



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Διπλωματική Εργασία
του
Μηνά Κωνσταντίνου

**Υπολογιστική επίλυση των τηλεγραφικών
εξισώσεων με προσεγγίσεις ανώτερης
τάξης για τη μελέτη προβλημάτων γραμμών
μεταφοράς**

Επιβλέπων Καθηγητής: Θεόδωρος Ζυγκιρίδης

Κοζάνη, Ιούλιος 2014

© Μηνάς Κωνσταντίνος
© Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΗΛΕΓΡΑΦΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Θ. Ζυγκιρίδης

Επίκουρος Καθηγητής

Π. Σαρηγιαννίδης

Λέκτορας

Πρόλογος

Δυο μειονεκτήματα της χρήσης της κλασικής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (finite difference time domain - FDTD) για την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων σε ανομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς είναι το επίπεδο ακρίβειας των αποτελεσμάτων και το αυξημένο υπολογιστικό κόστος που χρειάζεται για την επίλυσή τους, λόγω του ότι οι διάφορες περιοχές της γραμμής μεταφοράς απαιτούν ενδεχομένως διαφορετικά επίπεδα διακριτοποίησης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την επίλυση αυτών των δύο προβλημάτων. Για την βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων αναπτύσσονται προσεγγίσεις ανώτερης τάξης και για την μείωση του υπολογιστικού κόστους παρουσιάζεται μια μέθοδος μη ομοιόμορφου πλέγματος, η οποία χρησιμοποιεί έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων ο οποίος παράγει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο, όπου οι καθιερωμένες εξισώσεις ανανέωσης μπορούν να εφαρμοστούν. Τέλος, η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόζεται σε ένα ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικές ασυνέχειες και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.

Κοζάνη, Ιούλιος 2014

Μηνάς Κωνσταντίνος

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Γραμμές μεταφοράς	1
1.2	Μέθοδοι επίλυσης των τηλεγραφικών εξισώσεων	3
1.3	Διάρθρωση της εργασίας	6
2	Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου	8
2.1	Γενικά.....	8
2.2	Πεπερασμένες διαφορές	8
2.3	Ο αλγόριθμος του Yee	10
2.4	Οι εξισώσεις του Maxwell.....	11
2.5	Συνθήκη ευστάθειας και διασπορά	14
2.6	Συνοριακές συνθήκες απορρόφησης	15
2.7	4 ^{ης} τάξης προσεγγίσεις.....	17
2.7.1	Υπολογισμός 4 ^{ης} τάξης προσεγγίσεων.....	17
2.7.2	Ευστάθεια και διασπορά σε 4 ^{ης} τάξης προσεγγίσεις.....	19
3	Επίλυση τηλεγραφικών εξισώσεων	21
3.1	Γραμμές μεταφοράς και τηλεγραφικές εξισώσεις	21
3.2	Το πρόβλημα της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς	22
3.3	Ομοιόμορφο πλέγμα	23
3.3.1	Επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων	23
3.3.2	Χωρική ανάλυση και συνθήκη ευστάθειας.....	26
3.4	Μη ομοιόμορφο πλέγμα.....	28
3.4.1	Μετασχηματισμός συντεταγμένων	28
3.4.2	Ζητήματα εφαρμογής και κριτήρια ευστάθειας.....	31
4	Υπολογιστική μελέτη ομοαξονικών καλωδίων με ασυνέχειες	33
4.1	Γενικά.....	33
4.2	Προσομοίωση του προβλήματος	34

4.2.1 Παράμετροι και περιοχές της γραμμής μεταφοράς	34
4.2.2 Υπολογισμός του συντελεστή ανάκλασης.....	38
4.2.3 Συγκριτική μελέτη της απόδοσης του αλγορίθμου FDTD με 2 ^{ης} και 4 ^{ης} τάξης ακρίβειας χωρικούς τελεστές	43
4.2.4 Σύγκριση του μη ομοιόμορφου και του ομοιόμορφου πλέγματος	46
5 Συμπεράσματα και μελλοντικές προεκτάσεις	50
5.1 Συμπεράσματα	50
5.2 Μελλοντικές προεκτάσεις.....	51
Παράρτημα	52
Βιβλιογραφία	53
Abstract-Περίληψη στα Αγγλικά	57

1

Εισαγωγή

1.1 Γραμμές μεταφοράς

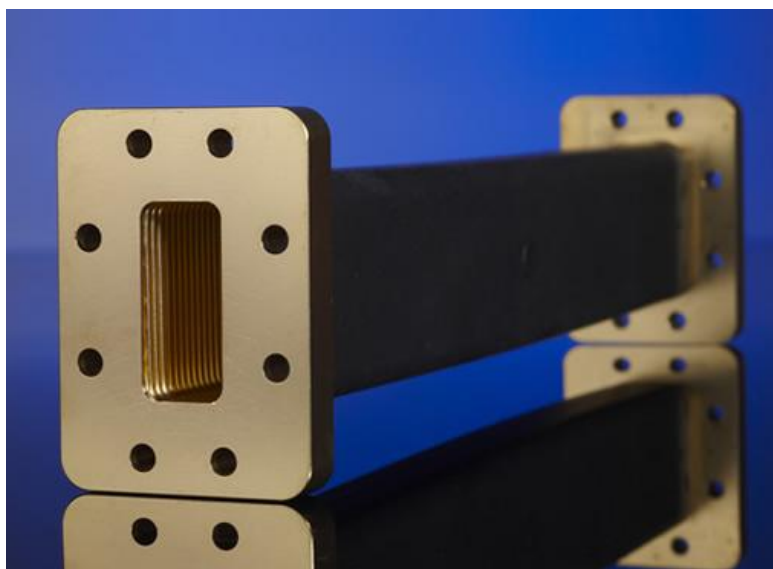
Οι γραμμές μεταφοράς είναι ένα μέσο μεταφοράς σημάτων ή ισχύος από ένα σημείο σε ένα άλλο. Από έναν τέτοιο γενικό ορισμό, οποιοδήποτε σύστημα αγωγών μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί μια ή περισσότερες γραμμές μεταφοράς. Μια γραμμή μεταφοράς βασικά αποτελείται από δύο ή περισσότερους αγωγούς που χρησιμοποιούνται για να ενώσουν την πηγή με το φορτίο. Καθώς κάθε αγωγός έχει συγκεκριμένο μήκος και διάμετρο, πρέπει να έχει αντίσταση και επαγωγή. Ο διαχωρισμός των αγωγών γίνεται με ένα μέσο που είναι διηλεκτρικό, το οποίο δεν μπορεί να είναι τέλειο μονωτικό.



Εικόνα 1.1: Ομοαξονικό καλώδιο (Η εικόνα είναι από την ιστοσελίδα <http://support.brighthouse.com/Article/What-Are-Coaxial-Cables-2706/>)

Οι γραμμές μεταφοράς χρησιμοποιούνται τόσο στη διανομή ενέργειας σε χαμηλές συχνότητες όσο και στις τηλεπικοινωνίες σε υψηλές συχνότητες. Τυπικές γραμμές μεταφοράς περιλαμβάνουν ομοαξονικά καλώδια (coaxial cables) (Εικόνα 1.1), γραμμές με παράλληλες πλάκες (parallel-plate lines) και δισύρματες γραμμές (two wire lines). Τα προβλήματα γραμμών μεταφοράς συνήθως λύνονται χρησιμοποιώντας θεωρία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων και θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούνται ευρέως για την μεταφορά ραδιοσυχνοτήτων ανάμεσα σε διάφορους επικοινωνιακούς εξοπλισμούς και για την σύνδεση κεραιών με πομπούς και δέκτες. Στις χαμηλές συχνότητες (<300MHz) τα ομοαξονικά καλώδια ή οι παράλληλοι αγωγοί χρησιμοποιούνται πιο συχνά. Στις υψηλές συχνότητες, οι κυματοδηγοί (waveguides) (Εικόνα 1.2) και η γραμμή ταινίας (stripline) είναι πιο συνηθισμένοι.



Εικόνα 1.2: Κυματοδηγός (Η εικόνα είναι από την ιστοσελίδα <http://www.flexiguide.com/products-rectangular-seamless.htm>)

Οι γραμμές μισού και ενός τετάρτου μήκους κύματος μπορούν να μιμηθούν ένα παράλληλο ή ένα RLC κυκλώμα. Γενικά, ένα ηλεκτρικά μικρό (μικρότερο από ένα τέταρτο μήκος κύματος) τμήμα μιας ανοιχτού κυκλώματος γραμμής μεταφοράς συμπεριφέρεται σαν πυκνωτής. Καθώς το μήκος της ανοιχτού κυκλώματος γραμμής προσεγγίζει το ένα τέταρτο μήκος κύματος, η χωρική αντίσταση που μετράται στην είσοδο γίνεται όλο και μικρότερη, γεγονός το οποίο είναι ισοδύναμο με το να

γίνεται η χωρητικότητα όλο και μεγαλύτερη. Με παρόμοιο τρόπο, και ένα τμήμα μιας βραχυκυκλωμένης γραμμής μεταφοράς με μήκος μικρότερο του ενός τέταρτου μήκους κύματος συμπεριφέρεται σαν επαγωγέας. Καθώς, το μήκος του μεγαλώνει προς το ένα τέταρτο μήκους κύματος, η άεργος αντίσταση (inductive reactance) και η επαγωγική (inductance) αυξάνονται. Οι πυκνωτές και οι επαγωγείς που δημιουργήθηκαν από τμήματα γραμμών μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμοι στις υψηλές συχνότητες (>500MHz) επειδή είναι δύσκολο να κατασκευαστούν πρότυποι πυκνωτές και επαγωγείς των κατάλληλων τιμών. Τα τμήματα των γραμμών μεταφοράς μπορούν να συνδεθούν απευθείας στην πλακέτα ενός υπολογιστή χρησιμοποιώντας γραμμές ταινίας ή ακόμα σε μια συσκευή μικροκυμάτων χρησιμοποιώντας τεχνικές κατασκευής ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (integrated circuits fabrication techniques).

Οι γραμμές μεταφοράς μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως μετασχηματιστές αντίστασης (impedance transformers). Είναι ευκολότερο να σχεδιαστούν από ότι τα π, T και L δίκτυα χρησιμοποιώντας πυκνωτές και πηνία και γενικά έχουν λιγότερες απώλειες από τους συμβατικούς μετασχηματιστές ραδιοσυχνοτήτων (RF transformers) που είναι φτιαγμένοι από με σιδηρομαγνητικά υλικά (ferromagnetic materials). Ο πιο διαδεδομένος μετασχηματιστής γραμμής μεταφοράς είναι ο ενός τέταρτου κύματος μετασχηματιστής (quarter-wave transformer).

Οι μη ομοιόμορφες γραμμές μεταφοράς είναι ο πιο σημαντικός τρόπος για την σύνδεση ενός κυκλώματος. Οι διασυνδέσεις σε υψηλής ταχύτητας κυκλώματα συνήθως μοντελοποιούνται ως γραμμές μεταφοράς. Για τις διασυνδέσεις που βρίσκονται στο φύλλο ημιαγωγού, οι γραμμές μεταφοράς με παραμέτρους που εξαρτώνται από την συχνότητα χρησιμοποιούνται συνήθως για να περιγράψουν τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά τους.

1.2 Μέθοδοι επίλυσης των τηλεγραφικών εξισώσεων

Οι τηλεγραφικές εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές στην επιστήμη και στην μηχανική. Χρησιμοποιούνται συνήθως στην ανάλυση σημάτων για την μετάδοση και διάδοση ηλεκτρικών σημάτων [1] και έχουν εφαρμοστεί και σε άλλα πεδία. Για την ενασχόληση με τις εξισώσεις, έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι οι οποίες

εξασφαλίζουν ακριβείς και προσεγγιστικές λύσεις. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές από αυτές.

Στην εργασία [2] χρησιμοποιήθηκε μια τεχνική αποθορύβωσης κυματιδίων (wavelet denoising) για να υπολογιστεί με ακρίβεια η FDTD λύση των τηλεγραφικών εξισώσεων. Η τεχνική FDTD απαιτεί μια πολύ λεπτή διακριτοποίηση του υπολογιστικού χώρου για να πετύχει ακριβείς λύσεις. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με την τεχνική που βασίζεται στην αποσύνθεση κυματιδίων. Αρχικά, γίνεται η διακριτοποίηση της γραμμής μεταφοράς και βρίσκεται η λύση μέσω της FDTD. Ύστερα, η λύση φιλτράρεται μέσω μιας διαδικασίας η οποία βασίζεται στα κυματίδια έτσι ώστε να αυξηθεί η ακρίβειά της. Το κύριο πλεονέκτημά της είναι ότι τα χωρικά βήματα Δz είναι σημαντικά μεγαλύτερα από αυτά που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο FDTD για να περιοριστεί η αριθμητική διασπορά της διάδοσης του κύματος στο πλέγμα. Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται ο χρόνος υπολογισμού της λύσης αφού τα χρονικά βήματα Δt σχετίζονται με τα χωρικά μέσω της συνθήκης Courant.

Μια κλειστής μορφής προσεγγιστική αναλυτική λύση των τηλεγραφικών εξισώσεων μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς παρουσιάστηκε στην εργασία [3]. Αρχικά, οι τηλεγραφικές εξισώσεις γράφονται ως σε μορφή πίνακα. Έπειτα λύνονται οι εξισώσεις για να προκύψει ως λύση ο πίνακας ο οποίος ονομάζεται πίνακας παραμέτρων αλυσίδας (chain parameter matrix) της γραμμής μεταφοράς. Οι παράμετροι αλυσίδας είναι γνωστοί και ως ABCD παράμετροι. Η μέθοδος αυτή δίνει ακριβείς λύσεις σε όλες τις συχνότητες σε μη ομοιόμορφες γραμμές μεταφοράς, στις οποίες η χαρακτηριστική αντίσταση είναι σταθερή κατά το μήκος τους. Επίσης, η ακρίβεια της λύσης είναι αποδεκτή στις μη ομοιόμορφες γραμμές μεταφοράς σε όλες της συχνότητες, ειδικά στις πολύ χαμηλές ή πολύ υψηλές.

Στην εργασία [4] εφαρμόστηκε η μέθοδος των πολωνύμων Hermite του χάους (Hermite polynomial chaos) στις τηλεγραφικές εξισώσεις που περιγράφουν την ρεαλιστική δομή μιας διασύνδεσης. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην θεωρία του χάους [5][6] και στην αντιπροσώπευση της στοχαστικής λύσης ενός δυναμικού κυκλώματος με όρους ορθογώνιων πολωνύμων, και μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορους τομείς της φυσικής. Η τεχνική αυτή παρέχει ακριβής αποτελέσματα και είναι υπολογιστικά αποδοτική.

Ακόμα, στην εργασία [7] παρουσιάστηκε μια τεχνική στο πεδίου του χρόνου για την επίλυση μη ομοιόμορφων γραμμών μεταφοράς πολλαπλών αγωγών. Η

τεχνική αυτή βασίζεται σε μια διατύπωση των τηλεγραφικών εξισώσεων η οποία προέκυψε από την ανάλυση των διανυσμάτων των τάσεων και των ρευμάτων σε διορθωγώνιες κυματιδιακές συναρτήσεις. Τα κυματίδια επιτρέπουν στην λύση να προσαρμόζεται χρησιμοποιώντας μερικούς συντελεστές επέκτασης, με κάθε καθορισμένη τάξη προσέγγισης. Το κύριο πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι ότι η αναπαράσταση της λύσης προσαρμόζεται αυτόματα καθώς ο χρόνος προχωράει. Δοθείσης μιας καθορισμένης ακρίβειας, η λύση αποθηκεύεται με τους λιγότερους δυνατούς συντελεστές επέκτασης κυματιδίων, οι οποίοι είναι οι μοναδικοί που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της υπολογιστικής προσπάθειας για καθορισμό της λύσης σε σύγκριση με μη προσαρμοστικές μεθόδους όπως η FDTD. Επιπλέον, η διατύπωση των εξισώσεων επιτρέπει την αντιμετώπιση αυθαίρετων γραμμών με ποικίλες φασικές ταχύτητες.

Άλλη μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων είναι ο αλγόριθμος εκθετικής συνέλιξης (exponential convolution algorithm - ECA) [8]. Βασίζεται στην μέθοδο που ονομάζεται αλγόριθμος πολυωνυμικής συνέλιξης (polynomial convolution algorithm - PCA) στην οποία η έξοδος της γραμμής μεταφοράς προσεγγίζεται από ένα πολώνυμο πεπερασμένου βαθμού στην περίοδο της προσομοίωσης. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος συνέλιξης στην τωρινή χρονική στιγμή από το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος συνέλιξης στην προηγούμενη χρονική στιγμή. Η αδυναμία της τεχνικής αυτής να προσεγγίσει ακριβώς την συνάρτηση εξόδου για μεγάλη περίοδο προσομοίωσης έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό του μήκους της περιόδου της προσομοίωσης. Αντιθέτως, η τεχνική ECA αντιμετωπίζει αυτόν τον περιορισμό προσεγγίζοντας τις συναρτήσεις εξόδου από εκθετικά τμήματα.

Η χωρίς συνθήκη ευσταθής FDTD μέθοδος (US-FDTD) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλύσει τις τηλεγραφικές εξισώσεις [9]. Το πλεονέκτημα της σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους FDTD είναι ότι δεν χρειάζεται να ικανοποιεί την συνθήκη Courant-Friedrich-Levy (CFL) για να είναι ευσταθής. Επομένως, αυξάνει σημαντικά την υπολογιστική απόδοση λόγω της μείωσης των συνολικών χρονικών βημάτων. Η συγκεκριμένη μέθοδος βασίζεται στην τεχνική διαίρεσης χρονικού βήματος (split-time-step scheme) για την ανάλυση των γραμμών μεταφοράς. Η αριθμητική ακρίβεια της λύσης μπορεί να βελτιωθεί αυξάνοντας τον αριθμό των χρονικών υπο-βημάτων (sub-time-step).

Άλλη μια μέθοδος που βασίζεται στην FDTD προτάθηκε στην εργασία [10]. Στην κλασική FDTD οι χρονικές και χωρικές παραγωγοί αντικαθίστανται με τις κεντρικές διαφορές, αντιθέτως στην προτεινόμενη μέθοδος οι παράγωγοι αντικαθίστανται από τον συνδυασμό και των δυο, κεντρικών και προς τα εμπρός διαφορών. Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνεται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για την προσομοίωση της διάδοσης των κυμάτων ρεύματος ή τάσης σε μια γραμμική γραμμή μεταφοράς με μη γραμμικό φορτίο ή σε μη γραμμική γραμμή μεταφοράς.

