ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός Κύκλος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η επίδραση του φαινομενικού προσήμου στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων: Μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα.»

Καραγιαννίδου Ελένη

ΑΕΜ: 1013

Θεσσαλονίκη, 2022

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διιδρυματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών:

«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Και εγκρίθηκε στις 25 / 06 / 2022 από την εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο		Υπογραφή
1. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου (επιβλέπων καθηγητής)	Επίκουρο Καθηγητή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	………………….
2. Βαμβακούση Ξένια	Επίκουρη Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	………………….
3. Καλδρυμίδου Μαρία	Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	………………….

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Π. Χρήστου, ο οποίος με τις συμβουλές του και τις εύστοχες παρατηρήσεις του με βοήθησε με ουσιαστικό τρόπο στην προετοιμασία, στην διεξαγωγή της έρευνας και στην συγγραφή της διπλωματικής εργασίας. Επιπλέον, οφείλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στις κυρίες Βαμβακούση Ξ. και Καλδρυμίδου Μ., μέλη της τριμελούς επιτροπής, των οποίων οι υποδείξεις ήταν πολύτιμες.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον διευθυντή και στην υποδιευθύντρια του Γυμνασίου για την ευκαιρία που μου έδωσαν να υλοποιήσω την έρευνά μου στο σχολείο τους. Η προθυμία και το συνεργατικό τους πνεύμα θα μου μείνουν αξέχαστα.

Ακόμη, ευχαριστώ τους γονείς των μαθητών/τριων και τους/τις ίδιους/ες τους/τις μαθητές/τριες που δέχθηκαν να λάβουν μέρος στην έρευνα. Η συμμετοχή των παιδιών ήταν ιδιαιτέρως σημαντική.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου, που στέκονται πάντα δίπλα μου στηρίζοντας όλες τις αποφάσεις μου και τις συμφοιτήτριες και φίλες Αναστασία, Σοφία και Στεφανία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σημασία της κατανόησης εξισώσεων και των ανισώσεων από τους/τις μαθητές/τριες είναι μεγάλη, τόσο για την μετέπειτα πορεία τους στο σχολείο όσο και για την καθημερινή τους ζωή. Ωστόσο, πολλοί/ες μαθητές/τριες Γυμνασίου αντιμετωπίζουν δυσκολίες και παρανοήσεις που μειώνουν την ικανότητά τους να επιλύουν και να ερμηνεύουν με ακρίβεια εξισώσεις και ανισώσεις. Πληθώρα ερευνών σε μαθητές/τριες δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ανέδειξε την τάση των παιδιών να αντιμετωπίζουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς τους οποίους όμως τείνουν να αντικαθιστούν με φυσικούς αριθμούς. Η τελευταία διαπίστωση μπορεί να ερμηνεύσει λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις τα οποία προκύπτουν ως αποτέλεσμα του τρόπου που οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τα αλφαβητικά σύμβολα που αναπαριστούν αγνώστους. Μια παρερμηνεία που προκύπτει από αυτή την τάση ονομάζεται «παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου» που είναι η τάση των παιδιών να θεωρούν πως το πρόσημο που φαίνεται να έχουν οι μεταβλητές ή οι παραστάσεις είναι το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορούν να αναπαραστήσουν. Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει εάν κάποια λάθη των παιδιών σε εξισώσεις και ανισώσεις προέρχονται από την τάση τους να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς και την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Επιπλέον, διερευνά αν μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να κάνουν λιγότερα τέτοια λάθη και τη συγκρίνει με μια παρέμβαση με ορθά λυμένα παραδείγματα. Λανθασμένα είναι τα παραδείγματα στα οποία γίνεται μια βήμα – προς – βήμα περιγραφή της μεθόδου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, όπου ένα ή περισσότερα βήματα περιέχουν συνήθη λάθη των παιδιών, όπως αυτά αναδεικνύονται από τη βιβλιογραφία. Στην έρευνα συμμετείχαν 109 μαθητές/τριες χωρισμένοι σε δυο ομάδες: την Ομάδα Παρέμβασης με Λανθασμένα και την Ομάδα Ελέγχου με Ορθά παραδείγματα. Η έρευνα περιλάμβανε τρεις φάσεις (προ-έλεγχος, μετά–έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος). Ως εργαλεία χρησιμοποιήθηκαν τρία σχεδόν ίδια ερωτηματολόγια. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου και η τάση των μαθητών/τριων να θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς, είχαν ως αποτέλεσμα να μην μπορούν να βρουν λύσεις σε εξισώσεις και ανισώσεις. Η διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα ήταν το ίδιο αποτελεσματική με τη διδακτική παρέμβαση με ορθά λυμένα παραδείγματα, βοηθώντας τους/τις μαθητές/τριες να περιορίσουν τα λάθη που έκαναν στην εύρεση λύσεων τόσο στις εξισώσεις όσο και στις ανισώσεις. Παρόλα αυτά, η αποτελεσματικότητα της παρέμβασης δεν διατηρήθηκε τόσο υψηλή, έναν μήνα μετά. Θεωρητικές και παιδαγωγικές εφαρμογές συζητιούνται.

Λέξεις κλειδιά: φαινομενικό πρόσημο, παρερμηνεία φαινομενικού προσήμου, λανθασμένα παραδείγματα, διδακτική παρέμβαση, εξίσωση, ανίσωση

ABSTRACT

The importance of students' understanding of equations and inequalities is great, both for their subsequent course in school and for their daily life. However, many high school students face difficulties and misunderstandings that reduce their ability to solve and interpret equations and inequalities accurately. Numerous surveys have highlighted the tendency of children to treat letters as generalized numbers which they tend to replace with natural numbers. The latter finding may explain errors in equations and inequalities that arise as a result of the way students perceive alphabetic symbols representing unknowns. A misunderstanding that arises from this tendency is called "phenomenal sign bias" which is the tendency of children to think that the sign that variables or mathematical expressions seem to have is the actual sign of the numbers they can represent. This report aims to investigate whether some students' errors in equations and inequalities stem from their tendency to regard letters as symbols representing only natural numbers and the "phenomenal sign bias". In addition, it explores whether a teaching intervention with erroneous examples can help students make fewer such mistakes and compares it to an intervention with correctly worked examples. Erroneous called the examples in which a step-by-step description of the method of solving a mathematical problem is made, where one or more steps contain common mistakes of children, as they are highlighted in the literature. From the 109 9^{th} grade students that participated in Pre/ Post/ Retention-test intervention study, experimental group received erroneous examples and control group received correctly worked examples. Three almost identical questionnaires were used. The results showed that the presence of the "phenomenal sign bias" and the students' tendency to consider the letters as natural numbers, resulted in not finding solutions to equations and inequalities. Teaching intervention with erroneous examples was as effective as teaching intervention with applications, helping students to reduce the mistakes they made in finding solutions to both equations and inequalities. However, the results did not have a long-term effect. Theoretical and educational implications are discussed.

Keywords: phenomenal sign, phenomenal sign bias, erroneous examples, teaching intervention, equation, inequality

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η άλγεβρα αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της ύλης των σχολικών μαθηματικών καθώς συνδέει την αριθμητική με τα ανώτερα μαθηματικά (Jacobson, 2000; McGinn, Lange, & Booth, 2015). Σύμφωνα με την Clark (2014), η διδασκαλία αλγεβρικών εννοιών στο σχολείο ωφελεί σημαντικά τους/τις μαθητές/τριες αποσκοπώντας στην απόκτηση καίριων μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, όπως η κριτική σκέψη, η διαχείριση πληροφοριών και η επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας. Ως συνέπεια, η κατανόηση της άλγεβρας από τα παιδιά σχολικής ηλικίας αποτελεί έναν από τους κυριότερους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Chow, 2011). Μεταξύ των επιμέρους στόχων περιλαμβάνονται, επίσης, η κατανόηση και χρήση μαθηματικών συμβόλων και αναπαραστάσεων (Duru & Koklu, 2011).

Συχνά, η άλγεβρα διδάσκεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην γίνεται φανερή η σχέση της με τις προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητών/τριων (Carraher & Schliemann, 2007), γεγονός που τους προκαλεί δυσκολίες, παρανοήσεις και προκλήσεις (Chow, 2011). Οι εξισώσεις και οι ανισώσεις κατέχουν κεντρική θέση στην ύλη της άλγεβρας Γυμνασίου και η κατανόησή τους είναι σημαντική ώστε οι μαθητές/τριες να μπορέσουν στη συνέχεια να κατακτήσουν ανώτερες μαθηματικές έννοιες και γνώσεις (Capraro & Joffrion, 2006; Verikios & Farmaki, 2010). Τόσο η έννοια της εξίσωσης όσο κι εκείνη της ανίσωσης έχουν εισαχθεί νωρίς στη σχολική ζωή των παιδιών. Η μεν έννοια της εξίσωσης διδάσκεται στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού, ενώ η δε γνωριμία των παιδιών με τις ανισώσεις πραγματοποιείται μέσα από τη σύγκριση αριθμών σε όλη τη διάρκεια του Δημοτικού.

Πολλοί/ες μαθητές/τριες ερχόμενοι/ες σε επαφή με εξισώσεις και ανισώσεις αντιμετωπίζουν δυσκολίες και παρανοήσεις που μειώνουν την ικανότητά τους να τις επιλύουν και να τις ερμηνεύουν με ακρίβεια (Almog & Ilany, 2012; Tsamir & Bazzini, 2004; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Μέρος των δυσκολιών και παρανοήσεων που παρουσιάζονται μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις περιλαμβάνουν γράμματα ως μέσο συμβολισμού των άγνωστων ποσοτήτων. Μάλιστα, και στις δυο περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες καλούνται να διαχειριστούν μαθηματικές δηλώσεις που εκφράζουν την ισότητα ή την ανισότητα μεταξύ δυο μαθηματικών εκφράσεων που συνδέουν γνωστές και άγνωστες ποσότητες οι οποίες θα πρέπει να προσδιοριστούν. Κατ΄ επέκταση, η κατανόηση της έννοιας και της χρήσης των γραμμάτων που συμβολίζουν αγνώστους ενισχύει την ικανότητά τους να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις (Bennett, 2015; Falkner, Levi, & Carpenter, 1999).

Οι προηγούμενες δυσκολίες μπορούν να συνδεθούν με το γεγονός ότι τα παιδιά εκτελούν μετασχηματισμούς με σύμβολα χρησιμοποιώντας μια φορμαλιστική δομή βασισμένη σε συγκεκριμένους κανόνες μη δίνοντας την απαραίτητη βάση στο αναφορικό νόημα των συμβόλων στην άλγεβρα (βλ. Resnick 1991) και την άρρηκτη σχέση μεταξύ αριθμού και συμβόλου. Το αναφορικό νόημα συμβόλων και αλγεβρικών παραστάσεων προέρχεται από τις καταστάσεις στις οποίες αναφέρονται και αφορούν στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων ή στη σύνδεση των συμβόλων με αριθμούς (Χρήστου, 2009; Resnick, 1991; Schoenfeld, 2008). Δηλαδή, κάποια λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις αποτελούν συνέπεια του περιορισμού του αναφορικού νοήματος ενός αλφαβητικού συμβόλου (βλ. Resnick, 1991) ή του σημασιολογικού νοήματος των εξισώσεων (Schoenfeld, 2008). Τέτοια λάθη τα οποία έχουν αναδειχθεί από προγενέστερες μελέτες αφορούν την τάση των παιδιών να αντικαθιστούν τα αλφαβητικά σύμβολα με φυσικούς αριθμούς και να ταυτίζουν το φαινομενικό πρόσημο με το πραγματικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων (βλ. Christou & Vosniadou, 2012).

Έρευνες σε μαθητές/τριες δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (βλ. Christou & Vosniadou, 2012; Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018 ˙ Χρήστου, 2009) ενίσχυσαν την υπόθεση πως τα παιδιά έχουν την τάση να αντιμετωπίζουν τα γράμματα στην άλγεβρα ως γενικευμένους αριθμούς τους οποίους αντικαθιστούν κυρίως με φυσικούς αριθμούς. Η τάση αυτή των μαθητών/τριων θα μπορούσε να έχει δυσμενείς επιδράσεις, ιδιαίτερα στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεις καθώς σε αυτές τα αλφαβητικά σύμβολα και οι τιμές που αναπαριστούν έχουν κεντρικό ρολό. Μάλιστα, έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές/τριες φαίνεται να ακολουθούν με τελετουργικό τρόπο τη διαδικασία επίλυσης που έχουν διδαχθεί και να μην κατανοούν την έννοια των συμβόλων, των πράξεων και των αλγεβρικών εκφράσεων που συναντούν (Linchevski & Herscovics, 1996). Αν οι μαθητές/τριες θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς και ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης είναι το πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει, τότε θα κάνουν λάθη και έχουν χαμηλές επιδόσεις σε συγκεκριμένα πλαίσια επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων

Συνοψίζοντας, ένας από τους λόγους εμφάνισης λαθών σε εξισώσεις και ανισώσεις θα μπορούσε να είναι η τάση των μαθητών/τριων να προβάλλουν τις γνώσεις τους στους φυσικούς αριθμούς, σε μαθηματικό πλαίσιο όπου εισάγονται οι μη φυσικοί, όπως οι τιμές των μεταβλητών στις αλγεβρικές εκφράσεις (Christou, Vosniadou, & Vamvakoussi, 2007). Μια παρερμηνεία που προκύπτει από την προαναφερθείσα τάση είναι εκείνη του «φαινομενικού προσήμου», όπου οι μαθητές/τριες ταυτίζουν το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια μεταβλητή με το πραγματικό πρόσημο της τιμής που αναπαριστά (Χρήστου, 2009). Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου παρατηρείται και στην περίπτωση αλγεβρικών παραστάσεων (Christou, 2017), ενώ επεκτείνεται και στον τρόπο που τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις μεταβλητές σε εξισώσεις και ανισώσεις (Christou & Vosniadou, 2007).

Σε συνέχεια του μεγάλου ενδιαφέροντος των ερευνητών για τις παρανοήσεις που παρουσιάζουν οι μαθητές/τριες στα μαθηματικά, ορισμένες μελέτες διερεύνησαν την αποτελεσματικότητα λανθασμένων παραδειγμάτων για την υπέρβασή τους (βλ. Barbieri & Booth, 2020; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Αυτές οι μελέτες αξιοποίησαν λανθασμένα παραδείγματα για να ισχυροποιήσουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών/τριων σε διάφορα πεδία της σχολικής άλγεβρας, όπως τα κλάσματα, η επίλυση εξισώσεων, λεκτικών προβλημάτων και γραμμικών συστημάτων. Ωστόσο, τα λανθασμένα παραδείγματα δεν αξιοποιήθηκαν έως και σήμερα για την υπέρβαση παρανοήσεων σχετικών με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, όπως η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην ερμηνεία της τάσης των μαθητών/τριων που φοιτούν στη Γ΄ Γυμνασίου να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών και να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο ως το πρόσημο των τιμών που μια αλγεβρική έκφραση μπορεί να αναπαραστήσει. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της εργασίας είναι να διερευνήσει εάν η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου και η τάση των μαθητών/τριων να θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς ευθύνεται για κάποια λάθη των παιδιών σε εξισώσεις και ανισώσεις. Επιπλέον, διερευνά αν μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα μπορεί να βοηθήσεις τους μαθητές/τριες να κάνουν λιγότερα τέτοια λάθη σε σχέση με μια παρέμβαση με ορθά λυμένα παραδείγματα.

Για την επίτευξη του παραπάνω σκοπού, χρησιμοποιήθηκαν τρία παρόμοια ερωτηματολόγια (ΕΡ/Ε1, ΕΡ/Ε2, ΕΡ/Ε3) που περιλάμβαναν 18 ασκήσεις (9 εξισώσεις και 9 ανισώσεις). Σε κάθε μια από τις 18 ασκήσεις, οι μαθητές/τριες έπρεπε να υποστηρίξουν την ύπαρξη ή την απουσία λύσεων αιτιολογώντας την επιλογή τους. Επιπλέον, σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα. Για το λόγο αυτό, οι συμμετέχοντες/ουσες χωρίστηκαν σε δυο ομάδες: την Πειραματική και την Ομάδα Ελέγχου. Η διδακτική παρέμβαση εφαρμόστηκε στην Πειραματική Ομάδα και περιλάμβανε 4 λανθασμένα παραδείγματα ανισώσεων. Συμπεριλήφθηκαν αποκλειστικά ανισώσεις με στόχο να ελεγχθεί αν τα αποτελέσματά της παρέμβασης θα μεταφερόταν και στις εξισώσεις. Στην Ομάδα Ελέγχου δόθηκαν 3 ορθά λυμένα παραδείγματα ανισώσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης σχετικά με: α) τη σημαντικότητα της κατανόησης των εξισώσεων και ανισώσεων από μαθητές/τριες και τις δυσκολίες ή παρανοήσεις που συνήθως παρουσιάζουν, β) την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου και γ) τα αποτελέσματα προγενέστερων μελετών οι οποίες χρησιμοποίησαν λανθασμένα παραδείγματα. Στο κεφάλαιο που διαδέχεται την βιβλιογραφική επισκόπηση (κεφάλαιο δεύτερο), παρουσιάζεται η ερευνητική υπόθεση, ο σκοπός και τα ερωτήματα της παρούσας μελέτης. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική παρουσίαση της μεθοδολογίας. Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα τα οποία συζητιούνται σε σχέση με τα ευρήματα προηγούμενων συναφών μελετών. Σε αυτό το κεφάλαιο καταγράφονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Τέλος, στο παράρτημα της παρούσας εργασίας επισυνάπτονται τα ερευνητικά εργαλεία που αξιοποιήθηκαν.

2. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

2.1. Εξισώσεις

2.1.1. Έννοια, λύση, τρόπος έκφρασης και διδασκαλία της εξίσωσης στο Γυμνάσιο

Μια από τις διδασκόμενες αλγεβρικές έννοιες στο σχολείο είναι εκείνη της εξίσωσης. Ως εξίσωση ορίζεται η μαθηματική δήλωση η οποία βεβαιώνει πως δυο εκφράσεις είναι μεταξύ τους ίσες. Έχει δυο μέλη τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους με το σύμβολο του ίσου (=) και κάθε μέλος αποτελείται από επιμέρους όρους. Συνεπώς, περιλαμβάνει αριθμούς, γράμματα, σύμβολα πράξεων και το σύμβολο του ίσου. Είναι, δηλαδή, η ισότητα η οποία συνδέει γνωστές με άγνωστες ποσότητες τις οποίες επιθυμούμε να προσδιορίσουμε (Blanton, Levi, Crites, Dougherty, & Zbiek, 2011; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, & McEldoon, 2011). Οι άγνωστες τιμές συμβολίζονται συνήθως με το γράμμα «x» ή με το γράμμα «y». Ως λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης, καλείται ο αριθμός ο οποίος όταν λάβει τη θέση του γράμματος (αγνώστου) επαληθεύει την ισότητα (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2011).

Ανάλογα με τη βαθμίδα και την τάξη στην οποία διδάσκεται, η εξίσωση, ορίζεται απλούστερα ή πιο σύνθετα και παρουσιάζεται στους/στις μαθητές/τριες. Επιπλέον, εκτός από τον τρόπο ορισμού της έννοιας, με το πέρασμα των τάξεων παρατηρείται και διαφοροποίηση στον τρόπο διδασκαλίας της επίλυσής της. Έτσι, η έννοια της εξίσωσης παρουσιάζεται με απλοϊκό τρόπο στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου και συγκεκριμένα ως μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (Βανδουλάκης κ.α., 2011˙ Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, 2011). Σε αυτές τις τάξεις, οι μαθητές/τριες διδάσκονται τις εξισώσεις κατηγοριοποιημένες σύμφωνα με τη δομή τους. Η εκάστοτε δομή της εξίσωσης είναι κι εκείνη που καθορίζει την τρόπο λύσης (Βανδουλάκης κ.α., 2011 ˙ Κασσώτη, κ.α., 2011). Δηλαδή, η επίλυση εξισώσεων μετατρέπεται σε μια διαδικασία άμεσης αντιστοίχισης μεταξύ δομής και τύπου επίλυσης, με αποτέλεσμα πολλά παιδιά να αποστηθίζουν και όχι να κατανοούν την διαδικασία εύρεσης τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση (English & Halford, 2012), καθώς η έλλειψη κατανόησης καθιστά τη διαδικασία επίλυσης εξίσωσης σχεδόν αδύνατη (Norton &

Cooper, 2001). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι εξισώσεις και ο τρόπος λύσης τους, όπως διδάσκονται στο Δημοτικό και στην Α΄ Γυμνασίου:

Πίνακας 1. Μορφές και λύση εξισώσεων, όπως διδάσκεται στην Στ΄ Δημοτικού και στην Α΄ Γυμνασίου

Μορφές εξισώσεων	Λύση εξισώσεων
$x + α = β$	$x = β - α$
$x – α = β$	$x = β + α$
$α – x = β$	$x = α - β$
$α \cdot x = β$	$x = α : β$
$x : α = β$	$x = β \cdot α$
$α : x = β$	$x = α \cdot β$

(Βανδουλάκης κ.α., 2011˙ Κασσώτη κ.α., 2011)

Λίγο αργότερα, στη Β΄ Γυμνασίου, οι μαθητές/τριες διδάσκονται την έννοια της εξίσωσης ως *«η ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό x»* (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, & Ρεκούμης, 2008: 17). Για την επίλυσή της, τα παιδιά διδάσκονται πως υπάρχουν επιμέρους βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν. Τα βήματα αυτά είναι τα ακόλουθα: (1) απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν), (2) εκτέλεση πράξεων και στα δυο μέλη της εξίσωσης, (3) χωρισμός γνωστών από αγνώστους σε διαφορετικά μέλη της εξίσωσης, (4) αναγωγή όμοιων όρων και (5) διαίρεση και των δυο μελών της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου (Βλάμος κ.α., 2008).

Περνώντας στη Γ΄ Γυμνασίου, το σχολικό εγχειρίδιο προχωρά σε διάκριση μεταξύ πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις παρουσιάζονται με τη μορφή $αx + β = 0$, $α \neq 0$ και για την λύση τους οι μαθητές/τριες διδάσκονται τα ακόλουθα:

- Αν $α \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδική λύση $x = -\frac{β}{α}$
- Αν $α = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται ως $0x = - β$ και
  - αν $β \neq 0$, δεν έχει λύση (είναι αδύνατη), ενώ
  - αν $β = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις παρουσιάζονται με τη μορφή: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (α, β: συντελεστές, γ: σταθερός όρος και x: άγνωστος). Αναφορικά με τη λύση τους, το σχολικό εγχειρίδιο επισημαίνει πως κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού καλείται λύση ή ρίζα της, ενώ η διαδικασία επίλυσης διδάσκεται αρχικά μέσω παραγοντοποίησης και στη συνέχεια με τη βοήθεια του τύπου της διακρίνουσας (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2014).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η έννοια της εξίσωσης και η διαδικασία επίλυσής της διδάσκονται σε όλη τη διάρκεια του Γυμνασίου. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως η διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας ξεκινά στο Δημοτικό και συνεχίζεται και στο Λύκειο, καθώς κατέχει σημαντική θέση και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Άλγεβρας του Λυκείου (βλ. Πρόγραμμα Σπουδών – Μαθηματικά – Γενικό Λύκειο, 2013). Κάτι τέτοιο καθιστά εύκολα κατανοητή τη σημασία της εξίσωσης, γεγονός που θα συζητηθεί αναλυτικότερα στην αμέσως επόμενη παράγραφο. Συνυπολογίζοντας τα όσα ήδη παρουσιάστηκαν, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα πως οι μαθητές/τριες διδάσκονται την εξίσωση ως μια ισότητα, όπου συμπεριλαμβάνεται άγνωστη ή άγνωστες ποσότητες που συμβολίζονται με το γράμμα «x». Αντιθέτως, άλλα σύμβολα, όπως το α, το β ή το γ τείνουν να χρησιμοποιούνται στη θέση γνωστών αριθμών κατά την παρουσίαση της γενικής μορφής μιας εξίσωσης στα παιδιά. Αναφορικά με την έννοια της λύσης μιας εξίσωσης, οι μαθητές την διδάσκονται ως την τιμή που επαληθεύει την δοσμένη ισότητα. Ωστόσο, ο τρόπος διδασκαλίας της επίλυσης εξίσωσης ελλοχεύει τον κίνδυνο της στείρας απομνημόνευσης βημάτων επίλυσης ή συγκεκριμένων τύπων, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν εσφαλμένα από τους/τις μαθητές/τριες οδηγώντας τους/τες σε λάθος προσδιορισμό λύσεων, σε αδυναμία επίλυσης εξισώσεων ή σε απούσα κατανόηση της έννοιας εξίσωσης ή την έννοιας της λύσης. Το εν λόγω συμπέρασμα μας ωθεί να διερευνήσουμε τα συνήθη λάθη και παρανοήσεις των μαθητών/τριων στο πεδίο των εξισώσεων.

2.1.3 Η σημασία της κατανόησης των εξισώσεων – συνήθη λάθη και παρανοήσεις σε σχέση με τα σύμβολα, τους αρνητικούς αριθμούς και την αλγοριθμική επίλυση

Η άλγεβρα συνδέει την αριθμητική με τα ανώτερα μαθηματικά και δεν μπορεί παρά να αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της ύλης των σχολικών μαθηματικών (Huntley, Marcus, Kahan, Miller, 2007; Jacobson, 2000; Mcginn et al., 2015). Η διδασκαλία αλγεβρικών εννοιών στο σχολείο ωφελεί τους/τις μαθητές/τριες. Ορισμένα από τα αποτελέσματα της ενασχόλησης των παιδιών σχολικής ηλικίας με αλγεβρικές έννοιες αποτελούν: η απόκτηση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, η όξυνση της κριτικής τους σκέψης, η αποτελεσματικότερη διαχείριση πληροφοριών και τελικά η επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (Clark, 2014; Huntley et al., 2007).

Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα η οποία αποτελείται από πολλά ειδικά σύμβολα (π.χ. αριθμοί: -10, 0, 1, …μεταβλητές: A, e, x, b, …) και ορολογία (πχ. πρόσθεση, συμμετρία…) που αντιπροσωπεύουν σχέσεις για να επικοινωνηθούν μαθηματικές ιδέες (Adams, 2003; Gough, 2007). Κύριος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί η κατανόηση της άλγεβρας (Chow, 2011) έτσι ώστε τα παιδιά να είναι σε θέση να διαχειρίζονται τη μαθηματική γλώσσα και να χρησιμοποιούν επιτυχώς σύμβολα και αναπαραστάσεις (Duru & Koklu, 2011). Ωστόσο, ο ρόλος των συμβόλων στην άλγεβρα είναι διπλός και περίπλοκος, με αποτέλεσμα το νόημα των εκάστοτε αλγεβρικών παραστάσεων να είναι φορμαλιστικό – οι παραστάσεις έχουν νόημα αν μπορούν να παραχθούν από ένα σύνολο αξιωμάτων και παραδοχών- αλλά και αναφορικό, με είδη αναφοράς είτε τους αριθμούς και τις πράξεις είτε τις καταστάσεις που εμπεριέχουν ποσότητες και σχέσεις Resnick, Cauzinille-Marmeche, & Mathieu (2005). Αυτό που ο Schoenfeld (2008) ονομάζει σημασιολογικό νόημα των εξισώσεων.

Το αναφορικό νόημα των συμβόλων και των καταστάσεων που τα περιλαμβάνουν γίνεται μέσω της σύνδεσής τους με τους αριθμούς, τις ποσότητες και τις σχέσεις που εκφράζονται από τα σύμβολα και τις σχέσεις μεταξύ τους. Αυτή η σύνδεση είναι χρήσιμη και σε ανώτερα επίπεδα της κατανόησης των μαθηματικών, καθώς νοηματοδοτούν ακόμα και τους αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται σε αυτά (βλ. Resnisck 1987, 1989, 2005). Κατά συνέπεια, το αναφορικό νόημα των συμβόλων που χρησιμοποιούνται σε αριθμητικές παραστάσεις και κατ΄ επέκταση σε εξισώσεις, είναι πολύ σημαντικό για τα μαθηματικά και ιδιαίτερα για τον τομέα της άλγεβρας καθώς οι μετασχηματισμοί που λαμβάνουν χώρα βάσει κανόνων του φορμαλιστικού συστήματος, μπορούν να αποδοθούν νοηματικά μέσα από την αναφοράς τους σε αριθμούς με αποτέλεσμα να νοηματοδοτούνται καλυτέρα. Πράγματι, όπως προκύπτει από εμπειρικά δεδομένα, η διαδικαστική επίλυση εξισώσεων δεν επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση της άλγεβρας και οδηγεί σε παρανοήσεις μετασχηματισμών, όπως η ακόλουθη: «Λύση της εξίσωσης $3x - 4 = 5$ είναι η $3x = 1$ έπειτα από την αφαίρεση της τιμής 4 και στα δυο μέλη». Τέτοιες παρανοήσεις ίσως θα μπορούσαν να ξεπεραστούν με διδακτικές παρεμβάσεις επεξήγησης του λάθους στους/στις μαθητές/τριες (Booth, Lange, Kenneth, & Newton, 2013).

Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα αποτελεί ένα κρίσιμο στάδιο κατά το οποίο οι μαθητές/τριες έρχονται αντιμέτωποι με πολλές και διαφορετικές δυσκολίες (Λεμονίδης, 1996). Παρά τις δυσκολίες που παρουσιάζονται, η διδασκαλία της έννοιας και της διαδικασίας επίλυσης μιας εξίσωσης στο Γυμνάσιο μαθαίνει στα παιδιά να ενεργούν με αλγεβρικό τρόπο, να χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις και κατ΄ επέκταση να οδηγούνται σε συνολικά καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα (βλ. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, 2011). Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί πως οι εξισώσεις δεν κατέχουν θεμελιώδη θέση μόνο στα προγράμματα σπουδών των σχολικών μαθηματικών, αλλά χρησιμοποιούνται στα καθαρά μαθηματικά και σε άλλους κλάδους, όπως η φυσική και η μηχανική. Κάτι τέτοιο, ενισχύει ακόμη περισσότερο την αξία τους στην ύλη της σχολικής άλγεβρας (Capraro & Joffrion, 2006). Την ίδια στιγμή, οι εξισώσεις, είναι χρήσιμες για την κατανόηση μαθηματικών σχέσεων καθώς επιτρέπουν τη μοντελοποίηση ρεαλιστικών ή πραγματικών καταστάσεων και βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων (Didis & Erbas, 2015).

Η Kieran (1989) αναφέρει πως η σχολική άλγεβρα ασχολείται μεταξύ άλλων με τις μεταβλητές, την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων και τις εξισώσεις. Με αφορμή την παραπάνω διαπίστωση, μπορεί να λεχθεί πως η σχολική άλγεβρα ασχολείται κατά βάση με την κατανόηση και των χειρισμό των γραμμάτων ως μεταβλητές. Μπορούμε, λοιπόν, να ισχυριστούμε πως οι μαθητές/τριες μεταβαίνουν από την αριθμητική στην άλγεβρα όταν διδάσκονται για πρώτη φορά τις μεταβλητές.

Η χρήση γραμμάτων και συμβόλων σηματοδοτεί την ενασχόληση των μαθητών/τριων με αφηρημένες αναπαραστάσεις και σύνθετες σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε παρανοήσεις σχετιζόμενες με προηγούμενες γνώσεις τους (Booth, Barbieri, Eyer, & Paré-Blagoev, 2014) και αφορούν κυρίως στην ερμηνεία των μαθηματικών συμβόλων (Carraher & Schliemann, 2007). Καθώς η επίλυση εξίσωσης προϋποθέτει την διαχείριση γραμμάτων και συμβόλων (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2011), αλλά και την ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού (Bennett, 2015; Falkner, Levi, & Carpenter, 1999), προκαλεί δυσκολίες στους/στις μαθητές/τριες. Μια τέτοια δυσκολία που εντοπίστηκε από τους Steinberg et al. (1991) και Welder (2012) είναι η αδυναμία των παιδιών να αντιληφθούν τη σύνδεση μεταξύ συντελεστών και μεταβλητών. Για παράδειγμα, τέτοια λάθη οδηγούν τους μαθητές/τριες να αντιλαμβάνονται τον όρο «4*x*» ως «4 + *x*» και όχι ως «4 φορές το *x*».

Μια σειρά ερευνών ασχολήθηκε με τον ρόλο των συμβόλων στα λάθη των μαθητών στην άλγεβρα (βλ. Booth et al., 2014; Knuth et al., 2006; Steinberg et al., 1991). Ένα σύμβολο που αποτελεί μέρος των εξισώσεων είναι εκείνο της ισότητας (=). Μάλιστα, έχει βρεθεί πως αρκετοί/ες μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται το σύμβολο του ίσου (=) ως το αποτέλεσμα μιας πράξης και όχι ως σύμβολο ισοδυναμίας (McNeil & Alibali, 2005). Η συγκεκριμένη παρανόηση οδηγεί σε αλγοριθμικά λάθη, όπως η πρόσθεση όλων των όρων που βρίσκονται στο πρώτο μέλος δημιουργώντας «αλυσίδες» ισότητας (πχ. $x + 3 = 5 - x = x + x = 5 – 3 = 2x = 2 = x = 1$) (βλ. Knuth et al., 2006). Ακόμη, τέτοιου είδους δυσκολίες είναι παρούσες και σε προτάσεις ανοιχτού τύπου υπό τη μορφή εξίσωσης, όπου ο άγνωστος δεν παρουσιάζεται με κάποιο γράμμα αλλά με κενό. Πιο αναλυτικά, σε βιβλίο των Carpenter, Franke και Levi (2003) αναφέρεται πως πολλοί/ες μαθητές/τριες συμπληρώνουν στο κενό της πρότασης «8 + 4 = ___ + 5» τον αριθμό 12 ή τον αριθμό 17. Δηλαδή, παρόλο που η κατανόηση του συμβόλου του ίσου (=) ως λειτουργία είναι επαρκής για την εκτέλεση πράξεων, δεν ισχύει το ίδιο για την επίλυση εξισώσεων όπου τα παιδιά καλούνται να διαχειριστούν και μεταβλητές. Αντιθέτως, για την επίλυση εξισώσεων θεωρείται αναγκαία η κατανόηση του ίσου (=) ως σύμβολο που δηλώνει σχέση (Booth et al., 2014; Bush & Karp, 2013).

