

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετούμε τη συμπεριφορά δρομέων που εκτελούν τυχαίους περιπάτους σε πολυπληθή περιβάλλοντα εντός μίας πεπερασμένου μήκους ουρά αναμονής για διάφορα μήκη ουράς. Μοντελοποιούμε την κίνηση των δρομέων χρησιμοποιώντας κλασματική κίνηση *Brown (fBM)* όπου η προτεραιότητα στην ουρά ορίζεται από το συντελεστή *Hurst*. Χρησιμοποιούμε συντελεστές $Hurst < 0.5$ για να μοντελοποιήσουμε συστήματα τα οποία ακολουθούν υποδιαχυτικές συμπεριφορές.

Λέξεις-κλειδιά: ουρές αναμονής, στοχαστικές διεργασίες, κλασματική κίνηση *Brown*, υποδιάχυση, πολυπληθή περιβάλλοντα

Abstract

In this thesis we study the stochastic motion of random walkers in a finite queueing system for different queue lengths. Based on fractional Brownian motion (fBM) we describe the motion for a given priority, which is defined by the value of the Hurst exponent. We obtain characteristics of the motion, namely, exponent of the mean square displacement for each walker and for different queue lengths. In all experiments we use Hurst exponents < 0.5 in order to study sub-diffusional motion in a crowded environment. Quantitatively, the model predicts the existence of an optimal length that leads to faster motion for a given number of walkers.

Keywords: *Queueing system, stochastic processes, fractional Brownian motion, sub-diffusion, crowded environment*

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	4
2	Βασικές έννοιες Θεωρίας Ουρών.....	7
2.1	Συμβολισμός.....	9
2.2	Απόδοση συστήματος.....	9
2.3	Γενικοί συσχετισμοί και αποτελέσματα.....	10
2.4	Η ουρά M/M/1.....	12
3	Τυχαίοι Περίπατοι (Random Walks).....	14
3.1	Από τους τυχαίους περιπάτους στην εξίσωση διάχυσης.....	15
3.2	Θεώρημα κεντρικού ορίου και τυχαίοι περίπατοι.....	22
3.3	Κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian Motion-fBM).....	24
3.4	Συνεχούς χρόνου τυχαίοι περίπατοι (Continuous Time Random Walks-CTRW).....	27
4	Πειραματική διαδικασία.....	28
4.1	Περιγραφή πειραματικής διαδικασίας.....	28
4.2	Αποτελέσματα.....	31
4.3	Παράθεση πειραματικών δεδομένων.....	32
5	Συζήτηση αποτελεσμάτων – μελλοντική έρευνα.....	46
6	Αναφορές.....	48
	Παράρτημα Α.....	51

1 Εισαγωγή

Η *Θεωρία Ουρών* ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων τα οποία περιλαμβάνουν χρόνο αναμονής. Οι ουρές επιτρέπουν την καλύτερη οργάνωση των συστημάτων ορίζοντας «κανόνες συμπεριφοράς» με στόχο την βελτίωση της απόδοσης του μοντέλου εξυπηρετούμενου - ουράς αναμονής - εξυπηρετητή. Από τα πρώτα συστήματα αναμονής που μελετήθηκαν ήταν το τηλεφωνικό δίκτυο για να αντιμετωπιστεί η τηλεπικοινωνιακή συμφόρηση στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Στην περίπτωση αυτή ο *Erlang* [1] απέδειξε ότι η κατανομή *Poisson* μπορεί να περιγράψει τυχαία τηλεπικοινωνιακή κίνηση [2]. Η *Θεωρία ουρών* εφαρμόζει αρχές της *Θεωρίας πιθανοτήτων* και το πεδίο εφαρμογής της εκτείνεται σε διάφορους τομείς όπως τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, εφοδιαστικές αλυσίδες, μεταφορές, κυτταρικές διεργασίες και εν δυνάμει μπορεί να εφαρμοστεί σε διεργασίες που περιγράφονται πιθανοκρατικά και περιέχουν χρόνους αναμονής [3][4][5][6]. Αξίζει να σημειωθεί ότι συστήματα ουρών πέραν των κλασσικών *στοχαστικών διεργασιών* μπορούν να εφαρμοσθούν και σε *αιτιοκρατικά* (ντετερμινιστικά) συστήματα. Στην παρούσα εργασία κάνοντας χρήση *στοχαστικών μοντέλων* μελετούμε συστήματα ουρών μικρού μήκους όπου η κίνηση κάθε δρομέα περιορίζεται από γειτονικούς δρομείς (*neighbors*), τα οποία καθιστούν την κίνηση αντικείμενο πιθανοκρατικών παρά αιτιοκρατικών μεταβολών. Σκοπός μας είναι η διερεύνηση πιθανής συσχέτισης του μήκους της ουράς με τον αριθμό των δρομέων εντός αυτής, η οποία οδηγεί στη βέλτιστη εξυπηρέτηση. Γνωρίζοντας ότι η μοντελοποίηση ενός ρεαλιστικού μοντέλου απαιτεί πεπερασμένο μήκος ουράς, το οποίο με τη σειρά του απαιτεί χρήση πιθανοκρατικών μοντέλων που εμπεριέχουν στην κατασκευή τους χρόνους αναμονής και κατά συνέπεια φαινομένων γήρανσης, π.χ. *Continuous Time Random Walks (CTRW)*, βλέπε συζήτηση στη συνέχεια, ακολουθούμε αρκετά διαφορετική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε πιθανοκρατικά μοντέλα που βασίζονται στην κλασματική κίνηση Brown (fBM), η οποία είναι αυτοόμοια διεργασία, δεν υποφέρει από φαινόμενα γήρανσης (*ensemble average is not equal to time average for large time*), αλλά απαιτεί μία χαλάρωση του ενός πεπερασμένου άκρου της ουράς και μας επιτρέπει την ποιοτική συσχέτιση μεταξύ μήκους ουράς και αριθμού δρομέων.

Για να περιγράψουμε και να ερμηνεύσουμε κατ' επέκταση την δυναμική μιας ουράς ή ενός συστήματος ουρών είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε ή να θέσουμε την

ή τις στοχαστική/στοχαστικές διεργασία/διεργασίες που περιγράφει τη ροή των δρομέων (πελατών) που εισέρχονται στο σύστημα καθώς και τους κανόνες/τρόπους εξυπηρέτησης που ισχύουν στο σύστημα [7]. Η διαδικασία άφιξης ενός δρομέα στην ουρά παίρνει τιμές από μία κατανομή πιθανότητας των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων και η κατανομή αυτή συνήθως ακολουθεί μία αντίστροφη δύναμη του χρόνου εισόδου. Βασική ιδιότητα του συστήματος είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε δρομέα από την ουρά. Το τελευταίο σχετίζεται και με τα τεχνικά χαρακτηριστικά της ουράς, για παράδειγμα, η χωρητικότητα του συστήματος αναμονής η οποία μπορεί να διαμοιράζεται σε ένα μοναδικό εξυπηρετητή ή ένα σύνολο εξυπηρετητών[8][9][10] .

Οι χρόνοι αναμονής επηρεάζουν τους αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται για την βελτιστοποίηση της δρομολόγησης και ελέγχου ροής. Η είσοδος των πακέτων σε ένα σύστημα ουράς μπορεί να ακολουθεί κατανομή *Poisson*, *Erlang* ή *μοντέλο Markov*. Σε ένα σύστημα η κατανομή/συμπεριφορά κατά την έξοδο των πακέτων από το σύστημα συνήθως διαφέρει από αυτή κατά την είσοδο σε ένα σύστημα ουράς αναμονής [9] .

Οι *τυχαίοι περίπατοι* αποτελούν μία εναλλακτική στοχαστική μοντελοποίηση όπου ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν αποδοθεί στον περίπατο μπορούν να οδηγήσουν σε πλήθος διαφορετικών κατανομών πιθανοτήτων [19] και κατά συνέπεια μπορούν να περιγράψουν τόσο κατανομές αφίξεων όσο και αναχωρήσεων/εξόδων από το σύστημα. Οι δρομείς είναι οι πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα ουράς και αναμένουν να εξυπηρετηθούν από αυτό και κινούνται σύμφωνα με μία τυχαία διεργασία. Τα περισσότερα μοντέλα στη βιβλιογραφία ασχολούνται με τις κατανομές άφιξης και εξυπηρέτησης στην ουρά για διαφορετικούς μηχανισμούς εξυπηρέτησης. Οι αλγόριθμοι που εφαρμόζονται μέχρι τώρα σε συστήματα ουράς δίνουν πληροφορία για το εάν η ουρά είναι κατειλημμένη και δεν εξυπηρετεί ή κατειλημμένη για κάποιο χρονικό διάστημα χωρίς να εξυπηρετεί χωρίς να παρέχει επιπλέον πληροφορία για το τι συμβαίνει εντός της ουράς.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιώντας τυχαίους περιπάτους περιγράφουμε την κίνηση των πελατών σε μία πεπερασμένη ουρά που εξυπηρετεί κατά FIFO (First In First Out). Χρησιμοποιούμε πολλαπλούς πελάτες που διεκδικούν την εξυπηρέτησή τους από την ουρά για να είναι πιο ρεαλιστική η απόδοση του ανταγωνισμού μεταξύ των δρομέων σε μία ουρά. Έτσι προσπαθούμε να εξάγουμε πληροφορία για την κίνηση των πελατών εντός της ουράς. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στόχος μας είναι να αποτυπώσουμε την σχέση μεταξύ του μεγέθους της ουράς και του αριθμού των

πελατών που κινούνται εντός αυτής που οδηγεί στη βελτίωση της αποδοτικότητας του συστήματος ουράς. Η γνώση αυτή επιτρέπει την επιτάχυνση της διαδικασίας εξυπηρέτησης των πελατών και ταυτόχρονα λαμβάνει υπόψη της την χωρητικότητα της ουράς έτσι ώστε να είναι επαρκής για να καλύπτει τις ανάγκες του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή της ροής πελατών. Μοντελοποιώντας την κίνηση των δρομέων εντός ουράς θεωρούμε ότι σε κάθε ενδιάμεση θέση, όχι τα σημεία εισόδου και εξόδου, ο πελάτης/δρομέας έχει μία πιθανότητα μετάβασης να πάει αριστερά, δεξιά (κίνηση προς την κατεύθυνση εξόδου) ή και να παραμείνει στην θέση του. Αντίθετα, εάν ο δρομέας βρίσκεται στο σημείο εισόδου μπορεί να πάει μόνο δεξιά ή να παραμείνει στη θέση του. Δρομέας στο σημείο εξόδου εξέρχεται με πιθανότητα ένα. Για κάθε ενδιάμεση θέση οι πιθανότητες μετάβασης τροποποιούνται σε κάθε βήμα λαμβάνοντας υπόψη και την θέση των γειτόνων τους. Μελετούμε τη συμμόρφωση και τον ανταγωνισμό των πελατών για την εξυπηρέτηση/έξοδό τους από την ουρά για διάφορα μήκη ουράς και διαφορετικές συνθήκες που επηρεάζουν την κινητικότητα των δρομέων εντός της ουράς.

2 Βασικές έννοιες Θεωρίας Ουρών

Μία ουρά είναι μία γραμμή αναμονής. Οι ουρές σχηματίζονται οποτεδήποτε η ζήτηση για εξυπηρέτηση ξεπερνά τη διαθεσιμότητα της υπηρεσίας. Ένα σύστημα ουράς αναμονής αποτελείται από τους πελάτες που καταφθάνουν για να εξυπηρετηθούν, περιμένοντας σε μία ουρά για την υπηρεσία αν αυτό είναι απαραίτητο, και μετά την εξυπηρέτησή τους αφήνουν/φεύγουν από το σύστημα. Ο όρος πελάτης είναι γενικός και δεν υπονοεί απαραίτητα πελάτη-άνθρωπο. Οποιαδήποτε μονάδα/οντότητα απαιτεί κάποια μορφή υπηρεσίας θεωρείται πελάτης.

Ένα σύστημα ουρών περιγράφεται συνήθως από πέντε βασικά χαρακτηριστικά των διαδικασιών ουράς:

- i. το πρότυπο της άφιξης των πελατών,
- ii. το πρότυπο εξυπηρέτησης για τους πελάτες,
- iii. τους κανόνες της ουράς (*discipline*),
- iv. τη χωρητικότητα του συστήματος και
- v. τον αριθμό των καναλιών εξυπηρέτησης.

Στα περισσότερα συστήματα ουρών το πρότυπο των αφίξεων θα είναι στοχαστικό. Επομένως, επιθυμούμε να γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας που περιγράφει τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των διαδοχικών πελατών και επιθυμούμε επίσης, να γνωρίζουμε αν οι αφίξεις είναι μεμονωμένες ή σε σύνολα. Αν ένα πρότυπο/κανόνας αφίξεων δεν βασίζεται στο χρόνο (δηλαδή, η κατανομή πιθανότητας είναι χρονικά ανεξάρτητη) τότε ονομάζεται *stationary/στάσιμο πρότυπο αφίξεων*. Ένα πρότυπο αφίξεων που είναι χρονικά εξαρτημένο ονομάζεται μη στάσιμο, δηλαδή η επιλογή μεταξύ δύο διαφορετικών αφίξεων σε τυχαίες χρονικές στιγμές οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Όσον αφορά τα πρότυπα αφίξεων, ο πιο σημαντικό παράγοντας στη μελέτη προτύπων εξυπηρέτησης είναι η κατανομή πιθανότητας που περιγράφει την ακολουθία των χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών. Η εξυπηρέτηση μπορεί να γίνεται είτε επιμέρους είτε σε παρτίδες. Η διαδικασία εξυπηρέτησης μπορεί να εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που αναμένουν να εξυπηρετηθούν: ένας εξυπηρετητής μπορεί να

αποδίδει επαρκέστερα καθώς η ουρά αυξάνει ή να διαταράσσεται η καλή λειτουργία του και να γίνεται λιγότερο παραγωγικός. Αυτό ονομάζεται *εξυπηρέτηση εξαρτημένη από την κατάσταση*. Η εξυπηρέτηση μπορεί να είναι επίσης στάσιμη ή μη-στάσιμη ανάλογα με το χρόνο. Για παράδειγμα, η εξυπηρέτηση μπορεί να δείχνει σημάδια μάθησης (self-learning), έτσι ώστε μετά από χρόνο να γίνεται πιο επαρκής .

Αν οι χρόνοι άφιξης και εξυπηρέτησης δεν είναι ντετερμινιστικοί, το μήκος της ουράς δε θα έχει καθορισμένο πρότυπο. Προκύπτει ότι μία κατανομή πιθανότητας για το μήκος των ουρών θα εξαρτάται σε δύο ξεχωριστές διεργασίες: την κατανομή των αφίξεων και την κατανομή της εξυπηρέτησης. Οι δύο αυτές διεργασίες θεωρούνται ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι κανόνες της ουράς ορίζουν τον τρόπο με τον οποίο οι πελάτες θα εξυπηρετούνται. Ο πιο κοινός κανόνας είναι ο *FCFS* ή *FIFO* (*First Come First Served* ή *First In First Out*). Υπάρχουν ωστόσο και άλλοι κανόνες εξυπηρέτησης όπως ο *LCFS* (*Last Come First Served*) ή κανόνες που περιέχουν την έννοια της προτεραιότητας [11].

Ένα σύστημα μπορεί να έχει άπειρη χωρητικότητα, ή μπορεί να υπάρχει περιορισμός στον αριθμό πελατών που μπορούν να εξυπηρετηθούν/να εισέλθουν στην ουρά. Σε μία κατάσταση με πεπερασμένη ουρά, όπου υπάρχει ένα άνω όριο εξυπηρέτησης, οι πελάτες αναγκάζονται να αποφύγουν την ουρά όταν η ουρά φτάνει στο όριό της. Αν το σύστημα έχει πεπερασμένη χωρητικότητα/ικανότητα εξυπηρέτησης θα ήταν σχετικό να γνωρίζουμε τη μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης.

Εμείς θα ασχοληθούμε με έναν μοναδικό εξυπηρετητή παρόλο που ένα ρεαλιστικό σύστημα μπορεί να διαθέτει πολλούς παράλληλους εξυπηρετητές [12][13]. Ένας πελάτης που φθάνει και βρίσκει περισσότερους από έναν ελεύθερους εξυπηρετητές μπορεί να διαλέξει τυχαία μεταξύ τους ώστε να εξυπηρετηθεί. Αν όλοι οι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι, τότε ο πελάτης μπαίνει σε μία ουρά η οποία είναι κοινή για όλους τους εξυπηρετητές. Ο πελάτης στην κορυφή της ουράς θα εξυπηρετηθεί στον πρώτο ελεύθερο εξυπηρετητή. Σε άλλες περιπτώσεις κάθε παράλληλος εξυπηρετητής μπορεί να έχει επιμέρους ουρά αναμονής. Υποθέτουμε γενικά, ότι τα παράλληλα κανάλια εξυπηρέτησης λειτουργούν ανεξάρτητα μεταξύ τους.

