**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ* ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ**

**ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

***ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ***

Διπλωματική εργασία

# Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τη σημασία ανάπτυξης άτυπης γεωμετρικής απόδειξης (πριν την εισαγωγή της τυπικής)

της

**Αδαμίδου Κυριακής**
**Α. Ε. Μ. 998**

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια
Λεμονίδης Χαράλαμπος, καθηγητής
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής

Φλώρινα, Ιούλιος 2022

**"Quod Erat Demonstrandum"**

**"ὅπερ ἔδει δεῖξαι"**

## Περιεχόμενα

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε μία ποιοτική έρευνα με στόχο να συγκεντρωθούν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας, δημόσιας και ιδιωτικής εκπαίδευσης, σχετικά με τη σημασία που έχει η άτυπη αποδεικτική διαδικασία στην ανάπτυξη της τυπικής, η οποία εισάγεται επίσημα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία της Α' Λυκείου. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση και το ρόλο τόσο της τυπικής όσο και της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της Γεωμετρίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το αν και με ποιους τρόπους η άτυπη αποδεικτική διαδικασία μπορεί να βοηθήσει τους/ις μαθητές/τριες, ώστε να καταφέρουν αν αναπτύξουν την τυπική. Και τέλος, γίνεται λόγος για τον βαθμό στον οποίο οι εκπαιδευτικοί εντάσσουν άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες στις δικές τους διδακτικές πρακτικές. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν με τη διενέργεια δομημένων συνεντεύξεων, με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, σε 15 εκπαιδευτικούς, δασκάλους Δημοτικού, καθηγητές Γυμνασίου και φροντιστές. Από τα αποτελέσματα διαφαίνεται η διαφορά μεταξύ των δασκάλων Δημοτικού και των εκπαιδευτικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς οι πρώτοι είναι εξοικειωμένοι με την άτυπη αποδεικτική διαδικασία, τα χαρακτηριστικά και το ρόλο αυτής, ενώ δυσκολεύονται να εκφράσουν τις αντιλήψεις τους για την τυπική απόδειξη, και οι δεύτεροι το αντίθετο. Ακόμα οι διαφορές μεταξύ τους διαφαίνονται και στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη σημασία που αποδίδουν στην άτυπη απόδειξη και τέλος στο αν και με ποιους τρόπους εντάσσουν οι ίδιοι τους, τέτοιου είδους άτυπες αποδεικτικές μορφές στις διδακτικές τους πρακτικές.

Λέξεις κλειδιά: τυπική απόδειξη, άτυπη απόδειξη, αποδεικτική διαδικασία, αντιλήψεις, εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας, εκπαιδευτικοί Δευτεροβάθμιας

## Abstract

In the present work, a qualitative research has been carried out aimed at the collection of the perceptions of Primary and Secondary school teachers of public and private education, concerning the consequence of the informal proof on the development of the formal, which is formally introduced through Euclidean Geometry in the first grade of Senior High School. In particular, there have been collected the perceptions of teachers regarding the nature and the importance both of the formal and the informal proof in the subject of Geometry. Moreover, there are presented teacher's perceptions in reference to which ways, if there any, the informal proof can help students develop the formal one. Finally, there has been talk to what extent teachers integrate informal proofs in their own teaching practices. The data has been collected after conducting structured interviews and using the open – ended questionnaire to 15 Primary and Secondary school teachers as well as teachers of private education. From the results, the differences between Primary school teachers and Secondary teachers are evident, as the formers are accustomed to the informal proof, its features and its role, while they have difficulty expressing their perceptions about the formal proof and the latter's vice versa. Furthermore, the differences between them are obvious among their perceptions on the importance of informal proof and finally on which ways, if there are any, they use to integrate informal proofs into their own teaching practices.



Key words: formal proof, informal proof, evidentiary procedure, perceptions, Primary school teachers, Secondary school teachers

## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στην Καθηγήτρια του Τ.Ε.Π.Α.Ε / Α.Π.Θ. Μαριάννα Τζεκάκη, η οποία ως επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας μου πρόσφερε απλόχερα την καθοδήγηση και την αμέριστη υποστήριξη της σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης και συγγραφής της εργασίας.

Επειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές του Π.Τ.Δ.Ε. / Π.Δ.Μ. Χαράλαμπο Λεμονίδη και Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τους Έφη Θεοδοσίου, Δημήτρη Πολυχρόνη, Σοφία Γρίβα, Μαρία Αποστολίδου και Πάνο Γούλα, τους πέντε φίλους που κέρδισα με τη συμμετοχή μου στο μεταπτυχιακό, για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε σε όλες μας τις εργασίες και για όλη την καθημερινή υποστήριξη που παρείχε ο ένας στον άλλον, σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος και στο δύσκολο έργο της συγγραφής των διπλωματικών μας εργασιών. Σας ευχαριστώ από καρδιάς «Ομάδα Φωτιά».

Θα ήθελα, επιπλέον, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον σύζυγό μου Νεόφυτο Καλτζίδη, γιατί χωρίς τη δική του παρότρυνση δε θα συμμετείχα στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα και χωρίς την βοήθεια και συμπαράσταση του καθ' όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος δε θα είχε ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στα πιο σημαντικά για μένα άτομα, στα παιδιά μου, στα διδυμάκια μου Ελευθερία Καλτζίδου και Χαράλαμπο Καλτζίδη, για την απεριόριστη υπομονή που κάνανε όσο η μαμά διάβαζε. Η εργασία αυτή είναι εξαιρετικά αφιερωμένη σε εσάς.

# Εισαγωγή

Η ουσία των Μαθηματικών βρίσκεται στην απόδειξη, καθώς αυτή είναι που οριοθετεί τα Μαθηματικά σε σχέση με άλλες διανοητικές δραστηριότητες (Λάππας, 2017). Η αποδεικτική διαδικασία περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα λογικό βήμα, και επικυρώνει πως κάποια μαθηματική πρόταση είναι ορθή. Ο τρόπος που χρησιμοποιούν τα παιδιά από μικρή ακόμα ηλικία, για να αποδείξουν ότι κάτι ισχύει, να πειστούν αρχικά τα ίδια και να πείσουν για αυτό, είναι άτυπος, παρουσιάζεται με ανεπίσημη μαθηματική γλώσσα και βασίζεται στη διαίσθησή τους (Μαρκάδας, 2017). Η διαίσθηση, πολύ νωρίτερα από κάθε από οποιοδήποτε επίσημο επιχείρημα (Polya, 1981, όπ. αναφ. στο Edwards, 1998), μπορεί να οδηγήσει ένα παιδί από μικρή ηλικία, να ασχοληθεί με την άτυπη απόδειξη για την αλήθεια μίας πρότασης μέσω εμπειρικών, βιωματικών διαδικασιών. Το πέρασμα από τα εμπειρικά επιχειρήματα στα τυπικά, σηματοδοτεί και το πέρασμα από την ανεπίσημη, άτυπη αποδεικτική διαδικασία, στην επίσημη και τυπική. Για να κατακτήσει κάποιος τη διαδικασία αυτή έρχεται αντιμέτωπος με διάφορες δυσκολίες, οι οποίες σχετίζονται κυρίως με τη φύση και το ρόλο της απόδειξης. Σημαντικό ρόλο σε αυτό δεν παίζει μόνο το πώς ο ίδιος ο μαθητής αντιλαμβάνεται την ανάγκη της απόδειξης, για να πειστεί για την εγκυρότητα μίας πρότασης, αλλά και από το πώς ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται τα χαρακτηριστικά της απόδειξης, την αναγκαιότητά της και με ποιους τρόπους την εντάσσει στην διδακτική του πρακτική.

Στο 1$^{ο}$ κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιήθηκε για τις ανάγκες της μελέτης του θέματος. Πιο αναλυτικά, αρχικά παρουσιάζεται μία ιστορική και επιστημολογική προσέγγιση της φύσης και του ρόλου που επιτελεί η απόδειξη στα Μαθηματικά και ειδικότερα στη Γεωμετρία. Στη συνέχεια, ορίζεται η μαθηματική απόδειξη και παρουσιάζονται τα είδη αυτής και οι λειτουργίες της. Ακολουθεί μία ανάλυση σχετικά με την απόδειξη στα πλαίσια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και στο τέλος παρουσιάζονται κάποια ερευνητικά ευρήματα σχετικά με την τυπική και την άτυπη απόδειξη, τόσο με μαθητές όσο και με εκπαιδευτικούς. Στο 2$^{ο}$ κεφάλαιο διατυπώνεται ο στόχος της ερευνητικής αυτής εργασίας, τα ερευνητικά ερωτήματα που απασχόλησαν, καθώς επίσης γίνεται και η εννοιολογική αποσαφήνιση των εμπλεκομένων εννοιών. Στο 3$^{ο}$ κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογική οργάνωση της έρευνας, με την περιγραφή της μεθόδου που ακολουθήθηκε, του δείγματος που συμμετείχε στην έρευνα, της ερευνητικής διαδικασίας καθώς και του ερευνητικού εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε. Στο 4ο κεφάλαιο ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας, ενώ στο 5ο κεφάλαιο η συζήτηση σχετικά με αυτά. Στο τέλος, στο 6ο κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

# Κεφάλαιο 1ο: Βιβλιογραφική ανασκόπηση

## 1.1 Η φύση και ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά και στη Γεωμετρία

Η μελέτη της φιλοσοφίας και της ιστορίας των μαθηματικών καθιστά σαφές ότι υπήρχαν από καιρό και εξακολουθούν να υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με το ρόλο και τη φύση της απόδειξης γενικά και ειδικότερα σχετικά με το τι καθιστά μία απόδειξη αποδεκτή (Hanna, 2000). Όπως γράφει ο Detlefsen (1992b, όπ. αναφ. στο Rav, 1999), «η κατανόηση της φύσης και του ρόλου της απόδειξης γίνεται μια από τις κύριες προκλήσεις που αντιμετωπίζει η φιλοσοφία των μαθηματικών». Η Hanna (1983, όπ. αναφ. στο Hanna, 2000) αναφέρεται στις διάφορες απόψεις σχετικά με τη φύση της απόδειξης, η μία εκ των οποίων υποστηρίζει τον εμπειρικό χαρακτήρα της απόδειξης, ενώ η άλλη έχει έναν χαρακτήρα πιο αυστηρό, υποστηρίζοντας τον φορμαλισμό, την τυπικότητα της απόδειξης. Πρόκειται για μία σύγκρουση μεταξύ της αποδεικτικής διαδικασίας η οποία «διαφωτίζει» - δηλαδή η επιχειρηματολογία είναι πιο χαλαρή ή ατελής, έχει λογικά κενά, ωστόσο κάνει το συμπέρασμα εμφανές και τελικά βέβαιο, συνεπώς τελικά πείθει καθώς βασίζεται σε προφανείς μαρτυρίες (του σχήματος, των αισθήσεων κλπ) - και της αποδεικτικής διαδικασίας η οποία «πείθει» - δηλαδή αποτελεί πειστήριο με βάση την τρέχουσα αντίληψη για την απόδειξη- συνεπώς η σύγκρουση αυτή έχει σχέση με τον εμπειρισμό και την ανάπτυξη των αισθήσεων από τη μία πλευρά και με τον φορμαλισμό και την αυστηρότητα από την άλλη (Dimitriadou, 2008).

Η έννοια της απόδειξης δεν είναι απόλυτη και οι απόψεις για το τι αποτελεί αποδεκτή απόδειξη έχουν εξελιχθεί μέσα στην ιστορία (Kleiner, 1991). Οι αντιλήψεις σχετικά με το τι είναι η απόδειξη, ποια είναι η φύση της και ο ρόλος της και το τι αποτελεί αποδεκτή απόδειξη, έχουν ενσωματωθεί σε ένα πρόβλημα γενικής επιστημολογίας (Lakatos, 1978, όπ. αναφ. στο Lee, 2003). Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας διαπιστώνεται πώς υπάρχουν διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις της έννοιας της απόδειξης, αναγνωρίζοντας την ψυχολογική της φύση (πλατωνισμός, εμπειρισμός), την δομική της φύση (λογικισμός, φορμαλισμός, ιντουσιονισμός) καθώς και την κοινωνική της φύση (οντολογία, αξιωματικά συστήματα) (Lee, 2003). Οι διάφορες αυτές προοπτικές της απόδειξης έχουν διαφορετικές θέσεις, όπως για παράδειγμα, κατά τη δομική προοπτική σημαντικό ρόλο παίζει η κριτική μίας απόδειξης, κάτι που δεν συναντάμε κατά την ψυχολογική προοπτική και επιπλέον , κατά την κοινωνική προοπτική σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση αλλά και η ανατροφοδότηση της κοινότητας (Lee, 2003). Ο Lakatos (1976, όπ. αναφ. στο Lee, 2003) – ο οποίος είναι ο κύριος εκφραστής της κοινωνικής φύσης της γεωμετρικής απόδειξης - και ο Tymoczko(1985, όπ. αναφ. στο Lee, 2003), επισημαίνουν τη σημαντικότητα της άτυπης και κοινωνικής πτυχής της μαθηματικής απόδειξης στην ιστορία και τη φιλοσοφία των μαθηματικών, με τις αντιλήψεις αυτές να ολοκληρώνονται με τις κονστρουκτιβιστικές τάσεις στην μαθηματική εκπαίδευση (Bauersfeld, 1988, όπ. αναφ. στο Lee, 2003).

Σύμφωνα με τη Hanna (1998), επειδή οι μαθηματικοί της Δύσης θεωρούσαν την απόδειξη ουσιαστικό μέρος των μαθηματικών από την εποχή του Ευκλείδη ακόμα, και απαραίτητο για τη διαπίστωση της εγκυρότητας των προτάσεων, έχουν καταβάλει μεγάλη προσπάθεια τόσο στην απόδειξη των διαφόρων θεωρημάτων όσο και στην αιτιολόγηση των μεθόδων απόδειξης αυτών, χωρίς αυτό να είναι πάντα εύκολο. Υπήρχαν πάντα διαφωνίες σχετικά με τη σύνδεση μεταξύ απόδειξης και αλήθειας στα μαθηματικά και σχετικά με το τι αποτελεί επαρκή απόδειξη (Hanna, 1998). Άλλωστε, σύμφωνα με τα λόγια του Αναπολιτάνου (2004), «αν κάτι χαρακτηρίζει την περιπέτεια της Λογικής και των Μαθηματικών στον 20ο αιώνα είναι το μοτίβο της σύγκρισης, του παντρέματος και ίσως της αντιδιαστολής δύο βασικών εννοιών, της έννοιας της απόδειξης και της έννοιας της αλήθειας».

Η απόδειξη, ως παραγωγή αληθών προτάσεων, επινοήθηκε από τους Έλληνες και αναμφίβολα, η αξιωματική μέθοδος είναι η σημαντικότερη συνεισφορά της Αρχαίας Ελλάδας στα μαθηματικά (Kleiner, 1991). Από την εξέλιξη της πρώιμης πρακτικής και εμπειρικής μαθηματικής γνώσης στα συστημικά απαγωγικά μαθηματικά της αρχαίας Ελλάδας, η απόδειξη έχει λάβει κεντρική θέση στα σύγχρονα μαθηματικά (Lee, 2003).

## 1.2 Τι είναι η μαθηματική απόδειξη

Η έννοια της απόδειξης πήρε το ακριβές φιλοσοφικό της νόημα, ή ακόμα και επινοήθηκε, από τον Αριστοτέλη, ο οποίος ονόμασε ως απόδειξη τον επιστημονικό συλλογισμό, δια μέσου του οποίου αποκτούμε έγκυρη γνώση (Κάλφας, 2015). Όπως αναφέρει ο Tall (1989) ο όρος «απόδειξη» σημαίνει πολύ διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικά πλαίσια, ενώ στον καθημερινό λόγο, συνδέεται περισσότερο με την επιβεβαίωση και την επικύρωση ενός ισχυρισμού μέσω επιχειρημάτων που γίνονται αποδεκτά από μία κοινότητα. Η καθορισμένη δήλωση που προκύπτει από τις υποθετικές δηλώσεις ονομάζεται συμπέρασμα της απόδειξης και οι υποτιθέμενες δηλώσεις από τις οποίες προκύπτει το συμπέρασμα ονομάζονται προϋποθέσεις της απόδειξης (“proof (logic)”, 2019).

Γενικότερα, στα μαθηματικά, μία απόδειξη παρουσιάζεται ως ένα πειστικό επιχείρημα, ως μια ακολουθία ισχυρισμών, όπου το πέρασμα από τον έναν ισχυρισμό στον άλλο βασίζεται στην εξαγωγή συμπερασμάτων, με βάση τις έννοιες ή μέσω αποδεκτής χρήσης συμβόλων, όχι παραθέτοντας κανόνες λογικής (Rav, 1999). Ωστόσο, το ποια μορφή επιχειρήματος θεωρείται ως έγκυρη απόδειξη από την μαθηματική κοινότητα είναι αδύνατο να οριστεί, καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, υπάρχουν από πάντα συγκρούσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών μαθηματικών, των ιστορικών και των φιλοσόφων των μαθηματικών, σχετικά με το ποιος είναι ο ρόλος και η φύση της απόδειξης και τι είναι αυτό που καθιστά μια απόδειξη αποδεκτή (Hanna, 2000). Γενικότερα, η επιχειρηματολογική διαδικασία που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών για να δικαιολογήσουν την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων, η οποία είναι ουσιαστικά μια λογική διαδικασία, ονομάζεται μαθηματική απόδειξη και συνδέεται με την εξαγωγή συμπερασμάτων και τα τυπικά συστήματα (Recio & Godino, 2001; Rav, 1999). Ο Polya (1954, όπ. αναφ. στο de Villiers, 1999) μάλιστα, αναφέρει πως έχοντας επαληθεύσει ένα θεώρημα σε αρκετές συγκεκριμένες περιπτώσεις, συγκεντρώνουμε ισχυρά επαγωγικά στοιχεία για αυτό και έτσι, με την επαγωγική φάση ξεπερνούμε την αρχική μας υποψία και αποκτούμε εμπιστοσύνη στο θεώρημα, γιατί χωρίς αυτή την εμπιστοσύνη δεν μπορούμε να βρούμε το θάρρος να αναλάβουμε την απόδειξη. Οι Reiss και Renkle (2002) από την άλλη, υποστηρίζουν πως η μαθηματική απόδειξη είναι μία σύνθετη δραστηριότητα που δεν μπορεί απλώς να περιοριστεί στη σωστή χρήση της επαγωγικής επιχειρηματολογίας, καθώς συνδυάζει διαδικασίες συνοπτικής λογικής επιχειρηματολογίας με ευρετικές διαδικασίες παραγωγής μιας εικασίας και αναζήτησης, για εύλογα επιχειρήματα που να υποστηρίζουν την εικασία.

Σύμφωνα με τη Hanna (1998), η γεωμετρία διδάσκεται ως παράδειγμα για την παραγωγή απόδειξης. Τα εγχειρίδια της γεωμετρίας διαφέρουν γενικά ως προς τον τρόπο με τον οποίον εξηγούν στους/ις μαθητές/τριες το τι αναμένεται από εκείνους και το τι υποτίθεται πως θα επιτύχει η απόδειξη, όμως δε διαφέρουν ως προς την κεντρική θέση της εξαγωγής συμπεράσματος (Hanna, 1998). Οι Ebos, Tuck και Crowley στο εγχειρίδιό τους (1970, όπ. αναφ. στο Hanna, 1998) αφού πρώτα εισήγαγαν όλα τα στοιχεία της Ευκλείδειας γεωμετρίας ως το σύνολο όλης της συμπερασματικής γεωμετρίας που ήταν γνωστή μέχρι την εποχή εκείνη, επεξηγούν την εξαγωγή συμπεράσματος μέσω ενός συλλογισμού, κάνοντας σαφές ότι πρόκειται για μία μέθοδο σκέψης που δε θα πρέπει να περιορίζεται στη γεωμετρία μόνο. Στη συνέχεια, οι ίδιοι, εξηγούν λέγοντας πώς ο Ευκλείδης και οι οπαδοί του είχαν ξεκινήσει με απροσδιόριστους όρους, αξιώματα και ισχυρισμούς και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας λογικό συλλογισμό και απαγωγική σκέψη, κατάφεραν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους για την γεωμετρία, αποδεικνύοντας συμπεράσματα, τα οποία είναι γνωστά σήμερα ως τα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας (Hanna, 1998).

Ο Hersh (2006, όπ. αναφ. στο Μούτσιος-Ρέντζος & Πιτσιλή-Χατζή, 2014) αποδίδει στον όρο «μαθηματική απόδειξη» δύο σημασίες, με την πρώτη να αντιλαμβάνεται την απόδειξη ως «μια αλληλουχία τυπικά εκφρασμένων δηλώσεων, εκκινώντας από μη αποδεδειγμένες δηλώσεις για μη ορισμένους όρους και προχωρώντας με βήματα επιτρεπτά από πρώτης τάξης κατηγορηματικό λογισμό», και τη δεύτερη να την αντιλαμβάνεται ως «ένα επιχείρημα που γίνεται δεκτό ως πειστικό από τη μαθηματική κοινότητα».

