ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τη χρήση των αναπαραστάσεων στη παρουσίαση των ρητών και άρρητων αριθμών.

της

Θεοδοσίου Ευφροσύνης, 1038

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια

Σακονίδης Χαράλαμπος, καθηγητής

Βαμβακούση Ξένια, Αναπλ. καθηγήτρια

Φλώρινα, 2022

Mathematics is not about numbers,

equations, computations, or algorithms:

it is about understanding.

William Paul Thurston

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη 6

Abstract 7

Ευχαριστίες 8

Εισαγωγή 9

Κεφάλαιο 1^{ο}: Βιβλιογραφική ανασκόπηση 12

1.1 Η έννοια του ρητού αριθμού 12

1.2 Η έννοια του άρρητου αριθμού 13

1.3 Από τους ρητούς στους άρρητους 15

1.4 Η έννοια της αναπαράστασης 16

1.5 Εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις 19

1.6 Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στους ρητούς και άρρητους 20

1.7 Διαφανείς και Αδιαφανείς αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων 22

1.8 Αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην ευθεία των αριθμών................ 24

1.9 Δυσκολίες και Παρανοήσεις στους ρητούς και άρρητους αριθμούς............... 29

1.10 Γνώσεις περιεχομένου του εκπαιδευτικού σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς 31

1.11 Κριτική ανασκόπηση 33

Κεφάλαιο 2^{ο}: Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα 35

2.1 Στόχος της έρευνας 35

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα 35

2.3 Εννοιολογικοί προσδιορισμοί-αποσαφηνίσεις 36

Κεφάλαιο 3^{ο}: Μεθοδολογία 39

3.1 Μέθοδος 39

3.2 Περιγραφή του δείγματος 40

3.3 Ανάλυση του ερευνητικού εργαλείου 40

3.4 Ερευνητική διαδικασία 43

3.5 Αξιοπιστία και εγκυρότητα 44

Κεφάλαιο 4ο: Αποτελέσματα 45

4.1 Δείγμα 45

4.2 Γνώσεις εκπαιδευτικών για τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις 45

4.2.1 Γνώσεις για τις πεπερασμένες και άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων 46

4.2.2 Γνώσεις για τις άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων 47

4.2.3 Γνώσεις για την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία 49

4.3 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων 51

4.3.1 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών, στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου 51

4.3.2 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των δεκαδικών αναπαραστάσεων των άρρητων, στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου 54

4.3.3 Αντιλήψεις για τα οφέλη στην κατανόηση των συνόλων των ρητών και άρρητων από την αναπαράσταση τους στην πραγματική ευθεία 56

4.4 Βαθμός χρήσης των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων κατά τη διδακτική προσέγγιση των αντίστοιχων συνόλων 58

4.4.1 Βαθμός χρήσης των πεπερασμένων και άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων 59

4.4.2 Βαθμός χρήσης των άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων 62

4.4.3 Βαθμός χρήσης της αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία 64

Κεφάλαιο 5ο: Συζήτηση 66

5.1 Συζήτηση για τις γνώσεις των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων. 66

5.2 Συζήτηση για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων, κατά την διδασκαλία αυτών των συνόλων. 67

5.3 Συζήτηση για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων 68

5.4 Περιορισμοί έρευνας 70

Κεφάλαιο 6ο: Συμπεράσματα 71

Βιβλιογραφία 75

Παράρτημα 79

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζεται μία ποιοτική έρευνα με στόχο την διερεύνηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας αναφορικά με τις ρητές και τις άρρητες αναπαραστάσεις, ειδικότερα μελετήθηκε ο βαθμός αναγνώρισης της δεκαδικής αναπαράστασης των δύο συνόλων και της αναπαράστασης των ρητών και άρρητων αριθμών στην πραγματική ευθεία. Επιπλέον, διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα οφέλη αυτών των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των μαθητών/τριών, όπως και ο βαθμός χρήσης τους κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων. Για την συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν δομημένες συνεντεύξεις σε 16 εκπαιδευτικούς, οι οποίοι είτε απασχολούνται στην δημόσια δευτεροβάθμια εκπαίδευση είτε στην ιδιωτική. Από τα αποτελέσματα της έρευνας, διαπιστώθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν σημαντικές ελλείψεις στη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, στην άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων όπως και στην αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία. Τέλος, ένα ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τον βαθμό που υποστηρίζουν μερικές περιπτώσεις ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων την κατανόηση των μαθητών/τριών διαφέρουν από το βαθμό χρήση τους κατά την διδακτική προσέγγιση αυτών των συνόλων.

Λέξεις κλειδιά: ρητοί, άρρητοι, δεκαδικές αναπαραστάσεις, αναπαράσταση στην πραγματική ευθεία, γνώσεις, αντιλήψεις, εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας

Abstract

This study presents a qualitative study aimed at investigating secondary school teacher’s knowledge regarding rational and irrational representations, in particular the recognition of decimal representations of rational and irrational numbers and the representation of the two sets on the real number line. Additionally, teachers' conceptions of these representation’s benefits, in student’s understanding were explored, as well as their use in presenting the respective sets. Structured interviews were conducted for data collection, 16 teachers participated who are either employed in public secondary education or in private education. The conclusions of the study show that secondary teachers have significant shortcomings in rational’s periodic decimal representation, in irrational’s non terminating decimal representation and in representing irrational numbers on the real number line. Finally, an interesting finding is that conceptions of the degree that some cases of rational and irrational representations support students' understanding differ from their use frequency teaching of these sets.

Key-words: rational numbers, irrational numbers, decimal representations, representation on the real number line, knowledge, conceptions, secondary school teachers

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια της εργασίας μου, κα Τζεκάκη Μαριάννα για την καθοδήγηση και την ανατροφοδότηση σε όλα τα στάδια της εκπόνησης και της συγγραφής της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κο Σακονίδη Χαράλαμπο και την αναπληρώτρια καθηγήτρια κα Βαμβακούση Ξένια, για τις σημαντικές τους επισημάνσεις στο τελικό στάδιο της εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τον σύζυγο μου, για την υποστήριξη και τη βοήθεια τους σε κάθε προσωπικό και επαγγελματικό μου βήμα.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και μια από τις παλαιότερες επιστήμες, που κατέχει σημαντική θέση στο σχολικό πρόγραμμα (Viseu et al., 2021). Η ιστορική εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία σταδιακή πρόοδος από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (Patel & Varma, 2018). Η εμπειρική προσέγγιση των αριθμών ξεκινά από την προσχολική ηλικία, όταν τα παιδιά ξεχωρίζουν το ένα από τα πολλά παρόμοια αντικείμενα και τα μετρούν (Gelman, 2003, όπ. αναφ. στο Voskoglou & Kosyvas, 2012). Αυτή η πρώτη γνωριμία με τους αριθμούς βοηθά σημαντικά στην κατανόηση της δομής του συνόλου των φυσικών αριθμών (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Σύμφωνα με τον μαθηματικό Leopold Kronecker, ο Θεός δημιούργησε αυτό το σχετικά συγκεκριμένο σύστημα αριθμών, ενώ τα πιο αφηρημένα συστήματα αριθμών είναι ανθρώπινο έργο (Bell, 1986, όπ. αναφ. στο Patel & Varma, 2018). Με άλλα λόγια, τα πιο αφηρημένα συστήματα αριθμών ανακαλύφθηκαν αργότερα και κατασκευάστηκαν ιεραρχικά πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Οι αρχαίοι, πίστευαν ότι ήταν δυνατό να γραφτούν όλοι οι αριθμοί ως αναλογία ακεραίων, ωστόσο, έκαναν μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις στην ανθρώπινη ιστορία όταν ανακάλυψαν ότι τα αποτελέσματα ορισμένων υπολογισμών δεν μπορούσαν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τους τότε γνωστούς αριθμούς (Sertöz, 2011, όπ. αναφ. στο Yilmaz & Ay, 2018). Σύμφωνα με τους Fischbein et al. (1995), οι Dedekind, Cantor και Weierstrass κάλυψαν ένα μεγάλο κενό στη βιβλιογραφία χάρη στις θεωρίες που ανέπτυξαν, καθώς οι πραγματικοί αριθμοί, είναι ένα από τα μαθηματικά αντικείμενα μέσω των οποίων τα μαθηματικά συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο και το σύνολο αυτό είναι το μεγαλύτερο γνωστό σύνολο αριθμών, το οποίο αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς (Yilmaz & Ay, 2018).

Μία ανασκόπηση των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών στην Ελλάδα, όπως είναι σχεδιασμένα έως και σήμερα, δείχνει ότι οι μαθητές/τριες μαθαίνουν τους φυσικούς αριθμούς στο Δημοτικό σχολείο και τους επεκτείνουν στο σύνολο των ακέραιων, επίσης γνωρίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς αλλά η έννοια του ρητού εισάγεται στους/ις μαθητές/τριες στην Α΄ Γυμνασίου και η έννοια του άρρητου στην Β΄ Γυμνασίου. Η Lamon (2007, όπ. αναφ. στο Viseu et al., 2021) θεωρεί ότι τα κλάσματα είναι, μεταξύ όλων των θεμάτων που συνθέτουν το πρόγραμμα σπουδών και απαιτούν χρόνο για την ανάπτυξη και την μάθηση τους, τα πιο δύσκολα στη διδασκαλία, τα πιο περίπλοκα, αλλά και τα πιο απαιτητικά και ουσιαστικά για τη μαθησιακή διαδικασία. Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Β΄ Γυμνασίου αναφέρεται μεταξύ των διδακτικών στόχων, ότι οι μαθητές/τριες επιδιώκεται να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν με την κλασματική μορφή $α/β$, όπου $α$, $β$ ακέραιοι και $β \neq 0$ και πως οι άρρητοι αριθμοί έχουν την ικανότητα να αναπαρασταθούν στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Όμως, σύμφωνα με τους Fischbein et al. (1995) ελάχιστη προσοχή δίνεται στους άρρητους αριθμούς στα σχολικά μαθηματικά και ο κύριος λόγος, κατά τη γνώμη τους, είναι ότι τα σχολικά μαθηματικά αντιλαμβάνονται ως ένα σύνολο τεχνικών επίλυσης.

Υπάρχει εκτεταμένη έρευνα σχετικά με τις αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και τον ρόλο τους στη μαθηματική μάθηση (Zazkis & Sirotic, 2010). Σύμφωνα με τον Ponte (2007, όπ. αναφ. στο Viseu et al., 2021) τα μαθηματικά θεωρούνται μια γλώσσα που επιτρέπει στους/ις μαθητές/τριες να αναπτύξουν την κατανόηση και να επιτύχουν την αναπαράσταση της καθημερινής ζωής και επιπλέον, αποτελεί ένα εργαλείο που παρέχει τρόπους επίλυσης προβλημάτων. Επιπλέον, η διδασκαλία των μαθηματικών, όπως και τα σχολικά εγχειρίδια στα μαθηματικά υποβάλλουν τα παιδιά, ακόμη και από μικρή ηλικία, σε μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων (Bednarz, 1984, όπ. αναφ. στο Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Αυτό εξηγείται, καθώς τα συστήματα αριθμών αναπτύσσονται ταυτόχρονα με τις μεθόδους για συμβολική αναπαράσταση και με το χειρισμό τους (Zazkis & Sirotic, 2004). Η συζήτηση των αναπαραστάσεων στα μαθηματικά σχετίζεται συχνά με ποιοτικά διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, όπως γραπτά σύμβολα, εικόνες ή χειραπτικά μοντέλα (Zazkis, 2005). Η ίδια περιγράφει τις αναπαραστάσεις ως εργαλεία γενίκευσης και αφαίρεσης, καθώς η έκφραση της γενικότητας μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη επιλογή μίας αναπαράστασης. Η ικανότητα εντοπισμού και αναπαράστασης της ίδιας έννοιας με διαφορετικές αναπαραστάσεις, και η ευελιξία στη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, επιτρέπει στους/ις μαθητές/τριες να δουν τη σύνδεση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις, να αναπτύξουν καλύτερη εννοιολογική κατανόηση, να διευρύνουν και να εμβαθύνουν την κατανόησή τους και να ενισχύσουν την ικανότητά τους για την επίλυση προβλημάτων (Even, 1998).

Οι Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987) τονίζουν πως ανεξάρτητα από τους ειδικούς στόχους που προβλέπονται σχετικά με τη χρήση των αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία, ο πρωταρχικός στόχος θα πρέπει να είναι χρήσιμες για το παιδί, ώστε να μάθει να τις χρησιμοποιεί αποτελεσματικά. Οι ίδιοι, αναφέρουν πως στα μαθηματικά υπάρχουν ήδη πολλές συμβατικές αναπαραστάσεις και πως οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν αναπαραστάσεις σε πολλούς τομείς για να ανακαλύψουν κανονικότητες που θα βοηθούσαν σε γραφικούς κώδικες και σύμβολα για τη διατύπωση εναλλακτικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Skemp (1986, όπ. αναφ. στο Zazkis, 2005) η κατοχή μιας αναπαράστασης στο χέρι επιτρέπει σε ένα άτομο να απομακρυνθεί από το νόημα αυτής της αναπαράστασης και να χειριστεί μόνο τα σύμβολα, καθιστώντας τους χειρισμούς αυτόματους και επιστρέφοντας αργότερα στην ερμηνεία του αποτελέσματος της συμβολικής χειραγώγησης και έτσι η φύση του χειρισμού που θα εκτελεστεί μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της αναπαράστασης.

Η Even (1998), αναφέρει πως η γνώση διαφορετικών αναπαραστάσεων είναι συνυφασμένη με τη γνώση των υποκείμενων εννοιών και πλαισίων και ως απόρροια οι αναπαραστάσεις θεωρούνται μέσο για τη διαμόρφωση εννοιολογικής κατανόησης. Οπότε, η ικανότητα ομαλής μετακίνησης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας θεωρείται, εκτός από ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης, βασικός στόχος διδασκαλίας (Lesh, Behr & Post, 1987). Βέβαια, παρόλο που υπάρχει συμφωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας σχετικά με τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην εκμάθηση των μαθηματικών, δεν είναι πολλά γνωστά για τη φύση των διαδικασιών που εμπλέκονται σε εργασίες με διαφορετικές αναπαραστάσεις, δηλαδή δεν έχει δοθεί αρκετή προσοχή στη διαπλοκή μεταξύ της ευελιξίας στη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, και σε άλλες πτυχές της γνώσης και της κατανόησης (Even,1998).

Η εργασία αυτή, αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο 1^{ο} κεφάλαιο περιέχεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση της εργασίας, κατά την οποία ορίζονται οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί και εν συνεχεία παρουσιάζονται οι αναπαραστάσεις αυτών των συνόλων. Ειδικότερα, αναλύεται η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και άρρητων αριθμών και η αναπαράσταση τους στην πραγματική ευθεία. Στο 2^{ο} κεφάλαιο διατυπώνονται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα και γίνεται αποσαφήνιση των εννοιών που εμπλέκονται σε αυτά. Στο 3ο κεφάλαιο της εργασίας αναλύεται η Μεθοδολογία της εργασίας, κατά την οποία περιγράφεται η μέθοδος, το δείγμα, η ερευνητική διαδικασία και το εργαλείο της έρευνας. Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, στο 5ο κεφάλαιο ακολουθεί η συζήτηση και στο 6ο και τελευταίο κεφάλαιο διατυπώνονται τα συμπεράσματα. Στο τέλος της εργασίας, υπάρχει η βιβλιογραφία και το παράρτημα.

<u>Κεφάλαιο 1ο: Βιβλιογραφική ανασκόπηση</u>

1.1 Η έννοια του ρητού αριθμού

Σε πολλές ερευνητικές μελέτες έχει διαπιστωθεί, τόσο για τους/ις μαθητές/τριες όσο και για τους εκπαιδευτικούς, ότι αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες με τους αριθμούς και ιδιαίτερα με το σύνολο των ρητών, ειδικότερα φαίνεται πως δεν είναι σε θέση να ορίσουν σωστά το σύνολο αυτό, ούτε μπορούν να διακρίνουν τους ακέραιους από τους παραπάνω αριθμούς (Fischbein et al., 1995). Η κατασκευή ενός συνόλου πιο «μεγάλου» από αυτό των ακέραιων αριθμών ($\mathbb{Z}$), φαινόταν αναγκαία καθώς η εξίσωση αx=β, όπου α,β ακέραιοι και $α \neq 0$, δεν έχει πάντα λύση στο $\mathbb{Z}$. Στα τυπικά μαθηματικά, ως ρητός αριθμός ορίζεται το σύνολο πηλίκου επί του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, με τη σχέση ισοδυναμίας $(α,β) \sim (γ,δ) \Leftrightarrow αδ = βγ$, με $\mathbb{Z}^*$ το σύνολο των μη μηδενικών ακεραίων.

Στα σχολικά εγχειρίδια, ο ορισμός του ρητού αριθμού βασίζεται στην ύπαρξη μίας ορισμένης αναπαράστασης, δηλαδή ως ρητός αριθμός ορίζεται ένας αριθμός που έχει την κλασματική μορφή α/β, όπου α, β ακέραιοι και $β \neq 0$ ή ως ένας αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως αναλογία δύο ακέραιων, όπως 2/5, -2/5, κ.λπ.. Ισοδύναμα, ένας ρητός αριθμός μπορεί να εκφραστεί είτε ως δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων είτε ως περιοδικός (σύμμετρος) δεκαδικός, για παράδειγμα 0.23, 0.4, 0.3757575 ..., 0.333 ..., κ.λπ.. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, για κάθε κλάσμα α/β, όπου α, β ακέραιοι και $β \neq 0$, το πηλίκο της διαίρεσης α:β είναι περιοδικός δεκαδικός, με εξαίρεση την μικρή πιθανότητα να είναι δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, αφού ένα κλάσμα, του οποίου ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο δυνάμεων του 2 ή/και του 5, δεν μπορεί να γραφτεί ως δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Οι ίδιοι, τονίζουν πως στην περίπτωση του περιοδικού δεκαδικού πρέπει να παρατηρηθεί ότι καθώς το υπόλοιπο της διαίρεσης α:β είναι μικρότερο από το β, εκτελώντας τη διαίρεση και μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων το ίδιο υπόλοιπο θα εμφανιστεί ξανά σε κάποιο βήμα, αυτό σημαίνει ότι από αυτό το σημείο και έπειτα τα ίδια ψηφία θα εμφανίζονται περιοδικά στο πηλίκο.

Σύμφωνα με τις Zazkis & Sirotic (2010), η ατυχής παρερμηνεία της οποιασδήποτε κανονικότητας ως περιοδικότητα, και η εξάρτηση από αυτήν την ερμηνεία, έχει έναν περιορισμένο τομέα εγκυρότητας και χρησιμεύει μόνο για να περιπλέξει τα πράγματα. Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός πως η κατανόηση των ρητών αριθμών συνδέεται με την κατανόηση του πώς και πότε η διαίρεση ακέραιων αριθμών δημιουργεί περιοδικούς αριθμούς και αντιστρόφως, πως κάθε περιοδικός δεκαδικός μπορεί να αναπαρασταθεί ως λόγος δύο ακεραίων. (Voskoglou, & Kosyvas, 2012). Κατά συνέπεια, το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα μίας διδακτικής είναι να χρησιμοποιούν οι άνθρωποι με ευχέρεια κάποιον από τους ορισμούς, όπως δικαιολογεί η κατάσταση, χωρίς να αμφισβητούν ποτέ την ισοδυναμία τους (Zazkis & Sirotic, 2010).

1.2 Η έννοια του άρρητου αριθμού

Σε γενικές γραμμές, γνωρίζουμε ότι το σύνολο των άρρητων αριθμών, περιέχει εκείνους τους αριθμούς που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως πηλίκο α/β, όπου το α είναι ακέραιος αριθμός και το β μη-μηδενικός ακέραιος, δηλαδή ένας άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ως λόγος ακεραίων. Σύμφωνα με την Zazkis (2005), η παραπάνω περιγραφή αποτελεί ένα ασαφές μέρος της «εννοιολογικής εικόνας» των μαθητών/τριών και όχι ορισμό, αυτός ο όρος χρησιμοποιήθηκε από τους Tall και Vinner (1981) για να περιγράψουν τη συνολική γνωστική δομή που σχετίζεται με μία έννοια και περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, όπως και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες, οπότε το «δεν μπορεί να αναπαρασταθεί» αποτελεί μέρος του τρόπου με τον οποίο γίνεται αντιληπτή αυτή η έννοια. Μία ισοδύναμη περιγραφή για έναν άρρητο αριθμό αναφέρεται σε μία άπειρη μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση, δηλαδή στην ανυπαρξία ενός πεπερασμένου ή περιοδικού δεκαδικού μέρους. Οι Zazkis & Sirotic (2010) υποστηρίζουν πως ένα πιθανό εμπόδιο στην κατανόηση των άρρητων είναι πως δεν αναγνωρίζεται η ισοδυναμία των παραπάνω ορισμών που δίνονται στα σχολικά μαθηματικά (δηλαδή, η ανυπαρξία της αναπαράστασης ως α/β, όπου το α είναι ακέραιος αριθμός και το β μη μηδενικός ακέραιος και η άπειρη μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση).

Ο επίσημος μαθηματικός ορισμός των άρρητων αριθμών βασίζεται στην έννοια του πραγματικού αριθμού και παρουσιάζεται μέσω της εισαγωγής των τομών Dedekind και είναι πέρα από αυτό που παρουσιάζεται στο σχολείο. Σύμφωνα με τον Dedekind (1901) μεγάλης σημασίας, είναι το γεγονός πως στην ευθεία των αριθμών υπάρχουν άπειρα σημεία που δεν αντιστοιχούν σε κανένα ρητό αριθμό. Οι Arcavi et al. (1987) αναφέρουν πως ο Dedekind αισθανόταν την ανάγκη για έναν επίσημο ορισμό και ανέπτυξε την ιδέα χρησιμοποιώντας μια γεωμετρική αναλογία, στη συνέχεια, προχώρησε στον ορισμό με έναν καθαρά τυπικό τρόπο, μαζί με τον ορισμό των πράξεων. Μία τομή Dedekind ορίζεται ως το διατεταγμένο ζεύγος (A,B) των μη κενών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{Q}$, τέτοιον ώστε: $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ και $\forall a \in A$, $\forall b \in B \Rightarrow a<b$ Για κάθε τομή (A,B) υπάρχει το πολύ ένα ρητός q, τέτοιος ώστε $q \geq a$, $\forall a \in A$ και $q \leq b$, $\forall b \in B$ και αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο, ή το B έχει ελάχιστο στοιχείο, σε αυτή την περίπτωση η τομή (A, B) ονομάζεται ρητή τομή. Αν σε μία ρητή τομή το B έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το *q,* θεωρούμε μία νέα τομή (A΄,B΄), που προκύπτει από την προηγούμενη, αν αφαιρέσουμε από το B το q και το προσθέσουμε στο A, στη νέα αυτή τομή το A΄ έχει ως μέγιστο στοιχείο το q. Κατά συνέπεια, μπορούμε να θεωρήσουμε ως ρητές τομές μόνο εκείνες στις οποίες το A έχει μέγιστο και με τον τρόπο αυτό ορίζεται μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ρητών τομών και των ρητών αριθμών. Υπάρχουν όμως τομές , που δεν είναι ρητές, για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τα σύνολα $B = \{x \in \mathbb{Q}: x > 0, x^2 > 2\}$ και A=$\mathbb{Q}$-B, μπορεί να αποδειχθεί ότι το (A,B) αποτελεί μία τομή, όπου το A δεν έχει μέγιστο και το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή για κάθε $x \in A$, υπάρχει πάντοτε y∈ A με y>x και ότι για κάθε $x \in$ B, υπάρχει πάντοτε y ∈ B με y<x, οπότε αν θεωρήσουμε ένα νέο αριθμό α, τέτοιον ώστε $\alpha^2 = 2$, μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο θέλουμε, είτε από αριστερά, είτε από δεξιά με ρητούς αριθμούς. Οι παραπάνω τομές ονομάζονται άρρητες τομές.

Σύμφωνα με τους Arcavi et al. (1987) οι καθηγητές δεν πρέπει να θυμούνται λεπτομερώς τον μαθηματικό ορισμό, αλλά τουλάχιστον πρέπει να γνωρίζουν ότι η περιγραφή και η εισαγωγή ορισμένων εννοιών όπως δίνονται στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου δεν είναι ο τυπικός μαθηματικός ορισμός, και πως υπάρχει τέτοιος ορισμός. Οι ίδιοι επίσης, υποστηρίζουν πως οι καθηγητές θα πρέπει να μπορούν να εκτιμήσουν ότι η περιγραφή του ορισμού καθοδηγείται από διδακτικές εκτιμήσεις και μπορεί να δικαιολογηθεί από την άποψη της σχετικής μαθηματικής ανωριμότητας του μαθητικού πληθυσμού.

