ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Η αντίστροφη συνάρτηση υπό το πρίσμα του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας»

της Γεμενετζή Ελισάβετ

Α.Ε.Μ. 00964

Επιβλέπων : Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής, Π. Δ. Μ.

Εξεταστές: Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη

2022

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, για την κατανόηση που επέδειξε κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας και την καθοδήγηση που μου προσέφερε· το προσωπικό του ενδιαφέρον και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικές για την ολοκλήρωση της.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τα αλλά δύο μέλη της Επιτροπής, Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, Καθηγητή Μαθηματικών του ΕΚΠΑ και Παπαδόπουλο Ιωάννη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Α.Π.Θ. για τις παρατηρήσεις και τις διορθώσεις τους.

Κατά τη διάρκεια της περιόδου των μεταπτυχιακών μου σπουδών η συμβολή σημαντικών ανθρώπων ήταν σημαντική. Ως εκ τούτου, το λιγότερο που θα μπορούσα να κάνω είναι να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς αυτούς. Οι συνάδελφοι και φίλες, Ελένη Λάππα, Περιστέρα Ζαρίμπα, Αθανασία Ελευθέρογλου και Βιργινία Αρβανίτη, αφιέρωσαν χρόνο, για να μελετήσουν, να κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις και να μεταφράσουν την ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Οι συμφοιτήτριες Θωμόγλου Κωνσταντίνα και Χριστοφόρη Δέσποινα συνεργάστηκαν μαζί μου καθ’ όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος για την εκπόνηση των εργασιών αλλά και στη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας μου πρόσφεραν πολύτιμες συμβουλές.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους/την καθηγητές/τρια του 1^{ου} ΓΕΛ Ευόσμου, Γιώργο Χριστοδουλίδη, Οδυσσέα Σταμέλο και Στέλλα Κατσικίνη για την πειραματική εφαρμογή του διδακτικού εργαλείου, τον Διευθυντή και μαθηματικό, Θεόδωρο Μακάριο, για την υποστήριξη και διευκόλυνση κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης στο σχολείο μας και τον μαθηματικό Γιώργο Γκάτσο για τον έλεγχο του διδακτικού εργαλείου. Ξεχωριστά, οφείλω να ευχαριστήσω τους μαθητές και τις μαθήτριές μου για την πρόθυμη και ανιδιοτελή συμμετοχή τους στη δραστηριότητα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου, Σοφία Γεμενετζή, για την ηθική της υποστήριξή της κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως επειδή στάθηκε πάντα ενθουσιώδης υποστηρικτής στην πραγματοποίηση των στόχων και ονείρων μου.

στη θεία Κούλα

Περιεχόμενα

Πίνακας εικόνων

Πίνακας Σχημάτων

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία προσπαθεί να πραγματοποιήσει μια διδακτική προσέγγιση της αντίστροφης συνάρτησης σε δεκαεπτά μαθητές/μαθήτριες του προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής με τη βοήθεια του μοντέλου Μαθηματικού Χώρου Εργασίας. Η αξία της συγκεκριμένης μελέτης είναι διττή, από την μια η χρήση ενός διδακτικού μοντέλου σε ένα μαθηματικό αντικείμενο που δεν έχει μελετηθεί μέχρι τώρα στην Ελλάδα και από την άλλη η διερεύνηση των δυσκολίων της έννοιας της συνάρτησης μέσω της αντίστροφης συνάρτησης. Πριν από την παρέμβαση διερευνήθηκε μέσω ενός προελέγχου (pre- test) ο προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών/τριών. Ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση που περιελάβανε τρία φύλλα εργασίας και κατά τη διάρκειά της επιχειρήθηκε η διαμόρφωση και ο εμπλουτισμός του. Μετά την ολοκλήρωσή της ελέγχθηκε πάλι ο προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών/τριών μέσω ενός μεταελέγχου (post- test). Τα αποτελέσματα του μεταελέγχου μάς έδειξαν πως υπήρξε σαφής βελτίωση στην ικανότητα των μαθητών/τριών να αναγνωρίζουν αν μία συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίζουν την αντίστροφή της, όταν η αρχική συνάρτηση δίνεται μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεών της και να μελετούν τις ιδιότητές της. Και στα δύο τεστ οι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν στην επίλυση προβλημάτων. Οπωσδήποτε το δείγμα μας είναι περιορισμένο, για να μπορέσουμε να προβούμε σε γενικεύσεις, ωστόσο, φαίνεται ότι η χρήση του ΜΧΕ για την κατασκευή διδακτικών παρεμβάσεων συμβάλλει στην πληρέστερη κατανόηση σύνθετων εννοιών. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι το μοντέλο είναι χρήσιμο για τη μελέτη των πιθανών χασμάτων ανάμεσα στον χώρο αναφοράς, τον κατάλληλο χώρο εργασίας και τους προσωπικούς χώρους διδασκόντων και διδασκομένων· οδηγεί δυνητικά σε χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιολόγηση επιλογών και ενεργειών που επηρεάζουν το διδακτικό έργο.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικός Χώρος Εργασίας, αντίστροφη συνάρτηση, σημειωτική γένεση, εργαλειακή γένεση, λεκτική γένεση.

Abstract

This dissertation attempts to develop a teaching approach of inverse function to seventeen students of Economics and Informatics with the help of the Mathematical Working Space model. The value of this study is twofold, on the one hand the use of a teaching model in a mathematical subject that has not been studied so far in Greece and on the other hand the investigation of the difficulties of the concept of function through inverse function. Prior to the intervention, the personal MWS of the students was examined through a pre-test. This was followed by the teaching intervention that included three worksheets and, during it, it was attempted to formulate and enrich it. After its completion, the personal MWS of the students was checked again through a post-test. The post-test results showed us that there was a clear improvement in students' ability to recognize if a function is inverted and to define its inverse function when the initial function is given through its different representations and to study its properties. In both tests, students had difficulty in solving the problems. Of course, our sample is limited to make generalizations, however, it seems that the use of MWS for the development of teaching interventions contributes to a more complete understanding of complex concepts Finally, the model was found to be useful in studying the possible gaps between the reference MWS, the suitable MWS and the personal MWS of both teachers and students; it potentially leads to useful conclusions for the evaluation of choices and actions that affect the teaching work.

Keywords: Mathematical Working Space, inverse function, semiotic genese, instrumental genese, discursive genese.

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια διδακτική προσέγγιση της αντίστροφης συνάρτησης σε μαθητές/τριες της Γ ‘Λυκείου. Τα θέματα των δυο τεστ και οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας στηρίχθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο του ΜΧΕ της ανάλυσης, τις δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης, το πρόγραμμα σπουδών και τα θέματα των Πανελλήνιων εξετάσεων.

Αφορμή για την μελέτη του συγκεκριμένου θέματος αποτέλεσε το Θέμα Β των Πανελλήνιων εξετάσεων του 2020 και οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών/τριών. Επιπλέον, ένας άλλος παράγοντας που συνηγόρησε στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος ήταν η έλλειψη ερευνών σχετικά με την αντίστροφη συνάρτηση και το μοντέλου του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας της Ανάλυσης στην χώρα μας.

Το πρώτο κεφάλαιο ξεκινά με την παρουσίαση της θεωρίας του ΜΧΕ, της δομής του μοντέλου που αποτελείται από το επιστημολογικό και γνωστικό επίπεδο, τις τρεις γένεσεις του· σημειωτική, εργαλειακή και λεκτική γένεση, τις αλληλεπιδράσεις αυτών και τέλος των παράλληλων Μαθηματικών Χώρων· του μαθηματικού χώρου αναφοράς, του κατάλληλου μαθηματικού χώρου και του προσωπικού χώρου εργασίας . Αντικείμενο μελέτης του μοντέλου του ΜΧΕ αποτελεί το ίδιο το μαθηματικό έργο και πώς αυτό παράγεται μέσα στη μαθηματική τάξη. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας της Ανάλυσης και τα παραδείγματα του· η αριθμητική- γεωμετρική ανάλυση ή Ανάλυση 1 (GA) , η υπολογιστική ανάλυση ή Ανάλυση 2 (CA) και η πραγματική ανάλυση ή Ανάλυση 3 (RA).

Το επόμενο κεφάλαιο αναφέρεται στις δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Αρχικά, παρουσιάζονται οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της συνάρτησης που οφείλεται στην γνωστική, επιστημολογική και αναπαραστατική πολυμορφία της. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Οι κυριότερες είναι η εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, οι απεικονιστικές τεχνικές, οι μεθοδεύσεις που ακολουθούν οι μαθητές/τριες, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αλλά και οι διαφορετικές διδακτικές πρακτικές. Τέλος παρουσιάστηκε το Θέμα Β των Πανελλήνιων του 2020 και τα στατιστικά στοιχεία από το 53ο και 66ο βαθμολογικό κέντρο Δυτικής Θεσσαλονίκης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο Μαθηματικός Χώρος Αναφοράς της αντίστροφης συνάρτησης. Μετά από μια σύντομη ιστορική αναδρομή των προγραμμάτων σπουδών, δίνεται μια πλήρης αναφορά για την αντίστροφη συνάρτηση στο Α.Π.Σ.. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η αντίστροφη συνάρτηση στα σχολικά εγχειρίδια και γίνεται η ανάλυση της συνάρτησης αυτής στο σχολικό εγχειρίδιο της Α ‘Δέσμης και το σημερινό. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την σύγκριση των δυο σχολικών εγχειρίδιων και την ανάδειξη των ελλείψεων και παραλείψεων τους.

Το τέταρτο κεφάλαιο ασχολείται με την αντίστροφη συνάρτηση όπως αυτή έχει ζητηθεί στο διάφορα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το σχολικό εγχειρίδιο δεν καλύπτει το εύρος των θεμάτων των εξετάσεων. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται μερικές απαντήσεις μαθητών/τριών στο Θέμα Β2 του 2020 από γραπτά που ερευνήτρια διόρθωσε και αναδεικνύουν τις δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας. Η χρησιμότητα της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι η παρούσα εργασία ασχολείται με μια έννοια η οποία δεν έχει μελετηθεί επαρκώς στην ελληνική βιβλιογραφία αλλά και στο ότι το μοντέλου του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας δεν έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων. Στο ίδιο κεφάλαιο διατυπώνεται ο σκοπός της εργασίας που δεν είναι άλλος από την χρήση του μοντέλου τόσο στην κατασκευή των δραστηριοτήτων όσο και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων σύμφωνα με αυτό και επιπροσθέτως η διερεύνηση των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες στην αντίστροφη συνάρτηση. Παράλληλα διατυπώνονται τα ερευνητικά ερώτημα, τα οποία αναφέρονται στο προσωπικό χώρο εργασίας των μαθητών/τριών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την αναλυτική παρουσίαση του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης και του προσωπικού ΜΧΕ της ερευνήτριας, η οποία σχεδίασε τον κατάλληλο ΜΧΕ, λαμβάνοντας υπόψιν τον μαθηματικό χώρο αναφοράς αλλά και την συγκεκριμένη τάξη στην οποία υλοποιήθηκε η έρευνα. Χρησιμοποιούνται δυο έλεγχοι (pre-test, post-test) για τη διερεύνηση των προσωπικών χώρων εργασίας των μαθητών/τριών πριν και μετά την παρέμβαση και τρια φύλλα εργασίας για την παρουσίαση της αντίστροφης συνάρτησης και των ιδιοτήτων της.

Το έκτο κεφάλαιο παρουσιάζει τα αποτελέσματα των δυο τεστ καθώς και της διδακτικής παρέμβασης και την ανάλυση τους υπό το πρίσμα του ΜΧΕ. Η παρουσίαση ξεκινά με τα αποτελέσματα κάθε θέματος του pre-test και την ανάλυση τους σύμφωνα με το μοντέλο. Δίνονται οι απαντήσεις ορισμένων μαθητών/τριών οι οποίες αναδεικνύουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών/τριών όπως αυτός έχει αναπτυχθεί από τα φροντιστηριακά μαθήματα. Στην συνέχεια γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κατασκευής του κατάλληλου ΜΧΕ της ανάλυσης, όπως αυτά καταγράφηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και δίνονται τόσο απαντήσεις κάποιων μαθητών/τριών όσο και οι γραφικές παραστάσεις που χρησιμοποίησε η ερευνήτρια στην πορεία της παρέμβασης. Τέλος ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων του post-test και η ανάλυση τους μέσα από τις λύσεις των μαθητών/τριών που παρουσιάζονται.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα κάθε θέματος των δυο τεστ και απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο όγδοο κεφάλαιο αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας και στο δέκατο κεφάλαιο οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας υπάρχει η βιβλιογραφία και δυο παραρτήματα. Το Παράρτημα Α’ που περιλαμβάνει τα τρια φύλλα εργασίας, με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές/τριες κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και το Παράρτημα Β’ που περιλαμβάνει τα δυο τεστ με τα οποία διερευνήθηκε ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών πριν και μετα τη διδακτική παρέμβαση.

1. Μαθηματικός Χώρος Εργασίας

1.1 Περιγραφή- Ορισμός Μαθηματικού Χώρου Εργασίας

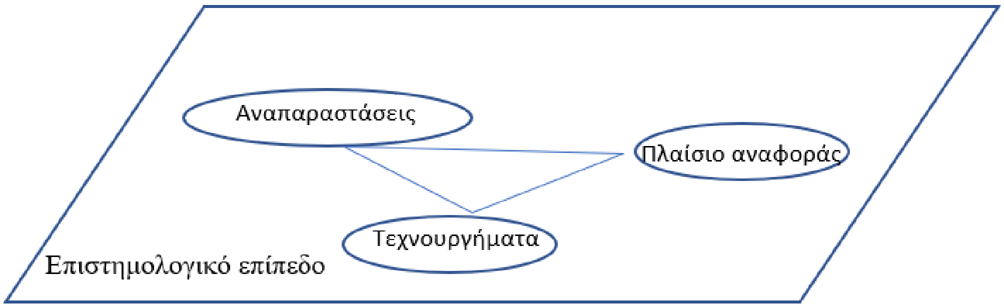
Ως εξέλιξη του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας (ΓΧΕ) που εισήχθη από τους Houdement και Kuzniak το 2006 εμφανίζεται στη γενικότερη μορφή του ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (ΜΧΕ), με στόχο την ακριβή περιγραφή και ανάλυση μιας μαθηματικής δραστηριότητας σε όλες της τις διαστάσεις, έτσι ώστε η μελέτη της πορείας κατασκευής του νοήματος να επιτυγχάνεται γεφυρώνοντας το κενό μεταξύ επιστημολογικών και γνωστικών στοιχείων που συνιστούν τη μαθηματική γνώση (Kuzniak et al., 2016β). Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας αποτελεί ένα περιβάλλον το οποίο έχει οργανωθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να καθίσταται εφικτή από τον χρήστη η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος. Επομένως, ενώ μελετήθηκε αρχικά για τα γεωμετρικά προβλήματα, μπορεί η χρήση του να γενικευτεί και σε αλγεβρικά, σε ζητήματα στατιστικής, ανάλυσης και άλλων. Είναι το περιβάλλον στο οποίο αποτυπώνονται τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμου και προβληματικής κατάστασης (Delgadillo, 2016).

Η μάθηση απαιτεί στοιχεία επιστημολογικής και γνωστικής φύσεως τα οποία αλληλοεπιδρούν και επικοινωνούν για την επίτευξη του στόχου (Delgadillo & Vivier, 2016). Κατά την Artique (2016), ένα μοντέλο ΜΧΕ περιέχει στοιχεία θεωρητικών προσεγγίσεων των τριών πυλώνων της γαλλικής σχολής της διδακτικής των Μαθηματικών: της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων, των εννοιολογικών πεδίων και του διδακτικού μετασχηματισμού. Ο/Η μαθητής/τρια ως υποκείμενο σε ένα μοντέλο ΜΧΕ δρα πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο με τη χρήση των εργαλείων- μέσων, ώστε να πραγματώσει το κίνητρο της δραστηριότητας (Engeström, 2001). Για τη σύνδεση επιστημολογικών και γνωστικών στοιχείων, η οποία επιτυγχάνεται από τον/την μαθητή/τρια χρησιμοποιώντας μαθηματικά αντικείμενα και εργαλεία, απαιτείται επιπλέον η ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, η οποία όμως εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον ανθρώπινο παράγοντα. Κατά τη διαδικασία της μάθησης, λοιπόν, ένα μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο και αντίστροφα ένα μαθηματικό εργαλείο ως αντικείμενο σε μία συγκεκριμένη στιγμή και σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Kuzniak et al., 2016α).

1.2 Δομή του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας

1.2.1 Επιστημολογικό και Γνωστικό Επίπεδο

Σε κάθε ΜΧΕ διακρίνονται δυο επίπεδα, το επιστημολογικό και το γνωστικό. Το επιστημολογικό επίπεδο βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με το περιεχόμενο του μαθηματικού αντικειμένου που μελετάται (Kuzniak & Richard, 2014). Τα τρία συστατικά που αποτελούν το επιστημολογικό επίπεδο είναι ένα σύνολο αντικειμένων (representamen) που αποτελεί τον χώρο, τα σύμβολα και τα σχήματα που πιθανώς να λαμβάνουν και υλική υπόσταση, ένα σύνολο από τεχνουργήματα (artefacts) που αποτελείται από όργανα, εργαλεία, το λογισμικό κ.ά. και ένα σύστημα αναφοράς (referential) που περιλαμβάνει ορισμούς, θεωρήματα, ιδιότητες κ.α..



Σχήμα 1:Επιστημολογικό επίπεδο

Το σύνολο των αντικειμένων αποτελεί το πλαίσιο των αναπαραστάσεων, σημείων ή συμβόλων και περιέχει χειροπιαστά και συγκεκριμένα στοιχεία, όπως γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα ή μοντέλα και φωτογραφίες στην περίπτωση προβλημάτων μοντελοποίησης (Kuzniak et al., 2016β).

Το πλαίσιο των τεχνουργημάτων περιλαμβάνει σύμφωνα με τους Beguin και Rabardel (2000) οτιδήποτε έχει υποστεί επεξεργασία και μετασχηματισμό ανθρώπινης προέλευσης. Κατά τον Rabardel (1995) τα τεχνουργήματα δεν περιορίζονται μόνο σε υλικά αντικείμενα αλλά περιλαμβάνουν και συμβολικά συστήματα. Σύμφωνα με τους Kuzniak et al (2016) η έννοια του τεχνουργήματος σε ένα μοντέλο ΜΧΕ έχει περιορισμένη εμβέλεια, ώστε να αποφεύγεται οποιαδήποτε σύγχυση με τα υπόλοιπα συστατικά του επιστημολογικού επιπέδου. Αποτέλεσμα αυτού είναι να θεωρούνται ως μοναδικά συμβολικά συστατικά οι αλγόριθμοι, οι οποίοι είτε δίνονται με την υλική τους διάσταση (λογαριθμικοί, τριγωνομετρικοί πίνακες κ.λπ.)

είτε δίνονται ως τεχνικές κατασκευών και υπολογισμών, όπως για παράδειγμα στην επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων, το σχήμα Horner ως τεχνική παραγοντοποίησης.

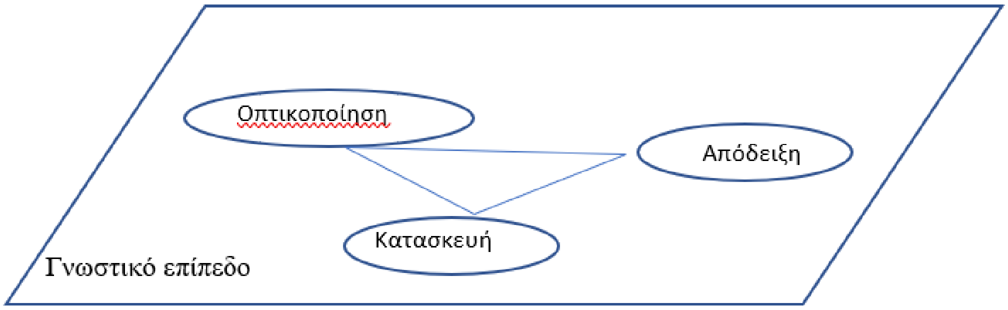
Το σύστημα ή αλλιώς πλαίσιο αναφοράς είναι και το θεωρητικό πλαίσιο του ΜΧΕ. Αποτελείται από ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα και αξιώματα που αναφέρονται στην υπό διδασκαλία γνώση και έχουν ως στόχο την ανάπτυξη της αποδεικτικής και λεκτικής πορείας που επιτυγχάνει το υποκείμενο, ώστε να οδηγηθεί στην απόδειξη και τεκμηρίωση του μαθηματικού αντικειμένου.

Το γνωστικό επίπεδο συνδέεται με τον τρόπο σκέψης του ατόμου που εκτελεί τη μαθηματική εργασία (Kuzniak & Richard, 2014). Οι διαδικασίες που περιλαμβάνονται στο γνωστικό επίπεδο είναι αυτές της οπτικοποίησης, της κατασκευής και της απόδειξης. Είναι το επίπεδο που έχει ως κύριο συστατικό την ανθρώπινη δραστηριότητα, εφόσον ο ανθρώπινος παράγοντας είναι αυτός που με την επέμβαση και τη συμμετοχή του στη δραστηριότητα κάνει τις κατάλληλες γνωστικές συνδέσεις. Για τον λόγο αυτό, το γνωστικό αποτελεί απαραίτητο επίπεδο σε ένα μοντέλο ΜΧΕ.

Αναφορικά με την οπτικοποίηση (visualization), είναι αυτή μέσω της οποίας δομείται η πληροφορία και δίνεται με διαγράμματα ή σύμβολα. Η διαδικασία αυτή έγκειται στην αποκωδικοποίηση συμβόλων και στην κατασκευή εσωτερικών αναπαραστάσεων που αφορούν στα αντικείμενα και στις σχέσεις μεταξύ τους. Τα παραπάνω σύμβολα δεν είναι μόνο οπτικά αλλά μπορεί να προκύπτουν και από ακουστικές εικόνες σε λεκτικά πλαίσια. Σύμφωνα με τους Kuzniak et al. (2016β), πρόκειται για μια «πλήρη οπτικοποίηση» (comprehensive visualization) και όχι για μια απλή αντίληψη αντικειμένων.

Το υποκείμενο χρησιμοποιώντας τεχνουργήματα του επιστημολογικού επιπέδου, οδηγείται στη δεύτερη διαδικασία του γνωστικού επιπέδου που είναι η κατασκευή. Σε διαδικασίες, δηλαδή παρατηρήσεις, εξερευνήσεις και πειραματισμούς που καθορίζονται από την επέμβαση του ατόμου στα τεχνουργήματα (Kuzniak et al., 2016β)· επομένως, δεν αφορά μόνο στην κατασκευή χειροπιαστών αντικειμένων.

Με τη χρήση, τέλος, του πλαισίου αναφοράς οδηγούμαστε στην ανάπτυξη μιας μη τυπικής επιχειρηματολογίας ή και στην κατασκευή μιας τυπικής απόδειξης (Kuzniak & Richard, 2014). Η απόδειξη, επομένως, αποτελεί στόχο μιας διαδικασίας παραγωγικών επαληθεύσεων οι οποίες μπορούν να αποτελούν ορισμούς, υποθέσεις ή εικασίες.



Σχήμα 2:Γνωστικό επίπεδο

1.2.2 Γενέσεις του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας

Η περιγραφή μιας μαθηματικής δραστηριότητας αναλύοντάς τη με την βοήθεια του μοντέλου του ΜΧΕ απαιτεί τη διασύνδεση του επιστημολογικού και του γνωστικού επιπέδου. Η δημιουργία της γνωσιακής μαθηματικής σκέψης επιτυγχάνεται μέσω της γεφύρωσης των δυο παραπάνω επίπεδων σε αντιστοιχία με διαφορετικές αλλά συνυφασμένες γενέσεις (Kuzniak et al., 2016α). Πρόκειται για συνδέσεις που καθιστούν εφικτή την αμφίδρομη επίδραση των δυο επιπέδων και φανερώνει τη δυναμικότητα του μοντέλου. Οι γενέσεις ενός ΜΧΕ είναι η σημειωτική (semiotic), εργαλειακή (instrumental) και λεκτική (discursive).

Η σημειωτική γένεση γεφυρώνει αμφίδρομα το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου με αυτό της οπτικοποίησης στο γνωστικό επίπεδο. Είναι η διαδικασία που καταγράφει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ της συντακτικής και της σημασιολογικής προοπτικής του υπό διδασκαλία μαθηματικού αντικειμένου. Σύμφωνα με τους Kuzniak και Richard (2014), διασφαλίζει τη σχέση μεταξύ μαθηματικής σύνταξης, σημασιολογίας, λειτουργίας, δομής και χρησιμοποιούμενων συμβόλων. Η πορεία από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων προς την οπτικοποίηση είναι μια διαδικασία αποκωδικοποίησης των συμβόλων βασιζόμενη στην αντίληψη του υποκειμένου, ενώ η αντίστροφη πορεία είναι μια διαδικασία κωδικοποίησης που προκαλείται, όταν ένα σύμβολο δημιουργείται ή συγκεκριμενοποιείται έχοντας ως βάση μια εννοιολογική δομή. Η σημειωτική γένεση διαιρείται σε δυο επίπεδα, το εικονικό και το σχηματικό (Kuzniak et al., 2016), δηλαδή, στην αντιληπτική αναγνώριση των σχημάτων και στον τρόπο ερμηνείας των χρησιμοποιούμενων συμβόλων αντίστοιχα.

Η εργαλειακή γένεση συνδέει το πλαίσιο των τεχνουργημάτων του επιστημολογικού επιπέδου με αυτό της διαδικασίας της κατασκευής στο γνωστικό επίπεδο. Πρόκειται, επίσης, για μια αμφίδρομη πορεία μέσω της οποίας τα τεχνουργήματα μετατρέπονται σε γνωστικά όργανα που οδηγούν στην ολοκλήρωση της μαθηματικής δραστηριότητας. Και αντιστρόφως, το υποκείμενο έχοντας στο μυαλό του το σχήμα που πρέπει να κατασκευαστεί εμπλέκει την επιλογή των κατάλληλων τεχνουργημάτων. Σύμφωνα με την Artique (2002), η πορεία από το επιστημολογικό επίπεδο στο γνωστικό αποτελεί μια διαδικασία εργαλειοποίησης (instrumentation) στην οποία ο χρήστης αναπτύσσει σχήματα που αποκτούν τη μορφή τεχνικών κατάλληλων για την επίτευξη του στόχου στο συγκεκριμένο μαθηματικό έργο. Κατά την αντίστροφη πορεία (instrumentalization) ο χρήστης επιλέγει κατάλληλα τα εργαλεία και κάνει πιθανές προσαρμογές στις απαιτούμενες ενέργειες.

Τέλος, η λεκτική γένεση αποτελεί γέφυρα μεταξύ του θεωρητικού πλαισίου αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου και της διαδικασίας της απόδειξης του γνωστικού επιπέδου. Οι ορισμοί, οι ιδιότητες, τα θεωρήματα και τα αξιώματα που περιέχονται στο πλαίσιο αναφοράς αποτελούν τα απαραίτητα εφόδια για την ανάπτυξη του κατάλληλου μαθηματικού συλλογισμού και την υλοποίηση μιας έγκυρης λεκτικής απόδειξης. Αντίστροφα, από το γνωστικό προς το επιστημολογικό επίπεδο, η απόδειξη επικυρώνεται με στοιχεία του πλαισίου αναφοράς με τα οποία ο χρήστης ταυτοποιεί και αναγνωρίζει ιδιότητες ή ορισμούς που υπάρχουν στο θεωρητικό πλαίσιο αλλά δεν είναι εμφανείς (Kuzniak et al., 2016β).

1.2.3 Τα κατακόρυφα επίπεδα του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας

Ο διαχωρισμός του είδους των γενέσεων δεν είναι πάντα εύκολα επιτεύξιμος. Η διερεύνηση του όμως, μπορεί να μελετηθεί, αν επικεντρωθεί στα τρία κατακόρυφα επίπεδα, δηλαδή αυτά της σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης, της εργαλειακής- λεκτικής γένεσης και της σημειωτικής- λεκτικής γένεσης. Τα επίπεδα αυτά βοηθάνε στην κατανόηση της περίπλοκης μαθησιακής διαδικασίας και περιγράφουν τις αλληλεπιδράσεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων (Coutat & Richard, 2011).

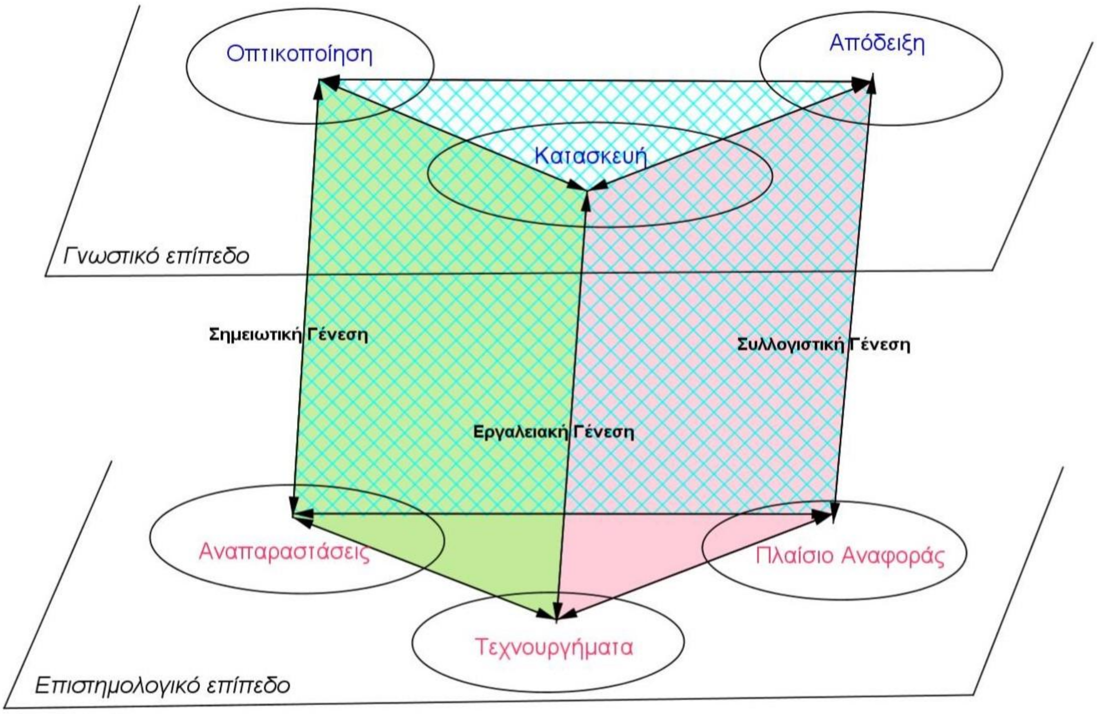
Στο πρώτο κατακόρυφο επίπεδο της σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης αναπτύσσεται η ικανότητα ανακάλυψης της λύσης ενός μαθηματικού έργου. Αναφέρεται ως πλαίσιο εξερεύνησης όπου με τον κατάλληλο μετασχηματισμό των τεχνουργημάτων σε γνωστικά όργανα ενθαρρύνεται η λειτουργία σημειωτικών συστημάτων, στα οποία ο χρήστης στηρίζεται στη διαδικασία ανάπτυξης νοήματος (Mariotti, 2006). Δίνεται, λοιπόν, έμφαση στην ταύτιση και διερεύνηση των αντικειμένων. Για παράδειγμα, ψηφιακά εργαλεία μπορούν να επιτρέψουν την εξερεύνηση γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με στόχο την κατανόηση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας.

Στο δεύτερο κατακόρυφο επίπεδο της εργαλειακής- λεκτικής γένεσης περιγράφεται το πλαίσιο της αιτιολόγησης και του συλλογισμού, οι διαδικασίες δηλαδή εξερεύνησης και πειραματισμού που γίνονται βάσει συγκεκριμένων θεωρητικών προτάσεων. Αναπτύσσεται δηλαδή ο μαθηματικός συλλογισμός βασιζόμενος στην επικύρωση των ανακαλύψεων. Η δραστηριότητα θεωρείται ότι επικεντρώνεται στην εργαλειακή γένεση, όταν με δεδομένα που συλλέγονται με τη χρήση εργαλείων οδηγείται ο χρήστης σε πειραματική τεκμηρίωση. Στον αντίποδα της παραπάνω διαδικασίας η δραστηριότητα επικεντρώνεται στη λεκτική διάσταση, όταν επαληθεύεται με τα κατάλληλα εργαλεία. Στην πρώτη περίπτωση ενυπάρχει επαγωγικός συλλογισμός ενώ στη δεύτερη παρατηρείται ένας γνήσια παραγωγικός συλλογισμός.

Τέλος, στο τρίτο κατακόρυφο επίπεδο της σημειωτικής- λεκτικής γένεσης συναντάται η πιο κρίσιμη διαδικασία της μαθηματικής δραστηριότητας, η οποία δεν επαναπαύεται σε μια απλή οπτική αντίληψη των αντικειμένων αλλά οδηγείται στη θεωρητική επικύρωση των αποτελεσμάτων μέσω της απόδειξης. Επικεντρώνεται στο επίπεδο της σημειωτικής γένεσης, όταν για παράδειγμα ο χρήστης αναπτύσσει αποδεικτική σκέψη μέσω μετασχηματισμών και ανακατανομών, ενώ αντίθετα επικεντρώνεται στη λεκτική γένεση, όταν αναπτύσσει μια τυπική γραπτή απόδειξη βασισμένη σε σαφή θεωρήματα και ιδιότητες.