### 1.2.1 Τα είδη της απόδειξης στα Μαθηματικά

Κάπως έτσι, με βάση τη διάκριση που κάνει ο Hersh, μπορούμε να διακρίνουμε στα σχολικά μαθηματικά την τυπική, επίσημη, αυστηρή απόδειξη από τη μη–τυπική ή άτυπη, διαισθητική, «οιονεί εμπειρική» απόδειξη, με την πρώτη μορφή να είναι μία ρητή επεξήγηση της δεύτερης (Sjögren, 2010). Ο Sjögren (2010) εξηγεί πως επίσημες αποδείξεις είναι εκείνες που εμφανίζονται στη λογική. Και στη λογική, η τυπική απόδειξη εννοείται ότι είναι μια ακολουθία τύπων σε κάποιο απαγωγικό σύστημα που δείχνει τη μετατροπή από το σύνολο των υποθέσεων στο συμπέρασμα, από τους κανόνες που καθορίζονται στο απαγωγικό σύστημα. Συνεπώς, η τυπική απόδειξη βασίζεται σε αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα που έχουν ήδη αποδειχθεί, και όλες οι προτάσεις, ακόμα και οι μικρότερες, θα πρέπει να τεκμηριώνονται (Van de Walle, 2005). Ωστόσο, η φορμαλιστική αυστηρότητα μειώνεται στην πράξη, καθώς οι επίσημες αποδείξεις γίνονται εξαιρετικά περίπλοκες (Recio & Godino, 2001) και αυτό εξηγεί, κατά τη γνώμη του Resnick (1992, όπ. αναφ. στο Recio & Godino, 2001), το γεγονός ότι τα σύγχρονα μαθηματικά είναι γεμάτα από λειτουργικές, δηλαδή άτυπες αποδείξεις. Η Hanna (1995) αναφέρει στρατηγικές για την μαθηματική απόδειξη, που αμφισβητούν την αυστηρότητα της απαγωγικής αντίληψης, όπως η οπτική απόδειξη και γενικότερα οι αποδείξεις που βασίζονται σε πειραματικές επιβεβαιώσεις. Επιπλέον, η Hanna (1989) υποστηρίζει πως πλέον οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών συμφωνούν πως μία απόδειξη που είναι έγκυρη μόνο λόγω της μορφής της, ανεξαρτήτως περιεχομένου, δεν βοηθάει στην κατανόηση της από τους/ις μαθητές/τριες και συνεπώς μπορεί να μην είναι καν πειστική. Έτσι λοιπόν, οι Recio και Godino (2001) κάνουν λόγο για τις άτυπες αποδείξεις, δηλαδή για τα άτυπα απαγωγικά σχήματα με ισχυρή διαισθητική συνιστώσα, συμπεριλαμβανομένης της οπτικοποίησης, τα οποία μπορεί να στερούνται την επικυρωτική δύναμη της τυπικής απόδειξης, αλλά χρησιμεύουν στην παροχή ορισμένων λογικών συνεπειών στις εικασίες που προκύπτουν από διαισθητικές διαδικασίες. Μια άτυπη απόδειξη, συνεπώς, είναι μια απόδειξη που χρησιμοποιείται στα συνηθισμένα μαθηματικά και ουσιαστικά πρόκειται για ένα επιχείρημα που διατυπώνεται για να πείσει για την αλήθεια μιας πρότασης (Sjögren, 2010). Τέτοια μη τυπικά επιχειρήματα είναι εύκολο να συνταχθούν από παιδιά, με χρήση καθημερινής λογικής, εφόσον τους δοθεί η ευκαιρία να ερευνήσουν μία ιδέα και να αποκτήσουν αίσθηση του τι εμπλέκεται σε αυτήν (Van de Walle, 2005).

Ο Edwards (1997) όρισε τον όρο «εννοιολογικό έδαφος πριν από την απόδειξη» υποδεικνύοντας ότι η εικασία, η επαλήθευση, η εξερεύνηση και η εξήγηση αποτελούν τα απαραίτητα στοιχεία που προηγούνται των επίσημων αποδείξεων. Το εννοιολογικό έδαφος παρέχει το έδαφος για την κατασκευή διαισθητικών ιδεών που μπορούν στη συνέχεια να δοκιμαστούν και να επιβεβαιωθούν με τυπικές μεθόδους και αποτελούν τη βάση για μια πιο πλούσια κατανόηση μιας απόδειξης (Edwards, 1997). Ο Hersh (2004, όπ. αναφ. στο Μούτσιος-Ρέντζος & Πιτσιλή-Χατζή, 2014) επίσης, διακρίνει την απόδειξη ως προϊόν από την απόδειξη ως διαδικασία, με τη δεύτερη να μπορεί να διαρκέσει χρόνια και να μπορεί να περιλαμβάνει προσεγγίσεις ποικίλες και όχι πάντα επιτυχημένες, αλλά να μην μπορεί ο πλούτος αυτής της μαθηματικής δραστηριότητα να αποτυπωθεί στην απόδειξη που θα αποτελέσει προϊόν αυτής της αποδεικτικής διαδικασίας. Οι Reiss και Renkle (2002) αναφέρουν, μάλιστα, πως το προϊόν αυτής της δραστηριότητας, που καταλήγει να είναι μία μαθηματική απόδειξη που θα δημοσιευτεί σε κάποιο περιοδικό, αντικατοπτρίζει μόνο συγκεκριμένα μέρη της πραγματικής διαδικασίας απόδειξης, η οποία είναι πολύ πιθανό να παραμείνει αδιαφανής για τους/ις μαθητές/τριες που μαθαίνουν την απόδειξη στην τάξη των μαθηματικών. Μπορεί «οι αυστηρές αποδείξεις να είναι το χαρακτηριστικό των μαθηματικών και να αποτελούν ουσιαστικό μέρος της συμβολής των μαθηματικών στη γενική κουλτούρα», όπως αναφέρει ο Polya (1981, όπ. αναφ. στο Edwards, 1998), ωστόσο, η αυστηρότητα και η επίσημη παρουσίαση της απόδειξης είναι μόνο τα τελευταία στάδια σε μία διαισθητική, επαναληπτική διαδικασία εξερεύνησης και ανακάλυψης (Hadamard, 1945; Hanna, 1983; Hanna & Winchester, 1990; Lakatos, 1976; Leron, 1985, όπ. αναφ. στο Edwards, 1998).

Ο Schoenfeld (1983, όπ. αναφ. στο Reiss & Renkle, 2002) αναφέρει πως η εξερεύνηση, η αναζήτηση μία καλής μεθόδου και η αξιολόγηση αυτής της εξερεύνησης είναι βασικοί παράγοντες που πρέπει να απεικονίζονται με κάποιον τρόπο στην κατασκευή απόδειξης. Πιο συγκεκριμένα, ο Schoenfeld (1993, όπ. αναφ. στο Reiss & Renkle, 2002) προτείνει η προσέγγιση της εκπαίδευσης της απόδειξης να γίνεται με παρουσίαση επεξεργασμένων παραδειγμάτων που δεν παρέχουν τα βήματα της λύσης της έτοιμης απόδειξης, αλλά τα βήματα της ευρετικής στρατηγικής που οδηγούν στα βήματα της τελικής λύσης. Ο Boero (1999, όπ. αναφ. στο Reiss & Renkle, 2002) παρουσιάζει ένα αντίστοιχο, με αυτό που ο Schoenfeld προτείνει, μοντέλο έξι φάσεων που οδηγούν στην μαθηματική απόδειξη, όπου παρατηρείται πως η εικασία, η εξερεύνηση, η δοκιμή αποτελεσμάτων και η σύνταξη μία επίσημης απόδειξης είναι δραστηριότητες που επαναλαμβάνονται επανειλημμένως κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Γίνεται εμφανές, σε αυτό το μοντέλο, η πολυπλοκότητα της φύσης της απόδειξης ως γνωστική διαδικασία, καθώς και το γεγονός ότι δεν χαρακτηρίζεται μόνο από λογική επιχειρηματολογία αλλά και από ανταλλαγή μεταξύ διερευνητικών, επαγωγικών και απαγωγικών διαδικασιών (Reiss & Renkle, 2002). Η ικανότητα διερεύνησης μία κατάστασης, εύρεσης επιχειρημάτων και οργάνωσης αυτών σε μία λογική σειρά είναι σημαντική για την αποδεικτική διαδικασία (Reiss & Renkle, 2002). Οι αλληλένδετες δραστηριότητες του μοντέλου αυτού, που περιλαμβάνουν ευρετικές διαδικασίες, εξερεύνηση και διερεύνηση, είναι σημαντικές για την μαθηματική κατανόηση, και τα μαθησιακά περιβάλλοντα θα πρέπει παρέχουν τις ευκαιρίες για μεμονωμένες εξερευνήσεις και να ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες στην μαθηματική επιχειρηματολογία. Ένα περιβάλλον μάθησης, για μαθηματική απόδειξη και λογική επιχειρηματολογία, είναι σημαντικό να ξεκινάει με την ευρετική επίλυσης προβλημάτων, την εξερεύνηση και τη διερεύνηση (Reiss & Renkle, 2002).

Συνεπώς, αυτό που προκύπτει από τα παραπάνω είναι πως οι αποδείξεις μπορούν να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η μία κατηγορία είναι οι τυπικές, αυστηρές, φορμαλιστικές αποδείξεις, οι οποίες είναι αυτές που έχουν επικυρωτική δύναμη, δημοσιεύονται σε περιοδικά και για την κατασκευή τους βασίζονται σε αξιώματα ή προηγούμενα θεωρήματα και προτάσεις, που έχουν επίσης αποδειχθεί με τυπικό τρόπο. Και η άλλη κατηγορία είναι οι άτυπες, λειτουργικές αποδείξεις, οι οποίες βασίζονται σε πειραματικές επιβεβαιώσεις, στη διαίσθηση και έχουν τη δύναμη να πείθουν, καθώς τα στάδια της εικασίας, της εξερεύνησης, της επαλήθευσης και της εξήγησης προηγούνται των τυπικών αποδείξεων και οφείλουν να απεικονίζονται στην κατασκευή αυτών.

### 1.2.2 Οι λειτουργίες της απόδειξης

Οι Epstein και Levy (1995) αποδίδουν στον όρο απόδειξη δύο βασικές λειτουργίες, της δοκιμής ή του ελέγχου και της εδραίωσης χωρίς αμφιβολία, κάτι που στην πραγματικότητα (όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν) είναι πολύ φυσικό - παρά το γεγονός ότι ίσως φαίνεται παράξενο στους μαθηματικούς του σήμερα που θεωρούν την απόδειξη ως κάτι ξεκάθαρο - γιατί ο πιο συνηθισμένος τρόπος να εδραιώσει κανείς κάτι, τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα μαθηματικά, είναι να το εξετάσει, να το δοκιμάσει, να το διερευνήσει, να πειραματιστεί μαζί του. Με αυτόν τον τρόπο, παρακινείται η μελλοντική ανάπτυξη της θεωρίας και δίνεται μια βαθύτερη κατανόηση της υπάρχουσας θεωρίας (Epstein & Levy, 1995). Επιπροσθέτως, η Movshovitz – Hadar (2001) ενισχύει τη λειτουργία εδραίωσης της αλήθειας με αυτήν της πειθούς, υποστηρίζοντας πως μια απόδειξη είναι ένα επιχείρημα που δίνει κάποιος για να πείσει τους άλλους (και συχνά τον εαυτό του) για την ορθότητα του ισχυρισμού του και πως αυτή η ανάγκη απόδειξης ενός ισχυρισμού πηγάζει από αμφιβολίες για την αλήθεια του. Θα λέγαμε συνεπώς, πώς η απόδειξη λειτουργεί κατά κύριο λόγο ως ένα μέσο επαλήθευσης και αιτιολόγησης, με σκοπό να εδραιώσει την αλήθεια και να επιβεβαιώσει την ισχύ μίας εικασίας, ώστε να εξαλειφθούν οι αμφιβολίες και τελικά να πείσει. Μία τέτοια αντιμετώπιση της λειτουργίας της απόδειξης όμως, που σύμφωνα με τον Harel (1998, όπ. αναφ. στο Weber, 2002) πρόκειται για μία αυστηρή επίδειξη φαινομενικά προφανών αποτελεσμάτων, συχνά οδηγούν τους/ις μαθητές/τριες να βλέπουν τη διαδικασία της απόδειξης ως σχολαστική διαδικασία και χωρίς νόημα και για αυτόν τον λόγο η Hanna (1990) και ο Hersh (1993) υποστηρίζουν πως τέτοιες αποδείξεις δεν είναι κατάλληλες για μία τάξη μαθηματικών. Ο Kline (1973, όπ. αναφ. στο Weber, 2002) έχει υποστηρίξει, μάλιστα, την πλήρη απομάκρυνση αυτών των αποδείξεων από τη σχολική τάξη.

Γίνεται ξεκάθαρο πως η εδραίωση της αλήθειας ενός επιχειρήματος με σκοπό την πειθώ, με την οποία εξαλείφεται κάθε αμφιβολία για την εγκυρότητα μίας πρότασης, αποτελεί τη βασικότερη και πιο προφανή λειτουργία της απόδειξης, και θα λέγαμε πως σε κάποιο βαθμό αντικατοπτρίζονται και στα προγράμματα μαθηματικών (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004). Ωστόσο, η απόδειξη εκτελεί ένα ευρύ φάσμα λειτουργιών στη μαθηματική πρακτική. Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (NCTM, 2000, όπ. αναφ. στο Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004) η απόδειξη δεν γίνεται κατανοητή μόνο με τον παραδοσιακό άκαμπτο και απόλυτο τρόπο, αλλά περιλαμβάνει επίσης πολλές άλλες λειτουργίες. Στη βιβλιογραφία συναντώνται πλήθος λειτουργιών της αποδεικτικής διαδικασίας στη σχολική πρακτική (Hanna, 2000; de Villiers, 1999).

Η απόδειξη μπορεί λοιπόν να λειτουργήσει και ως μέσο επεξήγησης και να παρέχει την επίγνωση του γιατί μία εικασία είναι αληθής (de Villiers, 1999). Μία απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί καλή απόδειξη αν βοηθάει να γίνει κατανοητό το νόημα του θεωρήματος που αποδεικνύει για να διαπιστωθεί όχι μόνο ότι είναι αληθινό, αλλά και το γιατί είναι αληθινό (Hersh, 1993; Hanna, 2000). Άλλωστε, στη σχολική τάξη το θεμελιώδες ερώτημα που πρέπει να εξετάσει η απόδειξη είναι σίγουρα το «γιατί;» (Hanna, 2000) και η αληθινή κατανόηση απαιτεί από τους/ις μαθητές/τριες να βλέπουν γιατί συμβαίνει κάτι, και επιπλέον γιατί πρέπει πάντα να συμβαίνει, και αυτή η κατανόηση προκαλείται από μία επεξηγηματική απόδειξη (Hanna, 1998). Η κατανόηση αυτή, είναι πρωτίστης σημασίας, για να εκτιμήσει κάποιος τι είναι αυτό που στη συνέχεια δικαιολογείται (Hanna & Jahnke, 1993). Ο Steiner (1978, οπ. αναφ. στο Knuth, 2002), η Hanna (1990) και ο Hersh (1993) κάνουν διάκριση μεταξύ των αποδείξεων που απλώς παρουσιάζουν για να πείσουν, δηλαδή αυτών που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος για να επαληθεύσει ότι ένα θεώρημα είναι αληθές (Weber, 2002), παρέχοντας απλώς αποδεικτικούς λόγους (Hanna, 1990), και των αποδείξεων που εξηγούν, δηλαδή αυτών που μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς για να αποκτήσει μία διαισθητική κατανόηση του γιατί το θεώρημα είναι αληθές (Weber, 2002), παρέχοντας μία σειρά από λόγους που απορρέουν από το ίδιο το φαινόμενο (Hanna, 1990). Ο Weber (2002) αναφέρει πως μία απόδειξη που έχει σκοπό να επεξηγήσει, δεν απαιτείται να είναι πολύ αυστηρή, απλώς να παρέχει διαισθητική κατανόηση βασικών ιδεών. Ο de Villiers (1999) συμφωνεί λέγοντας πως αν και είναι δυνατόν να επιτευχθεί αρκετά υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης στην εγκυρότητα μιας εικασίας μέσω οιονεί εμπειρικής επαλήθευσης, αυτό ουσιαστικά παρέχει ικανοποιητική εξήγηση γιατί η εικασία μπορεί να είναι αληθινή. Έτσι, στις περισσότερες περιπτώσεις όταν τα σχετικά αποτελέσματα είναι διαισθητικά αυτονόητα ή/και υποστηρίζονται από πειστικά οιονεί εμπειρικά στοιχεία, η λειτουργία της απόδειξης για τους μαθηματικούς δεν είναι η επαλήθευση, αλλά μάλλον η επεξήγηση. Στην πραγματικότητα, για πολλούς μαθηματικούς η επεξήγηση, ως λειτουργία, μιας απόδειξης έχει μεγαλύτερη σημασία από την πλευρά της επαλήθευσης (de Villiers, 1999). Βλέπουμε έτσι και ένα επιπλέον ρόλο της απόδειξης, ως μέσο ανάπτυξης της διαίσθησης, καθώς η αποδεικτική διαδικασία μέσω της οποίας εξετάζεται ένας ορισμός ή μία γεωμετρική εικασία, μπορεί να ενισχύσει την ανάπτυξη της διαισθητικής κατανόησης του αντικειμένου που μελετάται (Hersh, 1993).

Η Hanna (2000) υποστηρίζει πως η επαλήθευση και η επεξήγηση είναι οι θεμελιώδεις λειτουργίες των αποδείξεων, επειδή αποτελούν το προϊόν της μακράς ιστορικής ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Ο de Villiers (1999), από την άλλη, υποστηρίζει πως η απόδειξη δεν είναι απαραιτήτως απαραίτητη προϋπόθεση για την επαλήθευση, αντίθετα, η επαλήθευση είναι, πιθανότατα πολύ πιο συχνά, προϋπόθεση για την εύρεση μιας απόδειξης. Συχνά, τα θεωρήματα ανακαλύπτονται για πρώτη φορά με τη βοήθεια της διαίσθησης και/ή οιονεί εμπειρικών μεθόδων, πριν επαληθευτούν με την απόδειξη (de Villiers, 1999). Ωστόσο, υπάρχουν πολλά παραδείγματα στην ιστορία των μαθηματικών όπου νέα αποτελέσματα ανακαλύφθηκαν ή εφευρέθηκαν με καθαρά συμπερασματικό τρόπο (de Villiers, 1999). Η απόδειξη δεν είναι επομένως απλώς ένα μέσο επαλήθευσης ενός ήδη ανακαλυφθέντος αποτελέσματος, αλλά συχνά επίσης ένα μέσο εξερεύνησης, ανάλυσης, ανακάλυψης και εφεύρεσης νέων αποτελεσμάτων (de Villiers, 1999). Βλέπουμε έτσι και ακόμα δύο λειτουργίες της απόδειξης. Η μία θέλει την απόδειξη ως μέσο ανακάλυψης, καθώς μέσω της διερεύνησης των όσων συνεπάγεται η αποδεικτική διαδικασία, καθίσταται εφικτή η ανακάλυψη ή η εφεύρεση νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων (de Villiers, 1999; Hersh, 1993), όπως συνέβη και με τις μη - Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Hemmi, 2006), όπως επίσης και κατασκευής νέας γνώσης, μέσω προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας (Knuth, 2002), ή και κατασκευής εμπειρικής θεωρίας (Hanna, 2000). Η άλλη λειτουργία, θέλει την απόδειξη ως μέσο εξερεύνησης, καθώς μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας πραγματοποιείται η διερεύνηση της έννοιας ενός ορισμού και των συνεπειών μίας εικασίας (Hanna, 2000).

Μία ακόμα λειτουργία της απόδειξη είναι αυτή της συστηματοποίησης, καθώς μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο οργανώνονται διάφορα αποτελέσματα σε ένα συμπερασματικό σύστημα αξιωμάτων, εννοιών και θεωρημάτων, που υπακούνε σε κοινά αποδεκτούς νόμους και κανόνες (de Villiers, 1999). Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα συστηματοποίησης, καθώς η μελέτη της ξεκινάει από ένα μικρό σύνολο πρωταρχικών εννοιών, των αξιωμάτων, οι οποίες προκύπτουν εμπειρικά και τις οποίες δεχόμαστε χωρίς περαιτέρω απόδειξη, και από αυτές εξάγονται άλλες προτάσεις, τα θεωρήματα, που επιζητούν εκ νέου απόδειξη.

Επιπλέον, η απόδειξη μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο επικοινωνίας και αποτελεί ένα μέσο μετάδοσης μαθηματικών γνώσεων, αλλά και ενσωμάτωσης γνώσεων (Hanna, 2000), καθώς αποτελεί ένα προϊόν αλληλεπίδρασης μέσα σε μία σχολική τάξη και δημιουργεί τόπο για κριτική συζήτηση (Davis, 1976, όπ. αναφ. στο de Villiers, 1999). Μέσω αυτής της κοινωνικής διαπραγμάτευσης δίνεται η ευκαιρία ώστε να αποσαφηνιστούν τυχόν λάθη και να εξαλειφθούν τυχόν αμφιβολίες (de Villiers, 1999). Επίσης, όπως αναφέρει και ο Knuth (2002), μέσω της απόδειξης μίας πρότασης, οι μαθητές/τριες πείθονται για την εγκυρότητα και την αλήθεια της και την αποδέχονται ή τελικά την απορρίπτουν, με την εύρεση ενός αντιπαραδείγματος (de Villiers, 1999).

Ο de Villiers (1999), αναφέρει ως τελευταία λειτουργία της απόδειξης αυτή της πνευματικής πρόκλησης, μέσω της εκπλήρωσης της κατασκευής μίας απόδειξης προκαλείται η αυτοπραγμάτωση και η εσωτερική ευχαρίστηση.

