

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ ΦΛΩΡΙΝΑΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΙΤΛΟΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:
ΕΙΣΑΓΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΈΝΝΟΙΑ ΤΟΥ $\frac{1}{2}$ ΣΤΟ
ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ**

**INTRODUCING THE CONCEPT OF $\frac{1}{2}$ IN
KINDERGARTEN**

**Φοιτήτρια: ΕΛΕΝΗ Μ. ΒΟΣΝΑΚΟΥ
ΑΕΜ: 3477**

**Επόπτης: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Π. ΧΡΗΣΤΟΥ
Β' Βαθμολογήτρια: ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΣΙΔΗΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΦΛΩΡΙΝΑ, 2021

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| Εισαγωγή | 5 |
| Θεωρητικό πλαίσιο | 8 |
| 1.1 Η έννοια του αριθμού | 8 |
| 1.2 Θεωρία του Piaget για την διδασκαλία του αριθμού | 9 |
| 1.3 Σύγχρονη διδασκαλία του αριθμού..... | 10 |
| 1.4 Απαρίθμηση | 12 |
| 1.5 Ρητοί αριθμοί | 15 |
| 1.5.1 Η έννοια των ρητών αριθμών | 15 |
| 1.5.2 Η πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών | 16 |
| 1.6 Η διαίρεση..... | 18 |
| 1.7 Οι δεκαδικοί αριθμοί..... | 21 |
| 1.8 Δραστηριότητες στο νηπιαγωγείο..... | 23 |
| 1.9 Αναστοχασμός εκπαιδευτικού και μαθητών..... | 25 |
| 1.10 Τροχιές Μάθησης..... | 31 |
| 2.1 Τροχιά μάθησης του μισού στο νηπιαγωγείο | 33 |
| 2.2 Προτεινόμενες δραστηριότητες για έννοια του μισού στο νηπιαγωγείο | 36 |
| 1η Δραστηριότητα: Μπουγάδα Ακεραίων | 36 |
| 2η Δραστηριότητα: Το παζλ των ακεραίων..... | 40 |
| 3η Δραστηριότητα: Το μοίρασμα της Τούρτας | 43 |
| 4η Δραστηριότητα: Ταΐζουμε τα σκυλάκια | 47 |
| 5 ^η Δραστηριότητα: Η χαλασμένη μηχανή της πίτσας..... | 50 |
| 6η Δραστηριότητα: Μπουγάδα με αριθμούς και πίτσες | 54 |
| Τελική αναστοχαστική δράση | 58 |
| Συζήτηση..... | 59 |
| Βιβλιογραφία | 60 |

Περίληψη

Στο ελληνικό νηπιαγωγείο, η διδασκαλία των μαθηματικών κρίνεται πολύ σημαντική. Μέσα από τις δραστηριότητες που προτείνονται από το ΔΕΠΠΣ για το Νηπιαγωγείο, τα παιδιά, ανάμεσα στα άλλα, θα εισαχθούν στους φυσικούς αριθμούς, στις συμβολικές τους αναπαραστάσεις και στις βασικές πράξεις με αυτούς. Ωστόσο, η βιβλιογραφία δείχνει ότι λόγω αυτής της υπερέκθεσης στους φυσικούς αριθμούς, όταν οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο, εισαχθούν στους ρητούς αριθμούς, αντιμετωπίζουν δυσκολίες και κάνουν λάθη που θα μπορούσαν να οφείλονται στην προηγούμενη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, οι μαθητές δυσκολεύονται να θεωρήσουν τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως αριθμούς με το ίδιο στάτους με τους φυσικούς αριθμούς.

Στόχος της παρούσας εργασίας, είναι να προτείνει μια τροχιά μάθησης για την διδασκαλία του μισού στο νηπιαγωγείο, μέσα από την ανάπτυξη έξι διαφορετικών δραστηριοτήτων. Οι εν λόγω δραστηριότητες σχεδιάστηκαν να ακολουθούν μια συγκεκριμένη τροχιά μάθησης και τηρώντας τις βασικές αρχές για τα μαθηματικά του αναλυτικού προγράμματος. Η τροχιά μάθησης που σχεδιάστηκε ξεκινάει με την αναγνώριση των συμβόλων των φυσικών αριθμών και τη θέση τους στην αριθμογραμμή, τη συσχέτιση τους με το πλήθος αντικειμένων που αναπαριστούν και τη διαδικασία της απαρίθμησης. Ακολουθεί η πρώτη προσέγγιση με την έννοια του $1/2$ χάρη σε δραστηριότητες που στηρίζονται στη δίκαιη μοιρασιά ποσοτήτων. Τέλος, η διδασκαλία του μισού ολοκληρώνεται με την τοποθέτηση αριθμών που περιέχουν και ακέραιους και τους μισούς τους στην ίδια αριθμογραμμή, κάνοντας χρήση του παιχνιδιού της μπουγάδας των αριθμών.

Στο τέλος της παρούσας εργασίας παρατίθεται τόσο το υλικό που σχεδιάστηκε για τις εν λόγω δραστηριότητες, όσο και ο πλήρης σχεδιασμός των δραστηριοτήτων που περιλάμβαναν στο τέλος τους και δράσεις αναστοχασμού ώστε να αποτελέσει ένα έτοιμο εργαλείο για χρήση στην τάξη του Νηπιαγωγείου.

Λέξεις Κλειδιά: Μισό, Τροχιά μάθησης, φυσικοί αριθμοί, ρητοί, Νηπιαγωγείο, Μαθηματικά, $1/2$.

Abstract

In the Greek kindergarten, the teaching of mathematics is critical. Through the activities proposed by the curriculum for the kindergarten, among other concepts, the children will be introduced to the natural numbers, their symbolic representations and the basic operations with them. However, the literature shows that due to this overexposure to natural numbers, when elementary school students are introduced to rational numbers, they encounter difficulties and make mistakes that could be due to their prior knowledge of natural numbers. For example, students find it difficult to think of decimals and fractions as numbers with the same status as natural numbers.

The aim of this paper is to propose a learning trajectory for teaching half ($1/2$) in kindergarten, through the development of six different activities. These activities were designed to follow a specific learning trajectory and adhere to the basic mathematical principles of the curriculum. The designed learning trajectory begins with recognizing the symbols of natural numbers and their position on the number line, relating them with the number of objects they represent, and the enumeration process. The following introducing $1/2$ starts with activities based on the fair sharing of discrete quantities. Finally, the teaching of the half is completed by placing numbers that contain both integers and their halves on the same number line, making use of the number laundering game.

At the end of this dissertation both the material designed in these activities are presented, as well as a complete planning of the activities for applying them in the Kindergarten classroom.

Keywords: Half, Learning path, natural numbers, expressions, Kindergarten, Mathematics, $1/2$.

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία, εστιάζει στην εισαγωγή της έννοιας του ½ στο νηπιαγωγείο και αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την παρουσία των βασικών εννοιών που σχετίζονται με το θέμα και συγκροτούν το θεωρητικό μέρος της. Στο δεύτερο γίνεται μια προσπάθεια να προταθούν έξι δραστηριότητες, εντός σχολικής τάξης, οι οποίες θα διευκολύνουν την κατανόηση του ½ από τους μαθητές του νηπιαγωγείου. Ο αρχικός σχεδιασμός περιλάμβανε και την εμπειρική αξιολόγηση των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μέσω της χρήσης τους σε μαθητές νηπιαγωγείου. Ωστόσο, η εν λόγω αξιολόγηση δεν κατέστη δυνατόν να πραγματοποιηθεί, λόγω της αναστολής λειτουργίας όλων των σχολικών ιδρυμάτων, συμπεριλαμβανομένων και των νηπιαγωγείων εξαιτίας της πανδημίας Covid-19.

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας, που ορίζεται ως υποχρεωτική εκπαίδευση, έχει ως πρώτο στάδιο του το νηπιαγωγείο. Η φοίτηση στο Νηπιαγωγείο είναι διετής. Βάσει του νόμου 4521/2018, για τα νήπια που συμπληρώνουν ηλικία 4 ετών καθίσταται υποχρεωτική σταδιακά από το σχολικό έτος 2018-2019 και σε κάθε περίπτωση εντός τριετίας. Εγγράφονται σε αυτό νήπια 5 ετών που η φοίτηση τους είναι υποχρεωτική, βάσει του Ν. 3518/2006, και νήπια 4 ετών (φοίτηση σταδιακά υποχρεωτική).

Με βάση τα παραπάνω, φαίνεται ότι αναγνωρίζεται η σημασία του θεσμού της προσχολικής εκπαίδευσης στην ολόπλευρη ανάπτυξη των παιδιών. Εστιάζοντας, στον εκπαιδευτικό άξονα, το περιβάλλον μέσα στο οποίο καλούνται να αλληλεπιδράσουν οι εκπαιδευτικοί και παιδιά αποτελείται από δύο παράγοντες, το υλικό και το κοινωνικό. Στην πρώτη περίπτωση κατατάσσονται τόσο ο χώρος, όσο και ο εξοπλισμός που έχει στην διάθεσή του ο/η εκπαιδευτικός. Στην δεύτερη κατηγορία εντάσσονται ο εκπαιδευτικός, το σύνολο των μαθητών, οι μέθοδοι διδασκαλίας και το περιεχόμενό τους (Αναστασιάδου, 2012).

Εξετάζοντας το ΔΕΠΠΣ για το νηπιαγωγείο, γίνεται αντιληπτό πως οι εκπαιδευτικές ενότητες περιλαμβάνουν ένα μεγάλο εύρος γνώσεων. Αντίθετα με όσους πιστεύουν ότι το νηπιαγωγείο εστιάζει μόνο στην εκμάθηση της γλώσσας, τουλάχιστον σε προφορικό επίπεδο, θα πρέπει να σημειωθεί πως γίνεται σημαντική προσπάθεια στην προσέγγιση και των μαθηματικών εννοιών.

Όπως η γλώσσα, έτσι και τα μαθηματικά αποτελούνται από ένα σύνολο εννοιών, τις οποίες σταδιακά ο μαθητής διδάσκεται και κατακτά. Το νηπιαγωγείο συχνά αντιμετωπίζεται ως ένας προπομπός της βασικής εκπαίδευσης των μαθητών και ότι έχει ως στόχο περισσότερο να προετοιμάσει το νήπιο για τις μαθηματικές έννοιες (Φιλίππου & Χρίστου, 2002). Ωστόσο, ο βιωματικός χαρακτήρας του νηπιαγωγείου, είναι αυτός που επιτρέπει στα νήπια, βάσει των δικών τους μοναδικών χαρακτηριστικών και γνωρισμάτων να προσεγγίσουν το περιβάλλον τους και να καλύψουν τις ανάγκες τους μέσα από τις εμπειρίες που αποκτούν (Τζεκάκη, 1988, Nunes, & Bryant 2007). Συνεπώς, το νηπιαγωγείο είναι η βαθμίδα που θα βοηθήσει τα παιδιά με βιωματικό τρόπο να εμπλουτίσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, να επεξεργαστούν νέα δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις, συσχετισμούς και ποικίλους μετασχηματισμούς μέσω της δοκιμής και του ελέγχου. Επίσης, τα παιδιά στο νηπιαγωγείο θα βρεθούν αντιμέτωπα με την ομαδική ή ατομική επίλυση προβλημάτων και την αξιοποίηση της σύγχρονης τεχνολογίας (Καρούση, & Σκουμπουρδή, 2008).

Σε όλα τα μαθήματα, κατά την διδασκαλία τους, ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να εστιάζει μόνο στην μεταφορά της γνώσης, αλλά να σχεδιάζει και να εξελίσσει ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών του, τον τρόπο διδασκαλίας. Στην περίπτωση των μαθηματικών, το Εθνικό Αγγλικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000) θεωρεί ως σημαντικά στοιχεία τα εξής: α) την επίλυση προβλημάτων, β) τη συλλογιστική σκέψη και την απόδειξη, γ) την αναπαράσταση δ) την επικοινωνία και ε) τις συνδέσεις. Ο σχεδιασμός του μαθήματος με βάση τα παραπάνω κριτήρια αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να έχουν μια βαθύτερη σχέση με το συγκεκριμένο μάθημα και να αρχίσουν να κατανοούν τις έννοιες από τις οποίες αποτελείται (Χασάπης, 2000, Nunes & Bryant, 2007).

Η παρούσα εργασία, παρουσιάζει έξι διαφορετικές δραστηριότητες μέσα από τις οποίες ο εκπαιδευτικός θα προσπαθήσει αφενός να ενεργοποιήσει και να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών του ώστε να εισάγει την έννοια του $\frac{1}{2}$. Για την κατανόηση του $\frac{1}{2}$ ως αριθμού, είναι απαραίτητη η κατανόηση της σειράς των ακέραιων αριθμών από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο και ανάποδα, ώστε στη συνέχεια τα παιδιά να καταλάβουν ότι ανάμεσα σε δυο ακεραίους υπάρχει κι άλλος

αριθμός. Μια δυσκολία στην κατανόηση των ρητών αριθμών είναι ότι οι μαθητές υιοθετούν την ιδιότητα του επόμενου αριθμού των φυσικών αριθμών και στους ρητούς. Δηλαδή θεωρούν ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος επόμενος αριθμός κάθε ρητού αριθμού. Μάλιστα, εμφανίζονται να έχουν συγκεκριμένες προκαταλήψεις σχετικά με τα αποτελέσματα των μαθηματικών πράξεων, θεωρώντας ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης θα είναι πάντα μεγαλύτερο των αρχικών όρων και της διαίρεσης, αφαίρεσης θα είναι πάντα μικρότερο από τους αρχικούς όρους. μεγαλύτερος αριθμός στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και μικρότερος όταν γίνεται αφαίρεση ή διαίρεση (Cristou, 2015). Μάλιστα σε έρευνα σε μαθητές αναφορικά με το είδος των αριθμών που βρίσκονται ανάμεσα από δύο ρητούς αριθμούς, η πλειοψηφία των μαθητών, ανεξάρτητα από την ηλικία τους, εμφάνισαν την πεποίθηση ότι ανάμεσα σε δυο ψευτοδιαδοχικούς αριθμούς, π.χ., το 0, 5 και το 0,6 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί (Vamvakoussi&Vosniadou, 2010).

Η εισαγωγή των ρητών αριθμών στο νηπιαγωγείο αποτελεί μια πρόκληση για κάθε νηπιαγωγό. Μια τέτοια προσπάθεια μπορεί αρχικά να γίνει με την εισαγωγή στο $\frac{1}{2}$, που αποτελεί μια διαισθητική έννοια για τα μικρά παιδιά. Σε αυτή την προσπάθεια θα πρέπει να ληφθεί υπόψη τα χαρακτηριστικά των μαθητών και να προσαρμοστεί στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα τους, ώστε μέσα από μια βιωματική μάθηση να μπορέσουν να κατανοήσουν την συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Η εισαγωγή του $\frac{1}{2}$ στις μικρές ηλικίες θα μπορούσε να βοηθήσει μετέπειτα στην διδασκαλία και στην κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού, όπως των κλασμάτων και των δεκαδικών, στους οποίους τα παιδιά του δημοτικού σχολείου εμφανίζουν πολλές δυσκολίες. (Vamvakoussi&Vosniadou, 2010).

Θεωρητικό πλαίσιο

1.1 Η έννοια του αριθμού

Η χρήση των μαθηματικών και η κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές στηρίζεται στην κατανόηση του θεμέλιου λίθου, της έννοιας του αριθμού. Ο αριθμός δεν πρέπει να λογίζεται ως ένα σύμβολο που εκφράζει μια συγκριμένη ποσότητα, αντίθετα είναι μια πολυσύνθετη . Η έννοια του αριθμού όταν γίνεται αναφορά σε μαθητές προσχολικής ηλικίας, όπως είναι αυτοί του νηπιαγωγείου, μπορεί να περιγράφεται και ως αίσθηση του αριθμού. Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται συνολικά στην ικανότητα χρήσης και κατανόησης των αριθμών, των αριθμητικών σχέσεων και πράξεων. Ειδικότερα, η έννοια της αίσθησης του αριθμού και η κατανόησή της εκφράζουν πρωτίστως την ευχέρεια του μαθητή τόσο στην εκτίμηση και στην σύγκριση διαφορετικών μεγεθών ή ποσοτήτων, όσο και στις ολοκλήρωση νοερών πράξεων. Επίσης, συνδέονται με την ικανότητα να μπορεί ο μαθητής να αναγνωρίζει μη λογικά δεδομένα, αλλά και να χρησιμοποιεί αναπαραστάσεις ποσοτήτων, με άνεση ώστε να μπορεί κινηθεί ανάμεσα σε διαφορετικές κατηγορίες τους (Λεμονίδης, 2003, Kalchmanetal., 2005).

Η εν λόγω αίσθηση κατά την προσχολική ηλικία αναπτύσσεται σε δύο στάδια, το πρώιμο (predimensionalstage) και το ενοποιημένο (Unidimensionalstage). Το πρώιμο στάδιο φαίνεται να έχει ως σημείο εκκίνησης την ηλικία των τεσσάρων, κατά το οποίο τα νήπια μπορούν να εφαρμόσουν δύο διαφορετικά σχήματα. Στο πρώτο από αυτά, το ποσοτικό, έχουν πλέον την δυνατότητα να δίνουν απαντήσεις σε ερωτήματα που σχετίζονται με την διάκριση του περισσότερου και του λιγότερου. Αντίστοιχα στο δεύτερο σχήμα, περιλαμβάνεται η μέτρηση, δηλαδή η καταμέτρηση των αντικειμένων ενός συνόλου, το οποίο αντικρίζουν (Garcia, etal., 2006).

Το δεύτερο στάδιο της αίσθησης του αριθμού, ορίζεται ως το ενοποιημένο και η έναρξή του τοποθετείται χρονικά στην ηλικία των έξι. Κατά το στάδιο αυτό το παιδί καταφέρνει να συγχωνεύσει το ποσοτικό με την μέτρηση. Παράλληλα με την έναρξη του ενοποιημένου σταδίου, γίνεται και η ανάπτυξη της νοητικής αναπαράστασης της σειράς με την οποία αυξάνουν ή μειώνονται οι αριθμοί (numberline). Η νοητική αναπαράσταση των αριθμών περιλαμβάνει την αναγνώριση των μαθηματικών

συμβόλων, την γνώση των λέξεων που περιγράφουν τους αριθμούς, την ικανότητα για μέτρηση και την γνώση της πληθικότητας των αριθμών (Garcia, etal., 2006).

1.2 Θεωρία του Piaget για την διδασκαλία του αριθμού

Η διδασκαλία των μαθηματικών αρχικά βασιζόταν στην θεωρία του Piaget, σχετικά με τα στάδια νοητικής ανάπτυξης. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη θεωρία των σταδίων, η ανάπτυξη γίνεται μέσα από σειρά ποιοτικών μεταμορφώσεων, οι οποίες εντοπίζονται στη γενική γνωστική δομή του παιδιού. Σύμφωνα με τον Piaget, μεταξύ γέννησης και ενηλικίωσης, υπάρχουν τέσσερα κύρια στάδια ανάπτυξης τα οποία αντιστοιχούν στη βρεφική, νηπιακή, παιδική ηλικία και στην εφηβεία (Cole&Cole, 2001).

Το παιδί ηλικίας από 0 έως 2 ετών βρίσκεται στο αισθητηριοκινητικό στάδιο, το οποίο αποτελείται από έξι υποστάδια και περιλαμβάνει το συντονισμό αισθητηριακών αντιλήψεων και των απλών κινητικών συμπεριφορών για την απόκτηση γνώσης του κόσμου (Cole&Cole, 2001).

Αντίστοιχα σε ηλικία από 2 έως 6 ετών, το παιδί βρίσκεται στο στάδιο προ-λογικής νόησης. Στο συγκεκριμένο στάδιο, η ανάπτυξη της νοητικής αναπαράστασης δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να μπορούν να σκέφτονται για αντικείμενα που δεν είναι παρόντα και ταυτόχρονα να συμβολίζουν (χρήση γλώσσας, συμβολικό παιχνίδι, σχέδιο). Περιορισμοί της προσυλλογιστικής σκέψης αποτελούν ο εγωκεντρισμός, ο ανιμισμός, ο ρεαλισμός και η αδυναμία διατήρησης, η οποία οφείλεται στην έλλειψη ικανότητας των παιδιών για αντιστρεψιμότητα, αντιστάθμιση και ταυτότητα. Επίσης, τα παιδιά αυτού του σταδίου συγχέουν τις κατηγορίες με τις υποκατηγορίες και το φαινομενικό με το πραγματικό (Cole&Cole, 2001).

Παιδιά ηλικίας από 6 έως 12 ετών τοποθετούνται στο στάδιο της συγκεκριμένης λογικής νόησης. Στο εν λόγω στάδιο τα παιδιά πλέον είναι ικανά για νοητικές ενέργειες. Ο τρόπος σκέψης τους αλλάζει και γίνεται περισσότερο πολύπλοκος αφού έχουν την δυνατότητα να χρησιμοποιούν δραστηριότητες όπως η αποκέντρωση, η ταυτότητα, η αντιστάθμιση και η αντιστρεψιμότητα (διατήρηση),

ενώ λύνουν προβλήματα λογικής ταξινόμησης, σειροθέτησης και αρίθμησης (Cole&Cole, 2001).

Στο τελευταίο στάδιο της τυπικής νόησης ανήκουν μαθητές με ηλικία από 12 έως 19 ετών, όπου το πλέον έχουν αποκτήσει την ικανότητα να σκέφτονται συστηματικά όλες τις λογικές σχέσεις ενός προβλήματος (Cole&Cole, 2001).