1.2.4 Αναπαράσταση του μοντέλου του ΜΧΕ

Η αναπαράσταση του ΜΧΕ δίνεται με ένα τριγωνικό πρίσμα, αποτελούμενο από δυο οριζόντια επίπεδα (βάσεις του πρίσματος) και τρία κάθετα επίπεδα (παράπλευρες επιφάνειες του πρίσματος). Στην κάτω βάση παριστάνεται το πρώτο οριζόντιο επίπεδο που αφορά το επιστημολογικό επίπεδο ενώ στην άνω βάση το δεύτερο οριζόντιο επίπεδο, αυτό του γνωστικού επιπέδου του αντικειμένου. Οι τρεις κορυφές της κάτω βάσης αντιστοιχούν στα συστατικά του επιστημολογικού επιπέδου (αναπαραστάσεις, τεχνουργήματα, πλαίσιο αναφοράς) ενώ οι κορυφές της άνω βάσης αντιστοιχούν στις τρεις διαδικασίες του γνωστικού επιπέδου (οπτικοποίηση, κατασκευή, απόδειξη). Οι αντίστοιχες κορυφές των βάσεων συνδέονται μέσω των κατακόρυφων ακμών του πρίσματος και αντιστοιχούν στις τρεις γενέσεις (σημειωτική (semiotic), εργαλειακή (instrumental) και λεκτική (discursive)). Τα τρία κατακόρυφα επίπεδα της παράπλευρης επιφάνειας σχετίζονται με τις διαφορετικές εκφάνσεις του μαθηματικού έργου, δηλαδή την εξερεύνηση- ανακάλυψη, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, την παρουσίαση και την επικοινωνία των θεμάτων. Τα επίπεδα αυτά είναι της σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης, της εργαλειακής- λεκτικής γένεσης και της σημειωτικής- λεκτικής γένεσης αντίστοιχα. Όλα τα παραπάνω περιγράφονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 3: Διάγραμμα του μοντέλου (Delgadillo&Vivier,2016)

1.3. Παράλληλοι Μαθηματικοί Χώροι Εργασίας

Για την ολοκλήρωση μιας μαθηματικής δραστηριότητας στο σχολικό περιβάλλον υπάρχουν παράγοντες που την οριοθετούν όπως το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί που σχεδιάζουν τη δραστηριότητα αλλά και οι γνώσεις και οι προσωπικές ικανότητες του/της εκάστοτε μαθητή/τριας που εμπλέκεται σε αυτήν. Για τον λόγο αυτό καθίσταται αναγκαία η διάκριση τριών παράλληλων μαθηματικών χώρων· του μαθηματικού χώρου αναφοράς, του κατάλληλου μαθηματικού χώρου εργασίας και του προσωπικού χώρου εργασίας.

Ο μαθηματικός χώρος αναφοράς ορίζεται γενικά από τις συνθήκες μέσα στις οποίες λειτουργεί. Η μαθηματική κοινότητα καθορίζει το είδος των δραστηριοτήτων που δίνονται για επεξεργασία βασιζόμενο σε ένα σύνολο αξίων, τεχνικών και μεθόδων κοινά αποδεκτών που συμβαδίζουν με τις αρχές και τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η επιλογή δραστηριοτήτων δε γίνεται μόνο με μαθηματικά κριτήρια αλλά συμβάλλουν σε αυτήν τόσο κοινωνικά και οικονομικά όσο και πολιτικά κριτήρια. Σύμφωνα με τους Kuzniak et al. (2016β), ο προσανατολισμός της πορείας της μαθηματικής δραστηριότητας καθορίζεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, τα συμπεράσματα ερευνών της επιστημονικής κοινότητας της Διδακτικής των Μαθηματικών και από μελέτες φορέων που σχετίζονται με την εκπαιδευτική πολιτική.

Ο κατάλληλος μαθηματικός χώρος εργασίας εξαρτάται από το περιβάλλον μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα· δηλαδή, στην περίπτωση μιας σχολικής τάξης, η επιλογή ενός κατάλληλου ΜΧΕ εξαρτάται από το επίπεδο των μαθητών, τις ικανότητές τους και τις προσδοκίες τους και δεν παραμένει σταθερός αλλά μετασχηματίζεται ανάλογα με τις αντιδράσεις των μαθητών (Kuzniak, 2016β). Υπεύθυνος για τον σχεδιασμό του είναι ο/η εκπαιδευτικός, ο οποίος λαμβάνοντας υπόψη τον μαθηματικό χώρο αναφοράς αλλά και τη συγκεκριμένη σχολική τάξη στην οποία απευθύνεται επιλέγει τις κατάλληλες δραστηριότητες.

Ο προσωπικός χώρος εργασίας αναπτύσσεται από το ίδιο το άτομο, όταν αντιμετωπίζει ένα συγκεκριμένο μαθηματικό έργο. Διακρίνουμε τον προσωπικό χώρο εργασίας του/της εκπαιδευτικού, ο οποίος καλείται να σχεδιάσει τον κατάλληλο ΜΧΕ, και τον προσωπικό χώρο εργασίας του/της μαθητή/τριας, όταν ο/η τελευταίος/α έρχεται αντιμέτωπος/η με μια συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα και απαιτείται από αυτόν να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις και τις προσωπικές του ικανότητες.

1.4. Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας της Ανάλυσης

Στην ενότητα αυτή, αναπτύσσονται όλα τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας της Ανάλυσης. Ο τομέας της Μαθηματικής Ανάλυσης έχει απασχολήσει έντονα τη διδακτική των Μαθηματικών για τις «βαριές» έννοιες του. Ιστορικά, ήδη από τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα αρκετά ζητήματα επιλύθηκαν με την έννοια των άπειρων διαδικασιών. Η ενσωμάτωση όμως της έννοιας αυτής στην εκπαιδευτική διαδικασία αποσύρθηκε, καθώς ανέκυψαν τρομερά προβλήματα λόγω μαθησιακών κενών σε αυστηρούς ορισμούς του απειροστικού λογισμού (Delgadillo & Vivier, 2016). Στο $2^{ο}$ μισό του $19^{ου}$ αιώνα τα ελλείμματα στη θεωρία αναδιατυπώθηκαν. Πλέον η μαθηματική ανάλυση αρχίζει να ανθίζει και να καλύπτεται οποιοδήποτε κενό της στο θεωρητικό υπόβαθρο. Η θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών καθιέρωσε αυτόν τον κλάδο. Έτσι, εκείνη την περίοδο, παρατηρείται η προσθήκη της πραγματικής ανάλυσης στο πρόγραμμα σπουδών (Beke, 1914). Ωστόσο, στη δεκαετία του 1960, η μελέτη του Robinson (Robinson, 1966) όσον αφορά τη μη κλασσική ανάλυση, πρόσφερε πλούσια γνώση και καινοτόμες προσεγγίσεις, με αφηρημένες θεωρητικές ιδέες για τις άπειρες ποσότητες, κάτι που απουσίαζε στο πρώιμο στάδιο της μαθηματικής ανάλυσης. Όμως παρά την εξέλιξη αυτή, αυτό το είδος ανάλυσης δε συμπεριλήφθηκε στο πρόγραμμα σπουδών (Hodgson, 1994). Ο λόγος που συνέβη αυτό αναφέρεται στο γεγονός ότι πολλές τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι αρκετά περίτεχνες, για να αποδοθούν σε μαθητές/τριες και δεν έχουν άμεση εφαρμογή σε υπαρκτά προβλήματα της καθημερινότητας, δυσκολεύοντας το έργο των εκπαιδευτικών.

Οι Montaya, Delgadillo και Vivier (2016) στηριζόμενοι στο έργο των Houdement και Kuzniak εισήγαγαν μια νέα προσέγγιση της διδακτικής της Ανάλυσης μέσω του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας της Ανάλυσης και των παραδειγμάτων (paradigms) του, με στόχο να αναλύσουν τις διαδικασίες που οδηγούν στη λύση κάποιων προβλημάτων. Οι λύσεις αυτών των προβλημάτων προϋποθέτουν αναγκαστικά τη χρήση συγκεκριμένης μορφής λόγου, δηλαδή ένα σύνολο κανόνων και κωδικών (Kuzniak et al.,2016). Ως παράδειγμα θεωρείται ο συνδυασμός πεποιθήσεων, μεθόδων και αξίων που μοιράζεται μια επιστημονική ομάδα. Σε αντιστοιχία λοιπόν των τριών παραδειγμάτων του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας, Φυσική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 1 (GI), Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 2 (GII) και Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 3 (GIII) θέσπισαν την Αριθμητική– Γεωμετρική Ανάλυση ή Ανάλυση 1 (GA), την Υπολογιστική Ανάλυση ή Ανάλυση 2 (CA) και τέλος την Πραγματική Ανάλυση ή Ανάλυση 3 (RA).

Το πρώτο παράδειγμα ονομάστηκε Αριθμητική – Γεωμετρική Ανάλυση ή Ανάλυση 1 (GA) καθώς υποστηρίζει ερμηνείες που βασίζονται σε σιωπηρές υποθέσεις με βάση τη γεωμετρία, τους αριθμητικούς υπολογισμούς ή και τον πραγματικό κόσμο. Οι λύσεις που προτείνονται βασίζονται στη διαίσθηση, τον πειραματισμό και τον συλλογισμό που ακολουθείται. Μέσα πειραματισμού αποτελούν τα σχήματα, οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων αλλά και η χρήση των διάφορων μαθηματικών λογισμικών στη σχολική τάξη.

Η γεωμετρική ερμηνεία ενός προβλήματος έχει συνεισφέρει πολλά στην κατανόηση των εννοιών του πεδίου της Ανάλυσης. Ο Bolzano είχε χρησιμοποιήσει αυτή τη μέθοδο δίνοντας οπτική ερμηνεία στο Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών. Το θεώρημα αυτό ερμηνεύεται μέσα από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f, δηλαδή η επίλυση της εξίσωσης $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$, γίνεται μέσω της παρατήρησης ότι η ευθεία $y=c$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε κάποιο σημείο που η τετμημένη του ανήκει σε ένα διάστημα (α, β), αν το c ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης. Στη συνέχεια με τη μέθοδο της διχοτόμησης, δηλαδή με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων, γίνεται η καλύτερη προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης αυτής (Delgadillo & Vivier, 2016). Μια ακόμη περίπτωση παραδείγματος τύπου GA αποτελεί η εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας μέσω των αρχικών όρων της. Παρότι η έννοια αυτή είναι συνδεδεμένη με την έννοια των άπειρων διαδικασιών, η μελέτη και η αναπαράσταση των αρχικών όρων της ακολουθίας μπορεί να δώσει στον/στην μαθητή/τρια το εναρκτήριο έναυσμα για την εύρεση του γενικού τύπου των όρων της. Βασιζόμενοι/ες, λοιπόν, οι μαθητές/τριες σε κάποιο πίνακα τιμών ή μέσω της γραφικής παράστασης, πολλές ιδιότητες, όπως η μονοτονία ή η σύγκλιση, μπορούν να διαφανούν. Τέτοιες διεργασίες, άλλωστε, είναι θεμελιώδεις σε κάθε μαθηματικό ερευνητή που ανακαλύπτει νέα χαρακτηριστικά και μαθηματικές οντότητες, που μέσω της οπτικοποίησής τους μπορεί να εξαγάγει διάφορες εικασίες. Για τον λόγο αυτό και τα παραδείγματα τύπου GA θεωρούνται απαραίτητα κατά την εισαγωγή των μαθητών/τριών σε καινούριες έννοιες.

Το δεύτερο παράδειγμα ονομάστηκε Υπολογιστική Ανάλυση ή Ανάλυση 2 (CA), καθώς οι κανόνες υπολογισμού εκτελούνται πιο αυτοματοποιημένα με τη μορφή ενός αλγορίθμου και χρησιμοποιούνται χωρίς να ελέγχεται η ύπαρξη και η φύση των αντικειμένων που μελετώνται. Τα τεχνουργήματα του πεδίου της ανάλυσης μπορούν να θεωρηθούν οι κανόνες παραγώγισης, η μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης μέσω του προσήμου της παραγώγου, η εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της, ο υπολογισμός ορίων με χρήση αλγεβρικών μεθόδων κ.α. Οι μαθητές/τριες δείχνουν μια ιδιαίτερη προτίμηση στις τυποποιημένες διαδικασίες. Ένα σύνηθες φαινόμενο σχετίζεται με τη χρήση του θεωρήματος της μονοτονίας έναντι του ορισμού, παρότι ο τελευταίος μπορεί να αποφανθεί για τη μονοτονία της συνάρτησης πιο γρήγορα.

Από την άλλη πλευρά, παρατηρώντας το παράδειγμα των ακολουθιών από τη σκοπιά της δεύτερης κατηγορίας, διαφαίνονται αρκετές διαφορές. Πλέον, οι όροι της ακολουθίας δε λογίζονται με βάση παραστάσεις αλλά με τη συνδρομή αλγεβρικών υπολογισμών. Το γεγονός αυτό μπορεί να παραπέμψει σε αυτοαναιρέσεις όμοιων τιμών, πράξεις και συχνά σε γνωστά θεωρήματα. Δηλαδή, αν χρειάζεται η σύγκλιση μιας ακολουθίας με όριο στη μονάδα, οφείλεται να εξεταστεί ότι όλοι οι όροι της είναι θετικοί και φραγμένοι από αυτόν τον αριθμό, εφόσον είναι, βεβαίως, αύξουσα (σημαντική προϋπόθεση η μονοτονία). Ουσιαστικά, στην περίπτωση των ακολουθιών προτιμάται, κυρίως η δεύτερη αντιμετώπιση, καθώς προσφέρει μια υπολογιστική προσέγγιση που πιθανόν να δώσει ένα πιο άμεσο αποτέλεσμα. Όμως, περιθωριοποιώντας όλη τη διεργασία στη δεύτερη πτυχή, απομακρύνεται η μαθηματική εποπτεία που αποκτάται μέσω σχημάτων και απεικονίσεων. Έτσι, ακόμη και σε άλλες εφαρμογές, προτείνεται ο συνδυαστικός τρόπος ελέγχου ενός θέματος. Πρώτα μέσω κάποιων γραφικών παραστάσεων δίνοντας έτσι την αίσθηση του τι γίνεται στη συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτό το οπτικό ερέθισμα είναι εφικτό να παράγει μια εικασία. Έπειτα, η τελευταία αποδεικνύεται αυστηρά και φορμαλιστικά ακολουθώντας την οπτική του δεύτερου παραδείγματος. Συγκεκριμένα, αυτό που αναλύεται στην προκειμένη παράγραφο είναι σχεδόν ταυτόσημο με την πληθώρα των προβλημάτων της Γεωμετρίας, όπου σπανίζει η επίλυση τους χωρίς μια αρχική καθοδήγηση, συνήθως μέσω κάποιου σχήματος.

Το τρίτο παράδειγμα ονομάστηκε Πραγματική Ανάλυση ή Ανάλυση 3 (RA), καθώς ασχολείται με θέματα στα οποία υπάρχει η έννοια της προσέγγισης, των τοπολογικών χώρων, του εψιλοντικού (ε) ορισμού για τις διαδικασίας υπολογισμού ορίων. Όλα ερμηνεύονται με βαθύ θεωρητικό περιεχόμενο και σίγουρα αποτελεί το συγκεκριμένο παράδειγμα πολλές φορές θέμα που εξαιρείται από τη σχολική ύλη. Τέτοια παραδείγματα συναντώνται κυρίως στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί η διαφορά μεταξύ λογισμού και ανάλυσης. Η κύρια απόκλιση των δύο πεδίων εντοπίζεται στην πληρότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές/τριες από τη μία χρησιμοποιούν κατά ριπάς το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, από την άλλη δε γνωρίζουν την προϋπόθεση της πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών σε αυτό το θεώρημα. Ουσιαστικά αντιμετωπίζουν το πρόβλημα με λογιστικό τρόπο κι όχι με εκείνον που εναρμονίζεται με τη μαθηματική ανάλυση, δηλαδή τον ε– χαρακτηρισμό (Bergé, 2008).

Ένα, επίσης, βασικό παράδειγμα της διδακτικής των Μαθηματικών στον χώρο εργασίας της μαθηματικής ανάλυσης είναι το παρακάτω. Ένα κλασσικό φαινόμενο- ευρέως γνωστό- αντικατοπτρίζεται στην ιδέα που έχουν οι μαθητές/τριες αλλά και οι εκπαιδευτικοί για την ισότητα $0{,}999\ldots = 1$. Αυτό το παράδειγμα έχει μελετηθεί αρκετά από πολλούς μαθηματικούς από το 1980 και έπειτα (Sierpinska 1985; Tall & Schwarzenberger 1978; Oktac & Vivier, 2016). Η διττή παρουσία ενός μαθηματικού αντικειμένου που έχει το ίδιο νόημα θεωρείται πολύ βασικό κομμάτι όχι μόνο της μαθηματικής ανάλυσης αλλά γενικότερα των Μαθηματικών. Τα δύο αυτά πρότυπα μπορεί να διαφέρουν εξωτερικά, όμως δηλώνουν την ίδια ποσότητα καθώς και τα δύο μέλη αυτής της σχέσης ισούται με 1. Το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για την απόδειξη τέτοιων σχέσεων υπερβαίνει κατά πολύ τα όρια της διδακτικής σε μαθητικό επίπεδο. Βέβαια, εδώ υπάρχει ένα μεγάλο εγχείρημα όσον αφορά τον τρόπο εξήγησης ενός τέτοιου παραδείγματος χωρίς έννοιες από τη μη τυπική μαθηματική ανάλυση. Πάντως δεν πρέπει να προσπερνιούνται τέτοιες περιπτώσεις, καθώς η ενίσχυση των μαθητών/τριών σε αυτή τη μεταγνώση είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της μαθηματικής τους ωριμότητας (Ely, 2010).

Σε πολλές έρευνες που έχουν υλοποιηθεί για το συγκεκριμένο παράδειγμα τα ποσοστά είναι απογοητευτικά. Σχεδόν το 60% διδασκόντων ή διδασκόμενων απάντησε ότι οι δύο αυτές μορφές 0,999… και 1 είναι μια ανισότητα κι όχι ισότητα. Η έρευνα είχε αδιευκρίνιστη την περίοδο, τη χώρα ή οποιαδήποτε πρότερη γνώση του ζητήματος κάτι που επιβεβαιώνει ότι το ζήτημα είναι γενικό στο πληθυσμό (Tall, 1980; Mena-Lorca et al., 2015; Rittaud & Vivier, 2014). Μια άλλη μελέτη (Weller et al., 2009), που περιλάμβανε 204 δασκάλους πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης το ποσοστό αυξάνεται στο 73,5%, υπέρ του ενδεχόμενου της ανισότητας. Από τη στατιστική μεριά αυτό το ποσοστό δεν απέχει σημαντικά από το άλλο σύνολο πιο ειδικευμένων εκπαιδευτικών ή μαθητών/τριών.

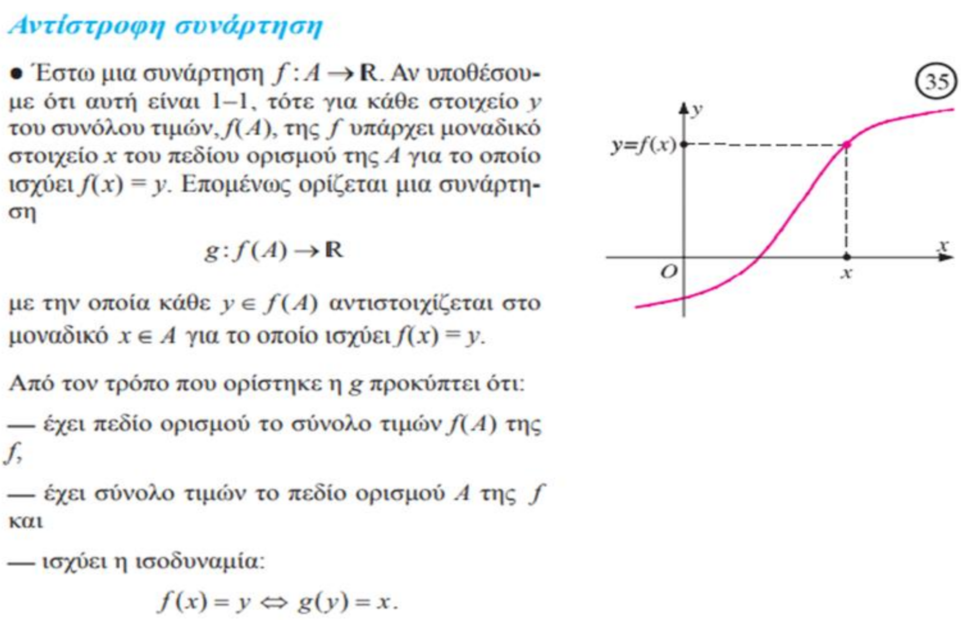
Αξίζει να σημειωθεί, η ιδιαίτερα υψηλή συσχέτιση που εμφανίζεται μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών των παραδειγμάτων που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Κανένα από τα παραπάνω τρία παραδείγματα δεν υπάρχει μεμονωμένο. Η εργασία σε περισσότερα από ένα παραδείγματα επιτρέπει στον/στην μαθητή/τρια να ελέγχει τις λύσεις και να αποφεύγει τα πιθανά λάθη. Ένα λάθος για παράδειγμα στην παραγώγιση μπορεί να ανιχνευτεί μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Η χρήση ενός θεωρήματος συσχετίζεται συνήθως με παράδειγμα της Υπολογιστικής Ανάλυσης αλλά, όταν οι σχετικές προϋποθέσεις του δεν ισχύουν, τότε το παράδειγμα αυτό αντιμετωπίζεται από την Πραγματική Ανάλυση. Τέλος οι εικασίες που προκύπτουν από την οπτικοποίηση ενός παραδείγματος της Γεωμετρικής Ανάλυσης αιτιολογούνται στη συνέχεια με τη βοήθεια των άλλων δυο παραδειγμάτων.

2. Η αντίστροφη συνάρτηση

2.1. Εισαγωγή

Η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης αποτελεί θεμελιώδη μαθηματική έννοια με κυρίαρχο ρόλο στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών όλων των χωρών και πολλές εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες. Οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν πολλά εμπόδια στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την αντίστροφη συνάρτηση, που πηγάζουν κυρίως από την ελλιπή κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αλλά και των ιδιοτήτων της, όπως είναι η 1-1 αντιστοίχιση, η μονοτονία, η σύνθεση δυο συναρτήσεων και η συμμετρία της γραφικής της παράστασης ως προς μια ευθεία.

Στο σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά Γ’ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ» υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος δίνεται ο παρακάτω ορισμός για την αντίστροφη συνάρτηση.


Αντίστροφη συνάρτηση

• Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Εικόνα 1:Αυστηρός Ορισμός αντίστροφης συνάρτησης

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2013.

Στην συνέχεια αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο ότι η συνάρτηση αυτή θα συμβολίζεται με $f^{-1}(x)$.

2.2. Δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της συνάρτησης

Η Sierpinska (1992) επισημαίνει ότι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι παρόμοιες με τις εννοιολογικές δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθηματικοί στο πέρασμα των αιώνων κατά την προσπάθεια τους να προσεγγίσουν την έννοια της συνάρτησης. Πολλοί ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες έχουν περιορισμένη και αδύναμη εννοιολογική εικόνα της συνάρτησης που οφείλεται στην γνωστική, επιστημολογική και αναπαραστατική πολυμορφία που διακατέχει την φύση της (Freudental, 1973; Janvier, 1978; Tall & Vinner, 1981; Leinhardt, et al., 1990; Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierbinska, 1992; Kalchman & Case, 1998; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Duval, 2002; Eisenberg, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Rabadi, 2015 κ.α.).

Η γνωστική πολυμορφία της έγκειται στο ότι η συνάρτηση εμπεριέχει ένα σύνολο προαπαιτούμενων μαθηματικών εννοιών και συνδέεται άμεσα με άλλες έννοιες, όπως είναι η έννοια της μεταβλητής, του πεδίου ορισμού, του συνόλου τιμών, της εξάρτησης και της σχέσης κ.α. Η επιστημολογική πολυμορφία της έννοιας οφείλεται στο ότι η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως σχέση, ως μετασχηματισμός ή ως αντικείμενο ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Τέλος, η αναπαραστατική της πολυμορφία συνίσταται στο ότι η συνάρτηση έχει πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης (λεκτικός, αλγεβρικός, γεωμετρικός, αριθμητικός) και κάθε ένας από αυτούς απαιτεί διαφορετικό γνωστικό πλαίσιο πληροφορίας και δίνει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πλευρές της, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει πλήρως.

Οι εννοιολογικές παρανοήσεις των μαθητών/τριών που οφείλονται στην πολυμορφία της έννοιας της συνάρτησης μελετήθηκαν από τους παραπάνω ερευνητές και οι κυριότερες παρουσιάζονται παρακάτω. Οι μαθητές/τριες θεωρούν αποδεκτή μόνο μια συνάρτηση με «φυσιολογική» συμπεριφορά. Κατά συνέπεια μια συνάρτηση με μη συνεχές γράφημα δε θεωρείται συνάρτηση. Αγνοώντας τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης αποδέχονται ως συναρτήσεις μόνο αυτές που έχουν αναλυτικό τύπο και μάλιστα απλό. Όσες έχουν πολλαπλό τύπο θεωρούνται πολλές συναρτήσεις και όχι μια. Επιπλέον, όταν οι συναρτήσεις δε δίνονται με την μορφή αναλυτικών τύπων αλλά ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, δεν τις αναγνωρίζουν ως συναρτήσεις. Θεωρούν ότι πρέπει να υπάρχει κάποια πράξη με την ανεξάρτητη μεταβλητή· κατά συνέπεια, οι σταθερές συναρτήσεις δεν αποτελούν συναρτήσεις για αυτούς. Ακόμη, οι μαθητές/τριες παρουσιάζουν πολλές παρανοήσεις σχετικά με τις ιδιότητες της συνάρτησης, όταν τους δίνεται η γραφική παράσταση της. Τα σημεία τομής της με τους άξονες και η σχετική θέση της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x’Ox δεν αναγνωρίζονται ως λύσεις της αντίστοιχης αλγεβρικής εξίσωσης ή ανίσωσης, η κλίση της καμπύλης ταυτίζεται με την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής και έννοιες όπως η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα δεν μπορούν να ερμηνευτούν μέσω του γραφήματος.

2.3. Δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης

Μια βασικότερη ιδέα προαπαιτούμενη για την κατανόηση της αντίστροφης συνάρτησης, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι η εννοιολογική κατανόηση της ίδιας της συνάρτησης. Όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης εξασφαλίζεται, όταν η αρχική είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη. Αυτά τα χαρακτηριστικά αποτελούν κύριες ιδιότητες μια συνάρτησης και διδάσκονται πριν από την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Πολλές φορές αυτή η πρότερη γνώση που χρειάζεται για το άλμα σε πιο ειδικές περιπτώσεις, απουσιάζει ή πραγματοποιείται με αρκετά μεθοδικό τρόπο υστερώντας στο εννοιολογικό πλαίσιο (Delastri et al., 2019).

Η παράβλεψη των διδασκόντων σε κομβικά σημεία δημιουργεί ασάφειες σε πολύ μεγάλο βαθμό. Η παράβλεψη αυτή στηρίζεται στο επιχείρημα ότι δε χρειάζεται να δώσει βάση ο/η μαθητής/τρια. Πάντως, αξίζει να τονιστεί ότι η διαδικασία της εννοιολογικής εμβάθυνσης με σκοπό την αντίληψη μιας αφηρημένης έννοιας σε συνδυασμό με τη λειτουργία της και τη μαθηματική της υπόσταση κρίνεται απαραίτητη (Kilpartrick et al., 2001; Wearne & Hiebert, 1988). Πιο συγκεκριμένα, αυτός ο τρόπος σκέψης συνιστάται στη σύγκριση παρόμοιων ιδεών και την κατανόηση τους, στο πότε ισχύουν και πότε παραβαίνουν τους κανόνες (μαθηματικούς) (Hiebert & Wearne, 1986; Bisanz & LeFevre, 1992).

Μελέτες έχουν δείξει ότι τα διαγράμματα βέλους ως βοηθητικός παράγοντας για την εύρεση της f^{-1} δρουν θετικά στην αντίληψη των παιδιών. Οι μαθητές/τριες πέτυχαν υψηλότερες βαθμολογίες, όταν διδάσκονταν με διαγράμματα βέλους, στα οποία αντιστοιχούσαν τιμές του πεδίου ορισμού της f προς το σύνολο τιμών της και ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία έβρισκαν τις τιμές της αντίστροφης συνάρτησης, αντί να διδαχθούν απευθείας την μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης $f(x)=y$ ως προς x. Μάλιστα, τα παιδιά που διδάχτηκαν τα διαγράμματα βέλους ήταν κατά 31% πιο αποδοτικοί από τους υπολοίπους (Nolasco, 2018).

Γενικότερα, αποδεικνύεται στην πράξη ότι οι απεικονιστικές τεχνικές έχουν ευρεία χρήση, το οποίο βασίζεται στο γεγονός ότι οι μαθητές/τριες δραστηριοποιούνται μέσα από αναπαραστάσεις και, όταν υπεισέρχονται σε πιο θεωρητικές έννοιες, έχουν αποκτήσει ήδη μια προπαιδεία που τους βοηθά σημαντικά στην πορεία της μαθηματικής τους συνείδησης. Γι' αυτό γραφήματα συναρτήσεων, πίνακες τιμών, σχήματα, γεωμετρικές ιδιότητες των σχέσεων μεταξύ της συνάρτησης και της αντίστροφής της δίνουν άλλη οπτική στο εκάστοτε πρόβλημα και ταυτόχρονα προσφέρουν κίνητρα ενεργοποίησης του ενδιαφέροντός τους για τη μάθηση.

Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί η αποτελεσματικότητα των βελοειδών διαγραμμάτων, ως μια οπτική προσέγγιση, δεν περιορίζει τους/τις μαθητές/τριες να οραματιστούν εύκολα. Σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές/τριες έχουν μια διαστρεβλωμένη εικόνα τόσο για τις συναρτήσεις όσο και για τις αντίστροφες εικόνες (DeMarois, 1996). Αυτή η αταξία στη λογική των παιδιών βασίζεται κυρίως στην υπερεκπαίδευση και την ανάγκη της να απομνημονεύουν σχεδόν τα πάντα, ώστε να ανταποκριθούν στην ύλη των μαθημάτων. Επιπλέον, μια ακόμη αιτία, η οποία δεν ισχύει μόνο στο υπό εξέταση παράδειγμα, αποτελεί και η έλλειψη κινήτρων, γι' αυτό και μια προσεγμένη διδακτική παρέμβαση μπορεί να προσδώσει καρπούς όχι μόνο στις αποδόσεις των μαθητών αλλά και στην προσπάθεια να τους εγείρει το ενδιαφέρον για τη γνώση (Nolasco, 2018).

Οι Carlson και Oehrtman (2005) χώρισαν τις αντιλήψεις των μαθητών/τριών για την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης σε τρεις κατηγορίες, την αλγεβρική, δηλαδή την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=y$ ως προς x, τη γεωμετρική, δηλαδή την κατασκευή της συμμετρικής γραφικής παράστασης της συνάρτησης ως προς την ευθεία $y=x$ και την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή τη διαδικασία της αναίρεσης (undo). Μάλιστα ο Carlson και οι συνεργάτες του κατέληξαν ότι οι μαθητές/τριες που είχαν συλλάβει την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης ως διαδικασία αναίρεσης ήταν ικανοί να απαντήσουν σε πληθώρα ερωτήσεων που αφορούσαν την αντίστροφη συνάρτηση. Οι Wilson, Adamson, Cox και O' Bryan (2011) κατέληξαν ότι ο αλγεβρικός και γεωμετρικός τρόπος εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές/τριες.

Η συνέπεια των μαθητών/τριών, όταν διερωτώνται για καίρια ζητήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης, διεκπεραιώνεται μέσα από τις γνώσεις που αποκόμισαν από τις παραδόσεις. Πολλοί από αυτούς, όταν δοκιμάζονται σε διαγωνίσματα, εφαρμόζουν τεχνικές για τον προσδιορισμό αντίστροφων συναρτήσεων που βασίζονταν σε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία κατά γράμμα. Στην έρευνα των Paoleti et al. (2018), η πλειονότητα των μαθητών

(21 από τους 25) δε σκέφτηκε να αποδείξει ότι η σύνθεση των δυο συναρτήσεων καταλήγει στην ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή να κάνει χρήση της ιδιότητας: $(f^{-1}of)(x)=x$, για κάθε $x \in D_f$, όπου D_f το πεδίο ορισμού της f, ώστε να αποδείξει ότι η μια συνάρτηση είναι η αντίστροφη της άλλης. Παρ' όλο που αυτός είναι ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός μιας αντίστροφης συνάρτησης σε αρκετά σχολικά εγχειρίδια άλλων χωρών, δε διαφαίνεται να τον έχουν εμπεδώσει οι μαθητές/τριες, οπότε το προσπερνάνε και καταλήγουν να χρησιμοποιούν πιο αλγοριθμικές λύσεις, που δεν τους οδηγούν πάντα στην ορθή επίλυση μιας άσκησης. (Brown & Reynolds, 2007; Engelke et al., 2005; Lucus, 2005; Vidakovic, 1997).

Στην ίδια μελέτη, είχε πραγματοποιηθεί μια συσχέτιση μεταξύ της λεκτικής που ακολουθούν οι μαθητές/τριες και της ιδέας των «συμφραζομένων» μιας αντίστροφης συνάρτησης για μια συγκεκριμένη συνάρτηση με βάση αυτή την πηγή γνώσης. Πραγματοποιήθηκε έλεγχος σε ένα κλασσικό παράδειγμα προερχόμενο από τη Φυσική, δηλαδή τη διασύνδεση μεταξύ βαθμών Κελσίου (C^o) και Φαρενάιτ (F^o). Σε πολλές χώρες του εξωτερικού η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης επιτυγχάνεται με εναλλαγή των μεταβλητών στην εξίσωση $f(x)=y$ από την αρχή. Η παραπάνω τεχνική δημιουργεί παρανοήσεις και οδηγεί σε λάθη στην περίπτωση των προβλημάτων. Στη συγκεκριμένη έρευνα, ένα μικρό μέρος μόνο των μαθητών (20%) κατόρθωσε να συνειδητοποιήσει την αντίστροφη διαδικασία μεταξύ αυτών των δύο ποσοτήτων (C^o και F^o). Όμως, η πλειονότητα των παιδιών είτε δεν κατανόησαν την ύπαρξη σχέσης μεταξύ των δύο μεγεθών ή το κατάλαβαν αλλά με τελείως λανθασμένο τρόπο και εναλλάσσοντας τις μεταβλητές από την αρχή οδηγήθηκαν σε λάθος συμπέρασμα, τόσο στην εύρεση του τύπου της συνάρτησης για τους βαθμούς Φαρενάιτ όσο και στην κατασκευή του αντίστοιχου γραφήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο πλαίσιο του ελληνικού Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών δεν προτείνεται η παραπάνω τεχνική αλλά η εναλλαγή των μεταβλητών γίνεται μετά την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=y$ ως προς x.

