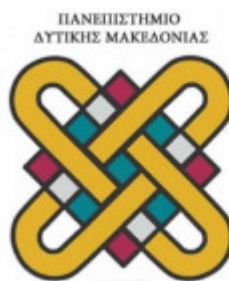


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μ.Π.Σ. ΠΡΟΗΓΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΙΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

**Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta**

Διπλωματική εργασία
της
Τοκατλίδου Ελένης
(ΑΜ : 117)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια : Καλογηράτου Ζαχαρούλα
Καστοριά, Ιούνιος 2022



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μ.Π.Σ. ΠΡΟΗΓΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta

Διπλωματική εργασία
της
Τοκατλίδου Ελένης
(ΑΜ : 117)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Καλογηράτου Ζαχαρούλα
Καστοριά, Ιούνιος 2022

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 24 Ιουνίου 2022

.....
Ζ.Καλογηράτου Θ. Μονοβασίλης Γ. Βασιλειάδης

Copyright ©2022 - Τοκατλίδου Ελένη

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν αποκλειστικά την συγγραφέα και δεν αντιπροσωπευουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια μου κ. Καλογηράτου Ζαχαρούλα για την στήριξη, την υπομονή της καθώς και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αλλά και τους ανθρώπους, οικογένεια και φίλοι, που στάθηκαν δίπλα μου όλο αυτό το διάστημα.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών Προηγμένες Τεχνολογίες Πληροφορικής και Υπηρεσίες. Στόχος ήταν η διερεύνηση της αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, με άμεσες μεθόδους Runge - Kutta 4ης, 5ης και 6ης τάξης καθώς και με τριγωνομετρικά προσαρμοσμένες αριθμητικές μεθόδους κατά V.Berghe.

Αρχικά έγινε μία αναφορά στις διαφορικές εξισώσεις και αναλύθηκε η λογική της αριθμητικής επίλυσης τους με την βοήθεια των αναπτυγμάτων Taylor.

Έπειτα αναφέρθηκαν οι πρώτες αριθμητικές μέθοδοι Runge - Kutta και παρουσιάστηκε η μετάβαση τους σε μεγαλύτερες τάξεις. Υπολογίστηκαν οι συνθήκες τάξης με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor μέχρι 4η τάξη ενώ δόθηκαν οι συνθήκες και κατασκευάστηκαν οι μέθοδοι μέχρι και την 6η τάξη. Η διαδικασία επαναλήφθηκε σε μορφή πινάκων και σε μορφή δέντρων.

Στην συνέχεια ερευνήθηκε μία ειδική κατηγορία αριθμητικών μεθόδων Runge - Kutta , οι μέθοδοι εκθετικής/τριγωνομετρικής προσαρμογής με βάση την θεώρηση του V.Berghe. Κατασκευάστηκαν και εδώ οι μέθοδοι μέχρι την 6η τάξη οπότε και βρέθηκαν οι θεωρητικοί τύποι των διορθωτικών συντελεστών που απαιτούνται για να επιτευχθεί η τριγωνομετρική προσαρμογή των μεθόδων Runge - Kutta.

Τέλος η έρευνα επικεντρώθηκε στο πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler , παρουσιάστηκαν οι διαφορικές εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση του και εφαρμόστηκαν σε αυτές τόσο οι άμεσες μεθόδους Runge - Kutta 4ης, 5ης και 6ης τάξης όσο και η αντίστοιχη τριγωνομετρική τους προσαρμογή κατά V.Berghe. Αξιολογήθηκαν και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Λέξεις κλειδιά: Μέθοδοι Runge - Kutta , Τριγωνομετρική προσαρμογή V.Berghe, Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων, Πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler.

Abstract

This study is done as part of a master's degree program called 'Modern Information Technologies and Services'.

The research aimed in studying the numerical solution of differential equations, in one aspect, with explicit Runge - Kutta methods (ERK) 4th, 5th and 6th order and, in another aspect, with Vanden Berghe's trigonometrically fitted numerical methods (TF) for the same orders. Initially there is a reference to differential equations in general and the way numerical methods solves them using Taylor development.

The first numerical Runge - Kutta methods are mentioned and their behaviour in greater orders is presented. Order conditions are analyzed using Taylor development until 4th order, conditions are given and the numerical methods are constructed up to 6th order. The process is repeated in matrix and tree formation.

Following, a special category of Runge - Kutta's numerical methods, called exponentially/trigonometrically fitted methods by Vanden Berghe, is researched. Order conditions are given and the numerical methods are constructed up to 6th order, for these methods also, and the theoretic equations for adjustment parameters of the methods are calculated. Finally, Kepler's two bodies problem is studied and the differential equations needed are analyzed. Explicit Runge - Kutta methods of 4th, 5th and 6th order and the respective order Vanden Berghe's trigonometrically fitted numerical methods are used to solve Kepler's problem. Results are compared.

Key words: Runge - Kutta methods, Vanden Berghe's trigonometrically fitted numerical methods , Numerical solution of differential equations, Kepler's two bodies problem.

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
1.1	Διαφορικές εξισώσεις	9
1.2	Εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους	12
1.2.1	Η μέθοδος Euler	14
2	Μέθοδοι Runge - Kutta	15
2.1	Εισαγωγή	15
2.2	Γενική μορφή των μεθόδων Runge - Kutta	17
2.3	Κατασκευή μεθόδων Runge - Kutta	21
2.3.1	Άμεσες μέθοδοι δευτερης τάξης	22
2.3.2	Άμεσες μέθοδοι τρίτης τάξης	25
2.3.3	Άμεσες μέθοδοι τέταρτης τάξης	31
2.3.4	Άμεσες μέθοδοι πεμπτης τάξης	35
2.3.5	Άμεσες μέθοδοι έκτης τάξης	39
2.4	Συνθήκες με χρήση πινάκων	46
2.5	Συνθήκες τάξης και δέντρα	51
3	Ειδικές μέθοδοι Runge - Kutta	59
3.1	Εισαγωγή	59
3.2	Εκθετική/τριγωνομετρική προσαρμογή κατά G.Vanden Berghe	60
3.2.1	Εκθετική προσαρμογή	61
3.2.2	Τριγωνομετρική προσαρμογή	68
4	Εφαρμογή στο πρόβλημα δύο σωμάτων	75
4.1	Το πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler	75
4.2	Αριθμητικά αποτελέσματα	78

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Διαφορικές εξισώσεις

Πολλά σημαντικά προβλήματα στην τεχνολογία, στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, όταν μαθηματοποιούνται, απαιτούν τον προσδιορισμό μίας συνάρτησης που ικανοποιεί κάποια εξίσωση, η οποία περιέχει μία ή περισσότερες παραγώγους της άγνωστης αυτής συνάρτησης. Τέτοιες εξισώσεις ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις.

Η βασική ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων είναι σε συνήθεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις ανάλογα αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία ή περισσότερες ανεξαρτητες μεταβλητές.

Στην πρώτη περίπτωση η διαφορική εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους και ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση ενώ στην δεύτερη περίπτωση υπάρχουν μερικές παράγωγοι οπότε η εξίσωση ονομάζεται μερική διαφορική εξίσωση.

Για την επίλυση προβλημάτων με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δίνεται η τιμή της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων είτε στην αρχή του διαστήματος ολοκλήρωσης (προβλήματα αρχικών τιμών Π.Α.Τ.), είτε στην αρχή και το τέλος (άκρα) του διαστήματος ολοκλήρωσης (προβλήματα συνοριακών τιμών). Η εξίσωση

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

αποτελεί τη γενική μορφή μιας συνήθης διαφορικής εξίσωσης n τάξης. Η εξίσωση αναπαριστά μία σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x , των τιμών της συνάρτησης y και των πρώτων παραγώγων της $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$

Μία ακόμα σημαντική ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται σύμφωνα με το κατά πόσο είναι γραμμικές ή μη γραμμικές. Η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ονομάζεται γραμμική αν η F είναι μία γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών

$$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$$

Αντίστοιχος είναι και ο ορισμός για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Τάξη n μίας διαφορικής εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Βαθμός μιας Δ.Ε. είναι η δύναμη στην οποία εμφανίζεται η παράγωγος της μεγαλύτερης τάξης.

Έτσι η γενική γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση n τάξης είναι η

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y = g(x)$$

Μία εξίσωση που δεν είναι αυτής της μορφής είναι μία μη γραμμική εξίσωση.

Υποθέτουμε ότι είναι πάντοτε δυνατή η επίλυση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, ως προς την ανώτερη παράγωγο της, οπότε αυτή παίρνει την μορφή

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (1.1)$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων περιέχουν μία ή περισσότερες αυθαίρετες σταθερές (προϊόντα της διαδικασίας ολοκλήρωσης, που συνήθως αποτελεί μέρος της επίλυσης της εξίσωσης) με άπειρο αριθμό επιλογών ($c \in \mathfrak{R}$) με αποτέλεσμα να αναπαριστούν έναν άπειρο αριθμό συναρτήσεων, δηλαδή

$$y(x) = k(x) + c$$

όπου c :σταθερά.

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται σύμφωνα και με τον αριθμό των άγνωστων συναρτήσεων που πρέπει να προσδιοριστούν. Αν υπάρχει μόνο μια συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί τότε μία εξίσωση είναι αρκετή ενώ σε περίπτωση δύο ή περισσότερων άγνωστων συναρτήσεων απαιτείται ένα σύστημα εξισώσεων.

Στην γενική του μορφή ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης για k άγνωστες συναρτήσεις

$$y_1(x), y_2(x) \dots y_k(x)$$

θα είναι:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2 \dots y_k) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2 \dots y_k) \\ &\vdots = \vdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, y_2 \dots y_k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορούμε να το γράψουμε και σε διανυσματική μορφή $Y' = F(x, Y)$ όπου Y και F ο διανυσματικές συναρτήσεις που ορίζονται ως

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

και

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

Μια διαφορική εξίσωση τάξης n της μορφής (1.1) μπορεί να γραφεί σαν ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως εξής. Θέτουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \\ y_3(x) &= y''(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}(x) &= y^{n-2}(x) \\ y_n(x) &= y^{n-1}(x) \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ y_3'(x) &= y_4(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

δηλαδή είναι ένα σύστημα της μορφής (1.2) με

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_2(x) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_3(x) \\ f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_4(x) \\ &\vdots \\ f_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_n(x) \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

1.2 Εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση πολλών προβλημάτων ωστόσο είναι γεγονός ότι η αναλυτική επίλυση τους δεν είναι πάντα εύκολη διαδικασία με αποτέλεσμα να είναι αδύνατος, σε κάποιες περιπτώσεις, ο προσδιορισμός των αναλυτικών λύσεων. Με αφορμή τα προβλήματα της ουράνιας μηχανικής που απασχόλησαν τους επιστήμονες το 17ο αιώνα όπως είναι ο χρονικός προσδιορισμός της επανεμφάνισης του κομήτη Halley, το πρόβλημα των δύο σωμάτων του Kepler κ.α. αναπτύχθηκε η αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

Η αριθμητική επίλυση παράγει προσεγγιστικές τιμές για τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης οι οποίες αποτελούν πολύ καλή εκτίμηση της πραγματικής (αναλυτικής) λύσης. Όσο πιο μικρή απόκλιση έχει αυτή η προσεγγιστική τιμή από την πραγματική λύση τόσο μεγαλύτερη είναι η τάξη ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου. Με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών μπορούμε να κατασκευάσουμε αριθμητικές μεθόδους με μεγάλη ακρίβεια.

Θεωρούμε μία διαφορική εξίσωση (ΔΕ) πρώτης τάξης

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ με } x \in [a, b]$$

το διάστημα $[a, b]$ ονομάζεται διάστημα ολοκλήρωσης. Αν για τυχαίο διάστημα $[x_n, x_{n+1}] \subseteq [a, b]$ ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\ y(x_{n+1}) - y(x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \end{aligned}$$

Ανάλογα την μέθοδο με την οποία υπολογίζονται οι προσεγγίσεις y_{n+1} και y_n των τιμών $y(x_{n+1})$ και $y(x_n)$, αντίστοιχα, καθώς και του ολοκληρώματος $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$ προκύπτει και διαφορετική αριθμητική μέθοδος.

Μία αριθμητική μέθοδος υπολογίζει εκτιμήσεις της λύσης μιας εξίσωσης για ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$.

Έστω μία διαμέριση n σημείων του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων ονομάζεται βήμα της μεθόδου και συμβολίζεται με h

$$h_n = x_{n+1} - x_n$$

Αν τα υποδιαστήματα θεωρηθούν ίδιου μήκους τότε το βήμα της μεθόδου είναι σταθερό και ίσο με

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Επίσης θεωρούμε μία αρχική συνθήκη $y(a) = y(x_0) = y_0$. (Π.Α.Τ. - Initial Value Problem (IVP))

Μπορούμε να υπολογίσουμε μία προσέγγιση, y_1 , της αναλυτικής λύσης, $y(x_1)$, της διαφορικής εξίσωσης στο σημείο x_1 από την τιμή της άγνωστης συνάρτησης στο σημείο x_0 που μας δίνει η αρχική συνθήκη.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την προσέγγιση, y_2 , της αναλυτικής λύσης, $y(x_2)$, της διαφορικής εξίσωσης στο σημείο x_2 χρησιμοποιώντας την εκτίμηση y_1 του προηγούμενου βήματος. Αυτή η μέθοδος λέγεται μέθοδος απλού βήματος καθώς δίνει την προσέγγιση y_2 χρησιμοποιώντας μόνο την προσέγγιση y_1 .

Μπορούμε να υπολογίσουμε την y_2 χρησιμοποιώντας τα y_0 και y_1 οπότε η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος δύο βημάτων.

Γενικά μια μέθοδος στην οποία υπολογίζουμε την y_{n+1} βασιζόμενοι μόνο στην y_n , ονομάζεται μέθοδος απλού βήματος ή μονοβηματική μέθοδος (one step method ή single step method), με γενική μορφή

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

ενώ μια μέθοδος που απαιτεί περισσότερες από μία προηγούμενες εκτιμήσεις ονομάζεται μέθοδος πολλαπλού βήματος ή πολυβηματική μέθοδος (multistep method) με γενική μορφή

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i y_{n+1} = h\Phi(x_n, y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}, h)$$

Η αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων μελετήθηκε σχεδόν παράλληλα με την αναλυτική θεώρηση τους, χαρακτηριστική είναι η δουλειά των Isaac Newton (1642 – 1727), B. Taylor (1685 – 1731), Euler (1707 – 1783). Οι J. C. Adams και F. Bashforth το 1883 παρουσίασαν μεθόδους πολλαπλού βήματος που χρησιμοποιούνται ακόμα, ενώ το 1895 ο C. Runge δημοσίευσε την πρώτη αριθμητική μέθοδο απλού βήματος και μαζί με τον W. Kutta θεωρούνται οι θεμελιωτές των φημισμένων μεθόδων Runge - Kutta.

1.2.1 Η μέθοδος Euler

Η παλαιότερη αριθμητική μέθοδος είναι αυτή του Euler.

Έστω συνάρτηση $y(x)$, θα ξεκινήσουμε εκτιμώντας την παράγωγο της $y(x)$ ως πηλίκο διαφορών

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

Αντικαθιστούμε στην ΔΕ και έχουμε

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(x_n, y_n)$$

απο όπου προκύπτει ο τύπος

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Ένας άλλος τρόπος να κατασκευάσουμε την μέθοδο είναι χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το x_n ,

$$y(x) = y(x_n) + (x - x_n)y'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!}y''(x_n) + \dots$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)y'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!}y''(x_n) + \dots$$

αντικαθιστούμε το $x_{n+1} - x_n$ με το h

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots$$

αποκόπτουμε από την σειρά τους όρους μετά το h^2 οπότε

$$y_{n+1} \approx y(x_n) + hy'(x_n)$$

αντικαθιστούμε την παράγωγο $y'(x_n)$ η οποία είναι ίση με $f(x_n, y(x_n))$

$$y_{n+1} \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

οπότε προκύπτει ο τύπος

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι Runge - Kutta

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = f(x, y(x)), x \in [a, b] \text{ με } y(a) = y(x_0) = y_0$$

όπου y είναι διάνυσμα από πραγματικές συναρτήσεις και f είναι ένα διάνυσμα από πραγματικές συναρτήσεις των x και y . Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση σε ένα τυχαίο διάστημα $[x_n, x_{n+1}] \subseteq [a, b]$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\ y(x_{n+1}) - y(x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \end{aligned} \tag{2.1}$$

για να καταλήξουμε σε αριθμητική μέθοδο προσεγγίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα από τον απλό τύπο του ορθογωνίου

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx hf(x_n, y(x_n))$$

οπότε από την (1) έχουμε

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx hf(x_n, y(x_n))$$

αν τέλος αντικαταστήσουμε τις τιμές $y(x_{n+1})$ και $y(x_n)$ με τις προσεγγίσεις τους y_{n+1} και y_n προκύπτει πάλι η μέθοδος του Euler.

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n) \tag{2.2}$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του y_{n+1} απαιτείται ο υπολογισμός της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_n, y_n) . Συμβολίζουμε με k_1 την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο οπότε η μέθοδος Euler μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Αν αντί για τον απλό τύπο του ορθογωνίου προσεγγίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα από τον απλό τύπο του τραπεζίου έχουμε

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{1}{2}h(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1})))$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{1}{2}h(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1})))$$

αντικαταθιστούμε τις τιμές $y(x_{n+1})$ και $y(x_n)$ με τις προσεγγίσεις τους y_{n+1} και y_n

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Euler στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η μέθοδος που είναι γνωστή ως μέθοδος του Heun (1900).

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))$$

Στην μέθοδο του Heun ο υπολογισμός του y_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x, y)$ σε δύο σημεία (x_n, y_n) και $(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$. Συμβολίζουμε με k_1 και k_2 την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο οπότε η μέθοδος μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Τα k_1 και k_2 ονομάζονται στάδια της μεθόδου. Οι μέθοδοι Euler και Heun είναι οι πρώτες από την κατηγορία μεθόδων γνωστές ως αριθμητικές μέθοδοι Runge - Kutta.

