ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ* ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)**

Διπλωματική εργασία

Ικανότητες μαθητών/τριών Γυμνασίου σε δραστηριότητες γραμμικών εικονιστικών κανονικοτήτων.

του

Παναγιώτη Γούλα,
Α.Ε.Μ. 1006

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Μαριάννα Τζεκάκη, καθηγήτρια
Εξεταστές: Μαριάννα Τζεκάκη, καθηγήτρια
Μαρία Καλδρυμίδου , καθηγήτρια
Μαρία Παπανδρέου, Αναπλ. καθηγήτρια

Φλώρινα, Ιούνιος 2022

*Όπως μετονομάστηκε η Παιδαγωγική Σχολή με τον Ν.4610/2019, ΦΕΚ70/τ.Α΄/07-5-2019

Ευχαριστίες

Στο τέλος αυτής της διαδρομής θα ήθελα να ευχαριστήσω θέρμα την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κυρία Τζεκάκη για τη συμβολή της στη συγγραφή αυτής της εργασίας, για το ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον που μου προκάλεσε για την έρευνα στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών μέσα από τα μαθήματα της αλλά και τη γενικότερη στάση της κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου σε αυτό το μεταπτυχιακό.

Να ευχαριστήσω επίσης και την καθηγήτρια κα Καλδρυμίδου, για την συμμετοχή της στην επιτροπή καθώς και για τα ενδιαφέροντα μαθήματα που μας παρέδωσε.

Επίσης ευχαριστώ την καθηγήτρια κα Παπανδρέου για τη συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος ευχαριστώ τους/τις συμφοιτητές-συνοδοιπόρους και τη Βένια με τα κορίτσια μου, για την υπομονή και τη στήριξη.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία μελετά την ικανότητα των μαθητών/τριών Γυμνασίου στην αναγνώριση και τη γενίκευση μιας γραμμικής εικονικής κανονικότητας. Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των κανονικοτήτων και η ενασχόληση με αυτές έχει πολλαπλά οφέλη για τους/τις μαθητές/τριες. Η γενίκευση επίσης αποτελεί κεντρικό συστατικό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Παρόλο αυτά όμως οι μαθητές/τριες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν είναι εξοικειωμένοι/ες με εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων. Για να καταγραφούν οι ικανότητες των μαθητών/τριών σε τέτοιες εργασίες αλλά και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να πετύχουν τη γενίκευση μοιράστηκαν σε 158 μαθητές/τριες ενός Γυμνασίου δυο έργα με γραμμικά εικονιστικά μοτίβα. Επίσης καταγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές/τριες εκφράζουν το γενικό τύπο μιας τέτοιας κανονικότητας, ενώ παράλληλα ελέγχθηκε αν οι παράγοντες φύλο και ηλικία σχετίζονται με τις επιδόσεις τους στη δοκιμασία.

Λέξεις Κλειδιά: Γενίκευση κανονικοτήτων, εικονιστικό γραμμικό μοτίβο, στρατηγικές γενίκευσης, μαθητές/τριες Γυμνασίου

Abstract

This paper examines the ability of middle school students to recognize and generalize a geometric linear pattern. Mathematics is the science of patterns and practicing them has multiple benefits for students. Generalization is also a central component of mathematics education. Nevertheless, students in secondary education are not familiar with generalization tasks. In order to record the skills of the students in such tasks as well as the strategies they use to achieve generalization, two projects with geometric linear patterns were given to 158 students of a Middle School in Greece. The way in which the students express the general formula of such a pattern was also recorded, while at the same time it was checked whether the factors of gender and age are related to their performance in the test.

Keywords: Pattern Generalization, geometric linear pattern, generalization strategies, Middle school students

Περιεχόμενα

«Η ίδια η ζωή είναι δημιουργός προτύπων» (Piaget, 1950*)*

1. Εισαγωγή

Η ενασχόληση των μαθητών/τριών με τις κανονικότητες μπορεί να διευκολύνει τη μετάβαση των μαθητών/τριών από την αριθμητική στην άλγεβρα. Στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών έχει ενισχυθεί η παρουσία των κανονικοτήτων στην εκπαίδευση και ο ρόλος τους συνεχώς αναβαθμίζεται. Η αναγνώριση και η γενίκευση των κανονικοτήτων, είτε αυτές είναι αναπτυσσόμενες γραμμικές ή τετραγωνικές είτε και επαναλαμβανόμενες, θεωρούνται πολύ σημαντικές για την αλγεβρική σκέψη, επειδή αρχικά καλλιεργείται η ικανότητα των μαθητών/τριών στην έκφραση γενικοτήτων αναγνωρίζοντας τα κοινά σημεία και αρθρώνοντας κανόνες και σχέσεις αλλά και γιατί οι μαθητές/τριες στην τελική αναπαριστούν αυτές τις σχέσεις χρησιμοποιώντας σύμβολα. Ο Kaput (1999) θεωρεί ότι οι κανονικότητες αποτελούν ένα χρήσιμο μέσο για να αναπτυχθεί από τους/τις μαθητές/τριες η εννοιολογική κατανόηση των συναρτήσεων και των μεταβλητών.

Σύμφωνα με τον Radford κ.α. (2007) όπως αναφέρεται στην Wilkie (2022) η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών/τριών, πιο ειδικά με τη βοήθεια των εικονιστικών μοτίβων, θεωρείται ως μια σημειωτική διαδικασία αντικειμενοποίησης στην οποία ο συντονισμός των ενεργειών με τα «μάτια, τις λέξεις και τις χειρονομίες» τους και οι συνεχείς μετατοπίσεις της προσοχής τους τους/τις κάνει σταδιακά να παρατηρούν και τελικώς να εκφράζουν μια γενίκευση. Για την εκμάθηση της άλγεβρας λοιπόν τα ευρήματα πολλών ερευνών συνηγορούν ότι βοηθά η συμπερίληψη τέτοιων οπτικών μορφών δηλαδή των εικονιστικών μοτίβων παράλληλα με τη συμβολική ανάπτυξη, αφού τα σχήματα ενσωματώνουν οπτικά την αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών, υποστηρίζοντας σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο τη διαδικασία της αφαίρεσης και της γενίκευσης. Ο Arcavi (2003) υποστήριξε ότι η οπτικοποίηση δεν καθοδηγεί απλά τη διαδικασία ανάπτυξης μιας γενίκευσης για ένα εικονιστικό μοτίβο, αλλά αποτελεί βασικό συστατικό του απαραίτητου αλγεβρικού συλλογισμού. Η οπτικοποίηση είναι σημαντική και χρήσιμη όχι μόνο για την απεικόνιση της έννοιας, αλλά και για την πραγματική κατάκτηση της (όπως αναφέρεται στην Wilkie, 2022).

Οι έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί διαχρονικά για τις κανονικότητες αφορούν κατά βάση τους/τις μαθητές/τριες στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα καταγράφονται οι επιδόσεις τους στην αναγνώριση και τη γενίκευση μιας κανονικότητας, ο τρόπος συλλογισμού και οι στρατηγικές που ακολουθούν για να γενικεύσουν ένα μοτίβο. Υπάρχουν όμως και έρευνες για τους εκπαιδευτικούς και τον τρόπο διδασκαλίας τους, καθώς και για τις αντιλήψεις που έχουν για τον τρόπο σκέψης των μαθητών/τριών τους.

Η παρούσα εργασία, που αφορά την έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές/τριες Γυμνασίου, είναι χωρισμένη σε έξι κεφάλαια: την εισαγωγή, το θεωρητικό πλαίσιο-βιβλιογραφική ανασκόπηση, την περιγραφή της νέας έρευνας, τα αποτελέσματα και τέλος τα συμπεράσματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης αρχικά ορίζονται οι κανονικότητες, παρατίθονται τα είδη τους, περιγράφεται η παρουσία τους στα ελληνικά προγράμματα σπουδών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ παρουσιάζεται και ο ρόλος της αναγνώρισης και εφαρμογής των μοτίβων στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών/τριών. Στη συνέχεια εισάγεται ο ορισμός της γενίκευσης με τα είδη της και περιγράφεται πιο ειδικά η γενίκευση κανονικοτήτων. Προχωρώντας παρουσιάζονται οι στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές/τριες σε δραστηριότητες γενίκευσης κανονικοτήτων, και πιο συγκεκριμένα σε γραμμικές κανονικότητες και έπειτα περιγράφονται οι διάφορες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες κατά την ενασχόληση της με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται τα βασικά σημεία της έρευνας που διεξάχθηκε, το δείγμα, η μέθοδος και το εργαλείο συλλογής δεδομένων καθώς και η διαδικασία που ακολουθήθηκε. Στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο παρατίθονται τα αποτελέσματα παρουσιασμένα σε διάφορους στατιστικούς πίνακες τα οποία έπειτα αναλύονται εξάγοντας και κάποια συμπεράσματα. Τέλος ακολουθεί η βιβλιογραφία που μελετήθηκε και χρησιμοποιήθηκε καθώς και το παράρτημα στο οποίο περιέχεται όλο το εργαλείο συλλογής δεδομένων.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο- Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1. Κανονικότητες

Για τον όρο pattern χρησιμοποιούνται στα ελληνικά οι όροι πρότυπο, μοτίβο ή κανονικότητα. Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των προτύπων. Τα ίδια τα μαθηματικά προέκυψαν από την ανάγκη του ανθρώπου να καταγράφει παρατηρούμενα μοτίβα στο χώρο και στο χρόνο. Το μυαλό αντιλαμβάνεται τις συνδέσεις και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ εννοιών και ιδεών και στη συνέχεια τις συνδέει μεταξύ τους. Η ικανότητα δημιουργίας μοτίβων είναι συνέπεια της νευρωνικής ανάπτυξης μας στην απόκριση που έχουμε στο περιβάλλον μας. Όπως αναφέρει ο Salingaros, (1999) τα μοτίβα στο μυαλό μιμούνται τα μοτίβα στη φύση καθώς και τα μοτίβα που δημιουργεί ο άνθρωπος, και πιθανώς έτσι εξελίχθηκαν τα ανθρώπινα όντα, ώστε να μπορούν να κάνουν μαθηματικά. Η ανθρωπότητα δημιουργεί μοτίβα από κάποια βασική εσωτερική ανάγκη, εξωτερικεύει τις συνδετικές δομές που δημιουργούνται στο νου μέσω της διαδικασίας της σκέψης, και έτσι εξηγείται η παρουσία των οπτικών μοτίβων εκτός από τα μαθηματικά στη παραδοσιακή τέχνη, στην αρχιτεκτονική, στην ιατρική, στο θέατρο αλλά και σε άλλους τομείς της πνευματικής ανάπτυξης. Τα πολύπλοκα φυσικά και χημικά συστήματα είναι γνωστό ότι δημιουργούν μοτίβα στο χώρο ή στο χρόνο, ενώ ακουστικά μοτίβα συναντούμε και στο χώρο της μουσικής.

Τα πρότυπα συναντώνται σχεδόν σε όλους τους τομείς των μαθηματικών. Όταν τα παιδιά μαθαίνουν να αναζητούν πρότυπα, να τα περιγράφουν να τα μετατρέπουν και να τα επεκτείνουν, τότε σκέφτονται αλγεβρικά. (Van de Walle, 2014).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί ορισμοί για το τι είναι κανονικότητα στα μαθηματικά. Έτσι στο χώρο των Μαθηματικών **κανονικότητα** αποτελεί ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007). Τα μοτίβα στα μαθηματικά μπορεί να περιγραφούν ως κανόνες μιας σειράς από μαθηματικά αντικείμενα (Guerrero & Rivera, 2002, όπως αναφέρεται στους Nurmawanti, και Sulandra, 2020). Παρόμοια οι Mulligan και Mitchelmore (2009) αναφέρουν ότι ένα μαθηματικό πρότυπο μπορεί να περιγραφεί ως οποιαδήποτε προβλέψιμη κανονικότητα, που συνήθως περιλαμβάνει αριθμητικές, χωρικές ή λογικές σχέσεις.

Η εύρεση μιας κανονικότητας απαιτεί την ανακάλυψη ηχητικών οπτικών και κινητικών δομών που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να αναπτύσσονται ή γενικότερα να σχετίζονται με ένα κανόνα δομών (Τζεκάκη 2007)

2.1.1. Είδη κανονικοτήτων

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη κανονικοτήτων στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών και μπορούν να αναπαρασταθούν είτε αριθμητικά είτε εικονιστικά. Τα εικονιστικά σχηματίζονται από αντικείμενα που μεταφέρονται σε θέσεις βασισμένες με μια δομική σχέση και μοιάζουν μεταξύ τους κατά κάποιο τρόπο (Rivera, 2013). Για μια κανονικότητα στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών η θεμελιώδης υπόθεση που γίνεται είναι ότι όλα τα πρότυπα μεταφέρουν σχεσιακές δομές ή απλά δομές. Κάθε δομή χρειάζεται να είναι συνεκτική, γενική και ακριβής. *Συνεκτική* με την έννοια ότι υπάρχει ένας ενιαίος κανόνας που μπορεί να καθορίσει όλα τα επόμενα αποτελέσματα. *Γενική* με την έννοια ότι μπορεί να δοθεί εξήγηση για τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό σταδίων και *ακριβής* με την έννοια ότι υπάρχει ικανοποιητική προσαρμογή μεταξύ ενός υποθετικού ή προβλεπόμενου αποτελέσματος και του πραγματικού αποτελέσματος.

Δυο βασικές κατηγορίες στις οποίες διακρίνουμε τα πρότυπα είναι τα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα.

Τα *επαναλαμβανόμενα μοτίβα* είναι μοτίβα με έναν αναγνωρίσιμο επαναλαμβανόμενο κύκλο στοιχείων, που αναφέρεται ως «μονάδα επανάληψης» ή πυρήνας όπως αναφέρεται στον Van de Walle (2014). Ο πυρήνας σε ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο είναι η μικρότερη επαναλαμβανόμενη αλληλουχία στοιχείων. Ο πυρήνας επαναλαμβάνεται πάντα πλήρως και δεν εμφανίζεται ποτέ μόνο μερικώς. Στα περισσότερα επαναλαμβανόμενα πρότυπα αριθμούμε τα στοιχεία του προτύπου με διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ξεκινώντας από τη μονάδα, τα οποία συχνά ονομάζονται όροι ή βήματα. Ειδικά σε πιο μικρές τάξεις οι μαθητές/τριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν διάφορα υλικά, όπως χρωματιστά πλακίδια, σχήματα «pattern blocks», άλλα αντικείμενα ή απλώς σχέδια, τόσο για να αντιγράψουν όσο και να επεκτείνουν τα πρότυπα. Σε πιο μεγάλες τάξεις μετατρέπουν τα πρότυπα από το ένα μέσο στο άλλο, αντιλαμβανόμενοι τις μαθηματικές τους ομοιότητες, δηλαδή την κοινή δομή ως πρότυπα. Για παράδειγμα το ΑΒΓΑΒΓ…μπορεί να θεωρηθεί ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο με πυρήνα ΑΒΓ και αριθμό στοιχείων 3 δηλαδή μήκος πυρήνα 3. Τα γράμματα Α, Β, Γ ανάλογα με το πρότυπο αλλά και τα υλικά που χρησιμοποιούνται σε κάθε τάξη μπορεί να αντιπροσωπεύουν χρώμα, σχήμα ή και αντικείμενα και βοηθούν τα παιδιά να αναπαραστήσουν τη δομή του προτύπου και να προχωρήσουν στη γενίκευση του.

Τα *αναπτυσσόμενα πρότυπα*, όπως αναφέρεται στον Van de Walle (2014), αυξάνονται κατά ένα παράγοντα με πρόσθεση ή με πολλαπλασιασμό και σε μεγαλύτερες τάξεις ο παράγοντας μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός άρα να γίνεται αφαίρεση και διαίρεση. Από τεχνικής άποψης τα πρότυπα αυτά είναι οι γνωστές ακολουθίες. Σε αυτήν την περίπτωση, τα παιδιά δεν επεκτείνουν απλώς το πρότυπο αλλά αναζητούν και μια γενίκευση, δηλαδή μια αλγεβρική σχέση, που να περιγράφει ποιο θα είναι το πρότυπο σε οποιαδήποτε σημείο της εξέλιξής του. Τα αναπτυσσόμενα πρότυπα είναι το μέσο επίσης για να αναδειχθεί η έννοια της συνάρτησης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημείο εισόδου σε αυτή τη μαθηματική ιδέα. Κατά την ανάλυση των αναπτυσσόμενων προτύπων η αναπτυξιακή διδακτική πορεία που ακολουθείται είναι η εξής: αρχικά οι μαθητές/τριες συλλογίζονται εξετάζοντας τα εποπτικά μέσα, στη συνέχεια συλλογίζονται τις αριθμητικές σχέσεις και τέλος η διερεύνηση επεκτείνεται σε μια μεγαλύτερη περίπτωση δηλαδή στη νιοστή (Friel και Markworth, 2009). Τα περισσότερα παιδιά αντιλαμβάνονται ευκολότερα τα πρότυπα από το ένα βήμα στο επόμενο. Το πρότυπο που μεταβάλλεται από βήμα σε βήμα με τρόπο που είναι δυνατόν να περιγραφεί ονομάζεται αναδρομικό πρότυπο.

Τα εναλλασσόμενα μοτίβα (Alternating patterns), σύμφωνα με τον Pasnak (2017) είναι εκείνα στα οποία τα αντικείμενα εναλλάσσονται σε χρώμα, μέγεθος ή σχήμα. Παραδείγματα τέτοιων μοτίβων θα ήταν απλές εναλλαγές όπως οβάλ, ορθογώνιο, οβάλ, ορθογώνιο, οβάλ, ορθογώνιο. Οι μαθητές/τριες καλούνται να απαντήσουν τι σχήμα θα ακολουθηθεί και συχνά τους ζητείται να επεκτείνουν την ακολουθία ή να την αντιγράψουν με διαφορετικά υλικά.

Συχνά διδάσκονται διπλές εναλλαγές (π.χ. κόκκινο, κόκκινο, μαύρο, μαύρο, κόκκινο, κόκκινο, μαύρο, μαύρο) ή εναλλαγές ενδιάμεσης πολυπλοκότητας (π.χ. μεγάλο, μεγάλο, μικρό, μεγάλο, μεγάλο, μικρό ή ροζ, μπλε, μπλε, ροζ, μπλε, μπλε). Μερικές φορές τέτοια μοτίβα έχουν τρία στοιχεία (δίσκος, τρίγωνο, τετράγωνο, δίσκος, τρίγωνο, τετράγωνο).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα είδη κανονικοτήτων, όπως αναφέρονται στον Rivera (2013).

Πίνακας 1: Είδη κανονικοτήτων

Είδη κανονικοτήτων	Αριθμητικό Παράδειγμα	Αλγεβρικό Παράδειγμα
Σταθερά μοτίβα (Constant Patterns)	A A A …	Μοντέλα οριζόντιων γραμμών
Επαναλαμβανόμενα Μοτίβα (Repeating Patterns)	A B A B A B …	Τεμαχικά μοντέλα, Τριγωνομετρικά Μοντέλα
Μοτίβα σε αύξουσα σειρά (Increasing Patterns)	1, 3, 5, 7, 9, 11, …	Γραμμικά και εκθετικά μοντέλα, πολυωνυμικά μοντέλα
Μοτίβα σε φθίνουσα σειρά (Decreasing Patterns)	12, 10, 8, 6, 4,…	
Μαθηματικοί αλγόριθμοι (Mathematical Algorithms)	Πράξεις που περιλαμβάνουν αριθμούς	Πράξεις που περιλαμβάνουν εκφράσεις
Μαθηματικές Έννοιες (Mathematical Concepts)	Αντιστάθμιση, Αποσύνθεση	Μετασχηματισμοί Συναρτήσεων
Αναδρομικά μοτίβα (Recursive Patterns)	Ακολουθία Fibonacci, Μοτίβο Πύργου του Hanoi και Αναδρομικά Μοτίβα στα Διακριτά Μαθηματικά	
Χωρικά σχεδιασμένα Μοτίβα (Spatially Drawn Patterns)	Μερικές Γεωμετρικές Σχέσεις (Fractals, Πυθαγόρειο Θεώρημα, Θεώρημα αθροίσματος γωνιών ενός τριγώνου, άκαμπτες κινήσεις)	

Η αντιστάθμιση στα μαθηματικά είναι η διαδικασία επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης σε ένα πρόβλημα που μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα νοητικά. Για παράδειγμα αν για τον υπολογισμό της πράξης 47+25 γίνει η μετατροπή 47+3+21 τότε είναι πιο εύκολο να γίνει η πράξη. Οι Chua και Hoyles (2014) ορίζουν και τα εικονιστικά μοτίβα σε ένα εικονογραφικό πλαίσιο που δείχνει έναν ή περισσότερους σχηματισμούς. Υπάρχει δηλαδή μια σειρά αριθμών που σχετίζονται με μια ακολουθία γεωμετρικών σχημάτων ή εικόνων στην οποία κάθε σχήμα προέρχεται από το προηγούμενο σχήμα με μια καλά ορισμένη διαδικασία. Οι εργασίες γεωμετρικών μοτίβων παρέχουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να αναλύουν αναπαραστάσεις προτύπων, να γενικεύουν αυτά τα μοτίβα, να διερευνούν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις σχέσεων και να εξερευνούν διαφορετικούς τύπους λειτουργικών σχέσεων (Markworth, 2010). Τα γεωμετρικά μοτίβα μπορούν να αντιπροσωπεύουν τόσο γραμμικές όσο και μη γραμμικές συναρτήσεις. Γραμμικές, γιατί ο νιοστός όρος μπορεί να γραφεί ως αν+b, ενώ μη γραμμικές γιατί ο νιοστός όρος μπορεί να γραφεί σε μορφή τουλάχιστον δευτέρου βαθμό. Πιο συγκεκριμένα δευτέρου βαθμού έχουν μορφή $αν^2+βν+γ$ και καλούνται τετραγωνικές.

2.1.2. Κανονικότητες στα ελληνικά προγράμματα σπουδών

Στα ελληνικά προγράμματα σπουδών η παρουσία των μοτίβων ή κανονικοτήτων ξεκινά από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών του Δημοτικού του 2011, οι μαθητές/τριες πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. Όπως τονίζεται, είναι σημαντικό να δοθεί χρόνος στα παιδιά από τις πρώτες κιόλας τάξεις της υποχρεωτικής εκπαίδευσης να εξοικειωθούν με τις θεμελιώδεις διαδικασίες της αναγνώρισης κανονικοτήτων και σχέσεων, οι οποίες θα αποτελέσουν το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική στη συνέχεια μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Στα προηγούμενα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα προστίθεται και η κατασκευή επαναλαμβανόμενων και μεταβαλλόμενων κανονικοτήτων με χρήση διάφορων εκπαιδευτικών υλικών. Στις ενδεικτικές δραστηριότητες οι μαθητές/τριες μπορούν να κατασκευάσουν δικά τους αντικείμενα πχ κομπολόγια ή συνθέσεις σχημάτων με χάντρες, γεωμετρικά σχήματα από χαρτόνι, κυβάκια lego κ.α. Οι επαναλαμβανόμενες κανονικότητες θα μπορούσαν να έχουν την μορφή εναλλαγής χρώματος ή σχήματος πέρα από αριθμούς. Σε μεγαλύτερες τάξεις καλούνται να περιγράψουν και να διατυπώσουν τον κανόνα ενός μοτίβου. Μοτίβα πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης βρίσκονται σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού. Είναι σημαντικό, όπως αναφέρεται να χρησιμοποιηθούν διάφορες κανονικότητες, μέσω των οποίων οι μαθητές/τριες να μπορέσουν να αποκτήσουν μια αίσθηση της σειράς και της οργάνωσης διαφόρων καταστάσεων γύρω τους. Επίσης, εξίσου ουσιαστικό είναι να μπορούν να ασκήσουν την παρατηρητικότητα τους στην ακρίβεια και στην εκτέλεση συγκεκριμένων διαδοχικών βημάτων. Στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού οι στόχοι είναι οι μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν, να διερευνούν, να περιγράφουν και να συμπληρώνουν γεωμετρικές, αριθμητικές και αναδρομικές κανονικότητες και να αναπαριστούν μια κανονικότητα με διαφορετικά μέσα (λεκτικά, αριθμητικά, εικονικά). Η έκφραση του κανόνα που διέπει ένα μοτίβο οδηγεί αναπόφευκτα σε κάποιο σημείο στην ανάγκη αξιοποίησης γραμμάτων, δηλαδή μεταβλητών. Επίσης πρέπει να μπορούν να συγκρίνουν κανονικότητες μεταξύ τους και να κάνουν μια μακρινή γενίκευση βρίσκοντας κάποιον απομακρυσμένο όρο μιας κανονικότητας. Η αξιοποίηση των κανονικοτήτων και των ιδιοτήτων τους θα τους βοηθήσει να επιλύουν σχετικά προβλήματα. Οι μαθητές/τριες θα διαπιστώσουν ότι υπάρχουν κανονικότητες και στη μεταβολή κάποιων μεγεθών πχ στη μεταβολή της περιμέτρου ή του εμβαδού κάποιου γεωμετρικού σχήματος, όταν μεταβάλλονται οι διαστάσεις του. Η σχέση που προκύπτει από δυο ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι μια μορφή κανονικότητας, που οι μαθητές/τριες θα τη διαπιστώσουν με τη χρήση διάφορων αναπαραστατικών μέσων όπως είναι ένας πίνακας τιμών. Η ρητή αναφορά σε συναρτήσεις είναι σπάνια στα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η έννοια της συνάρτησης είναι έμμεσα παρούσα στη μελέτη σχέσεων και απεικονίσεων και, ειδικότερα στην εξερεύνηση χρήση και εξήγηση σχέσεων, στην ερμηνεία, γενίκευση και χρήση απεικονίσεων, στη εύρεση συντεταγμένων, στην αναγνώριση σχέσεων μεταξύ συντεταγμένων ενός γραφήματος καθώς και στη χρήση μηχανών αριθμών.

Στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου του 2011, που δημιουργήθηκε αλλά τελικά δεν εφαρμόστηκε αποτελεί στόχος στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές/τριες διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση. Επίσης να αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες και με σημεία σε σύστημα αξόνων και μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Προχωρώντας στη Β΄ Γυμνασίου, γίνεται η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης, και οι έννοιες κανονικότητα και συνάρτηση βρίσκουν κοινές εφαρμογές. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών απουσιάζουν αυτοί οι στόχοι. Διαπιστώνουμε ότι η παρουσία των κανονικοτήτων στα προγράμματα σπουδών του Γυμνασίου είναι μάλλον περιορισμένη και περιορίζεται σε κάποιες δραστηριότητες κατά την εισαγωγή της έννοιας της εξίσωσης και της συνάρτησης. Οι μαθητές/τριες θα συναντήσουν πιο αναλυτικά στην Α΄ Λυκείου την ειδική περίπτωση κανονικοτήτων, το κεφάλαιο των ακολουθιών και συγκεκριμένα τις αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους.

Σύμφωνα με το νέα Προγράμματα Σπουδών που θα εφαρμοστούν πιλοτικά σε συνδυασμό με τα ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών σε όλα τα Πρότυπα και Πειραματικά Γυμνάσια της χώρας κατά τα σχολικά έτη 2021-2022 και 2022-2023, όπως αναφέρεται στο ΦΕΚ 5260/12-11-2021, η παρουσία των κανονικοτήτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ισχυροποιείται. Από το σχολικό έτος 2023-2024 σχεδιάζεται να εφαρμοστεί σε όλα τα Γυμνάσια της χώρας και οι κανονικότητες θα αποτελούν μια ξεχωριστή θεματική ενότητα. Τονίζεται ότι δραστηριότητες με κανονικότητες μπορούν να βοηθήσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και να αποτελέσουν έναν αποτελεσματικό τρόπο μετάβασης στην αλγεβρική παράσταση αλλά και την έννοια της συνάρτησης.

Ειδικά στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές/τριες θα πρέπει να αναγνωρίζουν, να συγκρίνουν, να περιγράφουν κανονικότητες και να τις εκφράζουν ως αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς και στη συνέχεια να μπορούν να τις συμπληρώσουν, να τις επεκτείνουν αλλά και να μπορούν να κατασκευάσουν μια κανονικότητα που εκφράζει ακολουθίες φυσικών αριθμών με σταθερή διαφορά. Επίσης να μπορούν να αναπαραστήσουν κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως εικόνες, γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών και να μπορούν να μεταβούν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα αποτελεί το να μπορούν οι μαθητές/τριες να διερευνούν κανονικότητες που μπορούν να εκφραστούν στη μορφή α ν και να διατυπώνουν το γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά καθώς και να επιλύουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και στην καθημερινή τους ζωή με κανονικότητες. Στη Β΄ Γυμνασίου οι κανονικότητες επεκτείνονται και στη γραμμική μορφή αν+β, όπου α και β ρητοί αριθμοί, και οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας. Στη Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές/τριες πρέπει να μπορούν να διερευνούν μαθηματικές κανονικότητες και να τις εκφράζουν με αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής α $ν^2$ με α>0.

2.1.3. Αναγνώριση και εφαρμογή μοτίβων (Patterning)

Ο αγγλικός όρος patterning αναφέρεται στην αναζήτηση μαθηματικών δομών και κανονικοτήτων, το να μπορεί κανείς δηλαδή να αναγνωρίζει και να εφαρμόζει μοτίβα. Συμβάλλει στην επιβολή μιας τάξης, συνοχής και προβλεψιμότητας σε καταστάσεις που φαινομενικά δεν είναι οργανωμένες, ενώ επιτρέπει να γίνουν γενικεύσεις πέρα από τις προφανείς πληροφορίες που δίνονται. Είναι λοιπόν μια διαδικασία, ένας ξεχωριστός τομέας μελέτης αλλά πολύ περισσότερο μια συνήθεια του νου. (Clements και Sarama, 2009, όπως αναφέρεται στον Rivera, 2013).

Κατά την αναζήτηση μαθηματικών δομών και κανονικοτήτων οι μαθητές/τριες έρχονται αντιμέτωποι/ες με δύο τουλάχιστον πολύ δύσκολες διεργασίες. Πρώτον, ο τρόπος που αντιλαμβάνονται τις καταστάσεις πρέπει να αλλάξει και να γίνει καθαρά μαθηματικός. Για παράδειγμα, μπορεί να επικεντρωθούν σε πτυχές ενός μοτίβου που πιστεύουν ότι μπορεί να αλλάζουν ή να παραμένουν αμετάβλητες σε δεδομένα στάδια του μοτίβου και έτσι να τους βοηθήσει να αντιλαμβάνονται πιθανές διαφορές και ομοιότητες. Αλλά η διαδικασία είναι περίπλοκη, λόγω της ανθρώπινης προδιάθεσης ή της φυσικής τάσης του ανθρώπου να δίνει κυρίως προσοχή σε αυτό που βρίσκει κανείς σημαντικό να δει, ένα φαινόμενο που αποκαλούμε αντιληπτική ποικιλομορφία. Δηλαδή, ειδικά κατά την αναγνώριση και εφαρμογή μοτίβων, αυτό που κάποιος θεωρεί ουσιαστικά αμετάβλητο και/ή μεταβαλλόμενο μπορεί να είναι πιθανώς μη αναγνωρίσιμο ή ασήμαντο για κάποιον άλλο. Δεύτερον, ειδικά οι μαθητές του Δημοτικού, πρέπει να αποκτήσουν τη μαθηματική πρακτική ότι με λίγα μόνο γνωστά στάδια ένα μοτίβο πιθανότατα θα συμπεριφέρεται σύμφωνα με μια επιβεβλημένη γενική έκφραση που αντλείται από μια ερμηνευμένη δομή, η οποία στη συνέχεια προβάλλεται στα άγνωστα και μακρινά στάδια του μοτίβου. Αναφέρεται η συγκεκριμένη πρακτική ως η ανάγκη για μια εξήγηση κανονικότητας σε σχέση με τη υψηλού επιπέδου φάση της δόμησης που ακολουθεί τη φάση της επέκτασης του μοτίβου. Σημαντικοί λοιπόν κατά τη δραστηριότητα διαμόρφωσης προτύπων είναι οι ρόλοι που αποδίδονται τόσο στην πρόβλεψη των αποτελεσμάτων (επεκτατική δραστηριότητα) αλλά και στις τυπικές απαιτήσεις που απαιτούνται για την κατασκευή μιας εξήγησης κανονικότητας. Ενώ η παραπάνω δεύτερη εργασία μπορεί να αντιμετωπιστεί, μέσω των εννοιών της απαγωγής, της επαγωγής και της αφαίρεσης απαιτούνται ακόμα περισσότερες έρευνες για να δημιουργηθεί μια σταθερή τροχιά αντιμετώπισης από τις παραπάνω έννοιες σε μοτίβα διαφορετικών επιπέδων πολυπλοκότητας. (Rivera, 2013). Στην απαγωγή οι μαθητές/τριες κάνουν μια υπόθεση, μια εικασία αφού παρατηρήσουν τη δομή του μοτίβου και στη συνέχεια με τη επαγωγή ελέγχουν αν η υπόθεση τους είναι σωστή και για τα επόμενα στάδια της κανονικότητας.

Σύμφωνα με τους Rittle-Johnson, Fyfe, Hofer και Farran (2017), η πρώιμη γνώση επαναλαμβανόμενων προτύπων θεωρείται πρόβλεψη των επιτευγμάτων στα μαθηματικά πολλά χρόνια αργότερα. Όταν δηλαδή τα παιδιά βελτιώνουν τις ικανότητες τους στη διαμόρφωση μοτίβων στην προσχολική ηλικία ή τις τάξεις του Δημοτικού βελτιώνουν τις γνώσεις τους στα μαθηματικά αργότερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης όπως αναφέρεται στον Pasnak (2017) υπάρχουν κάποια πολύ πρόσφατα εμπειρικά στοιχεία που δείχνουν ότι υπάρχει βελτίωση στην αναγνώριση και εφαρμογή μοτίβων, όταν δίνονται κάποιες σύντομες οδηγίες στους/στις μαθητές/τριες με κάποιες να υπερτερούν από κάποιες άλλες. Για παράδειγμα οι Fyfe, McNeil, Rittle-Johnson (2015), διαπίστωσαν ότι η χρήση αφηρημένων όρων, όπως το «abab» είναι πιο χρήσιμη για τα παιδιά από συγκεκριμένους όρους, όπως «μεγάλο μικρό μεγάλο μικρό», ενώ οι Rittle-Johnson, Saylor και O Swygert (2008) ανέφεραν ότι η διδασκαλία ήταν πιο χρήσιμη εάν τα παιδιά εξηγούσαν το σκεπτικό τους σε άλλο άτομο. Η διδασκαλία σύνθετων μοτίβων σε παιδιά παράγει πρόοδο στα μαθηματικά και την ανάγνωση, σύμφωνα με μετρήσεις που έγιναν με χρήση ορισμένων τυποποιημένων τεστ (Pasnak, 2017). Με όποιον τρόπο και να γίνεται η αντιμετώπιση και η εφαρμογή από τους μαθητές/τριες επαναλαμβανόμενων μοτίβων και ο εντοπισμός κοινών στοιχείων και δομών σε διαφορετικές καταστάσεις είναι μια σημαντική δραστηριότητα που βρίσκεται στον πυρήνα της μαθηματικής ανάπτυξης, αφού υποστηρίζει την αναγνώριση ιδιοτήτων και σχέσεων σε διαφορετικές καταστάσεις. (Papic και άλλοι 2013, όπως αναφέρεται στην Tzekaki, 2020)

2.1.4. Σημασία κανονικοτήτων στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης

Ο Van de Walle (2014) αναφέρει ότι από τα προνήπια ως τη Β΄ Δημοτικού, τα παιδιά αναπτύσσουν την αλγεβρική τους συλλογιστική κάνοντας γενίκευση των εμπειριών που έχουν με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς, επισημοποιώντας τις ιδέες αυτές με κατανοητές αναπαραστάσεις και σύμβολα και διερευνώντας τις έννοιες της κανονικότητας και της συνάρτησης. Η ουσία της αλγεβρικής συλλογιστικής ή σκέψης είναι η αναζήτηση και η εύρεση σχέσεων και η δημιουργία μιας δομής με τις σχέσεις αυτές. Η μορφή αυτή της αλγεβρικής σκέψης προετοιμάζει τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και για άλλους τομείς των μαθηματικών και είναι πολύ χρήσιμη για να αξιοποιηθούν τα μαθηματικά στην καθημερινότητα των ανθρώπων. Στόχος στα προγράμματα σπουδών είναι η αλγεβρική σκέψη να συνδέεται με τα βασικά σημεία σε όλες τις τάξεις, με κύριες θεματικές τη χρήση κανονικοτήτων για δημιουργία γενικεύσεων. Επίσης ο ίδιος αναφέρει τα τρία κύρια στοιχεία της αλγεβρικής συλλογιστικής σύμφωνα με τους (Blanton, 2008 και Kaput, 2008) στα οποία συνδυάζονται οι σημαντικές έννοιες της γενίκευσης και της συμβολικής αναπαράστασης είναι:

1. Η μελέτη των δομών του αριθμητικού συστήματος, όπως και αυτών που προκύπτουν από την αριθμητική (η άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική).
2. Η μελέτη των κανονικοτήτων, των σχέσεων και των συναρτήσεων.
3. Η διαδικασία της μαθηματικής αναπαράστασης, όπου περιλαμβάνεται η κατάλληλη χρήση των συμβόλων.