Βέβαια, υπάρχουν και σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούνται μόνο στην άλγεβρα και όχι στην αριθμητική. Αυτά τα σύμβολα είναι τα αλφαβητικά, τα οποία οδηγούν και σε πολλές παρανοήσεις από πλευράς μαθητών/τριων. Αίτιο παρανοήσεων είναι ο πολλαπλός ρόλος των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα, όπου σύμφωνα με τον Kuchemann (1981) χρησιμοποιούνται άλλοτε ως σύμβολα, άλλοτε ως παράμετροι και άλλοτε ως μεταβλητές. Στην περίπτωση των εξισώσεων, τα αλφαβητικά σύμβολα κατέχουν τον ρόλο αγνώστου. Ο πολυδιάστατος ρόλος των γραμμάτων, όμως, προκαλεί την διαφορετική ερμηνεία τους από τα παιδιά, όταν τα αντιμετωπίζουν σε αλγεβρικές παραστάσεις. Συγκεκριμένα, τα παιδιά φαίνεται να ερμηνεύουν τα γράμματα με έξι διαφορετικούς τρόπους: α) το γράμμα λαμβάνει συγκεκριμένη αριθμητική τιμή από ένα σύνολο αριθμών, β) το γράμμα μπορεί να μην χρειάζεται να υπολογιστεί και άρα να αγνοηθεί, γ) το γράμμα συμβολίζει ένα αντικείμενο, δ) το γράμμα χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός, ε) το γράμμα είναι ένας γενικός αριθμός και μπορεί να λάβει πάνω από μια τιμές και στ) το γράμμα έχει θέση μεταβλητής και συνεπώς αντιπροσωπεύει ένα σύνολο τιμών που δεν είναι συγκεκριμένες καθώς και αλλά αλγεβρικά αντικείμενα που αναπαρίστανται με σύμβολα και σχέσεις μεταξύ συμβόλων (Kuchemann, 1981).

Εκτός από τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες που προκαλεί στους μαθητές η διαχείριση γραμμάτων και συμβόλων στις εξισώσεις, η παρουσία αρνητικού προσήμου (-) υποστηρίζεται να αποτελεί πηγή εξίσου σημαντικών δυσκολιών. Κάτι τέτοιο έχει οδηγήσει σε αύξηση του αριθμού των ερευνών που κάνουν λόγο για τα λάθη των παιδιών κατά την εισαγωγή αρνητικών αριθμών σε αριθμητικές πράξεις (βλ. Gallardo, 2002; Gallardo & Romero, 1999; Vlassis, 2002, 2004), αλλά και σε εκείνες που αποσκοπούν στην νοηματοδότηση των αριθμητικών δομών βάσει συγκεκριμένων περιβαλλόντων που επιτρέπουν την κατανόηση των αρνητικών (π.χ. Schwarz, Baruch, Kohn, Resnick, & Lauren, 1994; Schwarz, Nathan, & Resnick, 1996).

Δυσκολίες στη νοηματοδότηση των αρνητικών αριθμών μπορούν να ξεπεραστούν με την κατάλληλη διδακτική υποστήριξη η οποία θα είναι ικανή να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν την νέα γνώση (βλ. Schwarz et al., 1996). Παράλληλα, οι δυσκολίες στους αρνητικούς φαίνεται να έχουν άμεση σχέση με την έλλειψη προϋπάρχουσας εμπειρίας των παιδιών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, η δυσκολία των μαθητών/τριων στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων άλγεβρας με αρνητικούς αριθμούς μπορεί να αιτιολογηθεί από το γεγονός ότι οι μεν θετικοί υπάρχουν στη φύση, ενώ οι αρνητικοί δεν σχετίζονται με τον φυσικό κόσμο (Schwarz et al., 1996). Από τα παραπάνω, διαπιστώνεται πως η ουσιαστική κατανόηση της επίλυσης εξισώσεων μπορεί να επέλθει ως συνέπεια της εξοικείωσης των μαθητών με το σύνολο των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων. Παραδείγματος χάρη, αν ανατρέξουμε στον τρόπο διδασκαλίας των εξισώσεων στο Δημοτικό και την Α΄ Γυμνασίου (Βλ. § 2.1.1.) καταλαβαίνουμε πως η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x + α = β$ στηρίζεται στις γνώσεις των παιδιών στην αριθμητική και συγκεκριμένα στην πρόσθεση, όπου για να βρεθεί άθροισμα β θα πρέπει να εφαρμόσουν την αντίστροφη πράξη και να εκτελέσουν την αφαίρεση: $x = β – α$. Ωστόσο, παρατηρείται δυσκολία των μαθητών να εκφράσουν την συγκεκριμένη σχέση οριζόντια, ενώ την ίδια στιγμή τα περισσότερα παιδιά θα μπορούσαν να υπολογίσουν κάθετα την διαφορά δυο αριθμών. Σύμφωνα με την Kieran (1982), η προαναφερθείσα δυσκολία γίνεται φανερή σε κάποια λάθη μαθητών/τριων κατά την επίλυση εξισώσεων (πχ. λύση της εξίσωσης $x + 21 = 53$

είναι η: $x = 53 + 21$). Γενικότερα, λοιπόν, διαπιστώνεται μια δυσκολία των μαθητών/τριων με τους μετασχηματισμούς (Linchevski & Vinner, 1990).

Συνήθης παρανόηση σχετιζόμενη με το αρνητικό πρόσημο των μεταβλητών, είναι εκείνη που θέλει το πρόσημο (-) να συμβολίζει την πράξη της αφαίρεσης (Booth et al., 2014; Vlassis, 2002, 2004) και όχι το πρόσημο της μεταβλητής καθώς οι διάφορες χρήσεις του αρνητικού προσήμου οδηγούν σε αντιφάσεις και προκαλούν εμπόδια για τους/τις μαθητές/τριες (Vlassis, 2002, 2004). Για παράδειγμα, το αρνητικό πρόσημο είναι πιο εύκολο να ερμηνευτεί όταν βρίσκεται μέσα σε μια έκφραση (πχ. ν – 9) παρά όταν αφορά σε μια μεμονωμένη τιμή (πχ. -9). Η προηγούμενη παρανόηση επιτρέπει τη διαπίστωση πως δημιουργείται επειδή δεν έχει επιτευχθεί η απαιτούμενη εννοιολογική κατανόηση της συμβολικής γραφής και της έννοιας των αρνητικών αριθμών, ενώ υπάρχουν και άλλες έρευνες οι οποίες υποστηρίζουν πως η εμπλοκή αρνητικών, δεκαδικών ή/και κλασματικών αριθμών σε εξισώσεις οδηγούν σε λάθη λόγω απουσίας εννοιολογικής κατανόησης από πλευράς μαθητών/τριων (Capraro & Joffrion, 2006; Kieran, 1992).

Στην περίπτωση του αρνητικού προσήμου, φαίνεται μια προσπάθεια των παιδιών να κατανοήσουν την λειτουργία του βάσει της προηγούμενης εμπειρίας τους στις πράξεις. Άλλωστε η εμπειρία των παιδιών στους φυσικούς προέρχεται από το σύνολο των χρόνων φοίτησής τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Νηπιαγωγείο και Δημοτικό) (Sarama & Clements, 2009). Πράγματι, προγενέστερες έρευνες συνέδεσαν τις παρανοήσεις που προκαλούνται από την παρουσία αρνητικού προσήμου σε αριθμητικές παραστάσεις με την προσπάθεια των παιδιών για αφομοίωση νέων γνώσεων βασιζόμενα στις εμπειρίες και τις διαισθήσεις τους από το σύνολο των φυσικών (Gallardo, 2002; Gallardo & Rojano, 1994; Peled, Mukhopadhyay, & Resnick, 1989; Widjaja, Stacey & Steinle, 2011). Η συγκεκριμένη διαπίστωση, φαίνεται με συνδέεται με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, όπου το πρόσημο ενός αλφαβητικού συμβόλου γίνεται αντιληπτό ως το πραγματικό του πρόσημο (Χρήστου, 2009). Μια τέτοια παρατήρηση είχε σημειωθεί και σε προηγούμενες έρευνες (πχ. Gallardo, 2002; Vlassis, 2004), ενώ θα μπορούσε να μεταφερθεί και σε παρερμηνείες των μαθητών/τριων σε σχέση με το πρόσημο των γραμμάτων που συμβολίζουν αγνώστους σε εξισώσεις. Λαμβάνοντας υπόψη πως η συγκεκριμένη προέκταση δεν έχει μελετηθεί επαρκώς και ταυτόχρονα αποτελεί κύριο στόχο της παρούσας μελέτης, τα παραπάνω θα αναλυθούν στην πορεία του θεωρητικού μέρους της εργασίας μας.

Άλλη κατηγορία, είναι τα λάθη που εντοπίζονται στον αλγόριθμο επίλυσης εξισώσεων. Η εκμάθηση της επίλυσης εξισώσεων αποτελεί σημείο του προγράμματος σπουδών των σχολικών μαθηματικών, ενώ αποτελεί κι ένα κομβικό σημείο για την μετάβαση των μαθητών/τριων από την αριθμητική στον συλλογισμό με αγνώστους (Carraher & Schliemann, 2007; Filloy & Rojano, 1989). Πολλοί μαθητές/τριες δεν κατακτούν τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων στο Γυμνάσιο με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εκμάθηση σχετικών εννοιών και στην κατάκτηση δεξιοτήτων επίλυσης. Σύμφωνα με την Kieran (1992), μαθητές/τριες του Δημοτικού ή των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου επιλύουν εξισώσεις βασιζόμενοι στην εμπειρία τους της αριθμητική. Κατά τον Λεμονίδη (1996), οι μαθητές/τριες Δημοτικού επιλέγουν έναν διαισθητικό τρόπο εύρεσης της λύσης ή προχωρούν σε δοκιμές με αριθμούς. Αντιθέτως, στο Γυμνάσιο, η συνηθέστερη μέθοδος επίλυσης είναι εκείνη που διδάσκεται στο σχολείο και βασίζεται σε εφαρμογή βημάτων ή τύπων. Ωστόσο, ο τρόπος διδασκαλίας της επίλυσης εξισώσεων σε Δημοτικό και Γυμνάσιο, δημιουργεί συχνά λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών/τριων σχετικά με την λύση τους. Έτσι, κατά τους Stacey και Mac Gregor (1997), ορισμένοι/ες μαθητές/τριες πιστεύουν πως η εξίσωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από μια διαδικασία η οποία αποσκοπεί στην εύρεση λύσεων, ενώ άλλοι/ες θεωρούν πως πρόκειται για έναν τρόπο περιγραφής πράξεων ή σχέσεων. Για τον λόγο αυτό, πιο πρόσφατες έρευνες διερεύνησαν την επίδραση του τρόπου διδασκαλίας των εξισώσεων στην κατανόησή τους από τα παιδιά (πχ. Booth et al., 2013). Στην έρευνα των Booth και συνεργατών (2013) χρησιμοποιήθηκε το λανθασμένο παράδειγμα ως μέσο επεξήγησης της διαδικασίας επίλυσης των εξισώσεων. Καθώς τα λανθασμένα παραδείγματα της συγκεκριμένης έρευνας βασίστηκαν σε εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών/τριων στην επίλυση εξισώσεων βρέθηκε πως η μελέτη τους βοήθησε τα παιδιά να βελτιώσουν την κατανόησή τους και να ενισχύσουν την κριτική εννοιολογική γνώση έναντι της αποστήθισης βημάτων. Το τελευταίο εύρημα είναι πολύ σημαντικό για την εξέλιξη της παρούσας εργασίας και ταυτόχρονα αναδεικνύει το ζήτημα πως κάποια λάθη, συμπεριλαμβανομένων των λαθών αλγοριθμικής επίλυσης εξισώσεων συνδέονται με απουσία εννοιολογικής κατανόησης.

2.2. Ανισώσεις

2.2.1. Έννοια, λύση, τρόπος έκφρασης και διδασκαλία της ανίσωσης στο Γυμνάσιο

Οι ανισώσεις, όπως ακριβώς και οι εξισώσεις, συμπεριλαμβάνονται στην ύλη των σχολικών μαθηματικών). Στη γλώσσα των μαθηματικών, οι ανισότητες αναπαριστούν σχέσεις μεταξύ δυο τιμών ή δυο ποσοτήτων οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Ως ανισότητες, ορίζονται οι μαθηματικές σχέσεις που λαμβάνουν την μορφή α < β, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και υποδηλώνουν πως ένας αριθμός α είναι μικρότερος από έναν άλλο αριθμό β.

Στα σχολικά μαθηματικά του Δημοτικού, οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με ανισότητες όταν καλούνται να συγκρίνουν φυσικούς, δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τα σύμβολα της σύγκρισης (>, < ή =) (Κασσώτη κ.α., 2011). Το ίδιο συμβαίνει και στους/στις μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου, οι οποίοι ενασχολούνται με την διάταξη πραγματικών αριθμών (Βανδουλάκης κ.α., 2011). Ωστόσο, οι ανισώσεις εισάγονται για πρώτη φορά με την τυπική τους μορφή στη Β΄ Γυμνασίου. Σε αυτή την τάξη, ορίζεται ως ανίσωση η ανισότητα η οποία περιέχει έναν άγνωστο *x* (πχ. 3x + 2 • 50 < 3x + 100) (Βλάμος κ.α., 2008). Αναφορικά με την επίλυση ανίσωσης, οι μαθητές/τριες διδάσκονται συγκεκριμένα βήματα, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση των εξισώσεων. Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, για να λύσουμε μια ανίσωση εργαζόμαστε ως εξής (Βλάμος κ.α., 2008):

(1) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν)
(2) Εκτελούμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις (αν υπάρχουν)
(3) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
(4) Κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων
(5) Διαιρούμε και τα δυο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου. Σε περίπτωση που ο συντελεστής του αγνώστου είναι ένας θετικός αριθμός, τότε η φορά της ανίσωσης παραμένει, ενώ αν είναι ένας αρνητικός αριθμός η φορά αλλάζει.

Λύση μιας ανίσωσης καλείται η αριθμητική τιμή που επαληθεύει την ανισοτική σχέση. Η επίλυση μιας ανίσωσης οδηγεί σε ανάδειξη άπειρου πλήθους αριθμών που επαληθεύουν την δοθείσα σχέση. Για τον λόγο αυτό, οι μαθητές/τριες διδάσκονται πως οι λύσεις μιας ανίσωσης μπορούν να παρασταθούν στην ευθεία των αριθμών (Βλάμος κ.α., 2008). Οι ανισώσεις α΄ βαθμού ορίζονται με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο και στην Γ΄ Γυμνασίου. Επιπλέον, δεν παρατηρούνται αλλαγές στον αλγόριθμο λύσης μιας ανίσωσης, όπως διδάσκεται στα παιδιά της Γ΄ τάξης (Αργυράκης κ.α., 2014).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πως οι μαθητές/τριες διδάσκονται ανισοτικές σχέσεις που έχουν την μορφή «α < β» κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αποκτώντας έναν βαθμό εξοικείωσης με τη σύγκριση αριθμών, στην Α΄ Γυμνασίου διδάσκονται το σύνολο των ρητών αριθμών κι έτσι ασχολούνται με σχέσεις διάταξης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, μέχρι την Α΄ Γυμνασίου διδάσκονται ανισοτικές σχέσεις στο πλαίσιο της αριθμητικής, όπου μοναδικός σκοπός τους είναι να συγκρίνουν αριθμούς μεταξύ τους. Αντιθέτως, από την Β΄ Γυμνασίου και έπειτα εισάγονται στις ανισώσεις α΄ βαθμού που περιλαμβάνουν ένα γράμμα ως μεταβλητή. Ιδιαίτερα για τις δυο τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου, το ζητούμενο είναι να αντιλαμβάνονται πως μια σχέση της μορφής «α*x* < β» παριστάνει μια ανίσωση, η οποία επαληθεύεται για έναν σύνολο πραγματικών αριθμών. Παρά την ομοιότητα στον τρόπο διδασκαλίας της επίλυσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων και ανισώσεων, στις ανισώσεις λαμβάνεται υπόψη το πρόσημο του συντελεστή με τον οποίο διαιρούνται ή πολλαπλασιάζονται τα δυο μέλη της ανισοτικής σχέσης, σύμφωνα με τις ιδιότητες των ανισώσεων. Όμως, η μετάβαση από την ανισοτική σχέση στην ανίσωση και την αναζήτηση ενός συνόλου λύσεων πραγματικών αριθμών που την επαληθεύουν, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες που ισχύουν για τις ανισώσεις, αποτελούν παράγοντες που δυσκολεύουν τους/τις μαθητές/τριες και οδηγούν σε λάθη και παρανοήσεις.

2.2.2. Η σημασία της κατανόησης ανισώσεων – συνήθη λάθη και παρανοήσεις σε σχέση με τα σύμβολα, τους αρνητικούς αριθμούς και την αλγοριθμική επίλυση

Οι ανισώσεις αποτελούν ένα δύσκολο μαθηματικό αντικείμενο για τους/τις μαθητές/τριες του οποίου η σημασία και η θέση δεν έχει μελετηθεί το ίδιο εκτενώς όπως οι εξισώσεις (Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Μάλιστα, όπως επισημαίνουν οι Verikios και Farmaki (2010), παρά τη σημαντικότητά τους, οι ανισώσεις ανήκουν εξ ολοκλήρου στην ύλη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (και όχι της πρωτοβάθμιας) κι έτσι ελλοχεύει ο κίνδυνος να θεωρηθούν αντικείμενο δευτερεύουσας σημασίας σε σύγκριση με εκείνο των εξισώσεων. Στον αντίποδα, η κατανόηση της έννοιας, των λύσεων και του τρόπου επίλυσης ανισώσεων από τα παιδιά είναι σημαντικά, καθώς οι ανισώσεις εμπλέκονται σε ποικίλες μαθηματικές περιοχές. Οι περιοχές αυτές είναι: η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, ο γραμμικός προγραμματισμός και η μελέτη συναρτήσεων (Bazzini & Tsamir, 2004). Συνεπώς, η κατανόηση των ανισώσεων αποτελεί προαπαιτούμενη γνώση την ομαλή μετάβαση και διαχείριση ανώτερων μαθηματικών εννοιών.

Η κατανόηση ανισώσεων προϋποθέτει δεξιότητες χειρισμού της μαθηματικής γλώσσας (Duru & Koklu, 2011; Vaiyavutjamai & Clements, 2006) και προϋπάρχουσες γνώσεις στην αριθμητική και την άλγεβρα (Bicer, Capraro, & Capraro, 2014; El-Khateeb, 2016). Στην περίπτωση των ανισώσεων α΄ βαθμού, που διδάσκονται στις δυο τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου, δεν εντοπίζεται μεγάλος αριθμός ερευνών που να έχουν ασχοληθεί με την κατανόησή τους από τα παιδιά (βλ. Arampatzis, Skiadaresis, & Christou, 2007; Bazzini & Tsamir, 2004; Tsamir & Almog, 2001; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Ωστόσο, σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις μελέτες που έχουν ήδη πραγματοποιηθεί, είναι πως οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν ένα αλγοριθμικό μοντέλο για να επιλύσουν ανισώσεις, το οποίο βασίζεται στα βήματα επίλυσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Κάτι τέτοιο συνδέει τον τρόπο διδασκαλίας της επίλυσης ανίσωσης στο Γυμνάσιο, με την διαδικαστική γνώση που αποκτούν οι μαθητές/τριες καθώς και με τις δυσκολίες που παρουσιάζουν στην επίλυση και στην περιγραφή του συνόλου λύσεων που προκύπτει (Arampatzis et al., 2007; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Ως συνέπεια, αρκετοί μαθητές δεν επιλύουν μια ανίσωση καθώς αγνοούν την ύπαρξη απείρου πλήθους λύσεων. Χαρακτηριστικά επισημαίνεται πως σε έρευνα των Tsamir και Bazzini (2004), μερίδα μαθητών/τριων είχε εδραιωμένη την πεποίθηση πως η επίλυση μιας ανίσωσης θα απέδιδε υποχρεωτικά ως αποτέλεσμα μια ανίσωση και κι ότι αυτή η ανίσωση δεν αντιστοιχεί σε ένα σύνολο ή μια ένωση συνόλων αριθμών. Εδώ βλέπουμε άλλο ένα παράδειγμα όπου η αδυναμία των παιδιών να προσδώσουν αναφορικό νόημα στα σύμβολα και τις σχέσεις μεταξύ τους μπορεί να επηρεάσει τον τρόπο κατανόησης και τις επιδόσεις τους στις ανισώσεις. Έτσι ένας μαθητής μπορείς να δώσει μια σωστή λύση μιας ανίσωσης (π.χ., ότι η λύση είναι $x > 3$) αλλά να μην αντιλαμβάνεται ότι αυτό σημαίνει πως κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 3 την επαληθεύει.

Ακόμη, η απομνημόνευση και όχι η κατανόηση των βημάτων επίλυσης οδηγεί σε άγνοια τρόπων επαλήθευσης των λύσεων μιας ανίσωσης (Tsamir & Almog, 2001; Tsamir & Bazzini, 2002; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Μάλιστα, έχει διαπιστωθεί πως ολοκληρώνοντας το

Γυμνάσιο, ο τρόπος διδασκαλίας των ανισώσεων, καθιστά τα παιδιά ικανά να επιλύσουν ανισώσεις της μορφής «αx < β». Ωστόσο, κατά την μετάβασή τους σε μεγαλύτερες τάξεις, παρατηρούνται υψηλά ποσοστά αποτυχίας στην προσπάθεια επίλυσης «μη τυπικών» ανισώσεων, όπως για παράδειγμα η «$x^2 - \frac{1}{x}$» (Boero, Bazzini, & Garuti, 2001).

Οι Blanco και Carrote (2007) υποστήριξαν πως οι δυσκολίες που εντοπίζονται στις διάφορες αλγεβρικές έννοιες σχετίζονται με την πολυπλοκότητα του μαθηματικού αντικειμένου, την ενδεχόμενη χρήση συμβόλων και γραμμάτων, τη σημασιολογία, τις αλγεβρικές ιδιότητες του αντικειμένου αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας του στη σχολική πράξη. Εκτός, λοιπόν, από τις δυσκολίες που προκαλούν στα παιδιά τα σύμβολα και τα γράμματα που εμπλέκονται στις ανισώσεις (Bazzini & Tsamir, 2002; Blanco & Carrote, 2007; Tsamir & Bazzini, 2004) και τις δυσκολίες που προκύπτουν από τη διδασκαλία αλγοριθμικής επίλυσης, μια άλλη κατηγορία λαθών και παρανοήσεων εμφανίζεται όταν στις ανισώσεις εμπλέκονται αρνητικοί αριθμοί. Η παρουσία αρνητικών αριθμών σε ανισοτικές σχέσεις προκαλεί συγκρούσεις μεταξύ των γνώσεων των μαθητών/τριων στους φυσικούς αριθμούς και των όσων ισχύουν για τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι ο αριθμός -27 είναι μικρότερος από τον αριθμό -12, αντιτίθεται στις γνώσεις των παιδιών στους φυσικούς (Badarudin & Khalid, 2008). Συνυπολογίζοντας πως τα λάθη στα πρόσημα σε πράξεις με πραγματικούς αριθμούς είναι συχνά, μπορούν να ερμηνευθούν κάποια λάθη των παιδιών στην επίλυση ανισώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι εκείνο που αφορά στην παράβλεψη της αλλαγής της φοράς μιας ανίσωσης κατά τον πολλαπλασιασμό ή την διαίρεση με αρνητικό αριθμό (πχ. είναι $8 > 4$, οπότε $8\cdot(-2) < 4\cdot(-2)$ και -8- < -4). Τέτοια λάθη συμβαίνουν είτε από απουσία κατανόησης της διάταξης των πραγματικών, είτε επειδή τα παιδιά δεν δίνουν ιδιαίτερη σημασία στους συμβολισμούς καθώς θεωρούν πως δεν έχουν νόημα για το αποτέλεσμα που προκύπτει, είτε γιατί συνδέουν το αρνητικό πρόσημο (-) με την πράξη της αφαίρεσης (Schechter, 2009).

Σε προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών/τριων σε εξισώσεων, ενώ στην παρούσα παράγραφο παρουσιάσαμε τα λάθη τους στις ανισώσεις. Και στις δυο περιπτώσεις φαίνεται πως τα λάθη τους οφείλονται σε διάφορους λόγους. Στην εργασία μας επικεντρωθήκαμε στα λάθη που σχετίζονται με την χρήση του αλγορίθμου επίλυσης εξίσωσης ή ανίσωσης, με την κατανόηση των συμβόλων και με την σημασιολογική τους δομή. Η διδασκαλία και η έρευνα εστιάζει περισσότερο στα λάθη των μαθητών/τριων στους αλγορίθμους. Παρόλο που τα λάθη στον αλγόριθμο επίλυσης ερμηνεύονται σπάνια ως λάθη εννοιολογικής κατανόησης, υπάρχουν ενδείξεις πως ο τρόπος διδασκαλίας προωθεί την αποστήθιση βημάτων και αποτρέπει την κατανόηση της έννοιας της λύσης μιας εξίσωσης ή μιας ανίσωσης. Επιπλέον, όπως επισημαίνεται από τους Blanco και Carrote (2007), η πλειοψηφία των μαθητών/τριων στην προσπάθεια επίλυσης ανισώσεων, δεν λαμβάνει ως σύνολο αναφοράς τους πραγματικούς αλλά περιορίζεται στους φυσικούς αριθμούς (Blanco & Carrote, 2007). Έτσι, παρατηρείται δυσκολία να δεχτούν ως λύση μιας εξίσωσης έναν μη φυσικό αριθμό, καθώς στη θέση του γράμματος τοποθετούν φυσικούς αριθμούς (Christou, 2017; Christou & Vosniadou, 2012). Ακόμη, τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σχέση διάταξης των αρνητικών αριθμών, ενώ κατά τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης συχνά παραβλέπουν να αλλάξουν τη φορά της όταν διαιρούν ή πολλαπλασιάζουν με αρνητικό αριθμό.

Συμπερασματικά, οι δυσκολίες των παιδιών στη διαχείριση γραμμάτων και αρνητικών αριθμών στο πλαίσιο της επίλυσης ανισώσεων είναι αυξημένες. Οι εξισώσεις και οι ανισώσεις αποτελούν μαθηματικές εκφράσεις οι οποίες περιέχουν γράμματα, σύμβολα και αριθμούς. Με γνώμονα το γεγονός ότι έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης μπορεί να ερμηνεύει κάποια λάθη μαθητών/τριων σε εξισώσεις και ανισώσεις, αξίζει να διερευνηθεί ο τρόπος που το φαινομενικό πρόσημο μιας εξίσωσης ή ανίσωσης επηρεάζει την ικανότητα των παιδιών να εντοπίζουν τιμές που την επαληθεύουν. Για τον λόγο αυτό, στην παράγραφο που ακολουθεί θα γίνει προσπάθεια σύνδεσης της προκατάληψης φυσικού αριθμού στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου σε εξισώσεις και ανισώσεις. Στόχος, είναι να αναδειχθεί ο τρόπος που τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη θέση των γραμμάτων σε μαθηματικές εκφράσεις και συγκεκριμένα στις εξισώσεις και στις ανισώσεις.

2.3 Η προκατάληψη φυσικού αριθμού στην κατανόηση των συμβόλων στην άλγεβρα

2.3.1. Προκατάληψη φυσικού αριθμού στην ερμηνεία των γραμμάτων

Σε προηγούμενες παραγράφους συζητήθηκε η θέση και η σημασία των εξισώσεων και ανισώσεων στα σχολικά μαθηματικά αλλά και οι δυσκολίες και παρανοήσεις τις οποίες αντιμετωπίζουν μαθητές και μαθήτριες στο συγκεκριμένο πεδίο της ύλης της άλγεβρας. Από την ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, έγινε φανερό πως τόσο οι εξισώσεις όσο και οι ανισώσεις περιλαμβάνουν γράμματα για να συμβολίσουν άγνωστους αριθμούς. Μάλιστα, η χρήση των γραμμάτων φάνηκε να αποτελεί κεντρικό σημείο των δυσκολιών που εντοπίστηκαν μαζί με κάποια λάθη στη διαχείριση των αρνητικών αριθμών, στην εφαρμογή του αλγορίθμου λύσης και στη διατύπωση της αναμενόμενης λύσης.

Τα παραπάνω λάθη σχετίζονται με την τάση των παιδιών να προβάλλουν τις γνώσεις τους στους φυσικούς αριθμούς σε σύνολα μη φυσικών αριθμών, εξαιτίας της μεγαλύτερης εμπειρίας τους σε αυτούς. Στην περίπτωση των γραμμάτων, τα αντιμετωπίζουν ως γενικευμένους αριθμούς τους οποίους αντικαθιστούν με τιμές από το σύνολο των φυσικών (Christou & Vosniadou, 2012). Η εν λόγω στάση είναι ευρέως γνωστή ως προκατάληψη του φυσικού αριθμού (ΠΦΑ). Πιο συγκεκριμένα, ως ΠΦΑ περιγράφεται η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τις αρχές, τις ιδιότητες και τους κανόνες που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς σε καταστάσεις όπου αυτές δεν ισχύουν, όπως στα κλάσματα, στους αρνητικούς, στους δεκαδικούς αριθμούς, σε αλγεβρικές παραστάσεις και εκφράσεις (Christou, 2015, 2017; Christou et al., 2020; Christou & Vamvakoussi, 2021; DeWolf & Vosniadou, 2015; Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Ni & Zhou, 2005). Σε έρευνες των Christou και Vosniadou (2005, 2012) βρέθηκε πως μαθητές/τριες δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, επηρεασμένοι από την ΠΦΑ είχαν την τάση να αντικαθιστούν τα γράμματα που ήταν μέρος αλγεβρικών παραστάσεων μόνο με φυσικούς αριθμούς. Πιο αναλυτικά, η αλγεβρική παράσταση «4γ» θεωρήθηκε ως να αναπαριστά φυσικούς αριθμούς – πολλαπλάσιους του 4, ενώ η παράσταση «κ+3» εκτιμήθηκε ως να αναπαριστά αριθμούς πιο μεγάλους του 3. Άλλες έρευνες σε παιδιά που φοιτούσαν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση προσπάθησαν να διερευνήσουν τον τρόπο που εκείνα αντιμετώπιζαν τα γράμματα (βλ. Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018. Χρήστου, 2009). Τα ευρήματά τους ενίσχυσαν ακόμη περισσότερο την υπόθεση πως οι προηγούμενες γνώσεις στους φυσικούς επηρεάζουν τον τρόπο ερμηνείας των αλφαβητικών συμβόλων. Φάνηκε, λοιπόν, ότι οι μαθητές/τριες τείνουν να αντιμετωπίζουν τα γράμματα ως σύμβολα γενικευμένων αριθμών αλλά είχαν έντονη την τάση να αντικαθιστούν τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς.

Όλα τα παραπάνω καθιστούν σαφές το γεγονός ότι τα αλφαβητικά σύμβολα που συμμετέχουν στις εξισώσεις και ανισώσεις δεν γίνονται πλήρως κατανοητά από τους μαθητές/τριες ως σύμβολά που μπορούν να αντικατασταθούν με οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ο οποίος θα μπορούσε να είναι λύση τους. Λαμβάνοντας υπόψη πως η κατανόηση της έννοιας και της χρήσης των γραμμάτων στις εξισώσεις και ανισώσεις οδηγούν σε ικανότητα επίλυσής τους (Bennett, 2015; Falkner, Levi, & Carpenter, 1999), η τάση να αντικαθίστανται μόνο με φυσικούς οδηγεί σε παρερμηνείες και αποτυχίες στο συγκεκριμένο πεδίο της άλγεβρας. Ωστόσο, η επιτυχία επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τον τρόπο που τα παιδιά ερμηνεύουν μεμονωμένα τα γράμματα ως μεταβλητές. Αντιθέτως, η εύρεση λύσεων σχετίζονται και με τον τρόπο που εκτελούν πράξεις μεταξύ γραμμάτων ή μεταξύ πραγματικών αριθμών. Γι΄ αυτό τον λόγο, θεωρήθηκε χρήσιμη μια σύντομη αναφορά στην ΠΦΑ σε πράξεις και αλγεβρικές εκφράσεις.

