



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

---

Διπλωματική Εργασία  
ΤΟΥ  
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΓΙΑΝΝΑΚΕΡΗ

**Υλοποίηση της συμπαγούς μεθόδου FDTD  
για τη μελέτη προβλημάτων  
κυματοδήγησης**

Επιβλέπων Καθηγητής: Θεόδωρος Ζυγκιρίδης

Κοζάνη, Ιούλιος 2015



- © Παναγιώτης Γιαννακέρης
- © Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

**ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FDTD ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ  
ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΗΣΗΣ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Θ. Ζυγκιρίδης	Επίκουρος Καθηγητής	Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Θ. Θεοδουλίδης	Καθηγητής	Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω κατ' αρχήν τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Θεόδωρο Ζυγκιρίδη για την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας και για την ευκαιρία που μου έδωσε να αποκτήσω πολύτιμες γνώσεις σχετικά με το αντικείμενο που αυτή πραγματεύεται.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου Παρμενίων και Αγορίτσα και στην αδερφή μου Ξένια, που υπομονετικά πρόσφεραν την απαραίτητη υλική υποστήριξη και ηθική συμπαράσταση καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.



# Πρόλογος

Από τις διαθέσιμες μεθόδους κατανόησης και πρόβλεψης ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, ο υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός είναι η νεώτερη και ταχύτερα αναπτυσσόμενη. Καθώς η τεχνολογική εξέλιξη λαμβάνει χώρα με ταχύτατους ρυθμούς, τα οφέλη της απολαμβάνουν, εδώ και δεκαετίες, ολοένα και περισσότερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού. Η κατασκευή τέτοιων μεθόδων δίνει τη δυνατότητα μελέτης της συμπεριφοράς περίπλοκων διατάξεων με ιδιαίτερη γεωμετρία, που μέχρι πρότινος η αξιολόγησή τους βασιζόταν στην διαθεσιμότητα αναλυτικών λύσεων και πολλές φορές προσεγγίσεων χωρίς τα επιθυμητά επίπεδα ακριβείας. Ωστόσο, τα πλεονεκτήματα αυτά δεν λαμβάνονται χωρίς κόστος. Η λύση των πιο δύσκολων προβλημάτων εξακολουθεί να απαιτεί τη χρήση συστημάτων μεγάλης υπολογιστικής ισχύος και ιδιαίτερος αυξημένους χρόνους επεξεργασίας. Συνεπώς, η αδιάκοπη προσπάθεια βελτίωσης των ήδη χρησιμοποιούμενων μεθόδων κρίνεται απαραίτητη προϋπόθεση, προκειμένου ο τομέας να συνεχίσει να εξελίσσεται σε αρμονία με την τεχνολογική ανάπτυξη. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται η υλοποίηση της συμπαγούς μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Compact 2D FDTD), μίας βελτιωμένης εκδοχής της κλασικής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών, η οποία καταφέρνει, μεταξύ άλλων, με χαρακτηριστική ευελιξία, να ελαττώσει τις αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστικούς πόρους, για τη μελέτη προβλημάτων κυματοδηγησης σε περίπλοκες δομές.

Κοζάνη, Ιούλιος 2015

**Παναγιώτης Γιαννακέρης**





# Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος</b>	<b>i</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Ιστορικά Στοιχεία . . . . .	1
1.2 Σκοπός της εργασίας . . . . .	3
<b>2 Παρουσίαση της μεθόδου</b>	<b>5</b>
2.1 Εισαγωγή στην μέθοδο FDTD . . . . .	5
2.1.1 Πεπερασμένες διαφορές . . . . .	5
2.1.2 Ο αλγόριθμος του Yee . . . . .	6
2.1.3 Κριτήριο ευστάθειας . . . . .	10
2.1.4 Επιλογή χωρικού βήματος . . . . .	11
2.1.5 Απλοποίηση σε δύο διαστάσεις . . . . .	12
2.2 Η μέθοδος Compact 2D-FDTD πραγματικών μεταβλητών . . . . .	14
2.2.1 Οι εξισώσεις της μεθόδου . . . . .	14
2.2.2 Συνθήκη ευστάθειας . . . . .	16
2.2.3 Πλεονεκτήματα και εφαρμογή της μεθόδου Compact FDTD . . . . .	17
2.2.4 Θέματα υπολογιστικής υλοποίησης . . . . .	19
2.3 Οριακές συνθήκες . . . . .	21
2.3.1 Συνθήκες τέλει ηλεκτρικού αγωγού . . . . .	21
2.3.2 Απορροφητικές οριακές συνθήκες . . . . .	22
2.4 Διέγερση . . . . .	23
2.5 Μοντελοποίηση ανισοτροπικών υλικών . . . . .	26
2.5.1 Τροποποιημένες εξισώσεις . . . . .	26
2.5.2 Εφαρμογή συνθηκών PEC . . . . .	29
<b>3 Αριθμητικά αποτελέσματα</b>	<b>33</b>
3.1 Ορθογώνιος κυματοδηγός . . . . .	33
3.2 Ορθογώνιος κυματοδηγός με διηλεκτρικό . . . . .	42
3.3 Ανομοιογενής κυματοδηγός με διηλεκτρικό . . . . .	45

---

3.4	Ανομοιογενής κυματοδηγός με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού . . . . .	49
3.5	Μονόπλευρες γραμμές πτερυγίου . . . . .	52
3.5.1	Πρώτη περίπτωση . . . . .	52
3.5.2	Δεύτερη περίπτωση . . . . .	58
3.6	Γραμμή μικροταινίας με ανισοτροπικό υπόστρωμα . . . . .	60
3.7	Θωρακισμένη μικροταινία με ανισοτροπικό υπόστρωμα . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>67</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>69</b>
	<b>Abstract – Περίληψη στα Αγγλικά</b>	<b>71</b>

# 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορικά Στοιχεία

Η αποτύπωση των αδιάλειπτων προσπαθειών πολλών δεκαετιών, της ερευνητικής κοινότητας του τομέα υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού, για τη βελτίωση των ήδη εξελιγμένων αλγορίθμων, θα μπορούσε να καταλαμβάνει την έκταση ολόκληρου βιβλίου. Ωστόσο, μερικά καίρια σημεία της προσπάθειας αυτής, με θεματολογία που περιστρέφεται γύρω από την μέθοδο Compact 2D FDTD, καταγράφονται στο ακόλουθο τμήμα αυτού του κεφαλαίου.

Η αναζήτηση λύσεων των εξισώσεων Maxwell στο πεδίο του χρόνου, πάνω σε διακριτοποιημένο πλέγμα χώρου, είχε ξεκινήσει ήδη από το 1930. Ορόσημο στην ιστορία της εξέλιξης του τομέα υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού αποτέλεσε η δημοσίευση του Kane S. Yee [1] 36 χρόνια αργότερα, το 1966, μίας μεθόδου τέτοιου σκοπού, η οποία μέχρι και σήμερα γίνεται αντικείμενο μελέτης και συνεχούς προσπάθειας εξέλιξης και βελτιστοποίησης. Η μέθοδος FDTD, όπως την παρουσίασε ο Yee, βασίζεται στην τοποθέτηση των πεδικών συνιστωσών σε τρισδιάστατο χωρικό πλέγμα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η διακριτοποίηση και τελικά η επίλυση των εξισώσεων Maxwell.

Με τον ερχομό νέων εξελίξεων και καινοτομιών τις επόμενες δεκαετίες στον τομέα των τηλεπικοινωνιών (και όχι μόνο), δημιουργήθηκε η ανάγκη για την κατασκευή ταχύτερων και πιο ευέλικτων μεθόδων. Τον Μάιο του 1992 οι S. Xiao, R. Vahldieck, και H. Jin [2], ανέπτυξαν την μέθοδο Compact 2D FDTD, κατά την οποία ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων ως προς  $z$  στις διαφορικές εξισώσεις γίνεται δια μέσου μίας διαφοράς φάσης κατά την

διεύθυνση διάδοσης και επιτυγχάνεται η μείωση του πλέγματος στο μισό. Ταυτόχρονα, με την εισαγωγή της σταθεράς διάδοσης στους υπολογισμούς, η τεχνική κρίθηκε ιδανική για μελέτη χαρακτηριστικών διασποράς σε διατάξεις κυματοδότησης.

Τον Ιούλιο της ίδιας χρονιάς οι A. Asi και L. Shafai παρουσίασαν μία ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή της Compact 2D FDTD [3]. Σε αυτήν την εκδοχή, γίνεται αντικατάσταση των μερικών παραγώγων ως προς  $z$  με τον όρο  $-j\beta$ , για να περιοριστούν οι υπολογισμοί στο επίπεδο  $xy$  και να προκύψει τελικά ένα πραγματικά δισδιάστατο πλέγμα. Ένα χρόνο μετά, το 1993, οι S. Χiao και R. Vahldieck [4], επαναπροσδιορίζουν και βελτιώνουν τη μέθοδό τους με την παραδοχή ότι το πλάτος διαμέρισης κατά  $z$  μπορεί να ορισθεί οριακά μηδέν, ενώ ταυτόχρονα με κατάλληλη χρήση της φανταστικής μονάδας  $j$  ως συντελεστή σε ορισμένες από τις εξισώσεις, οι υπολογισμοί περιορίζονται στην επεξεργασία καθαρά πραγματικών μεταβλητών, αυξάνοντας έτσι ακόμη περισσότερο την αποδοτικότητα του αλγορίθμου.

Τη ίδια χρονιά, ο A. C. Cangellaris [5] παρουσίασε την αριθμητική διασπορά της μεθόδου Compact 2D FDTD κατά την υλοποίηση της για την ανάλυση φαινομένων διασποράς σε κυματοδηγούς. Επιπλέον, γίνεται προσδιορισμός νέου κριτηρίου ευστάθειας που εξαρτάται από τη σταθερά διάδοσης και ορίζει γενικά ότι το άνω όριο του αριθμού Courant για την συμπαγή μέθοδο είναι μικρότερο από από το αντίστοιχο όριο μίας κλασικής μεθόδου δισδιάστατου πλέγματος. Η διαφορά αυτή, ωστόσο, συμπεραίνεται τελικά ότι μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για μήκος κελιού επαρκώς μικρότερο του μήκους κύματος στον κυματοδηγό.

Το 1996 αναπτύχθηκε από τους M. Fujii και S. Kobayashi [6] ένας νέος αλγόριθμος, βασισμένος στην μέθοδο Compact 2D FDTD που συνδυάζεται με τη χρήση ανάλυσης σήματος με τεχνικές αυτοπαλινδρόμησης (AR Signal Analysis), για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς μικροκυματικών κυκλωμάτων με απώλειες. Συγκεκριμένα, έγινε η παρατήρηση ότι τα πεδία που διεγείρονται με παλμούς σύντομης διάρκειας παρουσιάζουν χαρακτηριστικά αποσβεννημένης ταλάντωσης με συγκεκριμένη συχνότητα  $\Omega$  και συντελεστή απόσβεσης  $\xi$ . Η τεχνική AR χρησιμεύει στον προσδιορισμό αυτών των παραμέτρων. Μέσω μαθηματικής φόρμουλας που παρουσιάζεται, είναι δυνατή η ανάκτηση της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  και της σταθεράς απόσβεσης  $\alpha$ , με τη βοήθεια των γνωστών παραμέτρων  $\Omega$  και  $\xi$ .

Το 1997 οι A. P. Zhao, J. Juntunen, και A. V. Räisänen [7], εντόπισαν την αδυναμία της μεθόδου Compact 2D FDTD πραγματικών μεταβλητών, να επιλύσει συγκεκριμένα προβλήματα διατάξεων με ανισοτροπικά υλικά πλήρωσης. Ορίστηκαν τρεις πιθανές περιπτώσεις μελέτης. Στις δυο από αυτές είναι δυνατή η αναγωγή της μεθόδου φανταστικών μεταβλητών στη μέθοδο πραγματικών μεταβλητών. Η τρίτη περίπτωση που εμπεριέχει ανισοτροπικό υλικό πλήρωσης με μη μηδενικές τιμές σε ένα από στοιχεία  $\epsilon_{xz}$ ,  $\epsilon_{yz}$  του τανυστή διηλεκτρικού, απαιτεί την επίλυση ενός τροποποιημένου συνόλου εξισώσεων, με περισσότερες μεταβλητές, φανταστικών και πραγματικών τιμών.

Σημαντική εξέλιξη στο χώρο των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών ήταν η παρουσίαση της μεθόδου έμμεσης εναλλακτικής διεύθυνσης στο πεδίο του χρόνου (ADI-FDTD), από τον T. Namiki [8], το 1999. Οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου τοποθετούνται σε δισδιάστατο πλέγμα. Για τον υπολογισμό του πεδίου για ένα χρονικό βήμα, ακολουθούνται δύο επιμέρους διαδικασίες μία για κάθε ενδιάμεσο χρονικό βήμα, κατάλληλα ορισμένες έτσι ώστε το κριτήριο ευστάθειας να ικανοποιείται πάντα. Το αποτέλεσμα είναι κατά την εφαρμογή της μεθόδου, η δυνατότητα επιλογής μεγαλύτερου χρονικού βήματος και κατά συνέπεια η ελάττωση του χρόνου εκτέλεσης.

Μία αποδοτική μέθοδο Compact 2D FDTD, για την ανάλυση χαρακτηριστικών διάδοσης σε κυματοδηγούς με υλικά πλήρωσης αρνητικής διηλεκτρικής σταθεράς, μαγνητικής διαπερατότητας ή δείκτη διάθλασης, παρουσιάστηκε από τον D. F. P. Pile το 2005 [9]. Εκεί δίνονται και οι δύο παραλλαγές της μεθόδου, για πραγματικές αλλά και φανταστικές τιμές. Στους υπολογισμούς εισάγονται επιπλέον κόμβοι για την μαγνητική και ηλεκτρική πυκνότητα ρεύματος, με στόχο τη μοντελοποίηση της επίδρασης φορτίων πάνω στο υλικό. Η μέθοδος επιτυγχάνει την μελέτη διατάξεων που δεν είναι δυνατό να αξιολογηθούν με την εφαρμογή των κλασικών μεθόδων, λόγω της αστάθειας που προκαλούν οι αρνητικοί δείκτες.

## 1.2 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η υλοποίηση της συμπαγούς μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, Compact 2D FDTD και ακολούθως η μελέτη με τη βοήθειά της χαρακτηριστικών διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, σε διατάξεις με κλιμακούμενη πολυπλοκότητα γεωμετρίας. Η δομή της εργασίας είναι απλή. Στο παρόν κεφάλαιο που αποτελεί την εισαγωγή, αναλύεται ο σκοπός της εργασίας και γίνεται μία σύντομη ιστορική αναδρομή στη βιβλιογραφία πάνω σε μερικά από τα πιο σημαντικά θέματα που αφορούν την μέθοδο Compact 2D FDTD. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται πρώτα μία εισαγωγή στην κλασική μέθοδο FDTD τριών διαστάσεων, ορίζονται οι συνθήκες ευστάθειας της και μία πρώτη τεχνική απλοποίησης της σε δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος Compact 2D FDTD με τη συνθήκη ευστάθειας της, τα πλεονεκτήματα και το πεδίο εφαρμογής της. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μία συζήτηση περί σημαντικών θεμάτων που προκύπτουν κατά την υλοποίηση της σε γλώσσα προγραμματισμού. Στο τρίτο κεφάλαιο ξεκινά η παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων για κάθε διάταξη που προσομοιώθηκε ξεχωριστά. Γίνονται γνωστές οι παράμετροι εκτέλεσης των προσομοιώσεων και, μέσω συγκρίσεων με άλλα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, επικυρώνεται η ορθότητα υλοποίησης της μεθόδου. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο παραθέτονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου.



# 2

## Παρουσίαση της μεθόδου

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται αρχικά ο αλγόριθμος του Yee για τη μέθοδο FDTD στις τρεις διαστάσεις με το κριτήριο ευστάθειας του και, στη συνέχεια, εξετάζεται ειδικότερα η συμπαγής έκδοση της μεθόδου, Compact 2D FDTD. Αναλύονται επίσης οι οριακές συνθήκες τέλει ηλεκτρικού αγωγού και οι απορροφητικές οριακές συνθήκες που υλοποιούνται στις προσομοιώσεις. Επιπλέον, γίνεται λόγος για τη μορφή που έχουν οι πηγές και για τον τρόπο εξαγωγής των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier. Τέλος, παρουσιάζεται κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου για την εφαρμογή της σε διατάξεις που περιέχουν ανισοτροπικά υλικά.

### 2.1 Εισαγωγή στην μέθοδο FDTD

#### 2.1.1 Πεπερασμένες διαφορές

Η μέθοδος FDTD χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές για να προσεγγίσει το ρυθμό μεταβολής των μεγεθών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο και στο χρόνο. Στην απλή περίπτωση συνάρτησης  $f(x)$  μίας μεταβλητής, το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το σημείο  $x_0$  μετατοπισμένο κατά  $\pm\delta/2$  είναι:

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (2.1\alpha)$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.1\beta)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (2.2)$$

και διαιρώντας με  $\delta$  και τα δύο μέλη παίρνουμε,

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^3}{2^2} f'''(x_0) + \dots \quad (2.3)$$

Το άθροισμα στο δεξιό σκέλος αποτελείται από άπειρους όρους, με όρο χαμηλότερης τάξης τον τελευταίο που φαίνεται. Οι όροι υψηλότερης τάξης μπορούν να παραληφθούν για να καταλήξουμε τελικά σε μία προσέγγιση της παραγώγου στο  $x_0$  με μία κεντρική διαφορά, όπως ονομάζεται,

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}. \quad (2.4)$$

Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι παρ' όλο που η σχέση αφορά την τιμή της παραγώγου στο  $x_0$ , ουσιαστικά οι δειγματοληπτούμενες τιμές αντιστοιχούν στα γειτονικά σημεία  $x_0 \pm \delta/2$ . Επιπλέον, αν το  $\delta$  γίνει 0 οριακά, η προσέγγιση πλησιάζει την απόλυτη ακρίβεια.

Αντίστοιχα, για μία συνάρτηση  $f(x, y, z, t)$  του τρισδιάστατου χώρου και του χρόνου, η κεντρική διαφορά της μερικής παραγώγου της συνάρτησης ως προς μία χωρική ή χρονική διάσταση είναι [10],

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y, z, t\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta x}{2}, y, z, t\right)}{\delta x}, \quad (2.5\alpha)$$

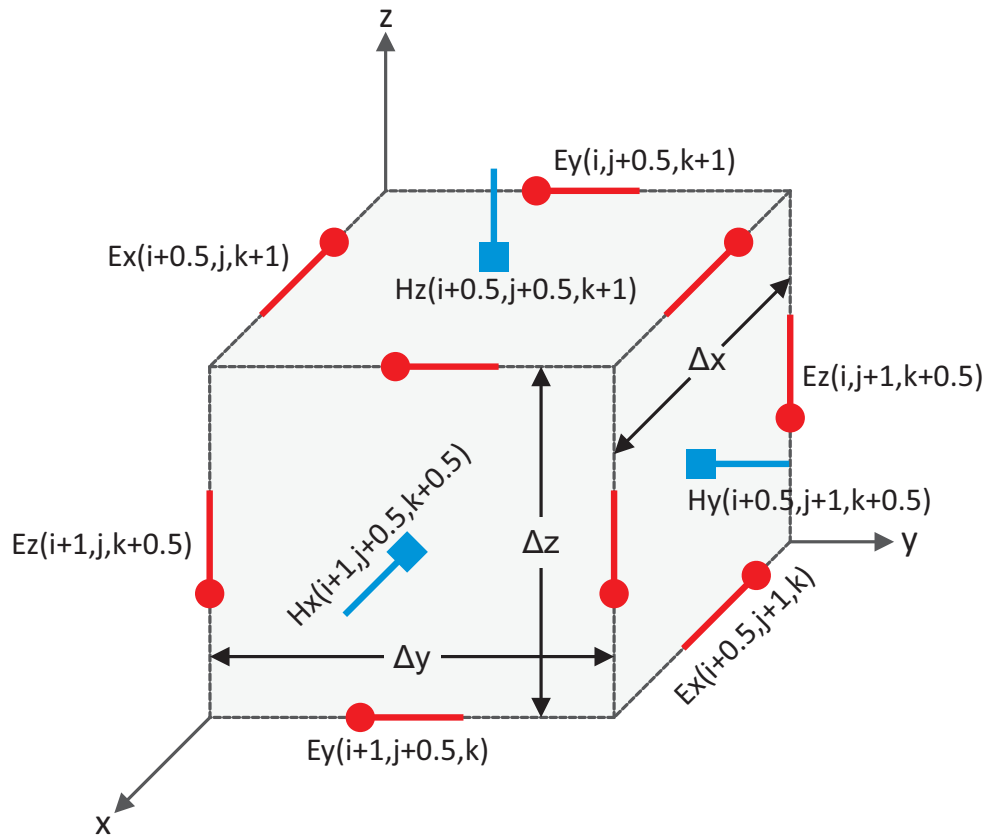
$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \approx \frac{f\left(x, y, z, t_0 + \frac{\delta t}{2}\right) - f\left(x, y, z, t_0 - \frac{\delta t}{2}\right)}{\delta t}. \quad (2.5\beta)$$

Ομοίως προκύπτουν οι προσεγγίσεις για τις υπόλοιπες μεταβλητές.

### 2.1.2 Ο αλγόριθμος του Yee

Για να υλοποιήσει πεπερασμένες διαφορές στις εξισώσεις του Maxwell, ο Yee [1] αρχικά χώρισε σε διακριτά τμήματα τον χώρο και το χρόνο, αφού τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μεταβάλλονται στις τέσσερις διαστάσεις. Ο χρόνος χωρίζεται σε διακριτά χρονικά διαστήματα, ή χρονικά βήματα  $\Delta t$ , ενώ οι τρεις χωρικές διαστάσεις χωρίζονται σε διακριτά χωρικά διαστήματα, ή χωρικά βήματα,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  και  $\Delta z$ . Επιπλέον όλες οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  και  $H_z$ , τοποθετούνται κατάλληλα σε μία νοητή διάταξη ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, διαστάσεων  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ , που αποτελεί το κελί, όπως ονομάζεται, του διακριτοποιημένου τρισδιάστατου χώρου. Πολλά ίδια τέτοια παραλληλεπίπεδα τοποθετημένα διαδοχικά και στις τρεις διαστάσεις, δημιουργούν ένα τρισδιάστατο χωρικό πλέγμα στο οποίο τοποθετούνται οι συνιστώσες του πεδίου.





Σχήμα 2.1: Κελί Yee.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1, το παραλληλεπίπεδο (και τελικά ολόκληρο το πλέγμα) τοποθετείται σε τρισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Οι δείκτες  $i$ ,  $j$  και  $k$  φανερώνουν την απόσταση ενός σημείου του πλέγματος από την αρχή των αξόνων, μετρημένη σε χωρικά βήματα και πρακτικά δείχνουν τη θέση του σημείου. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου τοποθετούνται στο μέσο των ακμών του παραλληλεπιπέδου, ενώ οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου κάθετα στο κέντρο των εδρών του. Η τοποθέτηση αυτή εξηγεί το λόγο που οι θέσεις δεν περιγράφονται αποκλειστικά από ακέραια πολλαπλάσια των χωρικών βημάτων  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Έτσι, για παράδειγμα, τα  $E_x$  και  $E_y$  απέχουν κατά  $\Delta z/2$  από το  $E_z$  στη διεύθυνση  $z$ . Άρα η απόσταση  $\Delta z$  είναι ουσιαστικά η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών  $E_z$  στη διεύθυνση  $z$ . Το σχήμα δεν διευκρινίζει το πώς τοποθετούνται οι συνιστώσες στο χρόνο, ωστόσο ακολουθείται παρόμοια λογική. Οι κόμβοι, όπως αλλιώς ονομάζονται, του ηλεκτρικού πεδίου απέχουν κατά μισό χρονικό βήμα από τους κόμβους του μαγνητικού.

Σύμφωνα με την διάταξη αυτή και θεωρώντας μηδενική αγωγιμότητα, οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή μπορούν να γραφούν ως το παρακάτω σύστημα έξι διαφο-

ρικών εξισώσεων [11]:

$$-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (2.9)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (2.11)$$

Παρατηρείται ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου, υπολογίζονται πάντα από τις μερικές παραγώγους ως προς το χώρο του μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα. Επιπλέον, η συνιστώσα κατά μία χωρική διάσταση κάθε μεμονωμένου πεδίου (ηλεκτρικό ή μαγνητικό), εξαρτάται από τις συνιστώσες κατά τις υπόλοιπες χωρικές διαστάσεις του άλλου πεδίου.

Από αυτό το σημείο και έπειτα θα γίνεται χρήση σημειογραφίας για τις συνιστώσες του πεδίου ως εξής:

$$H_x(x, y, z, t) = H_x(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = H_x^n[i, j, k], \quad (2.12\alpha)$$

$$H_y(x, y, z, t) = H_y(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = H_y^n[i, j, k], \quad (2.12\beta)$$

$$H_z(x, y, z, t) = H_z(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = H_z^n[i, j, k], \quad (2.12\gamma)$$

$$E_x(x, y, z, t) = E_x(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = E_x^n[i, j, k], \quad (2.12\delta)$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_y(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = E_y^n[i, j, k], \quad (2.12\epsilon)$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_z(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = E_z^n[i, j, k]. \quad (2.12\sigma)$$

Το σύστημα των έξι διαφορικών εξισώσεων μπορεί πλέον να γραφεί με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών:

$$\begin{aligned} H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5, k + 0.5] &= H_x^{n-0.5}[i, j + 0.5, k + 0.5] \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} (E_y^n[i, j + 0.5, k + 1] - E_y^n[i, j + 0.5, k]) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} (E_z^n[i, j + 1, k + 0.5] - E_z^n[i, j, k + 0.5]), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j, k + 0.5] &= H_y^{n-0.5}[i + 0.5, j, k + 0.5] \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} (E_z^n[i + 1, j, k + 0.5] - E_z^n[i, j, k + 0.5]) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} (E_x^n[i + 0.5, j, k + 1] - E_x^n[i + 0.5, j, k]), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5, k] &= H_z^{n-0.5}[i + 0.5, j + 0.5, k] \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} (E_x^n[i + 0.5, j + 1, k] - E_x^n[i + 0.5, j, k]) \\
&- \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_y^n[i + 1, j + 0.5, k] - E_y^n[i, j + 0.5, k]), \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}[i + 0.5, j, k] &= E_x^n[i + 0.5, j, k] \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} (H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5, k] - H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j - 0.5, k]) \\
&- \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} (H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j, k + 0.5] - H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j, k - 0.5]), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

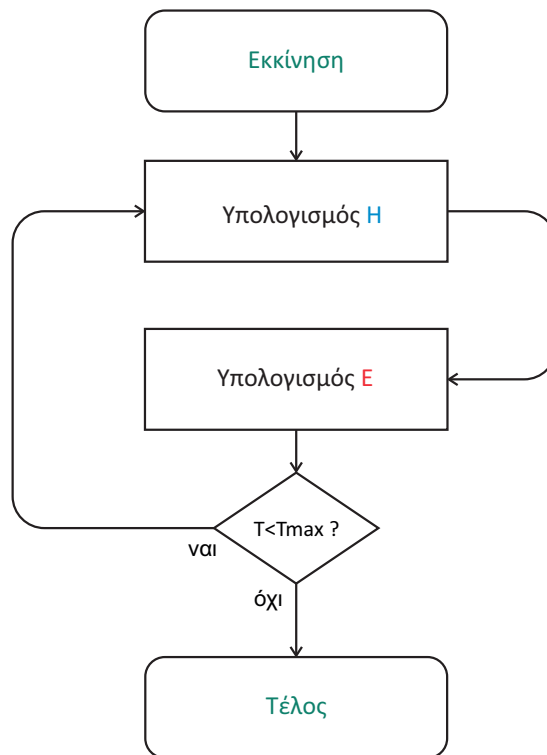
$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}[i, j + 0.5, k] &= E_y^n[i, j + 0.5, k] \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} (H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5, k + 0.5] - H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5, k - 0.5]) \\
&- \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5, k] - H_z^{n+0.5}[i - 0.5, j + 0.5, k]), \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}[i, j, k + 0.5] &= E_z^n[i, j, k + 0.5] \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} (H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j, k + 0.5] - H_y^{n-0.5}[i + 0.5, j, k + 0.5]) \\
&- \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} (H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5, k + 0.5] - H_x^{n+0.5}[i, j - 0.5, k + 0.5]). \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις φανερώνουν μερικά σημαντικά χαρακτηριστικά ή και επαληθεύουν άλλα που έχουν ήδη αναφερθεί και βοηθούν στην κατασκευή αλγόριθμου επίλυσης τους:

- Το μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται σε κάθε ενδιάμεσο χρονικό βήμα ενώ το ηλεκτρικό σε κάθε ολόκληρο χρονικό βήμα.
- Κάθε συνιστώσα ενός μεμονωμένου πεδίου εξαρτάται από γειτονικές τιμές των συνιστωσών του άλλου πεδίου.
- Κάθε μελλοντική τιμή ενός κόμβου μεμονωμένου πεδίου σε ένα σημείο εξαρτάται από την αμέσως προηγούμενη τιμή του στο ίδιο σημείο, αλλά και από παρελθοντικές τιμές των συνιστωσών του άλλου πεδίου.

Ισχύει λοιπόν ότι, δεδομένων των παρελθοντικών τιμών όλων των κόμβων του πλέγματος μπορούν να υπολογισθούν οι μελλοντικές τιμές αυτών. Η παροντική γραμμή του χρόνου σε κάθε τέτοιο άλμα χωρίζει τις γνωστές παρελθοντικές τιμές του πεδίου, από τις άγνωστες μελλοντικές. Στις εξισώσεις, οι χρόνοι  $n + 0.5$ ,  $n + 1$  είναι μελλοντικοί ενώ οι χρόνοι  $n - 0.5$ ,  $n$  είναι παρελθοντικοί. Παρατηρείται με βάση τους χρόνους ότι, σε ένα άλμα είναι απαραίτητο να προηγηθεί ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου. Στη συνέχεια μπορεί



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα ροής του αλγόριθμου FDTD.