Η ουσία του προβλήματος είναι κυρίως ότι η αντίστροφη συνάρτηση χρησιμοποιείται με μεθοδεύσεις από τους μαθητές/τριες χωρίς να είναι εφικτή η πλήρη κατανόηση τους στον λόγο ύπαρξης και ορισμού αυτής της μαθηματικής οντότητας. Βέβαια, δεν εκλείπει και η άποψη ότι η γενικότερη έλλειψη γνώσεων ορισμένων δεν τους επιτρέπει να διευρύνουν τους ορίζοντες τους και να συλλάβουν την ιδέα μιας αντίστροφης σχέσης (έστω απεικονιστικά). Τέτοιου είδους ασάφειες ως προς τις διεργασίες εναλλαγής και επίλυσης σχέσεων έρχονται σε συμφωνία με το άρθρο (Wilson et al., 2011) και τα ελλείματα αυτών των γνώσεων προέρχονται κυρίως από το σχολείο (Minh & Lagrange, 2016).

Τα μαθηματικά ως ποσοτική έννοια είναι ικανά να συρρικνώσουν τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης σε περιπτώσεις όπου κυριαρχούν τα συμφραζόμενα. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται και στην πράξη (Paoletti et al., 2015). Πολλοί μαθητές/τριες παρά τη σύλληψη της ιδέας της αντίστροφης διαδικασίας υστερούν αρκετά στο κομμάτι της ερμηνείας της και συνήθως προσφεύγουν σε εύκολα παραδείγματα, για να την περιγράψουν σαν διαδικασία κι όχι εκ του βάθους αυτής της ιδιαίτερα θεωρητικής έννοιας.

Μια πιο ειδική περίπτωση αποτελούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η βιβλιογραφία είναι εκτενής και για αυτό το πολύ ειδικό πεδίο (Akkoc, 2008; Hertel & Cullen, 2011; Moore & LaForest, 2014; Weber, 2005). Στην περίπτωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης σε ένα περιορισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όπου αυτή είναι 1-1, επιτυγχάνεται μέσω της γραφικής παράστασης. Παρότι οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται από το γράφημα ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται, δεν αποδέχονται το αποτέλεσμα αυτό, καθώς δεν μπορούν να βρουν τον τύπο της αντίστροφης. Τα αποτελέσματά των μελετών έδειξαν πως παρά τη συνέπεια στις τεχνικές των γραφικών απεικονίσεων από τους/τις μαθητές/τριες, το μεγαλύτερο ποσοστό από αυτούς δεν εφάρμοσαν τέτοιες μεθόδους για την εύρεση αντίστροφης συνάρτησης σε περιπτώσεις πιο απαιτητικών τριγωνομετρικών απεικονίσεων (Paoletti et al., 2015).

Όμως δεν είναι δυνατό να περιορίσουμε τους διδασκόμενους σε μια ανώριμη εννοιολογική κατανόηση που συνήθως γίνεται κατάχρηση της ιδιότητας της «αναίρεσης». Γενικά, η εμβάθυνση σε μια έννοια περιλαμβάνει τόσο διαδικαστικές (γραφήματα, διαγράμματα, εφαρμογές) και εννοιολογικές γνώσεις όσο και τις διασυνδέσεις μεταξύ τους (Freudenthal, 1983; Even, 1989; Silver, 1986). Γι’ αυτό, όταν η γνώση εφαρμόζεται με δυναμικό τρόπο για την επίλυση ενός προβλήματος ή την εκτέλεση κάποιου μέρους του, ο τρόπος σύνδεσης εννοιολογικών και διαδικαστικών πλαισίων βελτιώνεται ακόμη περισσότερο.

Οι άνθρωποι δεν μπορούν- από τη φύση τους- να συμπορευτούν με περιορισμούς και κανόνες γι’ αυτό και τα μαθηματικά, όταν διδάσκονται με ορθές μεθόδους, γεννούν έναν νέο κόσμο. Σκοπός είναι τα δύο είδη γνώσεων που αναφέρθηκαν να αλληλοκαλύπτουν το ένα το άλλο, γιατί στην αντίθετη περίπτωση διακρίνονται ως διαφορετικές οντότητες ενώ εξυπηρετούν τον ίδιο ρόλο. Αναλυτικότερα, αν διαφαίνεται διαχωρισμός στα μέσα ανάκτησης γνώσεων, το κάθε άτομο εξετάζει ένα πρόβλημα εμπειρικά και μηχανικά δίχως συναίσθηση των όσων πράττει.

Ειδικοί συνιστούν να προσδίδεται έμφαση στις αναλυτικές μεθόδους των συναρτήσεων και ιδιαίτερα όταν είναι πολυωνυμική, εκθετική ή ακόμη και λογαριθμική (NCTM, 1989). Μάλιστα, αυτές οι βασικές έννοιες διδάσκονται ήδη από το Γυμνάσιο σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών αλλά είναι συχνό φαινόμενο η ελλιπής γνώση των μαθητών/τριών σε αυτά τα πεδία. Μελέτες επιβεβαιώνουν ότι πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν ξεκάθαρη εικόνα για τις ενότητες που αναφέρθηκαν, ειδικά τη διαχείριση συναρτήσεων τέτοιου βεληνεκούς. Όπως τονίζεται, δε διέκριναν σημαντικές διαφορές σε ιδιότητες των συγκεκριμένων απεικονίσεων. Επομένως, δημιουργείται σοβαρή ένδειξη της πηγής και του προβλήματος των αντιστρόφων συναρτήσεων εκ των έσω, οπότε ίσως μια ορθότερη επιλογή εκπαιδευτικών αξιολογώντας την εκπαίδευση τους, επίλυε το γενικότερο ζήτημα ασαφειών σε μαθηματικές- θεωρητικές έννοιες, όπως η αντίστροφη συνάρτηση (Even, 1992).

Οι διαφορετικές διδακτικές πρακτικές διαμορφώνουν τη γνώση που αποκτούν οι μαθητές/τριες. Για το υποκείμενο ζήτημα εντοπίζεται μια διχογνωμία. Από τη μια, εκπαιδευτικοί κοινωνιολόγοι υποστηρίζουν την εκ του βάθους επιρροή που δημιουργείται στη μετάδοση των γνώσεων στο πλαίσιο ενός κοινωνικού συνόλου με πολλές συνιστώσες (Peaker, 1971), από την άλλη εκπαιδευτικοί ψυχολόγοι επιμένουν στην εγκαθίδρυση της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου για τη συνεισφορά στη μάθησή τους (Inhelder & Sinclair, 1969). Πάντως, πολλοί παράγοντες είτε ενδογενείς είτε εξωγενείς περιορίζουν οποιαδήποτε απόλυτη ερμηνεία για την εξάρτηση τέτοιων πρακτικών ως προς την πεμπτουσία της γνώσης. Ωστόσο, έρευνες έχουν δείξει πως η διαφορετική προσέγγιση μιας πρακτικής διδασκαλίας επιφέρει και διαφορετικά ποιοτικά αποτελέσματα (Bayazit & Gray, 2004).

Η επιστημολογία της αντίστροφης συνάρτησης, που απασχολεί και την εργασία μας, αφορά τον έλεγχο της μάθησης των μαθητών/τριών και την απόδοση των πρακτικών διδασκαλίας του διδάσκοντα και της αλληλεπίδρασης των τελευταίων. Είναι προφανές πως οι μαθητές/τριες είναι σε δυσμενή θέση σε επίπεδο εμπέδωσης στη διαδικασία της αντίστροφης συνάρτησης, αν δεν προβούν σε εφαρμογές όσων έχουν διδαχθεί. Βέβαια, δε χρειάζεται απλώς μια μηχανική μάθηση αλλά να δοκιμαστούν σε περιπτώσεις πιο θεωρητικές, ώστε να εποικοδομηθεί το μαθηματικό τους υπόβαθρο στο βέλτιστο δυνατό βαθμό.

Η προαναφερθείσα γνώση των μαθητών/τριών δύναται να συνεισφέρει στην καθιέρωση προτύπων από την πραγματική κατάσταση της μαθηματικής οντότητας της αντίστροφης συνάρτησης, η οποία ως ένα σημείο ωφελεί στην ανάπτυξη μαθηματικών πλαισίων. Γενικώς, αυτό που χρειάζεται για την αντιμετώπιση ασαφειών που προκύπτουν στους διδασκόμενους πρέπει να ενισχυθεί το δομικό πλαίσιο της αντίστροφης συνάρτησης μέσω του ορισμού της συνάρτησης και ειδικότερα χαρακτηρισμούς όπως η ιδιότητα «ένα προς ένα» (Bayazit & Gray, 2004).

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα μελέτη γύρω από το ζήτημα των παρανοήσεων στην αντίστροφη συνάρτηση παρουσιάζεται στη συνέχεια (Breen et al., 2015). Μελετήθηκαν δύο διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα, της Ιρλανδίας και της Σουηδίας. Σε κάθε περίπτωση το ζήτημα ήταν το ίδιο αλλά ο τρόπος που παρουσιάστηκε στους/στις μαθητές/τριες διαφορετικός, αν και τα αποτελέσματα έδειξαν να έχουν αρκετά κοινά σημεία. Ειδικότερα, οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν εστίασαν στις ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης και τα λάθη των μαθητών/τριών. Ένας καλός μαθητής/μία καλή μαθήτρια χαρακτηρίζεται από την πλήρη επίγνωση τόσο των αλγεβρικών ιδιοτήτων της απεικόνισης αυτής όσο και των γεωμετρικών εννοιών που την επεξηγούν. Όμως, μόνο ένα πολύ μικρό σύνολο μαθητών/τριών κατάφερε να απαντήσει με επιχειρήματα στις ερωτήσεις περί εννοιολογικών πλαισίων της μεθόδου της αντιστροφής.

Ειδικότερα ως προς την ιδιότητα της συμμετρίας που εντοπίζεται σε μια συνάρτηση f και την αντίστροφη της f^{-1} ως προς την ευθεια y=x, η διαισθητική αντίληψη της αντίστροφης συνάρτησης διακρίνεται πιο εύκολα στους Σουηδούς μαθητές/τριες, οι οποίοι δείχνουν μια σαφέστερη κατανόηση σε αυτό το σημείο (Breen et al., 2015). Τα αποτελέσματα της Σουηδίας έρχονται σε αντίθεση με αυτά των Ιρλανδών μαθητών/τριών, οι οποίοι απέτυχαν να περιγράψουν σωστά την ιδιότητα της συμμετρίας και μόνο 9 στους 58 μαθητές/τριες κατάφεραν να αναγνωρίσουν την ευθεία y=x ως άξονα συμμετρίας των δυο γραφικών παραστάσεων.

Μια ακόμη χαρακτηριστική ιδιότητα στις αντίστροφες συναρτήσεις ενυπάρχει στο πεδίο των γραφικών παραστάσεων τους. Αναλυτικότερα, το γράφημα της f,C_f, στα σημεία τομής του με τη γραφική παράσταση της $f^{-1}, C_{f^{-1}}$, ταυτίζεται με τα κοινά σημεία με την ευθεία y = x, όταν η αρχική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Αυτή η περίπτωση δυσκολεύει ιδιαίτερα τα παιδιά και δε διαφαίνεται να την επικαλούνται συχνά στον λόγο τους. Βεβαίως, αυτή η λειτουργία περιέχει μέσα της και μια αλγεβρική εξήγηση. Η τελευταία βασίζεται στο γεγονός ότι οι λύσεις των ακολούθων εξισώσεων είναι ίδιες (ισοδύναμες εξισώσεις) οπότε σε ένα υποκείμενο πρόβλημα λύνεται πάντα η πιο προσιτή από άποψη πράξεων :

$$f(x) = x$$

$$f^{-1}(x) = x$$

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

Ιδιαίτερα οι παραπάνω εξισώσεις, στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα, σπάνια αναγνωρίζονται ως ταυτόσημες και συνήθως δεν τις αναφέρουν οι μαθητές/τριες (Breen et al., 2015).

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες στην κατανόηση της αντίστροφης συνάρτησης θα παρουσιαστούν τα στατιστικά αποτελέσματα από το ερώτημα Β2 των Πανελλήνιων Εξετάσεων του 2020.

Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν μετά από μελέτη των καθηγητών Μανάρα Ν., Μπαρούτη Δ., Χαλατζιάν Π., Χατζημανώλη Ν. και Χριστοδουλίδη Γ. στο 53ο και 66ο βαθμολογικό κέντρο Δυτικής Θεσσαλονίκης. Το δείγμα ήταν 2309 μαθητές/τριες από δημόσια και ιδιωτικά σχολεία από περιοχές του κέντρου της Αθήνας, του νομού Αργολίδας, του νομού Λακωνίας και του νομού Έβρου. Στο ερώτημα αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να ορίσουν την αντίστροφη συνάρτηση της σύνθεσης δυο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το

(0, +∞).

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f \circ g)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x).$$

Μονάδες 6

Εικόνα 2 : Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις ΓΕΛ με το Νέο σύστημα 2020.

Αρχικά οι μαθητές/τριες έπρεπε να αποδείξουν ότι η συνάρτηση είναι ‘1-1’ και στη συνέχεια να ορίσουν την αντίστροφη συνάρτηση. Σύμφωνα με την οδηγία της επιτροπής των εξετάσεων, οι 3 από τις 8 μονάδες δόθηκαν στην απόδειξη ότι η συνάρτηση είναι ‘1-1’, οι επόμενες 3 μονάδες στην εύρεση του τύπου της αντίστροφης και οι τελευταίες 2 μονάδες στην εύρεση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Όπως προέκυψε από τη βαθμολόγηση των γραπτών το 26,6% του δείγματος απέτυχε εντελώς στο ερώτημα αυτό ενώ μόνο το 20,1% κατάφερε να πάρει και τις 8 μονάδες. Επίσης το 55,9% του δείγματος κατάφερε να ορίσει τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης αλλά το 71,2% του δείγματος δε βρήκε σωστά το πεδίο ορισμού της. Όπως παρατηρήθηκε από τα γραπτά, οι μαθητές/τριες μετά την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης όρισαν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής και δεν εξέτασαν το περιορισμό για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής της αρχικής συνάρτησης.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	B2 ($\bar{X} = 3,97$ & $SD = 3,077$)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Σύνολο
n (f %)	615(26,6)	114(4,9)	128(5,5)	163(7,1)	138(6,0)	283(12,3)	205(8,9)	200(8,7)	463(20,1)	2309(100)

Εικόνα 3 : Συχνότητες Βαθμολογίας της απάντησης των μαθητών στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Η δυσκολία των μαθητών να ορίσουν σωστά το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης παρουσιάζεται συχνά στα αποτελέσματα των Πανελλήνιων Εξετάσεων και οφείλεται αρχικά στην ελλιπή εννοιολογική κατανόηση των βασικών στοιχείων της συνάρτησης από την πλευρά των μαθητών/τριών αλλά και μη ύπαρξη παρόμοιων θεμάτων στο σχολικό εγχειρίδιο.

3. Ο Μαθηματικός Χώρος Αναφοράς της Αντίστροφης Συνάρτησης

3.1 Ο Μαθηματικός Χώρος Αναφοράς

Ο Μαθηματικός Χώρος Αναφοράς καθορίζεται από τη μαθηματική κοινότητα και μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών και του σχολικού εγχειριδίου παρουσιάζεται στους/στις εκπαιδευτικούς και τους/τις μαθητές/τριες.

3.2 Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί ορισμοί σχετικά με τον όρο «Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών». Προσεγγίζοντας την έννοια του Αναλυτικού Προγράμματος αντιλαμβανόμαστε ότι ο όρος αυτός αντιστοιχεί στη λατινική λέξη curriculum που σημαίνει κύκλο σε στάδιο. Ο Φλουρής (1997) αναφέρει ότι ο όρος curriculum χρησιμοποιείται ευρύτατα στις αγγλοσαξονικές χώρες και υποδηλώνει ένα είδος προγράμματος που δεν περιλαμβάνει μόνο τη διδακτέα ύλη και τους γενικούς της σκοπούς, αλλά και στοιχεία όπως είναι οι γενικοί σκοποί και οι ειδικοί στόχοι του κάθε μαθήματος, η μέθοδος και τα μέσα διδασκαλίας του, ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών και άλλα στοιχεία χρήσιμα για το διδάσκοντα. Αποτελεί δηλαδή το curriculum ένα πλήρη οδηγό διδασκαλίας. Η επιλογή του συγκεκριμένου όρου υποδηλώνει και την κυκλική διάταξη των περιοχών μελέτης που εμπεριέχει η συγκεκριμένη έννοια. Είναι ένα πρόγραμμα, το οποίο έχει σχεδιαστεί έτσι, ώστε η οργάνωση του περιεχομένου του να οδηγήσει στη μάθηση σύμφωνα με κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. (Χατζηγεωργίου, 2004).

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι η μεταρρύθμιση των αναλυτικών προγραμμάτων έχει ιδιαίτερη σημασία για ολόκληρο το εκπαιδευτικό σύστημα, καθώς αποτελεί αφετηρία και σημείο αναφοράς για κάθε αλλαγή στο εκπαιδευτικό σύστημα. Οποιαδήποτε, λοιπόν, εκπαιδευτική μεταρρύθμιση προτείνεται από τους αρμόδιους φορείς, εστιάζεται πρωτίστως στη μεταρρύθμιση των αναλυτικών προγραμμάτων. Η έννοια του αναλυτικού προγράμματος συγχέεται συχνά με την έννοια της ύλης των μαθημάτων που πρέπει να διδαχτεί από τους/τις εκπαιδευτικούς και να αφομοιωθεί από τους/τις μαθητές/τριες. Γι' αυτό μερικές φορές η μεταρρύθμισή τους θεωρείται μια υπόθεση πρόσθεσης και αφαίρεσης ύλης, αλλαγής βιβλίων, διδακτικών μέσων και μεθόδων διδασκαλίας. Η συζήτηση για την αναμόρφωση των ΑΠΣ της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης επηρεάζεται αναπόφευκτα από τρεις παράγοντες: α) από τις διαρκείς μεταβολές που σημειώνονται σε κοινωνικό, οικονομικό και πολιτιστικό επίπεδο, β) από την τάση γενίκευσης της λυκειακής εκπαίδευσης και γ) από την πίεση που ασκεί στο Λύκειο το σύστημα πρόσβασης στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση και αντίστροφα.

3.3 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή του ΑΠΣ

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) των μαθηματικών από τη Μεταπολίτευση ως το 1997 χαρακτηριζόταν κυρίως από δασκαλοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας, ήταν συγκεντρωτικό, αποτελούσε ολοκληρωμένη πρόταση ως προς τη διαμόρφωση και τη διεξαγωγή του μαθήματος, έδινε βαρύτητα στην επίτευξη γνωστικών στόχων, αγνοώντας τις ιδιαίτερες ανάγκες, τα ενδιαφέροντα και τις κλίσεις των μαθητών/τριών. Υπήρχε ασάφεια και αοριστία στους στόχους του μαθήματος, επιδίωκε κυρίως την απομνημόνευση γνώσεων, προσδιόριζε το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης δίχως να δίνει τη δυνατότητα ανάληψης πρωτοβουλιών από τον εκπαιδευτικό.

Με τις εκπαιδευτικές αλλαγές που επιχειρήθηκαν κατά την περίοδο 1997-2003, έγινε προσπάθεια στο ΑΠΣ των μαθηματικών να αντιμετωπιστεί η μάθηση όχι ως συσσώρευση γνώσεων αλλά ως δημιουργική καλλιέργεια των τρόπων πολυπρισματικής κατάκτησης της γνώσης μέσα από συμμετοχικές και βιωματικές διαδικασίες (Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, 1997). Επίσης, από το 2003, με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και τα ΑΠΣ για την υποχρεωτική εκπαίδευση υιοθετήθηκε και η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης και επιχειρήθηκε η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων. Τα προγράμματα αυτά στόχευαν στη διασφάλιση της συνέχειας της διδασκόμενης ύλης, στην εξάλειψη της αποσπασματικότητας της γνώσης, στην αποφυγή επικαλύψεων της ύλης, καθώς και στη δημιουργία ενός πλαισίου που θα διασφάλιζε μεγαλύτερη αυτονομία στον εκπαιδευτικό.

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών ορίζεται η αποστολή και οι σκοποί της εκπαίδευσης, οι θεμελιώδεις παιδαγωγικές αρχές, οι αρχές οργάνωσης και εφαρμογής των προγραμμάτων σπουδών, οι ειδικοί στόχοι, το περιεχόμενο, τα προγράμματα σπουδών για κάθε τάξη και κάθε γνωστικό αντικείμενο, οι μέθοδοι διδασκαλίας και μάθησης, οι δείκτες επιτυχίας και οι τρόποι αξιολόγησης, το μαθησιακό περιβάλλον, οι σχέσεις σχολείου και οικογένειας, οι συμπληρωματικές δραστηριότητες που απαιτούνται για την επιτυχία της αποστολής που έχει το σχολείο.

Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών εδράζεται σε τέσσερις αρχές:

1: Οι μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών.

2: Το αναλυτικό πρόγραμμα δίνει έμφαση στη λύση προβλήματος.

3: Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης.

4: Όλοι οι μαθητές/τριες πρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό πρόγραμμα μαθηματικών.

Στο ΑΠΣ του 1997 καθορίστηκαν οι γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο. Όπως αναφέρεται στο άρθρο 4, στο Λύκειο, οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών/τριών θα πρέπει να εμπεδωθούν, να αναπτυχθούν και να επεκταθούν σε θεωρητικότερο επίπεδο από αυτό του Γυμνασίου. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές/τριες θα πρέπει:

- Να είναι ικανοί να αναπτύσσουν και να συσχετίζουν ιδέες, να διαμορφώνουν ένα σχέδιο διαπραγμάτευσης και να ακολουθούν κατάλληλες στρατηγικές, όταν αντιμετωπίζουν μια μη οικεία κατάσταση.
- Να μυηθούν και να εξοικειωθούν με τη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και, γενικότερα, να καλλιεργήσουν τη «μαθηματική τους σκέψη και την κριτική τους ικανότητα».
- Να αποκτήσουν μια αξιόλογη βάση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που θα τους επιτρέψει να συνεχίσουν τις σπουδές τους σε πιο προχωρημένο επίπεδο.
- Να ασκηθούν στη χρησιμοποίηση των Μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις και στη σύγχρονη πραγματικότητα.
- Να γνωρίσουν τις ποικίλες εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες.
- Να εκτιμήσουν την αισθητική και ιστορική συνιστώσα των Μαθηματικών.
- Να χρησιμοποιούν με αποτελεσματικό τρόπο τις δυνατότητες των υπολογιστών τσέπης και των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην επίλυση προβλημάτων.

- Να είναι ικανοί να εκφράζουν και να παρουσιάζουν τις ιδέες τους με τη γλώσσα και τις δυνατότητες των Μαθηματικών, προφορικά και γραπτά αλλά και με τη χρήση των νέων τεχνολογιών.

Κατά τις σπουδές τους στο Λύκειο, οι μαθητές/τριες θα έλθουν σε επαφή με νέες ιδέες και έννοιες καθώς και με κλάδους των Μαθηματικών όπως η Άλγεβρα, η Ανάλυση, η Γεωμετρία, η Αναλυτική Γεωμετρία, οι Μιγαδικοί Αριθμοί, η Θεωρία Αριθμών, οι Πιθανότητες και η Στατιστική.

Προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις αυτές, το πρόγραμμα σπουδών και κατά συνέπεια και το σχολικό βιβλίο, θα πρέπει να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές/τριες να:

- Να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τα δεδομένα, τα σύμβολα και την ορολογία.
- Να οργανώνουν τα δεδομένα τους και να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες προσεγγίσεις και εκτιμήσεις.
- Να κατανοούν τις αριθμητικές, αλγεβρικές και γεωμετρικές (στο επίπεδο και στον χώρο) έννοιες και σχέσεις.
- Να αναγνωρίζουν την κατάλληλη μαθηματική διαδικασία για τη διαπραγμάτευση μιας κατάστασης.
- Να μεταφράζουν τα προβλήματα στη μαθηματική γλώσσα και να επιλέγουν και να εφαρμόζουν τις κατάλληλες τεχνικές και αλγορίθμους.
- Να ανακαλούν από τη μνήμη τους και να κάνουν σωστή χρήση των αλγοριθμικών διαδικασιών.
- Να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να κάνουν λογικές συνεπαγωγές.
- Να εκφράζουν την επίλυση ενός προβλήματος με λογικό και σαφή τρόπο και να ερμηνεύουν τα συμπεράσματά τους.
- Να επιλύουν προβλήματα που απαιτούν εκτεταμένη εργασία μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- Να διαβάζουν και να κατανοούν μαθηματικά κείμενα.
- Να κάνουν κριτική σε μαθηματικά επιχειρήματα.

Το 2012 διαπιστώνεται η παύση λειτουργίας του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, που μέχρι τότε ήταν υπεύθυνο για τη συγγραφή και αναθεώρηση των ΑΠΣ, και η έναρξη λειτουργίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π). Το 2015 παρουσιάζεται το νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά του Λυκείου. Όπως διατυπώνεται στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, τα Μαθηματικά είναι η γενική μελέτη των κανονικοτήτων (μοτίβα, πάττερν) και των σχέσεών τους. Οι σκοποί των μαθηματικών σε πρώτη φάση είναι η διαμόρφωση εικασιών επί αυτών των κανονικοτήτων και η απόδειξη αυτών και σε δεύτερη φάση η κατανόηση των φαινομένων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις και το μυαλό μας. Βασικός σκοπός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αναφέρεται ότι είναι να μυήσει τους/τις μαθητές/τριες στις βασικές αρχές, τον τρόπο σκέψης, στη γλώσσα της μαθηματικής επιστήμης και τη διασύνδεση της με τον κόσμο της εμπειρίας, και να τους/τις προετοιμάσει με αυτόν τον τρόπο για την ακαδημαϊκή τους εξέλιξη και την ενήλικη ζωή. Συγκεκριμένα, μέσω της διδασκαλίας των Μαθηματικών, επιδιώκεται οι μαθητές/τριες να δύναται:

Α) Να διατυπώνουν και να απαντούν ερωτήσεις μέσα και μέσω των Μαθηματικών και

Β) Να διαχειρίζονται με άνεση και αποτελεσματικότητα τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία.

Στο ΑΠΣ του 2015 υπάρχει ανακατανομή της ύλης της Άλγεβρας, Ανάλυσης και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Όπως προτάθηκε στην Α΄ Λυκείου συμπεριλήφθηκαν τα Συστήματα, οι Πιθανότητες και η εισαγωγή στην Τριγωνομετρία, στη Β΄ Λυκείου οι Πρόοδοι και η Στατιστική καθώς και οι Ακολουθίες και το όριο Ακολουθιών στα Μαθηματικά Προσανατολισμού ενώ στην Γ΄ Λυκείου τα Στοχαστικά Μαθηματικά και η Αναλυτική Γεωμετρία. Το πρόγραμμα αυτό δεν εφαρμόστηκε.

Το 2019 προτάθηκε από το ΙΕΠ και υιοθετήθηκε από την κυβέρνηση το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Το πρόγραμμα αυτό περιλαμβάνει τις θεματικές της Ανάλυσης και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Ειδικότερα αναφέρει ότι η Μαθηματική Ανάλυση απαιτεί την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης ποιοτικά διαφορετικού από αυτόν που γνωρίσαν οι μαθητές/τριες στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Ο πυρήνας αυτού του διαφορετικού τρόπου σκέψης είναι οι άπειρες διαδικασίες και ο προσδιορισμός άγνωστων ποσοτήτων μέσα από την προσέγγιση τους οσοδήποτε «κοντά» από γνωστές ποσότητες. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού έχει ως βάση την έννοια του ορίου, η οποία αποτελεί τη θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης. Οι βασικές υποπεριοχές της Ανάλυσης του παρόντος προγράμματος σπουδών παραμένουν οι ίδιες με αυτές του προϋπάρχοντος.

Τέλος, αναφέρεται ότι τα Στοχαστικά Μαθηματικά, ως μέρος του παρόντος Προγράμματος Σπουδών, αποβλέπουν: α) στην καλλιέργεια της στοχαστικής σκέψης των μαθητών/μαθητριών και β) στην αξιοποίησή τους στη μάθηση άλλων επιστημονικών πεδίων που η τεκμηρίωση των αποτελεσμάτων τους βασίζεται στα αποτελέσματα και τις μεθόδους των Στοχαστικών Μαθηματικών. Μετά από έντονες αντιδράσεις της Μαθηματικής κοινότητας τελικά τα Στοχαστικά Μαθηματικά δε συμπεριλήφθηκαν στη διδακτέα και εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου. Το σχολικό έτος 2020-2021 διδάχθηκαν στους/στις μαθητές/τριες της Γ’ Λυκείου που ακολούθησαν τον Προσανατολισμό Ανθρωπιστικών Σπουδών.

3.4 Η αντίστροφη συνάρτηση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

Στο πρόγραμμα σπουδών του 2019 η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης αναφέρεται στο Β΄ ΜΕΡΟΣ: ΑΝΑΛΥΣΗ στην ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ και το ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: Η έννοια της συνάρτησης, για την οποία προτείνονται συνολικά 37 ώρες διδασκαλίας. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας αυτής είναι οι μαθητές/τριες και οι μαθήτριες να είναι ικανοί/-ές να:

- γνωρίζουν τον ορισμό και το συμβολισμό της συνάρτησης
- βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν δίνεται ο τύπος της και να γνωρίζουν πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες
- αναπαριστούν γραφικά τις βασικές συναρτήσεις (πολυωνυμικές, ρητές τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές) και να αντλούν πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων
- βρίσκουν το άθροισμα, τη διαφορά το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση συναρτήσεων
- γνωρίζουν την έννοια της μονοτονίας (γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα), των ακροτάτων συνάρτησης, της 1-1 συνάρτησης, καθώς και της αντίστροφης συνάρτησης.

Όπως αναφέρεται, οι μαθητές/τριες έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης και σχετικές έννοιες σε προηγούμενα χρόνια. Στην Γ΄ τάξη του Λυκείου γίνεται μια συστηματική παρουσίαση και συμπλήρωση αυτών των εννοιών. Για την κατανόηση των πράξεων προτείνεται η χρήση των ΤΠΕ καθώς και για τη σύνθεση συναρτήσεων να εισαχθεί με παραδείγματα. Επισημαίνεται ότι για την κατανόηση της έννοιας της σύνθεσης συναρτήσεων και την αξιοποίηση της αργότερα είναι αρκετά μερικά απλά παραδείγματα μονοτονίας (γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα), των ακροτάτων συνάρτησης, της 1-1 συνάρτησης, καθώς και της αντίστροφης συνάρτηση.

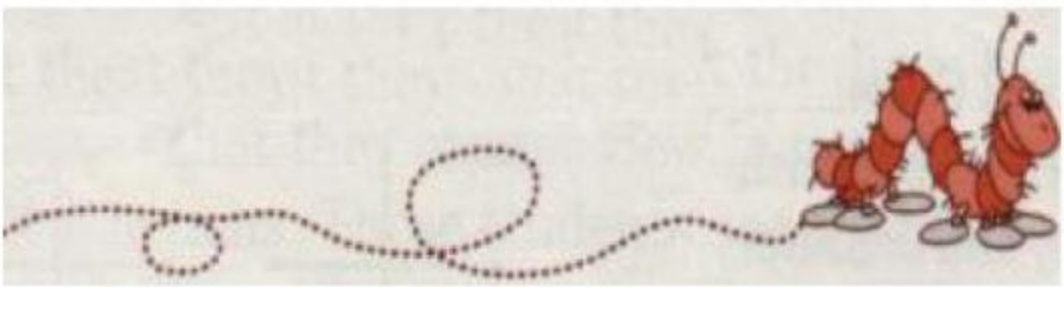
Η αντίστροφη συνάρτηση βρίσκεται στην παράγραφο 1.3 του σχολικού βιβλίου, για την οποία οι οδηγίες διδασκαλίας αφιερώνουν 8 διδακτικές ώρες. Παρότι στην παράγραφο αυτή οι μαθητές/τριες συναντούν τις γνωστές έννοιες της μονοτονίας, των ακροτάτων και της ένα προς ένα συνάρτησης από προηγούμενα χρόνια, η διδακτική πράξη έχει αποδείξει ότι οι έννοιες αυτές παραμένουν δύσκολες για τους/τις μαθητές/τριες/τριες, με αποτέλεσμα οι διδάσκοντες να αφιερώνουν τουλάχιστον 5 ώρες στη διδασκαλία τους. Οι υπόλοιπες 3 ώρες αφιερώνονται στη διδασκαλία της έννοιας της αντίστροφης συνάρτησης και των ιδιοτήτων της καθώς και στην εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης και του συνόλου τιμών μιας 1-1 συνάρτησης.

Στο πρόγραμμα σπουδών του 2015 στο Κεφάλαιο 3: Συναρτήσεις και στην παράγραφο 3.1 Γενικά περί συναρτήσεων προτάθηκε οι μαθητές/τριες μέσω παραδειγμάτων να οδηγηθούν στον ορισμό της συνάρτησης ένα προς ένα και να τους/τις επισημανθεί ότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ένα προς ένα. Μάλιστα προτείνονται και δυο δραστηριότητες για το σκοπό αυτό, η δραστηριότητα 12:

« Μια κάμπια σέρνεται πάνω σε ένα χαρτί όπως φαίνεται στο σχήμα.

Α) εάν θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση της κάμπιας πάνω στο χαρτί σε σχέση με το χρόνο, μπορεί η θέση να περιγράφει ως μια συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Β) Μπορεί ο χρόνος να περιγραφεί ως μια συνάρτηση της θέσης; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.»



Εικόνα 4 : Η πορεία της κάμπιας αντιπροσωπεύει την έννοια μιας συνάρτησης.

