



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Διϋδρματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο:

«Επιστήμες της αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Κατεύθυνση: «Α' Ηλικιακός κύκλος (5 -12 χρονών)»

Διπλωματική εργασία με θέμα:

«Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις μαθηματικές ικανότητες: Η περίπτωση των δεκαδικών αριθμών»

“Number line estimation with decimal numbers and its relationship with mathematical competence”

Γρίβα Σοφία (ΑΕΜ: 1008)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Α.Π.Θ

Μέλη τριμελούς επιτροπής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ, 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια μου, κα. Δέσποινα Δεσλή, για την ανεκτίμητη καθοδήγηση και τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές, που μου προσέφερε με μεγάλη προθυμία, κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, επιθυμώ να ευχαριστήσω τον κ. Λεμονίδη και την κα. Βαμβακούση για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους δικούς μου ανθρώπους, που είναι πάντα δίπλα μου και με στηρίζουν απόλυτα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	6
ABSTRACT.....	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ:ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ	15
A.1.1 Αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης και γενικά χαρακτηριστικά της	15
A.1.2 Χρησιμότητα της εκτίμησης στη μαθηματική εκπαίδευση.....	16
A.1.3 Είδη Εκτίμησης.....	17
A.2 Εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή.....	21
A.2.1 Αποσαφήνιση του όρου	21
A.2.2 Είδη έργων εκτίμησης σε αριθμογραμμή	21
A.2.3 Ευρήματα σχετικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή	23
A.2.3.1 Λογαριθμικές – γραμμικές αναπαραστάσεις.....	23
A.2.3.2 Στρατηγικές αναλογίας	24
A.2.3.2.1 Είδος αριθμογραμμής	26
A.2.3.3 Διμερές γραμμικό μοντέλο-εξοικείωση με τους αριθμούς.....	28
A.2.4 Ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση ρητών αριθμών σε αριθμογραμμή	30
A.3 Σχέση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές ικανότητες	34

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ40

B.1 Συμμετέχοντες.....40

B.2 Σχεδιασμός της έρευνας- Εργαλείο μέτρησης41

B.3 Διαδικασία.....44

B.4 Ανάλυση δεδομένων45

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....47

Γ.1 Επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης.....47

Γ.1.1. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα (Ε'-Στ' τάξη).....47

Γ.1.2. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το φύλο48

Γ.1.3 Επιμέρους επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης49

Γ.1.3.1 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το είδος του Έργου (NP-PN) .49

Γ.1.3.2 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το είδος της αριθμογραμμής ..50

Γ.1.3.3 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το μέγεθος των αριθμών (αριθμοί μικρότεροι της μονάδας και αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας)52

Γ.2 Επίδοση στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων.....55

Γ.2.1 Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα (Ε'-Στ' τάξη).....55

Γ.2.2 Επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το είδος Έργου56

Γ.3 Συσχέτιση της επίδοσης στην εκτίμηση με την επίδοση στις μαθηματικές ικανότητες58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	67
E.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία.....	67
E.2 Ελληνική και ελληνόγλωσση βιβλιογραφία	72
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	74
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	96

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει αφενός την ικανότητα για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και αφετέρου τη σχέση αυτής με τις μαθηματικές ικανότητες. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε 118 μαθητές (58 μαθητές της Ε' και 60 μαθητές Στ' τάξης) τέσσερα έργα: α) Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή (number-to-position – NP), β) Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή (position-to-number – PN), γ) Έργο 3: Έργο Επίλυσης Προβλήματος και δ) Έργο 4: Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων. Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν υψηλή (80,5%) και δεν επηρεάστηκε από την ηλικία, καθώς οι επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων κινήθηκαν σε παρόμοιο επίπεδο. Ωστόσο, το είδος του έργου (Έργο NP και PN) επηρέασε τις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων, οι οποίες εμφάνισαν μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες του έργου PN. Επίσης, η ύπαρξη επιπλέον σημείων αναφοράς, πέρα από το αρχικό και το τελικό σημείο αναφοράς, στις αριθμογραμμές ευνόησε την επιτυχία στις επιδόσεις των συμμετεχόντων. Το μέγεθος των εμπλεκόμενων δεκαδικών αριθμών επηρέασε τις επιδόσεις των μαθητών της Ε' τάξης, οι οποίοι παρουσίασαν υψηλότερη επιτυχία, όταν το μέγεθος των αριθμών ήταν μικρότερο της μονάδας, ενώ δεν διαφοροποίησε τις επιδόσεις των μεγαλύτερων μαθητών (Στ' τάξης). Υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην ικανότητα για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και την επίλυση προβλήματος, εύρημα που σημαίνει πως όσοι συμμετέχοντες εμφάνισαν υψηλή επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν υψηλή επίδοση και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Αντίθετα, καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην επιτυχία των εκτιμήσεων και την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων.

ABSTRACT

The aim of the present study is twofold, to examine both the ability of children to estimate decimal numbers on the number line and its relationship with mathematical competence. For this purpose, four tasks were designed and presented to 118 students (58 students of fifth grade and 60 students of sixth grade): a) Task 1: estimate the position of decimal numbers on the number line (number-to-position – NP), b) Task 2: estimate the numerical value of a decimal number which is indicated in a specific position on the number line (position-to-number – PN), c) Task 3: problem solving task and d) Task 4: arithmetic operation task. The overall participants' performance was high (80.5%) and was not affected by age, as the performance of the two age groups was very similar. The type of number line task (NP and PN Tasks) affected the estimations produced, with participants being more successful in the PN Task. In addition, students' accuracy of estimates was favored by the presence of additional reference points, in addition to starting and ending points, on the number lines. The size of the decimal numbers seemed affected the performance of the fifth graders, who performed higher when the numbers were smaller than one, whereas it did not differentiate the performance of the older students (sixth graders). A high positive correlation was found between the ability of number line estimations with decimal numbers and problem solving ability: participants who provided successful number line estimations tended to show great success in problem solving as well. In contrast, no correlation was found between number line estimation with decimal numbers on the number line and the execution of algorithms.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκτίμηση αποτελεί μία βασική δεξιότητα που διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στη μαθησιακή διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, στην καθημερινότητα παιδιών και ενηλίκων προκύπτουν πολλές καταστάσεις που δεν απαιτούν συγκεκριμένη αλλά μία προσεγγιστική απάντηση με σκοπό την εξοικονόμηση πολύτιμου χρόνου (van de Walle, 2007). Ο van de Walle (2007) υπογραμμίζει πως «ο όρος εκτίμηση αναφέρεται σε έναν αριθμό που αποτελεί κατάλληλη προσέγγιση για ένα ακριβή αριθμό που δίνεται στο κάθε συγκεκριμένο» (σελ. 326). Η σημασία των δεξιοτήτων εκτίμησης στα Μαθηματικά είναι αδιαμφισβήτητη και αναδεικνύεται από την παρουσία της στα αναλυτικά πρόγραμμα σπουδών από τη δεκαετία του 1980 (Segovia & Castro, 2009). Στην Ελλάδα, η διδασκαλία των εκτιμήσεων πρωτοεμφανίστηκε στα σχολικά εγχειρίδια το 2006 (Δεσλή, 2021). Παράλληλα, η αναγκαιότητα των εκτιμήσεων δεν συνδέεται μόνο με την πρακτική τους χρησιμότητα αλλά εντοπίζεται και στα σημαντικά τους οφέλη για την κατανόηση άλλων μαθηματικών πεδίων όπως, για παράδειγμα, της ενίσχυσης της αίσθησης του αριθμού (Bana & Dolma, 2006· Segovia & Castro, 2009).

Ο Reys (1984) και έπειτα οι Segovia, Castro, Rico και Castro (1989, στο Segovia & Castro, 2009) κατέληξαν πως οι εκτιμήσεις εμφανίζουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ τους. Αναλυτικότερα, με τις εκτιμήσεις προσδιορίζονται κατά προσέγγιση είτε το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης ή η αξία μιας ποσότητας. Το άτομο που καλείται να εκτιμήσει διαθέτει κάποιες πληροφορίες, αναφορές ή εμπειρίες σχετικά με την κατάσταση που πρέπει να εκτιμήσει και πραγματοποιεί την εκτίμηση νοερά και γρήγορα. Τέλος, η τιμή που προκύπτει από τις εκτιμήσεις δεν είναι ακριβής και ποικίλει ανάλογα με το άτομο που εκτιμά.

Οι εκτιμήσεις διακρίνονται σε τρία είδη. Στην πρώτη κατηγορία εκτιμήσεων εντάσσονται οι καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης. Ως υπολογιστική εκτίμηση ορίζεται ο κατά προσέγγιση προσδιορισμός του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης που δεν θέλουμε ή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια όπως για παράδειγμα, η κατανάλωση βενζίνης ενός αυτοκινήτου αν ταξιδεύει σε μια απόσταση 326 μιλίων με 16 γαλόνια βενζίνης (δηλαδή το κατά προσέγγιση πηλίκο της διαίρεσης $326 : 25$) (van de Walle, 2007, σελ. 326). Υπάρχουν, επίσης, οι εκτιμήσεις

μέτρησης που περιλαμβάνουν τον προσδιορισμό της κατά προσέγγιση μέτρησης -για το μήκος, το βάρος, το ύψος, κ.α. (Hogan & Brezinkí, 2003)- χωρίς να πραγματοποιηθεί η ακριβής μέτρηση (van de Walle, 2007). Ένα άλλο είδος εκτίμησης είναι η εκτίμηση πλήθους που αφορά στον κατά προσέγγιση υπολογισμό του αριθμού των στοιχείων σε ένα σύνολο (Δεσλή, 2021). Οι Hogan και Brezinkí (2003) υπογραμμίζουν, μάλιστα, πως τα επιμέρους στοιχεία του συνόλου παρουσιάζονται έτσι ώστε να αποκλείεται η ακριβής καταμέτρησή τους. Για παράδειγμα, δύναται να εκτιμηθεί ο αριθμός από ζελεδάκια σε ένα βάζο (van de Walle, 2007) ή ο αριθμός των κουκκίδων σε έναν πίνακα (Hogan & Brezinkí, 2003). Σύμφωνα με την Dehaene (1997, στο Zhu, Cai & Leung, 2017), οι εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή αποτελούν και αυτές ένα είδος εκτιμήσεων. Μάλιστα, για αρκετούς ερευνητές αυτό το είδος εντάσσεται στην ευρύτερη κατηγορία των εκτιμήσεων πλήθους (Δεσλή, 2021). Τα έργα που εξετάζουν την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή είναι δύο ειδών. Το πρώτο έργο περιλαμβάνει δοκιμασίες, στις οποίες δίνεται στους συμμετέχοντες ένας αριθμός και καλούνται να εκτιμήσουν τη θέση του στην αριθμογραμμή (number-to-position, NP) ενώ στο δεύτερο έργο οι συμμετέχοντες βλέπουν ένα σημείο της αριθμογραμμής και πρέπει να εκτιμήσουν τον αριθμό στον οποίο η θέση αυτή αντιστοιχεί (position-to-number, PN) (Siegler & Opfer, 2003).

Αξίζει να σημειωθεί πως πολλοί ερευνητές¹ έχουν συμπεράνει πως η επίδοση στις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή συνδέεται με τις αριθμητικές και τις μαθηματικές ικανότητες (Booth & Newton, 2012· Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014· Booth & Siegler, 2006· De Wolf, Bassok & Holyoak, 2015· Dietrich, Huber, Dackermann, Moeller & Fischer, 2016· Friso-van den Bos, Kroesbergen, van Luit, Xenidou- Dervou, Jonkman, van der Scoot & van Lieshout, 2015· Schneider, Merz, Stricker, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel & Luwel, 2018· Siegler & Booth, 2004· Xing, Zax, George, Taggart, Bass & Barth, 2021· Zhu et al., 2017). Μια ευρέως αποδεκτή θεωρητική εξήγηση για τη συσχέτιση με τις μαθηματικές ικανότητες, όπως αναφέρουν οι Schneider et al. (2018), είναι πως οι δοκιμασίες με εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή είναι σε θέση να αξιολογούν θεμελιώδη στοιχεία της μαθηματικής σκέψης, τα οποία συμβάλλουν στην κατάκτηση της μαθηματικής ευχέρειας.

¹ Ο όρος «ερευνητές» χρησιμοποιείται για να δηλώσει και τα δύο φύλα. Με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιούνται και οι όροι «μαθητές» και «συμμετέχοντες».

Ειδικότερα, σχετικά με τις δοκιμασίες εκτίμησης με ρητούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή, έρευνες έχουν δείξει πως η επίδοση στις εκτιμήσεις αποτελεί προγνωστικό παράγοντα για τις επιδόσεις των μαθητών στο πεδίο της άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα εκτίμησης για τη θέση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή συνδέεται σθεναρά με την αλγεβρική ετοιμότητα (Booth & Newton, 2012) και ταυτόχρονα με τη βελτίωση της επίλυσης εξισώσεων σε μαθητές Γυμνασίου (Booth et al., 2014). Οι De Wolf et al. (2015), όμως, συμπέραναν πως η ικανότητα εκτιμήσεων για τη θέση των δεκαδικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή είναι καλύτερος προγνωστικός παράγοντας για τις αλγεβρικές δεξιότητες σε σχέση με την ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων της θέσης των ακέραιων ή των κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή.

Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται ποικίλα ευρήματα σχετικά με το πώς πραγματοποιούνται οι εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή από παιδιά και ενήλικες και κατά συνέπεια πώς συνδέονται με τις μαθηματικές ικανότητες. Έτσι, κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν πως οι εκτιμήσεις παιδιών και ενηλίκων σε έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή αποτυπώνουν τις πολλαπλές τους αναπαραστάσεις σχετικά με τα αριθμητικά μεγέθη. Πιο αναλυτικά, οι Siegler και Opfer (2003) κατέληξαν πως οι εκτιμήσεις για τη θέση των ακέραιων αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή (0-1.000), που έκαναν παιδιά ηλικίας 8 και 10 ετών, δεν ήταν τόσο ακριβείς και είχαν την μορφή λογαριθμικών αναπαραστάσεων, κάτι το οποίο δεν ισχύει με την ίδια συχνότητα σε μεγαλύτερα παιδιά ηλικίας 12 ετών αλλά και ενήλικες οι οποίοι ακολουθούν γραμμικές αναπαραστάσεις και καταλήγουν σε πιο επιτυχείς εκτιμήσεις. Σε παρόμοια αποτελέσματα, σχετικά με τις αναπαραστάσεις για τα αριθμητικά μεγέθη ανάλογα με την ηλικία, κατέληξε και άλλη έρευνα με συμμετέχοντες παιδιά του νηπιαγωγείου και της δευτέρας δημοτικού (Siegler & Booth, 2004). Τα παραπάνω ευρήματα λοιπόν καταδεικνύουν πως η ηλικία και η εξοικείωση με τα αριθμητικά μεγέθη οδηγούν σε πιο ακριβείς και γραμμικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών σε δοκιμασίες εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή. Ωστόσο, οι Bath και Paladino (2011) διαφώνησαν με την παραπάνω θεώρηση και συμπέραναν, μέσω ερευνών σε παιδιά ηλικίας 5 και 7 ετών, πως οι εκτιμήσεις για τους ακεραίους πάνω στην αριθμογραμμή βασίζονται σε σχέσεις αναλογίας, καθώς παρατήρησαν πως οι εκτιμήσεις των μαθητών δεν βασίζονται μόνο στο αριθμητικό μέγεθος που καλούνται να εκτιμήσουν αλλά στη σχέση που έχει το εκάστοτε αριθμητικό μέγεθος

με το σύνολο της αριθμογραμμής. Μία ακόμη θεώρηση, που έχει προστεθεί τα τελευταία χρόνια και αποτελεί επέκταση των παραπάνω ευρημάτων, είναι πως οι διαφορετικές επιδόσεις σε εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή, που παρατηρούνται σε διαφορετικές ηλικίες, οφείλονται στην εξοικείωση με τους αριθμούς, όπως φάνηκε από τα ευρήματα των Ebersbach, Luwel και Verschaffel (2015) σε έρευνά τους που πραγματοποίησαν με παιδιά νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού.

Οι Iuculano και Butterworth (2011) επιχειρώντας να εξετάσουν αν διαφέρουν οι εκτιμήσεις, που πραγματοποιούν ενήλικες και δεκάχρονα παιδιά, για τη θέση των κλασμάτων, των δεκαδικών αριθμών, των δίψηφων ακεραίων και της αξίας χρημάτων πάνω στην αριθμογραμμή (Έργα: NP και PN) βρήκαν πως τα αποτελέσματα, για τις δύο ομάδες συμμετεχόντων, ήταν παρόμοια για τους δεκαδικούς, τους ακέραιους και τα χρήματα και στα δύο είδη έργων. Αναλυτικότερα, συμπέραναν πως υπήρξε γραμμική αναπαράσταση για τα ακέραια και δεκαδικά αριθμητικά μεγέθη ήδη από την ηλικία των 10 ετών. Σχετικά με τα κλάσματα, τα αποτελέσματα φάνηκε να διαφέρουν ανάμεσα στα δύο έργα. Έτσι, όταν ζητήθηκε να τοποθετήσουν μία κλασματική τιμή στην αριθμογραμμή (NP), οι εκτιμήσεις τόσο των ενηλίκων όσο και των παιδιών εμφάνισαν γραμμική αναπαράσταση, ενώ για το αντίστροφο έργο (PN) η αναπαράσταση δεν ήταν γραμμική.

Καθώς τα περισσότερα ερευνητικά ευρήματα αφορούν σε εκτιμήσεις που πραγματοποιούν τα άτομα για τη θέση των κλασμάτων ή ακεραίων αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή, η παρούσα εργασία σκοπεύει να εξετάσει τις επιδόσεις των παιδιών στην εκτίμηση της θέσης των δεκαδικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή και τη σχέση ανάμεσα σε αυτές τις επιδόσεις και τις μαθηματικές ικανότητες. Δεδομένου ότι οι περισσότερες έρευνες, με αντικείμενο μελέτης τις εκτιμήσεις με δεκαδικούς στην αριθμογραμμή, επικεντρώθηκαν σε μαθητές Γυμνασίου, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα εξεταστούν οι επιδόσεις παιδιών Ε' και Στ' Δημοτικού. Συνεπώς, το κύριο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τις επιδόσεις των παιδιών ηλικίας 11 και 12 ετών στην εκτίμηση με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και πώς αυτές σχετίζονται με τις μαθηματικές ικανότητές του. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί να απαντήσει η παρούσα εργασία είναι:

1. *Ποιες είναι οι ικανότητες των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή;*

Σύμφωνα με προγενέστερες έρευνες, τα παιδιά κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με ακέραιους και ρητούς αριθμούς βασίζονται στις πολλαπλές τους αναπαραστάσεις για τα αριθμητικά μεγέθη (Siegler & Opfer, 2003· Siegler & Booth, 2004), στις ικανότητες που αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό (Bath & Paladino, 2011) και πραγματοποιούν περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις όταν είναι εξοικειωμένα με τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται (Ebersbach et al., 2015).

Αναμένεται, λοιπόν, οι μαθητές της Ε' και της Στ' Δημοτικού να είναι σε θέση να πραγματοποιούν εκτιμήσεις για τη θέση των δεκαδικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή με επιτυχία.

2. *Διαφοροποιείται η ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή από την ηλικία;*

Σύμφωνα με προηγούμενες μελέτες, οι μεγαλύτεροι σε ηλικία μαθητές παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις σε εκτιμήσεις με ακέραιους αριθμούς σε αριθμογραμμή (Ebersbach et al., 2015· Siegler & Opfer, 2003· Siegler & Booth, 2004). Το παραπάνω εύρημα αναμένεται να επιβεβαιωθεί και στις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή με τους μαθητές της Στ' να πραγματοποιήσουν πιο ακριβείς εκτιμήσεις από τους μαθητές της Ε' Δημοτικού.

3. *Διαφοροποιείται η ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή από το είδος του έργου (NP και PN);*

Όπως επισήμαναν οι Slusser και Barth (2017) τα δύο είδη έργων εκτίμησης σε αριθμογραμμή οδηγούν στην εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών. Οι Iuculano και Butterworth (2011), όμως, επισήμαναν πως δεκάχρονα παιδιά πραγματοποιούν εκτιμήσεις για δεκαδικούς αριθμούς με την ίδια επιτυχία σε έργα NP και PN. Συνεπώς, αναμένεται να μην υπάρξει διαφοροποίηση στην επίδοση των παιδιών εξαιτίας του έργου εκτίμησης στην αριθμογραμμή.

4. *Διαφοροποιείται η ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή από το είδος της αριθμογραμμής (με και χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς, πέρα από το αρχικό και το τελικό σημείο αναφοράς);*

Προηγούμενες μελέτες έδειξαν πως η χρήση ενός ή περισσότερων σημείων αναφοράς (πέρα από το αρχικό και το τελικό άκρο) στις αριθμογραμμές των δοκιμασιών εκτίμησης επηρεάζει τις επιδόσεις των συμμετεχόντων και οδηγεί σε περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις συγκριτικά με τις αριθμογραμμές χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς (Peters, Degrande, Ebersbach, Verschaffel & Luwel, 2016· Peeters, Sekeris, Ebersbach, Verschaffel & Luwel, 2017). Το παραπάνω εύρημα αναμένεται να επιβεβαιωθεί και στην παρούσα έρευνα. Συνεπώς, αναμένεται πως οι επιδόσεις των συμμετεχόντων, που θα εξεταστούν σε αριθμογραμμές με επιπλέον σημεία αναφοράς, θα εμφανίζουν μεγαλύτερη επιτυχία στις εκτιμήσεις τους.

5. *Διαφοροποιείται η ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή από το μέγεθος των αριθμών (αριθμοί μικρότεροι ή μεγαλύτεροι της μονάδας);*

Έρευνες έχουν δείξει πως το μέγεθος των αριθμών προς εκτίμηση αποτελεί παράγοντα που επηρεάζει την επιτυχία των εκτιμήσεων για παιδιά ηλικίας έως 11 ετών, καθώς έχει επισημανθεί πως όταν οι συμμετέχοντες καλούνται να εκτιμήσουν «μικρούς αριθμούς» οι επιδόσεις τους είναι υψηλότερες συγκριτικά με την εκτίμηση «μεγάλων αριθμών» (Siegler, Thompson & Schneider, 2011· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019). Ωστόσο, από την έρευνα των Siegler, Thompson & Schneider (2011) προέκυψε επίσης πως οι επιδόσεις παιδιών μεγαλύτερης ηλικίας στην εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή δεν διαφοροποιήθηκαν από το μέγεθος των αριθμών. Αναμένεται, λοιπόν, με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, ο βαθμός επίδρασης του μεγέθους των εμπλεκόμενων αριθμών στην επίδοση των συμμετεχόντων να εξαρτηθεί από την ηλικία τους.

6. *Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς και τις μαθηματικές τους ικανότητες;*

Πολλοί ερευνητές έχουν υπογραμμίσει τη σχέση ανάμεσα στις εκτιμήσεις –με ακέραιους και ρητούς αριθμούς- και τις μαθηματικές ικανότητες (Friso-van den Bos, Kroesbergen, van Luit, Xenidou- Dervou, Jonkman, van der Scoot & van Lieshout, 2015· Schneider et al., 2018· Xing, Zax, George, Taggart, Bass & Barth, 2021· Zhu et al., 2017), εύρημα που αναμένεται να αναδειχθεί και στην παρούσα εργασία.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν παιδιά που φοιτούν στις Ε' και Στ' Δημοτικού, από τα οποία ζητήθηκε να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις για τη θέση δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή.

