ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα»

«Didactical intervention to first graders about the development of arithmetic relations from numbers 1 to 10»

της
Μαγδάκη Ειρήνης,
Α.Ε.Μ. 1018

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Α.Π.Θ.
Εξεταστές: Δεσλή Δέσποινα, Αν. Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε./Α.Π.Θ,
Χρήστου Κωνσταντίνος, Αν. Καθηγητής Πανεπιστήμιου Δυτ. Μακεδονίας

Φλώρινα, 2022

Ευχαριστίες

Πρωτίστως, ευχαριστώ από καρδιάς την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας, κα Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια του Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Το πάθος και η αγάπη της για το αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών, υπήρξε πηγή έμπνευσης και δημιουργίας για μένα από τα πρώτα κιόλας μαθήματα του μεταπτυχιακού προγράμματος. Την ευχαριστώ για την επιστημονική της καθοδήγηση, την άμεση ανταπόκριση, όταν την είχα ανάγκη, τη συμπαράστασή της και την συνεργασία που είχαμε προκειμένου να ολοκληρωθεί η εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κα. Δέσποινα Δεσλή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και τον κ. Κωνσταντίνο Χρήστου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, που οι εποικοδομητικές και εύστοχες υποδείξεις τους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους υπέροχους μικρούς μαθητές και στις υπέροχες μικρές μαθήτριές μου για τη χαρά της μάθησης, καθώς και στον συνάδελφό μου, Θέμη, που με τη στάση του με παρότρυνε να φοιτήσω στο συγκεκριμένο ΜΠΣ.

Τέλος, εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στον σύζυγό μου, Μιχαήλ για την συμπαράσταση και την υπομονή…

Στον Μιχαήλ μου,

στα παιδιά μου, Στέλιο & Μαρία

και στη μνήμη της Δέσποινας Ανανιάδου

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη 6

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ..... 8

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 10

1.1Αριθμοί και Πράξεις στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών 10

2.2. Πρώτη αρίθμηση και μαθηματική ικανότητα στην πρώτη δημοτικού 13

2.3. Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα 19

2.4. Έρευνες για τις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης στην πρώτη δεκάδα 25

2.5 Ερευνητικά ευρήματα για τη μετάβαση από τις στρατηγικές καταμέτρησης στις στρατηγικές χωρίς καταμέτρηση 31

2.6. Διδακτικές παρεμβάσεις εννοιολογικής κατανόησης των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα 35

2.7 Άμεση αναγνώριση ποσοτήτων (subitizing) και κατανόηση των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας - διδακτικές προτάσεις ερευνών 41

2.8 Αναγκαιότητα της έρευνας 47

3. ΣΤΟΧΟΙ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 48

3.1 Σκοπός της έρευνας 48

3.3 Ορισμοί 48

3.3.1. Ορισμός πρώτης αρίθμησης 48

3.3.2. Ορισμός σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας 48

3.3.3. Ορισμός σχέσης μέρους – μέρους – όλου 49

3.3.4. Ορισμός εννοιολογικής αντίληψης πρόσθεσης και αφαίρεσης 49

3.3.5. Ορισμός κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα 50

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 50

4.1 Μέθοδος 50

4.2. Το δείγμα 51

4.3. Τα εργαλεία 51

4.4. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στη διδακτική παρέμβαση 53

4.5. Η ερευνητική διαδικασία 55

4.7. Ανάλυση δεδομένων 57

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 59

5.1. Το δείγμα 59

5.2. Προ - έλεγχος (Pre - Test) 59

5.2.1 Αποτελέσματα συνεντεύξεων 60
5.2.1.1. Αποτελέσματα 1ου Έργου 60
5.2.1.2. Αποτελέσματα 2ου Έργου 60
5.2.1.3. Αποτελέσματα 3ου Έργου 61
5.2.1.4. Αποτελέσματα 4ου Έργου 62
5.3. Διδακτική παρέμβαση 63
5.4. Μετά - έλεγχος (Post - Test) 66
Αποτελέσματα συνεντεύξεων 66
5.4.1.1. Αποτελέσματα 1ου Έργου 66
5.4.1.2. Αποτελέσματα 2ου Έργου 67
5.3.1.3. Αποτελέσματα 3ου Έργου 68
5.4.1.4. Αποτελέσματα 4ου Έργου 68
5.5 Συγκριτικά αποτελέσματα προ - ελέγχου (pre - Testing) και μετά - ελέγχου (post - Testing) 69
6. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 72
6.1. Περιορισμοί και Επεκτάσεις 77
7. Βιβλιογραφία 78
7.1. Ξενόγλωσση 78
7.2. Ελληνική και μεταφρασμένη 87
8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 88
8.1. Πρωτόκολλα συνέντευξης (pre Test και post Test) 88
8.2. Φύλλα παρατήρησης 90
8.3. Δραστηριότητες διδακτικής παρέμβασης 91
8.4 Φωτογραφικό υλικό 95
8.5. Πίνακες 98

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει σε ποιο βαθμό μια κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει τη γνώση των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα. Αρχικά παρουσιάζεται το περιεχόμενο της πρώτης αρίθμησης και περιγράφεται η μαθηματική ικανότητα των παιδιών στην πρώτη δημοτικού. Επίσης καταγράφονται στοιχεία που αφορούν στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και γίνεται εκτενής αναφορά σε έρευνες που αφορούν στις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης σε αυτήν. Τέλος, παρουσιάζονται ερευνητικά ευρηματα διδακτικών παρεμβάσεων αναφορικά με την εννοιολογική κατανόηση των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, καθώς και τη σημασία της άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων στην κατανόηση αυτών των σχέσεων. Στην διδακτική παρέμβαση συμμετείχαν 25 παιδιά Α΄ τάξης δημοτικού. Πριν και μετά την διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις βασισμένες σε συγκεκριμένα έργα. Από την ανάλυση των απαντήσεων προέκυψαν τα εξής βασικά αποτελέσματα: α) τα παιδιά μετά τη διδακτική παρέμβαση εμπλούτισαν τη γνώση τους για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, β) οι δραστηριότητες με στόχο την εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, δημιουργεί ισχυρή γνώση του μέρους και του όλου, οδηγώντας σε κατανόηση των αριθμού και επομένως της ουσιαστικής γνώσης των σταθερών σχέσεων των αριθμών της πρώτης δεκάδας.

Λέξεις – κλειδιά: πρώτη αρίθμηση, σταθερές σχέσεις αριθμών στην πρώτη δεκάδα, άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, πρόσθεση, αφαίρεση, διδακτική παρέμβαση, πρώτη τάξη

ABSTRACT

The aim of this research paper is to study the extent to which an appropriate didactical intervention can improve children's knowledge of arithmetic relationships regarding about the first ten natural numbers. To begin with, the concept of the first numbering is introduced. Additionally, the mathematical ability of first graders is described. Data on the arithmetic relationships of the first ten natural numbers are also recorded. Furthermore, extensive research has been made on addition and subtraction strategies. Finally, research findings from the didactical interventions are presented regarding the conceptual understanding of the constant relations of the first ten natural numbers, as well as the importance of subitizing on the understanding of these relations. The participants were 25 first grade primary school students. Prior to and after the intervention, interviews were conducted based on specific tasks. Based on the students' answers, the following results were revealed: a) after the didactical intervention, students' knowledge about the arithmetic relations of the first ten natural numbers was enriched b) the activities specifically designed for the conceptual quantity recognition (subitizing), create a deeper knowledge of the part-whole number relations, leading to an understanding of numbers, hence the essential knowledge of the fixed relations of the first ten natural numbers.

Keywords: early numeracy, arithmetic relations of the first ten natural numbers, subitizing, addition**,** subtraction, didactical intervention, first grade

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας εντάσσεται στο περιεχόμενο της πρώτης αρίθμηση μέχρι το 10 για την προσχολική αλλά και την πρώτη σχολική ηλικία. Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών βρίσκονται στο επίκεντρο της διδακτικής προσέγγισης των πράξεων, καθώς αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη σχέσεων μεγαλύτερης τάξης. Έτσι, ο άνετος χειρισμός, η ευχέρεια στα αθροίσματα και τις διαφορές των αριθμών της πρώτης δεκάδας, είναι αναγκαία προϋπόθεση για κάθε αριθμητική μάθηση (Τζεκάκη, 2007). Για την εννοιολογική αντίληψη των αριθμών και των σχέσεών τους, είναι απαραίτητη η διδασκαλία μέσα από ποικίλες δραστηριότητες που οδηγούν τα παιδιά σε αναλύσεις και συνθέσεις των αριθμών, ώστε να μπορούν να ανακαλούν με ευκολία τα βασικά αθροίσματα και τις διαφορές της πρώτης δεκάδας (Van de Walle et al., 2007, 2017). Από την έρευνα προκύπτει πως η τυπική μάθηση και η απομνημόνευση είναι αναποτελεσματικές, ενώ η αργή συγκρότησή τους και η αξιοποίηση των κατάλληλων δραστηριοτήτων στηρίζει την εξοικείωση και την άνετη διαχείριση αυτών των σχέσεων (Verschaffel & De Corte, 1996 οπως αναφερ. σε Τζεκάκη 2007; Baroody, Eiland, Purpura, & Reid, 2013; Rickard, 2012; Baroody, 2013; Baroody et al., 2011; Walker et al., 2014).

Βασικές διδακτικές μέθοδοι για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας είναι η οργάνωση εποικοδομητικών δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην εννοιολογική κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων και κυρίως της σχέσης μέρους – μέρους – όλου των αριθμών (Neuman, 2013; Kullberg & Runesson Kempe, 2019; Kullberg et al., 2020; Baroody, 2016; Cheng, 2012), καθώς και στην εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, η οποία έχει συνδεθεί θετικά με μαθησιακά αποτελέσματα αναφορικά με την μέτρηση και την ταχύτητα μέτρησης (Benoit et al, 2004), με την κατανόηση της πληθικότητας (Baroody2004; Jung, 2011), την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και την ενίσχυση της γνώσης μέρους -μέρους - όλου (Jung et al. 2013).

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα, με σκοπό να μελετήσει σε ποιο βαθμό μια κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει τη γνώση των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, με δραστηριότητες άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων και ανάλυσης και σύνθεσης αριθμών.

Έτσι, το πρώτο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει το θεωρητικό πλαίσιο, όπου γίνεται βιβλιογραφική μελέτη για την πρώτη αρίθμηση και την μαθηματική ικανότητα στην πρώτη δημοτικού. Στη συνέχεια καταγράφονται στοιχεία που αφορούν στις σταθερές σχέσεις των

αριθμών στην πρώτη δεκάδα και γίνεται εκτενής αναφορά σε έρευνες που αφορούν στις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης σε αυτήν. Τέλος, παρουσιάζονται ερευνητικά ευρήματα διδακτικών παρεμβάσεων αναφορικά με την εννοιολογική κατανόηση των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, καθώς και τη σημασία της άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων στην κατανόηση αυτών των σχέσεων.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε όπως σχεδιάστηκε και οργανώθηκε με βάση τη βιβλιογραφία. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται η καταγραφή των γνώσεων των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών πριν τη διδακτική παρέμβαση μέσα από οργανωμένες συνεντεύξεις βασισμένες σε ανάλογα έργα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η καταγραφή των γνώσεων για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα μετά τη διδακτική παρέμβαση με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Τέλος, τα στοιχεία που καταγράφηκαν, συγκρίθηκαν μεταξύ τους και τα συμπεράσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στο τελευταίο μέρος της εργασίας σε αντιπαραβολή με ευρήματα προηγούμενων ερευνών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Αριθμοί και Πράξεις στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών

Τα ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι τα παιδιά ακολουθούν μία εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, είναι αυτονόητο ότι οικοδομούν περιβάλλοντα μάθησης της μαθηματικής γνώσης που μπορούν να στηρίξουν αποτελεσματικά την μαθησιακή διαδικασία στα μαθηματικά (Sarama & Clements, 2009). Τα νέα προγράμματα σπουδών διέπονται από την έννοια των τροχιών μάθησης (learning trajectories), όπου οι έννοιες ακολουθούν η μία την άλλη από την απλή στη σύνθετη, στοχεύοντας στην διερεύνηση και ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών σε όλους τους τομείς, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού, της ποσότητας και της γεωμετρίας (Sarama & Clements, 2009; NCTM 2000).

Το περιεχόμενο της πρώτης αρίθμησης του NCTM (2000) περιλαμβάνει την κατανόηση των αριθμών και των τρόπων παράστασής τους, παράλληλα με την αντίληψη των αριθμητικών σχέσεων και τον τρόπων δόμησης των αριθμητικών συστημάτων. Επίσης, δοκιμάζει να αναπτύξει αυτές τις διαστάσεις του αριθμού στα παιδιά μικρότερης ηλικίας. Οι μαθητές αναπτύσσουν γνώσεις για τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις τους, ήδη από το Νηπιαγωγείο. Στην Α΄ Δημοτικού, οι στόχοι (standards) που περιγράφουν τι θα πρέπει και τι είναι ικανοί να κατανοήσουν οι μαθητές σε σχέση με τους αριθμούς και τις πράξεις, ανήκουν στις θεματικές ενότητες «Πράξεις και Αλγεβρική σκέψη» (Operations and Algebraic thinking) και «Αριθμοί και Πράξεις με βάση τη δεκάδα» (Number and Operations in base ten). Η συνοχή στην εξέλιξη της γνώσης από το ένα επίπεδο τάξης στο επόμενο, επιτυγχάνεται με την οργάνωση των στόχων του μαθηματικού περιεχομένου σε επιμέρους θεματικές ενότητες. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζουν τις ιδιότητες των πράξεων σαν στρατηγικές για να προσθέτουν και να αφαιρούν, κατανοούν την αφαίρεση ως ένα πρόβλημα πρόσθεσης, όπου ο ένας προσθετέος είναι άγνωστος, συσχετίζουν την απαρίθμηση με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Π.χ., μετρούν μέχρι το 2, για να προσθέσουν 2 σε ένα σύνολο, προσθέτουν και αφαιρούν αριθμούς μέχρι το 20, επιδεικνύοντας μία ευχέρεια στην πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών μέχρι το 10, χρησιμοποιούν στρατηγικές υπολογισμού όπως είναι η απαρίθμηση, ο σχηματισμός της δεκάδας, η αποσύνθεση ενός αριθμού για να

τους οδηγήσει στη δεκάδα, αξιοποιούν την αντιστρεψιμότητα των πράξεων και αθροίσματα που τους είναι γνωστά από την εμπειρία τους για να υπολογίσουν ευκολότερα ένα άθροισμα.

Στο πρόγραμμα σπουδών της Αυστραλίας, (ACM, 2012) οι στόχοι που περιγράφουν την ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών για τις πράξεις με ακέραιους αριθμούς στην Α΄ Δημοτικού, ανήκουν στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και Άλγεβρα» (Numbers and Algebra). Στόχοι του ACM (2012) είναι οι μαθητές να αναπαριστούν και να επιλύουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης: α) χρησιμοποιώντας μία ποικιλία στρατηγικών στις οποίες περιλαμβάνονται: η απαρίθμηση από, (counting on), ο διαχωρισμός ενός αριθμού (partitioning) και η αναδιάταξη μερών (rearranging parts), β) αναπτύσσουν μία ποικιλία νοητικών στρατηγικών για τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Από τη σύγκριση των δύο προγραμμάτων προκύπτει πως οι μαθητές της Αυστραλίας και των ΗΠΑ διδάσκονται πρώτα την πρόσθεση και στη συνέχεια την αφαίρεση. Και στα δύο προγράμματα, οι μαθητές αναπτύσσουν απλές μεθόδους για να επιλύσουν καταστάσεις πρόσθεσης ή αφαίρεσης και σταδιακά αναπτύσσουν ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές υπολογισμού (νοεροί υπολογισμοί: υψηλές νοητικές διεργασίες). Οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού (στρατηγικές) που προτείνονται στο κάθε πρόγραμμα δεν παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους.

Σε αυτήν την κατεύθυνση και το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών στην Ελλάδα (2011) επιλέγει: την ανάπτυξη του περιεχομένου με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας», τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων ως μέσων διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων, την εισαγωγή της «συνθετικής εργασίας» ως ένα μέσο οριζόντιας διασύνδεσης των μαθηματικών με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα και σχεδιάζουν την αξιολόγηση δίνοντας έμφαση στον διαμορφωτικό της χαρακτήρα (ΝΠΣ, 2011). Τονίζεται ότι είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν, μέσα από μία ποικιλία δράσεων, τις σταθερές σχέσεις που συνδέουν τους αριθμούς ως το δέκα και στη συνέχεια των δεκάδων ως το εκατό. Οι σταθερές αυτές σχέσεις, που δεν απομνημονεύονται, αλλά σταθεροποιούνται από την συστηματική χρήση, αποτελούν βάση για κάθε αριθμητική ανάπτυξη (ΝΠΣ, 2011). Επιπροσθέτως, στο Νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (2011) οι δραστηριότητες έχουν ως στόχο το σταδιακό πέρασμα από την ένα – προς - ένα καταμέτρηση στη σύνθεση των αριθμών και την από κοινού αντιμετώπιση των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Στο ΠΣ (2021) περιλαμβάνεται το θεματικό πεδίο «Αριθμός, Άλγεβρα, Ανάλυση», όπου η μάθηση των αριθμών ξεκινά με την προοδευτική μελέτη των φυσικών και

ολοκληρώνεται με τη μελέτη των θετικών ρητών. Ομοίως με το ΝΠΣ (2011), ανάμεσα στους στόχους του ΠΣ (2021) συμπεριλαμβάνονται: η διερεύνηση συνδυασμών που δίνουν αθροίσματα ή διαφορές των αριθμών ως το 10 και των δεκάδων ως το 100, ο υπολογισμός του αθροίσματος και της διαφοράς αριθμών εντός της δεκάδας, καθώς και αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 10 μέχρι το 100.

Η παρούσα μελέτη αφορά στον άξονα «Αριθμοί και Πράξεις» για την Πρώτη δημοτικού, η έννοια του αριθμού περιλαμβάνει την τροχιά «Φυσικοί Αριθμοί» από το 0 έως το 100. Το περιεχόμενο αναλύεται σε: άμεση αναγνώριση, καταμέτρηση ποσοτήτων και αρίθμηση, διάταξη ποσοτήτων και αριθμών, ανάλυση και σύνθεση αριθμών, θεσιακή θέση ψηφίων, εκτιμήσεις, πράξεις στους φυσικούς αριθμούς, προσθέσεις και αφαιρέσεις αριθμών, πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, πολλαπλασιασμός και διαίρεση αριθμών (ΝΠΣ, 2011). Πιο συγκεκριμένα η παρούσα μελέτη αφορά την τροχιά «Πρώτη Αρίθμηση (0 - 10)» το περιεχόμενο της οποίας αναλύεται σε: άμεση αναγνώριση ποσοτήτων στην πρώτη δεκάδα με την χρήση υλικού και αναπαραστατικών μέσων, καταμέτρηση, μέτρηση με βήματα εμπρός και πίσω (ανά δυο και τρία) και μέτρηση μέχρι το είκοσι, ανάπτυξη αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα και διάταξη αριθμών, αριθμητικές πράξεις στην πρώτη δεκάδα και επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Τζεκάκη, 2010).

2.2. Πρώτη αρίθμηση και μαθηματική ικανότητα στην πρώτη δημοτικού

Η πρώτη αρίθμηση ως αρχικό στάδιο του αριθμητισμού (numeracy) συνδέεται με την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών (ψηφία, φυσικούς αριθμούς, δεκαδικό σύστημα αρίθμησης αριθμητικές πράξεις) και αποτελεί ένα μέρος των πρώτων συστηματικών μαθηματικών εννοιών με τις οποίες έρχεται σε επαφή και αναπτύσσει το παιδί, κυρίως γιατί οι αριθμοί και οι πράξεις είναι οικεία και άμεσα στοιχεία καθημερινής χρήσης. Τα παιδιά μαθαίνουν από πολύ νωρίς τις αριθμητικές λέξεις, τη διαδοχή τους, μπορεί να αναγνωρίσουν αριθμητικά σύμβολα, όμως ίσως χωρίς κατανόηση (Τζεκάκη, 2007). Ανεξάρτητα από τις προηγούμενες εμπειρίες των παιδιών, πριν έρθουν στο σχολείο, οι Clements και Sarama (2009), (όπως αναφερ. σε Van de Walle et al., 2017), τονίζουν πως είναι απαραίτητο τα παιδιά να αναπτύξουν τις εξής τέσσερις αλληλένδετες πτυχές της πρώιμης αριθμητικής γνώσης:

- Την ακολουθία των αριθμών. Να γνωρίζουν τα ονόματα και την διατεταγμένη σειρά των αριθμητικών λέξεων.
- Την αντιστοίχιση ένα - προς - ένα. Να απαριθμούν αντικείμενα λέγοντας τις αριθμητικές λέξεις και αντιστοιχίζοντας τες μία - προς - μία με τα αντικείμενα.
- Την πληθικότητα. Να αντιλαμβάνονται ότι, όταν απαριθμούν, η τελευταία αριθμητική λέξη ορίζει πόσα ήταν τα αντικείμενα που απαρίθμησαν.
- Την άμεση αναγνώριση ποσοτήτων. Να αναγνωρίζουν άμεσα και να κατονομάζουν πόσα αντικείμενα βλέπουν χωρίς να απαριθμούν.

Έτσι, σύμφωνα με τους Van de Walle κα. (2017), όταν τα παιδιά κατακτήσουν την έννοια της πληθικότητας και χρησιμοποιούν με λογικό τρόπο τις δεξιότητες απαρίθμησης μπορούν να αναπτύξουν τις τέσσερις μορφές αριθμητικών σχέσεων (χωρικές, ένα-δύο περισσότερα/ ένα - δύο λιγότερα, άγκυρες του 5 και του 10, σχέσεις μέρους- μέρους - όλου), οι οποίες θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Αναλυτικότερα, η μάθηση του αριθμού προϋποθέτει το πέρασμα από την πρακτική χρήση στην εννοιολόγησή του, που αφορά στην κατανόηση του γενικού του περιεχομένου, καθώς αποτελεί τη βάση, για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Verschaffel, Greer, & Torbeyns, 2006). Οι Bryant και Nunes (2002) πρότειναν ότι η λογική σκέψη, η διδασκαλία συμβατικών συστημάτων μέτρησης και ένα ουσιαστικό πλαίσιο για την εκμάθηση των μαθηματικών αποτελούν τη βάση για την πρώιμη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Σύμφωνα με την έρευνα των Bryant και Nunes (2002) για τις λογικές αρχές (όπως

αναφερ. σε Smith, 2002), η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σχετίζεται με τις αυξανόμενες ικανότητες των παιδιών να κατανοούν τις σχέσεις των αριθμών, να μαθαίνουν τι σημαίνει ότι ένας αριθμός είναι ίσος ή μεγαλύτερος ή μικρότερος από έναν άλλο αριθμό, δηλαδή η ικανότητα σύγκρισης, ταξινόμησης και αντιστοίχισης ένα – προς - ένα. Η ικανότητα αντιστοίχισης ένα - προς - ένα και διάταξης των αριθμών είναι απαραίτητη για την κατανόηση της πληθικότητας και της τακτικότητας, οι οποίες, με τη σειρά τους, είναι σημαντικές για την κατανόηση της ακολουθίας των αριθμών (Bryant, 1996). Η ικανότητα αριθμητικής σύγκρισης δύο συνόλων είναι ζωτικής σημασίας πτυχή της ικανότητας διατήρησης και άλλων σχετικών μορφών αριθμητικού συλλογισμού (Sophian,1998), ενώ η ικανότητα ταξινόμησης είναι ένα θεμελιώδες στοιχείο του μαθηματικού συλλογισμού γενικά (Smith, 2002).

Η πρώιμη αριθμητική ανάπτυξη, λοιπόν, έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον της έρευνας τις τελευταίες δεκαετίες, παρέχοντας στο πεδίο της εκπαίδευσης των μαθηματικών παρατηρήσεις αναφορικά με τις στρατηγικές μέτρησης των παιδιών (Carpenter, Moser & Romberg, 1982) και τις τροχιές μάθησης (Clements & Sarama, 2009; Cross, Woods & Schweingruber, 2009). Πολλαπλές μελέτες σε αυτόν τον γνωστικό τομέα έχουν δείξει ότι παρόλο που η εκμάθηση της αριθμητικής είναι πολύπλοκη, τα περισσότερα παιδιά μαθαίνουν να λύνουν απλά αριθμητικά προβλήματα κατά τη διάρκεια της προσχολικής τους ηλικίας. Ωστόσο, η ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων είναι μία πρόκληση για μελέτη, κυρίως επειδή ο αριθμητικός υπολογισμός περιλαμβάνει τη γνώση και την επίγνωση πολλών πτυχών του αριθμού και των λειτουργιών του (Baroody, 2016). Ακόμα κι αν τα παιδιά χρησιμοποιούν στρατηγικές για να λύσουν μία εργασία, οι στρατηγικές τους μπορεί να μην βασίζονται στην εννοιολογική κατανόηση της σχέσης μεταξύ και εντός των αριθμών, αλλά μάλλον στη διαδικαστική γνώση (Fuson, 1992). Η στήριξη μόνο στη διαδικαστική γνώση έχει φανεί ότι δεν διευκολύνει την περαιτέρω μάθηση και ενδεχομένως να προκαλεί δυσκολίες στην αντιμετώπιση πιο προηγμένων αριθμητικών εργασιών (Gray, 1991; Gray & Tall, 1994; Neuman, 1987).

Επομένως, η πρώτη αρίθμηση, η πρώτη δηλαδή αριθμητική μάθηση, συνοψίζεται α) στην κατανόηση του νοήματος που έχει ο κάθε αριθμός, β) στην ουσιαστική αντίληψη των σχέσεων των αριθμών της πρώτης δεκάδας και γ) εν τέλει στην κατανόηση του επαναλαμβανόμενου σχήματος από το οποίο προκύπτει η διαδοχή των αριθμών μετά την πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2007).

Η εκμάθηση ενός συμβατικού συστήματος μέτρησης στην πρώιμη παιδική ηλικία ξεκινά με την απόκτηση δεξιοτήτων αλληλουχίας ακέραιων αριθμών - λέξεων. Μερικοί συγγραφείς θεωρούν αυτές τις δεξιότητες ως τη βάση της αυξανόμενης επίγνωσης του αριθμού των παιδιών (Fuson, 1988), η οποία είναι μία άποψη διαφορετική από εκείνη της έμφασης στις λογικές αρχές (Smith, 2002). Είναι δυνατόν να διακρίνουμε έξι στάδια στην ανάπτυξη τέτοιων δεξιοτήτων (Fuson, 1988):

- Σε ηλικία δύο ετών τα παιδιά κατανοούν ότι οι διαφορετικοί αριθμοί - λέξεις αναφέρονται σε διαφορετικό αριθμό αντικειμένων, αλλά σε αυτό το στάδιο είναι δυνατή μόνο η πολύ βασική διάκριση ποσών.
- Σε ηλικία τριών ετών απαγγέλλουν αριθμητικές λέξεις, αλλά όχι με τη σωστή σειρά.
- Σε ηλικία τεσσάρων ετών, μπορούν να εκφέρουν αριθμούς - λέξεις με τη σωστή σειρά και να αντιστοιχίζουν με πλήθος αντικειμένων, χωρίς όμως να υπάρχει συνέπεια μεταξύ των λέξεων και του πλήθους των αντικειμένων.
- Έξι μήνες αργότερα μπορούν να απαγγείλουν αριθμητικές λέξεις και να επισημαίνουν σωστά τα καταμετρημένα αντικείμενα, για παράδειγμα, δείχνοντας ή μετακινώντας τα αντικείμενα.
- Σε ηλικία πέντε ετών τα παιδιά είναι σε θέση να απαριθμούν σωστά, κατανοώντας ότι η τελευταία αριθμητική λέξη φανερώνει το πλήθος ενός συνόλου αντικειμένων.
- Σε ηλικία περίπου πεντέμισι ετών μπορούν να αναγνωρίσουν επί παραδείγματι τον αριθμό 5 και να συνεχίσουν τη μέτρηση μετά από αυτόν.

Έτσι, η ικανότητά τους να λειτουργούν με την ακολουθία αριθμητικών λέξεων για ακέραιους αριθμούς και να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων, αυξάνεται σημαντικά κατά τη διάρκεια αυτών των αναπτυξιακών αλλαγών.

Για παράδειγμα, στην πρώτη τάξη του φινλανδικού δημοτικού σχολείου, τα παιδιά αναμένεται να μάθουν τις βασικές δεξιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι μαθητές της πρώτης τάξης συνήθως λειτουργούν με αριθμούς μεταξύ 0 και 100, αν και η έμφαση στην πρόσθεση και την αφαίρεση δίνεται στους αριθμούς από το 0 έως το 20. Οι μαθητές της πρώτης τάξης μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αυτές τις δεξιότητες στη βασική τους μορφή (π.χ. 2 + 3 = 5) και στο πλαίσιο εργασίας επίλυσης προβλημάτων (π.χ. «Η μαμά έχει δύο cupcakes και αγοράζει άλλα τρία, πόσα έχει συνολικά;»). Συνήθως, τα παιδιά αρχίζουν να λύνουν εργασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης χρησιμοποιώντας στρατηγικές που βασίζονται στην καταμέτρηση και σε υλικά που βοηθούν τη μνήμη (π.χ. κύβους, δάχτυλα) (Fuson,

1982). Μέσω της εξάσκησης, τα παιδιά αναπτύσσουν περισσότερες στρατηγικές (π.χ., στρατηγικές που βασίζονται στη μνήμη) και γίνονται πιο αποτελεσματικά στη χρήση της στρατηγικής τους, γεγονός που, προφανώς, καθιστά την επίλυση προβλημάτων ταχύτερη και λιγότερο επιρρεπή σε σφάλματα (Geary, Hamson, & Hoard, 2000, Siegler, & Shrager, 1984). Αυτό είναι που κάνει τις πρώιμες δεξιότητες αριθμητικής πολύ σημαντικές για την εκμάθηση βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων. Οι πρώιμες αριθμητικές δεξιότητες, ειδικά οι δεξιότητες μέτρησης, έχει διαπιστωθεί ότι είναι θετικοί προγνωστικοί παράγοντες για τις μεταγενέστερες επιδόσεις στα μαθηματικά (Aubrey, Dahl, & Godfrey, 2006; Aubrey, & Godfrey, 2003; Kavkler et al., 2003).

Η προλεκτική αίσθηση του αριθμού, μία κατά προσέγγιση αναπαράσταση του μεγέθους, η οποία είναι ήδη παρούσα πριν από την εμφάνιση της συμβολικής αναπαράστασης του αριθμού (Lipton, & Spelke, 2005), είναι βάση για τη μεταγενέστερη ανάπτυξη των μαθηματικών. Αυτή η σύλληψη περιορίζει την αίσθηση αριθμών σε διαδικασίες όπου χρησιμοποιείται μία κατά προσέγγιση αξιολόγηση μεγεθών ή συμβόλων που αντιπροσωπεύουν μεγέθη.