και η δραστηριότητα 13:

« Δώδεκα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν φόρο επί των πωλήσεων 6%. Δηλαδή, για κάθε ευρώ που δαπανάται για αγορά σε ένα κατάστημα, θα πρέπει να αποδίδονται στο δημόσιο 6 λεπτά. Να περιγράψετέ με λόγια και να αναπαραστήσετε με διάφορους τρόπους (εξίσωση, πίνακα, γράφημα) τη σχέση ανάμεσα στον φόρο επί των πωλήσεων(σε ευρώ) και της τιμής αγοράς (σε ευρώ). Μπορεί ο φόρος επί των πωλήσεων να εκφραστεί ως συνάρτηση της τιμής αγοράς των προϊόντων; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.»

Η λογαριθμική συνάρτηση προτάθηκε να διδάσκεται στην Γ΄ Λυκείου και μέσω αυτής να γίνει η αναφορά στην αντίστροφη συνάρτηση. Ενώ η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης δεν αποτελούσε αυτόνομη διαδικασία και δεν αναφερόταν στο πρόγραμμα σπουδών.

Στα προγράμματα σπουδών των προηγουμένων χρόνων η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης συμπεριλαμβανόταν στη διδασκαλία των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης, όπως και στο σημερινό πρόγραμμα σπουδών και οι ώρες για τη διδασκαλία της ήταν περίπου οι ίδιες.

Μελετώντας τα προγράμματα σπουδών παρατηρούμε ότι παρότι η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης είναι σημαντική για την επίλυση προβλημάτων, εξισώσεων και ανισώσεων δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά για τη διδασκαλία της. Ένας/μια νέος/α εκπαιδευτικός που θα πρέπει να τη διδάξει στους/στις μαθητές/τριες της Γ΄ Λυκείου στηριζόμενος/η σε αυτά θα θεωρήσει ότι οι μαθητές/τριες τη διδάχθηκαν στα προηγούμενα χρόνια. Η διδακτική πράξη έχει αποδείξει ότι η έννοια αυτή είναι δύσκολη στην κατανόηση και την εμπέδωση από τους/τις μαθητές/τριες.

3.5 Σχολικό Εγχειρίδιο

Η σπουδαιότητα της χρήσης των σχολικών εγχειριδίων στην εκπαιδευτική διαδικασία έχει τονισθεί ιδιαίτερα στη διεθνή βιβλιογραφία (Peacock & Cleghorn, 2004), καθώς κατέχουν ένα καίριο ρόλο στην παρεχόμενη σχολική γνώση (Ματσαγγούρας, 2006). Αποτελούν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στους στόχους και στα προσδοκώμενα αποτελέσματα που τίθενται από το πρόγραμμα σπουδών (Valverde et al., 2002) συγκροτώντας την κύρια πηγή του διδακτικού υλικού τόσο για τον/την εκπαιδευτικό όσο και για τον/την μαθητή/τρια (Eisner, 1987; McKnight et al., 1987; Johansson, 2005). Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, τα σχολικά εγχειρίδια είναι τα μοναδικά εγκεκριμένα από το Υπουργείο Παιδείας , σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ, 2003) και γι’ αυτό κατέχουν έναν σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Σε εκπαιδευτικά συστήματα με κεντρικές εξετάσεις των οποίων τα αποτελέσματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελλοντική πορεία των μαθητών/τριών η πληρότητα του σχολικού εγχειριδίου θεωρείται επιβεβλημένη. Το σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου προέρχεται από το παλαιότερο βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της ίδιας τάξης το οποίο με τη σειρά του προήλθε από την σύμπτυξη δυο παλαιότερων εγχειριδίων, αυτό των Μαθηματικών της Δ΄Δέσμης και αυτό των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου. Το αρχικό σχολικό εγχειρίδιο είχε σχεδιαστεί για ένα σύστημα με δεκατέσσερα πανελλαδικώς εξεταζόμενα μαθήματα και με την πρόβλεψη να διδάσκεται ολόκληρο, ως εκ τούτου δεν υπήρχε εμβάθυνση. Οι διαδοχικές μειώσεις της ύλης είχαν ως αποτέλεσμα τη διδασκαλία μόνο της Ανάλυσης. Ως ένα εγχειρίδιο Ανάλυσης παρουσιάζει αρκετές ελλείψεις σε επίπεδο θεωρίας και ταυτόχρονα ως το βασικό εγχειρίδιο για την προετοιμασία των μαθητών για τις Πανελλήνιες εξετάσεις θεωρείται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές/τριες. Οι παρανοήσεις τους για τις διάφορες έννοιες εμφανίζονται συχνά στα γραπτά των εξετάσεων αλλά και κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αν συνυπολογίσουμε πως οι μαθητές/τριες βάλλονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τους κάνουν να λειτουργούν μηχανικά, τότε γίνεται κατανοητό γιατί η Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου θεωρείται από αυτούς το δυσκολότερο μάθημα που καλούνται να εξεταστούν για την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο.

3.6 Η εισαγωγή της έννοιας της αντίστροφης συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια

Ο όρος αντίστροφη συνάρτηση εισέρχεται για πρώτη φορά στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Λυκείου, παρόλα αυτά η έννοιά της αντίστροφης συνάρτησης εμφανίζεται πάντα στις ενότητες που αναφέρονται στην έννοια της συνάρτησης.

Στο σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Π. Βλάμος, Π. Δρούτσας, Γ. Πρέσβης, Κ. Ρεκούμης, υπάρχει στο Μέρος Α-Κεφάλαιο $3^{ο}$- Συναρτήσεις, Ενότητα 3.1: Η έννοιά της συνάρτησης- Άσκηση 7.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης y = 3x - 5:

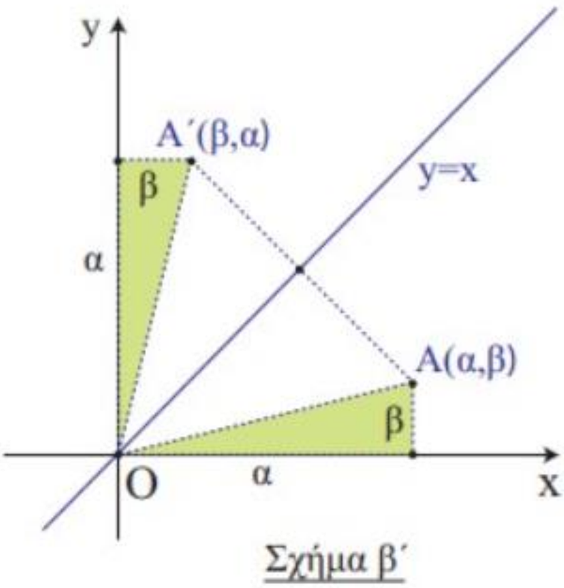
x	2		–3	
y		7		–2

Εικόνα 5 : Άσκηση με πίνακα τιμών του σχολικού εγχειριδίου της Β' Γυμνασίου.

Πηγή : (Βλάμος et al., 2009)

Η επίλυση της σχέσης ως προς την μεταβλητή x οδηγεί στην σχέση $x = \frac{y+5}{3}$, δηλαδή στην αντίστροφη συνάρτηση της αρχικής συνάρτησης. Η συμπλήρωση του πίνακα σε αυτή την περίπτωση γίνεται με απλή αντικατάσταση στην αντίστοιχη σχέση.

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου αποδεικνύεται γεωμετρικά γιατί το συμμετρικό σημείο του σημείου Α(α, β) ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α).



Εικόνα 6 : Γεωμετρική ερμηνεία συμμετρικών σημείων ως προς την y=x.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2010

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας Β’ Λυκείου, Κεφάλαιο 5: Εκθετική- Λογαριθμική Συνάρτηση, Ενότητα 5.3 παρουσιάζεται η λογαριθμική συνάρτηση και οι ιδιότητες της:

Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_\alpha x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_\alpha x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \to R \quad \text{με} \quad f(x) = \log_\alpha x$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.**

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$. Επειδή

$$\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x,$$

αν το $M(\xi,\eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y = \log_\alpha x}$, τότε το $N(\eta,\xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y = \alpha^x}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, $M(\xi,\eta)$ και $N(\eta,\xi)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$, Επομένως

Εικόνα 7 :Ορισμοί Λογαριθμικής και Εκθετικής συνάρτησης.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = \log_\alpha x \quad \text{και} \quad y = \alpha^x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $X\hat{O}y$ και $X'\hat{O}y'$.

Εικόνα 8 : Συμμετρία των γραφικών παραστάσεων της Λογαριθμικής και Εκθετικής συνάρτησης ως προς την ευθεία y=x.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012

Αν λάβουμε τώρα υπόψη μας την παραπάνω συμμετρία και όσα μάθαμε για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

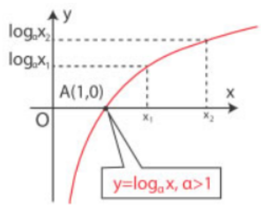
Αν $\boldsymbol{\alpha > 1}$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\textbf{αν} \quad x_1 < x_2, \quad \textbf{τότε} \quad \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

($\log_\alpha x < 0$, αν $0 < x < 1$) και ($\log_\alpha x > 0$, αν $x > 1$)



Εικόνα 9: Ιδιότητες που προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της Λογαριθμικής συνάρτησης για α > 1.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012

● Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy′.

Αν **$0 < \alpha < 1$,** τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$:

● Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$

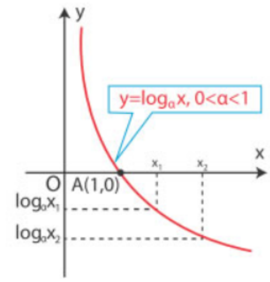
● Έχει σύνολο τιμών το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

● Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι

$$\textbf{αν} \quad x_1 < x_2, \quad \textbf{τότε} \quad \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

($\log_\alpha x > 0$, αν $0 < x < 1$) και ($\log_\alpha x < 0$, αν $x > 1$)



● Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Εικόνα 10 : Ιδιότητες που προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της Λογαριθμικής συνάρτησης για α < 1.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012

● Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } \log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2, \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$$

Εικόνα 11 : Ιδιότητα «1-1» συνάρτησης για τη λογαριθμική συνάρτηση.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012

3.7 Η αντίστροφη συνάρτηση στο σχολικό εγχειρίδιο της Α’ Δέσμης και το σημερινό σχολικό εγχειρίδιο

Το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δέσμης: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου -Ανάλυση ΟΕΔΒ 1992 του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Β. Κατσαργύρης, Κ. Μεντής, Γ. Παντελίδης και Κ. Σούρλας αντικαταστάθηκε με το σημερινό σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ» υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος.

Η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δέσμης στην παράγραφο 1.8 Συνάρτηση «ένα προς ένα» - Αντίστροφη Συνάρτηση. Στην παράγραφο αυτή δίνεται ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας «ένα προς ένα» συνάρτησης f, οι ιδιότητες της σύνθεσης της αντίστροφης συνάρτησης με τη συνάρτηση καθώς και της σύνθεσης της συνάρτησης με την αντίστροφη, η σχέση των γραφικών παραστάσεων μιας συνάρτησης με την αντίστροφη της καθώς και δυο βασικές προτάσεις που αφορούν τις συναρτήσεις αυτές με τις αποδείξεις τους.

Πρόταση 1: Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και «ένα προς ένα».

Απόδειξη:

Έστω η συνάρτηση $f: A \to R$ και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, ο λόγος μεταβολής

$\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ είναι διάφορος του 0, οπότε θα είναι:

$f(x_2) - f(x_1) \neq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$. Επομένως η f είναι «ένα προς ένα».

Πρόταση 2: Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

Ας υποθέσουμε ότι η αντίστροφη της δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν

$y_1, y_2 \in A$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Επειδή όμως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε: $f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ που είναι άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$. Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα αποδεικνύεται η πρόταση και για μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο Α.

Επίσης υπάρχουν και δυο λυμένα παραδείγματα για την κατανόηση της αντίστροφης συνάρτησης.

Παράδειγμα 1: Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-3}$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το A=[3, +∞) και είναι «ένα προς ένα», αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε $\sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Επομένως ορίζεται η αντιστροφή της $f^{-1}: f(A) \to R$.

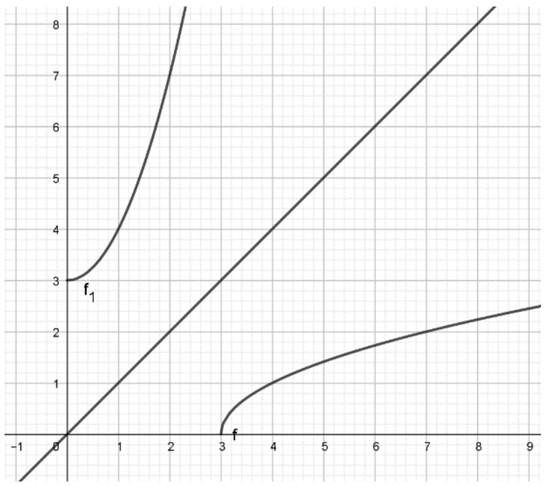
Ευκολά διαπιστώνουμε ότι είναι $f(A) = [0, +\infty)$.

Τέλος, για κάθε $y \in [0, +\infty)$, έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = y \Leftrightarrow x = y^2 + 3$.

Αυτό σημαίνει ότι $f^{-1}(y) = y^2 + 3$.

Επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x και η εξαρτημένη μεταβλητή με y, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αντιστροφή συνάρτηση της συνάρτησης f είναι η : f^{-1}: $[0, +\infty) \to R$, με $f^{-1}(x) = x^2 + 3$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική, ως προς την ευθεία y=x, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = x^2 + 3, x \geq 0$.



Εικόνα 12: Συμμετρία γραφικών παραστάσεων ως προς την ευθεία y=x, ιδιότητα των αντίστροφων συναρτήσεων.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2013.

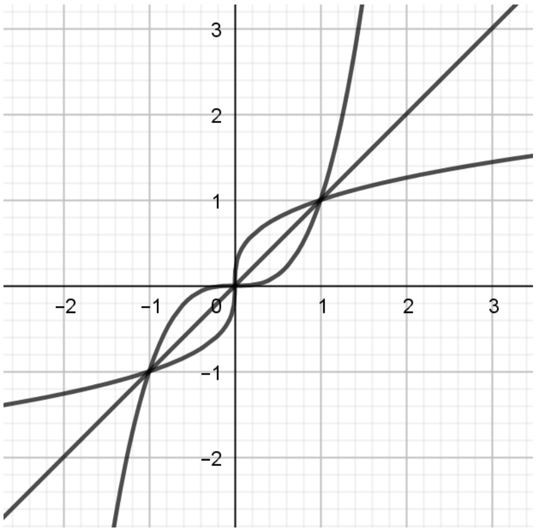
Παράδειγμα 2: Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^3$ καθώς και της αντίστροφης της.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι, όπως έχουμε παρατηρήσει, γνησίως αύξουσα στο R, οπότε και η αντιστροφή της

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, x>0 \\ -\sqrt[3]{-x}, x\le 0 \end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο R.



Εικόνα 13 : Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ και της αντίστροφης της.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2013.

Τέλος, στην παράγραφο αυτή υπάρχουν τρεις ασκήσεις Α ομάδας, τρεις ασκήσεις Β ομάδας καθώς δυο ασκήσεις που αφορούν την αντιστροφή συνάρτηση στις Γενικές Ασκήσεις του 1ου κεφαλαίου.

Ασκήσεις Α ομάδας

1. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»;

α) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

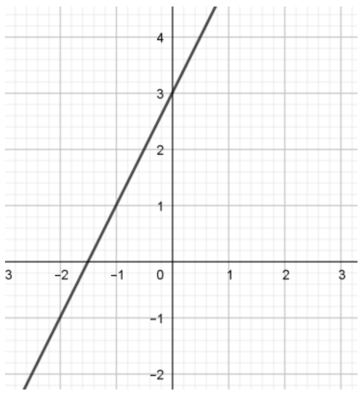
β) $f(x) = -x^2 + 7$

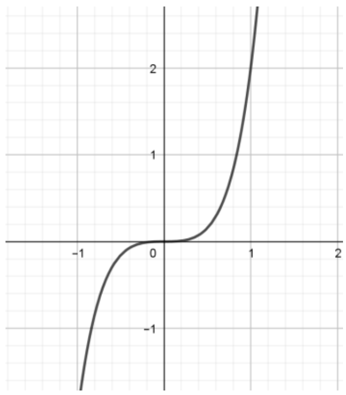
γ) $f(x) = -x^2 + 7, x \geq 0$

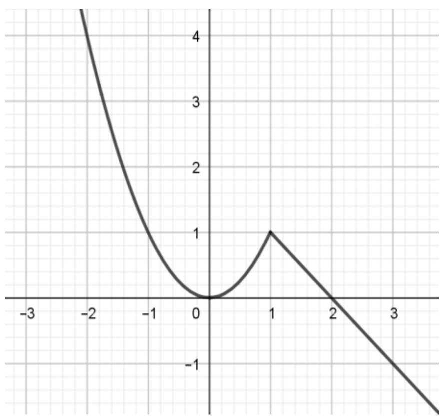
δ) $f(x) = |x| + 1$

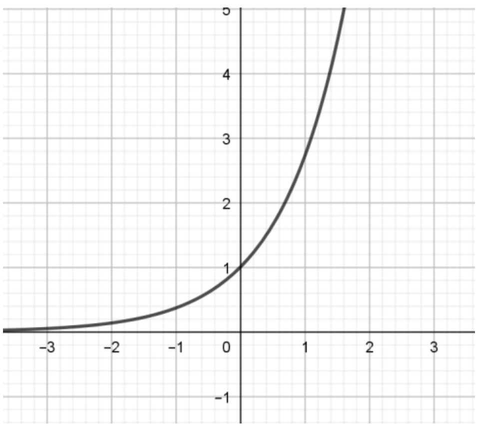
2. Να βρείτε την αντιστροφή συνάρτηση, για όσες από τις συναρτήσεις της προηγουμένης άσκησης αντιστρέφονται.

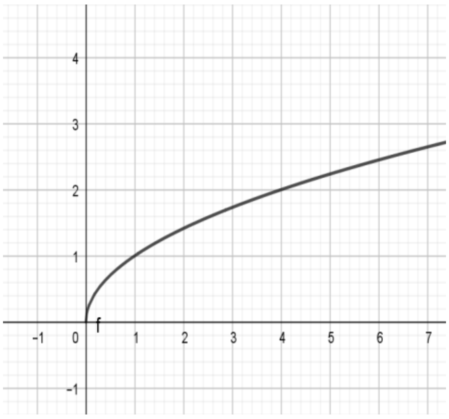
3. Ποιες από τις συναρτήσεις f με γραφικές παραστάσεις, που δίνονται στα παρακάτω σχήματα, αντιστρέφονται; Στις περιπτώσεις που ορίζεται η f^{-1}, να χαράξετέ την γραφική της παράσταση.

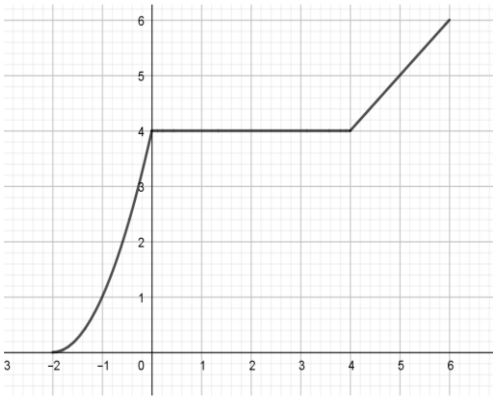












Ασκήσεις Β ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη τους.

α) $f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{6 - x}}$ β) $f(x) = 2x^3 - 1$

2. Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

α) $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3}}$ β) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. Αν $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = 3x - 5$, να βρείτε τις συναρτήσεις:

α) $(fog)^{-1}$ β) $f^{-1}og^{-1}$ γ) $g^{-1}of^{-1}$

Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3-1}{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

5. Αν $f(x) = \begin{cases} x+1, x<1 \\ x^2+1, x \geq 1 \end{cases}$ να μελετήσετε τη μονοτονία της και να προσδιορίσετε, αν ορίζεται, τη συνάρτηση f^{-1}.

Η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης παρουσιάζεται στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο στην παράγραφο 1.3 Μονότονες Συναρτήσεις- Αντίστροφη Συνάρτηση.

Στην υποενότητα Αντίστροφη Συνάρτηση παρουσιάζεται αναλυτικά ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης ως μια διαδικασία αντιστοίχισης κάθε στοιχείου y του συνόλου τιμών της σε ένα ακριβώς στοιχείο x του πεδίου ορισμού της. Αρχικά, η αντίστροφη συνάρτηση δίνεται ως g και στη συνέχεια παρουσιάζεται ως f^{-1}. Έπειτα, δίνονται οι ιδιότητες της σύνθεσης της συνάρτησης με την αντίστροφή της καθώς και της σύνθεσης της αντίστροφης με τη συνάρτηση. Τέλος, αποδεικνύεται γιατί οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και της αντίστροφης της είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου.

Στην παράγραφο αυτή υπάρχει ένα παράδειγμα και μια εφαρμογή που αφορούν την αντίστροφη συνάρτηση. Το παράδειγμα αφορά την εκθετική συνάρτηση και την αντίστροφη της, λογαριθμική ενώ στην εφαρμογή παρουσιάζεται η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$.

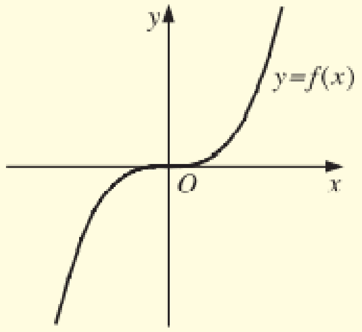
Συνολικά υπάρχουν τέσσερις ασκήσεις στην παράγραφο αυτή. Οι δυο αναφέρονται στην αντίστροφη συνάρτηση. Στις ερωτήσεις κατανόησης του 1ου κεφαλαίου δεν υπάρχει κάποια ερώτηση που να αναφέρεται στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

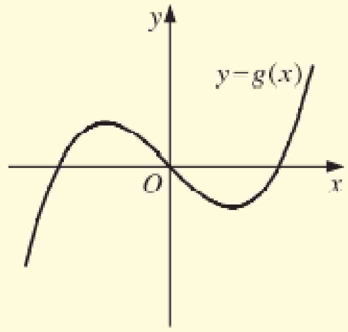
Ασκήσεις Α Ομάδας

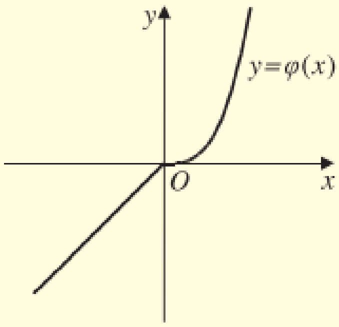
2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1–1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

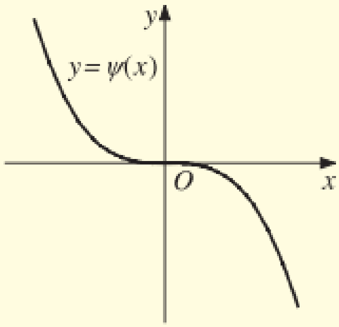
i) $f(x) = 3x - 2$	v) $f(x) = \ln(1-x)$
ii) $f(x) = x^2 + 1$	vi) $f(x) = e^{-x} + 1$
iii) $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$	vii) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
iv) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$	viii) $f(x) - \lvert x - 1 \rvert$.

3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ και ψ.









Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

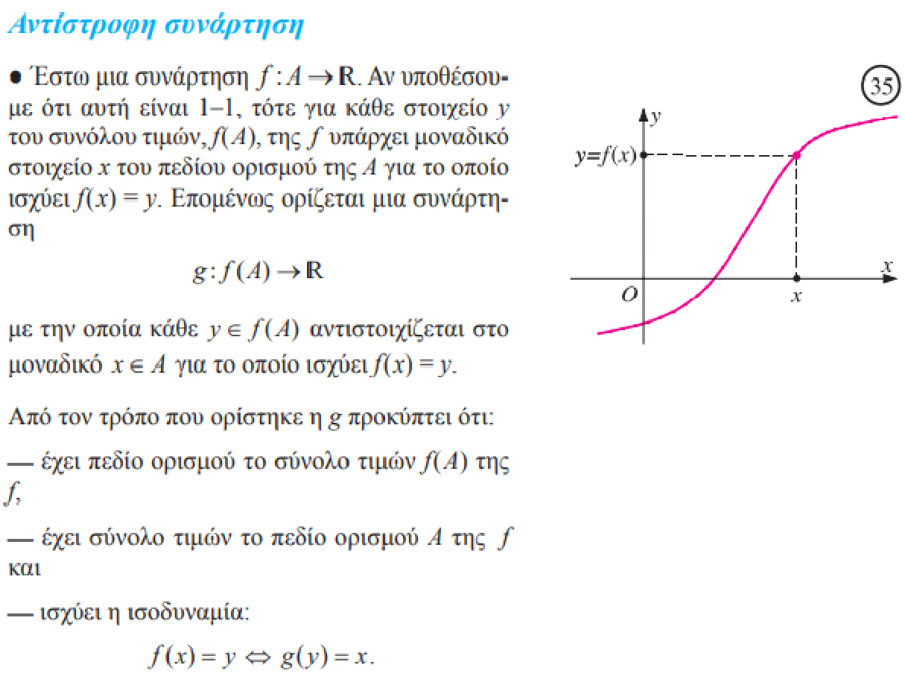
3.8 Σύγκριση των δυο σχολικών εγχειριδίων

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο το 2006, σε ό ,τι αφορά το περιεχόμενό του, το εγχειρίδιο του/της μαθητή/τριας πρέπει να είναι συμβατό με το Πρόγραμμα Σπουδών και να έχει συνταχθεί και διαρθρωθεί με τρόπο που να εξυπηρετεί το σκοπό και τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην αντίστοιχη βαθμίδα.

Στην κατεύθυνση αυτή οφείλει να είναι οργανωμένο σε ομοιογενείς ενότητες των οποίων το περιεχόμενο και το ύφος διασφαλίζουν τη συνέχεια και την ενότητα στις διδασκόμενες έννοιες. Όπως παρατηρήσαμε στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης παρουσιάζεται στην ίδια παράγραφο με την έννοια της μονοτονίας και των ακροτάτων, παρότι οι μαθητές/τριες τη συναντούν για πρώτη φορά. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δέσμης υπήρχε ξεχωριστή παράγραφος για την έννοια αυτήν.

Κάθε ενότητα είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει εισαγωγικό τμήμα, το οποίο προετοιμάζει το/τη μαθητή/τρια για το περιεχόμενό της, τον κατατοπίζει για τις πιθανές σχέσεις της με τις υπόλοιπες ενότητες του βιβλίου, τον/την πληροφορεί για τον σκοπό της διδασκαλίας της και τους στόχους που αναμένεται να επιτευχθούν με την ολοκλήρωσή της. Σε κανένα από τα δυο σχολικά εγχειρίδια δεν επιτυγχάνεται ο στόχος αυτός. Δεν υπάρχει η σύνδεση της αντίστροφης συνάρτησης με την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων, εύρεση συνόλου τιμών και επίλυση προβλήματος.

Αναφορικά με τη διδακτική προσέγγιση του εγχειριδίου θα πρέπει να καλλιεργεί την ανάπτυξη ερευνητικού πνεύματος στον/στην μαθητή/τρια και να υιοθετεί όπου και όσο είναι δυνατόν το ανακαλυπτικό μοντέλο μάθησης. Στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο αυτός ο στόχος εκπληρώνεται μέσα από την παρουσίαση του ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης


Αντίστροφη συνάρτηση

• Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Εικόνα 14 : Αυστηρός Ορισμός αντίστροφης συνάρτησης.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2013.

Σε αντίθεση με το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δέσμης, όπου δεν ξεκαθαρίζεται το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της νέας συνάρτησης.

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» συνάρτηση, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R},$$

που σε κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζει το μοναδικό αρχέτυπό του $x \in A$ και ονομάζεται **αντίστροφη της f.** Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

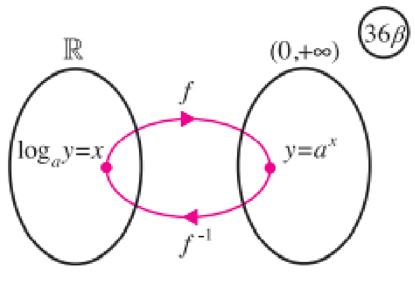
$$\boxed{f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y}$$

Εικόνα 15 : Ορισμός Αντίστροφης συνάρτησης.

Πηγή : Κατσαργύρης et al., 1992.

Το μαθηματικό περιεχόμενο θα πρέπει να είναι συμβατό με το αντίστοιχο Α.Π.Σ και το Δ.Ε.Π.Π.Σ. των Μαθηματικών. Μέσα από την ανάπτυξη του περιεχομένου θα πρέπει με τρόπο σαφή να παρουσιάζεται η βαθμιαία ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Κατά την ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου , θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τόσο οι προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών/τριών όσο και οι γνώσεις που θα διδαχθούν αργότερα, ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή μετάβαση από τάξη σε τάξη. Το παράδειγμα του σημερινού σχολικού εγχειριδίου με την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση εξασφαλίζει τη σύνδεση με την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι 1–1 με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,



— έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

— έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$ και

— αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο μονάδικό $x \in \mathbf{R}$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x = y$. Επειδή όμως

$$\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_\alpha y$$

Εικόνα 16 : Διασύνδεση εκθετικής λογαριθμικής συνάρτησης, η πρώτη επαφή με την έννοια της αντιστρόφου συνάρτησης.

Πηγή : Ανδρεαδάκης et al., 2012

Οι προτεινόμενες ασκήσεις και τα προβλήματα οφείλουν να είναι κλιμακούμενης δυσκολίας και να καλύπτουν το εύρος των εφαρμογών που αφορούν τη νέα γνώση. Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θεωρούν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν όχι μόνο ένα σύνολο γνώσεων αλλά και διαδικασία μέσω της οποίας οικοδομούνται αυτές οι γνώσεις. Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες πρέπει να αναδεικνύονται τόσο οι νέες γνώσεις όσο και το πεδίο εφαρμογής των γνώσεων που έχουν ήδη οικοδομηθεί. Το σημερινό σχολικό εγχειρίδιο υπολείπεται σε σχέση με αυτό της Α΄ Δέσμης. Για παράδειγμα, δεν περιέχεται κάποια δραστηριότητα με την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f(x) = x^3$, η οποία είναι δίκλαδη όπως και με την αντίστροφη μιας δίκλαδης συνάρτησης. Σε όλες τις ασκήσεις οι συναρτήσεις μελετώνται στο πεδίο ορισμού τους και όχι σε κάποιο περιορισμό αυτού. Για παράδειγμα, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δέσμης υπάρχει μια άσκηση στην οποία ζητείται να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 7$ και στη συνέχεια η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 7\,, x \geq 0$ ως προς την ύπαρξη και την εύρεση της αντίστροφης. Η μελέτη μιας συνάρτησης σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της καθορίζει και το σύνολο τιμών αυτής. Στις Πανελλήνιες εξετάσεις συχνά εμφανίζεται τέτοιο ερώτημα όπως θα μελετήσουμε και παρακάτω.

Στα σχολικά εγχειρίδια θα πρέπει να αναδεικνύεται η στενή σχέση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο. Η πραγματικότητα μπορεί να αποτελεί τόσο σημείο εκκίνησης της διδασκαλίας όσο και στόχο της, καθώς προσφέρει με άμεσο και βιωματικό τρόπο πρόσβαση στη γνώση. Θα πρέπει, επίσης, να γίνεται αξιοποίηση της σύγχρονης τεχνολογίας ως παράγοντα διαμόρφωσης ενός πλούσιου σε ερεθίσματα μαθησιακού περιβάλλοντος. Η έλλειψη προβλημάτων και στα δυο σχολικά εγχειρίδια που να εμπλέκουν την αντίστροφη συνάρτηση και τις ιδιότητες της δεν καλύπτει ούτε αυτόν τον στόχο που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

4. Η αντίστροφη συνάρτηση στις Πανελλήνιες Εξετάσεις

4.1 Εισαγωγή

Αφορμή για τη συγγραφή της συγκεκριμένης εργασίας αποτέλεσε το Θέμα Β των Πανελλήνιων Εξετάσεων του 2020 και τα στατιστικά αποτελέσματα των μαθητών/τριών έτσι όπως προέκυψαν από το 2ο Βαθμολογικό Κέντρο της Θεσσαλονίκης. Η αντίστροφη συνάρτηση θεωρείται από τους/τις διδάσκοντες/ουσες των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου ένα εύκολο και προσιτό θέμα για τους/τις μαθητές/τριες και συνήθως συμπεριλαμβάνεται σε κάποιο θέμα που εξετάζονται και άλλες βασικές έννοιες της Ανάλυσης.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα σχολιάσουμε τα θέματα που αναφέρονταν στην αντίστροφη συνάρτηση στις Πανελλήνιες Εξετάσεις από το 2000 μέχρι το 2020 και θα παρουσιάσουμε ορισμένες απαντήσεις των μαθητών/τριών και τα στατιστικά αποτελέσματα από το Θέμα Β των Πανελλήνιων Εξετάσεων του 2020.