Η εργασία *απαρτίζεται* από πέντε κεφάλαια. Στο **πρώτο** κεφάλαιο πραγματοποιείται βιβλιογραφική επισκόπηση ερευνών που αφορούν την εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή και τη σχέση της με τις μαθηματικές ικανότητες. Στο **δεύτερο** κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία της έρευνας, που πραγματοποιήθηκε για την απάντηση των παραπάνω ερευνητικών ερωτημάτων. Στο **τρίτο** κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας έπειτα από στατιστική ανάλυση. Στο **τέταρτο** κεφάλαιο καταγράφονται τα συμπεράσματα της έρευνας και γίνεται συζήτηση. Τέλος, το **πέμπτο** κεφάλαιο περιλαμβάνει τις βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για την συγγραφή της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Το πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, το οποίο απαρτίζεται από τρία μέρη, περιλαμβάνει το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, στο οποίο επιχειρείται να πραγματοποιηθεί βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με το θέμα. Στο πρώτο μέρος πραγματοποιείται αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης, υπογραμμίζεται η χρησιμότητά της και παρουσιάζονται συνοπτικά τα είδη της εκτίμησης. Το δεύτερο μέρος εστιάζει στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή και τα χαρακτηριστικά της. Παράλληλα, παρατίθενται ερευνητικά δεδομένα σχετικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή με φυσικούς και ρητούς αριθμούς. Τέλος, στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται ευρήματα για τη σχέση της ικανότητας για εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές και αριθμητικές ικανότητες.

A.1.1 Αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης και γενικά χαρακτηριστικά της

Η πραγματοποίηση εκτιμήσεων αποτελεί μια συχνή συνθήκη της καθημερινής ζωής, καθώς προκύπτουν καταστάσεις που χρειάζονται είτε γρήγορες και απλές απαντήσεις είτε προσεγγιστικούς και όχι ακριβείς υπολογισμούς. Είναι, λοιπόν, σύνηθες να προβαίνει κανείς σε εκτιμήσεις που αφορούν κατά προσέγγιση υπολογισμούς (το σύνολο των χρημάτων που θα κοστίσει ένα ταξίδι ή το κόστος εκτύπωσης μιας εργασίας σε ένα τυπογραφείο), μετρήσεις (το βάρος μιας βαλίτσας ή τον όγκο μιας κούτας) ή το πλήθος που απαρτίζει ένα σύνολο (τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε μια θεατρική αίθουσα ή τις πορτοκαλιές σε έναν πορτοκαλεώνα). Η ικανότητα πραγματοποίησης των εκτιμήσεων σε καταστάσεις της καθημερινότητας συνδέεται άρρηκτα με τη μαθηματική εκπαίδευση. Μάλιστα, ο Reys (1984) τόνισε πως σε περισσότερο από το 80% των μαθηματικών δραστηριοτήτων πραγματοποιούνται εκτιμήσεις.

Αρκετοί είναι οι ερευνητές που έχουν προτείνει ορισμούς για την έννοια της εκτίμησης τα τελευταία χρόνια. Έτσι, το 1996 ο Clayton όρισε την εκτίμηση ως δεξιότητα της διατύπωσης εικασιών (βασισμένες σε συγκεκριμένα στοιχεία, “educated guess”) σχετικά με την τιμή μιας απόστασης, το κόστος, το μέγεθος κ.ά. ή

με έναν αριθμητικό υπολογισμό (σελ. 87). Το 1999, ο Micklo υποστήριξε πως η εκτίμηση αποτελεί τη γρήγορη και λογική ανάπτυξη μιας ιδέας σχετικά με την ποσότητα ή το μέγεθος κάποιου αντικειμένου χωρίς να πραγματοποιείται υπολογισμός ή μέτρηση. Οι Siegler και Booth (2005) όρισαν την εκτίμηση τονίζοντας ότι η «εκτίμηση είναι μία διαδικασία μετάφρασης μεταξύ ξεχωριστών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων η μία τουλάχιστον είναι προσεγγιστική» (σελ. 198). Η έννοια της εκτίμησης που υιοθετεί το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) αναφέρεται σε έναν κατά προσέγγιση υπολογισμό αλλά παράλληλα εστιάζει και στη διαδικασία που ακολουθείται για να βρεθεί αυτός ο υπολογισμός (NCTM, 2006, στο Δεσλή, 2021).

Ο Reys (1984) επισήμανε κάποια γενικά χαρακτηριστικά της έννοιας της εκτίμησης με τα οποία οι Segovia, Castro, Castro και Rico (1989, στο Segovia & Castro, 2009) συμφώνησαν και ανέπτυξαν περαιτέρω. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις πραγματοποιούνται νοερά και γρήγορα με αριθμούς που διαχειρίζεται εύκολα το άτομο που εκτιμά συνήθως χωρίς χαρτί και μολύβι. Προσφέρουν προσεγγιστικές και όχι ακριβείς απαντήσεις αλλά ταυτόχρονα ικανές για τη λήψη αποφάσεων. Καθώς το άτομο που εκτιμά διαθέτει πληροφορίες, αναφορές ή εμπειρίες σχετικά με την κατάσταση που πρέπει να εκτιμηθεί, αυτές οι ατομικές προσεγγίσεις αποτυπώνονται στην ποικιλία των απαντήσεων που προσφέρει. Οι εκτιμήσεις που πραγματοποιούνται προσδιορίζουν προσεγγιστικά την τιμή μιας ποσότητας ή του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης.

A.1.2 Χρησιμότητα της εκτίμησης στη μαθηματική εκπαίδευση

Οι Segovia και Castro (2009) τόνισαν πως οι εκτιμήσεις αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών εξαιτίας της χρησιμότητάς τους. Επισήμαναν, μάλιστα, πως η εκτίμηση εξασφαλίζει περισσότερη ευκολία στους υπολογισμούς, διότι υπάρχουν πολλές καταστάσεις όπου η ακρίβεια δεν είναι απαραίτητη και μια κατά προσέγγιση απάντηση είναι επαρκής, χρήσιμη και πιο κατανοητή (π.χ. «150 εκατομμύρια πεσέτες για σχολικό πληθυσμό 63 χιλιάδων μαθητών, αντί για 148.739.426 πεσέτες για σχολικό πληθυσμό 62.879 μαθητών»)

(σελ. 506). Γίνεται σαφές πως η εκτίμηση καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική καθώς συμβάλλει στην κατανόηση του πραγματικού κόσμου (Δεσλή, 2021).

Βεβαίως, πέρα από τα πρακτικά οφέλη της, η εκτίμηση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Bana & Dolma, 2006· Segovia & Castro, 2009), η οποία παρουσιάζει ισχυρή συσχέτιση με τη γενική μαθηματική επίδοση των παιδιών (Yang, Li & Lin, 2008). Σύμφωνα με τους McIntosh, Reys και Reys (1992), η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων μαζί με την ικανότητα και την τάση να χρησιμοποιείται αυτή η κατανόηση με ευέλικτους τρόπους για την πραγματοποίηση μαθηματικών κρίσεων, την ανάπτυξη χρήσιμων στρατηγικών για τον χειρισμό των αριθμών και των πράξεων καθώς επίσης και την επεξεργασία και αντίληψη πληροφοριών που σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο. Η αίσθηση του αριθμού είναι ένα «πολυπαραγοντικό φαινόμενο» καθώς απαρτίζεται από μια πληθώρα επιμέρους χαρακτηριστικών και η ανάπτυξή της εξαρτάται από διάφορους παράγοντες (Δεσλή, 2021, σελ 47). Ανάμεσα σε αυτά τα χαρακτηριστικά είναι και οι εκτιμήσεις, που ανήκουν σε μια υποκατηγορία της αίσθησης του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, η υποκατηγορία αυτή που περιλαμβάνει την εκτίμηση αναφέρεται στην ικανότητα των ατόμων για διαχείριση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων με ευελιξία κατά την πραγματοποίηση υπολογισμών και εκτιμήσεων αλλά και κατά την αξιολόγηση της λογικότητας του αποτελέσματος (McIntosh et al., 1992· Δεσλή, 2021).

A.1.3 Είδη Εκτίμησης

Οι Siegler και Booth (2005) κατηγοριοποιούν τις εκτιμήσεις σε μη αριθμητικές και αριθμητικές. Αναλυτικότερα, στις μη αριθμητικές εκτιμήσεις πραγματοποιείται η μετάφραση από ένα μη αριθμητικό μέγεθος σε ένα άλλο, επίσης, μη αριθμητικό π.χ., η φωτεινότητα μιας λάμπας σε χωρική αναπαράσταση με γραμμές. Στη δεύτερη κατηγορία, που αφορά τις αριθμητικές εκτιμήσεις, στη μία ή και στις δύο πλευρές της μετάφρασης υπάρχουν αριθμητικά μεγέθη. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι τρεις τύποι εκτίμησης που έχουν επικρατήσει στην βιβλιογραφία: η εκτίμηση ενός υπολογισμού, η εκτίμηση μέτρησης και η εκτίμηση

πλήθους (Hogan & Brezinski, 2003· van de Walle , 2007), οι οποίες περιγράφονται σε αυτή την ενότητα. Ο κάθε τύπος εκτίμησης απαιτεί διαφορετική κατανόηση και διαφορετικές δεξιότητες (Sowder, 1992, στο Hogan & Brezinski, 2003).

Η υπολογιστική εκτίμηση ή εκτίμηση ενός υπολογισμού αναφέρεται στον προσδιορισμό προσεγγιστικών απαντήσεων σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς ή πριν από την εκτέλεση των υπολογισμών (Dowker, Flood, Griffiths, Harriss & Hook, 1996). Αφορά στον κατά προσέγγιση προσδιορισμό ενός υπολογισμού, ο οποίος δεν δύναται ή δεν είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί με ακρίβεια (van de Walle, 2007) όπως, για παράδειγμα, μια εκτίμηση ότι το αποτέλεσμα του γινομένου 2.345×52 είναι περίπου 120.000 (Segovia & Castro, 2009, σελ. 501) ή εκτιμήσεις σε ένα μανάβικο όπως συγκρίσεις τιμών ή υπολογισμοί για την επάρκεια των χρημάτων (van de Walle, 2007). Οι καλοί εκτιμητές παρουσιάζουν ευελιξία στη σκέψη τους και χρησιμοποιούν διάφορες στρατηγικές (Alajmi, 2009· van de Walle, 2007). Αναπτύσσουν βαθιά κατανόηση των αριθμών και των πράξεων, κατανοούν τη διαδικασία εκτίμησης και αναγνωρίζουν την αξία της (Alajmi, 2009). Παράλληλα, έχει επισημανθεί πως η ικανότητα εκτέλεσης επιτυχών υπολογιστικών εκτιμήσεων σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος (Desli & Lioliou, 2020). Συνεπώς, η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και τα οφέλη της είναι σημαντικά για παιδιά και ενήλικες.

Αξίζει να σημειωθεί πως στην πλειοψηφία των ερευνών που μελετούν την ικανότητα για υπολογιστική εκτίμηση, οι συμμετέχοντες είναι ενήλικες και παιδιά ποικίλων ηλικιών, κυρίως μεγαλύτερων των 8 ετών τόσο γιατί στα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών, οι εκτιμήσεις εισάγονται μετά την τρίτη δημοτικού όσο και επειδή δύναται να κυριαρχεί η πεποίθηση πως τα μικρότερα παιδιά δεν μπορούν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις (Δεσλή, 2021). Ωστόσο, σε έρευνα της Δεσλή (2011) φάνηκε πως ακόμη και μαθητές νηπιαγωγείου που δεν έχουν εκπαιδευθεί στην εκτέλεση υπολογισμών με ακρίβεια και σε στρατηγικές εκτίμησης είναι σε θέση να πραγματοποιούν επιτυχείς υπολογιστικές εκτιμήσεις προσθέσεων σε καταστάσεις που βασίζονται στα βιώματα και την καθημερινότητά τους.

Ακόμα, είναι γεγονός πως η ικανότητα για την πραγματοποίηση κατ' εκτίμηση υπολογισμών συγγέεται από πολλούς με την ικανότητα για νοερούς

υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2020). Ο Λεμονίδης (2020) ορίζει τον νοερό υπολογισμό ως υπολογισμό που γίνεται νοερά με τη χρήση στρατηγικών, παράγει ακριβή αποτελέσματα και πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις η χρήση μολυβιού και χαρτιού μπορεί να λειτουργήσει υποστηρικτικά για τη μνήμη με τη μορφή σημειώσεων. Τόσο οι νοεροί όσο και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί πραγματοποιούνται νοερά (Reys, 1984), με τους πρώτους να καταλήγουν σε αποτέλεσμα με ακρίβεια και τους δεύτερους σε προσεγγιστικό αποτέλεσμα (Δεσλή και Ανεστάκης, 2014). Η πραγματοποίηση νοερών αλλά και κατ' εκτίμηση υπολογισμών διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Reys, 1984). Ο Reys (1984) αναφέρεται στη σχέση των δύο υπολογισμών υπογραμμίζοντας πως ο νοερός υπολογισμός αποτελεί ένα σημαντικό συστατικό στοιχείο των εκτιμήσεων, καθώς λειτουργεί ως «ακρογωνιαίος λίθος» για τις ποικίλες αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση (σελ. 548). Επιπλέον, έχει βρεθεί από τους Gürbüz και Erdem (2016), σε έρευνά τους που πραγματοποιήθηκε με μαθητές 11 και 12 ετών, πως η ικανότητα πραγματοποίησης νοερών υπολογισμών φαίνεται να συνδέεται άμεσα με τις μαθηματικές ικανότητες.

Η εκτίμηση μέτρησης ή εκτίμηση μέτρων αφορά στον προσδιορισμό της κατά προσέγγιση μέτρησης «ενός χαρακτηριστικού σε ένα αντικείμενο ή μια κατάσταση χωρίς τη χρήση συγκεκριμένων τυπικών οργάνων μέτρησης» (Bright, 1976, στο Δεσλή, 2021, σελ. 230). Οι εκτιμήσεις μέτρησης πραγματοποιούνται καθημερινά για πρακτικούς λόγους, όταν, για παράδειγμα, χρειάζεται να εκτιμηθεί το μήκος ενός τραπεζιού, το βάρος μίας τσάντας, το ύψος μιας βιβλιοθήκης, ο χρόνος άφιξης στον εργασιακό χώρο ή ο όγκος του λαδιού σε ένα γυάλινο μπουκάλι. Σύμφωνα με τις Δεσλή και Μυρόβαλη (2017), αυτός ο τύπος εκτίμησης έχει ερευνηθεί λιγότερο από τους άλλους δύο. Ταυτόχρονα, έχει αποτελέσει λόγο προβληματισμού για τους Hogan και Brezinki (2003) η μεγάλη ετερογένεια που εμπεριέχεται σε αυτό τον τύπο εκτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις μέτρησης αφορούν πολλών διαφορετικών ειδών μεγέθη κι έτσι δημιουργούνται ερωτήματα για το αν επαρκεί η ίδια ικανότητα για την πραγματοποίηση εκτίμησης διαφορετικών ειδών μετρήσεων.

Η ικανότητα εκτίμησης μέτρησης είναι σημαντική καθώς συμβάλλει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για ακριβείς μετρήσεις (Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998) και ταυτόχρονα αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο και για άλλες μαθηματικές

έννοιες όπως οι αναλογίες, τα κλάσματα και η γεωμετρία (Coburn & Shulte, 1986· Davydov & Tsvetkovich, 1991· National Council of Teachers of Mathematics, 1989, στο Joram et al., 1998). Μία διαδομένη στρατηγική που αναδύεται σε καταστάσεις εκτίμησης μέτρων είναι η χρήση σημείων αναφοράς βασισμένα σε γνωστά -στα άτομα που εκτιμούν- αντικείμενα που λειτουργούν ως μονάδες μέτρησης και επαναλαμβάνονται για την πραγματοποίηση της εκτίμησης κάποιου αντικειμένου (για παράδειγμα, ένα στυλό για το οποίο το άτομο γνωρίζει ότι το μήκος του είναι περίπου 15 εκατοστά) (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman & Subrahmanyam, 2005).

Η εκτίμηση πλήθους ή πληθικότητας αναφέρεται στον κατά προσέγγιση υπολογισμό αντικειμένων ενός συνόλου χωρίς ακριβή καταμέτρηση (Hogan & Brezinski, 2003), όπως οι σελίδες ενός τετραδίου, ο αριθμός των μπισκότων σε ένα βάζο ή ο αριθμός των κουκίδων σε μια σελίδα. Η πραγματοποίηση εκτιμήσεων πλήθους σαφώς καταλαμβάνει ένα μεγάλο μέρος της καθημερινής μας ζωής και έτσι γίνεται φανερό για ακόμη μια φορά η πρακτικότητα με την οποία συνδέεται η ευρύτερη έννοια της εκτίμησης. Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πλήθους και η ικανότητα μέτρησης εξαρτώνται αμοιβαία (Barth, Starr & Sullivan, 2009) καθώς η μία βοηθά στην ανάπτυξη της άλλης (Δεσλή, 2021). Ακόμα, φαίνεται από προηγούμενες έρευνες πως η ικανότητα εκτίμησης πλήθους προβλέπει την μετέπειτα μαθηματική επίδοση των μαθητών στο σχολείο (Gilmore, McCarthy & Spelke, 2010· Park & Brannon, 2003), εύρημα που καθιστά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων πλήθους σημαντικό κομμάτι για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλοί ερευνητές επισημαίνουν πως μέρος της εκτίμησης πλήθους αποτελεί και η εκτίμηση σε αριθμογραμμή, η οποία, μάλιστα, έχει απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό πληθώρα ερευνών τα τελευταία χρόνια και αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

A.2 Εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή

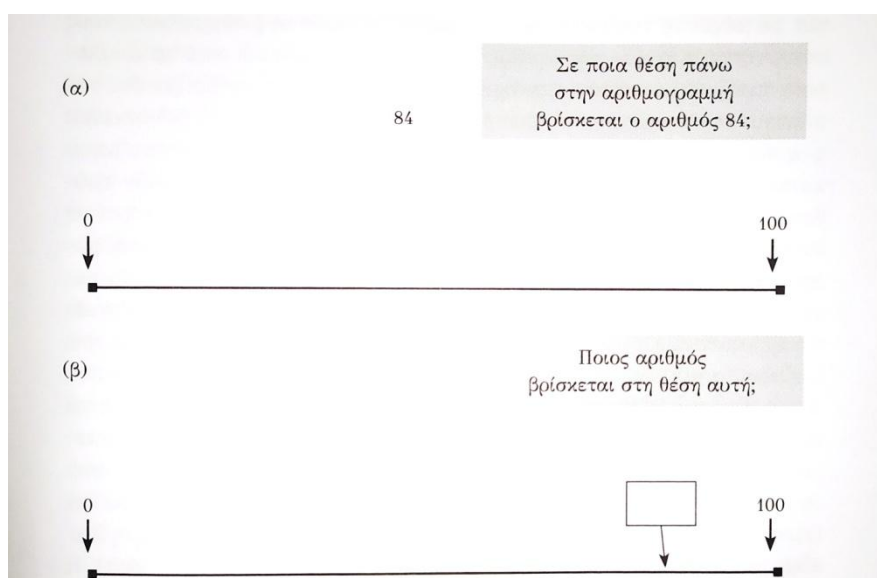
A.2.1 Αποσαφήνιση του όρου

Η εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή ορίζεται ως μετάφραση ενός αριθμού σε μία θέση πάνω στην αριθμογραμμή ή τη μετάφραση μίας θέσης πάνω στην αριθμογραμμή σε έναν αριθμό (Siegler, Thompson & Opfer, 2009). Αυτό το είδος εκτίμησης δεν συνδέεται με καταστάσεις της καθημερινότητας και του πραγματικού κόσμου, ωστόσο φαίνεται να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο για τη μαθηματική εκπαίδευση. Όπως επισημαίνεται από την Dahan (1997, στο Zhu, Cai & Leung, 2017), η εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή συμβάλλει σθεναρά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στα παιδιά. Ακόμα, η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή εμφανίζει ισχυρή σχέση με τις μαθηματικές ικανότητες (Friso-van den Bos, Kroesbergen, van Luit, Xenidou- Dervou, Jonkman, van der Scoot & van Lieshout, 2015· Schneider, Merz, Stricker, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel & Luwel, 2018· Xing, Zax, George, Taggart, Bass & Barth, 2021· Zhu et al., 2017). Με άλλα λόγια, τα έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή αποτελούν σημαντικό εργαλείο αξιολόγησης για θεμελιώδη στοιχεία της μαθηματικής σκέψης, που συντείνουν στην απόκτηση της ευρύτερης μαθηματικής γνώσης (Schneider et al., 2018).

A.2.2 Είδη έργων εκτίμησης σε αριθμογραμμή

Η πλειοψηφία των ερευνών, που έχει ως αντικείμενο μελέτης την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή, χρησιμοποιεί δύο ειδών έργα. Τα δύο έργα περιλαμβάνουν μια κενή οριζόντια αριθμογραμμή και τις περισσότερες φορές ορίζεται το σημείο που αυτή ξεκινά και το σημείο που τελειώνει (π.χ., ξεκινά από το 0 και τελειώνει στο 100 ή ξεκινά από το 0 και τελειώνει στο 1.000). Αναλυτικότερα, (βλ. Εικόνα 1.1) πρώτο είδος έργου εκτίμησης σε αριθμογραμμή είναι το έργο “number-to-position” (NP), στο οποίο δίνεται στους συμμετέχοντες ένας αριθμός και καλούνται να εκτιμήσουν τη θέση του πάνω στην αριθμογραμμή απαντώντας σε ερωτήσεις του τύπου «Πού βρίσκεται ο αριθμός 84 πάνω στην

αριθμογραμμής;». Το δεύτερο είδος ονομάζεται “position-to-number” (PN), στο οποίο δίνεται στους συμμετέχοντες ένα σημείο της αριθμογραμμής και ζητείται να εκτιμηθεί ο αριθμός που αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο απαντώντας στην ερώτηση «Ποιος αριθμός βρίσκεται σε αυτή την θέση;» (Δεσλή, 2021, σελ 186). Τα παραπάνω έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για τις έρευνες που συμμετέχουν παιδιά καθώς, όπως αναφέρουν οι Siegler και Opfer (2003), αντικατοπτρίζουν την έννοια της εκτίμησης -μετάφραση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (αριθμητικών και χωρικών)- χωρίς να απαιτείται συγκεκριμένη γνώση μονάδων μέτρησης, την οποία συνήθως δεν έχουν μικρά παιδιά. Παράλληλα, οι δύο ερευνητές υπογραμμίζουν πως τα έργα αυτά είναι οικεία στα παιδιά καθώς χρησιμοποιούν συχνά αριθμογραμμές κατά τη μαθησιακή διαδικασία.



ΕΙΚΟΝΑ 1.1 Έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή: (α) έργο NP (β) έργο PN

ΠΗΓΗ: Δεσλή, 2021, σελ. 187.

Το είδος των έργων εκτίμησης σε αριθμογραμμή φαίνεται να επηρεάζει σε κάποιες περιπτώσεις τις επιδόσεις των ατόμων κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων (Slusser & Barth, 2017). Σύμφωνα με τους Iuculano & Butterworth (2011), μία τέτοια περίπτωση είναι η περίπτωση της εκτίμησης με κλασματικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή, κατά την οποία συνήθως στα έργα NP πραγματοποιούνται πιο επιτυχείς εκτιμήσεις απ' ό,τι στα έργα PN. Γενικότερα, όμως, οι επιδόσεις στα έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή έχουν αποτελέσει σημείο ενδιαφέροντος για πολλές

έρευνες και έχουν προκύψει σημαντικά ερευνητικά στοιχεία, τα οποία παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

A.2.3 Ευρήματα σχετικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή

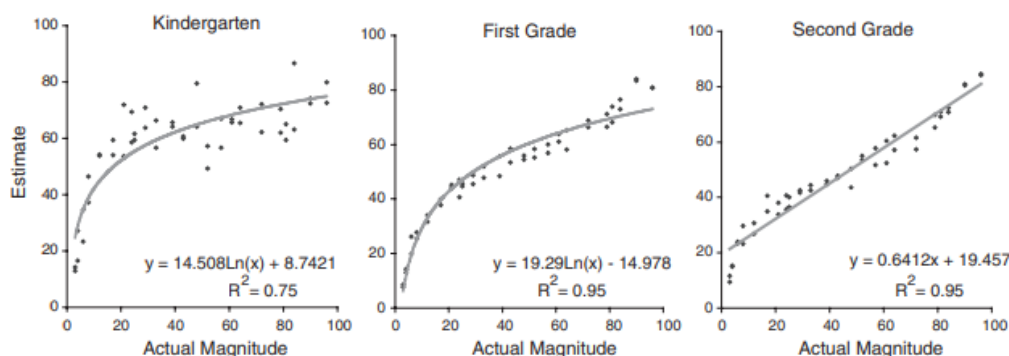
Πολλοί είναι οι ερευνητές που μελετούν τις επιδόσεις των συμμετεχόντων σε έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή. Ανάμεσα στο πλήθος αυτών των ερευνητικών δεδομένων, στη βιβλιογραφία κυριαρχούν τρεις τάσεις σχετικά με την ερμηνεία της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή.