2.2 Γενική μορφή των μεθόδων Runge - Kutta

Το 1901 ο Kutta έγραψε τις μεθόδους, που σήμερα ονομάζουμε Runge - Kutta, στη μορφή που φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + a_{s3} k_3 + a_{s4} k_4 \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\
 \\
 y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 + \dots + b_s k_s)
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Ο Kutta έκανε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}
 c_2 &= a_{21} \\
 c_3 &= a_{31} + a_{32} \\
 c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43} \\
 &\vdots \\
 c_s &= a_{s1} + a_{s2} + a_{s3} + a_{s4} + \dots + a_{s,s-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Η θεωρητική τεκμηρίωση των μεθόδων Runge - Kutta έγινε από τον μαθηματικό John Butcher με μία σειρά άρθρων που ξεκίνησε να δημοσιεύει από το 1963. Για την αναπαράσταση των μεθόδων χρησιμοποίησε ένα πίνακα γνωστό πλέον ως Butcher array ή Butcher tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Ο συνδυασμός της δουλειάς των Kutta και Runge έδωσε τις μεθόδους Runge - Kutta s σταδίων όπως ορίζονται παρακάτω

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_n + c_i h, Y_i), \\
 k_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} f(x_n + c_j h, Y_j), i = 1, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Τα διανύσματα k_i ονομάζονται εσωτερικά στάδια της μεθόδου.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + \dots + a_{1,s}k_s)) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 + \dots + a_{2,s}k_s)) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 + \dots + a_{3,s}k_s)) \\
 k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3 + \dots + a_{4,s}k_s)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + a_{s3}k_3 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}))
 \end{aligned}$$

ενώ ο πίνακας Butcher της μεθόδου είναι

$$\begin{array}{c|cccccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\
 c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{s,s} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Για τον συμβολισμό των παραπάνω μεθόδων πολύ συχνά χρησιμοποιούμε πίνακες. Ειδικότερα, A είναι ένας πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης $s \times s$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{s,s} \end{pmatrix}$$

ενώ οι b και c πίνακες είναι διανύσματα διάστασης s με τους αντίστοιχους συντελεστές

$$\begin{aligned}
 b &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_s)^T, \\
 c &= (c_1, c_2, c_3, \dots, c_s)^T
 \end{aligned}$$

Τα b_i ονομάζονται βάρη της μεθόδου (weights) ενώ c_i κόμβοι της μεθόδου (abscissae). Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό ο πίνακας Butcher παίρνει την μορφή

$$\begin{array}{c|c}
 c & A \\
 \hline
 & b^T
 \end{array}$$

Ανάλογα την μορφή του πίνακα A προκύπτει και διαφορετική κατηγορία μεθόδων Runge - Kutta, καθώς διαφοροποιούνται τα στάδια k_i (προηγούμενα και επόμενα)

που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε επόμενου k_i .

Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος του Kutta (1) είναι μία άμεση μέθοδος Runge kutta (Explicit Runge Kutta Method - ERK).

Εδώ ο πίνακας A είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός με $a_{ij} = 0$ για $i > j$ οπότε σε κάθε στάδιο απαιτείται ο υπολογισμός των προηγούμενων μόνο k_i .

- **1ο στάδιο:**

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

Για τον υπολογισμό του k_1 απαιτείται η τιμή της συνάρτησης f στο προηγούμενο βήμα (x_n, y_n)

- **2ο στάδιο:**

$$k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1)$$

Για τον υπολογισμό του k_2 απαιτείται ο υπολογισμός του προηγούμενου σταδίου k_1

- **3ο στάδιο:**

$$k_3 = f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2))$$

Για τον υπολογισμό του k_3 απαιτείται ο υπολογισμός των προηγούμενων σταδίων k_1, k_2

- **4ο στάδιο:**

$$k_4 = f(x_n + c_4h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3))$$

Για τον υπολογισμό του k_4 απαιτείται ο υπολογισμός των προηγούμενων σταδίων k_1, k_2, k_3

...

οπότε για το s στάδιο έχουμε

- **s στάδιο:**

$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + a_{s3}k_3 + a_{s4}k_4 \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}))$$

δηλαδή απαιτείται ο υπολογισμός όλων των προηγούμενων σταδίων για την ευρεση του k_s και την εκτίμηση της λύσης y_{n+1} στο επόμενο βήμα x_{n+1} .

Παρατηρούμε ότι σε κάθε στάδιο χρειαζόμαστε s υπολογισμούς της f

Αν ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός με $a_{ij} = 0$ για $i \geq j$, επιτρέπονται μη μηδενικά στοιχεία και στην κύρια διαγώνιο οπότε η μέθοδος ονομάζεται διαγώνια πεπλεγμένη Runge - Kutta (Diagonally Implicit Runge - Kutta Method - DIRK) και τα εσωτερικά της στάδια έχουν την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
 k_1 &= y_n + ha_{11}f(x_n + c_1h, k_1) \\
 k_2 &= y_n + ha_{21}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{22}f(x_n + c_2h, k_2) \\
 k_3 &= y_n + ha_{31}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{32}f(x_n + c_2h, k_2) + ha_{33}f(x_n + c_3h, k_3) \\
 k_4 &= y_n + ha_{41}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{42}f(x_n + c_2h, k_2) + ha_{43}f(x_n + c_3h, k_3) \\
 &\quad + ha_{44}f(x_n + c_4h, k_4) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 k_s &= y_n + h \sum_{j=1}^i a_{ij}f(x_n + c_jh, k_j)
 \end{aligned}$$

Σε κάθε στάδιο για τον υπολογισμό των k_i απαιτείται επίλυση μη γραμμικής εξίσωσης ως προς το αντίστοιχο k_i

• **1ο στάδιο:**

$$k_1 = y_n + ha_{11}f(x_n + c_1h, k_1)$$

Για τον υπολογισμό του k_1 , εφόσον η f είναι πραγματική συνάρτηση, επιλύουμε την παραπάνω μη γραμμική εξίσωση χρησιμοποιώντας συνήθως επαναληπτικές μεθόδους.

• **2ο στάδιο:**

$$k_2 = y_n + ha_{21}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{22}f(x_n + c_2h, k_2)$$

Για τον υπολογισμό του k_2 επιλύουμε την παραπάνω μη γραμμική εξίσωση ως προς k_2

• **3ο στάδιο:**

$$k_3 = y_n + ha_{31}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{32}f(x_n + c_2h, k_2) + ha_{33}f(x_n + c_3h, k_3)$$

Για τον υπολογισμό του k_3 επιλύουμε την παραπάνω μη γραμμική εξίσωση ως προς k_3

• **4ο στάδιο:**

$$\begin{aligned}
 k_4 &= y_n + ha_{41}f(x_n + c_1h, k_1) + ha_{42}f(x_n + c_2h, k_2) + ha_{43}f(x_n + c_3h, k_3) \\
 &= +ha_{44}f(x_n + c_4h, k_4)
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του k_4 επιλύουμε την παραπάνω μη γραμμική εξίσωση ως προς k_4

...

οπότε για το s στάδιο έχουμε

• **s στάδιο:**

$$k_s = y_n + h \sum_{j=1}^i a_{ij} f(x_n + c_j h, k_j)$$

δηλαδή για την ευρεση των k_i επιλύουμε s μη γραμμικές εξισώσεις.

Υπάρχει περίπτωση η f να είναι διανυσματική συνάρτηση (έστω D συνιστώσες) οπότε σε κάθε στάδιο επιλύουμε σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων και κατά συνέπεια στο s στάδιο επιλύουμε s μη γραμμικά συστήματα (DxD το καθένα).

Αν ο πίνακας A δεν είναι τριγωνικός, δηλαδή έχει μη μηδενικά στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο, η μέθοδος ονομάζεται πεπλεγμένη Runge - Kutta (Implicit Runge - Kutta Method - IRK) και τα εσωτερικά της στάδια έχουν την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + \dots + a_{1,s}k_s)) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 + \dots + a_{2,s}k_s)) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 + \dots + a_{3,s}k_s)) \\ k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3 + \dots + a_{4,s}k_s)) \\ &\vdots \\ k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + a_{s3}k_3 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})) \end{aligned}$$

Σε κάθε στάδιο για τον υπολογισμό του αντίστοιχου k_i απαιτούνται όλα τα υπόλοιπα k_i οπότε προκύπτει μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Αν η f είναι πραγματική συνάρτηση απαιτείται σύστημα από s μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ενώ αν η f είναι διανυσματική συνάρτηση (D συνιστώσες) απαιτείται σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων διάστασης $sD \times sD$.

2.3 Κατασκευή μεθόδων Runge - Kutta

Η κατασκευή μεθόδων Runge - Kutta (RK) βασίζεται στην αντιστοίχιση των αναπτυγμάτων Taylor της ακριβούς λύσης $y(x_n + h)$ με εκείνο της αριθμητικής λύσης y_{n+1} . Οι Hairer, Norset και Wanner στο βιβλίο τους [3] δίνουν τον παρακάτω ορισμό για την τάξη μιας αριθμητικής μεθόδου

Ορισμός 2.3.1. Μια μέθοδος Runge - Kutta έχει αλγεβρική τάξη p αν για ικανοποιητικά ομαλά προβλήματα (*sufficiently smooth problems*) ισχύει

$$\|y(x_n + h) - y_n\| \leq Kh^{p+1}$$

δηλαδή αν τα αναπτύγματα Taylor της ακριβούς λύσης $y(x_n + h)$ και της αριθμητικής λύσης y_{n+1} συμπίπτουν για όλους τους όρους συμπεριλαμβανομένου και του όρου h^p .

Αυτή η ταύτιση οδηγεί σε συνθήκες που περιλαμβάνουν τους συντελεστές a_{ij}, c_i, b_i της μεθόδου που ονομάζονται συνθήκες τάξης (order conditions). Ο προσδιορισμός των συνθηκών τάξης γίνεται με την βοήθεια των κανόνων του διαφορικού λογισμού. Η διαδικασία γίνεται περίπλοκη όσο αυξάνεται η τάξη. Στις ενότητες που ακολουθούν θα δείξουμε πως προκύπτουν οι συνθήκες τάξης για άμεσες μεθόδους έως και έκτης τάξης.

2.3.1 Άμεσες μέθοδοι δευτερης τάξης

Αναπτύσσουμε κατα Taylor την αναλυτική λύση

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + O(h^4) \quad (2.8)$$

- Για την πρώτη παράγωγο, από την διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$y'(x) = f(x, y)$$

- Για την δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' \\ &= \frac{d}{dx}f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}f(x, y)\frac{dy}{dx} \\ &= f_x + f_y f \end{aligned}$$

- Για την τρίτη παράγωγο έχουμε

$$\begin{aligned}
y^{(3)}(x) &= (y''(x))' \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \\
&= \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y} f \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right) f + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{dx} f \\
&= f_{xx} + f_{yx} f + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_y + \frac{\partial}{\partial y} f_y \frac{dy}{dx} \right) f + f_y (f_x + f_y f) \\
&= f_{xx} + f_{yx} f + (f_{xy} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f) \\
&= f_{xx} + f_{yx} f + f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \\
&= f_{xx} + 2f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην (2.8) και έχουμε

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6} (f_{xx} + 2f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f) + O(h^4) \quad (2.9)$$

Θεωρούμε μια μέθοδο Runge Kutta με δυο στάδια

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + ha_{21} k_1)
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \quad (2.10)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών για το k_2

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + ha_{21} k_1) \\
&= f + c_2 h \frac{\partial f}{\partial x} + ha_{21} k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \\
&\quad + \frac{1}{2} (c_2 h)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (ha_{21} k_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (c_2 h)(ha_{21} k_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + O(h^3) \\
&= f + c_2 h f_x + ha_{21} k_1 f_y \\
&\quad + \frac{1}{2} (c_2 h)^2 f_{xx} + \frac{1}{2} (ha_{21} k_1)^2 f_{yy} + (c_2 h)(ha_{21} k_1) f_{xy} + O(h^3)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην (2.10) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) & (2.11) \\
 &= y_n + hb_1 f + hb_2(f + c_2 h f_x + ha_{21} k_1 f_y + \frac{1}{2}(c_2 h)^2 f_{xx} + \frac{1}{2}(ha_{21} k_1)^2 f_{yy} \\
 &\quad + (c_2 h)(ha_{21} k_1) f_{xy} + O(h^3)) \\
 &= y_n + h(b_1 + b_2) f + h^2 b_2 (hc_2 f_x + ha_{21} k_1 f_y) + \frac{1}{2} h^3 b_2 (c_2^2 f_{xx} + 2c_2 a_{21} f f_{xy} \\
 &\quad + a_{21}^2 f^2 f_{yy}) + O(h^4)
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (2.9) και (2.11) εκφράζουν την αναλυτική και την αριθμητική λύση αντίστοιχα οπότε προκύπτουν οι εξής συνθήκες

- για τους συντελεστές του h

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (2.12)$$

- για τους συντελεστές του h^2

$$b_2 c_2 = \frac{1}{2}, b_2 + a_{21} = \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

Οι συντελεστές του h^3 δεν μπορούν να παράγουν συνθήκη καθώς δίνονται πεπλεγμένα με τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης, τόσο στην αναλυτική όσο και στην αριθμητική λύση.

Οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) ονομάζονται εξισώσεις τάξης. Η μέθοδος Heun επάληθευει τις εξισώσεις δεύτερης τάξης.

2.3.2 Άμεσες μέθοδοι τρίτης τάξης

Αναπτύσσουμε κατα Taylor την αναλυτική λύση

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5) \quad (2.14)$$

Για την τέταρτη παράγωγο έχουμε

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) &= (y^{(3)}(x))' \\ &= \frac{d}{dx}(f_{xx} + 2f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f) \\ &= \frac{d}{dx}f_{xx} + 2\frac{d}{dx}(f_{yx}f) + \frac{d}{dx}(f_{yy}f^2) + \frac{d}{dx}(f_y f_x) + \frac{d}{dx}(f_y^2 f) \end{aligned}$$

Οι παραπάνω παράγωγοι υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f_{xx} &= \frac{\partial f}{\partial x}f_{xx} + \frac{\partial f}{\partial y}f_{xx} \frac{dy}{dx} \\ &= f_{xxx} + f_{xxy}f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_{yx}f) &= \left(\frac{d}{dx}f_{yx}\right)f + f_{yx} \frac{df}{dx} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}f_{yx} \frac{dy}{dx}\right)f + f_{yx}(f_x + f_y f) \\ &= (f_{xyx} + f_{yyx}f)f + f_{yx}(f_x + f_y f) \\ &= f_{xyx}f + f_{yyx}f^2 + f_{yx}f_x + f_{yx}f_y f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_{yy}f^2) &= \left(\frac{d}{dx}f_{yy}\right)f^2 + f_{yy} \frac{d}{dx}(f^2) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f_{yy} + \frac{\partial}{\partial y}f_{yy} \frac{dy}{dx}\right)f^2 + f_{yy}2f \frac{df}{dx} \\ &= (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2f_{yy}f(f_x + f_y f) \\ &= f_{xyy}f^2 + f_{yyy}f^3 + 2f_{yy}f_x f + 2f_{yy}f_y f^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f_y f_x) &= \left(\frac{d}{dx} f_x\right) f_y + f_x \left(\frac{d}{dx} f_y\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_x \frac{dy}{dx}\right) f_y + f_x \left(\frac{\partial}{\partial x} f_y + \frac{\partial}{\partial y} f_y \frac{dy}{dx}\right) \\
&= (f_{xx} + f_{yx} f) f_y + f_x (f_{xy} + f_{yy} f) \\
&= f_{xx} f_y + f_{yx} f f_y + f_x f_{xy} + f_x f_{yy} f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f_y^2 f) &= \left(\frac{d}{dx} f_y^2\right) f + f_y^2 \frac{df}{dx} \\
&= 2f_y \left(\frac{d}{dx} f_y\right) f + f_y^2 (f_x + f_y f) \\
&= 2f_y \left(\frac{\partial}{\partial x} f_y + \frac{\partial}{\partial y} f_y \frac{dy}{dx}\right) f + f_y^2 (f_x + f_y f) \\
&= 2f_y (f_{xy} + f_{yy} f) f + f_y^2 (f_x + f_y f) \\
&= 2f_y f_{xy} f + 2f_{yy} f^2 f_y + f_y^2 f_x + f_y^3 f
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω παραγώγους στην εξίσωση της $y^{(4)}(x)$ προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}
y^{(4)}(x) &= f_{xxx} + f_{xxy} f \\
&\quad + f_{xyx} f + f_{yyx} f^2 + f_{yx} f_x + f_{yx} f_y f \\
&\quad + f_{xyy} f^2 + f_{yyy} f^3 + 2f_{yy} f_x f + 2f_{yy} f_y f^2 \\
&\quad + f_{xx} f_y + f_{yx} f f_y + f_x f_{xy} + f_x f_{yy} f \\
&\quad + 2f_y f_{xy} f + 2f_{yy} f^2 f_y + f_y^2 f_x + f_y^3 f \\
&= f_{xxx} + 3f_{xxy} f + 3f_{xyy} f^2 + f_{yyy} f^3 + 3f_{yx} f_x + 5f_{yx} f_y f \\
&\quad + 3f_{yy} f_x f + 4f_{yy} f_y f^2 + f_{xx} f_y + f_y^2 f_x + f_y^3 f
\end{aligned}$$

Αρα η εξίσωση (2.14) γίνεται :

$$\begin{aligned}
y(x_n + h) &= y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2!} (f_x + f_y f) \\
&\quad + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f) \\
&\quad + \frac{h^4}{4!} (3f_{yy} f_x f + 4f_{yy} f_y f^2 + f_{xx} f_y + f_y^2 f_x + f_y^3 f) \\
&\quad + O(h^5)
\end{aligned}$$

(2.15)

Θεωρούμε μια μέθοδο Runge Kutta με τρία στάδια

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1) \\ k_3 &= f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) \quad (2.16)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών για τα k_2 και k_3

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1) \\ &= f + c_2h \frac{\partial f}{\partial x} + ha_{21}k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_2h)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(ha_{21}k_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (c_2h)(ha_{21}k_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &\quad + \frac{1}{3!}(c_2h)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{3!}(ha_{21}k_1)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_2h)^2(ha_{21}k_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}(c_2h)(ha_{21}k_1)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(h^4) \\ &= f + c_2hf_x + ha_{21}k_1f_y \\ &\quad + \frac{1}{2}c_2^2h^2f_{xx} + \frac{1}{2}h^2a_{21}^2k_1^2f_{yy} + c_2h^2a_{21}k_1f_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{6}c_2^3h^3f_{xxx} + \frac{1}{6}h^3a_{21}^3k_1^3f_{yyy} + \frac{1}{2}c_2^2h^3a_{21}k_1f_{xxy} + \frac{1}{2}c_2h^3a_{21}^2k_1^2f_{xyy} \\ &\quad + O(h^4) \end{aligned} \quad (2.17)$$

και

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)) \\ &= f + c_3h \frac{\partial f}{\partial x} + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_3h)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}h^2(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (c_3h)h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &\quad + O(h^3) \\ &= f + c_3hf_x + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)f_y \\ &\quad + \frac{1}{2}c_3^2h^2f_{xx} + \frac{1}{2}h^2(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^2f_{yy} + c_3h^2(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)f_{xy} \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε στην Runge Kutta τριών σταδίων (2.16) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) \\
&= y_n + hb_1f + hb_2(f + c_2hf_x + ha_{21}k_1f_y) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_2^2h^2f_{xx} + \frac{1}{2}h^2a_{21}^2k_1^2f_{yy} + c_2h^2a_{21}k_1f_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{6}c_2^3h^3f_{xxx} + \frac{1}{6}h^3a_{21}^3k_1^3f_{yyy} + \frac{1}{2}c_2^2h^3a_{21}k_1f_{xxy} + \frac{1}{2}c_2h^3a_{21}^2k_1^2f_{xyy}) \\
&\quad + + hb_2(f + c_3hf_x + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)f_y) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_3^2h^2f_{xx} + \frac{1}{2}h^2(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^2f_{yy} + c_3h^2(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)f_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{6}c_3^3h^3f_{xxx} + \frac{1}{6}h^3(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^3f_{yyy} + \frac{1}{2}c_3^2h^3(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)f_{xxy} \\
&\quad + \frac{1}{2}c_3h^3(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^2f_{xyy})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

