ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος (5-12 ετών)

Διπλωματική εργασία

«Διατυπώνοντας τα διαφορετικά προβλήματα που προκύπτουν από την ίδια πολλαπλασιαστική κατάσταση:

Μια μελέτη παρέμβασης με παιδιά της Γ΄ Δημοτικού»

Τόνα Μαγδαληνή,

Α.Ε.Μ. 696

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια

Χρήστου Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω ιδιαίτερα τις ευχαριστίες μου στην αναπληρώτρια καθηγήτρια, επιβλέπουσα της εργασίας **κα Βαμβακούση Ξένια**, για την επιστημονική της καθοδήγηση και την αμέριστη βοήθεια και υποστήριξη που μου πρόσφερε σε όλα τα στάδια της εκπόνησης και συγγραφής της παρούσης εργασίας. Η υπομονή της και η ανθρώπινη και φιλική της αντιμετώπιση με ενθάρρυνε και με βοήθησε σημαντικά για να ανταπεξέλθω στις δυσκολίες που αντιμετώπισα.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια **κα Καλδρυμίδου Μαρία** καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή **κο Χρήστου Κωνσταντίνο**, που δέχτηκαν να είναι μέλη της Εξεταστικής επιτροπής.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού Διεπιστημονικού Προγράμματος Σπουδών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας και έθεσε ως κεντρικό ζήτημα τη διερεύνηση της κατανόησης των μαθητών/-τριών της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής δομής των «ισοπληθών ομάδων» και η διδακτική υποστήριξη για την ανάπτυξη αυτής της κατανόησης.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η κατανόηση των αριθμητικών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και της αντίστροφης σχέσης τους, αποτελεί μια πρόκληση για τους μαθητές του Δημοτικού αλλά και για τους εκπαιδευτικούς που καλούνται να την πραγματευτούν. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ένα πολύ σημαντικό μέρος του περιεχομένου των Μαθηματικών για την πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, καθώς συνδέονται με πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, όπως οι ρητοί αριθμοί και οι αναλογίες. Ενώ υπάρχει πληθώρα ερευνών που αφορούν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, καθώς και σχετικές διδακτικές προτάσεις, η διδακτική προσέγγιση της μεταξύ τους σχέσης είναι ένα ζητούμενο. Η παρούσα εργασία επιχειρεί να συμβάλλει προς αυτή την κατεύθυνση μέσω του σχεδιασμού μιας παρέμβασης που στοχεύει στην πραγμάτευση της σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μέσα από την κατασκευή προβλημάτων από τα ίδια τα παιδιά. Στην παρέμβαση συμμετείχαν τα 22 παιδιά μιας τάξης της Γ΄ Δημοτικού που κλήθηκαν συνεργαζόμενα σε μικρές ομάδες να αναπαραστήσουν με διάφορους τρόπους και να διατυπώσουν λεκτικά τα τρία διαφορετικά προβλήματα που προκύπτουν από καταστάσεις του τύπου των «ισοπληθών ομάδων». Τα παιδιά εργάστηκαν ομαδικά, με τη βοήθεια εμπράγματων και εικονικών αναπαραστάσεων, καθώς και πινάκων οργάνωσης των δεδομένων. Κεντρικός στόχος της παρέμβασης ήταν να αναγνωρίσουν τα παιδιά τις διαφορετικές ποσότητες που συμμετέχουν στην πολλαπλασιαστική σχέση και τους τρόπους με τους οποίους η σχέση μετασχηματίζεται. Τα παιδιά εξετάστηκαν πριν και μετά την παρέμβαση ατομικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπήρξε βελτίωση στην ικανότητα των παιδιών να διατυπώνουν και να μετασχηματίζουν προβλήματα αυτού του τύπου. Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού ήταν αυτά που διατυπώθηκαν ορθά συχνότερα, πριν, κατά τη διάρκεια, και μετά την παρέμβαση. Η βελτίωση στον μεταέλεγχο προήλθε κατά κύριο λόγο από την αύξηση της ορθής διατύπωσης προβλημάτων διαίρεσης μερισμού. Τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης ήταν αυτά που προκάλεσαν τη μεγαλύτερη δυσκολία, μέχρι και τον μεταέλεγχο.

Λέξεις κλειδιά: πολλαπλασιασμός, διαίρεση, αντίστροφη σχέση πράξεων, πολλαπλασιαστική δομή, ισοπληθείς ομάδες, διατύπωση προβλημάτων

Abstract

Understanding the arithmetic operations of multiplication and division and their inverse relationship is a challenge for elementary school students but also for teachers who are called to deal with it. The operations of multiplication and division are a very important part of the content of mathematics for primary education, as they are linked to many other mathematical concepts and relationships, such as rational numbers and proportions. While there is plenty of research on multiplication and division, as well as related teaching suggestions, the didactic approach to the relationship between them is a question. The present work attempts to contribute in this direction through the design of an intervention that aims to address the relationship between multiplication and division through problem posing by the students themselves. The intervention was attended by 22 3rd graders of one class who were invited to work together in small groups to represent in different ways and to formulate verbally the three different problems that arise from the "equal groups" situation. The students were supported by manipulatives, image-based, and tabular representations. The main goal of the intervention was for students to recognize the different quantities involved in the underlying multiplicative relationship and the ways in which the relationship is transformed. The students were tested before and after the intervention. The results of the study showed that there was an improvement in the ability of children to formulate and transform problems of this type. The multiplication problems were the ones that were correctly articulated most often, before, during, and after the intervention. The improvement in the post-test came mainly from the increase in posing partitive division problems. The measurement division problems were the ones that caused the greatest difficulty, during the intervention and at the post-test moment.

Keywords: multiplication, division, inverse relation of operations, multiplicative structure, equal groups, problem formulation

1. Εισαγωγή

Η πολλαπλασιαστική συλλογιστική (ή σκέψη), θεωρείται κεφαλαιώδους σημασίας στα Μαθηματικά, καθώς στηρίζει σημαντικές μαθηματικές διεργασίες όπως αναλογική συλλογιστική και αλγεβρικές γενικεύσεις (Hurst & Hurell, 2014). Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και, μάλιστα, στο ξεκίνημα της ακαδημαϊκής πορείας των μαθητών, απασχολεί εδώ και δεκαετίες την έρευνα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς φαίνεται ότι η ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σχέσης φαίνεται να έχει ευεργετική επίδραση στη γενικότερη μαθηματική απόδοση των παιδιών η οποία ανέδειξε την ενισχυτική επίδραση (Clark & Kamii, 1996; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Από την άλλη μεριά, είναι τεκμηριωμένο ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών που δεν αναπτύσσουν επαρκώς την πολλαπλασιαστική τους σκέψη στο Δημοτικό Σχολείο, προχωρώντας στην επόμενη βαθμίδα, δε θα μπορέσουν να αναπτύξουν δεξιότητες και στρατηγικές προσέγγισης των πολλαπλασιαστικών δομών (Clark & Kamii, 1996).

Μια κεντρική πτυχή της κατανόησης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αφορά τη σχέση μεταξύ αυτών των δύο πράξεων, που συνήθως διατυπώνεται ως «ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες». Υπάρχουν διαφορετικές εκφάνσεις της σχέσης αυτής, μία εκ των οποίων αφορά στα τρία διαφορετικά προβλήματα που προκύπτουν από μια πολλαπλασιαστική κατάσταση, όπως αυτή του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» (Greer, 1992). Στην πτυχή αυτή και στη συγκεκριμένη πολλαπλασιαστική κατάσταση εστιάζει η παρούσα εργασία.

Η πολλαπλασιαστική κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων» είναι η πρώτη με την οποία έρχονται σε επαφή τα παιδιά, ακόμα και σε προσχολική ηλικία, συνήθως μέσω της «δίκαιης μοιρασιάς». Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση από νωρίς συναντούν και τα τρία προβλήματα που προκύπτουν από μια τέτοια κατάσταση (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης), τα οποία αξιοποιούνται ως πλαίσιο στο οποίο γίνονται αντικείμενο πραγμάτευσης οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Πράγματι, κεντρική διδακτική πρακτική για την εκμάθηση των αριθμητικών πράξεων και των μεταξύ τους σχέσεων, καθώς επίσης και πρόκληση για την επικύρωση της μαθηματικής κατανόησης από την πλευρά των μαθητών, αποτέλεσε η επίλυση σχετικών προβλημάτων, τα οποία ανέκαθεν βρίσκονταν στο μικροσκόπιο της επιστημονικής έρευνας προκειμένου να εξελίσσονται διαρκώς και με τον πλέον εποικοδομητικό τρόπο ώστε να εξυπηρετούν το σκοπό για τον οποίο κατασκευάστηκαν (Παπαδοπούλου, 2018). Οι αριθμητικές πράξεις που διδάσκονται από την πρωτοσχολική ηλικία καθώς επίσης και η βαθιά κατανόηση των μεταξύ τους σχέσεων αποτελεί την βάση για την εκπαίδευση και τον εξελικτικό συλλογισμό που θα συνοδεύει τον μαθητή, τόσο κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής του πορείας και προς εξυπηρέτηση της απόκτησης γνώσεων, όσο και στην κοινωνική του ζωή, όπου ξανά θα έλθει αντιμέτωπος με πληθώρα προβλημάτων των οποίων διαρκώς θα αναζητά την λύση, εδραιώνοντας με αυτό τον τρόπο την ανεξαρτησία του (Polya, 1998). Η επίλυση προβλημάτων δεν είναι μόνο ένας στόχος προκειμένου να κατανοήσει ο μαθητής τα Μαθηματικά, αλλά και ένας τρόπος προκειμένου να το επιτύχει και να εξελίξει όλες τις δεξιότητες οργάνωσης στρατηγικής, εκτίμησης των δεδομένων, καθορισμού του ζητούμενου, αξιολόγηση της λύσης του και επαλήθευσής της, δεξιότητες που απαιτούνται, για την επίλυση ενός προβλήματος.

Η διδακτική διαχείριση της επίλυσης προβλήματος αποτελεί και μια εκ των μεγαλύτερων προκλήσεων που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας/μία εκπαιδευτικός που επωμίζεται την ευθύνη της ανάδειξης όλων των επιμέρους μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών που εμπλέκονται. (The Ontario Council, 2020). Ενώ κάθε μαθητής ξεκινά την ακαδημαϊκή του πορεία, όντας εφοδιασμένος με μια σχεδόν «διαισθητική» κατανόηση πολλών μαθηματικών ιδεών, η/ο εκπαιδευτικός αποτελεί τον συνδετικό κρίκο με την ακαδημαϊκή γνώση (Klerlein & Hervey, 2019).

Ωστόσο, συχνά η διδακτική διαχείριση των μαθηματικών προβλημάτων ειδικότερα, των λεκτικών προβλημάτων που αφορούν αριθμητικές πράξεις αντιμετωπίζει το πρόβλημα ως πεδίο εφαρμογής των πράξεων, δίνοντας μεγάλη έμφαση στην επιλογή της κατάλληλης πράξης και στην ευχέρεια όσον αφορά την εκτέλεση του αντίστοιχου αλγορίθμου. Πολλές στρατηγικές που προάγονται μέσω της διδασκαλίας (π.χ., αναζήτηση για «λέξεις-κλειδιά» που παραπέμπουν σε πράξεις, παρουσίαση κατηγοριοποιημένων προβλημάτων με κριτήριο την πράξη) έχουν αρνητικές συνέπειες στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά προσεγγίζουν την επίλυση προβλήματος (English & Halford, 1995). Πράγματι, είναι καλά τεκμηριωμένο ότι τα παιδιά αναπτύσσουν επιφανειακές στρατηγικές, καθώς και μη ευνοϊκές πεποιθήσεις για την αντιμετώπιση προβλήματος, όπως η εστίαση στα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος και ο συνδυασμός τους μέσω αριθμητικών πράξεων για να προκύψει ένα «ευλογοφανές» αποτέλεσμα.

Πολλοί ερευνητές τονίζουν τη σημασία της επεξεργασίας των προβλημάτων με έμφαση στις ποσότητες που εμπλέκονται και τις μεταξύ τους σχέσεις, σε αντιδιαστολή με την έμφαση στα αριθμητικά δεδομένα και τις αριθμητικές πράξεις (Corley, Confrey, & Nguyen, 2012; Nunes, Bryant, Evans, Bell, & Barros, 2012; Thompson, 1993). Ειδικότερα, οι Nunes et al. (2012) ανέδειξαν τη σημασία αυτής της προσέγγισης στην πραγμάτευση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στην εργασία αυτή σχεδιάστηκε μια παρέμβαση με στόχο να υποστηρίξει παιδιά της Γ΄ Δημοτικού να επεξεργαστούν την αντίστροφη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο πλαίσιο προβλημάτων του τύπου των «ισοπληθών ομάδων», με έμφαση στην αναπαράσταση των ποσοτήτων και της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ τους, στις τρεις ισοδύναμες μορφές της. Τα παιδιά κλήθηκαν να διατυπώσουν τα τρία διαφορετικά προβλήματα (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης) που προκύπτουν από μια πολλαπλασιαστική κατάσταση του τύπου των «ισοπληθών ομάδων».

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας εξετάζεται η πολυδιάστατη σημασία της επίλυσης αλλά και της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος στην εκπαιδευτική πράξη γενικά και, ειδικότερα, όσον αφορά την παρούσα εργασία.

Το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει στα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής και, ειδικότερα, στα προβλήματα του τύπου των ισοπληθών ομάδων. Συζητείται η πολυπλοκότητα των πολλαπλασιαστικών δομών και προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά, τόσο λόγω της εγγενούς δυσκολίας των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, όσο και λόγω της ελλιπούς διδακτικής τους διαχείρισης.

Στο τρίτο κεφάλαιο συζητείται η άποψη ότι η διδακτική πραγμάτευση των προβλημάτων που αφορούν αριθμητικές πράξεις θα πρέπει να αναδεικνύει τις εμπλεκόμενες ποσότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις και παρουσιάζονται ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν τα οφέλη της εφαρμογής της άποψης αυτής στη διδασκαλία.

Το τέταρτο κεφάλαιο εστιάζει στην αντίστροφη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Αναλύονται οι διαφορετικές πτυχές της σχέσης αυτής, τόσο σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο, όσο και στο πλαίσιο καταστάσεων αναφέρονται σε ποσότητες.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μαθησιακοί στόχοι που αφορούν το πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, αλλά και την επίλυση προβλημάτων στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα σπουδών για την Γ΄ Δημοτικού. Αναδεικνύεται το γεγονός ότι, τόσο η επίλυση, όσο και η κατασκευή προβλήματος εντάσσονται στους ρητούς μαθησιακούς στόχους. Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι η κατανόηση της σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ρητός στόχος, ωστόσο δεν είναι σαφές ποια ή ποιες πτυχές της σχέσης αυτής αφορά.

Στο έκτο και έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζεται το εμπειρικό μέρος της εργασίας, με αναλυτική παρουσίαση του σκεπτικού και του σχεδιασμού της παρέμβασης.

Τέλος, στο όγδοο και το ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται και συζητούνται τα αποτελέσματα της έρευνας, με ευρήματα από τη φάση της εφαρμογής της παρέμβασης, και από τις δοκιμασίες του προελέγχου και του μεταελέγχου. Κεντρικό εύρημα είναι ότι η παρέμβαση βελτίωσε μεν την ικανότητα των παιδιών να αναπαριστούν και να διατυπώνουν τα τρία διαφορετικά προβλήματα, ωστόσο σε ατομικό επίπεδο, υπήρξαν παιδιά για τα οποία δεν παρατηρήθηκε βελτίωση. Επιπλέον, η βελτίωση προήλθε από τη διατύπωση περισσότερων προβλημάτων διαίρεσης μερισμού στο μεταέλεγχο, και σε πολύ μικρότερο βαθμό από τη διατύπωση προβλημάτων διαίρεσης μέτρησης.

Μέρος Α΄ Θεωρητικό Πλαίσιο

1. Αριθμητικές Πράξεις και Λεκτικά Προβλήματα

1.1 Η σημασία της επίλυσης προβλημάτων στην εκπαιδευτική πράξη

Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων είναι θεμελιώδης ικανότητα για το ανθρώπινο είδος, δεδομένου ότι τα προβλήματα αφορούν το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής μας σκέψης (Polya, 1998). Πρόδρομοι των ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος υπάρχουν ήδη από πολύ μικρές ηλικίες, ωστόσο η ανάπτυξή τους απαιτεί συστηματική εκπαίδευση. Η έμφαση στη διδασκαλία της κριτικής σκέψης διαμέσου της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων θα μπορούσε να διαδραματίσει κεντρικό ρόλο για τη μεταρρύθμιση στο σχολικό πρόγραμμα διότι, οι δεξιότητες αυτές αποτελούν τη βάση, τόσο για την ίδια την ακαδημαϊκή γνώση, όσο και για την περαιτέρω ικανότητα του ατόμου να επιλύει προβλήματα που άπτονται της προσωπικής του εξέλιξης (Fennema et al, 1996; Pallavi, 2021). Πράγματι, η δυνατότητα του μαθητή να ανακτήσει και να επεξεργαστεί πληροφορίες, ώστε να σχεδιάσει μια στρατηγική επίλυσης σε ένα πρόβλημα, αντανακλά μια ικανότητα που θα ενισχύσει σε μεγάλο βαθμό την ανεξαρτησία του (Polya, 1998; Stainback, Stainback, & Stefanich, 1996).

Κατά την διαδικασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών, επομένως, τα παιδιά καλούνται να εμπλακούν με την επίλυση προβλήματος. Οι στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά διαφοροποιούνται ανάλογα με τις δομές των προβλημάτων και καθορίζονται κυρίως από τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τα ζητούμενα του κάθε ενός από αυτά, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται το ρόλο του προβλήματος στη διδακτική πράξη.

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη προβλημάτων. Μια πρώτη διάκριση των τυπικών μαθηματικών προβλημάτων που αξιοποιούνται στο πλαίσιο της εκπαίδευσης αναφέρεται σε προβλήματα εύρεσης και προβλήματα απόδειξης. Όπως υπονοεί ο κάθε ένας από αυτούς τους χαρακτηρισμούς, στα προβλήματα εύρεσης αναζητείται η τιμή ενός αγνώστου, ενώ στα προβλήματα απόδειξης δίνεται έμφαση στην διενέργεια συγκεκριμένων μετασχηματισμών που αποδεικνύουν ή καταρρίπτουν την ορθότητα της υπόθεσης (Polya, 1998).

Τα λεκτικά προβλήματα εντάσσονται συνήθως στην πρώτη κατηγορία και, σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές, αποτελούν τα πιο δύσκολα προβλήματα στα οποία καλούνται να ανταπεξέλθουν οι νεαροί λύτες. Η δυσκολία των λεκτικών προβλημάτων έγκειται στον συνδυασμό επιμέρους παραγόντων όπως είναι η πολυπλοκότητα της δομής του κειμένου, η αριθμητική πολυπλοκότητα και ο καθορισμός των τιμών σε δεδομένα και ζητούμενα και ένας τρίτος παράγοντας που αναφέρεται στον συνδυασμό των δύο παραπάνω (Powell, 2011). Πέραν αυτών, επιπλέον παράγοντες αναφέρονται στο θέμα του προβλήματος και την κατάσταση μέσα στην οποία εντάσσεται. Αφενός, έχει σημασία, αν οι συνθήκες του προβλήματος είναι γνώριμες στα παιδιά, ώστε να μπορέσουν να αποκωδικοποιήσουν τις πληροφορίες. Αφετέρου, εισάγεται και ένας ψυχολογικός παράγοντας που αφορά όχι μόνο στην ικανότητα του μαθητή να μπορεί να το λύσει αλλά και στο πόσο ελκυστικό και ενδιαφέρον είναι για αυτόν, το να το λύσει (Pallavi, 2021).

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από τον μαθητή, απαιτεί περισσότερες ικανότητες και δεξιότητες από την επιλογή και εφαρμογή ενός αλγόριθμου (Polya, 1998; Robinson & LeFevre, 2012). Για την επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος από τους μαθητές, απαιτείται η αντίληψη σχετικών πληροφοριών, η ικανότητα να οπτικοποιήσουν οι μαθητές τα δεδομένα, να αναγνωρίσουν τη δομή του προβλήματος, να κατευθύνουν σωστά τη λύση τους και να εκτιμήσουν τη διαδικασία που χρησιμοποίησαν ώστε να λύσουν το πρόβλημα (Silver, 2013).

Είναι γεγονός ότι ένα πρόβλημα και, ειδικότερα, λεκτικό πρόβλημα χρειάζεται να περιλαμβάνει συγκεκριμένα δομικά στοιχεία όπως τα δεδομένα, οι αριθμητικές τιμές οι οποίες θα αποτελέσουν το σημείο έναρξης διενέργειας μαθηματικών πράξεων και το ζητούμενο στο οποίο καλείται να φτάσει ο μαθητής μέσω των πράξεων (Polya, 1998). Ωστόσο, διαχρονικά η επιστημονική έρευνα καταδεικνύει ότι η αποκλειστική εστίαση στο αριθμητικό πλαίσιο δεν επαρκεί για να μελετηθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των λεκτικών προβλημάτων καθώς επίσης και τις δυσκολίες που συναντούσαν οι μαθητές και οι ικανότητες που θα έπρεπε να αναπτύξουν προκειμένου να πραγματευθούν τέτοιου τύπου προβλήματα. Επιπλέον, έχει καταδείξει ότι η χρήση λεκτικών προβλημάτων ως προβλήματα εφαρμογής των αριθμητικών πράξεων στη διδασκαλία, έχει ανεπιθύμητες συνέπειες. Πράγματι, μια πολύ γνωστή έρευνα, που επαναλήφθηκε πολλές φορές σε διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια, αποκάλυψε την εσφαλμένη πεποίθηση των παιδιών ότι κάθε πρόβλημα έχει λύση που βρίσκεται μέσω αριθμητικών πράξεων με τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, καθώς επίσης την ανταπόκριση τους σε καθιερωμένες διατυπώσεις που υπονοούν συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις. Από τα 97 παιδιά της Β΄ Δημοτικού που συμμετείχαν στην αρχική έρευνα, τα 76 έδωσαν «λύση» χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα της εκφώνησης, στο εξής πρόβλημα: *«Πάνω σε ένα καράβι ζουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκες. Πόσο χρονών είναι ο καπετάνιος;»* Συνεπώς, τα λεκτικά προβλήματα πρέπει να προσεγγίζονται διδακτικά κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να αυξάνουν και την κριτική σκέψη των μαθητών οι οποίοι καλούνται μέσα από την κατανόηση του κειμένου να ξεχωρίσουν τα δεδομένα, τα ζητούμενα, τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, αλλά και τις πληροφορίες οι οποίες δεν έχουν καμία σχέση με το ζητούμενο και πρέπει να αγνοηθούν (Darosky, Wolska, & Meurers , 2015). Ιδιαίτερα σημαντικό στην παρούσα εργασία είναι η εισήγηση να λαμβάνεται υπόψη το είδος των ποσοτήτων και των ποσοτικών σχέσεων στις οποίες αναφέρονται οι αριθμοί σε ένα πρόβλημα (Schwartz, 1988; Thompson, 1989, όπ. αναφ. στο Greer, 1997).