Εξαιτίας της σημαντικότητας του ρόλου της απόδειξης στα μαθηματικά, η Hanna (2000) προτείνει πως οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να συζητούν με τους/ις μαθητές/τριες τους τη λειτουργία της απόδειξης , επισημαίνοντας τόσο τη σημασία όσο και τους περιορισμούς της. Επιπλέον, η Hanna (1995) αναφέρει ότι η πιο σημαντική πρόκληση στους εκπαιδευτικούς μαθηματικών στο πλαίσιο της απόδειξης, είναι η ενίσχυση του ρόλου της στην τάξη με την εύρεση πιο αποτελεσματικών τρόπων χρήσης της ως μέσο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε πώς η απόδειξη επιτελεί πολλές και διαφορετικές λειτουργίες, ως μέσο επαλήθευσης και αιτιολόγησης για την εδραίωση της αλήθειας με σκοπό την πειθώ, ως μέσο επεξήγησης, εξερεύνησης και ανακάλυψης νέων αποτελεσμάτων, ως μέσο συστηματοποίησης, αλλά και ως μέσο ανάπτυξης της διαίσθησης, επικοινωνίας καθώς και πνευματικής πρόκλησης.

## 1.3 Η απόδειξη στην Μαθηματική Εκπαίδευση

### 1.3.1 Η σημασία της και η θέση της στα προγράμματα σπουδών

Το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (NCTM, 2000 όπ. αναφ. στο Heinz & Kwak, 2002) επεσήμανε πως:

«Η μαθηματική συλλογιστική και η απόδειξη προσφέρουν ισχυρούς τρόπους ανάπτυξης και κωδικοποίησης πληροφοριών για ένα ευρύ φάσμα φαινομένων. Οι άνθρωποι που σκέφτονται και σκέφτονται αναλυτικά διερευνούν τις ιδιότητες και τη δομή των αντικειμένων και των συστημάτων. Σημειώνουν μοτίβα και κανονικότητες τόσο στον πραγματικό κόσμο όσο και στα συμβολικά αντικείμενα, ρωτούν αν αυτά τα μοτίβα είναι τυχαία ή αν τα πράγματα πρέπει να είναι έτσι και δημιουργούν και αποδεικνύουν. Τελικά, μια μαθηματική απόδειξη αντιπροσωπεύει την επίσημη κωδικοποίηση των προτύπων συλλογισμού και αιτιολόγησης".

Η απόδειξη θεωρείται ένα θεμελιώδες μέρος της εξάσκησης στην μαθηματική επιστήμη, από την αρχαιότητα ακόμα, και έχει εισαχθεί στα προγράμματα σπουδών εδώ και πολλά χρόνια, (Lee, 2003) παραμένοντας στο επίκεντρο των μαθηματικών και αποτελώντας δηλωμένο στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών, να διδαχθούν οι μαθητές/τριες/τριες τόσο την πρακτική όσο και τη σημασία της απόδειξης (Hanna, 1998). Οι Hanna και Jahnke

(1996) συμφωνούν πως η απόδειξη είναι ένα ουσιαστικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών και ως εκ τούτου θα πρέπει να αποτελεί βασικό συστατικό στη μαθηματική εκπαίδευση, ωστόσο, υποστηρίζουν πως η μετάφραση αυτής της δήλωσης στην πρακτική στην τάξη δεν είναι απλή υπόθεση, επειδή υπήρξαν και παραμένουν διαφορετικές και συνεχώς αναπτυσσόμενες απόψεις σχετικά με τη φύση και τον ρόλο της απόδειξης και σχετικά με τους κανόνες στους οποίους πρέπει να τηρείται. Οι ίδιοι, αναφέρονται στο ρόλο της απόδειξης στην εκπαίδευση των μαθηματικών, υποστηρίζοντας πως δεν είναι απλώς μία αντανάκλαση της μαθηματικής πρακτικής, αλλά σε όλο το φάσμα των εκδηλώσεών της, είναι ένα ουσιαστικό εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης στην τάξη, αλλά και ένας μηχανισμός μίας βαθύτερης κατανόησης της εξωτερικής πραγματικότητας όσο τεχνητή και αφύσικη και αν φαίνεται η χρήση της στους αρχάριους (Hanna & Jahnke, 1996). Ως εκ τούτου, στα σχολικά μαθηματικά, η απόδειξη είναι μια από τις κύριες μεθόδους για την ανάπτυξη της ικανότητας συλλογιστικής και την προώθηση της κατανόησης των μαθηματικών (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2003).

Ο Schoenfeld (1994, όπ. αναφ. στο Knuth, 2002) αναφέρει πώς η απόδειξη δεν είναι κάτι το διαχωρίσιμο από τα μαθηματικά, όπως άλλωστε φαίνεται και από τα προγράμματα σπουδών, και είναι ένα απαραίτητο στοιχείο της επικοινωνίας στα μαθηματικά. Ωστόσο, και ενώ κατά τη διάρκεια των δεκαετιών ’50 και ’60 έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών, εκτός της Ευκλείδειας γεωμετρίας, στη διδασκαλία της οποίας κατέλαβε σημαντικότατη θέση (Lee, 2003), η απόδειξη δεν διαπέρασε ολόκληρο το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, αλλά στάθηκε σχεδόν αποκλειστικά στη γεωμετρία (Hanna, 1998). Η ιστορία απέδωσε στη γεωμετρία την προνομιακή θέση σε σχέση με τη μαθηματική απόδειξη, παρουσιάζοντάς την ως τον τομέα στον οποίο ο μαθηματικός συλλογισμός απέκτησε την ιδανική του μορφή, και επιπλέον και τα σημερινά αναλυτικά προγράμματα σπουδών εξακολουθούν να αντανακλούν αυτήν την ιστορική εξέλιξη (Hanna, 1998).

Η σημασία της απόδειξης εκφράζεται στην ευρέως αποδεκτή άποψη της σχολικής γεωμετρίας ως η μελέτη των χωρικών αντικειμένων μαζί με τα αξιωματικά συστήματα που υποτίθεται ότι τα αναπαριστούν (Clements & Battista, 1992). Περαιτέρω απόδειξη της σημασίας που αποδίδεται στην απόδειξη της σχολικής γεωμετρίας είναι το όφελος που αναμένεται να αποφέρει πέρα από τα όρια αυτού και μόνο του μαθήματος (Hanna, 1998). Οι βασικοί στόχοι της διδασκαλίας της γεωμετρίας φαίνεται να είναι η ανάπτυξη των ικανοτήτων σκέψης, της χωρικής διαίσθησης για τον κόσμο, της γνώσης που είναι απαραίτητη για τη μελέτη περισσότερων μαθηματικών και της ικανότητας ερμηνείας μαθηματικών επιχειρημάτων (Fehr, 1973, όπ. αναφ. στο Hanna, 1998). Έτσι, η γεωμετρική απόδειξη θεωρείται ως η εκπαίδευση για λογικούς συλλογισμούς (Suydam, 1985, όπ. αναφ. στο Hanna, 1998) και αναμένεται από τους/ις μαθητές/τριες να αποκτήσουν όχι μόνο έναν βαθμό ικανότητας στην κατανόηση και στην κατασκευή αποδείξεων, αλλά και μία «γενική ακρίβεια της σκέψης» (NCTM, 1989, όπ. αναφ. στο Hanna, 1998).

Έτσι λοιπόν, η απόδειξη έχει αναβαθμιστεί σε ένα πραγματικό πρότυπο, έχει λάβει ένα πολύ πιο εξέχοντα ρόλο στο σχολικό πρόγραμμα μαθηματικών και αναμένεται να είναι μέρος όλων των μαθηματικών μαθημάτων του σχολείου. Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (NCTM 2000, όπ. αναφ. στο Knuth, 2002), τα εκπαιδευτικά προγράμματα από το νηπιαγωγείο ακόμα, θα πρέπει να δίνουν τη δυνατότητα σε όλους τους/ις μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν τη συλλογιστική και την απόδειξη ως θεμελιώδη πτυχή των μαθηματικών, να κάνουν και ερευνούν μαθηματικές εικασίες, να αναπτύσσουν και να αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις, να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν διάφορους τύπους συλλογισμού και μεθόδων απόδειξης.

### 1.3.2 Πώς και πότε αρχίζει να αναπτύσσεται

Ο Mason (2001), ωστόσο, αναρωτιέται για το πως μάθαμε το τι είναι απόδειξη, το τι σημαίνει να αποδεικνύουμε κάτι και πως μάθαμε να το κάνουμε μόνοι μας. Η απόδειξη και η λειτουργία συλλογισμού είναι δύο σημαντικοί στόχοι που συνδέονται περισσότερο με το Γυμνάσιο και το Λύκειο, ωστόσο, τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία μπορούν να ασχοληθούν με τον μαθηματικό συλλογισμό και την άτυπη απόδειξη, και αυτό τους βοηθάει να δημιουργήσουν μία ισχυρή βάση για την ανάπτυξη τυπικών αποδείξεων μετέπειτα (Μαρκάδας, 2017). Σύμφωνα με την «γενετική προσέγγιση της απόδειξης» του Janhke (2005), η απόδειξη αποτελείται από τρεις φάσεις, με την πρώτη φάση να είναι αυτή των άτυπων συλλογισμών και των διερευνήσεων και αφορά μαθητές/τριες από την Α’ Δημοτικού μέχρι και την Α’ Γυμνασίου. Η δεύτερη φάση αφορά μαθητές/τριες της Β΄ και Γ’ Γυμνασίου και σχετίζεται με την υποθετική σκέψη που οδηγεί σε αφαιρετικούς συλλογισμούς. Και η τρίτη φάση, που συναντάται από το Λύκειο και πέρα, είναι αυτή των αυτόνομων μαθηματικών θεωριών. Στην ελληνική πραγματικότητα, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών (ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ) του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου ο όρος «απόδειξη» εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Πρόγραμμα Σπουδών της Β' Γυμνασίου, ενώ το ρήμα «αποδεικνύω» εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Πρόγραμμα Σπουδών της Γ' Γυμνασίου (Μαρκάδας, 2017).

Πολλοί ερευνητές και εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν πως η διδασκαλία της απόδειξης θα πρέπει να ξεκινάει στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Μαρκάδας, 2017), και ο λόγος τους στηρίζεται στον αργό ρυθμό διανοητικής ανάπτυξης των παιδιών που εμποδίζει την ικανότητα υποθετικής ή παραγωγικής σκέψης πριν την ηλικία των 14 με 15 ετών (Τουμάσης, 1994, όπ. αναφ. στο Μαρκάδας, 2017). Αυτό μπορεί να επεξηγηθεί από τα νοητικά στάδια ανάπτυξης της θεωρίας του Piaget. Οι Clements και Battista (1992), αναφέρονται στην μελέτη των Piaget & Inhelder (1967) οι οποίοι εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίον τα παιδιά οργανώνουν τις ιδέες τους και κατασκευάζουν γεωμετρικές αποδείξεις και υποστηρίζουν ότι, η οργάνωση των γεωμετρικών ιδεών ενός παιδιού ακολουθεί μια καθορισμένη, λογική διατεταγμένη σειρά και πως οι γεωμετρικές ιδέες αναπτύσσονται με την πάροδο του χρόνου και προχωρούν μέσω των επιπέδων νοητικής ανάπτυξης. Τα στάδια αυτά είναι 4 και συμπίπτουν με τη βιολογική ανάπτυξη του παιδιού, και ο Piaget υποστηρίζει πως οι μαθητές/τριες/τριες αναπτύσσουν τον συλλογισμό τους και τις δεξιότητες αιτιολόγησης και απόδειξης, στα 3 από αυτά τα στάδια (Clements & Battista, 1992). Πιο συγκεκριμένα, στο τέλος του δεύτερου νοητικού σταδίου του Piaget, το οποίο αφορά παιδιά από 2 έως 7-8 ετών, η σκέψη τους αρχίζει να μπορεί να μεταχειρίζεται αλληλένδετα γεγονότα χωριστά και είναι σε θέση να εκτελούν στοιχειώδεις αφαιρετικούς συλλογισμούς (Clements & Battista, 1992). Στο επόμενο στάδιο, που αφορά παιδιά 7-8 έως 11-12 ετών, αρχίζουν να επιτελούν λογικούς χειρισμούς (Atkinson, Atkinson, Smith, Bem & Nolen-Hoeksema, 2004), να διατυπώνουν υποθέσεις δικαιολογώντας τον συλλογισμό τους, μέσω εμπειρικών αποτελεσμάτων (Clements & Battista, 1992). Στο τελευταίο στάδιο, που εμφανίζεται σε παιδιά 11-12 ετών και άνω, μπορούν να συλλογιστούν με καθαρά συμβολικούς όρους (Atkinson, Atkinson, Smith, Bem & Nolen-Hoeksema, 2004) και πλέον να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό σε μία αποδεικτική διαδικασία (Clements & Battista, 1992).

Ωστόσο, σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007, όπ. αναφ. στο Μαρκάδας, 2017) «με εκκίνηση την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, οι μαθητές/τριες θα μάθουν βαθμιαία να εξηγούν, να δικαιολογούν και να τεκμηριώνουν ώστε να φτάσουν σε μεγαλύτερες ηλικίες όχι μόνο να αντιμετωπίζουν με άνεση τις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις αλλά και να κατανοούν τη δομή της μαθηματικής επιστήμης όπως και γενικότερα κάθε επιστημονικής προσέγγισης. όπως και η επίλυση προβλήματος, η μαθηματική απόδειξη είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στα παιδιά και με την έννοια αυτή να ενταχθεί στη διδακτική διαδικασία». Οι αποδείξεις που αναπτύσσουν τα μικρά παιδιά είναι άτυπες, δηλαδή παρουσιάζονται σε ανεπίσημη γλώσσα και βασίζονται στη διαίσθηση (Μαρκάδας, 2017). Η διαίσθηση, οι διερευνητικές διαδικασίες και η κατανόηση είναι πολύ σημαντικές και πρέπει να υποστηρίζονται στους/ις μαθητές/τριες από πολύ μικρές ηλικίες όπως επίσης, είναι απαραίτητο να αξιολογούνται τα είδη άτυπης μαθηματικής σκέψης και επιχειρηματολογίας για τα οποία είναι ικανοί οι μαθητές/τριες, προτού τους διδαχθούν οι επίσημες μέθοδοι απόδειξης και μαθηματικού επιχειρήματος (Edwards, 1998).

## 1.4 Ερευνητικά ευρήματα σχετικά με την τυπική και άτυπη απόδειξη

### 1.4.1 Ευρήματα που αφορούν μαθητές σχετικά με τη χρήση και τις προϋποθέσεις χρήσης άτυπων αποδεικτικών διαδικασιών

Η Edwards (1998) στη μελέτη της περιγράφει τον άτυπο μαθηματικό συλλογισμό μιας ομάδας μαθητών της Α’ Γυμνασίου με στόχο να διερευνηθεί το ποιες θεωρούσαν οι μαθητές/τριες επαρκείς εξηγήσεις για ένα σύνολο μαθηματικών δηλώσεων. Καθένας από τους/ις μαθητές/τριες «μετέφρασε» το πρόβλημα που του δόθηκε σε οπτική μορφή προκειμένου να οικοδομήσει το επιχείρημά του. Αυτές οι αναπαραστάσεις πιθανόν να βοήθησαν τους/ις μαθητές/τριες να εκφράσουν καλύτερα τη δομή του μαθηματικού αντικειμένου που είχαν να επεξεργαστούν, είτε μπορεί κατά την κατασκευή των εικαστικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές/τριες να ξεκαθάρισαν αυτή τη δομή μόνοι τους, δηλαδή οι οπτικές φόρμες τους βοήθησαν να «δουν» ένα επιχείρημα που ήταν ακόμη στη διαδικασία διατύπωσης. Και στις δύο περιπτώσεις, αυτές οι αναπαραστάσεις είχαν επεξηγηματική δύναμη για τους/ις μαθητές/τριες, αφού τις χρησιμοποιούσαν για να δικαιολογήσουν τις αποφάσεις τους και υπό αυτή την έννοια, αν και τα οπτικά επιχειρήματα δεν ήταν σε καμία περίπτωση πλήρεις ή τυπικές μαθηματικές αποδείξεις, ήταν ένα είδος «απόδειξης που εξηγεί» για τους/ις μαθητές/τριες που τα δημιούργησαν. Η μελέτη προτείνει ότι από την αρχή του γυμνασίου, ακόμη και χωρίς οδηγίες επίσημης απόδειξης, οι μαθητές/τριες μπορούν να υπερβούν, με προτροπή, την εμπειρική λογική και να προσφέρουν άτυπες αποδείξεις ή εξηγήσεις για τα ευρήματά τους (Edwards, 1998).

Οι Maher και Martino (1996), αναφέρουν πως έχει υπάρξει σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον για την ανάπτυξη της αιτιολόγησης και της απόδειξης σε παιδιά από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού έως και το κολέγιο, αλλά όχι σε παιδιά μικρότερης ηλικίας. Η διαχρονική μελέτη περίπτωσης, διάρκειας 5 ετών, των Maher και Martino (1996) παρουσιάζει τη διαδικασία με την οποία ένα κορίτσι 5 ετών «έμαθε» να κάνει αποδείξεις, μέσα σε ένα περιβάλλον που ενθάρρυνε την ανάπτυξη των ιδεών της, χωρίς να της «μάθει» κάποιος πώς να κάνει αποδείξεις. Μέσω αυτής της μελέτης αποκτήθηκαν περαιτέρω γνώσεις σχετικά με τις γνωστικές και αναπτυξιακές πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού ενός παιδιού, από τις διαισθητικές προσπάθειες να κατανοήσει τις καταστάσεις μαθηματικών προβλημάτων, έως την ανάπτυξη της ιδέας της απόδειξης σε μια εκτεταμένη χρονική περίοδο. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλοντα μάθησης με ενεργή τη συμμετοχή των μαθητών/τριών στην κατασκευή μαθηματικών ιδεών, με ευκαιρίες προς τους/ις μαθητές/τριες να εξερευνήσουν τις ιδέες τους και με ευελιξία ως προς το περιεχόμενο και τη χρονική διάρκεια ώστε τα παιδιά να μπορούν να επεκτείνουν τις σκέψεις τους. Πρόκειται για τη μελέτη ανάπτυξης της ιδέας της μαθηματικής απόδειξης από ένα 5χρονο κορίτσι, σε διάρκεια 5 χρόνων, μέσα από επεισόδια επίλυσης προβλημάτων και προσπάθεια κατασκευής μοντέλου των λύσεων των προβλημάτων. Κάθε τέτοιο επεισόδιο περιλάμβανε την αυθόρμητη χρήση ευρετικών, την ανάπτυξη ενός επιχειρήματος και την επέκταση ενός επιχειρήματος για τη δημιουργία πλήρους λύσης. Οι ιδέες του κοριτσιού, με την πάροδο των χρόνων, τροποποιήθηκαν, επεκτάθηκαν και βελτιώθηκαν καθώς στοχαζόταν πάνω σε αυτές, εξέταζε εναλλακτικές διαδρομές και έκανε προβλέψεις για άλλες ιδέες. Η μελέτη του κοριτσιού έδειξε τελικά πως όταν έγινε πλέον 10 ετών, «εφηύρε» αποδείξεις για να δικαιολογήσει τη λύση της σε ένα πρόβλημα στο οποίο εργαζόταν για πολλούς μήνες, οι οποίες καλύπτουν και τις τρεις μορφές μαθηματικών επιχειρημάτων που περιγράφονται από τον Balacheff (1988) οι οποίες αφορούν την παροχή αιτιολόγησης, την προσφορά απόδειξης και την παροχή μαθηματικής απόδειξης. Αρχικά, το κορίτσι έδειξε μία «διαισθητική» ιδέα ότι τα μαθηματικά πρέπει να έχουν νόημα, γεγονός που συνέβαλε στο ενδιαφέρον που είχε επιδείξει από νωρίς για ανάπτυξη αιτιολόγησης σύμφωνα με τα δικά της κριτήρια. Καθώς είχε πολλές ευκαιρίες να δοκιμάσει τις ιδέες της σε διάφορα περιβάλλοντα, ανέπτυξε περίπλοκα επιχειρήματα, τα οποία και παρουσίαζε στους συμμαθητές και στο δάσκαλό της, δεχόμενη τις απόψεις και τις κριτικές τους σχετικά με τη σκέψη της. Έτσι, είχε ευκαιρίες να τροποποιήσει και να επεκτείνει τις αρχικές της ιδέες και να χτίσει νέες και πιο ισχυρές στρατηγικές. Τελικά κατάφερε να αναπτύξει ένα επιχείρημα που περιλάμβανε τα πάντα για να θεωρείται μία νόμιμη μορφή απόδειξης που χρησιμοποιείται από μαθηματικούς. Μέσα από την μελέτη αυτή προκύπτει η εικόνα ενός μαθητή που είναι ενεργός δημιουργός μαθηματικών ιδεών σε ένα περιβάλλον κατάλληλα διαμορφωμένο, με τον δάσκαλο να είναι οδηγός σε όλη τη διαδικασία. Δίνεται έτσι η δυνατότητα να κατανοήσουμε καλύτερα την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού ως διαδικασία και όχι ως δεξιότητα που διδάσκεται άμεσα και αποκτάται με επίσημους τρόπους. (Maher & Martino, 1996).