όπου αν θέσουμε $k_1 = f$ και k_2 από την (2.17) προκύπτει η αριθμητική λύση

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(b_1 + b_2 + b_3)f \\
&\quad + h^2((b_2c_2 + b_3c_3)f_x + (a_{21}b_2 + (a_{31} + a_{32})b_3)ff_y) \\
&\quad + \frac{h^3}{2}((b_2c_2^2 + b_3c_3^2)f_{xx} + (a_{21}^2b_2 + (a_{31} + a_{32})^2b_3)f^2f_{yy} \\
&\quad + 2a_{32}b_3c_2f_xf_y + 2a_{21}a_{32}b_3f_y^2 \\
&\quad + 2(a_{21}b_2c_2 + (a_{31} + a_{32})b_3c_3)f_{yx})f + O(h^3)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Εξισώνοντας την αναλυτική λύση με την αριθμητική (εξισώσεις (2.15) και (2.19) έχουμε:

- για τους συντελεστές του $h f$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \tag{2.20}$$

- για τους συντελεστές του $h^2 f_x$

$$b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \tag{2.21}$$

- για τους συντελεστές του $h^2 ff_x$

$$b_1a_{21} + (a_{31} + a_{32})b_3 = \frac{1}{2} \tag{2.22}$$

- για τους συντελεστές του $h^3 f_{xx}$

$$\frac{1}{2}(b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2) = \frac{1}{6} \quad (2.23)$$

- για τους συντελεστές του $h^3 f_{yy} f^2$

$$\frac{1}{2}(b_2 a_{21}^2 + (a_{31} + a_{32})^2 b_3) = \frac{1}{6} \quad (2.24)$$

- για τους συντελεστές του $h^3 f_x f_y$

$$a_{32} b_3 c_2 = \frac{1}{6} \quad (2.25)$$

- για τους συντελεστές του $h^3 f_y^2$

$$a_{21} a_{32} b_3 = \frac{1}{6} \quad (2.26)$$

- για τους συντελεστές του $h^3 f_{xy} f$

$$a_{21} b_2 c_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 c_3 = \frac{2}{6} \quad (2.27)$$

Η συνθήκη δευτερης τάξης (2.21) είναι ισοδύναμη με την (2.22) . Για την τρίτη τάξη είναι ισοδύναμες οι συνθήκες (2.23), (2.24), (2.27) ενώ ,τέλος, η συνθήκη (2.25) είναι ισοδύναμη με την (2.26). Καταλήγουμε να έχουμε τις εξής συνθήκες:

- 1η τάξη

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

- 2η τάξη

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

- 3η τάξη

$$\begin{aligned} (b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2) &= \frac{1}{3} \\ a_{32} b_3 c_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Από τις συνθήκες γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned} c_2 &= a_{21} \\ c_3 &= a_{31} + a_{32} \end{aligned}$$

Προκύπτουν τέσσερις εξισώσεις από τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε τα c_i , τα b_i και έναν από τους συντελεστές a_{31}, a_{32} . Δεδομένου ότι οι άγνωστοι συντελεστές είναι έξι θέτουμε, για κάποιους από αυτούς, τιμές που λειτουργούν ως απλοποιητικές παράδοχές και προκύπτουν ανάλογα οι διάφορες γνωστές μέθοδοι τρίτης τάξης.

2.3.3 Άμεσες μέθοδοι τέταρτης τάξης

Θεωρούμε μια μέθοδο Runge Kutta με τέσσερα στάδια

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3))\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) \quad (2.28)$$

Έργαζόμενοι αντίστοιχα με τις περιπτώσεις για τα δύο και τρία στάδια προκύπτουν οι συνθήκες έως και τρίτης τάξης

- 1η τάξη

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

- 2η τάξη

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2} \quad (2.29)$$

- 3η τάξη

$$\begin{aligned}b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 &= \frac{1}{3} \\a_{32} b_3 c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

ενώ για την τέταρτη τάξη ισχύει:

- 4η τάξη

$$\begin{aligned}b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 &= \frac{1}{4} \\a_{32} b_3 c_3 c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) &= \frac{1}{8} \\a_{32} b_3 c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) &= \frac{1}{12} \\a_{32} b_4 c_2 a_{43} &= \frac{1}{24}\end{aligned} \quad (2.30)$$

Από τις συνθήκες γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned}c_2 &= a_{21} \\c_3 &= a_{31} + a_{32} \\c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43}\end{aligned}$$

Η κατασκευή μίας μεθόδου τέταρτης τάξης απαιτεί την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (2.29), (2.30). Αν δεχτούμε τις συνθήκες γραμμής προκύπτει ότι πρέπει να υπολογίσουμε ένα συντελεστή για το δεύτερο στάδιο, δύο για το τρίτο στάδιο και γενικά $s - 1$ συντελεστές για το s στάδιο. Επιπλέον υπολογίζουμε και τα b_i οπότε το πλήθος των συντελεστών, συνολικά, είναι

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (s - 1) + s = \frac{s(s + 1)}{2} \quad (2.31)$$

Έτσι για τα $s = 4$ στάδια έχουμε να υπολογίσουμε δέκα συντελεστές από τις οκτώ εξισώσεις του συστήματος (2.29), (2.30) με αποτέλεσμα δύο ελεύθερες παραμέτρους.

Ο *Butcher*(1963)[1]έδωσε την ακόλουθη απλοποιητική παραδοχή για την ευκολότερη επίλυση των συνθηκών.

$$\sum_{i=1}^s b_i a_{ij} = b_j(1 - c_j), \quad j = 2, 3, 4. \quad (2.32)$$

Για $j = 4$:

$$\begin{aligned}0 &= b_4(1 - c_4) \\1 &= c_4\end{aligned}$$

Για $j = 3$:

$$b_4 a_{43} = b_3(1 - c_3)$$

Για $j = 2$:

$$b_3 a_{32} + b_4 a_{42} = b_2(1 - c_2)$$

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω η τελευταία από τις συνθήκες τρίτης τάξης καθώς και οι δύο τελευταίες συνθήκες τέταρτης τάξης προκύπτουν από τις υπόλοιπες ,

όπως φαίνεται παρακάτω :

$$\begin{aligned}
 a_{32}b_3c_2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3) &= (a_{32}b_3 + a_{42}b_4)c_2 + a_{43}b_4c_3 \\
 &= b_2(1 - c_2)c_2 + b_3(1 - c_3)c_3 \\
 &= b_2c_2 + b_3c_3 - b_2c_2^2 - b_3c_3^2 \\
 &= \frac{1}{2} - b_4c_4 - \frac{1}{3} + b_4c_4^2 \\
 &= \frac{1}{6} + b_4c_4(c_4 - 1) \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{32}b_3c_2^2 + b_4(a_{42}c_2^2 + a_{43}c_3^2) &= a_{32}b_3c_2^2 + b_4a_{42}c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 \\
 &= (a_{32}b_3 + b_4a_{42})c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 \\
 &= b_2(1 - c_2)c_2^2 + b_3(1 - c_3)c_3^2 \\
 &= b_2c_2^2 - b_2c_2^3 + b_3c_3^2 - b_3c_3^3 \\
 &= \frac{1}{3} - b_4c_4^2 - \frac{1}{4} + b_4c_4^3 \\
 &= \frac{1}{12} - b_4c_4^2(c_4 - 1) \\
 &= \frac{1}{12} \\
 a_{32}b_4c_2a_{43} &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{32}b_4c_2a_{43} &= b_3(1 - c_3)a_{32}c_2 \\
 &= b_3a_{32}c_2 - b_3a_{32}c_2c_3 \\
 &= b_3a_{32}c_2 - \frac{1}{8} + b_4c_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3) \\
 &= b_3a_{32}c_2 - \frac{1}{8} + b_4a_{42}c_2 + b_4a_{43}c_3 \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες εξισώσεις θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα, το

οποίο είναι γραμμικό ως προς τα b_i

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 1 \\
 b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 &= \frac{1}{2} \\
 b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 &= \frac{1}{3} \\
 b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1 - 2c_2 - 2c_3 + 6c_2c_3}{12c_2c_3} \\
 b_2 &= \frac{2c_3 - 1}{12c_2(c_2 - 1)(c_2 - c_3)} \\
 b_3 &= \frac{1 - 2c_2}{12c_3(c_2 - c_3)(c_3 - 1)} \\
 b_4 &= \frac{3 - 4c_3 + c_2(6c_3 - 4)}{12(c_2 - 1)(c_3 - 1)}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς c_2, c_3 θέτοντας $c_4 = 1$ και θεωρώντας $c_2c_3 \neq 0, c_2 \neq 1, c_3 \neq 1$ οπότε:

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= c_2 \\
 a_{31} &= c_3 - \frac{c_3(c_2 - c_3)}{c_2(4c_2 - 2)} \\
 a_{32} &= \frac{c_3(c_2 - c_3)}{c_2(4c_2 - 2)} \\
 a_{41} &= \frac{2 - 5c_3 + 4c_3^2 + 4c_2^2(3c_3^2 - 3c_3 + 1) - 3c_2(4c_3^2 - 5c_3 + 2)}{2c_2c_3(3 - 4c_3 + c_2(6c_3 - 4))} \\
 a_{42} &= \frac{2 + c_2^2 - 5c_3 + 4c_3^2 + c_2(4c_3^2 + 5c_3 - 3)}{2c_2(c_2 - c_3)(3 - 4c_3 + c_2(6c_3 - 4))} \\
 a_{43} &= \frac{(c_3 - 1)(2c_3^2 - 3c_2 + 1)}{c_3(c_2 - c_3)(3 - 4c_3 + c_2(6c_3 - 4))}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Για διαφορετικές τιμές των c_2, c_3 προκύπτουν οι διάφορες μέθοδοι Runge Kutta τέταρτης τάξης.

2.3.4 Άμεσες μέθοδοι πεμπτης τάξης

Θεωρούμε μια μέθοδο Runge Kutta με έξι στάδια

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\
 k_5 &= f(x_n + c_5 h, y_n + h(a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{53} k_3 + a_{54} k_4)) \\
 k_6 &= f(x_n + c_6 h, y_n + h(a_{61} k_1 + a_{62} k_2 + a_{63} k_3 + a_{64} k_4 + a_{65} k_5))
 \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 + b_5 k_5 + b_6 k_6) \quad (2.36)$$

Εργαζόμενοι ανάλογα με τις περιπτώσεις για τα στάδια δύο, τρία και τέσσερα παράγουμε τις παρακάτω οκτώ συνθήκες

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 &= 1 \\
 b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 + b_5 c_5 + b_6 c_6 &= \frac{1}{2} \\
 b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 + b_5 c_5^2 + b_6 c_6^2 &= \frac{1}{3} \\
 a_{32} b_3 c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 \\
 + a_{54} c_4) + b_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) &= \frac{1}{6} \\
 b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 + b_5 c_5^3 + b_6 c_6^3 &= \frac{1}{4} \\
 a_{32} b_3 c_3 c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 c_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 + a_{54} c_4) \\
 + b_6 c_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) &= \frac{1}{8} \\
 a_{32} b_3 c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) + b_5 (a_{52} c_2^2 + a_{53} c_3^2 + a_{54} c_4^2) \\
 + b_6 (a_{62} c_2^2 + a_{63} c_3^2 + a_{64} c_4^2 + a_{65} c_5^2) &= \frac{1}{12} \\
 a_{32} b_4 a_{43} c_2 + b_5 (a_{32} a_{53} c_2 + a_{42} a_{54} c_2 + a_{43} a_{54} c_3) \\
 + b_6 (a_{32} a_{63} c_2 + a_{42} a_{64} c_2 + a_{52} a_{65} c_2 + a_{43} a_{64} c_3 + a_{53} a_{65} c_3 + a_{54} a_{65} c_4) &= \frac{1}{24}
 \end{aligned} \quad (2.37)$$

και επιπλέον οι συνθήκες για την πέμπτη τάξη είναι :

$$\begin{aligned}
& a_{42}a_{54}a_{65}b_6c_2 + a_{32}(a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 \\
& \quad + a_{53}a_{65}b_6)c_2 + a_{43}a_{54}a_{65}b_6c_3 = \frac{1}{120} \\
& a_{54}a_{65}b_6c_4c_6 + c_3(a_{43}a_{54}b_5c_5 + a_{43}a_{64}b_6c_6 + a_{53}a_{65}b_6c_6) \\
& \quad + c_2(a_{42}a_{54}b_5c_5 + a_{42}a_{64}b_6c_6 + a_{52}a_{65}b_6c_6 \\
& \quad + a_{32}(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6)) = \frac{1}{30} \\
& a_{32}b_3c_2c_3^2 + a_{42}b_4c_2c_4^2 + a_{43}b_4c_3c_4^2 + a_{52}b_5c_2c_5^2 \\
& \quad + a_{53}b_5c_3c_5^2 + a_{54}b_5c_4c_5^2 + a_{62}b_6c_2c_6^2 + a_{63}b_6c_3c_6^2 \\
& \quad + a_{64}b_6c_4c_6^2 + a_{65}b_6c_5c_6^2 = \frac{1}{10} \\
& a_{65}b_6c_5^2c_6 + c_2^2(a_{32}b_3c_3 + a_{42}b_4c_4 + a_{52}b_5c_5 + a_{62}b_6c_6) \\
& \quad c_3^2(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6) + c_4^2(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6) = \frac{1}{15} \\
& (a_{32}b_3 + a_{42}b_4 + a_{52}b_5 + a_{62}b_6)c_2^3 + (a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_3^3 \\
& \quad + (a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_4^3 + a_{65}b_6c_5^3 = \frac{1}{20} \\
& a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_2c_3 + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_2c_4 \\
& \quad + a_{43}a_{54}b_5c_3c_4 + a_{43}a_{64}b_6c_3c_4 + a_{52}a_{65}b_6c_2c_5 \\
& \quad + a_{53}a_{65}b_6c_3c_5 + a_{54}a_{65}b_6c_4c_5 = \frac{1}{20} \\
& a_{32}^2b_3c_2^2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)^2 + b_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)^2 \\
& \quad + b_6(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)^2 = \frac{1}{20} \\
& (a_{42}a_{54}b_5 + a_{42}a_{64}b_6 + a_{52}a_{65}b_6 + a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6))c_2^2 \\
& \quad + (a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 + a_{53}a_{65}b_6)c_3^2 + a_{54}a_{65}b_6c_4^2 = \frac{1}{60} \\
& b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

(2.38)

Από τις συνθήκες γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned}c_2 &= a_{21} \\c_3 &= a_{31} + a_{32} \\c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43} \\c_5 &= a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} \\c_6 &= a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65}\end{aligned}\tag{2.39}$$

Η κατασκευή μίας μεθόδου πεμπτης τάξης απαιτεί την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (2.37), (2.38). Αν δεχτούμε τις συνθήκες γραμμής (2.39) και επιπλέον υπολογίζουμε και τα b_i το πλήθος των συντελεστών, σύμφωνα με την (1.24), είναι 15. Απαιτούνται έξι στάδια ώστε με τις 17 εξισώσεις του συστήματος (2.37), (2.38) να υπολογίσουμε τους 15 συντελεστές, ενώ έχουμε και δύο ελεύθερες παραμέτρους.

Χρησιμοποιούμε τις απλοποιητικές παραδοχές του *Butcher*(2.32) για να εντοπίσουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις οπότε από τις υπόλοιπες προκύπτει το παρακάτω γραμμικό, ως προς b_i , σύστημα:

$$\begin{aligned}b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 &= 1 \\b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 + b_5c_5 + b_6c_6 &= \frac{1}{2} \\b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 + b_5c_5^2 + b_6c_6^2 &= \frac{1}{3} \\b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 + b_5c_5^3 + b_6c_6^3 &= \frac{1}{4} \\b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 &= \frac{1}{5}\end{aligned}\tag{2.40}$$

με $b_2 = 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-1}{60c_3c_4c_5c_6}(-12 + 15c_3 + 15c_4 - 20c_3c_4 + 15c_5 - 20c_3c_5 - 20c_4c_5 \\
&\quad + 30c_3c_4c_5 + 15c_6 - 20c_3c_6 - 20c_4c_6 + 30c_3c_4c_6 - 20c_5c_6 + 30c_3c_5c_6 \\
&\quad + 30c_4c_5c_6 - 60c_3c_4c_5c_6) \\
b_3 &= -\frac{12 - 15c_4 - 15c_5 + 20c_4c_5 - 15c_6 + 20c_4c_6 + 20c_5c_6 - 30c_4c_5c_6}{60c_3(-c_3 + c_4)(-c_3 + c_5)(-c_3 + c_6)} \\
b_4 &= -\frac{-12 + 15c_3 + 15c_5 - 20c_3c_5 + 15c_6 - 20c_3c_6 - 20c_5c_6 + 30c_3c_5c_6}{60c_4(-c_3 + c_4)(c_4 - c_5)(c_4 - c_6)} \\
b_5 &= -\frac{-12 + 15c_3 + 15c_4 - 20c_3c_4 + 15c_6 - 20c_3c_6 - 20c_4c_6 + 30c_3c_4c_6}{60c_5(-c_3 + c_5)(-c_4 + c_5)(c_5 - c_6)} \\
b_6 &= -\frac{(-12 + 15c_3 + 15c_4 - 20c_3c_4 + 15c_5 - 20c_3c_5 - 20c_4c_5 + 30c_3c_4c_5}{60(c_4 - c_6)c_6(-c_3 + c_6)(-c_5 + c_6)}
\end{aligned}$$

(2.41)

Θεωρώντας $c_3, c_4, c_5, c_6, \neq 0$ και $c_2 \neq c_3 \neq c_4 \neq c_5 \neq c_6$ για διαφορετικές τιμές των c_3, c_4, c_5, c_6 προκύπτουν οι διάφορες μέθοδοι Runge Kutta πέμπτης τάξης.