2.5.2 Προκατάληψη φυσικού αριθμού σε πράξεις/ αλγεβρικές εκφράσεις

Το αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής πράξης και οι τιμές που μπορούν να λάβουν οι αλγεβρικές εκφράσεις αποτελούν πεδία της μαθηματικής δραστηριότητας τα οποία επηρεάζονται από την ΠΦΑ (Christou, 2015; Christou & Vosniadou, 2012; Vamvakoussi et al., 2012, 2013; Van Hoof et al., 2015). Βάσει του τρόπου διδασκαλίας τους στο σχολείο, οι εξισώσεις και οι ανισώσεις αποτελούν δυο μαθηματικές εκφράσεις οι οποίες επιλύονται μετά από πράξεις μεταξύ αριθμών και γραμμάτων που περιλαμβάνονται σε αυτές. Επίσης, από την επισκόπηση που πραγματοποιήθηκε σε προηγούμενες παραγράφους, διαπιστώθηκε πως κάποια λάθη στον αλγόριθμο επίλυσης παραπέμπουν σε απουσία εννοιολογικής κατανόησης των παιδιών σε σχέση με την λειτουργία των γραμμάτων και το σύνολο των πραγματικών αριθμών (π.χ. Booth et al., 2014; Knuth et al., 2006; Stenberg et al., 1991). Εξαιτίας του αναφορικού νοήματος των συμβόλων στην άλγεβρα, αυτά έχουν διπλό ρόλο (Resnick et al., 2005). Συνεπώς, καθώς οι εξισώσεις αποτελούν εκφράσεις που περιλαμβάνουν είτε γράμματα είτε κενά (πχ. 3 + __ = -7), τα παιδιά θα πρέπει πρωτίστως να αναγνωρίζουν ένα πλαίσιο αναφοράς πίσω από την αλγεβρική έκφραση που διαβάζουν ώστε στη συνέχεια να εφαρμόζουν μια στρατηγικής επίλυσης μέσω μετασχηματισμών. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί πως ως στρατηγική επίλυσης μπορεί να εκληφθεί είτε ο τυπικός αλγόριθμος είτε άτυπες τεχνικές, όπως δοκιμή και λάθος (βλ. Kieran, 1992).

Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές/τριες έχουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα και τα κενά ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς (Carpenter et al., 2003; Christou, 2015, 2017). Επιπλέον, φαίνεται πως στην πλειοψηφία τους, τα παιδιά προσπαθώντας να προσδιορίζουν τους αριθμούς που μπορούν να αντικαταστήσουν γράμματα σε αλγεβρικές εκφράσεις, περιορίζονται στην αναζήτηση τιμών από το σύνολο των φυσικών αριθμών (Blanco & Carrote, 2007). Η παραπάνω τάση των παιδιών μπορεί να ερμηνευθεί ως συνέπεια της ΠΦΑ στην ερμηνεία των γραμμάτων και να επεκταθεί σε πράξεις. Παραδείγματα των προεκτάσεων της ΠΦΑ σε πράξεις και αλγεβρικές εκφράσεις είναι η εσφαλμένη πεποίθηση πως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός οδηγούν σε μεγαλύτερο αποτέλεσμα, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση σε μικρότερο αποτέλεσμα. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν επαληθεύεται σε πράξεις μη φυσικών με τελεστές μικρότερους της μονάδας (πχ. $6 \cdot 0.2 < 6$) ή με αρνητικούς τελεστές (πχ., $4 + (-1) = 3$, $4 - (-1) = 5$). (Χρήστου, 2015). Οι συγκεκριμένες λανθασμένες πεποιθήσεις φαίνεται να προέρχονται από την αρχική γνώση και εμπειρία που έχουν κατακτήσει τα παιδιά ενασχολούμενα αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα εισαγωγής τους στη μαθησιακή διαδικασία (Christou, 2015; Vamvakoussi et al., 2012). Μάλιστα, οι εν λόγω πεποιθήσεις έχουν τόσο ισχυρές βάσεις που τείνουν να επιμένουν, κάνοντας τα παιδιά να σκέφτονται πρώτα τους φυσικούς αριθμούς ακόμη και μετά από μακροχρόνια διδασκαλία μη φυσικών (Christou & Vamvakoussi, 2021).

Εμπειρικά ευρήματα ενισχύουν την υπόθεση πως η ΠΦΑ προεκτείνεται σε αριθμούς και πράξεις. Χαρακτηριστική στο πεδίο αυτό είναι η έρευνα του Christou (2015) σε δείγμα μαθητών/τριων πέμπτης και έκτης Δημοτικού, η οποία με τα αποτελέσματά της ισχυροποίησε την υπόθεση πως τα παιδιά έχουν την τάση να συνδέουν συγκεκριμένα αποτελέσματα με συγκεκριμένες πράξεις, γεγονός που αποτελεί συνέπεια της ΠΦΑ. Μάλιστα, ο ερευνητής διαπίστωσε πως η ΠΦΑ επηρέασε τους/τις συμμετέχοντες/ουσες α) μέσω της ύπαρξης διαισθητικών πεποιθήσεων για τα αποτελέσματα των πράξεων (πχ. ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει) και β) μέσω της τάσης των μαθητών/τριων να δοκιμάζουν φυσικούς αριθμούς στη θέση συμβόλων.

Όπως ήδη ειπώθηκε, η αλγοριθμική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων απαιτεί πράξεις μεταξύ αριθμών και γραμμάτων που ενέχουν θέση μεταβλητών. Η συμπεριφορά των παιδιών απέναντι στις πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών και μεταξύ αλφαβητικών συμβόλων που αναπαριστούν αγνώστους επηρεάζεται από τον τρόπο που κατανοούν τις ιδιότητες των μη φυσικών και από τον τρόπο που κατανοούν τα σύμβολα. Σε αυτή τη βάση, οι Van Hoof και συνεργάτες (2015) εξέτασαν ένα δείγμα 291 μαθητών/τριων Γυμνασίου, θέτοντας ερωτήσεις σχετικές με το αν μπορεί ή δεν μπορεί μια αλγεβρική έκφραση να είναι μικρότερη από μια άλλη (πχ. $\frac{x}{4}$ < x μπορεί να αληθεύει). Τα αποτελέσματα έδειξαν την παρουσία ΠΦΑ στις απαντήσεις των παιδιών, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις αλγεβρικών εκφράσεων με πολλαπλασιαστική και προσθετική δομή. Πιο συγκεκριμένα, απαντήσεις μαθητών/τριων παρέπεμπαν σε κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που ισχύουν μόνο στους φυσικούς αριθμούς (πχ. «Αν διαιρέσω με το 8, τότε το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο από το αρχικό, γιατί μια διαίρεση πάντοτε μικραίνει το αποτέλεσμα», «αν αντικαταστήσω το γράμμα με τον αριθμό 4, τότε 4 φορές το 4 κάνει 16, δηλαδή το αποτέλεσμα μεγαλώνει»). Αντίστοιχα, σε ένα μεγάλο πλήθος απαντήσεων, οι συμμετέχοντες/ουσες χρησιμοποίησαν τις γνώσεις τους στους φυσικούς αντικαθιστώντας λανθασμένα αγνώστους με θετικές ακέραιες τιμές.

Από τα παραπάνω, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα πως η πρώτη σκέψη των παιδιών να αντικαταστήσουν αλφαβητικά σύμβολα που συναντούν σε αλγεβρικές παραστάσεις με φυσικούς αριθμούς, θα οδηγούσε σε λάθη κατά την αναζήτηση λύσεων σε εξισώσεις και ανισώσεις. Κάποια από αυτά τα λάθη, όπως η αντικατάσταση αλφαβητικών συμβόλων με φυσικούς αριθμούς, μπορούν να αποτελούν συνέπεια της ΠΦΑ. Η συγκεκριμένη διαπίστωση ενισχύεται ακόμη περισσότερο εάν λάβουμε υπόψη και τα ευρήματα των ερευνών που πραγματοποίησαν οι Βοσνιάδου και Χρήστου (βλ. Christou & Vosniadou 2005, 2012). Σε αυτές τις έρευνες, διαπιστώθηκε για ακόμη μια φορά πως οι μαθητές/τριες αντικαθιστούν φυσικούς αριθμούς σε γράμματα με σκοπό να υπολογίσουν την τιμή μιας μαθηματικής έκφρασης που τους παρουσιάζεται. Ενδεικτικά, αξίζει να αναφερθεί πως σε ερώτηση σχετική με τη σύγκριση των τιμών που λαμβάνουν οι εκφράσεις 5δ και 4/δ, τα περισσότερα παιδιά δοκίμασαν συγκεκριμένους φυσικούς στη θέση του δ κι έπειτα απάντησαν πως η παράσταση 5δ θα είναι πιο μεγάλη από την

4/δ καθώς ο «πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει». Το τελευταίο εύρημα, μας επιτρέπει να αντλήσουμε κάποια δεδομένα για την ενδεχόμενη συμπεριφορά μαθητών/τριων Γυμνασίου κατά την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με την μέθοδο της δοκιμής τιμών. Η δοκιμή τιμών έχει αναδειχθεί ως μιας άτυπης μορφής διαδικασία επίλυσης εξισώσεων από την Kieran (1992), η οποία όμως μπορεί να οδηγήσει σε λάθη. Ωστόσο, η τεχνική της αντικατάστασης μεταβλητών με συγκεκριμένους αριθμούς αποτελεί μια επιτυχημένη στρατηγική, ακόμη κι αν δεν μπορεί να αποτελέσει τεκμήριο ορθότητας ή μη ενός μηχανισμού (Χρήστου, 2009).

Η ΠΦΑ σε πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων φαίνεται να επηρεάζει τον τρόπο σκέψης μαθητών/τριων Δημοτικού και να τους ακολουθεί και κατά την φοίτησή τους στο Γυμνάσιο. Ωστόσο, η διαίσθηση πως τα αλφαβητικά σύμβολα αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς είναι τόσο βαθιά ριζωμένη που ακολουθεί το άτομο ακόμη και στην ενήλικη ζωή του. Ενδεικτικά για την παραπάνω διαπίστωση είναι τα ευρήματα της έρευνας των Vamvakoussi et al. (2013), σε δείγμα ενηλίκων μεταξύ 18 και 28 ετών, δόθηκαν δηλώσεις όπως: «η παράσταση 2 + 4y είναι πάντα μικρότερη του 2». Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα έδειξαν πως πράγματι οι συμμετέχοντες/ουσες είχαν ισχυρές διαισθητικές πεποιθήσεις πως ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση μεγαλώνουν, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση μικραίνουν το τελικό αποτέλεσμα. Τέλος, καθώς αντικείμενο ενδιαφέροντος της παρούσας εργασίας είναι ερμηνεία των αλφαβητικών συμβόλων σε εξισώσεις και ανισώσεις, όπου δεν εμπλέκονται μόνο ακέραιοι, αλλά και κλασματικοί αριθμοί, είναι σημαντικό να αναφερθούμε και στα αποτελέσματα της πρόσφατης μελέτης των Christou και Vamvakoussi (2021).

2.5.3 Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου ως συνέπεια της προκατάληψης φυσικού αριθμού

Βασιζόμενοι στα ευρήματα της επισκόπησης που προηγήθηκε, συνδέσαμε την παρουσία κάποιων λαθών σε εξισώσεις και ανισώσεις με την απούσα εννοιολογική κατανόηση των μαθητών/τριων σε μαθηματικές εκφράσεις όπου εμπλέκονται μη φυσικοί αριθμοί κι έτσι υποθέσαμε πως η παρουσία αρνητικών αριθμών σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορεί να επηρεάσει την ικανότητα των παιδιών να εντοπίζουν αριθμούς που τις επαληθεύουν. Συνυπολογίζοντας πως η προηγούμενη γνώση των μαθητών/τριων στους φυσικούς ανακαλείται πρώτη ακόμη κι αν έχει προηγηθεί εκτεταμένη διδασκαλία σε μη φυσικούς (Christou & Vamvakoussi, 2021) και πως η παρουσία αλφαβητικών συμβόλων σε αλγεβρικές εκφράσεις αποτελεί ένα ζήτημα που δυσκολεύει τους μαθητές/τριες, ιδιαίτερα όταν εμπλέκονται αρνητικοί αριθμοί (Vlassis, 2004), θελήσαμε να συνδέσουμε την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου κατά την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Ως «παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου» περιγράφεται η τάση μαθητών/τριων να θεωρούν πως το πρόσημο που φαίνεται να έχουν οι μεταβλητές ή οι παραστάσεις είναι το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορούν να αναπαραστήσουν.

Στη βιβλιογραφία, εντοπίζονται λίγες έρευνες για την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Όμως, οι υπάρχουσες έρευνες μας παρέχουν σημαντικά δεδομένα. Ο Χρήστου (2009), επέλεξε το μαθηματικό πλαίσιο των ανισώσεων για να διερευνήσει τον τρόπο που οι μαθητές/τριες ερμηνεύουν τις μεταβλητές όταν αυτά εμφανίζονται μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις. Το πλαίσιο των ανισώσεων κρίθηκε ως κατάλληλο για την εμφάνιση δυσκολιών συνυφασμένων με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, εξαιτίας των ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, στην ίδια έρευνα, χρησιμοποιήθηκε το πεδίο των γραφικών παραστάσεων δοσμένων συναρτήσεων που περιλάμβαναν μεταβλητές μέσα σε τετραγωνική ρίζα (πχ., $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$, $f(x) = \sqrt{-2x - 1}$),ούτως ώστε να ελεγχθεί τόσο η παρουσία ΠΦΑ όσο και η εμφάνιση παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας οδήγησαν στο συμπέρασμα πως τα γράμματα που χρησιμοποιούνται σε ανισώσεις και συναρτήσεις για να αναπαραστήσουν μεταβλητές ερμηνεύονται ως φυσικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες περιορίστηκαν δίνοντας στις μεταβλητές τιμές φυσικών αριθμών δημιουργώντας μη ορθές γραφικές παραστάσεις, ενώ θεώρησαν πως το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών που τους δόθηκαν ήταν το πραγματικό τους.. Ιδιαίτερα για τα ερωτήματα με ανισώσεις, ένα μεγάλο ποσοστό των παιδιών επηρεάστηκε από το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων, ενώ τα πήγε καλύτερα σε ανισώσεις με θετικό παρά με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο. Αντίστοιχα, οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες πέτυχαν καλύτερες επιδόσεις σε συναρτήσεις με φαινομενικά θετικό σε σύγκριση με εκείνες με φαινομενικά αρνητικό υπόρριζο. Συνολικά, οι συμμετέχοντες/ουσες φάνηκαν πιο πρόθυμοι να δεχθούν πως μια φαινομενικά θετική παράσταση μπορεί να αναπαραστήσει αρνητικές τιμές, παρά να δεχθούν το αντίστροφο.

Τα παραπάνω ευρήματα παρουσιάζουν κοινά σημεία με εκείνα των αποτελεσμάτων της μελέτης της Vlassis (2004). Παρόλο που σε αυτή την έρευνα δεν γίνεται λόγος για παρερμηνεία φαινομενικού προσήμου, τα αποτελέσματά της αναφέρουν πως οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν εσφαλμένα κάποιες διαδικασίες που ισχύουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών κατά την αναγωγή όμοιων όρων πολυωνύμων πρώτου βαθμού με θετικούς και αρνητικούς ακέραιους συντελεστές. Συμπληρώνει, μάλιστα, πως η συγκεκριμένη λανθασμένη πρακτική των παιδιών ωθεί σε από πλευράς τους αδυναμία απόδοσης νοήματος στον συμβολισμό αρνητικών αριθμών στο μαθηματικό πλαίσιο των πολυωνύμων.

Σημαντικά είναι και τα ευρήματα που προκύπτουν από την μελέτη των Christou και Vosniadou (2012). Σύμφωνα με τα εμπειρικά δεδομένα που προέκυψαν, εκτός από την επίδραση του φαινομενικού προσήμου, παρουσιάστηκε και η επίδραση της ακεραιότητας στις απαντήσεις των συμμετεχόντων/ουσών στην έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, εντοπίστηκε πως οι μαθητές/τριες ήταν πρόθυμοι να δεχθούν πως τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές μπορούν να λάβουν τιμές που είναι αντίθετες στο φαινομενικό τους πρόσημο. Ωστόσο, δεν εντοπίστηκε η ίδια προθυμία στην αντικατάσταση των μεταβλητών με μη ακέραιες τιμές.

Συνοψίζοντας η ΠΦΑ σχετίζεται με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου και σε κάποιον βαθμό μπορεί και να την προκαλέσει. Οι μαθητές που θεωρούν ότι μόνο φυσικοί αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν στα γράμματα των αλγεβρικών εκφράσεων, θα θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης είναι και το πραγματικό της. Παρόλ΄ αυτά, κάποιος που μπορεί να θεωρεί ότι για παράδειγμά το $3x$ αναπαριστά μόνο θετικές ποσότητες, χωρίς απαραίτητα να θεωρεί ότι το x είναι σύμβολο φυσικών αριθμών. Ακόμα και αυτές οι περιπτώσεις, μπορεί να είναι αποτέλεσμα της ΠΦΑ καθώς οι μαθητές/τριες φαίνεται να διατηρούν ένα τουλάχιστον χαρακτηριστικό της τάσης τους να θωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αυτό της θετικότητας (Christou, Kyrvei, & Vamvakoussi, in press).

Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου φαντάζει να είναι ανθεκτική ανεξάρτητα από το αν οι μεταβλητές που δίνονται στους/στις μαθητές/τριες εντάσσονται σε συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο (πχ τετραγωνικές ρίζες, ανισώσεις, συναρτήσεις, πολυώνυμα) (βλ. Χρήστου 2009; Vlassis, 2004). Ακόμη, παράλληλα με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου και την τάση των μαθητών/τριων να δοκιμάζουν φυσικούς αριθμούς στη θέση των γραμμάτων, αναδείχθηκε και η τάση τους να επιλέγουν ακέραιες τιμές. Λαμβάνοντας υπόψη όλα αυτά τα στοιχεία, η διερεύνηση του τρόπου που επιδρά το φαινομενικό πρόσημο εξισώσεων και ανισώσεων στην ικανότητα των μαθητών/τριων να εντοπίζουν τιμές που της επαληθεύουν αποτελεί ενδιαφέρον ζήτημα προς μελέτη.

Το αυξανόμενο ενδιαφέρον των ερευνητών για τη μελέτη των παρανοήσεων των μαθητών/τριων στα μαθηματικά, οδήγησε στην ανάπτυξη μεθόδων διδακτικών παρεμβάσεων που θα μπορούσαν να βοηθήσουν στην υπέρβασή τους. Σε μια διδακτική παρέμβαση με άμεση διδασκαλία όπου αξιοποιήθηκε η τεχνική της γνωστικής σύγκρουσης, ο Christou (2012) προσπάθησε να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να υπερβούν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου μεταβλητών ή αλγεβρικών παραστάσεων. Οι αλγεβρικές παραστάσεις επιλέχθηκαν με κατάλληλο τρόπο ώστε το πρόσημό τους να είναι δυνατό να παρερμηνευτεί. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτής της παρέμβασης, η πειραματική ομάδα βελτίωσε τις επιδόσεις της συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου. Ωστόσο, η εννοιολογική σύγκρουση δεν μεταφέρθηκε σε άλλα μαθηματικά πλαίσια (τετραγωνική ρίζα και απόλυτη τιμή). Τέλος, τα αποτελέσματα της παρέμβασης δεν ήταν ανθεκτικά στο χρόνο.

Με γνώμονα αυτό το σημείο ενδιαφέροντος και τις αναφορές της βιβλιογραφίας για υπέρβαση των δυσκολιών των παιδιών μέσω προσαρμογών στη διδακτική διαδικασία (πχ. Stenberg et al., 1991), στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα μελετηθεί η αποτελεσματικότητα των λανθασμένων παραδειγμάτων, ως μέσο υπέρβασης δυσκολιών σε συναφή μαθηματικά αντικείμενα με εκείνα των εξισώσεων και των ανισώσεων.

2.4. Διδακτικές παρεμβάσεις με λανθασμένα παραδείγματα

Λανθασμένα ονομάζονται τα παραδείγματα τα οποία περιλαμβάνουν μια βήμα προς βήμα περιγραφή του τρόπου επίλυσης ενός προβλήματος στο οποίο ένα ή περισσότερα από τα βήματα είναι λανθασμένα. Τα λανθασμένα παραδείγματα βασίζονται σε συνήθη λάθη των μαθητών/τριων σε συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία αναφέρονται στη βιβλιογραφία (πχ. λάθη στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ αριθμών και αλγεβρικών συμβόλων, βλ Zhao & Acosta-Tello, 2016). Αυτού του είδους τα παραδείγματα, παρουσιάζονται συχνά στους/στις μαθητές/τριες ως λάθη που πραγματοποίησαν άλλα παιδιά καθώς υποστηρίζεται η άποψη πως υποθετικά λάθη άλλων ωθούν στον προβληματισμό και βοηθούν τους/τις μαθητές/τριες αρχικά να αναγνωρίζουν και στη συνέχεια να διορθώνουν δικά τους λάθη (Booth et al., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007; Siegler & Chen, 2008). Την ίδια στιγμή, η διδακτική τους αξιοποίηση φαίνεται να είναι ιδιαίτερα πολύτιμη για εκείνους/ες με επαρκή προϋπάρχουσα γνώση ή για μαθητές/τριες «έτοιμους» να έρθουν αντιμέτωποι με λάθη (Barbieri, & Booth, 2016; Große, & Renkl, 2007; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Σε ορισμένες περιπτώσεις, όμως, φαίνεται να ωφελούν κι εκείνους με περιορισμένη κατανόηση της άλγεβρας (Barbieri, & Booth, 2016, 2020). Ωστόσο, επισημαίνεται συχνά πως οι μαθητές/τριες με χαμηλό γνωστικό υπόβαθρο δυσκολεύονται να εντοπίσουν και να ερμηνεύσουν τα σφάλματα που ενσωματώνονται στα λανθασμένα παραδείγματα (Booth & Davenport, 2013; Große, & Renkl, 2007).

Κατά την αξιοποίηση λανθασμένων παραδειγμάτων στις τάξεις μαθηματικών, συνήθως ζητείται από τους/τις μαθητές/τριες να τα μελετήσουν, να τα επεξηγήσουν ή ακόμη και να διορθώσουν το λάθος που εντοπίζουν (Barbieri, Booth, Begolli, & McCann, 2021). Τα λανθασμένα παραδείγματα χρησιμοποιούνται είτε μεμονωμένα (βλ. Adams et al., 2014; Barbieri & Booth, 2020) είτε σε συνδυασμό με ορθά λυμένα παραδείγματα (βλ. Booth et al., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Σύμφωνα με τους Booth et al. (2013), ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο χορηγούνται, τα λανθασμένα παραδείγματα μπορούν να ενταχθούν στον τομέα της επιστήμης για την εννοιολογική αλλαγή, όπου η πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων είναι συνέπεια της αλληλεπίδρασης της ήδη κατακτημένης γνώσης με την νέο-εισερχόμενη πληροφορία.

Στη σχολική τάξη, τα ορθά λυμένα παραδείγματα αξιοποιούνται σε συντριπτικά μεγαλύτερη συχνότητα έναντι των λανθασμένων (Tulis, 2013), παρά το γεγονός ότι ολοένα και περισσότερα ευρήματα πρόσφατων μελετών ισχυροποιούν την υπόθεση πως τα δεύτερα παρέχουν σπουδαία μαθησιακά οφέλη στους/στις μαθητές/τριες (Barbieri, & Booth, 2020; Metcalfe, 2017; Wang, Yang, Liu, Cheng, Liu, 2015) προσφέροντάς τους απόκτηση γνώσεων και εξασφαλίζοντας μια ομαλότερη μετάβαση σε ανώτερες αλγεβρικές έννοιες (Wang et al., 2015). Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί πως η ενσωμάτωση λαθών σε λυμένα παραδείγματα φαίνεται να αποτελεί μια διδακτική μέθοδο που και κερδίζει συνεχώς έδαφος (πχ., Barbieri, & Booth, 2020).

Στην περίπτωση των λανθασμένων παραδειγμάτων, εντοπίζονται προηγούμενες έρευνες που επιχειρούν την διερεύνηση της αποτελεσματικότητάς τους στην υπέρβαση παρανοήσεων και λαθών στις εξισώσεις (Barbieri & Booth, 2016, 2020; Booth et al., 2013; Zhao, & Acosta-Tello, 2016). Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνα των Booth και συνεργατών (2013) διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα διαφορετικών διδακτικών παρεμβάσεων στην κατάκτηση εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης γραμμικών εξισώσεων δυο πράξεων από μαθητές/τριες γυμνασίου. Σε αυτή την έρευνα οι συμμετέχοντες χωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες. Οι πρώτες τρεις ομάδες λειτούργησαν ως πειραματικές, ενώ η τέταρτη ως ομάδα ελέγχου. Η πρώτη πειραματική ομάδα δέχθηκε διδακτική παρέμβαση με ορθά λυμένα παραδείγματα. Στη δεύτερη πειραματική ομάδα δόθηκαν μόνο λανθασμένα παραδείγματα, ενώ στην τρίτη συνδυασμός ορθών και λανθασμένων παραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα ενίσχυσαν την υπόθεση πως ο συνδυασμός ορθών και λανθασμένων παραδειγμάτων μαζί με την καθοδήγηση των μαθητών/τριων δρουν ευεργετικά για τη μάθηση σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Επιπλέον, υποστηρίχθηκε πως οι μαθητές/τριες των πειραματικών ομάδων απέκτησαν τόσο εννοιολογική όσο και διαδικαστική γνώση. Μάλιστα, η διαδικαστική γνώση που κατακτήθηκε ήταν το ίδιο καλή με εκείνη της ομάδας ελέγχου. Σε παρόμοια ευρήματα οδηγήθηκε και η διδακτική παρέμβαση των Zhao και Acosta-Tello (2016) όπου τρεις ομάδες μαθητών/τριων έλαβαν συνδυασμό ορθού και λανθασμένου παραδείγματος εξισώσεων υπό διαφορετικές συνθήκες (οδηγίες). Δηλαδή, και σε αυτή την έρευνα υποστηρίχθηκε πως κατά τη διδασκαλία της αλγεβρικής εξίσωσης, ο συνδυασμός ορθών και λανθασμένων παραδειγμάτων βελτιώνει την εννοιολογική κατανόηση των παιδιών συγκριτικά με την μεμονωμένη αξιοποίηση εφαρμογών.

Παρά το γεγονός ότι κάποια λάθη μαθητών/τριων προέρχονται από βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις τους στους φυσικούς αριθμούς, η μελέτη και επεξήγηση λανθασμένων παραδειγμάτων ενισχύει την ικανότητά τους να αντιμετωπίζουν με άμεσο τρόπο τις όποιες παρανοήσεις. Σε συνέχεια της μελέτης των Booth et al. (2013), οι Barbieri και Booth (2020) εκπόνησαν άλλη μια διδακτική παρέμβαση με την υπόθεση πως η έκθεση των μαθητών/τριων σε κοινά σφάλματα θα μπορούσε να βελτιώσει τις αλγεβρικές τους γνώσεις και να αυξήσει το βαθμό κατανόησης των αλγεβρικών εννοιών που εντάσσονται στην πορεία των σχολικών ετών. Αυτή τη φορά η έρευνα επικεντρώθηκε σε λάθη και παρανοήσεις των μαθητών/τριων σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ενώ συμμετέχοντες ήταν 206 παιδιά Γυμνασίου χωρισμένα σε δυο πειραματικές ομάδες και μια ομάδα ελέγχου. Σύμφωνα με τα ευρήματά τους, τα λανθασμένα παραδείγματα σε συνδυασμό με την επεξήγηση λαθών από τους/τις μαθητές/τριες βελτίωσαν την ικανότητά τους να επιλύουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Αξιοσημείωτο, μάλιστα, είναι το γεγονός ότι οι ερευνητές διαπίστωσαν πως οι μαθητές/τριες με μειωμένη προηγούμενη γνώση ή περιορισμένη κατανόηση αλγεβρικών εννοιών επωφελήθηκαν περισσότερο από την ενασχόληση με λάθη παρά από την παραδοσιακή διδασκαλία. Σε παρόμοια συμπεράσματα οδηγήθηκαν οι ίδιοι ερευνητές και μερικά χρόνια πριν, μελετώντας την αποτελεσματικότητα των λανθασμένων παραδειγμάτων στην βελτίωση των επιδόσεων μαθητών/τριων στην επίλυση γραμμικών συστημάτων δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους (Barbieri & Booth, 2016). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες με χαμηλά επίπεδα προηγούμενης γνώσης στην άλγεβρα επωφελήθηκαν από τα λανθασμένα παραδείγματα, ισχυροποιώντας την παραδοχή πως η μελέτη σφαλμάτων επιτρέπει την κωδικοποίηση ορισμένων χαρακτηριστικών ενός μαθηματικού προβλήματος και ταυτόχρονα να βοηθήσει την υπέρβαση κοινών παρανοήσεων κατά τα πρώτα στάδια ενασχόλησης με μια αλγεβρική έννοια.

Παρά τη διχογνωμία της ερευνητικής κοινότητας σχετικά με τις ομάδες μαθητών/τριων που επωφελούνται περισσότερο από την ενασχόληση με λανθασμένα παραδείγματα στο πεδίο της άλγεβρας, αξίζει να σημειωθεί πως η Booth και συνεργάτες (2015) υποστήριξαν με τα ευρήματά τους πως η διδασκαλία της άλγεβρας μέσω λανθασμένων παραδειγμάτων ενισχύει την απόδοση όλων, έχοντας μεγαλύτερο θετικό αντίκτυπο σε εκείνους/ες με τις χαμηλότερες επιδόσεις. Ενδιαφέρον, όμως, προκύπτει και από τον χρόνο στον οποίο η όποια αποτελεσματικότητα των λανθασμένων παραδειγμάτων γίνεται αντιληπτή. Σύμφωνα με μια μερίδα ερευνών, η ενασχόληση με λανθασμένα παραδείγματα οδηγεί σε οφέλη που δεν γίνονται αντιληπτά αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση (Adams, McLaren, Mayer, Goguadze, & Isotani, 2013; Adams et al., 2014; Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Η συγκεκριμένη διαπίστωση αιτιολογείται από το γεγονός ότι η αφομοίωση της γνώσης μέσα από λάθη απαιτεί βαθύτερη επεξεργασία του υλικού που μελετήθηκε κι έτσι τα αποτελέσματά της γίνονται φανερά σε βάθος χρόνου (Adams et al., 2013). Επιπλέον, όπως επισημαίνουν οι Bjork και Bjork (2011), η αλλαγή της διδακτικής πρακτικής κατά τη διάρκεια της μάθησης έχει οφέλη τα οποία γίνονται μακροπρόθεσμα αντιληπτά. Ωστόσο, το παραπάνω συμπέρασμα δεν είναι κοινό. Για παράδειγμα, η έρευνα των Barbieri και Booth (2020) εντόπισε βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών της πειραματικής ομάδας αμέσως μετά την ενασχόληση των παιδιών με λανθασμένα παραδείγματα. Μια εξήγηση που δόθηκε από τους ίδιους για το εύρημά τους, το οποίο είναι αντίθετο με εκείνο προγενέστερων μελετών, είναι πως η μελέτη λανθασμένων παραδειγμάτων είναι επαρκής να αποδώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα και πως μια ενδεχόμενη προσπάθεια των παιδιών για διόρθωση του λάθους να προσθέτει μια επιπλέον δυσκολία η οποία αυξάνει το χρόνο εμφάνισης των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν.

Κλείνοντας, από τη βιβλιογραφική επισκόπηση εντοπίστηκαν διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες χρησιμοποίησαν ως εργαλείο τα λανθασμένα παραδείγματα για την υπέρβαση παρανοήσεων και σε πεδία της άλγεβρας εκτός από εκείνο της επίλυσης εξισώσεων. Ενδεικτικά, τέτοιες έρευνες αυτές ασχολήθηκαν με παρανοήσεις σε κλάσματα (Tsovaltzi, Melis, Bruce, Meyer, Dietrich & Goguadze, 2010), δεκαδικούς αριθμούς (Adams et al., 2013, 2014; Durkin, & Rittle-Johnson, 2012) και επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Curry, 2004; Große, & Renkl, 2007). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι μέχρι σήμερα δεν έχουν δημοσιευθεί έρευνες που επιχειρούν την υπέρβαση παρανοήσεων στην επίλυση ανισώσεων μέσω λανθασμένων παραδειγμάτων και συνεκτιμώντας το γεγονός ότι τα διάφορα ερευνητικά δεδομένα παρουσιάζουν αποτελέσματα που διαφέρουν μεταξύ τους, κρίνεται πως η περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε να ενισχύσει περισσότερο την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

3. ΥΠΟΘΕΣΗ, ΣΚΟΠΟΣ, ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Ερευνητική Υπόθεση

Με την παρούσα εργασία θα επιχειρήσουμε να διερευνήσουμε τον τρόπο που επιδρά η τάση των μαθητών/τριων να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών και ότι το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων είναι το πραγματικό πρόσημο των τιμών που μπορούν να αναπαραστήσουν, σε λάθη και δυσκολίες εύρεσης λύσεων σε εξισώσεις και ανισώσεις. Επιπρόσθετα, θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε τον βαθμό αποτελεσματικότητας των λανθασμένων παραδειγμάτων ως μέσο υπέρβασης των λαθών αυτών και να το συγκρίνουμε με ορθά λυμένα παραδείγματα.

