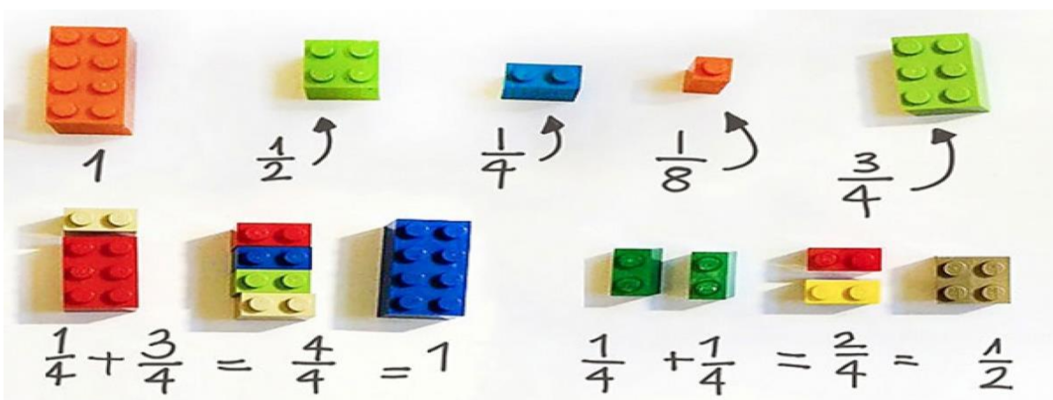
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Διπλωματική εργασία

«Δημιουργία λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων από υποψήφιους και απόφοιτους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης»



Αικατερίνη Λεβέντη (ΑΜ 974)

Επιβλέπουσα: Δέσποινα Δεσλή,

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΠΤΔΕ, ΑΠΘ

Φλώρινα, 2022

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει ποια είναι η ικανότητα των εκπαιδευτικών να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων. Στην έρευνα συμμετείχαν υποψήφιοι και απόφοιτοι εκπαιδευτικοί παιδαγωγικών τμημάτων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να δημιουργήσουν είτε ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων είτε ένα λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης κλασμάτων, όπως και να αναγνωρίσουν είτε την καταλληλότητα λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων είτε την καταλληλότητα λεκτικών προβλημάτων αφαίρεσης κλασμάτων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως περίπου οι μισοί συμμετέχοντες κατάφεραν να δημιουργήσουν κατάλληλα λεκτικά προβλήματα. Επίσης, όσοι συμμετέχοντες κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων εμφάνισαν μεγαλύτερη επιτυχία στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος σε σχέση με όσους συμμετέχοντες κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Επιπλέον, περίπου το ένα τρίτο των συμμετεχόντων κατάφερε να αναγνωρίσει σωστά την καταλληλότητα των λεκτικών προβλημάτων που τους παρουσιάστηκαν, με τους συμμετέχοντες να αναγνωρίζουν σωστά με μεγαλύτερη συχνότητα ένα κατάλληλο πρόβλημα από ένα ακατάλληλο πρόβλημα. Τέλος, οι περισσότεροι συμμετέχοντες αντιμετώπισαν τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς και όχι ως ποσότητες.

ABSTRACT

The purpose of this study is to examine the ability of teachers to pose addition word problems of fractions and subtraction word problems of fractions. In this study participated pre-service teachers of primary education departments and graduated teachers of primary education departments. Participants were asked to pose either an addition word problem of fractions or a subtraction word problem of fractions. Also, they were asked to recognize the appropriateness either of addition word problems of fractions or of subtraction word problems of fractions. The analysis of the results showed that only about half of them managed to pose appropriate word problems. Moreover, the participants posed more appropriate subtraction word problems than addition word problems. Furthermore, only about a third of them managed to properly recognize the word problems that were presented. Also, participants recognized more frequently an appropriate problem than an inappropriate problem. Finally, the majority of teachers treated fractions as whole numbers rather than as quantities.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σπουδαιότητα της επίλυσης προβλήματος, στη μαθηματική εκπαίδευση αντανακλάται στη θέση που κατέχει στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.). Είναι ευρέως γνωστό πως η επίλυση προβλήματος αποτελεί βασική ικανότητα του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά σε πολλές χώρες, όπως είναι η Σιγκαπούρη, οι Η.Π.Α., η Αγγλία, η Αυστραλία, η Φιλανδία, η Ινδονησία (Siswono, Kohar, Kurniasari, & Astuti, 2016) και η Ελλάδα (Υ.Π.Ε.Π.Θ., 2003). Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση προβλήματος διδάσκεται σε όλες τις τάξεις στο δημοτικό σχολείο και γυμνάσιο (year 1 - year 10) στο Αυστραλιανό Α.Π.Σ. και σε όλες τις τάξεις στο δημοτικό σχολείο (year 1 - year 6) στο Α.Π.Σ. της Αγγλίας, διατρέχοντας πολλές μαθηματικές περιοχές, όπως αριθμός και άλγεβρα, μέτρηση και γεωμετρία, στατιστική και πιθανότητες. Παρόμοια, η επίλυση προβλήματος κατέχει σημαντική θέση και στο Αμερικάνικο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, καθώς από το 1980, όταν το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (στο Schoenfeld, 2016) δήλωσε πως η επίλυση προβλήματος οφείλει να είναι το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών, αποτελεί μέρος του Α.Π.Σ. μέχρι και σήμερα (NCTM, 2000). Ακόμα, η αξία της επίλυσης προβλήματος διαπιστώνεται και μέσα από τις αναδιαμορφώσεις που πραγματοποιούνται στα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, στην τροποποίηση του Α.Π.Σ. της Σιγκαπούρης, αποφασίστηκε να μειωθεί η ύλη των μαθηματικών κατά 30%, για να έχουν οι μαθητές περισσότερο χρόνο να ασχολούνται με δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος. Επίσης, για το Α.Π.Σ. της Σιγκαπούρης, η επίλυση προβλήματος αποτελεί τον βασικό σκοπό του να μαθαίνει κανείς μαθηματικά (Kaur, 2001, στο Anderson, 2009).

Η επίλυση προβλήματος κατέχει σημαντική θέση και στα ελληνικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Εισάγεται πρώτη φορά στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. του νηπιαγωγείο με στόχο να αρχίσουν τα παιδιά να ενδιαφέρονται για δραστηριότητες επινόησης και επίλυσης προβλημάτων και συνεχίζει να αποτελεί ειδικό σκοπό και άξονα γνωστικού περιεχομένου για όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003). Μελετώντας, λοιπόν, το περιεχόμενο διαφόρων Α.Π.Σ., συμπεραίνεται πως η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Kılıç, 2013) και για αυτό εισάγεται στο Α.Π.Σ, πρώτη φορά, στο νηπιαγωγείο, όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, στην Ελλάδα (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003) και στις Η.Π.Α. και εξακολουθεί να αποτελεί στόχο μέχρι και το λύκειο (Common Core State Standards Initiative [CCSS], 2010, στο Kingsdorf & Krawec, 2014˙ ΦΕΚ 8622/Δ2/22/1/2015).

Για την έννοια του προβλήματος υπάρχει πληθώρα ορισμών. Για τους Blum και Niss (1991), όπως και για τον Schoenfeld (1992), το πρόβλημα αντιπροσωπεύει μία κατάσταση για την οποία το άτομο δεν γνωρίζει, εκ των προτέρων, ποιες μέθοδοι, διαδικασίες και αλγόριθμοι χρειάζονται για τη λύση του. Η προσέγγιση αυτή υπογραμμίζει μία άμεση σύνδεση μεταξύ προβλήματος και λύτη. Για τον λόγο αυτό, κάτι που μπορεί να θεωρείται πρόβλημα για ένα άτομο, ενδέχεται να αποτελεί άσκηση για κάποιο άλλο (Blum & Niss, 1991). Για τους Verschaffel, Greer και De Corte (2000, στο Palm, 2009), τα λεκτικά προβλήματα ορίζονται ως κείμενα, κατανοητά από τον αναγνώστη, τα οποία περιγράφουν καταστάσεις και εμπεριέχουν μαθηματικές ερωτήσεις εννοιολογικά πλαισιωμένες.

Όταν ένας άνθρωπος έρχεται αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα, ολόκληρη η διαδικασία που καταβάλλει για να το λύσει ονομάζεται επίλυση προβλήματος (Blum & Niss, 1991). Σύμφωνα με τον Polya (1981), η επίλυση ενός προβλήματος αποτελεί μία διαδικασία, κατά την οποία ο λύτης ψάχνει τα μέσα που θα τον οδηγήσουν στην επίτευξη ενός σαφώς σχεδιασμένου, αλλά όχι άμεσα εφικτού, τέλους. Παρόμοια, και το National Council of Teachers of Mathematics (2000, στο Foster, 2019) ορίζει την επίλυση προβλήματος ως μία δραστηριότητα, όπου η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος παραμένει σε πρώτη φάση άγνωστη.

Τα τελευταία χρόνια στο προσκήνιο της μαθηματικής εκπαίδευσης εμφανίστηκε η ενασχόληση με τη δημιουργία προβλήματος (problem posing[1])(Işık, Ocal, & Kar, 2013˙

[1] Ο αγγλικός όρος «problem posing» στα ελληνικά αποδίδεται με τους εξής όρους: δημιουργία προβλήματος, κατασκευή προβλήματος, διατύπωση προβλήματος.

Luo, 2009), βασικό συστατικό της επίλυσης προβλήματος (Kılıç, 2013). Αν και έχουν διατυπωθεί ποικίλοι ορισμοί, με τον όρο «δημιουργία προβλήματος», γενικότερα, εννοείται η δημιουργία καινούργιων προβλημάτων ή η επαναδιατύπωση των ήδη υπαρχόντων (Tichá & Hošpesová, 2010˙ Silver, 1994). Έρευνες έχουν αναδείξει πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί, εν ενεργεία και υποψήφιοι, όταν καλούνται να δημιουργήσουν προβλήματα. Για παράδειγμα, πολλοί εκπαιδευτικοί δημιουργούν προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να λυθούν (Kılıç, 2013). Οι έρευνες για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί, εν ενεργεία και υποψήφιοι, κατά τη δημιουργία προβλημάτων, επικεντρώνονται ως επί το πλείστον στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων (Rizvi, 2004˙ Luo, 2009˙ Kılıç, 2013˙ McAllister & Beaver, 2012˙ Kar & Işık, 2014˙ Iskenderoğlu, 2017). Πιο συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί συχνά δημιουργούν προβλήματα τα οποία θεωρούνται μη λογικά, δυσκολεύονται να δημιουργήσουν προβλήματα που παρουσιάζουν καταστάσεις της καθημερινής ζωής, αποδίδουν στα κλάσματα τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, δεν μπορούν να συμβολίσουν κλασματικούς αριθμούς (McAllister & Beaver, 2012) και εκδηλώνουν εννοιολογικές δυσκολίες, τόσο στα κλάσματα όσο και στις πράξεις με τα κλάσματα (Işık, 2011, στο Kar & Işık, 2014). Στους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς εντοπίζονται τρεις βασικές δυσκολίες. Αυτές είναι η έκφραση του κλάσματος του αφαιρετέου ως μία συγκεκριμένη μονάδα του κλάσματος του μειωτέου, η αποτυχία έκφρασης της πράξης στην ερώτηση του προβλήματος και η αδυναμία δημιουργίας σχέσης μέρους-όλου (Iskenderoğlu, 2017). Ακόμα, οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται περισσότερο να κατασκευάσουν προβλήματα με μεικτά κλάσματα, όπως και να κατανοήσουν τη μαθηματική έννοια της διαίρεσης κλασμάτων (Timmerman, 2011).

Με δεδομένο ότι αφενός η δημιουργία προβλήματος βρίσκεται, πλέον, στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης και αφετέρου οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες τόσο κατά τη δημιουργία προβλήματος όσο και κατά την ενασχόλησή τους με τα κλάσματα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα των εκπαιδευτικών να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με κλάσματα και, συγκεκριμένα, για τις αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για τον σκοπό αυτό, θα πραγματοποιηθεί έρευνα σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και απόφοιτους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να εξετάσει είναι:

1. Ποιες είναι οι ικανότητες των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων εκπαιδευτικών να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων;

Οι εκπαιδευτικοί, υποψήφιοι και εν ενεργεία, παρουσιάζουν γενικά δυσκολίες κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος είτε πρόκειται για εξισώσεις (Işık & Kar, 2012) είτε πρόκειται για κάποια αριθμητική πράξη (Kılıç, 2015) είτε πρόκειται για κλάσματα (Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014). Συνεπώς, αναμένεται και στην παρούσα έρευνα οι συμμετέχοντες να αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος με κλάσματα.

2. Επηρεάζεται η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από το είδος της αριθμητικής πράξης (πρόσθεση - αφαίρεση); Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί έχουν μεγαλύτερη επιτυχία στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης ή στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος αφαίρεσης;

Δεν υπάρχουν έρευνες που να αναφέρουν αν οι εκπαιδευτικοί έχουν μεγαλύτερη επιτυχία στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος σε μία από τις δύο αυτές αριθμητικές πράξεις. Φαίνεται, όμως, από την έρευνα του Kılıç (2013) πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί προτιμούν περισσότερο να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων παρά αφαίρεσης κλασμάτων. Ενδεχομένως, η προτίμησή τους αυτή σχετίζεται και με την ικανότητά τους να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων. Εάν η υπόθεση αυτή ισχύει, αναμένεται οι συμμετέχοντες, της παρούσας έρευνας, να έχουν καλύτερη επίδοση στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος με πρόσθεση κλασμάτων, παρά στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος με αφαίρεση κλασμάτων.

3. Επηρεάζεται η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από το αν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ή αν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα ελεύθερα, χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση;

Πρόκειται για ένα διερευνητικό ερώτημα, καθώς δεν υπάρχουν έρευνες που να έχουν συγκρίνει την επίδοση των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος με συγκεκριμένο πλαίσιο και ελεύθερο πλαίσιο. Οι έρευνες που ασχολούνται με τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος σε εκπαιδευτικούς συνήθως καλούν τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα για συγκεκριμένες κλασματικές εκφράσεις (συγκεκριμένο πλαίσιο) (Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014).

4. Ποια είναι τα υλικά στα οποία αναφέρονται οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι όταν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα;

Από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως η φαγώσιμη ύλη είναι το υλικό στο οποίο αναφέρονται, ως επί το πλείστον, οι εν ενεργεία και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, όταν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα (Austin & Hechter, 2015˙ Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Luo, 2009˙ Timmerman, 2011). Συνεπώς, και στην παρούσα έρευνα αναμένεται τα περισσότερα σενάρια των προβλημάτων που θα δημιουργήσουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί να σχετίζονται με κάποιο είδος φαγητού.

5. Επηρεάζει το έτος φοίτησης των υποψήφιων εκπαιδευτικών την ικανότητά τους να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα; Επίσης, υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην επίδοση των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων εκπαιδευτικών κατά τη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων;

Στην έρευνα που διεξήχθη από τις Δεσλή και Αβραμίδου (2015), βρέθηκε πως το έτος φοίτησης επηρεάζει την επίδοση των υποψήφιων εκπαιδευτικών, όταν αυτοί δημιουργούν λεκτικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, συγκριτικά με τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς των μεγαλύτερων ετών, βρέθηκε πως η επίδοση των νεότερων υποψήφιων εκπαιδευτικών ήταν φτωχή και αδύναμη κατά τη δημιουργία λεκτικών προσθετικών προβλημάτων με κλάσματα. Κατά συνέπεια, αναμένεται και στην παρούσα έρευνα οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί των μεγαλύτερων ετών, λόγω περισσότερης εμπειρίας, να δημιουργήσουν καταλληλότερα προβλήματα σε σχέση με τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς που φοιτούν σε μικρότερα έτη. Παρόμοια, αναμένεται και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί, λόγω περισσότερης εμπειρίας, να έχουν καλύτερη επίδοση στη δημιουργία προβλήματος από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς.

6. Ποια είναι η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων να αναγνωρίζουν πότε ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων είναι κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση;

Πρόκειται για ένα διερευνητικό ερώτημα, καθώς δεν υπάρχουν έρευνες που εξετάζουν αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αναγνωρίσουν πότε ένα λεκτικό πρόβλημα κλασμάτων, πρόσθεσης ή αφαίρεσης, είναι ακατάλληλο ή κατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται τους όρους πρόβλημα, επίλυση προβλήματος και δημιουργία προβλήματος. Επίσης, παρουσιάζει τη θέση της επίλυσης προβλήματος στα Α.Π.Σ. των μαθηματικών διάφορων χωρών, τη σχέση της δημιουργίας προβλήματος με την επίλυση προβλήματος, όπως και τα διαφορετικά πλαίσια μέσα από τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν προβλήματα. Επιπλέον, παρουσιάζονται τα οφέλη που έχει η δημιουργία προβλήματος σε μαθητές και εκπαιδευτικούς, όπως και η επίδοση των εκπαιδευτικών κατά τη δημιουργία προβλήματος σε διάφορες μαθηματικές περιοχές. Το δεύτερο μέρος πραγματεύεται τη γνώση των εκπαιδευτικών στα κλάσματα, καθώς και την επίδοσή τους στη δημιουργία προβλήματος στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Α. Πρόβλημα – Επίλυση Προβλήματος - Δημιουργία Προβλήματος

Α.1 Τι είναι πρόβλημα

Η έννοια του προβλήματος έχει οριστεί από πληθώρα ερευνητών. Για τον Schoenfeld (1992), το πρόβλημα αντιπροσωπεύει μία κατάσταση για την οποία το άτομο δεν γνωρίζει, εκ των προτέρων, ποιες μέθοδοι, διαδικασίες και αλγόριθμοι χρειάζονται για τη λύση του. Οι Blum και Niss (1991) ορίζουν το πρόβλημα ως μία κατάσταση που εμπεριέχει συγκεκριμένες ανοιχτές ερωτήσεις, οι οποίες προκαλούν πνευματικά κάποιον που δεν έχει άμεσα τις κατάλληλες μεθόδους/διαδικασίες/αλγορίθμους για να απαντήσει σε αυτά τα ερωτήματα. Οι Henderson και Pingry (1953) αποδίδουν στο πρόβλημα δύο ερμηνείες. Σύμφωνα με την πρώτη ερμηνεία, το πρόβλημα είναι μία ερώτηση που χρειάζεται απάντηση ή λύση, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη, το πρόβλημα είναι μία ερώτηση την οποία ο δημιουργός του προβλήματος προσαρμόζει κάθε φορά στο άτομο που την απαντά, γιατί κάτι που μπορεί να αποτελεί πρόβλημα για ένα άτομο, μπορεί να μην αποτελεί για ένα άλλο. Ακόμα, για τους Schoen και Oehmen (1980, στο Gonzales, 1998), ένα πρόβλημα μπορεί να αποδίδεται και ως άσκηση υπολογισμού, αλλά και ως γρίφος. Στο πρόβλημα ως άσκηση υπολογισμού, η στρατηγική που οδηγεί στη λύση είναι εκ των προτέρων γνωστή, ενώ στο πρόβλημα ως γρίφο, δεν υπάρχουν σαφώς καθορισμένες στρατηγικές που να οδηγούν στη λύση. Επίσης, δεν είναι σίγουρο πώς οι στρατηγικές αυτές θα είναι κατανοητές από τον πιθανό λύτη. Για τον Mayer (1983, στο Stoyanova, 1997), το πρόβλημα περιέχει δεδομένα, στόχους, εμπόδια και άγνωστη μέθοδο επίλυσης. Συνοπτικά, το πρόβλημα ορίζεται, από πολλούς ερευνητές, ως μία κατάσταση που χρήζει αντιμετώπισης και η λύση του δεν είναι ούτε γνωστή, ούτε προφανής (Krulik & Rudnick, 1980, στο Carson, 2007˙ Kantowski, 1977˙ Lester, 1980, στο Siswono, 2008).

Τα λεκτικά προβλήματα ορίζονται ως κείμενα, κατανοητά από τον αναγνώστη, τα οποία περιγράφουν καταστάσεις και εμπεριέχουν μαθηματικές ερωτήσεις εννοιολογικά πλαισιωμένες (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, στο Palm, 2009). Τα μαθηματικά λεκτικά προβλήματα περιλαμβάνουν μαθηματικά, πλαισιωμένα με καταστάσεις της καθημερινότητας, όπου για να βρουν οι μαθητές τη λύση, πρέπει να αποπλαισιώσουν τα μαθηματικά από τις καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Palm, 2009).

Επειδή οι μαθηματικές δραστηριότητες δεν έχουν κάποιο εγγενές χαρακτηριστικό που να τις καθιστά προβλήματα, δηλαδή μία δραστηριότητα δεν έχει δημιουργηθεί για να είναι πρόβλημα, η έννοια του προβλήματος ορίζεται με δυσκολία. Η δυσκολία αυτή απορρέει από τη συγγενική σχέση των όρων πρόβλημα και επίλυση προβλήματος (Schoenfeld, 1985). Αυτό που καθιστά μία δραστηριότητα πρόβλημα δεν είναι η φύση της, αλλά ο τρόπος που αντιμετωπίζεται από τον πιθανό λύτη. Έτσι, μία δραστηριότητα μπορεί να αποτελεί πρόβλημα για ένα άτομο, αλλά άσκηση για κάποιο άλλο, όπως επίσης, για το ίδιο άτομο, μία δραστηριότητα, μπορεί να αποτελεί πρόβλημα στον παρόντα χρόνο, αλλά άσκηση στο μέλλον (Henderson & Pingry, 1953). Συγκεκριμένα, όταν ο λύτης δεν έχει κάποιο γνωστό σχήμα επίλυσης και θεωρεί πως αντιμετωπίζει μία προβληματική κατάσταση, τότε λύνει ένα πρόβλημα. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν τα βήματα της επίλυσης είναι γνωστά, αντιμετωπίζει μία άσκηση ρουτίνας (Henderson & Pingry, 1953˙ Brookes, 1976, στο Manson, 2016˙ Schoenfeld, 1985). Για αυτόν τον λόγο, δεν υπάρχει σταθερός διαχωρισμός των έργων σε προβλήματα και ασκήσεις, καθώς ένα έργο δεν αποτελεί, αποκλειστικά, μόνο πρόβλημα ή μόνο άσκηση (Henderson & Pingry, 1953˙ Schoenfeld, 1985). Για παράδειγμα, κάτι που μπορεί να είναι πρόβλημα για έναν μαθητή του δημοτικού σχολείου, ίσως δεν είναι πρόβλημα για έναν μαθητή του λυκείου (Henderson & Pingry, 1953). Στον αντίποδα, μία άσκηση μπορεί να θεωρείται πρόβλημα από ένα άτομο, εάν αυτό δεν γνωρίζει, εκ των προτέρων, τη στρατηγική που θα τον οδηγήσει στη λύση, επομένως, πρέπει να κινητοποιηθεί για να τη βρει (Schoen &

Oehmen, 1980, στο Gonzales, 1998). Συνεπώς, το ίδιο έργο μπορεί να αποτελεί πρόβλημα για κάποιον που εξ' αρχής δεν γνωρίζει τη μέθοδο επίλυσης, αλλά άσκηση για κάποιον που τη γνωρίζει (Blum & Niss, 1991).

Α.2 Τι είναι επίλυση προβλήματος (problem solving)

Όταν ένας άνθρωπος έρχεται αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα, ολόκληρη η διαδικασία που ακολουθεί για να το λύσει ονομάζεται επίλυση προβλήματος (Blum & Niss, 1991). Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, το άτομο καλείται να συνδυάσει, με νέο τρόπο, πληροφορίες που του είναι καινούριες. Εάν από την αρχή το άτομο γνωρίζει τη διαδικασία επίλυσης, τότε δεν λύνει πρόβλημα, αλλά άσκηση ρουτίνας (Kantowski, 1980, στο Pehkonen, Naiveri, & Laine, 2013). Συνεπώς, η επίλυση προβλήματος είναι μία δραστηριότητα, στην οποία ο λύτης, σε πρώτη φάση, δεν ξέρει ποια οδός θα τον οδηγήσει στη λύση του προβλήματος (NCTM, 2000, στο Foster, 2019). Παρόμοια, και για τον Polya (1981), η επίλυση προβλήματος αποτελεί μία διαδικασία, κατά την οποία ο λύτης ψάχνει ποια μέσα θα τον οδηγήσουν στην επίτευξη ενός σαφώς σχεδιασμένου, αλλά όχι άμεσα εφικτού, τέλους. Συνδέοντας τους προαναφερθέντες ορισμούς του προβλήματος και της επίλυσης προβλήματος συνάγεται το εξής: Όταν ένα άτομο έρχεται αντιμέτωπο με ένα έργο, για το οποίο δεν γνωρίζει, εκ των προτέρων, ποια βήματα θα τον οδηγήσουν στη λύση του, τότε αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα και η διαδικασία στην οποία θα εμπλακεί ονομάζεται επίλυση προβλήματος.

Μία διαφορετική προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος φαίνεται στον ορισμό των Krulik και Rudnick (1980, στο Carson, 2007). Οι συγκεκριμένοι ερευνητές ορίζουν την επίλυση προβλήματος ως διαδικασία κατά την οποία το άτομο χρησιμοποιεί αποκτηθείσα γνώση για να λύσει το πρόβλημα με το οποίο έρχεται αντιμέτωπος. Τέλος, από τη σκοπιά του μαθητή, η επίλυση προβλήματος είναι η διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής χρησιμοποιεί την προηγούμενή του εμπειρία και γνώση στα μαθηματικά για να λύσει και να δώσει μία απάντηση σε ένα πρόβλημα (Stoyanova, 1997).

Α.3 Τι είναι δημιουργία προβλήματος (problem posing)

Τα τελευταία χρόνια στο προσκήνιο της μαθηματικής εκπαίδευσης ξεκίνησε η ενασχόληση με τη δημιουργία προβλημάτων (problem posing) (Isik, Ocal, & Kar, 2013˙ Luo, 2009), βασικό συστατικό της επίλυσης προβλήματος (Kılıç, 2013). Για τους Van den Heuval-Panhuizen, Middleton και Streefland (1995, στο Pelczer & Rodríguez, 2011), δημιουργία προβλήματος σημαίνει δημιουργία λεκτικών προβλημάτων, με κριτήριο, τουλάχιστον, ο δημιουργός των προβλημάτων να μην γνωρίζει, εκ των προτέρων, τη λύση τους. Θα πρέπει, δηλαδή, τα συγκεκριμένα έργα να είναι δύσκολα και για τον ίδιο τον δημιουργό και να καταβάλλει και ο ίδιος προσπάθεια για να βρει την οδό που θα τον οδηγήσει στη λύση τους. Οι Cohen και Stover (1981, στο Pelczer & Rodríguez, 2011) ορίζουν τη δημιουργία προβλήματος ως τη διαδικασία κατά την οποία το άτομο βρίσκει έτοιμα προβλήματα και τα αναδιαμορφώνει είτε επειδή θέλει να τα απλοποιήσει είτε επειδή είναι ασαφή.

Υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι ενσωματώνουν στον ορισμό τους για τη δημιουργία προβλήματος τους δύο προηγούμενους ορισμούς. Αναλυτικότερα, για τον Duncker (1945, στο Isik et al., 2013), η δημιουργία προβλήματος σχετίζεται με τη δημιουργία νέων προβλημάτων και την επαναδιατύπωση γνωστών προβλημάτων ή καταστάσεων. Παρόμοια, ο Silver (1994) ορίζει τη δημιουργία προβλήματος ως τη δημιουργία νέων προβλημάτων ή την αναδιατύπωση ήδη υπαρχόντων, τονίζοντας, όμως, πως η διαδικασία αυτή μπορεί να συμβεί πριν, κατά τη διάρκεια, αλλά και μετά τη λύση του προβλήματος. Επίσης, οι Tichá και Hošpesová (2010) ορίζουν τη δημιουργία προβλήματος ως τη δημιουργία καινούριων προβλημάτων ή ως την επαναδιατύπωση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, τροποποιώντας τις παραμέτρους του ή γενικεύοντας με την ερώτηση «Τι θα συνέβαινε εάν (δεν)…;». Οι ίδιες ερευνήτριες υπογραμμίζουν πως η διαδικασία δημιουργίας ή τροποποίησης ενός προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν, κατά τη διάρκεια, αλλά και μετά την επίλυση.

