

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Α' ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ  
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΗΣ Δ' ΤΑΞΗΣ»**

**Αποστολίδου Μαρία**

**ΑΕΜ: 1001**

**Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα**

**Θεσσαλονίκη, 2022**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Ευχαριστίες.....</b>	<b>4</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....</b>	<b>5</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>6</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>7</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ .....</b>	<b>11</b>
1.Α. Τα σχολικά εγχειρίδια .....	11
1.Α.1. Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων .....	11
1.Α.2. Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών .....	14
1.Α.3. Τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου.....	17
1.Β. Η επίλυση προβλήματος.....	21
1.Β.1. Αποσαφήνιση σημαντικών όρων: πρόβλημα, λεκτικό πρόβλημα, επίλυση προβλήματος.....	21
1.Β.2. Τα είδη μαθηματικών προβλημάτων .....	22
1.Β.3. Η σημασία της επίλυσης προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών...	26
1.Β.4. Μοντέλα των σταδίων επίλυσης προβλημάτων.....	29
1.Γ. Η επίλυση προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών.....	31
1.Γ.1. Έρευνες που αφορούν στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών μίας χώρας .....	32
1.Γ.2. Έρευνες που αφορούν στη συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών ανάμεσα σε δύο ή τρεις χώρες .....	35
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ .....</b>	<b>40</b>
2.Α. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα.....	40
2.Β. Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου - Αντικείμενο μελέτης .....	40
2.Β.1. Ανάλυση περιεχομένου - Τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης των Μαθηματικών ...	42
2.Β.2. Τα λεκτικά προβλήματα στα εγχειρίδια της Δ΄ Δημοτικού που μελετήθηκαν.....	46
2.Β.3. Κριτήρια ανάλυσης και διαδικασία .....	52
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>57</b>
3.Α. Αποτελέσματα ανάλυσης σύμφωνα με το μοντέλο ανάλυσης.....	57

3.A.1. Τυποποιημένα – μη τυποποιημένα προβλήματα .....	58
3.A.2. Παραδοσιακά – Μη παραδοσιακά.....	59
3.A.3. Αριθμός απαντήσεων.....	61
3.A.4. Τύπος της απάντησης .....	63
3.A.5. Σύνδεση του σεναρίου με τον πραγματικό κόσμο.....	64
3.A.6. Πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα.....	66
3.A.7. Αριθμός των απαιτούμενων πράξεων.....	67
3.A.8. Μέσα αναπαράστασης.....	68
3.B Συσχέτιση μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών των προβλημάτων .....	70
3.B.1. Μη τυποποιημένα προβλήματα .....	70
3.B.2. Τυποποιημένα προβλήματα .....	72
3.B.3. Μη παραδοσιακά προβλήματα .....	74
3.B.4. Παραδοσιακά προβλήματα .....	76
3.Γ. Σύνδεση των μαθηματικών προβλημάτων με την καθημερινή ζωή .....	78
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....</b>	<b>87</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>93</b>
5.A. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία .....	93
5. B. Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία .....	98

## Ευχαριστίες

*Η ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την αμέριστη στήριξη και βοήθεια της επιβλέπουσας καθηγήτριάς μου, κυρίας Δεσλή Δέσποινας, η οποία υπήρξε αρωγός μου στην προσπάθεια αυτή. Την ευχαριστώ θερμά για τη συνεργασία που είχαμε, την επιστημονική της στήριξη καθ'όλη τη διάρκεια της εργασίας, τις συμβουλές της και την υπομονή της. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω την κυρία Τζεκάκη Μαριάννα και την κυρία Σταθοπούλου Χαρούλα, ως μέλη της τριμελούς επιτροπής, αλλά και όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες αυτού του μεταπτυχιακού προγράμματος.*

*Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους, που με στήριξαν πολύ και με ενθάρρυναν, ώστε να πετύχω στην προσπάθειά μου αυτή.*

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στο προβλεπόμενο και στο εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών. Είναι το κύριο διδακτικό εργαλείο του εκπαιδευτικού, αλλά και των μαθητών και διαδραματίζουν πρωταγωνιστικό ρόλο στο ελληνικό σχολείο, αφού αποτελούν το ένα και μοναδικό εγχειρίδιο που διανέμεται στα σχολεία. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός, να μελετηθούν τα είδη των λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου και η συχνότητα εμφάνισής τους και αφετέρου, να μελετηθεί η σύνδεσή τους με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης είναι τυποποιημένα, παραδοσιακά προβλήματα, κλειστού τύπου, που στην πλειονότητά τους δεν ζητούν κάποια αιτιολόγηση ή επεξήγηση. Επίσης, τα περισσότερα από τα λεκτικά προβλήματα είναι επαρκών δεδομένων και απαιτούν περισσότερες από μία πράξεις για την επίλυσή τους. Τα αναπαραστατικά μέσα που χρησιμοποιούνται είναι κυρίως συνδυασμός οπτικών, λεκτικών και μαθηματικών μέσων και τα θέματα που πλαισιώνουν τα περισσότερα προβλήματα συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο. Ωστόσο, η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο δεν συνεπάγεται ότι τα προβλήματα θα αποσπούν και το ενδιαφέρον των μαθητών.

**Λέξεις κλειδιά:** Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, ανάλυση εγχειριδίων, επίλυση προβλήματος, λεκτικά μαθηματικά προβλήματα

## **ABSTRACT**

School textbooks are the link between the planned and the applied curriculum. They are the main teaching tool of the teacher, but also of the students and they contribute a leading role in the Greek school, since they constitute the one and only textbook that is distributed in schools. The purpose of this thesis is, on the one hand, to study the types of word problems contained in the textbooks of the fourth grade of primary school and the frequency of their occurrence and, on the other hand, to study their connection with the real world and the daily life of students. The results of the survey showed that the majority of word problems in the school textbooks of the fourth grade are routine, traditional problems, close-ended, the majority of which do not ask for any justification or explanation. Also, most of the word problems are of sufficient data and require more than one operation to solve them. The representation form of the problems is mainly a combination of visual, verbal and mathematical form and the context of the most of the problems is related to the real world. However, the connection with the real world does not imply that word problems will be of interest to the students.

**Key words:** Math school textbooks, textbook analysis, problem solving, word problems

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε παγκόσμια κλίμακα, μέσα στη σχολική τάξη τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν ίσως το σημαντικότερο μέσο διδασκαλίας και εργαλείο για τους/τις εκπαιδευτικούς και τους/τις μαθητές/τριες<sup>1</sup>. Η συμβολή και η αποτελεσματικότητά τους στην εκπαιδευτική διαδικασία έχει απασχολήσει μεγάλο μέρος της επιστημονικής εκπαιδευτικής κοινότητας (Desli & Loukidou, 2014; Fan & Zhu, 2006; Haggarty & Peppin, 2001, 2002; Parmjit et al., 2020; Rezat & Strässer, 2015; Shield & Dole, 2013; Stigler et al., 1986; Xin, 2007; Xin, Zheng & Liu, 2011). Σύμφωνα με τους Mullis, Martin, Foy και Arora (2012), τα δεδομένα για τις 57 χώρες που συμμετείχαν στο TIMMS του 2011 δηλώνουν ότι, κατά μέσο όρο, το 96% των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί ένα σχολικό βιβλίο και στην πλειοψηφία των εκπαιδευτικών τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν την κύρια βάση για την εκπαιδευτική τους πρακτική.

Ο τρόπος με τον οποίο ένας εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα σχολικό εγχειρίδιο δύναται να ποικίλει πολύ, αλλά δεν υπάρχει αμφιβολία ότι τα σχολικά βιβλία είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών (Desli & Loukidou, 2014; Haggarty & Peppin, 2002; Rezat & Strässer, 2015; Shield & Dole, 2013; Van de Walle, 2007). Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν μια ισχυρή προδιαγραφή του προγράμματος σπουδών και παίζουν καθοριστικό ρόλο σε αυτό που διδάσκεται στη σχολική τάξη (Oates, 2014; Rezat & Strässer, 2015; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Έτσι, οι ευκαιρίες για μάθηση δημιουργούνται από το σχολικό βιβλίο σε συνδυασμό με τον τρόπο χρήσης του από μαθητές και εκπαιδευτικούς (Rezat & Strässer, 2015; Shield & Dole, 2013).

Καθώς τα σχολικά βιβλία αποτελούν το υλικό που χρησιμοποιείται περισσότερο από την πλειονότητα των εκπαιδευτικών, αυτά αποτελούν και ένα από τα κύρια μέσα διδασκαλίας της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Hiebert et al., 2003). Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατέχει εξέχουσα θέση στη μαθηματική εκπαίδευση. Για τον Halmos (1980), η επίλυση μαθηματικού προβλήματος αποτελεί την καρδιά των μαθηματικών, αφού ο κύριος λόγος ύπαρξης των μαθηματικών είναι η επίλυση

---

<sup>1</sup> Στη συνέχεια της εργασίας, θα γίνεται χρήση μόνο του αρσενικού γένους σε όρους όπως «μαθητές» και «εκπαιδευτικούς» και θα νοούνται και τα δύο γένη.

προβλημάτων και ως εκ τούτου, αυτό από το οποίο αποτελούνται ουσιαστικά τα μαθηματικά είναι τα μαθηματικά προβλήματα και οι λύσεις τους.

Επίλυση προβλήματος σημαίνει η εύρεση ενός τρόπου για την αποφυγή μίας δυσκολίας, την παράκαμψη ενός εμποδίου και την επίτευξη ενός στόχου που δεν ήταν αρχικά εφικτός (Polya, 2001). Σύμφωνα με το NCTM (2000, στο van de Walle, 2007), η επίλυση προβλήματος δεν αποτελεί απλώς έναν μαθησιακό στόχο των μαθηματικών, αλλά ένα σημαντικό μέσο για την εκμάθησή τους. Όπως αναφέρει ο Schoenfeld (2016), η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων δεν αποτελεί μία σημαντική διανοητική εργασία απλώς επειδή οι λύτες βελτιώνουν την ικανότητά τους να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα, αλλά συνιστά από μόνη της μια σημαντική δεξιότητα του ατόμου. Υποστηρίζεται πως μέσω της επίλυσης προβλήματος δημιουργείται μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, που προάγει ικανότητες όπως η συλλογιστική και η διαδικαστική ευχέρεια (Hiebert & Grouws, 2007; Lithner, 2008).

Ωστόσο, οι μαθητές όλων των βαθμίδων φαίνεται να αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ενδεχομένως, ο γενεσιουργός παράγοντας αυτής της δυσκολίας να είναι ο τρόπος που τα μαθηματικά προβλήματα και η επίλυση μαθηματικού προβλήματος παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια (Desli & Loukidou, 2014; Singh, Yusoff & Hoon, 2020) και διδάσκονται από τους εκπαιδευτικούς.

Τα ευρήματα πολλών ερευνών ενισχύουν τον παραπάνω ισχυρισμό. Στην Ισπανία οι Vicente et al. (2020) σύγκριναν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ισπανίας με αυτά της Σιγκαπούρης. Διαπίστωσαν πως οι υψηλές επιδόσεις των μαθητών της Σιγκαπούρης στις διεθνείς εξετάσεις μαθηματικών (TIMSS) οφείλονται στα σχολικά τους εγχειρίδια, τα οποία παρέχουν μία υψηλής ποιότητας εκμάθηση της επίλυσης προβλήματος.

Ομοίως, η Xin (2007) αφού ανέλυσε τα σχολικά εγχειρίδια της Κίνας και των Η.Π.Α. και μελέτησε τις επιδόσεις των μαθητών στους διάφορους τύπους προβλημάτων, συμπέρανε πως η κατανομή των διαφορετικών λεκτικών προβλημάτων στο πρόγραμμα σπουδών καθορίζει τις επιδόσεις των μαθητών σε αυτά.



Επίσης, οι Desli και Loukidou (2014) στην Ελλάδα και οι Singh et al. (2020) στη Μαλαισία, ανέλυσαν τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου αναφορικά με τους έντεκα τύπους προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα ευρήματά τους συμφωνούν πως οι επιδόσεις των μαθητών στους διαφορετικούς αυτούς τύπους προβλημάτων καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από τη συχνότητα εμφάνισης των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια. Έτσι, στα προβλήματα που υποεκπροσωπούνται οι μαθητές σημείωσαν χαμηλές επιδόσεις, ενώ σε αυτά που υπερεκπροσωπούνται οι επιδόσεις τους ήταν πιο υψηλές.

Δεδομένου ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην επίλυση προβλήματος και καθώς τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται κατά κόρον διεθνώς και στην εκπαίδευση για τη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι πιθανόν οι δυσκολίες των παιδιών να συνδέονται με τον τρόπο που παρουσιάζονται στα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια. Έτσι, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετηθούν τα μαθηματικά προβλήματα που εμπεριέχονται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου. Η ανάλυση θα γίνει με στόχο να διερευνηθούν οι ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται στους μαθητές της Δ' τάξης γύρω από την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία επιχειρεί η παρούσα εργασία να απαντήσει είναι τα εξής:

- Ποια είδη προβλημάτων εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια;
- Ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης των προβλημάτων στο βιβλίο και στο τετράδιο εργασιών του μαθητή;
- Πώς συνδέονται τα μαθηματικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων με την καθημερινή ζωή;

Αναφορικά με τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, σύμφωνα με τους Βαμβακούση, Καργιωτάκη, Μπομποτίνου και Σαΐτη (2007a, σ. 13), τα ισχύοντα «βιβλία δεν περιορίζονται στα τυπικά λεκτικά προβλήματα, η παρουσία των οποίων ήταν κυρίαρχη στις "παραδοσιακές" διδακτικές προσεγγίσεις των μαθηματικών». Επίσης, μέσα από τα προβλήματα που συναντούν τα παιδιά στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών καλούνται να διατυπώσουν ενδιάμεσα ερωτήματα και «να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα, είτε με δεδομένους αριθμούς είτε με δεδομένη απάντηση είτε

συμπληρώνοντας ερωτήματα σ' ένα κείμενο». Συνεπώς, τα περισσότερα λεκτικά προβλήματα που θα αναλυθούν αναμένεται πως θα είναι μη τυποποιημένα και μη παραδοσιακά. Ακόμη, οι μαθητές στα ισχύοντα εγχειρίδια καλούνται «ν' αποκωδικοποιήσουν, ν' αξιολογήσουν και ν' αξιοποιήσουν πληροφορίες που δίνονται από διαφορετικές πηγές (εικόνα, κείμενο, πίνακα, διάγραμμα)» και «να επεξεργάζονται προβλήματα με περισσότερες από μία λύσεις» (Βαμβακούση κ.ά., 2007a, σ. 13). Αυτό συνεπάγεται πως τα εγχειρίδια αναμένεται να εμπεριέχουν πληθώρα ανοιχτού τύπου προβλημάτων και τα αναπαραστατικά μέσα στα λεκτικά προβλήματα να είναι κυρίως συνδυασμός οπτικών, μαθηματικών και λεκτικών μέσων.

Όσον αφορά τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινότητα των μαθητών, σύμφωνα με τους Βαμβακούση κ.ά. (2007a, σ. 10) «οι προβληματικές καταστάσεις που καλούνται ν' αντιμετωπίσουν τα παιδιά είναι συνδεδεμένες με πραγματικά προβλήματα, τα οποία στην πλειοψηφία τους είναι μέσα στα ενδιαφέροντα των παιδιών ή του οικογενειακού και σχολικού περιβάλλοντός τους» και από αυτήν την άποψη, «τα παιδιά εμπλέκονται σε δραστηριότητες που έχουν νόημα γι' αυτά». Συνεπώς, αναμένεται πως η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο πραγματοποιείται μέσω των σεναρίων των λεκτικών προβλημάτων, τα οποία πλαισιώνονται από θέματα που αφορούν άμεσα τους μαθητές και έλκουν το ενδιαφέρον τους.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο χωρίζεται σε τρία μέρη, επιχειρείται η βιβλιογραφική επισκόπηση ερευνών που σχετίζονται με: α) τα σχολικά εγχειρίδια και, πιο συγκεκριμένα, τα εγχειρίδια των μαθηματικών, β) την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και τα μαθηματικά προβλήματα και γ) την ανάλυση των μαθηματικών σχολικών εγχειριδίων διεθνώς και των μαθηματικών προβλημάτων που εμπεριέχουν. Το πρώτο μέρος αναφέρεται στον ρόλο και τη λειτουργία των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών. Έπειτα, περιγράφονται τα εγχειρίδια των μαθηματικών και τα Ελληνικά Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου, με ειδική αναφορά στην επίλυση προβλήματος. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται αναφορά στην επίλυση προβλήματος και τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Τέλος, στο τρίτο και τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου, παρουσιάζονται μερικά από τα κυριότερα ευρήματα των ερευνητών που έχουν μελετήσει σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια και ανέλυσαν τα μαθηματικά προβλήματα που περιέχουν.

### 1.A. Τα σχολικά εγχειρίδια

#### 1.A.1. Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων

Τα σχολικά εγχειρίδια είναι ισχυρά μέσα διδασκαλίας και μάθησης. Αποτελούν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο των εκπαιδευτικών και των μαθητών καθώς και ένα σπουδαίο στοιχείο των εκπαιδευτικών συστημάτων για πολλούς λόγους.

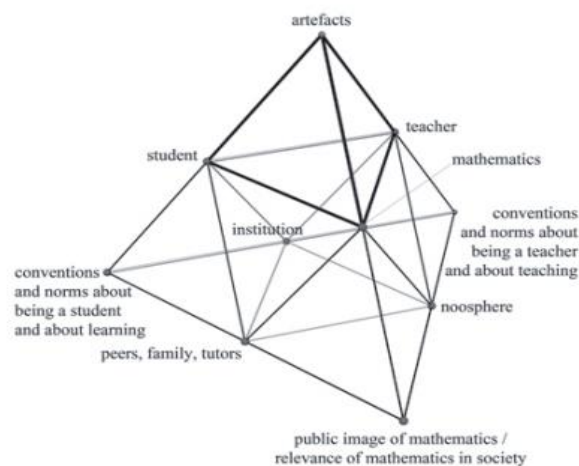
Πρώτον, αντιπροσωπεύουν μια τόσο ισχυρή προδιαγραφή του προγράμματος σπουδών που στην πραγματικότητα καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τι πραγματικά διδάσκεται στην τάξη (Oates, 2014; Rezat & Sträßer, 2015; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Υπό αυτήν την έννοια, τα εγχειρίδια παίζουν καθοριστικό

ρόλο σε αυτά που μαθαίνουν οι μαθητές, ρυθμίζουν συχνά το πρόγραμμα σπουδών και τα αντικείμενα που διδάσκονται στα περισσότερα μαθήματα, ενώ για πολλούς μαθητές τα σχολικά βιβλία είναι η πρώτη και μερικές φορές η μοναδική τους έκθεση στην ανάγνωση και τα βιβλία (Apple, 1992). Ομοίως, ο Apple (1986, στο Perin, Haggarty & Keynes, 2001) υποστηρίζει ότι το πρόγραμμα σπουδών στα περισσότερα αμερικανικά σχολεία δεν καθορίζεται από τα προτεινόμενα προγράμματα σπουδών, αλλά από ένα συγκεκριμένο τεχνούργημα, το τυποποιημένο κείμενο στο επίπεδο της κάθε τάξης. Ακόμη, υποστηρίζει ότι το εγχειρίδιο έχει τέτοια δύναμη που συχνά καθορίζει τι είναι η ελίτ και η νόμιμη κουλτούρα που πρέπει να μεταδοθεί και, επιπλέον, ότι η ευρεία χρήση του στις αίθουσες διδασκαλίας έχει τη δυνατότητα να ασκήσει ισχυρή επιρροή στους μαθητές (Apple, 1986, στο Haggarty & Perin, 2002). Ισχυρίζεται, έτσι, ότι «τα κείμενα δεν αποτελούν απλά "συστήματα παράδοσης" "γεγονότων" αλλά είναι τα ταυτόχρονα αποτελέσματα πολιτικών, οικονομικών και πολιτιστικών δραστηριοτήτων, μαχών και συμβιβασμών» (Apple, 1992, σ. 4).

Δεύτερον, τα σχολικά βιβλία είναι ένας εκπαιδευτικός πόρος που χρησιμοποιείται ευρέως και πολύ συχνά από τους εκπαιδευτικούς στις περισσότερες χώρες σε όλο τον κόσμο. Για παράδειγμα, τα στοιχεία για τις 57 χώρες που συμμετείχαν στο TIMSS1 του 2011 δείχνουν ότι, κατά μέσο όρο, το 96% των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί ένα εγχειρίδιο και, στην πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, τα εγχειρίδια αποτελούν την κύρια βάση για την εκπαιδευτική τους πρακτική (Mullis et al., 2012). Σύμφωνα με τους Chien και Young (2007), οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνά τους υποστήριξαν πως τα εγχειρίδια αποτελούν ένα σημαντικότατο στοιχείο στην ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών και της διδακτικής πρακτικής τους. Μάλιστα, όπως οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν, τα εγχειρίδια τους βοήθησαν να εξοικονομήσουν χρόνο για την προετοιμασία του μαθήματος, μιας και περιέχουν έτοιμο υλικό, όπως φυλλάδια και εργασίες, το οποίο είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον και κάνει τη μάθηση πιο διασκεδαστική και ελκυστική για τους μαθητές. Επιπλέον, σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς, τα σχολικά εγχειρίδια τους βοηθούν ώστε να μπορούν προσαρμόσουν το μάθημα στις δυνατότητες και τις ανάγκες του κάθε μαθητή. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν τα εγχειρίδια έγκυρα, ακριβή και απαραίτητα και έτσι, βασίζονται πολύ σε αυτά για να οργανώσουν και να διαρθρώσουν τη διδακτική διαδικασία (Apple, 1992).

Εκτός όμως από την ευρεία χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς, τα σχολικά συγγράμματα αποτελούν σημαντικό τμήμα του πλαισίου στο οποίο εργάζονται και οι μαθητές. Οι μαθητές περνούν μεγάλο μέρος του χρόνου τους στις τάξεις και στο σπίτι δουλεύοντας με προετοιμασμένο υλικό, όπως είναι τα σχολικά βιβλία. Όπως αναφέρει ο Apple (1986, στο Pepin et al., 2001), υπολογίζεται ότι το 75% του χρόνου που οι μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στις τάξεις και το 90% του χρόνου τους για την εργασία στο σπίτι αφιερώνεται σε κείμενα βιβλίων.

Το σχολικό βιβλίο, βεβαίως, δεν καθορίζει από μόνο του αυτά που θα μάθουν οι μαθητές. Η νέα γνώση που θα λάβουν οι μαθητές από τα εγχειρίδια και η πρακτικότητα της διαμεσολαβούνται από το σχολικό πλαίσιο (δάσκαλος, συμμαθητές, διδασκαλία, εργασίες), καθιστώντας, έτσι, το βιβλίο μια πηγή πιθανής μάθησης (Mesa, 2004). Αυτός ο συνδυασμός των παραγόντων του σχολικού πλαισίου αποτυπώνεται στο μοντέλο της διδασκαλίας των μαθηματικών από τους Rezat και Sträber (2015). Ειδικότερα, όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν, τα εγχειρίδια είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών και το βιβλίο κατέχει εξέχουσα θέση στην κορυφή ενός κοινωνικο-διδακτικού τετραέδρου, συνδιαμορφώνοντας τις διδακτικές καταστάσεις μαζί με τον εκπαιδευτικό, τους μαθητές και τα ίδια τα μαθηματικά.



**Εικόνα 1.1: Το κοινωνικο-διδακτικό τετράεδρο (Πηγή: Rezat & Sträber, 2015, σ. 249)**

Ωστόσο, τα σχολικά εγχειρίδια έχουν διχάσει τους εκπαιδευτικούς, μιας και υπάρχουν αρκετοί οι οποίοι τάσσονται κατά των συγγραμμάτων που διανέμονται στα

σχολεία. Για παράδειγμα, οι Loewenberg Ball και Cohen (1996, στο Chien & Young, 2007) βρήκαν πως οι εκπαιδευτικοί συχνά δυσφημούν τα εγχειρίδια και τα αποκηρύσσουν, λέγοντας περιφρονητικά ότι δεν τα χρησιμοποιούν. Αυτή η εξιδανίκευση της επαγγελματικής τους αυτονομίας οδηγεί στην άποψη ότι οι καλοί εκπαιδευτικοί δεν ακολουθούν τα εγχειρίδια, αλλά αντίθετα επινοούν το δικό τους πρόγραμμα σπουδών και οι υποστηρικτές αυτής της άποψης επαινούν τους εκπαιδευτικούς που δημιουργούν πρωτότυπο υλικό και μαθήματα. Επιπλέον, ο Mc Neil (1988, στο Chien & Young, 2007) αποκάλυψε ότι, όταν οι εκπαιδευτικοί βιώνουν έλλειψη του αυτοελέγχου στην εργασία τους, συνήθως λειτουργούν κατά τη διδασκαλία τους εφαρμόζοντας έναν απλό μηχανισμό αντιγραφής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγούνται σε μία υπεραπλουστευμένη διδασκαλία και στην απλή εφαρμογή των οδηγιών του εγχειριδίου.

Ο Apple (1982, στο Chien & Young, 2007) εξέτασε περαιτέρω τον τρόπο με τον οποίο η χρήση βιβλίων στα σχολεία ελέγχει και αυτοματοποιεί τους εκπαιδευτικούς. Συμπέρανε ότι τα βιβλία εμποδίζουν τις ικανότητες των εκπαιδευτικών να επινοούν εκπαιδευτικό υλικό για το πρόγραμμα σπουδών, το οποίο θα είναι κατάλληλα διαμορφωμένο και σύμφωνο με το σχολικό πλαίσιο και τις ανάγκες της κάθε τάξης. Παρόμοια, οι Apple και Jungck (1990, στο Chien & Young, 2007), υποστηρίζουν πως το υλικό του προγράμματος σπουδών θεωρείται ότι περιορίζει και ελέγχει τη γνώση και τη διδασκαλία, κάτι που έχει ως απόρροια τον περιορισμό της απόδοσης των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία (Eliot, 1990, στο Chien & Young, 2007). Συνεπώς, μπορεί να υποστηριχθεί ότι, με τον καθορισμό των στόχων και των σκοπών της εργασίας τους, οι εκπαιδευτικοί κινδυνεύουν να χάσουν την αίσθηση του αυτοελέγχου και της αυτονομίας τους στην εργασία (Chien & Young, 2007).