Καθώς ένα μεγάλο μέρος των δυσκολιών, λαθών και παρανοήσεων των παιδιών στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων προέρχεται από αλγοριθμικά λάθη/ λάθη μετασχηματισμών, υποθέτουμε πως η ανάδειξη του αναφορικού νοήματος των αλφαβητικών συμβόλων που αναπαριστούν αγνώστους θα μπορούσε να καταστήσει πιο κατανοητή την διαδικασία εύρεσης λύσεων, κάνοντας αναφορά σε αριθμούς. Για τον λόγο αυτό, στην παρούσα έρευνα, τέθηκαν τέτοιες ερωτήσεις στα παιδιά ώστε να μπορούν να απαντηθούν με δοκιμές αριθμών στη θέση των αλφαβητικών συμβόλων/ αγνώστων, αναδεικνύοντας έτσι το αναφορικό νόημα των εξισώσεων/ανισώσεων ως τρόπο νοηματοδότησής τους. Δηλαδή, ζητούμενο από τους/τις μαθητές/τριες δεν ήταν η αλγεβρική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, αλλά η αναζήτηση λύσεων με αναφορά σε αριθμούς. Άλλωστε, το αναφορικό νόημα των συμβόλων αποτελεί εργαλείο κατανόησης της διαδικασίας επίλυσης η οποία περιλαμβάνει μετασχηματισμούς. Έτσι, συστήνεται η αντιμετώπιση μιας εξίσωσης ή ανίσωσης όχι ως φορμαλισμού αλλά ως μιας έκφρασης που συσχετίζει γνωστούς και άγνωστους αριθμούς ή γνωστές με άγνωστες ποσότητες και με αυτό τον τρόπο να αναζητούνται πιθανές λύσεις ή όχι, αν αυτές είναι αδύνατες.

Λαμβάνοντας υπόψη όσα αντλήθηκαν από την μελέτη της βιβλιογραφίας, σε αυτή της έρευνα προσπαθούμε να διερευνήσουμε την υπόθεση ότι λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν να ερμηνευτούν από την τάση των μαθητών/τριων να:

α) θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών.

β) παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο ως το πρόσημο των τιμών που μια αλγεβρική έκφραση μπορεί να αναπαραστήσει.

Υποθέσαμε, λοιπόν, πως το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής έκφρασης που εμφανίζεται σε μια εξίσωση/ανίσωση θα επηρεάζει τους/τις μαθητές/τριες να θεωρούν ότι μπορεί να πάρει συγκεκριμένες τιμές κι όχι άλλες, κι αυτό θα τους/τις οδηγούσε σε λανθασμένες εκτιμήσεις του εύρους των λύσεων που αναφέρουν. Αντίστοιχα, η τάση των μαθήματων/τριων να θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς θα είχε ως αποτέλεσμα να περιορίσουν το εύρος των λύσεων που αναφέρουν σε αξιώσεις/ανισώσεις

Τέλος, εξετάσαμε το ερώτημα κατά ποσό μια διδακτική παρέμβαση με χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων θα βοηθούσε τους/τις μαθητές/τριες να μειώσουν την επίδραση των παραπάνω παρανοήσεων, με αποτέλεσμα να διευρύνουν το εύρος τιμών που βρίσκουν ως λύσεις εξισώσεων/ανισώσεων. Για τον λόγο αυτό, συγκρίναμε τις επιδόσεις μιας ομάδας παιδιών μετά από μια παρέμβαση που έγινε με χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων με εκείνα μιας παρέμβασης που έγινε με τη χρήση ορθών παραδειγμάτων σε άλλη ομάδα μαθητών/τριων.

3.2 Σκοπός

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσουμε εάν:

α) λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν να ερμηνευθούν από η τάση των παιδιών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των γραμμάτων.

β) μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα είναι ικανή να τους βοηθήσει να κάνουν λιγότερα τέτοια λάθη σε σχέση με μια άλλη διδακτική παρέμβαση βασισμένη σε ορθά λυμένα παραδείγματα.

3.3. Μεθοδολογία

3.3.1. Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 109 μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ Γυμνασίου (14,5 ετών περίπου) ενός δημόσιου Γυμνασίου του Ν. Κιλκίς. Το δείγμα ήταν σχεδόν ίσα μοιρασμένο σε αγόρια και κορίτσια (52 αγόρια και 57 κορίτσια). Η Ομάδα Παρέμβασης που έλαβε λανθασμένα παραδείγματα αποτελούνταν από 44 μαθητές/τριες (21 αγόρια και 23 κορίτσια) και η Ομάδα Ελέγχου αποτελούνταν από 65 μαθητές/τριες (31 αγόρια και 34 κορίτσια).

Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, έχουν διδαχθεί τις πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις κατά τη διάρκεια του παρόντος σχολικού έτους ή προηγούμενων σχολικών ετών. Έτσι, είναι ικανοί να τις επιλύσουν δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές οι οποίες είναι πιθανό να τις επαληθεύουν. Επιπλέον, είναι σε θέση να υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα πραγματικών αριθμών και να επιλύουν με δοκιμές εξισώσεις της μορφής $\sqrt{x}$ = α, με α > 0. Ακόμη, έχουν ασχοληθεί σε μεγάλο βαθμό με τους ρητούς αριθμούς και με τη διάταξη των αριθμών. Μπορούν να συγκρίνουν αριθμούς και να χρησιμοποιούν τα σύμβολα της σύγκρισης. Σημειώνεται, μάλιστα, πως στη διδακτέα ύλη της τάξης τους περιλαμβάνεται και η επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού. Συνεπώς, οι παραπάνω λόγοι συνέβαλλαν στην επιλογή μαθητών/τριων Γ΄ Γυμνασίου ως ένα κατάλληλο δείγμα για την έρευνα.

3.3.2. Υλικά

Ερωτηματολόγια

Στους μαθητές και στις μαθήτριες της έρευνας δόθηκαν τρία ερωτηματολόγια (ΕΡ/Ε1, ΕΡ/Ε2 και ΕΡ/Ε3) με 18 ασκήσεις σχετικές με την ύπαρξη ή μη λύσεων σε εξισώσεις και ανισώσεις. Οι 18 ασκήσεις ήταν πολλαπλής επιλογής – σύντομης αιτιολόγησης και τα τρία ερωτηματολόγια είχαν μικρές διαφορές μεταξύ τους.

Εξισώσεις

Η χρήση ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής – σύντομης απάντησης ευνοούσε τον εντοπισμό των λύσεων της κάθε εξίσωσης με τη μέθοδο δοκιμής αριθμών. Η μέθοδος της δοκιμής αριθμού κρίθηκε ως η καταλληλότερη καθώς στόχος της παρούσας μελέτης δεν ήταν να εξετάσουμε τα λάθη που πραγματοποιούν οι μαθητές και οι μαθήτριες στην επίλυση εξισώσεων/ ανισώσεων, αλλά να διερευνήσουμε αν το φαινομενικό πρόσημο επιδρά και με ποιον τρόπο στον προσδιορισμό της ύπαρξης ή μη ύπαρξης λύσεων σε εξισώσεις και ανισώσεις. Συνεπώς, ο τρόπος που θέσαμε τις ερωτήσεις (Βλ. Εικόνα 1 και Εικόνα 2) δεν κατεύθυνε τους/τις μαθητές/τριες προς την αλγοριθμική λύση αλλά τους παρακινούσε να δοκιμάσουν τιμές, ενεργοποιώντας την σύνδεση με το αναφορικό νόημα της εξίσωσης/ανίσωσης που εμφανίζεται στο έργο.

Όλες οι ασκήσεις εξισώσεων είχαν τη μορφή που παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί (Βλ. Εικόνα 1):

$-2y^2 = 2$

☐ Υπάρχουν και είναι………………………………………………………………

☐ Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………...……………

Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης πρώτου μέρους ερωτηματολογίου ΕΡ/Ε1

Σε κάθε μια ερώτηση οι μαθητές/τριες έπρεπε να επιλέξουν τη μια ανάμεσα στις δυο δοσμένες εναλλακτικές απαντήσεις (βλ. Εικόνα 1). Ακολούθως έπρεπε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στην περίπτωση της επιλογής «Υπάρχουν και είναι…» οι μαθητές/τριες έπρεπε να προσδιορίσουν τον αριθμό ή τους αριθμούς που επαλήθευαν την εξίσωση. Στην περίπτωση της επιλογής «Δεν υπάρχουν γιατί…», οι ίδιοι, έπρεπε να δώσουν μια πλήρη αιτιολόγηση που να δικαιολογεί την απάντησή τους (βλ. Εικόνα 2).

	Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν; Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν και είναι……………………», προσδιορίζοντας τον αριθμό ή τους αριθμούς αυτούς. Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί………………………..», αιτιολογώντας την απάντησή σου. • Να θυμάσαι πως οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού που γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά. • Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.
-x = 17	√**Υπάρχουν και είναι** *ο αριθμός -17* ☐Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………
y^2 = -16	☐Υπάρχουν και είναι…………………………………………… √ **Δεν υπάρχουν γιατί** *δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός*

Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα ερωτήσεων και απαντήσεων από το ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε1 (πρώτο μέρος)

Η δομή του ερωτηματολογίου ΕΡ/Ε1 περιλάμβανε δυο μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελούνταν από εννέα (9) εξισώσεις που ήταν οι εξής: x^2 + 1= 5, y^2 = 25, $\sqrt{(-x)^2}$ = 3, -y – 1 = y + 1, -x = 17, $\sqrt{-5x}$ = 5, - 2y^2 = 2, y^2 = -16, $-\sqrt{x} = 2$. Οι εξισώσεις ήταν τοποθετημένες με τυχαία σειρά και επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να εστιάζουν στο φαινομενικό πρόσημο και στην τάση των παιδιών να δοκιμάζουν ως τιμές που μπορούν να τις επαληθεύουν μόνο φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή, οι εξισώσεις ήταν αντίστοιχες των κατηγοριών των λαθών που αναμέναμε να εντοπίσουμε στις απαντήσεις των συμμετεχόντων/ουσών.

Σύμφωνα με τις κατηγορίες λαθών που αναμέναμε να συναντήσουμε, οι εξισώσεις οργανώθηκαν στις εξής κατηγορίες:

- **Εξισώσεις με εστίαση στο φαινομενικό πρόσημο**: -y – 1 = y + 1, $\sqrt{-5x}$ = 5, 3, -x = 17. Σε αυτές τις εξισώσεις υπάρχει διαφορά φαινομενικού προσήμου μεταξύ πρώτου και δεύτερου μέλους. Συγκεκριμένα, η εξίσωση «-y – 1 = y + 1» επιλέχθηκε καθώς αναμένεται να θεωρηθεί ως αδύνατη από κάποιους/ες μαθητές/τριες εξαιτίας των φαινομενικά αντίθετων μελών που περιλαμβάνει. Αντίστοιχα, η εξίσωση -x = 17 επιλέχθηκε με γνώμονα το φαινομενικά αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής x που περιλαμβάνει στο πρώτο μέλος. Όσον αφορά την εξίσωση $-\sqrt{5x} = 5$, επιλέχθηκε καθώς περιλαμβάνει τετραγωνική ρίζα. Το πλαίσιο των τετραγωνικών ριζών είναι κατάλληλο για την ανάδειξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, μιας που τα παιδιά διδάσκονται πως το υπόρριζο είναι πάντοτε μια θετική ποσότητα και πως δεν τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται. Θα αναμέναμε ότι στις εξισώσεις αυτές η παρερμηνεία του ΦΠ θα επηρέαζε τους/τις μαθητές/τριες να μην βρίσκουν λύσεις κι έτσι να θεωρούν πως είναι αδύνατες.
- **Εξισώσεις με εστίαση στους αριθμούς που μπορούν να δοκιμαστούν**: (x^2 +1 = 5, , y^2 = 25, $\sqrt{(-x)^2}$ = 3. Πρόκειται για εξισώσεις των οποίων ο άγνωστος είναι υψωμένος στο τετράγωνο. Οι μαθητές/τριες έχουν διδαχθεί πως ποσότητες που υψώνονται στο τετράγωνο είναι θετικές ή ίσες με μηδέν. Έτσι, με αυτές τις ερωτήσεις αναμένουμε να λάβουμε απαντήσεις που θα αναφέρονται μόνο στη θετική λύση καθώς και να δοκιμάζονται τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών λόγω της ΠΦΑ.
- **Αδύνατες εξισώσεις:** - $2y^2$ = 2, y^2 = -16, $-\sqrt{x} = 2$. Πρόκειται για εξισώσεις χωρίς λύσεις. Συνεπώς, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που να τις επαληθεύουν κι έτσι αναμένεται οι μαθητές/τριες να απαντήσουν ορθά σε αυτές. Τις συμπεριλάβαμε ώστε να μην είναι σε όλες τις ερωτήσεις η σωστή απάντηση «υπάρχουν και είναι».

Με σκοπό την πιο συνοπτική παρουσίαση των εξισώσεων των δυο ερωτηματολογίων ΕΡ/Ε1 και ΕΡ/Ε2, αυτές παρουσιάζονται κατηγοριοποιημένες ως προς τη δομή τους στον Πίνακα που ακολουθεί (βλ. Πίνακας 2). Εδώ φαίνεται ότι επιλέχθηκαν διαφορετικές δομές των εξισώσεων για να υπάρχει ποικιλομορφία. Συγκεκριμένα, στις εξισώσεις με προσθετική δομή, οι όροι των εξισώσεων διαχωρίζονταν με πρόσθεση ενός θετικού αριθμού (πρόσημο +) ή με την πρόσθεση ενός αρνητικού αριθμού (πρόσημο -). Στις εξισώσεις με πολλαπλαστιαστική δομή, περιλαμβανόταν μοναδικός όρος (ο άγνωστος πολλαπλασιαζόταν με μια αριθμητική τιμή). Στις εξισώσεις με ριζά στο ένα από τα δυο μέλη περιλαμβανόταν τετραγωνική ρίζα. Τα πλαίσια αυτά επέτρεψαν να έχουμε εξισώσεις με καμία, μια και δυο λύσεις, με διαφορετικές δομές μεταξύ τους.

Πίνακας 2. Ερωτήσεις πρώτου μέρους (εξισώσεις) ΕΡ/Ε1 και ΕΡ/Ε2

Ερωτηματολόγιο	Δομή	Πλήθος λύσεων		
		2 λύσεις	1 λύση	Καμία λύση
ΕΡ/Ε1	Προσθετική	$x^2 + 1 = 5$	$-y - 1 = y + 1$	
	Πολλαπλασιαστική	$y^2 = 25$	$-x = 17$	$-2y^2 = 2$ $y^2 = -16$
	Ρίζα	$\sqrt{(-x)^2} = 3$	$\sqrt{-5x} = 5$	$-\sqrt{x} = 2$
ΕΡ/Ε2	Προσθετική	$y^2 + 2 = 11$	$x + 5 = -x - 5$	
	Πολλαπλασιαστική	$y^2 = 36$	$-y = 13$	$-3x^2 = 9$ $x^2 = -25$
	Ρίζα	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	$\sqrt{-y} = 2$	$-\sqrt{y} = 4$

Ανισώσεις

Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου Ε1 (ΕΡ/Ε1) αποτελούνταν από εννέα (9) ανισώσεις που ήταν οι εξής: $x + 2 < - x - 2$, $- 2x - 1 > 5$, $-y > 7$, $1 < -\frac{1}{x}$, $\frac{4}{y+1} < -1$, $\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$, $3x^2 < -3$, $\sqrt{-y^2} > 2$, $-\sqrt{y} > 4$ (Βλ. Πίνακας 2). Οι ανισώσεις ήταν τοποθετημένες με τυχαία σειρά, όπως ακριβώς συνέβη και με τις εξισώσεις. Οι ερωτήσεις που δόθηκαν στους/στις μαθητές/τριες ήταν κλειστού τύπου - σύντομης αιτιολόγησης και είχαν τη μορφή που παρουσιάζεται ακολούθως στην εικόνα (Βλ. Εικόνα 3):

$x + 2 < - x - 2$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………………….. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………..………………

Εικόνα 3. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης δεύτερου μέρους ερωτηματολογίου ΕΡ/Ε1

Σε κάθε μια ερώτηση οι μαθητές/τριες έπρεπε να επιλέξουν τη μια ανάμεσα στις δυο δοσμένες εναλλακτικές απαντήσεις (Βλ. Εικόνα 3). Ακολούθως έπρεπε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στην περίπτωση της επιλογής «Υπάρχουν, για παράδειγμα…» έπρεπε να προσδιορίσουν τουλάχιστον έναν αριθμό που να επαλήθευε την εξίσωση. Στην περίπτωση της επιλογής «Δεν υπάρχουν γιατί…» έπρεπε να δώσουν μια πλήρη αιτιολόγηση που να δικαιολογεί την απάντησή τους (Βλ. Εικόνα 4).

Για κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν; Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………», προσδιορίζοντας τουλάχιστον έναν αριθμό που να την επαληθεύει. Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί…………………………….», αιτιολογώντας την απάντησή σου. • Να θυμάσαι πως η λύση της ανίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά. • Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.	
-y > 7	√ **Υπάρχουν, για παράδειγμα** *-8, -9, - 10* ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………
$3x^2 < - 3$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα …………………………… √ **Δεν υπάρχουν γιατί** *ένας θετικός αριθμός είναι πάντα μεγαλύτερος από έναν αρνητικό.*

Εικόνα 4. Ενδεικτικό παράδειγμα ερωτήσεων και απαντήσεων από το ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε1(δεύτερο μέρος)

Όμοια με τους λόγους επιλογής των εξισώσεων, έτσι και οι ανισώσεις επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε οι απαντήσεις που αναμέναμε να λάβουμε να ήταν σχετικές με την πρόκληση λαθών φαινομενικού προσήμου και την δοκιμή φυσικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με τους λόγους επιλογής τους, οι ανισώσεις μπορούν να συμπεριληφθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

- **Ανισώσεις με εστίαση στο φαινομενικό πρόσημο:** x + 2 < - x – 2, - 2x - 1 > 5, -y > 7, $\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$. Πρόκειται για ανισώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν φαινομενικά αντίθετα πρόσημα στα δυο μέλη. Σε αυτές τις ανισώσεις είναι αναμένουμε να λάβουμε απαντήσεις σχετικές με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, είτε επειδή τα παιδιά θα θεωρήσουν πως δυο φαινομενικά αντίθετα μέλη δεν θα μπορούν να είναι ίσα είτε γιατί θα θεωρήσουν πως η υπόρριζη ποσότητα έχει αρνητικό πρόσημο.
- **Κλασματικές ανισώσεις**: $1 < -\frac{1}{x}$, $\frac{4}{y+1} < -1$. Σε αυτές τις ανισώσεις περιλαμβάνονται κλάσματα. Έτσι, ενώ το ένα μέλος είναι ακέραιος αριθμός, το άλλο μέλος είναι κλάσμα. Σε αυτές τις ανισώσεις αναμένεται η δοκιμή θετικών ακέραιων.
- **Αδύνατες ανισώσεις:** $\sqrt{-y^2} > 2$, $3x^2 < -3$, $-\sqrt{y} > 4$. Οι συγκεκριμένες ανισώσεις επιλέχθηκαν καθώς δεν υπάρχουν πραγματικές τιμές που να τις επαληθεύουν. Σε αυτές τις ανισώσεις περιμένουμε αυξημένο αριθμό αυξημένων απαντήσεων.

Τέλος, όλες οι ανισώσεις που δόθηκαν στους/στις μαθητές/τριες (x + 2 < - x – 2, - 2x - 1 > 5, -y > 7, $1 < -\frac{1}{x}$, $\frac{4}{y+1} < -1$, $\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$, 3 x^2 < - 3, $\sqrt{-y^2} > 2$, $-\sqrt{y} > 4$) είχαν διαφορετικό φαινομενικό πρόσημο μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μέλους τους (Βλ. Πίνακας 3). Για λόγους συνοπτικής παρουσίασης, οι ανισώσεις των ερωτηματολογίων ΕΡ/Ε1 και ΕΡ/Ε2 περιλαμβάνονται στον Πίνακα 3, κατηγοριοποιημένες ως προς τη δομή τους.

Πίνακας 3. Ερωτήσεις δεύτερου μέρους (ανισώσεις) ΕΡ/Ε1 και ΕΡ/Ε2

Ερωτηματολόγιο	Δομή	Πλήθος λύσεων	
		2 ή περισσότερες λύσεις	Καμία λύση
ΕΡ/Ε1	Προσθετική	$x + 2 < - x - 2$	
		$- 2x - 1 > 5$	
	Πολλαπλασιαστική	$-y > 7$	$3x^2 < - 3$
	Κλασματική	$1 < -\frac{1}{x}$	
		$\frac{4}{y+1} < -1$	
	Ρίζα	$\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$	$\sqrt{-y^2} > 2$
			$-\sqrt{y} > 4$
ΕΡ/Ε2	Προσθετική	$x < - x$	
		$-y - 2 > 2$	
	Πολλαπλασιαστική	$-y > 4$	$- 5x^2 > 5$
	Κλασματική	$2 < -\frac{2}{2x}$	
		$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	
	Ρίζα	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	$\sqrt{-x^2} > 3$
			$-\sqrt{y} > 1$

Τεκμηρίωση επιλογής εξισώσεων/ανισώσεων

Συνολικά, στο πρώτο και δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου Ε1 (ΕΡ/Ε2) αξιοποιήθηκαν εξισώσεις με γνώριμη μορφή προς τους/στις μαθητές/τριες Γ΄ Γυμνασίου καθώς ενασχολούνται με αυτές ήδη από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Παράλληλα, οι ίδιοι έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση συμβόλων σύγκρισης και έχουν κατακτήσει γνώσεις επίλυσης πρωτοβάθμιων ανισώσεων τα τελευταία δυο έτη φοίτησής τους στο Γυμνάσιο. Όσον αφορά στις εξισώσεις και ανισώσεις που περιλαμβάνουν ρίζα, αυτές επιλέχθηκαν με σκοπό να διερευνηθεί εάν οι μαθητές/τριες μεταφέρουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου και στην νέα αυτή έννοια με την οποία ήρθαν σε επαφή στο Γυμνάσιο. Αντιθέτως, αποφεύχθηκε η χρήση άλλων μορφών εξισώσεων (πχ. εξισώσεων με απόλυτες τιμές) γιατί θεωρήθηκε ότι οι μαθητές/τριες σε αυτές τις ηλικίες δεν έχουν αποκτήσει την απαιτούμενη εξοικείωση με αυτές και πιθανώς η χρήση τους να οδηγούσε σε λάθη εξαιτίας έλλειψης εννοιολογικής κατανόησης.

Για τον σχεδιασμό του δεύτερου ερωτηματολογίου Ε2 (ΕΡ/Ε2) εφαρμόστηκαν όλες οι παραπάνω αποφάσεις. Το ερωτηματολόγιο αυτό περιλάμβανε συνολικά 18 ερωτήσεις (9 εξισώσεις στο πρώτο μέρος και 9 ανισώσεις στο δεύτερο μέρος) και ήταν παρόμοιο με το ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε1. Τέλος το τρίτο ερωτηματολόγιο Ε3 (ΕΡ/Ε3) ήταν όμοιο με το Ε2 (ΕΡ/Ε2) αλλά για λόγους παρουσίασης των αποτελεσμάτων της έρευνας ονομάστηκε ΕΡ/Ε3. Η αντιστοιχία των εξισώσεων μεταξύ ΕΡ/Ε1 και ΕΡ/Ε2 παρουσιάστηκε στους Πίνακα 2 (Βλ. Πίνακας 2) και των ανισώσεων στον Πίνακα 3 (Βλ. Πίνακας 3). Το σύνολο των ερωτηματολογίων της έρευνας παρατίθεται στο Παράρτημα (Βλ. Παράρτημα).

Διδακτική παρέμβαση

Στην Ομάδα Παρέμβασης δόθηκαν 4 **λανθασμένα παραδείγματα** με ανισώσεις (Βλ. Παράρτημα). Οι ανισώσεις επιλέχθηκαν ως ένα πιο δύσκολο αντικείμενο από εκείνο των εξισώσεων εξαιτίας της μικρότερης εξοικείωσης των παιδιών με αυτές, με σκοπό να ελεγχθεί εάν οι μαθητές/τριες θα διόρθωναν τα λάθη τους και στις εξισώσεις μετά το τέλος της παρέμβασης. Δίνοντας δυσκολότερα παραδείγματα κατά το στάδιο της διδακτικής παρέμβασης, θεωρήσαμε ευκολότερη την πιθανή διόρθωση των λαθών στις εξισώσεις, που κρίθηκαν ως να είναι ένα ευκολότερο αντικείμενο για τα παιδιά. Επιπλέον, στο πλαίσιο των ανισώσεων μπορούσαμε να εστιάσουμε ταυτόχρονα στην ΠΦΑ όσο και στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Σε κάθε ένα από τα λανθασμένα παραδείγματα παρουσιαζόταν η λάθος απάντηση ενός μαθητή ή μιας μαθήτριας σε άσκηση σχετικά με την ύπαρξη ή μη λύσεων σε ανισώσεις με διαφορετικό φαινομενικό πρόσημο στο πρώτο και δεύτερο μέλος. Για το κάθε παράδειγμα επισημαίνονταν η παρερμηνεία του/της μαθητή/τριας που τον/την οδήγησε σε λανθασμένη απάντηση. Σε τελευταίο στάδιο παρουσιαζόταν ένα αντιπαράδειγμα.

Το πρώτο λανθασμένο παράδειγμα (Λανθασμένο παράδειγμα 1) περιλάμβανε μια ανίσωση με προσθετική δομή και φαινομενικά αντίθετα μέλη ($x + 1 < - x – 1$). Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιαζόταν το εξής κείμενο: *«Ένας μαθητής είπε πως η ανίσωση είναι αδύνατη, επειδή η θετική ποσότητα « x + 1» δεν μπορεί ποτέ να είναι πιο μικρή από την αρνητική «-x -1». Η απάντηση που έδωσε ο μαθητής είναι **<u>λανθασμένη</u>**.».* Ακολουθούσε επεξήγηση της αιτίας για την οποία είναι λανθασμένη η σκέψη του μαθητή, η οποία οδήγησε στη λάθος απάντηση: *«Ωστόσο, το γράμμα x* *έχει θετική αξία και το -x αρνητική αξία* ***<u>μόνο</u>*** *όταν στη θέση του βάζουμε θετικούς αριθμούς. Αυτό δεν ισχύει όταν στη θέση του βάζουμε αρνητικούς αριθμούς.».* Το παράδειγμα ολοκληρωνόταν με ένα αντιπαράδειγμα: «*Για παράδειγμα, αν x = -5 τότε: x + 1 = -5 + 1 = - 4 και - x -1 = - (-5) -1 = 5 – 1 = 4. Προκύπτει -4 < 4, άρα η τιμή x = -5 είναι μία λύση που επαληθεύει την ανίσωση.».*

Τα επόμενα τρία λανθασμένα παραδείγματα (Λανθασμένο παράδειγμα 2, λανθασμένο παράδειγμα 3 και λανθασμένο παράδειγμα 4) που ακολούθησαν, είχαν αντίστοιχη δομή με αυτή του πρώτου παραδείγματος (Βλ. Παράρτημα). Στο δεύτερο παράδειγμα εξετάστηκε η περίπτωση της ανίσωσης «$2 < \frac{6}{-3y}$ » η οποία είχε φαινομενικά αρνητικό πρόσημο στο δεύτερο μέλος. Στο τρίτο και τέταρτο παράδειγμα εξετάστηκε η περίπτωση ανισώσεων με ρίζα. Συγκεκριμένα, στο τρίτο παράδειγμα εξετάστηκε η περίπτωση της ανίσωσης «$\sqrt{-4x} < 4$» η οποία έχει φαινομενικά αρνητικό πρόσημο στο πρώτο μέλος και φαινομενικά αρνητική υπόρριζη ποσότητα. Στο τέταρτο παράδειγμα παρουσιαζόταν η περίπτωση της ανίσωσης «$\sqrt{6+6y} > -1$» η οποία παρουσιάζει φαινομενικά θετικό πρόσημο στο πρώτο μέλος και φαινομενικά θετική υπόρριζη ποσότητα.

Στην Ομάδα Ελέγχου δόθηκαν 3 ορθά λυμένα παραδείγματα (Βλ. Παράρτημα) με ανισότητες για τις οποίες ένας μαθητής ή μια μαθήτρια έπρεπε να επιλέξει αν υπάρχουν ή δεν υπάρχουν λύσεις που τις επαληθεύουν. Πριν από την παρουσίαση των παραδειγμάτων, επισημάνθηκε η ιδιότητα των ανισοτήτων σχετικά με την αλλαγή της φοράς του συμβόλου «>» ή «<» σε περίπτωση πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης των δυο μελών με τον ίδιο αρνητικό αριθμό. Συγκεκριμένα δόθηκαν οι ακόλουθες οδηγίες: *«Θα πρέπει να θυμάστε πως αν και τα δυο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανισότητα με την ίδια φορά. Για παράδειγμα: αν 3 < 5 τότε 3 · 2 < 5 · 2 και* $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$. *Αν, όμως και τα δυο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίστροφη φορά. Για παράδειγμα: αν 3 < 5 τότε 3 · (-2) > 5 · (-2) γιατί –6 > - 10 και* $-\frac{3}{2} > -\frac{5}{2}$. *Σκεφτείτε επίσης: Λύση μιας ανίσωσης με έναν άγνωστο λέγεται κάθε αριθμός που επαληθεύει την ανίσωση. Για παράδειγμα, στην ανίσωση 2x – 1 > 5: το x = 4 είναι λύση γιατί 2 · 4 – 1 > 5 ή 8 – 1 > 5 ή 7 > 5 γιατί οδηγεί σε αληθές αποτέλεσμα. Αντίθετα, το x = 2 δεν είναι λύση γιατί 2 · 2 – 1 > 5 ή 4 – 1 > 5 ή 3 > 5 δεν την επαληθεύει.».*

Στα τρία ορθά λυμένα παραδείγματα που δόθηκαν στην Ομάδα Ελέγχου, παρουσιαζόταν ο τρόπος εύρεσης λύσεων ανισοτήτων με φαινομενικά αντίθετα πρόσημα μεταξύ πρώτου και δεύτερου μέλους, με δοκιμές. Στην Εφαρμογή 1 παρουσιαζόταν μια πιθανή λύση της ανισότητας «$x + 1 < - x – 1$» ως εξής: *«Θυμόμαστε πως στη θέση της μεταβλητής x μπορεί να μπει τόσο θετικός όσο και αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα, για x = -2 έχουμε: -2 + 1 < - (-2) – 1 ή -1 < +2 – 1 ή -1 < 1 που ισχύει, άρα το -2 είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση. Αλλά, για x = 4 έχουμε: 4 + 1 < - 4 – 1 ή 5 < -5 που δεν ισχύει, άρα το 4 δεν είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση.».* Με παρόμοιο τρόπο παρουσιαζόταν πιθανές λύσεις για την κλασματική ανίσωση «$2 < \frac{6}{-3y}$, y ≠ 0» (Εφαρμογή 2) και την ανίσωση με ρίζα «$\sqrt{-4x} < 4$» (Εφαρμογή 3).

3.3.3. Διαδικασία πιλοτικής έρευνας

Σε αρχικό στάδιο επιλέχθηκε πιλοτικά ένα δείγμα 4 μαθητών/τριων με παρόμοια χαρακτηριστικά με εκείνα του τελικού δείγματος με σκοπό να ελεγχθεί εάν το ερευνητικό εργαλείο του προ ελέγχου (ΕΡ/Ε1) ήταν κατανοητό σε επίπεδο περιεχομένου, δομής (σειράς ερωτήσεων) και οδηγιών και στη συνέχεια να διορθωθεί. Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο μοιράστηκε στους/στις μαθητές/μαθήτριες κατά τη διάρκεια κατ΄ οίκον μαθήματος μαθηματικών υπό την επίβλεψη της καθηγήτριας. Κατά την χορήγησή του δόθηκαν σαφείς προφορικές και γραπτές οδηγίες σχετικά με τον τρόπο συμπλήρωσής του.

Συγκεκριμένα οι γραπτές οδηγίες για το μέρος των 9 εξισώσεων ήταν: «*Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε να την επαληθεύει; Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν και είναι……………………», προσδιορίζοντας τον αριθμό ή τους αριθμούς αυτούς. Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί…………………………..», αιτιολογώντας την απάντησή σου. Να θυμάσαι πως οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά. Επίλεξε μόνο τη μία από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.»*. Παρόμοια, οι οδηγίες για τις 9 ανισώσεις ήταν: *«Για κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε να την επαληθεύει; Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………», προσδιορίζοντας τουλάχιστον έναν αριθμό που να την επαληθεύει. Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν* *υπάρχουν γιατί……………………………….», αιτιολογώντας την απάντησή σου. Να θυμάσαι πως η λύση της ανίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά. Επίλεξε μόνο τη μία από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.».*

Προφορικά ειπώθηκαν τα παρακάτω: *«Στο ερωτηματολόγιο που σας δόθηκε θα εντοπίσετε δυο διαφορετικά μέρη ασκήσεων. Στο πρώτο μέρος, θα πρέπει να επιλέξετε ανάμεσα στο αν υπάρχουν ή αν δεν υπάρχουν αριθμοί που να επαληθεύουν την κάθε μια από τις 9 εξισώσεις που βλέπετε. Στο δεύτερο μέρος, θα πρέπει να επιλέξετε ανάμεσα στο αν υπάρχουν ή αν δεν υπάρχουν αριθμοί που να επαληθεύουν την κάθε μια από τις 9 ανισώσεις που διαβάζετε. Να θυμάστε πως λύση μπορεί να είναι οποιοδήποτε αριθμός γνωρίζετε στα μαθηματικά. Γι΄ αυτό θα ήθελα να διαβάσετε προσεκτικά τις γραπτές οδηγίες που υπάρχουν στο ερωτηματολόγιο που κρατάτε. Να θυμάστε πως μπορείτε να δοκιμάσετε αριθμούς ως πιθανές λύσεις της κάθε εξίσωσης ή ανίσωσης που συναντάται. Εάν κάποιος/α επιθυμεί να λύσει μια εξίσωση ή μια ανίσωση με άλλη μέθοδο αντί της δοκιμής αριθμών, μπορεί να το κάνει. Σε κάθε επιλογή σας θα ήθελα να συμπληρώνετε μια σύντομη αιτιολόγηση. Η αιτιολόγηση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από την αποτύπωση του τρόπου σκέψη σας ή την αναγραφή λίγων αριθμών που επαληθεύουν την εξίσωση ή ανίσωση. Θα ήθελα να μην έχετε άγχος. Το ερωτηματολόγιο δεν είναι κάποιο τεστ στο οποίο θα βαθμολογηθείτε. Οι απαντήσεις που θα δώσετε στο ερωτηματολόγιο δεν θα επηρεάσουν τον βαθμό σας στα Μαθηματικά. Σκεφτείτε καλά πριν απαντήσετε σε κάθε άσκηση και μην διστάσετε να ρωτήσετε οτιδήποτε εάν προκύψει κάποια απορία. Ευχαριστώ πολύ».*

Τα αποτελέσματα της πιλοτικής έρευνας αναλύθηκαν και στη βάση των αποτελεσμάτων τους, πραγματοποιήθηκαν οι κατάλληλες διορθώσεις και το ΕΡ/Ε1 έλαβε την τελική του μορφή. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν και οι ασκήσεις του ΕΡ/Ε2 σε άμεση σχέση με εκείνες του ΕΡ/Ε1.