να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο με τη βοήθεια του μαγνητικού και να ολοκληρωθεί το άλμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε επόμενο άλμα αφού για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου όλες οι παρελθοντικές τιμές του ηλεκτρικού θα είναι ξανά διαθέσιμες και ούτω καθεξής. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου φαίνεται στο σχήμα 2.2. Ο αλγόριθμος αυτός, κατά τον οποίο οι παρελθοντικές τιμές οδηγούν στον προσδιορισμό των μελλοντικών τιμών κάθε μεμονωμένου πεδίου, εναλλάξ στα ενδιάμεσα χρονικά βήματα, είναι ο Leap-Frog αλγόριθμος του Yee ή αλλιώς ο αλγόριθμος της μεθόδου FDTD.

### 2.1.3 Κριτήριο ευστάθειας

Παρ' όλο που η διαδικασία που εκτελεί ο αλγόριθμος έχει γίνει κατανοητή, αυτό που δεν έχει ακόμα ορισθεί είναι οι συνθήκες με βάση τις οποίες πρέπει να προσδιορισθούν οι σταθερές  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$ . Η μέθοδος που εξετάζεται είναι μία αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές, οι οποίες είναι γνωστό ήδη από τον ορισμό τους ότι βασίζονται σε προσεγγίσεις και άρα προβλέπεται ένα σφάλμα υπολογισμού. Οι τιμές δηλαδή που υπολογίζονται θα απέχουν κατά αυτό το σφάλμα από τις πραγματικές τιμές. Τίθεται το ερώτημα, του κατά πόσο αυτό το σφάλμα με την πάροδο των βημάτων κατά την εκτέλεση, μπορεί να γιγαντωθεί τόσο ώστε να επηρεάσει σε απαγορευτικό βαθμό την αξιοπιστία της λύσης. Σε μία τέτοια περίπτωση η μέθοδος λέγεται ότι παρουσιάζει αστάθεια. Οι παράμετροι που επηρεάζουν την ευστάθεια της μεθόδου είναι οι σταθερές διακριτοποίησης χώρου και χρόνου. Κατάλληλη επιλογή τους και ειδικότερα, σχέση μεταξύ τους,

ορίζεται ως κριτήριο ευστάθειας.

Για να βρεθεί το κριτήριο ευστάθειας πρέπει να ληφθούν υπόψη περιορισμοί που απορρέουν από τα χαρακτηριστικά διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Στον ελεύθερο χώρο ισχύει ότι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να ταξιδέψει η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο χώρο είναι η ταχύτητα του φωτός  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ . Η παρατήρηση αυτή αυτόματα ορίζει τη μέγιστη δυνατή απόσταση που μπορεί να ταξιδέψει η ενέργεια σε ένα χρονικό βήμα, δηλαδή  $c\Delta t$ . Σύμφωνα με τη μέθοδο, είναι γνωστό πλέον ότι, κάθε κόμβος μπορεί να επηρεάσει τον υπολογισμό μόνο γειτονικών κόμβων σε ένα χρονικό βήμα. Συνεπώς το κριτήριο πρέπει να ορίζει ότι η ταχύτητα με την οποία η ενέργεια διαδίδεται από ένα κόμβο σε άλλο δεν πρέπει να ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός. Τα παραπάνω συνοψίζονται από την παρακάτω σχέση για πλέγμα τριών διαστάσεων [12]:

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}. \quad (2.19)$$

Η εξίσωση είναι απόρροια του κριτηρίου σταθερότητας **Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)** και ονομάζεται απλούστερα συνθήκη Courant.

Η σχέση αυτή μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε να ισχύει για οποιαδήποτε περίπτωση διάταξης που περιλαμβάνει διάδοση σε διηλεκτρικό. Αρκεί κάθε φορά στη θέση της ταχύτητας του φωτός στον ελεύθερο χώρο, να τοποθετείται η μέγιστη δυνατή ταχύτητα  $v_{max}$  που μπορεί να διαδοθεί το φως. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα στο υλικό με τη μικρότερη σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_r$ .

$$v_{max}\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}. \quad (2.20)$$

Ειδικότερα στην περίπτωση που για τη διαμέριση ισχύει ότι  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$  που είναι και η μοναδική περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς αυτής της μελέτης, τότε η έκφραση της συνθήκης Courant παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$v_{max}\Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{3}}. \quad (2.21)$$

#### 2.1.4 Επιλογή χωρικού βήματος

Είναι εύλογο σε αυτό το σημείο να οριοθετηθεί κάποια συνθήκη για την επιλογή του χωρικού βήματος. Σε μία μελέτη προσομοίωσης ο προσδιορισμός του θα πρέπει να προηγηθεί, λόγω της εμφάνισής του στο κριτήριο ευστάθειας. Με βάση τον ορισμό των πεπερασμένων διαφορών είναι γνωστό ότι οι προσεγγιστικές τιμές πλησιάζουν τις πραγματικές όσο το χωρικό βήμα πλησιάζει στην τιμή μηδέν. Συνεπώς, όσο αυξάνεται η λεπτομέρεια περιγραφής του χωρικού πλέγματος, τόσο μειώνεται το σφάλμα προσέγγισης. Θεωρητικά

δεν υπάρχει κάτω φράγμα για το μέγεθος των κελιών, όμως πρακτικά αυτό περιορίζεται από τους διαθέσιμους πόρους της προσομοίωσης, αφού γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι όσο μεγαλώνει η λεπτομέρεια του πλέγματος τόσο αυξάνεται το πλήθος των κελιών που πρέπει να επεξεργαστούν. Οι πόροι αυτοί μεταφράζονται σε επεξεργαστική ισχύ, μνήμη αλλά και χρόνο εκτέλεσης.

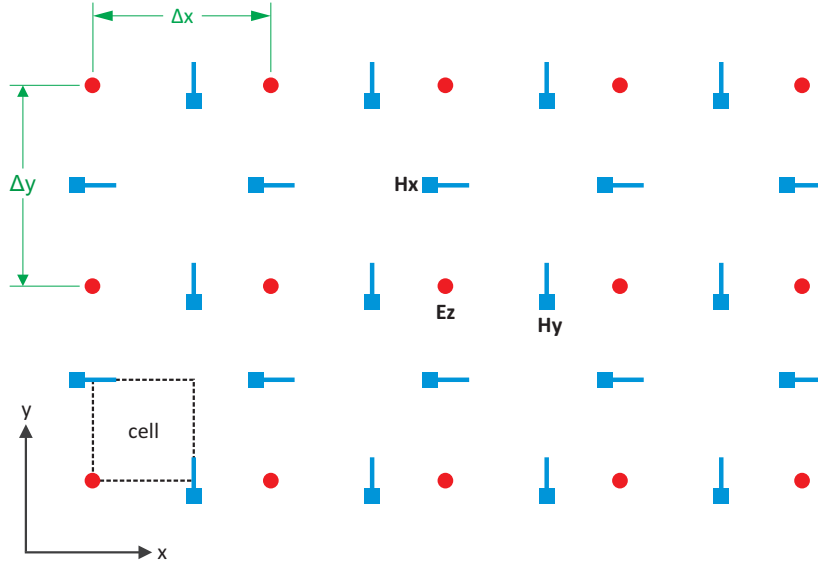
Ο βασικός περιορισμός για την επιλογή ενός άνω φράγματος του μεγέθους κελιού έχει σχέση με το ελάχιστο μήκος κύματος που πρόκειται να προσομοιωθεί. Η διαμέριση συνήθως μετριέται σε πλήθος κελιών ανά μήκος κύματος. Συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία ότι για ικανοποιητική διαμέριση το μήκος κύματος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 10 κελιά με ελάχιστο (θεωρητικό) όριο 2 κελιά [13]. Για να γίνει καλύτερα κατανοητό το γιατί πρέπει το κάθε κελί να έχει μέγεθος τουλάχιστον δύο φορές μικρότερο από το μήκος κύματος, βοηθάει να αντιληφθεί κανείς ότι το πλέγμα της FDTD προέρχεται ουσιαστικά από δειγματοληψία της πραγματικής κατανομής του πεδίου στο χώρο και το κάθε κελί είναι ένα από τα δείγματα. Σε κάθε δειγματοληπτική μέθοδο η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι διπλάσια από τη συχνότητα του σήματος σύμφωνα με το θεώρημα Nyquist. Το μήκος κύματος σαν μέγεθος εκφράσει μία περίοδο στο χώρο. Από το θεώρημα Nyquist προκύπτει, ότι πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο δείγματα ανά χωρική περίοδο έτσι ώστε να είναι εφικτή η εξαγωγή του πραγματικού μεγέθους από τα δείγματα του.

Τις περισσότερες φορές είναι επιθυμητή η μελέτη διατάξεων για διαφορετικές συχνότητες και άρα διαφορετικά μήκη κύματος. Το μήκος κύματος που περιορίζει το μέγεθος κελιού είναι πάντα το ελάχιστο που πρόκειται να προσομοιωθεί. Το ίδιο ισχύει και για διατάξεις που περιέχουν υλικά με διαφορετικές τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα μικρότερα μήκη κύματος, θεωρώντας ότι τα υλικά είναι μη μαγνητικά, εμφανίζονται στις περιοχές με το μεγαλύτερο  $\epsilon_r$ .

Σε άλλες περιπτώσεις ενδέχεται η διάταξη να περιέχει διαστάσεις μικρότερες από το ένα δέκατο του ελάχιστου μήκους κύματος. Οι διαστάσεις αυτές είναι γεωμετρικές λεπτομέρειες της διάταξης που πρέπει να αντιπροσωπεύονται επαρκώς στο πλέγμα, διαφορετικά η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ενδέχεται να υποβιβασθεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις η διαμέριση γίνεται με γνώμονα, εκτός από το ελάχιστο μήκος κύματος, και όσο το δυνατό πιο αξιόπιστη αναπαράσταση της διάταξης.

### 2.1.5 Απλοποίηση σε δύο διαστάσεις

Η μέθοδος FDTD είναι δυνατό να απλοποιηθεί στις δύο διαστάσεις χωρίς σημαντικές αλλαγές του αλγορίθμου. Η δυνατότητα αυτή χαλαρώνει τις απαιτήσεις υπολογιστικών πόρων και μικραίνει το χρόνο επεξεργασίας λόγω του μικρότερου πλήθους μεταβλητών. Για να επιτευχθεί τέτοια απλοποίηση αρκεί να γίνει η παραδοχή ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταβάλλεται κατά  $x$  και  $y$  αλλά όχι κατά  $z$  [11]. Συνεπώς οι συνιστώσες κατά  $x$  και  $y$  είναι

Σχήμα 2.3: Πόλωση  $TM^z$ .

οι μόνες μη μηδενικές. Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις πόλωσης του κύματος, κατά τις οποίες, είτε το μαγνητικό, είτε το ηλεκτρικό πεδίο είναι εγκάρσιο στη διεύθυνση  $z$  (πόλωση  $TM^z$  ή  $TE^z$  αντίστοιχα).

Στην περίπτωση  $TM^z$  πόλωσης, οι συνιστώσες που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell είναι οι  $H_x$ ,  $H_y$  και  $E_z$  και οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή,

$$-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.22)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.23)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (2.24)$$

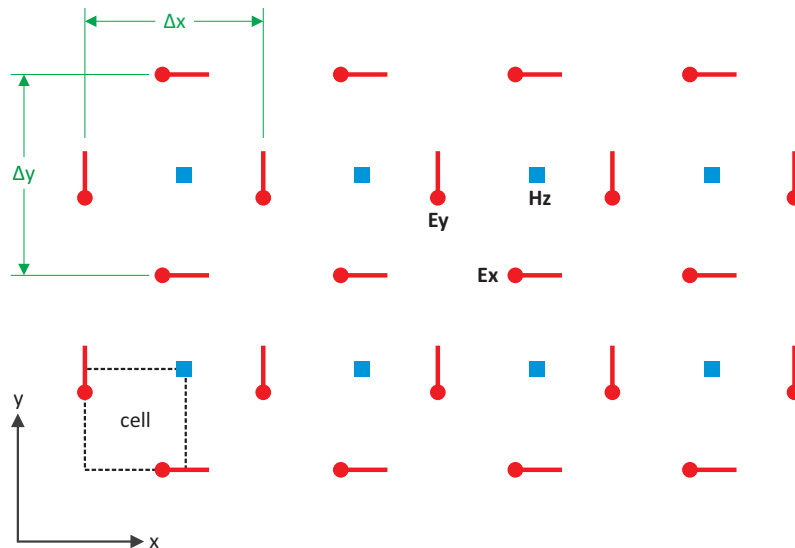
ενώ στην περίπτωση πόλωσης  $TE^z$  οι μη μηδενικές συνιστώσες είναι οι  $E_x$ ,  $E_y$  και  $H_z$  και οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή,

$$-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (2.25)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.26)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (2.27)$$

Η διαδικασία για την περιγραφή των εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές είναι παρόμοια με την κλασική μέθοδο. Ο αλγόριθμος δεν υπόκειται σε καμία αλλαγή αναφορικά την σειρά υπολογισμού των συνιστωσών. Η τοποθέτηση τους στο δισδιάστατο πλέγμα για κάθε περίπτωση πόλωσης φαίνεται στα σχήματα 2.3 και 2.4. Η μέθοδος για κάθε πόλωση, απαιτεί τον υπολογισμό του μισού πλήθους μεταβλητών σε σχέση με την κλασική μέθοδο και γι' αυτό παρέχει επιπλέον ευελιξία όταν απαιτείται η μελέτη τέτοιων εξειδικευμένων περιπτώσεων. Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να κατασκευασθούν οι μέθοδοι επίλυσης και για

Σχήμα 2.4: Πόλωση  $TE^z$ .

άλλες ειδικές περιπτώσεις πόλωσης, όπως το ζευγάρι  $TM^x$  και  $TE^x$ . Η χρήση της απλοποιημένης μεθόδου είναι φανερό ότι αποτρέπει τον υπολογισμό περιττής πληροφορίας, ωστόσο όταν πρόκειται για μελέτη περιπτώσεων όπου η πόλωση του κύματος δεν εμπίπτει σε κάποια τέτοια ειδική περίπτωση, η καταφυγή στην κλασική τρισδιάστατη μέθοδο είναι αναγκαιότητα. Στο πρόβλημα αυτό δίνει τη λύση η μέθοδος Compact 2D-FDTD, όπου η υλοποίηση αυτής είναι και ο σκοπός της παρούσας μελέτης.

## 2.2 Η μέθοδος Compact 2D-FDTD πραγματικών μεταβλητών

Η μέθοδος Compact 2D FDTD παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης για όλες τις περιπτώσεις αυθαίρετης μορφής πόλωσης του κύματος. Είναι ιδιαίτερα δημοφιλής σε περιπτώσεις ανάλυσης της διασποράς κυματοδηγών, αφού υποστηρίζει τον υπολογισμό υβριδικών ρυθμών, ενώ ταυτόχρονα με την εισαγωγή της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στους υπολογισμούς διευκολύνει τη μελέτη προβλημάτων όπου είναι επιθυμητή η ανάλυση διατάξεων κυματοδήγησης σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων.

### 2.2.1 Οι εξισώσεις της μεθόδου

Στόχος της μεθόδου Compact 2D-FDTD είναι να "συμπιέσει" το κλασικό τρισδιάστατο πλέγμα που χρησιμοποιείται για το διαμερισμό του χώρου, σε ένα δισδιάστατο πλέγμα που θα περιέχει και πάλι όλες τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και θα εξυπηρετεί τον αλγόριθμο Leap-Frog.

Αν το κελί Yee χωριστεί νοητά σε επίπεδα παράλληλα με το  $xy$ , παρατηρείται ότι σε κάθε τέτοιο επίπεδο υπάρχουν δύο πιθανές ομάδες τριών συνιστωσών που επαναλαμβάνονται



εναλλάξ στη διεύθυνση  $z$  σε όλο το πλέγμα:

$$\begin{aligned} & \{E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), H_z(x, y, z)\}, \\ & \{H_x(x, y, z), H_y(x, y, z), E_z(x, y, z)\}. \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι οι ομάδες αυτές συμπίπτουν με τις ομάδες συνιστωσών πόλωσης  $TM^z$  και  $TE^z$ . Ο όρος  $e^{-j\beta z}$  περιγράφει, όπως είναι γνωστό, τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά  $z$  και άρα μπορεί να αντικαταστήσει τις μερικές παραγώγους ως προς  $z$  στις εξισώσεις του Maxwell [4]. Κατά συνέπεια ισχύει ότι:

$$\{E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), H_z(x, y, z)\} = \{E_x(x, y), E_y(x, y), H_z(x, y)\}je^{-j\beta z}, \quad (2.28\alpha)$$

$$\{H_x(x, y, z), H_y(x, y, z), E_z(x, y, z)\} = \{H_x(x, y), H_y(x, y), E_z(x, y)\}e^{-j\beta z}. \quad (2.28\beta)$$

Σημειώνεται εδώ ότι το  $j = \sqrt{-1}$ , είναι συντελεστής του εκθετικού μόνο στην πρώτη ομάδα εξισώσεων και εισάγει μία διαφορά φάσης  $\pi/2$  μεταξύ των ομάδων, αλλά πρακτικά χρησιμοποιείται για να εξαλειφθούν φανταστικοί όροι από τις εξισώσεις Maxwell που θα προκύψουν. Έτσι η μέθοδος αξιοποιεί μόνο πραγματικές τιμές. Ταυτόχρονα γίνεται η παραδοχή ότι το μέγεθος τμηματοποίησης  $\Delta z$  δεν πρέπει να είναι κατ' ανάγκη πεπερασμένος αριθμός, αλλά μπορεί να θεωρηθεί ότι πλησιάζει πολύ κοντά στο μηδέν. Οι εξισώσεις τώρα γράφονται:

$$-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta E_y, \quad (2.29\alpha)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \beta E_x, \quad (2.29\beta)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (2.29\gamma)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta H_y, \quad (2.29\delta)$$

$$-\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x} + \beta H_x, \quad (2.29\epsilon)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (2.29\sigma)$$

Από αυτό το σημείο και έπειτα η διαδικασία για την εύρεση των εξισώσεων του αλγορίθμου Leap-Frog που ακολουθείται, είναι ίδια με την κλασική περίπτωση. Η εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών στις παραπάνω εξισώσεις Maxwell δίνει ως αποτέλεσμα το νέο σετ εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθεί στη συμπαγή έκδοση της μεθόδου FDTD.

$$\begin{aligned} H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5] &= H_x^{n-0.5}[i, j + 0.5] \\ &- \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_z^n[i, j + 1] - E_z^n[i, j]}{\Delta y} - \beta E_y^n[i, j + 0.5] \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j] &= H_y^{n-0.5}[i + 0.5, j] \\ &- \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_z^n[i, j] - E_z^n[i + 1, j]}{\Delta x} + \beta E_x^n[i + 0.5, j] \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+0.5}[i+0.5, j+0.5] &= H_z^{n-0.5}[i+0.5, j+0.5] \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_y^n[i+1, j+0.5] - E_y^n[i, j+0.5]}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{E_x^n[i+0.5, j+1] - E_x^n[i+0.5, j]}{\Delta y} \right), \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}[i+0.5, j] &= E_x^n[i+0.5, j] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_z^{n+0.5}[i+0.5, j+0.5] - H_z^{n+0.5}[i+0.5, j-0.5]}{\Delta y} \right. \\
 &\quad \left. + \beta H_y^{n+0.5}[i+0.5, j] \right), \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

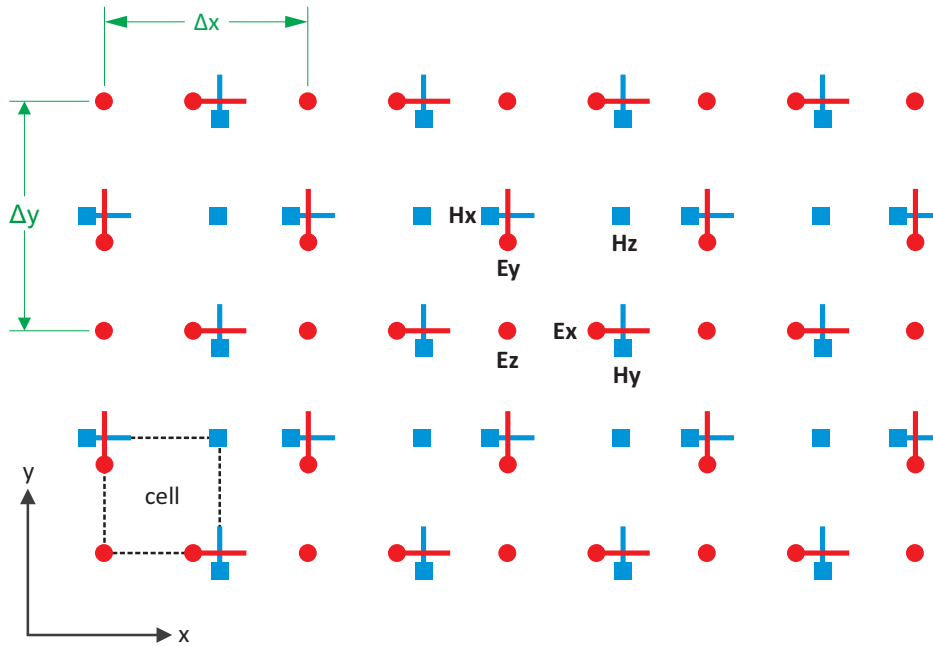
$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}[i, j+0.5] &= E_y^n[i, j+0.5] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_z^{n+0.5}[i-0.5, j+0.5] - H_z^{n+0.5}[i+0.5, j+0.5]}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. + \beta H_x^{n+0.5}[i, j+0.5] \right), \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}[i, j] &= E_z^n[i, j] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_y^{n+0.5}[i+0.5, j] - H_y^{n+0.5}[i-0.5, j]}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_x^{n+0.5}[i, j+0.5] - H_x^{n+0.5}[i, j-0.5]}{\Delta y} \right). \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι στις εξισώσεις οι χρονικές στιγμές όπου υπολογίζονται οι κόμβοι δεν έχουν μετατοπισθεί. Συνεπώς η ροή του αλγορίθμου Leap-Frog παραμένει ίδια. Η βασική αλλαγή σε σχέση με την κλασική μέθοδο είναι η απουσία του άξονα  $z$  στο πλέγμα καθώς και η παρουσία όρων που εξαρτώνται από τη φασική σταθερά  $\beta$ . Στο σχήμα 2.5 φαίνεται το πώς οι δύο ομάδες συνιστωσών περιέχονται πλέον σε μία δισδιάστατη διάταξη η οποία είναι ουσιαστικά μία συμπαγής έκδοση του τρισδιάστατου πλέγματος. Να σημειωθεί εδώ ότι παρόλο που το πλέγμα έχει συμπιεστεί, τρισδιάστατες διατάξεις είναι και πάλι δυνατό να προσομοιωθούν, αφού η διάδοση κατά  $z$  δεν έχει αποκλεισθεί από τους υπολογισμούς, αλλά έχει απλά αντικατασταθεί. Ωστόσο απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχει ομοιογένεια της διάταξης κατά  $z$ , αφού πλέον δεν υπάρχει τρόπος να περιγραφούν αλλαγές στη γεωμετρία ή τα μέσα διάδοσης κατ' αυτήν τη διεύθυνση.

### 2.2.2 Συνθήκη ευστάθειας

Για την επιλογή της χωρικής διαμέρισης ισχύουν οι περιορισμοί σχετικά με το ελάχιστο πλήθος κελιών ανά μήκος κύματος που έχουν ήδη διατυπωθεί. Σε ότι αφορά το κριτήριο



Σχήμα 2.5: Το δισδιάστατο πλέγμα της μεθόδου Compact 2D FDTD.

ευστάθειας, είναι εμφανές ότι αυτό θα πρέπει να ορισθεί εκ νέου, εφόσον η μορφή του πλέγματος έχει υποστεί αλλαγές και η σχέση μεταξύ της μεγαλύτερης δυνατής ταχύτητας διάδοσης σε ένα γειτονικό κόμβο ανά βήμα χρόνου δεν διατηρείται ίδια. Αποδεικνύεται ότι η συνθήκη Courant για δισδιάστατο πλέγμα είναι [4],

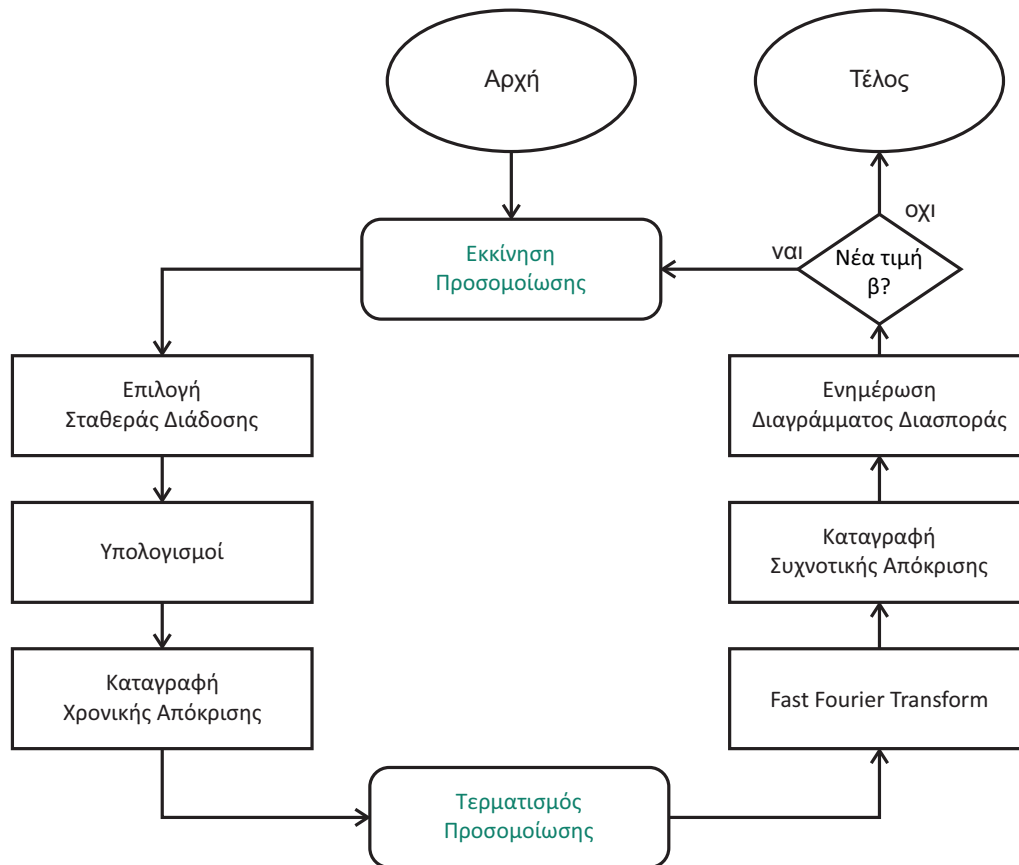
$$v_{max}\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}}, \quad (2.36)$$

και εν τέλη για  $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ ,

$$v_{max}\Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{2}}. \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Πλεονεκτήματα και εφαρμογή της μεθόδου Compact FDTD

Το συμπαγές πλέγμα οδηγεί στο μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου, που είναι η ελάττωση των πόρων που απαιτούνται για τη περάτωση όλων των υπολογισμών, αφού το πλήθος των κελιών που πρέπει τώρα να επεξεργαστούν μειώνεται δραστικά. Παράλληλα, υπάρχει πλέον η δυνατότητα επίλυσης για όλες τις περιπτώσεις αυθαίρετης μορφής πόλωσης του κύματος και πιο συγκεκριμένα υβριδικών ρυθμών σε διατάξεις κυματοδότησης. Επιπροσθέτως, η εξάλειψη φανταστικών τιμών από τους υπολογισμούς αποτρέπει την αύξηση του χρόνου επεξεργασίας. Η μέθοδος Compact FDTD δεν χάνει σχεδόν κανένα μέτρο ευελιξίας, από αυτά που χαρακτηρίζουν την κλασική μέθοδο στις τρεις διαστάσεις, ενώ ταυτόχρονα προσθέτει ακόμα ένα. Η εισαγωγή της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στους υπολογισμούς διευκολύνει τη μελέτη προβλημάτων όπου είναι επιθυμητή η ανάλυση διατάξεων κυματοδότησης σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων. Για να πραγματοποιηθεί κάτι τέτοιο



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα ροής για τη διαδικασία εξαγωγής διαγράμματος διασποράς με τη μέθοδο Compact FDTD.

με την κλασική μέθοδο απαιτεί ειδικές τεχνικές και αναπόφευκτη επεξεργασία μεγάλου όγκου πλεονάζουσας πληροφορίας που αυξάνει δραματικά τους απαιτούμενους πόρους που δεσμεύονται. Η δυνατότητα επιλογής εξαρχής του  $\beta$  περιορίζει τον όγκο αυτόν στο επιθυμητό εύρος.

Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος παρέχει σωστά αποτελέσματα στη συχνότητα στην οποία αυτή η τιμή της σταθεράς διάδοσης αντιστοιχεί [4]. Αφού υπολογισθεί με τη βοήθεια του αλγορίθμου το πεδίο μέσα στη διάταξη για όλα τα χρονικά βήματα, επιλέγεται τυχαίο σημείο καταγραφής για το οποίο αποθηκεύονται οι τιμές των συνιστωσών καθ' όλη τη διάρκεια προσομοίωσης. Για  $K$  συνολικά χρονικά βήματα δηλαδή, υπάρχουν  $K$  τιμές των συνιστωσών καταγεγραμμένες στο σημείο αυτό, μία για κάθε χρονικό βήμα. Στη συνέχεια η χρονική μεταβολή κάθε συνιστώσας μπορεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να περιγραφεί στο πεδίο συχνοτήτων. Ο υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier γίνεται με τη βοήθεια του αλγορίθμου **Fast Fourier Transform (FFT)** που περιέχει το περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής Matlab. Στο φάσμα συχνοτήτων, η μικρότερη τιμή αφορά τον ρυθμό πρώτης τάξης και οι επόμενες τιμές, διαδοχικά, ρυθμούς ανώτερων τάξεων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για διαφορετικές τιμές του  $\beta$  έτσι ώστε να βρεθούν τα χαρακτηριστικά και η καμπύλη διασποράς της διάταξης.

### 2.2.4 Θέματα υπολογιστικής υλοποίησης

Είναι σημαντικό να αποσαφηνιστούν εδώ μερικά σημαντικά σημεία αναφορικά με θέματα που προκύπτουν κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου σε μία γλώσσα προγραμματισμού έτσι ώστε να κατασκευαστεί αξιοποιήσιμο πρόγραμμα προσομοίωσης.