4.2 Θέματα από τις Πανελλήνιες Εξετάσεις

Το πρώτο θέμα είναι αυτό των επαναληπτικών εξετάσεων του 2002. Στο θέμα αυτό εκτός από την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες η επίλυση μιας εξίσωσης και ο υπολογισμός ολοκληρώματος που περιείχαν την αντίστροφη συνάρτηση. Όπως παρατηρούμε, δε δίνεται στους/στις μαθητές/τριες ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης, ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν στα επόμενα ερωτήματα και αυτό γιατί μπορούν να λυθούν χωρίς αυτόν. Στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχει παρόμοιο θέμα.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}, x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

συνάρτηση f^{-1}. **Μονάδες 10**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. **Μονάδες 5**

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$. **Μονάδες 10**

Το επόμενο θέμα είναι αυτό των Πανελλήνιων Εξετάσεων του 2003. Στο θέμα αυτό δε ζητήθηκε η εύρεση της αντίστροφης αλλά η ύπαρξη της. Και στο θέμα αυτό ζητήθηκε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της αντίστροφης συνάρτησης όπως και στο παραπάνω θέμα, απλώς στην περίπτωση αυτού του θέματος ο/η μαθητής/τρια θα έπρεπε να οδηγηθεί στη μέθοδο της αντικατάστασης.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathrm{IR}$. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. **Μονάδες 5**

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3. **Μονάδες 8**

Στις Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις του 2005 συνδέθηκε η έννοια της ένα προς ένα συνάρτησης με τον μη μηδενισμό της παραγώγου της και ζητήθηκε η επίλυση μιας εξίσωσης που περιέχει το σύμβολο της αντίστροφης.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2005

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathrm{IR}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”. **Μονάδες 7**

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1),να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{668}x+2005$. **Μονάδες 9**

Το 2006 ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες η εύρεση της αντίστροφης μιας παραβολής σε ένα περιορισμό του πεδίου ορισμού της στο οποίο αντιστρέφεται. Επίσης, για πρώτη φορά ζητήθηκε η εύρεση των σημείων τομής της συνάρτησης και της αντίστροφης με την ευθεία y=x και ο υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, στο σχολικό εγχειρίδιο δεν περιέχεται συνάρτηση που δεν είναι ένα προς ένα στο πεδίο ορισμού της αλλά είναι ένα προς ένα σε ένα περιορισμό αυτού.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) =2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x. **Μονάδες 4**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}. **Μονάδες 7**

Τα επόμενα δέκα χρόνια δεν εμφανίστηκε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις κάποιο θέμα που να αναφερόταν στην αντίστροφη συνάρτηση. Το 2016 έγινε αλλαγή στην ύλη των Πανελλήνιων Εξετάσεων. Εξαιρέθηκε το κεφάλαιο των Μιγαδικών Αριθμών και η ύλη αφορούσε τις έννοιες της Ανάλυσης. Αυτό είχε ως συνέπεια την εμφάνιση θεμάτων που αναφέρονταν στην αντίστροφη συνάρτηση και τις ιδιότητες της.

Το 2016 ζητήθηκε η εύρεση της αντίστροφης της συνάρτησης $f(x)=x^3$. Παρότι αποτελεί μια βασική συνάρτηση και η αντίστροφή της θα έπρεπε να είναι γνωστή οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι η αντίστροφη είναι πολλαπλού τύπου. Μάλιστα εκείνη τη χρονιά και αρκετοί εκπαιδευτικοί οδηγήθηκαν στην εύρεση λανθασμένης συνάρτησης.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f(x-\frac{1}{6}x^3).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx\ .$$

Μονάδες 6

Στις Πανελλήνιες Εξετάσεις του 2018 ζητήθηκε η εύρεση της αντίστροφης της σύνθεσης δυο συναρτήσεων. Παρόμοιο ήταν και το θέμα του 2020.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty}\varphi(x).$$

Μονάδες 6

Και στα δυο αυτά θέματα οι μαθητές/τριες παρουσίασαν ιδιαίτερη δυσκολία τόσο στην εύρεση του τύπου της αντίστροφης αλλά κυρίως στην εύρεση του πεδίου ορισμού της. Η δυσκολία αυτή εντοπίστηκε στον περιορισμό του πεδίου ορισμού της αρχικής συνάρτησης. Γεγονός στο οποίο οι μαθητές/τριες δεν έδωσαν ιδιαίτερη βαρύτητα.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0, \text{ όπου } 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2<F(1)<\ln(\dfrac{2^{e+1}}{e+1})$.

Μονάδες 5

Το 2018 ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες η απόδειξη της ύπαρξης της αντίστροφης συνάρτησης μέσω της μονοτονίας της και η εύρεση του πεδίου ορισμού της, δηλαδή η εύρεση του συνόλου τιμών της αρχικής συνάρτησης.

Τέλος στις Πανελλήνιες Εξετάσεις του 2019 ζητήθηκε η εύρεση της αντίστροφης μιας εκθετικής συνάρτησης και η γραφική της παράσταση. Ενώ οι περισσότεροι μαθητές/τριες βρήκαν σωστά τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, δυσκολεύτηκαν στην εύρεση του πεδίου ορισμού και στη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και της αντίστροφής της.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2),\ \ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

4.3 Μερικές απαντήσεις μαθητών/τριών στο Θέμα Β.2 των Πανελληνίων εξετάσεων του 2020

Στο ερώτημα 2 του Θέματος Β ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης της συνάρτησης $(fog)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}, \mu\varepsilon\ x > 0$. Στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχει παρόμοια συνάρτηση. Η διαφορά είναι ότι στο θέμα αυτό ζητήθηκε η αντίστροφη μιας συνάρτησης σε ένα περιορισμό του πεδίου ορισμού της και αυτό αποτέλεσε και τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους/τις μαθητές/τριες. Όπως θα δούμε και από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών, ενώ κατέληγαν στο σωστό τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, δεν κατέληγαν και στο σωστό πεδίο ορισμού.

Απάντηση Μαθητή/τριας 1

Επειδή η fog είναι γνησίως φθίνουσα άρα γνησίως μονότονη άρα 1-1.

Θέτουμε την (fog)(x)=y

$$\frac{e^x+2}{e^x-1} = y$$

$$ye^x - y - e^x = 2 \Rightarrow \frac{e^x(y-1)}{(y-1)} = \frac{y+2}{(y-1)} \Rightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Rightarrow$$

$$(\ln 1-1) \Rightarrow e^y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \Rightarrow (fog)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$A_{(fog)^{-1}} : \frac{x+2}{x-1} > 0$

$x+2>0$ και x-1>0

x>-2 και x>1

Αρα $A_{(fog)^{-1}} = (1, +\infty)$

Απάντηση Μαθητή/τριας 2

Για τη λύση της y=fog(x) ως προς x:

$$y=(fog)(x)$$
$$y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow\left(e^x-1>0\right)$$
$$\left(e^x-1\right)y=e^x+2\Leftrightarrow$$
$$e^xy-e^x=y+2\Leftrightarrow$$
$$e^x(y-1)=y+2\Leftrightarrow(\text{πρέπει y-1}\neq 0)$$
$$e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow(\ln:1-1)$$

$$x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow(fog)^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

Αφού $\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)=\ln(y+2)-\ln(y-1)$, άρα πρέπει y+2>0 και y-1>0 οπότε y>1

$$(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),x>1$$
.

Απάντηση Μαθητή/τριας 3

$$\begin{cases}y=(fog)(x)\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{e^x-2}{e^x-1}\\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ye^x-y=e^x+2\\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ye^x-e^x=y+2\\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}e^x(y-1)=y+2\\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=\dfrac{y+2}{y-1}\\ x>0,y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln e^x=\ln\dfrac{y+2}{y-1}\\ x>0,y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln\dfrac{y+2}{y-1}\\ x>0,y>1\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),x>1$.

Οι παραπάνω απαντήσεις αποτελούν χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών/τριών που εμφανίστηκαν στο 2^o Βαθμολογικό Κέντρο. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές/τριες παρουσίασαν αρκετές ελλείψεις στην αλγεβρικές πράξεις και στην εύρεση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης.

5. Μεθοδολογία της έρευνας

5.1. Χρησιμότητα της έρευνας

Από τη μελέτη της ξενόγλωσσης και της ελληνικής βιβλιογραφίας παρατηρήθηκε ότι η αντίστροφη συνάρτηση και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες στην κατανόηση της είναι ένα θέμα που δεν έχει μελετηθεί επαρκώς. Υπάρχει πληθώρα ερευνών για την έννοια της συνάρτησης αλλά ελάχιστες έχουν επικεντρωθεί στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Μάλιστα δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια ανάλογη έρευνα στην Ελλάδα, παρότι συχνά το θέμα αυτό εμφανίζεται στις Πανελλήνιες εξετάσεις και τα στατιστικά αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών δείχνουν ότι αυτοί αντιμετωπίζουν δυσκολία στη διαχείριση του.

Επιπροσθέτως, η θεωρία του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας της Ανάλυσης δεν έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων. Το μοντέλο του ΜΧΕ έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στην έρευνα γεωμετρικών και αλγεβρικών ζητημάτων αλλά ελάχιστα στην έρευνα ζητημάτων της Ανάλυσης. Σε ό,τι αφορά μάλιστα το θέμα της παρούσας εργασίας, δε βρέθηκε κάποια έρευνα που να εξετάζει το προσωπικό ΜΧΕ των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση.

Με βάση τα παραπάνω, η ερευνήτρια θεώρησε διδακτικά σκόπιμο και χρήσιμο να σχεδιάσει και να υλοποιήσει μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές/τριες Γ΄ Λυκείου προσανατολισμού που να εξετάζει το προσωπικό ΜΧΕ τους στην αντίστροφη συνάρτηση.

5.2. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (ΜΧΕ) αποτελεί ένα θεωρητικό μοντέλο για την ακριβή περιγραφή και ανάλυση της μαθηματικής δραστηριότητας σε όλες της τις διαστάσεις, με στόχο τη μελέτη της πορείας της διδασκαλίας από τον/την εκπαιδευτικό αλλά και της μάθησης από τον/την μαθητή/τρια, που επιτυγχάνεται γεφυρώνοντας το κενό μεταξύ επιστημολογικών και γνωστικών στοιχείων που συνιστούν τη μαθηματική γνώση. Ο σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας είναι διττός, από τη μια η χρήση ενός διδακτικού μοντέλου σε ένα μαθηματικό αντικείμενο που δεν έχει μελετηθεί μέχρι τώρα στην Ελλάδα και από την άλλη η διερεύνηση των δυσκολίων της έννοιας της συνάρτησης μέσω της αντίστροφης συνάρτησης.

Με βάση το σκοπό αυτό, τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

I. Ποιος ήταν ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση πριν τη διδακτική παρέμβαση;

II. Πως διαμορφώθηκε ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση μετά τη διδακτική παρέμβαση;

5.3. Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η μέθοδος επιλογής του δείγματος είναι η βολική δειγματοληψία.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2020- 2021 σε δημόσιο σχολείο της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Συμμετείχαν 17 μαθητές/τριες του τμήματος προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής, στο οποίο διδάσκει η ερευνήτρια. Οι 15 από τους 17 μαθητές/τριες παρακολούθησαν φροντιστηριακά μαθήματα και είχαν διδαχθεί την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης πριν τη διδακτική παρέμβαση.

5.4. Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης

5.4.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα του ΙΕΠ (2015): «Η Ανάλυση αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο των Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στις οικονομικές και άλλες επιστήμες. Η διδασκαλία της στο Λύκειο αποσκοπεί στο να εφοδιάσει τους μαθητές/τριες με κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία τα οποία θα μπορούν να χρησιμοποιήσουν για τη μοντελοποίηση και λύση προβλημάτων. Για τη σωστή και επιτυχημένη χρήση των εννοιών και θεωρημάτων της Ανάλυσης δεν αρκεί η απλή παρουσίασή τους και η διδασκαλία τυποποιημένων διαδικασιών, αλλά απαιτείται η ανάπτυξη μιας σωστής διαισθητικής αντίληψης από τους μαθητές/τριες. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της σύνδεσης των τυπικών λύσεων με τις αντίστοιχες οπτικές αναπαραστάσεις καθώς και μέσα από δραστηριότητες που συνδέουν τις έννοιες αυτές με πραγματικές καταστάσεις. Κύριο στόχο αποτελεί η εννοιολογική κατανόηση σε ένα αρχικό επίπεδο, μέσα από την ανάπτυξη σωστής διαισθητικής αντίληψης των βασικών εννοιών και θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη δεξιοτήτων για τη λύση προβλημάτων. Για τον λόγο αυτό, η εφαρμογή χωρίς κατανόηση θεωρημάτων για μηχανιστικούς υπολογισμούς, η διδασκαλία εννοιών των οποίων η κατανόηση δεν είναι εύκολη από τους μαθητές/τριες (π.χ. αόριστο ολοκλήρωμα) και η ανάπτυξη τεχνικών για την αντιμετώπιση δύσκολων ασκήσεων, χωρίς αυτό να συνδυάζεται με κάποια βαθύτερη κατανόηση, δεν προσφέρονται για την εξυπηρέτηση των παραπάνω στόχων.»

Σκοπός, λοιπόν, της παρακάτω διδακτικής πρότασης για την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης είναι η εκπλήρωση των παραπάνω στόχων αλλά και η διερεύνηση του προσωπικού Μαθηματικού Χώρου Εργασίας των μαθητών/τριών πριν και μετα τη διδασκαλία.

Για την επίτευξη των στόχων η επιλογή των δραστηριοτήτων έγινε με βάση το μοντέλο του ΜΧΕ έτσι, ώστε να διαφαίνονται οι γενέσεις μεταξύ των στοιχείων του επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου καθώς και οι αλληλεπιδράσεις των κατακόρυφων επιπέδων που δημιουργούνται.

5.4.2. Υλικά, Τεχνολογία και Εποπτικά Μέσα

Τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν είναι ο πίνακας, φύλλα εργασίας που θα μοιράζονται στους μαθητές/τριες σε κάθε διδακτική ώρα, ένα τεστ (pre-test) πριν τη διδασκαλία, ένα τεστ (post-test) μετά τη διδασκαλία και η χρήση του δυναμικού λογισμικού GeoGebra.

5.4.3. Χρονική Διάρκεια της Διδασκαλίας

Η διάρκεια της διδασκαλίας είναι 7 διδακτικές ώρες. Αρχικά στην $1^{η}$ διδακτική ώρα θα δοθεί ένα τεστ στους/στις μαθητές/τριες, για να διερευνηθεί η εικόνα που έχουν για την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Στη συνέχεια τη $2^{η}$ και $3^{η}$ διδακτική ώρα θα τους δοθεί το $1^{ο}$ φύλλο εργασίας και θα γίνει η εισαγωγή στην έννοια μέσα από δυο προβλήματα και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Την $4^{η}$ διδακτική ώρα θα μοιραστεί στους μαθητές/τριες το $2^{ο}$ φύλλο εργασίας και θα γίνει εμβάθυνση στην εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης μέσα από τη γραφική της παράσταση και τον τύπο της. Την $5^{η}$ διδακτική ώρα θα μοιραστεί το επόμενο φύλλο εργασίας και θα γίνει η διερεύνηση των ιδιοτήτων της αντίστροφης. Την $6^{η}$ ώρα θα ζητηθεί από τους μαθητές/τριες να βρουν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης με την αντίστροφή της καθώς και να επιλύσουν εξισώσεις. Τέλος, την $7^{η}$ διδακτική ώρα θα δοθεί στους μαθητές/τριες ένα τεστ με θέματα παρόμοια με το pre-test και θα ελεγχθεί η κατανόηση της έννοιας της αντίστροφης και των ιδιοτήτων της μετά τη διδακτική παρέμβαση, η οποία βασίστηκε στο μοντέλο του ΜΧΕ.

5.4.4. Οι Γνωστικοί ή άλλοι Στόχοι του Μαθήματος

Το ΑΠΣ αναφέρει ως στόχους για την θεματική της Ανάλυσης τους παρακάτω:

- τη σύνδεση της ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα
- την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από τη μέχρι τώρα μαθησιακή πορεία τους.

Και ως ειδικό στόχο αυτής της ενότητας να μπορούν οι μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν μέσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αν αυτή είναι 1-1 και να σχεδιάζουν την αντίστροφή τους.

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση έχει ως επιπλέον γνωστικούς στόχους μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης (πίνακα, γράφημα, εξίσωση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών) οι μαθητές/τριες/τριες:

- Να εξετάζουν πότε μια συνάρτηση αντιστρέφεται.
- Να ορίζουν την αντίστροφη συνάρτηση.
- Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης.

Επιπλέον, η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση έχει ως βασικούς στόχους για την απόκτηση δεξιοτήτων των μαθητών/τριών:

- Να εξοικειωθούν με το περιβάλλον του δυναμικού λογισμικού GeoGebra.
- Να καταλήγουν σε συμπεράσματα βάσει παρατήρησης και επαλήθευσης.
- Να υποστηρίζουν τα συμπεράσματά τους διατυπώνοντας επιχειρήματα.
- Να αναπτύξουν την ιδιότητα της εφαρμογής μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή.

5.4.5. Ανάλυση της Έννοιας σε σχέση με την Πραγματικότητα, τις Επιστήμες και τις προηγούμενες Μαθηματικές Έννοιες

Η αντίστροφη συνάρτηση που αποτελεί το κύριο θέμα της συγκεκριμένης διδακτικής πρότασης βρίσκει εφαρμογή τόσο σε θετικές επιστήμες όπως η Φυσική, η Χημεία, η Βιολογία, η Οικονομία κτλ. όσο και σε προβλήματα καθημερινής ζωής που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες. Η έννοια αυτή συνδέεται με τις βασικές έννοιες της συνάρτησης που οι μαθητές/τριες έχουν συναντήσει σε προηγούμενα μαθήματα και συμπεριλαμβάνονται στη διδακτική πρόταση.

5.4.6. Προαπαιτούμενες – Προϋπάρχουσες Γνώσεις

- Πεδίο ορισμού και Σύνολο τιμών συνάρτησης.
- Γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Πίνακας τιμών συνάρτησης.
- Μονοτονία συνάρτησης.
- Συνάρτηση 1-1
- Συμμετρία ως προς ευθεία.
- Επίλυση τύπου ως προς μια μεταβλητή.

5.4.7. Πορεία της Διδασκαλίας

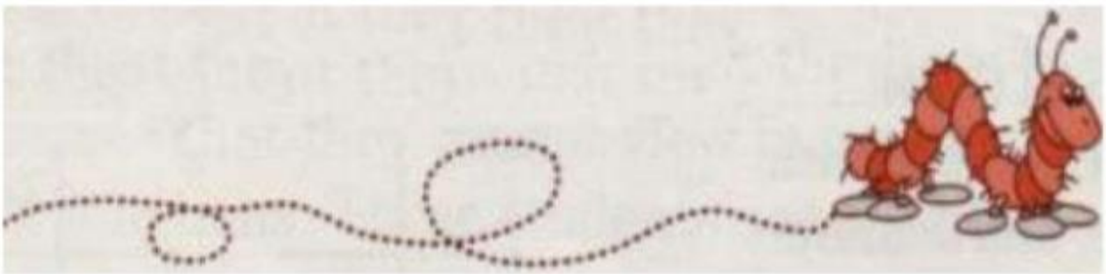
<u>1η Διδακτική ώρα</u>

<u>1η Φάση</u>: Ο στόχος του pre-test είναι να διερευνηθεί ο προσωπικός Μαθηματικός Χώρος Εργασίας των μαθητών/τριών πριν τη διδασκαλία, έτσι όπως έχει διαμορφωθεί από τα μαθήματα που έχουν παρακολουθήσει στο φροντιστήριο.

<u>2η Φάση</u>: Μοιράζεται στους μαθητές/τριες το pre-test. Στο Θέμα Α δίνεται ένα πρόβλημα από τις δραστηριότητες που προτείνει το ΑΠΣ του 2015 :

«Θέμα Α

Μια κάμπια σέρνεται πάνω σε ένα χαρτί όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α1. Εάν θέλαμε να προσδιορίσουμε τη θέση της κάμπιας πάνω στο χαρτί σε σχέση με το χρόνο, μπορεί η θέση να περιγραφεί ως μια συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A2. Μπορεί ο χρόνος να περιγράφει ως μια συνάρτηση της θέσης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.»

Το συγκεκριμένο θέμα αποτελεί παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Μέσα από το θέμα αυτό θα διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές/τριες έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία αντιστοίχισης δυο μεταβλητών καθώς επίσης και ότι η αντίστροφη διαδικασία δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση.

Δίνεται στους μαθητές/τριες μία εικόνα που αντιστοιχεί στο πλαίσιο αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου του ΜΧΕ με σκοπό, μέσω της σημειωτικής γένεσης, να οδηγηθούν στη διαδικασία της οπτικοποίησης του γνωστικού επιπέδου. Στη συνέχεια με χρήση του κατακόρυφου επιπέδου σημειωτικής– λεκτικής γένεσης και τη χρήση του ορισμού της συνάρτησης που περιέχεται στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου να κάνουν την επικύρωση του ορισμού.

Στο Θέμα Β θα δοθούν 1-1 συναρτήσεις με διαφορετικούς αναπαραστατικούς τρόπους (πίνακας τιμών, σύνολο διατεταγμένων ζευγών, γραφική παράσταση, τύπος) και θα ζητηθεί να κατασκευάσουν τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις της αντίστροφης συνάρτησης.

«Θέμα Β

Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

X	1	2	3	4	5
f(x)	7	3	1	9	5

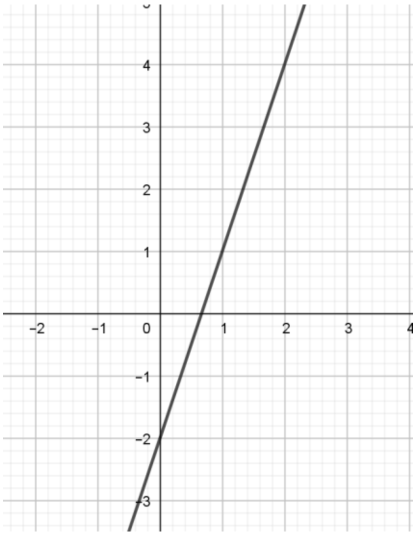
Β2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$$C_g = \{(1,3),(2,15),(3,8),(4,-2),(5,-1)\}.$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτησης είναι

1-1 και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



B4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ αντιστρέφεται και αν ναι, να υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1. »

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Μέσα από το θέμα αυτό διερευνάται η κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και του ορισμού της 1-1 συνάρτησης.

Ο/Η μαθητής/τρια στο 1^{o} ερώτημα κάθε υποθέματος χρησιμοποιεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που του δίνονται στα πλαίσια του επιστημολογικού επιπέδου, τις αποκωδικοποιεί περνώντας μ' αυτόν τον τρόπο στο γνωστικό επίπεδο και με τη χρήση του ορισμού της 1-1 συνάρτησης τεκμηριώνει το συμπέρασμά του. Άρα παρατηρείται αλληλεπίδραση μεταξύ σημειωτικής και λεκτικής γένεσης.

Στο 2^{o} ερώτημα, με τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων και των τεχνουργημάτων της 1-1 συνάρτησης, όπως είναι η συμμετρία και η αμφίδρομη αντιστοίχιση της ανεξάρτητης με την εξαρτημένη μεταβλητή, οδηγείται μέσω της εργαλειακής γένεσης στην κατασκευή. Παρατηρείται αλληλεπίδραση σημειωτικής και εργαλειακής γένεσης.

«Θέμα Γ

Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση

$f^{-1}(x)=x^3+3x+1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1.

Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+x$, να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x)=6$.»

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Μέσα από το θέμα αυτό διερευνάται η κατανόηση της βασικής ιδιότητας των αντίστροφων συναρτήσεων: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και ζητείται ο υπολογισμός μιας τιμής της αντίστροφης ή της συνάρτησης αντίστοιχα.

Στο θέμα αυτό ο μαθητής/τρια χρησιμοποιώντας από το πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου τη βασική ισοδυναμία μεταξύ της συνάρτησης και της αντίστροφης της τεκμηριώνει την λύση του αλλά και ταυτόχρονα χρησιμοποιεί την ισοδυναμία αυτή ως τεχνούργημα για την κατασκευή κατάλληλου αλγορίθμου για την επίλυση εξισώσεων. Με το θέμα αυτό επιτυγχάνεται η αλληλεπίδραση ανάμεσα στην εργαλειακή– λεκτική γένεση.

Στο Θέμα Δ θα δοθεί στους μαθητές/τριες το Θέμα Β από τις Πανελλαδικές Εξετάσεις του 2020.

«Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $k(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}, x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της.

Δ3. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης k με την αντίστροφή της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης k με την συνάρτηση.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση k μπορεί να πάρει τη μορφή $k(x)=1+\dfrac{3}{e^x-1}, x>0$ και να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της.»

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Μέσα από το θέμα αυτό οι μαθητές/τριες καλούνται να εξετάσουν την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης, να καθορίσουν τον τύπο και το πεδίο ορισμού της. Στη συνέχεια, με χρήση του ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης και των ιδιοτήτων της, να καθορίσουν το σύνολο τιμών των δύο συναρτήσεων και τη σύνθεση αυτών των δυο συναρτήσεων και τέλος, να μελετήσουν τη μονοτονία τους είτε με τη χρήση του ορισμού είτε με την ιδιότητα που έχουν οι αντίστροφες συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους.

Στο $1^{\text{ο}}$ ερώτημα οι μαθητές/τριες χρησιμοποιώντας ένα τεχνούργημα (αλγόριθμο) δηλαδή το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού καταλήγουν στην απόδειξη και στην κατασκευή του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης και την εύρεση του πεδίου ορισμού της. Κάνουν, επομένως, χρήση του κατακόρυφου επιπέδου αλληλεπίδρασης εργαλειακής– λεκτικής γένεσης.

Στο $2^{\text{ο}}$ και $3^{\text{ο}}$ ερώτημα, με χρήση ιδιοτήτων της αντίστροφης συνάρτησης που περιέχονται στο πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου καταλήγουν στο συμπέρασμα ακολουθώντας τη λεκτική γένεση.

Τέλος, στο $4^{\text{ο}}$ ερώτημα, με το τεχνούργημα της προσθαφαίρεσης ο/η μαθητής/τρια καλείται να μετασχηματίσει την αρχική συνάρτηση σε μια ισοδύναμη, τη μονοτονία της οποίας μπορεί να μελετήσει ανακαλώντας τον ορισμό της από το πλαίσιο αναφοράς και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων να καταλήξει σε συμπέρασμα. Όσον αφορά τη μονοτονία της αντίστροφης, ο/η μαθητής/τρια μπορεί να κινηθεί στο κατακόρυφο επίπεδο της εργαλειακής– λεκτικής γένεσης ή διαφορετικά να εφαρμόσει τον ορισμό της μονοτονίας και να καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα συνδέοντας έτσι το πλαίσιο αναφοράς μέσω της λεκτικής γένεσης με την απόδειξη.

$2^{\text{η}}$ Διδακτική ώρα

$1^{\text{η}}$ φάση: Ο στόχος του $1^{\text{ου}}$ φύλλου εργασίας είναι να συνδέσει την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης με προβλήματα από την επιστήμη της Οικονομίας.

Η διδακτική πρόταση αφορά ένα τμήμα προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής.

$2^{\text{η}}$ φάση: Μοιράζεται στους μαθητές/τριες το $1^{\text{ο}}$ Φύλλο Εργασίας. Στο Θέμα Α παρουσιάζεται ο νόμος της ζήτησης καθώς και η καμπύλη ζήτησης. Οι πληροφορίες αυτές αντλήθηκαν από το σχολικό εγχειρίδιο «Αρχές Οικονομικής Θεωρίας» της Γ΄ Λυκείου. Οι μαθητές/τριες έχουν διδαχθεί ήδη την ενότητα αυτή.

«Θέμα Α

Ο Νόμος της Ζήτησης – Καμπύλη Ζήτησης

Νόμος της Ζήτησης

Ο καταναλωτής στην επιδίωξή του να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του από την κατανάλωση ενός αγαθού επηρεάζεται βασικά: πρώτον, από το εισόδημά του και δεύτερον, από την ύπαρξη άλλων παρόμοιων αγαθών που μπορούν να ικανοποιήσουν την ίδια ανάγκη (υποκατάστατα αγαθά). Έτσι, αν αυξηθεί η τιμή ενός αγαθού, ο καταναλωτής είναι πιθανότερο να αγοράσει λιγότερες μονάδες από το συγκεκριμένο αγαθό, αφού το εισόδημά του δεν επαρκεί, για να συνεχίσει να αγοράζει τις ίδιες ποσότητες και επιπλέον μπορεί να υποκαταστήσει το αγαθό αυτό με ένα παρόμοιο φθηνότερο αγαθό. Για παράδειγμα, αν αυξηθεί η τιμή του μοσχαρίσιου κρέατος, οι καταναλωτές μπορεί να στραφούν στην κατανάλωση χοιρινού ή πουλερικών και να μειώσουν την κατανάλωση του μοσχαρίσιου.

Τα αποτελέσματα θα είναι αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι η τιμή του αγαθού μειώνεται. Ο καταναλωτής θα μπορεί με το ίδιο εισόδημα να αγοράζει περισσότερες μονάδες του αγαθού καθώς και να υποκαταστήσει άλλα αγαθά με το σχετικά φθηνότερο συγκεκριμένο αγαθό. Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει ο νόμος της ζήτησης· όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, ο καταναλωτής αυξάνει την ποσότητα που ζητάει (ζητούμενη ποσότητα). Όταν η τιμή του αγαθού αυξάνεται, ο καταναλωτής μειώνει την ποσότητα που ζητάει (ζητούμενη ποσότητα).

Υπάρχει, δηλαδή, αρνητική σχέση μεταξύ της τιμής ενός αγαθού και της ζητούμενης ποσότητας από αυτό το αγαθό. Η αρνητική αυτή σχέση τιμής και ζητούμενης ποσότητας αποτελεί το νόμο της ζήτησης, ο οποίος μπορεί γενικά να διατυπωθεί ως εξής:

Όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητά του, και, όταν η τιμή του αυξάνεται, μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα από το αγαθό αυτό, όταν οι άλλοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση παραμένουν σταθεροί (ceteris paribus).

Η συνάρτηση Ζήτησης

Όταν μελετάμε τις μεταβολές στις ζητούμενες ποσότητες ενός προϊόντος καθώς μεταβάλλεται η τιμή του, δεχόμαστε ότι όλοι οι άλλοι παράγοντες οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση του προϊόντος αυτού παραμένουν σταθεροί. Αυτήν την παραδοχή (συνθήκη) στην οικονομία τη διατυπώνουμε με την έκφραση “ceteris paribus”, που σημαίνει: τα άλλα ίσα ή σταθερά.

Θεωρώντας σταθερούς τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης (π.χ. τις προτιμήσεις ή το εισόδημα των καταναλωτών κτλ.) μπορούμε να παραστήσουμε τη σχέση ανάμεσα στη ζητούμενη ποσότητα και την τιμή ενός προϊόντος με τη μορφή συνάρτησης:

$Q_D = f(P)$, όπου Q_D = η ζητούμενη ποσότητα

P = η τιμή του προϊόντος

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι η καμπύλη ζήτησης.

Η συνάρτηση ζήτησης μπορεί να πάρει διάφορες αλγεβρικές μορφές.

Για ευκολία θα εξετάσουμε δυο απλές μορφές συναρτήσεων.

i) Γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

Η γραμμική συνάρτηση ζήτησης έχει τον τύπο: $Q_D = α + β P$ και είναι ευθεία γραμμή.

Με δεδομένα ότι η ζητούμενη ποσότητα και η τιμή δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, θα πρέπει: $Q_D \geq 0$ και $P \geq 0$.

Τι εκφράζει η παράμετρος α και ποιο είναι το πρόσημο της;

Τι εκφράζει η παράμετρος β και ποιο είναι το πρόσημο της;

ii) Η ισοσκελής υπερβολή

Η συνάρτηση ζήτησης έχει τύπο: $Q_D = \frac{A}{P}$, όπου Α σταθερός θετικός αριθμός. Το διάγραμμά της είναι ισοσκελής υπερβολή με ασύμπτωτους τους άξονες Q_D και P.

Τι εκφράζει η παράμετρος Α;»

Οι μαθητές/τριες καλούνται μέσα από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου του ΜΧΕ να αποκωδικοποιήσουν και να ερμηνεύσουν τα σύμβολα με στόχο την κατασκευή εσωτερικών αναπαραστάσεων, αντικειμένων και σχέσεων. Επιτυγχάνεται με τον τρόπο αυτό μια σημειωτική γένεση.

Η παραπάνω διαδικασία ενισχύεται με την εισαγωγική δραστηριότητα που ακολουθεί η οποία αποτελεί ένα παράδειγμα της Ανάλυσης 1.

«Εισαγωγική Δραστηριότητα Αντίστροφης Συνάρτησης

Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης καθορίζει τη ζήτηση αυτής από τους καταναλωτές. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές σε ευρώ ανά λίτρο αμόλυβδης βενζίνης σε δυο χώρες της Ευρώπης και η αντίστοιχη ημερήσια ζήτηση λίτρων σε εκατομμύρια λίτρα.

Χώρα Α

Τιμή	0	0,75	0,90	1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6
Ημερήσια ζήτηση	400	362,5	355	350	345	340	335	325	320

Χώρα Β

Τιμή	0,74	0,85	0,94	1	1,15	1,24	1,35	1,44	1,55
Ημερήσια ζήτηση	343,3162	298,8871	270,2702	254,054	220,9165	204,8823	188,1881	176,4264	163,9058

Α1. Να παραστήσετε τα δεδομένα κάθε πίνακα σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων και να εξετάσετε αν η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από μια γραμμική εξίσωση ή από μια ισοσκελή υπερβολή.

Α2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.

Α3. Ποια θα είναι η ημερήσια ζήτηση σε κάθε χώρα, αν η τιμή του λίτρου είναι:

i) 0,93€ ii) 1,25€ iii) 1,47€ αντίστοιχα;

Α4. Ποια θα είναι η τιμή του λίτρου σε κάθε χώρα, αν η ημερήσια ζήτηση λίτρων είναι

i) 360 ii) 310 iii) 290 εκατομμύρια λίτρα αντίστοιχα;

Α5. Να βρείτε τη συνάρτηση της τιμής του λίτρου ως προς την ημερήσια ζήτηση για κάθε χώρα και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή ή ισοσκελής υπερβολή.

Α6. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των παραπάνω συναρτήσεων;

Με τη βοήθεια του δυναμικού λογισμικού GeoGebra παρουσιάζονται τα δεδομένα των πινάκων στο σύστημα ορθογωνίων αξόνων και οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν το είδος της καμπύλης σε κάθε περίπτωση. Μέσω αυτής της σημειωτικής γένεσης πραγματοποιείται ταυτόχρονα και μια εργαλειακή γένεση η οποία μετατρέπει το σύνολο αυτών των σημείων στην κατασκευή της κατάλληλης γραφικής παράστασης από την οποία απαντώνται τα επόμενα τρία ερωτήματα. Το ψηφιακό εργαλείο στην περίπτωση αυτή δίνει την δυνατότητα στους μαθητές/τριες να σχηματίσουν μια εικόνα της μαθηματικής έννοιας μέσω της εξερεύνησης των γραφικών παραστάσεων. Στο σημείο αυτό επιτυγχάνεται η αλληλεπίδραση της σημειωτικής με την εργαλειακή γένεση.

Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες καλούνται να επικυρώσουν τα παραπάνω αποτελέσματα και να κατασκευάσουν τις κατάλληλες συναρτήσεις. Στόχος, λοιπόν, των δυο επόμενων ερωτημάτων είναι μια λεκτική γένεση από το πλαίσιο αναφοράς της επιστήμης της οικονομίας και των μαθηματικών αλλά και μια διασύνδεση με την εργαλειακή γένεση που πραγματοποιήθηκε στα προηγούμενα ερωτήματα.

<u>3η φάση:</u> Στη συνέχεια γίνεται η επισημοποίηση της νέας γνώσης, δηλαδή δίνεται ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης και καθορίζεται το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών αυτής.

«Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι:

αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A), μιας συνάρτησης f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x)=y, δηλαδή αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to R$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το f(A), σύνολο τιμών το A και ισχύει η ισοδυναμία : $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η συνάρτηση g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η συνάρτηση g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.»

<u>4η φάση:</u> Οι μαθητές/τριες αναλαμβάνουν ως δραστηριότητα για το σπίτι το παρακάτω θέμα, το οποίο και παρουσιάζουν την επόμενη μέρα. Σκοπός αυτού του θέματος είναι η κατανόηση των παραμέτρων α και β της γραμμικής συνάρτησης καθώς και η εφαρμογή της νέας γνώσης.

«Θέμα Β

Όταν ένα προϊόν βγαίνει στην κυκλοφορία, η τιμή του μειώνεται σε συνάρτηση του χρόνου που βρίσκεται στην αγορά. Η εταιρεία BestPrice, για να υπολογίσει την τιμή f σε ευρώ ενός κινητού τηλεφώνου x μήνες μετα την κυκλοφορία του, χρησιμοποιεί την συνάρτηση: $f(x)=750-25x$.

Β1. Υπολογίστε το f(12) και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο του προβλήματος.

Β2. Πως ερμηνεύεται το β στην ισότητα f(β)=0; Υπολογίστε την τιμή του β.

Β3. Η συνάρτηση f είναι 1-1; Αν ναι, να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

Β4. Πότε η τιμή του κινητού θα είναι μικρότερη από 500€;

Β5. Πως ερμηνεύεται το γ στην ισότητα $f^{-1}(\gamma)=20$; Υπολογίστε την τιμή του γ.»

Τα ερωτήματα επιλέχθηκαν με στόχο ο/η μαθητής/τρια μέσω της εμπλοκής του/της με αυτά να έρθει σε επαφή και με τις τρεις δημιουργικές διαδικασίες του ΜΧΕ, τη σημειωτική, την εργαλειακή και τη λεκτική. Επίσης, το θέμα αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα της Ανάλυσης 1.

<u>3η Διδακτική ώρα</u>

<u>1η φάση:</u> Μια από τις δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης άρα και της αντίστροφης συνάρτησης αποτελούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της: λεκτική (προφορική ή γραπτή), αριθμητική (πίνακας τιμών), γεωμετρική (γραφική παράσταση), συμβολική (αλγεβρικός τύπος). Η κάθε μια από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης εκφράζει και μια διαφορετική πτυχή της έννοιας και παρέχει διαφορετικές πληροφορίες για αυτήν, χωρίς ωστόσο από μόνη της μια αναπαράσταση να παρέχει ολοκληρωμένη εικόνα για αυτήν. Για τον λόγο αυτό στο Θέμα Γ και Θέμα Δ του 1ου φύλλου εργασίας επιλέχθηκαν δραστηριότητες που περιέχουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες μέσω αυτών να εξετάσουν αν η συνάρτηση αντιστρέφεται και στη συνέχεια να περιγράψουν την αντίστροφη με τον ίδιο τρόπο.

<u>2η φάση:</u> Στο Θέμα Γ και Δ οι μαθητές/τριες μέσα από τις τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης πρέπει να οπτικοποιήσουν τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης και να ελέγξουν την ισχύ του. Μέσα, λοιπόν, από τη σημειωτική γένεση οι μαθητές/τριες θα περάσουν σε μια λεκτική γένεση, η οποία στη συνέχεια θα μετατρέψει τον ορισμό από το πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου σε ένα τεχνούργημα και μέσω της εργαλειακής

γένεσης θα επιτρέψει τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν την κατάλληλη αναπαράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

Μέσω των δραστηριοτήτων αυτών οι μαθητές/τριες θα εργαστούν σε αντικείμενα–εργαλεία του επιστημολογικού επιπέδου, όπως οι πίνακες τιμών, οι γραφικές παραστάσεις, το σύνολο διατεταγμένων ζευγών, ο τύπος της συνάρτησης με στόχο την ενεργοποίηση και των τριών διαστάσεων του ΜΧΕ. Το παρόν θέμα αποτελεί αρχικά ένα παράδειγμα της Ανάλυσης 1 και της Ανάλυσης 2.

«Θέμα Γ

Μια συνάρτηση περιγράφεται παρακάτω με τρεις διαφορετικούς τρόπους: πίνακα τιμών, εξίσωση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Να εξετάσετε για κάθε περίπτωση αν αντιστρέφεται και να περιγράψετε την αντίστροφή της με τον ίδιο τρόπο. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

1ος τρόπος: Πίνακας τιμών

X	1	2	5	10	15	20
g(x)	19,8	19,6	19	18	17	16

X	-1	0	1	2	5	10
f(x)	-4	0	6	12	7	6

X	1,1	2,2	5,4	6	7,8	12
h(x)	-7	-6	-7	-4	-3	-2

2^{ος} τρόπος: Εξίσωση

$g(x)=(x-2)(x+3)+1$

$f(x)=\ln(1-x)$

$h(x)=e^{-x}+2$

$3^{ος}$ τρόπος: Σύνολο διατεταγμένων ζευγών

$$C_g = \{(1,5),(2,25),(3,125),(4,625)\}$$
$$C_f = \{(-2,e^{-2}),(-1,e^{-1}),(0,1),(1,e)\}$$
$$C_h = \left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,0),\left(2,\frac{1}{2}\right),(8,8)\right\}$$

«Θέμα Δ

Δ1. Α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\etaμx,\ x\in[-2\pi,2\pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f_1(x)=\etaμx,\ x\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$$
$$f_2(x)=\etaμx,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$f_3(x)=\etaμx,\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.

Δ2. Α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=συνx,\ x\in[-2\pi,2\pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$g_1(x)=συνx,\ x\in[-2\pi,-\pi]$$
$$g_2(x)=συνx,\ x\in[-\pi,0]$$
$$g_3(x)=συνx,\ x\in[0,\pi]$$
$$g_4(x)=συνx,\ x\in[\pi,2\pi]$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.

Δ3. Α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=εφx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h_1(x) = εφx,\ x \in \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$$

$$h_2(x) = εφx,\ x \in \left(\frac{π}{2}, \frac{3π}{2}\right)$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.»

<u>4^{η} Διδακτική ώρα</u>

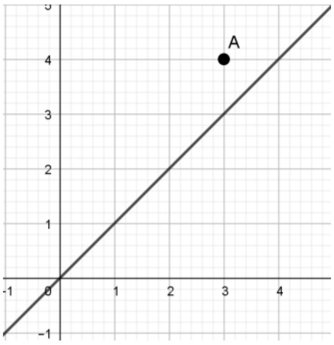
<u>1^{η} φάση:</u> Η έννοια του συμμετρικού σημείου ως προς ευθεία εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου καθώς και στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου. Σκοπός του 2^{ου} φύλλου εργασίας είναι μέσω των κατάλληλων δραστηριοτήτων που διαρθρώνονται στις διαστάσεις του μοντέλου του ΜΧΕ οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν γιατί οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και της αντίστροφης συνάρτησης είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, να μάθουν να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της αντίστροφης, όταν γνωρίζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και τέλος να αντιληφθούν μέσω του συμμετρικού γραφήματος μιας συνάρτησης ως προς την ευθεία y=x, αν η συνάρτηση αντιστρέφεται. Τέλος στο ίδιο φύλλο εργασίας θα ζητηθεί από τους μαθητές/τριες να συμπληρώσουν τον πίνακα της αντίστροφης μιας συνάρτησης και στη συνέχεια τους πίνακες της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων.

<u>2^{η} φάση:</u> Μοιράζεται στους μαθητές/τριες το 2^{ο} φύλλο εργασίας. Ταυτόχρονα στον πίνακα προβάλλονται μέσω του δυναμικού λογισμικού GeoGebra οι δραστηριότητες.

Το Θέμα Α επιλέχθηκε από το βιβλίο Θετικού Προσανατολισμού της Β’ Λυκείου.

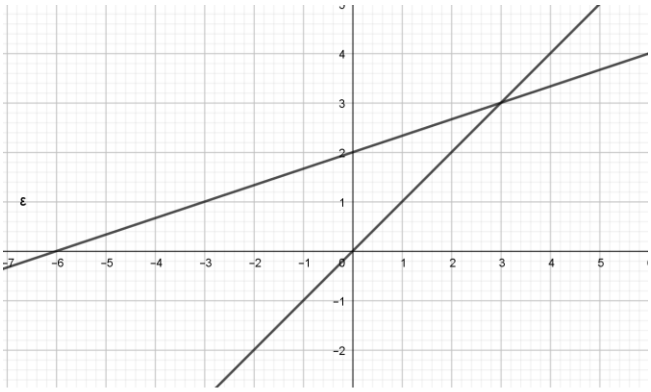
«Θέμα Α

Α1. Στο παρακάτω σύστημα ορθογωνίων αξόνων να βρείτε το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(3,4) ως προς τη διχοτόμο των γωνιών xOy και x’Oy’.



A2. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(α, β) ως προς την ευθεία y=x έχει συντεταγμένες (β,α).

A3. Να σχεδιάσετε την συμμετρική ευθεία (ζ) της ευθείας (ε) ως προς την ευθεία y=x. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



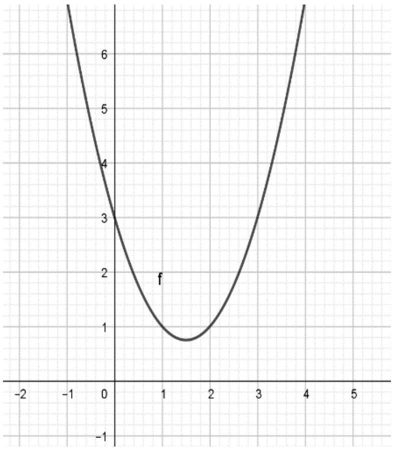
A4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και (ζ). Ποια σχέση έχουν οι δυο αυτές γραμμικές συναρτήσεις;»

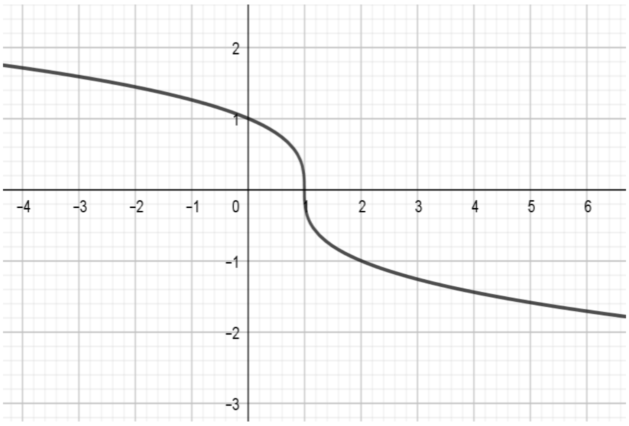
Η δραστηριότητα αυτή θα εξελιχθεί στο ΜΧΕ της Γεωμετρίας και αναμένεται να διαρθρωθεί στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του. Αρχικά οι μαθητές/τριες μέσω της σημειωτικής γένεσης θα οπτικοποιήσουν το αντικείμενο του επιστημολογικού επιπέδου, γεωμετρική εικόνα, ερμηνεύοντας την έννοια της συμμετρίας ως προς ευθεία, θα κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη το συμμετρικό σημείο ως προς την ευθεία, επιτυγχάνοντας έτσι μια εργαλειακή γένεση και τέλος θα επικυρώσουν τα συμπεράσματα τους μέσω της σημειωτικής γένεσης με χρήση των ιδιοτήτων της αναλυτικής γεωμετρίας.

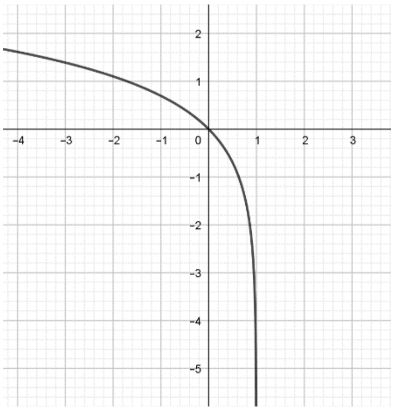
Στο Θέμα Β οι μαθητές/τριες μέσω των γραφικών παραστάσεων κάποιων συναρτήσεων θα ελέγξουν ποιες από αυτές αντιστρέφονται και στη συνέχεια θα πρέπει να χαράξουν την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

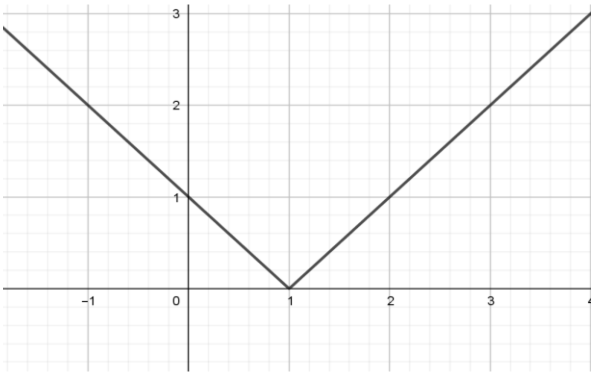
«Θέμα Β

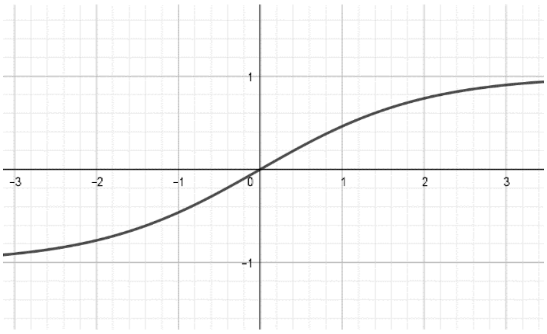
Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμία από αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης.

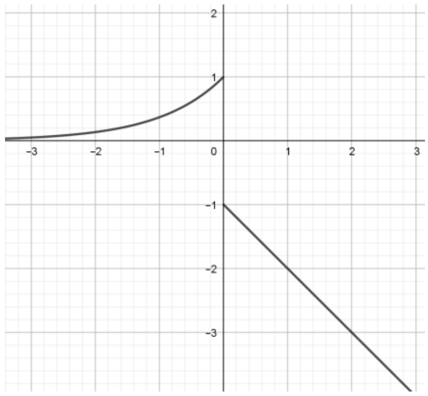










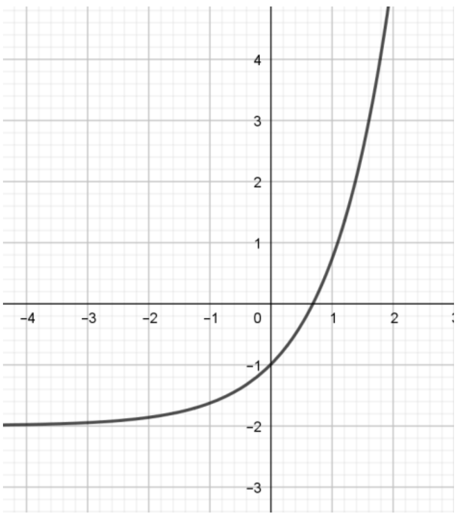


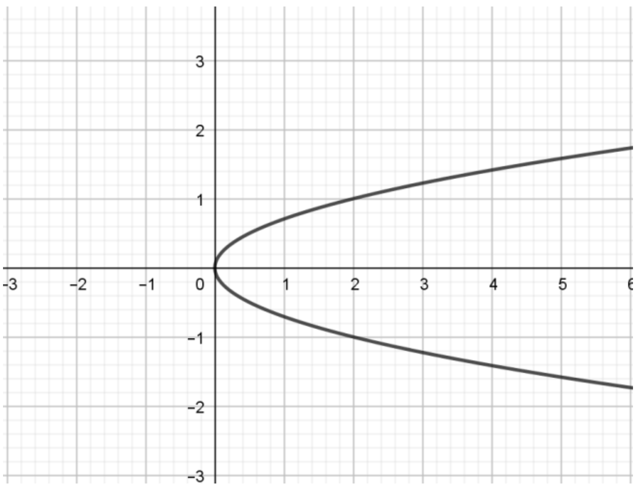
Μέσα από το θέμα αυτό αρχικά θα ζητηθεί από τους/τις μαθητές/τριες να οπτικοποιήσουν τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, για να αιτιολογήσουν την ύπαρξη της αντίστροφης διαδικασίας, στη συνέχεια να πειραματιστούν βρίσκοντας κατάλληλα σημεία σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που αντιστρέφονται συμμετρικά ως προς την ευθεία y=x και τέλος χρησιμοποιώντας τα τεχνουργήματα του επιστημολογικού επιπέδου να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Μέσω, λοιπόν, της λεκτικής γένεσης θα περάσουν σε μια σημειωτική γένεση, για να καταλήξουν σε μια εργαλειακή γένεση.

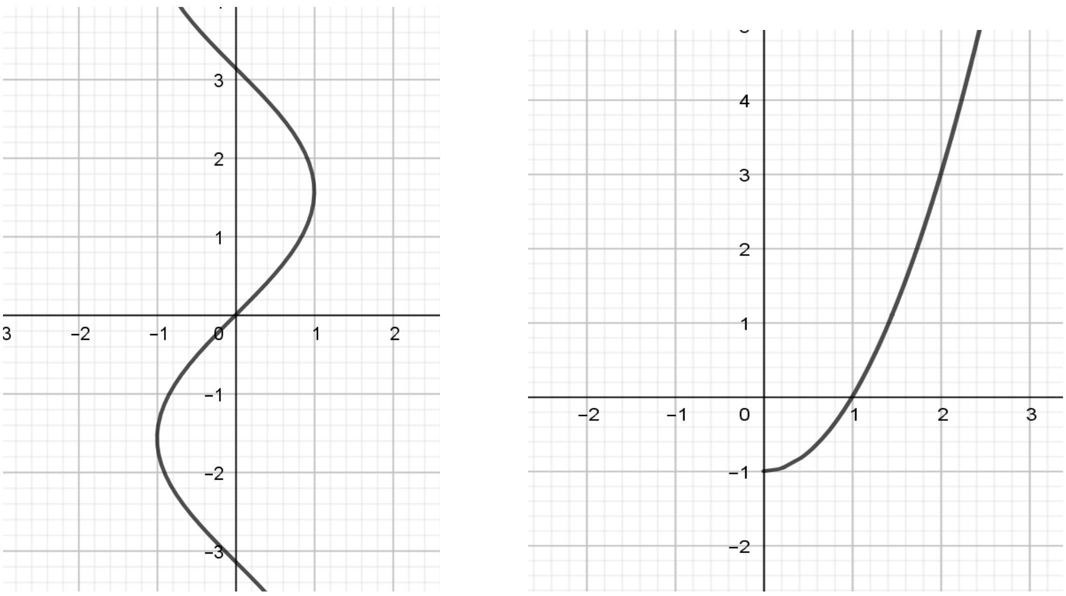
Σκοπός του επόμενου θέματος είναι οι μαθητές/τριες να πραγματοποιήσουν την αντίστροφη πορεία του θέματος Β. Στο Θέμα Γ δίνονται, λοιπόν, τα συμμετρικά γραφήματα τεσσάρων συναρτήσεων ως προς την ευθεία y=x και ζητείται από τους μαθητές/τριες να ελέγξουν αν αυτά αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στη συνέχεια αν αυτές οι συναρτήσεις αντιστρέφονται.

«Θέμα Γ

Δίνονται τα συμμετρικά γραφήματα των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 ως προς την ευθεία y=x. Να εξετάσετε αν τα γραφήματα αυτά είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στη συνέχεια να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f_1 , f_2 , f_3 , f_4 είναι 1-1.







Η μετάβαση από στοιχεία του επιστημολογικού επιπέδου στο γνωστικό επίπεδο συνίσταται στην ικανότητα χειρισμού του ορισμού της συνάρτησης μέσω γραφήματος, της έννοιας της συμμετρίας ως προς ευθεία και της οπτικοποίησής της, της μοντελοποίησής αυτής της κατάστασης και της ανακάλυψης μιας ιδιότητας που δεν αναφέρεται στο πλαίσιο αναφοράς της αντίστροφης συνάρτησης, έτσι όπως αυτό παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο. Η αλληλεπίδραση των κατακόρυφων επιπέδων του ΜΧΕ είναι ο στόχος αυτής της δραστηριότητας.

Η χρήση του δυναμικού λογισμικού GeoGebra κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας θα επιτρέψει τους μαθητές/τριες να πειραματιστούν και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους.

<u>3η φάση:</u> Στη συνέχεια γίνεται η επισημοποίηση της νέας γνώσης, δηλαδή η συμμετρία της αντίστροφης συνάρτησης και της συνάρτησης ως προς την ευθεία y=x.

«Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στην γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ'(β,α) θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις Cκαι C' της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.»

<u>4η φάση</u>

Στο τέλος της 4ης διδακτικής ώρας θα ζητηθεί από τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης μέσω του πίνακα τιμών της συνάρτησης και στη συνέχεια να συμπληρώσουν τους πίνακες τιμών της σύνθεσης της συνάρτησης με την αντίστροφή της και της αντίστροφης με την συνάρτηση. Οι μαθητές/τριες καλούνται να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα των δυο πινάκων.

«Θέμα Δ

Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας 1-1 συνάρτησης f.

x	-1	3	4	5,1	7	9	11	12,7	14
f(x)	7	10	12	13	-6	-1	-3	-8	-9

Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και στην συνέχεια να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες. Τι παρατηρείτε;

x	-1	3	4	5,1	7	9	11	12,7	14
$f^{-1}(f(x))$									

x	7	10	12	13	-6	-1	-3	-8	-9
$f\,(f^{-1}\,(x))$									

»

Μέσω του τεχνουργήματος του επιστημολογικού επιπέδου, όπου κάθε τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής οι μαθητές/τριες θα κατασκευάσουν τον κατάλληλο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Στη συνέχεια με χρήση των δυο πινάκων και την παραπάνω εργαλειακή γένεση θα συμπληρώσουν τους επόμενους πίνακες. Η αλληλεπίδραση σημειωτικής– εργαλειακής γένεσης θα οδηγήσει στην ανακάλυψη της ιδιότητας της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων.

Τα παραπάνω θέματα αποτελούν παραδείγματα της Ανάλυσης 1.

5η Διδακτική ώρα

<u>1η φάση:</u> Η έννοια της σύνθεσης δυο συναρτήσεων και της μονοτονίας μιας συνάρτησης έχουν διδαχθεί στους μαθητές/τριες στην προηγούμενη ενότητα του σχολικού εγχειριδίου. Οι μαθητές/τριες παρουσιάζουν δυσκολία στην κατανόηση της εύρεσης του πεδίου ορισμού της νέας συνάρτησης καθώς και στην εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας σε βασικές συναρτήσεις. Σκοπός, λοιπόν, των δραστηριοτήτων του 3ου φύλλου εργασίας είναι να ξεπεραστούν οι παραπάνω δυσκολίες καθώς και να παρουσιαστούν οι εφαρμογές αυτών των εννοιών στην περίπτωση της αντίστροφης συνάρτησης.

2η φάση: Μοιράζεται στους μαθητές/τριες το 3ο φύλλο εργασίας. Στο Θέμα Α παρουσιάζονται τρεις βασικές συναρτήσεις και ζητείται από τους μαθητές/τριες να αποδείξουν ότι αντιστρέφονται, να ορίσουν την αντίστροφή τους και στη συνέχεια να ορίσουν τη σύνθεση αυτών με την αντίστροφη τους αλλά και της αντίστροφης συνάρτησης με την αρχική συνάρτηση. Οι δυο από αυτές τις συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Στο σχολικό εγχειρίδιο δεν εμφανίζονται τέτοια παραδείγματα συναρτήσεων αλλά τέτοια θέματα εμφανίζονται σε θέματα των Πανελλήνιων Εξετάσεων.

«Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h με :

$f(x)=\frac{2}{3}x-12$ με $-2<x<3$,

$g(x)=3(x+2)^3$,

$h(x)=\frac{1}{x-3}$ με $x<3$

Α1. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αντιστρέφονται.

Α2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση για καθεμιά από τις συναρτήσεις.

Α3. Να ορίσετε τη σύνθεση καθεμίας από τις παραπάνω συναρτήσεις με την αντίστροφή τους καθώς και τη σύνθεση της αντίστροφης με τη συνάρτηση. Τι παρατηρείτε;»

Η δραστηριότητα αυτή θα εξελιχθεί στον ΜΧΕ της Ανάλυσης και αναμένεται να διαρθρωθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του. Αρχικά, θα ζητηθεί να αναγνωρίσουν οι μαθητές/τριες τις συναρτήσεις που εμφανίζονται και να κατασκευάσουν μια πρόχειρη γραφική παράσταση με κατάλληλες μετατοπίσεις των βασικών συναρτήσεων, στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι γραφικές τους παραστάσεις μέσω του δυναμικού λογισμικού GeoGebra. Η σημειολογική αυτή γένεση θα ενισχύσει την κατασκευή και δημιουργία εικόνας, δηλαδή μιας μοντελοποίησης του προβλήματος. Οι μαθητές/τριες, αφού ανακαλύψουν μέσω της γραφικής παράστασης την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης, θα πρέπει να περάσουν σε μια λεκτική γένεση, μέσω της τεκμηρίωσης της παρατήρησής τους και χρήση του ορισμού της 1-1 συνάρτησης. Στο ερώτημα Α2 θα πρέπει να ορίσουν την αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή να βρουν το πεδίο ορισμού της αλλά και τον τύπο της. Έχοντας, λοιπόν, το εργαλείο της γραφικής παράστασης και οπτικοποιώντας την προηγούμενη γνώση τους, δηλαδή ότι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης, θα πρέπει να αποδείξουν τα συμπεράσματά τους. Στο σημείο αυτό θα πραγματοποιηθεί μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σημειωτική– λεκτική γένεση και στη συνέχεια ανάμεσα στη λεκτική- εργαλειακή γένεση για την εύρεση του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης μέσω του αλγόριθμου επίλυσης του τύπου ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή. Τέλος, θα τους ζητηθεί να ορίσουν τη σύνθεση των δυο συναρτήσεων, βρίσκοντας το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της. Η σημειωτική αυτή γένεση στοχεύει στην ανακάλυψη της γνώσης που παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο αλλά και η εργαλειακή γένεση που θα πραγματοποιηθεί στην επικύρωσή της.

<u>3η φάση:</u> Στη συνέχεια γίνεται η επισημοποίηση της νέας γνώσης, δηλαδή ότι η σύνθεση αυτών των δυο συναρτήσεων οδηγεί στην ταυτοτική συνάρτηση με κατάλληλο πεδίο ορισμού.

«Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x, x\in A$ και $f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=x, x\in f\left(A\right)$»

<u>4η φάση:</u> Το Θέμα Β του 3ου φύλλου εργασίας αναφέρεται στη μονοτονία της αντίστροφης συνάρτησης. Αρχικά με χρήση του δυναμικού λογισμικού GeoGebra θα παρουσιαστούν όλες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και των αντίστροφων τους τις οποίες συνάντησαν οι μαθητές/τριες στα προηγούμενα φύλλα εργασίας και θα ζητηθεί από αυτούς/αυτές να εξετάσουν τη μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφής της. Η σημειωτική αυτή γένεση θα οδηγήσει στην οπτικοποίηση του συμπεράσματος που θα επικυρωθεί με το Θέμα Β.

«Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=\ln\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

Β1. α. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης g και να ορίσετε τη συμμετρική συνάρτηση h της g ως προς την ευθεία y=x.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

γ. Να εξετάσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης h στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Β2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, στο πεδίο ορισμού της τότε και η αντίστροφή της είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο τιμών της συνάρτησης με το ίδιο είδος μονοτονίας.»

Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να κάνουν χρήση των αλγορίθμων εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης και της μονοτονίας μιας συνάρτησης και μέσω αυτής της εργαλειακής γένεσης να οδηγηθούν στις κατάλληλες κατασκευές. Μέσω, λοιπόν, των κατάλληλων αντικειμένων–εργαλείων αλλά και τεχνουργημάτων του επιστημολογικού επιπέδου με τα οποία θα εργαστούν θα αναπτύξουν την κατάλληλη επιχειρηματολογία που θα τους οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η αντίστροφη συνάρτηση έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της με την αρχική συνάρτηση.

6η Διδακτική ώρα

<u>1η φάση:</u> Η επιλογή αυτής της δραστηριότητας του Θέματος Γ στόχο έχει την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης της πολυωνυμικής συνάρτησης τρίτου βαθμού αλλά και την εύρεση των κοινών σημείων αυτής με την αντίστροφή της. Οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία στην αντιμετώπιση αυτού του θέματος γεγονός που επιβεβαιώθηκε από τα αποτελέσματα των Πανελλήνιων Εξετάσεων, όταν ζητήθηκε από τους υποψήφιους η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης της συνάρτησης $f(x)=x^3$. Η πλειονότητα των μαθητών/τριών κατέληξαν στον τύπο $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η εμπλοκή των μαθητών/τριών με τη δραστηριότητα αυτή θα τους επιτρέψει να συμπληρώσουν τις ελλείψεις αλλά και να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις που τους έχουν δημιουργηθεί κατά την ενασχόληση τους με την εξίσωση $x^\nu=\alpha$. Τέλος, στο Θέμα Δ οι μαθητές/τριες καλούνται να βρουν την αντίστροφη συνάρτηση μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου και η επίλυση κάποιων εξισώσεων. Η έλλειψη τέτοιων θεμάτων από το σχολικό εγχειρίδιο επιβάλλει την εμπλοκή τους με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, ώστε να δημιουργήσουν μια πλήρη εικόνα για την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

<u>2η φάση:</u> Οι δραστηριότητες αυτές διαρθρώνονται στο ΜΧΕ της Άλγεβρας με επίλυση τύπων και εξισώσεων, τη χρησιμοποίηση αλγεβρικών συμβολισμών αλλά και στο ΜΧΕ της Ανάλυσης με την εμπλοκή της έννοιας της αντίστροφης συνάρτησης και των γραφικών παραστάσεων.

«Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=-x^3$.

Γ1. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης g και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία κάθε συνάρτησης με την ευθεία y=x και με την αντίστροφή της. Τι παρατηρείτε;

Γ4. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε οι εξισώσεις: $h(x)=x,\ h^{-1}(x)=x$ και $h(x)=h^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες στο διάστημα $\Delta\cap h(\Delta)$ »

«Θέμα Δ

Δ1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτησή τους.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{αν } x<2\\ \sqrt{x-2}+2, & \text{αν } x\geq 2\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x^2+2, & \text{αν } x\in(-2,0]\\ 3x-7, & \text{αν } x\in(0,3)\end{cases}$$

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-2$

Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x)=-1$, $f^{-1}(x)=e$ και $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2}\right)=x-\sqrt{x}$, με $x>0$.»

Η εξέλιξη της δραστηριότητας αναμένεται να αναπτυχθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα αλλά και στις αλληλεπιδράσεις αυτών. Η σημειωτική γένεση, μέσω της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων που εμφανίζονται και στα δυο θέματα, θα οδηγήσει στην οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων αλλά και στην αλληλεπίδραση με την εργαλειακή γένεση που θα οδηγήσει στην κατασκευή. Τέλος, η αξιοποίηση των ορισμών και ιδιοτήτων προκειμένου να παραχθεί μια έγκυρη λεκτική απόδειξη θα οδηγήσει στη διατύπωση νέων ιδιοτήτων.

Τα θέματα του τελευταίου φύλλου εργασίας αποτελούν παραδείγματα της Ανάλυσης 2.

7η Διδακτική ώρα

1η Φάση: Ο στόχος του post-test είναι να διερευνηθεί ο προσωπικός Μαθηματικός Χώρος Εργασίας των μαθητών/τριών μετά τη διδασκαλία, η οποία στηρίχθηκε στο μοντέλο του ΜΧΕ. Τα θέματα επιλέχθηκαν σε αντιστοιχία των θεμάτων του 1ου Τεστ, ώστε η γνώση που αποκόμισαν οι μαθητές/τριες από τη διδακτική παρέμβαση να αποτυπωθεί στα γραπτά τους.

2η Φάση: Μοιράζεται στους μαθητές/τριες το post-test. Στο Θέμα Α δίνεται ένα πρόβλημα από τις δραστηριότητες που προτείνει το ΑΠΣ του 2015 και αφορά ένα οικονομικό θέμα όπως είναι ο φόρος:

«Θέμα Α

Δώδεκα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν φόρο επί των πωλήσεων 6%. Δηλαδή, για κάθε ευρώ που δαπανάται για αγορά σε ένα κατάστημα, θα πρέπει να αποδίδονται στο δημόσιο 6 λεπτά.

Α1. Μπορεί ο φόρος επί των πωλήσεων να εκφραστεί ως συνάρτηση της τιμής αγοράς των προϊόντων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α2. Μπορεί η τιμή της αγοράς των προϊόντων να εκφραστεί ως συνάρτηση του φόρου επί των πωλήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Το πρόβλημα αυτό εξελίσσεται στο ΜΧΕ της Ανάλυσης και αναμένεται να διαρθρωθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του μοντέλου περιλαμβάνοντας διαδικασίες εξερεύνησης, συλλογισμού και τεκμηρίωσης των απαντήσεων. Το θέμα αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα της Ανάλυσης 1.