Εστιάζοντας στην έννοια ή στην αίσθηση του αριθμού, ο Piaget βάσει της θεωρίας του θεωρούσε πως τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας που βρίσκονται στην περίοδο της προσυλλογιστικής σκέψης δεν έχουν αναπτύξει ακόμη την έννοια του αριθμού. Μέσα από τα πειράματά του έδειξε ότι όταν τα παιδιά παρατηρούν δυο σειρές αντικειμένων, τα οποία είναι τοποθετημένα αντικριστά σε αντιστοιχία ένα προς ένα, μπορούν να αντιληφθούν την ίδια ποσότητά τους. Αν όμως υπάρξει κάποια μετατόπιση που οδηγεί στην απουσία του οπτικού ερεθίσματος της ισότητας, τότε χάνουν την αίσθηση της ποσότητας και θεωρούν πως η μια ομάδα αντικειμένων αποτελείται από μεγαλύτερο αριθμό (Βοσνιάδου, 1998).

Βάσει της θεωρίας του Piaget, αφού τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας δεν μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά ανάμεσα στις πράξεις της αραίωσης/σύμπτυξης(που δεν αλλάζουν τον αριθμό) και στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (που επηρεάζουν τον αριθμό), δεν έχουν καταφέρει να αναπτύξουν ακόμα την έννοια του αριθμού. Για τον Piaget η έννοια του αριθμού έχει αναπτυχθεί επαρκώς όταν το παιδί βρίσκεται στην περίοδο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών, όταν δηλαδή έχει αναπτύξει τις κατάλληλες λογικομαθηματικές δομές που του επιτρέπουν να λειτουργεί και να σκέπτεται με τρόπους που κάνουν δυνατή την κατανόηση του αριθμού (Βοσνιάδου, 1998).

1.3 Σύγχρονη διδασκαλία του αριθμού

Τα πειράματα και η θεωρία του Piaget αναφορικά με την κατανόηση των νήπιων και τα μαθηματικά, προσέφεραν πάρα πολλά, ειδικά με τα όρια της νοητικής ανάπτυξης. Ωστόσο, όπως υπογραμμίζει η Gelman(1972) στο βιβλίο της Σ. Βοσνιάδου, «η ψυχολογία των μαθηματικών», η ανάπτυξη της τεχνολογίας, σε συνδυασμό με την εξέλιξη της ανθρώπινης κοινωνίας καθιστούν την εφαρμογή τους, ως πεπερασμένη. Πλέον, τα όρια από τα διαφορετικά στάδια τα οποία καλούνται τα παιδιά να μεταβούν δεν είναι τόσο ξεκάθαρα. Ορισμένα αναμένεται να παρουσιάζουν

προεννοιακή σκέψη, άλλα ενορατικές παραστάσεις και μερικά θα ενεργούν με συγκεκριμένες ενέργειες (VandeWalle, 2017).

Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ (2003), τα μικρά παιδιά διαμορφώνουν, τροποποιούν και δομούν ιδέες με τη συνεχή αλληλεπίδραση με το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον. Αναπτύσσουν απλές μαθηματικές δεξιότητες με την εφαρμογή των ιδεών τους σε καθημερινές πράξεις και προβλήματα. Χειρίζονται απλές μαθηματικές έννοιες για να αντιληφθούν τη λογική καθημερινών πράξεων και προβλημάτων, ρωτούν γύρω από σχέσεις, σχέδια και ακολουθίες.

Σκοπός του προγράμματος των Μαθηματικών για το Νηπιαγωγείο είναι να βοηθήσει τα παιδιά μέσα από βιωματικές καταστάσεις να επεκτείνουν τις πρώτες μαθηματικές γνώσεις τους και να εφαρμόζουν οικείες μαθηματικές δομές σε νέες καταστάσεις. Να επεξεργάζονται και να αξιοποιούν νέα δεδομένα, να συγκρίνουν και να μετασχηματίζουν απλές σχέσεις και διαδικασίες με τη δοκιμή και τον έλεγχο. Να ενδιαφέρονται να επινοούν και να επιλύουν προβλήματα και να αξιοποιούν τη σύγχρονη τεχνολογία. Κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ομαδικά και ατομικά, τα παιδιά αναπτύσσουν ειδικές ικανότητες όπως να συγκρίνουν και να συσχετίζουν αντικείμενα, να αντιλαμβάνονται κάποιες ιδιότητες, σχέσεις και συνδυασμούς και τέλος να μετρούν και να αναγνωρίζουν απλά σχήματα στο περιβάλλον (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Ένα υποστηρικτικό πλαίσιο μάθησης για την οικοδόμηση της έννοιας του αριθμού, αντίθετα με όσα όριζε ο Piaget, πρέπει να περιλαμβάνει πολλές δραστηριότητες που σχετίζονται τόσο με την πληθικότητα, όσο και με την χρήση της απαρίθμησης. Τέτοιου είδους δραστηριότητες μπορεί να περιλαμβάνουν την επαναλαμβανόμενη αναφορά των αριθμών με την σειρά. Η εν λόγω αναφορά ξεκινάει σταδιακά και μπορεί να φτάσει μέχρι το εκατό. Επιπλέον, μπορεί να εφαρμοστούν δραστηριότητες απαρίθμησης, συνήθως μέχρι το δέκα, όπου οι μαθητές θα συνδέουν τον εκάστοτε αριθμό με την ονομασία του και με τον συμβολισμό του κατά την αποτύπωσή του στο χαρτί. Παράλληλα, μέσω της απαρίθμησης, τα νήπια θα μπορούν να συγκρίνουν ποσότητες από αντικείμενα και ταυτόχρονα να συνδυάσουν την κάθε ποσότητα με τον ίδιο τον αριθμό και την ονομασία του (Τζεκάκη 2007, Αρμενάκου και συν., 2008).

Εκτός όμως από τις παραπάνω δραστηριότητες, μπορεί να γίνουν δραστηριότητες που προκαλούν άτυπες αφαιρέσεις και προσθέσεις των αριθμών, τουλάχιστον μέχρι το δέκα. Ωστόσο, σημαντικές δραστηριότητες είναι και αυτές που βοηθούν τα νήπια να κατανοήσουν την έννοια της διαδοχής των αριθμών. Πρόκειται για μια πολύ σημαντική έννοια, δεδομένου αποτελεί προαπαιτούμενο για να εισαχθεί ή έννοια του μισού. Ουσιαστικά αρχικά το παιδί καλείται να κατανοήσει ότι η μονάδα είναι αδιαίρετη και δεν υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο μεταξύ των αριθμών. Μόνο όταν αντιληφθεί την έννοια του φυσικού αριθμού, μπορεί να προχωρήσει στην εκμάθηση των ρητών αριθμών και της σχέσης τους με τους φυσικούς (Τζεκάκη 2007, Αρμενάκου και συν., 2008).

1.4 Απαρίθμηση

Η θεωρία των λογικών διαδικασιών του Piaget, θεωρείται απαρχαιωμένη στην σύγχρονη κοινωνία, από τους ερευνητές, δεδομένου ότι τα νήπια από πολύ νωρίς (2-3ετών) έχουν εξοικειωθεί ακόμα και ακούσια με την διαδικασία της απαρίθμησης. Επομένως αναπτύσσουν ποσοτικές δεξιότητες με μια συγκεκριμένη διαδοχική σειρά. Αρχικά αναπτύσσεται η αυτόματη αναγνώριση του αριθμού, βάσει της αναπαράστασής του, ακολουθεί η ικανότητα της απαρίθμησης, προφορική και αντιστοίχιση των αριθμών και τέλος η αποτίμηση, βάσει των εμπειριών τους (Λεμονίδης, 1999).

Οι εμπειρίες των παιδιών, πριν ακόμη από τη φοίτησή τους στο νηπιαγωγείο, σχετίζονται με την απαρίθμηση που κάνουν σε διάφορα παιχνίδια ή στην καθημερινότητά τους. Τέτοια παραδείγματα είναι η απαρίθμηση των δακτύλων τους, ερωτήσεις που κάνουν οι γονείς σε καθημερινή βάση, όπως πόσα παιχνίδια έχεις, ποιος έχει πιο πολλά κ.τ.λ.. Αυτές οι καθημερινές εμπειρίες είναι που βοηθούν τα νήπια να κατανοούν τους αριθμούς και τη διαδικασία της απαρίθμησης (Clement&Sarama, 2009).

Εστιάζοντας στην ικανότητα της απαρίθμησης, φαίνεται ότι ορίζεται ως η δραστηριότητα η οποία περιλαμβάνει την απαγγελία μιας σειράς αριθμολέξεων, όπου κάθε μια από αυτές συνδέεται με μια αριθμητική μονάδα (Steffe&Cobb, 1988). Ως δραστηριότητα περιλαμβάνει:

- την ικανότητα απαγγελίας της ακολουθίας των αριθμολέξεων στη σωστή, συμβατική σειρά (ένα, δύο, τρία,...).
- την ικανότητα αναγνώρισης ενός πλήθους διακριτών μονάδων που θεωρούνται αριθμήσιμες.
- την ικανότητα διάκρισης των αντικειμένων .
- την ικανότητα συντονισμού των δύο παραπάνω δραστηριοτήτων έτσι ώστε κάθε αριθμολέξη να αντιστοιχίζεται σε μια αριθμητική μονάδα.

Ως δραστηριότητα στο νηπιαγωγείο, η απαρίθμηση είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που συνδέεται άμεσα με την μελλοντική ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης της ποσότητας, της αξίας θέσης, των πράξεων, και της δομής του συνόλου των (φυσικών) αριθμών. Ωστόσο, για να φτάσει το νήπιο να κατακτήσει την συγκεκριμένη ικανότητα, θα πρέπει να περάσει από την πρώιμη απαρίθμηση που στηρίζεται στις εμπειρίες του, στην απαρίθμηση. Επομένως, στο νηπιαγωγείο, ο/η εκπαιδευτικός καλείται να συγχρονίσει όλα τα παιδιά και ανεξαρτήτως των εμπειριών τους, να τα βοηθήσει να αναπτύξουν τις τέσσερις βασικές πτυχές της πρώιμης αριθμητικής γνώσης (Clement&Sarama, 2009).

- Ακολουθία αριθμών, να γνωρίζουν τα ονόματα και τη διατεταγμένη σειρά των αριθμητικών λέξεων.
- Αντιστοίχιση ένα προς ένα, να απαριθμούν αντικείμενα λέγοντας αριθμητικές λέξεις και να κάνουν αντιστοίχιση με αντικείμενα
- Πληθικότητα, να αντιλαμβάνονται πως όταν αριθμούν, η τελευταία αριθμητική λέξη εκφράζει το πλήθος των αντικειμένων
- Άμεση εκτίμηση ποσοτήτων, αναγνώριση του αριθμού των αντικειμένων μέσα σε ένα σύνολο, χωρίς να τα απαριθμούν.

Οι εν λόγω πτυχές για να μπορέσουν να αναπτυχθούν πλήρως και να φτάσουν τα παιδιά να έχουν κατακτήσει την απαρίθμηση, θα πρέπει να στηρίζονται σε μια σειρά από δραστηριότητες και εμπειρίες, οι οποίες θα ταιριάζουν με την ηλικία τους, αλλά και με τις, έως τώρα, γνώσεις τους (Clement&Sarama, 2009).

Οι εν λόγω διδακτικές δραστηριότητες μπορούν να στηρίζονται σε μια σειρά από διδακτικές μεθοδολογίες της απαρίθμησης, βάσει του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται το κάθε παιδί. Αναλυτικότερα, το στάδιο από το οποίο ξεκινάει ένα παιδί είναι η απαρίθμηση υπό διαμόρφωση, όπου το νήπιο δεν γνωρίζει ακόμα την σειρά των αριθμών και δεν μπορεί να συνδέσει μια σειρά αντικειμένων με συγκεκριμένους αριθμούς. Αναπτυξιακά, ακολουθεί η αντιληπτική απαρίθμηση, όπου το παιδί μπορεί να απαριθμήσει μια σειρά αντικειμένων, εφόσον αυτά είναι ορατά σε αυτό, ξεκινώντας πάντα από τον αριθμό ένα. Ακολουθεί η αναπαραστατική απαρίθμηση, όπου το παιδί μπορεί να κάνει την προηγούμενη διαδικασία χωρίς να έχει μπροστά του τα αντικείμενα την ίδια στιγμή που τα απαριθμεί. Επόμενο στάδιο είναι η απαρίθμηση από ένα αριθμό και μετά, όπου πλέον το παιδί μπορεί να ξεκινήσει να απαριθμεί νοερά τα αντικείμενα, χωρίς να χρειάζεται να ξεκινήσει από την αρχή, δηλαδή τον αριθμό ένα. Τέλος, είναι η απαρίθμηση ανά περισσότερες της μιας μονάδες, όπου το παιδί του νηπιαγωγείου δεν ανεβαίνει κατά μια μονάδα, αλλά μπορεί να κάνουν συνδυασμούς που σχετίζονται με την πρόσθεση και την αφαίρεση (Steffe&Cobb, 1988).

Παρόλα αυτά, η διαδικασία της απαρίθμησης διακριτών ποσοτήτων, μπορεί να δημιουργήσει στα παιδιά την αίσθηση ότι οι αριθμοί είναι μόνο οι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή οι θετικοί ακέραιοι (ολόκληροι αριθμοί), κάτι που θα τους προκαλέσει δυσκολίες και εμπόδια όταν εισαχθούν στους ρητούς αριθμούς, στο δημοτικό σχολείο (Christou 2015, Christou et al., 2020, Christou & Vamvakousi, 2021, Vamvakousi et al., 2018, Vamvakousi 2020, Gelman, 2000). Για παράδειγμα, η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να ενισχύσει μια διαισθητική πεποίθηση των παιδιών ότι ανάμεσα σε δυο φυσικούς αριθμούς (π.χ., το 7 και το 8) δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Ενώ πράγματι ανάμεσα σε δυο φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός, παρόλα αυτά υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί. Ένας τέτοιος αριθμός είναι το 7,5.

1.5 Ρητοί αριθμοί

1.5.1 Η έννοια των ρητών αριθμών

Η έννοια του ρητού αριθμού είναι μία από τις πιο πολύπλοκες αλλά και πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες που τα παιδιά συναντούν από την πρωτοβάθμια κιάλας εκπαίδευση. Στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών, ως ρητοί αριθμοί ορίζονται το σύνολο των αριθμών $Q: = \{x : x = a/\beta \text{ όπου } a, \beta \in Z \text{ και } \beta \neq 0\}$, είναι δηλαδή όλοι οι αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή κλάσματος a/β , με a, β ακέραιοι αριθμοί και $\beta \neq 0$. Η σχέση, που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο: $a/\beta = \gamma/\delta \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο Q , γιατί είναι ανακλαστική ή αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική. Κάθε στοιχείο του Q , δηλαδή είναι ρητός, σύμφωνα με αυτή τη σχέση αποτελεί μια κλάση ισοδυναμίας. Ο σχολικός ορισμός αυτός αφήνει το περιθώριο ο ίδιος ρητός αριθμός να έχει πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι οι αριθμοί 0,5, 500/1.000, 1/2, 4/8 είναι όλοι ρητοί αριθμοί. Ωστόσο, εξετάζοντας κανείς προσεχτικά τους παραπάνω δοθέντες αριθμούς, αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός και μόνο ρητού αριθμού (Λεμονίδης, 2013).

Στους ρητούς αριθμούς ανήκουν και τα κλάσματα, τα οποία ορίζονται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, β) με μορφή a/β , όπου a, β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις

- Η σχέση ισότητας, με βάση την οποία δύο κλάσματα a/β και γ/δ είναι ίσα αν και μόνο αν είναι $a=\gamma$ και $\beta=\delta$.
- Η σχέση διάταξης, σύμφωνα με την οποία ένα κλάσμα $a/\beta < \gamma/\delta$ αν και μόνο αν $a \cdot \delta < \beta \cdot \gamma$.

Επομένως ως ρητός αριθμός ορίζεται ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ των διατεταγμένων ζευγών (a, β) ή a/β , ένα σύνολο δηλαδή κλασμάτων, όπου a και β είναι ακέραιοι αριθμοί και $\beta \neq 0$ και δύο ζεύγη κλασμάτων είναι ίσα $a/\beta = \gamma/\delta$, αν και μόνο αν $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ (Λεμονίδης, 2013).

Η χρήση των ρητών αριθμών τόσο στο νηπιαγωγείο, όσο και στις άλλες εκπαιδευτικές βαθμίδες δημιουργούν αρκετές δυσκολίες στους μαθητές. Ωστόσο, οι πολλαπλές τους συμβολικές παραστάσεις, καθώς και από τις διαφορές τους σε σχέση

με τους οικείους στους μαθητές φυσικούς αριθμούς είναι δύο από τις πιο σημαντικές, (Markovits&Sowder, 1991; Vamvakoussi&Vosniadou, 2012). Και οι δύο αυτές δυσκολίες επηρεάζουν την κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών. Πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς μπορούν να εξηγηθούν από την τάση τους να χρησιμοποιούν την αρχική γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, σε περιστάσεις που απαιτείται γνώση για τους ρητούς αριθμούς. Το φαινόμενο αυτό έχει χαρακτηριστεί Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών, και τις πράξεις με ρητούς.

1.5.2 Η πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών

Μία από τις βασικές ιδιότητες του συνόλου των ρητών αριθμών είναι αυτή της πυκνής διάταξης. Ένα σύνολο θεωρείται πυκνά διατεταγμένο, όταν ανάμεσα από δύο διαφορετικά στοιχεία α , β του συνόλου υπάρχει πάντα ένα τρίτο στοιχείο γ τέτοιο ώστε $\alpha < \gamma < \beta$. Η ιδιότητα της πυκνής διάταξης που συναντάμε στο σύνολο των ρητών αριθμών, μπορεί να περιγραφεί με μια πληθώρα διαφορετικών εκφράσεων, οι οποίες ωστόσο είναι μαθηματικά ισοδύναμες (Vamvakoussi, 2017):

- Μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών αριθμών, υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός (απειρία των ενδιάμεσων)
- Κανένας ρητός αριθμός δεν έχει μοναδικό επόμενο αριθμό. Η ύπαρξη μοναδικού επόμενου αριθμού, αφορά μόνο το σύνολο των φυσικών αριθμών (μη ύπαρξη επόμενου).
- Οι ρητοί αριθμοί είναι άπειρα διαιρέσιμοι (άπειρη διαιρεσιμότητα).

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές έχει να κάνει με τον άπειρο αριθμό των ενδιάμεσων αριθμών, καθώς οι περισσότεροι θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς συγκεκριμένης μορφής, υπάρχει είτε πεπερασμένο, είτε μηδενικό πλήθος ρητών αριθμών, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών. Σύμφωνα με τις μελέτες των Vamvakoussi&Vosniadou (2012) αλλά και του Neuman (2001), φαίνεται ότι τα παιδιά διαμορφώνουν την άποψή τους για το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα, ανάλογα με τη μορφή των άκρων του διαστήματος.

Το δεύτερο σημείο στο οποίο φαίνεται να προβληματίζονται πολλοί μαθητές, ανεξαρτήτου ηλικίας, έχει να κάνει με μια ιδιότητα των φυσικών αριθμών, η ύπαρξη του επομένου, αρχή που δεν εντοπίζεται στους ρητούς. Η αρχή αυτή, συχνά αναφέρεται ως η «αρχή του επομένου» (Cheung, etal., 2017). Ένα παιδί που κατανοεί πραγματικά τη λειτουργία του επόμενου αριθμού στο σύνολο των φυσικών αριθμών, πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n , υπάρχει πάντα ένας μοναδικός επόμενος και αυτός θα είναι ο $n + 1$, καθώς και να κατανοεί τη μη ύπαρξη του μεγαλύτερου απ' όλους τους αριθμούς αυτού του συνόλου (Cheungetal., 2017; Φωκάς, 2019). Ωστόσο οι μαθητές διαφόρων βαθμίδων, επηρεασμένοι από το σύνολο των φυσικών αριθμών, φαίνεται να θεωρούν ότι και στους ρητούς αριθμούς συνεχίζει να ισχύει η αρχή του επόμενου. Αδυνατούν επομένως να κατανοήσουν πως σε ένα ρητό αριθμό n δεν υπάρχει ένας και μοναδικός επόμενος αριθμός, αλλά εξαρτάται από την μονάδα μεγέθους που θα προστεθεί και μπορεί να είναι άπειροι (Vamvakoussi&Vosniadou, 2012).

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα μιας καλά εδραιωμένης γνώσης για τον αριθμό που έχει τις ρίζες της στην αρχική κατανόηση του αριθμού που οργανώνεται από πολύ πρώιμη ηλικία γύρω από τους φυσικούς αριθμούς και την διαδικασία της απαρίθμησης (Gelman, 2000). Μια τέτοια αρχική κατανόηση του αριθμού ενισχύεται τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης με τη συστηματική χρήση των φυσικών αριθμών (Vosniadou, Vamvakoussi, &Skopeliti, 2008) καταλήγοντας να αποτελεί μια καλά διαμορφωμένη γνώση για το πως πρέπει να μοιάζει ο αριθμός και ποιες να είναι οι ιδιότητές του (Vamvakoussi, VanDooren, &Verschaffel, 2012). Έτσι, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευδο-διαδοχικούς ρητούς αριθμούς, για παράδειγμα ανάμεσα στο 0.5 και το 0.6, καθώς θεωρούν ότι οι αριθμοί γενικώς είναι διακριτοί, όπως οι φυσικοί αριθμοί (Vamvakoussietal., 2008).