Α.4 Πλαίσια δημιουργίας προβλήματος

Η δημιουργία προβλήματος μπορεί να προκύψει μέσα από διαφορετικά πλαίσια (frameworks), δηλαδή διαφορετικές αφετηρίες. Για παράδειγμα, για να δημιουργήσει κανείς ένα πρόβλημα μπορεί να εμπνευστεί είτε από ένα ήδη γνωστό πρόβλημα είτε από μία συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση. Ακόμα, μπορεί να δημιουργήσει ένα εξ' ολοκλήρου νέο πρόβλημα, χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τον τρόπο διατύπωσής του.

Το πιο γνωστό πλαίσιο, των Stoyanova και Ellerton (1996, στο Kar & Işık, 2014), αναφέρει πως η δημιουργία προβλήματος μπορεί να προκύψει μέσα από ελεύθερες καταστάσεις (free situations), ημιδομημένες καταστάσεις (semi-structured situations) και δομημένες καταστάσεις (structured situations). Αναλυτικότερα, όταν το άτομο καλείται να δημιουργήσει ένα πρόβλημα σε ελεύθερες καταστάσεις, δηλαδή χωρίς πλαίσιο, δεν δίνεται κάποιος περιορισμός για αυτό (π.χ., «Δημιούργησε ένα πρόβλημα που να σχετίζεται με χρήματα»). Κατά τη δημιουργία προβλήματος σε ημιδομημένες καταστάσεις, δίνεται στο άτομο μία ανοιχτή κατάσταση (open-ended situation) και αναμένεται να την ολοκληρώσει χρησιμοποιώντας τη γνώση, τις εμπειρίες και τις δεξιότητές του. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί να δημιουργήσει ένα πρόβλημα βασιζόμενο σε εικόνες, εξισώσεις ή ανοιχτά λεκτικά προβλήματα (π.χ., «Δημιούργησε ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με την ακόλουθη πράξη: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\ ?$ »). Τέλος, στις δομημένες καταστάσεις παρουσιάζονται συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης και ζητείται από το άτομο να δημιουργήσει ένα πρόβλημα που να λύνεται με τις συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης. Ακόμα, μπορεί να παρουσιαστεί ένα καλά δομημένο πρόβλημα ή μια κατάσταση και να ζητηθεί δημιουργηθούν νέα προβλήματα (Stoyanova, 2003, στο Kılıç, 2015).

Δεν υπάρχουν έρευνες που συγκρίνουν την επίδοση των ατόμων κατά τη δημιουργία προβλημάτων σε ελεύθερες, ημιδομημένες και δομημένες καταστάσεις. Σε έρευνες, όμως, που εξετάζουν την επίδοση των εκπαιδευτικών στη δημιουργία προβλήματος, στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων, χρησιμοποιούνται, συνήθως, ημιδομημένες καταστάσεις (Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014).

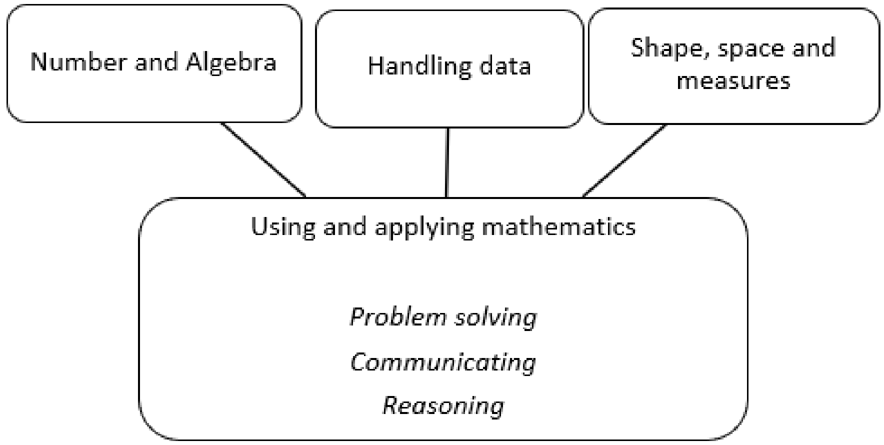
Α.5 Η θέση της επίλυσης προβλήματος στα Α.Π.Σ. των μαθηματικών διάφορων χωρών

Η σπουδαιότητα της επίλυσης προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση, αντανακλάται στη θέση που κατέχει στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) των μαθηματικών. Η ενασχόληση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τα προβλήματα δεν είναι πρόσφατη. Διαχρονικά, τα προβλήματα έχουν κεντρική θέση στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Παραδείγματα μαθηματικών και γεωμετρικών προβλημάτων διατυπώνονται και από τους αρχαίους Αιγύπτιους, Κινέζους και Έλληνες (Stanic & Kilpatrick, 1988, στο Bonotoo & Santo, 2015). Τα προβλήματα και η επίλυση προβλήματος εξακολουθούν να αποτελούν βασικό στόχο των Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά σε πολλές χώρες, όπως είναι η Σιγκαπούρη, οι Η.Π.Α., η Αγγλία, η Αυστραλία, η Φιλανδία, η Ινδονησία, η Ιαπωνία, η Κορέα και η Κίνα, η Κύπρος (Anderson, 2009˙ Arıkan & Ünal 2015˙ Kaur & Yeap, 2009˙ Siswono, Kohar, Kurniasari, & Astuti, 2016˙ Stacey, 2005˙ Xenofontos & Andrews, 2014) και η Ελλάδα (Υ.Π.Ε.Π.Θ., 2003).

Σε πολλά Α.Π.Σ. η ύλη των μαθηματικών παρουσιάζεται με «περιεχόμενα» (content) και «διαδικασίες» (processes). Τα «περιεχόμενα» περιλαμβάνουν θεμελιώδεις ιδέες των μαθηματικών, όπως αριθμός, άλγεβρα, μέτρηση, γεωμετρία, πιθανότητες και δεδομένα, ενώ οι «διαδικασίες» περιλαμβάνουν ενέργειες που σχετίζονται με τη χρήση και εφαρμογή μαθηματικών για την επίλυση προβλημάτων (Clarke, Goos & Morony, 2007, στο Anderson, 2009). Επίσης, η επίλυση προβλήματος στα Α.Π.Σ. παρουσιάζεται είτε ως βασικός στόχος του προγράμματος σπουδών είτε ως μέσο, δηλαδή, ως μέθοδος εκμάθησης (Stacey, 2005).

Στο Α.Π.Σ. της Αυστραλίας, όπως αυτό διαμορφώθηκε σύμφωνα με το National Profile (Australian Educational Council, 1994), οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης οργανώθηκαν σε «περιεχόμενα» και «διαδικασίες». Οι διαδικασίες τιτλοφορήθηκαν ως «Δουλεύοντας Μαθηματικά» (Working Mathematically). Η επίλυση προβλήματος αποτελούσε συστατικό της διαδικαστικής πτυχής του Α.Π.Σ. (Stacey, 2005). Το αναθεωρημένο Α.Π.Σ. της Αυστραλίας, που τέθηκε σε εφαρμογή το 2011, βασίστηκε στο Shape of the Australian Curriculum: Mathematics (National Curriculum Board [NCB], 2009). Σύμφωνα με αυτό, το Α.Π.Σ. δομήθηκε σε τρεις «πτυχές περιεχομένου» -αριθμός και άλγεβρα, μέτρηση και γεωμετρία, στατιστική και πιθανότητα- και τέσσερις «πτυχές ικανότητας» -κατανόηση, ευχέρεια, επίλυση προβλήματος και συλλογιστική. Στο αναθεωρημένο Α.Π.Σ. (NCB, 2009), η επίλυση προβλήματος δεν αποτελεί, απλώς, ένα συστατικό της διαδικαστικής πτυχής, αλλά μία ικανότητα που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές. Αναπτύσσοντας οι μαθητές την ικανότητα επίλυσης προβλήματος σημαίνει πως αναπτύσσουν και την ικανότητα τους να επιλέγουν, να καταλαβαίνουν, να διατυπώνουν, να διαμορφώνουν και να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις, καθώς και να επικοινωνούν, αποτελεσματικά, τις λύσεις που βρίσκουν. Καθώς, η επίλυση προβλήματος αποτελεί βασικό κομμάτι του αυστραλιανού Α.Π.Σ., διδάσκεται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου και γυμνασίου (year 1 - year 10), διατρέχοντας τις πτυχές περιεχομένου του Α.Π.Σ..

Παρόμοια, στο Α.Π.Σ. του Ηνωμένου Βασιλείου, υπάρχουν «στόχοι προς επίτευξη» (Attainment Targets), οι οποίοι χωρίζονται στα «περιεχόμενα» και στη «χρήση και εφαρμογή των μαθηματικών» (Using and applying mathematics). Τα «περιεχόμενα» απαρτίζονται από θεματικές (αριθμός και άλγεβρα, σχήματα, χώρος και μετρήσεις, χειρισμός δεδομένων), ενώ η «χρήση και εφαρμογή των μαθηματικών» αντιπροσωπεύει τις διαδικασίες (Stacey, 2005). Η επίλυση προβλήματος είναι μέρος του διαδικαστικού τομέα και διδάσκεται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου (year 1 - year 6) μέσω των περιεχομένων. Στην Εικόνα 1 φαίνεται η δομή του Α.Π.Σ. των μαθηματικών του Ηνωμένου Βασιλείου. Τα επάνω τρία ορθογώνια απεικονίζουν τα περιεχόμενα, ενώ το κεντρικό ορθογώνιο απεικονίζει τη χρήση και την εφαρμογή των μαθηματικών, μέρος της οποίας είναι και η επίλυση προβλήματος.

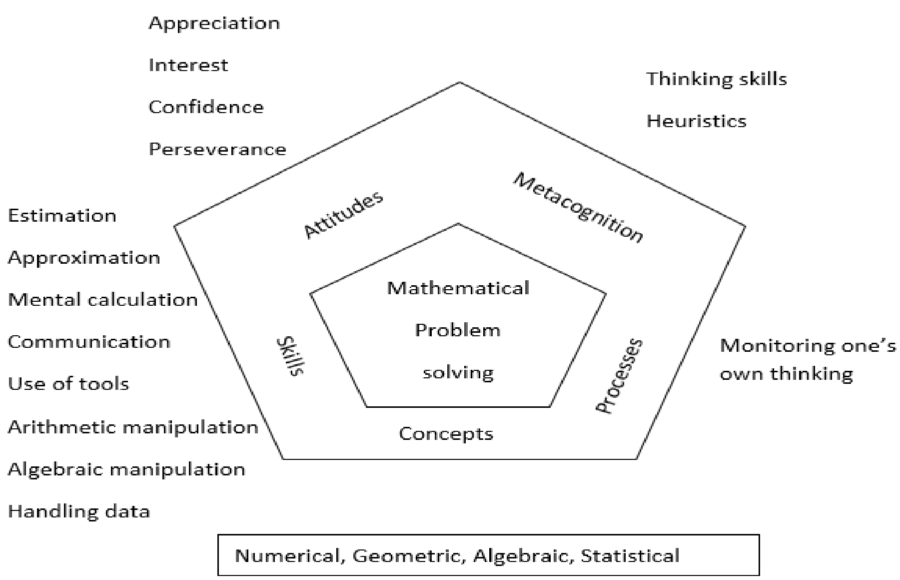


Εικόνα 1. Η δομή του Α.Π.Σ. των μαθηματικών του Ηνωμένου Βασιλείου (πηγή: Stacey, 2005, σελ. 344).

Το Α.Π.Σ. των Η.Π.Α συγκροτείται με βάση τις «Αρχές» (Principles) και τα «Πρότυπα» (Standards) για τα σχολικά μαθηματικά, όπως αυτά παρουσιάζονται στο NCTM (2000). Οι «Αρχές» περιλαμβάνουν τις βασικές αξίες που συμβάλλουν σε μία υψηλής ποιότητας εκπαίδευση για τα μαθηματικά, ενώ τα «Πρότυπα» περιγράφουν τα μαθηματικά που χρειάζεται να γνωρίζουν και να μπορούν να εκτελούν οι μαθητές. Υπάρχουν πέντε «Πρότυπα περιεχομένου» (Content Standards) και πέντε «Πρότυπα διαδικασίας» (Process Standards). Η επίλυση προβλήματος είναι ένα από τα πρότυπα διαδικασίας, τα οποία επισημαίνουν τρόπους απόκτησης και εφαρμογής των γνώσεων περιεχομένου.

Από το 1992 μέχρι και σήμερα, η επίλυση προβλήματος αποτελεί τον βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης, παρά τις αναθεωρήσεις του που πραγματοποιήθηκαν το 2001 και το 2007 (Kaur & Yeap, 2009). Η σημαντικότητα της επίλυσης προβλήματος για το Α.Π.Σ της Σιγκαπούρης φαίνεται και από το γεγονός πως το 1999, τα αποτελέσματα της TIMSS-R μελέτης, αποτέλεσαν εφαλτήριο να μειωθεί η ύλη των μαθηματικών κατά 30%, για να έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές να ασχολούνται περισσότερο με δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων (Anderson, 2009˙ Kaur, 2001). Λόγω, όμως, της περιορισμένης εφαρμογής αυτών των δραστηριοτήτων στην τάξη εισήχθησαν οι καινοτομίες «Thinking School, Learning Nation» (TSLN) και «Teach Less, Learn More» (TLLM). Σκοπός τους ήταν η περαιτέρω μείωση της ύλης και η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που χρειάζονταν περισσότερη κριτική σκέψη, όπως η επίλυση μη τυπικών προβλημάτων. (Anderson, 2009˙ Kaur & Yeap, 2009).

Η Εικόνα 2 παρουσιάζει τη δομή του Α.Π.Σ. των μαθηματικών της Σιγκαπούρης. Στο κέντρο βρίσκεται η επίλυση προβλήματος, η οποία αποτελεί τον στόχο και τον σκοπό της μαθηματικής εκπαίδευσης και περιμετρικά βρίσκονται οι υπόλοιποι παράγοντες που δομούν το Α.Π.Σ.. Αυτοί είναι οι έννοιες, οι δεξιότητες, οι διαδικασίες, οι στάσεις και η μεταγνώση. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο Α.Π.Σ., η επιτυχής ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων στηρίζεται στην αλληλεπίδραση των πέντε παραγόντων.



Εικόνα 2. Η δομή του Α.Π.Σ. των μαθηματικών της Σιγκαπούρης (πηγή: Stacey, 2005, σελ. 345).

Συνοψίζοντας, τα αγγλόφωνα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των Η.Π.Α, της Αυστραλίας και της Αγγλίας συγκαταλέγονται σε αυτά που οργανώνουν τη μαθηματική ύλη σε περιεχόμενα και διαδικασίες. Η επίλυση προβλήματος σε αυτές τις χώρες είναι μέρος της διαδικαστικής πτυχής και ένα από τα συστατικά που συντελούν σε μία επιτυχημένη μαθηματική εκπαίδευση. Η δομή, όμως, του Α.Π.Σ. της Σιγκαπούρης διαφέρει άρδην από τις προαναφερόμενες. Στο Α.Π.Σ. της Σιγκαπούρης, η επίλυση προβλήματος δεν αποτελεί συστατικό του Α.Π.Σ., αλλά βρίσκεται στο κέντρο της δομής του Α.Π.Σ., αποτελώντας τον στόχο και τον σκοπό της μαθηματικής εκπαίδευσης (Stacey, 2005).

Η επίλυση προβλήματος κατέχει σημαντική θέση και στα ελληνικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. του νηπιαγωγείου αναφέρεται πως ένας από τους στόχους του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών είναι, μέσω βιωματικών καταστάσεων, να αρχίσουν τα παιδιά να ενδιαφέρονται για δραστηριότητες επινόησης και επίλυσης προβλημάτων, καθώς αυτές έχουν πολλά οφέλη για τα ίδια. Τα παιδιά λύνοντας προβλήματα, ατομικά ή ομαδικά, αναπτύσσουν την ικανότητα να συγκρίνουν και να συσχετίζουν αντικείμενα, να αντιλαμβάνονται κάποιες σχέσεις, ιδιότητες και συνδυασμούς, να μετρούν, αλλά και να αναγνωρίζουν απλά σχήματα στο περιβάλλον. Επίσης, επιδιώκεται να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα να διατυπώνουν απορίες, όπως «τι θα συνέβαινε εάν…,», και να παράγουν κατάλληλο υποστηρικτικό υλικό για να λύνουν τα προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωπα (π.χ., στις συναλλαγές τους να χρησιμοποιούν κάρτες αντί για χρήματα) (Υ.Π.Ε.Π.Θ., 2003).

Το Δ.Ε.Π.Π.Σ. των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης διαρθρώνεται σε άξονες γνωστικού περιεχομένου, σε γενικούς στόχους (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες) και σε θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης. Οι άξονες γνωστικού περιεχομένου είναι οι: «επίλυση προβλήματος, αριθμοί και πράξεις, μετρήσεις, γεωμετρία, συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, λόγοι και αναλογίες, στατιστική, εξισώσεις», με την επίλυση προβλήματος να είναι η μοναδική που διατρέχει όλες τις τάξεις. Το συγκεκριμένο Δ.Ε.Π.Π.Σ. στοχεύει οι μαθητές του δημοτικού, μέσα από τις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, να μάθουν να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα βασιζόμενοι σε κάποια συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν εναλλακτικά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν, αλλά να είναι σε θέση και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινότητά τους και να εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες. Όσον αφορά το Α.Π.Σ. των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων αποτελεί έναν από τους ειδικούς σκοπούς του και γι΄ αυτό αφιερώνονται πολλές ώρες στη διδασκαλία της. Έτσι, από τις 120 διδακτικές ώρες των μαθηματικών, στις πρώτες τέσσερες τάξεις του δημοτικού, αφιερώνονται 18 ώρες στη θεματική ενότητα της επίλυσης προβλήματος, στην Ε τάξη αφιερώνονται 26 ώρες και στην Στ τάξη 24 ώρες.

Για κάθε τάξη, η θεματική ενότητα της επίλυσης προβλήματος έχει διαφορετική στοχοθεσία. Αρχικά, στην Α΄ δημοτικού οι δραστηριότητες επίλυσης στοχεύουν οι μαθητές να ενεργοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους και να μπορούν να προβαίνουν σε δοκιμές και επαληθεύσεις. Στην Β΄ δημοτικού, επιπλέον, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις, σύμφωνα με τις έννοιες που έχουν διδαχθεί, να ξεχωρίζουν σε ένα πρόβλημα τα δεδομένα από τα ζητούμενα, να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα που οδηγούν στη λύση του προβλήματος και να αυτοαξιολογούν τις γνώσεις και τις ικανότητές τους. Στην Γ΄ δημοτικού, ως στόχοι, προστίθενται η ικανότητα να επιχειρηματολογούν για την ορθότητα μιας λύσης, η σαφής παρουσίαση της δικής τους στρατηγικής επίλυσης, η πρόβλεψη της απάντησης του προβλήματος, η διατύπωση υποθέσεων για παραπάνω πιθανές λύσεις και η διερεύνηση ανοιχτών προβληματικών καταστάσεων. Στην Δ΄ δημοτικού, επιπρόσθετα, οι μαθητές πρέπει να δύνανται να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που βοηθούν τη διαδικασία της επίλυσης, όπως και να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και παραπλήσια προβλήματα. Στην Ε΄ και την Στ΄ δημοτικού, ως επιπλέον στόχος, τίθεται η χρήση του υπολογιστή και διάφορων λογισμικών για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων από τους μαθητές (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003).

Η επίλυση προβλήματος, αν και παρουσιάζεται με διαφορετικό τρόπο στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών των διάφορων χωρών, δεν παύει να θεωρείται από όλα μία σημαντική ικανότητα που οφείλει να αναπτυχθεί από τους μαθητές και ένας από τους πιο σημαντικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Kιlıç, 2013). Γι' αυτό, η επίλυση προβλήματος εισάγεται από νωρίς, ήδη από το νηπιαγωγείο, και εξακολουθεί να αποτελεί στόχο μέχρι και το λύκειο (Common Core State Standards Initiative [CCSS], 2010, στο Kingsdorf & Krawec, 2014˙ ΦΕΚ 8622/Δ2/22/1/2015).

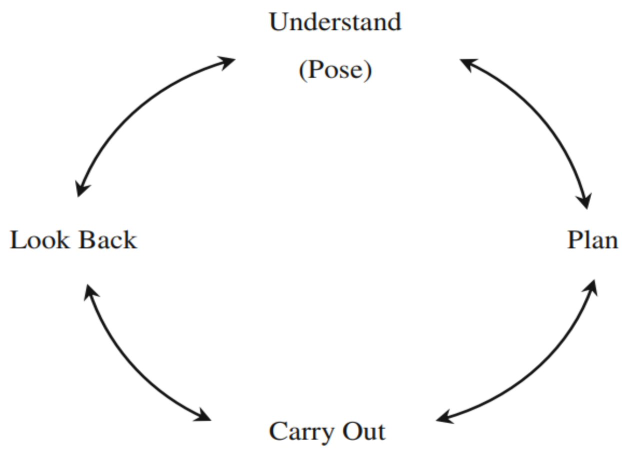
Α.6 Η σχέση δημιουργίας προβλήματος και επίλυσης προβλήματος

Από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως η επίλυση και η δημιουργία προβλημάτων είναι διαδικασίες που συσχετίζονται μεταξύ τους (Contreras, 2007˙ Ellerton , 2013˙ English, 2019˙ Xie & Masingila, 2017). Ο Kilpatrick (1987, σελ. 123) αναφέρει «πως η δημιουργία προβλήματος συμπορεύεται με την επίλυση προβλήματος».

Σύμφωνα με τον Polya (1945), η επίλυση ενός προβλήματος περνάει μέσα από τέσσερα στάδια: κατανόηση προβλήματος, δημιουργία σχεδίου λύσης, εκτέλεση σχεδίου λύσης, έλεγχος. Παρ' όλο που ο Polya κάνει λόγο για μία επάλληλη σειρά τεσσάρων διακριτών σταδίων, ο λύτης δεν δεσμεύεται να ακολουθήσει απαρέγκλιτα τη συγκεκριμένη πορεία. Ανάλογα με τις ανάγκες του, μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο προηγούμενο στάδιο, για αξιολόγηση ή διόρθωση, ή να μεταβεί στο επόμενο. Στην περίπτωση, όμως, που το πρόβλημα είναι προϊόν του ίδιου του λύτη, τότε το πρώτο στάδιο της επίλυσης δεν είναι η κατανόηση του προβλήματος, αλλά η δημιουργία του προβλήματος, με τα επόμενα τρία στάδια να παραμένουν τα ίδια (Leung, 2012). Στην Εικόνα 3 παρουσιάζεται η κυκλική πορεία που ακολουθούν τα στάδια της δημιουργίας ή/και της επίλυσης ενός προβλήματος.

Σύμφωνα με τον Silver (1994), η δημιουργία προβλήματος δεν σχετίζεται μόνο με τη δημιουργία ενός νέου προβλήματος, αλλά και με την τροποποίηση ενός υπάρχοντος. Η τροποποίηση ενός προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιοδήποτε στάδιο της επίλυσης. Κατά συνέπεια, και η δημιουργία ενός προβλήματος, μέσω τροποποίησης, δεν συμβαίνει αποκλειστικά κατά το πρώτο στάδιο επίλυσης, δηλαδή πριν λυθεί το πρόβλημα. Μπορεί να πραγματοποιηθεί και κατά τη διάρκεια της επίλυσης, όταν το άτομο, σκοπίμως, επιθυμεί να τροποποιήσει τον στόχο ή τις συνθήκες του προβλήματος, αλλά ακόμα και μετά το πέρας της λύσης, όταν το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος τροποποιείται ή εφαρμόζεται υπό νέες καταστάσεις.

Συνοψίζοντας, η δημιουργία και η επίλυση προβλήματος μοιράζονται τα ίδια στάδια επίλυσης και η δημιουργία ενός νέου προβλήματος μπορεί να προκύψει σε οποιοδήποτε στάδιο επίλυσης ενός προβλήματος.

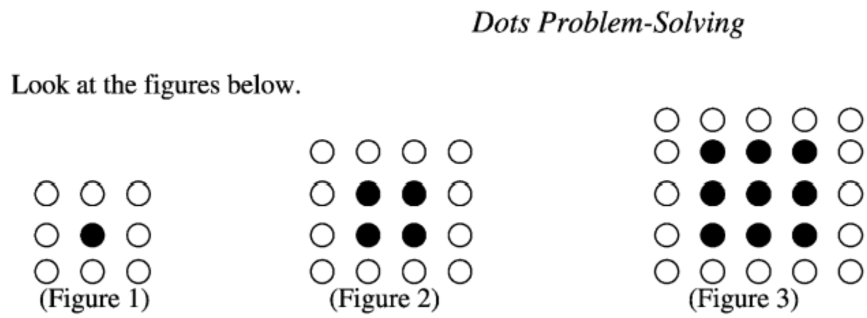


Εικόνα 3. Τα τέσσερα στάδια επίλυσης ή/και δημιουργίας προβλήματος (πηγή: Leung, 2012, σελ.105).

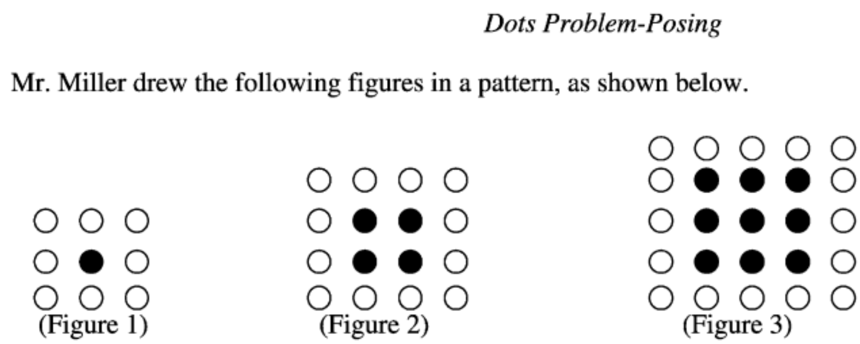
Η συνάφεια μεταξύ δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος ενισχύεται και από το γεγονός πως οι επιδόσεις ενός ατόμου στις αντίστοιχες διαδικασίες είναι παραπλήσιες. Συγκεκριμένα, αποτελέσματα ερευνών με μαθητές έχουν δείξει πως ένας δεινός λύτης προβλημάτων θα είναι και δεινός δημιουργός προβλημάτων, και το αντίστροφο (Cai & Hwang, 2002˙ Ellerton, 1986˙ Silver & Cai, 1996). Αναλυτικότερα, οι Silver και Cai (1996) θέλησαν να εξετάσουν τις επιδόσεις μαθητών γυμνασίου στη δημιουργία προβλημάτων. Στους συμμετέχοντες δόθηκε η λεκτική περιγραφή μίας κατάστασης για τρία άτομα που οδήγησαν συγκεκριμένα χιλιόμετρα («*Ο Τζερόμ, ο Έλιοτ και ο Αρθούρος οδήγησαν εναλλάξ κατά την επιστροφή τους στο σπίτι από ένα ταξίδι. Ο Αρθούρος οδήγησε 80 μίλια περισσότερα από τον Έλιοτ. Ο Έλιοτ οδήγησε τα διπλάσια* *μίλια από αυτά που οδήγησε ο Τζερόμ. Ο Τζερόμ οδήγησε 50 μίλια.»,* Silver & Cai, 1996, σελ. 525), και τους ζητήθηκε να γράψουν τρία διαφορετικά προβλήματα τα οποία επιλύονται στη βάση των πληροφοριών που δόθηκαν. Τα προβλήματα εξετάστηκαν σύμφωνα με το είδος τους, την πολυπλοκότητά τους και με το αν μπορούν να λυθούν. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως, συγκριτικά με τους λιγότερο ικανούς λύτες, οι περισσότερο ικανοί λύτες δημιούργησαν περισσότερα και περιπλοκότερα προβλήματα. Έτσι, οι ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα πως υπάρχει υψηλή συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στη δημιουργία προβλημάτων και την επίλυση προβλημάτων.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνει και η Ellerton (1986) η οποία εξέτασε τα προβλήματα που δημιούργησαν δύο ομάδες μαθητών ηλικίας 11-13 χρονών. Από την πρώτη ομάδα συμμετεχόντων επιλέχθηκαν οι 8 περισσότερο ικανοί μαθητές στα μαθηματικά και από τη δεύτερη ομάδα οι 8 λιγότερο ικανοί. Και από τις δύο ομάδες ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα δύσκολο πρόβλημα που θα προοριζόταν για κάποιο φίλο τους, και έπειτα έπρεπε να το λύσουν οι ίδιοι. Εξετάζοντας τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που δημιούργησαν οι δυο ομάδες, βρέθηκε πως οι μαθητές της πρώτης ομάδας δημιούργησαν περισσότερο περίπλοκα προβλήματα τα οποία οι ίδιοι μπόρεσαν να λύσουν, ενώ οι μαθητές της δεύτερης ομάδας δημιούργησαν πιο απλά προβλήματα τα οποία δυσκολεύτηκαν να λύσουν. Η Ellerton συμπέρανε πως τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν από τους μαθητές αντικατόπτριζαν το μαθησιακό τους περιβάλλον και πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος.