2.1 Συμβολισμός

Ο βασικός συμβολισμός που περιγράφει μια διεργασία ουράς (queuing process) είναι ο συμβολισμός Kendall [14] $A/B/X/Y/Z$, όπου A συμβολίζει το χρόνο μεταξύ των αφίξεων στην ουρά, B συμβολίζει την κατανομή πιθανότητας που περιγράφει το χρόνο εξυπηρέτησης, X είναι ο αριθμός των παράλληλων καναλιών εξυπηρέτησης, Y είναι ο περιορισμός στη χωρητικότητα του συστήματος και Z ο κανόνας της ουράς. Τα X και Y μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή στο $[1, \infty)$, αλλά τα A και B περιγράφονται από σύμβολα που παριστάνουν της κατανομές πιθανότητας. Για παράδειγμα M είναι μία εκθετική κατανομή, D είναι ντετερμινιστική και GD είναι μία (αυθαίρετη) γενική κατανομή. Στην τελευταία περίπτωση δεν έχει γίνει υπόθεση όσον αφορά τη μορφή της κατανομής. Τα αποτελέσματα σε αυτήν την περίπτωση είναι εφαρμόσιμα σε κατανομές πιθανότητας.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε μόνο τα τρία πρώτα σύμβολα για την περιγραφή των συστημάτων ουράς. Αν δεν υπάρχει περιορισμός στο σύστημα, δηλαδή $Y \rightarrow \infty$, παραβλέπουμε το σύμβολο. Μία ακόμη σύμβαση είναι ότι παραλείπουμε τον κανόνα της ουράς αν είναι FCFS. Για παράδειγμα, $M/D/2$ συμβολίζει ένα σύστημα ουράς με εκθετική κατανομή του χρόνου μεταξύ των αφίξεων (είσοδος Poisson), ντετερμινιστική κατανομή εξυπηρέτησης, 2 εξυπηρετητές, χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα του συστήματος και κανόνα FCFS στην ουρά [15].

2.2 Απόδοση συστήματος

Στην ανάλυση των συστημάτων ουρών αναμονής πρέπει να βρίσκουμε τρόπους να ενισχύουμε την απόδοση του συστήματος σε διάφορους τομείς. Υπάρχουν τρία κυρίως χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν. Πρώτα, το μέτρο του τυπικού χρόνου αναμονής των πελατών, δεύτερον, ο τρόπος με τον οποίο οι πελάτες συσσωρεύονται και τρίτον, το μέτρο του χρόνου που οι εξυπηρετητές παραμένουν αδρανείς. Επειδή είναι πολύ πιθανό να αντιμετωπίζουμε στοχαστικές διεργασίες επιθυμούμε να γνωρίζουμε της κατανομές πιθανότητάς της ή τουλάχιστον τη μέση τιμή της.

Υπάρχουν δύο είδη χρόνου αναμονής των πελατών: ο χρόνος που ο πελάτης περνά στην ίδια την ουρά και ο χρόνος που περνά σε ολόκληρο το σύστημα μέχρι την

εξυπηρέτησή του. Ομοίως υπάρχουν δύο είδη συσσώρευσης πελατών: ο αριθμός των πελατών στην ουρά και ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα. Μετρώντας τον αδρανή χρόνο των εξυπηρετητών της ουράς μπορεί να σημαίνει ότι είτε κάποιος συγκεκριμένος εξυπηρετητής είναι αδρανής (χωρίς πελάτες) ή ολόκληρο το σύστημα είναι σε αδράνεια.

2.3 Γενικοί συσχετισμοί και αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες σχέσεις και αποτελέσματα για τα $G/G/1$ και $G/G/c$ συστήματα ουρών. Έστω ο μέσος ρυθμός άφιξης των πελατών που φτάνουν στο σύστημα είναι λ και ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης των πελατών μ . Τότε το μέτρο της συμφόρησης της κίνησης σε ένα σύστημα με c εξυπηρετητές είναι $\rho = \lambda / c\mu$. όταν $\rho > 1$ ($\lambda > c\mu$) ο μέσος αριθμός των αφίξεων στο σύστημα ξεπερνά το μέγιστο ρυθμό εξυπηρέτησης του συστήματος και το μέγεθος της ουράς αυξάνει χωρίς όριο καθώς ο χρόνος περνά (εκτός αν το σύστημα είναι πεπερασμένης χωρητικότητας). Προκύπτει ότι όταν $\rho > 1$, δεν υπάρχει κατάσταση ισορροπίας (steady state solution) για το μέγεθος της ουράς [11]. Ο μόνος τρόπος να βρεθούν αποτελέσματα σε κατάσταση ισορροπίας είναι να ισχύει $\rho < 1$. Όταν $\rho = 1$, εκτός αν οι αφίξεις και η εξυπηρέτηση είναι ντετερμινιστικά, δεν υπάρχει κατάσταση ισορροπίας, διότι η τυχαιότητα αποτρέπει την ουρά να αδειάζει για κάποια χρονική στιγμή και οι εξυπηρετητές είναι συνεχώς πίσω, προκαλώντας την αύξηση της ουράς χωρίς όριο. Επομένως, αν είναι γνωστά ο μέσος ρυθμός αφίξεων και ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης, ο ελάχιστος αριθμός των παράλληλων εξυπηρετητών που απαιτείται για να έχουμε λύση/κατάσταση ισορροπίας είναι το μήκος της ουράς να βρίσκεται μέσω της λύσης για το μικρότερο c έτσι ώστε $\lambda / c\mu < 1$.

Συχνά θέλουμε να βρούμε την κατανομή πιθανότητας για το συνολικό αριθμό $N(t)$ των πελατών στο σύστημα σε χρόνο t . Ο $N(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών που αναμένουν σε μία ουρά, $N_q(t)$ και οι πελάτες που εξυπηρετούνται $N_s(t)$. Έστω $p_n(t) = P\{N(t) = n\}$, και $p_n = P\{N = n\}$ στην κατάσταση ισορροπίας. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν ουρές c -εξυπηρετητών στην κατάσταση ισορροπίας, μπορούμε να βρούμε το μέσο αριθμό στο σύστημα,

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n, \quad (2.1)$$

και ο προσδοκώμενος αριθμός στην ουρά,

$$L_q = E[N_q] = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) p_n, \quad (2.2)$$

Μεταξύ των πιο σημαντικών αποτελεσμάτων στην θεωρία ουρών είναι και ο τύπος του Little [], που σχετίζει τα μέσα μεγέθη των συστημάτων σε κατάσταση ισορροπίας με της μέσους χρόνους αναμονής των πελατών σε κατάσταση ισορροπίας. Έστω $T = T_q = S$ ο συνολικός χρόνος που περνά της πελάτης στο σύστημα. Τότε ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι $W_q = E[T_q]$, και ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι $W = E[T]$. Οι τύποι του Little είναι

$$\begin{aligned} L &= \lambda W \\ L_q &= \lambda W_q \end{aligned} \quad (2.3)$$

Επομένως είναι απαραίτητο να βρεθεί μόνο ένα από τα τέσσερα αναμενόμενα μέτρα αξίας $(E[N], E[N_q], E[T], E[T_q])$ επειδή ο τύπος του Little και η σχέση $E[T] = E[T_q] + E[S]$, ή ισοδύναμα $W = W_q + 1/\mu$ όπου μ είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης. Από αυτό μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ W και W_q ως

$$L - L_q = \lambda(W - W_q) = \lambda(1/\mu) = \lambda/\mu \quad (2.4)$$

Της $L - L_q = E[N] - E[N_q] = E[N - N_q] = E[S]$ κι έτσι ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται στην κατάσταση ισορροπίας είναι $r = \lambda/\mu$. Σε ένα σύστημα με έναν μόνο εξυπηρετητή, $r = \rho$ και

$$L - L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0 \quad (2.5)$$

Έστω η πιθανότητα οποιοσδήποτε εξυπηρετητής να είναι απασχολημένος σε ένα σύστημα πολλών εξυπηρετητών σε κατάσταση ισορροπίας να είναι p_b . Γνωρίζουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών σε εξυπηρέτηση σε οποιοδήποτε

στιγμιότυπο στην κατάσταση ισορροπίας είναι r/c . Επομένως, με μία σχέση της μέσης τιμής βλέπουμε ότι

$$r/c = \rho = 0 \cdot (1 - p_b) + 1 \cdot p_b \quad (2.6)$$

Άρα, $p_b = \rho$. Για σύστημα ουράς $G/G/1$, η πιθανότητα του συστήματος να βρίσκεται σε αδράνεια ($N=0$) είναι η ίδια με την πιθανότητα της εξυπηρετητή να είναι αδρανής. Έτσι, θα είναι $p_0 = 1 - p_b$, οπότε $p_0 = 1 - \rho = 1 - r = 1 - \lambda/\mu$. Η ποσότητα $\lambda/\mu = r$ ονομάζεται προσφερόμενος φόρτος, καθώς κατά μέσο όρο κάθε πελάτης έχει $1/\mu$ μονάδες χρόνου εξυπηρέτησης και ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι λ . Επομένως λ/μ είναι το ποσοστό φόρτου που καταφθάνει στο σύστημα ανά μονάδα χρόνου. Διαιρώντας το με τον αριθμό των εξυπηρετητών, λαμβάνουμε το μέσο φόρτο εργασίας ανά εξυπηρετητή ανά μονάδα χρόνου.

2.4 Η ουρά M/M/1

Το μοντέλο M/M/1 έχει είσοδο Poisson, εκθετική κατανομή εξυπηρέτησης και ουρά με έναν εξυπηρετητή. Οι συναρτήσεις πυκνότητας για της χρόνους μεταξύ των αφίξεων και της χρόνους εξυπηρέτησης δίνονται αντίστοιχα από

$$\begin{aligned} a(t) &= \lambda e^{-\lambda t}, \\ b(t) &= \mu e^{-\mu t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Όπου $1/\lambda$ είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ των αφίξεων και $1/\mu$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης. Και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί, και οι ρυθμοί άφιξης και υπό συνθήκη ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι Poisson, το οποίο της δίνει

$$\begin{aligned} P\{\text{να συμβεί μία άφιξη σε διάστημα } \Delta t\} &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P\{\text{να συμβούν περισσότερες από μία αφίξεις σε διάστημα } \Delta t\} &= o(\Delta t) \\ P\left\{\begin{array}{l} \text{να ολοκληρωθεί μία εξυπηρέτηση σε } \Delta t \\ \text{δεδομένου ότι το σύστημα δεν είναι άδειο} \end{array}\right\} &= \mu \Delta t + o(\Delta t) \\ P\left\{\begin{array}{l} \text{περισσότερες από μία εξυπηρετήσεις σε } \Delta t \\ \text{δεδομένου ότι εξυπηρετείται τουλάχιστον ένας} \end{array}\right\} &= o(\Delta t) \end{aligned}$$

Το μοντέλο M/M/1 είναι μία απλή διεργασία γεννήσεων-θανάτων (birth-death) με $\lambda_n = \lambda$ και $\mu_n = \mu$ για κάθε n . Οι αφίξεις είναι οι «γεννήσεις» στο σύστημα, καθώς εάν το σύστημα βρισκόταν στην κατάσταση n με την νέα άφιξη μεταβαίνει στην $n+1$

Ομοίως οι αναχωρήσεις από το σύστημα είναι οι «θάνατοι», μεταβαίνοντας από κατάσταση n σε κατάσταση $n-1$. Επομένως, οι εξισώσεις στην κατάσταση ισορροπίας θα είναι

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}, \\ 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ \text{ή} & \\ p_{n+1} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n - \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} \\ p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Θεωρώντας ότι το σύστημα ουράς M/M/1 είναι μία διεργασία γεννήσεων-θανάτων με σταθερούς ρυθμούς γεννήσεων και θανάτων, κάνοντας χρήση της παραπάνω αναδρομικής σχέσης με $\lambda_n = \lambda$ και $\mu_n = \mu$ για κάθε n καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \tag{2.9}$$

Για να βρούμε το p_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι πιθανότητες πρέπει να έχουν άθροισμα 1 και προκύπτει ότι

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \tag{2.10}$$

Ορίσαμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ το ρυθμό κίνησης για συστήματα ουρών με έναν εξυπηρετητή.

Έχουμε τότε

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} \tag{2.11}$$

Τώρα, η $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ είναι μία γεωμετρική σειρά που συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho < 1$. Έτσι, ο μόνος τρόπος να υπάρχει λύση στην κατάσταση ισορροπίας είναι αν και μόνο αν ισχύει $\rho < 1$. Καθώς γνωρίζουμε το άθροισμα των όρων των γεωμετρικών σειρών που συγκλίνουν,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad (\rho < 1) \quad (2.12)$$

έχουμε

$$p_0 = 1 - \rho \quad (2.13)$$

που επιβεβαιώνει το γενικό αποτέλεσμα για p_0 που εξάγαμε και στην περίπτωση $G/G/1$ ουράς. Άρα, η πλήρης λύση για την κατάσταση ισορροπίας του συστήματος ουράς $M/M/1$ είναι η γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n \quad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \right) \quad (2.14)$$

3 Τυχαίοι Περίπατοι (Random Walks)

Οι *τυχαίοι περίπατοι* (*random walks*) είναι μία κατηγορία *στοχαστικών διεργασιών* που χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα για την περιγραφή και μοντελοποίηση συστημάτων στον μικρόκοσμο. Ιστορικά, ο Robert Brown παρατήρησε και μελέτησε την κίνηση κόκκων γύρης σε νερό και αποδείχθηκε αργότερα ότι για την κίνηση αυτή που είναι γνωστή ως κίνηση Brown (μία ειδική περίπτωση τυχαίου περιπάτου), ότι οφείλεται της συγκρούσεις των μορίων του περιβάλλοντος με της κόκκους γύρης και η ένταση των κρούσεων από τη θερμοκρασία. Το 1900 ο Louis Bachelier [16] αναφέρει την έννοια των τυχαίων περιπάτων όπου και χρησιμοποίησε μία στοχαστική ανάλυση για να περιγράψει προβλήματα χρηματιστηριακών αγορών, ενώ το 1905 ο Karl Pearson χρησιμοποιεί τον «τυχαίο περίπατο» [17] και την ίδια χρονιά δύο εργασίες από διαφορετική οπτική γωνία πάνω στο πρόβλημα της διάχυσης, θεωρία διαταραχών

τον Albert Einstein [18], και πιθανοκρατική προσέγγιση βασισμένη σε τυχαίους περιπάτους από τον Marian Smolouchowski [19], οδήγησαν στα ίδια αποτελέσματα και καθιέρωσαν της τυχαίους περιπάτους ως ένα σημαντικό εργαλείο στην μελέτη φυσικών συστημάτων.

3.1 Από τους τυχαίους περιπάτους στην εξίσωση διάχυσης

Οι περισσότερες βασικές ιδιότητες του τυχαίου περιπάτου εξάγονται αν θεωρήσουμε τη μονοδιάστατη περίπτωση. Έστω ότι εξετάζουμε την κίνηση του σωματιδίου (δρομέα) το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά να «περπατάει» από κάποιο σημείο x_0 και στη μονάδα του χρόνου κάνει είτε ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p , είτε ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$. Τα βήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ της και αυτό μεταφράζεται ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του της βήματος είναι ανεξάρτητη από την πιθανότητα πραγματοποίησης του προηγούμενου βήματος. Προφανώς θα ισχύει ότι $p + q = 1$. Μετά από n βήματα θα υπάρχουν R βήματα στα δεξιά και $L = n - R$ βήματα στα αριστερά. Η καθαρή μετατόπιση στα δεξιά είναι $S = R - L$. Αν αυτοί οι περίπατοι επαναλαμβάνονται για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, η καθαρή μετατόπιση θα κυμαίνεται μεταξύ $S = -n$ και $S = +n$. Ο περίπατος που δίνει τη μέγιστη καθαρή μετατόπιση $S = n$ αντιστοιχεί σε αυτόν κατά τον οποίο όλα τα βήματα έχουν γίνει της τη μία κατεύθυνση. Η πιθανότητα να εκτελεστεί της τέτοιος περίπατος της τα δεξιά είναι:

$$P_n(n) = p^n \quad (3.1)$$

Όταν υπάρχει ένα βήμα στα αριστερά μεταξύ των βημάτων αυτών, η καθαρή μετατόπιση γίνεται $S = n - 2$ και μπορεί να συμβεί για οποιαδήποτε από της n διαφορετικές χρονικές στιγμές με πιθανότητα να συμβούν ίση με q . Άρα η συνολική πιθανότητα να βρεθεί της περίπατος με $R = n - 1$ βήματα στα δεξιά είναι

$$P_n(n-1) = np^{n-1}q \quad (3.2)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η πιθανότητα να βρούμε έναν περίπατο με R βήματα στα δεξιά ο οποίος έχει ολοκληρώσει όλα τα n βήματα ισοδυναμεί με την κατανομή πιθανότητας *Bernoulli*

$$P_n(R) = \binom{n}{R} p^R q^{n-R} \quad (3.3)$$

όπου $\binom{n}{R} = \frac{n!}{R!(n-R)!}$ ο αριθμός τέτοιων βημάτων.

Η συνολική πιθανότητα για n βήματα ανεξαρτήτως του αριθμού των βημάτων που έγιναν της τα δεξιά είναι τότε

$$\sum_{R=0}^n P_n(R) = (p+q)^n = 1 \quad (3.4)$$

Για αυτή την περίπτωση περιπάτου μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή του αριθμού των βημάτων στα δεξιά

$$\langle R \rangle = \sum_{R=0}^n R P_n(R) = \sum_{R=0}^n \binom{n}{R} R p^R q^{n-R} \quad (3.5)$$

Αν γράψουμε $R p^R = p \frac{d}{dp} p^R$, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle R \rangle &= \sum_{R=0}^n \binom{n}{R} p \frac{d}{dp} p^R q^{n-R} = p \frac{d}{dp} \sum_{R=0}^n \binom{n}{R} p^R q^{n-R} \\ &= p \frac{d}{dp} (p+q)^n = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned} \quad (3.6)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού για σύνολο n βημάτων λαμβάνεται στα δεξιά ένα κλάσμα p . Εφόσον η συνολική μετατόπιση σε έναν περίπατο είναι $S = 2R - n$, η μέση τιμή πολλών βημάτων είναι

$$\langle S \rangle = 2\langle R \rangle - n = 2np - n(p+q) = n(p-q) \quad (3.7)$$

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση του *συμμετρικού τυχαίου περιπάτου* σε μία διάσταση, στον οποίο η πιθανότητα να κινηθεί ο δρομέας δεξιά ή αριστερά είναι ίδια. Σε αυτή την περίπτωση η μέση μετατόπιση είναι μηδέν.