Τέλος, στην εργασία [11] αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος FDTD δυο διαστάσεων, ο οποίος είναι κατάλληλος για την ανάλυση κυλινδρικών γραμμών μεταφοράς. Αρχικά, οι εξισώσεις του Maxwell αναλύονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες και έπειτα, το τριών διαστάσεων πλέγμα μετατρέπεται σε δύο διαστάσεων αξιοποιώντας τη γνωστή διαμήκη μεταβολή (longitudinal variation). Τα επόμενα βήματα που πρέπει να εκτελεστούν για να προκύψει η λύση είναι ίδια με αυτά του κλασικού FDTD αλγορίθμου.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Ένα από τα προβλήματα της χρήσης της μεθόδου FDTD για την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων σε ανομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς είναι η επιλογή ενός πλέγματος διακριτοποίησης με επαρκή χωρική ανάλυση. Όταν οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι αλλάζουν στις διάφορες περιοχές της γραμμής μεταφοράς, είναι πιθανό απαιτούνται διαφορετικά επίπεδα διακριτοποίησης έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η απαιτούμενη ακρίβεια. Σε μια τέτοια περίπτωση, η χρήση ενός ομοιόμορφου πλέγματος διακριτοποίησης παράγει αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Αυτή η διπλωματική εργασία παρουσιάζει μια μέθοδο μη ομοιόμορφου πλέγματος η οποία παρουσιάστηκε στην εργασία [12] και χρησιμοποιεί έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων, ο οποίος παράγει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο, όπου οι καθιερωμένες εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν. Αυτή η μέθοδος μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των τηλεγραφικών εξισώσεων συγκριτικά με την επιλογή πλήρως ομοιόμορφων πλεγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου στην κλασικής της μορφή. Επίσης, αναφέρονται οι εξισώσεις του Maxwell και ο αλγόριθμος του Yee. Έπειτα, γίνεται λόγος για τη συνθήκη ευστάθειας

και το φαινόμενο της αριθμητικής διασποράς στη συγκεκριμένη μέθοδο. Τέλος, αναλύονται οι προσεγγίσεις τέταρτης τάξης.

Στο Κεφάλαιο 3 επιλύονται οι τηλεγραφικές εξισώσεις με τη μέθοδο FDTD. Αρχικά, γίνεται μια επισκόπηση των τηλεγραφικών εξισώσεων, και έπειτα παρουσιάζεται η επίλυση τους σε ομοιόμορφο πλέγμα στο χώρο. Τέλος, αναπτύσσεται ο μετασχηματισμός συντεταγμένων, ο οποίος σχεδιάζει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο.

Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται η προτεινόμενη μέθοδος σε ένα ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικές ασυνέχειες. Στην αρχή, συγκρίνεται η ακρίβεια επίλυσης των προσεγγίσεων δεύτερης και τέταρτης τάξης. Έπειτα, εξετάζεται η απόδοση του μη ομοιόμορφου πλέγματος σε σχέση με το ομοιόμορφο με τη χρήση διαγραμμάτων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η επισκόπηση και τα συμπεράσματα της εργασίας.

2

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου

2.1 Γενικά

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου είναι μια αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Παρουσιάστηκε αρχικά από τον Kane S. Yee το 1966 [13] αλλά έμεινε απαρατήρητη για περίπου μια δεκαετία, μέχρι το 1975 όταν και χρησιμοποιήθηκε από τους Taflove και Browin για να προσομοιώσουν τους διηλεκτρικούς κυλίνδρους και την βιολογική θερμότητα. Η χρήση της μεθόδου FDTD αυξήθηκε στα τέλη του 1970 και μετά, λόγω της συνεχούς προόδου της τεχνολογίας των υπολογιστών. Τις τελευταίες δεκαετίες, οι τεχνικές FDTD είναι το κύριο μέσο για την μοντελοποίηση πολλών επιστημονικών και μηχανικών προβλημάτων που έχουν σχέση με τις αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με διάφορα υλικά.

2.2 Πεπερασμένες διαφορές

Η μέθοδος FDTD χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές ως προσεγγίσεις για τις χωρικές και χρονικές παράγωγους που εμφανίζονται στις εξισώσεις του Maxwell. Ας θεωρήσουμε τις προσεγγίσεις της $f(x)$ στα $x_0 \pm h/2$ μέσω του αναπτύγματος σε σειρά Taylor:

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.1)$$

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.2)$$

Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη προκύπτει:

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = hf'(x_0) + \frac{2}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.3)$$

Διαιρώντας την εξίσωση (2.3) με h έχουμε:

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{h^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots \quad (2.4)$$

Ο όρος στα αριστερά είναι ίσος με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο x_0 συν έναν όρο που εξαρτάται από το h^2 συν έναν άπειρο πλήθος όρων ανώτερης τάξης, οι οποίοι δεν φαίνονται. Για τους τελευταίους, ο επόμενος θα εξαρτάται από το h^4 και όλοι οι υπόλοιποι όροι θα εξαρτώνται από ακόμα μεγαλύτερες δυνάμεις του h . Αυτή η σχέση δηλώνετε συνήθως ως:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h} + O(h^2). \quad (2.5)$$

Ο όρος “κεφαλαίο όμικρον” αντιπροσωπεύει όλους τους όρους που δεν φαίνονται και η τιμή μέσα στην παρένθεση δηλώνει την μικρότερη τάξη του h σε αυτούς τους κρυμμένους όρους. Αν το h είναι αρκετά μικρό, η προσέγγιση στην παράγωγο μπορεί να υπολογιστεί αγνοώντας όλους τους όρους “κεφαλαίο όμικρον”. Οπότε, η προσέγγιση κεντρικής διαφοράς δίνεται από την σχέση:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h}. \quad (2.6)$$

Παρατηρούμε ότι η κεντρική διαφορά δίνει μια προσέγγιση της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο x , ωστόσο η συνάρτηση δεν χρειάζεται να υπολογιστεί εκεί. Αντιθέτως, υπολογίζετε στα σημεία $x_0 + h/2$ και $x_0 - h/2$. Επειδή η μεγαλύτερη δύναμη του h που αγνοείται είναι δεύτερης τάξης, η κεντρική διαφορά είναι δεύτερης τάξης, δηλαδή έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης. Αυτό σημαίνει ότι αν το h μειωθεί κατά ένα παράγοντα του 10, τότε το σφάλμα στην προσέγγιση θα μειωθεί

περίπου κατά ένα παράγοντα τουλάχιστον του 100. Τέλος, στο όριο όπου το h τείνει στο μηδέν, η προσέγγιση γίνεται ακριβής. Αρκεί, βέβαια, η συνάρτηση να παριστάνεται από τη σειρά Taylor της.

2.3 Ο αλγόριθμος του Yee

Η μέθοδος FDTD στην απλούστερη μορφή είναι γνωστή ως αλγόριθμος του Yee. Αυτός ο αλγόριθμος διακριτοποιεί το χώρο και το χρόνο με τη βοήθεια δύο ορθογωνικών πλεγμάτων πεπερασμένων διαφορών. Επιπλέον, χρησιμοποιεί ως άγνωστα μεγέθη τις δύο πεδιακές εντάσεις (ηλεκτρική και μαγνητική) και τις προσδιορίζει στο χώρο και χρόνο, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell. Σημειώνεται ότι, αν και στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων, για λόγους ιστορικούς αλλά και κατανόησης θα παρουσιάσουμε - αρχικά τουλάχιστον - την τεχνική στην κλασική της μορφή.

Η βασική αρχή της διακριτοποίησης του χώρου είναι ότι ο χώρος χωρίζεται σε διακριτά κελιά. Δύο όμοια πλέγματα εμπλέκονται μεταξύ τους, ενώ τα άγνωστα μεγέθη ορίζονται ως διανύσματα στις ακμές του κάθε πλέγματος. Στο ένα πλέγμα ορίζονται οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου και στο άλλο του μαγνητικού πεδίου. Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται και η διακριτοποίηση του χρόνου. Ο αλγόριθμος του Yee συνοψίζεται ως εξής:

1. Αντικατάσταση όλων των παραγώγων των νόμων των Ampere και Faraday με πεπερασμένες διαφορές. Διακριτοποίηση του χώρου και του χρόνου, ώστε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία να εναλλάσσονται στον χώρο και στον χρόνο.
2. Λύση των διαφορικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των εξισώσεων ανανέωσης που εκφράζουν τα μελλοντικά πεδία με όρους παρελθοντικών τιμών.
3. Υπολογισμός των μαγνητικών πεδίων σε μία χρονική στιγμή.
4. Υπολογισμός των ηλεκτρικών πεδίων σε επόμενη χρονική στιγμή, η οποία απέχει μισό χρονικό βήμα.
5. Επανάληψη των προηγούμενων δύο βημάτων μέχρι τα πεδία να έχουν υπολογιστεί για την επιθυμητή χρονική διάρκεια.

Σε αυτό το στάδιο, η περίληψη του αλγορίθμου ενδεχομένως εμφανίζεται αρκετά αφηρημένη. Παρακάτω θα δούμε πιο αναλυτικά την εφαρμογή του, ώστε να τον κατανοήσουμε καλύτερα και να δούμε την απλότητά του.

2.4 Οι εξισώσεις του Maxwell

Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία οι εξισώσεις Maxwell είναι τέσσερις εξισώσεις που διατυπώθηκαν από τον Σκοτσέζο φυσικό και μαθηματικό James Clerk Maxwell και περιγράφουν τη συμπεριφορά ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους με την ύλη. Η μορφή των τεσσάρων εξισώσεων, όπως χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα και όπως περιγράφεται παρακάτω, σχηματοποιήθηκε από τον αυτοδίδακτο Άγγλο φυσικό και μαθηματικό Oliver Heaviside, ο οποίος τις αναδιατύπωσε χρησιμοποιώντας διανυσματικό λογισμό.

Παρακάτω θα δούμε πώς εφαρμόζεται η μέθοδος FDTD σε δυο από τις εξισώσεις του Maxwell. Ας θεωρήσουμε έναν μονοδιάστατο χώρο όπου υπάρχουν μεταβολές μόνο στην x κατεύθυνση. Υποθέστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z συνιστώσα. Σε αυτήν την περίπτωση ο νόμος του Faraday μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix} = -\hat{a}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.7)$$

όπου \mathbf{H} και \mathbf{E} είναι οι εντάσεις του μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου αντίστοιχα, μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα, ∇ ο τελεστής ανάδελα και τα \hat{a}_x , \hat{a}_y , και \hat{a}_z είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y και z αντίστοιχα. Ο νόμος του Ampere, υποθέτοντας ότι το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο y συνιστώσα, γράφεται:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{pmatrix} = \hat{a}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (2.8)$$

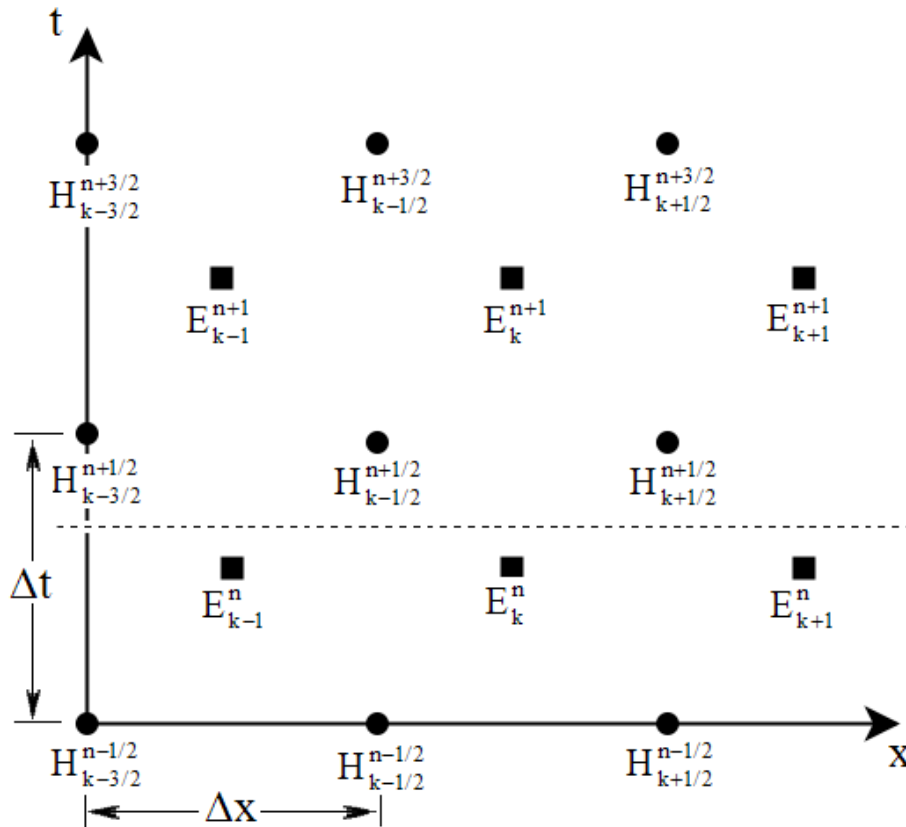
όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά. Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν δύο βαθμωτές εξισώσεις:

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Η πρώτη εξίσωση δηλώνει την χρονική παράγωγο του μαγνητικού πεδίου με όρους χωρικής παραγώγου του ηλεκτρικού πεδίου. Παρομοίως, η δεύτερη εξίσωση δηλώνει την χρονική παράγωγο του ηλεκτρικού πεδίου με όρους χωρικής παραγώγου του μαγνητικού πεδίου. Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση (2.9) θα χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξουμε το μαγνητικό πεδίο στο χρόνο ενώ η εξίσωση (2.10) θα χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους στις (2.9) και (2.10) με πεπερασμένες διαφορές. Για να γίνει αυτό πρέπει ο χώρος και ο χρόνος να



Εικόνα 2.1: Η διάταξη των ηλεκτρικών και μαγνητικών κόμβων στον χρόνο και χώρο.

είναι διακριτοποιημένος. Οι επόμενες σημειογραφίες θα χρησιμοποιηθούν για να δηλώσουν τη θέση και τη χρονική στιγμή όπου τα πεδία δειγματοληπτούνται:

$$E_z(x, t) = E_z(k\Delta x, n\Delta t) = E_k^n, \quad (2.11)$$

$$H_y(x, t) = H_y(k\Delta x, n\Delta t) = H_k^n, \quad (2.12)$$

όπου Δx είναι η χωρική απόσταση ανάμεσα στα σημεία δειγματοληψίας και Δt η αντίστοιχη χρονική. Ο δείκτης k υποδηλώνει το χωρικό βήμα και ο δείκτης n το χρονικό βήμα.

Αν και έχουμε μόνο μια διάσταση στο χώρο, ο χρόνος μπορεί να θεωρηθεί άλλη μια διάσταση. Έτσι, έχουμε δύο διαστάσεις. Στην Εικόνα 2.1 φαίνεται η διάταξη των σημείων δειγματοληψίας των μαγνητικών και ηλεκτρικών πεδίων, τα οποία ονομάζονται κόμβοι. Οι κόμβοι του ηλεκτρικού πεδίου αναπαριστούνται με τετράγωνα και οι κόμβοι του μαγνητικού πεδίου με κύκλους. Όπως φαίνεται οι κόμβοι των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων βρίσκονται σε απόσταση μισού χωρικού βήματος. Θεωρώντας ότι όλοι οι κόμβοι κάτω από την διακεκομμένη γραμμή είναι γνωστοί (παρελθοντικοί κόμβοι), ενώ οι κόμβοι πάνω από την γραμμή είναι άγνωστοι (μελλοντικοί κόμβοι). Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο FDTD μπορούμε να υπολογίσουμε τους μελλοντικούς κόμβους.

Στο σημείο $((k+1/2)\Delta x, n\Delta t)$ εφαρμόζοντας το νόμο του Faraday έχουμε:

$$\mu \left. \frac{\partial H_y}{\partial t} \right|_{((k+1/2)\Delta x, n\Delta t)} = \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{((k+1/2)\Delta x, n\Delta t)}. \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας τη χρονική παράγωγο με τη πεπερασμένη διαφορά $H_{k+1/2}^{n+1/2}$ και $H_{k+1/2}^{n-1/2}$ και τη χωρική παράγωγο με E_{k+1}^n και E_k^n έχουμε:

$$\mu \frac{H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{E_{k+1}^n - E_k^n}{\Delta x}. \quad (2.14)$$

Λύνοντας ως προς $H_{k+1/2}^{n+1/2}$ προκύπτει:

$$H_{k+1/2}^{n+1/2} = H_{k+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_{k+1}^n - E_k^n). \quad (2.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση ανανέωσης, και πιο συγκεκριμένα είναι η εξίσωση ανανέωσης του H_y πεδίου. Είναι μια γενική εξίσωση που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε μαγνητικό κόμβο και υποδηλώνει ότι η μελλοντική τιμή του H_y εξαρτάται μόνο από προηγούμενες τιμές και από γειτονικά ηλεκτρικά πεδία. Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere στο σημείο $(k\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$ έχουμε:

$$E_k^{n+1} = E_k^n + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k-1/2}^{n+1/2}). \quad (2.16)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.16) σε κάθε κόμβο ηλεκτρικού πεδίου, η γραμμή διαχωρισμού των γνωστών και άγνωστων κόμβων μετακινείται μισό χρονικό

βήμα πάνω. Έτσι, τα μελλοντικά πεδία που είναι πιο κοντά στην γραμμή διαχωρισμού γίνονται τα μαγνητικά πεδία. Αυτά ανανεώνονται ξανά, μετά ανανεώνονται τα ηλεκτρικά πεδία και ούτω καθ' εξής. Η παραπάνω μέθοδος FDTD χρησιμοποιεί δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χρόνο και στον χώρο αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό, για συντομία γράφεται ως FDTD (2, 2).

2.5 Συνθήκη ευστάθειας και διασπορά

Όπως είδαμε, η μέθοδος FDTD βασίζεται σε χρονικά βήματα χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις για τις παραγώγους. Ωστόσο, το μέγεθος των χρονικών βημάτων είναι περιορισμένο στην αρχική διατύπωση της μεθόδου FDTD από τον Yee. Χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα μεγαλύτερο από αυτόν τον περιορισμό έχει ως αποτέλεσμα η λύση να είναι ασταθής και να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές μετά από κάποιες επαναλήψεις. Ο Allen Taflove ήταν ο πρώτος που ανέφερε την σωστή αριθμητική συνθήκη ευστάθειας για την μέθοδο FDTD το 1975 και επινόησε τον όρο FDTD (2, 2) φαίνεται στην εξίσωση (2.17), οπότε το χρονικό βήμα πρέπει να είναι μικρότερο από την τιμή που είναι υπολογισμένη από αυτήν την εξίσωση έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ευστάθεια.