Στην παρούσα εργασία έχει τεθεί ως στόχος, να κατανοήσουν τα νήπια αρχικά την έννοια του μισού, αλλά και την θέση του ανάμεσα σε δύο ακέραιους, όταν χρησιμοποιούμε την απαρίθμηση. Επομένως, οι δραστηριότητες που προτείνονται έχουν ως σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές μέσα από την χρήση οικείων

αντικειμένων, όπως εικόνες με κομμάτια από τούρτα και πίτσες, την θέση που έχει το μισό ως αριθμός στην συνολική διάταξη, χρησιμοποιώντας μια κλίμακα από το ένα έως το δέκα. Δεδομένου μάλιστα ότι οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν την έννοια της δίκαιης μοιρασιάς, θα γίνει μια εστίαση ότι το μισό είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης μιας ποσότητας με το δύο. Ενώ σχετικά με τις μορφές γραφής του μισού οι δραστηριότητες θα επικεντρωθούν περισσότερο στην έννοια του κλάσματος $\frac{1}{2}$ και λιγότερο στο 0,5.

1.6 Η διαίρεση

Αν a και β είναι φυσικοί αριθμοί, με $\beta \neq 0$, και υπάρχει φυσικός αριθμός π , τέτοιος ώστε $\beta * \pi = a$, τότε ο π λέγεται πηλίκο του a με τον β . Το γράφουμε $a : \beta = \pi$. Λέμε ότι το a είναι πολλαπλάσιο του β και το συμβολίζουμε $a = \text{πολ. } \beta$. Ως ορισμός μπορεί να δοθεί ότι διαίρεση ονομάζεται η πράξη με την οποία σε κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών (a, β) , όπου $a = \text{πολ. } \beta$, αντιστοιχεί το στοιχείο $\pi = a : \beta$.

$$\text{Δηλαδή : } \mathbb{N} * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ με } : (a, \beta) = \pi = a : \beta$$

Το στοιχείο π ονομάζεται πηλίκο, το a διαιρετέος και το β διαιρέτης (Λεμονίδης, 2018).

Η διαίρεση των φυσικών και ρητών αριθμών μπορεί να διαχωριστεί σε δύο διαφορετικά είδη, την διαίρεση μερισμού και την διαίρεση μέτρησης. Στην πρώτη περίπτωση στην οποία προσδιορίζεται το πλήθος των ομάδων. Έστω a και β δύο φυσικοί αριθμοί, με $\beta \neq 0$, και A ένα σύνολο με πληθικό αριθμό a . Αν το σύνολο A μπορεί να διαμεριστεί σε β το πλήθος ισοδύναμα υποσύνολα, τότε θα υπάρχουν τα υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_β , με τις εξής ιδιότητες :

- Ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους
- Οι πληθικοί αριθμοί όλων των συνόλων είναι ίσοι με π ($|A_1| = |A_2| = \dots = |A_\beta| = \pi$)
- Η ένωση όλων των συνόλων θα δίνει το A . ($A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\beta$)

$$\text{Άρα } a = |A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_\beta| = \pi + \pi + \dots + \pi = \pi * \beta$$

Η διαίρεση μερισμού ή μοντέλο της “δίκαιης μοιρασιάς” (partitiveorsharingmodeldivision) είναι το πρωταρχικό μοντέλο διαίρεσης που συναντάνε οι μαθητές από πολύ μικρή ηλικία. Διαίρεση μερισμού έχουμε όταν γνωρίζουμε την τιμή των πολλών μονάδων και θέλουμε να βρούμε την τιμή της μονάδας, ομοειδούς από αυτές (Λεμονίδης, 1999). Ένα παράδειγμα σχετικό της πράξης “ $6 \div 2$ ”, είναι το ακόλουθο: “Ο Γιώργος έχει 6 σοκολάτες και θέλει να τις μοιράσει δίκαια στους 2 φίλους του. Πόσες σοκολάτες θα πάρει ο καθένας;” Σε αυτό το παράδειγμα διαιρετέος είναι η τιμή των πολλών μονάδων (6 σοκολάτες), ο διαιρέτης είναι ο αριθμός 2, που δείχνει σε πόσα ίσα μέρη μερίζεται ο διαιρετέος και το πηλίκο που προκύπτει είναι μία ποσότητα ομοειδής του διαιρετέου (Λεμονίδης, 2000).

Αντίστοιχα, στην περίπτωση της διαίρεσης μέτρησης, στην οποία προσδιορίζεται το μέγεθος κάθε ομάδας. Έστω a και β δύο φυσικοί αριθμοί, με $\beta \neq 0$, και A ένα σύνολο με πληθικό αριθμό a . Αν το σύνολο A μπορεί να διαμεριστεί σε υποσύνολα που το καθένα έχει β στοιχεία, τότε θα υπάρχουν π το πλήθος σύνολα A_1, A_2, \dots, A_π με τις εξής ιδιότητες (Λεμονίδης, 1999):

- Ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους
- Οι πληθικοί αριθμοί όλων των συνόλων είναι ίσοι με β ($|A_1| = |A_2| = \dots = |A_\pi| = \beta$)
- Η ένωση όλων των συνόλων θα δίνει το A . ($A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\pi$)

$$\text{Άρα } a = |A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_\pi| = \beta + \beta + \dots + \beta = \pi * \beta$$

Τροποποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, “Ο Γιώργος έχει 6 μικρές σοκολάτες και τις τοποθετεί σε συσκευασίες που περιέχουν 2 σοκολάτες η καθεμία. Πόσες συσκευασίες θα χρησιμοποιήσει ο Γιώργος;” Σε αυτό το παράδειγμα διαιρετέος είναι η τιμή των πολλών μονάδων και δηλώνει το συνολικό πλήθος από τις σοκολάτες, διαιρέτης είναι η τιμή της μίας μονάδας (2 σοκολάτες) και πηλίκο ο αριθμός 3 που δείχνει πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στο διαιρετέο (Λεμονίδης, 2000).

Σύμφωνα με το Λεμονίδη (2018) ένας πρακτικός τρόπος που βοηθάει στην αναγνώριση του κατάλληλου μοντέλου μέσα στα προβλήματα είναι ο ακόλουθος:

- Αν ο Διαιρετέος και ο διαιρέτης παίρνουν τιμές από ετεροειδή ποσά, τότε η διαίρεση $\Delta : \delta$ είναι μερισμού. Το πηλίκο και το υπόλοιπο εάν υπάρχει, είναι ομοειδές με το διαιρετέο.
- Αν Διαιρετέος και ο διαιρέτης παίρνουν τιμές από το ίδιο ποσό, τότε η διαίρεση $\Delta : \delta$ είναι μέτρησης. Το πηλίκο στην πράξη, είναι αφηρημένος αριθμός ετεροειδής με τον διαιρετέο και τον διαιρέτη. Ωστόσο αν υπάρξει υπόλοιπο, τότε θα είναι ποσότητα ομοειδής με το διαιρετέο.

Εστιάζοντας στην περίπτωση μελέτης που είναι το νηπιαγωγείο, για την πράξη της διαίρεσης προκύπτει ότι χρησιμοποιούνται και τα δύο μοντέλα που αναφέρθηκαν. Ωστόσο φαίνεται ότι το μοντέλο της δίκαιης μοιρασιάς είναι περισσότερο οικείο για τα νήπια, τα οποία δυσκολεύονται περισσότερο με την διαδικασία της διαίρεσης μέτρησης (Καφούση&Σκουμπούρδη, 2008).

Οι μαθητές στις οριζόντιες διαιρέσεις χρησιμοποιούν διάφορες στρατηγικές, οι οποίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής (Λεμονίδης, 2013):

- Άμεσης καταμέτρησης, μοιράζοντας δίκαια και διαδοχικά, ώσπου να τελειώσει το αρχικά πλήθος, π.χ. 12 μπισκότα σε 3 παιδιά.
- Ρυθμικής καταμέτρησης, με βάση τη δομή του προβλήματος, όπου ταυτόχρονα με την καταμέτρηση γίνεται και μέτρηση των ομάδων, π.χ. αν έχω 12 μπισκότα και δίνω 4 σε κάθε παιδί, πόσα παιδιά θα πάρουν μπισκότα.
- Καταμέτρησης με υπερπήδηση, καταμέτρηση με πολλαπλάσια, π.χ. πόσα πεντάρια έχει το 20. • Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση, υπολογισμοί όπως « $3+3=6$, $6+3=9$ ».
- Πρόσθεση διπλών, πρόσθεση μισών, για παράδειγμα «4 και 4 ίσον 8, 8 και 8 ίσον 16» ή $16:4$ «αν κόψουμε το 8 σε δυο μισά κάνει 4 και 4».
- Πολλαπλασιαστική πράξη, ανάκληση από τη μνήμη κάποια γνωστή πράξης του πολλαπλασιασμού, για παράδειγμα $12:3=4$ επειδή $3 \times 4=12$. Η χρήση των στρατηγικών διαφέρει ανάλογα με την τάξη.

Οι τρεις πιο κοινές στρατηγικές, που παρουσιάζονται σε όλες τις τάξεις, είναι η άμεση ανάκληση της διαίρεσης από τη μνήμη, ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση (Λεμονίδης, 2013).

Στην παρούσα εργασία για να είναι εφικτή η εισαγωγή του 0,5 στους μαθητές, μπορούμε αρχικά να χρησιμοποιήσουμε την μορφή του κλάσματος $\frac{1}{2}$. Η αιτία είναι ότι η μορφή του κλάσματος μπορεί να συνδυαστεί πιο εύκολα με τις αντιλήψεις τους για την μοιρασιά και την αναλογικότητα. Το κλάσμα του $\frac{1}{2}$ θεωρείται από τα πιο εύκολα κλάσματα, αφού μέσω της διαδικασίας της δίκαιης μοιρασιάς, τα νήπια μπορούν να κατανοήσουν πολύ πιο εύκολα τον τρόπο που γίνεται τόσο η διαίρεση, όσο και την έννοια του κλάσματος.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η διαίρεση ενός μονού αριθμού αντικειμένων σε δύο ομάδες ή σε δύο παιδιά. Κάθε φορά τα παιδιά θα αναγκάζονται στο τέλος να προχωρήσουν στην διαίρεση του τελευταίου αντικειμένου και λόγω της τεχνικής της δίκαιης μοιρασιάς θα μπορούν να καταλάβουν και να απαριθμήσουν τα αντικείμενα (βλ. Δραστηριότητα 4). Με αυτό τον τρόπο θα μπορούν να κάνουν την διαίρεση με το δύο και να γράψουν με μορφή δεκαδικού αριθμού το αποτέλεσμα, π.χ. επτά κόκαλα πρέπει να μοιραστούν σε δύο παιδιά, άρα μετά την διαίρεση και την απαρίθμηση 3.5 κόκαλα (VandeWalle, 2017).

1.7 Οι δεκαδικοί αριθμοί

Όπως τα κλάσματα, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί είναι υποδιαίρεσεις της μονάδας. Ένας δεκαδικός αριθμός αποτελείται από ένα ακέραιο τμήμα και ένα δεκαδικό, τα οποία διαχωρίζονται μεταξύ τους από μια υποδιαστολή. Η ερμηνεία τους σχετίζεται με τις δεκαδικές υποδιαίρεσεις της μονάδας, όπως είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά κ.τ.λ.. Εστιάζοντας στο ακέραιο τμήμα, οι δεκαδικοί αριθμοί μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Γνήσιοι δεκαδικοί αριθμοί, στους οποίους το ακέραιο μέρος είναι ίσο με το μηδέν
- Μικτοί δεκαδικοί αριθμοί, στους οποίους το ακέραιο μέρος δεν είναι μηδενικό. Πρόκειται για αριθμούς που εντοπίζονται ανάμεσα από δύο

ακέραιους αριθμούς. Στην περίπτωση της παρούσας εργασίας είναι οι δεκαδικοί αριθμοί που περιλαμβάνουν το μισό και θα πρέπει να τοποθετηθούν ανάμεσα από το 1 έως το 10.

Η θέση της υποδιαστολής καθορίζει και το μέγεθος του δεκαδικού αριθμού, αλλά και την αξία κάθε ψηφίου, δεξιά και αριστερά από αυτό. Όταν μετακινείται δεξιά η υποδιαστολή ο αριθμός γίνεται μεγαλύτερος, ενώ η αντίθετη κίνηση έχει το αντίστροφο αποτέλεσμα (Τουμάσης, 2002).

Εστιάζοντας σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, είναι γεγονός πως δεν έχουν ξαναέρθει σε επαφή με την μορφή των δεκαδικών όπως και των κλασμάτων, πριν τα διδαχτούν στο νηπιαγωγείο. Ωστόσο, το γεγονός αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούν να καταλάβουν την σημασία τους, η οποία σχετίζεται με τον διαμοιρασμό του συνόλου ή της μονάδας. Σε πολλές καθημερινές τους ασχολίες έχουν προχωρήσει στο να μοιράσουν μια ποσότητα από ένα υλικό, όπως είναι το φαγητό, γλυκά ή οτιδήποτε άλλο χρησιμοποιούν καθημερινά (Brizuela, 2005).

Στην συγκεκριμένη εργασία εστιάζουμε στην έννοια του μισού ή $\frac{1}{2}$. Σε έρευνες που έχουν γίνει σε παιδιά νηπιαγωγείου, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την έννοια του μισού και να προχωρήσουν στον δίκαιο διαμοιρασμό μιας ποσότητας. Όταν πρόκειται να προχωρήσουν στην τμηματοποίηση μιας ποσότητας φαγητού και τους ζητάτε να γίνει με δίκαιο τρόπο, γνωρίζουν πώς πρέπει να κόψουν ένα κομμάτι πίτσα ή ένα μπισκότο στην μέση. Παράλληλα, όταν τους δίνεται ένα σχήμα, όπως ένας ζωγραφισμένος κύκλος σε χαρτί, φαίνεται πάλι να γνωρίζουν πώς να τοποθετήσουν την γραμμή στην μέση, φτιάχνοντας ουσιαστικά την διάμετρο του κύκλου (Brizuela, 2005).

Επιπλέον, φαίνεται να γνωρίζουν και να μπορούν να τοποθετήσουν έστω και νοερά τους αριθμούς με το δεκαδικό μέρος που είναι ίσο με 0,5 μετά από τους αντίστοιχους ακέραιους. Για παράδειγμα μπορούν να καταλάβουν και να απαντήσουν ότι το 7,5 είναι μεγαλύτερο από 5, μεγαλύτερο από το 6, μεγαλύτερο από το 6,5 και φυσικά από το 7, αλλά μικρότερο από το 8 (Brizuela, 2005).

Ωστόσο, παρατηρήθηκε πως όταν τους ζητήθηκε να περιγράψουν πόσο είναι για παράδειγμα το 6,5, ορισμένα παιδιά έβαλαν ένα + δίπλα από το 6. Επίσης, δυσκολεύονταν να στο να χωρίσουν ένα αριθμό στην μέση, δηλαδή να κάνουν την

διαίρεση, με αποτέλεσμα όταν τους δινόταν γραμμένος ένας αριθμός και τους ζητούσαν να τον χωρίσουν στην μέση, πολλές φορές προχωρούσαν στην τοποθέτηση μιας γραμμής στην μέση του αριθμού, με τέτοιο τρόπο, που η απεικόνισή του να χωρίζεται στην μέση (Brizuela, 2005).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια του μισού μοιάζει να είναι περισσότερο εύκολα κατανοητή για τα παιδιά. Ο λόγος είναι ότι μέσα από τις ερωτήσεις που τους έγιναν, έμοιαζαν να γνωρίζουν και να έχουν ακούσει περισσότερο αυτή την έννοια και την είχαν συνδύσει περισσότερο με τον διαμοιρασμό μιας ποσότητας. Είναι γεγονός ότι σε εικόνες με κλάσματα και με κομμάτια από πίτσα, τα νήπια που συμμετείχαν, ανησυχούσαν περισσότερο για το μέγεθος και το σχήμα των κομματιών και μπέρδευαν τα κλάσματα αποκαλώντας τα μισά, ακόμα και όταν συμβόλιζαν τρίτα, τέταρτα ή κάποιο άλλο κλάσμα (Brizuela, 2005).

Τέλος, παρατηρήθηκε μια δυσκολία να αποτυπωθεί ένας δεκαδικός αριθμός ή τα μισά των αριθμών σε μια κλίμακα φυσικών αριθμών από το 1 έως το 10. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένοι μαθητές αδυνατούσαν να τα τοποθετήσουν, γιατί θεωρούσαν ότι τα μισά είναι μικρότεροι αριθμοί από την μονάδα. Επίσης, δεν μπορούσαν να μην κάνουν χρήση του κανόνα του επόμενου αριθμού, που ισχύει στους φυσικούς αριθμούς (Brizuela, 2005).

Στην παρούσα μελέτη προτείνουμε μια σειρά δραστηριότητες, κάνοντας χρήση του μοντέλου των τροχιών μάθησης, για να εισάγουμε την έννοια του $\frac{1}{2}$ στο νηπιαγωγείο.

1.8 Δραστηριότητες στο νηπιαγωγείο

Στο νηπιαγωγείο η εκπαιδευτική διαδικασία βασίζεται κυρίως στην βιωματική μέθοδο και γι' αυτό γίνεται χρήση ποικίλων και διαδραστικών δραστηριοτήτων, με διαφορετικές θεματολογίες, οι οποίες εστιάζουν σε διαφορετικά θεματικά πεδία ή γνωστικά αντικείμενα ή περιοχές μάθησης. Στόχος, των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων είναι να ενεργοποιήσουν τη σκέψη των παιδιών και να τους παρέχουν γόνιμες μαθησιακές ευκαιρίες.

Η χρήση μιας δραστηριότητας είναι σημαντική και αποδοτική, όταν έχει σχεδιαστεί κατάλληλα, ώστε να ταιριάζει στα ενδιαφέροντα, αλλά και στις ανάγκες των μαθητών κάθε τάξης. Η οργάνωση δραστηριοτήτων θα πρέπει επίσης να εστιάζει στην χρήση και στο συνδυασμό μιας σειράς από γνωστικούς και αναπτυξιακούς τομείς, ενός μαθήματος και κάθε ειδικής έννοιας αυτού. Ο στόχος είναι να μπορούν οι μαθητές μέσα από τις διαφορετικές εμπειρίες τους να αποκτούν μια πιο σφαιρική αντίληψη της εν λόγω έννοιας. (Δαφέρμου, κ.ά, 2006). Έτσι, κατά την οργάνωση της μάθησης και της διδασκαλίας στην τάξη του/της, ο/η εκπαιδευτικός λειτουργεί προωθώντας μια ολιστική αντιμετώπιση της γνώσης και αναδεικνύοντας τις λογικές συνδέσεις μεταξύ των μαθησιακών περιοχών. Εστιάζοντας στην περίπτωση των μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να μπορεί να συνδέει τα συγκεκριμένο μάθημα με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα και με εμπειρίες των μαθητών του από την καθημερινότητά τους (Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου, 2011).

Σύμφωνα με το Davydov (1999), «η δραστηριότητα είναι μία συγκεκριμένη μορφή της κοινωνικής ύπαρξης των ανθρώπων αποτελούμενη από τη σκόπιμη αλλαγή της φυσικής και κοινωνικής πραγματικότητας». Η δραστηριότητα ουσιαστικά αποτελεί το μέσο ή το εργαλείο μέσα από το οποίο οι άνθρωποι έρχονται σε επαφή με τα αντικείμενα που τους περιβάλλουν και δημιουργούν μια σειρά από συναισθηματικές συνδέσεις. Η αλληλεπίδρασή τους με τα συγκεκριμένα αντικείμενα οδηγεί στην ανάπτυξη της σκέψης τους, αφού τους ωθεί να δημιουργούν συνδέσεις και εμπειρίες, τις οποίες μπορούν να τις επικαλεστούν οποιαδήποτε στιγμή. Επίσης, όταν μια δραστηριότητα προκαλεί το ενδιαφέρον του ανθρώπου είναι αυτή που τον οδηγεί στο διαμορφώσει και ένα ευχάριστο συναίσθημα που δημιουργεί μια μεγαλύτερη προσήλωση του ανθρώπου στην κύρια έννοια που διαπραγματεύεται η εν λόγω δραστηριότητα. Ωστόσο, αυτό που διαφοροποιεί τη μία δραστηριότητα από την άλλη είναι το αντικείμενο της, αφού αυτό καθορίζει τον προσανατολισμό της και αποτελεί το πραγματικό κίνητρο για την υλοποίηση της (Zacharosetal, 2011).

Η έννοια της δραστηριότητας είναι μια έννοια με διαφορετικές σημασίες τόσο στον ερευνητικό χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης όσο και στο τρόπο με τον οποίο αυτή ερμηνεύεται στην πράξη. Η δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από ενεργή δράση των εμπλεκόμενων ατόμων έχοντας ένα κίνητρο και επιδιώκοντας ένα στόχο, είναι συλλογική και συστημική και χαρακτηρίζεται από συνεχή μετασχηματισμό και

αλλαγή. Μέσα από καταστάσεις – προβλήματα, ο μαθητής καλείται να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά ή και συλλογικά και να χρησιμοποιήσει διαφορετικής μορφής εργαλεία, προκειμένου να επιτύχει μια σειρά μαθηματικών στόχων και διεργασιών. Απώτερος στόχος είναι η εμπλοκή των μαθητών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην απόκτηση και χρήση τεχνικών με ευελιξία, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, στη δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων, στη σύνδεση αναπαραστάσεων, στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού καθώς και θετικής στάσης για τα Μαθηματικά. Η ίδια η μαθηματική δραστηριότητα αποτελεί μια δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων και αντιμετώπισης καταστάσεων και στηρίζεται σε συστηματικές διεργασίες, όπως δημιουργία συνδέσεων και δεσμών ανάμεσα σε διαφορετικά πλαίσια, εξήγηση και τεκμηρίωση των δράσεων και λύσεων, επικοινωνία με χρήση διαφορετικών μέσων (Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου, 2011).