Ο αλγεβρικός συλλογισμός κατά τον Kaput (1999), όπως αναφέρεται στους Zazkis και Liljedahl (2002), αναφέρεται στη δραστηριότητα των μαθητών να γενικεύουν δεδομένα και μαθηματικές σχέσεις, να καθιερώνουν αυτές τις γενικεύσεις μέσω εικασιών και επιχειρημάτων και να τις εκφράζουν σε ολοένα και πιο επίσημους τρόπους. Ο Mason (1996) ισχυρίζεται ότι οι ρίζες της αλγεβρικής σκέψης είναι ουσιαστικά η ανίχνευση των ομοιοτήτων και των διαφορών, η πραγματοποίηση διακρίσεων, η ταξινόμηση και η επισήμανση ή απλώς η «αναζήτηση αλγορίθμου». Ο ίδιος ο σχηματισμός αυτού του αλγορίθμου στο μυαλό των μαθητών/τριών με την όποια μορφή και αν οραματίζεται, θεωρεί ότι είναι αλγεβρική σκέψη. Δηλαδή η αναγνώριση των κανονικοτήτων θεωρείται κρίσιμη για την αλγεβρική σκέψη επειδή πρώτον αναπτύσσει την ικανότητα των μαθητών/τριών στην έκφραση γενικοτήτων αναγνωρίζοντας τα κοινά σημεία και αρθρώνοντας κανόνες και σχέσεις και δεύτερον γιατί οι μαθητές/τριες στην τελική αναπαριστούν αυτές τις σχέσεις χρησιμοποιώντας σύμβολα. Έτσι, όπως αναφέρεται και στους Mulligan και Mitchelmore

(2009), η ενασχόληση των μαθητών/τριών με δραστηριότητες κανονικοτήτων βοηθά στην ανάπτυξη της αλγεβρικής τους σκέψης, ενώ η Warren (2005) υπερτονίζει ότι αυτό μπορεί να ξεκινήσει και από το ξεκίνημα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τον Lükenet al. (2014), όπως αναφέρεται στις Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου (2019) ο σχηματισμός γενικεύσεων, αφαιρέσεων και συμβολισμού είναι από τα πιο βασικά στοιχεία της μαθηματικοποίησης και περιέχονται σε οποιαδήποτε δραστηριότητα με κανονικότητες. Ο McGarvey (2012) αναφέρει ότι τα εικονιστικά μοτίβα είναι η αφετηρία για την πρώιμη αλγεβρική σκέψη και ότι η σύνδεση μεταξύ της διερεύνησης των κανονικοτήτων και της αλγεβρικής σκέψης είναι πιο εμφανής σε δραστηριότητες που περιέχουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα που μπορούν να ποσοτικοποιηθούν. Επίσης για τους μεγαλύτερους μαθητές, τα γεωμετρικά αναπτυσσόμενα μοτίβα μπορούν να παρέχουν ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, και ειδικότερα την ικανότητα ανάλυσης, γενίκευσης και αναπαράστασης σχέσεων (Hourigan και Leavy, 2015). Όπως συνοψίζουν οι Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου (2019), τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα αποτελούν ισχυρό εργαλείο για την ικανότητα των μαθητών πρώτον στο να κατανοήσουν και να αναλύσουν μαθηματικά αντικείμενα ή διεργασίες, όπως τα συστήματα αρίθμησης ή οι κανονικότητες στα σχήματα (Liljedahl, 2004) και έπειτα στη γενίκευση και τον συμβολισμό σε μαθηματικές ενότητες, όπως η επίλυση προβλημάτων (Rivera & Becker, 2009; Radford, 2008) και εξισώσεων (McNeil & Alibali, 2005). Ενώ ακόμα και σε μικρότερες ηλικίες σε αριθμητικά μοτίβα στα οποία ζητείται ένα η περισσότερα στοιχεία του τα οποία βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη θέση μέσα στην κανονικότητα, παράγεται από τους μαθητές συναρτησιακή σκέψη (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019).

2.2. Γενίκευση

2.2.1. Ορισμός Γενίκευσης

Η βιβλιογραφία περιέχει πολλούς ορισμούς για τη γενίκευση. Ο Mason (1996) αναφέρει ότι η γενίκευση είναι η καρδιά των μαθηματικών. Αυτός ο ισχυρισμός ίσως δε θεωρείται υπερβολικός κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, ειδικά αν αναλογιστεί κανείς το πλήθος των εφαρμογών που προσφέρει η ικανότητα που έχει κάποιος να γενικεύει. Η Ellis και άλλοι (2017) σημειώνουν ότι η γενίκευση είναι μια κρίσιμη πτυχή της ενασχόλησης με τα μαθηματικά, είναι το μέσο για να παραχθεί νέα γνώση, με τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής να τη συνιστούν ως κεντρικό συστατικό της διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα. Ο τομέας της Άλγεβρας είναι ο κατεξοχήν τομέας των Μαθηματικών, όπου οι προτάσεις και τα θεωρήματα προκύπτουν από τη γενίκευση. Οι Warren, Trigueros, και

Ursini, (2016) αναφέρουν πιο συγκεκριμένα ότι οι εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων είναι από τους βασικούς τρόπους εισαγωγής των μαθητών/τριών στην Άλγεβρα.

Η **γενίκευση** όπως αναφέρεται και στους Chua και Hoyles (2014) έχει αναγνωριστεί ευρέως ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει τουλάχιστον μία από τις ακόλουθες δραστηριότητες:

α) την εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων για τον εντοπισμό κοινών σημείων (Dreyfus, 1991; Ellis, 2007; Mason, 1996; Radford, 2008)

β) την επέκταση τη συλλογιστικής κάποιου πέρα από αυτές τις συγκεκριμένες περιπτώσεις (Ellis, 2007; Harel & Tall, 1991; Radford, 2008), και

γ) την εξασφάλιση ενός ευρύτερου αποτελέσματος για αυτές τις συγκεκριμένες περιπτώσεις (Dreyfus, 1991; Dubinsky, 1991; Ellis, 2007).

Η γενίκευση, με την αυστηρή της έννοια, είναι η ανακάλυψη, μετά από τον στοχασμό σε έναν αριθμό από περιπτώσεις, μιας γενικής περιγραφής που ισχύει για όλες τις περιπτώσεις (Peirce, 1960, όπως αναφέρεται στον Rivera, 2013). Έτσι, όταν κάνουμε μια γενίκευση είναι ένδειξη ότι εμβαθύνουμε στη βεβαιότητα των αντιλήψεών μας για τα γνωστά θέματα και στη συνέχεια μπορούν να μας βοηθήσουν να χειριστούμε και άγνωστα θέματα. Η γενίκευση αφορά τη μετάβαση από την θεώρηση των δομικών χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει το αντικείμενο αυτό, επεκτείνοντας τα χαρακτηριστικά του σε όλα τα αντικείμενα του συνόλου. Η γενίκευση επιτρέπει στους μαθητές/τριες την επέκταση εννοιών και διεργασιών τις οποίες ήδη έχουν κατανοήσει ή την διατύπωση εικασιών που ενίοτε αποτελούν προστάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας.

Για τον Kaput (1999) η γενίκευση περιλαμβάνει τη σκόπιμη επέκταση του εύρους ενός συλλογισμού ή της επικοινωνίας πέρα από την περίπτωση ή τις περιπτώσεις που εξετάζονται, προσδιορίζοντας και εκθέτοντας ρητά τα κοινά σημεία στις περιπτώσεις αυτές. Ο συλλογισμός φτάνει σε ένα επίπεδο, όπου η εστίαση δεν γίνεται πλέον στις περιπτώσεις τις ίδιες, αλλά μάλλον στα πρότυπα, τις διαδικασίες, τις δομές και τις σχέσεις που δημιουργούνται. Απόδειξη ότι γενίκευση πραγματοποιείται είναι η έκφραση ενός λειτουργικού κανόνα που περιγράφει τις συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Γενίκευση κατά τον Polya (1957), όπως αναφέρεται στον Rivera (2013) είναι η μετάβαση από την εξέταση ενός αντικειμένου στην εξέταση ενός συνόλου που περιέχει αυτό το αντικείμενο ή η μετάβαση από την εξέταση ενός περιορισμένου συνόλου σε ένα πιο ολοκληρωμένο σύνολο που περιέχει το περιορισμένο. Σύμφωνα με τον Radford (2001) είναι σημαντικό οι μαθητές να εστιάσουν σε γενικεύσεις που βασίζονται σε μεταβλητές παρά σε μια απλή αντικατάσταση αριθμών με μεταβλητές. Είναι ουσιαστική η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό, από αριθμούς σε μεταβλητές μιας και η παρουσία μεταβλητών στις γενικεύσεις των μαθητών δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τις αντιλαμβάνονται ως γενικές και αλγεβρικές.

Κατά την έκφραση μιας γενίκευσης υπάρχουν τρία είδη συμπερασματικών συλλογισμών, όπως αναφέρονται στον Rivera (2013): η απαγωγή (abduction), η επαγωγή (induction) και η αφαίρεση (deduction). Αρχικά στην απαγωγή οι μαθητές διατυπώνουν μια υπόθεση ή ένα εύρος υποθέσεων. Στη συνέχεια μέσω της επαγωγής επαληθεύουν τις υποθέσεις τους. Η απαγωγή είναι η πηγή των πρωτότυπων ιδεών και συχνά επηρεάζεται από προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες, σε αντίθεση με την επαγωγή που ο/η μαθητής/τρια εκτελεί ένα απαγωγικό ισχυρισμό δοκιμάζοντας τον σε συγκεκριμένες περιπτώσεις με την ελπίδα ότι τυχόν σφάλματα μπορούν να διορθωθούν στην πορεία συλλέγοντας περισσότερα δεδομένα. Η αφαίρεση σε αντίθεση με την απαγωγή και την επαγωγή, θεμελιώνει πρωτίστως την αναγκαιότητα ενός μόνο έγκυρου συμπεράσματος και, όπως η επαγωγή, δεν δημιουργεί πρωτότυπες ιδέες. Για την αιτιολόγηση του συμπεράσματος ανάλογα με τη βαθμίδα της εκπαίδευσης οι μαθητές/τριες σε πιο μικρές τάξεις μπορούν να χρησιμοποιήσουν εικονιστικές ή αριθμητικές αναπαραστάσεις, ενώ σε μεγαλύτερες τάξεις οι αυστηρά λογικές αποδείξεις είναι ο τρόπος που οι εικασίες και οι συλλογισμοί επιβεβαιώνονται ή απορρίπτονται (Knuth, 2002). Η αφαίρεση, αφενός, αποτελεί παράδειγμα αποδεικτικού συλλογισμού, και αποτελεί τη βάση της «ασφάλειας των μαθηματικών μας γνώσεων», αφού είναι «ασφαλής, και πέρα από κάθε διαμάχη οριστική». Η απαγωγή και η επαγωγή, από την άλλη πλευρά, αποτελούν παράδειγμα εύλογης συλλογιστικής, οι οποίες «υποστηρίζουν τις δικές μας εικασίες» και μπορεί να είναι «επικίνδυνες, αμφιλεγόμενες και προσωρινές» (Polya, 1973, όπως αναφέρεται στον Rivera, 2013). Είναι κοινή παραδοχή ότι τα τρία αυτά είδη είναι επιστημολογικά απαραίτητα.

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών και συγκεκριμένα στο κείμενο φιλοσοφίας του προγράμματος, αναφέρεται ότι η γνώση των μαθηματικών δομείται πάνω σε γνωστικά σχήματα που οργανώνονται γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται Μεγάλες Ιδές των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα ως μεγάλη ιδέα ορίζεται μια πρόταση η οποία είναι κεντρική στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών και η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο. Οι μεγάλες ιδέες βρίσκονται σε διάφορες μαθηματικές περιοχές και σε διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Μια από αυτές είναι η γενίκευση, και εκεί ορίζεται ως η σταδιακή μετάβαση από την θεώρηση ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει το αντικείμενο αυτό δίνοντας έμφαση όχι στην ειδική περίπτωση αλλά στη δομή αυτής και στις σχέσεις που αυτή αναπαριστά.

2.2.2. Είδη γενίκευσης

Φαινομενολογική και σημειωτική

Ο Radford (2008) ταξινόμησε τη γενίκευση σε δυο είδη: *τη φαινομενολογική* και τη *σημειωτική*. Η φαινομενολογική περιλαμβάνει την κατανόηση μιας γενικότητας μέσω της παρατήρησης των ομοιοτήτων όλων των όρων, ενώ η σημειωτική περιλαμβάνει την έκφραση μιας γενικότητας μέσω χειρονομιών, γλώσσας και αλγεβρικών συμβόλων. Στο πρώτο είδος περιλαμβάνεται η *αλγεβρική γενίκευση μιας κανονικότητας* και βασίζεται αρχικά σε αυτήν την ικανότητα των μαθητών στη κατανόηση μιας κοινής ιδιότητας που παρατηρείται σε ορισμένους όρους (απαγωγή), έπειτα στην επέκταση ή γενίκευση αυτής της κοινής ιδιότητας σε όλους τους επόμενους όρους (μεταμόρφωση της απαγωγής), και στη συνέχεια ο/η μαθητής/τρια να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει το κοινό σημείο για να παρέχει μια άμεση έκφραση οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας (αφαίρεση). Οι μαθητές χρησιμοποιούν την απαγωγή και την επαγωγή με τη σειρά για να καταλήξουν σε μια λογική αλγεβρική γενίκευση.

Όταν οι μαθητές διερευνούν συγκεκριμένα στάδια για παράδειγμα σε ένα εικονιστικό μοτίβο, μαντεύουν και παράγουν εύλογες ερμηνείες που απεικονίζουν αντιληπτικές κρίσεις σε σχέση με τα στάδια του μοτίβου. Κατά συνέπεια, μερικές από αυτές τις εύλογες παρατηρήσεις εξελίσσονται σε υποθέσεις, επομένως, απαγωγές (Rivera,2013).

Εμπειρική και θεωρητική γενίκευση

Ο Dörfler (1991) κάνει διαχωρισμό στη γενίκευση σε εμπειρική και σε θεωρητική (όπως αναφέρεται στον Rivera, 2013). Οι μαθητές/τριες που πραγματοποιούν εμπειρική γενίκευση εξάγουν διανοητικά και απομονώνουν σταθερά και κοινά χαρακτηριστικά ή και ολόκληρα σύνολα χαρακτηριστικών από τα αρχικά τους πλαίσια μέσω των διαδικασιών της σύγκρισης και της παρατήρησης. Για παράδειγμα, η τριγωνικότητα είναι μια γενική ιδιότητα που μπορούν εύκολα οι μαθητές/τριες να συμπεράνουν για όλα τρίγωνα. Αντίθετα οι μαθητές/τριες, στη θεωρητική γενίκευση εστιάζουν στις σχετικές ενέργειες ή σε ολόκληρα συστήματα ενεργειών που συνοδεύουν τη γενική διαδικασία, καθώς και στα αποτελέσματα τέτοιων ενεργειών ή συστημάτων αλλά και στις συνθήκες (δηλαδή σχέσεις και ιδιότητες) που καθιστούν τις ενέργειες ή τα συστήματα ενεργειών εφικτά. Αυτές οι ενέργειες ανασύρουν είτε γνωστικά είτε συμβολικά (π.χ. χρήση μεταβλητών) εργαλεία που υποστηρίζουν τη εννοιολογική διαδικασία και ισχυροποιούν την αρχική φάση της δράσης. Οι ουσιαστικές και σκόπιμες ενέργειες στη συγκεκριμένη φάση μετατρέπονται σε αμετάβλητα ή αφηρημένα σχήματα ενεργειών που στη συνέχεια περιγράφονται συμβολικά και αποτυπώνονται μέσω ενός πρωτότυπου μοντέλου. Ο στόχος τελικά είναι να αποδοθεί έμφαση σε συγκεκριμένα αντικείμενα που παρέχουν στις αρχικές πηγές εποικοδομητικές ενέργειες. Οι συμβολικές περιγραφές αναμένεται να εξελιχθούν με την πάροδο του χρόνου με περισσότερες αντανακλαστικές δράσεις, από σύμβολα ως υποκατάστατα συγκεκριμένων ενεργειών σε σύμβολα ως αντικείμενα που αντιπροσωπεύουν τα αμετάβλητα των σχετικών ενεργειών και, πιο μετά σε σύμβολα ως μεταβλητές με χαρακτήρα αφηρημένων αντικειμένων που μπορούν να χειριστούν περαιτέρω και να γενικευτούν σε άλλους τομείς και εύρος αναφοράς, οδηγώντας σε δημιουργία νέων δράσεων ή συστημάτων ενεργειών. Οι Zazkis και Liljedahl (2002) αναφέρουν ότι η εμπειρική γενίκευση επικρίνεται αρχικά για την έλλειψη συγκεκριμένου στόχου για να διατηρήσει τα ουσιώδη, αφού είναι περιορισμένη και χωρίς δυνατότητα για περαιτέρω γενίκευση, αλλά και στη συνέχεια για την υπερβολική εξάρτηση σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Η θεωρητική γενίκευση, αντίθετα, δε στερείται στόχου και ενισχύει την επέκταση.

Προσεγγιστική και ακριβής γενίκευση

Οι κατά προσέγγιση γενικεύσεις είναι ασαφείς γενικότητες μιας αναδυόμενης δομής (Rivera, 2013). Ειδικά μεταξύ μαθητών Δημοτικού, *η κατά προσέγγιση γενίκευση* σε μια εργασία αποτυγχάνει να συντονίσει επαρκώς τις τρεις πτυχές: του αριθμού, του σχήματος και των εικονικών ιδιοτήτων με ένα αρμονικό και σταθερό τρόπο. Αυτό το πετυχαίνουν *οι ακριβείς γενικεύσεις* που είναι εννοιολογικά συνεπείς γενικότητες μιας αναδυόμενης δομής. Μεταξύ των μαθητών του Δημοτικού, η επεξεργασία γενίκευσης βαθμονομημένων προτύπων αποδίδει με τρεις τουλάχιστον γνωστικές συνέπειες, ως εξής:

•(Συνέπεια) Η επιλογή μεταξύ της κατά προσέγγισης ή της ακριβούς γενίκευσης είναι ένα φαινόμενο που εξαρτάται από την εργασία. Μπορεί να βασίζεται στην εργασία, η οποία εξαρτάται από το πώς ένας μεμονωμένος μαθητής/τρια αντιλαμβάνεται, ερμηνεύει, και κατασκευάζει τη δομική πολυπλοκότητα μιας δεδομένης εργασίας σχεδίασης. Μπορεί επίσης να προκαλείται από την ίδια την εργασία, η οποία καθοδηγείται από την αιτιακή ισχύ των δεδομένων σταδίων.

• Και οι δύο διαδρομές γενίκευσης είναι εγγενείς επιλογές στο σύστημα δικτύου κάθε μεμονωμένου εκπαιδευόμενου. Ενώ ένα σταθερό σύστημα αντικατοπτρίζει ισχυρές συνδέσεις γύρω από την ακριβή γενίκευση, ένα πλήθος σχετικών παραγόντων, όπως η καινοτομία της εργασίας, η αδύναμη προηγούμενη γνώση και η διάθεση του μαθητή κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας μπορούν δυνητικά να παράγουν κατά προσέγγιση γενίκευση.

• Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα ακριβούς γενίκευσης, τα οποία μπορούν να διακριθούν σύμφωνα με τις εννοιολογικές ικανότητες στις τρεις πτυχές του αριθμού, του σχήματος και της διάκριση των εικονικών ιδιοτήτων.

Γενίκευση ιδεών- γενίκευση μέσω παραδειγμάτων

Ο Yerushalmy (1993) κάνει τη διάκριση της γενίκευσης σε *γενίκευση των ιδεών* και *γενίκευση μέσω παραδειγμάτων* (όπως αναφέρεται στον Rivera, 2013). Στην πρώτη, οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν μια γενικότερη δήλωση από πολλές συγκεκριμένες ιδέες, ενώ στη δεύτερη καθιερώνουν μια γενίκευση αντλώντας από συγκεκριμένες περιπτώσεις ή παραδείγματα σε ένα δεδομένο σύνολο. Αναφέρει χαρακτηριστικά για την πρώτη, ότι δεν είναι κρίσιμο να βασιστούμε σε παραδείγματα καθώς αυτό που έχει σημασία είναι οι σχετικές ιδέες που μπορούν να απορριφθούν, να αγνοηθούν, να χαλαρώσουν και να συνδυαστούν προκειμένου να επιτευχθεί η μεγαλύτερη γενικότητα. Στους Yerushalmy and Maman (1988), όπως αναφέρεται στον Rivera (2013), μια πειραματική ομάδα μαθητών διδάχθηκε τη γενίκευση των ιδεών στη στρατηγική «τι θα συμβεί αν όχι», προκειμένου να συνειδητοποιήσουν ότι, όταν οι ίδιοι χαλαρώνουν ορισμένες συνθήκες ή υποθέσεις σε ένα πρόβλημα ή όταν παραλείπουν στοιχεία ή περιορισμούς σε μια γενική δήλωση, μπορούν να βελτιώσουν περαιτέρω την κατανόηση τους για το ίδιο το πρόβλημα. Οι Zazkis, Liljedahl και Chernoff (2008), αξιοποιώντας τα στοιχεία της έρευνας τους με μικρούς και μεγαλύτερους μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς, αναφέρουν ότι η γενίκευση μέσω παραδειγμάτων παρέχει στους μαθητές/τριες την ευκαιρία να παρατηρήσουν κοινά σημεία μεταξύ παραδειγμάτων που στη συνέχεια μεταφράζουν σε ουσιαστικές γενικεύσεις. Ωστόσο, αυτή η γενίκευση μπορεί να περιορίσει, ειδικά σε περιπτώσεις που εμφανίζουν έναν περιορισμένο χώρο παραδείγματος. Σε κάποια εργασία είναι αναπόφευκτη κατάσταση, ορισμένοι μαθητές να δημιουργήσουν άκυρα «συμπτωματικά παραδείγματα» που δείχνουν την εγκυρότητα μιας στενής ή ακατάλληλης γενίκευσης. Στην συγκεκριμένη έρευνα τους, κατέληξαν ότι η γενίκευση μπορεί να στηριχθεί με τον εμπλουτισμό ή την εξήγηση των παραδειγμάτων του κάθε ατόμου. Η εναλλαγή στη χρήση μικρών ή μεγάλων αριθμών χρησίμευσε ως μέσο για αυτόν τον σκοπό. Οι μεγάλοι αριθμοί έδειξαν ότι μπορεί να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ συγκεκριμένων μικρών αριθμών και αφηρημένων αλγεβρικών συμβολισμών, ενώ οι μικροί βοήθησαν στην αποκάλυψη της δομής που κρύβεται σε μεγαλύτερους αριθμούς. Ωστόσο, όταν οι μαθητές χρησιμοποίησαν άκυρα παραδείγματα χρειάστηκε έπειτα να εφαρμόσουν τη στρατηγική της χρήσης μεγάλων αριθμών για να αντιμετωπίσουν την περίπλοκη κατάσταση και τελικά να εκφράσουν αλγεβρικά τη γενίκευση τους. Η χρήση μεγάλων αριθμών ως στρατηγική της γενίκευσης μέσω παραδειγμάτων βοήθησε στην κατάρτιση των μαθητών στο να μπορούν να συμπεράνουν πιθανές υποκείμενες δομές. Μερικά χαρακτηριστικά της χρήσης των μεγάλων αριθμών είναι τα εξής:

• Δεν μπορούν να εκτελεστούν με αριθμομηχανή.

• Δεν ενθαρρύνουν τον υπολογισμό, αλλά αντίθετα ευνοούν τον εντοπισμό της δομής.
• Δεν ανήκουν στο τυπικό ή συνηθισμένο ρεπερτόριο των αριθμών που μπορεί να ανακαλείται από τη μνήμη.
• Λειτουργούν μέσα σε μια λογική αριθμητικής παραλλαγής, όπου οι αριθμοί αλλάζουν στο πλαίσιο ενός προβλήματος που έχει σταθερή δομή
• Παίζουν το ρόλο του κεντρικού παραδείγματος σε καταστάσεις που είτε δημιουργούν είτε αντιμετωπίζουν μια γνωστική σύγκρουση που έχει σαν αποτέλεσμα τη γνωστική προσαρμογή της νέας γνώσης. Δεν είναι απαραίτητα αντιπαραδείγματα.
• Λειτουργούν ως συνετά παραδείγματα που μπορούν να αντικρούσουν συμπτωματικά παραδείγματα.

Στην έρευνα των Zazkis, Liljedahl και Chernoff (2008) για παράδειγμα ζητήθηκε από μια μαθήτρια να γενικεύσει ένα μοτίβο αποτελούμενο από γινόμενα αριθμών, και παρόλο που αντιλήφθηκε τη δομή του δε μπόρεσε να την εκφράσει αλγεβρικά. Αυτό συνέβαινε διότι υπήρχε η αντίληψη ότι το αποτέλεσμά έπρεπε να είναι ένας αριθμός και όχι μια αριθμητική ή αλγεβρική έκφραση. Με την καθοδήγηση του ερευνητή, εξετάστηκαν γινόμενα «μεγάλων» αριθμών και αυτό οδήγησε τη μαθήτρια να μην υπολογίσει το κάθε γινόμενο σαν αριθμό, βοηθώντας την για την έκφραση της γενικότητας με αλγεβρικά σύμβολα. Ομοίως σε άσκηση παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης σε μαθητές Γυμνασίου, η χρήση πιο μεγάλων αριθμών στην παράσταση απέτρεψε τους μαθητές από το να κάνουν τις πράξεις και τους ανάγκασε να «δουν» τη διαφορά τετράγωνων λύνοντας την άσκηση πιο γρήγορα και χωρίς υπολογιστή τσέπης.

2.3. Γενίκευση κανονικοτήτων

Οι εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων θεωρούνται ένα ισχυρό και χρήσιμο όχημα για την προώθηση και την υποστήριξη της αλγεβρικής σκέψης. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά την εισαγωγή την έννοιας της μεταβλητής (Mason, 1996, Warren και Cooper, 2008), για την ανάπτυξη δύο βασικών πτυχών της αλγεβρικής σκέψης:
(i) την έμφαση στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (Radford, 2008), και
(ii) την ιδέα της έκφρασης ενός ρητού κανόνα χρησιμοποιώντας γράμματα για την αναπαράσταση αριθμητικών τιμών (Kaput, 2008) και την ανάπτυξη της έννοιας της ισοδυναμίας αλγεβρικών παραστάσεων (Warren & Cooper, 2008).

Είναι το είδος των μαθηματικών εργασιών που βοηθούν στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών στη γενίκευση. Οι εργασίες αυτές εμπλέκουν τους/τις μαθητές/τριες στο να εντοπίσουν ένα πρότυπο, να επεκτείνουν το μοτίβο για να βρουν έναν κοντινό ή και έναν μακρινό όρο και να καταγράψουν τις σχέσεις στο μοτίβο χρησιμοποιώντας σύμβολα. Οι οπτικές προσεγγίσεις σε εργασίες που περιλαμβάνουν τη γενίκευση των γεωμετρικών σχημάτων και των αριθμητικών ακολουθιών μπορούν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά για την ανάπτυξη αλγεβρικών εκφράσεων, μεταβλητών και εννοιολογικού πλαισίου για συναρτήσεις (Healy & Hoyles, 1999).

Οι έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σε διαφορετικές χώρες για τη γενίκευση κανονικοτήτων συγκλίνουν ότι η έγκυρη αναγνώριση της δομής μιας κανονικότητας συχνά δεν είναι δύσκολη για τους μαθητές, αλλά η ουσιαστική πρόκληση για πολλούς από αυτούς είναι η άρθρωση του κανόνα λεκτικά ή μέσω αλγεβρικών συμβόλων (English και Warren, 1995; Rivera και Becker, 2007; Stacey και MacGregor, 2001; Ursini, 1991, όπως αναφέρεται στους Chua και Hoyles, 2014). Ευρήματα μελετών υποστηρίζουν την υπόθεση ότι η εμπειρία των μαθητών/τριών στη γενίκευση προτύπων ευνοεί τις καλύτερες επιδόσεις αλλά και προάγει καλύτερα το σκεπτικό τους. Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών/τριών ενισχύεται δίνοντας τους εργασίες σχετικά με τη γενίκευση κανονικοτήτων (Chua & Hoyles, 2014). Οι Jurdak και El Mouhayar (2014) ανέφεραν σχετικά με την ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στη γενίκευση προτύπων, ότι όσο μεγαλύτεροι σε ηλικία ήταν οι συμμετέχοντες τόσο υψηλότερο ήταν το επίπεδο της συλλογιστικής τους. Η γενίκευση αριθμητικών μοτίβων θεωρείται ως δυναμικό όχημα για τη μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη γιατί προσφέρει τη δυνατότητα να δημιουργηθεί νόημα για αλγεβρικά σύμβολα συσχετίζοντάς τα σε μια ποσοτική αναφορά (Lannin και άλλοι, 2006).

Η γενίκευση μιας κανονικότητας από τους/τις μαθητές/τριες, περιλαμβάνει βασικά αμοιβαίο συντονισμό, καθώς επίσης και την ικανότητα τους να αντιλαμβάνονται και να βγάζουν συμπεράσματα για σύμβολα, ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν και αιτιολογούν μια εύλογη και αλγεβρικά χρήσιμη δομή που θα μπορούσε να εκφραστεί με τη μορφή ενός τύπου (Rivera, 2010a στον Rivera, 2013). Έτσι, κατά τη δραστηριότητα διαμόρφωσης και ερμηνείας μοτίβων οι μαθητές/τριες βγάζουν συμπεράσματα για τις δομές των κανονικοτήτων, που σημαίνει ότι τα μοτίβα δεν έχουν καμία ενυπάρχουσα αναλλοίωτη, σταθερή και ουσιαστική ιδιότητα πέρα από αυτή που τους επιβάλλεται αρχικά. Ωστόσο, η επαγωγική αφαίρεση, ως διαδικασία απαιτεί θεμελιωδώς τον συντονισμό και τη σύγκλιση πολλών γνωστικών, πολιτιστικών και άλλων παραγόντων (π.χ. γλωσσικών, νευρικών) που επηρεάζουν τόσο τις αντιληπτικές όσο και τις συμβολικές ικανότητες.

Στους Lian και Yew (2012), όπου περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο προηγούμενων ερευνών για τη φύση της ικανότητας επίλυσης ενός αλγεβρικού προβλήματος όσον αφορά τις αλγεβρικές διαδικασίες που ακολουθούνται, αναφέρονται τα βήματα που γίνονται μέσω της αλγεβρικής σκέψης για την επίλυση προβλημάτων γενίκευσης. Τα βήματα είναι τα εξής:

(1) εύρεση και κατανόηση δεδομένων στα δοθέντα προβλήματα. Εδώ αναμένεται ο μαθητής να είναι σε θέση για παράδειγμα να παρατηρήσει και να αναγνωρίσει ένα μοτίβο κατά την εργασία του με αριθμητικά παραδείγματα (Friedlander & Hershkowitz, 1997).
(2) αντικατάσταση των πληροφοριών του προβλήματος μαθηματικά με χρήση λέξεων, πινάκων ή και γραφημάτων δηλαδή τις κοινές μορφές μιας αλγεβρικής αναπαράστασης η οποία παρέχει οπτικοποίηση της σχέσης μεταξύ δυο μεταβλητών. (Friedlander & Hershkowitz, 1997; Herbert & Brown, 1997; Kaput, 1989).
(3) γενίκευση των μοτίβων σε μορφή εξισώσεων,
(4) εξήγηση και εφαρμογή των λύσεων για την επίλυση προβλημάτων, δοκιμή των εικασιών και τέλος προσδιορισμός της λειτουργικής σχέσης στην ίδια ή σε νέες καταστάσεις. Σύμφωνα με τους English και Warren (1995), όπως αναφέρεται στους Lian και Yew (2012), η διαδικασία της δοκιμής εικασιών χρησιμεύει για την ανάπτυξη της διαδικασίας απαγωγικής συλλογιστικής και καθορίζει την έγκυρη συνέπεια της υπόθεσης ή της εικασίας που έκαναν οι μαθητές.

2.3.1. Είδη γενίκευσης κανονικοτήτων

Στον Rivera (2013) συναντούμε τη διάκριση της γενίκευσης κανονικοτήτων σε εργασίες κοντινής και μακρινής γενίκευσης, ανάλογα με το πόσο κοντινός ή μακρινός είναι ο όρος της κανονικότητας που εξετάζουμε. Η επιλογή της στρατηγικής που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/τριες εξαρτάται από την τιμή ενός εικονικού βήματος που μπορεί να είναι κοντά ή μακριά από τα προηγούμενα βήματα. Οι τύποι γενίκευσης προτύπων, όπως αναφέρουν και οι El Mouhayar και Jurdak (2015) είναι τριών τύπων:
(1) εργασίες άμεσης γενίκευσης που περιλαμβάνουν τον υπολογισμό της τιμής ενός βήματος δοθέντος του προηγούμενου,
(2) εργασίες κοντινής γενίκευσης που περιλαμβάνουν την εύρεση της τιμής ενός βήματος που είναι κοντά σε δεδομένες τιμές προηγούμενων βημάτων και
(3) εργασίες μακρινής γενίκευσης που συνίστανται στον προσδιορισμό της τιμής του βήματος που είναι σχετικά μακριά από δεδομένα εικονικά βήματα. Η εύρεση του ν-οστού όρου, η αναζήτηση δηλαδή ενός τύπου είναι το αμέσως επόμενο βήμα από τη μακρινή γενίκευση. Η ενασχόληση με τουλάχιστον μια εργασία κοντινής γενίκευσης βοηθά πρώτα τους μαθητές/τριες να διατυπώσουν μια αρχική απαγωγή την οποία μπορούν επαγωγικά να επαληθεύσουν μάλλον εύκολα, ειδικά σε σχέση με της μακρινής γενίκευσης. Οι μαθητές/τριες στην πλειονότητα τους αντιμετωπίζουν επιτυχώς τις εργασίες κοντινής γενίκευσης σε αντίθεση με τις εργασίες μακρινής, στις οποίες οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται να αιτιολογήσουν και να θεσπίσουν τον κανόνα της γενίκευσης. Οι El

Mouhayar και Jurdak (2015) διερεύνησαν την χρήση στρατηγικής των μαθητών σε εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων και πως αυτές εναλλάσσονται ανάλογα με το είδος των εργασιών (άμεσης, κοντινής και μακρινής γενίκευσης) και ανάλογα με την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία ανήκουν. Τα ευρήματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι η συχνότητα χρήσης της στρατηγικής των μαθητών διέφερε ανάλογα με τον τύπο γενίκευσης και ότι οι συναρτησιακές και αναδρομικές στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν συχνά σε καθεμία από τις εργασίες γενίκευσης. Η χρήση της αναδρομικής στρατηγικής μειώθηκε, ενώ η χρήση της συναρτησιακής στρατηγικής αυξήθηκε, καθώς οι απαιτήσεις της εργασίας άλλαξαν από την κατασκευή μιας λύσης βήμα προς βήμα στην εύρεση ενός γενικού τύπου. Τα ευρήματα έδειξαν επίσης ότι η χρήση της αναδρομικής στρατηγικής αυξήθηκε στις μικρότερες τάξεις, ενώ η χρήση της συναρτησιακής στρατηγικής αυξήθηκε στις μεγαλύτερες τάξεις. Η Stacey (1989) σημειώνει επίσης ότι η πλειοψηφία των μαθητών/τριών αντιμετώπισαν με επιτυχία τις εργασίες κοντινής γενίκευσης και τα αποτελέσματα σε αυτές τις εργασίες μπορούν να επιτευχθούν με διαδικαστικές στρατηγικές όπως είναι η κατασκευή διαγραμμάτων, η δημιουργία ενός πίνακα ή και με μια απλή καταμέτρηση, ενώ στις εργασίες μακρινής γενίκευσης η προσέγγιση της λύσης δε μπορεί να γίνει βήμα προς βήμα με τις στρατηγικές της κοντινής γενίκευσης. Στην έρευνα που πραγματοποίησε με εργασίες γενίκευσης γραμμικών εικονιστικών μοτίβων σε μαθητές δημοτικού, αποκόμισε τη συνολική εντύπωση από τις απαντήσεις των μαθητών, ότι τα παιδιά δεν ήταν απρόθυμα να γενικεύσουν, αλλά μάλλον ότι κατασκεύασαν τη γενίκευση πολύ εύκολα με γνώμονα την απλότητα και όχι την ακρίβεια. Οι απαντήσεις επίσης έδειξαν ότι τα προβλήματα γραμμικής γενίκευσης αποτελούν πρόκληση ακόμα και στις μεγαλύτερες ηλικίες. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι ίδιες συνήθως σε όλες τις ηλικιακές ομάδες, αν και τα ποσοστά των μαθητών που επέλεξαν κάθε μέθοδο διέφεραν. Έτσι οι μαθητές των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου χρησιμοποιούσαν συχνά την αναδρομική στρατηγική στις άμεσες γενικεύσεις, τη στρατηγική μέτρησης στις κοντινές γενικεύσεις, ενώ η στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου χρησιμοποιήθηκε συχνά μετά από σωστή εφαρμογή της στρατηγικής μέτρησης ή της συναρτησιακής στρατηγικής.