Οι Heinze και Kwak (2002) αναφέρουν πως ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης και της γνωστικής ψυχολογίας, για να βρουν τους λόγους της τόσο χαμηλής απόδοσης των μαθητών/τριών/τριών του Γυμνασίου και του Λυκείου στη συλλογιστική και την απόδειξη, προσπαθούν να εντοπίσουν πτυχές της γεωμετρικής ικανότητας που αποτελούν προϋποθέσεις για τις ικανότητες των μαθητών/τριών/τριών στη λογική και την απόδειξη στη γεωμετρία. Σε αρκετές μελέτες, όπως σε αυτή του Greeno (1980, όπ. αναφ. στο Heinze & Kwak, 2002) και του Koedinger (1998, όπ. αναφ. στο Heinze & Kwak, 2002) εντοπίστηκαν πως εκτός από τη δηλωτική γνώση, δηλαδή η γνώση για γεωμετρικά αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα , σημαντικές προϋποθέσεις για την ανάπτυξη των γεωμετρικών αποδείξεων διαδραματίζουν και η μεθοδολογική γνώση, η μεταγνώση και οι χωρικές ικανότητες. Η έρευνα των Heinze και Kwak (2002) επικεντρώθηκε στις γνωστικές διαδικασίες και στις συγκεκριμένες δομές γνώσης, συγκεκριμένα στη δηλωτική και τη μεθοδολογική γνώση, που σχετίζονται με την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και της απόδειξης και που απαιτούνται για την επίλυση γεωμετρικών αποδεικτικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τα εμπειρικά αποτελέσματα τους αποδείχθηκε πως η δηλωτική γνώση, είναι απαραίτητη αλλά όχι επαρκής. Φάνηκε πως οι μαθητές/τριες δεν ήταν εξοικειωμένοι με τους ορισμούς γεωμετρικών αντικειμένων καθώς έχουν λανθασμένη κατανόηση των απαραίτητων και επαρκών συνθηκών για έναν ορισμό. Επιπλέον, για πολύ μικρό ποσοστό μαθητών φάνηκε να υπάρχει η ανάγκη να αιτιολογηθούν για την αλήθεια μίας μαθηματικής πρότασης, ενώ οι περισσότεροι αρκέστηκαν σε εμπειρικά επιχειρήματα. Σύμφωνα με τους ερευνητές, τα ελλείμματα αυτά ως προς αυτές τις γνώσεις, δεν τους επιτρέπουν να αποκτήσουν βαθύτερη εικόνα του γεωμετρικού συλλογισμού και της απόδειξης (Heinze & Kwak, 2002).

Οι Healy και Hoyles (1998, όπ. αναφ. στο Reiss & Renkle, 2002), σε έρευνα τους, έδειξαν πως μαθητές της Α΄ Γυμνασίου είχαν ελλείμματα στην κατανόηση των αποδείξεων, στην ικανότητά τους να κατασκευάζουν αποδείξεις και στις απόψεις τους για το ρόλο της απόδειξη, και επιπλέον, δεν ήταν σε θέση να προσδιορίσουν μαθηματικά επιχειρήματα για μια απόδειξη μετά από μια εντατική εμπειρική διερεύνηση του πλαισίου. Ο Lin (2000, όπ. αναφ. στο Reiss & Renkle, 2002) υποστηρίζει ότι αυτοί οι μαθητές/τριες πιθανώς δεν ήταν σε θέση να κατακτήσουν τη μεταφορά μεταξύ των μεθόδων και των αποτελεσμάτων μιας εμπειρικής έρευνας και των μεθόδων που απαιτούνται για τη γενική μαθηματική επιχειρηματολογία. Συνεπώς, το χάσμα μεταξύ του συλλογισμού που βασίζεται σε περιπτώσεις στις εμπειρικές έρευνες και της γενικευμένης επιχειρηματολογίας μπορεί να μην γεφυρωθεί (Reiss & Renkle, 2002).

Σε μία παρόμοια μελέτη που πραγματοποίησαν οι Reiss, Klieme και Henze (2001, οπ. αναφ. στο Reiss και Renkle, 2002) σε μαθητές της Γ’ Γυμνασίου, αποδείχθηκε πως ενώ οι μαθητές/τριες είχαν τις απαραίτητες δηλωτικές γνώσεις, μόνο λίγοι μπόρεσαν να συνδυάσουν έστω και μικρό αριθμό επιχειρημάτων, ενώ ήταν ευκολότερο για αυτούς να κρίνουν την ορθότητα των αποδείξεων, με τους περισσότερους από αυτούς να έχουν αναγνωρίσει ότι η εμπειρική επιχειρηματολογία δεν είναι μια έγκυρη μαθηματική μέθοδος απόδειξης (Reiss, Klieme & Heinze, 2001, οπ. αναφ. στο Reiss και Renkle, 2002).

Κάτι αντίστοιχο παρουσιάζουν και οι Kunimune, Fujita και Jones (2010) σε μία μακροχρόνια έρευνα που πραγματοποίησαν σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Ιαπωνίας, με στόχο να εντοπίσουν την αιτία της δυσκολίας των μαθητών/τριών στην κατασκευή γεωμετρικής απόδειξης. Κατέληξαν πως ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών θεωρούν πως οι εμπειρικές επαληθεύσεις είναι αρκετές για να αποδείξουν ότι οι γεωμετρικές δηλώσεις είναι αληθείς. Ακόμα και μετά από εντατικές οδηγίες για το πώς να προχωρήσουν στην κατασκευή μίας επίσημης απόδειξης, ακόμα και αν έχουν αντιληφθεί και οι ίδιοι ότι η πρόταση χρειάζεται περαιτέρω μελέτη και απόδειξη, σταματούν και θεωρούν την επαλήθευση ως έγκυρη απόδειξη.

Ομοίως, και οι Harel και Sowder (1998) πραγματοποίησαν μία έρευνα σε μαθητές του Ηνωμένου Βασιλείου και έδειξαν πως οι μαθητές/τριες θεωρούν ότι η φύση της απόδειξης στη γεωμετρία σχετίζεται με την επαλήθευση της ισχύος των θεωρημάτων, είτε την αποσαφήνιση των ζητουμένων και των υποθέσεων των γεωμετρικών θεωρημάτων, είτε την ανακάλυψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων.

### 1.4.2 Ευρήματα που αφορούν εκπαιδευτικούς σχετικά με αντιλήψεις για τη χρήση άτυπων αποδεικτικών διαδικασιών

Η Raymond (1997) μελέτησε τη σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων υποψήφιων εκπαιδευτικών για την πρακτική διδασκαλίας των μαθηματικών, πριν την εμπλοκή τους με αυτήν, και μετά την εμπλοκή τους. Ενώ υποστήριζαν την ομαδοσυνεργατική μάθηση με σκοπό την εισαγωγή νέων εννοιών μέσω διερεύνησης, εξερεύνησης και τη διαισθητική αποδεικτική διαδικασία μέσω μη τυπικών διδακτικών δραστηριοτήτων, στο τέλος της μελέτης, και μετά την εμπλοκή τους με την διδακτική πράξη, τελικά ακολούθησαν οι περισσότεροι την παραδοσιακή, τυπική μέθοδο διδασκαλίας, με απλή παρουσίαση εφαρμογών και αποδείξεων. Το εύρημα αυτό υποστηρίζει πως παρόλο που οι αρχάριοι δάσκαλοι του δημοτικού εισέρχονται συχνά στο εκπαιδευτικό επάγγελμα με μη παραδοσιακές πεποιθήσεις για τη διδακτική τους πρακτική, καθώς έρχονται αντιμέτωποι με τους περιορισμούς της πραγματικής διδασκαλίας στην τάξη, τείνουν να εφαρμόζουν περισσότερο παραδοσιακές πρακτικές. Οι παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζουν αυτήν την ασυνεπή σχέση, κατά κύριο λόγο, είναι οι δικές τους διδακτικές εμπειρίες και πρακτικές που δέχτηκαν από τους δικούς τους δασκάλους σαν παιδιά καθώς και η συμπεριφορά των μαθητών/τριών, ενώ το πρόγραμμα εκπαίδευσής τους για το επάγγελμα του εκπαιδευτικού, φαίνεται να έχει μόνο μία μικρή επιρροή. Αποτελέσματα αυτής της μελέτης υποδηλώνουν ότι οι βαθιά διαδεδομένες, παραδοσιακές πεποιθήσεις για τη φύση των μαθηματικών και το ρόλο της απόδειξης στα μαθηματικά, έχουν τη δυνατότητα να διαιωνίσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών που είναι πιο παραδοσιακή και φορμαλιστική, ακόμη και όταν οι δάσκαλοι έχουν μη παραδοσιακές πεποιθήσεις για την παιδαγωγική των μαθηματικών.

Αντίστοιχα, ο Knuth (2002) διαπίστωσε κατά την διάρκεια της μελέτης του με εκπαιδευτικούς μαθηματικών, πως μπορούν να αναγνωρίσουν τους ποικίλους ρόλους της απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας, όπως το ότι η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί εργαλείο επαλήθευσης ή επιβεβαίωσης των υποθέσεων ενός θεωρήματος, μέσω της παραγωγής ενός λογικού ή παραγωγικού επιχειρήματος ή ένα επιχείρημα που μπορεί να πείσει, αλλά επίσης ότι αποτελεί και εργαλείο πειραματισμού, δοκιμής και ελέγχου γεωμετρικών υποθέσεων. Ωστόσο, όταν ήρθε η ώρα της παρουσίασης της αποδεικτικής διαδικασίας μέσα στην τάξη, κατά την διδακτική πράξη, οι περισσότεροι αρκέστηκαν στην τυπική παρουσίαση της απόδειξης, όπως προτείνεται από το εγχειρίδιο και το αναλυτικό πρόγραμμα (Knuth, 2002).

Η Dimitriadou (2008) κατέληξε σε ποικίλα συμπεράσματα μέσα από την έρευνά της σχετικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών του Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Γενικά, στα αποτελέσματά της φαίνεται να υπάρχουν διαφωνίες ως προς την κύρια λειτουργία της απόδειξης αλλά και ως προς το ρόλο της στο μάθημα της γεωμετρίας, με κάποιους να υποστηρίζουν πως συμβάλλει στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης και πως αποτελεί εργαλείο για κατανόηση ή για να πείσει ή απλά για εξάσκηση για την επίλυση παρόμοιων προβλημάτων και άλλους να υποστηρίζουν πως δημιουργεί εμπόδια στους/ις μαθητές/τριες στην κατανόηση.

## 1.5 Κριτική αποτίμηση

Μεταξύ των εκπαιδευτικών μαθηματικών, υπάρχει μία συνεχόμενη διαμάχη για το αν θα πρέπει να δίνεται έμφαση στα αξιωματικά συστήματα και στην τυπική απόδειξη στη σχολική γεωμετρία ή αν θα πρέπει να εγκαταλειφθούν όλα αυτά για μία λιγότερο τυπική και περισσότερο ερευνητική προσέγγιση των γεωμετρικών ιδεών (Battista & Clements, 1995). Μπορούμε να διακρίνουμε τους εκπαιδευτικούς αρχικά σε αυτούς που υποστηρίζουν τον φορμαλιστικό χαρακτήρα των αποδεικτικών διαδικασιών και μεθόδων, και που πιστεύουν πως η αποδεικτική διαδικασία είναι απλώς το εργαλείο για να φανεί η ισχύς των θεωρημάτων της γεωμετρίας και πρέπει να διδαχθεί τυπικά και να μαθευτεί με απομνημόνευση (Dimitriadou, 2008). Αλλά από την άλλη, υπάρχουν και εκείνοι που υποστηρίζουν τον εμπειρικό, μη τυπικό χαρακτήρα της αποδεικτικής διαδικασίας, πιστεύοντας πως συμβάλλει στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και θεωρώντας την ως διδακτικό εργαλείο για πειραματισμό, δοκιμή, έλεγχο, εξήγηση, επιβεβαίωση και αιτιολόγηση ενός γεωμετρικού θεωρήματος (Dimitriadou, 2008). Ο Horgan (1993) παρατήρησε πώς όλο και περισσότεροι εκπαιδευτικοί μαθηματικών καθώς ενσωματώνουν τη χρήση του υπολογιστή στην καθημερινότητά τους και στην επιβεβαίωση μαθηματικών ιδιοτήτων με πειραματικό τρόπο, φαίνεται να εγκαταλείπουν την απαγωγική αποδεικτική μέθοδο και τελικά καταλήγουν να πιστεύουν πώς η εγκυρότητα ορισμένων προτάσεων μπορεί να διαπιστωθεί καλύτερα συγκρίνοντας τες με πειράματα που εκτελούνται σε υπολογιστές ή σε πραγματικά παγκόσμια φαινόμενα. Πολλοί εκπαιδευτικοί συμφωνούν πώς είναι πρόκληση το να μπορούν να αξιοποιήσουν τον ενθουσιασμό που προκαλεί η εξερεύνηση και έτσι να παρακινήσουν τους/ις μαθητές/τριες να παράγουν μία απόδειξη ή τουλάχιστον να κάνουν μία προσπάθεια να ακολουθήσουν μία απόδειξη που τους παρουσιάζει ο δάσκαλος (Hanna, 1998) αλλά παράλληλα να μεταδώσουν με σαφήνεια στους/ις μαθητές/τριες την αλληλεπίδραση της αφαίρεσης και του πειραματισμού και τη σχέση μεταξύ μαθηματικών και πραγματικού κόσμου (Hanna, 2000).

Πολλοί λοιπόν, θεωρούν την τυπική και την άτυπη απόδειξη ως αλληλοαποκλειόμενες, ενώ στην ουσία είναι αλληλοσυνδεόμενες και η μία συμπληρώνει την άλλη. Η αληθινή κατανόηση απαιτεί από τους/ις μαθητές/τριες να δουν γιατί συμβαίνει κάτι, και σε αυτό βοηθάει η εξερεύνηση, η διερεύνηση και οι διαισθητικές προσεγγίσεις και επιπλέον γιατί πρέπει να συμβαίνει πάντα, και αυτή η κατανόηση δημιουργείται από μία επεξηγηματική απόδειξη. Η άτυπη αποδεικτική διαδικασία οδηγεί σε συμπεράσματα τα οποία, αν και διατυπώνονται με ακρίβεια, παραμένουν ως δοκιμαστικά, ενώ η τυπική απόδειξη, παρέχοντας μία εξαγωγή από τις υποθέσεις, τελικά καθορίζει τα συμπεράσματα. Γενικότερα, παρατηρούμε πως η βασική επιδίωξη των εκπαιδευτικών μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι η βελτίωση των αποδεικτικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών τους (Marrades & Gutierrez, 2000). Η αξιολόγηση των αποδεικτικών δεξιοτήτων – η οποία σχετίζεται αφενός με τα επιχειρήματα που παράγονται από τους/ις μαθητές/τριες, αφετέρου με τους τρόπους και τις διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές/τριες ώστε με τα επιχειρήματά τους να «κάνουν» απόδειξη (Marrades & Gutierrez, 2000) - απασχολεί τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης ώστε να εξετάσουν τα είδη συλλογισμού και τα είδη αποδείξεων που βοηθούν στην ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων (Harel & Sowder, 1998). Έχει παρατηρηθεί πως για την προώθηση της κατανόησης, ορισμένα είδη συλλογισμού και απόδειξης και ορισμένοι τρόποι χρήσης της απόδειξης, είναι αποτελεσματικότεροι από άλλους (Hanna & Jahnke, 1996). Αυτό που απασχολεί τους ερευνητές, σύμφωνα με τα όσα έχουν μελετηθεί, είναι το κατά πόσο και με ποιους τρόπους μπορεί να συνδεθεί η επιχειρηματολογία που προκύπτει από εμπειρικά στοιχεία με την τυπική αποδεικτική διαδικασία, με τους Harel και Sowder (1998) να υποστηρίζουν πως υπάρχει άμεση σύνδεση, ενώ οι Marrades και Gutierrez (2000) είναι πιο επιφυλακτικοί στη σύνδεση αυτή, υποστηρίζοντας πως οι διάφορες εμπειρικές προσεγγίσεις οδηγούν πολύ αργά στην παραγωγική τυπική διαδικασία, αλλά επίσης θεωρούν πιθανό να οδηγούν σε νέες εμπειρικές προσεγγίσεις. Η Mariotti (2002), συμφωνεί και υποστηρίζει πως ακόμα και αν οι μαθητές/τριες έχουν επιτύχει την εμπειρική τοποθέτηση, η εξέλιξη μίας αιτιολόγησης σε μια παραγωγική μαθηματική απόδειξη παρουσιάζει δυσκολίες και δεν αναμένεται να είναι απλή και αυθόρμητη σε όλες τις βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης (Mariotti, 2002).

Στην παρούσα μελέτη, επιδιώκεται να ερευνηθούν οι τρέχουσες αντιλήψεις των εκπαιδευτικών τόσο της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σχετικά με το αν, πώς και κατά πόσο η ενασχόληση των μαθητών/τριών με άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας, είναι ικανή ώστε να τους βοηθήσει στην ανάπτυξη τυπικών αποδείξεων.

# Κεφάλαιο 2ο: Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

## 2.1 Στόχος της έρευνας

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η αποτύπωση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών του Δημοτικού και των εκπαιδευτικών μαθηματικών του Γυμνασίου, σχετικά με τη σημασία της άτυπης γεωμετρικής απόδειξης για την ανάπτυξη της τυπικής γεωμετρικής απόδειξης στο Λύκειο.

## 2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Πιο συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών των μαθηματικών του δημοτικού και του γυμνασίου σχετικά με τη φύση και τον ρόλο της αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας.

2. Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών των μαθηματικών του δημοτικού και του γυμνασίου σχετικά με τη φύση και το ρόλο της τυπικής και της άτυπης απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας.

3. Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών των μαθηματικών του δημοτικού και του γυμνασίου σχετικά με τη σημασία της άτυπης απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας.

4. Σε ποιον βαθμό χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών δημοτικού και γυμνασίου άτυπες μορφές αποδεικτικών διαδικασιών, στη δική τους διδακτική πρακτική.

## 2.3 Εννοιολογικό πλαίσιο

Η απόδειξη κατέχει σημαντική θέση στη μαθηματική επιστήμη γενικότερα και παραδοσιακά, στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο κυρίως στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η φύση της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία ορίζεται από την ακριβή τυποποιημένη γραμμική διαδοχή αληθών προτάσεων, υποθέσεων και συμπερασμάτων, η αλήθεια των οποίων βασίζεται είτε σε προηγούμενα αποδεδειγμένα θεωρήματα είτε σε αξιώματα (επιλεγμένοι ισχυρισμοί που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη). Στη γεωμετρία συναντάμε διάφορες μορφές τυπικής αποδεικτικής διαδικασίες, οι οποίες είναι (1) η ευθεία απόδειξη (συνδυασμός αξιωμάτων, ορισμών ή προηγούμενων αποδεδειγμένων θεωρημάτων),

(2) η απόδειξη με απαγωγή εις άτοπο (κατάληξη σε λογική αντίφαση μέσω λογικής ακολουθίας προτάσεων), (3) η τέλεια επαγωγή (γενίκευση συμπεράσματος μέσω επαγωγικού συλλογισμού) και (4) η απόδειξη με εξάντληση (όλων των πιθανών περιπτώσεων).

Ο ρόλος της τυπικής απόδειξης στη γεωμετρία είναι η επαλήθευση των γεωμετρικών προτάσεων και των εικασιών και η επιβεβαίωση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η φύση της άτυπης γεωμετρικής απόδειξης, η οποία συναντάται σε μορφές όπως η διερεύνηση, ο πειραματισμός, η παρατήρηση, ορίζεται από τον εμπειρικό της χαρακτήρα και η αλήθεια της βασίζεται σε πληροφορίες και εξηγήσεις προερχόμενες από τις αισθήσεις.

Δεδομένου ότι η διαίσθηση έρχεται σε εμάς πολύ νωρίτερα και με πολύ λιγότερη επιρροή από τα επίσημα επιχειρήματα (Polya, 1981, όπ. αναφ. στο Edwards, 1998), ο ρόλος της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας είναι να πείσει για την αλήθεια μίας πρότασης, αιτιολογώντας την με χρήση λέξεων, συμβόλων, διαγραμμάτων, σχημάτων, πριν την αυστηρότητα της τυπικής απόδειξης (Sjögren, 2010).

Κατά τη διαδικασία αναζήτησης της αλήθειας μέσω διερεύνησης διαφαίνεται η σημασία της άτυπης απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης στη γεωμετρία, καθώς προετοιμάζει και ενισχύει τους/ις μαθητές/τριες με δημιουργικό και ανεξάρτητο συλλογισμό, αναπτύσσει την κριτική τους σκέψη για αξιολόγηση ενός επιχειρήματος και τους οδηγεί στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους.

Η χρήση της άτυπης απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας μπορεί να γίνει με επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων με χειραπτικά υλικά, με χρήση οπτικών αναπαραστάσεων όπως τα διαγράμματα, οι εικόνες και τα σχήματα, με μέτρηση, σύγκριση, πειραματισμό και παρατήρηση μέσω αυτών. Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας ευνοούν αυτές τις δραστηριότητες.

# Κεφάλαιο 3ο: Μεθοδολογική οργάνωση

## 3.1 Μέθοδος της έρευνας

Στην παρούσα μελέτη ακολουθήθηκε η ποιοτική μέθοδος με τη διενέργεια δομημένων συνεντεύξεων. Σχεδιάστηκε ένα πλαίσιο συνέντευξης έτσι ώστε να απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα μέσα από 15 ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Ο σκοπός αυτής της επιλογής μεθόδου ήταν να δοθεί έμφαση στην προσωπική επικοινωνία του συνεντευξιαζόμενου και του ερευνητή κάθε φορά, ώστε να αντληθούν οι πληροφορίες για μία σε βάθος προσέγγιση του θέματος που διερευνάται. Όλες οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν ύστερα από τη σύμφωνη γνώμη όλων των συμβαλλομένων, σε συμφωνία με τον κώδικα δεοντολογίας πραγματοποίησης των ερευνών. Έπειτα, οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ομαδοποιήθηκαν και ερμηνεύθηκαν.