Έστω δρομέας που κινείται σε μονοδιάστατο πλέγμα του οποίου δύο διαδοχικές κορυφές απέχουν κατά απόσταση ℓ , την οποία ονομάζουμε πλεγματική σταθερά. Σε κάθε χρονικό βήμα διάρκειας τ ο δρομέας μετατοπίζεται σε μία από της δύο γειτονικές του κορυφές. Της ενδιαφέρει η κατανομή πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση x μετά από n βήματα. Στη συμμετρική περίπτωση θα είναι $p = q = 1/2$ και έστω ότι ο δρομέας φθάνει στη ζητούμενη θέση μετά από σύνολο n βημάτων εκ των οποίων τα R βήματα έγιναν της τα δεξιά. Ο δρομέας φθάνει στη θέση x μέσω $n! / R!(n-R)!$ συνδυασμών. Βάσει του κλασσικού ορισμού, η πιθανότητα θα είναι ίση με το λόγο των ευνοϊκών συνδυασμών της συνολικούς συνδυασμούς. Συνολικά οι συνδυασμοί είναι 2^n καθώς

$$\sum_{R=0}^n \frac{n!}{R!(n-R)!} = 2^n$$

και άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P_n(R) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{R!(n-R)!} \quad (3.8)$$

όπου $\binom{n}{R} = \frac{n!}{R!(n-R)!}$ που δεν είναι παρά οι συντελεστές του *διωνυμικού αναπτύγματος*, για αυτό και η (3.8) ονομάζεται *διωνυμική κατανομή* [20][21]. Οι συντελεστές της διωνυμικής κατανομής υπακούουν στην παρακάτω αναδρομική σχέση

$$\binom{n+1}{R} = \binom{n}{R} + \binom{n}{R-1} \quad (3.9)$$

Απόδειξη σχέσης (3.9)

Εξ' ορισμού θα είναι:

$$\binom{n+1}{R} = \frac{(n+1)!}{(n+1-R)!R!}$$

Για το άθροισμα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \binom{n}{R} + \binom{n}{R-1} &= \frac{n!}{(n-R)!R!} + \frac{n!}{(n-R+1)!(R-1)!} = \frac{n!}{(n-R)!R!} + \frac{n!}{((n+1)-R)!(R-1)!} \\ &\stackrel{k!=(k-1)!k}{=} \frac{n!}{(n-R)!(R-1)!R} + \frac{n!}{(n-R)!(n-R+1)!(R-1)!} \\ &= \frac{n!(n-R+1) + n!R}{(n-R)!(R-1)!R(n-R+1)} = \frac{n!(n+1)}{(n-R)!(n-R+1)R(R-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-R)!(n-R+1)R!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-R)!R!} \end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$\binom{n+1}{R} = \binom{n}{R} + \binom{n}{R-1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-R)!R!}$$

Μπορούμε να συνδέσουμε της πιθανότητες δύο διαδοχικών βημάτων συνδυάζοντας της (3.8) και (3.9). Πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της (3.9) με $1/2^n$ προκύπτει η εξίσωση

$$P(R, n+1) = \frac{1}{2} \{P(R, n) + P(R-1, n)\} \quad (3.10)$$

η οποία αποτελεί μια αναδρομική σχέση που συνδέει την πιθανότητα του βήματος $n+1$ με την πιθανότητα των προηγούμενων n βημάτων. Υποθέτουμε ότι το χωρικό και χρονικό βήμα είναι μοναδιαίο, δηλαδή $\ell = 1, \tau = 1$. Έστω ότι η ζητούμενη θέση είναι η θέση στην οποία ο δρομέας φθάνει αφού εκτελέσει $(n+1)$ βήματα, με τα R από αυτά να έχουν γίνει της τα δεξιά, δηλαδή $x = R - (n+1 - R)$. Έστω x_1 η θέση που καταλήγει ο δρομέας σε περίπατο n βημάτων εκ των οποίων τα R έγιναν της τα δεξιά, $x_1 = R + (n - R)$ και $x_2 = R - 1 + (n - (R - 1))$ η θέση στην οποία καταλήγει ο δρομέας σε περίπατο n βημάτων με τα $R-1$ να έχουν γίνει της τα δεξιά. Για της

θέσεις x , x_1 και x_2 ισχύει $x_1 = x+1$ και $x_2 = x-1$ αντίστοιχα. Η αναδρομική σχέση που δίνει την πιθανότητα της θέσης του δρομέα στο $(n+1)$ βήμα σαν συνάρτηση των πιθανοτήτων των θέσεων του τελευταίου βήματος γράφεται

$$P(x, n+1) = \frac{1}{2} \{P(x+1, n) + P(x-1, n)\} \quad (3.11)$$

Η εξίσωση (3.11) είναι εύκολο να γενικευθεί σε οποιαδήποτε διάσταση και να πάρει τη μορφή

$$P(r, n+1) = \frac{1}{2d} \sum_{\Delta r} P(r + \Delta r, n) \quad (3.12)$$

όπου με r συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης του πλεγματοειδούς σημείου που θέλουμε να εντοπίσουμε το δρομέα, με Δr το διάνυσμα που ενώνει το ζητούμενο σημείο με κάθε μία από τις γειτονικές κορυφές και με d τη διάσταση του χώρου. Η (3.12) είναι γνωστή ως εξίσωση *Chapman-Kolmogorov* και συνδέει την πιθανότητα των $n+1$ βημάτων με την πιθανότητα των περιπάτων που τελειώνουν στο αμέσως προηγούμενο βήμα.

Για μεγάλο αριθμό βημάτων n η κατανομή *Bernoulli* μεταπίπτει στην κανονική κατανομή ή κατανομή *Gauss*,

$$P(x, n) \sim e^{-\frac{ax^2}{n}}$$

Αυτό αποδεικνύεται αν θεωρήσουμε την περίπτωση του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου για σωματίδιο που ξεκινά από τη θέση μηδέν τη χρονική στιγμή μηδέν για μοναδιαίο χωρικό και χρονικό βήμα. Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από τη σχέση (3.8) ενώ αν λάβουμε υπόψη ότι $x = R - (n - R)$ μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μόνο των μεταβλητών x και n

$$P(x, n) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{\left\{ \frac{1}{2}(n+x) \right\}! \left\{ \frac{1}{2}(n-x) \right\}!} \quad (3.13)$$

Λογαριθμίζοντας στη συνέχεια την (3.13), κάνοντας την προσέγγιση *Stirling*

$$\ln x! \cong \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x$$

και έπειτα από της πράξεις λαμβάνουμε:

$$\ln P(x, n) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi n}\right) - \frac{1}{2}(n+x+1) \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2}(n-x+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \quad (3.14)$$

Στο όριο του μεγάλου αριθμού βημάτων ($n \rightarrow \infty$), η ποσότητα $y = x/n$ είναι πολύ μικρή και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τείνει στο μηδέν. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε ότι το κάθε βήμα του περιπάτου είναι ίσο με ένα πολύ μικρό βήμα μήκους y . Όμοια θεώρηση κάνουμε για το χρονικό βήμα το οποίο έχει διάρκεια αμελητέα τιμή τ και άρα ο περίπατος διαρκεί $t = n\tau$. Χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη

$$\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 \pm y) \approx 1 \pm y - \frac{1}{2} y^2$$

και η εξίσωση (3.14) γράφεται ως

$$\ln P(x, n) \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi n}\right) - \frac{x^2}{2n} \quad (3.15)$$

Τελικά η (3.15) γίνεται

$$P(x, n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} \quad (3.16)$$

η οποία είναι στη γκαουσιανή μορφή $P(x, t) = a e^{-\frac{bx^2}{t}}$. Οι συντελεστές a και b υπολογίζονται από της συνθήκες

i.
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$$

Να είναι δηλαδή η συνάρτηση κανονικοποιημένη και

ii.
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = 2Dt$$

να είναι το τετράγωνο της μέσης μετατόπισης ίσο με $2Dt$, όπου εισάγαμε τη σταθερά διάχυσης

$$D = \frac{y^2}{2\tau}$$

εφόσον κάθε πιθανή τελική θέση του περιπάτου με τον ίδιο αριθμό βημάτων είναι $\Delta x = 2y$. Προκύπτει ότι

$$a = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

$$b = \frac{1}{4D}$$

και τελικά η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δρομέα που εκτελεί τυχαίο περίπατο να βρεθεί στη θέση x έπειτα από χρόνο t εάν έχει ξεκινήσει από την αρχή των αξόνων, στο όριο του μεγάλου αριθμού βημάτων δίνεται από τη σχέση

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (3.17)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο μακριά από την πηγή αυξάνει με το χρόνο. Η κατανομή πιθανότητας που περιγράφει τη μετάβαση του δρομέα από τη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση x_2 τη χρονική στιγμή t_2 θα έχει τη μορφή της (3.17) έχοντας θεωρήσει, ότι ο αριθμός των βημάτων στο διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι πολύ μεγάλος. Αυτό μπορεί να συμβαίνει καθώς ο αριθμός των βημάτων σε ένα πεπερασμένο σύνολο μπορεί να είναι πολύ μεγάλος, καθώς τα πάντα εξαρτώνται από τη χρονική διαμέριση του βήματος. Γενικά, η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μετάβασης βήματος του δρομέα από θέση x_{i-1} σε θέση x_i στο διάστημα $t_i - t_{i-1}$ δίνεται από

$$P(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{4D(t_i - t_{i-1})}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}\right] \quad (3.18)$$

Το ίδιο εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τυχαίων περιπάτων για μεγαλύτερες διαστάσεις. Αν για τη μία διάσταση ο τυχαίος περίπατος κινείται δεξιά ή αριστερά στις δύο διαστάσεις μπορεί να κινείται σε τέσσερις κατευθύνσεις. Στις τρεις διαστάσεις η κατανομή πιθανότητας θα δίνεται από το γινόμενο τριών πιθανοτήτων, μία για κάθε διεύθυνση.

3.2 Θεώρημα κεντρικού ορίου και τυχαίοι περίπατοι

Το *θεώρημα κεντρικού ορίου (Central Limit Theorem)* μας επιτρέπει να εκφράζουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής στο όριο του μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ως κατανομή Gauss [21]. Επιπλέον, μας επιτρέπει να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα ότι ο τυχαίος περίπατος έχει κατανομή πιθανότητας Gauss, για άθροισμα βημάτων με τυχαίο μήκος και κίνηση προς τυχαία κατεύθυνση.

Μία τυχαία μεταβλητή \mathbf{X} μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα της μεγάλου αριθμού προσαυξήσεων έτσι ώστε

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.19)$$

όπου x_i οι τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $p(x)$ και μηδενική μέση τιμή, $\langle x \rangle = 0$. Η $p(x)$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή αλλά η *μεταβλητότητα (variance)* του x πρέπει να είναι πεπερασμένη, έτσι ώστε να ορίζουμε

$$\sigma^2 = \int x^2 p(x) dx \quad (3.20)$$

Μένει τώρα να οριστεί η κατανομή της μεταβλητής \mathbf{X} . Η πιθανότητα να βρεθεί δοσμένη \mathbf{X} είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων από όλα τα σύνολα $\{x_i\}$ που αθροίζονται στη \mathbf{X} . Ο άθροισμα αυτό γράφεται

$$P(\mathbf{X}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) \delta\left(\mathbf{X} - \sum_{i=1}^n x_i\right) \quad (3.21)$$

Για να συνεχίσουμε παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier της $P(x)$

$$\begin{aligned}
 \widehat{P}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{X} e^{-ikx} P(\mathbf{X}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{X} e^{-ikx} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta\left(\mathbf{X} - \sum_{i=1}^n x_i\right) p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{-ik \sum_{i=1}^n x_i} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) \quad (3.22) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^n \int dx_i e^{-ikx_i} p(x_i) \\
 &= (2\pi)^{n-1} \prod_{i=1}^n \widehat{p}(k) = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi \widehat{p}(k)\right)^n
 \end{aligned}$$

όπου $\widehat{p}(k)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $p(x)$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ένα γενικευμένο θεώρημα συνέλιξης [22]. Παίρνουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να καταλήξουμε πίσω στην $P(\mathbf{X})$:

$$P(\mathbf{X}) = \int dk e^{ikx} \widehat{P}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik \cdot \mathbf{X}/n} \left(2\pi \widehat{p}(k/n)\right)^n \quad (3.23)$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $k' = nk$. Η $\widehat{p}(k)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει του $p(x)$ ως:

$$\widehat{p}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n \langle x^n \rangle}{n!} \quad (3.24)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σειρά Taylor για το εκθετικό

$$e^{-ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-ik)^n \frac{x^n}{n!}$$

Εφόσον $\langle x \rangle = 0$, ο γραμμικός όρος στην $\widehat{p}(k)$ απαλείφεται. Ο όρος μηδενικής τάξης είναι ο $(1/2\pi)$ και ο όρος δεύτερης τάξης είναι ο $-(k\sigma)^2/(4\pi)$. Για αυτόν το λόγο κάνουμε της παρακάτω προσεγγίσεις.

$$\left(2\pi \widehat{p}(k/n)\right)^n \approx \left(1 - \frac{(k\sigma)^2}{2n^2}\right)^n \rightarrow e^{-k^2\sigma^2/(2n)}$$

για $n \rightarrow \infty$ αφού χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x, \text{ με } x = -\frac{(k\sigma)^2}{2n}$$

Τελικά η (3.24) θα της δίνει

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X}) &= \int dk e^{ik\mathbf{X}} \widehat{P}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik\mathbf{X} - k^2 n \sigma^2 / 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{\mathbf{X}^2}{2n\sigma^2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

που είναι στη μορφή του γκαουσιανού ολοκληρώματος και είναι το θεώρημα κεντρικού ορίου που λέει ότι μια τυχαία μεταβλητή \mathbf{X} έχει κανονική κατανομή με μεταβλητότητα $\langle \mathbf{X}^2 \rangle = n\sigma^2$.

3.3 Κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian Motion-fBM)

Η κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian Motion-fBM) είναι μία στοχαστική διεργασία που οδηγεί είτε σε υπο-διάχυση (subdiffusion) είτε σε υπερ-διάχυση (super-diffusion). Χρησιμοποιείται για να περιγράψει τυχαίες διεργασίες με μηδενική μέση τιμή και χωρική αυτοσυσχέτιση διάφορη του μηδενός για μη ταυτόσημες χρονικές στιγμές. Στο μοντέλο αυτό η κατάσταση του συστήματος επηρεάζεται από τις προηγούμενες καταστάσεις. Η fBM εισήχθη από της Kolmogorov [23] και στη συνέχεια από της Mandelbrot & Van Ness [24] με την προσέγγισή της να βασίζεται σε μία γενίκευση της κίνησης Brown. Η κλασματική κίνηση Brown μπορεί να περιγράψει την κίνηση ενός μονομερούς σε αλυσίδα πολυμερών [25] ή τη διάχυση του σωματιδίου σε δυναμικό περιορισμού μετατόπισης (single file diffusion) [26]. Είναι επιπλέον διαδεδομένη η χρήση της σε προβλήματα διάχυσης (ανώμαλης διάχυσης) σε πολυπληθή περιβάλλοντα και σε προβλήματα συστημάτων αναμονής

[27]. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε την fBM ώστε να περιγράψουμε την κίνηση πολλαπλών ανταγωνιζόμενων δρομέων που βρίσκονται σε μία πεπερασμένου μήκους ουρά αναμονής.

Ο θόρυβος στην fBM είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα του λευκού θορύβου γνωστού και ως Gaussian noise ο οποίος είναι υπεύθυνος για την περιγραφή της κλασσικής κίνησης Brown,

$$B(t) = \int_0^t dB(s) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

και $w(t)$ είναι ο λευκός γκαουσιανός θόρυβος.