2.3.2. Είδη αλγεβρικών δομών σε εργασίες γενίκευσης εικονιστικών μοτίβων

Οι Rivera και Becker (2011), όπως αναφέρεται στον Rivera (2013), τεκμηριώνουν την ύπαρξη αρκετών διαφορετικών τύπων χρήσιμων αλγεβρικά δομών σε σχέση με τις εργασίες γενίκευσης εικονιστικών μοτίβων. Αυτές οι εργασίες περιλαμβάνουν σχήματα ως κύρια αντικείμενα γενίκευσης. Όπως συμβαίνει με όλα τα σχήματα στα μαθηματικά, αναλύονται σε όρους επαναδιαμορφώσεων ή εξαρτημάτων που λειτουργούν ή έχουν νόημα σε κάποιες ερμηνευμένες δομές. Ο όρος χρήσιμη αλγεβρικά δομή πληροί όλες τις απαιτήσεις ενός ολοκληρωμένου σταδίου δομικής ανάπτυξης με τον πρόσθετο περιορισμό ότι μια ερμηνευμένη δομή μπορεί να συλληφθεί από μια εξίσωση ή από ένα τύπο συνάρτησης. Ανάλογα με το πώς οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται ένα εικονιστικό μοτίβο, οι χρήσιμες αλγεβρικές δομές των μαθητών μπορεί να είναι είτε κατασκευαστικές (constructive) είτε αποδομητικές (deconstructive) τουλάχιστον στο αρχικό απαγωγικό στάδιο της διαδικασίας δόμησης. Κατασκευαστικές υποδηλώνουν την απαγωγική δράση με την οποία βλέπουν σε ένα συγκεκριμένο στάδιο, ένα μοτίβο που αποτελείται από μη επικαλυπτόμενα μέρη που σχηματίζουν ένα ερμηνευμένο σταθερό σχήμα, όταν προστίθενται όλα μαζί. Η ίδια ενέργεια εφαρμόζεται στη συνέχεια εντός και κατά μήκος των σταδίων του μοτίβου. Το αποδομητικό περιλαμβάνει την εμφάνιση επικαλυπτόμενων τμημάτων που μπορούν να αποσυντεθούν με εύκολο τρόπο. Όταν μετασχηματίζονται σε αλγεβρική μορφή, οι κατασκευαστικές και αποδομητικές γενικεύσεις μπορούν να εκφραστούν είτε με τυπική είτε με μη τυπική μορφή. *Τυπική μορφή* σημαίνει ότι οι όροι στην αντίστοιχη αλγεβρική έκφραση είναι ήδη σε απλοποιημένη μορφή, ενώ η *μη τυπική μορφή* σημαίνει ότι οι όροι μπορούν ακόμα να απλοποιηθούν. Οι Rivera και Becker (2011), στην τριετή έρευνα τους σε μαθητές 10 έως 14 ετών, συνέλεξαν τα ακόλουθα δεδομένα από κάθε έτος: γραπτές εργασίες των μαθητών για το σπίτι ή στην τάξη, αξιολογήσεις απόδοσης στη γενίκευση προτύπων, βίντεο και καταγραφές συνεντεύξεων πριν και μετά από κάθε διδασκαλία, βίντεο και καταγραφές σχετικών επεισοδίων στην τάξη κατά τη διάρκεια ενός διδακτικού πειράματος. Έτσι διαπίστωσαν ότι οι κατασκευαστικές μη τυπικές μορφές δεν ήταν εμφανείς μέχρι το τρίτο έτος της μελέτης τους. Η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία μιας κατασκευαστικής τυπικής γενίκευσης ήταν τα πρώτα δύο έτη κυρίως αριθμητική με ποσοστό 87,5% και αναπτύχθηκαν σε όλες τις γραμμικές μορφές (αύξουσα και φθίνουσα), ενώ μια στροφή προς την εικονική σημειώθηκε το τρίτο έτος με παρόμοιο ποσοστό. Επιπλέον, ενώ οι μαθητές ήταν επιτυχείς (100%) στην καθιέρωση κατασκευαστικής τυπικής γενίκευσης στην περίπτωση γραμμικών μοτίβων σε αύξουσα σειρά, είχαν σημαντική δυσκολία στην περίπτωση της φθίνουσας (ποσοστό επιτυχίας 38% πριν από ένα διδακτικό πείραμα και 75% μετά). Στην περίπτωση των αποδομητικών γενικεύσεων, ενώ κανένας από τους μαθητές δεν μπόρεσε να τις κατασκευάσει μέχρι το τέλος του δεύτερου έτους, ωστόσο, είχαν σημαντική επιτυχία στην εξήγησή τους (από 50% έως 100% πριν και μετά από ένα διδακτικό πείραμα, αντίστοιχα).

Οι Chua και Hoyles (2013) αναλύουν τις γενικεύσεις που βασίζονται σε μετασχηματισμό, οι οποίες περιλαμβάνουν αρχικά την εκτέλεση ενεργειών μετακίνησης, αναδιοργάνωσης και μετασχηματισμού τμημάτων ή επαναδιαμορφώσεων σε ένα εικονικό στάδιο ενός μοτίβου σε κάποιο αναγνωρίσιμο σχήμα που έχει μια πιο οικεία και γνωστή δομή για τους μαθητές/τριες. Η έρευνα τους πραγματοποιήθηκε σε μαθητές/τριες ηλικίας μέχρι 14 ετών και περιείχε εργασίες γενίκευσης, οι οποίες σχεδιάστηκαν για να διερευνήσουν το πώς οι μαθητές κατασκευάζουν και αιτιολογούν το λειτουργικό κανόνα για την πρόβλεψη οποιουδήποτε όρου μιας κανονικότητας ανάλογα με τη γραμμική ή μη γραμμική μορφή του μοτίβου και ανάλογα με τρόπο παρουσίασης των όρων, διαδοχικών ή μη διαδοχικών. Η αδόμητη φύση των έργων γενίκευσης έδωσε στους μαθητές άφθονο χώρο για να αναπτύξουν τις απαντήσεις τους. Όταν δίνονταν μία ή δύο διαμορφώσεις, ορισμένοι μαθητές έπρεπε να επεξεργαστούν άλλες διαμορφώσεις προτού μπορέσουν να δουν τη δομική σχέση από τη γεωμετρική διάταξη των στοιχείων του έργου. Για ορισμένους άλλους μαθητές, η εύρεση πρόσθετων διαμορφώσεων δεν ήταν καθόλου απαραίτητη, καθώς ήταν σε θέση να ανακαλύψουν τη δομική σχέση από τα δεδομένα διαγράμματα αντιμετωπίζοντάς τα γενικά. Επομένως, όπως αναφέρουν οι ερευνητές, η ικανότητα των μαθητών/τριών να εξάγουν τον λειτουργικό κανόνα υποβοηθήθηκε σαφώς από την επίγνωσή τους για τη δομή που είναι εγγενής στο μοτίβο και όχι από τη μορφή εμφάνισης του μοτίβου.

2.3.3. Επεξεργασία γενίκευσης διαβαθμισμένων κανονικοτήτων

Όπως αναλύεται στον Rivera (2013), η *εξαρτώμενη από το αντικείμενο* (Object-dependent) αριθμητική επεξεργασία και μετατροπή αναφέρεται στην απόδοση γενίκευσης ενός αναδυόμενου μοτίβου στην οποία πρωταρχικό επίκεντρο της ανάλυσης είναι τα ίδια τα αριθμητικά στιγμιότυπα, με τη δομή να θεωρείται ως συνέπεια και μπορεί να αιτιολογείται ανάλογα με το πλαίσιο της δραστηριότητας γενίκευσης. Αυτό συμβαίνει όταν δεν υπάρχει εννοιολογική συνέχεια μεταξύ επεξεργασίας και μετατροπής. Το να μαντεύει και να ελέγχει αποτελεί τον αρχικό και κυρίαρχο τρόπο επεξεργασίας από τα περισσότερα μεγαλύτερα παιδιά, ίσως λόγω των προηγούμενων εμπειριών τους στο Δημοτικό σχετικά με τα μοτίβα. Ο τύπος μιας γενίκευσης που προκύπτει από την εξαρτώμενη από το αντικείμενο αριθμητική επεξεργασία, στερείται ή σε πολλές περιπτώσεις δεν έχει ισχυρή και έγκυρη αιτιολόγηση. Η *εξαρτώμενη από τις σχέσεις αριθμητική* επεξεργασία και μετατροπή (Relationship-dependent numerical) αναφέρεται στην απόδοση γενίκευσης ενός αναδυόμενου μοτίβου στην οποία το πρωταρχικό επίκεντρο της ανάλυσης είναι μια απαχθείσα μαθηματική δομή με τις σχετικές αριθμητικές αναπαραστάσεις να παρέχουν επαγωγική υποστήριξη για τον εντοπισμό των σχετικών δομικών σχέσεων. Όταν έχει χρησιμοποιηθεί πρώτα η εξαρτώμενη από το αντικείμενο αριθμητική επεξεργασία και μετατροπή, η διαδικασία γενίκευσης πιθανότατα έχει ακολουθήσει μια εμπειρική οδό από τη διερεύνηση και τη λύση των συγκεκριμένων παραδειγμάτων ως την κατασκευή μιας σκόπιμης γενίκευσης. Σχεδόν όλες οι αναφερόμενες περιπτώσεις γενίκευσης αριθμητικών μοτίβων μεταξύ μεγαλύτερων παιδιών και ενηλίκων, ειδικά εκείνων που περιλαμβάνουν γραμμικές και τετραγωνικές συναρτήσεις, αποτελούν παράδειγμα εκτέλεσης ενός εμπειρικού μοντέλου, αφού πάντα φαίνεται να εγγυάται την κατασκευή των αλγεβρικά χρήσιμων γενικεύσεων. Στην εξαρτώμενη από τις σχέσεις, η διαδικασία γενίκευσης προτύπων πολλές φορές προχωρά με δομικό τρόπο από την κατανόηση των σχετικών μαθηματικών σχέσεων με την παρουσίασή τους μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

Η *εξαρτώμενη από τις σχέσεις εικονιστική* επεξεργασία και μετατροπή (Relationship-dependent figural) αναφέρεται στην απόδοση γενίκευσης μοτίβου στην οποία μια απαγόμενη μαθηματική δομή είναι το πρωταρχικό επίκεντρο της ανάλυσης. Εδώ οι σχετικές εικονιστικές αναπαραστάσεις παρέχουν επαγωγική υποστήριξη για τις δομικές σχέσεις που προκύπτουν. Η τελευταία επεξεργασία έχει αποδειχθεί αποτελεσματική και ισχυρή στη γενίκευση πολλών θεμελιωδών εννοιών και διαδικασιών στα σχολικά μαθηματικά. Η ουσιαστική και αποτελεσματική χρήση των εικονικών λειτουργιών και ενεργειών συμβαίνει σε καταστάσεις όπου οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να παράγουν και να συνδέουν μεταξύ τους αμετάβλητες και μεταβλητές ιδιότητες. Σε πολλές τέτοιες περιπτώσεις οι αριθμητικές και εικονικές αναπαραστάσεις φαίνεται να εμφανίζονται από κοινού στη δραστηριότητα με συνεχή τρόπο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, και οι δύο αναπαραστάσεις μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν διαμεσολαβητικό ρόλο, στην αντικειμενοποίηση μιας συναγόμενης σχέσης ή δομής.

2.4. Στρατηγικές γενίκευσης κανονικότητας

Οι Rivera και Becker (2008) αναφέρουν ότι υπάρχουν τρεις τύποι στρατηγικής που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες:

(1) Η αριθμητική, στην οποία ο μαθητής/τρια χρησιμοποιεί μόνο ενδείξεις που παρατηρεί από οποιοδήποτε μοτίβο το οποίο «βλέπει» ως μια ακολουθία αριθμών ή συνοψίζει σε ένα πίνακα με σκοπό να εξάγει τον κανόνα,

(2) Η εικονιστική, η οποία ισχύει μόνο για τη γενίκευση δραστηριοτήτων που απεικονίζουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας διαγράμματα, και βασίζεται εξ ολοκλήρου σε οπτικές ενδείξεις που καθορίζονται απευθείας από τη δομή των σχημάτων για την εξαγωγή του κανόνα και

(3) Ένας συνδυασμός και των δύο προσεγγίσεων.

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες πιο συγκεκριμένα για τη γενίκευση αριθμητικών κανονικοτήτων συνοψίζονται σύμφωνα με τους Lannin, Barker και Townsend (2006) στις εξής:

(1) Σαφής: Κατασκευάζεται ένας κανόνας που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό οποιασδήποτε τιμής εξόδου όταν δίνεται μια συγκεκριμένη τιμή εισόδου,

(2) *Ολόκληρου-Αντικειμένου* (ενοποιητική): Ο μαθητής/τρια χρησιμοποιεί ένα μέρος ως μονάδα για να κατασκευάσει μια μεγαλύτερη μονάδα χρησιμοποιώντας πολλαπλάσια της,

(3) *Τμηματοποίησης*: Ο μαθητής βασίζεται σε ένα αναδρομικό μοτίβο χτίζοντας μια ενότητα σε γνωστές τιμές του επιθυμητού χαρακτηριστικού,

(4) *Αναδρομική*: Ο μαθητής περιγράφει μια σχέση που εμφανίζεται στη κατάσταση μεταξύ διαδοχικών τιμών μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στη μελέτη τους οι Lannin, Barker και Townsend (2006) διερεύνησαν τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση της κάθε στρατηγικής καθώς και τις πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών των παραγόντων σε μαθητές Δημοτικού. Ο αντίκτυπος των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων αναφέρονταν πάντα ως παράγοντας που συνέβαλε λόγω της απρόβλεπτης φύσης αυτών των αλληλεπιδράσεων. Για παράδειγμα, η εξήγηση για μια στρατηγική ή κάποια ερώτηση που τους τέθηκε, είχε τη δυνατότητα να επηρεάσει τη χρήση της στρατηγικής των μαθητών. Οι αρχικοί όροι, η μαθηματική δομή και οι προηγούμενες στρατηγικές προσδιορίστηκαν ως καθοριστικοί παράγοντες για τη χρήση μιας σαφούς και αναδρομικής στρατηγικής, ενώ στην ολόκληρου αντικειμένου και την τμηματοποίησης προστέθηκε και η οπτική εικόνα μαζί με τα προηγούμενα.

Ενώ σύμφωνα με τους El Mouhayar και Jurdak (2015) κατά τις εργασίες γενίκευσης μιας εικονιστικής γραμμικής ή μη κανονικότητας συναντούμε τις εξής πέντε στρατηγικές από τους/τις μαθητές/τριες:

(1) *Καταμέτρηση από το σχέδιο (*Counting from a drawing): γίνεται απλή μέτρηση των στοιχείων ενός συγκεκριμένου εικονιστικού όρου σε ένα σχέδιο.

(2) *Αναδρομική* (Recursive): ο/η μαθητής/τρια βρίσκει την κοινή διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών όρων και προσθέτει επαναλαμβανόμενα τη σταθερά από όρο σε όρο για να επεκτείνει το μοτίβο.

(3) *Τμηματοποίησης* (Chunking): πολλαπλασιάζει την κοινή διαφορά μεταξύ δύο όρων στο μοτίβο με τον αριθμό των βημάτων και προσθέτει το αποτέλεσμα σε κάποιον αρχικό εικονιστικό όρο.

(4) *Συναρτησιακή (*Functional) : συσχέτιση τμημάτων του σχεδίου με τον εικονικό αριθμό βήματος.

(5) *Ολόκληρου αντικειμένου* (Whole-object): προσδιορίζει την τιμή ενός όρου χρησιμοποιώντας πολλαπλάσια ενός προηγούμενου όρου.

Η ποικιλία στη χρήση στρατηγικής στη γενίκευση κανονικοτήτων είναι ένα δυναμικό και συνεχώς μεταβαλλόμενο φαινόμενο. Οι μαθητές χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για να γενικεύσουν τα μοτίβα ανάλογα με το είδος των εργασιών και ανάλογα και με την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία ανήκουν. Η διακύμανση στη σχετική συχνότητα χρήσης μιας στρατηγικής μπορεί να εξηγηθεί από διάφορους παράγοντες όπως η φύση της στρατηγικής, οι απαιτήσεις του έργου ακόμα και η στρατηγική εμπειρία και γνώση των μαθητών. Τα ευρήματα αυτής της μελέτης των El Mouhayar και Jurdak (2015) έδειξαν ότι ο τύπος γενίκευσης επηρέαζε τη συχνότητα χρήσης της στρατηγικής των μαθητών και ότι οι συναρτησιακές και αναδρομικές στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν συχνά σε καθεμία από τις εργασίες γενίκευσης. Όσο οι εργασίες προχωρούσαν από άμεση, σε κοντινή και μακρινή αλλά και στο επόμενο βήμα στην ανακάλυψη ενός αλγεβρικού τύπου, τόσο μειωνόταν η χρήση της αναδρομικής στρατηγικής και αυξανόταν η χρήση της συναρτησιακής στρατηγικής. Τα ευρήματα έδειξαν επίσης ότι η χρήση της αναδρομικής στρατηγικής αυξήθηκε στις μικρότερες τάξεις, ενώ η χρήση της συναρτησιακής στρατηγικής αυξήθηκε στις μεγαλύτερες τάξεις. Η χρήση πιο αποτελεσματικών στρατηγικών από τους/τις μαθητές/τριες αυξάνεται όσο αυξάνεται η βαθμίδα (El Mouhayar και Jurdak, 2015).

2.5. Στάδια προσέγγισης προβλημάτων γενίκευσης γραμμικών κανονικοτήτων

Στους Garcia-Cruz και Martinón, (1998) αναφέρονται τρία στάδια που χαρακτηρίζουν τη γνωστική συμπεριφορά των μαθητών/τριών στα προβλήματα γενίκευσης γραμμικών κανονικοτήτων:

Πρώτο στάδιο (*Διαδικαστική δραστηριότητα*)

Σε αυτό το στάδιο, ο/η μαθητής/τρια αναγνωρίζει τον επαναληπτικό και αναδρομικό χαρακτήρα του γραμμικού μοτίβου και με την αναγνώριση αυτή εισάγονται οι εισαγωγικές ερωτήσεις. Αυτές οι στρατηγικές δεν είναι γενικεύσιμες, αλλά είναι σημαντικές για την ανάδειξη της σταθερής διαφοράς των γραμμικών μοτίβων. Μια τέτοια συμπεριφορά ρουτίνας χρησιμοποιείται αργότερα σε άλλο επίπεδο κατά τον έλεγχο της εγκυρότητας των κανόνων που έχουν αναπτυχθεί. Εδώ οι μαθητές επικεντρώνονται στο πιο αντιληπτικό χαρακτηριστικό του προτύπου: προσθέτουν τη σταθερή διαφορά και αυτή η ενέργεια είναι η μόνη γενίκευση σε αυτό το επίπεδο.

Δεύτερο στάδιο (*Διαδικαστική κατανόηση. Τοπική γενίκευση*)

Σε αυτό το στάδιο, ο/η μαθητής/τρια έχει καθιερώσει μια τοπική γενίκευση. Αυτό σημαίνει ότι μπόρεσε να καθορίσει ένα αμετάβλητο από μια ενέργεια που εκτελείται στην εικόνα ή την αριθμητική ακολουθία, μέσα σε οποιοδήποτε νέο πρόβλημα, αν και αυτό το αμετάβλητο θα μπορούσε να είναι διαφορετικό από πρόβλημα σε πρόβλημα. Η καθιέρωση του αμετάβλητου σημαίνει ότι έχει εφαρμοστεί ένας ίδιος κανόνας υπολογισμού και ότι το ερέθισμα έχει αφομοιωθεί και εντάσσεται σε ένα ήδη υπάρχον γνωστικό σχήμα. Το υπάρχον γνωστικό σχήμα προσδιορίζεται από τη γραπτή προφορική απάντηση του μαθητή. Το βασικό χαρακτηριστικό εδώ είναι ότι υπάρχει μια μετατόπιση από τη διαδικαστική δραστηριότητα στη διαδικασία κατανόησης. Έτσι, αυτό που έχει γενικευτεί εδώ είναι ο συγκεκριμένος κανόνας για έναν υπολογισμό. Αυτός ο κανόνας έχει πάντα μεταβλητά και μη μεταβλητά στοιχεία και ο χαρακτήρας που αποδίδεται στα μεταβλητά στοιχεία πρέπει να λαμβάνεται ως γενίκευση.

Τρίτο στάδιο *(Εννοιολογική κατανόηση. Ολική γενίκευση)*

Σε αυτό το στάδιο, ο μαθητής έχει γενικεύσει μια στρατηγική. Αυτό σημαίνει ότι έχει πραγματοποιήσει την ίδια ενέργεια και καθιέρωσε το ίδιο αμετάβλητο σε ένα νέο αλλά παρόμοιο πρόβλημα. Σε αυτό το στάδιο, αυτό που επιτυγχάνεται ως γενίκευση είναι η συνολική απόδοση του μαθητή/τρια, όταν αντιμετωπίζει αυτές τις καταστάσεις, και έτσι δημιουργεί μια στρατηγική. Η γνωστική συμπεριφορά των μαθητών θα μπορούσε πλέον να θεωρηθεί ως εννοιολογική κατανόηση.

Στα ευρήματα των Garcia-Cruz και Martinón (1998) υπήρχε η διαπίστωση ότι απαιτείται χρόνος για να συνειδητοποιήσει ένας μαθητής ότι οι υπάρχουσες εννοιολογικές δομές δεν επαρκούν για την αφομοίωση μιας νέας προβληματικής κατάστασης και πολλοί μαθητές συνεχίζουν να καθιερώνουν ένα εσφαλμένο αμετάβλητο. Επίσης άλλοι μαθητές κατάφεραν να καθιερώσουν ένα αμετάβλητο (τοπική γενίκευση), αλλά όταν έρχονται αντιμέτωποι με μια νέα κατάσταση μετακινούνται από το ένα αμετάβλητο στο άλλο. Τέλος μόλις επιτευχθεί μια τοπική ή μια ολική γενίκευση, οι μαθητές θα πρέπει να έρθουν αντιμέτωποι με έναν μεγάλο αριθμό νέων καταστάσεων προτού η νέα γνωστική δομή γίνει σταθερή και μόνιμη.

2.6. Δυσκολίες των μαθητών/τριών στη γενίκευση μιας κανονικότητας

Ο Rivera (2008) αναφέρει ότι τα αποτελέσματα αξιολόγησης διάρκειας πέντε ετών σε εργασίες για τη γενίκευση κανονικοτήτων που δόθηκαν σε μαθητές/τριες σε περισσότερα από 60.000 Γυμνάσια και Λύκεια ανέδειξαν ένα σταθερό μέγιστο ποσοστό επιτυχίας 20% στην κατασκευή ενός γενικού τύπου. Τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών σε παρόμοιες έρευνες, όπως αναφέρουν οι Chua & Hoyles (2013) δείχνουν ξεκάθαρα ότι η διαδικασία κατασκευής κανόνων στη γενίκευση προτύπων είναι συχνά γεμάτη δυσκολίες, με πολλούς μαθητές συχνά να αποτυγχάνουν στη γενίκευση. Τέτοιες δυσκολίες, όπως αναφέρεται στους Chua & Hoyles (2013), θα μπορούσαν να αποδοθούν στους εξής παράγοντες που σχετίζονται με τους μαθητές:

α) απειρία στη χρήση της άλγεβρας και της ίδιας της γλώσσας της, για την έκφραση της γενικότητας (Hoyles, Noss, Geraniou, & Μαυρίκης, 2009). Όσον αφορά τον πρώτο παράγοντα οι Chua και Hoyles, (2014) αναφέρουν ότι ενώ πολλά από τα παιδιά μπορούν συχνά να εντοπίσουν την υποκείμενη δομή μιας κανονικότητας σε μια εργασία, η διατύπωση του λειτουργικού κανόνα δεν είναι πάντα εγγυημένη. Υπάρχουν τρεις τρόποι έκφρασης του κανόνα: καθαρά με λόγια, καθαρά μέσω αλγεβρικών συμβόλων ή σε αλφαριθμητική μορφή. Οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη δομή του προτύπου με βάση τους διαδοχικούς του όρους και τους είναι πιο εύκολο να περιγράψουν τη σχέση λεκτικά παρά αλγεβρικά (Zazkis και άλλοι, 2008). Οι MacGregor και Stacey (1993) παρατήρησαν ότι η δυσκολία έγκειται στην αδυναμία των μαθητών να διατυπώσουν με σαφήνεια τη δομή του μοτίβου χρησιμοποιώντας απλή γλώσσα, όπως και οι İmre και Akkoç (2012) συμφωνούν ότι υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ της αναγνώρισης ενός προτύπου και της ικανότητας να το εκφράσουν οι μαθητές/τριες αλγεβρικά. Η αδυναμία έκφρασης του κανόνα αλγεβρικά, όπως δείχνουν κάποιες πρωτοποριακές έρευνες για τη χρήση της αλγεβρικής σημειογραφίας ως εργαλείου για την έκφραση γενικών και εικονιστικών μοτίβων, καθώς και για την αιτιολόγηση ισοδύναμων μορφών των σχέσεων σε μια κανονικότητα, οφείλεται ότι λίγοι μαθητές χρησιμοποιούν την άλγεβρα ή εκτιμούν το ρόλο της στην αιτιολόγηση μιας γενικής δήλωσης σχετικά με τους αριθμούς. Οι μαθητές ειδικά στην αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, συναντούν δυσκολίες στο να κατανοήσουν πώς να χρησιμοποιούν γράμματα, μεταβλητές για να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε τιμή και σε συνδυασμό με το περιορισμένο μαθηματικό λεξιλόγιο δυσκολεύονται να εκφράσουν τη γενικότητα (Noss, Hoyles, Mavrikis, Geraniou, Gutierrez-Santos, και Pearce, 2009). Αλλά και σε πολλές περιπτώσεις πέρα από την κατασκευή, οι μαθητές/τριες αδυνατούν να κατανοήσουν πλήρως τον αλγεβρικό τύπο (Warren, 2008). Οι Warren και Cooper, (2008) αναφέρουν ότι σε έρευνες που έχουν γίνει, πολλοί νέοι έφηβοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τη μετάβαση των μοτίβων ως συναρτήσεις. Μια από τις πρώτες δυσκολίες σε μία ακολουθία είναι το πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές/τριες την έννοια της μεταβλητής γενικά και πιο συγκεκριμένα τη μεταβλητή ν. Οι παραστάσεις ή εξισώσεις με μεταβλητές είναι ένα μέσο για να διατυπώσει κανείς τα πρότυπα και τις γενικεύσεις. Οι μαθητές/τριες συχνά πιστεύουν ότι η μεταβλητή μπαίνει στη θέση ενός συγκεκριμένου αριθμού και όχι ότι μπορεί να αντιπροσωπεύει πολλαπλές, ακόμη και άπειρες τιμές (Van de Walle, 2014). Πιο ειδικά, όπως αναφέρουν οι Rico, Castro, και Romero (1996), οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τι σημαίνει να γράψεις τον νιοστό όρο μιας ακολουθίας και λόγω του επιπέδου της αφαιρετικής ικανότητας που απαιτείται σε αυτή τη διαδικασία είναι συχνά αναμενόμενο.

β) την έλλειψη τεχνικών χωρικής οπτικοποίησης (Warren, 2005). Όπως αναφέρουν οι Rivera και Becker (2011) ειδικά στην περίπτωση των εργασιών διαμόρφωσης εικονιστικών μοτίβων μεταξύ των πιο σημαντικών τύπων αντίληψης που έχουν σημασία είναι η οπτική αντίληψη. Η οπτική αντίληψη είναι δύο τύπων: αισθητηριακή και γνωστική αντίληψη. Η αισθητηριακή αντίληψη είναι όταν τα άτομα βλέπουν ένα αντικείμενο ως ένα απλό αντικείμενο από μόνο του, ενώ η γνωστική αντίληψη υπερβαίνει την αισθητηριακή όταν τα άτομα βλέπουν ή αναγνωρίζουν ένα γεγονός ή μια ιδιότητα σε σχέση με το αντικείμενο. Στην περίπτωση μιας κανονικότητας, όπου υπάρχει μόνο ακολουθία αριθμών, οι μεταβλητές εισόδου δεν δίνονται ρητά, σε αντίθεση με μια κανονικότητα όπου έχουμε εικονικές αναπαραστάσεις των κάθε όρων. Αυτό που βλέπουν οι μαθητές είναι μόνο οι όροι μιας αριθμητικής ακολουθίας, αλλά οι αριθμοί θέσης των κάθε όρων τους μπορούν να συναχθούν εύκολα. Αυτό το χαρακτηριστικό που λείπει μπορεί να συμβάλει στην κακή απόδοση των μαθητών, αφού σε μια τέτοια εργασία επειδή η σύνδεση αριθμός όρου και του ίδιου του όρου δεν είναι αμέσως εμφανής. Επομένως, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι οι μαθητές/τριες επικεντρώνονται στη σχέση μεταξύ όρων αντί της σχέσης όρου-θέση του κάθε όρου (Chua και Hoyles, 2014).

γ) άγνοια κατάλληλων στρατηγικών γενίκευσης (Moss & Beatty, 2006). Συχνά οι μαθητές/τριες περιορίζονται σε μια απλή μίμηση των όρων ειδικά στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αντί να εισέλθουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο επεξεργασίας, όπως αναμένεται από το στόχο δημιουργίας της εργασίας γενίκευσης του μοτίβου (Tzekaki, 2020). Ενώ στις γραμμικές κανονικότητες, σύμφωνα με την Stacey (1989) ένα αξιοσημείωτο ποσοστό μαθητών/τριών για να προσδιορίσει το ν-οστό όρο το θεώρει λανθασμένα ως το ν-οστό πολλαπλάσιο της διαφοράς μεταξύ δυο διαδοχικών όρων της κανονικότητας. Η αναδρομική στρατηγική είναι ο συλλογισμός από όρο σε όρο (Lannin και άλλοι, 2006) και αποτελέσματα ερευνών σε εργασίες γραμμικών κανονικοτήτων δείχνουν ότι οι συμμετέχοντες συχνά χρησιμοποιούν μια αναδρομική στρατηγική γράφοντας όλους τους όρους πριν από τον ζητούμενο όρο μακρινής γενίκευσης που περιλαμβάνει το ερώτημα. Έτσι, ενώ η προηγούμενη απάντηση είναι σωστή ο τύπος γενίκευσης είναι λανθασμένος (Setiawan και Nengah, 2020). Εκεί η συνήθης εύρεση του επόμενου όρου από τον προηγούμενο οδηγεί σε δυσκολία εύρεσης πιο «μακρινών» όρων ενός δεδομένου μοτίβου (Zazkis και Liljedahl, 2002). Οι Lannin, Barker, και Townsend (2006) διαπίστωσαν ότι υπάρχουν τρεις παράγοντες που επηρεάζουν την επιλογή και τη χρήση στρατηγικών γενίκευσης προτύπων και κατά συνέπεια την όποια αποτυχία στα έργα γενίκευσης κανονικοτήτων, αυτοί είναι παράγοντες εργασίας, κοινωνικοί και γνωστικοί παράγοντες. Όπως αναλύουν οι Setiawan και Nengah (2020) οι παράγοντες εργασίας σχετίζονται με εργασίες που βασίζονται σε καταστάσεις προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν αναδρομικές στρατηγικές κατά την επίλυση προβλημάτων γενίκευσης των οποίων οι ανεξάρτητες μεταβλητές δηλώνονται σιωπηρά. Οι κοινωνικοί παράγοντες είναι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που εμπλέκονται στο έργο της ταυτόχρονης γενίκευσης, όταν οι μαθητές/τριες επηρεάζονται από άλλους μαθητές ή δασκάλους. Τέλος, οι γνωστικοί παράγοντες μπορεί να είναι η μορφή γνώσης που κατέχουν οι μαθητές ή τα γνωστικά στυλ των μαθητών, δηλαδή ο διαφορετικός τρόπος που κατανοούν και αποθηκεύουν τις νέες πληροφορίες.

δ) από τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών εργασιών γενίκευσης κανονικοτήτων, όπως είναι η μορφή εμφάνισης των μοτίβων (Chua & Hoyles, 2012) ή ο τύπος της συνάρτησης. Η γραμμική ή μη μορφή μιας κανονικότητας, μπορεί να δυσκολέψει επίσης στους μαθητές, ενώ επίσης οι αρχικές αναπαραστάσεις του μοτίβου (π.χ. εικονογραφικές, λεκτικές και συμβολικές) μπορεί να επηρεάσουν την απόδοση των μαθητών/τριών. Οι εικονογραφικές αναπαραστάσεις μοτίβων για παράδειγμα, αποδεικνύονται ευκολότερες για τους μαθητές να προβλέψουν όρους σε περαιτέρω θέσεις και να διατυπώσουν τη γενίκευση (Stalo, Elia, Gagatsis, Teoklitou, & Savva, 2006, όπως αναφέρεται στους Warren, Trigueros & Ursini, 2016). Σύμφωνα με τον Gadzichowski, (2012a; 2012b), όπως αναφέρεται στον Pasnak (2017) ο προσανατολισμός, η διάσταση (γράμματα, αριθμοί, χρώματα, σχήματα ή αντικείμενα), ο τύπος σχεδίου (εναλλασσόμενο ABBABB, συμμετρικό, αυξανόμενο ή αυθαίρετο) και η θέση ενός στοιχείου που λείπει (δηλ. πρώτο, μεσαίο ή τελευταίο στοιχείο στο μοτίβο) δεν επηρέασε τις επιδόσεις των μαθητών/τριών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Αντίθετα αριθμός του βήματος μεταξύ των στοιχείων (π.χ., 3, 5, 7, 9, 11 έναντι 3, 6, 9, 12, 15) δημιούργησε δυσκολίες. Ωστόσο, μια μεταγενέστερη μελέτη που περιορίστηκε σε μοτίβα γραμμάτων και αριθμών, οι Pasnak και άλλοι (2014) έδειξε ότι ο προσανατολισμός έκανε μια μικρή αλλά στατιστικά σημαντική διαφορά για τα παιδιά της πρώτης τάξης. Η αλληλεπίδραση μεταξύ του προσανατολισμού και της διάστασης (γράμματα ή αριθμοί) με την οποία παρουσιάστηκαν τα μοτίβα ήταν πιο εντυπωσιακή. Τα λάθη στα μοτίβα γραμμάτων που παρουσιάστηκαν κατακόρυφα ήταν διπλάσια από εκείνα που παρουσιάζονταν οριζόντια, ενώ αντίθετα τα λάθη στα αριθμητικά μοτίβα που παρουσιάστηκαν οριζόντια ήταν τριπλάσια από αυτά που παρουσιάζονται κάθετα.

3. Νέα έρευνα

3.1. Σημασία της νέας έρευνας

Η ενασχόληση των μαθητών/τριών με τις κανονικότητες μπορεί να αποτελέσει εφόδιο για τη μετάβαση των μαθητών/τριών από την αριθμητική στην άλγεβρα και ειδικά οι πρώτες τάξεις του Γυμνασίου αποτελούν κομβικό σημείο γι' αυτή τη μετάβαση. Η αναγνώριση και η γενίκευση των κανονικοτήτων, είτε αυτές είναι αναπτυσσόμενες γραμμικές ή τετραγωνικές είτε και επαναλαμβανόμενες, θεωρούνται πολύ σημαντικές για την αλγεβρική σκέψη. Στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών έχει ενισχυθεί η παρουσία των κανονικοτήτων στην εκπαίδευση και ο ρόλος τους συνεχώς αναβαθμίζεται. Στα ελληνικά προγράμματα σπουδών οι κανονικότητες, προς το παρόν διδάσκονται μόνο στην Α΄ Λυκείου, στο κεφάλαιο των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων, κυρίως με εφαρμογή των γενικών τύπων των προόδων.