Με σκοπό να εξετάσουν τις δεξιότητες στην επίλυση προβλήματος, τον τρόπο σκέψης κατά τη δημιουργία προβλήματος και τη σχέση μεταξύ επίλυσης προβλήματος και δημιουργίας προβλήματος, οι Cai και Hwang (2002) έδωσαν σε Αμερικανούς και Κινέζους μαθητές έργα επίλυσης προβλήματος και δημιουργίας προβλήματος. Όσον αφορά την επίλυση προβλήματος, οι συμμετέχοντες έπρεπε να απαντήσουν σε ερωτήσεις που βασίζονταν στην κατάσταση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 4 *(1. «Ζωγράφισε το 4^{ο} Σχήμα.», 2. «Πόσες θα είναι οι μαύρες κουκίδες στο 6^{ο} Σχήμα; Εξήγησε* *πως βρήκες την απάντηση.», 3. «Πόσες θα είναι οι λευκές κουκίδες στο 6^{o} Σχήμα; Εξήγησε πως βρήκες την απάντηση.», 4. «Το Σχήμα 1 έχει 8 λευκές κουκίδες. Το Σχήμα 3 έχει 16 λευκές κουκίδες. Εάν ένα Σχήμα έχει 44 λευκές κουκίδες, ποιο είναι αυτό το Σχήμα (στη σειρά); Εξήγησε πως βρήκες την απάντηση.»)*, ενώ όσον αφορά τη δημιουργία προβλήματος, οι συμμετέχοντες έπρεπε να δημιουργήσουν ένα εύκολο, ένα μέτριο και ένα δύσκολο πρόβλημα για την κατάσταση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 5 *(«Ο κύριος Miller ζωγράφισε τα ακόλουθα σχήματα ακολουθώντας ένα μοτίβο, όπως φαίνεται παρακάτω. Ως εργασία για τους μαθητές του, θέλησε να δημιουργήσει τρία προβλήματα που να βασίζονται στην παραπάνω κατάσταση: ένα εύκολο πρόβλημα, ένα μέτριο πρόβλημα και ένα δύσκολο πρόβλημα. Τα προβλήματα πρέπει να λυθούν χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες της κατάστασης. Βοήθησε τον κύριο Miller να δημιουργήσει τα τρία προβλήματα.»)*. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η ποικιλία και τα είδη των προβλημάτων που δημιούργησαν οι Κινέζοι μαθητές συσχετίζονταν με την επιτυχία που οι ίδιοι σημείωσαν στις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Στον αντίποδα, η σχέση ανάμεσα στην ποικιλία και τα είδη των προβλημάτων των Αμερικανών μαθητών και την επιτυχία που σημείωσαν στην επίλυση προβλημάτων ήταν αδύναμη. Το αποτέλεσμα αυτό δεν αναιρεί την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ της επίλυσης και της δημιουργίας προβλήματος. Αντιθέτως, οι ερευνήτριες θεωρούν πως η διαφορά αυτή προκύπτει από το γεγονός πως οι Αμερικανοί μαθητές δεν χρησιμοποιούν σχεδόν ποτέ αφηρημένες στρατηγικές (abstract strategy), όπως οι Κινέζοι μαθητές. Για παράδειγμα, για να βρουν πόσες μαύρες κουκίδες θα είχε το Σχήμα 6 (Figure 6) που θα δημιουργούσαν οι ίδιοι οι συμμετέχοντες, οι περισσότεροι Κινέζοι μαθητές χρησιμοποίησαν τη στρατηγική «6 x 6» (abstract strategy), ενώ οι περισσότεροι Αμερικανοί μαθητές τη στρατηγική «ζωγραφίζω και μετρώ» (concrete strategy). Επίσης, οι Κινέζοι μαθητές χρησιμοποιούσαν περισσότερο συμβολικές αναπαραστάσεις σε αντίθεση με τους Αμερικανούς μαθητές που χρησιμοποιούσαν περισσότερες εικονικές αναπαραστάσεις.



Εικόνα 4. Η κατάσταση σύμφωνα με την οποία οι συμμετέχοντες θα έλυναν προβλήματα (πηγή: Cai & Hwang, 2002, σελ. 405).



Εικόνα 5. Η κατάσταση σύμφωνα με την οποία οι συμμετέχοντες θα δημιουργούσαν προβλήματα (πηγή: Cai & Hwang, 2002, σελ. 405).

Την ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στη δημιουργία προβλήματος και την επίλυση προβλήματος αναδεικνύουν στην έρευνά τους οι Xie και Masingila (2017), η οποία πραγματοποιήθηκε σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι ερευνήτριες, μέσα από πέντε δραστηριότητες, στις οποίες εναλλάσσονταν η δημιουργία και η επίλυση προβλήματος, διεξήγαγαν τρία γενικά συμπεράσματα για τη σχέση μεταξύ της δημιουργίας και της επίλυσης προβλήματος. Πρώτον, βρήκαν πως η δημιουργία προβλήματος συμβάλλει στην επίλυση προβλήματος. Συγκεκριμένα, όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν ένα ευκολότερο πρόβλημα, από το αρχικό πρόβλημα που τους παρουσιαζόταν, οι συμμετέχοντες κατανόησαν τη δομή του αρχικού προβλήματος και μπόρεσαν να λύσουν το αρχικό πρόβλημα. Δεύτερον, βρήκαν πως η επίλυση προβλήματος συμβάλλει στη δημιουργία προβλήματος. Όπως η δημιουργία προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την επίλυση προβλήματος, όμοια, και η επίλυση προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη δημιουργία προβλήματος. Στη συγκεκριμένη έρευνα, καθώς οι συμμετέχοντες ήταν εξοικειωμένοι μόνο με την επίλυση προβλήματος, πριν προβούν στη δημιουργία κάποιου προβλήματος, έλυναν τη μαθηματική έκφραση για την οποία θα δημιουργούσαν το πρόβλημα και γνωρίζοντας το αποτέλεσμα δημιουργούσαν το νέο πρόβλημα. Δηλαδή, η επίλυση του προβλήματος κατά τη διάρκεια της δημιουργίας του βοηθάει τον δημιουργό να ελέγχει αν βρίσκεται στη σωστή κατεύθυνση για τη δημιουργία του προσδοκώμενου προβλήματος. Τρίτον, βρέθηκε ότι η εμπλοκή εκπαιδευτικών σε δραστηριότητες δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος συμβάλλει στη διαχείριση και αποσαφήνιση των προηγούμενων γνώσεών τους. Συγκεκριμένα, η εναλλαγή σε δραστηριότητες δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος βοήθησε τους συμμετέχοντες να κατακτήσουν διαφορετικές έννοιες και να συνδέσουν το πρόβλημα που τους παρουσιαζόταν με προγενέστερες γνώσεις.

Τέλος, αναφορικά με τα παιδιά, υπάρχουν έρευνες που υποστηρίζουν ότι η εξοικείωσή τους με τη δημιουργία προβλημάτων, ενδεχομένως, έχει θετικό αντίκτυπο στη στάση τους απέναντι στην επίλυση προβλημάτων, αλλά και γενικότερα στα μαθηματικά (English, 1997, στο Austin, Carbone & Webb, 2011˙ Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, στο Austin et al., 2011).

Τα παραπάνω ευρήματα υπογραμμίζουν τη σχέση μεταξύ δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος και επιβεβαιώνουν την άποψη πως «η ανάπτυξη της ικανότητας δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων είναι εξίσου σημαντική με την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσής τους» (Stoyanova & Ellerton, 1996, στο Bonotto & Santo, 2015, σελ. 106).

Α.7 Τα οφέλη της δημιουργίας προβλήματος σε μαθητές και εκπαιδευτικούς

Με δεδομένο ότι τα παιδιά, από τη φύση τους, θέτουν προβλήματα (NCTM 1991, 2000, στο Barlow & Cates, 2006) και ότι η δημιουργία προβλημάτων συμβάλλει στην ψυχολογική και πνευματική τους ανάπτυξη (Rizvi, 2004), είναι σημαντικό να παρέχονται στα παιδιά ευκαιρίες να δημιουργούν τα δικά τους προβλήματα (NCTM 1991, 2000, στο Barlow & Cates, 2006).

Αρχικά, όταν οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα, μειώνεται η εξάρτησή τους από τον εκπαιδευτικό και τα σχολικά εγχειρίδια και, έτσι, αισθάνονται πως συμμετέχουν ενεργά στην εκπαίδευσή τους (Brown & Walter, 1993, στο Lavy & Shriki, 2007˙ English, 1996, στο Lavy & Shriki, 2007). Βλέποντας πως κινούνται ανεξάρτητα από τον εκπαιδευτικό και το σχολικό εγχειρίδιο, αναλαμβάνουν την ευθύνη να δομήσουν οι ίδιοι τις γνώσεις τους. Η διαδικασία αυτή τους γεμίζει με περιέργεια και ενθουσιασμό, συναισθήματα που αποτελούν κινητήρια δύναμη για τους ίδιους, ώστε να συμμετέχουν ακόμα πιο ενεργά στη μαθηματική τους εκπαίδευση (Cunningham, 2004). Εδραιώνοντας τη συνήθεια να θέτουν οι μαθητές ερωτήσεις (Whiten, 2004, στο Işık, Ocal & Kar, 2013) σταματούν να είναι παθητικοί δέκτες των όσων διαδραματίζονται στην τάξη και διαμορφώνουν θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Rizvi, 2004).

Η δημιουργία προβλημάτων ωφελεί τους μαθητές και νοητικά. Όταν οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα, ενθαρρύνονται να σκεφτούν προς διαφορετικές κατευθύνσεις, ενσωματώνοντας σχολική και εξωσχολική γνώση (Rizvi, 2004). Κατά συνέπεια, ενισχύεται στους μαθητές η διαφοροποιημένη και ευέλικτη σκέψη, η οποία, επίσης, βελτιώνει την ικανότητά τους να λύνουν προβλήματα (Brown & Walter, 1993, στο Lavy & Shriki, 2007˙ English, 1996, στο Lavy & Shriki, 2007). Ταυτόχρονα, αναπτύσσουν και ενδυναμώνουν την κριτική τους σκέψη (Nixon-Ponder, 1995), διευρύνουν την αντίληψή τους για τα μαθηματικά και εμπλουτίζουν-εδραιώνουν τις γνώσεις τους για βασικές μαθηματικές έννοιες (Brown & Walter, 1993, στο Lavy & Shriki, 2007˙ English, 1996, στο Lavy & Shriki, 2007). Γενικότερα, οι δραστηριότητες δημιουργίας προβλημάτων ενδυναμώνουν αυτές τις συνήθειες του νου που ευνοούν την ενασχόληση με τα μαθηματικά (Brown & Walter, 1990, στο Barlow & Cates, 2006). Επίσης, η εμπειρία των μαθητών με τη δημιουργία προβλήματος τους ωθεί να μην επικεντρώνονται, αποκλειστικά, στην εύρεση της λύσης ενός προβλήματος, αλλά και στο ίδιο το πρόβλημα (Stoyanova, 2003, στο Kılıç, 2014).

Τέλος, τα προβλήματα που δημιουργούν οι μαθητές είναι πηγή πληροφοριών για τους εκπαιδευτικούς. Σε αυτά αντικατοπτρίζονται οι ικανότητες, οι δεξιότητες και οι πεποιθήσεις που έχει ο μαθητής για τα μαθηματικά, όπως επίσης, και το τι έχει κατανοήσει (Whiten, 2004, στο Işık, et al., 2013˙ Brown & Walter, 1990˙ Toluk-Uçar, 2009˙ Rizvi, 2004). Κατά αυτόν τον τρόπο, η δημιουργία προβλημάτων, ως δραστηριότητα, μπορεί να αποτελέσει και ένα καλό διαγνωστικό εργαλείο για τις αιτίες των παρανοήσεων και των λαθών των μαθητών (Tichá & Hošpesová, 2010).

Οι δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος αποτελούν χρήσιμο εργαλείο και για τους εκπαιδευτικούς, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές περιστάσεις, εξυπηρετώντας διαφορετικούς σκοπούς (Kılıç¸ 2013). Ενδεικτικά, μία δραστηριότητα δημιουργίας προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως εργαλείο αξιολόγησης της γνώσης των μαθητών πάνω στα μαθηματικά (Lin, 2004) είτε ως μέθοδος διδασκαλίας μέσα στο πλαίσιο της τάξης (Toluk- Uçar, 2009).

Η δημιουργία προβλήματος έχει οφέλη και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Όταν οι εκπαιδευτικοί δημιουργούν οι ίδιοι προβλήματα, βελτιώνουν την παιδαγωγική τους γνώση περιεχομένου[2] (Tichá & Hošpesová, 2010). Εξετάζοντας οι εκπαιδευτικοί τα προβλήματα που δημιούργησαν, εντοπίζουν σε τι βαθμό έχουν κατανοήσει μία μαθηματική περιοχή και τι παρανοήσεις έχουν για αυτήν. Ακόμα, οι εκπαιδευτικοί μαθαίνουν με ποιον τρόπο πρέπει να διατυπώνουν τα προβλήματα και τις ερωτήσεις, ώστε να προσεγγίζουν αποτελεσματικότερα την εκάστοτε μαθηματική περιοχή (Tichá & Hošpesová, 2006, 2010). Επιπλέον, μέσα από τη δημιουργία προβλήματος επηρεάζονται

[2] Ο όρος «παιδαγωγική γνώση περιεχομένου» αναφέρεται στον τρόπο που συνδυάζεται ένα περιεχόμενο (γνωστικό αντικείμενο) με παιδαγωγική γνώση, με αποτέλεσμα το αντικείμενο του περιεχομένου που πρόκειται να διδαχθεί να μπορεί να μετασχηματιστεί και οργανωθεί με τρόπο κατανοητό για τους μαθητές (Shulman, 1987).

οι απόψεις των εκπαιδευτικών για το τι τελικά σημαίνει να γνωρίζει κανείς μαθηματικά (Toluk- Uçar 2009), οι οποίες μπορούν με τη σειρά τους να συμβάλουν στη βελτίωση της μαθηματικής γνώσης περιεχομένου τους (Κılıç, 2015).

Από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εμπλέκονται σε δραστηριότητες δημιουργίας προβλημάτων (Abu-Elwan, 1999˙ Contreras, 2007˙ Toluk-Uçar, 2009˙ Luo, 2009). Ο λόγος είναι πως οι εκπαιδευτικοί που είναι ενεργοί και στοχαστικοί δημιουργοί προβλημάτων δημιουργούν ουσιώδη, αποτελεσματικά και καλώς διατυπωμένα μαθηματικά προβλήματα (Contreras, 2007). Οι Lavy και Bershadsky (2003, στο Kılıç¸ 2013) ενθαρρύνουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να ενσωματώνουν δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος στις μελλοντικές τους τάξεις. Είναι απαραίτητο, όμως, να μπορούν και οι ίδιοι να θέτουν κατάλληλα προβλήματα, εάν θέλουν να δημιουργήσουν ένα σχολικό περιβάλλον, επίκεντρο του οποίου θα είναι η δημιουργική επίλυση προβλήματος (Abu-Elwan, 1999).

Α.8 Επιδόσεις των εκπαιδευτικών στη δημιουργία προβλήματος

Οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έχουν στρέψει το ενδιαφέρον τους τα τελευταία χρόνια στη δημιουργία προβλήματος (Luo, 2009). Οι περισσότερες έρευνες που ασχολούνται με τη δημιουργία προβλήματος επικεντρώνονται στους μαθητές (Chapman, 2012), ενώ η συζήτηση για τις επιδόσεις των εκπαιδευτικών είναι περιορισμένη (Luo, 2009). Παρ’ όλα αυτά, είναι σημαντικό να διερευνώνται οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών, καθώς επηρεάζουν τις επιδόσεις των μαθητών (Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Ma, 1996˙ Zhou, Peverly, & Xin, 2006). Οι έρευνες που μελετούν τους εκπαιδευτικούς εξετάζουν είτε πώς οι δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος επηρεάζουν τις πεποιθήσεις/πρακτικές τους, είτε τη γνώση περιεχομένου είτε την ικανότητά τους να δημιουργούν προβλήματα (Toluk-Uçar, 2009). Επίσης, μέσα από τις έρευνες που αφορούν τη δημιουργία προβλήματος, αναδύονται και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί με την εκάστοτε έννοια για την οποία καλούνται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα. Για παράδειγμα, στην έρευνα της Ball (1990), βρέθηκε πως οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα για μία συγκεκριμένη συμβολική έκφραση.

Ποια είναι η τάση των υποψήφιων εκπαιδευτικών, όταν δημιουργούν προβλήματα σε δομημένες καταστάσεις μελέτησε ο Κılıç (2015) σε έρευνα που διεξήγαγε σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς μαθηματικών και υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αναλυτικότερα, ζήτησε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν προβλήματα για τη διαίρεση 100 : 8 και οι απαντήσεις των προβλημάτων τους θα έπρεπε να είναι α) 12, β) 13 ή γ) 12.5 (δομημένη κατάσταση). Κατά τη δημιουργία των προβλημάτων παρατηρήθηκαν δύο τάσεις: είτε οι συμμετέχοντες επικεντρώνονταν στην κατάσταση του προβλήματος είτε στο αποτέλεσμα του προβλήματος. Όταν επικεντρώνονταν στην κατάσταση του προβλήματος, δημιουργούσαν τυπικά λεκτικά προβλήματα *«Μία μητέρα θέλει να μοιράσει 100 τούρκικες λίρες στα 8 παιδιά της. Πόσα λεφτά θα δώσει στο κάθε παιδί;»* ή μη τυπικά λεκτικά προβλήματα *«100 μαθητές θα πάνε για πικ-νικ. Κάθε όχημα χωράει 8 μαθητές. Πόσα οχήματα χρειάζονται για να μεταφέρουν τους μαθητές;»*. Συγκεκριμένα, το πρώτο πρόβλημα ανήκει στα τυπικά προβλήματα, επειδή το αποτέλεσμα της διαίρεσης (100 : 8 = 12.5) ταυτίζεται με την απάντηση του προβλήματος, καθώς είναι ρεαλιστικό να πάρουν τα παιδιά από 12.5 λίρες. Το δεύτερο πρόβλημα ανήκει στα μη τυπικά προβλήματα, γιατί το αποτέλεσμα της διαίρεσης (100 : 8 = 12.5) δεν μπορεί να είναι και η απάντηση του προβλήματος, εφόσον δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Συνεπώς, επειδή δεν είναι ρεαλιστικό να μεταφέρουν 12 ολόκληρα οχήματα και ένα μισό όχημα τους μαθητές, η απάντηση του προβλήματος είναι 13 οχήματα και όχι 12.5 οχήματα. Δηλαδή, στα μη τυπικά προβλήματα δίνεται βάση, ώστε η απάντηση του προβλήματος να συμβαδίζει με την πραγματικότητα. Αντίθετα, όταν οι συμμετέχοντες επικεντρώνονταν στο αποτέλεσμα της κατάστασης είτε η λεκτική περιγραφή των προβλημάτων τους δεν ανταποκρινόταν στην επιλεγόμενη κατάσταση (ακατάλληλα προβλήματα), *«Ο Αχμέτ έχει 100 τούρκικες λίρες. 8 άτομα μοιράστηκαν αυτά τα χρήματα ίσα. Μετά τη μοιρασιά, ο Αχμέτ αγόρασε μία μαστίχα που κόστιζε 0.5 τούρκικες λίρες. Πόσα λεφτά έχει τώρα;»*, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, στην προσπάθειά του ο συμμετέχων να δημιουργήσει ένα πρόβλημα του οποίου η απάντηση θα είναι το 12 δημιουργεί ένα πρόβλημα που λύνεται με τις πράξεις 100 : 8 και 12.5 - 0.5 και όχι μόνο με τη διαίρεση 100 : 8, είτε η λεκτική περιγραφή δεν σχετιζόταν καθόλου με την κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούσαν δικούς τους αριθμούς που οδηγούσαν στο αποτέλεσμα της κατάστασης (άσχετα προβλήματα), *«36 μήλα είχαν μοιραστεί ίσα σε αδερφούς. Κάθε αδερφός πήρε από 3 μήλα. Πόσοι ήταν οι αδερφοί;».* Και οι δύο ομάδες συμμετεχόντων δημιούργησαν με μεγαλύτερη συχνότητα τυπικά προβλήματα (100 : 8 = 12.5) (31,25%, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών και 27,86%, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης), παρά μη τυπικά προβλήματα (100 : 8 = 12, 100 : 8 = 13), ενδεχομένως, επειδή οι προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις τους σχετίζονταν περισσότερο με τέτοιου είδους προβλήματα. Από το σύνολο των μη τυπικών προβλημάτων τα περισσότερα δημιουργήθηκαν από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών, αν και γενικότερα και οι δυο ομάδες συμμετεχόντων δυσκολεύτηκαν να δημιουργήσουν μη τυπικά προβλήματα. Επίσης, οι υποψήφιοι μαθηματικοί εκπαιδευτικοί δημιούργησαν τα λιγότερα προβλήματα επικεντρωμένα στο αποτέλεσμα, ενώ τα περισσότερα προβλήματα αυτής της κατηγορίας κρίθηκαν ακατάλληλα. Ακόμα, οι υποψήφιοι μαθηματικοί εκπαιδευτικοί έθεσαν με μεγαλύτερη επιτυχία, από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο μη τυπικά όσο και τυπικά λεκτικά προβλήματα, χωρίς να εμφανίσουν πολλές δυσκολίες. Ενδεχομένως, το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στις προηγούμενες εμπειρίες τους, καθώς εμπλέκονται περισσότερο με τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Τέλος, δημιουργήθηκαν και κάποια μη λεκτικά προβλήματα και σε κάποιες περιπτώσεις οι συμμετέχοντες δεν ήταν σε θέση να δημιουργήσουν κανένα πρόβλημα. Αυτά τα ευρήματα συμφωνούν με τα ευρήματα των Chen, Van Dooren, Chen και Verschaffel (2011) που μελέτησαν, επίσης, τη δημιουργία προβλήματος σε εκπαιδευτικούς.

Την ικανότητα δημιουργίας προβλήματος υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, επίσης, για μαθηματικές εκφράσεις διαίρεσης, πριν από και μετά από παρέμβαση, μελέτησε η Rizvi (2004) με σκοπό να διαπιστώσει, αν μετά την παρέμβαση οι συμμετέχοντες μπορούσαν να δημιουργήσουν προβλήματα για καθημερινές καταστάσεις στις οποίες να απεικονίζονται διαιρέσεις με κλάσματα. Η παρέμβαση αποτελούνταν από μία σύντομη ατομική διδασκαλία στην οποία παρουσιαζόταν το μοντέλο του λόγου ή της αναλογίας (rate or ratio model) για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης χρησιμοποιώντας το σχηματικό διάγραμμα του Vergnaud (1994, στο Rizvi, 2004). Πριν από την παρέμβαση, οι συμμετέχοντες δημιούργησαν μόνο προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς με ακέραιο διαιρέτη και κανένας δεν μπόρεσε να δημιουργήσει κάποιο πρόβλημα διαίρεσης με διαιρέτη κλασματικό αριθμό. Η Rizvi πρότεινε πως η αδυναμία των συμμετεχόντων να δημιουργήσουν προβλήματα διαίρεσης με διαιρέτη κλασματικό αριθμό οφείλεται στην εξάρτησή τους από το μοντέλο διαίρεσης της δίκαιης μοιρασιάς, στη δυσκολία μετάφρασης μαθηματικών εκφράσεων σε καταστάσεις της καθημερινότητας, στην απουσία εμπλοκής των εκπαιδευτικών με δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος, αλλά και στην επαφή τους μόνο με τις διαισθητικές ερμηνείες της διαίρεσης. Μετά την παρέμβαση, οι συμμετέχοντες κατάφεραν να δημιουργήσουν προβλήματα διαίρεσης με διαιρέτη κλασματικό αριθμό, αλλά δεν ανέπτυξαν ούτε ευελιξία ούτε καινοτομία, καθώς δημιούργησαν παραπλήσια προβλήματα με αυτά της ερευνήτριας. Όπως και στην έρευνα του Kılıç (2015), η προηγούμενη εμπειρία με τη δημιουργία προβλήματος και την έννοια για την οποία θα δημιουργούταν το πρόβλημα επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων.

Η δυσκολία των εκπαιδευτικών να δημιουργούν κατάλληλα προβλήματα για κλάσματα εντοπίζεται και στην έρευνα του Luo (2009). Η έρευνα διεξήχθη σε Αμερικανούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με σκοπό να μελετηθεί η ικανότητά τους στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων για συγκεκριμένες κλασματικές εκφράσεις πολλαπλασιασμού. Για τον σκοπό αυτό, παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες δύο κλασματικές εκφράσεις πολλαπλασιασμού και τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα αφορούσε τον πολλαπλασιασμό $1\frac{2}{3}$ x 4 και το δεύτερο πρόβλημα αφορούσε τον πολλαπλασιασμό $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{3}$. Σύμφωνα με τον Izsak (2006, στο Luo, 2009, σελ. 86), το πρώτο πρόβλημα σχετιζόταν με «τα μέρη ενός όλου» και το δεύτερο πρόβλημα σχετιζόταν «με τα μέρη ενός μέρους του όλου». Τα αποτελέσματα της έρευνας του Luo έδειξαν πως, γενικά, είναι πιο εύκολο να δημιουργηθεί ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, όταν ο ένας παράγοντας της κλασματικής έκφρασης είναι ακέραιος αριθμός. Επίσης, βρέθηκε πως οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν περισσότερο να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που αφορούσε «τα μέρη ενός μέρους του όλου» (δεύτερο πρόβλημα), παρά «τα μέρη ενός όλου» (πρώτο πρόβλημα). Αρκετοί συμμετέχοντες δημιούργησαν ακατάλληλα προβλήματα, ενώ ένας σημαντικός αριθμός συμμετεχόντων δεν μπόρεσε να δημιουργήσει ένα επιλύσιμο πρόβλημα για τις κλασματικές εκφράσεις που τους δόθηκαν. Σύμφωνα με τον ερευνητή, η δυσκολία των υποψήφιων εκπαιδευτικών να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα ίσως οφείλεται στο γεγονός πως οι εκπαιδευτικοί δεν κατέχουν τη μαθηματική γνώση περιεχομένου που σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Το γεγονός πως η προηγούμενη εμπειρία που έχει ένας εκπαιδευτικός σε μία μαθηματική περιοχή επηρεάζει και την επίδοσή του σε αυτήν φαίνεται και στην έρευνα του Chapman (2012), σκοπός της οποίας ήταν να διαπιστώσει τι αποκομίζουν οι εκπαιδευτικοί από τη δημιουργία προβλήματος, γενικά, και από τη δημιουργία προβλήματος που προκύπτει από διαφορετικές καταστάσεις (π.χ., δημιουργία ενός ανοιχτού προβλήματος). Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να δημιουργήσουν εννέα διαφορετικά προβλήματα. Ενδεικτικά, ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα της επιλογής τους, ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου, όπως και να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα, τροποποιώντας ένα άλλο πρόβλημα που τους δόθηκε. Αφότου, οι συμμετέχοντες θα ολοκλήρωναν τη διαδικασία της δημιουργίας των προβλημάτων, έπρεπε να γράψουν μια έκθεση στην οποία θα περιέγραφαν τι έμαθαν μέσα από τη διαδικασία της δημιουργίας προβλήματος για τα μαθηματικά, για τη δημιουργία προβλήματος, για την επίλυση προβλήματος και για τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν περισσότερο με τις δραστηριότητες ανοιχτού τύπου που σχετίζονταν με μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια (π.χ., τον πολλαπλασιασμό), καθώς η διαδικασία αυτή αντιτίθετο με την προηγούμενη εμπειρία τους, δηλαδή την ενασχόλησή τους, κυρίως, με προβλήματα κλειστού τύπου. Επίσης, αν και κάποιοι συμμετέχοντες γνώριζαν πως τα ανοικτού τύπου προβλήματα έπρεπε να έχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα. Γενικότερα, οι υπάρχουσες γνώσεις των συμμετεχόντων, η φαντασία, και η προηγούμενη εμπειρία τους με την επίλυση προβλήματος ήταν παράγοντες που επηρέασαν τον τρόπο που οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δημιουργούσαν προβλήματα. Τέλος, οι συμμετέχοντες περιέγραψαν τη διαδικασία δημιουργίας προβλήματος, ως μία εμπειρία που οδηγεί στην αυτογνωσία, καθώς μέσα από αυτήν, διαπίστωσαν τις ικανότητες και τις αδυναμίες τους. Για παράδειγμα, έγραψαν πως έμαθαν πόσο δύσκολο είναι να δημιουργηθούν προβλήματα ανοιχτού τύπου, τα οποία για τη δημιουργία τους χρειάζεται περισσότερη σκέψη παρά απομνημόνευση κανόνων, και να διακρίνουν πότε μία ερώτηση ενός προβλήματος μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρουν αυτού που θα το λύσει και πότε όχι. Ακόμα, συνειδητοποίησαν πως τα μαθηματικά δεν είναι μία απλή αποστήθιση κανόνων και πως όταν κάποιος δημιουργεί διαφορετικού είδους προβλήματα εξασκείται σε διαφορετικούς τρόπους σκέψης.