A.2.3.1 Λογαριθμικές – γραμμικές αναπαραστάσεις

Η πρώτη τάση υποστηρίζει πως τα παιδιά σε μικρότερη ηλικία πραγματοποιούν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις, ενώ όσο μεγαλώνουν και αυξάνονται οι εμπειρίες τους προχωρούν σε πιο επιτυχείς εκτιμήσεις. Η ερμηνεία που έγκειται στην παραπάνω θεώρηση εστιάζει στη λογαριθμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών που παρουσιάζουν τα μικρά παιδιά, η οποία με το πέρασμα του χρόνου και των εμπειριών γίνεται γραμμική (Laski & Siegler, 2007· Siegler & Booth, 2004· Siegler & Opfer, 2003). Αυτό σημαίνει πως τα παιδιά σε μικρή ηλικία μεγιστοποιούν την απόσταση των αριθμητικών μεγεθών στα χαμηλά άκρα της αριθμογραμμής και ελαχιστοποιούν αυτή την απόσταση στα μεσαία και υψηλά άκρα της αριθμογραμμής, ενώ όσο τα παιδιά μεγαλώνουν αναπτύσσουν γραμμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών (ίσες αποστάσεις μεταξύ τους) (Δεσλή, 2021).

Οι Siegler και Opfer (2003) σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε μαθητές της δευτέρας, της τετάρτης, της έκτης δημοτικού και ενήλικες συμπέραναν πως οι μαθητές ηλικίας 8 και 10 ετών πραγματοποίησαν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή με λιγότερη επιτυχία ακολουθώντας λογαριθμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών σε αντίθεση με τους μαθητές 12 ετών και τους ενήλικες, οι οποίοι σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις που ταίριαζαν απόλυτα με το μοντέλο των γραμμικών αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους μικρούς

μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα (8 και 10 ετών) να σημειώσουν τη θέση του 150 σε μια αριθμογραμμή που ξεκινούσε από το 0 και τελείωνε στο 1.000, οι περισσότεροι εκτίμησαν ότι βρίσκεται πιο κοντά στο 1.000. Όταν οι Siegler και Booth (2004) μελέτησαν τις εκτιμήσεις μαθητών νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού σε αριθμογραμμή (0-100), παρατήρησαν και πάλι την μετατόπιση από τις λογαριθμικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών σε γραμμικές ανάλογα την ηλικία (βλ. Εικόνα 1.2). Πιο συγκεκριμένα, τα νήπια σημείωσαν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις, που είχαν τη μορφή λογαριθμικής αναπαράστασης, σε σχέση με τους μαθητές της δευτέρας δημοτικού που σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις από τα μικρότερα παιδιά και οι εκτιμήσεις τους ταίριαζαν σε μεγάλο βαθμό με την γραμμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών. Οι μαθητές της πρώτης δημοτικού φάνηκε πως χρησιμοποίησαν και τα δύο μοντέλα αναπαράστασης. Σύμφωνα με τις παραπάνω έρευνες, προκύπτει πως εκτιμήσεις παιδιών ίδιας ηλικίας (μαθητές δευτέρας δημοτικού) ακολούθησαν διαφορετικά μοντέλα αναπαράστασης των αριθμητικών μεγεθών ανάλογα με το εύρος της αριθμογραμμής (0-1.000 και 0-100).



ΕΙΚΟΝΑ 1. 2 Μετάβαση από λογαριθμικές σε γραμμικές αναπαραστάσεις (μαθητές νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού)

ΠΗΓΗ: Siegler & Booth, 2004, σελ. 433.

A.2.3.2 Στρατηγικές αναλογίας

Κάποιοι ερευνητές αμφισβητούν την παραπάνω θεώρηση του Siegler και των συνεργατών του σχετικά με την ερμηνεία τους για τις αναπαραστάσεις που έχουν παιδιά και ενήλικες για τα αριθμητικά μεγέθη, όπως φάνηκε μέσα από τις επιδόσεις τους σε έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή. Υποστηρίζουν, λοιπόν, πως η

εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή προϋποθέτει τη γνώση σχέσεων αναλογίας, μέσω των οποίων πραγματοποιείται η σύνδεση του αριθμητικού μεγέθους, που εκτιμάται, με τα σημεία που ξεκινά και τελειώνει η αριθμογραμμή (Barth & Paladino, 2011·Cohen & Blanc-Goldhammer, 2011· Slusser & Barth, 2017· Slusser, Santiago & Barth, 2013).

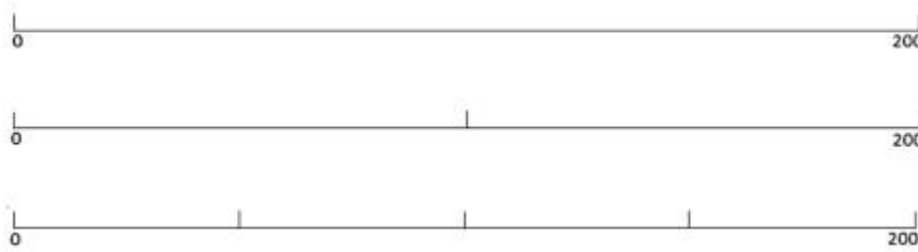
Συγκεκριμένα, οι Barth και Paladino (2011) σε έρευνά τους με παιδιά ηλικίας 5 και 7 ετών κατέληξαν πως τα παιδιά πραγματοποιούν εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή (0-100) λαμβάνοντας υπόψη τους ως σημεία αναφοράς τα γνωστά σημεία της αριθμογραμμής. Για παράδειγμα, τα παιδιά ηλικίας 7 ετών, όταν κλήθηκαν να εξηγήσουν γιατί ο αριθμός 50 βρισκόταν στη συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή, απάντησαν πως «επειδή το 50 είναι το μισό του 100, πηγαίνει δεξιά στη μέση, μεταξύ του 0 και του 100» (σελ. 158). Οι πεντάχρονοι συμμετέχοντες, ωστόσο, στην πλειοψηφία τους, όταν πραγματοποίησαν εκτιμήσεις, αξιοποίησαν μόνο το σημείο έναρξης της αριθμογραμμής και αυτό συνέβη, σύμφωνα με τους ερευνητές, είτε διότι ακόμα δεν έχουν αναπτύξει στρατηγικές αναλογίας είτε γιατί δεν είναι εξοικειωμένοι με μεγάλους αριθμούς, όπως το 100. Οι Slusser, Santiago και Barth (2013) κατέληξαν σε παρόμοια συμπεράσματα σχετικά με τους πεντάχρονους μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνά τους, υπογραμμίζοντας όμως πως τα εξάχρονα παιδιά πραγματοποίησαν εκτιμήσεις με μεγαλύτερη επιτυχία καθώς ήταν σε θέση να στηριχτούν σε σχέσεις αναλογίας του αριθμού-στόχου και των δύο άκρων της αριθμογραμμής. Τα παιδιά ηλικίας 7 έως 10 ετών, τα οποία συμμετείχαν στην έρευνα, φάνηκε πως είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν πέρα από τα δύο άκρα της αριθμογραμμής και ένα επιπλέον σημείο για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων τους.

Υποστηρικτές της θέωσης ότι οι εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή απαιτούν στρατηγικές αναλογίας είναι και οι Cohen και Blanc-Goldhammer (2011), καθώς με έρευνα που πραγματοποίησαν σε ενήλικες, συμπέραναν ότι οι επιδόσεις των συμμετεχόντων στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή (0-26) ήταν υψηλές και φάνηκε πως βασίζονται σε σχέσεις αναλογίας καθώς στηρίζονται στην απόσταση των αριθμών, που ζητήθηκε να εκτιμηθούν, από τα δύο άκρα της αριθμογραμμής (0 και 26).

A.2.3.2.1 Είδος αριθμογραμμής

Η έρευνα των Cohen και Blanc-Goldhammer (2011) δεν περιορίστηκε στη χρήση μόνο της οριοθετημένης αριθμογραμμής αλλά πραγματοποιήθηκε και δεύτερο πείραμα με μη οριοθετημένη αριθμογραμμή, δηλαδή αριθμογραμμή στην οποία υπήρχε μόνο ο αριθμός από τον οποίο ξεκινά (0) και η απόστασή του από έναν άλλο αριθμό (1). Τα ευρήματα έδειξαν πως στη μη οριοθετημένη γραμμή οι συμμετέχοντες δεν βασίστηκαν σε σχέσεις αναλογίας αλλά χρησιμοποίησαν ως μονάδα μέτρησης την απόσταση ανάμεσα στο άκρο της αριθμογραμμής και το γνωστό σημείο που τους δόθηκε. Πιο συγκεκριμένα, εφάρμοζαν το μήκος της γνωστής απόστασης όσες φορές χρειαζόταν προκειμένου να φτάσουν στον εκάστοτε αριθμό που καλούνταν να εκτιμήσουν.

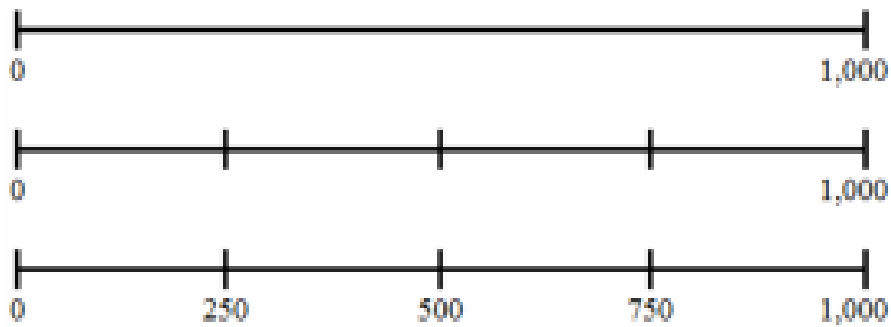
Οι Peters, Degrande, Ebersbach, Verschaffel και Luwel (2016) επηρεασμένοι από την ερμηνεία των Barth και Paladino (2011) για την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή εξέτασαν αν οι επιδόσεις των μαθητών της δευτέρας δημοτικού για εκτίμηση σε αριθμογραμμή επηρεάζονται από επιπρόσθετα σημεία αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή. Πιο συγκεκριμένα, δόθηκαν στα παιδιά τυχαία ένα από τα εξής τρία είδη οριοθετημένων αριθμογραμμών (0-200) με διαφορετικά σημεία αναφοράς: α) στο ένα είδος αναγράφονταν μόνο τα σημεία έναρξης και τέλους της αριθμογραμμής β) στο άλλο είδος το σημείο που ξεκινούσε και τελείωνε ενώ, επιπλέον, δόθηκε το ενδιάμεσο σημείο της αριθμογραμμής (100) και γ) στο τρίτο είδος, πέρα από τα σημεία έναρξης και τέλους της αριθμογραμμής, υπήρχαν σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο, δηλαδή στο 50, στο 100 και στο 150. Τα σημεία αναφοράς δεν δόθηκαν με αριθμητικά σύμβολα αλλά με μικρές μαύρες κάθετες γραμμές (βλ. Εικόνα 1.3). Τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν πως οι επιδόσεις των μαθητών ήταν πιο επιτυχημένες στην αριθμογραμμή που είχε δοθεί το ενδιάμεσο σημείο αναφοράς συγκριτικά με τα άλλα δύο είδη αριθμογραμμών. Τα δοσμένα σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο επηρέασαν αρνητικά το βαθμό επιτυχίας στις εκτιμήσεις των μαθητών και αυτό συνέβη, σύμφωνα με τους ερευνητές, λόγω της δυσκολίας, που είχαν τα παιδιά, να συνδέσουν τα σημεία αναφοράς με τους αριθμούς στους οποίους αντιστοιχούσαν επειδή δεν ήταν αρκετά εξοικειωμένα με αυτούς τους αριθμούς.



ΕΙΚΟΝΑ 1. 3 Τα τρία είδη αριθμογραμμών που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Peters et al. (2016)

ΠΗΓΗ: Peters et al., 2016, σελ. 120

Επεκτείνοντας την παραπάνω έρευνα οι Peeters, Sekeris, Ebersbach, Verschaffel και Luwel (2017) πραγματοποίησαν έρευνα για τις επιδόσεις μεγαλύτερων παιδιών (τρίτης και έκτης δημοτικού). Χρησιμοποίησαν τρία είδη αριθμογραμμών (0-1.000). Στο πρώτο είδος δόθηκαν το σημείο έναρξης και το σημείο που τελειώνει η αριθμογραμμή, στο δεύτερο είδος δόθηκαν το σημείο έναρξης και το σημείο τέλους της αριθμογραμμής καθώς επίσης και τα σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο με τη μορφή μαύρων, κάθετων γραμμών χωρίς να γράφονται οι αριθμοί. Στο τρίτο είδος αριθμογραμμής υπήρχαν τα ίδια σημεία αναφοράς με το δεύτερο είδος, με τη διαφοροποίηση ότι στα σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο αναγράφονταν και οι αριθμοί στους οποίους αντιστοιχούσαν (δηλ., το 250, το 500 και το 750). Στους συμμετέχοντες δόθηκε τυχαία ένα από τα είδη αριθμογραμμής και από τα αποτελέσματα φάνηκε πως η επισήμανση των αριθμητικών τιμών στα δοσμένα σημεία αναφοράς είχε θετική επίδραση στις επιδόσεις μαθητών της τρίτης τάξης ενώ οι μεγαλύτεροι μαθητές, της έκτης τάξης, πραγματοποίησαν επιτυχημένες και ακριβείς εκτιμήσεις και στο δεύτερο είδος αριθμογραμμής, στο οποίο δεν υπήρχαν οι ενδείξεις των αριθμών στα σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο. Οι ερευνητές υπογράμμισαν, συμπερασματικά, πως η στρατηγική με τα επιπλέον σημεία αναφοράς είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη για την ακρίβεια και την επιτυχία των εκτιμήσεων στην αριθμογραμμή. Τόνισαν όμως ότι είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη η ηλικία των παιδιών αλλά και η εξοικείωση τους με τους αριθμούς που διαχειρίζονται καθώς πιθανώς αποτελούν παράγοντες που επηρεάζουν αν τα σημεία αναφοράς θα συνοδεύονται από τις αριθμητικές τους τιμές.



ΕΙΚΟΝΑ 1. 4 Τα τρία είδη αριθμοραμμών που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Peters et al. (2017)

ΠΗΓΗ: Peters et al., 2017, σελ. 3

A.2.3.3 Διμερές γραμμικό μοντέλο-εξοικείωση με τους αριθμούς

Σχετικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή, τα τελευταία χρόνια αναδύεται μία νέα ερμηνεία, που αποτελεί επέκταση των παραπάνω απόψεων. Σύμφωνα με τους Ebersbach, Luwel, Frick, Onghena και Verschaffel (2008) και τους Ebersbach, Luwel και Verschaffel (2015), οι επιδόσεις των ατόμων που προβαίνουν σε εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή συνδέονται με την εξοικείωσή τους με τους αριθμούς που καλούνται να διαχειριστούν.

Οι Ebersbach et al. (2008) μελέτησαν τις επιδόσεις μαθητών ηλικίας 5 έως 9 ετών στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή (1-100 και 1- 1.000) και παρατήρησαν πως οι εκτιμήσεις που έκαναν οι μαθητές για αριθμούς μικρού αριθμητικού εύρους με τους οποίους ήταν εξοικειωμένοι ταίριαζε σε γραμμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών. Πιο αναλυτικά, οι ερευνητές επισήμαναν πως οι εκτιμήσεις των μαθητών μπορούν να εξηγηθούν σαφέστερα από ένα νέο μοντέλο που αποτελείται από την ύπαρξη δύο γραμμικών τμημάτων, σε αντίθεση με τον Siegler και τους συνεργάτες του, που υποστήριξαν τη μετάβαση από ένα αμιγώς λογαριθμικό σε ένα αμιγώς γραμμικό μοντέλο. Το διμερές αυτό γραμμικό μοντέλο, όπως ονομάστηκε, αποτελείται από δύο γραμμικά τμήματα όπου στο ένα απεικονίζονται εντελώς γραμμικά οι υψηλές επιδόσεις στις εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν οι μαθητές για αριθμούς με τους οποίους ήταν εξοικειωμένοι. Στο δεύτερο γραμμικό τμήμα, στο οποίο εμφανίζεται διαφοροποιημένη κλίση (αλλά

παραμένει γραμμικό) αποτυπώνονται οι χαμηλότερες επιδόσεις στις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν για αριθμούς που είτε τα παιδιά δεν γνώριζαν είτε δεν είχαν εξοικειωθεί σε μεγάλο βαθμό με αυτούς. Τέλος, οι ερευνητές υπογράμμισαν ότι το σημείο που διακόπτει τη ροή των δύο γραμμικών τμημάτων φανερώνει το εύρος των αριθμών με το οποίο είναι εξοικειωμένα τα παιδιά.

Το 2015 οι Ebersbach, Luwel και Verschaffel κατέληξαν σε παρόμοια αποτελέσματα με έρευνα στην οποία συμμετείχαν μαθητές νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού. Σκοπεύοντας, λοιπόν, να μελετήσουν τον ρόλο που διαδραματίζει η εξοικείωση των παιδιών με τους αριθμούς στις επιδόσεις τους για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή κινήθηκαν σε δύο επίπεδα. Οι αριθμογραμμές που χρησιμοποιήθηκαν (1-100) ήταν δύο ειδών: οριοθετημένες (με τρία σημεία αναφοράς το 1, το 10 και το 100) και μη οριοθετημένες (με δύο σημεία αναφοράς: το 1 και το 10). Όταν οι συμμετέχοντες ολοκλήρωσαν τις εκτιμήσεις τους, οι ερευνητές έλεγξαν το βαθμό εξοικείωσης των παιδιών με τους αριθμούς δίνοντάς τους μία ακολουθία δύο ή τριών διαδοχικών αριθμών (π.χ. 5, 6, 7) ζητώντας από τα παιδιά να φτάσουν ως την επόμενη δεκάδα (π.χ. 10). Εξετάστηκαν όλες οι αλλαγές δεκάδας ως το 100 και εάν κάποιο παιδί δεν ήταν σε θέση να φτάσει στην επόμενη αλλαγή δεκάδας είχε άλλη μια ευκαιρία. Αν δεν ανταποκρινόταν σε αυτή, η διαδικασία λάμβανε τέλος και καταγραφόταν η υψηλότερη αλλαγή δεκάδας που είχε ολοκληρωθεί με επιτυχία από κάθε παιδί. Έτσι, προέκυψε ο μέσος όρος της εξοικείωσης με τους αριθμούς για κάθε ηλικιακή ομάδα. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μικρότεροι μαθητές που δεν ήταν εξοικειωμένοι με τους αριθμούς ως το 100 πραγματοποίησαν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις σε σχέση με τους μεγαλύτερους που σημείωσαν υψηλότερες επιδόσεις. Συνεπώς, οι ερευνητές υπογράμμισαν πως η εξοικείωση με τους αριθμούς προς εκτίμηση είναι βασικός παράγοντας για τις επιδόσεις των μαθητών για τις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή και ενδέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις αν δεν υπάρχει να επηρεάσει την στήριξη των μαθητών σε επιπρόσθετα σημεία αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων.

Εν κατακλείδι, αξίζει να σημειωθεί, όπως αναφέρει η Δεσλή (2021), πως οι παραπάνω θεωρήσεις, που εστιάζουν στην ερμηνεία των επιδόσεων των ατόμων σχετικά με την πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή, δεν αποκλείουν η μία

την άλλη και το βασικό συμπέρασμα στο οποίο φαίνεται να συγκλίνουν και οι τρεις είναι πως οι εκτιμήσεις εμφανίζουν σημαντικές βελτιώσεις με την ηλικία, τις εμπειρίες και τη χρήση όλο και περισσότερων στρατηγικών.

A.2.4 Ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση ρητών αριθμών σε αριθμογραμμή

Αξίζει να σημειωθεί ότι ερευνητικά δεδομένα έχουν δείξει πως μαθητές αλλά και ενήλικες παρουσιάζουν δυσκολίες στην γενικότερη διαχείριση των ρητών αριθμών εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο επηρεάζονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Christou, 2015· Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Ως προκατάληψη του φυσικού αριθμού ορίζεται η τάση να εφαρμόζονται ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς (Ni & Zhou, 2015). Τα ευρήματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα επικεντρώνονται στις επιδόσεις των ατόμων για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή για τη θέση φυσικών αριθμών. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν ερευνητικά δεδομένα για τις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε αριθμογραμμή για ρητούς αριθμούς, καθώς το είδος των αριθμών για τους οποίους πραγματοποιούνται εκτιμήσεις αποτελεί έναν επίσης σημαντικό παράγοντα για την ερμηνεία της ικανότητας εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή (Δεσλή, 2021).

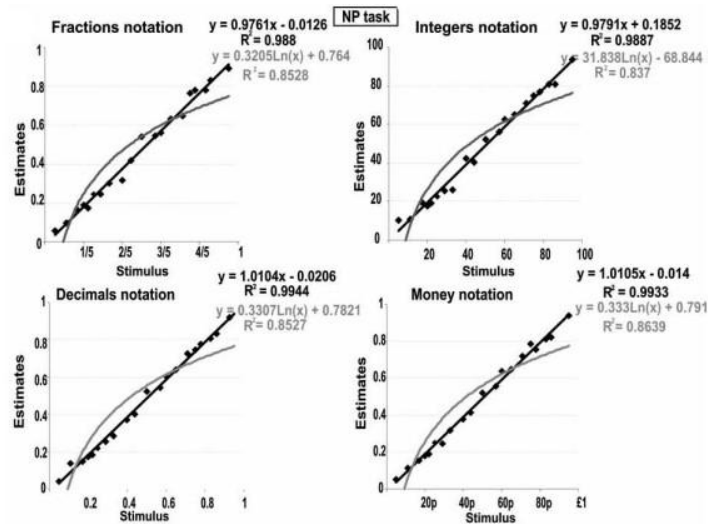
Οι Siegler, Thompson και Schneider (2011) εξέτασαν την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή για τη θέση κλασματικών αριθμών σε μαθητές ηλικίας 11 και 13 ετών. Παρουσιάστηκαν σε οθόνη υπολογιστή μία αριθμογραμμή (0 - 1), στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να εκτιμήσουν τη θέση κλασμάτων μικρότερων της μονάδας και μία αριθμογραμμή (0-5) όπου τα παιδιά έπρεπε να εκτιμήσουν τη θέση κλασμάτων μεγαλύτερων της μονάδας. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι επιδόσεις των εντεκάχρονων παιδιών ήταν περισσότερο επιτυχείς στην πρώτη αριθμογραμμή, στην οποία οι εκτιμήσεις τους ακολούθησαν ένα γραμμικό μοντέλο, ενώ στη δεύτερη οι εκτιμήσεις, που πραγματοποίησαν, δεν εμφάνισαν γραμμικότητα. Οι μαθητές ηλικίας 13 ετών σημείωσαν κατά μέσο όρο επιτυχείς επιδόσεις και στις δύο αριθμογραμμές και οι εκτιμήσεις τους αναπαρέστησαν γραμμική συνάρτηση. Συνεπώς, από τα ευρήματα της έρευνας, φάνηκε πως οι εντεκάχρονοι μαθητές δεν παρουσίασαν δυσκολία στην εκτίμηση της

θέσης των κλασμάτων που είναι μικρότερα της μονάδας αλλά δυσκολεύτηκαν στην εκτίμηση της θέσης καταχρηστικών κλασμάτων σε αντίθεση με τους μαθητές ηλικίας 13 ετών, οι οποίοι διαχειρίστηκαν με περισσότερη ευχέρεια την εκτίμηση της θέσης όλων των κλασματικών αριθμών.