### **1.A.2. Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών**

Τα σχολικά εγχειρίδια, λόγω της μεγάλης σημασίας τους στο εκπαιδευτικό σύστημα πολλών χωρών, έχουν αποσπάσει αρκετά το ενδιαφέρον της διεθνούς επιστημονικής εκπαιδευτικής κοινότητας τις τελευταίες δεκαετίες. Στη μαθηματική εκπαίδευση ειδικότερα, ένδειξη αυτού του ενδιαφέροντος αποτελεί το γεγονός ότι στην τρίτη Διεθνή Μαθηματική και Επιστημονική Έρευνα (TIMSS) συμπεριλήφθηκαν οι αναλύσεις εκατοντάδων σχολικών βιβλίων και άλλων υλικών, σχετικών με το πρόγραμμα σπουδών, από περίπου 50 χώρες (Fan

& Zhu, 2007). Επιπρόσθετα, το 2004, το 10ο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICME-10) διοργάνωσε μία ομάδα συζήτησης με ιδιαίτερη έμφαση στα εγχειρίδια (Fan & Zhu, 2007). Αυτή ήταν η πρώτη φορά στην ιστορία του ICME που τα εγχειρίδια υπήρξαν το επίκεντρο της συζήτησης μίας ολόκληρης επιστημονικής ομάδας, κάτι το οποίο προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών συμμετεχόντων.

Στη Δύση, σύμφωνα με τον Heath (1956, στο Usiskin, 2013), η παράδοση του μαθηματικού εγχειριδίου ξεκίνησε πριν από περίπου 2.300 χρόνια με τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι μια συλλογή ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών, τα οποία μέχρι πρόσφατα καθόριζαν την εμπειρία εκείνων που μελέτησαν τη γεωμετρία (Usiskin, 2013). Ομοίως, όσον αφορά τη μελέτη της άλγεβρας, ένα σημαντικό κείμενο ήταν το *Vollständige Anleitung zur Algebra* του Leonard Euler, γραμμένο γύρω στο 1765 (Usiskin, 2013). Ο γερμανικός τίτλος μεταφράζεται κυριολεκτικά ως *Πλήρης οδηγία για την Άλγεβρα*, αλλά μεταφράστηκε από τον Hewlett το 1822, σύμφωνα με τη γαλλική μετάφραση του Jean Bernoulli, ως *Στοιχεία της Άλγεβρας* (Euler, 1985, στο Usiskin, 2013). Η σημασία αυτού του εγχειριδίου έγκειται στην επιρροή που είχε στη γραπτή γλώσσα της άλγεβρας, καθώς ο Euler εισήγαγε και διέδωσε μεγάλο μέρος της γλώσσας που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα μέχρι και σήμερα (Usiskin, 2013).

Τη σύγχρονη εποχή, τα βιβλία των μαθηματικών είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μελετηθούν, τόσο αναφορικά με το περιεχόμενο και τη χρήση τους όσο και με τις επιπτώσεις που έχουν στη σχολική τάξη. Όπως οι Rezat και Sträßer (2015) υποστηρίζουν, τα μαθηματικά είναι μια μη-υλική επιστήμη και για κάποιον που θέλει να τα κατακτήσει, είναι αναγκαία κάποια συμβολική, κειμενική ή γραφική αναπαράστασή τους. Έτσι, και στην τάξη των μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές χρειάζονται μια αναπαράσταση του αντικειμένου το οποίο πρέπει να διδαχθεί και αυτό είναι που πραγματικά κάνουν τα εγχειρίδια. Προσφέρουν μια σκόπιμη διάταξη των αναπαραστάσεων των μαθηματικών, περικλείοντας σχεδόν όλα τα θέματα που σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση. Αποτελούν, έτσι, κομβικό σημείο της μαθηματικής εκπαίδευσης, διότι προσφέρουν μια πιστή και ακριβή εικόνα των μαθηματικών στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές (Rezat & Sträßer, 2015).

Ο εξέχοντας ρόλος των μαθηματικών εγχειριδίων είναι ότι αποτελούν ένα μοναδικό όχημα προς τη μαθηματική γνώση, αφού συχνά αποτελούν το κύριο υλικό του προγράμματος σπουδών και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το περιεχόμενο των μαθημάτων (Mullis et al., 2012; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζονται και παραδίδονται τα μαθήματα μαθηματικών, καθώς παρέχουν ένα κατάλληλα διαμορφωμένο πεδίο εφαρμογής της ύλης και μια ακολουθία, σύμφωνα με την οποία μπορεί να προγραμματιστεί η διδασκαλία και η οποία μπορεί να δώσει στον μαθητή μια εικόνα του τι αναμένεται να μάθει (Rezat & Sträßer, 2015; Uniskin, 2013). Αν και η διδασκαλία που χορηγούν οι εκπαιδευτικοί δεν ευθυγραμμίζεται πάντα με το εγχειρίδιο που χρησιμοποιούν, το βιβλίο είναι για πολλούς εκπαιδευτικούς η καθοριστική πηγή για να πραγματοποιήσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2014; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018; Mullis et al., 2012).

Σύμφωνα με τη Mesa (2004), το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών αποτελεί μια έκφραση του προβλεπόμενου προγράμματος σπουδών, καθώς σε αυτό υπηρετούνται οι θεσμοθετημένοι στόχοι για τη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίοι τίθενται σε εθνικό επίπεδο. Ωστόσο, το προβλεπόμενο πρόγραμμα σπουδών και αυτό που εμφανίζεται σε μια σειρά εγχειριδίων δεν συμφωνούν πάντα. Τα εγχειρίδια δεν επηρεάζονται μόνο από τους εκπαιδευτικούς στόχους που τίθενται, αλλά και από άλλους παράγοντες. Τέτοιοι παράγοντες μπορεί να αφορούν εμπορικά ζητήματα, την επαρκή κατάρτιση των εκπαιδευτικών και την ύπαρξη διαφορετικών ιδεών σχετικά με το ποια φύση των μαθηματικών πρέπει να τονιστεί και ποιες εκπαιδευτικές προσεγγίσεις πρέπει να εφαρμοστούν (Tarr, Chavez, Reys & Reys, 2006). Για τον λόγο αυτό, συχνά υπάρχει χάσμα μεταξύ του τι προορίζεται στα σχολικά εγχειρίδια και του τι συμβαίνει πραγματικά στις αίθουσες διδασκαλίας, αφού η φύση των μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να αλλάξει, καθώς αλλάζει ο τρόπος χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς (Zhu & Fun, 2006). Ως εκ τούτου, τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να θεωρηθούν ως το «δυνητικά εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών» μεταξύ του «προβλεπόμενου» και του «εφαρμοσμένου» προγράμματος σπουδών. Το πρώτο αφορά στους θεσμοθετημένους στόχους της εκπαίδευσης από την εκάστοτε κυβέρνηση και το δεύτερο αφορά σε αυτό που πραγματικά διδάσκεται στις τάξεις (Valverde et al., 2002, στο van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2014).



Τέλος, σύμφωνα με το TIMSS (Mullis et al., 2009, στο Usiskin, 2013) μία τρίτη διάσταση του προγράμματος σπουδών είναι αυτό το οποίο επιτεύχθηκε, δηλαδή αφορά στα μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές (Hiebert & Grouws, 2007). Έτσι, σύμφωνα με τη Mesa (2004, σ. 256), «μια ανάλυση του περιεχομένου των μαθηματικών εγχειριδίων γίνεται μια υποθετική επιχείρηση: Τι θα μάθαιναν οι μαθητές αν τα μαθηματικά τους κάλυπταν όλες τις ενότητες με τη σειρά που αυτές παρουσιάζονται στο βιβλίο; Τι θα μάθαιναν οι μαθητές αν έπρεπε να λύσουν όλες τις ασκήσεις στο εγχειρίδιο; Θα μάθαιναν τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται στο βιβλίο;»

### **1.A.3. Τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου**

Τα εγχειρίδια αποτελούν τον κύριο διδακτικό πόρο για τις περισσότερες χώρες σε όλο τον κόσμο (Mullis et al., 2012), ειδικά για τα εξαιρετικά συγκεντρωτικά εκπαιδευτικά συστήματα, όπως και αυτά της Κύπρου και της Ελλάδας (Xenofontos & Papadopoulos, 2015). Στην Ελλάδα το σχολείο αποτελεί τμήμα του τομέα της κυβέρνησης και όχι της κοινότητας και είναι από τις λίγες χώρες στον κόσμο που λειτουργεί με ένα και μοναδικό σχολικό βιβλίο (Xenofontos & Papadopoulos, 2015). Το εθνικό πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια προετοιμάζονται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, το οποίο αποτελεί φορέα του Υπουργείου Παιδείας, και διανέμονται δωρεάν σε όλους τους μαθητές σε δημόσια και ιδιωτικά σχολεία.

Τα τελευταία 20 χρόνια, τα ευρήματα της έρευνας σε χώρους που άπτονται της Γνωστικής, και Εκπαιδευτικής Ψυχολογίας, της Παιδαγωγικής και της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν αλλάξει όχι μόνο τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η διαδικασία της μάθησης, αλλά και την αντίληψή μας για την αποτελεσματική διδασκαλία στο σχολείο (Καργιωτάκης, Μαραγκού, Μπελίτσου & Σοφού, 2006). Επίσης τα αποτελέσματα ερευνών πάνω σε θέματα αξιολόγησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας οδήγησαν και στη χώρα μας στο να δημιουργηθούν τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (ΑΠΣ, ΔΕΠΠΣ) και συνακόλουθα το ισχύον εκπαιδευτικό υλικό στα επιμέρους γνωστικά αντικείμενα στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο.

Στη χώρα μας τα ισχύοντα σχολικά βιβλία μαθηματικών του δημοτικού σχολείου εισήχθησαν στις τάξεις για πρώτη φορά κατά το διδακτικό έτος 2007-2008 αντικαθιστώντας τα προηγούμενα, τα οποία είχαν ήδη συμπληρώσει εικοσαετή παρουσία στην εκπαίδευση (1987-2007). Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στο οποίο βασίζονται τα βιβλία που υπάρχουν σήμερα στις ελληνικές τάξεις είναι αυτό του 2003. Έκτοτε, το 2011, σχεδιάστηκαν τα Νέα Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Ωστόσο, αυτό το νέο πρόγραμμα σπουδών δεν εφαρμόστηκε στην πράξη, παρά μόνο πιλοτικά και δεν χρησιμοποιήθηκε περαιτέρω στις σχολικές τάξεις. Πρόσφατα, στα τέλη του 2021, έγινε η συγγραφή του αναθεωρημένου προγράμματος σπουδών, αλλά τα σχολικά βιβλία που υπάρχουν ακόμη στα σχολεία είναι αυτά που εκδόθηκαν το 2007.

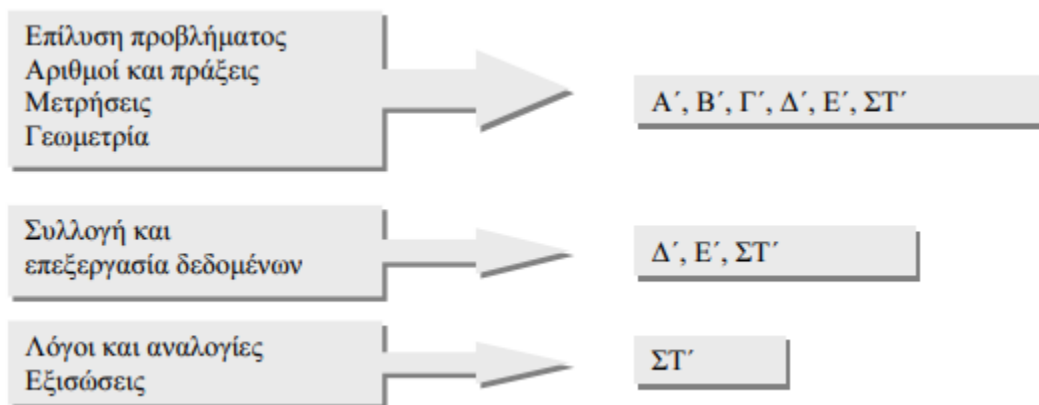
Τα ισχύοντα διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών έχουν τη μορφή ενός διδακτικού πακέτου. Αποτελούνται από το βιβλίο του μαθητή, το οποίο είναι το βασικό εγχειρίδιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, τα τετράδια εργασιών του μαθητή, τα οποία αποσκοπούν στην περαιτέρω εξάσκηση του μαθητή, το βιβλίο του δασκάλου, που λειτουργεί ως αρωγός για τον εκπαιδευτικό και τέλος, από το εκπαιδευτικό λογισμικό των μαθηματικών (CD-ROM).

Σύμφωνα με τον Τύπα (2005), βασικός σκοπός της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο είναι η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού, δηλαδή η ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να μπορεί να εφαρμόζει τις μαθηματικές γνώσεις, τις μεθόδους και τις διαδικασίες σε καταστάσεις της καθημερινής του ζωής. Ο σκοπός αυτός εξειδικεύεται σε συγκεκριμένους στόχους. Έτσι, τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο έχουν ως κύριο στόχο:

- Την απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων και διαδικασιών
- Την εκμάθηση του τρόπου επαναδόμησης και επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή, σε μαθηματικό πρόβλημα
- Τη χρήση μαθηματικών εργαλείων (π.χ. μαθηματικών μοντέλων και μεθόδων) για τη επίλυση προβλημάτων

- Μια συνολική θεώρηση της δομής των Μαθηματικών και των διασυνδέσεων μεταξύ διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών αντικειμένων
- Την καλλιέργεια δεξιοτήτων που αφορούν στη συναισθηματική και ψυχοκινητική περιοχή της προσωπικότητας των παιδιών
- Την ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων από τους μαθητές μέσα από τον έλεγχο και τη διαχείριση της μάθησής τους στο πλαίσιο επίτευξης των διαδικαστικών στόχων
- Την καλλιέργεια μιας θετικής στάσης για τα Μαθηματικά.

Μέσα από τα ισχύοντα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών σε κάθε βαθμίδα πρέπει να διδαχθούν ορισμένες κατηγορίες περιεχομένων. Έτσι, η ύλη των μαθηματικών για το Δημοτικό Σχολείο δομείται πάνω σε επτά άξονες περιεχομένου. Από αυτούς, η ‘Επίλυση προβλήματος’, οι ‘Αριθμοί και πράξεις’, οι ‘Μετρήσεις’ και η ‘Γεωμετρία’ εισάγονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, η ‘Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων’ εισάγεται στην Τετάρτη τάξη, ενώ οι ‘Λόγοι και αναλογίες’ και οι ‘Εξισώσεις’ εισάγονται στην Έκτη τάξη (Τύπας, 2005).



**Εικόνα 1.2: Οι άξονες περιεχομένου των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (Τύπας, 2005, σ. 2)**

Παράλληλα, εισάγονται και κάποια καινούργια στοιχεία όπως η έννοια του μοτίβου, ενώ γίνεται και μια πρώτη προσέγγιση των δεκαδικών, διαισθητική αρχικά, από τους μαθητές στην Τρίτη τάξη. Τέλος, η νέα προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών απομακρύνεται από τη θεωρία συνόλων και την εκμάθηση αλγορίθμων, και προσανατολίζεται στην κατανόηση και την κατασκευή λογικών συλλογισμών (Τύπας, 2005).

Σύμφωνα με τον Τύπα (2005), η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όχι μόνο ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά και ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο οργανώνεται η διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών. Εισάγεται από την Πρώτη τάξη του Δημοτικού, όμως τα πρώτα χρόνια η θεματολογία των προβλημάτων προκύπτει από τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών ενώ σταδιακά τα προβλήματα γίνονται πιο σύνθετα και προέρχονται τόσο από την καθημερινή πραγματικότητα όσο και από καθαρά μαθηματικές περιοχές. Η κατανόηση και αναζήτηση της λύσης ενός προβλήματος γίνεται αρχικά σε διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια επιχειρείται μια αποδεικτική διαδικασία, που στηρίζεται σε μια σειρά λογικών ισχυρισμών. Οι μαθητές καλούνται, επίσης, να σκεφτούν διάφορες στρατηγικές για τη λύση ενός προβλήματος, ενώ ενθαρρύνονται οι νοεροί και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί είτε σαν πρόβλεψη είτε σαν έλεγχος του αποτελέσματος.

Ειδικότερα, στη Δ' τάξη, τα μαθηματικά προβλήματα τίθενται σε πλαίσια πραγματικών προβληματικών καταστάσεων, μαζί με τους περιορισμούς τους, οι οποίες είναι οικείες στα παιδιά και έχουν νόημα για αυτά, αφού είναι εμπνευσμένες μέσα στα ενδιαφέροντα των παιδιών ή του οικογενειακού και σχολικού περιβάλλοντός τους (Βαμβακούση κ.ά., 2007α; Τύπας, 2005). Έτσι, η προσέγγιση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος γίνεται με απώτερο σκοπό την αναβάθμιση της ικανότητας των παιδιών να διαχειρίζονται καταστάσεις που έχουν μαθηματικό περιεχόμενο (Τύπας, 2005).

## 1.B. Η επίλυση προβλήματος

### 1.B.1. Αποσαφήνιση σημαντικών όρων: πρόβλημα, λεκτικό πρόβλημα, επίλυση προβλήματος

Σε γενικότερο πλαίσιο, το τι μπορεί να χαρακτηριστεί ως πρόβλημα εξαρτάται από το άτομο στο οποίο απευθύνεται και βρίσκεται σε συνάρτηση με τις γνώσεις και τις εμπειρίες του (Κολέζα, 2009; Schoenfeld, 2013). Μία κατάσταση στην οποία υπάρχει γνωστή μέθοδος για την αντιμετώπισή της δεν αποτελεί πρόβλημα για το άτομο που την αντιμετωπίζει, αλλά θα μπορούσε να χαρακτηριστεί πρόβλημα για κάποιον ο οποίος δεν γνωρίζει τι πρέπει να κάνει (Κολέζα, 2009; Schoenfeld, 2013). Έτσι, όπως αναφέρει ο Schoenfeld (2013), η πολυπλοκότητα ή η δυσκολία από μόνες τους δεν καθιστούν ένα έργο πρόβλημα και υπάρχουν προβλήματα που δεν δημιουργούν προβληματικές καταστάσεις. Πέρα όμως από τον παράγοντα του ατόμου, υπάρχει και ο παράγοντας του χρόνου. Ένα άτομο που αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα δεν θα είναι το ίδιο μετά από αυτό, αλλά θα αποκτήσει εμπειρία και γνώση με την αντιμετώπισή του. Συνεπώς, στο μέλλον, ενδέχεται αυτό που αρχικά ήταν πρόβλημα να γίνει μία εργασία ρουτίνας (Schoenfeld, 2013; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018).

Όσον αφορά τα μαθηματικά, σύμφωνα με τους Hiebert et al. (1997, στο van de Walle, 2007, σ. 77), «πρόβλημα ορίζεται ως οποιαδήποτε εργασία για την οποία τα παιδιά δεν έχουν αποστηθίσει κανένα προκαθορισμένο κανόνα ή μέθοδο, αλλά ούτε έχουν την εντύπωση ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη σωστή μέθοδος επίλυσης». Οι Zhu και Fan (2006) ορίζουν ένα πρόβλημα ως μια κατάσταση που απαιτεί μια απόφαση ή /και απάντηση, ανεξάρτητα από το αν η λύση είναι άμεσα διαθέσιμη ή όχι στο δυνητικά επιλύσιμο πρόβλημα.

Ειδικότερα, τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση μαθηματικών προβλημάτων (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020). Μπορούν να οριστούν ως «λεκτικές περιγραφές προβληματικών καταστάσεων, που δημιουργούν ένα ή περισσότερα ερωτήματα, των οποίων οι απαντήσεις μπορούν να βρεθούν με την εφαρμογή μαθηματικών πράξεων στα αριθμητικά δεδομένα που υπάρχουν στο πρόβλημα» και θεωρούνται παγκοσμίως ένα προνομιακό όχημα για την καλλιέργεια των ικανοτήτων επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων στα παιδιά (Vicente et al., 2020).

Προς επέκταση των παραπάνω ορισμών ορίζεται και η διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Σύμφωνα με τον Polya (2001, σ. 11), «λύνω ένα πρόβλημα σημαίνει πως βρίσκω κάποιον τρόπο να αποφύγω μια δυσκολία, να παρακάμψω ένα εμπόδιο, να επιτύχω ένα στόχο, ο οποίος δεν ήταν άμεσα εφικτός». Ομοίως, για τον Schoenfeld (2013), η επίλυση προβλημάτων ορίζεται ως η προσπάθεια του ατόμου να βρει την κατάλληλη μέθοδο που πρέπει να εφαρμόσει για την επίτευξη ενός στόχου και τη λύση του προβλήματος που αντιμετωπίζει.

### **1.B.2. Τα είδη μαθηματικών προβλημάτων**

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες ταξινομήσεις των προβλημάτων. Ο Polya (2001), βασισμένος στα *Στοιχεία του Ευκλείδη*, διακρίνει τα μαθηματικά προβλήματα σε δύο κατηγορίες: απόδειξης και εύρεσης. Σκοπός ενός προβλήματος εύρεσης είναι να βρεθεί, να κατασκευαστεί, να παραχθεί, να προκύψει ή να αναγνωρισθεί από τον λύτη κάποιο συγκεκριμένο στοιχείο. Σε ένα πρόβλημα απόδειξης, σκοπός είναι ο λύτης να βρει εάν μία συγκεκριμένη πρόταση είναι ψευδής ή αληθής, να την αποδείξει ή να την ανακατασκευάσει.

Στην έρευνά τους, οι Zhu και Fan (2006), με βάση τα χαρακτηριστικά του πλαισίου του προβλήματος, αναφέρονται στον βαθμό και τους τρόπους με τους οποίους ενσωματώνονται οι πραγματικές εμπειρίες στα έργα του σχολικού εγχειριδίου, διακρίνοντας τα προβλήματα στα μαθηματικά εγχειρίδια σε προβλήματα εφαρμογής και προβλήματα μη εφαρμογής. Ένα πρόβλημα μη εφαρμογής δεν σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο, ενώ ένα πρόβλημα εφαρμογής προκύπτει στο πλαίσιο μιας πραγματικής κατάστασης. Τα προβλήματα εφαρμογής διακρίνονται σε ρεαλιστικά-φανταστικά και σε αυθεντικά. Τα φανταστικά προβλήματα εφαρμογής περιέχουν δεδομένα που έχουν επινοηθεί από τον συγγραφέα του εγχειριδίου, ενώ τα αυθεντικά προβλήματα περιέχουν πραγματικές καταστάσεις ή δεδομένα που συλλέγονται από τους ίδιους τους μαθητές μέσα από την καθημερινή τους ζωή.

Τύποι προβλημάτων εφαρμογής	Παράδειγμα
<b>Ρεαλιστικά</b>	Πόσες φορές μπορείς να διπλώσεις μια σελίδα εφημερίδας; Εξήγησέ μου πώς έφτασες στην απάντησή σου. (McConnell et al., 1996, σ.59)
<b>Αυθεντικά</b>	Τρεις καμπάνες χτυπούν σε διαστήματα 8 λεπτών, 15 λεπτών και 24 λεπτών, αντίστοιχα. Αν χτυπήσουν μαζί στις 3 μ.μ., τι ώρα θα είναι όταν ξαναχτυπήσουν μαζί; (Teh & Looi, 1997, σ. 32)

**Πίνακας 1.1: Παραδείγματα προβλημάτων εφαρμογής (Ρεαλιστικά-Αυθεντικά) (Πηγή: Zhu & Fan, 2006, σ. 614)**

Επιπλέον, οι Zhu και Fan (2006) διακρίνουν τα προβλήματα σε παραδοσιακά και μη παραδοσιακά. Τα μη παραδοσιακά προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις επιμέρους τύπους. Ο πρώτος τύπος αφορά στην *κατασκευή μαθηματικού προβλήματος*, καθώς αφορά προβλήματα που απαιτούν από τους μαθητές να δημιουργήσουν ερωτήσεις χρησιμοποιώντας τις δεδομένες πληροφορίες ως προβληματική κατάσταση (Problem-posing problem). Ο δεύτερος τύπος είναι τα *προβλήματα γρίφοι* (Puzzle problem), που συχνά επιτρέπουν στους μαθητές να συμμετέχουν σε μία πιο διασκεδαστική πλευρά των μαθηματικών. Ο τρίτος τύπος είναι τα *προβλήματα πρότζεκτ* (Project problem), δηλαδή εργασίες ή μια σειρά εργασιών που περιλαμβάνουν μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες διαδικασίες: συλλογή δεδομένων, παρατήρηση, αναζήτηση πηγών, μέτρηση, ανάλυση, προσδιορισμός μοτίβων ή/και σχέσεων, σχεδιασμός γραφημάτων και επικοινωνία. Αυτά τα προβλήματα συνήθως απαιτούν από τους μαθητές να αφιερώσουν σημαντικό χρονικό διάστημα για να τελειώσουν. Τέλος, ο τέταρτος τύπος μη παραδοσιακών προβλημάτων είναι τα *προβλήματα καταγραφής* που ζητούν από τους μαθητές να γράψουν ένα έργο για να εκφράσουν τις ιδέες, τις εμπειρίες, τις ερωτήσεις, τους προβληματισμούς ή την προσωπική τους γνώμη (Journal problem). Τα υπόλοιπα είδη προβλημάτων συγκαταλέγονται στα παραδοσιακά προβλήματα. Παρακάτω ακολουθούν μερικά ενδεικτικά παραδείγματα μη παραδοσιακών προβλημάτων (Πίνακας 1.2).