3.3.4. Διαδικασία χορήγησης τελικών ερωτηματολογίων

Η χορήγηση των τελικών ερωτηματολογίων της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις. Το ερωτηματολόγιο Ε1 (ΕΡ/Ε1) δόθηκε στους/στις μαθητές/τριες και των δυο ομάδων στην πρώτη φάση του πειράματος ως προ-έλεγχος (pre test) για την ύπαρξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Το δεύτερο ερωτηματολόγιο Ε2 (ΕΡ/Ε2) δόθηκε αμέσως μετά την διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα στην Ομάδα Παρέμβασης και με ορθά λυμένα παραδείγματα στην Ομάδα Ελέγχου, αντίστοιχα, για να εξεταστεί εάν η διδακτική παρέμβαση είχε αποτέλεσμα στη διόρθωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Το ΕΡ/Ε2 χρησιμοποιήθηκε ως μετα – έλεγχος (post test). Τέλος, ένα τρίτο ερωτηματολόγιο, το Ε3 (ΕΡ/Ε3), χορηγήθηκε και στις δυο ομάδες μαθητών/τριων ως μεταγενέστερος - έλεγχος για να εξεταστεί αν τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης διατηρούνταν και μετά το πέρας ενός μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος (retention test).

Κατά την πρώτη φάση της έρευνας, στην αρχή μιας διδακτικής ώρας Μαθηματικών μοιράστηκε το ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε1 σε όλους τους/τις μαθητές/τριες που συμμετείχαν στην έρευνα. Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο παρουσία της καθηγήτριας μαθηματικών της τάξης τους και της ερευνήτριας. Τους δόθηκαν προφορικές και γραπτές οδηγίες και χρόνος περίπου 20 λεπτών ώστε να το συμπληρώσουν. Μετά το πέρασμα αυτού του χρονικού διαστήματος, τα ερωτηματολόγια μαζεύτηκαν και ξεκίνησε η διαδικασία της σύντομης διδακτικής παρέμβασης. Ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία αλλά διαφορετική διδακτική παρέμβαση για τους/τις μαθητές/τριες της Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου. Συγκεκριμένα, η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με την χορήγηση λανθασμένων παραδειγμάτων με ανισώσεις σε έντυπη μορφή για την Ομάδα Παρέμβασης. Για την Ομάδα Ελέγχου περιλάμβανε την χορήγηση τριών ορθά λυμένων εφαρμογών με ανισώσεις με τη μέθοδο της δοκιμής αριθμών, σε έντυπη μορφή. Στους/στις μαθητές/τριες των δυο ομάδων δόθηκαν περίπου 10 λεπτά ώστε να διαβάσουν μόνοι/ες τους τα παραδείγματα που έλαβαν. Αφιερώθηκε, επιπλέον, χρόνος περίπου 5 λεπτών για την επίλυση αποριών και την απάντηση ερωτήσεων των μαθητών/τριων. Η παρέμβαση είχε τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν πιο πάνω και πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια με τη βοήθεια έντυπου υλικού και του πίνακα της τάξης, όταν κρινόταν σκόπιμο για την επίλυση αποριών που διατυπώθηκαν. Η συνολική διάρκεια της παρέμβασης ήταν περίπου 15 λεπτά. Αμέσως μετά το τέλος της συγκεκριμένης διαδικασίας, όλοι οι συμμετέχοντες/ουσες μαθητές/τριες ανεξαρτήτως Ομάδας έλαβαν το ΕΡ/Ε2 το οποίο συμπλήρωσαν μέχρι το τέλος της διδακτικής ώρας και του διαλείμματος που ακολουθούσε. Για την ολοκλήρωση της διαδικασίας χρειάστηκαν περίπου 55 λεπτά. Το ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε3 δόθηκε μόνο στους/στις μαθητές/τριες των δυο Ομάδων, ακριβώς έναν μήνα μετά, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Αποτελέσματα απαντήσεων μαθητών/τριων στις εξισώσεις

Αρχικά αναλύθηκαν περιγραφικά οι απαντήσεις των μαθητών/τριων που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Οι απαντήσεις τους τοποθετήθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες: α) μερικώς ορθές, ορθές καθώς και σε ερωτήσεις χωρίς απάντηση σύμφωνα με την ορθότητα της επιλογής απάντησης και της αιτιολόγησής της. Λανθασμένες κρίθηκαν οι απαντήσεις με λανθασμένη επιλογή απάντησης, με ή χωρίς πλήρη αιτιολόγηση της επιλογής αυτής. Μερικώς ορθές κρίθηκαν οι απαντήσεις οι οποίες περιλάμβαναν σωστή επιλογή και μη πλήρη αιτιολόγηση της επιλογής αυτής. Ιδιαίτερα για τη συγκεκριμένη κατηγορία απαντήσεων λήφθηκε υπόψη η επιλογή και η δικαιολόγηση, ενώ η δικαιολόγηση αναλύεται λεπτομερώς παρακάτω μαζί με τις λανθασμένες απαντήσεις. Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση των εξισώσεων με δυο λύσεις, μερικώς ορθές κρίθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες δόθηκε μόνο η μία. Ορθές απαντήσεις θεωρήθηκαν εκείνες που περιλάμβαναν επιλογή της σωστής απάντησης και είχαν επαρκή αιτιολόγηση. Οι ερωτήσεις χωρίς απάντηση κατηγοριοποιήθηκαν ως «καμία απάντηση». Σύμφωνα με την παραπάνω ομαδοποίηση, οι απαντήσεις συλλέχθηκαν, ταξινομήθηκαν και παρουσιάζονται συνολικά ακολούθως.

Προ-έλεγχος

Τα συνολικά ποσοτικά αποτελέσματα που προέκυψαν από το στάδιο του προ – ελέγχου παρουσιάζονται στον Πίνακα 4 για την Ομάδα Παρέμβασης (ΟΠ) και στον Πίνακα 5 για την Ομάδα Ελέγχου (ΟΕ). Αναφορικά με την ΟΠ παρατηρείται αυξημένο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (38,9%) και μερικώς ορθών απαντήσεων (36,6%), ενώ διαφαίνεται εντονότερη η τάση των μαθητών/τριων να απαντούν λανθασμένα σε εξισώσεις με μοναδική λύση και μερικώς ορθά σε εξισώσεις με 2 λύσεις. Όπως ήδη αναφέρθηκε για τις εξισώσεις που επαληθεύονταν από δυο τιμές, η μερικότητα των λύσεων οδήγησε σε μερικώς ορθέ απαντήσεις (Βλ. Πίνακας 4).

Πίνακας 4. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις εξισώσεων του προ – ελέγχου (ΕΡ/Ε1)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$x^2 + 1 = 5$	7 (15,9%)	34 (77,3%)	1 (2,3%)	2 (4,5%)
	$y^2 = 25$	4 (9,1%)	38 (86,4%)	1 (2,3%)	1 (2,3%)
	$\sqrt{(-x)^2} = 3$	18 (40,9%)	6 (13,6%)	17 (38,6%)	3 (6,8%)
1 λύση	$-y - 1 = y + 1$	24 (54,5%)	15 (34,1%)	-	5 (11,4%)
	$-x = 17$	28 (63,6%)	6 (13,6%)	6 (13,6%)	4 (9,1%)
	$\sqrt{-5x} = 5$	20 (45,5%)	10 (22,7%)	6 (13,6%)	8 (18,2%)
Χωρίς λύσεις	$-2y^2 = 2$	24 (54,5%)	9 (20,5%)	8 (18,2%)	3(6,8%)
	$y^2 = -16$	19 (43,2%)	11 (25,0%)	10 (22,7%)	4 (9,1%)
	$-\sqrt{x} = 2$	10 (22,7%)	16 (36,4%)	14 (31,8%)	4 (9,1%)
Σύνολο:		154 (38,9%)	145 (36,6%)	63 (15,9%)	34 (8,6%)

Για την ΟΕ παρατηρείται υψηλό ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (36,8%) και ελαφρώς υψηλότερο ποσοστό μερικώς ορθών απαντήσεων (44,1%). Περισσότερα λάθη προκύπτουν στις απαντήσεις των μαθητών/τριων σε ερωτήσεις εξισώσεων με μοναδική λύση. Περισσότερες μερικώς ορθές απαντήσεις προκύπτουν από ερωτήσεις εξισώσεων με 2 λύσεις (Βλ. Πίνακας 5).

Πίνακας 5. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N = 65) στις ερωτήσεις εξισώσεων του προ – ελέγχου (EP/E1)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Ελέγχου (N = 65)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$x^2 + 1 = 5$	17 (26,2%)	44 (67,7%)	4 (6,2%)	-
	$y^2 = 25$	3 (4,6%)	55 (84,6%)	1 (1,5%)	6 (9,2%)
	$\sqrt{(-x)^2} = 3$	20 (30,8%)	18 (27,7%)	19 (29,2%)	8 (12,3%)
1 λύση	$-y - 1 = y + 1$	33 (50,8%)	27 (41,5%)	-	5 (7,7%)
	$-x = 17$	35 (53,8%)	14 (21,5%)	5 (7,7%)	11 (16,9%)
	$\sqrt{-5x} = 5$	32 (49,2%)	21 (32,3%)	5 (7,7%)	7 (10,8%)
Χωρίς λύσεις	$-2y^2 = 2$	36 (55,4%)	17 (26,2%)	10 (15,4%)	2 (3,1%)
	$y^2 = -16$	25 (38,5%)	22 (33,8%)	10 (15,4%)	8 (12,3%)
	$-\sqrt{x} = 2$	14 (21,5%)	40 (61,5%)	10 (15,4%)	1 (1,5%)
Σύνολο:		215 (36,8%)	258 (44,1%)	64 (10,9%)	48 (8,2%)

Στη συνέχεια, επικεντρωθήκαμε στην παρουσίαση των λαθών που πραγματοποίησαν οι μαθητές/τριες της κάθε ομάδας στο στάδιο του προ-ελέγχου. Έτσι, προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες λανθασμένων απαντήσεων: α) «Φαινομενικό πρόσημο», β) «Δοκιμές με ακέραιους», γ) «Χωρίς νόημα» και δ) «Χωρίς αιτιολόγηση». Από τις μερικώς ορθές απαντήσεις που δόθηκαν (Βλ. Πίνακες 2 και 3) προέκυψαν δυο υποκατηγορίες απαντήσεων σύμφωνα με την αιτιολόγηση που έδωσαν οι μαθητές/τριες και είναι οι εξής: α) «Μόνο θετικοί ακέραιοι» και β) «Ελλιπής αιτιολόγηση/ Χωρίς αιτιολόγηση».

Πιο αναλυτικά, η κατηγορία «Φαινομενικό πρόσημο» περιλαμβάνει απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκε η ύπαρξη τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση εξαιτίας του διαφορετικού φαινομενικού προσήμου μεταξύ πρώτου και δεύτερου μέλους. Ενδεικτικές απαντήσεις της κατηγορίας στις ασκήσεις του πρώτου μέρους των εξισώσεων είναι: *«δεν εξισώνονται οι θετικοί με τους αρνητικούς»*, *«τα δυο μέλη είναι αντίθετα και δυο αντίθετοι αριθμοί δεν γίνεται να είναι ίσοι»*, *«δεν γίνεται κάτω από τη ρίζα να υπάρχει – και το αποτέλεσμα να βγαίνει +»*.

Στην κατηγορία «Δοκιμές με ακέραιους» συμπεριλήφθηκαν απαντήσεις μαθητών/τριων που δοκίμασαν τιμές οι οποίες δεν τους/τις έδωσαν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Συνήθεις περιπτώσεις ήταν οι δοκιμές ακέραιων τιμών οι οποίες οδηγούσαν σε εσφαλμένο συμπέρασμα εξαιτίας παραβίασης κανόνων και ιδιοτήτων της άλγεβρας. Ένα παράδειγμα τέτοιας απάντησης είναι το ακόλουθο: *«Η εξίσωση $x^2 = -25$ επαληθεύεται για τιμές, όπως το -5, γιατί $-5^2 = -25$».* Σημειώνεται, μάλιστα, πως οι μαθητές/τριες απέφυγαν να δοκιμάσουν μη ακέραιες τιμές.

Στην κατηγορία «Χωρίς νόημα» τοποθετήθηκαν τα λάθη τα οποία δεν εντοπίστηκαν συστηματικά στις απαντήσεις των μαθητών/τριων και ούτε είχαν κάποια συγκεκριμένη λογική πίσω τους. Τέτοια λάθη δεν μπορούσαν να τοποθετηθούν σε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες καθώς προέκυπταν είτε από την επιλογή ορισμένων μαθητών/τριων να λύσουν τις εξισώσεις και όχι να δοκιμάσουν αριθμούς, είτε από τις παρανοήσεις μαθητών/τριων σε σχέση με τη διαχείριση προσήμων. Για παράδειγμα, απαντήσεις αυτής της κατηγορίας είναι οι ακόλουθες: «*Η εξίσωση $-x = 17$ έχει λύση τον αριθμό $x = 17$ γιατί $-x = -(-5 -12) = 17$», «Η εξίσωση $\sqrt{-y} = 2$ δεν έχει λύση γιατί $\sqrt{-y} + \sqrt{y} = -y + y = 0$».*

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 5, οι μαθητές/τριες της ΟΠ έδωσαν σε μεγαλύτερη συχνότητα λανθασμένες απαντήσεις που σχετίζονται με την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου (42,2%). Πιο αναλυτικά, στις εξισώσεις «$\sqrt{(-x)^2} = 3$» και «$\sqrt{-5x} = 5$», 16 και 12 μαθητές/τριες αντίστοιχα απάντησαν πως δεν υπάρχουν τιμές που να τις επαληθεύουν γιατί στο υπόρριζο υπάρχει αρνητικός αριθμός. Ακόμη, στην εξίσωση «$-y – 1 = y + 1$» 21 μαθητές/τριες αποκρίθηκαν πως τα δυο μέλη είναι μεταξύ τους αντίθετα και δεν μπορούν να εξισωθούν, ενώ στην εξίσωση «$-x = 17$» 17 μαθητές/τριες απάντησαν πως αρνητικός αριθμός δεν είναι ποτέ ίσος με έναν θετικό.

Συνήθη (39,0%) ήταν και τα λάθη που προήλθαν και από «δοκιμές ακεραίων» ως λύσεις των εξισώσεων (Βλ. Πίνακας 5). Αναλυτικότερα, στις εξισώσεις «$-x = 17$» και «$\sqrt{-5x} = 5$» 11 και 8 μαθητές/τριες, αντίστοιχα, σημείωσαν πως δεν υπάρχουν τιμές που τις επαληθεύουν καθώς δοκίμασαν θετικούς ακέραιους και δεν οδηγήθηκαν σε μια αληθή σχέση. Αντίθετα, στην αδύνατη εξίσωση «$-2y^2 = 2$», 13 μαθητές κατέγραψαν λύσεις, όπως η τιμή -1. Στην αδύνατη εξίσωση «$y^2 = -16$», 18 μαθητές απέδωσαν λύσεις, όπως η τιμή -4 και στην αδύνατη εξίσωση «$-\sqrt{x} = 2$», 10 μαθητές/τριες αντίστοιχα αποκρίθηκαν πως υπάρχουν λύσεις, όπως η τιμή 4, που επαληθεύουν την εξίσωση.

Επιπλέον, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 6, το 53,8% των μερικώς ορθών απαντήσεων στις εξισώσεις με 2 λύσεις (x^2 + 1= 5, y^2 = 25 και $\sqrt{(-x)^2}$ = 3) προέκυψε από το γεγονός ότι 78 μαθητές/τριες σημείωσαν ως μοναδική λύση την θετική ενώ παρέλειψαν την αρνητική. Στην περίπτωση των εξισώσεων με μοναδική λύση και των αδύνατων εξισώσεων, 31 και 36 μαθητές/τριες αντίστοιχα έδωσαν ελλιπείς αιτιολογήσεις .

Στον ίδιο Πίνακα (Βλ. Πίνακας 6) παρουσιάζονται και οι συχνότητες των λαθών που πραγματοποίησε η ΟΕ. Μεγαλύτερη κι εδώ ήταν η συχνότητα των λανθασμένων απαντήσεων από την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (43,7%). Στις εξισώσεις «$\sqrt{(-x)^2}$ = 3» και «$\sqrt{-5x}$ = 5», 16 και 23 μαθητές/τριες αντίστοιχα, απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να τις επαληθεύουν επειδή δεν γίνεται να υπάρχει αρνητικός αριθμός στο υπόρριζο. Ακόμη, 25 και 30 μαθητές/τριες αντίστοιχα, θεώρησαν πως οι εξισώσεις «-y – 1 = y + 1» και «-x = 17» είναι αδύνατες σημειώνοντας πως οι αντίθετοι αριθμοί δεν γίνεται να είναι ίσοι. Επιπλέον, υψηλή συχνότητα λαθών (27,4%) προήλθε από λανθασμένες απαντήσεις εξαιτίας «δοκιμών με ακεραίους». Τέτοιες απαντήσεις προέκυψαν κατά κύριο λόγο στις αδύνατες εξισώσεις (Βλ. Πίνακας 5). Συγκεκριμένα, 25, 17 και 6 μαθητές/τριες αντίστοιχα αποκρίθηκαν πως υπάρχουν τιμές, όπως για παράδειγμα: -1, -4 και 4, που να επαληθεύουν τις εξισώσεις «- $2y^2$ = 2», «y^2 = -16» και «$-\sqrt{x} = 2$».

Τέλος, αναφορικά με τις μερικώς ορθές απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές/τριες της ΟΕ, το μεγαλύτερο ποσοστό (65,5%) προήλθε από ελλιπείς αιτιολογήσεις. Ωστόσο, στην περίπτωση των εξισώσεων με 2 λύσεις, υψηλότερη συχνότητα τέτοιων απαντήσεων (89 απαντήσεις) προήλθε από το γεγονός ότι οι μαθητές/τριες απάντησαν πως υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν τις εξισώσεις και στη συνέχεια ανέφεραν μόνο τις θετικές τιμές 2, 5 και 3.

Πίνακας 6. Συχνότητες Λανθασμένων απαντήσεων Ομάδα Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (προ – έλεγχος)

Ομάδα	Εξισώσεις	Κατηγορίες Λαθών					
		Λάθος				Μερικώς ορθές	
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές με ακέραιους	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση	Μόνο θετικοί ακέραιοι	Ελλιπής αιτιολόγηση
ΟΠ	2 λύσεις	16	-	13		78	-
	1 λύση	49	19	3	1	-	31
	Αδύνατες	-	41	4	8		36
	Σύνολο N (%)	65 (42,2%)	60(39,0%)	20 (13,0%)	9 (5,8%)	78(53,8%)	67 (46,2%)
ΟΕ	2 λύσεις	16	-	15	9	89	28
	1 λύση	78	11	7	4	-	62
	Αδύνατες	-	48	13	14	-	79
	Σύνολο N (%)	94 (43,7%)	59 (27,4%)	35 (16,3%)	27 (12,6%)	89(34,5%)	169 (65,5%)

Μετά – έλεγχος

Στον μετά – έλεγχο, από τις απαντήσεις της ΟΠ, παρατηρείται μικρότερος αριθμός λανθασμένων και μερικώς ορθών απαντήσεων σε σύγκριση με το στάδιο του προ – ελέγχου και ταυτόχρονα μεγαλύτερος αριθμών ορθών απαντήσεων (Βλ. Πίνακας 7 και Πίνακας 4) δείχνοντας ότι η διδακτή παρέμβαση βοήθησε κάποιους να αλλάξουν λανθασμένες πεποιθήσεις τους. Ωστόσο, και πάλι οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν ήταν λανθασμένες (34,1%), αρκετές ήταν μερικώς ορθές (31,8%) και λιγότερες ορθές (25,5%). Αναφορικά με τις μερικώς ορθές απαντήσεις, σημειώνεται πως στην πλειοψηφία τους προήλθαν από εξισώσεις με 2 λύσεις. Αντιθέτως, οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες έδωσαν ορθές απαντήσεις στις αδύνατες εξισώσεις του ερωτηματολογίου (Βλ. Πίνακας 7).

Πίνακας 7. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις εξισώσεων του μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$y^2 + 2 = 11$	11 (25,0%)	30 (68,2%)	1 (2,3%)	2 (4,5%)
	$y^2 = 36$	3 (6,8%)	30 (68,2%)	8 (18,2%)	3 (6,8%)
	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	13 (29,5%)	7 (15,9%)	14 (31,8%)	10 (22,7%)
1 λύση	$x + 5 = -x – 5$	19 (43,2%)	15 (34,1%)	6 (13,6%)	4 (9,1%)
	$-y = 13$	22 (50,0%)	6 (13,6%)	12 (27,3%)	4 (9,1%)
	$\sqrt{-y} = 2$	18 (40,9%)	13 (29,5%)	8 (18,2%)	5 (11,4%)
Χωρίς λύσεις	$- 3x^2 = 9$	11 (25,0%)	11 (25,0%)	20 (45,5%)	2 (4,5%)
	$x^2 = -25$	25 (56,8%)	4 (9,1%)	14 (31,8%)	1 (2,3%)
	$-\sqrt{y} = 4$	13 (29,5%)	10 (22,7%)	18 (40,9%)	3 (6,8%)
Σύνολο:		135 (34,1%)	126 (31,8%)	101 (25,5%)	34 (8,6%)

Από τις απαντήσεις της ΟΕ (Βλ. Πίνακας 8) γίνεται φανερό πως η πλειοψηφία τους ήταν μερικώς ορθές (52,9%). Λιγότερες ήταν οι λανθασμένες (23,6%), οι οποίες προήλθαν σε μεγαλύτερη συχνότητα από τις απαντήσεις των μαθητών/τριων στις αδύνατες εξισώσεις. Χαμηλό ήταν το ποσοστό (16,6%) των ορθών απαντήσεων.

Πίνακας 8. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (Ν = 65) στις ερωτήσεις εξισώσεων του μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Ελέγχου (Ν = 65)			
		Ν (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$y^2 + 2 = 11$	17 (26,2%)	45 (69,2%)	-	3 (4,6%)
	$y^2 = 36$	13 (20,0%)	31 (47,7%)	18 (27,7%)	3 (4,6%)
	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	4 (6,2%)	48 (73,8%)	8 (12,3%)	5 (7,7%)
1 λύση	$x + 5 = -x - 5$	16 (24,6%)	30 (46,2%)	12 (18,5%)	7 (10,8%)
	$-y = 13$	9 (13,8%)	35 (53,8%)	18 (27,7%)	3 (4,6%)
	$\sqrt{-y} = 2$	17 (26,2%)	27 (41,5%)	13 (20,0%)	8 (12,3%)
Χωρίς λύσεις	$- 3x^2 = 9$	15 (36,9%)	36 (55,4%)	5 (7,7%)	-
	$x^2 = -25$	17 (26,2%)	31 (47,7%)	15 (23,1%)	2 (3,1%)
	$-\sqrt{y} = 4$	21 (32,3%)	27 (41,5%)	8 (12,3%)	9 (13,8%)
Σύνολο:		138 (23,6%)	310 (52,9%)	97 (16,6%)	40 (6,9%)

Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις της ΟΠ είναι συνέπεια «Δοκιμών ακεραίων» ως λύσεις των επιμέρους εξισώσεων (40,6%) (Βλ. Πίνακας 9). Για παράδειγμα, 10 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την εξίσωση «$-y = 13$» γιατί δοκίμασαν διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς, όπως το 13 και δεν έφτασαν σε σχέση που αληθεύει. Ακόμη, 23 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως η αδύνατη εξίσωση «$x^2 = -25$» επαληθεύεται για τιμές, όπως για παράδειγμα το -5. Τέλος, οι περισσότερες μερικώς ορθές απαντήσεις (53,2%) αφορούσαν στην παράληψη της αναφοράς της αρνητικής ρίζας μιας εξίσωσης με 2 λύσεις. Για παράδειγμα, 30 μαθητές/τριες απάντησαν πως υπάρχουν τιμές που επαληθεύουν την εξίσωση «$y^2 = 36$» γιατί $6^2 = 36$, άρα $y = 6$.

Και στην περίπτωση των λανθασμένων απαντήσεων που δόθηκαν από την ΟΕ, οι περισσότερες αφορούν σε δοκιμές μη κατάλληλων ακέραιων τιμών ως λύσεις των εξισώσεων (31,8%) (Βλ. Πίνακας 8). Για παράδειγμα, 18 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως η εξίσωση «- $3x^2$ = 9» επαληθεύεται για τιμές, όπως το -3. Αναφορικά με τις μερικώς ορθές απαντήσεις τους, αυτές προήλθαν στην πλειοψηφία τους (63,3%) από ελλιπείς αιτιολογήσεις (Βλ. Πίνακας 9).

Πίνακας 9. Συχνότητες Λανθασμένων απαντήσεων Ομάδα Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (μετά – έλεγχος)

Ομάδα	Εξισώσεις	Κατηγορίες Λαθών					
		Λάθος				Μερικώς ορθές	
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές με ακέραιους	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση	Μόνο θετικοί ακέραιοι	Ελλιπής αιτιολόγηση
ΟΠ	2 λύσεις	9	-	11	7	67	-
	1 λύση	31	21	3	4	-	34
	Αδύνατες	-	34	6	9	-	25
	Σύνολο	40	55	20	20	67	59
	Ν (%)	(29,6%)	(40,6%)	(14,8%)	(14,8%)	(53,2%)	(46,8%)
ΟΕ	2 λύσεις	4	5	17	8	114	10
	1 λύση	33	7	-	2	-	92
	Αδύνατες	-	32	16	14	-	94
	Σύνολο	37	44	33	24	114	196
	Ν (%)	(26,8%)	(31,9%)	(23,9%)	(17,4%)	(36,7%)	(63,3%)

Μεταγενέστερος έλεγχος

Στον μεταγενέστερο έλεγχο, παρατηρείται πως οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν από την ΟΠ ήταν λανθασμένες (46,5%) και εντοπίστηκαν κυρίως σε εξισώσεις με μοναδική λύση. Ωστόσο, αρκετές (30,3%) ήταν και οι ορθές απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτό το στάδιο της έρευνας (Βλ. Πίνακας 10).

Πίνακας 10. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις εξισώσεων του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$y^2 + 2 = 11$	8 (18,2%)	29 (65,9%)	4 (9,1%)	3 (6,8%)
	$y^2 = 36$	7 (15,9%)	28 (63,3%)	9 (20,5%)	-
	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	22 (50,0%)	2 (4,5%)	18 (40,9%)	2 (4,5%)
1 λύση	$x + 5 = -x - 5$	29 (65,9%)	4 (9,1%)	7 (15,9%)	4 (9,1%)
	$-y = 13$	28 (63,6%)	2 (4,5%)	14 (31,8%)	-
	$\sqrt{-y} = 2$	29 (65,9%)	1 (2,3%)	11 (25,0%)	3 (6,8%)
Χωρίς λύσεις	$-3x^2 = 9$	18 (36,4%)	6 (13,6%)	20 (45,5%)	-
	$x^2 = -25$	24 (54,5%)	2 (4,5%)	18 (40,9%)	-
	$-\sqrt{y} = 4$	19 (43,2%)	5 (11,4%)	19 (43,2%)	1 (2,3%)
Σύνολο:		184 (46,5%)	79 (19,9%)	120 (30,3%)	13 (3,3%)

Όσον αφορά την ΟΕ, παρατηρήθηκε υψηλό ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (46,0%) προερχόμενο κυρίως από εξισώσεις με μοναδική λύση. Χαμηλότερο ήταν το ποσοστό των μερικώς ορθών (27,2%) και των ορθών απαντήσεων (26,0%) (Βλ. Πίνακας 11).

Πίνακας 11. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N = 65) στις ερωτήσεις εξισώσεων του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3)

Πλήθος λύσεων	Εξίσωση	Ομάδα Ελέγχου (N = 65)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 λύσεις	$y^2 + 2 = 11$	15 (23,1%)	48 (73,8%)	1 (1,5%)	1 (1,5%)
	$y^2 = 36$	18 (27,7%)	39 (60,0%)	8 (12,3%)	-
	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	25 (38,5%)	8 (12,3%)	30 (46,2%)	2 (3,1%)
1 λύση	x + 5 = -x – 5	38 (58,4%)	5 (7,7%)	22 (33,8%)	-
	-y = 13	21 (32,3%)	12 (18,5%)	32 (49,2%)	-
	$\sqrt{-y} = 2$	37 (56,9%)	7 (10,8%)	20 (30,8%)	1 (1,5%)
Χωρίς λύσεις	$- 3x^2 = 9$	37 (56,9%)	17 (26,2%)	11 (16,9%)	-
	$x^2 = -25$	37 (56,9%)	17 (26,2%)	11 (16,9%)	-
	$-\sqrt{y} = 4$	41 63,1%)	6 (9,2%)	17 (26,2%)	1 (1,5%)
	Σύνολο:	269 (46,0%)	159 (27,2%)	152 (26,0%)	5 (0,8%)

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 12, τα λάθη της ΟΠ προέρχονται κυρίως από «Δοκιμές ακέραιων» (35,3%) καθώς και από απαντήσεις που φανερώνουν την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (34,8%). Παράδειγμα λανθασμένης απάντησης εξαιτίας δοκιμής ακέραιων τιμών είναι το εξής: 11 μαθητές/τριες απάντησαν πως υπάρχουν αριθμοί που επαληθεύουν την αδύνατη εξίσωση «x^2 = -25», ένας τέτοιος αριθμός είναι το -5. Ως προς τις λανθασμένες απαντήσεις εξαιτίας της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, αξίζει να σημειωθεί πως 24 μαθητές/τριες απάντησαν πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την εξίσωση «$\sqrt{-y}$ = 2» γιατί αυτή έχει αρνητικό υπόρριζο. Όσον αφορά στις μερικώς ορθές απαντήσεις, στην πλειοψηφία τους (75,6%) οι μαθητές/τριες δεν αναφέρθηκαν στην αρνητική τιμή που επαλήθευε μια εξίσωση με δυο λύσεις (μια θετική και μια αρνητική).

Αναφορικά με τη συχνότητα των λαθών που πραγματοποίησε η ΟΕ στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου της έρευνας (Βλ. Πίνακας 12), συνηθέστερος τύπος λάθους είναι οι

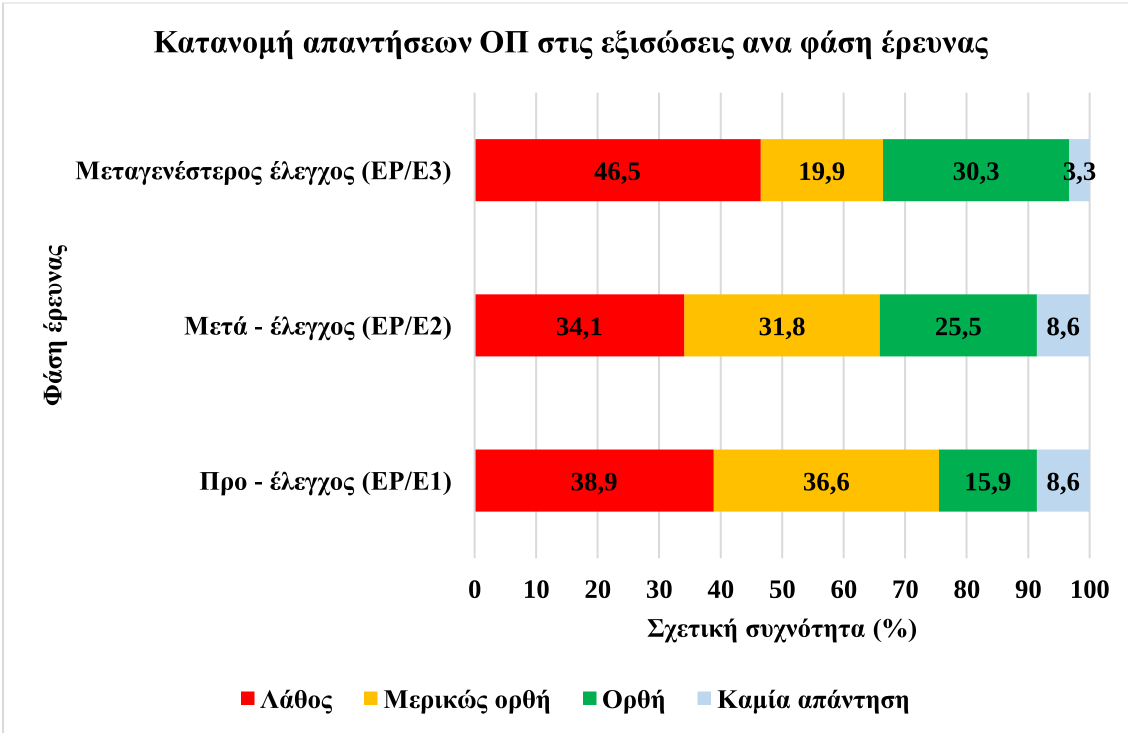
«Δοκιμές ακεραίων» και αρκετά συνήθης η παρουσία παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου. Για παράδειγμα, 29 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως υπάρχουν τιμές που επαληθεύουν την αδύνατη εξίσωση «$-3x^2 = 9$», όπως το -1, το -3 ή το 3. Ακόμη, 35 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως για την εξίσωση «x + 5 = -x – 5» δεν υπάρχουν τιμές που την επαληθεύουν. Τέτοιες απαντήσεις υποστήριζαν πως τα δυο μέλη της εξίσωσης είναι αντίθετα, ή πως δεν υπάρχει τρόπος να «φύγει» το πρόσημο – από το δεύτερο μέλος ώστε να προκύψουν δυο «ίσες» εκφράσεις. Ως προς τις μερικώς λάθος απαντήσεις της ΟΕ, η πλειοψηφία τους (54,7%) προέκυψε από τον εντοπισμό μόνο της θετικής τιμή που επαλήθευε μια εξίσωση με δυο λύσεις (μια θετική και μια αρνητική). Ιδιαίτερα για την εξίσωση «$y^2 + 2 = 11$» 42 μαθητές/τριες απάντησαν πως υπάρχει τιμή που την επαληθεύει και πως αυτή είναι η y = 3.