Ωστόσο, οι Henningsen και Stein (1997) υποστηρίζουν ότι η μαθηματική δραστηριότητα εξαρτάται και από τη διαχείρισή της στη σχολική τάξη, αφού μια «πλούσια» κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε μια «τετριμμένη» μαθηματική εμπλοκή των μαθητών, όπου η έμφαση δίνεται κυρίως στη χρήση αλγορίθμων και τεχνικών χωρίς κατανόηση (Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, 2011). Επομένως, για τη διδασκαλία των μαθηματικών, ειδικά στις μικρές ηλικίες, απαιτείται η ύπαρξη ενός περιβάλλοντος το οποίο θα εμπλέκει τα παιδιά ενεργά στη διαδικασία της μάθησης και θα τα βοηθάει να οικοδομήσουν τη γνώση, ενώ θα πρέπει να ολοκληρώνεται με μια αναστοχαστική δράση, που θα προσφέρει ανατροφοδότηση στον εκπαιδευτικό για την αποτελεσματικότητα των δραστηριοτήτων, όσο και την ανάπτυξη των δεξιοτήτων της μεταγνωστικής ανάπτυξης και της αυτορρύθμισης των μαθητών.

1.9 Αναστοχασμός εκπαιδευτικού και μαθητών

Η έννοια του αναστοχασμού επικεντρώνεται στην κριτική αξιολόγηση των πεποιθήσεων του ατόμου, αλλά και την πηγή της ύπαρξής τους και έχει ως κύριο σκοπό την αναθεώρηση των εμπειριών του εν λόγω ατόμου με βάση την κριτική αποτίμηση εννοιών και αντιλήψεων (Ζαρίφης, 2009). Εστιάζοντας στην εφαρμογή του αναστοχασμού στην διδακτική διαδικασία, τότε αποτελεί «μια σύνθετη και

πολυεπίπεδη διαδικασία στην εξέλιξη της οποίας εμπλέκονται όλες οι προϋπάρχουσες έννοιες για τη μάθηση και οι υποκειμενικές εμπειρίες κάθε εκπαιδευόμενου» (Γιαννακοπούλου, 2008).

Στην περίπτωση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και πιο συγκεκριμένα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα ΔΕΠΠΣ, ο αναστοχασμός προκύπτει ότι πρέπει να είναι μια καθημερινά εφαρμόσιμη εκπαιδευτική πρακτική. Πλέον, σύμφωνα με τα ΔΕΠΠΣ, θα πρέπει το σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα να εστιάζει στην όσο μεγαλύτερη ενεργή συμμετοχή των παιδιών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ο λόγος είναι ότι η ενεργή συμμετοχή αποτελεί έναν από τους βασικούς παράγοντες που μπορούν να ενισχύσουν τον ρόλο των παιδιών στην υλοποίηση των εκπαιδευτικών δράσεων του σχολείου τους. Ειδικά στην περίπτωση της προσχολικής εκπαίδευσης, η χρήση των συμμετοχικών και συνεργατικών διαδικασιών έχουν αποτελέσει αντικείμενα μελετών (Edwardsetal., 2001, OECD, 2001,200). Επομένως, κάθε εκπαιδευτικός θα πρέπει να μοιράζεται με τους μαθητές την ευθύνη του μαθήματος, τον ρόλο και την ισχύ του, εφαρμόζοντας μια εκπαιδευτική διαδικασία που θα στηρίζεται στην ενεργητική εμπλοκή των παιδιών, μέσω κυρίως της ακρόασης των απόψεών και των ιδεών τους (Avgitidou, 2019). Στόχος, η δημιουργία προϋποθέσεων για μια ουσιαστική συμμετοχή των παιδιών που θα ενισχύει την μαθησιακή εμπειρία του νηπιαγωγείου και θα συμβάλλει στην βελτίωση του εκπαιδευτικού προγράμματος της εν λόγω εκπαιδευτικής βαθμίδας (OECD, 2001, 2006).

Για να επιτευχθεί όμως αυτή η συμμετοχή, θα πρέπει από την μεριά των εκπαιδευτικών να υπάρχει η διάθεση και η σχετική γνώση για την δημιουργία ενός αντισυμβατικού περιβάλλοντος μάθησης, και ενός ευέλικτου εκπαιδευτικού προγράμματος που θα στηρίζει την καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία (Lansdown, 2001). Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να μπορούν κατά την εκπαιδευτική διαδικασία να σχεδιάσουν εκπαιδευτικές διαδικασίες που θα πληρούν ορισμένες βασικές προϋποθέσεις. α) την θεώρηση των παιδιών ως δρώντων υποκειμένων, β) την υιοθέτηση δημοκρατικών εκπαιδευτικών διαδικασιών και γ) την υιοθέτηση κονστρουκτιβιστικών θεωριών για τη μάθηση και διδασκαλία (Avgitidou, 2019). Οι παραπάνω θεωρήσεις διαπνέουν το πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών για την οργάνωση

της μάθησης και της διδασκαλίας στο σύγχρονο νηπιαγωγείο (Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου - ΠΣΝ, 2014).

Στόχος ήταν να δημιουργηθεί ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μπορεί να προωθηθεί η δημιουργικότητα και η κριτική σκέψη των παιδιών, να αξιοποιούνται οι ικανότητες και η διάθεσή τους για πρωτοβουλίες και δράσεις, να αναδεικνύονται τα ενδιαφέροντα των παιδιών, να αναδειχθεί το παιχνίδι ως κυρίαρχη συμμετοχική πρακτική και να δοθεί έμφαση στην επικοινωνία και την αλληλεπίδραση μεταξύ των παιδιών και μεταξύ παιδιών και εκπαιδευτικών (Αυγητίδου, 2008)

Με βάση το περιεχόμενό του ο αναστοχασμός διακρίνεται σε τρεις τύπους, οι οποίοι είναι οι εξής (Αγγελάκη κ.ά., 2010, VanVeen&Van de Ven, 2008):

- Λειτουργικός στοχασμός, ο οποίος εστιάζει κυρίως στην αποτελεσματική εφαρμογή μεθόδων, πρακτικών, δεξιοτήτων και τεχνικών και αναφέρεται σε τρόπους δράσης.
- Ακαδημαϊκός στοχασμός, ο οποίος συνδέεται με διάφορες θεωρίες, την κατανόηση του περιεχομένου τους, των βασικών αρχών που τις διέπουν και τις επιπτώσεις τους κατά την πρακτική εφαρμογή. Ο αναστοχασμός στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφέρεται στη χρήση θεωρίας.
- Κριτικός στοχασμός, ο οποίος αναφέρεται σε ηθικά ζητήματα, κώδικες και κανονιστικά κριτήρια που οδηγούν σε σκέψεις αναφορικά με την κοινωνική επίδραση και τις συνέπειες των δράσεων του ερευνητή για την ευημερία των άλλων.

Το βάθος του αναστοχασμού, σύμφωνα με το Lee (2000), μαρτυρά τη διαδικασία ανάπτυξης στην αναστοχαστική σκέψη. Ανάλογα με το βάθος του αναστοχασμού, ο ίδιος διακρίνει τρία επίπεδα αναστοχαστικής σκέψης (Αγγελάκη κ.ά., 2010, Lee, 2005):

- Επίπεδο ανάκλησης, κατά το οποίο περιγράφεται η κατάσταση και ερμηνεύεται με βάση των ανάκληση εμπειριών, χωρίς εναλλακτικές εξηγήσεις.

- Επίπεδο αιτιολόγησης, κατά το οποίο αναζητούνται σχέσεις και ερμηνείες από τους συμμετέχοντες και προσδιορίζονται γενικεύσεις και καθοδηγητικές αρχές.
- Επίπεδο κριτικής ανάλυσης, κατά το οποίο η εμπειρία προσεγγίζεται με στόχο την αλλαγή και τη μελλοντική βελτίωση, μέσω ανάλυσης από διάφορες προοπτικές, επιδράσεις, συνεργασίες και επιτεύγματα.

Ο αναστοχασμός ως διαδικασία είναι χρήσιμος τόσο για τους μαθητές, όσο και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Ωστόσο, δεν αποτελεί μια απλή διαδικασία και η εφαρμογή της μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη και να μην επιφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Εστιάζοντας στην περίπτωση των εκπαιδευτικών, ο αναστοχασμός μπορεί να ενισχύσει την αναθεώρηση της προϋπάρχουσας αντίληψης για την παιδαγωγική διαδικασία που έχουν ήδη διαμορφώσει οι εκπαιδευτικοί από σχολικές εμπειρίες, γνώσεις, σπουδές και επομένως να οδηγήσει σε βελτίωση της συνολικής παιδαγωγικής και εκπαιδευτικής διαδικασίας (Rogers, 2000).

Επιπλέον η σωστή εφαρμογή του αναστοχασμού, μπορεί να είναι η μέθοδος που θα αποτελέσει το εργαλείο προσέγγισης ζητημάτων και καταστάσεων που προκύπτουν στην τάξη και που δεν μπορούν να αναλύσουν οι εκπαιδευτικοί με άλλα μέσα. Οι εκπαιδευτικοί μέσω του μετασχηματισμού των αντιλήψεων και των εκπαιδευτικών μεθόδων τους, μπορούν να λειτουργήσουν περισσότερο υποστηρικτικά προς τα παιδιά και τις ανάγκες τους και να είναι λιγότεροι κριτικοί απέναντί τους. Στα παραπάνω συμβάλλει και η δημιουργία πιο στενών διαπροσωπικών σχέσεων στο σύνολο της ομάδας, μαθητών και εκπαιδευτικού. Οι σχέσεις αυτές καλλιεργούν το αίσθημα της μεγαλύτερης αποτελεσματικότητας αλλά και της επαγγελματικής ικανοποίησης, για τα αποτελέσματα που προκύπτουν και ολοένα βελτιώνονται. Επομένως, αναμένεται να αρχίσει να αποκτά ολοένα και συχνότερα πρακτικές που εστιάζουν σε διερευνητικές μεθόδους (Rogers, 2000).

Με βάση τα παραπάνω ο χρόνος εφαρμογής του αναστοχασμού διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στο περιεχόμενο και τη δράση που προκύπτει από αυτόν (Loughran, 1996):

Ο αναστοχασμός μετά την πράξη είναι η συνειδητή ανάκληση της εμπειρίας με στόχο την κατανόηση και αξιολόγησή της για κάποιο σκοπό. Σ' αυτό το στάδιο θα περίμενε κανείς ότι η αναστοχαστική διαδικασία ολοκληρώνεται, όμως ο αναστοχασμός μετά την πράξη βοηθάει πολύ στον αναστοχασμό πριν την πράξη, στο σχεδιασμό δηλαδή των επόμενων δράσεων με σκοπό να δημιουργηθεί μια συνεχής ανακατασκευή εμπειριών.

Εστιάζοντας στην περίπτωση των παιδιών, ο αναστοχασμός ως μέθοδος που εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς, ενισχύει την θέση τους μέσα στην σχολική τάξη, αφού μαθαίνουν περισσότερα. Οι εκπαιδευτικοί λόγω της αμεροληψίας τους, μπορούν να θέτουν κρίσιμα ερωτήματα στα παιδιά σχετικά με τυχόν προκαταλήψεις (πχ. περί ανισότητας, περί φυλετικών διακρίσεων κ.λ.π.) και τη δημιουργία των πεποιθήσεων για τους μαθητές (MacNaughton, 2003, Appl&Yordle, 2005).

Επιπρόσθετα όταν οι εκπαιδευτικοί σέβονται τις απόψεις των παιδιών τότε εκείνα αισθάνονται υπεύθυνα αναφορικά με τις δράσεις τους. Επιπλέον, εάν οι εκπαιδευτικοί δημιουργούν πραγματικές ευκαιρίες για τα παιδιά, τότε εκείνα δύνανται να εκφράσουν τις δικές τους σκέψεις και συναισθήματα και να ασκήσουν επιρροή σε ότι συμβαίνει στη ζωή τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ενίσχυση τόσο της μεταγνώσης, όσο και της αυτορρύθμισης των παιδιών (Marbinaet al. 2010).

Ως μεταγνώση, μπορεί να οριστεί η ικανότητα του ατόμου να γνωρίζει τι γνωρίζει, τι δε γνωρίζει και πώς θα το γνωρίσει. Για να επιτευχθεί η μεταγνώση, θα πρέπει το άτομο να μπορεί να κάνει αυτοκριτική για το τι έχει μάθει, πως συνδυάζεται αυτή η γνώση με τα συναισθήματά του, πως μπορεί να χρησιμοποιήσει την εν λόγω γνώση στην καθημερινότητά του. Η μεταγνώση όμως είναι μια από τις δεξιότητες που μπορούν να καλλιεργηθούν, μέσω της αποτελεσματικής διδασκαλίας και να οδηγήσει τους μαθητές να αυτοβελτιώνονται και να μπορούν να αυτομορφώνονται, μέσα από την εκπαιδευτική διαδικασία (Κουτσελίνη, 1995)

Επομένως η μεταγνώση και η αυτορρύθμιση των παιδιών είναι δύο αλληλένδετες έννοιες (Fisher, 2005· Arthuretal., 2006). Σύμφωνα με τον Flavell (1979) διακρίνονται 2 κατηγορίες της μεταγνώσης: η μεταγνωστική γνώση, που αφορά στις πληροφορίες που έχουμε σχετικά με τις γνωστικές μας διεργασίες και σε ό,τι σχετίζεται με αυτές, και τη μεταγνωστική εμπειρία, που αναφέρεται στους μηχανισμούς που ενεργοποιούνται από τους μαθητές στην προσπάθειά τους να

επιλύσουν ένα πρόβλημα ή να διεκπεραιώσουν ένα μαθησιακό έργο. Οι εν λόγω εργασίες θα υποστηρίξουν την επίτευξη των στόχων που θέτει ο μαθητής στο εκπαιδευτικό περιβάλλον, και καθοδηγούν τον τρόπο με τον οποίο θα συμμετέχει στο εκάστοτε μάθημα, μια διαδικασία που αποτελεί τμήμα της αυτορρυθμιζόμενης μάθησής του (Παναγάκος & Τζανάκη, 2007).

Εστιάζοντας στην πολύπλευρη και σύνθετη διαδικασία της αυτορρύθμισης, μπορεί να οριστεί ως η ικανότητα ενός ατόμου να ελέγχει τις δράσεις και αντιδράσεις του για την επίτευξη ενός επιδιωκόμενου στόχου (Jahromietal., 2008). Το άτομο, επομένως, εμπλέκεται ενεργά στη διαμόρφωση και συνεχή αναπροσαρμογή συμπεριφορών και στρατηγικών, επιδιώκοντας να επιτύχει τους στόχους που έχει ορίσει, ενώ η ελεγκτική - ρυθμιστική του δράση κινείται ουσιαστικά σε τρεις άμεσα αλληλεξαρτώμενους άξονες: το συναίσθημα, τη συμπεριφορά και τη γνώση (McClellandetal, 2007)

Βάση της ηλικιακής ομάδας των νήπιων, που εστιάζει η παρούσα εργασία, μπορεί να ειπωθεί ότι στην ηλικία των πέντε ετών τα περισσότερα παιδιά είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τα συναισθήματά τους, ενώ οι στρατηγικές που επιλέγουν, στοχεύουν επί της ουσίας να παρατείνουν το ευχάριστο συναίσθημα ή να αλλάξουν την κατάσταση που τους προκαλεί το δυσάρεστο συναίσθημα (Coleetal., 2009)

Για την χαρτογράφηση του τρόπου που αυτορυθμίζονται τα παιδιά σε αυτή την ηλικία ο Zimmerman (1989) ανέπτυξε ένα κυκλικό μοντέλο για εφαρμογή στο χώρο της εκπαίδευσης, το οποίο αποτελείται από τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές.

- Προπαρασκευαστική (forethought), που προηγείται του μαθησιακού έργου,
- Εκτελεστική (performancecontrol), που αναφέρεται στην ευσυνείδητη και προγραμματισμένη ενασχόληση με το μαθησιακό έργο,
- Αναστοχαστική (self-reflection), που περιλαμβάνει όλες εκείνες τις διαδικασίες επισκόπησης, αναστοχασμού αλλά και αναπροσαρμογής των στρατηγικών ανάλογα με τα αποτελέσματα των δράσεων (Cleary&Zimmerman, 2004).

Αντίστοιχα, οι Rimm-Kaufmanetal. (2009) εντοπίζουν τρία στοιχεία που καθορίζουν την οργάνωση, την εύρυθμη και ποιοτική λειτουργία της τάξης του νηπιαγωγείου. Τα στοιχεία αυτά αφορούν στη φύση της αλληλεπίδρασης μεταξύ

εκπαιδευτικού και νηπίων και δύνανται να βελτιώσουν σημαντικά την ικανότητα αυτορρύθμισης των μικρών παιδιών.

Ο πρώτος άξονας είναι η συναισθηματική ενίσχυση, όπου ο εκπαιδευτικός καλείται να εστιάσει στις συναισθηματικές ανάγκες των παιδιών, με το να οργανώνει δραστηριότητες ή να τροποποιεί τις ήδη υπάρχουσες, ώστε να τις καλύψει και να μπορεί να δημιουργηθεί ένα ομαδικό πνεύμα συνεργασίας τόσο μεταξύ μαθητών, όσο και μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών.

Ο δεύτερος άξονας περιλαμβάνει την συνολική διαχείριση της τάξης, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός πρέπει να ορίσει το πρόγραμμα και την καθημερινή ρουτίνα των παιδιών, εντός της σχολικής τάξης. Για να το επιτύχει αυτό θα πρέπει να οργανώσει νέες ή να διαμορφώσει ήδη υπάρχουσες δραστηριότητες που θα κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών του, θα περιλαμβάνουν τις εμπειρίες τους εκτός σχολείου και τα οδηγούν σε μια τάση για μεγαλύτερη διερεύνηση

Ο τελευταίος άξονας, περιλαμβάνει την καθοδηγητική υποστήριξη, όπου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να υποστηρίζει το σύνολο των παιδιών, χωρίς όμως να επεμβαίνει, αλλά διατηρώντας περισσότερο ένα ρόλο εκτός ομάδας, περισσότερο συμβουλευτικό. Θα πρέπει να προσφέρει στοιχεία ανατροφοδότησης, να επιβραβεύει, να διορθώνει χωρίς να επικρίνει και να κατευθύνει όπου και όταν χρειάζεται το σύνολο της τάξης προς το επιθυμητό αποτέλεσμα, όχι της διδασκαλίας, αλλά της κατάκτησης της γνώσης (Yelland&Masters, 2007).

1.10 Τροχιές μάθησης

Για τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και τον συνδυασμό της πράξης με την υπάρχουσα θεωρία, χρησιμοποιούνται οι τροχιές μάθησης διδασκαλίας (ΤΜΔ). Ουσιαστικά οι εν λόγω τροχιές περιγράφουν πρωτίστως μια υποθετική πορεία μέσα από την οποία μπορεί να αναπτυχθεί ή μάθηση και η κατανόηση των παιδιών, σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους (Λεμονίδης, 2015).

Τι είναι όμως οι τροχιές μάθησης και που αποσκοπεί η χρήση τους, σύμφωνα με τους Clements and Sarama (2004, σελ. 81) που δίνουν τον παρακάτω ορισμό για τις τροχιές μάθησης: «Είναι οι περιγραφές της σκέψης και της μάθησης των παιδιών σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, και μια σχετική εικαζόμενη διαδρομή διαμέσου ενός συνόλου διδακτικών έργων που έχουν σχεδιαστεί για να προκαλέσουν αυτές τις

διανοητικές διαδικασίες ή ενέργειες. Αυτές υποθέτονται για να μετακινήσουν τα παιδιά διαμέσου μιας αναπτυξιακής εξέλιξης επιπέδων της σκέψης, που δημιουργήθηκε με πρόθεση την υποστήριξη των επιδόσεων των παιδιών σε συγκεκριμένους στόχους αυτού του μαθηματικού τομέα»

Παράλληλα, σημειώνουν ότι οι τροχιές της μάθησης αποτελούνται από τρία τμήματα.

- Ένα μαθηματικό στόχο, στην παρούσα περίπτωση την κατανόηση της έννοιας του μισού
- Μια αναπτυξιακή διαδρομή κατά μήκος της οποίας τα παιδιά αναπτύσσονται για να φτάσουν αυτό τον στόχο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται αναφορά πρώτα στην έννοια των φυσικών αριθμών, μετά στην απαρίθμησή τους, ακολουθεί η έννοια του μισού, και μετά η τοποθέτηση ανάμεσα σε δύο ακέραιους.
- Ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες ή έργα που ταιριάζουν με καθένα από τα επίπεδα της σκέψης σε αυτήν την διαδρομή. Στην παρούσα προτείνονται εικόνες που έχουν τους φυσικούς αριθμούς, εικόνες από αντικείμενα που είναι γνωστά στα παιδιά όπως, μπλούζες, η πίτσα, το κέικ και κόκαλα για σκύλο

Μια τροχιά μάθησης για την διδασκαλία του μισού

2.1 Τροχιά μάθησης του μισού στο νηπιαγωγείο

Για την διδακτική προετοιμασία των μαθητών του νηπιαγωγείου, θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να προετοιμάσει συγκεκριμένες τροχιές μάθησης για κάθε ένα από τα γνωστικά αντικείμενα του νηπιαγωγείου. Κάθε τροχιά μάθησης στηρίζεται στις αρχικές εμπειρίες που έχουν οι μαθητές πριν έρθουν στο σχολείο και οι οποίες προέρχονται από την καθημερινότητά τους από άλλα περιβάλλοντα, όπως είναι η οικογένεια.