Τύποι μη παραδοσιακών προβλημάτων	Παράδειγμα
Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος	Κάντε μια ερώτηση συγκρίνοντας δύο ποσότητες οι οποίες αυξάνονται ή μειώνονται, η καθεμία με το δικό της σταθερό ρυθμό. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση για να απαντήσετε στην ερώτησή σας. (McConnell, Brown, Usiskin, Senk, Widderski, Anderson et al., 1996, σ. 675)
Πρόβλημα γρίφος	Βρείτε τον διψήφιο αριθμό που έχει το άθροισμα των κύβων των ψηφίων του ίσο με τρεις φορές τον εαυτό του. (Teh & Looi, 1997, σ. 35)
Πρόβλημα πρότζεκτ	Μάθετε τις τιμές για τηλεφωνικές κλήσεις από τον τόπο διαμονής σας σε μια πόλη ή πόλη που έχει διαφορετικό κωδικό περιοχής. Συγκρίνετε τις τιμές από δύο εταιρείες μεγάλων αποστάσεων για κλήσεις διαφόρων μηκών. Μπορεί να χρειαστεί να εξετάσετε διαφορετικές ώρες της ημέρας και της εβδομάδας. Μην κάνετε τις κλήσεις για να προσδιορίσετε το κόστος τους! (McConnell et al., 1996, σ. 339)
Πρόβλημα καταγραφής	Γράψτε ένα γράμμα σε έναν μαθητή που δεν έχει κάνει ακόμα άλγεβρα εξηγώντας του τη σειρά προτεραιότητας των πράξεων. Χρησιμοποιήστε παραδείγματα για να απεικονίσετε την εξήγησή σας. Μπορεί να θέλετε να δώσετε το γράμμα σας σε έναν νεότερο μαθητή για να το διαβάσει πριν το παραδώσετε. Εάν αυτός ή αυτή δυσκολεύεται να κατανοήσει την εξήγησή σας, θα πρέπει να την αναθεωρήσετε πριν τη δώσετε στον δάσκαλό σας. (McConnell et al., 1996, σ. 60)

**Πίνακας 1.2: Παραδείγματα μη παραδοσιακών προβλημάτων (Πηγή: Zhu & Fun, 2006, σ. 614)**



Ακόμη μία κατηγοριοποίηση αφορά στον αριθμό των πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος. Τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με μία μόνο πράξη ορίζονται ως *προβλήματα ενός βήματος* (Single-step Problems), ενώ όταν χρειάζονται περισσότερες πράξεις, ανήκουν στα *προβλήματα πολλαπλών βημάτων* (Multiple-step Problems) (Vicente et al., 2020; Zhu & Fan, 2006).

Σύμφωνα με τους Zhu και Fan (2006), ανάλογα με τις πληροφορίες που παρέχουν στους λύτες, τα προβλήματα διακρίνονται σε προβλήματα επαρκών δεδομένων, προβλήματα περιττών δεδομένων και προβλήματα ανεπαρκών δεδομένων. Εάν ένα πρόβλημα περιέχει περισσότερες από αρκετές πληροφορίες ή προϋποθέσεις για την επίλυσή του, θεωρείται πρόβλημα περιττών δεδομένων. Εάν οι πληροφορίες που παρέχονται ουσιαστικά δεν επαρκούν για την εύρεση της λύσης και δεν αναμένεται ούτε είναι δυνατό για έναν λύτη να συμπληρώσει τις πληροφορίες που λείπουν, τότε το πρόβλημα θεωρείται πρόβλημα ανεπαρκών δεδομένων. Τα υπόλοιπα προβλήματα, στα οποία οι πληροφορίες είναι ακριβώς όσες χρειάζονται για την επίλυσή τους, θεωρούνται προβλήματα επαρκών δεδομένων.

Μία ακόμη ταξινόμηση σύμφωνα με τους Zhu και Fan (2006) είναι αυτή που αφορά στα αναπαραστατικά μέσα που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα. Εάν το πρόβλημα περιλαμβάνει μόνο μαθηματικές εκφράσεις, τότε ταξινομείται στην κατηγορία των προβλημάτων σε καθαρά μαθηματική μορφή. Εάν το πρόβλημα είναι εξ ολοκλήρου λεκτικό, δηλαδή, μόνο με λεκτικές περιγραφές, τότε αυτό κωδικοποιείται στην κατηγορία των προβλημάτων σε λεκτική μορφή. Εάν αποτελείται απλά από εικόνες, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα, χάρτες κ.λπ., ταξινομείται στα προβλήματα σε οπτική μορφή. Τα υπόλοιπα είναι προβλήματα σε συνδυαστική μορφή, καθώς παρουσιάζονται με τον συνδυασμό δύο ή τριών από τα παραπάνω αναπαραστατικά μέσα.

Όσον αφορά τις δυνατές απαντήσεις ενός προβλήματος, τα προβλήματα μπορούν να διακριθούν σε ανοιχτά και κλειστά (Κολέζα, 2009; Zhu & Fan, 2006). Τα ανοιχτά προβλήματα έχουν περισσότερες από μία λύσεις, ενώ τα κλειστά έχουν μία μοναδική λύση, ασχέτως των διαφορετικών προσεγγίσεων που μπορεί να ακολουθήσει ένας λύτης.

Εκτός, όμως, από τον αριθμό των δυνατών απαντήσεων ακόμη μία κατηγοριοποίηση των λεκτικών προβλημάτων δημιουργείται από τον τύπο της απάντησης του προβλήματος.

Έτσι, τα προβλήματα διακρίνονται σε αυτά που ζητούν απλώς την αριθμητική απάντηση και σε αυτά που απαιτούν κάποια επεξήγηση ή αιτιολόγηση για την απάντηση (Son & Diletti, 2017; Xin et al., 2011).

Τέλος, τα προβλήματα διακρίνονται σε τυποποιημένα (routine problems) και σε μη τυποποιημένα προβλήματα (non routine problems) (Βισσαρίου & Δεσλή, 2021; Schoenfeld, 2016; Krulik, 1988; Yeo, 2009; Zhu & Fan, 2006). Τα πρώτα αποτελούν απλές ασκήσεις με σκοπό να παρέχουν πρακτική εξάσκηση σε μια συγκεκριμένη μαθηματική τεχνική ή έναν αλγόριθμο που, συνήθως, έχει μόλις διδαχθεί στον μαθητή και η πορεία προς τη λύση είναι άμεσα εμφανής (Kulik, 1988; Schoenfeld, 2016; Zhu & Fan, 2006). Αντιθέτως, στα μη τυποποιημένα προβλήματα, ο μαθητής δεν γνωρίζει τον δρόμο που πρέπει να ακολουθήσει για να φτάσει στη λύση, καθώς το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί με την απλή εφαρμογή ενός τυπικού αλγορίθμου, τύπου ή διαδικασίας (Βισσαρίου & Δεσλή, 2021; Schoenfeld, 2016; Yeo, 2009; Zhu & Fan, 2006). Σε ένα μη τυποποιημένο πρόβλημα (non routine problem) απαιτείται ευέλικτος, κριτικός και παραγωγικός τρόπος σκέψης (Βισσαρίου & Δεσλή, 2021; van Zanten & van den Heuvel Panhuizen, 2018) και ένα υψηλότερο επίπεδο δεξιοτήτων, οι οποίες αναπτύσσονται μέσα από την εξάσκηση επίλυσης τυποποιημένων προβλημάτων (Schoenfeld, 2016).

### **1.B.3. Η σημασία της επίλυσης προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών**

Μεγάλο μέρος της ερευνητικής κοινότητας φαίνεται να έχει εστιάσει την προσοχή του στην επίλυση προβλήματος και ειδικότερα, στο πώς αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Αυτή η εστίαση των ερευνητών στην εν λόγω μαθηματική έννοια οφείλεται στον αντίκτυπο που έχουν τα μαθηματικά εγχειρίδια στις επιδόσεις των μαθητών, σε συνδυασμό με τη εξέχουσα σημασία που έχει η επίλυση προβλήματος για τη μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα.

Η επίλυση προβλήματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μαθηματική εκπαίδευση και έχει διττό ρόλο σε αυτήν: αφορά αφενός στη διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, αποτελώντας κύριο στόχο του προγράμματος σπουδών, και αφετέρου, τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλημάτων, αποτελώντας ένα ιδιαίτερα

χρήσιμο μέσο εκμάθησης των μαθηματικών εννοιών (van de Walle, 2007). Αυτό σημαίνει ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να συμβάλει όχι μόνο στην εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων αλλά και στην απόκτηση νέων (van de Walle, 2007).

Επιπλέον, το γεγονός ότι οι μαθητές τείνουν να είναι λιγότερο ικανοί να αντιμετωπίσουν επιτυχώς προβληματικές καταστάσεις που αντιπροσωπεύονται λιγότερο στα μαθηματικά εγχειρίδιά τους οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κακή απόδοση οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας σε τέτοιες καταστάσεις (Desli & Loukidou, 2014; Singh et al., 2020; Xin, 2007). Ο Polya (2001) παρομοιάζει την επίλυση προβλήματος με το κολύμπι, υποστηρίζοντας πως και οι δύο αυτές δεξιότητες χρήζουν μίμησης και εξάσκησης, έτσι ώστε να καλλιεργηθούν. Προκειμένου ένας λύτης να εξοικειωθεί με την επίλυση προβλημάτων, χρειάζεται ευκαιρίες για να αναπτύξει και να εξασκήσει την ικανότητά του αυτή. Αυτού του είδους η μάθηση δεν συμβαίνει αυτόματα και οι μαθητές χρειάζονται συνεχείς ευκαιρίες για την επίτευξή της (Polya, 1998; Hiebert & Grouws, 2007).

Σύμφωνα με τους Hiebert & Grouws (2007), αυτές οι συνεχείς ευκαιρίες μάθησης δύναται να παρέχουν έναν χρήσιμο οδηγό στη μαθηματική εκπαίδευση, τόσο για την εξήγηση των επιπτώσεων συγκεκριμένων ειδών διδασκαλίας σε συγκεκριμένα είδη μάθησης (π.χ. επίλυση προβλήματος) όσο και για τη βελτίωση των μεθόδων διδασκαλίας ανάλογα με τους μαθησιακούς στόχους. Η έννοια αυτή βασίζεται στη γνωστή έννοια της ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης του Vygotsky (1978, στο Hiebert & Grouws, 2007), η οποία αποτυπώνει τις γενικές αρχές πίσω από το παράδειγμα των μαθητών που διδάσκονται λογισμό. Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης αναφέρεται στον χώρο εντός του οποίου μπορεί να αναμένεται μάθηση, υπό υποστηρικτικές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψιν τη λειτουργικότητα του ατόμου. Περιγράφει τι είναι δυνατό, δεδομένων των κατάλληλων ευκαιριών. Συνεπώς, οι ευκαιρίες μάθησης που δίνονται στους μαθητές μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια για την επίλυση προβλήματος, καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό την ανάπτυξη της ικανότητάς τους να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα.

Όσον αφορά τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, η ιδιαίτερη σημασία της συμπερίληψής τους στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών έγκειται στον δυνητικό ρόλο τους στην ανάπτυξη ανώτερων δεξιοτήτων στους μαθητές (Schoenfeld, 2016), τέτοιων ώστε να γνωρίζουν πότε και πώς να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για την

προσέγγιση και την επίλυση προβλημάτων σε πρακτικές καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής (De Corte, Verschaffel & Greer, 2000; van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Αυτή η εφαρμογή των μαθηματικών για την επίλυση προβληματικών καταστάσεων στον πραγματικό κόσμο αποτελεί τη μαθηματική μοντελοποίηση και η χρήση των λεκτικών προβλημάτων προωθεί μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση προς αυτήν (De Corte et al., 2000). Σύμφωνα με τους De Corte et al. (2000), η μαθηματική μοντελοποίηση αφορά στην αντιμετώπιση του κειμένου ως την περιγραφή κάποιας πραγματικής κατάστασης που πρέπει να διαμορφωθεί με μαθηματικούς όρους. Αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου, αποτελώντας ένα σύνολο εργαλείων για την περιγραφή πολλών πτυχών του, προωθώντας μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη πτυχές της πραγματικότητας κατά τη μοντελοποίηση των καταστάσεων που περιγράφονται στα λεκτικά προβλήματα, η μοντελοποίηση είναι ένας δυνητικά ισχυρός τρόπος για τη σύνδεση των μαθηματικών προβλημάτων με τον πραγματικό κόσμο και την τροποποίηση της πεποίθησης και της αίσθησης πολλών παιδιών ότι τα μαθηματικά είναι άσχετα με τις εμπειρίες τους από την καθημερινή ζωή.

Ωστόσο, οι μαθητές έχουν την τάση να αποσυνδέουν την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από τον πραγματικό κόσμο και αντιλαμβάνονται τα λεκτικά προβλήματα ως ένα είδος σχολικών εργασιών, που διαχωρίζονται από αυτόν. Θεωρούν ότι τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να επιλυθούν με συγκεκριμένες πράξεις χρησιμοποιώντας τους δεδομένους αριθμούς. Αυτό έχει ως συνέπεια, οι μαθητές συχνά να αγνοούν τις πραγματικές τους γνώσεις και τους περιορισμούς που αφορούν στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος σε καταστάσεις στην καθημερινή τους ζωής (De Corte et al., 2000).

Για τον λόγο αυτό, κρίνεται αναγκαίο ο μαθητής να έρχεται σε επαφή με προβλήματα που συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο, τα οποία έχουν πραγματικές διαστάσεις και αφορούν καταστάσεις που προκαλούν το ενδιαφέρον του και παρατηρεί στην καθημερινή του ζωή. Αυτό θα συμβάλει στην αύξηση της ποικιλομορφίας και της αυθεντικότητας των λεκτικών προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων, το οποίο με τη σειρά του θα οδηγήσει στην πλήρη κατανόηση του γιατί ο μαθητής ασχολείται με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και στην αποφυγή λανθασμένων «κρυφών» πεποιθήσεων περί αποσύνδεσης με τον πραγματικό του κόσμο (De Corte et al., 2000).

#### 1.Β.4. Μοντέλα των σταδίων επίλυσης προβλημάτων

Θεμελιώδες έργο στην επίλυση προβλήματος υπήρξε αυτό του Ούγγρου μαθηματικού George Polya. Βασική αρχή για τον Polya αποτελεί η ιδέα ότι η εμπειρία στα μαθηματικά εξισώνεται με την ικανότητα «να λύνει κανείς προβλήματα, όχι τετριμμένα, αλλά τα οποία απαιτούν κάποιο ποσοστό ανεξάρτητης σκέψης, κρίσης, πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας» (Polya, 2001, σ. 14). Έργο του εκπαιδευτικού, λοιπόν, που θέλει να καλλιεργήσει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος των μαθητών του, είναι αρχικά να τους εμπνεύσει κάποιο ενδιαφέρον για τα προβλήματα και έπειτα, να τους παρέχει αρκετές ευκαιρίες για μίμηση και πρακτική εξάσκηση, ώστε στο μέλλον να μπορούν να λύνουν προβλήματα μόνοι τους.

Στο βιβλίο του *Πώς να το λύσω*, ο Polya (1998) περιγράφει τα τέσσερα στάδια, που πρέπει να ακολουθεί ένας επιτυχημένος λύτης για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων: κατανόηση του προβλήματος, επινόηση ενός σχεδίου, εκτέλεση του σχεδίου και ανασκόπηση της λύσης.

Με την πάροδο των ετών, υπήρξαν αρκετά μοντέλα που προτάθηκαν για τα στάδια που ακολουθούν οι λύτες, ώστε να είναι πιο αποτελεσματικοί στην επίλυση προβλήματος. Παρακάτω, ακολουθεί η παρουσίαση των βασικότερων από αυτά.

Polya (1998)	Krulik & Rudnick (1988)	Verschaffel et al. (1999)	Schoenfeld (1985, 1992)
1) Κατανόηση του προβλήματος 2) Επινοήση ενός σχεδίου 3) Εκτέλεση του σχεδίου 4) Ανασκόπηση της λύσης	1) Ανάγνωση 2) Εξερεύνηση 3) Επιλογή μιας στρατηγικής 4) Επίλυση 5) Έλεγχος προς τα πίσω και επέκταση	1) Δημιουργία νοερής αναπαράστασης του προβλήματος 2) Τρόπος επίλυσης του προβλήματος 3) Εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων 4) Ερμηνεία του αποτελέσματος και διατύπωση μιας απάντησης 5) Αξιολόγηση της λύσης	1) Ανάγνωση (ή επανάληψη της ανάγνωσης) του προβλήματος 2) Ανάλυση του προβλήματος 3) Διερεύνηση πτυχών του προβλήματος 4) Σχεδιασμός του συνόλου ή μέρους μιας λύσης 5) Εφαρμογή του σχεδίου 6) Επαλήθευση λύσης

**Πίνακας 1.3: Τα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων των Polya (1998), Krulik & Rudnick (1988), Verschaffel et al. (1999) και Schoenfeld (1985, 1992).**

Από τα παραπάνω στάδια, οι περισσότεροι ερευνητές συγκλίνουν στα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος του Polya (1998).

*Κατανόηση του προβλήματος:* Για την επίλυση ενός προβλήματος απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η εννοιολογική κατανόησή του (Polya, 1998). Όπως ο Polya αναφέρει, «θα ήταν ανόητο να απαντήσετε σε μία ερώτηση που δεν καταλαβαίνετε» (Polya, 1998, σ. 34). Στο στάδιο αυτό, ο λύτης πρέπει να εξετάσει και να αναλύσει με προσοχή τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, ώστε να κατανοήσει τις σχέσεις και τις διασυνδέσεις ανάμεσα στα δεδομένα, με τελικό σκοπό να αντιληφθεί τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα. Η ευχέρεια του μαθητή να επαναλάβει το πρόβλημα με δικά του λόγια και η

ικανότητά του να διαχωρίζει τα μέρη του προβλήματος (ζητούμενα, δεδομένα, συνθήκη), φανερώνουν πως η κατανόηση του προβλήματος έχει επιτευχθεί.

*Επινόηση ενός σχεδίου:* Το κυριότερο επίτευγμα στην επίλυση ενός προβλήματος είναι η σύλληψη της ιδέας ενός σχεδίου από τους μαθητές. Ωστόσο, για να γίνει αυτό, οι λύτες θα πρέπει να γνωρίζουν σε γενικές γραμμές τους απαραίτητους υπολογισμούς και τις κατασκευές που απαιτούνται ώστε να φτάσουν στο ζητούμενο του προβλήματος. Ενδέχεται να χρειαστεί οι λύτες να επιχειρήσουν αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες μέχρι να καταλήξουν σε μια αποτελεσματική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος. Οι προηγούμενες εμπειρίες και οι προγενέστερα αποκτημένες γνώσεις, όπως η επίλυση παρόμοιων προβλημάτων ή η απόδειξη θεωρημάτων, μπορούν να παίξουν καταλυτικό ρόλο στην εύρεση μίας καλής ιδέας.

*Εκτέλεση του σχεδίου:* Μετά τη σύλληψη της ιδέας, που θα οδηγήσει τους λύτες στη λύση του προβλήματος, ακολουθεί η εκτέλεση αυτής, η οποία αποτελεί μια πολύ πιο εύκολη διαδικασία. Οι λύτες χρειάζονται υπομονή, ώστε να εφαρμόσουν σωστά τη στρατηγική τους, ενώ συνίσταται να ελέγχουν κάθε βήμα που κάνουν για να βεβαιώνονται ότι είναι σωστό.

*Ανασκόπηση της λύσης:* Η επανεξέταση του αποτελέσματος είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό βήμα της επίλυσης προβλήματος, το οποίο πολλοί λύτες - εκπαιδευτικοί και μαθητές - ξεχνούν να εκτελέσουν. Οι λύτες, φτάνοντας στο σημείο αυτό και αφού έχουν ελέγξει όλα τα βήματα, είναι πολύ πιθανό να θεωρούν δεδομένο ότι η λύση τους είναι ορθή. Παρόλα αυτά υπάρχει η πιθανότητα ύπαρξης λάθους και, για τον λόγο αυτό, χρειάζεται να γίνεται η επαλήθευση. Η σημασία αυτού του σταδίου έγκειται, επίσης, στην ευκαιρία που έχουν οι λύτες, ξανακοιτάζοντας τη λύση, να ερευνήσουν τη συνάφεια του συγκεκριμένου προβλήματος με άλλα παρόμοια, έτσι ώστε να την εφαρμόσουν και σε αυτά.

### **1.Γ. Η επίλυση προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών**

Πληθώρα ερευνών έχουν πραγματοποιηθεί γύρω από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά συγγράμματα. Μελετώντας τις έρευνες που

πραγματοποιήθηκαν στη μαθηματική εκπαίδευση διεθνώς, διαπιστώνεται πως ήταν πολλοί οι ερευνητές που προσέγγισαν το θέμα της επίλυσης προβλήματος στα σχολικά βιβλία ως προς τα είδη των προβλημάτων που περιέχουν (Glasnovic Gracin, 2018; Li, 2000; Son & Senk, 2010; Zhu & Fun, 2006) και ως προς τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίζουν τα παιδιά (Desli & Loukidou, 2014; Singh et al., 2020). Επίσης, πολλοί ανέλυσαν τα σχολικά βιβλία της χώρας τους (Desli & Loukidou, 2014; Fan & Zhu, 2007; Singh et al., 2020; van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018; Vicente et al., 2018), ενώ άλλοι προχώρησαν σε μία συγκριτική ανάλυση των βιβλίων δύο ή και τριών χωρών, προκειμένου να αποδόσουν εξηγήσεις στις διαφορετικές επιδόσεις των μαθητών σε κάθε χώρα (Fan & Zhu, 2007; Stigler et al., 1986; Vicente et al., 2020; Xin, 2007; Zhu & Fun, 2006).

### **1.Γ.1. Έρευνες που αφορούν στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών μίας χώρας**

Οι Vicente, Manchado και Verschaffel (2018), μελέτησαν δύο σειρές ισπανικών μαθηματικών βιβλίων για όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Ανέλυσαν τα μαθηματικά προβλήματα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού που περιείχαν, σύμφωνα με δύο επίπεδα πολυπλοκότητας: το διαδικαστικό επίπεδο, που αφορά τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για την επίλυση ενός προβλήματος και το σημασιολογικό/μαθηματικό επίπεδο, που αφορά το επίπεδο δυσκολίας του πλαισίου και των πράξεων που πρέπει να εκτελεστούν. Διαπίστωσαν πως στην πλειονότητά τους τα προβλήματα που περιείχαν οι δύο αυτές σειρές σχολικών εγχειριδίων ήταν απλά και παρουσίαζαν περιορισμένη ποικιλομορφία. Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα παρουσίασαν χαμηλή (53,45%) ή μεσαία (35,99%) διαδικαστική πολυπλοκότητα (απαιτούσαν μόνο μία ή δύο πράξεις), ενώ ιδιαίτερα υψηλό ήταν και το ποσοστό των προβλημάτων με χαμηλή (77.21%) ή μεσαία (19.19%) σημασιολογική και μαθηματική πολυπλοκότητα.

Στην Ολλανδία, οι van Zanten και van den Heuvel-Panhuizen (2018) πραγματοποίησαν μία συγκριτική ανάλυση τεσσάρων σειρών ολλανδικών μαθηματικών εγχειριδίων του δημοτικού σχολείου, αναφορικά με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και τις ευκαιρίες που παρέχονται στους μαθητές για την ανάπτυξη της



ικανότητας επίλυσης προβλήματος. Οι σειρές των εγχειριδίων αυτών ήταν η *De Wereld in Getallen* (The World in Numbers), η *Pluspunt* (Plus Point, η *Alles Telt* (Everything Counts) και τέλος, η σειρά *Rekenwonders* (Wonder Calculators). Τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν ότι οι ευκαιρίες που προσφέρουν τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα ολλανδικά εγχειρίδια (*De Wereld in Getallen*, *Pluspunt*, *Alles Telt*) για την επίλυση προβλημάτων είναι πολύ περιορισμένες και αυτές οι ευκαιρίες προσφέρονταν κυρίως σε υλικά που προορίζονται για πιο ικανούς λύτες. Σε όλες τις σειρές εγχειριδίων που περιλαμβάνονταν στην ανάλυσή τους, το ποσοστό των μη τυποποιημένων προβλημάτων (non routine problems) ήταν ιδιαίτερα χαμηλό. Ειδικότερα, στην τετάρτη τάξη το ποσοστό των μη τυποποιημένων προβλημάτων κυμαινόταν από 0 έως 5 %, ενώ στην έκτη τάξη από 2 έως 8 %. Όλες οι σειρές βιβλίων ήταν γεμάτες, κυρίως, με απλά έργα, δηλαδή έργα τα οποία επιλύονται με έναν απλό υπολογισμό ή έργα που παρουσιάζονται μετά από μια εξήγηση ή ένα παράδειγμα που δείχνει πώς μπορεί να επιλυθεί και συνεπώς, ο τρόπος επίλυσης είναι φανερός. Ωστόσο, η μία από τις σειρές σχολικών εγχειριδίων, το *Rekenwonders*, παρείχε τον υψηλότερο αριθμό εργασιών επίλυσης προβλήματος, ακόμη και στο υλικό που προοριζόταν για όλους τους μαθητές (όχι μόνο για τους προχωρημένους μαθητές) και προσέφερε ευρετικές με συστηματικό τρόπο. Το συγκεκριμένο εγχειρίδιο περιείχε συστηματικές οδηγίες, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίες λειτουργούσαν βοηθητικά για την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος. Στις οδηγίες των εκπαιδευτικών του *Rekenwonders* παρέχονταν ευρετικές λύσης προβλημάτων, όπως εικασίες και έλεγχοι, δημιουργία κάποιας συστηματικής λίστας και εργασία προς τα πίσω. Η εκμάθηση της χρήσης των ευρετικών, μάλιστα, αποτελούσε ξεχωριστό μαθησιακό στόχο. Επιπλέον, οι οδηγίες των εκπαιδευτικών παρείχαν προτάσεις για ερωτήσεις προς τους μαθητές ώστε αυτοί να τους ενημερώσουν για τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων που ακολούθησαν. Τέτοια παραδείγματα ήταν το να ζητούν από τους μαθητές να συνοψίζουν τα δεδομένα, τις συνθήκες και τους άγνωστους των προβλημάτων, καθώς και να τους παρακινούν να σκεφτούν κατάλληλες αναπαραστάσεις των προβλημάτων.

