσυνόλων μέσα σε ένα δοθέν διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Οι μαθητές δεν κατέχουν την επίσημη μαθηματική γνώση ώστε να απαντήσουν ορθά σε αυτές τις ερωτήσεις αλλά αναμένουμε όπως και οι έρευνες των Sirotic & Zazkis (2007α) και Guven, Cekmez & Karatas (2011) να ελέγξουμε που τους οδηγεί η διαίσθησή τους. Πιο συγκεκριμένα θα εξεταστούν οι ιδέες των συμμετεχόντων σχετικά με το πώς οι ρητοί και οι άρρητοι συνυπάρχουν στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Πως οι μαθητές συνδυάζουν το γεγονός ότι μεταξύ δυο ρητών, ανεξάρτητα πόσο κοντά βρίσκονται, υπάρχουν άπειροι ρητοί και πώς είναι επιπλέον δυνατή η τοποθέτηση και άρρητων μεταξύ τους.

«Πώς οι μαθητές καθορίζουν αν τα αποτελέσματα των πράξεων μεταξύ ρητών και άρρητων είναι ρητά ή άρρητα;»

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ

Χαρακτήρισε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Αν προσθέσουμε δύο θετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα θα είναι πάντα άρρητο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Αν πολλαπλασιάσουμε δυο διαφορετικούς άρρητους το αποτέλεσμα θα είναι πάντα άρρητο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς και επιλέχθηκαν σύμφωνα με την έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α) και των Guven, Cekmez & Karatas (2011) ώστε να καθοριστεί ο τρόπος με τον οποίο απαντούν οι μαθητές σε προτάσεις σχετικά με το αν το σύνολο των άρρητων είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Ωστόσο, ο περιορισμός του «θετικού» στο (1) επιλέχτηκε για να αποφευχθεί η ασήμαντη επιλογή αντιθέτου αριθμού, όπου το άθροισμα είναι μηδέν, και συνεπώς ρητό. Επίσης, ο περιορισμός «διαφορετικούς» στο (2) επιλέχθηκε για να αποφευχθεί η ασήμαντη επιλογή του τετραγωνισμού μιας (άρρητης) τετραγωνικής ρίζας ενός ρητού αριθμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΠΙΣΗΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

4.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ

A. ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ

	Συχνότητα
Σωστός ορισμός	14 23,3%
Αδύναμος Ορισμός	27 45%
Λανθασμένος Ορισμός	13 21,7%
Καμία απάντηση	6 10%
Σύνολο	60 100%

Πίνακας 1. Απαντήσεις στον ορισμό των ρητών

Για τους ρητούς λαμβάνουμε ως **σωστό ορισμό** τον (τον ορισμό όπως διατυπώνεται στα σχολικά βιβλία): «Ρητοί είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος, με όρους ακεραίους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός» ή «Ρητοί είναι οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται με περιοδικό τρόπο». Ενώ στους αδύναμους ορισμούς κατατάσσουμε τις απαντήσεις: «Ρητοί είναι τα κλάσματα» ή «Ρητοί είναι αυτοί που δεν είναι άρρητοι». Στον Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι μόνο το 23.3% των μαθητών κατάφερε να διατυπώσει έναν επίσημο ορισμό όπως αναφέρεται στα σχολικά βιβλία, ενώ η πλειοψηφία των ατόμων που απάντησαν στην ερώτηση, και πιο συγκεκριμένα το 45% έδωσαν έναν από τους παραπάνω αδύναμους ορισμούς για τους ρητούς αριθμούς. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι πλειοψηφία των μαθητών που έδωσαν **αδύναμο ορισμό** (40 % του συνόλου) αναφέρουν ότι ρητοί είναι τα κλάσματα χωρίς να αναφέρουν ότι οι όροι πρέπει να είναι ακέραιοι και ο παρανομαστής πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, ενώ το 5% των μαθητών αναφέρουν «Ρητοί είναι αυτοί που δεν είναι άρρητοι». Το υπόλοιπο 21.7% έδωσε λανθασμένο ορισμό και το 10% επί του συνολικού ποσοστού δεν απάντησαν καθόλου στην ερώτηση. Κάποιες από τις λανθασμένες απαντήσεις είναι: «Ρητοί είναι οι ρίζες» ή «Ρητοί είναι οι ακέραιοι».

Β. ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΡΗΤΩΝ

	Συχνότητα
Σωστός ορισμός	24 40%
Αδύναμος Ορισμός	11 18,3%
Λανθασμένος Ορισμός	18 30%
Καμία απάντηση	7 11,7%
Σύνολο	60 100%

Πίνακας 2. Απαντήσεις στον ορισμό των άρρητων

Το 40% των ερωτηθέντων διατύπωσε τον επίσημο ορισμό για τους άρρητους αριθμούς, όπως αναφέρεται στα σχολικά βιβλία, δηλαδή: «Άρρητοι είναι όλοι οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος, με όρους ακεραίους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός» ή «Άρρητοι είναι οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται με συγκεκριμένο τρόπο». Ως σωστή λάβαμε επίσης την απάντηση: «Άρρητοι είναι όλοι οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος». Το 18,3% διατύπωσε έναν αδύναμο ορισμό ότι «Άρρητοι είναι όλοι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί».

Αξίζει να σχολιάσουμε και τις λανθασμένες απαντήσεις καθώς από την ανάλυση αυτών λαμβάνουμε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τις παρανοήσεις των μαθητών στους άρρητους. Από το 30% των συνολικών λανθασμένων απαντήσεων, το 8% των μαθητών απαντάει ότι: «Άρρητοι είναι οι δεκαδικοί», μη λαμβάνοντας υπόψη την μη περιοδικότητα του δεκαδικού τους μέρους. Στην ίδια λογική ένας από τους μαθητές έδωσε τον εξής λάθος ορισμό: «Άρρητοι είναι οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία». Σε ποσοστό 8% οι μαθητές απάντησαν λανθασμένα ότι «Άρρητοι είναι οι αριθμοί που η τετραγωνική τους ρίζα δεν είναι ακέραιος», ενώ ένας μαθητές έδωσε τον λάθος ορισμό ότι: Άρρητοι είναι όλες οι ρίζες». Επιπλέον, το 5% απάντησε λανθασμένα ότι: «Άρρητοι είναι οι μη φυσικοί αριθμοί» ή «Άρρητοι είναι οι αρνητικοί αριθμοί»

Συσχέτιση απαντήσεων μεταξύ επιτυχίας στον ορισμό των ρητών και στον ορισμό των άρρητων αριθμών

Για τον έλεγχο συνάφειας / συσχέτισης απαντήσεων μεταξύ του ορισμού ρητών αριθμών και του ορισμού άρρητων αριθμών χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Chi-Square (χ^2). Ειδικότερα, έγινε υπολογισμός της επιτυχίας στον ορισμό των ρητών αριθμών (η μεταβλητή λαμβάνει τιμές 0 και 1 για την αποτυχία και την επιτυχία, αντίστοιχα) και υπολογισμός της επιτυχίας στον ορισμό των άρρητων αριθμών (η μεταβλητή λαμβάνει τιμές 0 και 1 για την αποτυχία και την επιτυχία, αντίστοιχα).Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δίνονται στον κάτωθι πίνακα.

		Επιτυχία στον ορισμό άρρητων (1)	Αποτυχία στον ορισμό άρρητων (0)	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Επιτυχία στον ορισμό ρητών (1)	N	14	0	14	36.522	0.000
	%	23.3%	0.0%	23.3%		
Αποτυχία στον ορισμό ρητών (0)	N	6	40	46		
	%	10.0%	66.7%	76.7%		
Σύνολο	N	20	40	60		
	%	33.3%	66.7%	100.0%		

Πίνακας 3. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας στον ορισμό ρητών και άρρητων αριθμών

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν ότι το 23,3% των μαθητών του δείγματος έχει επιτυχία τόσο στον ορισμό των ρητών όσο και στον ορισμό των άρρητων αριθμών. Από την άλλη πλευρά, το 76,7% των ερωτηθέντων είχε αποτυχία τόσο στον ορισμό των ρητών όσο και στον ορισμό των άρρητων αριθμών. Ως προς το αποτέλεσμα του ελέγχου, η τιμή chi-square ισούται με 36,552 και επειδή P-value=0,000 συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% το αποτέλεσμα είναι στατιστικά σημαντικά.