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}. \quad (2.17)$$

c είναι η ταχύτητα του φωτός σε ομογενή υλικό. Η παραπάνω συνθήκη είναι γνωστή και ως συνθήκη ευστάθειας CFL (Courant-Friedrich-Levy). Για ομοιόμορφα πλέγματα με ίσα μεγέθη κελιών σε όλες τις διαστάσεις ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$), η συνθήκη ευστάθειας CFL γίνεται:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}. \quad (2.18)$$

Η μέθοδος FDTD χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Αυτή η προσέγγιση έχει ως αποτέλεσμα η φασική ταχύτητα στο διακριτοποιημένο χώρο να διαφέρει από την ταχύτητα του φωτός, ανάλογα με την συχνότητα, την κατεύθυνση, ή το μέγεθος του πλέγματος, προκαλώντας διασπορά [14]. Διασπορά θεωρείτε η παρέκκλιση της φασικής ταχύτητας των κυμάτων στο πλέγμα του αλγορίθμου FDTD από την

ταχύτητα του φωτός στο κενό. Επειδή οι διαφορικές εξισώσεις προσδιορίζονται κατά μήκος του άξονα, η φασική ταχύτητα στο διακριτοποιημένο χώρο που υπάρχει κατά μήκος του άξονα είναι διαφορετική από αυτήν που υπάρχει διαγώνια στο πλέγμα. Αυτό προκαλεί ανισοτροπία. Τα φαινόμενα της διασποράς και της ανισοτροπίας μπορούν να οδηγήσουν σε αποκλίσεις [14] σε μια προσομοίωση. Η σχέση διασποράς σε τριών διαστάσεων αλγόριθμο FDTD(2, 2) όπως υπολογίστηκε στην [14] δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) \right]^2, \quad (2.19)$$

όπου k_x , k_y και k_z είναι οι συνιστώσες των αξόνων x , y και z του αριθμού κύματος k , και ω η κυκλική συχνότητα.

2.6 Συνοριακές συνθήκες απορρόφησης

Ένα πρόβλημα που προκύπτει όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος FDTD για να προσομοιώσει ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε προβλήματα ανοιχτού χώρου (π.χ. ακτινοβολία κεραιών) είναι το πώς παρουσιάζεται σε μια τέτοια περίπτωση ένα πεπερασμένο πλέγμα. Ο χώρος πρέπει να είναι περιορισμένος με ένα τεχνητό σύνορο, το οποίο υποστηρίζει μια συνοριακή συνθήκη που απορροφά αποτελεσματικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία προσκρούουν πάνω στο σύνορο. Ιδανικά, όλη η ενέργεια απορροφάται και δεν ανακλάται καθόλου ενέργεια πίσω στον χώρο. Αυτή η συνθήκη ονομάζεται συνοριακή συνθήκη απορρόφησης (Absorbing Boundary Condition - ABC). Στην πράξη, η απορροφητική συνθήκη πάντα προκαλεί ανακλάσεις. Ωστόσο, αρκεί αυτές να μην παίρνουν απαγορευτικά μεγάλες τιμές.

Έχει αναπτυχθεί πληθώρα ABCs για την μέθοδο FDTD. Μια από τις πιο επιτυχημένες μεθόδους είναι η Engquist-Majda ABC, η οποία βασίζεται στην εξίσωση κύματος [15]. Ο G. Mur εφάρμοσε την πρώτη και δεύτερη τάξη Engquist-Majda ABC στην μέθοδο FDTD [16]. Η διατύπωση της δεύτερης τάξης συχνά αναφέρεται και ως Mur-ABC [14]. Παρακάτω θα αναλύσουμε την απορροφητική συνθήκη Mur πρώτης τάξης βασιζόμενοι στην εργασία [17].

Ας θεωρήσουμε ότι ένα κύμα ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός c , κατά μήκος του άξονα x , προς ένα σύνορο στο τέλος ενός υπολογιστικού πεδίου (computational domain). Η εξίσωση κύματος σε μια διάσταση είναι:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2.20)$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή:

$$G = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_x^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2. \quad (2.21)$$

Η εξίσωση κύματος μπορεί να γραφτεί με την μορφή τελεστή ως:

$$GU = 0, \quad (2.22)$$

ο G παραγοντοποιείται ως:

$$G^+ G^- U = 0, \quad (2.23)$$

όπου ο G^- ορίζεται ως:

$$G^- = D_x - \frac{D_t}{c} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.24)$$

με:

$$S = \frac{D_y}{(D_t/c)}. \quad (2.25)$$

Ο τελεστής G^+ ορίζεται παρομοίως εκτός από τον τελεστή πλην, πριν τη ρίζα, ο οποίος γίνεται συν.

Ο Engquist και ο Majda έδειξαν ότι στο αριστερό σύνορο ενός πλέγματος όπου $x=0$, η εφαρμογή του G^- στην συνάρτηση κύματος U απορρόφα ένα κύμα που διαδίδεται προς αυτό το σύνορο σε κάθε γωνία θ . Ο τελεστής G^+ πραγματοποιεί την ίδια λειτουργία για κύμα που διαδίδεται προς το δεξιό σύνορο. Από την (2.23) προκύπτει ότι:

$$G^- U = 0. \quad (2.26)$$

Η παρουσία της τετραγωνικής ρίζας στην (2.24) κατατάσσει τον G^- ως ένα ψευδό-διαφορικό τελεστή (pseudo-differential operator) ο οποίος είναι μη γραμμικός. Αυτό το χαρακτηριστικό απαγορεύει την άμεση εφαρμογή της (2.26) ως ABC. Ωστόσο, μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας για να παράγουμε ένα σύνολο κανονικών χωρικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε προσομοιώσεις. Ας θεωρήσουμε την προσέγγιση της

συνάρτησης της τετραγωνικής ρίζας μέσω του αναπτύγματος σε σειρά Taylor. Η σειρά ενός όρου είναι:

$$\sqrt{1-S^2} \approx 1. \quad (2.27)$$

Αντικαθιστώντας την (2.27) στην (2.24) προκύπτει:

$$G^- = D_x - \frac{D_t}{c}. \quad (2.28)$$

Αντικαθιστώντας την (2.28) στην (2.26) και αναγνωρίζοντας τους διαφορικούς τελεστές ως χωρικούς παραγώγους προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Διακριτοποιώντας την εξίσωση (2.29), προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} [U_1^{n+1} + U_1^n] - \frac{1}{2} [U_0^{n+1} + U_0^n] \right\} \\ & - \frac{1}{c \Delta x} \left\{ \frac{1}{2} [U_1^{n+1} + U_0^n] - \frac{1}{2} [U_1^n + U_0^{n+1}] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές με $2c(\Delta t)(\Delta x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & c(\Delta t)U_1^{n+1} + c(\Delta t)U_1^n - c(\Delta t)U_0^{n+1} - c(\Delta t)U_0^n \\ & - (\Delta x)U_1^{n+1} - (\Delta x)U_0^{n+1} + (\Delta x)U_1^n + (\Delta x)U_0^n = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.31) ως προς το U_0^{n+1} παίρνουμε:

$$U_0^{n+1} = U_1^n + \left\{ \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \right\} \times [U_1^{n+1} - U_0^n]. \quad (2.32)$$

Εάν ισχύει $c\Delta t - \Delta x = 0$, τότε ο δεύτερος όρος της δεξιάς εξίσωσης θα γίνει μηδέν, οπότε χρησιμοποιώντας την συνθήκη $\Delta t = \Delta x/c$ η εξίσωση (2.32) γίνεται $U_0^{n+1} = U_1^n$.

2.7 4^{ης} τάξης προσεγγίσεις

2.7.1 Υπολογισμός 4^{ης} τάξης προσεγγίσεων

Ένα από τα μειονεκτήματα της κλασικής μεθόδου FDTD είναι τα σφάλματα φάσης τα οποία οφείλονται στην αφύσικη διασπορά που χαρακτηρίζει τα κύματα στο πλέγμα. Ένας τρόπος για την μείωση των σφαλμάτων διασποράς είναι η χρήση μεγαλύτερης τάξης προσεγγίσεων. Ο κλασικός αλγόριθμος FDTD με ακρίβεια

δεύτερης τάξης στον χρόνο και χώρο υστερεί στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων ειδικά όταν συγκρίνεται με μεθοδολογίες ανώτερης τάξης [18]. Η χρήση μεγαλύτερης τάξης προσεγγίσεων πετυχαίνει μικρότερα σφάλματα διασποράς και συνεπώς, εξασφαλίζει υψηλότερα επίπεδα ακρίβειας.

Παρακάτω παρουσιάζεται η αναλυτική κατασκευή τέταρτης τάξης προσέγγισης κεντρικών διαφορών. Ας θεωρήσουμε τις προσεγγίσεις της $f(x)$, μέχρι τους όρους 5^{ης} τάξης, στα $x_0 \pm h/2$ μέσω του αναπτύγματος σε σειρά Taylor:

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) &= f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) &= f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) \\ &- \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (2.34) από την εξίσωση (2.33) προκύπτει:

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = hf'(x_0) + \frac{2}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \frac{2}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \quad (2.35)$$

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω βήματα για την συνάρτηση $f(x)$ που επεκτείνεται κατά $\pm 3h/2$ παίρνουμε ως αποτέλεσμα:

$$f\left(x + \frac{3h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{3h}{2}\right) = 3hf'(x_0) + \frac{2}{3!}\left(\frac{3h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \frac{2}{5!}\left(\frac{3h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \quad (2.36)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.35) με 27 έχουμε:

$$\begin{aligned} 27f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - 27f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) &= \\ 27hf'(x_0) + 27\frac{2}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + 27\frac{2}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (2.36) από την εξίσωση (2.37) προκύπτει:

$$\begin{aligned} 27f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - 27f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{3h}{2}\right) &= \\ 24hf'(x_0) + 9\frac{2}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(5)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Λύνοντας την (2.38) έχουμε ως αποτέλεσμα:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 - \frac{3h}{2}\right) - 27f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) + 27f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right)}{24h} + O(h^4). \quad (2.39)$$

Αγνοώντας όλους τους όρους “κεφαλαίο όμικρον” προκύπτει η τέταρτης τάξης προσέγγιση κεντρικής διαφοράς:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 - \frac{3h}{2}\right) - 27f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) + 27f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right)}{24h}. \quad (2.40)$$

2.7.2 Ευστάθεια και διασπορά σε 4^{ης} τάξης προσεγγίσεις

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.5 το μέγεθος του χρονικού βήματος έχει ένα συγκεκριμένο όριο σχετικό με τις χωρικές διακριτοποιήσεις Δx , Δy , και Δz . Αυτό το όριο είναι απαραίτητο για να αποτραπούν αριθμητικές αστάθειες. Επίσης, το όριο αυτό διαφοροποιείται στον αλγόριθμο FDTD (2, 4) από ότι στον κλασικό FDTD (2, 2).

Το κριτήριο ευστάθειας του αλγορίθμου FDTD (2, 4) υπολογίστηκε από τον Fang [19], ο οποίος βάσισε την διατύπωσή του στην συνθήκη Von Neumann. Ο περιορισμός ευστάθειας για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) που υπολόγισε ο Fang είναι:

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}. \quad (2.41)$$

Για ομοιόμορφα πλέγματα με ίσα μεγέθη κελιών σε όλες τις διαστάσεις ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$), η εξίσωση (2.41) γίνεται:

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}. \quad (2.42)$$

Είναι φανερό ότι το κριτήριο ευστάθειας του αλγορίθμου FDTD (2, 4), είναι πιο περιορισμένο από του FDTD (2, 2) κατά $\frac{1}{7} \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}$.

Ένα ακόμα ζήτημα της μεθόδου FDTD είναι η αριθμητική διασπορά. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα σε μια προσομοίωση [14]. Σύμφωνα με την εργασία [20], ο αλγόριθμος FDTD (2, 4) έχει

σημαντικά μειωμένη διασπορά σε σχέση με τον FDTD (2, 2). Για το λόγο αυτό, ο FDTD (2, 4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση μεγαλύτερων ηλεκτρικών κατασκευών από αυτών που μπορεί να προσομοιώσει ο FDTD (2, 2).

Η εξίσωση διασποράς για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) όπως τον υπολόγισε ο Fang είναι:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 \\
 &+ \frac{1}{\Delta y^2} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 \\
 &+ \frac{1}{\Delta z^2} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_z\Delta z}{2}\right) \right]^2. \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

3

Επίλυση τηλεγραφικών εξισώσεων

3.1 Γραμμές μεταφοράς και τηλεγραφικές εξισώσεις

Με τον όρο γραμμή μεταφοράς αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε σύστημα αγωγών, διηλεκτρικών ή συνδυασμών τους, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο [21]. Σχεδόν πάντα όμως, ιδιαίτερα σε τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές, υπονοείται ταυτόχρονα ότι το μήκος της γραμμής είναι συγκρίσιμο προς το μήκος κύματος ή και μεγαλύτερο, με αποτέλεσμα την εμφάνιση κυματικών φαινομένων. Πρακτικά παραδείγματα γραμμών μεταφοράς αποτελούν οι γραμμές παράλληλων συρματόμορφων αγωγών, τα ομοαξονικά καλώδια και οι ταινιωτές γραμμές.

Γενικά μια γραμμή μεταφοράς μπορεί να παρουσιάζει μεταβολή της γεωμετρικής της δομής κατά μήκος της. Συνήθως όμως, έχουμε να κάνουμε με ομοιόμορφες γραμμές μεταφοράς, με την έννοια ότι η διατομή της γραμμής παραμένει αμετάβλητη σε όλο το μήκος της. Αυτό, πράγματι, συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, καθώς είναι ευκολότερη η υλοποίηση, αλλά και η μαθηματική ανάλυση τέτοιων γραμμών. Έτσι, πολλές φορές με τον όρο γραμμή μεταφοράς υπονοείται ότι πρόκειται για ομοιόμορφη γραμμή.

Είναι συνηθισμένο και βολικό να περιγράψουμε μια γραμμή μεταφοράς με βάση τις παραμέτρους της γραμμής της, που είναι:

- Η ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα C , δηλαδή η χωρητικότητα λόγω γειτνίασης των δυο αγωγών για μήκος γραμμής ίσο με μονάδα, με τα άκρα της γραμμής ανοιχτοκυκλωμένα.
- Η ανά μονάδα μήκους ωμική αντίσταση R της γραμμής μεταφοράς, που οφείλεται στις απώλειες των αγωγών λόγω της πεπερασμένης αγωγιμότητάς

τους, δηλαδή η ωμική αντίσταση ενός τμήματος γραμμής με βραχυκυκλωμένα τα άκρα, μήκους ίσου με τη μονάδα.

- Η ανά μονάδα μήκους αυτεπαγωγή L της γραμμής, δηλαδή η αυτεπαγωγή του βρόχου που σχηματίζεται από ένα τμήμα δυο αγωγών μήκους ίσου με τη μονάδα, θεωρώντας τα άκρα του τμήματος αυτού βραχυκυκλωμένα.
- Η ανά μονάδα μήκους αγωγιμότητα G της γραμμής, που οφείλεται στις απώλειες του διηλεκτρικού.

Οι παραπάνω παράμετροι ισχύουν για τις γραμμές μεταφοράς με απώλειες. Σε περιπτώσεις που η γραμμή μεταφοράς δεν έχει απώλειες, κάτι που συμβαίνει όταν οι αγωγοί της είναι τέλει και το διηλεκτρικό που τους χωρίζει τους δύο αγωγούς δεν έχει απώλειες, σε μια τέτοια γραμμή ισχύει $R=G=0$.

Σε περιπτώσεις όπου κάποια γραμμή τερματίζεται, καθώς και σε σημεία όπου αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της γραμμής, παρουσιάζονται ασυνέχειες. Αυτό το γεγονός προκαλεί ανακλάσεις στην ενέργεια που μεταδίδεται μέσω της γραμμής μεταφοράς.

Οι τηλεγραφικές εξισώσεις είναι δύο διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την τάση και το ρεύμα σε μια ηλεκτρική γραμμή μεταφοράς. Αυτές οι εξισώσεις προέρχονται από τον Oliver Heaviside ο οποίος την δεκαετία του 1880 ανέπτυξε το μοντέλο της γραμμής μεταφοράς. Οι τηλεγραφικές εξισώσεις, όπως όλες οι εξισώσεις που περιγράφουν ηλεκτρικά φαινόμενα, προέρχονται από τις εξισώσεις του Maxwell.

Στην περίπτωση όπου η γραμμή μεταφοράς δεν έχει απώλειες οι τηλεγραφικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{C(x)} \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{L(x)} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}, \quad (3.2)$$

όπου $V(x, t)$ και $I(x, t)$ είναι οι συναρτήσεις τάσης και ρεύματος αντίστοιχα. Η πρώτη εξίσωση δείχνει ότι το ρεύμα σχετίζεται με τον ρυθμό αλλαγής της τάσης. Ενώ, η δεύτερη εξίσωση δείχνει ότι η επαγόμενη τάση σχετίζεται με το ρυθμό αλλαγής του ρεύματος.

3.2 Το πρόβλημα της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς

Όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος FDTD για την επίλυση των τηλεγραφικών

εξισώσεων σε μη ομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς, ένα πλέγμα διακριτοποίησης με επαρκή ανάλυση, πρέπει να επιλεγεί. Ωστόσο, όταν ασχολούμαστε με ανά μονάδα μήκους παραμέτρους (per-unit-length parameters), διαφορετικές περιοχές της μη ομοιόμορφης γραμμή μεταφοράς απαιτούν ενδεχομένως διαφορετικά επίπεδα αναλύσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η χρήση ομοιόμορφου πλέγματος διακριτοποίησης έχει ως αποτέλεσμα να παράγετε αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Στο παρελθόν, δύο κύριες εναλλακτικές λύσεις έχουν προταθεί για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα. Η πρώτη είναι να ενσωματώσουμε ένα μη ομοιόμορφο πλέγμα στο βασικό αλγόριθμο FDTD (2, 2) [22], και η δεύτερη είναι να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο κυματιδίων πολλαπλών αναλύσεων στο πεδίο του χρόνου [23]. Ενώ και οι δύο μέθοδοι οδηγούν σε πολύ ακριβείς αλγορίθμους, οι εξισώσεις ανανέωσης που προκύπτουν είναι συχνά περισσότερο πολύπλοκες από τις αντίστοιχες των ομοιόμορφων πλεγμάτων. Αυτό μπορεί να περιπλέξει την διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου FDTD και να αποθαρρύνει πιθανούς χρήστες. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, θα παρουσιάσουμε μια τεχνική, που προέρχεται από την δημοσίευση [12], μη ομοιόμορφου πλέγματος που είναι τόσο ακριβής όσο και εύκολη στην εφαρμογή.