Με βάση και τις νευροψυχολογικές μελέτες (Feigenson et al , 2004; Piazza, et al, 2004), η ικανότητα αναπαράστασης και επεξεργασίας πληροφοριών αριθμητικού μεγέθους είναι ζωτικής σημασίας για τη φυσιολογική ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων. Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, δηλαδή η γρήγορη λεκτική ονομασία μικρών ποσοτήτων χωρίς να μετράμε τα στοιχεία χωριστά, φαίνεται να προηγείται και να υποστηρίζει την ανάπτυξη των δεξιοτήτων μέτρησης (Τζεκάκη, 2010). Έρευνες που έγιναν σε παιδιά ηλικίας 5 - 6 χρόνων, έδειξαν ότι επιτυγχάνουν στη μέτρηση αντικειμένων με αντιστοίχιση ένα – προς - ένα, αλλά όταν έρχονται αντιμέτωπα με τη σύνθεση μικρών ποσοτήτων (π.χ. 4 + 2 + 1), όπου απαιτείται να κάνουν νοερές πράξεις και να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές, τότε οι επιτυχίες μειώνονται (Nunes & Bryant, 2007). Υποστηρίζεται ότι η εννοιολογική κατανόηση του αριθμού, συνδέεται με την αντίληψη του αριθμού ως ποσότητα και μάλιστα ως ομάδες ποσοτήτων που τον συνθέτουν, γεγονός που κάνει τη μαθηματική σκέψη περισσότερο ευέλικτη (Van de Walle et al., 2017). Επιπροσθέτως, τονίζεται η σημασία της ανάλυσης και σύνθεσης του αριθμού σε ομάδες ποσοτήτων που τον συνθέτουν, καθώς με τον τρόπο αυτό αναδεικνύονται οι σχέσεις του με τους άλλους αριθμούς και γίνεται κατανοητή η διάταξη και ο τρόπος δόμησης του δεκαδικού μοντέλου (Baroody, 1987). Οι διαδικασίες μάθησης σχετικά με την ικανότητα αντίληψης του αριθμού ως ποσότητα,

φαίνεται να έχουν διαρκή επίδραση στη μαθηματική μάθηση στο σχολείο (Krajewski & Schneider, 2009).

Οι Krajewski και Schneider (2009) διακρίνουν την ποσοτική αντίληψη του αριθμού σε τρία επίπεδα. Σύμφωνα με το μοντέλο τους, στο πρώτο επίπεδο η αλληλουχία αριθμού - λέξεων και η κατανόηση της ποσότητας αναπτύσσονται μεμονωμένα η μία από την άλλη. Μόνο συνδέοντας αυτές τις «βασικές αριθμητικές δεξιότητες» οι αριθμητικές λέξεις αποκτούν ποσοτική σημασία. Στο δεύτερο επίπεδο, τα παιδιά συνειδητοποιούν ότι οι αριθμητικές λέξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν διακριτές ποσότητες και ότι οι ποσότητες μπορούν να προσδιοριστούν με μέτρηση («έννοια ποσότητα - αριθμός»). Στο τρίτο επίπεδο η κατανόηση των «σχέσεων αριθμών» αναπτύσσεται, καθώς τα παιδιά συνειδητοποιούν ότι οι αριθμοί σχετίζονται με άλλους αριθμούς και ότι οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν αυτές τις σχέσεις. Διακρίνονται δύο κύριες σχέσεις:

- Σχέση σύνθεσης και αποσύνθεσης: οι αριθμοί μπορούν να περιγραφούν με συνθέσεις άλλων αριθμών (μέρη) (5 = 3 + 2) ή να αποσυντίθεται σε αριθμούς.
- Σχέση διαφοράς: οι αριθμοί μπορούν να περιγράφουν διαφορές μεταξύ δύο αριθμών (η διαφορά μεταξύ 3 και 5 είναι 2, 5 - 3 = 2).

Από την άποψη της αναπτυξιακής ψυχολογίας, αυτή η σχεσιακή κατανόηση έχει σημαντικό ρόλο για την περαιτέρω μαθηματική μάθηση των παιδιών (Krajewski & Schneider, 2009; Langhorst et al, 2012). Από τη σκοπιά της διδακτικής των μαθηματικών, η ικανότητα αναγνώρισης και χρήσης σχέσεων μεταξύ μεμονωμένων αριθμών με μέτρηση και υπολογισμό τονίζεται ως κεντρικός στόχος για τις μαθησιακές διαδικασίες στο νηπιαγωγείο, οι οποίες θα πρέπει να συνεχιστούν στο δημοτικό σχολείο (Wittmann & Müller, 2009).

Επιπλέον, από επιστημολογική άποψη, η σχεσιακή κατανόηση είναι σημαντική. Οι μαθηματικές έννοιες δεν είναι συγκεκριμένες, αλλά χαρακτηρίζονται από σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων και αφηρημένων αντικειμένων (Nührenbörger & Steinbring, 2009; Steinbring, 2005). Κατά συνέπεια, οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν νόημα, εφόσον τα παιδιά ασχοληθούν με συγκεκριμένα και αργότερα με αφηρημένα αντικείμενα με τρόπο ενεργό και ερμηνεύσουν σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Κατά τη μετάβαση από το νηπιαγωγείο στο δημοτικό σχολείο, η σύνδεση των εμπειριών με συγκεκριμένα αντικείμενα και οι συστηματικές αφηρημένες εργασίες είναι πρόκληση (Hasemann, 2005). Αυτή η σύνδεση επιτυγχάνεται εάν τα παιδιά προχωρήσουν πέρα από τη συγκεκριμένη κατάσταση: «*Όταν τους ζητείται να δουν, να ερμηνεύσουν ή να ανακαλύψουν κάτι άλλο, μία άλλη δομή,*

στην αριθμητική κατάσταση» (Steinbring, 2005, σελ. 82). Κατά συνέπεια, τα παιδιά πρέπει να προσδιορίσουν τις γενικές δομές στη συγκεκριμένη κατάσταση και ταυτόχρονα να εξετάσουν τη συγκεκριμένη φύση της κατάστασης. Για την ερμηνεία, τον προσδιορισμό και τη χρήση σχέσεων μεταξύ αριθμών, οι διαδικασίες αλληλεπίδρασης και διαπραγμάτευσης είναι σχετικές. Όταν τα παιδιά ενθαρρύνονται να εκφραστούν και να συζητήσουν τους τρόπους σκέψης και δράσης τους, έχουν την ευκαιρία να συλλογιστούν σχετικά με το μαθηματικό νόημα και να κατασκευάσουν μαθηματική γνώση (Nührenbörger & Steinbring, 2009).

Συνοψίζοντας, το νόημα της πρώτης αρίθμησης, όπως έχει αναλυθεί παραπάνω έχει απασχολήσει την έρευνα τις τελευταίες δεκαετίες και έχει εξεταστεί από διάφορες ερευνητικές οπτικές που όλες καταλήγουν ότι η κατάλληλη εισαγωγή στην έννοια του αριθμού (του φυσικού αριθμού) αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη των πιο εξελιγμένων αριθμητικών μοντέλων αλλά και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Verschaffel, Greer, & Torbeyns, 2006, όπως αναφέρεται σε Τζεκάκη, 2007).

2.3. Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα

Οι Van de Walle κα. (2017) ορίζουν συγκεκριμένους τύπους δόμησης αριθμητικών σχέσεων που χρειάζεται να αναπτύξουν οι μαθητές σε ό,τι αφορά τους μικρούς αριθμούς,

▪ Οι *χωρικές σχέσεις*, όπου τα παιδιά αναγνωρίζουν σύνολα αντικειμένων σε διάταξη σχηματικού προτύπου, λένε πόσα είναι χωρίς απαρίθμηση και κατασκευάζουν πρότυπα από δύο ή περισσότερα πρότυπα αριθμών.

▪ Οι *σχέσεις ένα - δύο περισσότερα, ένα - δύο λιγότερα,* να γνωρίσουν δηλαδή ότι το 8 είναι δύο παραπάνω από 6 και 2 λιγότερα από 10.

▪ Οι *«άγκυρες» ή τα «σημεία αναφοράς» του 5 και του 10,* όπου τα παιδιά αναπτύσσουν σχέσεις για τους αριθμούς από το 1 ως το 10 με σημεία αναφοράς το 5 και το 10, τα οποία κατέχουν κεντρικό ρόλο στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και

▪ Οι *σχέσεις μέρους - μέρους - όλου*, η εννοιολογική δηλαδή σύλληψη ενός αριθμού ως συνδυασμού δύο ή περισσότερων μερών (Τζεκάκη, 2007). Ανάμεσα στον τύπο αριθμητικών σχέσεων «μέρους - μέρους - όλου» και στις ιδέες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης υπάρχει στενή σύνδεση.

Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ένα σύνολο σχετίζεται με τα μέρη του - αυτό που ο Piaget (1965, όπως αναφέρεται σε Baroody, 2004) ονόμασε *«προσθετική σύνθεση»* - περιλαμβάνει την αναγνώριση ότι ένα σύνολο είναι το άθροισμα των μερών του (μέρος 1 + μέρος 2 = όλο) και ότι το σύνολο είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε μεμονωμένο μέρος (όλο > μέρος 1 ή μέρος 2). Η κατασκευή μιας ιδέας μέρους - όλου είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό επίτευγμα. Μερικοί μελετητές θεωρούν ότι είναι η βάση για μια βαθιά κατανόηση του αριθμού, της αριθμητικής και ένας βασικός σύνδεσμος μεταξύ αυτών των δύο εννοιών.

Μια έννοια μέρους - όλου μπορεί να αποτελέσει το θεμέλιο για την κατανόηση των ακόλουθων πιο προηγμένων εννοιών του αριθμού: (α) αναπαράσταση θέσης - αξίας (π.χ., το σύνολο 23 μπορεί να αποσυντεθεί στα μέρη 12 δεκάδες και 3 μονάδες ή 1 δεκάδα και 13), (β) κοινά κλάσματα (στην παράσταση a/b, ο αριθμητής a δηλώνει τον αριθμό των ίσων τμημάτων ενός συνόλου ενδιαφέροντος και ο παρονομαστής b δείχνει τον συνολικό αριθμό ίσων μερών στα οποία υποδιαιρείται το σύνολο), και (γ) αναλογίες - συμπεριλαμβανομένης της πιθανότητας (η πιθανότητα ενός αποτελέσματος = η συχνότητα/συχνότητα όλων των αποτελεσμάτων = συχνότητα του μέρους ενδιαφέροντος/συχνότητα όλων των μερών ή του συνόλου).

Η έννοια μέρους - όλου θεωρείται ότι αποτελεί την εννοιολογική βάση για την κατανόηση και την επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης (προσθήκης) (π.χ., x + 3 =

5). Επιπλέον, μπορεί να χρησιμεύσει στη σύνδεση των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με τους ακόλουθους τρόπους:

- βασική αρχή του συμπληρώματος: όλο - μέρος 1 = x.
- μέρος 1 + x = όλο, όπου σχετίζεται η αρχή του προηγμένου συμπληρώματος μέρος 1 + μέρος 2 = ολόκληρο - μέρος 1 = μέρος 2 ή ολόκληρο - μέρος 2 = μέρος 1.
- η αντίστροφη αρχή: μέρος 1 + μέρος 2 - μέρος 2 = μέρος 1 ή μέρος 1 - μέρος 2 + μέρος 2 = μέρος 1 (Baroody, 1999 σε Baroody, 2004).

Τέλος, η έννοια μέρους - όλου βοηθά στην κατανόηση ότι ένας αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους. Ο αριθμός πέντε για παράδειγμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως: 0 + 5, 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, 5 + 0, 6 -1, 7 -2. Η κατασκευή μιας έννοιας μέρους - όλου μπορεί να ξεκινήσει με ανακριβείς μη λεκτικές εμπειρίες, όπως είναι η συναρμολόγηση και η απομάκρυνση αλληλοσυνδεόμενων τμημάτων ενός παιχνιδιού. Αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια διαισθητική κατανόηση ότι ένα σύνολο είναι μεγαλύτερο από τα σύνθετα μέρη του.

Οι Sophian και McCorgray (1994) σε έρευνά τους διαπίστωσαν ότι τα παιδιά ηλικίας πέντε και έξι ετών, (αλλά όχι τεσσάρων ετών), αναγνώρισαν ότι έλειπε το αρχικό ποσό (μέρος 1) σε ένα λεκτικό πρόβλημα που τους παρουσίασαν. Η αδυναμία των μικρών παιδιών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης (με μέρος που λείπει) λαμβάνεται ως ένδειξη ότι δεν έχουν κατανοήσει την έννοια μέρους - όλου (Riley et al., 1983 σε Baroody, 2004). Μερικοί ερμήνευσαν τέτοια στοιχεία και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία σχετικά με τα μέρη που λείπουν είναι πολύ δύσκολο να εισαχθεί στις πρώτες τάξεις του δημοτικού (Kamii, 1985 σε Baroody, 2004).

Σε αντιδιαστολή, άλλες έρευνες ανέδειξαν διαφορετικά συμπεράσματα. Οι Sophian και McCorgray (1994), για παράδειγμα, παρουσίασαν λεκτικά προβλήματα σε παιδιά ηλικίας τεσσάρων, πέντε και έξι ετών (ατομικά), χρησιμοποιώντας ένα λούτρινο αρκουδάκι και εικόνες αντικειμένων. Όταν έγινε αναφορά στο αρχικό άγνωστο ποσό, εμφανίστηκε στον συμμετέχοντα ένα στρογγυλό κουτί καλυμμένο από έναν φάκελο. Όταν έγινε αναφορά στην προσθήκη αντικειμένων, εμφανίστηκε μία εικόνα των αντικειμένων η οποία στη συνέχεια τοποθετήθηκε στον φάκελο (εκτός οπτικής γωνίας). Για προβλήματα που αφορούν την αφαίρεση, αφαιρέθηκε μια εικόνα των αντικειμένων που τραβήχτηκε από το κουτί, εμφανίστηκε στο παιδί και στη συνέχεια τοποθετήθηκε εκτός οπτικού πεδίου. Όταν αναφέρθηκε το αποτέλεσμα, εμφανίστηκε στον συμμετέχοντα μια εικόνα των αντίστοιχων

αντικειμένων. Αν και τα παιδιά ηλικίας πέντε και έξι ετών είχαν συνήθως μεγάλη δυσκολία να προσδιορίσουν τις ακριβείς απαντήσεις τέτοιων προβλημάτων, έδιναν τουλάχιστον απαντήσεις που ήταν προς τη σωστή κατεύθυνση. Για παράδειγμα, τα παιδιά γνώριζαν ότι το ένα μέρος έπρεπε να είναι μικρότερο από το σύνολο, ή ότι το σύνολο έπρεπε να είναι μεγαλύτερο από τα δύο μέρη. Αυτά τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι τα παιδιά ηλικίας πέντε και έξι ετών μπορούν να συλλογιστούν (ποιοτικά) σε καταστάσεις που «λείπουν» και επομένως, έχουν μια βασική κατανόηση των σχέσεων μέρους - όλου.

Αυτό που είναι γνωστό είναι ότι, μεταξύ πέντε και επτά ετών, τα παιδιά ανακαλύπτουν ότι όταν το μέρος 2 προστεθεί στο μέρος 1 ή το αντίστροφο, το άθροισμα είναι το ίδιο - είτε η εργασία περιλαμβάνει άγνωστες ποσότητες, γνωστές ποσότητες ή συμβολικές εκφράσεις (Baroody & Gannon, 1984; Baroody et al., 1983; Bemejo & Rodriguez, 1993; Cowan & Renton, 1996; Sophian, Harley, & Martin, 1995, όπως αναφερ. σε Baroody, 2004). Τα παιδιά που μπορούν να αναγνωρίσουν ότι πέντε και άλλα τρία έχουν το ίδιο άθροισμα με τρία και άλλα πέντε έχουν κατασκευάσει μια σχετικά βαθιά κατανόηση της αθροιστικής αντιστάθμισης.

Ένας λόγος που πολλά παιδιά της πρώτης δημοτικού δεν κατανοούν βαθιά τις σχέσεις μέρους - όλου είναι ότι μπορεί να μην αναγνωρίζουν ότι μια ποσότητα (ένα σύνολο) μπορεί να αναλύεται ή να συντίθεται με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να πιστεύει ότι πέντε και δύο ακόμη είναι επτά και να μην αντιλαμβάνεται ότι τέσσερα και άλλα τρία μπορούν να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα Στην πραγματικότητα, τα παιδιά μπορεί να χρειαστεί να ανακαλύψουν ξανά την αρχή της αντιστάθμισης στο επίπεδο του αφηρημένου αριθμού. Αυτό μπορεί να συμβεί περίπου στην ηλικία των 7 ετών, όταν τα παιδιά αρχίζουν να υπολογίζουν και είτε να συγκρίνουν νοερά αθροίσματα και διαφορές είτε να συγκρίνουν γραπτές εξισώσεις (Baroody, 2004).

Η «*προσθετική σύνθεση του αριθμού»,* ως μία ιδιότητα των αριθμών, αναδεικνύεται και μέσα από τη διερεύνηση των αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα. Όπως αναφέρουν οι Nunes και Bryant (2007), η ιδέα που αναπτύσσουν οι μαθητές για την *προσθετική σύνθεση* του αριθμού είναι ότι *οποιοσδήποτε αριθμός n μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο άλλους που να δίνουν το άθροισμα n* (σελ. 110). Μέσα από αυτή την ιδέα, τα μικρά παιδιά οδηγούνται στην ανάπτυξη των ιδεών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Όταν οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν τις αριθμητικές σχέσεις στην πρώτη δεκάδα και να τις χρησιμοποιήσουν, σημαίνει ότι έχουν μία πρώτη αντίληψη για την έννοια του αριθμού (Van de Walle et al., 2017).

Αυτές οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα εκφράζονται με

παραστάσεις πρόσθεσης - αφαίρεσης και αποτελούν τα βασικά δεδομένα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Η ουσιαστική κατανόησή τους θεωρείται θεμελιώδης για την προσέγγιση μεγαλύτερων αριθμών. Προς αυτή την κατεύθυνση η άμεση εκτίμηση ποσοτήτων είναι μία σημαντική ικανότητα για τη σύλληψη των αριθμών, των αριθμητικών σχέσεων και συστημάτων. Για παράδειγμα, κατά την άμεση εκτίμηση ποσοτήτων, τα παιδιά μπορεί να αναγνωρίσουν μικρές ομάδες ποσοτήτων μέσα σε μία μεγαλύτερη ποσότητα, βλέπουν δηλαδή έναν σχηματισμό οκτώ κουκίδων σαν δύο τετράδες (Van de Walle et al., 2017). Η ικανότητα αυτή πρέπει να ενθαρρύνεται στα προγράμματα της πρώτης αρίθμησης, ειδάλλως τα παιδιά συνεχίζουν να χρησιμοποιούν την καταμέτρηση ως την ασφαλέστερη μέθοδο υπολογισμού (Τζεκάκη, 2010).

Όπως επισημαίνει η Τζεκάκη (2007) η διαδικασία της καταμέτρησης δεν αρκεί για την εννοιολογική ολοκλήρωση του αριθμού, η οποία απαιτεί ένα πέρασμα από τους μεμονωμένους αριθμούς και την ένα - προς - ένα διαδοχή τους στη δημιουργία σύνθετων μονάδων που χρησιμοποιούνται με επανάληψη. Στο τέλος, ο κάθε μεμονωμένος αριθμός με τις ιδιότητές του εντάσσεται και λειτουργεί μέσα σε ένα αριθμητικό σύνολο. Η διαδοχή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα ακολουθεί ένα επαναλαμβανόμενο σχήμα, λόγω της πολλαπλασιαστικής δομής του, κάθε μονάδα επόμενης τάξης (π.χ., δεκάδες) είναι δεκαπλάσια της προηγούμενης (π.χ., μονάδες). Επομένως, το άτομο εφαρμόζει την κατανόησή του για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας στους μεγαλύτερους αριθμούς. Χωρίς τις κατάλληλες δράσεις ανάπτυξης αυτών των σχέσεων, τα παιδιά συναντούν δυσκολίες κατά την εύρεση όλων των συνδυασμών των αθροισμάτων για έναν αριθμό, έτσι δεν μπορούν να συστηματοποιήσουν τα ευρήματά τους και εμφανίζουν σοβαρές ελλείψεις (Cobb, 1987 όπως αναφερ. σε Τζεκάκη, 2010).

Είναι σημαντικό να αποδώσουν οι μαθητές νόημα στις αριθμητικές σχέσεις που μαθαίνουν, καθώς η απλή τους απομνημόνευση εμποδίζει την κατανόηση της δομής του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Σύμφωνα με τους Nunes και Bryant (2007) στην επιδίωξη αυτή συμβάλλουν δύο παράγοντες:

- Η προσέγγιση των αριθμητικών σχέσεων μέσα από συγκεκριμένες προβληματικές καταστάσεις που σχετίζονται με τις εμπειρίες τους από την καθημερινή ζωή. Οι προβληματικές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να αποδώσει νόημα ο μαθητής, τον *καθιστούν ικανό να ελέγχει τις πράξεις που απαιτούνται καθώς τις εκτελεί και να αναγνωρίζει ευκολότερα τα λάθη του*.

▪ Η αξιοποίηση μίας ποικιλίας αναπαραστάσεων, όπως πραγματικά αντικείμενα και εικονιστικό υλικό βοηθούν σε πρώτη φάση τους μαθητές να μοντελοποιήσουν τις αριθμητικές σχέσεις που περιγράφονται σε κάθε προβληματική κατάσταση και στη συνέχεια να τις αναπαραστήσουν συμβολικά, με παραστάσεις πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Διδακτικά η δράση των παιδιών πάνω στα πραγματικά αντικείμενα και στον πραγματικό κόσμο πρέπει να τα βοηθάει να συνδυάσουν τις διαφορετικές λειτουργίες των αριθμών που δίνουν νόημα στους αριθμούς και στο να συγκροτήσουν ολοκληρωμένη αλλά και αφηρημένη μαθηματική έννοια. Η εννοιολογική συγκρότηση που απαιτείται για το πέρασμα της δράσης από τα πραγματικά αντικείμενα στους αριθμούς και την αφηρημένη δομή τους, είναι αυτή που δίνει περιεχόμενο στο αριθμητικό σύμβολο (Τζεκάκη, 2007).

Στο PSSM (NCTM, 2000) περιλαμβάνεται η σύσταση ότι «*οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν στρατηγικές για τη γνώση των βασικών συνδυασμών αριθμών, βασισμένες στη σκέψη τους και στην κατανόηση των αριθμών»* και ότι τουςπαρέχονται εργασίες που «*τους βοηθούν να αναπτύξουν τις σχέσεις εντός πρόσθεσης και αφαίρεσης» (σελ. 84)*. Για παράδειγμα: α) ανακάλυψη του κανόνα του επόμενου αριθμού (ο επόμενος ακέραιος αριθμός στην ακολουθία μέτρησης, είναι ένα περισσότερο από τον αριθμό που μόλις ονομάστηκε) και β) η συμπληρωματική σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., το 5 - 3 = α μπορεί να θεωρηθεί ως 3 + β = 5). Γίνονται επίσης αναφορές στη «γνώση βασικών συνδυασμών αριθμών», όπου η «γνώση» αυτή εξισώνεται με την «υπολογιστική ευχέρεια».

Ο Baroody (2004) προτείνει τους εξής στόχους για τη γνώση των σταθερών σχέσεων των αριθμών:

• Η ευχέρεια με κάθε οικογένεια συνδυασμών αριθμών θα πρέπει να βασίζεται σε δύο απαραίτητες αναπτυξιακές φάσεις: (α) στρατηγικές που βασίζονται στην καταμέτρηση για τον προσδιορισμό των αθροισμάτων και των διαφορών (απαρίθμηση από) και (β) στρατηγικές βασισμένες σε συλλογισμούς. Μία οικογένεια συνδυασμών αποτελείται από συνδυασμούς που μοιράζονται ένα κοινό πρότυπο ή σχέση. Ένας συνδυασμός μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μία οικογένειες.

• Στη δεύτερη φάση, βασισμένη σε συλλογισμό, τίθενται τα θεμέλια για την τρίτη φάση (ευχέρεια). Τα παιδιά ενθαρρύνονται να αναζητούν πρότυπα και σχέσεις και να τις χρησιμοποιούν για να επινοήσουν, να εφαρμόσουν και να μοιραστούν στρατηγικές συλλογισμού (σκέψη).

• Στην τρίτη φάση (ευχέρεια) τα παιδιά εξασκούνται στο να αυτοματοποιήσουν τις

στρατηγικές συλλογισμού (σκέψη) και όχι στο να απομνημονεύουν μεμονωμένα αριθμητικά γεγονότα. Η εξάσκηση, τονίζει ο Baroody (2004), θα πρέπει να γίνεται με ουσιαστική διερεύνηση.

- Η ευχέρεια μπορεί να ενσωματώνει μία ποικιλία στρατηγικών, συμπεριλαμβανομένης της ανάκλησης (μεμονωμένων) γεγονότων. Επιπλέον, οι παραπάνω γενικές αρχές θα πρέπει να συνοδεύονται από προβλήματα, παιχνίδια και άλλες δραστηριότητες βασισμένες στην έρευνα (Baroody, 2004).

Συνοψίζοντας, όπως προκύπτει από την έρευνα, όταν τα παιδιά δομούν τις σχέσεις των αριθμών αρχικά, χρησιμοποιούν ως εργαλείο την απαρίθμηση. Όταν όμως έρθουν σε επαφή με πιο ισχυρές ιδέες, η απαρίθμηση γίνεται λιγότερο απαραίτητη. Από τις τέσσερις αριθμητικές σχέσεις, που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι ιδέες για το μέρος και το όλο, η ικανότητα, δηλαδή να σκέφτεται κανείς τον αριθμό ως συνδυασμό μερών είναι βασικός σταθμός για την ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού. Τέλος, υπάρχει μια ξεκάθαρη σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες μέρους – μέρους – όλου και στις ιδέες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

2.4. Έρευνες για τις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης στην πρώτη δεκάδα

Σύμφωνα με τους Van de Walle et al. (2017) για την αντίληψη της βασικής ιδέας της πρόσθεσης, μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι τοποθετούνται μαζί δύο ή περισσότερες ποσότητες, πραγματικές ή νοητές. Για την αφαίρεση ότι από μία ορισμένη ποσότητα, «βγαίνει» ένα μέρος της, ότι γίνεται σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων ή ότι γνωρίζοντας το όλο και το ένα μέρος, αναζητείται το μέρος που λείπει. Οι αριθμητικές πράξεις συνδέονται μεταξύ τους. Η πρόσθεση ορίζει το σύνολο με βάση τα μέρη του και η αφαίρεση ορίζει το μέρος που λείπει. Επομένως, η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στηρίζεται στην ολοκληρωμένη αντίληψη της πρώιμης αριθμητικής μάθησης (απαγγελία αριθμών, αντιστοίχιση ένα - προς - ένα, πληθικότητα, άμεση εκτίμηση ποσοτήτων) (Kilpatrick et al., 2001;Baroody et al., 2011; Τζεκάκη, 2007). Από τη στιγμή που τα παιδιά κατακτήσουν την έννοια της πληθικότητας και μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις δεξιότητες της απαρίθμησης με λογικό τρόπο, έχουν ένα αρχικό εργαλείο για τη διερεύνηση των αριθμητικών σχέσεων και κατ' επέκταση την κατανόηση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Clements & Sarama, 2014).

Όσον αφορά τις στρατηγικές των παιδιών, όταν αντιμετωπίζουν πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, η έρευνα έδειξε ότι τα παιδιά που χρησιμοποιούν ορισμένες στρατηγικές, είναι απρόθυμα να τις αλλάξουν, ακόμη και σε πιο αποτελεσματικές (Cheng, 2012). Αυτό σημαίνει ότι τόσο η πρώτη επαφή των παιδιών με ισχυρούς τρόπους επίλυσης αριθμητικών εργασιών όσο και οι πρώιμες διδακτικές παρεμβάσεις είναι σημαντικές για περαιτέρω ευκαιρίες μάθησης και για την ανάπτυξη πιο προηγμένων αριθμητικών δεξιοτήτων.

Ένα ζήτημα που έχει απασχολήσει την έρευνα είναι η ευχέρεια στους βασικούς συνδυασμούς της πρώτης δεκάδας (Baroody, Feil, & Johnson, 2007, NCM, 2000, Rittle & Schneider, 2014). Η ευχέρεια συνεπάγεται την εφαρμογή της γνώσης στο κατάλληλο πλαίσιο, προσαρμοστικά και αποτελεσματικά. Κατάλληλη χρήση σημαίνει επιλεκτική εφαρμογή της γνώσης μόνο σε κατάλληλες περιπτώσεις (π.χ., αναγνωρίζοντας ότι ο κανόνας του επόμενου αριθμού n+1 στην ακολουθία μέτρησης, ισχύει για το 3 + 1 ή το 1 + 3, αλλά όχι για 3 + 5 ή 5 + 3). Η προσαρμοστική χρήση περιλαμβάνει την ευέλικτη εφαρμογή ή ακόμη και την προσαρμογή της γνώσης για την επίλυση νέων προβλημάτων (μεταφορά).

Αν και η ευχέρεια στα βασικά αθροίσματα και τις διαφορές είναι κρίσιμη για τη μαθηματική επιτυχία (CCSSO, 2010; NCTM, 2000), πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να επιτύχουν αυτόν τον στόχο. Οι Henry και Brown (2008) διαπίστωσαν ότι η συντριπτική πλειοψηφία 275 μαθητών της πρώτης τάξης σε πολιτεία της Καλιφόρνια, δεν πέτυχε το κριτήριο ευχέρειας με αθροίσματα και σχετικές διαφορές. Η διάμεση γνώση, δηλαδή η

γνώση που αποκτήθηκε μέσω μιας διαδικασίας συλλογισμού, ήταν μόνο το 22% των δοκιμασμένων συνδυασμών. Αυτό ίσχυε ακόμη και για σχολεία με υψηλές επιδόσεις και παρά τη διδακτική έμφαση σε αυτή την ευχέρεια.

Η ικανότητα ευχέρειας απαιτεί ουσιαστική μάθηση, η οποία συνεπάγεται τη σύνδεση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης (Moursund, 2002; Rittle - Johnson, 2014; Siegler & Araya, 2005). Η επίτευξη μίας τέτοιας μάθησης προϋποθέτει την οργάνωση της διδασκαλίας με στόχο (α) την αναγνώριση των κανονικοτήτων από τα παιδιά και (β) την αξιοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης των παιδιών (Baroody, 2014).