Στη Μαλαισία, όταν οι Singh et al., (2020) ανέλυσαν τα λεκτικά προβλήματα από έντεκα σχολικά συγγράμματα των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου, διαπίστωσαν πως οι έντεκα διαφορετικοί τύποι προβλημάτων δεν αντιπροσωπεύονται σε αυτά με

συστηματικότητα. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων υπερεκπροσωπήθηκαν (πρόσθεσης με άγνωστο το τελικό ποσό, αφαίρεσης με άγνωστο το τελικό ποσό, μέρους-όλου με άγνωστο το ολόκληρο ποσό), ενώ άλλες υποεκπροσωπήθηκαν (σύγκρισης με άγνωστο το μεγαλύτερο ποσό, σύγκρισης με άγνωστο το μικρότερο ποσό, πρόσθεσης με άγνωστο το τελικό ποσό). Σύμφωνα με τους Singh et al. (2020), απόρροια αυτής της άνισης κατανομής είναι να μην παρέχονται στους μαθητές οι κατάλληλες ευκαιρίες για επίλυση προβλημάτων, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στα είδη των προβλημάτων που υποεκπροσωπούνται.

Παρόμοια ήταν και τα ευρήματα στον ελληνικό χώρο. Οι Desli και Loukidou (2014), αναλύοντας τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α' και της Β' Δημοτικού, αναφορικά με τους έντεκα τύπους προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, διαπίστωσαν πως υπάρχει άνιση κατανομή των διαφορετικών τύπων προβλημάτων σε αυτά. Τα ευρήματα έδειξαν πως τα προβλήματα πρόσθεσης με άγνωστο το τελικό ποσό (JRU), τα προβλήματα αφαίρεσης με άγνωστο το τελικό ποσό (SRU) και τα προβλήματα μέρους-όλου με άγνωστο το ολόκληρο ποσό (PWWU) εμφανίζονται περισσότερο στα σχολικά εγχειρίδια. Άλλοι τύποι προβλημάτων όπως τα προβλήματα πρόσθεσης με άγνωστο το αρχικό ποσό (JIU) απουσιάζουν από τα σχολικά εγχειρίδια, ενώ τα προβλήματα μέρους-όλου με άγνωστο το μέρος (PWPU) και τα προβλήματα σύγκρισης με άγνωστη τη διαφορά (CDU) υποεκπροσωπούνταν. Επίσης, μελετώντας τις επιδόσεις των μαθητών στα παραπάνω προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης συμπεράναν πως η κακή επίδοσή τους σε ορισμένους από τους τύπους προβλημάτων που υποεκπροσωπούνταν, πιθανότατα, να οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας και εξάσκησης των μαθητών σε τέτοιες προβληματικές καταστάσεις, κάτι που συμφωνεί και με τα ευρήματα από άλλες έρευνες (Singh et al., 2020; Xin, 2007). Συνεπώς, οι μαθητές έτειναν να είναι λιγότερο ικανοί να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που αντιπροσωπεύονταν λιγότερο στα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια. Τέλος, το γεγονός ότι οι καλές επιδόσεις των παιδιών σε τύπους προβλημάτων που εμφανίζονταν συχνά στα σχολικά βιβλία έδειξαν παρόμοιο μοτίβο με την κατανομή αυτών των τύπων προβλημάτων στα εγχειρίδια, υποστηρίζει περαιτέρω τον παραπάνω ισχυρισμό (Desli & Loukidou, 2014).

### **1.Γ.2. Έρευνες που αφορούν στη συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών ανάμεσα σε δύο ή τρεις χώρες**

Όταν οι Vicente et al. (2020) προχώρησαν σε σύγκριση των μαθηματικών σχολικών συγγραμμάτων του Δημοτικού σχολείου ανάμεσα στην Ισπανία και τη Σιγκαπούρη, βρήκαν πως τα βιβλία της Σιγκαπούρης περιλάμβαναν προβλήματα που απαιτούν πολύ περισσότερη συλλογιστική σκέψη σε σχέση με τα ισπανικά εγχειρίδια, ενώ είχαν λιγότερα προβλήματα που σχετίζονται με τη χρήση στρατηγικών και τον έλεγχο. Αυτά τους οδήγησαν στο συμπέρασμα πως τα βιβλία της Σιγκαπούρης παρέχουν καλύτερες σκαλωσιές για την ανάπτυξη μίας πιο υψηλής ποιότητας ικανότητας επίλυσης προβλήματος σε σχέση με τα ισπανικά εγχειρίδια.

Επιχειρώντας να συγκρίνουν τα σχολικά εγχειρίδια των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου της Σιγκαπούρης με τα εγχειρίδια της Κίνας και των Η.Π.Α., οι Fan και Zhu (2007) συμπέραναν πως όσον αφορά τις ευρετικές για την επίλυση προβλήματος, τα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης είναι λιγότερο ελλιπή σε αυτόν τον τομέα. Πιο συγκεκριμένα, τα κινεζικά εγχειρίδια εισήγαγαν μόνο 11 ευρετικές, ενώ αυτά των Η.Π.Α. και της Σιγκαπούρης εισήγαγαν 14 και 16 ευρετικές, αντίστοιχα. Ωστόσο, τα ευρήματα της έρευνάς τους έδειξαν πως στα εγχειρίδια των Η.Π.Α. παρουσιάζονται τουλάχιστον δύο από τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλημάτων του μοντέλου του Polya, ενώ οι δύο ασιατικές σειρές βιβλίων, στις περισσότερες περιπτώσεις, απλώς παρουσίαζαν το στάδιο της «εκτέλεσης του σχεδίου» στις λύσεις των προβλημάτων.

Σε άλλη έρευνά τους, οι Zhu και Fun (2006), ανέλυσαν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου ανάμεσα στις Η.Π.Α. και την Κίνα. Συμπέραναν πως ο συνολικός αριθμός των προβλημάτων που εμπειρείχαν τα αμερικάνικα σχολικά εγχειρίδια ήταν εμφανώς μεγαλύτερος σε σχέση με αυτόν των κινέζικων βιβλίων. Μάλιστα, παρατηρήθηκε πως τα προβλήματα για επίλυση ήταν πολύ περισσότερα από τα προβλήματα εφαρμογών στα αμερικανικά εγχειρίδια, δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στην πρακτική εξάσκηση των μαθητών.

Ακόμη, διαπίστωσαν πως τα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. ήταν πιο εύκολα σε σχέση με αυτά της Κίνας, καθώς πάνω από το 63% των προβλημάτων στα βιβλία των Η.Π.Α. χρειάζονταν μόνο ένα βήμα για να επιλυθούν, ενώ τέτοια προβλήματα στα

κινεζικά εγχειρίδια αποτελούσαν περίπου το 52%. Αυτή η λιγότερο συχνή έκθεση σε προβλήματα πολλαπλών βημάτων για τους μαθητές των Η.Π.Α. μπορεί να είναι ένας λόγος για τον οποίο δεν απέδωσαν τόσο καλά σε αυτό το είδος προβλήματος (Zhu και Fun, 2006). Παρόμοια, όταν οι Stigler, Fuson, Ham και Sook Kim (1986) μελέτησαν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Σοβιετικής Ένωσης σε σύγκριση με τα εγχειρίδια των Η.Π.Α., διαπίστωσαν πως τα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. υστερούν σημαντικά ως προς τον αριθμό των σύνθετων προβλημάτων που απαιτούσαν περισσότερα από ένα βήματα για την επίλυσή τους (multiple problems), σε σχέση με τα εγχειρίδια της Σοβιετικής ένωσης (Stigler et al., 1986).

Επίσης, σύμφωνα με τους Zhu και Fun (2006), η πλειοψηφία των προβλημάτων τόσο στα βιβλία των Η.Π.Α. όσο και στα βιβλία της Κίνας, είναι τυποποιημένα και παραδοσιακά προβλήματα. Ωστόσο, μεταξύ του μικρού αριθμού των μη τυποποιημένων προβλημάτων που βρέθηκαν, μεγαλύτερη ποικιλία υπάρχει στα βιβλία των Η.Π.Α.. Ειδικότερα, τα αμερικανικά εγχειρίδια είχαν και τους τέσσερις τύπους μη παραδοσιακών προβλημάτων, ενώ τα κινεζικά βιβλία περιλαμβάνουν μόνο την κατασκευή προβλημάτων και τα προβλήματα γρίφων.

Όσον αφορά τη συσχέτιση των προβλημάτων με την πραγματική ζωή των μαθητών, τα περισσότερα προβλήματα τόσο στα κινεζικά όσο και στα αμερικανικά εγχειρίδια δεν αφορούν πραγματικές καταστάσεις, κάτι το οποίο είναι πιο προφανές στα βιβλία της Κίνας. Η διαφοροποίηση αυτή είναι πιο εμφανής αναφορικά με τα αυθεντικά προβλήματα εφαρμογής, μιας και στα κινεζικά εγχειρίδια τα αυθεντικά προβλήματα αποτελούν μόλις το 1% του συνόλου των προβλημάτων, ενώ στα αμερικανικά βιβλία τα αυθεντικά προβλήματα κατέχουν το 7,7% (Zhu & Fun, 2006).

Τέλος, και στις δύο σειρές βιβλίων περισσότερο από το 90% των προβλημάτων είναι κλειστού τύπου προβλήματα, ενώ σχεδόν όλα τα προβλήματα και των δύο χωρών είναι επαρκών δεδομένων, καθώς παρέχουν στους μαθητές ακριβώς τις απαραίτητες πληροφορίες για τη λύση του προβλήματος. Αυτό, ωστόσο, είναι κάτι το οποίο έρχεται σε ρήξη με την πραγματικότητα, όπου τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν τις χρήσιμες πληροφορίες για την επίλυση των καθημερινών τους προβλημάτων (Zhu & Fun, 2006).

Η Xin (2007) μελέτησε, επίσης, τα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. σε σύγκριση με τα εγχειρίδια της Κίνας, παρέχοντας σημαντικά στοιχεία για το πώς το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να επηρεάσουν τις επιδόσεις των μαθητών. Ειδικότερα, συμπέρανε πως τα εγχειρίδια των Η.Π.Α. παρέχουν μία άνιση κατανομή των λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στους διάφορους τύπους προβλημάτων. Αντιθέτως, τα κινέζικα σχολικά εγχειρίδια, όχι μόνο παρέχουν στους μαθητές ίσες ευκαιρίες για την επίλυση διαφόρων ειδών προβλημάτων, αλλά απαιτούν από τους μαθητές να λύσουν και όλες τις παραλλαγές ενός τύπου προβλήματος. Αυτές οι ποικίλες παραλλαγές ενός τύπου προβλήματος δίνουν στους λύτες τη δυνατότητα να διδάσκονται ή να εκτίθενται σε μία πιο ολιστική προσέγγιση ενός τύπου προβλήματος, το οποίο με τη σειρά του συμβάλει στην ανάπτυξη των γενικότερων δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων (Xin, 2007).

Ο Li (2000) χρησιμοποιώντας ένα τρισδιάστατο μοντέλο ανάλυσης των προβλημάτων, ανέλυσε κι αυτός τα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. συγκριτικά με αυτά της Κίνας, προκειμένου να διερευνηθούν οι διακρατικές διαφορές στην μαθηματική εκπαίδευση και στις αποδόσεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, ταξινόμησε τα προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων της Κίνας και των Η.Π.Α. σχετικά με: α) τον αριθμό των απαιτούμενων πράξεων, β) τα χαρακτηριστικά του πλαισίου, γ.i) τον τύπο της απάντησης και γ.ii) τις γνωστικές απαιτήσεις του προβλήματος. Τα ευρήματα της έρευνάς του έδειξαν πως το 19% των προβλημάτων των αμερικανικών εγχειριδίων απαιτούν αιτιολόγηση για την απάντηση, σε αντίθεση με τα κινέζικα εγχειρίδια, όπου κανένα δεν ζητά κάποια επεξήγηση. Σε αντίθεση με τον Li (2000), ήλθαν τα ευρήματα των Xin et al. (2011) όταν ανέλυσαν τέσσερις παραδοσιακές σειρές εγχειριδίων και δύο σειρές των Η.Π.Α. που βασίζονται σε πρότυπα, μαζί με μία σειρά από την Κίνα. Όπως διαπίστωσαν, τα παραδοσιακά βιβλία των Η.Π.Α. έχουν τα λιγότερα προβλήματα που απαιτούν μια επεξήγηση, ακολουθούμενη από τα κινεζικά βιβλία, ενώ οι σειρές βάσει προτύπων έχουν τα περισσότερα προβλήματα που απαιτούν μια εξήγηση. Ομοίως, οι Sun και Kulm (2010) διαπίστωσαν ότι η κινεζική σειρά χρησιμοποίησε περισσότερες ερωτήσεις που απαιτούσαν εξήγηση ή αιτιολόγηση από ό,τι οι αμερικανικές σειρές εγχειριδίων βάσει προτύπων.

Επίσης, σύμφωνα με τον Li (2000), όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του πλαισίου του προβλήματος, το 90% των κινεζικών και το 87% των αμερικανικών προβλημάτων που αναλύθηκαν είχαν καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο. Τέλος, το 80% των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων και των δύο εθνών απαιτούσαν την εκτέλεση μίας μόνο αριθμητικής πράξης για την εύρεση του αποτελέσματος. Ωστόσο, ανέφερε ότι το είδος της απάντησης που απαιτείται σε ένα πρόβλημα (π.χ. μια εξήγηση) και οι γνωστικές πτυχές του (π.χ. εννοιολογική κατανόηση) ήταν σημαντικά προβληματικά χαρακτηριστικά που εξηγούν τις διαφορές στην απόδοση μεταξύ των μαθητών στις Η.Π.Α. και την Κίνα.

Οι Son και Senk (2010) χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο τρισδιάστατο μοντέλο ανάλυσης με τον Li (2000), μελέτησαν τα προβλήματα διαίρεσης και πολλαπλασιασμού στα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. συγκριτικά με αυτά της Κορέας, προκειμένου να διερευνηθούν οι διακρατικές διαφορές στη μαθηματική εκπαίδευση και στις αποδόσεις των μαθητών. Συμπέραναν πως τα προβλήματα που αναλύθηκαν, στην πλειονότητά τους, απαιτούσαν μόνο μία αριθμητική απάντηση, ενώ περισσότερα προβλήματα στα εγχειρίδια της Κορέας ζητούσαν κάποια επεξήγηση. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι η κατανομή των τύπων απάντησης στα εγχειρίδια των Η.Π.Α. είναι πιο ποικίλη από εκείνη των εγχειριδίων της Κορέας. Επιπλέον, τα περισσότερα προβλήματα και στα δύο εγχειρίδια παρουσιάζονται με καθαρά μαθηματικά αναπαραστατικά μέσα. Περίπου το 30% των προβλημάτων στις Η.Π.Α. και στην Κορέα παρουσιάζονται με εικόνες ή λεκτικά μέσα αναπαράστασης, το οποίο φανερώνει πως τόσο στις Η.Π.Α. όσο και στην Κορέα δίνουν παρόμοια έμφαση στα προβλήματα σε εικονικά μέσα αναπαράστασης. Τέλος, τα περισσότερα προβλήματα και στα δύο προγράμματα σπουδών απαιτούν μόνο ένα βήμα για την επίλυσή τους. Ωστόσο, περίπου το 18% των προβλημάτων στα εγχειρίδια της Κορέας και μόνο το 1% των προβλημάτων στα βιβλία των Η.Π.Α. απαιτούσαν πολλαπλά υπολογιστικά βήματα. Αυτό το αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι τα προβλήματα στην Κορέα μπορεί να είναι πιο δύσκολα από αυτά στις Η.Π.Α.. Η έλλειψη ευκαιριών για τους μαθητές των Η.Π.Α. να εμπλακούν σε προβλήματα πολλαπλών βημάτων μπορεί να είναι ένας λόγος για τον οποίο δεν αποδίδουν καλά σε αυτό το είδος προβλήματος (Son & Senk, 2010).

Συνοψίζοντας, είναι εμφανές πως η ανάλυση των μαθηματικών εγχειριδίων ως προς τα είδη των προβλημάτων που εμπεριέχουν απασχολεί μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής κοινότητας. Η έρευνα γύρω από τη θεματική αυτή δύναται να συμβάλει στη βελτίωση των εγχειριδίων και του τρόπου χρήσης τους στην τάξη, ώστε να βελτιωθούν και οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλήματος. Αναδεικνύεται, λοιπόν, η ανάγκη να πραγματοποιηθεί μία έρευνα στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για το Δημοτικό σχολείο, αναφορικά με τους τύπους προβλημάτων που εμπεριέχονται σε αυτά, η μεθοδολογία της οποίας παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 2.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

---

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

### 2.A. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Πραγματώνοντας την παρούσα έρευνα γίνεται μία προσπάθεια καταγραφής και ανάλυσης της επίλυσης προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια στα ελληνικά δημοτικά σχολεία. Δεδομένης της αποκλειστικότητας των σχολικών εγχειριδίων που διανέμονται στα ελληνικά σχολεία και της σημασίας τους, αφού αποτελούν το βασικότερο μέσο διδασκαλίας στις σχολικές τάξεις, η ανάλυσή τους, ενδεχομένως, να συμβάλει στην ενημέρωση των υπεύθυνων με νέα δεδομένα για πιθανή μελλοντική βελτίωση ή τροποποίηση.

Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στο να μελετήσει τα μαθηματικά προβλήματα που εμπεριέχονται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου και της επίλυσης προβλήματος σε αυτά.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα τα οποία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

- Ποια είδη προβλημάτων εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια;
- Ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης των προβλημάτων στο βιβλίο και στο τετράδιο εργασιών του μαθητή;
- Πώς συνδέονται τα μαθηματικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων με την καθημερινή ζωή;

### 2.B. Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου - Αντικείμενο μελέτης

Τα αποτελέσματα ερευνών, όσον αφορά τα θέματα αξιολόγησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Καργιωτάκης κ.ά., 2006), οδήγησαν και στη χώρα μας στο να δημιουργηθούν τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα και συνακόλουθα, το ισχύον εκπαιδευτικό υλικό στα επιμέρους γνωστικά αντικείμενα στο Δημοτικό σχολείο. Τα



σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου εισήχθησαν στις τάξεις για πρώτη φορά κατά το σχολικό έτος 2007-2008. Δημιουργήθηκαν σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) του 2003, το οποίο δίνει βαρύνουσα σημασία στη διαθεματικότητα και την προώθηση της ενεργητικής μάθησης (ΥΠΕΠΘ, 2001).

Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. (Καργιωτάκης κ.ά, 2006; ΥΠΕΠΘ, 2001), η νέα προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλάζει καθώς δίνεται ιδιαίτερη προσοχή και έμφαση στην καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων. Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης μετατοπίζονται κυρίως από την εκμάθηση των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων και των τύπων τους στην εκμάθηση επίλυσης ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων. Τα προβλήματα προέρχονται μέσα από την καθημερινή ζωή και έχουν νόημα για τα παιδιά, βοηθώντας τα να κατανοήσουν ότι η χρησιμότητα των μαθηματικών έγκειται στην επίλυση προβλημάτων.

Οι ειδικοί σκοποί των μαθηματικών για το δημοτικό σχολείο, όπως ορίζονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το Α.Π.Σ. (ΥΠΕΠΘ, 2001), είναι η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων, η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσο επικοινωνίας, η κατανόηση στοιχειωδών μαθηματικών μεθόδων, η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία, η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των μαθηματικών, η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών) και η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά.

Στην παρούσα έρευνα αντικείμενο μελέτης αποτελούν τα λεκτικά προβλήματα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου. Ως λεκτικά προβλήματα ορίζονται οι «λεκτικές περιγραφές προβληματικών καταστάσεων, που δημιουργούν ένα ή περισσότερα ερωτήματα, των οποίων οι απαντήσεις μπορούν να βρεθούν με την εφαρμογή μαθηματικών πράξεων στα αριθμητικά δεδομένα που υπάρχουν στο πρόβλημα» (Vicente et al., 2020).

Η επιλογή των συγκεκριμένων εγχειριδίων έγινε, αρχικά, λόγω του ότι η Δ' τάξη αποτελεί την πρώτη από τις τρεις μεγάλες τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Αυτό, σε συνδυασμό με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και τον σπουδαίο ρόλο της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος σε αυτή, δημιουργεί την ανάγκη να ερευνηθεί πώς παρουσιάζεται η επίλυση μαθηματικού προβλήματος στις πιο μεγάλες τάξεις και αν παρέχονται στους μαθητές οι κατάλληλες ευκαιρίες μάθησης. Επίσης, τα εγχειρίδια της Δ' τάξης είναι πλούσια σε λεκτικά προβλήματα και προσφέρονται για μία τέτοιου είδους ανάλυση.

Τέλος, σύμφωνα με την εισήγηση του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) σε ό,τι αφορά την αναδιάρθρωση, τον εξορθολογισμό και τη διαχείριση της διδακτέας ύλης για το μάθημα των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, προτάθηκαν ορισμένες διορθώσεις σχετικά με την ύλη των Διδακτικών Πακέτων των έξι τάξεων. Όσον αφορά την ύλη της Δ' τάξης διαπιστώθηκε πως πολλά προβλήματα θεωρούνται ιδιαίτερα πολύπλοκα και απαιτητικά για το αντιληπτικό επίπεδο των μαθητών της Δ' τάξης και θα ήταν προτιμότερο να μελετηθούν στην επόμενη τάξη (Γενική Δ/ση σπουδών Π/θμιας και Δ/θμιας Εκπαίδευσης, Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων και Οργάνωσης Π.Ε., Τμήμα Α' Σπουδών και Εφαρμογής Προγραμμάτων: Εγκύκλιος Αναδιάρθρωσης και Εξορθολογισμού της Διδακτέας ύλης των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, 2016). Τονίστηκε, επίσης, πως «στα κεφάλαια που πραγματεύονται την επίλυση προβλημάτων (...) είναι παιδαγωγικά επιθυμητό και ευκαίριο να δοθεί αυξημένη βαρύτητα και περισσότερος διδακτικός χρόνος και η προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος ρουτίνας δεν συμβάλει επ' ουδενί στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Από την άλλη μεριά, τα πολύ δύσκολα προβλήματα αφαιρούν τα περιθώρια συμφιλίωσης των μαθητών με τα Μαθηματικά».

### **2.B.1. Ανάλυση περιεχομένου - Τα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης των Μαθηματικών**

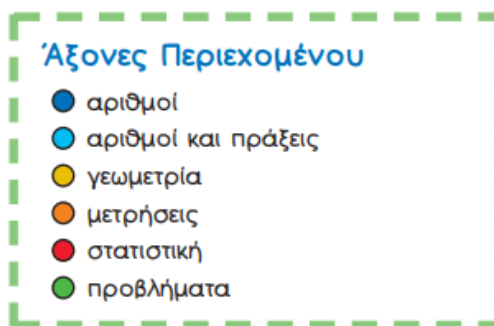
Το διδακτικό πακέτο των Μαθηματικών για την Δ' τάξη του δημοτικού σχολείου (Βαμβακούση κ.ά., 2007a, 2007b, 2007c, 2007d, 2007e, 2007e) περιλαμβάνει το έντυπο υλικό και το συνοδευτικό λογισμικό. Το έντυπο υλικό αποτελείται από: α) ένα Βιβλίο Μαθητή, στο οποίο γίνεται η εισαγωγή στις νέες έννοιες με τις δραστηριότητες

ανακάλυψης, β) τέσσερα τεύχη Τετραδίων Μαθητή, όπου υπάρχουν εργασίες διαφόρων τύπων και επιπέδων δυσκολίας, με τις οποίες επιχειρείται τα παιδιά να εξασκηθούν, να εμβαθύνουν και να επεκτείνουν τις γνώσεις που αποτελούν διδακτικό στόχο του κεφαλαίου και γ) ένα Βιβλίο δασκάλου, το οποίο παρέχει οδηγίες και καθοδηγεί τους εκπαιδευτικούς για το πώς να χειριστούν το μαθηματικό περιεχόμενο και τα έργα. Το Εκπαιδευτικό Λογισμικό (CD-ROM) συμπληρώνει το διδακτικό πακέτο των Μαθηματικών με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών μέσα από ψηφιακές δραστηριότητες.

Το διδακτικό υλικό οργανώνεται βάσει του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών σε έξι άξονες γνωστικού περιεχομένου: αριθμοί και πράξεις, μετρήσεις, γεωμετρία, συλλογή και επεξεργασία δεδομένων/στατιστική και επίλυση προβλήματος. Παρακάτω, στις εικόνες 2.1, 2.2 παρουσιάζονται οι άξονες περιεχομένου με τους χρωματικούς κωδικούς ανά γνωστική περιοχή.

Πίνακας 3.					
Χρωματικός κωδικός ανά γνωστική περιοχή					
<b>Αριθμοί</b>	<b>Πράξεις</b>	<b>Γεωμετρία</b>	<b>Μετρήσεις</b>	<b>Διαχείριση δεδομένων</b>	<b>Προβλήματα</b>
(μπλε)	(γαλάζιο)	(κίτρινο)	(πορτοκαλί)	(κόκκινο)	(πράσινο)

**Εικόνα. 2.1:** Προκαταβολικοί οργανωτές που δηλώνουν τον τρόπο οργάνωσης στη Δ' τάξη (Πηγή: Βαμβακούση κ.α., 2007b, σελ.16)



**Εικόνα. 2.2:** Προκαταβολικοί οργανωτές που δηλώνουν τον τρόπο οργάνωσης στη Δ' τάξη (Πηγή: Βαμβακούση κ.α., 2007b, σελ.6)

Η ύλη και οι διδακτικοί στόχοι που προβλέπονται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών καταμερίζονται σε 3 περιόδους (Α΄, Β΄, Γ΄ περίοδος) και κάθε περίοδος χωρίζεται σε 3 ενότητες. Στην Εικόνα 2.3 παρουσιάζονται οι περίοδοι, οι αντίστοιχες ενότητες και το αντικείμενο που αυτές διαπραγματεύονται.