Με δεδομένο λοιπόν ότι οι μαθητές/τριες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν είναι εξοικειωμένοι/ες με εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων, αφού η παρουσία τους ειδικά στα ελληνικά προγράμματα σπουδών του Γυμνασίου δεν είναι έντονη, η ανάγκη για μια νέα έρευνα είναι χρήσιμη. Τα αποτελέσματα της έρευνας θα οδηγήσουν σε χρήσιμα συμπεράσματα κατά την εισαγωγή της έννοιας των κανονικοτήτων στα νέα Προγράμματα Σπουδών του Γυμνασίου, καθώς θα καταγραφεί ο τρόπος που οι μαθητές/τριες θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες δραστηριότητες.

3.2. Σκοπός της έρευνας - Ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της διπλωματικής είναι να διερευνηθούν οι ικανότητες των μαθητών/τριών Γυμνασίου στην αναγνώριση και την γενίκευση μιας γραμμικής εικονιστικής κανονικότητας.

Πιο αναλυτικά θα επιχειρηθεί να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

1) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στη γενίκευση (άμεση, κοντινή, μακρινή) ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

2) Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες Γυμνασίου για τη γενίκευση ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

3) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στην εύρεση ενός γενικού τύπου ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

4) Με ποιους παράγοντες (φύλο, ηλικία) σχετίζονται οι επιδόσεις των μαθητών/τριών στη δοκιμασία;

3.3. .Εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας

Παρατίθενται παρακάτω οι σημαντικότεροι έννοιες και ορισμοί που είναι απαραίτητοι για τον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση της έρευνας που διεξάχθηκε.

Ο πρώτος ορισμός αφορά το αντικείμενο της παρούσας έρευνας δηλαδή τα **γραμμικά**

εικονιστικά μοτίβα (figural linear patterns ή επίσης τα συναντούμε στη βιβλιογραφία και ως geometric growing patterns).

Εικονιστικά καλούνται τα μοτίβα που έχουν οριστεί σε ένα εικονογραφικό πλαίσιο που δείχνει έναν ή περισσότερους σχηματισμούς δηλαδή αριθμοί σχετίζονται με μια ακολουθία γεωμετρικών σχημάτων ή εικόνων στην οποία κάθε σχήμα προέρχεται από το προηγούμενο σχήμα με κάποια καλά καθορισμένη διαδικασία (Chua και Hoyles, 2014).

Γραμμικά καλούνται τα μοτίβα, εάν κάθε αριθμός προκύπτει προσθέτοντας μια σταθερή αύξηση στον προηγούμενο αριθμό ή ισοδύναμα, εάν κάθε αριθμός είναι μια γραμμική συνάρτηση της θέσης του στην ακολουθία δηλαδή όταν ο γενικός όρος του μοτίβου παίρνει τη μορφή αν+β (Bishop, 2000).

Υπάρχουν δύο ευρέως χρησιμοποιούμενες προσεγγίσεις όσον αφορά τον τρόπο που παρουσιάζονται τα γραμμικά εικονιστικά μοτίβα η πρώτη είναι η παροχή τριών ή περισσότερων διαδοχικών σχηματισμών-όρων και η δεύτερη όταν παρουσιάζεται μόνο ένας σχηματισμός-όρος με τη βοήθεια του οποίου ο/η μαθητής/τρια αναπαριστά μια γενική περίπτωση του εικονιστικού μοτίβου. Μερικές προσεγγίσεις περιλαμβάνουν την παροχή δύο ή τριών μη διαδοχικών όρων.

Η **γενίκευση ενός εικονιστικού μοτίβου** σύμφωνα με Radford (2008), είναι η ικανότητα των μαθητών/τριών να αντιληφθούν ένα κοινό στοιχείο που παρατηρείται σε ορισμένα στοιχεία (σε μια ακολουθία), επεκτείνοντας ή γενικεύοντας αυτό το κοινό στοιχείο σε όλους τους επόμενους όρους, χρησιμοποιώντας το για την παροχή μιας άμεσης έκφρασης οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας με τα σχήματα να αποτελούν τα κύρια αντικείμενα γενίκευσης. Οι εργασίες ***γενίκευσης γραμμικών εικονιστικών μοτίβων*** εμπλέκουν τους/τις μαθητές/τριες στον προσδιορισμό μιας κανονικότητας, επεκτείνοντας το μοτίβο για να βρουν την αξία ενός κοντινού ή απομακρυσμένου όρου και την άρθρωση της λειτουργικής σχέσης μεταξύ των όρων του μοτίβου χρησιμοποιώντας σύμβολα. (Chua και Hoyles, 2014).

Οι **τύποι γενίκευσης μιας κανονικότητας**, όπως αναφέρουν και οι El Mouhayar και Jurdak (2015) είναι τρεις:

(1) **εργασίες άμεσης γενίκευσης** (immediate generalization tasks) που περιλαμβάνουν τον υπολογισμό της τιμής ενός βήματος δοθέντος του προηγούμενου,

(2) **εργασίες κοντινής γενίκευσης** (near generalization tasks) που περιλαμβάνουν την εύρεση της τιμής ενός βήματος που είναι κοντά σε δεδομένες τιμές προηγούμενων βημάτων

(3) **εργασίες μακρινής γενίκευσης** (far generalization tasks) που συνίστανται στον προσδιορισμό της τιμής του βήματος που είναι σχετικά μακριά από δεδομένα εικονικά βήματα.

Η εύρεση του ν-οστού όρου, ***η αναζήτηση*** δηλαδή ***ενός τύπου*** που θα περιγράφει τη λειτουργική σχέση μεταξύ των όρων είναι το αμέσως επόμενο βήμα από τη μακρινή γενίκευση. Η εύρεση ενός τύπου δηλαδή ενός γενικευμένου κανόνα θα διευκολύνει την ανακάλυψη της φύσης οποιουδήποτε σταδίου ενός μοτίβου (Hourigan και Leavy, 2015). Σύμφωνα με τους Chua και Hoyles (2014) εκφράζεται ως συνάρτηση και υπολογίζει απευθείας τον όρο χρησιμοποιώντας τη θέση του στην ακολουθία. Ο τύπος μπορεί να εκφράζεται από τους μαθητές/τριες συμβολικά, με λέξεις αλλά και σε αλφαριθμητική μορφή δηλαδή με ένα συνδυασμό μεταβλητών και λέξεων.

Οι επιστημολογικές **μορφές γενίκευσης** που περιλαμβάνουν εικονικά γραμμικά μοτίβα, όπως αυτές αναφέρονται στους Rivera και Becker (2011) είναι οι εξής τρεις:

(1) Οι *εποικοδομητικές γενικεύσεις* (constructive generalizations), οι οποίες αναφέρονται σε αυτούς τους άμεσους ή κλειστούς πολυωνυμικούς τύπους πρώτου βαθμού που οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν από τα γνωστά στάδια σε ένα εικονιστικό μοτίβο ως αποτέλεσμα της γνωστικής αντίληψης σχημάτων που αποτελούνται δομικά από μη επικαλυπτόμενα συστατικά ή μέρη. ($y=ax+b$ σε γραμμικά, και καλούνται standard constructive generalizations)

(2) Οι *εποικοδομητικές μη τυπικές γενικεύσεις* (constructive nonstandard generalizations) όταν οι όροι που εκφράζονται χρειάζονται περαιτέρω απλοποίηση.

(3) Οι αποδομητικές γενικεύσεις (deconstructive generalizations), ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου εφαρμόζεται σε περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές/τριες γενικεύουν με βάση το ότι αρχικά βλέπουν επικαλυπτόμενες υποδιαμορφώσεις στη δομή των σχημάτων. Κατά συνέπεια, η αντίστοιχη γενική γραμμική μορφή περιλαμβάνει μια συνδυασμένη διαδικασία πρόσθεσης-αφαίρεσης χωριστής μέτρησης κάθε υποδιαμόρφωσης και αφαίρεσης τμημάτων (πλευρών ή κορυφών) που επικαλύπτονται.

Σύμφωνα με τους El Mouhayar και Jurdak (2015) κατά τις εργασίες γενίκευσης μιας εικονιστικής γραμμικής κανονικότητας συναντούμε τις εξής πέντε **στρατηγικές** από τους/τις μαθητές/τριες:

(1) *Καταμέτρηση από το σχέδιο (*Counting from a drawing): γίνεται απλή μέτρηση των στοιχείων ενός συγκεκριμένου εικονιστικού όρου παρατηρώντας ή κατασκευάζοντας ένα σχέδιο.

(2) *Αναδρομική* (Recursive): ο/η μαθητής/τρια βρίσκει την κοινή διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών όρων και προσθέτει επαναλαμβανόμενα τη σταθερά από όρο σε όρο για να επεκτείνει το μοτίβο.

(3) *Τμηματοποίησης* (Chunking): πολλαπλασιάζει την κοινή διαφορά μεταξύ δύο όρων στο μοτίβο με τον αριθμό των βημάτων και προσθέτει το αποτέλεσμα σε έναν αρχικό εικονιστικό όρο.

(4) *Συναρτησιακή (*Functional) : γίνεται συσχέτιση τμημάτων του σχεδίου με τον εικονικό αριθμό βήματος. Έτσι κατασκευάζεται μια συνάρτηση που υπολογίζει τον όρο απευθείας χρησιμοποιώντας τη θέση του στην ακολουθία.
(5) *Ολόκληρου αντικειμένου* (Whole-object): προσδιορίζει την τιμή ενός όρου χρησιμοποιώντας πολλαπλάσια ενός προηγούμενου όρου.

3.4. Μεθοδολογία της έρευνας

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθούν τα βασικά σημεία της μεθοδολογίας της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Πιο συγκεκριμένα αρχικά θα περιγραφεί η μέθοδος που επιλέχθηκε για να αναλυθούν τα αποτελέσματα της έρευνας. Στη συνέχεια θα περιγραφεί το δείγμα δηλαδή θα δοθούν κάποιες πληροφορίες για το σχολείο στο οποίο πραγματοποιήθηκε η έρευνα καθώς και για τους/τις μαθητές/τριες που συμμετείχαν σε αυτή. Έπειτα θα παρουσιαστεί το εργαλείο συλλογής δεδομένων με τους άξονες των ερωτημάτων του σε πλήρη αντιστοιχία με τα αντίστοιχα ερευνητικά ερωτήματα. Ακολουθεί η ερευνητική διαδικασία που ακολουθήθηκε και τέλος θα παρατεθεί η πλήρης αιτιολόγηση για την αξιοπιστία και την εγκυρότητα της έρευνας.

3.4.1. Μέθοδος

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είναι ποσοτική-δειγματοληπτική, αφού καταγράφηκαν οι επιδόσεις των μαθητών/τριών σε εργασίες αναγνώρισης και γενίκευσης γραμμικών εικονιστικών κανονικοτήτων. Επίσης ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να αναλύσουν το σκεπτικό με το οποίο κινήθηκαν για να τις επιλύσουν αιτιολογώντας σε κάθε ερώτημα κάθε τους απάντηση. Έτσι όλες οι στρατηγικές που ακολούθησαν κωδικοποιήθηκαν και καταγράφηκαν τα ποσοστά εμφάνισης τους.

3.4.2. Δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στους μαθητές και τις μαθήτριες του 1^{ου} Πειραματικού Γυμνασίου Καρδίτσας, κατά το σχολικό έτος 2021-2022. Πιο συγκεκριμένα συμμετείχαν συνολικά 158 μαθητές/τριες (55 της Α΄ Γυμνασίου, 55 της Β΄ Γυμνασίου και 48 της Γ΄ Γυμνασίου). Το σχολείο λειτούργησε πρώτη χρονιά ως Πειραματικό το έτος πραγματοποίησης της έρευνας, ενώ σημειώνεται ότι κανένας μαθητής/τρια δε εισήχθη στο σχολείο μετά από γραπτές εξετάσεις, αφού οι μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου επιλέχθηκαν με κλήρωση, ενώ οι μαθητές/τριες της Β΄ και Γ΄ φοιτούσαν και τα προηγούμενα χρόνια στο συγκεκριμένο σχολείο. Το παραπάνω τονίζεται, για να γίνει σαφές ότι οι μαθητές/τριες του σχολείου στην πλειοψηφία τους δε αποτελούν απαραίτητα, μια ομάδα με ιδιαίτερα υψηλές μαθηματικές επιδόσεις, και επομένως το δείγμα αν και βολικό μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό της ελληνικής σχολικής πραγματικότητας. Η συμμετοχή ενός σχολείου σε ερευνητικές δράσεις και μελέτες αποτελεί ένα από τα πολλά βασικά κριτήρια που οδηγούν στο χαρακτηρισμό ενός δημόσιου σχολείου ως Πειραματικό. Έτσι η διεύθυνση του σχολείου με τη σύμφωνη γνώμη του συλλόγου των εκπαιδευτικών αλλά και των γονέων έδωσε τη συγκατάθεση της για την πραγματοποίηση της έρευνας.

3.4.3. Εργαλείο συλλογής δεδομένων

Το εργαλείο συλλογής δεδομένων, το οποίο παρατίθεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας, βασίστηκε σε δοκιμασίες των Stacey (1989), Friel και Markworth (2009) και περιλαμβάνει δυο εργασίες με γραμμικές εικονιστικές κανονικότητες. Σε κάθε ερώτημα οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν.

Τα ερευνητικά ερωτήματα του εργαλείου αντιστοιχούν στους δυο άξονες ερωτημάτων στους οποίους έχει αναλυθεί το εργαλείο που περιλαμβάνει τις εργασίες γραμμικών εικονιστικών κανονικοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα:

- Ο *πρώτος άξονας* ερωτημάτων αφορά τον τρόπο σκέψης και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες κατά την ενασχόληση τους με δραστηριότητες αναγνώρισης και γενίκευσης μιας γραμμικής εικονιστικής κανονικότητας.
- Ο *δεύτερος άξονας* ερωτημάτων αφορά τον τρόπο που οι μαθητές/τριες εκφράζονται κατά την ενασχόληση τους με τέτοιες δραστηριότητες γενίκευσης.

Το εργαλείο περιλαμβάνει δυο έργα αναγνώρισης και γενίκευσης γραμμικών εικονιστικών κανονικοτήτων στα οποία αρχικά δίνονται κάποιοι όροι τους. Στο πρώτο έργο, ο πρώτος όρος της κανονικότητας, δηλαδή μια σκάλα με ένα σκαλοπάτι κατασκευάζεται από πέντε ευθύγραμμα τμήματα (σπίρτα), τέσσερα κάθετα και ένα οριζόντιο, όπως φαίνεται στο φύλλο των δοκιμασιών που μοιράστηκε στους/στις μαθητές/τριες και παρατίθεται και στο Παράρτημα στο τέλος της εργασίας. Η δεύτερη κατά σειρά σκάλα, η οποία έχει δυο σκαλοπάτια κατασκευάζεται από οκτώ σπίρτα, έξι κάθετα και δύο οριζόντια, ενώ ο τρίτος όρος του μοτίβου, δηλαδή η τρίτη σκάλα αποτελείται από έντεκα σπίρτα, οκτώ κάθετα και τρία οριζόντια. Σε όλο το έργο υπάρχει ένα είδος σχήματος το ευθύγραμμο τμήμα που απεικονίζεται ως σπίρτο. Επίσης η σκάλα παρουσιάζεται σε κατακόρυφο και όχι οριζόντιο προσανατολισμό και αυτό ίσως είναι παράγοντας δυσκολίας. Η αλληλεπίδραση για παράδειγμα σύμφωνα με την έρευνα του Pasnak και άλλοι (2014) μεταξύ του προσανατολισμού και της διάστασης με την οποία παρουσιάστηκαν τα μοτίβα στην έρευνα τους ήταν εντυπωσιακή. Τα λάθη στα μοτίβα γραμμάτων που παρουσιάστηκαν κατακόρυφα ήταν διπλάσια από εκείνα που παρουσιάζονταν οριζόντια, ενώ αντίθετα τα λάθη στα αριθμητικά μοτίβα που παρουσιάστηκαν οριζόντια ήταν τριπλάσια από αυτά που παρουσιάζονται κάθετα.

Στο δεύτερο έργο κατασκευάζονται δέντρα με τη βοήθεια όμως τριών διαφορετικών σχημάτων: τριγώνου, τραπεζίων και τετραγώνων. Το πρώτο δέντρο αποτελείται από τρια διαφορετικά σχήματα: ένα τετραγωνάκι για κορμό, ένα τραπέζιο για φύλλωμα και από ένα τριγωνάκι στην κορυφή. Έπειτα δίνεται στους/στις μαθητές/τριες το τρίτο δέντρο αποτελούμενο από επτά σχήματα: ένα τριγωνάκι, τρια τραπέζια και τρια τετραγωνάκια. Υπάρχουν δυο πιο συχνοί τρόποι παρουσίασης ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου, η πρώτη είναι η παροχή τριών ή περισσότερων διαδοχικών όρων και η δεύτερη όταν παρουσιάζεται μόνο ένας όρος με τη βοήθεια του οποίου ο/η μαθητής/τρια αναπαριστά μια γενική περίπτωση του εικονιστικού μοτίβου. Υπάρχουν βέβαια και μερικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν την παροχή δύο ή τριών μη διαδοχικών όμως όρων. Στο πρώτο έργο (σκάλα) δίνονται οι τρεις πρώτοι όροι, ένας παραπάνω όρος από το αντίστοιχο έργο της Stacey, ενώ στο δεύτερο δυο όροι που δεν είναι διαδοχικοί (στους Friel και Markworth υπήρχαν τρεις διαδοχικοί όροι). Στο δεύτερο έργο οι μη διαδοχικοί όροι δεν απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους για να μη δυσκολευτούν σε μεγάλο βαθμό οι μαθητές/τριες στην αναγνώριση της κανονικότητας. Θέλοντας να χρησιμοποιηθούν και οι δυο πιο συχνοί τρόποι παρουσίασης ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου αλλά έχοντας υπόψιν ότι οι μαθητές/τριες στο Γυμνάσιο δεν είναι εξοικειωμένοι/ες με το κεφάλαιο των κανονικοτήτων στο δεύτερο έργο λοιπόν δόθηκαν δυο μη διαδοχικοί όροι. Επίσης δεν προηγήθηκε κάποια διδακτική παρέμβαση και αυτός ήταν και ο επιπλέον λόγος που δεν υπήρχαν περισσότερα έργα κανονικοτήτων στη δοκιμασία των 40 λεπτών.

Στο πρώτο ερώτημα που αντιστοιχεί στον πρώτο άξονα ερωτημάτων οι μαθητές/τριες καλούνται να βρουν τον τέταρτο και τον έκτο όρο της κανονικότητας, δηλαδή να πραγματοποιήσουν μια άμεση και μία κοντινή γενίκευση αντίστοιχα. Έτσι καλούνται στο πρώτο έργο να βρουν πόσα σπίρτα θα χρειαστεί για να κατασκευαστούν οι σκάλες με τέσσερα και με έξι σκαλιά, ενώ στο δεύτερο έργο πόσα σχήματα θα χρειαστούν, για να δημιουργηθεί το τέταρτο και το έκτο κατά σειρά δέντρο. Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές/τριες καλούνται να κάνουν μια μακρινή γενίκευση και στα δυο έργα βρίσκοντας τον 50ο και τον 30ο όρο αντίστοιχα, δηλαδή πόσα σπίρτα έχει η πεντηκοστή σκάλα και πόσα σχήματα έχει το τριακοστό δέντρο. Με τη βοήθεια των δυο πρώτων ερωτημάτων θα καταγραφούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες προκειμένου να κάνουν τις γενικεύσεις τους. Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές/τριες καλούνται να βρουν το ν-οστό όρο της κανονικότητας, να βρουν δηλαδή τον αλγεβρικό τύπο που να περιγράφει την κανονικότητα. Καλούνται λοιπόν να βρουν πόσα σπίρτα έχει η σκάλα με ν σκαλιά και πόσα σχήματα έχει το ν-οστό δέντρο. Σε αυτό το ερώτημα επίσης θα γίνει η καταγραφή της στρατηγικής, αλλά και θα διαφανεί και ο τρόπος έκφρασης των μαθητών/τριών στην αναζήτηση ενός αλγεβρικού τύπου. Οπότε το τελευταίο ερώτημα αντιστοιχεί και στους δυο άξονες ερωτημάτων. Εκεί οι μαθητές/τριες αν καταφέρουν να βρουν τον λειτουργικό κανόνα βρίσκοντας τον τύπο του ν-οστού όρου, μπορούν να χρησιμοποιήσουν σύμβολα δηλαδή μεταβλητές ή λεκτικά ή και ένα συνδυασμό των δυο πρώτων τρόπων.

Για να παραχθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα στην έρευνα και για να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα, σε όλα τα ερωτήματα κάτω από τα ερωτήματα υπάρχει κενός χώρος για να μπορέσουν οι μαθητές/τριες να εξηγήσουν πως σκέφτονται σε κάθε απάντηση που θα δώσουν. Επίσης σε κάθε έργο πέρα από το κάθε σχήμα-όρο της κανονικότητας, υπήρξε και μια περιγραφή του όρου, γεγονός που λειτουργούσε βοηθητικά για τους μαθητές/τριες. Έτσι για παράδειγμα στο έργο σκάλα, υπήρχε η αρχική επεξηγηματική πρόταση: «με 5 σπίρτα κατασκευάζουμε μια σκάλα με ένα σκαλί, με 8 σπίρτα κατασκευάζουμε μια σκάλα με 3 σκαλιά κ.τ.λ..», όπως και στο δέντρο η: « Το δέντρο μεγέθους 1 αποτελείται από τα 3 σχήματα, ενώ το δέντρο μεγέθους 3 από 7 σχήματα», και έπειτα ακολούθησε η διατύπωση των ερωτημάτων. Σε πολλές προηγούμενες έρευνες υπήρχαν οι όροι σχήματα και ακολουθούσαν αμέσως τα ερωτήματα, ενώ εδώ έγινε το αντίθετο προς διευκόλυνση των μαθητών/τριών.

3.4.4. Ερευνητική Διαδικασία

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν έργα με κανονικότητες και μοιράστηκαν στα παιδιά κατά τη διάρκεια του σχολικού ωραρίου. Η διάρκεια της δοκιμασίας ήταν μια διδακτική ώρα, περίπου σαράντα λεπτά, και τα έργα δόθηκαν σε κάθε τάξη με ευθύνη και εποπτεία του μαθηματικού της τάξης.

Οι μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου είχαν διδαχτεί το κεφάλαιο των εξισώσεων, όπου γίνεται και η εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής, έτσι ώστε να είναι εξοικειωμένοι και να μπορούν να αντιμετωπίσουν τα αντίστοιχα ερωτήματα με το γενικό τύπο της κανονικότητας. Ομοίως οι μαθητές/τριες της Β΄ Γυμνασίου αντίστοιχα είχαν ξεκινήσει το κεφάλαιο των συναρτήσεων, ενώ οι μαθητές της Γ΄ με την αυξημένη ύλη της Άλγεβρας σε αυτήν την τάξη, θεωρείται δεδομένο ότι πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση των μεταβλητών. Σε καμία τάξη όμως δε εισήχθη ούτε διδάχτηκε στα πλαίσια του μαθήματος η έννοια της κανονικότητας, έτσι ώστε οι μαθητές/τριες να έχουν ασχοληθεί με εργασίες αναγνώρισης και γενίκευσης κανονικοτήτων.

Η πραγματοποίηση της έρευνας έγινε με τη σύμφωνη γνώμη του συλλόγου διδασκόντων και της διευθύντριας του Γυμνασίου. Οι μαθητές/τριες ήταν ενήμεροι ότι η δοκιμασία γίνεται στα πλαίσια της ερευνητικής εργασίας και ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για το σκοπό αυτό και δεν θα βαθμολογηθούν ούτε θα συνυπολογιστεί στο προσωπικό βαθμό του τετραμήνου. Επίσης το ονοματεπώνυμο των μαθητών/τριών σε κάθε φύλλο απαντήσεων συμπληρώθηκε, έτσι ώστε αν θεωρηθεί απαραίτητο ο/η μαθητής/τρια να ερωτηθεί για κάποια διευκρίνηση για τις εξηγήσεις που έδωσε σε κάθε απάντηση. Τονίστηκε ότι η ανωνυμία των μαθητών/τριών θα τηρηθεί και ότι δε θα χρησιμοποιηθεί το όνομα των μαθητών/τριών σε καμία περίπτωση.

Οι δοκιμασίες δόθηκαν πιλοτικά σε έναν μικρό αριθμό μαθητών/τριών έτσι, ώστε να διορθωθούν πιθανές ατέλειες στα ερωτήματα ή κάποια σημεία στα οποία οι εκφωνήσεις τους απαιτούσαν κάποιες μεταβολές και τροποποιήσεις που θα βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να λειτουργήσουν πιο αποτελεσματικά στις δραστηριότητες.

3.4.5. Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Η αξιοπιστία σε μια έρευνα έγκειται στο κατά πόσο σταθερά είναι τα αποτελέσματά της όταν και όσες φορές αυτή επαναληφθεί. Στην παρούσα έρευνα η αξιοπιστία εξασφαλίζεται από το δείγμα, αφού αυτή πραγματοποιήθηκε σε μαθητές/τριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δηλαδή στην ηλικιακή ομάδα στην οποία θα εστιάσουμε για την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας. Το σχολείο είναι ένα Πειραματικό Γυμνάσιο, στο οποίο οι μαθητές/τριες που φοιτούν δεν έχουν εισαχθεί με εξετάσεις. Οι μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου επιλέχθηκαν ύστερα από κλήρωση και οι δυο μεγαλύτερες τάξεις συνεχίζουν την κανονική φοίτηση τους πριν την μετατροπή του σχολείου σε Πειραματικού την τρέχουσα σχολική χρονιά. Έτσι αν εξαιρέσουμε κάποιες διδακτικές ώρες, όπου πιλοτικά εφαρμόζονται κάποιες ενότητες από το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, οι μαθητές/τριες ακολουθούν το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών που εφαρμόζεται σε όλα τα Γυμνάσια της χώρας. Επίσης το περιεχόμενο και ο τρόπο γραφής των ερωτήσεων του εργαλείου συλλογής δεδομένων, που ήταν ίδια για όλους τους/τις συμμετέχοντες/ουσες διασφαλίζει την αξιοπιστία της έρευνας.

Όσον αφορά την εγκυρότητα της μελέτης, αυτή διασφαλίζεται από το εργαλείο συλλογής δεδομένων. Το εργαλείο έχει σχεδιαστεί κατάλληλα, έπειτα από μελέτη εργαλείων παρόμοιων ερευνών που περιέχουν δραστηριότητες αναγνώρισης και γενίκευσης μιας εικονιστικής γραμμικής κανονικότητας. Περιλαμβάνει όλες τις διαστάσεις των ορισμών και των εννοιών και ο σχεδιασμός είναι τέτοιος, έτσι ώστε να υπάρχει κατάλληλη αντιστοιχία των ερευνητικών ερωτημάτων με τους άξονες των δοκιμασιών.

4. Αποτελέσματα

4.1. Κατανομή δείγματος της έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν σχεδόν όλοι οι μαθητές/τριες του σχολείου, ενώ για την καταμέτρηση των αποτελεσμάτων και την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων θεωρήθηκε σκόπιμο να μη συμπεριληφθούν κάποια φύλλα απαντήσεων από ορισμένους μαθητές/τριες στο τελικό δείγμα. Για παράδειγμα, οκτώ φύλλα απαντήσεων μαθητών/τριών της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου αφαιρέθηκαν από το τελικό δείγμα για να μην αλλοιωθούν τα τελικά αποτελέσματα. Αυτό έγινε γιατί οι συγκεκριμένοι μαθητές/τριες, δήλωσαν ότι αδυνατούσαν να κατανοήσουν την λογική των έργων που τους δόθηκαν και δεν απάντησαν σχεδόν σε κανένα ερώτημα.

Στον παρακάτω Πίνακα 2 φαίνεται η κατανομή του δείγματος που τελικώς χρησιμοποιήθηκε για την στατιστική ανάλυση που ακολουθήθηκε. Στον πίνακα 2 φαίνεται ξεχωριστά πόσοι μαθητές, πόσες μαθήτριες και από ποια τάξη συμμετείχαν στην έρευνα, αφού θα εξεταστεί και κατά πόσο οι παράγοντες φύλο και εκπαιδευτική βαθμίδα σχετίζονται με τις επιδόσεις των μαθητών/τριών στην αναγνώριση και τη γενίκευση των εικονιστικών γραμμικών κανονικοτήτων.

Πίνακας 2: Κατανομή του δείγματος

Τάξη	Μαθητές	Μαθήτριες	Σύνολο
Α΄ Γυμνασίου	21	34	55
Β΄ Γυμνασίου	27	28	55
Γ΄ Γυμνασίου	19	29	48
Σύνολο	67	91	158

4.2. Αποτελέσματα της έρευνας

Αναλύοντας και ομαδοποιώντας όλες τις απαντήσεις από τις δοκιμασίες που συλλέχθηκαν από τους μαθητές/τριες, θα επιχειρηθεί να δοθούν απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

1) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στη γενίκευση (άμεση, κοντινή, μακρινή) ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

2) Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες Γυμνασίου για τη γενίκευση ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

3) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στην εύρεση ενός γενικού τύπου ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου;

4) Με ποιους παράγοντες (φύλο , ηλικία) σχετίζονται οι επιδόσεις των μαθητών/τριών στη

δοκιμασία;

Για να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα καταγράφηκαν οι συχνότητες εμφάνισης των απαντήσεων και των στρατηγικών των μαθητών/τριών σε κάθε ερώτημα, καθώς και τα αντίστοιχα ποσοστά τους ως προς το σύνολο των απαντήσεων ή των στρατηγικών των μαθητών/τριών, ως προς την τάξη στην οποία ανήκουν και ως προς το φύλο.

4.2.1. Επιδόσεις των μαθητών/τριών στη γενίκευση (άμεση, κοντινή , μακρινή)

Όλες οι απαντήσεις των μαθητών/τριών στα δυο έργα συλλέχθηκαν, καταγράφηκαν, ομαδοποιήθηκαν και στη συνέχεια αναλυθήκαν, ώστε να προκύψουν τα συμπεράσματα της έρευνας . Στον πίνακα 3 παρουσιάζεται ο αριθμός και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στα έργα «σκάλα» (Σ) και «δέντρο» (Δ) αντίστοιχα.

Πίνακας 3: Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα δυο έργα (N=158)

Γενικεύσεις					
Άμεση Γενίκευση		Κοντινή Γενίκευση		Μακρινή Γενίκευση	
Σ	Δ	Σ	Δ	Σ	Δ
136	138	127	134	72	84
86 %	87 %	80 %	85 %	46 %	53 %

Στο πρώτο έργο (σκάλα) δόθηκαν στους μαθητές/τριες ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της κανονικότητας και τους ζητήθηκε να βρουν τον τέταρτο (άμεση γενίκευση) και τον έκτο (κοντινή γενίκευση), ενώ στο δεύτερο έργο (δέντρο) τους δόθηκε ο πρώτος και ο τρίτος και τους ζητήθηκε πάλι ο τέταρτος (άμεση γενίκευση) και ο έκτος (κοντινή γενίκευση). Στο έργο δέντρο υπήρχε λοιπόν μια επιπλέον μικρή δυσκολία, αφού οι δοθέντες όροι δεν ήταν διαδοχικοί.

Πολλοί/ες μαθητές/τριες στα ερωτήματα άμεσης και κοντινής γενίκευσης του πρώτου έργου κατασκεύασαν σχήματα προκειμένου να βρουν τον αριθμό των σπίρτων ή τον αριθμό των σχημάτων και στη συνέχεια προσπάθησαν να αναγνωρίσουν και να επεκτείνουν το μοτίβο. Σχεδόν 9 στους 10 μαθητές αντιλήφθηκαν και στα δυο έργα τη δομή της κάθε κανονικότητας και βρήκαν τους ζητούμενους όρους της άμεσης και κοντινής γενίκευσης. Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών λοιπόν είναι σε θέση, αν τους δοθεί ένας όρος μιας κανονικότητας να βρουν τον αμέσως επόμενο όρο. Να σημειωθεί βέβαια ότι τα 14% και 13% αποτυχίας στην άμεση γενίκευση, αντίστοιχα στα δυο έργα, είναι ποσοστά που ίσως θα πρέπει να αποτελέσουν θέμα προβληματισμού και συζήτησης. Τα ποσοστά αποτυχίας αυξάνονται ελαφρώς περισσότερο στην κοντινή γενίκευση. Εκεί περίπου 8 στους 10 μαθητές/τριες καταφέρνουν να βρουν τους ζητούμενους όρους. Παρόλο που στο δεύτερο έργο οι όροι που δόθηκαν στους μαθητές/τριες δεν είναι διαδοχικοί, τα ποσοστά σωστών απαντήσεων είναι λίγο καλύτερα σε σχέση με το πρώτο έργο.

Η εικόνα αυτή διαφοροποιείται πολύ στις μακρινές γενικεύσεις δηλαδή στην αναζήτηση του $50^{ου}$ και του $30^{ου}$ όρου στα δυο έργα σκάλα και δέντρο αντίστοιχα. Οι μαθητές/τριες που κατάφεραν να βρουν τον τέταρτο και τον έκτο όρο δηλαδή στην άμεση και κοντινή γενίκευση αντίστοιχα φαίνεται να δυσκολεύονται πολύ στο να βρουν το ζητούμενο μακρινό όρο. Στη σκάλα ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες να βρουν τα σπίρτα που θα χρειαστεί να κατασκευάσουν μια σκάλα με 50 σκαλιά, ενώ στο δέντρο τα σχήματα που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν το $30^{ο}$ στη σειρά δέντρο. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 46% στο έργο «σκάλα» και 53% στο έργο «δέντρο». Δηλαδή σχεδόν ένας στους δυο μαθητές δε καταφέρνει να κάνει σωστά τη γενίκευση.

Στα ποσοστά αποτυχίας πέρα από αυτούς/ες που απάντησαν λανθασμένα χρησιμοποιώντας μια λάθος στρατηγική συμπεριλαμβάνονται και μερικοί μαθητές/τριες που αδυνατούσαν να δώσουν κάποια απάντηση στις μακρινές γενικεύσεις και άφησαν τα ερωτήματα κενά. Έτσι στη σκάλα, 21 μαθητές/τριες από όλο το σχολείο, αριθμός που αντιστοιχεί σε 13,3%, δεν απάντησαν καθόλου στο ερώτημα, ενώ με εξαίρεση ένα μαθητή, είχαν απαντήσει σωστά και στην άμεση και στη κοντινή γενίκευση. Στο δέντρο οι μαθητές/τριες που δεν απάντησαν καθόλου στο ερώτημα για το πόσα σχήματα απαιτούνται για να σχηματιστεί το $30^{ο}$ δέντρο ήταν 28, ποσοστό 17,7% επί του συνολικού δείγματος.

4.2.2. Επιδόσεις μαθητών/τριών στη γενίκευση σε κάθε βαθμίδα.

Η εικόνα του προηγούμενου πίνακα αποτυπώνεται και ξεχωριστά στα ποσοστά σωστών απαντήσεων της κάθε τάξης. Στους πίνακες 4 και 5 παρουσιάζεται ο αριθμός και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων όλων των μαθητών/τριών ξεχωριστά σε κάθε τάξη για τα έργα σκάλα και δέντρο αντίστοιχα.

Στην Α΄ Γυμνασίου στην άμεση γενίκευση, στο έργο σκάλα, παρουσιάζονται τα καλύτερα ποσοστά, αφού μόλις 5 από τους 55 απάντησαν λανθασμένα. Στη Β΄ τάξη ο αριθμός αυτός ήταν λιγότερος δηλαδή οι 11 από τους 55 δεν έδωσαν σωστή απάντηση. Στη Γ΄ τάξη οι 42 από τους συνολικά 48 βρήκαν σωστά τον τέταρτο όρο. Στην κοντινή γενίκευση δηλαδή στην αναζήτηση του έκτου όρου, τα ποσοστά είναι ελαφρώς μειωμένα 81,8%, 78,1% και 81,3% αντίστοιχα. Στη μακρινή γενίκευση, εκεί δηλαδή όπου οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται πιο πολύ, η Β΄ Γυμνασίου παρουσιάζει τα καλύτερα ποσοστά, ακολουθεί η Α΄ Γυμνασίου και τελευταία η Γ΄ Γυμνασίου με μόλις 37,5%.