Η φυσική πορεία της ουσιαστικής κατανόησης ενός βασικού αριθμητικού συνδυασμού ή μίας οικογένειας συνδυασμών περιλαμβάνει συνήθως τρεις αλληλοσυμπληρούμενες φάσεις (Kilpatrick et al., 2001; Steinberg, 1985):

- Η πρώτη φάση είναι η μέτρηση, τα παιδιά χρησιμοποιούν στρατηγικές μέτρησης αντικειμένων ή λέξεων για να προσδιορίσουν αθροίσματα ή διαφορές.
- Η δεύτερη φάση είναι ο συλλογισμός, τα παιδιά χρησιμοποιούν τα μοτίβα και τις σχέσεις που ανακάλυψαν στην πρώτη φάση για να εφεύρουν στρατηγικές συλλογισμού (π.χ., τον κανόνα μετά τον αριθμό για την πρόσθεση με το 1).
- Η τρίτη φάση είναι η ανάκτηση, τα παιδιά μπορούν αποτελεσματικά, κατάλληλα και προσαρμοστικά να παράγουν αθροίσματα και διαφορές από ένα δίκτυο μνήμης.

Οι σκόπιμες (συνειδητές και σχετικά αργές) στρατηγικές συλλογισμού (δεύτερη φάση) χρησιμεύουν ως βασική γέφυρα μεταξύ της χρήσης σχετικά αναποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης (πρώτη φάση) και της αποτελεσματικής ανάκτησης (τρίτη φάση) με δύο κρίσιμους τρόπους. Ο ένας τρόπος είναι ότι μπορούν να παρέχουν ένα οργανωτικό πλαίσιο για την εκμάθηση και την απομνημόνευση συνδυασμών, εξασκημένων και μη (Dowker, 2009; Sarama & Clements, 2009) και ο δεύτερος ότι τέτοιες στρατηγικές μπορούν να αυτοματοποιηθούν και να ενσωματωθούν στο σύστημα ανάκτησης και έτσι να χρησιμεύσουν ως βάση ρέουσας ανάκτησης που μπορεί να είναι ανώτερη σε αποτελεσματικότητα από την ανάκληση ενός συγκεκριμένου βασικού γεγονότος (Fayol & Thevenot, 2012; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007).

Για τους ανωτέρω λόγους, οι στρατηγικές συλλογισμού συνιστώνται ευρέως ως στόχος για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση και συνήθως ενσωματώνονται στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι στόχοι του Common Core περιλαμβάνουν την κατανόηση της στρατηγικής αφαίρεσης – πρόσθεσης (προσθήκης) (Στόχος 1.OA.4:

«Κατανοήστε την αφαίρεση ως πρόβλημα άγνωστης πρόσθεσης. Για παράδειγμα, αφαιρέστε 10 - 8 βρίσκοντας τον αριθμό που κάνει το 10, όταν προστεθεί στο 8». Στόχος 1.ΟΑ.6: «Πρόσθεση και αφαίρεση εντός του 20, επιδεικνύοντας ευχέρεια για πρόσθεση και αφαίρεση εντός του 10. Για παράδειγμα, 8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14»). Η σχετική ευκολία πρόκλησης στρατηγικών συλλογισμού ή εκμάθησής τους μέσω καθοδηγούμενης διδασκαλίας διαφέρει ανάλογα με τη στρατηγική.

Σύμφωνα με έρευνες, παιδιά της πρώτης τάξης που δέχτηκαν είτε «μη καθοδηγούμενη» είτε «καθοδηγούμενη» διδασκαλία, ανακάλυψαν και έμαθαν τον κανόνα του επομένου αριθμού (n+1) (Baroody, Eiland, Purpura, & Reid, 2013). Αντίθετα, τα παιδιά που δέχτηκαν καθοδηγούμενη διδασκαλία στη στρατηγική «σχεδόν διπλά» (π.χ., το άθροισμα ενός «σχεδόν διπλού», όπως 5 + 6 είναι «ένα περισσότερο» από το άθροισμα του «διπλού», 5 + 5 = 10) δεν σημείωσαν σημαντικά καλύτερη επίδοση. Ένας πιθανός λόγος που η καθοδηγούμενη ανακάλυψη έχει αποδειχθεί πιο αποτελεσματική από την άμεση διδασκαλία είναι ότι, στην τελευταία, πολλοί μαθητές εστιάζουν στη διαδικασία ώστε χάνουν το ενδιαφέρον τους για κατανόηση (το σύνδρομο «απλώς πες μου πώς να το κάνω»). Επιπλέον, η παράκαμψη της εποικοδομητικής δραστηριότητας και η προσπάθεια επιβολής της εννοιολογικής κατανόησης στα παιδιά μπορεί να οδηγήσει σε μερική κατανόηση ή ακόμα και σύγχυση (DeCaro & Rittle-Johnson, 2012; Rittle-Johnson, 2006). Ο Murata (2004) βρήκε ότι τα παιδιά πρώτης τάξης της Ιαπωνίας διδάχτηκαν μία στρατηγική ανάλυσης και σύνθεσης (π.χ., 9 + 8 = 9 + 1 + 7 = 10 + 7 = 17) και η λογική της με τους συνδυασμούς, όταν ο πρώτος προσθετέος ήταν μεγαλύτερος από τον δεύτερο, δεν παρουσίαζε αλλαγή στη στρατηγική όταν ο πρώτος προσθετέος ήταν μικρότερος από τον δεύτερο (π.χ., 8 + 9).

Αν και η συχνότητα εξάσκησης μπορεί να παίζει κάποιο ρόλο (Ashcraft, 1992), δύο συχνά αλληλένδετοι, παράγοντες είναι ίσως πιο σημαντικοί. Ο ένας είναι η θέση των εννοιών και των σχέσεων που διέπουν την ουσιαστική μάθηση μίας στρατηγικής και καθορίζεται από: (α) την προηγούμενη εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, που απαιτείται για την ανακάλυψη και την κατανόηση ενός προτύπου ή μίας σχέσης και (β) την πολυπλοκότητα της κανονικότητας.

Ο δεύτερος παράγοντας είναι η προϋπάρχουσα ευχέρεια στις δεξιότητες που απαιτούνται για την εκτέλεση της στρατηγικής. Τα παιδιά συνήθως μαθαίνουν και εφαρμόζουν τον κανόνα του αριθμού n+1 για την πρόσθεση του 1 μέσω καθοδηγούμενης ή μη διδασκαλίας, επειδή η υποκείμενη κανονικότητά του είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Συγκεκριμένα, η σύνδεση μεταξύ των σχέσεων «αριθμού n - n+1 είναι σχετικά απλή. Για παράδειγμα, αφού χρησιμοποιήσει μία στρατηγική μέτρησης για να καταλήξει ότι το άθροισμα 7 + 1 είναι 8, ένα παιδί μπορεί να θυμηθεί ότι το 8 έρχεται (αμέσως) μετά το 7 στη μέτρηση. Αρκετές τέτοιες εμπειρίες μπορεί να οδηγήσουν το παιδί στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού n και του 1 είναι ο επόμενος αριθμός μετά το n (Baroody, 2014). Αυτό είναι σύμφωνο με την άποψη της ενεργητικής μνήμης ότι η πρακτική δεν είναι απλώς ένα όχημα για την ενίσχυση μίας υπάρχουσας συσχέτισης πραγματικών στοιχείων, αλλά μία ευκαιρία να εμπλουτιστεί η υπάρχουσα μνήμη δημιουργώντας ενεργά νέες συσχετίσεις (Nader & Hardt, 2009).

Οι Walker, Mickes, Bajic, Nailon και Rickard (2013) διαπίστωσαν ότι η εξάσκηση στη μετάφραση τριγώνων γεγονότων σε εξισώσεις (π.χ., 3 + 5 = 8, 5 + 3 = 8, 8 - 3 = 5, 8 - 5 = 3), μία μέθοδος που προτείνεται στα προγράμματα σπουδών με στόχο την αναγνώριση και την ευχέρεια στους σχετικούς ή συμπληρωματικούς συνδυασμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης, σε μία συνεδρία την εβδομάδα για διάστημα έξι εβδομάδων, δεν προήγαγε την ευχέρεια με τα εξασκημένα ή τη μεταφορά στοιχείων πιο αποτελεσματικά από τη μη δομημένη πρακτική.

Ο Baroody (1999) διαπίστωσε ότι ακόμη και η ρητή και επανειλημμένη πρόταση της στρατηγικής «αφαίρεση ως πρόσθεση» (π.χ., 5 αφαιρώ 3 κάνει τι;) μπορεί να θεωρηθεί ότι προστίθεται 3 σε αυτό που κάνει 5 (3 + = 5). Χρειάστηκαν περισσότερες από 24 συνεδρίες, ώστε να βελτιωθεί ελάχιστα η κατανόηση των παιδιών, ηλικίας 6,0 έως 7,5 ετών, ότι η πρόσθεση μπορεί να χρησιμεύσει ως ένας σύντομος τρόπος προσδιορισμού των σχετικών διαφορών. Επιπλέον, αυτή η καθοδηγούμενη διδασκαλία δεν οδήγησε σε σημαντικά καλύτερη μεταφορά σε μη εξασκημένες διαφορές από ό,τι η ίδια ποσότητα ασκήσεων με εξασκημένους συνδυασμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης. Σε μία μελέτη παρατήρησης μαθητών δευτέρας τάξης, η καθοδηγούμενη οδηγία που περιλάμβανε την παροχή μίας λογικής για τη στρατηγική «αφαίρεση ως πρόσθεση» απέτυχε να οδηγήσει σε μεταφορά σε συνδυασμούς αφαίρεσης που δεν εφαρμόστηκαν (Baroody, 2013). Μία μελέτη παρατήρησης μαθητών τρίτης τάξης παρήγαγε μη σημαντικά αλλά πολλά υποσχόμενα στοιχεία μεταφοράς (δηλαδή, ένα μέτριο μέγεθος επίδρασης, Baroody, Eiland, & Baroody, 2011).

Η αναποτελεσματικότητα των προηγούμενων προσπαθειών ενδέχεται να οφείλεται σε πέντε αλληλένδετους λόγους:

▪ Οι σχέσεις μεταξύ αφαίρεσης και πρόσθεσης γενικά και η αρχή του συμπληρώματος που συνδέει άγνωστους συνδυασμούς αφαίρεσης με γνωστούς συνδυασμούς πρόσθεσης (π.χ., εάν 5 + 3 = 8, τότε 8 - 5 = 3) δεν είναι ιδιαίτερα εμφανείς και επομένως σχετικά

δύσκολες για να τις μαθαίνουν ή να τις εφαρμόζουν τα παιδιά (Canobi, 2004; Canobi, 2005; Canobi,, 2009; Henry & Brown, 2008). Ως αποτέλεσμα, η απλή εξάσκηση σε βασικούς συνδυασμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης, ακόμη και μαζί (όπως έγινε στη μελέτη των Rickard, 2012 και Walker et al., 2013) ή λέγοντας στα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική «αφαίρεση ως πρόσθεση», μπορεί να μην είναι βοηθητική στο να κατανοήσουν τη σύνδεση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης.

▪ Η διδασκαλία δεν ήταν (επαρκώς) αποτελεσματική για τους συμμετέχοντες. Σε μία εκτενή ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, οι Kilpatrick et al. (2001) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η άμεση διδασκαλία στρατηγικών συλλογισμού, εάν γίνει εννοιολογικά, θα μπορούσε να επιταχύνει τη Φάση 2. Η μη καθοδηγούμενη διδασκαλία στη μελέτη των Rickard (2012) και Walker et al. (2014) και η καθοδηγούμενη αλλά η λανθασμένη διδασκαλία (που προτρέπει τη χρήση της στρατηγικής χωρίς να βοηθά τους συμμετέχοντες να κατανοήσουν την έννοια της) στη μελέτη Baroody (1999) ήταν χωρίς εννοιολογική σύνδεση. Πρόσθετες μελέτες, οι οποίες περιλάμβαναν μία προσπάθεια να βοηθήσουν τους συμμετέχοντες να κατανοήσουν τη λογική της στρατηγικής «αφαίρεσης ως πρόσθεση», μπορεί να απέτυχαν στην κατάκτηση της εννοιολογικής κατανόησης της στρατηγικής (π.χ., η ανατροφοδότηση που παρείχαν επικεντρωνόταν στην ορθότητα αλλά όχι στους λόγους για τους οποίους μία συγκεκριμένη απάντηση ήταν σωστή ή λανθασμένη).

▪ Καθώς οι σχέσεις μεταξύ αφαίρεσης ως πρόσθεση δεν είναι σημαντικές, είναι απαραίτητο να συνδέεται ρητά η διαδικασία με την έννοια, ώστε η οδηγία της στρατηγικής «αφαίρεση ως πρόσθεση» να έχει νόημα.

Προηγούμενη έρευνα, συμπεριλαμβανομένων των Walker et al. (2013) και Baroody (2013; Baroody et al., 2011), δεν συσχέτισε ρητά τη στρατηγική με τις εννοιολογικές της βάσεις.

▪ Σύμφωνα με όλες τις προηγούμενες μελέτες, τα παιδιά πρέπει πρώτα να μάθουν άπταιστα τα σχετικά ποσά, προτού μπορέσουν να συνδέσουν την πρόσθεση με την αφαίρεση και να χρησιμοποιήσουν αυτή τη γνώση αποτελεσματικά για να αιτιολογήσουν τις διαφορές.

▪ Ακόμα κι αν η διδασκαλία είναι επιτυχής, βοηθώντας τα παιδιά να κατανοήσουν και να μάθουν τη στρατηγική «αφαίρεση ως πρόσθεση», μπορεί να χρειαστεί εξάσκηση για πολλούς μήνες, αντί για εβδομάδες, όπως συμβαίνει με τους Walker et al. (2013) σε μελέτη, για την αυτοματοποίηση της στρατηγικής.

Συμπερασματικά, η έρευνα έδειξε πως η ευχέρεια και η ακρίβεια στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στην πρώτη δεκάδα ως στόχος των

αναλυτικών προγραμμάτων, εξαρτάται από 1) την προηγούμενη εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, που απαιτείται για την ανακάλυψη και την κατανόηση ενός προτύπου ή μίας σχέσης, την πολυπλοκότητα της κανονικότητας και την προϋπάρχουσα ευχέρεια στις δεξιότητες που απαιτούνται για την εκτέλεση της στρατηγικής. 2) Η καθοδηγούμενη ανακάλυψη των στρατηγικών και όχι η άμεση διδασκαλία, ενδεχομένως, ενισχύει την αντίληψη των παιδιών για τις αριθμητικές πράξεις, ενώ η ταυτόχρονα ενισχύεται η βαθύτερη κατανόηση των αριθμών και η πολυπλοκότερη σκέψη αναφορικά με τους συνδυασμούς των βασικών δεδομένων. 3) Οι σχέσεις μεταξύ αφαίρεσης και πρόσθεσης δεν είναι ιδιαίτερα εμφανείς και επομένως σχετικά δύσκολες να τις μαθαίνουν ή να τις εφαρμόζουν τα παιδιά. 4) Η εξάσκηση στους βασικούς συνδυασμούς χωρίς εννοιολογική κατανόηση είναι αναποτελεσματική (Baroody, Eiland, Purpura, & Reid, 2013; Rickard, 2012; Baroody, 2013; Baroody et al., 2011; Walker et al., 2014).

2.5 Ερευνητικά ευρήματα για τη μετάβαση από τις στρατηγικές καταμέτρησης στις στρατηγικές χωρίς καταμέτρηση

Οι μελέτες που έγιναν σε διάφορες χώρες έδειξαν ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης διαφέρουν με διάφορους τρόπους, όχι μόνο σε σχέση με μεμονωμένα παιδιά (Geary & Brown 1991), αλλά και σε εθνικό επίπεδο. Έτσι, στις ΗΠΑ η πιο κοινή στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποιείται μέχρι το τέλος της πρώτης τάξης φαίνεται να είναι η μέτρηση (Henry & Brown, 2008). Αντίθετα, συγκριτική μελέτη που διεξήχθη από τους Geary et al. έδειξε ότι στην Κίνα, μέχρι το τέλος της πρώτης τάξης μόνο το 3% των παιδιών λύνει βασικά προβλήματα πρόσθεσης έως το 20 υπολογίζοντας με καταμέτρηση, ενώ το 91% χρησιμοποιεί ανάκτηση γεγονότων και ένα άλλο 6% βασίζεται σε στρατηγικές παράγωγων γεγονότων (Geary et al. 1996, σε Campbell & Xue, 2001).

Φαίνεται εύλογο ότι αυτές οι σημαντικές διακρατικές διαφορές στις αναλογίες των παιδιών που καταφέρνουν να εγκαταλείψουν τις στρατηγικές μέτρησης κατά την πρώτη δημοτικού μπορούν να αποδοθούν, τουλάχιστον εν μέρει, σε διαφορετικές διδακτικές - μεθοδολογικές προσεγγίσεις για την αρχική αριθμητική εκπαίδευση. Έτσι, για την Κίνα αναφέρεται ότι είναι ευρέως διαδεδομένη μία παράδοση με την οποία τα παιδιά διδάσκονται συστηματικά στρατηγικές παράγωγων γεγονότων ξεκινώντας από ένα πρώιμο στάδιο της εκπαίδευσης στα μαθηματικά (Sun & Zhang, 2001; Fuson & Kwon, 1992). Στις ΗΠΑ, αντίθετα, οι δραστηριότητες στην τάξη, τουλάχιστον κατά τη διάρκεια των τάξεων της πρώτης και της δευτέρας, φαίνεται να ενθαρρύνουν ρητά τα παιδιά να χρησιμοποιούν στρατηγικές μέτρησης (Henry & Brown, 2008).

Οι Geary et al. σε έρευνά τους έδειξαν ότι στην Κίνα, παράλληλα με άλλους παράγοντες, η εστίαση σε στρατηγικές παραγόμενων γεγονότων ευνόησε τα παιδιά στο να δημιουργούν συσχετίσεις μεταξύ προβλημάτων και λύσεων και αυτό συνέβαλε στην πρώιμη απομνημόνευσή τους (Geary et al, 1996 σε Gaidoschik, 2012). Η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής παραγόμενων γεγονότων στην απομνημόνευση βασικών γεγονότων έχει επίσης επισημανθεί σε μία σειρά πειραμάτων που εφαρμόστηκαν σε τάξεις των ΗΠΑ (Steinberg, 1985 σε Gaidoschik, 2012). Όσον αφορά τη γνωστική ψυχολογία, αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως αποτέλεσμα «επεξεργασίας» που συνδέεται με τη διαδικασία παραγωγής (Schneider & Büttner, 2008 σε Gaidoschik, 2012): Με τη συσχέτιση με μία ήδη αυτοματοποιημένη αριθμητική πρόταση κατά τη διάρκεια της παραγωγής, η αριθμητική πρόταση που δεν έχει ακόμη αυτοματοποιηθεί

θα αποκτήσει μεγαλύτερο «βάθος νοητικής επεξεργασίας» (Zimbardo & Gerrig, 2004, σε Gaidoschik, 2012).

Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης στις γερμανόφωνες χώρες συμφωνούν με το στόχο να μπορέσουν οι μαθητές να αφήσουν πίσω τους υπολογισμούς που στηρίζονται στην καταμέτρηση, μέχρι το τέλος της πρώτης τάξης δημοτικού. Και οι εργασίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών που δημοσιεύθηκαν σε γερμανόφωνες χώρες τις τελευταίες δύο δεκαετίες συναινούν ως προς ορισμένα βασικά μέτρα που πρέπει να ληφθούν στην τάξη για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος.

Αυτή η συναίνεση ισχύει πρώτα για τη σύσταση ότι οι αριθμοί, τουλάχιστον έως το 10 (αν όχι έως το 20), θα πρέπει: 1) να αντιμετωπίζονται ως οντότητα αντί να επικεντρώνονται οι πρώτες δραστηριότητες στην τάξη σε ένα στενό εύρος αριθμών (παραδοσιακά έως τέσσερις, πέντε ή έξι) και σε «παρουσίαση» υψηλότερων αριθμών έως και 10 ένας προς έναν (Padberg & Benz, 2011) προτείνεται ευρέως ότι πρέπει να γίνουν σοβαρές προσπάθειες για τη διευκόλυνση της αντίληψης των «αριθμών ως συνθέσεων αριθμών» (Gerster, 2009), της «Μερικής έννοιας των αριθμών» (Gerster, 2009), της «Σύλληψης δομημένων αριθμών» (Wittmann & Müller, 2004). Αυτή η αντίληψη των αριθμών θα πρέπει να παρέχει τη βάση για στρατηγικές παραγόμενων γεγονότων που πρέπει να επεξεργάζονται συστηματικά (Gaidoschik, 2007; Hasemann, 2005; Benz, 2011 σε Gaidoschik, 2012) και 2) για να προωθηθεί η ανάπτυξη στρατηγικών παράγωγων γεγονότων χωρίς μέτρηση, η πρώιμη αριθμητική διδασκαλία θα πρέπει να δώσει έμφαση στην εκτέλεση ασκήσεων με δομημένο τρόπο, που σημαίνει ότι μεταξύ του συνόλου των εργασιών σε μία ακολουθία ασκήσεων θα πρέπει να υπάρχει μία ποσοτική - λογική σχέση (ένα «μοτίβο αριθμών»), την οποία τα παιδιά θα κληθούν να επεξεργαστούν. Αυτό είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τη σύσταση ότι πρέπει να προσφέρονται στα παιδιά κίνητρα για συμμετοχή σε συζήτηση, με εξήγηση και αιτιολόγηση των στρατηγικών υπολογισμού τους (Krauthausen & Scherer, 2007 σε Gaidoschik, 2012).

3) Τέλος, σε εργασίες με μονοψήφια πρόσθεση με αθροίσματα στο εύρος 11 έως 18, οι μελετητές συνιστούν ομόφωνα ότι η στρατηγική «πάτημα στη δεκάδα» (π.χ., το 6 + 7 χωρίζεται σε 6 + 4 και 10 + 3) δεν είναι η μόνη στρατηγική που αντιμετωπίζεται και προκύπτει από τις δραστηριότητες στην τάξη. Τα παιδιά όχι μόνο θα πρέπει να επιτρέπεται, αλλά ακόμη και να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν επίσης εναλλακτικές διαδικασίες, όπως «σχεδόν διπλά» (6 + 7 ως 6 + 6 +1), «δύναμη πέντε» (6 + 7 ως 5 +5 +

1 + 2) ή «δύναμη του δέκα» (6 + 9 ως 6 + 10 - 1) (Padberg & Benz, 2011 σε Gaidoschik, 2012).

Παρ' όλη την ομοφωνία των ερευνητών, όπως εκτέθηκε παραπάνω, υπάρχει λιγότερη συναίνεση μεταξύ των ερευνητών όσον αφορά το ερώτημα πώς θα αντιμετωπιστούν οι στρατηγικές που έχουν τα παιδιά πριν την είσοδο τους στο σχολείο, κατά τους πρώτους μήνες της επίσημης αριθμητικής διδασκαλίας. Έχει ήδη επισημανθεί ότι το κύριο ρεύμα των ερευνητών στην εκπαίδευση των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο στις ΗΠΑ υποστηρίζει μία πρακτική που πρέπει να ακολουθείται κατά τη διάρκεια της πρώτης τάξης και πέρα από αυτήν, κατά την οποία, αντί να επικεντρώνεται η διδασκαλία στη «μέτρηση όλων», θα πρέπει συστηματικά να επικεντρώνεται στη «μέτρηση επί» ως η «πιο προοδευτική» στρατηγική υπολογισμού, τουλάχιστον σε προβλήματα που αφορούν αθροίσματα μικρότερα από τρία (Van de Walle, 2004). Όσο για τις γερμανόφωνες χώρες, οι Moog και Schultz (1999), καθώς και οι Gerlach et al. (2007) υποστηρίζουν ρητά μία πρακτική που θα έδινε έμφαση στη συστηματική επεξεργασία στρατηγικών μέτρησης από την αρχή.

Οι Radatz et al. δηλώνουν ότι οι στρατηγικές μέτρησης είναι «σημαντικά ενδιάμεσα βήματα» προς τη δημιουργία «ευρετικών και λειτουργικών στρατηγικών», προσθέτοντας ότι «για όλους τους ανθρώπους» η μέτρηση είναι ένα βασικό προαπαιτούμενο για την ανάπτυξη «πιο αποτελεσματικών στρατηγικών» (Radatz et al.,1996 σε Gaidoschik, 2012). Αυτή την άποψη φαίνεται να συμμερίζεται σε μεγάλο βαθμό ο Lorenz (2003) Αυτοί οι μελετητές, ωστόσο, δεν προσφέρουν σαφείς οδηγίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι στρατηγικές καταμέτρησης πρέπει πρώτα να επεξεργαστούν και στη συνέχεια να εφαρμοστούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Οι Gerlach et al., (2007) οι Schipper et al., (2011) υποστηρίζουν ότι αριθμητική διδασκαλία πρέπει να ξεκινήσει με την εξάσκηση στρατηγικών μέτρησης, βασιζόμενοι στο «Μοντέλο Στρατηγικών Επιλογών για τα Παιδιά» του Siegler. Σύμφωνα με τον Siegler, κάθε περίπτωση παροχής μίας σωστής λύσης σε ένα πρόβλημα ως αποτέλεσμα της χρήσης μίας στρατηγικής μέτρησης συμβάλλει στην ενίσχυση των δεσμών συσχέτισης μεταξύ προβλήματος και λύσης στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Μόλις η «συνδετική δύναμη» μεταξύ μίας εργασίας και του αριθμού που προκύπτει υπερβεί μία ορισμένη τιμή (το «κριτήριο εμπιστοσύνης», το οποίο διαφέρει ανάλογα με τις ατομικές απαιτήσεις ασφαλείας του κάθε παιδιού), το παιδί θα εγκαταλείψει τη στρατηγική μέτρησης και θα ανακτήσει το αποτέλεσμα από τη μνήμη. (Siegler, 2001 σε Gaidoschik, 2012). Στο πλαίσιο του νευροψυχολογικού «Μοντέλου Τριπλού Κώδικα»

αυτό συμβαίνει μέσα στο «πλαίσιο της ακουστικής λεκτικής λέξης» (Dehaene, 1992). Και σύμφωνα με αυτή την εξήγηση, τα αριθμητικά γεγονότα θα ενσωματωθούν στην μακροπρόθεσμη μνήμη, καθώς αυξάνεται η ρουτίνα (Von Aster, 2005 σε Gaidoschik, 2012). Τα ευρήματα του Gray (1991) έρχονται σε αντίθεση με αυτήν την υπόθεση, που υποστηρίζει ότι η καταμέτρηση θα ξεπεραστεί με καταμέτρηση. Στην πραγματικότητα οι στρατηγικές που στηρίζονται στην καταμέτρηση, ο Gray υποστηρίζει ότι αντεπιτίθενται στην απομνημόνευση των βασικών αριθμητικών γεγονότων στη μακροπρόθεσμη μνήμη, καθώς αυτά δεν θα πραγματοποιηθούν καν ως γεγονότα: *«Μετά τη χρήση της καταμέτρησης για τη εύρεση λύσεων [. . .] πολλά από τα μικρότερα παιδιά δεν μπόρεσαν να θυμηθούν το πρόβλημα που είχε προκαλέσει τη διαδικασία της επίλυσης. [. . .] Φαίνεται ότι το μικρότερο παιδί δεν λαμβάνει καμία ανατροφοδότηση από τη διαδικασία καταμέτρησης. η διαδικασία δεν ενσωματώνεται σε μία γνωστή έννοια»* (Gray, 1991, σελ. 569 σε Gaidoschik, 2012).

Ο Steinberg επισημαίνει ένα ακόμη πιθανό πρόβλημα που προκύπτει ως αποτέλεσμα επιτυχούς υπολογισμού με καταμέτρηση. Στο πλαίσιο της μελέτης παρέμβασής του, σε μαθητές της πρώτης και δευτέρας τάξης δημοτικού παρουσιάστηκαν συστηματικά στρατηγικές παράγωγων γεγονότων. Είναι σημαντικό ότι εκείνα τα παιδιά που στην αρχή της στρατηγικής είχαν επιδείξει τον υψηλότερο βαθμό βεβαιότητας και ταχύτητας στη χρήση της στρατηγικής μέτρησης αποδείχθηκαν σε μεγάλο βαθμό ότι έχουν επηρεαστεί λιγότερο σε αυτήν την παρέμβαση, συνεχίζοντας να παραμένουν προσκολλημένα στις στρατηγικές μέτρησης. Αντίθετα, τέσσερα στα πέντε παιδιά που αρχικά κατέφυγαν στην κουραστική στρατηγική της «μέτρησης όλων» αποδέχθηκαν τις προερχόμενες στρατηγικές γεγονότων που τους παρουσιάστηκαν και εγκατέλειψαν σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς «μέτρηση όλων» (Steinberg, 1985).

Αυτού του είδους τα εμπειρικά ευρήματα ώθησαν τους Van de Walle et al., (2004, 2017) να προτείνει ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά της πρώτης τάξης από την αρχή πρέπει να στοχεύει στη χρήση στρατηγικών χωρίς καταμέτρηση σε συστηματική βάση. Αυτό που, κατά την άποψή του, αντιτίθεται στην ενίσχυση των στρατηγικών καταμέτρησης είναι η δυσκολία να κατανοήσουν τα παιδιά γιατί ο υπολογισμός με μέτρηση θα ήταν σωστός σε μία περίπτωση (δηλαδή κατά τους πρώτους μήνες), αλλά λάθος σε μία άλλη (δηλαδή σε μεταγενέστερα στάδια, τουλάχιστον στα προβλήματα που αφορούν αθροίσματα μεγαλύτερα από τρία). Οι στρατηγικές μέτρησης, σύμφωνα με τους Van de Walle et al. θα ήταν περιττές, ιδιαίτερα εάν οι στρατηγικές

παράγωγων γεγονότων αντιμετωπίζονταν από την αρχή με βάση την κατανόηση των σχέσεων μέρους - όλου (Van de Walle et al., 2004, 2017; Gaidoschik 2007; Gerster, 2009).

2.6. Διδακτικές παρεμβάσεις εννοιολογικής κατανόησης των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα

Αναζητώντας διδακτικές παρεμβάσεις σε παιδιά πρώτης δημοτικού αναφορικά με τη διαμόρφωση δράσεων για την εννοιολογική κατανόηση των σταθερών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα, διαπιστώθηκε πως οι περισσότερες παρεμβάσεις επικεντρώνονται σε παιδιά προσχολικής ηλικίας και σε παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες ή μαθηματικές μαθησιακές δυσκολίες.

Η συστηματική διδασκαλία της έννοιας του αριθμού, βασισμένη στις εμπειρικές ιδέες των μαθητών, ξεκινά από την τάξη του νηπιαγωγείου με τις βασικές αριθμητικές δεξιότητες που αφορούν τους αριθμούς έως το 10, όπως άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, απαγγελία και γραφή αριθμών, σύγκριση, ανάλυση και σύνθεση αριθμών, διερεύνηση απλών προσθετικών και αφαιρετικών καταστάσεων (ΝΠΣ, 2011). Η διεθνής έρευνα των τελευταίων τριών δεκαετιών έχει δώσει μία ολοκληρωμένη εικόνα των γενικών μαθησιακών τροχιών των αριθμητικών δεξιοτήτων (Clements & Sarama, 2009).