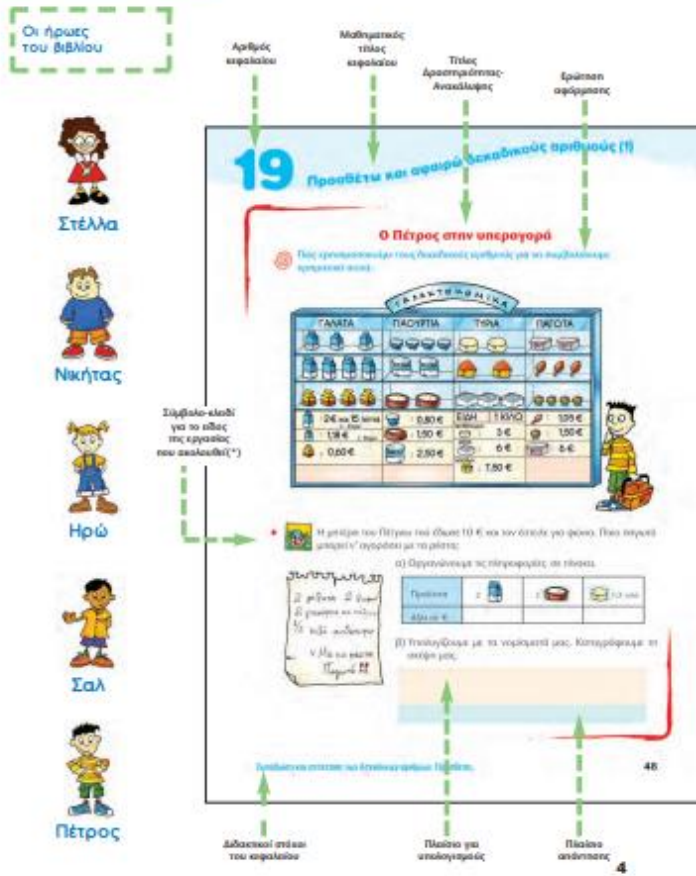
<b>Πίνακας 2</b> <b>Κατανομή της ύλης ανά περίοδο</b>			
	<b>Α΄ Ενότητα</b>	<b>Β΄ Ενότητα</b>	<b>Γ΄ Ενότητα</b>
<b>Α΄ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για τους αριθμούς μέχρι το 10.000.</li> <li>■ Παρουσίαση των αριθμών μέχρι το 20.000.</li> <li>■ Επανάληψη και επέκταση των γνώσεων για τα επίπεδα σχήματα</li> <li>■ Εισαγωγή στη διαχείριση προβλήματος.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Επανάληψη και επέκταση των γνώσεων για τις 4 πράξεις και τις ιδιότητές τους.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση των γνώσεων για τους δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία και τα δεκαδικά κλάσματα.</li> <li>■ Μετρήσεις μήκους μάζας, χρήσιμος.</li> <li>■ Εμφάνιση του 3ου δεκαδικού ψηφίου.</li> <li>■ Εμφάνιση των συμμετρών και των δεκαδικών κλασμάτων στο πλαίσιο των μετρήσεων.</li> <li>■ Προβληματικές καταστάσεις με δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία.</li> </ul>
<b>Β΄ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Επιστημοποίηση, σταθεροποίηση και επέκταση των γνώσεων για τους δεκαδικούς με 3 δεκαδικά ψηφία, τα δεκαδικά κλάσματα και τους συμμετρής αριθμούς.</li> <li>■ Παρόμοια και για τις μονάδες μέτρησης μήκους και βάρους.</li> <li>■ Προβληματικές καταστάσεις με δεκαδικούς και συμμετρής.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για συνήθη επίπεδα σχήματα.</li> <li>■ Η έννοια και η μέτρηση της επιφάνειας.</li> <li>■ Η έννοια της συμμετρίας.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Παρουσίαση και διαχείριση των αριθμών ως το 200.000.</li> <li>■ Επέκταση των γνώσεων για τις 4 πράξεις σε μεγαλύτερους αριθμούς.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> </ul>
<b>Γ΄ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εισαγωγή των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού με τριψήφιο πολλαπλασιαστή και της διαίρεσης με διψήφιο διαιρέτη.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλημάτων.</li> <li>■ Η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Παρουσίαση και διαχείριση των αριθμών ως το 1.000.000.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> <li>■ Μέτρηση χρόνου.</li> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση της έννοιας του μοτίβου. Εισαγωγή στην έννοια του αναδρομικού μοτίβου.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για τα στερεά σώματα.</li> <li>■ Εισαγωγή στην έννοια και τη μέτρηση της χωρητικότητας.</li> <li>■ Επιστημοποίηση και εφαρμογή των γνώσεων για τη Στατιστική.</li> </ul>

**Εικόνα 2.3: Η κατανομή της ύλης ανά περίοδο στη Δ΄ τάξη (Πηγή: Βαμβακούση κ.α., 2007α, σελ.15)**

Συνολικά, το Βιβλίο του Μαθητή αποτελείται από 56 δισέλιδα κεφάλαια και από 9 επαναληπτικά, καθένα από τα οποία συνοδεύεται από το αντίστοιχο δισέλιδο στο Τετράδιο Μαθητή. Κάθε κεφάλαιο αντιστοιχεί σε 1 ή 2 διδακτικές ώρες, κάτι το οποίο διευκρινίζεται στο Βιβλίο του Δασκάλου. Σε κάποια κεφάλαια, όπως, για παράδειγμα, στα κεφάλαια που γίνεται εξοικείωση με τη χρήση οργάνων, υπάρχει ειδική αναφορά με οδηγίες στο Βιβλίο του Δασκάλου, η οποία προβλέπει περισσότερες από 1 ή 2 ώρες για εξάσκηση.

Κάθε δισέλιδο του Βιβλίου ξεκινά με την Ερώτηση Αφόρμησης, η οποία, κατά περίπτωση, δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να διερευνήσει την προηγούμενη γνώση των παιδιών σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους του κεφαλαίου. Έπειτα, ακολουθεί η Δραστηριότητα Ανακάλυψης (Δ/Α), στην οποία τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους και ακολουθούν κάποιες Εργασίες, στις οποίες επεξεργάζονται περαιτέρω τις έννοιες, που αποτελούν στόχο του κεφαλαίου. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζεται το Συμπέρασμα, το οποίο επισημοποιεί τη γνώση που επεξεργάστηκαν τα παιδιά (Εικ. 2.4). Στα κεφάλαια του Τετραδίου Μαθητή, οι μαθητές εκτελούν εργασίες διαφόρων τύπων και επιπέδων δυσκολίας ώστε να εξασκηθούν, να εμβαθύνουν και να εμπεδώσουν τις γνώσεις που αποτελούν τον διδακτικό στόχο του κεφαλαίου (Βαμβακούση κ.α., 2007a).

# Η Δομή του Βιβλίου



Εικόνα. 2.4: : Η δομή και η οργάνωση του κάθε κεφαλαίου στη Δ' τάξη (Πηγή: Βαμβακούση κ.ά., 2007b, σελ.4)

## 2.B.2. Τα λεκτικά προβλήματα στα εγχειρίδια της Δ' Δημοτικού που μελετήθηκαν

Στην παρούσα έρευνα αντικείμενο μελέτης αποτελούν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετηθούν τα λεκτικά προβλήματα που εμπεριέχονται στο βιβλίο του μαθητή και στα τέσσερα τεύχη των τετραδίων εργασιών της Δ' τάξης.

Να σημειωθεί πως τα λεκτικά προβλήματα του Βιβλίου του Μαθητή τα οποία συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση δεν ανήκουν στις εισαγωγικές δραστηριότητες ανακάλυψης του εκάστοτε κεφαλαίου, αλλά μόνο στις εργασίες.

Επίσης, στην ανάλυση δεν εντάσσονται τα κεφάλαια της γεωμετρίας, αλλά μόνο αυτά που το γνωστικό τους αντικείμενο ανήκει στους αριθμούς, στους αριθμούς και πράξεις, στις μετρήσεις, στη στατιστική και στα προβλήματα (βλ. Εικόνα 2.2). Η εν λόγω διάκριση έγκειται στο γεγονός ότι, σύμφωνα με τον ορισμό των λεκτικών προβλημάτων που υιοθετήθηκε στην παρούσα μελέτη (Vicente et al., 2020), για να συμπεριληφθεί ένα πρόβλημα στην ανάλυση θα πρέπει να διαθέτει λεκτική περιγραφή της προβληματικής κατάστασης και να απαιτεί την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων στα δεδομένα του προβλήματος για την επίλυσή του. Η εκτέλεση μαθηματικών πράξεων στα κεφάλαια της γεωμετρίας απουσιάζει από την πλειοψηφία των έργων και για τον λόγο αυτό αφαιρέθηκαν από την ανάλυση.

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2.1) παρουσιάζονται τα κεφάλαια τα οποία μελετήθηκαν και στην Εικόνα 2.5 παρουσιάζονται οι στόχοι που έχουν τεθεί για τη διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΥΠΕΠΘ, 2001).

Περίοδοι	Ενότητες	Κεφάλαια	Τίτλοι κεφαλαίων	Σελίδες στο ΒΜ	Τεύχος ΤΜ	Σελίδες στα ΤΜ
	1 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 1	Θυμάμαι ό,τι έμαθα από την Γ' τάξη	8-9	α' τεύχος	6-7
		Κεφάλαιο 2	Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 10.000	10-11	α' τεύχος	8-9
		Κεφάλαιο 3	Γνωρίζω τους αριθμούς ως το 20.000	12-13	α' τεύχος	10-11

Α΄ περίοδος		Κεφάλαιο 4	Αναλύω και συγκρίνω αριθμούς ως το 20.000	14-15	α΄ τεύχος	12-13
		Κεφάλαιο 6	Οργάνωση δεδομένων και πληροφοριών	18-19	α΄ τεύχος	16-17
		Κεφάλαιο 7	Αξιολογώ και οργανώνω πληροφορίες	20-21	α΄ τεύχος	18-19
		1 <sup>η</sup> επανάληψη		22-23	α΄ τεύχος	20-21
	2 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 8	Προσθέτω και αφαιρώ	24-25	α΄ τεύχος	22-23
		Κεφάλαιο 9	Πολλαπλασιάζω με διάφορους τρόπους	26-27	α΄ τεύχος	24-25
		Κεφάλαιο 10	Επιλύω προβλήματα	28-29	α΄ τεύχος	26-27
		Κεφάλαιο 11	Πολλαπλασιάζω και διαιρώ	30-31	α΄ τεύχος	28-29
		Κεφάλαιο 12	Διαιρώ με διάφορους τρόπους	32-33	α΄ τεύχος	30-31
		Κεφάλαιο 13	Τέλεια και ατελής διαίρεση	34-35	α΄ τεύχος	32-33
		Κεφάλαιο 14	Διαχειρίζομαι προβλήματα	36-37	α΄ τεύχος	34-35
		2 <sup>η</sup> επανάληψη		38-39	α΄ τεύχος	36-37
	3 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 15	Θυμάμαι τους δεκαδικούς αριθμούς	40-41	β΄ τεύχος	6-7
		Κεφάλαιο 16	Νομίσματα και δεκαδικοί αριθμοί	42-43	β΄ τεύχος	8-9



		Κεφάλαιο 17	Μετρώ και εκφράζω το μήκος	44-45	β' τεύχος	10-11
		Κεφάλαιο 18	Μετρώ το βάρος	46-47	β' τεύχος	12-13
		Κεφάλαιο 19	Προσθέτω και αφαιρώ δεκαδικούς αριθμούς (1)	48-49	β' τεύχος	14-15
		Κεφάλαιο 20	Προσθέτω και αφαιρώ δεκαδικούς αριθμούς (2)	50-51	β' τεύχος	16-17
		3 <sup>η</sup> επανάληψη		52-53	β' τεύχος	18-19
Β' περίοδος	4 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 21	Γνωρίζω καλύτερα τους δεκαδικούς	56-57	β' τεύχος	22-23
		Κεφάλαιο 22	Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς	58-59	β' τεύχος	24-25
		Κεφάλαιο 23	Υπολογίζω με συμμιγείς και δεκαδικούς	60-61	β' τεύχος	26-27
		Κεφάλαιο 24	Διαιρώ με 10, 100, 1000	62-63	β' τεύχος	28-29
		Κεφάλαιο 25	Επιλύω προβλήματα	64-65	β' τεύχος	30-31
		Κεφάλαιο 26	Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς	66-67	β' τεύχος	32-33
			4 <sup>η</sup> επανάληψη		68-69	β' τεύχος
		Κεφάλαιο 35	Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 20.000	88-89	γ' τεύχος	24-25

	6 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 36	Γνωρίζω τους αριθμούς ως το 100.000	90-91	γ' τεύχος	26-27	
		Κεφάλαιο 37	Γνωρίζω τους αριθμούς ως το 200.000	92-93	γ' τεύχος	28-29	
		Κεφάλαιο 38	Διαχειρίζομαι προβλήματα	94-95	γ' τεύχος	30-31	
		Κεφάλαιο 39	Εκτιμώ και υπολογίζω με τον νου	96-97	γ' τεύχος	32-33	
		Κεφάλαιο 40	Πολλαπλασιάζω και διαιρώ	98-99	γ' τεύχος	34-35	
		6 <sup>η</sup> επανάληψη		100-101	γ' τεύχος	36-37	
	Γ' περίοδος	7 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 41	Πολλαπλασιάζω με τριψήφιο πολλαπλασιαστή	104-105	δ' τεύχος	6-7
			Κεφάλαιο 42	Διαιρώ με διψήφιο διαιρέτη	106-107	δ' τεύχος	8-9
			Κεφάλαιο 43	Αντίστροφα προβλήματα	108-109	δ' τεύχος	10-11
			Κεφάλαιο 44	Μαθαίνω για την αναγωγή στη μονάδα	110-111	δ' τεύχος	12-13
Κεφάλαιο 45			Διαχειρίζομαι σύνθετα προβλήματα	112-113	δ' τεύχος	14-15	
Κεφάλαιο 46			Διατυπώνω και επιλύω προβλήματα	114-115	δ' τεύχος	16-17	
		7 <sup>η</sup> επανάληψη		116-117	δ' τεύχος	18-19	
	Κεφάλαιο 47	Γνωρίζω τους αριθμούς ως το	118-119	δ' τεύχος	20-21		

		1.000.000			
8 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 48	Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 1.000.000	120-121	δ' τεύχος	22-23
	Κεφάλαιο 49	Διαχειρίζομαι προβλήματα με μεγάλους αριθμούς	122-123	δ' τεύχος	24-25
	Κεφάλαιο 50	Μετρώ τον χρόνο (1)	124-125	δ' τεύχος	26-27
	Κεφάλαιο 51	Μετρώ τον χρόνο (2)	126-127	δ' τεύχος	28-29
	8 <sup>η</sup> επανάληψη		128-129	δ' τεύχος	30-31
9 <sup>η</sup> ενότητα	Κεφάλαιο 54	Μαθαίνω για τη χωρητικότητα	134-135	δ' τεύχος	36-37
	Κεφάλαιο 55	Μοτίβα	136-137	δ' τεύχος	38-39
	Κεφάλαιο 56	Διαχειρίζομαι πληροφορίες	138-139	δ' τεύχος	40-41
	9 <sup>η</sup> επανάληψη		140-141	δ' τεύχος	42-43

**Πίνακας 2.1: Συγκεντρωτικός πίνακας των κεφαλαίων που μελετήθηκαν από το Βιβλίο και τα Τετράδια Μαθητή της Δ' τάξης**

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
<p>Πριν από τους άξονες: 1. Αριθμοί και πράξεις 2. Μετρήσεις 3. Γεωμετρία, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων γίνονται επαναληπτικές δραστηριότητες και αυτο-αξιολόγηση, ώστε οι μαθητές:</p> <p>Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες</p> <p>Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση.</p> <p>Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής.</p> <p>Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις.</p> <p>Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του.</p> <p>Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης.</p> <p>Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα.</p> <p>Να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση.</p> <p>Να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα.</p> <p>Να αυτο-αξιολογούν τις γνώσεις και</p>	<p>Επίλυση προβλήματος</p> <p>Επίλυση προβλημάτων</p> <p>(18 ώρες)</p>	<p>Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα.</p> <p>Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος.</p> <p>Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος.</p> <p>Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως:</p> <p>σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση</p> <p>δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις</p> <p>Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται παρακάτω στον κάθε επιμέρους άξονα.</p>
<p>ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία.</p>		

**Εικόνα 2.5: Οι στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στη Δ΄ τάξη (Πηγή: ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ, 2003, σελ.263-264)**

### 2.B.3. Κριτήρια ανάλυσης και διαδικασία

Το μεθοδολογικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα ανάγεται στην ανάλυση περιεχομένου (content analysis) και «εστιάζει στους τρόπους με τους οποίους τα θέματα εντός ενός κειμένου γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης και τη συχνότητά τους» και «η αναζήτηση των θεμάτων γίνεται στη βάση προκαθορισμένων

ερωτημάτων ή συστήματος κατηγοριών» (Τσιώλης, 2015, σ. 8). Ειδικότερα, η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στη συστηματική συλλογή και ανάλυση των λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Η επιλογή του παραπάνω σχεδιασμού έρευνας έγινε με σκοπό να συλλεχθούν, να οργανωθούν και να μελετηθούν τα διαφορετικά είδη λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχονται στα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια. Έτσι, μέσα από τη συστηματική ταξινόμηση των διαφορετικών κατηγοριών των προβλημάτων, δύναται να διεξαχθεί ένα σαφές συμπέρασμα για τα είδη των προβλημάτων, τη συχνότητα εμφάνισής τους και τη σύνδεσή τους με την καθημερινή ζωή των μαθητών στην ύλη της Δ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου.

Όσον αφορά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε, αρχικά έγινε καταγραφή και ομαδοποίηση των λεκτικών προβλημάτων του βιβλίου και των τεσσάρων τευχών των τετραδίων εργασιών του μαθητή ανά σχολικό εγχειρίδιο. Στη συνέχεια, σε συνάρτηση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και τη βιβλιογραφία, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση του περιεχομένου των εγχειριδίων των Μαθηματικών της Δ' τάξης και η ταξινόμηση των λεκτικών προβλημάτων στις επιμέρους κατηγορίες (Πίνακας 2.2). Έτσι, οι κατηγορίες στις οποίες ταξινομήθηκαν είναι οι εξής:

**1) Ανοιχτά - Κλειστά:** Εάν σε ένα πρόβλημα υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, τότε αυτό ταξινομείται στα *ανοιχτά* προβλήματα. Εάν υπάρχει μία και μοναδική σωστή λύση, τότε ανήκει στα *κλειστά* προβλήματα.

**2) Ενός βήματος – πολλαπλών βημάτων:** Εάν για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτούνται πάνω από μία αριθμητικές πράξεις για την εύρεση του αποτελέσματος, τότε αυτό συγκαταλέγεται στα *προβλήματα πολλαπλών βημάτων*. Αντιθέτως, εάν για την εύρεση της λύσης απαιτείται η εκτέλεση μόνο μίας αριθμητικής πράξης, τότε αυτό ανήκει στα *προβλήματα ενός βήματος*. Στο σημείο αυτό να σημειωθεί πως τα προβλήματα που αποτελούνται από πολλά ερωτήματα ή υποερωτήματα, συγκαταλέγονται στα προβλήματα πολλαπλών βημάτων, ακόμη και αν για την επίλυση του κάθε υποερωτήματος απαιτείται η εκτέλεση μίας μόνο αριθμητικής πράξης.

**3) Προβλήματα επαρκών – περιττών – ανεπαρκών δεδομένων:** Εάν σε ένα πρόβλημα παρέχονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες που το καθιστούν επιλύσιμο, τότε αυτό χαρακτηρίζεται *πρόβλημα επαρκών δεδομένων*. Εάν οι πληροφορίες που δίνονται δεν αρκούν για να βρεθεί η λύση στα ζητούμενα του προβλήματος, χαρακτηρίζεται ως *ελλιπών δεδομένων*, ενώ αν παρέχονται περισσότερες πληροφορίες από αυτές που χρειάζονται για την εύρεση της λύσης, ανήκει στα *προβλήματα περιττών δεδομένων*. Στα λεκτικά προβλήματα που απαιτείται η δημιουργία είτε ενός μέρους είτε ενός ολόκληρου προβλήματος, εφόσον οι πληροφορίες που παρέχονται στην εκφώνηση καθιστούν το πρόβλημα επιλύσιμο, αυτό χαρακτηρίζεται πρόβλημα επαρκών δεδομένων.

**4) Τυποποιημένα – Μη τυποποιημένα:** ανάλογα με το πόσο προφανής και γνωστός είναι ο τρόπος λύσης, τα προβλήματα ταξινομούνται σε τυποποιημένα και μη τυποποιημένα. Εάν ένα πρόβλημα απαιτεί ευέλικτο, κριτικό και παραγωγικό τρόπο σκέψης και η επίλυση του δεν απαιτεί την απλή εφαρμογή ενός αλγόριθμου ή μίας γνωστής μεθόδου επίλυσης, τότε αυτό ανήκει στα *μη τυποποιημένα προβλήματα*. Αντιθέτως, εάν το πρόβλημα αποτελεί απλή εφαρμογή ενός κανόνα ή κάποιας γνωστής μεθόδου επίλυσης, τότε αυτό συγκαταλέγεται στα *τυποποιημένα προβλήματα*.

**5) Εφαρμογής – Μη εφαρμογής:** Εφόσον το πλαίσιο ενός προβλήματος συνδέεται με τον πραγματικό κόσμο, τότε το πρόβλημα ανήκει στα *προβλήματα εφαρμογής*. Ειδικότερα, εάν τα δεδομένα του λεκτικού προβλήματος δίνονται από τους ίδιους τους συγγραφείς του εγχειριδίου, αυτό ανήκει στα *ρεαλιστικά προβλήματα*. Εάν τα δεδομένα του επιλέγονται από τους μαθητές, ανήκει στα *αυθεντικά*. Στις περιπτώσεις που το πλαίσιο δεν συνδέεται με ρεαλιστικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής, το πρόβλημα αποτελεί *πρόβλημα μη εφαρμογής*.

**6) Παραδοσιακά – Μη παραδοσιακά:** Ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος, αυτά διακρίνονται σε *παραδοσιακά* και *μη παραδοσιακά*. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τέσσερις επιμέρους τύποι προβλημάτων. Ο πρώτος υποτύπος είναι τα *προβλήματα κατασκευής*, στα οποία ζητείται η κατασκευή ενός μέρους ή και ολόκληρου του μαθηματικού προβλήματος από τον μαθητή. Μία ακόμη κατηγορία μη παραδοσιακών προβλημάτων είναι τα *προβλήματα γρίφοι*, που δίνουν μία πιο παιγνιώδη

διάσταση στην επίλυση προβλημάτων. Η τρίτη κατηγορία είναι τα *πρότζεκτ*, τα οποία είναι προβλήματα που απαιτούν τη συλλογή πληροφοριών ή την ανάλυση δεδομένων και συνήθως απαιτούν ένα χρονικό διάστημα κάποιων ημερών, εβδομάδων ή και μηνών για την ολοκλήρωσή τους. Ο τελευταίος τύπος μη παραδοσιακού προβλήματος είναι τα *προβλήματα καταγραφής*, όπου οι μαθητές μπορούν να καταφύγουν στην καταγραφή των ιδεών, των σκέψεων, των αποριών ή του συλλογισμού τους. Οι υπόλοιποι τύποι προβλημάτων ανήκουν στα παραδοσιακά προβλήματα.

**7) Μόνο απάντηση – Απάντηση με αιτιολόγηση:** Το είδος της απάντησης σχετίζεται με το αν απαιτείται από το πρόβλημα η αιτιολόγηση για τον τρόπο εύρεσης της λύσης ή δεν απαιτείται. Έτσι, προκύπτουν δύο κατηγορίες, τα προβλήματα που ζητούν *μόνο την απάντηση* και αυτά που ζητούν *επιπλέον και αιτιολόγηση* για την απάντηση.

**8) Μαθηματικής μορφής – Οπτικής μορφής – Λεκτικής μορφής – Συνδυαστικής μορφής:** Τέλος, το κριτήριο αυτό, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Zhu & Fun, 2006), διακρίνει τα έργα σε τέσσερις επιμέρους κατηγορίες: προβλήματα που παρουσιάζονται αποκλειστικά σε *μαθηματική μορφή*, δηλαδή με τη χρήση μαθηματικών αναπαραστατικών μέσων, προβλήματα σε *οπτική μορφή*, δηλαδή μόνο με οπτικά μέσα αναπαράστασης, προβλήματα μόνο σε *λεκτική μορφή*, με τη χρήση λεκτικών περιγραφών και τέλος, προβλήματα με τον *συνδυασμό* ενός ή και περισσότερων, από τα παραπάνω τρία, αναπαραστατικών μέσων.

Έπειτα από την καταγραφή και την κατηγοριοποίηση των λεκτικών προβλημάτων στις παραπάνω κατηγορίες, θα είναι δυνατή η καταγραφή και της συχνότητας εμφάνισης της κάθε κατηγορίας προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης. Επιπλέον, μέσα από τη μελέτη και την ανάλυση των σεναρίων των λεκτικών προβλημάτων θα μελετηθεί και η σύνδεσή τους με την καθημερινή ζωή.