Ο βασικός στόχος κάθε μαθησιακής τροχιάς είναι να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τις οποίες παλιές αντιλήψεις έχουν και να προετοιμαστούν για το νέο μαθησιακό πλαίσιο στο οποίο θα ενταχθούν. Εστιάζοντας στην περίπτωση των μαθηματικών, θα πρέπει τα νήπια να αναπτύξουν νέες μαθηματικές ιδέες και έννοιες, με τις οποίες να μην έχουν έρθει σε επαφή ή να μην γνωρίζουν πλήρως την σημασία τους.

Στην παρούσα εργασία, θα γίνει μια προσπάθεια να παρουσιαστεί μια ενδεικτική τροχιά μάθησης των παιδιών του νηπιαγωγείου, η οποία θα σχετίζεται με την έννοια του μισού ή $\frac{1}{2}$. Αρχικά, γίνεται η παραδοχή ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν την μορφή των αριθμών. Έχουν δηλαδή την προ-σχολική εμπειρία κατά την οποία έχουν έρθει σε επαφή με την μορφή των αριθμών, μπορούν να τους αναγνωρίσουν, αλλά δεν γνωρίζουν πώς να τους τοποθετήσουν σε μια σειρά. Άρα, η πρώτη δραστηριότητα «Η μπουγάδα των ακέραιων», έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την σειρά στην οποία μπαίνουν οι φυσικοί αριθμοί από το ένα έως το δέκα. Επίσης, συνδέουν τους αριθμούς ως ποσότητες (πληθικότητα) με τη θέση τους σε μια ιεραρχική δομή (Διατακτικότητα του αριθμού), αντιστοιχώντας τη συμβολικη αναπαράσταση του αριθμού με την ποσότητα που αναπαριστά.

Η επιλογή των υλικών (Δραστηριότητα Παράρτημα 1), σχετίζεται με αντικείμενα που έχουν δει και χρησιμοποιήσει τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται μπλούζες που έχουν πάνω τους ζωγραφισμένα από την μια μεριά τα νούμερα και από την άλλη μεριά αντίστοιχο αριθμό από μικρές πίτσες. Στόχος, να

μπορούν τα παιδιά μέσα από οικεία αντικείμενα, να αρχίσουν να τοποθετούν τους φυσικούς αριθμούς σε μια σειρά, με βάση το μέγεθός τους, συνδυάζοντας την μορφή του αριθμού με το πλήθος ενός αντικειμένου. Ουσιαστικά είναι το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση για την χρήση της απαρίθμησης και την κατάκτηση της έννοιας της αριθμογραμμής στην την οποία μπαίνουν οι φυσικοί αλλά και οι ρητοί αριθμοί.

Στην τροχιά της μάθησης που σχεδιάστηκε ο συνδυασμός του αριθμού με την ποσότητα υποστηρίζεται με μια ακόμα δραστηριότητα. Το παζλ των ακέραιων αριθμών (Δραστηριότητα 2), βοηθάει τους μαθητές μέσα από ένα παιχνίδι που σχετίζεται με την ηλικία τους, όπως είναι το παζλ, να συνδυάσουν τον αριθμό με μια ποσότητα. Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα επιλέγεται ένα άλλο γνώριμο και αγαπητό στα παιδιά αντικείμενο που είναι μια φωτογραφία μιας τούρτας ενός, τα κομμάτια της οποίας μπορούν να αποκολληθούν και να απομακρυνθούν. Ουσιαστικά οι μαθητές προσπαθούν να συνδυάσουν τον αριθμό των κέικ με το σωστό κομμάτι από το παζλ που δείχνει τον αντίστοιχο φυσικό αριθμό. Το μοναδικό σχήμα που έχει κάθε κομμάτι του παζλ, βοηθάει να μπορέσουν οι μαθητές να συνδέσουν τα κομμάτια μεταξύ τους.

Μετά τους φυσικούς αριθμούς την τοποθέτηση τους στην αριθμογραμμή και την αντιστοίχιση τους με τις ποσότητες, επόμενος στόχος είναι η κατανόηση της διάσπασης της μονάδας. Για τον λόγο αυτό έχει σχεδιαστεί η δραστηριότητα 3 (δραστηριότητα 3), όπου δίνεται στους μαθητές μια τούρτα, η οποία είναι χωρισμένη σε 8 τμήματα. Όλα τα κομμάτια της τούρτας μπορούν να αποσπαστούν και στα δύο άκρα τους έχουν κολλητική ταινία. Αναμένεται βάση των εμπειριών τους οι μαθητές να έχουν προχωρήσει σε μοίρασμα κάποιων υλικών στην προσχολική ζωή τους και ιδιαίτερα στο σπίτι τους. Άρα είναι εξοικειωμένοι με την συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Σκοπός αυτής της δραστηριότητας είναι να μπορέσουν τα παιδιά να αντιληφθούν πως η τούρτα μπορεί να είναι μια μονάδα και πως με την κοπή των τμημάτων μπορεί να χωριστεί σε υποδιαιρέσεις της μονάδας που συμβολίζονται με τους δεκαδικούς ρητούς αριθμούς. Στην δραστηριότητα ζητάτε από τους μαθητές να προχωρήσουν στον μοίρασμα των κομματιών στα δυο και γίνεται εστίαση στον δίκαιο μοιρασμό. Με την κοπή της τούρτας στην μέση γίνεται μια πρώτη επαφή με την έννοια του μισού, το οποίο αποτελεί μέρος της μονάδας.

Βάση της τροχιάς μάθησης που σχεδιάστηκε και η τέταρτη δραστηριότητα εστιάζει στην έννοια του μισού, μέσω της διαδικασίας της δίκαιης μοιρασιάς. Πιο συγκεκριμένα ζητείται από τους μαθητές να μοιράσουν σε δυο διαφορετικούς σκύλους (Δραστηριότητα 4), μια ποσότητα από κόκαλα. Στόχος, να μοιραστεί ίσος αριθμός από κόκαλα στους 2 σκύλους. Αφού εκτυπωθεί ένας αριθμός από ολόκληρα και δύο μισά κόκαλα, οι μαθητές καλούνται να μοιράσουν τα κόκαλα χρησιμοποιώντας εικόνες που απεικονίζουν ολόκληρα και μισά κομμάτια. Στόχος είναι οι μαθητές να απαριθμούν τα ολόκληρα και σε δεύτερο χρόνο τα μισά, καταλήγοντας σε έναν δεκαδικό αριθμό π.χ. επτά και μισό (7,5).

Η κατανόηση του μισού ως ποσότητα σε σχέση με την μονάδα, έρχεται ως το επόμενο βήμα της τροχιάς μάθησης. Σκοπός η κατανόηση μέσα από την πράξη της πρόσθεσης, ότι δύο μισά δίνουν μια μονάδα. Πιο συγκεκριμένα στην πέμπτη δραστηριότητα, δίνονται στους μαθητές κάρτες που στην μια όψη έχουν το νούμερο και στην άλλη την αντίστοιχη ποσότητα από πίτσες (Δραστηριότητα 5). Οι μαθητές προσπαθούν βλέποντας τον αριθμό και την ποσότητα από τις ολόκληρες τις πίτσες, να συνδυάσουν τμήμα καρτών που απεικονίζουν ποσότητα από ολόκληρες και από μισές πίτσες. Από τους μαθητές ζητάτε να βρουν ποια κάρτα θα πρέπει να συνδυαστεί με κάποια άλλη, ώστε να καταφέρουν να επιτύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή τον αριθμό των ολόκληρων ποσοτήτων.

Οι μαθητές γνωρίζουν μέσω της απαρίθμησης την σειρά των αριθμών και μπορούν να ξεκινήσουν την απαρίθμηση από οποιοδήποτε αριθμό. Επιλέγοντας τυχαία μια κάρτα με έναν οποιοδήποτε αριθμό, προσπαθούν να βρουν πόσα μισά κομμάτια πρέπει να αναζητήσουν. Ο συνδυασμός των καρτών με το ίδιο αριθμό μισών τμημάτων, έχει ως στόχο την κατανόηση της αξίας του μισού σε σχέση με την μονάδα.

Τέλος, η τελευταία δραστηριότητα έχει ως στόχο την τοποθέτηση των μισών ποσοτήτων στην αριθμογραμμή. Για να συνδυαστεί η ήδη υπάρχουσα εμπειρία των μαθητών με την τοποθέτηση των φυσικών ακέραιων αριθμών σε μια σειρά, χρησιμοποιούνται οι ίδιες κάρτες με την δραστηριότητα ένα. Ωστόσο, πλέον υπάρχουν επιπλέον κάρτες που απεικονίζουν ποσότητα από πίτσες που έχουν και μισά τμήματα π.χ 7,5 πίτσες (Δραστηριότητα 6). Οι μαθητές καλούνται να βάλουν

στην σειρά τα μπλουζάκια με τις πίτσες και ουσιαστικά να τοποθετήσουν τις μπλούζες με τα μισά, ανάμεσα από αυτές που έχουν ακέραιο αριθμό από πίτσες.

Με την τελευταία αυτή δραστηριότητα σκοπός είναι να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του μισού ως αριθμού που έχει θέση στην αριθμογραμμή. Να χρησιμοποιηθεί η ήδη υπάρχουσα γνώση από την σειρά των ακεραίων και να μπορέσουν να αντιληφθούν την έννοια τόσο του μισού, όσο και την παρουσία και άλλων αριθμών ανάμεσα στους ακεραίους φυσικούς που γνώριζαν.

2.2 Προτεινόμενες δραστηριότητες για έννοια του μισού στο νηπιαγωγείο

1^η Δραστηριότητα: Μπουγάδα Ακεραίων

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα σχεδιάστηκε για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την σειρά των αριθμών από το ένα έως το δέκα και τη συσχέτιση τους με την ποσότητα αντικειμένων.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών.

Σκοπός: Σκοπός της παρούσας δραστηριότητας είναι να εξοικειωθούν τα παιδιά με την σειρά των αριθμών στη συμβολική τους μορφή.

Στόχος: Στόχος της είναι η πλειοψηφία των παιδιών να μπορεί να τοποθετεί στην σωστή σειρά τους αριθμούς.

Υλικά:

(για 10 παιδιά)

- 7 (εφτά) σχοινάκια μπουγάδας, πέντε για να χρησιμοποιηθούν και ακόμα 2 για να υπάρχουν ως εφεδρικά.,

- 7 (εφτά) σετ από 10 (δέκα) μπλουζάκια με το σύμβολο του αριθμού 1-10 από την μια πλευρά και από πίσω να απεικονίζεται η ποσότητα του συμβόλου αριθμού με 1- 10 πίτσες (Εικόνα 1). Από αυτά θα χρησιμοποιηθούν πέντε σετ και δύο θα είναι εφεδρικά σε περίπτωση που υπάρχει κάποια απώλεια (Παράρτημα Ι).



Εικόνα 1. Χάρτινα μπλουζάκια της 1^{ης} δραστηριότητας, με το νούμερο στην μπροστινή όψη και την ποσότητα στην πίσω.

Περιγραφή Δραστηριότητας: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά με την βοήθεια του/της εκπαιδευτικού θα παίξουν την Μπουγάδα των Ακεραίων. Η δράση αυτή μπορεί να υλοποιηθεί με την διαδικασία της συνεργασίας σε ομάδες καθώς μέσα από το παιχνίδι-δραστηριότητα τα παιδιά θα αναπτύξουν διάλογο μεταξύ τους αλλά και με τον/την εκπαιδευτικό με σκοπό να κάνουν τη δραστηριότητα και να εκφράσουν μαθηματικό λεξιλόγιο.

Περιγραφή Έναρξης: Αρχικά θα χωριστούν σε 5 (πέντε) ομάδες των 2 (δύο) ατόμων μέσα από κλήρωση. Κάθε ομάδα έχει μπροστά της από 1 (ένα) σχοινί -μπουγάδα και 10 (δέκα) μπλουζάκια-κάρτες. Κάθε κάρτα από την μια πλευρά θα έχει το σύμβολο του αριθμού και από την πίσω πλευρά την ποσότητα του

Δράσεις Νηπιαγωγού: Αρχικά ο/η εκπαιδευτικός συζητήσει με τα παιδιά την ρουτίνα της δραστηριότητας, έπειτα παρατηρεί και σχολιάζει μαζί με τα παιδιά τα υλικά στα παιδιά δηλαδή τις 10 (δέκα) κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών και τις ποσότητες τους και το σχοινί της μπουγάδας. Αφού έχει παρουσιάσει τα υλικά θα αναφέρει το στόχο της δραστηριότητας δηλαδή ότι τα παιδιά θα αναγνωρίσουν το σύμβολο των αριθμών από το 1-10. Στη συνέχεια εξηγήσει με ένα παράδειγμα της

δραστηριότητας για να γίνει πιο κατανοητή στα παιδιά. Αφού τελειώσει με τις οδηγίες θα δώσει το σύνθημα της έναρξης. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας ο/η εκπαιδευτικός θα βοηθάει τις ομάδες όπου δυσκολεύονται και όπου χρειάζονται περαιτέρω εξηγήσεις δηλαδή την σωστή σειρά των αριθμών από το 1-10 ή την διαδικασία της δραστηριότητας.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Ποιος αριθμός είναι μετά το 4;

Ποιος αριθμός είναι πριν το 4;

Ποιος αριθμός είναι ανάμεσα στο 4 και στο 6;

Ποιος αριθμός είναι πρώτος;

Ποιος αριθμός είναι δεύτερος, τρίτος...;

Ποιος αριθμός είναι τελευταίος;

Δράσεις των παιδιών: Τα παιδιά κάθονται σε δυάδες. Κάθε ζευγάρι έχει μπροστά του ένα σχοινί μπουγάδας και από 10 (δέκα) κάρτες-μπλουζάκια που στην μια πλευρά τους έχουν το σύμβολο των αριθμών 1-10 και στην άλλη πλευρά τους έχουν την ποσότητα κάθε αριθμού. Κάθε παιδί παίρνει από μια κάρτα-μπλουζάκι αναγνωρίζει το σύμβολο του αριθμού και έπειτα το τοποθετεί στην μπουγάδα στην σωστή σειρά. Αφού τοποθετήσει το ένα παιδί την κάρτα στην μπουγάδα τότε το άλλο παιδί παίρνει μια άλλη κάρτα και την τοποθετεί πάλι στην μπουγάδα στην σωστή σειρά. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι κάρτες. Για παράδειγμα στη Δραστηριότητα 1 τα παιδιά θα έχουν μπροστά τους το σχοινί της μπουγάδας και θα επιλέγουν ένα από τα μπλουζάκια π.χ. το 2 και θα πρέπει να το τοποθετήσει στη σειρά μετά το 1 και πριν το 3.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις κάθε ομάδα έχει τοποθετήσει όλους τους αριθμούς από το 1-10 στη σωστή σειρά.

Αξιολογητική Δράση: Μετά από κάποιες μέρες που τα παιδιά έχουν παίξει-λύσει την δραστηριότητα αρκετές φορές και έχουν εξοικειωθεί με αυτήν ο/η νηπιαγωγός για να κατανοήσει κατά πόσο τα παιδιά έχουν εμπεδώσει την σειρά των αριθμών τους δίνει άλλες κάρτες με τους αριθμούς από το 1-10 και τους ζητάει να τις τοποθετήσουν με την σειρά.

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Γίνονται στοχευμένες ερωτήσεις όπως: Γιατί απλώσαμε τα μπλουζάκια με αυτή την σειρά, Πως μετράμε τους αριθμούς και από ξεκινάμε την απαρίθμηση.

2^η Δραστηριότητα: Το παζλ των ακεραίων

Η παρούσα δραστηριότητα σχεδιάστηκε ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν συνδυασμούς αριθμών με αντίστοιχες ποσότητες αντικειμένων, για την οπτικοποίηση της αξίας τους.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών καθώς και κάνουν απαρίθμηση.

Σκοπός: Σκοπός της παρούσας δραστηριότητας είναι τα νήπια να έρθουν σε επαφή και να εξοικειωθούν με την εικόνα των συμβόλων των αριθμών και με τις ποσότητες που αναπαριστούν.

Στόχος: Στόχος της δραστηριότητας είναι να μπορεί η πλειοψηφία των παιδιών να αντιστοιχίζει τα σύμβολο των αριθμών με τις ποσότητές τους.

Υλικά:

(για 10 παιδιά)

- 7 (επτά) σετ από 10 (δέκα) κάρτες-παζλ όπου θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 1 - 10. Από αυτά θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 5 και τα άλλα 2 θα είναι εφεδρικά.
- 7 (επτά) σετ από 10 κάρτες-παζλ όπου θα απεικονίζεται η ποσότητα του συμβόλου του αριθμού 1 - 10 με 1 - 10 (ένα) κεκάκια (Εικόνα 2) (Παράρτημα II).



Εικόνα 2. Χάρτινα κομμάτια του παζλ της 2^{ης} δραστηριότητας, με το νούμερο και την ποσότητα σε δύο διαφορετικά κομμάτια.

Περιγραφή Δραστηριότητας: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να ενώσουν τα κομμάτια του παζλ. Το ένα κομμάτι θα έχει το σύμβολο του αριθμού και το άλλο κομμάτι θα έχει την ποσότητα του αριθμού. Ο/Η εκπαιδευτικός θα έχει προετοιμάσει τα κομμάτια του παζλ. Τα παιδιά θα κάθονται σε δυάδες και μπροστά τους θα έχουν τα κομμάτια του παζλ. Τα παιδιά ανά ζεύγος θα συνεργαστούν για να ενώσουν τα κομμάτια μεταξύ τους. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να αναπτύξουν διάλογο καθώς θα συζητήσουν, θα πουν τη γνώμη τους, θα επιχειρηματολογήσουν για την άποψη τους και θα αναπτυχθεί μαθηματικό λεξιλόγιο.

Περιγραφή έναρξης: Στη παρούσα δραστηριότητα ο/η νηπιαγωγός θα έχει ετοιμάσει 20 (είκοσι) κομμάτια παζλ εκ των οποίων στα 10 (δέκα) κομμάτια θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και στα άλλα 10 (δέκα) κομμάτια θα απεικονίζονται οι ποσότητες των συμβόλων των αριθμών με κεκάκια. Τα νήπια θα χωριστούν σε 5 (πέντε) ομάδες των 2 (δύο) ατόμων μέσα από κλήρωση. Ο/Η εκπαιδευτικός θα μοιράσει στα νήπια τα υλικά και η δραστηριότητα θα ξεκινήσει.

Δράσεις Νηπιαγωγού: Πρώτη δράση του/της νηπιαγωγού είναι να υπενθυμίσει στα νήπια την ρουτίνα της δραστηριότητας, στη συνέχεια θα παρουσιάσει τα υλικά

δηλαδή ότι θα υπάρχουν 20 (είκοσι) κομμάτια πάζλ εκ των οποίων στα 10 (δέκα) κομμάτια θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και στα άλλα 10 (δέκα) κομμάτια θα απεικονίζονται οι ποσότητες των συμβόλων των αριθμών με κεκάκια. Αφού θα έχει παρουσιάσει τα υλικά θα εξηγήσει τα βήματα της δραστηριότητας δηλαδή ότι θα υπάρχουν 20 (είκοσι) κομμάτια πάζλ όπου στα 10 (δέκα) θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και στα άλλα 10 (δέκα) κομμάτια θα απεικονίζονται οι ποσότητες τους με κεκάκια όπου θα πρέπει να τα αντιστοιχίσουν μεταξύ τους δηλαδή 1 (ένα) σύμβολο με 1 (μια) μόνο ποσότητα. Έπειτα ο/η νηπιαγωγός θα δείξει ένα παράδειγμα της δραστηριότητας στα νήπια έτσι ώστε να κατανοήσουν την διαδικασία. Στη συνέχεια αφού έχει τελειώσει με τις οδηγίες θα δώσει το σύνθημα έναρξης της δραστηριότητας. Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας ο/η εκπαιδευτικός θα βοηθάει τα παιδιά όπου χρειάζονται βοήθεια ή περεταίρω εξηγήσεις δηλαδή ότι πρέπει να αναγνωρίσουν το σύμβολο του αριθμού και έπειτα να το αντιστοιχίσουν με την ποσότητα του.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Πόσα κεκάκια υπάρχουν σε αυτό το κομμάτι;

Πόσα κεκάκια αντιστοιχούν σε αυτόν τον αριθμό;

Ποιος αριθμός αντιστοιχίζεται σε τόσα κεκάκια;

Δράσεις των παιδιών: Τα παιδιά είναι χωρισμένα σε δυάδες. Κάθε ζευγάρι έχει μπροστά του 20 (είκοσι) κομμάτια πάζλ όπου στα 10 (δέκα) θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και στα άλλα 10 (δέκα) θα απεικονίζονται οι ποσότητες των συμβόλων με κεκάκια. Κάθε ζευγάρι θα συνεργάζεται και θα προσπαθεί να αντιστοιχίσει ένα κομμάτι πάζλ με σύμβολο με ένα κομμάτι πάζλ που θα απεικονίζεται η ποσότητα του συμβόλου. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να τελειώσουν όλα τα κομμάτια του πάζλ. Στη Δραστηριότητα 2 τα παιδιά θα επιλέγουν ένα από τα κομμάτια του πάζλ π.χ. το κομμάτι με τον αριθμό 5 και θα πρέπει να το ενώσουν με το κομμάτι που έχει πάνω 5 κεκάκια ή το αντίστροφο δηλαδή διαλέγει το κομμάτι με τα 5 κεκάκια και πρέπει να βρει σε ποιόν αριθμό αντιστοιχεί.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις όλες οι ομάδες έχουν αντιστοιχίσει και τα 10 σύμβολα των αριθμών με τις ποσότητες τους.