Η τεχνική του μη ομοιόμορφου πλέγματος που εφαρμόζουμε χρησιμοποιεί ένα μονοδιάστατο μετασχηματισμό συντεταγμένων για να δημιουργήσει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο, όπου οι κλασικές (2, p) εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν. (Όπου (2, p) σημαίνει δεύτερης τάξης ακρίβειας στον χρόνο και p-οστής τάξης ακρίβειας στο χώρο). Ενώ αυτή η προσέγγιση μπορεί να μην οδηγεί στην πιο αποδοτική στρατηγική μη ομοιόμορφου πλέγματος, είναι όμως, ευρέως εφαρμόσιμη και η εφαρμογή του αλγορίθμου είναι μόνο ελαφρώς πιο περίπλοκη από τον κλασικό (2, p) αλγόριθμο σε ομοιόμορφο πλέγμα.

3.3 Ομοιόμορφο πλέγμα

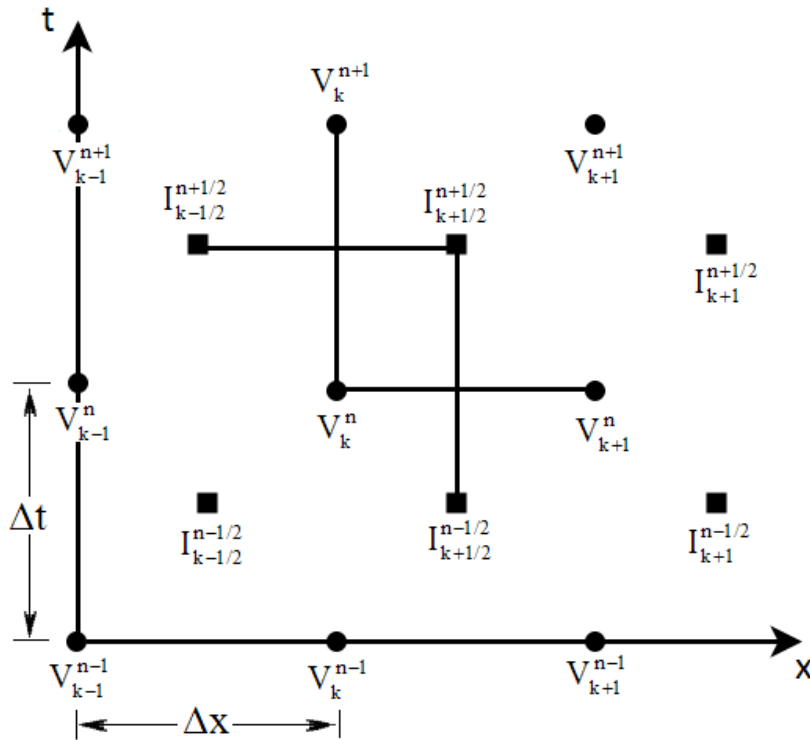
3.3.1 Επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων

Στην ενότητα αυτή θα επιλύσουμε τις τηλεγραφικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον κλασικό (2, p) αλγόριθμο. Ας θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις τάσης και ρεύματος $V(x, t)$ και $I(x, t)$ μιας γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{C(x)} \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{L(x)} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (3.4)$$

όπου $C(x)$ είναι η ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα και $L(x)$ είναι η ανά μονάδα μήκους επαγωγή της γραμμής μεταφοράς. Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.3) στο σημείο $(k\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$, το οποίο φαίνεται στην Εικόνα 3.1, και αντικαθιστώντας



Εικόνα 3.1: Η διάταξη των κόμβων του ρεύματος και της τάσης στον χώρο και τον χρόνο.

τις χωρικές και χρονικές παραγώγους με δεύτερης τάξης προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών στον χώρο και χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\Delta t} = -\frac{1}{C_k} \frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \quad (3.5)$$

Λύνοντας ως προς V_k^{n+1} έχουμε:

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{C_k \Delta x} (I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}), \quad (3.6)$$

όπου $V_k^n = V(k\Delta x, n\Delta t)$, $I_{k+1/2}^{n+1/2} = I((k+1/2)\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$ κτλ. Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.4) στο σημείο $((k+1/2)\Delta x, n\Delta t)$, προκύπτει:

$$\frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{L_{k+1/2}} \frac{V_{k+1}^n - V_k^n}{\Delta x}. \quad (3.7)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3.7) ως προς $V_{k+1/2}^{n+1/2}$ έχουμε:

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{L_{k+1/2}\Delta x} (V_{k+1}^n - V_k^n). \quad (3.8)$$

Από την άλλη πλευρά, λύνοντας τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) χρησιμοποιώντας τέταρτης τάξης προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών στον χώρο παίρνουμε ως αποτέλεσμα:

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{C_k \Delta x} \left[\frac{9}{8} (I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}) - \frac{1}{24} (I_{k+3/2}^{n+1/2} - I_{k-3/2}^{n+1/2}) \right], \quad (3.9)$$

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{L_{k+1/2}\Delta x} \left[\frac{9}{8} (V_{k+1}^n - V_k^n) - \frac{1}{24} (V_{k+2}^n - V_{k-1}^n) \right]. \quad (3.10)$$

Όπως είπαμε στο Κεφάλαιο 2 η χρήση προσεγγίσεων μεγαλύτερης τάξης δίνει μικρότερα σφάλματα διασποράς και πετυχαίνει υψηλότερα επίπεδα ακρίβειας.

Πίνακας 3.1

Συντελεστές q_s για την p -οστή τάξη ακρίβειας της μεθόδου FDTD

p	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
2	1	0	0	0	0
4	$\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0	0	0
6	$\frac{75}{64}$	$-\frac{25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0	0
8	$\frac{1225}{1024}$	$-\frac{245}{3072}$	$\frac{49}{5120}$	$-\frac{5}{7168}$	0
10	$\frac{19854}{16384}$	$-\frac{735}{8192}$	$\frac{567}{40960}$	$-\frac{405}{229376}$	$\frac{35}{294912}$

Γενικά, οι λύσεις των εξισώσεων (3.3) και (3.4) για τον $(2, p)$ αλγόριθμο είναι:

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{C_k \Delta x} \sum_{s=1}^{p/2} q_s (I_{k+s-1/2}^{n+1/2} - I_{k-s+1/2}^{n+1/2}), \quad (3.11)$$

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{L_{k+1/2} \Delta x} \sum_{s=1}^{p/2} q_s (V_{k+s}^n - V_{k-s+1}^n). \quad (3.12)$$

Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει τους πιο συχνά χρησιμοποιημένους q_s συντελεστές, οι οποίοι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σειρές Taylor όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Οι εξισώσεις (3.11) και (3.12) υπολογίζονται για N_t χρονικά βήματα, υποθέτοντας ότι υπάρχουν N_x κόμβοι ρεύματος και $N_x + 1$ κόμβοι τάσης, και ότι οι κόμβοι V_0^n και $V_{N_x}^n$ ανανεώνονται ξεχωριστά μέσω εξισώσεων που προέρχονται από την συνθήκη απορρόφησης Mur πρώτης τάξης.

3.3.2 Χωρική ανάλυση και συνθήκη ευστάθειας

Όταν χρησιμοποιείται ένα πλέγμα δειγματοληψίας, το μέγεθος του κελιού Δx , που καθορίζει τη χωρική ανάλυση του πλέγματος, πρέπει να είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιόπιστη δειγματοληψία των κυματομορφών της τάσης και του ρεύματος. Οπότε, το μέγεθος του κελιού Δx πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη ακρίβειας. Για να ικανοποιηθεί αυτή η συνθήκη, τυπικά το Δx επιλέγεται συνήθως ως:

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{\min}}{10}, \quad (3.13)$$

όπου λ_{\min} είναι το μικρότερο μήκος κύματος στο πλέγμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\lambda_{\min} = \min_{x=x_0}^{x_0+\ell} \{\lambda(x)\}, \quad (3.14)$$

όπου x_0 είναι η θέση όπου ο άξονας x είναι μηδέν και $\lambda(x)$ είναι το μήκος κύματος στη θέση x και ισούται με:

$$\lambda(x) = \frac{1}{f_{\max} \sqrt{L(x)C(x)}}, \quad (3.15)$$

όπου f_{\max} είναι η μέγιστη συχνότητα που προέρχεται από την πηγή και ℓ είναι το μήκος της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς κατά μήκος του άξονα x .

Αφού επιλεγεί το κατάλληλο Δx , πρέπει να επιλεγεί το χρονικό βήμα Δt έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ευστάθεια του αλγορίθμου (2, p). Η ευστάθεια εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι σχετικά ευαίσθητο σε σφάλματα, που προέρχονται από προσεγγίσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Σε διαφορετική περίπτωση τα σφάλματα αυτά οδηγούν σε ανακριβείς αποτελέσματα. Για να ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{s=1}^{p/2} |q_s| \leq \frac{\Delta x}{c_{\max} \Delta t}, \quad (3.16)$$

όπου c_{\max} είναι η μέγιστη ταχύτητα του φωτός στη γραμμή μεταφοράς και δίνεται από την σχέση:

$$c_{\max} = \max_{x=x_0}^{x_0+\ell} \{f_{\max} \lambda(x)\}. \quad (3.17)$$

Σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν πολλές μεταβολές του $\lambda(x)$, θα υπάρχουν περιοχές όπου οι κυματομορφές της τάσης και του ρεύματος θα υπερδειγματοληπτούνται. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την χρήση μη ομοιόμορφου πλέγματος διακριτοποίησης. Ωστόσο, πριν παρουσιάσουμε πώς θα γίνει αυτό, είναι απαραίτητο να δούμε τα διαφορετικά επίπεδα ανάλυσης που απαιτούνται από τις διάφορες περιοχές της μη ομοιόμορφης γραμμή μεταφοράς.

Για αυτό το σκοπό, χωρίζουμε τον άξονα σε x σε M μη επικαλυπτόμενες περιοχές, όπου η m -οστή περιοχή βρίσκεται ορίζεται από το διάστημα $[x_{m-1}, x_m]$. Ο διαχωρισμός πρέπει να γίνει έτσι ώστε να μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα μέγεθος κελιού Δx_m που δεν υπερδειγματοληπτεί ούτε υποδειγματοληπτεί τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος μέσα στην m -οστή περιοχή. Αυτό επιτυγχάνεται απαιτώντας την ικανοποίηση της παρακάτω συνθήκης:

$$\frac{\lambda_{\min,m}}{50} \leq \Delta x_m \leq \frac{\lambda_{\min,m}}{10}, \quad (3.18)$$

όπου $\lambda_{\min,m}$ είναι το μικρότερο μήκος κύματος στην περιοχή m και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\lambda_{\min,m} = \min_{x=x_{m-1}}^{x_m} \{\lambda(x)\}. \quad (3.19)$$

Από δω και στο εξής, οι περιοχές για τις οποίες ισχύει:

$$\Delta x_m \approx \Delta x_{\max}, \quad (3.20)$$

όπου Δx_{\max} είναι το μεγαλύτερο μέγεθος κελιού των περιοχών M και δίνεται από την σχέση:

$$\Delta x_{\max} = \max_{m=1}^M \{ \Delta x_m \}, \quad (3.21)$$

θα ονομάζονται περιοχές κύριου πλέγματος (main grid region). Ενώ, οι υπόλοιπες περιοχές θα ονομάζονται περιοχές πυκνότερου πλέγματος (refined grid regions) επειδή απαιτούνται μεγαλύτερα επίπεδα ανάλυσης σε αυτές τις περιοχές.

3.4 Μη ομοιόμορφο πλέγμα

3.4.1 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που μπορεί να μετασχηματίσει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα όπου οι κλασικές (2, p) εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν.

Ας θεωρήσουμε το μετασχηματισμό συντεταγμένων $x = f(\bar{x})$. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό στις εξισώσεις (3.3) και (3.4) προκύπτει:

$$\frac{\partial V(\bar{x}, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\bar{C}(\bar{x})} \frac{\partial I(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}}, \quad (3.22)$$

$$\bar{C}(\bar{x}) = C(\bar{x})f'(\bar{x}), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial I(\bar{x}, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\bar{L}(\bar{x})} \frac{\partial V(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}}, \quad (3.24)$$

$$\bar{L}(\bar{x}) = L(\bar{x})f'(\bar{x}). \quad (3.25)$$

Βλέποντας της εξισώσεις (3.22) και (3.24) παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια μορφή με τις (3.3) και (3.4). Αυτή η ιδιότητα, που ονομάζεται μετρικό αναλλοίωτο (metrical invariance) [24], συνεπάγεται ότι οι εξισώσεις (3.23) και (3.25) μπορούν να λυθούν αριθμητικά στον χώρο (\bar{x}, t) χρησιμοποιώντας τις (3.11) και (3.12) έχοντας αντικαταστήσει τα Δx , C_k και $L_{k+1/2}$ με τα $\Delta \bar{x}$, \bar{C}_k και $\bar{L}_{k+1/2}$ αντίστοιχα. Έχοντας παρουσιάσει τις νέες χωρικές συντεταγμένες, το ζήτημα που προκύπτει είναι, εάν δοθέντος ενός ομοιόμορφου πλέγματος που χρησιμοποιείται στον χώρο (\bar{x}, t) , πώς μπορεί να κατασκευαστεί η $f(\bar{x})$, έτσι ώστε το αντίστοιχο πλέγμα στον χώρο (x, t) να είναι μη ομοιόμορφο με επαρκή πυκνότητα από κόμβους πλέγματος. Πριν

αναφερθούμε σε αυτό το ζήτημα, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνάρτηση $f(\bar{x})$ πρέπει να ικανοποιεί δύο σημαντικές ιδιότητες:

1. Να είναι ένα προς ένα.
2. Να είναι συνεχής με συνεχή πρώτη παράγωγο.

Η πρώτη ιδιότητα απαιτείται έτσι ώστε όλα τα στοιχεία να είναι μοναδικά προσδιορισμένα και στα δυο χωρικά πεδία. Η δεύτερη ιδιότητα απαιτείται έτσι ώστε να μην παρουσιάζονται τεχνητές ασυνέχειες όταν κανονικοποιούμε τις παραμέτρους $\bar{C}(\bar{x})$ και $\bar{L}(\bar{x})$, γεγονός το οποίο θα μπορούσε να προκαλέσει αφύσικες ανακλάσεις. Ένας απλός μετασχηματισμός, που ικανοποιεί αυτές τις δύο ιδιότητες, παρουσιάζεται παρακάτω.

Για ευκολία, θα ασχοληθούμε με την αντίστροφη σχέση $\bar{x} = f^{-1}(x)$ αντί για την $x = f(\bar{x})$. Ο προτεινόμενος μετασχηματισμός συντεταγμένων δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\bar{x} = f^{-1}(x) = x + \varphi(x) , \quad (3.26)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^M a_m d_m (1 + 2g_m) \phi_m(x) , \quad (3.27)$$

$$a_m = \frac{\Delta x_{\max}}{\Delta x_m} - 1 , \quad (3.28)$$

$$d_m = x_m - x_{m-1} , \quad (3.29)$$

$$\phi_m(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{m-1} - g_m d_m \\ \phi_m(x), & x_{m-1} - g_m d_m \leq x \leq x_m + g_m d_m \\ 1, & x > x_m + g_m d_m \end{cases} , \quad (3.30)$$

$$\phi_m(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(x - x_{m-1} - g_m d_m)}{d_m(1 + 2g_m)} \right) \right) , \quad (3.31)$$

όπου g_m είναι μία παράμετρος προσαρμογής πλέγματος (unitless grid adjustment parameter) στο διάστημα $0 \leq g_m \leq 1$. Για να καταλάβουμε πώς λειτουργεί ο προτεινόμενος μετασχηματισμός, παρατηρούμε ότι όταν ισχύει $a_m = 0$ τότε παίρνουμε ως αποτέλεσμα $\bar{x} = x$. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή του κύριου πλέγματος θα έχει το ίδιο μέγεθος κελιού στο πλέγμα και των δύο πεδίων. Στην m -οστή περιοχή πυκνότερου πλέγματος, όπου $a_m > 0$, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων προσθέτει

μια συνάρτηση βήματος $\phi_m(x)$ που επεκτείνει αποτελεσματικά τις αποστάσεις, τουλάχιστον κατά έναν παράγοντα $\Delta x_{\max} / \Delta x_m$, καθώς μεταφερόμαστε από τον χώρο (x, t) στον χώρο (\bar{x}, t) . Αυτή η μετατροπή δημιουργεί μεγαλύτερη πυκνότητα κόμβων στην περιοχή πυκνότερου πλέγματος.

Όταν χρησιμοποιείται ο προτεινόμενος μετασχηματισμός συντεταγμένων, ο χρήστης πρέπει να ακολουθήσει την παρακάτω διαδικασία. Ως πρώτο βήμα, μια τιμή του g_m πρέπει να επιλεγεί για κάθε περιοχή. Αυτή η παράμετρος καθορίζει την πυκνότητα των κόμβων στα σύνορα της m -οστής περιοχής ελέγχοντας πόσο μακριά η $\phi_m(x)$ θα επεκταθεί μετά το x_m και πριν το x_{m-1} . Ως δεύτερο βήμα, πρέπει να υπολογιστεί το μήκος της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς κατά μήκος του άξονα \bar{x} . Το μήκος δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\bar{\ell} = f^{-1}(x_M) - f^{-1}(x_0) \quad (3.32)$$

Το τρίτο βήμα είναι να καθορίσουμε ένα ομοιόμορφο σύνολο κόμβων. Αυτό γίνεται καθορίζοντας το \bar{x}_k ως:

$$\bar{x}_k = k\Delta x_{\max}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, N_x, \quad (3.33)$$

όπου Δx_{\max} είναι το μέγεθος κελιού του ομοιόμορφου πλέγματος στον χώρο (\bar{x}, t) , και μπορούμε να το επαναπροσδιορίσουμε ως $\Delta \bar{x} = \Delta x_{\max}$. Ο συνολικός αριθμός των N_x κόμβων καθορίζεται ως:

$$N_x = \frac{\bar{\ell}}{\Delta \bar{x}}, \quad (3.34)$$

όπου το $\Delta \bar{x}$ επιλέγεται με βάση το κριτήριο ακρίβειας ως:

$$\frac{\lambda_{\max}}{50} \leq \Delta \bar{x} \leq \frac{\lambda_{\max}}{10}, \quad (3.35)$$

$$\lambda_{\max} = \max_{m=1}^M \{\lambda_{\min,m}\}. \quad (3.36)$$

Ως τέταρτο βήμα, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις του μετασχηματισμού για να καθορίσουμε τις παραμέτρους:

$$x_k = f(\bar{x}_k), \quad (3.37)$$

$$x_{k+1/2} = f(\bar{x}_{k+1/2}), \quad (3.38)$$

$$x'_k = f'(\bar{x}_k), \quad (3.39)$$

$$x'_{k+1/2} = f'(\bar{x}_{k+1/2}), \quad (3.40)$$

σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Ως πέμπτο βήμα, οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.39) και (3.40), και προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\bar{C}_k = C_k f'(\bar{x}_k), \quad (3.41)$$

$$\bar{L}_{k+1/2} = L_{k+1/2} f'(\bar{x}_{k+1/2}). \quad (3.42)$$

Τέλος, έχοντας υπολογίσει τις ανά μονάδα μήκους παραμέτρους, ο χρήστης μπορεί να συνεχίσει εκτελώντας τον κλασικό αλγόριθμο FDTD στον χώρο (\bar{x}, t) .