Για τη σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας στον ορισμό μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών έγινε χρήση του ελέγχου Z-test. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Κατηγορία	N	Mean Rank	Sum of Ranks	Z-test	P-value
Ρητοί Αριθμοί	60	57.50	3450.0	-1.210	0.226
Άρρητοι Αριθμοί	60	63.5	3810.0		
Σύνολο	120				

Πίνακας 4. Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στον ορισμό μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών (z-test)

Τα αποτελέσματα του ελέγχου z-test δείχνουν ότι το Mean rank για την επιτυχία ορισμού στους ρητούς αριθμούς είναι 57,5 ενώ το Mean rank για την επιτυχία ορισμού στους άρρητους αριθμούς είναι 63,5. Η τιμή του ελέγχου z ισούται με -1,210 και επειδή P-value=0,226>0,05 συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα ποσοστά επιτυχίας ορισμού μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα σημαίνει ότι τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάζουν οι συμμετέχοντες στον ορισμό των αριθμών δε διαφέρουν ανάλογα με το εάν ορίζουν τους ρητούς ή τους άρρητους αριθμούς και επομένως δεν παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επιτυχία των ερωτηθέντων ως προς τον ορισμό των ρητών/άρρητων αριθμών.

Είναι, λοιπόν, ξεκάθαρο από την ανάλυση των αποτελεσμάτων ότι επιβεβαιώνεται η πρώτη ερευνητική υπόθεση. Οι μαθητές δυσκολεύονται σε μεγάλο βαθμό να ορίσουν τόσο τους ρητούς όσο και τους άρρητους. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα των άλλων ερευνών που περιείχαν αντίστοιχα ερωτήματα.

Συμπερασματικά, οι συμμετέχοντες στην έρευνά μας, αποτυγχάνουν να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα προτείνουν ορισμούς οι οποίοι απέχουν πολύ από το να είναι επίσημοι και συνήθως βασίζονται σε αναπαραστάσεις και διαισθήσεις. Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), των Yilmaz & Ay (2018) όπως και στη δική μας, το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (περίπου το 60%) δίνει λανθασμένους ή ελλιπείς ορισμούς για τους άρρητους.

4.1.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΣΥΝΟΛΑ

Αρχικά, θα εξετάσουμε κάθε έναν αριθμό ξεχωριστά ώστε να διαπιστώσουμε πόσοι μαθητές κατάφεραν να αντιστοιχήσουν τον αριθμό στα σύνολα στα οποία ανήκει. Σωστή θεωρείται η απάντηση όταν ο μαθητής έχει αντιστοιχήσει τον αριθμό στην στήλη των ρητών ή στη στήλη των άρρητων αντίστοιχα.

		ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
	$\sqrt[4]{0,0016}$	25 (41,7%)
	$\sqrt{16}$	30 (50%)
ΡΗΤΟΙ	$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$	26 (43,3%)
	0,05555……	18 (30%)
	3,14	20 (33,3%)
	0,05755755575… …	32 (53,3%)
	Το εμβαδόν ενός κύκλου	29 (48,3%)
ΑΡΡΗΤΟΙ	Η λύση της εξίσωσης: $2^x = 3$	22 (36,7%)
	$\sqrt[3]{0,8}$	17 (28,3%)
	$\sqrt{\frac{12}{25}}$	27 (45%)

Πίνακας 5. Συχνότητες και ποσοστά (n=60) των σωστών απαντήσεων στην αντιστοίχηση των αριθμών ως ρητών ή άρρητων

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φαίνεται πως η δραστηριότητα αυτή δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές. Σχεδόν οι μισοί και στις περισσότερες περιπτώσεις πάνω από τους μισούς μαθητές δεν κατάφεραν να κατατάξουν κάθε αριθμό στα αντίστοιχα σύνολα στα οποία ανήκει.

Α. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΡΗΤΩΝ

Ξεκινώντας με τους ρητούς αριθμούς της λίστας, μόνο το 30% των μαθητών είναι σε θέση να αναγνωρίσει ότι ο αριθμός 0,05555…. είναι ρητός. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το 30% των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα αντιστοιχούν τον αριθμό 3,14 στους άρρητους αριθμούς. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία, αυτό συμβαίνει είτε διότι ταυτίζουν τον αριθμό 3,14 με το π είτε επειδή ένα ποσοστό των μαθητών θεωρεί πως όλοι οι δεκαδικοί είναι και άρρητοι. Μόνο το 41,7% των μαθητών αναγνώρισαν τον ρητό αριθμό$\sqrt[4]{0,0016}$. Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) λιγότεροι από τους μισούς μαθητές αναγνώρισαν ότι ο αριθμός $\sqrt{16}$ είναι ρητός. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας καθώς το50% αναγνώρισε ότι ο αριθμός $\sqrt{16}$ είναι ρητός. Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούμε και για τον αριθμό $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$, όπου περίπου το 44% απαντάει ότι ο αριθμός είναι ρητός. Ένα τέτοιο ποσοστό ορθών απαντήσεων σε πολύ απλούς αριθμούς επιβεβαιώνει το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν εντελώς συγκεχυμένες τις έννοιες των αριθμών. Αντιλαμβάνονται ότι το $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ δίνει ακέραιο αποτέλεσμα, αλλά δεν τον συμπεριλαμβάνουν στο σύνολο των ρητών.

Β. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ

Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούμε και στην αναγνώριση των άρρητων από τη δοθείσα λίστα. Μόνο των 48,3% των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνά μας απάντησαν ορθά ότι ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν ενός κύκλου είναι άρρητος. Στη πορεία συναντούν Οι μαθητές έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με τον αριθμό π και με το εμβαδόν του κύκλου στο Δημοτικό και στην συνέχεια γίνεται λεπτομερής αναφορά στη β' Γυμνασίου. τις έννοιες αυτές σε όλες τις τάξεις του Λυκείου τόσο στα μαθηματικά όσο και στην φυσική. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι τελειόφοιτοι μαθητές Λυκείου δεν έχουν καταφέρει να κατανοήσουν την έννοια και τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου. Επίσης, μόνο το 45% των μαθητών αναγνωρίζουν ότι η $\sqrt{\frac{12}{25}}$ είναι άρρητος, ίσως διότι η υπόριζη ποσότητα είναι κλάσμα και τον συγχέουν με τους ρητούς. Ομοίως, οι μαθητές αντιμετώπισαν ιδιαίτερη δυσκολία στην ταξινόμηση της $\sqrt[3]{0,8}$. Σε ποσοστό περίπου 28,3% οι μαθητές αντιστοιχούν τον αριθμό $\sqrt[3]{0,8}$ στους άρρητους. Ένα σημείο στο οποίο αξίζει να σταθούμε είναι ότι μόνο 36,7% των μαθητών γνωρίζουν ότι η λύση της εξίσωσης $2^x = 3$ είναι άρρητος αριθμός. Είναι άξιο σχολιασμού διότι οι μαθητές διδάσκονται για μεγάλο χρονικό διάστημα και με ιδιαίτερη έμφαση τις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, τόσο στη Β' όσο και στη Γ' Λυκείου. Πρόκειται για μαθητές οι οποίοι στο σύνολό τους θα λάβουν μέρος στις εισαγωγικές εξετάσεις για το Πανεπιστήμιο, στις οποίες τα τελευταία τουλάχιστον είκοσι χρόνια πάντα υπάρχει ένα θέμα σχετικό με εκθετική ή λογαριθμική συνάρτηση. Φαίνεται πως οι μαθητές δουλεύουν μηχανικά με αυτές τις συναρτήσεις χωρίς να έχουν κατανοήσει σε βάθος τις ιδιότητές τους, το πεδίο ορισμού τους, το σύνολο τιμών τους και την γραφική τους παράσταση.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, είναι γνωστό από πολλές έρευνες ότι οι μαθητές ταυτίζουν τους δεκαδικούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία με τους άρρητους χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την περιοδικότητα του δεκαδικού τους μέρους. Αυτό επιβεβαιώνεται και στη δική μας έρευνα καθώς το 53,3% των μαθητών απαντά ορθά ότι ο αριθμός 0,575575557….. είναι άρρητος και ταυτόχρονα μόνο το 30% του συνόλου απαντά σωστά ότι ο αριθμός 0,0555… είναι ρητός.