## 3.2 Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 15 εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και εκπαιδευτικοί Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι δάσκαλοι που διδάσκουν σε δημόσια Δημοτικά σχολεία, είτε ως μόνιμοι είτε ως αναπληρωτές. Οι μόνιμοι δάσκαλοι που συμμετείχαν έχουν περίπου 25 χρόνια εκπαιδευτικής εμπειρίας, ενώ οι αναπληρωτές δάσκαλοι, παρόλο που η εκπαιδευτική εμπειρία τους στον δημόσιο τομές είναι από 3 έως 7 χρόνια, είχαν αρκετά χρόνια εμπειρίας στον ιδιωτικό χώρο, όπου ανήκαν νωρίτερα, είτε διδάσκοντας σε φροντιστήρια και σε κέντρα δημιουργικής απασχόλησης παιδιών, είτε παραδίδοντας ιδιαίτερα μαθήματα. Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, πρόκειται για καθηγητές Μαθηματικών που είτε διδάσκουν σε δημόσια Γυμνάσια είτε παραδίδουν μαθήματα σε φροντιστήρια μέσης εκπαίδευσης ή ιδιαίτερα μαθήματα σε κατ' οίκον διδασκαλία. Στους μαθηματικούς που διδάσκουν σε δημόσια Γυμνάσια ανήκουν καθηγητές μόνιμοι, των οποίων η εκπαιδευτική εμπειρία είναι από 15 έως 30 χρόνια, αλλά και αναπληρωτές με 2 έως 3 χρόνια εκπαιδευτικής εμπειρίας σε δημόσια σχολεία, οι οποίοι όμως είχαν 7 με 16 χρόνια εμπειρίας στον ιδιωτικό τομέα, παραδίδοντας ιδιαίτερα μαθήματα. Οι φροντιστές του δείγματος είναι καθηγητές με εκπαιδευτική εμπειρία που κυμαίνεται από 8 έως και 35 χρόνια. Το δείγμα, συνεπώς, το οποίο αποτελείται από 3 ομάδες, κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από 5 εκπαιδευτικούς, ως εξής:

- Δάσκαλοι σε δημόσια Δημοτικά (μόνιμοι ή αναπληρωτές)
- Μαθηματικοί σε δημόσια Γυμνάσια (μόνιμοι ή αναπληρωτές)
- Φροντιστές μαθηματικοί

περιλαμβάνει εκπαιδευτικούς από διάφορες βαθμίδες και τομείς της εκπαίδευσης και με μία διασπορά των χρόνων της εκπαιδευτικής τους εμπειρίας, ώστε να διερευνηθούν οι διαφορετικές αντιλήψεις και το αν υπάρχει συσχέτιση του τομέα ή της βαθμίδας εκπαίδευσης όπου ανήκει ο καθένας, καθώς επίσης και των χρόνων εμπειρίας του, με τα τελικά αποτελέσματα. Πρόκειται για δειγματοληψία από διάφορες πόλεις της Ελλάδας, όπως Σιδηρόκαστρο, Θεσσαλονίκη, Ξάνθη, Καστοριά, Τρίκαλα, Καρδίτσα, Κοζάνη, Χαλκιδική και Ρέθυμνο, και εξαρτήθηκε από την προθυμία του καθένα να συμμετάσχει στην ερευνητική διαδικασία.

### 3.3 Ερευνητικό εργαλείο

Το ερευνητικό εργαλείο, αποτελεί ένα πλαίσιο συνέντευξης 15 ερωτήσεων ανοιχτού τύπου, οργανωμένες στους πέντε ερευνητικούς άξονες της μελέτης. Επιπλέον, ο κάθε ένας από τους άξονες σχεδιάστηκε με τρόπο ώστε οι ερωτήσεις του να αντιστοιχεί τα ερευνητικά ερωτήματα με τις εμπλεκόμενες έννοιες, όπως έχουν αποσαφηνιστεί αυτές στο αντίστοιχο κεφάλαιο των εννοιολογικών αποσαφηνίσεων.

Ο πρώτος άξονας αφορά στα δημογραφικά στοιχεία των εκπαιδευτικών και στη θέση τους στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Συνεπώς, τα δύο ερωτήματα από τα οποία αποτελείται, γνωστοποιούν στοιχεία για τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς σχετικά με το αν ανήκουν στην Πρωτοβάθμια ή στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τα έτη προϋπηρεσίας τους, καθώς επίσης και το αν ανήκουν στον δημόσιο ή στον ιδιωτικό τομέα ή αν διδάσκουν σε «ένας προς έναν» μαθήματα.

Οι επόμενοι τέσσερις άξονες της μελέτης, ορίζονται από τα ερευνητικά ερωτήματα, όπως αναφέρθηκαν στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Πιο αναλυτικά, στόχος του 2ου ερευνητικού άξονα είναι η διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση και το ρόλο της αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της Γεωμετρίας. Στα δύο ερωτήματα, επομένως, από τα οποία αποτελείται ο άξονας, οι εκπαιδευτικοί ερωτήθηκαν σχετικά με το ποια θεωρούν πως είναι τα χαρακτηριστικά της φύσης της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και ο ρόλος της στο μάθημα της Γεωμετρίας.

Στον 3ο ερευνητικό άξονα, αντίστοιχα, και στα επόμενα δύο ερωτήματα της συνέντευξης, μελετώνται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση και το ρόλο της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της Γεωμετρίας.

Στον 4ο ερευνητικό άξονα, ο οποίος αποτελείται από 4 ερωτήματα, διερευνώνται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη σημασία της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στην ανάπτυξη της τυπικής. Ειδικότερα, στο πρώτο ερώτημα αυτού του άξονα της συνέντευξης, διερευνώνται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το αν θεωρούν πως η άτυπη αποδεικτική διαδικασία προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της τυπικής γεωμετρικής απόδειξης. Στη συνέχεια, στο δεύτερο ερώτημα του άξονα, διερευνώνται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το αν θεωρούν πως η άτυπη αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία ενισχύει τους/ις μαθητές/τριες με την ανάπτυξη της συλλογιστικής τους ικανότητας, ενώ στο τρίτο ερώτημα, σχετικά με το αν θεωρούν πως η άτυπη αποδεικτική διαδικασία μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος. Στο τελευταίο ερώτημα του άξονα, μελετώνται αντίστοιχα οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το αν θεωρούν πως η αναζήτηση της αλήθειας μέσω της διερεύνησης και της διαίσθησης μπορεί να οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους.

Στόχος του 5ου και τελευταίου ερευνητικού άξονα της συνέντευξης, ο οποίος αποτελείται από 5 ερωτήματα, είναι να μελετηθεί ο βαθμός στον οποίον χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας στη διδακτική τους πρακτική. Πιο αναλυτικά, στα δύο πρώτα ερωτήματα του άξονα, οι εκπαιδευτικοί ερωτήθηκαν για το αν ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους να επιβεβαιώνουν διαισθητικά την αλήθεια μίας πρότασης που τους παρουσιάζεται στην τάξη, και το αν τους ενθαρρύνουν να αξιολογούν ένα επιχείρημα που τίθεται στην τάξη είτε από τους ίδιους, είτε από συμμαθητές τους, είτε από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, για το αν μπορεί να αποτελέσει απόδειξη ή όχι. Στο επόμενο ερώτημα, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να προτείνουν μία άτυπη αποδεικτική διαδικασία που θα ακολουθούσαν οι ίδιοι μέσα στην τάξη, για την απόδειξη της πρότασης: «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180^{o}$», ενώ στη συνέχεια ερωτήθηκαν για το αν ενθαρρύνουν γενικότερα τους/ις μαθητές/τριες τους για τέτοιου είδους άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες. Κλείνοντας, οι εκπαιδευτικοί ερωτήθηκαν για το αν θεωρούν τελικά πως η ενασχόληση των μαθητών/τριών με την άτυπη αποδεικτική διαδικασία είναι ικανή να τους οδηγήσει και να τους βοηθήσει στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης μίας γεωμετρικής πρότασης.

Κάποιες από τις συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν δια ζώσης, τηρώντας τα μέτρα προστασίας κατά τη διασπορά της πανδημίας, και κάποιες διαδικτυακά μέσω ανάλογης πλατφόρμας.

### 3.4 Ερευνητική διαδικασία

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν από τον Φεβρουάριο μέχρι και τον Μάρτιο του 2022, κάποιες διαδικτυακά μέσω της πλατφόρμας zoom ή άλλων κοινωνικών δικτύων και κάποιες δια ζώσης, τηρώντας σε κάθε περίπτωση τα μέτρα προστασίας για τον περιορισμό της εξάπλωσης της πανδημίας. Η διάρκεια της κάθε συνέντευξης ήταν 30 έως 40 λεπτά. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης ήταν στη διάθεση των συμμετεχόντων, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη άνεση σε περίπτωση που δεν ακούστηκε καλά μία ερώτηση. Όλοι οι συμμετέχοντες δέχτηκαν τις ίδιες ερωτήσεις και με την ίδια σειρά. Επιπλέον, όπου κρινόταν απαραίτητο, δινόταν οι απαραίτητες διευκρινίσεις σχετικά με τα ερωτήματα της συνέντευξης, όπως επίσης και ζητήθηκαν επιπλέον διευκρινήσεις από τους εκπαιδευτικούς, όπου η απάντησή τους ήταν μονολεκτική ή χωρίς επεξήγηση. Στη διάρκεια διεξαγωγής των συνεντεύξεων, εκτός της μαγνητοφώνησης αυτών, κρατήθηκαν σημειώσεις σχετικά με τις δυσκολίες που παρατηρήθηκαν από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς, για την απάντηση κάποιων ερωτημάτων. Στο τέλος όλων, οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και τα δεδομένα συλλέχθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν, για να γίνει η ανάλυσή τους και να διεξαχθούν τα συμπεράσματα.

### 3.5 Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Το εργαλείο συλλογής δεδομένων κατασκευάστηκε με σκοπό να διερευνήσει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών όπως αναφέρονται στα ερευνητικά ερωτήματα, και συνεπώς η σχεδίαση του ανταποκρίνεται τόσο στις ανάγκες των δασκάλων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όσο και στους εκπαιδευτικούς μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ανεξαρτήτως αν διδάσκουν στον δημόσιο ή στον ιδιωτικό τομέα. Για να εξασφαλιστεί η εγκυρότητα του περιεχομένου του εργαλείου αυτού, συνεπώς, οι ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στις συνεντεύξεις περιλαμβάνουν τις διαστάσεις των αξόνων που αναπτύχθηκαν παραπάνω και η οργάνωσή του έχει γίνει με τρόπο ώστε οι ερωτήσεις να είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον, όλες οι εμπλεκόμενες έννοιες έχουν αποσαφηνιστεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο, και οι ερωτήσεις της συνέντευξης ανταποκρίνονται πλήρως σε αυτές. Τέλος, η εγκυρότητα σε μία ποιοτική έρευνα, όπως η παρούσα, καθώς δεν μπορεί να εξασφαλιστεί από τα στατιστικά αποτελέσματα όπως σε μία αντίστοιχη ποσοτική έρευνα, στηρίζεται στην εμπιστοσύνη και για αυτόν τον λόγο οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν, με σκοπό την ανάλυση των αποτελεσμάτων σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα και την εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Η αξιοπιστία της ερευνητικής διαδικασίας εξασφαλίζεται με τον μεθοδολογικό σχεδιασμό που πραγματοποιήθηκε για τη διενέργεια των συνεντεύξεων. Όλες οι συνεντεύξεις είχαν την ίδια περίπου διάρκεια και διενεργήθηκαν υπό τις ίδιες συνθήκες, δηλαδή οι ερωτήσεις τέθηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες με τον ίδιο τρόπο και με την ίδια σειρά. Επιπλέον, έγιναν οι ίδιες διευκρινίσεις και επεξηγήσεις, όπου κρινόταν αναγκαίο, και οι ίδιες διευκρινιστικές ερωτήσεις, επίσης όπου ήταν απαραίτητο. Τέλος, παρόλο που το δείγμα της έρευνας είναι μικρό, τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τις συνεντεύξεις μπορούν να οδηγήσουν σε αληθινά και άξια εμπιστοσύνης ευρήματα, καθώς τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων, όπως αυτά αναλύονται και παρουσιάζονται στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, είναι αντιπροσωπευτικά και παρέχουν ένα αξιόπιστο δείγμα.

# Κεφάλαιο 4ο: Αποτελέσματα

## 4.1 Δημογραφικά στοιχεία συμμετεχόντων

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα δημογραφικά στοιχεία των 15 εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, από τους οποίους οι 6 είναι γυναίκες και οι 9 είναι άντρες. Από τις 6 γυναίκες, οι 3 ανήκουν στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι υπόλοιπες 3 γυναίκες ανήκουν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ως φροντιστές. Από τους 9 άντρες, οι 2 ανήκουν στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και από τους υπόλοιπους 7 άντρες που ανήκουν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι 5 είναι εκπαιδευτικοί σε δημόσια Γυμνάσια, και οι 2 είναι φροντιστές.

Πίνακας 1: Δημογραφικά στοιχεία εκπαιδευτικών

| Δημογραφικά στοιχεία | Κατηγορίες | N | f % |
|---|---|---|---|
| Φύλο | Γυναίκα | 6 | 40 |
| | Άντρας | 9 | 60 |
| Βαθμίδα εκπαίδευσης | Πρωτοβάθμια | 5 | 33,3 |
| | Δευτεροβάθμια | 10 | 66,7 |
| Τομέας εκπαίδευσης | Δάσκαλοι | 5 | 33,3 |
| | Καθηγητές Γυμνασίου | 5 | 33,3 |
| | Φροντιστές | 5 | 33,3 |

N: Συχνότητα (Πλήθος εκπαιδευτικών)

f%: Σχετική συχνότητα

### 4.2 Η φύση και ο ρόλος της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας:

Σχετικά με τα ερωτήματα του δεύτερου ερευνητικού άξονα, που αφορά στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη φύση και το ρόλο της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας, παρατηρήθηκε μία αμεσότητα από την πλευρά των εκπαιδευτικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε αντίθεση με τους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας.

- **Δάσκαλοι:** Στο ερώτημα για το ποια θεωρούν πως είναι τα χαρακτηριστικά της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας, φάνηκε να δυσκολεύονται να απαντήσουν και χρειάστηκε να τους δοθεί μία πιο σαφής εικόνα του τι θεωρείται πως είναι μία τυπική απόδειξη στη γεωμετρία, ζητώντας τους να θυμηθούν τα δικά τους σχολικά χρόνια και την Ευκλείδεια Γεωμετρία με τα θεωρήματα και τις αποδείξεις τους, με τις αποδεικτικές ασκήσεις, όπου καλούνταν να αποδείξουν κάτι. Οι Δ1 και Δ2, έχοντας 25 και 30 χρόνια διδακτικής εμπειρίας ως μόνιμοι δάσκαλοι, τόνισαν σαν μοναδικό χαρακτηριστικό της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας την αυστηρότητά της και για αυτόν τον λόγο θεωρούν πως είναι δύσκολη στην κατανόηση από τα παιδιά. Ωστόσο, η Δ2 ανέφερε πως παρότι είναι δύσκολη στην κατανόηση, είναι εύκολη στην αποστήθιση, αναφέροντας συγκεκριμένα πως:

  *«Προτιμάω γενικότερα, και όχι μόνο στη γεωμετρία, τυπικές μεθόδους, δίνω μεθοδολογία. Και για τις ασκήσεις θέλω έναν τρόπο λύσης, να μάθουν όλοι τον ίδιο, για να μην μπερδεύονται μέσα στη τάξη. Αν καθίσουμε και ψάξουμε το γιατί και πως ισχύει κάτι, θα χάσουμε πολύ χρόνο. Ας το μάθουν ότι έτσι είναι και θα καταλάβουν το γιατί και το πώς όταν πάνε στο Γυμνάσιο»*

  Οι Δ3, Δ4 και Δ5 έχοντας 3 έως 7 χρόνια διδακτικής εμπειρίας σε δημόσια σχολεία ανέφεραν στα χαρακτηριστικά της τυπικής απόδειξης την αλληλουχία μεταξύ των προτάσεων, δηλαδή το γεγονός ότι για να γίνει μία απόδειξη βασίζεται σε άλλα θεωρήματα. Ο Δ3 συγκεκριμένα την χαρακτήρισε ως: *«νόμος, κάτι που δεν αλλάζει»*, ενώ η Δ5 έκανε λόγο για: *«επίκληση στην αυθεντία»*. Η Δ4 ανέφερε και τη χρήση συμβόλων στην τυπική αποδεικτική διαδικασία, καθώς και το ότι είναι οριοθετημένη και αυστηρή.

Όσον αφορά στο ρόλο της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας, όλοι συμφώνησαν πως είναι σημαντικός και απαραίτητος. Οι Δ2, Δ4 και Δ5 υποστήριξαν πως είναι απαραίτητη καθώς βοηθάει τους/ις μαθητές/τριες στην επίλυση ασκήσεων. Συγκριμένα η Δ4 σχολίασε τη θέση της ως εξής:

*«Σημαντικός... Βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση, στην αντίληψη με ακρίβεια των θεωρημάτων, για ευκολότερη εφαρμογή σε αντίστοιχες ασκήσεις»*

Η ίδια, τόνισε επιπλέον:

*« Έτσι οι μαθητές/τριες το δέχονται πιο εύκολα και δεν τους αφήνει με ερωτηματικά».*

Την πειθώ της τυπικής απόδειξης υποστήριξε και ο Δ3, ενώ ο Δ1 σχολίασε την ανάπτυξη της μαθηματικής και γεωμετρικής σκέψης των μαθητών/τριών μέσα από την τυπική αποδεικτική διαδικασία.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Ο ρόλος των καθηγητών του Γυμνασίου, θα λέγαμε πως είναι να προετοιμάσουν τους/ις μαθητές/τριες για την τυπική απόδειξη του Λυκείου. Οι απαντήσεις των Κ4 και Κ5, οι οποίοι έχουν διδακτική εμπειρία 20 χρόνων σε δημόσιο Γυμνάσιο, ήταν λακωνικές, αναφέροντας πως τα χαρακτηριστικά της τυπικής απόδειξης είναι τα εξής: *«σαφήνεια, ακρίβεια, επάρκεια»*

  Οι Κ2 και Κ3, με 2 και 16 χρόνια διδακτικής εμπειρίας αντίστοιχα, αναφέρθηκαν στη σειρά συλλογισμών, στη σύνδεση με προγενέστερες γνώσεις, θεωρήματα και προτάσεις, που έχουν επίσης τυπικά αποδειχθεί, και στα λογικά βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν στην τυπική απόδειξη. Ο Κ3 τόνισε στα χαρακτηριστικά της τυπικής απόδειξης και *«τον συσχετισμό με τις προηγούμενες γνώσεις, δηλαδή την επαλήθευση της ορθότητας».*

  Ο Κ1, έχοντας 3 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, ανέφερε πως:

  *«είναι μία χρήσιμη διαδικασία που προσφέρει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό για αφόρμηση μίας έννοιας, και στον μαθητή για προσέγγιση της γνώσης με αξιωματικό τρόπο, εμπλουτίζοντας την ανάγκη του να αποδεικνύει και μεθοδολογικά».*

  Με αυτή του την απάντηση, που απαντούσε περισσότερο στο ποιος είναι ο ρόλος της τυπικής απόδειξης, συνέχισε αναφέροντας πως:

*«ο ρόλος της τυπικής απόδειξης είναι ο βασικότερος, καθώς αναπτύσσει στον μαθητή όχι μόνο τη γεωμετρική του αντίληψη, αλλά μία στιβαρή εγκαθίδρυση των εννοιών και των σχημάτων (schemes)»*

Οι Κ4 και Κ5, λακωνικά και πάλι απάντησαν πως ο ρόλος της τυπική απόδειξης είναι σημαντικός, με τον Κ4 να σχολιάζει πως:

*«Χωρίς την τυπική δεν υπάρχει η έννοια της Γεωμετρίας».*

Ο Κ2 αναφέρθηκε στον βοηθητικό ρόλο της τυπικής απόδειξης, αποτελώντας βασικό σκελετό για επίλυση ασκήσεων, κάτι που συναντήσαμε και στις απαντήσεις των Δασκάλων. Ο Κ3 τόνισε τον ρόλο της πειθούς, καθώς διαλύει αμφιβολίες ή δισταγμούς και οι μαθητές/τριες έχουν τη σιγουριά για κάτι που έχει αποδειχθεί επίσημα.

- **Φροντιστές:** Στους φροντιστές συναντήθηκε μία εξοικείωση με την τυπική αποδεικτική διαδικασία, μπορούσαν να την ορίσουν ευκολότερα και να αναγνωρίσουν το ρόλο της. Ο δικός τους ρόλος στην εκπαιδευτική πραγματικότητα άλλωστε, όπως σχολιάστηκε από αρκετούς, είναι η προετοιμασία των μαθητών/τριών από το Γυμνάσιο στο Λύκειο ή από το Λύκειο στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, επομένως η άτυπη απόδειξη δεν έχει θέση στις δικές τους διδασκαλίες. Ο Φ1, έχοντας 35 χρόνια εμπειρίας, δήλωσε συνειδητοποιημένος για τη φύση και το ρόλο της τυπικής απόδειξης, θέλοντας, ωστόσο, να την εμπλέξει με την άτυπη, κάτι που κάνει και στη διδακτική του πρακτική, όπως ανέφερε. Συγκεκριμένα, ανέφερε πως:

  *«Είναι μία προσέγγιση χωρίς αυστηρά γεωμετρικούς όρους… πρέπει να το βάλεις στην καθημερινότητα, να το δεις σαν ένα είδος παιχνιδιού, πρέπει όμως να κρατηθεί και ένα μέτρο. Βέβαια, αυτό θα φοβίσει το παιδί»*

  Είναι μία προσέγγιση που δεν συναντήθηκε σε άλλες απαντήσεις και έρχεται σε αντίθεση με όλες τις άλλες που κάνανε λόγο για αυστηρότητα.