Όσον αφορά την τροχιά μάθησης της απαρίθμησης, έρευνες έχουν δείξει ότι η απαρίθμηση ακολουθεί μία εξελικτική πορεία με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής πολυπλοκότητας (Stafford, & Martland, 2004, όπως αναφέρεται σε Van de Walle et al., 2017). Στην υπόθεση ότι τα παιδιά καλούνται να προσδιορίσουν «πόσες» μονάδες υπάρχουν σε δύο σύνολα αντικειμένων (ένα σύνολο των 6 και ένα των 7 αντικειμένων), θα απαντήσουν ανάλογα με το στάδιο που βρίσκονται στην αναπτυξιακή τους διαδρομή και το επίπεδο σκέψης ως προς την απαρίθμηση (απαρίθμηση υπό διαμόρφωση, αντιληπτική, αναπαραστατική, απαρίθμηση από έναν αριθμό και πέρα, απαρίθμηση ανά περισσότερες της μίας μονάδας). Εφόσον οι εκπαιδευτικοί λάβουν υπόψη αυτή την πορεία, σχεδιάζουν διδακτικές δραστηριότητες που επιδιώκουν στοχευμένα να προχωρήσουν τα παιδιά από το ένα επίπεδο στο επόμενο (Van de Walle et al., 2017).

Σε έρευνες έχει καταφανεί ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές μέτρησης με αυξανόμενη πολυπλοκότητα (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1992; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007) που τα βοηθούν να αιτιολογήσουν το δρόμο τους προς μία λύση. Πολλές μελέτες για την απόκτηση βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων από μικρά

παιδιά τονίζουν σε μεγάλο βαθμό τις πρώιμες δεξιότητες μέτρησης, με τις οποίες τα παιδιά μαθαίνουν να προσθέτουν και να αφαιρούν αριθμούς, όπου ένα σύνολο στοιχείων προστίθεται σε ένα άλλο ή αφαιρείται από ένα μεγαλύτερο σύνολο (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1988). Ακολουθώντας αυτή τη συλλογιστική, τα παιδιά παρατηρείται ότι αναπτύσσουν δεξιότητες μέτρησης επιπλέον «απαρίθμηση όλων» (counting all) και «απαρίθμηση από» (counting on) και σε αφαίρεση με «μετρώντας αντίστροφα» (Fuson, 1988), για να βρουν την απάντηση.

Οι Murata and Fuson (2006) υποστηρίζουν ότι «τα πολύ μικρά παιδιά συνήθως βλέπουν μία ποσότητα ως άθροισμα μεμονωμένων μονάδων, και επομένως πρέπει να μετρούν, για να βρίσκουν το σύνολο» (σελ. 432). Τα παιδιά υποτίθεται ότι ανακαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και τελικά μπορούν να βρουν το προσθετέο που λείπει στις αριθμητικές εργασίες, όπως 3 + _ = 8. Ωστόσο, η απλή μέτρηση από το 3 δεν απαντά στο ερώτημα, εάν το παιδί γνωρίζει ότι το 8 αναφέρεται σε ένα σύνολο που αποτελείται από 3 και ένα άλλο άγνωστο μέρος Το κρίσιμο σημείο στην ανάπτυξη αριθμητικών δεξιοτήτων είναι να συνειδητοποιεί ότι το 3 είναι ένα μέρος του 8 και ότι ένα μέρος που λείπει, μπορεί να βρεθεί, εάν η εργασία (πρόσθεση και αφαίρεση) θεωρηθεί ως σχέση «μέρους - μέρους - όλου» (Baroody, 2016).

Η μέτρηση μπορεί να βοηθήσει το παιδί να λύσει την εργασία που έχει στη διάθεσή του, αλλά δεν το βοηθά να αναπτύξει πλήρως τις δυνατότητές του για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς η μέτρηση δεν δίνει έμφαση στις σχέσεις αριθμών, όπως η τριάδα των αριθμών 3 - 5 - 8 στο παραπάνω παράδειγμα. Η υπερβολική έμφαση στις στρατηγικές μέτρησης μπορεί ακόμη και να καθυστερήσει την ανάπτυξη πιο προηγμένων μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών, καθώς «τα παιδιά προσχολικής ηλικίας που λαμβάνουν συνεχή ενθάρρυνση, όταν χρησιμοποιούν στρατηγικές μέτρησης είναι απρόθυμα να δοκιμάσουν τη νέα πιο προηγμένη στρατηγική σύνθεσης» (Cheng, 2012, σελ. 30).

Έτσι, η έρευνα προτείνει ότι η καταμέτρηση μεμονωμένων μονάδων ως η κύρια στρατηγική για την επίλυση αριθμητικών εργασιών μπορεί να μην προετοιμάσει τα παιδιά για την ανάπτυξη πιο προηγμένων υπολογιστικών δεξιοτήτων που περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, τη δομή της βάσης του δέκα. Αυτό επιβεβαιώνεται από τους Gray, Pitta και Tall (2000), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι τα παιδιά που ήταν λιγότερο ικανά να λύσουν αριθμητικά προβλήματα κατά τα σχολικά χρόνια βασίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στις διαδικασίες μέτρησης. Το ερώτημα είναι, λοιπόν, εάν είναι δυνατόν να υιοθετηθεί η πιο ισχυρή δομική προσέγγιση για την επίλυση αριθμητικών εργασιών στα πρώτα χρόνια. Στην παρέμβαση του

Cheng (2012) με παιδιά ηλικίας 5 έως 6 ετών, αποδείχθηκε ότι είναι δυνατό να διδάξουμε στα παιδιά να χρησιμοποιούν στρατηγικές ανάλυσης και σύνθεσης (αποσύνθεση) αντί να μετρούν.

Η αποσύνθεση αριθμών είναι επίσης γνωστό ότι προάγει την ικανότητα των παιδιών να χειρίζονται αριθμητικές εργασίες, καθώς σημαίνει να χωρίζουν αριθμούς και να τους συνδυάζουν με τρόπους που διευκολύνουν την κατανόηση της πράξης 8 + 5 σε 8 + (2 + 3), όπου 8 + 2 φαίνεται εύκολα ως 10, και στη συνέχεια προσθέτουν το υπόλοιπο μέρος, 3, βασιζόμενα στην επίγνωση «μέρους - μέρους - όλου» των αριθμών. Όπως καταλήγει ο Cheng, η επιτυχία βασίζεται στο ότι τα παιδιά έχουν γνώση της σχέσης «μέρους - μέρους - όλου» των πρώτων δέκα φυσικών αριθμών. Τα παιδιά που κατανοούν την ιδέα της αποσύνθεσης των αριθμών, μπορούν να αναγνωρίσουν ως μία οικογένεια γεγονότων τους αριθμούς (Baroody, 2006). Η κατανόηση του 5 + 3 σημαίνει ότι έχουν σημειώσει εννοιολογική πρόοδο (Sarama & Clements, 2009), επομένως γνωρίζουν τις σταθερές σχέσεις των αριθμών.

Ο Neuman **(**2013) υποστηρίζει ότι η αδυναμία αναγνώρισης των αριθμών ως σχέσεων «μέρους - μέρους - όλου» μπορεί να δυσκολεύει την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων, πράγμα που οδηγεί στην ανάγκη για περίπλοκες στρατηγικές, όπως η «διπλή μέτρηση» μεμονωμένων μονάδων. Σύμφωνα με το συμπέρασμα του Cheng (2012), η έννοια του αριθμού στα παιδιά μπορεί να αναπτυχθεί μέσω δραστηριοτήτων που δεν περιλαμβάνουν απαραίτητα καταμέτρηση.

Για να μάθουν να βλέπουν τους αριθμούς ως σχέσεις «μέρους - μέρους - όλου», τα παιδιά χρειάζεται να βρουν τρόπους να δομούν τις αριθμητικές σχέσεις, για παράδειγμα με συγκεκριμένους χειρισμούς ή με τα δάχτυλα. Υπάρχουν πολλές παρατηρήσεις σε μικρά παιδιά που χρησιμοποιούν και δημιουργούν διαφορετικές, δημιουργικές λύσεις και στρατηγικές στην επίλυση προβλημάτων, όπως μέτρηση δακτύλων, μοτίβα δακτύλων, λεκτική μέτρηση, στρατηγικές και λύσεις για να διευκολύνουν την εξεύρεση τρόπων αντιμετώπισης μίας αριθμητικής εργασίας (Clements & Sarama, 2007).

Σε μία μελέτη, ο Neuman (2013) πρότεινε τη χρήση των μοτίβων των δακτύλων προκειμένου τα παιδιά να διακρίνουν δομές αριθμών που διαφορετικά θα ήταν δύσκολο να ανακαλύψουν. Τα παιδιά που χρησιμοποιούν τα δάκτυλά τους για να παραστήσουν σύνθετα σύνολα αριθμών ως «μέρος - μέρος - όλο» είναι πιθανότερο να αναπτύξουν επιτυχημένες στρατηγικές για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, από τα παιδιά που κάνουν καταμέτρηση με τα δάκτυλά τους.

Οι Björklund et al., (2018) επιβεβαιώνουν με έρευνα τους ότι η κατανόηση της σχέσης «μέρους - μέρους - όλου», είναι η βάση για την κατανόηση των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ομοίως, η μελέτη των Kullberg et al. (2020) που βασίζεται στη θεωρία της ποικιλότητας της μάθησης (Variation theory of learning) (Marton, 2015), σύμφωνα με την οποία οι μαθητές πρέπει να μάθουν να βιώνουν τους αριθμούς ως σχέσεις μέρους – μέρους – όλου αντί απλά να μαθαίνουν διαδικασίες ή στρατηγικές μέτρησης, έδειξε ότι η στρατηγική χρήσης προτύπων δαχτύλων για την αναπαράσταση των αριθμών διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση των αριθμών παρά τη διαδικαστική χρήση. Προκειμένου να επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση των αριθμών, οι Kullberg et al. (2020) αξιοποιήσαν στην έρευνά τους τις εξής δραστηριότητες:

1. «Παιχνίδι δήλωσης»: Στόχος του παιχνιδιού είναι να δείξει ότι ο ίδιος αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με δάχτυλα και με σύνολα διαφορετικών δαχτύλων.

2. «Πέντε φίδια και δέκα φίδια»: Στόχος είναι το παιδί σταδιακά να μοντελοποιήσει το όλο και το ορατό σημείο, αλλά και να αντιληφθεί αυτό που λείπει χωρίς μέτρηση, με σκοπό την εννοιολογική κατανόηση της σχέσης μέρους - μέρους - όλου.

3. «Πρότυπα δαχτύλων»: Μεταβάλλοντας την ποσότητα του όλου, που τονίζει τη φυσική σχέση του μέρους με το όλο.

4. «Έργα αριθμητικού περιεχομένου»: Στόχος είναι να τονιστεί η μεταγωγικότητα και η αντίστροφη σχέση πρόσθεσης - αφαίρεσης. Στην εξερεύνηση αυτών των πτυχών συμβάλλει η συστηματική σειρά των δραστηριοτήτων. (Π.χ., ένα λεκτικό πρόβλημα: «Τρεις αρκούδες έφυγαν και πέντε έμειναν» και το επόμενο λεκτικό πρόβλημα: «Πέντε αρκούδες έφυγαν και τρεις αρκούδες έμειναν»).

Οι Tzekaki και Papadopoulou (2019) διαπίστωσαν ότι οι κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις με σχετικές δραστηριότητες και η συζήτηση συμβάλλουν στην εξαγωγή γενικών ιδεών για τους αριθμούς, τις ιδιότητες και τις αλληλεπιδράσεις τους. Οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν σε παιδιά προσχολικής ηλικίας εμπεριείχαν: μέτρηση ποσοτήτων, υπολογισμό ποσοτήτων χωρίς μέτρηση, συνδυασμό και μετασχηματισμό αριθμών έως το 10 και στόχευαν στην εξέταση της αντίληψης των αριθμών, όπως προκύπτει από τον τρόπο δράσης τους. Παράλληλα ενθαρρύνονταν συστηματικά από τον εκπαιδευτικό α) η συζήτηση σχετικά με τις ενέργειες, τις στρατηγικές, τις μεθόδους, τις αποφάσεις, την αιτιολόγηση β) το πέρασμα σε λεκτικές διατυπώσεις λαμβάνοντας υπόψη γενικές ιδέες για τα αποτελέσματα των δράσεών τους, γ) η μεταφορά από ειδικό, μέσω συμπερασμάτων συγκεκριμένης εργασίας, προς ευρύτερο επίπεδο μέσω υποθέσεων μαθηματικών ιδεών δ) η

διαμόρφωση κανόνων και προτάσεων και ε) η επανεξέταση σε παρόμοια έργα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα βελτιώθηκε η ευελιξία των μαθητών στην εύρεση κοινών στοιχείων σε διαφορετικό περιεχόμενο, ο συλλογισμός στις πράξεις και η παραγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων από συγκεκριμένες καταστάσεις.

Οι σχεδιαστές του προγράμματος «Mathe 2000» προτείνουν για την ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών και των αριθμητικών σχέσεων, όπως διαδοχή, αθροιστικά και αφαιρετικά στοιχεία, αριθμητικός συλλογισμός, το «αριθμογώνιο». Πρόκειται για ένα ισόπλευρο τρίγωνο χωρισμένο σε τρία μέρη, στα οποία γράφονται αριθμοί και υπολογίζεται το άθροισμα των διαδοχικών μερών στις πλευρές. Μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία απλών και σύνθετων προβλημάτων (Τζεκάκη, 2007).

Οι διδακτικές παρεμβάσεις που βασίζονται στα προγράμματα «Οι κόσμοι των αριθμών» (Number World s) και Building Blocks μοιράζονται πολλά κοινά χαρακτηριστικά. Οι συγγραφείς των προγραμμάτων χρησιμοποίησαν την έρευνα για να συμπεριλάβουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο γνωστικών εννοιών και διαδικασιών (το Number World s επικεντρώθηκε μόνο στους αριθμούς). Και τα δύο προγράμματα χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό διδακτικών μεθόδων, συμπεριλαμβανομένης της ρητής διδασκαλίας (αλλά όχι υπερβολικά διδακτικής, η οποία μπορεί να έχει αρνητικά αποτελέσματα για τα μικρότερα παιδιά) (Stipek, et al., 1995, όπως αναφερ. σε Clements & Sarama, 2011). Και τα δύο βασίζονται σε αναπτυξιακά διαδοχικές δραστηριότητες, βασισμένες σε τροχιές μάθησης και αμφότερες βοηθούν τους δασκάλους να μαθαίνουν, να αξιολογούν και να παρεμβαίνουν στο πρόγραμμα σπουδών Building Blocks, με κάθε πτυχή (Π.χ., κείμενο, λογισμικό και επαγγελματική ανάπτυξη) να συνδέεται με έναν ρητό πυρήνα μαθησιακών τροχιών για κάθε μαθηματικό θέμα.

Αρκετές διδακτικές παρεμβάσεις στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση βασίζονται σε εκδοχές της δομής των μαθησιακών τροχιών (Bobis, et al, 2005, όπως αναφερ. σε Clements & Sarama, 2011; Clements & Sarama, 2009, Wright, et al, 2002), για παράδειγμα, δίνοντας έμφαση στη χρήση αναπτυξιακών διαδρομών που βασίζονται στην έρευνα στη διαμορφωτική αξιολόγηση. Μεριμνούν ρητά για την εννοιολογική κατανόηση, αντιμετωπίζοντας, συζητώντας και αναπτύσσοντας συνδέσεις μεταξύ εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών (Clements & Sarama, 2011) και δεν αναλύουν βασικά γεγονότα έως ότου αναπτυχθούν εννοιολογικές βάσεις και ουσιαστικές στρατηγικές. Προκαλούν τους μαθητές να λύσουν απαιτητικά μαθηματικά προβλήματα, υπερβαίνοντας την εκμάθηση γεγονότων, βοηθώντας τους να μάθουν να σκέφτονται μαθηματικά (Hiebert & Grouws, 2007).

Συμπερασματικά, οι δομημένες, βασισμένες στην έρευνα μαθηματικές παρεμβάσεις που φαίνεται να συμβάλουν στην κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα προτείνουν: α) δραστηριότητες που δεν βασίζονται απαραίτητα σε στρατηγικές καταμέτρησης, καθώς αυτή μπορεί να καθυστερήσει την ανάπτυξη πιο προηγμένων μαθηματικών δεξιοτήτων. β) εννοιολογική κατανόηση των σχέσεων μέρους – μέρους – όλου χρησιμοποιώντας ακόμη και πρότυπα δαχτύλων, γ) ανάλυση και σύνθεση αριθμών (Kullberg et al., 2020; Kullberg, Runesson & Kempe, 2019; Baroody, 2016; Cheng, 2012; Kullberg et al., 2020; Clements & Sarama, 2011). Λαμβάνοντας υπόψη τις διδακτικές προτάσεις που προκύπτουν από την έρευνα, στην παρούσα εργασία η επιστημονική επιδίωξη είναι να διερευνηθεί ποιες είναι, ενδεχομένως, οι κατάλληλες δραστηριότητες που επιδρούν θετικά στην ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας.

2.7 Άμεση αναγνώριση ποσοτήτων (subitizing) και κατανόηση των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας - διδακτικές προτάσεις ερευνών

Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων (subitizing) είναι «να βλέπεις αμέσως πόσα», προέρχεται από μία λατινική λέξη που σημαίνει «ξαφνικά», πρόκειται δηλαδή για άμεση αντιληπτική σύλληψη και αναγνώριση του πλήθους μίας μικρής ομάδας αντικειμένων (Clements & Sarama, 2009; Clements, Sarama & MacDonald, 2018).

Οι ιδέες και οι δεξιότητες της άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων αρχίζουν να αναπτύσσονται πολύ νωρίς, αλλά, όπως κάθε άλλος τομέας των μαθηματικών, δεν είναι μόνο «απλές, βασικές δεξιότητες». Το «Subitizing» εισάγει τις βασικές ιδέες της πληθικότητας – «πόσο», ιδέες για «περισσότερο» και «λιγότερο», ιδέες μερών και ολοτήτων και τις σχέσεις τους και γενικά, ιδέες για την ποσότητα. Η ανάπτυξη αυτών των ιδεών σχετίζεται, σχηματίζοντας ιστούς συνδεδεμένων ιδεών που αποτελούν τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών μέχρι το δημοτικό, το γυμνάσιο και πέρα από αυτό (Clements, Sarama & MacDonald, 2018). Τα μικρά παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν την αντιληπτική αναγνώριση (perceptual subitizing) για να φτιάξουν μονάδες μέτρησης και για να χτίσουν τις αρχικές τους ιδέες για την πληθικότητα (Slusser & Sarnecka, 2011). Για παράδειγμα, οι πρώτες βασικές έννοιες για αριθμητικές λέξεις μπορεί να είναι ετικέτες για μικρά σύνολα αναγνωρισμένων αντικειμένων, ακόμα κι αν ο καθορισμός των ετικετών έγινε μετρώντας (Fuson, 1992; Steffe, Thompson, & Richards, 1982).

Οι MacDonald και Wilkins (2017) διαπίστωσαν σε μία μελέτη περίπτωσης ότι ένα παιδί προσχολικής ηλικίας, η Έιμι, χρησιμοποίησε εννοιολογική αναγνώριση (conceptual subitizing) για να αναπτύξει πρώιμες μορφές μονάδων μέτρησης. Όταν δόθηκε μία εργασία μέτρησης των Steffe και Cobb (1988 σε MacDonald & Wilkins, 2018), η Έιμι άντλησε από αυτές τις ίδιες μονάδες και τις αναπαρέστησε με μοτίβα δακτύλων, υποδεικνύοντας την ικανότητά της να αναδιοργανώνει τα μοτίβα στα οποία μπορεί να βασιζόταν η προηγούμενη δραστηριότητα αναγνώρισης ποσοτήτων. Καθ’ όλη τη διάρκεια των συνεδριών, η Έιμι ασχολήθηκε με την αναγνώριση του «πέντε» και είχε κατασκευάσει μονάδες «δύο και τρία» και «δύο, δύο και ένα», όταν αναγνώρισε εννοιολογικά το «πέντε». Στο τέλος της μελέτης, η Έιμι έλαβε μία εργασία στη σχέση του μέρους που έλειπε, στην οποία έπρεπε να χρησιμοποιήσει το «τέσσερα» και το «τρία». Ουσιαστικά, στην εργασία ο δάσκαλος - ερευνητής έφτιαξε μία σειρά από επτά στοιχεία μέτρησης (μετρητές) και κάλυψε τέσσερα στοιχεία σε αυτή τη σειρά. Στη συνέχεια, η Έιμι ρωτήθηκε: «Αν υπάρχουν τέσσερα εδώ,

πόσα είναι συνολικά;» Η Έιμι έδειξε με τα δάχτυλά της ότι μπορούσε να είναι τρία (χρησιμοποιώντας τρία μεσαία δάχτυλα από το ένα χέρι) και στη συνέχεια να προσθέσει δύο (χρησιμοποιώντας τον δείκτη και τον αντίχειρά της) και δύο ακόμη (χρησιμοποιώντας δύο δάχτυλα στο άλλο χέρι), για να ανακαλύψει ότι ήταν επτά συνολικά (MacDonald & Wilkins, 2018). Αυτά τα στοιχεία φαίνεται να υποδηλώνουν σχέσεις μεταξύ των πρώιμων μορφών πρόσθεσης και αφαίρεσης και της εννοιολογικής αναγνώρισης ποσοτήτων.

Σε μελέτη των Fuhs, Hornburg, & McNeil (2016, όπως αναφερ. σε Clements, Sarama & MacDonald, 2018) καταγράφηκε ότι οι δεξιότητες που αναπτύσσουν τα παιδιά του νηπιαγωγείου μεσολάβησαν στη συσχέτιση μεταξύ της εκτελεστικής λειτουργίας και της επιτυχίας στα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο. Η εκτελεστική λειτουργία μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αναγνωρίσουν γρήγορα και με ακρίβεια τα σύνολα αριθμών ως σύνολο και αυτή η εστίαση στα σύνολα μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη προηγμένων μαθηματικών εννοιών. Όπως περιεγράφηκε προηγουμένως, η μέτρηση και η εννοιολογική κατανόηση αλληλοεπιδρούν για τη δημιουργία αριθμητικών ικανοτήτων. Για παράδειγμα, τα παιδιά περνούν από τη στρατηγική «απαρίθμηση όλων» (counting all) σε πιο περίπλοκη στρατηγική «απαρίθμηση από» (counting on) για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Fuson et al., 2000; Wright et al., 2006). Όταν η μετακίνησή τους μέσω των μαθησιακών τροχιών μέτρησης και εννοιολογικής αναγνώρισης τους δίνει πρόσβαση στην ιδέα ότι μπορούν να μετρήσουν από μία δεδομένη ποσότητα, τότε προχωρούν στην επίλυση του 6 + 3 με νέο τρόπο. Αναγνωρίζουν τον πρώτο προσθετέο (αντί να μετρούν ένα προς ένα), και μετά μετρούν άλλα τρία, χρησιμοποιώντας ένα ρυθμικό μοτίβο ως διαισθητική στρατηγική παρακολούθησης: «έξι … επτά, οκτώ, εννέα!».

Σε ένα άλλο παράδειγμα, πιο προηγμένης ικανότητας γρήγορης ομαδοποίησης και ποσοτικοποίησης συνόλων, ένας μαθητής της πρώτης δημοτικού εξηγεί τη διαδικασία: Βλέποντας ένα μοτίβο 3 επί 3 κουκκίδων, λέει αμέσως «*Εννέα*», στην ερώτηση «*Πώς το έκανες;*», απαντά: «*Όταν ήμουν περίπου τεσσάρων ετών, ήμουν στο νηπιαγωγείο. Το μόνο που έπρεπε να κάνω ήταν να μετρήσω. Και έτσι, πηγαίνω 1, 2, 3 - 4, 5, 6 - 7, 8, 9, και το έμαθα από έξω και συνέχισα να το κάνω και όταν ήμουν πέντε. Μετά συνέχισα να ξέρω το 9, ακριβώς έτσι* (δείχνοντας τη διάταξη των εννέα κουκκίδων) (Ginsburg, 1977, όπως αναφερ. σε Clements, Sarama & MacDonald, 2018).

Οι Starkey και McCandliss (2014) βρήκαν, επίσης ότι η δραστηριότητα άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων σε παιδιά του νηπιαγωγείου σχετίζεται με τη δραστηριότητά τους για «ομαδοποίηση» (τύπος εννοιολογικής αναγνώρισης) και τις ευέλικτες λειτουργίες στους

αριθμούς, όταν εγγράφονται στην τρίτη τάξη. Έτσι, καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν πιο αφηρημένους τρόπους για τον αριθμό, αντιμετωπίζοντας τον ως ένα ευέλικτο σύνολο μονάδων, είναι ικανά να λειτουργούν με ευχέρεια και πιο αποτελεσματικά με τις λειτουργίες του ακόμη και σε μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Όσον αφορά τις διδακτικές δραστηριότητες, η έρευνα δείχνει ότι παρόλο που τα παιδιά έχουν αντίληψη της ποσότητας, η αλληλεπίδραση με τους άλλους είναι απαραίτητη για την εννοιολογική κατανόηση, διότι αυτή δεν αναπτύσσεται «από μόνη της» (Baroody, Li, & Lai, 2008). Τα παιδιά που εστιάζουν αυθόρμητα στον αριθμό και κατανοούν τις λειτουργίες του, έχουν πιο ανεπτυγμένες δεξιότητες αναφορικά με την αίσθηση του αριθμού (Edens & Potter, 2013). Οι διδακτικές δραστηριότητες που παρουσιάζονται παρακάτω αποτελούν μέρος της μαθησιακής τροχιάς για την ανάπτυξη της άμεσης αναγνώριση ποσοτήτων (subitizing).

• *Διδακτικές δραστηριότητες εννοιολογικής αναγνώρισης ποσοτήτων (conceptual subitizing) και μάθηση των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας*

Για την ανάπτυξη της αίσθησης ποσοτήτων, γενικότερα, η έρευνα προτείνει ότι η επιλογή προτύπων αριθμών σε σετ όλων των μεγεθών, βοηθά στην ενίσχυση της εννοιολογικής αναγνώρισης των παιδιών (Libertus, Feigenson, & Halberda, 2013; Wang, Odic, Halberda, & Feigenson, 2016). Αυτά συνήθως δεν επισημαίνονται με αριθμητικές λέξεις, αλλά με λεξιλόγιο όπως «περισσότερο» και «λιγότερο» (για κουκίδες). Για τα μικρότερα παιδιά, ο ενδοαισθητηριακός πλεονασμός, για παράδειγμα, «βλέπετε μία μπάλα να αναπηδά περισσότερες φορές», «χρειάζεται περισσότερος χρόνος», «ακούτε περισσότερους θορύβους» - βοηθά στην εστίαση της προσοχής στον αριθμό (Jordan, Suanda, & Brannon, 2008).

Οι ερευνητικές προτάσεις για την εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων βασισμένων στις τροχιές μάθησης εστιάζουν: α) Στην καθημερινή αναγνώριση αριθμών: η πιο εύκολη αλλά χρήσιμη «δραστηριότητα» είναι απλώς να καθιερώσουν τη συνήθεια να χρησιμοποιούν συχνά μικρές λέξεις σε καθημερινές αλληλεπιδράσεις. Μπορούν να αντικαταστήσουν το «Καθαρίστε τα φλιτζάνια από το τραπέζι, ώστε να έχουμε χώρο για αυτό», με το «Χρειαζόμαστε περισσότερη επιφάνεια στο τραπέζι για αυτό, θα θέλατε να αφαιρέσετε αυτά τα τρία φλιτζάνια από το τραπέζι;». Η χρήση αυτών των τύπων ονομασίας συλλογών βοηθά τα παιδιά να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ της ποσότητας (αριθμός, πόσα) και των αριθμητικών λέξεων, στη συνέχεια να δημιουργήσουν συνδέσεις λέξης - πληθικότητας (• •

είναι «δύο») και, τέλος, να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων ενός δεδομένου αριθμού (Clements, Sarama & MacDonald, 2018). β) Τα μη παραδείγματα είναι επίσης σημαντικά για την αποσαφήνιση των ορίων του αριθμού (Baroody et al., 2006). Για παράδειγμα, «Δεν είναι δύο άλογα. Είναι τρία άλογα!», γ) Στα παιδιά που δείχνουν μικρότερο ενδιαφέρον είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι δάσκαλοι να μιλήσουν για τον αριθμό. Για παράδειγμα, επεκτείνοντας το ενδιαφέρον τους για τον χειρισμό αντικειμένων, ώστε να συμπεριλάβουν μαθηματικές ιδέες, όπως ο αριθμός και το σχήμα (Edens & Potter, 2013). Η έρευνα δείχνει ότι τέτοιες εμπειρίες είναι χρήσιμες, ειδικά για παιδιά που ξεκινούν με μειωμένες ικανότητες (Olkun & Özdem, 2015).

Πρακτικές που δεν βασίζονται σε έρευνα μπορεί να οδηγήσουν τα παιδιά στο να αντιληφθούν τις συλλογές ως εικονικές ρυθμίσεις που δεν είναι ακριβείς. Η Richardson (2004) ανέφερε ότι για χρόνια νόμιζε ότι τα παιδιά κατανοούν τα αντιληπτικά μοτίβα, όπως τα ζάρια. Ωστόσο, όταν τελικά τους ζήτησε να αναπαραγάγουν τα μοτίβα, έμεινε έκπληκτη που δεν χρησιμοποίησαν τον ίδιο αριθμό στοιχείων μέτρησης (μετρητών). Για παράδειγμα, μερικοί ζωγράφισαν ένα «Χ» με εννέα τελείες και το ονόμασαν «πέντε». Έτσι, χωρίς κατάλληλες εργασίες και προσεκτικές παρατηρήσεις, δεν είχε αντιληφθεί ότι τα παιδιά της δεν φαντάζονταν καν με ακρίβεια μοτίβα και τα μοτίβα τους σίγουρα δεν ήταν αριθμητικά. Τέτοιες ιδέες είναι σημαντικές για την κατανόηση και προώθηση της μαθηματικής σκέψης των παιδιών.

Πολλές δραστηριότητες αριθμών μπορούν να προάγουν την αντιληπτική και στη συνέχεια την εννοιολογική αναγνώριση (Sayers, Andrews, & Boistrup, 2016). Ίσως η πιο άμεση δραστηριότητα που προκαλεί απλώς τα παιδιά να αναγνωρίσουν είναι τα «Στιγμιότυπα» (Clements & Sarama, 2007) και «Σχεδιάστε αυτό που βλέπετε» (MacDonald & Wilkins, 2016). Για παράδειγμα, τα παιδιά λένε ότι πρέπει να τραβήξουν γρήγορα ένα «στιγμιότυπο» του πόσα άτομα βλέπουν - το μυαλό τους πρέπει να τραβήξει μία «γρήγορη φωτογραφία». Τους εμφανίζεται μία συλλογή από στοιχεία μόνο για 2 δευτερόλεπτα και στη συνέχεια τους ζητείται να κατασκευάσουν: «Σχεδιάστε ή πείτε τον αριθμό». Σύμφωνα με την έρευνα, οι διατάξεις μπορεί να είναι ευθείες γραμμές αντικειμένων, μετά ορθογώνια σχήματα και στη συνέχεια διάταξη ζαριών, όλα με μικρούς αριθμούς. Ο διαχωρισμός αυτών των τυπικών διατάξεων ζαριών με μεγάλο χώρο προωθεί την προσοχή των παιδιών για αντιληπτική αναγνώριση (MacDonald & Wilkins, 2016). Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν, χρησιμοποιούν διαφορετικές διατάξεις και μεγαλύτερους αριθμούς. Παραλλαγές της Δραστηριότητας «Στιγμιότυπα» είναι: παιχνίδια «ταιριάσματος», όπου μετά από επίδειξη

πολλών καρτών, που όλες εκτός από μία έχουν τον ίδιο αριθμό, τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν «ποιο δεν ανήκει» (αυτό διδάσκει επίσης την πρώιμη ταξινόμηση). Παιχνίδια «μνήμης» με κάρτες που έχουν διαφορετική διάταξη για κάθε αριθμό και έναν κανόνα που επιτρέπεται να «κοιτάξουν» μόνο για 2 δευτερόλεπτα.