Ένα μικρό ποσοστό των συμμετεχόντων(περίπου 7%) δεν χρησιμοποίησαν το γεγονός ότι τα σύνολα των ρητών και των άρρητων είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και παρατηρήθηκαν απαντήσεις όπου αριθμοί αντιστοιχήθηκαν ταυτόχρονα στα δύο σύνολα.

Ένα από τα πιο σημαντικά σημεία τα οποία μας απασχόλησαν κατά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών είναι ότι οι μαθητές σε μεγάλο βαθμό δεν αναγνωρίζουν ότι όλοι οι αριθμοί του έργου 2 είναι πραγματικοί. Πιο συγκεκριμένα, από τον Πίνακα 6, μπορούμε να δούμε ότι μόνο το 53.3% των μαθητών της Γ' Λυκείου που συμμετείχαν στην έρευνα μπόρεσε να αναγνωρίσει ότι όλοι οι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

		Συχνότητα
	Σωστή αναγνώριση	32 (53,3%)
	Λάθος αναγνώριση	28 (46,7%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 6. Αποτελέσματα σχετικά με την αναγνώριση του συνόλου των πραγματικών.

Συσχέτιση απαντήσεων μεταξύ επιτυχίας ταξινόμησης ρητών και άρρητων αριθμών

Για τον έλεγχο συνάφειας / συσχέτισης απαντήσεων μεταξύ επιτυχίας στους ρητούς και επιτυχίας στους άρρητους αριθμούς χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Chi-Square (χ^2). Ειδικότερα, έγινε υπολογισμός της στους ρητούς αριθμούς (η μεταβλητή λαμβάνει τιμές 0 και 1 για την αποτυχία και την επιτυχία, αντίστοιχα) και υπολογισμός της στους άρρητους αριθμούς (η μεταβλητή λαμβάνει τιμές 0 και 1 για την αποτυχία και την επιτυχία, αντίστοιχα).Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δίνονται στον κάτωθι πίνακα.

		Επιτυχία στους άρρητους (1)	Αποτυχία στους άρρητους (0)	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Επιτυχία στους ρητούς (1)	N	17	9	26	21.210	0.000
	%	28.3%	15.0%	43.3%		
Αποτυχία στους ρητούς (0)	N	3	31	34		
	%	5.0%	51.7%	56.7%		
Σύνολο	N	20	40	60		
	%	33.3%	66.7%	100.0%		

Πίνακας 7. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν ότι το 28,3% των ερωτηθέντων είχε επιτυχία στους ρητούς αριθμούς και ταυτόχρονα είχε επιτυχία στους άρρητους αριθμούς. Ειδικότερα, 17 μαθητές στην έρευνα είχαν επιτυχία στην ταξινόμηση τόσο των ρητών όσο και των άρρητων αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα. Από την άλλη πλευρά, 31 μαθητές δηλαδή το 51,7% των ερωτηθέντων είχε αποτυχία στους ρητούς αριθμούς όσο και στους άρρητους αριθμούς. Ως προς το αποτέλεσμα του ελέγχου, η τιμή chi-square ισούται με 21,210 και επειδή P-value=0,000 συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% το αποτέλεσμα είναι στατιστικά σημαντικό. Ειδικότερα, οι συμμετέχοντες που είχαν επιτυχία στην ταξινόμηση των ρητών στατιστικά σημαντικά σχετίζονται με υψηλότερα επίπεδα επιτυχίας στην σωστή ταξινόμηση των άρρητων.

Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στην ταξινόμηση των αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα

Για τη σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα έγινε χρήση του ελέγχου Z-test. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Κατηγορία	N	Mean Rank	Sum of Ranks	Z-test	P-value
Ρητοί Αριθμοί	60	63.5	3810.0	-1.122	0.262
Άρρητοι Αριθμοί	60	57.5	3450.0		
Σύνολο	120				

Πίνακας 8. Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων αριθμών (z-test)

Τα αποτελέσματα του ελέγχου z-test δείχνουν ότι το Mean rank για την επιτυχία ταξινόμησης στους ρητούς αριθμούς είναι 63,5, ενώ το Mean rank για την επιτυχία ταξινόμησης στους άρρητους αριθμούς είναι 57,5. Η τιμή του ελέγχου z ισούται με -1,122 και επειδή P-value=0,262>0,05 συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα ποσοστά επιτυχίας για την ταξινόμηση των αριθμών στα σύνολα ρητών και άρρητων αριθμών. Επομένως, συμπεραίνεται ότι τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάζουν οι συμμετέχοντες για την ταξινόμηση των αριθμών δε διαφέρουν στατιστικά σημαντικά με βάση το εάν ταξινομούν τους αριθμούς σε ρητούς ή άρρητους αριθμούς.

4.1.3 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ

Με τη χρήση του ελέγχου chi-square εξετάζεται εάν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση στα αποτελέσματα των δύο πρώτων δραστηριοτήτων. Ειδικότερα, εξετάζεται εάν η γνώση του ορισμού των ρητών σχετίζεται με επιτυχία στην ταξινόμηση των ρητών αριθμών, ενώ επίσης εξετάζεται εάν η γνώση του ορισμού των άρρητων αριθμών σχετίζεται με την ταξινόμηση των άρρητων αριθμών στα αντίστοιχα σύνολα. Τα αποτελέσματα συσχέτισης επιτυχίας (μεταξύ ορισμού και ταξινόμησης) για τους ρητούς αριθμούς δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

		Επιτυχία στην ταξινόμηση των ρητών (1)	Αποτυχία στην ταξινόμηση των ρητών (0)	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Επιτυχία στον ορισμό ρητών (1)	N	7	7	14	0.331	0.565
	%	11.7%	11.7%	23.3%		
Αποτυχία στον ορισμό ρητών (0)	N	19	27	46		
	%	31.7%	45.0%	76.7%		
Σύνολο	N	26	34	60		
	%	43.3%	56.7%	100.0%		

Πίνακας 9. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση μεταξύ επιτυχίας ορισμού και ταξινόμησης ρητών αριθμών

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι 7 μαθητές δηλαδή το 11,7% των ερωτηθέντων είχε επιτυχία τόσο στον ορισμό ρητών όσο και στην ταξινόμηση των ρητών αριθμών. Από την άλλη πλευρά, το 45% των μαθητών είχε αποτυχία και στις δύο δραστηριότητες. Επειδή chi-square=0,331 και P-value=0,565>0.05 συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% τα αποτελέσματα δεν είναι στατιστικά σημαντικά.

Τα αποτελέσματα συσχέτισης επιτυχίας (μεταξύ ορισμού και ταξινόμησης) για τους άρρητους αριθμούς δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

		Επιτυχία στην ταξινόμηση των αρρήτων (1)	Αποτυχία στην ταξινόμηση των αρρήτων (0)	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Επιτυχία στον ορισμό άρρητών (1)	N	9	11	20	1.838	0.175
	%	15.0%	18.3%	33.3%		
Αποτυχία στον ορισμό άρρητων (0)	N	11	29	40		
	%	18.3%	48.3%	66.7%		
Σύνολο	N	20	40	60		
	%	33.3%	66.7%	100.0%		

Πίνακας 10. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση μεταξύ επιτυχίας ορισμού και ταξινόμησης άρρητων αριθμών

Βάσει των αποτελεσμάτων, 9 μαθητές δηλαδή το 15% του δείγματος σημείωσε επιτυχία τόσο στον ορισμό όσο και στην ταξινόμηση των άρρητων αριθμών. Επιπλέον, το 48,3% των μαθητών είχε αποτυχία και στις δύο δραστηριότητες. Επειδή chi-square=1,838 και P-value=0,175>0,05 σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ των αποτελεσμάτων στις δύο δραστηριότητες.