  Οι απαντήσεις των υπολοίπων φροντιστών είχαν άμεση σύνδεση με κάποιες των δασκάλων και κάποιες των καθηγητών Γυμνασίου. Οι Φ2, Φ4 και Φ5 αναφέρθηκαν στην αλληλουχία και τη σύνδεση με προηγούμενες αποδεδειγμένες προτάσεις. Η Φ2 αναφέρθηκε επιπλέον στη σαφήνεια και την αυστηρότητα, όπως και ο Φ3. Ενώ η Φ4 αναφέρθηκε στη γενίκευση προς την ειδίκευση, στο ότι με την τυπική απόδειξη γίνεται κάτι αποδεκτό σε όλες τις περιπτώσεις και όχι μεμονωμένες.

Σχετικά με το ρόλο της τυπικής απόδειξης, συμφώνησαν και εδώ όλοι για το πόσο σημαντική και απαραίτητη είναι, αναφέροντας αντιλήψεις που έχουν ήδη αναφερθεί από τους δασκάλους και τους καθηγητές Γυμνασίου, όπως η πειθώ, η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και αντίληψης, η βοήθεια για την επίλυση ασκήσεων. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση του Φ1:
*«Είναι η υπογεύση αυτού που θέλει να πετύχει η Γεωμετρία και αν γίνει απτό με αισθήσεις, προάγει την κατανόηση και έτσι θα δώσει κανόνες και νόμους».*

Γενικότερα, παρατηρήθηκαν αρκετές ομοιότητες ως προς τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση της τυπικής απόδειξης, με τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να μπορούν να την ορίσουν πιο εύκολα και να δικαιολογήσουν και την αντίληψή τους. Για το ρόλο της, όλοι ανεξαρτήτως βαθμίδας και τομέα συμφώνησαν πως είναι πολύ σημαντικός, εκφράζοντας ο καθένας την προσωπική του αντίληψη. Πολλές από αυτές ήταν κοινές, συνεπώς θα λέγαμε πως δεν παίζει κάποιον ιδιαίτερο ρόλο η βαθμίδα ή τομέας εκπαίδευσης.

### 4.3 Η φύση και ο ρόλος της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας

Ο τρίτος ερευνητικός άξονας αφορά στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση και το ρόλο της άτυπης απόδειξης στο μάθημα της Γεωμετρίας. Παρατηρήθηκε πως τόσο οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας απέδωσαν κοινά χαρακτηριστικά στην άτυπη αποδεικτική διαδικασία, όπως ο εμπειρισμός, η πρακτικότητα, η παρατήρηση μέσω εικόνων και σχημάτων, η μέτρηση και η εκτίμηση και γενικότερα ανέδειξαν τον βιωματικό της χαρακτήρα μέσα από καταστάσεις παιχνιδιού. Οι δάσκαλοι μπόρεσαν με μεγαλύτερη ευκολία να απαντήσουν σε αυτές τις ερωτήσεις, ενώ παρατηρήθηκε μία δυσκολία από τους φροντιστές.

- **Δάσκαλοι:** Οι Δ1 και Δ2 ανέφεραν στα χαρακτηριστικά της άτυπης, επιπλέον, τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και την ευκαιρία για εκμάθηση καλύτερου χειρισμού αυτού. Αξιοσημείωτη η αντίληψη της Δ4 σύμφωνα με την οποία η άτυπη απόδειξη έχει *«απαγωγικό χαρακτήρα, καθώς οι μαθητές/τριες πρώτα θα δούνε τις περιπτώσεις όπου δεν* *ισχύει κάτι, ώστε να συγκεντρωθούν οι κοινές ιδιότητες και έτσι να βγάλουμε μαζί τον κανόνα».*

Για το ρόλο της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας όλοι οι δάσκαλοι, εκτός της Δ2, συμφώνησαν πως είναι πολύ σημαντικός καθώς νοηματοδοτεί αυτό το οποίο καλούνται να μάθουν, βοηθάει στην κατανόηση και στο να ανακαλύψουν τη νέα γνώση μέσω μίας διαδικασίας σκέψης που αναπτύσσεται. Η Δ4 υποστήριξε πως είναι πιο σημαντικός ο ρόλος της άτυπης από αυτόν της τυπικής απόδειξης. Αντιθέτως, η Δ2, ναι μεν θεωρεί πως η άτυπη απόδειξη βοηθάει τους/ις μαθητές/τριες για όλους τους παραπάνω λόγους, αλλά απαιτεί πολύ χρόνο και για αυτόν τον λόγο αποφεύγει να εντάσσει άτυπες μορφές απόδειξης στη διδακτική της πρακτική.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Όπως αναφέρθηκε ήδη, οι εκπαιδευτικοί της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συμφώνησαν σε πολλά με τους δασκάλους, σχετικά με τα χαρακτηριστικά της άτυπης απόδειξης, όπως ο εμπειρικός και διαισθητικός της χαρακτήρας, η οπτικοποίηση, η περιγραφικότητα, η παρατήρηση, το ότι είναι κατασκευαστική και ανακαλυπτική. Οι Κ4 και Κ5 ανέφεραν στα χαρακτηριστικά της άτυπης απόδειξης τις αλλεπάλληλες συνδέσεις με προηγούμενες γνώσεις. Ο Κ1 τόνισε την έλλειψη της αμιγώς αξιωματικής χρήσης των εννοιών και της καθαρά δομημένης μαθηματικής σκέψης. Ενδιαφέρον παρουσίασε η απάντηση του Κ3 ο οποίος ανέφερε πως ένα από τα χαρακτηριστικά της άτυπης απόδειξης είναι η εμπιστοσύνη μεταξύ του διδάσκοντος και του διδασκομένου και ο τρόπος με τον οποίον ο πρώτος θα παρουσιάσει την εμπειρική γνώση στον δεύτερο.

Σχετικά με το ρόλο της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας, οι αντιλήψεις των καθηγητών του Γυμνασίου δε φάνηκαν να τάσσονται τόσο υπέρ της άτυπης απόδειξης. Αναφέρθηκαν στον βοηθητικό ρόλο της άτυπης απόδειξης για τους/ις μαθητές/τριες, αλλά από κανέναν τους δεν ακούστηκε πως ο ρόλος της είναι σημαντικός και απαραίτητος, σε αντίθεση με τους δασκάλους. Οι Κ1, Κ2, Κ3 και Κ5 σχολίασαν πως η άτυπη απόδειξη βοηθάει τους/ις μαθητές/τριες στο να εξοικειωθούν με δύσκολες γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές και να ξεπεράσουν κάποια προβλήματα. Ο Κ2 επιπλέον ανέφερε και την εξοικείωση των μαθητών/τριών με το λεξιλόγιο της Γεωμετρίας. Ο Κ4 υποστήριξε πως: *«είναι η εισαγωγή στην τυπική, αλλά αυτό είναι έργο προηγούμενων τάξεων, του Δημοτικού»*.

- **Φροντιστές:** Δεν παρατηρήθηκε κάποια ξεχωριστή απάντηση για το ποια θεωρούν πως είναι τα χαρακτηριστικά της άτυπης απόδειξης οι φροντιστές, σε σχέση με τους καθηγητές Γυμνασίου και τους δασκάλους. Επικεντρώθηκαν στον πρακτικό και εμπειρικό της χαρακτήρα, στην παρατήρηση, τη μέτρηση και τη σύνδεση που απαιτεί με προηγούμενες γνώσεις.

  Σχετικά με το ρόλο της άτυπης, οι φροντιστές έδειξαν να αναγνωρίζουν περισσότερο τη σημαντικότητά του. Όλοι τους ανέφεραν πως είναι απαραίτητη για να γίνει η εισαγωγή της τυπικής. Ωστόσο, η Φ4 σχολίασε πως είναι απαραίτητη μόνο για μικρές ηλικίες, λέγοντας συγκεκριμένα:
  *«Είναι ο δρόμος για να οδηγηθούν οι μαθητές/τριες στην τυπική… Μπαίνουν στη διαδικασία να καταλάβουν ότι πρέπει να αποδείξουν κάτι. Όμως αποδεικνύουν μεμονωμένες περιπτώσεις και πολλές φορές λανθασμένα»*.
  Εντύπωση προκάλεσε η απάντηση του Φ1, σύμφωνα με τον οποίον η άτυπη απόδειξη είναι *«η λέξη μαμά, χωρίς να ξέρει κανείς το βάθος της»*.

Αυτό που παρατηρήθηκε στις απαντήσεις που δόθηκαν, είναι ότι υπάρχει άμεση σχέση της βαθμίδας εκπαίδευσης του κάθε εκπαιδευτικού με τις αντιλήψεις τους. Οι δάσκαλοι είναι εκείνοι που θεωρούν το ρόλο της άτυπης απόδειξης πολύ σημαντικό και απαραίτητο, ίσως και περισσότερο από αυτόν της τυπικής. Κάτι τέτοιο είναι φυσιολογικό αν σκεφτούμε πως η άτυπη απόδειξη επικρατεί κυρίως στο Δημοτικό. Οι καθηγητές της Δευτεροβάθμιας αν και αναγνωρίζουν εν μέρει το ρόλο της άτυπης απόδειξης, την εντάσσουν και εκείνη στα πλαίσια του Δημοτικού. Ελάχιστες οι διαφορετικές αντιλήψεις, οι οποίες έχουν να κάνουν προφανώς με τις προσωπικές εμπειρίες του καθένα.

## 4.4 Η σημασία της άτυπης απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής

Ο τέταρτος ερευνητικός άξονας αφορά στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη σημασία της άτυπης απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας. Οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν αν θεωρούν πως η άτυπη αποδεικτική διαδικασία προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της τυπικής, ενισχύει τους/ις μαθητές/τριες με την ανάπτυξη της συλλογιστικής τους ικανότητας, αν αναπτύσσει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος και αν μπορεί να οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες στην αναζήτηση της ακρίβειας ενός συλλογισμού τους.

- **Δάσκαλοι:** Όλοι οι δάσκαλοι συμφώνησαν στο ότι η άτυπη απόδειξη προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες για την ανάπτυξη της τυπικής. Η Δ2 ωστόσο, πιο επιφυλακτική σχολίασε:

  «*Ναι… αλλά παίζουν και άλλοι παράγοντες ρόλο, όπως ο δάσκαλος, το επίπεδο των μαθητών/τριών, ο διαθέσιμος χρόνος… Θέλει πολύ διαθέσιμο χρόνο και εγώ δεν τον έχω».*

  Ο Δ1, Δ3 και Δ5 αιτιολόγησαν την αντίληψή τους λέγοντας πως οι μαθητές/τριες μέσα από την άτυπη απόδειξη θα είναι προϊδεασμένοι όταν θα έρθει η ώρα της τυπικής. Η Δ4 είπε χαρακτηριστικά:

  *« Ναι, απόλυτα… Η επαφή με την άτυπη μπορεί να επηρεάσει τη στάση των παιδιών απέναντι στην τυπική, γιατί μέσα από την άτυπη τα παιδιά καταλαβαίνουν το ρόλο της απόδειξης γενικά».*

  Στη συνέχεια, όλοι οι δάσκαλο απάντησαν θετικά στο ότι η άτυπη απόδειξη ενισχύει τους/ις μαθητές/τριες με την ανάπτυξης της συλλογιστικής τους ικανότητας. Η αντίληψη της Δ4 έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, σύμφωνα με την οποία:

  *«Ο συλλογισμός είναι ένα κομμάτι πριν την απόδειξη, προηγείται, και όταν έρχεται η άτυπη αποδεικτική διαδικασία, η συλλογιστική ικανότητα τίθεται σε λειτουργία».*

  Έπειτα, σημειώθηκε και πάλι μία ομόφωνη συμφωνία στο ότι η άτυπη αποδεικτική διαδικασία μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος. Η Δ4 συγκεκριμένα σχολίασε πως μέσω της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας έχουν ήδη κάνει κάτι αντίστοιχο, το να αξιολογούν ένα επιχείρημα. Χαρακτηριστική η απάντηση της Δ5, η οποία συνέδεσε την ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας των μαθητών/τριών, που θεωρεί πως επιτυγχάνεται μέσω της άτυπης απόδειξης, και ανέφερε:

*«Εφόσον αναπτύσσουν τη συλλογιστική τους σκέψη, μαθαίνουν να αιτιολογούν και μετά ασκούν κριτική σε αυτά που αιτιολογούν οι άλλοι».*

Στο τελευταίο ερώτημα, για το αν θεωρούν πως μέσω της άτυπη απόδειξης οι μαθητές/τριες μπορούν να οδηγηθούν στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους, η απάντηση ήταν, σχεδόν ομόφωνα, αρνητική. Συγκεκριμένα, οι Δ1, Δ2, Δ3 και Δ5 ανέφεραν πως μόνο με καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό θα μπορούσε να γίνει κάτι τέτοιο αλλά και πάλι σε πολύ μικρό ποσοστό παιδιών. Η Δ2 αιτιολόγησε την αντίληψή της συμπληρώνοντας τα εξής σχόλια:

*«Το επίπεδο των μαθητών/τριών είναι πολύ χαμηλό και θέλουν έτοιμη γνώση. Σε αυτό παίζει πολύ αρνητικό ρόλο ο υπολογιστής, που ότι θελήσουν το ψάχνουν για να το βρούνε, χωρίς να το σκεφτούν πρώτα. Αλλά και οι γονείς παίζουν αρνητικό ρόλο, καθώς επεμβαίνουν στην κρίση των παιδιών τους».*

Από την άλλη, η Δ4 επιφυλακτική, θεωρεί πως μπορεί να συμβεί κάτι αντίστοιχο, όχι σε όλους τους/ις μαθητές/τριες, αλλά:

*«…σε παιδιά με ισχυρές νοερές αναπαραστάσεις, που έχουν κατανοήσει την έννοια της απόδειξης και ότι είναι κάτι που δεν ισχύει μόνο για μένα, αλλά πρέπει να πείσω και άλλους».*

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Παρατηρήθηκαν ομοιότητες στις απαντήσεις των καθηγητών Γυμνασίου με αυτές των δασκάλων στα 2 πρώτα ερωτήματα και στο τελευταίο. Όλοι οι καθηγητές συμφωνούν τόσο με το ότι η άτυπη απόδειξη προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες για την τυπική όσο και για το ότι αναπτύσσει τη συλλογιστική τους ικανότητα. Ο Κ1 μόνο που φάνηκε λίγο επιφυλακτικός, υποστήριξε πως:

  *«Υπό συνθήκη ναι… έχει να κάνει με το γνωστικό αντικείμενο και την ηλικία του/ης μαθητή/τριας και με το αν ο μαθητής έχει προσεγγίσει ένα σχήμα (scheme) πολύπλευρα… αυτό μπορεί να γίνει εφικτό όχι αφηρημένα αλλά μέσω δυναμικής γεωμετρίας»*

  Αντίστοιχα, όλοι τους απάντησαν αρνητικά για το αν οι μαθητές/τριες μπορούν να οδηγηθούν στην αναζήτηση της ακρίβειας ενός συλλογισμού τους. Όπως και οι δάσκαλοι, ανέφεραν πως μόνο με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και εξαιρετικά μικρό ποσοστό μαθητών θα έφτανε σε αυτό το σημείο. Ο Κ1 επισήμανε πως:

*«οι μαθητές/τριες θα έπρεπε να μπορούν να παραδεχτούν πως αυτό που έκαναν μέσω της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας δεν μπορούν να το γενικεύσουν, γιατί είναι απόδειξη σε μία μόνο περίπτωση, όμως δυστυχώς αυτό δεν το γνωρίζουν και έτσι οδηγούνται σε λανθασμένες γενικεύσεις».*

Στο τρίτο ερώτημα, σχετικά με το αν θεωρούν πως η άτυπη απόδειξη μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των παιδιών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος, παρατηρήθηκαν διαφοροποιημένες αντιλήψεις, συγκριτικά με εκείνες των δασκάλων. Όλοι, πλην του Κ4, απάντησαν αρνητικά. Ο Κ1 σχολίασε πως:

*«Αυτό το επιτυγχάνεις με την τυπική, γιατί αυτό είναι η τυπική… ισχυρισμοί στη σειρά»*

ενώ ο Κ2 ανέφερε πως:

*«… η άτυπη είναι περισσότερο διαπιστωτική…».*

Από την άλλη, ο Κ4 θεωρεί πως αυτό μπορεί να συμβεί, αλλά με επιμονή στη διαδικασία από την πλευρά του εκπαιδευτικού και την συχνή και όχι αποσπασματική επαφή του παιδιού με την άτυπη απόδειξη.

- **Φροντιστές:** Στις απαντήσεις των φροντιστών παρατηρήθηκαν αρκετές ομοιότητες με αυτές των καθηγητών Γυμνασίου. Όλοι συμφώνησαν, όπως και οι καθηγητές, τόσο με το ότι η άτυπη απόδειξη προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες για την τυπική όσο και για το ότι αναπτύσσει τη συλλογιστική τους ικανότητα. Συγκεκριμένα ο Φ1 υποστήριξε πως:

  *«…κερδίζεις χρόνο με την άτυπη, πας πιο ομαλά... χωρίς την άτυπη θέλει χρόνο για αφομοίωση».*

  Η αντίληψη αυτή έρχεται σε αντίθεση με τις αντιλήψεις μίας δασκάλας, της Δ2, που αναφέρθηκε παραπάνω, η οποία θεωρεί πως η άτυπη απόδειξη είναι σπατάλη χρόνου.

  Η Φ2 είναι λίγο επιφυλακτική ωστόσο, καθώς ανέφερε πως:

  *«…του εισάγεις στο μυαλό του/ης μαθητή/τριας πως κάποια στιγμή θα πρέπει να το κάνει και τυπικά… αλλά αυτό ίσως δημιουργεί σύγκρουση μέσα του…»*

  Σχετικά με την ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας των μαθητών/τριών, ο Φ1 αναφέρει:

*«Ναι… τους βάζεις τα πρώτα τουβλάκια χτισίματος, κάπου να πατήσουν για να ισχυριστούν… όχι να αποδείξουν».*

Επιπλέον, η Φ4 προσθέτει πως:

*«Με την άτυπη ο μαθητής αρχίζει να βλέπει τις ιδιότητες, οπότε αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη συλλογισμών».*

Στην ερώτηση αν θεωρούν πως η άτυπη απόδειξη μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος, οι αντιλήψεις δίστανται. Οι Φ1 και Φ2 θεωρούν πως κάτι τέτοιο δεν είναι από μόνο του εφικτό, παρά μόνο με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, ο οποίος μπορεί να επικαλεστεί στη μνήμη του παιδιού ένα επιχείρημα που έχει ήδη γνωρίσει μέσω της άτυπης, ώστε να μπορέσει να στηρίξει ή όχι το νέο επιχείρημα. Οι υπόλοιποι απάντησαν θετικά, με την απάντηση της Φ4 να έχει ενδιαφέρον, καθώς υποστηρίζει πως:

*«…μπαίνει (ο μαθητής) στη διαδικασία επεξήγησης, άρα όταν θέλεις εσύ να του εξηγήσεις κάτι, περιμένει περισσότερα από σένα».*

Στην τελευταία ερώτηση, αν θεωρούν πως οι μαθητές/τριες μπορούν να οδηγηθούν στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους, όλοι απάντησαν αρνητικά, αφήνοντας ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών να μπορούν αν το πετύχουν και μόνο με την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών, συμφωνώντας με τις αντιλήψεις των δασκάλων και των καθηγητών. Συγκεκριμένα αναφέρθηκαν όλοι στο ότι τα παιδιά επαναπαύονται και δεν ψάχνουν κάτι παραπάνω, και σε αυτό παίζει ρόλο η γενικότερη παιδεία τους, οι γνώσεις και οι αντιλήψεις του και τα κίνητρά τους.

Σε κάποια σημεία διαφαίνεται η διαφορά των αντιλήψεων μεταξύ των δασκάλων και όσων ανήκουν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

### 4.5 Διδακτικές πρακτικές των συμμετεχόντων

Ο τελευταίος ερευνητικός άξονας περιλαμβάνει ερωτήσεις που σχετίζονται με τον βαθμό στον οποίο οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας στη δική τους διδακτική πρακτική. Διευκρινίστηκε πως οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι σχετικές με το τι πραγματικά εφαρμόζει ο καθένας στη δική του πρακτική και όχι με το τι θα ήθελε να κάνει σε ιδανικές συνθήκες.

- **Δάσκαλοι:** Όλοι οι δάσκαλοι, εκτός της Δ2, υποστήριξαν πως ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους να επιβεβαιώνουν διαισθητικά την αλήθεια μίας γεωμετρικής πρότασης που τους παρουσιάζουν στην τάξη. Ο Δ3 συγκεκριμένα, ανέφερε:

  *«Ναι, αλλά αντίθετα… πρώτα εμπειρικά για να καταφέρουν να φτάσουν στην απόδειξη μόνοι τους».*

  Από την άλλη, η Δ2 απάντησε κατηγορηματικά όχι, υποστηρίζοντας πως δεν έχει τον απαραίτητο χρόνο, καθώς θα πρέπει να καλύψει τη σχολική ύλη. Επιπλέον, υποστήριξε πως για εκείνη είναι ευκολότερο το να παρουσιάσει τυπικά μία πρόταση καθώς η κατανόηση αυτής θα επιτευχθεί με το πέρασμα των χρόνων σε μεγαλύτερες τάξεις. Ακόμη, ανέφερε:

  *«…αν αφήσουμε τους/ις μαθητές/τριες να επεξεργαστούν ένα δεδομένο, αφήνουν το χρόνο να κυλάει άσκοπα και χωρίς αποτέλεσμα».*

  Στη συνέχεια, εκτός των Δ2 και Δ4, οι δάσκαλοι συμφώνησαν πως ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους να αξιολογούν ένα επιχείρημα, θέτοντας προκλητικά ερωτήματα. Η Δ2 στάθηκε και πάλι στην έλλειψη χρόνου που δεν της επιτρέπει να το κάνει αυτό. Ενώ η Δ4 ανέφερε:

  *«Όχι… μένουμε στο κομμάτι της διερεύνησης και της διαίσθησης και όχι στο τελικό αποτέλεσμα».*

  Ως άτυπη αποδεικτική διαδικασία που θα ακολουθούσαν για την πρόταση: «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180$^o$», οι Δ1, Δ2 και Δ3 πρότειναν το σχεδιασμό πολλών τριγώνων και τη μέτρηση των γωνιών τους με μοιρογνωμόνιο και την άθροιση αυτών. Η Δ2 επεσήμανε ωστόσο πως θεωρεί χάσιμο χρόνου κάτι τέτοιο, λόγω της κακής χρήσης γεωμετρικών οργάνων από τους/ις μαθητές/τριες. Η Δ5 πρότεινε το κόψιμο των γωνιών ενός τριγώνου και της τοποθέτησής τους τη μία δίπλα στην άλλη ώστε να φανεί το ημικύκλιο που σχηματίζουν και να συμπεράνουν πως το άθροισμά τους είναι 180$^o$. Τέλος, η Δ4 πρότεινε κάτι αντίστοιχο με τους πρώτους δασκάλους, αλλά με τη χρήση προγραμμάτων δυναμικής Γεωμετρίας, όπως το Geogebra, με πειραματισμό και διερεύνηση, με την κατασκευή πολλών και διαφόρων τριγώνων και μέτρηση και άθροιση των γωνιών με τη χρήση του προγράμματος.