Παράλληλα, οι ερευνητές βρήκαν πως τα παιδιά για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων για τη θέση των κλασμάτων που τους δόθηκαν βασίστηκαν κατά κύριο λόγο σε δύο είδη στρατηγικών. Πιο αναλυτικά, πρόκειται για τις στρατηγικές μετατροπής των κλασμάτων, κατά την οποία οι συμμετέχοντες μετέτρεπαν το κλάσμα σε έναν πιο βολικό αριθμό για αυτούς (κάποιοι με στρογγυλοποίηση αναφέροντας πως «το $\frac{5}{9}$ είναι λίγο περισσότερο από το $\frac{1}{2}$ », κάποιοι με απλοποίηση π.χ. «το $\frac{9}{5}$ είναι ίσο με το 1 και $\frac{4}{5}$, που είναι λίγο λιγότερο από το 2» και κάποιοι αλλάζοντας το είδος του αριθμού «το $\frac{12}{13}$ είναι περίπου το 90%») (σελ. 283). Το άλλο είδος στρατηγικών που βασίστηκαν οι μαθητές, κατά την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων, είναι οι στρατηγικές τμηματοποίησης της αριθμογραμμής, στις οποίες οι μαθητές χωρίζουν την αριθμογραμμή σε τμήματα με τη χρήση σημείων αναφοράς που τους διευκολύνουν στην εκτίμηση της θέσης των κλασμάτων (π.χ. σημεία που χωρίζουν την αριθμογραμμή σε ίσα μέρη ή σημεία που χωρίζουν την αριθμογραμμή σε όσα μέρη δείχνει ο παρονομαστής). Σχετικά με τη συχνότητα που χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές που εντοπίστηκαν, φάνηκε πως οι 13χρονοι μαθητές βασίστηκαν σε μεγάλο ποσοστό και στα δύο είδη στρατηγικών για τις δύο αριθμογραμμές, ενώ οι 11χρονοι χρησιμοποίησαν περισσότερο στρατηγικές με βοηθητικά σημεία αναφοράς και στις δύο αριθμογραμμές παρά στρατηγικές μετατροπής των κλασμάτων σε βολικούς αριθμούς.

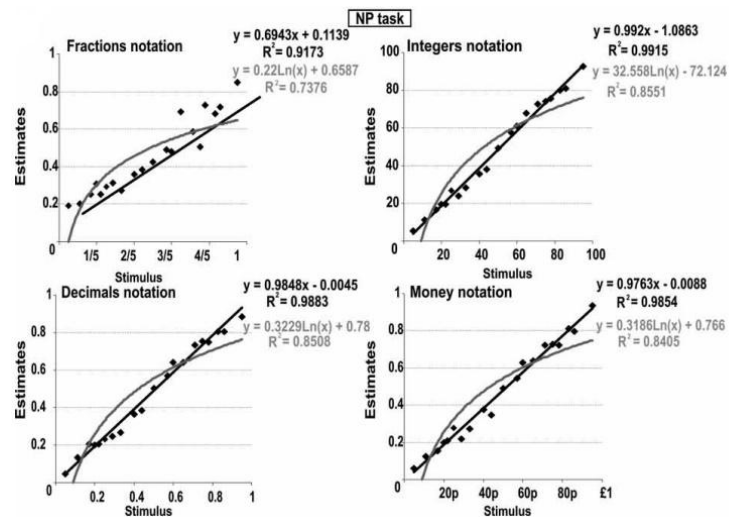
Οι Iuculano και Butterworth (2011) μελέτησαν τις επιδόσεις δεκάχρονων παιδιών και ενηλίκων κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων για τη θέση κλασμάτων, δεκαδικών και ακέραιων αριθμών καθώς επίσης και αξίας χρημάτων. Χρησιμοποιήθηκαν τα έργα εκτίμησης NP και PN και τα αποτελέσματα έδειξαν πως και οι δύο ηλικιακές ομάδες στο έργο NP σημείωσαν υψηλές επιδόσεις και οι αναπαραστάσεις, που εμφάνισαν οι εκτιμήσεις τους, ήταν γραμμικές για όλα τα αριθμητικά μεγέθη (βλ. Εικόνα 1.5 και 1.6). Στο έργο PN εμφανίστηκε διαφοροποίηση στις επιδόσεις που αφορούσαν την εκτίμηση των κλασματικών αριθμών σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Πιο αναλυτικά, οι εκτιμήσεις για τους ακέραιους, τους δεκαδικούς και τα χρήματα ήταν πιο ακριβείς και

ακολούθησαν το γραμμικό μοντέλο, σε αντίθεση με τις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν για τα κλάσματα, οι οποίες και για τις δύο ηλικιακές ομάδες δεν αποτυπώθηκαν γραμμικά (βλ. Εικόνα 1.7 και 1.8).



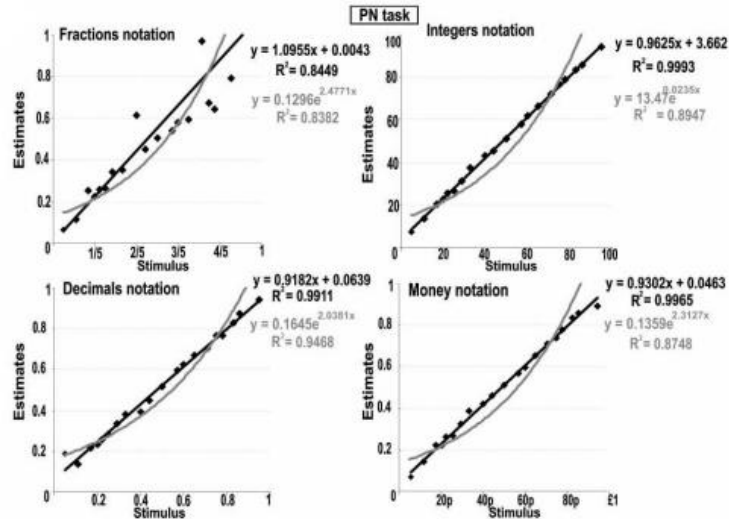
ΕΙΚΟΝΑ 1.5 ΕΝΗΛΙΚΕΣ: Οι αναπαραστάσεις των εκτιμήσεων για τα κλάσματα, τους ακέραιους, τους δεκαδικούς αριθμούς και τα χρήματα στο έργο NP.

ΠΗΓΗ: Iuculano & Butterworth, 2011, σελ. 2.092



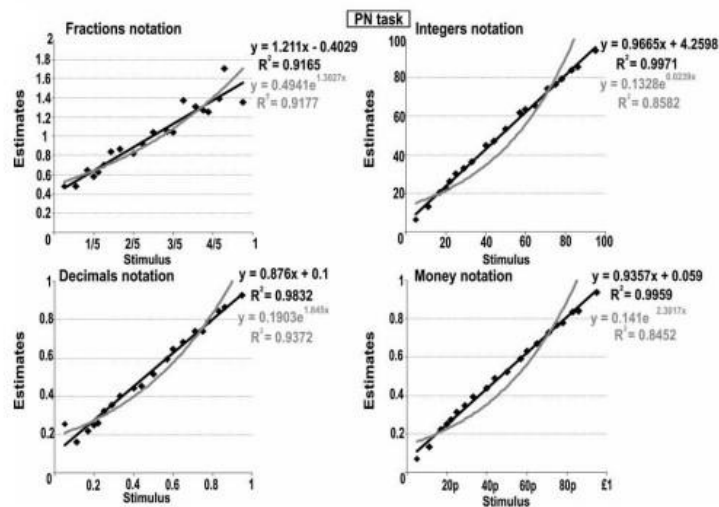
ΕΙΚΟΝΑ 1.6 ΜΑΘΗΤΕΣ: Οι αναπαραστάσεις των εκτιμήσεων για τα κλάσματα, τους ακέραιους, τους δεκαδικούς αριθμούς και τα χρήματα στο έργο NP.

ΠΗΓΗ: Iuculano & Butterworth, 2011, σελ. 2.094



EIKONA 1. 7 ΕΝΗΛΙΚΕΣ: Οι αναπαραστάσεις των εκτιμήσεων για τα κλάσματα, τους ακέραιους, τους δεκαδικούς αριθμούς και τα χρήματα στο έργο PN.

ΠΗΓΗ: Iuculano & Butterworth, 2011, σελ. 2.092



EIKONA 1. 8 ΜΑΘΗΤΕΣ: Οι αναπαραστάσεις των εκτιμήσεων για τα κλάσματα, τους ακέραιους, τους δεκαδικούς αριθμούς και τα χρήματα στο έργο PN.

ΠΗΓΗ: Iuculano & Butterworth, 2011, σελ. 2.094

Συμπερασματικά, όπως προκύπτει από τις παραπάνω έρευνες, η εκτίμηση για τη θέση των κλασμάτων καθώς επίσης και οι στρατηγικές στις οποίες βασίζεται αποτελούν πιο απαιτητική διαδικασία συγκριτικά με την εκτίμηση της θέσης ακέραιων και δεκαδικών αριθμών.

A.3 Σχέση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές και αριθμητικές ικανότητες

Είναι γνωστό πως οι μαθηματικές ικανότητες των παιδιών συνδέονται με γνωστικούς παράγοντες όπως είναι η εργαζόμενη μνήμη (Fuchs, Geary, Compton, Fuchs, Hamlett & Bryant, 2010· Träff, 2013) και η προσοχή (Anobile, Stievano & Burr, 2013). Έρευνες έχουν δείξει, επίσης, ότι η ικανότητα για εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή δεν εξαρτάται μόνο από τη γνώση των αριθμητικών μεγεθών αλλά και από γνωστικούς παράγοντες, που δεν σχετίζονται άμεσα με τους αριθμούς, όπως είναι οι γνωστικές λειτουργίες που ενεργοποιούνται στις σχέσεις αναλογίας όταν τα άτομα βασίζονται για εκτίμηση σε αριθμογραμμή (Barth & Paladino, 2011) ή από γνωστικές ικανότητες όπως η εργαζόμενη μνήμη (Geary, 2011), η προσοχή (Anobile et al., 2013). Οι Fuchs et al. (2010) διαπίστωσαν ακόμα ότι οι εκτιμήσεις για τη θέση των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή μπορούν να ερμηνεύουν τις ατομικές διαφορές των ατόμων στην επίλυση προβλημάτων.

Συνεπώς, η επίδραση γνωστικών λειτουργιών-που συνδέονται και με τις μαθηματικές ικανότητες- στην πραγματοποίηση εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή θα μπορούσε να συμβάλλει στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας πραγματοποίησης εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές επιδόσεις των παιδιών (Zhu, Cai & Leung, 2017). Πολλοί είναι οι ερευνητές, άλλωστε, που έχουν υπογραμμίσει την ισχυρή σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών σε έργα, που εξετάζουν την ικανότητά τους για εκτίμηση σε αριθμογραμμή, με τις επιδόσεις τους σε δοκιμασίες, που αξιολογούν τις μαθηματικές ικανότητες (Friso-van den Bos, Kroesbergen, van Luit, Xenidou- Dervou, Jonkman, van der Scoot & van Lieshout, 2015· Schneider et al., 2018· Xing, Zax, George, Taggart, Bass & Barth, 2021· Zhu et al., 2017).

Οι Schneider et al. (2018) πραγματοποίησαν μία μετα-ανάλυση 41 ερευνών, οι οποίες είχαν ως αντικείμενο μελέτης τη συσχέτιση ανάμεσα στις επιδόσεις, που σημειώθηκαν από τους συμμετέχοντες, σε έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Οι συμμετέχοντες στις παραπάνω έρευνες ήταν μαθητές ηλικίας 4-14 ετών (πρόκειται συνολικά για 10.576 μαθητές). Από τα ευρήματα της μετα-ανάλυσης φάνηκε πως υπάρχει ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα για

εκτίμηση σε αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Η σχέση αυτή μάλιστα φάνηκε πως διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος των αριθμών που οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν και την ηλικία των συμμετεχόντων. Πιο αναλυτικά, οι εκτιμήσεις με κλάσματα φάνηκε πως παρουσίασαν ισχυρότερη σχέση με τις μαθηματικές ικανότητες συγκριτικά με τις εκτιμήσεις με ακέραιους αριθμούς. Σύμφωνα με τους ερευνητές, αυτό το εύρημα μπορεί να εξηγηθεί από τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα που εμφανίζουν οι στρατηγικές για την εκτίμηση με κλασματικούς αριθμούς σε σύγκριση με τις στρατηγικές εκτίμησης με ακέραιους. Σχετικά με την ηλικία των μαθητών, η σχέση μεταξύ των εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές ικανότητες φάνηκε πως για τους μαθητές ηλικίας μέχρι 6 ετών ήταν χαμηλότερη από τους μαθητές 6 έως 9 ετών, ενώ για τους μαθητές άνω των 9 ετών ήταν πιο ισχυρή από τις άλλες δύο ηλικιακές ομάδες. Σύμφωνα με τους ερευνητές, αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μεγαλύτεροι μαθητές διαχειρίζονται κλασματικούς αριθμούς πιο συστηματικά από τους μαθητές του δημοτικού που είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τους ακέραιους αριθμούς.

Άλλος ένα παράγοντας που επηρέασε τον βαθμό της συσχέτισης ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις μαθηματικές ικανότητες είναι το είδος της αριθμογραμμής, που δόθηκε στους μαθητές. Αναλυτικότερα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συσχέτιση ήταν υψηλότερη για οριοθετημένες παρά για μη οριοθετημένες αριθμογραμμές και αυτό συνέβη είτε διότι οι οριοθετημένες αριθμογραμμές δύναται να είναι πιο οικείες στους μαθητές είτε διότι πολλοί από αυτούς χρησιμοποιούν στρατηγικές αναλογίας για να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και συνήθως στις εκτιμήσεις σε μη οριοθετημένη αριθμογραμμή δεν βασίζονται σε τέτοιες στρατηγικές (Cohen & Blanc-Goldhammer, 2011 ·Link, Nuerk & Moeller, 2014).

Οι Xing et al. (2021) τόνισαν, επίσης, τη σχέση που έχει η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή με την επίδοση σε σταθμισμένα τεστ που εξετάζουν τις μαθηματικές ικανότητες. Παράλληλα, εστίασαν στις διαφορετικές επιδόσεις που σημείωσαν μαθητές 6 έως 8 ετών. Από τα αποτελέσματα της έρευνας, προέκυψε πως οι συμμετέχοντες βασίστηκαν σε στρατηγικές αναλογίας για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή (0-100). Όσο αυξανόταν η ηλικία των συμμετεχόντων, πολλοί από αυτούς χρησιμοποίησαν ως σημεία αναφοράς -πέρα από το σημείο που ξεκινούσε και τελείωνε η αριθμογραμμή- και ένα ενδιάμεσο

σημείο αναφοράς. Οι μαθητές που βασίστηκαν στην παραπάνω στρατηγική, με το επιπλέον σημείο αναφοράς, σημείωσαν υψηλότερες βαθμολογίες στις δοκιμασίες που εξέτασαν τις μαθηματικές ικανότητες, εύρημα που σύμφωνα με τους ερευνητές, επιβεβαίωσε τη σχέση ανάμεσα στις πιο αναπτυγμένες στρατηγικές για εκτίμηση σε αριθμογραμμή και τις ισχυρές μαθηματικές ικανότητες.

Ακόμα, οι Zhu et al. (2017) μελέτησαν τη σχέση μεταξύ της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή και των μαθηματικών ικανοτήτων (συγκεκριμένα την ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων) σε έρευνα, που πραγματοποίησαν με συμμετέχοντες 148 μαθητές δευτέρας και τετάρτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι επιδόσεις, των μικρότερων μαθητών της δευτέρας τάξης, σε έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή συσχετίστηκαν σημαντικά με την ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων και την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, οι επιδόσεις των μαθητών της τετάρτης τάξης σε έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή φάνηκε πως προέβλεψαν τις επιδόσεις των μαθητών μόνο στην επίλυση προβλήματος και όχι στους υπολογισμούς των πράξεων. Έτσι, οι ερευνητές τόνισαν πως η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε σύνθετες μαθηματικές ικανότητες, όπως η ικανότητα επίλυσης προβλήματος, αλλά ταυτόχρονα και σε πιο απλές (π.χ. υπολογιστικές ικανότητες) που αφορούν παιδιά μικρότερων τάξεων.

Επιπλέον, οι Friso-van den Bos et al. (2015) διαπίστωσαν, σε έρευνα που πραγματοποίησαν με μαθητές νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού, πως η ακρίβεια των εκτιμήσεων που πραγματοποιούνται σε αριθμογραμμή προβλέπει τη μαθηματική ικανότητα και δύναται να συμβαίνει και το αντίστροφο. Με άλλα λόγια, επισήμαναν πως τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για τα αριθμητικά μεγέθη μόνο για να κατανοούν και να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα αλλά ότι αναπτύσσουν ακριβέστερες αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών λόγω της ενασχόλησής τους με μαθηματικά προβλήματα. Συνεπώς, όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021) τα παιδιά που έχουν πιο ακριβείς αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών σημειώνουν υψηλότερες βαθμολογίες και σε έργα που εξετάζουν τις μαθηματικές ικανότητες καθώς επίσης και σε έργα που αφορούν τους αριθμούς, τις πράξεις και τα χαρακτηριστικά των αριθμών.

Πολλοί είναι, επίσης, οι ερευνητές που έχουν μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή και τις αριθμητικές ικανότητες (Booth & Newton, 2012· Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014· Booth & Siegler, 2006· De Wulf, Bassok & Holyoak, 2015· Dietrich, Huber, Dackermann, Moeller & Fischer, 2016· Siegler & Booth, 2004).

Η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή αποτελεί σημαντικό προγνωστικό παράγοντα των αριθμητικών ικανοτήτων σε μικρά αλλά και σε μεγαλύτερα παιδιά (Booth & Siegler, 2006· Siegler & Booth, 2004). Αναλυτικότερα, οι Booth και Siegler (2004) επισήμαναν πως όσο πιο γραμμικές και ακριβείς ήταν οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν μαθητές νηπιαγωγείου, πρώτης και δευτέρας δημοτικού τόσο μεγαλύτερες ήταν οι βαθμολογίες που συγκέντρωσαν σε τεστ αριθμητικής. Στα ίδια αποτελέσματα κατέληξαν οι ίδιοι ερευνητές σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 2006, στην οποία πέρα από μαθητές νηπιαγωγείου πρώτης και δευτέρας τάξης συμμετείχαν και μεγαλύτερα παιδιά τρίτης δημοτικού.

Οι Dietrich et al. (2016) μελέτησαν τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με την κατανόηση της θεσιακής αξίας. Στην έρευνα συμμετείχαν 43 μαθητές της πρώτης τάξης του δημοτικού και πραγματοποιήθηκε σε δύο διαφορετικά χρονικά σημεία: στην αρχή και στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Αρχικά, οι μαθητές κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών σε αριθμογραμμές (0-10 και 0-20, αντίστοιχα). Στο τέλος της χρονιάς πραγματοποίησαν εκτιμήσεις για διψήφιους αριθμούς σε αριθμογραμμή (0-100). Τα παιδιά αξιολογήθηκαν, επίσης, και σε άλλες δοκιμασίες, η μία εκ των οποίων περιείχε προβλήματα (επίλυση με πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών ως το 20) και η άλλη απαιτούσε γραφή των αριθμών. Τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν ότι υπάρχει ισχυρή σχέση ανάμεσα στις εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν τα παιδιά στην αριθμογραμμή 0-20, στην αρχή της χρονιάς, τόσο με τις εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν στην αριθμογραμμή 0-100, έπειτα από σχεδόν δέκα μήνες, όσο και με τις επιδόσεις που σημείωσαν στη δοκιμασία με τη γραφή των αριθμών. Συνεπώς, οι ερευνητές υπογράμμισαν πως η ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή μπορεί να προβλέψει γενικότερα αριθμητικές ικανότητες και ειδικότερα την κατανόηση της θεσιακής αξίας.

Η ικανότητα για εκτίμηση της θέσης κλασματικών αριθμών σε αριθμογραμμή μπορεί να προβλέψει τις επιδόσεις των ατόμων στο πεδίο της άλγεβρας. Πιο αναλυτικά, οι Booth και Newton (2012) πραγματοποίησαν έρευνα, στην οποία

συμμετείχαν 32 μαθητές, ηλικίας 12 - 14 ετών. Οι μαθητές πραγματοποίησαν εκτιμήσεις για τη θέση κλασμάτων σε αριθμογραμμή (0 - 1), για τη θέση ακέραιων αριθμών σε αριθμογραμμή με αριθμητικό εύρος 0 - 10.000 και σε αριθμογραμμή που ξεκινούσε από το 0 και τελείωνε στο 6.257. Η διαφοροποίηση στις αριθμογραμμές για την εκτίμηση της θέσης των ακεραίων έγκειται, σύμφωνα με τους ερευνητές, στο γεγονός πως η πρώτη αριθμογραμμή (0-10.000) παρέχει πληροφορίες σχετικά με τα αριθμητικά μεγέθη σε συνδυασμό με τις σχέσεις αναλογίας, στις οποίες βασίζονται οι μαθητές για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεών τους σε αυτή την αριθμογραμμή, ενώ η «άτυπη» αριθμογραμμή (0-6.257) αποτελεί ένα μέτρο αξιολόγησης, που παρέχει ίσως πιο «αμιγή» αποτελέσματα για τα αριθμητικά μεγέθη. Παράλληλα, οι έφηβοι μαθητές ολοκλήρωσαν έργα άλγεβρας (αξιολόγηση σε βασικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας, αναγνώριση συμβόλων, επίλυση εξισώσεων κ.α.). Οι ερευνητές υπογράμμισαν πως οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν οι μαθητές για τη θέση των κλασματικών αριθμών εμφάνισαν ισχυρότερη σχέση με τις επιδόσεις στα έργα της άλγεβρας, συγκριτικά με τις εκτιμήσεις για τη θέση των ακέραιων. Ακόμα, οι εκτιμήσεις για τη θέση κλασματικών μονάδων αλλά και πιο πολύπλοκων κλασμάτων (η εκτίμηση των τελευταίων βασίστηκε σε στρατηγικές αναλογίες που εφάρμοσαν οι μαθητές) σχετίζονται σημαντικά με την αλγεβρική ετοιμότητα των μαθητών, και πιο συγκεκριμένα με τις επιδόσεις τους στην επίλυση εξισώσεων.

Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώθηκαν και ενισχύθηκαν περαιτέρω από τους Booth et al. (2014) σε έρευνα, που συμμετείχαν μαθητές 13 και 14 ετών. Το εύρος των αριθμογραμμών ήταν μεγαλύτερο για την εκτίμηση της θέσης ακέραιων αριθμών (αριθμογραμμές: 0-1.000.000 και 0-62.571), ίδιο για τη θέση κλασμάτων (0-1) και τα έργα άλγεβρας πιο απαιτητικά. Επεκτείνοντας τα ευρήματα της προηγούμενης μελέτης, τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν πως η εκτίμηση της θέσης των κλασματικών μονάδων σε αριθμογραμμή δεν επηρέασε την πρόβλεψη της απόδοσης και της μάθησης της άλγεβρας. Η εκτίμηση, όμως, των πιο σύνθετων κλασμάτων μπορούσε να προβλέψει σε μεγαλύτερο βαθμό τις μετέπειτα αλγεβρικές ικανότητες. Αυτό συνέβη, σύμφωνα με τους ερευνητές, διότι οι σχέσεις αναλογίας, στις οποίες βασίζονται τα άτομα για την εκτίμηση της θέσης πιο σύνθετων κλασμάτων, αποτελούν έναν σημαντικό συνδετικό κρίκο ανάμεσα στη γνώση των κλασματικών αριθμών και της εκμάθησης της άλγεβρας.