Αρχικά πρέπει να οριοθετηθεί ο χώρος προσομοίωσης. Σε οποιοδήποτε πρόγραμμα υπάρχουν μεταβλητές που δεσμεύουν μνήμη για να αποθηκευθούν. Στην περίπτωση της μεθόδου FDTD γενικά οι κύριες μεταβλητές είναι οι κόμβοι του πλέγματος. Ο αριθμός των κόμβων εξαρτάται πάντα από τη διαμέριση. Το κάθε κελί στο πρόγραμμα περιέχει έξι κόμβους. Κάθε συνιστώσα περιγράφεται από δισδιάστατο πίνακα το μέγεθος του οποίου καθορίζεται από το χώρο προσομοίωσης. Τα στοιχεία ενός τέτοιου πίνακα είναι οι τιμές της συνιστώσας σε κάθε σημείο. Οι πίνακες αρχικοποιούνται στο ξεκίνημα της προσομοίωσης και κάθε στοιχείο τους έχει τιμή μηδέν, αφού αρχικά το πεδίο δεν υπάρχει.

Για παράδειγμα αν η μελέτη απαιτεί προσομοίωση κυματοδηγού διαστάσεων  $1 \times 1$  cm και η διαμέριση που έχει επιλεγεί είναι  $\Delta h = 0.1$  cm, ο χώρος προσομοίωσης είναι  $10\Delta h \times 10\Delta h$ . Η διαστάσεις αυτές όταν πρόκειται να μεταφραστούν σε πλήθος κελιών δεν διατηρούνται ίδιες. Στην πραγματικότητα η μνήμη που δεσμεύεται για το πλέγμα αντιστοιχεί σε  $11 \times 11$  στοιχεία για κάθε πίνακα. Ο λόγος που προστίθεται ένα επιπλέον κελί σε κάθε διάσταση είναι γιατί στην πραγματικότητα η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων της ίδιας συνιστώσας ισούται με  $\Delta h$ . Αν  $N_x \Delta x \times N_y \Delta y$  είναι οι διαστάσεις της διάταξης, τότε οι διαστάσεις σε κόμβους στην προσομοίωση που απαιτούνται για κάθε συνιστώσα είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} E_x &: (N_x) \times (N_y + 1), \\ E_y &: (N_x + 1) \times (N_y), \\ E_z &: (N_x + 1) \times (N_y + 1), \\ H_x &: (N_x + 1) \times (N_y), \\ H_y &: (N_x) \times (N_y + 1), \\ H_z &: (N_x) \times (N_y). \end{aligned}$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι για κάθε συνιστώσα οι διαστάσεις του ενεργού πλέγματος είναι διαφορετικές. Από εδώ και στο εξής, για λόγους απλοποίησης, η διάσταση του χώρου προσομοίωσης της εκάστοτε διάταξης που μελετάται θα γράφεται ενιαία για όλες τις συνιστώσες, σε κελιά αντί για βήματα χώρου, αλλά θα υπονοείται το παραπάνω σχήμα για το πλέγμα κάθε συνιστώσας.

Η θέση κάθε κόμβου, δηλαδή κάθε στοιχείου του πίνακα, στο πλέγμα ορίζεται με δείκτες  $i, j$  που αναφέρονται στις συνταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα. Για παράδειγμα, ο κόμβος  $[1, 2]$  της συνιστώσας  $E_z$  στο πλέγμα, είναι η μεταβλητή  $E_z[1, 2]$  στο πρόγραμμα.

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι δεν είναι δυνατό να ορισθεί μεταβλητή της μορφής  $E_x[1.5, 2]$ , όπως υπάρχει αυτή στις εξισώσεις της μεθόδου. Αντ' αυτού, ορίζεται ότι οποιοσδήποτε κόμβος που βρίσκεται μέσα στο ίδιο κελί με κόμβο της συνιστώσας  $E_z$  (η οποία είναι η μόνη που οι κόμβοι της περιγράφονται από ακέραιες τιμές δεικτών) θα δανείζεται τους δείκτες της. Στο κελί δηλαδή  $[i, j]$  θα υπάρχουν οι κόμβοι  $E_z[i, j]$ ,  $E_x[i, j]$ ,  $E_y[i, j]$ ,  $H_x[i, j]$ ,  $H_y[i, j]$ ,  $H_z[i, j]$ . Αυτή η αλλαγή είναι αδύνατο να επηρεάσει τα αποτελέσματα, γιατί στο πρόγραμμα δεν υπάρχει πρακτική σημασία αναφορικά με το που είναι τοποθετημένοι οι κόμβοι όπου δειγματοληπτείται το πεδίο.

Γίνεται σαφές τώρα ότι για τα διαστήματα χρόνου πρέπει να οριοθετηθεί παρόμοια προσέγγιση. Έχει ήδη διατυπωθεί ότι στις εξισώσεις υπολογισμού οι χρονικές στιγμές  $n - 0.5$  και  $n$ , θεωρούνται παρελθοντικές, ενώ οι  $n + 0.5$  και  $n + 1$ , μελλοντικές. Αυτός ο διαχωρισμός χρησιμοποιείται ομοίως και στον κώδικα. Οι τιμές κάθε ομάδας συγχωνεύονται σε μία χρονική περίοδο, έτσι ώστε οι τιμές των κόμβων να τοποθετούνται χρονικά σε δύο μόνο διακριτές χρονικές καταστάσεις, την παλιά και την νέα. Έτσι για παράδειγμα η νέα τιμή ενός κόμβου  $H_y[i, j]$  θα υπολογισθεί από την παλιά τιμή του και τις παλιές τιμές των κόμβων  $E_z[i, j]$ ,  $E_z[i + 1, j]$  και  $E_x[i, j]$ , ενώ η νέα τιμή ενός κόμβου  $E_x[i, j]$  θα υπολογισθεί από την παλιά τιμή του και τις νέες τιμές των κόμβων  $H_z[i, j]$ ,  $H_z[i, j - 1]$  και  $H_y[i, j]$ .

Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να γίνει λόγος και για τον τρόπο επιλογής του συνολικού αριθμού των χρονικών βημάτων της προσομοίωσης. Κατά την καταγραφή του πεδίου στη διάρκεια της προσομοίωσης, αποθηκεύονται επί της ουσίας σήματα διακριτού χρόνου. Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier που επεξεργάζεται στη συνέχεια τα σήματα αυτά είναι διακριτός, που σημαίνει πρακτικά ότι δεν εξάγεται ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων, αλλά είναι χωρισμένο σε μικρά τμήματα  $\Delta f$ . Έστω ότι μία προσομοίωση εκτελείται για  $K$  συνολικά βήματα και η διαμέριση χρόνου που έχει επιλεγεί είναι  $\Delta t$  δευτερόλεπτα ανά βήμα. Ορίζεται ότι το μέγεθος του διαστήματος συχνότητας  $\Delta f$ , ρυθμίζει την αναλυτικότητα συχνότητας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και υπολογίζεται από τη σχέση  $\Delta f = 1/(K \Delta t)$ . Γίνεται αντιληπτό ότι ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης καθορίζει τη διαμέριση του φάσματος συχνοτήτων. Συνεπώς ο χρόνος αυτός πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος έτσι ώστε η διαμέριση του φάσματος να είναι επαρκώς λεπτομερής. Για τη σωστή εκτίμηση του χρόνου προσομοίωσης είναι επιθυμητό να υπάρχει μία εικόνα εκ των προτέρων για την περιοχή συχνοτήτων που λειτουργεί η εκάστοτε διάταξη. Σε αντίθετη περίπτωση λάθος εκτίμηση μπορεί να φανεί μόνο από τα αποτελέσματα. Αν προκύψουν στο φάσμα συχνότητες που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, τότε μπορεί να εκτελεστεί εκ νέου η προσομοίωση με περισσότερα βήματα και να γίνει σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα.

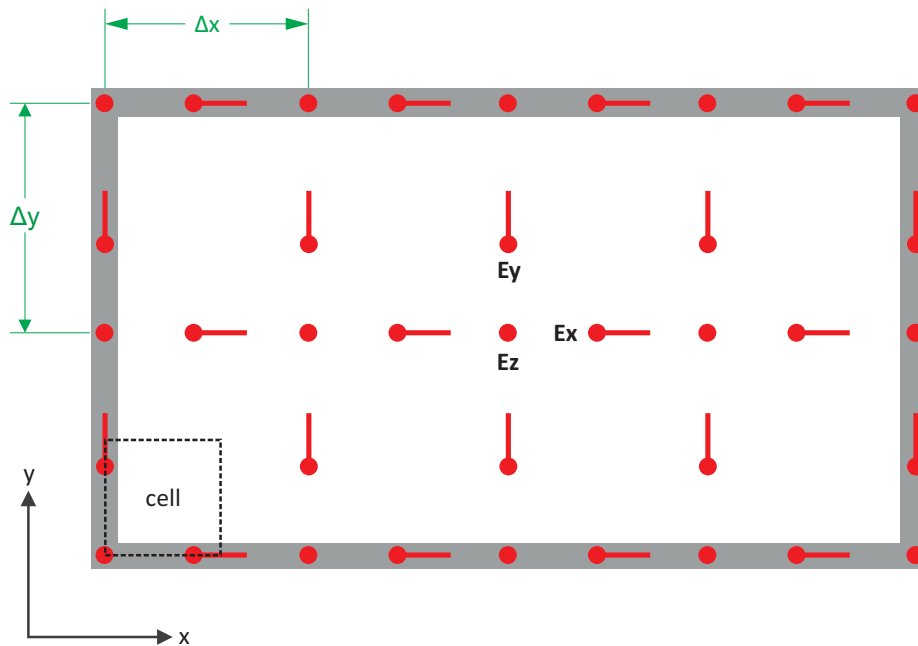
## 2.3 Οριακές συνθήκες

Μέχρι στιγμής, έχει αναλυθεί πλήρως η διαδικασία υπολογισμού της τιμής κάθε κόμβου του πλέγματος, με βάση τις εξισώσεις της μεθόδου. Τίθεται εύλογα όμως το ερώτημα του τι γίνεται όταν πρέπει να υπολογισθούν οι τιμές των κόμβων στα όρια του χώρου προσομοίωσης. Το πρόβλημα είναι ότι με βάση τις εξισώσεις ο υπολογισμός ενός κόμβου προσδιορίζεται από τις τιμές γειτονικών κόμβων. Οι κόμβοι του συνόρου του πλέγματος όμως δεν έχουν γείτονες σε όλες τις πλευρές. Επιπλέον, στις περισσότερες περιπτώσεις οι διατάξεις που μοντελοποιούνται είναι είτε κλειστές διατάξεις κυματοδήγησης, ή διατάξεις και αντικείμενα που βρίσκονται και εκπέμπουν ή διαχέουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα στον ελεύθερο χώρο. Κατά συνέπεια, στην πρώτη περίπτωση είναι σαφές ότι απαιτείται στα όρια του χώρου να εφαρμόζονται συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι αυτονόητο ότι το πλέγμα της προσομοίωσης δεν μπορεί να εκτείνεται στο άπειρο όπως ο ελεύθερος χώρος.

### 2.3.1 Συνθήκες τέλειου ηλεκτρικού αγωγού

Από τις πιο συνηθισμένες διατάξεις μοντελοποίησης και μελέτης με τη μέθοδο Compact FDTD είναι οι κυματοδηγοί. Επιτρέπουν την κατευθυνόμενη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με βέλτιστη συμπεριφορά στην περιοχή των μικροκυματικών συχνοτήτων. Από κατασκευαστική άποψη, οι κυματοδηγοί είναι κοίλοι μεταλλικοί αγωγοί με σταθερή διατομή (ορθογωνικού ή κυκλικού σχήματος συνήθως). Σε κάθε περίπτωση το μεταλλικό περιβλημα, μοντελοποιείται από *συνθήκες τέλειου ηλεκτρικού αγωγού* ή *συνθήκες PEC (Perfect Electric Conductor)*, όπως ονομάζονται. Επιπλέον, σε πιο πολύπλοκες μορφές κυματοδηγών, ή ακόμα και σε άλλες διατάξεις, ενδέχεται η ύπαρξη τέτοιων μεταλλικών επιφανειών η αντικειμένων να μην περιορίζεται μόνο στα σύνορα της περιοχής προσομοίωσης αλλά οπουδήποτε μέσα στη διάταξη. Στις περιπτώσεις αυτές γίνεται επίσης χρήση συνθηκών PEC.

Κατά την εφαρμογή συνθηκών PEC ορίζεται ότι οποιοσδήποτε κόμβος του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια του μετάλλου, πρέπει να έχει τιμή μηδέν. Η γενίκευση αυτή αφορά μεταλλικές επιφάνειες με διακριτό πάχος μέσα στη διάταξη. Όταν όμως πρόκειται για μία λεπτή πλάκα μετάλλου αμελητέου πάχους που τοποθετείται είτε οριζόντια ή κάθετα μέσα στη διάταξη ή στην περίπτωση των συνόρων ενός κυματοδηγού, τότε απλά οι κόμβοι του επαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου που πρέπει να έχουν τιμή μηδέν, βρίσκονται πάνω στην οριζόντια ή κάθετη γραμμή που διαγράφει η πλάκα μετάλλου. Στην εικόνα 2.7, έχουν σχεδιαστεί με γκρίζο χρώμα οι κόμβοι του ηλεκτρικού πεδίου που οι τιμές τους είναι μηδέν στην περίπτωση ενός συνόρου κυματοδηγού. Ο λόγος που μηδενίζονται οι συγκεκριμένοι κόμβοι, είναι εξαιτίας του μηδενισμού των επαπτομενικών συνιστωσών



Σχήμα 2.7: Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών PEC. Με γκριζο χρώμα οι κόμβοι του ηλεκτρικού πεδίου που μηδενίζονται.

του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο υπεραγώγιμο σύνορο [14].

### 2.3.2 Απορροφητικές οριακές συνθήκες

Κατά την επίλυση των εξισώσεων της μεθόδου στον ελεύθερο χώρο, υπάρχει μέθοδος που περιορίζει το χώρο προσομοίωσης, ενώ ταυτόχρονα δημιουργεί στα σύνορα του τεχνητά όρια που απορροφούν το κύμα αντί να ανακλούν την ενέργεια προς τα πίσω. Υπάρχει πληθώρα υλοποιήσεων τέτοιων απορροφητικών συνθηκών στη βιβλιογραφία. Στην παρούσα μελέτη γίνεται υλοποίηση των απορροφητικών συνθηκών Mur πρώτης τάξης, για δισδιάστατο πλέγμα [15]. Να σημειωθεί εδώ ότι, παρόλο που υπερέχουν σε απλότητα εφαρμογής σε σχέση με άλλες μεθόδους, το μειονέκτημα είναι ότι δεν απορροφάται πλήρως το προσπίπτον κύμα, διότι η μέθοδος βασίζεται σε προσεγγίσεις που εισάγουν αριθμητικό λάθος δεύτερης τάξης.

Αποδεικνύεται ότι οι κόμβοι που εμπλέκονται στον υπολογισμό των οριακών συνθηκών απορρόφησης πρώτης τάξης, ανήκουν αποκλειστικά στο ηλεκτρικό πεδίο. Επιπλέον όπως και στις οριακές συνθήκες PEC, υπολογίζονται μόνο οι εφαπτομενικές συνιστώσες κάθε συνόρου. Για κάθε συνοριακό κόμβο, ορίζεται ότι η νέα τιμή του ισούται με την παλιά τιμή του γειτονικού εσωτερικού κόμβου, αφού το κύμα ταξιδεύει προς τα έξω, συν μία προσέγγιση πρώτης τάξης αναφορικά με τη διάδοση από τον συνοριακό προς τον εσωτερικό κόμβο.

Πιο συγκεκριμένα ισχύει για,

- $i = 0$  (αριστερό σύνορο):



$$E_z^{n+1}[0, j] = E_z^n[1, j] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_z^{n+1}[1, j] - E_z^n[0, j]), \quad (2.38\alpha)$$

$$E_y^{n+1}[0, j + 0.5] = E_y^n[1, j + 0.5] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_y^{n+1}[1, j + 0.5] - E_y^n[0, j + 0.5]). \quad (2.38\beta)$$

- $i = X$  (δεξιό σύνορο):

$$E_z^{n+1}[X, j] = E_z^n[X - 1, j] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_z^{n+1}[X - 1, j] - E_z^n[X, j]), \quad (2.39\alpha)$$

$$E_y^{n+1}[X, j + 0.5] = E_y^n[X - 1, j + 0.5] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_y^{n+1}[X - 1, j + 0.5] - E_y^n[X, j + 0.5]). \quad (2.39\beta)$$

- $j = 0$  (κάτω σύνορο):

$$E_z^{n+1}[i, 0] = E_z^n[i, 1] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_z^{n+1}[i, 1] - E_z^n[i, 0]), \quad (2.40\alpha)$$

$$E_x^{n+1}[i + 0.5, 0] = E_x^n[i + 0.5, 1] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_x^{n+1}[i + 0.5, 1] - E_x^n[i + 0.5, 0]). \quad (2.40\beta)$$

- $j = Y$  (άνω σύνορο):

$$E_z^{n+1}[i, Y] = E_z^n[i, Y - 1] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_z^{n+1}[i, Y - 1] - E_z^n[i, Y]), \quad (2.41\alpha)$$

$$E_x^{n+1}[i + 0.5, Y] = E_x^n[i + 0.5, Y - 1] + \frac{c_0\Delta t - \Delta h}{c_0\Delta t + \Delta h}(E_x^{n+1}[i + 0.5, Y - 1] - E_x^n[i + 0.5, Y]). \quad (2.41\beta)$$

## 2.4 Διέγερση

Διατυπώθηκε ήδη ότι στο ξεκίνημα της προσομοίωσης οι πίνακες αρχικοποιούνται και οι κόμβοι έχουν τιμή μηδέν παντού. Για να γίνει η εκκίνηση της διάδοσης του πεδίου πρέπει να υπάρξει διέγερση. Στα πραγματικά ηλεκτρομαγνητικά κυκλώματα η διέγερση γίνεται με τη βοήθεια προβόλων, ή βρόγχων ρεύματος και διαφόρων άλλων τεχνικών όπως η διέγερση με ανοίγματα ή οπές στα τοιχώματα κυματοδηγών. Στις προσομοιώσεις του τύπου

που εξετάζεται στην παρούσα εργασία δεν υπάρχει ανάγκη για πιστή μοντελοποίηση τέτοιων πολύπλοκων διαδικασιών. Η διέγερση πραγματοποιείται από αυθαίρετες πηγές ηλεκτρικών σημάτων. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κόμβοι ηλεκτρικού πεδίου τροφοδοτούνται με τιμές που είτε περιγράφουν μεταβαλλόμενα σήματα στο χρόνο, ή είναι σταθερές τιμές που τροφοδοτούν ένα κόμβο του πλέγματος, ή ακόμα και κατανομές πεδιακής έντασης που εφαρμόζονται σε όλους τους κόμβους του πλέγματος.

Στην παρούσα μελέτη ορίζεται, σε όλες τις περιπτώσεις διατάξεων, ένα σετ τριών κόμβων  $E_x$ ,  $E_y$  και  $E_z$ , οι οποίοι βρίσκονται στο ίδιο κελί, ως κόμβοι διέγερσης και αποτελούν μαζί τη σημειακή πηγή. Οι κόμβοι τροφοδοτούνται από το πρώτο χρονικό βήμα, για πεπερασμένη διάρκεια, με γκαουσιανό παλμό πολλαπλασιασμένο με ημίτονο.

Ο γκαουσιανός παλμός ως σήμα συνεχούς χρόνου ορίζεται ως εξής:

$$g(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{t_w^2}}, \quad (2.42)$$

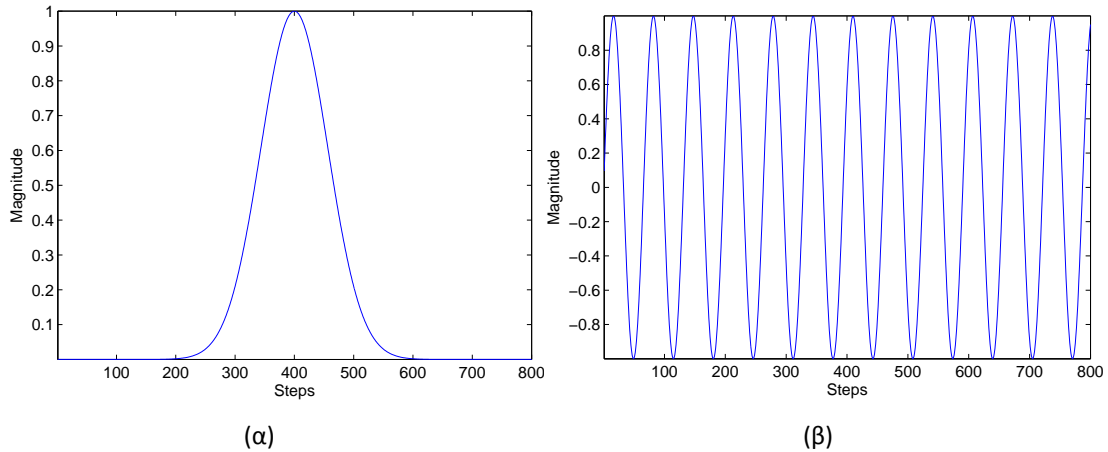
όπου ο όρος  $t - t_0$  είναι μία χρονική μετατόπιση προς τα θετικά  $t$  κατά  $t_0$  και  $t_w$  είναι το ενεργό πλάτος του παλμού, όπως ονομάζεται. Τη χρονική στιγμή μηδέν το πλάτος του παλμού δεν είναι ακριβώς μηδέν, αλλά ισχύει

$$g(0) = e^{-\frac{(t_0)^2}{t_w^2}}.$$

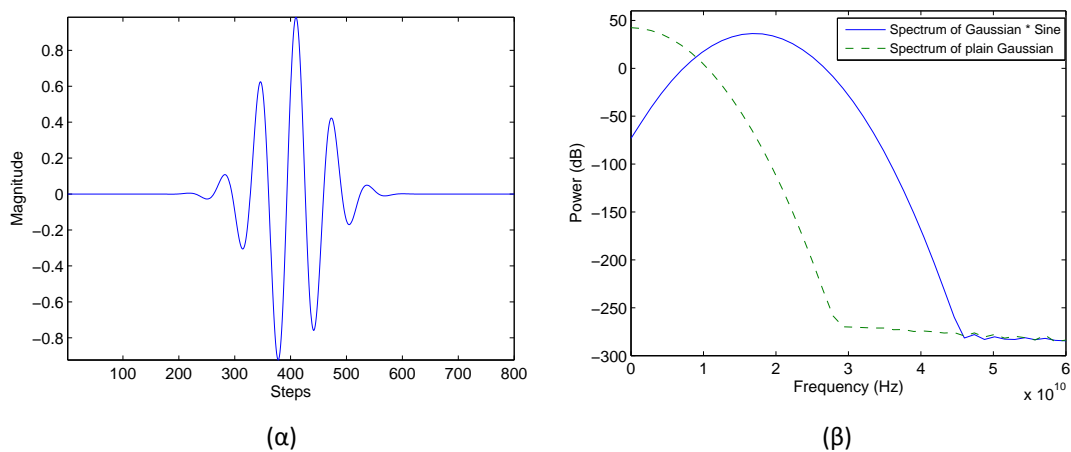
Η ιδιαιτερότητα αυτή μπορεί να εισάγει ανεπιθύμητο θόρυβο στα αριθμητικά αποτελέσματα και το πρόβλημα εντείνεται αφού η συνάρτηση που χρησιμοποιείται στην προσομοίωση είναι ουσιαστικά διακριτού χρόνου και οι ασυνέχειες εντονότερες. Γι' αυτό το λόγο προτείνεται η επιλογή της χρονικής καθυστέρησης να ξεπερνά κατά τέσσερις φορές το ενεργό πλάτος για να αυξάνεται πιο ομαλά η καμπύλη [16].

Ο γκαουσιανός παλμός έχει το πλεονέκτημα πως εισάγει ισχύ σε ένα εύρος συχνοτήτων και όχι μόνο σε μία συχνότητα όπως για παράδειγμα το ημίτονο. Το πρόβλημα είναι όμως ότι το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος εισάγεται κοντά στη μηδενική συχνότητα η οποία αποκόπτεται στους κυματοδηγούς. Για το λόγο αυτό, κρίθηκε σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός των δύο σημάτων, ο οποίος παρουσιάζει ενδιαφέρουσες ιδιότητες αν αναλυθεί στο πεδίο της συχνότητας. Στο σχήμα 2.8 φαίνεται ο γκαουσιανός παλμός και το ημίτονο στο πεδίο του χρόνου. Ο πολλαπλασιασμός των δύο και η απόκριση συχνότητας που προέρχεται από την πράξη της συνέλιξης απεικονίζονται στο σχήμα 2.9.

Η διάρκεια του σήματος της πηγής καθορίζεται από τη διάρκεια του παλμού, εφόσον πρόκειται για πολλαπλασιασμό σημάτων. Στο παράδειγμα του σχήματος το σήμα φαινομενικά μηδενίζεται στο εξακοσιοστό βήμα, αλλά λόγω της πολύ ομαλής μετάβασης του παλμού στις μηδενικές τιμές, πλησιάζει στο μηδέν κοντά στο οκτακοσιοστό βήμα. Επιπλέον είναι εμφανές ότι η διάρκεια αυτή είναι διπλάσια από το χρόνο μετατόπισης  $t_0$ , αφού για  $t = t_0$  ο παλμός παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Στο διπλανό σχήμα με διακεκομμένη γραμμή



Σχήμα 2.8: Αριστερά απεικονίζεται ο γκαουσιανός παλμός στο χρόνο και δεξιά το ημίτονο στο χρόνο.



Σχήμα 2.9: Πολλαπλασιασμός σημάτων στο χρόνο και σύγκριση της απόκρισης συχνότητας του πολλαπλασιασμού με τον απλό γκαουσιανό παλμό.

σχεδιάζεται η απόκριση συχνότητας για τον γκαουσιανό παλμό. Η συνεχής γραμμή δείχνει την απόκριση του πολλαπλασιασμού των σημάτων. Το εύρος συχνοτήτων με τη μεγαλύτερη ισχύ έχει μετατοπισθεί και μάλιστα εστιάζεται στη συχνότητα του ημίτονου. Αυτό είναι σημαντικό για την προσομοίωση γιατί εκτός από το ότι είναι απαραίτητη η διέγερση ενός εύρους συχνοτήτων, είναι κρίσιμο να τοποθετείται κατά βούληση η ζώνη διέγερσης στην επιθυμητή περιοχή. Γενικά το πόσο μεγάλο είναι το εύρος της ζώνης αυτής καθορίζεται από το ενεργό πλάτος του παλμού το οποίο για κάθε διάταξη που μελετήθηκε, ορίστηκε πειραματικά με βάση την απόκριση. Ως γενικός κανόνας επίσης ορίζεται αυθαίρετα ότι ζώνη διέγερσης θα θεωρείται η ζώνη συχνοτήτων με ισχύ άνω των  $-10$  dB και ότι συχνότητες εκτός αυτής της περιοχής δεν διεγείρονται.

## 2.5 Μοντελοποίηση ανισοτροπικών υλικών

Στη γενική περίπτωση η μέθοδος Compact 2D FDTD δεν είναι μέθοδος πραγματικών μεταβλητών. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε μπορεί να θεωρηθεί υποπερίπτωση της γενικής μεθόδου επίλυσης με μιγαδικές μεταβλητές. Υπενθυμίζεται ότι για να εξαλειφθούν οι φανταστικοί αριθμοί από τις εξισώσεις, πολλαπλασιάστηκε η μιγαδική μονάδα  $j$  με μία από τις δύο ομάδες συνιστωσών και πιο συγκεκριμένα, την ομάδα που αντιστοιχεί σε πόλωση  $TE^z$ . Αν η διαδικασία αυτή παραληφθεί, το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση επιπλέον έξι εξισώσεων για τον υπολογισμό του φανταστικού μέρους των μιγαδικών συνιστωσών. Σε κάθε μία από τις δώδεκα συνολικά εξισώσεις εμπλέκονται τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των πεδιακών συνιστωσών. Υπάρχει η δυνατότητα όμως υπό περιπτώσεις να δημιουργηθούν δύο ισοδύναμα σετ από τα οποία αρκεί να επιλεγεί αυθαίρετα το ένα για την επίλυση του προβλήματος. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι η μέθοδος μιγαδικών μεταβλητών ανάγεται στη μέθοδο πραγματικών μεταβλητών. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι πάντοτε δυνατό. Συγκεκριμένα σε περιπτώσεις όπου οι συνιστώσες  $E_x$  και  $E_y$  συμπεριλαμβάνουν κατά τον υπολογισμό τους τη συνιστώσα  $E_z$ , τα δύο σετ δεν είναι διαχωρίσιμα, και η μέθοδος μιγαδικών μεταβλητών δεν μπορεί να αναχθεί στην απλούστερη μορφή. Τέτοιες περιπτώσεις προκύπτουν σε ορισμένες από τις πιθανές διατάξεις με ανισοτροπικά υλικά πλήρωσης. Οι περιπτώσεις αυτές δεν αφορούν την παρούσα μελέτη γι' αυτό και η περιγραφή που θα ακολουθήσει αφορά προβλήματα διατάξεων με ανισοτροπικά υλικά επιλύσιμα με την απλουστευμένη μέθοδο πραγματικών μεταβλητών Compact 2D FDTD.

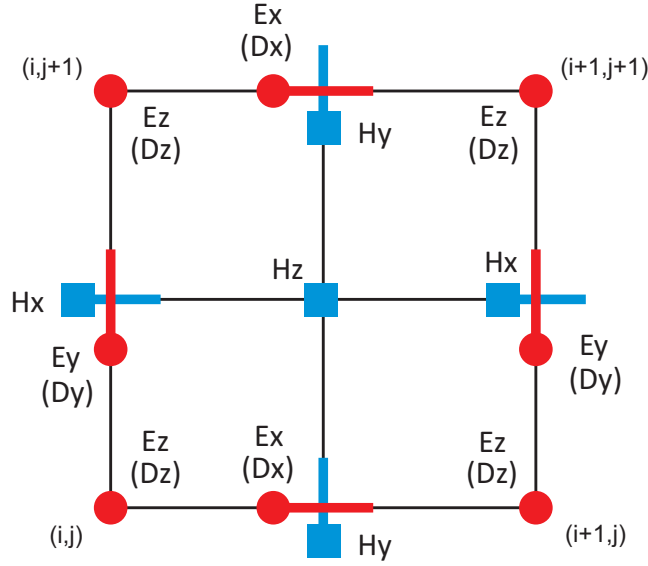
### 2.5.1 Τροποποιημένες εξισώσεις

Σε προβλήματα τέτοιων διατάξεων, οι ιδιότητες ενός ανισοτροπικού υλικού περιγράφονται αντί της διηλεκτρικής σταθεράς, με τη βοήθεια του τανυστή διηλεκτρικού:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Ο τανυστής  $\epsilon$  είναι συμμετρικός [7] και εμφανίζεται στην εξίσωση που συνδέει το ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  με την ηλεκτρική μετατόπιση  $\vec{D}$  η οποία αναλύεται σε συνιστώσες  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ ,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} [\epsilon]^{-1} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.10: Το πλέγμα της τροποποιημένης μεθόδου Compact 2D FDTD, που περιλαμβάνει κόμβους διηλεκτρικής μετατόπισης.