Η ίδια σχολίασε πως γενικότερα αξιοποιεί τα προγράμματα δυναμικής Γεωμετρίας στις δικές της διδασκαλίες, ενθαρρύνοντας συχνά άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας. Και οι υπόλοιποι δάσκαλοι, εκτός της Δ2, ανέφεραν πως η άτυπη αποδεικτική διαδικασία έχει σταθερή θέση στις διδακτικές τους πρακτικές.

Στην τελευταία ερώτηση σχετικά με το αν θεωρούν πως οι άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες μπορούν να οδηγήσουν τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της τυπικής, οι Δ1, Δ2 και Δ4 απάντησαν θετικά, με την τελευταία να σχολιάζει:

*«οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές/τριες με την ενασχόλησή τους με την άτυπη απόδειξη και ο εμπλουτισμός των γνώσεών τους σε όλες τις μαθηματικές περιοχές με την πάροδο του χρόνου, μπορεί να τους οδηγήσει στην τυπική».*

Ο Δ3 υποστήριξε πως ελάχιστοι μαθητές/τριες θα κατάφερναν κάτι τέτοιο, καθώς οι περισσότεροι επαναπαύονται στο άτυπο που έχουν αποδείξει. Ενώ η Δ5 σχολίασε πως δε βρίσκει κοινά στοιχεία στις διαδρομές της άτυπης και της τυπικής απόδειξης, οπότε δε θεωρεί ότι η άτυπη μπορεί από μόνη της να βοηθήσει στην ανάπτυξη της τυπικής.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Από τους καθηγητές, μόνο ο Κ4 υποστήριξε πως ενθαρρύνει τους/ις μαθητές/τριες να επιβεβαιώνουν διαισθητικά την αλήθεια μίας πρότασης, φέρνοντας σαν παράδειγμα την έννοια των παραλλήλων ευθειών, για τις οποίες οι μαθητές/τριες συχνά απαντούν πως είναι εκείνες που δε συναντιούνται όσο και αν προεκταθούν, ενώ εκείνος τους παρουσιάζει δύο ασύμβατες ευθείες, νοερά, με τα χέρια του, οι οποίες επίσης δε συναντιούνται όσο και αν προεκταθούν, αλλά δεν είναι παράλληλες. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, προσπαθεί διαισθητικά να παρουσιάσει την πραγματική έννοια της παραλληλίας. Οι υπόλοιποι απάντησαν κατηγορηματικά όχι στο αν ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους.

Στο αν τους ενθαρρύνουν, ωστόσο, να αξιολογούν επιχειρήματα, όλοι απάντησαν θετικά, καθώς θέτουν προκλητικά ερωτήματα για να δημιουργηθεί μία συζήτηση μέσα στην τάξη μεταξύ των συμμαθητών.

Για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, όλοι πρότειναν ως άτυπη μορφή απόδειξης το σχεδιασμό τριγώνων και τη μέτρηση των γωνιών τους, εκτός του Κ1. Ο τελευταίος πρότεινε το σχεδιασμό τριγώνου μέσα σε ένα ημικύκλιο με τη μία πλευρά των τριγώνων να είναι η διάμετρος του ημικυκλίου. Βέβαια στη μεταξύ μας συζήτηση, διαπίστωσε πως κάτι τέτοιο εσφαλμένα θα οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες σε αυτήν την πρόταση καθώς μέσα σε ένα ημικύκλιο μπορούμε να σχεδιάσουμε και τετράπλευρο ή οποιοδήποτε άλλο πολύγωνο, τα οποία δεν έχουν άθροισμα $180^{o}$. Επιπλέον, διαπίστωσε πως για να φτάσουν οι μαθητές/τριες σε αυτήν την πρόταση μέσω αυτού του σχεδιασμού, θα πρέπει να γνωρίζουν ήδη πως μία εγγεγραμμένη γωνία έχει το μισό μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει. Άρα, κάτι τέτοιο απαιτεί μία τυπική παρά διαισθητική προσέγγιση της πρότασης.

Στο ερώτημα αν χρησιμοποιούν άτυπες μορφές απόδειξης στις διδασκαλίες τους, όλοι σχεδόν απάντησαν θετικά μεν, αλλά με δισταγμό, αναφέροντας πως αρκετές φορές παραβλέπουν τις άτυπες προσεγγίσεις καθώς δεν έχουν τον απαραίτητο χρόνο. Μόνο ο Κ1 σχολίασε:
*«Όχι… ξέρω ότι το κάνανε κατεξοχήν στο Δημοτικό… άλλωστε ο δικός μας ρόλος είναι άλλος, να τους εισάγουμε στην τυπική».*

Στην τελευταία ερώτηση σχετικά με το αν θεωρούν πως οι άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες μπορούν να οδηγήσουν τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της τυπικής, απάντησαν όλοι τους κατηγορηματικά όχι. Ο Κ1 ανέπτυξε την αντίληψή του αυτή, σχολιάζοντας:
*«ένας μαθητής θα πρέπει να καταλαβαίνει τι σημαίνει ένας ισχυρισμός, πως τον χρησιμοποιούμε και πως τον βάζουμε μαζί με άλλους. Μπορεί να ενισχύσει ένας μαθητής την αντίληψη για το πώς δουλεύει ο μηχανισμός αυτός, αλλά η άτυπη αποδεικτική διαδικασία από μόνη της δεν αποτελεί ούτε ικανή ούτε αναγκαία συνθήκη για να καταφέρει να αποδείξει κάτι τυπικά».*

- **Φροντιστές:** Οι φροντιστές επιτελώντας το δικό τους έργο στην εκπαιδευτική πραγματικότητα, που δεν είναι άλλο από την προετοιμασία των μαθητών/τριών για τις εξετάσεις και για υψηλότερες βαθμίδες, εκφράζουν τις δικές τους αντιλήψεις.

  Μόνο η Φ4 αναφέρει πως ενθαρρύνει τους/ις μαθητές/τριες να επιβεβαιώνουν διαισθητικά μία γεωμετρική πρόταση, καθώς, όπως η ίδια σχολίασε:

  *«…το οπτικό μέσο είναι ένα μέσο για συζήτηση, για να δούμε τι βλέπουν, τι πιστεύουν οι μαθητές/τριες, να εμφανιστούν οι ιδιότητες και να καταλήξουμε»*

  Ο Φ1 ανέφερε πως κρίνει απαραίτητη τη διαισθητική προσέγγιση από τους/ις μαθητές/τριες, καθώς μόνο *«αν το κάνουν εικόνα θα τους μείνει»*. Ωστόσο, αναφέρει πως δεν μπορεί ο μαθητής από μόνος του να κάνει αυτή την προσέγγιση, αλλά μόνο με παρακίνηση του εκπαιδευτικού. Ο ίδιος υποστηρίζει πως το κάνει.

  Ο τελευταίος, ήταν κατηγορηματικά αρνητικός στο να ενθαρρύνει τους/ις μαθητές/τριες του να αξιολογούν επιχειρήματα, καθώς, όπως ανέφερε:

  *«…είναι λεπτό πράγμα… δεν έχουν εμπειρία για το γιατί».*

  Όλοι οι υπόλοιποι, όπως και οι δάσκαλοι και οι καθηγητές, ανέφεραν πως με προκλητικές ερωτήσεις προκαλούν διάλογο για την αξιολόγηση επιχειρημάτων που είτε δίνονται από τον μαθητή, είτε από τον ίδιο εκπαιδευτικό, είτε από κάποιον συμμαθητή.

  Στις προτάσεις άτυπης απόδειξης για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν υπήρξε κάποια πρωτότυπη. Όλοι ανέφεραν είτε τη μέτρηση των γωνιών και την άθροισή του, είτε το κόψιμο των γωνιών ώστε με την τοποθέτησή τους να σχηματίζουν ευθεία γωνία. Η Φ5 ανέφερε κάτι αντίστοιχο, αλλά με δίπλωση όλων των γωνιών στη βάση του τριγώνου.

  Μόνο η Φ4 υποστήριξε πως χρησιμοποιεί γενικότερα, άτυπες αποδεικτικές μορφές στις διδασκαλίες της, ενώ όλοι οι υπόλοιποι, επικαλούμενοι την έλλειψη χρόνου , απάντησαν κατηγορηματικά όχι.

Και στο τελευταίο ερώτημα, σχετικά με το αν θεωρούν πως η άτυπη απόδειξη μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή στην ανάπτυξη της τυπικής, οι αντιλήψεις διίστανται. Οι Φ2, Φ3 και Φ5 φάνηκαν αρνητικοί. Συγκεκριμένα, η Φ5 σχολίασε το «ενδιάμεσο γνωστικό κομμάτι» και την ανάπτυξη κατάλληλων δεξιοτήτων, τα οποία σε ελάχιστα παιδιά επιτυγχάνονται. Η Φ4, από την άλλη, απάντησε πως:

*«καθώς ο μαθητής μεγαλώνει, αποκτά περισσότερα εργαλεία, εμπλουτίζεται το ρεπερτόριό του στις γεωμετρικές γνώσεις και πως ο ίδιος ο μαθητής θα θέλει να εξακριβώσει αυτό που άτυπα γνωρίζει»*

Ο Φ1, συμφωνώντας με την θετική απάντηση της Φ4, υποστήριξε:

*«η άτυπη απόδειξη χρειάζεται τα 3/5 του απαιτούμενου χρόνου για μία γεωμετρική πρόταση, η τυπική απόδειξη, η οποία επικαλείται την άτυπη, απαιτεί το 1/5 του χρόνου και το υπόλοιπο 1/5 του χρόνου είναι για να γίνεται αυτή η αυτόματη σύνδεση της άτυπης με την τυπική».*

Όπως αναφέρθηκε, διαχωρίζονται σε αυτό το σημείο οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, αναλόγως με τη βαθμίδα αλλά και τον τομέα εκπαίδευσης όπου ανήκει ο καθένας, πλην κάποιων εξαιρέσεων όπου υπερισχύει το κομμάτι των προσωπικών εμπειριών.

# Κεφάλαιο 5ο: Συζήτηση

Οι δάσκαλοι κυρίως θεωρούν πως η τυπική απόδειξη χαρακτηρίζεται από αυστηρότητα και αλληλουχία, καθώς κάθε πρόταση στηρίζεται σε άλλες που έχουν ήδη αποδειχθεί με αντίστοιχη αυστηρότητα, και για αυτό υποστηρίζουν πως είναι δύσκολη στην κατανόησή της από τους/ις μαθητές/τριες. Ο ρόλος της τυπικής απόδειξης στο μάθημα της Γεωμετρίας θεωρούν πως είναι σημαντικός κυρίως γιατί βοηθάει τους/ις μαθητές/τριες στην επίλυση ασκήσεων και επιπλέον επειδή βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση με την ανάπτυξη της σκέψης τους, καθώς επίσης και τους πείθει για την αλήθεια των προτάσεων. Οι καθηγητές Γυμνασίου θεωρούν πως τα κύρια χαρακτηριστικά της τυπικής απόδειξης είναι η σαφήνεια, η ακρίβεια και η επάρκεια, χωρίς να αναφέρονται την αυστηρότητα όπως οι δάσκαλοι, ενώ συμφωνούν με τους δασκάλους στην αλληλουχία και τη σύνδεση με προγενέστερες γνώσεις. Για το ρόλο της τυπικής απόδειξης στη

Γεωμετρία συμφωνούν και οι καθηγητές πως είναι πολύ σημαντικός, για τους ίδιους λόγους που ανέφεραν οι δάσκαλοι, την ανάπτυξη της μαθηματικής και γεωμετρικής σκέψης και αντίληψης, τη βοήθεια για την επίλυση ασκήσεων και την πειθώ. Οι φροντιστές με τη σειρά τους, συμφωνούν σε πολλά με τους δασκάλους και τους καθηγητές Γυμνασίου, ως προς την σαφήνεια και την αυστηρότητα που χαρακτηρίζει την τυπική απόδειξη, αλλά και τη σύνδεσή της με προγενέστερες γνώσεις, με εξαίρεση ενός φροντιστή που προσδίδει σε αυτήν έναν λιγότερο αυστηρό χαρακτήρα. Για τον σημαντικό ρόλο της τυπικής απόδειξης στη Γεωμετρία, συμφωνούν και οι φροντιστές με όλους τους προηγούμενους.

Για την άτυπη απόδειξη, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όλοι απέδωσαν πολλά κοινά χαρακτηριστικά, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στον εμπειρικό και βιωματικό της χαρακτήρα μέσα από καταστάσεις παιχνιδιού. Οι δάσκαλοι αναφέρθηκαν επιπλέον στη χρήση γεωμετρικών οργάνων. Οι καθηγητές Γυμνασίου και οι φροντιστές – οι οποίοι παρατηρήθηκε πως αντιμετώπισαν δυσκολία στον να καταφέρουν να ορίσουν την άτυπη απόδειξη - επισήμαναν τον διαισθητικό χαρακτήρα της άτυπης απόδειξης μέσω παρατήρησης, οπτικοποίησης, μέτρησης και σύνδεσης με προγενέστερες γνώσεις. Για το ρόλο της άτυπης απόδειξης παρατηρήθηκαν αρκετές αντιφάσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι δάσκαλοι, στην πλειοψηφία τους, θεωρούν πως ο ρόλος της άτυπης απόδειξης είναι πολύ σημαντικός, πιο σημαντικός και από αυτόν της τυπικής, καθώς βοηθάει τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της σκέψης τους και μέσω αυτής στην κατανόηση. Από την άλλη, οι καθηγητές Γυμνασίου και οι φροντιστές δεν υποστηρίζουν τη σημαντικότητα του ρόλου της άτυπης απόδειξης. Οι καθηγητές Γυμνασίου ναι μεν βρίσκουν το ρόλο της άτυπης απόδειξης βοηθητικό για τους/ις μαθητές/τριες, όμως την τοποθετούν στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση και θεωρούν πως στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν έχει θέση. Οι φροντιστές επίσης, στην πλειοψηφία τους, υποστηρίζουν τη σημαντικότητα του ρόλου της άτυπης απόδειξης, αλλά και πάλι αναφέρουν πως είναι απαραίτητη για μικρότερες ηλικίες, για μαθητές του Δημοτικού.

Σχετικά με τη σημασία της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στην ανάπτυξη της τυπικής, παρατηρήθηκε πως οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί, όλων των βαθμίδων και των τομέων, συμφώνησαν τόσο στο ότι η άτυπη απόδειξη προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες για την ανάπτυξη της τυπικής, όσο και στο ότι η άτυπη απόδειξη αναπτύσσει τη συλλογιστική ικανότητα των μαθητών/τριών. Υπήρχαν ελάχιστες εξαιρέσεις εκπαιδευτικών που έδειξαν κάποια αμφιβολία κυρίως στις συνθήκες υπό τις οποίες είναι εφικτό να επιτευχθούν τα παραπάνω. Σχετικά με το αν η άτυπη απόδειξη μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος, οι δάσκαλοι ομόφωνα απάντησαν θετικά, θεωρώντας πως αυτό είναι συνέπεια της ανάπτυξης της συλλογιστικής τους σκέψης μέσω της άτυπης. Από την άλλη οι καθηγητές Γυμνασίου έχουν εντελώς αντίθετη αντίληψη, θεωρώντας πως κάτι τέτοιο συμβαίνει με την τυπική και όχι με την άτυπη. Οι αντιλήψεις των φροντιστών βρίσκονται κάπου ανάμεσα. Στην πλειοψηφία υποστηρίζουν πως κάτι τέτοιο είναι εφικτό όμως μόνο με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού. Τέλος, όλοι οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν πως μόνο ελάχιστοι μαθητές/τριες μπορούν να οδηγηθούν στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους, δηλαδή από την άτυπη απόδειξη να αναζητήσουν την τυπική. Αλλά και πάλι, αυτοί οι ελάχιστοι μαθητές/τριες θα επιτύχουν κάτι τέτοιο μόνο με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού τους.

Τέλος, συνοψίζοντας τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη δική τους διδακτική πρακτική και το βαθμό στον οποίον οι ίδιοι χρησιμοποιούν άτυπες μορφές απόδειξης, οι δάσκαλοι στην πλειοψηφία τους, υποστήριξαν πως ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους να επιβεβαιώσουν διαισθητικά την αλήθεια μας γεωμετρικής πρότασης που τους παρουσιάζεται στην τάξη. Αντιθέτως, οι καθηγητές Γυμνασίου και οι φροντιστές, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων, δεν ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους για κάτι αντίστοιχο. Ωστόσο, όλοι σχεδόν οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί υποστήριξαν πως ενθαρρύνουν τους/ις μαθητές/τριες τους να αξιολογούν ένα επιχείρημα που τίθεται στην διάρκεια του μαθήματος είτε από τους ίδιους, είτε από συμμαθητές, είτε από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, για το αν μπορεί αυτό να αποτελέσει απόδειξη ή όχι. Γενικότερα, οι δάσκαλοι υποστήριξαν πως οι άτυπες μορφές απόδειξης έχουν σημαντική θέση στη δική τους διδακτική πρακτική, κάτι που στην πλειοψηφία τους υποστήριξαν και οι καθηγητές Γυμνασίου, ωστόσο με κάποια επιφύλαξη ως προς τον βαθμό που τις χρησιμοποιούν, επικαλούμενοι την έλλειψη χρόνου. Εξαιτίας αυτού, της έλλειψης χρόνου, οι φροντιστές παραδέχτηκαν πως οι άτυπες μορφές απόδειξης δεν έχουν καμία θέση στη δική τους διδακτική πρακτική. Κλείνοντας, από τους δασκάλους, οι μισοί υποστήριξαν πως η ενασχόληση των μαθητών/τριών με τις άτυπες μορφές απόδειξης μπορεί να τους οδηγήσει στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης, ενώ οι υπόλοιποι φάνηκαν επιφυλακτικοί ή και αρνητικοί. Οι καθηγητές

Γυμνασίου ήταν κατηγορηματικά αρνητικοί όλοι τους σχετικά με αυτό, ενώ οι αντιλήψεις των φροντιστών μοιράστηκαν, όπως και αυτές των δασκάλων.

## Κεφάλαιο 6ο: Συμπεράσματα

Στην παρούσα μελέτη, με τη διεξαγωγή ημιδομημένων συνεντεύξεων ανοιχτού τύπου σε 15 εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, έγινε μία προσπάθεια αποτύπωσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τη σημασία της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας στην ανάπτυξη της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στα παιδιά.

Στο Δημοτικό μέχρι και τη Β’ Γυμνασίου απουσιάζει η τυπική απόδειξη και η όποια προσέγγιση των γεωμετρικών προτάσεων πραγματοποιείται με έναν άτυπο τρόπο, ενώ στη Γ’ Γυμνασίου παρατηρείται μία προσπάθεια προετοιμασίας του/ης μαθητή/τριας για την τυπική απόδειξη, που εισάγεται επισήμως με την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου. Η ανεπίσημη, άτυπη γεωμετρική προσέγγιση των αποδείξεων των προτάσεων διέπεται από το πνεύμα της διερεύνησης, με τη μορφή, σχεδόν πάντα κυρίως στο Δημοτικό, μίας χειραπτικής ελκυστικής δραστηριότητας (Van de Walle, 2005). Στο Γυμνάσιο, σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), αυτό που είναι εφικτό, είναι να ζητηθεί από τους/ις μαθητές/τριες να συντάξουν μη τυπικά επιχειρήματα, με τη χρήση καθημερινής λογικής, τα οποία μπορούν εύκολα να γίνουν από τα παιδιά, με την προϋπόθεση ότι τους έχει δοθεί η ευκαιρία να ερευνήσουν μία ιδέα και να αποκτήσουν αίσθηση του τι εμπλέκεται σε αυτήν.