3.4.2 Ζητήματα εφαρμογής και κριτήρια ευστάθειας

Όταν λύνουμε ένα πρόβλημα μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό συντεταγμένων, τρία σημαντικά πρακτικά ζητήματα προκύπτουν. Το πρώτο ζήτημα είναι ότι για να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός, πρέπει να ξέρουμε την συνάρτηση $x = f(\bar{x})$ στα σημεία $\bar{x}_k = k\Delta\bar{x}$ για όλα τα $k = 0, 1, 2, \dots, N_x$. Ενώ είναι δυνατόν να αντιστραφεί αναλυτικά η συνάρτηση (3.26) έτσι ώστε να βρεθούν οι (3.37) και (3.38), ο πιο εύκολος τρόπος για να υπολογιστούν αυτές οι συναρτήσεις είναι μέσω μιας μεθόδου παρεμβολής (interpolation) που τις υπολογίζει από τα δεδομένα μιας γραφικής παράστασης του $f^{-1}(x)$ και του x . Το δεύτερο ζήτημα είναι ότι για να υπολογιστούν οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι (3.41) και (3.42), είναι απαραίτητο να είναι γνωστή η παράγωγος $f'(\bar{x}_k)$. Αφού τα x_k έχουν υπολογιστεί, ο πιο εύκολος τρόπος για να γίνει αυτό είναι η χρήση της σχέσης:

$$\frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x). \quad (3.43)$$

Η παράγωγος της $f^{-1}(x)$ μπορεί να εκφραστεί από την (3.26).

Το τρίτο και πιο σημαντικό ζήτημα είναι η ευστάθεια του της μεθόδου FDTD στον χώρο (\bar{x}, t) . Επειδή οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι έχουν κανονικοποιηθεί, το κριτήριο ευστάθειας (3.16) πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Κάνοντας τις αλλαγές $x \rightarrow \bar{x}$, $C \rightarrow \bar{C}$ και $L \rightarrow \bar{L}$ στην (3.16) οδηγούμαστε στο καινούργιο κριτήριο ευστάθειας:

$$\sum_{s=1}^{p/2} |q_s| \leq \frac{\Delta \bar{x}}{c_{\max} \Delta t} \min_{\bar{x}=\bar{x}_0}^{\bar{x}_0+\ell} \{|f'(\bar{x})|\} , \quad (3.44)$$

το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλεγεί το κατάλληλο χρονικό βήμα Δt . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η κανονικοποίηση των ανά μονάδα μήκους παραμέτρων δεν αλλάζει την δομή των τηλεγραφικών εξισώσεων.

4

Υπολογιστική μελέτη ομοαξονικών καλωδίων με ασυνέχειες

4.1 Γενικά

Σε ένα μεγάλο αριθμό από προβλήματα και εφαρμογές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αναφέρεται συχνά η χρήση ομοαξονικών αγωγών ή καλωδίων (coaxial cable). Το ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από ένα κεντρικό πυρήνα (center core) που είναι ένας συμπαγής κυλινδρικός αγωγός με μικρή σχετικά διάμετρο (της τάξης του 1mm). Γύρω από το κεντρικό σύρμα υπάρχει πλαστικό μονωτικό (dielectric insulator). Πάνω στο μονωτικό αυτό υπάρχει ο δεύτερος αγωγός, ο θώρακας (metallic shield), σε μορφή μεταλλικού πλέγματος ή λεπτού μεταλλικού σωλήνα. Ο θώρακας μονώνεται ηλεκτρικά από το περιβάλλον με έναν εξωτερικό πλαστικό μανδύα (plastic jacket). Στην Εικόνα 4.1 φαίνεται η δομή του ομοαξονικού καλωδίου.



Εικόνα 4.1: Η δομή του ομοαξονικού καλωδίου. (Η εικόνα είναι από την ιστοσελίδα http://en.wikipedia.org/wiki/Coaxial_cable)

Το ομοαξονικό καλώδιο χρησιμοποιείται σαν γραμμή μεταφοράς για σήματα ραδιοσυχνοτήτων. Οι εφαρμογές του περιλαμβάνουν την σύνδεση ραδιομεταδοτών και ραδιοδεκτών με τις κεραίες τους, τις συνδέσεις ηλεκτρονικών υπολογιστών με το διαδίκτυο και την μεταφορά σημάτων μέσω καλωδίων τηλεόρασης. Ένα πλεονέκτημα του ομοαξονικού καλωδίου σε σχέση με άλλες γραμμές μεταφοράς είναι ότι σε ένα ιδανικό ομοαξονικό καλώδιο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που μεταφέρει το σήμα υφίσταται μόνο στο χώρο ανάμεσα στους εσωτερικούς και εξωτερικούς αγωγούς. Αυτό επιτρέπει στο ομοαξονικό καλώδιο να μπορεί να εγκαθίσταται δίπλα σε μεταλλικά αντικείμενα, όπως υδρορροές, χωρίς τις παρεμβολές που συναντώνται σε άλλου είδους γραμμές μεταφοράς.

4.2 Προσομοίωση του προβλήματος

4.2.1 Παράμετροι και περιοχές της γραμμής μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε ένα ανομοιογενές ομοαξονικό καλώδιο που περιέχει δύο πλάκες διηλεκτρικού υλικού, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2. Ο στόχος σε αυτήν την ενότητα είναι να υπολογίσουμε το συντελεστή ανάκλασης της συγκεκριμένης διάταξης. Η προσομοίωση του προβλήματος θα γίνει μέσω της πλατφόρμας Matlab. Όπως περιγράφεται στην [25], σε ένα ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικές ασυνέχειες οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι αυτεπαγωγής και χωρητικότητας δίνονται από:

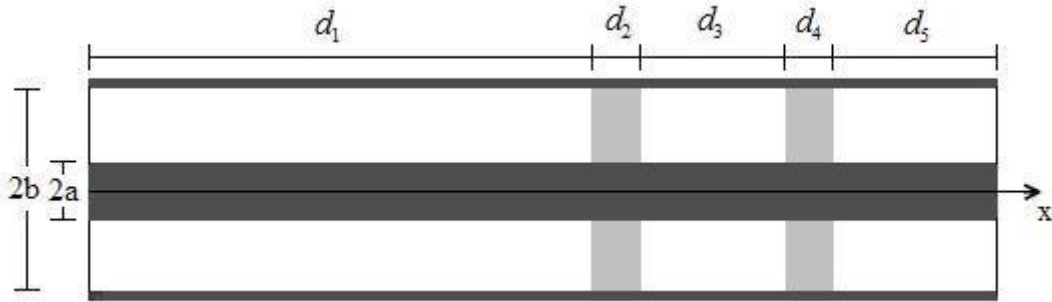
$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (4.1)$$

$$C(x) = 2\pi\epsilon_r(x)\epsilon_0 \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{-1}, \quad (4.2)$$

όπου a είναι η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού και b η ακτίνα του εξωτερικού αγωγού. Για ευκολία, θα θεωρήσουμε ότι $b/a = e$, έτσι ώστε οι ανά μονάδα μήκους παράμετροι να γίνουν:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}, \quad (4.3)$$

$$C(x) = 2\pi\epsilon_r(x)\epsilon_0. \quad (4.4)$$



Εικόνα 4.2: Οι περιοχές του ομοαξονικού καλωδίου.

Πίνακας 4.1

Παράμετροι μη ομοιόμορφου πλέγματος.

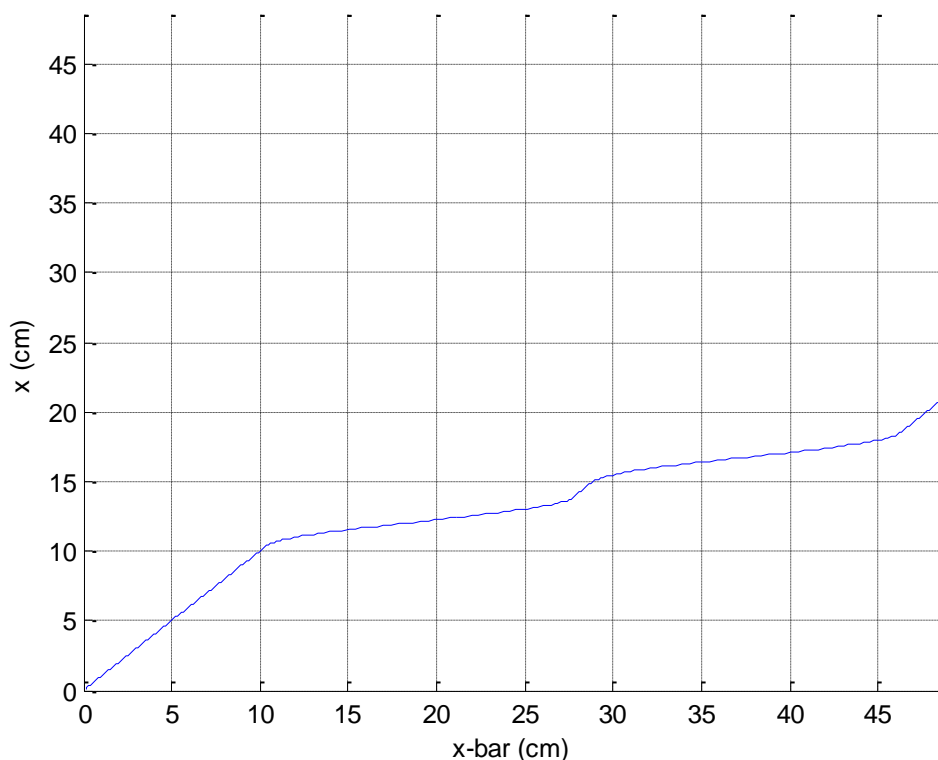
m	d_m	x_m	λ_{min,m}	a_m	g_m
0	-	0 cm	-	-	-
1	11.56 cm	11.56 cm	λ ₀ / 10	0	0
2	1.16 cm	12.72 cm	λ ₀ / 50	4	1
3	3.46 cm	16.18 cm	λ ₀ / 10	0	0
4	1.26 cm	17.34 cm	λ ₀ / 50	4	1
5	3.47 cm	20.81 cm	λ ₀ / 10	0	0

Το συνολικό μήκος του καλωδίου είναι 20.81 εκατοστά, ενώ τα μήκη των επιμέρους τμημάτων του καλωδίου $d_1 - d_5$ δίνονται από την δεύτερη στήλη του Πίνακα 4.1. Για λόγους σύγκρισης των αποτελεσμάτων οι τιμές της συνάρτησης της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς για κάθε περιοχή είναι ίδιες με αυτές τις εργασίας [12], και ισούνται με:

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} 1, & x_0 \leq x \leq x_1 & (\text{περιοχή 1}) \\ 25, & x_1 \leq x \leq x_2 & (\text{περιοχή 2}) \\ 1, & x_2 \leq x \leq x_3 & (\text{περιοχή 3}) \\ 25, & x_3 \leq x \leq x_4 & (\text{περιοχή 4}) \\ 1, & x_4 \leq x \leq x_5 & (\text{περιοχή 5}) \end{cases}, \quad (4.5)$$

όπου $x_0 - x_5$ δίνονται στην τρίτη στήλη του Πίνακα 4.1. Υποθέτοντας ότι η μέγιστη συχνότητα που διεγείρεται είναι $f_{\max} = 20 \text{ GHz}$, το μέγιστο μέγεθος κελιού που

μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να μπορεί μοντελοποιήσει επαρκώς κάθε μια από τις πέντε περιοχές του ομοαξονικού καλωδίου δίνεται στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 4.1, όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος στο κενό στη συχνότητα f_{\max} και ισούται με 1.5 εκατοστά. Από αυτή τη λίστα των τιμών, είναι εμφανές ότι για να δειγματοληπτήσουμε με ικανοποιητική αξιοπιστία τις κυματομορφές της τάσης και του ρεύματος, οι περιοχές 2 και 4 απαιτούν μεγαλύτερη πυκνότητα σημείων του πλέγματος που είναι τουλάχιστον πέντε φορές μεγαλύτερη από αυτήν των περιοχών 1, 3 και 5. Για αυτό το λόγο, μια αριθμητική λύση που να αξιοποιεί με βέλτιστο τρόπο τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτεί την χρήση ενός μη ομοιόμορφου πλέγματος διακριτοποίησης.



Εικόνα 4.3: Διάγραμμα σύγκρισης της $f(\bar{x})$ με την $f^{-1}(x)$.

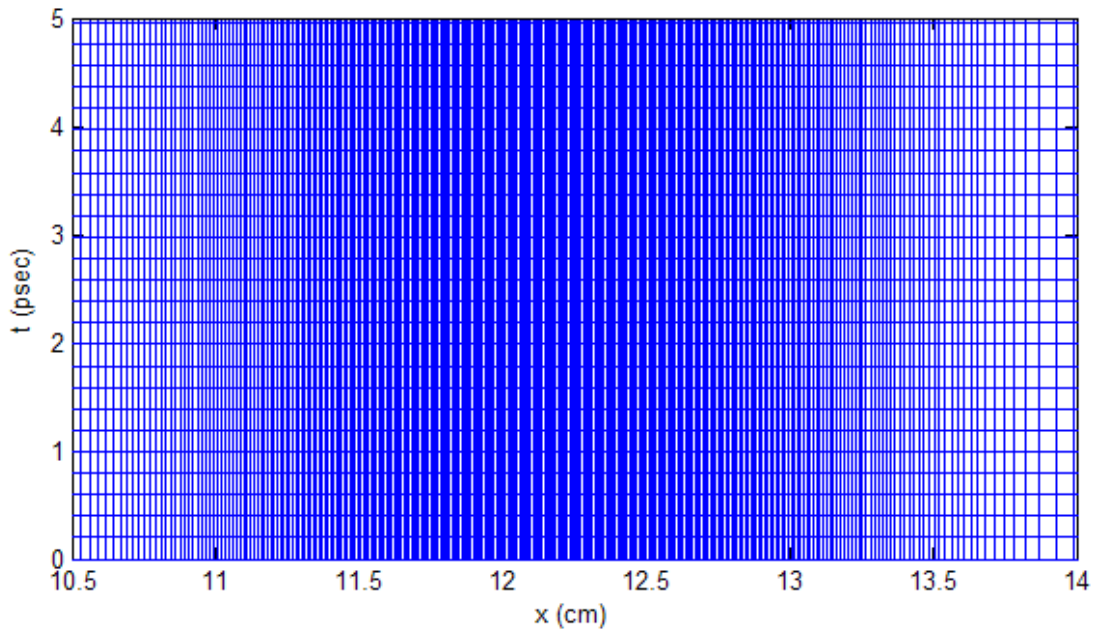
Για ευκολία, οι ίδιες περιοχές που χρησιμοποιήθηκαν στην (4.5) για να προσδιοριστεί το $\varepsilon_r(x)$, χρησιμοποιήθηκαν επίσης και για να προσδιοριστεί ο διαχωρισμός του άξονα x που απαιτείται για να εφαρμοστεί η συνάρτηση (3.26). Όλες οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για να προσδιοριστεί η $f(\bar{x})$ για το

συγκεκριμένο πρόβλημα δίνονται από τον Πίνακα 4.1. Η Εικόνα 4.3 παριστάνει τα μήκη της γραμμής μεταφοράς στους στον άξονες \bar{x} και x . Ο άξονας \bar{x} παράγεται μέσω της συνάρτησης $f^{-1}(x)$ και ο x μέσω της $f(\bar{x})$. Παρατηρούμε ότι η μη ομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς είναι μεγαλύτερη στον άξονα \bar{x} , έχοντας μήκος $\bar{\ell} = 48.61$ εκατοστά, από ότι στον άξονα x , όπου το πραγματικό μήκος είναι $\ell = 20.81$ εκατοστά. Αυτό συμβαίνει διότι η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ επεκτείνει τις αποστάσεις μέσω μιας συνάρτησης βήματος $\varphi(x)$ καθώς μεταφερόμαστε από τον χώρο (x, t) στο χώρο (\bar{x}, t) . Έχοντας προσδιορίσει την $f(\bar{x})$, το μόνο που απομένει για να παραχθεί το μη ομοιόμορφο πλέγμα είναι ο ορισμός ενός συνόλου ομοιόμορφων χωρικών κόμβων στο χώρο (\bar{x}, t) . Αυτό γίνεται θέτοντας στις παραμέτρους του πλέγματος τις τιμές που έχει η πρώτη γραμμή του Πίνακα 4.2. Η επιλογή αυτών των παραμέτρων έγινε με βάση τα κριτήρια (3.34), (3.35) και (3.44) για $p \leq 4$. Ο συνολικός αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα \bar{x} επιλέχθηκε έτσι ώστε ένας κόμβος τάσης να τοποθετείται σε κάθε σύνορο των υλικών.

Πίνακας 4.2
Παράμετροι των δυο πλεγμάτων.

Πλέγμα	$\Delta\bar{x}$	Δt	N_x	N_t
Ομοιόμορφο	0.1156 mm	0.21979 ps	841	2^{15}
Μη ομοιόμορφο	0.578 mm	0.21979 ps	1800	2^{15}

Στην Εικόνα 4.4 φαίνεται η πυκνότητα των κόμβων στην περιοχή 2 όπου βρίσκεται η πρώτη διηλεκτρική πλάκα. Παρατηρώντας την, βλέπουμε ότι καθώς μετακινούμαστε προς την περιοχή 2 η πυκνότητα του πλέγματος αυξάνεται. Τέλος, για να διατηρήσουμε σχετικά ομαλή την μετάβαση από την μια περιοχή στην άλλη και να μη δημιουργηθούν επιπλέον σφάλματα από την εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών κατά μήκος της ασυνέχειας, προσδιορίσαμε την επαγωγή και την χωρητικότητα στις διεπιφάνειες των περιοχών, υπολογίζοντας το μέσο όρο τους.



Εικόνα 4.4: Η πυκνότητα του πλέγματος της διηλεκτρικής πλάκας.

Για να γίνει καλύτερα κατανοητό πώς επιτυγχάνει ο μετασχηματισμός συντεταγμένων την κατασκευή του μη ομοιόμορφου πλέγματος, ας δούμε την Εικόνα 4.3. Παρατηρούμε ότι, στις περιοχές όπου η κλίση της καμπύλης είναι ίση με 45 μοίρες, τότε το μέγεθος των κελιών και στα δύο πεδία του χώρου είναι ίδιο διότι $x = \bar{x}$. Ωστόσο, στις περιοχές όπου η κλίση της καμπύλης είναι μικρότερη των 45 μοιρών, τότε ο μετασχηματισμός συντεταγμένων “επιμηκώνει” τις αποστάσεις καθώς πηγαίνουμε από το χώρο (x, t) στο χώρο (\bar{x}, t) . Όπως ειπώθηκε νωρίτερα, αυτή η επέκταση είναι η αιτία της αύξησης της πυκνότητας των σημείων του πλέγματος στο χώρο (x, t) . Επιπλέον βλέποντας την Εικόνα 4.3, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δυο περιοχές όπου η κλίση της $f(\bar{x})$ είναι μικρότερη των 45 μοιρών. Αυτές οι δύο περιοχές αντιστοιχούν στις περιοχές 2 και 4 της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς, όπου απαιτείται μεγαλύτερη πυκνότητα σημείων πλέγματος από ότι στις υπόλοιπες περιοχές του καλωδίου, εξαιτίας των διηλεκτρικών πλακών.