1.3 Από τους ρητούς στους άρρητους

Η μετάβαση από τους ρητούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς αποδεικνύεται ένα κρίσιμο σημείο καμπής για πολλούς/ές μαθητές/τριες, καθώς στο σχολικό πρόγραμμά συναντούν άρρητους αριθμούς, όπως τους αριθμούς $\sqrt{2}$, e και π, και συνειδητοποιούν ότι η ευθεία αριθμών έχει αριθμούς που δεν είναι ρητοί, αλλά δεν γίνεται σαφές ποιο είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών (Tall, 2013, όπ. αναφ. στο Kidron, 2016). Σύμφωνα με τους Voskoglou & Kosyvas (2012) η κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι θεμελιώδης για τους/τις μαθητές/τριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην αναθεώρηση και την επέκταση της έννοιας των αριθμών, παρ'όλα αυτά, η μετάβαση από το σύνολο των ρητών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών χτυπά τις εγγενείς δυσκολίες, που συνδέονται με την ελλιπή κατανόηση του ρητού αριθμού και τη φύση των άρρητων αριθμών. Οι Zazkis & Sirotic (2004), αναφέρουν πως ο λόγος που επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε τον δεκαδικό χαρακτηρισμό ως «ορισμό» είναι ότι ένας δεκαδικός αριθμός αντιπροσωπεύει έναν ρητό αριθμό εάν και μόνο αν τερματιστεί ή επαναληφθεί, κατά ειρωνικό τρόπο, αυτός ο χαρακτηρισμός δεν έχει καμία σχέση με το αρχικό κίνητρο για τη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών. Η βασικότερη προϋπόθεση για την κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι ότι οι μαθητές/τριες έχουν ήδη εμπεδώσει τις γνώσεις τους σχετικά με τους ρητούς αριθμούς διότι εάν αυτό δεν επιτευχθεί, όπως συμβαίνει συνήθως, δημιουργούνται πολλά προβλήματα, καθώς φαίνεται ότι η έννοια των ρητών αριθμών γενικά παραμένει απομονωμένη από την ευρύτερη κατηγορία των πραγματικών αριθμών (Moseley, 2005, όπ. αναφ. στο Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Meserve (1983, όπ. αναφ. στο Arcavi et al., 1987), η ιστορία των μαθηματικών είναι μια πλούσια σειρά παραδειγμάτων που δείχνουν τρόπους με τους οποίους οι προηγούμενες γενιές έχουν πειραματιστεί και έχουν ανακαλύψει την ανάγκη για επίσημες μαθηματικές δομές, δηλαδή η ιστορία φαίνεται να είναι ένα φυσικό μέσο για την καλλιέργεια του αισθήματος της λογικής αναγκαιότητας για την κατασκευή ορισμών. Η ιστορία σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε μια έννοια, τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών στο παρελθόν, τις δυσκολίες τους, τη μαθηματική τους δημιουργικότητα, μέχρι το στάδιο της επισημοποίησης (Arcavi et al., 1987). Η ανησυχία για τη φύση των άρρητων αριθμών έγινε πιο διαδεδομένη μετά την ανάπτυξη των δεκαδικών κλασμάτων τον 16ο αιώνα από τον Simon Stevin (1548-1620), όπως αναφέρεται από τους Arcavi et al. (1987). Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το γεγονός ότι έχουν περάσει 2500 χρόνια από την «ανακάλυψη» των άρρητων αριθμών, ως μήκη μέχρι την επίσημη κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών (Sirotic & Zazkis, bb). Άλλωστε, το ιστορικό πλαίσιο μπορεί να ενθαρρύνει τη δημιουργία μιας λογικής εικόνας των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας ως ανθρώπινο, δημιουργικό και δυναμικό εγχείρημα, σε αντίθεση με την πιο κοινή άποψη ότι τα μαθηματικά προκύπτουν «ουρανοκατέβατα», ειδικότερα η ιστορία των άρρητων έχει ωραία παραδείγματα για να επεξηγήσει αυτό το σημείο, για παράδειγμα, η αρρητότητα που κλόνισε τον Πυθαγόρειο κόσμο, η συζήτηση τον δέκατο έκτο αιώνα αν οι άρρητοι είναι αληθινοί αριθμοί κ.λπ. (Arcavi et al., 1987).

1.4 Η έννοια της αναπαράστασης

Το ζήτημα της αναπαράστασης δεν είναι νέο στη μαθηματική εκπαίδευση, ωστόσο, πρόσφατα έχει προσελκύσει νέα προσοχή στην έρευνα και στην πρακτική της διδακτικής των Μαθηματικών (Zazkis, 2005). Υπάρχουν τουλάχιστον δύο απλοί λόγοι για να θεωρηθεί η αναπαράσταση ως σημαντικό θέμα για επιστημονική μελέτη, σύμφωνα με τον Vergnaud (1998), ο πρώτος είναι ότι όλοι/ες χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση ως μια ροή εσωτερικών εικόνων, χειρονομιών και λέξεων και ο δεύτερος είναι, ότι οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να επικοινωνήσουμε δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα αλλά σε αντιπροσωπευόμενες οντότητες, όπως αντικείμενα, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, ενέργειες και κατασκευές, για τις οποίες δεν υπάρχει αυτόματη συμφωνία μεταξύ δύο ατόμων. Επιπλέον, ο Kaput (1987) αναφέρει πως οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σύμφυτες με τα μαθηματικά και υπογραμμίζει ότι η αναπαράσταση και ο συμβολισμός είναι η καρδιά του περιεχομένου των μαθηματικών και βρίσκονται ταυτόχρονα στην καρδιά των γνώσεων που σχετίζονται με τη μαθηματική δραστηριότητα.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως το νόημα και η ερμηνεία της αναπαράστασης δεν είναι από όλους τους ερευνητές κοινή, έτσι διάφοροι τύποι ορισμών και ερμηνειών αποδίδονται στην έννοια της αναπαράστασης, ιδιαίτερα στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών (Zazkis & Liljedahl, 2004, όπ. αναφ. στο Mainali, 2021), ίσως διότι η έννοια της αναπαράστασης χαρακτηρίζεται πολύπλοκη καθώς δεν είναι μία στατική διαδικασία, αλλά μια δυναμική που συνδέεται με τη μαθηματική σκέψη ενός ατόμου (Vergnaud, 1998). Ο Janvier (1987a) δηλώνει ότι η χρήση αναπαραστάσεων στη μαθηματική σκέψη είναι θεμελιώδης και για το λόγο αυτό, τα περισσότερα από τα σχολικά βιβλία σήμερα, χρησιμοποιούν μια μεγάλη ποικιλία διαγραμμάτων και εικόνων προκειμένου να προάγουν την κατανόηση των μαθηματικών. Οι Davis et al. (1982, όπ. αναφ. στο Janvier, 1987b) ορίζουν πως μία αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως συνδυασμός από κάτι γραμμένο στο χαρτί, από κάτι που υπάρχει με τη μορφή φυσικών αντικειμένων και από μία προσεκτική διάταξη μίας ιδέας στο μυαλό κάποιου. Δηλαδή, μια αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συνδυασμός τριών συστατικών: συμβόλων, πραγματικών αντικειμένων και νοητικών εικόνων, όμως και τα λεκτικά ή γλωσσικά χαρακτηριστικά είναι εξίσου κυρίαρχα καθώς, είναι οι σύνδεσμοι μεταξύ αυτών των στοιχείων (Janvier, 1987b).

Ο Palmer (1978) περιγράφει την αναπαράσταση ως μία σύνθετη και άπιαστη έννοια, πολύ περισσότερο από ότι γενικά υποτίθεται, και την ορίζει ως ένα σχηματισμό ο οποίος ολοκληρωτικά ή εν μέρει συνδέεται, αντιστοιχεί, αλληλοεπιδρά, συμβολίζει και «αναπαριστά» κάτι άλλο. Σύμφωνα με τον ίδιο, οποιαδήποτε έννοια της αναπαράστασης πρέπει να περιλαμβάνει δύο συναφείς αλλά λειτουργικά ξεχωριστές οντότητες, η μία ονομάζεται αναπαριστώμενος κόσμος και η άλλη αναπαριστώντας κόσμος. Συνεχίζει επεξηγώντας πως η δουλειά του αναπαριστώντα κόσμου είναι να αντικατοπτρίζει ορισμένες πτυχές του αναπαριστώμενου κόσμου με κάποιο τρόπο και πως δεν χρειάζεται να είναι φανερές όλες οι πτυχές του αναπαριστώμενου κόσμου, αλλά ούτε χρειάζεται όλες οι πτυχές του αναπαριστώντα κόσμου να μοντελοποιήσουν μια πτυχή του αναπαριστώμενου κόσμου, ωστόσο, εκεί πρέπει να είναι κάποιες αντίστοιχες πτυχές εάν ο ένας κόσμος πρόκειται να αντιπροσωπεύει τον άλλον. Θα πρέπει δηλαδή, να υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ ορισμένων εννοιών του αναπαριστώμενου κόσμου και ορισμένων εννοιών του αναπαριστώντος κόσμου (Kaput, 1987). Προκειμένου να προσδιοριστεί πλήρως μια αναπαράσταση, θα πρέπει να περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε οντότητες, σύμφωνα με τον Palmer (1978):

1. την ολότητα που αναπαρίσταται
2. την ολότητα που αναπαριστά

3. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται
4. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση
5. την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες

Ο Duval (2006) δηλώνει ότι οι αναπαραστάσεις μπορεί, επίσης, να είναι σημεία και οι σύνθετοι συσχετισμοί τους, που παράγονται σύμφωνα με κανόνες και επιτρέπουν την περιγραφή ενός συστήματος, μιας διαδικασίας, ενός συνόλου φαινομένων και υπογραμμίζει το γεγονός ότι θα μπορούσε να υπάρχει τεράστιο χάσμα μεταξύ του αναπαριστώμενου κόσμου και του αναπαριστώντα κόσμου. Επεξεργάζεται το κενό δίνοντας ένα παράδειγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων του αριθμού δέκα, ειδικότερα αναφέρει πως στο δεκαδικό σύστημα το «10» σημαίνει την υλική αναπαράσταση του «IIIIIIII» και δίνει την αντίστοιχη σημασία. Ωστόσο, σε αυτό το παράδειγμα, δεν απαιτείται η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναπαράστασης που προτείνει ο Palmer. Έτσι, ο Duval τονίζει τη διαδικασία του σημειωτικού συστήματος αναπαραστάσεων, επειδή η μαθηματική επεξεργασία περιλαμβάνει πάντα την αντικατάσταση κάποιας σημειωτικής αναπαράστασης με μια άλλη.

Οι αναπαραστάσεις, επιπλέον, θεωρούνται εγγενές μέρος των μαθηματικών και έτσι κάποιες αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια που είναι δύσκολο να δούμε πώς μπορεί να συλληφθεί η έννοια αυτή, χωρίς τις αναπαραστάσεις (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Η έννοια της αναπαράστασης περιγράφεται ως εργαλείο γενίκευσης και αφαίρεσης, καθώς η έκφραση της γενικότητας μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη επιλογή μίας αναπαράστασης (Zazkis, 2005). Οι Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987) τονίζουν το γεγονός πως οι αναπαραστάσεις έχουν σκοπό να κάνουν τα μαθηματικά πιο ελκυστικά και ενδιαφέρων και πως αυτός είναι ο λόγος που οι συγγραφείς χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στα πρόσφατα σχολικά βιβλία, ώστε να «στολίσουν» την παρουσίαση των μαθηματικών με σκοπό να παρακινήσουν το παιδί ή να παρουσιάσουν αναλογίες στον πραγματικό κόσμο. Επιπλέον, σημειώνουν, ότι ορισμένες από αυτές τις αναπαραστάσεις έχουν ως πρωταρχικό στόχο να είναι όσο το δυνατόν πιο προσιτές στα παιδιά, ενώ άλλες έχουν ως πρωταρχικό μέλημα το ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο.

1.5 Εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις

Μία βασική διάκριση που επισημαίνεται στην περιοχή των αναπαραστάσεων είναι από τους Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987), κατά τους οποίους διαχωρίζονται οι αναπαραστάσεις ως εξής:

a. Εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι οι νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα (πεδίο σημαινόμενου)
b. Εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις, οι οποίες αναφέρονται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολισμούς (σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα κ.λπ.) που έχουν ως στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μία συγκεκριμένη μαθηματική «πραγματικότητα» (πεδίο σημαίνοντος)

Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως οι εσωτερικές αναπαραστάσεις μπορούν να συνδεθούν με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις στη μάθηση, στην πραγματικότητα, οι εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι αλληλένδετες μεταξύ τους επειδή η εξωτερική αναπαράσταση είναι η ενσωμάτωση της εσωτερικής αντίληψης ή κατασκευής ενός/μίας μαθητή/τριας, δηλαδή του τρόπου, με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές (Lesh, Post, & Behr, 1987). Άλλωστε, η εσωτερική αναπαράσταση δεν είναι φυσικό αντικείμενο, αλλά μια νοητική εικόνα που μπορεί να γίνει αντιληπτή ως νοητική απεικόνιση μέσα στο κεφάλι ενός ατόμου (Mainali, 2021). Οι Godino & Font (2010), αναφέρουν πως σε αυτήν την κατηγορία, ο Goldin (1998) περιλαμβάνει επίσης τη φυσική γλώσσα των μαθητών/τριών, τις οπτικές εικόνες, τη χωρική αναπαράστασή τους, τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και καθώς και την επιρροή τους σε σχέση με τα μαθηματικά.

Ο Mainali (2021), υποστηρίζει πως η εξωτερική αναπαράσταση είναι το πραγματικό φυσικό προϊόν που παράγεται είτε από έναν δάσκαλο, είτε από έναν/μία μαθητή/τρια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας για τη διδασκαλία των μαθηματικών ιδεών, έτσι οι αναπαραστάσεις των μαθητικών αντικειμένων είναι κυρίως εξωτερικές αναπαραστάσεις. Ορισμένα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης είναι σημειογραφικά και τυπικά, όπως η γραφή αλγεβρικών παραστάσεων, η έκφραση συναρτήσεων, παραγώγων, ολοκληρωμάτων ενώ άλλα δείχνουν τις οπτικές ή γραφικές σχέσεις, για παράδειγμα η αριθμογραμμή, τα γραφήματα που βασίζονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες και τα διαγράμματα, οι λέξεις και οι εκφράσεις της γλώσσας είναι επίσης εξωτερικές αναπαραστάσεις (Godino & Font, 2010). Σύμφωνα με τους Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987), καθώς τα παιδιά έρχονται καθημερινά αντιμέτωποι με μια πληθώρα εξωτερικών αναπαραστάσεων, η επιβολή εξωτερικών αναπαραστάσεων που είναι πολύ απομακρυσμένες από το παιδί έχει ως αποτέλεσμα το παιδί να αντιδρά αρνητικά ή να του δημιουργεί δυσκολίες. Με αυτόν τον προσανατολισμό, οι ίδιοι προτείνουν πως όταν ο εκπαιδευτικός κρίνει πως πρέπει να χρησιμοποιήσει μια εξωτερική αναπαράσταση στη διδασκαλία, θα πρέπει να λάβει υπόψη του ότι αυτές οι αναπαραστάσεις πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις εσωτερικές αναπαραστάσεις των παιδιών, καθώς συχνά επιβάλλονται από τον εκπαιδευτικό εξωτερικές αναπαραστάσεις, χωρίς να συνειδητοποιείται το μεγάλο χάσμα που μπορεί να υπάρχει μεταξύ αυτών που χρησιμοποιούνται και εκείνων που οραματίζεται το παιδί για την προβληματική κατάσταση.

Τέλος, ο Mainali (2021) αναφέρει πως υπάρχουν διαφωνίες για την ύπαρξη εσωτερικών αναπαραστάσεων, καθώς πολλοί μελετητές δεν πιστεύουν στην ύπαρξη της εσωτερικής αναπαράστασης και ακόμη κι όταν αναγνωρίζουν την ύπαρξη τους, είναι σχεδόν αδύνατο να την διερευνήσουν. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται από τους Lesh, Post και Behr (1987) οι οποίοι δηλώνουν ότι η διάκριση σε εξωτερικές και σε εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι τεχνητή, αφού μόνο η εξωτερική αναπαράσταση είναι μια παρατηρήσιμη δραστηριότητα.

1.6 Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στους ρητούς και άρρητους

Ο Janvier (1987b) περιγράφει την κατανόηση μιας έννοιας ως μία σωρευτική διαδικασία, βασισμένη κυρίως στην ικανότητα αντιμετώπισης ενός συνεχώς εμπλουτισμένου συνόλου αναπαραστάσεων και για αυτόν τον λόγο έχει αναπτυχθεί μια εκτεταμένη έρευνα για το ρόλο των αναπαραστάσεων με στόχο την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Οι Hiebert & Carpenter (1992, όπ. αναφ στο Peled & Hershkovitz, 1999) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση εμφανίζεται καθώς οι αναπαραστάσεις συνδέονται σε όλο και πιο δομημένα και συνεκτικά δίκτυα. Επιπλέον, η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων ενός δεδομένου συστήματος αναπαράστασης και η ελαχιστοποίηση των αδυναμιών του, αποτελούν σημαντικά συστατικά της κατανόησης για μια δεδομένη μαθηματική έννοια και οι αντιπροσωπευτικοί μετασχηματισμοί είναι σημαντικοί τόσο για την απόκτηση όσο και για τη χρήση των μαθηματικών ιδεών (Lesh, Behr & Post,1987).

Έχει παρατηρηθεί ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μίας έννοιας, είναι απλώς αντιστοιχίες της έννοιας που εμπλέκεται, έτσι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις έχουν στόχο ο/η εκπαιδευόμενος/η να είναι σε θέση να κατανοήσει τις κοινές ιδιότητες αυτών των διαφορετικών αναπαραστάσεων και να επιτύχει την κατασκευή της έννοιας αυτής (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger,1987). Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως θα πρέπει οι μαθητές/τριες να μπορούν να περάσουν από μία αναπαράσταση σε μία άλλη, να διατηρήσουν τις γνώσεις που αποκτήθηκαν, σε πλαίσια που ενσωματώνουν διαφορετικές πτυχές της ίδιας έννοιας, και επιπλέον πρέπει να είναι σε θέση να επιλέξουν την κατάλληλη αναπαράσταση, μεταξύ άλλων, καθώς οι αναπαραστάσεις που απορρίφθηκαν δεν είναι από μόνες τους ακατάλληλες απλώς λιγότερο αποτελεσματικές στο δεδομένο πλαίσιο. Επίσης, οι Peled και Hershkovitz (1999), δίνουν έμφαση στο γεγονός πως ο εκπαιδευτικός στόχος θα πρέπει να είναι η δημιουργία πολλών ευκαιριών με σκοπό να ενθαρρύνουμε την κατασκευή μίας ευέλικτης και συνδεδεμένης γνώσης.

Σύμφωνα με την Zazkis (2005), η κατανόηση των άρρητων αριθμών από τους/τις μαθητές/τριες βασίζεται κυρίως στην δεκαδική αναπαράσταση, ειδικότερα παρατήρησαν ότι η σύνδεση των δύο τρόπων περιγραφής των άρρητων, ως ένας αριθμός που δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ως λόγος ακεραίων και ως άπειρη μη επαναλαμβανομένη δεκαδική αναπαράσταση, δεν ήταν καλά κατανοητή, επιπλέον η γεωμετρική αναπαράσταση τους, ήταν σε μεγάλο βαθμό απούσα από τη λογική τους. Σχετικά με τη κατανόηση του ρητού αριθμού δεν αποτελείται από μια μοναδική, ουσιαστική ιδιότητα ή ικανότητα, αλλά σχηματίζει ένα σύνθετο και αλληλένδετο σύστημα γνώσης, ικανοτήτων και διαθέσεων (Brown, 2019). Ο ίδιος υποστηρίζει πως αυτά συνθέτουν την προσωπική εμπειρία του παιδιού από κοινωνικές, οργανικές και συμβολικές αλληλεπιδράσεις που μπορεί να συνδέονται με τη θεμελιώδη, σχεσιακή φύση των ρητών αριθμών. Οι Voskoglou & Kosyvas (2012), δηλώνουν πως ένα χαρακτηριστικό των ρητών αριθμών που πιθανώς επηρεάζει αρνητικά την κατανόησή τους είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις τους (π.χ. μπορούμε να γράψουμε 1/2 = 2/4 = ... = 0,5), κατά συνέπεια θεωρούν πως οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς αριθμούς και ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι δύο ασύνδετα υποσύνολα του συνόλου Q των ρητών αριθμών. Επίσης, υποστηρίζουν πως η διαδικασία διδασκαλίας θα μπορούσε να βασιστεί στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών, δηλαδή θα μπορούσαν να παρουσιαστούν οι ρητοί αριθμοί γραμμένοι ως κλάσματα και ως περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί και οι άρρητοι αριθμοί που θεωρούνται μη-ρητοί και ασύμμετροι δεκαδικοί, ως όρια ακολουθιών ρητών αριθμών, ως γεωμετρικές αναπαραστάσεις και γενικά στους ευέλικτους μετασχηματισμούς μεταξύ τους.

Η Kidron (2016), στην έρευνα της με σκοπό τη μελέτη των αντιλήψεων των μαθητών/τριών για το σύνολο των άρρητων αριθμών, υποστηρίζει πως υπάρχουν τρεις διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις των άρρητων και του τρόπου που αυτές επηρεάζουν την κατανόηση τους. Η πρώτη αφορά τη δεκαδική αναπαράσταση τους, η δεύτερη την τοποθέτηση τους στην ευθεία των αριθμών και η τρίτη αναπαράσταση αναφέρεται στη σχέση μεταξύ των ασύμμετρων μεγεθών (δεν υπάρχει κοινή μονάδα μέτρησης) και των άρρητων αριθμών. Ένα από τα βασικότερα ευρήματα της, ήταν πως παραπάνω από τους/ις μισούς/ές μαθητές/τριες ταυτίζουν το σύνολο των δεκαδικών (με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και με άπειρο πλήθος ψηφίων) με το σύνολο των ρητών, παρόλο το γεγονός ότι ισχυρίζονται πως έχουν διδαχθεί την αρρητότητα ενός αριθμού. Επιπλέον, στην έρευνα των Zazkis & Sirotic (2010), οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δήλωσαν ότι ένας αριθμός είναι ρητός εάν υπάρχει ένα μοτίβο και ότι ένας αριθμός είναι άρρητος εάν δεν υπάρχει μοτίβο στη δεκαδικό μέρος του αριθμού. Η παρανόηση αυτή, φαίνεται πως προήλθε από την εσφαλμένη κατανόηση της σχέσης μεταξύ των κλασμάτων και των δεκαδικών αναπαραστάσεων τόσο από τους προϋπηρεσιακούς όσο και από τους ενδοϋπηρεσιακούς καθηγητές στην παρούσα μελέτη.

1.7 Διαφανείς και Αδιαφανείς αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων

Οι Lesh, Behr & Post (1987), εισήγαγαν τη διάκριση των αναπαραστάσεων σε διαφανείς και αδιαφανείς, και όρισαν πως οι διαφανείς αναπαραστάσεις έχουν ακριβώς το νόημα από τις αντιπροσωπευτικές έννοιες, ενώ μία αδιαφανή αναπαράσταση δίνει έμφαση σε ορισμένες πτυχές των εννοιών και δεν αναδεικνύει άλλες. Σε γενικές γραμμές, λέμε ότι μια παράσταση είναι διαφανής σε σχέση με μια συγκεκριμένη ιδιότητα, εάν η ιδιότητα μπορεί να «φανεί» ή να προκύψει λαμβάνοντας υπόψη τη δεδομένη αναπαράσταση του αριθμού (Zazkis, 2005).

Η Zazkis (2005) υιοθέτησε τις έννοιες της διαφάνειας και της αδιαφάνειας στους ρητούς και άρρητους αριθμούς, σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας, και πρότεινε ότι μία άπειρη μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού είναι μία διαφανής αναπαράσταση, παρόλο που δεν υπάρχει πεπερασμένη διαφανή αναπαράσταση για τους άρρητους, ενώ ως διαφανή αναπαράσταση ενός ρητού όρισε την κλασματική αναπαράσταση του. Στα συμπεράσματα της έρευνας υποστήριξε ότι οι συμμετέχοντες δεν αξιοποίησαν τα διαφανή χαρακτηριστικά των παραστάσεων και αναγνώρισε τις δυσκολίες στην αναπαράσταση των άρρητων αριθμών. Επίσης, παρατήρησε ότι η έλλειψη διαφανής αναπαράστασης, αναδεικνύει το σημαντικό ρόλο των παραδειγμάτων στους/ις μαθητές/ριες για την απόκτηση των σχετικών εννοιών και πρότεινε τον εμπλουτισμό της ποικιλίας των παραδειγμάτων ώστε να τους/ις βοηθήσει στις νοητικές κατασκευές.