Η έμφαση στην εννοιολογική αναγνώριση δίνεται με τη χρήση διαφορετικών διατάξεων με διαφορετικές κατατμήσεις ενός αριθμού, τα μοτίβα μπορεί επίσης να είναι χρονικά και κιναισθητικά, συμπεριλαμβανομένων ρυθμικών και ακουστικών μοτίβων.

Οι κατευθυντήριες γραμμές για τη δημιουργία προτύπων για το σκοπό αυτό περιλαμβάνουν τα ακόλουθα: (α) Αποφυγή της ενσωμάτωση ομάδων σε εικονογραφικό πλαίσιο. (β) χρήση απλών μορφών, όπως ομοιογενών ομάδων με κύκλους ή τετράγωνα (και όχι εικόνες ζώων ή οποιαδήποτε σχήματα) για τις μονάδες (γ) διατάξεις που περιλαμβάνουν τη συμμετρία, με τις γραμμικές ρυθμίσεις για τα παιδιά προσχολικής ηλικίας και τις ορθογώνιες ρυθμίσεις για τα μεγαλύτερα παιδιά και (δ) οπτική αντίθεση εικόνας - πλαισίου. Για να αναπτύξουν ισχυρή εννοιολογική αναγνώριση τα παιδιά θα πρέπει να βιώσουν πολλές πραγματικές καταστάσεις όπως μοτίβα δακτύλων, διευθετήσεις σε ζάρια και ντόμινο, πρότυπα διατάξεων για εννοιολογική αναγνώριση που να προτείνουν το 5 ως 3 + 2, 2 + 1 + 2, ή 1 + 4 (ή άλλες ερμηνείες) και πίνακες που χωρίζουν δύο υποομάδες, πχ πλαίσια των «δέκα» (Clements, Sarama & MacDonald, 2018).

Η επέκταση της εννοιολογικής αναγνώρισης με στοχαστικές, διαδραστικές, εποικοδομητικές εμπειρίες είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος οικοδόμησης της χωρικής αίσθησης και της σύνδεσης με την αίσθηση αριθμών (Nes, 2009 σε Clements, Sarama & MacDonald, 2018). Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορούν να ζωγραφίσουν λουλούδια με δεδομένο αριθμό πετάλων ή να ζωγραφίσουν ή να φτιάξουν εικόνες με σπίτια με συγκεκριμένο αριθμό παραθύρων, έτσι ώστε αυτά να μπορούν να υποκαθιστούν τον αριθμό. Αυτή η εννοιολογική αναγνώριση παρέχει μία άμεση φαινομενολογική εμπειρία με αθροιστικές καταστάσεις, καθώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται δύο μέρη και το σύνολο. Η ύπαρξη και των δύο μερών και του συνόλου στη μνήμη εργασίας δημιουργεί ένα θεμέλιο για τη γνώση «γεγονότων πρόσθεσης», που είναι σημαντικότερο από τις λύσεις που βασίζονται στην καταμέτρηση. Τα παιδιά που χρησιμοποιούν την αρχική στρατηγική «Απαρίθμηση όλων» για 3 + 2: μετρώντας 3 αντικείμενα, μετά μετρώντας 2 αντικείμενα, μετά ξεκινώντας από το «ένα» και μετρώντας και τα 5, απαντούν σωστά, αλλά είναι πιθανό ότι μόνο το 5 διατηρείται στη μνήμη εργασίας και επομένως είναι απίθανο να γίνει σύνδεση μεταξύ των μερών και του όλου (Clements, Sarama & MacDonald, 2018).

Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων δεν είναι μόνο ένα ξεχωριστό συμπλήρωμα των προσεγγίσεων της αριθμητικής που βασίζονται στην καταμέτρηση, αλλά μία πολύτιμη διαδικασία για ενσωμάτωση με την καταμέτρηση. Δηλαδή, τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν το «subitizing» σε συνδυασμό με τη μέτρηση για να προχωρήσουν σε πιο σύνθετες διαδικασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ως ένα παράδειγμα, τα παιδιά που ενθαρρύνονται για εννοιολογική αναγνώριση του 3, μπορούν να περάσουν από την «Απαρίθμηση όλων» στη «μέτρηση από», αναγνωρίζοντας το σύνολο των 3 και μετρώντας μόνο, «4, 5!». Ως άλλο παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να λύνει 4 + 5 μετρώντας «4 ... 5 είναι 1 ακόμη, 6 είναι 2 ακόμη ... 9 είναι 5 ακόμη», Ωστόσο, υπολογίζει σε δύο χρησιμοποιώντας ρυθμική εννοιολογική αναγνώριση για 5 + 2, λέγοντας «πέντε … έξι, επτά!" Η αντιστοίχιση της μέτρησης σε έναν ρυθμό "τα - ταμ" των δύο, τους δίνει έναν τρόπο να καταλάβουν πώς υπολογίζουν. Αργότερα μπορούν να μάθουν να υπολογίζουν σε μεγαλύτερους αριθμούς, αναπτύσσοντας την εννοιολογική τους αναγνώριση ή μαθαίνοντας διαφορετικούς τρόπους «παρατήρησης». Τελικά, τα παιδιά φθάνουν να αναγνωρίζουν τα αριθμητικά μοτίβα τόσο ως ένα σύνολο (ως μία ίδια μονάδα) όσο και ως ένα σύνθετο μέρος μερών (μεμονωμένες μονάδες) (Clements, Sarama & MacDonald, 2018).

Η εννοιολογική αναγνώριση μπορεί να ερμηνευθεί και ως συνώνυμη της χωρικής δομής ποσοτήτων (Battista et al.1998). Σε αυτή την περίπτωση, η ικανότητα αναγνώρισης και χειρισμού αριθμών χωρικά, μέσω της χρήσης, για παράδειγμα, ζαριών, ντόμινο και πλαισίου των δέκα, παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αριθμητικής κατανόησης των παιδιών (Mulligan & Mitchelmore,2009; Van Nes & Van Eerde, 2010). Πράγματι, η έρευνα έχει δείξει ότι η εννοιολογική αναγνώριση μπορεί να διδαχθεί μέσω μαθηματικών εργασιών που παρέχουν δομημένες εικόνες αριθμών, συμπεριλαμβανομένων των δακτύλων για την αναπαράσταση μικρών αριθμών (Clements2007; Mulligan et al, 2006). Επίσης, έχει συνδεθεί θετικά με μία ποικιλία συγκεκριμένων μαθησιακών αποτελεσμάτων αναφορικά με την μέτρηση και την ταχύτητα μέτρησης (Benoit et al, 2004), καθώς και την κατανόηση της πληθικότητας (Baroody2004; Jung, 2011). Η εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων βοηθά τα παιδιά στην κατανόηση της ισοδυναμίας διαφορετικών συνθέσεων και αναλύσεων των αριθμών, της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης και ενισχύει τη γνώση μέρους - μέρους - όλου (Jung et al. 2013), απαραίτητη για την κατανόηση ότι 8 + 6 = 14 επειδή 5 + 5 = 10, 3 + 1 = 4 και 10 + 4 = 14 (Van Nes και Doorman 2011). Αντιθέτως, η κακή απόδοση στην αντιληπτική και εννοιολογική κατανόηση (Mulligan et al.2006) μπορεί

να συνδεθεί με μεταγενέστερες μαθηματικές δυσκολίες. Συγκεκριμένα, στην εκμάθηση της αριθμητικής (Clements1999).

2.8 Αναγκαιότητα της έρευνας

Όπως προέκυψε από την βιβλιογραφική ανασκόπηση στο πεδίο της Πρώτης Αρίθμησης που αφορά στην ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα, βρέθηκε πως η προσέγγιση των σταθερών σχέσεων αποτελεί θεμέλιο για την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος και των αριθμητικών εννοιών γενικότερα. Σε προηγούμενες εμπειρικές μελέτες διδακτικών παρεμβάσεων έχουν διερευνηθεί οι δυσκολίες και η ελλιπής κατανόηση των σταθερών σχέσεων των αριθμών σε παιδιά, κυρίως, προσχολικής ηλικίας και σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες ή μαθηματικές μαθησιακές δυσκολίες της Α΄ τάξης δημοτικού. Οι περισσότερες έρευνες μελετούν τις στρατηγικές των παιδιών, όταν αντιμετωπίζουν έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης, και ανέδειξαν έλλειψη ευχέρειας σε αθροίσματα και διαφορές στην πρώτη δεκάδα, όταν δεν υπάρχει σύνδεση εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης (CCSSO, 2010; NCTM, 2000; Henry και Brown, 2008).

Επομένως, προκύπτει ότι είναι σημαντική η νέα έρευνα για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδα, καθώς εστιάζει σε παιδιά Α΄ δημοτικού, χωρίς διαπιστωμένες μαθησιακές δυσκολίες, και διερευνά κατά πόσο μπορεί να είναι αποτελεσματική μία διδακτική παρέμβαση με δραστηριότητες που εστιάζουν α) στη βελτίωση της εννοιολογικής αναγνώρισης ποσοτήτων, β) στην κατανόηση των αριθμητικής σχέσης μέρους – μέρους- όλου και γ) στη σύνδεσή τους με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης

3. ΣΤΟΧΟΙ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

3.1 Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι να διερευνήσει σε ποιο βαθμό μία κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει τη γνώση των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας.

3.2. Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερωτήματα με βάση τα οποία θα σχεδιαστεί η έρευνα είναι τα εξής:

- Ποιες είναι οι γνώσεις των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας πριν τη διδακτική παρέμβαση;
- Πώς βελτιώνονται οι γνώσεις που έχουν τα παιδιά για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση;

3.3 Ορισμοί

3.3.1. Ορισμός πρώτης αρίθμησης

«Η πρώτη αρίθμηση αφορά ένα αρχικό στάδιο ενασχόλησης με τους αριθμούς και περιλαμβάνει την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών: ψηφία, αριθμητικές λέξεις, φυσικοί αριθμοί, θεσιακή αξία ψηφίων, δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, αριθμητικές πράξεις» (Τζεκάκη, 2010, σελ. 289)».

Η πρώτη αρίθμηση, η πρώτη δηλαδή αριθμητική μάθηση συνοψίζεται στην κατανόηση του νοήματος που έχει ο κάθε αριθμός στην ουσιαστική αντίληψη των σχέσεων των αριθμών της πρώτης δεκάδας και τελικά στην κατανόηση του επαναλαμβανόμενου σχήματος από το οποίο προκύπτει η διαδοχή των αριθμών μετά την πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2007, σελ. 202). Επομένως, η ανάπτυξη των αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα εντάσσεται στο περιεχόμενο της πρώτης αρίθμησης.

3.3.2. Ορισμός σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας

Σταθερές σχέσεις στην πρώτη δεκάδα είναι όλοι οι συνδυασμοί που δίνουν αθροίσματα ή διαφορές αριθμών ως το δέκα, η αντίληψη των οποίων είναι κρίσιμη για την κατανόηση όλων των επόμενων πράξεων. Οι πράξεις 3 και 4 κάνει 7 ή 4 και 5 κάνει 9, όπως και όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί που δημιουργούν έναν αριθμό, πχ το 4 είναι 1 + 3, 2 + 2 και επίσης 3 +

1, αποτελούν ένα μεγάλο αριθμό από σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς της πρώτης δεκάδας που στηρίζουν και τις επόμενες μονάδες. Έτσι, 30 και 40 κάνει 70, όπως και 400 και 500 κάνει 900 (Τζεκάκη, 2010, σελ. 293).

Οι Van de Walle κα. (2017) ορίζουν συγκεκριμένους τύπους δόμησης αριθμητικών σχέσεων για μικρούς αριθμούς: i) Οι *χωρικές σχέσεις*, όπου τα παιδιά αναγνωρίζουν σύνολα αντικειμένων σε διάταξη σχηματικού προτύπου και λένε πόσα είναι χωρίς απαρίθμηση, ii) οι *σχέσεις ένα – δύο περισσότερα, ένα – δύο λιγότερα* (πχ το 8 είναι δύο παραπάνω από 6 και 2 λιγότερα από 10), iii) οι *«άγκυρες» ή τα «σημεία αναφοράς» του 5 και του 10,* όπου τα παιδιά αναπτύσσουν σχέσεις για τους αριθμούς από το 1 ως το 10 με σημεία αναφοράς το 5 και το 10, το οποίο κατέχει κεντρικό ρόλο στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και οι iv) *σχέσεις μέρους – μέρους – όλου*, η εννοιολογική δηλαδή σύλληψη ενός αριθμού ως συνδυασμού δύο ή περισσότερων μερών, για παράδειγμα όταν ένα παιδί μετρά το σύνολο 8 αντικειμένων να μπορεί να συνειδητοποιεί ότι αυτό μπορεί να αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέρη, 6 και 2 ή 4 και 2 και 2 ή 5 και 3.

Επομένως, η αντίληψη των σταθερών σχέσεων προϋποθέτει την ουσιαστική κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων και εκφράζεται με την ικανότητα των παιδιών να απαντούν με ευχέρεια στους συνδυασμούς των αριθμών της πρώτης δεκάδας και να σκέφτονται τον αριθμό ως συνδυασμό δύο ή περισσότερων μερών (σχέση μέρους – μέρους - όλου) (Τζεκάκη, 2010; Van de Walle, 2017).

3.3.3. Ορισμός σχέσης μέρους – μέρους – όλου

Η αριθμητική σχέση μέρος - μέρος – όλο είναι η ικανότητα να σκέφτεται κανείς έναν αριθμό ως συνδυασμό δύο ή περισσότερων μερών. Για παράδειγμα να σκεφτεί κανείς το 7 ως ένα σύνολο των 3 και ένα σύνολο των 4 ή ως ένα σύνολο των 2 και ένα σύνολο των 5. Αυτή η εννοιολογική σύλληψη αποτελεί ορόσημο για την ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού (Van de Walle κα., 2017).

3.3.4. Ορισμός εννοιολογικής αντίληψης πρόσθεσης και αφαίρεσης

Όταν είναι γνωστά τα μέρη ενός συνόλου, προσδιορίζουμε το σύνολο κάνοντας πρόσθεση με βάση τα μέρη, πχ στην πράξη 5 + 3 = 8, για να αντιληφθούν τη σχέση των δύο μερών με το σύνολο, χρειάζεται να έχουν στο μυαλό τους το 5 και το 3 ως δύο ξεχωριστά σύνολα (Van de Walle κα., 2017).

Στα μοντέλα μέρους - μέρους - όλου, όταν είναι γνωστό το σύνολο και το ένα από τα μέρη, προσδιορίζουμε το άλλο κάνοντας αφαίρεση, πχ ξεκινώντας από ένα πλήρες σύνολο 8, βγάζουμε ένα σύνολο 3, τα δύο γνωστά σύνολα είναι του 8 και 3. Η φράση 8 μείον 3

αναφέρεται στα υπόλοιπα 5. Τα μοντέλα μέρους - μέρους - όλου αφορούν και την πρόσθεση και την αφαίρεση, η αντίληψη αυτή, ότι δηλαδή τα μοντέλα είναι τα ίδια, βοηθά τα παιδιά να συνδέσουν τις δύο πράξεις μεταξύ τους (Van de Walle κα., 2017).

3.3.5. Ορισμός κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα

Η κατάλληλη διδακτική παρέμβαση στην Πρώτη Τάξη για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα (NCTM, 2000; ΝΠΣ, 2011; Clements & Sarama, 2009; Van de Walle et al.,2017) με καθοδηγούμενη διδασκαλία έχει ως περιεχόμενο: την βελτίωση αναγνώρισης με μια ματιά, την βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, κυρίως της σχέσης μέρους - μέρους – όλου και την εννοιολογική αντίληψη των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Περιλαμβάνει δραστηριότητες που δεν βασίζονται απαραίτητα στην απαρίθμηση, όπως της άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων, οι οποίες στηρίζουν την προσέγγιση των αριθμητικής σχέσης μέρους – μέρους - όλου, οι οποίες με τη σειρά τους στηρίζουν τις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης (Τζεκάκη, 2010; Τζεκάκη, 2007; NCTM, 2000; ΝΠΣ, 2011; Clements & Sarama, 2009; Van de Walle et al.,2017)

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Μέθοδος

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε από το Φεβρουάριο έως τον Απρίλιο του 2022. Πρόκειται για έρευνα σχεδιασμού κατά την οποία γίνεται ένας αρχικός σχεδιασμός, πραγματοποιείται διδακτική παρέμβαση και καταγράφονται τα αποτελέσματα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (Gravemaijer & Cobb, 2004). Η μέθοδος που επιλέχτηκε με προέλεγχο (pre-Testing) και μετά έλεγχο (post -Testing), αφενός δίνει τη δυνατότητα αξιολόγησης της ανάπτυξης της ικανότητας αντίληψης των σταθερών σχέσεων των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και αφετέρου δίνει τη δυνατότητα αξιολόγησης της διδακτικής παρέμβασης, από τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων του προελέγχου και του μετά ελέγχου. Η ικανότητα αντίληψης των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας αποτελεί το κεντρικό φαινόμενο που απαιτεί μεθοδική διερεύνηση στο πλαίσιο της διδασκαλίας ανάπτυξης των πρώτων αριθμητικών εννοιών (Creswell, 2016).

Ως προς την εφαρμογή των τεστ για τη συλλογή δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε κυρίως ποιοτική ερευνητική μεθοδολογία, προκειμένου να διερευνηθεί η ανάπτυξη της ικανότητας

αντίληψης των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας στη διδασκαλία της πρώτης αρίθμησης. Τα παιδιά αξιολογήθηκαν ατομικά, μέσα από αξιολόγηση έργων προ - ελέγχου και μετά - ελέγχου, τα οποία δομήθηκαν στη βάση των αξόνων των μαθηματικών εννοιών που ερευνώνται. Επίσης, μέσω των συνεντεύξεων που δόθηκαν κατά τον προ - έλεγχο και τον μετά - έλεγχο, τα παιδιά απάντησαν και σε ερωτήματα που σχεδιάστηκαν ώστε να εξυπηρετούν το σκοπό της έρευνας.

4.2. Το δείγμα

Η έρευνα διεξήχθη σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της Ανατολικής Θεσσαλονίκης. Το δείγμα αποτελείται από ένα τμήμα 25 παιδιών Α΄ τάξης, εκ των οποίων τα 14 (56%) είναι αγόρια και τα 11 (44%) είναι κορίτσια. Η επιλογή των παιδιών δεν έγινε με βάση κάποια χαρακτηριστικά, αλλά ήταν δειγματοληψία βολική ή ευκολίας (Creswell, 2016), καθώς η ερευνήτρια είναι και η εκπαιδευτικός του συγκεκριμένου τμήματος. Στην πλειοψηφία του το δείγμα αποτελείται από παιδιά ηλικίας 6,5 ετών χωρίς διαπιστωμένες μαθησιακές δυσκολίες. Η ιδιαιτερότητα του δείγματος έγκειται στο γεγονός ότι η φοίτηση των παιδιών στα προνήπια (από τον Μάρτιο 2020 έως τον Ιούνιο 2020) και στα νήπια (από τον Σεπτέμβριο 2020 έως τον Ιούνιο 2021) έγινε σε ψηφιακές τάξεις και όχι δια ζώσης, λόγω της εφαρμογής του lockdown που επέφερε η πανδημία της covid-19, γεγονός που, ενδεχομένως, καθιστά την φοίτησή τους ελλιπή.

4.3. Τα εργαλεία

Για την συλλογή των δεδομένων της έρευνας τα εργαλεία που δημιουργήθηκαν είναι συνεντεύξεις (task - based interview), λόγω της ηλικίας των παιδιών. Οι συνεντεύξεις εξετάζουν τη γνώση των παιδιών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και το επίπεδο στρατηγικής που χρησιμοποιούν σε προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών (Kilpatrick et al., 2001; Steinberg, 1985).

Τα Pre και Post Tests σχεδιάστηκαν, ώστε να απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα και σε αντιστοιχία με τους ορισμούς, όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω. Περιλαμβάνουν τέσσερα διαφορετικά έργα με τρία ενδεικτικά ερωτήματα το κάθε ένα. Είναι αυξημένης δυσκολίας και αφορούν στην αριθμητική σχέση «μέρους - μέρους - όλου». Αναλυτικότερα κάθε ένα από τα έργα εξετάζει:

- **1ο Έργο**: τη γνώση των μαθητών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης

δεκάδας σε αθροίσματα μικρότερα του 10 (α + β < 10).

- **2ο Έργο**: τη γνώση των μαθητών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας με τρία μέρη και διπλά αθροίσματα, (α + α + β).

- **3ο Έργο**: τη γνώση των μαθητών στις σχέσεις «μέρους – μέρους – όλου» με ένα μέρος να λείπει σε αθροίσματα του 10 (α + x = β).

- **4ο Έργο**: τη γνώση των μαθητών στις σχέσεις «μέρους – μέρους – όλου» με ένα μέρος να λείπει σε διαφορές από το 10 (β – χ = α).

Στο **3ο** και **4ο Έργο** ελέγχεται η ικανότητα των παιδιών για εννοιολογική σύνδεση των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Το επίπεδο στρατηγικής πριν και μετά την παρέμβαση καθώς και το στάδιο ανάπτυξης της αντίληψης των παιδιών για τους αριθμούς και τις σχέσεις μεταξύ αυτών, ελέγχεται μέσα από τις ερωτήσεις: «Πώς το σκέφτηκες;», «Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;». Οι ερωτήσεις που επιλέχθηκαν είναι ανοιχτού τύπου, ώστε να επιδέχονται ανοιχτές απαντήσεις, οι οποίες παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες και σχόλια, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στην ερευνήτρια να προσδιορίσει και να περιγράψει τους λόγους της απάντησης (Creswell, 2016). Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων τα παιδιά έχουν στη διάθεση τους χειραπτικό και εικονιστικό υλικό και επιλέγουν τα ίδια, αν θέλουν να το χρησιμοποιήσουν ή όχι.

Οι σημειώσεις έχουν περιγραφικό χαρακτήρα, καθώς αφορούν την λεπτομερειακή απόδοση των μαθητών στα έργα (Creswell, 2016). Στο πρωτόκολλο καταγράφηκαν οι απαντήσεις για κάθε έργο σύμφωνα με τους ορισμούς και την βιβλιογραφική μελέτη. Τα Post και Pre-Tests είναι δομημένα με τον ίδιο τρόπο. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων κατηγοριοποιούνται σε: απαρίθμηση όλων (counting all), απαρίθμηση από (counting on) και ανάκληση.

4.4. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στη διδακτική παρέμβαση

Οι δραστηριότητες που αξιοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης σχεδιάστηκαν με στόχο την άσκηση των παιδιών στις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς της πρώτης δεκάδας και την κατάκτηση αυτών των σχέσεων, δεδομένου ότι τα παιδιά έχουν κατακτήσει την έννοια της πληθικότητας και χρησιμοποιούν με λογικό τρόπο τις δεξιότητες απαρίθμησης. Η διδακτική παρέμβαση στηρίχθηκε σε γρήγορες δραστηριότητες και παιχνίδια που ενθάρρυναν τα παιδιά να αναπτύξουν μία διαισθητική αντίληψη των αριθμών και των σχέσεων τους, περνώντας σταδιακά στην πρόσθεση και την αφαίρεση των αριθμών στην πρώτη δεκάδα. Στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων θεωρήθηκε σημαντική η ενθάρρυνση των παιδιών για αυτόνομη και δημιουργική δράση (Τζεκάκη, 2010). Το σύνολο των δραστηριοτήτων οργανώθηκε σε άξονες που αντιστοιχούν στους ορισμούς των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας, και πιο συγκεκριμένα τη σχέση μέρους - μέρους - όλου και την εννοιολογική αντίληψη των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι δραστηριότητες ακολουθούν μία εξελικτική πορεία και εμπλέκουν στοιχεία διαφορετικών επιπέδων που βοηθούν στην κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων της πρώτης δεκάδας. Ο έλεγχος για την ορθότητα των απαντήσεων σε όλες τις δραστηριότητες γίνεται με μέτρηση και παρατήρηση, δίνοντας τη δυνατότητα στα παιδιά να συζητούν, να διαμορφώνουν και να τυποποιούν τις ιδέες που αναπτύσσουν. Οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν από την βιβλιογραφία (Τζεκάκη, 2010; Van de Walle, 2017) ξεκινούν με την αναγνώριση σχηματικών προτύπων σε σύνολα, η οποία στηρίζει την προσέγγιση των αριθμητικών σχέσεων και οι οποίες στη συνέχεια στηρίζουν τις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης που ακολουθούν. Συνολικά αξιοποιήθηκαν δέκα δραστηριότητες κατά τη διάρκεια πέντε διδασκαλιών. Κάθε διδασκαλία διαρκούσε δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες και περιλάμβανε δύο δραστηριότητες. Στον Πίνακα 1 που ακολουθεί καταγράφονται σε άξονες τα είδη μαθηματικής δράσης και τα αντίστοιχα έργα των δραστηριοτήτων, όπως εφαρμόστηκαν στις πέντε διδασκαλίες.

***Πίνακας 1**. Είδος μαθηματικής δράσης και προτεινόμενα έργα*

Μαθηματική ιδέα	**Είδος μαθηματικής δράσης**	**Έργα δραστηριοτήτων**
Ανάπτυξη αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα	Αναγνώριση σχηματικών προτύπων σε σύνολα (Van De Walle, 2017).	Α) Τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίσουν και να αναπαραστήσουν ποσότητες μεγαλύτερες του 5 σε σχηματισμούς που τους επιδεικνύονται και αποσύρονται γρήγορα. Β) Παιχνίδι ταχύτητας αναγνώρισης σχηματικών προτύπων (βλ. Παράρτημα).
	Συνθέσεις αριθμών στην πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2010)	Α) παιχνίδι ταχύτητας Τα παιδιά καλούνται να δημιουργήσουν πιθανούς συνδυασμούς ποσοτήτων για αριθμούς που τους δίνονται. Β) ως επέκταση της προηγούμενης δραστηριότητας, τα παιδιά καλούνται να αναπαραστήσουν σε τετραγωνισμένο χαρτί συνδυασμούς ποσοτήτων για αριθμούς που τους δίνονται (βλ. Παράρτημα).
	Συμπληρώματα ποσοτήτων (Van De Walle, 2017)	Α) Δράσεις για εξοικείωση με το υλικό «πλαίσιο των δέκα» Β) Παιχνίδι «Τρελοί μπερδεμένοι αριθμοί» το οποίο λειτουργεί ως πρόβλημα. Τα παιδιά καλούνται να κάνουν αλλαγές στο πλαίσιό τους ώστε να φτιάξουν τον αριθμό που τους ζητείται με εκφράσεις όπως πχ «μείον 2» ή «συν 3» («Πόσα ακόμη καπάκια να προσθέσω στο πλαίσιο;». Γ) Παιχνίδι ταχύτητας, παραλλαγή της προηγούμενης δραστηριότητας («Πόσα ήταν τα κενά στα πλαίσια;», «Πείτε δύο παραπάνω από αυτά που βλέπετε ή δύο λιγότερα»). Επίσης καλούνται να πουν το βασικό δεδομένο του 10, πχ «7 και 3 κάνουν 10» ((βλ. Παράρτημα).
	Ανάλυση και σύνθεση ποσοτήτων / αντίληψη	Α) Παιχνίδι του «κρυμμένου αριθμού» σε ζευγάρια, τα παιδιά καλούνται να βρουν το μέρος που λείπει. Η νοερή

	του μέρους και του όλου (Τζεκάκη, 2010)	ενέργεια είναι η «προσθετική σκέψη» και όχι η μέθοδος «μετράω ό,τι απομένει». Β) Τα παιδιά καλούνται γρήγορα να βρουν το μέρος που λείπει όταν τους επιδεικνύονται αριθμοκάρτες όπου δίνεται το όλο και το ένα μέρος (βλ. Παράρτημα).
	Νοεροί υπολογισμοί με αθροίσματα και διαφορές στην πρώτη δεκάδα (Van de Walle, 2017)	Α) Παιχνίδι ταχύτητας σε ζευγάρια «γύρισε και πρόσθεσε». Β) Παιχνίδι ταχύτητας σε ζευγάρια «Κάνε strike». Τα παιδιά ασκούνται σε γρήγορους νοερούς υπολογισμούς κάνοντας πρόσθεση και αφαίρεση, ώστε να βρουν τον αριθμό - στόχο (βλ. Παράρτημα).

Αναλυτική περιγραφή και φωτογραφικό υλικό των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης παρατίθενται στο παράρτημα.

4.5. Η ερευνητική διαδικασία

Ακολουθώντας τους κανόνες ηθικής και δεοντολογίας σε όλα τα στάδια της ερευνητικής διαδικασίας, πρωτίστως έγινε ενημέρωση του Συλλόγου διδασκόντων του δημοτικού σχολείου για τη διεξαγωγή της έρευνας, στη συνέχεια ενημερώθηκαν οι γονείς και κηδεμόνες, καθώς και τα παιδιά για το δικαίωμα τους να αρνηθούν ή να αποσυρθούν από τις συνεντεύξεις οποιαδήποτε στιγμή, καθώς και για την διασφάλιση της ανωνυμίας τους. Σημειώνεται ότι η ερευνήτρια είναι και η εκπαιδευτικός της τάξης με εικοσαετή διδακτική εμπειρία στη δημόσια και ιδιωτική εκπαίδευση. Πιο συνοπτικά:

Σε πρώτο στάδιο σχεδιάστηκε το πρωτόκολλο συνέντευξης pre Test βασισμένο σε προτεινόμενα έργα για τον έλεγχο της γνώσης των παιδιών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας και οργανώθηκε η διδακτική παρέμβαση. Οι δραστηριότητες οργανώθηκαν πάνω σε μαθηματικές δράσεις που αντιστοιχούν στους ορισμούς των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας, πιο συγκεκριμένα της σχέσης μέρους - μέρους - όλου και της εννοιολογικής αντίληψης των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης πραγματοποιήθηκαν σε πέντε διδασκαλίες διάρκειας δύο διδακτικών ωρών εκάστη. Συνολικά εφαρμόστηκαν δέκα δραστηριότητες σε συνολικά δέκα διδακτικές ώρες.

Οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης ολοκληρώθηκαν σε 6 εβδομάδες. Κάθε διδακτικό επεισόδιο διαρκούσε ένα διδακτικό δίωρο στο οποίο οι δραστηριότητες εφαρμοζόταν όπως ακριβώς σχεδιάστηκαν και εντός της εβδομάδας τα παιδιά ασκούνταν αυτόβουλα και αυτόνομα στα παιχνίδια με κάποιες επεκτάσεις, μέχρι την επόμενη νέα δραστηριότητα. Κάθε φορά που τα παιδιά ολοκλήρωναν τις δραστηριότητες είχαν τη δυνατότητα να περιγράψουν, να συζητήσουν τη διαδικασία και τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Οι μαθητές συμμετείχαν ατομικά ή σε ζευγάρια. Επιλέχθηκε να γίνει βιντεοσκόπηση μέρους μόνο των διδακτικών επεισοδίων, τηρώντας τους κανόνες προστασίας προσωπικών δεδομένων.

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης, την 6η εβδομάδα, ακολούθησε ο μετά - έλεγχος με το ίδιο εργαλείο, στο οποίο τροποποιήθηκε κατ' ελάχιστο, μέρος των έργων με λίγο μεγαλύτερους αριθμούς (αφορά τις σχέσεις του 1ου και 2ου Έργου). Η διεξαγωγή των συνεντεύξεων των παιδιών τόσο στο στάδιο του προ - ελέγχου όσο και στο στάδιο του μετά - ελέγχου έγινε σε ατομικό επίπεδο, σε μία κατάλληλη διαμορφωμένη γωνιά της τάξης, καθώς η υλικοτεχνική υποδομή του σχολείου δεν παρείχε τη δυνατότητα απομόνωσης των παιδιών. Ωστόσο η ησυχία στην αίθουσα διασφαλίστηκε σε μεγάλο βαθμό, καθώς στην αίθουσα υπήρχε και δεύτερη εκπαιδευτικός που απασχολούσε δημιουργικά τα υπόλοιπα παιδιά, τα οποία ήταν ενήμερα για τη διεξαγωγή της έρευνας. Η συνέντευξη ήταν διάρκειας 8 έως 10 λεπτών. Τα pre και post Tests εφαρμόστηκαν σταδιακά μέσα σε μία εβδομάδα, με 5 παιδιά την ημέρα, για 5 συνεχόμενες ημέρες. Σημειώνεται ότι στην τάξη υπήρχε η δυνατότητα συνδιδασκαλίας με συνάδελφο εκπαιδευτικό παράλληλης στήριξης, η συνεργασία με την οποία διευκόλυνε τη διεξαγωγή της έρευνας. Η διαδικασία των συνεντεύξεων ξεκίνησε με ενημέρωση των παιδιών ότι θα έπρεπε να βρουν γρήγορα «πόσο κάνει» και ότι μπορούσαν, αν ήθελαν, να χρησιμοποιήσουν υλικό (κυβάκια, καπάκια, μολύβι και χαρτί) απαντώντας λεκτικά στο Έργο που τους είχε ανατεθεί. Η ερευνήτρια παρατηρούσε τα παιδιά και κατέγραφε πληροφορίες. Η διατύπωση των ερωτήσεων που τους απηύθυνε ήταν ακριβής και ακολουθούσε πιστά τη σειρά με την οποία σχεδιάστηκε στο πρωτόκολλο. Τα παιδιά μπορούσαν να εκφράσουν λεκτικά τον τρόπο σκέψης τους για το έργο καθώς το υλοποιούσαν αλλά και αφού το ολοκλήρωναν. Όπου κρινόταν απαραίτητο η ερευνήτρια ζητούσε να αποσαφηνίσουν τις απαντήσεις τους.

4.6. Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Η εγκυρότητα της έρευνας εξασφαλίστηκε καθώς στις συνεντεύξεις χρησιμοποιήθηκε εργαλείο με έργα και ερωτήσεις σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα και τους εννοιολογικούς προσδιορισμούς. Επιπροσθέτως, χρησιμοποιήθηκε συνδυασμός διαφορετικών μεθόδων συλλογής (Creswell, 2016): η μερική παρατήρηση, οι συνεντεύξεις και οι σημειώσεις πεδίου που καταγράφηκαν από την ερευνήτρια.

Η αξιοπιστία της έρευνας, δηλαδή η σταθερότητα της μέτρησης, διασφαλίζεται καθώς ο προ - έλεγχος (πριν την διδακτική παρέμβαση) και ο μετά - έλεγχος (μετά την διδακτική παρέμβαση) έγιναν με το ίδιο ερευνητικό εργαλείο, το δείγμα παρέμεινε σταθερό κατά τους ελέγχους και η διδακτική παρέμβαση έγινε με φυσική παρουσία όλων των παιδιών που αποτελούσαν το δείγμα της έρευνας. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίστηκε η συνέπεια της ερευνήτριας ώστε να μην υπάρχει παρέκκλιση στην ερευνητική διαδικασία (Robson, 2010). Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας τα δεδομένα καταγράφηκαν πλήρως και η παρουσίασή τους έγινε με συνδυασμό ποιοτικής και ποσοτικής προσέγγισης.

4.7. Ανάλυση δεδομένων

Μετά την συγκέντρωση των δεδομένων που κατάγραψε η ερευνήτρια στο πρωτόκολλο των συνεντεύξεων, ακολούθησε η οργάνωσή τους, ώστε να γίνει μεταγραφή των σημειώσεων σε δεδομένα κειμένου (Creswell, 2016). Έγινε ποιοτική ανάλυση των στρατηγικών και των παρεμβάσεων των μαθητών. Για την ποιοτική ανάλυση εξετάστηκαν τα δεδομένα και κωδικοποιήθηκαν, ταξινομήθηκαν δηλαδή σε τμήματα με βάση τους άξονες που οργανώθηκαν τα έργα της συνέντευξης, τα οποία αντιστοιχούσαν στα ερευνητικά ερωτήματα, προκειμένου να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα.

Αναλυτικότερα, η κωδικοποίηση των απαντήσεων στα έργα (Kilpatrick et al., 2001; Steinberg, 1985) έχει ως εξής:

1ο επίπεδο (*χρήση υλικού / αισθητοποίηση - απαρίθμηση όλων)*: Το παιδί ακολουθεί τη στρατηγική της «απαρίθμηση όλων» (counting all). Προκειμένου να προσθέσει δύο ποσότητες, τις ενώνει και μετράει το σύνολο.

2ο επίπεδο (αρίθμηση με ακολουθία αριθμών): Το παιδί ακολουθεί τη στρατηγική «απαρίθμηση από» (counting on), όπου αρχίζει να μετρά από το τέλος του πρώτου συνόλου.

3ο επίπεδο - ανάκληση: Το παιδί δεν μετρά ποσότητες αλλά αθροίζει τους αριθμούς, που είναι και ο επιδιωκόμενος στόχος. Ως ανάκληση κωδικοποιήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών, όπως, «Μου ήρθε στο μυαλό», «Το ξέρω», «Έτσι το σκέφτηκα», «Είναι στο μυαλό

μου». Τα δεδομένα που προέκυψαν από τον προ - έλεγχο και τον μετά - έλεγχο, συνδυάστηκαν και παρουσιάστηκαν συγκριτικά μεταξύ τους αλλά και σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την βιβλιογραφική ανασκόπηση.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας που προέκυψαν από τη συγκέντρωση, κωδικοποίηση και ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τη γνώση των μαθητών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση σε μαθητές/τριες Α΄ τάξης δημοτικού. Αρχικά παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των παιδιών, φύλο και ηλικία που αποτελούν το δείγμα. Στη συνέχεια γίνεται περιγραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων από τις συνεντεύξεις που έγιναν πριν τη διδακτική παρέμβαση (pre Test). Ομοίως παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων μετά την διδακτική παρέμβαση (post Tests). Παράλληλα αναλύονται ποσοτικά δεδομένα που προέκυψαν από την επεξεργασία των δεδομένων των φύλλων παρατήρησης, προκειμένου να γίνει σαφέστερη η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Στο τέλος και προκειμένου να εκτιμηθεί η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης συγκρίνονται τα δεδομένα και αναλύονται οι μεταβολές που σημειώθηκαν μεταξύ των συνεντεύξεων, pre και post Tests, των μαθητών/τριών.

5.1. Το δείγμα

Οι προ - έλεγχοι, η διδακτική παρέμβαση και οι μετά - έλεγχοι εφαρμόστηκαν σε όλα τα παιδιά (n = 25), τα οποία ανταποκρίθηκαν με ευχαρίστηση σε όλα τα στάδια της ερευνητικής διαδικασίας. Σημειώνεται ότι τα παιχνίδια που αξιοποιήθηκαν στη διδακτική παρέμβαση, παίζονταν με ενθουσιασμό από τα παιδιά στον ελεύθερο τους χρόνο, εντός και εκτός τάξης και μετά το τέλος της διαδικασίας. Τέλος, ικανοποιώντας το αίτημά τους, δόθηκε φάκελος με το περιεχόμενο των παιχνιδιών «Παίζουμε μαθηματικά;» σε κάθε παιδί.

5.2. Προ - έλεγχος (Pre - Test)

Τα έργα στα οποία ελέγχθηκε η γνώση των παιδιών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας ήταν τέσσερα. Κάθε έργο περιλάμβανε τρεις πράξεις, συνολικά δώδεκα πράξεις αυξημένης δυσκολίας. Όπως προέκυψε από τη συγκέντρωση των δεδομένων τα παιδιά έδρασαν με διαφορετικούς τρόπους στα έργα και χρησιμοποίησαν στρατηγικές ανάλογα με το επίπεδο εννοιολογικής ανάπτυξης που βρίσκονται. Κάποια χρησιμοποίησαν το υλικό που είχαν στη διάθεσή τους, ενώ κάποια έκαναν ανάκληση.

5.2.1 Αποτελέσματα συνεντεύξεων

5.2.1.1. Αποτελέσματα 1ου Έργου

Το πρώτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις 4 και 2, 5 και 2, 6 και 2. Οι 5 από τους 25 συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν την αθροιστική στρατηγική «απαρίθμηση όλων» (counting all) κάνοντας χρήση είτε του χειραπτικού υλικού είτε των δαχτύλων τους (αισθητοποίηση). Οι 9 από τους 25 χρησιμοποιούν την αθροιστική στρατηγική «μέτρηση από» (counting on), αρχίζοντας να μετρούν από το τέλος του πρώτου συνόλου, χρησιμοποιώντας την ακολουθία των αριθμών. Οι 11 από τους 25 συμμετέχοντες απάντησαν στο ερώτημα «πόσο κάνει» με ευχέρεια, κάνοντας ανάκληση. Οι σχέσεις του πρώτου Έργου δε φαίνεται να δυσκόλεψαν το σύνολο των παιδιών, ενδεχομένως γιατί κατανόησαν ότι είναι δύο περισσότερα, «Έχω 4 και ανεβαίνω δύο 5, 6». Δε σημειώθηκαν λάθος απαντήσεις.

Πίνακας 2. *1ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους - όλου» - αθροίσματα που δεν ξεπερνούν τη δεκάδα (α + β < 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	5	5	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	11	11	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.2.1.2. Αποτελέσματα 2ου Έργου

Το δεύτερο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις 4 και 2 και 2, 7 και 1 και 1, 4 και 3 και 3.

- Οι απαντήσεις είναι ακριβώς ίδιες με αυτές του προηγούμενου Έργου. Φαίνεται ότι τα 5 παιδιά που ακολουθούν το πρώτο επίπεδο στρατηγικής επιμένουν να το κάνουν και σε αυτό το Έργο με τα τρία μέρη, συμπεριλαμβανομένων των διπλών, 9 παιδιά βρίσκονται στο δεύτερο επίπεδο στρατηγικής, πιο συγκεκριμένα 6 από τους 9 σκέφτηκαν ως εξής «4 και άλλα 2 κάνει 6 και άλλα 2 κάνει 8», ενώ 3 πρόσθεσαν πρώτα τα διπλά «2 + 2 κάνει 4 και άλλα 4, κάνει 5, 6, 7, … 8 (μέτρηση με δάχτυλα από το 4)». Οι 11 κάνουν ανάκληση και απαντούν με ευχέρεια, με το επιχείρημα «αφού 2 και 2 κάνει 4, και άλλα 4, κάνει 8».

Πίνακας 3. *2ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους - όλου» με διπλά αθροίσματα (α + α + β)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	5	5	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	11	11	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.2.1.3. Αποτελέσματα 3ου Έργου

Το τρίτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις:7 και x = 10, 6 και x = 10, 8 και x = 10. Από τις απαντήσεις διαφαίνεται ότι η απαρίθμηση είναι το αριθμητικό εργαλείο που χρησιμοποιεί η πλειοψηφία των παιδιών. Η σχέση μέρους - μέρους - όλου με το ένα μέρος να λείπει δυσκόλεψε τους συμμετέχοντες. Από αυτούς, 7 ακολούθησαν την στρατηγική «απαρίθμηση όλων» με χρήση χειραπτικού υλικού, πρώτα μέτρησαν την ποσότητα του γνωστού μέρους, μετρώντας 1 - 1 βρήκαν την ποσότητα που λείπει για φτάσουν ως το 10 (σύνολο), και τέλος τα μέτρησαν όλα από την αρχή για να ελέγξουν την απάντησή τους. Οι 2 από τους 7 απάντησαν λάθος μετρώντας τα δάχτυλά τους Οι 10 άρχισαν τη μέτρηση από το γνωστό μέρος και μετρώντας έφτασαν στο σύνολο «7 στο μυαλό και 1, 2, 3 (μετρώντας) 10, άρα 7 και 3 κάνει 10». Ένα παιδί απάντησε λανθασμένα , καθώς μέτρησε και το 7 «7…8…9…10» , άρα 7 και 4, 10. Ανάκληση έκαναν 8 συμμετέχοντες, «Τα ξέρω, είναι τα ζευγαράκια του 10».

Πίνακας 4. *3ο Έργο: Το μέρος που λείπει - αθροίσματα (α + x = 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο – αισθητοποίηση / χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	7	5	2
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	10	9	1
3ο επίπεδο - ανάκληση	8	8	0
Σύνολα	**25**	**22**	**3**

5.2.1.4. Αποτελέσματα 4ου Έργου

Το τέταρτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις: 10 - x =7, 10 - x = 6, 10 - x = 8. Το Έργο αυτό δυσκόλεψε περισσότερο του συμμετέχοντες. Οι 7 συμμετέχοντες που ακολουθούν τη στρατηγική του πρώτου επιπέδου στο 3ο Έργο επιμένουν στην ίδια στρατηγική και σε αυτό το Έργο. Μετρούν 1 - 1 μία ποσότητα από 10 καπάκια και αφαιρούν 1 - 1 καπάκι μέχρι να βρουν το αποτέλεσμα, στο τέλος ελέγχουν την απάντησή τους μετρώντας την ποσότητα που έχει μείνει και την ποσότητα που έχουν διαχωρίσει. 13 συμμετέχοντες ακολουθούν τη στρατηγική του 2ου επιπέδου, 10 από αυτούς έδωσαν σωστή απάντηση, «Πες έχω 2, ως το 10 βάζω 8, άρα βγάζω 8 από τα 10 και έχω 2» οι 3 είχαν παρανοήσεις στις στρατηγικές όμως επέμεναν στην απάντηση τους, χωρίς να θέλουν να προχωρήσουν σε έλεγχο, για παράδειγμα για την πράξη 10 - x =7, κατέβηκε μετρώντας από το 10, οπότε απάντησε λανθασμένα 4.

Οι 5 μόνο από τους συμμετέχοντες έκαναν ανάκληση δίνοντας τη σωστή απάντηση, μάλιστα 4 από αυτούς παρατήρησαν την ομοιότητα στα μοντέλα των σχέσεων με τις πράξεις του 3ου Έργου και έκαναν τη σύνδεση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης «10 βγάζω 8, κάνει 2 γιατί 8 και 2 κάνει 10».

Πίνακας 5. *4ο Έργο: Το μέρος που λείπει - διαφορές (10 - x = α)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (διαχωρισμός από)	7	7	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	13	10	3
3ο επίπεδο - ανάκληση	5	5	0
Σύνολα	**25**	**22**	**3**

5.3. Διδακτική παρέμβαση

Μετά την ολοκλήρωση του προ - ελέγχου πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση. Η ερευνήτρια είχε δημιουργήσει το κατάλληλο παιδαγωγικό κλίμα στην τάξη, προετοιμάζοντας τα παιδιά για τη διαδικασία που θα ακολουθούσε. Η εισαγωγική ιδέα «Παίζουμε μαθηματικά;» προκάλεσε ενθουσιασμό στα παιδιά, δημιουργώντας έτσι ένα γόνιμο παιδαγωγικά έδαφος για την ανάπτυξη των δράσεων της διδακτικής παρέμβασης.

Η πρώτη διδασκαλία βασίστηκε σε δραστηριότητες (βλ. Παράρτημα), όπου η μαθηματική δράση αφορούσε την αναγνώριση προτύπων σε σύνολα (Van de Walle, 2017). Αφού πρώτα τα παιδιά εξοικειώθηκαν με το υλικό και κατανόησαν τους κανόνες, προχωρήσαμε στη δράση. Οι απαντήσεις των παιδιών ήταν ενδιαφέρουσες γιατί αποκάλυπταν τους διαφορετικούς τρόπους που «βλέπει» το κάθε παιδί τον αριθμό μίας ποσότητας. Η γρήγορη επίδειξη των «πιάτων» με τα σχηματικά πρότυπα δεν άφηνε στα παιδιά περιθώρια για καταμέτρηση, οπότε καλούνταν να ανακαλύψουν άλλους τρόπους για να βρουν «πόσα είναι». Ενδεικτικά, αναφέρονται κάποιες απαντήσεις στο πρότυπο με τις 9 κουκίδες. Ο Νικόλας είδε πως «*Υπάρχουν δύο τετράδες και μία μονάδα, άρα είναι 9 οι κουκίδες»,* η Μάγια είδε «*Δύο σειρές από τέσσερα και ένα πιο κάτω*», ο Μάξιμος είδε *«Τέσσερις δυάδες και ένα μόνο του»,* η Χριστίνα έδωσε μία πιο περίπλοκη απάντηση *«Δύο δυάδες δεξιά και αριστερά και στη μέση ένα πεντάρι, δηλαδή αν σπρώξω τη μία κουκκίδα στη μέση του τέσσερα θα γίνει πεντάρι».* Η πλειοψηφία των παιδιών έδωσε μερικώς σωστές απαντήσεις, ενώ κάποια παιδιά δεν κατάφεραν να «βρουν πόσα», ούτε να φτιάξουν τους σχηματισμούς που είδαν, διότι προσπαθούσαν να στηρίξουν την απάντησή τους στην καταμέτρηση. Το θετικό είναι ότι κανένα παιδί δεν απογοητεύτηκε, αντιθέτως βρήκαν την δραστηριότητα άμεσης αναγνώρισης με τα πιάτα *«φοβερή!»* και συνέχιζαν να παίζουν σε ζευγάρια στον ελεύθερο χρόνο τους.

Με το ίδιο ενδιαφέρον προχωρήσαμε και στη δεύτερη διδασκαλία (βλ. Παράρτημα), με μαθηματική δράση: συνθέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2010). Τα παιδιά έφτιαχναν σύνολα αριθμών μέσα σε δοσμένο χρόνο. Ενδιαφέρουσα ήταν η παρέμβαση της Χριστίνας «*Να δίνουμε τους αριθμούς με γρίφους στους αντιπάλους! Δηλαδή, όχι να λέμε 7 αμέσως…».* Η ιδέα της ήταν μία ευκαιρία για αυθόρμητη επέκταση της δραστηριότητας με στόχο να βρουν τα παιδιά πώς σχετίζεται ο ένας αριθμός με έναν άλλον. Πρότεινα να «*Παρουσιάζουμε τον αριθμό*» που κληρώνεται πχ για το 7 *«Έχω έναν αριθμό που είναι δύο περισσότερα από 5 και 1 λιγότερο από 8».* Η δραστηριότητα, όπως εξελίχθηκε

ήταν αποκαλυπτική για το πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται τον τρόπο που σχετίζονται οι αριθμοί.

Η πλειοψηφία των μαθητών δυσκολεύτηκε στην «παρουσίαση» του αριθμού, ενός αντιθέτως τα κατάφεραν καλύτερα να βρουν τα σύνολα. Παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά που δυσκολεύτηκαν στην προηγούμενη διδασκαλία είχαν σταθερά χαμηλή απόδοση και σε αυτήν, χωρίς όμως να απογοητεύονται.

Στην τρίτη διδασκαλία (Βλ. Παράρτημα) η μαθηματική δράση ήταν συμπληρώματα ποσοτήτων. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν η βάση των 10 (ten - frame) (Van de Walle, 2017). Πρόκειται για πλαίσιο - πίνακα 2 x 5, στα τμήματα του οποίου, τοποθετούνται καπάκια ή πούλια ως απεικόνιση τους αριθμών που βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν τους αριθμούς ως μία σύνθεση από μεμονωμένες ομάδες και να αναγνωρίσουν τη δεκάδα ως μία ξεχωριστή ανώτερη μονάδα (Clements, 1999) Οι δραστηριότητες στόχευαν α) στο να βοηθήσουν τα παιδιά να συνδέσουν έναν ορισμένο αριθμό με άλλους και ειδικότερο με το 5 και το 10, σχέσεις ιδιαίτερα χρήσιμες στην αντίληψη διάφορων αριθμητικών συνδυασμών. β) στο να τα βοηθήσουν τα παιδιά να δομήσουν και να απεικονίσουν νοερά τα μέρη των αριθμών. Έχοντας μάθει ότι μία πλήρης σειρά έχει 5, τα παιδιά συμπλήρωναν το πλαίσιο των δέκα χωρίς να συμπληρώσουν πρώτα την πάνω σειρά. Για παράδειγμα απεικόνισαν το 8 ως 5 και 3 ή ως 6 και 2, με καπάκια διαφορετικού χρώματος, φροντίζοντας να στραφεί η προσοχή των παιδιών στις κενές θέσεις του πλαισίου. Ο τρόπος που τα παιδιά χρησιμοποίησαν το «πλαίσιο των δέκα», ήταν ενδεικτικός για το κατά πόσο είχαν αναπτύξει την έννοια των αριθμών. Στις ερωτήσεις «*Τι κοίταξες στο πλαίσιο των δέκα για να βρεις πόσα είναι;*», «*Με ποιο τρόπο σε βοηθά η γεμάτη σειρά να καταλάβεις πόσα είναι;*» πολλά παιδιά απάντησαν πως δεν χρησιμοποίησαν τη μέτρηση γιατί φαίνεται ο Θοδωρής απάντησε «*Η πάνω σειρά είναι πάντα 5, αν ήταν και η κάτω θα είχαμε το 10, όμως λείπουν 2 καπάκια από το πεντάρι, 5 και 3 που έχω, 8»,* παρομοίως η Αναστασία *«Αφού όταν γεμίσουν οι σειρές έχω 10, αν λείπουν 2, θα έχω 8».* Σταθερά υπήρχαν παιδιά που χρησιμοποιούσαν τη «μέτρηση από», και 2 την «μέτρηση όλων». Ενώ στη δεύτερη δραστηριότητα της διδασκαλίας ($3^{ης}$) που είχε γρήγορο ρυθμό, τα παιδιά που στην προηγούμενη δραστηριότητα χρησιμοποιούσαν τη «μέτρηση από», απαντούσαν με εννοιολογική αναγνώριση άμεσα και γρήγορα. Φάνηκε πώς όταν τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν καταμέτρηση, την επέλεγαν. Δύο μαθητές δεν κατάφεραν να απαντήσουν σε καμία κάρτα με συνδυασμούς πάνω από 5.

Στην τέταρτη διδασκαλία (Βλ. Παράρτημα) η μαθηματική δράση ήταν για την ανάλυση και σύνθεση ποσοτήτων, την αντίληψη του μέρους και του όλου (Τζεκάκη, 2010).

Σε αυτές τις δραστηριότητες τα παιδιά αξιοποίησαν τη γνώση που είχαν αποκτήσει για τα μέρη του συνόλου, ώστε να βρουν το «μέρος που λείπει». Αυτές οι δραστηριότητες, αποδείχτηκαν απαιτητικές για τα παιδιά γιατί τα παρακινούσαν να σκεφτούν περαιτέρω συνδυασμούς ενός ορισμένου αριθμού. Προετοίμαζαν όμως και το δρόμο για την αφαίρεση. Το παιχνίδι, αν και απαιτητικό, ενθουσίασε τα παιδιά, παρόλο που ένας από τους κανόνες ήταν να *«μιλάμε μαθηματικά»*, για παράδειγμα όταν το σύνολο ήταν 7 και το ένα παιδί έδειχνε 3, το άλλο έπρεπε να πει «*τρία και τέσσερα κάνει 7*». Η παρατήρηση έδειξε ότι η δραστηριότητα αυτή δυσκόλεψε περισσότερο τα παιδιά στο σύνολό τους, ενώ μεγαλύτερη δυσκολία αντιμετώπισαν τα παιδιά που χρησιμοποιούσαν την καταμέτρηση και στις προηγούμενες διδασκαλίες. Στην πέμπτη διδασκαλία (Βλ. Παράρτημα) οι δραστηριότητες ήταν παιχνίδια με νοερά αθροίσματα και διαφορές ως το 10 (παραλλαγές από Van de Walle, 2017). Οι δραστηριότητες αυτές ήταν αποκαλυπτικές της γνώσης των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα. Τα παιδιά αξιοποίησαν την προηγούμενη γνώση στις σχέσεις μέρους - μέρους - όλου και ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά. Τα παιχνίδια, όπως παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα, δεν περιορίστηκαν μόνο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας αλλά απασχολούσαν τα παιδιά και εκτός σχολικού πλαισίου. Ενδεχομένως, η εξάσκηση να είναι ένας επιδραστικός παράγοντας στα ποιότητα των αποτελεσμάτων του μετά - ελέγχου.

5.4. Μετά - έλεγχος (Post - Test)

Μετά την ολοκλήρωση του προ - ελέγχου και τη συλλογή των δεδομένων από τις συνεντεύξεις (pre - Tests) των συμμετεχόντων, υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση με αξιοποίηση των δραστηριοτήτων που σχεδιάστηκαν και έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα παιδιά πριν την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης διδάχτηκαν την πρώτη αρίθμηση σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ (2003), αξιοποιώντας τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για την Α΄ τάξη. Την 6η και τελευταία εβδομάδα της παρέμβασης, ακολούθησε ο μετά – έλεγχος και η συλλογή δεδομένων από τις συνεντεύξεις (post - Tests).

Αποτελέσματα συνεντεύξεων

5.4.1.1. Αποτελέσματα 1ου Έργου

Το πρώτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις: 4 + 2, 5 + 4, 6 + 3. Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρείται ότι 19 από τους 25 μαθητές/τριες κατάφεραν να επιτύχουν τον επιδιωκόμενο στόχο, κάνοντας ανάκληση, 2 παιδιά επιμένουν στην στρατηγική 1ου επιπέδου και 4 ακολουθούν τη στρατηγική του 2ου επιπέδου. Δεν σημειώθηκαν λανθασμένες απαντήσεις.

Στις ερωτήσεις «Τι σκέφτηκες και βρήκες την απάντηση;», «Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;». Τα 2 παιδιά απάντησαν ότι τα μέτρησαν και είναι σίγουρα για την ορθότητα της απάντησής τους. Τα 4 παιδιά εστίασαν για αρκετή ώρα στις σχέσεις του Έργου και επιμένοντας στην στρατηγική τους μέτρησαν από το μεγαλύτερο αριθμό και απάντησαν με σιγουριά, ενώ δεν είχαν καμία παρατήρηση. Οι απαντήσεις των 19 παιδιών που έκαναν ανάκληση, καταγράφονται σε δύο κατηγορίες:

- Τα παιδιά που απάντησαν άμεσα: «Το ήξερα», «Μου ήρθε στο μυαλό», «Είμαι πολύ καλός στα μαθηματικά, γιαυτό» χωρίς να θέλουν να αιτιολογήσουν περαιτέρω την απάντησή τους.

- Τα παιδιά που απάντησαν άμεσα με αιτιολόγηση, όπως: «4 και 2 κάνει 6, επειδή έχω 4 και 2 περισσότερα, άρα κάνει 6», «επειδή το 4 είναι 2 και 2 και άλλο ένα 2, έχουμε τρία δυάρια που κάνουν 6», «5 + 4 κάνει 9, επειδή 5 + 5 κάνει 10, ένα λιγότερο 9», «6 + 3 κάνει 9, επειδή 3 και 3 κάνει 6 και άλλα 3, κάνουν 9». Από τις απαντήσεις των παιδιών φάνηκε ότι έχουν αναπτύξει την πολλαπλασιαστική αντίληψη των αριθμών, γεγονός που ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των αριθμητικές σχέσεων, «…τρία δυάρια κάνουν 6 (4 + 2 = 2 + 2

+ 2», «…3 τριάρια κάνουν 9 (6 + 3 = 3 + 3 +3)». Έχουν αντιληφθεί τη δυάδα και την τριάδα, ως μία νέα μονάδα με την οποία μπορούν να μετρήσουν μία ποσότητα.

Πίνακας 6. *1ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους όλου» - αθροίσματα που δεν ξεπερνούν τη δεκάδα (α + β < 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	2	2	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	4	4	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	19	19	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.4.1.2. Αποτελέσματα 2ου Έργου

Το δεύτερο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις: 7 + 1 + 1, 6 + 2 + 2, 4 + 4 + 2. Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρείται ότι 19 από τους 25 μαθητές/τριες κατάφεραν να επιτύχουν τον επιδιωκόμενο στόχο, κάνοντας ανάκληση, 2 παιδιά επιμένουν στην στρατηγική 1ου επιπέδου και 4 ακολουθούν τη στρατηγική του 2ου επιπέδου. Δεν σημειώθηκαν λανθασμένες απαντήσεις. Τα αποτελέσματα του 2ου Έργου συμπίπτουν απόλυτα με αυτά του 1ου Έργου, όπως ακριβώς συνέβη και με τα αποτελέσματα του προ - ελέγχου. Στις ερωτήσεις «Τι σκέφτηκες και βρήκες την απάντηση;», «Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;», οι απαντήσεις των παιδιών που έκαναν ανάκληση, καταγράφονται σε δυο κατηγορίες:

- Τα παιδιά που αναγνωρίζουν τα διπλά ως ένα σύνολο και το αθροίζουν στο ένα μέρος. Στη σχέση για παράδειγμα 6 + 2 + 2, βλέπουν 6 + 4 και απαντούν 10, ομοίως και στις άλλες δύο σχέσεις. «Έχει 3 αριθμούς αλλά είναι σαν έχει 2».
- Τα παιδιά που δεν εστιάζουν στα διπλά αλλά αθροίζουν με τη σειρά που βλέπουν τους αριθμούς. Στη σχέση, για παράδειγμα 7 +1 + 1, αθροίζουν (7 + 1) + 1 = 9.