Λύνοντας ως προς τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει ότι [17]:

$$E_x = \frac{(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy})}{\Lambda} D_x + \frac{(\epsilon_{xz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{zz})}{\Lambda} D_y + \frac{(\epsilon_{xy}\epsilon_{yz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy})}{\Lambda} D_z, \quad (2.45\alpha)$$

$$E_y = \frac{(\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx}\epsilon_{zz})}{\Lambda} D_x + \frac{(\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx})}{\Lambda} D_y + \frac{(\epsilon_{xz}\epsilon_{yx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yz})}{\Lambda} D_z, \quad (2.45\beta)$$

$$E_z = \frac{(\epsilon_{yx}\epsilon_{zy} - \epsilon_{yy}\epsilon_{zx})}{\Lambda} D_x + \frac{(\epsilon_{xy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zy})}{\Lambda} D_y + \frac{(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx})}{\Lambda} D_z, \quad (2.45\gamma)$$

όπου

$$\Lambda = \epsilon_0(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} + \epsilon_{xz}\epsilon_{yx}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}). \quad (2.46)$$

Στις εξισώσεις Maxwell, στη θέση των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκονται οι αντίστοιχες συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης και στο δισδιάστατο πλέγμα αυτές δειγματοληπτούνται ακριβώς όπου και οι αντίστοιχες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Στο σχήμα 2.10, φαίνεται η διάταξη των κόμβων στο νέο πλέγμα.

Γίνεται αμέσως εμφανές ότι στον αλγόριθμο της μεθόδου πλέον προστίθεται και ο υπολογισμός της ηλεκτρικής μετατόπισης και μάλιστα λαμβάνει χώρα αμέσως μετά τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται κατά συνέπεια στο τέλος. Οι εξισώσεις Maxwell έχουν τώρα τη μορφή (το ένα από τα δύο ισοδύναμα σετ):

$$-\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta E_y, \quad (2.47\alpha)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \beta E_x, \quad (2.47\beta)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (2.47\gamma)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta H_y, \quad (2.47\delta)$$

$$-\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x} + \beta H_x, \quad (2.47\epsilon)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (2.47\sigma\tau)$$

όπου με εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών εξάγονται οι εξισώσεις υπολογισμού,

$$H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5] = H_x^{n-0.5}[i, j + 0.5] \frac{\Delta t}{\mu_0} \left( \frac{E_z^n[i, j + 1] - E_z^n[i, j]}{\Delta y} - \beta E_y^n[i, j + 0.5] \right), \quad (2.48)$$

$$H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j] = H_y^{n-0.5}[i + 0.5, j] - \frac{\Delta t}{\mu_0} \left( \frac{E_z^n[i, j] - E_z^n[i + 1, j]}{\Delta x} + \beta E_x^n[i + 0.5, j] \right), \quad (2.49)$$

$$H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5] = H_z^{n-0.5}[i + 0.5, j + 0.5] - \frac{\Delta t}{\mu_0} \left( \frac{E_y^n[i + 1, j + 0.5] - E_y^n[i, j + 0.5]}{\Delta x} - \frac{E_x^n[i + 0.5, j + 1] - E_x^n[i + 0.5, j]}{\Delta y} \right), \quad (2.50)$$

$$D_x^{n+1}[i + 0.5, j] = D_x^n[i + 0.5, j] + \Delta t \left( \frac{H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5] - H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j - 0.5]}{\Delta y} + \beta H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j] \right), \quad (2.51)$$

$$D_y^{n+1}[i, j + 0.5] = D_y^n[i, j + 0.5] + \Delta t \left( \frac{H_z^{n+0.5}[i - 0.5, j + 0.5] - H_z^{n+0.5}[i + 0.5, j + 0.5]}{\Delta x} + \beta H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5] \right), \quad (2.52)$$

$$D_z^{n+1}[i, j] = D_z^n[i, j] + \Delta t \left( \frac{H_y^{n+0.5}[i + 0.5, j] - H_y^{n+0.5}[i - 0.5, j]}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+0.5}[i, j + 0.5] - H_x^{n+0.5}[i, j - 0.5]}{\Delta y} \right). \quad (2.53)$$

Ο αλγόριθμος δεν είναι ακόμα ολοκληρωμένος. Πρέπει να βρεθούν οι εξισώσεις υπο-

λογισμού του ηλεκτρικού πεδίου με μορφή πεπερασμένων διαφορών. Πρόκειται για τις εξισώσεις (2.45), για την μετατροπή των οποίων ακολουθείται προσεγγιστική διαδικασία εύρεσης μίας μέσης τιμής των άμεσα γειτονικών κόμβων ηλεκτρικής μετατόπισης κάθε συνιστώσας ηλεκτρικού πεδίου [17]. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
E_x^n[i + 0.5, j] &= \frac{\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy}}{\Lambda} D_x^n[i + 0.5, j] \\
&+ \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{zz}}{4\Lambda} (D_y^n[i, j - 0.5] + D_y^n[i, j + 0.5]) \\
&\quad + D_y^n[i + 1, j - 0.5] + D_y^n[i + 1, j + 0.5]) \\
&+ \frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{yz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy}}{2\Lambda} (D_z^n[i, j] + D_z^n[i + 1, j]), \tag{2.54}
\end{aligned}$$

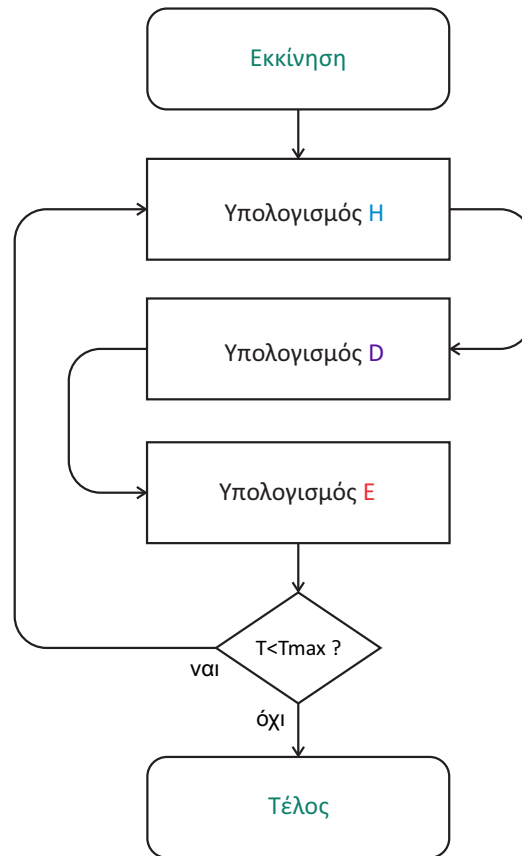
$$\begin{aligned}
E_y^n[i, j + 0.5] &= \frac{\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx}}{\Lambda} D_y^n[i, j + 0.5] \\
&+ \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx}\epsilon_{zz}}{4\Lambda} (D_x^n[i + 0.5, j] + D_x^n[i + 0.5, j]) \\
&\quad + D_x^n[i - 0.5, j + 1] + D_x^n[i + 0.5, j + 1]) \\
&+ \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{yx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yz}}{2\Lambda} (D_z^n[i, j] + D_z^n[i, j + 1]), \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^n[i, j] &= \frac{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx}}{\Lambda} D_z^n[i, j] \\
&+ \frac{\epsilon_{yx}\epsilon_{zy} - \epsilon_{yy}\epsilon_{zx}}{2\Lambda} (D_x^n[i - 0.5, j] + D_x^n[i + 0.5, j]) \\
&+ \frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zy}}{2\Lambda} (D_y^n[i, j + 0.5] + D_y^n[i, j - 0.5]). \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Το διάγραμμα ροής του τροποποιημένου αλγορίθμου φαίνεται στο σχήμα 2.11.

## 2.5.2 Εφαρμογή συνθηκών PEC

Έχει ήδη περιγραφεί η σημασία του ορισμού συνοριακών συνθηκών PEC προηγουμένως, για διατάξεις κυματοδηγών. Οι διατάξεις που περιέχουν ανισοτροπικά υλικά δεν αποτελούν εξαίρεση και είναι ανάγκη να οριστεί εκ νέου ο τρόπος εφαρμογής συνθηκών PEC στην τροποποιημένη μέθοδο. Στην επιφάνεια των PEC, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, έστω  $E_t$ , μηδενίζεται. Για να διασφαλισθεί η συνθήκη αυτή στον αλγόριθμο της τροποποιημένης μεθόδου, αρκεί να ορισθεί η τιμή των αντίστοιχων κόμβων ηλεκτρικού πεδίου σταθερά μηδέν. Αναφέρεται στην εργασία [17], για την πιθανή εξάλειψη αριθμητικών ανωμαλιών ή θορύβου στα αποτελέσματα, ότι οι συνθήκες αυτές είναι προτιμότερο να επιβάλλονται στο ηλεκτρικό πεδίο από κατάλληλες τιμές των κόμβων της ηλεκτρικής μετατόπισης, αφού οι τιμές των κόμβων του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτώνται πάντα



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα ροής του τροποποιημένου αλγόριθμου FDTD.

μόνο από γειτονικούς κόμβους του πεδίου της ηλεκτρικής μετατόπισης. Η διαδικασία διαφέρει στην περίπτωση τοποθέτησης PEC μέσα στη διάταξη από την περίπτωση εφαρμογής συνοριακών PEC.

Όταν η συνθήκες PEC πρέπει να εφαρμοσθούν μέσα στη διάταξη, τότε η εφαπτομενική συνιστώσα  $D_t$  υπολογίζεται εύκολα με αντικατάσταση της τιμής των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου με την τιμή μηδέν στις εξισώσεις (2.54), (2.55) και (2.56). Έτσι για παράδειγμα με αντικατάσταση  $E_x^n[i + 0.5, j] = 0$  στην (2.54), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 D_x^n[i + 0.5, j] = & \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{zz}}{4(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy})} (D_y^n[i, j - 0.5] + D_y^n[i, j + 0.5]) \\
 & + D_y^n[i + 1, j - 0.5] + D_y^n[i + 1, j + 0.5]) \\
 & + \frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{yz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy}}{2(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy})} (D_z^n[i, j] + D_z^n[i + 1, j]). \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

Ομοίως υπολογίζονται και οι υπόλοιπες συνιστώσες. Για ένα επίπεδο μεταλλικό τμήμα, για παράδειγμα, θα χρειαστεί επιπλέον ο υπολογισμός του  $D_z^n[i, j]$  από την (2.56) με αντικατάσταση  $E_z^n[i, j] = 0$ .

Όταν οι συνθήκες PEC πρέπει να εφαρμοστούν στα σύνορα της περιοχής προσομοίωσης, η διαδικασία είναι πιο περίπλοκη λόγω της απουσίας γειτόνων στα σημεία αυτά. Θα παρουσιαστεί αναλυτικά ο υπολογισμός μόνο για τις περιπτώσεις  $j = 0$  και  $i = 0$ . Από εκεί και έπειτα οι συνθήκες για  $j = Y$  και  $i = X$  είναι πολύ απλό να εξαχθούν.



- $j = 0$ :

Αρχικά, υπολογίζεται προσεγγιστικά για τους κόμβους ηλεκτρικής μετατόπισης που βρίσκονται πάνω στο σύνορο, τιμή που εξαρτάται μόνο από γειτονικούς κόμβους που βρίσκονται εσωτερικά της διάταξης. Η προσέγγιση για  $j = 0$  περιγράφεται ως εξής:

$$D_x^n[i + 0.5, 0] = 2D_x^n[i + 0.5, 1] - D_x^n[i + 0.5, 2] \quad (2.58\alpha)$$

$$D_y^n[i, 0] = \frac{1}{2}(3D_y^n[i, 0.5] - D_y^n[i, 1.5]) \quad (2.58\beta)$$

$$D_z^n[i, 0] = 2D_z^n[i, 1] - D_z^n[i, 2]. \quad (2.58\gamma)$$

Με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στην (2.54) θέτοντας  $j = 0$  και ταυτόχρονα απαιτώντας  $E_x^n[i + 0.5, 0] = 0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} D_x^n[i + 0.5, 0] = & -\frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{zz}}{4(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy})} (3D_y^n[i, 0.5] - D_y^n[i, 1.5]) \\ & + 3D_y^n[i + 1, 0.5] - D_y^n[i + 1, 1.5]) \\ & -\frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{yz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy}}{2(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy})} (2D_z^n[i, 1] - D_z^n[i, 2]) \\ & + 2D_z^n[i + 1, 1] - D_z^n[i + 1, 2]), \quad (2.59) \end{aligned}$$

και με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στην (2.56) θέτοντας  $j = 0$  και ταυτόχρονα απαιτώντας  $E_z^n[i, 0] = 0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} D_z^n[i, 0] = & -\frac{\epsilon_{yx}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zy}}{2(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx})} (2D_x^n[i - 0.5, 1] - D_x^n[i + 0.5, 2]) \\ & + 2D_x^n[i + 0.5, 1] - D_x^n[i + 0.5, 2]) \\ & -\frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zy}}{2(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx})} (3D_y^n[i, 0.5] - D_y^n[i, 1.5]). \quad (2.60) \end{aligned}$$

- $i = 0$ :

Ο προσεγγιστικός υπολογισμός των κόμβων ηλεκτρικής μετατόπισης για  $i = 0$  περιγράφεται ως εξής:

$$D_x^n[0, j] = \frac{1}{2}(3D_x^n[0.5, j] - D_x^n[1.5, j]) \quad (2.61\alpha)$$

$$D_y^n[0, j + 0.5] = 2D_y^n[1, j + 0.5] - D_y^n[2, j + 0.5] \quad (2.61\beta)$$

$$D_z^n[0, j] = 2D_z^n[1, j] - D_z^n[2, j]. \quad (2.61\gamma)$$

Με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στην (2.55) θέτοντας  $i = 0$  και ταυτόχρονα

απαιτώντας  $E_y^n[0, j + 0.5] = 0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 Dy^n[0, j + 0.5] = & -\frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx}\epsilon_{zz}}{4(\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx})}(3D_x^n[0.5, j] - D_x^n[1.5, j]) \\
 & + 3D_x^n[0.5, j + 1] - D_x^n[1.5, j + 1]) \\
 & -\frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{yx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yz}}{2(\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx})}(2D_z^n[1, j] - D_z^n[2, j]) \\
 & + 2D_z^n[1, j + 1] - D_z^n[2, j + 1]), \tag{2.62}
 \end{aligned}$$

και με αντικατάσταση των προσεγγίσεων στην (2.56) θέτοντας  $i = 0$  και ταυτόχρονα απαιτώντας  $E_z^n[0, j] = 0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 Dz^n[0, j] = & -\frac{\epsilon_{yx}\epsilon_{zy} - \epsilon_{yy}\epsilon_{zx}}{2(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx})}(3D_x^n[0.5, j] - D_x^n[1.5, j]) \\
 & -\frac{\epsilon_{xy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zy}}{2(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx})}(2D_y^n[1, j + 0.5] - D_y^n[2, j + 0.5]) \\
 & + 2D_y^n[1, j - 0.5] - D_y^n[2, j - 0.5]). \tag{2.63}
 \end{aligned}$$

# 3

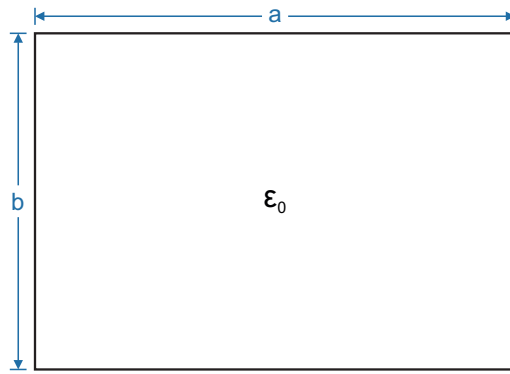
## Αριθμητικά αποτελέσματα

Η μέθοδος Compact-FDTD εφαρμόστηκε σε συνολικά οκτώ διατάξεις μεταφοράς και οδήγησης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξήχθησαν και θα βοηθήσουν στο να επαληθευθεί η σωστή λειτουργία της, παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο. Για κάθε διάταξη θα δίνονται επίσης τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της και οι παράμετροι εκτέλεσης της προσομοίωσης. Η εκτέλεση των προσομοιώσεων πραγματοποιήθηκε σε φορητό υπολογιστή με διπύρρηνο επεξεργαστή Intel Core i3-2330M @ 2.20 GHz, μνήμη RAM 6 GB, σκληρό δίσκο 5400 rpm και λειτουργικό σύστημα Microsoft Windows 8.1.

### 3.1 Ορθογώνιος κυματοδηγός

Η πρώτη διάταξη που μελετήθηκε είναι η απλούστερη μορφή κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής χωρίς διηλεκτρικό πλήρωσης. Οι μοναδικές γεωμετρικές διαστάσεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη εδώ είναι τα μήκη της μικρής και της μεγάλης πλευράς. Η διάταξη του κυματοδηγού φαίνεται στο σχήμα 3.1 και οι διαστάσεις του στον πίνακα 3.1.

Ο χώρος προσομοίωσης είναι ένα ορθογώνιο με πλευρές τα πολλαπλάσια του χωρικού βήματος που αντιστοιχούν στις πραγματικές γεωμετρικές διαστάσεις. Το μέγεθος κελιού που επιλέχθηκε είναι ίσο με 0.381 mm και είναι τέτοιο ώστε να είναι περίπου 30 φορές μικρότερο από το ελάχιστο μήκος κύματος που πρόκειται να διαδοθεί. Η διάδοση γίνεται μόνο στον αέρα και άρα η ταχύτητα του φωτός είναι η μικρότερη δυνατή ταχύτητα διάδοσης η οποία επηρεάζει τον υπολογισμό του  $\lambda_{min}$ . Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυματοδηγού δίνονται σε αριθμό κελιών στον πίνακα 3.2. Το χρονικό βήμα υπολογίζεται ότι δεν



Σχήμα 3.1: Ορθογώνιος κυματοδηγός.

Πίνακας 3.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ορθογώνιου κυματοδηγού.

a (mm)	b (mm)
19.05	9.525

Πίνακας 3.2: Γεωμετρία προσομοίωσης ορθογώνιου κυματοδηγού.

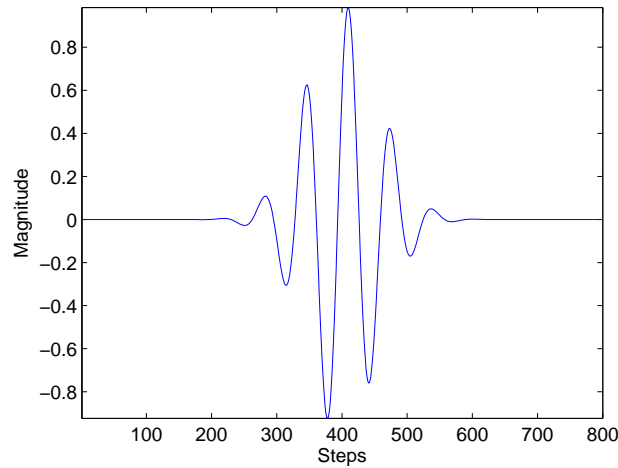
a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )
50	25

πρέπει να υπερβαίνει τα 0.897 ps, σύμφωνα με τη συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας της μεθόδου. Με συνολική διάρκεια εκτέλεσης 55000 χρονικά βήματα επιτυγχάνεται αναλυτικότητα στο πεδίο της συχνότητας ίση με 20.2 MHz και χρόνος εκτέλεσης 15 δευτερολέπτων.

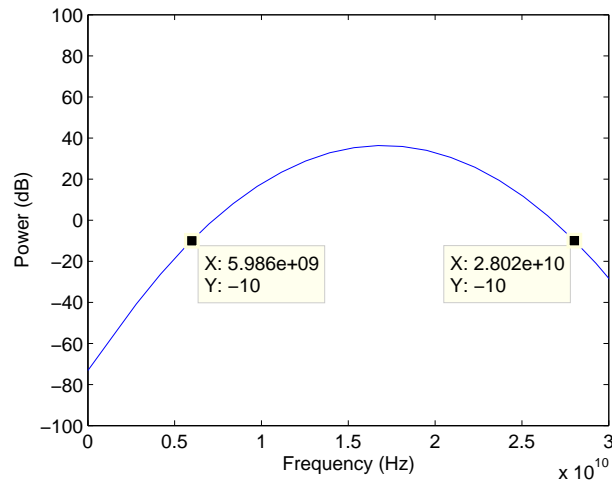
Η σημειακή πηγή που χρησιμοποιήθηκε, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα 3.2(α), είναι γκαουσιανός παλμός ενεργού πλάτους  $80 \Delta t$  πολλαπλασιασμένος με ημίτονο συχνότητας 17 GHz. Οι παράμετροι αυτές επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε η πηγή να εισάγει ισχύ που να ξεπερνά τα -10 dB στη ζώνη συχνοτήτων 6 έως 28 GHz. Το σχήμα 3.2(β) επαληθεύει ότι η συχνότητα του ημιτόνου συμβάλει στο κεντράρισμα της ζώνης συχνοτήτων στα 17 GHz και το πλάτος του παλμού περιορίζει την ισχύ αναλόγως στην επιθυμητή περιοχή.

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για δέκα διαφορετικές τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα από 0 έως 450 rad/m. Μετά το πέρας της κάθε προσομοίωσης ακολούθησε η φασματική ανάλυση του χρονικά εξαρτώμενου σήματος στο σημείο καταγραφής, αντιστοίχως για κάθε τιμή της σταθεράς διάδοσης. Το σχήμα 3.3 δείχνει το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού για κάθε πεδιακή συνιστώσα όταν  $\beta = 0$ . Όπως είναι αναμενόμενο, οι συχνότητες που εμφανίζονται στα γραφήματα είναι οι συχνότητες αποκοπής των διαδιδόμενων ρυθμών. Η μικρότερη συχνότητα που εμφανίζεται είναι η συχνότητα αποκοπής του ρυθμού  $TE_{10}$ , η δεύτερη συχνότητα αντιστοιχεί στους ρυθμούς  $TE_{01}$  και  $TE_{20}$  και η τρίτη συχνότητα στους ρυθμούς  $TE_{11}$  και  $TM_{11}$ . Ομοίως και στα αποτελέσματα για τις υπόλοιπες τιμές της σταθεράς διάδοσης.

Σ' αυτήν την απλή περίπτωση (του ορθογώνιου κυματοδηγού) είναι διαθέσιμη η αναλυτική λύση κατά την οποία είναι δυνατό να υπολογισθεί για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.



(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.2: Η σημειακή πηγή για τον ορθογώνιο κυματοδηγό και το συχνοτικό της περιεχόμενο.

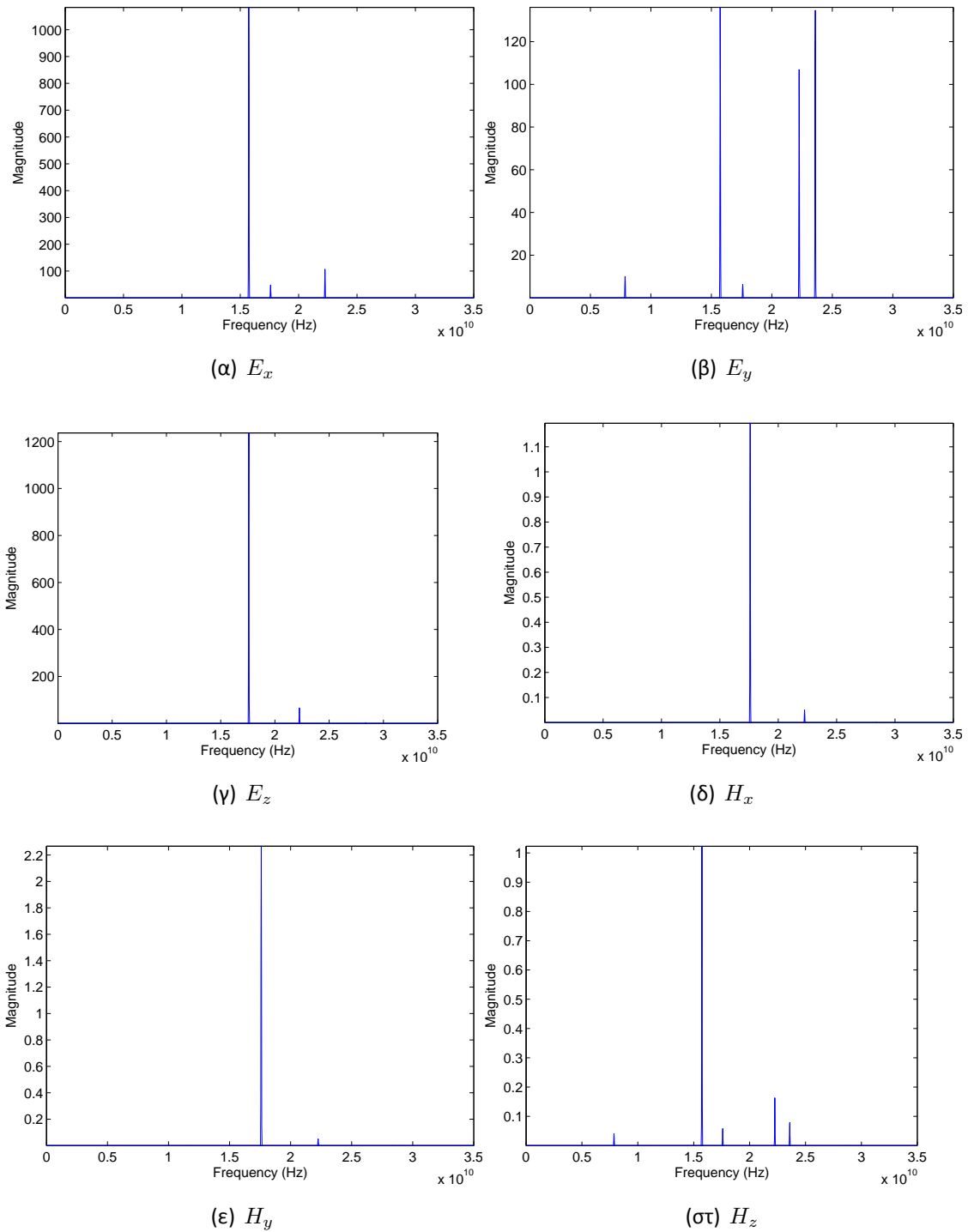
διάδοσης  $\beta$  η συχνότητα  $f_{mn}$  του ρυθμού  $MN$  με τη σχέση:

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.1)$$

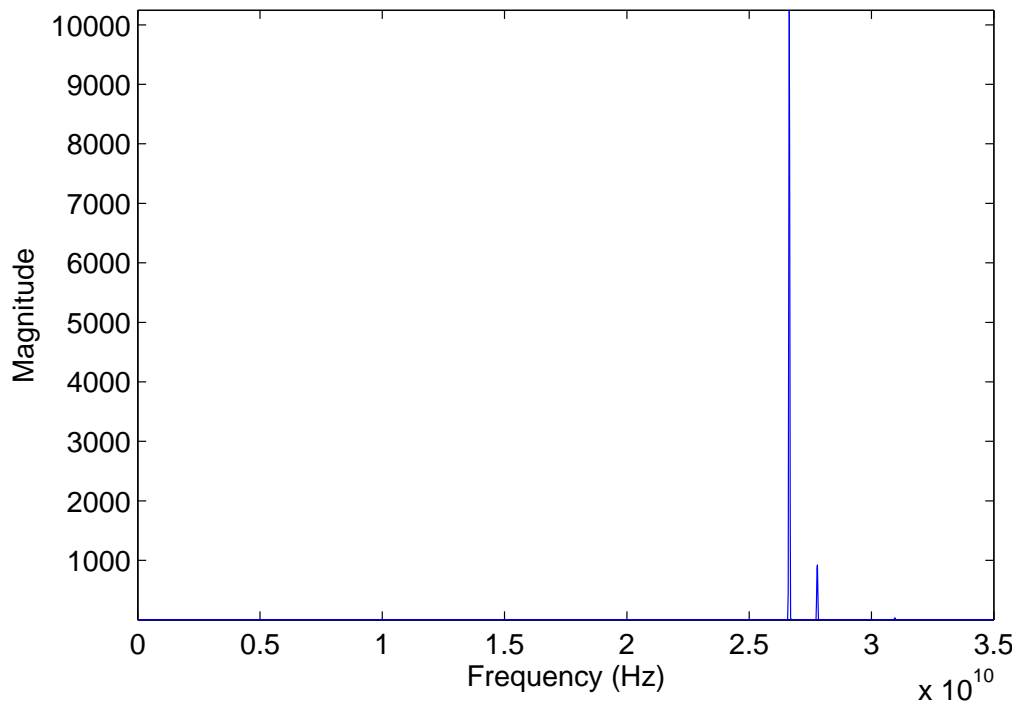
Γίνεται πλέον κατανοητό ότι με τη βοήθεια της αναλυτικής λύσης μπορεί να προσδιοριστεί πριν την έναρξη των προσομοιώσεων η ζώνη συχνοτήτων μέσα στην οποία πρόκειται να εμφανιστούν τα αποτελέσματα. Κατά συνέπεια με την επιλογή εξαρχής των ρυθμών που θα μελετηθούν και βέβαια του διαστήματος από όπου θα πάρει τιμές η σταθερά διάδοσης, μπορεί κανείς να προβλέψει τη μέγιστη συχνότητα που πρόκειται να εμφανιστεί. Ακολούθως ορίζεται το μικρότερο μήκος κύματος που πρέπει να παραστήσει ορθά η προσομοίωση, το οποίο με τη σειρά του προσδιορίζει το μέγεθος κελιού.