Διαστάσεις	Ερώτημα στο οποίο απαντάει	Κατηγορίες και υποκατηγορίες
Πολυπλοκότητα του προβλήματος	Πόσο προφανής είναι η λύση;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Τυποποιημένα</li> <li>• Μη τυποποιημένα</li> </ul>
Τύπος του προβλήματος	Ποιος είναι ο τύπος του προβλήματος;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Παραδοσιακά</li> <li>• Μη παραδοσιακά <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Πρότζεκτ</li> <li>✓ Κατασκευή</li> <li>✓ Γρίφοι</li> <li>✓ Προβλήματα καταγραφής</li> </ul> </li> </ul>
Αριθμός απαντήσεων	Πόσες απαντήσεις διαθέτει το πρόβλημα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ανοιχτά</li> <li>• Κλειστά</li> </ul>
Τύπος της απάντησης	Τι είδους απάντηση απαιτεί το πρόβλημα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Μόνο απάντηση</li> <li>• Απάντηση με αιτιολόγηση</li> </ul>
Ο αριθμός των πράξεων	Πόσες είναι οι απαιτούμενες πράξεις για την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ενός βήματος</li> <li>• Πολλαπλών βημάτων</li> </ul>
Πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα	Πόσες πληροφορίες παρέχονται στο πρόβλημα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Επαρκών δεδομένων</li> <li>• Περιττών δεδομένων</li> <li>• Ανεπαρκών δεδομένων</li> </ul>
Σύνδεση του πλαισίου με τον πραγματικό κόσμο	Συνδέεται το πλαίσιο του προβλήματος με τον πραγματικό κόσμο;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εφαρμογής <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Ρεαλιστικά</li> <li>✓ Αυθεντικά</li> </ul> </li> <li>• Μη εφαρμογής</li> </ul>
Μέσα αναπαράστασης	Τι αναπαραστατικά μέσα χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Οπτικά μέσα</li> <li>• Λεκτικά μέσα</li> <li>• Μαθηματικά μέσα</li> <li>• Συνδυαστικά μέσα</li> </ul>

**Πίνακας 2.2: Κατηγορίες και υποκατηγορίες των λεκτικών προβλημάτων**



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

---

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας, έπειτα από τη μελέτη και την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Δ' Τάξης. Το παρόν κεφάλαιο χωρίζεται σε τρεις επιμέρους ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κατηγοριοποίησης των λεκτικών προβλημάτων στις επιμέρους κατηγορίες και η ανάλυση της συχνότητας εμφάνισής τους. Η ανάλυση γίνεται τόσο σε συλλογικό επίπεδο, όσο και μεμονωμένα για κάθε εγχειρίδιο (Βιβλίο Μαθητή και Τετράδιο Μαθητή). Στη δεύτερη ενότητα επιχειρείται η συσχέτιση μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών προβλημάτων που βρέθηκαν. Ειδικότερα, τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται σε τυποποιημένα και μη τυποποιημένα, καθώς και σε παραδοσιακά και μη παραδοσιακά προβλήματα. Τέλος, στην τρίτη ενότητα παρουσιάζεται η σύνδεση των προβλημάτων με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των παιδιών, μέσα από την ανάλυση των σεναρίων των ρεαλιστικών προβλημάτων.

### 3.A. Αποτελέσματα ανάλυσης σύμφωνα με το μοντέλο ανάλυσης

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Zhu & Fun, 2006; Son & Diletti, 2017; Xin et al., 2011), τα προβλήματα διακρίνονται στις εξής κατηγορίες: ανοιχτά – κλειστά, ενός βήματος – πολλαπλών βημάτων, προβλήματα επαρκών – περιττών – ανεπαρκών δεδομένων, τυποποιημένα – μη τυποποιημένα, εφαρμογής (ρεαλιστικά, αυθεντικά) – μη εφαρμογής, παραδοσιακά – μη παραδοσιακά (προβλήματα κατασκευής, πρότζεκτ, προβλήματα γρίφοι, προβλήματα καταγραφής), μόνο απάντηση – απάντηση με αιτιολόγηση, μαθηματικής μορφής – οπτικής μορφής – λεκτικής μορφής – συνδυαστικής μορφής (βλ. κεφ. 2.B.3).

Στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν, αναλύθηκαν 276 λεκτικά προβλήματα. Από αυτά, τα 97 ανήκουν στο Βιβλίο του Μαθητή (BM) και τα 179 ανήκουν στα τέσσερα τεύχη των Τετραδίων του Μαθητή (TM).

### 3.A.1. Τυποποιημένα - μη τυποποιημένα προβλήματα

Όσον αφορά το πόσο εμφανής είναι η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει ο λύτης για την επίλυση των προβλημάτων, η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχονται στα εγχειρίδια της Δ' τάξης αποτελούν τυποποιημένα προβλήματα, στα οποία οι λύτες μπορούν να ακολουθήσουν μία γνωστή διαδικασία ή να εφαρμόσουν απλώς έναν γνωστό αλγόριθμο και η πορεία προς τη λύση τους είναι άμεσα εμφανής. Πιο συγκεκριμένα, από τα 276 λεκτικά προβλήματα που συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση, τα 214 (77,54%) είναι τυποποιημένα και τα 62 (22,46%) είναι μη τυποποιημένα προβλήματα (Πίνακας 3.1).

Είδη των προβλημάτων	N	%
Τυποποιημένα	214	77,54
Μη τυποποιημένα	62	22,46
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.1: Κατανομή συχνότητας των τυποποιημένων και μη τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Εξετάζοντας μεμονωμένα τα δύο σχολικά εγχειρίδια, το ΒΜ και το ΤΜ, παρατηρούμε πως τα ποσοστά τους συγκλίνουν αρκετά και η κυριαρχία των τυποποιημένων προβλημάτων είναι σταθερή. Πιο συγκεκριμένα, στο ΒΜ, η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων αποτελεί τυποποιημένα προβλήματα, ενώ τα μη τυποποιημένα προβλήματα είναι λιγοστά. Έτσι, από τα 97 λεκτικά προβλήματα που αναλύθηκαν, τα 76 (78,35%) είναι τυποποιημένα, ενώ τα μη τυποποιημένα προβλήματα συνιστούν μόλις το 21,65% (N=21) των λεκτικών προβλημάτων που αναλύθηκαν (Πίνακας 3.2).

Είδη προβλημάτων	N	%
Τυποποιημένα	76	78,35
Μη τυποποιημένα	21	21,65
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.2: Κατανομή συχνότητας των τυποποιημένων και μη τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων στο Β.Μ. (N=97)**

Παρομοίως, στο ΤΜ, τα τυποποιημένα προβλήματα επικρατούν έναντι των μη τυποποιημένων. Έτσι, από τα 179 λεκτικά προβλήματα που συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση τα 138 (77,09%) είναι τυποποιημένα, ενώ τα 41 (22,91%) μη τυποποιημένα προβλήματα (Πίνακας 3.3).

Είδη προβλημάτων	N	%
Τυποποιημένα	138	77,09
Μη τυποποιημένα	41	22,91
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.3: Κατανομή συχνότητας των τυποποιημένων και μη τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων στο Τ.Μ. (N=179)**

### 3.A.2. Παραδοσιακά - Μη παραδοσιακά

Από τα δεδομένα που αναλύθηκαν, παρατηρείται πως η πλειοψηφία των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης αποτελεί παραδοσιακά προβλήματα. Πιο αναλυτικά, το 63,41% (N=175) του συνόλου των λεκτικών προβλημάτων είναι παραδοσιακά, ενώ το 36,59% (N=101) είναι μη παραδοσιακά (Πίνακας 3.4). Από το σύνολο των μη παραδοσιακών προβλημάτων (N=101), τα 33 (32,67%) είναι προβλήματα Γρίφοι (Puzzle Problem), τα 26 (25,75%) είναι προβλήματα Πρότζεκτ (Project Problem), τα 33 (32,67%) αποτελούν προβλήματα Κατασκευής (Problem-Posing Problem) και μόλις 9 (8,91%) προβλήματα είναι προβλήματα Καταγραφής (Journal Problem).

Είδη προβλημάτων	N	%
Παραδοσιακά	175	63,41
Μη παραδοσιακά	101	36,59
Προβλήματα γρίφοι	33	32,67
Προβλήματα πρότζεκτ	26	25,75
Κατασκευή προβλήματος	33	32,67
Προβλήματα καταγραφής	9	8,91
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.4: Κατανομή συχνότητας των παραδοσιακών και μη παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Στο ΒΜ, όπως και στο σύνολο όλων των προβλημάτων των εγχειριδίων, επικρατούν τα παραδοσιακά προβλήματα. Ωστόσο, όπως δείχνουν τα δεδομένα που μελετήθηκαν, στο ΒΜ επικρατούν τα προβλήματα Κατασκευής (N=11), ενώ τα υπόλοιπα είδη μη παραδοσιακών προβλημάτων έχουν την ίδια και μικρή συχνότητα εμφάνισης (N=5) (Πίνακας 3.5).

Είδη προβλημάτων	N	%
Παραδοσιακά	71	73,2
Μη παραδοσιακά	26	26,8
Προβλήματα γρίφοι	5	19,23
Προβλήματα πρότζεκτ	5	19,23
Κατασκευή προβλήματος	11	42,31
Προβλήματα καταγραφής	5	19,23
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.5: Κατανομή συχνότητας των παραδοσιακών και μη παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων στο ΒΜ (N=97)**

Αντιθέτως, στο TM την πλειοψηφία των μη παραδοσιακών προβλημάτων αποτελούν τα προβλήματα Γρίφοι (N=28), που συχνά επιτρέπουν στους μαθητές να συμμετέχουν σε μία πιο διασκεδαστική πλευρά των μαθηματικών. Τα Πρότζεκτ (28%) και τα προβλήματα Κατασκευής Μαθηματικού προβλήματος (29,33%) κατέχουν περίπου το ίδιο ποσοστό στο σύνολο των μη παραδοσιακών προβλημάτων του TM, ενώ τα προβλήματα όπου οι μαθητές καταγράφουν τις ιδέες και τον τρόπο σκέψης τους έχουν το μικρότερο ποσοστό ανάμεσα στα μη παραδοσιακά προβλήματα (Πίνακας 3.6). Ωστόσο, στο TM τα παραδοσιακά προβλήματα είναι εμφανώς πιο περιορισμένα σε σύγκριση με το BM, καθώς μειώνονται στο 58,1% του συνόλου των προβλημάτων.

<b>Είδη προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Παραδοσιακά</b>	104	58,1
<b>Μη παραδοσιακά</b>	75	41,9
<b>Προβλήματα γρίφοι</b>	28	37,34
<b>Προβλήματα πρότζεκτ</b>	21	28
<b>Κατασκευή προβλήματος</b>	22	29,33
<b>Προβλήματα καταγραφής</b>	4	5,33
<b>Σύνολο</b>	179	100

**Πίνακας 3.6: Κατανομή συχνότητας των παραδοσιακών και μη παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων στο TM (N=179)**

### **3.A.3. Αριθμός απαντήσεων**

Σύμφωνα με τον αριθμό των δυνατών απαντήσεων που υπάρχουν σε κάθε λεκτικό πρόβλημα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα κλειστά προβλήματα υπερτερούν σημαντικά έναντι των ανοιχτών προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά βιβλία της Δ΄ Τάξης. Πιο αναλυτικά, από τα 276 λεκτικά προβλήματα που αναλύθηκαν, τα 235 (85,14%) είναι κλειστού τύπου προβλήματα, καθώς έχουν μόνο μία δυνατή λύση. Αντιθέτως, μόνο τα 41 (14,86%) αποτελούν ανοιχτού τύπου προβλήματα, έχοντας είτε δύο είτε περισσότερες σωστές λύσεις (Πίνακας 3.7).

Είδη προβλημάτων	N	%
Ανοιχτά	41	14,86
Κλειστά	235	85,14
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.7: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαντήσεων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Τα παραπάνω στοιχεία επιβεβαιώνονται όταν η ανάλυση των προβλημάτων ως προς τον αριθμό των δυνατών απαντήσεων γίνεται για κάθε σχολικό εγχειρίδιο ξεχωριστά. Στο ΒΜ, ειδικότερα, υπάρχουν 16 ανοιχτού τύπου προβλήματα (16,5%) και 81 κλειστού τύπου (83,5%) (Πίνακας 3.8), ενώ στο ΤΜ υπάρχουν 25 (13,97%) και 154 (86,03%), αντίστοιχα (Πίνακας 3.9).

Είδη προβλημάτων	N	%
Ανοιχτά	16	16,5
Κλειστά	81	83,5
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.8: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαντήσεων στο ΒΜ (N=97)**

Είδη προβλημάτων	N	%
Ανοιχτά	25	13,97
Κλειστά	154	86,03
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.9: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαντήσεων στο ΤΜ (N=179)**

### 3.A.4. Τύπος της απάντησης

Τα δεδομένα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών που μελετήθηκαν, όσον αφορά τον τύπο της απάντησης, έδειξαν ότι τα περισσότερα από τα λεκτικά προβλήματα δεν απαιτούν κάποια επεξήγηση, παρά μόνο την απάντηση στο ερώτημα ή στα ερωτήματά τους. Ειδικότερα, το 78,62% (N=217) των λεκτικών προβλημάτων ζητούν μόνο την απάντηση, ενώ το 21,38% (N=59) των προβλημάτων ζητούν και κάποιου είδους αιτιολόγηση από τους μαθητές (Πίνακας 3.10).

Είδη προβλημάτων	N	%
Απάντηση μόνο	217	78,62
Αιτιολόγηση	59	21,38
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.10: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον τύπο της απάντησης στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Συγκρίνοντας το ΒΜ και το ΤΜ, τα αποτελέσματα έδειξαν πως, ενώ τα έργα που δεν απαιτούν κάποια αιτιολόγηση από τους μαθητές είναι λιγότερα και στα δύο εγχειρίδια, η διαφορά τους είναι εμφανώς μειωμένη στο ΒΜ, όπου τα προβλήματα που απαιτούν μόνο απάντηση αποτελούν το 68,04% (N=66) των προβλημάτων (Πίνακας 3.11). Αντιθέτως, στο ΤΜ τα έργα που δεν απαιτούν κάποια επεξήγηση συγκροτούν το 84,36% (N=151) του συνόλου των έργων (Πίνακας 3.12).

Είδη προβλημάτων	N	%
Απάντηση μόνο	66	68,04
Αιτιολόγηση	31	31,96
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.11: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον τύπο της απάντησης στο ΒΜ (N=97)**

Είδη προβλημάτων	N	%
Απάντηση μόνο	151	84,36
Αιτιολόγηση	28	15,64
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.12: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον τύπο της απάντησης στο ΓΜ (N=179)**

### 3.A.5. Σύνδεση του σεναρίου με τον πραγματικό κόσμο

Από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε πως η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις, καθώς το 69,57% (N=192) ανήκουν στα προβλήματα εφαρμογής. Αντιθέτως, τα προβλήματα μη εφαρμογής κατέχουν ένα αρκετά μικρότερο ποσοστό, αφού τα 84 από τα 276 (30,43%) δεν συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο και έχουν αποκλειστικά ενδομαθηματικό περιεχόμενο (Πίνακας 3.13). Πιο αναλυτικά, το μεγαλύτερο ποσοστό κατέχουν τα ρεαλιστικά προβλήματα, που αποτελούν το 91,15% (N=175) του συνόλου των προβλημάτων εφαρμογής, ενώ τη χαμηλότερη συχνότητα εμφάνισης έχουν τα αυθεντικά προβλήματα, καθώς αποτελούν μόλις το 8,85% (N=17) των προβλημάτων εφαρμογής (Πίνακας 3.13).

Είδη προβλημάτων	N	%
Μη εφαρμογής	84	30,43
Εφαρμογής	192	69,57
Εφαρμογής - Ρεαλιστικά	175	91,15
Εφαρμογής - Αυθεντικά	17	8,85
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.13: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τη σύνδεση του πλαισίου με τον πραγματικό κόσμο στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**



Όσον αφορά την ανάλυση στο ΒΜ, παρατηρήθηκε πως αυτή η κλιμάκωση ανάμεσα στις κατηγορίες αυξάνεται. Τα προβλήματα μη εφαρμογής κατέχουν ακόμη μικρότερο ποσοστό (15,47%), ενώ τα προβλήματα εφαρμογής μεγαλύτερο (84,53%) (Πίνακας 3.14). Τα ρεαλιστικά προβλήματα, μάλιστα, στο ΒΜ κατέχουν το 95,12% (N=78) των προβλημάτων εφαρμογής, σε αντίθεση με τα αυθεντικά, που αποτελούν μόλις το 4,88% (N=4).

<b>Είδη προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Μη εφαρμογής</b>	15	15,47
<b>Εφαρμογής</b>	82	84,53
<b>Εφαρμογής – Ρεαλιστικά</b>	78	95,12
<b>Εφαρμογής – Αυθεντικά</b>	4	4,88
<b>Σύνολο</b>	97	100

**Πίνακας 3.14: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τη σύνδεση του πλαισίου με τον πραγματικό κόσμο στο ΒΜ (N=97)**

Στο ΤΜ, οι διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά αποκλιμακώνονται (Πίνακας 3.15). Τα προβλήματα εφαρμογής εξακολουθούν να κατέχουν μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με τα προβλήματα μη εφαρμογής, φτάνοντας το 61,45% (N=110) του συνόλου των προβλημάτων, ενώ η συχνότητα εμφάνισης των έργων μη εφαρμογής αυξάνεται στο 38,55% (N=69). Παρατηρείται πως, από τα προβλήματα εφαρμογής, τα ρεαλιστικά προβλήματα παραμένουν και στο ΤΜ αυτά με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης (88,18%) και τα αυθεντικά με τη μικρότερη (11,82%).

Είδη προβλημάτων	N	%
Μη εφαρμογής	69	38,55
Εφαρμογής	110	61,45
Εφαρμογής – Ρεαλιστικά	97	88,18
Εφαρμογής – Αυθεντικά	13	11,82
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.15: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τη σύνδεση του πλαισίου με τον πραγματικό κόσμο στο ΤΜ (N=179)**

### 3.A.6. Πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα

Οι πληροφορίες που παρέχονται στο 97,1% (N=268) των λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης αποτελούν τις απολύτως απαραίτητες, ώστε το πρόβλημα να καθίσταται επιλύσιμο. Τα προβλήματα περιττών δεδομένων είναι στο σύνολό τους μόνο 6 (2,17%) και αυτά που τα δεδομένα τους είναι ελλιπή με αποτέλεσμα να μην μπορεί να φτάσει ο μαθητής στη λύση είναι μόλις 2 (0,73%).

Είδη προβλημάτων	N	%
Επαρκών δεδομένων	268	97,1
Ανεπαρκών δεδομένων	2	0,73
Περιττών δεδομένων	6	2,17
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.16: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τις πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Στο ΒΜ (Πίνακας 3.17) και στο ΤΜ (Πίνακας 3.18) τα ποσοστά ακολουθούν το ίδιο μοτίβο, με τη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων να είναι επαρκών δεδομένων και ελάχιστα να είναι περιττών ή ανεπαρκών δεδομένων.

Είδη προβλημάτων	N	%
Επαρκών δεδομένων	93	95,88
Ανεπαρκών δεδομένων	1	1,03
Περισσότερων δεδομένων	3	3,09
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.17: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τις πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα στο ΒΜ (N=97)**

Είδη προβλημάτων	N	%
Επαρκών δεδομένων	175	97,76
Ανεπαρκών δεδομένων	1	0,56
Περισσότερων δεδομένων	3	1,68
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.18: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τις πληροφορίες που παρέχονται στο πρόβλημα στο ΤΜ (N=179)**

### 3.A.7. Αριθμός των απαιτούμενων πράξεων

Από τα 276 λεκτικά προβλήματα που αναλύθηκαν στα εγχειρίδια της Δ' τάξης, τα 192 (69,57%) απαιτούν περισσότερες από μία αριθμητικές πράξεις για την επίλυσή τους και τα 84 (30,43%) είναι προβλήματα του ενός βήματος (Πίνακας 3.19).

Είδη προβλημάτων	N	%
Ενός βήματος	84	30,43
Πολλαπλών βημάτων	192	69,57
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.19: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαιτούμενων πράξεων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Βλέποντας τα δύο σχολικά εγχειρίδια ξεχωριστά, παρατηρείται πως από τα 97 προβλήματα του ΒΜ, το 61,86% (N=60) είναι προβλήματα πολλαπλών βημάτων και το 38,14% (N=37) είναι έργα του ενός βήματος (Πίνακας 3.20). Από την άλλη, στο ΤΜ τα προβλήματα με περισσότερες αριθμητικές πράξεις αποτελούν το 73,18% (N=131) του συνόλου των λεκτικών προβλημάτων, ενώ τα προβλήματα με μία μόνο αριθμητική πράξη είναι αρκετά λιγότερα, κατέχοντας το 26,82% (N=48) (Πίνακας 3.21).

Είδη προβλημάτων	N	%
Ενός βήματος	37	38,64
Πολλαπλών βημάτων	60	61,86
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.20: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαιτούμενων πράξεων στο ΒΜ (N=97)**

Είδη προβλημάτων	N	%
Ενός βήματος	48	26,82
Πολλαπλών βημάτων	131	73,18

**Πίνακας 3.21: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τον αριθμό των απαιτούμενων πράξεων στο ΤΜ (N=179)**

### 3.A.8. Μέσα αναπαράστασης

Όσον αφορά τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των προβλημάτων, τα αποτελέσματα έδειξαν πως στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν τα προβλήματα αναπαριστώνται είτε αποκλειστικά με λεκτικό τρόπο είτε με συνδυασμό δύο ή και τριών ειδών αναπαραστατικών μέσων. Πιο συγκεκριμένα, το 69,57% (N=192) του συνόλου των προβλημάτων που συμπεριλαμβάνονται στη μελέτη παρουσιάζονται με συνδυασμό λεκτικών, μαθηματικών και οπτικών αναπαραστατικών μέσων και το 30,43%

(N=84) παρουσιάζονται κατ' αποκλειστικότητα με λεκτικό τρόπο, ενώ απουσιάζουν τα προβλήματα αποκλειστικά σε μαθηματική ή σε οπτική μορφή (N=0) (Πίνακας 3.22).

Είδη προβλημάτων	N	%
Μαθηματική μορφή	0	0
Λεκτική μορφή	84	30,43
Οπτική μορφή	0	0
Συνδυαστική μορφή	192	69,57
Σύνολο	276	100

**Πίνακας 3.22: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τα μέσα αναπαράστασης στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης (N=276)**

Ομοίως, στο ΒΜ τα προβλήματα που αναπαριστώνται με συνδυασμό λεκτικών, μαθηματικών και οπτικών μέσων είναι περισσότερα σε σχέση με αυτά που είναι αποκλειστικά σε λεκτική μορφή (Πίνακας 3.23).

Είδη προβλημάτων	N	%
Μαθηματική μορφή	0	0
Λεκτική μορφή	23	23,71
Οπτική μορφή	0	0
Συνδυαστική μορφή	74	76,29
Σύνολο	97	100

**Πίνακας 3.23: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τα μέσα αναπαράστασης στο ΒΜ (N=97)**

Στο ΤΜ, η αναπαράσταση γίνεται, επίσης, κατά κύριο λόγο σε συνδυαστική μορφή (N=118), ωστόσο, υπάρχουν περισσότερα προβλήματα σε αμιγώς λεκτική μορφή αναπαράστασης (Πίνακας 3.24).

Είδη προβλημάτων	N	%
Μαθηματική μορφή	0	0
Λεκτική μορφή	61	34,08
Οπτική μορφή	0	0
Συνδυαστική μορφή	118	65,92
Σύνολο	179	100

**Πίνακας 3.24: Κατανομή συχνότητας των λεκτικών προβλημάτων ως προς τα μέσα αναπαράστασης στο TM (N=179)**

### **3.B Συσχέτιση μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών των προβλημάτων**

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί πως η διάκριση των λεκτικών προβλημάτων δεν είναι απόλυτη και κάποια προβλήματα μπορεί να ανήκουν σε περισσότερες από μία κατηγορίες.

#### **3.B.1. Μη τυποποιημένα προβλήματα**


Από τα δεδομένα που αναλύθηκαν, παρατηρήθηκε πως η πλειοψηφία των μη τυποποιημένων προβλημάτων αποτελούν μη παραδοσιακά, κλειστά προβλήματα, σε ρεαλιστικό πλαίσιο, που απαιτούν περισσότερες από μία μαθηματικές πράξεις. Επιπλέον, τα αποτελέσματα έδειξαν πως στη συντριπτική τους πλειοψηφία τα προβλήματα έχουν επαρκή δεδομένα, που τα καθιστούν επιλύσιμα και τα αναπαραστατικά μέσα που χρησιμοποιούνται σε αυτά είναι κατά κύριο λόγο συνδυασμός λεκτικών, οπτικών και μαθηματικών μέσων (Πίνακας 3.25).

<b>Είδη μη τυποποιημένων προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Παραδοσιακά</b>	22	35,48
<b>Μη παραδοσιακά</b>	40	64,52
<b>Ανοιχτά</b>	19	30,65
<b>Κλειστά</b>	43	69,35
<b>Μη εφαρμογής</b>	12	19,36
<b>Εφαρμογής Ρεαλιστικά</b>	43	69,35
<b>Εφαρμογής Αυθεντικά</b>	7	11,29
<b>Επαρκών δεδομένων</b>	61	98,38
<b>Ανεπαρκών δεδομένων</b>	0	0
<b>Περισσότερων δεδομένων</b>	1	1,62
<b>Ενός βήματος</b>	13	20,97
<b>Πολλαπλών βημάτων</b>	49	79,03
<b>Μόνο απάντηση</b>	48	77,42
<b>Αιτιολόγηση</b>	14	22,58
<b>Λεκτική μορφή</b>	23	37,1
<b>Συνδυαστική μορφή</b>	39	62,9
<b>Σύνολο</b>	62	100

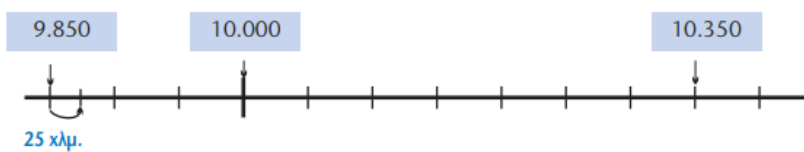
**Πίνακας 3.25: Συχνότητας εμφάνισης των μη τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων (N=62)**

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.1 αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα ενός μη τυποποιημένου, κλειστού και μη παραδοσιακού προβλήματος (Κατασκευή). Επίσης, το πλαίσιο του προβλήματος (κατανάλωση βενζίνης και εύρεση συνολικού ποσού χρημάτων) συνδέεται με τον πραγματικό κόσμο (Εφαρμογής-Ρεαλιστικό) και τα δεδομένα που παρέχει στον λύτη προσφέρουν τη δυνατότητα σε αυτόν να το λύσει (Επαρκών δεδομένων). Τέλος, ανήκει στα προβλήματα πολλαπλών βημάτων, αφού οι πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του είναι περισσότερες από

μία και τα αναπαραστατικά μέσα που χρησιμοποιούνται είναι τόσο λεκτικά και μαθηματικά όσο και οπτικά (αριθμογραμμή) (Συνδυαστική μορφή).