4.2.2 Υπολογισμός του συντελεστή ανάκλασης

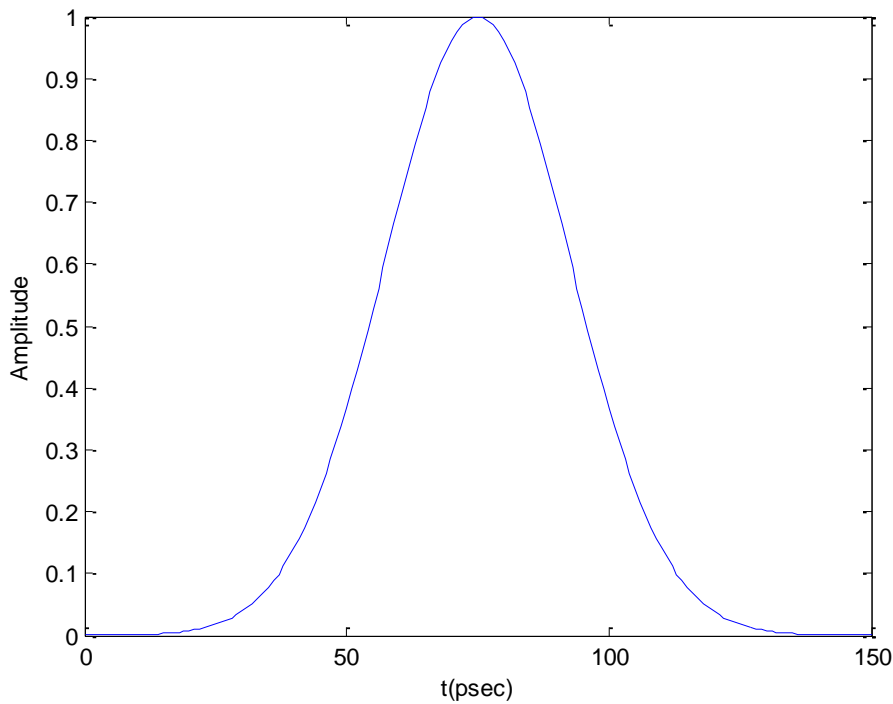
Για να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης, το ομοαξονικό καλώδιο διεγέρθηκε με έναν Γκαουσιανό παλμό (Gaussian pulse) της μορφής:

$$V_s(t) = e^{-\left(\frac{t-3T_s}{T_s}\right)^2}, \quad (4.6)$$

όπου $T_s = 1/2f_{\max}$. Ο όρος $3T_s$ είναι η χρονική καθυστέρηση του παλμού, και ο όρος T_s είναι το μισό πλάτος του παλμού. Ο παλμός, ο οποίος απεικονίζεται στην Εικόνα 4.5, προστίθεται σε κάθε χρονικό βήμα στο κόμβο τάσης που βρίσκεται στο σημείο $x=5.72$ εκατοστά. Η εξίσωση ανανέωσης της πηγής είναι:

$$V_{sk}^{n+1} = V_{sk}^n - \frac{\Delta t}{C_k \Delta x} (I_{k+s-1/2}^{n+1/2} - I_{k-s+1/2}^{n+1/2}) + e^{-\left(\frac{(n+1)\Delta t - 3T_s}{T_s}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Η τιμή του χρονικού βήματος και ο αριθμός των χρονικών βημάτων που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στην τρίτη και πέμπτη στήλη αντίστοιχα του Πίνακα 4.2.



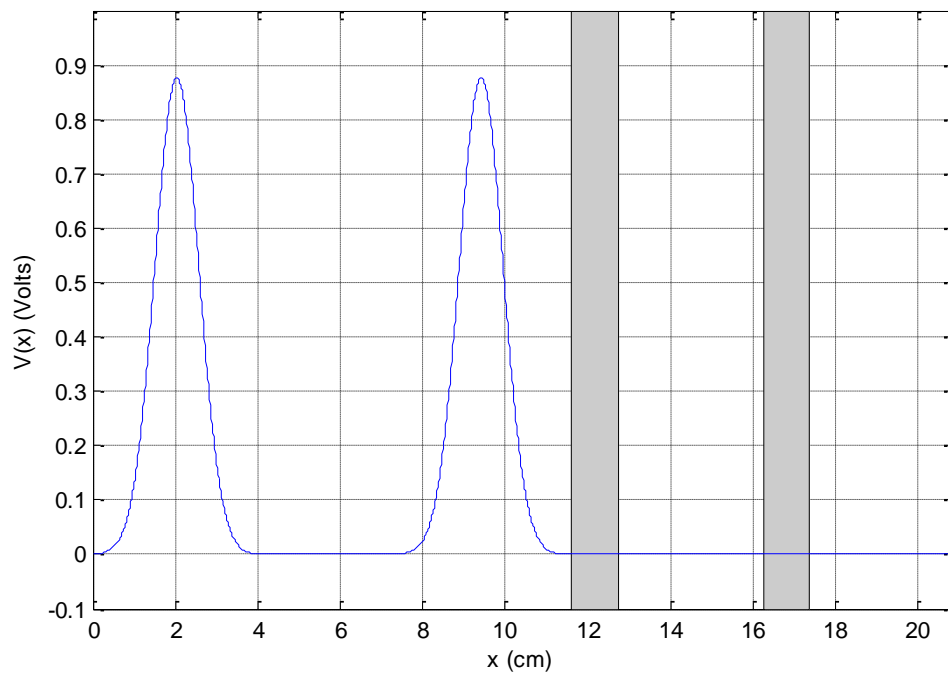
Εικόνα 4.5: Γραφική παράσταση του Γκαουσιανού παλμού.

Κατά τα γνωστά, ο συντελεστής ανάκλασης δίνεται από την σχέση:

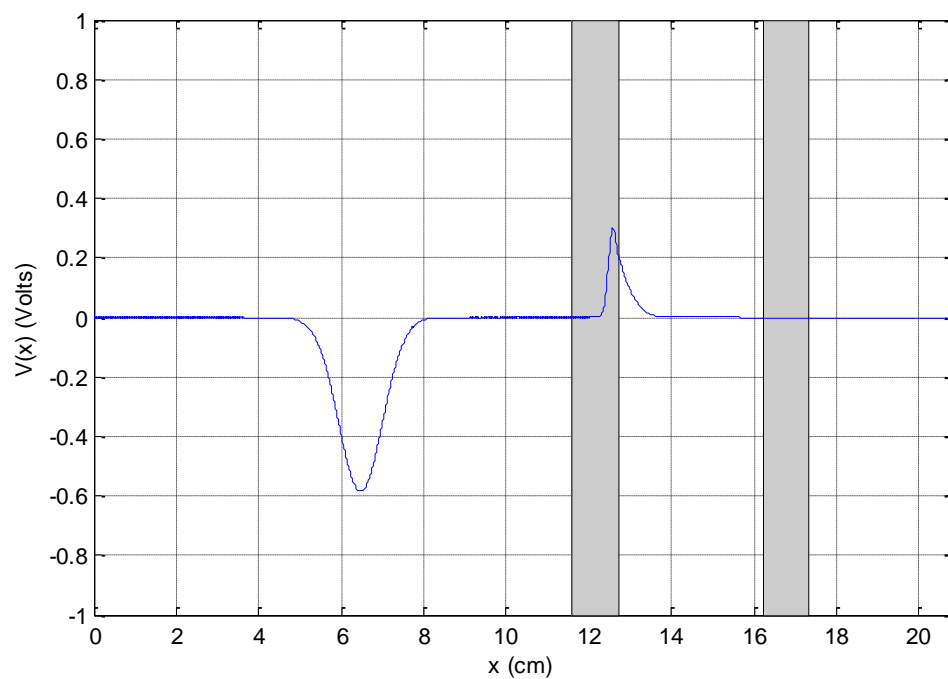
$$\Gamma = \frac{V_{\text{refl.}(\omega)}}{V_{\text{inc.}(\omega)}}, \quad (4.8)$$

όπου $V_{\text{refl.}(\omega)}$ είναι ο ανακλώμενος παλμός και $V_{\text{inc.}(\omega)}$ ο προσπίπτων. Ο υπολογισμός του συντελεστή ανάκλασης Γ έγινε στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιώντας το διακριτό μετασχηματισμό Fourier των δύο σημάτων. Οι ανακλώμενοι και

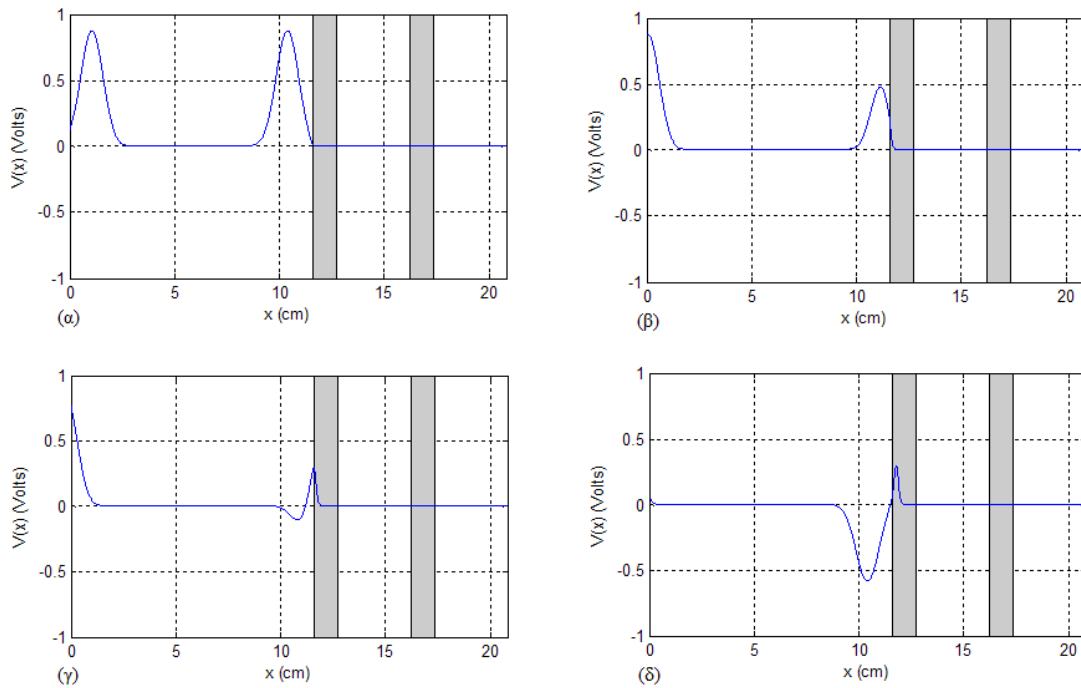
προσπίπτων παλμοί δειγματοληπτήθηκαν στον κόμβο που βρίσκεται στο σημείο $x=8.02$ εκατοστά.



Εικόνα 4.6: Κυματομορφή τάσης.



Εικόνα 4.7: Ανακλώμενος παλμός



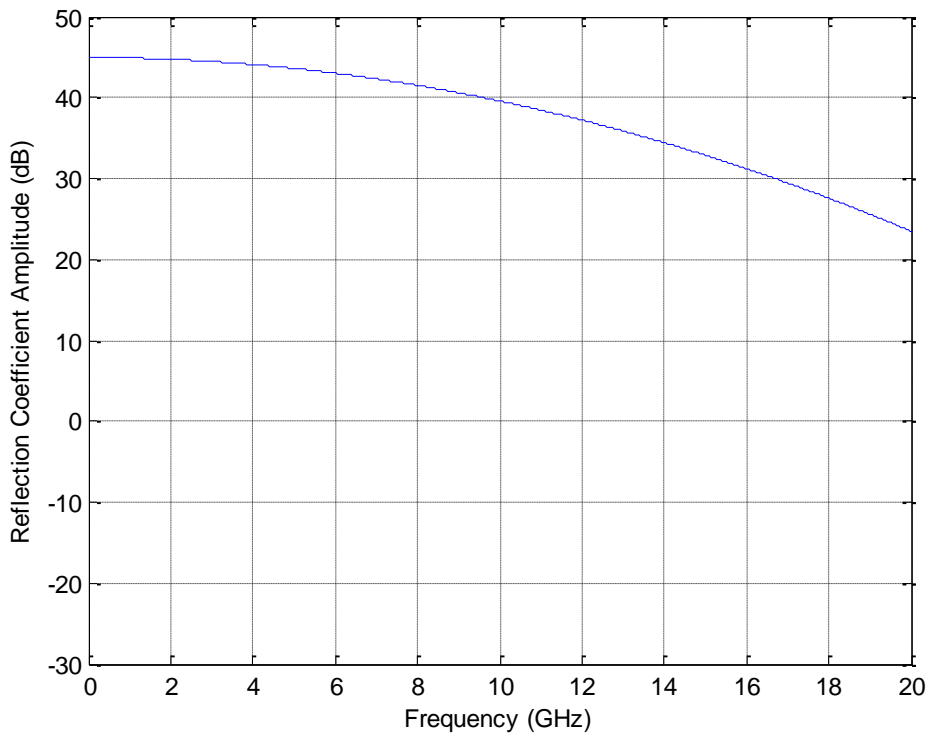
Εικόνα 4.8: Δημιουργία ανακλώμενου παλμού τις χρονικές στιγμές: (α) $t=230.78\text{ps}$. (β) $t=263.75\text{ps}$. (γ) $t=274.74\text{ps}$. (δ) $t=307.71\text{ps}$.

Βλέποντας την Εικόνα 4.6 παρατηρούμε ότι οι παλμοί που δημιουργήθηκαν είναι δύο, το γεγονός αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η πηγή δεν βρίσκεται σε ένα από τα δύο άκρα της γραμμής μεταφοράς. Στις Εικόνες 4.7 και 4.8 απεικονίζεται το ανακλώμενο κύμα καθώς και η δημιουργία του στις χρονικές στιγμές που προσκρούει στην πρώτη περιοχή ασυνέχειας.

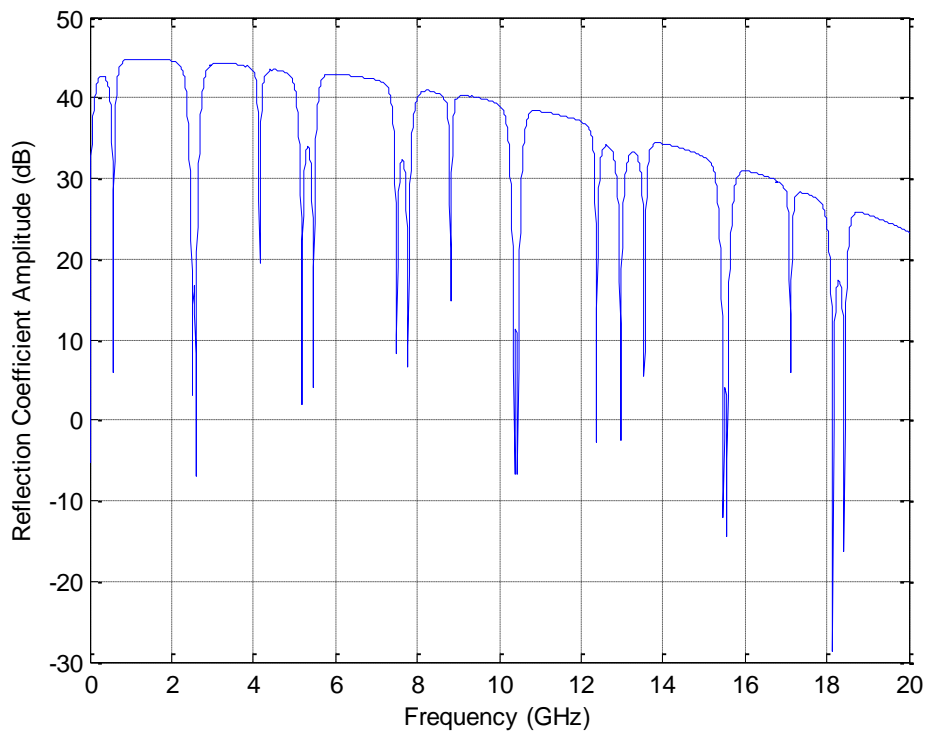
Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης υπολογίσαμε αναλυτικά το συντελεστή ανάκλασης Γ_N [26] (βλέπε Παράρτημα). Η σύγκριση των αποτελεσμάτων θα γίνει μέσω διαγραμμάτων του $|\Gamma|$ μαζί με το $|\Gamma_N|$, και μέσω διαγραμμάτων του $|\Gamma_{\text{error}}|$, δηλαδή το σφάλμα στον υπολογισμό του πλάτους του συντελεστή ανάκλασης. Η συνάρτηση Γ_{error} υπολογίζεται από την σχέση:

$$\Gamma_{\text{error}} = |\Gamma| - |\Gamma_N|. \quad (4.9)$$

Στις Εικόνες 4.9 και 4.10 αναπαριστώνται τα πλάτη των μετασχηματισμών Fourier του προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος αντίστοιχα.



Εικόνα 4.9: Πλάτος του προσπίπτοντος κύματος στο πεδίο της συχνότητας.