1.2 Η σημασία της κατασκευής προβλημάτων στην εκπαιδευτική πράξη

Πολλοί ερευνητές, της Διδακτικής των Μαθηματικών, έχουν αναφέρει ότι η εποικοδομητική εισαγωγή της Κατασκευής Μαθηματικού Προβλήματος (ΚΜΠ) στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει θετική επίδραση στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Kilpatrick, 1987). Οι δραστηριότητες ΚΜΠ προσφέρουν στον εκπαιδευτικό μοναδική ευκαιρία να αντιληφθεί τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δομούν και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες (Lowrie & Whitland, 2000). Υποστηρίζεται ότι η ΚΜΠ από τους μαθητές μπορεί να προσφέρει ένα πλούσιο, ενδιαφέρον και εποικοδομητικό περιβάλλον για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δημιουργήσουν, να εμπλακούν στη δυναμική των Μαθηματικών και να αποκτήσουν ενεργητική συμμετοχή στην κατασκευή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Όταν οι μαθητές αρχίσουν να κατασκευάζουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα και δουν ότι τα προβλήματα αυτά γίνονται το επίκεντρο των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη, τότε αναπτύσσουν θετική στάση για τα Μαθηματικά. Με αυτό τον τρόπο, η ΚΜΠ μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο αξιολόγησης της Διδακτικής των Μαθηματικών για τον εκπαιδευτικό και οι δραστηριότητες, αυτής της κατασκευής, να προσφέρουν στα παιδιά μια ευκαιρία ενεργητικής παρέμβασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών και έλεγχο στις μαθησιακές δραστηριότητες που πραγματοποιούνται στην τάξη (Lowrie, 1999). Η Stoyanova (1997), διαχωρίζει την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (ΚΜΠ) από τους μαθητές στα ακόλουθα πλαίσια:

α. Μη δομημένο πλαίσιο (free problem-posing situation), στο οποίο περιλαμβάνονται προβλήματα τα οποία κατασκευάζονται χωρίς περιορισμούς σε ελεύθερη βάση. Είναι προβλήματα που κατασκευάζονται από μαθητές για να λυθούν από έναν φίλο ή συμμαθητή τους. Το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν κάποιο άτομο υπόψη τους όταν κατασκευάζουν προβλήματα, ενισχύει τις προσπάθειες τους ώστε τα προβλήματα τους να είναι οργανωμένα καλύτερα και πιο ολοκληρωμένα.

β. Ημι-δομημένο πλαίσιο (semi-structured problem-posing situation), όπου οι μαθητές κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα σε πλαίσιο που περιέχει αρκετές πληροφορίες. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να δίνεται με εικόνα, πίνακα, γραφική παράσταση, ιστορία ή ποίημα.

γ. Δομημένο πλαίσιο κατασκευής (structured problem-posing situation), όπου οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν προβλήματα βασισμένα σε συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις, όπως εξισώσεις ή να μετατρέψουν ένα υφιστάμενο πρόβλημα σε συγκεκριμένο πλαίσιο.

Η ΚΜΠ από τους μαθητές μπορεί να προσφέρει ένα πλούσιο, ενδιαφέρον και εποικοδομητικό περιβάλλον για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δημιουργήσουν, να εμπλακούν στη δυναμική των Μαθηματικών και να αποκτήσουν ενεργητική συμμετοχή στην κατασκευή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Όταν οι μαθητές αρχίσουν να κατασκευάζουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα και δουν ότι τα προβλήματα αυτά γίνονται το επίκεντρο των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη, τότε αναπτύσσουν θετική στάση για τα Μαθηματικά (Silver, 2013).

Για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η κατασκευή προβλήματος, σε περιπτώσεις όπου δίνονται στοιχεία μέσω, για παράδειγμα, μιας εικόνας, απαιτεί την αναγνώριση κατάλληλων ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων. Αν, επιπλέον, τίθενται περιορισμοί ως προς το είδος του προβλήματος που πρέπει να διατυπωθεί, τότε δημιουργείται μια δυνατότητα εστίασης της προσοχής των παιδιών στις υπό μελέτη σχέσεις.

2. Προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής

Σύμφωνα με την Kouba (1989) μια από τις περιοχές, που συγκεντρώνει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον των μελετητών της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών (Carpenter, 1985; Carpenter & Moser, 1983; Nesher, 1982; Nesher, Greeno, & Riley, 1982; Steinberg, 1983, όπ. αναφ. στο Kouba, 1989), είναι αυτή της κατανόησης και επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων που αφορούν τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα λεκτικά προβλήματα αξιοποιούνταν κυρίως ως προβλήματα εφαρμογής των αριθμητικών πράξεων, με το ενδιαφέρον να στρέφεται κυρίως στην ορθότητα εκτέλεσης των πράξεων. Οι διδακτικές πρακτικές επίλυσης προβλήματος περιορίζονταν σε τεχνικές αναγνώρισης της κατάλληλης πράξης (π.χ. λέξεις-κλειδιά), οι οποίες μπορεί να φαίνονταν αποτελεσματικές για να επιλυθεί ένα πρόβλημα, όμως, υστερούσαν στο να υποστηρίξουν τους μαθητές να αναπτύξουν πράγματι ικανότητες επίλυσης προβλήματος (English & Halford, 1995). Επιπλέον, ήταν συνήθης η κατηγοριοποίηση των προβλημάτων με κριτήριο την αριθμητική πράξη που ήταν απαραίτητη για την επίλυσή τους (π.χ. προβλήματα πολλαπλασιασμού, προβλήματα διαίρεσης).

Ωστόσο, ανάλυση των χαρακτηριστικών διαφορετικών τύπων προβλημάτων για κάθε πράξη, αλλά και διαφορετικών στρατηγικών με τις οποίες τα προσέγγιζαν οι μαθητές, καθώς και διαφορετικών δυσκολιών τις οποίες αντιμετώπιζαν, οδήγησαν σε πολύ διαφορετικές-από την παραδοσιακή-θεωρήσεις, τόσο για το τι σημαίνει «πρόβλημα» για μια πράξη, όσο και για τη διδακτική διαχείριση των λεκτικών προβλημάτων των αριθμητικών πράξεων.

Διαφορετική έμφαση σε κάθε μία από τις παραπάνω παραμέτρους οδήγησε σε διαφορετικές αναλύσεις των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων (Greer, 1992). Για παράδειγμα, ο Schwartz το 1976, όπως αναφ. στο Kouba (1989), κατηγοριοποιεί τις καταστάσεις ανάλογα με το είδος των εμπλεκόμενων ποσοτήτων (εκτατικές / εντατικές, διακριτές / συνεχείς). Άλλοι ερευνητές σύμφωνα με τον Greer (1992), εστίασαν στη σημασιολογική δομή των καταστάσεων, οι οποίες μοντελοποιούνται από αριθμητικές πράξεις, κατηγοριοποιώντας τις διαφορετικές καταστάσεις με βάση αυτό το κριτήριο. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία, ως παράδειγμα, μπορούν να συγκριθούν τα εξής δύο προβλήματα: α) «Το ένα τετράδιο κοστίζει 3 ευρώ. Τα δύο τετράδια πόσο κοστίζουν;» και β) «Η Μαρία έχει 3 μπλούζες και 2 παντελόνια. Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς μπορεί να κάνει;». Και τα δύο προβλήματα είναι προβλήματα πολλαπλασιασμού και, μάλιστα, με τους ίδιους αριθμούς. Ωστόσο, το νόημα του πολλαπλασιασμού είναι διαφορετικό στις δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, ο πολλαπλασιασμός μπορεί να αντικατασταθεί με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ενώ στη δεύτερη όχι. Άλλοι ερευνητές, πάλι, εστίασαν στον τρόπο με τον οποίο ο λύτης ερμηνεύει τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η προσέγγιση του Fischbein et al., (1985), σύμφωνα με την οποία υπάρχουν εδραιωμένα άδηλα μοντέλα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι λύτες ερμηνεύουν τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι οι άνθρωποι τείνουν να ερμηνεύουν με τα πρωταρχικά, διαισθητικά μοντέλα που έχουν εδραιωθεί στο μυαλό τους και αφορούν στην διαίρεση η οποία ερμηνεύεται πρωτίστως ως ισομερισμός («διαμερίζω ποσότητα σε ίσα μέρη»), ενώ ο πολλαπλασιασμός ερμηνεύεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Επιπλέον, υποστηρίζουν ότι υπάρχει και ένα δεύτερο σημαντικό διαισθητικό μοντέλο για τη διαίρεση, αυτό της μέτρησης («μετράω το διαιρετέο με μονάδα μέτρησης το διαιρέτη»), το οποίο, ωστόσο, αναπτύσσεται στο πλαίσιο της διδασκαλίας.

Οι δύο προσεγγίσεις (αυτή των «διαισθητικών μοντέλων» και αυτή που βασίζεται στη σημασιολογική ανάλυση των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων) δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά μάλλον αλληλεπικαλύπτονται (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Στην πραγματικότητα σύμφωνα με τους Sherin & Fuson (2005) ακόμη και ο ίδιος ο Fischbein, ισχυρίστηκε ότι τα «διαισθητικά μοντέλα» από μόνα τους, χωρίς την συνδρομή του σημασιολογικού μοντέλου και της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών συνθηκών που εκφράζονται, δεν θα ήταν αρκετό για να εξηγήσει πώς οι λύτες προσεγγίζουν τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής (Sherin & Fuson, 2005).

Ο Vergnaud σύμφωνα με τον Ramful (2012), επιχείρησε μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση. Υποστήριξε ότι η πολυπλοκότητα των προβλημάτων εξαρτάται από τη δομή του προβλήματος, από τα αριθμητικά χαρακτηριστικά των δεδομένων και από τις εμπλεκόμενες αναπαραστάσεις. Αλλά το νόημα και η βαρύτητα αυτών των παραγόντων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το γνωστικό επίπεδο των μαθητών. Η προσέγγιση του Vergnaud παρέχει ένα θεωρητικό πλαίσιο που συνδέει την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων με την ανάπτυξη της γνώσης, των σχημάτων, των εννοιών και των συμβόλων που εμπλέκονται στη διαδικασία λύσης. Η γνώση τόσο των συμβόλων και των εννοιών που αποτυπώνουν όσο και η γνώση του τρόπου με τον οποίον αλληλεπιδρούν, όπως είναι οι μαθηματικές πράξεις, είναι επίκτητες, δεν είναι εγγενείς και συμβάλλουν στην γνωστική εξέλιξη (Vergnaud, 2013).

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής είναι, επομένως, μια πρόκληση, τόσο για τους μαθητές, όσο και για τη διδασκαλία. Τα είδη ποσοτήτων που εμπλέκονται σε αυτές, το είδος των αριθμών που εκφράζουν αυτές τις ποσότητες, οι διαφορετικές καταστάσεις στις οποίες απαντώνται και η διαφορετική ερμηνεία των πολλαπλασιαστικών σχέσεων, ανάλογα με την κατάσταση, είναι παράγοντες που συμβάλλουν στην πολυπλοκότητα του θέματος. Από την άλλη μεριά, εδραιωμένες κατανοήσεις των μαθητών για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (στο πλαίσιο των βιωματικών τους εμπειριών, αλλά και της διδασκαλίας στα πρώτα σχολικά χρόνια), αλλά και αντιλήψεων για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της διδασκαλίας, μπορεί να μην είναι ευνοϊκές για την πραγμάτευση των προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής.

Πράγματι, ανάμεσα στις εσφαλμένες στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά πιο συχνά για την επίλυση ενός προβλήματος, αναφέρονται η χρήση μαθηματικών πράξεων για τις οποίες νιώθουν πιο ασφαλή να χρησιμοποιήσουν ή έχουν αναφερθεί πιο πρόσφατα στην τάξη, η επιλογή της πράξης ανάλογα με το είδος των αριθμητικών τιμών που υπάρχουν στο πρόβλημα, η δοκιμή όλων των πράξεων προκειμένου να φτάσουν σε ένα αποτέλεσμα που θεωρούν «λογικό», ή η αναζήτηση για λέξεις- κλειδιά που υπονοούν συγκεκριμένες μαθηματικές πράξεις (Pallavi, 2021).

Άλλες δυσκολίες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης εντοπίζονται στην χρήση της σωστής μαθηματικής πράξης αλλά λάθος χρήση των αριθμητικών τιμών από τα διαθέσιμα δεδομένα του προβλήματος (π.χ. ανάμεσα σε δύο αριθμούς, επιλέγεται ο μικρότερος ως διαιρέτης), παρερμηνεία του κειμένου της εκφώνησης του προβλήματος, χρήση λανθασμένης μαθηματικής πράξης (π.χ., επιλέγεται η διαίρεση, όταν αναμένεται ότι το αποτέλεσμα πρέπει να βγει «μικρότερο»), υπεργενίκευση «κανόνων» και εφαρμογής τους σε κάθε περίσταση ακόμα και όταν είναι ακατάλληλος (π.χ., «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τους αριθμούς»). Πολλά από αυτά τα λάθη μπορούν να ερμηνευθούν ως επιρροές «διαισθητικών μοντέλων» για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Άλλα (π.χ., η αναζήτηση για λέξεις-κλειδιά) μπορούν να ερμηνευθούν ως αποτέλεσμα του τρόπου προσέγγισης της επίλυσης λεκτικών προβλημάτων από τη διδασκαλία. Ένα γενικότερο πλαίσιο ερμηνείας είναι ότι τα λάθη υποδηλώνουν ότι το παιδί δεν μελέτησε πληθώρα παραδειγμάτων προκειμένου να αντιληφθεί τις διαφορετικές και ποικίλες περιστάσεις όπου αρμόζει μια συγκεκριμένη μαθηματική πράξη (Deringol, 2009). Σε ακόμα γενικότερο επίπεδο, οι δυσκολίες αυτές αναδεικνύουν ένα έλλειμμα στην αποκρυπτογράφηση των ποσοτήτων ενυπάρχουν σε μια κατάσταση και, κυρίως, των σχέσεων που τις συνδέουν.

Ωστόσο, οι δυσκολίες των μαθητών για την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι πολυεπίπεδες (Τζεκάκη, 2011), ακόμα και για την κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων». Για παράδειγμα, τα παιδιά έχουν δυσκολία στο να αντιληφθούν τις ομάδες με περισσότερα στοιχεία (δυάδες, τριάδες κ.ά.) ως μια ενιαία οντότητα. Επιπλέον, τα παιδιά δεν διακρίνουν πόσες και ποιες είναι οι ποσότητες που εμπλέκονται. Ειδικότερα, στην περίπτωση των καταστάσεων του τύπου των «ισοπληθών ομάδων», ενυπάρχει πάντα μια εντατική ποσότητα η οποία δεν είναι άμεσα ορατή. Στο παράδειγμα με τα τετράδια, η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στην τιμή του ενός τετραδίου (2 ευρώ / τετράδιο). Η τιμή αυτή λειτουργεί ως πολλαπλασιαστέος στην κατάσταση (δηλ. είναι η ποσότητα που επαναλαμβάνεται), ενώ το πλήθος των τετραδίων λειτουργεί ως πολλαπλασιαστής. Ο διαφορετικός ρόλος των ποσοτήτων αυτών συνήθως δε γίνεται αντιληπτός από τα παιδιά.

Το ζήτημα αυτό σχετίζεται με την αντίληψη αναφορικά στην σχέση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ως αντίστροφες πράξεις το οποίο αναλύεται εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο.

3. Ποσοτική σκέψη: Σχεσιακός έναντι αριθμητικού συλλογισμού

Με βάση τα παραπάνω, φαίνεται να είναι σημαντική μια διάκριση ανάμεσα στις πράξεις σε αριθμητικό πλαίσιο και στην ανάλυση των ποσοτικών σχέσεων σε μια κατάσταση που μοντελοποιείται από μια μαθηματική πράξη. Ο Vergnaud (1979) διακρίνει δύο είδη λογισμού, τον «αριθμητικό συλλογισμό» (numerical calculus) που αντιστοιχεί στο πρώτο και το «σχεσιακό λογισμό» (relational calculus) που αντιστοιχεί στο δεύτερο. Ο αριθμητικός λογισμός, σύμφωνα με τον Vergnaud, σημαίνει να κάνει κάποιος τους υπολογισμούς ανάμεσα στους αριθμούς ώστε να υπολογίσει το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης όπως είναι το άθροισμα σε μια πρόσθεση ή η διαφορά σε μια αφαίρεση. Ο σχεσιακός λογισμός είναι πολύπλοκος γιατί συνδυάζεται με τον μετασχηματισμό και την εμπλοκή των ποσοτικών σχέσεων που υπάρχουν σε μια κατάσταση-πρόβλημα.

Η διάκριση αυτή είναι σημαντική και για τον Thompson (1993), ο οποίος την τοποθετεί στο πλαίσιο του ποσοτικού συλλογισμού (quantitative reasoning): *«Ο ποσοτικός συλλογισμός αφορά την ανάλυση μιας κατάστασης σε ποσοτική δομή- ένα δίκτυο από ποσότητες και ποσοτικές σχέσεις… Ένα βασικό χαρακτηριστικό του ποσοτικού συλλογισμού είναι ότι οι αριθμοί και οι μεταξύ τους σχέσεις είναι δευτερεύουσας σημασίας και δεν υπεισέρχονται στην πρώτη ανάλυση της κατάστασης. Αυτό που έχει βαρύνουσα σημασία είναι οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων» (p.165).* Παρόμοια, ο Booth (1981), όπ. αναφ. στο Nunes, Bryant, Evans, Bell, & Barros, (2012), δίνει έμφαση στο σχεσιακό, έναντι του αριθμητικού συλλογισμού. Οι μαθητές, όταν έχουν να ασχοληθούν με υπολογισμούς, εστιάζουν τις προσπάθειές τους στο να υπολογίσουν με ακρίβεια το αποτέλεσμα της πράξης. Ενώ όταν η έμφαση στους υπολογισμούς μειώνεται (π.χ., όταν μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή κατά την επίλυση ενός προβλήματος), η προσοχή τους στρέφεται στον να αναγνωρίσουν τις ποσότητες και τις ποσοτικές σχέσεις και έπειτα να εισάγουν τα αριθμητικά δεδομένα στον υπολογιστή. Πιο πρόσφατα, οι Polotskaia & Savard (2020) ανέλυσαν τις απλές πολλαπλασιαστικές δομές που ενυπάρχουν στα Μαθηματικά του Δημοτικού σχολείου από τη σχεσιακή οπτική και υποστήριξαν ότι είναι προτιμότερο τα παιδιά να αναγνωρίζουν τις ποσότητες που ενυπάρχουν σε μια κατάσταση, καθώς και τη σχέση που τις συνδέει και να μπορούν να μετασχηματίζουν τη σχέση αυτή σε ισοδύναμες μορφές, παρά να προσπαθούν να αναγνωρίσουν την πράξη με την οποία επιλύεται κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.

Με την άποψη αυτή συμφωνούν και άλλοι ερευνητές (Corley et al. (Corley, Confrey, & Nguyen, 2012) 2012) που υποστηρίζουν ότι η κατηγοριοποίηση προβλημάτων σε προβλήματα διαίρεσης και προβλήματα πολλαπλασιασμού δεν βοηθάει τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Είναι προτιμότερο να γίνεται διάκριση μεταξύ των ζητούμενων που τίθενται σε ένα πρόβλημα (π.χ. το πλήθος των ομάδων ή το μέγεθος του μεριδίου) και η συσχέτιση αυτών των ερωτήσεων. Αυτή η προσέγγιση επιχειρεί να φωτίσει την κοινή σχέση που συνδέει διαφορετικά λεκτικά προβλήματα και τον τρόπο που διατυπώνονται τα ερωτήματα προκειμένου να καθοριστούν τα ζητούμενα του κάθε προβλήματος. Να αναγνωριστεί δηλαδή η μαθηματική συνθήκη που συνδέεται με το συγκεκριμένο ζητούμενο ώστε να επιλεγεί η ορθή μαθηματική πράξη.

Η βιβλιογραφία όμως κατέδειξε και εμπειρικά στοιχεία που δείχνουν ότι η έμφαση στις σχέσεις μπορεί να επιφέρει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα για τους μαθητές, παρά η έμφαση στους υπολογισμούς (Nunes et al. 2012) (Nunes, Bryant, Evans, Bell, & Barros, 2012). Σύμφωνα με τους παραπάνω συγγραφείς, το σημείο εκκίνησης για την έρευνα των ήταν η διάκριση μεταξύ του αριθμητικού και του σχεσιακού λογισμού, όπως τη διατύπωσε ο Vergnaud (1979). Οι αριθμητικοί υπολογισμοί εξαρτώνται από την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών από τους μαθητές ενώ οι σχεσιακοί υπολογισμοί αφορούν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων. Οι δύο τρόποι λογισμού, ενώ συνδέονται, μπορούν και να λειτουργήσουν ανεξάρτητα, να εφαρμοστούν σε διαφορετικές συνθήκες και να πυροδοτήσουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Οι ερευνητές διερεύνησαν το ερώτημα αν μια παρέμβαση με στόχο την υποστήριξη των παιδιών να αναλύουν μια προσθετική κατάσταση με αναφορά στις εμπλεκόμενες ποσότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις θα βελτίωνε την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα προσθετικής δομής, του τύπου «αλλαγής» (δηλαδή, προβλήματα του τύπου «υπάρχει μια αρχική ποσότητα Α, συμβαίνει μια προσθετική αλλαγή, είτε με πρόσθεση είτε με αφαίρεση μιας ποσότητας Β και προκύπτει μια ποσότητα Γ»), με άγνωστη την αρχική ποσότητα, ή την ποσότητα της «αλλαγής», που είναι τα πιο απαιτητικά προβλήματα για τους μαθητές. Πέρα από την προσθετική σχέση που συνδέει τις ποσότητες σε καταστάσεις αυτού του τύπου, κεντρική είναι και η αντίστροφη σχέση ανάμεσα στη πρόσθεση και την αφαίρεση.