Οι Mandelbrot και Van Ness όρισαν την κλασματική κίνηση Brown [28] ως εξής:

Έστω παράμετρος H με $0 < H < 1$ η οποία ονομάζεται παράμετρος (εκθέτης) Hurst. Για $H < 0,5$ το σύστημα εκτελεί υπο-διάχυση ενώ για $H > 0,5$ υπερ-διάχυση. Ορίζουμε

$$B_H(0) = 0, \\ B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \left(\int_{-\infty}^0 (t-\tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2} w(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{H-1/2} w(\tau) d\tau \right) \quad (3.27)$$

Αν η (3.27) γραφεί ως η συγκλίνουσα διαφορά δύο ολοκληρωμάτων που αποκλίνουν μεμονωμένα έχουμε:

$$B_H(t_2) - B_H(t_1) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \left(\int_{-\infty}^{t_2} (t_2-\tau)^{H-1/2} w(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{H-1/2} w(\tau) d\tau \right) \quad (3.28)$$

Το βασικό χαρακτηριστικό που καθιστά την συγκεκριμένη ανέλιξη (fBM) χρήσιμη για μοντελοποίηση ουρών είναι ότι οι μεταβολές της είναι στατιστικά αυτοόμοιες και στατικές [36][37]. Ισχύει δηλαδή

$$B_H(t+\tau) - B_H(t) \stackrel{P}{=} a^{-H} (B_H(t+a\tau) - B_H(t)) \quad (3.29)$$

Για τη μεταβλητότητα (variance) ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\text{var} [B_H(t_2) - B_H(t_1)] = E \left[(B_H(t_2) - B_H(t_1))^2 \right] = (t_2 - t_1)^{2H} V_H \quad (3.30)$$

Όπου

$$V_H = \Gamma(H+1/2)^{-2} \left(\int_{-\infty}^0 \left(1-s^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\right)^2 ds + \frac{1}{2H} \right) \quad (3.31)$$

Με την μπορούμε να υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση της ανέλιξης fBM:

$$R_{B_H}(t, s) = E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{\sigma_H^2}{2} \left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \quad (3.32)$$

όπου

$$\sigma_H^2 = \text{var}(x(1)) = \Gamma(1-2H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H} \quad (3.33)$$

Η ανέλιξη fBM είναι συνεχής (σχεδόν παντού) αλλά δεν είναι διαφορίσιμη, δηλαδή

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{B_H(t) - B_H(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty \quad (3.34)$$

με πιθανότητα 1. Το πρόβλημα της μη παραγωγισιμότητας είναι σημαντικό διότι έτσι δεν λαμβάνουμε το πλεονέκτημα των στάσιμων μεταβολών. Για να το «παραβλέψουν» αυτό οι Mandelbrot και Van Ness [31] εισάγουν την ανέλιξη με τη χρήση της πυρήνα εξομάλυνσης της μορφής

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} 1/\delta & t \in [0, \delta] \\ 0 & t \notin [0, \delta] \end{cases} \quad (3.35)$$

Και δημιουργεί την εξομαλυμένη ανέλιξης

$$B_H^\delta(t) = B_H(t) * \varphi_\delta(t) \quad (3.36)$$

Η B_H^δ είναι παραγωγίσιμη και όταν το δ είναι πολύ μικρό τείνει στην B_H . Η k παράγωγος της B_H^δ είναι

$$\left(B_H^\delta(t) \right)^{(k)} = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} B_H(s) \varphi^{(k)}(t-s) ds \quad (3.37)$$

Τέλος ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που αποδεικνύεται από το [23] είναι πως κάθε μη σταθερή γκαουσιανή ανέλιξη που έχει την ιδιότητα της αυτομοιότητας και των στάσιμων μεταβολών είναι κλασματική κίνηση Brown.

Η fBM ορίζεται σε μία διάσταση ενώ σύμφωνα με την [28] μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερες διαστάσεις έτσι ώστε μία d -διαστάσεων κλασματική κίνηση Brown με εκθέτη H να είναι μία διεργασία στην οποία η κάθε συντεταγμένη είναι μία μονοδιάστατη fBM εκθέτη H [29][30].

3.4 Συνεχούς χρόνου τυχαίοι περίπατοι (*Continuous Time Random Walks-CTRW*)

Ο συνεχούς χρόνου τυχαίος περίπατος (*Continuous Time Random Walk-CTRW*) προτάθηκε από τους *Montroll και Weiss* [31]. Αντίθετα με τους διακριτούς τυχαίους περιπάτους στην περίπτωση των CTRW ο αριθμός των βημάτων που εκτελούνται από ένα δρομέα για δεδομένο χρονικό διάστημα αποτελούν τυχαία μεταβλητή. Οι CTRW είναι πολύ χρήσιμοι στη μελέτη συστημάτων που δεν βρίσκονται σε ισορροπία και ιδιαίτερα στοχαστικών συστημάτων διάχυσης που δεν εξελίσσονται γραμμικά [32]. Είναι μία προέκταση του κλασσικού τυχαίου περιπάτου και της δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε την κατανομή πιθανότητας των βημάτων της σωματιδίου λαμβάνοντας υπόψη την καθυστέρηση/αναμονή μεταξύ των βημάτων.

Έστω τυχαίος περίπατος που ξεκινά τα βήματά του τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ο δρομέας παραμένει στην αρχική του θέση του μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 . Έπειτα ο δρομέας κάνει άλμα στη θέση $\Delta \mathbf{r}_1$ και το σωματίδιο περιμένει εκεί μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 > t_1$ που εκτελεί άλμα στη νέα θέση $\Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2$ και η διεργασία ανανεώνεται. Το σύνολο $\{t_1, t_2, \dots\}$ ορίζει το σύνολο των χρονικών στιγμών που συμβαίνουν τα άλματα. Τα χρονικά διαστήματα $\tau_1 = t_1 - 0, \tau_2 = t_2 - t_1$ κ.ο.κ. είναι οι χρόνοι αναμονής μεταξύ των βημάτων. Στους CTRW οι χρόνοι αναμονής $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ και οι μετατοπίσεις $\{\Delta \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{r}_2, \dots\}$ είναι μεταξύ της ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Οι χρόνοι αναμονής έχουν μία κοινή *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* (σ.π.π ή *pdf-probability density function*) $\psi(\tau)$ και οι μετατοπίσεις έχουν μία σ.π.π. $f(\Delta \mathbf{r})$. Σε έναν τέτοιο τυχαίο περίπατο το μήκος του κάθε βήματος είναι *στατιστικά ανεξάρτητο* από τους χρόνους αναμονής και η κίνηση του δρομέα ορίζεται πλήρως από τις δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας.

Στη βιβλιογραφία συναντάμε περιγραφή CTRW με γενίκευση των εξισώσεων του *Einstein* ή *Chapman-Kolmogorov* για τον τυχαίο περίπατο αλλά ,και με την χρήση της εξίσωσης *Langevin* για συστήματα που παρουσιάζουν υποδιάχυση [32][33].

Η συνολική μετατόπιση της σωματιδίου/δρομέα σε χρόνο t είναι

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{r}_i \quad (3.38)$$

και n είναι ο τυχαίος αριθμός των βημάτων στο διάστημα $(0, t)$. Έστω $P(t; n)$ η πιθανότητα να εκτελεστούν n βήματα σε χρόνο t . Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την σ.π.π. $P(\mathbf{r}, t)$ του να βρεθεί το σωματίδιο σε θέση \mathbf{r} τη χρονική στιγμή t . Έτσι έχουμε

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(t; n) P_n(\mathbf{r}) \quad (3.39)$$

και $P_n(\mathbf{r})$ είναι η σ.π.π. να βρεθεί το σωματίδιο στο \mathbf{r} μετά από n άλματα.

Οι CTRW μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα με αναμονής καθώς εμπεριέχουν χρόνους αναμονής μεταξύ των βημάτων του εκάστοτε δρομέα. Είναι ένα πολύ καλό μοντέλο για να περιγράψει φαινόμενα σε περιβάλλοντα με ανταγωνιστικά είδη. Όσο αυξάνει η πολυπλοκότητα της συστήματος αναμονής, είτε σε αριθμό βημάτων είτε σε αριθμό δρομέων δεν μπορούμε να λάβουμε το ίδιο εύκολα της πιθανότητες μετάβασης και της χρόνους αναμονής των επιμέρους βημάτων. Ένας πελάτης σε μία ουρά αντιμετωπίζει διαφορετικούς χρόνους αναμονής σε κάθε βήμα του προσπαθώντας να εξυπηρετηθεί, να βγει δηλαδή από το σύστημα. Μέσα στην ουρά μπορεί στην περίπτωση που εκτελεί μονοδιάστατο τυχαίο περίπατο να μετακινείται συνεχώς από το ένα άκρο της ουράς στο άλλο, με διαφορετικό βήμα κάθε φορά χωρίς να κάνει ουσιαστικό βήμα για την έξοδό του από το σύστημα. Οι αποστάσεις που διανύονται εντός της ουράς είναι πολύ μικρές και τις φορές ένα πακέτο μπορεί να παραμείνει εγκλωβισμένο στην ουρά ακόμη και μετά από μεγάλο αριθμό βημάτων.

4 Πειραματική διαδικασία

4.1 Περιγραφή πειραματικής διαδικασίας

Υλοποιήσαμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού θέσης πακέτων σε μία ουρά αναμονής πεπερασμένου μήκους buffer ενός τηλεπικοινωνιακού δικτύου, με χρήση

Matlab [34]. Βασιστήκαμε σε ένα μοντέλο περιγραφής θέσεων με τυχαίους περιπάτους (random walks) των πελατών μέσα σε μία πεπερασμένου μήκους ουρά $(0, L)$. Επιτρεπτές κινήσεις των πακέτων είναι η κίνηση της τα δεξιά (κατά την κατεύθυνση εξόδου της ουράς- άκρο L) η παραμονή του πελάτη στην ίδια θέση (καμία μετατόπιση) και η κίνηση του πακέτου της τα αριστερά (της την αρχή της ουράς- άκρο 0). Όλοι οι πελάτες που εισέρχονται στην ουρά από το άκρο 0 επιτρέπεται να κινηθούν μόνο προς το άκρο L (δεξιά) ή να παραμείνουν στη θέση τους, ενώ οι δρομείς που βρίσκονται στο άκρο L βγαίνουν εκτός της ουράς (εξυπηρετούνται). Οι πελάτες που βρίσκονται εντός της ουράς $(0, L)$ επιτρέπεται να κινηθούν αριστερά ή δεξιά, είτε να παραμείνουν στη θέση της. Οι πελάτες δεν μπορούν να επικαλύπτονται και επομένως καταλαμβάνουν μοναδική θέση σε κάθε χρονική στιγμή του πειράματος εντός της ουράς.

Ο κάθε πελάτης θεωρούμε ότι καταλαμβάνει μήκος $1/L$ και το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από βήμα σε βήμα της κίνησής του είναι $\Delta t = 1$. Για κάθε χρονική στιγμή οι πιθανότητες μετάβασης των πελατών στην ουρά υπολογίζονται από γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Σε κάθε πείραμα θεωρούμε σταθερή τιμή/πιθανότητα την πιθανότητα ο δρομέας να παραμείνει στη θέση του (p_s) και οι πιθανότητες μετάβασης είτε προς τα δεξιά (p_r) είτε προς τα αριστερά (p_l) δίνονται από γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή. Για την περίπτωση που ο πελάτης εισέρχεται στην ουρά η συνολική πιθανότητα μετάβασης/διάδοσης υπολογίζεται από την πιθανότητα να κινηθεί της τα δεξιά ή να παραμείνει στην είσοδο της ουράς, ενώ στην περίπτωση που το πακέτο εξυπηρετείται στο άκρο L η πιθανότητα διάδοσης δίνεται μόνο από την πιθανότητα να κινηθεί της τα δεξιά.

Για το χρονικό διάστημα που ο πελάτης βρίσκεται στην ουρά η πιθανότητα μετάβασης υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη την πιθανότητα να εκτελέσει κίνηση προς τα αριστερά, τα δεξιά και την πιθανότητα να παραμείνει στη θέση του. Η θέση του πελάτη για της χρονικές στιγμές που βρίσκεται εντός της ουράς δίνεται από τη σχέση

$$pos(i, t) = (1 + p_s) pos(i, t - 1) + delta_x (p_R - p_L)$$

όπου $pos(i,t)$ η θέση του πελάτη i για δεδομένη χρονική στιγμή t . Το $delta_x$ είναι το μέγεθος του βήματος του πελάτη ενώ για της πιθανότητες εκτέλεσης του βήματος p_r και p_l δεξιά και αριστερά αντίστοιχα ισχύει ότι

$$P_{tot} = p_r + p_l + p_s$$

$$p_R = \frac{p_r}{P_{tot}}$$

$$p_L = \frac{p_l}{P_{tot}}$$

$$p_S = \frac{p_s}{P_{tot}}$$

Μελετήσαμε την κίνηση των δρομέων/πελατών στην πεπερασμένη ουρά υπολογίζοντας τη θέση του κάθε πελάτη για το χρονικό διάστημα της προσομοίωσης. Χρησιμοποιήσαμε ένα μοντέλο ουράς στο οποίο εξετάσαμε για διάφορα μήκη και για διαφορετικά χρονικά διαστήματα την κίνηση 3 πελατών προς εξυπηρέτηση. Οι πελάτες κινούνται προς την ουρά με θέσεις που αρχικά ορίζονται από συνάρτηση που περιγράφει *κλασματική κίνηση Brown*. Θεωρήσαμε εξυπηρέτηση κατά FIFO (First In First Out) με την προτεραιότητα να δίνεται στους δρομείς μέσω του *συντελεστή Hurst*, διακρίνοντας με διαφορετικούς συντελεστές τη δυσκολία ή ευκολία διάχυσης των δρομέων μέσα στο σύστημα. Χρησιμοποιήθηκαν συντελεστές $H < 0,5$ για να διατηρήσουμε το φαινόμενο του συνωστισμού εντός της ουράς.

Ο αλγόριθμος εκτελέστηκε για διαφορετικούς πελάτες (random walkers) που προσπαθούν να εξυπηρετηθούν από την πεπερασμένη ουρά για πλήθος επαναλήψεων έως 1000 για διαφορετικά μήκη ουράς, όπως και για διαφορετικές πιθανότητες του πακέτου να παραμένει στη θέση του (p_s). Το φαινόμενο που παρατηρήσαμε ήταν ότι οι πελάτες στα περισσότερα πειράματα αδυνατούσαν να εξέλθουν σύντομα από την ουρά, καθώς η διεργασία που περιγράφουμε μπορεί να είναι μία πολύ αργή διαδικασία.

Της περιπτώσεις με μικρή πιθανότητα να παραμείνει στη θέση του ο δρομέας διαπιστώσαμε ότι οι ανταγωνιζόμενοι πελάτες κινούνταν με μεγαλύτερη ευκολία στο πρώτο χρονικό διάστημα του πειράματος. Οι δρομείς στις περισσότερες περιπτώσεις εξυπηρετούνταν επιτυχώς από την ουρά και είχαν κίνηση με θετικό πρόσημο για το διάστημα μέχρι το πρώτο πακέτο να εξέλθει από την ουρά. Αυτό είχε ως συνέπεια τα πακέτα να εξέρχονται από το άκρο L πιο γρήγορα. Μεταβάλλοντας το μήκος της

ουράς παρατηρήσαμε ότι όσο μικρότερη ήταν η ουρά, τόσο περισσότερο χρόνο περνούσαν τα πακέτα εντός της ουράς μέχρι να φτάσουν το άκρο L . Ο συνωστισμός ήταν ιδιαίτερα έντονος για ουρές μικρού μήκους και για πιθανότητες p_s υψηλές. Μία μετρήσιμη ιδιότητα η οποία βασίζεται στο πως μεταβάλλεται η θέση του κάθε πελάτη εντός της ουράς σαν συνάρτηση του χρόνου είναι το μέσο τετράγωνο της μετατόπισης (*Mean Squared Displacement-MSD*), και αποτελεί τη *δεύτερη ροπή* της κατανομής πιθανότητας [35]. Η MSD είναι ανάλογη της δύναμης του χρόνου και ο εκθέτης του χρόνου της πληροφορεί για το πόσο γρήγορα η κίνηση υλοποιείται. Για εκθέτη μεταξύ μηδενός και ένα η κίνηση είναι υποδιαχυτική, για εκθέτη ίσο με ένα παίρνουμε την κλασσική τυχαία κίνηση και για εκθέτη μεταξύ της και δύο η κίνηση είναι υπερδιαχυτική. Μικρότερος ο εκθέτης πιο αργή η κίνηση.

4.2 Αποτελέσματα

Ακολουθούν ενδεικτικά κάποια γραφήματα και δεδομένα των πειραμάτων που εκτελέστηκαν. Σε όλα τα πειράματα μελετήθηκαν 3 πακέτα/δρομείς. Περιγραφή των δεδομένων ανά προσομοίωση που εκτελέστηκε δίνεται στον *Πίνακα 1*. Από την πειραματική διαδικασία διαπιστώσαμε ότι η κίνηση των δρομέων είναι εξαιρετικά δύσκολη και αργή διεργασία σε πολυπληθή περιβάλλοντα. Πρόβλημα υπάρχει όταν η χωρητικότητα της ουράς είναι μικρή (π.χ. $L=5$) ενώ περιπτώσεις μήκους ουράς μικρότερες του αριθμού των πακέτων δεν αξίζει να αναφερθούν, διότι το κάθε πακέτο θα εξυπηρετούνταν αν και μόνο αν αυτό που προηγείται χρονικά εξυπηρετηθεί επιτυχώς. Μία τέτοια ουρά αναμονής η οποία απασχολεί της πόρους του συστήματος για μεγάλο χρονικό διάστημα δεν είναι αποδοτική και κατά συνέπεια δεν την εξετάζουμε. Σε εκθέτες *Hurst* μικρότερους από 0.25 στην πλειοψηφία τους τα πακέτα δεν κατάφεραν να εξέλθουν από την ουρά ακόμη και μετά από πολύ μεγάλο αριθμό βημάτων και παρέμεναν εγκλωβισμένα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που αυξήθηκε ο συντελεστής *Hurst* ο οποίος έδινε την «προτεραιότητα» στο μοντέλο, παρατηρήσαμε ότι οι πελάτες κινούνταν με μεγαλύτερη ευκολία και της φορές έβγαιναν από την ουρά σε χρόνο που καθορίζονταν από το πόσο έντονη ήταν η κίνηση λόγω αυξημένου συντελεστή *Hurst*.

4.3 Παράθεση πειραματικών δεδομένων

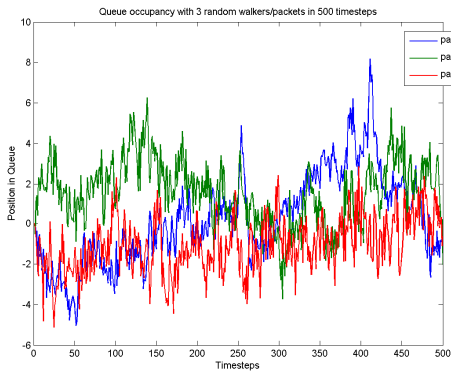
Κατά την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση *wfbm* [36] από την εφαρμογή Matlab [34] και οι συντελεστές Hurst που χρησιμοποιήθηκαν ήταν για την πρώτη φάση των πειραμάτων 0.25, 0.15 και 0.10, για τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο δρομέα αντίστοιχα. Η 1^η φάση της διαδικασίας αφορά τα πειράματα 1 έως 8. Τα πειράματα προσομοιώνουν κίνηση 3 πελατών κάθε φορά σε πεπερασμένη ουρά μήκους L , όπου μελετάμε 4 διαφορετικά μήκη ουράς από $L = 5$ έως $L = 20$, με βήμα 5 για $N_1 = 500$ και $N_2 = 1000$ επαναλήψεις. Για κάθε πείραμα παραθέτουμε το κοινό γράφημα των θέσεων των τριών πελατών μέσα στην ουρά, την MSD αυτών καθώς και το διάγραμμα της συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτηση δύναμης $f(x) = ax^b$) με την MSD του κάθε πελάτη. Η MSD υπολογίζεται από τη σχέση $msd(k+1) = sum((pos(k+1:end) - pos(1:end-k)))^2$. Οι συντελεστές της συνάρτησης δύναμης λαμβάνονται με διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) 95%.