Πίνακας 12. Συχνότητες Λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (μεταγενέστερος έλεγχος)

Ομάδα	Εξισώσεις	Κατηγορίες Λαθών					
		Λάθος				Μερικώς ορθές	
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές με ακέραιους	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση	Μόνο θετικοί ακέραιοι	Ελλιπής αιτιολόγηση
ΟΠ	2 λύσεις	14	-	11	12	59	-
	1 λύση	50	28	2	6	-	7
	Αδύνατες	-	37	15	9	-	12
	Σύνολο	64	65	28	27	59	19
	N (%)	(34,8%)	(35,3%)	(15,2%)	(14,7%)	(75,6%)	(24,4%)
ΟΕ	2 λύσεις	16	-	26	16	87	8
	1 λύση	77	16	3	-	-	24
	Αδύνατες	-	86	16	13	-	40
	Σύνολο	93	102	45	29	87	72
	N (%)	(34,6%)	(37,9%)	(16,7%)	(10,8%)	(54,7%)	(45,3%)

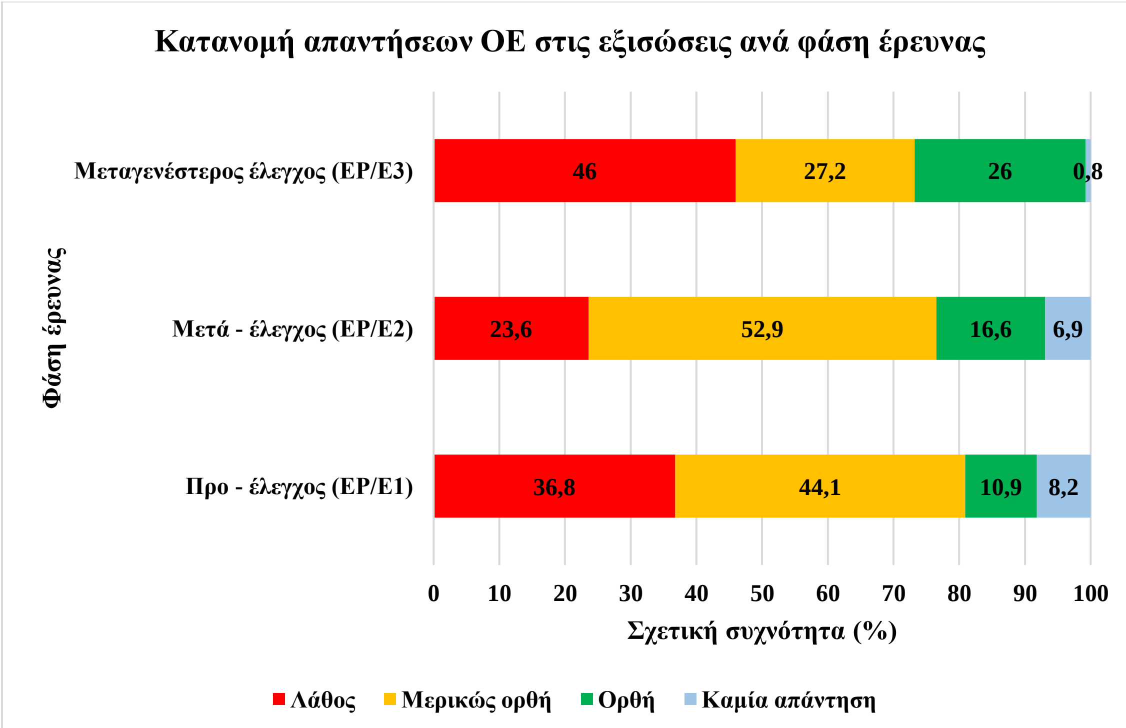
Σε αυτό το σημείο, με στόχο να παρουσιάσουμε μια συνολική και συγκριτική εικόνα των απαντήσεων που έδωσαν οι δυο ομάδες (ΟΠ και ΟΕ), συγκεντρώσαμε τις απαντήσεις που δόθηκαν ανά φάση έρευνας.

Πιο αναλυτικά, στο Γράφημα 1 παρουσιάζεται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων των απαντήσεων των μαθητών/τριων της ΟΠ ανά φάση έρευνας. Έτσι, διαπιστώνεται πως ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων ήταν μεγαλύτερος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (46,5%) και μικρότερος στη φάση του μετά – ελέγχου (34,1%). Ακόμη, ο αριθμός των μερικώς σωστών απαντήσεων ήταν μεγαλύτερος στη φάση του προ – ελέγχου (36,6%) και μικρότερος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (19,9%). Οι ορθές απαντήσεις ήταν περισσότερες στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (30,3%) και λιγότερες στη φάση του προ – ελέγχου (15,9%). Τέλος, οι ερωτήσεις με «καμία απάντηση» ήταν ίσες σε πλήθος στις φάσεις του προ – ελέγχου (8,6%) και μετά – ελέγχου (8,6%), ενώ μειώθηκαν στην τελευταία φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (3,3%) (Βλ. Γράφημα 1).



Γράφημα 1. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα σχετικών συχνοτήτων κατανομής απαντήσεων στις εξισώσεις – Ομάδα Παρέμβασης (Ν = 44) ανά φάση (προ – έλεγχος, μετά – έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος)

Αναφορικά με τις απαντήσεις που δόθηκαν από την ΟΕ, διαπιστώνεται πως και σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων ήταν μεγαλύτερος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (46,0%) και μικρότερος στη φάση του μετά – ελέγχου (36,8%). Επιπλέον, ο αριθμός των μερικώς σωστών απαντήσεων ήταν μεγαλύτερος στη φάση του μετά – ελέγχου (52,9%) και μικρότερος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (27,2%). Ακόμη, και σε αυτή την ομάδα, οι ορθές απαντήσεις ήταν περισσότερες στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (26,6%) και λιγότερες στη φάση του προ – ελέγχου (10,9%). Τέλος, οι ερωτήσεις με «καμία απάντηση» ήταν περισσότερες στη φάση του προ – ελέγχου (8,2%) και ελάχιστες στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (0,8%) (Βλ. Γράφημα 2).



Γράφημα 2. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα σχετικών συχνοτήτων κατανομής απαντήσεων στις εξισώσεις -Ομάδα Ελέγχου (Ν = 65) ανά φάση (προ – έλεγχος, μετά – έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος)

Σύγκριση συνολικών μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις

Με αφορμή τη συγκριτική παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών/τριων των δυο ομάδων στις τρεις φάσεις της έρευνας, κρίθηκε σκόπιμο να υπολογίσουμε την μέση επίδοση που συγκέντρωσαν σε αυτές τις φάσεις. Για τον σκοπό αυτό, οι απαντήσεις των μαθητών/τριων στις ασκήσεις εξισώσεων των τριών ερωτηματολογίων (ΕΡ/Ε1, ΕΡ/Ε2 και ΕΡ/Ε3) βαθμολογήθηκαν ως εξής: κάθε λανθασμένη απάντηση και κάθε μια με την ένδειξη «καμία απάντηση» έλαβαν 0 (μηδέν) βαθμούς, κάθε μερικώς ορθή έλαβε 1 (έναν) βαθμό και κάθε ορθή έλαβε 2 (δυο) βαθμούς. Ως συνέπεια του τρόπου βαθμολόγησης των απαντήσεων, η ελάχιστη δυνατή τιμή μέσης επίδοσης ήταν οι 0 (μηδέν) βαθμοί και η μέγιστη οι 2 (δυο) βαθμοί. Υψηλότερη μέση βαθμολογία φανερώνει καλύτερες μέσες επιδόσεις από πλευράς των μαθητών/τριών.

Οι μέσες επιδόσεις για την ΟΠ και την ΟΕ παρουσιάζονται στον Πίνακα που ακολουθεί (Βλ. Πίνακας 13).

Πίνακας 13. Μέσες επιδόσεις προ-ελέγχου (ΕΡ/Ε1), μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) και μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) στις εξισώσεις συνολικά

Ομάδα	Συνολική μέση επίδοση στις εξισώσεις					
	Προ-έλεγχος (ΕΡ/Ε1)		Μετά – έλεγχος (ΕΡ/Ε2)		Μεταγενέστερος έλεγχος (ΕΡ/Ε3)	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
ΟΠ	0,74	0,312	0,90	0,334	0,82	0,398
ΟΕ	0,72	0,256	0,92	0,237	0,80	0,362

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε έλεγχος ομοιογένειας της διασποράς βάσει του κριτηρίου του Levene (Levene’s test) για να ελεγχθεί αν τα δυο αρχικά δείγματα διαφοροποιούνταν με στατιστικώς σημαντικό τρόπο. Τα αποτελέσματα του κριτηρίου οδήγησαν σε στατιστικώς μη σημαντικό αποτέλεσμα $F(1,107) = 1.455$, $p = .230$, δείχνοντας την ομοιογένεια των αρχικών δειγμάτων.

Μικτή ανάλυση διακύμανσης με επαναλαμβανόμενο παράγοντα (Mixed ANOVA with Repeated Measures) για να εξεταστεί εάν οι αλλαγές που σημειώθηκαν στις μέσες επιδόσεις των δυο ομάδων ανά φάση έρευνας (Βλ. Πίνακας 12) είναι ίδιες ή διαφέρουν με στατιστικώς σημαντικό τρόπο. Όσον αφορά στα αποτελέσματα της ομοιογένειας συνδιακύμανσης (Sphericity), η τιμή του κριτηρίου Mauchly (Mauchly΄s Test of Sphericity) βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική ($p <.001$) δείχνοντας πως οι συσχετίσεις μεταξύ των συνδυασμών των μέσων βαθμολογιών δεν είναι ίσες. Λαμβάνοντας υπόψη την παραβίαση της σφαιρικότητας από τα δεδομένα, τα στατιστικά αποτελέσματα των δοκιμών ANOVA υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Huynh-Feldt.

Ως προς την επίδραση της φάσης έρευνας (προ-έλεγχος, μετά – έλεγχος, μεταγενέστερος έλεγχος) βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στη μέση συνολική βαθμολογία στις εξισώσεις [$F(1{,}836, 196{,}439) = 15{,}015$, $p < .001$, $n_p^2 = .123$]. Εξετάζοντας τους μέσους όρους φαίνεται ότι οι συμμετέχοντες είχαν υψηλότερη μέση βαθμολογία στις εξισώσεις κατά τη φάση του μετα – ελέγχου σε σχέση με την μέση βαθμολογία τους στην αρχική μέτρηση (προ-έλεγχος) (Βλ. Πίνακας

12). Για τον έλεγχο των επιμέρους διαφορών μεταξύ της μέσης συνολικής επίδοσης στις τρεις φάσεις της έρευνας, πραγματοποιήθηκε έλεγχος t – test για ζεύγη τιμών (Paired Samples t – test). Για την ΟΠ διαπιστώθηκε πως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις του προ-ελέγχου (ΕΡ/Ε1) (Μ.Ο. = .74, Τ.Α = .312) και του μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) (Μ.Ο. = .90, Τ.Α = .334) , $t(43) = -3.109$, $p = .003$. Αντιθέτως, για την ίδια ομάδα μαθητών/τριων διαπιστώθηκε πως δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις του μετα – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) (Μ.Ο. = .90, Τ.Α = .334) και του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) (Μ.Ο. = .82, Τ.Α. = .398), $t(43) = 1.473$, $p = .148$. Όμοια, δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων βαθμολογιών στις εξισώσεις του προ – ελέγχου (ΕΡ/Ε1) (Μ.Ο. = .74, Τ.Α. = .312) και του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) (Μ.Ο. = .82, Τ.Α. = .398), $t(43) = -1.393$, $p = .171$.

Για την ΟΕ (N = 65) διαπιστώθηκε πως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις του προ-ελέγχου (ΕΡ/Ε1) (Μ.Ο. = .72, Τ.Α = .256) και του μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) (Μ.Ο. = .92, Τ.Α = .237) , $t(64) = -6.894$, $p = .000$. Όμοια, βρέθηκε πως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις του μετα – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) (Μ.Ο. = .92, Τ.Α = .23) και του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) (Μ.Ο. = .80, Τ.Α. = .362), $t(64) = 2.958$, $p = .004$. Αντιθέτως, δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ προ – ελέγχου (ΕΡ/Ε1) (Μ.Ο. = .72, Τ.Α = .256) και μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) (Μ.Ο. = .80, Τ.Α. = .362), $t(64) = -1.658$, $p = .102$.

Αντιθέτως, η μικτή ανάλυση διακύμανσης με επαναλαμβανόμενο παράγοντα δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων επιδόσεων στις τρεις φάσεις της έρευνας (προ-έλεγχος, μετά – έλεγχος, μεταγενέστερος έλεγχος) και των ομάδων μαθητών/τριων (Ομάδα Παρέμβασης, Ομάδα Ελέγχου). Η ομάδα στην οποία ανήκαν οι μαθητές/τριες (ΟΠ, ΟΕ) δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις μέσες βαθμολογίες τους στις εξισώσεις [$F(1,107) = .030$, $p = .864$, $n_p^2 = .000$]. Συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα που ελέγχου φάνηκε να μην υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις ανά ομάδα συμμετεχόντων [$F(1,836, 196,439) = .359$, $p = .680$, $n_p^2 = .003$].

4.2. Αποτελέσματα απαντήσεων μαθητών/τριων στις ανισώσεις

Οι απαντήσεις των μαθητών/τριων των δυο ομάδων στις ερωτήσεις ανισώσεων αναλύθηκαν περιγραφικά και παρουσιάζονται ακολούθως. Οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν σε λανθασμένες, μερικώς ορθές, ορθές καθώς και σε ερωτήσεις χωρίς απάντηση, όπως συνέβη και στις ερωτήσεις των εξισώσεων.

Προ – έλεγχος

Τα συνολικά ποσοτικά αποτελέσματα στο στάδιο προ – ελέγχου για την ΟΠ παρουσιάζονται στον Πίνακα 14. Από τις συνολικές απαντήσεις των μαθητών/τριων προκύπτει πως στο μεγαλύτερο ποσοστό (46,0%) οι απαντήσεις ήταν λανθασμένες.

Πίνακας 14. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις ανισώσεων του προ – ελέγχου (ΕΡ/Ε1)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	$x + 2 < - x – 2$	26 (59,1%)	14 (31,8%)	2 (4,5%)	2 (4,5%)
	$- 2x - 1 > 5$	21 (47,7%)	9 (20,5%)	7 (15,9%)	7 (15,9%)
	$-y > 7$	28 (63,6%)	5 (11,4%)	9 (20,5%)	2 (4,5%)
	$1 < -\frac{1}{x}$	18 (40,9%)	16 (36,4%)	3 (6,8%)	7 (15,9%)
	$\frac{4}{y+1} < -1$	25 (56,8%)	10 (22,7%)	3 (6,8%)	6 (13,6%)
	$\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$	21 (47,7%)	7 (15,9%)	6 (13,6%)	10 (22,7%)
Χωρίς λύσεις	$3 x^2 < - 3$	15 (34,1%)	17 (38,6%)	6 (13,6%)	6 (13,6%)
	$\sqrt{-y^2} > 2$	19 (43,2%)	15 (34,1%)	5 (11,4%)	5 (11,4%)
	$-\sqrt{y} > 4$	9 (20,5%)	18 (40,9%)	11 (25,0%)	6 (13,6%)
Σύνολο:		182 (46,0%)	111 (28,0%)	52 (13,1%)	51 (12,9%)

Το μεγαλύτερο ποσοστό των απαντήσεων που δόθηκαν από την ΟΕ ήταν λανθασμένες (45,6%). Ωστόσο, παρατηρήθηκε αρκετά υψηλό ποσοστό μερικώς ορθών απαντήσεων (37,4%) (Βλ. Πίνακας 15).

Πίνακας 15. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N = 65) στις ερωτήσεις ανισώσεων του προ – ελέγχου (ΕΡ/Ε1)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Ελέγχου (N = 65)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	$x + 2 < - x – 2$	39 (60,0%)	24 (36,9%)	1 (1,5%)	1 (1,5%)
	$- 2x - 1 > 5$	29 (44,6%)	22 (33,8%)	4 (6,2%)	10 (15,4%)
	$-y > 7$	39 (60,0%)	16 (24,6%)	5 (7,7%)	5 (7,7%)
	$1 < -\frac{1}{x}$	28 (43,1%)	27 (41,5%)	1 (1,5%)	9 (13,8%)
	$\frac{4}{y+1} < -1$	41 (63,1%)	7 (10,8%)	1 (1,5%)	16 (24,6%)
	$\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$	36 (55,4%)	17 (26,2%)	6 (9,2%)	6 (9,2%)
Χωρίς λύσεις	$3 x^2 < - 3$	23 (35,4%)	30 (46,2%)	3 (4,6%)	9 (13,8%)
	$\sqrt{-y^2} > 2$	24 (36,9%)	33 (50,8%)	7 (10,8%)	1 (1,5%)
	$-\sqrt{y} > 4$	8 (12,3%)	43 (66,2%)	13 (20,0%)	1 (1,5%)
Σύνολο:		267 (45,6%)	219 (37,4%)	41 (7,1%)	58 (9,9%)

Αμέσως μετά, ταξινομήθηκαν τα λάθη που πραγματοποίησαν οι μαθητές/τριες των δυο ομάδων στις ερωτήσεις ανισώσεων. Σύμφωνα με το περιεχόμενο των αιτιολογήσεων που δόθηκαν, προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες λανθασμένων απαντήσεων: α) «Φαινομενικό πρόσημο», β) «Δοκιμές ακεραίων», γ) «Χωρίς νόημα» και δ) «Χωρίς αιτιολόγηση». Επιπλέον, σημειώνεται πως το σύνολο των μερικώς ορθών απαντήσεων προέκυψε ως αποτέλεσμα αιτιολογήσεων που δεν ήταν ολοκληρωμένες. Συνεπώς, οι συγκεκριμένες απαντήσεις δεν θα αναλυθούν περαιτέρω.

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 16, οι μαθητές/τριες της ΟΠ έδωσαν στην πλειοψηφία τους (51,6%) λανθασμένες απαντήσεις που σχετίζονται με την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Παραδείγματος χάρη, 23 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «x + 2 < - x – 2» υποστηρίζοντας πως το πρώτο μέλος είναι θετικό, ενώ το δεύτερο αρνητικό και ως αποτέλεσμα ένας αρνητικός αριθμός είναι πάντοτε μικρότερος από κάθε θετικό. Ακόμη, 21 μαθητές/τριες θεώρησαν πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «-y > 7» γιατί το 7 είναι ένας θετικός αριθμός ενώ το -y παριστάνει έναν αρνητικό.

Η πλειοψηφία (55,4%) των απαντήσεων της ΟΕ φανερώνουν την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (Βλ. Πίνακας 16). Για παράδειγμα, 24 μαθητές/τριες απάντησαν πως η ανίσωση «- 2x - 1 > 5» δεν επαληθεύεται για καμία τιμή της μεταβλητής, σημειώνοντας πως *«ο αρνητικός αριθμός είναι πάντα πιο μικρός από τον θετικό»*. Παρόμοια, 22 μαθητές/τριες απάντησαν πως δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να επαληθεύει την ανίσωση «$\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$» γιατί *«το υπόρριζο είναι αρνητικό και το κλάσμα $\frac{1}{2}$ είναι θετικό»*.

Πίνακας 16. Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων στις ανισώσεις Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (προ – έλεγχος)

Ομάδα	Ανίσωση	Λάθη			
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές ακεραίων	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση
ΟΠ	2 + λύσεις	94	11	15	19
	Αδύνατες	-	24	7	12
	Σύνολο	94	35	22	31
	Ν (%)	(51,6%)	(19,2%)	(12,1%)	(17,0%)
ΟΕ	2 + λύσεις	142	26	27	17
	Αδύνατες	6	15	21	13
	Σύνολο	148	41	48	30
	Ν (%)	(55,4%)	(15,4%)	(18,0%)	(11,2%)

Μετά – έλεγχος

Στο στάδιο του μετά – ελέγχου, από τις απαντήσεις της ΟΠ, παρατηρείται πως οι λανθασμένες (31,6%), οι μερικώς ορθές (28,0%) και οι ορθές (29,3%) κατανεμήθηκαν σχεδόν ισόποσα (Βλ. Πίνακας 17). Το ποσοστό των λανθασμένων παρέμεινε ελαφρώς υψηλότερο των άλλων δυο.

Πίνακας 17. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις ανισώσεων του μετά - ελέγχου (ΕΡ/Ε2)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	x < - x	15 (34,1%)	11 (25,0%)	16 (36,4%)	2 (4,5%)
	-y - 2 > 2	14 (31,8%)	12 (27,3%)	14 (31,8%)	4 (9,1%)
	-y > 4	10 (22,7%)	10 (22,7%)	22 (50,0%)	2 (4,5%)
	$2 < -\frac{2}{2x}$	17 (38,6%)	17 (38,6%)	3 (6,8%)	7 (15,9%)
	$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	17 (38,6%)	13 (29,5%)	6 (13,6%)	8 (18,2%)
	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	18 (40,9%)	8 (18,2%)	8 (18,2%)	10 (22,7%)
Χωρίς λύσεις	$- 5x^2 > 5$	7 (15,9%)	21 (47,7%)	16 (36,4%)	-
	$\sqrt{-x^2} > 3$	21 (47,7%)	11 (25,0%)	7 (15,9%)	5 (11,4%)
	$-\sqrt{y} > 1$	6 (13,6%)	8 (18,2%)	24 (54,5%)	6 (13,6%)
Σύνολο:		125 (31,6%)	111 (28,0%)	116 (29,3%)	44 (11,1%)

Στο ίδιο στάδιο της έρευνας, οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες της της ΟΕ απάντησαν μερικώς ορθά (38,8%). Αρκετά υψηλό ποσοστό απαντήσεων ήταν λανθασμένες (33,7%) (Βλ. Πίνακας 18).

Πίνακας 18. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N = 65) στις ερωτήσεις ανισώσεων του μετά - ελέγχου (ΕΡ/Ε2)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Ελέγχου (N = 65)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	x < - x	34 (52,3%)	20 (30,8%)	11 (16,9%)	-
	-y - 2 > 2	22 (33,8%)	22 (33,8%)	18 (27,7%)	3 (4,6%)
	-y > 4	20 (30,8%)	24 (36,9%)	18 (27,7%)	3 (4,6%)
	$2 < -\frac{2}{2x}$	22 (33,8%)	29 (44,6%)	10 (15,4%)	4 (6,2%)
	$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	16 (24,6%)	34 (52,3%)	14 (21,5%)	1 (1,5%)
	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	23 (35,4%)	20 (30,8%)	19 (29,2%)	3 (4,6%)
Χωρίς λύσεις	$-5x^2 > 5$	18 (27,7%)	30 (46,2%)	15 (23,1%)	2 (3,1%)
	$\sqrt{-x^2} > 3$	31 (47,7%)	22 (33,8%)	12 (18,5%)	-
	$-\sqrt{y} > 1$	11 (16,9%)	26 (40,0%)	24 (36,9%)	4(6,2%)
	Σύνολο:	197 (33,7%)	227 (38,8%)	141 (24,1%)	20 (3,4%)

Αναφορικά με τους τύπους λαθών που πραγματοποίησαν οι μαθητές/τριες της ΟΠ στο ερωτηματολόγιο ΕΡ/Ε2 (Βλ. Πίνακας 18) προκύπτει πως σε μεγαλύτερη συχνότητα (40,0%) δοκιμάστηκαν ακέραιοι αριθμοί. Για παράδειγμα, 10 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «$\sqrt{-x^2} > 3$», όπως το 3 ή το 9. Ακόμη, 7 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «$2 < -\frac{2}{2x}$» γιατί δοκίμασαν τιμές, όπως το 1 ή το -1, και δεν βρήκαν μια σχέση που να αληθεύει. Επιπλέον, αρκετά μεγάλη συχνότητα παρουσίασαν και τα λάθη παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου (33,6%). Παραδείγματος χάρη, 8 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «x < - x» καθώς τα δυο μέλη είναι μεταξύ τους αντίθετα.

Ως προς τα λάθη που πραγματοποίησαν οι μαθητές/τριες της ΟΕ, διαπιστώθηκε πως στην πλειοψηφία τους (53,8%) προέκυψαν από λανθασμένες δοκιμές ακέραιων τιμών. Για παράδειγμα, 14 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως η αδύνατη ανίσωση «$- 5x^2 > 5$» επαληθεύεται για τιμές, όπως το -1. Επιπλέον, 13 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως η ανίσωση «$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$» δεν επαληθεύεται για καμία τιμή, γιατί δοκίμασαν τιμές όπως το 1, το 2, το 3 κ.α. Μεγάλη συχνότητα παρουσίασαν και τα λάθη παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου (31,0%). Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων λαθών ήταν πως 22 μαθητές/τριες απάντησαν λανθασμένα πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «$x < - x$» γιατί πάντα το ένα μέλος θα είναι θετικό και το άλλο αρνητικό (Βλ. Πίνακας 19).

Πίνακας 19. Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων στις ανισώσεις Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (μετά – έλεγχος)

Ομάδα	Ανίσωση	Λάθη			
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές ακεραίων	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση
ΟΠ	2 + λύσεις	42	33	4	12
	Αδύνατες	-	17	11	6
	Σύνολο	42	50	15	18
	Ν (%)	(33,6%)	(40,0%)	(12,0%)	(14,4%)
ΟΕ	2 + λύσεις	61	63	4	9
	Αδύνατες	-	43	15	2
	Σύνολο	61	106	19	11
	Ν (%)	(31,0%)	(53,8%)	(9,6%)	(5,6%)

Μεταγενέστερος έλεγχος

Στον μεταγενέστερο έλεγχο, οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών/τριων της ΟΠ ήταν λανθασμένες (46,0%). Βέβαια, αρκετές από τις ερωτήσεις που δόθηκαν (25,5%) ήταν ορθές (Βλ. Πίνακας 20).

Πίνακας 20. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N = 44) στις ερωτήσεις ανισώσεων του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Παρέμβασης (N = 44)			
		N (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	$x < -x$	27 (61,4%)	4 (9,1%)	10 (22,7%)	3 (6,8%)
	$-y - 2 > 2$	20 (45,5%)	2 (4,5%)	12 (27,3%)	10 (22,7%)
	$-y > 4$	21 (47,7%)	2 (4,5%)	16 (36,4%)	5 (11,4%)
	$2 < -\frac{2}{2x}$	16 (36,4%)	15 (34,1%)	4 (9,1%)	9 (20,5%)
	$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	20 (45,4%)	9 (20,5%)	3 (6,8%)	12 (27,3%)
	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	23 (52,3%)	4 (9,1%)	4 (9,1%)	13 (29,5%)
Χωρίς λύσεις	$-5x^2 > 5$	13 (29,6%)	1 (2,3%)	27 (61,4%)	3 (6,8%)
	$\sqrt{-x^2} > 3$	22 (50,0%)	6 (13,6%)	11 (25,0%)	5 (11,4%)
	$-\sqrt{y} > 1$	20 (45,5%)	6 (13,6%)	14 (31,8%)	4 (9,1%)
Σύνολο:		182 (46,0%)	49 (12,3%)	101 (25,5%)	64 (16,2%)

Οι περισσότερες απαντήσεις της ΟΕ ήταν λανθασμένες (44,3%). Αρκετές απαντήσεις ήταν μερικώς ορθές (29,9%) (Βλ. Πίνακας 21).

Πίνακας 21. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (Ν = 65) στις ερωτήσεις ανισώσεων του μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3)

Πλήθος λύσεων	Ανίσωση	Ομάδα Ελέγχου (Ν = 65)			
		Ν (%)			
		Λάθος	Μερικώς ορθή	Ορθή	Καμία απάντηση
2 ή περισσότερες λύσεις	$x < -x$	41 (63,1%)	6 (9,2%)	18 (27,7%)	-
	$-y - 2 > 2$	28 (43,1%)	23 (35,4%)	9 (13,8%)	5 (7,7%)
	$-y > 4$	23 (35,3%)	26 (40,0%)	15 (21,3%)	1 (1,5%)
	$2 < -\frac{2}{2x}$	21 (32,3%)	28 (43,1%)	11 (16,9%)	5 (7,7%)
	$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	30 (46,2%)	33 (50,8%)	2 (3,1%)	-
	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	31 (47,7%)	21 (32,3%)	6 (9,2%)	7 (10,8%)
Χωρίς λύσεις	$-5x^2 > 5$	23 (35,4%)	3 (4,6%)	39 (60,0%)	-
	$\sqrt{-x^2} > 3$	42 (64,6%)	16 (24,6%)	7 (10,8%)	-
	$-\sqrt{y} > 1$	20 (30,8%)	19 (29,2%)	21 (32,3%)	5 (7,7%)
Σύνολο:		259 (44,3%)	175 (29,9%)	128 (21,9%)	23 (3,9%)

Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις της ΟΠ στο στάδιο του μεταγενέστερου ελέγχου οφείλονταν στην παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (40,7%). Παράδειγμα τέτοιου είδους λανθασμένης απάντησης είναι το ακόλουθο: 15 μαθητές/τριες απάντησαν πως δεν υπάρχουν τιμές που να επαληθεύουν την ανίσωση «-y > 4» γιατί πάντα τα θετικά είναι μεγαλύτερα από τα αρνητικά (Βλ. Πίνακας 21).

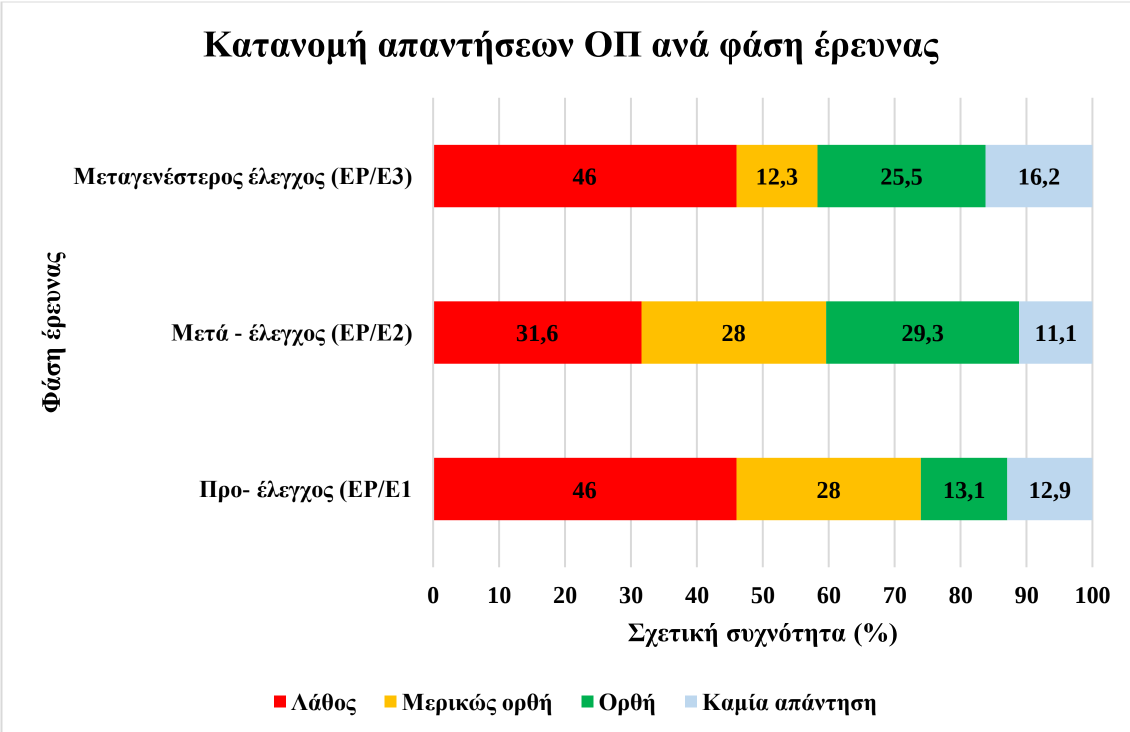
Για την ΟΕ, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις ήταν σχετικές με την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (34,0%). Αρκετά υψηλά ήταν το ποσοστά λαθών από τη δοκιμή ακέραιων αριθμών (28,6%) και μη συστηματικών λαθών (25,8%) (Βλ. Πίνακας 22).