«Θέμα Β

Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι

1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

x	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	5	9	1	3	7

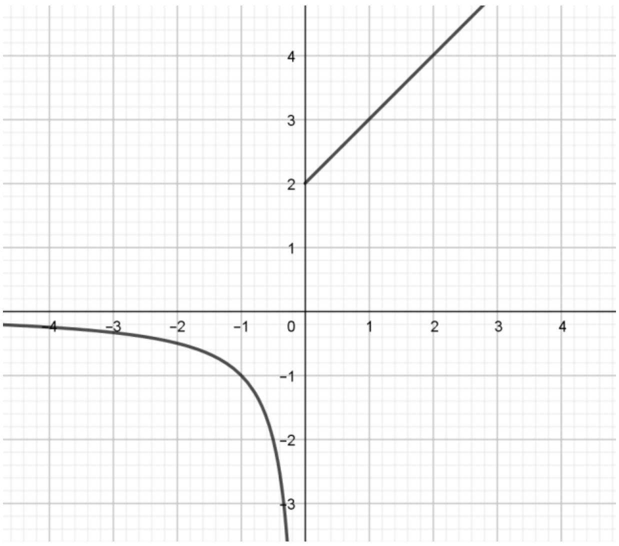
B2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$C_g = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\ \}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτησης είναι 1-1 και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



B4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x) = \text{συν}x,\ x \in [0,\pi]$ αντιστρέφεται και αν ναι, να υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1. »

Η αλληλεπίδραση σημειωτικής– λεκτικής γένεσης αλλά και σημειωτικής– εργαλειακής γένεσης μέσω των ερωτημάτων του θέματος αυτού θα φανερώσει κατά ποσό οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας που προηγήθηκαν εκπλήρωσαν τον στόχο τους. Το θέμα αποτελεί παράδειγμα της Ανάλυσης 1.

Τα επόμενα δυο θέματα του post-test αναφέρονται στον ορισμό και τις ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης. Στόχος είναι να διερευνηθεί η κατανόηση από τους μαθητές/τριες των τεχνουργημάτων αλλά και του θεωρητικού πλαισίου που αναπτύχθηκαν στα φύλλα εργασίας με σκοπό την κατασκευή αλλά και απόδειξη των κατάλληλων ιδιοτήτων της αντίστροφης συνάρτησης.

«Θέμα Γ

Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση

$f^{-1}(x) = x^5 + 5x + 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1.

Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1}$, να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x) = 6$.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $t(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), x > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφής της.

Δ3. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης t με την αντίστροφή της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης t με τη συνάρτηση.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t μπορεί να πάρει τη μορφή $t(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right), x > 1$ και

να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της.»

Η εξέλιξη της εργασίας αναμένεται να αναπτυχθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ περιλαμβάνοντας όλες τις απαραίτητες διαδικασίες, όπως αυτές έχουν περιγράφει στις αντίστοιχες δραστηριότητες του pre-test. Τα θέματα αποτελούν παραδείγματα της Ανάλυσης 2.

6. Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας υπό το πρίσμα του ΜΧΕ, λαμβάνοντας υπόψη και τους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών. Για την πλήρη εννοιολογική κατανόηση της αντίστροφης συνάρτησης, η όλη εργασία πρέπει να ξεκινάει με μια σημειωτική γένεση. Αυτό επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με πραγματικές καταστάσεις που θα τους/τις δώσουν τη δυνατότητα της οπτικοποίησης. Στην συνέχεια ακολουθεί μια εργαλειακή γένεση μέσω του πειραματισμού με διάφορα μέσα, όπως είναι ο πίνακας τιμών, η γραφική παράσταση της συνάρτησης και ο αναλυτικός τύπος της. Στο τέλος, καταλήγει στη λεκτική γένεση. Οι μαθητές/τριες βασίζονται σε ένα θεωρητικό σύστημα κανόνων και είναι ικανοί πλέον να καταλήγουν σε συμπεράσματα και να δικαιολογούν πλήρως τις απαντήσεις τους. Αφού φτάσουν σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να πηγαίνουν αυτόματα από τη διαίσθηση στο συλλογισμό και αντίστροφα. Μπορούν να οπτικοποίησουν το σχήμα ή το λεκτικό πρόβλημα και να εξάγουν θεωρητικά συμπεράσματα και ταυτόχρονα να χρησιμοποιούν το θεωρητικό σύστημα αναφοράς και να μοντελοποιούν το πρόβλημα. Επιπλέον μέσω της διαδικασίας της εργαλειοποίησης ανατροφοδοτούν τις άλλες δυο γενέσεις. Η επιλογή των θεμάτων στα δυο τεστ αλλά και των δραστηριοτήτων στη διδακτική παρέμβαση έγινε ώστε να ελεγχθεί ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών, όπως αυτός αναπτύσσεται όταν αντιμετωπίζουν ένα μαθηματικό ζήτημα.

Στην ανάλυση των αποτελεσμάτων κάθε μαθητής/τρια έχει ένα κωδικό (Μ1- Μ17).

6.1 Ο προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών/τριών πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Ο προσωπικός Μαθηματικός Χώρος Εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση πριν τη διδακτική παρέμβαση έχει διαμορφωθεί από τα φροντιστηριακά μαθήματα που παρακολουθούν οι μαθητές/τριες. Οι δεκαπέντε από τους δεκαεπτά μαθητές/τριες παρακολουθούν φροντιστηριακά μαθήματα και είχαν διδαχθεί την αντίστροφη συνάρτηση ήδη από τον Αύγουστο, δηλαδή δυο μήνες πριν τη διδαχθούν στο σχολείο. Η μαθήτρια Μ7 και ο μαθητής Μ17 δεν παρακολουθούν φροντιστηριακά μαθήματα αλλά προσπάθησαν να απαντήσουν στα ερωτήματα του pre-test. Όπως έχουν δηλώσει παρακολουθούν κατά μέσο ορό πέντε με έξι ώρες μαθηματικά στο φροντιστήριο. Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να κάνουν επανάληψη στην ύλη της αντίστροφης συνάρτησης πριν να γράψουν το pre-test.

6.1.1 Αποτελέσματα του Θέματος Α

Το συγκεκριμένο θέμα αποτελεί παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Μέσα από το θέμα αυτό θα διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές/τριες έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία αντιστοίχισης δυο μεταβλητών καθώς επίσης και ότι η αντίστροφη διαδικασία δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση.

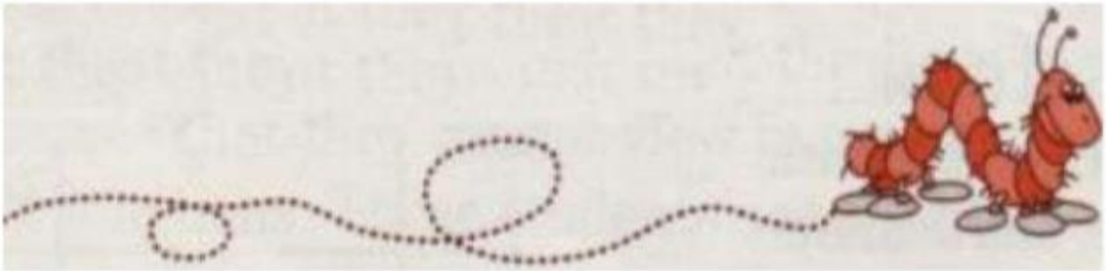
Στο Θέμα Α1 του τεστ που προηγήθηκε της διδακτικής παρέμβασης όλοι οι μαθητές/τριες απάντησαν σωστά στην ερώτηση που τους τέθηκε αλλά μόνο οι εννέα από τους δεκαεπτά κατάφεραν να δικαιολογήσουν σωστά την απάντηση τους. Οι επτά από αυτούς χρησιμοποίησαν τον ορισμό της συνάρτησης, ένας την γραφική παράσταση και ένας το δεδομένο σχήμα του θέματος.

Στο Θέμα Α2 του ίδιου τεστ δώδεκα μαθητές/τριες απάντησαν σωστά και οι εννέα από αυτούς δικαιολόγησαν σωστά την απάντηση τους με τον ίδιο τρόπο που κάνανε και στο προηγούμενο ερώτημα.

6.1.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Α υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Α

Μια κάμπια σέρνεται πάνω σε ένα χαρτί όπως φαίνεται στο σχήμα.

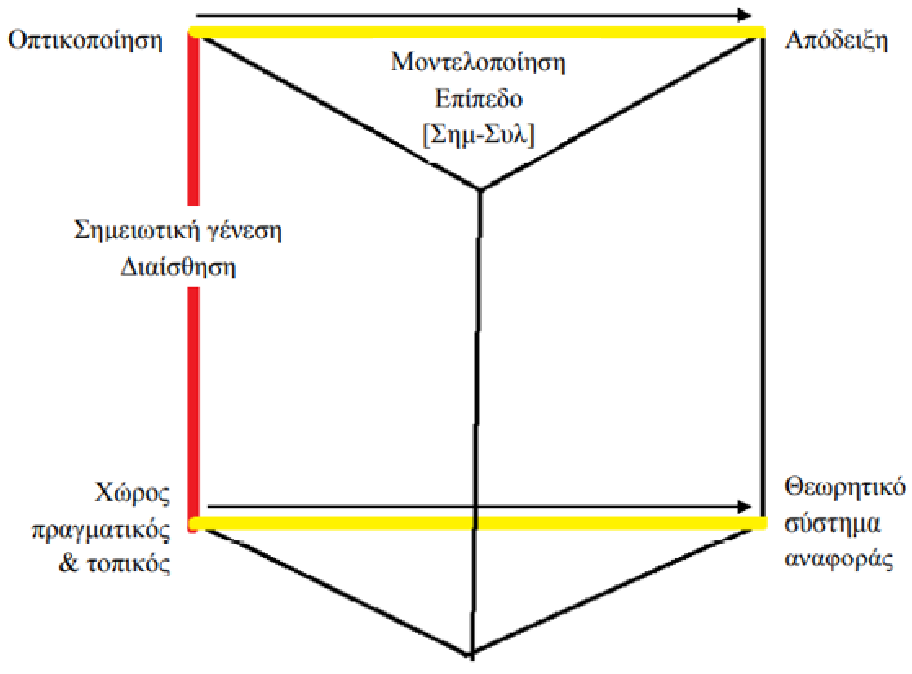


Α1. Εάν θέλαμε να προσδιορίσουμε τη θέση της κάμπιας πάνω στο χαρτί σε σχέση με το χρόνο, μπορεί η θέση να περιγράφει ως μια συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α2. Μπορεί ο χρόνος να περιγράφει ως μια συνάρτηση της θέσης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

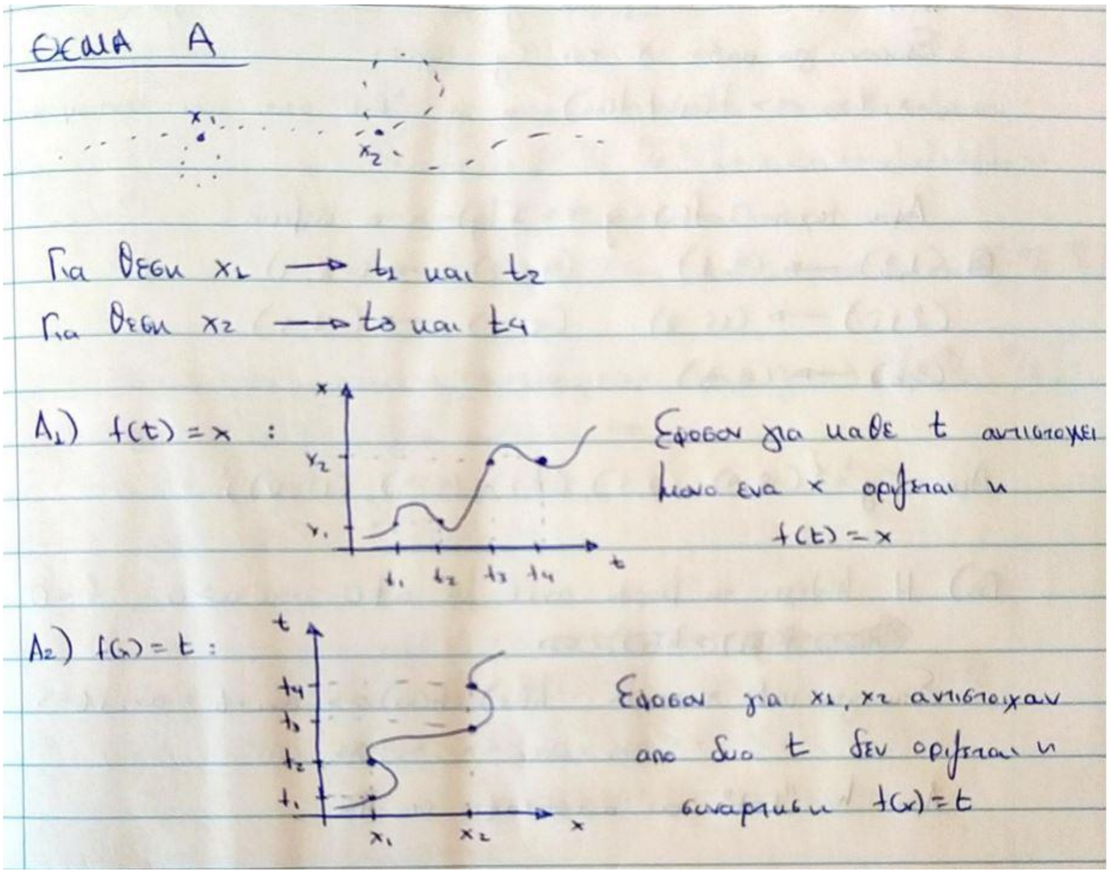
Όπως έχει ήδη αναφερθεί το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια είχε ως στόχο μέσω του θέματος αυτού να διερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές/τριες της έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία αντιστοίχισης δυο μεταβλητών. Οι μαθητές/τριες παρατηρώντας την εικόνα που τους δόθηκε θα έπρεπε να απαντήσουν ότι κάθε χρονική στιγμή η κάμπια βρίσκεται σε μια ακριβώς θέση άρα η θέση μπορεί να περιγραφεί ως μια συνάρτηση του χρόνου, ενώ υπάρχει θέση στην οποία η κάμπια βρίσκεται δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές οπότε ο χρόνος δεν μπορεί να περιγράφει ως μια συνάρτηση της θέσης.

Δίνεται στους μαθητές/τριες μία εικόνα που αντιστοιχεί στο πλαίσιο αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου του ΜΧΕ με σκοπό, μέσω της σημειωτικής γένεσης, να οδηγηθούν στη διαδικασία της οπτικοποίησης του γνωστικού επιπέδου. Στη συνέχεια με χρήση του κατακόρυφου επιπέδου σημειωτικής – λεκτικής γένεσης και τη χρήση του ορισμού της συνάρτησης που περιέχεται στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου να κάνουν την επικύρωση του ορισμού. Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνεται η πορεία που έπρεπε να ακολουθήσουν οι μαθητές/τριες σύμφωνα με το μοντέλο του ΜΧΕ.



Σχήμα 4:Μετάβαση από την σημειωτική γένεση στην λεκτική γένεση

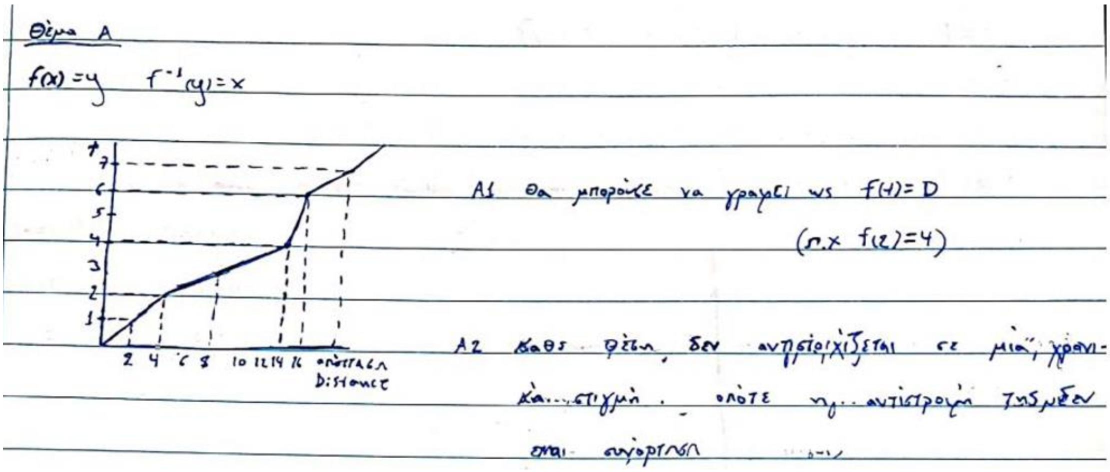
Η απάντηση της μαθήτριας Μ14 περιγράφει ακριβώς την παραπάνω διαδικασία.



Εικόνα 17: Απάντηση της Μ14 στο Θέμα Α του pre-test

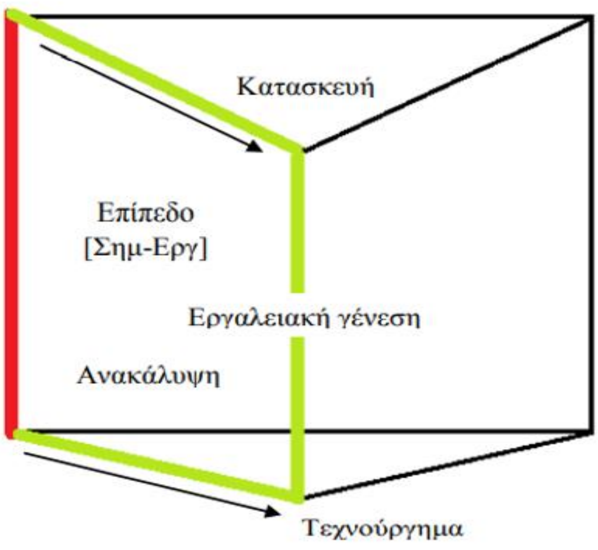
Η μαθήτρια Μ14 παρατηρεί την εικόνα που της δόθηκε και μέσω της σημειωτικής γένεσης οδηγείται στη διαδικασία της οπτικοποίησης του γνωστικού επιπέδου σημειώνοντας στο γραπτό της ότι για τη θέση x_1 και x_2 αντιστοιχούν οι χρονικές στιγμές t_1 , t_2 και t_3, t_4 αντίστοιχα. Στη συνέχεια πραγματοποιεί μια μεταβαση στο κατακόρυφο επίπεδο σημειωτικής – λεκτικής γένεσης του ΜΧΕ και με χρήση του ορισμού της συνάρτησης από το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς τεκμηριώνει την απάντηση της. Ταυτόχρονα, όμως, αποτυπώνει τα συμπεράσματα της στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο αλλά και στη γραφική παράσταση του χρόνου ως προς τη θέση. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς, το γράφημα της καμπύλης που έχει δυο σημεία με την ίδια τετμημένη δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης. Το συμπέρασμα αυτό το χρησιμοποιεί για να επικυρώσει τον ισχυρισμό της.

Ο μαθητής Μ4 ακολουθεί μια διαφορετική διαδικασία στο πλαίσιο του ΜΧΕ. Αρχικά οπτικοποιεί το σχήμα που του δίνεται, πραγματοποιώντας μια σημειωτική γένεση και στην συνέχεια κατασκευάζει την γραφική παράσταση απόστασης -χρόνου και όχι θέσης -χρόνου. Θεωρεί, λοιπόν, ότι η θέση της κάμπιας είναι ένας πραγματικός αριθμός και όχι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών. Δίνει αυθαίρετα κάποιες τιμές στο χρόνο και την απόσταση και κατασκευάζει το παρακάτω γράφημα, πραγματοποιώντας έτσι μια εργαλειακή γένεση.



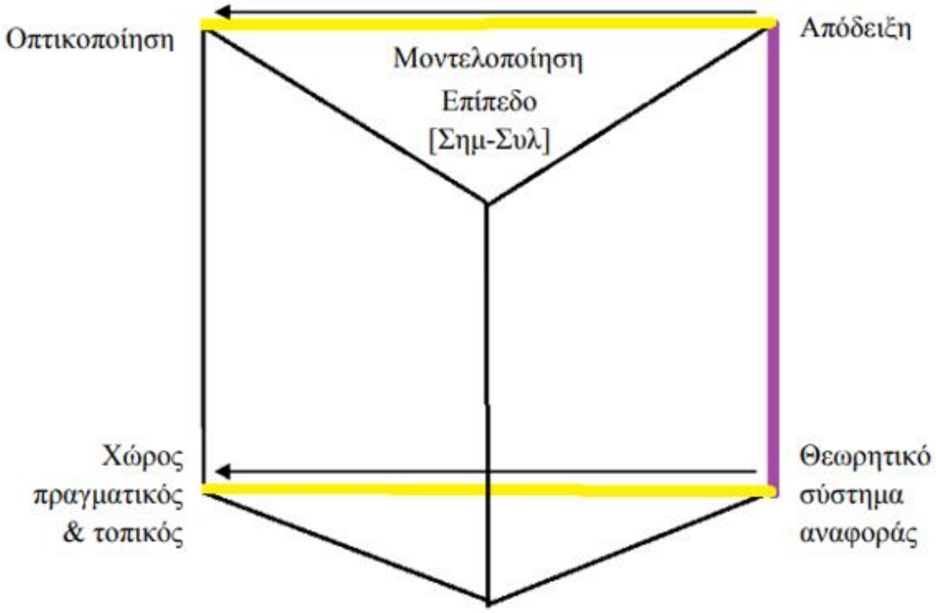
Εικόνα 18:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Α του pre-test

Στο γράφημα που παρουσιάζει δεν έχει αποτυπώσει το γεγονός ότι δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές η κάμπια βρίσκεται στην ίδια θέση και μάλιστα ότι αυτό συμβαίνει δυο φορές. Επίσης παρατηρούμε ότι η καμπύλη που παρουσιάζει είναι γνησίως αύξουσα. Η οπτικοποίηση της εικόνας αλλά και η κατασκευή του τεχνουργήματος δεν είναι επιτυχής, με αποτέλεσμα να μην καταφέρνει να δικαιολογήσει τις απαντήσεις του και να πραγματοποιήσει και την λεκτική γένεση.



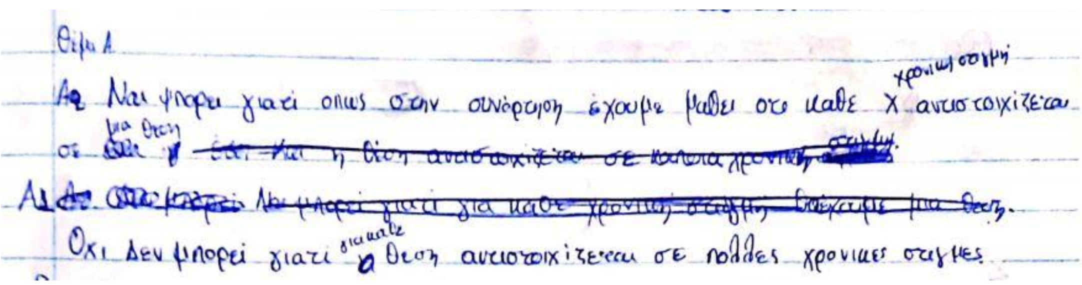
Σχήμα 5:Μετάβαση από την σημειωτική στην εργαλειακή γένεση

Οι υπόλοιποι μαθητές/τριες προσπάθησαν να δικαιολογήσουν την απάντησή τους ακολουθώντας την αντίθετη πορεία από την μαθήτρια Μ14. Δηλαδή από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς χρησιμοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης για να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους προσαρμόζοντας τον στα πλαίσια του προβλήματος που τους δόθηκε. Η πορεία της σκέψης τους φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 6:Μετάβαση από τη λεκτική γένεση στη σημειωτική γένεση.

Η χρήση του ορισμού για τη δικαιολόγηση των δυο ερωτημάτων δεν ήταν επιτυχής από τους/τις μαθητές/τριες. Δυο από αυτούς, η μαθήτρια Μ2 και η μαθήτρια Μ3 ανέφεραν ότι κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχίζεται σε μια θέση και όχι σε μια ακριβώς θέση ενώ στο Α2 ερώτημα ανέφεραν ότι κάθε θέση αντιστοιχίζεται σε πολλές χρονικές στιγμές ενώ αυτό συμβαίνει σε δυο μόνο θέσεις.



Εικόνα 19:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Α του pre-test

Η μαθήτρια Μ7 αναφέρει στο Α2 ερώτημα ότι κάθε θέση δεν αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή αλλά δε δικαιολογεί από το σχήμα την απάντησή της, ενώ η μαθήτρια Μ6 το επιτυγχάνει αυτό αναφέροντας ότι «ο χρόνος δεν μπορεί να περιγράφει ως μια συνάρτηση της θέσης καθώς, επειδή γυρνάει και πίσω, μπορεί να βρεθεί στην ίδια θέση αλλά σε διαφορετική χρονική στιγμή. »

6.1.3 Αποτελέσματα του Θέματος Β

Το θέμα αυτό αποτελεί επίσης παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια είχε ως στόχο μέσω του θέματος αυτού να διερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές/τριες έχουν κατανοήσει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης. Επίσης, στο θέμα αυτό ζητείται να δικαιολογηθεί αν η ημιτονοειδής συνάρτηση είναι 1-1 σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και να υπολογιστούν κάποιες τιμές της αντίστροφης συνάρτησης του ημιτόνου στο διάστημα αυτό. Παρότι στο σχολικό εγχειρίδιο δεν παρουσιάζονται όλες οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης, η ερευνήτρια από την αρχή της σχολικής χρονιάς προσπάθησε να τις ενσωματώσει στο μάθημα της.

Στο Β1 ερώτημα επτά μαθητές/τριες απάντησαν ότι η συνάρτηση δεν είναι 1-1, ένας απάντησε ότι είναι αλλά δε δικαιολόγησε την απάντησή του και οι υπόλοιποι απάντησαν ότι είναι συνάρτηση 1-1 δικαιολογώντας την απάντηση τους είτε με τον ορισμό είτε περιγραφικά. Όσοι μαθητές/τριες απάντησαν σωστά, συμπλήρωσαν σωστά και τον πίνακα, απλά η μαθήτρια Μ2 και η μαθήτρια Μ10 δεν χρησιμοποίησαν σωστές μεταβλητές στον πίνακα τους.

Στο Β2 ερώτημα δεκαπέντε μαθητές/τριες απάντησαν ότι η συνάρτηση είναι 1-1 αλλά οι δέκα από αυτούς δικαιολόγησαν σωστά την απάντηση τους. Οι δώδεκα μάλιστα έγραψαν σωστά το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μαθητής Μ4 παρουσιάζει το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα διαδοχικά σημεία.

Στο Β3 ερώτημα δεκατρείς μαθητές/τριες απαντούν ότι η συνάρτηση είναι 1-1. Οι πέντε από αυτούς δικαιολογούν την απάντηση τους με την βοήθεια των παράλληλων ευθειών στον άξονα x’x που τέμνουν την γραφική παράσταση της δεδομένης συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο, δυο με την βοήθεια της μονοτονίας, μια μαθήτρια αποδεικνύει ότι η ευθεία συνάρτηση είναι 1-1 και οι υπόλοιποι δε δικαιολογούν την απάντησή τους. Εννέα μαθητές/τριες καταφέρνουν να σχεδιάσουν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μέσω δυο σημείων της δεδομένης ευθείας συνάρτησης βρίσκουν δυο σημεία της αντίστροφης ευθείας συνάρτησης και τα ενώνουν. Δυο μαθητές σχεδιάζουν τη συμμετρική ευθεία ως προς τον άξονα y’y.

Στο Β4 ερώτημα έξι μαθητές/τριες απάντησαν ότι η ημιτονοειδής συνάρτηση αντιστρέφεται δικαιολογώντας την απάντηση τους μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Οι τρεις από αυτούς χρησιμοποίησαν τη μονοτονία, η μαθήτρια Μ2 τον ορισμό και οι άλλοι δυο την ιδιότητα του γραφήματος μιας 1-1 συνάρτησης.

6.1.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Β υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Β

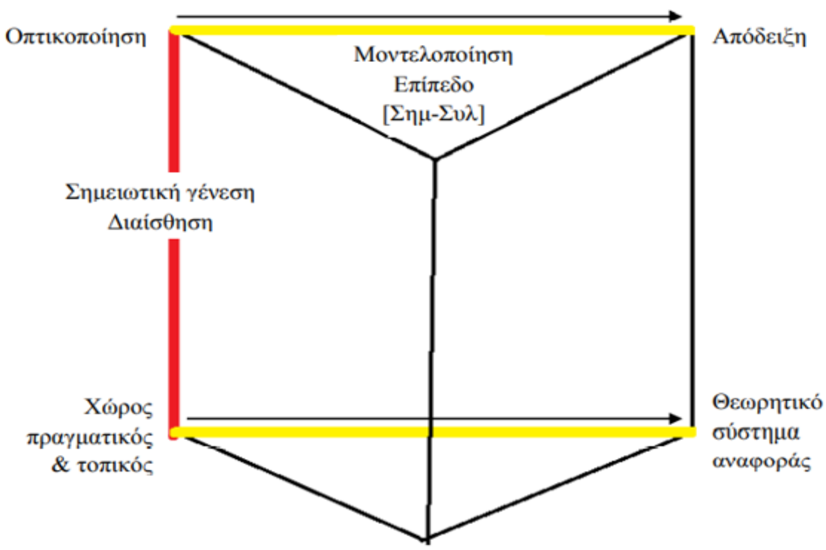
Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι

1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

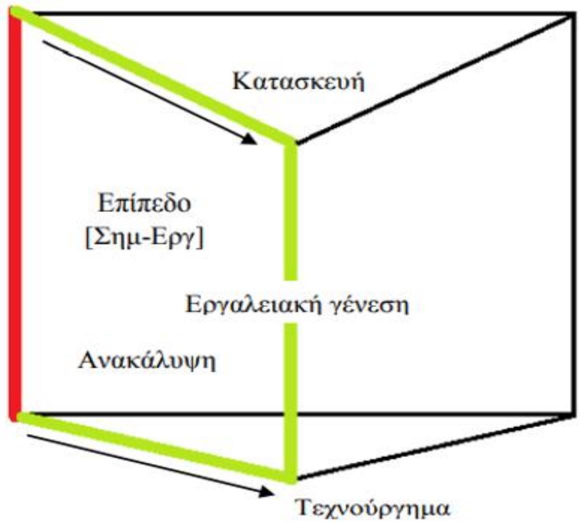
X	1	2	3	4	5
f(x)	7	3	1	9	5

Η ερευνήτρια στο ερώτημα αυτό ήθελε από τους/τις μαθητές/τριες της να παρατηρήσουν ότι στον πίνακα που τους δίνεται οι διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζονται σε διαφορετικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής και να δικαιολογήσουν με τον τρόπο αυτό ότι η συνάρτηση είναι 1-1, δηλαδή να οδηγηθούν μέσω της σημειωτικής γένεσης σε μια λεκτική γένεση, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



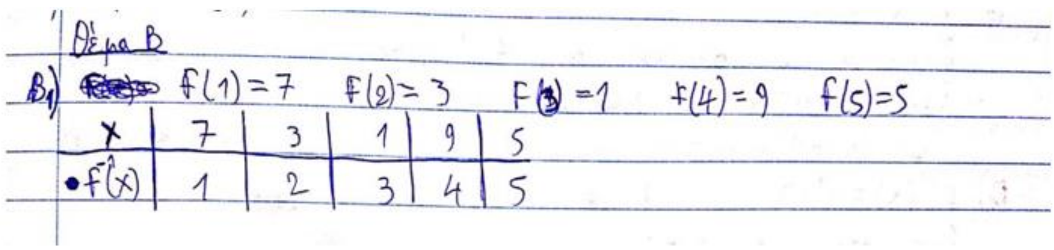
Σχήμα 7:Μετάβαση από την σημειωτική γένεση στην λεκτική γένεση

Στη συνέχεια με τη χρήση του βασικού τεχνουργήματος της αντίστροφης συνάρτησης, δηλαδή της αμφίδρομης αντιστοίχισης της ανεξάρτητης με την εξαρτημένη μεταβλητή να οδηγηθούν σε μια εργαλειακή γένεση, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



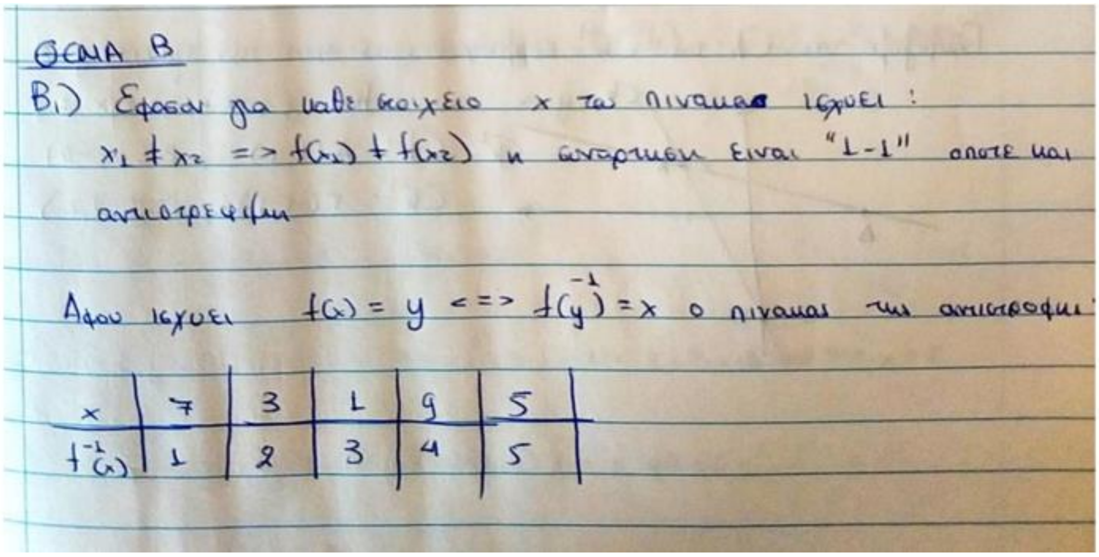
Σχήμα 8:Μετάβαση από την σημειωτική στην εργαλειακή γένεση

Ο μαθητής Μ9 δε δικαιολογεί ότι η συνάρτηση είναι 1-1, γραφεί τις τιμές της συνάρτησης και στην συνέχεια κατασκευάζει τον πίνακα της αντίστροφης. Δεν οδηγείται στη λεκτική γένεση αλλά μόνο στην εργαλειακή.