Οι De Wolf et al. (2015) διερεύνησαν, επίσης, τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση ρητών αριθμών πάνω σε

αριθμογραμμή με τις μετέπειτα αλγεβρικές ικανότητες των παιδιών, σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε μαθητές ηλικίας 12 ετών. Βασίστηκαν στα ερευνητικά εργαλεία της έρευνας των Booth et al. (2014) (αριθμογραμμές: 0-1.000.000 και 0-62.571 για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων της θέσης ακέραιων αριθμών, 0-1 για τη θέση κλασμάτων) και συμπεριέλαβαν μία αριθμογραμμή (0-1) για την εκτίμηση της θέσης δεκαδικών αριθμών. Πέρα από τα έργα άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων, οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν και σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες είχαν ως στόχο τη διερεύνηση της εννοιολογικής και όχι της διαδικαστικής κατανόησης των κλασματικών αριθμών. Τα αποτελέσματα της έρευνας των De Wolf et al. (2015) έδειξαν ότι η ικανότητα εκτίμησης της θέσης δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή αποτελεί καλύτερο προγνωστικό παράγοντα της αλγεβρικής επίδοσης, συγκριτικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση κλασματικών και ακέραιων αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή. Οι ερευνητές τόνισαν ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει διότι η εκτίμηση για τη θέση των δεκαδικών αριθμών στην αριθμογραμμή αποτελεί ίσως ένα πιο «ξεκάθαρο» μέτρο αξιολόγησης των αριθμητικών μεγεθών επειδή η διαχείριση των δεκαδικών αριθμών δεν απαιτεί την πράξη της διαίρεσης, που προϋποθέτει η εκτίμηση της θέσης κλασματικών αριθμών στην αριθμογραμμή.

Συμπερασματικά, όπως προκύπτει από τα παραπάνω ευρήματα, η ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή φαίνεται να έχει ισχυρή σχέση με τη γενικότερη μαθηματική ευχέρεια. «Το γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών είναι θεμελιώδεις και απαραίτητες για μεγάλο εύρος μαθηματικών ικανοτήτων» εξηγεί πιθανώς τη βάση της σημαντικής σχέσης της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή με τις αριθμητικές και με τις μαθηματικές ικανότητες (Δεσλή, 2021, σελ. 229) και παράλληλα, καθιστά την ανάπτυξη και ενίσχυση αυτής της ικανότητας αναγκαία από πολύ μικρή ηλικία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας παρατίθεται η μεθοδολογία που υιοθετήθηκε στην έρευνα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αναλυτικά πληροφορίες για τους συμμετέχοντες, για τον σχεδιασμό της έρευνας καθώς επίσης και για τα εργαλεία μέτρησης. Ακόμα, περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε διαδικασία για τη συλλογή των δεδομένων καθώς και ο τρόπος κωδικοποίησης και ανάλυσης των δεδομένων.

B.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 118 μαθητές και μαθήτριες, εκ των οποίων οι 58 φοιτούν στην Ε' και οι 60 στην Στ' τάξη του δημοτικού σχολείου. Πιο αναλυτικά, συμμετείχαν 56 αγόρια (47,5%) και 62 κορίτσια (52,5%). Οι μαθητές προέρχονται από διάφορα δημόσια δημοτικά σχολεία που καλύπτουν μεγάλο εύρος περιοχών της περιοχής της Θεσσαλονίκης.

Το σύνολο των παιδιών της Ε' τάξης (ηλικίας από 10 χρονών και 4 μηνών έως 11 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 10 χρόνια και 10 μήνες) απαρτίζεται από: 27 αγόρια (46,6%) και 31 κορίτσια (53,4%). Το σύνολο της Στ' τάξης (ηλικίας από 11 χρονών έως 12 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 11 χρόνια και τους 8 μήνες) περιλαμβάνει 29 αγόρια (48,3%) και 31 κορίτσια (51,7%) (Πίνακας 1). Τέλος, η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε με βολική δειγματοληψία.

Συμμετέχοντες (N=118)			
Ε' τάξη (N=58)		Στ' τάξη (N=60)	
10 χρονών και 4 μηνών – 11 χρονών και 3 μηνών		11 χρονών – 12 χρονών και 3 μηνών	
Μ.Ο. ηλικίας: 10 χρόνια και 10 μήνες		Μ.Ο. ηλικίας : 11 χρόνια και 8 μήνες	
27 αγόρια	31 κορίτσια	29 αγόρια	31 κορίτσια

Πίνακας 1: Στοιχεία για τους συμμετέχοντες της έρευνας

B.2 Σχεδιασμός της έρευνας- Εργαλείο μέτρησης

Προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν μετά τη βιβλιογραφική επισκόπηση του θέματος, σχεδιάστηκαν τέσσερα διαφορετικά έργα, δύο από τα οποία εξετάζουν τις επιδόσεις σε εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή και δύο τις επιδόσεις σε μαθηματικές ικανότητες.

Πιο αναλυτικά, με σκοπό την μελέτη της ικανότητας των συμμετεχόντων για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων για δεκαδικούς αριθμούς (1^ο ερευνητικό ερώτημα) δόθηκαν σε αυτούς δύο έργα εκτίμησης, κάθε έργο αποτελούνταν από 8 δοκιμασίες και ο συνολικός αριθμός δοκιμασιών εκτίμησης ήταν 16. Στο πρώτο έργο (**Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή – NP: number-to-position**), δίνονταν συγκεκριμένοι δεκαδικοί αριθμοί από το 0 ως το 5 και ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν τη θέση τους πάνω στην αριθμογραμμή, σημειώνοντας κάθετη γραμμή στο σημείο που θεωρούσαν κατάλληλο. Στο δεύτερο έργο (**Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή – PN: position-to-number**), δινόταν πάνω σε αριθμογραμμή μια συγκεκριμένη θέση, η οποία υποδεικνυόταν από μία κάθετη γραμμή και ένα βέλος και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν την τιμή του αριθμού αυτής της θέσης. Τα συγκεκριμένα δύο έργα σχεδιάστηκαν επιπρόσθετα με σκοπό να μελετηθεί αν η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή διαφοροποιείται από το είδος του έργου εκτίμησης (NP και PN) (3^ο ερευνητικό ερώτημα).

Έχοντας ως σκοπό να εξεταστεί, επίσης, αν διαφοροποιούνται οι επιδόσεις των παιδιών στις εκτιμήσεις για δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή από το είδος της αριθμογραμμής (4^ο ερευνητικό ερώτημα), οι συμμετέχοντες κάθε ηλικιακής ομάδας (Ε' και Στ' τάξης) χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, οι 58 μαθητές της Ε' τάξης κατανεμήθηκαν τυχαία σε δύο ισάριθμες ομάδες των 29 ατόμων η καθεμία και οι 60 μαθητές της Στ' τάξης κατανεμήθηκαν τυχαία σε δύο ισάριθμες ομάδες των 30 ατόμων η καθεμία. Στους συμμετέχοντες της μίας ομάδας (Ομάδα Α) δόθηκαν δοκιμασίες, στις οποίες οι αριθμογραμμές είχαν σημειωμένα το αρχικό και το τελικό άκρο της αριθμογραμμής (0 και 5), ενώ στους συμμετέχοντες της άλλης ομάδας (Ομάδα Β) δόθηκαν δοκιμασίες, στις οποίες οι

αριθμογραμμές είχαν σημειωμένα, πέρα από το αρχικό και το τελικό άκρο της αριθμογραμμής (0 και 5), τρία επιπλέον σημεία αναφοράς. Τα επιπλέον σημεία αναφοράς βρίσκονταν σε κάθε τεταρτημόριο της αριθμογραμμής με τη μορφή μαύρων γραμμών και από κάτω αναγράφονταν οι αριθμοί στους οποίους αντιστοιχούν (1,25 2,5 και 3,75). Οι αριθμογραμμές σε όλες τις δοκιμασίες είχαν μήκος 25 εκατοστά.

Οι δεκαδικοί αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στα έργα εκτίμησης επιλέχθηκαν με σκοπό να εξεταστεί αν η επιτυχία των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή για τους δεκαδικούς αριθμούς επηρεάζεται από το μέγεθος των αριθμών (5^ο ερευνητικό ερώτημα). Για το σκοπό αυτό, σε κάθε έργο δόθηκαν 4 αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας και 4 αριθμοί μικρότεροι της μονάδας (βλ. πίνακα 2). Η επιλογή των αριθμών ήταν τέτοια ώστε να μην διαφέρουν πολύ ανάμεσα στο δύο έργα εκτίμησης. Για το σκοπό αυτό, για το Έργο 2 όσοι αριθμοί επιλέχθηκαν προέκυψαν ύστερα από αφαίρεση των αριθμών του Έργου 1, από το 1 για τις δοκιμασίες με αριθμούς μικρότερους της μονάδας (για παράδειγμα, 0,07 και 0,93) και από το 5 για τις δοκιμασίες με αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (για παράδειγμα, 3,2 και 1,8). Και στα δύο έργα εκτίμησης, οι αριθμοί δόθηκαν στους συμμετέχοντες με τυχαία σειρά, η οποία όμως ήταν ίδια για όλους τους συμμετέχοντες.

Αριθμοί προς εκτίμηση		
Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή – NP: number-to-position	Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή – PN: position-to-number	
0,07	0,93	} <1
0,3	0,7	
0,68	0,32	
0,9	0,1	
1,09	3,91	} >1
2,4	2,6	
3,2	1,8	
3,84	1,16	

Πίνακας 2. Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμασίες των έργων εκτίμησης (μισές δοκιμασίες με 2 δεκαδικά ψηφία π.χ. 0,07 και μισές δοκιμασίες με ένα δεκαδικό ψηφίο π.χ. 2,4)

Με σκοπό να μελετηθεί η σχέση της ικανότητας πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή για τους δεκαδικούς αριθμούς με τις μαθηματικές ικανότητες δόθηκαν δύο έργα μαθηματικών ικανοτήτων (6^ο ερευνητικό ερώτημα). Στο Έργο 3 (Έργο Επίλυσης Προβλήματος) οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλύσουν και να επιλέξουν τη σωστή απάντηση σε οχτώ μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ισάριθμα αφορούν σε τέσσερις μαθηματικές περιοχές: αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες, γεωμετρία και μοτίβα. Το Έργο Επίλυσης Προβλήματος βασίστηκε στο ερευνητικό εργαλείο των Desli και Lioliou (2020) και των Gürbüz και Erdem (2016). Στο Έργο 4 (Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων) ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να εκτελέσουν γραπτά οχτώ αριθμητικές πράξεις, δύο για κάθε αλγόριθμο των πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Το Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων βασίστηκε και επέκτεινε το ερευνητικό εργαλείο των Gürbüz και Erdem (2016). Πιο αναλυτικά, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες η εκτέλεση δύο πράξεων της πρόσθεσης με τριψήφιους αριθμούς και κρατούμενο, η εκτέλεση δύο πράξεων της αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς και

δανεικό, η εκτέλεση δύο πράξεων του πολλαπλασιασμού διψήφιου με διψήφιο και η εκτέλεση δύο πράξεων της διαίρεσης με τριψήφιο διαιρετέο και διψήφιο διαιρέτη.

Όλα τα έργα παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες. Υπήρξε αλλαγή παρουσίασης στα Έργα 1 και 2, κατά την οποία οι μισοί συμμετέχοντες είδαν πρώτα τις δοκιμασίες για το Έργο 1 (NP) και μετά τις δοκιμασίες για το Έργο 2 (PN) και οι άλλοι μισοί το αντίστροφο. Οι δοκιμασίες για τα Έργα 3 και 4 (μαθηματικών ικανοτήτων) παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες με την ίδια σειρά.

Το σύνολο των δοκιμασιών (32 δοκιμασίες) που σχεδιάστηκαν για καθένα από τα τέσσερα έργα παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α.

B.3 Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε χώρο του σχολείου τους, όπου επικρατούσε ησυχία, με σκοπό την διατήρηση της συγκέντρωσής τους κατά τη διάρκεια της εξέτασης. Τα παιδιά κάθονταν ένα-ένα στα θρανία και απάντησαν ατομικά στις δοκιμασίες. Η συμμετοχή των μαθητών στην έρευνα πραγματοποιήθηκε μετά από ενυπόγραφη συγκατάθεση των γονέων-κηδεμόνων τους, ενώ κατά τη διαδικασία της έρευνας διασφαλίστηκε η ανωνυμία τους.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο χρονικές στιγμές για να διασφαλιστεί ότι οι συμμετέχοντες δεν θα κουράζονταν ή δεν θα παρουσίαζαν μείωση προσοχής και συγκέντρωσης λόγω του πλήθους των δοκιμασιών. Μετά από σύντομη γνωριμία με την ερευνήτρια, έγινε ξεκάθαρος ο σκοπός της έρευνας και οι συμμετέχοντες διαβεβαιώθηκαν πως οι απαντήσεις τους δεν θα χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της σχολικής τους επίδοσης στα Μαθηματικά. Αρχικά, δόθηκαν βασικές οδηγίες για κάθε έργο και πραγματοποιήθηκε από ένα παράδειγμα δοκιμαστικά.

Για τη συμπλήρωση των δοκιμασιών των Έργων 1 και 2 δόθηκε σε κάθε συμμετέχοντα από ένα μπλοκ με 16 σελίδες. Στις 8 σελίδες υπήρχαν δοκιμασίες για το Έργο 1 (NP) και στις υπόλοιπες για το Έργο 2 (PN). Οι συμμετέχοντες έπρεπε να συμπληρώσουν την απάντησή τους σε κάθε δοκιμασία. Σε κάθε σελίδα του μπλοκ υπήρχε η εκφώνηση της δοκιμασίας και μια αριθμογραμμή 25 εκατοστών. Η

διαδικασία για τη συμπλήρωση των δοκιμασιών των Έργων 1 και 2 διήρκησε περίπου 20 λεπτά.

Σχετικά με τα Έργα 3 και 4 (μαθηματικών ικανοτήτων), δόθηκε στους συμμετέχοντες ένα μπλοκ 5 σελίδων. Οι 4 πρώτες σελίδες περιείχαν τα προβλήματα ανάλογα με την μαθηματική περιοχή που ανήκαν και οι συμμετέχοντες έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή απάντηση. Δίπλα από κάθε πρόβλημα υπήρχε χώρος, τον οποίο μπορούσαν να αξιοποιήσουν οι συμμετέχοντες κατά την επίλυση των προβλημάτων. Η 5^η σελίδα περιείχε τις κάθετες αριθμητικές πράξεις. Η διαδικασία για τη συμπλήρωση των δοκιμασιών των Έργων 3 και 4 διήρκησε 45 λεπτά.

B.4 Ανάλυση δεδομένων

Μετά τη συλλογή των δεδομένων ακολούθησε η κωδικοποίησή τους ως εξής: για κάθε σωστή απάντηση δόθηκε 1 βαθμός και για κάθε λανθασμένη 0. Για τη στατιστική επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα SPSS 27.

Στα Έργο 1 (NP) ο έλεγχος επίδοσης των συμμετεχόντων πραγματοποιήθηκε με βάση ένα ελαστικό κριτήριο που χρησιμοποιείται σε παρόμοιες έρευνες (π.χ. Booth & Siegler, 2006· Siegler & Pyke, 2013· Slusser, Santiago & Barth, 2012). Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν απόκλιση 20% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης στην αριθμογραμμή. Το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης εξαρτάται από το μήκος της αριθμογραμμής που έχει οριστεί. Καθώς στην παρούσα έρευνα το μήκος κάθε αριθμογραμμής είναι 25 εκατοστά, η απόκλιση του 20% με βάση το μήκος της αριθμογραμμής (25 εκ.) είναι $20\% \times 25 = 5$ εκατοστά, δηλαδή επιτυχείς εκτιμήσεις θεωρήθηκαν αυτές που τοποθετήθηκαν 2,5 εκατοστά πριν από την ακριβή θέση του αριθμού και 2,5 εκατοστά μετά από την ακριβή θέση του αριθμού που ζητήθηκε να εκτιμηθεί πάνω στην αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, η δοκιμασία που αφορούσε την εύρεση της θέσης του αριθμού 1,09 (που βρίσκεται στη θέση 5,45 στην αριθμογραμμή με μήκος 25 εκατοστά) έχει εύρος σωστών απαντήσεων 2,95-7,95 εκατοστά.

Αντίστοιχα, στο Έργο 2 (PN), θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν απόκλιση 20% του αριθμητικού μεγέθους που αντιστοιχούσε στη συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αριθμητικό εύρος της αριθμογραμμής. Στην παρούσα έρευνα, η αριθμογραμμή έχει εύρος 0-5, άρα $20\% \times 5 = 1$, δηλαδή επιτυχείς εκτιμήσεις θεωρήθηκαν οι αριθμοί που βρίσκονταν 0,5 πάνω και 0,5 κάτω από τον αριθμό που αντιστοιχούσε στην συγκεκριμένη θέση πάνω στη αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, η δοκιμασία που αφορούσε την εύρεση του αριθμού 2,6 σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή είχε εύρος σωστών απαντήσεων 2,1-3,1.

Τα εύρη των σωστών απαντήσεων για τα δύο έργα εκτίμησης βρίσκονται στο Παράρτημα Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, όπως προέκυψαν μετά τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση του προγράμματος SPSS 27. Το κεφάλαιο απαρτίζεται από τέσσερις ενότητες. Η πρώτη ενότητα αφορά στην εξέταση της γενικής επίδοσης των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης ως προς την ηλικία (Ε'- Στ' τάξη) και το φύλο. Στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις επιμέρους επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς το είδος έργου (NP-PN), ως προς το είδος της αριθμογραμμής (με επιπλέον σημεία αναφοράς-χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς) και ως προς το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμασίες εκτίμησης (αριθμοί μικρότεροι της μονάδας και αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας). Η τρίτη ενότητα εστιάζει στην επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων (επίλυση προβλήματος και εκτέλεση αριθμητικών πράξεων). Τέλος, στην τέταρτη ενότητα εξετάζεται η συσχέτιση ανάμεσα στην επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων.

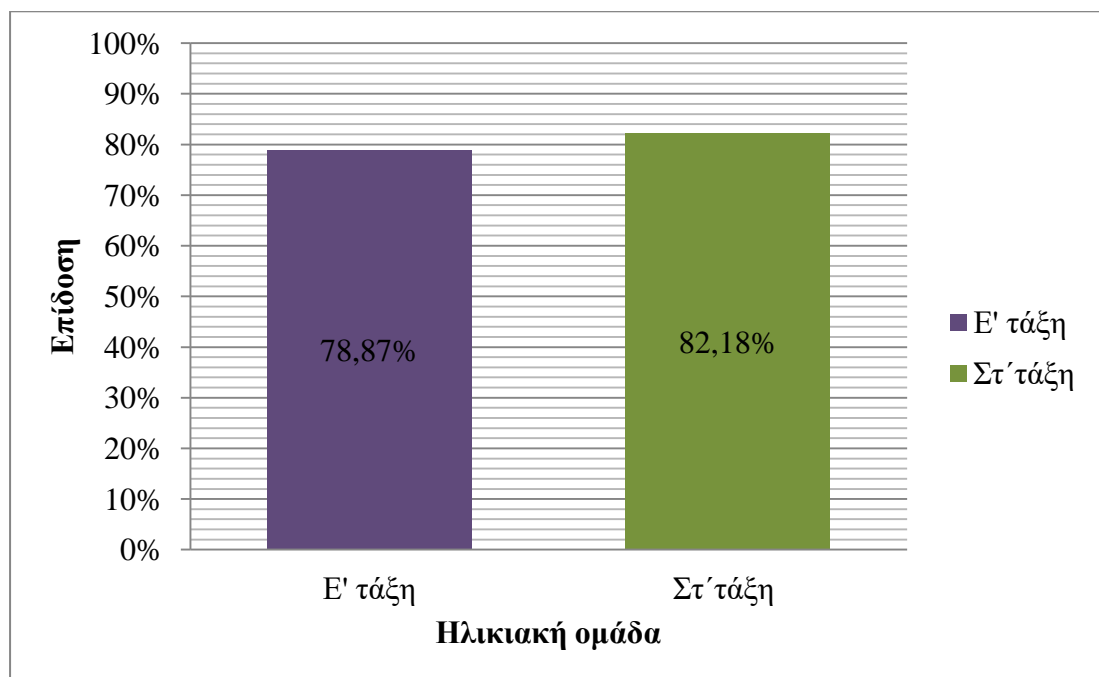
Γ.1 Επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης

Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης κινήθηκε αρκετά υψηλά. Το ποσοστό επιτυχίας τους στις εκτιμήσεις ξεπέρασε το 80% (80,5%).

Γ.1.1. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα (Ε'-Στ' τάξη)

Προκειμένου να εξεταστεί αν η ηλικία επηρέασε την επιτυχία των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών της Ε' τάξης και τις επιδόσεις των παιδιών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες εκτίμησης ($t(116)=-,984, p=.327$). Πιο συγκεκριμένα, τα

παιδιά των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης (78,87% και 82,18%, για τα παιδιά της Ε' και της Στ', αντίστοιχα). Το Σχήμα 1 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτά τα στοιχεία.



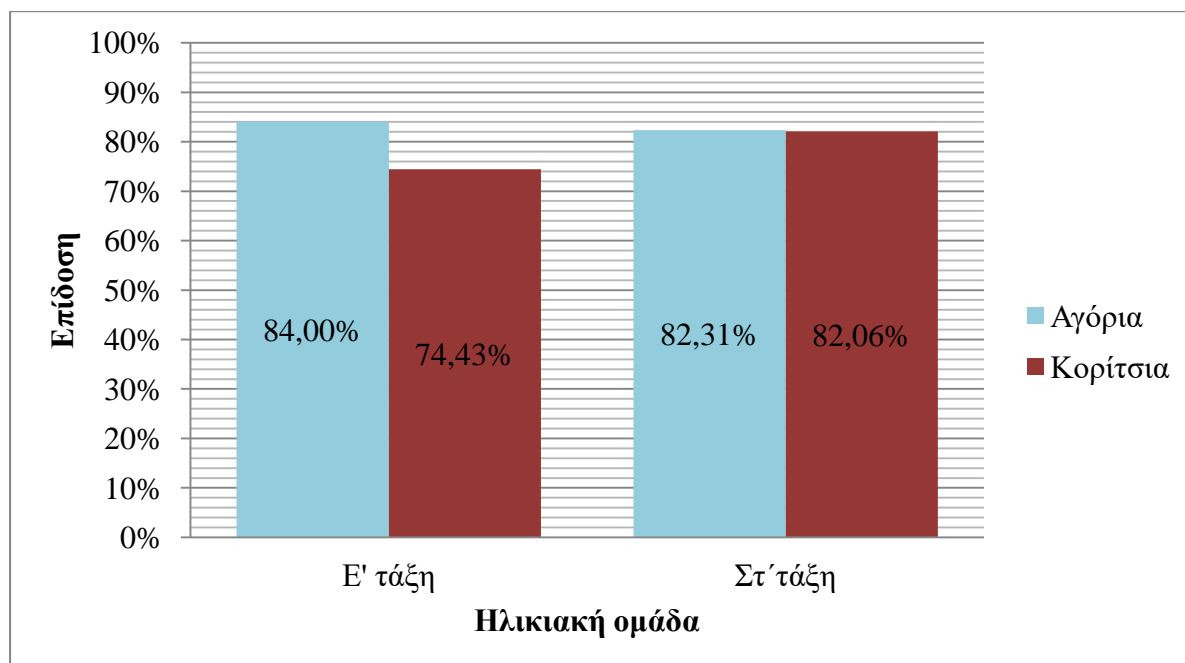
Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα

Γ.1.2. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το φύλο

Όταν μελετήθηκε αν το φύλο επηρεάζει την επιτυχία των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς το φύλο ($t(116)=1,471$, $p=.144$), δηλαδή τα αγόρια και τα κορίτσια εμφάνισαν παρόμοια επίδοση (83,12% και 78,25%, για τα αγόρια και τα κορίτσια, αντίστοιχα).

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα βρέθηκε πως για τα παιδιά της Ε' τάξης το φύλο οριακά δεν επηρέασε τις επιδόσεις αγοριών και κοριτσιών ($t(56)=1,879$, $p=.065$). Για τα παιδιά της Στ' τάξης επίσης δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς το φύλο ($t(58)=,063$, $p=.950$).

Στο Σχήμα 2, που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα παραπάνω στοιχεία σε ποσοστιαία κλίμακα.