Τέλος, ακόμα μία μαθηματική περιοχή για την οποία οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα είναι οι εξισώσεις. Οι Işık και Kar (2012) θέλοντας να εξετάσουν τις πιθανές δυσκολίες των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη δημιουργία προβλημάτων με εξισώσεις, χρησιμοποίησαν ένα τεστ δημιουργίας προβλήματος [Problem Posing Test (PPT)] στο οποίο υπήρχαν δύο εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και τρία ζεύγη εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να δημιουργήσουν προβλήματα στα οποία χρησιμοποιούνταν οι εξισώσεις σε καταστάσεις της καθημερινότητας. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν εφτά διαφορετικές κατηγορίες δυσκολιών που αφορούσαν στο μαθηματικό περιεχόμενο: 1) λανθασμένη μετάφραση της μαθηματικής σημειογραφίας (λειτουργίες, παρενθέσεις) σε μαθηματικές προτάσεις, 2) απόδοση μη ρεαλιστικών τιμών στις άγνωστες μεταβλητές των προβλημάτων, 3) αλλαγή της δομής της εξίσωσης κατά τη δημιουργία του προβλήματος, 4) χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων στη λεκτική αφήγηση των προβλημάτων (π.χ., x, y), 5) αποτυχία δημιουργίας σχέσης μέρους-όλου, 6) δημιουργία ξεχωριστών προβλημάτων για κάθε εξίσωση ενός ζεύγους εξισώσεων και 7) αδυναμία δημιουργίας σχέσης μεταξύ των μεταβλητών. Ως αίτια των προαναφερθεισών δυσκολιών θεωρήθηκαν οι γλωσσικές δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά τη μετατροπή των αλγεβρικών εκφράσεων σε λεκτικές εκφράσεις, η έλλειψη εννοιολογικών πληροφοριών για τις εξισώσεις και το γεγονός πως οι συμμετέχοντες δεν ενδιαφέρθηκαν ώστε τα προβλήματα που θα δημιουργήσουν να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

Από τις προαναφερθείσες έρευνες διαπιστώνεται πως οι εκπαιδευτικοί έχουν χαμηλή επίδοση στη δημιουργία προβλήματος, επειδή δεν είναι εξοικειωμένοι με το να δημιουργούν προβλήματα αλλά και, επειδή συνήθως δεν έχουν κατακτήσει εννοιολογικά την έννοια για την οποία δημιουργούν πρόβλημα. Η έλλειψη εμπειρίας με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων (π.χ., ανοιχτού τύπου προβλήματα) και η απουσία σύνδεσης μαθηματικών εκφράσεων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής είναι παράγοντες που, επίσης, οδηγούν στη δημιουργία ακατάλληλων προβλημάτων.

Β. Κλάσματα και δημιουργία προβλήματος

Β.1 Η γνώση των εκπαιδευτικών για τα κλάσματα

Τα κλάσματα θεωρούνται πως είναι η πιο δύσκολή περιοχή των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου (Smith, 2002, στο Ward & Thomas, 2007). Τα κλάσματα δεν δυσκολεύουν μόνο τους μαθητές. Από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως ακόμα και οι υποψήφιοι και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί εμφανίζουν ανεπαρκή γνώση για τα κλάσματα (Ball,1990˙ Kilcan, 2006, στο Toluk-Uçar, 2009˙ Ma, 1999˙ Marchionda, 2006˙ Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Toluk-Uçar, 2009˙ Zhou, Peverly & Xin, 2006). Για παράδειγμα, η Marchionda (2006) παρατήρησε πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν αδύναμη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα.

Η Tirosh (2000), κατά τη διεξαγωγή έρευνας με στόχο να περιγράψει τη γνώση περιεχομένου διαίρεσης κλασμάτων ισραηλινών υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, βρήκε πως οι περισσότεροι συμμετέχοντες, αν και γνώριζαν πώς να διαιρούν κλάσματα, δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν τη διαδικασία που ακολούθησαν.

Τη γνώση των υποψήφιων εκπαιδευτικών για τα κλάσματα μελέτησε και η Toluk-Uçar (2009) μέσα από δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος. Τα αποτελέσματα της έρευνάς της έδειξαν πως, αν και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί μπορούσαν να εκτελούν πράξεις με κλάσματα, αδυνατούσαν να συσχετίσουν τα κλάσματα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, σχολιάζοντας οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα πως έχουν διδαχθεί μόνο να εκτελούν τέτοιες πράξεις και όχι να τις εντοπίζουν στην καθημερινότητα. Επιπλέον, βρέθηκε πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί αντιμετώπιζαν τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς και όχι ως ποσότητες και πως δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν τη μονάδα στην οποία αναφερόταν το κλάσμα.

Θέλοντας οι Luo, Lo και Leu (2011) να παρουσιάσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές στη θεμελιώδη γνώση υποψήφιων εκπαιδευτικών από την Αμερική και την Ταιβάν για τα κλάσματα, διεξήγαγαν έρευνα και βρήκαν πως οι Αμερικανοί υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν αρκετά χαμηλότερο επίπεδο βασικών γνώσεων για τα κλάσματα από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς της Ταιβάν. Ωστόσο, πέρα κάποιων εξαιρέσεων, και οι δύο ομάδες των υποψήφιων εκπαιδευτικών κατανοούσαν και δυσκολεύονταν με τα κλάσματα σε παρόμοιο βαθμό. Για παράδειγμα, και οι δύο ομάδες κατανοούσαν πως, όταν συγκρίνουν δύο κλασματικές ποσότητες, αυτές πρέπει να προέρχονται από το ίδιο όλο, όπως και οι δύο ομάδες δυσκολεύονταν να διαλέξουν ποιο σχήμα απεικόνιζε μία δεδομένη πολλαπλασιαστική έκφραση που τους παρουσιάστηκε.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι Αμερικανοί υποψήφιοι εκπαιδευτικοί με τα κλάσματα παρουσιάζονται και σε έρευνα που διεξήχθη σε Αμερικανούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς και Κινέζους υποψήφιους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, οι Αμερικανοί εκπαιδευτικοί παρουσίασαν σημαντικά χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με τους Κινέζους εκπαιδευτικούς, σε δραστηριότητες που αφορούσαν στην έννοια του κλάσματος, σε υπολογισμούς κλασμάτων και στην επίλυση λεκτικών προβλήματα με κλάσματα (Zhou et al., 2006).

Παρόμοιες δυσκολίες με τα κλάσματα εμφανίζουν και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί. Σε έρευνα των Ward και Thomas (2007), βρέθηκε πως η επίδοση των εκπαιδευτικών ήταν καλύτερη στις ερωτήσεις που αφορούσαν το γνωστικό περιεχόμενο των κλασμάτων, ενώ δυσκολεύτηκαν με την περιγραφή των βασικών ιδεών που περιλαμβάνουν τα κλάσματα, παρουσιάζοντας χαμηλή εννοιολογική γνώση. Ιδιαίτερη δυσκολία αντιμετώπισαν οι εκπαιδευτικοί με την πρόσθεση και τη διαίρεση κλασμάτων, με σχεδόν το ένα τρίτο των απαντήσεων των εκπαιδευτικών να παρουσιάζει σε αυτές τις περιοχές έλλειψη εννοιολογικής γνώσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας ώθησαν τις ερευνήτριες να υποστηρίξουν πως η γνώση που φέρουν οι εκπαιδευτικοί, ενδεχομένως, επηρεάζει την επίδοση των μαθητών.

Οι ανεπαρκείς γνώσεις των εκπαιδευτικών για την περιοχή των κλασμάτων ενδεχομένως είναι και η αιτία που επηρεάζει την αυτοπεποίθησή τους για αυτήν τη μαθηματική περιοχή. Έχει βρεθεί πως η αυτοπεποίθηση για τη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων διαφέρει ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς (Ball, 1990˙ Newton, 2009). Συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζουν πολύ χαμηλή αυτοπεποίθηση σχετικά με τις ικανότητές τους για τα κλάσματα (Newton, 2009). Μάλιστα, έχουν περισσότερο άγχος από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, παρ’ όλο που και οι τελευταίοι παρουσιάζουν δυσκολίες στο πεδίο αυτό. Η αυξημένη αυτοπεποίθηση των υποψήφιων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προέρχεται από την πεποίθηση πως γνωρίζουν καλά μαθηματικά (Ball, 1990).

Οι αιτίες των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων ενδεχομένως είναι απότοκος σύγχυσης μεταξύ αλγορίθμων, ακατάλληλης εφαρμογής αλγορίθμων ή υπεργενίκευση των κανόνων που ισχύουν στις πράξεις με ακέραιους αριθμούς (Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Williams & Ryan, 2002, στο Young & Zientek, 2011).

Β.2 Δημιουργία προβλημάτων για τα κλάσματα από τους εκπαιδευτικούς

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων (Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014).

Στην έρευνα των Δεσλή και Αβραμίδου (2015), ζητήθηκε από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα με σενάριο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πρόσθεσης κλασμάτων ($\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$) και ένα πρόβλημα με σενάριο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πολλαπλασιασμού κλασμάτων ($\frac{1}{2}$ x $\frac{2}{3}$). Τα αποτελέσματα έδειξαν πως ένα μεγάλο ποσοστό των υποψήφιων εκπαιδευτικών παρουσίασε είτε αδύναμη (35,3%) είτε πολύ καλή (40%) επίδοση κατά τη δημιουργία προβλημάτων πρόσθεσης, ενώ παρουσίασε ιδιαίτερα χαμηλή επίδοση κατά τη δημιουργία προβλημάτων πολλαπλασιασμού, καθώς το 15,7% των συμμετεχόντων μπόρεσε να δημιουργήσει ένα κατάλληλο πρόβλημα πολλαπλασιασμού. Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας τα παρουσίασαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί που φοιτούσαν στα μικρότερα έτη.

Παρόμοια, και στην έρευνα της Doğan-Coşkun (2019), που ζητήθηκε από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα για τέσσερις συγκεκριμένες κλασματικές εκφράσεις πρόσθεσης, βρέθηκε πως, αν και η πλειονότητα των συμμετεχόντων δημιούργησε κάποιο πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων, λιγότερο από το ένα τέταρτο αυτών των προβλημάτων κρίθηκε κατάλληλο.

Χαμηλή επίδοση, κατά τη δημιουργία προβλημάτων πρόσθεσης κλασμάτων, είχαν και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα των Kar και Isik (2014). Στη συγκεκριμένη έρευνα, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν δύο διαφορετικά προβλήματα για κάθε μία από τις τέσσερις δοκιμασίες που τους δόθηκαν. Στις δοκιμασίες περιλαμβάνονταν προσθέσεις γνήσιων κλασμάτων ($\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$), πρόσθεση μεικτού κλάσματος με γνήσιο κλάσμα ($2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$) και πρόσθεση μεικτού κλάσματος με μεικτό κλάσμα ($2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6}$). Η επίδοσή των συμμετεχόντων μειωνόταν, κυρίως, στις δοκιμασίες που τουλάχιστον ένα από τα δύο κλάσματα ήταν μεικτό. Επίσης, συγκριτικά με τους συμμετέχοντες που στις δοκιμασίες δημιούργησαν είτε μόνο προβλήματα αλλαγής είτε μόνο προβλήματα συνδυασμού, καλύτερη επίδοση είχαν αυτοί που δημιούργησαν προβλήματα με διαφορετικές σημασιολογικές δομές (semantic structures) για μία δοκιμασία, δηλαδή δημιουργούσαν και πρόβλημα αλλαγής και πρόβλημα συνδυασμού.

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση και στη δημιουργία προβλημάτων με αφαίρεση κλασμάτων. Η Doğan-Coşkun (2018) θέλησε να εξετάσει εάν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων, και εάν όχι, να προσδιορίσει τους τύπους λαθών των προβλημάτων. Για την έκφραση $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως η πλειονότητα των συμμετεχόντων δεν κατάφερε να δημιουργήσει κατάλληλα προβλήματα, ενώ 34 συμμετέχοντες δεν δημιούργησαν κανένα πρόβλημα.

Τη δημιουργία προβλήματος με αφαίρεση κλασμάτων εξέτασε και η Iskenderoğlu, αλλά σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (2017). Στους συμμετέχοντες δόθηκε ένα τεστ δημιουργίας προβλήματος (PPT) με τέσσερις δοκιμασίες που αφορούσαν αφαιρέσεις κλασμάτων. Οι δοκιμασίες περιλάμβαναν γνήσια και μεικτά κλάσματα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων μειώνονταν, καθώς προχωρούσαν από την πρώτη δοκιμασία, όπου και το κλάσμα του μειωτέου και το κλάσμα του αφαιρετέου ήταν γνήσια κλάσματα, στην τέταρτη δοκιμασία, όπου ένα μεικτό κλάσμα αφαιρούνταν από ένα άλλο μεικτό κλάσμα. Επίσης, η ερευνήτρια οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν σημαντικές ελλείψεις κατά τη δημιουργία προβλημάτων με αφαίρεση κλασμάτων.

Οι τύποι λαθών που εντοπίζονται στα προβλήματα που δημιουργούν οι εκπαιδευτικοί, υποψήφιοι και εν ενεργεία, είναι κοινοί και για τα προβλήματα πρόσθεσης και για τα προβλήματα αφαίρεσης. Τα λάθη αυτά είναι πως οι εκπαιδευτικοί: 1) αποδίδουν στα κλάσματα τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, π.χ., *«Η μητέρα μου* *έκοψε μία πίτσα σε 4 κομμάτια και μου έδωσε 3 κομμάτια. Η μητέρα έκοψε άλλη πίτσα σε 2 κομμάτια και έδωσε 1 κομμάτι στην αδερφή μου. Πόσα κομμάτια πίτσας έχω παραπάνω από την αδερφή μου;»* (Toluk-Uçar, 2009), 2) κατά την πρόσθεση κλασμάτων δεν προσθέτουν το δεύτερο κλάσμα στο πρώτο, αλλά προσθέτουν το δεύτερο κλάσμα στο υπόλοιπο του όλου. Για παράδειγμα, αντί να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για τη μαθηματική έκφραση $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ δημιουργούν ένα πρόβλημα για τη μαθηματική έκφραση $\frac{1}{3}+(1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2}$, π.χ., *«Η Ετζέ περπάτησε το $\frac{1}{3}$ της απόστασης. Αφού ξεκουράστηκε για λίγο, περπάτησε το $\frac{1}{2}$ της διαδρομής που της έμεινε. Πόσο περπάτησε η Ετζέ;»* (Kar & Isik, 2014). Αντίστοιχα, για την αφαίρεση, δεν αφαιρούν το κλάσμα του αφαιρετέου από το κλάσμα του μειωτέου, αλλά το αφαιρούν από το υπόλοιπο του όλου. Για παράδειγμα, αντί να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για τη μαθηματική έκφραση $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$ δημιουργούν ένα πρόβλημα για τη μαθηματική έκφραση $\frac{3}{4}-(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4})$, π.χ., *«Αφού, εγώ διάβασα τα $\frac{3}{4}$ από ένα βιβλίο σήμερα, σχεδιάζω να διαβάσω το $\frac{1}{8}$ από το υπόλοιπο μέρος του βιβλίου αύριο. Πόσο παραπάνω από το βιβλίο θα έχω διαβάσει σήμερα από ότι αύριο;»* (Doğan-Coşkun, 2018), 3) χρησιμοποιούν διαφορετικές μονάδες μέτρησης για τα κλάσματα, π.χ., *«Η Αϊσέ ήπιε τα $2\frac{1}{3}$ από ένα ολόκληρο μπουκάλι γάλα. Αργότερα, αυτή ήπιε $3\frac{1}{6}$ λίτρα γάλα. Πόσο γάλα ήπιε η Αϊσέ;»* (Kar & Isik, 2014), 4) δεν αφορούν τα κλάσματα στο ίδιο όλο, αλλά σε διαφορετικά, π.χ., *«Η Ελίφ έδωσε το $\frac{1}{2}$ των χρημάτων της στην Αϊσέ και η Τζέμρε έδωσε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων της στην Αϊσέ, επίσης. Πόσα χρήματα έχει η Αϊσέ συνολικά;»* (Kar & Isik, 2014), 5) αδυνατούν να αποδώσουν την αριθμητική πράξη στην ερώτηση του προβλήματος, π.χ., *«Έχουμε τα $\frac{3}{4}$ από ένα ψωμί για το πρωινό μας. Έφαγα το $\frac{1}{8}$ από το ψωμί που είχαμε. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί;»* (Doğan-Coşkun, 2018), 6) αδυνατούν να δημιουργήσουν μία σχέση μέρους όλου, π.χ., *«Ο Αλή ξόδεψε το $\frac{1}{2}$ του μισθού του στα ψώνια και τα $\frac{3}{4}$ του μισθού του στους λογαριασμούς. Τι μέρος από το μισθό του έχει ξοδέψει;»* (Kar & Isik, 2014), 7) αδυνατούν να εκφράσουν τα μέρη ενός όλου, όταν πρόκειται για μεικτό κλάσμα, π.χ., για την κλασματική έκφραση $2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ ένας συμμετέχοντας έγραψε *«Η Αϊσέ ήπιε $\frac{1}{3}$ από ένα μπουκάλι γάλα. Αυτή έδωσε τα $\frac{2}{5}$ από αυτό στη γάτα της. Πόσο χρησιμοποίησε από το γάλα της;»* (Kar & Isik, 2014), 8) εκφράζουν το κλάσμα του αφαιρετέου ως μία συγκεκριμένη ποσότητα του κλάσματος του μειωτέου (αφαίρεση κλασμάτων), π.χ., *«Ο Αλή αγόρασε ένα κέικ και πήρε τα $\frac{3}{4}$ του κέικ για τον εαυτό του. Έπειτα, ο Αλή έδωσε το $\frac{1}{8}$ από το κέικ που πήρε για τον εαυτό του στην Αϊσέ. Τι κλάσμα από το κέικ έμεινε τώρα για την Αϊσέ;»,* 9) αποδίδουν στο όλο μία δική τους συγκεκριμένη ποσότητα, με αποτέλεσμα τα κλάσματα να εκφράζουν μία συγκεκριμένη ποσότητα από το όλο που δημιούργησαν. Για παράδειγμα, κατά τη δημιουργία ενός προβλήματος για την κλασματική έκφραση $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, ένας συμμετέχοντας όρισε αυθαίρετα πως το όλο στο οποίο θα αναφέρονται αυτά τα κλάσματα θα είναι «24 ξηροί καρποί» δημιουργώντας το πρόβλημα *«Έχω 24 φιστίκια. Ο Μεχμέτ έφαγε το $\frac{1}{2}$ από αυτά και ο φίλος μου τα $\frac{3}{4}$ από αυτά. Πόσα φιστίκια φάγαμε εγώ και ο φίλος μου;»* (Kar & Isik, 2014) (Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Işık et al., 2013˙ Işık & Kar, 2012˙ Kar & Isik, 2014˙ Luo, 2009˙ McAllister & Beaver, 2012˙ Toluk-Ucar, 2009).

Από τα προαναφερθέντα λάθη, με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίζονται η απόδοση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στους κλασματικούς αριθμούς, η μη αναφορά των κλασμάτων στο ίδιο όλο αλλά σε διαφορετικά και η αδυναμία δημιουργίας μιας σχέσης μέρους-όλου (Kar & Isik, 2014). Το γεγονός πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί σε κάθε έρευνα επιδίδονται σε παρόμοια λάθη οδηγεί στο συμπέρασμα πως οι τύποι λαθών που προκύπτουν από τη μετατροπή συμβολικών εκφράσεων (symbolic expressions) σε λεκτικές εκφράσεις (verbal expressions) είναι όμοιοι σε διεθνές επίπεδο (Kar & Isik, 2014).

Όσον αφορά τα προβλήματα πρόσθεσης, φαίνεται πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δείχνουν ιδιαίτερη προτίμηση στη δημιουργία προβλημάτων συνδυασμού (Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Doğan-Coşkun, 2019˙ Kar & Işık, 2014). Συγκεκριμένα, τόσο η πλειονότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών στην έρευνα των Δεσλή και Αβραμίδου (2015) (75%) όσο και η πλειονότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών στην έρευνα των Kar και Işık (2014) (68%) δημιούργησαν προβλήματα συνδυασμού. Παρόμοια, τα προβλήματα συνδυασμού ήταν σχεδόν τα διπλάσια από τα προβλήματα αλλαγής στην έρευνα της Doğan-Coşkun (2019).

Όσον αφορά τα προβλήματα αφαίρεσης, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί προτιμούν να δημιουργούν προβλήματα διαχωρισμού παρά προβλήματα σύγκρισης. Η διαφορά στην προτίμηση αυτή δεν είναι πάντα μεγάλη. Για παράδειγμα, σε κάποιες περιπτώσεις, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δημιούργησαν 5 προβλήματα διαχωρισμού και 2 προβλήματα σύγκρισης (Kilıç, 2013), ενώ σε άλλες περιπτώσεις δημιούργησαν 38 προβλήματα διαχωρισμού και μόλις 6 προβλήματα σύγκρισης (Doğan-Coşkun, 2018).

Τα προβλήματα, όπως και η επίλυση προβλήματος, είναι δραστηριότητες που κατέχουν κεντρική θέση στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) των μαθηματικών (Siswono, Kohar, Kurniasari, & Astuti, 2016˙ Υ.Π.Ε.Π.Θ., 2003), ενώ η δημιουργία προβλήματος, αν και συνδέεται άμεσα με την επίλυση προβλήματος, βρίσκεται τα τελευταία χρόνια στο προσκήνιο της μαθητικής εκπαίδευσης (Işık, Ocal, & Kar, 2013˙ Luo, 2009). Η εμπλοκή των εκπαιδευτικών σε δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος συμβάλλει στη βελτίωση της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών για την εκάστοτε μαθηματική έννοια για οποία δημιουργείται το πρόβλημα. Επιπλέον, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να είναι ενεργοί και στοχαστικοί δημιουργοί κατάλληλα διατυπωμένων προβλημάτων (Contreras, 2007), γιατί η επίδοσή τους επηρεάζει και την επίδοση των μαθητών τους (Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Ma, 1996˙ Zhou, Peverly, & Xin, 2006). Από τη βιβλιογραφία, όμως, προκύπτει πως οι εκπαιδευτικοί, γενικά, δυσκολεύονται να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα για διαφορετικές μαθηματικές περιοχές συμπεριλαμβανομένης και αυτής των κλασμάτων (Ball, 1990˙ Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Işık & Kar, 2012˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014˙ Kılıç, 2015˙ Rizvi, 2004). Συγκεκριμένα, τα κλάσματα είναι μία μαθηματική περιοχή στην οποία, πέρα από τους μαθητές, και οι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν ανεπαρκή γνώση (Ball,1990˙ Kilcan, 2006, στο Toluk-Uçar, 2009˙ Ma, 1999˙ Marchionda, 2006˙ Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Toluk-Uçar, 2009˙ Zhou, Peverly & Xin, 2006). Εφόσον, και η δημιουργία προβλήματος και τα κλάσματα είναι περιοχές στις οποίες οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση, οι έρευνες πάνω στη δημιουργία προβλήματος στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων μπορούν να αποδώσουν σημαντικά ευρήματα που να συμβάλλουν στη βελτίωση της επίδοσης των εκπαιδευτικών και στη δημιουργία προβλήματος και στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 που ακολουθεί περιγράφεται η Μεθοδολογία της έρευνας που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας με σκοπό να εξετάσει την ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1 Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελούνταν συνολικά από 84 άτομα: από αυτά, οι 57 (67,9%) ήταν υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι 27 (32,1%) ήταν απόφοιτοι εκπαιδευτικοί. Στο σύνολο υπήρχαν 17 άνδρες (20,2%) και 67 γυναίκες (79,8%).

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί προέρχονταν από διαφορετικά παιδαγωγικά τμήματα δημοτικής εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, 9 άτομα (15,8%) φοιτούσαν στο 1^{ο} έτος, 14 άτομα (24,6%) φοιτούσαν στο 2^{ο} έτος, 16 άτομα (28,1%) φοιτούσαν στο 3^{ο} έτος και 18 άτομα (31,6%) φοιτούσαν στο 4^{ο} έτος. Από το σύνολο των υποψήφιων εκπαιδευτικών, οι άνδρες ήταν 11 (19,3%) και οι γυναίκες ήταν 46 (80,7%).

Οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί προέρχονταν από διαφορετικά παιδαγωγικά τμήματα δημοτικής εκπαίδευσης, από τους οποίους, οι άνδρες ήταν 6 (22,2%) και οι γυναίκες ήταν 21 (77,8%). Και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί δεν είχαν διδακτική εμπειρία στα κλάσματα. Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν με τυχαία βολική δειγματοληψία.

2.2 Σχεδιασμός έρευνας – εργαλείο μέτρησης

Η ερευνητική στρατηγική που ακολουθήθηκε ήταν η ποσοτική έρευνα στην οποία εφαρμόστηκε συγχρονικό σχέδιο, καθώς οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν σε δοκιμασίες έργων σε μία δεδομένη χρονική στιγμή. Τα έργα παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες με ηλεκτρονική μορφή.

Για τους σκοπούς της έρευνας σχεδιάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν δύο έργα. Το Έργο 1 αφορούσε στη «δημιουργία λεκτικού προβλήματος» και σκοπός του ήταν να εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων. Το Έργο 1 περιελάμβανε μία δοκιμασία στην οποία καλούνταν οι συμμετέχοντες να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων. Η επιλογή της δοκιμασίας του Έργου 1 βασίστηκε σε αντίστοιχες έρευνες που αφορούσαν στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων με κλάσματα στις οποίες οι ερευνητές παρουσίαζαν στους συμμετέχοντες κλασματικές εκφράσεις και τους ζητούσαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα γι' αυτές (Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014˙ Kılıç, 2014). Επιπλέον, για τη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων επιλέχθηκαν οι κλασματικοί αριθμοί $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{5}$, έτσι ώστε για την κλασματική έκφραση $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ να βρεθεί αν οι συμμετέχοντες αρχικά ήταν σε θέση να διαπιστώσουν πως η κλασματική έκφραση ξεπερνούσε τη μονάδα και έπειτα αν μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα για αυτήν (Kılıç, 2014).