Οι ερευνητές έκαναν διαφορετικού τύπου παρεμβάσεις σε τρεις ομάδες παιδιών στη 2η και 3η τάξη. Και στις τρεις ομάδες έγινε προέλεγχος, μεταέλεγχος και μεταγενέστερος μεταέλεγχος, και η παρέμβαση εστίασε στην πραγμάτευση προβλημάτων προσθετικής δομής του τύπου «αλλαγής», με άγνωστη την αρχική ποσότητα ή την τελική ποσότητα. Στην ομάδα ελέγχου, η παρέμβαση εστίασε στη χρήση της αριθμογραμμής ως αναπαράσταση και τα προβλήματα επιλύθηκαν σε αριθμητικό πλαίσιο. Στις δύο πειραματικές ομάδες, η παρέμβαση βασίστηκε στην πραγμάτευση των προβλημάτων με βάση τις ποσότητες, με έμφαση στο μετασχηματισμό που απαιτείται και στηρίζεται στην αντίστροφη σχέση μεταξύ της πρόσθεσης και τις αφαίρεσης. Η διαφορά μεταξύ των δύο πειραματικών ομάδων όσον αφορά την παρέμβαση ήταν ότι στη μία τα προβλήματα παρουσιάζονταν ομαδοποιημένα με κριτήριο την πράξη που απαιτούσαν, ενώ στη δεύτερη όχι. Σημειώνεται ότι η παρέμβαση έγινε ατομικά σε κάθε ένα παιδί.

Ένα παράδειγμα προβλήματος με άγνωστη την αρχική ποσότητα που επεξεργάστηκαν τα παιδιά των πειραματικών ομάδων είναι το εξής: «Ένας ταχυδρόμος έχει γράμματα στην τσάντα του. Παραδίδει 12 γράμματα σε μια πολυκατοικία. Τώρα του έμειναν 39 γράμματα στην τσάντα. Πόσα γράμματα είχε πριν παραδώσει στην πολυκατοικία;». Βοηθητικά χρησιμοποιήθηκαν εικονικές αναπαραστάσεις, που έδειχναν τις τρεις φάσεις της κατάστασης, χωρίς να περιλαμβάνουν αριθμητικές πληροφορίες. Η κατάσταση στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα παραπέμπει στην αφαίρεση («είχε γράμματα στην τσάντα, αφαίρεσε μερικά»), αλλά η κατάλληλη πράξη είναι η πρόσθεση. Σε τέτοιου είδους προβλήματα το συνηθισμένο σφάλμα ήταν το παιδί να προτείνει την πράξη στην οποία παρέπεμπε η κατάσταση. Σε αυτή την περίπτωση, ο πειραματιστής ρωτούσε το παιδί αν το συγκεκριμένο αποτέλεσμα ήταν λογικό και αν μπορούσε να φανταστεί τι θα έπρεπε να γίνει για να «γυρίσει» από την εικόνα της δεύτερης φάσης, στην εικόνα της πρώτης φάσης κι έπειτα με ποια πράξη θα μπορούσε να το βρει.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά των πειραματικών ομάδων, και ιδιαίτερα στη συνθήκη που τα προβλήματα δεν ήταν ομαδοποιημένα, είχαν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά της ομάδας ελέγχου στην επίλυση προβλημάτων προσθετικής δομής του τύπου «αλλαγής» με άγνωστη την αρχική ποσότητα, αλλά και σε προβλήματα με άγνωστη την ποσότητα της αλλαγής, που δεν είχαν παρουσιαστεί στη διάρκεια της παρέμβασης, τόσο στον άμεσο μεταέλεγχο, όσο και στο μεταγενέστερο μεταέλεγχο. Η έρευνα των Nunes et al. (2012) αναδεικνύει τρία ζητήματα που είναι σημαντικά για το σκοπό της εργασίας. Το πρώτο είναι η έμφαση στην αναγνώριση των ποσοτήτων που εμπλέκονται σε μια κατάσταση και έκφραση των σχέσεων που τις συνδέουν (βλ. και Corley et al., 2012; Polotskaia & Savard, 2020). Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, ιδιαίτερα για τις εντατικές ποσότητες (Schwartz, 1996) που δεν είναι άμεσα ορατές στα προβλήματα όπως αυτά του τύπου των «ισοπληθών ομάδων». Τέλος, αναδεικνύεται η σημασία της αναγνώρισης των τριών διαφορετικών προβλημάτων που προκύπτουν από μια κατάσταση και ικανότητα μετασχηματισμού από το ένα πρόβλημα στο άλλο. Το τελευταίο εμπλέκει και μια συνιστώσα που αφορά την κατασκευή προβλήματος. Η πλευρά, όμως, που έχει ιδιαίτερη σημασία για την παρούσα εργασία είναι ότι, πέρα από την κεντρική σχέση που συνδέει τις ποσότητες, αναδεικνύεται η σημασία η σχέση μεταξύ δύο αντίστροφων πράξεων. Στην περίπτωση της έρευνας των Nunes et al. (2012), η σχέση αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση. Στη συνέχεια εστιάζουμε στη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων προσφέρεται ως το πλέον κατάλληλο πεδίο για την καλλιέργεια ικανοτήτων. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων και της προοδευτικής μάθησης της διαδικασίας απόδειξης, οι μαθητές συνειδητοποιούν σταδιακά ότι, δουλεύοντας πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα (πρόβλημα) επιτυγχάνεται η κατανόηση του προβλήματος, η διατύπωση υποθέσεων για το αποτέλεσμα, ο πειραματισμός με τη βοήθεια παραδειγμάτων, η συγκέντρωση στοιχείων για την δημιουργία ενός συλλογισμού, η γραπτή έκφραση της σκέψης προς μια πιθανή λύση, ο έλεγχος των αποτελεσμάτων και η αξιολόγηση της ορθότητάς τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα. Συμπερασματικά, οι δεξιότητες που απαιτούνται είναι τόσες πολλές, που στην πραγματικότητα δεν μπορούν να κατατμηθούν και να διδαχτούν ξεχωριστά, αλλά κατακτάται περισσότερο η ανάπτυξη τους μέσα από την σταδιακή γνώση, την εμπέδωση της γνώσης αυτής, την εξάσκηση τους μέσω προβλημάτων και την ενσωμάτωσή τους στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (Baird, 1983).

Γι' αυτόν τον λόγο η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελεί το κέντρο του ενδιαφέροντος ενός Προγράμματος Σπουδών (Π.Σ.) των Μαθηματικών, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο θα οργανωθεί η διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών.

4. Η αντίστροφη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης

Οι «αντίστροφες» σχέσεις είναι πολύ σημαντικές για τα μαθηματικά (Greer, 2012), αλλά και για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Ο Piaget (1964, οπ. αναφ. στο Gilmore, 2006) μελέτησαν την ικανότητα των παιδιών να αντιστρέφουν μια ενέργεια, γιατί θεωρούσαν ότι είναι ενδεικτική της λογικής ικανότητας. Ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί είναι το εξής: ο αριθμός 8 φτιάχνεται από το 5+3, αυτό σημαίνει ότι αν βγάλεις το 3 από το 8 θα μείνουν 5. Αυτός ο συλλογισμός βασίζεται στην κατανόηση ότι αν σε έναν αριθμό ή μια ποσότητα α προσθέσεις και μετά αφαιρέσεις τον ίδιο αριθμό (αντ. ποσότητα) β, επιστρέφεις στην αφετηρία σου. Ορισμένα μόνο παιδιά δείχνουν την ικανότητα για αντίστροφη σκέψη σε σχετικά μικρή ηλικία, περίπου έξι ετών, ενώ το ποσοστό αυτό που κάνει χρήση του αντίστροφου λογισμού παραμένει μικρό, και μάλιστα όχι σε κάθε πρόβλημα που απαιτεί τέτοιου είδους συλλογισμό, έως τα 11 όπου φαίνεται ότι η ικανότητα αυτή εξελίσσεται και παραμένει διαθέσιμη προς χρήση σε κάθε πρόβλημα (Gilmore, 2006).

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες. Υπάρχουν διαφορετικές εκφάνσεις της σχέσης αυτής μεταξύ των δύο πράξεων. Ίσως η πιο μελετημένη είναι αυτή που διατυπώνεται σε αριθμητικό πλαίσιο ως εξής: Αν ένας αριθμός α πολλαπλασιαστεί (αντ. διαιρεθεί) με τον αριθμό β και στη συνέχεια διαιρεθεί με τον αριθμό β (αντ. πολλαπλασιαστεί), το αποτέλεσμα παραμένει α. Με αυτή τη διατύπωση, η σχέση που συνδέει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως «αρχή της αντιστροφής» (inverse principle) και μπορεί να αξιοποιηθεί για τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών υπολογισμού. Πράγματι, η εφαρμογή της «αρχής της αντιστροφής» (τόσο για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, όσο και για την πρόσθεση και την αφαίρεση) μπορεί να διευκολύνει τα παιδιά και να τα οδηγήσει σε νοερούς υπολογισμούς μειώνοντας την υπολογιστική προσπάθεια και αυξάνοντας την αποτελεσματικότητα της λύσης. Ένα παιδί που κατανοεί την «αρχή της αντιστροφής» στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μπορεί να εκτελέσει λιγότερους υπολογισμούς, ακυρώνοντας απλά τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται και διαιρείται ταυτόχρονα με τον αρχικό αριθμό (Verschaffel, Bryant, & Torbeyns, 2012).

Η «αρχή της αντιστροφής» έχει μελετηθεί στο πλαίσιο των στρατηγικών υπολογισμού και ως ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Πράγματι, η κατανόηση των αντίστροφων σχέσεων μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (και παρόμοια για την πρόσθεση και την αφαίρεση) θεωρείται ένα ουσιαστικό μέρος της μάθησης για καθεμιά από τις τέσσερις πράξεις (Robinson & LeFevre, 2012). Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση που έχουν οι πράξεις μεταξύ τους, διότι χωρίς να έχουν εμπεδώσει την αρχή αυτή, δεν είναι δυνατό να αντιληφθούν την φύση των πράξεων αυτών.

Μια ακόμα έρευνα στο οπλοστάσιο της διεθνούς βιβλιογραφίας, που χρησιμοποίησε ένα ευρύ φάσμα μεθόδων συμπεριλαμβάνοντας μια μετα-ανάλυση από 14 έρευνες, κατέδειξε ότι οι αριθμητικές δεξιότητες και η κατανόηση της αρχής της αντιστροφής ήταν σε μεγάλο ποσοστό ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Κατά συνέπεια η γνώση των μαθητών για την αντιστροφή αποτελείται από πολλά κομμάτια ή όψεις που αποκτώνται και αποθηκεύονται στη μνήμη εν μέρει ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Αν και η αντιστροφή από θεωρητική άποψη είναι μια σχετική περιοχή περιεχομένου, η κατανόησή της από τους μαθητές είναι κατακερματισμένη και την καθιστά ετερογενή και πολύπλευρη (Gilmore & Papadatou-Pastou, 2009).

Μια διαφορετική εφαρμογή της αρχής της αντιστροφής είναι ότι μια αριθμητική πρόταση της μορφής $α \times β = γ$ έχει ως ισοδύναμες προτάσεις τις $β = γ : α$ και $γ = α : β$. Με δεδομένη οποιαδήποτε από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει άμεσα η πρώτη σχέση. Αντίθετα με δεδομένη την πρώτη σχέση, όμως, το πέρασμα σε οποιαδήποτε από τις δύο άλλες σχέσεις προϋποθέτει μια επιλογή ως προς τον παράγοντα που θα παίξει το ρόλο του διαιρέτη, και άρα έχει το ρόλο του πολλαπλασιαστή στο γινόμενο $α \times β$. Συγκεκριμένα, αν θεωρηθεί ότι το α έχει τη ρόλο του πολλαπλασιαστή, τότε γίνεται διαιρέτης και προκύπτει η πρώτη σχέση ($β = γ : α$). Αν, αντίθετα, τον ρόλο του πολλαπλασιαστή έχει το β, τότε γίνεται το β διαιρέτης και προκύπτει η δεύτερη σχέση ($α = γ : β$). Σε αριθμητικό πλαίσιο όπου, δεδομένη της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού, η διάκριση μεταξύ πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου δεν έχει βαρύνουσα σημασία, οι δύο αριθμητικές προτάσεις που προκύπτουν από την αρχική είναι ισοδύναμες και μεταξύ τους.

Τα πράγματα γίνονται πιο περίπλοκα στην περίπτωση που κάποια από τις προηγούμενες αριθμητικές προτάσεις μοντελοποιεί μια πολλαπλασιαστική κατάσταση, στην οποία οι αριθμοί αναφέρονται σε ποσότητες (Greer, 2012**.** Ας πάρουμε ως παράδειγμα την κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων» που είναι τυπικά η πρώτη πολλαπλασιαστική κατάσταση που συναντούν τα παιδιά. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας κατάστασης είναι η εξής: «Το ένα τετράδιο κοστίζει 2 ευρώ. Τα 5 τετράδια κοστίζουν 10 ευρώ». Η κατάσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της «συμμεταβολής ποσοσοτήτων» (Τζεκάκη, 2011, π.χ. «τα 5 τετράδια κοστίζουν 10 ευρώ. Τα 15 τετράδια κοστίζουν 30 ευρώ»), η οποία αφορά την τιμή της μιας μονάδας (1 τετράδιο).

Η αρχική σχέση που συνδέει τις τρεις ποσότητες είναι η εξής: 5 (τετράδια) x 2 (ευρώ ανά τετράδιο) = 10 ευρώ. Ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο προκύπτουν 3 διαφορετικά προβλήματα, ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού και δύο προβλήματα διαίρεσης.

Το πρόβλημα πολλαπλασιασμού διατυπώνεται ως εξής: « Το ένα τετράδιο κοστίζει 2 ευρώ. Πόσα ευρώ θα πρέπει να πληρώσω για να αγοράσω 5 τετράδια;» Στο πρόβλημα αυτό εμπλέκεται η επανάληψη μιας ποσότητας (η τιμή του ενός τετραδίου επαναλαμβάνεται τόσες φορές, όσες δείχνει το πλήθος των τετραδίων).

Το ένα πρόβλημα διαίρεσης διατυπώνεται ως εξής: «Αγόρασα 5 τετράδια και πλήρωσα 10 ευρώ. Πόσο κόστισε το ένα;». Η ποσότητα «5 τετράδια» λειτουργεί ως πολλαπλασιαστής στην αρχική σχέση και γίνεται διαιρέτης κατά το μετασχηματισμό της. Η ενέργεια που απαιτείται για την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι ο ισομερισμός μιας ποσότητας (10 ευρώ σε 5 ίσα μέρη). Για το λόγο αυτό, η διαίρεση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα αυτό έχει το νόημα του ισομερισμού και είναι γνωστή ως «διαίρεση μερισμού».

Το δεύτερο πρόβλημα διαίρεσης διατυπώνεται ως εξής: «Είχα 10 ευρώ και τα ξόδεψα όλα για να αγοράσω τετράδια που κοστίζουν 2 ευρώ το κάθε ένα. Πόσα τετράδια αγόρασα;». Η ποσότητα «2 ευρώ ανά τετράδιο» λειτουργεί τώρα ως πολλαπλασιαστής στην αρχική σχέση και μετατρέπεται σε διαιρέτη κατά το μετασχηματισμό της. Οι ενέργειες που απαιτούνται τώρα για την επίλυση του προβλήματος είναι διαφορετικές σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση: Η ποσότητα «10 ευρώ» ομαδοποιείται σε δυάδες και καταμετρούνται οι δυάδες. Απαιτείται, επομένως, καταμέτρηση με σύνθετη μονάδα, δηλαδή, η καταμέτρηση μιας ομάδας από ν στοιχεία ως «ένα», ενιαίο αντικείμενο. Με διαφορετικά λόγια, η διαίρεση αυτή απαντά το ερώτημα «πόσα 2ευρα υπάρχουν στα 10 ευρώ;» ή πιο γενικά «πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στο διαιρετέο;» Η διαίρεση αυτού του τύπου είναι γνωστή ως «διαίρεση μέτρησης».

Με άλλα λόγια, ενώ οι αριθμητικές προτάσεις είναι ισοδύναμες με την αρχική και μεταξύ τους, τα προβλήματα που προκύπτουν διαφέρουν, όσον αφορά το είδος των ποσοτήτων που διαιρούνται, αλλά και τις ενέργειες που απαιτούνται για την εύρεση του αποτελέσματος (ισομερισμός, μέτρηση). Αντιστοιχούν, δε, σε διαφορετικά νοήματα της διαίρεσης (μερισμού, μέτρησης).

5. Τα Προγράμματα Σπουδών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και οι στόχοι επίλυσης πολλαπλασιαστικών προβλημάτων

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ) καθώς και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ), τα οποία σχεδιάστηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.), για την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και εφαρμόζονται στη χώρα μας από το 2003, θέτουν τους παρακάτω στόχους (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003), όσον αφορά την κατανόηση και τη χρήση των μαθηματικών πράξεων (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης) στην Γ΄ Δημοτικού από τους μαθητές και μαθήτριες:

- Να εξοικειωθούν με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης φυσικών αριθμών.

- Να σταθεροποιήσουν και να ολοκληρώσουν τη συνήθη προφορική πρακτική του νοερού πολλαπλασιασμού (προπαίδεια) και των γραπτών οριζόντιων γινομένων

- Εισαγωγή στη διαίρεση με οριζόντιες γραπτές διαιρέσεις (αντιστροφή της προπαίδειας), καθώς και με προφορικές διαιρέσεις

Όσον αφορά τον άξονα γνωστικού περιεχομένου «*Επίλυση Προβλημάτων*» γενικός στόχος σύμφωνα με τα Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ., για όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου ορίζεται ως εξής:

«*Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες*».

Οι στόχοι του Α.Π.Σ. για την επίλυση προβλήματος στην Γ΄ τάξη αναφέρονται έτσι ώστε οι μαθητές:

- Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες

- Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση

- Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής

- Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις

- Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του

- Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης

- Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα

- Να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων
- Να αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία

Μια από τις ενδεικτικές δραστηριότητες που προτείνει το Α.Π.Σ. για την συγκεκριμένη ηλικία των παιδιών (8-9 χρονών) είναι η εξής: «*Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση*».

Βλέπουμε πως οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος εναρμονίζονται με σύγχρονες αντιλήψεις για τα μαθηματικά λαμβάνοντας υπόψη τα στάδια επίλυσης προβλήματος, σύμφωνα με τα επιστημονικά κριτήρια της διεθνούς βιβλιογραφίας, (κατανόηση, σχεδιασμός, εκτέλεση, έλεγχος) (Polya, 1998), προσθέτοντας στα βήματα επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος τις αναπαραστάσεις και την επαλήθευση.

Από την άλλη μεριά, η αντίστροφη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης φαίνεται να περιορίζεται σε αριθμητικό πλαίσιο, ενώ δεν υπάρχει ρητή αναφορά στην κατασκευή ή τον μετασχηματισμό προβλημάτων.

Η έμφαση στην επίλυση προβλήματος διατηρείται και στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του 2011, ενώ η αντίστροφη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αναφέρεται ρητά και με τις δύο μορφές της. Πράγματι, ως στόχοι στην Γ΄ Δημοτικού κατανοούν την προπαίδεια του πολλαπλασιασμού καθώς και τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Είναι ικανοί να αναπτύξουν πιο σύνθετες στρατηγικές στην επίλυση προβλημάτων, όπως και στην κατασκευή αντίστροφων προβλημάτων από των αρχικών που τους δίνεται ως γνωστό, καθώς και στην χρησιμοποίηση μοντέλων και αναπαραστάσεων.