Τη διάκριση μεταξύ διαφανών και αδιαφανών αναπαραστάσεων χρησιμοποίησαν, επίσης, οι Zazkis & Sirotic (2010) ως θεωρητικό πλαίσιο στη μελέτη των τρόπων με τους οποίους οι διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών, επηρέασαν τις απαντήσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, σε σχέση με την κατανόηση των άρρητων αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες δεν βασίζονται στη δεδομένη διαφανή αναπαράσταση (δηλαδή την κλασματική) για να καθορίσουν εάν ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος και πως έτσι γίνεται εμφανής η προτίμηση τους στη δεκαδική αναπαράσταση, σε σχέση με την κλασματική. Επιπλέον, παρουσιάστηκε παρανόηση μεταξύ του άρρητου αριθμού και της δεκαδικής αναπαράστασης του, ανεξάρτητα από τη δομή αυτής της αναπαράστασης, όπως και η τάση των συμμετεχόντων να βασίζονται σε αριθμομηχανή για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Μία διαφορετική προσέγγιση της αδιαφάνειας των άρρητων αριθμών χρησιμοποιήθηκε από τους Voskoglou & Kosyvas (2012) στη δική τους έρευνα, στην οποία υποστηρίζουν πως ενώ οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών είναι αδιαφανείς στις περισσότερες περιπτώσεις λόγω της σύνθετης δομής τους, υπάρχουν και άρρητοι αριθμοί που έχουν διαφανείς αναπαραστάσεις λόγω της εμφάνισης κανονικοτήτων στο δεκαδικό μέρος. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, με τους αριθμούς 2.00131311311131111311113... όπου το 1, μετά το 13, επαναλαμβάνεται άλλη μία φορά κάθε φορά, και 0.28228822888222288882... όπου το 2 και το 8, μετά από το 28, επαναλαμβάνονται άλλη μία φορά κάθε φορά, οι αριθμοί αυτοί έχουν δεκαδική αναπαράσταση με άπειρο πλήθος ψηφίων, όμως παρατηρούνται κανονικότητες, όχι περιοδικότητες. Σε αντίθεση με τους αριθμούς π=3,14159265…, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618033\ldots$, $\frac{1}{\sqrt{3499149}}=0{,}0005345\ldots$ που παρουσιάζεται η αδιαφανής δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, όπου στο δεκαδικό μέρος δεν εμφανίζουν συγκεκριμένη κανονικότητα. Οι ίδιοι, παρουσιάζουν τη διαφανή δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών, κατά την οποία μπορούμε να προβλέψουμε το ψηφίο οποιασδήποτε τάξης, όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν $\frac{1}{4}=0{,}25$, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$, $\frac{281849}{99900}=2{,}82131131\ldots$ και την αδιαφανή δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, κατά την οποία δεν μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η περίοδος τους, όπως στους αριθμούς $\frac{22}{7}=3{,}14285714\ldots$, $\frac{144}{233}=0{,}618025\ldots$, $\frac{1}{1861}=0{,}0005373\ldots$, που η ακολουθία των επαναλαμβανόμενων ψηφίων έχει 6, 232 και 1860 ψηφία, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους, έδειξαν ότι οι δυσκολίες στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών συνδέονται με την ελλιπή κατανόηση των ρητών αριθμών, την ασυμμετρισιμότητα των άρρητων αριθμών και τη συχνή εμφάνιση των αδιαφανών αναπαραστάσεων των ρητών και των άρρητων αριθμών.

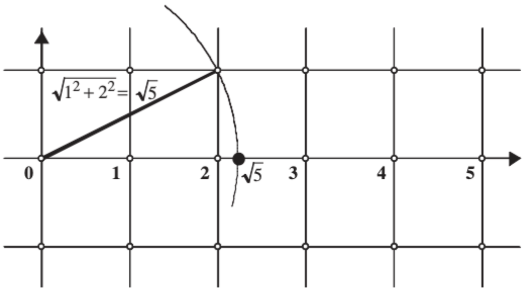
Τέλος, καθώς η έλλειψη διαφανής αναπαράστασης και στις δύο περιπτώσεις συμβάλλει στην «αρνητική» αντίληψη και των δύο συνόλων, δηλαδή στην αντίληψη των αριθμών ως προς τις ιδιότητες που δεν διαθέτουν (Zazkis, 2005) και δεδομένου ότι η πιθανότητα εμφάνισης αδιαφανών αναπαραστάσεων των ρητών και των άρρητων αριθμών είναι μεγάλη, ορισμένα κενά ή παρανοήσεις παραμένουν συχνά στους/ις μαθητές/τριες, αλλά ακόμη και στους ενήλικες μετά το τέλος του σχολείου, σχετικά με την κατανόηση των πραγματικών αριθμών (Voskoglou & Kosyvas, 2012).

1.8 Αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην ευθεία των αριθμών

Σύμφωνα με τους Lemmo et al. (2015) η διεθνής έρευνα αναδεικνύει τον κρίσιμο ρόλο της αριθμητικής γραμμής στη μαθηματική εκπαίδευση, έτσι η έννοια της αριθμογραμμής εμφανίζεται από πολύ νωρίς στους/ις μαθητές/τριες, από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, και παρουσιάζεται ως ένα διδακτικό εργαλείο με υψηλές δυνατότητες καθώς παρέχει έναν απλό τρόπο απεικόνισης των μαθηματικών εννοιών.

Σύμφωνα με τους DeWolf et al. (2014), τόσο οι ενήλικες όσο και τα παιδιά είναι πιο ακριβείς όταν τοποθετούν ρητούς στην πραγματική ευθεία με δεκαδικούς αριθμούς παρά με κλάσματα καθώς οι δεκαδικοί προσφέρουν απευθείας αντιστοίχιση σε μια νοητική γραμμή αριθμών και, ως εκ τούτου, επιτρέπουν την ευκολότερη εκτίμηση του μεγέθους από τα κλάσματα. Οι Siegler et al. (2011, όπ. αναφ. στο Brown 2019), αναφέρουν ότι τα παιδιά θα πρέπει να βλέπουν τους ρητούς αριθμούς και τους ακέραιους αριθμούς ως ένα ενιαίο σύστημα, ενωμένο με την ιδιότητα του μεγέθους που μπορεί να αναπαρίσταται συμβολικά στον αριθμογραμμή και πως αυτή η ιδιότητα και η χρήση της διατεταγμένης αριθμητικής γραμμής θα πρέπει να είναι η βάση για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών. Προηγούμενες ερευνητικές μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές/τριες, οι προϋπηρεσιακοί και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί είχαν δυσκολία στον προσδιορισμό του τρόπου εντοπισμού περιοδικών δεκαδικών και άρρητων αριθμών στην αριθμητική γραμμή (Caylan-Ergene & Ergene, 2020). Το γεγονός ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο στην ευθεία των αριθμών, μπορεί να είναι δύσκολο να το πιστέψει κανείς αν δεν έχει δει ποτέ άρρητο σημείο να βρίσκεται στην αριθμητική γραμμή, ειδικά λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η αριθμητική γραμμή είναι πυκνή με ρητούς αριθμούς (Sirotic & Zazkis, 2007b). Οι Arcavi et al. (1987) επισημαίνουν ότι η ιστορική προέλευση των άρρητων γενικά, και οι συνδέσεις με τη γεωμετρία ειδικότερα, μπορούν να παρέχουν μια διορατική κατανόηση της έννοιας καθώς και διδακτικές ιδέες για την εισαγωγή του θέματος στην τάξη. Δηλαδή, ο εντοπισμός των άρρητων αριθμών στην αριθμογραμμή μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν καλύτερα αυτό το αριθμητικό σύνολο και έτσι απαιτείται η διδασκαλία των άρρητων με την χρήση της αριθμογραμμής, ώστε να γίνει σαφές ότι όλοι οι άρρητοι αριθμοί εκφράζονται ως σημεία πάνω σε αυτήν. Παράλληλα, με τον εντοπισμό των άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, οι μαθητές/τριες επιτυγχάνουν την συσχέτιση τους με την έννοια του γεωμετρικού μήκους.

Σημαντική χαρακτηρίζεται η συμβολή της έρευνας των Sirotic & Zazkis (2007b), οι οποίοι επικεντρώθηκαν στην ικανότητα των μελλοντικών εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να αναπαριστούν τους άρρητους αριθμούς ως σημεία σε μια αριθμητική γραμμή και παρατήρησαν σύγχυση μεταξύ των άρρητων αριθμών και της δεκαδικής προσέγγισής τους, με συντριπτική εξάρτηση από τους τελευταίους. Ειδικότερα, η έρευνα τους πραγματοποιήθηκε σε 46 καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εγγράφηκαν στο μάθημα επαγγελματικής ανάπτυξης «Σχέδια για Μάθηση: Μαθηματικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» και μετά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, 16 εθελοντές από την ομάδα συμμετείχαν σε κλινική συνέντευξη στην οποία διερευνήθηκαν περαιτέρω οι απαντήσεις και οι γενικές τους διαθέσεις. Ένα από τα βασικά έργα που τους ζητήθηκε ήταν η ακριβής τοποθέτηση του $\sqrt{5}$ στην αριθμογραμμή, στο έργο αυτό είχε δοθεί αριθμημένο το καρτεσιανό επίπεδο και είχε σκοπό να βοηθήσει στην επίκληση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος για τις προσπάθειες κατασκευής του απαιτούμενου μήκους (Εικόνα 1).



Εικόνα 1. Γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{5}$

Οι ερευνητές είχαν σκοπό, να μελετήσουν αν οι συμμετέχοντες θα χρησιμοποιούσαν αυτή τη συμβατική ή παρόμοια προσέγγιση ή αν θα καταφύγουν στη σκέψη με όρους δεκαδικών επεκτάσεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας, έδειξαν ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών απουσίαζε από τις εννοιολογικές εικόνες πολλών συμμετεχόντων, με μόνο 9 από 46 να χρησιμοποιούν ακριβής γεωμετρικές προσεγγίσεις. Η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων, αντιλαμβάνεται την αριθμογραμμή ως ευθεία των ρητών και ειδικότερα αποδείχθηκε πως την αντίληψη αυτή την έχουν όσοι/ες είχαν την πεποίθηση πως είναι αδύνατο να βρεθεί το $\sqrt{5}$ στην αριθμογραμμή και αυτοί/ες που χρησιμοποίησαν μια δεκαδική προσέγγιση του, επιπλέον, οι ερευνητές τονίζουν πως η γνώση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος φαίνεται να είναι ένα αδρανές είδος γνώσης για μεγάλη πλειονότητα των υποψήφιων καθηγητών μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως μεταξύ εκείνων των συμμετεχόντων που μπόρεσαν να βρουν στην αριθμογραμμή το $\sqrt{5}$ υπήρχε ένα αίσθηση ασφάλειας ότι πράγματι υπήρχε τέτοιος αριθμός και οι ερευνητές υποθέτουν πως η διαθεσιμότητα μιας γεωμετρικής αναπαράστασης τους βοήθησε στον κύκλο της ανάπτυξης της έννοιας προς το τελικό στάδιο της ενθυλάκωσής της. Αυτό έρχεται σε αντίθεση, με αυτούς/ες που σκέφτηκαν την δεκαδική προσέγγιση του, όπου ο αριθμός $\sqrt{5}$ θεωρήθηκε ως μια μη-τερματισμένη διαδικασία και υπογραμμίζουν ότι οι μαθητές/τριες πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι υπάρχει μια βαθιά διάκριση μεταξύ της ακριβής τιμής ενός άρρητου αριθμού και της ρητής προσέγγισής του. Υπογραμμίζουν, επίσης, πως η σύλληψη άπειρων δεκαδικών με κάτι πεπερασμένο, συγκεκριμένο, και τόσο απλό όσο ένα σημείο στην αριθμητική γραμμή, ακόμα κι αν αυτό είναι δυνατό μόνο για μια συγκεκριμένη κατηγορία άρρητων (κατασκευάσιμα μήκη), είναι βοηθητικό στην κατανόηση της δύσκολης έννοιας της αρρητότητας.

Επιπλέον, η ύπαρξη της ακριβής τοποθέτησης του $\sqrt{5}$ στην ευθεία των αριθμών, αποτέλεσε ένα από τα βασικότερα ερώτημα της έρευνας των Hayfa & Saikaly (2016), κατά την οποία διερεύνησαν τις διαστάσεις της γνώσης και τους τρόπους σκέψης των μαθητών/τριών διαφορετικών τάξεων, σχετικά με τον ορισμό και τον εντοπισμό στην ευθεία των αριθμών, των άρρητων. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μόνο το 14,01% θεώρησε πως το $\sqrt{5}$ μπορεί να βρεθεί με ακρίβεια στην πραγματική ευθεία και οι ερευνητές υποστηρίζουν πως η ικανότητα εντοπισμού ορισμένων άρρητων αριθμών και η σχεδίασής τους ως τμήματα με ακριβή μήκη, θα βοηθούσαν τους/ις μαθητές/τριες να κατακτήσουν την έννοια των άρρητων.

Στον ίδιο προσανατολισμό, οι Caylan-Ergene & Ergene (2020) διεξήγαγαν έρευνα κατά την οποία εξέτασαν 106 καθηγητές μαθηματικών αλλά και 274 προϋπηρεσιακούς καθηγητές, σκοπός της έρευνας ήταν να εξετάσουν αν μπορούν να εντοπίσουν περιοδικούς δεκαδικούς ρητούς και άρρητους αριθμούς στην ευθεία των αριθμών. Ειδικότερα από τους εκπαιδευτικούς ζητήθηκε να απαντήσουν αν οι αριθμοί $0{,}444\ldots$, $\sqrt{2}, \pi$ και το e μπορούν ή δεν μπορούν να τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών ή δεν έχουν ακριβή θέση στην αριθμογραμμή, επιπλέον τους ζητήθηκε να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους. Τα ευρήματα της έρευνας, έδειξαν ότι ενώ η πλειονότητα των συμμετεχόντων δήλωσε ότι ο δεδομένος περιοδικός δεκαδικός, δηλαδή ο 0,444..., μπορεί να βρίσκεται στην αριθμητική γραμμή, για τους δοθέντες άρρητους αριθμούς, δηλαδή $\sqrt{2}, \pi$ και το e, μόνο ένας μικρός αριθμός συμμετεχόντων θεώρησε ότι μπορούν να βρεθούν με ακρίβεια. Τον 0,444... φαίνεται πως μπόρεσαν να το τοποθετήσουν στην αριθμητική γραμμή μετατρέποντάς το σε 4/9 και σχεδιάζοντας μια αριθμητική γραμμή και αναπαριστώντας το κλάσμα στην αριθμητική γραμμή ή τονίζοντας ότι τα κλάσματα έχουν μια θέση στην αριθμητική γραμμή. Σχετικά με τους άρρητους αριθμούς, οι ερευνητές εντόπισαν ότι υπάρχουν δύο βασικοί τύποι γνώσης που πρέπει να έχουν οι συμμετέχοντες για να μπορούν να τους εντοπίσουν στην αριθμητική γραμμή. Αρχικά πρέπει να γνωρίζουν τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις δεδομένων άρρητων αριθμών, η γνώση αυτή είναι συγκεκριμένη γιατί απαιτεί τη γνώση άλλων πραγμάτων όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα, για το $\sqrt{2}$, το μήκος του κύκλου, για το π και η γραφική παράσταση του y= e^x, για το e. Εν συνεχεία ο δεύτερος τύπος γνώσης, είναι η γνώση ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί τοποθετούνται στην αριθμητική γραμμή και αυτή η γνώση είναι πιο γενική από την πρώτη και προσθέτουν πως αυτού του είδους οι γνώσεις μπορούν να αποκτηθούν από τα σχολικά βιβλία και τα μαθήματα μαθηματικών στο γυμνάσιο και στο λύκειο, καθώς και σε μαθήματα μαθηματικών σε προπτυχιακές σπουδές. Οι ίδιοι διαπίστωσαν, πως ενώ έχουν περάσει 20 χρόνια από τις πρώτες ερευνητικές μελέτες που διεξήχθησαν σχετικά με τον εντοπισμό των ρητών και άρρητων στην ευθεία γραμμή, ακόμα οι προϋπηρεσιακοί καθηγητές και οι εν ενεργεία εξακολουθούν να κάνουν λάθος στην τοποθέτηση τους στην αριθμογραμμή και καταλήγουν πως οι κύριες πηγές των λαθών τους είναι οι προσεγγίσεις, η αίσθηση του άπειρου, η αρρητότητα και η αβεβαιότητα που εντοπίστηκε στις αιτιολογήσεις τους. Τα ευρήματα αυτής της έρευνας είναι παρόμοια με αυτά της έρευνας των Peled & Hershkovitz (1999), οι οποίοι έδειξαν πως το μεγαλύτερο μέρος των προϋπηρεσιακών καθηγητών δεν ολοκλήρωσαν σωστά τα έργα που απαιτούσαν την τοποθέτηση των αριθμών 0,333…, $\sqrt{5}, \pi$ στην ευθεία των αριθμών. Οι συμμετέχοντες που απάντησαν λάθος ισχυρίστηκαν πως επειδή έχουν άπειρο αριθμό ψηφίων στις δεκαδικές τους αναπαραστάσεις, οι δοθέντες αριθμοί δεν μπορούν να τοποθετηθούν στην αριθμητική γραμμή και επιπλέον κάποιοι συμμετέχοντες υποστήριξαν ότι οι άρρητοι αριθμοί, δεν έχουν θέση στην πραγματική ευθεία των αριθμών. Caylan-Ergene & Ergene (2020)

Τέλος, οι Fischbein et al. (1995), πραγματοποίησαν μία από τις μεγαλύτερες μελέτες, σε μαθητές/τριες Δημοτικού αλλά και σε μελλοντικούς καθηγητές κατά την οποία διερεύνησαν, μεταξύ άλλων, την σχέση ανάμεσα στους ρητούς και στους άρρητους και την τοποθέτηση αυτών των σημείων στην ευθεία των αριθμών. Στο δείγμα ένα από τα βασικά ερωτήματα που δόθηκε ήταν το εξής: «Δοθέντων δύο σημείων Α και Β στην ευθεία των αριθμών, πόσα σημεία αντιστοιχούν σε ρητούς σε αυτό το διάστημα;» και παρόμοιο ερώτημα τέθηκε για τους άρρητους. Όσον αφορά τους ρητούς η απάντηση «άπειρα σημεία», δόθηκε σχεδόν από τους μίσους/ές μαθητές/τριες τόσο της $9^{ης}$ όσο και της $10^{ης}$ τάξης και από το 90% των μελλοντικών φοιτητών, ενώ σχετικά με τους άρρητους η απάντηση «άπειρα» δόθηκε από περισσότερους/ες μαθητές/τριες, σε σχέση με την προηγούμενη ερώτηση, αλλά και από τους μελλοντικούς καθηγητές. Εν συνεχεία, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως στον ισχυρισμό: « Σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας ρητός αριθμός», η σωστή απάντηση που είναι προφανώς «όχι», δόθηκε από λιγότερους από τους μισούς μαθητές/τριες και των δύο τάξεων και από το 66% των μελλοντικών καθηγητών, ένα αποτέλεσμα καθόλου ικανοποιητικό για τους μαθητές/τριες της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ στον αντίστοιχο ισχυρισμό για τους άρρητους τα αποτελέσματα ήταν καλύτερα. Στην αντίστοιχη ερώτηση για τους άρρητους, τα αποτελέσματα ήταν καλύτερα καθώς 80% των προυπηρεσιακών καθηγητών απάντησαν ορθά «ναι».

1.9 Δυσκολίες και Παρανοήσεις στους ρητούς και άρρητους αριθμούς

Οι μαθητές/τριες, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ειδικότερα δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι το σύνολο των άρρητων έχει περισσότερα στοιχεία από αυτό των ρητών. Η δυσκολία αυτή, επιβεβαιώνεται από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας των Fischbein et al. (1995), στην οποία προέκυψε πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών/τριών θεωρούν πως τόσο το σύνολο των ρητών όσο και το σύνολό των άρρητων αποτελείται από ίδιο πλήθος στοιχείων. Σύμφωνα με τους Fischbein et al. (1995), η έννοια του άρρητου αριθμού παρουσιάζει μία διαισθητική δυσκολία, ειδικότερα αναφέρονται στο γεγονός πως η δύναμη της συνέχειας είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη του συνόλου των ρητών αριθμών. Οι Courant και Robbins (1944/1978, όπ. αναφ. στο Fischbein et al., 1995) αναφέρουν πως στο αφελές μυαλό πρέπει να φαίνεται πολύ παράξενο και παράδοξο πως το πυκνό σύνολο των ρητών, δεν καλύπτει ολόκληρη την ευθεία αριθμών και πως η διαίσθηση μας δεν μας βοηθά να αντιληφθούμε τους άρρητους αριθμούς ως ξεχωριστό σύνολο από αυτό των ρητών. Σύμφωνα με τους Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger (1987), τα παιδιά χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή κατά τη διάρκεια της εκμάθησης των θετικών ακεραίων και αναπτύσσουν την έννοια της αριθμητικής γραμμής ως μια σειρά από "σκαλοπατάκια", όπου κάθε βήμα νοείται ως βράχος και ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς βράχους υπάρχει μια τρύπα, οι ίδιοι επεξηγούν πως αυτό, απέχει πολύ από την έννοια της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται από την αριθμογραμμή, και ως απόρροια δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι στο Γυμνάσιο τόσοι πολλοί/ες μαθητές/τριες λένε ότι μεταξύ δύο ακέραιων αριθμών δεν υπάρχουν αριθμοί, ή το πολύ ένας και αντιμετωπίζουν δυσκολία στην τοποθέτηση ενός αριθμού, αφού δεν μπορούν να τον συσχετίσουν με τη διαβάθμιση που έχει ήδη δοθεί στη γραμμή.

Παράλληλα, πλήθος ερευνών αποδεικνύει ότι αντιμετωπίζονται δυσκολίες στην αναγνώριση και στην διάκριση των ρητών και των άρρητων αριθμών, βασική πηγή αυτών των δυσκολίων φαίνεται πως είναι τόσο η δεκαδική αναπαράσταση και των δύο συνόλων όσο και οι διαφορετικές αναπαραστάσεις τους. Μερικές από τις γνωστικές δυσκολίες σε σχέση με την έννοια των άρρητων αριθμών μπορεί να είναι συνέπεια του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνεται η έννοια του άπειρου. Ειδικότερα, οι Fischbein et al. (1979, όπ. αναφ. στο Kidron, 2016) παρατήρησαν ότι η φυσική έννοια του απείρου αντιμετωπίζεται ως η έννοια του δυνητικού απείρου, έτσι η διαίσθηση των μαθητών/τριών για το άπειρο μπορεί να γίνει εμπόδιο στην κατανόηση των άρρητων αριθμών ως μη επαναλαμβανόμενων άπειρων δεκαδικών. Στην έρευνα της η Kidron (2016), επιβεβαιώνει πως ένας μεγάλο μέρος των μαθητών/τριών δεν έδειξε επίγνωση της ύπαρξης μη επαναλαμβανόμενων άπειρων δεκαδικών για του άρρητους αριθμούς, παρά το γεγονός ότι τους είχαν διδαχθεί. Στο Arithmetica Integra του StifeJ (1544, όπ. αναφ. στο Arcavi et al., 1987), δηλώνεται ότι οι άρρητοι είναι χρήσιμοι όταν οι ρητοί αριθμοί αποτυγχάνουν, αλλά άλλες σκέψεις αναγκάζουν τον μαθητή/τρια να αρνηθεί ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι αριθμοί καθώς "Φεύγουν συνεχώς" και βρίσκονται "κρυμμένοι σε ένα είδος σύννεφου απείρου" (όταν κάποιος προσπαθεί να χρησιμοποιήσει δεκαδική αναπαράσταση).