Για το Έργο 1, οι συμμετέχοντες τυχαία κατανεμήθηκαν σε δύο ομάδες. Όσοι κατανεμήθηκαν στην πρώτη ομάδα, περίπου οι μισοί, κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα για μία κλασματική έκφραση που οι ίδιοι θα επέλεγαν (συνθήκη δημιουργίας ελεύθερου προβλήματος). Από τους υπόλοιπούς συμμετέχοντες που ανήκαν στη δεύτερη ομάδα ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (συνθήκη δημιουργίας προβλήματος με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

Η διαφοροποίηση αυτή ανάμεσα στους συμμετέχοντες επιλέχθηκε προκειμένου να εξεταστεί αν οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να δημιουργήσουν περισσότερα κατάλληλα λεκτικά προβλήματα χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ή περισσότερα κατάλληλα λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Δηλαδή, σκοπός ήταν να εξεταστεί αν η συνθήκη δημιουργίας προβλήματος (ελεύθερο πρόβλημα ή με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση) επηρέαζε την επίδοσή τους στη δημιουργία προβλήματος.

Το Έργο 2 αφορούσε στην <u>«αναγνώριση της καταλληλότητας προβλήματος»</u> και σκοπός του ήταν να εξετάσει αν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν πότε ένα λεκτικό πρόβλημα είναι κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση που αφορούσε στην πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, το Έργο 2 περιελάμβανε τέσσερις δοκιμασίες. Σε κάθε δοκιμασία παρουσιαζόταν ένα πρόβλημα το οποίο οι συμμετέχοντες καλούνταν να αναγνωρίσουν ως κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ($\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ ή $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$, αν τα προβλήματα αφορούσαν πρόσθεση ή αφαίρεση, αντίστοιχα) και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Για παράδειγμα, σε όσους είδαν τις δοκιμασίες της πρόσθεσης του Έργου 2 ειπώθηκε: *«Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθειά του να διδάξει στους μαθητές του και στις μαθήτριές του την πρόσθεση κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση* $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ *;».* Η εκφώνηση του Έργου 2 για όσους είδαν τις δοκιμασίες της αφαίρεσης ήταν ως εξής: *«Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθειά του να διδάξει στους μαθητές του και στις μαθήτριές του την αφαίρεση κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση* $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$*;».*

Προκειμένου να εξεταστεί αν το είδος της αριθμητικής πράξης επηρεάζει τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος και την αναγνώριση της καταλληλότητας προβλήματος, οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν τυχαία σε δύο ομάδες: σε αυτούς που θα απαντούσαν σε δοκιμασίες που αφορούσαν πρόσθεση κλασμάτων και σε αυτούς που θα απαντούσαν σε δοκιμασίες που αφορούσαν αφαίρεση κλασμάτων.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τον ερευνητικό σχεδιασμό που ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα.

Πίνακας 1. Ερευνητικός Σχεδιασμός

	Ομάδα 1 **Πρόσθεση κλασμάτων**		**Ομάδα 2** **Αφαίρεση κλασμάτων**	
Έργο 1 **Δημιουργία προβλήματος**	Δημιουργία ελεύθερου προβλήματος	Δημιουργία προβλήματος με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση	Δημιουργία ελεύθερου προβλήματος	Δημιουργία προβλήματος με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση
Έργο 2 **Αναγνώριση καταλληλότητας προβλήματος**	Προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων		Προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων	

Σε όλους τους συμμετέχοντες παρουσιάστηκαν τρία ακατάλληλα προβλήματα και ένα κατάλληλο πρόβλημα. Η επιλογή των ακατάλληλων προβλημάτων έγινε με βάση τις κατηγορίες των ακατάλληλων προβλημάτων που συναντώνται με τη μεγαλύτερη συχνότητα στη βιβλιογραφία τόσο στη δημιουργία προβλημάτων πρόσθεσης με κλάσματα όσο και στη δημιουργία προβλημάτων αφαίρεσης με κλάσματα (Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Kar & Işık, 2014˙ Toluk-Uçar, 2009). Με αυτόν τον τρόπο επιχειρήθηκε τα προβλήματα που θα αναγνώρισε η ομάδα της πρόσθεσης να ήταν παρόμοιας δυσκολίας με τα προβλήματα που θα αναγνώριζε η ομάδα της αφαίρεσης. Αναλυτικότερα, η πρώτη δοκιμασία περιελάμβανε ένα πρόβλημα που αφορούσε άλλη πράξη από αυτήν που προοριζόταν ότι στόχευε το πρόβλημα. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα ήταν ακατάλληλο, γιατί δεν αποτύπωνε την πράξη-στόχο στην ερώτηση του προβλήματος (αδυναμία αποτύπωσης της πράξης στην ερώτηση). Όσοι είδαν το Έργο 2 με πρόσθεση κλήθηκαν να κρίνουν το εξής πρόβλημα: *«Έδωσα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου στη μεγαλύτερή μου αδερφή και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων μου στη μικρότερή μου αδερφή. Πόσα χρήματα έχω τώρα;»* το οποίο είναι εμπνευσμένο από την έρευνα των Kar και Işık (2014, σελ. 141). Όσοι είδαν το Έργο 2 με αφαίρεση κλήθηκαν να κρίνουν το εξής πρόβλημα: *«Στο πρωινό μας φαγητό έχουμε τα $\frac{2}{3}$ ενός ψωμιού. Έφαγα το $\frac{1}{4}$ του ψωμιού που είχαμε στο πρωινό φαγητό. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί;»* το οποίο είναι εμπνευσμένο από την έρευνα της Doğan-Coşkun (2018, σελ. 100).

Η δεύτερη δοκιμασία αφορούσε ένα πρόβλημα στο οποίο το αποτέλεσμα της πράξης του προβλήματος αποδιδόταν με ακέραιο αριθμό. Δηλαδή, στο πρόβλημα αυτό τα κλάσματα παρουσιάζονταν ως ακέραιοι αριθμοί και όχι ως ποσότητες (απόδοση του αποτελέσματος της πράξης με ακέραιο αριθμό). Όσα άτομα διαχειρίστηκαν το Έργο 2 με πρόσθεση είδαν το εξής πρόβλημα: *«Η Αλίκη και ο Ανδρέας αγόρασαν δύο πίτσες του ίδιου μεγέθους. Η Αλίκη έκοψε την πίτσα της σε 3 ίσα κομμάτια και έφαγε τα 2. Ο Ανδρέας έκοψε τη δική του πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έφαγε το 1. Πόσα κομμάτια πίτσα έφαγαν η Αλίκη και ο Ανδρέας μαζί;»*, πηγή έμπνευσης του οποίου αποτέλεσε η έρευνα της Doğan-Coşkun (2019, σελ. 1526). Τα άτομα που είδαν το Έργο 2 με αφαίρεση είδαν το εξής πρόβλημα: *«Η μαμά χώρισε μία πίτσα σε 3 ίσα κομμάτια και μου έδωσε 2 κομμάτια. Επίσης, η μαμά χώρισε μία άλλη πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έδωσε στην αδερφή μου 1 κομμάτι. Πόσα παραπάνω κομμάτια πίτσας έφαγα από την αδερφή μου;»*, πηγή έμπνευσης του οποίου ήταν η έρευνα της Toluk-Uçar (2009, σελ. 170).

Η τρίτη δοκιμασία περιελάμβανε ένα κατάλληλο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα *«Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{2}{3}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$ του γκαζόν. Πόσο μέρος του γκαζόν κούρεψαν τα δύο αδέρφια μαζί;»* παρουσιάστηκε στα άτομα που είδαν το Έργο 2 με πρόσθεση και προερχόταν από το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της ΣΤ’ τάξης (Β.Μ., σελ. 54). Το πρόβλημα *«Τα $\frac{2}{3}$ μιας κανάτας είναι γεμάτα με νερό. Έριξα το $\frac{1}{4}$ του νερού της κανάτας σε ένα ποτήρι. Πόσο νερό έμεινε στην κανάτα;»* παρουσιάστηκε στα άτομα που είδαν το Έργο 2 με αφαίρεση και προερχόταν από την έρευνα της Doğan-Coşkun (2018, σελ. 99).

Στην τέταρτη δοκιμασία εντάχτηκε ένα πρόβλημα που δεν περιελάμβανε όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να λυθεί. Το πρόβλημα αυτό ήταν ακατάλληλο, καθώς έλειπαν στοιχεία από την εκφώνηση του προβλήματος και το καθιστούσαν μη επιλύσιμο (ελλιπή στοιχεία στην εκφώνηση του προβλήματος). Όσοι είδαν το Έργο 2 με πρόσθεση είδαν το εξής πρόβλημα: *«Τα $\frac{2}{3}$ από τις μπλούζες του πρώτου συρταριού είναι λευκές. Το $\frac{1}{4}$ από τις μπλούζες του τελευταίου συρταριού είναι λευκές. Πόσες λευκές μπλούζες έχει η Βάγια;»*, εμπνευσμένο από την έρευνα των Baroody και Hume (1991, σελ. 57). Τα άτομα που είδαν το Έργο 2 με αφαίρεση είδαν το εξής πρόβλημα: *«Ο Αλέξης πήρε τα $\frac{2}{3}$ των μπισκότων για το σχολείο. Στο σχολείο έδωσε το $\frac{1}{4}$ των μπισκότων στον Κώστα. Πόσα μπισκότα έμειναν στον Αλέξη;»* το οποίο ήταν προϊόν έμπνευσης της ερευνήτριας.

Το πρόβλημα της τέταρτης δοκιμασίας αποτελεί παραλλαγή λανθασμένων προβλημάτων που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία ως προβλήματα που αποδίδουν αξία στη μονάδα (όλο). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Kar και Işık (2014) ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που λύνεται με την πράξη $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. Ένας συμμετέχοντας δημιούργησε το εξής πρόβλημα: *«Έχω 24 φιστίκια. Ο Μεχμέτ έφαγε το $\frac{1}{2}$ από αυτά και ο φίλος μου τα $\frac{3}{4}$ από αυτά. Πόσα φιστίκια φάγαμε εγώ και ο φίλος μου;»* Ο δημιουργός του προβλήματος, αυθαίρετα, απέδωσε αριθμητική αξία στη μονάδα, δηλαδή ανέφερε πως τα φιστίκια συνολικά ήταν 24. Η ανάγκη του συμμετέχοντα να προσδιορίσει την αξία της μονάδας, ενδεχομένως, προέρχεται από το γεγονός πως το σενάριο του προβλήματος αναφερόταν σε διακριτή ποσότητα, τα φιστίκια, και όχι σε συνεχή ποσότητα. Επειδή πρόκειται για συχνό λάθος, στην παρούσα έρευνα τόσο το πρόβλημα πρόσθεσης όσο και το πρόβλημα αφαίρεσης, σκόπιμα, αναφέρονταν σε διακριτές ποσότητες. Στα προβλήματα αυτά, δεν αναφερόταν η αξία της μονάδας, με σκοπό να μην μπορεί να λυθεί το πρόβλημα και, συνεπώς, να εξεταστεί αν οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να εντοπίσουν την παράλειψη αυτή.

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει συνοπτικά τις δοκιμασίες του Έργου 2: τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν, τον λόγο που τα προβλήματα κρίθηκαν ακατάλληλα, καθώς και την πηγή της έμπνευσής τους. Αναλυτικά, οι δοκιμασίες βρίσκονται στο Παράρτημα.

Συνοψίζοντας, οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν σε δύο ομάδες, όσοι είδαν δοκιμασίες πρόσθεσης και όσοι είδαν δοκιμασίες αφαίρεσης. Σε κάθε ομάδα, οι μισοί είδαν το Έργο 1 χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση και οι άλλοι μισοί είδαν το Έργο 1 με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Ανεξάρτητα από το αν το Έργο 1 αφορούσε συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ή όχι, οι δοκιμασίες του Έργου 2 ήταν ίδιες σε όλους τους συμμετέχοντες κάθε ομάδας.

Πίνακας 2. Παρουσίαση των δοκιμασιών του Έργου 2

	Προβλήματα πρόσθεσης «$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$»	Προβλήματα αφαίρεσης «$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$»
1η Δοκιμασία «Αδυναμία αποτύπωσης της πράξης στην ερώτηση» ***(Ακατάλληλο πρόβλημα)***	Έδωσα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου στη μεγαλύτερή μου αδερφή και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων μου στη μικρότερή μου αδερφή. Πόσα χρήματα έχω τώρα; (Kar & Işık, 2014, σελ. 141)	Στο πρωινό μας φαγητό έχουμε τα $\frac{2}{3}$ ενός ψωμιού. Έφαγα το $\frac{1}{4}$ του ψωμιού που είχαμε στο πρωινό φαγητό. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί; (Doğan-Coşkun, 2018, σελ. 100)
2η Δοκιμασία «Απόδοση της πράξης με ακέραιο αριθμό» ***(Ακατάλληλο πρόβλημα)***	Η Αλίκη και ο Ανδρέας αγόρασαν δύο πίτσες του ίδιου μεγέθους. Η Αλίκη έκοψε την πίτσα της σε 3 ίσα κομμάτια και έφαγε τα 2. Ο Ανδρέας έκοψε τη δική του πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έφαγε το 1. Πόσα κομμάτια πίτσα έφαγαν η Αλίκη και ο Ανδρέας μαζί; (Doğan-Coşkun, 2019, σελ. 1526)	Η μαμά χώρισε μία πίτσα σε 3 ίσα κομμάτια και μου έδωσε 2 κομμάτια. Επίσης, η μαμά χώρισε μία άλλη πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έδωσε στην αδερφή μου 1 κομμάτι. Πόσα παραπάνω κομμάτια πίτσας έφαγα από την αδερφή μου; (Toluk-Uçar, 2009, σελ. 170)
3η Δοκιμασία ***(Κατάλληλο πρόβλημα)***	Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{2}{3}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$ του γκαζόν. Πόσο μέρος του γκαζόν κούρεψαν τα δύο αδέρφια μαζί; (Βιβλίο μαθηματικών της ΣΤ', σελ. 54)	Τα $\frac{2}{3}$ μιας κανάτας είναι γεμάτα με νερό. Έριξα το $\frac{1}{4}$ του νερού της κανάτας σε ένα ποτήρι. Πόσο νερό έμεινε στην κανάτα; (Doğan-Coşkun, 2018, σελ. 99)
4η Δοκιμασία «Ελλιπή στοιχεία στην εκφώνηση του προβλήματος» ***(Ακατάλληλο πρόβλημα)***	Το $\frac{2}{3}$ από τις μπλούζες του πρώτου συρταριού είναι λευκές. Τα $\frac{1}{4}$ από τις μπλούζες του τελευταίου συρταριού είναι λευκές. Πόσες λευκές μπλούζες έχει η Βάγια; (Baroody & Hume, 1991, σελ. 57)	Ο Αλέξης πήρε τα $\frac{2}{3}$ των μπισκότων για το σχολείο. Στο σχολείο έδωσε το $\frac{1}{4}$ των μπισκότων στον Κώστα. Πόσα μπισκότα έμειναν στον Αλέξη; (Επινόηση της ερευνήτριας)

2.3 Εννοιολογικό πλαίσιο έρευνας

Λεκτικό πρόβλημα

Στην παρούσα έρευνα οι εκπαιδευτικοί, για το Έργο 1, κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα, δηλαδή ένα κείμενο που να περιέχει ποσοτικές πληροφορίες, να περιγράφει μία κατάσταση που είναι οικεία στον αναγνώστη και να θέτει μια ποσοτική ερώτηση, η απάντηση στην οποία να προέρχεται από μαθηματικές πράξεις που γίνονται με τα δεδομένα που παρέχονται στο κείμενο (Greer, Verschaffel & De Corte, 2002).

Ικανότητα δημιουργίας προβλήματος

Η ικανότητά των εκπαιδευτικών της παρούσας έρευνας στη δημιουργία προβλήματος ορίστηκε σύμφωνα με το αν οι εκπαιδευτικοί δημιούργησαν ένα κατάλληλο ή ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα για μία συγκεκριμένη ή μη κλασματική έκφραση.

Κατάλληλο – Ακατάλληλο Πρόβλημα

Για να αναγνωριστούν τα πρόβλημα που δημιούργησαν οι εκπαιδευτικοί ως κατάλληλα έπρεπε σε αυτά να περιλαμβάνονται κλασματικοί αριθμοί, να περιγράφεται ο υπολογισμός της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, να περιέχεται μια ερώτηση που να αποδίδει την πράξη που ζητείται, να περιγράφονται αληθινές καταστάσεις, να είναι επιλύσιμα (De Corte & Verschaffel, 1996), τα κλάσματα να παρουσιάζονται ως ποσότητες και όχι ως ακέραιοι αριθμοί και να αναφέρεται πως οι μονάδες/κλασματικές μονάδες του προβλήματος είναι ίσες. Όταν τα λεκτικά προβλήματα των εκπαιδευτικών δεν πληρούσαν μία από τις παραπάνω προϋποθέσεις, τότε αναγνωρίζονταν ως ακατάλληλα.

2.4 Αξιοπιστία κωδικοποίησης

Για το Έργο 1, τα λεκτικά προβλήματα που δημιούργησαν οι συμμετέχοντες κωδικοποιήθηκαν ως κατάλληλα ή ακατάλληλα σύμφωνα με τους ορισμούς του κατάλληλου προβλήματος και του ακατάλληλου προβλήματος. Επιπλέον, συζητήθηκαν με την επιβλέπουσα καθηγήτρια παραδείγματα λεκτικών προβλημάτων των συμμετεχόντων για να διαπιστωθεί αν υπάρχει συμφωνία ως προς την κωδικοποίηση (Koichu, Harel, & Manaster, 2013).

Για το Έργο 2, για να ληφθεί μία απάντηση ως σωστή έπρεπε οι συμμετέχοντες στην αιτιολόγηση των ακατάλληλων προβλημάτων να αναφέρουν τον τύπο λάθους που συναντάται στο πρόβλημα. Για παράδειγμα, το πρόβλημα της 3ης δοκιμασίας οι συμμετέχοντες έπρεπε να το αναγνωρίσουν ως ακατάλληλο με αιτιολογία πως υπάρχουν ελλιπή στοιχεία στην εκφώνησή του. Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή, αν οι συμμετέχοντες αναγνώριζαν το πρόβλημα αυτό ως ακατάλληλο με αιτιολογία πως η διατύπωσή του ήταν περίπλοκη, η απάντηση αναγνωρίζονταν ως λανθασμένη.

2.3 Διαδικασία

Για τη διεξαγωγή της έρευνας δημιουργήθηκαν δοκιμασίες έργων, ηλεκτρονικής μορφής, μέσω του λογισμικού «Google Forms». Ο διαμοιρασμός τους πραγματοποιήθηκε ηλεκτρονικά. Τα έργα αναρτήθηκαν σε φοιτητικές παιδαγωγικές ομάδες κοινωνικής δικτύωσης. Δικαίωμα συμπλήρωσης των έργων είχαν μόνο υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παιδαγωγικών τμημάτων και απόφοιτοι εκπαιδευτικοί παιδαγωγικών τμημάτων χωρίς διδακτική εμπειρία στα κλάσματα.

Η συμπλήρωση των έργων ήταν ανώνυμη και προαιρετική. Οι συμμετέχοντες διαβεβαιώθηκαν πως μπορούσαν να απαντήσουν ελεύθερα ή να αποχωρήσουν οποιαδήποτε στιγμή επιθυμούσαν. Η παραλαβή των έργων πραγματοποιούνταν αυτόματα μετά την υποβολή τους. Ο εκτιμώμενος χρόνος απάντησης των έργων ήταν 10 -15 λεπτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

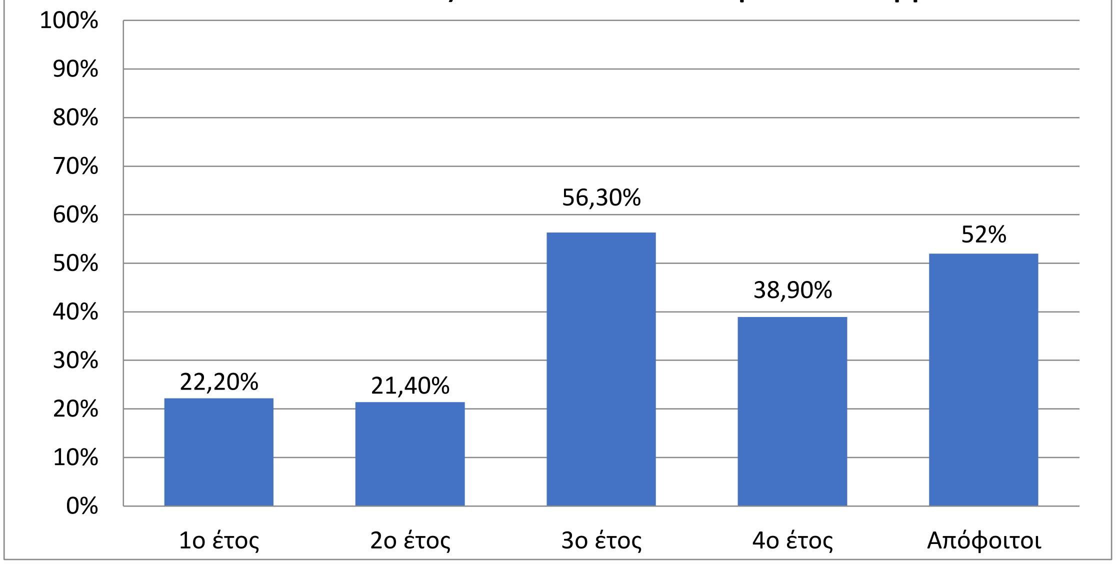
3.1. Επιδόσεις στο Έργο 1 (Δημιουργία Λεκτικού Προβλήματος)

Στο Έργο 1 ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων ή ένα λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης κλασμάτων. Οι σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων βαθμολογήθηκαν με 1 (κατάλληλα προβλήματα), ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 0 (ακατάλληλα προβλήματα). Από τους 84 συμμετέχοντες, οι 7 δεν κατάφεραν να δημιουργήσουν λεκτικό πρόβλημα με κλάσματα. Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων στο Έργο 1 ήταν .42 (mx=1, τυπική απόκλιση = .496).

Προκειμένου να εξεταστεί αν στο Έργο 1 ο αριθμός των σωστών απαντήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών διέφερε από τον αριθμό των σωστών απαντήσεων των αποφοίτων, πραγματοποιήθηκε t test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων ($t(82) = -1{,}301$, $p = .197$). Δηλαδή, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στη δημιουργία προβλήματος. Το Σχήμα 1 παρουσιάζει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών ανά έτος σπουδών και των αποφοίτων στο Έργο 1.

Για να ελεγχθεί αν το φύλο των συμμετεχόντων επηρέασε την επίδοσή τους στο Έργο 1, υλοποιήθηκε t test για ανεξάρτητα δείγματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση των ανδρών και των γυναικών ($t(82) = -{,}045$, $p = .964$). Δηλαδή, τα δύο φύλα παρουσίασαν παραπλήσια επίδοση (μ.ο.= .41 και μ.ο.= .42 για τους άνδρες και τις γυναίκες, αντίστοιχα).

Σχήμα 1. Ποσοστό σωστών απαντήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών ανα έτος σπουδών και των αποφοίτων στο Έργο 1



Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε t test για να μελετηθεί αν <u>το είδος των λεκτικών προβλημάτων</u>[3] που κλήθηκαν να δημιουγήσουν οι συμμετέχοντες, δηλαδή χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (ελεύθερα) ή με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση, επηρέασε την επίδοσή τους. Από την ανάλυση βρέθηκε ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων που δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (ελεύθερα) και αυτούς που δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (t(82) = -,658, p = .513). Με άλλα λόγια, η επίδοση όσων δημιούργησαν ελεύθερα προβλήματα (μ.ο.= .38) δεν διέφερε στατιστικά σημαντικά από την επίδοση όσων δημιούργησαν προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (μ.ο.= .45).

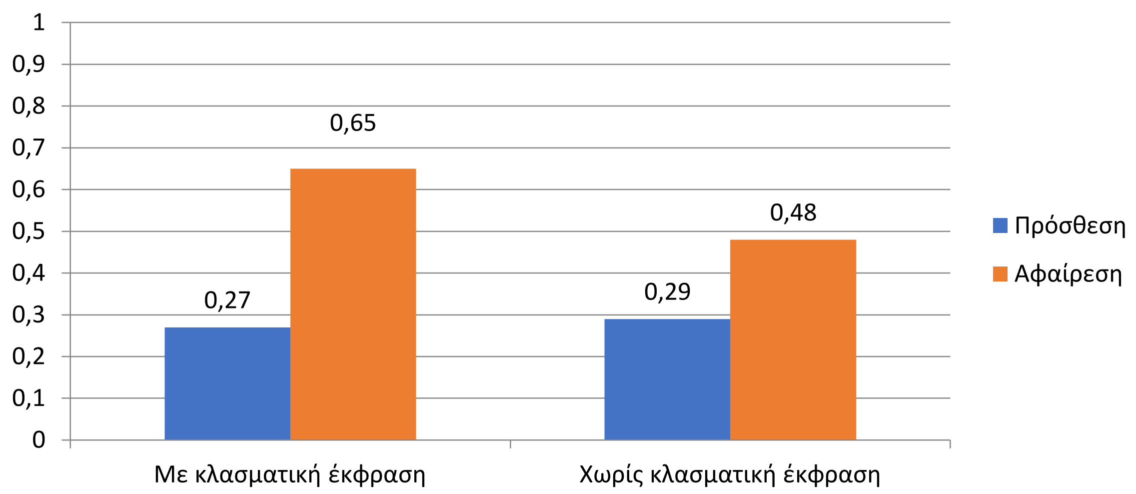
[3]«Δημιουργία ελεύθερου λεκτικού προβλήματος»: Από τους μισούς συμμετέχοντες ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων, χωρίς να δοθεί συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Η κλασματική έκφραση, πάνω στην οποία θα δομούνταν το πρόβλημα, ήταν ελεύθερη επιλογή κάθε συμμετέχοντα.
«Δημιουργία λεκτικού προβλήματος με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση»: Από τους μισούς συμμετέχοντες ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Δηλαδή, η κλασματική έκφραση, πάνω στην οποία θα δομούνταν το πρόβλημα, δινόταν στους συμμετέχοντες.

Για να εξεταστεί αν το είδος της αριθμητικής πράξης[4], πρόσθεση ή αφαίρεση, επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων στη δημιουργία προβλήματος στο Έργο 1, πραγματοποιήθηκε t test. Από την ανάλυση βρέθηκε ότι οι συμμετέχοντες που κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων (μ.ο. = .56) παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με όσους κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων (μ.ο. = .28) ($t(82) = -2{,}701$, $p < .01$). Δηλαδή, ήταν πιο εύκολο για τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων παρά να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων.

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ομάδα συμμετεχόντων ανάλογα με το αν δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ή ελεύθερα, βρέθηκε ότι για τους συμμετέχοντες που κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά πρόβλημα χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση η αριθμητική πράξη δεν επηρέασε την επίδοσή τους ($t(40) = -1{,}265$, $p = .213$). Ωστόσο, όταν οι συμμετέχοντες έπρεπε να δημιουργήσουν λεκτικό πρόβλημα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση, εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα σε αυτούς που δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης και σε αυτούς που δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης ($t(40) = -2{,}587$, $p < .05$). Πιο συγκεκριμένα, όσοι δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (μ.ο. = .65) σημείωσαν στατιστικά σημαντικά περισσότερες σωστές απαντήσεις σε σχέση με αυτούς που δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (μ.ο. = .27). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 2 που ακολουθεί.

[4] Για να εξεταστεί αν οι συμμετέχοντες έχουν καλύτερη επίδοση σε μία από τις δύο αριθμητικές πράξεις, πρόσθεση ή αφαίρεση, οι μισοί συμμετέχοντες δημιούργησαν ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων και οι άλλοι μισοί συμμετέχοντες δημιούργησαν ένα λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης κλασμάτων.