4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Για να καταφέρει κάποιος να κατανοήσει μια μαθηματική έννοια θα πρέπει να κατανοεί το θεωρητικό της υπόβαθρο και ταυτόχρονα την έννοια μέσω της διαίσθησης. Έχει παρατηρηθεί ότι συχνά η θεωρία και η διαίσθηση παρουσιάζουν δυσκολία στο να συμβιβαστούν. Εξετάσαμε τις διαισθήσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Γ' Λυκείου σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ των δύο συνόλων, ρητών και άρρητων, όπως η πυκνότητα, το πλήθος, το πώς συνυπάρχουν οι αριθμοί στην αριθμογραμμή καθώς και τις πράξεις μεταξύ αυτών των συνόλων.

4.2.1 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ

Μέσω της δραστηριότητας 3 διερευνώνται οι αυθόρμητες απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το πλήθος ρητών και άρρητων καθώς τα παιδιά αναμένεται να απαντήσουν διαισθητικά. Πιο συγκεκριμένα δίνονται τρεις δυνατές επιλογές μέσω των οποίων ο μαθητής καλείται να επιλέξει τη σωστή.

Μόνο το 25% των μαθητών απάντησε σωστά ότι οι άρρητοι είναι περισσότεροι σε πλήθος από τους ρητούς, όπως φαίνεται στον πίνακα 11. Από τον Πίνακα 11 παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές, με ποσοστό 36.7% απάντησαν ότι οι ρητοί αριθμοί είναι περισσότεροι σε πλήθος από τους άρρητους, το 26.7% των ερωτηθέντων πιστεύει τα δύο σύνολα αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το γεγονός επιβεβαιώνει την σχετική ερευνητική μας υπόθεση ότι οι μαθητές δεν κατανοούν σε μεγάλο βαθμό την υπεροχή σε πλήθος των αρρήτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα των άλλων ερευνών που είχαν συμπεριλάβει την ίδια ερώτηση. Στις έρευνες των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) και των Sirotic & Zaskis (2007a), όπως και στη δική μας, φαίνεται η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν ότι οι άρρητοι υπερέχουν σε πλήθος έναντι των ρητών. Στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) περίπου οι μισοί μαθητές απαντούν πως τα δύο σύνολα αποτελούνται από ίδιο πλήθος στοιχείων και ομοίως στην έρευνα των Sirotic & Zaskis (2007a) αναφέρεται ότι η παραπάνω αποτελεί την πιο συχνή απάντηση. Στην δική μας έρευνα διαφαίνεται η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν το πλήθος των δύο συνόλων αλλά σε αντίθεση με τις άλλες δύο έρευνες η συνηθέστερη απάντηση είναι ότι οι ρητοί είναι περισσότεροι σε σχέση με τους άρρητους. Αυτό ίσως αποδίδεται στο γεγονός ότι οι μαθητές στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας μας και όπως είναι δομημένο το πρόγραμμα σπουδών η διδασκαλία των άρρητων είναι παραγκωνισμένη.

		Συχνότητα
	Το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των άρρητων.	22 (36,7%)
	Το σύνολο των άρρητων αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των ρητών.	**15 (25%)**
	Το σύνολο των ρητών και το σύνολο των άρρητων αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων.	16 (26,7%)
	Καμία απάντηση	7 (11,7%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 11. Απαντήσεις σχετικά με το πλήθος ρητών και άρρητων

4.2.2 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΩΝ

Στη δραστηριότητα 4 παρουσιάζονται κάποιες ερωτήσεις μέσω των οποίων εξετάζονται οι αντιληπτικές ικανότητες των μαθητών σχετικά με τις έννοιες της πυκνότητας των συνόλων των ρητών και των άρρητων καθώς και του πλήθους των ρητών και των άρρητων. Για κάθε μία από τις ερωτήσεις της δραστηριότητας, δίνονται δύο αριθμοί όπου ο μαθητής πρέπει να σημειώσει αν μεταξύ αυτών υπάρχουν άλλοι ρητοί ή άρρητοι (ανάλογα με την ερώτηση) και να αιτιολογήσει την απάντησή του είτε μέσω του ορισμού είτε μέσω παραδείγματος, είτε να επεξηγήσει την απάντηση του ανάλογα με το πώς το αντιλαμβάνεται (διαισθητικά).

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ

Ύπαρξη ρητών ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{6}$

Στον Πίνακα 12, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των ατόμων που απάντησαν στην ερώτηση, συγκεκριμένα το 41.7% απάντησε και αιτιολόγησε σωστά την απάντησή του ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ του $\frac{3}{5}$ και του $\frac{5}{6}$. Η πλειοψηφία των απαντήσεων των μαθητών που κατηγοριοποιήθηκαν στην σωστή αιτιολόγηση είναι βασισμένη στα ισοδύναμα κλάσματα. Οι μαθητές αυτοί έκαναν τα κλάσματα ομώνυμα και βρήκαν ένα ή περισσότερα κλάσματα ανάμεσά τους. Μόνο ένας μαθητής ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και αφού ήδη βρει τρία κλάσματα, έγραψε ότι υπάρχουν και άπειρα άλλα κλάσματα. Πολλοί επίσης μαθητές μετέτρεψαν τα κλάσματα σε δεκαδικούς και βρήκαν έναν δεκαδικό αριθμό ανάμεσά τους. Το 35% απάντησε σωστά χωρίς ωστόσο να δώσει καμία αιτιολόγηση στην απάντησή του. Από την ανάλυση των απαντήσεων σε αυτή την ερώτηση φαίνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την πυκνότητα του συνόλου των ρητών, ότι δηλαδή ανάμεσα σε οποιουσδήποτε ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί. Τα αποτελέσματά μας επιβεβαιώνουν αυτά της έρευνας των Merenluoto & Lehtinen (2002), όπου οι μαθητές που απάντησαν σωστά βρήκαν μόνο έναν αριθμό ανάμεσα, είτε δημιουργώντας ισοδύναμα κλάσματα είτε δίνοντας σαν απάντηση τον αριθμητικό μέσο των δοθέντων κλασμάτων. Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι, οι μαθητές χρησιμοποιούν οικείες σε αυτούς διαδικασίες, όπως ισοδύναμα κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς, ψάχνοντας έστω και έναν αριθμό ανάμεσα. Έτσι παρότι θεωρήθηκε ότι απάντησαν σωστά είναι στην πραγματικότητα πολύ μακριά από την κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας και του απείρου.

Το 10% ενώ απάντησε σωστά έδωσε λάθος αιτιολόγηση. Τέτοιες απαντήσεις είναι για παράδειγμα: «Υπάρχουν ενδιάμεσοι ακέραιοι ανάμεσα στα δύο κλάσματα». Ταυτόχρονα ένα ποσοστό 8.3% θεωρεί ότι δεν υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ του $\frac{3}{5}$ και του $\frac{5}{6}$ και ένα ποσοστό της τάξης του 5% (συγκεκριμένα τα 3 από τα 60 που συμμετείχαν συνολικά στην έρευνα) δεν έδωσαν καμία απάντηση στη συγκεκριμένη ερώτηση.

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	25 (41,7%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	21 (35%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	6 (10%)
	Λανθασμένη απάντηση	5 (8,3%)
	Καμία απάντηση	3 (5%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 12. Ύπαρξη ρητών ανάμεσα στο 3/5 και 4/6

Β. Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$.