Αξιολογητική δράση: Αφού έχει ολοκληρωθεί η δραστηριότητα ο/η εκπαιδευτικός για να κατανοήσει εάν τα παιδιά έχουν εμπεδώσει την όλη διαδικασία θα μοιράσει σε κάθε παιδί ξεχωριστά από ένα φύλλο εργασίας όπου θα έχει δύο στήλες. Στην μία στήλη θα αναγράφονται όλα τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και στην απέναντι στήλη θα απεικονίζονται οι ποσότητες των συμβόλων αλλά σε τυχαία σειρά. Σε αυτή την δραστηριότητα θα πρέπει τα παιδιά να ενώσουν το σύμβολο με την σωστή ποσότητα που του αντιστοιχεί.

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Γιατί προχωρήσαμε στο να δέσουμε τον κάθε αριθμό με μια ποσότητα, χρησιμοποιήσαμε την απαρίθμηση ή την αναγνώριση του αριθμού ή και τα δύο.

3^η Δραστηριότητα: Το μοίρασμα της Τούρτας

Στη δραστηριότητα αυτή γίνεται αξιοποίηση της δίκαιης μοιρασιάς για την κατανόηση της διαίρεσης της μονάδας σε ίσα μέρη. Με αυτόν τον τρόπο θα εισαχθούν τα παιδιά στο μισό.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να γνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών, την διατακτικότητα τους δηλαδή τη ιδιότητα του αριθμού να αναπαριστά την ιεραρχία των αριθμών καθώς και την απαρίθμηση δηλαδή την απαγγελία μιας σειράς αριθμολέξεων. Επίσης έχουν έρθει σε επαφή με την καταμέτρηση δηλαδή τη διαδικασία της απαρίθμησης.

Σκοπός: Σκοπός της παρούσας δραστηριότητας είναι τα νήπια να έρθουν σε επαφή και να εξοικειωθούν με την εικόνα μιας ολόκληρης ποσότητας και πως μπορούμε να την χωρίσουμε σε δύο ίσες ποσότητες.

Στόχος: Στόχος της δραστηριότητας είναι να μπορέσει το σύνολο των παιδιών να μοιράσει μια ποσότητα σε δύο ίσα μέρη.

Υλικά:

(για 10 παιδιά)

- 5 (πέντε) χάρτινες τούρτες (Εικόνα 3).
- 5 (πέντε) κάρτες με το σύμβολο του αριθμού 2 (δύο).
- 5 (πέντε) κάρτες με το σύμβολο του αριθμού 4 (τέσσερα).
- 5 (πέντε) κάρτες με το σύμβολο του αριθμού 8 (οκτώ) (Παράρτημα ΙΙΙ).



Εικόνα 3. Χάρτινη τούρτα που αποτελείται από 8 κομμάτια που αποκολλούνται, της 3^{ης} δραστηριότητας.

Περιγραφή Δραστηριότητας: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα κληθούν να μοιράσουν μια τούρτα σε δύο ίσα μέρη. Τα παιδιά θα χωριστούν σε ομάδες μέσα από κλήρωση και έτσι θα δουλέψουν συνεργατικά.

Περιγραφή έναρξης: Στην παρούσα δραστηριότητα ο/η εκπαιδευτικός θα έχει προετοιμάσει 5 (πέντε) χάρτινες τούρτες όπου χωρίζονται σε 8 (οκτώ) κομμάτια που ενώνονται με αυτοκόλλητη ταινία διπλής όψης τύπου velcro. Αυτό δίνει την δυνατότητα να χωρίζουμε την τούρτα όπου εμείς θέλουμε (π.χ. στη μέση, σε τέσσερα κομμάτια και σε οκτώ). Ακόμα θα έχει ετοιμάσει 15 (δεκαπέντε) κάρτες από τις οποίες στις 5 (πέντε) θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 2 (δύο), στις άλλες 5 (πέντε) θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 4 (τέσσερα) και στις άλλες 5 (πέντε) θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 8 (οκτώ). Τα παιδιά μέσα από κλήρωση χωρίζονται σε 5 (πέντε) ομάδες των 2 (δύο) ατόμων. Κάθε ομάδα έχει μπροστά της από μία χάρτινη τούρτα και έχουν ως στόχο να την μοιράσουν ίσα μεταξύ τους.

Δράσεις Νηπιαγωγού: Πρώτη δράση του/της εκπαιδευτικού είναι να υπενθυμίσει στα νήπια την ρουτίνα της δραστηριότητας, στη συνέχεια παρουσιάζει τα υλικά δηλαδή ότι η κάθε τούρτα μπορεί να χωριστεί σε όσα κομμάτια πιστεύουν τα παιδιά έτσι ώστε να δημιουργηθούν ίσες ποσότητες καθώς και 3 τρεις κάρτες όπου στην μια θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 2 (δύο), στην άλλη το σύμβολο του αριθμού 4 (τέσσερα) και στην άλλη το σύμβολο του αριθμού 8 (οκτώ). Αφού έχει παρουσιάσει τα υλικά θα εξηγήσει τα βήματα της δραστηριότητας δηλαδή ότι κάθε ζευγάρι θα έχει από 1 (μια) τούρτα μπροστά του και θα επιλέγουν μέσα από συζήτηση μεταξύ τους τραβώντας μια από τις τρεις κάρτες αν θα την χωρίσουν σε δύο, τέσσερα ή οκτώ ίσα

κομμάτια. Έπειτα ο/η εκπαιδευτικός θα δείξει ένα παράδειγμα της δραστηριότητας έτσι ώστε να κατανοήσουν τα παιδιά την διαδικασία. Στη συνέχεια αφού έχει τελειώσει με τις οδηγίες θα δώσει το σύνθημα έναρξης της δραστηριότητας. Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας ο/η νηπιαγωγός θα βοηθάει τα παιδιά όπου χρειάζονται βοήθεια και παραπάνω εξηγήσεις δηλαδή ότι χωρίζουμε την τούρτα σε ίσα κομμάτια και για τα δύο παιδιά.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Σε πόσα κομμάτια πρέπει να την κόψουμε για να πάρουν ίσα και τα δύο παιδιά;

Δράσεις των παιδιών: Τα παιδιά έχουν χωριστεί μέσα από κλήρωση σε δυάδες. Σε κάθε ζευγάρι θα μοιράσουμε από μία τούρτα και τρεις κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών 2 (δύο), 4 (τέσσερα) και 8 (οκτώ). Κάθε ζευγάρι θα συζητάει και θα προσπαθεί να χωρίσει την τούρτα ίσα έτσι ώστε να έχουν και τα δύο παιδιά ίσα κομμάτια δηλαδή είτε 2 (δύο), είτε 4 (τέσσερα), είτε 8 (οκτώ). Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται μόλις τα παιδιά έχουν κάνει όλες τις πιθανές μοιρασιές που υπάρχουν. Στη Δραστηριότητα 3 τα παιδιά θα έχουν μια χάρτινη τούρτα που αποτελείται από 8 κομμάτια και κάθε φορά ανάλογα με το πόσα κομμάτια έχουν θα πρέπει να τα μοιραστούν μεταξύ τους ίσα π.χ. έχουν 4 κομμάτια άρα κάθε παιδί θα πάρει από 2.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις και οι 5 (πέντε) ομάδες έχουν μοιράσει την τούρτα με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς τουλάχιστον 2 (δύο) φορές.

Αξιολογητική δράση: Αφού τα παιδιά έχουν τελειώσει με την προηγούμενη δραστηριότητα τότε ο/η εκπαιδευτικός για να κατανοήσει εάν τα παιδιά έχουν εμπεδώσει την διαδικασία της δράσης μοιράζει σε κάθε ομάδα μία πίτσα και τρεις κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών 2 (δύο), 4 (τέσσερα) και 8 (οκτώ) με σκοπό να την μοιράσουν τα δύο νήπια ίσα μεταξύ τους. Ο/Η εκπαιδευτικός αφού έχει μοιράσει στα παιδιά τα υλικά τότε τους εξηγεί ότι θα πρέπει να μοιράσουν την πίτσα μεταξύ τους τα δύο παιδιά ίσα έτσι ώστε να έχουν είτε δύο, είτε τέσσερα, είτε οκτώ. Η

δραστηριότητα τελειώνει μόλις κάθε ζευγάρι έχει μοιράσει τουλάχιστον μία φορά την πίτσα με όλους τους πιθανούς τρόπους.

Αναστοχαστική Δράση

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Για τον λόγο αυτό ρωτάμε γιατί χωρίσαμε την τούρτα σε κομμάτια, πως μπορούμε να τα ενώσουμε, τι θα γίνει αν ενώσουμε

4^η Δραστηριότητα: Ταΐζουμε τα σκυλάκια

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητας επιχειρείται η κατανόηση του μισού μέσω της δίκαιης μοιρασιάς και της διαδικασίας της διαίρεσης διακριτών ποσοτήτων και συγκεκριμένα έναν αριθμό από κόκαλα.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να γνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών, την διατακτικότητα τους δηλαδή τη ιδιότητα του αριθμού να αναπαριστά την ιεραρχία των αριθμών καθώς και την απαρίθμηση.

Σκοπός: Σκοπός της παρούσας δραστηριότητας είναι τα νήπια να έρθουν σε επαφή και να εξοικειωθούν με την εικόνα του ολόκληρου και του μισού.

Στόχος: Στόχος της δραστηριότητας είναι να μπορέσει η πλειοψηφία των παιδιών να μοιράσει μια διακριτή ποσότητα σε δύο ίσα μέρη.

Υλικά:

(για 10 παιδιά)

- 14 (δεκατέσσερα) χάρτινα σκυλάκια από 2 θα μοιραστούν σε κάθε μια από τις 5 ομάδες των παιδιών .
- 8 (οκτώ)σες από 10 κάρτες με το σύμβολο του αριθμού 1 – 10, εκ των οποίων θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 5 σες και τα υπόλοιπα θα είναι εφεδρικά..
- 55 (πενήντα πέντε) κάρτες σε σχήμα ολόκληρου κόκαλου.
- 110 (εκατόν δέκα) κάρτες σε σχήμα μισού κόκαλου(Παράρτημα IV).

Περιγραφή Δραστηριότητας: Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να μοιράσουν στα σκυλάκια ίσα κόκαλα. Ο/Η εκπαιδευτικός θα έχει προετοιμάσει κάρτες σε σχήμα κόκαλου και δύο σκυλάκια από χαρτί για κάθε ομάδα. Τα παιδιά θα συνεργαστούν σε ομάδες οπότε θα δημιουργηθεί διάλογος ανάμεσα στα παιδιά καθώς θα πουν τις ιδέες τους, θα συμφωνήσουν ή θα διαφωνήσουν.

Περιγραφή έναρξης: Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ο/η εκπαιδευτικός θα έχει προετοιμάσει 10 (δέκα) κάρτες που θα αναγράφουν τα σύμβολα των αριθμών από το

1-10, επίσης 20 (είκοσι) κάρτες σε σχήμα κόκκαλου, 10 (δέκα) ολόκληρα και 10 (δέκα) μισά καθώς και 10 (δέκα) χάρτινα σκυλάκια 2 (δύο) για κάθε ομάδα. Τα παιδιά χωρίζονται σε 5 (πέντε) ομάδες των 2 (δύο) ατόμων μέσα από κλήρωση. Ο/Η νηπιαγωγός μοιράζει τα υλικά στα παιδιά και η δραστηριότητα ξεκινάει.

Δράσεις Νηπιαγωγού: Πρώτη δράση του/της εκπαιδευτικού είναι να υπενθυμίσει στα νήπια την ρουτίνα της δραστηριότητας, στη συνέχεια παρουσιάζει τα υλικά δηλαδή ότι θα υπάρχουν 10 (δέκα) κάρτες όπου θα αναγράφουν τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10, 2 (δύο) χάρτινα σκυλάκια και 20 (είκοσι) κόκκαλα εκ των οποίων οι 10 (δέκα) θα είναι ολόκληρα κόκκαλα και οι άλλες 10 (δέκα) θα είναι μισά κόκκαλα. Αφού έχει παρουσιάσει τα υλικά θα εξηγήσει τα βήματα της δραστηριότητας δηλαδή ότι υπάρχουν 10 (δέκα) κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10, κάθε ζευγάρι θα επιλέγει μια από αυτές τις κάρτες θα την αναγνωρίζει και έπειτα θα μοιράζει στα 2 (δύο) σκυλάκια την σωστή ποσότητα με κόκκαλα ώστε να έχουν και τα δύο ίση τροφή. Έπειτα ο/η εκπαιδευτικός θα δείξει ένα παράδειγμα της δραστηριότητας έτσι ώστε να κατανοήσουν τα παιδιά την διαδικασία. Στη συνέχεια αφού έχει τελειώσει με τις οδηγίες θα δώσει το σύνθημα έναρξης της δραστηριότητας. Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας ο/η νηπιαγωγός θα βοηθάει τα παιδιά όπου χρειάζονται βοήθεια και παραπάνω εξηγήσεις δηλαδή ότι τα σκυλάκια πρέπει να έχουν ίση ποσότητα τροφής και να αντιστοιχεί στο σύμβολο της κάρτας που έχουν επιλέξει.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Πόσα κόκκαλα θα πάρει/φάει κάθε σκυλάκι;

Αν μοιράσουμε 3 κόκκαλα σε 2 σκυλάκια πόσα κόκκαλα θα πάρει το καθ' ένα;

Δράσεις των παιδιών: Τα νήπια έχουν χωριστεί σε δυάδες. Σε κάθε ζευγάρι θα μοιραστούν τα υλικά δηλαδή οι 10 (δέκα) κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10, τα 2 (δύο) χάρτινα σκυλάκια καθώς και οι 20 (είκοσι) κάρτες σε σχήμα κόκκαλου (ολόκληρα και μισά). Κάθε παιδί θα έχει μπροστά του από ένα σκυλάκι. Θα επιλέγουν μια από τις κάρτες με τα σύμβολα και θα προσπαθούν να μοιράσουν την ποσότητα της κάρτας ίσα στα σκυλάκια. Μόλις έχουν μοιράσει την ποσότητα της

κάρτας επιλέγουν την επόμενη και προσπαθούν εκ νέου να μοιράσουν την καινούρια ποσότητα ίσα στα σκυλάκια. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών. Στην 4^η Δραστηριότητα τα παιδιά έχουν από δύο σκυλάκια και πρέπει να τους δώσουν ίση ποσότητα από κόκαλα π.χ. έχουν 3,5 κόκαλα και βάζουν 0,5 για να γίνουν 4.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις και οι 5 (πέντε) ομάδες έχουν μοιράσει και τις 10 (δέκα) ποσότητες των καρτών.

Αξιολογητική δράση: Αφού τα παιδιά έχουν τελειώσει με την συγκεκριμένη δραστηριότητα τότε ο/η νηπιαγωγός για να κατανοήσει εάν τα παιδιά έχουν εμπεδώσει την διαδικασία της δράσης μοιράζει σε κάθε ομάδα 10 (δέκα) κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και 20 (είκοσι) κάρτες σε σχήμα πίτσας, 10 (δέκα) κάρτες με ολόκληρες πίτσες και 10 (δέκα) μισές πίτσες. Ο/Η εκπαιδευτικός αφού έχει μοιράσει στα παιδιά τα υλικά τότε τους εξηγεί ότι θα επιλεγούν μια από τις κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών και έπειτα θα πρέπει να μοιράσουν σε δύο ίσα μέρη την συγκεκριμένη ποσότητα.

Αναστοχαστική Δράση

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Αρχικά γίνονται ερωτήσεις για το πώς μοιράσανε τα παιδιά τα κόκαλα στα σκυλιά που είχε κάθε ομάδα, πως μετρούσαν τα κόκαλα και εάν δυσκολευτήκαν όταν έπρεπε να μοιράσουν τις κάρτες με τα μισά κόκαλα.

5^η Δραστηριότητα: Η χαλασμένη μηχανή της πίτσας

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα τα παιδιά θα έχουν την ευκαιρία να δουν πως εάν προσθέσουν δύο μισά, θα σχηματίσουν μία μονάδα. Αποτελεί έτσι την αντίστροφη διαδικασία από αυτή που έγινε στην προηγούμενη δραστηριότητα, όπου η μονάδα διαιρούνταν σε δύο μισά.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα πρέπει να γνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών, την διατακτικότητα τους δηλαδή τη ιδιότητα του αριθμού να αναπαριστά την ιεραρχία των αριθμών. Επίσης έχουν έρθει σε επαφή με την καταμέτρηση δηλαδή τη διαδικασία της απαρίθμησης.

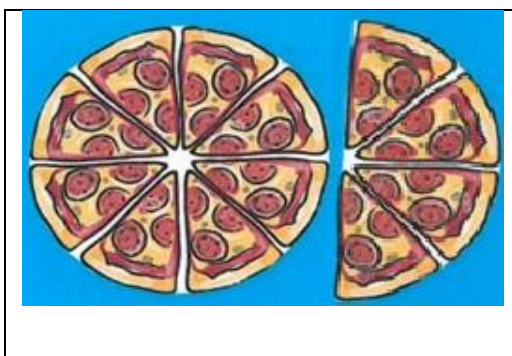
Σκοπός: Ο σκοπός αυτής της δράσης είναι τα νήπια να έρθουν σε επαφή και να εξοικειωθούν με την εικόνα του ολόκληρου και του μισού.

Στόχος: στόχος της είναι τα παιδιά να φτιάξουν ένα σύνολο από πίτσες με βάση τον αριθμό που βρίσκεται στην κάρτα που έχουν τραβήξει. Προσθέτουν κάρτες που έχουν μισή πίτσα με κάρτες που έχουν ακέραιες πίτσες και μια μισή.

Υλικά: (για 10 παιδιά)

□ 8 (οκτώ)σες με 10κάρτες που μπροστά θα αναγράφεται το σύμβολο του αριθμού 1-10 και από πίσω θα απεικονίζεται η ποσότητα του συμβόλου με 1-10 ολόκληρες πίτσες. Από αυτά θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 5 και τα άλλα 3 είναι εφεδρικά.

□ 12 (δώδεκα)σες από 11 (έντεκα) κάρτες. Από αυτές δύο θα έχουν που θα έχουν από 0,5 πίτσα και οι υπόλοιπες από το 1,5 έως 9,5 πίτσες. Από τα σες θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 10 και τα υπόλοιπα 2 μόνο σε περίπτωση που προκύψει κάποια ανάγκη, όπως η καταστροφή κάποιας κάρτας των παιδιών (Εικόνα. 4) (Παράρτημα V).



Εικόνα 4. Χάρτινες κάρτες με ποσότητες, οι οποίες πρέπει να συνδυαστούν και να γίνουν ζευγάρι, ώστε να δημιουργηθεί η ολόκληρη ποσότητα.

Περιγραφή δραστηριότητας: Στην παρούσα δραστηριότητα ο/η εκπαιδευτικός θα έχει προετοιμάσει κάρτες στις οποίες πάνω θα απεικονίζονται σύνολο από ολόκληρες πίτσες και μια μισή. Μέσα από την συνεργασία σε ομάδες δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να συζητούν καθώς μπορεί είτε να συμφωνούν είτε να διαφωνούν, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να επιχειρηματολογήσουν πάνω στην άποψή τους.

Περιγραφή έναρξης: Με κλήρωση τα 10 (δέκα) παιδιά θα χωριστούν σε 5 (πέντε) δυάδες και θα τους δοθούν 21 (είκοσι μια) κάρτες. Οι 10 (δέκα) θα έχουν πάνω τα σύμβολα των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 και στις άλλες 11 (έντεκα) θα έχουν πάνω τους σύνολο από ολόκληρες και μια μισή πίτσα, στόχος να τις προσθέσουν και να φτιάξουν ακέραιο αριθμό από πίτσες.