Πίνακας 4: Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά τάξη στη «σκάλα»

	Γενικεύσεις		
Τάξη	Άμεση γενίκευση	Κοντινή Γενίκευση	Μακρινή Γενίκευση
Α΄ Γυμνασίου	50	45	25
(N=55)	90,9 %	81,8 %	45,5 %
Β΄ Γυμνασίου	44	43	29
(N=55)	80 %	78,1 %	52,7 %
Γ΄ Γυμνασίου	42	39	18
(N=48)	87,5 %	81,3 %	37,5 %

Παρόμοια ευρήματα συναντούμε και στο δεύτερο έργο με μεγαλύτερα όμως ποσοστά επιτυχίας σε κάθε ερώτημα γενίκευσης αλλά και σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα. Όπως διαφάνηκε και από τα συνολικά ποσοστά του Πίνακα 3, στο δέντρο, παρόλο που οι αρχικοί δοθέντες όροι ήταν μη διαδοχικοί, φαίνεται ότι φάνηκε στους μαθητές/τριες πιο εύκολο στην αναγνώριση και τη γενίκευση. Έτσι οι μαθητές/τριες της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου βελτίωσαν τα ποσοστά τους στη μακρινή γενίκευση στο έργο δέντρο, σε σχέση με τη σκάλα. Στην Γ΄ Γυμνασίου παρουσίασαν καλύτερα ποσοστά, 58,3% στο δέντρο, ενώ στη σκάλα μόλις 37,5%.

Πίνακας 5: Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά τάξη στο έργο «δέντρο».

	Γενικεύσεις		
Τάξη	Άμεση γενίκευση	Κοντινή Γενίκευση	Μακρινή Γενίκευση
Α΄ Γυμνασίου	47	45	23
(N=55)	85,5 %	81,8 %	41,8 %
Β΄ Γυμνασίου	46	45	33
(N=55)	83,6 %	81,8 %	60 %
Γ΄ Γυμνασίου	45	44	28
(N=48)	93,8 %	91,6 %	58,3 %

Στην Α΄ Γυμνασίου η εικόνα είναι λίγο διαφορετική. Στην άμεση και μακρινή γενίκευση οι μαθητές/τριες τα πήγαν καλύτερα στη σκάλα, χωρίς βέβαια να υπάρχει αξιοσημείωτη διαφορά στα δυο ποσοστά. Δηλαδή σε αυτές τις γενικεύσεις μόλις τρεις περισσότεροι μαθητές/τριες στην άμεση και δυο στην μακρινή απάντησαν καλύτερα στο πρώτο έργο.

4.2.3. Επιδόσεις μαθητών/τριών στη γενίκευση ανά φύλο.

Καθώς θα εξεταστεί αν ο παράγοντας φύλο σχετίζεται με τις επιδόσεις στις εργασίες, καταγράφηκαν από κάθε τάξη ξεχωριστά οι σωστές απαντήσεις των μαθητών και μαθητριών σε κάθε ερώτημα γενίκευσης και για τα δυο έργα.

Στον Πίνακα 5 που ακολουθεί παρουσιάζονται για το έργο σκάλα, ο συνολικός αριθμός των μαθητών και μαθητριών με σωστές απαντήσεις και στην παρένθεση τα αντίστοιχα ποσοστά τους ως προς τον αριθμό των μαθητών/τριών του σχολείου με σωστή απάντηση στα ερωτήματα γενίκευσης (άμεσης, κοντινής και μακρινής).

Στα ερωτήματα άμεσης και κοντινής γενίκευσης φαίνεται πως οι μαθήτριες τα καταφέρνουν καλύτερα από τους μαθητές, αφού τα ποσοστά τους ως προς όλες τις σωστές απαντήσεις στο σχολείο είναι 76% έναντι 60% των μαθητών στην άμεση και 70% έναντι 57% στην κοντινή. Στη μακρινή γενίκευση αλλάζει το σκηνικό με τα αγόρια να προηγούνται με μικρή διαφορά, 54,2% από 42,8% που έχουν τα κορίτσια.

Η γενική εικόνα λοιπόν είναι ότι στο σύνολο των μαθητών/τριών στο συγκεκριμένο έργο, στην άμεση και κοντινή γενίκευση καλύτερες επιδόσεις έχουν τα κορίτσια και στην μακρινή τα αγόρια.

Πίνακας 6:

Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά φύλο σε όλο στο σχολείο στο έργο «σκάλα»

Φύλο	Γενίκευση		
	Άμεση	Κοντινή	Μακρινή
Μαθητές	60 (44,1 %)	57 (44,9 %)	39 (54,2 %)
Μαθήτριες	76 (55,9 %)	70 (55,1 %)	33 (45,8 %)
Σύνολο	136	127	72

Στον πίνακα 7 φαίνονται ξεχωριστά σε κάθε τάξη πόσοι μαθητές και πόσες μαθήτριες έδωσαν σωστή απάντηση. Δίπλα από κάθε αριθμό υπάρχει σε παρένθεση το ποσοστό των μαθητών ή μαθητριών που έχει απαντήσει σωστά σε κάθε ερώτημα γενίκευσης ως προς το σύνολο των απαντήσεων όλης της τάξης.

Πίνακας 7: Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά φύλο ανά τάξη στη σκάλα

Τάξη/ φύλο	Άμεση Γενίκευση	Κοντινή Γενίκευση	Μακρινή Γενίκευση
Α΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	17 (34 %)	17 (38 %)	12 (48 %)
Μαθήτριες	33 (66 %)	28 (62 %)	13 (52 %)
Σύνολο σωστών	50	45	25

Β΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	26 (59 %)	25 (58 %)	19 (65,5 %)
Μαθήτριες	18 (41 %)	18 (42 %)	10 (34,5 %)
Σύνολο σωστών	44	43	29
Γ΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	17 (40,5 %)	15 (38,5 %)	8 (44,4 %)
Μαθήτριες	25 (59,5 %)	24 (61,5 %)	10 (55,6 %)
Σύνολο σωστών	42	39	18

Η γενική εικόνα είναι υπέρ των κοριτσιών και αποτυπώνεται από τις επιδόσεις στην Α΄ και Γ΄. Στην Β΄ Γυμνασίου, σε αντίθεση με το σύνολο όμως, τα αγόρια εμφανίζουν καλύτερα ποσοστά σε όλες τις γενικεύσεις.

Στον πίνακα 8 καταγράφονται τα ποσοστά των μαθητών και μαθητριών ως προς το σύνολο των σωστών απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές/τριες σε όλο το σχολείο για το δεύτερο έργο. Παρατηρείται στην άμεση και κοντινή γενίκευση, όπως και στο πρώτο έργο, μια μικρή υπεροχή των μαθητριών έναντι των μαθητών. Ομοίως και σε αυτό το έργο, η εικόνα αντιστρέφεται στις μακρινές γενικεύσεις, όπου τα αγόρια ξεπερνούν τα κορίτσια με μικρή διαφορά όμως στα ποσοστά τους.

Πίνακας 8:

Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά φύλο σε όλο στο σχολείο στο έργο «δέντρο»

		Γενίκευση	
	Άμεση	Κοντινή	Μακρινή
Μαθητές	63 (45,6 %)	63 (47 %)	44 (52,4 %)
Μαθήτριες	75 (54,4 %)	71 (53 %)	40 (47,6 %)
Σύνολο	138	134	84

Όπως παρατηρούμε και στον πίνακα 9 για το «δέντρο», τα κορίτσια της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου τα καταφέρνουν καλύτερα από τα αγόρια σε άμεση και κοντινή γενίκευση. Στην Α΄ τάξη τα ποσοστά των κοριτσιών είναι πάλι υψηλότερα και στη μακρινή, ενώ στην Γ΄ Γυμνασίου συμβαίνει το αντίθετο, αφού με μια μικρή διαφορά τα αγόρια που απάντησαν σωστά είναι περισσότερα. Στη Β΄ Γυμνασίου, όπως και στο πρώτο έργο, τα αγόρια εμφανίζουν καλύτερα ποσοστά σε όλες τις γενικεύσεις με σχεδόν παρόμοια ποσοστά και στα δυο έργα.

Πίνακας 9:

Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά φύλο σε κάθε τάξη στο έργο «δέντρο»

Τάξη/ φύλο	Άμεση γενίκευση	Κοντινή Γενίκευση	Μακρινή Γενίκευση
Α΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	19 (40,4 %)	19 (42,2 %)	8 (34,8 %)
Μαθήτριες	28 (59,6 %)	26 (57,8 %)	15 (65,2 %)
Σύνολο σωστών	47	45	23
Β΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	26 (56,5 %)	26 (57,8 %)	20 (60,6 %)
Μαθήτριες	20 (43,5 %)	19 (42,2 %)	13 (39,4 %)
Σύνολο σωστών	46	45	33
Γ΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	18 (40,5 %)	18 (38,5 %)	16 (44,4 %)
Μαθήτριες	27 (59,5 %)	26 (61,5 %)	12 (55,6 %)
Σύνολο σωστών	42	39	28

Στον πίνακα 10 καταγράφονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών/τριών όλου του σχολείου ταξινομημένες ανά φύλο και για τα δυο έργα, για τα τρια είδη γενίκευσης αλλά και για το σύνολο των απαντήσεων γενίκευσης

Πίνακας 10: Αριθμός και ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά φύλο και στα δυο έργα

Φύλο		Γενίκευση		Σύνολο σε όλες
	Άμεση	Κοντινή	Μακρινή	τις γενικεύσεις
Μαθητές	123	120	83	326
	44,8 %	46 %	54,2 %	**47,2%**
Μαθήτριες	151	141	73	365
	55,1 %	54 %	45,8 %	**52,8%**
Σύνολο	274	261	153	691

Έτσι και στον πίνακα αυτό αποτυπώνεται η εικόνα των προηγούμενων ποσοστών.

- Οι μαθήτριες τα καταφέρνουν καλύτερα στις άμεσες και κοντινές γενικεύσεις με τη διαφορά από τους μαθητές να κυμαίνεται στα 10,8% και 8% αντίστοιχα.
- Στα ερωτήματα μακρινής γενίκευσης η διαφορά παραμένει στα ίδια επίπεδα (8,4%) αλλά η εικόνα αντιστρέφεται υπέρ των μαθητών.
- Τέλος στο σύνολο των απαντήσεων στην άμεση, κοντινή και μακρινή γενίκευση η ψαλίδα κλείνει μεταξύ των δυο φύλων, στο 5,6%.

4.2.4. Εύρεση γενικού τύπου

Το τρίτο ερώτημα, στο οποίο οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να βρουν το ν-οστό όρο, δηλαδή να βρουν τον αλγεβρικό τύπο που θα δίνει οποιονδήποτε όρο της κανονικότητας και θα περιγράφει την ίδια τη δομή της, ήταν και αυτό που δυσκόλεψε την πλειοψηφία των μαθητών/τριών. Σχεδόν ένας στους τρεις μαθητές/τριες κατάφερε να βρει το σωστό τύπο.

Στο έργο «σκάλα» ο ν-οστός όρος αντιστοιχούσε στον αριθμό των σπίρτων που απαιτούνται για να σχηματιστεί μια σκάλα με ν σκαλιά. Εκεί οι μαθητές/τριες κατέληξαν σε διάφορους τύπους οι οποίοι με κατάλληλη απλοποίηση κατέληγαν στον σωστό 3ν+2. Για παράδειγμα δόθηκαν οι εξής τύποι: ν+ν+1+ν+1, 5+3(ν-1), 2(ν+1)+ν ή και κανόνες διατυπωμένοι με λόγια οι οποίοι προσμετρήθηκαν στις σωστές απαντήσεις. Ομοίως στο έργο «δέντρο» ο σωστός τύπος που βρίσκει πόσα σχήματα έχει το ν-οστό δέντρο είναι ο 2ν+1 και υπήρχαν και οι τύποι: ν+ν+1, 2(ν-3)+7 που επίσης θεωρήθηκαν σωστοί.

Τα ποσοστά αποτυχίας ήταν σχεδόν ίδια και για τις δυο δραστηριότητες (70,9% και 69% σε σκάλα και δέντρο αντίστοιχα). Στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στην εύρεση του τύπου στο σύνολο όλων των μαθητών/τριών του δείγματος.

Πίνακας 11: Αριθμός και ποσοστά μαθητών με σωστό τύπο.

	Έργο	
	Σκάλα	Δέντρο
Μαθητές/τριες με σωστό τύπο	46 29,1 %	49 31 %
	(N=158)	

Πιο ειδικά τώρα όσον αφορά τα αποτελέσματα σε κάθε τάξη, όπως βλέπουμε και από τον Πίνακα 11 η Β΄ Γυμνασίου είναι η τάξη με το περισσότερο πλήθος σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα με τον τύπο και για τις δυο δραστηριότητες με πολύ κοντινά ποσοστά 40% και 38%. Η Α΄ Γυμνασίου και στα δυο έργα εμφανίζει παρόμοιο ποσοστό 23.6% και 25.5%. Στο πρώτο έργο το πλήθος των σωστών η Γ΄ Γυμνασίου σημειώνει το χαμηλότερο ποσοστό από όλες τις τάξεις, ενώ η εύρεση του τύπου στο δεύτερο έργο τους φάνηκε λίγο πιο εύκολη αφού σημειώθηκε το ίδιο ποσοστό με τους/τις μαθητές/τριες της Α΄ τάξης.

Πίνακας 12: Αριθμός και ποσοστά μαθητών με σωστό τύπο ανά τάξη

	Έργο	
Τάξη	Σκάλα	Δέντρο
Α΄ Γυμνασίου (N=55)	13 23,6 %	14 25,5 %

B΄ Γυμνασίου	22	21
(N=55)	40 %	38 %
Γ΄ Γυμνασίου	11	14
(N=48)	20 %	25,5 %

Όσον αφορά τις επιδόσεις για κάθε φύλο στα δυο έργα, όπως φαίνεται και από τον πίνακα-13 τα ποσοστά των μαθητών είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα των μαθητριών υπολογισμένα και τα δυο ως προς το συνολικό αριθμό των σωστών απαντήσεων στο ερώτημα. Βλέπουμε λοιπόν ότι τα αγόρια τα καταφέρνουν καλύτερα στο αμέσως επόμενο βήμα μετά την μακρινή γενίκευση, αφού το 63% και το 57% των απαντήσεων με το σωστό τύπο, ανήκουν σε αυτά. Αν βέβαια αυτός ο πίνακας μετατραπεί σε ποσοστά των μαθητών και μαθητριών ως προς το συνολικό αριθμό ατόμων σε κάθε φύλο τότε η εικόνα δε γίνεται καλύτερη. Ενδεικτικά στο πρώτο έργο από τα συνολικά 67 αγόρια οι 29 απάντησαν σωστά δηλαδή ποσοστό 43,2%, ενώ από τα 91 κορίτσια όλου του σχολείου απάντησαν σωστά μόλις 17 ποσοστό δηλαδή 18,6%.

Πίνακας 13: Αριθμός και ποσοστά μαθητών/τριών με σωστό τύπο.

	Έργο	
	Σκάλα	Δέντρο
Μαθητές	29 (63 %)	28 (57 %)
Μαθήτριες	17 (37 %)	21 (43 %)
Σύνολο	46	49

Στον πίνακα 14 παρουσιάζεται το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών/τριών σε κάθε τάξη ανά φύλο. Παρατηρούμε και εδώ στην Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου ότι υπάρχουν μικρές διαφορές στα δυο φύλα, ένα ως τρια άτομα κάθε φορά με εναλλαγές στην πρωτιά. Στη Β΄ Γυμνασίου αποτυπώνεται η διαφορά στα δυο φύλα και ίσως είναι και αυτή που επηρεάζει και την γενική διαφορά στο σύνολο. Έτσι τα ποσοστά των αγοριών στη Β΄ τάξη που βρήκαν τον σωστό τύπο ως προς το σύνολο των σωστών απαντήσεων είναι 68,2% και 71,4% στα δυο έργα (σκάλα και δέντρο αντίστοιχα) αριθμοί που υπερτερούν των αντίστοιχων των κοριτσιών.

Πίνακας 14: Αριθμός και ποσοστά ατόμων με σωστό τύπο ανά φύλο σε κάθε τάξη

	Έργο		Συνολικά και
Τάξη/ φύλο	Σκάλα	Δέντρο	στα 2 έργα
Α΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	8 (61,5 %)	6 (42,8 %)	14 (**51,9%)**
Μαθήτριες	5 (38,5 %)	8 (57,2 %)	13 (**48,1%)**
Σύνολο σωστών	13	14	27

Β΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	15 (68,2 %)	15 (71,4 %)	30 (**70%**)
Μαθήτριες	7 (31,8 %)	6 (28,6 %)	13 (**30%**)
Σύνολο σωστών	22	21	43
Γ΄ Γυμνασίου			
Μαθητές	6 (54,5 %)	7 (50 %)	13 (**52%**)
Μαθήτριες	5 (45,5 %)	7 (50 %)	12 (**48%**)
Σύνολο σωστών	11	14	25

4.3. Στρατηγικές των μαθητών

4.3.1. Στρατηγικές στα ερωτήματα γενίκευσης

Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να δώσουν μια εξήγηση για τις απαντήσεις τους σε κάθε ερώτημα των δυο δραστηριοτήτων. Αρκετοί/ες από αυτούς/ές κατά τη διάρκεια της δοκιμασίας εξέφρασαν την δυσκολία τους στο να εκφραστούν αλλά και μερικοί/ες ακόμα και μια δυσφορία όταν χρειάστηκε να βρουν τα κατάλληλα λόγια για να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Σε κάποια γραπτά μαθητών θεωρήθηκε απαραίτητο να δοθούν εκ των υστέρων και κάποιες επιπλέον διευκρινίσεις. Δηλαδή μερικοί μαθητές/τριες ρωτήθηκαν προφορικά μετά το τέλος της έρευνας και καταγράφηκαν τα λεγόμενα τους από τον ερευνητή. Με τη βοήθεια των εξηγήσεων των μαθητών/τριών στα ερωτήματα άμεσης, κοντινής, μακρινής γενίκευσης αλλά και στην εύρεση του τύπου, καταγράφηκαν οι στρατηγικές που χρησιμοποιήσαν οι μαθητές/τριες στην προσπάθεια τους να βρουν τις σωστές απαντήσεις. Έτσι για την καταγραφή των ποσοστών των διαφορετικών τρόπων σκέψης- εξηγήσεων των μαθητών/τριών σημειώθηκαν οι έξι κατηγορίες στρατηγικών:

(1) Καταμέτρηση από το σχέδιο

(2) Αναδρομική

(3) Τμηματοποίησης

(4) Συναρτησιακή

(5) Ολόκληρου αντικειμένου

(6) Αδιευκρίνιστη/καμία

Οι πέντε πρώτες κατηγορίες είναι οι στρατηγικές που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των γραπτών και οι οποίες βασίζονται στην βιβλιογραφία του εννοιολογικού πλαισίου της παρούσας έρευνας. Η έκτη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές/τριες χωρίς να μπορέσουν να δώσουν καμία εξήγηση ή στις οποίες η εξήγηση που δόθηκε δεν αντιστοιχούσε σε καμία από τις παραπάνω πέντε στρατηγικές. Σε όλα τα γραπτά έγινε προσπάθεια σε κάθε απάντηση να αντιστοιχηθεί μια στρατηγική από τη λίστα των στρατηγικών της βιβλιογραφίας. Έτσι καταγράφηκε το πλήθος τους και τα ποσοστά τους σε κάθε είδος γενίκευσης, σε κάθε τάξη, σε όλο το σχολείο, σε κάθε φύλο αλλά και στο σύνολο όλων των απαντήσεων της γενίκευσης.

Ένα αντιπροσωπευτικό μέρος από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών συνοδευμένες από τις εξηγήσεις που δόθηκαν ταξινομήθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες και παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα 15.

Πίνακας 15 Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών/τριών στα δυο έργα στα ερωτήματα γενίκευσης

Στρατηγική	Εξήγηση
	Σκάλα
Καταμέτρηση από το σχέδιο	
4 σκαλοπάτια (σκ)	-«Κάθε πλευρά της σκάλας αυξάνεται κατά 1 σπίρτο».
14 σπίρτα(σπ)	-«'Ζωγράφισα τη σκάλα και τα μέτρησα».
50 σκ 152 σπ	-«Στις άκρες βάζουμε συν 1 από τον αριθμό των σκαλοπατιών, άρα 51+51+50=152». -«Ζωγράφισα τη σκάλα με 50 σκαλιά και το βρήκα».
Αναδρομική	
4σκ 14σπ	- «Ανεβαίνει κατά 3». -«Αφού η $3^{η}$ έχει 11 για την $4^{η}$ προσθέτω 3 παραπάνω»
6σκ 20σπ	-«Με 4 σκαλιά η σκάλα έχει 14 σπίρτα άρα για τα 6 σκαλιά θα έχουμε 14+3+3=20 σκαλοπάτια».
50σκ 152σπ	- «Ανέβηκα +3 μέχρι να φτάσω στον $50^{ο}$ όρο (έγραψε όλους τους όρους μέχρι τον $50^{ο}$)».
Τμηματοποίησης	
50σκ 152 σπ	- «Το $1^{ο}$ σκαλί είναι 5 σπίρτα, μετά ανεβαίνοντας προσθέτουμε 3, θέλουμε άλλα 50-1=49 σκαλιά με $3 \cdot 49$ σπίρτα όποτε συνολικά $3 \cdot 49 + 5 = 147 + 5 = 152$». - «Η $3^{η}$ σκάλα έχει 11 σπίρτα άρα 50-3=47 σκαλιά επί 3 που ανεβαίνουν $47 \cdot 3 = 141$ προσθέτουμε και τα 11, άρα 152» -« Η $6^{η}$ σκάλα έχει 20 σπίρτα, 50-6=44, $44 \cdot 3 = 132$ άρα 132+20=152».
Συναρτησιακή	
4σκ 14σπ	-«Γιατί $14 = 5 + 5 + 4 = 5 \cdot 2 + 4$».
6σκ 20σπ	-«Γιατί $6 \cdot 3 + 2 = 20$».

50σκ 152σπ -«Κάθε σκαλί αποτελείται από 3 σπίρτα και 2 αυτά της βάσης, άρα $3 \cdot 50 + 2$».

-«Γιατί $152 = 51 \cdot 2 + 50$, αφού βάζουμε τη θέση της σκάλας συν 1 παραπάνω από τις δυο μεριές».

-«Στο κέντρο η σκάλα θα έχει 50 σπίρτα για σκαλοπάτια και 2 από πάνω του, δηλαδή $2 + 3 \cdot 50$».

Ολόκληρου αντικειμένου

4 σκ 20 σπ - «Για ένα σκαλί χρειαζόμαστε 5 σπίρτα , άρα για τα 4 θα χρειαστούμε $4 \cdot 5$».

6 σκ 30 σπ - «Αφού έχουμε στην $1^η$ σκάλα 5 σπίρτα στην έκτη θα έχουμε $5 \cdot 6 = 30$».

50 σκ 250 σπ - «Πολλαπλασιάζουμε επί 50 την πρώτη σκάλα $5 \cdot 50 = 250$».

50 σκ 150 σπ - «Εφόσον το 1 σκαλί έχει 3 σπίρτα κάνουμε $50 \cdot 3$»

50 σκ 134 σπ -« Γιατί αν τα 25 είναι 67 τα 50 είναι επί 2»

50 σκ 160 σπ - «Τα 10 σκαλιά=20+3+3+3+3=32 τα 50 σκαλιά $32 \cdot 5 = 160$»

50 σκ 170 σπ - «Στα 5 σκαλιά η σκάλα θα έχει 17 σπίρτα , άρα στα 50 είναι 170»

50 σκ 200 σπ - «Η $2^η$ σκάλα έχει 8 σπίρτα οπότε $8 \cdot 25 = 200$»

-«Η $2^η$ σκάλα 8, άρα η $50^η$ πόσο; $2 \cdot x = 5 \cdot 80$ ή $2 \cdot x = 400$ άρα x=200»

Αδιευκρίνιστη/καμία

50 σκ 174 σπ -«Κάθε 4 σκαλιά χρειαζόμαστε 14 σπίρτα, 40 σκαλοπάτια $14 \cdot 10 = 140$, 48 σκαλοπάτια=168 σπίρτα, άρα 50 σκαλοπάτια είναι 168+3+3=174, αφού κάθε ένα σκαλί θέλει 3 σπίρτα»

50 σκ 166 σπ -«Έχουμε 6σκ=20σπίρτα, οπότε 12σκ=40, 24σκ=80, 48σκ=160σπίρτα οπότε +2 σκαλιά από 3+3 σπίρτα, άρα 160+6=166»

50 σκ 252 σπ - « $5 \cdot 50 + 2$ προσθέτουμε 2 στο τέλος γιατί η σκάλα δεν κλείνει

Δέντρο

Καταμέτρηση από το σχέδιο

$4^ο$ δέντρο (δ) 9 σχήματα (σχ) - «Σχεδίασα το δέντρο, το τρίγωνο μένει ίδιο, χρειάζονται 4 κορμοί και 4 φύλλα»

$6^ο$ δ 13 σχ - «1 τριγωνάκι και 6τραπέζια +6 ορθογώνια»

$30^ο$ δ 61 σχ - «30 ο κορμός 30 τα κλαδιά και 1 κορυφή»

Αναδρομική

4^{o} δ 9 σχ	- «Ανεβαίνει κατά 2 κάθε φορά δηλαδή 3+2+2+2=9»
	-«7 σχήματα το 3^{o} άρα 7+2=9»
	-«Σε κάθε δέντρο προσθέτω 2 (1 τετράγωνο+1 τραπέζιο)»
6^{o} δ 13 σχ	-«Προσθέτουμε 2 σχήματα κάθε φορά»
30^{o} δ 61 σχ	-«Γιατί τα μέτρησα μέχρι να φτάσω στο 30^{o} αφού ο τύπος πάει 2+2+2+2+…»
	-«Αυξάνεται κάθε σχήμα κατά 1 εκτός από το τρίγωνο.»

Τμηματοποίησης

30^{o} δ 61σχ	-« 1^{o} σχήμα έχει 3 άρα μετά 30-1=29 επί 2 βγαίνει 58, άρα 58+3=61»
30^{o} δ 61σχ	- «6^{o} =13 30-6=24 άρα $24 \cdot 2 = 48$ αφού ανεβαίνει κατά 2 άρα συνολικά 48+13=61»
30^{o} δ 61 σχ	- «3^{o} =7, 30-3=27 οπότε $27 \cdot 2 = 54$, 54+7=61»

Συναρτησιακή

4^{o} δ 9 σχ	-« $2 \cdot 4 + 1 = 9$, αφού 4 είναι η θέση του δέντρου»
	-«έβαλα όπου ν το 4 στον τύπο 2ν+1»
30^{o} δ 61 σχ	- «Το τρίγωνο μένει πάντα ίδιο και ανάλογα με τον αριθμό του δέντρου εδώ είναι 30, κάνουμε $1 + 2 \cdot 30 = 61$»
30^{o} δ 61 σχ	-« Όλα τα δέντρα έχουν μια κορυφή, 1 σώμα και 1 κορμό . Τα σχήματα του σώματος και του κορμού είναι ίδια με το μέγεθος του δέντρου, άρα $30 + 30 + 1 = 2 \cdot 30 + 1 = 61$»
	-«Κάνω $2 \cdot 30$ γιατί σε κάθε παραπάνω μέγεθος αυξάνεται κατά 2 και τέλος προσθέτω το τρίγωνο»

Ολόκληρου αντικειμένου

4^{o} δ 12σχ	-«Αφού το 1^{o} θέλει 3 του $4^{ου}$ θα είναι $4 \cdot 3 = 12$»
6^{o} δ 14 σχ	-«Αφού το 3^{o} έχει 7 σχήματα το 6^{o} θα έχει τα διπλάσια»
30^{o} δ 70 σχ	-«το 3^{o} σχήμα έχει 7, άρα $10 \cdot 7 = 70$»
30^{o} δ 90σχ	-« $30 \cdot 3 = 90$ σχήματα».
30^{o} δ 75σχ	-« Έκανα πολλαπλασιασμό το 5^{o} δέντρο που το βρήκα 15».
30^{o} δ 65σχ	- «Το 6^{o} δέντρο 13 σχήματα άρα επί 5 βγαίνει 65».
30^{o} δ 63σχ	-« Το 10^{o} δέντρο έχει 21 σχήματα άρα $21 \cdot 3 = 63$».

.

Αδιευκρίνιστη /καμία

30^o δ 61σχ	- «2^o=5 6^o =13 10^o =21 14^o =29 18^o =37 22^o =45 26^o =53 30^o =61 κάθε 4 επίπεδα ανεβαίνει 8».
30^o δ 65 σχ	-«Αφού 4^o και 6^o δέντρο μαζί 9+13=22σχήματα τα 10 άρα $22 \cdot 3 = 66$ τα 30 μείον 1 το τριγωνάκι 65 σχήματα».
30^o δ 63σχ	- «4^o και 6^o δέντρο μαζί 22-1 που είναι το τρίγωνο= 21 άρα $21 \cdot 3 = 63$σχήματα».
30^o δ 61 σχ	-« Μέχρι το 10^o δέντρο θα έχουμε 21 σχήματα , αλλά επειδή το 1^o σχήμα δεν αλλάζει θα πολλαπλασιάσουμε 20 σχήματα με το 3 και στο τέλος προσθέτουμε και το σχήμα που δεν αλλάζει (εννοεί το τρίγωνο)».

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω εξηγήσεις των παιδιών καταγράφηκαν οι συχνότητες εμφάνισης των στρατηγικών σε όλες τις απαντήσεις των μαθητών/τριών για τα ερωτήματα άμεσης, κοντινής και μακρινής γενίκευσης. Στον Πίνακα 16 παρουσιάζονται ξεχωριστά για τα δυο έργα, σκάλα (Σ) και Δέντρο (Δ), αυτές οι συχνότητες με τα αντίστοιχα ποσοστά τους ως προς το σύνολο των απαντήσεων των μαθητών/τριών σε κάθε ερώτημα του έργου. Βλέπουμε ότι τα ποσοστά εμφάνισης των στρατηγικών στα ερωτήματα σε κάθε έργο είναι περίπου τα ίδια με κάποιες μικρές διαφορές. Στην άμεση γενίκευση η πιο συχνή στρατηγική είναι η αναδρομική, αφού οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τη σταθερή διαφορά δυο διαδοχικών όρων σε κάθε κανονικότητα και βρίσκουν τον πρώτο επόμενο όρο μετά από τους δοθέντες της δραστηριότητας. Δεύτερη ακολουθεί η στρατηγική της καταμέτρησης, αφού σε πολλές περιπτώσεις οι περισσότεροι μαθητές/τριες αρχικά έκαναν ένα σχέδιο ακόμα και αν στην πορεία της δραστηριότητας άλλαζαν στρατηγική. Το ίδιο συμβαίνει και στην κοντινή γενίκευση με σχεδόν ίδιες συχνότητες στις δυο παραπάνω στρατηγικές. Στο δέντρο η συναρτησιακή εμφανίστηκε πιο συχνά, σε σχέση με τη σκάλα, ενώ στη μακρινή συνέβη το αντίστροφο.

Πίνακας 16 Αριθμός και ποσοστά εμφάνισης στρατηγικών στα δυο έργα

Είδος στρατηγικής	Γενίκευση/ Έργο					
	Άμεση		Κοντινή		Μακρινή	
	Σ ($4^{ος}$)	Δ($4^{ος}$)	Σ($6^{ος}$)	Δ($6^{ος}$)	Σ($50^{ος}$)	Δ ($30^{ος}$)
Καταμέτρηση από το σχέδιο	37 23.4 %	39 25 %	32 20.3 %	33 21.2 %	10 7.4 %	18 13.8 %

Αναδρομική	90 57 %	80 51.3 %	93 58.8%	83 53.2 %	17 12.6 %	21 16.1 %
Τμηματοποίησης	0 0 %	0 0 %	0 0 %	0 0 %	14 10.4 %	16 12.3 %
Συναρτησιακή	13 8.2 %	22 14.1 %	14 8.9 %	23 14.7 %	34 25.2 %	28 21.5 %
Ολόκληρου αντικειμένου	12 7.6 %	6 3.8 %	13 8.2 %	7 4.5 %	46 34.1 %	33 25.4 %
Αδιευκρίνιστη/καμία	6 3.8 %	9 5.8 %	6 3.8 %	10 6.4 %	14 10.4 %	14 10.8 %
Σύνολο Απαντήσεων	158	156	158	156	135	130

Επίσης στη μακρινή γενίκευση η στρατηγική της καταμέτρησης από το σχέδιο εμφανίζει τα μικρότερα ποσοστά σε σχέση με όλες τις στρατηγικές. Πιο ειδικά στο δέντρο, η καταμέτρηση ήταν ελαφρώς πιο συχνή σε σχέση με τη σκάλα, αφού φάνηκε πιο εύκολο στους μαθητές/τριες ακόμα και να σχεδιάσουν ένα τόσο μακρινό όρο.

Στη στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου, στη μακρινή γενίκευση υπάρχει μια διαφορά μεταξύ των δυο έργων περίπου 10% με μεγαλύτερο ποσοστό της σκάλας. Εκεί αρκετοί μαθητές/τριες στη σκάλα, συγκεκριμένα 46 από τις 135 απαντήσεις, (33 από τις 130 στο άλλο έργο) θεώρησαν ότι κάθε όρος δηλαδή η σκάλα και κάθε βήμα δηλαδή ο αριθμός των σπίρτων είναι ανάλογα ποσά. Έτσι πολλοί μαθητές/τριες βασίστηκαν σε κοντινούς όρους για να υπολογίσουν τον μακρινό 50^{ο} όρο στη σκάλα και τον 30^{ο} όρο στο δέντρο. Μερικοί/ες χρησιμοποίησαν τους δοθέντες όρους, τον πρώτο, το δεύτερο ή τον τρίτο όρο λέγοντας για παράδειγμα: «αφού η πρώτη σκάλα έχει 3 σπίρτα η 50^{η} θα έχει 3 επί 50 δηλαδή 150 σπίρτα», ή «το 3^{ο} δέντρο έχει 7 σχήματα, άρα το 30^{ο} δέντρο θα έχει $10 \cdot 7 = 70$ σχήματα». Άλλοι πάλι βρήκαν σωστά ή λανθασμένα τους ζητούμενους κοντινούς όρους (4^{ο} και 6^{ο}) και έπειτα προχώρησαν με τη λογική των ανάλογων ποσών για τη μακρινή γενίκευση. Κάποιοι/ες μαθητές/τριες έφτιαξαν πίνακα ανάλογων ποσών ή κατασκεύασαν εξίσωση: «Η 2^{η} σκάλα 8, άρα η 50^{η} πόσο; $2 \cdot x = 5 \cdot 80$ ή $2 \cdot x = 400$ άρα x=200».

Τα ποσοστά εμφάνισης της έκτης κατηγορίας στρατηγικών, δηλαδή της αδιευκρίνιστης/καμίας, στην άμεση και κοντινή γενίκευση κυμάνθηκαν από 3.8% έως και

6.4%. Σε αυτά τα είδη γενίκευσης ελάχιστοι μαθητές/τριες δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους ή τις εξήγησαν με κάποιο τρόπο που δεν μπορούσε να ταξινομηθεί στις προηγούμενες πέντε κατηγορίες στρατηγικών. Στη μακρινή γενίκευση, περίπου 20-25 μαθητές/τριες δεν απάντησαν καθόλου στα ερωτήματα. Από τις υπόλοιπες απαντήσεις στα ερωτήματα όμως υπήρχε ένας αριθμός μαθητών/τριών, 14 συγκεκριμένα και στα δύο έργα. των οποίων η στρατηγική που χρησιμοποίησαν δεν ήταν σαφής. Για παράδειγμα μαθητής στο έργο δέντρο αρχικά αθροίζει τα σχήματα του τέταρτου και του έκτου όρου θεωρώντας ότι υπολογίζει τα σχήματα του δέκατου όρου, στη συνέχεια αφαιρεί το τρίγωνο που παραμένει σταθερό σε όλα τα δέντρα και τελικά χρησιμοποιεί την στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου πολλαπλασιάζοντας τα σχήματα του δέκατου όρου που υπολόγισε με το 3 ώστε να προκύψει ο τριακοστός όρος. Μαθήτρια στο πρώτο έργο ακολουθεί μια λογική ταυτόχρονου διπλασιασμού σκαλιών και σπίρτων μέχρι να φτάσει στον 48^{ο} όρο κοντά δηλαδή στον ζητούμενο 50^{ο} όρο και στη συνέχεια χρησιμοποιεί την αναδρομική στρατηγική προσθέτοντας τη σωστή διαφορά δυο φορές ώστε να καταλήξει στον 50^{ο}. Συγκεκριμένα αναφέρει: «Έχουμε 6σκ=20σπίρτα, οπότε 12σκ=40, 24σκ=80, 48σκ=160σπίρτα οπότε +2 σκαλιά από 3+3 σπίρτα, άρα 160+6=166».