Στη δεύτερη φάση των προσομοιώσεων επιλέξαμε συντελεστές Hurst 0.45, 0.35 και 0.25 για τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο πελάτη αντίστοιχα. Μελετήθηκαν τα μήκη ουράς $L = 2, L = 10, L = 15$ και $L = 20$ για $N = 1000$ επαναλήψεις και παραθέτουμε τα ίδια μεγέθη της εξέτασης, της και στα προηγούμενα πειράματα.

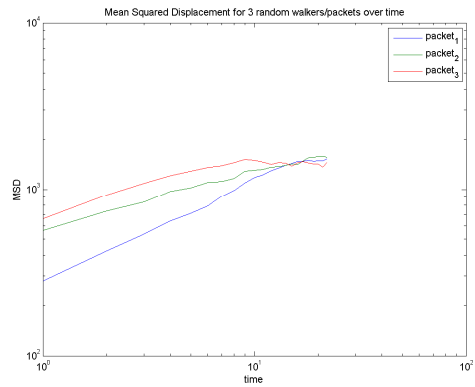
Οι διαφορετικοί δρομείς περιγράφονται με τα τρία διαφορετικά χρώματα. Με μπλε χρώμα ο πρώτος δρομέας, με πράσινο ο δεύτερος και με κόκκινο ο τρίτος. Παρατηρούμε ότι δύο πελάτες καταφέρνουν να εξέλθουν από το άκρο $L=5$ της ουράς ενώ το τελευταίο παραμένει συνεχώς εγκλωβισμένο, αυξάνοντας το συνολικό μέσο χρόνο εξυπηρέτησης. Τα πακέτα που εξυπηρετούνται επιτυχώς παραμένουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα και αυτά εγκλωβισμένα.

Για την MSD $(msd(k+1) = sum((pos(k+1:end) - pos(1:end-k)))^2)$ χρησιμοποιούμε λογαριθμικούς άξονες με σκοπό να εκτιμήσουμε την εκθετική εξάρτηση των συντελεστών της συνάρτησης προσαρμογής, που είναι συνάρτηση δύναμης της μορφής $f(x) = ax^b$.

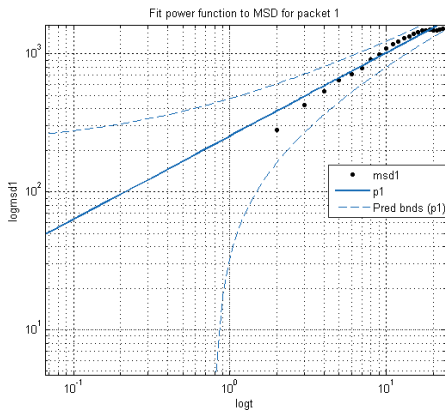
Πείραμα 1



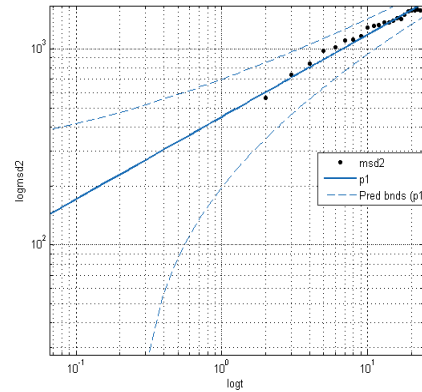
Εικόνα 1 Γραφική παράσταση θέσης πελατών συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=5, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



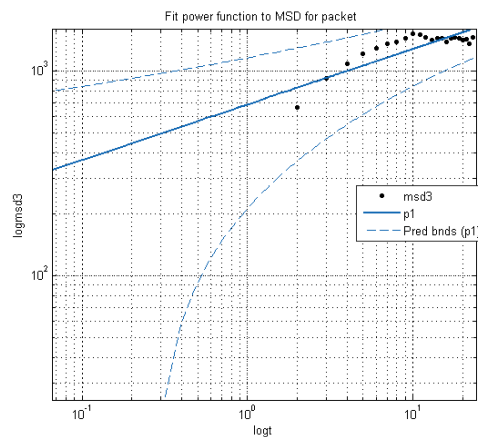
Εικόνα 2 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς. $L=5, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 3 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD- t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=5, N=500$

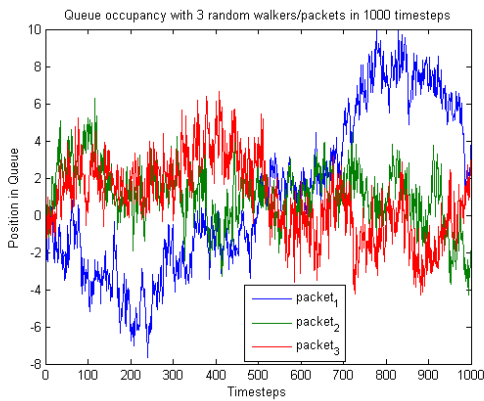


Εικόνα 4 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) MSD- t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=5, N=500$

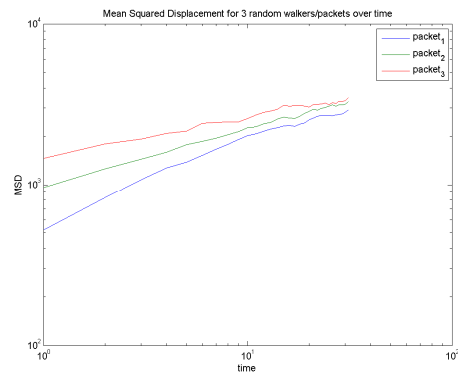


Εικόνα 5 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) MSD- t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=5, N=500$

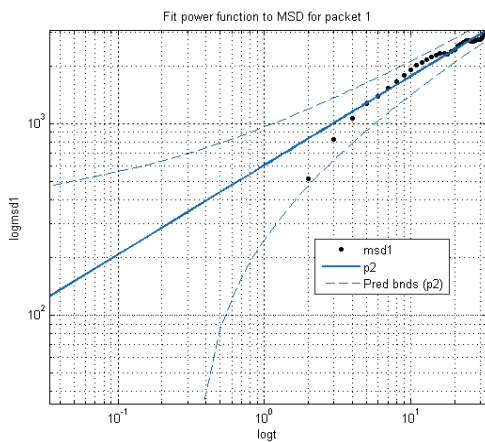
Πείραμα 2



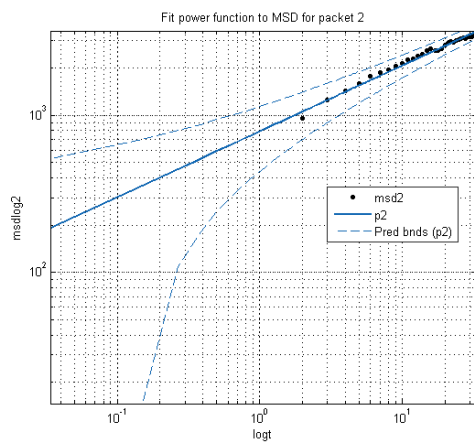
Εικόνα 6 Γραφική παράσταση θέσης πελατών συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=5, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



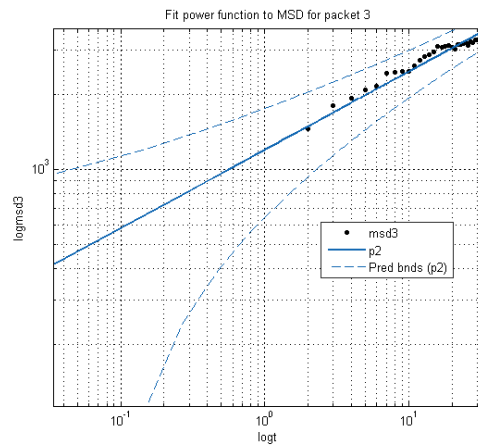
Εικόνα 7 MSD συναρτήσει του χρόνου για τα τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=5, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 8 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=5, N=1000$

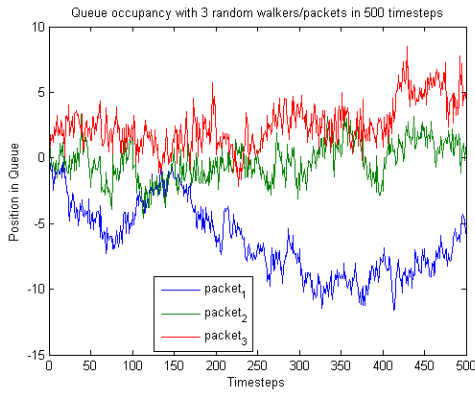


Εικόνα 9 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=5, N=1000$

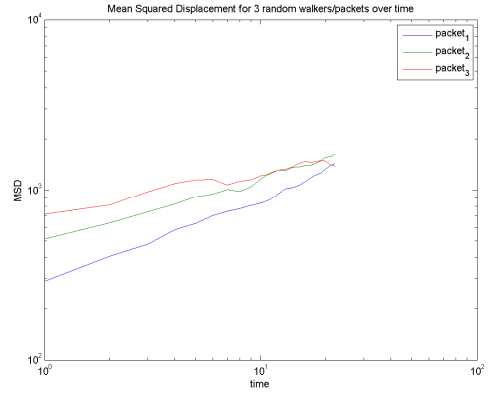


Εικόνα 10 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=5, N=1000$

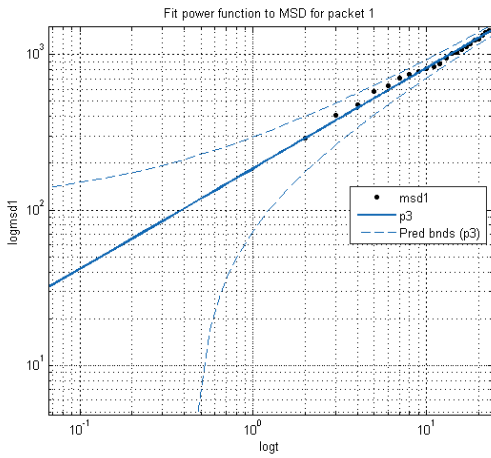
Πείραμα 3



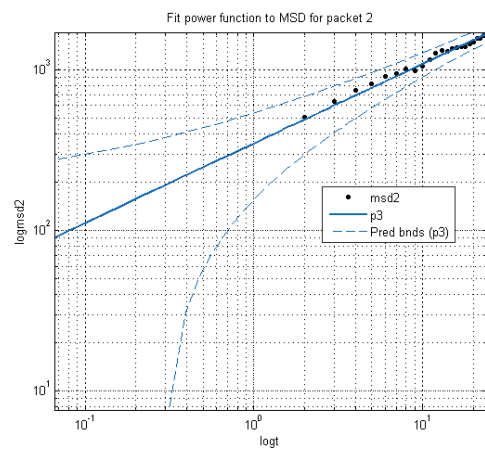
Εικόνα 11 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις ξεταζόμενους πελάτες. $L=10, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



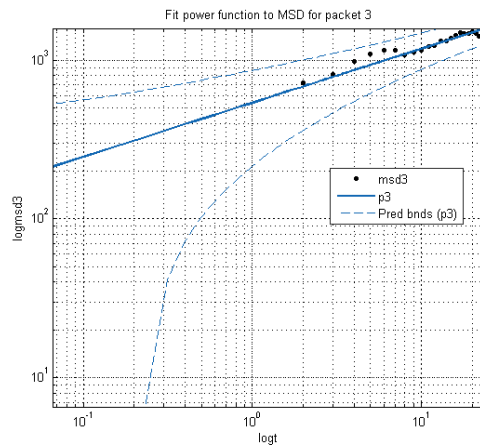
Εικόνα 12 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=10, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 13 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=10, N=500$

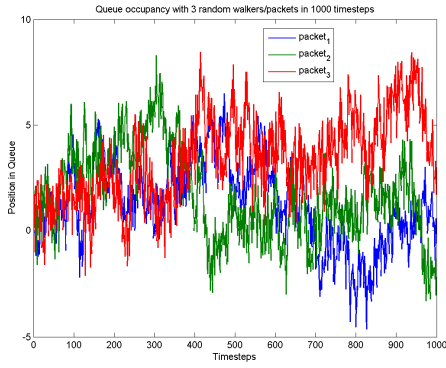


Εικόνα 14 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=10, N=500$

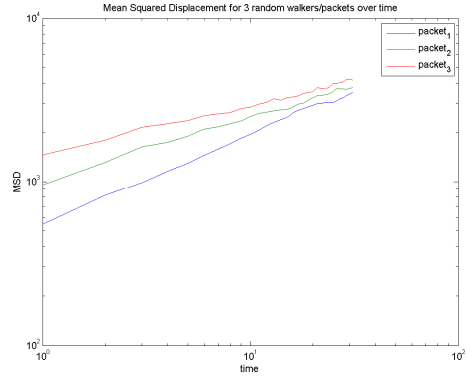


Εικόνα 15 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=10, N=500$

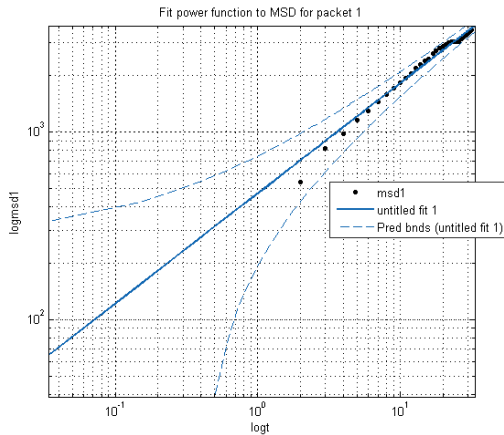
Πείραμα 4



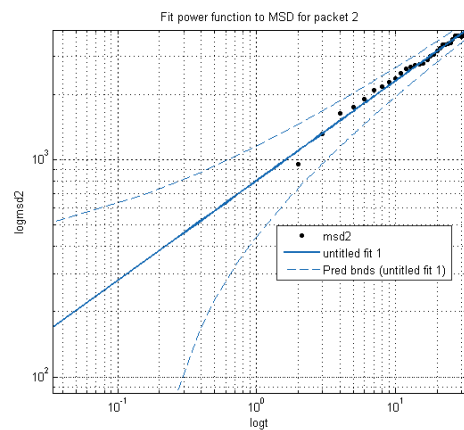
Εικόνα 16 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις ξεταζόμενους πελάτες. $L=10, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



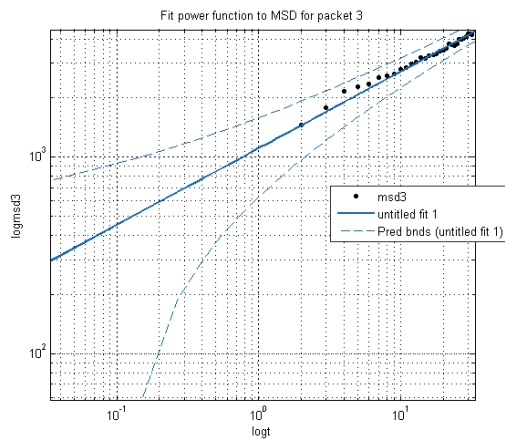
Εικόνα 17 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες $L=10, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$.