2.3.5 Άμεσες μέθοδοι έκκτης τάξης

Θεωρούμε μια μέθοδο Runge Kutta με επτά στάδια

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\
 k_5 &= f(x_n + c_5 h, y_n + h(a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{53} k_3 + a_{54} k_4)) \\
 k_6 &= f(x_n + c_6 h, y_n + h(a_{61} k_1 + a_{62} k_2 + a_{63} k_3 + a_{64} k_4 + a_{65} k_5)) \\
 k_7 &= f(x_n + c_7 h, y_n + h(a_{71} k_1 + a_{72} k_2 + a_{73} k_3 + a_{74} k_4 + a_{75} k_5 + a_{76} k_6))
 \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 + b_5 k_5 + b_6 k_6 + b_7 k_7) \quad (2.42)$$

Εργαζόμενοι ανάλογα με τις περιπτώσεις για τα στάδια δύο, τρία, τέσσερα και πέντε παράγουμε τις παρακάτω 17 συνθήκες

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 &= 1 \\
 b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 + b_5 c_5 + b_6 c_6 + b_7 c_7 &= \frac{1}{2} \\
 b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 + b_5 c_5^2 + b_6 c_6^2 + b_7 c_7^2 &= \frac{1}{3} \\
 a_{32} b_3 c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 + a_{54} c_4) \\
 + b_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) + b_7 (a_{72} c_2 + a_{73} c_3 + a_{74} c_4 + a_{75} c_5 + a_{76} c_6) &= \frac{1}{6} \\
 b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 + b_5 c_5^3 + b_6 c_6^3 + b_7 c_7^3 &= \frac{1}{4} \\
 a_{32} b_3 c_3 c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) + b_5 c_5 (a_{52} c_2 + a_{53} c_3 + a_{54} c_4) \\
 + b_6 c_6 (a_{62} c_2 + a_{63} c_3 + a_{64} c_4 + a_{65} c_5) + b_7 c_7 (a_{72} c_2 + a_{73} c_3 + a_{74} c_4 + a_{75} c_5) &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{32}b_3c_2^2 + b_4(a_{42}c_2^2 + a_{43}c_3^2) + b_5(a_{52}c_2^2 + a_{53}c_3^2 + a_{54}c_4^2) \\
& + b_6(a_{62}c_2^2 + a_{63}c_3^2 + a_{64}c_4^2 + a_{65}c_5^2) + b_7(a_{72}c_2^2 + a_{73}c_3^2 + a_{74}c_4^2 + a_{75}c_5^2 + a_{76}c_6^2) = \frac{1}{12} \\
& a_{32}b_4a_{43}c_2 + b_5(a_{32}a_{53}c_2 + a_{42}a_{54}c_2 + a_{43}a_{54}c_3) \\
& + b_6(a_{32}a_{63}c_2 + a_{42}a_{64}c_2 + a_{52}a_{65}c_2 + a_{43}a_{64}c_3 + a_{53}a_{65}c_3 + a_{54}a_{65}c_4) \\
& + b_7(a_{32}a_{73}c_2 + a_{42}a_{74}c_2 + a_{52}a_{75}c_2 + a_{62}a_{76}c_2 + a_{63}a_{76}c_3 + a_{43}a_{74}c_3 \\
& + a_{53}a_{75}c_3 + a_{54}a_{75}c_4 + a_{64}a_{76}c_4 + a_{65}a_{76}c_5) = \frac{1}{24} \\
& a_{42}a_{54}a_{65}b_6c_2 + a_{32}(a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 \\
& + a_{53}a_{65}b_6)c_2 + a_{43}a_{54}a_{65}b_6c_3 = \frac{1}{120} \\
& a_{54}a_{65}b_6c_4c_6 + c_3(a_{43}a_{54}b_5c_5 + a_{43}a_{64}b_6c_6 + a_{53}a_{65}b_6c_6) \\
& + c_2(a_{42}a_{54}b_5c_5 + a_{42}a_{64}b_6c_6 + a_{52}a_{65}b_6c_6 \\
& + a_{32}(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6)) = \frac{1}{30} \\
& a_{32}b_3c_2c_3^2 + a_{42}b_4c_2c_4^2 + a_{43}b_4c_3c_4^2 + a_{52}b_5c_2c_5^2 \\
& + a_{53}b_5c_3c_5^2 + a_{54}b_5c_4c_5^2 + a_{62}b_6c_2c_6^2 + a_{63}b_6c_3c_6^2 \\
& + a_{64}b_6c_4c_6^2 + a_{65}b_6c_5c_6^2 = \frac{1}{10} \\
& a_{65}b_6c_5^2c_6 + c_2^2(a_{32}b_3c_3 + a_{42}b_4c_4 + a_{52}b_5c_5 + a_{62}b_6c_6) \\
& c_3^2(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6) + c_4^2(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6) = \frac{1}{15} \\
& (a_{32}b_3 + a_{42}b_4 + a_{52}b_5 + a_{62}b_6)c_2^3 + (a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_3^3 \\
& + (a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_4^3 + a_{65}b_6c_5^3 = \frac{1}{20} \\
& a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6)c_2c_3 + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6)c_2c_4 \\
& + a_{43}a_{54}b_5c_3c_4 + a_{43}a_{64}b_6c_3c_4 + a_{52}a_{65}b_6c_2c_5 \\
& + a_{53}a_{65}b_6c_3c_5 + a_{54}a_{65}b_6c_4c_5 = \frac{1}{20} \\
& a_{32}^2b_3c_2^2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)^2 + b_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)^2 \\
& + b_6(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)^2 = \frac{1}{20} \\
& (a_{42}a_{54}b_5 + a_{42}a_{64}b_6 + a_{52}a_{65}b_6 + a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6))c_2^2 \\
& + (a_{43}a_{54}b_5 + a_{43}a_{64}b_6 + a_{53}a_{65}b_6)c_3^2 + a_{54}a_{65}b_6c_4^2 = \frac{1}{60} \\
& 40 \quad b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

και επιπλέον οι συνθήκες για την έκτη τάξη είναι :

$$\begin{aligned}
& a_{42}a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_2 + a_{32}(a_{53}a_{65}a_{76}b_7 \\
& + a_{43}(a_{54}a_{65}b_6 + a_{54}a_{75}b_7 + a_{64}a_{76}b_7))c_2 \\
& + a_{43}a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_3 = \frac{1}{720}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{32}a_{43}b_4c_2(a_{42}c_2 + a_{43}c_3) + b_5(a_{32}a_{53}c_2 + a_{42}a_{54}c_2 + a_{43}a_{54}c_3) \\
& (a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4) + b_6(a_{32}a_{63}c_2 + a_{42}a_{64}c_2 + a_{52}a_{65}c_2 + a_{43}a_{64}c_3 \\
& + a_{53}a_{65}c_3 + a_{54}a_{65}c_4)(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5) + b_7(a_{32}a_{73}c_2 \\
& + a_{42}a_{74}c_2 + a_{52}a_{75}c_2 + a_{62}a_{76}c_2 + a_{43}a_{74}c_3 + a_{53}a_{75}c_3 + a_{63}a_{76}c_3 \\
& + a_{54}a_{75}c_4 + a_{64}a_{76}c_4 + a_{65}a_{76}c_5)(a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6) = \frac{1}{72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_4c_7 + c_3(a_{53}a_{65}a_{76}b_7c_7 + a_{43}(a_{54}a_{65}b_6c_6 \\
& + a_{54}a_{75}b_7c_7 + a_{64}a_{76}b_7c_7)) + c_2(a_{52}a_{65}a_{76}b_7c_7 + a_{42}(a_{54}a_{65}b_6c_6 \\
& + a_{54}a_{75}b_7c_7 + a_{64}a_{76}b_7c_7) + a_{32}(a_{53}a_{65}b_6c_6 + a_{53}a_{75}b_7c_7 \\
& + a_{63}a_{76}b_7c_7 + a_{43}(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7))) = \frac{1}{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{32}^2b_3c_2^3 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)(a_{42}c_2^2 + a_{43}c_3^2) + b_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4) \\
& (a_{52}c_2^2 + a_{53}c_3^2 + a_{54}c_4^2) + b_6(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5) \\
& (a_{62}c_2^2 + a_{63}c_3^2 + a_{64}c_4^2 + a_{65}c_5^2) + b_7(a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6) \\
& (a_{72}c_2^2 + a_{73}c_3^2 + a_{74}c_4^2 + a_{75}c_5^2 + a_{76}c_6^2) = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{65}a_{76}b_7c_5^2c_7 + c_4^2(a_{54}a_{65}b_6c_6 + a_{54}a_{75}b_7c_7 + a_{64}a_{76}b_7c_7) \\
& + c_2^2(a_{52}a_{65}b_6c_6 + a_{52}a_{75}b_7c_7 + a_{62}a_{76}b_7c_7 + a_{32}(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 \\
& + a_{63}b_6c_6 + a_{73}b_7c_7) + a_{42}(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7)) \\
& + c_3^2(a_{53}a_{65}b_6c_6 + a_{53}a_{75}b_7c_7 + a_{63}a_{76}b_7c_7 \\
& + a_{43}(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7)) = \frac{1}{72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{76}b_7c_6^3c_7 + c_2^3(a_{32}b_3c_3 + a_{42}b_4c_4 + a_{52}b_5c_5 + a_{62}b_6c_6 + a_{72}b_7c_7) \\
& + c_3^3(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6 + a_{73}b_7c_7) + c_4^3(a_{54}b_5c_5 \\
& + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7) + c_5^3(a_{65}b_6c_6 + a_{75}b_7c_7) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{65}a_{76}b_7c_5c_6c_7 + c_2(a_{52}a_{65}b_6c_5c_6 + a_{52}a_{75}b_7c_5c_7 \\
& + a_{62}a_{76}b_7c_6c_7 + a_{32}c_3(a_{43}b_4c_4 + a_{53}b_5c_5 + a_{63}b_6c_6 \\
& + a_{73}b_7c_7) + a_{42}c_4(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7)) + c_3(a_{63}a_{76}b_7c_6c_7 \\
& + a_{43}c_4(a_{54}b_5c_5 + a_{64}b_6c_6 + a_{74}b_7c_7) + a_{53}c_5(a_{65}b_6c_6 + a_{75}b_7c_7)) \\
& + c_4(a_{64}a_{76}b_7c_6c_7 + a_{54}c_5(a_{65}b_6c_6 + a_{75}b_7c_7)) = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{65}a_{76}b_7c_5c_7^2 + c_4(a_{54}a_{65}b_6c_6^2 + a_{54}a_{75}b_7c_7^2 + a_{64}a_{76}b_7c_7^2) \\
& + c_2(a_{52}a_{65}b_6c_6^2 + a_{52}a_{75}b_7c_7^2 + a_{62}a_{76}b_7c_7^2 + a_{32}(a_{43}b_4c_4^2 + a_{53}b_5c_5^2 \\
& + a_{63}b_6c_6^2 + a_{73}b_7c_7^2) + a_{42}(a_{54}b_5c_5^2 + a_{64}b_6c_6^2 + a_{74}b_7c_7^2)) \\
& + c_3(a_{53}a_{65}b_6c_6^2 + a_{53}a_{75}b_7c_7^2 + a_{63}a_{76}b_7c_7^2 + a_{43}(a_{54}b_5c_5^2 \\
& + a_{64}b_6c_6^2 + a_{74}b_7c_7^2)) = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{32}^2b_3c_2^2c_3 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)^2c_4 + b_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)^2c_5 + b_6(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 \\
& + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)^2c_6 + b_7(a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6)^2c_7 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{76}b_7c_6^2c_7^2 + c_2^2(a_{32}b_3c_3^2 + a_{42}b_4c_4^2 + a_{52}b_5c_5^2 + a_{62}b_6c_6^2 \\
& + a_{72}b_7c_7^2) + c_3^2(a_{43}b_4c_4^2 + a_{53}b_5c_5^2 + a_{63}b_6c_6^2 + a_{73}b_7c_7^2) \\
& + c_4^2(a_{54}b_5c_5^2 + a_{64}b_6c_6^2 + a_{74}b_7c_7^2) + c_5^2(a_{65}b_6c_6^2 + a_{75}b_7c_7^2) = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{76}b_7c_6c_7^3 + c_2(a_{32}b_3c_3^3 + a_{42}b_4c_4^3 + a_{52}b_5c_5^3 + a_{62}b_6c_6^3 \\
& + a_{72}b_7c_7^3) + c_3(a_{43}b_4c_4^3 + a_{53}b_5c_5^3 + a_{63}b_6c_6^3 + a_{73}b_7c_7^3) \\
& + c_4(a_{54}b_5c_5^3 + a_{64}b_6c_6^3 + a_{74}b_7c_7^3) + c_5(a_{65}b_6c_6^3 + a_{75}b_7c_7^3) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$b_2c_2^5 + b_3c_3^5 + b_4c_4^5 + b_5c_5^5 + b_6c_6^5 + b_7c_7^5 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
& a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_4c_6 + c_2(a_{52}a_{65}a_{76}b_7c_6 + a_{32}(a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 \\
& + a_{74}b_7)c_4 + a_{53}a_{65}b_6c_5 + a_{53}a_{75}b_7c_5 + a_{63}a_{76}b_7c_6) \\
& + a_{42}(a_{54}a_{65}b_6c_5 + a_{54}a_{75}b_7c_5 + a_{64}a_{76}b_7c_6)) \\
& + c_3(a_{53}a_{65}a_{76}b_7c_6 + a_{43}(a_{54}(a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5 + a_{64}a_{76}b_7c_6)) = \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{65}a_{76}b_7c_5^2c_6 + c_2^2(a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6 + a_{73}b_7)c_3 \\
& + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)c_4 + a_{52}a_{65}b_6c_5 + a_{52}a_{75}b_7c_5 + a_{62}a_{76}b_7c_6) \\
& + c_3^2(a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)c_4 + a_{53}(a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5 \\
& + a_{63}a_{76}b_7c_6) + c_4^2(a_{54}a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5 + a_{64}a_{76}b_7c_6) = \frac{1}{90} \\
& a_{32}^2(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6 + a_{73}b_7)c_2^2 + (a_{54}b_5 + a_{64}b_6 \\
& + a_{74}b_7)(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)^2 + (a_{65}b_6 + a_{75}b_7)(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 \\
& + a_{54}c_4)^2 + a_{76}b_7(a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)^2 = \frac{1}{120} \\
& a_{65}a_{76}b_7c_5c_6^2 + c_2(a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6 + a_{73}b_7)c_3^2 \\
& + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)c_4^2 + a_{52}(a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5^2 + a_{62}a_{76}b_7c_6^2) \\
& + c_3(a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)c_4^2 + a_{53}(a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5^2 + a_{63}a_{76}b_7c_6^2) \\
& + c_4(a_{54}(a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5^2 + a_{64}a_{76}b_7c_6^2) = \frac{1}{60} \\
& (a_{32}b_3 + a_{42}b_4 + a_{52}b_5 + a_{62}b_6 + a_{72}b_7)c_2^4 \\
& + (a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6 + a_{73}b_7)c_3^4 + (a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)c_4^4 \\
& + (a_{65}b_6 + a_{75}b_7)c_5^4 + a_{76}b_7c_6^4 = \frac{1}{30} \\
& a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_4c_5 + c_2(a_{32}(a_{53}a_{65}b_6 + a_{53}a_{75}b_7 + a_{63}a_{76}b_7 \\
& + a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7))c_3 + a_{42}(a_{54}a_{65}b_6 + a_{54}a_{75}b_7 \\
& + a_{64}a_{76}b_7)c_4 + a_{52}a_{65}a_{76}b_7c_5) + c_3(a_{43}(a_{54}a_{65}b_6 + a_{54}a_{75}b_7 \\
& + a_{64}a_{76}b_7)c_4 + a_{53}a_{65}a_{76}b_7c_5) = \frac{1}{240} \\
& (a_{52}a_{65}b_6 + a_{52}a_{75}b_7 + a_{62}a_{76}b_7 + a_{32}(a_{43}b_4 + a_{53}b_5 + a_{63}b_6 + a_{73}b_7) \\
& + a_{42}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7))c_2^3 + (a_{53}a_{65}b_6 + a_{53}a_{75}b_7 \\
& + a_{63}a_{76}b_7 + a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7))c_3^3 + (a_{54}a_{65}b_6 \\
& + a_{54}a_{75}b_7 + a_{64}a_{76}b_7)c_4^3 + a_{65}a_{76}b_7c_5^3 = \frac{1}{120} \\
& (a_{52}a_{65}a_{76}b_7 + a_{42}(a_{54}a_{65}b_6 + a_{54}a_{75}b_7 + a_{64}a_{76}b_7) + a_{32}(a_{53}a_{65}b_6 \\
& + a_{53}a_{75}b_7 + a_{63}a_{76}b_7 + a_{43}(a_{54}b_5 + a_{64}b_6 + a_{74}b_7)))c_2^2 + (a_{53}a_{65}a_{76}b_7 \\
& + a_{43}(a_{54}a_{65}b_6 + a_{54}a_{75}b_7 + a_{64}a_{76}b_7))c_3^2 + a_{54}a_{65}a_{76}b_7c_4^2 = \frac{1}{360}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Από τις συνθήκες γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned}
 c_2 &= a_{21} \\
 c_3 &= a_{31} + a_{32} \\
 c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43} \\
 c_5 &= a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} \\
 c_6 &= a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65} \\
 c_7 &= a_{71} + a_{72} + a_{73} + a_{74} + a_{75} + a_{76}
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

Η κατασκευή μίας μεθόδου έκτης τάξης απαιτεί την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (2.43), (2.44). Αν δεχτούμε τις συνθήκες γραμμής (2.45) και επιπλέον υπολογίζουμε και τα b_i το πλήθος των συντελεστών, σύμφωνα με την (1.24), είναι 28. Απαιτούνται επτά στάδια ώστε με τις 20 εξισώσεις του συστήματος (2.43), (2.44) να υπολογίσουμε τους 28 συντελεστές, ενώ έχουμε και οκτώ ελεύθερες παραμέτρους. Χρησιμοποιούμε τις απλοποιητικές παραδοχές του *Butcher*(2.32) για να εντοπίσουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις οπότε από τις υπόλοιπες προκύπτει το παρακάτω γραμμικό, ως προς b_i , σύστημα:

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 &= 1 \\
 b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 + b_5c_5 + b_6c_6 + b_7c_7 &= \frac{1}{2} \\
 b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 + b_5c_5^2 + b_6c_6^2 + b_7c_7^2 &= \frac{1}{3} \\
 b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 + b_5c_5^3 + b_6c_6^3 + b_7c_7^3 &= \frac{1}{4} \\
 b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 + b_7c_7^4 &= \frac{1}{5} \\
 b_2c_2^5 + b_3c_3^5 + b_4c_4^5 + b_5c_5^5 + b_6c_6^5 + b_7c_7^5 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

με $b_2 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{60c_3c_4c_5c_6c_7}(-10 + 12c_5 + 12c_6 - 15c_5c_6 + 12c_7 - 15c_5c_7 - 15c_6c_7 \\
&\quad + 20c_5c_6c_7 + c_4(12 - 15c_7 + 5c_6(-3 + 4c_7) - 5c_5(3 - 4c_7 + c_6(-4 + 6c_7))) \\
&\quad + c_3(12 - 15c_6 - 15c_7 + 20c_6c_7 - 5c_5(3 - 4c_6 - 4c_7 + 6c_6c_7) + 5c_4(-3 + 4c_6 \\
&\quad + 4c_7 - 6c_6c_7 + 2c_5(2 - 3c_6 - 3c_7 + 6c_6c_7)))) \\
b_3 &= \frac{10 - 12c_6 - 12c_7 + 15c_6c_7 + c_5(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7)}{60c_3(c_3 - c_4)(c_3 - c_5)(c_3 - c_6)(c_3 - c_7)} \\
&\quad + \frac{c_4(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7 + 5c_5(3 - 4c_6 - 4c_7 + 6c_6c_7))}{60c_3(c_3 - c_4)(c_3 - c_5)(c_3 - c_6)(c_3 - c_7)} \\
b_4 &= \frac{10 - 12c_6 - 12c_7 + 15c_6c_7 + c_5(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7)}{60c_4(-c_3 + c_4)(c_4 - c_5)(c_4 - c_6)(c_4 - c_7)} \\
&\quad + \frac{c_3(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7 + 5c_5(3 - 4c_6 - 4c_7 + 6c_6c_7))}{60c_4(-c_3 + c_4)(c_4 - c_5)(c_4 - c_6)(c_4 - c_7)} \\
b_5 &= -\frac{10 - 12c_6 - 12c_7 + 15c_6c_7 + c_4(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7)}{60c_5(-c_3 + c_5)(-c_4 + c_5)(c_5 - c_6)(c_5 - c_7)} \\
&\quad + \frac{c_3(-12 + 15c_6 + 15c_7 - 20c_6c_7 + 5c_4(3 - 4c_6 - 4c_7 + 6c_6c_7))}{60c_5(-c_3 + c_5)(-c_4 + c_5)(c_5 - c_6)(c_5 - c_7)} \\
b_6 &= \frac{10 - 12c_5 - 12c_7 + 15c_5c_7 + c_4(-12 + 15c_5 + 15c_7 - 20c_5c_7)}{60c_6(-c_3 + c_6)(-c_4 + c_6)(-c_5 + c_6)(c_6 - c_7)} \\
&\quad + \frac{c_3(-12 + 15c_5 + 15c_7 - 20c_5c_7 + 5c_4(3 - 4c_5 - 4c_7 + 6c_5c_7))}{60c_6(-c_3 + c_6)(-c_4 + c_6)(-c_5 + c_6)(c_6 - c_7)} \\
b_7 &= \frac{10 - 12c_5 - 12c_7 + 15c_5c_7 + c_4(-12 + 15c_5 + 15c_7 - 20c_5c_7)}{60c_6(-c_3 + c_6)(-c_4 + c_6)(-c_5 + c_6)(c_6 - c_7)} \\
&\quad + \frac{c_3(-12 + 15c_5 + 15c_7 - 20c_5c_7 + 5c_4(3 - 4c_5 - 4c_7 + 6c_5c_7))}{60c_6(-c_3 + c_6)(-c_4 + c_6)(-c_5 + c_6)(c_6 - c_7)}
\end{aligned}$$

(2.47)

Θεωρώντας $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \neq 0$ και $c_2 \neq c_3 \neq c_4 \neq c_5 \neq c_6 \neq c_7$ για διαφορετικές τιμές των c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 προκύπτουν οι διάφορες μέθοδοι Runge Kutta έκτης τάξης.