Στον Πίνακα 13, φαίνεται ότι το 43.3% των ερωτηθέντων πιστεύει σωστά ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί ανάμεσα στο $\sqrt{10}$ και στο $\sqrt{20}$, δίνοντας ταυτόχρονα και τη σωστή αιτιολόγηση για αυτή του την απάντηση. Ένα σημαντικό ποσοστό των ερωτηθέντων, το 35%, ενώ απάντησε σωστά δεν αιτιολόγησε την απάντησή του. Ανάμεσα στις απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως σωστές είναι οι αριθμοί: $\sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$ και κάποιοι άλλοι οι οποίοι αναλύονται περαιτέρω όπως ο $\sqrt{18} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	26 (43,3%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	21 (35%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	3 (5%)
	Λανθασμένη απάντηση	6 (10%)
	Καμία απάντηση	4 (6,7%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 13. Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του √10 και του √20.

Ύπαρξη ρητών μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$

Το 31.7% απάντησαν και αιτιολόγησαν σωστά την απάντησή τους. Κατηγοριοποιώντας τις απαντήσεις βλέπουμε ότι σχεδόν το σύνολο των απαντήσεων στην κατηγορία "σωστή αιτιολόγηση" είναι αιτιολογημένες με τον ίδιο τρόπο. Οι μαθητές βρίσκουν την δεκαδική προσέγγιση των δύο ριζών και μέσω αυτής βρίσκουν έναν δεκαδικό ανάμεσα.

Από τον Πίνακα 14, παρατηρούμε ότι ένα σημαντικό ποσοστό ατόμων, συγκεκριμένα το 35% θεωρεί ότι δεν υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$ απαντώντας λάθος στην ερώτηση. Κάποιες από τις λανθασμένες απαντήσεις είναι: «Δεν υπάρχουν ρητοί ανάμεσα στους άρρητους» και « Οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ είναι διαδοχικοί και δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα». Από την ανάλυση των απαντήσεων βλέπουμε ότι μαθητές δεν κατέχουν την επίσημη μαθηματική γνώση ώστε να απαντήσουν ορθά σε αυτές τις ερωτήσεις αλλά απαντούν διαισθητικά όπως και οι εμπλεκόμενοι στις έρευνες τωνSirotic & Zazkis (2007α) και Guven, Cekmez & Karatas (2011).

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	19 (31,7%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	15 (25%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	4 (6,7%)
	Λανθασμένη απάντηση	21 (35%)
	Καμία απάντηση	1 (1,7%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 14. Ύπαρξη ρητών μεταξύ του √2 και του √3.

Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του 0 και του 1

Στον Πίνακα 15, βλέπουμε ότι οι σωστές απαντήσεις με σωστή αιτιολόγηση ανέρχονται 36.7%. Ανάμεσα στις σωστές αιτιολογήσεις συναντάμε την απάντηση ενός μαθητή που έδωσε την $\sqrt[3]{0,08}$ενώ οι υπόλοιποι έδωσαν αριθμούς όπως τους $\sqrt{\frac{1}{7}}$, $\sqrt{0,2}$, $\sqrt{0,5}$ αλλά και άλλους αριθμούς όπως το $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Το 13.3%έχει απαντήσει σωστά ότι υπάρχουν άρρητοι αλλά έχει δώσει λανθασμένη αιτιολόγηση του ισχυρισμού. Τέτοιες απαντήσεις είναι οι αριθμοί το 1/3, το 0,9999.. και άλλοι τυχαίοι απειροψήφιοι δεκαδικοί. Είναι προφανές ότι οι μαθητές αυτοί θεωρούν ότι όλοι οι αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι άρρητοι.

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	22 (36,7%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	9 (15%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	8 (13,3%)
	Λανθασμένη απάντηση	17 (28,3%)
	Καμία απάντηση	4 (6,7%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 15. Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του 0 και του 1

	Ποσοστό επιτυχίας
Ύπαρξη ρητών ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$	25 (41,7%)
Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$	26 (43,3%)
Ύπαρξη ρητών μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$	19 (31,7%)
Ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του 0 και του 1	22 (36,7%)

Πίνακας 16. Συνολική επιτυχία στην πυκνότητα

Συνολικά, συμπεραίνουμε ότι μαθητές δεν κατανοούν σε πολύ μεγάλο βαθμό την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, καθώς μόνο 17 από τους 60 μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε πάνω από δύο ερωτήσεις της δραστηριότητας. Σε μεγάλο βαθμό οι απαντήσεις που δίνουν είναι λανθασμένες καθώς σε όλα τα σχετικά ερωτήματα ψάχνουν με διάφορους τρόπους να βρουν έστω και έναν αριθμό ανάμεσα στους δοθέντες ρητούς ή άρρητους. Εκτός ελάχιστων περιπτώσεων δεν φτάνουν στο σημείο να γενικεύσουν ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι ανάμεσα σε οποιουδήποτε ρητούς ή άρρητους.

Συσχέτιση μεταξύ συνολικής επιτυχίας στη δραστηριότητα σχετικά με την πυκνότητα και ολικής επιτυχίας στην ταξινόμηση αριθμών

Με τη χρήση του ελέγχου chi-square εξετάζεται εάν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση στα αποτελέσματα συνολικής επιτυχίας στη δραστηριότητα σχετικά με την πυκνότητα (δραστηριότητα 4) και της ολικής επιτυχίας στην αντιστοίχιση αριθμών (δραστηριότητα 2).

		Ολική επιτυχία στην ταξινόμηση	Ολική αποτυχία στην ταξινόμηση	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Συνολική επιτυχία στην πυκνότητα	N	9	8	17	7.074	0.008
	%	15.0%	13.3%	28.3%		
Συνολική αποτυχία στην πυκνότητα	N	8	35	43		
	%	13.3%	58.3%	71.7%		
Σύνολο	N	17	43	60		
	%	28.3%	71.7%	100.0%		

Πίνακας 17. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση επιτυχίας μεταξύ της ικανότητας ταξινόμησης και της κατανόησης της πυκνότητας

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το 15% των μαθητών είχε επιτυχία τόσο στη δραστηριότητα με την πυκνότητα όσο και στη δραστηριότητα αντιστοίχισης αριθμών στα σύνολα). Από την άλλη πλευρά, 35 μαθητές δηλαδή το 58,3% του δείγματος είχε αποτυχία και στις δύο δραστηριότητες. Επειδή chi-square=7,074 και P-value=0,008<0,01, συμπεραίνεται ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% τα παραπάνω αποτελέσματα είναι στατιστικά σημαντικά

4.2.3 ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Στη δραστηριότητα 5 παρουσιάζονται δυο προτάσεις μέσω των οποίων διερευνάται ο τρόπος με τον οποίο απαντούν οι μαθητές σε προτάσεις σχετικά με το αν το σύνολο των άρρητων είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Α. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Η πρόσθεση θετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα

Από τον Πίνακα 20, παρατηρούμε μόνο το 15% των μαθητών κατάφερε να απαντήσει σωστά και να αιτιολογήσει την απάντησή του. Σχεδόν το 50% θεωρεί ότι παραπάνω πρόταση αληθεύει, δηλαδή έδωσε λανθασμένη απάντηση. Παρόμοια αποτελέσματα στην ίδια ερώτηση είχαν και οι έρευνες Sirotic & Zazkis (2007α) και των Guven, Cekmez & Karatas (2011). Με βάση το γραπτό ερωτηματολόγιο και τις συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007α), διαπιστώθηκε ότι σχεδόν το σύνολο των συμμετεχόντων έδειξαν να μην αντιλαμβάνονται τους άρρητους αριθμούς ως αντικείμενα. Για παράδειγμα ο $5 + \sqrt{2}$ προσλαμβάνεται συνήθως λειτουργικά (ως μια διαδικασία) και όχι δομικά (ως ένα αντικείμενο) (Sirotic & Zazkis, 2007α). Το γεγονός επιβεβαιώνεται και στη δική μας έρευνα όπου μόνο 4 μαθητές κατάφεραν να δώσουν ένα αντιπαράδειγμα (όπως οι αριθμοί $\sqrt{3}$,$5 - \sqrt{3}$). Οι υπόλοιποι 5 μαθητές που βρίσκονται στην κατηγορία της σωστής αιτιολόγησης περιγράφουν με λόγια πως το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δυο θετικών άρρητων δεν θα είναι απαραίτητα άρρητο, χωρίς να καταφέρουν να δώσουν ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	9 (15%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	13 (21,7%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	7 (11,7%)
	Λανθασμένη απάντηση	28 (46,7%)
	Καμία απάντηση	3 (5%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 18. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Η πρόσθεση θετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα

Β. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Ο πολλαπλασιασμός δυο διαφορετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα

Στον Πίνακα 19, παρατηρούμε ότι το 23.3% των μαθητών απάντησε σωστά και έδωσε και τη σωστή αιτιολόγηση. Κάποιες από τις απαντήσεις είναι $\sqrt{3} \cdot$

$\left(-\sqrt{3}\right) = -3$, $\sqrt{2}\sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$ και άλλα παρόμοια. Είναι ενδιαφέρον ότι, στην έρευνά μας όπως και στην έρευνα τωνSirotic & Zazkis (2007α), κανείς δεν έδωσε ως αντιπαράδειγμα ένα γινόμενο συζυγών με το οποίο αποδεικνύεται εύκολα ότι το γινόμενο δύο διαφορετικών άρρητων μπορεί πράγματι να είναι ρητός. Παρά το γεγονός ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες γνωρίζουν την εκτέλεση αλγορίθμων όπως «ρητοποίηση του παρονομαστή», καθώς είναι μια διαδικασία που τη χρησιμοποιούν πολύ συχνά σε όλες τις τάξεις του Λυκείου. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την έρευνά μας καθώς ενώ το 43,3 % έχει αντιστοιχήσει τον αριθμό $\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)$ στο σύνολο των ρητών αλλά πολύ λιγότεροι απαντούν σωστά στην παραπάνω πρόταση. Το γεγονός αυτό αποκαλύπτει ότι η αλγοριθμική γνώση μπορεί να γίνει εξαιρετικά διαδικαστική και μηχανιστική για το μαθητή, σε βαθμό που ο ίδιος ο σκοπός της χρήσης τέτοιων διαδικασιών να χάνεται τελείως.

		Συχνότητα
	Σωστό με αιτιολόγηση	14 (23,3%)
	Σωστό χωρίς αιτιολόγηση	9 (15%)
	Σωστό με λάθος αιτιολόγηση	6 (10%)
	Λανθασμένη απάντηση	26 (43,3%)
	Καμία απάντηση	5 (8,3%)
	Σύνολο	60 (100%)

Πίνακας 19. Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Ο πολλαπλασιασμός δυο διαφορετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα

Από τον πίνακα 20, βλέπουμε ότι συνολικά οι μαθητές δείχνουν να αποτυγχάνουν στην κατηγοριοποίηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ άρρητων αριθμών, σε ρητά ή άρρητα. Φαίνεται ότι οι μαθητές σε μεγάλο βαθμό κατέχουν την πεποίθηση ότι το σύνολο των άρρητων είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

	Επιτυχία
Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Η πρόσθεση θετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα	9 (15%)
Απαντήσεις σχετικά με την πρόταση: Ο πολλαπλασιασμός δυο διαφορετικών αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα	14 (23,3%)

Πίνακας 20. Επιτυχία στον καθορισμό των αποτελεσμάτων των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Συσχέτιση απαντήσεων μεταξύ απάντησης στο αποτέλεσμα πρόσθεσης και απάντησης στο αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρρητων αριθμών

Για τον έλεγχο συνάφειας / συσχέτισης απαντήσεων μεταξύ των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές για το αποτέλεσμα που έχει η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός άρρητων αριθμών χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Chi-Square (χ^2). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δίνονται στον κάτωθι πίνακα.

			Αν πολλαπλασιάσουμε δυο διαφορετικούς άρρητους το αποτέλεσμα θα είναι πάντα άρρητο.				
			Επιτυχία	Αποτυχία	Σύνολο	Chi-Square	P-value
Αν προσθέσουμε δύο θετικούς άρρητους αριθμούς θα αποτέλεσμα θα είναι άρρητο.	**Επιτυχία**	N	3	6	9	0.592	0.442
		%	5.0%	10.0%	15.0%		
	Αποτυχία	N	11	40	51		
		%	18.3%	66.7%	85%		
	Σύνολο	N	14	46	60		
		%	23.3%	76.7%	100.0%		

Πίνακας 21. Συσχέτιση Chi-Square για τη σύγκριση απαντήσεων για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό άρρητων αριθμών

Βάσει των αποτελεσμάτων, 3 μαθητές δηλαδή το 5% του δείγματος απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις. Από την άλλη πλευρά, 40 μαθητές δηλαδή το 66,7% των ερωτηθέντων απάντησε λάθος τόσο στο αποτέλεσμα πρόσθεσης άρρητων αριθμών όσο και στο αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρρητων αριθμών. Επειδή chi-square=0,592 και P-value=0,442>0,05, σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% το αποτέλεσμα δεν είναι στατιστικά σημαντικό. Ως εκ τούτου, η απάντηση (σωστή/λάθος) που δίνουν οι μαθητές στο αποτέλεσμα πρόσθεσης άρρητων αριθμών δε σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την απάντηση (σωστή/λάθος) που δίνουν οι μαθητές αναφορικά με το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού άρρητων αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην συγκεκριμένη έρευνα είχαμε ως στόχο να αναλύσουμε τον βαθμό κατανόησης των μαθητών Λυκείου σχετικά με το σύνολο των άρρητων αριθμών,να αναδείξουμε τις συνηθέστερες δυσκολίες, εμπόδια και παρανοήσεις και να διερευνήσουμε τις γνώσεις των μαθητών που σχετίζονται:

- με τον ορισμό ρητών και άρρητων αριθμών,
- με την ικανότητά των μαθητών να ταξινομούν τους αριθμούς στα σύνολα των ρητών, άρρητων και πραγματικών,
- με το πλήθος των άρρητων, την πυκνότητα και την συνύπαρξη ρητών και άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών,
- με την κατηγοριοποίηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ άρρητων αριθμών, σε ρητά ή άρρητα.

Θα παραθέσουμε τα κύρια ευρήματα σχετικά με τις ερευνητικές υποθέσεις της έρευνάς μας.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων επιβεβαιώνεται η **πρώτη ερευνητική υπόθεση**. Οι μαθητές αποτυγχάνουν στο να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα προτείνουν ορισμούς οι οποίοι απέχουν πολύ από το να είναι επίσημοι και συνήθως βασίζονται σε αναπαραστάσεις και διαισθήσεις. Το ποσοστό επιτυχίας για τον ορισμό των ρητών ήταν 23,3%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τον ορισμό των άρρητων είναι 40%, ενώ παράλληλα μόνο το 23,3% των μαθητών κατάφεραν να διατυπώσουν ορθά και τους δύο ορισμούς. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης των ποσοστών επιτυχίας στον ορισμό μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών (z-test) δείχνουν ότι τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάζουν οι συμμετέχοντες στον ορισμό των αριθμών δε διαφέρουν ανάλογα με το εάν ορίζουν τους ρητούς ή τους άρρητους αριθμούς και επομένως δεν παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επιτυχία των ερωτηθέντων ως προς τον ορισμό των ρητών/άρρητων αριθμών.