Μέρος Β' Έρευνα

6. Μεθοδολογία

6.1 Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα τελευταία χρόνια επανέρχεται στη βιβλιογραφία το αίτημα για την υποστήριξη της ανάπτυξης της ποσοτικής σκέψης των παιδιών, που αφορά την αναγνώριση και επεξεργασία των κατάλληλων ποσοτήτων και των κατάλληλων σχέσεων μεταξύ τους σε μια κατάσταση, ενώ διαχρονικά υποστηρίζεται ότι η απόδοση νοήματος στους αριθμούς με αναφορά σε ποσότητες (αναφορικό νόημα) προάγει και την κατανόηση για τους αριθμούς ως αντικείμενα, τις μεταξύ τους σχέσεις και τις πράξεις τους (αναλυτικό νόημα των αριθμών) (Nunes, Bryant, Evans, Bell, & Barros, 2012; Polotskaia & Savard, 2020)

Στην εργασία αυτή σχεδιάσαμε μια παρέμβαση με στόχο να υποστηρίξουμε μαθητές/-τριες Γ΄ Δημοτικού ώστε: α) να αναγνωρίζουν πολλαπλασιαστικές δομές (δηλαδή τις ποσότητες και την πολλαπλασιαστική σχέση που τις συνδέει, βλ. (Polotskaia & Savard, 2020) σε καταστάσεις και β) να επεξεργαστούν τη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στο πλαίσιο αυτών των καταστάσεων. Έτσι λοιπόν, οι μαθητές/-τριες ήρθαν σε επαφή με πολλαπλασιαστικά προβλήματα, τα οποία κλήθηκαν να γνωρίσουν, να κατανοήσουν την μεταξύ τους σχέση, να διατυπώσουν ορθά και με σαφήνεια δικά τους λεκτικά πολλαπλασιαστικά προβλήματα αναγνωρίζοντας πως μέσα από μια κατάσταση εμπλέκονται τρεις ποσότητες εκ των οποίων η μία είναι η κρυμμένη ποσότητα. Από την αρχή εντοπίσαμε τη δυσκολία των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, όπως εξάλλου ανέδειξε και η βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε. Γι' αυτό, επιδίωξή μας ήταν να σχεδιάσουμε και να πραγματοποιήσουμε μια διαφορετική διδασκαλία εκτός του σχολικού εγχειριδίου, βοηθώντας τους μ αυτόν τον τρόπο να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και να κατανοήσουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τις ποσότητες που εμπλέκονται μεταξύ τους όχι μόνο σε αριθμητικό επίπεδο αλλά και σε εννοιολογικό.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω θέσαμε στην έρευνά μας και προσπαθήσαμε να απαντήσουμε τα εξής ερωτήματα:

- Μπορούν παιδιά της Γ΄ Δημοτικού που έχουν εκτεθεί σε διδασκαλία για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, όπως προβλέπεται στο αναλυτικό τους πρόγραμμα, να διατυπώσουν τα τρία προβλήματα που προκύπτουν από μια πολλαπλασιαστική κατάσταση του τύπου των «ισοπληθών ομάδων»;

- Τι επίδραση έχει μια διδακτική παρέμβαση, με στόχο την υποστήριξη των παιδιών στο να αναγνωρίζουν τις ποσότητες και τις ισοδύναμες μορφές της μεταξύ τους σχέσης σε μια κατάσταση του τύπου των «ισοπληθών ομάδων»;

Υποθέσαμε ότι η παρέμβαση αυτή θα βελτιώσει την ικανότητα των παιδιών να διατυπώνουν τα τρία προβλήματα που αντιστοιχούν σε μια δεδομένη πολλαπλασιαστική κατάσταση.

6.2 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες σε αυτή την έρευνα ήταν 22 μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ τάξης από δημόσιο σχολείο της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Το δείγμα αποτέλεσαν οι μαθητές και οι μαθήτριες του ενός τμήματος του σχολείου και το οποίο χωρίζονταν σε 11 αγόρια και 11 κορίτσια. Η επιλογή έγινε με τη μορφή της βολικής, ευκαιριακής δειγματοληψίας (Cohen, Manion & Morrison et al., 2008), καθώς στο σχολείο αυτό εργαζόταν η ερευνήτρια. Το δείγμα του πληθυσμού δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό, όμως, έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Η γλώσσα που μιλούσαν καθώς και η υπηκοότητα όλων των μαθητών και μαθητριών ήταν ελληνική. Η καταγωγή τους όμως ποικίλλει. Από τις έντεκα (11) μαθήτριες που είχε όλο το τμήμα, οι δύο (2) ήταν οικογένεια παλιννοστούντων από την πρώην Σοβιετική ένωση, μία (1) μαθήτρια κατάγονταν από την Βουλγαρία και δύο (2) άλλες είχαν καταγωγή από την Αλβανία.

Από τους έντεκα (11) μαθητές, ένας μαθητής (1) είχε καταγωγή από την Θράκη και συγκεκριμένα από τη μουσουλμανική μειονότητα του Νομού Ξάνθης. Η ιδιαιτερότητα του συγκεκριμένου μαθητή έγκειται στο γεγονός ότι, ενώ οι γονείς του συναίνεσαν στο να συμμετάσχει στην έρευνα, είχε ελλιπή φοίτηση και δεν συμμετείχε στις διαδικασίες της έρευνας, όπως είχαμε ορίσει, παρά μόνο ελάχιστες φορές όταν ερχόταν στο σχολείο στα ομαδικά φύλλα εργασίας. Του δόθηκε τεστ προελέγχου (pre-test) για να απαντηθεί κάποια άλλη στιγμή που ήρθε στο μάθημα ενώ δεν απάντησε στο τεστ μεταελέγχου (post-test).

6.3 Ερευνητικά εργαλεία

Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκαν δύο δοκιμασίες για τον προέλεγχο και το μεταλέγχο. Τα δύο τεστ που χορηγήθηκαν στο πλαίσιο της τάξης, ατομικά σε κάθε παιδί, πριν και μετά την παρέμβαση, περιλάμβαναν από μια εικόνα και κοινές οδηγίες για την κατασκευή προβλημάτων: **«Με τα στοιχεία που βλέπεις στην παραπάνω εικόνα μπορείς να φτιάξεις προβλήματα που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση; Φτιάξε όσα περισσότερα μπορείς!».** Η εικόνα του τεστ του προέλεγχου ήταν 4 τούρτες που η καθεμία είχε πάνω της από 5 κερασάκια (βλ. Παράρτημα 5). Η εικόνα του τεστ του μεταέλεγχου ήταν 4 αυγοθήκες που η καθεμία είχε μέσα από 6 αυγά (βλ. Παράρτημα 6). Η επιλογή των εικόνων και για τα 2 τεστ έγινε μετά από σκέψη και συζήτηση, επειδή η εξοικείωση των παιδιών της συγκεκριμένης ηλικίας με τα εικονοπροβλήματα είναι μεγαλύτερη, αφού στα σχολικά βιβλία βρίσκουμε δραστηριότητες αυτής της μορφής. Οι εικόνες είχαν επίσης ακόμη ένα χαρακτηριστικό: ήταν από τον πραγματικό κόσμο, άπτονταν της καθημερινότητάς τους και έτσι μπορούσαν να τις αναγνωρίσουν, να τις αποκωδικοποιήσουν και να υποστηριχθούν ώστε να δημιουργήσουν λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Ο περιορισμός που υπήρχε ήταν ότι έπρεπε να διατυπώσουν προβλήματα που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Αυτή ήταν η διαφορετική προσέγγιση και για αυτό το λόγο χρησιμοποιήθηκε ακριβώς το ίδιο τεστ και στο τέλος της παρέμβασης για να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε την επίδοση των μαθητών.

6.4 Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τη σχολική χρονιά 2017-2018 και κράτησε περίπου 2 μήνες (Απρίλιο και Μάιο) κι αφού προηγήθηκε η διδασκαλία των αριθμητικών πράξεων και υπολογισμών (νοερών και γραπτών) του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Επίσης είχε προηγηθεί και ολοκληρωθεί η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από το σχολικό εγχειρίδιο (Ενότητα 3η – μαθ. 17-19).

Το εγχείρημα αυτό υλοποιήθηκε επιπλέον της παραδοσιακής διδασκαλίας του σχολικού εγχειριδίου, και πραγματοποιήθηκε σε ώρες εκτός του ωρολογίου προγράμματος των Μαθηματικών. Είχαν ενημερωθεί, εκ των προτέρων, ο Διευθυντής του σχολείου καθώς και οι γονείς-κηδεμόνες των μαθητών για τον χρόνο και τον τρόπο υλοποίησης της παρέμβασης.

Το τεστ προέλεγχου χορηγήθηκε ταυτόχρονα σε όλη την τάξη σε μορφή ενός φύλλου εργασίας με διάρκεια μιας διδακτικής ώρας (45 λεπτά). Αφού δόθηκαν κάποιες διευκρινήσεις στους μαθητές, σχετικά με τις οδηγίες που αναγράφονταν, συνέχισαν μόνοι τους χωρίς καμιά επιπλέον βοήθεια για την συμπλήρωσή του. Από την αρχή κατέστη σαφές στους μαθητές ότι δεν θα αποτελούσε κάποιο είδος γραπτής δοκιμασίας-αξιολόγησής τους, αλλά ήταν ένα εργαλείο που θα τους βοηθούσε στην κατανόηση και επεξεργασία των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων. Επίσης θα τους βοηθούσε να διατυπώσουν και να επιλύσουν προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Μετά τη συλλογή του αρχικού τεστ, έγινε μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων ώστε να βγουν κάποια αρχικά συμπεράσματα σχετικά με την ικανότητα της διατύπωσης των προβλημάτων από τους μαθητές.

Στη συνέχεια μεσολάβησε η διδακτική παρέμβαση. Η παρέμβαση πραγματοποιούνταν μια φορά την εβδομάδα (κάθε Παρασκευή), επί 5 εβδομάδες. Το εισαγωγικό μέρος της παρέμβασης είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Στις επόμενες συναντήσεις δόθηκαν τα 4 φύλλα εργασίας, τα οποία τα παιδιά επεξεργάστηκαν ομαδικά, για περίπου 2 διδακτικές ώρες (το καθένα από αυτά). Το σύνολο των ωρών της παρέμβασης ήταν τουλάχιστον 10 διδακτικές ώρες .

Στη διάρκεια της παρέμβασης οι μαθητές δημιούργησαν σταθερές ομάδες εργασίας, τέσσερις ομάδες των τεσσάρων ατόμων και μία ομάδα των πέντε ατόμων, με δική τους πρωτοβουλία και επεξεργάστηκαν τα φύλλα εργασίας που σχεδιάστηκαν για τις ανάγκες της διδακτικής παρέμβασης. Τα φύλλα εργασίας περιείχαν άλλοτε προβλήματα με τη χρησιμοποίηση υλικού από τις ομάδες και άλλοτε προβλήματα με εικόνα και πίνακες. Οι ομάδες θα έπρεπε να συνεργαστούν με τα μέλη της η καθεμιά και να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους έτσι ώστε κουβεντιάζοντας, σχεδιάζοντας, προτείνοντας, διατυπώνοντας και λύνοντας προβλήματα να ξεχωρίσουν και να κατανοήσουν τις ποσότητες που εμπλέκονται σε αυτές τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Μετά την ομαδική εργασία ακολουθούσε συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης.

Αφού ολοκληρώθηκε η διαδικασία της παρέμβασης, χορηγήθηκε στους μαθητές η δοκιμασία του μεταέλεγχου. Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το αρχικό τεστ και κάθε μαθητής αφού εργάστηκε ατομικά και μέσα στη διάρκεια της μιας διδακτικής ώρας ολοκλήρωσε το τεστ. Έγινε ανάλυση των δεδομένων του τελικού τεστ έτσι ώστε να βγουν τα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση που είχε η παρέμβαση αυτή στην ικανότητα αναγνώρισης των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων από τους μαθητές της Γ΄ Δημοτικού.

6.5 Περιγραφή, στόχος και κύριοι άξονες της διδακτικής παρέμβασης

Ο σκοπός της παρέμβασης ήταν να υποστηρίξει τους μαθητές να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που υπάρχουν μέσα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, να κατανοήσουν τις σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ των ποσοτήτων, να κατασκευάσουν προβλήματα των τριών καταστάσεων και να τα επιλύσουν.

Πιο συγκεκριμένα, η παρέμβαση είχε τους εξής στόχους:

α) να δημιουργήσει την ευκαιρία για τους μαθητές να επεξεργαστούν βαθύτερα την πολλαπλασιαστικές καταστάσεις του τύπου των «ισοπληθών ομάδων».

β) να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που ενυπάρχουν σε αυτές και, ιδιαίτερα, τις εντατικές ποσότητες (π.χ. κόστος ανά τεμάχιο), οι οποίες παρουσιάζουν προκλήσεις για τα παιδιά αυτής της ηλικίας.

γ) να αναγνωρίσουν ότι από την ίδια πολλαπλασιαστική κατάσταση μπορούν να προκύψουν τρία διαφορετικά προβλήματα, ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο, έτσι ώστε να έρθουν σε επαφή με τη συγκεκριμένη έκφανση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και τη διαίρεσης.

δ) να εμπλακούν βιωματικά στην δημιουργία προβλημάτων πραγματοποιώντας τις ενέργειες που αντιστοιχούν στις πράξεις (επανάληψη ποσότητας, ισομερισμός, ομαδοποίηση και μέτρηση με σύνθετη μονάδα) με τη χρήση των υλικών που τους δόθηκαν, ώστε να αναδειχθούν τα διαφορετικά νοήματα της διαίρεσης (μερισμός, μέτρηση).

ε) να ανταλλάξουν απόψεις και να αλληλοϋποστηρίξουν-διορθώσουν τις ιδέες τους μέσα από ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, θέσαμε ως κύριο στόχο του μαθησιακού περιβάλλοντος να στρέψουμε την προσοχή των μαθητών, μέσα από στοχευμένες ερωτήσεις και διαδικασίες, στην εννοιολογική κατανόηση και επεξεργασία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, μέσω της παραγωγής προβλημάτων ομαδοσυνεργατικά. Η χρήση χειραπτικού υλικού, η παρουσίαση των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων μέσω εικόνων, ο σχεδιασμός πινάκων, οι αναπαραστάσεις των προβλημάτων μέσω της ζωγραφικής είναι τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης ώστε να υποστηρίξουμε τους μαθητές.

Σημαντικός άξονας του μαθησιακού περιβάλλοντος ήταν η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία δίνει έμφαση περισσότερο στη διαδικασία της διδασκαλίας και λιγότερο στη μάθηση της πληροφορίας, όπως συμβαίνει με την παραδοσιακή δασκαλοκεντρική διδασκαλία (Κογκούλης, 2004). Κατά την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες όπου η εργασία είναι προγραμματισμένη, προσχεδιασμένη και χαρακτηρίζεται από τη συνεχή παρατήρηση του εκπαιδευτικού.

Έγινε, λοιπόν, επιδίωξη των παραπάνω στόχων μέσα από την οργάνωση στοχευμένων ερωτήσεων και την υποστήριξη ελεύθερης ανταλλαγής απόψεων σε συζητήσεις μέσα στην τάξη σχετικά με τη διαδικασία (δυσκολίες, σκέψεις, προβληματισμοί).

7. Αναλυτική περιγραφή της παρέμβασης

7.1 Φάση 1η - Εισαγωγική παρέμβαση

Αφού προηγήθηκε ο προέλεγχος και αποτυπώθηκε μια πρώτη εικόνα των παιδιών σχετικά με την ικανότητα της διατύπωσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, ακολούθησε η διδασκαλία που αφορούσε στην κατασκευή προβλημάτων διαίρεσης και πολλαπλασιασμού. Σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε με προσεκτικά βήματα και σύμφωνα με τις ανάγκες της τάξης. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους χειραπτικό υλικό ώστε να μπορούν να το επεξεργαστούν και να δημιουργήσουν μόνοι τους τις καταστάσεις που προκύπτουν στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Χρησιμοποιήθηκαν επίσης πίνακες, στους οποίους οργανώθηκαν και καταγράφηκαν οι πληροφορίες ταυτόχρονα και για τα τρία προβλήματα, με ρητή αναφορά των ποσοτήτων και διάκριση των δεδομένου και του ζητούμενου για κάθε πρόβλημα.

Για τις ανάγκες της διδασκαλίας κρίθηκε χρήσιμο να δημιουργηθούν πέντε (5) ομάδες συνεργασίας (4 ομάδες αποτελούνταν από 4 παιδιά και 1 ομάδα από 5 παιδιά). Για κάθε ομάδα ορίστηκε ένας «γραμματέας», ο οποίος/η οποία θα κρατούσε σημειώσεις σε κόλλα A4 από τις δραστηριότητες.

Εξαρχής μοιράστηκε το υλικό στην κάθε ομάδα ξεχωριστά και συμφωνήθηκε με τα παιδιά να παρατηρήσουν πολύ προσεκτικά τα υλικά που είχαν μπροστά τους. Η κάθε ομάδα είχε πάνω στα θρανία από 2 ποτήρια-δοχεία και από 10 φασόλια-αντικείμενα. Ζητήθηκε από την κάθε ομάδα, χρησιμοποιώντας τα αντικείμενα που είχε μπροστά της, να κατασκευάσει ένα πρόβλημα που να λύνεται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Η ερευνήτρια βοηθούσε με τις κατάλληλες ερωτήσεις *(«Τι έχετε μπροστά σας;», «Μπορείτε να φτιάξετε ένα πρόβλημα που να λύνεται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση;»)* και ενθάρρυνε τις ομάδες για την κατασκευή του, παροτρύνοντάς τους: *«Εσείς θα το φτιάξετε κι εγώ θα το λύσω»*. Οι μαθητές προσπαθούσαν να φτιάξουν με τα υλικά που είχαν στα χέρια τους το πρόβλημα που θα ανταποκρινόταν στη συνθήκη που τους ζητούνταν. Στην Εικόνα 1 παρουσιάζεται η αναπαράσταση με τα υλικά που έκαναν τα παιδιά για το πρόβλημα της διαίρεσης μερισμού **(**Εχω *10 φασόλια και θέλω να τα μοιράσω σε 2 ποτηράκια. Πόσα φασόλια πρέπει να βάλω στο κάθε ποτηράκι;).* Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι προηγήθηκε η ενέργεια του ισομερισμού της γραπτής διατύπωσης του προβλήματος.

<u>Εικόνα 1</u>: *Ισομερισμός των αντικειμένων / Δημιουργία 1ου προβλήματος με τα υλικά*

Το επόμενο βήμα στον σχεδιασμό της διδασκαλίας ήταν να καταλάβουν οι μαθητές ότι οι αριθμοί που υπάρχουν σε ένα πρόβλημα εκφράζουν κάποιες ποσότητες που συνδέονται με τα αντικείμενα τα οποία χειρίζονται, αλλά δεν ταυτίζονται με αυτά. Επιπλέον, ότι συνδέονται με μια πολλαπλασιαστική που εκφράζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους, καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε διαφορετικό πρόβλημα. Για να μπορέσει να γίνει αυτό αντιληπτό από τους μαθητές χρησιμοποιήθηκε ένας πίνακας τον οποίο η ερευνήτρια σχεδίασε στον ασπροπίνακα της τάξης (*Πίνακας 1*). Στην κεφαλίδα του πίνακα αναγράφονταν οι τρεις ποσότητες (συνολικό πλήθος αντικειμένων, πλήθος δοχείων, πλήθος αντικειμένων ανά δοχείο) με τη μορφή ερωτήματος. Στα κατάλληλα κελιά τοποθετήθηκαν οι αντίστοιχοι αριθμοί, με το σύμβολο Χ για το ζητούμενο. Σημειώνεται ότι οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με κάτι παρόμοιο, γιατί ήταν η πρώτη φορά που έβλεπαν δεδομένα και ζητούμενα ενός προβλήματος και τον άγνωστο x να τοποθετούνται σε πίνακα.

Πόσα αντικείμενα συνολικά;	Πόσα δοχεία;	Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;	Πράξη:
10	2	**Χ**;	10:2 = 5

<u>Πίνακας 1</u>: Δημιουργία πίνακα με τα στοιχεία του προβλήματος

Η πρώτη (1η) γραμμή του πίνακα χρωματίστηκε και γράφτηκαν όλα τα αντικείμενα που εμπλέκονται στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ανάλογα με την κατάσταση που εκφράζουν και την σχέση που έχουν σε καθένα από τα προβλήματα που δημιουργούνται. Θα έπρεπε να γίνει κατανοητό ότι με τα αντικείμενα που έχουν μπροστά τους και επεξεργάζονται δημιουργούνται και τα τρία προβλήματα. Το πλήθος των αντικειμένων που έχουν μπροστά τους δηλαδή οι ποσότητες δεν αλλάζουν, αλλά η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους. Η τελευταία στήλη του πίνακα περιλάμβανε τη λύση του προβλήματος με μαθηματική πράξη.

Στόχος της επόμενης φάσης για τις ομάδες ήταν να φτιάξουν με τα υλικά τους και να διατυπώσουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με πολλαπλασιασμό, να καταλάβουν την ομαδοποίηση των αντικειμένων και να φτιάξουν 2 ίδιες ομάδες αντικειμένων που είχαν ήδη μπροστά τους από το προηγούμενο πρόβλημα που έφτιαξαν, διατύπωσαν και λύσαμε. Προτρέψαμε τους μαθητές στο να παρατηρήσουν τα αντικείμενα που είχαν μοιραστεί στα δοχεία και να προσπαθήσουν να καταλάβουν ποια ήταν η αρχική κατάσταση που περίγραψαν και έφτιαξαν το πρόβλημα, τι έχει παραμείνει ίδιο και τι έχει αλλάξει στην καινούρια κατάσταση που έβλεπαν *(Εικόνα 2)*.

Το πρόβλημα διατυπώθηκε ως εξής (***<u>Πρόβλημα 2:</u> Έχω 2 ποτηράκια που το καθένα έχει από 5 φασόλια. Πόσα είναι όλα μαζί;)*** και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία.

<u>Εικόνα 2</u>: Ομαδοποίηση αντικειμένων / Δημιουργία 2ου προβλήματος

Η ερευνήτρια συνεχίζοντας τη διδασκαλία, με σταθερές ερωτήσεις (***«Πόσα δοχεία έχουμε;», «Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;», «Πόσα συνολικά αντικείμενα;»***) προσπαθούσε να βοηθήσει τα παιδιά ώστε να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που είχαν τώρα μπροστά τους για να τοποθετήσουν τα στοιχεία στον πίνακα συμπληρώνοντας την επόμενη γραμμή (*Πίνακας 2*).

Πόσα αντικείμενα συνολικά;	Πόσα δοχεία;	Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;	Πράξη:
10	2	**Χ;**	10:2 = 5
Χ;	2	5	2x5=10

<u>Πίνακας 2:</u> Συμπλήρωση των στοιχείων του 2ου προβλήματος στην γραμμή του πίνακα

Στη συνέχεια τοποθετήθηκε μια κενή γραμμή στον πίνακα 2 και ζητήθηκε από τις ομάδες συνεργασίας να τον παρατηρήσουν και να αναγνωρίσουν σε ποια στήλη από τα στοιχεία που είναι γραμμένα στην κίτρινη γραμμή δεν έχουμε βάλει ακόμη τον «***άγνωστο Χ;»*** (***Τι δεν έχουμε ρωτήσει ακόμη;)***. Τα παιδιά εντόπισαν ότι δεν υπάρχει ο ***«άγνωστος Χ;»*** στην στήλη που ρωτάει «Πόσα δοχεία;» και προσπαθήσαμε να τους βοηθήσουμε παροτρύνοντάς τους να διατυπώσουν ένα πρόβλημα που θα ρωτάει για τα δοχεία όπως είχαν καταλάβει (***Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα υλικά σας και να διατυπώσετε το πρόβλημα που θα ρωτάει «Πόσα δοχεία;» και θα λύνεται με διαίρεση;***).