Η στρατηγική της τμηματοποίησης είναι μηδενική στις γενικεύσεις του πρώτου ερωτήματος και στα δυο έργα, ενώ κάνει την εμφάνιση της αποκλειστικά στη μακρινή γενίκευση. Εκεί 14 και 16 μαθητές/τριες αντίστοιχα και στα δυο έργα εντόπισαν την κοινή διαφορά μεταξύ δύο όρων στο μοτίβο, την πολλαπλασίασαν με τον αριθμό των βημάτων και τέλος πρόσθεσαν το αποτέλεσμα σε έναν αρχικό όρο. Με δεδομένο ότι τα ποσοστά εμφάνισης των στρατηγικών και στα δυο έργα δεν παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις, στον παρακάτω Πίνακα 17 δε γίνεται διαχωρισμός αυτών των ποσοστών σε δυο έργα ξεχωριστά. Έτσι αφαιρέθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών/τριών της έκτης κατηγορίας αδιευκρίνιστων στρατηγικών και παρουσιάζονται τα συνολικά ποσοστά εμφάνισης των ειδών της στρατηγικής ως προς το είδος κάθε γενίκευσης , ως προς το είδος της στρατηγικής αλλά και ως προς το σύνολο όλων των απαντήσεων

Πίνακας 17 Είδος στρατηγικής σε κάθε ερώτημα

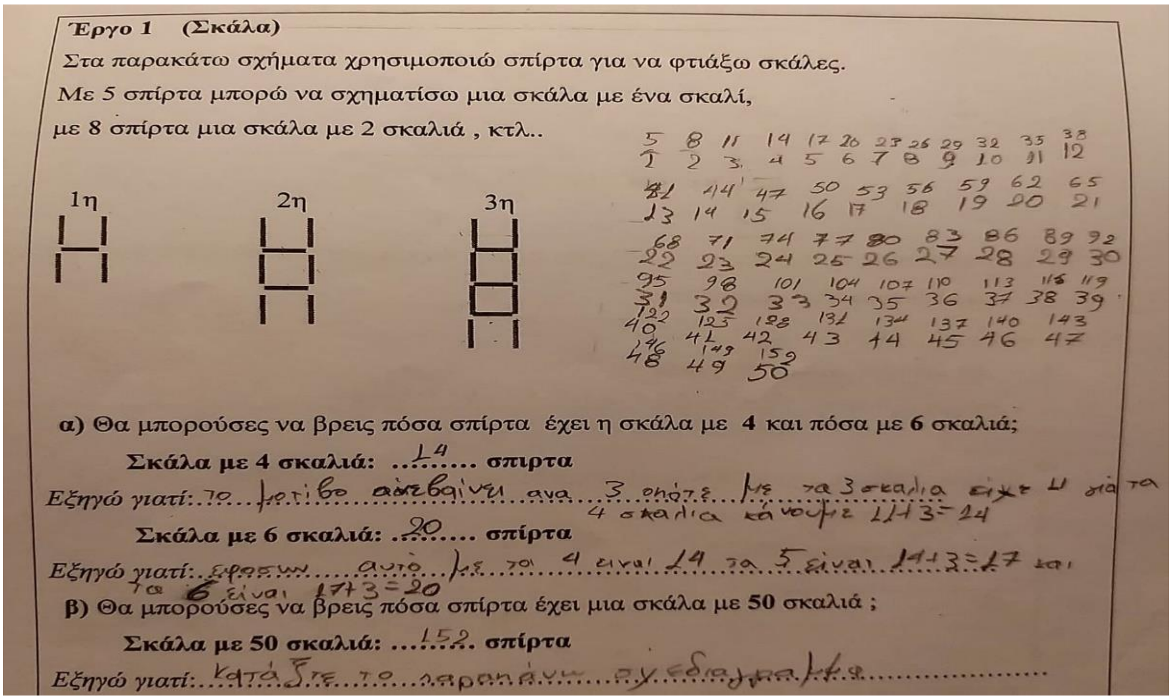
Είδος στρατηγικής	Γενίκευση			
	Άμεση	Κοντινή	Μακρινή	Σύνολο
Καταμέτρηση από το σχέδιο	76	65	28	169
% είδος γενίκευσης	25.4	21.8	10.6	
% είδος στρατηγικής	44.9	38.5	16.6	
% στο σύνολο	9.1	7.8	3.4	**20,3 %**

Αναδρομική	170	176	38	384
% είδος γενίκευσης	56.9	59,1	16	
% είδος στρατηγικής	44.3	45.8	9.9	
% στο σύνολο	20.4	21.1	4.5	**46 %**
Τμηματοποίησης	0	0	30	30
% είδος γενίκευσης	0	0	12.7	
% είδος στρατηγικής	0	0	100	
% στο σύνολο	0	0	3.7	**3,7 %**
Συναρτησιακή	35	37	62	134
% είδος γενίκευσης	11.7	12.4	26.2	
% είδος στρατηγικής	26.1	27.6	46.3	
% στο σύνολο	4.2	4.4	7.4	**16 %**
Ολόκληρου αντικειμένου	18	20	79	117
% είδος γενίκευσης	6	6.7	33.3	
% είδος στρατηγικής	15.4	17.1	67.5	
% στο σύνολο	2.2	6.7	9.5	**14 %**
Σύνολο Απαντήσεων	299	298	237	834

. Η αναδρομική αναδεικνύεται η πρώτη σε χρήση σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες στρατηγικές με ποσοστό 46% στο σύνολο των απαντήσεων των μαθητών/τριών που έδωσαν κάποια εξήγηση..

Σχεδόν ένας στους δυο μαθητές/τριες εντόπισαν τη σταθερή διαφορά στους δοθέντες όρους και επέκτειναν το μοτίβο προσθέτοντας τον αριθμό αυτό στους προηγούμενους όρους. Στην άμεση και κοντινή γενίκευση είναι η κύρια στρατηγική με ποσοστά 56,9% και 59,1% αντίστοιχα, ενώ στη μακρινή το ποσοστό πέφτει στο 16%. Εκεί κάποιοι μαθητές/τριες για να βρουν την 50η σκάλα ή το 30ο δέντρο πρόσθεσαν τον αριθμό που ανέβαινε το κάθε μοτίβο και έγραψαν όλους τους όρους μέχρι να φτάσουν στο ζητούμενο μακρινό όρο.

Αυτή τη στρατηγική ακολούθησε και μια μαθήτρια σε όλα τα ερωτήματα γενίκευσης στη σκάλα όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα:



Έργο 1 (Σκάλα)

Στα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώ σπίρτα για να φτιάξω σκάλες.

Με 5 σπίρτα μπορώ να σχηματίσω μια σκάλα με ένα σκαλί,

με 8 σπίρτα μια σκάλα με 2 σκαλιά , κτλ..

1η 2η 3η

α) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει η σκάλα με 4 και πόσα με 6 σκαλιά;

Σκάλα με 4 σκαλιά: ...14... **σπίρτα**

Εξηγώ γιατί: το μοτίβο ανεβαίνει ανα 3 σπίρτα με τα 3 σκαλια είχε 11 στα τα 4 σκαλια κάνουμε 11+3=14

Σκάλα με 6 σκαλιά: ...20... **σπίρτα**

Εξηγώ γιατί: έψαξα αυτό με τα 4 είναι 14 τα 5 είναι 14+3=17 και τα 6 είναι 17+3=20

β) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με 50 σκαλιά ;

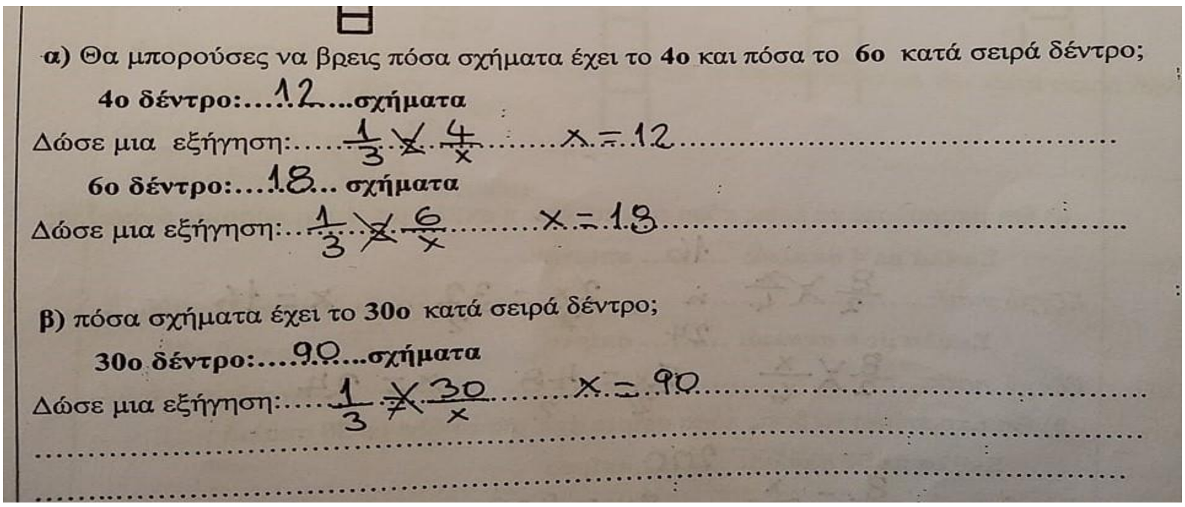
Σκάλα με 50 σκαλιά: ...152... **σπίρτα**

Εξηγώ γιατί: κατάξτε το παραπάνω σχεδιάγραμμα

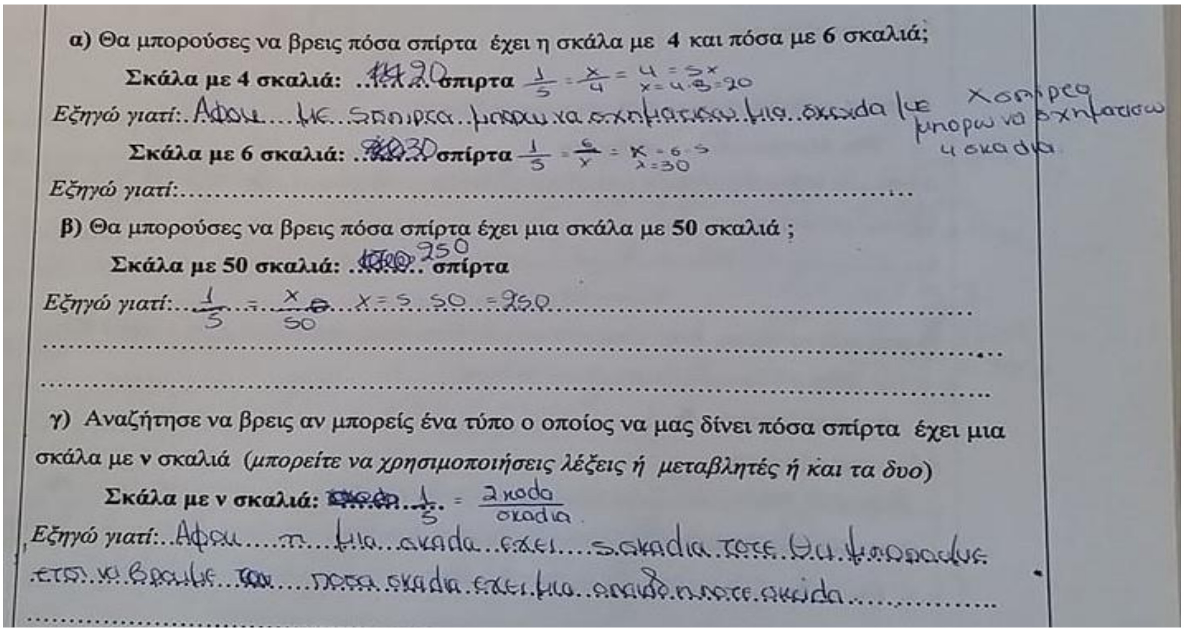
Η στρατηγική της καταμέτρησης από το σχέδιο χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στις άμεσες γενικεύσεις, ακολουθούν οι κοντινές και τελευταίες οι μακρινές με ποσοστά 44,9%, 38,5% και 16,6% αντίστοιχα. Στις άμεσες και κοντινές αρκετοί/ες μαθητές/τριες σχεδίασαν τον 4^{ο} και 6^{ο} όρο αντίστοιχα, χωρίς να σημαίνει ότι η πλειοψηφία βασίστηκε αποκλειστικά στο σχέδιο τους, για να επεκτείνουν το μοτίβο. Σίγουρα το σχέδιο τους ήταν το μέσο που τους βοήθησε να αντιληφθούν τη δομή της κανονικότητας και να εντοπίσουν τη σταθερή διαφορά μεταξύ των διαδοχικών όρων. Καθώς λοιπόν οι ζητούμενοι όροι απομακρύνονταν από τους δοθέντες των δραστηριοτήτων μειωνόταν το ποσοστό των μαθητών/τριών που απλά καταμετρούσαν τα σπίρτα στη σκάλα ή τα σχήματα στο δέντρο.

Καθώς αλλάζει το είδος της γενίκευσης η αναδρομική στρατηγική μειώνεται και αυξάνεται η συναρτησιακή. Από όλες τις απαντήσεις, όπου έγινε χρήση της συναρτησιακής στρατηγικής το 26,1% και το 27,6% έγινε στο πρώτο ερώτημα. Όπως και στα ευρήματα των Lannin και άλλοι (2006) έτσι και στη παρούσα έρευνα λοιπόν η αναδρομική στρατηγική χρησιμοποιείται πιο συχνά σε άμεσες και κοντινές γενικεύσεις, ενώ η συναρτησιακή στρατηγική χρησιμοποιείται συχνότερα στις εργασίες μακρινής γενίκευσης. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι καθώς ο αριθμός βημάτων μεγαλώνει, η αναδρομική στρατηγική γίνεται λιγότερο αποτελεσματική λόγω της τοπικής φύσης της, καθώς εξετάζει την ανάπτυξη μεταξύ διαδοχικών βημάτων της κανονικότητας. Ακολουθεί λοιπόν με 16% η συναρτησιακή στρατηγική, με τα μεγαλύτερα ποσοστά της, όπως αναφέρθηκε, να τα εμφανίζει στις μακρινές γενικεύσεις με ποσοστό 46,3% στο σύνολο των απαντήσεων αυτής της στρατηγικής. Αρκετοί μαθητές/τριες πρώτα εντόπισαν τη γραμμική σχέση που συνδέει τους όρους με το κάθε βήμα. Έπειτα απάντησαν ακόμα και στην άμεση και κοντινή γενίκευση με

τη βοήθεια του τύπου που δημιούργησαν. Μαθήτρια για παράδειγμα σχεδιάζει τον 4^{ο} και 6^{ο} όρο στη δραστηριότητα σκάλα, στη συνέχεια τονίζει ότι κάθε όρος ανεβαίνει ανά 3 , αλλά στην εξήγηση που δίνει σε όλους τους ζητούμενους όρους αναφέρει ότι ο γενικός τύπος της κανονικότητας είναι 3ν+2 και για να υπολογιστεί ο 4^{ος} , ο 6^{ος} και ο 50^{ος} όρος αντικαθιστούμε όπου ν το 4, το 6 και το 50 αντίστοιχα. Στις μακρινές γενικεύσεις 62 μαθητές/τριες από όλο το δείγμα ουσιαστικά κατασκεύασαν μια συνάρτηση και υπολόγισαν τον μακρινό όρο απευθείας χρησιμοποιώντας τη θέση στην ακολουθία. Μαθήτρια στη σκάλα για την αναζήτηση του 50^{ου} όρου εξηγεί: «Πολλαπλασιάζω τα 3 σκαλιά που χρειάζεται το κάθε σκαλί για να γίνει με τα 50 σκαλιά που θέλω να έχει η σκάλα μου και προσθέτω τα 2 τελευταία για τη άκρη της σκάλας, δηλαδή 3 ·50+2=152 ». Μαθητής στο δέντρο αναφέρει: «κάθε δέντρο αποτελείται από τον ίδιο αριθμό τραπεζίων και ορθογωνίων ανάλογα με τη θέση του δέντρου και προσθέτουμε και ένα τριγωνάκι. Εδώ η θέση του δέντρου είναι 30, άρα πολλαπλασιάζουμε επί 2 τον αριθμό του δέντρου συν 1 δηλαδή $2 \cdot 30 + 1 = 61$».
Τέταρτη είναι η στρατηγική Ολόκληρου Αντικειμένου με ποσοστό 14% στο σύνολο όλων των απαντήσεων. Τα μεγαλύτερα ποσοστά της βρίσκονται πάλι στη μακρινή γενίκευση με 67.5%. Από τους 237 μαθητές/τριες που έδωσαν απάντηση στη μακρινή γενίκευση οι 79 χρησιμοποίησαν αυτή τη στρατηγική. Δηλαδή στο σύνολο των απαντήσεων σχεδόν μια στις τρεις οι μαθητές/τριες θεώρησαν ότι ο αριθμός των σπίρτων και η σκάλα αλλά και αριθμός των σχημάτων και το δέντρο είναι ανάλογα ποσά και έτσι κατέληγαν σε λανθασμένες απαντήσεις. Οι περισσότεροι μαθητές/τριες έβρισκαν σωστά τα ερωτήματα άμεσης και κοντινής γενίκευσης και όταν πήγαιναν στο δεύτερο ερώτημα τότε χρησιμοποιούσαν αυτή τη στρατηγική. Υπήρχαν όμως και μαθητές/τριες που από την αρχή είχαν την ίδια αντιμετώπιση σε όλα τα ερωτήματα. Μαθήτρια στην παρακάτω εικόνα , στο δεύτερο έργο θεώρησε ότι αφού το πρώτο δέντρο έχει τρια σχήματα, για να υπολογίσει το 4^{ο} , το 6^{ο} και το 30^{ο} πολλαπλασίασε τον αριθμό του δέντρου με το 3 και στις τρεις περιπτώσεις.



Όπως αναφέρεται και στον Rivera (2010) σε αντίθεση με την αναδρομική στρατηγική που εξαρτάται κυρίως από την προσθήκη μιας κοινής διαφοράς από το ένα βήμα στο άλλο, οι στρατηγικές τμηματοποίησης και ολόκληρου αντικειμένου βασίζονται σε πολλαπλασιαστικούς συλλογισμούς και σχέσεις που απαιτούν υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης και είναι περισσότερο σύνθετες σε σχέση με μια απλή προσθήκη αριθμού μεταξύ διαδοχικών όρων. Το γεγονός ότι και οι δυο παραπάνω στρατηγικές απαιτούν την εύρεση μιας σχέσης μεταξύ ενός προηγούμενου εικονικού βήματος και του απαιτούμενου βήματος (όχι απαραίτητα το επόμενο βήμα), ίσως αποτελεί και μια εξήγηση γιατί αυτές χρησιμοποιούνταν συχνά σε μακρινές γενικεύσεις (El Mouhayar και Jurdak, 2015).


α) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει η σκάλα με 4 και πόσα με 6 σκαλιά;

Σκάλα με 4 σκαλιά: ...20... **σπίρτα** $\frac{1}{5}=\frac{x}{4}=4=5x$, $x=4\cdot5=20$

Εξηγώ γιατί: Αφου με 5 σπιρτα μπορω να σχηματισω μια σκαλα με Χ σπιρτα μπορω να σχηματισω 4 σκαλια

Σκάλα με 6 σκαλιά: ...30... **σπίρτα** $\frac{1}{5}=\frac{6}{x}=x=6\cdot5$, $x=30$

Εξηγώ γιατί: ...

β) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με 50 σκαλιά ;

Σκάλα με 50 σκαλιά: ...250... **σπίρτα**

Εξηγώ γιατί: $\frac{1}{5}=\frac{x}{50}$ $x=5\cdot50=250$

γ) Αναζήτησε να βρεις αν μπορείς ένα τύπο ο οποίος να μας δίνει πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με ν σκαλιά (*μπορείτε να χρησιμοποιήσεις λέξεις ή μεταβλητές ή και τα δυο*)

Σκάλα με ν σκαλιά: $\frac{1}{5}=\frac{\text{σπιρτα}}{\text{σκαλια}}$

Εξηγώ γιατί: Αφου ... μια σκαλα εχει 5 σκαλια τοτε θα μπορουμε ετσι να βρουμε ... ποσα σκαλια εχει μια ... ποσα σκαλια

Μαθήτρια για παράδειγμα στη σκάλα χρησιμοποίησε σε όλα τα ερωτήματα εξισώσεις με τη λογική της αναλογίας χωρίς να μπει στη λογική να αναγνωρίσει το τρόπο που δημιουργείται το μοτίβο , όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα.

Η στρατηγική της τμηματοποίησης είναι η στρατηγική με το μικρότερο ποσοστό, αφού τη συναντούμε σε μόλις 30 απαντήσεις από τις συνολικά 834. Το ποσοστό είναι μόνο 3,7% και εμφανίζεται αποκλειστικά στη μακρινή γενίκευση. Εκεί οι μαθητές/τριες, αφού βρουν τη σταθερή διαφορά χρησιμοποιούν έναν αρχικό όρο, τον αφαιρούν από το ζητούμενο και έπειτα πολλαπλασιάζουν τη διαφορά με τα βήματα που απομένουν και προσθέτουν το αποτέλεσμα έπειτα στον αρχικό όρο. Μαθητής γράφει για παράδειγμα στην αναζήτηση της 50ης σκάλας: «Η τρίτη σκάλα έχει 11 σπίρτα άρα 50-3=47 σκαλιά. Πολλαπλασιάζουμε το 47 επί 3 που ανεβαίνουν δηλαδή $47 \cdot 3 = 141$, προσθέτουμε και τα αρχικά 11 που έχει η τρίτη σκάλα άρα συνολικά 152 σπίρτα». Επίσης μαθήτρια για να βρει το 30ο δέντρο γράφει: «Το έκτο δέντρο έχει 13 σχήματα, άρα 30-6=24 δέντρα. Τα δέντρα ανεβαίνουν κατά 2 άρα $24 \cdot 2 = 48$ άρα συνολικά 48+13=61 σχήματα».

4.3.2. Αποτελεσματικότητα στρατηγικής

Κατά πόσο αποτελεσματική είναι η κάθε στρατηγική στις δραστηριότητες της παρούσας έρευνας φαίνεται στον Πίνακα 18. Σε αυτόν τον πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των απαντήσεων με τη χρήση της κάθε στρατηγικής που χρησιμοποιήθηκε και σε αντιπαραβολή ο αριθμός των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων.

Πίνακας 18 Σχέση στρατηγικής και σωστού αποτελέσματος

Είδος στρατηγικής	Απαντήσεις με τη στρατηγική	Σωστές απαντήσεις	Λανθασμένες απαντήσεις
Καταμέτρηση από το σχέδιο	169	160 **94,7 %**	9
Αναδρομική	384	364 **94,8 %**	20
Τμηματοποίησης	30	30 **100 %**	0
Συναρτησιακή	134	133 **99,3 %**	1
Ολόκληρου αντικειμένου	117	0 **0 %**	117
Αδιευκρίνιστη/καμία	59	5 **8,5 %**	54

Έτσι παρατηρούμε ότι οι στρατηγικές της τμηματοποίησης και η συναρτησιακή είναι σχεδόν αλάνθαστες. Ακολουθούν η καταμέτρηση από το σχέδιο και η αναδρομική με κάποιες απώλειες. Οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών/τριών στα ερωτήματα γενίκευσης ουσιαστικά προήρθαν από δυο κατηγορίες μαθητών/τριών. Η πρώτη κατηγορία, η οποία απουσιάζει από τον παραπάνω πίνακα, είναι μαθητές/τριες ιδίως στις μακρινές γενικεύσεις οι οποίοι/ες δεν κατάφεραν να δώσουν απάντηση σε κάποια ερωτήματα. Η δεύτερη κατηγορία είναι παιδιά που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις και η πλειοψηφία των οποίων προήρθαν από μαθητές/τριες που χρησιμοποίησαν μια αδιευκρίνιστη στρατηγική που δε μπορούσε να ταξινομηθεί ή τη στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου. Οι μαθητές/ες που χρησιμοποιήσαν τη στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου, δεν αντιλήφθηκαν τη γραμμικότητα των εικονιστικών μοτίβων των δραστηριοτήτων και θεώρησαν ότι η θέση του όρου και το κάθε βήμα είναι ανάλογα ποσά. Επομένως όλες οι απαντήσεις τους ήταν λανθασμένες.

Να σημειωθεί ότι ο παραπάνω πίνακας καταγράφει απλά τη σχέση μεταξύ της επιλογής μιας στρατηγικής και του σωστού αποτελέσματος που αποφέρει. Η αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου ίσως δε στηρίζεται βέβαια μόνο σε ένα σωστό αποτέλεσμα, τουλάχιστον σε επίπεδο γενίκευσης μιας κανονικότητας σε τέτοιες δραστηριότητες. Για παράδειγμα για ένα μαθητή που υπολογίζει έναν μακρινό όρο με καταμέτρηση από το σχέδιο ίσως σημαίνει η επίδοση του στη γενίκευση δε θεωρείται ικανοποιητικά αποτελεσματική.

4.3.3. Χρήση στρατηγικής των ερωτημάτων γενίκευσης σε κάθε τάξη

Στον Πίνακα 19 παρουσιάζεται ο αριθμός των απαντήσεων των μαθητών/τριών ανάλογα με το είδος των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν για κάθε τάξη ξεχωριστά.

Οι μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου συμμετείχαν με αυξημένο ενδιαφέρον στις δραστηριότητες και προσπάθησαν να απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα. Η πιο συχνή στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε από την τάξη είναι η αναδρομική. Έτσι το 42,6 % της τάξης αντιλήφθηκε ότι σε κάθε κανονικότητα κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με μια σταθερή αύξηση και πρόσθεσε στους ζητούμενους όρους αυτή τη διαφορά όσες φορές χρειαζόταν. Για το υπολογισμό του 4^{ου} όρου οι περισσότεροι βασίστηκαν στον 3^{ο} όρο προσθέτοντας +3 στη σκάλα και +2 στο δέντρο. Για τη σκάλα οι πιο συχνές εξηγήσεις ήταν :«αφού τα 3 σκαλιά έχουν 11 σπίρτα, προσθέτουμε 3 σπίρτα κάθε φορά, οπότε 3+11 = 14» ή « το μοτίβο ανεβαίνει ανά 3, οπότε για τα 4 σκαλιά κάνουμε πρόσθεση με το 3». Ομοίως για τον 6^{ο} όρο : «εφόσον αυτή η σκάλα με τα 4 σκαλιά είναι 14 σπίρτα, τα 5 είναι 14+3 =17 και τα 6 σκαλιά είναι 17+3=20» ή « από την 4^{η} ανεβαίνουμε 2 σκαλιά άρα 14+3+3=20» ή «αφού η 1^{η} σκάλα έχει 5 σπίρτα για να φτάσουμε στην 6^{η} θα κάνουμε 5 +3 +3 +3+3+3=20». Αρκετοί μαθητές/τριες συνέχισαν με τον ίδιο τρόπο για να βρουν και τον όρο της μακρινής γενίκευσης. Μαθητής έγραψε « κάνω +3+3+3+3… μέχρι να φτάσω τα 50 σκαλιά.

Πίνακας 19 Χρήση στρατηγικής σε κάθε τάξη

Στρατηγική / Τάξη	**Α΄ Γυμνασίου**	**Β΄ Γυμνασίου**	**Γ΄ Γυμνασίου**	Σύνολο
Καταμέτρηση από το σχέδιο	66	71	32	169
% τάξης	21,3	22,2	12,1	
% στρατηγικών	39	42	19	
Αναδρομική	132	110	142	384
% τάξης	42,6	34,5	53,6	
% στρατηγικών	34,4	28,6	37	
Τμηματοποίηση	5	10	15	30
% τάξης	1,6	3,1	5,6	
% στρατηγικών	16,7	33,3	50	

Συναρτησιακή	48	53	33	134
% τάξης	15,5	16,6	12,5	
% στρατηγικών	35,8	39,5	24,6	
Ολόκληρου Αντικειμένου	42	39	36	117
% τάξης	13,5	12,3	13,6	
% στρατηγικών	35,9	33,3	30,8	
Αδιευκρίνιστη	17	35	7	59
% τάξης	5,5	11	2,6	
% στρατηγικών	28,8	59,3	11,9	
Σύνολο	310	318	265	893

Στη μακρινή γενίκευση μαθήτρια πάλι με την ίδια λογική ανεβαίνοντας κατά 3 κάθε φορά κατέγραψε όλους τους όρους μέχρι να φτάσει στον επιθυμητό $50^{ο}$ όρο κάνοντας
και ένα μικρό πίνακα:

1 2 3 4 …………… 48 49 50

5 8 11 14 ……………146 149 152

Στο δέντρο έλειπε ο δεύτερος όρος, οπότε οι μαθητές/τριες πριν απαντήσουν έπρεπε να αντιληφθούν τη δομή του μοτίβου για να μπορέσουν να βρουν τους ζητούμενους όρους. Έτσι αφού διαπίστωσαν ότι το δεύτερο δέντρο έχει πέντε σχήματα, βρήκαν το $4^{ο}$ και το $6^{ο}$ δέντρο σημειώνοντας ότι «ανεβαίνει ανά 2» ή «κάθε φορά προσθέτω 2». Η διαπίστωση αυτή σε άλλα γραπτά έγινε συγκεκριμένη για σχήματα και όχι απλά αριθμητικά. Τονίστηκε δηλαδή ότι σε κάθε δέντρο το τριγωνάκι είναι σταθερό και αυξάνεται κάθε φορά 1 τραπέζιο και 1 τετραγωνάκι. Υπήρχαν οι παρόμοιες εξηγήσεις «γιατί η κορυφή είναι πάντα μια, ενώ τα υπόλοιπα ανεβαίνουν κατά 2», ή «είναι 13 σχήματα, αφού για να βρω το $4^{ο}$ βάζω 1+1+1+1 =4 σχήματα στον κορμό και ομοίως άλλα 4 στο φύλλωμα και μένει η κορυφή η ίδια». Για το $30^{ο}$ δέντρο μαθήτρια έγραψε «κάνω 2+2+2+… και το βρίσκω» ενώ άλλη αφού στην άμεση και κοντινή διαπίστωσε ότι ανεβαίνει κατά 2 συνέχισε γράφοντας «1=3, 2=5, 3=7, 4=9 .....30=61».

Δεύτερη στρατηγική σε προτίμηση στα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου είναι η καταμέτρηση από το σχέδιο με ποσοστό 21,3 % στο σύνολο των απαντήσεων της τάξης. Αρκετοί/ες μαθητές/τριες ξεκινώντας έκαναν δυο σχήματα ένα για τον $4^{ο}$ και ένα για τον $6^{ο}$ όρο και στις δυο δραστηριότητες. Αρκετοί από αυτούς βασίστηκαν στο σχήμα και έπειτα χρησιμοποίησαν κάποια άλλη στρατηγική, όπως η αναδρομική. Αυτοί δεν προσμετρήθηκαν στην στρατηγική της καταμέτρησης. Εξηγήσεις της μορφής : «εφόσον η άσκηση μας ζητάει μια σκάλα με 4 σκαλιά την σχεδιάζουμε και μετράμε τις γραμμές» ή και «γιατί τα ζωγράφισα» ή «το σχεδίασα και μέτρησα τα σπίρτα» είναι οι συνηθισμένες σε αυτή τη στρατηγική. Ομοίως στο δέντρο σχεδίασαν τα σχήματα και μέτρησαν τα σχήματα που έχει το κάθε δέντρο. Στο τέταρτο κατά σειρά δέντρο κάνοντας το σχήμα κάποιοι έγραψαν 4+4+1=9 σχήματα, ενώ στο έκτο 6+6+1= 13 σχήματα απλά καταμετρώντας τα σχήματα και διαπιστώνοντας ότι τα τραπέζια και τα τετράγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό σχημάτων.

Τρίτη πιο συχνή στρατηγική στην Α΄ Τάξη είναι η συναρτησιακή με ποσοστό 15,5%, όπου οι μαθητές/τριες παρόλο που δεν είναι εξοικειωμένοι με την άλγεβρα και τις μεταβλητές όσο οι μεγαλύτερες τάξεις προσπάθησαν να απαντήσουν τα ερωτήματα γενίκευσης κατασκευάζοντας μια σχέση η οποία θα λειτουργεί για τα ερωτήματα άμεσης, κοντινής και μακρινής γενίκευσης. Δηλαδή, ενώ για τον τέταρτο και τον έκτο όρο αρκετοί είχαν βρει με καταμέτρηση ή και αναδρομικά ότι ανεβαίνει με σταθερή αύξηση τους όρους, δε σταμάτησαν την προσπάθεια για την ανακάλυψη μιας σχέσης που θα τους χρησιμεύσει για την απάντηση στη μακρινή. Όσοι την βρήκαν, έδωσαν σε όλα τα ερωτήματα την ίδια εξήγηση. Για παράδειγμα μαθήτρια έγραψε: σκάλα με 4 σκαλιά: $3 \cdot 4 + 2 = 14$, σκάλα με 6 σκαλιά $3 \cdot 6 + 2 = 20$ και σκάλα με 30 σκαλιά $3 \cdot 50 + 2 = 152$». Τη σκέψη της μαθήτριας ακολούθησε και ένας άλλος μαθητής, αφού παρατήρησε στη πρώτη σκάλα ότι ένα σκαλί σχηματίζεται από 3 σπίρτα + 2 που περισσεύουν σαν βάση, οπότε έγραψε και αυτός τις τρεις παραπάνω σχέσεις. Μαθητής αφού παρατήρησε ότι η σκάλα με ένα σκαλί έχει 2 κάθετα σπίρτα αριστερά και 2 κάθετα σπίρτα δεξιά και ένα στη μέση, στην 2η σκάλα έχει 3 αριστερά, 3 δεξιά και 2 στη μέση, διαπίστωσε ότι τα κατακόρυφα σπίρτα είναι 1 παραπάνω από τα σκαλιά σε κάθε μεριά. Οπότε με αυτή τη λογική απάντησε ότι η τέταρτη έχει 5 αριστερά, 5 δεξιά και 4 στη μέση οπότε $5 + 5 + 4 = 5 \cdot 2 + 4 = 14$, η έκτη έχει $7 + 7 + 6 = 7 \cdot 2 + 6 = 14$ και ομοίως η 50η έχει $51 \cdot 2 + 50 = 152$ σπίρτα. Ομοίως και στο δέντρο για τα σχήματα του τέταρτου, έκτου και τριακοστού δέντρου έγραψε σαν εξήγηση: «$4 \cdot 2 + 1 = 9$, $6 \cdot 2 + 1 = 13$ και $30 \cdot 2 + 1 = 61$», περιορίστηκε στις σχέσεις χωρίς όμως να περιγράψει αναλυτικά τι παρατήρησε για τον αριθμό των σχημάτων και κατέληξε σε αυτές τις ισότητες.

Η τέταρτη στρατηγική που χρησιμοποιούν πιο συχνά οι μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου είναι του Ολόκληρου αντικειμένου. Όπως έχει επισημανθεί οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις. Μαθητής χωρίς να έχει σχεδιάσει κάποιο σχήμα ή να προσέξει τη σταθερή διαφορά μεταξύ των δοθέντων αρχικών όρων αναφέρει: «αφού η πρώτη σκάλα έχει 5 σπίρτα, για τη σκάλα με τέσσερα σκαλιά θα χρειαστώ $5 \cdot 4 = 20$ σπίρτα, για τη σκάλα με έξι σκαλιά $5 \cdot 6 = 30$ σπίρτα και για τα 50 σκαλιά θα χρειαστώ $5 \cdot 50 = 250$ σπίρτα. Το ίδιο σκεπτικό στο δέντρο, ακολούθησαν και άλλοι μαθητές/τριες χωρίς να δουν τα «συστατικά» του δέντρου και πως αυξάνονται σε κάθε βήμα γράφουν: «το πρώτο δέντρο έχει 3 σχήματα άρα

4^o δέντρο $4 \cdot 3 = 12$, το έκτο δέντρο έχει $6 \cdot 3 = 18$ σχήματα και το 30^o έχει $3 \cdot 30 = 90$ σχήματα. Υπήρχαν περιπτώσεις και στα δύο έργα που είχαν σωστές τις γενικεύσεις του πρώτου ερωτήματος και στο δεύτερο της μακρινής γενίκευσης ακολούθησαν τη λανθασμένη λογική της αναλογίας.