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα και το φύλο

Γ.1.3 Επιμέρους επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης

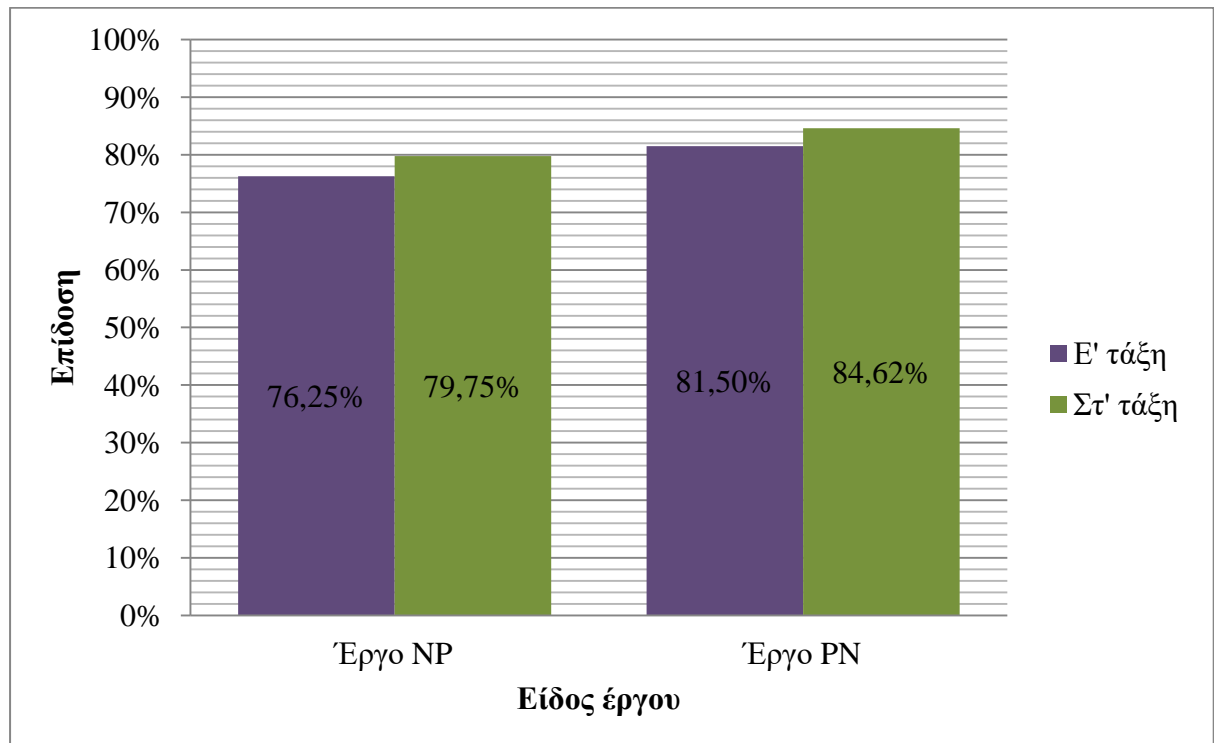
Γ.1.3.1 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το είδος του Έργου (NP-PN)

Με σκοπό να εξεταστεί αν το είδος του Έργου² επηρέασε την επίδοση του συνόλου των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου NP και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων για το Έργο PN ($t(117)=-2,636, p<.05$). Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες στο Έργο PN (83%) συγκριτικά με το Έργο NP (78,12%).

² Έργο NP : εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή

Έργο PN: εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν, καθώς δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ανάμεσα στα δύο Έργα ($t(57)=-1,863$, $p=.068$) και $t(59)=-1,849$ $p=.069$, για τα παιδιά της Ε' και της Στ', αντίστοιχα). Το Σχήμα 3, που ακολουθεί, παρουσιάζει τα παραπάνω στοιχεία σε ποσοστιαία κλίμακα.



Σχήμα 3: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος Έργου εκτίμησης και την ηλικιακή ομάδα

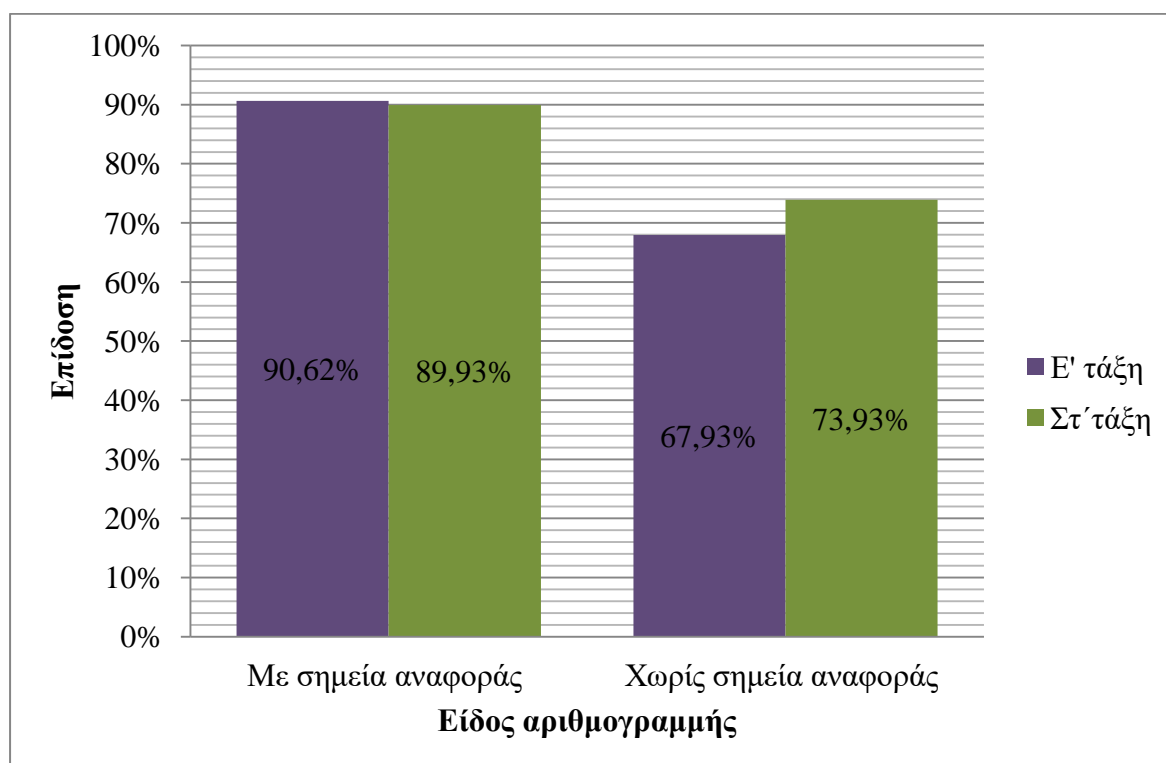
Γ.1.3.2 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το είδος της αριθμογραμμής

Προκειμένου να εξεταστεί αν το είδος της αριθμογραμμής³ επηρέασε την επιτυχία όλων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Από την ανάλυση προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν αριθμογραμμές με επιπλέον σημεία αναφοράς και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν

³ Στους μισούς συμμετέχοντες, η αριθμογραμμή είχε επιπλέον σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο της. Στους άλλους μισούς δεν είχε κανένα επιπλέον σημείο αναφοράς. Όλες οι αριθμογραμμές που δόθηκαν στο σύνολο των συμμετεχόντων είχαν το σημείο εκκίνησης και το σημείο τέλους.

αριθμογραμμές χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς ($t(116)=6,805$ $p<.001$). Πιο συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν αριθμογραμμές με σημεία αναφοράς ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες (90,25%) από τις επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν αριθμογραμμές χωρίς σημεία αναφοράς (70,87%).

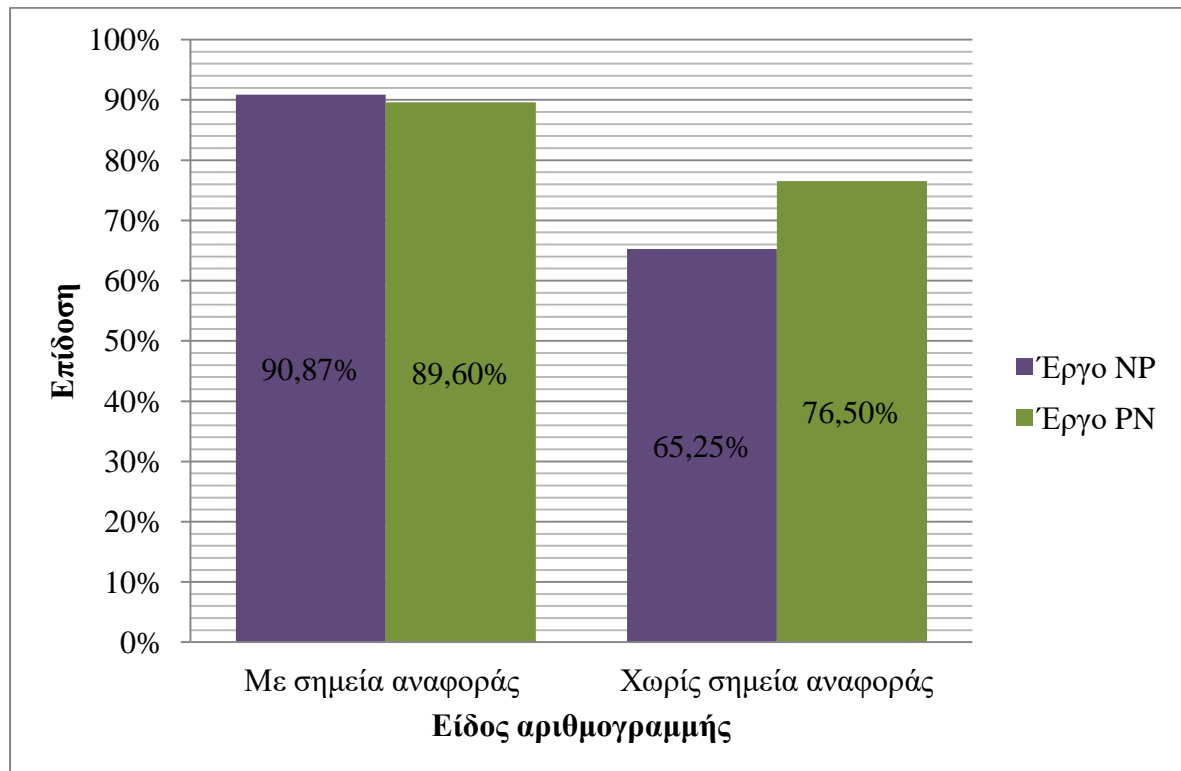
Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Ε' τάξης όσο και τα παιδιά της Στ' τάξης που είχαν αριθμογραμμές με επιπλέον σημεία αναφοράς πραγματοποίησαν στατιστικά σημαντικά περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις σε σχέση με όσα παιδιά είδαν αριθμογραμμές χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς ($t(56)=5,269$, $p<.001$) και $t(58)=4,275$ $p<.001$, για τα παιδιά της Ε' και της Στ', αντίστοιχα). Τα παραπάνω στοιχεία απεικονίζονται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος αριθμογραμμής και την ηλικιακή ομάδα

Επίσης, πραγματοποιήθηκαν επιμέρους αναλύσεις ξεχωριστά για κάθε Έργο (NP και PN) για το σύνολο των παιδιών και βρέθηκε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν και για τα δύο Έργα. Συγκεκριμένα, τόσο στο Έργο NP όσο και στο

Έργο PN, οι επιδόσεις των παιδιών που είδαν αριθμογραμμές με σημεία αναφοράς ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες από τις επιδόσεις των παιδιών που είδαν αριθμογραμμές χωρίς σημεία αναφοράς ($t(116)=7,984, p<.001$) και $t(116)=3,718, p<.001$, για το έργο NP και PN, αντίστοιχα). Το Σχήμα 5 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτές τις διαφορές.



Σχήμα 5: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος αριθμογραμμής και το είδος Έργου εκτίμησης

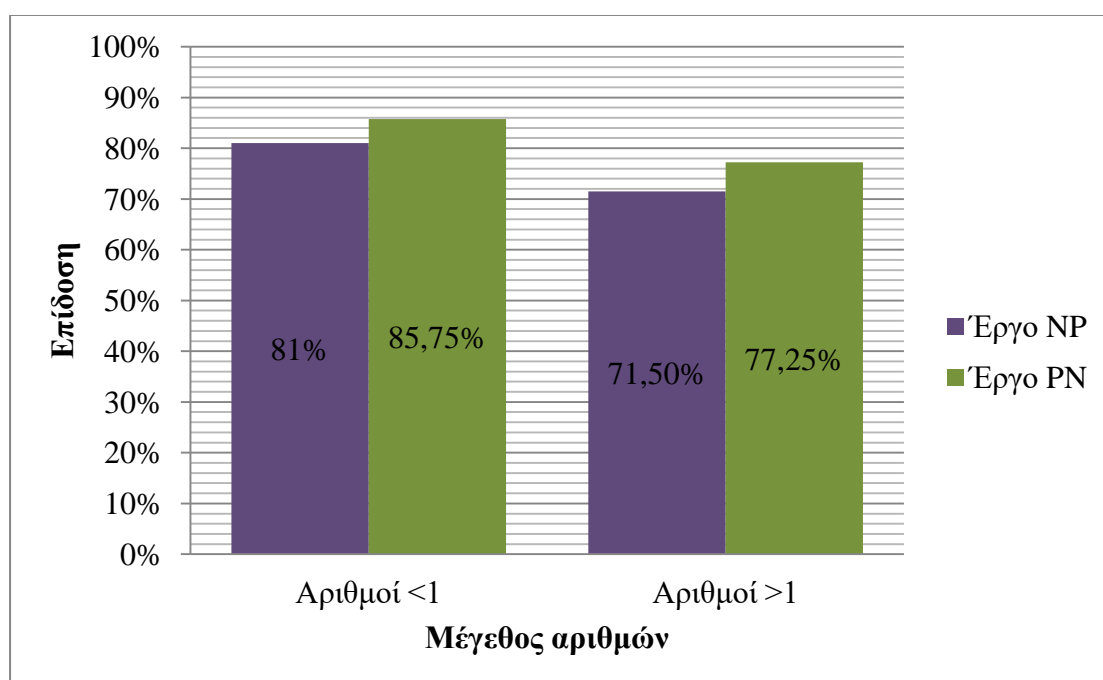
Γ.1.3.3 Επίδοση συμμετεχόντων ως προς το μέγεθος των αριθμών (αριθμοί μικρότεροι της μονάδας και αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας)

Με σκοπό να διερευνηθεί αν οι επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων διαφοροποιήθηκαν από το μέγεθος των αριθμών, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας

($t(117)=2,323, p<.05$). Αναλυτικότερα, οι επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων ήταν υψηλότερες στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας (83,12%) συγκριτικά με τις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (78%).

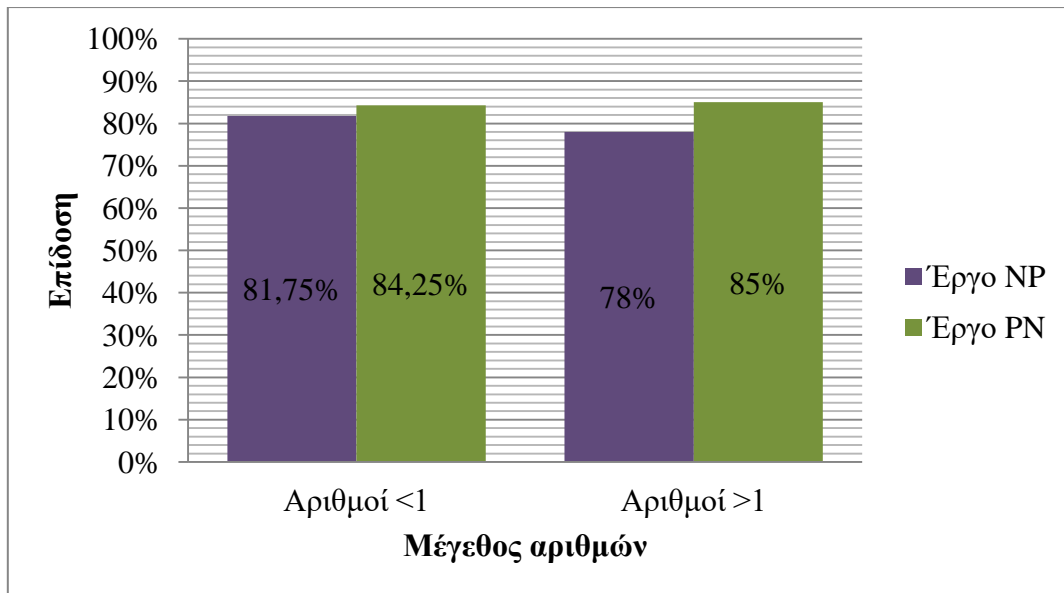
Πραγματοποιήθηκαν επιμέρους αναλύσεις ξεχωριστά για κάθε Έργο (NP και PN) για το σύνολο των παιδιών. Σχετικά με το Έργο NP, η ανάλυση έδειξε πως τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν και υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες ανάλογα με το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών ($t(117)=2,321, p<.05$). Ειδικότερα, στις δοκιμασίες του Έργου NP που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας, οι συμμετέχοντες πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις (81,25%) σε σύγκριση με τις δοκιμασίες του Έργου NP που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (74,75%). Ωστόσο, για τις δοκιμασίες του Έργου PN βρέθηκε πως το μέγεθος των αριθμών δεν επηρέασε την επιτυχία των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις ($t(117)=1,359, p=.177$). Συνεπώς, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου PN είτε αφορούσαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας (85%) είτε αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (81,25%) ήταν παρόμοιες.

Η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα. Για την Ε' τάξη, προέκυψε πως υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας ($t(57)=2,895, p<.01$). Πιο αναλυτικά, οι επιδόσεις των μαθητών της Ε' τάξης ήταν υψηλότερες στο σύνολο των δοκιμασιών που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας (83,37%) συγκριτικά με τις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (74,37%). Επιπρόσθετα, οι επιμέρους αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστά για κάθε Έργο (NP και PN) για τους μαθητές της Ε' τάξης έδειξαν πως οι επιδόσεις τους στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες από τις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας ($t(57)=2,303, p<.05$ και $t(57)=2,267, p<.05$ για το Έργο NP και το Έργο PN, αντίστοιχα). Στο Σχήμα 6 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα παραπάνω στοιχεία.



Σχήμα 6: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των παιδιών της Ε' τάξης ως προς το μέγεθος των αριθμών και το είδος Έργου εκτίμησης

Ωστόσο, για τους μαθητές της Στ' τάξης η ανάλυση έδειξε πως οι επιδόσεις τους στις δοκιμασίες δεν επηρεάζονται στατιστικά σημαντικά από το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών, είτε αυτό ήταν μικρότερο είτε μεγαλύτερο από τη μονάδα ($t(59)=-,464, p=.645$). Οι επιδόσεις των μαθητών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες που αφορούσαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας (82,87%) ήταν παρόμοιες με τις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες που περιλάμβαναν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (81,5%). Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν τόσο για το Έργο NP όσο και για το Έργο PN ($t(59)=-,964, p=.339$ και $t(59)=-,205 p=.839$ για το έργο NP και το Έργο PN, αντίστοιχα). Στο Σχήμα 7 απεικονίζονται τα παραπάνω αποτελέσματα.



Σχήμα 7: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των παιδιών της Στ' τάξης ως προς το μέγεθος των αριθμών και το είδος έργου εκτίμησης

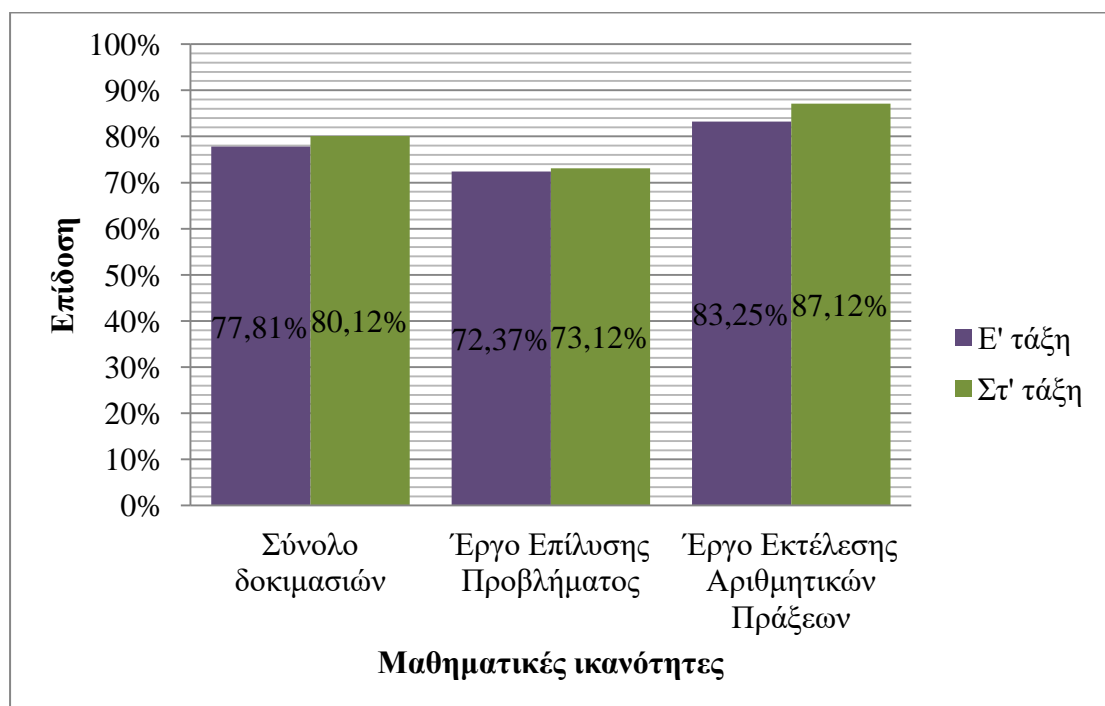
Γ.2 Επίδοση στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων

Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών μαθηματικών ικανοτήτων βρέθηκε να είναι πολύ υψηλή (78,94%).

Γ.2.1 Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα (Ε'-Στ' τάξη)

Με σκοπό να διερευνηθεί αν η ηλικία επηρέασε την επιτυχία των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών της Ε' τάξης και τις επιδόσεις των παιδιών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων ($t(116)=-,931, p=.354$). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις σε αυτές τις δοκιμασίες (77,81% και 80,12%, για τα παιδιά της Ε' και της Στ', αντίστοιχα).

Όταν η ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για το Έργο Επίλυσης Προβλήματος και το Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών της Ε' τάξης και τις επιδόσεις των παιδιών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες για τα παραπάνω έργα ($t(116)=-,201, p=.841$ και $t(116)=-1,427, p=.156$, για το Έργο Επίλυσης Προβλήματος και το Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων, αντίστοιχα). Τα παραπάνω στοιχεία απεικονίζονται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα και το είδος έργου μαθηματικών ικανοτήτων

Γ.2.2 Επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το είδος Έργου

Με σκοπό να εξεταστεί αν το είδος του Έργου⁴ επηρέασε την επίδοση του συνόλου των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις

⁴ Έργο Επίλυσης Προβλήματος για διάφορες μαθηματικές περιοχές (αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες, γεωμετρία, μοτίβα)

Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων, δύο για κάθε αλγόριθμο των πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση)

επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων για το Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων ($t(117)=-6,328, p<.001$). Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων ήταν υψηλότερες στο Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων (85,12%) συγκριτικά με το Έργο Επίλυσης Προβλήματος (72,75%).

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Ε' τάξης όσο και τα παιδιά της Στ' τάξης σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στο Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων συγκριτικά με το Έργο Επίλυσης Προβλήματος ($t(57)=-3,770, p<.001$) και $t(59)=-5,185, p<.001$, για τα παιδιά της Ε' και της Στ', αντίστοιχα). Στο Σχήμα 8 παρουσιάζονται αυτές οι διαφορές.

Επιπρόσθετα, στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος. Παρατηρείται πως η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες που αφορούσαν τα μοτίβα, ενώ η χαμηλότερη επίδοσή τους σημειώθηκε στις δοκιμασίες από την περιοχή της Γεωμετρίας. Μάλιστα η μικρή τυπική απόκλιση που παρατηρήθηκε και για τις ηλικιακές ομάδες στις δοκιμασίες για τα μοτίβα (.360 και .324, για τα παιδιά της Ε' τάξης και της Στ' τάξης, αντίστοιχα) δείχνει ότι για την πλειοψηφία των παιδιών οι δοκιμασίες των μοτίβων ήταν ίδιας δυσκολίας.