Εδώ προέκυψε δυσκολία με την διατύπωση του συγκεκριμένου προβλήματος από το σύνολο των ομάδων συνεργασίας, όπως εξάλλου ήταν αναμενόμενο. Για τον λόγο αυτόν υπήρξε μια καθοδήγηση από την ερευνήτρια προς τα παιδιά για να επικεντρωθούν στις απαντήσεις των παρακάτω ερωτήσεων:

«Τι μας δίνεται;» *(πόσα είναι τα αντικείμενα συνολικά και πόσα αντικείμενα υπάρχουν στο κάθε δοχείο).*

«Τι μας ζητείται;» *(πόσα είναι τα δοχεία που χωρίσαμε τα αντικείμενα)*

Έπειτα ζητήθηκε από τις ομάδες συνεργασίας να βάλουν στη σειρά τα αντικείμενα (φασόλια), να τα μετρήσουν και να τα χωρίσουν σε ομάδες των πέντε. (*Εικόνα 3*).

Εικόνα 3: Βάζοντας τα αντικείμενα στη σειρά

Τα παιδιά χώρισαν τα αντικείμενα σε 2 ομάδες των 5 αντικειμένων και τα τοποθέτησαν στα δοχεία. Το πρόβλημα που φτιάχτηκε από τους μαθητές με τα υλικά απεικονίζεται στην παρακάτω φωτογραφία (*Εικόνα 4*).

<u>Εικόνα 4</u>: Φτιάχνοντας το 3ο πρόβλημα/Χωρισμός των αντικειμένων σε 5άδες

Το πρόβλημα διατυπώθηκε, γράφτηκε και λύθηκε στον πίνακα ***(<u>Πρόβλημα 3:</u> Έχω 10 φασόλια και θέλω να τα βάλω σε ποτηράκια. Το κάθε ποτηράκι θα έχει από 5 φασόλια. Πόσα ποτηράκια θα χρειαστώ;)*** Ακολούθησε η καταγραφή των στοιχείων στον παρακάτω πίνακα (*Πίνακας 3*).

Πόσα αντικείμενα συνολικά;	Πόσα δοχεία;	Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;	Πράξη:
10	2	**Χ;**	10:2 = 5
Χ;	2	5	2x5 =10
10	**Χ;**	5	10:5 = 2

<u>Πίνακας 3</u>: Συμπλήρωση των στοιχείων του 3ου προβλήματος

Αφού ολοκληρώθηκε η διατύπωση των τριών προβλημάτων από τους μαθητές, η καταγραφή τους και η επίλυσή τους στον πίνακα της τάξης και ολοκληρώθηκε η τοποθέτηση των στοιχείων των τριών προβλημάτων στον πίνακα που σχεδιάστηκε ακολούθησε μια 10λεπτη συζήτηση μεταξύ της ερευνήτριας και των ομάδων. Ο σκοπός της συζήτησης έγινε για να αποσαφηνίσει τυχόν απορίες των μαθητών σχετικά με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Τονίστηκε ότι ξεκινάμε από μια κατάσταση στην οποία υπάρχουν ορισμένα στοιχεία:

(Πόσα αντικείμενα συνολικά; Πόσα δοχεία; Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;)

Από αυτήν την κατάσταση μπορούμε να φτιάξουμε τρία (3) προβλήματα. Συζητήθηκαν οι ομοιότητες που υπάρχουν μεταξύ τους αλλά και οι διαφορές. Τονίστηκε πώς συνδέονται μεταξύ τους και η αρχή που διέπει τη σχέση τους:

Συνολικό Πλήθος Αντικείμενα συνολικά = Αντικείμενα ανά δοχείο × Πλήθος Δοχείων

Για την διευκόλυνση της συζήτησης αλλά και την κατανόηση των σχέσεων που δημιουργούνται μεταξύ των ποσοτήτων χρησιμοποιήθηκε ο πίνακας που σχεδιάστηκε. Οι μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν μέσα σ' αυτόν το πλήθος των αντικειμένων, το οποίο μέτρησαν και είδαν πώς έφτιαξαν τις τρεις καταστάσεις ανάλογα με το τι «μας ζητείται» και τι «μας δίνεται» σε κάθε μια από τις τρεις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Το πλήθος, δηλαδή ο αριθμός των αντικειμένων είναι ο ίδιος και δε αλλάζει, αλλά οι ποσότητες όπως εμπλέκονται είναι αυτές που διαμορφώνουν τη διαφορετική κατάσταση κάθε φορά των προβλημάτων. Η μαθηματική πράξη που υπήρχε στην τελευταία στήλη του πίνακα έλυνε το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά δείχνοντάς τους την πράξη που χρησιμοποιείται ως επίλυση στο κάθε πρόβλημα. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες των αντικειμένων και τοποθετούνται σε κάθε γραμμή του πίνακα ανάλογα με αυτό που φανερώνουν, γι αυτό διακρίνεται σε καθεμιά γραμμή του πίνακα που συμβολικά φτιάχνεται ένα πρόβλημα, οι δύο γνωστές ποσότητες που ονομάζονται και η μία άγνωστη ποσότητα που ζητείται και συμβολίζεται με τον άγνωστο **Χ;** Οι μαθηματικές πράξεις (διαίρεση-πολλαπλασιασμός-διαίρεση), οι οποίες λύνουν το κάθε πρόβλημα που διαμορφώνεται, περιέχουν την αντιστροφή των πράξεων. Η πορτοκαλί γραμμή που προστέθηκε ήταν η συνολική καταγραφή του πλήθους των αντικειμένων που είχαν μπροστά τους τα παιδιά από το υλικό που τους δόθηκε ως χειραπτικό υλικό *(Πίνακας 4).*

Πόσα αντικείμενα συνολικά;	Πόσα δοχεία;	Πόσα αντικείμενα ανά δοχείο;	Πράξη:
10	2	5	
10	2	**Χ;**	10:2 = 5
Χ;	2	5	2x5 =10
10	**Χ;**	5	10:5 = 2

Πίνακας 4: Ολοκληρωμένος πίνακας πολλαπλασιαστικών καταστάσεων

7.2 Φάση 2η - 1ο φύλλο εργασίας

Το 1ο φύλλο εργασίας μοιράστηκε στις ομάδες την επόμενη μέρα από τη διδασκαλία (βλ. Παράρτημα 1). Παρόμοια με την προηγηθείσα διδασκαλία, το 1ο φύλλο εργασίας αφορούσε την κατάσταση του τύπου των «ισοπληθών ομάδων». Το φύλλο εργασίας σχεδιάστηκε στον υπολογιστή, ήταν δισέλιδο και είχε εικόνα (4 έτοιμες τούρτες με κεράσια), πίνακα (έτοιμος με γραμμές και στήλες, πανομοιότυπος με της διδασκαλίας) και πλαίσια-χώρους για τις καταγραφές των παιδιών (6 χώροι συνολικά με οδηγίες για τα προβλήματα).

Στην κάθε ομάδα μοιράστηκε υλικό από χαρτόνι (προσομοίωση τούρτας και κερασιών) (Εικόνα 5). Για τον λόγο αυτόν η ερευνήτρια φρόντισε ώστε η κάθε ομάδα να έχει από ένα ψαλίδι και μια υγρή κόλλα στα θρανία τους. Επίσης είχαν ξυλομπογιές για τις ζωγραφιές των προβλημάτων και κόλλες Α4 για να μπορούν να κρατούν σημειώσεις αν χρειάζονταν.

Αρχικά δόθηκαν ορισμένες διευκρινήσεις για τον τρόπο που θα χρησιμοποιηθούν τα υλικά, και έγινε υπενθύμιση των όρων που διέπουν την ομαδική δουλειά. Το φύλλο εργασίας δουλεύτηκε και συμπληρώθηκε ομαδικά κατά το δίωρο που κράτησε η δοκιμασία αυτή. Συναποφασίστηκε ότι θα προσπαθήσουν να συνεργαστούν μεταξύ τους τα μέλη σε κάθε ομάδα και όρισαν τους ρόλους και τις ευθύνες που αντιστοιχούσαν στον καθένα/καθεμιά.

Τα παιδιά έπρεπε να ακολουθήσουν βήμα- βήμα αυτά που ζητούσε το φύλλο εργασίας και να φτιάξουν 3 προβλήματα που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

Το πρώτο βήμα που έπρεπε να ακολουθήσουν ήταν το εξής: ***α) να ξεχωρίσετε και να γράψετε τα στοιχεία του προβλήματος που υπάρχουν στην εικόνα στην οριζόντια κίτρινη γραμμή του πίνακα.***

Το δεύτερο βήμα ήταν η διατύπωση των προβλημάτων και η αναπαράστασή τους μέσω της ζωγραφικής .

Η οδηγία για το τρίτο βήμα αφορούσε την αναπαράσταση των 3 προβλημάτων στον πίνακα. Η οδηγία έλεγε:

γ) να γράψετε τα στοιχεία του κάθε προβλήματος και να τα λύσετε με μαθηματική πράξη.

Ακολουθούν 2 φωτογραφίες (εικόνες 5 και 6) από την προσπάθεια των παιδιών για την κατασκευή των τριών καταστάσεων των προβλημάτων με τα υλικά που τους μοιράστηκαν.

<u>Εικόνες 5 και 6:</u> *Δουλεύοντας με το υλικό*

7.3 Φάση 3η - 2° φύλλο εργασίας

Την επόμενη εβδομάδα, ίδια μέρα και ώρα σε συνέχεια της παρέμβασης μοιράστηκε στις ομάδες το 2° φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα 2). Το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας που δόθηκε στις ομάδες περιέχεται αυτούσιο στο βιβλίο

Μαθηματικών της Δ΄ Δημοτικού (σελίδα 30) με τίτλο ***«Οι μαρκαδόροι του Πέτρου»*** και περιλαμβάνεται στην διδακτέα ύλη της τάξης, σύμφωνα με τα ΑΠΠΣ και ΔΕΠΠΣ, για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ως αντίστροφες πράξεις.

Το φύλλο εργασίας ήταν μονοσέλιδο και χωρισμένο σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος είχε έναν σχεδιασμένο έτοιμο πίνακα με τέσσερις γραμμές. Κάθε γραμμή ήταν χρωματιστή με τα στοιχεία περιγραφής των προβλημάτων τοποθετημένα και γραμμένα (δεδομένα και ζητούμενα καθώς και ο άγνωστος x) και αντιστοιχούσε σε ένα πρόβλημα. Ζητούσε, λοιπόν, από τις ομάδες να γράψουν προβλήματα που να περιέχουν τα στοιχεία που υπάρχουν στον πίνακα και να απαντάνε σε μια ερώτηση κάθε φορά.

Στο δεύτερο μέρος είχε τρία κενά πλαίσια, τρεις πράξεις και τρεις ζωγραφιές. Στην μέση υπήρχαν τρία χρωματιστά πλαίσια (καθένα από τα χρώματα ήταν αντίστοιχο της χρωματιστής γραμμής που υπήρχε στον πίνακα). Εκεί θα γινόταν η καταγραφή των τριών προβλημάτων. Στην δεξιά μεριά υπήρχαν οι μαθηματικές πράξεις (ένας πολλαπλασιασμός και δύο διαιρέσεις) και στην αριστερή μεριά οι εικόνες-ζωγραφιές, που περίγραφαν το καθένα από τα 3 προβλήματα.

Ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες αφού συζητήσουν να σκεφτούν ομαδικά και:

α) να διατυπώσουν γραπτά το πρόβλημα που αφορούσε την κατάσταση με τον ***άγνωστο Ẋ;***

β) να κάνουν την διπλή αντιστοίχιση των προβλημάτων και με τις τρεις έτοιμες εικόνες που έδειχναν τα προβλήματα και με τις τρεις μαθηματικές πράξεις που έλυναν τα 3 προβλήματα.

7.4 Φάση 4η- 3° φύλλο εργασίας

Η παρέμβαση συνεχίστηκε την επόμενη εβδομάδα με το 3° φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα 3). Μοιράστηκε στις ομάδες μια σελίδα, η οποία είχε έναν έτοιμο σχεδιασμένο πίνακα με τρεις (3) στήλες για την ταξινόμηση έξι (6) πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Στην αρχική γραμμή η οποία ήταν χρωματισμένη έντονα με πράσινο χρώμα υπήρχαν κωδικοποιημένες ερωτήσεις σύμφωνα με τις τρεις καταστάσεις των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Η κάθε ομάδα είχε γραμμένα τα 6 προβλήματα που έπρεπε να ταξινομήσει με τον τρόπο που περιγράφεται παρακάτω.

Η ερευνήτρια, πριν την έναρξη της δοκιμασίας, είχε τοποθετήσει στο θρανίο της κάθε ομάδας από ένα ανοιχτό ορθογώνιο κουτί που περιείχε έξι (6) μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ήταν κομμένα σε ξεχωριστές λωρίδες και ανακατεμένα. Δόθηκαν στις ομάδες σε αυτήν τη μορφή, γιατί αυτός ο τρόπος επεξεργασίας τους θεωρήθηκε πιο εύκολος και πιο διασκεδαστικός, γιατί θα μπορούσαν να τα διαλέξουν ένα-ένα, να τα διαβάσουν φωναχτά στην ομάδα και να αποφασίσουν σε ποια κατάσταση ανήκουν και να τα αντιγράψουν. Επίσης το φύλλο εργασίας ήταν χωρισμένο στη μέση και είχε ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μπορούσαν να λύσουν ή να ζωγραφίσουν τα προβλήματα αν αυτό τους βοηθούσε παραπάνω για την κατανόηση.

Τα προβλήματα ήταν ίδια για όλες τις ομάδες και ήταν τα παρακάτω:

Κατηγορία	Προβλήματα
Επανάληψη ποσότητας/Πολλαπλασιασμός	Ο Πέτρος έχει μια βιβλιοθήκη με 6 ράφια. Σε κάθε ράφι έχει 5 βιβλία. Πόσα βιβλία έχει ο Πέτρος στη βιβλιοθήκη;
Επανάληψη ποσότητας /Πολλαπλασιασμός	Ένα κουτί με ξυλομπογιές κοστίζει 2 ευρώ. Η δασκάλα αγόρασε 6 κουτιά με ξυλομπογιές. Πόσα πλήρωσε;
Ισομερισμός/ Διαίρεση μερισμού	Η Μαρίνα είχε 16 χάντρες και έφτιαξε 4 ίδια βραχιόλια για να δώσει στις φίλες της. Πόσες χάντρες έβαλε στο κάθε βραχιόλι;
Ισομερισμός/ Διαίρεση μερισμού	Η γιαγιά μοίρασε 24 ευρώ δίκαια στα 3 εγγόνια της. Πόσα ευρώ πήρε το κάθε παιδί;
Ομαδοποίηση / Διαίρεση μέτρησης	Μια παρέα παιδιών μοιράστηκαν δίκαια ένα σακουλάκι με 15 καραμέλες και πήρε το καθένα από 3 καραμέλες. Πόσα παιδιά είναι στην

	παρέα;
Ομαδοποίηση /Διαίρεση μέτρησης	Η κυρία Ευδοκία μάζεψε 20 αυγά από τις κότες της και τα συσκεύασε σε αυγοθήκες των 4 θέσεων. Πόσες αυγοθήκες χρειάστηκε;

7.5 Φάση 5η- 4° φύλλο εργασίας

Μοιράστηκε το τελευταίο ομαδικό φύλλο εργασίας της παρέμβασης, το οποίο ήταν τρισέλιδο (βλ. Παράρτημα 4). Η πρώτη σελίδα περιείχε έξι (6) μαθηματικά προβλήματα αριθμημένα σε έντυπη μορφή. Τα προβλήματα ήταν ίδια με τα προβλήματα της ταξινόμησης που είχαν ασχοληθεί οι ομάδες στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Η οδηγία που περιείχε το 4° φύλλο εργασίας ήταν:

«Διαλέξτε ένα πρόβλημα, με την ομάδα σας, και προσπαθήστε να το λύσετε. Έπειτα συζητώντας προσπαθήστε να κατασκευάσετε τα άλλα δυο προβλήματα που προκύπτουν από το αρχικό».

Οι άλλες δύο σελίδες του φύλλου εργασίας είχαν τρία διαμορφωμένα πλαίσια με τίτλους: ***Πρόβλημα 1, Πρόβλημα 2, Πρόβλημα 3***

Ακολούθησε επεξήγηση των οδηγιών κι αφού ολοκληρώθηκαν και δόθηκαν οι κατάλληλες διευκρινήσεις προς τις ομάδες, ξεκίνησε να μετρά το δίωρο που θα πραγματοποιούνταν η δοκιμασία αυτή. Η διαδικασία βασίστηκε αρχικά στην προσπάθεια για συνεργασία και ομοφωνία των μελών της κάθε ομάδας που αφορούσε στην επιλογή προβλήματος, το οποίο θα γραφόταν στο πλαίσιο με τίτλο (Πρόβλημα 1) και η ομάδα θα προχωρούσε στην επίλυσή του (με μαθηματική πράξη του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης).

Στη συνέχεια έπρεπε να κατασκευάσουν τα άλλα δύο προβλήματα που προκύπτουν από το αρχικό μεταφέροντας τα δεδομένα σε άλλη κατάσταση, διατυπώνοντάς τα και λύνοντάς τα σωστά, χωρίς να χρησιμοποιήσουν βοηθητικό χειραπτικό υλικό.

8. Στοιχεία για την ανταπόκριση των παιδιών κατά τη διάρκεια της Παρέμβασης

Τα φύλλα εργασίας της κάθε ομάδας εξετάστηκαν ως προς το αν διατυπώθηκαν ή όχι ορθά τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε κάθε πράξη (πολλαπλασιασμός, διαίρεση μερισμού και διαίρεση μέτρησης), καθώς και αν κατασκευάστηκαν σωστά οι διαφορετικές ζητούμενες αναπαραστάσεις (εικονική, συμβολική, με πίνακα). Οι διαφορετικές κατηγορίες που αναδείχθηκαν παρουσιάζονται στα υπομνήματα των αντίστοιχων πινάκων, για κάθε φύλλο εργασίας ξεχωριστά.

1ο Φύλλο Εργασίας

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται η κατάταξη των απαντήσεων της κάθε ομάδας σε κατηγορία, ανά πράξη, για το 1ο Φύλλο Εργασίας.

ΦΑΣΗ ΙΙ						
		Ομάδες				
		1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**
Πολλαπλασιασμός	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
	Στον πίνακα					
Δαίρεση Μερισμού	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
	Στον πίνακα					
Διαίρεση Μέτρησης	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
	Στον πίνακα					
Πίνακας	**Κεφαλίδα**					

Υπόμνημα	Σωστά	
	Σωστά, άλλη συνθήκη	Πρόβλημα που ταιριάζει στην πράξη, άλλη κατάσταση ή άλλα νούμερα
	Μερικώς σωστά	Λείπουν στοιχεία (π.χ. από την εικόνα ή τον πίνακα), ή κάποια στοιχεία είναι λανθασμένα
	Λανθασμένα	Πρόβλημα που δεν ταιριάζει στην πράξη
		Καμία Απάντηση

<u>Πίνακας 5</u>: Αξιολόγηση του 1ου Φύλλου Εργασίας, ανά πράξη και ανά ομάδα

Στο 1° φύλλο εργασίας τα παιδιά της ***1ης ομάδας εργασίας***, διατύπωσαν τρία (3) προβλήματα. Τα δύο (2) από αυτά είναι όμοια προβλήματα πολλαπλασιασμού και αφορούν το ίδιο ζητούμενο. Το ένα (1) συνοδεύεται από ζωγραφιά και λύθηκε με σωστό τρόπο, αλλά επρόκειτο για πρόβλημα αφαίρεσης. Το πρόβλημα που διατύπωσαν ήταν το παρακάτω: ***«Σε ένα ζαχαροπλαστείο υπήρχαν 4 τούρτες και είχαν 5 κεράσια. Ένας ζαχαροπλάστης έριξε τα 4 κεράσια από τις 4 τούρτες. Πόσα κεράσια έμειναν στην κάθε τούρτα;»***

Στην κίτρινη γραμμή του πίνακα, δεν έγραψαν σωστά τις ποσότητες των αντικειμένων που ζητούνται σε κάθε κατάσταση, έβαλαν τους αριθμούς και τον άγνωστο **Χ;** και έκαναν την αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού στην πρώτη γραμμή που αντιστοιχούσε στο πρώτο πρόβλημα.

Στην ***2η ομάδα εργασίας*** ο πίνακας συμπληρώθηκε σωστά, γιατί έγραψαν σωστά τις αριθμητικές ποσότητες στην κίτρινη γραμμή και έλυσαν με τη σωστή μαθηματική πράξη (πολλαπλασιασμό και διαιρέσεις) και τις 3 καταστάσεις. Διατύπωσαν ορθά τα δύο από τα τρία προβλήματα (της διαίρεσης μερισμού και μέτρησης) και έγραψαν πρόβλημα περιορισμού για τον πολλαπλασιασμό, το οποίο ήταν το εξής: **«Ένας ζαχαροπλάστης έκανε 4 τούρτες...(έχει 20 κεράσια) και θέλει να τις στολίσει. Πόσα κεράσια θα βάλει και στις 4 τούρτες;»**. Επίσης ζωγράφισαν και τα τρία (3) προβλήματα στον ειδικό χώρο που υπήρχε στο φύλλο εργασίας.

Στην ***3η ομάδα εργασίας*** τοποθέτησαν στον πίνακα, σωστά, τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και των τριών καταστάσεων. Έλυσαν με σωστή πράξη και τα τρία (3) προβλήματα και διατύπωσαν ορθά εντός του πλαισίου και τα 3 πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Αποτύπωσαν με κατανοητή ζωγραφιά και τις τρεις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις του προβλήματος.