2.4 Συνθήκες με χρήση πινάκων

Οι συνθήκες που περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορούν να περιγραφούν με χρήση πινάκων.

- Για μία μέθοδο με δύο στάδια έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2)^T, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

στην περίπτωση που η μέθοδος είναι άμεση οι πίνακες παίρνουν την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2)^T, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες δεύτερης τάξης γράφονται

$$b.e = 1$$

$$b.C.e = \frac{1}{2}$$

- Για μία μέθοδο με τρία στάδια έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, b_3)^T, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

στην περίπτωση που η μέθοδος είναι άμεση οι πίνακες παίρνουν την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, b_3)^T, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες τρίτης τάξης γράφονται

$$b.e = 1$$

$$b.C.e = \frac{1}{2}$$

$$b.C^2.e = \frac{1}{3}$$

$$b.A.C.e = \frac{1}{6}$$

- Για μία μέθοδο με τέσσερα στάδια έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

στην περίπτωση που η μέθοδος είναι άμεση οι πίνακες παίρνουν την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες έως τρίτης τάξης γράφονται όπως δείξαμε στα τρία στάδια και επιπλέον οι συνθήκες για την τέταρτη τάξη γράφονται

$$b.C^3.e = \frac{1}{4}$$

$$b.C.A.C.e = \frac{1}{8}$$

$$b.A.C^2.e = \frac{1}{12}$$

$$b.A.A.C.e = \frac{1}{24}$$

- Για μία μέθοδο με έξι στάδια έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}$$

στην περίπτωση που η μέθοδος είναι άμεση οι πίνακες παίρνουν την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες έως τέταρτης τάξης γράφονται όπως δείξαμε στα τέσσερα στάδια και επιπλέον οι συνθήκες για την πέμπτη τάξη γράφονται

$$b.C^3.e = \frac{1}{4}$$

$$b.C.A.C.e = \frac{1}{8}$$

$$b.A.C^2.e = \frac{1}{12}$$

$$b.A.A.C.e = \frac{1}{24}$$

- Για μία μέθοδο με επτά στάδια έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix},$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^T, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix}$$

στην περίπτωση που η μέθοδος είναι άμεση οι πίνακες παίρνουν την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^T, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix}$$

Τότε οι συνθήκες έως πέμπτης τάξης γράφονται όπως δείξαμε στα έξι στάδια και επιπλέον οι συνθήκες για την έκτη τάξη γράφονται

$$\begin{aligned}
b.C^5.e &= \frac{1}{6} \\
b.A.C^4.e &= \frac{1}{30} \\
b.A^2.C^3.e &= \frac{1}{120} \\
b.A^3.C^2.e &= \frac{1}{360} \\
b.A^4.C.e &= \frac{1}{720} \\
b.C.A^3.C.e &= \frac{1}{144} \\
b.C.A^2.C^2.e &= \frac{1}{72} \\
b.C.A.C^3.e &= \frac{1}{24} \\
b.C^2.A^2.C.e &= \frac{1}{36} \\
b.C^2.A.C^2.e &= \frac{1}{18} \\
b.C^3.A.C.e &= \frac{1}{12} \\
b.A.C.A^2.C.e &= \frac{1}{180} \\
b.A.C.A.C^2.e &= \frac{1}{90} \\
b.A.C^2.A.C.e &= \frac{1}{60} \\
b.A^2.C.A.C.e &= \frac{1}{240} \\
b.((A.C.e) * (A^2.C.e)) &= \frac{1}{72} \\
b.((A.C.e) * (A.C^2.e)) &= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

2.5 Συνθήκες τάξης και δέντρα

Τα δέντρα είναι συνδυαστικά γραφήματα των οποίων τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους χωρίς να δημιουργούν κύκλους. Ένα δέντρο με ρίζα (rooted tree) είναι ένα δέντρο στο οποίο μία συγκεκριμένη κορυφή θεωρείται ρίζα (root).

Ορισμός 2.5.1. Ένα γράφημα t λέγεται δέντρο με ρίζα (rooted tree) αν υπάρχει μία κορυφή του, την οποία αποκαλούμε ρίζα, με τις εξής ιδιότητες:

- Οι κορυφές χωρίζονται σε επίπεδα $0, 1, \dots, H$ με H το ύψος του δέντρου.
- Στο μηδενικό επίπεδο έχουμε μόνο την ρίζα του δέντρου.
- Στο κάθε επίπεδο πλην το μηδενικό βρίσκονται τα παιδιά των κορυφών του προηγούμενου επιπέδου ορίζοντας τα κλαδιά που ξεκινούν από τον γονέα και καταλήγουν στο παιδί.
- Κάθε κορυφή έχει γονέα, εκτός από την ρίζα που δεν έχει κανέναν.

Ο αριθμός των κορυφών ενός δέντρου αποτελεί την τάξη $r(t)$ του δέντρου. Η πυκνότητα ενός δέντρου ορίζεται αναδρομικά ως το γινόμενο των πυκνοτήτων των δέντρων, με ρίζα, που προκύπτουν αν από το δέντρο αποκοπεί η ρίζα, επί την τάξη του δέντρου. Για την πυκνότητα χρησιμοποιείται η συνάρτηση $\gamma(t)$ την ρίζα ενώ η πυκνότητα του δέντρου πρώτης τάξης ισούται με την μονάδα.

Τα δέντρα που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τη ρίζα μαζί με τα κλαδιά που ξεκινούν από αυτή ονομάζονται υπόδεντρα. Σε κάθε δέντρο αντιστοιχούν πολλά δέντρα με ρίζα και μπορούν να θεωρηθούν σαν μία κλάση ισοδυναμίας. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά όταν λέμε δέντρο θα εννοείται δέντρο με ρίζα.

Σε κάθε δέντρο αντιστοιχεί ένα πολυώνυμο ως προς τους συντελεστές της μεθόδου

$$\Phi(t) = \sum_i b_i \Phi_i(t) \text{ όπου } \Phi_i(t) = \sum_{j,k,l,\dots} a_{ij} a_{jk} a_{kl} \dots$$



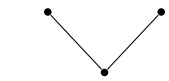

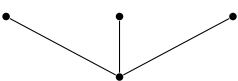
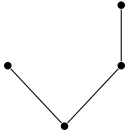
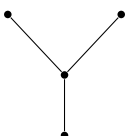

Θεώρημα 2.5.1. Μια μέθοδος Runge Kutta έχει τάξη p αν

$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$$

για όλα τα δέντρα τάξης $\leq p$

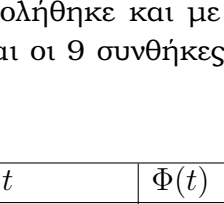
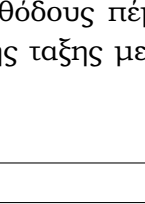
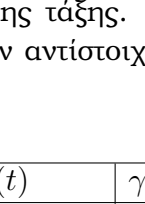
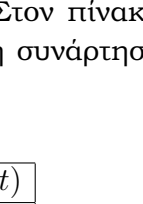
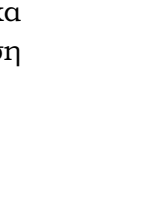
Η συνθήκη κάθε δέντρου προκύπτει αν αντιστοιχίσουμε την ρίζα στο διάνυσμα b και την τελευταία κορυφή κάθε υπόδεντρου, δηλαδή την κορυφή που δεν έχει παιδιά, στον πίνακα C . Οι υπόλοιπες κορυφές του δέντρου αντιστοιχούν στον πίνακα A .

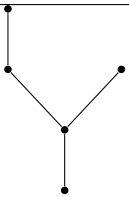
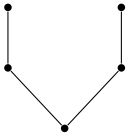
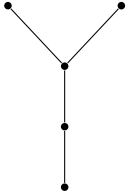
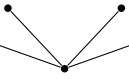
Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα δέντρα με τις αντίστοιχες συνθήκες και την συνάρτηση πυκνότητας έως και 4ης τάξης.

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
1		$\sum_{i=1}^s b_i$	$b^T e$	1
2		$\sum_{i=1}^s b_i c_i$	$b^T C e$	2
3		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2$	$b^T C^2 e$	3
3		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$	$b^T A C e$	6
4		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3$	$b^T C^3 e$	4
4		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j$	$b^T C A C e$	8
4		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2$	$b^T A C^2 e$	12
4		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$b^T A^2 C e$	24

Πίνακας 2.5.1. Δέντρα με ρίζα, οι συνθήκες και η συνάρτηση πυκνότητας μέχρι 4η τάξη

Ο Kutta (1901) ασχολήθηκε και με μεθόδους πέμπτης τάξης. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι 9 συνθήκες 5ης τάξης με την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας.

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
5		$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$b^T A^3 C e$	120
5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$b^T C A^2 C e$	30
5		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} c_j$	$b^T C^2 A C e$	10
5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j^2$	$b^T C A C^2 e$	15
5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j^3$	$b^T A C^3 e$	20

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$b^T ACACe$	40
5		$\sum_{i=1}^s b_i \left(\sum_{j=1}^4 a_{ij} c_j \right)^2$	$b^T (ACe) * (ACe)$	20
5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$b^T A^2 C^2 e$	60
5		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^4$	$b^T C^4 e$	5


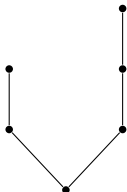

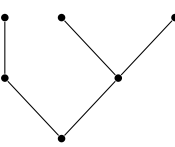
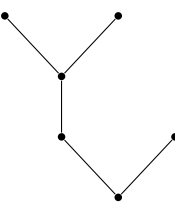
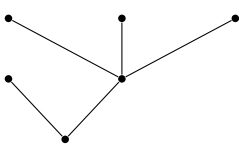
Πίνακας 2.5.2. Δέντρα με ρίζα, οι συνθήκες και η συνάρτηση πυκνότητας 5ης τάξης

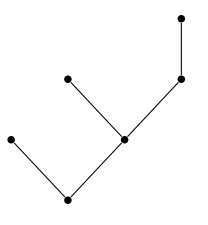
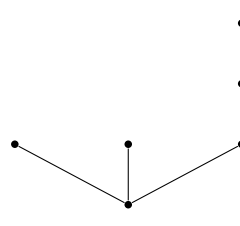
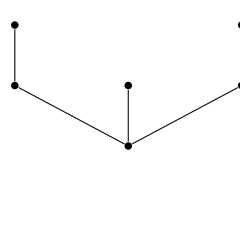
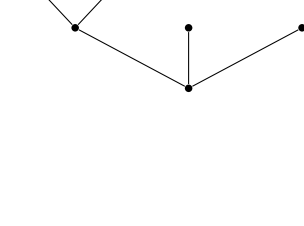
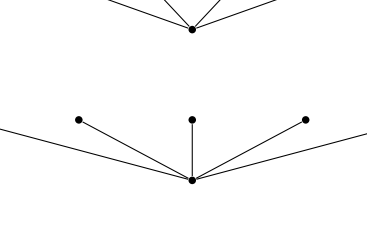
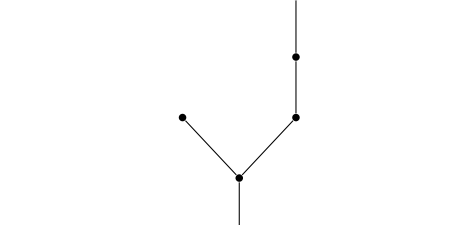

Παρατηρούμε ότι για μία άμεση μέθοδο 5ης τάξης πρέπει να ικανοποιούνται 17 εξισώσεις οπότε δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε άμεση μέθοδο 5ης τάξης με $s=5$ στάδια. Αν χρησιμοποιήσουμε $s=5$ στάδια έχουμε 15 συντελεστές οπότε χρησιμοποιούμε $s=6$ στάδια.

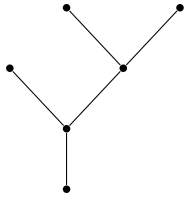
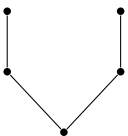
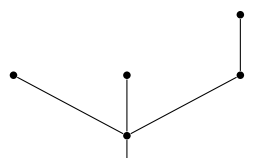
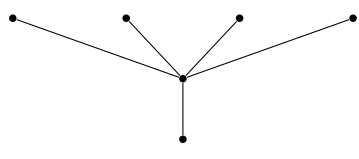
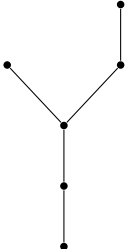
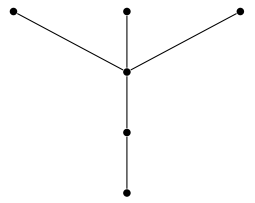
Για την κατασκευή μεθόδου 6ης τάξης απαιτούνται 7 στάδια ενώ γενικά ο απαιτούμενος αριθμός σταδίων για την κατασκευή μεθόδων έως και 8ης τάξης είναι:

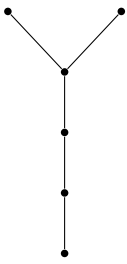
<i>Order</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Stages</i>	1	2	3	4	6	7	9	11

Για να κατασκευάσουμε μια άμεση μέθοδο 6ης τάξης χρειάζονται 20 δέντρα. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα δέντρα 6ης τάξης με τις συνθήκες και την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας.

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^4 c_j$	$b^T A^4 C e$	720
6		$\sum_{i=1}^s b_i \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij} c_j \sum_{j=1}^5 a_{ij}^2 c_j \right)$	$b^T ((ACe) * (A^2Ce))$	72
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij}^3 c_j$	$b^T CA^3 C e$	144
6		$\sum_{i=1}^s b_i \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij} c_j \sum_{k=1}^5 a_{ik} c_k^2 \right)$	$b^T * ((ACe) * (AC^2e))$	36
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij}^2 c_{jk}^2$	$b^T CA^2 C^2 e$	72
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j^3$	$b^T CAC^3 e$	24

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$b^T C A C A C e$	48
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^2 a_{ij}^2 c_j$	$b^T C^2 A^2 C e$	36
6		$\sum_{i=1}^s b_i c_i \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij} c_j \right)^2$	$b^T C ((A C e) * (A C e))$	24
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} c_j^2$	$b^T C^2 A C^2 e$	18
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^3 a_{ij} c_j$	$b^T C^3 A C e$	12
6		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^5$	$b^T C^5 e$	6
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk}^2 c_k$	$b^T A C A^2 C e$	180

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k^2$	$b^T ACAC^2 e$	90
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} \left(\sum_{k=1}^5 a_{jk} c_k \right)^2$	$b^T A((ACe) * (ACe))$	120
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 a_{jk} c_k$	$b^T AC^2 ACe$	60
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^4$	$b^T AC^4 e$	30
6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij}^2 c_j a_{jk} c_k$	$b^T A^2 C ACe$	240
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^2 c_j^3$	$b^T A^2 C^3 e$	120

$r(t)$	t	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$\gamma(t)$
6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^3 c_j^2$	$b^T A^3 C^2 e$	360

Ο αριθμός των δέντρων έως και 10ης τάξης φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

<i>Order</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Trees</i>	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719

Κεφάλαιο 3

Ειδικές μέθοδοι Runge - Kutta

3.1 Εισαγωγή

Οι λύσεις πολλών φυσικών προβλημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις είναι περιοδικές (periodic) ή ταλαντωτικές (oscillating) (το πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler, η εξίσωση του Schrodinger κ.α.) με αποτέλεσμα ένα μεγάλο μέρος της έρευνας, παράλληλα με την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων, να επικεντρωθεί στην κατασκευή μεθόδων οι οποίες προσαρμόζονται σε συγκεκριμένες ιδιότητες της λύσης.

Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να καταταχθούν σε δύο βασικές κατηγορίες

- μέθοδοι με σταθερούς συντελεστές και
- μέθοδοι με μεταβλητούς συντελεστές που εξαρτώνται από την περίοδο ή τη συχνότητα του κάθε προβλήματος

Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι εκθετικά προσαρμοσμένες μέθοδοι (exponentially fitted methods EF) και οι τριγωνομετρικά προσαρμοσμένες μέθοδοι (trigonometrically fitted methods TF) που θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης του συγκεκριμένου κεφαλαίου.

Μια αριθμητική μέθοδος είναι τάξεως n , (με n θετικό ακέραιο) όταν η μέθοδος είναι ακριβής για πολυώνυμο βαθμού $\leq n$. Δηλαδή, για μία μέθοδο τάξης n η προσεγγιστική λύση και η πραγματική θα ταυτίζονται, αν η πραγματική λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$. Ο αριθμός των συναρτήσεων για τον οποίο είναι ακριβείς οι περισσότερες αριθμητικοί μέθοδοι εξαρτάται από την τάξη της διαφορικής εξίσωσης την οποία καλούνται να επιλύσουν, από την αλγεβρική τάξη της μεθόδου και από τον αριθμό των σταδίων της.