Δράσεις νηπιαγωγού: Αρχικά ο/η εκπαιδευτικός υπενθυμίζει στα παιδιά την ρουτίνα της δραστηριότητας. Έπειτα παρουσιάζει τα υλικά στα παιδιά δηλαδή τις 21 (είκοσι μια) κάρτες. Αφού ο/η νηπιαγωγός έχει παρουσιάσει στα παιδιά τα υλικά τότε δίνει οδηγίες για την δραστηριότητα δηλαδή ότι υπάρχουν 10 (δέκα) κάρτες όπου αναγράφεται σε κάθε μία ένας από τους αριθμούς 1, ..., 10 και από πίσω τους η ποσότητα τους με ολόκληρες πίτσες. Στις άλλες 11 (έντεκα) κάρτες θα απεικονίζεται, σε δύο κάρτες η μισή πίτσα και στις υπόλοιπες 9, σύνολο από ολόκληρες και μια μισή πίτσα. Κάθε ζευγάρι θα επιλέγει τις κάρτες με τη σειρά 1, ..., 10 και έπειτα μέσα από τις άλλες 11 (έντεκα) κάρτες πρέπει να συνδυάσει δύο κάρτες με πίτσες για να φτιάξει την ολόκληρη ποσότητα του συμβόλου του αριθμού. Στη συνέχεια ο/η εκπαιδευτικός θα δείξει ένα παράδειγμα στα παιδιά για να κατανοήσουν την διαδικασία της δραστηριότητας. Έπειτα αφού τελειώσει ο/η νηπιαγωγός με τις οδηγίες τότε δίνει το σύνθημα έναρξης της δραστηριότητας. Κατά την διάρκεια που τα παιδιά πραγματοποιούν την δραστηριότητα ο/η νηπιαγωγός θα βοηθάει όπου τα

νήπια χρειάζονται βοήθεια η περεταίρω εξηγήσεις δηλαδή ότι πρέπει να αναγνωρίσουν τα σύμβολα των αριθμών και να φτιάξουν την ολόκληρη ποσότητα των αριθμών συνδυάζοντας τις μισές πίτσες.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Πόσες μισές πίτσες θα σχηματίσουν 1 (μία) ολόκληρη πίτσα;

Πόσες μισές πίτσες θα σχηματίσουν 2,...,10 (δύο) ολόκληρες πίτσες;

Δράσεις των παιδιών: Τα παιδιά κάθονται σε δυάδες. Κάθε ζευγάρι έχει μπροστά του 21 (είκοσι μία) κάρτες εκ των οποίων στις 10 (δέκα) αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και από πίσω η ολόκληρη ποσότητα τους με πίτσες και στις υπόλοιπες 11 (έντεκα) απεικονίζεται σύνολο από ολόκληρες και μια μισή πίτσα. Κάθε ζευγάρι παίρνει μια από τις κάρτες με τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10, το αναγνωρίζει και στη συνέχεια με τις υπόλοιπες 11 (έντεκα) κάρτες που απεικονίζουν τις ποσότητες των συμβόλων των αριθμών προσπαθούν να φτιάξουν την ολόκληρη ποσότητα κάθε κάρτας. Στην 5^η Δραστηριότητα τα παιδιά διαλέγουν μια από τις κάρτες με τους αριθμούς και στη συνέχεια φτιάχνουν την ποσότητα του με τις πίτσες π.χ. το 4 αποτελείται από $3,5 + 0,5$ πίτσες.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις όλες οι ομάδες έχουν φτιάξει όλες τις ολόκληρες ποσότητες με τις κάρτες.

Αξιολογητική δράση: Αφού τα παιδιά έχουν κατανοήσει την δραστηριότητα και την έχουν κάνει κτήμα τους τότε ο/η νηπιαγωγός για να καταλάβει σε τι βαθμό έχουν εμπεδώσει τα νήπια τις μισές ποσότητες τους βάζει μια νέα δραστηριότητα. Με νέες κάρτες τα παιδιά θα παίξουν ένα παιχνίδι μνήμης. Θα έχουν μπροστά τους ανοιχτές 10 (δέκα) κάρτες όπου θα αναγράφονται πάνω τα σύμβολα των αριθμών από το 1-10 και από πίσω θα απεικονίζεται η ποσότητα του κάθε συμβόλου του αριθμού με πίτσες επίσης θα έχουν 11 (έντεκα) κάρτες που θα απεικονίζουν την λειψή ποσότητα του συμβόλου κάθε αριθμού. Τα παιδιά θα έχουν ανάποδα μπροστά τους τις κάρτες με τις

ποσότητες. Κάθε παιδί εναλλάξ γυρνάει δύο κάρτες με σκοπό να φτιάξει την ολόκληρη ποσότητα της κάρτας που έχει. Αν δεν είναι οι σωστές κάρτες τότε τις ξανά γυρίζει ανάποδα και παίζει το άλλο παιδί. Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται μόλις ταιριάξουν όλες οι κάρτες με τις ποσότητες τους.

Αναστοχαστική Δράση

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Ο εκπαιδευτικός ρωτάει τα παιδιά ποιος αριθμός μισών κομματιών πίτσας μας δίνει ολοκληρωμένες πίτσες, πως κάνουμε την απαρίθμηση των μισών κομματιών, και πως κάνουν την αναγνώριση του $\frac{1}{2}$ ώστε να σχηματιστεί μια ολόκληρη πίτσα.

Συζητιούνται οι διαφορετικοί τρόποι να συνδυαστούν οι κάρτες για να φτιάξουν ολόκληρες ποσότητες από μισές.

6^η Δραστηριότητα: Μπουγάδα με αριθμούς και πίτσες

Στη δραστηριότητα αυτή επιχειρείται η τοποθέτηση των μισών στην σειρά και την απαρίθμησή τους μαζί με τους φυσικούς αριθμούς, από το ένα έως το δέκα. Με τον τρόπο αυτό τα παιδιά θα έχουν την ευκαιρία να διακρίνουν τα μισά των ακεραίων αριθμών ως αριθμούς με το ίδιο στάτους με τους ακεραίους αριθμούς, από τη στιγμή που έχουν θέση στην αριθμογραμμή. Επίσης, θα δουν ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί, όπως τα μισά των ακεραίων.

Προϋπάρχουσες γνώσεις παιδιών: Στην παρούσα δραστηριότητα τα παιδιά θα γνωρίζουν από πριν τα σύμβολα των αριθμών, την διατακτικότητα τους δηλαδή τη ιδιότητα του αριθμού να αναπαριστά την ιεραρχία των αριθμών. Επίσης έχουν έρθει σε επαφή με την καταμέτρηση δηλαδή τη διαδικασία της απαρίθμησης.

Σκοπός: Σκοπός της είναι να κατανοήσουν ότι ανάμεσα σε δυο αριθμούς (ακέραιους) υπάρχει τουλάχιστον ακόμα ένας.

Στόχος: Στόχος της είναι να μπορούν σχεδόν όλοι οι μαθητές να τοποθετήσουν ανάμεσα σε δύο ακεραίους έναν δεκαδικό.

Υλικά:

- 7 (εφτά) σχοινάκια μπουγάδας, από τα οποία θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 5 και τα άλλα 2 είναι εφεδρικά
- 7 (εφτά) σετ από 10 μπλουζάκια με το σύμβολο του αριθμού 1-10 από την μια πλευρά και από πίσω να απεικονίζεται η ποσότητα του συμβόλου αριθμού με 1-10 ολόκληρες πίτσες. Θα χρησιμοποιηθούν μόνο τα 5 και τα άλλα 2 είναι εφεδρικά (Εικόνα.5) (Παράρτημα VI).



Εικόνα 5. Χάρτινα μπλουζάκια της 6^{ης} δραστηριότητας, με το νούμερο στην μπροστινή όψη και την ποσότητα στην πίσω.

Περιγραφή δραστηριότητας: Η παρούσα δραστηριότητα γίνεται σε συνδυασμό με την 1^η δραστηριότητα. Μέσα από την παρούσα δραστηριότητα ο/η εκπαιδευτικός θα παρατηρήσει αν τα νήπια έχουν κατανοήσει την νέα έννοια και αν ναι σε τι επίπεδο. Τα νήπια θα συνεργαστούν σε ομάδες . Αυτό θα δώσει την ευκαιρία στα παιδιά να συζητήσουν τόσο μεταξύ τους όσο και με τον/την νηπιαγωγό και να πουν ιδέες και απόψεις. Στη δραστηριότητα αυτή τα παιδιά θα παίζουν την μπουγάδα με τους αριθμούς και τις πίτσες.

Περιγραφή έναρξης: Αρχικά τα νήπια θα χωριστούν σε 5 (πέντε) ομάδες των 2 (δύο) ατόμων. Αυτό θα γίνει μέσα από κλήρωση. Κάθε ομάδα θα έχει μπροστά της από 1 (ένα) σχοινί-μπουγάδα και 19 (δεκαεννέα) κάρτες-μπλουζάκια που από την μία θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών 1, 2, ..., 10 και από την άλλη πλευρά θα απεικονίζεται η ποσότητα κάθε συμβόλου-αριθμού.

Δράσεις νηπιαγωγού: Αρχικά ο/η εκπαιδευτικός θα υπενθυμίσει την ρουτίνα της δραστηριότητας, έπειτα θα παρουσιάσει τα υλικά στα νήπια δηλαδή ότι κάθε ομάδα θα έχει μπροστά της από 1 (ένα) σχοινί-μπουγάδα και 19 (δεκαεννέα) κάρτες-μπλουζάκια που από την μία θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών 1,2, ..., 10 και από την άλλη πλευρά θα απεικονίζεται οι ποσότητα κάθε συμβόλου-αριθμού. Αφού έχει παρουσιάσει ο/η εκπαιδευτικός τα υλικά τότε εξηγεί στα παιδιά τα βήματα

της δραστηριότητας δηλαδή ότι κάθε παιδί θα επιλέγει μια κάρτα-μπλουζάκι θα αναγνωρίζει το σύμβολο του αριθμού και έπειτα θα την τοποθετούν στο σχοινί της μπουγάδας στη σωστή θέση δηλαδή από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό. Στη συνέχεια ο/η νηπιαγωγός θα δείξει ένα παράδειγμα της δραστηριότητας για να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν την διαδικασία της δραστηριότητας. Έπειτα αφού τελειώσει με τις οδηγίες θα δώσει το σύνθημα έναρξης της δραστηριότητας. Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας ο/η εκπαιδευτικός θα βοηθάει τα παιδιά όπου δυσκολεύονται ή χρειάζονται περαιτέρω εξηγήσεις δηλαδή την σωστή σειρά των αριθμών ή αλλιώς την διατακτικότητα τους.

Ενδεικτικές ερωτήσεις νηπιαγωγού:

Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Ποιος αριθμός είναι μετά το 4;

Ποιος αριθμός είναι πριν το 4;

Ποιος αριθμός είναι ανάμεσα στο 4 και το 6;

Ποιος αριθμός είναι ανάμεσα στο 4 και το 5;

Ποιος αριθμός είναι πρώτος;

Ποιος αριθμός είναι δεύτερος, τρίτος, ...;

Ποιος αριθμός είναι τελευταίος;

Δράσεις παιδιών: Τα παιδιά έχουν χωριστεί σε ζευγάρια. Κάθονται σε δυάδες και έχουν μπροστά τους τα υλικά για την δραστηριότητα δηλαδή από 1 (ένα) σχοινί-μπουγάδα και 19 (δεκαεννέα) κάρτες-μπλουζάκια που από την μία θα αναγράφονται τα σύμβολα των αριθμών 1, 2, ... , 10 και από την άλλη πλευρά θα απεικονίζεται οι ποσότητα κάθε συμβόλου-αριθμού. Κάθε παιδί παίρνει από μία κάρτα-μπλουζάκι θα αναγνωρίσει το σύμβολο του αριθμού και στη συνέχεια θα το τοποθετήσει στην μπουγάδα στην σωστή θέση. Αφού τοποθετήσει το ένα παιδί την κάρτα στην μπουγάδα τότε το άλλο παιδί επιλέγει μια άλλη κρατά-μπλουζάκι και επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία. Στην 6^η Δραστηριότητα τα παιδιά τοποθετούν τα μπλουζάκια με

τις ποσότητες των αριθμών στη σωστή σειρά π.χ. 4,5 πίτσες τοποθετείται ανάμεσα στο 4 και το 5.

Περιγραφή λήξης: Η δραστηριότητα τελειώνει μόλις όλες οι ομάδες τοποθετήσουν όλες τις κάρτες-μπλουζάκια στην μπουγάδα με την σωστή σειρά.

Αναστοχαστική Δράση

Στο τέλος της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τα παιδιά στην ολομέλεια για να συζητήσουν την όλη διαδικασία της δραστηριότητας. Γίνονται ερωτήσεις, για το πώς βάζουμε τους αριθμούς στο σχοινάκι, αν αλλάζει κάτι με την παρουσία του $\frac{1}{2}$ και πως κάνουμε πλέον την απαρίθμηση

Τελική αναστοχαστική δράση

Με το τέλος των δραστηριοτήτων μαζεύεται ο/η εκπαιδευτικός με τα παιδιά την παρεούλα και συζητάνε γύρω από το τι έκαναν όλες αυτές τις μέρες, αν μάθανε κάτι που δεν γνώριζαν μέσα από αυτές της δραστηριότητες, εάν τους άρεσαν οι δραστηριότητες και αν θα θέλανε να τις ξανακάνουν κάποια άλλη φορά, πόσο καλά τα πήγαν, αν τους δυσκόλεψε κάτι καθώς και τι τους εντυπωσίασε μέσα από αυτές τις δράσεις. Αν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο 7& 8 στο 4&5 κτλ ποιος αριθμός είναι ανάμεσα ...

Ουσιαστικά πρόκειται για μια δράση που έχει ως στόχο να ενισχύσει μέσα από τον αναστοχασμό και την αυτορρύθμιση των παιδιών. Μέσα από την συζήτηση και τις συγκεκριμένες ερωτήσεις που θα γίνουν στους μαθητές, ο εκπαιδευτικός θα μπορεί να αναγνωρίσει εάν οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν για την έννοια του μισού ήταν κατανοητές από τους μαθητές, εάν τα αντικείμενα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γνωστά και σχετίζονταν με κάποιες προσωπικές τους εμπειρίες.

Κλείνοντας ο/η εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να ζωγραφίσουν κάτι από όλες αυτές τις μέρες που έκαναν τις δράσεις. Στόχος αυτής της ζωγραφιάς είναι να αναστοχαστούν τα παιδιά τις δραστηριότητες που έκαναν και να καταλήξουν στο τι τους έμεινε μέσα από αυτό. Επίσης η ζωγραφιά θα δώσει στον/στην εκπαιδευτικό μια εικόνα από το πώς αντιλήφθηκαν τα νήπια όλες τις δράσεις. Δεν δίνεται βαρύτητα στο πώς ζωγραφίζουν τα νήπια, αλλά στην θεματολογία. Εξετάζεται εάν θα χρησιμοποιήσουν τα αντικείμενα των δραστηριοτήτων και εάν θα προσθέσουν κάποια νέα δικά τους, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε νέες δράσεις. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός θα προσπαθήσει να εντοπίσει εάν οι μαθητές στις ζωγραφιές τους θα τοποθετήσουν ή θα προσπαθήσουν να χρησιμοποιήσουν την έννοια του μισού και εάν αυτή γίνεται στη σωστή διάσταση.

Συζήτηση

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια να σχεδιαστεί και να εφαρμοστεί μια τροχιά μάθησης για την διδασκαλία της έννοιας του μισού στην θεματική ενότητα των μαθηματικών.

Ο σχεδιασμός ξεκίνησε με την παραδοχή πως τα νήπια έχουν την δυνατότητα και την γνώση να απαριθμούν μέχρι περίπου το 20. Επίσης, χρησιμοποιούν την μέθοδο της δίκαιης μοιρασιάς αρκετά συχνά στην εκτός σχολείου ζωή τους και ειδικά στο οικογενειακό τους περιβάλλον. Θα μπορούσε να υπάρξει μια διαδικασία που να βοηθήσει ή / και να στηρίξει την εκμάθηση του μισού, εφόσον εφαρμοστούν βιωματικοί τρόποι διδασκαλίας.

Ωστόσο για να φτάσει το σύνολο των μαθητών να διδαχτεί την έννοια του μισού, πρέπει να ακολουθήθει μια τροχιά μάθησης που θα χτίζει την επόμενη έννοια σε μια προηγούμενη περισσότερο βασική. Στην περίπτωση μας στηρίζουμε την εκμάθηση του μισού, στην έννοια της διαίρεσης της μονάδας, μέσω της δίκαιης μοιρασιάς, αλλά και την δημιουργία της μονάδας μέσα από την πρόσθεση μισών αυτής. Επίσης, χρησιμοποιείται το μοντέλο της αριθμογραμμής, με τη μορφή της μπουγάδας των αριθμών, για να αντιληφθούν τα παιδιά ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί, όπως τα μισά. Επιπλέον, να δεχθούν ότι αυτό που θα αποκληθεί στο δημοτικό σχολείο ως ρητοί αριθμοί, είναι αριθμοί με το ίδιο στάτους με τους φυσικούς αριθμούς, από τη στιγμή που μπορούν να μουν στην ίδια αριθμογραμμή. (Vamvakoussi 2010, Christou 2015, Christou et al., 2020, Christou & Vamvakousi, 2021, Vamvakousi et al., 2018,).

Δυστυχώς, η εν λόγω τροχιά μάθησης που προτείνεται και αποτελείται από έξι βήματα, δεν γνωρίζουμε εάν μπορεί να έχει ικανοποιητική εφαρμογή ή απαιτείται να γίνουν τροποποιήσεις τόσο στον αριθμό των δραστηριοτήτων όσο και στην θεματολογία τους. Ο λόγος είναι ότι λόγω της υγειονομικής κρίσης Covid -19, δεν ήταν εφικτή η εφαρμογή σε κάποιο νηπιαγωγείο.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

- Αυγητίδου, Σ. (επιμ.) (2008). *Συνεργατική Μάθηση στην Προσχολική Εκπαίδευση: Έρευνα και Εφαρμογές*. Αθήνα: Gutenberg
- Βοσνιάδου Σ., (1998). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*. Εκδόσεις Gutenberg , Αθήνα
- Γιαννακοπούλου, Ε. (2008). Η μικροδιδασκαλία στην εκπαίδευση εκπαιδευτών ενηλίκων: Από την ανατροφοδότηση στον αναστοχασμό. *Εκπαίδευση Ενηλίκων*, 14, 11-16.
- Christou, K. (2015). Τρόποι επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε πράξεις, μέγεθος και διάταξη των ρητών αριθμών. Conference: Πρακτικά του 6^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ελλήνων Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ). Volume: 688-697..
- Cole and Cole, (2001). *Ανάπτυξη των παιδιών*. Τόμοι α, β, Εκδόσεις Τυπωθήτω, Αθήνα.
- Ζαρίφης, Γ. (2009). *Ο κριτικός στοχασμός στη μάθηση και εκπαίδευση ενηλίκων. Θεωρητικές προσεγγίσεις και πρακτικές προεκτάσεις*. Αθήνα: Παπαζήσης.
- Λεμονίδης, Χ.(1999). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής*. Εκδόσεις Αφοι Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.
- Λεμονίδης , Χ. (2000). *Στοιχεία Αριθμητικής και ΙΘεωρίας Αριθμών για το Δάσκαλο*. 1^η έκδοση Εκδόσεις Πατάκης. Αθήνα.
- Λεμονίδης , Χ. (2003) Μια διαφορετική διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων στην αρχή του σχολείου. Γέφυρες. Τεύχος 9, σελ 22-29.

- Λεμονίδης. X., (2013) *Μαθηματικά της φύσης & της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί*. Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.
- Λεμονίδης, X., (2015) παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας. Προσκεκλημένη ομιλία στο 13^ο Διήμερο για τη Διδασκαλία των μαθηματικών. Χώρος και Γεωμετρία στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση. 8-9 Μαΐου. Θεσ/νίκη.
- Λεμονίδης. X., (2018) *Στοιχεία Αριθμητικής και θεωρίας αριθμών για το δάσκαλο*. 10^η έκδοση. Εκδόσεις Πατάκης. Αθήνα.
- Nunes, T., Bryant, P. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά*, Μετάφραση: Λειβαδοπούλου, Σ. & Σαρηγιαννίδου, Γ. Εκδόσεις Gutenberg Αθήνα.
- Τζεκάκη, Μ. (1998). *Μαθηματικές Δραστηριότητες για την Προσχολική Ηλικία*. Εκδόσεις Gutenberg. Αθήνα.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Εκδόσεις Gutenberg. Αθήνα.
- Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Gutenberg.
- Φιλίππου, Γ. & Χρήστου, Κ. (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Τυπωθήτω - Γ. Δαρδανός. Αθήνα.
- Φωκάς, Δ., (2019). «Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών: Μια μελέτη περίπτωσης» (Μεταπτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα.
- Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*. Εκδόσεις Μεταίχμιο. Αθήνα.
- VandeWalleJ., LovinL., Karp, K., Bay – WilliamsJ. (2017) *Μαθηματικά από το νηπιαγωγείο ως το γυμνάσιο. Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Εκδόσεις Gutenberg. Αθήνα.