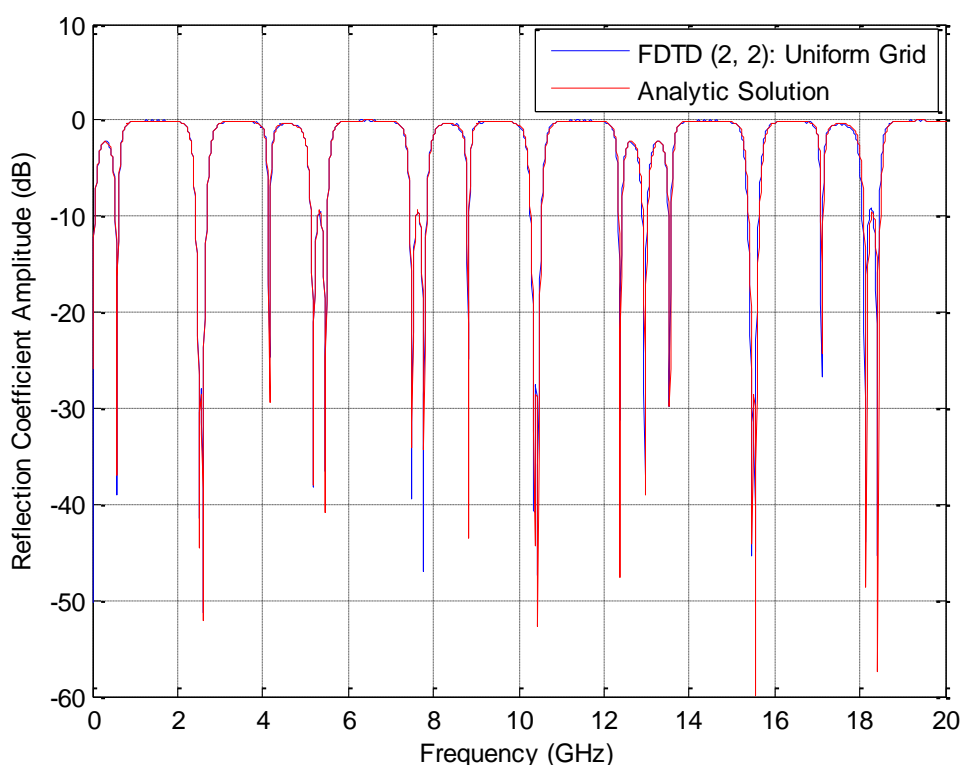
Εικόνα 4.10: Πλάτος του ανακλώμενου κύματος στο πεδίο της συχνότητας.

4.2.3 Συγκριτική μελέτη της απόδοσης του αλγορίθμου FDTD με 2^{ης} και 4^{ης} τάξης ακρίβειας χωρικούς τελεστές

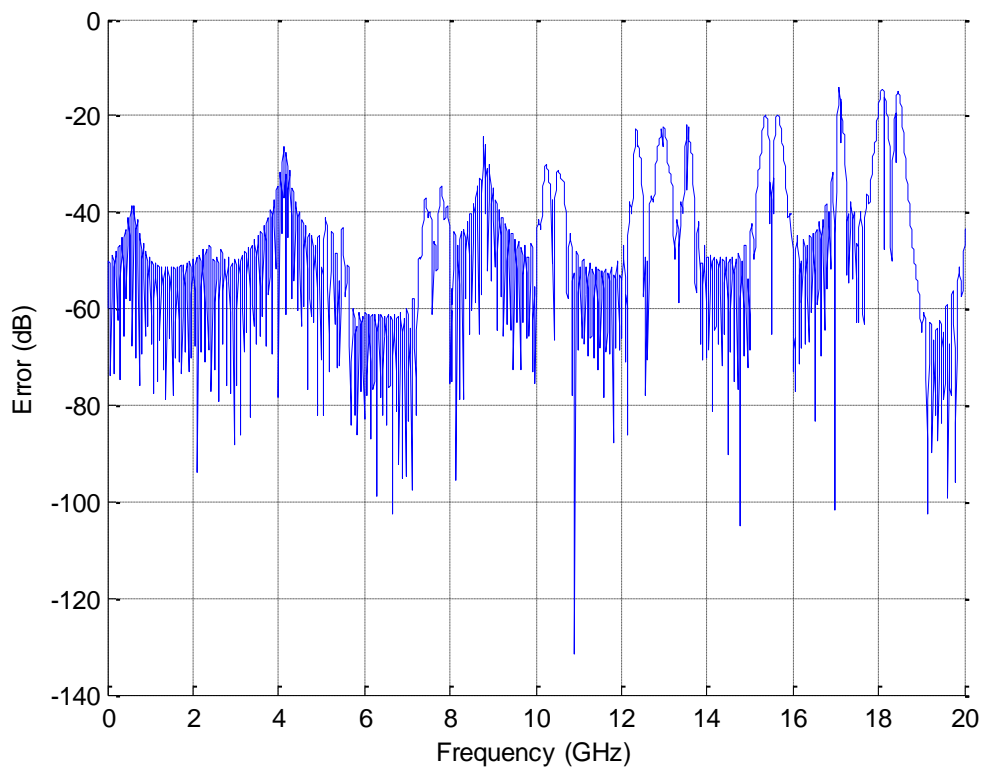
Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πώς ο κλασικός αλγόριθμος FDTD (2, 2) αποδίδει συγκριτικά με τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα. Θεωρητικά, η χρήση τέταρτης τάξης προσεγγίσεων στη μέθοδο FDTD προσδίδει υψηλότερη ακρίβεια στη λύση του προβλήματος.

Στην Εικόνα 4.11 απεικονίζεται το πλάτος του συντελεστή ανάκλασης σε dB στις συχνότητες από 0 μέχρι 20 GHz. Η κόκκινη καμπύλη παριστάνει την αναλυτική λύση και η μπλε τη λύση μέσω του αλγορίθμου FDTD (2, 2). Σε όσα περισσότερα σημεία συμπίπτουν οι δυο γραμμές τόσο πιο ακριβές είναι το αποτέλεσμα. Το αντίστοιχο διάγραμμα για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) φαίνεται στην Εικόνα 4.13.

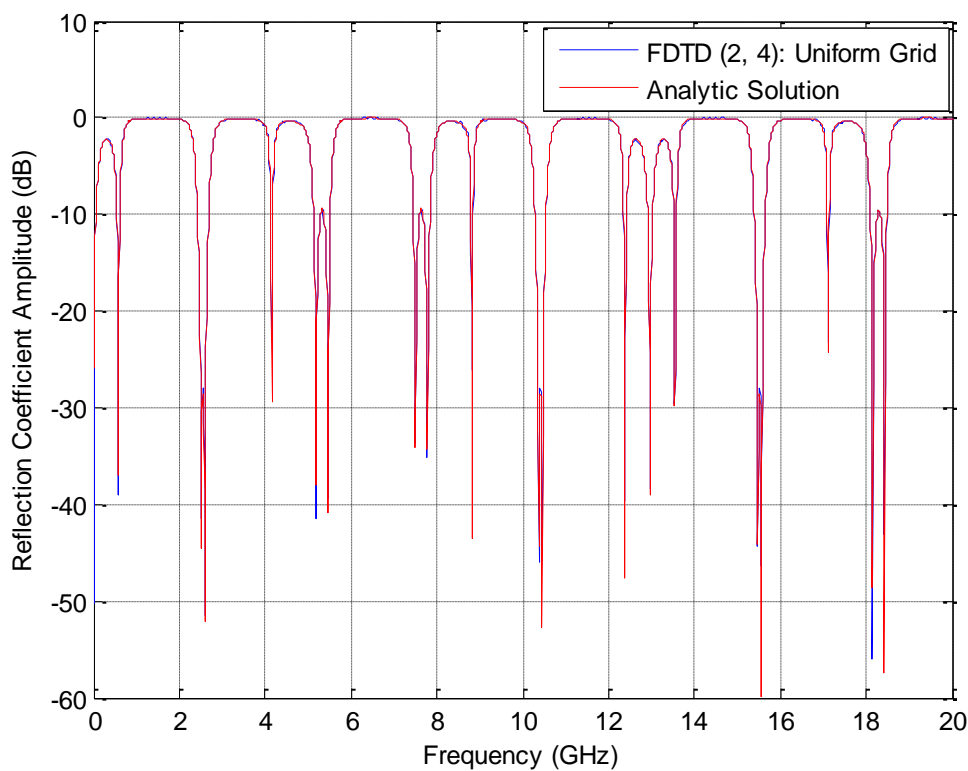
Στην Εικόνα 4.12 φαίνεται το σφάλμα στον υπολογισμό του συντελεστή ανάκλασης μέσω του αλγορίθμου FDTD (2, 2). Όσο μικρότερες τιμές παίρνει τόσο πιο ακριβής είναι ο υπολογισμός. Επιπλέον, στην Εικόνα 4.14 βλέπουμε το αντίστοιχο διάγραμμα για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4).



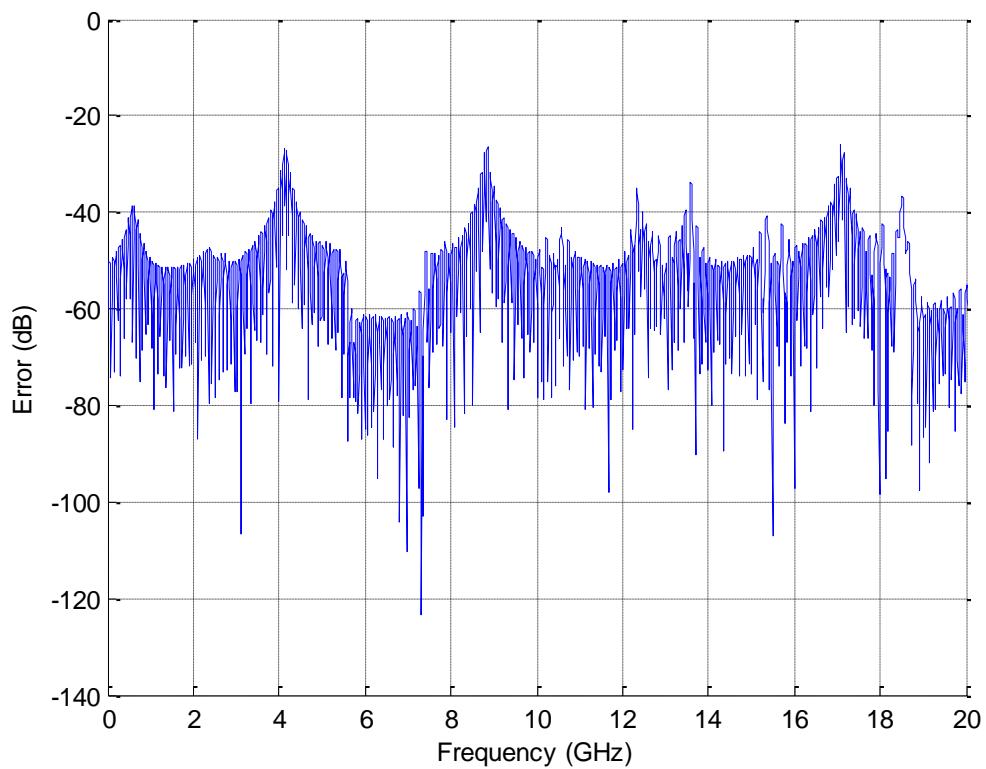
Εικόνα 4.11: Συντελεστής ανάκλασης σε ομοιόμορφο πλέγμα.



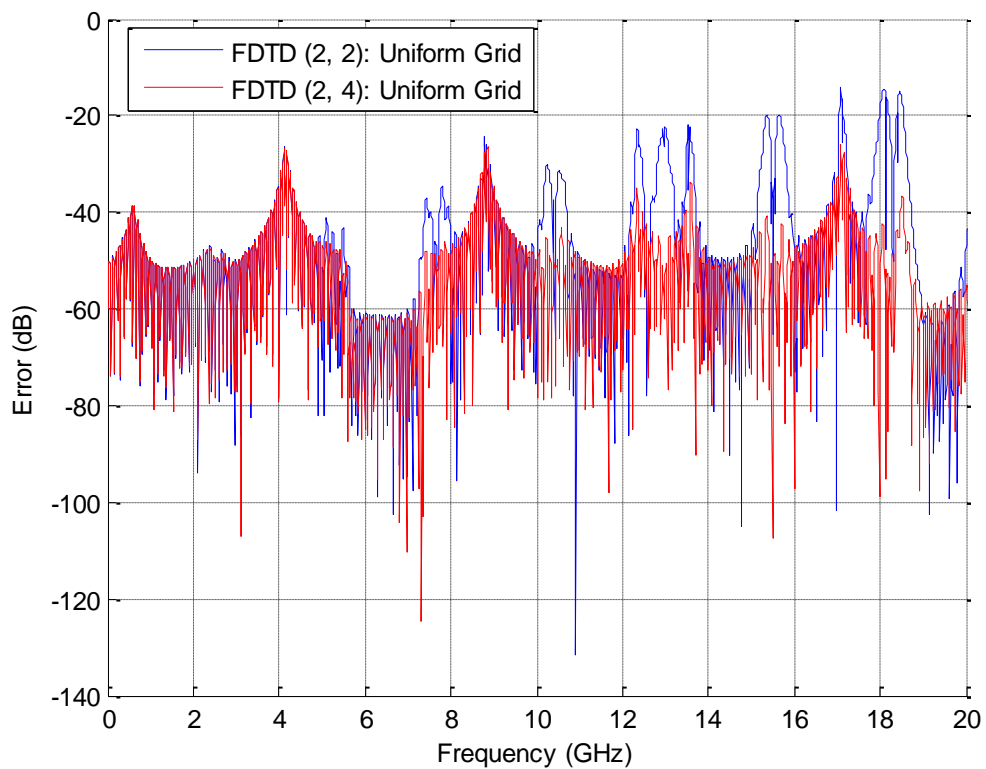
Εικόνα 4.12: Σφάλμα υπολογισμού του συντελεστή ανάκλασης για τον αλγόριθμο FDTD (2, 2).



Εικόνα 4.13: Συντελεστής ανάκλασης σε ομοιόμορφο πλέγμα.



Εικόνα 4.14: Σφάλμα υπολογισμού του συντελεστή ανάκλασης για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4).

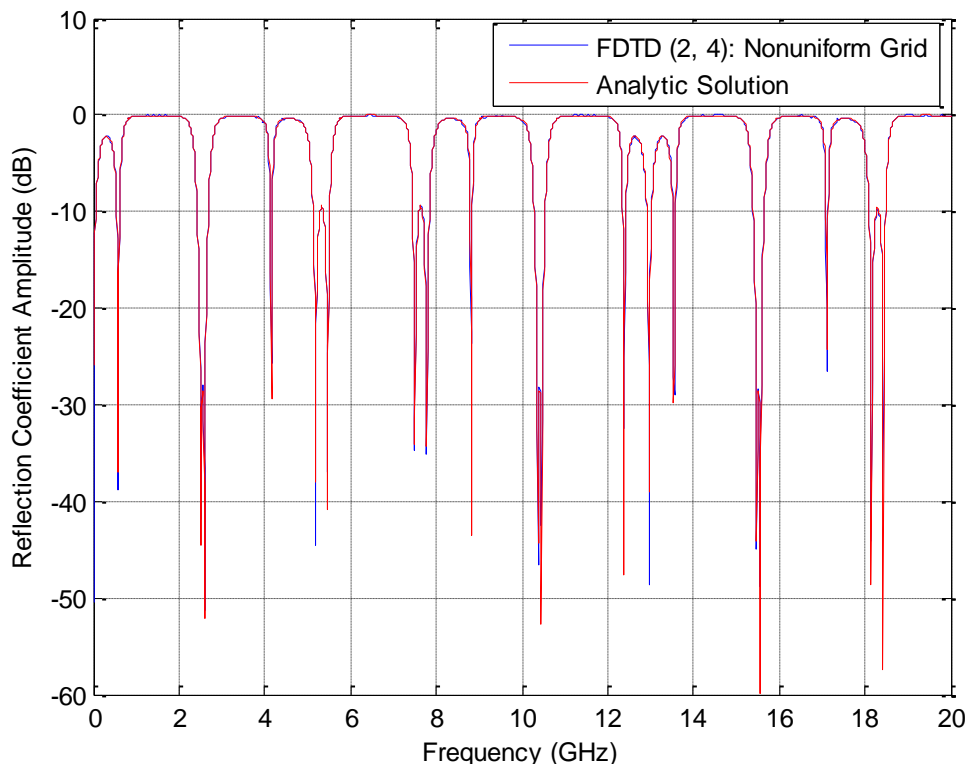


Εικόνα 4.15: Σύγκριση σφαλμάτων των αλγορίθμων FDTD (2, 2) και FDTD (2, 4).

Στην Εικόνα 4.15 συγκρίνεται η ακρίβεια των δύο αλγορίθμων. Με τη κόκκινη γραμμή παριστάνονται τα επίπεδα σφάλματος του αλγορίθμου FDTD (2, 2), ενώ με τη μπλε καμπύλη του αλγορίθμου FDTD (2, 4). Παρατηρώντας το διάγραμμα, βλέπουμε ότι, κυρίως μετά τη συχνότητα των 10 GHz, τα επίπεδα σφαλμάτων για τον αλγόριθμο FDTD (2, 2) είναι υψηλότερα από ότι του αλγορίθμου FDTD (2, 4). Αυτό είναι λογικό, δεδομένου ότι τα σφάλματα διασποράς στις τεχνικές FDTD είναι εντονότερα στις υψηλές συχνότητες. Το παραπάνω γεγονός, επαληθεύει ότι η χρήση ανώτερης τάξης προσεγγίσεων προσδίδει υψηλότερη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

4.2.4 Σύγκριση του μη ομοιόμορφου και του ομοιόμορφου πλέγματος

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε την ακρίβεια του ομοιόμορφου και μη ομοιόμορφου πλέγματος στον αλγόριθμο FDTD (2, 4). Επίσης, θα συγκρίνουμε και το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται από τις δύο υλοποιήσεις.

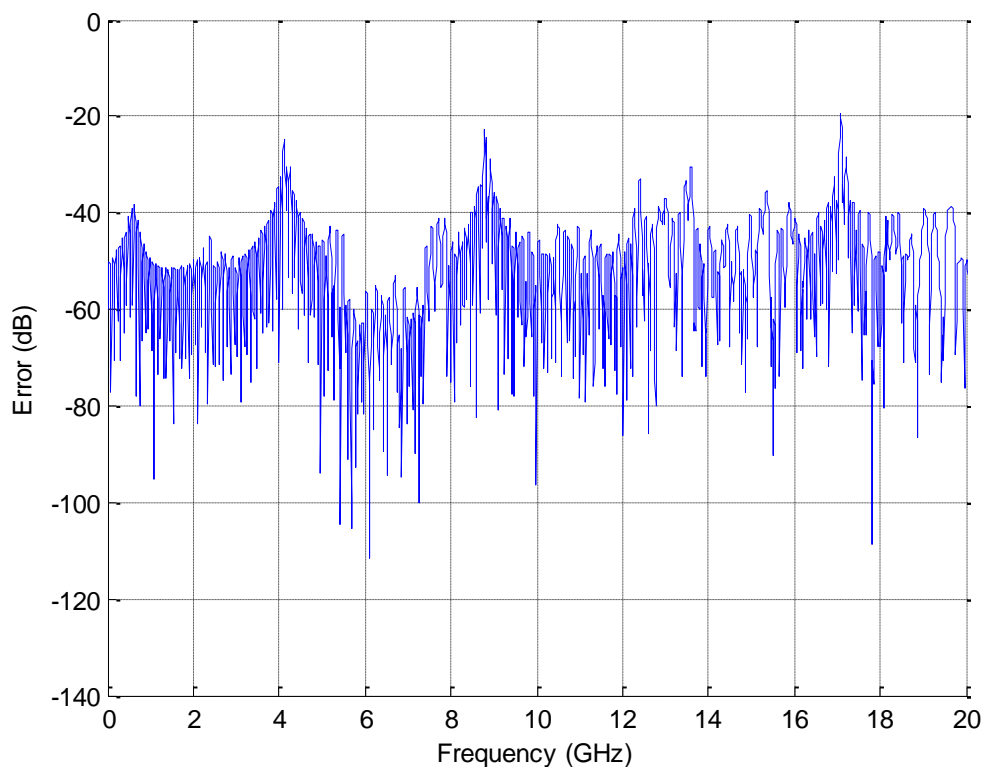


Εικόνα 4.16: Συντελεστής ανάκλασης σε μη ομοιόμορφο πλέγμα.