- 3)  Η οικογένεια του Πέτρου πηγαίνει εκδρομή με το αυτοκίνητό της. Στην αρχή του ταξιδιού ο χιλιομετρής έδειχνε 9.850 χμ. και όταν επέστρεψαν έδειχνε 10.350 χμ. Ανά 25 χμ. το αυτοκίνητό τους καταναλώνει βενζίνη αξίας περίπου 150 λεπτών. Πόσα χρήματα ξόδεψαν για βενζίνη σ' αυτό το ταξίδι;

- Οργανώνουμε τα δεδομένα με τη βοήθεια μιας πρόχειρης αριθμογραμμής:



- Διατυπώνουμε ένα ενδιάμεσο ερώτημα που θα μας βοηθήσει ώστε να επιλύσουμε το πρόβλημα:

.....

**Εικόνα 3.1: Ενδεικτικό παράδειγμα μη τυποποιημένου προβλήματος (Τετράδιο εργασιών, α' τεύχος, κεφ. 14, σελ. 35)**

### 3.B.2. Τυποποιημένα προβλήματα

Παρόμοια με τα μη τυποποιημένα είναι τα αποτελέσματα και στα τυποποιημένα προβλήματα των εγχειριδίων που αναλύθηκαν, καθώς αποτελούν στην πλειοψηφία τους κλειστά προβλήματα, με ρεαλιστικό πλαίσιο, επαρκή δεδομένα, πολλαπλές πράξεις, που απαιτούν μόνο την απάντηση και όχι αιτιολόγηση της λύσης. Ωστόσο, τα περισσότερα τυποποιημένα προβλήματα ανήκουν στα παραδοσιακά, σε αντίθεση με τα μη τυποποιημένα που ανήκουν στα μη παραδοσιακά προβλήματα.

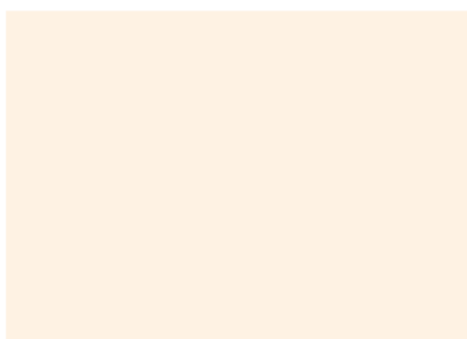


<b>Είδη τυποποιημένων προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Παραδοσιακά</b>	153	71,5
<b>Μη παραδοσιακά</b>	61	28,5
<b>Ανοιχτά</b>	22	10,28
<b>Κλειστά</b>	192	89,72
<b>Μη εφαρμογής</b>	72	33,65
<b>Εφαρμογής Ρεαλιστικά</b>	132	61,68
<b>Εφαρμογής Αυθεντικά</b>	10	4,67
<b>Επαρκών δεδομένων</b>	207	96,73
<b>Ανεπαρκών δεδομένων</b>	2	0,93
<b>Περισσότερων δεδομένων</b>	5	2,34
<b>Ενός βήματος</b>	71	33,18
<b>Πολλαπλών βημάτων</b>	143	66,82
<b>Μόνο απάντηση</b>	169	78,97
<b>Αιτιολόγηση</b>	45	21,03
<b>Λεκτική μορφή</b>	61	28,5
<b>Συνδυαστική μορφή</b>	153	71,5
<b>Σύνολο</b>	214	100

**Πίνακας 3.26: Συχνότητα εμφάνισης των τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων (N=214)**

Στην εικόνα που ακολουθεί (Εικόνα 3.2) παρουσιάζεται ένα τυποποιημένο πρόβλημα του σχολικού εγχειριδίου. Το συγκεκριμένο αποτελεί παραδοσιακό πρόβλημα με μία μοναδική λύση σε κάθε υποερώτηση, σε ρεαλιστικό πλαίσιο (τιμή κόστους ενός μπαχαρικού που χρησιμοποιείται ευρέως στη μαγειρική) και με επαρκή δεδομένα. Για την επίλυσή του απαιτούνται περισσότερες από μία πράξεις αλλά όχι αιτιολόγηση. Η αναπαράστασή του γίνεται με τον συνδυασμό οπτικών (πίνακας), μαθηματικών (αριθμοί) και λεκτικών μέσων (λέξεις).

2)



Το ακριβότερο μπαχαρικό του κόσμου παράγεται στην Κοζάνη και είναι ο κρόκος (σαφράν).

Συμπληρώνω στον πίνακα ό,τι λείπει:

Κρόκος	18 κ.	2 κ.	250 γραμμ.
Τιμή	15.120 €	.....	.....

**Εικόνα 3.2: Ενδεικτικό παράδειγμα τυποποιημένου προβλήματος (Τετράδιο εργασιών, δ' τεύχος, κεφ. 44, σελ. 12)**

### 3.B.3. Μη παραδοσιακά προβλήματα

Όσον αφορά τα μη παραδοσιακά λεκτικά προβλήματα που αναλύθηκαν, τα αποτελέσματα έδειξαν πως η πλειοψηφία τους στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄τάξης κατατάσσεται στα τυποποιημένα, κλειστά και προβλήματα μη εφαρμογής. Επιπλέον, όλα τα μη παραδοσιακά προβλήματα έχουν επαρκή δεδομένα και στην πλειονότητά τους απαιτούν περισσότερες από μία πράξεις. Τέλος, είναι λίγα τα μη παραδοσιακά προβλήματα που θέλουν κάποιου είδους αιτιολόγηση για την απάντηση, ενώ η συνδυαστική μορφή αναπαραστάσεων επικρατεί και σε αυτά (Πίνακας 3.27).

<b>Είδη μη παραδοσιακών προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Τυποποιημένα</b>	61	60,4
<b>Μη τυποποιημένα</b>	40	39,6
<b>Ανοιχτά</b>	23	22,77
<b>Κλειστά</b>	78	77,23
<b>Μη εφαρμογής</b>	45	44,56
<b>Εφαρμογής Ρεαλιστικά</b>	41	40,59
<b>Εφαρμογής Αυθεντικά</b>	15	14,85
<b>Επαρκών δεδομένων</b>	101	100
<b>Ανεπαρκών δεδομένων</b>	0	0
<b>Περισσότερων δεδομένων</b>	0	0
<b>Ενός βήματος</b>	23	22,77
<b>Πολλαπλών βημάτων</b>	78	77,23
<b>Μόνο απάντηση</b>	81	80,2
<b>Αιτιολόγηση</b>	20	19,8
<b>Λεκτική μορφή</b>	36	35,64
<b>Συνδυαστική μορφή</b>	65	64,36

**Πίνακας 3.27: Συχνότητα εμφάνισης των μη παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων (N=101)**

Παρακάτω ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα μη παραδοσιακού προβλήματος κατασκευής (Problem-Posing Problem), καθώς ζητά από τον λύτη να δημιουργήσει ο ίδιος δύο ερωτήματα τα οποία θα τον βοηθήσουν για να φτάσει στη λύση (Εικόνα 3.3). Το παρόν πρόβλημα ανήκει στα τυποποιημένα προβλήματα, αφού ο τρόπος επίλυσης παρόμοιων προβλημάτων είναι γνωστός. Επίσης, αποτελεί ένα κλειστό πρόβλημα με επαρκή δεδομένα, καθώς τα δύο ερωτήματα που θα συμπληρώσει ο λύτης τον βοηθούν

να φτάσει στη μία και μοναδική λύση του προβλήματος. Τέλος, είναι ένα πρόβλημα πολλαπλών βημάτων, διότι χρειάζονται πάνω από μία αριθμητικές πράξεις, η απάντηση δεν χρειάζεται αιτιολόγηση και τα μέσα αναπαράστασής του είναι λεκτικά (λεκτική περιγραφή εκφώνησης), οπτικά (ημερολόγιο) και μαθηματικά (ποσά χρημάτων) (Συνδυαστική μορφή).

**1)** Ο Νικήτας και η Ζωή θέλουν ν' αγοράσουν ένα δώρο στη μητέρα τους. Η Ζωή ξεκινά την αποταμίευση στις 10 Νοεμβρίου και αποταμιεύει 30 λ. κάθε μέρα. Ο Νικήτας έχει ξεκινήσει 5 μέρες νωρίτερα και αποταμιεύει 20 λ. τη μέρα. Πόσα χρήματα θα έχουν αποταμιεύσει και τα δύο παιδιά μέχρι και τις 25 Νοεμβρίου που είναι τα γενέθλια της μαμάς;

- Διατυπώνω ενδιάμεσα ερωτήματα για ν' απαντήσω στο ερώτημα του προβλήματος:

#### Ν Ο Ε Μ Β Ρ Ι Ο Σ

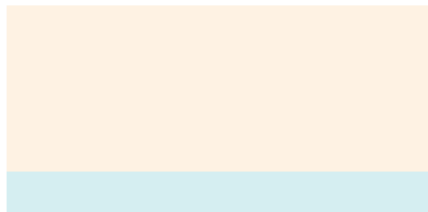
Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

α) Για τη Ζωή: .....

.....

β) Για τον Νικήτα: .....

.....



**Εικόνα 3.3: Ενδεικτικό παράδειγμα μη παραδοσιακού προβλήματος (Τετράδιο εργασιών, α' τεύχος, κεφ. 14, σελ.34)**

### 3.B.4. Παραδοσιακά προβλήματα

Για τα παραδοσιακά προβλήματα των βιβλίων που αναλύθηκαν, τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα εγχειρίδια περιέχουν παραδοσιακά προβλήματα τα οποία είναι κυρίως τυποποιημένα και έχουν μία μοναδική λύση. Επίσης, το πλαίσιο τους σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο και παρέχουν ακριβώς τα απαραίτητα δεδομένα για την επίλυσή τους. Είναι προβλήματα πολλαπλών βημάτων και συνήθως δεν απαιτούν κάποια αιτιολόγηση στην απάντησή τους. Τα αναπαραστατικά τους μέσα είναι κυρίως συνδυασμός των λεκτικών, οπτικών και μαθηματικών μέσων (Πίνακας 3.28).

<b>Είδη παραδοσιακών προβλημάτων</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Τυποποιημένα</b>	153	87,43
<b>Μη τυποποιημένα</b>	22	12,57
<b>Ανοιχτά</b>	18	10,29
<b>Κλειστά</b>	157	89,71
<b>Μη εφαρμογής</b>	39	22,29
<b>Εφαρμογής Ρεαλιστικά</b>	134	76,57
<b>Εφαρμογής Αυθεντικά</b>	2	1,14
<b>Επαρκών δεδομένων</b>	167	95,43
<b>Ανεπαρκών δεδομένων</b>	2	1,14
<b>Περισσότερων δεδομένων</b>	6	3,43
<b>Ενός βήματος</b>	61	34,86
<b>Πολλαπλών βημάτων</b>	114	65,14
<b>Μόνο απάντηση</b>	136	77,71
<b>Αιτιολόγηση</b>	39	22,29
<b>Λεκτική μορφή</b>	48	27,43
<b>Συνδυαστική μορφή</b>	127	72,57
<b>Σύνολο</b>	175	100

**Πίνακας 3.28: Συχνότητα εμφάνισης των παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων (N=175)**

Στην Εικόνα 3.4 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ρεαλιστικού, παραδοσιακού και τυποποιημένου προβλήματος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ανήκει στα κλειστά προβλήματα, διότι έχει μία μοναδική λύση. Είναι έργο πολλαπλών βημάτων, χωρίς να απαιτείται κάποια αιτιολόγηση της απάντησής του και γίνεται χρήση συνδυαστικών αναπαραστατικών μέσων (λεκτική περιγραφή, αριθμοί, εικόνα), παρέχοντας επαρκή δεδομένα για την επίλυσή του.

- 2) Στα προγράμματα ρυθμικής γυμναστικής συμμετέχουν επτά δωδεκαμελείς ομάδες. Τα παιδιά μοιράζονται, ανά 3, ένα στεφάνι. Πόσα στεφάνια χρειάζονται για όλα τα παιδιά;



**Εικόνα 3.4: Ενδεικτικό παράδειγμα παραδοσιακού προβλήματος (Τετράδιο Εργασιών, α' τεύχος, κεφ. 12, σελ. 30)**

### **3.Γ. Σύνδεση των μαθηματικών προβλημάτων με την καθημερινή ζωή**

Σύμφωνα με τα ευρήματα της παρούσας ανάλυσης, τα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης εμπεριέχουν λεκτικά προβλήματα που συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο. Το συμπέρασμα αυτό εξάγεται δεδομένων των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, όπου τα προβλήματα εφαρμογής αποτελούν την πλειονότητα των λεκτικών προβλημάτων, με ποσοστό 69,57% (N=192) έναντι των προβλημάτων μη εφαρμογής, που καλύπτουν το 30,43% (N=84) και έχουν καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

Ωστόσο, τα αυθεντικά προβλήματα (6,16%), τα οποία αφορούν άμεσα τον πραγματικό κόσμο των μαθητών, αφού οι ίδιοι οι μαθητές επιλέγουν τα δεδομένα του προβλήματος, κατέχουν ένα πολύ μικρό ποσοστό στο σύνολο των έργων του εγχειριδίου (Πίνακας 3.13). Στην πλειοψηφία των προβλημάτων Κατασκευής, τα δεδομένα επινοούνται από τους μαθητές και συνεπώς είναι άμεσα συνδεδεμένα με τα δικά τους βιώματα και εμπειρίες. Ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα κατασκευής προβλήματος, στο οποίο ο μαθητής καλείται να πραγματοποιήσει μία έρευνα στο σχολείο του, σχετικά με το τι ψωνίζουν οι μαθητές από το κυλικείο.

2)



Οργανώνουμε μια ανάλογη έρευνα στο σχολείο μας και την παρουσιάζουμε στην τάξη μας.

- Περιγράφουμε την έρευνα που κάναμε:

.....

.....

.....

.....

**Εικόνα 3.5: Ενδεικτικό παράδειγμα αυθεντικού προβλήματος όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν δεδομένα από την πραγματική τους ζωή (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 56, σελ. 40)**

Από την άλλη, τα ρεαλιστικά προβλήματα (63,41%), στα οποία τα δεδομένα συνδέονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, αλλά έχουν επινοηθεί από τους συγγραφείς του βιβλίου, αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων εφαρμογής (Πίνακας 1.13). Τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με ποικίλα θέματα, τα οποία, όμως, άλλοτε αφορούν άμεσα την καθημερινή ζωή των μαθητών και άλλοτε όχι.

Ειδικότερα, τα λεκτικά προβλήματα των εγχειριδίων των μαθηματικών της Δ' τάξης πλαισιώνονται σε μεγάλο βαθμό από οικονομικά ζητήματα καθημερινής ζωής, όπως ζητήματα σχετικά με αγορές προϊόντων και οικονομικές συναλλαγές. Στην Εικόνα 3.6 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα λεκτικού προβλήματος με ρεαλιστικό πλαίσιο, που σχετίζεται με ζητήματα οικονομικών συναλλαγών και εμπίπτει στα ενδιαφέροντα των παιδιών, καθώς αναφέρεται στην αγορά παιχνιδιών.


- 6)  Η Ηρώ και ο αδερφός της έχουν 60 €. Ποια απ' τα παρακάτω παιχνίδια μπορούν ν' αγοράσουν;



• Αρχικά εκτιμούμε: .....

**Εικόνα 3.6:** Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που ενδιαφέρει τα παιδιά (Τετράδιο Μαθητή, β' τεύχος, κεφ. 19, σελ.15)

Όλα τα ρεαλιστικά προβλήματα που αφορούν οικονομικά ζητήματα, ωστόσο, δεν αφορούν άμεσα τα παιδιά του Δημοτικού Σχολείου, αλλά υπάρχουν και αρκετά που απευθύνονται σε άτομα μεγαλύτερης ηλικίας. Τα παραδείγματα στις Εικόνες 3.7 και 3.8 αποτελούν ρεαλιστικά προβλήματα οικονομικής φύσης, των οποίων τα πλαίσια, αν και ρεαλιστικά, απέχουν από την καθημερινότητα των μαθητών και ενδεχομένως να μην ελκύουν το ενδιαφέρον τους. Είναι, ωστόσο, προβλήματα που αφορούν καταστάσεις της καθημερινής ζωής ή εμπνέονται από την καθημερινότητα.

- 5)  Συμπληρώνουμε το κείμενο με μια ερώτηση, ώστε να προκύψει ένα πρόβλημα. Στη συνέχεια το επιλύουμε.

- Το 2003, η Ελλάδα ενίσχυσε την Τουρκία με 489.000 €. Τα 157.534 € δόθηκαν για φάρμακα και τα υπόλοιπα για τρόφιμα και ρούχα. ....


.....  
.....

- Διατυπώνουμε ένα αντίστροφο του παραπάνω προβλήματος: .....

.....  
.....

**Εικόνα 3.7:** Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που δεν ενδιαφέρει τα παιδιά (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 49, σελ.25)



- 5)  Ο πατέρας της Ηρώς έκανε ανάληψη 2.250 € από την τράπεζα. Ο ταμίας του έδωσε δεσμίδες αξίας 300 € η καθεμία και κάποια χαρτονομίσματα. Πόσες δεσμίδες και ποια χαρτονομίσματα μπορεί να πήρε;

**Εικόνα 3.8:** Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που δεν ενδιαφέρει τα παιδιά (Τετράδιο Μαθητή, γ' τεύχος, κεφ. 40, σελ.35)

Ακόμη, τα λεκτικά προβλήματα στα εγχειρίδια της Δ' τάξης συχνά αντλούν τα θέματά τους από τη γαστρονομία και σχετίζονται με τη μαγειρική και το φαγητό. Η θεματολογία αυτή σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των μαθητών, χωρίς όμως να είναι πάντα άμεσα εμπλεκόμενη με την καθημερινότητά τους. Παρακάτω, στις Εικόνες 3.9 και 3.10, ακολουθούν δύο ενδεικτικά παραδείγματα.

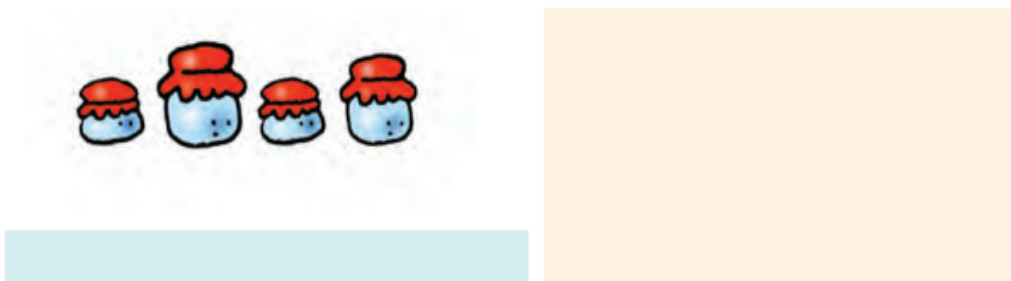
- 2) Αξιοποιώ τις πληροφορίες από το βιβλιαράκι των συνταγών και συμπληρώνω τα ρολόγια με δείκτες. Η γιαγιά ....  Ξεκίνησε το μαγείρεμα.  Ολοκλήρωσε το μαγείρεμα.



**Εικόνα 3.9:** Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που σχετίζεται με τη μαγειρική και το φαγητό και ενδιαφέρει τα παιδιά (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 50, σελ.26)

Το παράδειγμα της Εικόνας 3.9 αποτελεί ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με πλαίσιο σχετικό με τη μαγειρική. Συνδέει τα μαθηματικά προβλήματα με τον πραγματικό κόσμο, καθώς αναφέρεται σε μία κατάσταση που βιώνουν τα παιδιά στην καθημερινή τους ζωή στο σπίτι. Αυτή η σύνδεση αφορά στη μαγειρική και περιλαμβάνει τη διδασκαλία τόσο της έννοιας του χρόνου όσο και της μέτρησης της ώρας, τα οποία είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα των παιδιών.

- 3) Στο σπίτι της Ηρώς αγαπούν τα γλυκά του κουταλιού. Ο πατέρας της αγόρασε 6 κιλά περγαμόντο για να φτιάξουν γλυκό και πλήρωσε 12 €. Η μητέρα της αγόρασε 4 κιλά νεράντζα και πλήρωσε ακριβώς τα ίδια χρήματα. Σκέφτηκε όμως ότι δεν θα της φτάσουν και αγόρασε 2,5 κιλά ακόμη. Πόσα χρήματα πλήρωσε για τα 2,5 κιλά;



**Εικόνα 3.10: Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που σχετίζεται με τη μαγειρική και το φαγητό και δεν ενδιαφέρει τα παιδιά (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 50, σελ.26)**

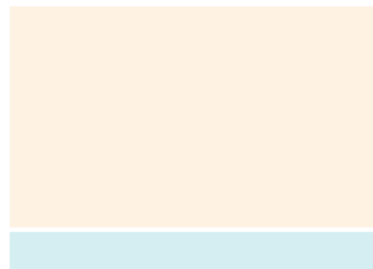
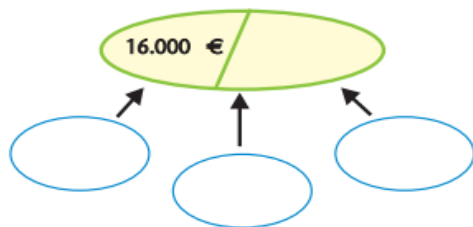
Το πρόβλημα της Εικόνας 3.10 αποτελεί επίσης ένα παράδειγμα λεκτικού ρεαλιστικού προβλήματος με θεματολογία γύρω από τη μαγειρική. Το συγκεκριμένο παράδειγμα συνδέει την πραγματική ζωή των μαθητών με τα μαθηματικά, ωστόσο ενδέχεται να είναι ένα θέμα που δεν ενδιαφέρει άμεσα τους μαθητές.

Μία ακόμη κατηγορία θεμάτων που πλαισιώνει τα λεκτικά προβλήματα σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των παιδιών στο σχολείο ή την οικογένεια. Αυτού του είδους τα θέματα συνδέουν άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο των μαθητών, καθώς αυτού του είδους τα προβλήματα προσομοιάζουν τις καταστάσεις που βιώνουν καθημερινά. Τα δύο παραδείγματα στις Εικόνες 3.11 και 3.12 που ακολουθούν σχετίζονται με τέτοιες καθημερινές καταστάσεις.

Για παράδειγμα, στην Εικόνα 3.11 το λεκτικό πρόβλημα αφορά στο εισόδημα της οικογένειας ενός παιδιού και τις κατηγορίες εξόδων στις οποίες αυτό δαπανάται. Είναι ένα θέμα που αφορά άμεσα τους μαθητές, καθώς και οι ίδιοι ενδέχεται να αντιμετωπίσουν μία παρόμοια κατάσταση και να καταφύγουν σε υπολογισμούς των εσόδων και των εξόδων της οικογένειάς τους.

- 4) Στο **επίσιο εισόδημα** της οικογένειας του Πέτρου συνεισφέρουν και οι δύο του γονείς. Από το κοινό τους εισόδημα οι γονείς του διαθέτουν 6.600 € για το ενοίκιο του σπιτιού τους και 11.500 € για ένδυση και διατροφή. Τους μένουν ακόμη 15.900 € για τις υπόλοιπες ανάγκες τους. Το επίσιο εισόδημα της μητέρας είναι **16.000 €**. Ποιο είναι το εισόδημα του πατέρα;

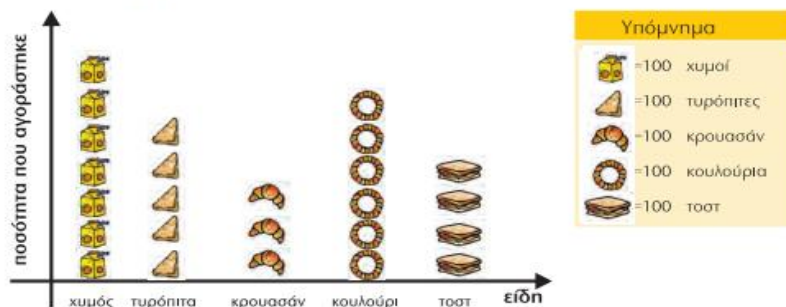
- Συμπληρώνω στο σχεδιάγραμμα τα στοιχεία του προβλήματος.
- Βάζω ερωτηματικό ( ; ) στη θέση του ζητούμενου στοιχείου.
- Στη συνέχεια επιλύω το πρόβλημα.



**Εικόνα 3.11: Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος του οποίου το πλαίσιο σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των παιδιών και την οικογένεια (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 45, σελ.15)**


Παρομοίως, στην Εικόνα 3.12 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η μηνιαία κατανάλωση των τροφίμων στο κυλικείο ενός σχολείου. Το πλαίσιο του συγκεκριμένου λεκτικού προβλήματος είναι εμπνευσμένο από την καθημερινότητα των μαθητών και προσομοιάζει καταστάσεις που βιώνουν καθημερινά. Συνεπώς, είναι ένα πρόβλημα που τους αφορά άμεσα και τους ενδιαφέρει.