Οι Peled & Hershkovitz (1999) κατά την εκτέλεση πειραματικής έρευνας παρατήρησαν ότι οι μελλοντικοί καθηγητές μαθηματικών, στο δεύτερο και τρίτο έτος σπουδών τους, αν και γνώριζαν τους ορισμούς και τα βασικά χαρακτηριστικά των άρρητων αριθμών, απέτυχαν σε έργα που απαιτούσαν την ευέλικτη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεών τους. Επίσης, οι Voskoglou και Kosyvas (2012) αναλογιζόμενοι τα αποτελέσματα της δικής τους έρευνας καθώς και τα ευρήματα των ερευνών σε πραγματικούς αριθμούς των Peled & Hershkovitz (1999) όπως και των Sirotic & Zazkis (2007b) κατέληξαν στην υπόθεση ότι το κύριο εμπόδιο για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών είναι οι διαισθητικές δυσκολίες που έχουν οι μαθητές/τριες με τις πολλαπλές σημειωτικές αναπαραστάσεις τους, δηλαδή τους τρόπους με τους οποίους τους ορίζουμε, τους συμβολίζουμε και τους καταγράφουμε. Φαίνεται πως οι μαθητές/τριες τείνουν να κατηγοριοποιούν τα αντικείμενα ως προς την εικόνα τους και όχι ως προς τα δομικά τους χαρακτηριστικά και έτσι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση ότι διαφορετικά σύμβολα μπορεί να αντιπροσωπεύουν το ίδιο αντικείμενο (Chi et al., 1981, όπ. αναφ. στο Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Δυσκολίες και παρανοήσεις, φαίνεται πως παρουσιάζονται και στις πράξεις με άρρητους αριθμούς. Η μαθηματική γνώση αποτελείται από ένα σύνολο συνδέσεων μεταξύ αλγοριθμικών, διαισθητικών και τυπικών διαστάσεων της γνώσης, έτσι φαίνεται πως οι μαθητές/τριες τείνουν να προσαρμόζουν την τυπική γνώση και τις αλγοριθμικές διαδικασίες στις πεποιθήσεις τους (Sirotic & Zazkis, 2007a). Οι συγγραφείς παρατήρησαν στην έρευνα τους ασυνέπειες μεταξύ των διαισθήσεων των συμμετεχόντων και της τυπικής και αλγοριθμικής τους γνώσης και ισχυρίζονται ότι η κατασκευή συνδέσεων μεταξύ αλγορίθμων, διαισθήσεων και εννοιών είναι απαραίτητη για την κατανόηση της αρρητότητας ενός αριθμού. Επίσης, τα αποτελέσματα της έρευνας των Sirotic & Zazkis (2007a), τους οδήγησε στο συμπέρασμα πως οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών/τριών στις πράξεις των άρρητων αριθμών οφείλονται στη δυσκολία να αντιληφθούν το σύνολο των άρρητων αριθμών ως αντικείμενο, αντίθετα αντιλαμβάνονται τους άρρητους ως μία κατασκευή από συνεχόμενα αθροίσματα των δεκαδικών τους ψηφίων. Τέλος, υποστηρίζουν πως μία ακόμα αιτία αυτής της δυσκολίας είναι η πεποίθηση πως το αποτέλεσμα οποιασδήποτε πράξης μεταξύ δύο άρρητων, πρέπει να ανήκει στο ίδιο σύνολο αριθμών, για παράδειγμα πως το άθροισμα δυο άρρητων αριθμών θα είναι και αυτό άρρητος, οι μαθητές/τριες που έδωσαν διαισθητικά αυτές τις απαντήσεις δεν αναζήτησαν αντιπαραδείγματα, αλλά προσπάθησαν να δικαιολογήσουν την πεποίθηση τους με παραδείγματα ή λανθασμένους ισχυρισμούς.

1.10 Γνώσεις περιεχομένου του εκπαιδευτικού σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς

Σύμφωνα με τον Shulman (1986), «Ο δάσκαλος δεν χρειάζεται μόνο να καταλάβει ότι κάτι είναι έτσι, ο δάσκαλος πρέπει να καταλάβει περαιτέρω γιατί συμβαίνει αυτό». Εν συνεχεία ο ίδιος, ορίζει ως γνώση περιεχομένου την κατανόηση ενός εκπαιδευτικού για το ευρύτερο πλαίσιο του τομέα του, το οποίο υπονοεί ότι η γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών πρέπει να αντιπροσωπεύει μια βαθιά κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου. Η εξειδίκευση της γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών, ενώ φαίνεται απλή, απαιτεί γνώσεις οι οποίες πρέπει να υπερβαίνουν την γνώση του αντικειμένου που πρέπει να κατακτήσουν οι μαθητές/τριες. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να εξηγήσουν γιατί μια συγκεκριμένη πρόταση θεωρείται δικαιολογημένη, γιατί αξίζει να τη γνωρίσουν οι μαθητές/τριες και πώς σχετίζεται με άλλους τομείς, τόσο εντός του κλάδου όσο και εκτός, τόσο στη θεωρία όσο και πράξη (Shulman,1986). Δηλαδή, είναι υποχρεωμένοι να προσθέσουν στην ατζέντα τους, ένα μαθηματικό υπόβαθρο για το περιεχόμενο που καλύπτεται στο σχολικό πρόγραμμα, βαθύτερου επίπεδου από αυτό που καλούνται οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν.

Σύμφωνα με τους Zachariades et al. (2013) όταν ζητείται από τους/ις μαθητές/τριες να σκεφτούν τις έννοιες των συνόλων των ρητών και άρρητων, σπάνια σκέφτονται τους ορισμούς που ικανοποιούν αυτές οι έννοιες, αλλά είναι σύνηθες να σκέφτονται συγκεκριμένα παραδείγματα και αυτό, φυσικά, δεν μπορεί να τους οδηγήσει σε γενικεύσεις. Τα παραδείγματα αυτά, αποτελούν σημαντικό στοιχείο της γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών, καθώς τα παραδείγματα δίνονται από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς ή κατασκευάζονται από τους μαθητές/τριες με δοσμένους περιορισμούς από τους εκπαιδευτικούς (Zazkis, 2005). Έτσι, ο κίνδυνος στην περίπτωση των άρρητων αριθμών είναι η παρουσίαση περιορισμένου συνόλου παραδειγμάτων (όπως το π και το $\sqrt{2}$) από τον εκπαιδευτικό, τα οποία μπορούν να οδηγήσουν σε παρανοήσεις χωρίς την αναφορά σε περαιτέρω περιπτώσεις, καθώς ένας/μία μαθητής/τρια μπορεί να παρατηρήσει μόνο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου παραδείγματος, δίνοντας προσοχή στο ίδιο το παράδειγμα και όχι σε αυτό που αντιπροσωπεύει (Zazkis, 2005). Η ίδια, ισχυρίζεται πως εάν η παρουσίαση ενός περιορισμένου συνόλου παραδειγμάτων είναι επικίνδυνη, τότε ο εμπλουτισμός του ρεπερτορίου των παραδειγμάτων των μαθητών/τριών θα μπορούσε να είναι ωφέλιμος. Οπότε, η δυσκολία στην αναγνώριση και την διάκριση των άρρητων από τους ρητούς, λόγω της δεκαδικής τους αναπαράστασης, μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση παραδειγμάτων, τα οποία μπορούν να βοηθήσουν στην εισαγωγή των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, στην αναγνώριση των ιδιοτήτων τους και στη διάκριση των δύο συνόλων.

Μεγάλη πρόκληση, επίσης, αποτελεί για τους εκπαιδευτικούς, στην προπτυχιακή μαθηματική εκπαίδευση, να σταματήσουν τις συνήθειες των μαθητών/τριών σχετικά με την εκτέλεση αλγορίθμων και να στρέψουν την προσοχή τους στις δομές της αναπαράστασης (Zazkis, 2005). Ειδικότερα, η γεωμετρική αναπαράσταση του άρρητου αριθμού μπορεί κάλλιστα να αποδειχθεί ένα πολύ ισχυρό και απαραίτητο εργαλείο διδασκαλίας για την ενθυλάκωση μιας διαδικασίας σε ένα αντικείμενο, ειδικά στην περίπτωση που ο/η μαθητής/τρια βρίσκεται στα πρόθυρα του σταδίου πραγματοποίησης στην ανάπτυξη της έννοιας της αρρητότητας, ωστόσο, εάν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν τις σχετικές γνώσεις περιεχομένου, είναι απίθανο να επιτευχθεί η κατανόηση στους/στις μαθητές/τριες (Sirotic & Zazkis, 2007b). Σύμφωνα με τους Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987) βασικός στόχος για την γνωστική εξέλιξη ενός/μίας μαθητή/τριας, είναι να αντιληφθεί τις αναπαραστάσεις ως μαθηματικά εργαλεία που θα μπορεί να χρησιμοποιήσει κατάλληλα σε μια δεδομένη κατάσταση, έτσι αναμένεται πως ο εκπαιδευτικός, πρώτα, θα αντιλαμβάνεται τις αναπαραστάσεις ως μαθηματικά εργαλεία. Κλείνοντας πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός πως ο καθηγητής πρέπει να είναι ικανός να βοηθήσει ένα παιδί να κατασκευάσει τις γνώσεις του με μια στρατηγική μάθησης που ενσωματώνεται με τις αναπαραστάσεις που ανέπτυξε το ίδιο το παιδί, βέβαια απαιτείται προσοχή καθώς η πρόωρη χρήση μιας αναπαράστασης, όπως και η εφαρμογή της σε ακατάλληλο πλαίσιο, μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά να αναπτύξουν λανθασμένες αντιλήψεις που θα εμποδίσουν τη μετέπειτα μάθηση (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger,1987).

1.11 Κριτική ανασκόπηση

Μεγάλο μέρος της έρευνας σχετικά με την κατανόηση των αριθμητικών συστημάτων από τους/ις μαθητές/τριες, δείχνει ότι οι έννοιες των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών αριθμών είναι δύσκολο να γίνουν αντιληπτές (Fischbein και συν 1995). Ο κύριος λόγος, σύμφωνα με τους Fischbein et al. (1995), είναι ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν δίνουν έμφαση στην ιδέα των μαθηματικών ως συνεκτικό, δομικό οργανωμένο σώμα γνώσεων και έτσι δίνεται λιγότερη έμφαση στη θεωρητική σκέψη. Από τα ευρήματα των ίδιων, φαίνεται πως υπάρχει ισχυρή ένδειξη πως η ηλικία και το εύρος των μαθηματικών γνώσεων του ατόμου παίζουν σημαντικό ρόλο για την καλύτερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών, καθώς τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν αναμενόμενα λίγο καλύτερα, αφού αφορούσαν προϋπηρεσιακούς καθηγητές μαθηματικών. Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς, τόσο τους προϋπηρεσιακούς όσο και τους εν ενεργεία, υπάρχουν έρευνες που έχουν δείξει ότι ενώ οι εκπαιδευτικοί γνώριζαν τους ορισμούς των ρητών και άρρητων αριθμών, όπως και τα βασικά χαρακτηριστικά τους, απέτυχαν σε έργα που απαιτούσαν την ευέλικτη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων (Peled & Hershkovitz, 1999; Arcavi et al., 1987). Ενώ παράλληλα, έχουν πραγματοποιηθεί έρευνες που έδειξαν πως οι ορισμοί των ρητών καθώς και των άρρητων αριθμών δεν ήταν στο ενεργό ρεπερτόριο της γνώσης τους (Fischbein et al., 1995; Zazkis & Sirotic, 2010), με τους Zazkis και Sirotic (2004) να υποστηρίζουν πώς οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών είναι ένας από τους βασικότερους λόγους που επηρεάζουν τις απαντήσεις των συμμετεχόντων σε σχέση με την αρρητότητα των αριθμών.

Επιπλέον, η γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές, με σκοπό τη διερεύνηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών σχετικά με την αναπαράσταση αυτών των αριθμών στην πραγματική ευθεία και με τη σχεδίαση τους ως τμήματα με ακριβή μήκη (Fischbein et al., 1995; Sirotic & Zazkis, 2007b; Peled & Hershkovitz, 1999; Voskoglou & Kosyvas, 2012; Caylan-Ergene & Ergene, 2020). Στην έρευνα των Sirotic & Zazkis (2007b) εντυπωσιακή ήταν η παρατήρηση πως η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων αντιλαμβάνεται το αριθμητική γραμμή ως ευθεία των ρητών. Τα ευρήματα των ερευνών των Peled & Hershkovitz (1999) και των Caylan-Ergene & Ergene (2020) ήταν παρόμοια και έδειξαν πως η πλειοψηφία των συμμετεχόντων μπορούσαν να τοποθετήσουν στην ευθεία των αριθμών το δεδομένο περιοδικό δεκαδικό, σε αντίθεση με τους δοθέντες άρρητους. Πλήρη αποτυχία, έδειξαν τα ποσοτικά αποτελέσματα της πειραματική έρευνας των Voskoglou & Kosyvas (2012) σε μαθητές/τριες του Τ.Ε.Ι. σε διαδικασίες που συνδέονται με γεωμετρικές κατασκευές ασσύμετρων μεγεθών.

Σύμφωνα με τους Zazkis & Sirotic (2004), φαίνεται πως τα συστήματα αριθμών αναπτύσσονται ταυτόχρονα με τις μεθόδους για συμβολική αναπαράσταση, όπως και με τον χειρισμό τους. Ερευνητές οδηγούνται στο συμπέρασμα πως υπάρχει ισχυρή σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται και της κατανόησης των αντίστοιχων εννοιών, καθώς η κατανόηση συνδέεται με την ικανότητα εφαρμογής διάφορων αναπαραστάσεων και της καταλληλότερης επιλογής αυτών, ανάλογα με την προβληματική κατάσταση που έχουν να αντιμετωπίσουν (Zazkis, 2005).

Η παρούσα έρευνα, στοχεύει στη μελέτη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων που είναι στο ενεργό ρεπερτόριο των γνώσεων των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας. Ειδικότερα, θα μελετηθεί αν αναγνωρίζουν συγκεκριμένες αναπαραστάσεις αυτών των συνόλων, ποιες από αυτές που γνωρίζουν αξιοποιούν, καθώς τις θεωρούν κατάλληλες για την παράδοση των συγκεκριμένων εννοιών, κατά την διδασκαλία και με ποια συχνότητα τις χρησιμοποιούν. Επιπλέον, η έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση της σύνδεσης αυτών των αναπαραστάσεων και της κατανόησης των ρητών και άρρητων αριθμών, δηλαδή θα μελετηθούν οι λόγοι για τους οποίους κρίθηκαν ικανές και κατάλληλες οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις για την παρουσίαση αυτών των συνόλων στους/ις μαθητές/τριες.

Κεφάλαιο 2ο: Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

2.1 Στόχος της έρευνας

Στόχος της έρευνας, είναι η διερεύνηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας σχετικά με τις αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών και των αντιλήψεων τους για τη χρήση τους και τα οφέλη τους στη κατανόηση των αντίστοιχων αριθμητικών συνόλων.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

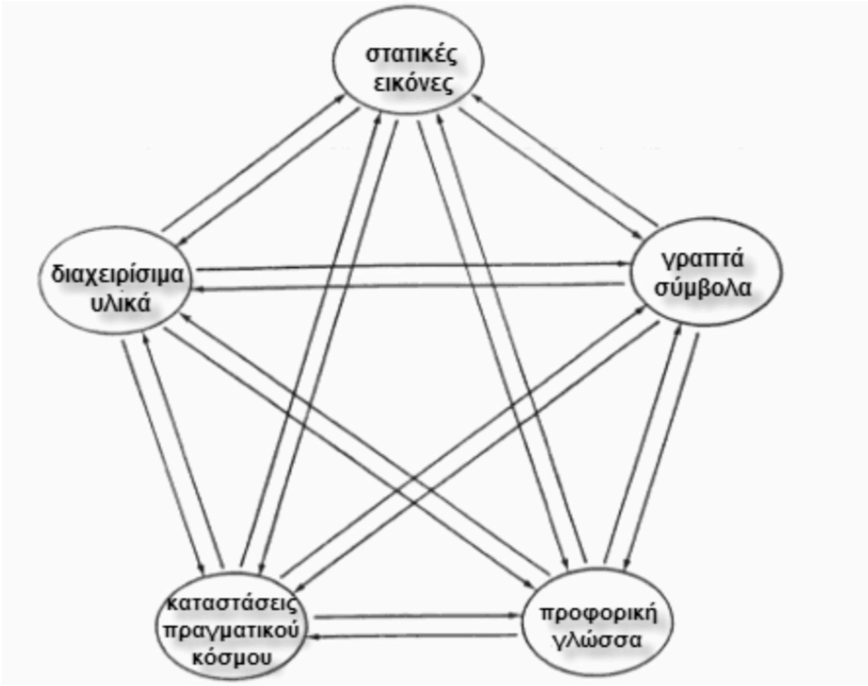
Ειδικότερα, η έρευνα αυτή, καλείται να απαντήσει στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Σε ποιο βαθμό οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας γνωρίζουν τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις και ποιες είναι αυτές;
2. Σε ποιο βαθμό οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας κάνουν χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων, κατά την διδασκαλία αυτών των συνόλων;
3. Κατά την αντίληψη των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, σε ποιο βαθμό η συστηματική χρήση των αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων αριθμών υποστηρίζει την κατανόηση των αντίστοιχων αριθμητικών συνόλων;

2.3 Εννοιολογικοί προσδιορισμοί-αποσαφηνίσεις

Ως απόρροια του σχολικού ορισμού των ρητών, η πιο συνήθης και διαδεδομένη αναπαράσταση των ρητών είναι η κλασματική αναπαράσταση, κατά την οποία ένας ρητός αριθμός μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή α/β, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$ ή ισοδύναμα μπορεί να εκφραστεί ως δεκαδική αναπαράσταση, είτε ως πεπερασμένη είτε ως άπειρη επαναλαμβανόμενη (περιοδική). Επιπλέον, οι Lesh, Post, & Behr (1987), όρισαν πέντε διακριτούς τύπους συστημάτων αναπαράστασης για τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλημάτων, οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν και στη διδασκαλία/μάθηση των ρητών και είναι οι εξής:

1. Οι καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, οι οποίες βασίζονται στην εμπειρία και την καθημερινότητα, κατά την οποία η γνώση οργανώνεται γύρω από δραστηριότητες του πραγματικού κόσμου που χρησιμεύουν ως γενικά πλαίσια για την ερμηνεία αυτής της έννοια.
2. Τα χειραπτικά υλικά ή μοντέλα, όπως οι κλασματικοί κύκλοι, οι ράβδοι Cuisenaire οι κλασματικές λωρίδες, οι αριθμογραμμές κ.α., τα ίδια τα στοιχεία στο σύστημα έχουν μικρή σημασία από μόνα τους, αλλά διαθέτουν ενσωματωμένες σχέσεις και λειτουργίες που ταιριάζουν με τις ιδιότητες, τις πράξεις και τις πραγματικές καταστάσεις στις οποίες εμφανίζονται οι ρητοί αριθμοί.
3. Οι εικόνες ή τα διαγράμματα, που όπως και τα χειραπτικά μοντέλα μπορούν να εσωτερικευθούν ως «εικόνες», για την κατανόηση των ρητών.
4. Η ομιλούμενη γλώσσα, η οποία χρησιμοποιείται με προφορική ή γραπτή μορφή για να δίνονται πληροφορίες και εξηγήσεις, που σχετίζονται με τομείς όπως η λογική κ.λπ..
5. Τα γραπτά σύμβολα, όπως και η ομιλούμενη γλώσσα, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν συνηθισμένες, αλλά και εξειδικευμένες προτάσεις.



Εικόνα 2: Αλληλεπιδραστικό μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh, Behr & Post, 1987)

Ειδικότερα, ο Marshall (1993, όπ. αναφ. στο Moseley, 2005) οριοθετεί πέντε ξεχωριστές ερμηνείες των ρητών, όταν εκφράζονται με την κλασματική αναπαράσταση, καθώς αποτελεί μία σύνθετη έννοια και σκιαγραφεί ένα σχήμα που αποτελείται από τις εξής ερμηνείες:

α) μέρος-όλου, το οποίο δίνει έμφαση σε καταστάσεις στις οποίες ένα μέρος συγκρίνεται με το συνολικό ποσό

β) αναλογία, η οποία δίνει έμφαση σε καταστάσεις στις οποίες συγκρίνονται ξεχωριστές ποσότητες

γ) πηλίκο, που δίνει έμφαση σε καταστάσεις που τονίζουν τη διαδικασία ή το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης

δ) μέτρο, που δίνει έμφαση σε καταστάσεις που αφορούν την απόσταση ενός ρητού αριθμού από το μηδέν και στη σημαντικότητα του

ε) τελεστής, ο οποίος δίνει έμφαση σε καταστάσεις στις οποίες τονίζεται ο ρόλος ενός ρητού αριθμού ως φορείου/συρρίκνωσης ποσοτήτων.

Όσον αφορά τους άρρητους, σύμφωνα με την Kidron (2016), υπάρχουν οι εξής σημειωτικές αναπαραστάσεις των άρρητων:

1. η δεκαδική αναπαράσταση τους, κατά την οποία το δεκαδικό μέρος το αριθμού αποτελείται από άπειρα μη επαναλαμβανόμενα ψηφία
2. η τοποθέτηση των άρρητων αριθμών ως σημεία στην ευθεία των αριθμών

Επιπλέον, σύμφωνα με τους Patel & Varma (2018) οι άρρητοι διακρίνονται:

1. στους αλγεβρικούς άρρητους, οι οποίοι είναι οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές και μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή $\sqrt[y]{x}$, με $x \geq 0$.
2. στους υπερβατικούς άρρητους, οι οποίοι δεν προκύπτουν ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές.

Οι Voskoglou & Kosyvas (2012), όπως έχει προαναφερθεί στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, όρισαν τις διαφανείς και αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις τόσο των ρητών όσο και των άρρητων, η διάκριση έγινε ως εξής:

- Ονομάζεται διαφανής η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, κατά την οποία είναι δυνατό να προβλεφθεί το ψηφίο οποιασδήποτε τάξης του δεκαδικού μέρους του αριθμού.
- Ονομάζεται διαφανής η δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, κατά την οποία παρατηρούνται κανονικότητες στο δεκαδικό μέρος του αριθμού, δηλαδή τα ψηφία τους επαναλαμβάνονται με έναν προφανή νόμο.
- Ονομάζεται αδιαφανής η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, κατά την οποία δεν μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η περίοδος του ρητού αριθμού.
- Ονομάζεται αδιαφανής η δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, κατά την οποία οι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί δεν έχουν συγκεκριμένη κανονικότητα.

Η παρούσα έρευνα, εξετάζει τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων, που ορίζονται με πεπερασμένα στοιχεία ή με άπειρα στοιχεία και τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και άρρητων με άπειρα επαναλαμβανόμενα στοιχεία και με άπειρα στοιχεία, που δεν είναι κανονικώς επαναλαμβανόμενα. Επιπλέον, εξετάζεται η γεωμετρική αναπαράσταση αυτών των συνόλων, ειδικότερα μελετάται η αναπαράσταση αυτών των αριθμών στην πραγματική ευθεία. Η έρευνα έχει περιοριστεί σε αυτές δύο περιπτώσεις των αναπαραστάσεων, καθώς η ευρύτητα και η ευελιξία του συγκεκριμένου θέματος είναι μεγάλη.

Για να επιτευχθεί η κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών αριθμών, σύμφωνα με τις Vamvakoussi & Vosniadou (2007) ο/η μαθητής/τρια καλείται να γνωρίζει ότι το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από στοιχεία που μπορούν να αναπαρασταθούν είτε ως κλάσματα, είτε ως πεπερασμένοι ή περιοδικοί δεκαδικοί και πως παραμένουν αμετάβλητα κάτω από διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, σύμφωνα με την Zazkis (2005) η κατανόηση ότι ένας ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους, αλλά ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις του αναφέρονται στην ίδια μαθηματική οντότητα, απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να γνωρίζουν να κινούνται με ευελιξία μεταξύ των διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών.

Σχετικά με την κατανόηση του συνόλου των άρρητων αριθμών, αυτή μπορεί να επιτευχθεί σύμφωνα με τις Zazkis & Sirotic (2010), όταν αναγνωρίζεται η ισοδυναμία των δύο ορισμών των άρρητων από τους/τις μαθητές/τριες, δηλαδή η ανυπαρξία της κλασματικής αναπαράστασης α/β, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$ και η δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα μη επαναλαμβανόμενα ψηφία. Βασική, βέβαια, προϋπόθεση για την κατανόηση των άρρητων αριθμών σύμφωνα με τους Voskoglou & Kosyvas (2012), είναι η εμπέδωση των γνώσεων τους σχετικά με το σύνολο των ρητών αριθμών.