Στην Εικόνα 4.16 φαίνεται το πλάτος του συντελεστή ανάκλασης σε dB στο στις συχνότητες από 0 μέχρι 20 GHz. Η κόκκινη καμπύλη παριστάνει την αναλυτική

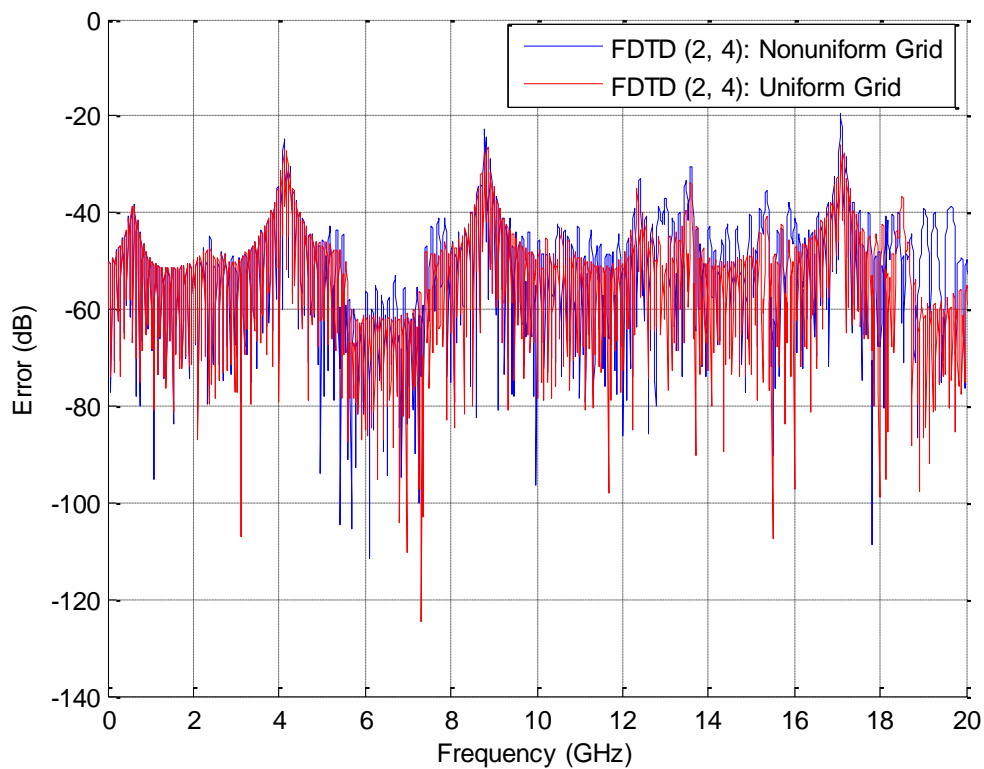
λύση και η μπλε τη λύση μέσω του αλγορίθμου FDTD (2, 4) σε μη ομοιόμορφο πλέγμα. Το αντίστοιχο διάγραμμα για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) σε ομοιόμορφο πλέγμα φαίνεται στην Εικόνα 4.13.

Στην Εικόνα 4.17 φαίνονται τα επίπεδα σφαλμάτων στον υπολογισμό του συντελεστή ανάκλασης μέσω του αλγορίθμου FDTD (2, 4) σε μη ομοιόμορφο πλέγμα. Στην Εικόνα 4.14 απεικονίζεται το αντίστοιχο διάγραμμα για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) σε ομοιόμορφο πλέγμα.



Εικόνα 4.17: Σφάλμα υπολογισμού του συντελεστή ανάκλασης για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4) σε μη ομοιόμορφο πλέγμα.

Στην Εικόνα 4.18 μπορούμε να δούμε τη σύγκριση των δύο πλεγμάτων για τον αλγόριθμο FDTD (2, 4). Με τη κόκκινη γραμμή παριστάνονται τα επίπεδα σφάλματος του ομοιόμορφου πλέγματος, ενώ με τη μπλε γραμμή του μη ομοιόμορφου πλέγματος. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, τα επίπεδα σφαλμάτων είναι περίπου τα ίδια και για τα δύο πλέγματα. Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματα του μη ομοιόμορφου πλέγματος είναι πρακτικά το ίδιο αξιόπιστα με του ομοιόμορφου πλέγματος.



Εικόνα 4.18: Σύγκριση σφαλμάτων των αλγορίθμων των αλγορίθμου FDTD (2, 4) σε ομοιόμορφο και μη ομοιόμορφο πλέγμα.

Πίνακας 4.3

Χρόνοι υπολογισμού σε ομοιόμορφο και μη ομοιόμορφο πλέγμα

Πλέγμα	2 ^η τάξη	4 ^η τάξη
Ομοιόμορφο	4.2813 sec.	6.1719 sec.
Μη ομοιόμορφο	2.0938 sec.	2.9531 sec.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3, ενώ τα σφάλματα είναι στα ίδια επίπεδα και για τα δυο πλέγματα, η χρήση του μη ομοιόμορφου πλέγματος μείωσε σημαντικά το υπολογιστικό κόστος που χρειάζεται για να λυθεί το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, στο ομοιόμορφο πλέγμα με χωρικούς τελεστές δεύτερης και τέταρτης τάξης, ο χρόνος που χρειάστηκε για να λυθεί το πρόβλημα ήταν 4.2813 και 6.1719 δευτερόλεπτα αντίστοιχα. Ενώ, οι χρόνοι για το μη ομοιόμορφο πλέγμα ήταν 2.0938 και 2.9531

δευτερόλεπτα. Η μείωση του χρόνου εκφρασμένη σε ποσοστά είναι 51.09% για τους τελεστές δεύτερης τάξης και 52.15% για τέταρτης τάξης. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι εκτέλεσης του προβλήματος ήταν περίπου μισοί στο μη ομοιόμορφο πλέγμα από ότι στο ομοιόμορφο.

5

Συμπεράσματα και μελλοντικές προεκτάσεις

5.1 Συμπεράσματα

Η χρήση της μεθόδου FDTD με ομοιόμορφο πλέγμα διακριτοποίησης, για την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων σε μη ομοιόμορφη γραμμή μεταφοράς έχει ως αποτέλεσμα να παράγετε αυξημένο υπολογιστικό κόστος, λόγω του ότι διαφορετικές της μη ομοιόμορφης γραμμή μεταφοράς περιοχές απαιτούν ενδεχομένως διαφορετικά επίπεδα διακριτοποίησης έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η απαιτούμενη ακρίβεια.

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε μια μέθοδος FDTD η οποία παρουσιάστηκε στην εργασία [12] και χρησιμοποιεί ένα μη ομοιόμορφο πλέγμα για την επίλυση των τηλεγραφικών εξισώσεων σε μη ομοιόμορφες γραμμές μεταφοράς. Ένα μοναδικό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι ότι χρησιμοποιεί ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, ο οποίος παράγει ένα μη ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα πάνω σε ένα ομοιόμορφο χωρικό πλέγμα, όπου οι καθιερωμένες εξισώσεις ανανέωσης μπορούν να εφαρμοστούν. Για να επιτευχτεί αυτό, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων κάνει χρήση της τμηματικής προσέγγισης της πυκνότητας του πλέγματος, η οποία απαιτείται από τις διάφορες περιοχές της μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς. Αυτή η μέθοδος οδηγεί σε έναν εύκολα εφαρμόσιμο αλγόριθμο ο οποίος μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των τηλεγραφικών εξισώσεων συγκριτικά με την επιλογή πλήρως ομοιόμορφων πλεγμάτων.

Επιπλέον, για τη μείωση των σφαλμάτων φάσης της κλασικής μεθόδου FDTD, προτάθηκε η χρήση ανώτερης τάξης προσεγγίσεων. Η χρήση μεγαλύτερης

τάξης προσεγγίσεων πετυχαίνει μικρότερα σφάλματα διασποράς και επομένως, εξασφαλίζει μεγαλύτερα επίπεδα ακρίβειας στα αποτελέσματα της λύσης.

Ακόμα, η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόστηκε σε ένα ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικές ασυνέχειες έτσι ώστε να αναπαρασταθεί το πώς μπορεί αυτή η μέθοδος να υλοποιηθεί σε ένα απλό πρόβλημα μη ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς. Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι η χρήση του μη ομοιόμορφου πλέγματος μείωσε τον χρόνο επίλυσης του προβλήματος περίπου στο μισό σε σχέση με το ομοιόμορφο, διατηρώντας τα επίπεδα ακρίβειας του αποτελέσματος σχεδόν ίδια. Τέλος, η χρήση προσεγγίσεων τέταρτης τάξης στο χώρο αντί για δεύτερης τάξης είχε ως αποτέλεσμα την βελτιστοποίηση της ακρίβειας της λύσης.

5.2 Μελλοντικές προεκτάσεις

Οι μελλοντικές προεκτάσεις εστιάζουν στην αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων της μεθόδου που παρουσιάστηκε. Ένας τρόπος για επιτευχθεί αυτό είναι η εφαρμογή συνοριακών συνθηκών απορρόφησης με μικρότερα σφάλματα ανάκλασης από αυτά που προκαλεί η συνθήκη η οποία εφαρμόστηκε στην συγκεκριμένη μέθοδο. Δύο απορροφητικές συνθήκες που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν είναι η Liao και το τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα (Perfectly Matched Layer - PML).

Επιπλέον, ένας άλλος τρόπος για την αύξηση της ακρίβειας είναι η χρήση τάξης προσεγγίσεων μεγαλύτερη από την τέταρτη, η οποία χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν την εργασία. Με αυτόν τον τρόπο, η μέθοδος που παρουσιάστηκε θα πετυχαίνει μικρότερα σφάλματα διασποράς και συνεπώς, θα εξασφαλίζει υψηλότερα επίπεδα ακρίβειας.

Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή ανάκλασης Γ_N . Ο συντελεστή ανάκλασης Γ_N δίνεται από την σχέση

$$\Gamma_N = \frac{CU_{N-1}}{AU_{N-1} - U_{N-2}}, \quad (\text{Π.1})$$

όπου τα A, B, C, D και U_N δίνονται παρακάτω:

$$A = e^{-ik_1 w_1} \left[\cos(k_2 w_2) - \frac{1}{2}i \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \sin(k_2 w_2) \right], \quad (\text{Π.2})$$

$$B = e^{ik_1 w_1} \left[-\frac{1}{2}i \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin(k_2 w_2) \right], \quad (\text{Π.3})$$

$$C = e^{-ik_1 w_1} \left[\frac{1}{2}i \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin(k_2 w_2) \right], \quad (\text{Π.4})$$

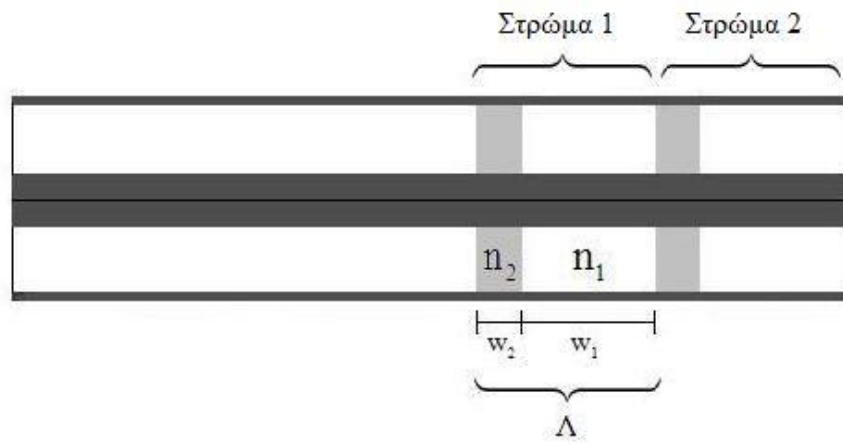
$$D = e^{ik_1 w_1} \left[\cos(k_2 w_2) + \frac{1}{2}i \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \sin(k_2 w_2) \right], \quad (\text{Π.5})$$

$$U_N = \frac{\sin(N+1)K\Lambda}{\sin(K\Lambda)}, \quad (\text{Π.6})$$

όπου N είναι το πλήθος των ζευγαριών στρωμάτων με υλικό υψηλού και χαμηλού δείκτη διάθλασης. Το στρώμα με το χαμηλό δείκτη διάθλασης έχει δείκτη διάθλασης n_1 , πάχος w_1 και κυματικό αριθμό $k_1 = 2\pi n_1 f / u$. Ενώ, το στρώμα με το υψηλό δείκτη διάθλασης έχει δείκτη διάθλασης n_2 , πάχος w_2 και κυματικό αριθμό $k_2 = 2\pi n_2 f / u$. Το συνολικό πάχος ενός ζευγαριού στρωμάτων, όπως μπορούμε να δούμε στην Εικόνα Π.1, είναι $\Lambda = w_1 + w_2$.

Το K είναι η συνάρτηση κύματος Bloch (Bloch wave function) και δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{1}{\Lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A+D) \right]. \quad (\text{Π.7})$$



Εικόνα Π.1: Τα ζευγάρια στρωμάτων του καλωδίου όπως χρησιμοποιούνται για τον αναλυτικό υπολογισμό του συντελεστή ανάκλασης.

Βιβλιογραφία

- [1] A.C. Metaxas and R.J., *Meredith. Industrial Microwave Heating*. Peter Peregrinus, London, 1993.
- [2] C. Buccella, M. Feliziani and G. Manzi, *Wavelet Denoising Approach to Extract Accurate FDTD Solution With Coarse Discretization in Transmission Lines*. IEEE Transactions on magnetics, vol. 41, no. 5, Italy, May 2005.
- [3] Mohammad Khalaj-Amirhosseini, *An Approximated Closed Form Solution For Nonuniform Transmission Lines*. Microwave Conference, pp. 1310-1314, Singapore, 2009.
- [4] Paolo Manfredi, Igor S. Stievano and Flavio G. Canavero *Parameters Variability Effects on Microstrip Interconnects via Hermite Polynomial Chaos*. IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology, vol. 1, no. 8, pp. 1234-1239, Italy, August 2011.
- [5] D. Xiu, G. E. Karniadakis, *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*. SIAM, Journal of Sci. Computation, vol. 24, no. 2, pp. 619–622, 2002.
- [6] B. J. Debusschere et Al., *Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 26, no. 2, pp. 698–719, 2005.
- [7] S. Grivet-Talocia and F. Canavero, *Wavelet-Based Adaptive Solution for the Nonuniform Multiconductor Transmission Lines*. IEEE microwave and guided wave letters, vol. 8, no. 8, August 1998.

- [8] J.S. Barkatullah and S. Chowdhury, *Transient analysis of lossy transmission lines in integrated circuits*. Circuits and Systems, vol. 5, pp. 2352-2355, May 1992.
- [9] W. Wang, P.-G. Liu and Y.-J. Qin, *An unconditional stable 1D-FDTD method for modeling transmission lines based on precise split-step scheme*. Progress In Electromagnetics Research, vol. 135, pp. 245-260, 2013.
- [10] J. Dedková and T. Kriz, *FDTD Analysis of a Nonlinear Transmission Line*. PIERS Proceedings, Beijing, China, March, 2009.
- [11] Nihad Dib, Thomas Weller, Max Scardelletti, and Michael Imparato, *Analysis of Cylindrical Transmission Lines with the Finite-Difference Time-Domain Method*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 47, no. 4, April, 1999.
- [12] Roberto B. Armenta and Costas D. Sarris, *Introducing Nonuniform Grids into the FDTD Solution of the Transmission-Line Equations by Renormalizing the Per-Unit-Length Parameters*. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol. 51, no 3, pp. 818 – 824, Aug. 2009.
- [13] Yee, K. S., Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. 14, pp. 302-307, 1966.
- [14] A. Taflove and S. B. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain*. 3rd ed. Boston, MA: Artech House, 2005.
- [15] B. Engquist and A. Majda, *Absorbing boundary-conditions for numerical simulation of waves*. Mathematics of Computation, vol. 31, 629–651, 1977.
- [16] G. Mur, *Absorbing boundary-conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic-field equations*. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 23, 377–382, 1981.
- [17] CHAN, Auc Fai, *The Finite Difference Time Domain Method for Computational Electromagnetics*. BA thesis, University of Southern Queensland, Toowoomba, 2006.

- [18] S. Ghosal, *An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence*. Journal of Computational Physics, 187–206, 1996.
- [19] J. Fang, *Time Domain Finite Difference Computation for Maxwell's Equations*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, 1989.
- [20] Stavros V. Georgakopoulos, Craig R. Birtcher, Constantine A. Galanis, and Rosemary A., *Renauf Higher-Order Finite-Difference Schemes for Electromagnetic Radiation, Scattering, and Penetration, Part I: Theory*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 44. 134 – 142, 2002.
- [21] Τραϊανός Β. Γιούλτσης και Εμμανουήλ Ε. Κριεζής, *Μικροκύματα*. Τόμος Ι, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη Α.Ε., Θεσσαλονίκη, 2008.
- [22] K. Xiao, D. J. Pommerenke, and J. L. Drewniak, *A three-dimensional FDTD subgridding method with separate spatial and temporal subgridding interfaces and related stability analysis*. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 55, no. 7, pp. 1981–1990, Jul. 2007.
- [23] S. Barmada and M. Raugi, *Transient numerical solutions of nonuniform MTL equations with nonlinear loads by wavelet expansion in time or space domain*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol. 47, no. 8, pp. 1178–1190, Aug. 2000.
- [24] D. Van Dantzig, *The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry*. Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 30, no. 4, pp. 421–427, Oct. 1934.
- [25] C. R. Paul, *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. New York: Wiley, 1994.
- [26] P. Yeh, A. Yariv, and C. S. Hong, *Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory*. JOSA, vol. 67, no. 4, pp. 423–438, Apr. 1977.

ABSTRACT

Two disadvantages of using the classic FDTD method to solve the telegraph equations in a nonuniform transmission line are the level of accuracy of the results and the increased computational cost that is necessary for their solution, because of the different regions of transmission line require possibly different discretization levels.

This thesis addresses the solution of these two problems. For improving the accuracy of the results approximations of higher order are being developed and in order to reduce the computational cost, a method of nonuniform grid, that uses a coordinate transformation to map a nonuniformly spaced grid onto a uniformly spaced grid where the standard update equations can be applied, is presented. In the end, the new method is applied to coaxial cable with dielectric discontinuities and the comparison of the results is presented.