Ξενόγλωσση

- Appl, D. J., & Yorde, S. L. (2005). Stories about teaching: Using qualitative data to promote reflective practices. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 25(4), 309- 320.
- Arthur, James, Grainger, Teresa & Wray, David (2006). *Learning to Teach in the Primary School*. Oxon: Routledge.
- Avgitidou, S. (2019). Facilitating teachers as action researchers and reflective practitioners: new issues and proposals. *Educational Action Research*, 28(2), 175-191. <https://doi.org/10.1080/09650792.2019.1654900>
- Brizuela. M. B., (2005) Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics*. 62: 281–305.
- Cheung, P., Rubenson, M., & Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive Psychology*, 92, 22-36.
- Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education*, 47(5), 747-758. doi:10.1007/s11858-015-0675.
- Christou, K. P., Pollack, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2020). Natural Number Bias in Arithmetic Operations With Missing Numbers—A Reaction Time Study. *Journal of Numerical Cognition*, 6(1), 22-49. doi: <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i1.228>
- Christou, K. P. & Vamvakoussi, X. (2021). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: the role of the type of numbers. *Mathematics Education Research Journal*, doi: <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00398-3>
- Clements, D.H. & Sarama, J. (2009) *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

- Fisher, Robert (2005). *Teaching Children to Learn*. Cheltenham: NelsonThornes Limited.
- Garcia, A., Jimnez, J.E., & Hess, S. (2006) Solving arithmetic problems: An analysis of difficulty in children arithmetic LD. *Journal of learning Disabilities*, 39(3), pp270-281.
- Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction* (pp, 1-38). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lansdown, G. (2001). *Promoting Children's Participation in Democratic DecisionMaking*. Florence: UNICEF.
- Lee, H. (2005). Understanding and assessing preservice teachers' reflective thinking. *Teaching and TeacherEducation*, 21, 699-715.
- Loughran, J. (1996). *Developing reflective practitioners: Learning about teaching and learning through modeling*. London: Falmer.
- Marbina L. Church A. & Collette T. (2010). *Victorian Early Years Learning and Development Framework Evidence Paper Practice Principle 8: Reflective Practice* Department of Education and Early Childhood Development 2010
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1991). Students' Understanding of the Relationship between Fractions and Decimals. *Focus on LearningProblems in Mathematics*, 13(1), 3-11.
- Rogers, J. (2000). Communities of practice: a framework for fostering coherence in virtual learning communities. *Educational Technology and Society*, 3(3), 384– 392
- Steffe, L., & Cobb, P., (1998) *Construction of arithmetical meanings and strategies*. *Recent Research in Psychology*.

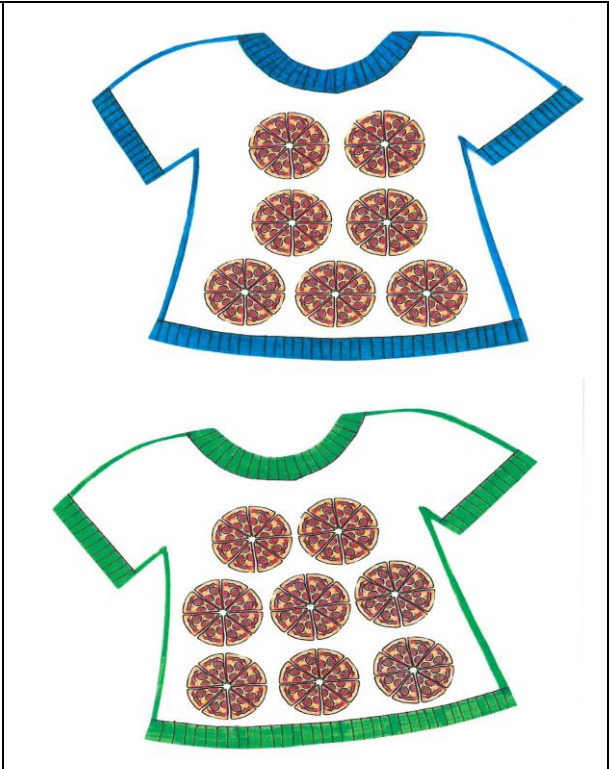
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181 - 209. doi:10.1080/07370001003676603
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the “rubber line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 265-284
- Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics. *ZDM Mathematics Education*
- Vamvakoussi, X., Christou, K.P., Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 2018, Vol. 4(1), 84–106, doi:10.5964/jnc.v4i1.82
- Zacharos, K., Antonopoulos, K., & Ravanis, K. (2011). Activities in mathematics education and teaching interactions. The construction of the measurement of capacity in preschoolers. *European Early Childhood Education Research Journal*, 19:4, p. 451-468

Παράρτημα καρτελών για τις δραστηριότητες

Παράρτημα I: Υλικό δραστηριότητας 1

Η Μπουγάδα Των Ακεραίων

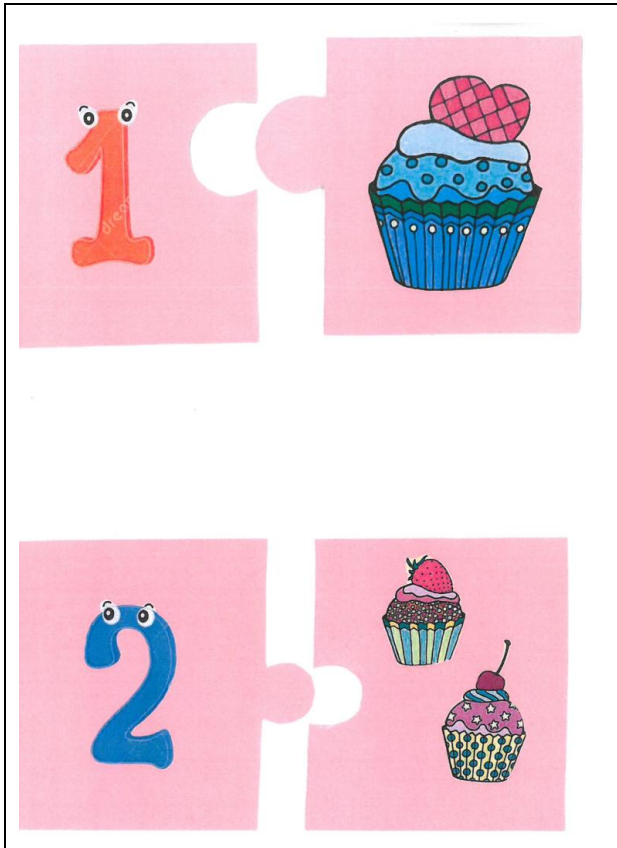




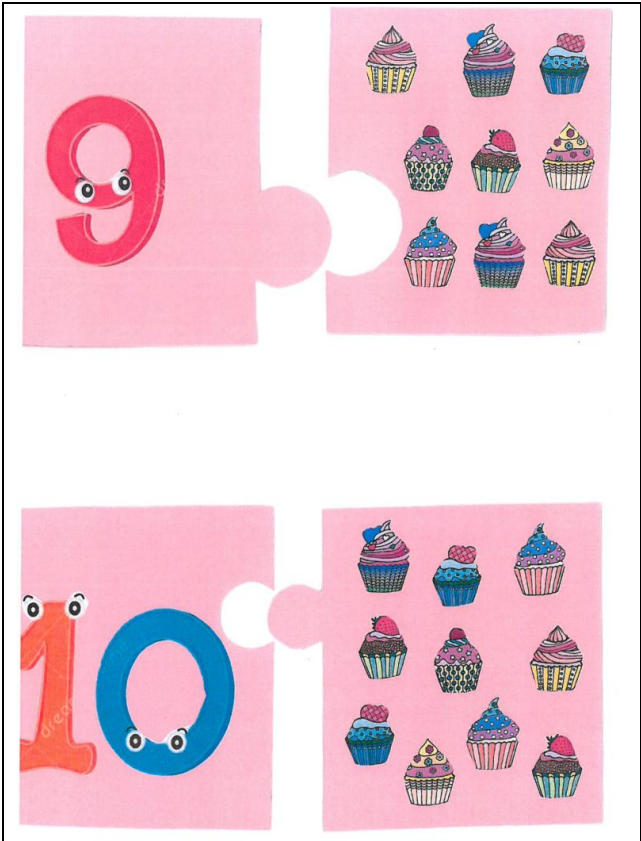


Παράρτημα II: Υλικό δραστηριότητας 2

Το Πάζλ Των Ακεραίων



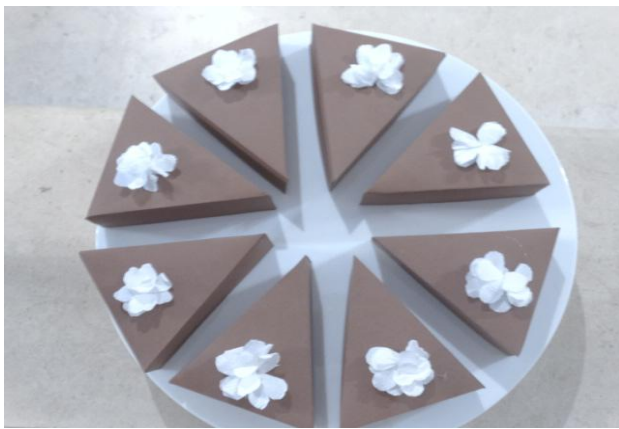




Παράρτημα III: Υλικό δραστηριότητας 3

Το μοίρασμα Της Τούρτας

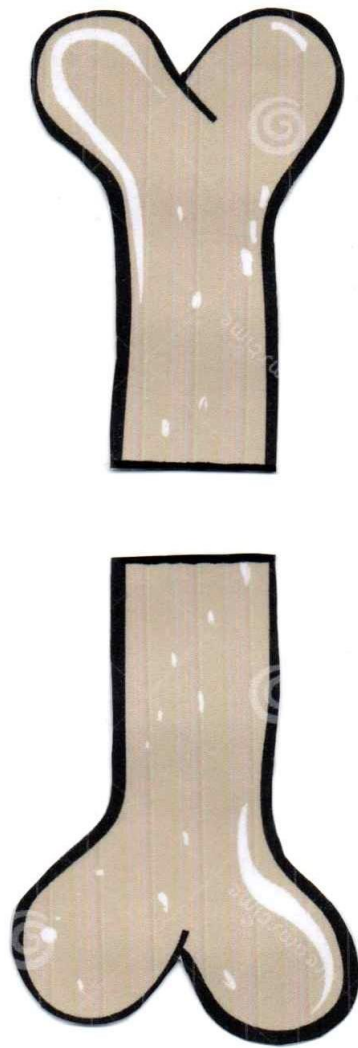




Παράρτημα IV: Υλικό δραστηριότητας 4

Ταΐζουμε Τα Σκυλάκια

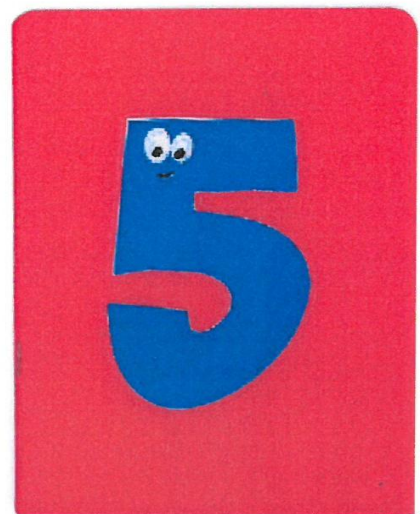
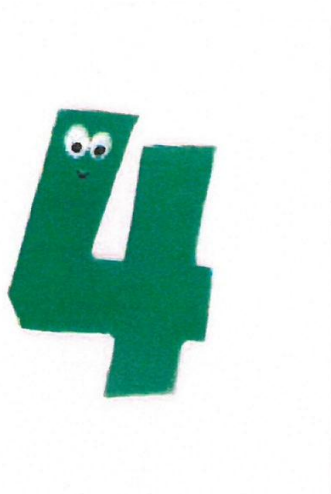
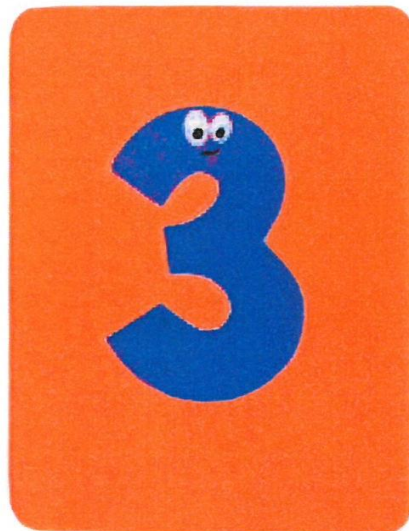
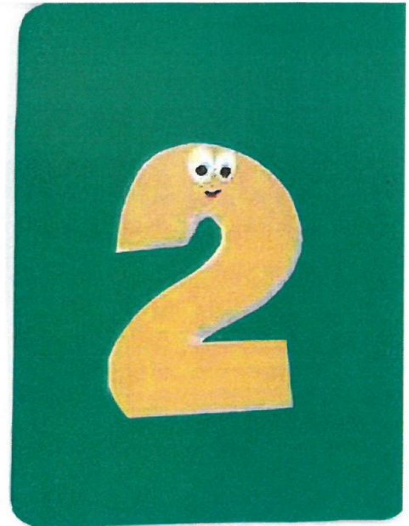
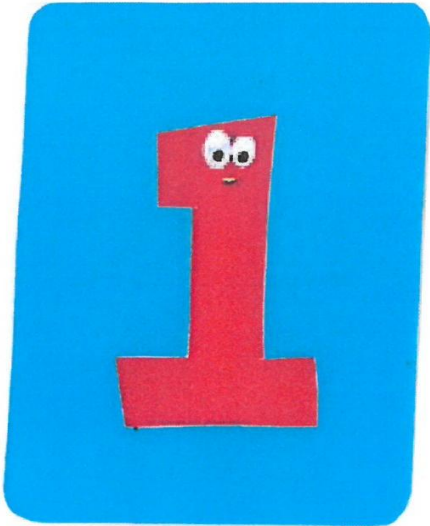


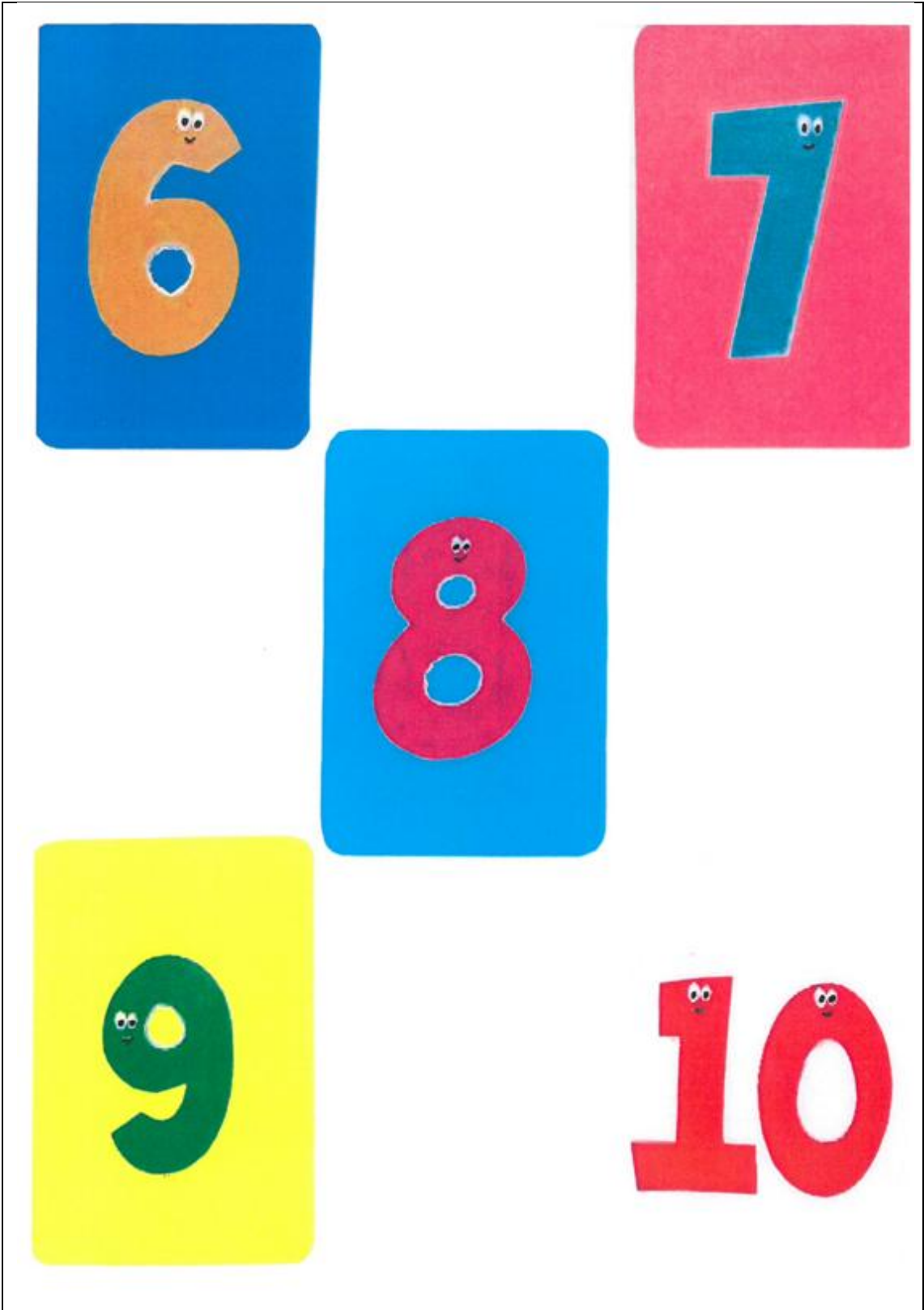


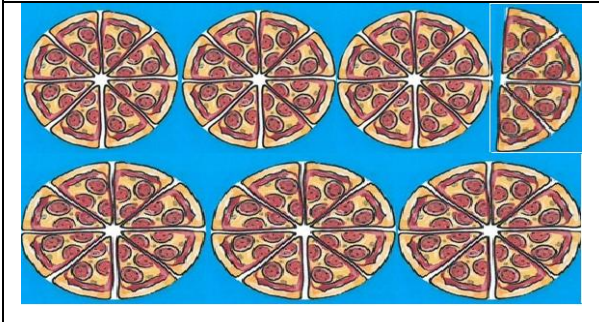
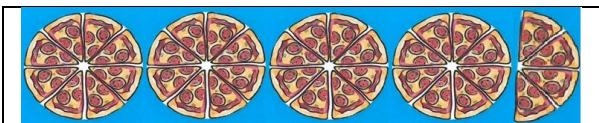
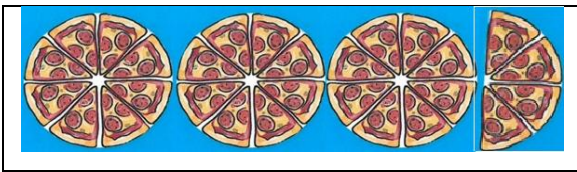
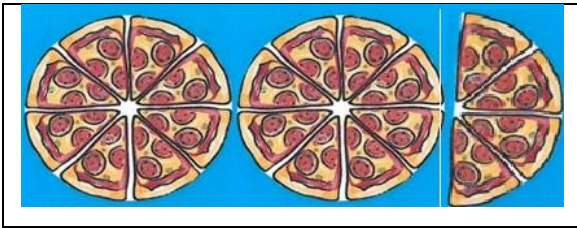
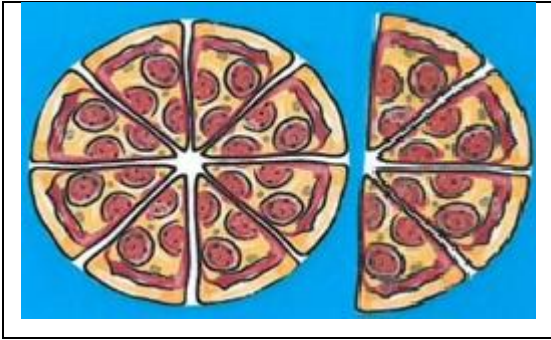
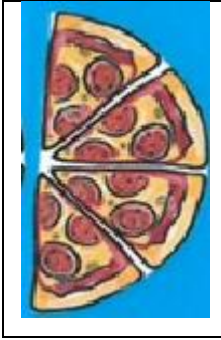
Παράρτημα IV: Υλικό δραστηριότητας 5

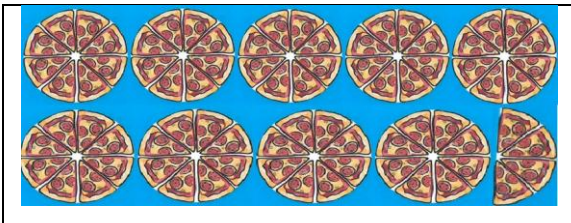
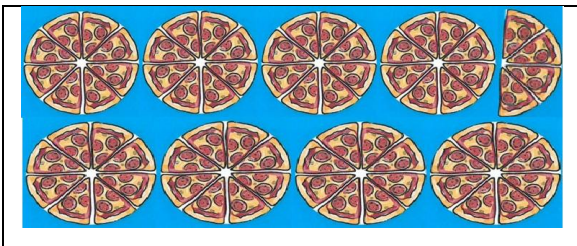
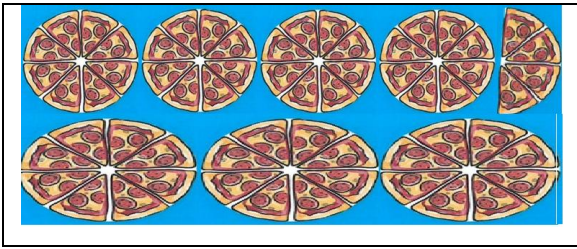
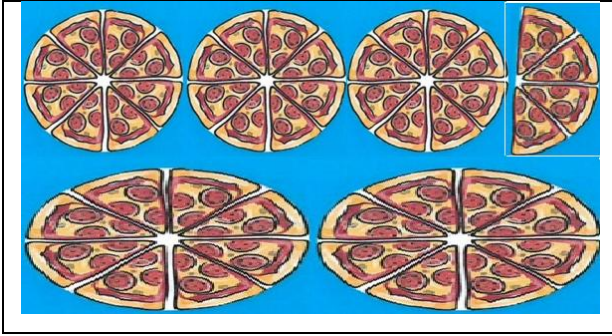
Η χαλασμένη μηχανή της πίτσας

Κάρτες με νούμερα από πίτσες που πρέπει να φτιάξει το παιδί









Παράρτημα VI: Υλικό δραστηριότητας 6

Μπουγάδα με Αριθμούς και Πίτσες