Σχήμα 2. Μέσοι όροι των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στη δημιουργία προβλήματος ως προς την αριθμητική πράξη και την ύπαρξη κλασματικής έκφρασης



3.1.α Παραδείγματα προβλημάτων

Τα λεκτικά προβλήματα που δημιούργησαν οι συμμετέχοντες ομαδοποιήθηκαν ανάλογα με το περιεχόμενό τους σε κατηγορίες σεναρίων. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων, 53 άτομα (68,8%), δημιούργησε λεκτικά προβλήματα με σενάριο που αφορούσε σε κάποια φαγώσιμη ύλη. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα σε αυτήν την κατηγορία αναφέρονταν σε πίτσες, γλυκά, φρούτα και φαγητά. 11 συμμετέχοντες (14,3%) δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα που σχετίζονταν με επιφάνειες, καθιστώντας την κατηγορία αυτή τη δεύτερη δημοφιλέστερη. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας αναφέρονταν σε γήπεδα, χωράφια, κήπους και διαδρομές. Επιπλέον, 6 συμμετέχοντες (7,8%) δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα που σχετίζονταν με χρηματικά ποσά, 2 συμμετέχοντες (2,6%) δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα που σχετίζονταν με λίτρα, ενώ 5 συμμετέχοντες (6,5%) δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα που δεν ανήκαν σε κάποιες από τις παραπάνω κατηγορίες.

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τις κατηγορίες σεναρίων που επέλεξαν οι συμμετέχοντες για να δημιουργήσουν τα λεκτικά προβλήματά τους και τα ποσοστά εμφάνισής τους.

Πίνακας 3. Οι κατηγορίες σεναρίων και η συχνότητα εμφάνισής τους

Σενάριο προβλήματος	Ποσοστό
Φαγώσιμη ύλη	68,8%
Επιφάνειες	14,3%
Χρήματα	7,8%
Λίτρα	2,6%
Διάφορα	6,5%

Ακολουθούν κάποια, ενδεικτικά, σωστά λεκτικά προβλήματα των συμμετεχόντων.

«Μία παρέα φίλων βγήκε για φαγητό και παρήγγειλε δύο οικογενειακές πίτσες. Από τη μία έφαγαν τα $\frac{3}{5}$ της πίτσας και από τη δεύτερη έφαγαν το $\frac{1}{2}$ της πίτσας. Πόση πίτσα έφαγαν συνολικά τα παιδιά;» (Φοιτήτρια, 3ο έτος, πρόσθεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

«Η μαμά της Άννας από τα $\frac{3}{5}$ του πακέτου με αλεύρι που είχε μείνει στο ράφι χρησιμοποίησε το $\frac{1}{2}$ για το κέικ της. Πόσο αλεύρι περίσσεψε;». (Φοιτήτρια, $4^{ο}$ έτος, αφαίρεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

«Αν η Άννα έτρεξε μισό γύρο στο γήπεδο, σταμάτησε για να χαιρετήσει μία φίλη της κι έπειτα συνέχισε από το ίδιο σημείο κι έτρεξε ώστε να καλύψει τα $\frac{3}{5}$ του γηπέδου, πόση απόσταση έτρεξε συνολικά;» (Απόφοιτη, πρόσθεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

Από τα 53 άτομα όπου το σενάριο του προβλήματός τους ήταν κάποια φαγώσιμη ύλη, μόνο οι 20 (37,7%) κατάφεραν να δημιουργήσουν κατάλληλα λεκτικά προβλήματα. Οι περισσότεροι, 33 άτομα (62,3%), δημιούργησαν ακατάλληλα λεκτικά προβλήματα.

Στα προβλήματα των οποίων το σενάριο αφορούσε φαγώσιμη ύλη, επικράτησαν δύο κατηγορίες ακατάλληλων λεκτικών προβλημάτων. Πρώτον, οι συμμετέχοντες συχνά δεν ανέφεραν στα προβλήματά τους πως οι μονάδες/κλασματικές μονάδες ήταν ίσες. Για παράδειγμα, έγραφαν «…αγόρασαν 2 πίτσες…», αντί για «…αγόρασαν 2 ίδιες πίτσες ή 2 οικογενειακές/ατομικές πίτσες…» ή «…χωρίστηκε σε κομμάτια…», αντί για «…χωρίστηκε σε ίδια κομμάτια…». Για παράδειγμα, στο πρόβλημα που ακολουθεί, ο συμμετέχων παρέλειψε να τονίσει πως οι μονάδες του προβλήματος είναι ίσες (φόρμες του κέικ): *«Ο μπαμπάς έφτιαξε κέικ και το έβαλε σε δυο φόρμες. Από τη μία φόρμα μάς σέρβιρε τα $\frac{3}{5}$ και από την άλλη το $\frac{1}{2}$. Πόσο κέικ μάς σέρβιρε συνολικά;»* (Απόφοιτος, πρόσθεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

Δεύτερον, αρκετοί συμμετέχοντες απέδιδαν το αποτέλεσμα της πράξης με ακέραιο αριθμό. Για παράδειγμα, ρωτούσαν «…πόσα κομμάτια τούρτας έμειναν;…», αντί για «…τι μέρος της τούρτας έμεινε;…». Αντιμετώπιζαν δηλαδή, τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς, αντί για ποσότητες. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα που ακολουθεί, η συμμετέχουσα έθεσε την ερώτηση του προβλήματος παρουσιάζοντας τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς, καθώς η ερώτηση αφορούσε στον αριθμό των κομματιών της σοκολάτας που φαγώθηκαν και περίσσεψαν και όχι στην ποσότητα: *«Ο Γιάννης και η Μαρία αγόρασαν δύο διαφορετικές σοκολάτες ίσου μεγέθους από το περίπτερο. Ο Γιάννης έφαγε τα $\frac{3}{5}$ της δικής του, ενώ η Μαρία το $\frac{1}{2}$ της δικής της. Πόσα κομμάτια σοκολάτας έφαγαν μαζί και πόσα περίσσεψαν;»* (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος, πρόσθεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

Υπάρχουν, τέλος, περιπτώσεις συμμετεχόντων που στα λεκτικά προβλήματα που δημιούργησαν εμφανίζονταν και οι δύο παραπάνω κατηγορίες ακατάλληλων λεκτικών προβλημάτων. Δηλαδή, δημιούργησαν ένα λεκτικό πρόβλημα στο οποίο και δεν αναφέρονταν πως οι μονάδες/κλασματικές μονάδες ήταν ίσες και τα κλάσματα αντιμετωπίστηκαν ως ακέραιοι αριθμοί. Για παράδειγμα, *«Ο Γιάννης και η Ελένη αγόρασαν δυο πίτες. Ο Γιάννης πήρε 3 κομμάτια και έφαγε τα 2 και η Ελένη πήρε 2 κομμάτια και έφαγε το 1. Ποσά κομμάτια πίτας έφαγαν και οι δυο μαζί;»* (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος, πρόσθεση με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση). Στο πρόβλημα αυτό, η δημιουργός δεν τονίζει πως οι πίτες που αγόρασαν ο Γιάννης και η

Ελένη είναι ίδιου μεγέθους και ούτε αναφέρει αν τα κομμάτια που έφαγε ο καθένας ήταν ισομεγέθη. Επιπλέον, η ερώτηση του προβλήματος ζητάει να βρεθεί ο αριθμός των κομματιών της πίτας που έφαγαν τα δύο παιδιά μαζί, αντί για το μέρος της πίτας που φαγώθηκε, αντιμετωπίζοντας, έτσι, τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς.

Παρόμοια, άλλη συμμετέχουσα δεν τονίζει πως οι τούρτες είναι ίδιου μεγέθους. Επίσης, ρωτάει πόσα κομμάτια τούρτας θα πάρει ο καθένας, αντί για τι μέρος της τούρτας θα πάρει ο καθένας, αντιμετωπίζοντας τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς: *«Ο Γιώργος έχει γενέθλια μαζί με την αδελφή του. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να πάρουν δυο τούρτες και να πάρει ο καθένας λίγο παραπάνω από την κάθε τούρτα. Ο Γιώργος θα πρέπει να πάρει από την δική του τούρτα τα* $\frac{4}{10}$ *και από της αδελφής του τα* $\frac{2}{10}$*, το ίδιο θα πάρει και η αδελφή του αντίστοιχα. Πόσα κομμάτια συνολικά θα πάρει ο καθένας; Αιτιολογείστε την απάντηση σας»* (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 3^{ο} έτος, πρόσθεση χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση)

Τέλος, υπήρξαν λεκτικά προβλήματα με σενάριο κάποια φαγώσιμη ύλη τα οποία δεν σχετίζονταν καθόλου με τα κλάσματα. Ακολουθούν τρία, ενδεικτικά, παραδείγματα λεκτικών προβλημάτων όπου φαίνεται πως κάποιοι συμμετέχοντες δεν κατάφεραν να δημιουργήσουν λεκτικό πρόβλημα που να σχετίζεται με τα κλάσματα.

«Ο κύριος Κώστας αγόρασε $\frac{4}{8}$ *πατάτες. Πόσα χρήματα πλήρωσε, όταν το ένα κιλό κοστίζει 1,5€;»* (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2^{ο} έτος, πρόσθεση χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

«Η Μαρία έχει 3 καραμέλες και ο Άρης 4. Πόσες έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 1^{ο} έτος, πρόσθεση χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

«Σε ένα τραπέζι έχουμε 4 λεμόνια, παίρνουμε το 1 και το κόβουμε στην μέση. Το μισό λεμόνι το χρησιμοποιούμε για να φτιάξουμε λεμονάδα. Πόσα λεμόνια δεν χρησιμοποιήσαμε;» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2^{ο} έτος, πρόσθεση χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση).

Όσον αφορά τη δεύτερη δημοφιλέστερη κατηγορία σεναρίου, από τα 11 άτομα που δημιούργησαν λεκτικά προβλήματα που αφορούσαν επιφάνειες, οι περισσότεροι (10 άτομα, 90,9%) δημιούργησαν κατάλληλα λεκτικά προβλήματα και μόλις 1 άτομο (9,1%) δημιούργησε ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4 που παρουσιάζει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων που έδωσαν οι συμμετέχοντες για κάθε σενάριο, από όσους επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν ένα σενάριο που αφορά φαγώσιμη ύλη, μόνο το 37,7% κατάφερε να δημιουργήσει κατάλληλα λεκτικά προβλήματα. Από όσους επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν ένα σενάριο που αφορά επιφάνειες, το 90,1% δημιούργησε κατάλληλα λεκτικά προβλήματα. Με άλλα λόγια, αν και οι περισσότεροι συμμετέχοντες επέλεξαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα με κάποια φαγώσιμη ύλη, τα περισσότερα προβλήματα που δημιουργήθηκαν ήταν ακατάλληλα. Αντιθέτως, αν και λίγα άτομα επέλεξαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα που σχετίζονται με επιφάνειες, τα περισσότερα προβλήματα που δημιουργήθηκαν στην κατηγορία αυτή ήταν κατάλληλα.

Πίνακας 4. Τα σενάρια των προβλημάτων και το ποσοστό των σωστών απαντήσεων

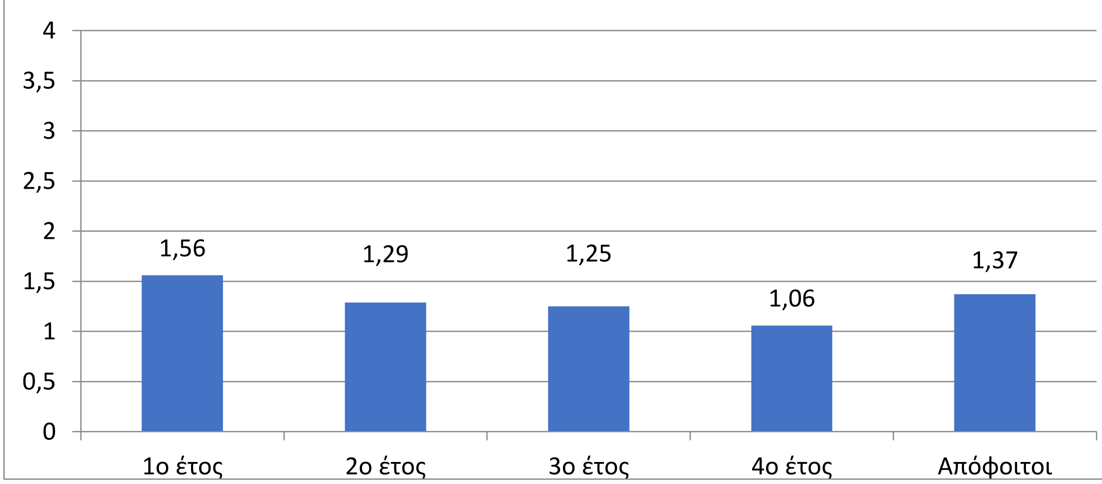
Σενάριο προβλήματος	Ποσοστό
Φαγώσιμη ύλη	37,7%
Επιφάνειες	90,9%
Χρήματα	16,7%
Λίτρα	100%
Διάφορα	40%

3.2 Επιδόσεις στο Έργο 2 (Αναγνώριση Καταλληλότητας Προβλήματος)

Στο Έργο 2 παρουσιάστηκαν στους μισούς συμμετέχοντες τέσσερις δοκιμασίες πρόσθεσης κλασμάτων και στους άλλους μισούς συμμετέχοντες τέσσερις δοκιμασίες αφαίρεσης κλασμάτων. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να αναγνωρίσουν αν τα λεκτικά προβλήματα που παρουσιάζονταν στις δοκιμασίες ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση και έπειτα έπρεπε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1 και οι λανθασμένες με 0. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν αυτές που οι συμμετέχοντες αναγνώρισαν σωστά το πρόβλημα της δοκιμασίας. Λανθασμένες απαντήσεις θεωρήθηκαν αυτές που είτε οι συμμετέχοντες δεν αναγνώρισαν σωστά το πρόβλημα της δοκιμασίας είτε αυτές που οι συμμετέχοντες αναγνώρισαν σωστά το πρόβλημα της δοκιμασίας, αλλά έδωσαν λανθασμένη αιτιολόγηση. Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων στο Έργο 2 ήταν 1.29 (mx=4, τυπική απόκλιση = .830)

Για να διαπιστωθεί αν η <u>ομάδα</u> των υποψήφιων εκπαιδευτικών παρουσίασε στο Έργο 2 διαφορά στην επίδοσή τους από την ομάδα των αποφοίτων, πραγματοποιήθηκε t test για ανεξάρτητα δείγματα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των δύο ομάδων ($t(82) = -,641$, $p = .523$). Δηλαδή, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις στις δοκιμασίες αναγνώρισης της καταλληλότητας των προβλημάτων. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει τους μέσους όρους των σωστών απαντήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών ανά έτος σπουδών και των αποφοίτων στο Έργο 2.

Σχήμα 3. Μέσοι όροι (max = 4) σωστών απαντήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών ανά έτος σπουδών και των αποφοίτων στο Έργο 2



Προκειμένου να ελεγχθεί αν το φύλο των συμμετεχόντων επηρέασε την επίδοσή τους, διενεργήθηκε t test για ανεξάρτητα δείγματα. Τα ευρήματα της ανάλυσης έδειξαν πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις σωστές απαντήσεις των ανδρών και των γυναικών ($t(82) = 1{,}029$, $p = .307$). Δηλαδή, άνδρες (μ.ο.= 1.47) και γυναίκες (μ.ο.= 1.24) είχαν παρόμοιες επιδόσεις.

Επιπλέον, για να εξεταστεί αν η αριθμητική πράξη, πρόσθεση ή αφαίρεση, ήταν ένας παράγοντας που επηρέασε τις σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t test για ανεξάρτητα δείγματα το οποίο έδειξε πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων που αναγνώρισαν προβλήματα πρόσθεσης και στις σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων που αναγνώρισαν προβλήματα αφαίρεσης ($t(82) = 1{,}515$, $p = .134$), καθιστώντας τις επιδόσεις αυτών που ασχολήθηκαν με την πρόσθεση κλασμάτων (μ.ο.= 1.42) παρόμοιες με αυτών που ασχολήθηκαν με την αφαίρεση κλασμάτων (μ.ο.= 1.15).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις τέσσερις δοκιμασίες του Έργου 2 και οι επιδόσεις των συμμετεχόντων σε αυτές.

3.2.α Δοκιμασία 1

Στην 1η δοκιμασία παρουσιαζόταν ένα ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης, το οποίο κατέληγε σε ερώτηση που αφορούσε άλλη αριθμητική πράξη. Συγκεκριμένα, από τους συμμετέχοντες ζητούνταν να αναγνωρίσουν αν το πρόβλημα ήταν κατάλληλο ή ακατάλληλο για συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Από το σύνολο των συμμετεχόντων (84 άτομα), οι 53 (63,1%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα της 1ης δοκιμασίας ήταν ακατάλληλα και 27 άτομα (32,1%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα αυτά ήταν κατάλληλα. Επίσης, μόλις 4 άτομα (4,8%) απάντησαν πως δεν γνώριζαν αν τα συγκεκριμένα προβλήματα ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα. Ωστόσο, μόνο 21 άτομα (25%) έδωσαν σωστές αιτιολογήσεις. Από αυτά, οι 12 ήταν υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι 9 άτομα ήταν απόφοιτοι. Από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς, 2 άτομα φοιτούσαν στο 1ο έτος, 3 άτομα φοιτούσαν στο 2ο έτος, 3 άτομα φοιτούσαν στο 3ο έτος και 4 άτομα φοιτούσαν στο 4ο έτος.

Από την ομάδα των συμμετεχόντων που είδαν το πρόβλημα της πρόσθεσης κλασμάτων[5], το πιο συχνό λάθος ήταν πως οι συμμετέχοντες θεωρούσαν το πρόβλημα ακατάλληλο, επειδή δεν αναφερόταν το αρχικό ποσό των χρημάτων. Παρατίθενται κάποιες ενδεικτικές αιτιολογήσεις των συμμετεχόντων.

«Δεν ξέρουμε πόσα χρήματα είχα αρχικά.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

«Ασαφές πρόβλημα χωρίς τα απαραίτητα δεδομένα - θα έπρεπε να αναφέρει πόσα είναι τα λεφτά που διαθέτει.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

«Δεν αναφέρεται ο αριθμός των χρημάτων.» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

Για την ομάδα των συμμετεχόντων που είδαν το πρόβλημα της αφαίρεσης[6], το πιο συχνό λάθος ήταν πως οι συμμετέχοντες θεωρούσαν το συγκεκριμένο πρόβλημα κατάλληλο. Οι πιο κοινές λανθασμένες αιτιολογήσεις ήταν:

«Είναι κατάλληλο.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 1ο έτος) (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 3ο έτος)

«Είναι σωστό.» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός 3ο έτος) (Απόφοιτος)

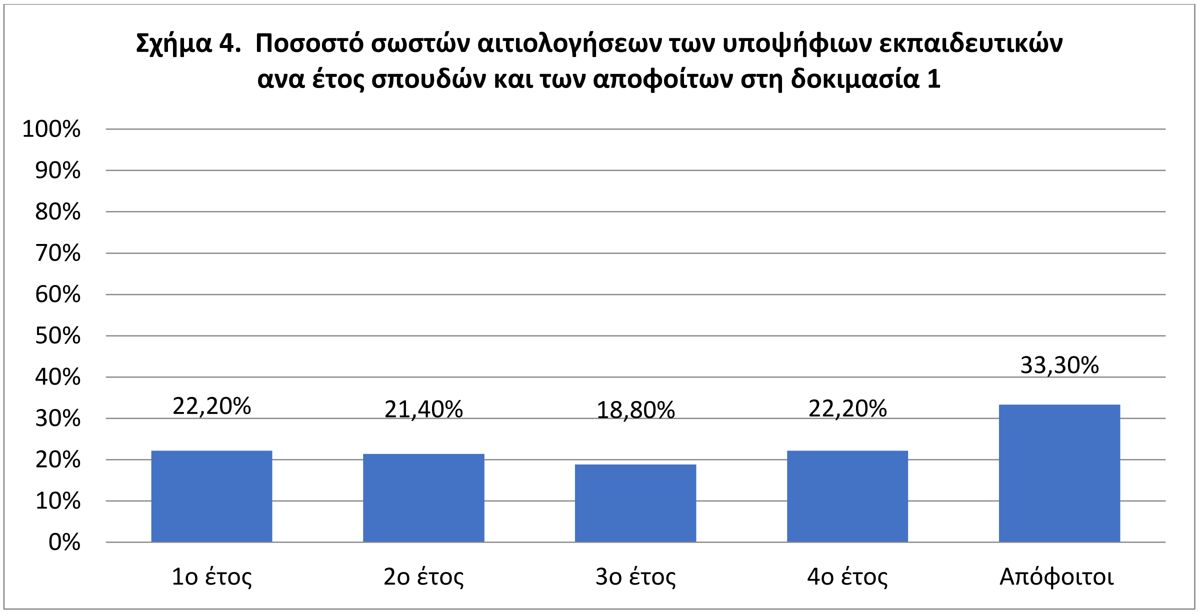
«Λύνεται με αφαίρεση.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4ο έτος)

«Με αφαίρεση θα βρεθεί το αποτέλεσμα.» (Απόφοιτος)

Το Σχήμα 4 που ακολουθεί παρουσιάζει το ποσοστό των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων που αιτιολόγησαν σωστά στη δοκιμασία 1.

[5] *«Έδωσα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου στη μεγαλύτερή μου αδερφή και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων μου στη μικρότερή μου αδερφή. Πόσα χρήματα έχω τώρα;»,*

[6] *«Στο πρωινό μας φαγητό έχουμε τα $\frac{2}{3}$ ενός ψωμιού. Έφαγα το $\frac{1}{4}$ του ψωμιού που είχαμε στο πρωινό φαγητό. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί;»*



3.2.β Δοκιμασία 2

Στη 2^{η} δοκιμασία παρουσιαζόταν ένα ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Συγκεκριμένα, από τους συμμετέχοντες ζητούνταν να αναγνωρίσουν αν το πρόβλημα ήταν κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Το πρόβλημα που παρουσιαζόταν στους συμμετέχοντες κατέληγε σε ερώτηση που αντιμετώπιζε τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς και όχι ως ποσότητες.

Σε αυτήν τη δοκιμασία, από το σύνολο των συμμετεχόντων (84 άτομα), μόλις οι 30 (35,7%) βρήκαν πως τα προβλήματα ήταν ακατάλληλα. Οι περισσότεροι (45 άτομα, 53,6%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα αυτά ήταν κατάλληλα και μόλις 9 άτομα (10,7%) απάντησαν πως δεν ήξεραν αν τα συγκεκριμένα προβλήματα ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα. Ωστόσο, μόνο 3 άτομα (3,6%) αιτιολόγησαν σωστά, από τα οποία οι 2 ήταν υποψήφιοι εκπαιδευτικοί (1 άτομο από το 1^{ο} έτος και 1 άτομο από το 4^{ο} έτος) και 1 ήταν απόφοιτος.

Από την ομάδα των συμμετεχόντων που είδαν το πρόβλημα της πρόσθεσης[7], οι περισσότεροι συμμετέχοντες αναγνώρισαν το πρόβλημα αυτό ως κατάλληλο, και μερικά άτομα τόνισαν πως πρώτα πρέπει να γίνουν τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να λυθεί το πρόβλημα. Παρατίθενται, ενδεικτικά, αιτιολογήσεις αυτής της κατηγορίας.

«Πρέπει πρώτα να γίνουν ομώνυμα τα κλάσματα και μετά η πρόσθεση.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4ο έτος)

«Αφού κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα, μπορούν εύκολα να βρουν το αποτέλεσμα.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 3ο έτος)

«Ξέρουμε πως έχουμε δυο πίτσες και η πρόσθεση των κλασμάτων είναι σωστή σε αυτή την περίπτωση.» (Απόφοιτος)

Από την ομάδα των συμμετεχόντων που είδαν το πρόβλημα της αφαίρεσης[8], αρκετοί αναγνώρισαν πως το πρόβλημα αυτό είναι κατάλληλο, επειδή λύνεται με αφαίρεση, και κάποιοι διευκρίνισαν πως πρώτα τα κλάσματα έπρεπε να γίνουν ομώνυμα. Ακολουθούν μερικές συχνές αιτιολογήσεις.

«Γιατί βρίσκουν τη διαφορά των δύο κλασμάτων.» (Απόφοιτος)

«Σαφής και κατανοητή εκφώνηση, δείχνει πιο ξεκάθαρα τα μέρη των ποσοτήτων που πρόκειται να αφαιρεθούν.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

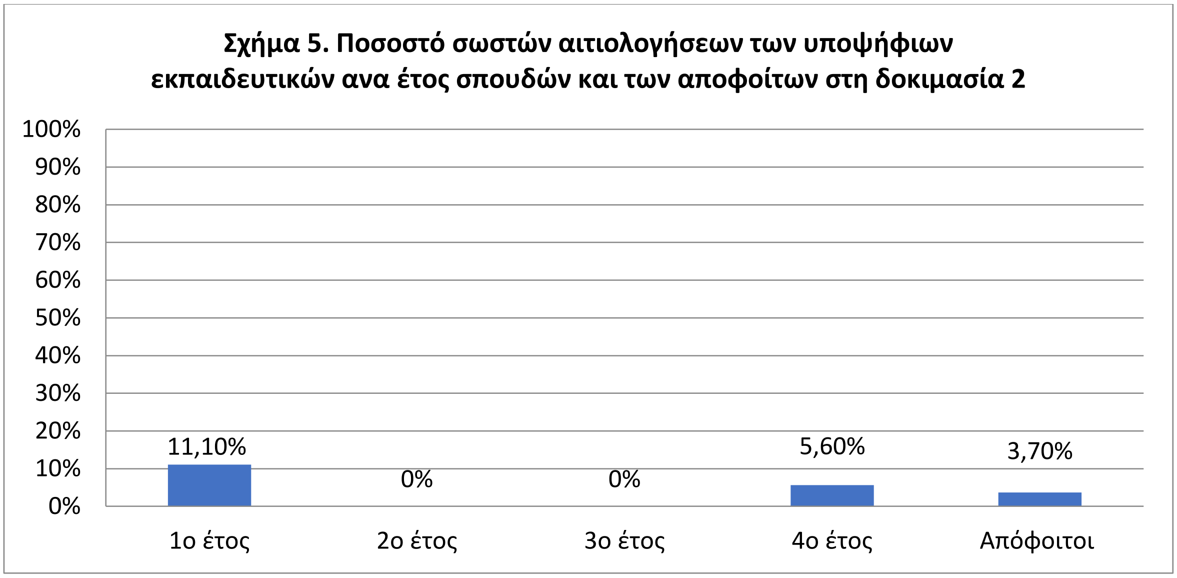
«Η πίτσα έχει $\frac{3}{3}$, άρα επιλεγώ το 2, άρα έχω $\frac{2}{3}$ εγώ, η πίτσα της αδερφής μου έχει $\frac{4}{4}$ επιλεγώ το 1, άρα έχω $\frac{1}{4}$, άρα εγώ έφαγα $\frac{2}{3}$ - $\frac{1}{4}$ παραπάνω κομμάτια από την αδερφή μου.» (Απόφοιτος)

«Μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα ($\frac{8}{12}$ και $\frac{3}{12}$). Έτσι θα δω πόσα παραπάνω κομμάτια έφαγα.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 1ο έτος)

[7] *«Η Άλική και ο Ανδρέας αγόρασαν δύο πίτσες του ίδιου μεγέθους. Η Αλίκη έκοψε την πίτσα της σε 3 ίσα κομμάτια και έφαγε τα 2. Ο Ανδρέας έκοψε τη δική του πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έφαγε το 1. Πόσα κομμάτια πίτσας έφαγαν η Αλίκη και ο Ανδρέας μαζί;»*

[8] *«Η μαμά χώρισε μία πίτσα σε 3 ίσα κομμάτια και μου έδωσε 2 κομμάτια. Επίσης, η μαμά χώρισε μία άλλη πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έδωσε στην αδερφή μου 1 κομμάτι. Πόσα παραπάνω κομμάτια πίτσα έφαγα από την αδερφή μου;»*

Το Σχήμα 5 που ακολουθεί παρουσιάζει το ποσοστό των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων που αιτιολόγησαν σωστά στη δοκιμασία 2.



3.2.γ Δοκιμασία 3

Στη δοκιμασία 3 παρουσιαζόταν ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Συγκεκριμένα, από τους συμμετέχοντες ζητούνταν να αναγνωρίσουν αν το πρόβλημα ήταν κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Η πλειονότητα των συμμετεχόντων, 64 άτομα (76,2%), αναγνώρισε πως τα προβλήματα της 3ης δοκιμασίας ήταν κατάλληλα, ενώ 15 άτομα (17,9%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα της 3ης δοκιμασίας ήταν ακατάλληλα. Επίσης, μόλις 5 άτομα (6%) απάντησαν πως δεν γνώριζαν αν τα συγκεκριμένα προβλήματα ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα. Σωστά αιτιολόγησαν 42 υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και 22 απόφοιτοι.