Επίλυση προβλήματος	Ηλικιακές ομάδες		
	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Σύνολο
Αριθμητικές πράξεις	1,53 (.599)	1,42 (.645)	1,47 (.623)
Πιθανότητες	1,28 (.720)	1,45 (.649)	1,36 (.688)
Γεωμετρία	1,09 (.779)	1,10 (.730)	1,09 (.751)
Μοτίβα	1,90 (.360)	1,88 (.324)	1,89 (.341)

Πίνακας 3: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των σωστών απαντήσεων (max=2) στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος ως προς την ηλικία

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου Εκτέλεσης Αριθμητικών πράξεων. Ειδικότερα, φαίνεται πως οι συμμετέχοντες σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες που αφορούσαν στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, ενώ τα ποσοστά επιτυχίας τους ήταν χαμηλότερα στις δοκιμασίες με τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων	Ηλικιακές ομάδες		
	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Σύνολο
Πρόσθεση	1,81 (.395)	1,87 (.389)	1,84 (.392)
Αφαίρεση	1,76 (.471)	1,82 (.431)	1,79 (.450)
Πολλαπλασιασμός	1,45 (.730)	1,68 (.567)	1,57 (.660)
Διαίρεση	1,64 (.552)	1,60 (.588)	1,62 (.569)

Πίνακας 4: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των σωστών απαντήσεων (max=2) στις δοκιμασίες εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων ως προς την ηλικία

Γ.3 Συσχέτιση της επίδοσης στην εκτίμηση με την επίδοση στις μαθηματικές ικανότητες

Με σκοπό να διερευνηθεί αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην επίδοση στις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχέτισης (Pearson Correlation). Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχει θετική συνάφεια ανάμεσα στη γενική επίδοση όλων των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης και το σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων (Pearson's $r=,236$, $p<.01$) αλλά και τις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r=,300$, $p<.01$). Δηλαδή, όσοι συμμετέχοντες εμφάνισαν μεγάλη επιτυχία στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν μεγάλη επιτυχία στο σύνολο των δοκιμασιών μαθηματικών ικανοτήτων καθώς και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (βλ. Πίνακα 5).

Παρόμοια, θετική συνάφεια υπάρχει ανάμεσα στην επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου NP και το σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων (Pearson's $r=,261$, $p<.01$) καθώς επίσης και τις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r=,298$, $p<.01$). Όσοι συμμετέχοντες εμφάνισαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες για το Έργο NP έτειναν να εμφανίζουν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων και, ειδικότερα, στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Ακόμη, βρέθηκε να υπάρχει θετική συνάφεια ανάμεσα στην επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου PN και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r=,223$, $p<.05$). Δηλαδή, όσοι συμμετέχοντες παρουσίασαν υψηλή επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου PN έτειναν να παρουσιάζουν υψηλή επίδοση και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Καμία συνάφεια δεν εντοπίστηκε για τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων.

Πίνακας 5: Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης και τις επιδόσεις στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων

	Μαθηματικές ικανότητες	Επίλυση προβλήματος	Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων
Δοκιμασίες εκτίμησης	,236**	,300**	,041
Έργο NP	,261**	,298**	,089
Έργο PN	,147	,223*	-,021

Στατιστική σημαντικότητα: * $p<.05$, ** $p<.01$

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Ε' τάξης, βρέθηκε ότι η μόνη θετική συνάφεια που υπάρχει είναι ανάμεσα στην επίδοσή τους στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r=,275$, $p<.05$). Αυτό σημαίνει πως όσοι μαθητές της Ε' τάξης παρουσίασαν μεγάλη επιτυχία στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν μεγάλη επιτυχία και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (βλ. Πίνακα 6).

Πίνακας 6: Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών της Ε' τάξης στις δοκιμασίες εκτίμησης και τις επιδόσεις στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων

	Μαθηματικές ικανότητες	Επίλυση προβλήματος	Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων
Δοκιμασίες εκτίμησης	,213	,275*	,037
Έργο NP	,233	,255	,101
Έργο PN	,142	,230	-,036

Στατιστική σημαντικότητα: * $p < .05$, ** $p < .01$

Τέλος, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Στ' τάξης προέκυψε πως υπάρχει θετική συνάφεια ανάμεσα στην επίδοσή τους στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης και την επίδοσή τους στο σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων (Pearson's $r = .255$, $p < .05$) αλλά και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r = .333$, $p < .01$). Έτσι, όσοι συμμετέχοντες παρουσίασαν καλή επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν καλή επίδοση και στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων και, συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος.

Επίσης, θετική συνάφεια βρέθηκε να υπάρχει ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες του Έργου NP και την επίδοσή τους στο σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων (Pearson's $r = .286$, $p < .05$) αλλά και ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες του Έργου NP και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r = .349$, $p < .01$). Συνεπώς, όσοι συμμετέχοντες εμφάνισαν μεγάλη επιτυχία στις δοκιμασίες του Έργου NP έτειναν να εμφανίζουν μεγάλη επιτυχία στο σύνολο των δοκιμασιών των μαθηματικών ικανοτήτων και, πιο συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Καμία συνάφεια δεν εντοπίστηκε για τις επιδόσεις των παιδιών της Στ' στο Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων (βλ. Πίνακα 7).

Πίνακας 7: Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών της Στ' τάξης στις δοκιμασίες εκτίμησης και τις επιδόσεις στις δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων

	Μαθηματικές ικανότητες	Επίλυση προβλήματος	Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων
Δοκιμασίες εκτίμησης	,255*	,333**	,019
Έργο NP	,286*	,349**	,053
Έργο PN	,140	,212	-,026

Στατιστική σημαντικότητα: * $p < .05$, ** $p < .01$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών της Ε' και Στ' τάξης να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και τη σχέση αυτής της ικανότητας με τις μαθηματικές τους ικανότητες. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε 118 μαθητές (58 μαθητές της Ε' τάξης και 60 της Στ' τάξης) τέσσερα έργα: α) Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή (number-to-position – NP), β) Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή (position-to-number – PN), γ) Έργο 3: Έργο Επίλυσης Προβλήματος για διάφορες μαθηματικές περιοχές (αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες, γεωμετρία, μοτίβα), και δ) Έργο 4: Έργο Εκτέλεσης Αριθμητικών Πράξεων. Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφονται τα κύρια ευρήματα, όπως προέκυψαν μετά την πραγματοποίηση της έρευνας και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της.

Με στόχο την απάντηση των επιμέρους ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν στην εισαγωγή της εργασίας, η παρούσα έρευνα κατέληξε σε πέντε κύρια ευρήματα. Πιο αναλυτικά, διερευνήθηκε ποια ήταν η επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και αν αυτή διαφοροποιείται από την ηλικία τους, το είδος του Έργου (NP και PN), το είδος της αριθμογραμμής (με και χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς) και το μέγεθος των αριθμών (αριθμοί μικρότεροι ή μεγαλύτεροι της μονάδας). Τέλος, εξετάστηκε αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές τους ικανότητες.

Πρώτον, η γενική επίδοση των μαθητών της Ε' και της Στ' τάξης στις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή ήταν πολύ καλή (80,5%), χωρίς να διαφοροποιείται σημαντικά μεταξύ των δυο ηλικιακών ομάδων (περίπου 79% και 83%, αντίστοιχα για Ε' και Στ'). Το παραπάνω εύρημα φαίνεται να συμφωνεί με ευρήματα που δείχνουν πως όσο τα παιδιά μεγαλώνουν τόσο πραγματοποιούν περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή (Laski & Siegler, 2007· Siegler & Booth, 2004· Siegler & Opfer, 2003). Είναι πιθανόν το ίδιο να ισχύει και στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων με

δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή. Το γεγονός ότι η διαφορά στην ηλικία των δύο ομάδων συμμετεχόντων ήταν πολύ μικρή πιθανότατα εξηγεί την απουσία σημαντικών διαφορών στις επιδόσεις τους.

Δεύτερον, η ικανότητα των παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή φάνηκε πως διαφοροποιήθηκε από το είδος του Έργου των δοκιμασιών εκτίμησης (NP και PN). Αναλυτικότερα, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων και των δύο ηλικιακών ομάδων φάνηκε να είναι περισσότερο επιτυχείς στις δοκιμασίες για το Έργο PN. Τα παραπάνω ευρήματα δεν συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας των Iuculano και Butterworth (2011), οι οποίοι υπογράμμισαν πως η ικανότητα δεκάχρονων μαθητών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή φάνηκε να μην επηρεάζεται σημαντικά από το είδος Έργου (NP και PN) σε αντίθεση με τις εκτιμήσεις για κλασματικούς αριθμούς, οι οποίες ήταν λιγότερο επιτυχείς στο έργο PN. Η διαφοροποίηση αυτή ανάμεσα στα ευρήματα της παρούσας έρευνας και της έρευνας των Iuculano και Butterworth (2011) ίσως έγκειται στο γεγονός ότι τα παιδιά στην παρούσα έρευνα είναι μεγαλύτερης ηλικίας και άρα περισσότερο εξοικειωμένα με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Τρίτον, η ύπαρξη των επιπλέον σημείων αναφοράς στις αριθμογραμμές επηρέασε σημαντικά τις επιδόσεις των παιδιών και των δυο ηλικιακών ομάδων. Ειδικότερα, οι μαθητές που εργάστηκαν με δοκιμασίες στις οποίες οι αριθμογραμμές, πέραν του αρχικού και του τελικού άκρου (0 και 5), είχαν επιπλέον σημεία αναφοράς (1,25 – 2,5 – 3,75) σε κάθε τεταρτημόριο της αριθμογραμμής πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις (90%) συγκριτικά με τους μαθητές που είδαν αριθμογραμμές μόνο με το αρχικό και το τελικό άκρο (0 και 5) χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς (71%). Το εύρημα αυτό μάλιστα βρέθηκε να ισχύει και για τις δύο ηλικιακές ομάδες αλλά και για τα δύο Έργα εκτίμησης (NP και PN). Όπως επισημαίνουν οι Peeters, Sekeris, Ebersbach, Verschaffel και Luwel (2017), η χρήση των επιπλέον σημείων αναφοράς είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη για την επιτυχία των εκτιμήσεων με φυσικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, γεγονός που τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν και για την εκτίμηση με δεκαδικούς αριθμούς. Η θετική επίδραση των επιπλέον σημείων αναφοράς στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή ενδεχομένως εξηγείται από την άποψη ερευνητών (Barth & Paladino, 2011·Cohen & Blanc-Goldhammer, 2011·

Slusser & Barth, 2017· Slusser, Santiago & Barth, 2013) που υποστηρίζουν πως η εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή προϋποθέτει τη γνώση σχέσεων αναλογίας, μέσω των οποίων πραγματοποιείται η σύνδεση του αριθμητικού μεγέθους που ζητείται να εκτιμηθεί με τα σημεία που ξεκινά και τελειώνει η αριθμογραμμή και κατ' επέκταση με τα επιπλέον σημεία αναφοράς. Επίσης, είναι πιθανόν να εξηγείται από τη μεγαλύτερη εξοικείωση των παιδιών με δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια, στις οποίες παρουσιάζονται συχνά αριθμογραμμές με επιπλέον, περισσότερα των δύο, σημεία αναφοράς.

Τέταρτον, το μέγεθος των αριθμών φαίνεται να επηρεάζει την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή. Ωστόσο, η επίδραση του μεγέθους των αριθμών διαφοροποιείται ανάλογα με την ηλικία των παιδιών. Συγκεκριμένα, η επίδοση των παιδιών της Ε΄ τάξης ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες εκτίμησης που περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας συγκριτικά με τις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας. Η επίδραση του μεγέθους των εμπλεκόμενων αριθμών παρατηρήθηκε και στα δύο έργα εκτίμησης (NP και PN). Για τα παιδιά της Στ΄ τάξης, όμως, το μέγεθος των αριθμών δεν αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα για την επιτυχία στις εκτιμήσεις τους με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς η επίδοσή τους ήταν παρόμοια είτε το μέγεθος των αριθμών ήταν μικρότερο είτε ήταν μεγαλύτερο της μονάδας. Το εύρημα αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με αντίστοιχο το εύρημα των Siegler, Thompson και Schneider (2011). Όταν οι συγκεκριμένοι ερευνητές εξέτασαν την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση κλασματικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή σε μαθητές ηλικίας 11 και 13 ετών, βρήκαν ακριβώς αυτό που εντοπίστηκε και με τους δεκαδικούς αριθμούς στην παρούσα έρευνα, δηλαδή ότι η επίδοση των εντεκάχρονων παιδιών ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες εκτίμησης που περιελάμβαναν κλασματικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας σε σχέση με τις δοκιμασίες εκτίμησης που περιελάμβαναν κλασματικούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας, ενώ η επίδοση των δεκατριάχρονων μαθητών ήταν υψηλή ανεξάρτητα από το μέγεθος των εμπλεκόμενων κλασματικών αριθμών.

Το γεγονός ότι το μέγεθος των αριθμών δεν επηρέασε σημαντικά τις επιδόσεις των μεγαλύτερων παιδιών ενδεχομένως συνδέεται με την άποψη των Ebersbach, Luwel, Frick, Onghena και Verschaffel (2008) και των Ebersbach, Luwel και Verschaffel (2015), οι οποίοι κατέληξαν πως οι επιδόσεις των ατόμων που

πραγματοποιούν εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή συνδέονται με την εξοικείωση που έχουν με τους αριθμούς που καλούνται να διαχειριστούν. Έτσι, είναι πιθανόν οι μαθητές της Στ' τάξης να πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης μέσα από το σχολικό πλαίσιο αλλά και τις προσωπικές εμπειρίες τους με δεκαδικούς αριθμούς μεγαλύτερους της ακέραιης μονάδας.

Τέλος, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως υπάρχει ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Ειδικότερα, παρατηρήθηκε πως όσοι συμμετέχοντες και από τις δύο ηλικιακές ομάδες παρουσίασαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης έτειναν να παρουσιάζουν υψηλά ποσοστά και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Το παραπάνω εύρημα συμφωνεί με τα αποτελέσματα πολλών ερευνών (Friso-van den Bos, Kroesbergen, van Luit, Xenidou- Dervou, Jonkman, van der Scoot & van Lieshout, 2015· Schneider, Merz, Stricker, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel & Luwel, 2018· Xing, Zax, George, Taggart, Bass & Barth, 2021· Zhu et al., 2017), τα οποία υπογράμμισαν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ικανότητα για εκτιμήσεις με ακέραιους και κλασματικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Επομένως, το εύρημα που προέκυψε από την παρούσα έρευνα επιβεβαιώνει τη σχέση της ικανότητας εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή με την επίλυση προβλήματος ως μέρος των μαθηματικών ικανοτήτων και για την περίπτωση των δεκαδικών αριθμών.

Αξίζει επίσης να επισημανθεί πως η ικανότητα πραγματοποίησης εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς δεν βρέθηκε να σχετίζεται με την ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Αυτό ενδεχομένως φανερώνει πως η εκτίμηση είναι μια διαδικασία που προϋποθέτει εννοιολογική κατανόηση και δεν πραγματοποιείται με διαδικαστικές πρακτικές, καθώς προέκυψε πως όσοι είναι καλοί λύτες προβλημάτων είναι και καλοί εκτιμητές, ενώ όσοι είναι καλοί στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων δεν είναι απαραίτητα και καλοί εκτιμητές. Με άλλα λόγια, η επιδεξιότητα στην εκτέλεση των αλγορίθμων δεν συνδέεται απαραίτητα με την ικανότητα πραγματοποίησης επιτυχών εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή.

Αν και η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε προς το τέλος της εθνικής πανδημίας (Covid-19) και, κατά συνέπεια, υπήρχε δυσκολία στην πρόσβαση σε σχολικές μονάδες, η συμμετοχή των παιδιών επετεύχθη σε σημαντικό βαθμό. Οι

συμμετέχοντες προέρχονταν από σχολεία που καλύπτουν μεγάλο εύρος περιοχών της Θεσσαλονίκης. Ωστόσο, σε περίπτωση που οι συμμετέχοντες προέρχονταν και από άλλες περιοχές της χώρας, θα υπήρχαν επιπλέον πληροφορίες και άλλα κοινωνικοπολιτισμικά χαρακτηριστικά τους που πιθανότατα αξίζει να μελετηθούν αναφορικά με την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων.

Η μελέτη της ικανότητας πραγματοποίησης εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω. Έχει ενδιαφέρον σε μελλοντική έρευνα να εξεταστούν οι στρατηγικές που τα άτομα υιοθετούν για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων για δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και η σχέση αυτών με τις μαθηματικές ικανότητες. Η παραπάνω ιδέα για περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε επίσης να πλαισιωθεί από μια διδακτική παρέμβαση με αντικείμενο τις στρατηγικές εκτίμησης και έπειτα τη μελέτη των επιδόσεων των παιδιών για την εκτίμηση με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, δεδομένου της επίδρασης που φάνηκε ότι έχει το είδος της αριθμογραμμής (χωρίς και με επιπλέον σημεία αναφοράς, πέρα από το αρχικό και το τελικό σημείο αναφοράς) στην επιτυχία των εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, θα μπορούσε να μελετηθεί μελλοντικά αν ένα άλλο είδος αριθμογραμμής, όπως οι μη οριοθετημένες αριθμογραμμές (συνήθως περιλαμβάνουν το αρχικό σημείο αναφοράς και ένα ακόμα ενδιάμεσο, χωρίς το τελικό σημείο αναφοράς), διαφοροποιεί τις επιδόσεις των παιδιών.

Συνοψίζοντας, γίνεται φανερό πως η υπάρχουσα, αλλά και η μελλοντική, έρευνα για τις εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή έχει να προσφέρει πληθώρα σημαντικών ευρημάτων. Μέσω της παρούσας εργασίας έγινε προσπάθεια ανάδειξης της ισχυρής σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Το παραπάνω εύρημα είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικό, αναδεικνύει τη μεγάλη σημασία της εκτίμησης –γενικότερα- στη μάθηση των μαθηματικών και καθιστά απαραίτητη την εξοικείωση των παιδιών με τις εκτιμήσεις από μικρή ηλικία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

E.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 263-283.
- Anobile, G., Stievano, P., & Burr, D. C. (2013). Visual sustained attention and numerosity sensitivity correlate with math achievement in children. *Journal of experimental child psychology*, 116(2), 380-391.
- Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA. Child.
- Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14(1), 125-135.
- Barth, H., Starr, A., & Sullivan, J. (2009). Children's mappings of large number words to numerosities. *Cognitive Development*, 24(3), 248-264.
- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman?. *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253.
- Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 110-118.
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 42(1), 189-201.
- Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education*, 47(5), 747-758.

- Clayton, J. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.
- Cohen, D. J., & Blanc-Goldhammer, D. (2011). Numerical bias in bounded and unbounded number line tasks. *Psychonomic Bulletin and Review*, 18(2), 331–338.
- Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematical Education*, 15(3).
- DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 133, 72-84.
- Dietrich, J. F., Huber, S., Dackermann, T., Moeller, K., & Fischer, U. (2016). Place-value understanding in number line estimation predicts future arithmetic performance. *British Journal of Developmental Psychology*, 34(4), 502-517.
- Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L., & Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical cognition*, 2(2), 113-135.
- Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99(1),1-17.
- Ebersbach, M., Luwel, K., & Verschaffel, L. (2015). The relationship between children's familiarity with numbers and their performance in bounded and unbounded number line estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2-3), 136-154.
- Friso-van den Bos, I., Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E., Xenidou-Dervou, I., Jonkman, L. M., Van der Schoot, M., & Van Lieshout, E. C. (2015). Longitudinal development of number line estimation and mathematics performance in primary school children. *Journal of experimental child psychology*, 134, 12-29.

- Fuchs, L. S., Geary, D., Compton, D. L., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Bryant, J. D. (2010). The contributions of numerosity and domain-general abilities to school readiness. *Child development, 81*(5), 1520-1533.
- Geary D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology, 47*(6), 1539–1552.
- Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition, 115*(3), 394-406.
- Gürbüz, R., & Erdem, E. (2016). Relationship between mental computation and mathematical reasoning. *Cogent Education, 3*(1), 1-18.
- Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities?. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280.
- Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Rapid communication: Understanding the real value of fractions and decimals. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 64*(11), 2088-2098.
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4-23.
- Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research, 68*(4), 413-449.
- Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development, 78*(6), 1723–1743.
- Link, T., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2014). On the relation between the mental number line and arithmetic competencies. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), 1597–1613.
- McIntosh, A. J., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-8.

- Micklo, S. J. (1999). Estimation it's more than a guess. *Childhood Education*, 75(3), 142-145.
- Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological science*, 24(10), 2013-2019.
- Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 31(2), 117-134.
- Peeters, D., Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Evaluating the effect of labeled benchmarks on children's number line estimation performance and strategy use. *Frontiers in Psychology*, 8(JUN), 1–10.
- Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 31(2), 117-134.
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 547-557.
- Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development*, 89(5), 1467-1484.
- Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(1), 499–536.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444.

- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197–212). New York: Psychology Press.
- Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237-250.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education, 3*(3), 143-150.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology, 62*(4), 273-296.
- Slusser, E., & Barth, H. (2017). Intuitive proportion judgment in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks. *Journal of Experimental Child Psychology, 162*, 181-198.
- Slusser, E., Santiago, R., & Barth, H. (2013). Developmental change in numerical estimation. *Journal of Experimental Psychology: General, 142*(1), 193-208.
- Träff, U. (2013). The contribution of general cognitive abilities and number abilities to different aspects of mathematics in children. *Journal of experimental child psychology, 116*(2), 139-156.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355.
- Xing, C., Zax, A., George, E., Taggart, J., Bass, I., & Barth, H. (2021). Numerical estimation strategies are correlated with math ability in school-aged children. *Cognitive Development, 60*, 101089.

Yang, D.-C., Li, M.-N., & Lin, C. I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(4), 789-807.

Zhu, M., Cai, D., & Leung, A. W. (2017). Number line estimation predicts mathematical skills: Difference in grades 2 and 4. *Frontiers in Psychology*, 8, 1576.