Με μία επισκόπηση της φασματικής ανάλυσης των πεδιακών συνιστωσών του σχήματος 3.3 φαίνεται ότι το σύνολο των συχνοτήτων που εμφανίζονται συγκεντρώνεται στην περιοχή κάτω από 30 GHz περίπου. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι δεν υποστηρίζονται άλ-

### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



Σχήμα 3.3: Μετασχηματισμός Fourier για  $\beta = 0$  του πεδίου στον ορθογώνιο κυματοδηγό.



Σχήμα 3.4: Μετασχηματισμός Fourier του  $E_x$  για  $\beta = 450$  rad/m.

λοι ρυθμοί στον κυματοδηγό, αλλά είναι άμεσο αποτέλεσμα απουσίας κατάλληλης διέγερσης, λόγω του συχνοτικού περιεχομένου του παλμού. Μάλιστα για την τιμή 0 της σταθεράς διάδοσης διεγείρονται περισσότεροι ρυθμοί από το επιθυμητό πλήθος, διότι οι συχνότητες αποκοπής ανώτερων ρυθμών, από αυτούς που είναι επιθυμητοί, συμπεριλαμβάνονται στη ζώνη συχνοτήτων με ισχύ άνω των -10 dB της πηγής. Κατά συνέπεια για μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  σταδιακά οι ανεπιθύμητοι ρυθμοί αρχίζουν να εκλείπουν από τα αποτελέσματα, εφόσον οι αντίστοιχες συχνότητες αυτών τοποθετούνται μετά τα 30 GHz όπου η ισχύς πέφτει κάτω από τα -10 dB. Τα προηγούμενα επαληθεύονται από το σχήμα 3.4 που απεικονίζει τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού για  $\beta = 450$  rad/m του  $E_x$ . Επαληθεύεται επίσης από το σχήμα 3.4, ότι η αναλυτικότητα συχνότητας είναι τέτοια ώστε να είναι πάντα μικρότερη από την μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ δύο συχνοτήτων στο φάσμα, αφού η χειρότερη περίπτωση συμβαίνει στην υψηλότερη τιμή της σταθεράς διάδοσης. Γίνεται τέλος σαφές ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης χάνουν την εγκυρότητα τους για  $\beta > 450$  rad/m, γιατί πλέον η συχνότητα κανενός ρυθμού δεν τοποθετείται μέσα στη ζώνη συχνοτήτων που διεγείρονται.

Με περαιτέρω ανάλυση ανακαλύπτουμε ότι δεν εμφανίζονται οι συχνότητες όλων των ρυθμών στο φάσμα κάθε πεδιακής συνιστώσας. Ο λόγος είναι ότι για κάθε ρυθμό μόνο μερικές συνιστώσες του πεδίου δεν είναι μηδενικές ή αντίστροφα, ενδέχεται μόνο ορισμένες συνιστώσες να συμβάλουν στη διάδοση ενός ρυθμού. Είναι γνωστές οι εκφράσεις των

συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για το ρυθμό  $TE_{mn}$ :

$$E_z = 0, \quad (3.2\alpha)$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.2\beta)$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.2\gamma)$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.2\delta)$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.2\epsilon)$$

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.2\sigma\tau)$$

όπου

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Για τον ρυθμό  $TM_{mn}$  ισχύει:

$$E_z = B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.3\alpha)$$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.3\beta)$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.3\gamma)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.3\delta)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}, \quad (3.3\epsilon)$$

$$H_z = 0, \quad (3.3\sigma\tau)$$

όπου

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad m = 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Άρα, για τον επικρατέστερο ρυθμό  $TE_{10}$  για παράδειγμα ισχύει:

$$E_y = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} A_{10} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}, \quad (3.4\alpha)$$

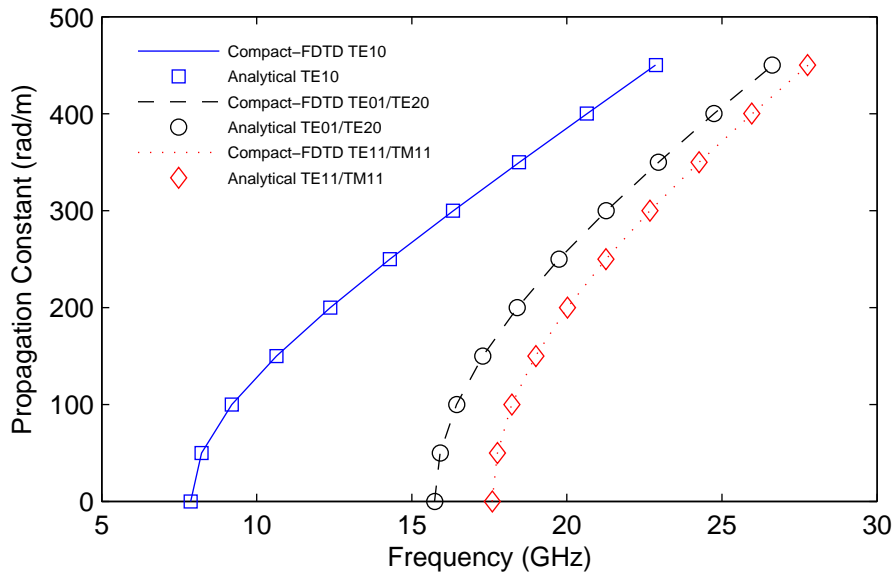
$$H_x = \frac{j\beta a}{\pi} A_{10} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}, \quad (3.4\beta)$$

$$H_z = A_{10} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}, \quad (3.4\gamma)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0. \quad (3.4\delta)$$

Πράγματι στο φάσμα συχνοτήτων των  $E_x$ ,  $E_z$  και  $H_y$  για  $\beta = 0$  δεν υπάρχει καμία κορυφή κοντά στη συχνότητα των 8 GHz που είναι η συχνότητα αποκοπής του βασικού ρυθμού.



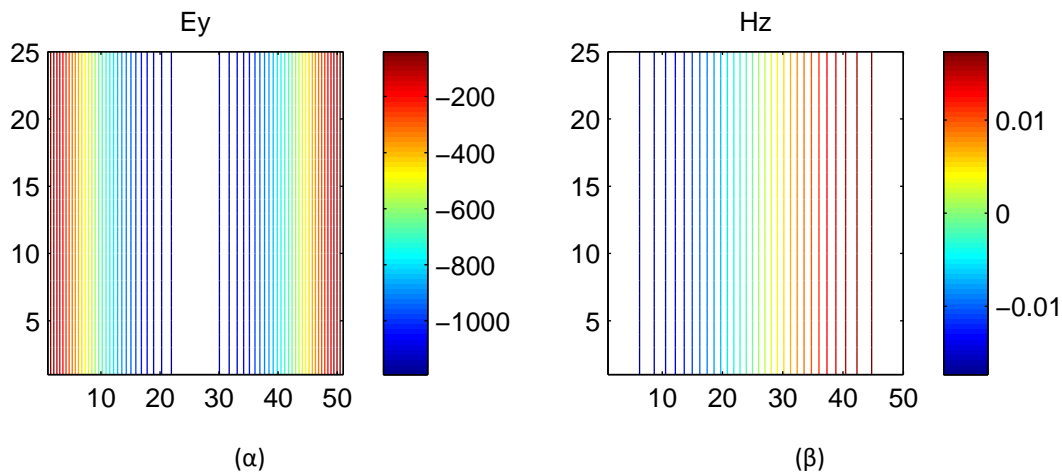


Σχήμα 3.5: Διάγραμμα διασποράς για τους πέντε πρώτους ρυθμούς του ορθογώνιου κυματοδηγού.

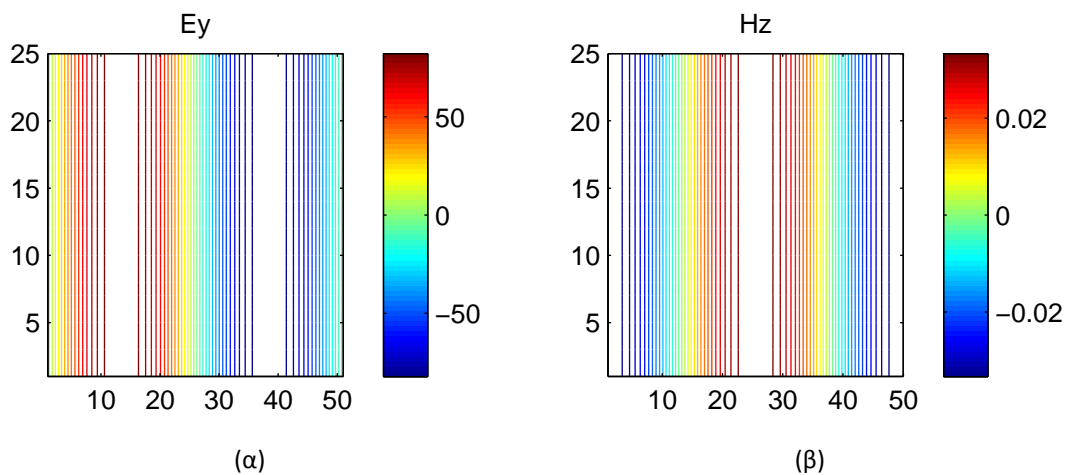
Βέβαια δεν υπάρχει ούτε και στο φάσμα του  $H_x$ , αλλά αυτό είναι αναμενόμενο γιατί όπως φαίνεται και στη σχέση (3.4β) για μηδενική σταθερά διάδοσης, το  $H_x$  επίσης μηδενίζεται.

Με βάση τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί, η σχέση της συχνότητας με τη σταθερά διάδοσης μπορεί να αναπαρασταθεί για κάθε ρυθμό σε ένα **διάγραμμα διασποράς**. Ένα τέτοιο διάγραμμα δίνεται στο σχήμα 3.5 και αφορά τον ορθογώνιο κυματοδηγό που μελετήθηκε. Στο διάγραμμα δίνονται οι καμπύλες διασποράς των πέντε πρώτων ρυθμών του κυματοδηγού. Σε οποιαδήποτε τιμή της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  αντιστοιχεί μοναδική τιμή συχνότητας για κάθε ρυθμό. Για να κατασκευαστεί το συγκεκριμένο διάγραμμα χρειάστηκε να καταγραφούν συνολικά οι τρεις μόνο πρώτες κορυφές στο φάσμα συχνοτήτων στην έξοδο του μετασχηματισμού Fourier. Αυτές είναι αρκετές στην προκειμένη περίπτωση για να περιγραφούν πέντε ρυθμοί. Οι ρυθμοί  $TE_{01}$  και  $TE_{20}$  έχουν την ίδια συμπεριφορά στο φάσμα συχνοτήτων και περιγράφονται από την ίδια καμπύλη λόγω της ιδιαίτερης γεωμετρίας του συγκεκριμένου κυματοδηγού: η μεγάλη του πλευρά είναι ακριβώς διπλάσια από τη μικρή. Το ίδιο συμβαίνει ούτως ή άλλως και για τους ρυθμούς  $TE_{11}$  και  $TM_{11}$  σε κάθε περίπτωση ορθογώνιου κυματοδηγού ανεξαρτήτως διαστάσεων. Στο διάγραμμα διασποράς γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αναλυτική λύση. Όπως γίνεται φανερό πολύ καλή συμφωνία μπορεί να παρατηρηθεί.

Στα σχήματα 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 και 3.10 δίνονται οι εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για κάθε ρυθμό για  $\beta = 0$ . Οι εγκάρσιες κατανομές ουσιαστικά απεικονίζουν τις ισοσταθμικές καμπύλες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα στον κυματοδηγό (όχι τις δυναμικές γραμμές). Για την καταγραφή της πεδιακής κατανομής σε κάθε ρυθμό, χρησιμοποιείται πηγή της οποίας ο παλμός έχει μεγάλο ενεργό πλάτος (π.χ.  $1000 \Delta t$ ) και το ημίτονο συχνότητα ίση με τη συχνότητα αποκοπής του ρυθμού. Με

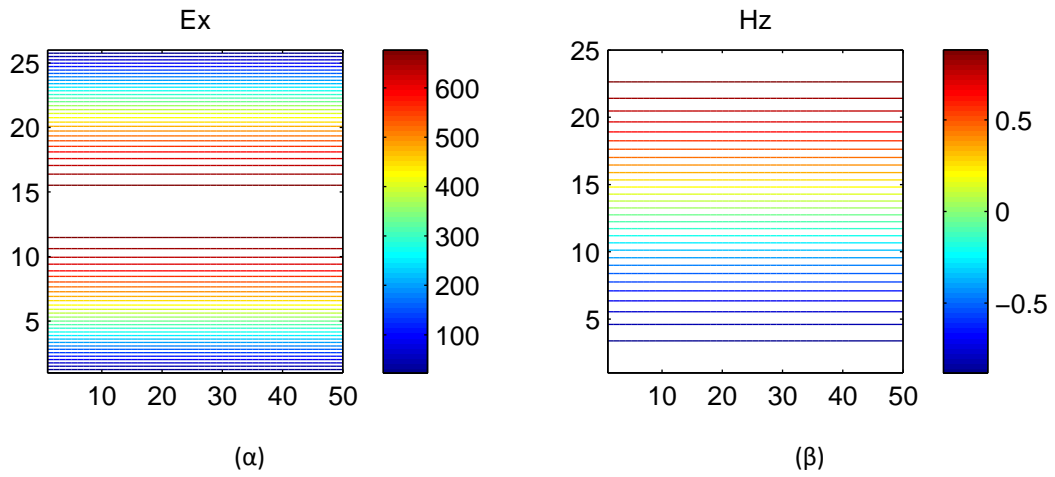


Σχήμα 3.6: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_z$  του ρυθμού  $TE_{10}$  στον ορθογώνιο κυματοδηγό ( $\beta = 0$ ).

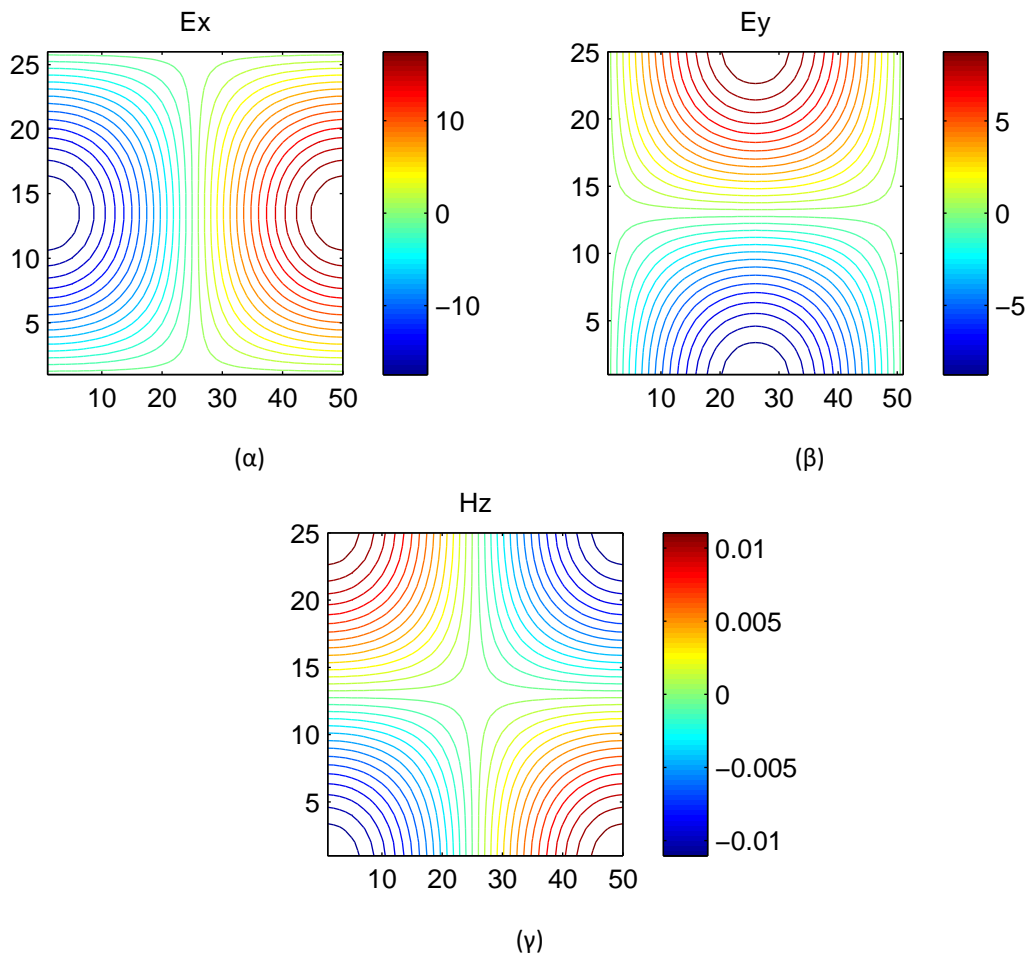


Σχήμα 3.7: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_z$  του ρυθμού  $TE_{20}$  στον ορθογώνιο κυματοδηγό ( $\beta = 0$ ).

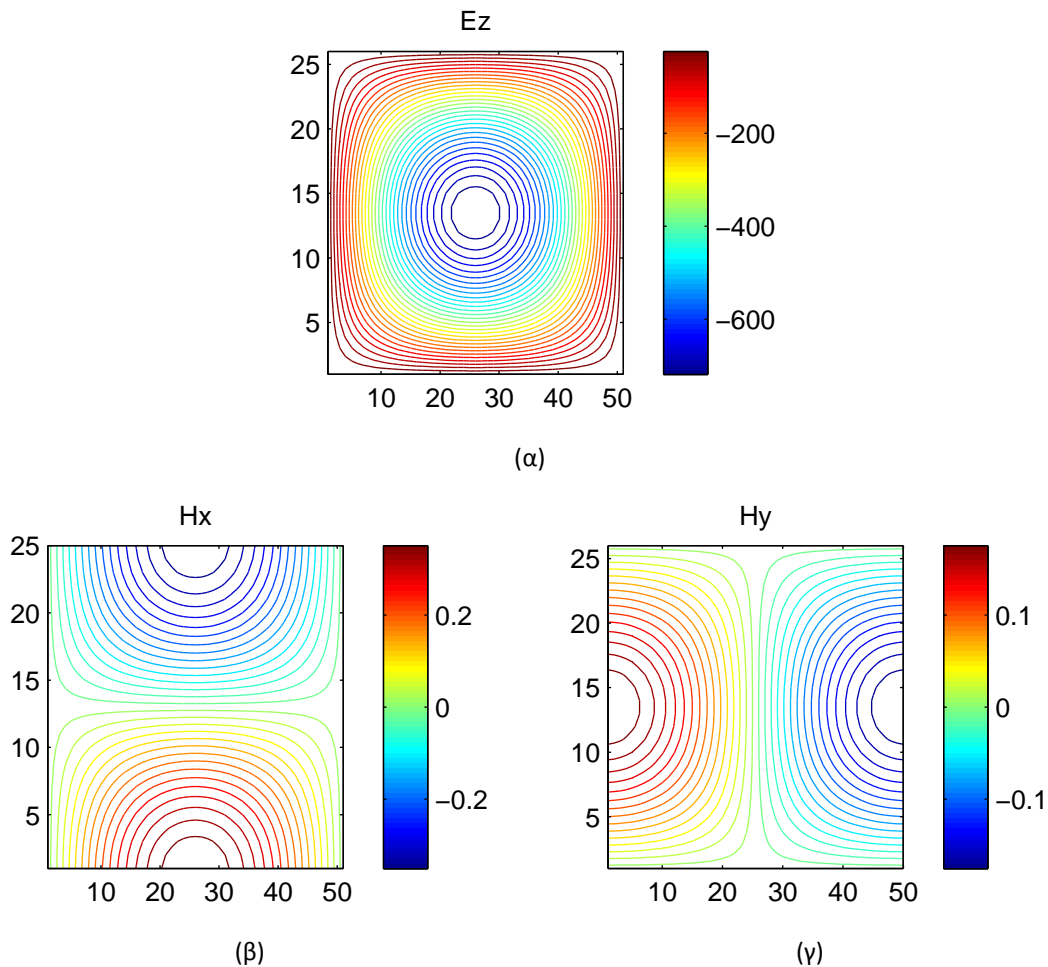
αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η διέγερση μίας ελάχιστης ζώνης συχνοτήτων πολύ κοντά στη συχνότητα αποκοπής έτσι ώστε να αποτραπεί η διέγερση των υπολοίπων. Στην περίπτωση των εκφυλισμένων ρυθμών ο διαχωρισμός τους απαιτεί επιπλέον την διακοπή της τροφοδότησης με το σήμα της πηγής όποιας συνιστώσας ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι μηδενική με βάση τη θεωρία. Το γεγονός ότι η καταγραφή αυτή έγινε με μηδενική τιμή της σταθεράς διάδοσης δεν είναι τυχαίο, διότι η επιλογή αυτή μηδενίζει ακόμα περισσότερες συνιστώσες και διευκολύνει περαιτέρω τον διαχωρισμό των εκφυλισμένων ρυθμών και ιδιαίτερα στην περίπτωση των  $TE_{11}/TM_{11}$ . Για παράδειγμα για το ρυθμό  $TM_{11}$  δεν διεγείρονται από την πηγή οι συνιστώσες  $H_z$  (λόγω του ρυθμού),  $E_x$  και  $E_y$  (λόγω της μηδενικής τιμής του  $\beta$ ).



Σχήμα 3.8: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_x$  και  $H_z$  του ρυθμού  $TE_{01}$  στον ορθογώνιο κυματοδηγό ( $\beta = 0$ ).



Σχήμα 3.9: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_x$ ,  $E_y$  και  $H_z$  του ρυθμού  $TE_{11}$  στον ορθογώνιο κυματοδηγό ( $\beta = 0$ ).



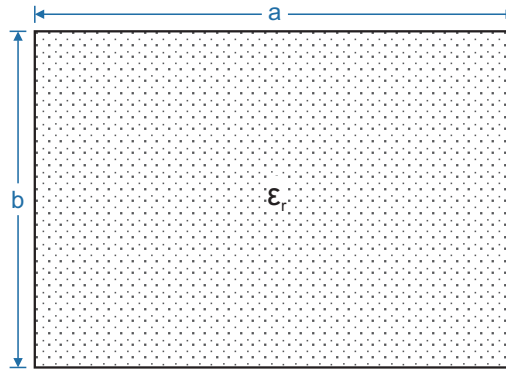
Σχήμα 3.10: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_z$ ,  $E_x$  και  $H_y$  του ρυθμού  $TM_{11}$  στον ορθογώνιο κυματοδηγό ( $\beta = 0$ ).

### 3.2 Ορθογώνιος κυματοδηγός με διηλεκτρικό

Στην παρούσα ενότητα, η μοναδική αλλαγή σε σχέση με τον απλό κυματοδηγό είναι ότι εδώ το μέσο πληρούται εξ ολοκλήρου με διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_r = 4$ . Η διάταξη του κυματοδηγού φαίνεται στο σχήμα 3.11 και οι διαστάσεις του αναφέρονται στον πίνακα 3.3.

Ο χώρος προσομοίωσης είναι, όπως και πριν, ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις σε κελιά φαίνονται στον πίνακα 3.4. Το μέγεθος κελιού που επιλέχθηκε είναι ίσο με 0.357 mm. Σ' αυτήν την περίπτωση το ελάχιστο μήκος κύματος  $\lambda_{min}$ , που υπολογίζεται βάση της ταχύτητας στο μέσο πλήρωσης με σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_r$ , περιέχει 29 κελιά. Το χρονικό βήμα είναι 0.841 ps σύμφωνα με τη συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας και η συνολική διάρκεια εκτέλεσης 60000 χρονικά βήματα. Η αναλυτικότητα στο πεδίο της συχνότητας που επιτυγχάνεται εδώ είναι ίση με 20.1 MHz και ο πραγματικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι 30 δευτερόλεπτα.

Η πηγή που χρησιμοποιήθηκε, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα 3.12(α), είναι γκαου-



Σχήμα 3.11: Ορθογώνιος κυματοδηγός με διηλεκτρικό.

Πίνακας 3.3: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ορθογώνιου κυματοδηγού με διηλεκτρικό.

a (cm)	b (cm)	$\epsilon_r$
3	1.25	4

Πίνακας 3.4: Γεωμετρία προσομοίωσης ορθογώνιου κυματοδηγού με διηλεκτρικό.

a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )
84	35

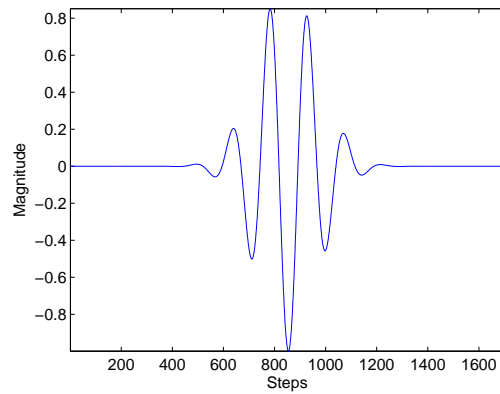
σιανός παλμός ενεργού πλάτους  $170 \Delta t$  πολλαπλασιασμένος με ημίτονο συχνότητας 8 GHz. Οι παράμετροι αυτές ορίζουν την περιοχή διέγερσης (ισχύς μεγαλύτερη από -10 dB) στη ζώνη συχνοτήτων από 2 έως 14 GHz.

Η αύξηση στο χρόνο εκτέλεσης σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση είναι αποτέλεσμα ενός συνδυασμού παραμέτρων. Το  $\lambda_{min}$  είναι μικρότερο από πριν, ενώ ταυτόχρονα είναι επιθυμητό να διατηρηθεί η αναλυτικότητα στα ίδια επίπεδα, καθώς στο φάσμα συχνοτήτων στη χειρότερη περίπτωση οι κορυφές απέχουν κατά 0.22 GHz, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.13. Επιπλέον εύκολα παρατηρείται ότι ενώ το χωρικό πλέγμα στην προηγούμενη περίπτωση αποτελείται από 1250 κελιά, εδώ αποτελείται από παραπάνω από τα διπλάσια, δηλαδή 2940, καθώς επίσης και ότι ο χρόνος προσομοίωσης είναι αυξημένος κατά 5000 βήματα.

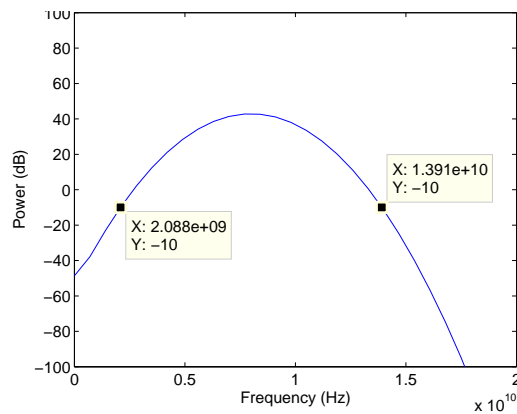
Η προσομοίωση εκτελέστηκε για έντεκα τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα από 0 έως 500 rad/m. Στο σχήμα 3.14 δίνονται οι καμπύλες διασποράς των πέντε πρώτων ρυθμών του ορθογώνιου κυματοδηγού με διηλεκτρικό. Συνολικά με την καταγραφή των τεσσάρων πρώτων κορυφών στην έξοδο του fft περιγράφονται πέντε ρυθμοί, αφού οι συχνότητες των  $TE_{11}$  και  $TM_{11}$  πάντα συμπίπτουν.

Στο διάγραμμα διασποράς γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αναλυτική λύση κατά την οποία η συχνότητα  $F_{mn}$  του ρυθμού MN για κάποια σταθερά διάδοσης  $\beta$  δίνεται σύμφωνα με τη σχέση 3.1. Και πάλι, πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των υπολογιστικών αποτελεσμάτων της μεθόδου και της αναλυτικής λύσης φαίνεται στο γράφημα.

### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα

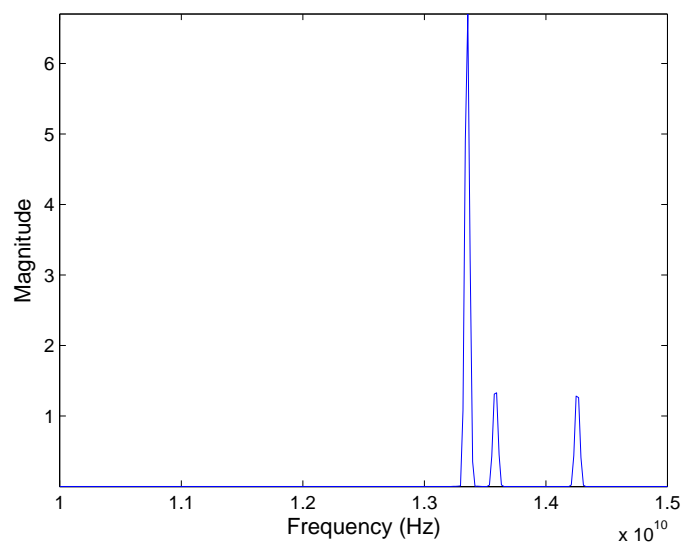


(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.

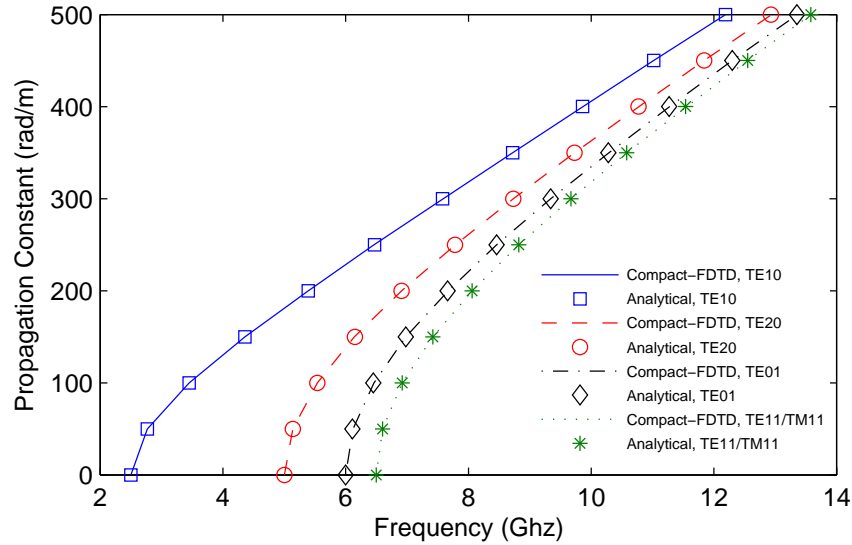


(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

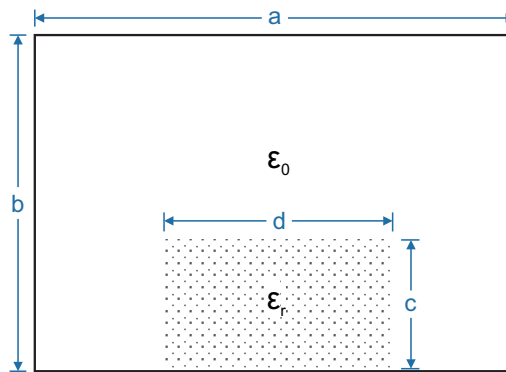
Σχήμα 3.12: Η σημειακή πηγή για τον ορθογώνιο κυματοδηγό με διηλεκτρικό και το συχνοτικό της περιεχόμενο.