<u>Κεφάλαιο 3ο: Μεθοδολογία</u>

3.1 Μέθοδος

Στην παρούσα έρευνα, υιοθετήθηκε η ποιοτική ερευνητική προσέγγιση με δομημένες ατομικές συνεντεύξεις, οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν με τη σύμφωνη γνώμη όλων των συνεντευξιαζόμενων, σε συμφωνία με τον κώδικα δεοντολογίας πραγματοποίησης ερευνών. Επιλέχθηκε η δομημένη συνέντευξη, προκειμένου να επιτευχθεί η διερεύνηση τόσο των γνώσεων των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας όσο και των αντιλήψεων τους, για τα οφέλη και τη χρήση, σχετικά με τις ρητές και τις άρρητες αναπαραστάσεις. Κρίθηκε πως η ποιοτική προσέγγιση με χρήση της συνέντευξης ως ερευνητικό εργαλείο, μπορεί να εξασφαλίσει μία πληρέστερη κατανόηση του θέματος, με την αποφυγή γενικών απαντήσεων και με την εστίαση στις αιτιολογήσεις των απαντήσεων αλλά και στη συζήτηση που προκύπτει κατά τη διάρκεια της, καθώς η συνέντευξη αποτελεί μία μέθοδο που περιλαμβάνει τη συλλογή πληροφοριών μέσω της άμεσης λεκτικής συναλλαγής του συνεντευξιαζόμενου και του συνεντευκτή. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης, κατασκευάστηκαν έτσι ώστε να μπορούν να υποστηρίξουν τα ερευνητικά ερωτήματα, ειδικότερα έγινε προσπάθεια να διερευνηθεί κάθε ερευνητικός στόχος με τη βοήθεια τριών ερωτήσεων με τον αντίστοιχο προσανατολισμό.

3.2 Περιγραφή του δείγματος

Το δείγμα της παρούσας έρευνας, αποτέλεσαν 16 εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας, απόφοιτοι του Μαθηματικού τμήματος διαφορετικών Πανεπιστημίων της Ελλάδας. Η επιλογή των εκπαιδευτικών έγινε πριν τη συλλογή των δεδομένων και χρησιμοποιήθηκε η βολική ή ευκολίας δειγματοληψία, καθώς υπήρχε η δυνατότητα επικοινωνίας της ερευνήτριας με τους συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς. Πιο συγκεκριμένα, το δείγμα αποτελούνταν από 2 μόνιμους εκπαιδευτικούς, από 4 αναπληρωτές εκπαιδευτικούς, από 5 εκπαιδευτικούς που εργάζονται σε φροντιστήρια μέσης εκπαίδευσης και από 5 εκπαιδευτικούς που απασχολούνται με την κατ' οίκον διδασκαλία. Παρόλο που το δείγμα ήταν βολικό, έγινε προσπάθεια να επιλεχθούν εκπαιδευτικοί που απασχολούνται τόσο στη δημόσια όσο και στην ιδιωτική εκπαίδευση, τα έτη προϋπηρεσίας τους να καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος και να διαφέρουν ως προς τα ακαδημαϊκά τους προσόντα, δηλαδή να είναι ή όχι κάτοχοι μεταπτυχιακών τίτλων σχετικά με το μαθηματικό αντικείμενο ή με τη διδακτική των Μαθηματικών.

3.3 Ανάλυση του ερευνητικού εργαλείου

Το ερευνητικό εργαλείο της παρούσας έρευνας αποτελεί η δομημένη συνέντευξη, η οποία περιείχε τρεις άξονες ερωτημάτων και κάθε άξονας σχεδιάστηκε ώστε να περιλαμβάνει έργα που να αντιστοιχούν με τα ερευνητικά ερωτήματα και με τους αντίστοιχους ορισμούς, όπως παρουσιάστηκαν στις εννοιολογικές αποσαφηνίσεις του προηγούμενου κεφαλαίου και στόχευαν στην επεξήγηση της κάθε απάντησης.

Ο πρώτος άξονας ερωτημάτων αφορά τις γνώσεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας, σχετικά με τις ρητές και τις άρρητες αναπαραστάσεις. Για την διερεύνηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών χρησιμοποιήθηκαν 3 ερωτήσεις που αφορούν τις 3 διαστάσεις των αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων, την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και άρρητων και την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία. Με αυτόν τον προσανατολισμό, οι πρώτες δύο αναφέρονται στη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και των άρρητων και η τρίτη στην αναπαράσταση των ρητών και άρρητων αριθμών πάνω στη πραγματική ευθεία. Ειδικότερα, στην πρώτη ερώτηση διερευνώνται οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων. Αξιοποιήθηκαν οι πεπερασμένοι δεκαδικοί ρητοί 0,25, 1,58961, 0,589746241637 με 2, 5 και 12 αντιστοίχως δεκαδικά ψηφία και οι άρρητοι δεκαδικοί 0,61…, 3,14159…, 2,718281828459... με τα αντίστοιχα δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά. Η επιλογή αυτών των δεκαδικών, έγινε έτσι ώστε να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό αναγνωρίζουν την δεκαδική αναπαράσταση των ρητών με λίγα, αρκετά και πολλά δεκαδικά ψηφία και αντίστοιχα την δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων όπου εμφανίζονται λίγα, αρκετά και πολλά δεκαδικά ψηφία με αποσιωπητικά στο δεκαδικό τους μέρος. Στην δεύτερη ερώτηση, μελετάται η αναγνώριση της άπειρης επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και της άπειρης μη-επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων από τους εκπαιδευτικούς. Αξιοποιήθηκαν οι ρητοί 1,6464…, 67,19854854…, 2,8254131131131... με περίοδο δύο ψηφίων που ξεκινάει ακριβώς μετά την υποδιαστολή, με περίοδο τριών ψηφίων που ξεκινάει στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο μετά την υποδιαστολή και με περίοδο τριών ψηφίων που ξεκινάει στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο μετά την υποδιαστολή και οι άρρητοι 1,7320…, 12,23606797…, 2,00131311311131111... με 4, 8 και 17 ψηφία, με τον τελευταίο να έχει επαναλαμβανόμενα ψηφία μη-περιοδικά. Με αυτούς τους δεκαδικούς, διερευνάται ο βαθμός αναγνώρισης της άπειρης επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών με περίοδο δύο και τριών ψηφίων που είτε ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή είτε μετά από τρία ή πέντε δεκαδικά ψηφία και της άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων με τα αντίστοιχα δεκαδικά ψηφία, με κάποιους από αυτούς να παρουσιάζουν επαναλαμβανόμενα ψηφία χωρίς κανονικότητες. Στην τελευταία ερώτηση αυτού του άξονα, μελετώνται οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Ο δεύτερος άξονας ερωτημάτων, αφορά τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας για τα οφέλη των ρητών και των άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων και εξετάζεται με τη βοήθεια 3 ερωτήσεων που αφορούν τις 3 διαστάσεις των αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων, την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και άρρητων και την αναπαράσταση των ρητών και των άρρητων στην πραγματική ευθεία. Ειδικότερα, στην τέταρτη ερώτηση παρουσιάζονται οι ρητοί αριθμοί 0,37, 0,89456714, 0,58333…, 3,142857142857…, με σκοπό τη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με το βαθμό που υποστηρίζει τη κατανόηση του συνόλου των ρητών η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με δύο και οχτώ δεκαδικά ψηφία, αντίστοιχα, και η άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση με ένα ψηφίο που ξεκινάει στο τρίτο ψηφίο του δεκαδικού μέρους και με έξι δεκαδικά ψηφία που ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή. Η πέμπτη ερώτηση, με τους άρρητους αριθμούς 3,31…, 3,141592…, 0,282288222888222288882… μελετά τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το βαθμό που υποστηρίζει τη κατανόηση του συνόλου των άρρητων η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση με δύο, πέντε και είκοσι ένα δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, με τον τελευταίο να επαναλαμβάνει τα δεκαδικά του ψηφία χωρίς κανονικότητα. Με τον ίδιο προσανατολισμό, η τελευταία ερώτηση αυτού του άξονα, δηλαδή η έκτη της συνέντευξης διερευνά το βαθμό που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι ωφελεί η αναπαράσταση των ρητών και άρρητων αριθμών στην ευθεία των πραγματικών αριθμών για την κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων.

Ο τρίτος άξονας ερωτημάτων αφορά το βαθμό χρήσης των ρητών και των άρρητων αναπαραστάσεων από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας, κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων στους/ις μαθητές/τριες. Ο βαθμός χρήσης διερευνάται με 3 ερωτήσεις που αφορούν τις 3 διαστάσεις των αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων, την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και άρρητων και την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία. Στην έβδομη ερώτηση, δίνονται οι δεκαδικοί 2,89, 2,25481, 0,0000015928, 3,14…, 0,61803…, 4,3588989435… με σκοπό τη διερεύνηση της συχνότητας με την οποία αξιοποιείται η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με 2, 5 και 10 δεκαδικά ψηφία στους ρητούς και η δεκαδική αναπαράσταση με άπειρο πλήθος ψηφίων των άρρητων με τα αντίστοιχα ψηφία. Στην δεύτερη ερώτηση του άξονα, διερευνάται ο βαθμός χρήσης της άπειρης επαναλαμβανομένης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και της δεκαδικής αναπαράστασης με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία των άρρητων. Η διερεύνηση αυτή γίνεται με τη βοήθεια των αριθμών 17,5252…, 5,123144144…, 0,01234567890123456789…, 1,4142…, 1,618033988…, 1,01001000100001… όπου παρουσιάζεται περιοδικότητα με 2 ψηφία που ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή, με τρία ψηφία που ξεκινάει στο τέταρτο ψηφίο του δεκαδικού μέρους και με 9 ψηφία που παρουσιάζεται αμέσως μετά την υποδιαστολή και με 4, 9 και 14 ψηφία χωρίς κανονικότητας αλλά με επαναλαμβανόμενα ψηφία, αντίστοιχα. Με την τελευταία ερώτηση, αναζητάτε ο βαθμός χρήσης της αναπαράστασης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, τόσο των ρητών όσο και των άρρητων από τους εκπαιδευτικούς κατά την διδακτική προσέγγιση αυτών των συνόλων.

3.4 Ερευνητική διαδικασία

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν τον Ιανουάριο του 2022, μέσω της πλατφόρμας zoom, τόσο με τους εκπαιδευτικούς που κατοικούν στον ίδιο νομό με την ερευνήτρια όσο και με αυτούς εκτός νομού, λόγω της προσπάθειας περιορισμού της εξάπλωσης του Covid-19 και είχαν διάρκεια 30-50 λεπτά. Ο κάθε συμμετέχων είχε στη διάθεση του τις ερωτήσεις, μέσω του διαμοιρασμού της οθόνης της ερευνήτριας και δεχόταν τις προκαθορισμένες ερωτήσεις, έπειτα δινόταν χρόνος στο συμμετέχων προκειμένου να διαβάσει και να κατανοήσει το περιεχόμενο της κάθε ερώτησης. Κατά την διεξαγωγή της έρευνας οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σημειώθηκαν από την ερευνήτρια σε φύλλα παρατήρησης, επιπλέον κρατήθηκαν σημειώσεις σχετικά με τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών, και για την παρουσία των αποτελεσμάτων κρίθηκε πως η ποιοτική προσέγγιση μπορεί να εξασφαλίσει μία πληρέστερη κατανόηση του θέματος. Σε κάθε συνέντευξη, αρχικά σημειώθηκαν τα ταυτοτικά στοιχεία του κάθε εκπαιδευτικού, δηλαδή το όνομα, η ηλικία, τα χρόνια προϋπηρεσίας και τα ακαδημαϊκά του προσόντα και εν συνεχεία ακολούθησαν οι ερωτήσεις, ομαδοποιημένες ανά ερευνητικό άξονα. Η διερεύνηση κατά τη διάρκεια της συνέντευξης επικεντρώθηκε στις επεξηγήσεις των απαντήσεων των συνεντευξιαζόμενων. Τέλος, οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν κα τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν, έτσι ώστε να αναλυθούν και να ερμηνευτούν.

3.5 Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Η εγκυρότητα περιεχομένου του εργαλείου μέτρησης της έρευνας, της συνέντευξης δομημένη σε τρεις άξονες ερωτημάτων, εξασφαλίζεται από την οργάνωση του σε πλήρη αντιστοιχία με τα τρία ερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον, ενισχύεται από την σύνδεση του περιεχομένου των ερωτήσεων που περιλαμβάνει ο κάθε ένας από τους τρεις άξονες με τις εννοιολογικές αποσαφηνίσεις των εννοιών, όπως φαίνεται στην παρουσίαση της ανάλυσης του ερευνητικού εργαλείου στην ενότητα 3.3. Τέλος, η εγκυρότητα υποστηρίζεται από την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων σε συνδυασμό με τις παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια τους και τη μετέπειτα ανάλυση των αποτελεσμάτων σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα.

Η αξιοπιστία του εργαλείου και της διερευνητικής διαδικασία εξασφαλίζεται με το γεγονός ότι έγιναν οι ίδιες διερευνητικές ερωτήσεις με συστηματικό τρόπο σε όλους τους συμμετέχοντες, δηλαδή πραγματοποιήθηκαν οι ίδιες ερωτήσεις με την ίδια σειρά και σε περίπτωση που κρινόταν αναγκαίο οι ίδιες διευκρινιστικές επεξηγήσεις. Ως προς την αξιοπιστία του δείγματος, παρόλο που πραγματοποιήθηκε βολική δειγματοληψία, ωστόσο σύμφωνα με τη ανάλυση των χαρακτηριστικών που έγινε στην παρουσίαση του δείγματος στην ενότητα 3.2 έχουν επιλεγεί χαρακτηριστικά τα οποία βοηθούν στην κατοχύρωση της αξιοπιστίας του δείγματος.

Κεφάλαιο 4°: Αποτελέσματα

4.1 Δείγμα

Πίνακας 4.1: Δημογραφικά στοιχεία

Δημογραφικά στοιχεία	Κατηγορίες	Ν
Φύλλο	΄Άντρας	6
	Γυναίκα	10
Ενασχόληση εκπαιδευτικού	Μόνιμος	2
	Αναπληρωτής	4
	Φροντιστές	5
	Κατ' οίκον διδασκαλία	5
Κάτοχος μεταπτυχιακού	Ναι	7
	Όχι	9

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται συνολικά από 16 εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας και στον Πίνακα 4.1, που ακολουθεί, δίνονται τα δημογραφικά χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών. Από το σύνολο των συμμετεχόντων, 6 είναι άντρες εκ των οποίων 2 είναι αναπληρωτές, 2 είναι εκπαιδευτικοί φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης και 2 απασχολούνται με την κατ' οίκον διδασκαλία και 10 είναι γυναίκες, από τις οποίες οι 2 είναι μόνιμοι εκπαιδευτικοί, 2 είναι αναπληρώτριες, 3 απασχολούνται σε φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης και 3 με την κατ' οίκον διδασκαλία. Οι 7 από τους 16 εκπαιδευτικούς είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος ή είναι στο στάδιο εκπόνησης της διπλωματικής τους εργασία στην Διδακτική των Μαθηματικών και οι υπόλοιποι 9 είτε είναι κάτοχοι μεταπτυχιακών διπλωμάτων διαφορετικών αντικειμένων είτε δεν συνέχισαν σε μεταπτυχιακές σπουδές.

4.2 Γνώσεις εκπαιδευτικών για τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας όπως προέκυψαν μετά τις συνεντεύξεις, από τη συγκέντρωση, την οργάνωση και την ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας για τις ρητές και τις άρρητες αναπαραστάσεις. Θα παρουσιαστούν αναλυτικά τα αποτελέσματα για την δεκαδική αναπαράσταση αυτών των αριθμητικών συνόλων και για την αναπαράσταση τους στην ευθεία των αριθμών.

4.2.1 Γνώσεις για τις πεπερασμένες και άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων

Πίνακας 4.2.1: Αναγνώριση πεπερασμένης και άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης

Αναγνώριση	Ν
Αναγνώριση πεπερασμένης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών	16
Αναγνώριση λόγω σύνδεσης με ορισμό (κλασματική μορφή)	11
Αναγνώριση ως πηλίκο τέλειας διαίρεσης	2
Αναγνώριση λόγω ισοδύναμου ορισμού των ρητών	3
Αναγνώριση άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων	16
Σύνδεση με γνωστούς άρρητους (π, e)	8
Αναγνώριση λόγω αποσιωπητικών	16

Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, σχετικά με τη δεκαδική πεπερασμένη αναπαράσταση των ρητών, μελετήθηκε με την πρώτη ερώτηση της συνέντευξης. Από τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών, φαίνεται ότι η αναγνώριση της πεπερασμένης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών, αντιμετωπίζεται από μικρό πλήθος εκπαιδευτικών ως ένας ισοδύναμος ορισμός τους, με χαρακτηριστική την απάντηση ενός εκπαιδευτικού όπου αναφέρει «Κάθε πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, ανήκει στο σύνολο των ρητών, εξ ορισμού». Από την άλλη, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4.2, για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς η επίτευξη της αναγνώρισης αυτής της αναπαράστασης ως ρητή, είτε με λίγα είτε με περισσότερα δεκαδικά ψηφία, φαίνεται να συνδέεται άμεσα με ισοδύναμες αναπαραστάσεις. Με την βοήθεια του σχολικού ορισμού των ρητών, δηλαδή με την κλασματική αναπαράσταση με ακέραιους όρους και παρονομαστή διαφορετικό του μηδενός, αναγνώρισαν οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί την πεπερασμένη αναπαράσταση, ενώ λίγοι, στο σύνολο 2, συνέδεσαν την δοθέν αναπαράσταση με το πηλίκο μίας τέλειας διαίρεσης. Κάποιος μάλιστα, ανέφερε «Θα εξηγούσα στους μαθητές/τριες πως είναι ρητές οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών 0,25, 1,58961 και 0,589746241637, αφού μπορούν να πάρουν κλασματική μορφή με παρονομαστή δυνάμεις του 10», ενώ ένας άλλος δήλωσε

«Η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, πρέπει να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες πως είναι το πηλίκο μίας τέλειας διαίρεσης και πως το γεγονός αυτό τις κατατάσσει στις ρητές».

Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση, που παρουσιάστηκε στο ίδιο έργο, με 2, 5 και 12 δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά αναγνωρίστηκε, επίσης, από όλους τους εκπαιδευτικούς. Έναν ενδοιασμό, εμφάνισαν 3 εκπαιδευτικοί για το δεκαδικό 0,61… όπου σχολίασαν πως θα ήθελαν λίγα δεκαδικά ψηφία ακόμα για να είναι σίγουροι αν αυτή η δεκαδική μορφή ανήκει στους ρητούς ή στους άρρητους, με έναν εκπαιδευτικό χαρακτηριστικά να αναφέρει «Εδώ δυσκολεύομαι να σου απαντήσω, μπορεί να είναι άρρητη αναπαράσταση, μπορεί και όχι, χρειάζομαι περισσότερα δεκαδικά ψηφία για να έχω μία ολοκληρωμένη εικόνα για αυτήν την αναπαράσταση», αλλά τελικά συγκριτικά με τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις αυτού του έργου κατέταξαν τις αναπαραστάσεις σε ρητές, με πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση και σε άρρητες, με άπειρη δεκαδική αναπαράσταση. Από τις δηλώσεις όλων των εκπαιδευτικών, φαίνεται πως η παρουσία των αποσιωπητικών ήταν καθοριστικός παράγοντας για την αναγνώριση της απειρίας των δεκαδικών ψηφίων και την μετέπειτα κατηγοριοποίηση τους στις άρρητες αναπαραστάσεις. Επιπλέον, οι μισοί εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τον αριθμό π ανάμεσα στους δεκαδικούς και ένας από όλους και τον αριθμό e, γεγονός που φάνηκε να ευνόησε την αναγνώριση της άπειρης δεκαδικής μορφής ως άρρητη αναπαράσταση με τη σύνδεση με γνωστούς άρρητους, με έναν να αναφέρει «Παρατηρώ τη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών π και e, άρα θα εξηγούσα στους/ις μαθητές/τριες πως αυτή είναι δεκαδική προσέγγιση γνωστών άρρητων αριθμών».

4.2.2 Γνώσεις για τις άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων

Πίνακας 4.2.2: Αναγνώριση άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης

Αναγνώριση	n
Αναγνώριση της άπειρης επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και στους 3 δεκαδικούς	9
Αναγνώριση της άπειρης επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών μόνο στον 1,6464…	1

Μη-αναγνώριση της άπειρης επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και στους 3 δεκαδικούς	6
Αναγνώριση της άπειρης μη-επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων και στους 3 δεκαδικούς	12
Μη-αναγνώριση της άπειρης μη-επαναλαμβανόμενης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων στον 2,00131311311131111...	4

Η αναγνώριση της άπειρης περιοδικής δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και της άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων, χωρίς κανονικότητες, ήταν ένα έργο το οποίο έδειξε ελλείψεις στις γνώσεις αρκετών εκπαιδευτικών σχετικά με αυτές τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις. Οι απόψεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας διαφοροποιήθηκαν, ως προς την αξία της περιοδικότητας στην άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, με πολλούς να την αναγνωρίζουν ως μία ιδιότητα των ρητών αναπαραστάσεων, ενώ σημαντικό ήταν και το πλήθος των εκπαιδευτικών, 6 από τους 16, που αναγνώρισαν τις περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις των δεκαδικών, στην ερώτηση 2, αλλά την κατέταξαν στις άρρητες αναπαραστάσεις, με την αντίληψη πως όλες οι άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις είναι άρρητες. Χαρακτηριστικά, ένας από τους εκπαιδευτικούς που αναγνώρισε την άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών 1,6464…, 67,19854854… και του 2,8254131131131... είπε «Θα εξηγούσα στους/ις μαθητές/τριες το προφανές, δηλαδή ότι η περιοδική δεκαδική αναπαράσταση, ανεξαρτήτως από το δεκαδικό ψηφίο όπου ξεκινάει και το πλήθος των ψηφίων της περιόδου, είναι μία ρητή αναπαράσταση», ενώ ένας από τους εκπαιδευτικούς που τις αναγνώρισε ως άρρητες ανέφερε «Όλες οι δεκαδικές αναπαραστάσεις αυτού του ερωτήματος είναι άρρητες αναπαραστάσεις, καθώς αποτελούνται από άπειρα ψηφία και θα εξηγούσα στους/ις μαθητές/τριες πως οι άρρητοι διακρίνονται σε αυτούς που έχουν περιοδική αναπαράσταση και σε αυτούς που δεν έχουν». Η άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση, με κανονικότητες, που παρουσιάστηκε με κάποια ψηφία και με περισσότερα, αναγνωρίστηκε σε όλες τις περιπτώσεις από όλους τους εκπαιδευτικούς που γνώριζαν αυτή τη ρητή αναπαράσταση, με εξαίρεση έναν που θεώρησε μόνο την αναπαράσταση του 1,6464… ως ρητή, και εμφάνισε δυσκολία στην αναγνώριση της περιοδικής αναπαράσταση με περισσότερα ψηφία που δεν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή. Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, αναγνωρίστηκε από το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών, σε όλες τις περιπτώσεις. Με εξαίρεση, την δεκαδική αναπαράσταση του 2,00131311311131111... με επαναλαμβανόμενα ψηφία, μη-κανονικά, που εμφάνισε την παρανόηση των εκπαιδευτικών σχετικά με την εμφάνιση περιοδικότητας, τόσο σε αυτούς που αναγνωρίσουν την περιοδική αναπαράσταση ως ρητή, όσο και σε αυτούς που την αναγνωρίσαν ως άρρητη, με κάποιον από αυτούς, να λέει «Η δεκαδική αναπαράσταση αυτού του αριθμού, είναι περιοδική καθώς το 1, μετά το 13, επαναλαμβάνεται άλλη μία φορά κάθε φορά».