Πίνακας 7. *2ο Έργο: Σχέση «μέρους -μέρους – όλου» συμπεριλαμβανομένων των διπλών αθροισμάτων (α + α + β)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	2	2	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	4	4	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	19	19	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.3.1.3. Αποτελέσματα 3ου Έργου

Το τρίτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις: 7 + x = 10, 6 + x =10, 8 + x =10. Μετά τη διδακτική παρέμβαση 4 παιδιά παραμένουν στο πρώτο επίπεδο στρατηγικής, για παράδειγμα παίρνουν μία ποσότητα με 6, μετρώντας ένα – ένα και μετρώντας ένα - ένα βάζουν στο 6 μία ποσότητα με 4 (6 + **4** = 10). Ελέγχουν την απάντησή τους κάνοντας απαρίθμηση όλων. Οι 7 ακολουθούν τη στρατηγική του δεύτερου επιπέδου, για παράδειγμα εστιάζουν λίγα λεπτά στις σχέσεις και υπολογίζουν μετρώντας από το γνωστό μέρος μέχρι να φτάσουν στο αποτέλεσμα «8 στο μυαλό και άλλα 2, 10, άρα λείπει το 2». Τα παιδιά που κάνουν ανάκληση είναι λιγότερα σε αυτό το Έργο σε σχέση με τα προηγούμενα δύο Έργα. Επίσης, δεν σημειώθηκαν λανθασμένες απαντήσεις.

Φάνηκε ότι το «μέρος που λείπει» είναι περισσότερο απαιτητική νοητική διαδικασία. Στις ερωτήσεις «Τι σκέφτηκες και βρήκες την απάντηση;», «Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;», οι απαντήσεις των παιδιών που έκαναν ανάκληση, καταγράφονται και πάλι σε δύο κατηγορίες:

- Τα παιδιά που αναγνώρισαν άμεσα τη σχέση μεταξύ των αριθμών, για παράδειγμα «Είναι πανεύκολα αυτά, 8 + 2 κάνει 10, ποιος δεν το ξέρει», χωρίς να θέλουν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.
- Τα παιδιά που απαντούσαν άμεσα, όμως ήθελαν να επιβεβαιώσουν την απάντησή τους, για παράδειγμα «Το είπα σωστά; Ναι σίγουρα είναι σωστό αφού 6 + 4 κάνει 10». «7 και άλλα 3, 10 αφού 7 + 3 κάνουν 10», επαληθεύουν την απάντησή τους και με μέτρηση.

Πίνακας 8. *3ο Έργο: Το μέρος που λείπει - αθροίσματα (α + x = 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/ χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	4	4	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	7	7	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	14	14	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.4.1.4. Αποτελέσματα 4ου Έργου

Το τέταρτο Έργο περιλάμβανε τις σχέσεις: 10 - x = 7, 10 - x= 6, 10 - x = 2. Μετά τη διδακτική παρέμβαση 4 παιδιά επιμένουν να ακολουθούν τη στρατηγική πρώτου επιπέδου, κάνοντας απαρίθμηση όλων με χρήση υλικού, 1 μόνο παιδί χρησιμοποίησε τα δάχτυλά του. 9 παιδιά ακολούθησαν τη στρατηγική του δευτέρου επιπέδου, 4 από αυτά κατεβαίνοντας ένα - ένα από το 10 και μετρώντας την ποσότητα που αφαιρείται, έφτανε στη σωστή απάντηση,

για παράδειγμα «10 στο μυαλό 9, 8, 7 … άρα 10 - 3 κάνει 7» και 5 παιδιά κάνοντας προσθετικό συλλογισμό, για παράδειγμα «έχουμε 7 και μέχρι το 10, βάζω 3». Οι σχέσεις του τέταρτου Έργου φάνηκε να είναι περισσότερο απαιτητικές, καθώς ανάκληση έκαναν 12 μαθητές. Στις ερωτήσεις «Τι σκέφτηκες και βρήκες την απάντηση;», «Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;», οι απαντήσεις των παιδιών που έκαναν ανάκληση, καταγράφονται και πάλι σε δυο κατηγορίες:

- Τα παιδιά που απαντούν άμεσα αναγνωρίζοντας τη σχέση μεταξύ των αριθμών, για παράδειγμα «Είναι πανεύκολα αυτά, 8 + 2 κάνει 10, άρα 10 - 8 κάνουν 2 αλλά και 10 - 2, κάνει 8». Φάνηκε να έχουν κάνει τη σύνδεση μεταξύ των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, παρατηρώντας ότι οι σχέσεις αυτού του Έργου, είναι ίδιες με τις σχέσεις του τρίτου Έργου, ότι δηλαδή πρόκειται για το ίδιο μοντέλο.

- Τα παιδιά που απαντούν άμεσα και με ευχέρεια αλλά χωρίς αιτιολόγηση «Το ξέρω», «Είναι εύκολο για μένα».

Πίνακας 9. *4ο Έργο: Το μέρος που λείπει - διαφορές (10 - x = α)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (διαχωρισμός από)	4	4	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	12	12	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

5.5 Συγκριτικά αποτελέσματα προ - ελέγχου (pre - Testing) και μετά - ελέγχου (post - Testing)

Μετά την ολοκλήρωση της συλλογής των δεδομένων μέσω των συνεντεύξεων του προελέγχου και του μετά ελέγχου, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων ως προς το επίπεδο στρατηγικής που ακολούθησαν οι συμμετέχοντες σε κάθε έργο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Από τις στρατηγικές που εφάρμοσαν τα παιδιά πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση καταγράφονται σημαντικές παρατηρήσεις στις αλλαγές των στρατηγικών τους, οι οποίες δείχνουν κατά πόσο έχει διαφοροποιηθεί (ή αναπτυχθεί) η αντίληψή τους για τις

σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας.

Πίνακας 10. *Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση*

Επίπεδα στρατηγικής	**1ο Έργο**				**2ο Έργο**				**3ο Έργο**				**4ο Έργο**			
	Πριν	**%**	**Μετά**	**%**	**Πριν**	**%**	**Μετά**	**%**	**Πριν**	**%**	**Μετά**	**%**	**Πριν**	**%**	**Μετά**	**%**
1ο επίπεδο Απαρίθμηση όλων	5	20	2	8	5	20	2	8	7	28	4	16	7	28	4	16
2ο επίπεδο Απαρίθμηση από	9	36	4	16	9	36	4	16	10	40	7	28	13	52	9	36
3ο επίπεδο ανάκληση	11	44	19	76	11	44	19	76	8	32	14	56	5	20	12	48

Έτσι, όπως διαφαίνεται στον παραπάνω πίνακα πριν τη διδακτική παρέμβαση το 20% των παιδιών ακολουθούσε την αθροιστική στρατηγική «απαρίθμηση όλων» στα πρώτα δύο έργα, ενώ τα έργα με το μέρος που λείπει φάνηκαν πιο απαιτητικά, καθώς το 28% των παιδιών επέλεξε να χρησιμοποιήσει υλικό και δεν έκανε νοερούς υπολογισμούς. Μετά τη διδακτική παρέμβαση το ποσοστό των παιδιών μειώθηκε στο 8% για τα δύο πρώτα Έργα, ενώ για το τρίτο και τέταρτο Έργο το ποσοστό των παιδιών μειώθηκε στο 16%. Παρατηρείται ότι ενώ έχει σημειωθεί βελτίωση, ωστόσο μερικά παιδιά επιμένουν σταθερά σε αυτή την στρατηγική, όσο αυξάνονται οι απαιτήσεις των Έργων.

Τα ποσοστά των παιδιών που ακολουθήσαν την αθροιστική στρατηγική του δευτέρου επιπέδου «απαρίθμηση από» πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση σε όλα τα προτεινόμενα έργα, έχουν ως εξής: στα δύο πρώτα Έργα το 36% των παιδιών μετρούσε από το μεγαλύτερο μέρος, ενώ μετά την διδακτική παρέμβαση, το ποσοστό μειώθηκε στο 16%. Και τα παιδιά που βρίσκονται σε αυτό το επίπεδο στρατηγικής φάνηκε να αντιμετωπίζουν περισσότερες δυσκολίες με το 3ο και 4ο Έργο, όπου λείπει το ένα μέρος, σε σύγκριση με τα δύο προηγούμενα Έργα. Πριν τη διδακτική παρέμβαση το 40% των μαθητών βρήκε το μέρος που λείπει στα αθροίσματα μετρώντας από το γνωστό μέρος και το 52% εφάρμοσε την ίδια στρατηγική στις διαφορές με το μέρος που λείπει. Μετά τη διδακτική παρέμβαση τα ποσοστά αυτά μειώθηκαν στο 28% και 36% αντιστοίχως.

Από τα αποτελέσματα που καταγράφονται στον πίνακα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση των παιδιών που κάνουν ανάκληση και απαντούν με ευχέρεια στα Έργα, διαφαίνεται η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας.

Πριν τη διδακτική παρέμβαση το 44% των παιδιών έκανε ανάκληση στις απαντήσεις των δύο πρώτων Έργων που αφορούσαν στις σχέσεις μέρους - μέρους - όλου, ενώ μετά την παρέμβαση το ποσοστό έφτασε στο 76%, δηλαδή 8 παιδιά περισσότερα έκαναν ανάκληση. Στο τρίτο Έργο με ένα μέρος σε αθροίσματα να λείπει, το ποσοστό των παιδιών πριν την παρέμβαση ήταν 32% και μετά την παρέμβαση έφτασε στο 56%, δηλαδή 6 παιδιά περισσότερα. Στο Έργο με τις διαφορές και το μέρος που λείπει πριν την παρέμβαση έκανε ανάκληση το 20% παιδιών, ενώ μετά την παρέμβαση το ποσοστό έφτασε στο 48%, δηλαδή 7 παιδιά περισσότερα.

6. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει σε ποιο βαθμό μία κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει τη γνώση των παιδιών Α΄ τάξης δημοτικού για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας. Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκε ένα αρχικό τεστ (pre Test) που έλεγξε τη γνώση των μαθητών/τριών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας, σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε το πρόγραμμα διδακτικής παρέμβασης και με ένα τελικό τεστ (post Test) αντίστοιχο του αρχικού, ελέγχθηκε η γνώση μετά την παρέμβαση. Τα ευρήματα της έρευνας, όπως προέκυψαν από τα αποτελέσματα των δύο Τεστ και της μεταξύ τους σύγκρισης, παρουσιάζονται παρακάτω, οργανωμένα σε άξονες, ώστε να απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα.

• *Οι γνώσεις των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας πριν τη διδακτική παρέμβαση*

Προκειμένου να δοθεί μία εκτενής απάντηση στο συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα μελετήθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων σε όλα τα έργα του προελέγχου σε αντιστοιχία με τους ορισμούς που δόθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα παιδιά έδρασαν με διαφορετικούς τρόπους στα έργα και χρησιμοποίησαν στρατηγικές ανάλογα με το επίπεδο εννοιολογικής ανάπτυξης που βρίσκονταν. Πιο συγκεκριμένα η πλειοψηφία των παιδιών χρησιμοποίησε το μηχανισμό της μέτρησης για τον υπολογισμό των αθροισμάτων και της εύρεσης του μέρους που λείπει στις σχέσεις - μέρους - μέρους - όλου, χωρίς να είναι σε θέση να συστηματοποιήσει τα ευρήματα αυτά. Αναλυτικότερα, από τα παιδιά (n = 25) που ακολουθήσαν στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης τα 5 (24%) χρησιμοποίησαν το εργαλείο της καταμέτρησης, επιλέγοντας τη χρήση υλικού, έβαζαν μαζί ή έβγαζαν από, ακολουθώντας την απλοϊκή προσθετική διαδικασία της «απαρίθμηση όλων» (counting all) (Kilpatrick et al., 2001; Steinberg, 1985; Bryant & Nunes, 2002), ενώ οι 19 / 25 μαθητές (41%) είχε συνειδητοποιήσει ότι δεν είναι αναγκαίο να τα μετρήσουν όλα και συνέχιζαν τη μέτρηση από το τέλος του μεγαλύτερου συνόλου, τη στρατηγική, δηλαδή «απαρίθμηση από» (counting on). Από αυτούς οι 9 / 19 ακολούθησαν τη στρατηγική αυτή για τα πρώτα δύο έργα και οι 10 / 19 για τα δύο τελευταία έργα Το εύρημα αυτό συμφωνεί με ευρήματα και άλλων ερευνητών (Gaidoschik, 2012; Kilpatrick et al., 2001; Steinberg, 1985; Bryant & Nunes, 2002)

Σημαντικό εύρημα είναι ότι συμμετέχοντες που βρίσκονται στα δύο αυτά επίπεδα στρατηγικών φάνηκε να δυσκολεύονται στο 4^{ο} έργο με τις διαφορές και το μέρος που λείπει. Οι 7 / 25 μαθητές ακολούθησαν τη στρατηγική «απαρίθμηση όλων», 13/ 25, τη στρατηγική

«απαρίθμηση από» και μόλις 5 / 25 έκαναν ανάκληση. Επισημαίνεται και έλλειψη ικανότητας σύνδεσης μεταξύ των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, εύρημα που συμφωνεί με αυτά των Canobi (2004, 2005, 2009) και Henry και Brown, (2008).

Η έρευνα έδειξε ότι τα παιδιά αυτά δεν είχαν αναπτύξει την αριθμητική δεξιότητα να ανακαλύπτουν τις σχέσεις των αριθμών, έβλεπαν την ποσότητα ως μεμονωμένες μονάδες, επομένως, έβρισκαν το σύνολο με καταμέτρηση, που σημαίνει μη κατανόηση της σχέσης μέρους- μέρους- όλου. Για παράδειγμα στο ερώτημα 6 + _ = 10, η μέτρηση από το 6, δεν δείχνει ότι το παιδί γνωρίζει ότι το 10 αναφέρεται σε ένα σύνολο από 6 και ένα άλλο άγνωστο μέρος, όταν στο ερώτημα 10 - _ = 6, χρησιμοποιεί και πάλι τη μέτρηση από το 10, εύρημα που συμφωνεί με αυτά των Murata & Fuson (2006) και Baroody (2016). Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από τους Neuman (2013) και Van de Walle et al., (2017) που υποστηρίζουν ότι η αδυναμία αναγνώρισης των αριθμών ως σχέσεων «μέρους – μέρους - όλου» μπορεί να δυσκολεύει την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων, πράγμα που οδηγεί στην ανάγκη για περίπλοκες στρατηγικές, όπως η «διπλή μέτρηση» μεμονωμένων μονάδων».

Πριν την διδακτική παρέμβαση μόλις 8 / 25 (32%) παιδιά κατά μέσο όρο μπορούσαν να απαντούν με ευχέρεια και στα 12 ερωτήματα των έργων, αιτιολογώντας τον συλλογισμό τους και κάνοντας σύνδεση των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Το συγκεκριμένο ποσοστό των παιδιών είχε αναπτύξει την κατανόηση των σχέσεων και των αριθμητικών πράξεων και λειτούργησε με ανεπτυγμένες υπολογιστικές ικανότητες, ενώ από τις απαντήσεις τους φάνηκε ότι έκαναν άμεση ανάκληση, απαντώντας «Το ξέρω», «Μου ήρθε στο μυαλό» που είναι και ο επιδιωκόμενος στόχος, μπορούσαν, δηλαδή να αναπτύξουν έναν ολόκληρο συλλογισμό αιτιολόγησης που δεν περιλάμβανε την καταμέτρηση. Σημειώνεται ότι πριν την παρέμβαση οι μαθητές/τριες δέχτηκαν τυπική διδασκαλία, βασισμένη κυρίως στις δραστηριότητες και τις ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων.

Επομένως, πριν τη διδακτική οι 17 από τους 25 συμμετέχοντες (68%) κατά μέσο όρο, δεν είχαν κατακτήσει τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, χρησιμοποιώντας την καταμέτρηση για την επίλυση των Έργων, ενώ οι 8 /25 (32%) έκαναν αυτόματη ανάκληση, έδειξαν ευχέρεια στη διαχείριση των αντίστοιχων Έργων και απάντησαν με κατανόηση.

Αυτή η διαφορά μπορεί να εξηγηθεί με τον ακόλουθο τρόπο: Η εξάρτηση από τις στρατηγικές «μετρώντας από» και «μέτρηση όλων» παρεμποδίζει την αριθμητική ανάπτυξη κυρίως, επειδή εμποδίζει την κατανόηση των δομικών στοιχείων του αριθμών (την έννοια

του «μέρους» και του «όλου»), των μεταξύ τους σχέσεων και των λειτουργιών. Από αυτή την άποψη, η συνέχιση των υπολογισμών με μέτρηση υπονομεύει την ανάπτυξη βασικών προϋποθέσεων για να ξεπεραστούν αυτού του είδους οι υπολογισμοί (Gaidoschik, 2012).

Η οικοδόμηση σε αυτή τη γνώση, του μέρους και του όλου, θα διευκολύνει το παιδί να αναπτύξει και να εδραιώσει την κατανόηση των αριθμών ως συνθέσεων αριθμών και να αναγνωρίσει σχέσεις μεταξύ μεμονωμένων εργασιών υπολογισμού, διασφαλίζοντας ότι αυτές οι εργασίες που θα του παρουσιάζονται όλο και περισσότερο στην τάξη δεν θα επιλύονται ως «εργασίες καταμέτρησης». Ελλείψει αυτών των προ απαιτούμενων, ένα παιδί διατρέχει σημαντικό κίνδυνο ότι, όποτε καλείται να επιλύσει τέτοιου είδους εργασίες, θα κάνει χρήση της καταμέτρησης, ενισχύοντας έτσι μία στρατηγική που τίθεται να εμποδίσει σοβαρά την περαιτέρω αριθμητική ανάπτυξη του παιδιού (Gaidoschik, 2012).

• *Οι γνώσεις των παιδιών για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση.*

Προκειμένου να δοθεί μία εκτενής απάντηση στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα μελετήθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων σε όλα τα έργα του μετά – ελέγχου, συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα του προ - ελέγχου, σε αντιστοιχία και πάλι με τους ορισμούς αλλά και η συμπεριφορά των μαθητών κατά τη διάρκεια και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Μετά τη διδακτική παρέμβαση διαπιστώθηκε πως οι συμμετέχοντες που κατά τον προ - έλεγχο φάνηκε να βρίσκονται στο πρώτο επίπεδο (στάδιο) στρατηγικής «απαρίθμηση όλων», είχαν προχωρήσει σε εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, και πέρασαν στο επόμενο επίπεδο (στάδιο) στρατηγικής «απαρίθμηση από». Μετακινήθηκαν μέσω των μαθησιακών τροχιών μάθησης της μέτρησης και της εννοιολογικής αναγνώρισης στην ιδέα της «απαρίθμησής από», εύρημα που συμφωνεί με αυτά των Fuson (2000) και Wright (2006).

Σημαντικό εύρημα είναι ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση το ποσοστό των παιδιών που έκαναν άμεση ανάκληση, αυξήθηκε κατά 32% για τα δύο πρώτα έργα και 26% κατά μέσο όρο για το τρίτο και τέταρτο Έργο. Φαίνεται ότι οι διαφορές και οι σχέσεις με το μέρος που λείπει, εξακολουθούν να δυσκολεύουν μερικά παιδιά (Henry και Brown, 2008), παρόλο που σημειώθηκε σημαντική βελτίωση (βλ. Πίνακα 10). Έτσι, τα παιδιά χρησιμοποιώντας ως γέφυρα τις σχέσεις που ανακάλυψαν στο δεύτερο επίπεδο «απαρίθμηση από», πέρασαν στην άμεση ανάκτηση, παράγοντας αθροίσματα και διαφορές από ένα δίκτυο μνήμης (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007).

Τα παιδιά μετά τη διδακτική παρέμβαση εμπλούτισαν τη γνώση τους για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, καθώς το 76% απάντησε με ευχέρεια στα Έργα που αφορούσαν αθροίσματα στην πρώτη δεκάδα, ενώ το 52% μπορούσε να κάνει συνδέσεις μεταξύ των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Σύμφωνα με τον Van de Walle (2017) η ρητή συσχέτιση των δύο πράξεων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την γνώση και κατανόηση των σχέσεων μέρους - μέρους - όλου.

Από τις απαντήσεις των παιδιών διεφάνη η σύνδεση της εννοιολογικής με τη διαδικαστική γνώση, που συνεπάγεται ουσιαστική μάθηση των αριθμητικών σχέσεων και επομένως ικανότητα ευχέρειας (Moursund, 2002; Rittle-Johnson, 2014; Siegler et Araya, 2005; Baroody, 2014).

Σύμφωνα με τους Clements, Sarama & MacDonald, (2018) η εννοιολογική αναγνώριση παρέχει μία άμεση φαινομενολογική εμπειρία με αθροιστικές καταστάσεις, καθώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται δύο μέρη και το σύνολο. Η ύπαρξη και των δύο μερών και του συνόλου στη μνήμη εργασίας είναι θεμελιώδης για τη γνώση «γεγονότων πρόσθεσης», που είναι σημαντικότερη από τις λύσεις που βασίζονται στην καταμέτρηση. Τα παιδιά που χρησιμοποιούν την αρχική στρατηγική «Απαρίθμηση όλων» στις σχέσεις - μέρους - μέρους - όλου είναι πιθανό ότι διατηρούν στη μνήμη εργασίας μόνο το σύνολο και επομένως είναι απίθανο να γίνει σύνδεση μεταξύ των μερών και του όλου, που είναι η βάση της κατανόησης της σύνδεσης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Van de Walle, 2017).

Συμπερασματικά, η διδακτική παρέμβαση βασισμένη σε δραστηριότητες που προάγουν την αντιληπτική και στη συνέχεια την εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση της λειτουργίας του αριθμού και των αριθμητικών σχέσεων, κυρίως της σχέσης μέρους - μέρους - όλου, που εστίασε η παρούσα έρευνα, εύρημα με το οποίο συμφωνούν οι Clements, Sarama & MacDonald, (2018) και Sayers, Andrews, & Boistrup, (2016), Gaidoschik (2012), Van de Walle et al. (2004, 2017). Τα παιδιά βελτίωσαν σημαντικά τη γνώση τους για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, όπως ορίστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι αυτό που προκύπτει από τη μελέτη είναι η ανάγκη για εφαρμογή τόσο από διδακτική όσο και από μεθοδολογική άποψη, δραστηριοτήτων που συνάδουν με τα αποτελέσματα των ερευνών για τη διδασκαλία της πρώτης αρίθμησης σε παιδιά Α΄ τάξης. Αυτές αφορούν την κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, της σχέσης μέρους - μέρους - όλου και επομένως, της κατανόησης σε βάθος των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας. Η έρευνα έδειξε πως η διδασκαλία με

δραστηριότητες που στοχεύουν στην εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, βοηθά τα παιδιά να ξεπεράσουν τις στρατηγικές που βασίζονται στην καταμέτρηση, δεξιότητα που εμποδίζει την περαιτέρω αριθμητική ανάπτυξη των παιδιών. Η διδασκαλία που στοχεύει στην εννοιολογική αναγνώριση ποσοτήτων, δημιουργεί ισχυρή γνώση του μέρους και του όλου, οδηγώντας σε κατανόηση των αριθμού και επομένως της ουσιαστικής γνώσης των σταθερών σχέσεων των αριθμών της πρώτης δεκάδας. Υπερτερεί, στατιστικά, σε σχέση με τη διδασκαλία που προωθεί τις στρατηγικές καταμέτρησης (Baroody, Lai, Mix, 2006; Clements; Sarama & Mac Donald, 2018; Mac Donald, & Wilkins, 2017; Sayers, Andrews, & Boistrup, 2016).

Το ερώτημα που αναφύεται σχετικά με την γνώση που οι μαθητές αναπτύσσουν αναφορικά με την αριθμητική μάθηση και τη διαπίστωση ότι η εννοιολογική αναγνώριση ενθαρρύνει την ουσιαστική κατανόηση του αριθμού και των σχέσεων του, είναι:

Ποια θα ήταν τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάπτυξης των παιδιών, εάν είχε εφαρμοστεί ήδη από το 2011 το ΝΠΣ, που περιλάμβανε στους στόχους του την άμεση αναγνώριση; Επιπροσθέτως το γεγονός ότι οι μαθητές πριν τη διδακτική παρέμβαση, είχαν ελλιπή γνώση των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας, δείχνει ότι πιθανόν η προώθηση των στρατηγικών για υπολογισμούς με καταμέτρηση, που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια, είναι ενδεχομένως ανασταλτικός παράγοντας.

6.1. Περιορισμοί και Επεκτάσεις

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν αποδεκτές ποιοτικές ερευνητικές μέθοδοι, αναγνωρίζεται ωστόσο ότι υπήρξαν κάποιοι περιορισμοί. Ο πρώτος περιορισμός αφορά στην ποιότητα του δείγματος. Τα παιδιά που αποτελούσαν το δείγμα είχαν ελλιπή φοίτηση στο νηπιαγωγείο, καθώς η διδασκαλία γινόταν σε ψηφιακές τάξεις και όχι δια ζώσης, κατά τα χρονικά διαστήματα Μάρτιος 2020 - Ιούνιος 2020 (προνήπια) και Σεπτέμβριος 2020 - Ιούνιος 2021(νήπια), λόγω της εφαρμογής των μέτρων lockdown που επέφερε η πανδημία Covid-19.

Ο δεύτερος περιορισμός αφορά την επιλογή του δείγματος. Το γεγονός ότι η ερευνήτρια ήταν η εκπαιδευτικός του τμήματος, η δειγματοληψία ήταν ευκολίας και ενδεχομένως να υπήρχε μεροληψία κατά τις συνεντεύξεις, επηρεάζοντας ενδεχομένως τα αποτελέσματα. Η σκόπιμη δειγματοληψία, πιθανόν μεγαλύτερης διακύμανσης, συμπεριλαμβανομένων μαθητών/τριών από διάφορα δημοτικά σχολεία, ιδιωτικά, δημόσια, αστικής, ημιαστικής περιοχής, θα ήταν ιδανικότερη επιλογή. Ωστόσο η παρουσία της ερευνήτριας ενθάρρυνε τα παιδιά να συμμετέχουν και να εμπλέκονται στη διαδικασία με περισσότερη άνεση.

Ο τρίτος περιορισμός αφορά τον χρόνο διεξαγωγής της έρευνας. Λόγω της πανδημίας οι συνεχείς απουσίες μέρους του δείγματος, διέστειλε τα χρονικό όρια της διεξαγωγής της. Πιθανόν αν η διεξαγωγή της έρευνας, γινόταν στις αρχές της σχολικής χρονιάς, τα αποτελέσματα να είχαν διαφοροποιηθεί. Ο τέταρτος περιορισμός είναι ότι δεν έγινε πλήρης βιντεοσκόπηση της διδακτικής παρέμβασης, αλλά μέρους της, ώστε να συγκεντρωθεί υλικό για πιο εκτεταμένη συλλογή δεδομένων. Ωστόσο υπάρχει φωτογραφικό υλικό, σημειώσεις πεδίου, παρατηρήσεις στα πρωτόκολλα των συνεντεύξεων που συνδυαστικά, έδωσαν τη δυνατότητα να εμβάθυνσης στα τιθέμενα ερευνητικά ερωτήματα.

Τέλος, με βάση τα ευρήματα της έρευνας προτείνεται η επέκτασή της σε μεγαλύτερο δείγμα, μη βολικής δειγματοληψίας, με σχεδιασμό μεγαλύτερης διάρκειας παρέμβασης, που θα μελετά τη γνώση των παιδιών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών με την είσοδό τους στην πρώτη τάξη και τη γνώση τους στο τέλος της σχολικής χρονιάς συμπεριλαμβανομένων των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης που ξεπερνούν τη δεκάδα, προκειμένου να διερευνηθεί κατά πόσο η σταθεροποίηση της γνώσης επιδρά σε πράξεις με μεγαλύτερους αριθμούς.

7. Βιβλιογραφία

7.1. Ξενόγλωσση

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. Cognition, 44,75-106.

Aubrey, C., & Godfrey, R. (2003). The development of children's early numeracy through Key Stage 1. *British Educational Research Journal, 29(6)*, 821-840.

Aubrey, C., Dahl, S., & Godfrey, R. (2006). Early mathematics development and later achievement: Further evidence. *Mathematics Education Research Journal, 18(1)*, 27-46.

Australian curriculum mathematics resource book (2012), *Number and algebra (year 1),* Ric publications: Western Australia.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking: A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* New York: Teacher's College Press.

Baroody, A. J. (2004). The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 173–219). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J., Eiland, M. D, & Baroody, S. C. (2011). Fostering third-graders' fluency with basic addition and subtraction combinations. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association,* New Orleans, LA.

Baroody, A. J., Eiland, M. D., Purpura, D. J., & Reid, E. E. (2013). Can computer-assisted discovery learning foster first graders' fluency with the most basic addition combinations? *American Educational Research Journal, 50(13),* 533-573.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38, 115-131.*

Baroody, A. J., Li, X., & Lai, M.-l. (2008). Toddlers' spontaneous attention to number. Mathematical Thinking and Learning, 10, 240–270.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students'spatial structuring of two-dimensional arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 503–532.

Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? Cognitive Development, 19 (3), 291-307.

Björklund, C., Kullberg, A., & Kempe, U. R. (2018). Structuring versus counting: critical ways of using fingers in subtraction. ZDM, 0(0), 0. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0962-0

Bryant, P. (1996). Children and arithmetic. In L. Smith (Ed.), *Critical readings on Piaget (pp. 312−346).* London, UK: Routledge.

Bryant, P., & Nunes, T. (2002). Children's understanding of mathematics. In U. Goswami (Ed.), *Blackwell handbook of childhood cognitive development (pp. 412−439)*

Bryant, P., & Nuñes, T. (2002). Children's understanding of mathematics. In U. Goswami (Ed.), *Blackwell handbook of childhood cognitive development* (pp. 412-439). Blackwell Publishing. https://doi.org/10.1002/9780470996652.ch19

Campbell, J. I. D., & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology.General,* 120, 299-315.

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. Cognitive Development, 19, 81-93.

Canobi, K. H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 92,* 220-246.

Canobi, K. H. (2009). Conceptual-procedural interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102,* 131-149.

Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 67-81). *Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates,* Inc.

Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior, 31(1),* 29–47

Clements, D. (1999). Subitizing. What is it? Why teach it? Teaching Children Mathematics, 5 (7), 400-405.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the *Building Blocks* project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 136–163.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2018). Subitizing: The Neglected Quantifier. Constructing Number, 13–45.

Clements, D.H., Sarama, J., MacDonald, B.L. (2019). Subitizing: The Neglected Quantifier. In: Norton, A., Alibali, M. (eds) Constructing Number. *Research in Mathematics Education. Springer*, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2

Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition.* New York, NY: Oxford University Press.

Common Core State Standards Initiative. CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org

Council of Chief State School Officers (CCSSO). (2010). *Common Core State Standards*: *Preparing America's Students for College and Career*. Retrieved from http://www.corestandards.org/

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44, 1-42.

Dowker, A. (2009). Use of derived fact strategies by children with mathematical difficulties. Cognitive Development, 24, 401-410.