Αναφορικά με την **δεύτερη ερευνητική υπόθεση**, επιβεβαιώνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ των συνόλων που συγκροτούν τους πραγματικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στην ταξινόμηση. Σχεδόν οι μισοί και στις περισσότερες περιπτώσεις πάνω από τους μισούς μαθητές, δεν κατάφεραν να κατατάξουν κάθε αριθμό στα αντίστοιχα σύνολα στα οποία ανήκει. Μόνο το 28,3% του συνόλου των μαθητών κατάφεραν ταυτόχρονα να αναγνωρίσουν τουλάχιστον τρείς από τους πέντε ρητούς και τουλάχιστον τρείς από τους πέντε άρρητους. Από την σύγκριση ποσοστών επιτυχίας στην ταξινόμηση ρητών και άρρητων (z-test), συμπεραίνεται ότι τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάζουν οι συμμετέχοντες για την ταξινόμηση των αριθμών δε διαφέρουν στατιστικά σημαντικά με βάση το αν ταξινομούν ρητούς ή άρρητους αριθμούς. Επιπλέον, η συσχέτιση chi-square για τη σύγκριση μεταξύ επιτυχίας στη διατύπωση των ορισμών και στην ικανότητα ταξινόμησης, δεν έδειξε στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ τους.

Μόνο το 25% των μαθητών γνωρίζει ότι το σύνολο των άρρητων αποτελείται από περισσότερα στοιχεία, επιβεβαιώνοντας την **τρίτη ερευνητική υπόθεση**. Παράλληλα, αναλύοντας τον βαθμό κατανόησης της έννοιας της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες. Μόνο το 43,3% αναγνωρίζει και μπορεί να αιτιολογήσει την ύπαρξη αρρήτων μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό πέφτει στο 31,7% όταν τα άκρα του διαστήματος είναι το 0 και το 1. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι μόνο το 31,7% μπορεί να αντιληφθεί την ύπαρξη ρητών μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ και το 41.7% απάντησε και αιτιολόγησε σωστά την για την ύπαρξη ρητών μεταξύ του $\frac{3}{5}$ και του $\frac{5}{6}$. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται και μπορούν να αιτιολογήσουν με μεγαλύτερη ευκολία την ύπαρξη ρητών σε ένα διάστημα του οποίου τα άκρα είναι ρητοί και ομοίως την ύπαρξη αρρήτων σε διάστημα του οποίου τα άκρα είναι άρρητοι. Δυσκολεύονται να αντιληφθούν την ύπαρξη ρητών ανάμεσα σε άρρητους, όπως και αρρήτων ανάμεσα σε ρητούς, δηλαδή την ύπαρξη δυο απειροσυνόλων μέσα σε ένα δοθέν διάστημα της πραγματικής ευθείας. Μέσω της συσχέτισης chi-square φαίνεται να σχετίζονται στατιστικά σημαντικά η κατανόηση της πυκνότητας με την ικανότητα ταξινόμησης.

Τέλος, όσον αφορά το **τέταρτο ερευνητικό ερώτημα** επιβεβαιώνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να καθορίσουν αν τα αποτελέσματα των πράξεων (πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού) μεταξύ άρρητων είναι ρητά ή άρρητα. Μόνο το 15% γνωρίζει και μπορεί να αιτιολογήσει ότι η πρόσθεση θετικών αρρήτων δεν δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα και ομοίως μόνο το 23,3% γνωρίζει και μπορεί να αιτιολογήσει ότι ο πολλαπλασιασμός διαφορετικών αρρήτων δεν δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα. Αξιοσημείωτο είναι ότι μόνο το 5% των μαθητών απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις, με τον έλεγχο chi-square να δείχνει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των δύο ερωτήσεων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα αντικείμενο διδασκαλίας και μάθησης, το οποίο οι μαθητές το συναντούν διαδοχικά στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Η ύπαρξη των άρρητων αριθμών είναι το στοιχείο αυτό που οδηγεί στην επέκταση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Όταν εισάγονται οι άρρητοι αριθμοί, ένα άτομο πρέπει να ανακατασκευάσει την έννοια του αριθμού ώστε να ταιριάξει τα νέα στοιχεία στις υπάρχουσες γνωστικές δομές.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας, φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να διατυπώσουν έναν τυπικό ορισμό τόσο για τους ρητούς όσο και για τους άρρητους. Σε μεγάλο βαθμό δεν έχουν ξεκάθαρες τις ιδιότητες που πρέπει να έχει ένας αριθμός για να ανήκει σε ένα από τα δύο σύνολα. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με το σύνολο των σχετικών ερευνών, στις οποίες αναφέρεται ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να διατυπώσουν έναν τυπικό ορισμό για τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995, Yilmaz & Ay, 2018, Arcavi, Bruckheimer, Ben-Zvi, 1987, Merenluoto & Lehtinen, 2002).

Από την ανάλυση των ευρημάτων της έρευνάς μας, βλέπουμε πως οι μαθητές δυσκολεύονται σε πολύ μεγάλο βαθμό να αναγνωρίσουν αν κάποιοι αριθμοί είναι ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι, το 53,3% των μαθητών απαντά ορθά ότι ο αριθμός 0,575575557….. είναι άρρητος και ταυτόχρονα μόνο το 30% του συνόλου απαντά σωστά ότι ο αριθμός 0,0555… είναι ρητός. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), στην οποία αναφέρεται ότι οι μαθητές ταυτίζουν τον όρο «άρρητος» με τον όρο «μη-ολόκληρος αριθμός».

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι λίγοι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές έχουν αντιληφθεί ότι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών. Το συγκεκριμένο εύρημα επιβεβαιώνει το κοινό συμπέρασμα όλων των σχετικών ερευνών ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών αδυνατεί να αντιληφθεί ότι όλοι οι δοθέντες αριθμοί είναι πραγματικοί (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995, Merenluoto & Lehtinen, 2002, Voskoglou, Kosyvas, 2011). Θα έπρεπε να διδάσκεται πιο συστηματικά η ιεραρχική δομή των διαφόρων συνόλων που συγκροτούν το σύνολο των πραγματικών, των οποίων οι άρρητοι αποτελούν αναπόσπαστο μέρος.

Μόνο το 25% των μαθητών γνωρίζει ότι το σύνολο των άρρητων αποτελείται από περισσότερα στοιχεία, επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα της έρευνας των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), όπου μόνο το 25% των μαθητών (grade 10) απάντησαν σωστά στην αντίστοιχη ερώτηση. Επιπλέον, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας φαίνεται ότι οι μαθητές απέχουν πολύ από την συνειδητοποίηση της έννοιας της πυκνότητας στους πραγματικούς. Κατά μέσο όρο κάτω από το 40% κατάφερε να απαντήσει σωστά στην σχετική ερώτηση με την πυκνότητα, με τις αιτιολογήσεις τους να κάνουν ξεκάθαρο το γεγονός ότι απέχουν πολύ από την κατανόηση της έννοιας. Όπως αναφέρεται και στην έρευνα των Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), οι μαθητές εκπλήσσονται στην ιδέα ότι σε ένα δοθέν διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι. Καθώς η ευθεία των αριθμών είναι πυκνή από τους ρητούς αριθμούς, μοιάζει λογικό στη πλειοψηφία των μαθητών να μην υπάρχει χώρος για άλλους αριθμούς. Έτσι όταν οι μαθητές εισάγονται στους άρρητους δυσκολεύονται να δεχτούν ότι στην αριθμογραμμή υπάρχουν και άλλοι και μάλιστα πολλοί περισσότεροι αριθμοί. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι οι άρρητοι υπερέχουν σε πλήθος από τους ρητούς καθώς και να συνειδητοποιήσουν και να αποδεχθούν την "ιδιαίτερη" φύση τους.