Στις απαντήσεις που συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν από την παρούσα έρευνα, διαφαίνεται σε αρκετά σημεία η διαφορά τόσο μεταξύ των δασκάλων Δημοτικού και των καθηγητών Γυμνασίου, όσο και μεταξύ των καθηγητών των δημοσίων σχολείων και των φροντιστών. Θα έλεγε κανείς πως οι φροντιστές, ως επί το πλείστον, αναγνωρίζουν πως η άτυπη απόδειξη απουσιάζει σχεδόν πλήρως από τις διδακτικές τους πρακτικές, λόγω έλλειψης χρόνου και του διαφορετικού εκπαιδευτικού ρόλου που έχουν, αλλά εκφράζουν την επιθυμία να μπορούσαν να το κάνουν. Από την άλλη, οι καθηγητές Γυμνασίου βρίσκονται σε μία μέση κατάσταση, όπου ναι μεν αναγνωρίζουν το ρόλο της άτυπης απόδειξης, αλλά ρίχνουν το βάρος αυτής σε προηγούμενες τάξεις, κυρίως στο Δημοτικό, και αποποιούνται, κατά κάποιον τρόπο, την ευθύνη. Θεωρούν πως η άτυπη απόδειξη είναι απαραίτητο στοιχείο της Γεωμετρίας, αλλά την ευθύνη γης εμπλοκής των μαθητών/τριών σε αυτήν την έχουν οι δάσκαλοι του Δημοτικού. Και στο τέλος, οι δάσκαλοι είναι εκείνοι που παίρνουν όλο το βάρος της άτυπης απόδειξης, στην πλειοψηφία τους τουλάχιστον, μιας και οι αποδεικτικές προσεγγίσεις στο Δημοτικό γίνονται με άτυπους τρόπους, ούτως ή άλλως.

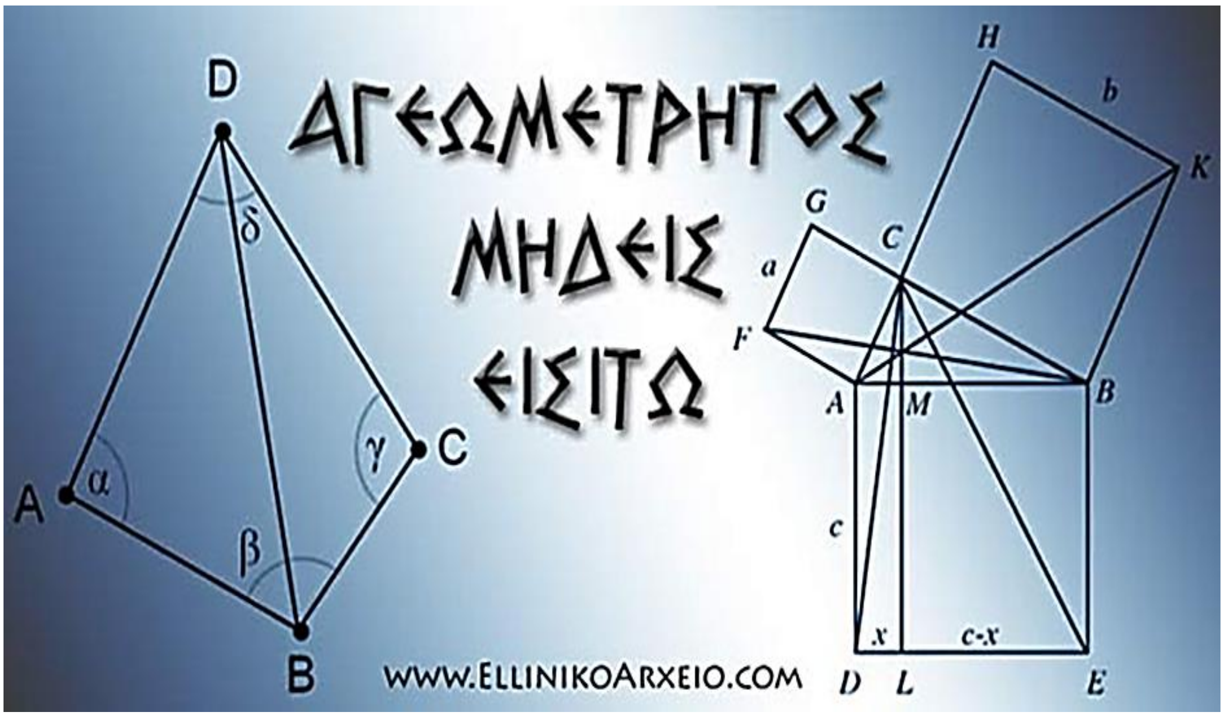
Οι εκπαιδευτικοί τόσο της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά της φύσης της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στη Γεωμετρία, όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω, με αυτό της αλληλουχίας, της σύνδεσης της αλήθειας μίας πρότασης με προηγούμενες αποδεδειγμένες γνώσεις, να είναι αυτό που αναφέρθηκε από την πλειοψηφία. Για το ρόλο της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας ωστόσο, φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί είχαν περισσότερα να αναφέρουν, από τον ήδη αναφερόμενο ρόλο αυτής, που είναι η επαλήθευση των γεωμετρικών προτάσεων και των εικασιών και η επιβεβαίωση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των γεωμετρικών αντικειμένων. Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί τόνισαν τη σημαντικότητα του ρόλου της τυπικής απόδειξης για τους/ις μαθητές/τριες, θεωρώντας την ως σκελετό για την επίλυση ασκήσεων, αλλά και ως μέσο ανάπτυξης της μαθηματικής και γεωμετρικής σκέψης, εργαλείο κατανόησης και πειθούς για την αλήθεια μίας πρότασης από τους/ις μαθητές/τριες. Αυτό το εύρημα συμφωνεί με αυτό της Dimitriadou (2008), στης οποίας την έρευνα ωστόσο υπήρχαν και διαφωνίες σχετικά με το ρόλο της τυπικής απόδειξης, με κάποιους να υποστηρίζουν το αντίθετο, δηλαδή το ότι αποτελεί εμπόδιο στην κατανόηση, κάτι που δεν διαπιστώθηκε στην παρούσα μελέτη.

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά της φύσης της άτυπης γεωμετρικής απόδειξης, δηλαδή τη διερεύνηση, τον πειραματισμό, την παρατήρηση και τον γενικότερο εμπειρικό χαρακτήρα, όλοι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί φάνηκε να τα αναγνωρίζουν, με πολλούς, κυρίως δασκάλους, να αναφέρονται σε αυτήν ως μία κατάσταση παιχνιδιού. Για τον ρόλο της στο μάθημα της Γεωμετρίας, ωστόσο, ο οποίος είναι κατά κύριο λόγο η πειθώ, όπως ορίστηκε στην παρούσα μελέτη, μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, φάνηκε πως ποικίλες αντιλήψεις. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στην σημαντικότητα του ρόλου της άτυπης απόδειξης, μην εισχωρώντας στον αυτό καθεαυτό ρόλο, ενώ μετά από διευκρινιστικές ερωτήσεις ανέφεραν οι περισσότεροι τον ρόλο της πειθούς. Οι δάσκαλοι κυρίως είναι εκείνοι που υποστηρίζουν τη σημαντικότητα του ρόλου της, στην ανάπτυξη της μαθηματικής και γεωμετρικής σκέψης μέσω της κατανόησης. Οι εκπαιδευτικοί της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αναγνωρίζουν και αυτοί τη σημαντικότητα του ρόλου της, υποστηρίζοντας ωστόσο, πως είναι κομμάτι της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κυρίως. Θα λέγαμε πως και σε αυτό το σημείο τα ευρήματα συμφωνούν με κάποια από αυτά της Dimitriadou (2008), η οποία διέκρινε τους εκπαιδευτικούς σε εκείνους που αναγνωρίζουν την άτυπη απόδειξη ως διδακτικό εργαλείο μέσω του οποίου αναπτύσσεται η σκέψη των μαθητών/τριών και πείθονται για την αλήθεια μίας πρότασης, αλλά και σε εκείνους που υποστηρίζουν τον φορμαλισμό της γεωμετρικής απόδειξης και πως θα πρέπει να διδαχθεί τυπικά και να μαθευτεί με απομνημόνευση. Στην παρούσα μελέτη, το σύνολο των συμμετεχόντων ανήκουν στην πρώτη κατηγορία κατά την Dimitriadou (2008), εκτός μίας δασκάλας που ανήκει στην δεύτερη κατηγορία, υποστηρίζοντας τον φορμαλισμό, την απομνημόνευση και πως η ενασχόληση των μαθητών/τριών με την άτυπη απόδειξη, μόνο χάσιμο χρόνου είναι.

Στη συνέχεια, και συγκεντρώνοντας τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη σημασία της άτυπης γεωμετρικής απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής, προέκυψαν σημεία στα οποία οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας συμφώνησαν με αυτούς της Δευτεροβάθμιας και πολλά στα οποία διαφώνησαν. Από τη μία, όλοι σχεδόν οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί συμφώνησαν πως με την ενασχόληση των μαθητών/τριών με την άτυπη αποδεικτική διαδικασία, αναπτύσσεται η συλλογιστική τους ικανότητα. Από την άλλη, μόνο οι δάσκαλοι υποστήριξαν την ανάπτυξη κριτικής σκέψης των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος, ενώ οι καθηγητές και οι φροντιστές φάνηκαν πιο επιφυλακτικοί σε αυτό, υποστηρίζοντας πως αυτό είτε συμβαίνει με την τυπική αποδεικτική διαδικασία, είτε συμβαίνει μόνο με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Τελικά, οι αντιλήψεις όλων των συμμετεχόντων συγκλίνουν στο ότι η άτυπη αποδεικτική διαδικασία δεν είναι ικανή, τουλάχιστον από μόνη της, να οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους, με την ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης.

Κλείνοντας, ο βαθμός στον οποίον οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν άτυπες αποδεικτικές μορφές, στη δική τους διδακτική πρακτική, ποικίλει μεταξύ των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και μεταξύ δημόσιας και ιδιωτικής εκπαίδευσης. Τα υπολογιστικά προγράμματα δυναμικής Γεωμετρίας δεν κατέχουν σημαντική θέση στη διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών, καθώς μόνο μία δασκάλα και ένας καθηγητής Γυμνασίου έκαναν αναφορά στη χρήση αυτών, εύρημα που έρχεται σε αντίθεση με τον Horgan (1993), ο οποίος υποστήριξε την ολοένα και μεγαλύτερη αύξηση ενσωμάτωσης της χρήσης του υπολογιστή στις τάξεις μαθηματικών. Η γενικότερη αποτίμηση των αποτελεσμάτων δείχνει πως οι δάσκαλοι είναι εκείνοι που παρέχουν θέση στις διδασκαλίες τους τις άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας, ενώ οι καθηγητές Γυμνασίου περιορίζονται ως προς τη χρήση τους, λόγω έλλειψης χρόνου, κάτι που υποστήριξαν και οι φροντιστές. Η δασκάλα, ωστόσο, που υποστηρίζει το φορμαλισμό αποτελεί την εξαίρεση, ερχόμενη αντίθετη με τη Hanna (1998) κατά την οποία οι εκπαιδευτικοί παρακινούν τους/ις μαθητές/τριες τους που παρουσιάζουν ενθουσιασμό λόγω της εξερεύνησης, για να παράγουν απόδειξη. Επιπλέον, θα λέγαμε πως οι φροντιστές είναι εκείνοι που με λύπηση ανέφεραν την έλλειψη άτυπων αποδεικτικών διαδικασιών από τις διδακτικές τους, ενώ κάποιοι σχολίασαν το γεγονός πως θα ήθελαν πολύ να μην μεταδίδουν απλώς ξερή γνώση, αλλά να μπορούν να συνδέσουν τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο, κάτι που και η Hanna (2000) υποστήριξε. Τέλος, το μεγαλύτερο ποσοστό των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών δεν συμφωνούν με τη σύνδεση της άτυπης με την τυπική αποδεικτική διαδικασία, συνεπώς υποστηρίζουν πως οι μαθητές/τριες, ακόμη και αν έχουν ασχοληθεί σε όλα τους τα σχολικά χρόνια, από μικρή ηλικία με την άτυπη αποδεικτική διαδικασία, δε θα καταφέρουν να φτάσουν στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης, τουλάχιστον όχι μόνοι τους, παρά μόνο με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού αλλά και πάλι, οι μαθητές/τριες που θα το καταφέρουν αυτό είναι πολύ λίγοι. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τους Marrades και Gutierrez (2000) και κυρίως με τη Mariotti (2002), οι οποίοι παρουσιάζουν τη δυσκολία σύνδεσης μεταξύ άτυπης και τυπικής απόδειξης και πως ακόμα και αν υπάρχει αυτή η σύνδεση, δεν είναι απλή, άμεση και αυθόρμητη.

Η παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκε σε σύντομο χρονικό διάστημα και συμμετείχε σε αυτήν μικρός αριθμός εκπαιδευτικών, κάτι που την περιορίζει ως προς τα αποτελέσματα και τη γενίκευση αυτών. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσίασαν οι αμφιβολίες που εξέφρασαν κάποιοι από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σχετικά με τις συνθήκες κάτω από τις οποίες θα μπορούσαν κάποιοι μαθητές/τριες να οδηγηθούν στην τυπική απόδειξη μέσω της άτυπης διαδικασίας, αλλά και σχετικά με το ποιοι μαθητές/τριες θα κατάφερναν κάτι αντίστοιχο, δηλαδή ποια είναι τα χαρακτηριστικά που θα είχαν. Τα στοιχεία αυτά θα μπορούσαν να αποτελέσουν ερευνητικά ερωτήματα για μία μελλοντική μελέτη.


ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ
ΜΗΔΕΙΣ
ΕΙΣΙΤΩ
WWW.ELLINIKOARXEIO.COM
D
A
B
C
α
β
γ
δ
H
b
K
G
C
a
F
A
M
B
c
x
c-x
D
L
E

# Βιβλιογραφία


Atkinson, R., Atkinson, R. C., Smith, E. E., Bem, D. J., & Nolen-Hoeksema, S. (2003). Εισαγωγή στην ψυχολογία του Hilgard. *Αθήνα, Εκδόσεις Παπαζήση*.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In *Second UCSMP international conference on mathematics education*. NCTM.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. *arXiv preprint math/0305021*.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Connecting research to teaching: Geometry and proof. *The Mathematics Teacher*, *88*(1), 48-54.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 339-352.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *420*, 464.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking proof with Sketchpad*, 3-10.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student‘s generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International journal of computers for mathematical learning*, *2*(3), 187-215.

Edwards, L. D. (1998). Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 489-504.

Epstein, D., & Levy, S. (1995). Experimentation and proof in mathematics. *Notices of the AMS*, *42*(6), 670-674.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, *9*(1), 20-23.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49.

Hanna, G. (1998). Proof as explanation in geometry. *Focus on learning problems in mathematics*, *20*, 4-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1), 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Springer, Dordrecht.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Heinze, A., & Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 9-16.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a community of mathematical practice (Doctoral dissertation, Stockholm University). *Available from WorldCat Dissertations and Theses database*.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Horgan, J. (1993). The death of proof. *Scientific American*, *269*(4), 92-103.

Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. In *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 428-437).

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics magazine*, *64*(5), 291-314.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. STRENGTHENING STUDENTS'UNDERSTANDING OF 'PROOF'IN GEOMETRY IN LOWER SECONDARY SCHOOL. *CERME 6–WORKING GROUP 5*, 756.

Lee, J. K. (2003). Proof in Mathematics Education. *Research in Mathematical Education*, *7*(1), 1-10.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194-214.

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, *44*(1), 87-125.

Mariotti, M. A. (2002). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281.

Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. *Opening address to QCA Conferen-ce, UK.*

Movshovitz-Hadar, N. (2001). The Notion of Proof. *Encyclopedia of Mathematics Education. New York: Routledge-Falmer.*

Proof (logic). (2019, June 16). *New World Encyclopedia, .* Retrieved 20:36, June 16, 2022 from https://www.newworldencyclopedia.org/p/index.php?title=Proof_(logic)&oldid=1020780.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica*, *7*(1), 5-41.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for research in mathematics education*, *28*(5), 550-576.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, *48*(1), 83-99.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29-35.

Sjögren, J. (2010). A note on the relation between formal and informal proof. *Acta Analytica*, *25*(4), 447-458.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Van de Walle, J. A. (2005). Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία. *Τυπωθήτω-Δαρδανός.(Έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1998)*.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, *22*(3), 14-17.

Αναπολιτάνος, Δ. (2004). *20ος αιώνας: σχέσεις λογικής, φιλοσοφίας και επιστημών. Φιλοσοφία και θετικές επιστήμες στον 20ο αιώνα* (σ. 107–114). Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών (ΕΙΕ) https://hdl.handle.net/10442/555

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος & Διονυσία Πιτσιλή-Χατζή (2014). *Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.* Στο Χ. Σκουμπουρδή, Μ. Σκουμιός (επιμ.), *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, 17-18 Οκτωβρίου 2014 (σ. 561-578). Ρόδος.

Dimitriadou, E. (2008). *Didactical and Epistemological Issues Related to the Concept of Proof: Some mathematics teachers' ideas about the role of proof in Greek secondary curriculum*. Στο E. Barbin, N. Stehlíková, C. Tzanakis (επιμ.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 5th European Summer University.*, 19-24 July 2007 (p. 363-371). (Questions didactiques et épistémologiques en relation avec le concept de preuve.). Prague: Vydavatelský servis, Plzeň

Κάλφας, Β. (2015). *Η φιλοσοφία του Αριστοτέλη* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://hdl.handle.net/11419/683

Λάππας, Δ. (2017). *Σχολικά Μαθηματικά και Μαθηματικά (Η απόδειξη στη σχολική Γεωμετρία).* Στο Ι. Σαράφης, Α. Πέρδος (επιμ.), *Η μαθηματική απόδειξη ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης:* 7η ημερίδα Μαθηματικών, 11 Μαρτίου 2017 (σ. 35 – 41). Θεσσαλονίκη: Κανδύλας.

Μαρκάδας, Σ. (2017). *Η μαθηματικά απόδειξη στον αστερισμό του Δημοτικού σχολείου. Εκπαιδευτικά ασύμβατη ή διδακτικά εφικτή;* Στο Ι. Σαράφης, Α. Πέρδος (επιμ.), *Η μαθηματική απόδειξη ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης*: 7η ημερίδα Μαθηματικών, 11 Μαρτίου 2017 (σ. 3 – 16). Θεσσαλονίκη: Κανδύλας.

# Παράρτημα

**Συνέντευξη**

**1$^{ος}$ άξονας: Δημογραφικά στοιχεία των εκπαιδευτικών.**

**Ερώτηση 1:** Φύλο, Ηλικία, Ακαδημαϊκό επίπεδο (Πρωτοβάθμια ή Δευτεροβάθμια εκπαίδευση).

**Ερώτηση 2:** Δημόσιος ή ιδιωτικός τομέας, Έτη προϋπηρεσίας, Σχολείο/α ή φροντιστήριο/α που έχετε διδάξει ή αν έχετε διδάξει σε ιδιαίτερα μαθήματα «ένας προς έναν».

**2$^{ος}$ άξονας: Αντιλήψεις σχετικά με τη φύση και το ρόλο της αποδεικτικής διαδικασίας στο μάθημα της γεωμετρίας.**

**Ερώτηση 3:** Ποια θεωρείτε ότι είναι τα χαρακτηριστικά της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας;

**Ερώτηση 4:** Ποιος είναι ο ρόλος της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας στη διδασκαλία της γεωμετρίας;

**3$^{ος}$ άξονας: Αντιλήψεις σχετικά με τη φύση και το ρόλο της άτυπης απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας.**

**Ερώτηση 5:** Ποια θεωρείτε ότι είναι τα χαρακτηριστικά της άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας;

**Ερώτηση 6:** Ποιος είναι ο ρόλος της άτυπης απόδειξης στη διδασκαλία της γεωμετρίας;

**4$^{ος}$ άξονας: Αντιλήψεις σχετικά με τη σημασία της άτυπης απόδειξης στην ανάπτυξη της τυπικής απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας.**

**Ερώτηση 7:** Θεωρείτε ότι η άτυπη αποδεικτική διαδικασία προετοιμάζει τους/ις μαθητές/τριες στην ανάπτυξη της τυπικής γεωμετρικής απόδειξης;

**Ερώτηση 8:** Θεωρείτε ότι η άτυπη αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία ενισχύει τους/ις μαθητές/τριες με την ανάπτυξη της συλλογιστικής τους ικανότητας;

**Ερώτηση 9:** Θεωρείτε ότι η άτυπη αποδεικτική διαδικασία μπορεί να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος;

**Ερώτηση 10:** Θεωρείτε ότι η αναζήτηση της αλήθειας μέσω της διερεύνησης και της διαίσθησης μπορεί να οδηγήσει τους/ις μαθητές/τριες στην αναζήτηση της ακρίβειας του συλλογισμού τους;

**<u>5ος άξονας: Σε ποιον βαθμό χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί άτυπες μορφές αποδεικτικής διαδικασίας στη διδακτική τους πρακτική.</u>**

**Ερώτηση 11:** Ενθαρρύνετε τους/ις μαθητές/τριες σας να επιβεβαιώσουν διαισθητικά την αλήθεια μίας γεωμετρικής πρότασης που παρουσιάζεται στην τάξη;

**Ερώτηση 12:** Ενθαρρύνετε τους/ις μαθητές/τριες σας να αξιολογήσουν ένα επιχείρημα αν μπορεί να αποτελέσει απόδειξη ή όχι;

**Ερώτηση 13:** «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180^o$».

Ποια άτυπη αποδεικτική διαδικασία θα ακολουθούσατε για αυτήν την πρόταση;

**Ερώτηση 14:** Γενικά, στη δική σας διδακτική πρακτική ενθαρρύνετε τους/ις μαθητές/τριες σας να χρησιμοποιούν άτυπες μορφές απόδειξης γεωμετρικών προτάσεων, όπως η προηγούμενη;

**Ερώτηση 15:** Γενικά, θεωρείτε ότι οι άτυπες αποδεικτικές διαδικασίες μπορούν να βοηθήσουν τους/ις μαθητές/τριες σας ώστε να αναπτύξουν, στη συνέχεια, την τυπική απόδειξη της πρότασης;