Στις αδιευκρίνιστες στρατηγικές ή στα ερωτήματα που δεν έδωσαν εξήγηση το ποσοστό στην Α΄ τάξη είναι μόλις 5,5% σε όλη την τάξη και 28,8% στο σύνολο των απαντήσεων σε όλες τις τάξεις. Παράδειγμα αδιευκρίνιστης στρατηγικής είναι του μαθητή που γράφει: «9+13=22 τα σχήματα του 4^{ου} και 6^{ου} δέντρου, $22 \cdot 3 = 66$, αφαιρούμε 1 τριγωνάκι άρα 65 σχήματα.». Άλλος μαθητής σκέφτηκε ως εξής: «Κάθε 4 σκαλιά χρειαζόμαστε 14 σπίρτα, 40 σκαλοπάτια= $14 \cdot 10 = 140$, 48 σκαλοπάτια=168σπίρτα, άρα 50σκαλόπάτια είναι 168+3+3=174, αφού κάθε ένα σκαλί θέλει 3 σπίρτα».

Παρατηρώντας τα ποσοστά της Β΄ Γυμνασίου διαπιστώνουμε ότι ακολουθούν την ίδια σειρά σε συχνότητα χρήσης των στρατηγικών τους. Οι διαφορές είναι μικρές και αφορούν το μικρότερο ποσοστό της αναδρομικής στατιστικής και τα διπλάσια ποσοστά στη στρατηγική της τμηματοποίησης και της αδιευκρίνιστης σε σχέση πάντα με την Α΄ τάξη. Οι μαθητές/τριες της Β΄ Γυμνασίου της καταμέτρησης από το σχέδιο είναι λίγο περισσότεροι, αφού εδώ αρκετοί σχεδίασαν ακόμα και τις σκάλες με 50 σκαλοπάτια: «γιατί ζωγράφισα μια σκάλα, από 4 σπίρτα και από τις δυο πλευρές» Στην τάξη αυτή υπήρχαν αρκετοί μαθητές/τριες που κάνοντας ένα σχέδιο διαπίστωσαν ότι στην 50^η σκάλα έχουμε 50 σκαλιά και 51 σπίρτα αριστερά και 51 δεξιά δηλαδή σύνολο 151 σκαλιά. Όποτε σε πολλά γραπτά υπήρχε η απλή εξήγηση καταμέτρησης: «51+51+50». Παρομοίως και στο δέντρο για την δικαιολόγηση του 4^{ου}, 6^{ου} και 30^{ου} όρου έγραψαν «4+4+1=9 ή 6+6+1=13 και 30+30+1=61 σχήματα» αντίστοιχα.

Η στρατηγική της τμηματοποίησης βλέπουμε ότι αυξάνεται όσο μεγαλώνει η τάξη, με τα ποσοστά της όμως να είναι στο σύνολο των κατηγοριών των στρατηγικών τα πιο χαμηλά. Βλέπουμε έτσι ότι οι μαθητές/τριες για να υπολογίσουν τον μακρινό όρο για παράδειγμα στη σκάλα εντοπίζουν την κοινή διαφορά που είναι 3 και χρησιμοποιούν σαν βάση τον πρώτο ή τον τρίτο όρο από τους δοθέντες ή τον τέταρτο ή τον έκτο όρο από αυτούς που οι ίδιοι/ες υπολόγισαν. Αφαιρούν από τον 50^o ζητούμενο όρο τον γνωστό όρο και έπειτα πολλαπλασιάζουν με τη κοινή διαφορά. Γράφει μαθητής για παράδειγμα σε εξήγηση του: «έχουμε την σκάλα με 1 σκαλί που είναι 5 σπίρτα, μένουν άλλα 49 επί 3 =147. Τελικά έχει 147+5=152», ενώ άλλος «η σκάλα με 3 σκαλιά έχει 11 σπίρτα άρα 50-3=47 μένουν. Άρα τελικά έχει $11 + 47 \cdot 3 = 152$ σπίρτα». Η ίδια λογική υπήρχε και στο δέντρο: «το πρώτο δέντρο έχει 3 σχήματα άρα 29 επί 2 βγαίνει 58, οπότε το 30^o δέντρο έχει 58+3=61 σχήματα».

Ομοίως και στην Γ΄ Γυμνασίου η σειρά των στρατηγικών δεν αλλάζει. Έχουμε ενισχυμένα τα ποσοστά όμως στην αναδρομική στρατηγική, αφού το 53,6% ακολούθησε αυτή τη βήμα προς βήμα στρατηγική. Η καταμέτρηση από το σχέδιο είναι σχεδόν η μισή σε σχέση με τις μικρότερες τάξεις, μόλις 12,1%. Αυτό όμως που δεν είναι ενθαρρυντικό για το επίπεδο γενίκευσης είναι το μικρότερο ποσοστό της συναρτησιακής στρατηγικής το οποίο κατά κανόνα είναι και η βάση για την έκφραση του λειτουργικού κανόνα της κανονικότητας και την εύρεση του ν-οστού όρου. Στην Γ΄ τάξη παρουσιάζεται το μικρότερο ποσοστό συναρτησιακής σε σχέση με την Α΄ και τη Β΄ τάξη, ενώ μεγαλύτερο είναι το ποσοστό της στρατηγικής του Ολόκληρου Αντικειμένου. Μαθήτρια για να υπολογίσει τα σπίρτα που απαιτούνται για τη σκάλα με 50 σκαλιά εξηγεί: «στην πρώτη σκάλα είχαμε 5 σπίρτα και σε καθεμία σκάλα προσθέτουμε από 3 σπίρτα, άρα μπορούμε να βρούμε μέχρι τα 10 σκαλιά δηλαδή 32 σπίρτα και να τα πολλαπλασιάσουμε με το 5, δηλαδή 160 σπίρτα». Επίσης η στρατηγική της τμηματοποίησης είναι πιο υψηλή σε σχέση με τις μικρές τάξεις συγκεκριμένα ακριβώς 50% των συνολικών απαντήσεων με χρήση αυτής της στρατηγικής. « Κάθε φορά προσθέτουμε 2 σχήματα, άρα μέχρι το $30^{ο}$ δέντρο θα έχουμε προσθέσει 2 επί 24 =48 σχήματα από το $6^{ο}$ δέντρο που έχει 13 σχήματα. Οπότε 48 +13=61.» αναφέρει μια μαθήτρια της τρίτης τάξης.

Στον Πίνακα 20 φαίνονται αναλυτικά και τα ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής, σε κάθε ερώτημα γενίκευσης για το κάθε έργο, ξεχωριστά για κάθε τάξη.

Εκεί διαπιστώνουμε ότι στο σύνολο των απαντήσεων με μια συγκεκριμένη στρατηγική, η αναδρομική στρατηγική στην Α΄ τάξη συγκεντρώνει αυξημένα ποσοστά στην άμεση και κοντινή γενίκευση (55,4%) ενώ στην μακρινή σχεδόν υποπενταπλασιάζεται δηλαδή κυμαίνεται στο 11,1%. Ομοίως στην καταμέτρηση από το σχέδιο άμεση και κοντινή έχουν 26,5% και 24,6% και στη μακρινή γίνεται 11,1%. Στη συναρτησιακή τα ποσοστά αντίθετα ακολουθούν αύξουσα πορεία όσο οι όροι γίνονται πιο μακρινοί. Στην Ολόκληρου Αντικειμένου τα ποσοστά στην άμεση και κοντινή είναι πολύ μικρά δηλαδή οι μαθητές/τριες είχαν σωστές τις γενικεύσεις του πρώτου ερωτήματος και στο δεύτερο της μακρινής γενίκευσης το ποσοστό της λανθασμένης στρατηγικής αυξήθηκε κατακόρυφα σε ποσοστό 34,4%. Σε κοντινές γενικεύσεις λοιπόν οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται εύκολα το πως ανεβαίνουν οι όροι, ενώ όταν δυσκολεύει η δραστηριότητα γενίκευσης εκεί οι μαθητές/τριες καταφεύγουν σε γνώριμες μεθόδους που πιστεύουν ότι μπορούν να λειτουργήσουν σε οποιαδήποτε κατάσταση.

Στη Β΄ Γυμνασίου η αναδρομική υπερισχύει σε άμεση (42,2%) και κοντινή (45%), ενώ μειώνεται στη μακρινή (15%). Ιδία πορεία ακολουθεί η καταμέτρηση από το σχέδιο με μικρότερα ποσοστά σε όλες τις γενικεύσεις. Η τμηματοποίησης εμφανίζεται μόνο στις μακρινές με ποσοστό 10 %, ενώ όσον αφορά τις υπόλοιπες στρατηγικές, αυξάνοντας τους όρους ακολουθούν και οι στρατηγικές αύξουσα πορεία. Τα ποσοστά του Ολόκληρου αντικειμένου είναι πιο αυξημένα στην πρώτη δραστηριότητα της σκάλας.

Στην Γ΄ Γυμνασίου από το σύνολο των απαντήσεων της τάξης, οι απαντήσεις με χρήση αναδρομικής στην άμεση ήταν 66% και 69,5% στην κοντινή, ενώ μειώνεται στο 17,3% στη μακρινή. Η σκάλα ήταν πιο δύσκολη σε σχέση με το δέντρο, όταν έγινε χρήση της συναρτησιακής. Επίσης το 34,7% επί του συνόλου των απαντήσεων στη μακρινή γενίκευση είναι ένα μάλλον αποθαρρυντικό ποσοστό για την Γ΄ τάξη που παρουσιάζεται πολύ υψηλό σε σχέση και με τα αντίστοιχα ποσοστά των μικρότερων τάξεων.

Πίνακας 20 Χρήση στρατηγικής σε κάθε τάξη στα ερωτήματα γενίκευσης

Τάξη	**Στρατηγική**	Γενίκευση / έργο								
		Άμεση			**Κοντινή**			**Μακρινή**		
		Σ	Δ	Σύνολο	Σ	Δ	Σύνολο	Σ	Δ	Σύνολο
Α΄	**Καταμέτρηση από το σχέδιο**	15	14	29	13	14	27	5	5	10
	%	27,4	25,5	**26,5**	23,6	25,5	**24,6**	10,6	11,6	**11,1**
	Αναδρομική	30	31	61	30	31	61	4	6	10
	%	54,5	56,4	**55,4**	54,5	56,4	**55,4**	8,5	14	**11,1**
	Τμηματοποίηση	0	0	0	0	0	0	2	3	5
	%	0	0	**0**	0	0	**0**	4,3	7	**5,6**
	Συναρτησιακή	7	5	12	8	5	13	15	8	23
	%	12,7	9	**10,9**	14,6	9	**11,8**	32	18,6	**25,6**
	Ο. Αντικειμένου	2	3	5	3	3	6	16	15	31
	%	3,6	5,5	**4,5**	5,5	5,5	**5,5**	34	34,8	**34,4**
	Αδιευκρίνιστη	1	2	3	1	2	3	5	6	11
	%	1,8	3,6	**2,7**	1,8	3,6	**2,7**	10,6	14	**12,2**
	Σύνολο	55	55	110	55	55	110	47	43	90
Β΄	**Καταμέτρηση από το σχέδιο**	17	14	31	16	11	27	5	8	13
	%	31	25,9	**28,4**	29,1	20,4	**24,7**	10	16	**13**
	Αναδρομική	23	23	46	24	25	49	7	8	15
	%	41,8	42,6	**42,2**	43,6	46,3	**45**	14	16	**15**
	Τμηματοποίηση	0	0	0	0	0	0	4	6	10
	%	0	0	**0**	0	0	**0**	8	12	**10**
	Συναρτησιακή	5	9	14	5	9	14	14	11	25
	%	9	16,7	**12,8**	9,1	16,7	**12,8**	28	22	**25**
	Ο. Αντικειμένου	6	2	8	6	3	9	12	10	22
	%	10,9	3,7	**7,4**	10,9	5,5	**8,2**	24	20	**22**
	Αδιευκρίνιστη	4	6	10	4	6	10	8	7	15
	%	7,3	11,1	**9,2**	7,3	11,1	**11,1**	16	14	**15**
	Σύνολο	55	54	109	55	54	109	50	50	100

	Καταμέτρηση από το σχέδιο	5	11	16	3	8	11	0	5	5
	%	10,4	23,4	**16,7**	6,3	17,1	**11,6**	0	13,5	**6,6**
	Αναδρομική	37	26	63	39	27	66	6	7	13
	%	77,1	55,3	**66**	81,2	57,5	**69,5**	15,8	18,9	**17,3**
Γ΄	**Τμηματοποίηση**	0	0	0	0	0	0	8	7	15
	%	0	0	**0**	0	0	**0**	21,1	18,9	**20**
	Συναρτησιακή	1	8	9	1	9	10	5	9	14
	%	2,1	17	**9,3**	2,1	19,1	**10,4**	13,2	24,4	**18,7**
	Ο. Αντικειμένου	4	1	5	4	1	5	18	8	26
	%	8,3	2,1	**5**	8,3	2,1	**5,3**	47,4	21,6	**34,7**
	Αδιευκρίνιστη	1	2	3	1	2	3	1	1	2
	%	2,1	4,2	**3**	2,1	4,2	**3,2**	2,6	2,7	**2,7**
	Σύνολο	48	47	95	48	47	95	38	37	75

4.3.4. Στρατηγικές στην εύρεση του ν-οστού όρου

Στο αμέσως επόμενο βήμα μετά τη μακρινή γενίκευση δηλαδή στην εύρεση του ν-οστού όρου της κάθε εικονιστικής κανονικότητας σημειώθηκαν συνολικά 138 απαντήσεις από τις ζητούμενες 316 του έργου που μοιράστηκε στους μαθητές/τριες. Αριθμός που αντιστοιχεί σε ένα ποσοστό 43,7% από το σύνολο των ερωτήσεων. Από τους 138 τύπους που καταγράφηκαν οι 95 ήταν σωστοί δηλαδή ποσοστό 68,8%. Το ποσοστό βέβαια δείχνει ότι όσοι/ες μαθητές/τριες ασχολήθηκαν και απάντησαν, σχεδόν 7 στους 10 τα κατάφεραν. Το πραγματικό ποσοστό εύρεσης τύπου όμως αντιστοιχεί στο πλήθος των σωστών δηλαδή 95 προς το συνολικό αριθμό 316, που αντιστοιχεί σε ποσοστό περίπου 30%.

Για την εύρεση του τύπου οι μαθητές/τριες χρησιμοποίησαν κάποια από τις προηγούμενες στρατηγικές των έξι κατηγοριών που είχαν ταξινομηθεί και τα προηγούμενα ερωτήματα γενίκευσης. Παρατηρούμε ότι και στα δυο έργα στο σύνολο, τα ποσοστά της συναρτησιακής στρατηγικής είναι αυξημένα δίνοντας στην συναρτησιακή την πρώτη θέση. Ακολουθεί η αναδρομική με 11%, η αδιευκρίνιστη με 10,1%, η ολόκληρου αντικειμένου με 8%, η καταμέτρηση από το σχέδιο με 7,2% και τελευταία η τμηματοποίησης με μόλις 4,3% . Όλες εκτός από την ολόκληρου αντικειμένου και την αδιευκρίνιστη εμφανίζουν χαμηλότερα ποσοστά στο δέντρο από ότι στη σκάλα. Αυτό σε συνδυασμό με τον παρακάτω Πίνακα 22 , όπου παρουσιάζεται η επιλογή της στρατηγικής με το σωστό αποτέλεσμα που αποφέρει, δείχνει και ότι τα παιδιά τα κατάφεραν καλύτερα στο γενικό τύπο του δέντρου παρά της σκάλας.

Πίνακας 21 Χρήση στρατηγικής στην εύρεση τύπου

Στρατηγική	**Τύπος στη Σκάλα**	**Τύπος στο Δέντρο**	**Σύνολο**
Καταμέτρηση από το σχέδιο	5	5	10
	6,8 %	7,4 %	7,2 %
Αναδρομική	7	8	15
	9,6 %	11,9 %	11 %
Τμηματοποίηση	5	1	6
	6,8 %	4,5 %	4,3 %
Συναρτησιακή	39	43	82
	53,5 %	64,2 %	59,4 %
Ολόκληρου αντικειμένου	7	4	11
	9,6 %	6	8 %
Αδιευκρίνιστη	10	4	14
	13,7 %	6 %	10,1 %
Σύνολο	73	65	138

Όπως παρατηρούμε στο Πίνακα 22 η καταμέτρηση από το σχέδιο και η τμηματοποίησης αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα με ποσοστό επιτυχίας 100% και ακολουθεί η συναρτησιακή με 95,1%. Διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές/τριες που στην εύρεση ενός γενικού τύπου ακολούθησαν την ίδια αναδρομική στρατηγική που είχαν χρησιμοποιήσει στις προηγούμενες γενικεύσεις βρίσκοντας σχεδόν σε όλα τα ερωτήματα σωστές απαντήσεις εδώ οδηγήθηκαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα, αφού και οι 15 απαντήσεις δεν ήταν σωστές. Η στρατηγική της τμηματοποίησης παρόλο που είναι η λιγότερο διαδεδομένη από όλες τις στρατηγικές οδηγεί και στα προηγούμενα δυο ερωτήματα των κανονικοτήτων της άμεσης, κοντινής και μακρινής γενίκευσης αλλά και στο τρίτο ερώτημα του ν-οστού όρου με ασφάλεια σε σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 22 Σχέση στρατηγικής και σωστού αποτελέσματος

Είδος στρατηγικής	Απαντήσεις με τη στρατηγική	Σωστές απαντήσεις	Λανθασμένες απαντήσεις
Καταμέτρηση από το σχέδιο	10	10 (100%)	0
Αναδρομική	15	0 (0%)	15

Τμηματοποίησης	6	6 (100%)	0
Συναρτησιακή	82	78 (95,1%)	4
Ολόκληρου αντικειμένου	11	0 (0%)	11
Αδιευκρίνιστη/καμία	14	1 (7,1 %)	13
Σύνολο	138	95	43

Απαντήσεις στη σκάλα

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να βρουν ένα τύπο ο οποίος θα δίνει πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με ν σκαλιά. Ο τύπος που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των όρων και της θέσης του όρου στην κανονικότητα είναι ο 3ν+2. Αν είχαν γίνει κάποιες πράξεις σε αρκετούς τύπους που έδωσαν τα παιδιά θα είχαν την παραπάνω αρχική μορφή. Ειδικά μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου που δεν είναι αρκετά εξοικειωμένοι με την επιμεριστική ιδιότητα σε παραστάσεις με μεταβλητές έδωσαν τύπους που καταγράφηκαν ως σωστοί. Θα ακολουθήσουν κάποιες ενδεικτικές χαρακτηριστικές απαντήσεις των παιδιών.

Οι πρώτες δυο απαντήσεις αντιστοιχούν στη συναρτησιακή στρατηγική αφού βρίσκουν ένα τύπο που συσχετίζει τον αριθμό του δέντρου με τον αριθμό των σπίρτων. Δηλαδή ένας τύπος που υπολογίζει τον όρο απευθείας χρησιμοποιώντας τη θέση του στην ακολουθία.

- Αρκετοί/ες μαθητές/τριες παρατηρώντας την πρώτη σκάλα που έχει 5 σπίρτα απομονώνουν τα 3 σπίρτα, δυο κατακόρυφα και ένα οριζόντιο, για να «κατασκευάσουν» ένα σκαλί και ισχυρίζονται ότι περισσεύουν δυο κατακόρυφα σπίρτα στο τελείωμα. Την ίδια λογική ακολουθείται και στη δεύτερη δραστηριότητα της σκάλας: 2 τριάδες σπίρτων από πάνω και 2 στο τελείωμα.

Μαθήτρια της Β ‘ Γυμνασίου γράφει τον σωστό τύπο 3ν+2 και εξηγεί: «κάθε σκαλί χρειάζεται 3 σπίρτα για να δημιουργηθεί, άρα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των σκαλιών που θέλουμε να έχουμε και προσθέτουμε και 2 που είναι η άκρη της σκάλας για να ολοκληρωθεί το μοτίβο». Ίδια λογική χωρίς όμως να εξηγεί γιατί πολλαπλασιάζεται με το 3, γράφει και μια άλλη μαθήτρια: «κάθε σπίρτο πολλαπλασιάζεται με το 3 και προσθέτουμε 2 που είναι τα τελευταία σπίρτα.»

- Ο επόμενος τύπος είναι ο 2 (ν+1) + ν που μερικοί μαθητές/τριες ιδίως σε μεγαλύτερες τάξεις τον απλοποίησαν κάνοντας τις πράξεις, φέροντας τον στη μορφή 3 ν +2. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι κάθε σκάλα έχει αριστερά και δεξιά τον ίδιο αριθμό σπίρτων και μάλιστα είναι +1 παραπάνω από τον αριθμό των σκαλιών. Έτσι για να βρουν τον συνολικό αριθμό των σπίρτων προσθέτουν στον αριθμό των σκαλιών το γινόμενο του αριθμού των κατακόρυφων σπίρτων επί 2. Μαθητής της Α΄ Γυμνασίου δίνει την εξήγηση: «είναι (ν+1) 2 + ν γιατί παρατήρησα ότι η μια πλευρά είναι ο αριθμός της θέσης της σκάλας +1 και μετά επί 2 ώστε να βρούμε και τις 2 πλευρές. Τέλος προσθέτω και τα σκαλιά»

- Ο επόμενος τύπος είναι ο ν+1+ ν+1+ ν ο οποίος κινείται στην προηγούμενη λογική και προέκυψε σταδιακά από την στρατηγική της καταμέτρησης από το σχέδιο που εφάρμοσαν στις πρώτες γενικεύσεις. Έτσι στην τέταρτη σκάλα έκαναν 5+5+4 = 14, στην έκτη έκαναν 7+7+6 = 20, στην $50^{η}$ σκάλα 51+51+50 επομένως στην ν-οστή σκάλα έκαναν ν+1 +ν+1+ν ο οποίος τύπος με αναγωγή όμοιων όρων καταλήγει στον 3ν +2. Οι εξηγήσεις αυτού του τύπου ταξινομήθηκαν στην καταμέτρηση.
- Ο τύπος που ανήκει στην στρατηγική της τμηματοποίησης είναι ο 5 + 3(ν-1) Μαθήτρια της Γ΄ γυμνασίου εξηγεί: « 5 είναι τα σπίρτα που χρειάζονται για την πρώτη σκάλα με το ένα σκαλί. Τα υπόλοιπα σκαλιά είναι ν - 1 και τα πολλαπλασιάζουμε με το 3 επειδή 3 σπίρτα απαιτούνται για το κάθε σκαλί.
- Πολλοί/ες μαθητές/τριες ακολουθώντας την αναδρομική στρατηγική, αφού είχαν βρει τη σταθερή διαφορά +3 που ανέβαινε κάθε σκάλα, έδωσαν τύπους της μορφής ν +3 ή x+3. Μια μαθήτρια της Α΄ έγραψε: «3+3+3+3+…».
- Ακολουθώντας την στρατηγική Ολόκληρου αντικειμένου 5 ν ήταν άλλος ένας λανθασμένος τύπος που δόθηκε. Αφού λοιπόν η πρώτη σκάλα έχει 5 σπίρτα άρα η ν-οστή θα έχει 5 ν. Μαθήτρια έγραψε την ισοδυναμία: $\frac{x}{\nu}=\frac{8}{2}$, αφού η σκάλα με 2 σκαλιά έχει 8 σπίρτα, όπου x ο αριθμός των σπίρτων και ν ο αριθμός της σκάλας. Μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου έδωσε την εξής εξήγηση για τον τύπο ω = ν x : «έστω ν τα σκαλιά και x ο αριθμός των σπίρτων για ένα σκαλί και ω ο συνολικός αριθμός ω των σπίρτων για ν σκαλιά είναι ω=ν x. Όπως και στο πρώτο ερώτημα 1 σκαλί επί 5 σπίρτα»
- Ενώ άλλοι λανθασμένοι τύποι χωρίς καμία εξήγηση ήταν οι ν+ν+2, 2 ν -2, 2 ν +2, 3ν +3, 3 ν – 2, 3 x +5

Απαντήσεις στο δέντρο

Στο το τρίτο ερώτημα του δεύτερου έργου οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να βρουν πόσα σχήματα έχει το ν-οστό δέντρο. Να βρουν έναν τύπο δηλαδή ο οποίος θα «δουλεύει» και θα βρίσκει τα σχήματα για οποιαδήποτε θέση του δέντρου επιθυμήσουν. Η εικονιστική κανονικότητα αυτή αντιστοιχούσε στην ακολουθία των θετικών περιττών με πρώτο όρο το 3, δηλαδή ο τύπος που έπρεπε να βρουν ήταν ο 2 ν +1 με ν μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές/τριες δεν έδωσαν πολλούς διαφορετικούς τύπους όπως έκαναν στη σκάλα. Οι περισσότεροι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι σε κάθε δέντρο παραμένει σταθερό το τριγωνάκι στην κορυφή και ότι τα τραπέζια και τα ορθογώνια έχουν τον ίδιο αριθμό σχημάτων.

- Με αυτό το σκεπτικό το οποίο ακολούθησαν με τη στρατηγική της καταμέτρησης και στα δυο προηγούμενα ερωτήματα των γενικεύσεων προχώρησαν και στο ν-οστό όρο. Δηλαδή στο τέταρτο δέντρο σημειώσανε ότι έχει 4 + 4+1= 9 σχήματα, στο 6^{o} δέντρο 6+6+1=13 σχήματα, στο 30^{o} δέντρο ότι έχει 30+30+ 1 =61 σχήματα άρα το ν-οστό θα έχει ν +ν +1 σχήματα. Μαθητής της Α΄ Γυμνασίου έγραψε: « ν-στο + ν-οστό +1».
- Πολλοί μαθητές/τριες με τη προηγούμενη λογική της παρατήρησης της δομής του δέντρου ή και παρατηρώντας πως ανεβαίνουν οι όροι της ακολουθίας κατέληξαν κατευθείαν στον τύπο 2 ν +1. Έτσι χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή στρατηγική κατασκεύασαν ουσιαστικά μια συνάρτηση που υπολογίζει τα σχήματα οποιουδήποτε δέντρου δηλαδή τον όρο απευθείας χρησιμοποιώντας τη θέση του στην ακολουθία. Μαθητής της Α΄ Γυμνασίου που βρήκε τον σωστό τύπο γράφει στην εξήγηση του: «παρατήρησα ότι αν πολλαπλασιάσω τον αριθμό της θέσης του δέντρου επί το 2 και προσθέσω το 1 θα μας δώσει τον αριθμό των σχημάτων». Ομοίως μαθήτρια της Β΄ αιτιολόγησε γράφοντας: «κάθε μέγεθος δέντρου είναι δυο σχήματα και προσθέτουμε 1 που είναι κορυφή. Άρα για ν μέγεθος δέντρου πολλαπλασιάζουμε με το 2 και προσθέτουμε 1, (την κορυφή)». Παρόμοια εξήγηση έδωσε μαθητής που μετέτρεψε τα γεωμετρικά σχήματα σε μέρη του δέντρου, δηλαδή «το δέντρο έχει τον ίδιο αριθμό κορμού και φύλλων με την ίδια κορυφή κάθε φορά»
- Μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου σημείωσε: «αν x το μέγεθος του δέντρου τότε x 1+x 1+ 1=x+x+1» χωρίς όμως να κάνει την αναγωγή και να καταλήξει στον 2 ν +1. Βρήκε όμως τον τύπο που συνδέει τον όρο- μέγεθος του δέντρου με τον αριθμό των σχημάτων.
- Υπήρχαν 8 μαθητές/τριες οι οποίοι/ες αφού παρατήρησαν ότι το μοτίβο πηγαίνει 3,5,7,9,….δηλαδή ανεβαίνει σταθερά κατά 2 κάθε φορά χρησιμοποίησαν την αναδρομική στρατηγική και στο τρίτο ερώτημα όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα. Έγραψαν λοιπόν ότι ο τύπος είναι ν +2 ή α +2. Υπήρχε απάντηση μαθήτριας που έδειχνε ότι αντιλήφθηκε τη λογική της κανονικότητας γράφοντας ότι: «στο δέντρο πριν το ν-οστό θα προσθέσουμε 2 δηλαδή ν+2», γράφοντας ουσιαστικά τον αναδρομικό τύπο μιας ακολουθίας χρησιμοποιώντας λάθος μεταβλητές και χωρίς να μπορεί να εκφράσει το γενικό τύπο της.
- Μαθητής θεωρώντας ότι x είναι τα τραπέζια, y είναι τα ορθογώνια, ω τα τρίγωνα και ν είναι ο αριθμός των παραπάνω σχημάτων, ενώ το τριγωνάκι είναι πάντα 1, έγραψε ότι ο τύπος που δίνει τον συνολικό αριθμό των σχημάτων είναι x ν +y ν +ω 1
- Μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου θεώρησε, χρησιμοποιώντας τη λανθασμένη στρατηγική

Ολόκληρου αντικειμένου, ότι αφού το $1^{ο}$ δέντρο αποτελείται από 3 σχήματα τότε θα μπορούσε να βρει τα σχήματα του ν-οστού δέντρου με τη βοήθεια της σχέσης: $\frac{1}{3} = \frac{δέντρο}{σχήματα}$. Άλλη μαθήτρια εξήγησε ότι «αν έχω ν-στο δέντρο με x σχήματα για να βρω τα υπόλοιπα κάνω ν-οστό επί x».

- Υπήρχε επίσης μια και μοναδική απάντηση 2 (ν-3) +7 από μαθήτρια της Γ΄ τάξης με τη στρατηγική τμηματοποίησης. Χρησιμοποιώντας τα 7 σχήματα του τρίτου δέντρου αφαίρεσε από το ν-οστό το $3^{ο}$ και τα πολλαπλασίασε με το 2 δηλαδή τη σταθερή διαφορά της ακολουθίας.

4.3.5. Στρατηγικές ανά τάξη

Ο πρώτος άξονας ερωτημάτων του έργου αφορά τον τρόπο σκέψης και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες κατά την ενασχόληση τους με δραστηριότητες αναγνώρισης και γενίκευσης μιας γραμμικής εικονιστικής κανονικότητας.

Έτσι στον Πίνακα 23 συγκεντρώνονται ο αριθμός των απαντήσεων όλων των μαθητών/τριών του δείγματος στο τρίτο ερώτημα, στα δύο έργα της σκάλας και του δέντρου, ομαδοποιημένες ανά στρατηγική που ακολούθησαν αλλά και ανά τάξη.

Παρατηρούμε και εδώ, όπως και σε προηγούμενη διαπίστωση ότι πιο συχνή στρατηγική σε όλες τις τάξεις είναι η συναρτησιακή με τη Β΄ Γυμνασίου να παρουσιάζει το μεγαλύτερο ποσοστό της, 64,3%. Τα υπόλοιπα ποσοστά στην Β΄ τάξη μοιράζονται σχεδόν ισοδύναμα στις υπόλοιπες στρατηγικές.

Η Α΄ Γυμνασίου ως δεύτερη πιο συχνή στρατηγική επιλέγει την λανθασμένη αναδρομική με ποσοστό 24,4%. Δηλαδή σχεδόν 1 στις 4 απαντήσεις που δόθηκαν για τον τύπο, περιείχαν τον τύπο ν+2 για τον ν-οστό όρο. Για την Α΄ τάξη ακολούθησε τρίτη η καταμέτρηση και τελευταία με ποσοστό 8,8% η αδιευκρίνιστη, 4 εξηγήσεις που δε κατέστη δυνατόν να ταξινομηθούν σε καμία κατηγορία. Κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε την στρατηγική της τμηματοποίησης η οποία εμφανίστηκε μόνο στις μεγαλύτερες τάξεις, ενώ επίσης μηδενικά ήταν τα ποσοστά του ολόκληρου αντικειμένου. Η στρατηγική του ολόκληρου αντικειμένου, ενώ είχε χρησιμοποιηθεί από την Α΄ τάξη στα προηγούμενα ερωτήματα της γενίκευσης, εδώ στην εύρεση τύπου θεωρήθηκε δύσκολη από τους/τις μαθητές/τριες να υιοθετηθεί. Ίσως η αιτία για αυτό ήταν ότι εδώ στο ν-οστό όρο είχαν δυο αγνώστους και έπρεπε να κάνουν χρήση δυο μεταβλητών. Δηλαδή στην προσπάθεια τους να δημιουργήσουν μια εξίσωση για την πρώτη δραστηριότητα αν έκαναν χρήση της πρώτης σκάλας που έχει 5 σπίρτα για την ν-οστή σκάλα έπρεπε να βάλουν x σπίρτα.

Πίνακας 23 Χρήση στρατηγικής στην εύρεση τύπου σε κάθε τάξη

Στρατηγική/	Τύπος Σκάλα			Τύπος Δέντρο			Σύνολο τάξης			Σύνολο
Τάξη	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	**Α**	**Β**	**Γ**	
Καταμέτρηση από το σχέδιο	2	3	0	3	1	1	5	4	1	10
% τάξης	8,7	9,7	0	13,6	4	5	**11,1**	**7**	**2,7**	
% στρατηγικής							50	40	10	
% συνόλου							**3,6**	**2,9**	**0,7**	**7,2**
Αναδρομική	5	0	2	6	2	0	11	2	2	15
% τάξης	21,7	0	10,5	27,3	8	0	**24,4**	**3,6**	**5,4**	
% στρατηγικής							73,4	13,3	13,3	
% συνόλου							**7,9**	**1,5**	**1,5**	**10,9**
Τμηματοποίηση	0	2	3	0	0	1	0	2	4	6
% τάξης	0	6,5	15,8	0	0		**0**	**3,6**	**10,8**	
% στρατηγικής							0	33,3	66,7	
% συνόλου							**0**	**1,5**	**2,9**	**4,4**
Συναρτησιακή	13	17	9	12	19	12	25	36	21	82
% τάξης	56,6	54,8	47,4	54,6	76	60	**55,6**	**64,3**	**56,8**	
% στρατηγικής							30,5	42,4	28,2	
% συνόλου							**18,1**	**26,1**	**15,2**	**59,4**
Ολόκληρου αντικειμένου	0	2	5	0	1	3	0	3	8	11
% τάξης	0	6,5	26,3	0	4	15	**0**	**5,4**	**21,6**	
% στρατηγικής							0	27,3	72,7	
% συνόλου							0	2,2	5,8	**8**
Αδιευκρίνιστη	3	7	0	1	2	1	4	9	1	14
% τάξης	13	22,5	0	4,5	8	5	**8,8**	**16,1**	**2,7**	
% στρατηγικής							28,5	64,3	7,2	
% συνόλου							**2,9**	**6,5**	**0,7**	**10,1**
Σύνολο	23	31	19	22	25	18	45	56	37	138

Για τη σκάλα θα έβαζαν μια μεταβλητή για τον αριθμό των σπίρτων και μια για τον αριθμό της σκάλας και για τη δεύτερη δραστηριότητα μια για τον αριθμό των σχημάτων και μια για τον αριθμό του δέντρου. Έτσι δεδομένου ότι δεν είναι τόσο εξοικειωμένοι με τις μεταβλητές παρόλο που χρησιμοποίησαν την αναδρομική στο πρώτο και το δεύτερο ερώτημα στο τρίτο ερώτημα δεν έγινε αυτό.

Αντίθετα στην Γ΄ Γυμνασίου που είναι συνηθισμένοι λόγω της ύλης της τάξης, σε μια ισότητα να δουν δυο μεταβλητές, χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της αναλογίας με ποσοστό 8%. Μετά τη συναρτησιακή, όπου έκανε την εμφάνιση της σε 21 από τις συνολικά 37 απαντήσεις της τάξης, δεύτερη ήταν η αναδρομική στρατηγική και τρίτες οι αταξινόμητες απαντήσεις. Το 66,7% των συνολικών απαντήσεων με τη στρατηγική της τμηματοποίησης ανήκει στην Γ΄ τάξη.

Γενικά παρατηρούμε ότι στην παρούσα έρευνα υπάρχει μια ποικιλία στη χρήση στρατηγικής από τους/τις μαθητές/τριες, και αυτό είναι σύμφωνο με τα ευρήματα διάφορων ερευνών (Lannin, και άλλοι, 2006) που αναφέρουν ότι καθώς αυξάνονται οι απαιτήσεις των συγκεκριμένων εργασιών, οι μαθητές/τριες συνήθως έχουν μια αυξανόμενη εξάρτηση από τις πιο προηγμένες/σύνθετες στρατηγικές (πχ. Συναρτησιακή στρατηγική) από το σύνολο όλων των στρατηγικών που υπάρχουν στο ρεπερτόριό τους και μια φθίνουσα εξάρτηση από λιγότερες προηγμένες στρατηγικές (πχ. η αναδρομική στρατηγική)

4.4. Τρόπος έκφρασης των μαθητών/τριών.