Πίνακας 22. Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων στις ανισώσεις Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου (μεταγενέστερος έλεγχος)

Ομάδα	Ανίσωση	Λάθη			
		Φαινομενικό Πρόσημο	Δοκιμές ακεραίων	Χωρίς νόημα	Χωρίς αιτιολόγηση
ΟΠ	2 + λύσεις	74	13	26	14
	Αδύνατες	-	26	23	6
	Σύνολο	74	39	49	20
	Ν (%)	(40,7%)	(21,4%)	(26,9%)	(11,0%)
ΟΕ	2 + λύσεις	88	40	28	18
	Αδύνατες	-	34	39	12
	Σύνολο	88	74	67	30
	Ν (%)	(34,0%)	(28,6%)	(25,8%)	(11,6%)

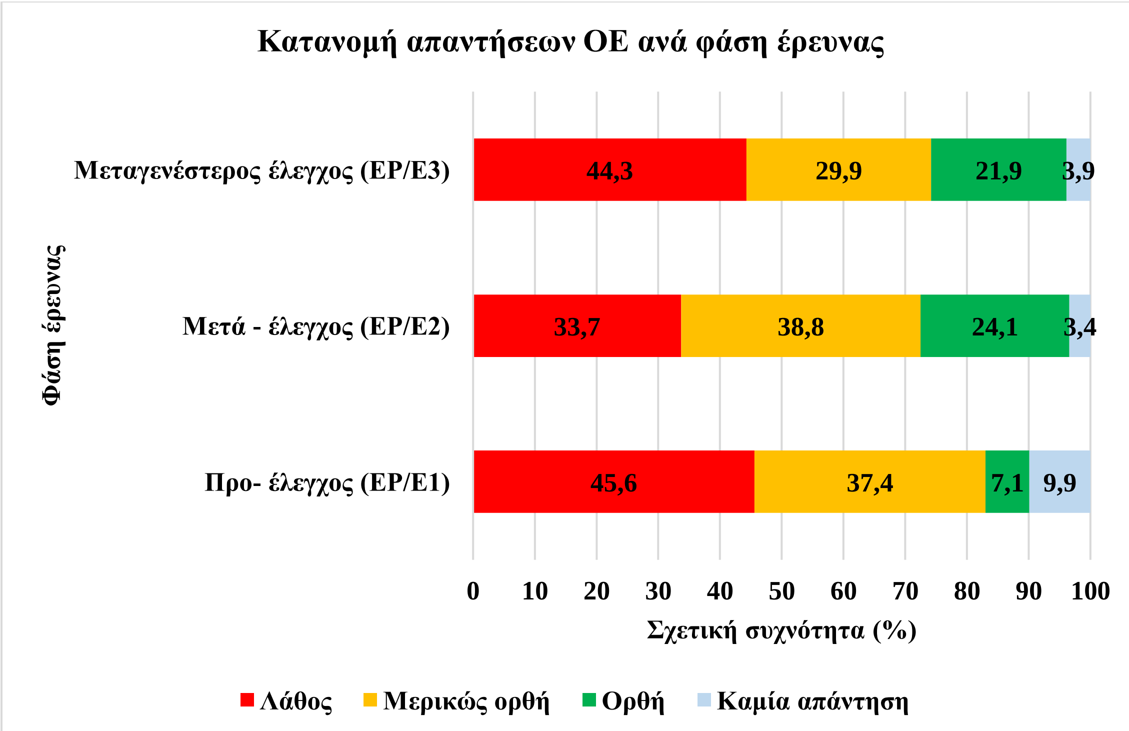
Εν συνεχεία, και για την ολοκλήρωση της παρουσίασης των ποσοτικών αποτελεσμάτων των απαντήσεων που δόθηκαν στις ανισώσεις, συγκεντρώσαμε τα ποσοστά των απαντήσεων αυτών ανά φάση της έρευνας.

Αναλυτικότερα, στο Γράφημα 3, παρουσιάζεται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων των απαντήσεων των μαθητών/τριων της ΟΠ ανά φάση έρευνας. Από το Γράφημα αυτό, διαπιστώνεται ότι σημειώθηκε ίδιος πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων στον προ – έλεγχο και τον μεταγενέστερο έλεγχο (46,0% αντίστοιχα). Αντίθετα, ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων ήταν μικρότερος (31,6%) στη φάση του μετά – ελέγχου. Ως προς το πλήθος των μερικώς ορθών απαντήσεων, διαπιστώνεται πως ήταν ίδιο στον προέλεγχο και στον μετά – έλεγχο (28,0% αντίστοιχα), ενώ ήταν πολύ μικρότερο στην φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (12,3%). Επιπλέον, οι ορθές απαντήσεις ήταν περισσότερες στη φάση του μετα – ελέγχου (29,3%) και λιγότερες στη φάση του προ – ελέγχου (13,1%). Τέλος, οι ερωτήσεις με «καμία απάντηση» ήταν περισσότερες σε πλήθος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (16,2%) και λιγότερες στη φάση του μετά – ελέγχου (11,1%) (Βλ. Γράφημα 3).



Γράφημα 3. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα σχετικών συχνοτήτων κατανομής απαντήσεων στις ανισώσεις – Ομάδα Παρέμβασης (Ν = 44) ανά φάση (προ – έλεγχος, μετά – έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος)

Όσον αφορά στις απαντήσεις που έδωσε η ΟΕ, διαπιστώνεται πως και σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων στις φάσεις του προ – ελέγχου και μεταγενέστερου ελέγχου ήταν σχεδόν το ίδιο (45,6% και 44,3% αντίστοιχα). Μικρότερος ήταν ο αριθμός των λαθών στη φάση του μετά – ελέγχου (33,7%). Ακόμη, ο αριθμός των μερικώς σωστών απαντήσεων ήταν περίπου ίδιους στις φάσεις του προελέγχου (37,4%) και μετά – ελέγχου (38,8%) και μικρότερος στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου (29,9%). Επίσης, ενώ οι ορθές απαντήσεις ήταν λιγοστές (7,1%) στη φάση του προελέγχου, αυξήθηκαν στον μετά – έλεγχο (24,1%) και παρέμειναν περίπου ίσες στον μεταγενέστερο έλεγχο (21,9%). Τέλος, οι ερωτήσεις με «καμία απάντηση» ήταν περισσότερες στη φάση του προ – ελέγχου (9,9%) και λιγότερες στις επόμενες δυο φάσης (μετά – έλεγχος: 3,4%, μεταγενέστερος έλεγχος: 3,9%) (Βλ. Γράφημα 4).



Γράφημα 4. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα σχετικών συχνοτήτων κατανομής απαντήσεων στις ανισώσεις – Ομάδα Ελέγχου (N = 65) ανά φάση (προ – έλεγχος, μετά – έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος)

Σύγκριση συνολικών μέσων επιδόσεων στις ανισώσεις

Σε συνέχεια της συγκριτικής παρουσίασης των απαντήσεων των μαθητών/τριων των δυο ομάδων στις τρεις φάσεις της έρευνας, κρίθηκε σκόπιμο να υπολογίσουμε την μέση επίδοση που συγκέντρωσαν σε αυτές τις φάσεις. Κατά συνέπεια, οι απαντήσεις τους στις ασκήσεις ανισώσεων των τριών ερωτηματολογίων (ΕΡ/Ε1, ΕΡ/Ε2 και ΕΡ/Ε3) βαθμολογήθηκαν όπως ακριβώς και σε εκείνες των εξισώσεων (Βλ. § Σύγκριση συνολικών μέσων επιδόσεων στις εξισώσεις).

Οι μέσες επιδόσεις για την ΟΠ και την ΟΕ παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα (Βλ. Πίνακας 23).

Πίνακας 23. Μέσες επιδόσεις προ-ελέγχου (ΕΡ/Ε1), μετά – ελέγχου (ΕΡ/Ε2) και μεταγενέστερου ελέγχου (ΕΡ/Ε3) στις ανισώσεις συνολικά

	Συνολική μέση επίδοση στις εξισώσεις					
Ομάδα	(ΕΡ/Ε1)		Μετά – έλεγχος (ΕΡ/Ε2)		Μεταγενέστερος έλεγχος (ΕΡ/Ε3)	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
ΟΠ	0,61	0,283	1,02	0,418	0,71	0,440
ΟΕ	0,58	0,245	0,90	0,324	0,77	0,372

Ο έλεγχος της ομοιογένειας της διασποράς με το κριτήριο του Levene (Levene's test) οδήγησε σε στατιστικώς σε μη στατιστικώς σημαντικό αποτέλεσμα $F(1,107) = 3.014$, $p = .085$, δείχνοντας την ομοιογένεια του δείγματος.

Πραγματοποιήθηκε, ακόμη, μικτή ανάλυση διακύμανσης με επαναλαμβανόμενο παράγοντα (Mixed ANOVA with Repeated Measures) για να εξεταστεί εάν οι αλλαγές που σημειώθηκαν στις μέσες βαθμολογίες ανισώσεων των δυο ομάδων ανά φάση έρευνας (Βλ. Πίνακας 23) παρουσιάζουν στατιστικώς σημαντικές διαφορές ανά φάση και ανά ομάδα. Από τα αποτελέσματα της ομοιογένειας συνδιακύμανσης (Sphericity), βρέθηκε πως η τιμή του κριτηρίου Mauchly (Mauchly´s Test of Sphericity) να μην είναι στατιστικά σημαντική ($p = .78$) δείχνοντας πως οι συσχετίσεις μεταξύ των συνδυασμών των μέσων βαθμολογιών είναι ίσες.

Αναφορικά με την επίδραση της φάσης έρευνας (προ-έλεγχος, μετά – έλεγχος, μεταγενέστερος έλεγχος) βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στη μέση συνολική επίδοση στις ανισώσεις [$F(2,214) = 34.973$, $p < .001$, $n_p^2 = .246$]. Από την εξέταση των μέσων βαθμολογιών στις ανισώσεις (Βλ. Πίνακας 23) προέκυψε υψηλότερη επίδοση στη φάση του μετά – ελέγχου και χαμηλότερη στη φάση του προ – ελέγχου.

Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων βαθμολογιών στις τρεις φάσεις της έρευνας (προ-έλεγχος, μετά – έλεγχος, μεταγενέστερος έλεγχος) και των ομάδων μαθητών/τριων (Πειραματική Ομάδα, Ομάδα Ελέγχου). Η ομάδα στην οποία ανήκαν οι μαθητές/τριες (ΠΟ, ΟΕ) δεν οδήγησε σε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις μέσες βαθμολογίες τους στις ασκήσεις ανισώσεων [$F\ (1,107) = .509$, $p = .477$, $n_p^2 = .005$]. Πιο συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε πως δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ μέσων βαθμολογιών στις εξισώσεις και ομάδων παιδιών [$F_{(2, 214)} = 1.952$, $p = .145$, $n_p^2 = .018$].

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1. Συζήτηση

Η παρούσα εργασία εστίασε το ενδιαφέρον της στην ερμηνεία της τάσης που εντοπίζεται σε μαθητές/τριες δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να θεωρούν ότι οι μεταβλητές είναι σύμβολα φυσικών αριθμών με συνέπεια να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο ως το πραγματικό πρόσημο που αναπαριστά μια αλγεβρική έκφραση. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνήσει αν κάποια λάθη μαθητών/τριων που φοιτούν στην Γ΄ Γυμνασίου σε εξισώσεις και ανισώσεις προκύπτουν ως συνέπεια της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Επιπλέον, η παρούσα έρευνα διερεύνησε τη συμβολή μιας διδακτικής παρέμβασης με εργαλείο τα λανθασμένα παραδείγματα, στην υπέρβαση αντίστοιχων δυσκολιών και στη μείωση λαθών που προκύπτουν από την προαναφερθείσα παρερμηνεία, συγκρίνοντάς την με την αποτελεσματικότητα μιας παρέμβασης με ορθά λυμένα παραδείγματα.

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα της μελέτης υποστήριξαν την υπόθεση ότι η προσπάθεια να βρουν τιμές που επαληθεύουν εξισώσεις και ανισώσεις με τη μέθοδο της δοκιμής, παρεμποδίζεται από την τάση των μαθητών/τριων να θεωρούν ότι τα αλφαβητικά σύμβολα που συναντούσαν αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Ως αποτέλεσμα, στο πρώτο στάδιο του προ-ελέγχου, διαπιστώθηκε πως τόσο τα μέλη της ομάδας παρέμβασης όσο κι εκείνα της ομάδας ελέγχου έδωσαν σε ένα μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων ή μερικώς ορθών απαντήσεων. Πιο αναλυτικά, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών/τριων προέκυψαν από την παρουσία της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου σε σχέση με το πρόσημο της τιμής που θα μπορούσε να επαληθεύει την εξίσωση ή την ανίσωση. Φάνηκε, λοιπόν, πως η τάση των παιδιών να θεωρούν το φαινομενικό πρόσημο των γραμμάτων ως το πραγματικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων στις οποίες συμπεριλαμβάνονται στάθηκε εμπόδιο στο να βρουν τιμές που επαληθεύουν εξισώσεις/ ανισώσεις. Κάτι τέτοιο, διαπιστώθηκε από τα χαμηλά ποσοστά ορθών απαντήσεων κατά την πρώτη φάση της έρευνας (προ-έλεγχος). Παραδείγματος χάρη, πληθώρα παιδιών απάντησε πως οι εξισώσεις «$-y - 1 = y + 1$» και «$-x = 17$» δεν αληθεύουν για καμία τιμή, καθώς τα δυο μέλη έχουν αντίθετο πρόσημο και συνεπώς μια «θετική ποσότητα» δεν μπορεί να εξισωθεί με μια «αρνητική ποσότητα». Αντίστοιχα, στην περίπτωση ανισώσεων όπως η: «-y > 7» τα παιδιά απέρριψαν το ενδεχόμενο μια φαινομενικά αρνητική τιμή να είναι μεγαλύτερη μιας θετικής (π.χ., απαντώντας πως το – y δηλώνει μια αρνητική ποσότητα, για τιμές όπως το 1, το 2, το 3…το 8 κλπ). Το συγκεκριμένο εύρημα έρχεται σε συμφωνία με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, όπου αναδεικνύεται η τάση των παιδιών να αντιλαμβάνονται τις φαινομενικά θετικές αλγεβρικές παραστάσεις ως πραγματικά θετικές και τις φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις ως πραγματικά αρνητικές (Christou & Vosniadou, 2012). Το ίδιο διαπιστώθηκε και στην περίπτωση των ερωτήσεων τετραγωνική ρίζα, όπου το φαινομενικά αρνητικό υπόρριζο οδηγούσε τους/τις μαθητές/τριες να πιστεύουν πως μια τέτοια εξίσωση/ ανίσωση είναι αδύνατη. Για παράδειγμα, εξισώσεις όπως η: «$\sqrt{-5x}$ = 5» και ανισώσεις όπως η: «$\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}$» θεωρήθηκαν αδύνατες. Αντιθέτως, αδύνατες εξισώσεις, όπως η: «$-\sqrt{x} = 2$» και αδύνατες ανισώσεις, όπως η: « -$\sqrt{y}$ > 4». συγκέντρωσαν υψηλό ποσοστό ορθών απαντήσεων. Τα τελευταία ευρήματα βρίσκονται σε συμφωνία με αποτελέσματα προγενέστερης μελέτης του Χρήστου (2009), όπου διαπιστώθηκε πως στην περίπτωση των ερωτήσεων με ανισώσεις, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών/τριων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης επηρεάστηκε από το φαινομενικό πρόσημο, ενώ τα πήγε καλύτερα σε ερωτήσεις με φαινομενικά θετικό παρά με φαινομενικά αρνητικό υπόρριζο.

Αναφορικά με την πληθώρα μερικώς ορθών απαντήσεων που εντοπίστηκε στο στάδιο του προ-ελέγχου της παρούσας μελέτης, διαπιστώθηκε πως η μεγάλη πλειοψηφία τους αφορούσε σε εύρεση τιμών που επαληθεύουν εξισώσεις με διπλή λύση (πχ. $y^2 = 25$). Σε αυτή την περίπτωση, τα παιδιά απαντούσαν πως υπάρχουν τιμές που επαληθεύουν την εξίσωση, περιορίζοντας όμως τις λύσεις στις θετικές ακέραιες τιμές των μεταβλητών. Η παράβλεψη της αναφοράς στην αρνητική λύση οδήγησε σε μερικώς ορθές απαντήσεις. Βρέθηκε, λοιπόν, πως πολλοί/ες μαθητές/τριες επηρεάστηκαν από την φαινομενικά θετική παράσταση που αντιμετώπιζαν και δεν ανέφεραν τυχόν αρνητικές λύσεις. Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με τα βιβλιογραφικά ευρήματα τα οποία κάνουν λόγο για την τάση των μαθητών/τριων να κατανοούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς (Christou, 2015, 2017) και να πιστεύουν πως σε μια φαινομενικά θετική παράσταση, τα αλφαβητικά σύμβολα αναπαριστούν κατά προτεραιότητα θετικούς ακέραιους αριθμούς (Christou & Vosniadou, 2012).

Ισχυρή αναδείχθηκε και η τάση των μαθητών/τριων να δοκιμάζουν ακέραιες τιμές στη θέση των γραμμάτων. Τέτοιου είδους απαντήσεις εντοπίστηκαν κυρίως σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού με διαφορετικό φαινομενικό πρόσημο μεταξύ των δυο μελών τους (πχ. $- 2y^2 = 2$ και $y^2 = -16$». Έτσι, ενώ στην περίπτωση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δυο λύσεις (πχ. $y^2 = 25$) σημαντικό πλήθος παιδιών παρέλειψε την αρνητική λύση, στην τελευταία περίπτωση υπήρχαν μαθητές/τριες που ανέφεραν ως λύσεις αρνητικές ακέραιες τιμές, όπως το -1 ή το -4. Το τελευταίο εύρημα αναδεικνύει πως εκτός από την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, πολύ ισχυρή είναι και η επίδραση του φαινομένου της ακεραιότητας (Christou et al., in press).

Όσον αφορά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, εάν τα λανθασμένα παραδείγματα αποδείχθηκαν ωφέλημα για την υπέρβαση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου σε σύγκριση με τα ορθά λυμένα παραδείγματα, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας συμφωνούν με την προϋπάρχουσα βιβλιογραφία, όπου υποστηρίζεται πως τέτοιου είδους διδακτικές παρεμβάσεις βοηθούν τα παιδιά ώστε να διορθώσουν τα λάθη τους (πχ. Booth et al., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007; Siegler & Chen, 2008; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Πράγματι, μελετώντας την μεταβολή της μέσης συνολική επίδοση των παιδιών της ομάδας παρέμβασης σε ασκήσεις εξισώσεων και ανισώσεων διαπιστώθηκε υψηλότερη επίδοση στη φάση του μετά – ελέγχου. Πιο αναλυτικά, η διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα είχε ως αποτέλεσμα την βελτίωση των επιδόσεων κάποιων μαθητών/τριων αμέσως μετά την εφαρμογή της. Ωστόσο η επίδραση της συγκεκριμένης παρέμβασης δεν διατηρήθηκε για μεγάλο χρονικό διάστημα, καθώς έναν μήνα μετά, οι επιδόσεις των παιδιών στη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου ήταν υψηλότερες εκείνων του προελέγχου χωρίς, όμως, η διαφορά μεταξύ τους να είναι στατιστικά σημαντική. Τα ευρήματα αυτής της μελέτης, λοιπόν, ενισχύουν την υπόθεση πως τα λανθασμένα παραδείγματα αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την υπέρβαση κάποιων λαθών στα μαθηματικά καθώς φέρνει τους μαθητές/τριες αντιμέτωπους/ες με λάθη συνομηλίκων συμμαθητών τους (Booth et al., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007; Siegler & Chen, 2008). Εκτός, όμως, από το γεγονός της βελτίωσης των επιδόσεων των παιδιών της ΠΟ που δέχθηκαν διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα, το ίδιο ωφέλιμα φάνηκε να είναι και τα αποτελέσματα της παρέμβασης με ορθά λυμένες εφαρμογής στα παιδιά της ΟΕ. Πράγματι, συγκρίνοντας τις μέσες επιδόσεις του δείγματος παιδιών που δέχθηκε διδακτική παρέμβαση με ορθά λυμένα παραδείγματα στις τρεις φάσεις της έρευνας, διαπιστώθηκε καλύτερη επίδοση στη φάση του μετα-ελέγχου. Συνεπώς, όπως ακριβώς συνέβη και με την περίπτωση της ομάδας παρέμβασης, τα ορθά λυμένα παραδείγματα φάνηκε να αποτελούν αποτελεσματικό εργαλείο για την υπέρβαση λαθών εξαιτίας της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου σε εξισώσεις/ανισώσεις. Δηλαδή, από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, διαπιστώθηκε πως οι δυο διαφορετικές διδακτικές παρεμβάσεις που εφαρμόστηκαν σε ομάδα παρέμβασης και ομάδα ελέγχου ήταν το ίδιο αποτελεσματικές καθώς στατιστικά σημαντικές διαφορές στις μέσες επιδόσεις των παιδιών διαπιστώθηκαν μόνο μεταξύ της φάσης της έρευνας και όχι μεταξύ των δυο ομάδων. Παρά το γεγονός της απουσίας προηγούμενων ερευνών που να συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα των λανθασμένων έναντι των ορθών παραδειγμάτων στην υπέρβαση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, τα αποτελέσματα της έρευνάς μας φαίνεται να βρίσκονται σε συμφωνία με τη διαπίστωση των Zhao και Acosta – Tello (2016). Συγκεκριμένα, οι τελευταίοι ανέδειξαν την εξίσου ωφέλιμη πλευρά λανθασμένων και ορθών παραδειγμάτων και ενίσχυσαν την υπόθεση πως ο συνδυασμός τους βελτιώνει την εννοιολογική κατανόηση έναντι της διαδικαστικής γνώσης.

Η μη διαφορά στις επιδόσεις αναμεσά στις δυο ομάδες δείχνει επίσης ότι αρκεί μια υπενθύμιση, σε μορφή λανθασμένου ή ορθού παραδείγματος, για να παρακαμφθεί η τάση να σκέφτονται οι μαθητές/τριες μόνο με φυσικούς αριθμούς που ενισχύει και την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, αλλά, αυτό δεν αρκεί για πιο μόνιμες αλλαγές στη συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, σε ό,τι αφορά στην διάρκεια των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης με λανθασμένα παραδείγματα, καθώς και της διδακτικής παρέμβασης με ορθά λυμένα παραδείγματα, διαπιστώθηκε πως κατά την τρίτη φάση του μεταγενέστερου ελέγχου, τα μέσα συνολικά επιδόσεις των δυο ομάδων παιδιών σε εξισώσεις και ανισώσεις ήταν ελαφρώς υψηλότερες από εκείνων του προ-ελέγχου. Δηλαδή, οι υψηλότερες μέσες επιδόσεις σημειώθηκαν στο στάδιο του μετα-ελέγχου αμέσως μετά την διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα και ορθά λυμένα παραδείγματα, αντίστοιχα. Έτσι, έγινε φανερό πως λάθη εξαιτίας της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου και της επίδρασης της ακεραιότητας στις δοκιμές τιμών επέστρεψαν. Σε αντίστοιχα ευρήματα είχε οδηγηθεί προηγούμενη διδακτική παρέμβαση των Χρήστου και Βοσνιάδου (2009) που ήταν εστιασμένη στην μείωση της επίδρασης της παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Στην ίδια έρευνα, οι υψηλότερες επιδόσεις των μαθητών/τριων σημειώθηκαν αμέσως μετά την διδακτική παρέμβαση, όπως συνέβη και στην παρούσα έρευνα. Ως αποτέλεσμα, τα οφέλη της παρέμβασής τους, όπως και στην παρούσα περίπτωση, δεν είχαν μεγάλη διάρκεια στον χρόνο. Τα τελευταία ευρήματα υποστηρίζουν προηγούμενα ευρήματα πως η μακρόχρονη εμπειρία των παιδιών στους φυσικούς δημιουργεί ισχυρές διαισθητικές πεποιθήσεις που επιμένουν ακόμη και μετά από μακροχρόνια έκθεση σε διδασκαλία μη φυσικών (Christou & Vamvakoussi, 2021). Συνεπώς, μια σύντομη διδακτική παρέμβαση δεν θα μπορούσε να οδηγήσει σε ολοκληρωτική υπέρβαση των παρερμηνειών που προκύπτουν ως συνέπεια της ΠΦΑ. Όπως, άλλωστε υποστήριξαν οι Χρήστου και Βοσνιάδου (2009) για την επίτευξη μακροχρόνιων αποτελεσμάτων θα πρέπει να διερευνηθούν οι βαθύτερες αιτίες που προκαλούν παρερμηνείες αντίστοιχες με αυτής του φαινομενικού προσήμου. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι μαθητές/τριες βοηθήθηκαν να περιορίσουν λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις που οφείλονται στην τάση τους να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των γραμμάτων σε εξισώσεις/ανισώσεις ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αναπαριστούν, μας βοηθά να κατανοήσουμε τη σημασία της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε έστω κι αν δεν ήταν αρκετή για μόνιμες αλλαγές.

Τα παραπάνω δείχνουν για άλλη μια φορά ότι οι μαθητές/τριες δεν είναι ότι δεν έχουν την απαραίτητη μαθηματική γνώση για το τι συμβολίζουν τα γράμματα στην άλγεβρα, τι τιμές μπορεί να πάρουν και κατά συνέπεια τι συμβολίζουν εξισώσεις και ανισώσεις που τα περιλαμβάνουν. Αλλά, ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού μπορεί ακόμα να επηρεάζει τις απαντήσεις τους παρόλη τη γνώση αυτή. Αυτό επιβεβαιώνει και το χαρακτηρισμό του φαινομένου ως «προκατάληψη» καθώς δεν αφορά την έλλειψη γνώσης, αλλά μιας διαδικασία που η διαισθητικές αντιλήψεις ενεργοποιούνται αυτόματα, παρά την ύπαρξη της πιο εκλεπτυσμένης γνώσης.

Τα βραχυχρόνια αποτελέσματα των διδακτικών παρεμβάσεων με λανθασμένα και ορθά παραδείγματα, καθιστά κατανοητό το γεγονός ότι ανεξάρτητα από το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης, τα παιδιά θα πρέπει πρωτίστως να συνειδητοποιήσουν πως τα αλφαβητικά σύμβολα αναπαριστούν οποιοδήποτε αριθμό, είτε θετικό είτε αρνητικό (Χρήστου & Βοσνιάδου, 2009). Αυτός ο στόχος μπορεί να επιτευχθεί με την προϋπόθεση πως οι μαθητές/τριες Γυμνασίου έχουν αναπτύξει επαρκώς την έννοια του αριθμού. Ωστόσο, η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού εκτός του πλαισίου των φυσικών αριθμών απαιτεί εννοιολογική αλλαγή η οποία συντελείται έπειτα από χρονοβόρες διαδικασίες (Χρήστου, 2009).

Βασιζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα, μια διδακτική παρέμβαση - η οποία θα βασίζεται είτε σε λανθασμένα είτε σε ορθά λυμένα παραδείγματα - θα μπορέσει να πετύχει μακροχρόνια αποτελέσματα στην υπέρβαση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου μόνο εάν στοχεύσει τις βαθύτερες αιτίες που την προκαλούν. Έτσι, τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα της παρούσας μελέτης θα πρέπει να αποτελέσουν κίνητρο για μια γενικότερη αλλαγή της εκπαιδευτικής στρατηγικής έτσι ώστε ο τρόπος διδασκαλίας της άλγεβρας να στοχεύει στην μείωση των επιδράσεων της ΠΦΑ. Κάτι τέτοιο θα βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν την έννοια των συμβόλων στην άλγεβρα και τον ρόλο των γραμμάτων σε εξισώσεις και ανισώσεις. Παρεμβάσεις με τέτοιο στόχο την θα πρέπει να ενταχθούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και συγκεκριμένα στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου και να περιλαμβάνουν βραχυπρόθεσμους στόχους έτσι ώστε να εφαρμόζονται συστηματικά εντός της σχολικής τάξης. Τα παραδείγματα που θα επιλέγονται, θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να βοηθούν τα παιδιά να κατανοήσουν την έννοια των συμβόλων και ιδιαίτερα των μεταβλητών στην άλγεβρα, ενισχύοντας το αναφορικό νόημά τους. Τα μέχρι τώρα δεδομένα δεν μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε αν τα λανθασμένα, τα ορθά ή ο συνδυασμός ορθών και λανθασμένων παραδειγμάτων είναι το πλέον κατάλληλο μοντέλο διδακτικής παρέμβασης. Ωστόσο, η αξιοποίηση λυμένων παραδειγμάτων σε μαθητοκεντρικά μοντέλα διδασκαλίας είναι δυνατό να βοηθήσουν μαθητές υψηλών αλλά και χαμηλότερων επιδόσεων.

5.2. Περιορισμοί της έρευνας

Τα συμπεράσματα που συζητήθηκαν στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο προέκυψαν από τις απαντήσεις που έδωσαν μαθητές/τριες που φοιτούσαν στο ίδιο Δημόσιο Γυμνάσιο μιας κωμόπολης της Κεντρικής Μακεδονίας. Συνεπώς, σε αυτή την έρευνα αντλήθηκαν απαντήσεις από μόνο ένα Δημόσιο Σχολείο και συνεπώς από παιδιά που κατοικούν στο ίδιο γεωγραφικό διαμέρισμα της Ελλάδας. Κατά συνέπεια, οι μαθητές/τριες αποτελούν μόνο ένα μικρό δείγμα του πληθυσμού με αποτέλεσμα τα όποια συμπεράσματα προέκυψαν να μην μπορούν να γενικευθούν για όλους τους/τις μαθητές/τριες που φοιτούν στη Γ΄ Γυμνασίου.

Ένας ακόμη παράγοντας που πρέπει να επισημανθεί ως περιορισμός της παρούσας μελέτης είναι η αποκλειστική συμμετοχή μαθητών/τριων της Γ΄ Γυμνασίου. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα βασίστηκαν σε απαντήσεις παιδιών της ίδιας ηλικίας και τάξης φοίτησης. Ως άμεση συνέπεια, το δείγμα περιορίζεται σε ένα μικρό τμήμα μαθητών/τριων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δεν αντιπροσωπεύει το σύνολο των παιδιών δευτεροβάθμιας που έχουν διδαχθεί εξισώσεις και ανισώσεις κατά τη φοίτησή τους στο σχολείο.

Ακόμη κι αν το ερευνητικό εργαλείο έδινε την ευκαιρία στους/στις μαθητές/τριες να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους και να μην παραμείνουν στην επιλογή απάντησης μεταξύ πολλαπλών επιλογών, τα δεδομένα αντλήθηκαν με ποσοτικά μέσα. Έτσι, η αποκλειστική χρήση ποσοτικών μέσων ανάλυσης των απαντήσεων που δόθηκαν, αναγνωρίζεται ως ένας ακόμη περιορισμός της μελέτης μας. Ο συνδυασμός διχοτομικού τύπου ερωτήσεων (Υπάρχουν τιμές/ Δεν υπάρχουν τιμές) με την αιτιολόγηση της απάντησης που διάλεγαν οι μαθητές/τριες, αξιοποιήθηκε σε επίπεδο κατηγοριοποίησης του τύπου των λαθών που οδήγησαν σε μερικά ορθές ή σε λανθασμένες απαντήσεις (πχ. φαινομενικό πρόσημο, ακέραιοι αριθμοί κλπ). Όμως, η σύντομες απαντήσεις που κλήθηκαν να δώσουν τα παιδιά, ενδέχεται να τους απέτρεψε από διατύπωση μεγαλύτερων απαντήσεων που θα αιτιολογούσε καλύτερα τον τρόπο σκέψη τους. Ωστόσο, ακόμη και οι σύντομες απαντήσεις που δόθηκαν θα μπορούσαν να έχουν αναλυθεί με ποιοτικά μέσα εάν αντί για την διαδικασία που επιλέχθηκε είχε προτιμηθεί η συνέντευξη ή η παρατήρηση των παιδιών. Βέβαια, η εκπόνηση συνεντεύξεων και η παρατήρηση των παιδιών ήταν μη εφικτή τόσο εξαιτίας του περιορισμένου χρόνου όσο και εξαιτίας της πανδημίας του κορονοϊού η οποία απαιτούσε την διατήρηση αποστάσεων.

Η επισήμανση των παραπάνω περιορισμών δεν ακυρώνει την σημασία και την πρωτοτυπία της έρευνας. Στον αντίποδα, αναδεικνύει σημεία προβληματισμού τα οποία χαίρουν βελτίωσης και φέρνει στο προσκήνιο πτυχές που αξίζει να διερευνηθούν σε μελλοντικές συναφείς μελέτες.