Έτσι μία γενική μέθοδος τέτοιου τύπου n τάξης μπορεί να ολοκληρώνει ακριβώς ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων. Στην κανονική μορφή της μία τέτοια μέθοδος n τάξης είναι ακριβής για το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων $1, x, x^2, \dots, x^n$. Στην περίπτωση που η λύση του προβλήματος αρχικών ή

συνοριακών τιμών είναι εκθετικού ή περιοδικού χαρακτήρα τότε, για μία μέθοδο n τάξης, η επιλογή του παραπάνω συνόλου πολυωνυμικών συναρτήσεων μπορεί να μην είναι η καταλληλότερη ώστε να είναι ακριβής η μέθοδος. Τα αποτελέσματα θα είναι ακριβέστερα αν η μέθοδος ολοκληρώνει ακριβώς σύνολα εκθετικών ή τριγωνομετρικών συναρτήσεων όπως είναι οι e^{wx} , e^{-wx} και οι $\sin(wx)$, $\cos(wx)$. Με τον τρόπο αυτό παράγονται αντίστοιχα οι εκθετικά (exponentially fitted EF) και τριγωνομετρικά (trigonometrically fitted TF) προσαρμοσμένες μέθοδοι.

Πρώτος ο *Gautschi*(1961) ανέπτυξε την θεωρία και κατασκεύασε μεθόδους με την απαίτηση να είναι ακριβείς για τριγωνομετρικά πολυώνυμα συγκεκριμένου βαθμού. Οι συντελεστές των μεθόδων που ανέπτυξε είναι μεταβλητοί και εξαρτώνται από μία παράμετρο $v = wh$ όπου h είναι το μήκος του βήματος και w η συχνότητα του προβλήματος. Οι μέθοδοι αυτό συγκλίνουν στις κλασικές μεθόδους (με σταθερούς συντελεστές) όταν $w \rightarrow 0$.

Αργότερα ο *Simos*(1998) μετέτρεψε μία κλασική Runge - Kutta μέθοδο σε εκθετικά και τριγωνομετρικά προσαρμοσμένη βελτιώνοντας την ακρίβεια της. Στην συνέχεια ο *VandenBerghe*(1999) στηριζόμενος στην προηγούμενη εργασία διαφοροποίησε την μέθοδο *Simos* ζητώντας αυτή να είναι ακριβής σε κάθε στάδιο της και έτσι παράγαγε μια τροποποιημένη εκθετικά προσαρμοσμένη μέθοδο με πολύ καλά αποτελέσματα σε κάποια προβλήματα.

3.2 Εκθετική/τριγωνομετρική προσαρμογή κατά G.Vanden Berghe

Οι G.Varden Berghe et.al. (1999) ανέπτυξαν μία άλλη μέθοδο για την κατασκευή εκθετικά/τριγωνομετρικά προσαρμοσμένων μεθόδων στηριζόμενοι στην παρατήρηση του *Albrecht* ότι κάθε εσωτερικό στάδιο της μεθόδου μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν μια γραμμική πολυβηματική μέθοδος ορισμένη σε μη ισομήκη διαμέριση. Ζήτησαν τόσο οι εξισώσεις κάθε σταδίου όσο και η εξίσωση του τελικού βήματος να είναι ακριβής για ένα σύνολο εκθετικών ή τριγωνομετρικών συναρτήσεων .

Προκειμένου να πετύχουν την παραπάνω συνθήκη εισήγαγαν σε κάθε στάδιο την μεταβλητή γ_i όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n + c_1 h, \gamma_1 y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1s}k_s)) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, \gamma_2 y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2s}k_s)) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, \gamma_3 y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + \dots + a_{3s}k_s)) \\ &\vdots \\ k_s &= f(x_n + c_s h, \gamma_s y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{ss}k_s)) \end{aligned}$$

Ο πίνακας Bucher σε αυτή την περίπτωση έχει ως εξής

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 c_1 & \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} \\
 c_2 & \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s-1} & a_{2s} \\
 c_3 & \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s-1} & a_{3s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_s & \gamma_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & a_{ss} \\
 \hline
 & & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

ή

$$\begin{array}{c|c|c}
 c & \gamma & A \\
 \hline
 & & b^T
 \end{array}$$

Αν η μέθοδος είναι άμεση τότε παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2 h, \gamma_2 y_n + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_3 h, \gamma_3 y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_n + c_s h, \gamma_s y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}))
 \end{aligned}$$

ενώ ο πίνακας Bucher αντίστοιχα γράφεται

$$\begin{array}{c|c|cc}
 0 & 1 & & \\
 c_2 & \gamma_2 & a_{21} & \\
 c_3 & \gamma_3 & a_{31} & a_{32} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_s & \gamma_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Στις άμεσες μεθόδους $c_1 = 0$ και $\gamma_1 = 0$ οπότε στο δεύτερο στάδιο υπάρχουν μόνο δύο παράμετροι να υπολογιστούν, οι a_{21} και γ_2 . Αντίστοιχα προκύπτει ότι σε κάθε επόμενο εσωτερικό στάδιο, με $i > 2$, υπολογίζονται οι συντελεστές γ_i και $a_{i,i-1}$

3.2.1 Εκθετική προσαρμογή

Αν η μεταβλητή w είναι πραγματικός αριθμός πρέπει η μέθοδος να είναι ακριβής για την συνάρτηση $e^{\pm wx}$. Θα κατασκευάσουμε τις συνθήκες της εκθετικής προσαρμογής για κάθε στάδιο.

Έστω ότι

$$y(x) = e^{wx} \text{ ή } y(x) = e^{-wx}$$

με

$$y'(x) = (e^{wx})' = we^{wx} \text{ ή } y'(x) = (e^{-wx})' = -we^{-wx}$$

και αν απαιτείται η μέθοδος να είναι ακριβής για κάθε στάδιο της διαδικασίας, με δεδομένο ότι $c_1 = 0$, προκύπτουν τα εξής

Για την συνάρτηση $y(x) = e^{wx}$

- Πρώτο στάδιο:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

οπότε έχουμε

$$e^{wx} = \gamma_1 e^{wx} \Leftrightarrow$$

$$(1)\gamma_1 = 1$$

αντίστοιχα για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$-we^{-wx} = \gamma_1(-we^{-wx}) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_1 = 1$$

- Δεύτερο στάδιο:

$$k_2 = f(x_n + c_2h, \gamma_2 y_n + ha_{21}k_1)$$

οπότε έχουμε

$$e^{w(x+c_2h)} = \gamma_2 e^{wx} + ha_{21}we^{wx} \Leftrightarrow$$

$$e^{wx}e^{wc_2h} = e^{wx}(\gamma_2 + ha_{21}w) \Leftrightarrow$$

$$(1)e^{wc_2h} = \gamma_2 + ha_{21}w$$

με $wh=v$

$$e^{c_2v} = \gamma_2 + a_{21}v$$

αντίστοιχα για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$(2)e^{-c_2v} = \gamma_2 - a_{21}v$$

Απο τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε τα γ_2 και a_{21}

$$\begin{cases} e^{c_2v} = \gamma_2 + a_{21}v \\ e^{-c_2v} = \gamma_2 - a_{21}v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = \frac{e^{c_2v} + e^{-c_2v}}{2} = \cosh(c_2v) \\ a_{21} = \frac{e^{c_2v} - e^{-c_2v}}{2v} = \frac{\sinh(c_2v)}{v} \end{cases}$$

• Τρίτο στάδιο :

$$k_3 = f(x_n + c_3h, \gamma_3 y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2))$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} e^{w(x+c_3h)} &= \gamma_3 e^{wx} + ha_{31}w e^{wx} + ha_{32}w e^{w(x+c_2h)} \Leftrightarrow \\ e^{wx} e^{wc_3h} &= e^{wx} (\gamma_3 + ha_{31}w + ha_{32}w e^{wc_2h}) \Leftrightarrow \\ e^{wc_3h} &= \gamma_3 + ha_{31}w + ha_{32}w e^{wc_2h} \end{aligned}$$

με $wh=v$

$$(3) e^{c_3v} = \gamma_3 + a_{31}v + a_{32}v e^{c_2v} \Leftrightarrow$$

ομοίως για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-c_3v} = \gamma_3 - a_{31}v - a_{32}v e^{-c_2v}$$

Απο τις σχέσεις (3) και (4) βρίσκουμε τα γ_3 και a_{32}

$$\begin{cases} e^{c_3v} = \gamma_3 + a_{31}v + a_{32}v e^{c_2v} \\ e^{-c_3v} = \gamma_3 - a_{31}v - a_{32}v e^{-c_2v} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{c_3v} + e^{-c_3v} &= 2\gamma_3 + a_{32}v(e^{c_2v} - e^{-c_2v}) \Leftrightarrow \\ (5) \cosh(c_3v) &= \gamma_3 + a_{32}v \sinh(c_2v) \end{aligned}$$

ενώ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{c_3v} - e^{-c_3v} &= 2\gamma_3 + a_{32}v(e^{c_2v} + e^{-c_2v}) \Leftrightarrow \\ (6) \sinh(c_3v) &= a_{31}v + a_{32}v \cosh(c_2v) \end{aligned}$$

Από τις (5) και (6) έχουμε :

$$\begin{cases} \gamma_3 = \frac{\cosh(c_2 - c_3)v + a_{31}v \sinh(c_2v)}{\sec(c_2v)} \\ a_{32} = \frac{\sinh(c_3v) - a_{31}v}{v \cosh(c_2v)} \end{cases}$$

- Τέταρτο στάδιο :

$$k_4 = f(x_n + c_4h, \gamma_4 y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3))$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} e^{w(x+c_4h)} &= \gamma_4 e^{wx} + ha_{41}w e^{wx} + ha_{42}w e^{w(x+c_2h)} + ha_{43}w e^{w(x+c_3h)} \Leftrightarrow \\ e^{wx} e^{wc_4h} &= e^{wx} (\gamma_4 + ha_{41}w + ha_{42}w e^{wc_2h} + ha_{43}w e^{wc_3h}) \Leftrightarrow \\ e^{wc_4h} &= \gamma_4 + ha_{41}w + ha_{42}w e^{wc_2h} + ha_{43}w e^{wc_3h} \end{aligned}$$

με $wh=v$

$$e^{c_4v} = \gamma_4 + a_{41}v + a_{42}v e^{c_2v} + a_{43}v e^{c_3v}$$

ομοίως για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-c_4v} = \gamma_4 - a_{41}v - a_{42}v e^{-c_2v} - a_{43}v e^{-c_3v}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{c_4v} + e^{-c_4v} &= 2\gamma_4 + a_{42}v(e^{c_2v} - e^{-c_2v}) + a_{43}v(e^{c_3v} - e^{-c_3v}) \Leftrightarrow \\ (7) \cosh(c_4v) &= \gamma_4 + a_{42}v \sinh(c_2v) + a_{43}v \sinh(c_3v) \end{aligned}$$

ενώ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{c_4v} - e^{-c_4v} &= 2\gamma_4 + a_{42}v(e^{c_2v} + e^{-c_2v}) + a_{43}v(e^{c_3v} + e^{-c_3v}) \Leftrightarrow \\ (8) \sinh(c_4v) &= a_{41}v + a_{42}v \cosh(c_2v) + a_{43}v \cosh(c_3v) \end{aligned}$$

Από τις (7) και (8) έχουμε :

$$\begin{cases} \gamma_4 = \frac{\cosh(c_3 - c_4)v - a_{42}v \sinh(c_2 - c_3) + a_{41}v \sinh(c_3v)}{\cosh(c_3v)} \\ a_{43} = \frac{\sinh(c_4v) - v(a_{41} + a_{42} \cosh(c_2v))}{v \cosh(c_3v)} \end{cases}$$

- Πέμπτο στάδιο :

$$k_5 = f(x_n + c_5h, \gamma_5 y_n + h(a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4))$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{w(x+c_5h)} &= \\
\gamma_5 e^{wx} + ha_{51} w e^{wx} + ha_{52} w e^{w(x+c_2h)} + ha_{53} w e^{w(x+c_3h)} + ha_{54} w e^{w(x+c_4h)} &\Leftrightarrow \\
e^{wx} e^{wc_5h} = e^{wx} (\gamma_5 + ha_{51} w + ha_{52} w e^{wc_2h} + ha_{53} w e^{wc_3h} + ha_{54} w e^{wc_4h}) &\Leftrightarrow \\
e^{wc_5h} = \gamma_5 + ha_{51} w + ha_{52} w e^{wc_2h} + ha_{53} w e^{wc_3h} + ha_{54} w e^{wc_4h} &
\end{aligned}$$

με $wh=v$

$$e^{c_5v} = \gamma_5 + a_{51}v + a_{52}v e^{c_2v} + a_{53}v e^{c_3v} + a_{54}v e^{c_4v} \Leftrightarrow$$

αντίστοιχα για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-c_5v} = \gamma_5 - a_{51}v - a_{52}v e^{-c_2v} - a_{53}v e^{-c_3v} - a_{54}v e^{-c_4v}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned}
e^{c_5v} + e^{-c_5v} &= 2\gamma_5 + a_{52}v(e^{c_2v} - e^{-c_2v}) + a_{53}v(e^{c_3v} - e^{-c_3v}) + a_{54}v(e^{c_4v} - e^{-c_4v}) \Leftrightarrow \\
(9) \cosh(c_5v) &= \gamma_5 + a_{52} \sinh(c_2v) + a_{53} \sinh(c_3v) + a_{54} \sinh(c_4v)
\end{aligned}$$

ενώ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned}
e^{c_5v} - e^{-c_5v} &= 2\gamma_5 + a_{52}v(e^{c_2v} + e^{-c_2v}) + a_{53}v(e^{c_3v} + e^{-c_3v}) + a_{54}v(e^{c_4v} + e^{-c_4v}) \Leftrightarrow \\
(10) \sinh(c_5v) &= a_{51}v + a_{52} \cosh(c_2v) + a_{53} \cosh(c_3v) + a_{54} \cosh(c_4v)
\end{aligned}$$

Από τις (9) και (10) έχουμε:

$$\begin{cases}
\gamma_5 = \cosh(c_5v) + v(-a_{52} \sinh(c_2v) - a_{53} \sinh(c_3v) + (a_{51}v + a_{52} \cosh(c_2v) \\
+ a_{53} \cosh(c_3v) - \sinh(c_5v)) \tanh(c_4v)) \\
a_{54} = -\operatorname{sech}(c_4v)(a_{51}v + a_{52} \cosh(c_2v) + a_{53} \cosh(c_3v) - \sinh(c_5v))
\end{cases}$$

- Έκτο στάδιο:

$$k_6 = f(x_n + c_6h, \gamma_6 y_n + h(a_{61}k_1 + a_{62}k_2 + a_{63}k_3 + a_{64}k_4 + a_{65}k_5))$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{w(x+c_6h)} &= \gamma_6 e^{wx} + ha_{61} w e^{wx} + ha_{62} w e^{w(x+c_2h)} + ha_{63} w e^{w(x+c_3h)} + \\
&ha_{64} w e^{w(x+c_4h)} + ha_{65} w e^{w(x+c_5h)} \Leftrightarrow \\
e^{wx} e^{wc_6h} &= \\
e^{wx} (\gamma_6 + ha_{61} w + ha_{62} w e^{wc_2h} + ha_{63} w e^{wc_3h} + ha_{64} w e^{wc_4h} + ha_{65} w e^{wc_5h}) &\Leftrightarrow \\
e^{wc_6h} = \gamma_6 + ha_{61} w + ha_{62} w e^{wc_2h} + ha_{63} w e^{wc_3h} + ha_{64} w e^{wc_4h} + ha_{65} w e^{wc_5h} &
\end{aligned}$$

με $wh=v$

$$e^{c_6v} = \gamma_6 + a_{61}v + a_{62}ve^{c_2v} + a_{63}ve^{c_3v} + a_{64}ve^{c_4v} + a_{65}ve^{c_5v} \Leftrightarrow$$

αντίστοιχα για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-c_6v} = \gamma_6 - a_{61}v - a_{62}ve^{-c_2v} - a_{63}ve^{-c_3v} - a_{64}ve^{-c_4v} - a_{65}ve^{-c_5v}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{c_6v} + e^{-c_6v} &= 2\gamma_6 + a_{62}v(e^{c_2v} - e^{-c_2v}) + a_{63}v(e^{c_3v} - e^{-c_3v}) + a_{64}v(e^{c_4v} - e^{-c_4v}) + a_{65}v(e^{c_5v} - e^{-c_5v}) \Leftrightarrow \\ (11) \cosh(c_6v) &= \gamma_6 + a_{62}v \sinh(c_2v) + a_{63}v \sinh(c_3v) + a_{64}v \sinh(c_4v) + a_{65}v \sinh(c_5v) \end{aligned}$$

ενώ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{c_6v} - e^{-c_6v} &= 2\gamma_6 + a_{62}v(e^{c_2v} + e^{-c_2v}) + a_{63}v(e^{c_3v} + e^{-c_3v}) + a_{64}v(e^{c_4v} + e^{-c_4v}) + a_{65}v(e^{c_5v} + e^{-c_5v}) \Leftrightarrow \\ (12) \sinh(c_6v) &= a_{61}v + a_{62}v \cosh(c_2v) + a_{63}v \cosh(c_3v) + a_{64}v \cosh(c_4v) + a_{65}v \cosh(c_5v) \end{aligned}$$

Από τις (11) και (12) έχουμε:

$$\begin{cases} \gamma_6 = \cosh(c_6v) + v(-a_{62} \sinh(c_2v) - a_{63} \sinh(c_3v) - a_{64} \sinh(c_4v) + \\ (a_{61}v + a_{62} \cosh(c_2v) + a_{63} \cosh(c_3v) + a_{64} \cosh(c_4v) - \sinh(c_6v)) \tanh(c_5v)) \\ a_{65} = -\operatorname{sech}(c_5v)(a_{61}v + a_{62} \cosh(c_2v) + a_{63} \cosh(c_3v) + a_{64} \cosh(c_4v) \\ - \sinh(c_6v)) \end{cases}$$

- Έβδομο στάδιο:

$$k_7 = f(x_n + c_7h, \gamma_7 y_n + h(a_{71}k_1 + a_{72}k_2 + a_{73}k_3 + a_{74}k_4 + a_{75}k_5 + a_{76}k_6))$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} e^{w(x+c_7h)} &= \gamma_7 e^{wx} + ha_{71}we^{wx} + ha_{72}we^{w(x+c_2h)} + ha_{73}we^{w(x+c_3h)} + \\ &ha_{74}we^{w(x+c_4h)} + ha_{75}we^{w(x+c_5h)} + ha_{76}we^{w(x+c_6h)} \Leftrightarrow \\ e^{wx}e^{wc_7h} &= e^{wx}(\gamma_7 + ha_{71}w + ha_{72}we^{wc_2h} + ha_{73}we^{wc_3h} + ha_{74}we^{wc_4h} + \\ &ha_{75}we^{wc_5h} + ha_{76}we^{wc_6h}) \Leftrightarrow \\ e^{wc_7h} &= \\ \gamma_7 + ha_{71}w + ha_{72}we^{wc_2h} + ha_{73}we^{wc_3h} + ha_{74}we^{wc_4h} + ha_{75}we^{wc_5h} + ha_{76}we^{wc_6h} \end{aligned}$$

με $wh=v$

$$e^{c_7v} = \gamma_7 + a_{71}v + a_{72}ve^{c_2v} + a_{73}ve^{c_3v} + a_{74}ve^{c_4v} + a_{75}ve^{c_5v} + a_{76}ve^{c_6v} \Leftrightarrow$$