Ο δεύτερος άξονας ερωτημάτων αφορά τον τρόπο που οι μαθητές/τριες εκφράζονται κατά την ενασχόληση τους με τέτοιες δραστηριότητες γενίκευσης. Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να βρουν έναν γενικό τύπο ο οποίος θα περιγράφει τη δομής της κάθε γραμμικής εικονιστικής κανονικότητας και στα δυο έργα της δοκιμασίας. Δόθηκε στους μαθητές/τριες οι εξής τρεις δυνατότητες. Πρώτον μπορούσαν να αποδώσουν λεκτικά τον ν-οστό όρο, δεύτερον αυτό να γίνει με χρήση μεταβλητών και τρίτον να κάνουν χρήση λέξεων και μεταβλητών.

Ο Πίνακας 24 παρουσιάζει τον αριθμό των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές/τριες στο τρίτο ερώτημα, ταξινομημένες ανά τρόπο έκφρασης σε κάθε έργο αλλά και στα δυο έργα συνολικά. Τα αντίστοιχα ποσοστά σε καθεμία από τις τρεις κατηγορίες είναι παρόμοια και στα δυο έργα, οπότε είναι ασφαλές να εξάγουμε τα συμπεράσματα μας από το σύνολο των απαντήσεων και των δυο έργων.

Πίνακας 24 Τρόπος έκφρασης των μαθητών/τριών στα δυο έργα

Τρόπος έκφρασης	Τύπος στη σκάλα	Τύπος στο δέντρο	Σύνολο
Με μεταβλητές	44	37	81
	60,3%	56,9%	**58,7%**
Με λόγια	4	4	8
	5,5%	6,2%	**5,8%**

Με λόγια και μεταβλητές	25	24	49
	34,2%	36,9%	**35,5%**
Σύνολο	73	65	138

Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών με ποσοστό 58,7% επί του συνόλου των απαντήσεων δείχνει ότι απάντησαν στο τρίτο ερώτημα κάνοντας χρήση μεταβλητών. Έγραψαν τον τύπο που θεώρησαν σωστό και απλά έδωσαν κάποια εξήγηση για το σκεπτικό τους. Μόλις ένα 5,8% εκφράστηκε μόνο λεκτικά κατά την εύρεση του τύπου, ενώ το υπόλοιπο 35,5% έγραψε τον τύπο του ν-οστού όρου λεκτικά και συμβολικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας στη σκάλα είναι η απάντηση μαθητή: «πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των σκαλιών επί 3 και προσθέτουμε 2» ή στο δέντρο: «ο αριθμός των σχημάτων σε κάθε δέντρο είναι ίσος με το διπλάσιο του αριθμού του δέντρου +1 το τρίγωνο που είναι σταθερό». Οι 49 μαθητές/τριες που εκφράστηκαν και συμβολικά και λεκτικά, έδωσαν τον τύπο του ν-οστού όρου και ουσιαστικά η εξήγηση που έδωσαν ήταν μια λεκτική περιγραφή του τύπου. Τα συνολικά ποσοστά των μαθητών/τριών που χρησιμοποίησαν τουλάχιστον σύμβολα ήταν αθροιστικά 94,2%. Το ποσοστό αυτό δείχνει ότι παρόλο που αρκετοί μαθητές/τριες ειδικά της Α΄ τάξης δεν είναι εξοικειωμένοι/ες με τις μεταβλητές, εντούτοις δε φοβήθηκαν να τις χρησιμοποιήσουν για την έκφραση ενός κατά βάση αλγεβρικού τύπου ακόμα και αν η επιλογή τους δεν αντιστοιχούσε στη θέση του κάθε όρου στην ακολουθία. Στον Πίνακα 24 παρουσιάζονται τα ποσοστά αυτά ανά τάξη και στα δυο έργα και συνολικά.

Πίνακας 25 Τρόπος έκφρασης των μαθητών/τριών στα δυο έργα ανά τάξη

Τρόπος έκφρασης	Σκάλα τύπος			Δέντρο τύπος			Συνολικά			
Τάξη	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α	Β	Γ	
Με μεταβλητές	14	22	8	12	20	5	26	42	13	81
% τάξη	60,9	71	42,1	54,5	80	27,8	**57,8**	**75**	**35,1**	
% τρόπο							**32,1**	**51,8**	**16,1**	
Με λόγια	1	1	2	2	0	2	3	1	4	8
% τάξη	4,3	3,2	10,5	9,1	0	11,1	**6,7**	**1,8**	**10,8**	
% τρόπο							**37,5**	**12,5**	**50**	
Με μεταβλητές και με λόγια	8	8	9	8	5	11	16	13	20	49
% τάξη	34,8	25,8	47,4	36,4	20	61,1	**35,5**	**23,2**	**54,1**	
% τρόπο							**32,7**	**26,5**	**40,8**	
Σύνολο	23	31	19	22	25	18	45	56	37	138

Τα υψηλοτέρα ποσοστά στις Α΄ και Β΄ τάξη ανήκει στην ίδια κατηγορία. Συγκεκριμένα στην Α΄ Γυμνασίου το 57,8% της τάξης χρησιμοποίησε μόνο μεταβλητές, ενώ σχεδόν 3 στους 4 μαθητές της Β, δηλαδή το 75% της Β΄ τάξης έχει εκφραστεί συμβολικά. Τέλος το 54,1% στην Γ έχει εκφραστεί και με τους δυο τρόπους.

5. Συζήτηση- Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα Πειραματικό Γυμνάσιο της χώρας μας και προσπάθησε να διερευνήσει την ικανότητα των μαθητών/τριών να αναγνωρίζουν και να γενικεύουν μια γραμμική εικονιστική κανονικότητα.

Οι μαθητές/τριες ήταν ενήμεροι ότι το θέμα των δραστηριοτήτων με το οποίο κλήθηκαν να ασχοληθούν, αφορούσε κανονικότητες. Η ονομασία μοτίβο αντί της κανονικότητας ή του προτύπου φάνηκε πιο οικεία σχεδόν για όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες και αυτή χρησιμοποίησαν και στις εξηγήσεις που έδωσαν στις απαντήσεις τους. Έτσι από την αρχή γνωρίζοντας ότι το κάθε σχέδιο θα προκύπτει από το προηγούμενο με μια συγκεκριμένη διαδικασία, προσπάθησαν σε πρώτη φάση να εντοπίσουν τη λογική της συμμεταβολής των αρχικών όρων, προκειμένου να αναγνωρίσουν τα δυο δοθέντα μοτίβα.

Έτσι όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή το βαθμό που οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στη γενίκευση (άμεση, κοντινή, μακρινή) ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου διαπιστώθηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών/τριών κατάφερε να αναγνωρίσει τη δομή των δυο εικονιστικών μοτίβων. Τα ποσοστά που απάντησαν σωστά στα ερωτήματα άμεσης και κοντινής γενίκευσης και στα δύο έργα, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3, κυμαίνονται από 80 % έως 87 %. Η εικόνα αλλάζει στη μακρινή γενίκευση, αφού το ποσοστό πέφτει στο 46% και αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με προηγούμενα ευρήματα ερευνών (Stacey, 1989; Rivera και Becker, 2008), τα οποία αναφέρουν ότι οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη θέσπιση και αιτιολόγηση κανόνων στις εργασίες μακρινής γενίκευσης.

Όσον αφορά τις επιδόσεις ξεχωριστά της κάθε τάξης στα ερωτήματα γενίκευσης η διαφορά μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων είναι πολύ μικρή και μεταβαλλόμενη διαφορετικά στα δυο έργα. Έτσι στα ερωτήματα άμεσης και κοντινής γενίκευσης τα ποσοστά και των τριών τάξεων κυμαίνονται από 80% έως 90% χωρίς καμία τάξη να υπερτερεί στο σύνολο των ερωτημάτων. Ωστόσο στο ερώτημα μακρινής γενίκευσης, στο έργο σκάλα η Γ΄ Γυμνασίου σημειώνει το χαμηλότερο ποσοστό σωστών ερωτημάτων μόλις 37.5% ενώ τα αντίστοιχα στις Α΄ και Β΄ είναι 45,5% και 52,7% αντίστοιχα. Στο δέντρο το ποσοστό αυξάνεται στο

58,3% χωρίς όμως να ξεπερνά το 60% της Β΄ Γυμνασίου. Έτσι λοιπόν στην παρούσα έρευνα, και όσον αφορά το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, ο παράγοντας εκπαιδευτική βαθμίδα δε φάνηκε μάλλον να επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις επιδόσεις των μαθητών/τριών, αφού βλέπουμε ότι η Β΄ Γυμνασίου παρουσίασε τις καλύτερες επιδόσεις και στα δυο έργα, όπως παρατηρούμε στους Πίνακες 4 και 5, και έπειτα ακολουθούν οι δυο άλλες τάξεις με εναλλαγές ανάλογα με το κάθε έργο. Κατά τη περίοδο διεξαγωγής της έρευνας οι μαθητές/τριες της Β' Γυμνασίου, είχαν διδαχθεί σχετικά πρόσφατα την ενότητα των συναρτήσεων Αυτό το γεγονός ίσως ήταν ένας παράγοντας που επηρέασε τις καλές επιδόσεις τους.

Όπως αναφέρεται και στους El Mouhayar και Jurdak (2015), η ανάλυση μιας κανονικότητας είναι υποκειμενική και το ίδιο μοτίβο μπορεί να αναγνωριστεί διαφορετικά από τους μαθητές. Έτσι τα ευρήματα από πολλές προηγούμενες μελέτες που έχουν διερευνήσει τις διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές/τριες στην προσπάθεια τους να γενικεύσουν ένα εικονιστικό μοτίβο, υποδηλώνουν ότι η γενίκευση προτύπων εμπλέκει τους μαθητές σε διαφορετικούς τρόπους συλλογισμού αλλά και στη χρήση μιας ποικιλίας στρατηγικών. Αυτές κυμαίνονται από απλές στρατηγικές που εστιάζουν στη μέτρηση βήμα προς βήμα ή σε διαδοχικές προσθέσεις (π.χ. αναδρομική στρατηγική), και σε πιο προηγμένες στρατηγικές που περιλαμβάνουν υψηλότερο επίπεδο μαθηματικού συλλογισμού, όπως ο πολλαπλασιασμός (π.χ. στρατηγική τμηματοποίησης) ή/και τη συσχέτιση ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών (π.χ. συναρτησιακή στρατηγική).

Το πρώτο στάδιο της γνωστικής συμπεριφοράς των μαθητών/τριών είναι μια διαδικαστική δραστηριότητα (Garcia-Cruz και Martinón, 1998), όπου οι μαθητές/τριες αναγνώρισαν τον επαναληπτικό και αναδρομικό χαρακτήρα του γραμμικού εικονιστικού μοτίβου και με την αναγνώριση αυτή εισάγονται οι εισαγωγικές ερωτήσεις. Βρίσκουν τη σταθερή διαφορά την προσθέτουν και αυτή η ενέργεια είναι η μόνη γενίκευση σε αυτό το επίπεδο.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες Γυμνασίου για τη γενίκευση ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου, διαπιστώνουμε ότι η αναδρομική στρατηγική, η οποία είναι ο συλλογισμός από όρο σε όρο (Lannin, και άλλοι, 2006) ήταν η πιο συχνή στρατηγική με ποσοστό 46%, όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 17. Αρκετοί μαθητές/τριες έγραψαν όλους τους όρους πριν από τον ζητούμενο όρο μακρινής γενίκευσης που περιλαμβάνει το ερώτημα και αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα πολλά αποτελέσματα ερευνών σε εργασίες γραμμικών κανονικοτήτων που έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν συχνά μια αναδρομική στρατηγική ακόμα και σε μακρινούς όρους. Η καταμέτρηση από το σχέδιο ήταν η δεύτερη πιο συχνή στρατηγική με ποσοστό 20,3% σε όλα τα ερωτήματα, λιγότερο συχνή στη μακρινή γενίκευση. Οι μαθητές/τριες έκαναν ένα σχέδιο και μέτρησαν ένα προς ένα τα στοιχεία που τους ζήτησαν (σπίρτα στη σκάλα ή σχήματα στο δέντρο). Στην παρούσα έρευνα σχεδόν όλοι που ακολούθησαν την αναδρομική στην άμεση, χρησιμοποίησαν την ίδια στην κοντινή. Αρκετοί χρησιμοποίησαν την συναρτησιακή με ποσοστό 16%, κατανοώντας το πως δομείται η κανονικότητα και συνδέοντας όλους τους όρους με τη θέση τους στο μοτίβο, ενώ την στρατηγική Ολόκληρου Αντικείμενου, χρησιμοποίησαν 14% στο σύνολο των απαντήσεων. Στο δεύτερο στάδιο, στη διαδικασία κατανόησης, οι μαθητές/τριες έχουν καθιερώσει μια τοπική γενίκευση. Αυτό σημαίνει ότι μπόρεσαν να καθορίσουν ένα αμετάβλητο από μια ενέργεια που εκτελείται στην εικόνα. Στις άμεσες γενικεύσεις η αναδρομική στρατηγική ήταν η πιο δημοφιλής στρατηγική με ποσοστό 56.9%, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 17 και αυτό έρχεται σε συμφωνία με το εύρημα στην έρευνα της Stacey (1989) η οποία διαπίστωσε ότι η αναδρομική είναι η πιο συχνή στρατηγική στις άμεσες. Στις κοντινές γενικεύσεις το ποσοστό ήταν 59.1% κρατώντας την αναδρομική στην πρώτη σε σειρά προτίμησης, με την καταμέτρηση να είναι δεύτερη, ενώ στης Stacey η καταμέτρησης στις κοντινές ήταν πρώτη. Επίσης οι έρευνες συμφωνούν στη μακρινή γενίκευση όπου η ολόκληρου αντικειμένου ήταν η δημοφιλέστερη από τις στρατηγικές με ποσοστό 33.3% (Πίνακας 17) και ακολουθήθηκε σε πολλές περιπτώσεις ακόμα και αφού οι μαθητές/τριες εφάρμοσαν σωστά στις προηγούμενες γενικεύσεις αυτή της καταμέτρησης ή της συναρτησιακής.

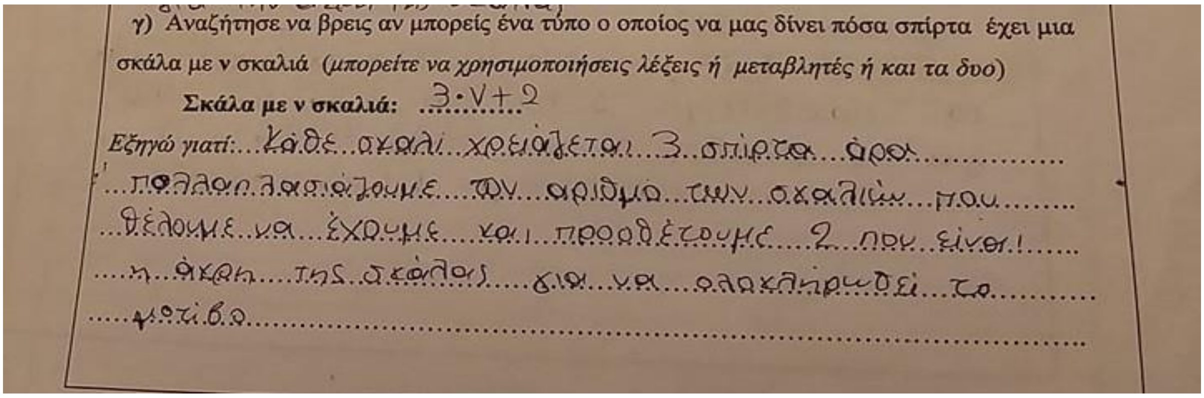
Όσον αφορά τη χρήση στρατηγικής σε κάθε τάξη, παρατηρώντας τον Πίνακα 19, φαίνεται ότι και στις τρεις βαθμίδες η αναδρομική συγκεντρώνει τα περισσότερα ποσοστά. Και ενώ στις δυο μικρότερες τάξεις η καταμέτρηση από το σχέδιο είναι η δεύτερη πιο δημοφιλής στρατηγική μετά την αναδρομική, στη Γ΄ τα ποσοστά μοιράζονται σχεδόν εξίσου στην καταμέτρηση, στη συναρτησιακή και στην ολόκληρου αντικειμένου. Έτσι σε αντίθεση με ευρήματα προηγούμενων μελετών που επικεντρώθηκαν στην ποικιλία της χρήσης στρατηγικής και δείχνουν ότι η εμπειρία επιτρέπει στους μαθητές να τροποποιήσουν τις στρατηγικές και τους τρόπους συλλογισμούς σε πιο προσαρμοστικές επιλογές στρατηγικών στην παρούσα έρευνα οι μαθητές της Γ΄ δε δείχνουν να έχουν την ίδια ευχέρεια που περιγράφεται πιο πάνω. Συγκεκριμένα σύμφωνα με τα ευρήματα διάφορων ερευνών (π.χ. Stacey,1989; Lamnin 2008; Rivera, 2008) η εμπειρία των μαθητών στη γενίκευση προτύπων προωθεί τη χρήση των πιο προηγμένων στρατηγικών. Δηλαδή η συναρτησιακή η οποία θεωρείται η πιο προηγμένη στρατηγική παρουσιάζει παρόμοια ποσοστά και στις τρεις τάξεις. Η μοναδική ίσως πιο προηγμένη σε σκέψη στρατηγική είναι αυτή της τμηματοποίησης στην οποία οι 15 από τους συνολικά 30 μαθητές/τριες του σχολείου ήταν μαθητές/τριες της Γ΄ Γυμνασίου.

Ο Siegler όπως αναφέρουν οι Jurdak και El Mouhayar (2014) διαπιστώνει ότι παρόλο που οι μαθητές γνωρίζουν και μπορούν να χρησιμοποιήσουν ποικίλες στρατηγικές για να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, η εμπειρία τους, τους εμπλέκει στη μεμονωμένη χρήση των στρατηγικών που απλά τους βοηθούν να αποκτήσουν γρήγορα ακριβή απόδοση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, χωρίς πολλή σκέψη στην απόφαση που θα πάρουν. Ίσως για αυτό εξηγούνται τα αυξημένα ποσοστά στις πιο απλές στρατηγικές της καταμέτρησης και της αναδρομικής.

Η γνωστική συμπεριφορά των μαθητών θα μπορούσε πλέον να θεωρηθεί ως εννοιολογική κατανόηση στο τρίτο στάδιο όπου έχουμε μια ολική γενίκευση. Έτσι στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή σε ποιο βαθμό οι μαθητές/τριες Γυμνασίου πετυχαίνουν στην εύρεση ενός γενικού τύπου ενός γραμμικού εικονιστικού μοτίβου διαπιστώνουμε τα εξής: Βλέποντας τον Πίνακα 13, μόλις 29,1% και 31% στη σκάλα και δέντρο αντίστοιχα κατάφερε να βρει τον σωστό τύπο, ενώ σε έρευνα του Rivera (2008) το ποσοστό ήταν μόλις 20%. Συχνά σύμφωνα με την Stacey (1989) ένα αξιοσημείωτο ποσοστό μαθητών/τριών για να προσδιορίσει το ν-οστό όρο το θεωρεί λανθασμένα ως το ν-οστό πολλαπλάσιο της διαφοράς μεταξύ δυο διαδοχικών όρων της κανονικότητας. Στην παρούσα έρευνα, παρατηρώντας τον Πίνακα 21, διαπιστώνουμε ότι 8% των μαθητών/τριών χρησιμοποίησαν την στρατηγική ολόκληρου αντικειμένου για την εύρεση του τύπου και έτσι οδηγήθηκαν σε λανθασμένο τύπο. Επίσης ένα 11% ως συνέχεια των προηγούμενων ερωτημάτων γενίκευσης χρησιμοποίησε και στον αλγεβρικό τύπο την αναδρομική στρατηγική γράφοντας π.χ. ν+2, όπου 2 η διαφορά της προόδου. Η συναρτησιακή ήταν η επικρατέστερη στρατηγική στην εύρεση του τύπου με ποσοστό γύρω στο 60%.

Σύμφωνα και με τους Zazkis, Liljedahl και Chernoff (2008) οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τη δομή μιας κανονικότητας δίνοντας βάση στη σχέση μεταξύ διαδοχικών όρων και τους ήταν πιο εύκολο να εκφράσουν τη σχέση λεκτικά παρά αλγεβρικά. Ωστόσο στην παρούσα έρευνα ωστόσο διαπιστώθηκε ότι μόλις ένα 5,8 % εκφράστηκε μόνο λεκτικά. Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών (58,7%) απάντησαν μόνο με μεταβλητές. Μερικοί παραθέσαν και κάποιες εξηγήσεις για την επιλογή του τύπου, ενώ άλλοι πάλι έγραψαν απλά ένα συνδυασμό μεταβλητών με μερικούς από αυτούς να τον γράφουν μάλλον χωρίς πολλή σκέψη και ο οποίος ήταν και συχνά λανθασμένος. Οι μαθητές/τριες της Γ΄ ήταν αυτοί που στην πλειοψηφία τους (54,1%) εκφράστηκαν και συμβολικά και λεκτικά, ενώ στις Α΄ και Β΄ η πλειοψηφία (57,8% και 75% αντίστοιχα) χρησιμοποίησε μόνο μεταβλητές. Θα περίμενε κάνεις οι μικρότερες τάξεις να μην έχουν την ευχέρεια να κάνουν χρήση των μεταβλητών αλλά τα ποσοστά διαψεύδουν μια τέτοια υπόθεση και είναι αξιοσημείωτο ότι και οι δυο τάξεις είχαν καλύτερες επιδόσεις στην ανακάλυψη του αλγεβρικού τύπου από ότι η Γ΄ Γυμνασίου η οποία αναμενόταν να ήταν πρώτη λόγω της εμπειρίας της αλλά και λόγω της αυξημένης ύλης στην Άλγεβρα που διδάσκεται σύμφωνα με το Αναλυτικό πρόγραμμα Σπουδών της τάξης της.

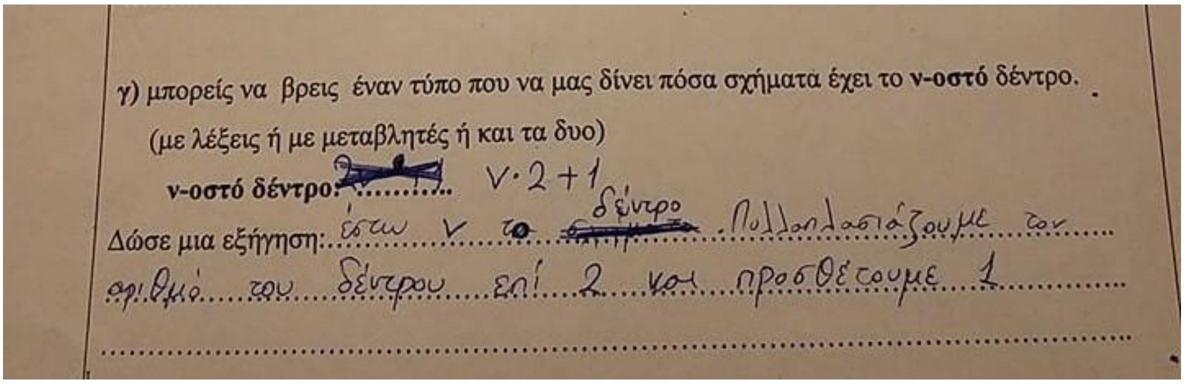
Έτσι σε 35,5 % των απαντήσεων οι μαθητές/τριες εκφράστηκαν και με μεταβλητές αλλά και με λόγια, όπως φαίνεται για παράδειγμα στις δυο παρακάτω απαντήσεις των μαθητών στη σκάλα:


γ) Αναζήτησε να βρεις αν μπορείς ένα τύπο ο οποίος να μας δίνει πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με ν σκαλιά (*μπορείτε να χρησιμοποιήσεις λέξεις ή μεταβλητές ή και τα δυο*)

Σκάλα με ν σκαλιά: 3·ν+2

Εξηγώ γιατί: κάθε σκαλί χρειάζεται 3 σπίρτα άρα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των σκαλιών που θέλουμε να έχουμε και προσθέτουμε 2 που είναι η άκρη της σκάλας για να ολοκληρωθεί το μοτίβο

και στο δέντρο αντίστοιχα:


γ) μπορείς να βρεις έναν τύπο που να μας δίνει πόσα σχήματα έχει το **ν-οστό** δέντρο.

(με λέξεις ή με μεταβλητές ή και τα δυο)

ν-οστό δέντρο: ν·2+1

Δώσε μια εξήγηση: έστω ν το ~~δέντρο~~ δέντρο πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό του δέντρου επί 2 και προσθέτουμε 1

Όσον αφορά το φύλο και τις επιδόσεις τους στις δραστηριότητες, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία δε παρουσιάζονται αισθητές διαφορές μεταξύ των δυο φύλων. Στην παρούσα έρευνα στο σύνολο των απαντήσεων άμεσης κοντινής και μακρινής γενίκευσης, όπως διαπιστώνουμε από τον Πίνακα 10 τα κορίτσια προηγούνται των αγοριών με μια διαφορά γύρω στο 5% . Στις επιμέρους γενικεύσεις, στην άμεση και κοντινή προηγούνται τα κορίτσια με διαφορά γύρω στο 10 %, ενώ στη μακρινή τα αγόρια αντιστρέφουν τη διαφορά και ξεπερνούν τα κορίτσια πάλι με την ίδια διαφορά 10%. Η ίδια εικόνα στο αμέσως επόμενο βήμα μετά τη μακρινή γενίκευση, δηλαδή στην εύρεση του ν-οστού όρου. Έτσι βλέποντας τον Πίνακα 13, το σωστό τύπο βρήκαν περισσότεροι μαθητές παρά μαθήτριες με μεγαλύτερη διαφορά σε σχέση με τα ερωτήματα γενικεύσεων στο σύνολο , με ποσοστά περίπου 60% - 40 %. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ίσως ότι η εννοιολογική κατανόηση των δυο έργων κανονικοτήτων, δηλαδή στο τρίτο στάδιο γνωστικής συμπεριφοράς, όπως αυτή αναφέρεται στους Garcia-Cruz και Martinón (1998) έχει επιτευχθεί περισσότερο στους μαθητές από ότι στις μαθήτριες.

Όπως διαπιστώθηκε από την παρούσα εργασία οι μαθητές/τριες δεν είναι εξοικειωμένοι με τις εργασίες γενίκευσης κανονικοτήτων. Ίσως τα συγκρατημένα ποσοστά των μαθητών/τριών ειδικά της Γ΄ Γυμνασίου και η μη ξεκάθαρη υπεροχή τους έναντι των μικρότερων τάξεων να οφείλεται και στη δίχρονη κατάσταση της πανδημίας, με την αποχή τους από την δια ζώσης εκπαιδευτική διαδικασία να επηρεάζει τις ίδιες σχολικές επιδόσεις τους. Παρόλο αυτά όμως η πλειοψηφία των παιδιών έδειξε ενδιαφέρον και προσπάθησε να ασχοληθεί και να αντιμετωπίσει αυτές τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν. Να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές/τριες εξέφρασαν την δυσκολία τους να δώσουν εξηγήσεις για τις απαντήσεις τους και ίσως αν είχε πραγματοποιηθεί μια συνέντευξη με τον/την κάθε μαθητή/τρια θα ήταν πιο βολικό για τους ίδιους να εκφραστούν αλλά και για τα αποτελέσματα της έρευνας κατά την ομαδοποίηση των στρατηγικών.

Ενδιαφέρον θα είχε και μια έρευνα με δραστηριότητες κανονικοτήτων με πιο σύνθετες, μη γραμμικές μορφές όπως είναι τετραγωνικές μορφές της μορφής $αν^2$ με $α>0$. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Γυμνασίου τέτοιες μορφές προβλέπονται να εισαχθούν στην ύλη της Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, οι κανονικότητες της γραμμικής μορφής $αν+β$ προβλέπονται μόνο για τη Β΄ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές/τριες θα πρέπει να είναι σε θέση να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή, να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας. Όμως, όπως διαπιστώθηκε πολλοί/ες μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου προσπάθησαν και αντιμετώπισαν με επιτυχία τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν με τις γραμμικές κανονικότητες, που σημαίνει ότι με το κατάλληλο σχεδιασμό θα μπορούσαν να ενταχθούν και σε μικρότερες τάξεις.

Επίσης σύμφωνα με τους Chua και Hoyles (2010b) υπάρχει μια ασυμφωνία στην επιλογή των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές/τριες για τον καθορισμό του λειτουργικού κανόνα σε ένα πρόβλημα γενίκευσης μιας κανονικότητας. Δηλαδή οι κρίσεις των εκπαιδευτικών για το ποιες στρατηγικές θα ήταν κατάλληλες για να επιλύσουν οι μαθητές τα προβλήματα δεν ταιριάζουν πάντα με την επιλογή των στρατηγικών των μαθητών. Αυτή η έλλειψη ευθυγράμμισης μπορεί να επηρεάσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας αλλά και των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Στα Πειραματικά Γυμνάσια όλης της χώρας θα εφαρμοστούν κατά τη διάρκεια όλης της επόμενης σχολικής χρονιάς πιλοτικά τα νέα Προγράμματα Σπουδών. Η ανατροφοδότηση που θα γίνει από τους εκπαιδευτικούς και από τους/τις μαθητές/τριες σχετικά με τον τρόπο συλλογισμού και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες σε δραστηριότητες γενίκευσης γραμμικών και μη γραμμικών κανονικοτήτων θα είναι χρήσιμη για τον τρόπο διδασκαλίας των εκπαιδευτικών αλλά και την εξοικείωση των μαθητών/τριών με τα μοτίβα

Μια νέα έρευνα μόνο σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας αλλά και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα βοηθούσε να βγουν χρήσιμα συμπεράσματα για τον τρόπο διδασκαλίας των δραστηριοτήτων με κανονικότητες αλλά και τις γενικότερες αντιλήψεις που έχουν οι ίδιοι/ες για τις κανονικότητες.

Βιβλιογραφία

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 107-126.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2010b). Teacher and student choices of generalising strategies: A tale of two views?. In Y. Shimizu, Y. Sekiguchi & K. Hino (Eds.), *Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education,* 2, 24- 31. Tokyo. Japan: EARCOME.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2013). Rethinking and researching task design in pattern generalisation. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 193-200). Kiel, Germany: PME.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2014). Generalisation of linear figural patterns in secondary school mathematics. *The Mathematics Educator*, 15(2), 1-30.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 553-569.

Ellis, A., Tillema, E., Lockwood, E., & Moore, K. (2017). Generalization across domains: The relating-forming-extending generalization framework. In Galindo and Newton (Eds.), *Proceedings of 39th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, p.* 677-684, Indianapolis: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Friel, S. N., & Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *MatheMatics teaching in the Middle school*, *15*(1), 24-33.

Garcia-Cruz, J. A., & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In Olivier and Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336), Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers. *Mathematical Thinking and learning*, *1*(1), 59-84.

Hourigan, M., & Leavy, A. (2015). Geometric growing patterns: What's the rule?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *20*(4), 31-39.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92.

İmre, S. Y., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(3), 207-226.

Kaput, J. J. (1999). *Teaching and learning a new algebra.* In Fennema and Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, (pp. 145-168). Routledge.

Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E., & Carlson, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education & Development*, *25*(1), 134-151.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Lian, L. H., & Yew, W. T. (2012). Assessing Algebraic Solving Ability: A Theoretical Framework. *International Education Studies*, *5*(6), 177-188.

Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* (PhD thesis). Available from ProQuest & Thesis Global. (UMI No. 3418575)

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer, Dordrecht.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ mathematical generalisation. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Nurmawanti, I., & Sulandra, I. M. (2020). Exploring of Student’s Algebraic Thinking Process Through Pattern Generalization using Similarity or Proximity Perception. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *9*(2), 191-202.

Pasnak, R. (2017). Empirical studies of patterning. *Grantee Submission*, *8*, 2276-2293

Radford, L. (2001, July). Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. In M. Hueuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 4-81). The Netherlands: Freudental Institute, Utrecht University.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, *40*(1), 83-96.

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 87–102). Spain : University of Valencia.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742.

Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: Compolicities and complexities in patterning activity. *For the learning of mathematics*, *28*(1), 17-25.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (advances in mathematics education)* (Vol. 2, pp. 323–366). New York: Springer.

Rivera, F. D. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. *New York, NY*.

Salingaros, N. A. (1999). Architecture, patterns, and mathematics. *Nexus network journal*, *1*(1-2), 75-86

Setiawan, Y. E., & I Nengah, P. (2020). Generalization strategy of linear patterns from field-dependent cognitive style. *Journal on Mathematics Education*, 11(1), 77– 94.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Tzekaki, M. (2020). Mathematical activity in early childhood and the role of generalization. In *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 301-313). Springer, Cham.

Van de Walle, J. Lovin L., Karp K., Bay-Williams J. (2014), *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο* (Α. Γρίβα, Μετ.) Αθήνα Εκδόσεις Gutenberg

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 305-312.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns:

Actions that support 8-year olds' thinking. *Educational Studies in mathematics*, *67*(2), 171-185.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In Á. Gutiérrez, G. Leder, P. Boero (Eds.) *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). The Netherlands: Sense Publishers.

Wilkie, K. J. (2022). Generalization of quadratic figural patterns: Shifts in student noticing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *65*, 100917.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*(3), 379-402.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131-141.

Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γυμνασίου, ΦΕΚ 5260/12-11-2021 αναρτημένο http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Τζεκάκη, Μ. (2007). Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα. *Αθήνα: Gutenberg, παιδαγωγική σειρά*.

Τζεκάκη, Μ., & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, 268-278.

Τζεκάκη, Μ., Βαμβακούση, Ξ. & Καλδρυμίδου, Μ. (2019). Κανονικότητες (Patterning) στις μικρές ηλικίες. Στο Κ. Χρίστου (Επιμ.), *Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών στη Διδακτική των Μαθηματικών*, σ.276-284. Κύπρος: ΕΝΕΔΙΜ

Παράρτημα

Εργαλείο συλλογής Δεδομένων

Όνομα………………………………………………………..

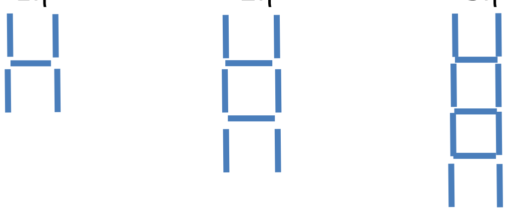
Τάξη:……………

Έργο 1 (Σκάλα)

Στα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώ σπίρτα για να φτιάξω σκάλες.

Με 5 σπίρτα μπορώ να σχηματίσω μια σκάλα με ένα σκαλί,

με 8 σπίρτα μια σκάλα με 2 σκαλιά , κτλ..



α) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει η σκάλα με **4** και πόσα με **6** σκαλιά;

Σκάλα με 4 σκαλιά: ……… σπίρτα

Εξηγώ γιατί:……………………………………………………………………

Σκάλα με 6 σκαλιά: ……… σπίρτα

Εξηγώ γιατί:…………………………………………………………………………

β) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με **50** σκαλιά ;

Σκάλα με 50 σκαλιά: ……… σπίρτα

Εξηγώ γιατί:…………………………………………………………………………

γ)Αναζήτησε να βρεις αν μπορείς ένα τύπο ο οποίος να μας δίνει πόσα σπίρτα έχει μια σκάλα με **ν** σκαλιά (*μπορείτε να χρησιμοποιήσεις λέξεις ή μεταβλητές ή και τα δυο*)

Σκάλα με ν σκαλιά: …………

Εξηγώ γιατί:………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

Έργο 2 (Δέντρο)

Τα παρακάτω δέντρα κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας σχήματα .

Το δέντρο μεγέθους 1 αποτελείται από τα 3 σχήματα, ενώ το δέντρο μεγέθους 3 από 7 σχήματα.

1ο

3ο

α) Θα μπορούσες να βρεις πόσα σχήματα έχει το **4ο** και πόσα το **6ο** κατά σειρά δέντρο;

4ο δέντρο:………..σχήματα

Δώσε μια εξήγηση:……………………………………………………………………

6ο δέντρο:………. σχήματα

Δώσε μια εξήγηση:…………………………………………………………………..

β) πόσα σχήματα έχει το **30ο** κατά σειρά δέντρο;

30ο δέντρο:………..σχήματα

Δώσε μια εξήγηση:…………………………………………………………………..

γ) μπορείς να βρεις έναν τύπο που να μας δίνει πόσα σχήματα έχει το **ν-οστό** δέντρο. (με λέξεις ή με μεταβλητές ή και τα δυο)

ν-οστό δέντρο: ………..

Δώσε μια εξήγηση:…………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………