Στην ***4η ομάδα εργασίας*** προσπάθησαν να τοποθετήσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα στον πίνακα και να λύσουν με πράξη το καθένα πρόβλημα. Έβαλαν και για τα τρία (3) προβλήματα στην ίδια στήλη τον άγνωστο **Χ;** και δεν έγραψαν όλα τα στοιχεία που ζητούνταν στην αρχική κίτρινη γραμμή. Διατύπωσαν δύο (2) προβλήματα, το ένα ανταποκρινόταν στην εικόνα που έβλεπαν στο φύλλο εργασίας και ήταν ορθό. Η λύση του είχε τη σωστή μαθηματική πράξη και η ζωγραφιά ανταποκρίνονταν στα δεδομένα. Το δεύτερο πρόβλημα ήταν το εξής: **«Ο ζαχαροπλάστης έκανε 2 τούρτες πού είχε η κάθε μία από 5 κερασάκια. Πόσα κεράσια έχει η κάθε τούρτα;»** Η διατύπωση του δεν είναι ορθή, παρ' όλα αυτά η ομάδα έλυσε το πρόβλημα με πολλαπλασιασμό και το ζωγράφισε. Δεν διατύπωσαν πρόβλημα που να λύνεται με διαίρεση, παρόλο που στην πρώτη γραμμή του πίνακα είχαν συμπληρώσει δεδομένα και ζητούμενα προβλήματος που λύνεται με διαίρεση μερισμού και είναι συμπληρωμένη σωστά και η μαθηματική πράξη.

Στην ***5η ομάδα εργασίας*** έγραψαν σωστά όλα τα στοιχεία στην αρχική κίτρινη γραμμή, για να σχηματιστεί σωστά ο πίνακας των δεδομένων του φύλλου εργασίας. Τοποθέτησαν σωστά τα στοιχεία που αφορούσαν τις διαιρέσεις και υπήρξε και σωστή πράξη για την διαίρεση μερισμού. Ενώ η λογική του πίνακα ήταν ορθή, η πράξη από την διαίρεση μέτρησης περιείχε κάποιους άλλους αριθμούς και όχι σωστό αποτέλεσμα. Το ίδιο συνέβη με τα δεδομένα του προβλήματος του πολλαπλασιασμού. Υπήρξαν άλλοι αριθμοί από την αρχική εικόνα, όπως κι άλλοι αριθμοί στην πράξη. Διατύπωσαν πρόβλημα διαίρεσης μερισμού, και το έλυσαν με σωστή μαθηματική πράξη. Επιχείρησαν να διατυπώσουν κι άλλο πρόβλημα: **«Έχω 2 αντικείμενα και 4 τούρτες και κεράσια και πρέπει να βάλω κεράσια στις 4 τούρτες. Πόσα κεράσια θα βάλουμε στις τούρτες;».** Η λύση που ξεκίνησαν να γράφουν ήταν (2×….) αλλά δεν την ολοκλήρωσαν.

Επίσης δεν υπήρξε ζωγραφιά σε κανένα από τα 3 πλαίσια ή ό,τι έκαναν το έσβησαν, γιατί η ομάδα είχε διαφωνίες, ως προς τον σχεδιασμό και την υλοποίηση των απόψεων, καθώς και στην μεταξύ των μελών της συνεννόηση.

2ο Φύλλο Εργασίας

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται η κατάταξη των απαντήσεων της κάθε ομάδας σε κατηγορία, ανά πράξη, για το 2ο Φύλλο Εργασίας.

		Ομάδες				
		1η	2η	3η	4η	5η
Πολλαπλασιασμός	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
Διαίρεση Μερισμού	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
Διαίρεση Μέτρησης	**Λεκτικά**					
	Εικονικά					
	Με πράξη					
Υπόμνημα	Σωστά					
	Σωστά, άλλη συνθήκη	Πρόβλημα που ταιριάζει στην πράξη, άλλη κατάσταση ή άλλα νούμερα				
	Μερικώς σωστά	Λείπουν στοιχεία (π.χ. από την εικόνα ή τον πίνακα), ή κάποια στοιχεία είναι λανθασμένα				
	Λανθασμένα	Πρόβλημα που δεν ταιριάζει στην πράξη				
		Καμία Απάντηση				

Πίνακας 6: Αξιολόγηση του 2ου Φύλλου Εργασίας, ανά πράξη και ανά ομάδα

Στο 2ο φύλλο εργασίας, η ***1η ομάδα εργασίας*** των παιδιών διατύπωσαν και αντιστοίχισαν σωστά τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μερισμού. Δεν έγραψαν σωστά το πρόβλημα της διαίρεσης μέτρησης. Το λεκτικό πρόβλημα που διατύπωσαν δεν ανταποκρίνεται σε συνθήκη διαίρεσης αν και η αντιστοίχιση της έτοιμης εικόνας και της πράξης έγινε σωστά.

Η 2η ομάδα εργασίας διατύπωσαν σωστά το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού και αντιστοίχισαν σωστά την πράξη, αλλά δεν αντιστοίχισαν σωστά την αντιπροσωπευτική εικόνα. Έγραψαν σωστά το πρόβλημα της διαίρεσης μερισμού, αντιστοίχισαν σωστά την πράξη αλλά όχι την εικόνα. Το πρόβλημα με τη διαίρεση μέτρησης είχε σωστή αντιστοίχιση και στην πράξη και στην εικόνα, σωστή διατύπωση, αλλά λάθος δεδομένα (οι μαρκαδόροι σε κάθε κουτί είναι 4 και όχι 3 που έγραψε η ομάδα).

Η 3η ομάδα εργασίας διατύπωσαν και αντιστοίχισαν σωστά και τα 3 προβλήματα του 2ου φύλλου εργασίας με τις πράξεις και τις ζωγραφιές.

Η 4η ομάδα εργασίας διατύπωσαν και αντιστοίχισαν σωστά και τα 3 προβλήματα του 2ου φύλλου εργασίας με τις πράξεις και τις ζωγραφιές.

Η 5η ομάδα εργασίας δεν κατάφεραν να διατυπώσουν κανένα από τα 3 προβλήματα σωστά, μέσα στα χρωματιστά πλαίσια, παρόλο που η αντιστοίχιση των εικόνων και των πράξεων έγινε σωστά. Η βοήθεια που τους πρόσφερε ο έτοιμος πίνακας δεν συνδυάστηκε σωστά με τις εικόνες.

3^{ο} Φύλλο Εργασίας

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζεται η κατάταξη των απαντήσεων της κάθε ομάδας σε κατηγορία, ανά πράξη, για το 3^{ο} Φύλλο Εργασίας.

		Ομάδες				
		1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**
Πολλαπλασιασμός	**Λεκτικά** (σωστή ομάδα)					
	Με πράξη					
	Σχηματικά-Πίνακας					
Διαίρεση Μερισμού	**Λεκτικά** (σωστή ομάδα)					
	Με πράξη					
	Σχηματικά-Πίνακας					
Διαίρεση Μέτρησης	**Λεκτικά** (σωστή ομάδα)					
	Με πράξη					
	Σχηματικά-Πίνακας					
Υπόμνημα	Σωστά					
	Σωστά, άλλη συνθήκη	Πρόβλημα που ταιριάζει στην πράξη, άλλη κατάσταση ή άλλα νούμερα				
	Μερικώς σωστά	Λείπουν στοιχεία (π.χ. από την εικόνα ή τον πίνακα), ή κάποια στοιχεία είναι λανθασμένα				
	Λανθασμένα	Πρόβλημα που δεν ταιριάζει στην πράξη				
		Καμία Απάντηση				

<u>Πίνακας 7:</u> Αξιολόγηση του 3^{ου} Φύλλου Εργασίας, ανά πράξη και ανά ομάδα

Στο 3^{ο} φύλλο εργασίας η ***1^{η} ομάδα εργασίας*** δεν τήρησαν τους περιορισμούς του πίνακα. Έγραψαν μαζί τα προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό αλλά δεν τα τοποθέτησαν στην σωστή στήλη του πίνακα. Επίσης έδωσαν σωστή λύση και απάντηση. Η στήλη όμως που τα τοποθέτησαν αφορούσε προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μέτρησης.

Στην στήλη των προβλημάτων που λύνονται με πολλαπλασιασμό, τοποθέτησαν ένα πρόβλημα διαίρεσης μερισμού κι ένα πρόβλημα που λύνεται με διαίρεση μέτρησης. Και τα δύο τα έλυσαν σωστά.

Στην στήλη με τα προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μερισμού, τοποθέτησαν τα άλλα 2 προβλήματα που λύνονται με διαιρέσεις. Το ένα που λυνόταν με διαίρεση μέτρησης το έλυσαν σωστά. Το άλλο που ήταν και το μοναδικό πρόβλημα από όλα που τοποθετήθηκε στη σωστή στήλη, γιατί ήταν πρόβλημα που λύνονταν με διαίρεση μερισμού, δεν το έλυσαν σωστά. Αντί για διαίρεση μερισμού έκαναν πολλαπλασιασμό και έδωσαν απάντηση που δεν ανταποκρίνονταν στη συνθήκη.

Η 2η ομάδα εργασίας ταξινόμησαν σωστά όλα τα προβλήματα που είχε το φύλλο. Ζωγράφισαν και έλυσαν όλα τα προβλήματα. Έλυσαν σωστά τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μερισμού, αλλά δεν έλυσαν με διαίρεση μέτρησης τα δύο προβλήματα που έβαλαν σ αυτήν την κατηγορία. Έλυσαν τα προβλήματα αυτά με πολλαπλασιασμό. Επίσης δεν μπόρεσαν να αναπαραστήσουν με σωστή ζωγραφιά τα δεδομένα από τα προβλήματα της διαίρεσης μέτρησης.

Η 3η ομάδα εργασίας δεν τήρησαν τους περιορισμούς που υπήρχαν στον πίνακα. Έγραψαν μαζί τα προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό, αλλά δεν τα ταξινόμησαν σωστά, βάζοντάς τα στην στήλη των προβλημάτων που λύνονται με διαίρεση μέτρησης (όμοια με την 1η ομάδα). Όσον αφορά τα προβλήματα με τις διαιρέσεις μερισμού και μέτρησης, έγραψαν από ένα σωστό στην κατηγορία (όμοια με την 1η ομάδα). Αφού έκαναν την ταξινόμηση θέλησαν να προχωρήσουν και στην επίλυση όλων των προβλημάτων με πράξη.

Στο πλαίσιο, ακριβώς από κάτω, κατασκεύασαν έναν δικό τους πίνακα γράφοντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα και τη λύση με αριθμητική πράξη. Εκεί παρατηρούμε ότι τακτοποίησαν σωστά όλες τις κατηγορίες των προβλημάτων καθώς και οι πράξεις επίλυσης ήταν σωστές και τοποθετημένες στις στήλες όπου έπρεπε να τοποθετηθούν.

Η 4η ομάδα εργασίας ταξινόμησαν τα προβλήματα ανά κατηγορίες, δηλαδή μαζί τα προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό, μαζί και τα προβλήματα που λύνονται με διαιρέσεις (μερισμού και μέτρησης), έλυσαν και τα 6 προβλήματα σωστά και έδωσαν την σωστή απάντηση. Αλλά η ταξινόμησή τους δεν έγινε συνολικά και με σωστό τρόπο και για τις 3 καταστάσεις.

Η στήλη που ζητούσε τα προβλήματα πολλαπλασιασμού αντικαταστάθηκε με την στήλη που ζητούσε τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης (όμοια με την 1η και την

3η ομάδα). Η μόνη σωστή στήλη ήταν αυτή που αφορούσε τα προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μερισμού.

Η 5η ομάδα εργασίας έλυσαν και ζωγράφισαν και τα 6 προβλήματα, αλλά τα ταξινόμησαν με διαφορετικό τρόπο. Τα προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό, τα τοποθέτησαν στην στήλη που έπρεπε να τοποθετηθούν τα προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μερισμού και τα προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μερισμού στην στήλη που έπρεπε να τοποθετηθούν τα προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό. Τέλος τα προβλήματα που λύνονται με διαίρεση μέτρησης τα τοποθέτησαν στην σωστή στήλη. Όλα τα προβλήματα λύθηκαν από την ομάδα με την σωστή αριθμητική πράξη και με τη σειρά που είχαν ταξινομηθεί στον παραπάνω πίνακα και υπήρξαν αναπαραστάσεις των προβλημάτων με ζωγραφιές κάτω από την επίλυσή τους.

4ο Φύλλο Εργασίας

Στον Πίνακα 8 παρουσιάζεται η κατάταξη των απαντήσεων της κάθε ομάδας σε κατηγορία, ανά πράξη, για το 4ο Φύλλο Εργασίας.

		Ομάδες				
		1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**
Πολλαπλασιασμός	**Λεκτικά**					
	Με πράξη					
Διαίρεση Μερισμού	**Λεκτικά**					
	Με πράξη					
Διαίρεση Μέτρησης	**Λεκτικά**					
	Με πράξη					

Υπόμνημα	Σωστά	
	Σωστά, άλλη συνθήκη	Πρόβλημα που ταιριάζει στην πράξη, άλλη κατάσταση ή άλλα νούμερα
	Μερικώς σωστά	Λείπουν στοιχεία (π.χ. από την εικόνα ή τον πίνακα), ή κάποια στοιχεία είναι λανθασμένα
	Λανθασμένα	Πρόβλημα που δεν ταιριάζει στην πράξη
		Καμία Απάντηση

Πίνακας 8: Αξιολόγηση του 4ου Φύλλου Εργασίας, ανά πράξη και ανά ομάδα

Στο 4ο φύλλο εργασίας, τα παιδιά της ***1ης ομάδας εργασίας*** διάλεξαν το πρόβλημα: «*Η γιαγιά μοίρασε 24 ευρώ δίκαια στα 3 εγγόνια της. Πόσα ευρώ πήρε το κάθε παιδί;»,* έδωσαν σωστή απάντηση, η αναπαράστασή τους με ζωγραφιά σωστή, η αριθμητική πράξη λανθασμένη, (**3:24=8**). Δεν κατασκεύασαν ορθά τα άλλα προβλήματα. Το 2ο πρόβλημα ήταν το εξής: **«Έχω 24€ και θέλω να τα μοιράσω σε 3 φίλους μου. Πόσα θα μοιράσω;»**, η αριθμητική πράξη εδώ ήταν σωστή, η απάντηση σωστή και δεν υπήρχε ζωγραφιά. Το 3ο πρόβλημα που διατύπωσαν: **«Η γιαγιά έχει 24€ και έδωσε 3€ σε κάθε παιδί. Πόσα ήταν τα παιδιά;»**, έλυσαν το πρόβλημα με την ίδια πράξη (**24:3=8**) που είχαν στο 2ο πρόβλημα και η απάντηση τους: **«Τα παιδιά ήταν 8»**.

Η 2η ομάδα εργασίας διάλεξε το εξής πρόβλημα: *«Η κυρία Ευδοκία μάζεψε 20 αυγά από τις κότες της και τα συσκεύασε σε αυγοθήκες των 4 θέσεων. Πόσες αυγοθήκες χρειάστηκε;»,* το έλυσε σωστά. Στη συνέχεια κατασκεύασε και διατύπωσε και έλυσε σωστά και τα άλλα δύο προβλήματα που προκύπτουν από το αρχικό. Στο τέλος του φύλλου εργασίας δημιούργησαν έναν πίνακα που εξηγεί τις τρεις καταστάσεις των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων.

Η 3η ομάδα εργασίας διάλεξε προς επίλυση το εξής πρόβλημα: *«Ο Πέτρος έχει μια βιβλιοθήκη με 6 ράφια. Σε κάθε ράφι έχει 5 βιβλία. Πόσα βιβλία έχει ο Πέτρος στη βιβλιοθήκη;»* και το έλυσαν σωστά. Από αυτό δημιούργησαν τις άλλες δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, τις διατύπωσαν σε προβλήματα, τα οποία έλυσαν σωστά. Επιχείρησαν να φτιάξουν τον πίνακα και να βάλουν τις ποσότητες, αλλά στο τέλος τον έσβησαν.

Η 4η ομάδα εργασίας διάλεξε το ίδιο πρόβλημα με την 1η ομάδα εργασίας. Το έλυσαν σωστά με διαίρεση μερισμού και στη συνέχεια διατύπωσαν το 2ο πρόβλημα ίδιας κατάστασης αλλά με διαφορετικά αντικείμενα. Το πρόβλημα ήταν το εξής: **«Ο Πέτρος έχει 24 αυτοκινητάκια και τα μοίρασε σε 3 ομάδες. Πόσα αυτοκινητάκια έδωσε σε κάθε ομάδα;»**, το έλυσαν με την ίδια μαθηματική πράξη. Το επόμενο πρόβλημα που διατύπωσαν είχε την ίδια ακριβώς μαθηματική πράξη μα δεν εξηγούσε καμιά πολλαπλασιαστική κατάσταση. Η διατύπωσή του ήταν η εξής: **«Η Μαρίνα έχει 24 φορέματα και 3 φούστες και θέλει να δώσει τα μισά φορέματα στην φίλη της. Πόσα φορέματα θα της δώσει;»**

Η 5η ομάδα εργασίας διάλεξε να επιλύσει το πρόβλημα που λύνεται με πολλαπλασιασμό, και ήταν το ίδιο με την 3η ομάδα εργασίας. Το έλυσαν και το ζωγράφισαν σωστά. Δημιούργησαν και διατύπωσαν σωστά και τις άλλες δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, με ημιτελείς ζωγραφιές. Έφτιαξαν κι αυτοί στο τέλος του φύλλου εργασίας, πίνακα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα που δείχνει τις τρεις καταστάσεις των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων.

Γενικές παρατηρήσεις

Ο τύπος προβλήματος που προβλημάτισε και δυσκόλεψε τα παιδιά περισσότερο στη διατύπωση αφορούσε τη διαίρεση μέτρησης. Ενώ μπορούσαν να πουν και να δείξουν με ευκολία πώς μπορούν να ισομερίσουν τα αντικείμενα που είχαν μπροστά τους, διατυπώνοντας με σωστούς όρους το πρόβλημα της διαίρεσης μερισμού, όπως επίσης και να διατυπώσουν με ευκολία το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού, στο πρόβλημα της διαίρεσης μέτρησης είχαν μια σχετική δυσκολία. Προσπαθήσαμε να συζητήσουμε την δυσκολία αυτήν στην ολομέλεια της τάξης για να βοηθηθούν όλοι οι μαθητές και να προσπαθήσουν να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που δημιουργήθηκαν και τις απορίες που προέκυπταν. Εξάλλου αυτός ήταν και ο στόχος που επιδιώχθηκε κάνοντας αυτή την διαφορετική διδακτική προσέγγιση, να μπορούν οι μαθητές να εξοικειωθούν με την διατύπωση, την κατανόηση και την επίλυση τέτοιων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων.

Σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης οι ομάδες εργασίας είχαν διάθεση, όρεξη και οργάνωση για να μπορέσουν να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις που είχαν μπροστά τους. Η σύνθεση των ομάδων έγινε κατά βάση με πρωτοβουλία των παιδιών άλλα και με κλήρωση για αυτούς που ήταν αναποφάσιστοι. Τα περισσότερα παιδιά έκαναν την σύνθεση των ομάδων με χαρακτηριστικό την κοινή τους παρέα και τα ενδιαφέροντά τους. Έδειξαν ενδιαφέρον για την διαδικασία και για την έκβασή της. Δεν υπήρξε κανένας μαθητής ή μαθήτρια που να μην ήθελε να συμμετέχει στις ομαδικές εργασίες. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, δεδομένου του τρόπου σύνθεσής τους, οι ομάδες δεν ήταν ισοδύναμες ως προς τη μαθηματική επίδοση των μελών τους. Για παράδειγμα, οι μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας ήταν μαθητές υψηλότερης επίδοσης στα μαθηματικά, σε σχέση με τις άλλες ομάδες και ήταν περισσότερο ομοιογενείς ως προς την ικανότητά τους στα μαθηματικά. Αυτό φαίνεται και από τις καλύτερες επιδόσεις τους στα ατομικά τεστ. Η προσπάθεια πάντως έγινε από όλες τις ομάδες και η ανταπόκρισή τους στο εγχείρημα αυτό ήταν πολύ θετική.

9. Αποτελέσματα Προελέγχου και Μεταελέγχου

Τα προβλήματα που διατυπώθηκαν από τα παιδιά (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης), εξετάστηκαν αρχικά ως προς την πράξη στην οποία υποτίθεται ότι αναφέρονταν. Στη συνέχεια, για κάθε τύπο πράξης, τα παραπάνω προβλήματα χωρίστηκαν σε τρεις επιπλέον βασικές κατηγορίες: *ορθά προβλήματα*, *προβλήματα εκτός πλαισίου* και *άλλα προβλήματα*. Τα ορθά προβλήματα (εντός πλαισίου) αποτελούσαν κατασκευασμένα ερωτήματα που πληρούσαν τις προϋποθέσεις των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, μπορούσαν δηλαδή να οδηγήσουν στην λύση του προβλήματος με τη χρήση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, χρησιμοποιώντας πλήρως και επακριβώς τα δοσμένα στοιχεία των εικόνων. Τα προβλήματα εκτός πλαισίου πληρούσαν εξίσου τις προϋποθέσεις των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, αλλά δεν ανταποκρίνονταν στα στοιχεία των εικόνων. Η τρίτη κατηγορία αφορούσε προβλήματα άλλων πράξεων, μη επαρκή προβλήματα τα οποία είχαν ελλιπή στοιχεία, δεν πληρούσαν τις προϋποθέσεις και τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που ορίζουν ένα ερώτημα ως μαθηματικό πρόβλημα (δεδομένα και ζητούμενα) και συνεπώς δεν μπορούσαν να λυθούν ή να οδηγήσουν σε ένα ζητούμενο αποτέλεσμα. Τα τεστ του προέλεγχου και του μεταέλεγχου περιείχαν πανομοιότυπες εικόνες και μοιράζονταν κοινές οδηγίες, γεγονός το οποίο οδήγησε σε κοινή γραμμή κατηγοριοποίησης των προβλημάτων.