4.2.3 Γνώσεις για την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία

Πίνακας 4.2.3: Αναγνώριση αναπαράστασης στην πραγματική ευθεία

Αναγνώριση	n
Αναπαράσταση ρητών με κλασματική και πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση	5
Αναπαράσταση ρητών μόνο με κλασματική αναπαράσταση	5
Αναπαράσταση ρητών μόνο με πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση	4
Άλλες περιπτώσεις	2
Αναπαράσταση με προσεγγιστική δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων	11
Αναπαράσταση με προσεγγιστική δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων και έργα με Πυθαγόρειο Θεώρημα	3
Αναπαράσταση άρρητων μόνο με γεωμετρική κατασκευή	2

Από τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, φαίνεται αρχικά, πως η γεωμετρική αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία με σύνδεση στη κλασματική τους αναπαράσταση βρίσκει σύμφωνους τους περισσότερους εκπαιδευτικούς, με έμφαση αρχικά στη διάταξη του αριθμού, ώστε να αντιληφθεί ο/η μαθητής/τρια ανάμεσα σε ποιους φυσικούς αριθμούς βρίσκεται και έπειτα να ακολουθήσει ο διαχωρισμός στα αντίστοιχα μέρη του διαστήματος και να επιλέξει τα μέρη αυτά που ορίζει ο αριθμητής. Λιγότερο θετικοί, φάνηκαν οι εκπαιδευτικοί στη αναπαράσταση αυτή των ρητών, με σύνδεση στην δεκαδική αναπαράσταση, με την τάση αυτών των εκπαιδευτικών να αξιοποιούν την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, ενώ σημαντικές φαίνονται οι ελλείψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την αναπαράσταση των ρητών, με άπειρη περιοδική δεκαδική μορφή, στην πραγματική ευθεία. Κάποιος, από τους εκπαιδευτικούς που αξιοποιεί την πεπερασμένη αναπαράσταση είπε «Για την αναπαράσταση των ρητών στην αριθμογραμμή, χρησιμοποιώ ρητούς μόνο με πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, με 1 ή 2 δεκαδικά ψηφία, καθώς η αναπαράσταση γίνεται εύκολα και οι μαθητές/τριες μπορούν να χειριστούν αυτούς τους δεκαδικούς καλύτερα.», ενώ ένας εκπαιδευτικός που ανέφερε πως χρησιμοποιεί την κλασματική και την άπειρη περιοδική αναπαράσταση, συνδυαστικά, για την αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία ανέφερε «Προσπαθώ να τους παρουσιάσω διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου ρητού στην πραγματική ευθεία ώστε να αντιμετωπίσουμε τις παρανοήσεις που παρουσιάζονται για τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού, για παράδειγμα επεξηγώ πως το $\frac{1}{3}$ παριστάνει ακριβώς ένα σημείο πάνω στην ευθεία, το οποίο εν συνεχεία το προσδιορίζω με ακρίβεια, κι έπειτα παρουσιάζω τη άπειρη περιοδική αναπαράσταση του, που είναι το $0{,}333\ldots$.». Η αναπαράσταση του συνόλου των ρητών, στην πραγματική ευθεία δεν συνδέθηκε με άλλες ρητές αναπαραστάσεις, με εξαίρεση έναν εκπαιδευτικό που δήλωσε πως «Κατά τη διδακτική προσέγγιση του συνόλου των ρητών, με τη βοήθεια της πραγματικής ευθείας επεξηγώ, πάντα, στους/στις μαθητές/τριες πως το σημείο αυτό, μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα, ως δεκαδικός και ως ποσοστό και πως όλες αυτές είναι απλά διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου ρητού αριθμού, έτσι μπορεί να επιτευχθεί η κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου».

Για την τοποθέτηση του συνόλου των άρρητων, στην αριθμογραμμή οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας χρησιμοποιούν προσεγγιστικές μεθόδους, στις επεξηγήσεις τους ανέφεραν πως θα υπολόγιζαν τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία γνωστών άρρητων όπως το $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ και το π και με τη βοήθεια της δεκαδικής αναπαράστασης θα τοποθετούσαν κατά προσέγγιση το σημείο, ενώ ελάχιστοι είναι οι εκπαιδευτικοί που χρησιμοποιούν γεωμετρικές κατασκευές για την ακριβή τοποθέτηση τους στην πραγματική ευθεία. Κάποιος από τους εκπαιδευτικούς που χρησιμοποιεί προσεγγιστική μέθοδο χαρακτηριστικά ανέφερε «Για την αναπαράσταση των άρρητων, στην πραγματική ευθεία, χρησιμοποιώ τη δεκαδική προσέγγιση το πολύ με δύο δεκαδικά ψηφία, για να δείξω στους/ις μαθητές/τριες που περίπου βρίσκονται οι αριθμοί αυτοί», ενώ ένας από αυτούς που δήλωσαν πως η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία μπορεί να γίνει μόνο γεωμετρικά είπε «Η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία μπορεί να γίνει μόνο γεωμετρικά, έτσι με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, τη σπείρα των άρρητων και με την χρήση του του τύπου της περιμέτρου του κύκλου, δείχνω στους/ις μαθητές/τριες πως μπορούν να κατασκευάσουν τα αντίστοιχα μήκη των άρρητων.».

4.3 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας σχετικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, ως προς τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων. Ειδικότερα, αναλύθηκαν τα αποτελέσματα ως προς τον βαθμό που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι υποστηρίζει την κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων η δεκαδική αναπαράσταση τους και η τοποθέτηση τους στην πραγματική ευθεία και τους λόγους που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι ωφελούν στον αντίστοιχο βαθμό.

4.3.1 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών, στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου

Πίνακας 4.3.1: Βαθμός υποστήριξης των ρητών δεκαδικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση του συνόλου των ρητών.

Ρητή αναπαράσταση	Πολύ (n)	Αρκετά (n)	Λίγο (n)	Καθόλου (n)
0,37	12	4	0	0
0,89456714	3	6	7	0
0,58333…	7	4	4	1
3,142857142857…	3	5	5	3

Με τη 4^{η} ερώτηση, μελετήθηκε ο βαθμός που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας ότι ωφελεί την κατανόηση του συνόλου των ρητών η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση και η άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση τους. Η αναπαράσταση των ρητών με τα πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία, που αρχικά παρουσιάστηκε με δύο δεκαδικά ψηφία βρίσκει σύμφωνους όλους τους εκπαιδευτικούς σε αντίθεση με τη πεπερασμένη μορφή των ρητών με περισσότερα δεκαδικά ψηφία, που παρουσιάστηκε με τον αριθμό 0,89456714 όπου ανταποκρίνονται αρνητικά οι μισοί, περίπου, εκπαιδευτικοί για τη σημασία της στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου. Από τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών αναδεικνύεται η αντίληψη πως η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση του 0,37, μπορεί εύκολα να συνδεθεί με την κλασματική μορφή του και για τον λόγο αυτό επεξήγησαν πως η ύπαρξη λίγων δεκαδικών ψηφίων ευνοεί την κατανόηση των μαθητών/τριών. Επιπλέον, η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με λίγα δεκαδικά ψηφία παρουσιάστηκε από πολλούς εκπαιδευτικούς ως έλλειψη της άπειρης περιοδικής αναπαράστασης με την αντίληψη πως είναι ένα πλεονέκτημα αυτής της μορφής για την κατανόηση των ρητών από τους/ις μαθητές/τριες. Από την άλλη, για τη πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία, κάποιοι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι ο τρόπος αυτός μπερδεύει με τον αριθμό των ψηφίων, καθώς πιστεύουν ότι τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία οδηγούν τους/τις μαθητές/τριες σε παρανοήσεις σχετικά με το είδος του αριθμού ενώ άλλοι υποστηρίζουν πως οι μαθητές/τριες εμφανίζουν δυσκολίες με την μετατροπή της δεκαδικής αναπαράστασης σε κλασματική όταν τα δεκαδικά ψηφία είναι πολλά. Κάποιος μάλιστα που θεωρεί ότι υποστηρίζει η αναπαράσταση αυτή με λίγα δεκαδικά ψηφία, την κατανόηση λέει «Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να ωφελήσει σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση των ρητών καθώς οι μαθητές/τριες εύκολα μπορούν να ανακαλύψουν άλλες αναπαραστάσεις του ίδιου ρητού, όπως η κλασματική ή η ποσοστιαία, και η σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων θα έχει ως αποτέλεσμα την κατανόηση του συνόλου των ρητών.», ενώ ένας που δεν βρίσκεται σύμφωνος με την πεπερασμένη αναπαράσταση με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία υποστηρίζει «Η αναπαράσταση του 0,89456714, δεν μπορεί να ευνοήσει την κατανόηση των ρητών, καθώς το πλήθος των ψηφίων μπορεί εύκολα να οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες σε παρανοήσεις, καθώς μπορεί να θεωρήσουν ότι συνεχίζονται τα ψηφία, διότι δεν είναι συνηθισμένοι στη παρουσίαση δεκαδικού μέρους με πολλά ψηφία.».

Η άπειρη περιοδική αναπαράσταση που παρουσιάζεται με περίοδο ενός ψηφίου και δεν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή υποστηρίζει την κατανόηση του συνόλου των ρητών, σύμφωνα με ένα σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, ενώ η περιοδική μορφή με περίοδο 6 ψηφίων του αριθμού 3,142857142857… διαφοροποιήθηκε από τους εκπαιδευτικούς, ως προς την σημασία της για την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η μικρή περίοδος ενός ψηφίου γίνεται εύκολα κατανοητή και μπορεί με γνωστή διαδικασία να μετατραπεί σε κλασματική μορφή, ανεξαρτήτως του δεκαδικού ψηφίου που ξεκινάει, παράλληλα οι ίδιοι εκπαιδευτικοί δεν είναι σύμφωνοι με την άπειρη περιοδική αναπαράσταση με μεγάλη περίοδο, με την αιτιολόγηση πως αυτή η περιοδική δεκαδική αναπαράσταση δεν είναι βολικά παρατηρίσιμη όποτε δυσκολεύεται η διαδικασία της σύνδεσης με την κλασματική αναπαράσταση, φέρνοντας στην επιφάνεια την αντίληψη αυτών των εκπαιδευτικών πως όφελος στην κατανόηση των μαθητών/τριών έχει η μικρή περίοδος, ανεξαρτήτως το δεκαδικό ψηφίο που ξεκινάει. Από την άλλη, υπάρχει η αντίληψη πως η κατανόηση ευνοείται όταν η περίοδος ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή στην άπειρη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση, με ένα μικρό μέρος των εκπαιδευτικών, 4 από τους 16, να πιστεύουν πως μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση για την αναγνώριση της περιοδικότητας του αριθμού, 0,58333… που δεν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή η περίοδος και με αυτόν τον προσανατολισμό να ανταποκρίνονται θετικά στην αναπαράσταση του 3,142857142857… που η περίοδος αποτελείται από περισσότερα ψηφία αλλά ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή. Με έναν εκπαιδευτικό, που έχει την αντίληψη πως ωφελεί η μικρή περίοδος ανεξαρτήτως της δεκαδικής θέσης που ξεκινάει, να λέει «Η δεκαδική περιοδική αναπαράσταση των ρητών, για να μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση του συνόλου πρέπει να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τους/ις μαθητές/τριες, έτσι είναι μεγαλύτερο το όφελος μίας μικρής περιόδου, με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία που ξεκινάει σε οποιαδήποτε δεκαδική θέση, καθώς το επαναλαμβανόμενο μοτίβο θα αναγνωριστεί χωρίς μεγάλη προσπάθεια.», ενώ ένας άλλος, που έχει την αντίληψη ότι η κατανόηση υποστηρίζεται από την περιοδική μορφή που ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή ανεξαρτήτως πλήθους, να δηλώνει «Η κατανόηση επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές/τριες είναι ικανοί να υπολογίσουν τα επαναλαμβανόμενα ψηφία, για το λόγο αυτό ευνοούν οι δεκαδικές αναπαραστάσεις να έχουν περίοδο λίγων ή πολλών ψηφίων, αρκεί να ξεκινάνε αμέσως μετά την υποδιαστολή για να μην γίνουν παρανοήσεις με τις άπειρες άρρητες αναπαραστάσεις, με τον κίνδυνο να μην αναγνωριστεί η περιοδικότητα της αναπαράστασης».

4.3.2 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη των δεκαδικών αναπαραστάσεων των άρρητων, στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου

Πίνακας 4.3.2: Βαθμός υποστήριξης των άρρητων δεκαδικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση του συνόλου των άρρητων

Άρρητη αναπαράσταση	Πολύ (n)	Αρκετά (n)	Λίγο (n)	Καθόλου (n)
3,31…	4	2	6	4
3,141592…	5	9	2	0
0,2822882228882222888882...	4	2	9	1

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της 5ης ερώτησης, όπου μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας για τον βαθμό που θεωρούν, ότι οι άρρητες δεκαδικές αναπαραστάσεις με διαφορετικό πλήθος ψηφίων υποστηρίζουν την κατανόηση του συνόλου των ρητών. Η αναπαράσταση με τα άπειρα δεκαδικά που όμως παρουσιάζεται με λίγα δεκαδικά ψηφία ή πολλά δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, όπως στις αναπαραστάσεις των αριθμών 3,31… και 0,2822882228882222888882... δεν βρίσκει σύμφωνους τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, θεωρούν ότι ο τρόπος αυτός μπερδεύει με τον αριθμό των ψηφίων, με κάποιους να αναφέρουν πως η αναπαράσταση με 2 δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, μπορεί ευκολά να αναγνωριστεί ως ρητή περιοδική αναπαράσταση και δίνουν πιθανότητα να εμφανίσουν οι μαθητές/τριες τη παρανόηση πως τα αποσιωπητικά, υπονοούν την επανάληψη του τελευταίου δεκαδικού ψηφίου, στην περίπτωση αυτή του 1, ενώ άλλοι θεωρούν πως τα λίγα δεκαδικά ψηφία δεν ευνοούν την αντίληψη της έννοιας της απειρίας. Παράλληλα, οι ίδιοι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως η δεκαδική αναπαράσταση, με μεγάλο πλήθος δεκαδικών ψηφίων δεν υποστηρίζει την κατανόηση, καθώς δεν είναι εύχρηστα παραδείγματα για την διδακτική προσέγγιση αυτού του συνόλου. Από την άλλη, ανταποκρίθηκαν θετικά στην δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού 3,141592…, που παρουσιάζεται ούτε με λίγα ούτε με πολλά δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, με την αντίληψη πως αυτός είναι ο ιδανικός αριθμός για να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες ότι δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία με κανονικότητα στην άπειρη δεκαδική μορφή και άρα ικανοποιείται ο ισοδύναμος ορισμός των άρρητων αριθμών του σχολικού εγχειριδίου, ώστε να ευνοηθεί η κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου. Σε διαφορετικό προσανατολισμό, η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων που παρουσιάστηκε με λίγα ή πολλά δεκαδικά ψηφία, θεωρήθηκε ωφέλιμη από λίγους εκπαιδευτικούς. Με ένα μικρό μέρος των εκπαιδευτικών να θεωρεί πως δύο μη-επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά είναι αρκετά για να αντιληφθούν την έννοια της απειρίας που είναι το χαρακτηριστικό της δεκαδικής άρρητης αναπαράστασης, για τον αριθμό 3,31…, και το ίδιο μέρος του δείγματος δήλωσε ότι υποστηρίζει την κατανόηση των μαθητών/τριών η αναπαράσταση του 0,28228822288822288882..., καθώς οι μαθητές/τριες εστιάζουν στο μεγάλο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων έχοντας την αντίληψη ότι όσα περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει η δεκαδική αναπαράσταση τόσο πιο εύκολη είναι η κατανόηση της απειρίας, άρα και η κατανόηση της έννοιας του άρρητου. Με έναν εκπαιδευτικό που έχει την αντίληψη πως η κατανόηση δεν ευνοείται από τα λίγα δεκαδικά ψηφία να λέει «Η αναπαράσταση του 3,31…, δεν μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση του συνόλου των άρρητων γιατί στους/ις μαθητές/τριες η αναπαράσταση αυτή θα θυμίζει την περιοδική αναπαράσταση του ρητού 3,31111….», ενώ ένας που θεωρεί σημαντικό τον ρόλο τους για τη σημασία των άρρητων να δηλώνει «Το παράδειγμα αυτής της αναπαράστασης με δύο δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, είναι αρκετά ικανό να ευνοήσει της έννοιας της αναπαράστασης καθώς τους άρρητους αριθμούς με τη συμβολική αναπαράσταση των ριζών, τους προσεγγίζουμε συνήθως κατά την διδακτική προσέγγιση με τόσα δεκαδικά ψηφία και πάντα με την παρουσία αποσιωπητικών για να μην ξεχνάνε την απειρία του δεκαδικού μη-επαναλαμβανόμενου δεκαδικού μέρους.».

Επιπλέον, η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, με επαναλαμβανόμενα ψηφία, χωρίς κανονικότητες, δεν θεωρήθηκε ωφέλιμη από πολλούς εκπαιδευτικούς με την αντίληψη πως αυτή η μορφή αναπαράστασης μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση στους/ις μαθητές/τριες σχετικά με την περιοδική αναπαράσταση που αποτελεί χαρακτηριστικό του συνόλου των ρητών, ενώ λίγοι εκπαιδευτικοί την θεώρησαν ένα μέσω για την αντιμετώπιση αυτής της παρανόησης. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση ενός από τους εκπαιδευτικούς, που ανέφερε πως δεν υποστηρίζει καθόλου την κατανόηση λόγω των επαναλαμβανόμενων ψηφίων, αναφέροντας πως «Αυτή η δεκαδική αναπαράσταση κάθε άλλο από ωφέλιμη είναι, καθώς το μεγάλο πλήθος επαναλαμβανόμενων ψηφίων σε άρρητη αναπαράσταση μπορεί εύκολα να ερμηνευτεί σαν ρητή αναπαράσταση και δεν πρέπει να παρουσιάζονται τέτοιες ειδικές περιπτώσεις παραδειγμάτων κατά την διδακτική προσέγγιση των άρρητων», ενώ ένα άλλος εκπαιδευτικός που θεωρεί ότι μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση λέει «Αυτή η άρρητη αναπαράσταση, είναι ένα εργαλείο και να αντιμετωπίσουμε την παρανόηση της περιοδικότητας, που είναι χαρακτηριστικό μόνο των ρητών αναπαραστάσεων και μπορεί να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών, δημιουργώντας πεδίο συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης με τελικό στόχο την κατανόηση τόσο του συνόλου των ρητών όσο και των άρρητων. Για την ακρίβεια, μου έδωσες πολύ ωραία ιδέα, την οποία πλέον θα την συμπεριλάβω στο μάθημα μου για την παρουσίαση του αντίστοιχου συνόλου». Τέλος, την αντίληψη πως οι άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις, που ανήκουν σε δημοφιλής άρρητους αριθμούς, ευνοούν την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου, έχουν επίσης αρκετοί εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας, αυτό έγινε φανερό από την αναγνώριση του δεκαδικού αριθμού 3,141592… ως τον αριθμό π και με τον σχολιασμό των εκπαιδευτικών πως αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα άρρητης αναπαράστασης, που πρέπει να περιέχεται στην διδακτική προσέγγιση για την καλύτερη κατανόηση των άρρητων.

4.3.3 Αντιλήψεις για τα οφέλη στην κατανόηση των συνόλων των ρητών και άρρητων από την αναπαράσταση τους στην πραγματική ευθεία

Πίνακας 4.3.3: Βαθμός υποστήριξης στην κατανόηση του συνόλου των άρρητων, από την αναπαράσταση τους στην πραγματική ευθεία

Αναπαράσταση	Πολύ (n)	Αρκετά (n)	Λίγο (n)	Καθόλου (n)
Ρητή	6	6	4	0
Τεκμηριωμένες απαντήσεις	2	1	1	0
Άρρητη	5	5	5	1
Τεκμηριωμένες απαντήσεις	2	1	2	0

Η αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία βρίσκει σύμφωνους τους περισσότερους εκπαιδευτικούς, ως προς τα οφέλη που αποδίδουν στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου. Κάποιοι εκπαιδευτικοί, θεωρούν πως η τοποθέτηση στην ευθεία των αριθμών υποστηρίζει την κατανόηση, καθώς η οπτικοποίηση των ρητών αριθμών στην πραγματική ευθεία, σε συνδυασμό με την παρουσίαση της κλασματικής και της δεκαδικής αναπαράστασης, μπορεί να ωφελήσει αρκετά την κατανόηση του συνόλου των ρητών για τους/ις μαθητές/τριες με την παρουσίαση των διαφορετικών αναπαραστάσεων τους. Ταυτόχρονα, και άλλοι εκπαιδευτικοί έχουν θετική στάση για τα οφέλη της αναπαράστασης των ρητών στην πραγματική ευθεία, χωρίς όμως να μπορούν να τεκμηριώσουν την άποψη τους για τον τρόπο με τον οποίο επιτυγχάνεται η κατανόηση μέσω της τοποθέτησης στην πραγματική ευθεία και δίνοντας γενικευμένες απαντήσεις για τα οφέλη της αριθμογραμμής. Μάλιστα, κάποιος από τους εκπαιδευτικούς που βρίσκει ωφέλιμη την χρήση της αναπαράστασης στην κατανόηση ανέφερε πως «Υποστηρίζει την κατανόηση, καθώς είναι ένα μέσο ώστε οι μαθητές/τριες να αντιληφθούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού, για παράδειγμα όταν τοποθετούμε το κλάσμα $\frac{1}{3}$ στην πραγματική ευθεία και επεξηγήσουμε πως ισούται με την άπειρη περιοδική αναπαράσταση του $0{,}333\ldots$, οι μαθητές/τριες κατανοούν πολύ καλύτερα το σύνολο των ρητών, διότι βλέπουν ταυτόχρονα 3 διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού.», ενώ ένας άλλος εκπαιδευτικός που έδωσε γενικευμένη απάντηση είπε «Γενικά, είναι βοηθητικό να τους αναπαριστάνουμε στην ευθεία όλους τους αριθμούς, ειδικά το σύνολο των ρητών γιατί επιτυγχάνουμε την συσχέτιση με τους πραγματικούς αριθμούς και αυτό θα βοηθήσει να καταλάβουν καλύτερα το σύνολο των ρητών, μέσω της διάταξης». Την τοποθέτηση των ρητών στην πραγματική ευθεία, λίγοι εκπαιδευτικοί δεν την βρίσκουν ωφέλιμη για την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου, με 4 από τους 16 εκπαιδευτικούς να δηλώνουν πως υποστηρίζει λίγο την κατανόηση και να έχουν την αντίληψη πως μπορεί να βοηθήσει εν μέρη στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου, καθώς μπορεί να γίνει σύνδεση με μία ακόμα αναπαράσταση, είτε την κλασματική είτε την δεκαδική, σε μία από αυτές τις απαντήσεις ένας εκπαιδευτικός ανέφερε χαρακτηριστικά πως «Είναι ωφέλιμη μόνο για την κατανόηση της δεκαδικής αναπαράσταση των ρητών, διότι για τις κλασματικές αναπαραστάσεις προτιμώ άλλους τρόπους αναπαράστασης».

Ο βαθμός που υποστηρίζει την κατανόηση του συνόλου των άρρητων, η τοποθέτηση τους στην πραγματική ευθεία φάνηκε να προβλημάτισε τους περισσότερους εκπαιδευτικούς, καθώς απαιτήθηκε περισσότερος χρόνος για να απαντήσουν σε σχέση με κάθε άλλη ερώτηση και πολλοί εκπαιδευτικοί ανταποκρίθηκαν χωρίς τεκμηρίωση στις απαντήσεις τους. Επιπλέον, οι απόψεις των εκπαιδευτικών διαφοροποιήθηκαν ως προς την σημασία της αναπαράστασης των ρητών στην πραγματική ευθεία για την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου. Κάποιοι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως η αναπαράσταση αυτή, υποστηρίζει την κατανόηση του συνόλου των άρρητων με την αντίληψη πως μέσω αυτής της διαδικασίας θα βοηθηθούν οι μαθητές/τριες να καταλάβουν ότι οι ρίζες μη-αρνητικών αριθμών είναι πραγματικοί αριθμοί και όχι διαδικασίες, όπως πιστεύουν συχνά σύμφωνα με τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών, και πως η αντιμετώπιση αυτής της παρανόησης θα ευνοήσει την επίτευξη της κατανόησης του αντίστοιχου συνόλου, επιπλέον πιστεύουν πως η αναγνώριση της ισοδυναμίας των διαφορετικών αναπαραστάσεων ενός άρρητου υποστηρίζει την σημασία αυτού του συνόλου. Σύμφωνοι με την αναπαράσταση αυτή, είναι και άλλοι εκπαιδευτικοί οι οποίοι θεωρούν ότι υποστηρίζει την κατανόηση καθώς αναδεικνύει την πυκνότητα της πραγματικής ευθείας, αφού με την τοποθέτηση των άρρητων οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται ότι, δεν υπάρχουν κενά σε αυτήν αλλά κάθε σημείο αντιστοιχεί σε έναν ακριβώς αριθμό, βέβαια η αντίληψη αυτή δεν συσχετίζεται με την κατανόηση της έννοιας των άρρητων αλλά με τις ιδιότητες αυτού του συνόλου, στον ίδιο προσανατολισμό υπήρχαν και άλλες απαντήσεις μη-τεκμηριωμένες ή γενικευμένες. Από την άλλη, ένα μέρος του δείγματος των εκπαιδευτικών δεν αναγνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να υποστηρίξει η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου, με 2 εκπαιδευτικούς να δηλώνουν πως την τοποθέτηση των αριθμών οι μαθητές/τριες δεν την καταλαβαίνουν καλά καθώς δεν μπορούν να βρουν τα σημεία με ακρίβεια, άρα δεν μπορεί να ωφελήσει στην κατανόηση μίας άλλης έννοιας η αριθμογραμμή και άλλους να έχουν αρνητική στάση για τα οφέλη της, χωρίς όμως να μπορούν να το υποστηρίξουν την άποψη τους. Ένας εκπαιδευτικός που τεκμηρίωσε την άποψη του σχετικά με τα οφέλη της τοποθέτησης στην πραγματική ευθεία, δήλωσε πως «Η αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία, με τη βοήθεια γεωμετρικών εργαλείων μπορεί να συμβάλει αρκετά στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου, καθώς η οπτικοποίηση του άρρητου, συμβάλει στην αντίληψη του αντίστοιχου μήκους και έτσι γίνεται σύνδεση των διαφορετικών τους αναπαραστάσεων.», ενώ ένας από τους εκπαιδευτικούς που δεν την είναι της ίδιας άποψης είπε πως «Η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία δεν βοηθά τους/ις μαθητές/τριες με κάποιον τρόπο στην κατανόηση του συνόλου των άρρητων, αρκεί για την επίτευξη της η παρουσίαση τους με τον σχολικό ορισμό.»