5.3. Γενικά Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Η ενασχόληση του παιδιού με αλφαβητικά σύμβολα σηματοδοτεί την μετάβασή του από την αριθμητική στην άλγεβρα. Κατά την φοίτησή του στο Γυμνάσιο, ένας/μια μαθητής/τρια καλείται να διαχειριστεί παραστάσεις και εκφράσεις που περιλαμβάνουν σύμβολα. Τέτοιες μαθηματικές εκφράσεις, οι οποίες κατέχουν σημαντική θέση στην ύλη των σχολικών μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Παρά τη σημασία της κατανόησης της έννοιας και της διαδικασίας επίλυσης των παραπάνω εκφράσεων, πολλά παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες και εμφανίζουν παρανοήσεις όταν καλούνται να τις διαχειριστούν (Almog & Ilany, 2012; Tsamir & Bazzini, 2004; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Η εξέχουσα θέση των αλφαβητικών συμβόλων και η σημασία της κατανόησης των εξισώσεων και ανισώσεων τόσο για την πορεία ενός παιδιού στο σχολείο όσο και στην καθημερινή ζωή, έχει οδηγήσει σε μελέτες που ανέδειξαν συνήθη λάθη σε αυτά τα δυο αντικείμενα.

Στην παρούσα εργασία επικεντρωθήκαμε στον εντοπισμό προηγούμενων μελετών που αναδείκνυαν λάθη και παρανοήσεις μαθητών/τριων σε εξισώσεις και ανισώσεις σε σχέση με την παρουσία συμβόλων και αρνητικών αριθμών αλλά και σε σχέση με λάθη στον αλγόριθμο επίλυσης. Πράγματι, από την βιβλιογραφική επισκόπηση αναδείχθηκε πληθώρα αναφορών που υποστήριζε πως οι μαθητές/τριες δεν κατανοούν τα αλφαβητικά σύμβολα και συνεπώς κάνουν λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις. Παρομοίως, αναδείχθηκαν μελέτες που έκαναν λόγο για παρουσία λαθών από πλευράς μαθητών/τριων όταν σε εξισώσεις και ανισώσεις συμπεριλαμβάνονται αρνητικοί αριθμού. Τέλος, αναδείχθηκε πως τα αλγοριθμικά λάθη σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με την απουσία εννοιολογικής κατανόησης των μετασχηματισμών που απαιτείται να εκτελεστούν. Αντιθέτως, οι όποιοι μετασχηματισμοί θα ήταν ευκολότερο να αφομοιωθούν αν λαμβανόταν υπόψη το αναφορικό νόημα των συμβόλων.

Το αναφορικό νόημα των συμβόλων αφορά τη σχέση μεταξύ συμβόλου και αριθμού δηλαδή της ποσότητας που αναπαριστά κι ως διαδικασία μπορεί να νοηματοδοτήσει τόσο τις λύσεις όσο και την αδυναμία λύσεως εξισώσεων και αναλώσεων. Η επένδυση, λοιπόν, στο αναφορικό νόημα των αλγεβρικών συμβολών και τον εκφράσεων που τα περιλαμβάνουν, είναι χρήσιμη ειδικά σε πλαίσια όπως η λύση εξισώσεων και ανισώσεων. Ωστόσο, ελλοχεύει ο κίνδυνος να αναδειχθούν λάθη, όταν υπάρχουν φαινόμενα όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού που μπορούν να περιορίσουν το αναφορικό νόημα δημιουργώντας συγκεκριμένες παρανοήσεις. Μια τέτοια παρερμηνεία η οποία τέθηκε στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος της παρούσας έρευνας ήταν εκείνη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, δηλαδή της τάσης των παιδιών παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης ως το πραγματικό της πρόσημο (βλ. Christou & Vosniadou, 2012). Στην παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε την υπόθεση ότι λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν να ερμηνευτούν από την τάση των μαθητών να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών και να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο ως το πρόσημο των τιμών που μια αλγεβρική έκφραση μπορεί να αναπαραστήσει. Για να διερευνήσουμε την υπόθεσή μας, επιλέξαμε το πλαίσιο των εξισώσεων και των ανισώσεων, καθώς οι εξισώσεις αποτελούν αντικείμενο όπου λάθη μαθητών/τριων έχουν μελετηθεί αρκετά και οι ανισώσεις – εξαιτίας των ιδιοτήτων τους – οδηγούν εύκολα σε παρερμηνεία του φαινομενικού τους προσήμου. Από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, διαπιστώθηκε πως πράγματι, το φαινομενικό πρόσημο εξισώσεων και ανισώσεων επηρεάζει την ικανότητα των μαθητών/τριων να εντοπίζουν τιμές που τις επαληθεύουν.

Με αφορμή το αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον και έπειτα από αξιολόγηση των μέχρι σήμερα εμπειρικών δεδομένων, στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σύγκριση της αποτελεσματικότητας μιας διδακτικής παρέμβασης με λανθασμένα παραδείγματα και μιας διδακτικής παρέμβασης με ορθά λυμένα παραδείγματα σε διαφορετικά δείγματα παιδιών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν ενθαρρυντικά για την αποτελεσματικότητα και των δυο μεθόδων. Ωστόσο, η βελτίωση των επιδόσεων της ομάδας παρέμβασης ήταν αντίστοιχη με εκείνη της ομάδας ελέγχου κι έτσι δεν εντοπίστηκαν διαφορές μεταξύ των μέσων επιδόσεων των δυο ομάδων, παρά μόνο διαφορές μεταξύ των φάσεων της έρευνας στην ίδια ομάδα παιδιών. Υψηλότερη μέση επίδοση σημειώθηκε και στις δυο ομάδες αμέσως μετά την διδακτική παρέμβαση. Παρά το γεγονός ότι και οι δυο μέθοδοι παρέμβασης αποδείχθηκαν το ίδιο καλές, η αποτελεσματικότητά τους δεν είχε διάρκεια στο χρόνο.

Συμπερασματικά, από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας διαπιστώνεται πως κάποια λάθη μαθητών/τριων σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν να ερμηνευθούν από την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Όμως, επίσης ισχυρή είναι και η επίδραση της ακεραιότητας. Παρά τα πρόσκαιρα οφέλη της διδακτικής παρέμβασης με λανθασμένα και της διδακτικής παρέμβασης με ορθά λυμένα παραδείγματα στην υπέρβαση της παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου στην περίπτωση εξισώσεων και ανισώσεων, τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά και θα πρέπει να διασταυρωθούν με επόμενες μελέτες. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη πως η προϋπάρχουσα εμπειρία των παιδιών στους φυσικούς αριθμούς ενισχύει την τάση τους να σκέφτονται φυσικούς αριθμούς όταν καλούνται να αντικαταστήσουν αλφαβητικά σύμβολα, γίνεται κατανοητή πως η υπέρβαση παρανοήσεων συναφών με την ΠΦΑ απαιτεί μακρόχρονη και συστηματική προσπάθεια.

Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς υπό τους οποίους πραγματοποιήθηκε η παρούσα έρευνα και τις εκπαιδευτικές προεκτάσεις που συζητήθηκαν, συστήνονται:

- Η διεξαγωγή επόμενης έρευνας η οποία θα συγκρίνει την αποτελεσματικότητα των δυο διδακτικών παρεμβάσεων μεταξύ μαθητών/τριων με υψηλό και χαμηλό επίπεδο προηγούμενης γνώσης.
- Η διεξαγωγή μελλοντικής συναφούς έρευνας σε μαθητές/τριες Γυμνασίου και Λυκείου με σκοπό τη σύγκριση των επιδόσεων των συμμετεχόντων ανάλογα με την τάξη φοίτησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher, 56*(8), 786–795.

Adams, D., McLaren, B. M., Mayer, R. E., Goguadze, G., & Isotani, S. (2013). Erroneous examples as desirable difficulty. In H. C. Lane, K. Yacef, J. Mostow, & P. Pavlik, (Eds.). *Proceedings of the 16th International Conference on Artificial Intelligence in Education (AIED 2013).* LNCS 7926 (pp. 803-806). Springer, Berlin.

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S., & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior, 36,* 401-411. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.053

Almog, N., & Ilany, B.-S. (2012). Absolute Value Inequalities: High School Students' Solutions and Misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81,* 347-364. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9404-z

Arampatzis, K., Skiadaresis, P., & Christou, K. P. (2007). Conceptual change in the shift from equations to inequalities. *2nd National Conference of the Greek Association of Reserach in Mathematics Education,* Alexandroupolis.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2014). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Badarudin, B. R. H., & Khalid, M. (2008). Using the Jar Model to Improve Students' Understanding of Operations on Integers. *PROCEEDINGS OF ICME-11–TOPIC STUDY GROUP 10 Research and Development in the Teaching And Learning Of Number Systems and Arithmetic*, 85.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2011). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Barbieri, C., & Booth, J. L. (2016). Support for struggling students in algebra: Contributions of incorrect worked examples. *Learning and Individual Differences, 48,* 36–44. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.04.001

Barbieri, C. A., & Booth, J. L. (2020). Mistakes on display: Incorrect examples refine equation solving and algebraic feature knowledge. *Applied Cognitive Psychology*, *34*(4), 862-878. https://doi.org/10.1002/acp.3663

Barbieri, C. A., Booth, J. L., Begolli, K. N., & McCann, N. (2021). The effect of worked examples on student learning and error anticipation in algebra. *Instructional Science, 49*, 419–439. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09545-6

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2004). Algebraic Equations and Inequalities: Issues for Research and Teaching. Research Forum. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 137–166.

Bennett, V. M. (2015). *Understanding the meaning of the equal sign: an investigation of elementary students and teachers* (Doctoral dissertation). University of Louisville.

ThinkIR: The University of Louisville's Institutional Repository. https://doi.org/10.18297/etd/2303

Bicer, A., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2014). Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*, *1*(1), 1-10.

Blanco, L., & Carrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(3), 221-229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Boero, P., Bazzini, L., & Garuti, R. (2001, July). Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. In *Pme conference* (Vol. 2, pp. 2-185).

Booth, J. L., & Davenport, J. L. (2013). The role of problem representation and feature knowledge in algebraic equation-solving. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*, 415–423. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.003

Booth , J. L., Lange, K. E., Kenneth, R. K., & Newton, J. K. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction, 25*, 24-34. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.11.002

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *The Journal of Problem Solving*, *7*(1), 3. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161

Booth, J. L., Cooper, L. A., Donovan, M. A., Huyghe, A., Koedinger, K. R., & Paré-Blagoev, E. J. (2015) Design-Based Research Within the Constraints of Practice: AlgebraByExample, *Journal of Education for Students Placed at Risk (JESPAR), 20*(1-2), 79-100. http://dx.doi.org/10.1080/10824669.2014.986674

Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher, R. W. Pew, L. M. Hough, & J. R. Pomerantz (Eds.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (pp. 56-64). New York: Worth Publishers.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*: *Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Early Algebra: The big ideas and essential understandings. In M. Blanton, L. Levi, T. Crites, B. Dougherty, & R. M. Zbiek, *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades* 3-5 (pp. 7 -64). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 613–632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols? *Reading Psychology, 27*(2-3), 147–164. https://doi.ord/10.1080/02702710600642467

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Christou, K. P. (2012). Helping students remedy the phenomenal sign bias: The case of a refutational lecture. In *Proceedings of the 8th International Conference on Education* (pp. 643-648). Samos.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers." *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 1-12. http://dx.doi.org/10.1007%2Fs11858-015-0675-6

Christou, K. P. (2017) Students' interpretation of variables and the phenomenal sign of algebraic expressions. *MENON: Online Journal of Educational Research, 4*, 161-175.

Christou, K. P., Kyrvei, D. I., & Vamvakoussi, X. (in press). Natural Numbers Bias in understanding variables – the integrity and the phenomenal sign effect. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena, (Eds), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3). Khon Kaen, Thailand: PME.

Christou, K.P., & Vamvakoussi, X. (2021). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: the role of the type of numbers. *Math Ed Res J* (2021). https://doi.org/10.1007/s13394-021-00398-3

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 27, No. 27).

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2007, August). Students' interpretations of algebraic expressions in inequalities. *Paper presented at the 12th Biennial Conference for Research in Learning and Instruction*, Budapest, Hungary.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1–27. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625074

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 283-297). Elsevier Science.

Chow, T. C. F. (2011). *Students' difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning* (Doctoral dissertation). Curtin University.

Clark, R. (2014). *Exploring and describing the growth points of learners as they encounter functions in equation form* (Doctoral dissertation). University of the Witwatersrand, Faculty of Science, School of Science Education.

Curry, L. A. (2004). The effects of self-explanations of correct and incorrect solutions on algebra problem-solving performance. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 26, No. 26, p. 1546). Erlbaum, Chicago.

Δημητρακοπούλου, Σ. Α., & Χρήστου, Κ. Π. (2018). Τα γράμματα-μεταβλητές: Πώς τα κατανοούν οι μαθητές και πώς εμφανίζονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 11*, 31- 52.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice, 15*(4), 1137-1150. https://doi.org/10.12738/estp.2015.4.2743

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The efectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22,* 206–214. doi: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.11.001

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: revealing changing decimal fraction knowledge. Learning and Instruction, 37, 21- 29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Duru, A., & Koklu, O. (2011). Middle school students' reading comprehension of mathematical texts and algebraic equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(4), 447-468. https://doi.org/10.1080/0020739x.2010.550938

El-Khateeb, M.M.A. (2016). Errors analysis of solving linear inequalities among the preparatory year students at King Saud University. *Journal of Education and Practice, 7*(12), 2016.

English, L., & Halford, G. (2012). *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah(NJ): LEA. https://doi.org/10.4324/9780203052884

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236. https://doi.org/10.5951/TCM.6.4.0232

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*, 19-25.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* North American Chapter, Baton Rouge, LA (pp. 159–165).

Gallardo, A., & Romero, M. (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Mexico, Vol. I. (pp. 275–282).

Gough, J. (2007). Teaching square roots: Conceptual complexity in mathematics language. *Australian Senior Mathematics Journal, 21*(1), 53-57.

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction, 17,* 612-634. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations *Journal of Mathematical Behavior 26*(2), 115–139. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.005

Jacobson, K. G. (2000). Central Tensions: A Critical Framework for Examining High School Mathematics and Mathematics Education. Paper presented at *the Annual Meeting of the American Educational Research Association* (New Orleans, LA, April, 24-28, 2000).

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2011). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1982). *The Learning of Algebra: A Teaching Experiment*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. NY.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp.33-56). Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. In: J. Cai, & E. Knuth (eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 259–276). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312. https://doi.org/128.104.46.196

Kuchemann, D. E. (1981). Algebra (Chapter 8). In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp.102-119). Springer, John Murray.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α’ βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, Τεύχος 1. *Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σσ. 14-35.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθηματικών κατα το πέρασμα απο την αριθμητική στην άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ*, (45), 61-70.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, *30*(1), 39-65. https://doi.org/10.1007/BF00163752

Linchevski, L., & Vinner, S. (1990). Embedded figures and structures of algebraic expressions. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.),*Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 85–92). Oaxtepec, Mexico: PME.

McGinn, K. M. Lange, K. E., & Booth, J. L. (2015). A Worked Example for Creating Worked Examples. *Mathematics Teaching in the Middle School, 21*(1), 26 - 33. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.21.1.0026

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, 76,* 883-899. http://dx.doi.org/10.1111/j. 1467-8624.2005.00884.x

Metcalfe, J. (2017). Learning from errors. *Annual Review of Psychology, 68*, 465–489. doi: https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044022

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. http://dx.doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Norton, S. J., & Cooper, T. J. (2001, August). Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra. In *Proceedings of the international conference: New Ideas in Mathematics Education* (pp. 19-24).

Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. III. (pp. 108–111).

Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. (2011). http://ebooks.edu.gr/info/newps/Μαθηματικά/Μαθηματικά — Γυμνάσιο.pdf

Πρόγραμμα Σπουδών - Μαθηματικά (Τάξεις Α',Β',Γ'). (2015). Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. http://repository.edulll.gr/edulll/bitstream/10795/1798/2/1798_ΠΣ_ΓΕΛ_ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ_ΕΞ ΩΦΥΛΛΟ.pdf

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other. *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: a construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85-104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Resnick, L. B. (1991). Shared cognition: Thinking as social practice. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 1–20). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/10096-018

Resnick, L. B., Cauzinelle-Mameche, E., & Mathieu, J. (1987). L' lntegration de Nouvelles Connaissances: Entre Arithmetique et Algebre. *European Journal of Psychology of Education, 2*(1), 41 – 57.

Resnick, L. B., Cauzinille-Marmeche, E., & Mathieu, J. (2005). Η Κατανόηση της Άλγεβρας. Στο: Σ. Βοσνιάδου (2005). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών* (σσ.191 – 247). Τρίτη έκδοση. Αθήνα: Gutenberg.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Schechter, E. (2009). *The most common errors in undergraduate mathematics: Algebra Errors.* Retrieved from http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/commerrs/#Signs

Schwarz, B. B., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1994). Positives about negatives: A case study of an intermediate model for signed numbers. *The Journal of the Learning Sciences*, *3*(1), 37-92. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0301_2

Schwarz, B. B., Nathan, M. J., & Resnick, L. B. (1996). Acquisition of meaning for arithmetical structures with the Planner. In S. Vosniadou, E. De Corte, R. Glaser, & H. Mandl (Eds.), *International perspectives on the construction of technology-based learning environment*. (pp. 61–80). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (2008). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 467–519). New York: Routledge.

Siegler, R.S., & Chen, Z. (2008). Differentiation and integration: Guiding principles for analyzing cognitive change. *Developmental Science, 11*, 433-448. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00689.x

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1991). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 112–121. https://doi.org/10.2307/749588

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, *90*(2), 110-113. https://doi.org/10.5951/MT.90.2.0110

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513–524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. In *Proceedings of Second International Conference On The Teaching Of Mathematics–ICTM (at the Undergraduate Level)*.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(6), 793-812. https://doi.org/10.1080/00207390412331271357

Tsovaltzi, D., Melis, E., McLaren, B. M., Meyer, A. K., Dietrich, M., & Goguadze, G. (2010, September). Learning from erroneous examples: when and how do students benefit from them? In *European conference on technology enhanced learning* (pp. 357-373). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16020-2_24

Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education, 33,* 56–68. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.003

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations. *Mathematics Education Research Journal, 18*(1), 47–77. https://doi.org/10.1007/bf03217429

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Brief Report. Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educ Stud Math, 82,* 323–330. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9432-8

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction, 37*(1), 30-38. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

Verikios, P., & Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 515-530. https://doi.org/10.1080/00207390903564611

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 341–359. https://doi.org/10.1023/A:1020229023965

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and instruction, 14*(5), 469-484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Wang, M., Yang, Z.-K., Liu, S.-Y., Cheng, H. N. H., & Liu, Z. (2015). Using Feedback to Improve Learning: Differentiating between Correct and Erroneous Examples. In *2015 International Symposium on Educational Technology (ISET)* (pp. 99-103). IEEE. https://doi.org/10.1109/iset.2015.28

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School science and mathematics*, *112*(4), 255-264. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of pre-service primary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(1), 80-91. http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.jmathb.2010.11.004

Χρήστου, Κ. Π. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Διδακτορική Διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης.

Χρήστου, Κ. Π. (2015, Δεκέμβριος). Τρόποι επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε πράξεις, μέγεθος και διάταξη των ρητών αριθμών. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, & Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ελλήνων Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ)* (σσ. 688 – 697). Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Χρήστου, Κ. Π., & Βοσνιάδου, Σ. (2009). Η Παρερμηνεία του Φαινομενικού Πρόσημου των Αλγεβρικών Παραστάσεων – μια Διδακτική Παρέμβαση. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. ,Καφούση, Μ., Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ., Σκουμπορδή, & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές – Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου*

Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (σσ. 299 – 308). Ρόδος, Ελλάδα.

Zhao, H., & Acosta-Tello, E. (2016). The impact of erroneous examples on students' learning of equation solving. *Journal of Mathematics Education*, *9*(1), 57-68.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγια

Ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Ε1)

Σχολείο:……………………………… Τάξη:…………………. Τμήμα:……………….

Αρχικά Γράμματα Ονόματος:……..... Ημερομηνία Γέννησης:………… Φύλο: αγόρι ☐ κορίτσι ☐

<u>Διάβασε τις οδηγίες και απαντήστε προσεκτικά στις ερωτήσεις που ακολουθούν.</u>

Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν;

Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν και είναι…………………….», προσδιορίζοντας τον αριθμό ή τους αριθμούς αυτούς.

Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί………………………..», αιτιολογώντας την απάντησή σου.

- Να θυμάσαι πως οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού που γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά.
- Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.

<u>Εξισώσεις</u>

1.	$- 2y^2 = 2$	☐ Υπάρχουν και είναι………………………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………...……………
2.	$-y - 1 = y + 1$	☐ Υπάρχουν και είναι…………………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………
3.	$- \sqrt{x} = 2$	☐ Υπάρχουν και είναι…………………………………………………..……… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………
4.	$y^2 = 25$	☐ Υπάρχουν και είναι…………………………………………………..……… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………..………
5.	$\sqrt{(-x)^2} = 3$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………

6.	**$-x = 17$**	□ Υπάρχουν και είναι ……………………………………………………….. □Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………………..
7.	**$y^2 = -16$**	□Υπάρχουν και είναι…………………………………………………….. □Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………………..
8.	**$\sqrt{-5x} = 5$**	□ Υπάρχουν και είναι…………………………………………………… □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….…………………………
9.	**$x^2 + 1 = 5$**	□ Υπάρχουν και είναι………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….………………………….

Για κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν;

Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………», προσδιορίζοντας τουλάχιστον έναν αριθμό που να την επαληθεύει.

Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί…………………………….», αιτιολογώντας την απάντησή σου.

- Να θυμάσαι πως η λύση της ανίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά.
- Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.

Ανισώσεις

10.	**$x + 2 < - x - 2$**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………...……………..
11.	**$\sqrt{-y^2} > 2$**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………….
12.	**$-y > 7$**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………….

13.	$\mathbf{1 < -\frac{1}{x}}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………..…… □ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………….……………
14.	$\mathbf{-\sqrt{y} > 4}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………….
15.	$\mathbf{3x^2 < -3}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………….
16.	$\mathbf{\sqrt{-2x-1} > \frac{1}{2}}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………..…………………………………………
17.	$\mathbf{-2x-1 > 5}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….………………………………………..
18.	$\mathbf{\frac{4}{y+1} < -1}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….…………………………………………

Ευχαριστούμε πολύ!

Ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Ε2 και ΕΡ/Ε3)

Σχολείο:……………………………… Τάξη:…………………. Τμήμα:……………….

Αρχικά Γράμματα Ονόματος:……..... Ημερομηνία Γέννησης:………… Φύλο: αγόρι ☐ κορίτσι ☐

Διάβασε τις οδηγίες και απαντήστε προσεκτικά στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν;

Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν και είναι……………………», προσδιορίζοντας τον αριθμό ή τους αριθμούς αυτούς.

Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί………………………..», αιτιολογώντας την απάντησή σου.

- Να θυμάσαι πως οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού που γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά.
- Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.

Εξισώσεις

1.	$x^2 = -25$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………...…………
2.	$-3x^2 = 9$	☐ Υπάρχουν και είναι………………………………………………………………. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………………
3.	$-y = 13$	☐ Υπάρχουν και είναι………………………………………………….…………. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………………
4.	$\sqrt{(-x)^2} = 2$	☐ Υπάρχουν και είναι…………………………………………………...………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………….…………
5.	$x + 5 = -x - 5$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………….. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………………………….
6.	$\sqrt{-y} = 2$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………….. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………..………...

7.	$\mathbf{y^2 = 36}$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………... ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………..……………………………….……...
8.	$-\sqrt{y} = 4$	☐ Υπάρχουν και είναι……………………………………………………………... ☐ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….……………………………………...
9.	$\mathbf{y^2 + 2 = 11}$	☐ Υπάρχουν και είναι………………………………………………...……... ☐ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….…………………………..……...

Για κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις, μπορείς να βρεις αν υπάρχουν αριθμοί τέτοιοι που να την επαληθεύουν;

Αν ναι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………», προσδιορίζοντας τουλάχιστον έναν αριθμό που να την επαληθεύει.

Αν όχι, τότε επίλεξε με √ την απάντηση «Δεν υπάρχουν γιατί…………………………….», αιτιολογώντας την απάντησή σου.

- Να θυμάσαι πως η λύση της ανίσωσης μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή να είναι κάθε αριθμός που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά.
- Επίλεξε **μόνο τη μία** από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή.

Ανισώσεις

10.	$\sqrt{-x^2} > 3$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………………………………...……......
11.	$\mathbf{x < -x}$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………….. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………......
12.	$2 < -\frac{2}{2x}$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………….. ☐ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………......
13.	$-\sqrt{y} > 1$	☐ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………… ☐ Δεν υπάρχουν γιατί …………………………………………………….……......

14.	$\frac{1}{y+1} < -\frac{1}{2}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα………………………………………………………. □ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………….......
15.	**-y > 4**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα……………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί ………………………………………………………….
16.	$\sqrt{-x-1} > \frac{1}{3}$	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………………. □ Δεν υπάρχουν γιατί ……………………..………………………………………..
17.	**-y - 2 > 2**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα………………………………………………………….. □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….………………………………………..
18.	**- 5x² > 5**	□ Υπάρχουν, για παράδειγμα…………………………………………………………… □ Δεν υπάρχουν γιατί……………………….……………………………………………

Ευχαριστούμε πολύ!

Υλικά Διδακτικής Παρέμβασης

Ομάδα Παρέμβασης: Λανθασμένα Παραδείγματα

Λανθασμένο Παράδειγμα 1: Να λυθεί η ανίσωση x + 1 < -x – 1

- Ένας μαθητής είπε πως η ανίσωση είναι αδύνατη, επειδή η θετική ποσότητα « x + 1» δεν μπορεί ποτέ να είναι πιο μικρή από την αρνητική «-x -1».
- Η απάντηση που έδωσε ο μαθητής είναι λανθασμένη.
- Ωστόσο, το γράμμα x έχει θετική αξία και το -x αρνητική αξία μόνο όταν στη θέση του βάζουμε θετικούς αριθμούς. Αυτό δεν ισχύει όταν στη θέση του βάζουμε αρνητικούς αριθμούς.
- Για παράδειγμα, αν x = -5 τότε: x + 1 = -5 + 1 = - 4 και - x -1 = - (-5) -1 = 5 – 1 = 4. Προκύπτει -4 < 4, άρα η τιμή x = -5 είναι μία λύση που επαληθεύει την ανίσωση.

Λανθασμένο Παράδειγμα 2: Να λυθεί η ανίσωση: $2 < \frac{6}{-3y}$

- Μια μαθήτρια είπε πως η ανίσωση είναι αδύνατη, επειδή θεώρησε πως το $\frac{6}{-3y}$ μπορεί να είναι μόνο ένας αρνητικός αριθμός και άρα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το 2.
- Η απάντηση που έδωσε η μαθήτρια είναι λανθασμένη.
- Το λάθος της προέκυψε από το γεγονός ότι προσπάθησε να βρει λύσεις της ανίσωσης δοκιμάζοντας **μόνο** θετικές τιμές. Δηλαδή, θεώρησε πως το γράμμα y έχει μόνο θετική αξία και άρα η ποσότητα -3y θα είναι πάντα αρνητική.
- Ωστόσο, στη θέση του y μπορούμε να βάλουμε και αρνητικές τιμές. Για παράδειγμα, αν $y = -\frac{1}{3}$ η ανίσωση επαληθεύεται γιατί έχουμε:

  $-3 \cdot (-\frac{1}{3}) = 1$ και

  $\frac{6}{-3y} = \frac{6}{1} = 6$.

  Προκύπτει: 6 > 2 που ισχύει.

Λανθασμένο Παράδειγμα 3: Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{-4x}$ < 4

- Ένας μαθητής είπε πως η ανίσωση είναι αδύνατη γιατί θεώρησε πως το υπόρριζο -4*x* είναι αρνητικός αριθμός και άρα η ρίζα δεν ορίζεται, γιατί γνωρίζουμε ότι το υπόρριζο πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν, κι όχι αρνητικό.
- Η απάντηση που έδωσε ο μαθητής είναι λανθασμένη.
- Το λάθος του προέκυψε από το γεγονός ότι θεώρησε πως το γράμμα *x* μπορεί να πάρει **μόνο** θετικές τιμές ή μηδέν και άρα το πρόσημο της ποσότητας -4*x* είναι πάντα αρνητικό ή μηδέν.
- Για να επαληθεύσει τη σκέψη του έκανε δοκιμές για διάφορες θετικές τιμές, ως εξής:

για $x = 0$ τότε $-4x = -4 \cdot 0 = 0$

για $x = 1$ τότε $-4x = -4 \cdot 1 = -4 < 0$

για $x = 2$ τότε $-4 \cdot 2 = -8 < 0$

…

- Ωστόσο, το γράμμα *x* μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Για αρνητικές τιμές του *x*, η ποσότητα – 4*x* θα γινόταν θετική. Για παράδειγμα:

  αν $x = -1$ τότε $-4x = -4 \cdot (-1) = +4$ και

  $\sqrt{-4\chi} = \sqrt{4} = 2$.

  Προκύπτει: 2 < 4, οπότε η τιμή $x = -1$ επαληθεύει την ανίσωση.

Λανθασμένο Παράδειγμα 4: Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{6+6y}$ > -1

- Μια μαθήτρια απάντησε πως η ανίσωση επαληθεύεται για όλες τις τιμές του y γιατί θεώρησε πως η ποσότητα 6 + 6y είναι πάντα θετική και άρα πάντα μεγαλύτερη από τον αριθμό – 1 που είναι αρνητικός.
- Η απάντηση της μαθήτριας είναι λανθασμένη.
- Το λάθος της προκύπτει από το γεγονός ότι θεωρεί πως το γράμμα y έχει **μόνο** θετική αξία και συνεπώς πως το 6y είναι πάντα θετικό. Έτσι, έκρινε πως το υπόρριζο 6 + 6y είναι πάντα θετικό, ως άθροισμα θετικών.

- Ωστόσο το γράμμα y μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα:
  για $y = -\frac{1}{6}$ τότε $6 + 6y = 6 + 6 \cdot (-\frac{1}{6}) = 6 - 1 = 5$ και $\sqrt{5} > -1$.
- Όμως, για $y = -2$ τότε $6 + 6y = 6 + 6 \cdot (-2) = 6 - 12 = -6$ και $\sqrt{-6}$ δεν ορίζεται, συνεπώς η ανίσωση δεν έχει ρίζα.

Ομάδα Ελέγχου: Ορθά Λυμένα Παραδείγματα

Θα ήθελα την προσοχή σας για τις ιδιότητες των ανισοτήτων και συγκεκριμένα για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση των δυο μελών μιας ανίσωσης με συγκεκριμένο αριθμό.

- Θα πρέπει να θυμάστε πως αν και τα δυο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανισότητα με την ίδια φορά.

Για παράδειγμα: αν $3 < 5$ τότε $3 \cdot 2 < 5 \cdot 2$ και $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

- Αν, όμως και τα δυο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίστροφη φορά.

Για παράδειγμα: αν $3 < 5$ τότε $3 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$ γιατί $-6 > -10$ και $-\frac{3}{2} > -\frac{5}{2}$

Σκεφτείτε επίσης: Λύση μιας ανίσωσης με έναν άγνωστο λέγεται κάθε αριθμός που επαληθεύει την ανίσωση.

Για παράδειγμα, στην ανίσωση $2x - 1 > 5$:

το $x = 4$ είναι λύση γιατί $2 \cdot 4 - 1 > 5$ ή $8 - 1 > 5$ ή $7 > 5$ γιατί οδηγεί σε αληθές αποτέλεσμα. Αντίθετα, το $x = 2$ δεν είναι λύση γιατί $2 \cdot 2 - 1 > 5$ ή $4 - 1 > 5$ ή $3 > 5$ δεν την επαληθεύει.

Παράδειγμα 1: Να βρεθούν λύσεις της ανίσωσης: $x + 1 < - x - 1$

Θυμόμαστε πως στη θέση της μεταβλητής x μπορεί να μπει τόσο θετικός όσο και αρνητικός αριθμός.

Για παράδειγμα, για $x = -2$ έχουμε: $-2 + 1 < -(-2) - 1$ ή $-1 < +2 - 1$ ή $-1 < 1$ που ισχύει, άρα το -2 είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση.

Αλλά, για $x = 4$ έχουμε: $4 + 1 < -4 - 1$ ή $5 < -5$ που δεν ισχύει, άρα το 4 δεν είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση.

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί μια λύση για την ανίσωση: $2 < \frac{6}{-3y}$, y ≠ 0

Η τιμή y = 2, δεν είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση, γιατί για y = 2: έχουμε $\frac{6}{-3 \cdot 2} = \frac{6}{-6} =$ -1, αποτέλεσμα που δεν είναι μεγαλύτερο του 2.

Αντίθετα, η τιμή y = $-\frac{1}{3}$ είναι μια λύση της ανίσωσης γιατί:

με y = $-\frac{1}{3}$ έχουμε -3 · ($-\frac{1}{3}$) = 1 και $\frac{6}{-3y} = \frac{6}{1}$ = 6. Πράγματι 6 > 2.

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί μια λύση για την ανίσωση: $\sqrt{-4x} < 4$

Το x = 0 είναι λύση, καθώς 4 · 0 = 0 και $\sqrt{0}$ < 4 ή 0 < 4 που ισχύει.

Παρόμοια, το x = -1 είναι κι εκείνο λύση, καθώς -4 · (-1) = 4 και $\sqrt{4}$ < 4 ή 2 < 4 που ισχύει.

Αντίθετα, το x = 1 δεν μπορεί να είναι λύση, καθώς -4 · 1 = -4 και γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση των τετραγωνικών ριζών, το υπόρριζο δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός, αλλά μόνο θετικός ή μηδέν.