Οι περισσότεροι συμμετέχοντες αναγνώρισαν σωστά το πρόβλημα της πρόσθεσης[9]. Παρακάτω, παρουσιάζονται τρεις ενδεικτικές λανθασμένες αιτιολογήσεις.

«Θα έπρεπε να είναι ήδη ομώνυμα για να το βρούμε.» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

«Τα παιδιά δεν μπορούν να αναλογιστούν την ποσότητα του γκαζόν και συνεπώς δεν μπορούν να σκεφτούν ανάλογα για την επίλυση του προβλήματος.» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2ο έτος)

«Πολύπλοκη διατύπωση.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 1ο έτος)

Για το πρόβλημα της αφαίρεσης[10], οι λανθασμένες απαντήσεις σχετίζονταν με το σενάριό του. Συγκεκριμένα, κάποιοι συμμετέχοντες αναγνώρισαν το πρόβλημα ως ακατάλληλο, επειδή έκριναν πως το σενάριο του προβλήματος ήταν δύσκολο. Για παράδειγμα, κάποιοι συμμετέχοντες έγραψαν:

«Δυσκολία στην κατανόηση, ποιο είναι το κλάσμα ενός υγρού.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4ο έτος)

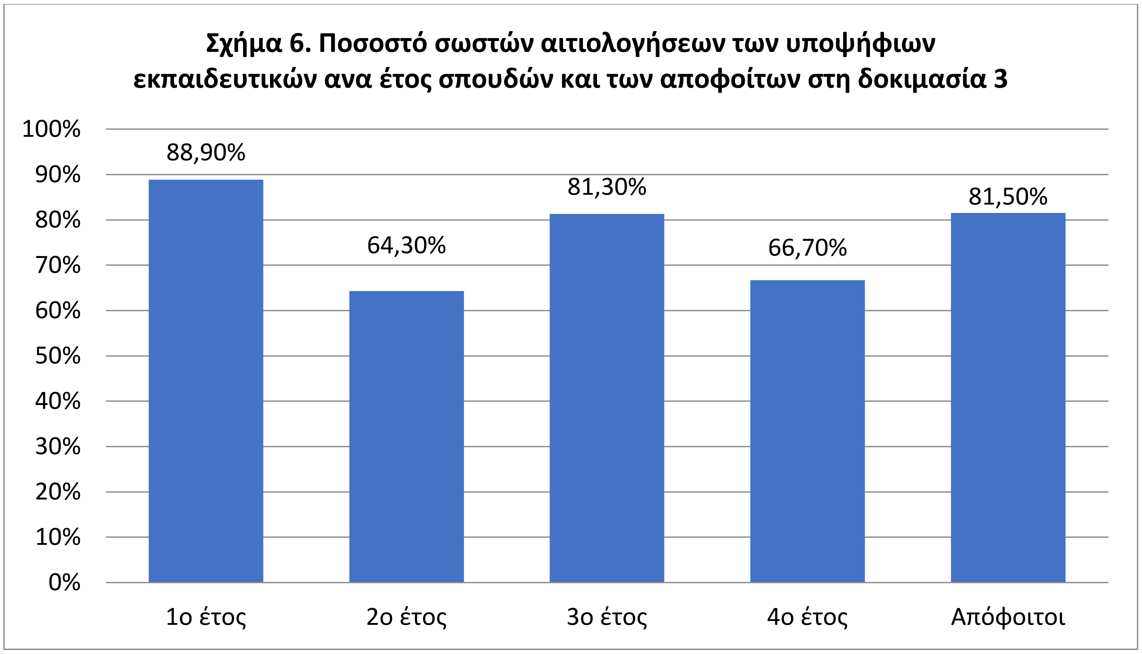
«Δύσκολο πρόβλημα.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 3ο έτος)

«Αν και το πρόβλημα είναι άρτια γραμμένο και κατανοητό, δεν υπάγεται στην πραγματικότητα, καθώς με το "μάτι" δεν γίνεται να ρίξεις το $\frac{1}{4}$ *νερού μιας κανάτας που είναι γεμισμένη κατά* $\frac{2}{3}$*.»* (Απόφοιτος)

Το Σχήμα 6 που ακολουθεί παρουσιάζει το ποσοστό των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων που αιτιολόγησαν σωστά στη δοκιμασία 3.

[9] *«Η Μυρτώ κούρεψε τα* $\frac{2}{3}$ *του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το* $\frac{1}{4}$ *του γκαζόν. Πόσο μέρος του γκαζόν κούρεψαν τα δύο αδέρφια μαζί;»*

[10] *«Τα* $\frac{2}{3}$ *μιας κανάτας είναι γεμάτα με νερό. Έριξα το* $\frac{1}{4}$ *του νερού της κανάτας σε ένα ποτήρι. Πόσο νερό έμεινε στην κανάτα;»*



3.2.δ Δοκιμασία 4

Στην 4$^{\eta}$ δοκιμασία παρουσιαζόταν ένα ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης, το οποίο δεν περιελάμβανε όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να λυθεί. Συγκεκριμένα, από τους συμμετέχοντες ζητούνταν να αναγνωρίσουν αν το πρόβλημα ήταν κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Στη συγκεκριμένη δοκιμασία, 38 συμμετέχοντες (45,2%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν ήταν ακατάλληλα και 37 συμμετέχοντες (44%) αναγνώρισαν πως τα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν ήταν κατάλληλα. Ακόμα, 9 άτομα (10,7%) απάντησαν πως δεν γνώριζαν αν τα συγκεκριμένα προβλήματα ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα. Σωστά αιτιολόγησαν 19 άτομα (22,9%), εκ των οποίων οι 14 ήταν υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι 5 ήταν απόφοιτοι. Από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς, 3 άτομα φοιτούσαν στο 1^{o} έτος, 6 άτομα φοιτούσαν στο 2^{o} έτος, 3 άτομα φοιτούσαν στο 3^{o} έτος και 2 άτομα φοιτούσαν στο 4^{o} έτος.

Για το πρόβλημα της πρόσθεσης[11], το πιο συχνό λάθος ήταν πως οι συμμετέχοντες αναγνώρισαν το πρόβλημα αυτό ως κατάλληλο, λέγοντας πως λύνεται με πρόσθεση. Ακόμα, υπήρξαν κάποιοι συμμετέχοντες που είπαν πως το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί, επειδή θα μπορούσε να υπάρχουν λευκές μπλούζες και σε άλλα συρτάρια. Παρατίθενται κάποιες ενδεικτικές αιτιολογήσεις για τις δύο παραπάνω τάσεις.

«Είναι σαφές ότι ο μαθητής θα πρέπει να κάνει πρόσθεση κλασμάτων.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 2^{ο} έτος)

«Το πρόβλημα ασχολείται με την πρόσθεση.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 2^{ο} έτος)

«Τα παιδιά θα αντιληφθούν πιο εύκολα την έννοια της πρόθεσης των κλασμάτων σε αυτό το πρόβλημα, καθώς θα προσθέσουν ίδια πράγματα.» (Απόφοιτος)

«Κατάλληλο, γιατί θα κάνουν πρόθεση για να βρουν το άθροισμα από τα λευκά μπλουζάκια.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος)

«Μπορεί να υπάρχουν λευκές (μπλούζες) και στο δεύτερο συρτάρι.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος)

«Γιατί μπορεί να υπάρχουν και άλλα συρτάρια που να έχουν λευκές μπλούζες. Δημιουργείται σύγχυση στους μαθητές εφόσον δεν αναφέρεται αν υπάρχουν και άλλες λευκές μπλούζες ή αυτές είναι όλες κι όλες.» (Υποψήφιος εκπαιδευτικός, 2^{ο} έτος)

Για το πρόβλημα της αφαίρεσης[12], το πιο συχνό λάθος ήταν πως οι περισσότεροι συμμετέχοντες αναγνώρισαν το πρόβλημα ως κατάλληλο. Έτσι, οι περισσότερες λανθασμένες αιτιολογήσεις υποστήριζαν πως το πρόβλημα αυτό ήταν κατάλληλο είτε αναφέροντας πως η σωστή αριθμητική πράξη είναι η αφαίρεση είτε πως έπειτα από τη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα μπορεί το πρόβλημα να λυθεί με αφαίρεση. Πιο συγκεκριμένα, κάποιοι απάντησαν πως:

[11] *«Τα $\frac{2}{3}$ από τις μπλούζες του πρώτου συρταριού είναι λευκές. Το $\frac{1}{4}$ από τις μπλούζες του τελευταίου συρταριού είναι λευκές. Πόσες λευκές μπλούζες έχει η Βάγια;»*

[12] *«Ο Αλέξης πήρε τα $\frac{2}{3}$ των μπισκότων για το σχολείο. Στο σχολείο έδωσε το $\frac{1}{4}$ των μπισκότων στον Κώστα. Πόσα μπισκότα έμειναν στον Αλέξη;»*

«Θα κάνουμε την αφαίρεση για να δούμε πόσα του έμειναν.» (Απόφοιτος), (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 3^{ο} έτος)

«Κατάλληλο» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 1^{ο} έτος)

«Σωστό» (Απόφοιτος)

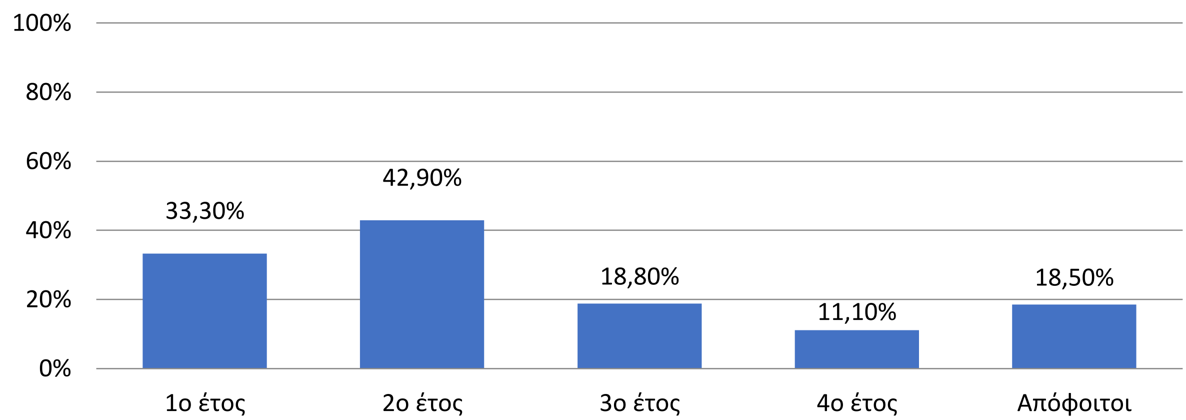
«Θεωρώ πως είναι ένα κατάλληλο πρόβλημα.» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος)

«Έμειναν $\frac{5}{12}$ (Μετατρέπω τα $\frac{2}{3}$ σε $\frac{8}{12}$ και το $\frac{1}{4}$ σε $\frac{3}{12}$).» (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος)

«Το ίδιο με το παραπάνω ερώτημα. Κάνουμε ομώνυμα και βρίσκουμε τη λύση». (Υποψήφια εκπαιδευτικός, 4^{ο} έτος)

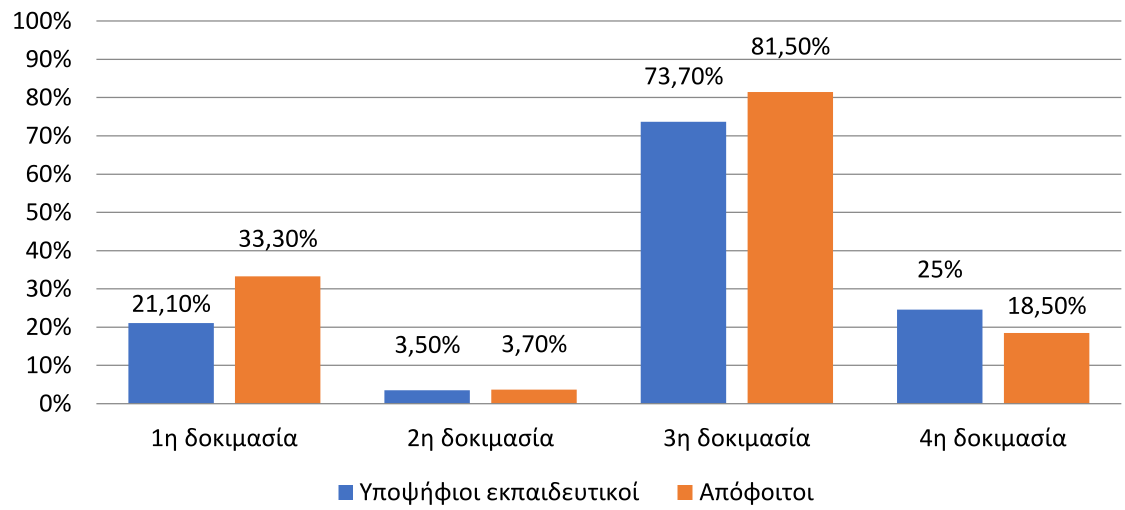
Το Σχήμα 7 παρουσιάζει το ποσοστό των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων που αιτιολόγησαν σωστά στη δοκιμασία 4.

Σχήμα 7. Ποσοστό σωστών αιτιολογήσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών ανά έτος σπουδών και των αποφοίτων στη δοκιμασία 4



Όπως φαίνεται στο Σχήμα 8, σε κάθε δοκιμασία, και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί δεν παρουσίασαν μεγάλες διαφορές στην επίδοσή τους. Για το σύνολο των συμμετεχόντων, η 3^{η} δοκιμασία ήταν η πιο εύκολη, καθώς σε αυτήν τόσο οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί όσο και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί είχαν την υψηλότερη επίδοση (73,7% και 81,5%, αντίστοιχα) και αναγνώρισαν σωστά την καταλληλότητα του προβλήματος. Με παρόμοια συχνότητα μπορούσαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί (3,5%) και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί (3,7%) να αναγνωρίσουν πως το πρόβλημα της 2ης δοκιμασίας ήταν ακατάλληλο, επειδή το αποτέλεσμα της πράξης αποδίδονταν με ακέραιο αριθμό. Επίσης, η 2η δοκιμασία ήταν η δυσκολότερη και για τις δύο ομάδες συμμετεχόντων, καθώς σε αυτήν παρουσίασαν και οι δύο ομάδες τη χαμηλότερη επίδοση. Επίσης, περισσότεροι από 1 στους 5 υποψήφιους εκπαιδευτικούς και 1 στους 3 απόφοιτους εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν πως το πρόβλημα της 1ης δοκιμασίας ήταν ακατάλληλο, εφόσον δεν αποτυπωνόταν η πράξη-στόχος στην ερώτηση του προβλήματος. Τέλος, 1 στους 4 υποψήφιους εκπαιδευτικούς, όπως και περίπου 1 στους 5 απόφοιτους εκπαιδευτικούς, ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν πως το πρόβλημα της 4ης δοκιμασίας ήταν ακατάλληλο, καθώς το πρόβλημα είχε ελλιπή στοιχεία στην εκφώνησή του.

Σχήμα 8. Η επίδοση των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των αποφοίτων ανά δοκιμασία



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αν και τα τελευταία χρόνια, η ενασχόληση με τη δημιουργία προβλήματος έχει βρεθεί στο προσκήνιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Işık, Ocal, & Kar, 2013˙ Luo, 2009), από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως οι εκπαιδευτικοί, υποψήφιοι και εν ενεργεία, δυσκολεύονται να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα (Ball, 1990˙ Chapman, 2012˙ Işık & Kar, 2012˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kılıç, 2015˙ Luo, 2009˙ Leung & Carbone, 2013˙ Rizvi, 2004˙ Unlu & Ertekin, 2012). Οι περισσότερες έρευνες που ασχολούνται με το πώς δημιουργούν προβλήματα οι εκπαιδευτικοί επικεντρώνονται στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων (Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Işık, 2014˙ Kılıç, 2013˙ Luo, 2009˙ McAllister & Beaver, 2012˙ Rizvi, 2004), η οποία τους δυσκολεύει, ιδιαίτερα (Ball, 1990˙ Kilcan, 2006, στο Toluk-Uçar, 2009˙ Ma, 1999˙ Marchionda, 2006˙ Newton, 2008˙ Tirosh, 2000˙ Toluk-Uçar, 2009˙ Zhou, Peverly & Xin, 2006).

Έχοντας ως δεδομένο πως οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν δυσκολίες κατά τη δημιουργία προβλήματος και κατά την ενασχόλησή τους με τα κλάσματα, σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει ποια είναι η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με κλάσματα και, συγκεκριμένα, για τις αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Επιπλέον, εξετάστηκαν ποια είναι τα υλικά στα οποία αναφέρονται οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, όταν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με κλάσματα. Τέλος, μελετήθηκε η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών να αναγνωρίζουν την καταλληλότητα προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων.

Γενικά, τόσο στη δημιουργία προβλήματος όσο και στην αναγνώριση της καταλληλότητας του προβλήματος, οι συμμετέχοντες παρουσίασαν χαμηλή επίδοση. Περίπου οι μισοί κατάφεραν να δημιουργήσουν κατάλληλα λεκτικά προβλήματα, ενώ περίπου το ένα τρίτο κατάφερε να αναγνωρίσει αν τα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν ήταν κατάλληλα ή ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση που τους δόθηκε.

Αναφορικά με τη δημιουργία προβλήματος, τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα. Πρώτον, οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν να δημιουργήσουν κατάλληλα λεκτικά προβλήματα με κλάσματα. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με προηγούμενα ερευνητικά ευρήματα, σύμφωνα με τα οποία οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν γενικά δυσκολίες κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος, σε διαφορετικές μαθηματικές περιοχές συμπεριλαμβανομένης και αυτής των κλασμάτων (Chapman, 2012˙ Kılıç, 2015˙ Işık & Kar, 2012˙ Toluk-Uçar, 2009). Πιο συγκεκριμένα, περίπου τα μισά προβλήματα που δημιούργησαν οι συμμετέχοντες στην παρούσα έρευνα ήταν ακατάλληλα, ενώ υπήρξαν κάποιοι συμμετέχοντες που δημιούργησαν πρόβλημα που δεν αφορούσε την πρόσθεση ή την αφαίρεση κλασμάτων. Για παράδειγμα, μία συμμετέχουσα δημιούργησε το πρόβλημα *«Η Μαρία έχει 3 καραμέλες και ο Άρης 4. Πόσες έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;».* Οι εκπαιδευτικοί, λοιπόν, κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος συνήθως, δημιουργούν ακατάλληλα προβλήματα, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορούν να δημιουργήσουν κανένα πρόβλημα για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Doğan-Coşkun, 2018, 2019˙ Iskenderoğlu, 2017˙ Kar & Isik, 2014).

Δεύτερον, αν και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι δυσκολεύτηκαν να δημιουργήσουν κάποιο λεκτικό πρόβλημα και για τις δύο αριθμητικές πράξεις, όταν εξετάστηκε σε ποια αριθμητική πράξη είχαν καλύτερη επίδοση, βρέθηκε πως όσοι ασχολήθηκαν με την αφαίρεση κλασμάτων δημιούργησαν περισσότερα κατάλληλα λεκτικά προβλήματα από όσους ασχολήθηκαν με την πρόσθεση κλασμάτων. Δηλαδή, φαίνεται ότι ήταν πιο εύκολο για τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων, παρά πρόσθεσης κλασμάτων. Η αρχική υπόθεση ήταν πως οι συμμετέχοντες θα είχαν καλύτερη επίδοση στην πρόσθεση κλασμάτων, γιατί στην έρευνα του Kılıç (2013), οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έδειξαν μεγαλύτερη προτίμηση στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης κλασμάτων παρά αφαίρεσης κλασμάτων και θεωρήθηκε πως η προτίμηση σε μία αριθμητική πράξη συνδέεται και με καλύτερη επίδοση σε αυτή. Ενδεχομένως, η κλασματική έκφραση που είχαν να διαχειριστούν όσοι συμμετέχοντες κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση να οδήγησε στη δημιουργία περισσότερων ακατάλληλων προβλημάτων. Συγκεκριμένα, σε αυτήν την ομάδα συμμετεχόντων δόθηκε η κλασματική έκφραση $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, το άθροισμα της οποίας ξεπερνούσε τη μονάδα. Έτσι, πολλοί συμμετέχοντες δημιούργησαν ακατάλληλα προβλήματα, επειδή δεν πρόσεξαν πως το άθροισμα της πράξης υπερέβαινε τη μονάδα. Για παράδειγμα, μία συμμετέχουσα έγραψε το πρόβλημα *«Η Μαρία έφαγε τα $\frac{3}{5}$ της πίτσας, ενώ ο Γιώργος έφαγε το $\frac{1}{2}$ της πίτσας. Πόση πίτσα έφαγαν συνολικά η Μαρία με τον Γιώργο;»*. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η συμμετέχουσα δεν φαίνεται να πρόσεξε πως το άθροισμα των κλασμάτων υπερέβαινε τη μονάδα για να το αποτυπώσει στο πρόβλημά της. Ίσως, αν το εντόπιζε να δημιουργούσε ένα κατάλληλο πρόβλημα. Επίσης, υπήρξαν και κάποια άτομα που, ενώ πρόσεξαν αυτό το στοιχείο, έκαναν άλλα λάθη κατά τη διατύπωση του προβλήματός τους, δημιουργώντας έτσι, ακατάλληλα προβλήματα. Για παράδειγμα, μία συμμετέχουσα δημιούργησε το πρόβλημα *«Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{3}{5}$ μιας σοκολάτας και η αδερφή του το $\frac{1}{2}$ μιας άλλης σοκολάτας. Έφαγαν περισσότερο ή λιγότερο από μία ολόκληρη σοκολάτα και οι δύο μαζί;»*. Ενώ σε αυτό το πρόβλημα η συμμετέχουσα φάνηκε πως εντόπισε πως το άθροισμα $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, κατά τη δημιουργία του προβλήματος δεν τόνισε πως οι μονάδες που χρησιμοποίησε (οι σοκολάτες) ήταν ίδιου μεγέθους, καταλήγοντας έτσι σε ένα ακατάλληλο πρόβλημα. Ενδεχομένως, αν η κλασματική έκφραση που δινόταν δεν ξεπερνούσε τη μονάδα, οι επιδόσεις των ατόμων που δημιούργησαν λεκτικά πρόβλημα πρόσθεσης να ήταν παρόμοιες ή καλύτερες από τις επιδόσεις των ατόμων που δημιούργησαν λεκτικά πρόβλημα αφαίρεσης.

Παρόμοια, στην έρευνα του Kılıç, (2014), όταν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικό πρόβλημα για μία κλασματική έκφραση που, επίσης, ξεπερνούσε τη μονάδα ($\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{4}$), κάποιοι αντιμετώπισαν το ίδιο πρόβλημα με τους συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας, καθώς δεν πρόσεξαν πως το άθροισμα της κλασματικής έκφρασης ήταν μεγαλύτερο της μονάδας. Από τις συνεντεύξεις διαπιστώθηκε πως οι συμμετέχοντες κατά τη δημιουργία του προβλήματος επικεντρώνονταν στην πράξη για την οποία έπρεπε να δημιουργήσουν πρόβλημα και δεν εξέταζαν τη σχέση των κλασμάτων μεταξύ τους. Δηλαδή, αντιμετώπιζαν τα κλάσματα σαν απλούς αριθμούς και δεν εξέταζαν αν τα προβλήματά τους συμβάδιζαν με την πραγματικότητα και αν ήταν επιλύσιμα ή όχι. Μάλλον, και στην παρούσα έρευνα, οι συμμετέχοντες βιάστηκαν να δημιουργήσουν το πρόβλημα και δεν εξέτασαν αφενός τη σχέση των κλασμάτων μεταξύ τους και αφετέρου αν το πρόβλημα που δημιούργησαν μπορούσε να λυθεί ή όχι.

Τρίτον, όταν στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε αν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι έχουν καλύτερη επίδοση, όταν δημιουργούν ένα λεκτικό πρόβλημα με κλάσματα ελεύθερα ή όταν δημιουργούν ένα λεκτικό πρόβλημα για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση, βρέθηκε πως η επίδοση όσων δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση (ελεύθερα) ήταν παρόμοια με την επίδοση όσων δημιούργησαν λεκτικό πρόβλημα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Αν και υπάρχουν έρευνες που εξετάζουν τις επιδόσεις των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος και στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις (Doğan-Coşkun, 2019, 2018˙ Kar & Isik, 2014˙ Leung & Carbone, 2013), δεν υπάρχουν έρευνες που εξετάζουν τις επιδόσεις τους ανάλογα με το αν δημιουργούν λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένη κλασματική έκφραση ή χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Συγκεκριμένα, στις έρευνες για τη δημιουργία προβλήματος με κλάσματα, οι ερευνητές συνήθως καλούν τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα για οποιαδήποτε αριθμητική πράξη με συγκεκριμένες κλασματικές εκφράσεις (Doğan-Coşkun, 2019, 2018˙ Kar & Isik, 2014˙ Leung & Carbone, 2013). Από την παρούσα έρευνα φάνηκε πως η συνθήκη της δημιουργία λεκτικού προβλήματος με ή χωρίς συγκεκριμένη κλασματική έκφραση δεν διαφοροποίησε την επίδοση των συμμετεχόντων.

Τέταρτον, η πλειονότητα των συμμετεχόντων (68,8%) δημιούργησε λεκτικά προβλήματα με σενάριο κάποια φαγώσιμη ύλη, δηλαδή τα προβλήματά τους αναφέρονταν κυρίως σε πίτσες, γλυκά και φρούτα. Η δεύτερη δημοφιλέστερη κατηγορία σεναρίου ήταν οι επιφάνειες (14,3%). Πολύ λιγότερα προβλήματα δημιουργήθηκαν σχετικά με τα χρηματικά ποσά (7,8%) και τα λίτρα (2,6%). Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν προηγούμενα ευρήματα που δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί τις περισσότερες φορές δημιουργούν λεκτικά προβλήματα τα σενάρια των οποίων αναφέρονται σε κάποια φαγώσιμη ύλη (Austin & Hechter, 2015˙ Δεσλή & Αβραμίδου, 2015˙ Luo, 2009˙ Timmerman, 2011). Όταν εξετάστηκε η καταλληλότητα των προβλημάτων, τα περισσότερα ακατάλληλα προβλήματα αφορούσαν τη φαγώσιμη ύλη (62,3%), ενώ τα περισσότερα κατάλληλα προβλήματα αφορούσαν τις επιφάνειες (90,9%). Το εύρημα αυτό εγείρει προβληματισμό σχετικά με το γιατί οι συμμετέχοντες έδωσαν τόσες λανθασμένες απαντήσεις σε μία κατηγορία σεναρίου που τους φαίνεται οικεία. Ενδεχομένως, η επίδοση στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος με κλάσματα επηρεάζεται από τη φύση των υλικών που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα. Συγκεκριμένα, η φαγώσιμη ύλη παρουσιάζεται συνήθως ως διακριτή ποσότητα για την οποία οι δημιουργοί των προβλημάτων πρέπει να αναφέρουν πως οι μονάδες, όπως και οι κλασματικές μονάδες είναι ίσες. Επίσης, πρέπει να προσέξουν πώς θα διαχειριστούν τις μονάδες που χρησιμοποιούν στα προβλήματα, όταν πρόκειται για μία πράξη το αποτέλεσμα της οποίας ξεπερνάει τη μονάδα. Αντίθετα, οι επιφάνειες παρουσιάζονται συνήθως ως συνεχείς ποσότητες για τις οποίες είναι πιο εύκολο να δημιουργηθεί ένα πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει, καθώς δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές μονάδες, και έτσι αποφεύγονται τα λάθη που εμφανίζονται κατά την παρουσίαση διαφορετικών μονάδων σε ένα πρόβλημα. Επίσης, στις επιφάνειες είναι πιο εύκολο να δημιουργηθεί πρόβλημα για κλασματικές εκφράσεις που ξεπερνούν τη μονάδα. Για παράδειγμα, μία τέτοια περίπτωση είναι όταν οι συμμετέχοντες επικαλούνται σενάριο που αφορά, για παράδειγμα, το γήπεδο και εξετάζει πόσους γύρους έτρεξε κάποιος. Στο γήπεδο, κάθε γύρος τρεξίματος είναι μία μονάδα και δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το πόσους γύρους μπορεί να τρέξει κάποιος.