Εικόνα 18 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=10, N=1000$

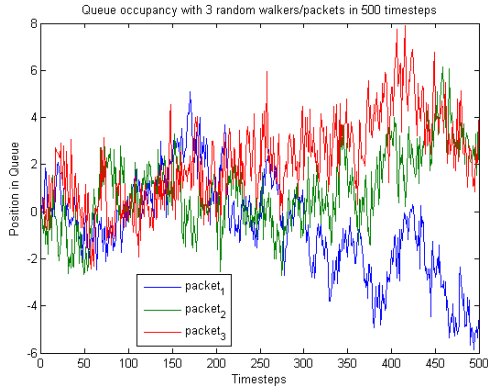


Εικόνα 19 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=10, N=1000$

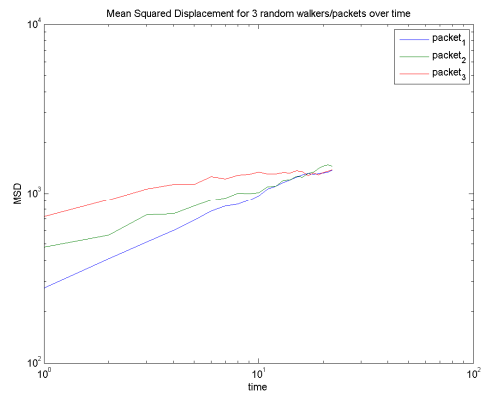


Εικόνα 20 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=10, N=1000$

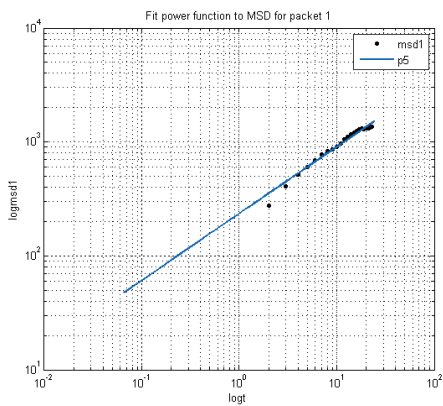
Πείραμα 5



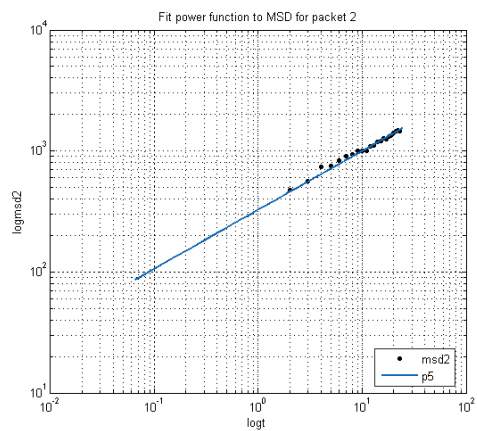
Εικόνα 21 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=15, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



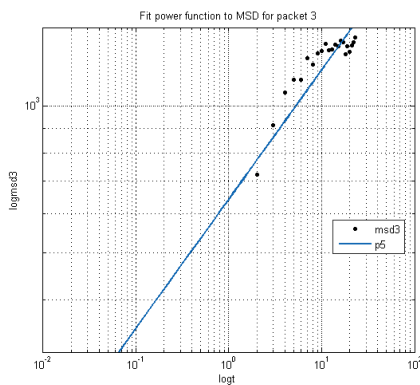
Εικόνα 22 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=15, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 23 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=15, N=500$

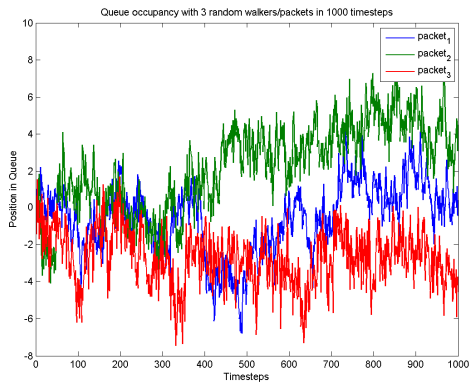


Εικόνα 24 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=15, N=500$

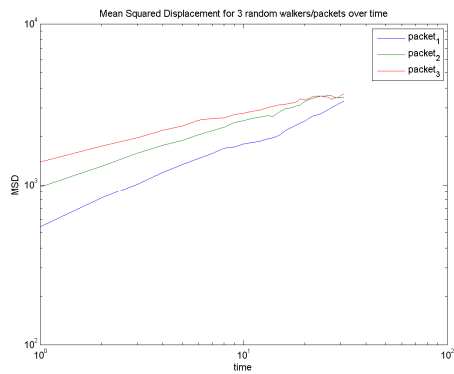


Εικόνα 25 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=15, N=500$

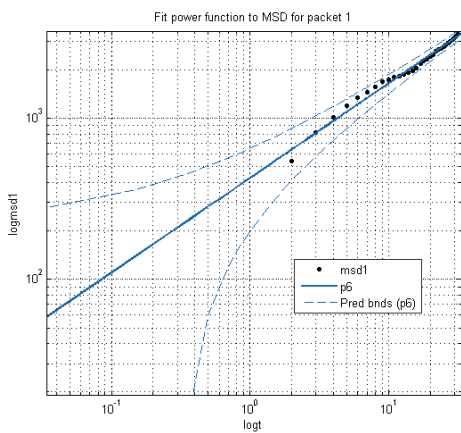
Πείραμα 6



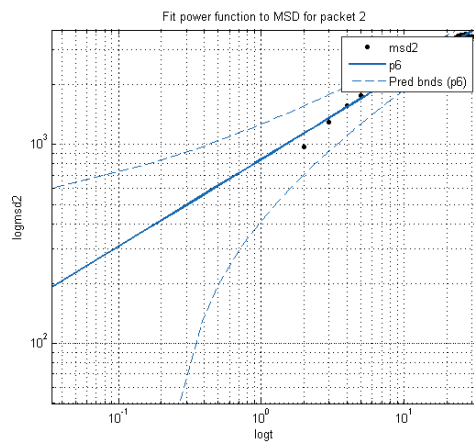
Εικόνα 26 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=15, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



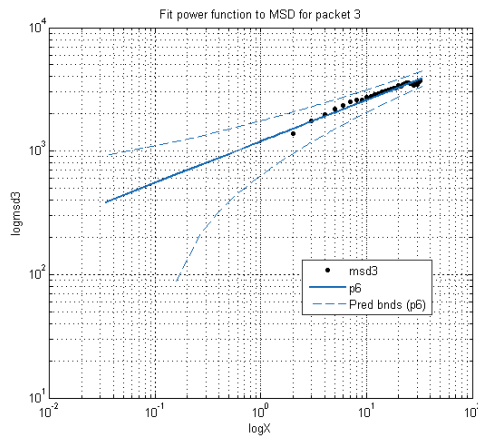
Εικόνα 27 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=15, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 28 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=15, N=1000$

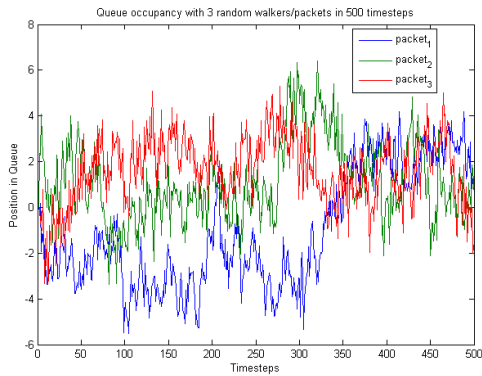


Εικόνα 29 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=15, N=1000$

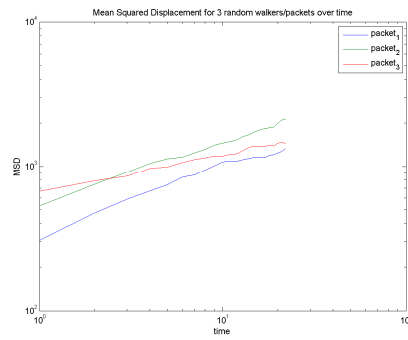


Εικόνα 30 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=15, N=1000$

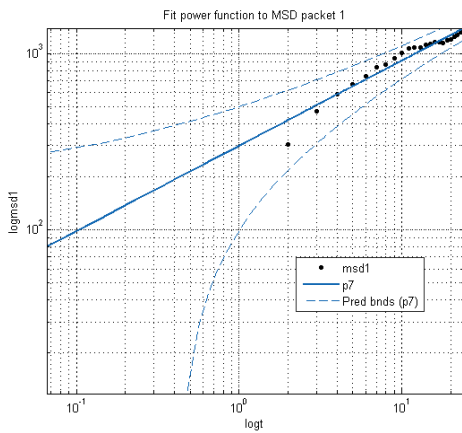
Πείραμα 7



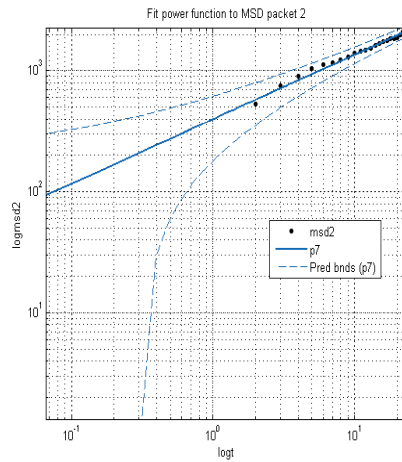
Εικόνα 31 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=20, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



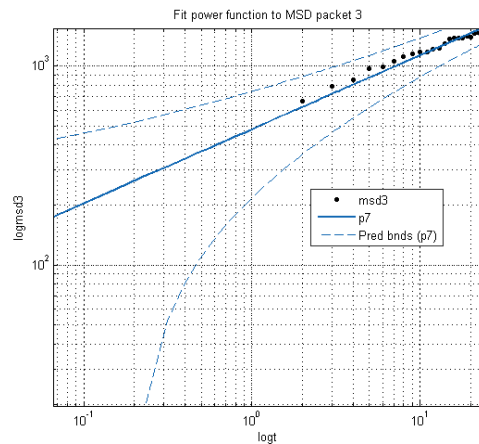
Εικόνα 32 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=20, N=500, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 33 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=15, N=500$

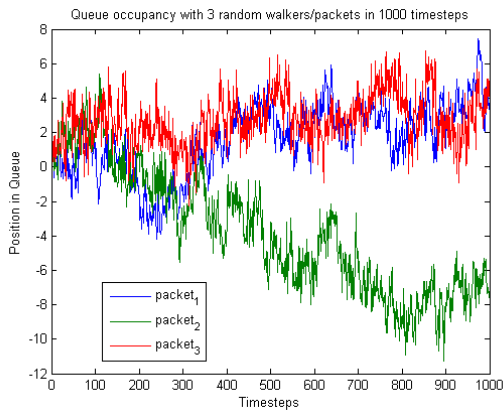


Εικόνα 34 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=15, N=500$

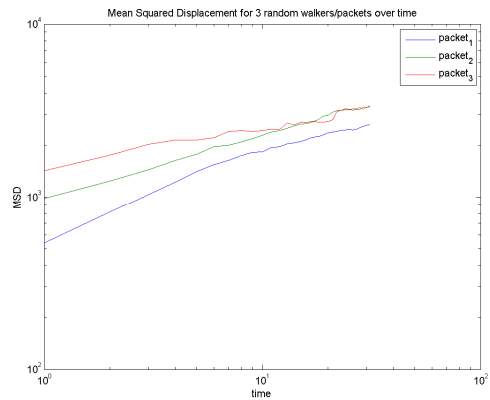


Εικόνα 35 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=15, N=500$

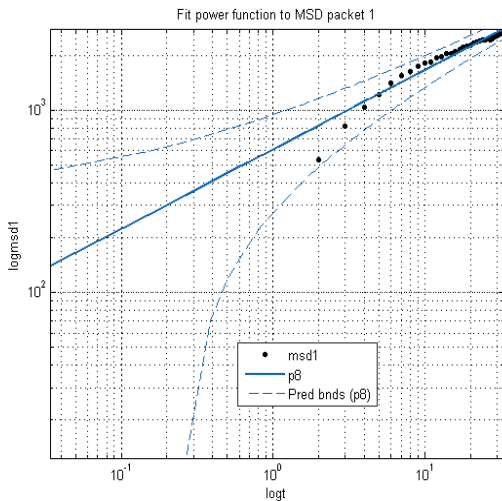
Πείραμα 8



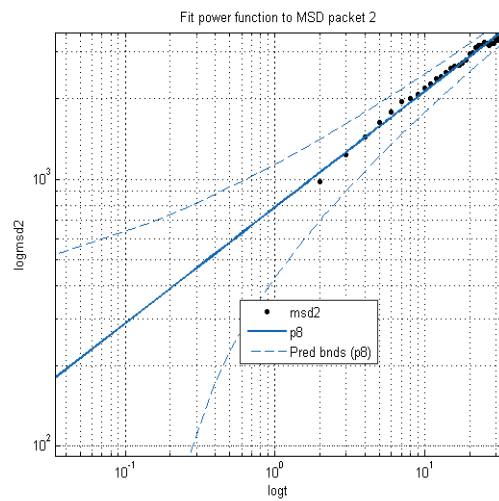
Εικόνα 36 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=20, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



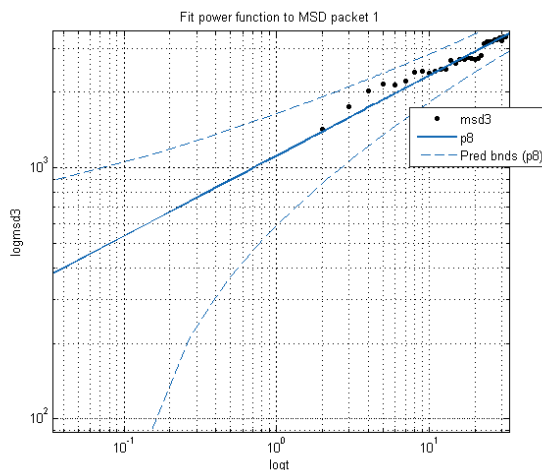
Εικόνα 37 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=20, N=1000, H=0.1, 0.15, 0.25$



Εικόνα 38 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.25, L=20, N=1000$

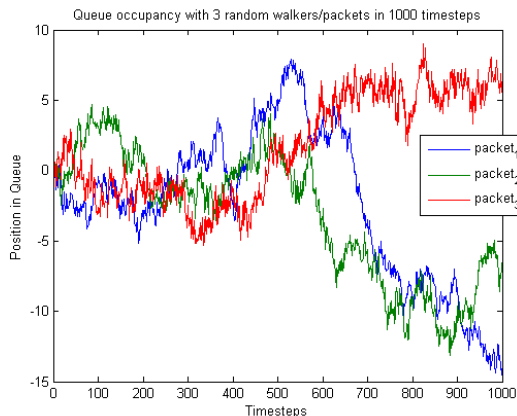


Εικόνα 39 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.15, L=20, N=1000$

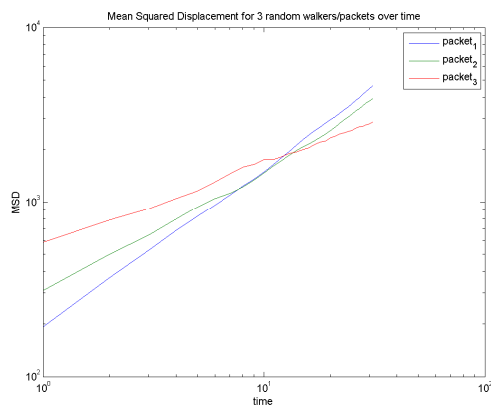


Εικόνα 40 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.1, L=20, N=1000$

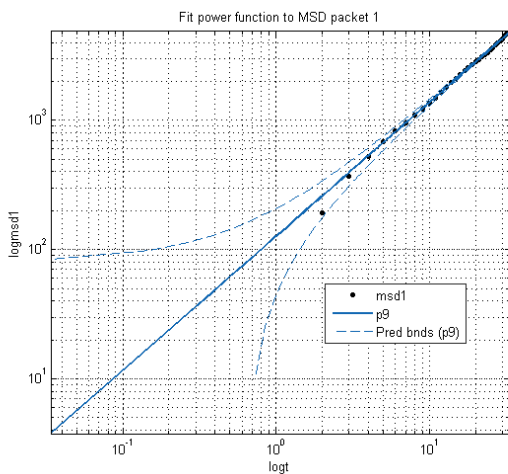
Πείραμα 9



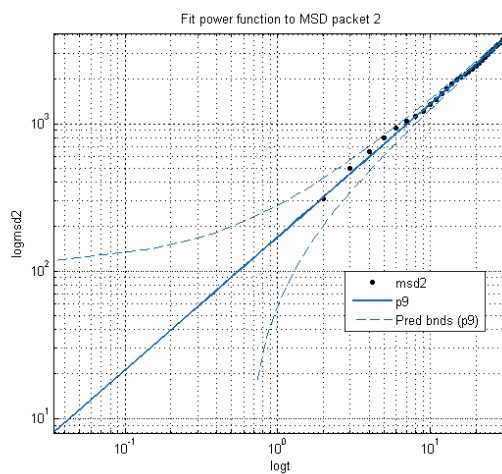
Εικόνα 41 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=5, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



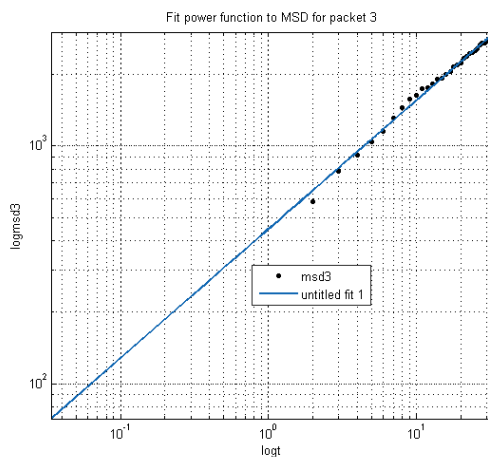
Εικόνα 42 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=5, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