Σχήμα 3.13: Μέρος του φάσματος του  $H_y$  (από 10 έως 15 GHz) για  $\beta = 500$  rad/m. Οι δύο πρώτες κορυφές αντιστοιχούν στους ρυθμούς  $TE_{01}$  και  $TE_{11}/TM_{11}$ .



Σχήμα 3.14: Διάγραμμα διασποράς για τους πέντε πρώτους ρυθμούς του ορθογώνιου κυματοδηγού με διηλεκτρικό.



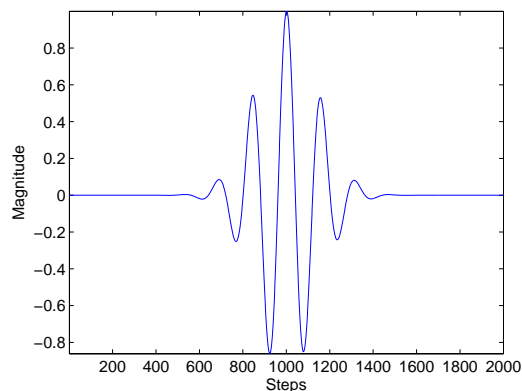
Σχήμα 3.15: Ανομοιογενής κυματοδηγός με διηλεκτρικό.

### 3.3 Ανομοιογενής κυματοδηγός με διηλεκτρικό

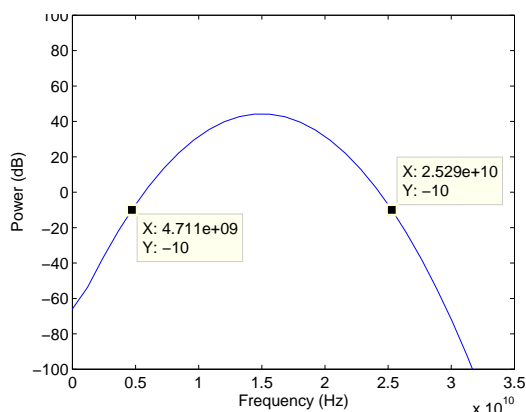
Προχωρώντας σε πιο περίπλοκες διατάξεις, μοντελοποιούμε έναν ανομοιογενή κυματοδηγό, ο οποίος όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.15, πληρούται μερικώς με διηλεκτρικό. Στην προκειμένη περίπτωση η περιοχή με το διηλεκτρικό είναι ένα ορθογώνιο που εφάπτεται στη μία πλευρά του με τον άξονα των  $x$ . Ο πίνακας 3.5 αναφέρει τις γεωμετρικές διαστάσεις του κυματοδηγού και της περιοχής με το διηλεκτρικό.

Οι διαστάσεις σε κελιά των μεγεθών που αφορούν αυτή τη διάταξη φαίνονται στον πίνακα 3.6. Όπως πάντα οι τιμές αυτών των μεγεθών εξαρτώνται από το μέγεθος ενός κελιού στην προσομοίωση. Το ελάχιστο μήκος κύματος  $\lambda_{min}$ , που υπολογίστηκε με βάση την ταχύτητα διάδοσης στο διηλεκτρικό και όχι στον αέρα, περιέχει 30 χωρικά βήματα. Το κάθε χωρικό βήμα ισούται με 0.177 mm. Το χρονικό βήμα, σύμφωνα με τη συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας, είναι 0.416 ps και η συνολική διάρκεια εκτέλεσης είναι 100000 χρονικά βήματα. Η αναλυτικότητα στο πεδίο της συχνότητας που επιτυγχάνεται εδώ είναι ίση με 24

### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.



(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.16: Η σημειακή πηγή για τον ανομοιογενή κυματοδηγό με διηλεκτρικό και το συχνοτικό της περιεχόμενο.

MHz και ο πραγματικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι 40 δευτερόλεπτα.

Η πηγή (σχήμα 3.16), είναι γκαουσιανός παλμός ενεργού πλάτους  $200 \Delta t$  πολλαπλασιασμένος με ημίτονο συχνότητας 15 GHz. Οι παράμετροι αυτές ορίζουν την περιοχή διέγερσης (ισχύς μεγαλύτερη από -10 dB) στη ζώνη συχνοτήτων από 4 έως 25 GHz.

Η αύξηση αυτή τη φορά στο χρόνο εκτέλεσης αποδίδεται στη διπλάσια τιμή που έχει η σχετική διηλεκτρική σταθερά σε σχέση με το παράδειγμα του απλού Ορθογώνιου Κυματοδηγού με διηλεκτρικό. Αυτό συνεπάγεται ακόμα μικρότερη τιμή για το  $\lambda_{min}$  και άρα πυκνότερο χωρικό πλέγμα. Το πυκνότερο χωρικό πλέγμα με τη σειρά του θα επηρεάσει την συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας και θα μειώσει το χρονικό βήμα. Όλα αυτά βέβαια έχουν νόημα, όπως γίνεται εύκολα κατανοητό, εφόσον απαιτείται μία τιμή στην αναλυτικότητα συχνότητας κοντά στα 20 MHz. Θα μπορούσε η διάρκεια να μειωθεί στα μισά χρονικά βήματα και η αναλυτικότητα να κυμανθεί κοντά στα 40 MHz, μία αρκετά ικανοποιητική τιμή. Η διαφορά στο χρόνο εκτέλεσης εδώ θα ήταν μερικά δευτερόλεπτα και γι' αυτό δεν κρίνεται απαραίτητος αυτός ο συμβιβασμός, παρ' όλα αυτά σε προβλήματα μεγαλύτερης κλίμακας οι παράμετροι αυτές εξετάζονται πιο διεξοδικά.

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για εννέα τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα

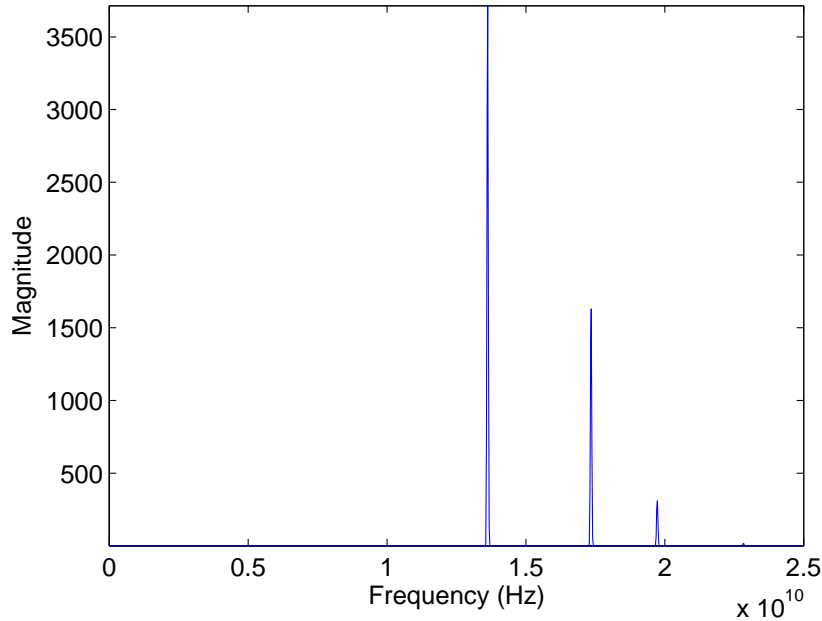


Πίνακας 3.5: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ανομοιογενή κυματοδηγού με διηλεκτρικό.

a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)	$\epsilon_r$
10.16	5.588	3.048	5.08	8

Πίνακας 3.6: Γεωμετρία προσομοίωσης του ανομοιογενή κυματοδηγού με διηλεκτρικό.

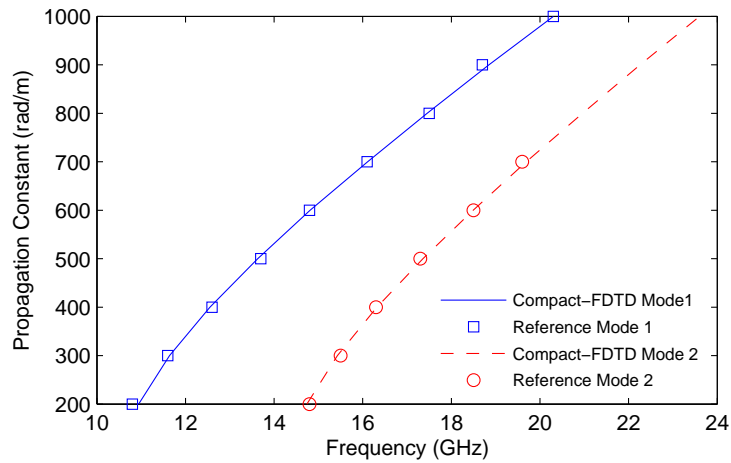
a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )	c ( $\Delta h$ )	d ( $\Delta h$ )
57	32	17	28

Σχήμα 3.17: Παράδειγμα εξόδου του μετασχηματισμού Fourier για τον ανομοιογενή κυματοδηγό με διηλεκτρικό. Εδώ ο  $\text{fft}$  του  $E_y$  για  $\beta = 500 \text{ rad/m}$ .

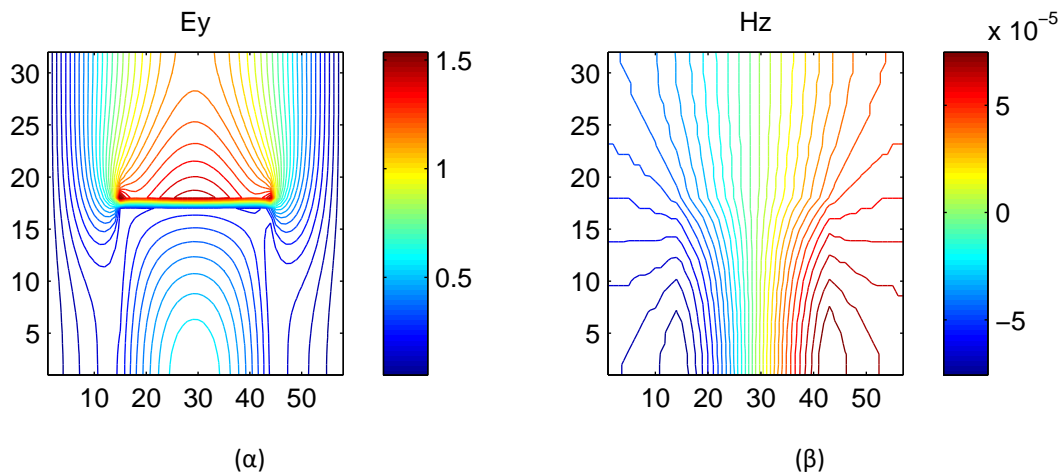
από 200 έως 1000  $\text{rad/m}$ . Στο σχήμα 3.18 δίνονται οι καμπύλες διασποράς των δύο πρώτων ρυθμών του ανομοιογενή κυματοδηγού με διηλεκτρικό. Στο διάγραμμα διασποράς γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις τιμές της αναφοράς [18]. Με βάση τη σύγκριση επιβεβαιώνεται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας, τα οποία σχεδόν ταυτίζονται με αυτά της αναφοράς.

Στα σχήματα 3.19 και 3.20 απεικονίζονται οι εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_z$  του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που καταγράφηκαν για κάθε ρυθμό. Η λογική είναι παρόμοια με την περίπτωση του ορθογώνιου κυματοδηγού. Ορίζεται ένα αρκετά μεγάλο παράθυρο για τον γκαουσιανό παλμό και συχνότητα του ημίτονου ίση με τη συχνότητα του ρυθμού. Με αυτόν τον τρόπο απομονώνονται οι ρυθμοί και μπορούν να παρουσιαστούν ξεχωριστά.

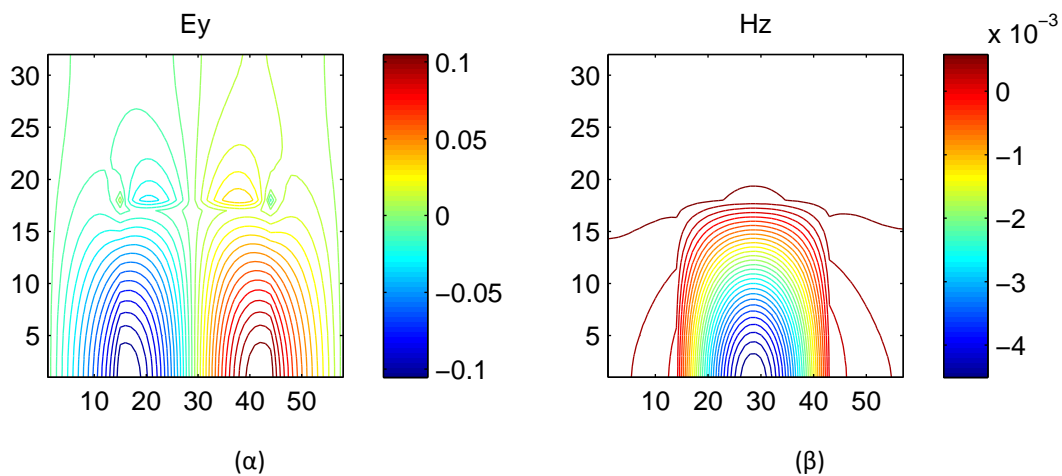
### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



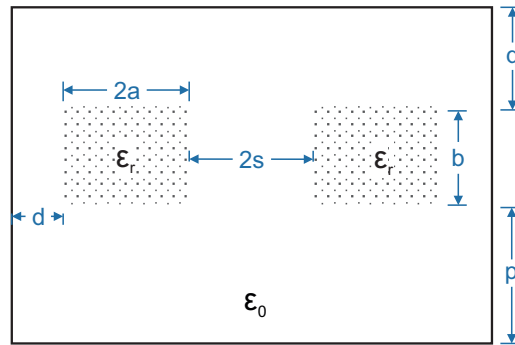
Σχήμα 3.18: Διάγραμμα διασποράς για τους δύο πρώτους ρυθμούς του ανομοιογενή κυματοδηγού με διηλεκτρικό.



Σχήμα 3.19: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_z$  του βασικού ρυθμού στον ανομοιογενή κυματοδηγό με διηλεκτρικό.



Σχήμα 3.20: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_z$  του ρυθμού δεύτερης τάξης στον ανομοιογενή κυματοδηγό με διηλεκτρικό.



Σχήμα 3.21: Ανομοιογενής κυματοδηγός με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.

Πίνακας 3.7: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ανομοιογενή κυματοδηγού με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.

a (mm)	b (mm)	s (mm)	d (mm)	p (mm)	q (mm)	$\epsilon_r$
2	2	1	1	1	1	2.56

Πίνακας 3.8: Γεωμετρία προσομοίωσης του ανομοιογενή κυματοδηγού με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.

a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )	s ( $\Delta h$ )	d ( $\Delta h$ )	p ( $\Delta h$ )	q ( $\Delta h$ )
10	10	5	5	5	5

### 3.4 Ανομοιογενής κυματοδηγός με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού

Τροποποιώντας το προηγούμενο μοντέλο κυματοδηγού, αυτή τη φορά μελετούμε μία διάταξη στην οποία περιέχονται δύο ίδιων διαστάσεων ορθογώνιες περιοχές διηλεκτρικού αντί για μία, οι οποίες είναι συμμετρικά τοποθετημένες ως προς ευθεία κάθετη στην οριζόντια πλευρά που διέρχεται από το μέσο της. Η διάταξη απεικονίζεται στο σχήμα 3.21. Παρατηρείται επίσης, σε αντίθεση με την προηγούμενη διάταξη ανομοιογενούς κυματοδηγού, ότι καμία από τις περιοχές διηλεκτρικού δεν εφάπτεται με κάποιο από τα μεταλλικά τοιχώματα. Το ενδεχόμενο αυτό παρ' όλα αυτά είναι γενικά πιθανό καθώς η συγκεκριμένη τεχνική κατασκευής χρησιμοποιείται για να εξαλειφθούν φαινόμενα εξασθένησης λόγω ακτινοβολίας κατά την κύρτωση ενός κυματοδηγού.

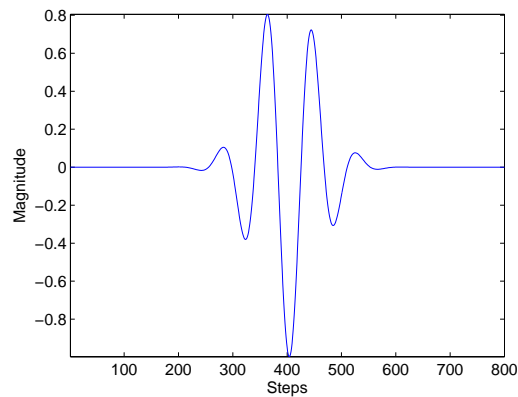
Ο πίνακας 3.7 αναφέρει τις διαστάσεις των διάφορων μεγεθών που εμπλέκονται και ο πίνακας 3.8 δείχνει τις ίδιες διαστάσεις αφού έχουν μετατραπεί σε κελιά, βάση του χωρικού βήματος που έχει επιλεγεί. Οι διαστάσεις του χώρου προσομοίωσης μπορεί να βρεθεί με πρόσθεση των μεγεθών:

$$X = d + 2a + 2s + 2a + d = 60 \text{ κελιά}$$

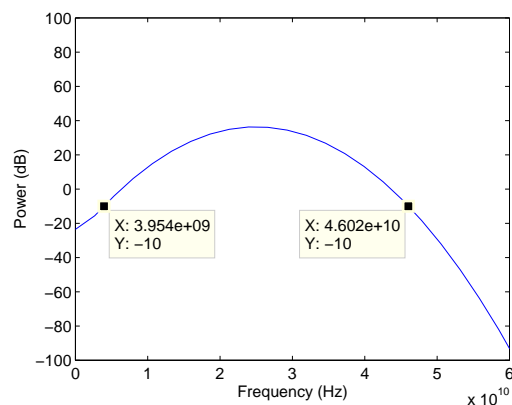
$$Y = q + b + p = 20 \text{ κελιά}$$

Το ελάχιστο μήκος κύματος  $\lambda_{min}$  περιέχει 23 χωρικά βήματα και το κάθε χωρικό βήμα

### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.

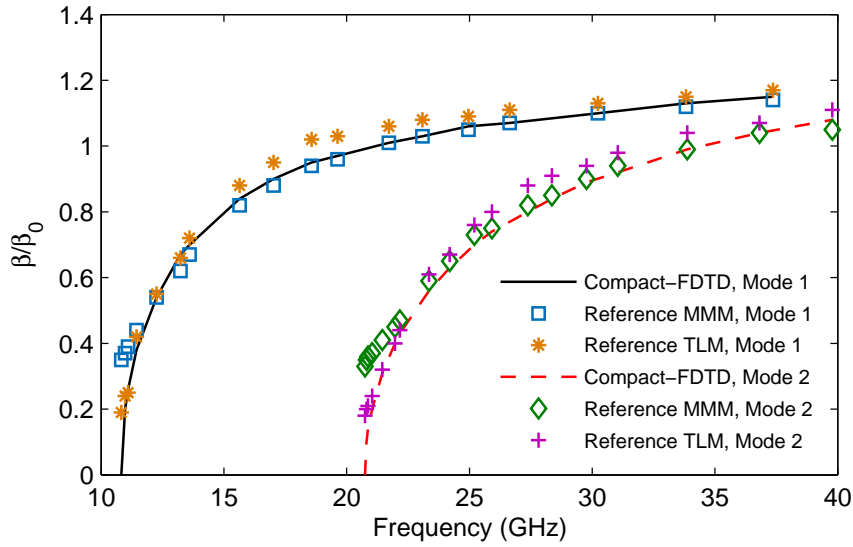


(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

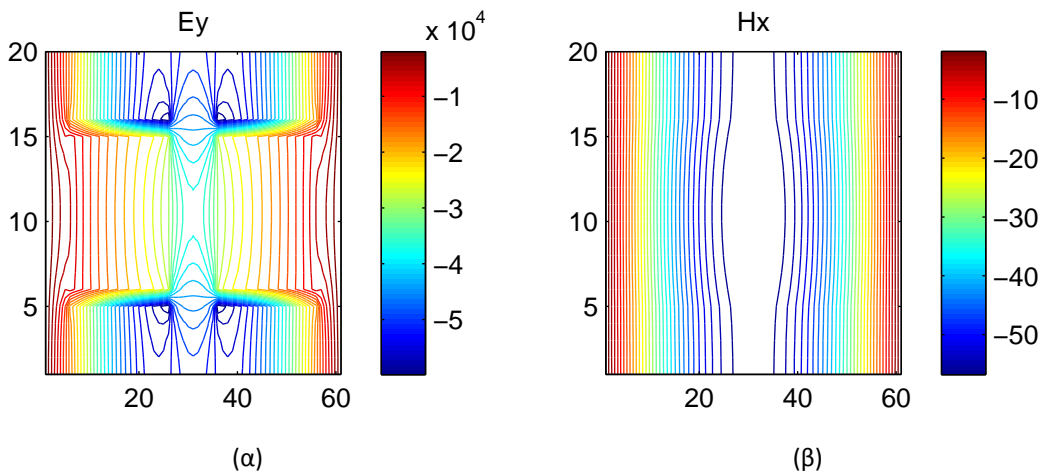
Σχήμα 3.22: Η σημειακή πηγή για τον ανομοιογενή κυματοδηγό με διηλεκτρικό με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού και το συχνοτικό της περιεχόμενο.

ισούται με 0.2 mm. Η συνθήκη ευστάθειας επιβάλλει χωρικό βήμα 0.47 ps και η διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 100000 χρονικά βήματα. Η αναλυτικότητα συχνότητας που επιτυγχάνεται εδώ είναι ίση με 21.3 MHz στην έξοδο του fft. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 25 δευτερόλεπτα. Η μορφή της πηγής φαίνεται στο σχήμα 3.22. Ο γκαουσιανός παλμός έχει ενεργό παράθυρο  $80 \Delta t$  και το ημίτονο με το οποίο πολλαπλασιάζεται, συχνότητα 25 GHz.

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για δεκαοκτώ τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα από 0 έως 900 rad/m. Στο σχήμα 3.23 δίνονται οι καμπύλες διασποράς των δύο πρώτων ρυθμών του κυματοδηγού. Στο διάγραμμα διασποράς γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου Compact-FDTD με τιμές από τις μεθόδους **Mode-Matching Method (MMM)** και **Transmission-Line-Matrix Method (TLM)** τα αποτελέσματα των οποίων παρέχει η αναφορά [2]. Στον κάθετο άξονα είναι ο λόγος της σταθεράς διάδοσης  $\beta$ , που δίνεται σαν παράμετρος εισόδου στην προσομοίωση, προς τη σταθερά διάδοσης  $\beta_0$  που αντιστοιχεί στην εκάστοτε συχνότητα που προκύπτει από την έξοδο μετά τον μετασχηματισμό Fourier. Το  $\beta_0$  είναι ουσιαστικά ο κυματικός αριθμός εάν η διάδοση γινόταν στον αέρα με



Σχήμα 3.23: Διάγραμμα διασποράς για τους δύο πρώτους ρυθμούς του ανομοιογενή κυματοδηγού με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.  $\beta_0 = 2\pi f_0/c_0$



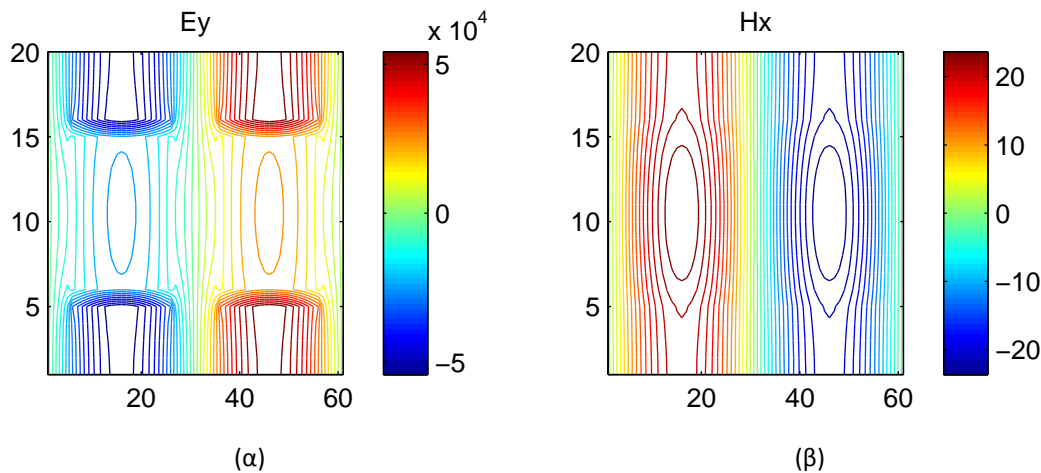
Σχήμα 3.24: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_x$  του βασικού ρυθμού στον ανομοιογενή κυματοδηγό με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.

συχνότητα  $f_0$  και μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

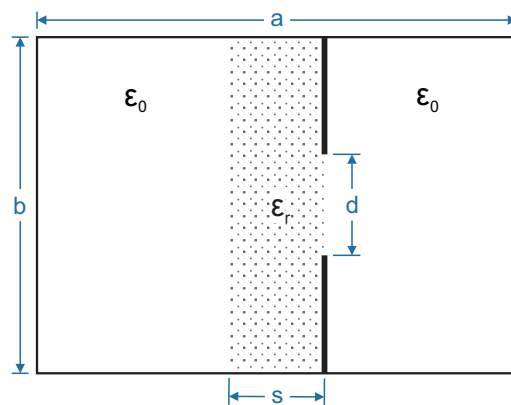
$$\beta_0 = \frac{2\pi f_0}{c_0} \tag{3.5}$$

Πολύ καλή συμφωνία μπορεί να παρατηρηθεί και με τις δύο μεθόδους γενικά. Ειδικότερα όμως τα αποτελέσματα είναι πιο κοντά για τιμές του λόγου  $\beta/\beta_0$  μεγαλύτερες του 0.5 με τη μέθοδο MMM. Το ίδιο ισχύει για τιμές μικρότερες του 0.5 με τη μέθοδο TLM.

Στα σχήματα 3.24 και 3.25 απεικονίζονται οι εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_x$  του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που καταγράφηκαν για κάθε ρυθμό.



Σχήμα 3.25: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_y$  και  $H_x$  του δεύτερου ρυθμού στον ανομοιογενή κυματοδηγό με συζευγμένες περιοχές διηλεκτρικού.



Σχήμα 3.26: Μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου.

### 3.5 Μονόπλευρες γραμμές πτερυγίου

Οι γραμμές πτερυγίου (finlines) ανήκουν στην κατηγορία των σχεδόν-επίπεδων γραμμών μεταφοράς (quasi-planar transmission lines) γιατί, όπως όλες οι διατάξεις στην κατηγορία αυτή, ενσωματώνουν στοιχεία επίπεδων γραμμών, αλλά διαφέρουν από την απόλυτα επίπεδη διάταξη. Μία τέτοια τέτοια γραμμή αποτελείται από μία διηλεκτρική πλάκα που εφάπτεται με δύο αγωγίμες επιφάνειες στη μία ή και στις δύο πλευρές της, οι οποίες διαχωρίζονται από μία εγκοπή και τοποθετείται μέσα σε έναν ορθογώνιο κυματοδηγό με διάτομή παράλληλη στο επίπεδο  $xy$ . Ειδικότερα, η μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου (unilateral finline) περιλαμβάνει μόνο ένα σετ από αγωγίμες πλάκες στη μία πλευρά της διηλεκτρικής πλάκας. Μελετήθηκαν δύο διαφορετικές περιπτώσεις τέτοιων γραμμών οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια ξεχωριστά. Στο Σχήμα 3.26 φαίνεται η διάταξη της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.

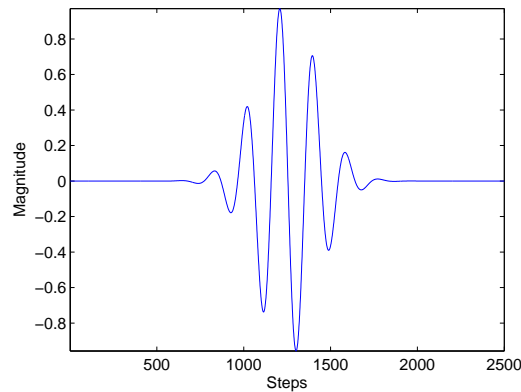
#### 3.5.1 Πρώτη περίπτωση

Πίνακας 3.9: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.

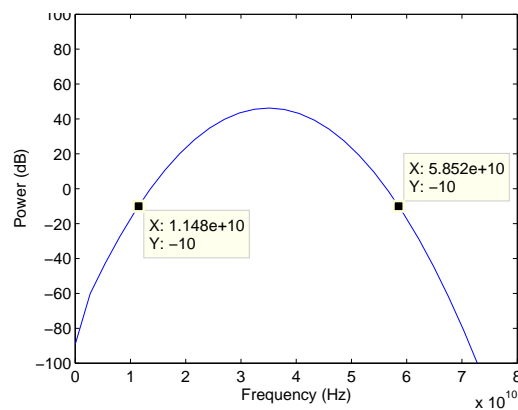
a (mm)	b (mm)	d (mm)	s (mm)	$\epsilon_r$
7.112	3.556	0.3556 / 0.7112 / 1.778	0.127	2.2

Πίνακας 3.10: Γεωμετρία προσομοίωσης της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.

a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )	d ( $\Delta h$ )	s ( $\Delta h$ )
112	56	6 / 11 / 28	2



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.