Επίσης, η επίδοση των συμμετεχόντων στη δημιουργία προβλήματος δεν βρέθηκε να βελτιώνεται, καθώς αυξάνονταν τα έτη σπουδών. Συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί από όλα τα έτη σπουδών και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις στη δημιουργία προβλήματος. Το εύρημα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την έρευνα των Δεσλή και Αβραμίδου (2015) που βρήκαν πως η επίδοση των υποψήφιων εκπαιδευτικών που φοιτούσαν στα μεγαλύτερα έτη ήταν καλύτερη στη δημιουργία προσθετικών προβλημάτων από αυτή των υποψήφιων εκπαιδευτικών που φοιτούσαν στα μικρότερα έτη. Επιπλέον, η επίδοση των συμμετεχόντων δεν επηρεάστηκε από το φύλο, καθώς άνδρες και γυναίκες παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις τόσο στη δημιουργία προβλήματος όσο και στην αναγνώριση της καταλληλότητας προβλήματος.

Όσον αφορά την αναγνώριση της καταλληλότητας προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, δύο είναι τα κύρια ευρήματα. Πρώτον, οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στην αναγνώριση της καταλληλότητας προβλήματος, καθώς περίπου μόνο ένας στους τρεις κατάφερε να αναγνωρίσει σωστά τα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν.

Δεύτερον, υπήρξαν συγκεκριμένες παρανοήσεις των εκπαιδευτικών, όταν κλήθηκαν να αναγνωρίσουν αν ένα πρόβλημα ήταν κατάλληλο ή ακατάλληλο για μία συγκεκριμένη κλασματική έκφραση. Αναλυτικότερα, η πλειονότητα των συμμετεχόντων αντιμετώπισε τα κλάσματα ως ακέραιους αριθμούς και όχι ως ποσότητες, καθώς αναγνώρισε ως κατάλληλα τα προβλήματα στα οποία τα κλάσματα παρουσιάζονταν ως ακέραιοι αριθμοί. Συγκεκριμένα, ένα μικρό ποσοστό των συμμετεχόντων (3,6%) κατάφερε να αναγνωρίσει σωστά ένα ακατάλληλο πρόβλημα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, όταν σε αυτό τα κλάσματα εμφανίζονταν ως ακέραιοι αριθμοί και όχι ως ποσότητες. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με αποτελέσματα άλλων ερευνών στις οποίες αρκετοί συμμετέχοντες δημιουργούσαν λεκτικά προβλήματα στα οποία τα κλάσματα εμφανίζονταν ως ακέραιοι αριθμοί και όχι ως ποσότητες (Kar & Isik, 2014˙ Toluk-Uçar, 2009). Επίσης, 1 στους 4 εκπαιδευτικούς αναγνώρισε σωστά ένα ακατάλληλο πρόβλημα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, όταν αυτό κατέληγε σε ερώτηση που αφορούσε άλλη αριθμητική πράξη από αυτήν που παρουσιαζόταν στην κλασματική έκφραση. Παρόμοια, περίπου 1 στους 4 εκπαιδευτικούς αναγνώρισε σωστά ένα ακατάλληλο πρόβλημα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, όταν αυτό δεν περιελάμβανε όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να λυθεί. Επιπλέον, σχετικά με τα ακατάλληλα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες, υπήρξαν άτομα που αναγνώρισαν τα προβλήματα αυτά ως ακατάλληλα, όχι όμως, επειδή εντόπισαν τον λόγο που καθιστούσαν τα προβλήματα ακατάλληλα, αλλά επειδή θεώρησαν τα προβλήματα αυτά δύσκολα (π.χ., «*Το θεωρώ πολύ απαιτητικό πρόβλημα»),* παρωχημένα (π.χ., «*Τα προβλήματα με την "πίτσα" στο κεφάλαιο των κλασμάτων έχουν κουράσει μαθητές και εκπαιδευτικούς. Θα πρέπει να υπάρξουν καινούρια παραδείγματα»)* ή τα αντιμετώπισαν ως γρίφους (π.χ., «*Μπορεί να υπάρχουν λευκές (μπλούζες) και στο δεύτερο συρτάρι»).* Στην περίπτωση αυτή, οι συμμετέχοντες δεν εξέτασαν αν η διατύπωση του προβλήματος ήταν κατάλληλη ή ακατάλληλη για την κλασματική έκφραση για την οποία δημιουργήθηκε το πρόβλημα, αλλά αναγνώρισαν τα προβλήματα ως ακατάλληλα σύμφωνα με άλλα κριτήρια, όπως είναι ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος και το σενάριο του προβλήματος. Αντίθετα, όταν παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες ένα κατάλληλο πρόβλημα, οι περισσότεροι, πάνω από το 75%, βρήκαν πως το πρόβλημα ήταν κατάλληλο για την κλασματική έκφραση που τους δόθηκε, εξηγώντας και τον τρόπο με τον οποίο λύνεται το πρόβλημα. Για παράδειγμα, κάποιοι συμμετέχοντες έγραψαν: *«Το σύνολο είναι όλο το γκαζόν, οπότε αν προστεθούν (τα κλάσματα) έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε.», «Πράξη πρόσθεσης κλασμάτων με μετατροπή σε ομώνυμα.» και «Θα αφαιρέσει από μία ποσότητα μία άλλη για να δει πόσο έμεινε. Άρα μου φαίνεται σωστό.».* Συμπεραίνεται, λοιπόν, πως είναι πιο εύκολο οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων, παρά να αναγνωρίσουν ένα ακατάλληλο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων. Ενδεχομένως, η δυσκολία στην αναγνώριση ακατάλληλων λεκτικών προβλημάτων οφείλεται σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης για τη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων.

Ο μικρός αριθμός των συμμετεχόντων αποτέλεσε τον κύριο περιορισμό της έρευνας. Συγκεκριμένα, η έρευνα διεξήχθη κατά την περίοδο της πανδημίας Covid, οπότε τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν από μακριά και αρκετοί υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και απόφοιτοι εκπαιδευτικοί έδειξαν απροθυμία να συμμετάσχουν στην έρευνα.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν ιδέες για περεταίρω διερεύνηση και μελέτη σε μελλοντικές έρευνες. Αρχικά, θα μπορούσε να μελετηθεί ποια βήματα ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί, όταν επιχειρούν να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα και αν επικεντρώνονται μόνο στα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματός τους ή και στον τρόπο παρουσίασής του. Επιπλέον, αναφορικά με τα κλάσματα, θα μπορούσε να μελετηθεί αν επηρεάζεται η ικανότητα των εκπαιδευτικών να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα από το αν η ποσότητα για την οποία δημιουργούν το πρόβλημα είναι διακριτή ή συνεχής, καθώς και τους λόγους που συμβαίνει αυτό. Κρίνεται, λοιπόν, αναγκαία η περαιτέρω εξέταση του θέματος, για να βρεθούν οι παράγοντες που επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς και τους οδηγούν να δημιουργούν ακατάλληλα προβλήματα με κλάσματα. Όσον αφορά στην αναγνώριση της καταλληλότητας προβλημάτων, είτε πρόκειται για τη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων είτε για κάποια άλλη μαθηματική περιοχή, θα ήταν ωφέλιμο, σε επόμενες έρευνες, να πραγματοποιηθούν συνεντεύξεις για να διαπιστωθούν οι παράγοντες για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν σωστά πότε ένα πρόβλημα είναι ακατάλληλο και πότε κατάλληλο για μία συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση. Επίσης, θα μπορούσε να μελετηθεί, εάν υπάρχει σύνδεση μεταξύ της δημιουργίας προβλήματος και της αναγνώρισης της καταλληλότητας προβλήματος. Δηλαδή, αν η χαμηλή ή η υψηλή επίδοση στη δημιουργία προβλήματος οδηγεί και σε χαμηλή ή υψηλή επίδοση στην αναγνώριση της καταλληλότητας προβλήματος αντίστοιχα.

Τέλος, είναι πολύ ενθαρρυντικό το γεγονός πως η έρευνα έχει στραφεί στη μελέτη της επίδοσης των εκπαιδευτικών στη δημιουργία προβλήματος σε διάφορες μαθηματικές περιοχές (Chapman, 2012˙ Işık & Kar, 2012˙ Kılıç, 2015˙ Luo, 2009˙ Rizvi, 2004). Συγκεκριμένα, για τη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να εμπλέκονται με δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος, καθώς μέσα από αυτές μπορούν να βελτιώσουν την παιδαγωγική τους γνώση περιεχόμενου (Tichá & Hošpesová, 2010) για τα κλάσματα. Με αυτόν τον τρόπο, οι εκπαιδευτικοί θα είναι σε θέση να μετασχηματίσουν και να οργανώσουν τη διδασκαλία των κλασμάτων με κατανοητό τρόπο για τους μαθητές τους (Shulman, 1987). Ακόμα, είναι απαραίτητο να μπορούν και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να θέτουν κατάλληλα προβλήματα, εάν θέλουν να δημιουργήσουν ένα σχολικό περιβάλλον, επίκεντρο του οποίου θα είναι η δημιουργική επίλυση προβλήματος (Abu-Elwan, 1999). Συνεπώς, οι έρευνες που αφορούν στη δημιουργία προβλήματος στα κλάσματα, και σε οποιαδήποτε άλλη μαθηματική περιοχή, ωφελεί άμεσα τους εκπαιδευτικούς και έμμεσα και τους μαθητές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1 ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. In F. Mina & A. Rogerson (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematical Education into the 21st Century: Social Challenges, Issues and Approaches* (pp.1–8). Cairo: Social Challenges, Issues and Approaches.

Anderson, J. (2009). Mathematics curriculum development and the role of problem solving. In K. School (Ed.), *Curriculum: A national conversation* (pp. 1-9). Canberra: Australian Curriculum Studies Association.

Arikan, E. E., & Ünal, H. (2015). Investigation of problem-solving and problem-posing abilities of seventh-grade students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(5), 1403-1416.

Austin, P. & Hechter, J. (2015). Posing fraction problem scenarios: A comparative study of pre-service teachers and grade five learners. In A. Rogerson (Ed.), *Mathematics education in a connected world* (pp. 19-26). Italy: The Mathematics Education for the Future Project.

Austin, P., Carbone, R. E., & Webb, P. (2011). Prospective primary school teachers' attempts to pose acceptable word problems on the addition of fractions: Some insights from South Africa and the United States of America. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), 168-178.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2018). Australian Curriculum Mathematics proficiencies Problem-Solving. Ανακτήθηκε 18 Νοεμβρίου, 2020,

από:
https://www.australiancurriculum.edu.au/resources/mathematics-proficiencies/portfolios/problem-solving/

Australian Education Council (1994). *Mathematics — A curriculum profile for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation. Ανακτήθηκε 18 Νοεμβρίου, 2020, από: https://www.australiancurriculum.edu.au/resources/mathematics-proficiencies/portfolios/problem-solving/

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Barlow, A. T., & Cates, J. M. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics*, *106*(2), 64-73.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 103-123). Springer, New York: NY.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 401-421.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 57–69.

Carson, J. (2007). A problem with problem solving: Teaching thinking without teaching knowledge. *The Mathematics Educator*, *17*(2), 7-14.

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA*, *6*(4), 135-146.

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q., & Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(4), 919-948.

Cohen, S.A. & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth-grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*(2), 175-200.

Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: Using a problem-posing framework with prospective mathematics teachers. *The Mathematics Educator*, *17*(2), 15-23.

Cunningham, R. (2004). Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility. *Mathematics and Computer Education*, *38*(1), 83-89.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219–243.

Doğan-Coşkun, S. (2018). Are pre-service elementary teachers able to pose problems for the subtraction of fractions? *Osmangazi Journal of Educational Research, 5*(2), 94-105.

Doğan-Coşkun, S. (2019). The analysis of the problems posed by pre-service elementary teachers for the addition of fractions. *International Journal of Instruction*, *12*(1), 1517-1532.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261-271.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101.

Ellerton, N. F. (2015). Problem posing as an integral component of the mathematics curriculum: A study with prospective and practicing middle-school teachers. In F.M. Singer, N.F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 513-543). New York: Springer.

English, L. D. (2019). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational and Scientific Research*, (2), 30-39.

Erdogan, F. (2020). Prospective middle school mathematics teachers' problem posing abilities in context of Van Hiele levels of geometric thinking. *International Online Journal of Educational Sciences, 12*(2), 132-152.

Foster, C. (2019). The fundamental problem with teaching problem solving. *Mathematics Teaching*, *265*, 8–10.

Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, *98*(8), 448-456.

Greer, B., Verschaffel, L., & Corte, E. D. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 271-292). Springer: Dordrecht.

Henderson, K. B., & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. In H. G. Fehr (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, *25*(4), 12-21.

Isik, C., & Kar, T. (2012). The analysis of the problems posed by the pre-service teachers about equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9) 93-113.

Isik, C., Ocal, T., & Kar, T. (2013). Analysis of pre-service elementary teachers' pedagogical content knowledge in the context of problem posing. In B., Ubuz, C., Haser &

M. A., Mariotti, (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3115-3124). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

Iskenderoglu, T. A. (2017). The problems posed and models employed by primary school teachers in subtraction with fractions. *Educational Research and Reviews*, *12*(5), 239-250.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163-180.

Kar, T., & Isik, C. (2014). Analysis of problems posed by pre-service primary teachers about adding fractions in terms of semantic structures. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *9*(2), 135-146.

Kaur, B. (2001). TIMSS & TIMSS-R – Performance of grade eight Singaporean students. In C. Vale, J. Horwood, & J. Roumeliotis (Eds), *Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematical Association of Victoria* (pp. 132-144). Brunswick, Vic: MAV.

Kaur, B., & Yeap, B. H. (2009). Mathematical problem solving in Singapore schools. In B. Kaur, B. H. Yeap & M., Kapur (Eds), *Mathematical problem solving*: *Yearbook 2009* (pp. 3-13). Singapore: Association of Mathematics Education and World Scientific.

Kılıç, Ç. (2013). Pre-service primary teachers' free problem-posing performances in the context of fractions: An example from Turkey. *The Asia-Pacific Education Researcher*, *22*(4), 677-686.

Kilic, C. (2014). Analyzing pre-service primary teachers' fraction knowledge structures through problem posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1603-1619.

Kılıç, Ç. (2015). The tendency of Turkish pre-service teachers to pose word problems. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6*(2), 163-178.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the problem: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.*), Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *29*(2), 66-74.

Koichu, B., Harel, G., & Manaster, A. (2013). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problem posing in the context of division of fractions. *Instructional Science, 41*(4), 681-698.

Lavy, I., & Shriki, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-136). Seoul: PME.

Leung, I. & Carbone, R.E. (2013). Pre-service teachers' knowledge about fraction division reflected through problem posing. *The Mathematics Educator, 14*(1), 80-92.

Leung, S. S. (2012). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 103-116.

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 3–257–264). Bergen: Bergen University College.

Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 83-98.

Luo, F., Lo, J. J., & Leu, Y. C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *111*(4), 164-177.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marchionda, H. (2006). *Preservice teachers' procedural and conceptual understanding of fractions and the effects of inquiry-based learning on this understanding*. Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή. Clemson University, South Carolina. Ανακτήθηκε 30 Οκτωβρίου, 2020, από: https://tigerprints.clemson.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1037&context=all_dissertations

Mason, J. (2016). When is a problem…? "When" is actually the problem! In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 263–285). Switzerland: Springer International.

McAllister, C. J., & Beaver, C. (2012). Identification of error types in preservice teachers' attempts to create fraction story problems for specified operations. *School Science and Mathematics*, *112*(2), 88-98.

National Curriculum Board (2009). *Shape of the Australian curriculum: Mathematics*. Barton, ACT: NCB.

GOV.UK (2020). National curriculum in England: mathematics programmes of study. Ανακτήθηκε 20 Νοεμβρίου, 2020, από: https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

NCTM (2000). Executive summary principles and standards for school mathematics. Ανακτήθηκε 21 Νοεμβρίου, 2020, από:

https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45*(4), 1080–1110.

Newton, K. J. (2009). Instructional practices related to prospective elementary school teachers' motivation for fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(2), 89-109.

Nixon-Ponder, S. (1995). Using problem posing dialogue in adult literacy education. *Adult Learning, 7*(2), 10–12.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. V., Dooren, S., & Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds (*pp. 3–19). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Pehkonen, E., Naiveri, L., & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *Centre for European Policy Studies Journal, 3*(4), 9-23.

Pelczer, I., & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity assessment in school settings through problem posing tasks. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(1), 383-398.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematically discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.) New York: John Wiley & Sons.

Rizvi, N. F. (2004). Prospective teachers' ability to pose word problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 12*, 1–22.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education*, *196*(2), 1-38.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4–14.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539.

Siswono, T. Y. E. (2008). Promoting creavity in learning mathematics using open-ended problems. In A. M. A. Khairul, M. Zainol, I. Fazli & Y. Siau (Eds.), *Proceedings of 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3)* (pp. 5-6). Indonesia: Institut Pertanian Bogor.

Siswono, T. Y. E., Kohar, A. W., Kurniasari, I., & Astuti, Y. P. (2016). An investigation of secondary teachers' understanding and belief on mathematical problem solving. *Journal of Physics: Conference Series, 693*(1), 12015-12033.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 341–350.

Stoyanova, E. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians* Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή. Cowan University, Australia. Ανακτήθηκε 27 Οκτωβρίου, 2020, από: http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1886&context=theses

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal for Mathematics Teachers Education*, *9*(2), 129-156.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2010). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society* *for Research in Mathematics Education* (pp. 1941–1950). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Timmerman, M. (2011). Making connections: Elementary teachers’ construction of division word problem and representations. *School Science and Mathematics*, *115*(3), 115-123.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Toluk- Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 166-175.

Unlu, M. & Ertekin, E. (2012). Why do pre-service teachers pose multiplication problems instead of division problems in fractions*? Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *46*, 490-494

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, *5*(3), 239-256.

Ward, J., & Thomas, G. (2007). What do teachers know about fractions? In F. Ell, N. Hawera, J. Higgins, K. Irwin, A. Tagg, G. Thomas, T. Trinick, J. Ward, & J. Young-Loveridge (Eds.), *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects 2006* (pp.128-138). Wellington: Learning Media.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2014). Defining mathematical problems and problem solving: Prospective primary teachers’ beliefs in Cyprus and England. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 279-299.

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 101-118.

Young, E., & Zientek, L. R. (2011). Fraction operations: An examination of prospective teachers' errors, confidence, and bias. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 1-23.

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: A cross-cultural study of American and Chinese mathematics teachers. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(4), 438-457.

5.2 ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δεσλή, Δ., & Αβραμίδου, Η. (2015). Κατασκευή προβλημάτων με σενάριο από υποψήφιους εκπαιδευτικούς: Η περίπτωση της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Στο *32ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (*σελ. 263-272). Καστοριά: ΕΜΕ.

Υ.Π.Ε.Π.Θ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, ΦΕΚ 303Β/τεύχ.2^{o}, 13-03-2003. Ανακτήθηκε 23 Νοεμβρίου, 2020, από: http://www.pi-schools.gr/download/programs/depps/fek303.pdf

Εφημερίδα της Κυβέρνησης (ΦΕΚ 162/Β/22-1-2015). Ανακτήθηκε 3 Οκτωβρίου, 2021, από: http://www.et.gr/index.php/anazitisi-fek

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2007). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Βιβλίο Μαθητή.* Ρίο: Διόφαντος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α) ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ/ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα έργα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί στο πλαίσιο μιας διπλωματικής μεταπτυχιακής εργασίας στη διδακτική των μαθηματικών με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων. Η βοήθειά σας για την απάντηση των έργων είναι πολύτιμη.

Εκτιμώμενος χρόνος συμπλήρωσης 10-15 λεπτά.

Παρακαλώ συμπληρώστε τα παρακάτω στοιχεία.

Φύλο:

- ☐ Άνδρας
- ☐ Γυναίκα

Έτος φοίτησης:

- ☐ 1ο έτος
- ☐ 2ο έτος
- ☐ 3ο έτος
- ☐ 4ο έτος
- ☐ Απόφοιτος

Έργο1

Υποθέστε ότι είστε εκπαιδευτικός της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που θεωρείτε κατάλληλο για **<u>πρόσθεση κλασμάτων</u>**.

____

____

Έργο 2

Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθειά του να διδάξει στους μαθητές και στις μαθήτριές του την **<u>πρόσθεση</u>** κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση

$$«\frac{2}{3}+\frac{1}{4}»$$

α) Έδωσα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου στη μεγαλύτερή μου αδερφή και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων μου στη μικρότερή μου αδερφή. Πόσα χρήματα έχω τώρα;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

β) Η Αλίκη και ο Ανδρέας αγόρασαν δύο πίτσες του ίδιου μεγέθους. Η Αλίκη έκοψε την πίτσα της σε 3 ίσα κομμάτια και έφαγε τα 2. Ο Ανδρέας έκοψε τη δική του πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έφαγε το 1. Πόσα κομμάτια πίτσας έφαγαν η Αλίκη και ο Ανδρέας μαζί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

γ) Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{2}{3}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$ του γκαζόν. Πόσο μέρος του γκαζόν κούρεψαν τα δύο αδέρφια μαζί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

δ) Τα $\frac{2}{3}$ από τις μπλούζες του πρώτου συρταριού είναι λευκές. Το $\frac{1}{4}$ από τις μπλούζες του τελευταίου συρταριού είναι λευκές. Πόσες λευκές μπλούζες έχει η Βάγια;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

B) ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ/ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα έργα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί στο πλαίσιο μιας διπλωματικής μεταπτυχιακής εργασίας στη διδακτική των μαθηματικών με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων. Η βοήθειά σας για την απάντηση των έργων είναι πολύτιμη.

Εκτιμώμενος χρόνος συμπλήρωσης 10-15 λεπτά.

Παρακαλώ συμπληρώστε τα παρακάτω στοιχεία.

Φύλο:

- ☐ Άνδρας
- ☐ Γυναίκα

Έτος φοίτησης:

- ☐ 1^{o} έτος
- ☐ 2^{o} έτος
- ☐ 3^{o} έτος
- ☐ 4^{o} έτος
- ☐ Απόφοιτος

Έργο 1

Υποθέστε ότι είστε εκπαιδευτικός της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που θεωρείτε κατάλληλο για την κλασματική έκφραση

$$«\frac{3}{5}+\frac{1}{2}»$$

Έργο 2

Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθειά του να διδάξει στους μαθητές και στις μαθήτριές του την <u>**πρόσθεση**</u> κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση

$$«\frac{2}{3}+\frac{1}{4}»$$

α) Έδωσα τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων μου στη μεγαλύτερή μου αδερφή και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων μου στη μικρότερή μου αδερφή. Πόσα χρήματα έχω τώρα;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

β) Η Αλίκη και ο Ανδρέας αγόρασαν δύο πίτσες του ίδιου μεγέθους. Η Αλίκη έκοψε την πίτσα της σε 3 ίσα κομμάτια και έφαγε τα 2. Ο Ανδρέας έκοψε τη δική του πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έφαγε το 1. Πόσα κομμάτια πίτσας έφαγαν η Αλίκη και ο Ανδρέας μαζί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

γ) Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{2}{3}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$ του γκαζόν. Πόσο μέρος του γκαζόν κούρεψαν τα δύο αδέρφια μαζί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

δ) Τα $\frac{2}{3}$ από τις μπλούζες του πρώτου συρταριού είναι λευκές. Το $\frac{1}{4}$ από τις μπλούζες του τελευταίου συρταριού είναι λευκές. Πόσες λευκές μπλούζες έχει η Βάγια;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

Γ) ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ/ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα έργα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί στο πλαίσιο μιας διπλωματικής μεταπτυχιακής εργασίας στη διδακτική των μαθηματικών με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων. Η βοήθειά σας για την απάντηση των έργων είναι πολύτιμη.

Εκτιμώμενος χρόνος συμπλήρωσης 10-15 λεπτά.

Παρακαλώ συμπληρώστε τα παρακάτω στοιχεία.

Φύλο:

- ☐ Άνδρας
- ☐ Γυναίκα

Έτος φοίτησης:

- ☐ 1ο έτος
- ☐ 2ο έτος
- ☐ 3ο έτος
- ☐ 4ο έτος
- ☐ Απόφοιτος

Έργο1

Υποθέστε ότι είστε εκπαιδευτικός της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που θεωρείτε κατάλληλο για **<u>αφαίρεση κλασμάτων</u>**.

Έργο 2

Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθεια του να διδάξει στους μαθητές και στις μαθήτριές του την **αφαίρεση** κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση

$$«\frac{2}{3}-\frac{1}{4}»$$

α) Στο πρωινό μας φαγητό έχουμε τα $\frac{2}{3}$ ενός ψωμιού. Έφαγα το $\frac{1}{4}$ του ψωμιού που είχαμε στο πρωινό φαγητό. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

β) Η μαμά χώρισε μία πίτσα σε 3 ίσα κομμάτια και μου έδωσε 2 κομμάτια. Επίσης, η μαμά χώρισε μία άλλη πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έδωσε στην αδερφή μου 1 κομμάτι. Πόσα παραπάνω κομμάτια πίτσας έφαγα από την αδερφή μου;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

γ) Τα $\frac{2}{3}$ μιας κανάτας είναι γεμάτα με νερό. Έριξα το $\frac{1}{4}$ του νερού της κανάτας σε ένα ποτήρι. Πόσο νερό έμεινε στην κανάτα;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

δ) Ο Αλέξης πήρε τα $\frac{2}{3}$ των μπισκότων για το σχολείο. Στο σχολείο έδωσε το $\frac{1}{4}$ των μπισκότων στον Κώστα. Πόσα μπισκότα έμειναν στον Αλέξη;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

Δ) ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ/ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα έργα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί στο πλαίσιο μιας διπλωματικής μεταπτυχιακής εργασίας στη διδακτική των μαθηματικών με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα των εκπαιδευτικών στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων. Η βοήθειά σας για την απάντηση των έργων είναι πολύτιμη.

Εκτιμώμενος χρόνος συμπλήρωσης 10-15 λεπτά.

Παρακαλώ συμπληρώστε τα παρακάτω στοιχεία.

Φύλο:

- ☐ Άνδρας
- ☐ Γυναίκα

Έτος φοίτησης:

- ☐ 1ο έτος
- ☐ 2ο έτος
- ☐ 3ο έτος
- ☐ 4ο έτος
- ☐ Απόφοιτος

Έργο1

Υποθέστε ότι είστε εκπαιδευτικός της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που θεωρείτε κατάλληλο για **<u>αφαίρεση κλασμάτων</u>**.

Έργο 2

Ένας δάσκαλος της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου, στην προσπάθεια του να διδάξει στους μαθητές και στις μαθήτριές του την **<u>αφαίρεση</u>** κλασμάτων, επινόησε ο ίδιος κάποια προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω. Ποια από αυτά τα προβλήματα είναι κατάλληλα και ποια ακατάλληλα για την κλασματική έκφραση

$$«\frac{2}{3} - \frac{1}{4}»$$

α) Στο πρωινό μας φαγητό έχουμε τα $\frac{2}{3}$ ενός ψωμιού. Έφαγα το $\frac{1}{4}$ του ψωμιού που είχαμε στο πρωινό φαγητό. Πόσο έφαγα από όλο το ψωμί;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

β) Η μαμά χώρισε μία πίτσα σε 3 ίσα κομμάτια και μου έδωσε 2 κομμάτια. Επίσης, η μαμά χώρισε μία άλλη πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και έδωσε στην αδερφή μου 1 κομμάτι. Πόσα παραπάνω κομμάτια πίτσας έφαγα από την αδερφή μου;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

γ) Τα $\frac{2}{3}$ μιας κανάτας είναι γεμάτα με νερό. Έριξα το $\frac{1}{4}$ του νερού της κανάτας σε ένα ποτήρι. Πόσο νερό έμεινε στην κανάτα;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____

δ) Ο Αλέξης πήρε τα $\frac{2}{3}$ των μπισκότων για το σχολείο. Στο σχολείο έδωσε το $\frac{1}{4}$ των μπισκότων στον Κώστα. Πόσα μπισκότα έμειναν στον Αλέξη;

Α) Κατάλληλο πρόβλημα Β) Ακατάλληλο πρόβλημα Γ) Δεν γνωρίζω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

____