Εικόνα 43 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=5, N=1000$

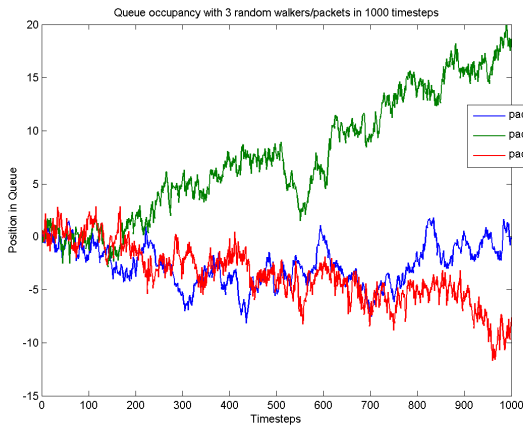


Εικόνα 44 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=5, N=1000$

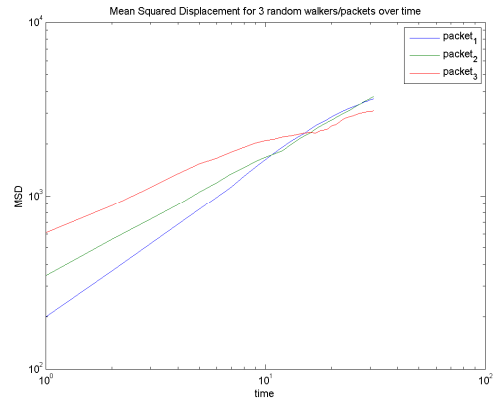


Εικόνα 45 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=5, N=1000$

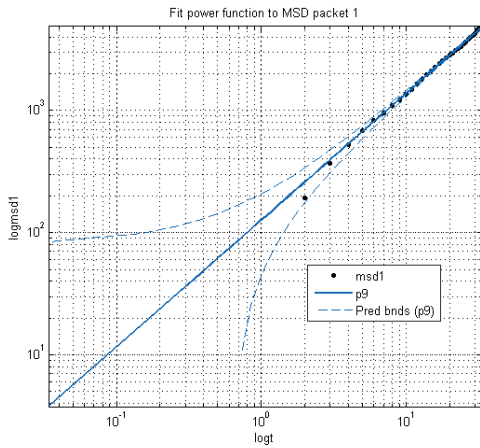
Πείραμα 10



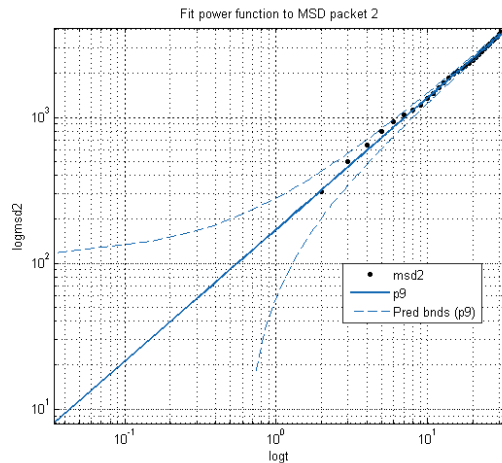
Εικόνα 46 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=10, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



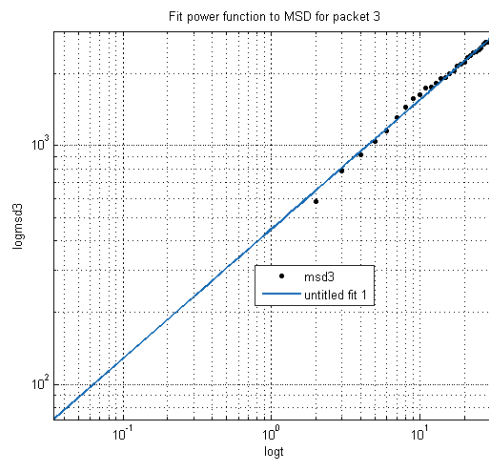
Εικόνα 47 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=10, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



Εικόνα 48 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=10, N=1000$

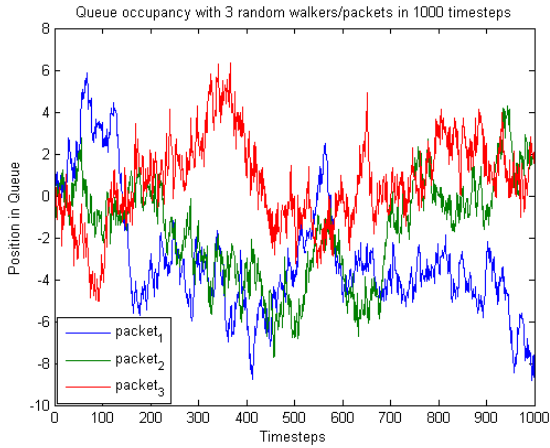


Εικόνα 49 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=10, N=1000$

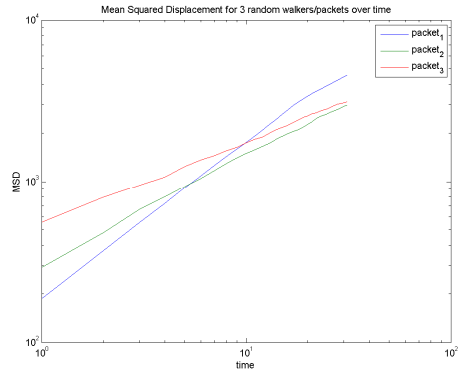


Εικόνα 50 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=10, N=1000$

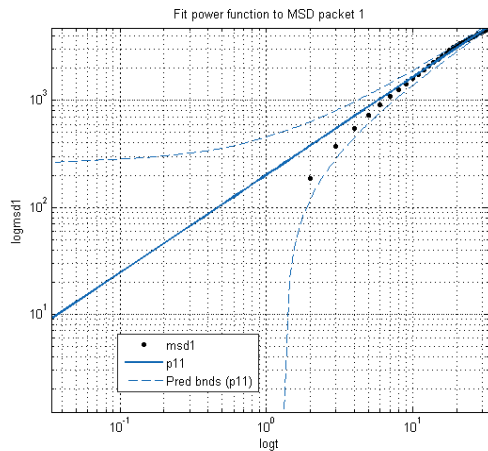
Πείραμα 11



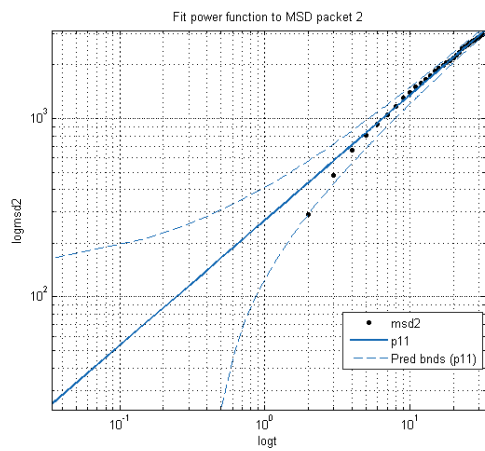
Εικόνα 51 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις ξεταζόμενους πελάτες. $L=15, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



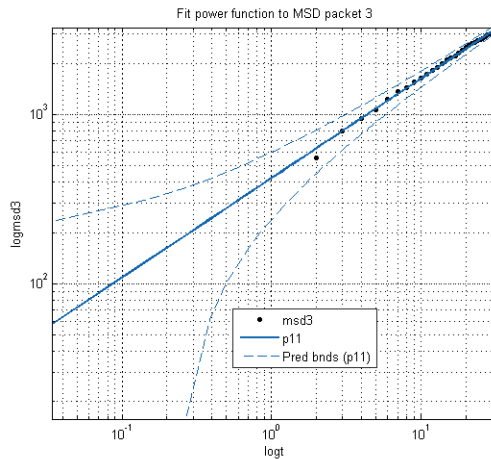
Εικόνα 52 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=15, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



Εικόνα 53 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=15, N=1000$

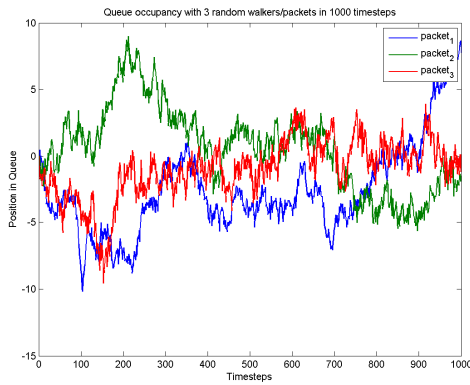


Εικόνα 54 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=15, N=1000$

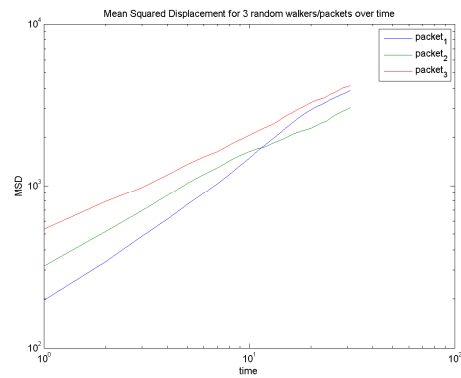


Εικόνα 55 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=15, N=1000$

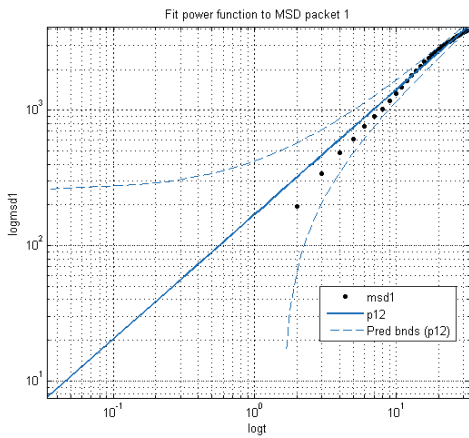
Πείραμα 12



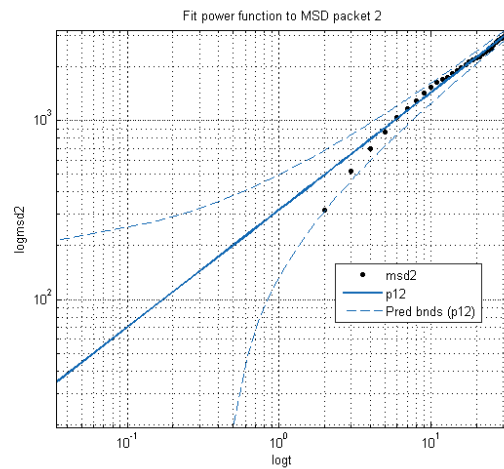
Εικόνα 56 Γραφική παράσταση θέσης πακέτων συναρτήσει του χρόνου για τρεις εξεταζόμενους πελάτες. $L=20, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



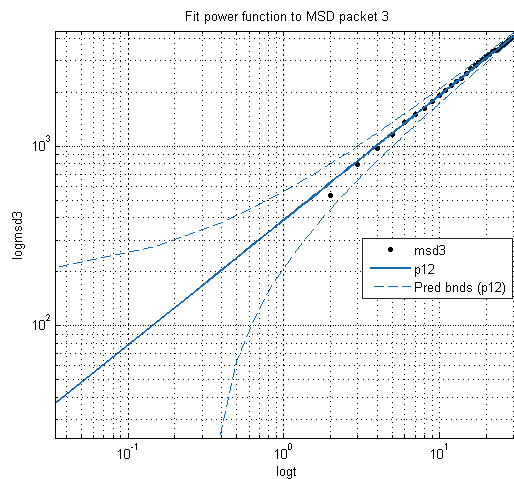
Εικόνα 57 MSD συναρτήσει του χρόνου για τους τρεις πελάτες του συστήματος ουράς σε λογαριθμικούς άξονες. $L=20, N=1000, H=0.45, 0.35, 0.25$



Εικόνα 58 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 1, $H=0.45, L=20, N=1000$



Εικόνα 59 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 2, $H=0.35, L=20, N=1000$



Εικόνα 60 Καμπύλη συνάρτησης προσαρμογής (συνάρτησης δύναμης) και MSD-t σε λογαριθμικούς άξονες για τον πελάτη 3, $H=0.25, L=20, N=1000$

Πίνακας 1 Πίνακας αποτελεσμάτων προσομοιώσεων. Αναφέρονται τα μήκη ουράς, τα βήματα, Hurst exponent και οι συντελεστές α,β για τους αντίστοιχους πελάτες

	Αριθμός βημάτων	Μήκος ουράς	Αρ. πελατών	Hurst exponent			συντελεστής α			συντελεστής β		
				Πελάτης 1	Πελάτης 2	Πελάτης 3	Πελάτης 1	Πελάτης 2	Πελάτης 3	Πελάτης 1	Πελάτης 2	Πελάτης 3
Πείραμα 1	500	5	3	0,25	0,15	0,1	252,9	449,3	688,2	0,6039	0,42	0,2708
Πείραμα 2	1000	5	3	0,25	0,15	0,1	604	789,3	1197	0,4647	0,4182	0,313
Πείραμα 3	500	10	3	0,25	0,15	0,1	184,5	347,9	538,2	0,6464	0,4952	0,3404
Πείραμα 4	1000	10	3	0,25	0,15	0,1	469,9	798,6	1107	0,586	0,582	0,3904
Πείραμα 5	500	15	3	0,25	0,15	0,1	234,2	325,8	642,6	0,5854	0,4869	0,2652
Πείραμα 6	1000	15	3	0,25	0,15	0,1	424,2	839,4	1198	0,5871	0,4377	0,3351
Πείραμα 7	500	20	3	0,25	0,15	0,1	299,6	398,4	480,7	0,4839	0,5324	0,371
Πείραμα 8	1000	20	3	0,25	0,15	0,1	609,7	782,8	1116	0,4353	0,4338	0,3194
Πείραμα 9	1000	5	3	0,45	0,35	0,25	125,9	169	445,4	1,037	0,9027	0,5419
Πείραμα 10	1000	10	3	0,45	0,35	0,25	224,3	258,2	604,6	0,8209	0,7738	0,4802
Πείραμα 11	1000	15	3	0,45	0,35	0,25	199,4	267,7	419,4	0,9151	0,7017	0,5883
Πείραμα 12	1000	20	3	0,45	0,35	0,25	169,1	315,8	385,9	0,9204	0,6545	0,6941

5 Συζήτηση αποτελεσμάτων – μελλοντική έρευνα

Χρησιμοποιώντας *κλασματική κίνηση Brown (fBM)* μελετήσαμε την κίνηση πολλαπλών δρομέων σε μία πεπερασμένου μήκους ουρά. Η προτεραιότητα κάθε πακέτου ανατίθεται από το μοντέλο μέσω της τιμής του *εκθέτη Hurst*. Παρατηρήσαμε ότι μικρότερη η τιμή του συντελεστή αυτού μεγαλύτερη δυσκολία εξαγωγής του πακέτου από την ουρά, ενώ πλήθος προσομοιώσεων (κίνηση πελατών σε μικρές ή πολύ μεγάλες ουρές με προτεραιότητα δρομέα να αντιστοιχεί σε μικρό εκθέτη) δεν οδηγεί σε εξυπηρέτηση του πακέτου. Κατά συνέπεια το συμπέρασμα της συγκεκριμένης εργασίας είναι ότι υπάρχει μία βέλτιστη σχεδίαση ουράς (μήκος) που οδηγεί στην καλύτερη εξυπηρέτηση ενός συγκεκριμένου αριθμού πελατών. Πέραν της παρατήρησης αυτής δεν μπορεί να γίνει ποσοτικοποίηση μεταξύ των δύο μεγεθών με χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου. Η *fBM* δεν προβλέπει χρόνους αναμονής και η απαίτηση για αυτοομοιότητα μας επιβάλλει να επιτρέπουμε κατά την προσομοίωση κίνηση κατά τον αρνητικό άξονα (αρνητικές τιμές στα γραφήματα θέσεις του πελάτη συναρτήσει του χρόνου). Ένα περαιτέρω βήμα στη συγκεκριμένη ερευνητική εργασία είναι η χρήση CTRW, μοντέλο που εκ φύσεως στηρίζεται σε χρόνους αναμονής, οι ιδιότητες του οποίου έχουν περιγραφεί στην ενότητα 3.4. Ένα τέτοιο μοντέλο θα μπορεί να περιγράψει την κίνηση πολλαπλών δρομέων εντός της ουράς λαμβάνοντας υπόψη τις περιοχές της ουράς όπου «εγκλωβίζονται» τα πακέτα για μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς να κινούνται.

Η χρήση στοχαστικών μοντέλων σε προβλήματα τηλεπικοινωνιακών δικτύων εμφανίζει ιδιαίτερη αύξηση τις τελευταίες δεκαετίες. Για παράδειγμα η μοντελοποίηση που ακολουθήσαμε στη συγκεκριμένη εργασία θα μπορούσε να βρει εφαρμογή σε δίκτυα TCP/IP [37] όπου ο ανταγωνισμός μεταξύ μη αλληλεπιδρώντων δρομέων είναι έντονος. Αντίθετα δεν θα αποτελούσε κατάλληλη επιλογή στην μοντελοποίηση τηλεπικοινωνιακού φόρτου Internet, καθώς επιτρέπει την λήψη αρνητικών τιμών κατά την κίνηση των δρομέων με χρήση συγκεκριμένων παραμέτρων κίνησης [38][39][40][41][42].

Ένα μοντέλο κίνησης δρομέων σε πολυπληθή περιβάλλοντα με *fBM* ή CTRW, ουρά μπορεί να έχει μία πιθανή εφαρμογή σε συστήματα ουρών σε τηλεπικοινωνιακά δίκτυα μεταγωγής πακέτων. Οι CTRW λαμβάνουν υπόψη το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από βήμα σε βήμα για το δρομέα του συστήματος. Εφαρμογή των CTRW μπορούμε να δούμε σε μοντέλα ουρών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, στα οποία

μας ενδιαφέρει να παρατηρήσουμε για δεδομένο χρόνο την κατάσταση της ουράς (κατειλημμένη ή αδρανής), ενώ δεν έχουμε πληροφορία για τη δεσμευμένη και ελεύθερη χωρητικότητα της ουράς.

6 Αναφορές

- [1] A. K. Erlang, “The Theory of Probabilities and Telephone Conversations,” *Nyt Tidsskrift for Matematik*, vol. No. B, no. vol 20, pp. 33-39, 1909.
- [2] A. K. Erlang, “Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges,” *Elektroteknikerens*, no. vol 13, 1917.
- [3] L. Kleinrock, *Queueing Systems vol. I: Theory*, New York: Wiley Interscience, 1975.
- [4] L. Kleinrock, *Queueing Systems, vol. II Computer Applications*, New York: Wiley Interscience, 1975.
- [5] C. S. Papacostas, *Transportation engineering and planning by Papacostas. C. S.*, 3rd edition ed., Prentice Hall of India, 2001.
- [6] H. C. Tijms, *A First Course in Stochastic Models*, John Wiley & Sons Ltd, 2003.
- [7] R. B. Cooper, *Introduction to queueing theory*, 2nd ed. Ed., London: Edward Arnold., 1981.
- [8] G. R., *Performance analysis of communication systems. Modeling with non-Markovian stochastic Petri nets*, Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- [9] R. G. Gallager, *Stochastic Processes: Theory for Applications*, Cambridge University Press, 2014.
- [10] R. Nelson, *Probability, stochastic processes, and queueing theory, The mathematics of computer performance modeling*, New York: Springer-Verlag, 1995.
- [11] R. Wolf, *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, 1989.
- [12] Borovkov A.A., *Some Limit Theorems in the Theory of Mass Service, I. Theor. Prob. Appl.* **10**, 375-400, 1967
- [13] Borovkov A.A., *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976
- [14] Kendall, D. G. , *Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. The Annals of Mathematical Statistics* **24** (3): 338, 1953
- [15] D. Gross and C. M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory*. 3rd Ed., John Wiley and Sons Inc., NY, 1998
- [16] Bachelier, L. (1900a), “Théorie de la spéculation”, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure* **3** (17): 21–86
- [17] Pearson, K. (1905). “*The Problem of the Random Walk*”, *Nature*. **72**, 294.