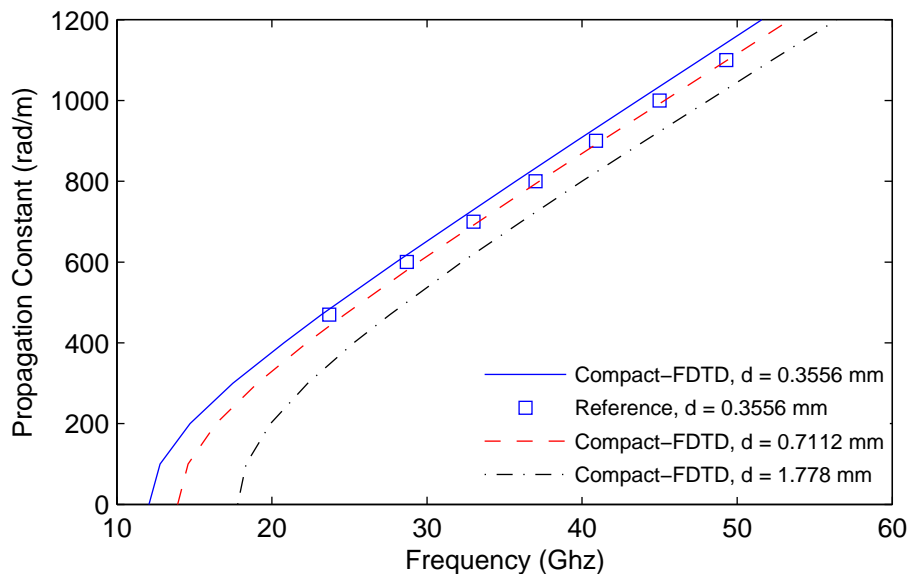


(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.27: Η σημειακή πηγή για την πρώτη περίπτωση μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου και το συχνοτικό της περιεχόμενο.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πρώτης γραμμής πτερυγίου που μελετήθηκε βρίσκονται στον πίνακα 3.9. Για την εγκοπή  $d$  χρησιμοποιήθηκαν τρεις εναλλακτικές τιμές. Διατηρώντας όλες τις υπόλοιπες διαστάσεις ίδιες, οι προσομοιώσεις εκτελέστηκαν τρεις φορές, μία για κάθε διαφορετικό μέγεθος εγκοπής.

Κατά τους υπολογισμούς περί του μεγέθους του χωρικού κελιού διαπιστώθηκε ότι το πάχος  $s$  της διηλεκτρικής πλάκας θα αντιστοιχούσε σε λιγότερο από ένα κελί για διακριτοποίηση χώρου  $\Delta h = \frac{\lambda_{min}}{30}$ . Το μέγεθος του  $s$  σε σύγκριση με τις πλευρές του κυματοδηγού, μπορεί ούτως ή άλλως να γίνει αντιληπτό, ότι αποτελεί μία λεπτομέρεια της όλης διάτα-



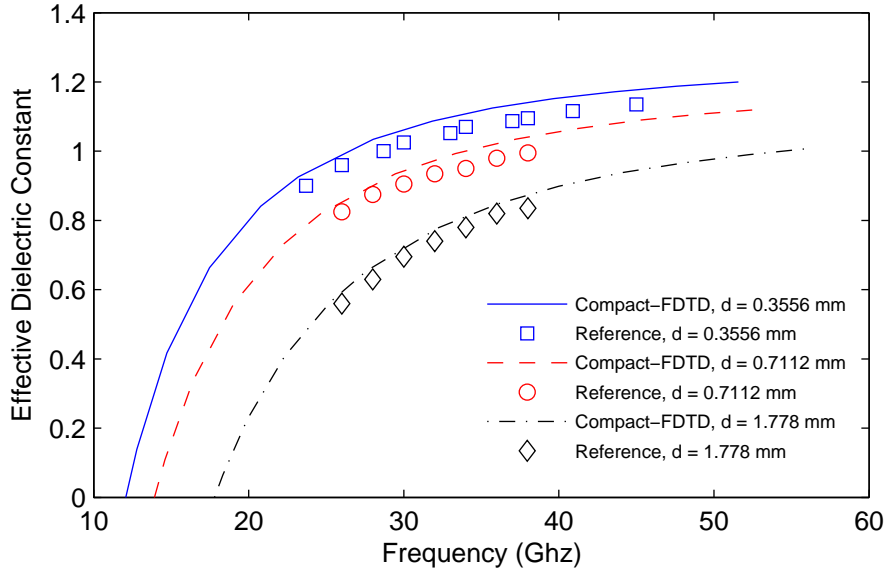
Σχήμα 3.28: Διάγραμμα διασποράς για τον βασικό ρυθμό της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου για διαφορετικές διαστάσεις εγκοπής.

ξής παρατηρώντας απλά τα μεγέθη στον πίνακα 3.9. Ενδεικτικά, η μεγάλη πλευρά  $a$  του κυματοδηγού είναι μεγαλύτερη του  $s$  κατά 56 φορές. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι η επιλογή του μεγέθους του κελιού εξαρτάται σε αυτήν την περίπτωση από το  $s$ . Με βάση την επιλογή  $s = 2\Delta h$  υπολογίζονται και όλες οι υπόλοιπες διαστάσεις της διάταξης σε πλήθος κελιών (πίνακας 3.10).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το χωρικό βήμα ισούται με 0.0635 mm και τελικά το ελάχιστο μήκος κύματος περιέχει περίπου 53 χωρικά βήματα. Η συνθήκη ευστάθειας επιβάλλει χρονικό βήμα 0.148 ps και η διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 200000 χρονικά βήματα. Η αναλυτικότητα συχνότητας που επιτυγχάνεται εδώ είναι ίση με 33 MHz. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι περίπου 5 λεπτά και είναι πολλαπλάσιος από όλους τους χρόνους προσομοίωσης των δομών που προηγήθηκαν. Είναι φανερό ότι το μικρό μέγεθος κελιού επιμηκύνει το χρόνο εκτέλεσης πολύ περισσότερο εδώ λόγω της επιβάρυνσης του υπολογιστικού φορτίου που οφείλεται σε μία μικρή γεωμετρική λεπτομέρεια της διάταξης. Βέβαια, αυτό είναι χαρακτηριστικό όλων των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών που υλοποιούνται σε ομοιόμορφο καρτεσιανό πλέγμα, μιας και η πυκνότητα του τελευταίου πάντα καθορίζεται από τις μικρότερες σε μέγεθος γεωμετρικές λεπτομέρειες της μοντελοποιούμενης διάταξης.

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για δεκατρείς τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα 0 - 1200 rad/m, αλλά και για κάθε μέγεθος  $d$  της εγκοπής. Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι για την περάτωση της όλης διαδικασίας εκτέλεσης των προσομοιώσεων σε αυτή τη δομή, απαιτήθηκαν περίπου 3 ώρες. Υπενθυμίζεται ότι για κάθε άλλη δομή που μελετήθηκε η αντίστοιχη διάρκεια δεν ήταν πάνω από μερικά λεπτά. Σε ότι αφορά την πηγή, ο γκαουσιανός παλμός έχει ενεργό πλάτος  $200 \Delta t$  και το ημίτονο με το οποίο πολλαπλα-





Σχήμα 3.29: Διάγραμμα της ενεργού σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς προς τη συχνότητα για τον βασικό ρυθμό της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου για διαφορετικές διαστάσεις εγκοπής.

σιάζεται, συχνότητα 35 GHz. Η ζώνη συχνοτήτων με ισχύ άνω των -10 dB, βρίσκεται από 11 έως 58 GHz περίπου και έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε για να καλύψει όλες τις συχνότητες που εμφανίζονται στο φάσμα για όλες τις δυνατές περιπτώσεις της εγκοπής  $d$ .

Στο σχήμα 3.28 δίνονται οι καμπύλες διασποράς του βασικού ρυθμού για κάθε τιμή  $d$ . Στο διάγραμμα διασποράς γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με τιμές της αναφοράς [19] στην περίπτωση του μικρότερου από τα δυνατά μεγέθη  $d$  της εγκοπής. Αρκετά καλή αντιστοιχία με τις τιμές της αναφοράς φαίνεται στο γράφημα.

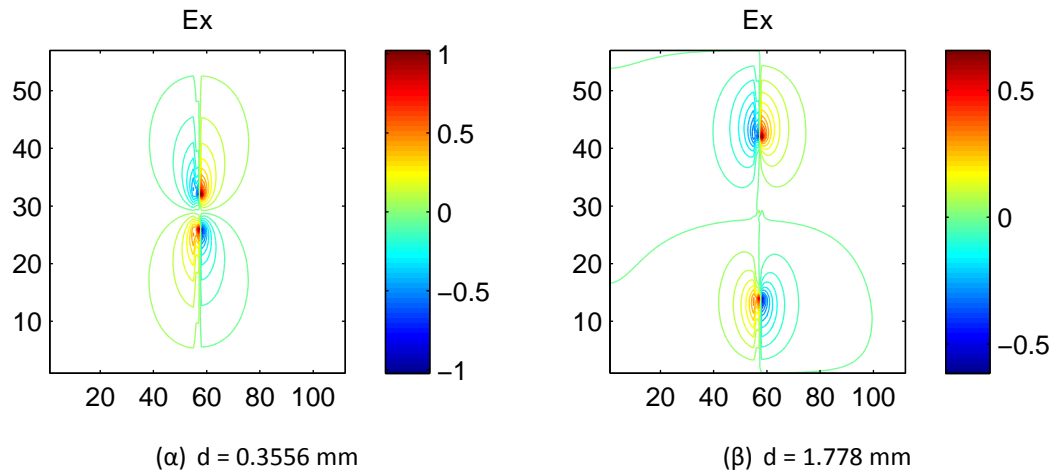
Με τη βοήθεια επιπρόσθετων υπολογισμών αναλύθηκε στη συνέχεια η συμπεριφορά της ενεργού σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς σε σχέση με τις συχνότητες που βρέθηκαν και παρουσιάστηκαν στο διάγραμμα διασποράς για κάθε ένα από τα εναλλακτικά μεγέθη της εγκοπής. Η ενεργός σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_{eff}$  δίνεται [20], στην περίπτωση της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου, προσεγγιστικά από τον τύπο:

$$\epsilon_{eff}(f) \cong \left( \frac{\lambda_{cf}}{\lambda_{ca}} \right)^2 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{ca}} \right)^2 \quad (3.6)$$

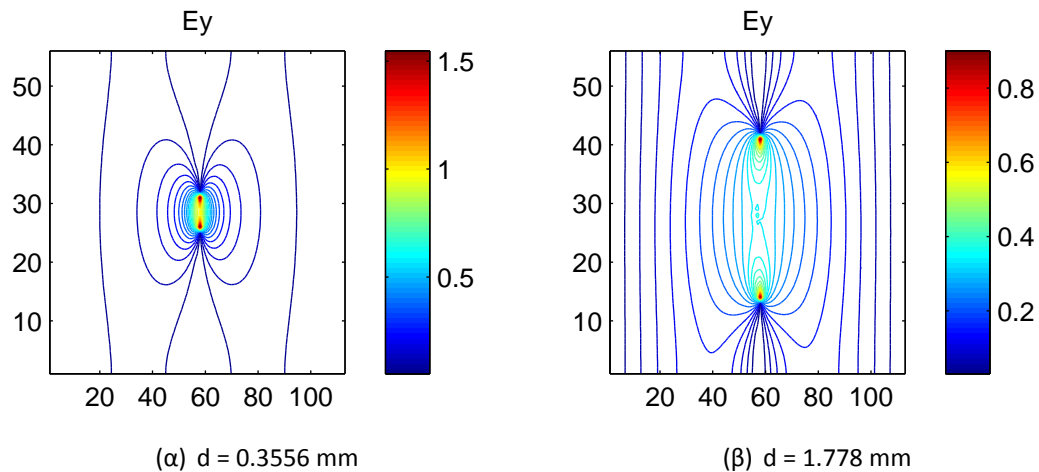
όπου  $\lambda_0$  είναι το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα για την οποία μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την ενεργό σχετική διηλεκτρική σταθερά κάθε φορά και  $\lambda_{cf}$ ,  $\lambda_{ca}$  το μήκος κύματος αποκοπής της γραμμής πτερυγίου με ή χωρίς το διηλεκτικό αντίστοιχα. Το σχήμα 3.29 απεικονίζει τη σχέση της ενεργού σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς με τη συχνότητα για τις διάφορες τιμές  $d$ . Καλή αντιστοιχία παρατηρείται με τις τιμές της αναφοράς [19].

Τέλος, στα σχήματα 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34 και 3.35, γίνεται μία σύγκριση των κατανομών όλων των συνιστωσών του πεδίου ως προς τη μορφή τους σχετικά με την αλλαγή του μεγέθους της εγκοπής  $d$ .

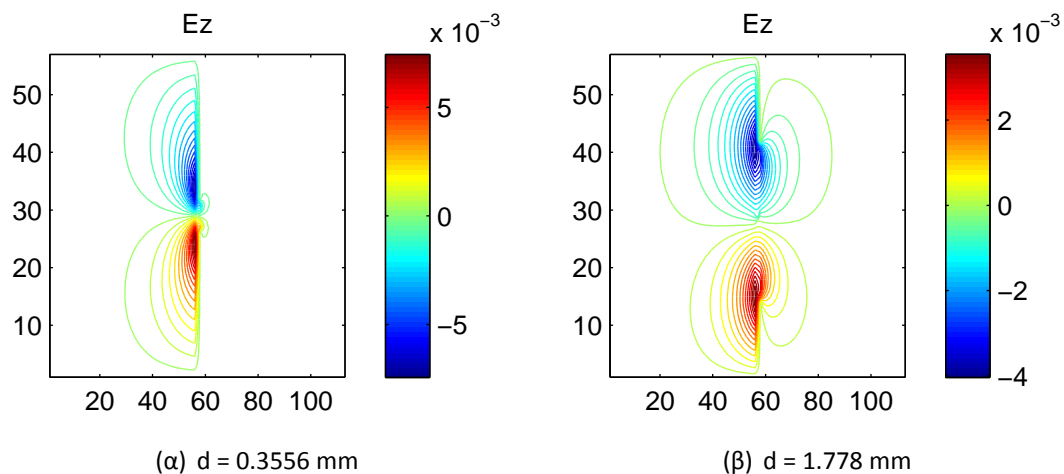
### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



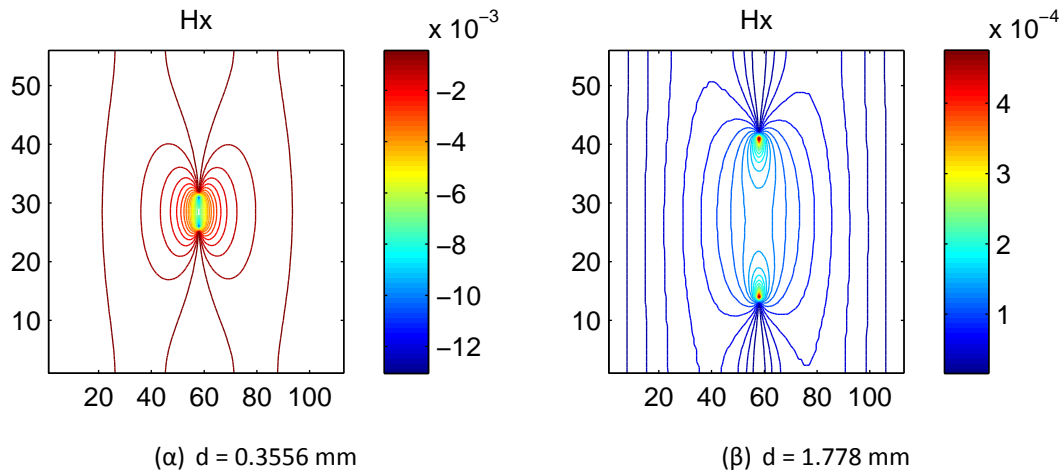
Σχήμα 3.30: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $E_x$  του ηλεκτρικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.



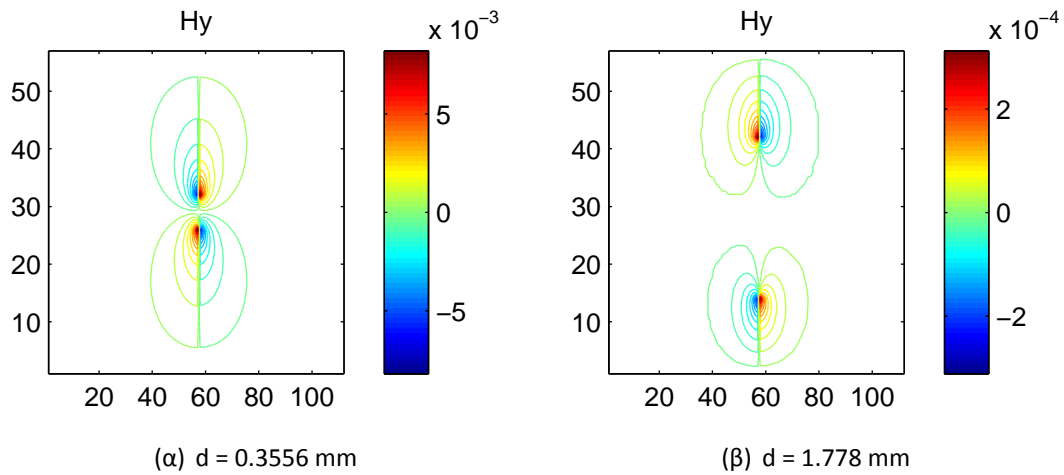
Σχήμα 3.31: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $E_y$  του ηλεκτρικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.



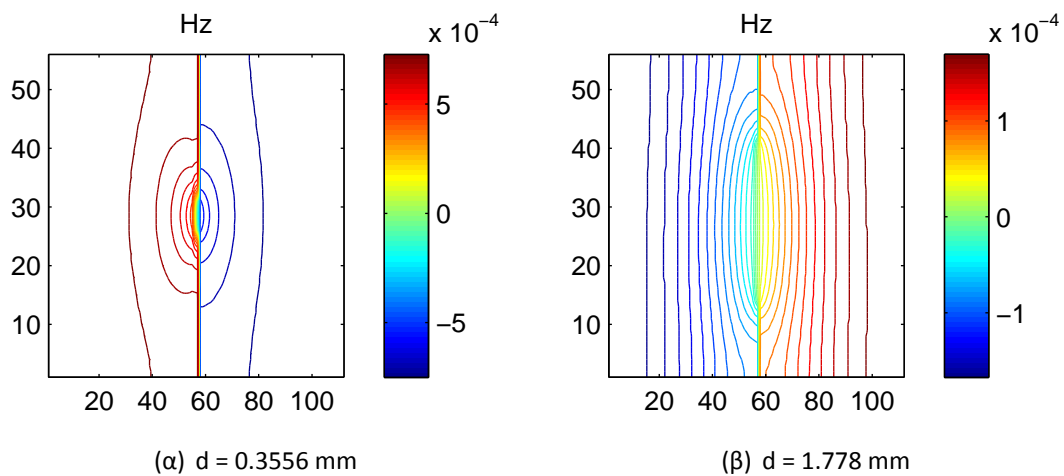
Σχήμα 3.32: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $E_z$  του ηλεκτρικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.



Σχήμα 3.33: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $H_x$  του μαγνητικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.



Σχήμα 3.34: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $H_y$  του μαγνητικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.



Σχήμα 3.35: Σύγκριση των κατανομών της συνιστώσας  $H_z$  του μαγνητικού πεδίου στη μονόπλευρη γραμμή πτερυγίου για διαφορετικό μέγεθος  $d$  της εγκοπής.

Πίνακας 3.11: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.

a (mm)	b (mm)	d (mm)	s (mm)	$\epsilon_r$
20	10	4	1	2.22

Πίνακας 3.12: Γεωμετρία προσομοίωσης της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.

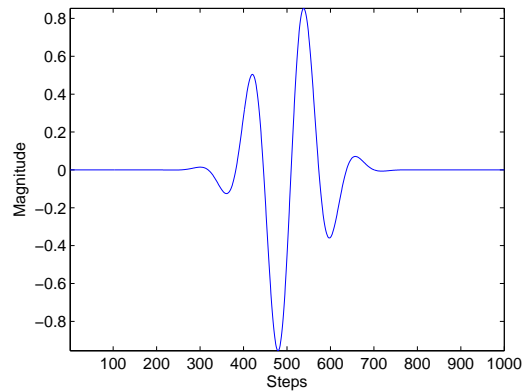
a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )	d ( $\Delta h$ )	s ( $\Delta h$ )
60	30	12	3

### 3.5.2 Δεύτερη περίπτωση

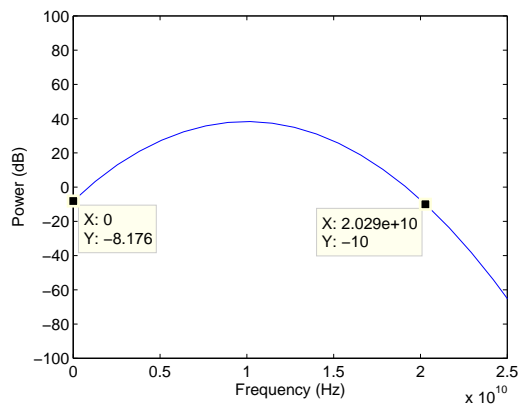
Η δεύτερη περίπτωση μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου που προσομοιώθηκε ήταν λιγότερο χρονοβόρα λόγω της πιο "ομαλής" γεωμετρίας της και της επιλογής για μελέτη ενός μικρότερου συχνοτικού εύρους ζώνης. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη εμφανίζονται στον πίνακα 3.11. Εδώ το πάχος της διηλεκτρικής πλάκας είναι μόνο 20 φορές μικρότερο από τη μεγαλύτερη πλευρά του κυματοδηγού. Επιπλέον, αν συγκρίνει κανείς τα διαγράμματα διασποράς των δύο περιπτώσεων θα παρατηρήσει τη σημαντική διαφορά ως προς το εύρος ζώνης στο οποίο κατανέμονται οι τιμές. Στην προηγούμενη περίπτωση αυτό καταλαμβάνει χώρο περίπου από 10 έως 60 GHz ενώ εδώ η μέγιστη τιμή συχνότητας που ορίστηκε ως άνω κατώφλι είναι τα 18 GHz. Το γεγονός αυτό είναι βέβαια άμεσο αποτέλεσμα της επιλογής ενός μικρότερου άνω ορίου για τις τιμές της σταθερά διάδοσης  $\beta$  που δόθηκαν ως είσοδο στον προσομοιωτή σε σχέση με πριν.

Χωρίς ιδιαίτερες αποκλίσεις από την συνηθισμένη διαδικασία έγινε η επιλογή της διακριτοποίησης του χώρου και του χρόνου. Το ελάχιστο μήκος κύματος  $\lambda_{min}$  περιέχει 30 κελιά όπου κάθε κελί ισοδυναμεί με 0.333 mm. Η συνθήκη αριθμητικής ευστάθειας επιβάλλει χρονικό βήμα 0.785 ps και η διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 70000 χρονικά βήματα. Η αναλυτικότητα συχνότητας που επιτυγχάνεται εδώ είναι ίση με 18 MHz. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 25 δευτερόλεπτα. Η μορφή της πηγής, κατά τα γνωστά, είναι ένας γκαουσιανός παλμός πολλαπλασιασμένος με ημίτονο. Για τον γκαουσιανό παλμό χρησιμοποιήθηκε ενεργό πλάτος 100  $\Delta t$ , ενώ το ημίτονο κεντράρει την ζώνη συχνοτήτων με ισχύ άνω των -10 dB στα 10 GHz (σχήμα 3.36).

Η προσομοίωση εκτελέστηκε για δέκα τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα 0 - 450 rad/m. Στο σχήμα 3.37 απεικονίζεται το διάγραμμα διασποράς για τον βασικό ρυθμό της γραμμής πτερυγίου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίνονται με το διάγραμμα της αναφοράς [18]. Καλή αντιστοιχία μπορεί να παρατηρηθεί.

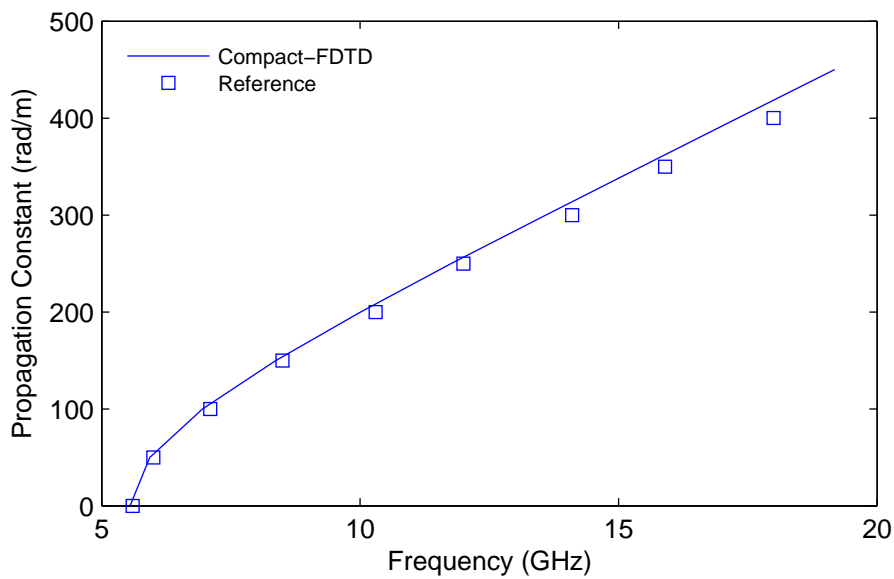


(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.

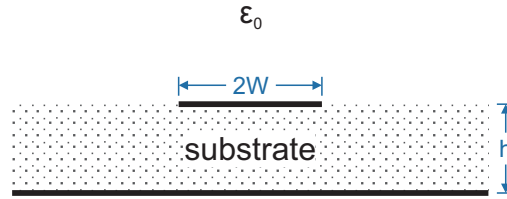


(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.36: Η σημειακή πηγή για την δεύτερη περίπτωση μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου και το συχνοτικό της περιεχόμενο.



Σχήμα 3.37: Διάγραμμα διασποράς για τον βασικό ρυθμό της μονόπλευρης γραμμής πτερυγίου.



Σχήμα 3.38: Γραμμή μικροταινίας.

Πίνακας 3.13: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της μικροταινίας.

w (mm)	h (mm)
0.5	0.5

Πίνακας 3.14: Γεωμετρία προσομοίωσης της μικροταινίας.

w ( $\Delta h$ )	h ( $\Delta h$ )
5	5

### 3.6 Γραμμή μικροταινίας με ανισοτροπικό υπόστρωμα

Η διάταξη της μικροταινίας που μελετούμε σε αυτήν την ενότητα απεικονίζεται στο σχήμα 3.38. Αγωγός πλάτους  $2W$  τυπώνεται επάνω σε διηλεκτρική πλάκα πάχους  $h$ , η οποία βρίσκεται πάνω από θεωρητικά άπειρο αγωγίμο επίπεδο. Γύρω από τη μικροταινία υπάρχει απλά ο ελεύθερος χώρος. Στην περίπτωση που μελετήθηκε, το διηλεκτρικό υπόστρωμα είναι από ζαφείρι και ο οπτικός άξονας βρίσκεται στο επίπεδο  $xy$ . Διαφορετικές περιπτώσεις για τη γωνία  $\theta$ , που ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει ο οπτικός άξονας με τη διεύθυνση  $x$ , επίσης εξερευνήθηκαν.

Ο πίνακας 3.13 δείχνει τις διαστάσεις της γεωμετρίας. Στον πίνακα δεν περιλαμβάνεται κάποια τιμή για τη σχετική διηλεκτρική σταθερά ως συνήθως, γιατί εδώ το υλικό είναι ανισοτροπικό. Το διηλεκτρικό συνεπώς περιγράφεται από τον τανυστή

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση όπου ο οπτικός άξονας βρίσκεται στο  $xy$  επίπεδο, οι τιμές των στοιχείων του τανυστή ορίζονται ως εξής:

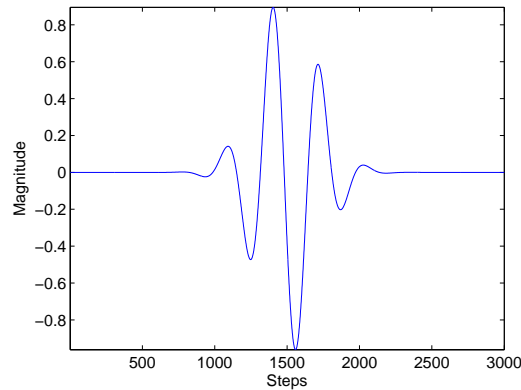
$$\epsilon_{xx} = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta \quad (3.7\alpha)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_2 \cos^2 \theta \quad (3.7\beta)$$

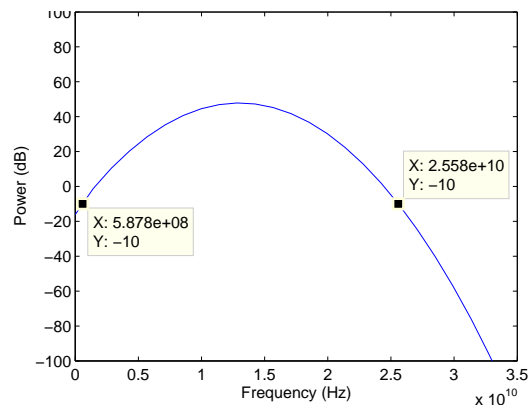
$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (3.7\gamma)$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_1 \quad (3.7\delta)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0 \quad (3.7\epsilon)$$



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.



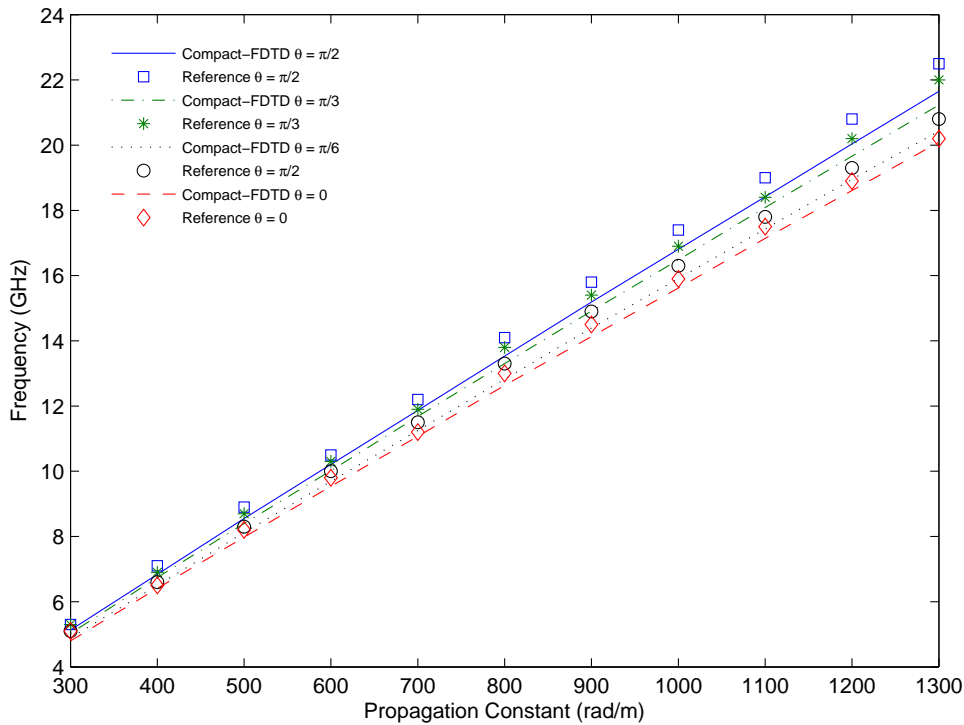
(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.39: Η σημειακή πηγή για την ανοιχτή μικροταινία και το συχνοτικό της περιεχόμενο.