- 1) Το εικονόγραμμα παρουσιάζει τι ψώνισαν τα παιδιά του σχολείου από το κυλικείο τον προηγούμενο μήνα.



- Συμπληρώνω στον πίνακα τα στοιχεία που λείπουν:

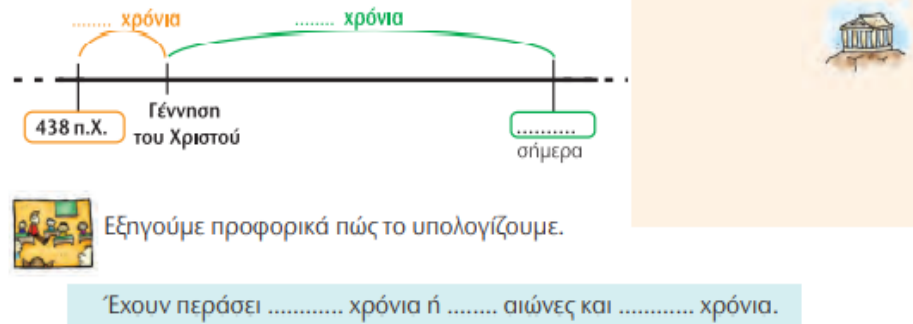
είδος	χυμός	τυρόπιτα	κρουασάν	κουλούρι	τσστ
ποσότητα που αγοράστηκε					

- α) Ποιο είδος αγοράστηκε περισσότερο; .....
- β) Ποιο είδος αγοράστηκε λιγότερο; .....
- γ)  Με τα στοιχεία του εικονογράμματος, μπορούμε να απαντήσουμε πόσα παιδιά ψώνισαν στο κυλικείο τον τελευταίο μήνα; Εξηγούμε: .....
- .....

**Εικόνα 3.12: Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των παιδιών και το σχολείο (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 56, σελ.40)**

Ακόμη, τα ρεαλιστικά προβλήματα του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών της Δ' τάξης αντλούν τη θεματολογία τους από πολιτισμικά, ιστορικά ή άλλα σημαντικά γεγονότα. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί το ρεαλιστικό πρόβλημα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.13, το οποίο αφορά στο μνημείο της Ακρόπολης στην Αθήνα. Ειδικότερα, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν πόσα χρόνια έχουν περάσει από την κατασκευή του Παρθενώνα μέχρι την ημέρα που λύνουν το συγκεκριμένο πρόβλημα.

- 6) Ο ναός του Παρθενώνα, στην Ακρόπολη των Αθηνών, ολοκληρώθηκε το 438 π.Χ. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από τότε ως σήμερα;



**Εικόνα 3.13: Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος του οποίου το πλαίσιο σχετίζεται με πολιτισμικά, ιστορικά ή άλλα σημαντικά γεγονότα (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ. 51, σελ.29)**

Μία ακόμη κατηγορία προβλημάτων που συναντάται συχνά στα μαθηματικά σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης είναι αυτά που αφορούν μετρήσεις και συγκρίσεις ύψους, κιλών ή ηλικίας μεταξύ παιδιών ή/και ζώων. Η συγκεκριμένη θεματολογία πλαισίων συνδέει τον πραγματικό κόσμο των μαθητών με τα μαθηματικά, όχι όμως τόσο όσο θα τα συνέδεε ένα παρόμοιο αυθεντικό πρόβλημα. Ακολουθεί στην Εικόνα 3.14 ένα ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος.

- 1) Η Σοφία έχει ύψος 1,42 μ. και είναι 7 εκ. ψηλότερη από τη Μαρίνα. Ποιο είναι το ύψος της Μαρίνας;

● Ελέγχω το αποτέλεσμα της Ηρώς:

Η Μαρίνα είναι 1,49 μ.

**Εικόνα 3.14: Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που σχετίζεται με μετρήσεις και συγκρίσεις ύψους, κιλών ή ηλικίας μεταξύ παιδιών ή/και ζώων (Τετράδιο Μαθητή, δ' τεύχος, κεφ.45., σελ.14)**

Το συγκεκριμένο λεκτικό πρόβλημα, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το ύψος δύο κοριτσιών, είναι ένα ρεαλιστικό πρόβλημα εφαρμογής και συνδέεται με την πραγματική ζωή των παιδιών. Ωστόσο, θα ήταν πολύ πιο ενδιαφέρον και χρήσιμο για τους μαθητές να υπολογίσουν το δικό τους ύψος σε σύγκριση με το ύψος των συμμαθητών τους.

Τέλος, τα λεκτικά προβλήματα στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν πλαισιώνονται από θέματα που αφορούν στον χώρο του αθλητισμού και του παιχνιδιού, κάτι που προέρχεται από την καθημερινή ζωή των παιδιών και, πιθανότατα, να έλκει και το ενδιαφέρον τους. Ακολουθεί ένα παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος, το οποίο αντλεί τη θεματολογία του από τον χώρο της άθλησης και αφορά αγώνες στίβου.

**5)** Στον Μαραθώνιο δρόμο οι αθλητές διανύουν 42 χμ. και 150 μ. Ο Σουηδός μαραθωνοδρόμος έχει διανύσει 25,5 χμ. Ο Ισπανός έχει διανύσει 25.350 μ. Ποιος έχει διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση και πόσο;

• Εκτιμώ: .....

Υπολογίζω με ακρίβεια:



• Πόση απόσταση πρέπει να διανύσει ακόμα ο καθένας για να τερματίσει;

**Εικόνα 3.15:** Ενδεικτικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος με πλαίσιο που σχετίζεται με τον χώρο του αθλητισμού (Τετράδιο Μαθητή, β' τεύχος, κεφ. 3<sup>η</sup> επαν., σελ.19)

Στο λεκτικό πρόβλημα της Εικόνας 3.15, που αποτελεί ένα ρεαλιστικό πρόβλημα εφαρμογής, οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν τις αποστάσεις που διένυσαν οι δύο δρομείς στους αγώνες στίβου και είναι ένα θέμα που, πιθανότατα, να έλκει το ενδιαφέρον των μαθητών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

---

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να ταξινομηθούν τα λεκτικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων της Δ' τάξης στις κατηγορίες που ορίστηκαν σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Son & Diletti, 2017; Xin et al., 2011; Zhu & Fun, 2006), καθώς και να μελετηθούν τα πλαίσια των προβλημάτων, ώστε να διαπιστωθεί εάν υπάρχει σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα βασικά ευρήματα της παρούσας μελέτης και θα επιχειρηθεί η διατύπωση ορισμένων περιορισμών που εντοπίστηκαν κατά την πραγμάτωσή της. Τέλος, θα παρουσιαστούν κάποιες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Συνολικά αναλύθηκαν 276 λεκτικά προβλήματα, τα οποία βρίσκονται σε όλο το εύρος των σχολικών εγχειριδίων της Δ' τάξης, ΒΜ και ΤΜ (εξαιρούνται τα κεφάλαια της γεωμετρίας που δεν συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση). Από αυτά, τα περισσότερα βρίσκονται στα τέσσερα τεύχη των ΤΜ (179) και λιγότερα στο ΒΜ (97).

Όσον αφορά το πόσο εμφανής είναι η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής για την επίλυση του προβλήματος, το 77,54% των λεκτικών προβλημάτων που εμπεριέχονται στα εγχειρίδια της Δ' Τάξης αποτελούν τυποποιημένα προβλήματα, καθώς η διαδικασία προς τη λύση είναι γνωστή ή αποτελεί απλώς την εφαρμογή ενός αλγόριθμου. Τα μη τυποποιημένα προβλήματα, από την άλλη, αποτελούν ένα χαμηλό ποσοστό του συνόλου των προβλημάτων (22,46%). Ωστόσο, σε σύγκριση με τα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. και της Κίνας, όπου τα ποσοστά των τυποποιημένων προβλημάτων είναι 96.8% και 98.8%, αντίστοιχα (Zhu και Fun, 2006), αλλά και με τα εγχειρίδια της Ολλανδίας, όπου τα μη τυποποιημένα προβλήματα κατέχουν ένα πολύ χαμηλό ποσοστό στο σύνολο των προβλημάτων (van Zanten & van den Heuvel Panhuizen, 2018), τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου εμπεριέχουν περισσότερα μη τυποποιημένα προβλήματα.

Σχετικά με τον τύπο του προβλήματος (παραδοσιακά - μη παραδοσιακά), τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως, ομοίως με τα αμερικάνικα και τα κινέζικα

σχολικά εγχειρίδια, η πλειοψηφία των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' τάξης αποτελούν παραδοσιακά προβλήματα. Ωστόσο, τα ποσοστά των παραδοσιακών προβλημάτων στα ελληνικά εγχειρίδια είναι σημαντικά μικρότερα. Πιο συγκεκριμένα, το 63,41% των προβλημάτων που αναλύθηκαν είναι παραδοσιακά, με το αντίστοιχο ποσοστό στην Κίνα να είναι 99,5% και στις Η.Π.Α. 97,2% (Zhu & Fun, 2006).

Επίσης, τα ποσοστά στα εγχειρίδια της Δ' τάξης δείχνουν μεγαλύτερη ποικιλία και καλύτερη κατανομή της συχνότητας στους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων. Από το σύνολο των μη παραδοσιακών προβλημάτων, τα προβλήματα Γρίφοι (Puzzle Problem) όπως και τα προβλήματα Κατασκευής (Problem-Posing Problem) συνιστούν το 32,67%. Το 25,75% είναι προβλήματα Πρότζεκτ (Project Problem) και μόλις το 8,91% αποτελούν προβλήματα Καταγραφής (Journal Problem). Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με τα ευρήματα της Κίνας, όπου τα ποσοστά δεν είναι τόσο εξισορροπημένα και τα εγχειρίδια περιέχουν μόνο τα προβλήματα γρίφους και κατασκευής (Zhu & Fun, 2006). Στα εγχειρίδια των Η.Π.Α., από την άλλη, υπάρχει καλύτερη κατανομή των προβλημάτων στους τέσσερις τύπους μη παραδοσιακών προβλημάτων, αλλά και πάλι η κατανομή των εγχειριδίων της Δ' τάξης είναι πιο εξισορροπημένη.

Αναφορικά με τον αριθμό των δυνατών απαντήσεων, βρέθηκε πως τα κλειστά προβλήματα υπερτερούν σημαντικά έναντι των ανοιχτών προβλημάτων στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Δ' Τάξης, καθώς τα κλειστά προβλήματα καταλαμβάνουν το 85,14% του συνόλου των προβλημάτων. Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μην έρχονται συχνά αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου προβλήματα και να μην αναπτύσσουν δεξιότητες σκέψης ανώτερης τάξης για την επίλυση προβλημάτων. Επίσης, το εύρημα αυτό αποκλίνει από τους ειδικούς στόχους του ΑΠΣ για τη Δ' τάξη, όπου τονίζεται πως οι μαθητές πρέπει να μάθουν να διερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις (ΥΠΕΠΘ, 2001). Ωστόσο, στα βιβλία της Δ' τάξης υπάρχουν περισσότερα ανοιχτά προβλήματα σε σχέση με τα εγχειρίδια της Κίνας και των Η.Π.Α., όπου τα κλειστά προβλήματα κατέχουν το 98,1% και το 93,4%, αντίστοιχα (Zhu & Fun, 2006).

Σχετικά με τον τύπο της απάντησης, στα βιβλία των μαθηματικών της Δ' τάξης τα προβλήματα που απαιτούν αιτιολόγηση ή επεξήγηση για τον συλλογισμό τους κατέχουν το 21,38%, ενώ η πλειοψηφία των προβλημάτων ζητά μόνο το αποτέλεσμα



(78,62%). Το χαμηλό αυτό ποσοστό των προβλημάτων χωρίς αιτιολόγηση της απάντησης έρχεται σε ρήξη με τους ειδικούς στόχους του ΑΠΣ, αναφορικά με την επίλυση προβλήματος στη Δ' τάξη. Όπως αναφέρεται, οι μαθητές πρέπει να μάθουν «να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης, να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα» (ΥΠΕΠΘ, 2001, σ. 263). Δεδομένου, λοιπόν, ότι η υποεκπροσώπηση ορισμένων τύπων προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια, συμβάλει στην μειωμένη απόδοση σε αυτού του είδους τα προβλήματα (Desli & Loukidou, 2014; Singh et al., 2020; Xin, 2007), κρίνεται αναγκαίο να αυξηθεί το ποσοστό των προβλημάτων που απαιτούν επεξήγηση στα σχολικά βιβλία της Δ' τάξης.

Αναφορικά με τη σύνδεση του σεναρίου με τον πραγματικό κόσμο, τα ευρήματα δείχνουν πως η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης αφορούν καταστάσεις που είναι εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο, με ποσοστό που φτάνει το 69,57%. Από την άλλη τα προβλήματα με καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο κατέχουν ένα αρκετά μικρότερο ποσοστό (30,43%). Φανερόνεται, λοιπόν, η προσπάθεια σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, ώστε οι μαθητές να διαπιστώσουν πως τα μαθηματικά του σχολείου έχουν νόημα και είναι χρήσιμα στην καθημερινή τους ζωή. Σε αντιδιαστολή, τα αποτελέσματα αυτά αποκλίνουν με τα ευρήματα στα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. και της Κίνας, όπου η πλειοψηφία των προβλημάτων δεν σχετίζεται με πραγματικές καταστάσεις (Zhu & Fun, 2006). Εντούτοις, τόσο στα ελληνικά εγχειρίδια της Δ' τάξης όσο και στα βιβλία των δύο αυτών χωρών, η εμφάνιση των αυθεντικών προβλημάτων είναι περιορισμένη και τα ποσοστά των Η.Π.Α. συγκλίνουν σημαντικά με αυτά της παρούσας μελέτης.

Οι πληροφορίες που παρέχονται στα προβλήματα των βιβλίων που αναλύθηκαν είναι στη συντριπτική πλειοψηφία τους οι απολύτως απαραίτητες, ώστε το πρόβλημα να είναι επιλύσιμο (97,1%). Είναι ιδιαίτερα περιορισμένα τα προβλήματα με ελλιπή δεδομένα (0,73%), ενώ αρκετά χαμηλό είναι και το ποσοστό των προβλημάτων με περιττά δεδομένα (2,17%). Τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά των αμερικανικών και των κινέζικων βιβλίων (Zhu & Fun, 2006). Ωστόσο, η εμπειρία με προβλήματα που δεν παρέχουν ακριβώς τις απαραίτητες πληροφορίες είναι σημαντική, διότι συμβάλει στην

ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα των δεδομένων του προβλήματος, όπως ακριβώς συμβαίνει και στον πραγματικό κόσμο. Στην πραγματικότητα, οι άνθρωποι συνήθως πρέπει να συλλέγουν πληροφορίες, να κρίνουν την ποιότητα των πληροφοριών και στη συνέχεια να επιλέγουν αυτές που είναι απαραίτητες για την επίλυση των καθημερινών τους προβλημάτων (Zhu & Fun, 2006).

Όσον αφορά τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων, τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης αποτελούνται κυρίως από προβλήματα πολλαπλών βημάτων (69,57%), γεγονός που τα καθιστά προβλήματα μεσαίας ή υψηλής πολυπλοκότητας (Vicente et al., 2018). Το ποσοστό τους είναι ιδιαίτερα υψηλό συγκριτικά με άλλα ευρήματα, όπως αυτά που αφορούν στα σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α. (Son & Senk, 2010; Zhu & Fun, 2006), της Κίνας (Zhu & Fun, 2006), της Ισπανίας (Vicente et al., 2018) ή της Κορέας, όπου τα προβλήματα που απαιτούν πολλαπλά υπολογιστικά βήματα δεν ξεπερνούν το 19% (Son & Senk, 2010),.

Τέλος, τα αναπαραστατικά μέσα που πλαισιώνουν τα περισσότερα λεκτικά προβλήματα στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄τάξης (69,57%) αποτελούν έναν συνδυασμό λεκτικών (λεκτικές περιγραφές), μαθηματικών (μαθηματικά σύμβολα) και οπτικών (γραφήματα, εικόνες, αριθμογραμμές, πίνακες κ.ά.) μέσω αναπαράστασης. Επίσης, ένα μικρότερο ποσοστό των προβλημάτων αναπαριστάται αποκλειστικά με λεκτικό τρόπο (30,43%), ενώ απουσιάζουν τα προβλήματα σε αμιγώς μαθηματική ή οπτική μορφή (0%). Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα έργα που μελετήθηκαν αποτελούν λεκτικές περιγραφές μίας προβληματικής κατάστασης και συνεπώς, αναπαριστώνται όλα, εν μέρει, με λεκτικά μέσα. Τα ευρήματα συγκλίνουν με αυτά στα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. ως προς τα προβλήματα σε λεκτική μορφή, τα οποία αποτελούν το 31,5%, αλλά διαφέρουν ως προς τα προβλήματα σε συνδυαστική, οπτική και καθαρά μαθηματική μορφή (Zhu & Fun, 2006).

Σύμφωνα με τα ευρήματα της παρούσας ανάλυσης, τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης εμπεριέχουν λεκτικά προβλήματα που συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο, αφού τα προβλήματα εφαρμογής αποτελούν την πλειοψηφία των προβλημάτων (69,57%). Η σύνδεση αυτή πραγματοποιείται μέσω των σεναρίων των προβλημάτων, τα οποία προέρχονται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Τα πιο συχνά θέματα που

υιοθετούνται στα σενάρια σχετίζονται με οικονομικά ζητήματα καθημερινής ζωής, όπως ζητήματα σχετικά με αγορές προϊόντων και οικονομικές συναλλαγές ή θέματα από τη γαστρονομία, που σχετίζονται με τη μαγειρική και το φαγητό. Επίσης, αντλούν τη θεματολογία τους από πολιτισμικά, ιστορικά ή άλλα σημαντικά γεγονότα, τον χώρο του αθλητισμού και του παιχνιδιού και την καθημερινή ζωή των παιδιών στο σχολείο ή την οικογένεια. Τέλος, τα προβλήματα αφορούν, συχνά, μετρήσεις και συγκρίσεις ύψους, κιλών ή ηλικίας μεταξύ παιδιών ή/και ζώων. Εντούτοις, υπάρχουν προβλήματα τα οποία, παρόλο που το πλαίσιο τους είναι ρεαλιστικό και συνδέουν τα μαθηματικά με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, ενδέχεται να μην ενδιαφέρουν τους μαθητές. Η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο δεν συνεπάγεται και την εξασφάλιση του ενδιαφέροντος των παιδιών για ένα θέμα. Για τον λόγο αυτό, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια περισσότερα αυθεντικά προβλήματα, τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα με τη ζωή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

Εξετάζοντας συγκριτικά το σύνολο των λεκτικών προβλημάτων, διαπιστώνεται ότι η κατανομή της συχνότητας των διαφορετικών κατηγοριών στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης είναι άνιση. Εμφανίζονται περισσότερα τυποποιημένα και παραδοσιακά προβλήματα, κλειστού τύπου και πολλών υπολογιστικών βημάτων. Επίσης, είναι κυρίως προβλήματα με επαρκή δεδομένα, ρεαλιστικό πλαίσιο, που δεν απαιτούν κάποια αιτιολόγηση για την απάντηση και που αναπαριστώνται με συνδυασμό αναπαραστατικών μέσων. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν την ανάγκη για μία πιο ισορροπημένη κατανομή των διαφορετικών τύπων προβλημάτων, ώστε οι μαθητές να εκτίθενται σε μία πολύπλευρη διάσταση της επίλυσης προβλήματος. Η αναγκαιότητα για μία πιο αρμονική κατανομή ενισχύεται και από το γεγονός ότι η κακή απόδοση των παιδιών σε ορισμένους από τους τύπους προβλημάτων που υποεκπροσωπούνται στα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας και εξάσκησης των μαθητών σε τέτοιες προβληματικές καταστάσεις (Desli & Loukidou, 2014; Singh et al., 2020; Xin, 2007). Τέλος, η χρήση περισσότερων μη τυποποιημένων και ανοιχτού τύπου προβλημάτων κρίνεται αναγκαία, προκειμένου να βελτιωθούν οι μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών (Βισσαρίου & Δεσλή, 2021).

Μέσα από την παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να φανερωθούν οι διδακτικές ευκαιρίες που παρέχονται στους μαθητές γύρω από την επίλυση λεκτικού προβλήματος στη Δ' τάξη του δημοτικού σχολείου και να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο συνδέεται η μαθηματική εκπαίδευση με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Κατά την προσπάθεια υλοποίησης της παρούσας έρευνας παρουσιάστηκαν κάποιες δυσκολίες όσον αφορά την ταξινόμηση των λεκτικών προβλημάτων στις επιμέρους κατηγορίες. Ωστόσο, έπειτα από επανειλημμένες και προσεκτικές αναγνώσεις, πάντα σε συνάρτηση με τη βιβλιογραφία, έγινε η ομαδοποίηση και η ταξινόμηση των προβλημάτων, έτσι ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής και να επιτευχθούν οι στόχοι της εργασίας.

Παρόλο που η παρούσα έρευνα εστιάζει στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης, θα άξιζε να εξεταστούν τα σχολικά εγχειρίδια και των υπόλοιπων τάξεων, ώστε η εικόνα για τις διδακτικές ευκαιρίες στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, που παρέχονται στους μαθητές στο ελληνικό δημοτικό σχολείο, να είναι πιο ολοκληρωμένη. Επίσης, θα ήταν ακόμη πιο ενδιαφέρον να μελετηθούν και οι επιδόσεις των μαθητών στις επιμέρους κατηγορίες των προβλημάτων και να γίνει μία συσχέτιση μεταξύ της συχνότητας εμφάνισής τους και των επιδόσεων των μαθητών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 5.A. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Apple, M. W. (1992). The text and cultural politics. *Educational Researcher*, 21(7), 4-19.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Chien, C. Y., & Young, K. (2007). The centrality of textbooks in teachers' work: perceptions and use of textbooks in a Hong Kong primary school. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 16(2), 155-163.
- De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. In *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (pp. 66-73).
- Desli, D., & Loukidou, H. (2014). Addition and subtraction word problems in greek grade A and grade B mathematics textbooks: distribution and children's understanding. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 8, 340., 1-15.
- Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75.

- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a fivedimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, 49(7), 1003-1024.
- Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what?. *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590.
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. W. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study* (NCES 2003-013). Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). *The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning*. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). *Problem solving: A handbook for elementary school teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234-241.

- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2), 255-286.
- Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.
- Oates, T. (2014). *Why textbooks count*. Cambridge: Cambridge assessments. Ανάκτηση από: <http://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/181744-why-textbooks-count-tim-oates.pdf>. (14 Ιουλίου 2014)
- Pepin, B., Haggarty, L. & Keynes, M., (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *ZDM*, 33(5), 158-175.
- Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 247-266.
- Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of “out loud” problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 171-191.
- Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 179-214.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 9-34.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38.

- Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Singh, P., Yusoff, N. M., & Hoon, T. S. (2020). Content analysis of primary school mathematics textbooks and its relationship with pupils achievement. *Asian Journal of University Education*, 16(2), 15-25.
- Son, J. W., & Diletti, J. (2017). What can we learn from textbook Analysis? In J. W. Son, T. Watanabe & J. Lo (Eds), *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education*, (pp. 3-32). Cham: Springer.
- Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., & Sook Kim, M. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 3(3), 153-171.
- Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191-201.
- Usiskin, Z. (2013). Studying textbooks in an information age—a United States perspective. *ZDM*, 45(5), 713-723.
- van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 713-717.
- van Zanten, M. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Freedom of design: The multiple faces of subtraction in Dutch primary school textbooks. In *Mathematics Curriculum in School Education* (pp. 231-259). Springer, Dordrecht.



- van Zanten, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM*, 50(5), 827-838.
- Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 195-229.
- Vicente, S., Manchado, E., & Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks. *Cultura y Educación*, 30(1), 71-104.
- Vicente, S., Sánchez, R., & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European Journal of Psychology of Education*, 35(3), 567-587.
- Xenofontos, C., & Papadopoulos, C. (2015). The history of mathematics in the lower secondary textbook of Cyprus and Greece: Developing a common analytical framework. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1766-1772).
- Xin, Y. P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, 100(6), 347-360.
- Xin, Y. P., Liu, J., & Zheng, X. (2011). A cross-cultural lesson comparison on teaching the connection between multiplication and division. *School Science and Mathematics*, 111(7), 354-367.
- Yeo, K. K. J. (2009). Secondary 2 Students' Difficulties in Solving Non-Routine Problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 10, 1-30

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

## 5. Β. Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Βισσαρίου, Α., & Δεσλή, Δ. (2021). Ο ρόλος των μη τυποποιημένων προβλημάτων στην επίλυση προβλήματος, *Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*, 438-447

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007a). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Βιβλίο Δασκάλου*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007b). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Βιβλίο Μαθητή*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007c). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή α' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007d). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή β' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007e). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή γ' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007f). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή δ' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

- Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού, Β. (2006). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού: Βιβλίο του Δασκάλου*. Αθήνα: Πατάκη.
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.
- Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω;*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.
- Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη*. Θεσσαλονίκη: Κάτοπτρο.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών – Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, τ. Α' Αθήνα: ΥΠ.Ε.Π.Θ και Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.*
- Τσιώλης, Γ. (2015). Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων: διλήμματα, δυνατότητες, διαδικασίες. *Ερευνητική Μεθοδολογία στις Κοινωνικές Επιστήμες και στην Εκπαίδευση. Συμβολή στην επιστημολογική θεωρία και την ερευνητική πράξη*, 473-498.
- Τύπας, Γ. (2005). Τα νέα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: το πλαίσιο δημιουργίας και τα ειδικά χαρακτηριστικά τους. *Πρακτικά Συνεδρίου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, με θέμα: «Διδακτικό βιβλίο και εκπαιδευτικό υλικό στο Σχολείο: Προβληματισμοί – Δυνατότητες – Προοπτικές»*. Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- van de Walle, J.A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά για δημοτικό και γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο
- ΥΠΕΠΘ (2001). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*, ΦΕΚ 303/τεύχ.2<sup>ο</sup>, 13-3-2003.