- [18] Einstein, Albert, "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen". *Annalen der Physik* (in German) **322** (8): 549–560. 1905
- [19] Smoluchowski, M. "Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen". *Annalen der Physik* **326** (14): 756–780, (1906)
- [20] A. Papoulis. Probability, Random variables and Stochastic Processes, Third Edition, McGraw-Hill, 1991
- [21] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2. John Wiley and Sons, 1966.
- [22] Μάργαρης, Αθ. Ι., ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου, Βελτιωμένη Έκδοση, Θεσ/νίκη: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014.
- [23] Kolmogorov, A. N., Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 26 115–118, 1940
- [24] B. Mandelbrot. a. J. V. Ness, "Fractional Brownian motion, fractional noises and applications," *SIAM Review*, no. vol. 10(4), pp. 422-437, 1968.
- [25] Y. K. a. M. Kardar, "Anomalous diffusion with absorbing boundary," *Phys. Rev. E* **76**, 2007.
- [26] J. S. a. M. Weiss, "Elucidating the origin of anomalous diffusion in crowded fluids," *Physical Review Letters* **103**, no. no.3 , 2009.
- [27] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson, On the selfsimilar nature of Ethernet traffic (extended version), *IEEE/ACM Trans. Networking* **2** (1) (1994) 1–15
- [28] J. Unterberger, "Stochastic calculus for fractional brownian motion with hurst exponent $h > 1/4$: A rough path method by analytic extension," *Annals of Probability* **37**, no. no.2, pp. 565-614 , 2009.
- [29] M. T. M. a. V. MATACHE, "QUEUEING SYSTEMS FOR MULTIPLE FBM-BASED TRAFFIC MODELS". *Australian Mathematical Society*.
- [30] M. M. Krzysztof Debicki, "Traffic with an fBm Limit: Convergence of the Stationary Workload Process.," pp. 113-127, 01 2004.
- [31] Elliott W. Montroll and George H. Weiss. "Random Walks on Lattices. II". *Math. Phys.* **6**
- [32] Ralf METZLER, Joseph KLAFTER, THE RANDOM WALK:S GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION: A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH, *Physics Reports* **339**, 1-77, 2000
- [33] G. Wornell, Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach, Prentice Hall, 1995.
- [34] <http://www.mathworks.com/products/matlab>

- [35] Tolman, R. C., *The Principles of Statistical Mechanics*. Dover Publications, 1938
- [36] <http://www.mathworks.com/help/wavelet/ref/wfbm.html>
- [37] M. Zukerman, T. D. Neame, R. G. Addie, Internet traffic modeling and future technology implications, in: Proc. IEEE INFOCOM 2003, Vol. 1, 2003, pp. 587–596
- [38] D. E. COMER, ΔΙΑΔΙΚΤΥΑ ΜΕ TCP/IP ΑΡΧΕΣ, ΠΡΩΤΟΚΟΛΛΑ ΚΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΕΣ, 4^η Αμερικανική Έκδοση ed., vol. 1, Αθήνα: ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ, 2001.
- [39] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, 1st ed., Wiley, 1968.
- [40] Michael Devetsikiotis and J. Keith Townsend. Statistical optimization of dynamic importance sampling parameters for efficient simulation of communication networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1:293–305, 1993.
- [41] H. Kobayashi, *Modeling and Analysis: An Introduction to System Performance Evaluation Methodology*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1978.
- [42] H. M. B. Kobayashi, *System modeling and analysis: Foundations of system performance evaluation*, Upper Saddle River: Pearson Education Inc, 2008.

Παράρτημα Α

Επισκόπηση θεωρίας πιθανοτήτων

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πιθανοκρατικό μοντέλο ως ένα πείραμα με πολλά πιθανά ενδεχόμενα [20][21]. Το πείραμα αυτό θα αποτελείται από ένα χώρο δειγματοληψίας Ω , είναι το σύνολο όλων των πιθανών ενδεχομένων, και τον νόμο των πιθανοτήτων που ορίζει μία πιθανότητα $P(A)$ για κάθε συμβάν, όπου ένα συμβάν είναι ένα υποσύνολο του χώρου δειγματοληψίας. Η $P(\cdot)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση πραγματικής τιμής της οποίας το εύρος είναι το σύνολο όλων των πιθανών συμβάντων.

Ο νόμος των πιθανοτήτων προϋποθέτει να ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις ιδιότητες:

Μη αρνητικότητα: $P(A) \geq 0$ για κάθε συμβάν A .

Additivity: αν A_i είναι όλα ανεξάρτητα γεγονότα, $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum P(A_i)$.

Κανονικοποίηση: η πιθανότητα της ένωσης όλων των πιθανών ενδεχομένων είναι ίση με τη μονάδα, $P(\Omega) = 1$

Για παράδειγμα ένα πιθανοκρατικό μοντέλο θα μπορούσε να αναπαριστά το μήκος ενός πακέτου που αποστέλλεται σε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων. Σε αυτό το μοντέλο ο χώρος δειγματοληψίας θα είναι το σύνολο των πιθανών μηκών πακέτου, έστω $\{l_1, l_2, l_3, \dots, l_m\}$ και $P(l_i)$ η πιθανότητα ένα πακέτο να έχει μήκος l_i

Υπό συνθήκη πιθανότητα

Η υπό συνθήκη πιθανότητα ενός γεγονότος A , δεδομένου ότι ένα γεγονός B έχει συμβεί,

συμβολίζεται ως $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Με την υπόθεση ότι $P(B) > 0$, καθώς γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το B .

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Έστω A_0, \dots, A_n ανεξάρτητα γεγονότα που σχηματίζουν ένα τμήμα του χώρου δειγματοληψίας (π.χ. κάθε πιθανό ενδεχόμενο περιλαμβάνεται σε ένα και μόνο ένα από τα ενδεχόμενα

A_1, \dots, A_n) και υποθέτουμε ότι $P(A_i) \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Για κάθε ενδεχόμενο B , έχουμε

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

Όπου η πρώτη γραμμή προκύπτει από την προσθετικότητα και η δεύτερη γραμμή είναι ο ορισμός της υπό συνθήκης πιθανότητας.

Ανεξαρτησία

Τα γεγονότα A και B ορίζονται ως ανεξάρτητα γεγονότα αν και μόνο αν,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υπό συνθήκης πιθανότητας, προκύπτει ότι:

$$P(A|B) = P(A)$$

Διαφορετικά τα γεγονότα θεωρούνται εξαρτημένα. Το να είναι ανεξάρτητα δύο γεγονότα σημαίνει ότι το να συμβαίνει το ένα δεν επηρεάζει την πιθανότητα να εκτελείται το άλλο. Αυτό μπορεί να γενικευτεί για κάθε σύνολο n γεγονότων, π.χ. το σύνολο των γεγονότων A_1, \dots, A_n είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Τυχαίες μεταβλητές

Για δεδομένο πιθανοκρατικό μοντέλο, μία **τυχαία μεταβλητή** είναι μία συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, με το συμβολισμό αυτό να σημαίνει ότι ο χώρος X είναι ο χώρος δειγματοληψίας Ω και το πεδίο τιμών του είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών. Η πιθανότητα μία τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμές σε ένα υποσύνολο A του \mathbb{R} δίνεται από:

$$P(X \in A) = P(\omega \in \Omega: X(\omega) \in A)$$

Μια τυχαία μεταβλητή είναι **διακριτή** αν λαμβάνει πεπερασμένο ή μετρήσιμο πλήθος τιμών.

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει μη αριθμήσιμο πλήθος τιμών, π.χ. οποιαδήποτε τιμή στον άξονα των πραγματικών αριθμών, ή ακόμη ένα υποσύνολο τιμών του.

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Για μια τυχαία μεταβλητή X , η pmf (probability mass function) δίνει την πιθανότητα η X να πάρει συγκεκριμένη τιμή στο εύρος της. Αυτό το συμβολίζουμε ως p_X , π.χ.

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

Όπου ο δείκτης X μπορεί να παραληφθεί. Καθώς P ακολουθεί το βασικό κανόνα των πιθανοτήτων, προκύπτει ότι η $p_X(x)$ είναι μη αρνητική και έχει άθροισμα τη μονάδα

$$\sum_i p_X(x_i) = 1$$

Όπου $\{x_i\}$ είναι οι τιμές λαμβάνει η X .

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μια διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από

$$E[X] = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

Έστω $g(X)$ μία συνάρτηση της X που λαμβάνει πραγματικές τιμές, η μέση τιμή της $g(X)$ υπολογίζεται από

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_X(x_i)$$

Όταν $g(X) = (X - E(X))^2$, η μέση τιμή της $g(X)$ ονομάζεται η μεταβλητότητα της X και συμβολίζεται ως σ_X^2

$$\sigma_X^2 = E(X - E(X))^2$$

Η τυχαία μεταβλητή Bernoulli με παράμετρο p

Η τυχαία μεταβλητή X είναι τυχαία μεταβλητή Bernoulli με παράμετρο p αν μπορεί να πάρει τιμές 0 και 1 με

$$\begin{aligned}p_X(1) &= p \\p_X(0) &= 1 - p\end{aligned}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli μας δίνουν ένα απλό μοντέλο για ένα πείραμα που μπορεί να οδηγηθεί είτε σε επιτυχία (1) είτε σε αποτυχία (0).

Διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους p και n

Για S αριθμό επιτυχιών μέσα από n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, η pmf δίνεται από

$$p_s(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

για $k = 0, 1, \dots, n$. Ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών δίνεται από

$$E[S] = np$$

Για παράδειγμα αν τα πακέτα φτάνουν σωστά σε έναν κόμβου δικτύου με πιθανότητα p (ανεξάρτητα), τότε ο αριθμός των επιτυχιών/σωστών αφίξεων από n αφίξεις είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή.

Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο p

Για δεδομένη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli, έστω T ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων συμπεριλαμβανομένης της πρώτης επιτυχίας. Τότε ο T θα έχει μια γεωμετρική κατανομή. Η pmf θα δίνεται από

$$p_T(t) = (1-p)^{t-1} p$$

για $t = 1, 2, \dots$, η μέση τιμή είναι

$$E[T] = \frac{1}{p}$$

Τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο μ

Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή N έχει κατανομή Poisson με παράμετρο μ , αν

$$p_N(n) = \frac{(\mu)^n}{n!} e^{-\mu}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η pmf αποδεικνύεται ότι είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) = 1$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)^n}{n!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)^n}{n!} \\ &= e^{-\mu} e^{\mu} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Poisson είναι

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\mu)^n}{n!} e^{-\mu} \\ &= (\mu) e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= (\mu) e^{-\mu} e^{\mu} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Poisson χρησιμοποιούνται συχνά για τη μοντελοποίηση της τηλεπικοινωνιακής κίνησης σε ένα δίκτυο. Για παράδειγμα σε ένα τηλεφωνικό δίκτυο, ο αριθμός των κλήσεων που καταφθάνουν σε διάστημα T δευτερολέπτων μπορεί να μοντελοποιηθεί πολύ καλά από μία τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο λT όπου λ είναι ο αριθμός άφιξης των κλήσεων.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X , η *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* (*probability density function-PDF*) f_X είναι μια μη αρνητική συνάρτηση για την οποία για κάθε $a < b$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1$$

Για συνεχή τυχαία μεταβλητή X (η οποία έχει PDF) και για κάθε τιμή του a

$$P(X = a) = \int_a^a f_X(x) dx = 0$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής ορίζεται ως

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Για μια συνάρτηση που λαμβάνει πραγματική τιμή $g(X)$ έχουμε

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Εκθετική τυχαία μεταβλητή

Ένα παράδειγμα συνεχούς τυχαίας μεταβλητής μπορεί να θεωρηθεί η εκθετική τυχαία μεταβλητή. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιούνται και για τη μοντελοποίηση της κίνησης σε ένα δίκτυο τηλεπικοινωνιών, για παράδειγμα για να μοντελοποιήσουν το χρόνο μεταξύ των αφίξεων των πακέτων. Μι εκθετική τυχαία μεταβλητή έχει PDF της μορφής

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$. Αποδεικνύεται ότι για εκθετική τυχαία μεταβλητή η μέση τιμή παίρνει τη μορφή

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Συναρτήσεις Συσσωρευμένης πιθανότητας

Η συνάρτηση συσσωρευμένης πιθανότητας (cumulative distribution function-CDF) μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η πιθανότητα $P(X \leq x)$ και συμβολίζουμε με $F_X(x)$.

Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε έχουμε

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_x(k)$$

Ομοίως, αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε έχουμε

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την f_X σε όρους της F_X

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx},$$

π.χ. η PDF μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι η παράγωγος της CDF της.

Παράδειγμα: Η CDF μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής είναι

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0
 \end{aligned}$$

Υπό συνθήκη PDF

Η υπό συνθήκη PDF $f_{X|A}$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X για συγκεκριμένο γεγονός A με $P(A) > 0$, ορίζεται ως

$$f_{X|A} = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(A)} & \alpha \nu x \in A, \\ 0 & \alpha \lambda \lambda \acute{\iota} \omega \varsigma \end{cases}$$

Έτσι ώστε

$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x) dx$$

Αντίστοιχος ορισμός προκύπτει και για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Η υπό συνθήκη μέση τιμή ορίζεται ως

$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$$

Σε αυτή την περίπτωση, το θεώρημα της ολικής πιθανότητας μπορεί να γραφεί ως

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n P(A_i) f_{X|A_i}(x)$$

όπου $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι ανεξάρτητα γεγονότα που καλύπτουν το χώρο δειγματοληψίας. Προκύπτει ότι

$$E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) E[X|A_i]$$

Ο οποίος είναι συχνά ένας χρήσιμος τρόπος στον υπολογισμό της μέσης τιμής.

Παράδειγμα: έστω X μια εκθετική τυχαία μεταβλητή και A το γεγονός όπου $X > t$. Τότε $P(A) = e^{-\lambda t}$ και

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-t)}, & x \geq t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$P\{X > r+t | X > t\} = P\{X > r\}, \quad r, t \geq 0$$

Η παραπάνω ιδιότητα είναι μία πολύ σημαντική ιδιότητα μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής και ονομάζεται «αμνήμων» ιδιότητα (memoryless property)

Στοχαστικές διεργασίες

Μια στοχαστική διεργασία είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών προσαρμοσμένες στο χρόνο. Οι στοχαστικές διεργασίες χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιηθεί ο τρόπος άφιξης πακέτων σε ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο. Σε αυτή την περίπτωση $\{A(t), t \geq 0\}$ μπορούμε να συμβολίσουμε τον συνολικό αριθμό πακέτων που φτάνουν σε έναν κόμβο μέχρι τη χρονική στιγμή t . Για κάθε χρονική στιγμή t , η ποσότητα $A(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Οι στοχαστικές διεργασίες μπορούν επίσης να οριστούν και σε διακριτό χρόνο. Έστω, X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανομημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Αυτή η διακριτού χρόνου στοχαστική διεργασία ονομάζεται διεργασία Bernoulli.

Ένα δεδομένο αποτέλεσμα κάθε τυχαίας μεταβλητής που αποτελεί μια στοχαστική διεργασία αναφέρεται ως realization ή sample path της διεργασίας.

Νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανομημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών, κάθε μία με μέση τιμή \bar{X} . ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών ορίζει ότι με πιθανότητα τη μονάδα,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \bar{X}$$

Αυτό που μας λέει ο νόμος των μεγάλων αριθμών, είναι ότι αν παρατηρήσουμε μια αρκετά μεγάλη ακολουθία αποτελεσμάτων αυτών των τυχαίων μεταβλητών και πάρουμε τον αριθμητικό τους μέσο, θα συγκλίνει στη μέση τιμή του κάθε επιμέρους αποτελέσματος.

Όταν κάθε X_i είναι μια τυχαία μεταβλητή Bernoulli, ο νόμος των μεγάλων αριθμών μπορεί να αποδοθεί ως EX_i .

Μπορούμε να δούμε την ακολουθία X_1, X_2, \dots ως διακριτού χρόνου στοχαστική διεργασία.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε την ποσότητα $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \bar{X}$ ως το μέσο χρόνο μιας

δεδομένης realization της στοχαστικής διεργασίας. Ωστόσο, ο \bar{X} είναι ο στατιστικός μέσος, υπολογίζεται λαμβάνοντας μία συγκεκριμένη μέση τιμή του X μέσα από όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών μας λέει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον χρονικό μέσο με το στατιστικό μέσο για μια διεργασία που αποτελείται από i.i.d. τυχαίες μεταβλητές. Αυτό είναι χρήσιμο για ένα μοντέλο στον ευκολότερο υπολογισμό μοντέλο στατιστικών μέσων, αλλά στην πράξη οι χρονικοί μέσοι είναι η σημαντική ποσότητα.