Οι παράμετροι των εξισώσεων ορίζονται εδώ ως  $\epsilon_1 = 9.4$  και  $\epsilon_2 = 11.6$ , ενώ για τη γωνία  $\theta$  εξετάστηκαν οι περιπτώσεις  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\theta = \pi/3$  και  $\theta = \pi/2$ .

Οι διαστάσεις του χώρου προσομοίωσης διατηρήθηκαν ίδιες με αυτές που παρέχει η αναφορά [17] δίχως να γίνει κάποια προεργασία. Εάν κατασκευαστεί νοητά ένα ορθογώνιο περίβλημα γύρω από τη μικροταινία αυτό έχει διαστάσεις  $60 \times 30$  κελιά. Αυτή όμως είναι και η μόνη πληροφορία που δίνεται στην αναφορά. Το πρόβλημα που τίθεται εδώ είναι ότι ένα μέρος του χώρου αυτού αναπαριστά τη διάταξη της μικροταινίας και το υπόλοιπο αναπαριστά τον ελεύθερο χώρο. Κατά συνέπεια πρέπει να οριστούν οι διαστάσεις των δύο επιμέρους νοητών ορθογώνιων περιοχών που δημιουργούνται αλλά πιο συγκεκριμένα ενδιαφέρει η αναλογία μεταξύ τους. Να σημειωθεί εδώ ότι στα ανοιχτά όρια της περιοχής υλοποιήθηκαν απορροφητικές οριακές συνθήκες πρώτης τάξης του Mur, οι οποίες δεν παύουν να εξακολουθούν να εισάγουν μικρές αντανακλάσεις του κύματος προς τα πίσω. Γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό ότι θα πρέπει γενικά οι διαστάσεις του ελεύθερου χώρου να καταλαμβάνουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ποσοστό της συνολικής διάστασης του χώρου προσομοίωσης προκειμένου να ελαχιστοποιούνται οι αφύσικες ανακλάσεις που προκαλούνται από την εφαρμογή των μη ιδανικών απορροφητικών συνθηκών. Ορίστηκε αυθαίρετα ότι το πάχος  $h$  του διηλεκτρικού θα καταλαμβάνει το  $1/6$  του συνολικού πλάτους του

### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



Σχήμα 3.40: Διάγραμμα διασποράς του επικρατέστερου ρυθμού της μικροταινίας για διάφορες τιμές της γωνίας  $\theta$ .

χώρου προσωμοίωσης, δηλαδή 5 κελιά. Στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί το μέγεθος κελιού:

$$\Delta h = \frac{0.5mm}{5} = 0.1mm$$

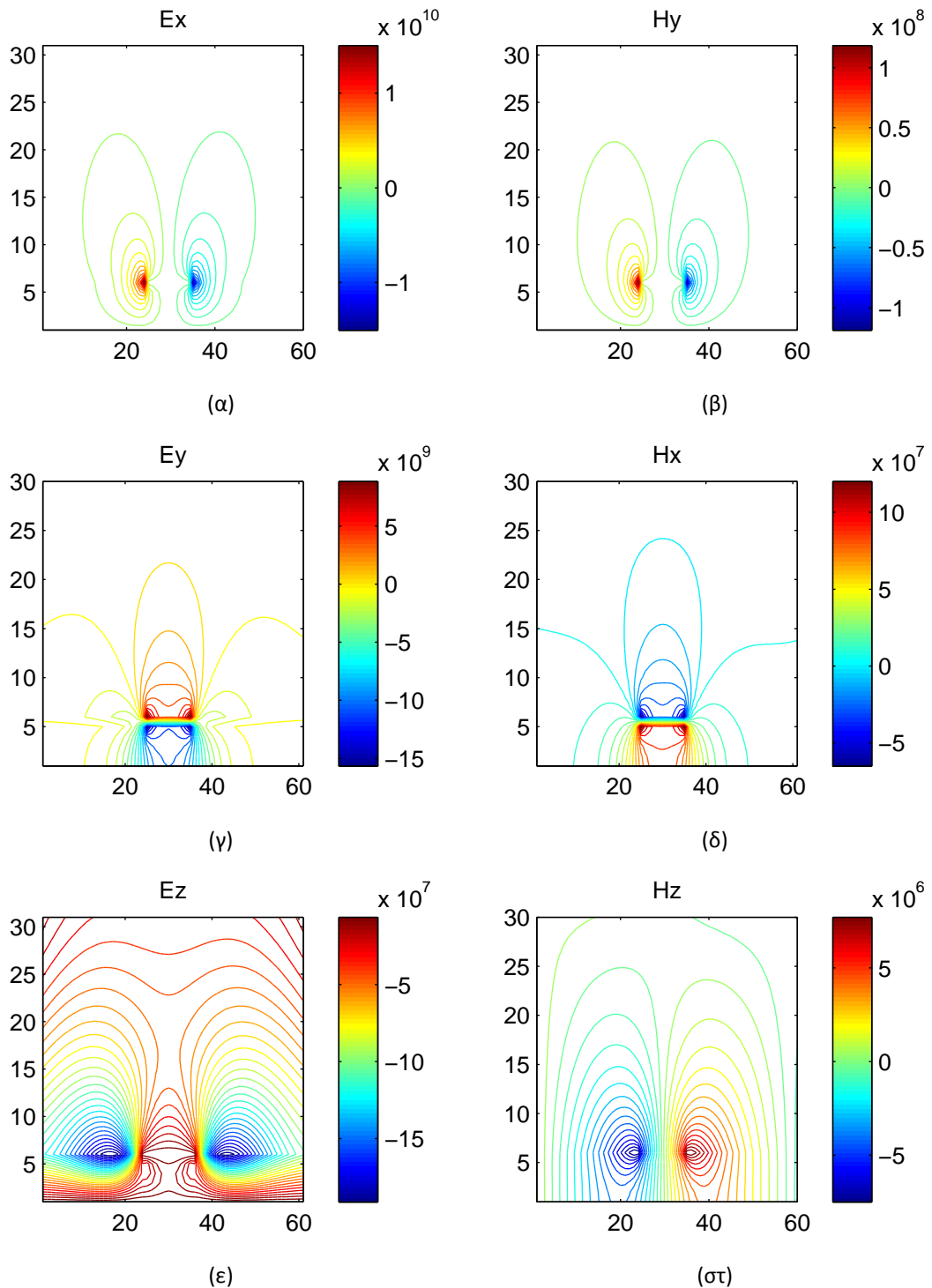
Με βάση τα παραπάνω το χρονικό βήμα ισούται με 0.234 ps. Η διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 90000 χρονικά βήματα για να επιτευχθεί ακολούθως αναλυτικότητα συχνότητας 47.4 MHz. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι 1 λεπτό.

Το σχήμα 3.39 απεικονίζει τη μορφή της πηγής για την ανοιχτή μικροταινία. Η ζώνη συχνοτήτων από 0.5 έως 25 GHz είναι η επιθυμητή ζώνη διέγερσης και καθορίζεται από μέγεθος ενεργού πλάτους  $300 \Delta t$  στον γκαουσιανό παλμό και συχνότητα του ημιτόνου ίση με 13 GHz.

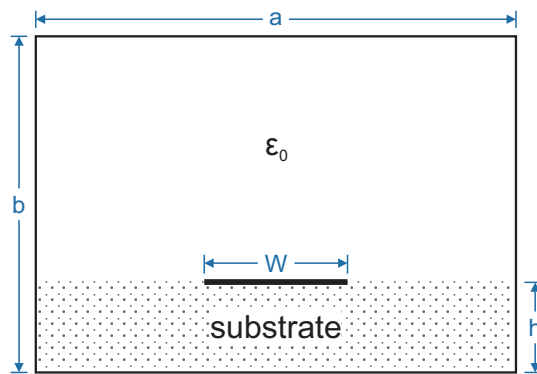
Η προσομοίωση εκτελέστηκε για έντεκα τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα 300 - 1300 rad/m. Στο Σχήμα 3.40 δίνονται οι καμπύλες διασποράς του επικρατέστερου ρυθμού για τις διάφορες τιμές της γωνίας  $\theta$  και γίνεται η σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές της αναφοράς [17]. Παρά την περιπλοκότητα του προβλήματος, καλή αντιστοιχία μεταξύ των αποτελεσμάτων μπορεί να παρατηρηθεί.

Στο σχήμα 3.41 απεικονίζονται οι εγκάρσιες κατανομές όλων των συνιστωσών του πεδίου όταν  $\beta = 400 \text{ rad/m}$  και  $\theta = \pi/2$ . Παρατηρούνται ομοιότητες στις καμπύλες μεταξύ των ζευγαριών  $E_x$  και  $H_y$ ,  $E_y$  και  $H_x$ .





Σχήμα 3.41: Εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην ανοιχτή γραμμή μικροταινίας με ανισοτροπικό υπόστρωμα ( $\beta = 400 \text{ rad/m}$ ).



Σχήμα 3.42: Θωρακισμένη μικροταινία.

Πίνακας 3.15: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της θωρακισμένης μικροταινίας.

a (mm)	b (mm)	w (mm)	h (mm)
6.5	3.5	1.5	1.5

Πίνακας 3.16: Γεωμετρία προσομοίωσης της θωρακισμένης μικροταινίας.

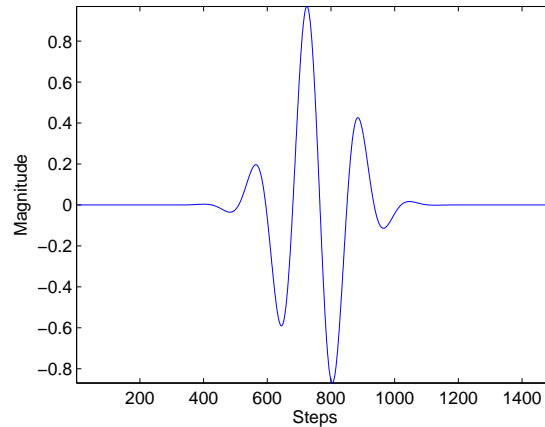
a ( $\Delta h$ )	b ( $\Delta h$ )	w ( $\Delta h$ )	h ( $\Delta h$ )
26	14	6	6

### 3.7 Θωρακισμένη μικροταινία με ανισοτροπικό υπόστρωμα

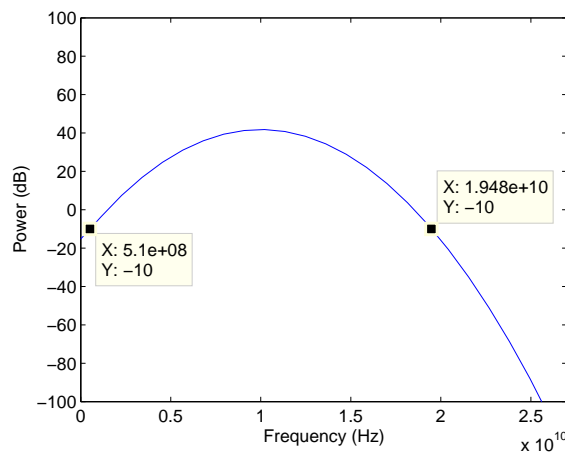
Η γεωμετρία της θωρακισμένης μικροταινίας που προσομοιώθηκε απεικονίζεται στο σχήμα 3.42. Η διάταξη αποτελείται από ορθογώνιο μεταλλικό περίβλημα μέσα στο οποίο τοποθετείται διηλεκτρική πλάκα πάχους  $h$ , πάνω στην οποία είναι τυπωμένος ένας αγωγός μήκους  $W$ . Όπως και πριν το διηλεκτρικό υπόστρωμα είναι από ζαφείρι και ο οπτικός άξονας βρίσκεται στο επίπεδο  $xy$ . Διαφορετικές περιπτώσεις για τη γωνία  $\theta$  εξερευνήθηκαν. Οι παράμετροι των εξισώσεων 3.7 που περιγράφουν τον ταυστή διηλεκτρικού είναι και εδώ  $\epsilon_1 = 9.4$  και  $\epsilon_2 = 11.6$ , ενώ για τη γωνία  $\theta$  εξετάστηκαν οι περιπτώσεις  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/4$  και  $\theta = \pi/2$ .

Κατά τα γνωστά, η πηγή (σχήμα 3.43) είναι ένας γκαουσιανός παλμός πολλαπλασιασμένος με ημίτονο. Για τον γκαουσιανό παλμό χρησιμοποιήθηκε ενεργό πλάτος  $150 \Delta t$ , ενώ το ημίτονο κεντράρει την ζώνη συχνοτήτων με ισχύ άνω των  $-10$  dB στα 10GHz. Η ζώνη διέγερσης τοποθετείται από 0.5 έως 20 GHz.

Οι διαστάσεις του χώρου προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκαν διατηρήθηκαν και εδώ ίδιες με αυτές που παρέχει η αναφορά [17] δίχως να γίνει κάποια προεργασία. Σε αντίθεση με την περίπτωση της ανοιχτής μικροταινίας, στα όρια αυτής της διάταξης υλοποιήθηκαν συνοριακές συνθήκες τέλει ηλεκτρικού αγωγού. Επιπλέον, όπως φαίνεται και στον πίνακα 3.15, οι πραγματικές διαστάσεις του περιβλήματος δίνονται και άρα μπορεί άμεσα να υπολογιστεί το χωρικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε στην μελέτη της αναφοράς. Το κάθε κελί ισούται με 0.25 mm και κατά συνέπεια η συνθήκη ευστάθειας επιβάλλει χωρικό βήμα



(α) Η πηγή στο πεδίο του χρόνου.



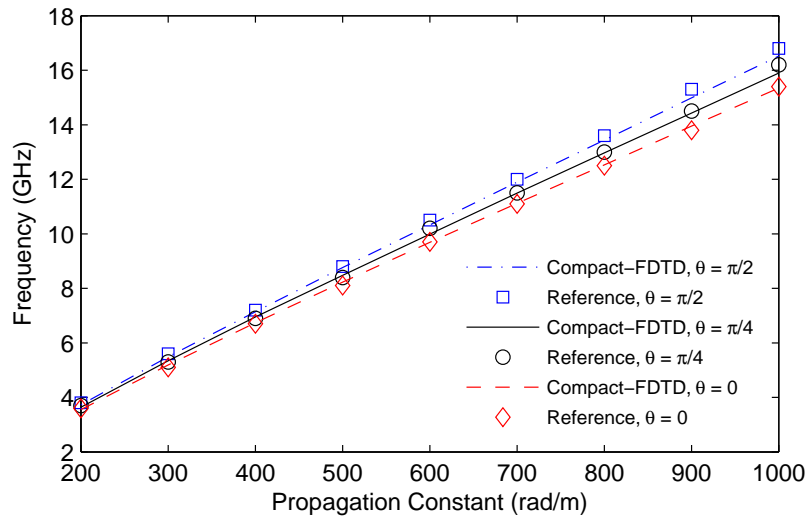
(β) Η πηγή στο πεδίο της συχνότητας.

Σχήμα 3.43: Η σημειακή πηγή για τη θωρακισμένη μικροταινία και το συχνοτικό της περιεχόμενο. 0.588 ps. Η διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι 80000 χρονικά βήματα για να επιτευχθεί ακολούθως αναλυτικότητα συχνότητας 21 MHz. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι 15 δευτερόλεπτα.

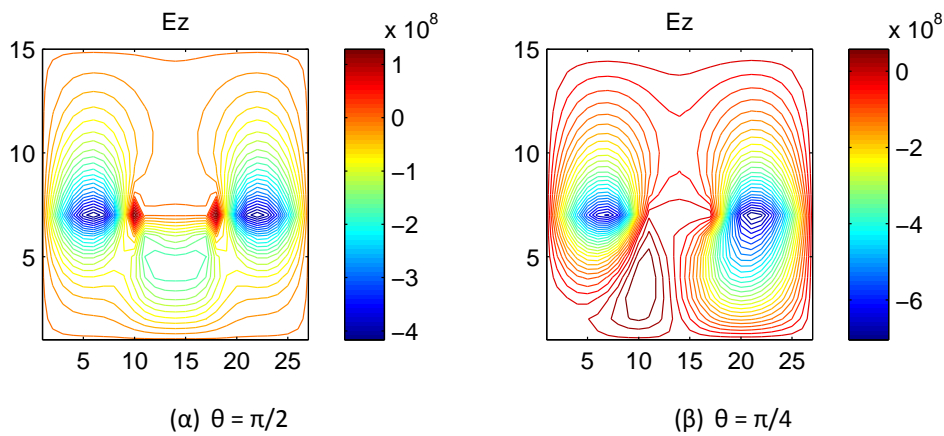
Η προσομοίωση εκτελέστηκε για εννέα τιμές της σταθεράς διάδοσης  $\beta$  στο διάστημα 200 - 1000 rad/m. Στο Σχήμα 3.44 δίνονται οι καμπύλες διασποράς του επικρατέστερου ρυθμού για τις διάφορες τιμές της γωνίας  $\theta$  και γίνεται η σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές της αναφοράς. Πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων μπορεί να παρατηρηθεί.

Στα σχήματα 3.45 και 3.46 συγκρίνονται οι εγκάρσιες κατανομές των συνιστωσών  $E_z$  και  $H_z$  για  $\theta = \pi/2$  και  $\theta = \pi/4$ . Γίνεται εύκολα αντιληπτή η έλλειψη συμμετρίας των γραμμών στο ανισοτροπικό υλικό, διότι σύμφωνα με τη σχέση 3.7γ,  $\epsilon_{xy} \neq 0$  όταν  $\theta = \pi/4$ .

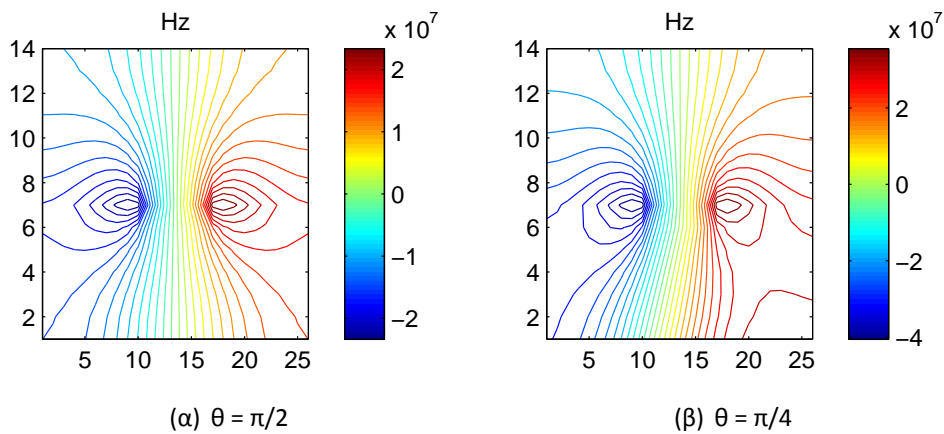
### 3. Αριθμητικά αποτελέσματα



Σχήμα 3.44: Διάγραμμα διασποράς του επικρατέστερο ρυθμού της θωρακισμένης μικροταινίας για διάφορες τιμές της γωνίας  $\theta$ .



Σχήμα 3.45: Σύγκριση της εγκάρσιας κατανομής της συνιστώσας  $E_z$  για  $\theta$  διαφορετικές τιμές της γωνίας  $\theta$  στη θωρακισμένη μικροταινία.



Σχήμα 3.46: Σύγκριση της εγκάρσιας κατανομής της συνιστώσας  $H_z$  για διαφορετικές τιμές της γωνίας  $\theta$  στη θωρακισμένη μικροταινία.

# 4

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία ξεκινήσαμε από τη παρουσίαση της κλασικής μεθόδου FDTD στις τρεις διαστάσεις και το κριτήριο κάτω από το οποίο αυτή είναι ευσταθής. Στη συνέχεια εμβαθύνουμε περαιτέρω μελετώντας μία βελτιωμένη εκδοχή της κλασικής μεθόδου, την Compact 2D-FDTD. Δείξαμε πρώτα τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την θεμελίωσή της και στη συνέχεια παρουσιάσαμε τη νέα συνθήκη ευστάθειας που πρέπει να επαληθεύεται. Έπειτα παρουσιάσαμε ζητήματα που αφορούν την κατασκευή παραμετροποιήσιμου προσομοιωτικού προγράμματος που εφαρμόζει τη μέθοδο στις διατάξεις που επιλέξαμε.

Το μέγεθος του εύρους εφαρμογών της μεθόδου γίνεται αντιληπτό στη συνέχεια, όπου παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για οκτώ διαφορετικές διατάξεις οδήγησης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Οι διατάξεις αυτές κατηγοριοποιούνται σε ομοιογενείς κυματοδηγούς ορθογωνικής διατομής με ή χωρίς διηλεκτρικό πλήρωσης, ανομοιογενείς κυματοδηγούς με αυθαίρετα τοποθετημένες περιοχές διηλεκτρικού, μονόπλευρων γραμμών περυγίου, καθώς και διατάξεων ανοιχτής ή θωρακισμένης μικροταινίας. Οι κατηγορίες διατάξεων που μελετήθηκαν αποτελούν ένα ολιγάριθμο πλήθος των δυνατών δομών που μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη μέθοδο Compact FDTD, καθώς η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας τους δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα της του εύρους εφαρμογών της. Δείκτης πρακτικής αξίας της μεθόδου είναι επίσης το γεγονός ότι η εξαγωγή αποτελεσμάτων για τις παραπάνω δομές δεν δεσμεύεται από τη μορφή των διαδιδόμενων ρυθμών. Η καταλληλότητα της Compact FDTD για την ανάλυση πλήρους κύματος αυθαίρετα πολύπλοκων ρυθμών διάδοσης αποδεικνύεται από τα αποτελέσματά μας και παράλληλα η ευχρηστία της, αφού είναι δυνατή, με την εισαγωγή της φασικής σταθεράς στους υπολογισμούς, η

ανάλυση στο εκάστοτε επιθυμητό εύρος συχνοτήτων.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παραθέτουμε για κάθε διάταξη παρουσιάζουν πολύ καλή συσχέτιση με αντίστοιχα αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή αναλυτικών λύσεων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία. Η συσχέτιση αυτή αποδεικνύει την ακρίβεια της μεθόδου Compact FDTD σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν και αναδεικνύει τη σημαντικότητα της. Περαιτέρω, η δυνατότητα εξαγωγής της κατανομής των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να αποτελέσει ακόμα ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη της μορφής των διαδιδόμενων ρυθμών σε διατάξεις για τις οποίες δεν υπάρχει διαθέσιμη αναλυτική λύση.

Όπως προκύπτει από τους χρόνους εκτέλεσης των προσομοιώσεων η ταχύτητα της μεθόδου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της και αυξάνει επιπρόσθετα την ελκυστικότητα της. Οι χρόνοι που παραθέτονται κυμαίνονται από δεκάδες δευτερόλεπτα έως μερικά λεπτά για κάθε προσομοίωση για μία τιμή της φασικής σταθεράς.

Επιπλέον είναι δυνατή, όπως δείξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου για τη μοντελοποίηση ανισοτροπικών υλικών με αποτέλεσμα την επέκταση της ευελιξίας της σε μεγάλο βαθμό. Ειδικότερα, ανισοτροπικά υλικά με ιδιότητες που περιγράφονται από τανυστές διηλεκτρικού με μη μηδενικές τιμές σε όλα τα στοιχεία εκτός των  $\epsilon_{xz}$  και  $\epsilon_{yz}$ , μοντελοποιούνται προσαρμόζοντας τη μέθοδο με τρόπο ώστε να συμπεριληφθεί στον αλγόριθμο επίλυσης ο υπολογισμός της ηλεκτρικής μετατόπισης. Παρά την ανάγκη υπολογισμού ενός πρόσθετου συνόλου τριών συνιστωσών από τον αλγόριθμο, η τροποποίηση φαίνεται ότι δεν επηρεάζει την ταχύτητα εκτέλεσης με βάση τους χρόνους που έχουμε παραθέσει στα αποτελέσματα.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία, αναφέρουμε μερικές προτάσεις βελτίωσης της εργασίας στο μέλλον. Προτείνουμε αρχικά, την κατασκευή κατάλληλης τροποποίησης του αλγορίθμου Compact FDTD για την εφαρμογή του σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Διατάξεις κυλινδρικής συμμετρίας, όπως οι κυματοδηγοί κυκλικής διατομής, δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν ορθά με τον αλγόριθμο καρτεσιανών συντεταγμένων λόγω του ορθογώνιου σχήματος των κελιών. Συνεπώς, μία τέτοια επέκταση θα διευρύνει το εύρος εφαρμογών της μεθόδου. Επίσης, η υλοποίηση μη ιδανικών απορροφητικών συνθηκών πρώτης τάξης στη μελέτη της ανοιχτής μικροταινίας μπορεί να αντικατασταθεί είτε από απορροφητικές συνθήκες δεύτερης τάξης, ή από τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα και μέσα από σύγκριση των αποτελεσμάτων για να προσδιοριστεί η προτιμώμενη τεχνική, με απώτερο στόχο την επίτευξη περισσότερης ακρίβειας στα αποτελέσματα. Τέλος, για να συμπεριληφθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις μοντελοποίησης ανισοτροπικών υλικών στο εύρος εφαρμογών της μεθόδου κρίνεται επιθυμητή η υλοποίηση της γενικής μεθόδου Compact FDTD φανταστικών μεταβλητών που έχει ήδη παρουσιαστεί αναλυτικά στη σχετική βιβλιογραφία.

## Βιβλιογραφία

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, 1966.
- [2] S. Xiao, R. Vahldieck, and H. Jin, "Full-Wave analysis of guided wave structures using a novel 2-D FDTD," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 2, no. 5, pp. 165–167, 1992.
- [3] A. Asi and L. Shafai, "Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using COMPACT 2D-FDTD," *Electronics Letters*, vol. 28, no. 15, pp. 1451–1452, 1992.
- [4] S. Xiao and R. Vahldieck, "An efficient 2-D FDTD algorithm using real variables," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, no. 5, pp. 127–129, 1993.
- [5] A. C. Cangellaris, "Numerical stability and numerical dispersion of a Compact 2-D/FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, no. 1, pp. 3–5, 1993.
- [6] M. Fujii and K. Sumio, "Accurate analysis of losses in waveguide structures by Compact Two-Dimensional FDTD method combined with Autoregressive Signal Analysis," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 6, pp. 970–975, 1996.
- [7] A. P. Zhao, J. Juntunen, and A. V. Räsänen, "Relationship between the Compact complex and real variable 2-D FDTD methods in arbitrary anisotropic dielectric waveguides," in *Microwave Symposium Digest, 1997., IEEE MTT-S International*, vol. 1, pp. 83–87, IEEE, 1997.
- [8] T. Namiki, "A new FDTD algorithm based on Alternating-Direction Implicit method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 10, pp. 2003–2007, 1999.

- [9] D. F. P. Pile, "Compact-2D FDTD for waveguides including materials with negative dielectric permittivity, magnetic permeability and refractive index," *Applied Physics B*, vol. 81, no. 5, pp. 607–613, 2005.
- [10] S. T. Chu and S. K. Chaudhuri, "Finite-Difference Time-Domain method for optical waveguide analysis," *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 11, pp. 255–300, 1995.
- [11] J. B. Schneider, "Understanding the Finite-Difference Time-Domain method," 2013.
- [12] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*. Artech House, 1995.
- [13] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. CRC Press, 1993.
- [14] T. D. Tsimproukis, *Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο: Βασική Θεωρία & Εφαρμογές*, vol. 2. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011.
- [15] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field equations," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-23, no. 4, pp. 377–382, 1981.
- [16] S. Gedney, *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*. Morgan & Claypool Publishers, 2011.
- [17] A. P. Zhao, J. Juntunen, and A. V. Räsänen, "A generalized compact 2-D FDTD model for the analysis of guided modes of anisotropic waveguides with arbitrary tensor permittivity," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 18, no. 1, pp. 17–23, 1998.
- [18] Y. J. Zhao, K. L. Wu, and C. K. K. M, "A Compact 2-D full-wave Finite-Difference Frequency-Domain method for general guided wave structures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 7, pp. 1844–1848, 2002.
- [19] I. P. Hong and H. K. Park, "Dispersion characteristics of a unilateral fin-line using 2D FDTD," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 21, pp. 1992–1994, 1996.
- [20] T. K. Ishii, *Components and Devices*, vol. 1. Academic Press, 2013.



## ABSTRACT

Of the available methods of understanding and predicting interactions of electromagnetic fields with physical objects or the environment, computational electromagnetics (CEM) is the newest and fastest-growing practice. While technological evolution is taking place at a rapid pace, a plethora of electromagnetic problem-solving techniques continue to enjoy its benefits for decades. Application of such methods plays an important part on studying the behaviour of structures with particularly complex geometry, the evaluation of which depended previously on the availability of analytical solutions or approximations, often without achieving the desired precision levels. However, these conveniences do not come without cost. The solution of the most difficult problems still requires the use of large amounts of computing power and processing time. Therefore, constant effort to improve the methods already used is imperative in order to ensure that the CEM field will continue to grow in harmony with technological evolution. The Finite-Difference Time Domain method in its original three dimensional form is a versatile technique that can tackle a wide range of electromagnetic problems. However, if utilized in full-wave frequency selective analysis problems it demands large amounts of memory space and processing time. The purpose of this paper is the analysis and implementation of an improvement of the original FDTD method, the Compact 2D FDTD method, that is faster and promises a good level of accuracy. We will later use it in order to analyse the behaviour of wave-guiding structures with complex geometries and inhomogeneities, to showcase the method's strong benefits.