E.2 Ελληνική και ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Δεσλή, Δ. (2011). Ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Στα *Πρακτικά του 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2017). Επίδοση και στρατηγικές των παιδιών σε καταστάσεις που αφορούν εκτίμηση μέτρησης εμβαδού. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, & Γ. Ψυχάρης (Επιμ.), *Πρακτικά του 7^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σσ. 773-783). Αθήνα: Ε.Κ.Π.Α. και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2019). Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού. *International Electronic Journal of Mathematical Education*, 1, 28-36.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις. Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

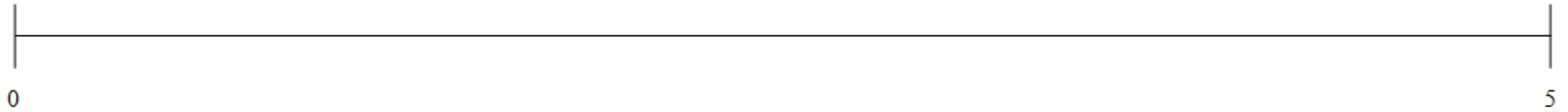
van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για Δημοτικό και Γυμνάσιο: Μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

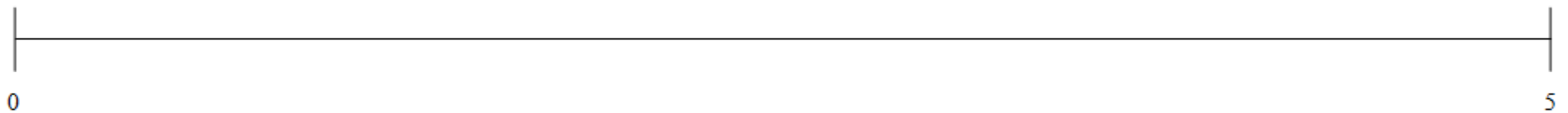
ΕΡΓΟ 1

ΟΜΑΔΑ Α

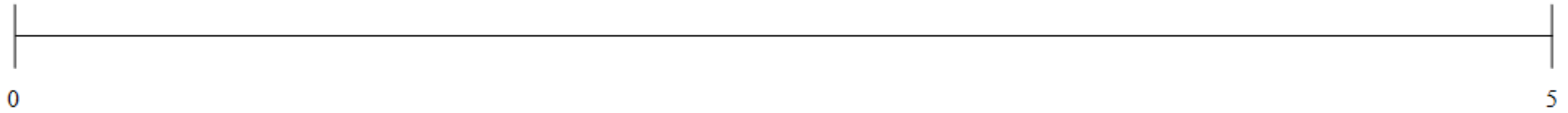
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,07;



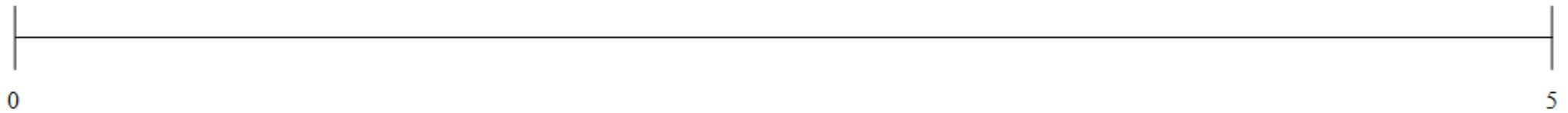
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 1,09;



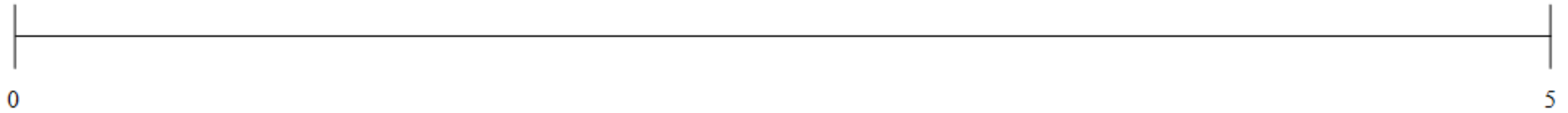
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,3;



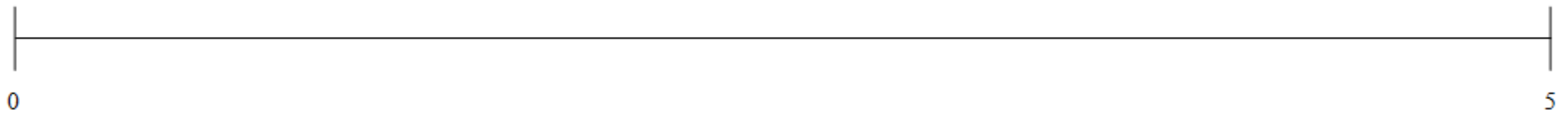
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 2,4;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,68;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 3,2;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,9;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 3,84;



ΕΡΓΟ 2

ΟΜΑΔΑ Α

Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



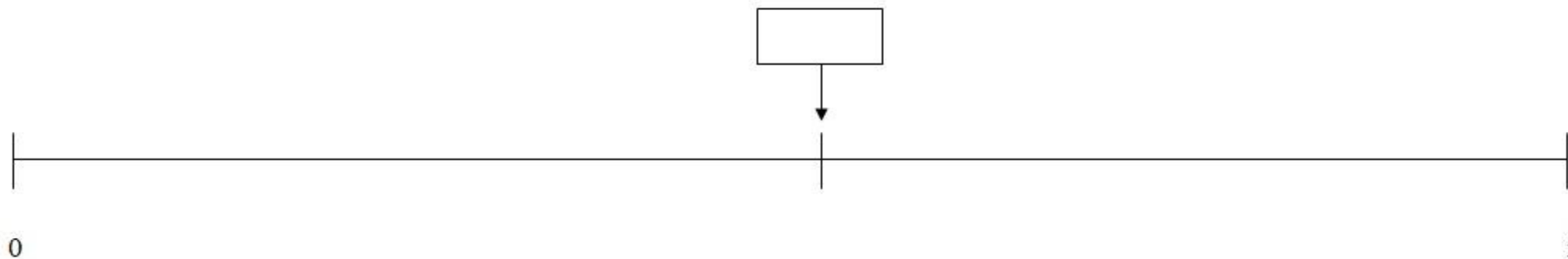
Ποιος αριθμός βρίσκεται σε αυτή την θέση;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



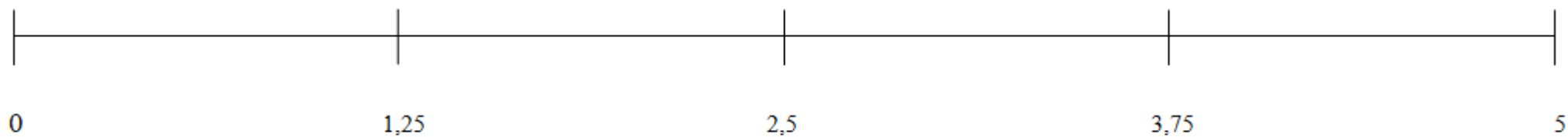
Ποιος αριθμός βρίσκεται σε αυτή τη θέση;



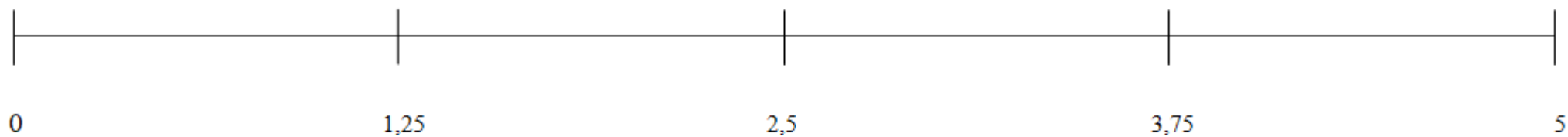
ΕΡΓΟ 1

ΟΜΑΔΑ Β

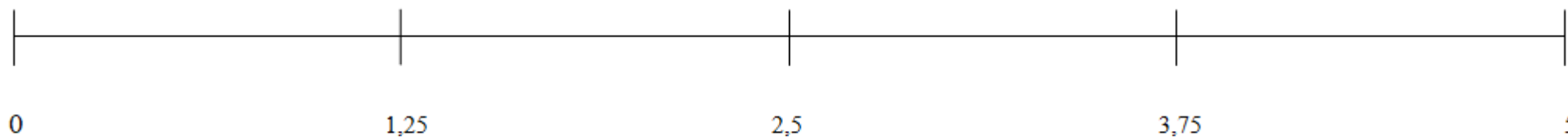
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,07;



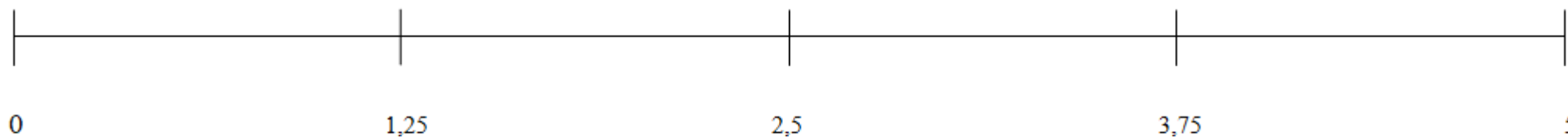
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 1,09;



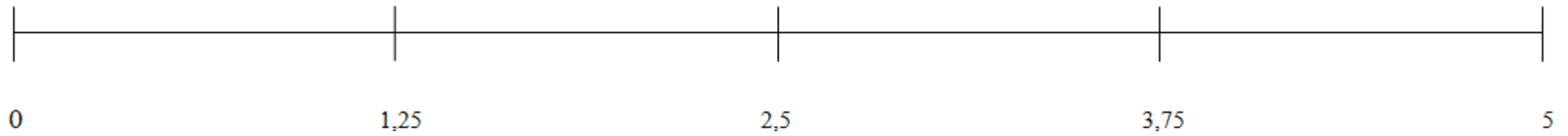
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,3;



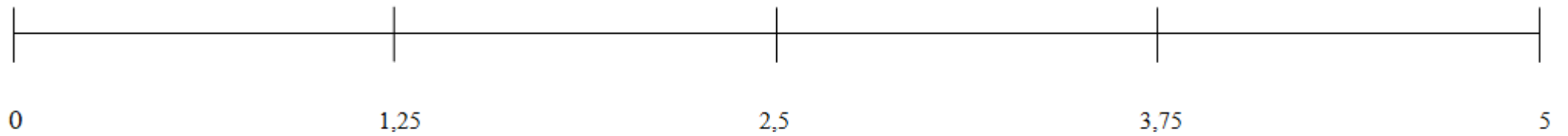
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 2,4;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,68;



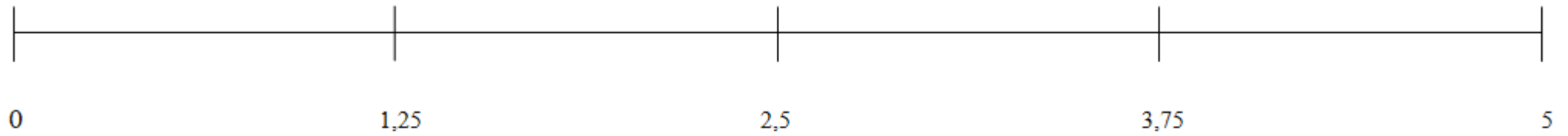
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 3,2;



Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 0,9;



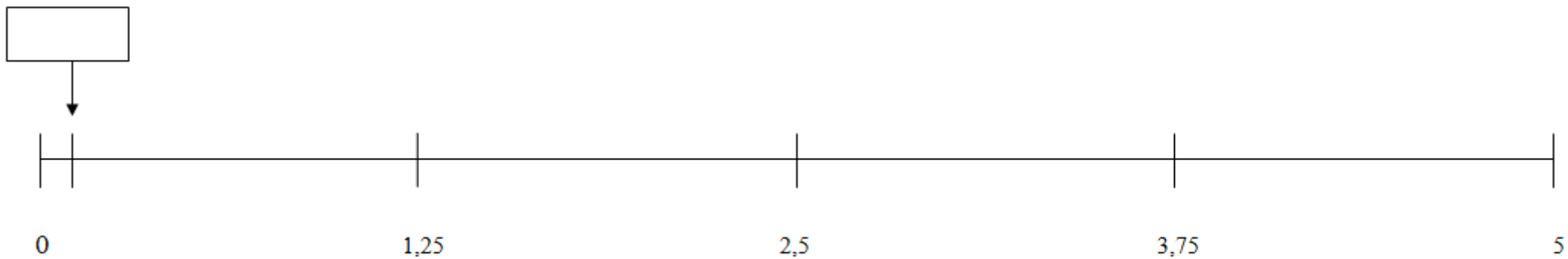
Σε ποια θέση πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται ο αριθμός 3,84;



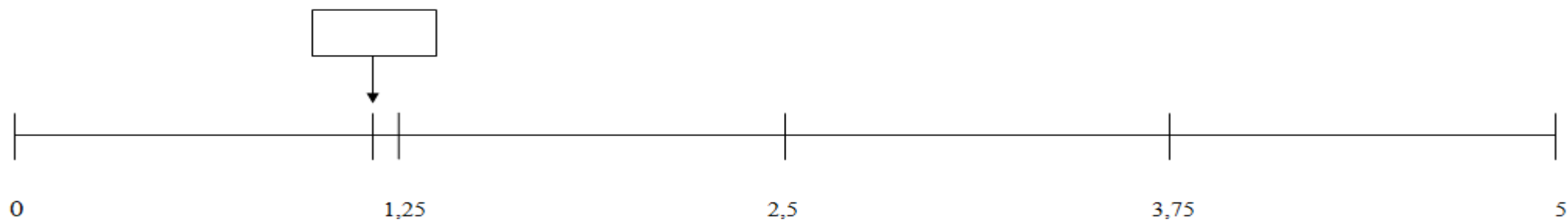
ΕΡΓΟ 2

ΟΜΑΔΑ Β

Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



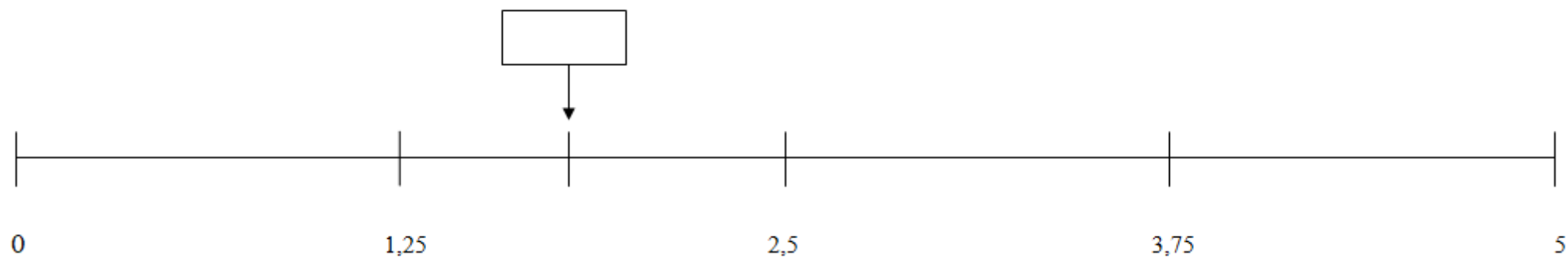
Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



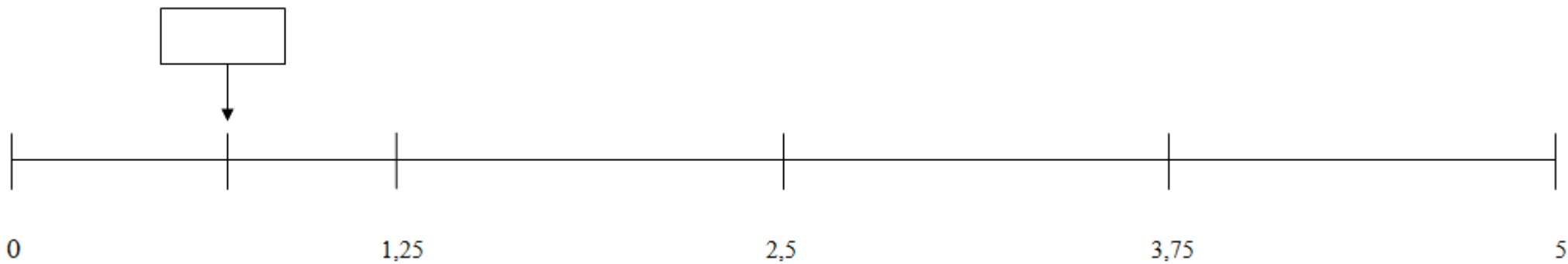
Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



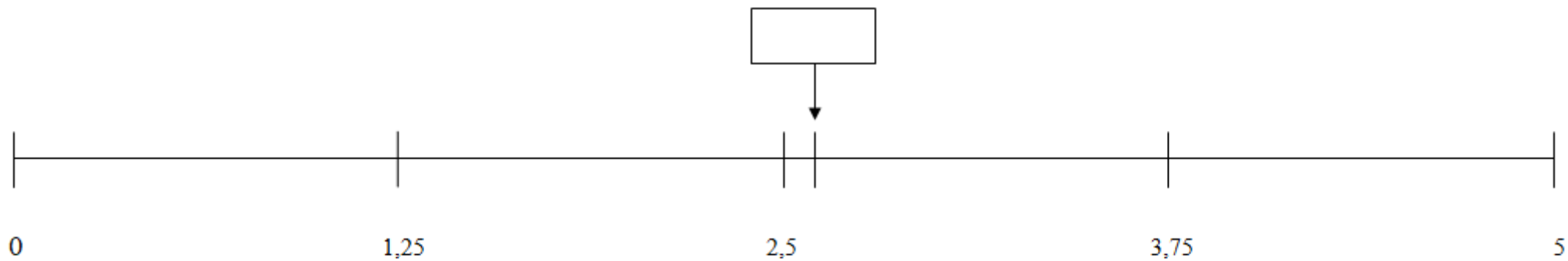
Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



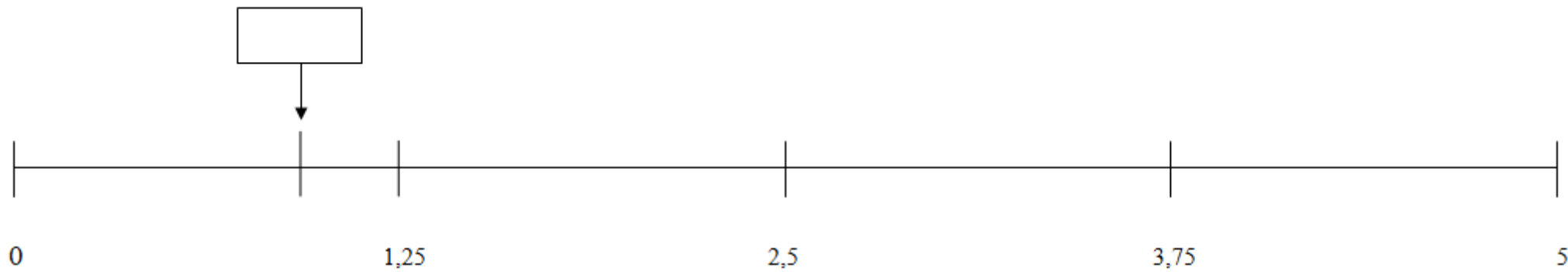
Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



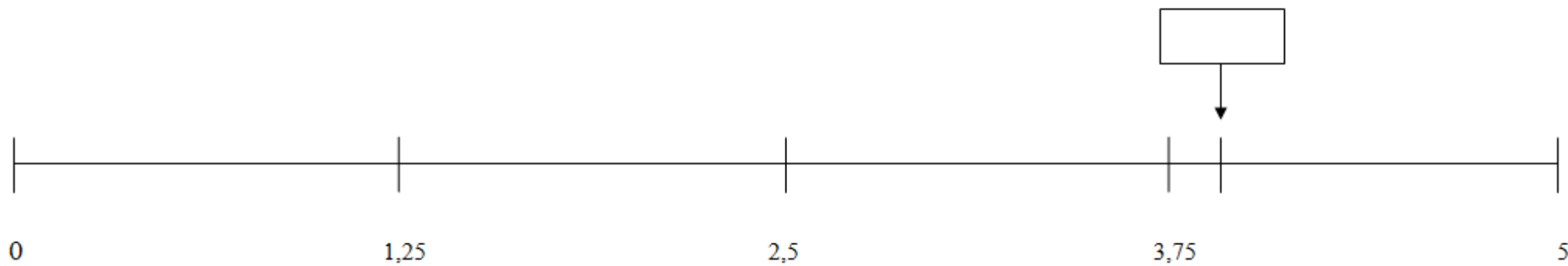
Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση αυτή;



ΕΡΓΟ 3

Φύλο:.....





Ημερομηνία Γέννησης:.....

- Παρακαλώ να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα:

<p>1. Σε μια πόλη υπάρχουν 5 σχολεία με 12 τμήματα σε κάθε σχολείο. Σε κάθε τμήμα υπάρχουν 20 μαθητές. Αν χωρίζαμε ισάριθμα αυτούς τους μαθητές σε 10 σχολεία, πόσοι μαθητές θα υπήρχαν σε κάθε σχολείο; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) 120 β) 100 γ) 150</p>	
<p>2. Ένα δελφίνι πήδηξε 8 μέτρα ψηλά από μια πισίνα που έχει βάθος 3 μέτρα. Πόσα μέτρα ψηλά πήδηξε το δελφίνι από την επιφάνεια του νερού; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) 12μ. β) 5μ. γ) 11μ.</p>	

<p>3. Οι νέοι γενικά οδηγούν γρήγορα. Οι μεγαλύτεροι, αν και οδηγούν πιο αργά, έχουν συχνά έλλειψη προσοχής. Παρατηρήθηκε ότι στα 25 από τα 50 ατυχήματα που έγιναν τον προηγούμενο μήνα σε μια πόλη, οι οδηγοί ήταν νέοι. Πιστεύετε ότι ο οδηγός σε ένα πιθανό 51^ο ατύχημα θα είναι νέος ή άτομο μεγαλύτερης ηλικίας; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) Ο οδηγός θα είναι νέος.</p> <p>β) Ο οδηγός θα είναι άτομο μεγαλύτερης ηλικίας.</p> <p>γ) Οι πιθανότητες να είναι ο οδηγός είτε νέος είτε άτομο μεγαλύτερης ηλικίας είναι ίσες.</p>	
<p>4. Η περιοχή που καλύπτεται από νερό στη γη είναι μεγαλύτερη από αυτήν που καλύπτεται από στεριά. Από στιγμή σε στιγμή, μερικοί μετεωρίτες πρόκειται να πέσουν σε κάποιο σημείο της γης. Νομίζετε πως η πιθανότητα να πέσουν οι μετεωρίτες στη στεριά είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πέσουν στο νερό; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) Η πιθανότητα να πέσουν στη στεριά είναι μεγαλύτερη.</p> <p>β) Η πιθανότητα να πέσουν στο νερό είναι μεγαλύτερη.</p> <p>γ) Οι πιθανότητες να πέσουν είτε στη στεριά είτε στο νερό είναι ίσες.</p>	

<p>5. Ένας αγρότης έχει δύο κήπους σε σχήμα τετραγώνου και θέλει να σπείρει ντομάτες στον μεγαλύτερο κήπο. Για τον ένα κήπο ξέρει πως το εμβαδόν του είναι 36 τετραγωνικά μέτρα και για τον άλλο κήπο ξέρει πως η περίμετρος του είναι 28 μέτρα. Σε ποιον κήπο τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει εμβαδόν 36 τ.μ.</p> <p>β) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει περίμετρο 28 μ.</p> <p>γ) Σε όποιον από τους δύο κήπους και να σπείρει ντομάτες είναι το ίδιο.</p>	
<p>6. Δύο άνθρωποι κοιτούν προς την ίδια κατεύθυνση. Ο ένας κάνει μια στροφή 180 μοιρών και ο άλλος μια στροφή 360 μοιρών. Πού κοιτάζει ο καθένας τώρα; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο.</p> <p>α) Και οι δυο κοιτούν προς την αρχική κατεύθυνση.</p> <p>β) Ο ένας κοιτάζει την αρχική κατεύθυνση και ο άλλος την αντίθετη της αρχικής.</p> <p>γ) Και οι δυο κοιτούν διαφορετικές κατευθύνσεις από την αρχική.</p>	

<p>7. Ποιος αριθμός μπορεί να συμπληρώσει το μοτίβο των αριθμών που δίνονται; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας στο διπλανό πλαίσιο</p> <p>$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ?, 1, 2</p> <p>α) $\frac{1}{5}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $\frac{1}{3}$</p>	
<p>8. Ποιο σχήμα ακολουθεί στο μοτίβο που δίνεται;</p> <p>  </p> <p>α)  β)  γ) </p>	

ΕΡΓΟ 4

- Παρακαλώ να υπολογίσετε τις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{array}{r} 658 \\ + 142 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 254 \\ + 679 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ - 230 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 653 \\ - 482 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 69 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 54 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 432 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 765 & 45 \\ \hline \end{array}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Εύρη σωστών απαντήσεων

Αριθμοί για έργο NP	Εύρη σωστών απαντήσεων
0,07	0-2,85 εκατοστά
1,09	2,95-7,95 εκατοστά
0,3	0-4 εκατοστά
2,4	9,5-14,5 εκατοστά
0,68	0,9-5,9 εκατοστά
3,2	13,5-18,5 εκατοστά
0,9	2-7 εκατοστά
3,84	16,7- 21,7 εκατοστά

Πίνακας 3. Τα εύρη των σωστών απαντήσεων για τις δοκιμασίες του Έργου 1 (NP)

Αριθμοί για έργο PN	Εύρη σωστών απαντήσεων
0,1	0-0,6
1,16	0,66-1,66
0,32	0-0,82
1,8	1,3-2,3
0,7	0,2-1,2
2,6	2,1-3,1
0,93	0,43-1,43
3,91	3,41-4,41

Πίνακας 4. Τα εύρη των σωστών απαντήσεων για τις δοκιμασίες του Έργου 2 (PN)