Τέλος, από την ανάλυση των ευρημάτων της έρευνας μας φαίνεται ότι οι μαθητές αποτυγχάνουν στο να καθορίσουν αν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αρρήτων δίνει πάντα άρρητο αποτέλεσμα, επιβεβαιώνοντας έτσι τις αντίστοιχες έρευνες (Sirotic & Zazkis, 2007α;Guven, Cekmez & Karatas, 2011). Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τους άρρητους αριθμούς ως αντικείμενα, για παράδειγμα ο $5 + \sqrt{2}$ προσλαμβάνεται συνήθως ως μια διαδικασία (Sirotic & Zazkis, 2007α). Ενώ, το 43,3 % των μαθητών στην έρευνά μας έχει αντιστοιχήσει τον αριθμό $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$ στο σύνολο των ρητών, μόνο το 23,3% μπορεί να αιτιολογήσει ότι το γινόμενο διαφορετικών αρρήτων μπορεί να δώσει ρητό αποτέλεσμα. Το γεγονός αυτό αποκαλύπτει ότι η αλγοριθμική γνώση μπορεί να γίνει εξαιρετικά διαδικαστική και μηχανιστική για το μαθητή, σε βαθμό που ο ίδιος ο σκοπός της χρήσης τέτοιων διαδικασιών να χάνεται τελείως.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ-ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

Μια από τις βασικές δυσκολίες που συναντήσαμε είναι ότι οι έρευνες σχετικά με την κατανόηση των αρρήτων στην ελληνική βιβλιογραφία είναι ελάχιστές, αλλά και στην ξενόγλωσση είναι εξίσου περιορισμένες. Επίσης, η έρευνα μας ήταν μικρής κλίμακας καθώς έγινε με μόνο 60 μαθητές και αφορούσε το τοπικό επίπεδο μόνο δύο σχολείων στην πόλη της Λάρισας, με συγκεκριμένα γεωγραφικά, πολιτισμικά και οικονομικά χαρακτηριστικά. Επιπλέον, η βολική δειγματοληψία δεν κατοχυρώνει την πλήρη αξιοπιστία της έρευνάς μας, γεγονός που δεν μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας.

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον μια μελλοντική έρευνα, να πραγματοποιηθεί:

- σε μεγαλύτερο πλήθος μαθητών, από αντιπροσωπευτικά σχολεία διαφορετικών γεωγραφικών περιοχών της χώρας.
- συγκριτικά σε μαθητές Λυκείου και φοιτητές Παιδαγωγικών τμημάτων, ώστε να μελετηθεί αν οι υποψήφιοι δάσκαλοι συνεχίζουν να κατέχουν αντίστοιχες δυσκολίες στην κατανόηση σχετικά με το σύνολο των αρρήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbott, S. (2015). The Real Numbers. In Understanding Analysis (pp. 1-37). *Springer*, New York, NY.

Adams, T. L. (1998). Prospective elementary teachers' mathematics subject matter knowledge: The real number system. *Action in teacher education*, 20(2), 35-48.

Arbour, D. (2012). *Students' Understanding of Real, Rational, and Irrational Numbers* (Doctoral dissertation, Concordia University).

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the learning of mathematics*, 7(2), 18-23.

ClawsonS. (2005).*Ο ταξιδευτής των μαθηματικών*, μτφ. Ε. Αλεξοπούλου, εκδ. Κέδρος: Αθήνα.

Creswell, W. J. (2011). *Η Έρευνα στην Εκπαίδευση. Σχεδιασμός. Διεξαγωγή και Αξιολόγηση της Ποσοτικής και Ποιοτικής Έρευνας*. Μτφ. Ν.. Κουβαράκου, εκδ. Ιων:Αθήνα.

EvesH. (1989).*Μεγάλεςστιγμές των μαθηματικών*, μτφ. Μ. Κωνσταντινίδης-Ν. Λιλής, εκδ. Τροχαλία: Αθήνα.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 230-248.

Guven, B., Cekmez, E., & Karatas, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *Primus*, 21(5), 401-416.

Kidron, I. (2016, March). Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals. In First conference of International Network for Didactic.*Research in University Mathematics.*

Lehtinen, E., Merenluoto, K., &Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un) real numbers. *European Journal of Psychology of Education*, 12(2), 131-145.

Mamolo, A. (2009). Intuitions of"infinite numbers": Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 305-330.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (pp. 232-257). *Springer*, Dordrecht.

Sirotic, N. (2006). *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality*, Canada: Simon Fraser University.

Sirotic, N. &Zazkis, R. (2007a), Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49- 76.

Sirotic, N. &Zazkis, R. (2007b), Irrational numbers on the number line – where are they, International Journal of Mathematical *Education in Science and Technology*, 38 (4), 477-488.

Struik,D.J. (1993). *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*, μτφ. Α. Φερεντίνου - Νικολακοπούλου, εκδ. Δαίδαλος: Αθήνα.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, 82.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., &Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84-106.

Voskoglou, M. G. (2013). An application of the APOS/ACE approach in teaching the irrational numbers. *Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education*, 8(1), 30-47.

Voskoglou, M. G., &Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 21, 127-141.

Yilmaz, N., & Ay, Z. S. (2018). Exploring 8th Grade Students' Skills and Knowledge on Irrational Numbers. *InternationalJournal of Research in Education and Science*, 4(2), 633-654.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *InternationalJournal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 207-217.

Zazkis, R., &Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *Research in collegiatemathematicseducation*, 7, 1-27.

Ζαχαριάδης, Θ., Χρίστου, Κ., Πίττα-Πανταζή, Δ.(2009).*Μοντέλο Κατανόησης της Δομής και των Ιδιοτήτων των Πραγματικών Αριθμών*. 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.), Ρόδος 29-31 Οκτωβρίου 2009.

Θωμαΐδης, Γ. (2018). *Η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών ως βασικό προαπαιτούμενο στη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης.*doi: https://www.kalamari.gr/images/stories/hmerida_mathimatikwn/8h/2018thomaidis-paper.pdf (ανακτήθηκε 17 Φεβρουαρίου 2022).

Κόσυβας, Γ. Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; Αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (7), 9-48.

Κουφός, Ε. & Ευαγγελόπουλος, Α. *Η μαθηματική υποδομή των μαθητών που εγγράφονται στην Α΄ τάξη του Γενικού Λυκείου. Μια εμπειρική έρευνα.*Πρακτικά 4ης Μαθηματικής Εβδομάδας, σσ.360–383. Θεσσαλονίκη: Παράρτημα Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2012.

Μάκρας, Σ., & Σαλίχος, Μ. (1991). Αξιολόγηση των Γνώσεων των Μαθητών στα Μαθηματικά κατά την είσοδό. *Ευκλείδης Γ*, (30-31), 42-60.

Παπασταυρίδης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ. Α. Κ., Ευγενία Αξιολόγηση Μπάραλος, Γ., Πολύζος, Γ. Α. Σ., & Ανδρέας Αξιολόγηση Σκούρας, Α. (2016). Πρόγραμμα Σπουδών: Μαθηματικά (Τάξεις: Α΄, Β΄, Γ΄): Γενικό Λύκειο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να δοθεί ο ορισμός των ρητών αριθμών.

____

____

____

____

____

____

β) Να δοθεί ο ορισμός των άρρητων αριθμών.

____

____

____

____

____

____

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Να σημειώσετε με Χ στα αντίστοιχα σύνολα που ανήκει ο κάθε αριθμός.

	ΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
0,05755755575……			
$\sqrt{16}$			
$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$			
$\sqrt[4]{0,0016}$			
Το εμβαδόν ενός κύκλου			
Η λύση της εξίσωσης: $2^x = 3$			
$\sqrt[3]{0,8}$			
$\sqrt{\frac{12}{25}}$			
0,05555……			
3,14			

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3</u>

Επέλεξε την **σωστή** πρόταση από τις ακόλουθες τρείς:

α) Το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των άρρητων.
β) Το σύνολο των άρρητων αριθμών αποτελείται από πιο πολλά στοιχεία σε σχέση με το σύνολο των ρητών.
γ) Το σύνολο των ρητών και το σύνολο των άρρητων αποτελούνται από το ίδιο πλήθος στοιχείων.

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4</u>

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις.

α) Υπάρχουν ρητοί αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί μεταξύ του $\sqrt{10}$ και του $\sqrt{20}$;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

δ) Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί μεταξύ των αριθμών 0 και 1;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5Χαρακτήρισε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

α) Αν προσθέσουμε δύο θετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα θα είναι πάντα άρρητο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Αν πολλαπλασιάσουμε δυο διαφορετικούς άρρητους το αποτέλεσμα θα είναι πάντα άρρητο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.