Επομένως, κατηγοριοποιώντας τα προβλήματα του προέλεγχου αλλά και του μεταέλεγχου δημιουργήθηκαν εννιά κατηγορίες προβλημάτων, τρεις για κάθε πράξη. Διατυπώθηκαν: α) *ορθά προβλήματα πολλαπλασιασμού εντός πλαισίου*, β) *προβλήματα πολλαπλασιασμού εκτός πλαισίου* και γ) *άλλα προβλήματα που δεν μπορούσαν να λυθούν*.

Για τα προβλήματα που αφορούν την πράξη της διαίρεσης διατυπώθηκαν *δ) ορθά προβλήματα διαίρεσης μερισμού εντός πλαισίου, ε) προβλήματα διαίρεσης* *μερισμού εκτός πλαισίου και στ) άλλα προβλήματα.* Ο παρακάτω πίνακας περιέχει κάποια αντιπροσωπευτικά προβλήματα που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές/τριες κι έχουν ως λύση τους την διαίρεση μερισμού.

Παρόμοια καταγράφηκαν και *ζ) ορθά προβλήματα διαίρεσης μέτρησης εντός πλαισίου, η) προβλήματα διαίρεσης μέτρησης εκτός πλαισίου και θ) άλλα προβλήματα.*

Ο *Πίνακας* 9 περιέχει κάποια αντιπροσωπευτικά προβλήματα για κάθε κατηγορία ανά πράξη.

Πράξη	Κατηγορία	Παραδείγματα
Πολλαπλασιασμός	Α	«Ένας ζαχαροπλάστης έφτιαξε 4 τούρτες και σε κάθε τούρτα έβαλε 5 κερασάκια. Πόσα είναι όλα τα κερασάκια και στις 4 τούρτες συνολικά;» «Έχουμε 4 αυγοθήκες και η καθεμιά έχει από 6 αυγά. Πόσα αυγά είναι συνολικά;»
	Β	«Σε ένα ζαχαροπλαστείο ο ζαχαροπλάστης έκανε 4 τούρτες. Μετά από λίγο ήρθαν 4 παιδιά και πήραν τις τούρτες για το πάρτι γενεθλίων τους. Την κάθε μια τούρτα την χώρισαν εξίσου σε 12 κομμάτια. Πόσα κομμάτια κόπηκαν συνολικά;» «Ήταν μια τερηδόνα που ζούσε σε ένα σπίτι από τα 32. Έπινε από κάθε δόντι 102 λίτρα σοκολάτα. Πόσα

		λίτρα σοκολάτα έπινε για 10 μέρες;»
	Γ	«Ένας ζωγράφος ζωγράφισε 5 πίνακες ζωγραφικής και άλλους 5 φορές. Πόσους πίνακες ζωγράφισε ο ζωγράφος;» «Ένα ζαχαροπλαστείο έχει παραγγείλει 10 κουτιά με τούρτες και 10 κουτιά με κεράσια. Το 1 κουτί με τούρτες έχει μέσα από 5 τούρτες και το κάθε κουτί με κεράσια έχει από 6 κεράσια. Πόσα…..»
Διαίρεση μερισμού	Α	«Ο ζαχαροπλάστης μιας διπλανής οδού είχε 4 τούρτες και 20 κερασάκια. Όμως σε κάθε τούρτα ήθελε να βάλει ίσα κερασάκια. Πόσα κεράσια θα βάλει σε κάθε τούρτα;» «Η κυρία Λυδία έχει 4 κότες όλα τα αυγά που γέννησαν ήταν 24 αυγά. Πόσα αυγά γέννησε η κάθε μία;»
	Β	«Στα γενέθλιά μου κάλεσα 8 παιδιά. Η τούρτα μου επάνω της είχε 32 κεράσια. Πόσα κεράσια πήρε το κάθε παιδί;» «Η κυρία Ελένη θέλει να μοιράσει 24 αυγά στις τρεις γειτόνισσες αλλά να κρατήσει και για τον εαυτό της. Πόσα θα δώσει στις γειτόνισσες; Πόσα θα κρατήσει για τον εαυτό

		της;»
	Γ	«Η μαμά της Μάγδας έπρεπε από 20 κεράσια να πάρει μισό κιλό. Πόσα κεράσια πρέπει να πάρει;»
Διαίρεση μέτρησης	Α	«Στην εικόνα έχουμε 24 αυγά και είναι συσκευασμένα 6 θέσεις ανά αυγοθήκη αλλά δεν ξέρουμε πόσες είναι οι αυγοθήκες. Πόσες αυγοθήκες είναι συνολικά;» «Έχω 24 αυγά και μερικές αυγοθήκες. Σε κάθε αυγοθήκη χωράνε 6 αυγά. Πόσες αυγοθήκες θα χρειαστεί;»
	Β	«Ο ζαχαροπλάστης έφτιαξε 4 τούρτες από 5 κεράσια. Η κάθε τούρτα κοστίζει 6€. Με 24€ πόσες τούρτες μπορεί να πάρει ο κυρ Αντώνης;»
	Γ	«Αν τρώγαμε το ένα κερασάκι της κάθε τούρτας, πόσα κερασάκια θα είχαν τώρα όλες οι τούρτες;» «Αν τα αυγά είναι 60: α)Πόσες κότες θα υπήρχαν; Β)Πόσες αυγοθήκες θα χρειαστούν;»
Υπόμνημα **Α:** Ορθό πρόβλημα, εντός πλαισίου Β: Ορθό πρόβλημα, εκτός πλαισίου Γ: Άλλο		

<u>Πίνακας 9:</u> Κατηγορίες προβλημάτων που διατύπωσαν οι μαθητές ανά πράξη και παραδείγματα

Στη συνέχεια εξετάστηκε εξετάστηκε το πλήθος των ορθών και εντός πλαισίου προβλημάτων που διατυπώθηκαν από τον κάθε ένα μαθητή ατομικά, κατά τον προέλεγχο και κατά το μεταέλεγχο. Το ελάχιστο δυνατό πλήθος είναι 0 και το μέγιστο είναι 3. Στον Πίνακα 10 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης του κάθε πλήθους, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο. Ο παρακάτω πίνακας αφορά το πλήθος των μαθητών που δημιούργησαν ορθά/εντός πλαισίου προβλήματα στα τεστ (προέλεγχος και μεταέλεγχος): Σημειώνουμε ότι το σύνολο των μαθητών είναι 21, καθώς ένας μαθητής με ελλιπή φοίτηση δεν ήταν παρών στις δοκιμασίες ελέγχου (βλ. και τμήμα «Συμμετέχοντες»).

Μεταέλεγχος	***Προέλεγχος***				**Σύνολο**
	0	**1**	**2**	**3**	
0	5	1	0	0	6
1	0	2	0	0	2
2	3	3	1	0	7
3	3	1	2	0	6
Σύνολο	11	7	3	0	21

Πίνακας 10: Συχνότητα εμφάνισης 0, 1, 2 ή 3 ορθών προβλημάτων, εντός πλαισίου από τον κάθε μαθητή στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο

Από τα στοιχεία του Πίνακα 10 διακρίνουμε καταρχήν ότι στον προέλεγχο η πλειοψηφία των παιδιών της τάξης (11) δεν διατύπωσε κανένα κατάλληλο πρόβλημα, ενώ η επόμενη συχνότερη περίπτωση (7) ήταν το ένα κατάλληλο πρόβλημα, το οποίο σημειώνουμε ότι ήταν πρόβλημα πολλαπλασιασμού. Τρία παιδιά διατύπωσαν δύο προβλήματα (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μερισμού). Στο μεταέλεγχο, η εικόνα αυτή έχει βελτιωθεί: Η πλειοψηφία των παιδιών της τάξης (13) διατύπωσαν τουλάχιστον δύο κατάλληλα προβλήματα, με 6 από αυτά να διατυπώνουν τρία. Τρία από αυτά 6 παιδιά δεν είχαν διατυπώσει κανένα πρόβλημα στον προέλεγχο και είναι τα παιδιά που παρουσίασαν τη μεγαλύτερη βελτίωση μετά την παρέμβαση.

Ωστόσο, ένα σημαντικό μέρος των παιδιών (8) στο μεταέλεγχο διατυπώνει το πολύ 1 πρόβλημα, με 6 από αυτά να μη διατυπώνουν κανένα. Αξίζει να σημειωθεί ότι από αυτά τα παιδιά, πέντε (5) παιδιά δεν είχαν διατυπώσει κανένα ορθό πρόβλημα στο τεστ του προέλεγχου.

Επίσης υπήρξαν τρία (3) παιδιά που κατασκεύασαν τον ίδιο αριθμό ορθών προβλημάτων (πάνω από 1) τόσο στον προέλεγχο όσο και στον μεταέλεγχο. Τα παιδιά αυτά που είχαν σταθερή εικόνα και στα δύο τεστ διατύπωσαν και ίδιο είδος προβλημάτων. Όλα διατύπωσαν πρόβλημα πολλαπλασιασμού στα τεστ, αλλά ο ένας από αυτούς διατύπωσε και πρόβλημα διαίρεσης (μερισμού στον προέλεγχο και μέτρησης στον μεταέλεγχο).

Στη συνέχεια εξετάστηκαν οι κατηγορίες προβλημάτων που διατυπώθηκαν από τα παιδιά ανά πράξη, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο (Πίνακας 11).

	Ορθά/Εντός πλαισίου		**Εκτός πλαισίου**		**Άλλα**	
	Πριν	*Μετά*	*Πριν*	*Μετά*	*Πριν*	*Μετά*
Πολλαπλασιασμού	10	13	6	2	8	4
Διαίρεσης Μερισμού	3	12	3	1	2	3
Διαίρεσης Μέτρησης	0	8	1	2	0	2
Σύνολο Απαντήσεων	**13**	**33**	**10**	**5**	**10**	**9**

Πίνακας 11: Συγκεντρωτικός/ πίνακας του τύπου των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων που διατυπώθηκαν στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο

Όπως φαίνεται Πίνακα 11, στον προέλεγχο κατασκευάστηκαν ***16 προβλήματα πολλαπλασιασμού*** *(10 ορθά/εντός πλαισίου προβλήματα και 6 προβλήματα πολλαπλασιασμού εκτός πλαισίου).* Επιπλέον, καταμετρήθηκαν 8 προβλήματα πολλαπλασιασμού που δεν μπορούσαν να λυθούν καθώς δεν είχαν σωστή δομή. Στον μεταέλεγχο κατασκευάστηκαν ***15 προβλήματα πολλαπλασιασμού*** *(13 προβλήματα ορθά/εντός πλαισίου και 2 προβλήματα πολλαπλασιασμού εκτός πλαισίου).* Εδώ παρατηρούμε ότι ενώ αυξήθηκαν τα ορθά προβλήματα πολλαπλασιασμού μειώθηκαν σχεδόν κατά το ήμισυ τα προβλήματα πολλαπλασιασμού εκτός πλαισίου, ενώ παρόμοια μείωση εντοπίστηκε και στα άλλα προβλήματα (από 8 σε 4).

Για τα προβλήματα ***διαίρεσης μερισμού*** κατασκευάστηκαν ***6 προβλήματα διαίρεσης μερισμού*** στον προέλεγχο *(3 προβλήματα διαίρεσης μερισμού ορθά/εντός πλαισίου και 3 προβλήματα διαίρεσης μερισμού εκτός πλαισίου).* Στο τεστ του μεταέλεγχου κατασκευάστηκαν ***13 προβλήματα διαίρεσης μερισμού*** (*12 προβλήματα διαίρεσης μερισμού ορθά/εντός πλαισίου και 1 πρόβλημα εκτός πλαισίου).* Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού, που αφορούν τα δύο τεστ και δημιουργήθηκαν από τους μαθητές και τις μαθήτριες, καταρχήν διπλασιάστηκαν και τα ορθά προβλήματα ήταν 4 φορές περισσότερα στον μεταέλεγχο συγκριτικά με τα προβλήματα του προέλεγχου.

Όσον αφορά την ***διαίρεση μέτρησης*** για τον προέλεγχο ***κανένα (0) ορθό πρόβλημα*** δεν δημιουργήθηκε από τους μαθητές/τριες ***εκτός από*** μια μαθήτρια που δημιούργησε ***ένα πρόβλημ**α **διαίρεσης μέτρησης*** αλλά ***εκτός πλαισίου***. Στον μεταέλεγχο δημιουργήθηκαν ***10 προβλήματα διαίρεσης μέτρησης*** *(8 προβλήματα ορθά/εντός πλαισίου και 2 προβλήματα εκτός πλαισίου).* Η διαφορά των αποτελεσμάτων είναι σημαντική αφού για τον προέλεγχο δεν είχαμε καμία ορθή απάντηση από το σύνολο των μαθητών/τριών της τάξης ενώ στον μεταέλεγχο σχεδόν οι μισοί μαθητές/τριες διατύπωσαν ορθό πρόβλημα διαίρεσης μερισμού.

Επιπλέον, στα προβλήματα διαίρεσης παρατηρήθηκε σχετική αύξηση στη δημιουργία άλλων προβλημάτων από τον προέλεγχο (*2 άλλα προβλήματα)* στον μεταέλεγχο (*5 άλλα προβλήματα*)**,** ενώ η πλειοψηφία τους προέρχονταν από τους ίδιους μαθητές/τριες που τα δημιούργησαν και στον προέλεγχο.

Τέλος, δεν υπήρξαν διατυπωμένα ορθά προβλήματα διαίρεσης μέτρησης εντός πλαισίου στον προέλεγχο αλλά ούτε κατασκευάστηκαν άλλα προβλήματα. Αντίθετα, στον μεταέλεγχο, οι μαθητές/τριες διατύπωσαν ορθά προβλήματα που έχουν ως λύση τους την διαίρεση μέτρησης και τα οποία ήταν εντός πλαισίου. Επίσης κατασκεύασαν προβλήματα με διαίρεση μέτρησης εκτός πλαισίου, χρησιμοποιώντας ορισμένα στοιχεία από την εικόνα ή βάζοντας δικά τους στοιχεία. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση η διαίρεση μέτρησης συγκέντρωσε- τον μικρότερο αριθμό ορθών προβλημάτων στο σύνολο των μαθητών, αν και υπήρχε αύξησή τους στον μεταέλεγχο.

Τέλος, ενδιαφέρον έχει να σχολιαστεί η απόδοση της κάθε ομάδας στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο και να αντιπαρατεθεί με την ανταπόκρισή της κατά τη διάρκεια της παρέμβασης (βλ. Ενότητα 7). Για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκε ο *Πίνακας 12*, που παρουσιάζει το σύνολο των ορθών και μη προβλημάτων που δημιούργησαν συγκεντρωτικά οι μαθητές της κάθε ομάδας, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο. Ο ελάχιστος αριθμός προβλημάτων είναι 0 και ο μέγιστος είναι 12 (4 παιδιά x 3 προβλήματα), με την εξαίρεση της 5ης ομάδας που είχε 5 μέλη, συνεπώς ο μέγιστος αριθμός είναι 15.

	Ορθά/Εντός πλαισίου		**Εκτός πλαισίου**		**Άλλα**	
	Προ	*Μετά*	*Προ*	*Μετά*	*Προ*	*Μετά*
1η	1	3	3	0	3	5
2η	5	8	1	2	1	0
3η	4	11	2	0	1	0
4η	0	7	2	0	2	1
5η	3	4	2	3	3	3
Σύνολο	**13**	**33**	**10**	**5**	**10**	**9**

Πίνακας 12: Δημιουργία προβλημάτων ανά ομάδα

Από τον Πίνακα 12 φαίνεται ότι η $2^{η}$ και η $3^{η}$ ομάδα ήταν αυτές που ξεκίνησαν από ένα σχετικά υψηλότερο σημείο, σε σχέση με τις υπόλοιπες. Από τη $2^{η}$ ομάδα προέκυψε και πρόβλημα διαίρεσης κατά τον προέλεγχο. Ο δύο αυτές ομάδες αύξησαν το πλήθος των κατάλληλων προβλημάτων στο μεταέλεγχο, με την $3^{η}$ να πλησιάζει το μέγιστο πλήθος, Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο αυτές ομάδες είχαν καλή ανταπόκριση στις δραστηριότητες της παρέμβασης.

Η $1^{η}$ και η $5^{η}$ ομάδα ξεκίνησαν από χαμηλότερο σημείο, με την $1^{η}$ να έχει συγκεντρωτικά μόνο ένα κατάλληλο πρόβλημα (πολλαπλασιασμού) στον προέλεγχο. Και οι δύο αυτές ομάδες αύξησαν μόλις κατά ένα τα κατάλληλα προβλήματα που διατύπωσαν (η $1^{η}$ πρόβλημα πολλαπλασιασμού και η $5^{η}$ πρόβλημα διαίρεσης μερισμού), ενώ η πλειοψηφία των προβλημάτων που δημιούργησαν ήταν μη επαρκής, δεν πληρούσαν τις προϋποθέσεις και είχαν ελλιπή στοιχεία. Υπενθυμίζεται ότι οι δύο αυτές ομάδες είχαν χαμηλή ανταπόκριση κατά τη διάρκεια της παρέμβασης (βλ. Ενότητα 7).

Εντύπωση προκαλεί η πορεία της 4ης ομάδας, από την οποία δεν προήλθε κανένα κατάλληλο πρόβλημα στον προέλεγχο. Στον μεταέλεγχο, η ομάδα συγκεντρωτικά έδωσε 7 κατάλληλα προβλήματα, περισσότερα από τα μισά ζητούμενα. Η πορεία αυτής της ομάδας κατά την παρέμβαση ήταν κυμαινόμενη: Απέδωσαν πολύ καλά στη δεύτερη και την τρίτη φάση της παρέμβασης, ενώ δυσκολεύτηκαν στην πρώτη και την τέταρτη φάση της παρέμβασης.

Στον Πίνακα 13 παρουσιάζεται το πλήθος των σωστών προβλημάτων που διατυπώθηκαν στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο από κάθε παιδί, ανάλογα με την ομάδα στην οποία τοποθετήθηκε. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 αναφέρονται στην ομάδα, ενώ με μικρά γράμματα (α, β, γ, δ και ε, στην περίπτωση της $5^{ης}$ ομάδας) σημαίνονται τα μέλη της ομάδας, με τυχαία σειρά.

Μεταέλεγχος	Προέλεγχος		
	0	1	2
0	1α, 1β, 4α, 5α, 5β	2δ	
1	1δ	5γ, 5δ	2γ
2	4β 4γ	1γ, 5ε	
3	2α, 3α, 4δ	3γ, 3δ	2β, 3β

Πίνακας 13: Κατανομή των μελών κάθε ομάδας, ανάλογα με το πλήθος των προβλημάτων που διατύπωσαν ορθά, πριν και μετά την παρέμβαση

Από τον Πίνακα 13 φαίνεται ότι κατά το μεταέλεγχο, 3 σωστά προβλήματα διατυπώθηκαν από μέλη των ομάδων 2, 3 και 4, ενώ κανένα πρόβλημα δε διατυπώθηκε σωστά από μέλη των ομάδων 1, 4 και 5. Το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι η συμμετοχή σε μια «δυνατή» ομάδα δεν εξασφαλίζει απαραίτητα τη βελτίωση μετά την παρέμβαση. Για παράδειγμα, το παιδί 2β, ενώ είναι μέλος της 2ης ομάδας, δε διατύπωσε κανένα πρόβλημα στο μεταέλεγχο, ενώ είχε διατυπώσει ένα στον προέλεγχο.

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στην εργασία αυτή σχεδιάστηκε μια παρέμβαση με κεντρικό στόχο την υποστήριξη των παιδιών της Γ΄ Δημοτικού να αναγνωρίζουν τις ποσότητες που εμπλέκονται σε καταστάσεις του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» (Greer, 1994) και την μεταξύ τους σχέση και να διατυπώνουν τα τρία διαφορετικά προβλήματα (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης) που προκύπτουν από την ίδια τέτοιου τύπου κατάσταση. Το σκεπτικό της παρέμβασης ήταν συμβατό με την άποψη ότι πρέπει να αποδοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα, απ' όσο αποδίδεται τυπικά στην εκπαίδευση, στο συλλογισμό στο επίπεδο των ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων, σε αντιδιαστολή με την (υπερβολική) έμφαση στα αριθμητικά δεδομένα και τις αριθμητικές πράξεις (Corley et al., 2012; Nunes et al., 2012; Thompson, 1993). Στη διάρκεια της παρέμβασης, τα παιδιά κλήθηκαν να διατυπώσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αξιοποιώντας πληροφορίες από εικονικό ή εμπράγματο υλικό. Το ζητούμενο αυτό βρίσκεται στην τομή της κατασκευής προβλήματος σε ημι-δομημένο και δομημένο πλαίσιο (Stoyanova, 1997). Πέρα από τα γενικότερα οφέλη της κατασκευής προβλήματος για τα παιδιά, το ζητούμενο αυτό απαιτεί να αναγνωριστούν οι ποσότητες και η μεταξύ τους σχέση. Τα παιδιά υποστηρίχθηκαν προς αυτή την κατεύθυνση λεκτικά (από την ερευνήτρια), αλλά και κυρίως μέσω του αιτήματος για αναπαράσταση των προβλημάτων μέσω πινάκων, με ρητή αναγραφή των ποσοτήτων. Οι πίνακες αυτοί, που συμπληρώνονταν σταδιακά, παρουσίαζαν τελικά μια συνολική εικόνα και των τριών προβλημάτων, με ορατή τη σημασία της ζητούμενης ποσότητας για κάθε πρόβλημα, καθώς και σύνδεση με την αντίστοιχη πράξη.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα, πριν την παρέμβαση η ικανότητα διατύπωσης προβλημάτων με τους δεδομένους περιορισμούς ήταν πολύ περιορισμένη. Πάνω από τα μισά παιδιά της τάξης δεν διατύπωσαν ορθά κανένα πρόβλημα, και η διατύπωση προβλημάτων διαίρεσης από τα υπόλοιπα παιδιά ήταν σπάνια.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα, μετά την παρέμβαση η ικανότητα διατύπωσης προβλημάτων με τους δεδομένους περιορισμούς βελτιώθηκε: Η πλειοψηφία των παιδιών της τάξης κατάφερε να διατυπώσει τουλάχιστον δύο από τα ζητούμενα προβλήματα, με το ένα τρίτο περίπου των παιδιών να διατυπώνουν και τα τρία προβλήματα σωστά. Ωστόσο, η βελτίωση αυτή δεν ήταν γενική. Περίπου το ένα τρίτο των παιδιών που συμμετείχαν στον μεταέλεγχο δεν διατύπωσε κανένα από τα τρία προβλήματα. Η βελτίωση προήλθε από μια σχετικά μικρή αύξηση στην ορθή διατύπωση των προβλημάτων πολλαπλασιασμού (που ήταν συχνότερη και πριν την παρέμβαση) και από μια σχετικά μεγάλη αύξηση προβλημάτων διαίρεσης μερισμού. Η συχνότητα της ορθής διατύπωσης των προβλημάτων διαίρεσης μέτρησης, που ήταν μηδενική κατά τον προέλεγχο, αυξήθηκε στον μεταέλεγχο (διατυπώθηκαν 8 συνολικά προβλήματα διαίρεσης μέτρησης από ισάριθμα παιδιά), αλλά παρέμεινε πιο χαμηλή σε σχέση με την αντίστοιχη συχνότητα των άλλων δύο προβλημάτων. Τα προβλήματα της διαίρεσης μέτρησης ήταν αυτά που δυσκόλεψαν περισσότερο τα παιδιά και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Πρόκειται για μια ισχυρή ένδειξη ότι το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση είναι πιο απαιτητικό για τα παιδιά, όπως προβλέπεται από τη θεωρητική προσέγγιση των Fischbein et al. (1985), σύμφωνα με την οποία το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης είναι μεν ένα από τα δύο πρωταρχικά διαισθητικά μοντέλα για τη διαίρεση, είναι όμως αυτό που αναπτύσσεται αργότερα και απαιτεί συστηματική διδασκαλία.