Edens, K. M., & Potter, E. F. (2013). An exploratory look at the relationships among math skills, motivational factors and activity choice. *Early Childhood Education Journal, 41(3),* 235-243. https://doi.org/10.1007/s10643-012-0540-y

Fayol, M., & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction. Cognition, 123, 392-403.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8(7), 307-314.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting on solution procedure in addition. In T. P.

Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concept of number. New York: Springer Verlag.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. *In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 243-275)*. New York, NY: Macmillan.

Fuson, K. C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's single-digit addition and subtraction. Numbers structured by ten. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(2),* 148-165.

Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drueck, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the standards-based curriculum everyday mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 31,* 277-295.

Gaidoschik, M. (2007). Rechenschwäche vorbeugen - Erstes Schuljahr. *Vom Zählen zum Rechnen*. Wien: G&G

Gaidoschik, M. (2012). First-Graders' Development of Calculation Strategies: How Deriving Facts Helps Automatize Facts. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 33*(2), 287-315. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0038-6

Geary, D. C., & Brown, S. C. (1991). Strategy choice and speed-of-processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27(3),* 398-406.

Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77,* 236-263.

Gerlach, M., Fritz, A., Ricken, G., & Schmidt, S. (2007). Trainingsprogramm Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. *Baustein 1: Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen.* Berlin: Cornelsen.

Gerster, H.-D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Eds.), Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (2nd ed., pp. 248-268). Weinheim: Beltz.

Hasemann, K. (2005). Word problems and mathematical understanding. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37,* 208–211. doi: 10.1007/s11858-005-0010-8.

Henry, V., & Brown, R. (2008). First-grade basic facts. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 153-183. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2

Jordan, K. E., Suanda, S. H., & Brannon, E. M. (2008). Intersensory redundancy accelerates preverbal numerical competence. Cognition, 108, 210-221.

Jung, M. (2011). Number relationships in a preschool classroom. *Teaching Children Mathematics, 17 (9)*, 550-557.

Jung, M., Hartman, P., Smith, T., & Wallace, S. (2013). The effectiveness of teaching number relationships in preschool. *International Journal of Instruction, 6 (1),* 165-178.

Kavkler, M., Tancig, S., & Magajna, L. (2003). Follow-up study of children with very low and very high mathematical competence in preschool years. *Paper presentation in EARLI conference, 2003,* Padova Italy.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction, 19 (6),* 513–526

Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. Educ. Stud. Math. 103**,**157–172 https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1

Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A., 2012, Non-numerical and numerical understanding of the part-whole concept of children aged 4 to 8 in word problems. *Journal für Mathematik - Didaktik 33(2)*, 233–262. https://doi.org/10.1007/s13138-012- 0039-5

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Effects of approximate number system training for numerical approximation and school math abilities. *Paper presented at the NICHD Mathematics Meeting*, Bethesda, MD.

Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2005). Preschool children's mapping of number words to nonsymbolic numerosities. *Child Development, 76(5),* 978-988.

Lorenz, J.-H. (2003). Rechenschwäche ein Problem der Schule - und Unterrichtsentwicklung. In M. Baum

MacDonald, B. L., & Wilkins, J. L. M. (2016). Seven types of subitizing activity characterizing young children's mental activity. In S. Marx (Ed.), *Qualitative research in STEM (pp. 256 – 286).* New York, NY: Routledge.

MacDonald, B. L., & Wilkins, J. L. M. (2018). Subitizing activity relative to units construction and coordination: A case study. Manuscript submitted for publication.

Marton, F. (2015). Necessary conditions of learning. New York, NY: Routledge.

Moursund, D. G. (2002). Increasing your expertise as a problem solver: Some roles of computers (2nd ed.). Eugene, OR: *International Society for Technology in Education.*

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21 (2)*, 33-49.

Nader, K., & Hardt,O. (2009). A single standard formemory: The case for reconsolidation. *Nature Reviews/Neuroscience, 10*, 224-234.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*: Standards 2000. Reston, VA: NCTM

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen [Changing the ways of working and culture in early arithmetic teaching]. *Nordic Studies in Mathematics Education, 18(2),* 3–46.

Nührenbörger, M., & Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings: Examples from students', teachers' and teacher - students' communication about mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12,* 111–132. doi: 10.1007/s10857-009-9100-9.

Olkun, S., & Özdem, S. e. (2015). The effect of conceptual subitizing training on calculation performance. *Başkent University Journal of Education, 2(1),* 1-9.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron, 44(3),* 547−555

Richardson, K. (2004). Making sense. In D. H. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education (pp. 321-324). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Rickard, T. C. (2012). Do children access their addition facts to perform subtraction? *Paper presented at the 53rd Annual Meeting of the Psychonomic Society, St. Louis,* MO.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York, NY: Routledge.

Sayers, J., Andrews, P., & Boistrup, L. B. (2016). The role of conceptual subitizing in the development of foundational number sense. In T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange, & A. Wernberg (Eds.), *Mathematics education in the early years (pp. 371-394)*. Switzerland: Springer

Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). BIRTE 2. Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr. *Handbuch zur Diagnostik und Förderung.* Braunschweig: Schroedel.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills (pp. 229-293).*, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Siegler, R., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In R. Kail (Ed.), *Advances in child development and behavior (Vol. 33, pp. 1-42).* New York, NY: Academic Press.

Slusser, E. B., & Sarnecka, B. W. (2011). Find the picture of eight turtles: A link between children's counting and their knowledge of number word semantics. *Journal of Experimental Child Psychology, 110(1),* 38-51

Smith, L. (2002). Reasoning by mathematical induction in children's arithmetic. Oxford, UK: Pergamon Press.

Sophian, C. (1998). A developmental perspective on children's counting. In C. Donlan (Ed), *The development of mathematical skills (pp. 27-46).* Hove, UK: Psychology Press.

Sophian, C., & McCorgray, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem- solving. *Cognition and Instruction, 12,* 3-33.

Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology, 126,* 120-137. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & Richards, J. (1982). Children's counting in arithmetical problem solving. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 337-355.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 16(5), 337–355.

Steinbring, H. (2005). The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective. Berlin, New York: Springer.

Sun, W., & Zhang, J. Y. (2001). Teaching addition and subtraction facts. A Chinese perspective. *Teaching Children Mathematics, 8(1),* 28-31

Tzekaki, M., & Papadopoulou, E. (2019, February). *Generalization in early arithmetic*. In Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11) (No. 27). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Van de Walle, J. A. (2004). Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally (5thed.). Boston: Pearson.

Van Nes, F., & Doorman, M. (2011). Fostering young children's spatial structuring ability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6 (1),* 27-39

Van Nes, F., & Van Eerde, D. (2010). Spatial structuring and the development of number sense: A case study of young children working with blocks. *The Journal of Mathematical Behavior, 29 (2),* 145–159.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 557-628).* Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Walker, D., Bajic, D. Mickes, L., Kwak, J., & Rickard, T. C. (2014). Specificity of children's arithmetic learning. *Journal of Experimental Child Psychology, 122,* 62–74.

Walker, D., Mickes, L., Bajic, D., Nailon, C. R., & Rickard, T. C. (2013). A test of two methods of arithmetic fluency training and implications for educational practice. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 2,* 25–32.

Wang, J. J., Odic, D., Halberda, J., & Feigenson, L. (2016). Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance. *Journal of Experimental Child Psychology, 147,* 82–99. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.03.002

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2009). Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm [*Zahlenbuch. Handbook of the early learning programme]* . Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1994). Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins (2nd ed.). Stuttgart: Klett.

Wright, R. J., Stanger, G., Stafford, A. K., & Martland, J. (2006). Teaching number in the classroom with 4–8 year olds. London: Paul Chapman/Russell Sage.

7.2. Ελληνική και μεταφρασμένη

Creswell, J. (2016). *Η έρευνα στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Ίων

Nunes, T. & Bryant, P. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά* (Σ. Λειβαδοπούλου & Γ. Σαρηγιαννίδου, μετ.). Αθήνα: Gutenberg.

Van de Walle J., Louann Lovin H., Karen Karp S., Jennifer Bay - Williams M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο. Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του.* Αθήνα: GUTENBERG

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003)*, Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών,* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (2021), ΙΕΠ, **Φ.Ε.Κ.5814Β΄/10-12-2021**

ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013. *Πρόγραμμα Σπουδών (2011) Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (Δημοτικό).

Τζεκάκη, Μ. (2007) *μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα.* Αθήνα: Εκδόσεις GUTENBERG

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία,* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

8.1. Πρωτόκολλα συνέντευξης (pre Test και post Test)

Α) Πρωτόκολλο συνέντευξης Pre Test βασισμένο σε προτεινόμενα έργα

Όνομα παιδιού	
Ηλικία	
Ημερομηνία	

1ο Έργο: «σχέση μέρους – μέρους - όλου» κάτω από 10 (3 ερωτήματα)

Πόσο κάνει	Πώς το σκέφτηκες;
4 και 2	
5 και 2	
6 και 2	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

2ο Έργο: « σχέση μέρους - μέρους - όλου» με διπλά αθροίσματα (3 ερωτήματα)

Πόσο κάνει	Πώς το σκέφτηκες;
4 και 2 και 2	
7 και 1 και 1	
4 και 3 και 3	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

3ο Έργο: «το μέρος που λείπει» - αθροίσματα (3 ερωτήματα)

Πόσα προσθέτω;	Πώς το σκέφτηκες;
Έχω 7, πώς θα γίνουν 10;	
Έχω 6, πώς θα γίνουν 10;	
Έχω 8, πως θα γίνουν 10;	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

4ο Έργο: «το μέρος που λείπει» - διαφορές (3 ερωτήματα)

Πόσα αφαιρώ	Πώς το σκέφτηκες;
Έχω 10, πώς θα γίνουν 2;	
Έχω 10, πώς θα γίνουν 6;	
Έχω 10, πώς θα γίνουν 7;	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

Β) Πρωτόκολλο συνέντευξης Post Test βασισμένο σε προτεινόμενα έργα

Όνομα παιδιού	
Ηλικία	
Ημερομηνία	

1ο Έργο: «σχέση μέρους - μέρους - όλου» κάτω από 10 (3 ερωτήματα)

Πόσο κάνει	Πώς το σκέφτηκες;
4 + 2 =	
5 + 3 =	
6 + 3 =	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

2ο Έργο: « σχέση μέρους - μέρους - όλου» με διπλά αθροίσματα (3 ερωτήματα)

Πόσο κάνει	Πώς το σκέφτηκες;
4 +2 + 2 =	
5 +2 + 2 =	
4 + 4 + 2 =	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

3ο Έργο: «το μέρος που λείπει» - αθροίσματα (3 ερωτήματα)

Πόσα προσθέτω;	Πώς το σκέφτηκες;
7 +…. = 10	
6 + …. = 10	
8 + …. =10	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

4ο Έργο: «το μέρος που λείπει» - διαφορές (3 ερωτήματα)

Πόσα αφαιρώ	Πώς το σκέφτηκες;
10 - …. = 2	
10 - …. = 6	
10 - …. = 7	
Παρατήρησες κάτι που θέλεις να πεις;	

8.2. Φύλλα παρατήρησης

ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ **ΠΡΟ - ΕΛΕΓΧΟΣ (PRE - TESTING) ΣΤΗ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΕΚΑΔΑΣ**						
Πράξεις		Στρατηγικές				
		1ο επίπεδο με υλικά ή αισθητοποίηση	2ο επίπεδο αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	3ο επίπεδο ανάκληση ή κατασκευαστική	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Α *1ο Έργο*	4 + 2 =					
	5 + 2 =					
	6 + 2 =					
Β *2ο Έργο*	4 + 2 + 2 =					
	7 + 1 + 1 =					
	4 + 3 + 3 =					
Γ *3ο Έργο*	7 + x = 10					
	6 + x = 10					
	8 + x = 10					
Δ *4ο Έργο*	10 – x = 2					
	10 - x = 6					
	10 – x = 7					

*** Παρόμοιο είναι κα το post Test

8.3. Δραστηριότητες διδακτικής παρέμβασης

▪ Περιγραφή των διδασκαλιών με δραστηριότητες για την ανάπτυξη των σταθερών σχέσεων της πρώτης δεκάδας

1η διδασκαλία

Είδος μαθηματικής δράσης: αναγνώριση σχηματικών προτύπων σε σύνολα (van de Walle, 2017)

1η δραστηριότητα

Αρχικά, η εκπαιδευτικός έχει δημιουργήσει μία συλλογή πιάτων με κολλημένες μαύρες κουκίδες ως υλικό για τις δραστηριότητες αναγνώρισης προτύπων με περισσότερες από πέντε κουκίδες που βοηθούν τα παιδιά να δουλέψουν πάνω σε πιο προχωρημένη αναγνώριση προτύπων ή στην ανάλυση, όπου βλέπουν και χρησιμοποιούν γρήγορα τις μικρές ομάδες εντός ενός μεγαλύτερου συνόλου για να διαπιστώσουν γρήγορα πόσες είναι οι κουκίδες.

Δράση: Τα παιδιά δουλεύουν ατομικά. Δίνονται στα παιδιά 10 περίπου καπάκια ίδιου χρώματος και μεγέθους, και ένα χάρτινο πιατάκι για επιφάνεια εργασίας. Η εκπαιδευτικός δείχνει για μερικά δευτερόλεπτα το δικό της πιάτο και λέει: «Φτιάξτε το σχέδιο που είδατε στο δικό σας πιάτο με τα καπάκια σας. Πόσες κουκίδες είδατε; Με τι έμοιαζε το σχέδιο;». Στόχος της γρήγορης παρουσίασης είναι να παρακινήσει τα παιδιά να ξεπεράσουν το στάδιο της απαρίθμησης ανά μονάδες.

Σχολιάζουμε για λίγο τη διάταξη και το πλήθος των κουκίδων. Ο έλεγχος γίνεται, όταν η εκπαιδευτικός ξαναδείχνει το πιάτο με τις κουκίδες και τα παιδιά αξιολογούν τη δουλειά τους. Η δραστηριότητα επαναλαμβάνεται και με άλλα πρότυπα.

Υλικό: συλλογή πιάτων με κουκίδες, πιατάκια, καπάκια ή πούλια.

2η δραστηριότητα

Παιχνίδι - ταχύτητας: Η εκπαιδευτικός δείχνει ένα πιάτο με κουκίδες μόνο για ελάχιστα δευτερόλεπτα και ρωτά πόσες κουκίδες βλέπουν και με τι μοιάζει το σχέδιο. Αρχικά η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τα εύκολα πρότυπα (πχ ζάρι) και μόλις αποκτήσουν περισσότερη σιγουριά, δυσκολεύει το πρότυπο.

Τα παιδιά κάνουν την δραστηριότητα ομαδικά, μεταξύ τους, καθώς τους ενθουσιάζει η πρόκληση της ταχύτητας αναγνώρισης.

2η διδασκαλία

Είδος μαθηματικής δράσης: συνθέσεις αριθμών στην πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2010)

1η δραστηριότητα

Παιχνίδι ταχύτητας: Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η εκπαιδευτικός ρίχνει κάρτες στο πάτωμα με σχηματισμούς από 0 - 10. Η κάθε ομάδα που παίζει κληρώνει έναν αριθμό συμβολικό ή λεκτικό, η εκπαιδευτικός δίνει το σύνθημα και σε περιορισμένο χρόνο η ομάδα βρίσκει όσες περισσότερες κάρτες μπορεί που να αθροίζουν αυτόν τον αριθμό. Η τάξη ελέγχει τις κάρτες και αναπτύσσεται το σχετικό λεξιλόγιο.

2η δραστηριότητα

Η δραστηριότητα αυτή είναι επέκταση της προηγούμενης. Η εκπαιδευτικός δείχνει δύο κάρτες στα παιδιά για λίγα δευτερόλεπτα και τα παιδιά βρίσκουν το άθροισμα. Τα παιδιά σχεδιάζουν όλες τις περιπτώσεις που δίνουν ίδιο άθροισμα στο τετράδιό τους με τα τετραγωνάκια, έτσι γίνεται ο έλεγχος με μέτρηση και αναπτύσσεται το σχετικό λεξιλόγιο.

3η διδασκαλία

Είδος μαθηματικής δράσης: συμπληρώματα ποσοτήτων – βάση των 10 (ten-frame) (Van de Walle, 2017)

1η δραστηριότητα

Με αυτή την δραστηριότητα η εκπαιδευτικός βοηθά τα παιδιά να συνδέσουν έναν ορισμένο αριθμό με άλλους και ειδικότερα με το 5 και 10. Σχέσεις ιδιαίτερα χρήσιμες όταν σκέφτεται κανείς διάφορους συνδυασμούς αριθμών.

Η εκπαιδευτικός δίνει σε κάθε μαθητή ένα πλαίσιο των 10 (ten-frame), εξηγώντας ότι σε κάθε θέση του πλαισίου μπαίνει μόνο ένα καπάκι. Ο πρώτος κανόνας είναι να γεμίσουν πρώτα την πάνω σειρά (σειρά με 5) αρχίζοντας από τα αριστερά, όπως διαβάζουν. Όταν γεμίσει η πάνω σειρά, τα καπάκια μπορούν να μπουν στην κάτω σειρά, επίσης αρχίζοντας από τα αριστερά. Η εκπαιδευτικός στρέφει την προσοχή στο πλαίσιο των 10 με ερωτήσεις:

- Τι σημαίνει η γεμάτη σειρά στο πλαίσιο των 10;
- Τι θα κοιτάξεις στο πλαίσιο των 10 για να βρεις πόσα είναι;
- Με ποιο τρόπο σε βοηθά η πάνω σειρά να καταλάβεις πόσα είναι;

Δράση «Οι τρελοί μπερδεμένοι αριθμοί» (λειτουργεί ως πρόβλημα)

Αφού τα παιδιά έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση του πλαισίου των 10 η εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να φτιάξουν τον ίδιο αριθμό στο πλαίσιο των 10. Στη συνέχεια λέει τυχαίους αριθμούς από το 0 ως το 10. Έπειτα από κάθε αριθμό, τα παιδιά κάνουν αλλαγές στο πλαίσιό τους, ώστε να φτιάξουν τον καινούργιο αριθμό.

Επιπλέον η εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να λένε *πριν κάνουν τις αλλαγές στα πλαίσια τους*, πόσα ακόμη καπάκια πρέπει να προσθέσουν (συν) ή να αφαιρέσουν (μείον). Μετά θα λένε το ανάλογο ποσό που πρέπει να προστεθεί ή να αφαιρεθεί.

Για παράδειγμα, στο πλαίσιο των 10, υπάρχει ο αριθμός 6. Η εκπαιδευτικός λέει το 4, τα παιδιά θα απαντήσουν «μείον 2» και μετά κάνουν τις ανάλογες αλλαγές στο πλαίσιο και ελέγχουν.

Στο τέλος η εκπαιδευτικός ρωτά πώς βρήκαν τι έπρεπε να κάνουν.

2η δραστηριότητα

Παιχνίδι ταχύτητας με τα πλαίσια των δέκα: η εκπαιδευτικός δείχνει στιγμιαία κάρτες με πλαίσια των 10 σε όλη την τάξη και ζητάει από τα παιδιά να απαντήσουν γρήγορα στην ερώτηση πόσες είναι όλες οι κουκίδες. Στη συνέχεια κάνει παραλλαγές στις ερωτήσεις, όπως

- Πόσα ήταν τα κενά στο πλαίσιο;
- Πείτε ένα παραπάνω από τον αριθμό των κουκίδων ή δύο παραπάνω ή ένα λιγότερο ή δύο λιγότερο
- Τα παιδιά λένε και το «βασικό δεδομένο του 10», πχ. «7 και 3 κάνουν 10»

Η δραστηριότητα έχει γρήγορο ρυθμό, διαρκεί μερικά λεπτά και διατηρεί το ενδιαφέρον των παιδιών.

4η διδασκαλία

Είδος μαθηματικής δράσης: ανάλυση και σύνθεση ποσοτήτων, αντίληψη του μέρους και του όλου (Τζεκάκη, 2010)

1η δραστηριότητα

Τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια. Κάθε παιδί έχει 5, 6, 7, 8, 9, 10 μικρά ξύλινα κυβάκια. Το ένα παιδί χωρίζει την ποσότητα, παρουσιάζει στο χέρι του τη μία ποσότητα και κρύβει την υπόλοιπη σε ένα ποτήρι. Πόσα κυβάκια είναι κρυμμένα; Ο κανόνας είναι «βρίσκω πόσα λείπουν», ο νικητής παίρνει τη σειρά. Η δραστηριότητα παρέχει δυνατότητα συζήτησης μεταξύ των παιδιών με συγκεκριμένο λεξιλόγιο, οι απαντήσεις ελέγχονται δείχνοντας την κρυμμένη ποσότητα.

2η δραστηριότητα

Η εκπαιδευτικός προεκτείνει την προηγούμενη δραστηριότητα δείχνοντας στα παιδιά αριθμοκάρτες και δεδομένο άθροισμα, όπου τους λείπει το ένα μέρος. Τα παιδιά καλούνται να το βρουν. Κερδίζει όποιο παιδί βρίσκει τις πιο πολλές κάρτες.

5η διδασκαλία

Είδος μαθηματικής δράσης: νοερά αθροίσματα και διαφορές ως το 10 (παραλλαγή από Van de Walle, 2017)

1η δραστηριότητα

Παιχνίδι: Τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια. Η εκπαιδευτικός έχει φτιάξει για κάθε ζευγάρι ένα ταμπλό «Strike» με πλαίσιο που παραπέμπει στο παιχνίδι μπόουλινγκ και έχει τυπωμένους τους αριθμούς 1 έως 10, τους δίνει κάρτες με αριθμούς από 1 έως 5. Ένα παιδί επιλέγει τρεις τυχαίες κάρτες (πχ 1, 3, 4). Στόχος είναι κάνοντας πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μόνο με αυτούς τους αριθμούς να κατασκευάσουν όλους τους αριθμούς από το 1 έως 10, διαγράφοντας κάθε φορά τον αριθμό που βρήκαν, ώστε να κάνουν strike. Βασικοί κανόνες είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιούν τους αριθμούς και δύο φορές μέσα στην πράξη, αλλά όχι τρεις (πχ. για τον αριθμό 10 κάνουν 4 + 4 + 1 + 1) και ότι μπορούν να χρησιμοποιούν και δύο μόνο από τους αριθμούς που επέλεξαν. Νικητής είναι όποιος βρει πρώτος όλους τους συνδυασμούς (κάνει δηλαδή, strike).

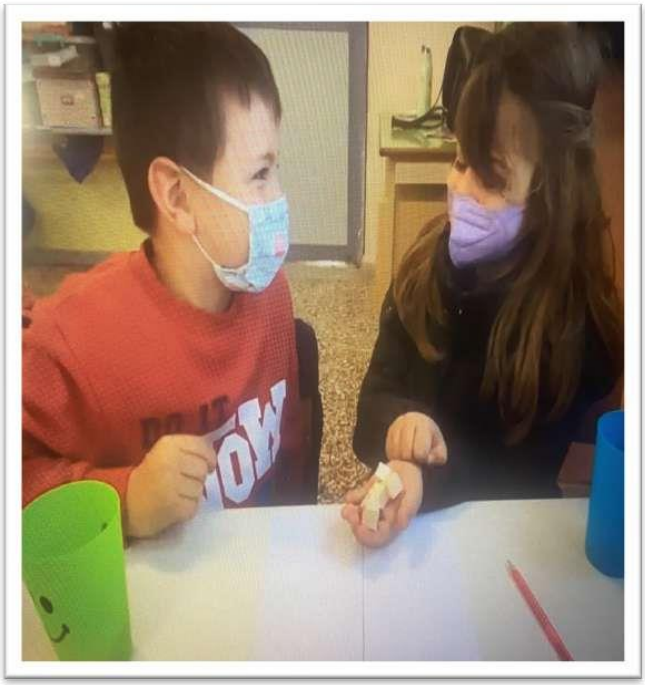
2η δραστηριότητα

Παιχνίδι: «Γύρισε και πρόσθεσε», τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια. Η εκπαιδευτικός δίνει σε κάθε ζευγάρι ένα κυκλικό ταμπλό με περιστρεφόμενο δείκτη με τους αριθμούς 0 - 9 και 12 κάρτες με τη μορφή «πλαισίου των 10», που παριστάνουν τους αριθμούς 0 - 10. Κάθε παιδί παίρνει από 6 κάρτες, τις οποίες γυρίζει προς τα κάτω. Το παιδί που ξεκινάει γυρίζει τον τροχό. Αν έχει κάρτα που να συμπληρώνει δεκάδα, τότε γυρίζει την κάρτα προς τα πάνω. Για παράδειγμα, αν φέρει 4, αναποδογυρίζει την κάρτα που δείχνει 6, γιατί 6 + 4 = 10. Αν δεν έχει κάρτα, παίζει ο επόμενος παίκτης. Νικητής είναι όποιος αναποδογυρίσει πρώτος όλες τις κάρτες.

8.4 Φωτογραφικό υλικό

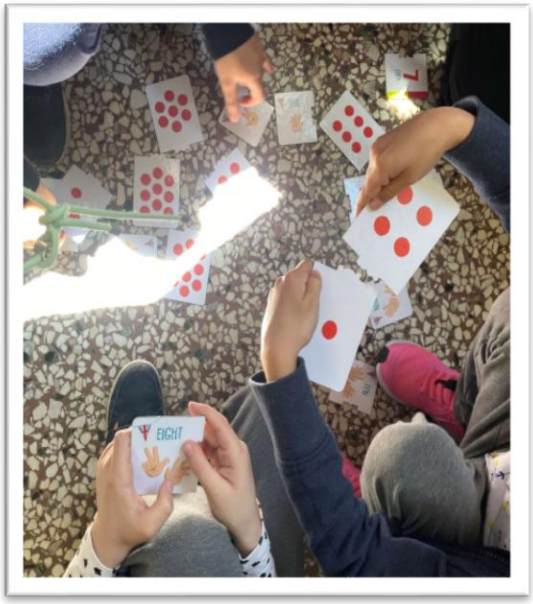
«γύρισε και πρόσθεσε»

«Κρυμμένοι αριθμοί»- το μέρος που λείπει

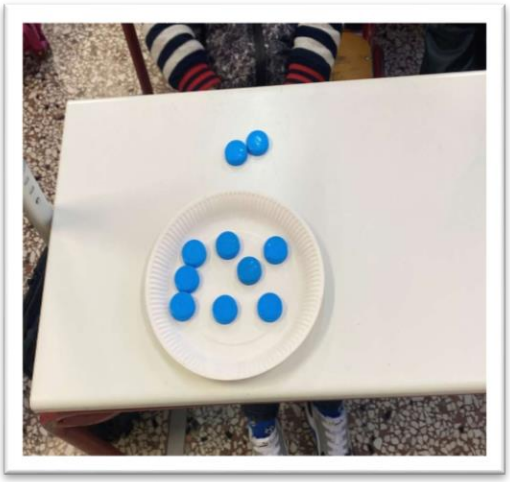


"Παίζουμε μαθηματικά;"

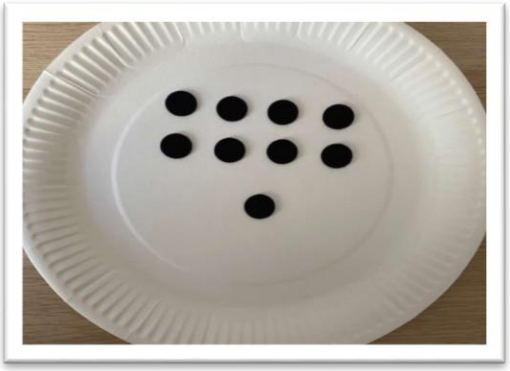
Συνθέσεις αριθμών



Σχηματισμοί προτύπων (άμεση αναγνώριση)



Το σχηματικό πρότυπο στο οποίο αναφέρονται τα παιδιά (σελ.49)



Μετασχηματισμοί στο "πλαίσιο των δέκα"

8.5. Πίνακες

Α) ΠΡΟ - ΕΛΕΓΧΟΣ

Πίνακας 2. *1ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους όλου» - αθροίσματα που δεν ξεπερνούν τη δεκάδα (α + β < 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	5	5	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	11	11	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Πίνακας 3. *2ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους όλου» με διπλά αθροίσματα (α + α + β)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	5	5	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	11	11	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Πίνακας 4. *3ο Έργο: Το μέρος που λείπει – αθροίσματα (α + x = 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	7	5	2
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	10	9	1
3ο επίπεδο - ανάκληση	8	8	0
Σύνολα	**25**	**22**	**3**

Πίνακας 5. *4ο Έργο: Το μέρος που λείπει - διαφορές (10 - x = α)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (διαχωρισμός από)	7	7	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	13	10	3
3ο επίπεδο - ανάκληση	5	5	0
Σύνολα	**25**	**22**	**3**

Β) ΜΕΤΑ - ΕΛΕΓΧΟΣ

Πίνακας 6. *1ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους - όλου» - αθροίσματα που δεν ξεπερνούν τη δεκάδα (α + β < 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	2	2	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	4	4	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	19	19	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Πίνακας 7. *2ο Έργο: Σχέση «μέρους - μέρους - όλου» συμπεριλαμβανομένων των διπλών αθροισμάτων (α + α + β)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	2	2	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	4	4	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	19	19	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Πίνακας 8. *3ο Έργο: Το μέρος που λείπει - αθροίσματα (α + x = 10)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/ χρήση υλικού (απαρίθμηση όλων)	4	4	0
2ο επίπεδο - αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	7	7	0
3ο επίπεδο - ανάκληση	14	14	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Πίνακας 9. *4ο Έργο: Το μέρος που λείπει - διαφορές (10 - x = α)*

Αποτελέσματα	**Μαθητές n=25**	**Σωστή Απάντηση**	**Λάθος Απάντηση**
1ο επίπεδο - αισθητοποίηση/χρήση υλικού (διαχωρισμός από)	4	4	0
2ο επίπεδο – αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	9	9	0
3ο επίπεδο – ανάκληση	12	12	0
Σύνολα	**25**	**25**	**0**

Γ) ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΙ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Πίνακας 10. *Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων (pre - post Tests) στο 1ο επίπεδο στρατηγικής*

1ο επίπεδο / αισθητοποίηση Απαρίθμηση όλων / διαχωρισμός από	**1ο Έργο**		**2ο Έργο**		**3ο Έργο**		**4ο Έργο**	
Πριν την παρέμβαση	5	20%	5	20%	7	28%	7	28%
Μετά την παρέμβαση	2	8%	2	8%	4	16%	4	16%

Πίνακας 11. *Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων (pre – post Tests) στο 2ο επίπεδο στρατηγικής*

2ο επίπεδο / αρίθμηση με ακολουθία αριθμών	**1ο Έργο**		**2ο Έργο**		**3ο Έργο**		**4ο Έργο**	
Πριν την παρέμβαση	9	36%	9	36%	10	40%	13	52%
Μετά την παρέμβαση	4	16%	4	16%	7	28%	9	36%

Πίνακας 12. *Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων (pre – post Tests) στο 3ο επίπεδο στρατηγικής*

3ο επίπεδο / ανάκληση	**1ο Έργο**		**2ο Έργο**		**3ο Έργο**		**4ο Έργο**	
Πριν την παρέμβαση	11	44%	11	44%	8	32%	5	20%
Μετά την παρέμβαση	19	76%	19	76%	14	56%	12	48%