4.4 Βαθμός χρήσης των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων κατά τη διδακτική προσέγγιση των αντίστοιχων συνόλων

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας σχετικά με τη συχνότητα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις. Ειδικότερα, αναλύθηκαν τα αποτελέσματα ως προς το βαθμό συχνότητας της χρήσης των δεκαδικών αναπαραστάσεων τόσο των ρητών όσο και των άρρητων αριθμών και της αναπαράστασης τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, επιπλέον, αναφέρονται οι λόγοι που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί να αξιοποιούν κατά την διδακτική τους προσέγγιση την κάθε αναπαράσταση με την αντίστοιχη συχνότητα.

4.4.1 Βαθμός χρήσης των πεπερασμένων και άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων

Πίνακας 4.4.1: Βαθμός χρήσης των πεπερασμένων και άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων

Αριθμοί	Πολύ συχνά (n)	Συχνά (n)	Σπάνια (n)	Καθόλου (n)
2,89	14	2	0	0
5,25481	4	4	8	0
0,0000015928	0	2	7	7
3,14…	10	2	1	3
0,61803…	4	5	6	1
4,3588989435…	1	3	6	6

Με την 7η ερώτηση, μελετήθηκε ο βαθμός χρήσης των πεπερασμένων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και των άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των άρρητων, από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων. Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.4.1, με μεγάλη συχνότητα χρησιμοποιείται η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση που παρουσιάζεται με δύο δεκαδικά ψηφία στον αριθμό 2,89, η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με περισσότερα δεκαδικά ψηφία του 5,25481 δεν αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό, ενώ η αναπαράσταση του πεπερασμένου ρητού 0,0000015928 με πολλά δεκαδικά ψηφία δεν προτιμάται από τους εκπαιδευτικούς για την διδακτική προσέγγιση αυτού του συνόλου.

Η συστηματική χρήση πεπερασμένων δεκαδικών αναπαραστάσεων με λίγα δεκαδικά ψηφία, προτιμάται από τους εκπαιδευτικούς καθώς έχουν την αντίληψη πως αυτές οι αναπαραστάσεις είναι αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των ρητών αφού η μικρή πεπερασμένη δεκαδική μορφή ευνοεί την κατανόηση τους έχοντας το πλεονέκτημα πως μπορεί ευκολά να συνδεθεί με την κλασματική αναπαράσταση και έγινε φανερή από τις απαντήσεις όλων των εκπαιδευτικών. Παράλληλα, η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με πολλά δεκαδικά ψηφία, του αριθμού 0,0000015928, δεν είναι στην ατζέντα των περισσότερων εκπαιδευτικών για την διδακτική προσέγγιση των ρητών, με κάποιους να έχουν την αντίληψη πως η συγκεκριμένη αναπαράσταση δεν είναι ωφέλιμη, αφού δεν θα την χρειαστούν στα σχολικά μαθηματικά και άλλους με την άποψη πως οι μαθητές/τριες δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτό τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων. Με έναν εκπαιδευτικό που χρησιμοποιεί τα λίγα δεκαδικά ψηφία στην πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση να λέει «Την πεπερασμένη αναπαράσταση του 2,89, την χρησιμοποιώ κάθε φορά όταν παρουσιάζω το σύνολο των ρητών, καθώς είναι μία αναπαράσταση που οι μαθητές/τριες την συνδέουν αμέσως με την κλασματική, αλλά και με άλλες αναπαραστάσεις και έτσι κατανοούν εύκολα ότι είναι μία ρητή αναπαράσταση και δεν το ξεχνούν λόγω της σύνδεσης των αναπαραστάσεων» και έναν εκπαιδευτικό που δεν αξιοποιεί την πεπερασμένη αναπαράσταση με πολλά δεκαδικά ψηφία χαρακτηριστικά να αναφέρει «Δεν χρησιμοποιώ ποτέ τέτοια παραδείγματα δεκαδικών αναπαραστάσεων κατά την παρουσίαση των άρρητων, δεν έχω σκεφτεί καν να τα αναφέρω για την ακρίβεια, καθώς τα παιδιά δεν είναι εξοικειωμένα με τόσα δεκαδικά ψηφία κατά τον αλγόριθμο της διαίρεσης, προτιμώ να παρουσιάζω παραδείγματα με λιγότερα δεκαδικά ψηφία, που θα μπορούν να συνδεθούν εύκολα και με άλλες ρητές αναπαραστάσεις».

Η ανάλυση των απαντήσεων έδειξε πως, 10 από τους 16 εκπαιδευτικούς, χρησιμοποιεί «Πολύ συχνά» την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση με δύο δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά των άρρητων κατά την διδασκαλία αυτού του συνόλου, αναδεικνύοντας την αντίληψη πως αυτές οι αναπαραστάσεις είναι πιο εύχρηστες κατά την επίλυση ασκήσεων, λόγω του μικρού πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, και πιο χρήσιμες για τους/ις μαθητές/τριες αφού κατά βάση θα χρησιμοποιούν τέτοια δεκαδική προσέγγιση στα σχολικά μαθηματικά, με έναν από τους εκπαιδευτικούς που έχουν αυτή την αντίληψη να αναφέρει «Χρησιμοποιώ τη δεκαδική άρρητη αναπαράσταση, με δύο δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά κάθε φορά που παρουσιάζω το σύνολο των άρρητων, καθώς είναι η δεκαδική μορφή που θα χρειαστούν οι μαθητές/τριες πιο πολύ, άλλωστε από την πρώτη τους επαφή με τους άρρητους, που ήταν η παρουσίαση του άρρητου π ζητούσαμε από τους/ις μαθητές/τριες να θυμούνται ότι είναι περίπου το

3,14». Από την άλλη, λίγοι ήταν οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν πως δεν χρησιμοποιούν καθόλου την αναπαράσταση του 3,14…, καθώς θεωρούν πως ο μικρός αριθμός δεκαδικών ψηφίων μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις στους/ις μαθητές/τριες σχετικά με τις ρητές περιοδικές αναπαραστάσεις με έναν εκπαιδευτικό να αναφέρει «Δεκαδική αναπαράσταση σαν αυτή, δεν χρησιμοποιώ κατά την παρουσίαση των άρρητων καθώς μπορεί εύκολα να δημιουργήσει παρανοήσεις στους/ις μαθητές/τριες με την περιοδική αναπαράσταση, με τον κίνδυνο να θεωρηθεί ότι τα αποσιωπητικά υποδεικνύουν την επανάληψη της περιόδου με ένα ψηφίο, στην συγκεκριμένη περίπτωση του 4». Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση με περισσότερα δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, όπως παρουσιάστηκε με τον αριθμό 0,61803…, δεν χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.4.1, κατά την παρουσίαση του συνόλου των άρρητων. Κάποιοι εκπαιδευτικοί, 4 από τους 16, απάντησαν πως την χρησιμοποιούν «Πολύ συχνά», με την αντίληψη πως αυτό το πλήθος των ψηφίων είναι το ιδανικό ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες ότι δεν επαναλαμβάνονται τα άπειρα ψηφία, ενώ άλλοι, 6 από τους 16 εκπαιδευτικούς, δήλωσαν πως «Σπάνια» χρησιμοποιούν αυτή την αναπαράσταση των άρρητων, υποστηρίζοντας πως η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση αυτών των αριθμών γίνεται φανερή και με λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Τέλος, η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση με 10 δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά του αριθμού 4,3588989435…, φαίνεται πως δεν χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς σχεδόν καθόλου, με 12 από τους 16 εκπαιδευτικούς να δίνουν την απάντηση πως την χρησιμοποιούν σπάνια ή καθόλου. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, απέρριψαν παραδείγματα τέτοιας αναπαράστασης λόγω του πλήθους των ψηφίων, κάνοντας φανερή την αντίληψη πως οι μαθητές/τριες κατανοούν την έννοιας της απειρίας και με λιγότερα δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, ενώ διαφορετική άποψη είχε ένας από τους εκπαιδευτικούς, που θεωρεί πως κατά την παρουσίαση των άρρητων πρέπει να παρουσιαστούν διαφορετικές αναπαραστάσεις τους ώστε να επιτευχθεί η κατανόηση και χαρακτηριστικά να λέει πως «Φυσικά, και χρησιμοποιώ πολύ συχνά αυτήν την αναπαράσταση, για την ακρίβεια κάθε φορά που παρουσιάζω τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων, καθώς θέλω οι μαθητές/τριες να δουν διαφορετικές αναπαραστάσεις τους, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του συνόλου και την μετέπειτα αναγνώριση αυτών των αριθμών».

4.4.2 Βαθμός χρήσης των άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων

Πίνακας 4.4.2: Βαθμός χρήσης τω άπειρων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και άρρητων

Αριθμοί	Πολύ συχνά (n)	Συχνά (n)	Σπάνια (n)	Καθόλου (n)
17,5252…	7	8	0	1
5,123144144…	0	3	11	2
0,01234567890123456789…	1	1	3	11
1,4142…	2	7	3	4
1,618033988…	1	4	7	4
1,01001000100001…	0	3	3	10

Με μεγάλη συχνότητα, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.4.2, χρησιμοποιείται η άπειρη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση με περίοδο 2 ψηφίων, με 15 από τους 16 εκπαιδευτικούς να απαντούν πως ο βαθμός χρήσης της είναι «Πολύ Συχνά» ή «Συχνά». Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών ήταν παρόμοιες και όλοι θεωρούν πως παραδείγματα με αυτή την αναπαράσταση είναι από τα πρώτα και πιο σημαντικά, για την κατανόηση, καθώς η περίοδος ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή και αποτελείται μόνο από δύο ψηφία, γεγονός που το καθιστά ευνοϊκό για την παρουσίαση της περιοδικότητας των ρητών. Με έναν εκπαιδευτικό που απάντησε πως αξιοποιεί «Πολύ συχνά» την αναπαράσταση, να αναφέρει «Κατά την διδασκαλία των ρητών, βασικός στόχος είναι η κατανόηση της περιοδικότητας αυτού του συνόλου έτσι τα πρώτα παραδείγματα που δείχνω στην τάξη θέλω να έχουν αυτή την αναπαράσταση, δηλαδή ένα απλό επαναλαμβανόμενο μοτίβο το οποίο εύκολα μπορεί να αναγνωριστεί, ώστε να είμαι σίγουρος ότι το κατανόησαν.». Την άπειρη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση του 5,123144144…, με περίοδο τριών ψηφίων που ξεκινάει στο 4ο δεκαδικό ψηφίο, δεν την χρησιμοποιούν με μεγάλη συχνότητα οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί του δείγματος. Σπάνια, δήλωσαν 11 από τους 16 εκπαιδευτικούς, πως αξιοποιούν αυτή την αναπαράσταση, εκφράζοντας την προτίμηση τους στις δεκαδικές περιοδικές αναπαραστάσεις, που ξεκινάει το περιοδικό μέρος αμέσως μετά την υποδιαστολή, ενώ λίγοι δήλωσαν πω την χρησιμοποιούν «Συχνά» με την αντίληψη πως οι μαθητές/τριες πρέπει να δουν και μερικά παραδείγματα αυτής της ρητής αναπαράστασης ώστε να αντιμετωπιστούν κάποιες παρανοήσεις σχετικά με την περιοδικότητα των ρητών αριθμών. Με κάποιον από τους 11 που τη χρησιμοποιούν σπάνια να λέει «Δεν την χρησιμοποιώ συχνά αυτή την αναπαράσταση, καθώς θέλω να εστιάσω σε παραδείγματα που αναδεικνύουν την περιοδικότητα, ανεξαρτήτως του πλήθους των επαναλαμβανόμενων ψηφίων, παρουσιάζω αναπαραστάσεις που η περίοδος ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή», ενώ έναν άλλον που την αξιοποιεί συχνά να αναφέρει «Αυτή την αναπαράσταση την χρησιμοποιώ, καθώς οι μαθητές/τριες θα αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες σχετικά με την αναγνώριση της περιοδικότητας, μόνο αν έρθουν σε επαφή με διάφορες αναπαραστάσεις της.». Η άπειρη περιοδική αναπαράσταση του 0,01234567890123456789… με περίοδο δέκα ψηφίων που ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή, δεν χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας, αναδεικνύοντας την αντίληψη των εκπαιδευτικών πως το μεγάλο πλήθος των ψηφίων της περιόδου, δεν ευνοεί την κατανόηση του συνόλου των ρητών, με κάποιον χαρακτηριστικά να λέει «Την αναπαράσταση αυτή δεν την χρησιμοποιώ, η έννοια της περιοδικότητας μπορεί να γίνει κατανοητή και με λιγότερα ψηφία. Προσωπικά, δεν θεωρώ πως έχει να προσφέρει κάτι στην κατανόηση των μαθητών/τριών.»

Η άρρητη δεκαδική αναπαράσταση με 4 δεκαδικά ψηφία, φαίνεται πως χρησιμοποιείται σε διαφορετικό βαθμό από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας, με τους 9 εκπαιδευτικούς να δηλώνουν πως την χρησιμοποιήσουν «Πολύ συχνά» ή «Συχνά» και 7 να την χρησιμοποιούν σε βαθμό «Σπάνια» ή «Καθόλου». Στην πρώτη περίπτωση, οι εκπαιδευτικοί έχουν την αντίληψη ότι τα παραδείγματα αυτής της αναπαράστασης είναι εύχρηστα και κάνουν την έννοια της απειρίας κατανοητή στους/ις μαθητές/τριες με αυτό το πλήθος δεκαδικών ψηφίων, κατά την παρουσίαση του αντίστοιχου συνόλου, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ,σύμφωνα με τις απαντήσεις τους, θεωρούν πως η προσέγγιση με 2 ή 3 δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά είναι αρκετή για την παρουσίαση τους. Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, με 9 δεκαδικά ψηφία χρησιμοποιείται σπάνια έως καθόλου, από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς κατά τη διδακτική προσέγγιση του συνόλου των άρρητων, από τις απαντήσεις έγινε εμφανής η αντίληψη τους, πως δεν απαιτείται η χρήση αναπαραστάσεων με μεγάλο πλήθος ψηφίων, ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες την έννοια της άπειρης μη-επαναλαμβανόμενης αναπαράστασης των άρρητων, με κάποιον εκπαιδευτικό να αναφέρει «Σπάνια, χρησιμοποιώ αυτή την αναπαράσταση, θεωρώ πως αρκούν λιγότερα δεκαδικά ψηφία ώστε να καταλάβουν ότι δεν είναι επαναλαμβανόμενα και για να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες την απειρία των ψηφίων δίνω έμφαση στην ύπαρξη των αποσιωπητικών.». Τέλος, η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση του άρρητου 1,01001000100001…, με 14 επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία, χωρίς κανονικότητα, δεν χρησιμοποιείται από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας, με κάποιους να έχουν την αντίληψη ότι οι αναπαραστάσεις με μεγάλο πλήθος δεκαδικών ψηφίων δεν έχουν σημαντικό όφελος στην κατανόηση του συνόλου των άρρητων και κάποιους άλλους να αποφεύγουν τη χρήση της για να μην δημιουργηθεί σύγχυση με την περιοδική ρητή αναπαράσταση, με έναν εκπαιδευτικό να αναφέρει «Ποτέ, δεν έχω χρησιμοποιήσει κατά τη διδακτική προσέγγιση του συνόλου των άρρητων αναπαράσταση με επαναλαμβανόμενα ψηφία, μη-περιοδικά όπως αυτή την αναπαράσταση. Θεωρώ, πως εύκολα θα παρερμηνευτεί με την περιοδική αναπαράσταση ρητών και αντί να καταλάβουν τις άρρητες αναπαραστάσεις, θα δημιουργηθούν παρανοήσεις και στις ρητές, άλλωστε τέτοιες αναπαραστάσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, που πιθανόν να μην συναντήσουν ποτέ οι μαθητές/τριες».

4.4.3 Βαθμός χρήσης της αναπαράσταση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία

Πίνακας 4.4.3: Βαθμός χρήσης της αναπαράστασης των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία

Αναπαράσταση	Πολύ συχνά (n)	Συχνά (n)	Σπάνια (n)	Καθόλου (n)
Ρητή	5	9	2	0
Άρρητη	2	6	7	1

Η αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4.3, χρησιμοποιείται συχνά από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας κατά την παρουσίαση του συνόλου των ρητών. Με βαθμό «Πολύ συχνά» ή «Συχνά», δήλωσαν 14 από τους 16 εκπαιδευτικούς πως χρησιμοποιούν την τοποθέτηση των ρητών στην αριθμογραμμή, κατά την διδακτική προσέγγιση αυτού του συνόλου, αναδεικνύοντας την αντίληψη, στους περισσότερους, ότι η χρήση της είναι σημαντική, κυρίως για την κατανόηση των ιδιοτήτων των ρητών και όχι για την κατανόηση του συνόλου με κάποιον να λέει «Η πραγματική ευθεία είναι το μέσο, με το οποίο θα καταλάβουν καλύτερα τη διάταξη των πραγματικών», ενώ κάποιοι άλλοι αξιοποιούν την πραγματική ευθεία καθώς την κρίνουν σημαντική, χωρίς να μπορούν να αιτιολογήσουν την απάντηση τους, με κάποιον χαρακτηριστικά να αναφέρει «Συχνά, χρησιμοποιώ την τοποθέτηση των ρητών στην πραγματική ευθεία, καθώς είναι καλό οι μαθητές/τριες να δουν τους ρητούς πάνω σε αυτήν, ώστε να τους καταλάβουν καλύτερα».

Την αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία, έδειξε η ανάλυση των συνεντεύξεων, πως δεν την χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας στον ίδιο βαθμό με την αναπαράσταση των ρητών. Σπάνια, χρησιμοποιούν οι μισοί σχεδόν εκπαιδευτικοί, κατά την παρουσίαση των άρρητων την γεωμετρική τους αναπαράσταση ως σημείο στην αριθμογραμμή, με κυρίαρχη την αντίληψη των περισσότερων εκπαιδευτικών πως η αναπαράσταση αυτή είναι μία διαδικασία που δεν θα χρειαστούν οι μαθητές/τριες στα σχολικά μαθηματικά και πως είναι μία διαδικασία που δύσκολα κατανοούν, καθώς απαιτείται χρήση γεωμετρίας. Με κάποιον εκπαιδευτικό που έχει αυτή την αντίληψη να λέει «Δεν υπάρχει λόγος να αναπαριστούμε με ακρίβεια τους άρρητους, είναι χρονοβόρα διαδικασία, αυτά, είναι ανώτερα μαθηματικά και δεν υπάρχει λόγος οι μαθητές/τριες να εμβαθύνουν σε αυτού του είδους τις γνώσεις, αρκεί να ξέρουν ότι οι ρητοί είναι μετρήσιμοι ενώ οι άρρητοι όχι, όποτε χρειαστεί σε ασκήσεις θα τους δείξω τους άρρητους προσεγγιστικά» και κάποιους άλλους να δηλώνουν πως χρησιμοποιούν πιο συχνά την αναπαράσταση των ρητών, χωρίς να μπορούν να υποστηρίξουν την γνώμη τους. Από την άλλη, στις απαντήσεις των υπόλοιπων εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν αυτή την αναπαράσταση «Πολύ συχνά» ή «Συχνά», αναδεικνύεται η αντίληψη ότι η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία υποστηρίζει την αντιμετώπιση της παρανόησης ότι η συμβολική αναπαράσταση των άρρητων με τη μορφή ριζών είναι αριθμοί και όχι διαδικασίες, καθώς παρατηρούν αυτή τη δυσκολία στους/ις περισσότερους/ες μαθητές/τριες.

Κεφάλαιο 5^{ο}: Συζήτηση

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, όπως παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4, και την εξαγωγή συμπερασμάτων κρίθηκε αναγκαία η οργάνωση αυτών σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, τα ευρήματα αφορούν τις γνώσεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας, σχετικά με τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις. Στην δεύτερη ενότητα ερμηνεύονται τα ευρήματα αναφορικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων, κατά την διδασκαλία αυτών των συνόλων. Στην τελευταία ενότητα, τα ευρήματα αφορούν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων. Οι ερμηνείες αυτών των αποτελεσμάτων, απαντούν ουσιαστικά στα τρία ερευνητικά ερωτήματα αυτής της έρευνας.

5.1 Συζήτηση για τις γνώσεις των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων.

Ως προς τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, αναφορικά με τις δεκαδικές αναπαραστάσεις, τα ευρήματα έδειξαν πως οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση του ρητού σε μεγάλο βαθμό, ενώ ένα σημαντικό μέρος τους δεν αναγνωρίζει την περιοδική δεκαδική αναπαράσταση. Αξιοσημείωτο, είναι το γεγονός πως η πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση αναγνωρίστηκε από ένα μικρό μέρος των εκπαιδευτικών ως ένας ισοδύναμος ορισμός των ρητών, χωρίς τη σύνδεση με κάποια άλλη αναπαράσταση τους. Από την άλλη, στη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, όλοι οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να αναγνωρίσουν την επανάληψη των ψηφίων με κανονικότητες, αλλά ένα σημαντικό μέρος του δείγματος θεωρεί την περιοδικότητα μία ιδιότητα των άρρητων δεκαδικών αναπαραστάσεων, αναδεικνύοντας σημαντικές ελλείψεις στις γνώσεις αυτής της αναπαράστασης. Ταυτόχρονα, τα ευρήματα έδειξαν πως οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την περιοδική δεκαδική αναπαράσταση σε κάθε περίπτωση, δηλαδή με περίοδο λίγων ψηφίων ή περισσότερων και με αυτή να ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή ή όχι. Σαν συνέπεια των παραπάνω, η δεκαδική αναπαράσταση του άρρητου, που αναγνωρίστηκε σωστά στα αντίστοιχα έργα, από όλους σχεδόν τους εκπαιδευτικούς, κρύβει ελλείψεις για την αντίστοιχη αναπαράσταση καθώς, ένα μέρος του δείγματος αναγνώριζε όλες τις άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις ως άρρητες, ανεξαρτήτως των επαναλαμβανόμενων ψηφίων με κανονικότητες ή όχι. Επιπλέον, η δεκαδική αναπαράσταση του άρρητου με επαναλαμβανόμενα ψηφία, μη κανονικά, δεν αναγνωρίστηκε ως μία άπειρη δεκαδική αναπαράσταση, χωρίς περιοδικότητα από όλους, αλλά κάποιοι εκπαιδευτικοί τη κατηγοριοποίησαν ως ρητή αναπαράσταση λόγω των επαναλαμβανόμενων ψηφίων, κάνοντας εμφανή κενά που υπάρχουν σχετικά με τον ορισμό της περιοδικότητας. Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για την αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία, φαίνεται να είναι περισσότερο εκτεταμένες από τις γνώσεις τους σχετικά με την αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε πως οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την τοποθέτηση των ρητών με σύνδεση στην κλασματική αναπαράσταση ή στην πεπερασμένη δεκαδική μορφή, ενώ φαίνεται να υπάρχουν ελλείψεις σχετικά με την άπειρη περιοδική αναπαράσταση των ρητών πάνω στην πραγματική ευθεία. Από την άλλη, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας αξιοποιούν κυρίως προσεγγιστικές μεθόδους για την γεωμετρική αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία.