Εξετάζοντας ορισμένα χαρακτηριστικά των παιδιών που βελτίωσαν την επίδοσή τους μετά την παρέμβαση, φαίνεται ότι η χαμηλή επίδοση στον προέλεγχο δεν είναι καθοριστική για την επίδοση στον μεταέλεγχο. Πράγματι, τα μισά από τα παιδιά που διατύπωσαν και τα τρία ζητούμενα προβλήματα στον μεταέλεγχο, δεν είχαν διατυπώσει κανένα πρόβλημα στον προέλεγχο. Από την άλλη μεριά, ούτε η ένταξη σε μια ομάδα με σχετικά υψηλή συνολική επίδοση στον προέλεγχο που παρουσίασε, επιπλέον, βελτίωση στον μεταέλεγχο, δεν εξασφάλισε απαραίτητα τη βελτίωση σε ατομικό επίπεδο όλων των μελών της. Η πορεία του κάθε παιδιού στη διάρκεια της παρέμβασης, όπως και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας δε μελετήθηκαν στην εργασία αυτή. Η διερεύνηση αυτών των παραμέτρων θα ήταν χρήσιμη σε ενδεχόμενη μελλοντική εφαρμογή.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διάρκεια και η πυκνότητα της παρέμβασης ήταν μικρή, σε σχέση με την πρόκληση που αποτελεί η ανάπτυξη της ποσοτικής σκέψης, που απαιτεί μακροχρόνια και συστηματική προσέγγιση (Thompson, 1993). Υπό αυτήν την οπτική, τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά. Ασφαλώς δεν μπορούν να γενικευθούν, δεδομένου του μικρού δείγματος, αλλά και της έλλειψης ομάδας ελέγχου, κάτι που αποτελεί ένα σημαντικό μεθοδολογικό περιορισμό της έρευνας.

Σε μελλοντική διδακτική παρέμβαση με παρόμοιους στόχους, θα ήταν σκόπιμη η ενσωμάτωση της προσέγγισης αυτής στο «κανονικό» πρόγραμμα των Μαθηματικών της τάξης, τόσο από την άποψη των διδακτικών ωρών, όσο και από την άποψη της διδακτέας ύλης που αφορά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Με άλλα λόγια, να προσεγγιστούν οι αντίστοιχες ενότητες με βάση την οπτική αυτή.

Τέλος, μια παράμετρος που θα μπορούσε να βελτιωθεί είναι ο τρόπος σχηματισμού των ομάδων. Στην περίπτωση της έρευνας αυτής, οι ομάδες έγιναν με βάση τις προτιμήσεις των παιδιών και παρέμειναν σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης. Θα πρέπει επιπλέον να σημειωθεί ότι τα συγκεκριμένα παιδιά δεν είχαν εμπειρία από ομαδική εργασία στα Μαθηματικά. Για να μεγιστοποιηθούν τα οφέλη της συνεργασίας σε ομάδες, θα πρέπει τα παιδιά να είναι εξοικειωμένα με αυτόν τον τρόπο εργασίας και η σύνθεση των ομάδων να αξιολογείται και να τροποποιείται, αν είναι απαραίτητο. Και σε αυτή την περίπτωση, απαιτείται ένας πιο μακροπρόθεσμος σχεδιασμός.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Baird, L. (1983). *Review of Problem-Solving skills.* New Jersey: Educational Testing Service.

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Indentification of Multiplacative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal of Research in Mathematics Education, 1*(27), σσ. 41-51.

Corley, A., Confrey, J., & Nguyen, K. (2012). The co-Splitting Construct: Students Strategies and the relationship to equipartitioning and ratio. *Annual Meeting of the American Education Research Assotiation.* Vancouver : American Education Research Association.

Darosky, G., Wolska, M., & Meurers , W. (2015). Word Problems: A Review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*.

Deringol, Y. (2009). Misconceptions of primary school students about the subject of fractions. *International Journal of Evaluation and research in Education*(8), σσ. 29-38.

English, L., & Halford, G. (1995). Challenges and Opporunities in Mathematics Education and Cognitive Science : A Reply to Collis.

Fennema et al, E. (1996). A Longitudinal Study of Learning to Use Childrens's Thinking in Mathematic Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*(27), σσ. 403-434.

Fischbein et al. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*(16), σσ. 3-17.

Gilmore , C. (2006). Investigating children's understanding of inversion using the missing number paradigm. *Cognitive Development*(21), σσ. 301-316.

Gilmore, C., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of indidual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A Meta-analysis. *Special Issue of Mathematical Thinking and Learning*(11), σσ. 25-40.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276–295). Macmillan Publishing Co, Inc.

Greer, B. (1994) Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 61-83). New York: State University of New York Press

Greer, B. (1997). Modelling Reality in Mathematics Classrooms : The Case of Word Problems. *Learning and Instruction*(7), σσ. 293-307.

Greer , B. (2012). Inversion in Mathematical Thinking and Learning. *Educational Studies in Mathematics*(79), σσ. 429-438.

Hurst, C., & Hurell, D. (2014). Developing the big ideas of number. *Educational Studies in Mathematics*(1), σσ. 1-18.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the Problem : Where do good problems come from? *Cognitive Science and Mathematics Education*, σσ. 123-147.

Klerlein, J., & Hervey, S. (2019). Mathematics as a Complex Problem Solving Activity: Promoting Students' thinking through problems-solving. *Generation Ready*.

Kouba, V. L. (1989). Children’s Solution Strategies for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems. Journal for Research in Mathematics Education, 20(2), 147–158. https://doi.org/10.2307/749279

Lowrie, T. (1999). Free Problem Posing: Year 3/4 students constructing problems for friends to solve. *Making a difference (proceedings of the 22nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, σσ. 328-335.

Lowrie, T., & Whitland, J. (2000). Problem posing as a Tool for Learning, Planning and assesment in the primary school. *Proceedings of the 24th conference of the Psychology of Mathematics Education*, σσ. 247-254.

Mulligan , J., & Mitchelmore, M. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal foe Reaserch in Mathematics Education*(28), σσ. 309-331.

Nunes, T., Bryant, P., Evans , D., Bell, D., & Barros, R. (2012). Teaching Children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*.

Pallavi, S. (2021). Word Problems on Multiplication and Division: A literature Review. *Student's Journal of Education and Development*, σσ. 69-78.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2020). Some multiplicative structures in elementary education : a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, σσ. 1-23.

Powell, S. (2011). Solving Word Problems using schemas: A review of the literature. *Learning Dissabilities Research and Practice*, σσ. 94-108.

Ramful, A. (2012). A snapshot of Student's Number Sense at the Lower Secondary Level: How are Mauritian student's Faring? *Educational Research Conferance*, σσ. 92-107.

Robinson, K., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Sudies in Mathematics*, σσ. 409-428.

Schwartz, J.. (1996). *Semantic Aspects of Quantity*. Unfinished draft https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.7161&rep=rep1&type=pdf

Sherin , B., & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and Computational Recourses. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(36), σσ. 347-395.

Silver, E. (2013). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Looking Back, Looking Around and Looking Ahead. *Educational Studies in Mathematics*(83), σσ. 152-162.

Stainback, W., Stainback, S., & Stefanich, G. (1996). Learning Together in Inclusive Classrooms. *The Council for Exceptional Children*(28), σσ. 14-19.

Stoyanova, E. N. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing*. Thesis, Edith Cowan University. HYPERLINK "https://ro.ecu.edu.au/theses/885" https://ro.ecu.edu.au/theses/885

The Ontario Council. (2020). Mathematics The Ontario Curriculum. Ontario: Canada State.

Thompson, P.W. Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educ Stud Math* **25,** 165–208 (1993). https://doi.org/10.1007/BF01273861

Vergnaud, G. (1979). The aquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*(10), σσ. 263-274.

Vergnaud, G. (2013). Conceptual Development and Learning. *Revista Qurriculum*(26), σσ. 39-59.

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). The Inverse Pricipal : Psychologigal, Mathematical and Educational Considerations : Introduction. *Educational Studies in Mathematics*(79), σσ. 327-334.

Ελληνόγλωσση

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2008) *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα, Εκδόσεις Μεταίχμιο

Polya, G. (1998). Πως να το λύσω. Αθήνα: Καρδαμίτσα.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003). Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών και αναλυτικά προγράμματα σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Δεσλή , Δ., & Κορνηλάκη , Α. (2013). Η ανάδυση του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού σκέψη των μικρών παιδιών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Καλδρυμίδου, Μ., Καπέλου, Κ., & Τζεκάκη, Μ. (2005). Σχεδιασμός και ανάλυση διαδακτικών καταστάσεων πολλαπλασιαστικών δομών στο Νηπιαγωγείο. *1ο Συνέδριο ΕΝΕΔΙΜ* (σσ. 118-227). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κογκούλης, Ι. Β. (2004).*Η σχολική τάξη ως κοινωνική ομάδα και η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και μάθηση* (2η εκδ.). Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης.

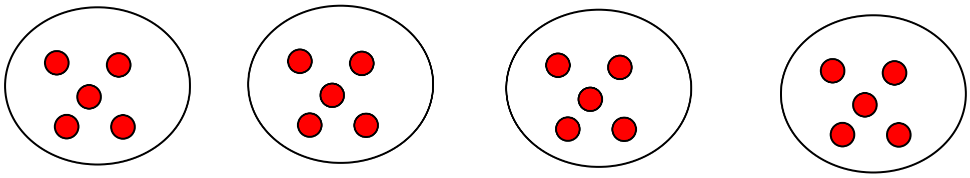
Παπαδοπούλου, Σ. (2018). *Επίλυση προβλήματος : Διδακτική Παρέμβαση.* Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Τζεκάκη Μ., (2011) *Επιμόρφωση Εκπαιδευτών Εκπαιδευτικών ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.* Αθήνα. https://docplayer.gr/4972996-Epimorfosi-ekpaideyton-ekpaideytikon-mathimatika-marianna-tzekaki-kathigitria-a-p-th.html

Παράρτημα 1

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ένας ζαχαροπλάστης έφτιαξε τούρτες και τις στόλισε με κεράσια.



Με τα στοιχεία που φαίνονται στην εικόνα μπορείτε να φτιάξετε 3 προβλήματα **που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση**; Έχετε στη διάθεσή σας υλικά από χαρτόνι και μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε αν θέλετε;

α)Ξεχωρίστε και γράψτε **τα στοιχεία** που υπάρχουν στην εικόνα στην κίτρινη γραμμή του πίνακα;

				Πράξη:
1ο Πρόβλημα				
2ο Πρόβλημα				
3ο Πρόβλημα				

β) Προσπαθήστε ομαδικά **να διατυπώσετε και να ζωγραφίσετε τα 3 προβλήματα** που σκεφτήκατε και **λύνονται με πολλαπλασιασμό και διαίρεση**.

<u>ΖΩΓΡΑΦΙΖΩ ΤΟ 1ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

<u>ΓΡΑΦΩ ΤΟ 1ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

ΖΩΓΡΑΦΙΖΩ ΤΟ 2ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΓΡΑΦΩ ΤΟ 2ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

ΖΩΓΡΑΦΙΖΩ ΤΟ 3ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΓΡΑΦΩ ΤΟ 3ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

γ)Αφού διατυπώσατε τα προβλήματα, γράψτε **τα στοιχεία** του κάθε προβλήματος στην κατάλληλη θέση στον πίνακα και λύστε τα **με πράξη**.

Παράρτημα 2

2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1) Ο Πέτρος αγόρασε από το βιβλιοπωλείο μαρκαδόρους για να εμπλουτίσει τα χρώματά του στην ζωγραφική. Μπορείς με τα στοιχεία που βλέπεις στον πίνακα να γράψεις ένα πρόβλημα που να απαντάει σε μια ερώτηση κάθε φορά;

Πόσα κουτιά	Πόσοι μαρκαδόροι σε κάθε κουτί	Πόσοι μαρκαδόροι συνολικά
3	**4**	**;**
3	**;**	**12**
;	**4**	**12**

Σκέφτηκες;

2) Γράψε τώρα στα χρωματιστά πλαίσια τα προβλήματα αυτά. Μόλις τα ολοκληρώσεις αντιστοίχισέ τα με τη ζωγραφιά και την πράξη που νομίζεις ότι ταιριάζει στο καθένα τους.

α) 

• 12:3=4

β) 

• 3x4=12

γ) 

• 12:4=3

Παράρτημα 3

3º ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Διαβάστε προσεκτικά τα προβλήματα που έχετε μπροστά σας και προσπαθήστε να καταλάβετε ***τι μας δίνουν και τι μας ζητάνε***. Στη συνέχεια προσπαθήστε να τα γράψετε και να τα τοποθετήσετε στις στήλες του πίνακα σύμφωνα με το ***τι ζητάνε***.

Πόσα… είναι συνολικά; (Το συνολικό πλήθος των διαφορετικών αντικειμένων που υπάρχουν)	***Πόσα… ανά…;*** (Το πλήθος των αντικειμένων ανά αντικείμενο)	***Πόσες ομάδες των…;*** (Το πλήθος των αντικειμένων που υπάρχουν)

Μπορείτε να τα ***λύσετε ή να τα ζωγραφίσετε*** πρώτα εδώ, αν αυτό σας βοηθάει να καταλάβετε καλύτερα.

Παράρτημα 4

4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

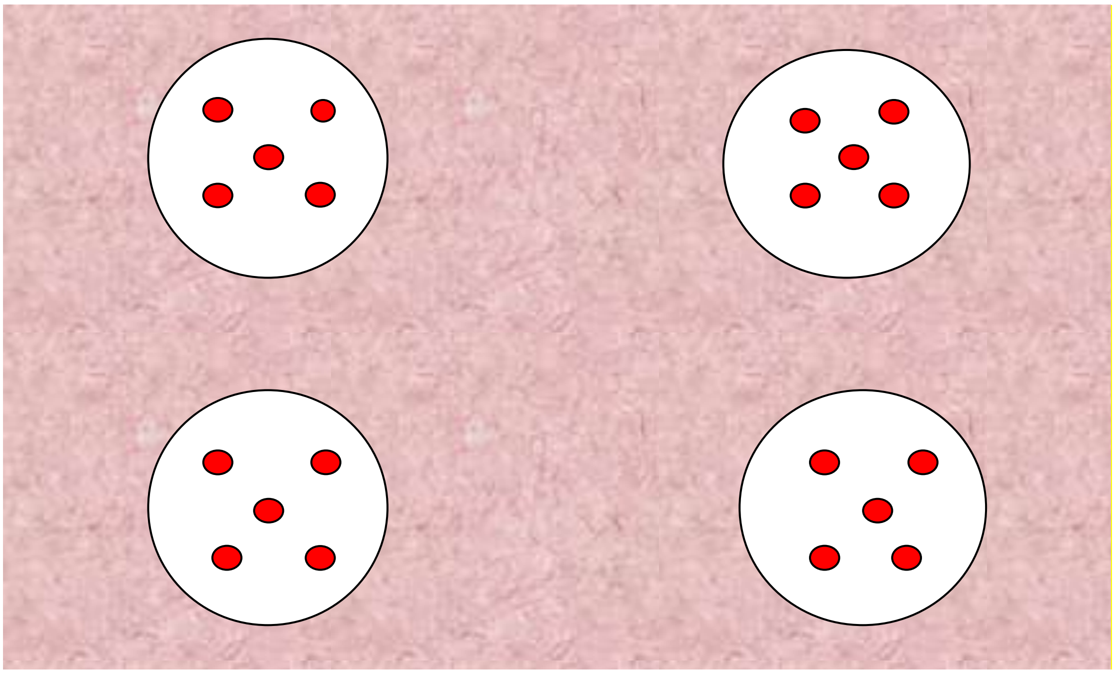
- Ο Πέτρος έχει μια βιβλιοθήκη με 6 ράφια. Σε κάθε ράφι έχει 5 βιβλία. Πόσα βιβλία έχει ο Πέτρος στη βιβλιοθήκη;
- Ένα κουτί με ξυλομπογιές κοστίζει 2 ευρώ. Η δασκάλα αγόρασε 6 κουτιά με ξυλομπογιές. Πόσα πλήρωσε;
- Η Μαρίνα είχε 16 χάντρες και έφτιαξε 4 ίδια βραχιόλια για να δώσει στις φίλες της. Πόσες χάντρες έβαλε στο κάθε βραχιόλι;
- Η γιαγιά μοίρασε 24 ευρώ δίκαια στα 3 εγγόνια της. Πόσα ευρώ πήρε το κάθε παιδί;
- Μια παρέα παιδιών μοιράστηκαν δίκαια ένα σακουλάκι με 15 καραμέλες και πήρε το καθένα από 3 καραμέλες. Πόσα παιδιά είναι στην παρέα;
- Η κυρία Ευδοκία μάζεψε 20 αυγά από τις κότες της και τα συσκεύασε σε αυγοθήκες των 4 θέσεων. Πόσες αυγοθήκες χρειάστηκε;

Διαλέξτε ένα πρόβλημα, με την ομάδα σας, και προσπαθήστε να το λύσετε. Έπειτα συζητώντας προσπαθήστε να κατασκευάσετε τα άλλα δυο προβλήματα που προκύπτουν από το αρχικό.

Παράρτημα 5

ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ (τεστ)

ΤΟΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΕΡΑΣΙΑ



ΟΔΗΓΙΕΣ :

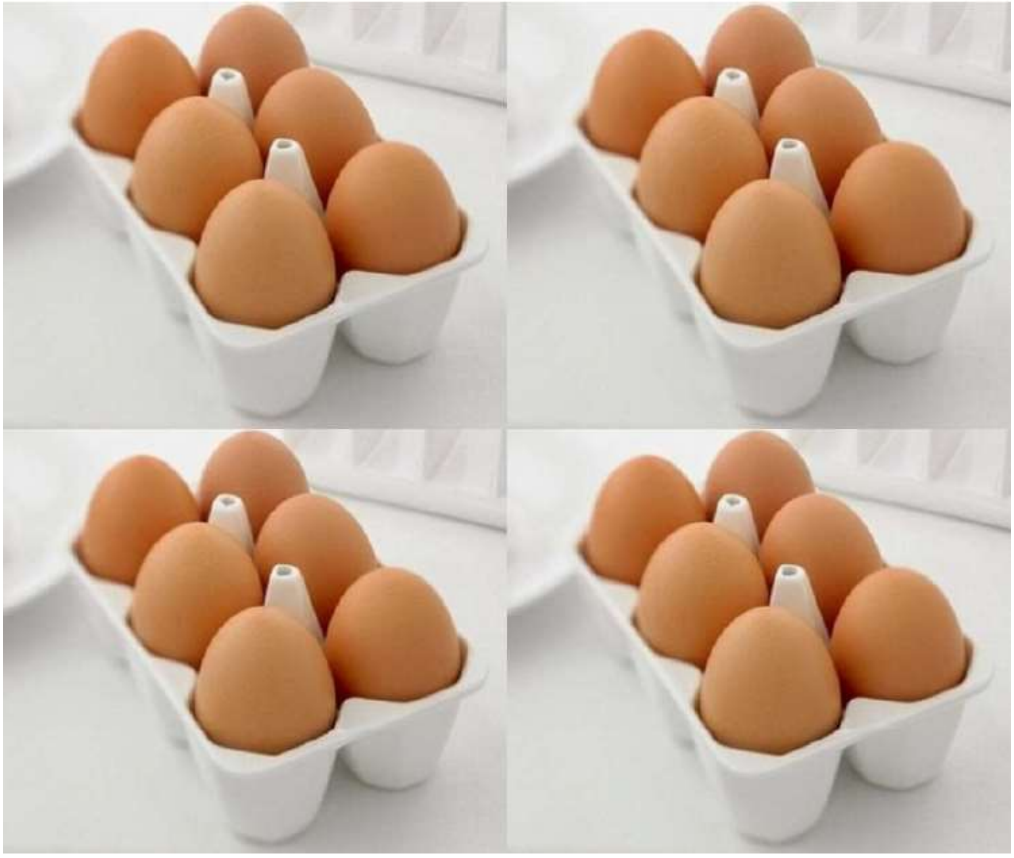
Με τα στοιχεία που βλέπεις στην παραπάνω εικόνα μπορείς να φτιάξεις ***προβλήματα που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση;***

Φτιάξε όσα περισσότερα μπορείς!

Παράρτημα 6

ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ (τεστ)

ΑΥΓΟΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΑΥΓΑ



ΟΔΗΓΙΕΣ :

Με τα στοιχεία που βλέπεις στην παραπάνω εικόνα μπορείς να φτιάξεις ***προβλήματα που να λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση;***

Φτιάξε όσα περισσότερα μπορείς!