αντίστοιχα για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-c_7v} = \gamma_7 - a_{71}v - a_{72}ve^{-c_2v} - a_{73}ve^{-c_3v} - a_{74}ve^{-c_4v} - a_{75}ve^{-c_5v} - a_{76}ve^{-c_6v}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{c_7v} + e^{-c_7v} &= 2\gamma_7 + a_{72}v(e^{c_2v} - e^{-c_2v}) + a_{73}v(e^{c_3v} - e^{-c_3v}) + a_{74}v(e^{c_4v} - e^{-c_4v}) \\ &+ a_{75}v(e^{c_5v} - e^{-c_5v}) - a_{76}v(e^{c_6v} - e^{-c_6v}) \Leftrightarrow \\ &(13)\cosh(c_7v) = \\ \gamma_7 + a_{72}\sinh(c_2v) + a_{73}\sinh(c_3v) + a_{74}\sinh(c_4v) + a_{75}\sinh(c_5v) + a_{76}\sinh(c_6v) \end{aligned}$$

ενώ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{c_7v} - e^{-c_7v} &= 2\gamma_7 + a_{72}v(e^{c_2v} + e^{-c_2v}) + a_{73}v(e^{c_3v} + e^{-c_3v}) + a_{74}v(e^{c_4v} + e^{-c_4v}) \\ &+ a_{75}v(e^{c_5v} + e^{-c_5v}) + a_{76}v(e^{c_6v} + e^{-c_6v}) \Leftrightarrow \\ &(14)\sinh(c_7v) = \\ a_{71}v + a_{72}\cosh(c_2v) + a_{73}\cosh(c_3v) + a_{74}\cosh(c_4v) + a_{75}\cosh(c_5v) + a_{76}\cosh(c_6v) \end{aligned}$$

Από τις (13) και (14) έχουμε:

$$\begin{cases} \gamma_7 = \cosh(c_7v) + v(-a_{72}\sinh(c_2v) - a_{73}\sinh(c_3v) - a_{74}\sinh(c_4v) - a_{75}\sinh(c_5v)) + \\ a_{71}v + a_{72}\cosh(c_2v) + a_{73}\cosh(c_3v) + a_{74}\cosh(c_4v) + a_{75}\cosh(c_5v) - \sinh(c_7v) \\ a_{76} = -\operatorname{sech}(c_6v)(a_{71}v + a_{72}\cosh(c_2v) + a_{73}\cosh(c_3v) + a_{74}\cosh(c_4v) \\ + a_{75}\cosh(c_5v) - \sinh(c_7v)) \end{cases}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις για μια μέθοδο i -σταδίων ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{\pm c_i v} - \gamma_i \mp v \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} e^{\pm c_j v} &= 0 \\ \text{για } i &= 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Για να είναι ακριβής η μέθοδος για $y(x) = e^{wx}$ θα πρέπει να ισχύει:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 + b_5k_5 + b_6k_6 + b_7k_7)$$

$$e^{w(x+h)} = e^{wx} + hb_1we^{wx} + hb_2we^{w(x+c_2h)} + hb_3we^{w(x+c_3h)} + hb_4we^{w(x+c_4h)} + hb_5we^{w(x+c_5h)} + hb_6we^{w(x+c_6h)} + hb_7we^{w(x+c_7h)}$$

με $wh=v$

$$e^v = 1 + b_1v + b_2ve^{c_2v} + b_3ve^{c_3v} + b_4ve^{c_4v} + b_5ve^{c_5v} + b_6ve^{c_6v} + b_7ve^{c_7v} \Leftrightarrow$$

ενώ για την συνάρτηση $y(x) = e^{-wx}$

$$e^{-v} = 1 - b_1v - b_2ve^{c_2v} - b_3ve^{c_3v} - b_4ve^{c_4v} - b_5ve^{c_5v} - b_6ve^{c_6v} - b_7ve^{c_7v} \Leftrightarrow$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω σχέσεις για μια μέθοδο s -σταδίων ως εξής:

$$e^{\pm v} = 1 \pm v \sum_{j=1}^s b_j e^{\pm c_j v}$$

3.2.2 Τριγωνομετρική προσαρμογή

Αν η μεταβλητή w είναι φανταστικός αριθμός πρέπει η μέθοδος να είναι ακριβής τόσο για την συνάρτηση $\cos(wx)$ όσο και για την συνάρτηση $\sin(wx)$. Θα κατασκευάσουμε τις συνθήκες της τριγωνομετρικής προσαρμογής για κάθε στάδιο.

Έστω ότι

$$y(x) = e^{iwx}$$

με

$$y'(x) = (e^{iwx})' = iwe^{iwx}$$

και αν απαιτείται η μέθοδος να είναι ακριβής για κάθε στάδιο της διαδικασίας, με δεδομένο ότι $c_1 = 0$, προκύπτουν τα εξής

- Πρώτο στάδιο:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

οπότε έχουμε

$$e^{iwx} = \gamma_1 e^{iwx}$$

$$\cos(c_1v) + i\sin(c_1v) = \gamma_1 \Leftrightarrow$$

$$(1)\gamma_1 = 1$$

- Δεύτερο στάδιο:

$$k_2 = f(x_n + c_2h, \gamma_2 y_n + ha_{21}k_1)$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_2h)} = \gamma_2 e^{iwx} + ha_{21}iwe^{iwx}$$

με $wh=v$

$$\begin{aligned} e^{ic_2v} &= \gamma_2 + ia_{21}v \Leftrightarrow \\ \cos(c_2v) + isin(c_2v) &= \gamma_2 + ia_{21}v \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} \gamma_2 = \cos(c_2v) \\ a_{21} = \frac{\sin(c_2v)}{v} \end{cases}$$

• Τρίτο στάδιο :

$$k_3 = f(x_n + c_3h, \gamma_3 y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2))$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_3h)} = \gamma_3 e^{iwx} + ha_{31}iwe^{iwx} + ha_{32}iwe^{iw(x+c_2h)}$$

με $wh=v$

$$\begin{aligned} e^{ic_3v} &= \gamma_3 + ia_{31}v + ia_{32}ve^{ic_2v} \Leftrightarrow \\ \cos(c_3v) + isin(c_3v) &= \gamma_3 + ia_{31}v + ia_{32}v(\cos(c_2v) + isin(c_2v)) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} \cos(c_3v) = \gamma_3 - a_{32}v\sin(c_2v) \\ \sin(c_3v) = a_{31}v + a_{32}v\cos(c_2v) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = \cos(c_3v) + a_{31}v\tan(c_2v) + \sin(c_3v)\tan(c_2v) \\ a_{32} = -\frac{\sec(c_2v)(a_{31}v - \sin(c_3v))}{v} \end{cases}$$

• Τέταρτο στάδιο :

$$k_4 = f(x_n + c_4h, \gamma_4 y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3))$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_4h)} = \gamma_4 e^{iwx} + ha_{41}iwe^{iwx} + ha_{42}iwe^{iw(x+c_2h)} + ha_{43}iwe^{iw(x+c_3h)}$$

με $wh=v$

$$e^{ic_4v} = \gamma_4 + ia_{41}v + ia_{42}ve^{ic_2v} + ia_{43}ve^{ic_3v} \Leftrightarrow$$

$$\cos(c_4v) + i\sin(c_4v) =$$

$$\gamma_4 + ia_{41}v + ia_{42}v(\cos(c_2v) + i\sin(c_2v)) + ia_{43}v(\cos(c_3v) + i\sin(c_3v)) \Leftrightarrow$$

$$(4) \begin{cases} \cos(c_4v) = \gamma_4 - a_{42}v\sin(c_2v) - a_{43}v\sin(c_3v) \\ \sin(c_4v) = a_{41}v + a_{42}v\cos(c_2v) + a_{43}v\cos(c_3v) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_4 = \cos(c_4v) + a_{42}v\sin(c_2v) - a_{41}v\tan(c_3v) \\ -a_{42}v\cos(c_2v)\tan(c_3v) + \sin(c_4v)\tan(c_3v) \\ a_{43} = -\frac{a_{41}v\sec(c_3v) + a_{42}v\cos(c_2v)\sec(c_3v) - \sec(c_3v)\sin(c_4v)}{v} \end{cases}$$

• Πέμπτο στάδιο:

$$k_5 = f(x_n + c_5h, \gamma_5y_n + h(a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4))$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_5h)} =$$

$$\gamma_5e^{iwx} + ha_{51}iwe^{iwx} + ha_{52}iwe^{iw(x+c_2h)} + ha_{53}iwe^{iw(x+c_3h)} + ha_{54}iwe^{iw(x+c_4h)}$$

με $wh=v$

$$e^{ic_5v} = \gamma_5 + ia_{51}v + ia_{52}ve^{ic_2v} + ia_{53}ve^{ic_3v} + ia_{54}ve^{ic_4v} \Leftrightarrow$$

$$\cos(c_5v) + i\sin(c_5v) = \gamma_5 + ia_{51}v + ia_{52}v(\cos(c_2v) + i\sin(c_2v)) +$$

$$ia_{53}v(\cos(c_3v) + i\sin(c_3v)) + ia_{54}v(\cos(c_4v) + i\sin(c_4v)) \Leftrightarrow$$

$$(5) \begin{cases} \cos(c_5v) = \gamma_5 - a_{52}v\sin(c_2v) - a_{53}v\sin(c_3v) - a_{54}v\sin(c_4v) \\ \sin(c_5v) = a_{51}v + a_{52}v\cos(c_2v) + a_{53}v\cos(c_3v) + a_{54}v\cos(c_4v) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_5 = \cos(c_5v) + a_{52}v\sin(c_2v) + a_{53}v\sin(c_3v) - a_{51}v\tan(c_4v) \\ -a_{52}v\cos(c_2v)\tan(c_4v) - a_{53}v\cos(c_3v)\tan(c_4v) + \sin(c_5v)\tan(c_4v) \\ a_{54} = -\frac{a_{51}v\sec(c_4v) + a_{52}v\cos(c_2v)\sec(c_4v) + a_{53}v\cos(c_3v)\sec(c_4v) - \sec(c_4v)\sin(c_5v)}{v} \end{cases}$$

• Έκτο στάδιο:

$$k_6 = f(x_n + c_6h, \gamma_6y_n + h(a_{61}k_1 + a_{62}k_2 + a_{63}k_3 + a_{64}k_4 + a_{65}k_5))$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_6h)} = \gamma_6 e^{iw x} + ha_{61} i w e^{iw x} + ha_{62} i w e^{iw(x+c_2h)} + ha_{63} i w e^{iw(x+c_3h)} + ha_{64} i w e^{iw(x+c_4h)} + ha_{65} i w e^{iw(x+c_5h)}$$

με $wh=v$

$$e^{ic_6v} = \gamma_6 + ia_{61}v + ia_{62}v e^{ic_2v} + ia_{63}v e^{ic_3v} + ia_{64}v e^{ic_4v} + ia_{65}v e^{ic_5v} \Leftrightarrow$$

$$\cos(c_6v) + i \sin(c_6v) = \gamma_6 + ia_{61}v + ia_{62}v(\cos(c_2v) + i \sin(c_2v)) + ia_{63}v(\cos(c_3v) + i \sin(c_3v)) + ia_{64}v(\cos(c_4v) + i \sin(c_4v)) + ia_{65}v(\cos(c_5v) + i \sin(c_5v)) \Leftrightarrow$$

$$(6) \begin{cases} \cos(c_6v) = \gamma_6 - a_{62}v \sin(c_2v) - a_{63}v \sin(c_3v) - a_{64}v \sin(c_4v) - a_{65}v \sin(c_5v) \\ \sin(c_6v) = a_{61}v + a_{62}v \cos(c_2v) + a_{63}v \cos(c_3v) + a_{64}v \cos(c_4v) + a_{65}v \cos(c_5v) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_6 = \cos(c_6v) + a_{62}v \sin(c_2v) + a_{63}v \sin(c_3v) + a_{64}v \sin(c_4v) - a_{61}v \tan(c_5v) \\ -a_{62}v \cos(c_2v) \tan(c_5v) - a_{63}v \cos(c_3v) \tan(c_5v) - a_{64}v \cos(c_4v) \tan(c_5v) \\ + \sin(c_6v) \tan(c_5v) \\ a_{65} = -a_{61} \sec(c_5v) - a_{62} \cos(c_2v) \sec(c_5v) - a_{63} \cos(c_3v) \sec(c_5v) \\ - a_{64} \cos(c_4v) \sec(c_5v) + \frac{\sec(c_5v) \sin(c_6v)}{v} \end{cases}$$

• Έβδομο στάδιο:

$$k_7 = f(x_n + c_7h, \gamma_7y_n + h(a_{71}k_1 + a_{72}k_2 + a_{73}k_3 + a_{74}k_4 + a_{75}k_5 + a_{76}k_6))$$

οπότε έχουμε

$$e^{iw(x+c_7h)} = \gamma_7 e^{iw x} + ha_{71} i w e^{iw x} + ha_{72} i w e^{iw(x+c_2h)} + ha_{73} i w e^{iw(x+c_3h)} + ha_{74} i w e^{iw(x+c_4h)} + ha_{75} i w e^{iw(x+c_5h)} + ha_{76} i w e^{iw(x+c_6h)}$$

με $wh=v$

$$e^{ic_7v} = \gamma_7 + ia_{71}v + ia_{72}v e^{ic_2v} + ia_{73}v e^{ic_3v} + ia_{74}v e^{ic_4v} + ia_{75}v e^{ic_5v} \Leftrightarrow$$

$$\cos(c_7v) + i \sin(c_7v) = \gamma_7 + ia_{71}v + ia_{72}v(\cos(c_2v) + i \sin(c_2v)) + ia_{73}v(\cos(c_3v) + i \sin(c_3v)) + ia_{74}v(\cos(c_4v) + i \sin(c_4v)) + ia_{75}v(\cos(c_5v) + i \sin(c_5v)) + ia_{76}v(\cos(c_6v) + i \sin(c_6v)) \Leftrightarrow$$

$$(7) \begin{cases} \cos(c_7v) = \gamma_7 - a_{72}v\sin(c_2v) - a_{73}v\sin(c_3v) - a_{74}v\sin(c_4v) \\ -a_{75}v\sin(c_5v) - a_{76}v\sin(c_6v) \\ \sin(c_7v) = a_{71}v + a_{72}v\cos(c_2v) + a_{73}v\cos(c_3v) + a_{74}v\cos(c_4v) \\ +a_{75}v\cos(c_5v) + a_{76}v\cos(c_6v) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_7 = -\frac{1}{c_6\cos(v)}(-c_6\cos(v)\cos(c_7v) - a_{72}c_6\cos(v^2)\sin(c_2v) - a_{73}c_6\cos(v^2)\sin(c_3v) \\ -a_{74}c_6\cos(v^2)\sin(c_4v) - a_{75}c_6\cos(v^2)\sin(c_5v) + a_{71}v\sin(c_6v) \\ +a_{72}v\cos(c_2v)\sin(c_6v) + a_{73}v\cos(c_3v)\sin(c_6v) + a_{74}v\cos(c_4v)\sin(c_6v) \\ +a_{75}v\cos(c_5v)\sin(c_6v) - \sin(c_6v)\sin(c_7v)) \\ a_{76} = -\frac{1}{c_6\cos(v^2)}(a_{71}v + a_{72}v\cos(c_2v) + a_{73}v\cos(c_3v) + a_{74}v\cos(c_4v) \\ +a_{75}v\cos(c_5v) - \sin(c_7v)) \end{cases}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις σχέσεις (1) έως (7) για μια μέθοδο s-σταδίων ως εξής:

$$\begin{aligned} \cos(c_iv) &= \gamma_i - v \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\sin(c_jv) \\ \sin(c_iv) &= v \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cos(c_jv) \end{aligned}$$

Για να είναι ακριβής η μέθοδος για $y(x) = e^{iwx}$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 + b_5k_5 + b_6k_6 + b_7k_7) \\ e^{i\omega(x+h)} &= e^{i\omega x} + hb_1i\omega e^{i\omega x} + hb_2i\omega e^{i\omega(x+c_2h)} + hb_3i\omega e^{i\omega(x+c_3h)} + hb_4i\omega e^{i\omega(x+c_4h)} + \\ &hb_5i\omega e^{i\omega(x+c_5h)} + hb_6i\omega e^{i\omega(x+c_6h)} + hb_7i\omega e^{i\omega(x+c_7h)} \end{aligned}$$

με $wh=v$

$$\begin{aligned} e^{iv} &= 1 + b_1iv + b_2ive^{ic_2v} + b_3ive^{ic_3v} + b_4ive^{ic_4v} + b_5ive^{ic_5v} + b_6ive^{ic_6v} + b_7ive^{ic_7v} \Leftrightarrow \\ \cos(v) + i\sin(v) &= 1 + ib_1v + ib_2v(\cos(c_2v) + i\sin(c_2v)) + ib_3v(\cos(c_3v) + \\ &isin(c_3v)) + ib_4v(\cos(c_4v) + i\sin(c_4v)) + ib_5v(\cos(c_5v) + i\sin(c_5v)) + \\ &ib_6v(\cos(c_6v) + i\sin(c_6v)) + ib_7v(\cos(c_7v) + i\sin(c_7v)) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \cos(v) &= 1 - b_2 v \sin(c_2 v) - b_3 v \sin(c_3 v) - b_4 v \sin(c_4 v) - b_5 v \sin(c_5 v) - b_6 v \sin(c_6 v) - \\ & b_7 v \sin(c_7 v) \\ \sin(v) &= b_1 v + b_2 v \cos(c_2 v) + b_3 v \cos(c_3 v) + b_4 v \cos(c_4 v) + b_5 v \cos(c_5 v) + b_6 v \cos(c_6 v) + \\ & b_7 v \cos(c_7 v) \end{aligned}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω σχέσεις για μια μέθοδο s -σταδίων ως εξής:

$$\begin{aligned} \cos(v) &= 1 - v \sum_{j=1}^s b_j \sin(c_j v) \\ \sin(v) &= v \sum_{j=1}^s b_j \cos(c_j v) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή στο πρόβλημα δύο σωμάτων

4.1 Το πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler

Στην κλασική μηχανική το πρόβλημα του Kepler είναι μία ειδική περίπτωση του προβλήματος δύο σωμάτων. Το πρόβλημα δύο σωμάτων προέκυψε αρχικά από την ανάγκη για μελέτη της κίνησης των πλανητών γύρω από τον ήλιο και αργότερα της κίνησης των δορυφόρων παρατήρησης και τηλεπικοινωνίας που είναι σήμερα αντικείμενο με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Αφορά δύο σώματα που αλληλεπιδρούν με μία κεντρική δύναμη F , η οποία μπορεί να είναι είτε ελκτική είτε απωστική.

Πιο συγκεκριμένα ο Kepler μελετησε την κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον ήλιο όταν αγνοήσουμε την ύπαρξη των άλλων πλανητών και θεώρησουμε τα σώματα ως ακίνητα υλικά σημεία, λόγω του σφαιρικού τους σχήματος και των μεταξύ τους αποστάσεων, που είναι πολύ μεγάλες σε σύγκριση με την χαρακτηριστική τους διάσταση.

Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση των δύο σωμάτων περιγράφεται από το νόμο βαρύτητας του Νεύτωνα και έχουμε :

$$mr'' = -\frac{GmM}{\|r\|^3}r$$

όπου

M : η μάζα του ήλιου

G : η βαρυτική σταθερά και

m : η μάζα του πλανήτη

r : η απόσταση των δύο σωμάτων

Θεωρούμε τον ήλιο στην αρχή των αξόνων οπότε η θέση του πλανήτη την χρονική στιγμή t περιγράφεται από το διάνυσμα $r(t) = (x(t), y(t))$. Επίσης η τροχιά είναι ελλειπτική, σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Kepler, με τον ήλιο να βρίσκεται στην μία εστία της έλλειψης.

Κανονικοποιούμε το πρόβλημα με τις μάζες και την βαρυτική σταθερά να αντικαθίστανται από τη μονάδα και θέτουμε $q_1(t) = x(t)$ και $q_2(t) = y(t)$ οπότε

προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$q_1'' = -\frac{q_1}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}$$
$$q_2'' = -\frac{q_2}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}$$

όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο μπορούμε να μετατρέψουμε μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$q_1' = p_1$$
$$p_1' = -\frac{q_1}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}$$
$$q_2' = p_2$$
$$p_2' = -\frac{q_2}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}$$

Έστω οι αρχικές συνθήκες

$$q_1(0) = 1 - e$$
$$p_1(0) = 0$$

$$q_2(0) = 0$$
$$p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

όπου e : η εκκενρότητα της ελλειπτικής τροχιάς , με $0 \leq e < 1$

Η ελλειπτική τροχιά που αναπαριστά τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο επίπεδο $(q_1(t), q_2(t))$ είναι η έλλειψη

$$(q_1 + e)^2 + \frac{q_2^2}{1 - e^2} = 1$$

Η λύση του προβλήματος είναι περιοδική με περίοδο 2π και δίνεται από τους τύπους

$$q_1(t) = \cos(E) - e$$

$$q_2(t) = \sqrt{1 - e^2} \sin(E)$$

όπου E : η ανωμαλία της εκκενρότητας της ελλειπτικής τροχιάς , η οποία δίνεται στην πεπλεγμένη ως προς το χρόνο t μορφή

$$t = E - e \sin(E)$$

Αν παραγωγίσουμε προκύπτει

$$p_1(t) = \frac{\sin(E)}{e\cos(E) - 1}$$

$$p_2(t) = \frac{\sqrt{1 - e^2}\cos(E)}{1 - e\cos(E)}$$

Για $e = 0$ η τροχιά είναι κυκλική και η αναλυτική λύση είναι

$$q_1(t) = \cos(t)$$

$$q_2(t) = \sin(t)$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τις αριθμητικές μεθόδους των προηγούμενων κεφαλαίων στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα θεωρήσουμε το παρακάτω διάνυσμα λύσης y με συντεταγμένες τα q_1, p_1, q_2, p_2 .

$$y(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ p_1(t) \\ q_2(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

οπότε η παράγωγος δίνεται από το διάνυσμα

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\frac{y_1(t)}{\sqrt{(y_1(t)^2 + y_3(t)^2)^3}} \\ y_4(t) \\ -\frac{y_3(t)}{\sqrt{(y_1(t)^2 + y_3(t)^2)^3}} \end{pmatrix}$$

Τα ορίσματα εξόδου είναι το x (ένας πίνακας διάστασης $n \times 1$) που περιέχει τα σημεία διαμέρισης στα οποία υπολογίζεται η αριθμητική λύση και το διάνυσμα y (ένας πίνακας διάστασης $n \times 4$) που περιέχει σε κάθε στήλη κάθε συντεταγμένη της αριθμητικής λύσης σε κάθε στοιχείο του x (στην πρώτη στήλη την $y_1(t)$, στην δεύτερη την $y_2(t)$, κ.ο.κ.)

Πίνακας 4.1.1. Συντεταγμένες της αριθμητικής λύσης για το διάνυσμα x

t	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$y_4(t)$
x	$y_1(:, t)$	$y_2(:, t)$	$y_3(:, t)$	$y_4(:, t)$
$x(1)$	$y_1(1, 1)$	$y_2(1, 2)$	$y_3(1, 3)$	$y_4(1, 4)$
$x(2)$	$y_1(2, 1)$	$y_2(2, 2)$	$y_3(2, 3)$	$y_4(2, 4)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x(n)$	$y_1(n, 1)$	$y_2(n, 2)$	$y_3(n, 3)$	$y_4(n, 4)$

4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Υλοποιήθηκαν συνολικά 12 αριθμητικές μέθοδοι, 6 άμεσες μέθοδοι Runge - Kutta και 6 τριγωνομετρικά προσαρμοσμένες κατά G.Vanden Berghe στο πρόβλημα δύο σωμάτων του Kepler. Ο υπολογισμός των σφαλμάτων έγινε με Matlab ενώ η κατασκευή των μεθόδων έγινε σε Mathematica. Οι μέθοδοι που υλοποιήθηκαν είναι:

- Μία μέθοδος Runge - Kutta τεσσάρων σταδίων 4ης τάξης ($RK 4 A$)
- Τέσσερις μέθοδοι Runge - Kutta έξι σταδίων 5ης τάξης ($RK 5 A$, $RK 5 B$, $RK 5 D$, $RK 5 G$)
- Μία μέθοδος Runge - Kutta επτά σταδίων 6ης τάξης ($RK 6 A$)
- Μία μέθοδος τριγωνομετρικά προσαρμοσμένη κατά G.Vanden Berghe τεσσάρων σταδίων 4ης τάξης ($RK 4 A TF$)
- Τέσσερις μέθοδοι τριγωνομετρικά προσαρμοσμένες κατά G.Vanden Berghe έξι σταδίων 5ης τάξης ($RK 5 A TF$, $RK 5 B TF$, $RK 5 D TF$, $RK 5 G TF$)
- Μία μέθοδος τριγωνομετρικά προσαρμοσμένη κατά G.Vanden Berghe επτά σταδίων 6ης τάξης ($RK 6 A TF$)

Σε κάθε μέθοδο χρησιμοποιήθηκε διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 10]$ και εφαρμόστηκαν δύο διαμερίσεις, μία για $n = 50$ σημεία και μία για $n = 100$ σημεία, με βήμα $h = 0.2$ και $h = 0.1$ αντίστοιχα. Δεχτήκαμε, επίσης, ότι $e = 0$ και $v = h$ για τις τριγωνομετρικά προσαρμοσμένες μεθόδους, ενώ για τον υπολογισμό των σφαλμάτων εφαρμόστηκε η Ευκλείδεια νόρμα. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται τα σφάλματα που προέκυψαν για τις αριθμητικές λύσεις σε σχέση με τις πραγματικές.

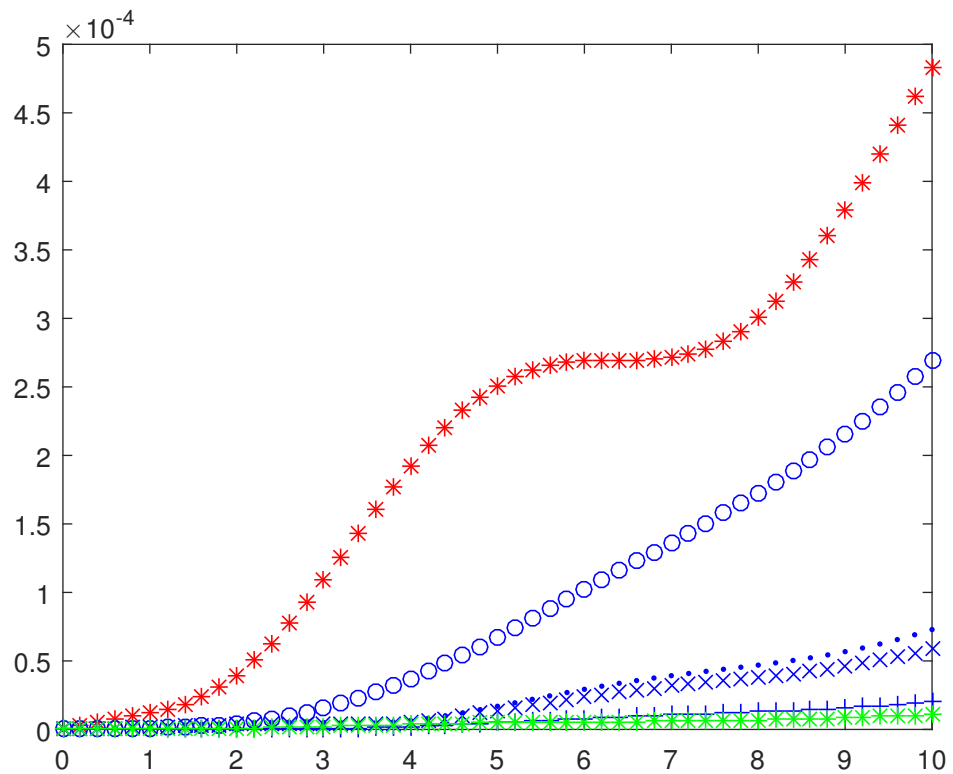
Πίνακας 4.2.1. Σφάλματα των αριθμητικών μεθόδων για $n = 50$ και $n = 100$

Μεθοδος	Στάδια	Τάξη	Σφάλμα $n = 50$	Σφάλμα $n = 100$
<i>RK 4 A</i>	4	4	$4.8248e - 04$	$2.7549e - 05$
<i>RK 5 A</i>	6	5	$1.9942e - 05$	$6.0156e - 07$
<i>RK 5 B</i>	6	5	$5.8985e - 05$	$1.9230e - 06$
<i>RK 5 D</i>	6	5	$2.6922e - 04$	$8.5711e - 06$
<i>RK 5 G</i>	6	5	$7.2898e - 05$	$2.4151e - 06$
<i>RK 6 A</i>	7	6	$1.0788e - 05$	$1.4488e - 07$
<i>RK 4 A TF</i>	4	4	$6.1712e - 14$	$3.7123e - 14$
<i>RK 5 A TF</i>	6	5	$5.5858e - 15$	$2.4976e - 14$
<i>RK 5 B TF</i>	6	5	$1.9845e - 14$	$8.0787e - 14$
<i>RK 5 D TF</i>	6	5	$5.1835e - 14$	$1.1662e - 13$
<i>RK 5 G TF</i>	6	5	$5.9134e - 15$	$3.4218e - 14$
<i>RK 6 A TF</i>	7	6	$1.6523e - 14$	$1.8984e - 14$

Ξεκινώντας από τις άμεσες μεθόδους παρατηρούμε ότι τα σφάλματα μειώνονται όσο αυξάνουν τα σημεία διαμέρισης. Η μείωση είναι της τάξης των δύο δεκαδικών ψηφίων το οποίο υποδηλώνει ικανοποιητική αύξηση της ακρίβειας. Ενδεικτικά για την μέθοδο 4ης τάξης *RK 4 A* το σφάλμα μειώθηκε από $4.8248e - 04$ σε $2.7549e - 05$, για την μέθοδο 5ης τάξης *RK 5 A* το σφάλμα μειώθηκε από $1.9942e - 05$ σε $6.0156e - 07$ και για την μέθοδο 6ης τάξης *RK 6 A* το σφάλμα μειώθηκε από $1.0788e - 05$ σε $1.4488e - 07$.

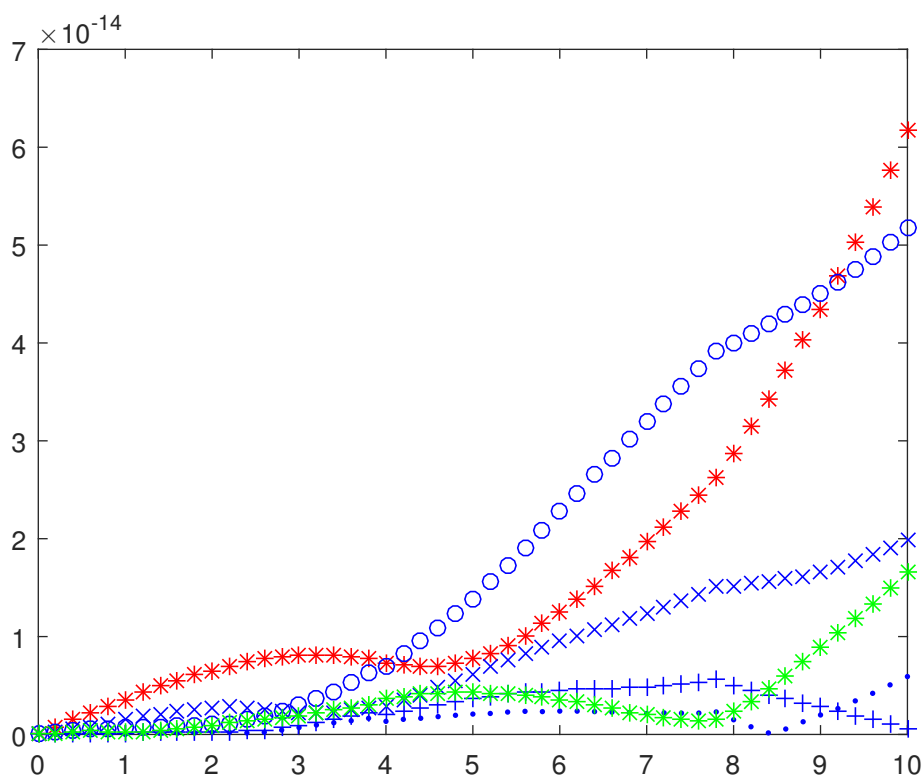
Επίσης η μετάβαση σε μέθοδο μεγαλύτερης τάξης δείχνει να μειώνει την απόκλιση της προσεγγιστικής λύσης από την πραγματική. Αν επικεντρωθούμε στην διαμέριση των 50 σημείων μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι τα σφάλματα μικραίνουν κατά μήκος της στήλης, καθώς πάμε από την *RK 4 A*, που είναι 4ης τάξης, στην *RK 6 A*, που είναι 6ης τάξης. (Διάγραμμα 4.2.1)

Διάγραμμα 4.2.1. Σφάλματα άμεσων μεθόδων ανά σημείο για διαμέριση με $n = 50$ σημεία



Αναφορικά με τις μεθόδους τριγωνομετρικής προσαρμογής κατά G.Vanden Berghe παρατηρείται και εδώ μείωση των σφαλμάτων καθώς αυξάνεται η τάξη της μεθόδου. Η μείωση είναι της τάξης του ενός δεκαδικού ψηφίου ίσως και μικρότερη αλλά ωστόσο υπαρκτή, ενισχύοντας την θεώρηση ότι η τάξη της μεθόδου είναι καθοριστική για την ακρίβεια που επιθυμούμε να επιτύχουμε. (Διάγραμμα 4.2.2)

Διάγραμμα 4.2.2. Σφάλματα μεθόδων τριγωνομετρικής προσαρμογής ανά σημείο για διαμέριση με $n = 50$ σημεία



Αξίζει να επισημάνουμε ότι συγκριτικά με τις άμεσες μεθόδους Runge - Kutta οι μέθοδοι τριγωνομετρικής προσαρμογής κατά G.Vanden Berghe εμφανίζουν σημαντικά μικρότερα σφάλματα, της τάξης των 13 έως 15 δεκαδικών ψηφίων ακρίβειας. Η μέθοδος $RK 4 A$ δίνει σφάλμα $4.8248e - 04$ ενώ η $RK 4 A TF$ δίνει σφάλμα $6.1712e - 14$, . Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα και για τις μεγαλύτερες τάξεις, για παράδειγμα η μέθοδος $RK 5 B$ δίνει σφάλμα $5.8985e - 05$ ενώ η $RK 5 B TF$ δίνει σφάλμα $1.9845e - 14$, και η μέθοδος $RK 6 A$ δίνει σφάλμα $1.0788e - 05$ ενώ η $RK 6 A TF$ δίνει σφάλμα $1.6523e - 14$.

Τα σφάλματα των μεθόδων τριγωνομετρικής προσαρμογής κατά G.Vanden Berghe φαίνεται να δίνουν μεγαλύτερο σφάλμα όσο αυξάνονται τα σημεία διαμέρισης αλλά τα αποτελέσματα δεν θεωρούνται αξιόπιστα καθώς η ακρίβεια των σφαλμάτων είναι της τάξης των υπολογιστικών δυνατοτήτων των προγραμμάτων και ενδέχεται να οφείλεται σε στρογγυλοποιήσεις.

Παράρτημα

Μέθοδοι Runge-Kutta που υλοποιήθηκαν:

Μέθοδος 4 σταδίων 4ης τάξης:

0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	1	-2	2	
	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Μέθοδος 6 σταδίων 5ης τάξης:

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$		
1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

Μέθοδος 6 σταδίων 5ης τάξης:

0					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$			
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$		
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	
1	$-\frac{3}{7}$	0	2	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$
	$\frac{7}{90}$		$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$

Μέθοδος 6 σταδίων 5ης τάξης:

0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$			
1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{15}{4}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{10}{9}$	$-\frac{50}{81}$	$\frac{8}{81}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{75}$	0
	$\frac{23}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$-\frac{27}{64}$
	$\frac{23}{192}$		$\frac{125}{192}$	0	$-\frac{27}{64}$

Μέθοδος 6 σταδίων 5ης τάξης:

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-11}{12}$	$\frac{17}{12}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{-5}{16}$	$\frac{9}{16}$		
1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{8}{7}$	
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

Μέθοδος 7 σταδίων 6ης τάξης:

0							
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$						
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{12}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-3}{8}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{9}{144}$	$\frac{-9}{11}$	$\frac{63}{44}$	$\frac{18}{11}$	0	$\frac{-16}{11}$	
	$\frac{11}{120}$	0	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{-4}{15}$	$\frac{-4}{15}$	$\frac{11}{200}$

Βιβλιογραφία

- [1] Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley and Sons.
- [2] Chan, R. P., Tsai, A. Y. (2010). On explicit two-derivative Runge-Kutta methods. Numerical Algorithms, 53(2), 171-194.
- [3] Hairer, E., Norsett, S.P. and Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems. Springer-Verlag.
- [4] Berghe, G. V., De Meyer, H., Van Daele, M., Van Hecke, T. (1999). Exponentially-fitted explicit Runge-Kutta methods. Computer Physics Communications, 123(1-3), 7-15.
- [5] Berghe, G. V., De Meyer, H., Van Daele, M., Van Hecke, T. (2000). Exponentially fitted Runge-Kutta methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 125(1-2), 107-115.
- [6] Berghe, G. V., Ixaru, L. G., De Meyer, H. (2001). Frequency determination and step-length control for exponentially-fitted Runge-Kutta methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 132(1), 95-105.
- [7] Franco, J. M. (2002). An embedded pair of exponentially fitted explicit Runge-Kutta methods. Journal of computational and applied mathematics, 149(2), 407-414.
- [8] Καλογηράτου, Ζ., Μονοβασίλης, Θ., Σίμος, Θ., (2015). Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Καστοριά
- [9] Βραχάτης, Μ. (2003). Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Ελληνικά γράμματα.
- [10] Παπαγεωργίου, Γ., Τσίτουρας, Χ. (2008). Αριθμητική ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica. Εκδόσεις Συμεών.
- [11] Δημητριάδου, Δ. (2021). Two Derivative Runge - Kutta μέθοδοι. Εφαρμογή στο πρόβλημα Rigid Body. Διπλωματική εργασία.