5.2 Συζήτηση για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων, κατά την διδασκαλία αυτών των συνόλων.

Οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας, κατά τη διδασκαλία του συνόλου των ρητών, χρησιμοποιούν την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση με λίγα δεκαδικά ψηφία, ενώ αποφεύγουν παραδείγματα αναπαραστάσεων με μεγαλύτερο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Στην επιλογή αυτή, αναδεικνύεται η αντίληψη ότι οι ρητές αναπαραστάσεις με πεπερασμένη δεκαδική μορφή και μικρό δεκαδικό μέρος αποτελούν τα πρώτα και βασικότερα παραδείγματα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, καθώς θεωρούν ότι υποστηρίζεται η κατανόηση του συνόλου των ρητών με την εύκολη μετατροπή σε κλασματική αναπαράσταση και κατά συνέπεια δεν χρησιμοποιούν παραδείγματα με μεγαλύτερο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Αναφορικά με τη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση του ρητού, τα ευρήματα έδειξαν πως χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας με μικρή περίοδο και με την περίοδο να ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή, κατά την παρουσίαση του συνόλου των ρητών. Η χρήση της περιοδικής αναπαράστασης με αυτά τα χαρακτηριστικά, κάνει φανερή την αντίληψη των εκπαιδευτικών ότι η έννοια των επαναλαμβανόμενων ψηφίων με κανονικότητες γίνεται ευκολότερα κατανοητή στους/ις μαθητές/τριες όταν αποτελείται από λίγα ψηφία και πως ευνοείται η αναγνώριση όταν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή. Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση του συνόλου των άρρητων αξιοποιείται όλο και λιγότερο όταν αυξάνονται τα δεκαδικά ψηφία, από τους εκπαιδευτικούς κατά την παρουσίαση του συνόλου των άρρητων. Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συστηματικά τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων με λίγα δεκαδικά ψηφία που συνοδεύονται από αποσιωπητικά κατά την παρουσίαση του συνόλου των άρρητων, καθώς θεωρούν πως η προσέγγιση αυτή κάνει κατανοητή την έννοια της απειρίας με την ύπαρξη των αποσιωπητικών και πως η αναπαράσταση αυτή είναι χρήσιμη στην επίλυση των ασκήσεων για τους/ις μαθητές/τριες, ενώ φαίνεται πως αποφεύγουν τη χρήση αναπαραστάσεων με πολλά δεκαδικά ψηφία καθώς πιστεύουν πως η έννοια της απειρίας και της μη επανάληψης των ψηφίων μπορεί να γίνει κατανοητή με λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Σχετικά με την άρρητη δεκαδική αναπαράσταση με επαναλαμβανόμενα ψηφία, χωρίς κανονικότητες, τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι εκπαιδευτικοί δεν την χρησιμοποιούν, με τη αντίληψη πως δεν θέλουν να θυμίζει την ρητή περιοδική αναπαράσταση ώστε να αποφύγουν παρανοήσεις με τα επαναλαμβανόμενα ψηφία. Η αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία χρησιμοποιείται σε μεγαλύτερο βαθμό από την αναπαράσταση των άρρητων, κατά τη διδακτική προσέγγιση των αντίστοιχων συνόλων από τους εκπαιδευτικούς. Βέβαια, η αναπαράσταση των ρητών στην αριθμογραμμή αξιοποιείται για την παρουσίαση των ιδιοτήτων του συνόλου, και όχι για την καλύτερη κατανόηση της έννοια του. Από την άλλη, η αναπαράσταση των άρρητων στην πραγματική ευθεία από τους μισούς εκπαιδευτικούς του δείγματος δεν χρησιμοποιείται καθώς θεωρούν πως η γεωμετρική προσέγγιση αυτού του συνόλου με ακρίβεια είναι μία δύσκολη διαδικασία, που δεν θα χρειαστούν οι μαθητές/τριες, σύμφωνα με τους ίδιους, και οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί την χρησιμοποιούν για να αναδείξουν το γεγονός ότι οι ρίζες μη-αρνητικών αριθμών είναι αριθμοί και όχι διαδικασίες.

5.3 Συζήτηση για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων στην κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων

Για την πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, ισχυρή εμφανίζεται η αντίληψη σε όλους τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας, πως όσα λιγότερα είναι τα δεκαδικά ψηφία της δεκαδικής αναπαράστασης ενός ρητού, τόσο μεγαλύτερο το όφελος στην κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου για τους/ις μαθητές/τριες. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν την αντίληψη, πως οι αναπαραστάσεις αυτές με πεπερασμένο δεκαδικό μέρος, λίγων ψηφίων, υποστηρίζουν την κατανόηση καθώς μπορούν ευκολά να αναπαρασταθούν με τη κλασματική μορφή των ρητών. Αναφορικά με την περιοδική δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, τα ευρήματα εμφάνισαν δύο διαφορετικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη στην κατανόηση των μαθητών/τριών για το σύνολο των ρητών. Το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος θεωρεί ότι η κατανόηση των μαθητών/τριών υποστηρίζεται από το μικρό πλήθος ψηφίων της περιόδου της ρητής δεκαδικής αναπαράστασης, ανεξαρτήτως της θέσης που ξεκινάει, καθώς μπορεί ευκολά να αναγνωριστεί στο δεκαδικό μέρος και εν συνεχεία να μετατραπεί, με γνωστή διαδικασία, σε κλασματική αναπαράσταση. Από την άλλη, στους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς έγινε φανερή η αντίληψη πως ο σημαντικότερος παράγοντας που ευνοεί την κατανόηση είναι η περιοδική αναπαράσταση του ρητού να ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή, χωρίς να δίνεται έμφαση στο πλήθος των ψηφίων της, ώστε οι μαθητές/τριες να μπορέσουν να την αναγνωρίσουν εύκολα. Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση του άρρητου, με ούτε λίγα ούτε πολλά δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, χαρακτηρίστηκε από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας ωφέλιμη για την κατανόηση του συνόλου των άρρητων, καθώς αυτό το πλήθος των ψηφίων θεωρείται ευνοϊκό ώστε να καταλάβουν οι μαθητές/τριες ότι τα ψηφία δεν είναι κανονικώς επαναλαμβανόμενα και για να αντιληφθούν την απειρία των ψηφίων. Επιπλέον, τα παραδείγματα δεκαδικών αναπαραστάσεων με λίγα ή πολλά δεκαδικά ψηφία και αποσιωπητικά, σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς δεν ευνοούν την κατανόηση του συνόλου καθώς, τα πρώτα μπορούν ευκολά να αναγνωριστούν, λανθασμένα, ως ρητές αναπαραστάσεις, με τα αποσιωπητικά να εννοούν την επανάληψη του τελευταίου ψηφίου, ενώ τα δεύτερα να αποτελούν παραδείγματα δεκαδικών άρρητων αναπαραστάσεων, που δεν θα χρειαστούν οι μαθητές/τριες κατά τα σχολικά μαθηματικά. Σχετικά με την αναπαράσταση με επαναλαμβανόμενα ψηφία, χωρίς κανονικότητες, τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι εκπαιδευτικοί έχουν την αντίληψη ότι δεν υποστηρίζει την κατανόηση του συνόλου των άρρητων για τους μαθητές/τριες, καθώς θεωρούν ότι ευκολά μπορεί να παρερμηνευτεί με την ρητή περιοδική αναπαράσταση.

Αναφορικά με τη τοποθέτηση των ρητών στην πραγματική ευθεία, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι υποστηρίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου για τους/ις μαθητές/τριες. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί έχουν την αντίληψη ότι η αναπαράσταση αυτή σε συνδυασμό με την κλασματική ή και την δεκαδική αναπαράσταση, έχει σημαντικά οφέλη στην κατανόηση καθώς η παρουσίαση διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αριθμού θα οδηγήσει στην επίτευξη της κατανόησης της έννοιας του ρητού. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως ένα μέρος των εκπαιδευτικών έκρινε ότι υποστηρίζει σε μεγάλο βαθμό η αναπαράσταση αυτή την κατανόηση, χωρίς όμως να μπορεί να επεξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο θα επιτευχθεί. Από την άλλη, η τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία, χαρακτηρίστηκε σε διαφορετικούς βαθμούς ωφέλιμη από τους εκπαιδευτικούς, ένα μέρος των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι η αναπαράσταση αυτή βοηθά την παρανόηση ότι οι ρίζες μη-αρνητικών αριθμών είναι αριθμοί και όχι διαδικασίες, ενώ κάποιοι άλλοι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι η αναπαράσταση αυτή ευνοεί την κατανόηση των ιδιοτήτων του συνόλου των άρρητων.

5.4 Περιορισμοί έρευνας

Οι ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις αποτελούν ένα μεγάλο κεφάλαιο στη μαθηματική εκπαίδευση, έτσι η παρούσα έρευνα εστιάζει στη δεκαδική αναπαράσταση τους και στη τοποθέτηση των ρητών και άρρητων αριθμών στην πραγματική ευθεία. Επιλέχθηκαν οι αναπαραστάσεις αυτές, καθώς είναι βασικές για την κατανόηση των αντίστοιχων συνόλων και συμβάλλουν στη κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών. Βασική προϋπόθεση για να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες τις αναπαραστάσεις αυτές και να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που συναντούν σε όλες τις σχολικές τάξεις, που πολλές φορές συναντώνται και στην ενήλικη ζωή τους, είναι οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας να είναι γνώστες ενός μεγαλύτερου πλαισίου από αυτό που καλούνται να διδάξουν. Επιπλέον, η επιτυχία της παρουσίασης αυτών των συνόλων στους/ις μαθητές/τριες θα εξαρτηθεί από τις αντιλήψεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί σχετικά με τα οφέλη και τη χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων.

Κεφάλαιο 6ο: Συμπεράσματα

Οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας, προκειμένου να είναι ικανοί να προσφέρουν μία ουσιαστική και αποτελεσματική διδασκαλία στους/ις μαθητές/τριες για το σύνολο των ρητών και των άρρητων πρέπει να κατέχουν μία ποικιλία γνώσεων σχετικά με τις ρητές και τις άρρητες αναπαραστάσεις. Στην παρούσα έρευνα, αρχικά επιχειρήθηκε να μελετηθεί σε ποιο βαθμό γνωρίζουν τις αναπαραστάσεις αυτές οι εκπαιδευτικοί και εν συνεχεία διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις τους για την χρήση των ρητών και άρρητων αναπαραστάσεων κατά την διδακτική προσέγγιση και για τα οφέλη των αναπαραστάσεων αυτών στην κατανόηση των μαθητών/τριών, για τα αντίστοιχα σύνολα.

Τα κύρια ευρήματα της έρευνας, αναφορικά με τις γνώσεις των δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών και των άρρητων, έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τη δεκαδική πεπερασμένη αναπαράσταση των ρητών, αλλά ένα σημαντικό μέρος τους παρουσιάζει ελλείψεις στη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση τους και στην άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα έδειξαν πως παρόλο που οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας γνωρίζουν τη δεκαδική πεπερασμένη αναπαράσταση των ρητών σε κάθε μορφή, έχουν την αντίληψη ότι μόνο η συστηματική χρήση της πεπερασμένης δεκαδικής αναπαράστασης με λίγα δεκαδικά ψηφία υποστηρίζει την κατανόηση του συνόλου των ρητών, καθώς μπορεί ευκολά να συνδεθεί με την κλασματική αναπαράσταση, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με το βαθμό χρήσης αυτών των αναπαραστάσεων κατά τη διδακτική προσέγγιση του συνόλου των ρητών.

Από την άλλη, το εύρημα πως πολλοί εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν ότι η επαναλαμβανόμενη αναπαράσταση, με κανονικότητες είναι μία ρητή αναπαράσταση αλλά λόγω της απειρίας των ψηφίων την αναγνωρίζουν ως άρρητη, κατηγοριοποιώντας έτσι όλες τις άπειρες δεκαδικές αναπαραστάσεις με περιοδικό δεκαδικό μέρος ή μη, στις άρρητες αναπαραστάσεις έρχεται σε συμφωνία με τους Voskoglou & Kosyvas (2012), που δηλώνουν ότι βασική προϋπόθεση για την κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι η εμπέδωση των γνώσεων τους σχετικά με το σύνολο των ρητών αριθμών. Ταυτόχρονα, έγινε φανερό ότι οι εκπαιδευτικοί, τόσο αυτοί που την αναγνώρισαν ως ρητή αναπαράσταση όσο και αυτοί την αναγνώρισαν λανθασμένα ως άρρητη, θεωρούν ότι η περιοδική δεκαδική αναπαράσταση ωφελεί την κατανόηση του συνόλου των ρητών, είτε κατά τη περίπτωση όπου η περίοδος αποτελείται από λίγα ψηφία είτε όταν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή, αλλά κατά την παρουσίαση του συνόλου, εστιάζουν σε παραδείγματα αναπαραστάσεων που συνδυάζουν τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ταυτόχρονα.

Επιπλέον, φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλείψεις στη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων καθώς λανθασμένα έχουν αναγνωρίσει δεκαδικές ρητές αναπαραστάσεις ως άρρητες. Επιπλέον, δεν γνωρίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό, την επαναλαμβανόμενη αναπαράσταση του άρρητου, χωρίς κανονικότητες, επιβεβαιώνοντας, έτσι τα ευρήματα των Zazkis & Sirotic (2010), που αναφέρουν πως οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θεωρούν ότι ένας αριθμός είναι ρητός εάν υπάρχει ένα μοτίβο και ότι ένας αριθμός είναι άρρητος εάν δεν υπάρχει μοτίβο στη δεκαδικό μέρος του αριθμού, με τη παρερμηνεία οποιασδήποτε κανονικότητας ως περιοδικότητα. Για την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων, οι εκπαιδευτικοί έχουν την αντίληψη πως υποστηρίζει την κατανόηση των μαθητών/τριών, όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων αποτελείται ούτε από λίγα, ούτε από πολλά ψηφία, όμως η αντίληψη αυτή έρχεται σε σύγκρουση με το βαθμό χρήσης αυτής της αναπαράστασης, καθώς οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν αναπαραστάσεις με λίγα δεκαδικά ψηφία για την παρουσίαση του συνόλου των άρρητων.

Σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας για την αναπαράσταση των ρητών και άρρητων αριθμών στην πραγματική ευθεία, τα αποτελέσματα και η αντίστοιχη συζήτηση, έδειξε ότι η αναπαράσταση αυτή δεν αναγνωρίζεται στον ίδιο βαθμό για τα δύο σύνολα. Αρχικά, η γεωμετρική αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία, αναγνωρίζεται από τους εκπαιδευτικούς όταν συνδυάζεται τόσο με τη πεπερασμένη αναπαράσταση όσο και με τη κλασματική αναπαράσταση, ένα εύρημα που διαφέρει από την άποψη των DeWolf et al. (2014), που αναφέρουν ότι η αναπαράσταση των ρητών στην πραγματική ευθεία είναι πιο ακριβείς όταν τους τοποθετούν με δεκαδικούς αριθμούς παρά με κλάσματα. Επιπλέον, η σύνδεση της περιοδικής δεκαδικής αναπαράστασης με την τοποθέτηση τους στην πραγματική ευθεία, φαίνεται πως δεν αναγνωρίζεται σε ικανοποιητικό βαθμό, αυτό το εύρημα συμφωνεί με τους Caylan-Ergene & Ergene (2020) και τους Peled & Hershkovitz (1999) που αναφέρουν πως οι εκπαιδευτικοί είτε είχαν δυσκολία στην τοποθέτηση επαναλαμβανόμενων δεκαδικών είτε θεωρούσαν ότι δεν μπορούν να αναπαρασταθούν. Με αυτόν τον προσανατολισμό, οι εκπαιδευτικοί χαρακτήρισαν ωφέλιμη την τοποθέτηση των ρητών στην πραγματική ευθεία, για την κατανόηση του αντίστοιχου συνόλου από τους/ις μαθητές/τριες, καθώς ο συνδυασμός της με τις υπόλοιπες ρητές αναπαραστάσεις θα οδηγήσει στην επίτευξη της κατανόηση τους. Βέβαια, τα ευρήματα αναφορικά με τον βαθμό χρήσης τους, έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί αρχικά δεν χρησιμοποιούν την αναπαράσταση αυτή στον ίδιο βαθμό με το οποίο την θεωρούν ωφέλιμη και εν συνέχεια ότι την αξιοποιούν κατά την διδακτική προσέγγιση κυρίως για την καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων του συνόλου, και όχι για την καλύτερη κατανόηση της έννοια του.

Εν συνεχεία, αναφορικά με τη τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται πως έχουν σοβαρές ελλείψεις στις γνώσεις τους, με επικρατέστερη τη προσεγγιστική μέθοδο για την αναπαράσταση τους και τις γεωμετρικές προσεγγίσεις, που θα επιτύγχαναν με ακρίβεια την αναπαράσταση αυτή, να μην είναι στο ενεργό ρεπερτόριο των γνώσεων τους, τα αποτελέσματα της έρευνας βρίσκονται στον ίδιο προσανατολισμό με αυτά των Caylan-Ergene & Ergene (2020) και των Sirotic & Zazkis (2007b), ενώ διαφέρουν από αυτά των Peled & Hershkovitz (1999) καθώς οι εκπαιδευτικοί σε αυτή την έρευνα ήξεραν ότι έχουν ακριβή θέση στην πραγματική ευθεία οι άρρητοι, αλλά δεν ήταν σε θέση να τα αναπαραστήσουν με ακρίβεια. Σχετικά με την τοποθέτηση των άρρητων στην πραγματική ευθεία οι εκπαιδευτικοί έχουν διαφορετικές αντιλήψεις ως προς τον βαθμό που μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση των μαθητών/τριών, με επικρατέστερη την αντίληψη πως η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει την κατανόηση ότι οι ρίζες μη-αρνητικών αριθμών είναι αριθμοί και όχι διαδικασίες και τελικά με την αντιμετώπιση αυτής της παρανόησης επιτυγχάνεται η κατανόηση των άρρητων. Αξιοσημείωτο, είναι το γεγονός πως παρόλο που ένα σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι υποστηρίζεται η κατανόηση του συνόλου με την αναπαράσταση αυτή, η συστηματική της χρήση κατά τη διδακτική προσέγγιση αποφεύγεται από τους μισούς εκπαιδευτικούς.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αναδεικνύουν στοιχεία που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην περαιτέρω διερεύνηση του θέματος, όπως και στη διεξαγωγή άλλων ερευνών αναφορικά με τη μελέτη των γνώσεων και των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για όλες τις ρητές και άρρητες αναπαραστάσεις, καθώς η συγκεκριμένη έχει περιοριστεί στην δεκαδική τους αναπαράσταση και στη γεωμετρική τους αναπαράσταση, ως σημείο πάνω στη πραγματική ευθεία. Επιπλέον, θα μπορούσαν να σχεδιαστούν κατάλληλα σενάρια, τα οποία θα εστίαζαν στην αντιμετώπιση των ελλείψεων που παρουσιάστηκαν, τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους/ις μαθητές/τριες.

Βιβλιογραφία

1. Arcavi, A., M. Bruckheimer, & R. Ben-Zvi. (1987). History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*. 7(2), 18–23.
2. Brown, B. (2019). Rational number understanding: The big picture, not the essence. *South African Journal of Childhood Education***.** 9(1), 1-8.
3. Çaylan-Ergene, B., & Ergene, Ö. (2020). Repeating Decimals and Irrational Numbers on the Number Line: Through the Lens of Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers. *Acta Didactica Napocensia,* 13(2), 215-232.
4. Dedekind, R. (1963). Essays on the theory of numbers. New York. Dover Publications.
5. DeWolf, M., Rapp, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Semantic alignment of fractions and decimals with discrete versus continuous entities: A textbook analysis. In B. Bello, M. Guarini, M. McShane, & B. Scassellati (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Cognitive Science* Society, 2133-2138.
6. Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (σσ. 109–122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
7. Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educ Stud Math,* 61, 103–131.
8. Even, R., 1998, Factors involved in linking representation of functions. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121
9. Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.
10. Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 189-210.
11. Hayfa, N., & Saikaly, L. (2016). Dimensions of knowledge and ways of thinking of irrational numbers. *Athens Journal of Education, 3*(2), 137-154.

12. Janvier, C. (1987a). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (σσ. 27– 31).Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
13. Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. In: C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (σσ. 67-72). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
14. Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In: C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (σσ.19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
15. Kidron, I. (2016). Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, 4, 94-118.
16. Lesh, R., Behr, M., and Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In: C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (σσ. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
17. Lemmo, A., Branchetti, L., Ferretti, F., Maffia, A., & Martignone, F. (2015). Students' difficulties dealing with number line: a qualitative analysis of a question from national standardized assessment. Proc. of CIEAEM 67. Quaderni di ricerca in didattica (Mathematics), 25(2), 149-156.
18. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In: C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (σσ. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
19. Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 9(1), 1-21
20. Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educ Stud Math,* 60**,** 37–69.
21. Palmer, S. F. (1978) Fundamental aspects of cognitive representation. In: Rosch, E. H., & Lloyd, B. B. (Ed), *Cognition and categorization* (σσ. 259-303). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

22. Patel, P., & Varma, S. (2018). How the Abstract Becomes Concrete: Irrational Numbers Are Understood Relative to Natural Numbers and Perfect Squares. *Cognitive Science*, *42*(5), 1642-1676.
23. Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematics Education, Science, and Technology*, 30(1), 39–46.
24. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
25. Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007a). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49-76.
26. Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line–where are they?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477-488.
27. Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction*., 265–282.
28. Vergnaud, G. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematics Behavior*, 17(2), 167-181.
29. Viseu, F., Pires, A. L., Menezes, L., & Costa, A. M. (2021). Semiotic Representations in The Learning of Rational Numbers by 2nd Grade Portuguese Students. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *13*(5), 611–624.
30. Voskoglou, M., & Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 301-336.
31. Yilmaz, N. & Ay, Z.S. (2018). Exploring 8th grade students' skills and knowledge on irrational numbers. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 4(2), 633-654.
32. Zachariades, T., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educ Stud Math,* 82, 5–22.
33. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 4, 497–505.

34. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 1-27.
35. Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 207-217.
36. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Παράρτημα

Ερωτήσεις

1. Πως θα εξηγούσατε στους/ις μαθητές/τριες τη διαφορά ανάμεσα στη δεκαδική αναπαράσταση των παρακάτω ρητών και των άρρητων αριθμών;

   0,25 0,61… 1,58961 3,14159… 0,589746241637 2,718281828459...

2. Πως θα εξηγούσατε στους/ις μαθητές/τριες τη διαφορά ανάμεσα στη δεκαδική αναπαράσταση των παρακάτω ρητών και των άρρητων αριθμών;

   1,6464… 1,7320… 67,19854854…
   2,8254131131131... 12,23606797… 2,00131311311131111...

3. Πώς θα εξηγούσατε στους/ις μαθητές/τριες την τοποθέτηση των ρητών και άρρητων στην πραγματική ευθεία;

4. Σε ποιο βαθμό θεωρείτε ότι οι παρακάτω δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών υποστηρίζουν την κατανόηση της έννοιας του αντίστοιχου συνόλου;

Ρητοί Αριθμοί	Πολύ	Αρκετά	Λίγο	Καθόλου
0,37				
0,89456714				
0,58333…				
3,142857142857…				

5. Σε ποιο βαθμό θεωρείτε ότι οι παρακάτω δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων υποστηρίζουν την κατανόηση της έννοιας του αντίστοιχου συνόλου;

Άρρητοι Αριθμοί	Πολύ	Αρκετά	Λίγο	Καθόλου
3,31…				
3,141592…				
0,28228822288822228882...				

6. Σε ποιο βαθμό θεωρείτε ότι υποστηρίζει την κατανόηση της έννοιας του ρητού και του άρρητου, η τοποθέτηση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών;

α. Πολύ β. Αρκετά γ. Λίγο δ. Καθόλου

7. Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε τις παρακάτω δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και των άρρητων, κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων;

Αριθμοί	Πολύ συχνά	Συχνά	Σπάνια	Καθόλου
2,89				
5,25481				
0,0000015928				
3,14…				
0,61803…				
4,3588989435…				

8. Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε τις παρακάτω δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και των άρρητων, κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων;

Αριθμοί	Πολύ συχνά	Συχνά	Σπάνια	Καθόλου
17,5252…				
5,123144144…				
0,01234567890123456789…				

1,4142…				
1,618033988…				
1,01001000100001…				

9. Πόσο συχνά αναπαριστάνετε τους ρητούς και τους άρρητους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, κατά την παρουσίαση των αντίστοιχων συνόλων;

α. Πολύ συχνά β. Συχνά γ. Σπάνια δ. Καθόλου