Εικόνα 20:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Β1 του pre-test

Η μαθήτρια Μ14 δικαιολογεί την απάντησή της, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του σχολικού εγχειριδίου και στη συνέχεια με χρήση της βασικής ισοδυναμίας της αντίστροφης συνάρτησης κατασκευάζει τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Στον πίνακα της αντίστροφης αλλάζει τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x. Παρατηρείται μια αλληλεπίδραση σημειωτικής- λεκτικής γένεσης και λεκτικής- εργαλειακής γένεσης όπως φαίνεται στην απάντηση της μαθήτριας.



ΘΕΜΑ Β

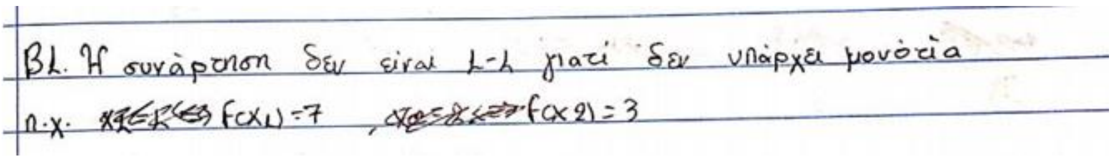
Β1) Εφοσον για καθε στοιχειο x του πινακα ισχυει:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ η συναρτηση ειναι "1-1" οποτε και αντιστρεψιμη

Αφου ισχυει $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ ο πινακας της αντιστροφης:

x	7	3	1	9	5
$f^{-1}(x)$	1	2	3	4	5

Εικόνα 21:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Β1 του pre-test

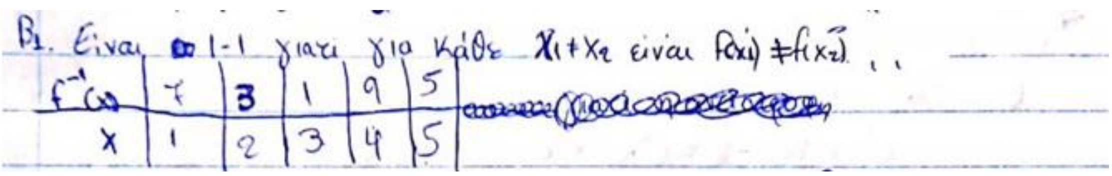
Η μαθήτρια Μ3 δικαιολογεί ότι η συνάρτηση δεν είναι 1-1, καθώς δεν είναι μονότονη.



Β1. Η συνάρτηση δεν είναι 1-1 γιατί δεν υπάρχει μονοτονία
π.χ. $f(x_1)=7$, $f(x_2)=3$

Εικόνα 22:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Β1 του pre-test

Η μαθήτρια Μ2 δικαιολογεί την απάντησή της με χρήση του ορισμού αλλά στην κατασκευή του πίνακα δεν τοποθετεί σωστά τις μεταβλητές. Δεν οδηγείται, λοιπόν, στη λεκτική γένεση.

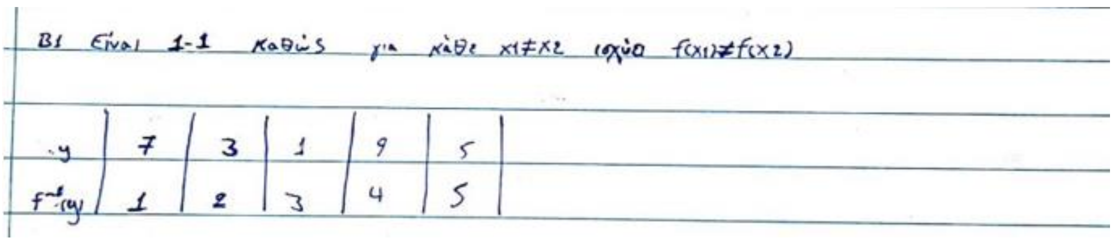


Β1. Είναι 1-1 γιατί για κάθε $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$ . .

$f^{-1}(x)$	7	3	1	9	5
x	1	2	3	4	5

Εικόνα 23:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β1 του pre-test

Ο μαθητής Μ4, τέλος, αντιστοιχίζει τις τιμές της μεταβλητής y στις τιμές της μεταβλητής x και κατασκευάζει τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης.



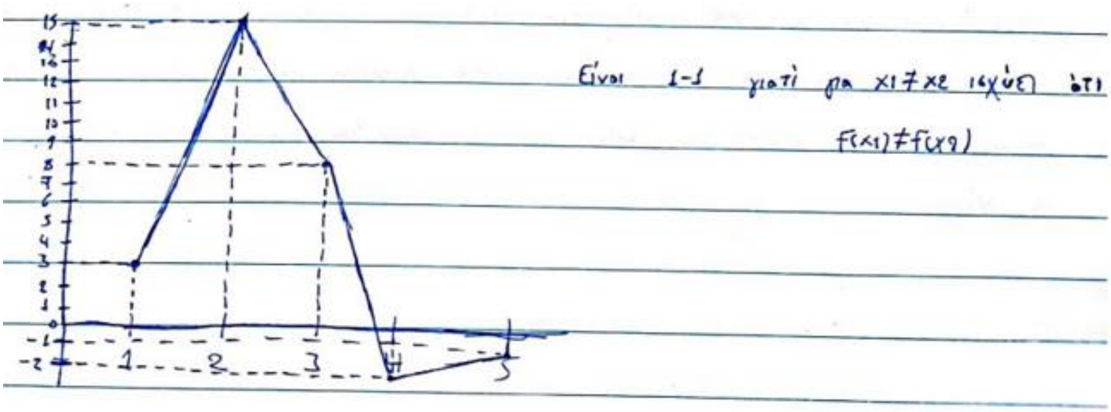
Εικόνα 24:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Β1 του pre-test

Β2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$C_g = \{(1,3),(2,15),(3,8),(4,-2),(5,-1)\}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

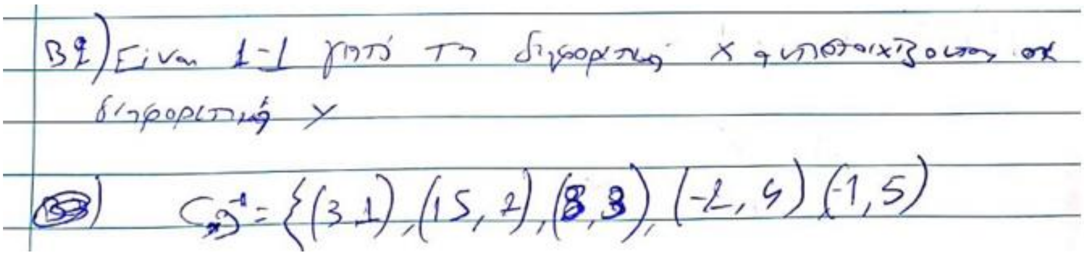
Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα στόχος της ερευνήτριας ήταν να διερευνήσει την αλληλεπίδραση σημειωτικής- λεκτικής γένεσης και εργαλειακής- λεκτικής γένεσης στον τρόπο σκέψης των μαθητών/τριών της.

Ο μαθητής Μ4 παρουσιάζει την παρακάτω λύση. Θεωρεί ότι η συνάρτηση αποτελείται και από τα υπόλοιπα σημεία και ενώνει με ευθύγραμμα τμήματα τα διαδοχικά σημεία που δίνονται. Η συνάρτηση που σχεδιάζει δεν είναι γνησίως μονότονη άρα θα έπρεπε να συμπεράνει ότι δεν είναι και 1-1, παρόλα αυτά χρησιμοποιεί τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης και δικαιολογεί σωστά την απάντηση του. Η εργαλειακή γένεση δεν έχει πραγματοποιηθεί στον μαθητή αυτό.



Εικόνα 25:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Β2 του pre-test

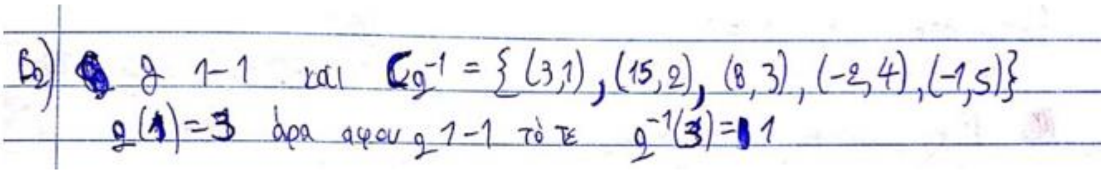
Ο μαθητής Μ8 δικαιολογεί περιγραφικά την απάντησή του και δίνει το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης.


B2) Είναι 1-1 γιατί τα διαφορετικά x αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά y

B3) $C_{g^{-1}} = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4)(-1,5)\}$

Εικόνα 26:Απάντηση του μαθητή Μ8 στο Θέμα Β2 του pre-test

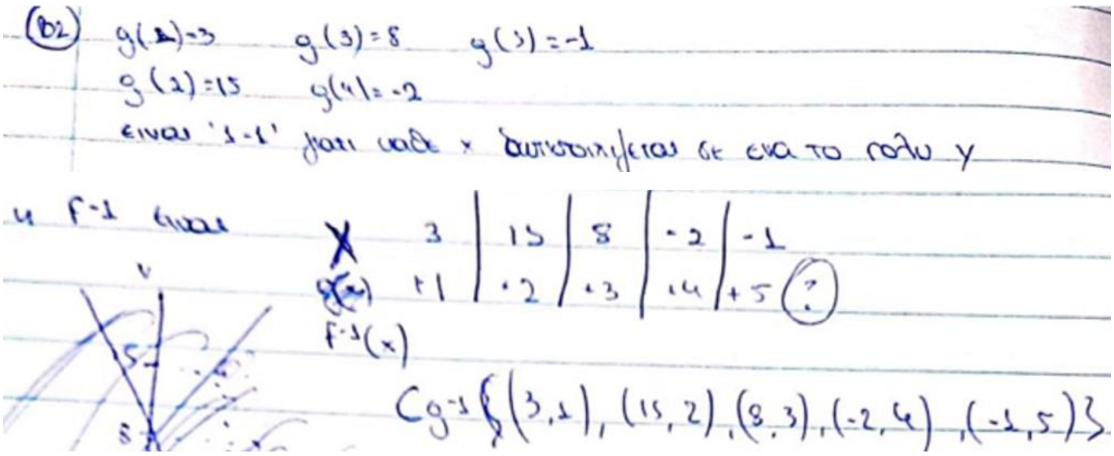
Ο μαθητής Μ9 δίνει και ένα παράδειγμα για την κατασκευή του συνόλου αλλά δε δικαιολογεί την απάντηση του. Πραγματοποιεί μια εργαλειακή γένεση, η οποία όμως δε συνοδεύεται από την αντίστοιχη λεκτική γένεση.


B2) g 1-1 και $C_{g^{-1}} = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$

$g(1)=3$ άρα αφού g 1-1 τότε $g^{-1}(3)=1$

Εικόνα 27:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Β2 του pre-test

Η μαθήτρια Μ10 μετατρέπει το σύνολο διατεταγμένων ζευγών σε τιμές της συνάρτησης, κατασκευάζει τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης και στη συνέχεια κατασκευάζει το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Δικαιολογεί, όμως, την απάντηση της λανθασμένα. Η εργαλειακή γένεση δεν την οδηγεί σε μια επιτυχής λεκτική γένεση.


B2) $g(1)=3$ $g(3)=8$ $g(5)=-1$

$g(2)=15$ $g(4)=-2$

είναι '1-1' γιατί κάθε x αντιστοιχίζεται σε ένα το πολύ y

η f^{-1} είναι

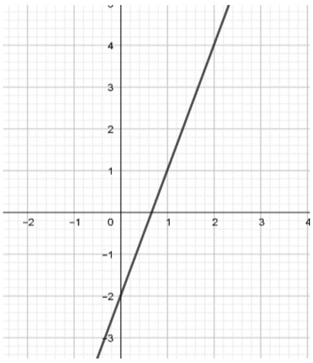
x	3	15	8	-2	-1
g(x)	1	2	3	4	5

$f^{-1}(x)$

$C_{g^{-1}} \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$

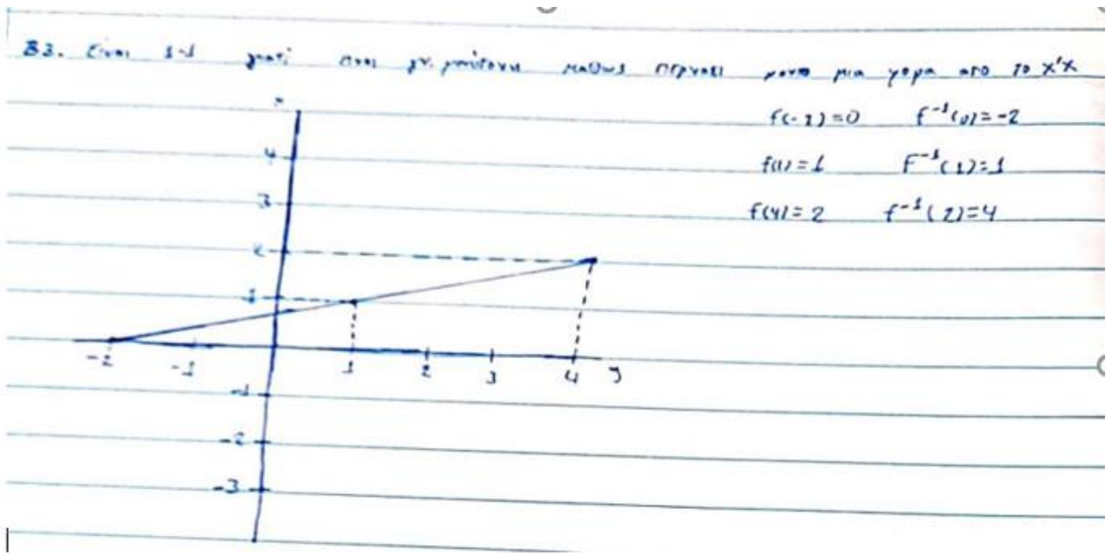
Εικόνα 28:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 στο Θέμα Β2 του pre-test

B3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



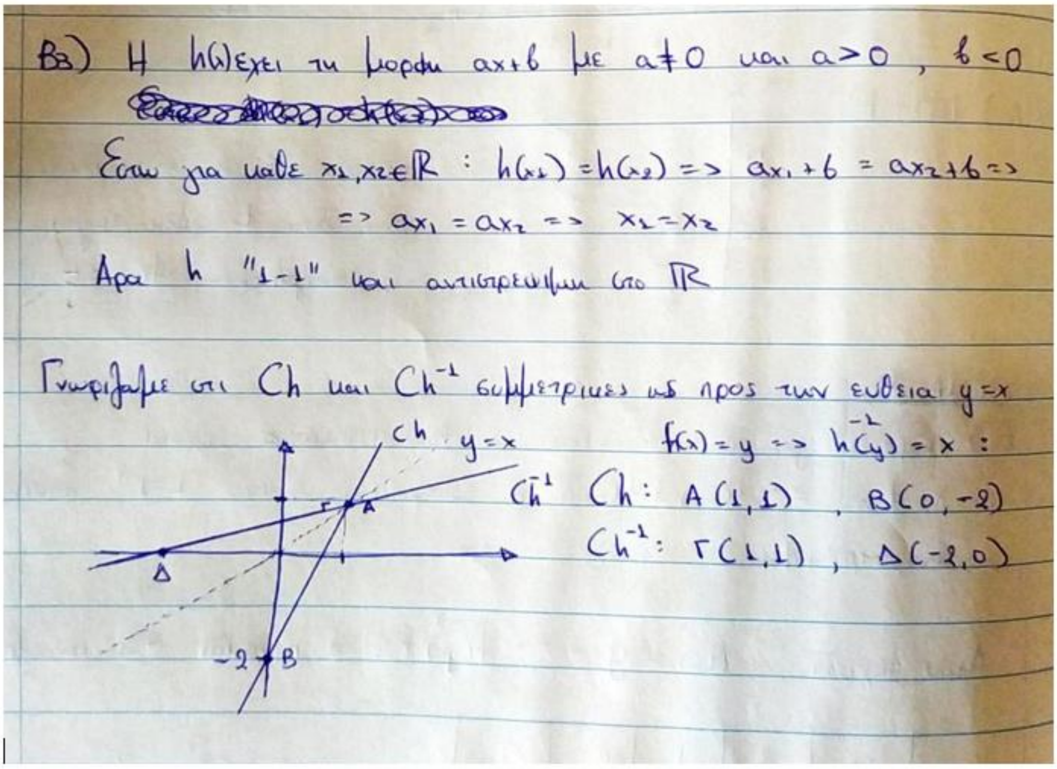
Στο ερώτημα αυτό από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και ζητείται από τους μαθητές/τριες να αναγνωρίσουν ότι είναι μια ευθεία συνάρτηση και μάλιστα γνησίως αύξουσα και να πραγματοποιήσουν μια σημειωτική γένεση, μεταβαίνοντας έτσι στο γνωστικό επίπεδο. Στην συνέχεια από το πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου της αντίστροφης συνάρτησης οι μαθητές/τριες θα χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα της μονοτονίας, για να αποδείξουν ότι είναι 1-1, πραγματοποιώντας έτσι μια λεκτική γένεση. Στη συνέχεια πρέπει να πραγματοποιήσουν μια μετάβαση από τη λεκτική γένεση στην εργαλειακή γένεση, για να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης μέσω της συμμετρίας της αρχικής συνάρτησης και της αντίστροφης με την ευθεία y=x. Αρκετοί μαθητές/τριες πραγματοποίησαν αρχικά μια εργαλειακή γένεση και οδηγήθηκαν στη λεκτική γένεση. Παρατήρησαν ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x’x έχει με την γραφική παράσταση ένα το πολύ κοινό σημείο και έτσι δικαιολόγησαν ότι η συνάρτηση είναι 1-1.

Ο μαθητής Μ4 αναφέρει ότι η συνάρτηση είναι 1-1, διότι είναι γνησίως μονότονη αλλά δε δικαιολογεί σωστά την απάντησή του. Μεταβαίνει στο γνωστικό επίπεδο μέσω μιας σημειωτικής γένεσης, η οποία όμως δεν συνοδεύεται με την αντίστοιχη λεκτική γένεση. Στη συνέχεια σχεδιάζει την αντίστροφη συνάρτηση, κατασκευάζοντας μέσω τριών σημείων της αρχικής συνάρτησης τα αντίστοιχα τρία σημεία της αντίστροφης συνάρτησης.



Εικόνα 29:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Β3 του pre-test

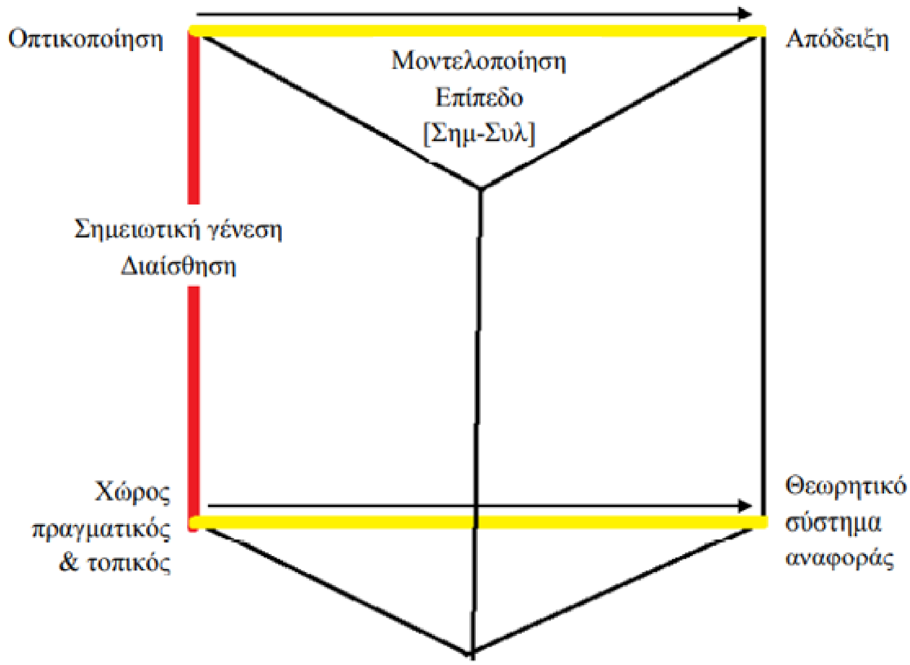
Η μαθήτρια Μ14 αναγνωρίζει ότι η συνάρτηση είναι μια ευθεία, αποδεικνύει ότι η ευθεία είναι 1-1 και κατασκευάζει τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Όπως παρατηρείται στην απάντηση της υπάρχει μια αμφίδρομη κίνηση μεταξύ της εργαλειακής και λεκτικής γένεσης.



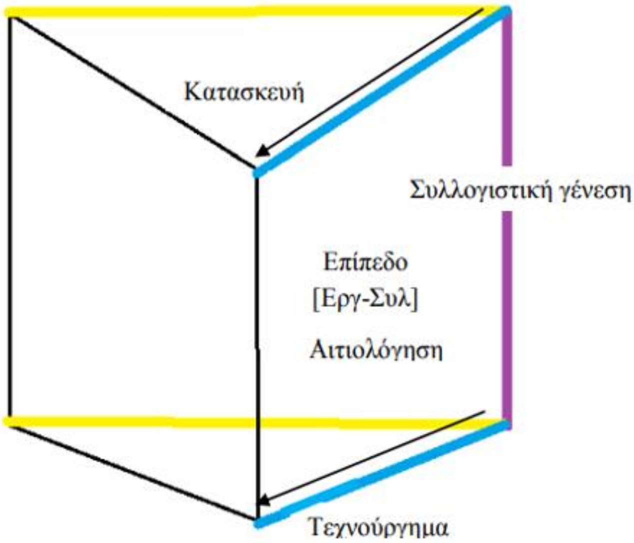
Εικόνα 30:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Β3 του pre-test

B4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x)=ημx,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ αντιστρέφεται και αν ναι, να υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1.

Στόχος του ερωτήματος αυτού ήταν οι μαθητές/τριες να αντιληφθούν ότι μια συνάρτηση μπορεί να αντιστρέφεται σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και ότι μπορούν να υπολογίζουν τις τιμές της αντίστροφης συνάρτησης χωρίς τον τύπο αυτής. Αρχικά οι μαθητές/τριες θα πρέπει να παρατηρήσουν το γράφημα της συνάρτησης στο διάστημα που τους δίνεται και μέσω της σημειωτικής γένεσης να οδηγηθούν στη λεκτική γένεση. Αναγνωρίζουν, λοιπόν, ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο δεδομένο διάστημα και στην συνέχεια οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι αντιστρέφεται. Για τον υπολογισμό των τιμών της αντίστροφης συνάρτησης οι μαθητές/τριες θα πρέπει από το πλαίσιο αναφοράς της αντίστροφης συνάρτησης να ανακαλέσουν την ιδιότητα $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, η οποία θα λειτουργήσει ως τεχνούργημα για τον υπολογισμό των τιμών της αντίστροφης. Με αυτόν τον τρόπο θα οδηγηθούν σε μια εργαλειακή γένεση.

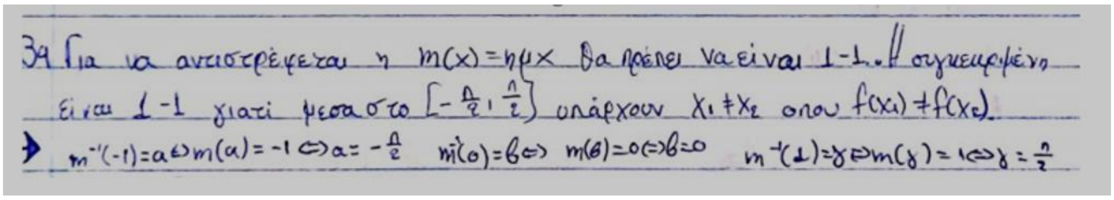


Σχήμα 9:Μετάβαση από την σημειωτική γένεση στην λεκτική γένεση



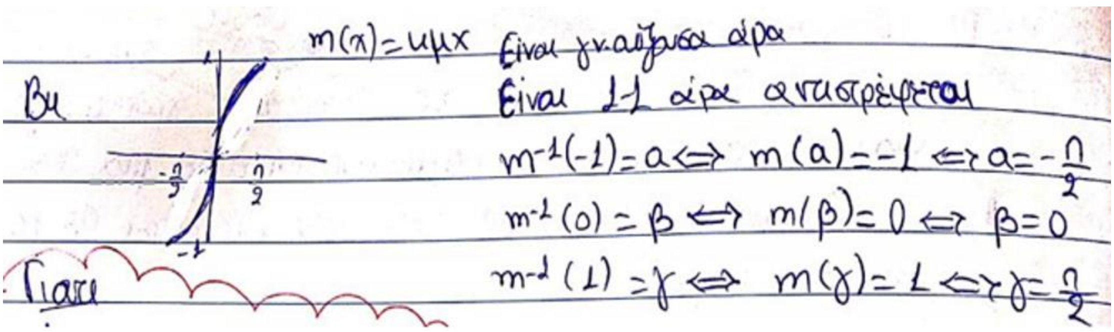
Σχήμα 10:Μετάβαση από την λεκτική γένεση στην εργαλειακή γένεση.

Η μαθήτρια Μ2 δεν καταφέρνει να δικαιολογήσει την απάντησή της, διότι δεν κατασκευάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στην απάντησή της αναφέρει ότι η συνάρτηση είναι 1-1, καθώς υπάρχουν διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Η ιδιότητα αυτή θα έπρεπε όμως να ισχύει για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.



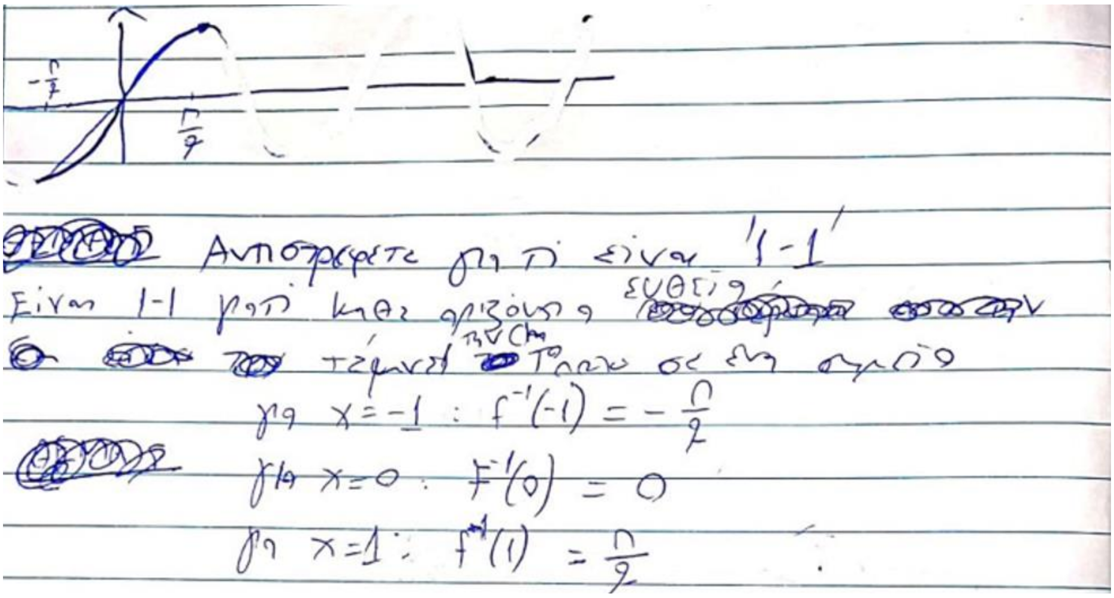
Εικόνα 31:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β4 του pre-test

Η μαθήτρια Μ7 παρουσιάζει μια ολοκληρωμένη λύση και κινείται με επιτυχία στο επίπεδο λεκτικής- εργαλειακής γένεσης.



Εικόνα 32:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Β4 του Pre-test

Ο μαθητής Μ8, όπως παρατηρούμε στο γραπτό του, έχει σχεδιάσει αρχικά το γράφημα της συνάρτησης και στη συνέχεια σβήνει αυτό που δεν του χρειάζεται. Δικαιολογεί την απάντηση του μέσω της ιδιότητας της γραφικής παράστασης των αντίστροφων συναρτήσεων, δηλαδή των παράλληλων ευθειών στον άξονα x'x και δίνει τις τιμές της αντίστροφης δίχως να παρουσιάσει τον τρόπο που της υπολόγισε.



Αντιστρέψιμη γιατί είναι '1-1'

Είναι 1-1 γιατί κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την Cf πάνω σε ένα σημείο

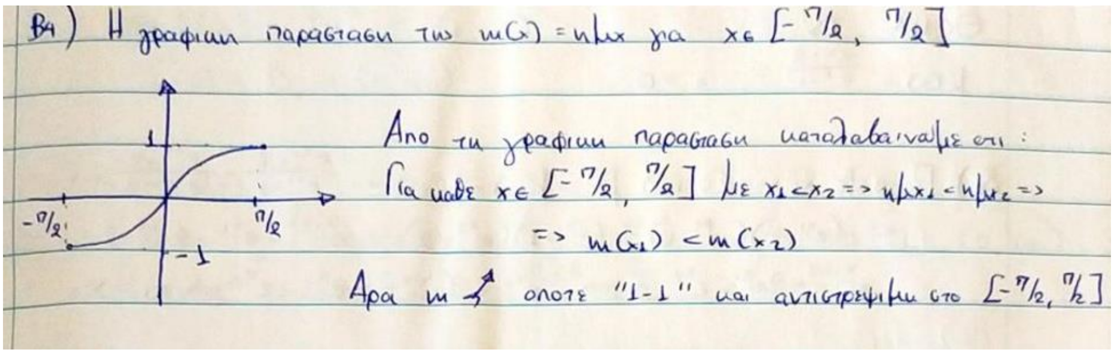
για $x=-1$: $f^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

για $x=0$: $f^{-1}(0) = 0$

για $x=1$: $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

Εικόνα 33:Απάντηση του μαθητή Μ8 στο Θέμα Β4 του Pre-test

Τέλος, η μαθήτρια Μ14 παρουσιάζει για ακόμη μια φορά αναλυτικά τη λύση της. Από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου χρησιμοποιεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, οπτικοποιεί την εικόνα και αποδεικνύει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1. Στη συνέχεια ανακαλεί από το πλαίσιο αναφοράς τη βασική ισοδυναμία ανάμεσα στις τιμές της συνάρτησης και της αντίστροφης της και υπολογίζει αναλυτικά τις τιμές που της ζητήθηκαν.

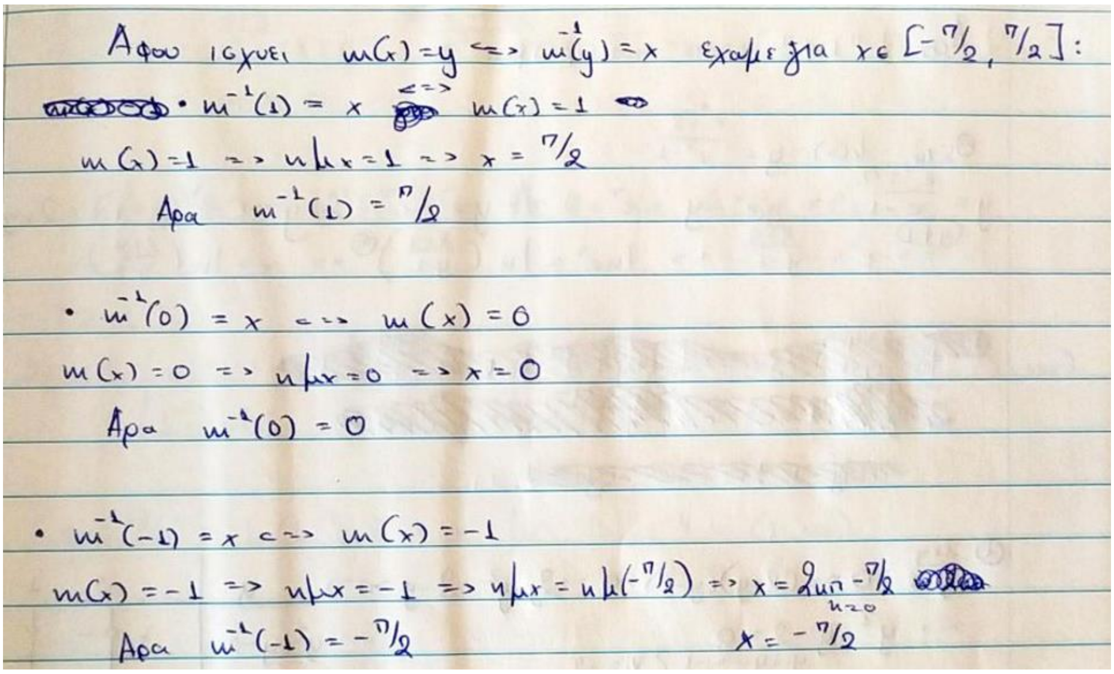


Β4) Η γραφική παράσταση της $κ(x) = ημx$ για $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

Από τη γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι:

Για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 < ημx_2 \Rightarrow κ(x_1) < κ(x_2)$

Άρα κ ↗ οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη στο $[-\pi/2, \pi/2]$



Εικόνα 34:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Β4 του pre-test

6.1.5 Αποτελέσματα του Θέματος Γ

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Στόχος του θέματος αυτού είναι να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες ότι όταν γνωρίζουν τον τύπο της συνάρτησης μπορούν να υπολογίζουν τις τιμές της αντίστροφης και όταν γνωρίζουν τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης να υπολογίζουν τις τιμές της συνάρτησης, δηλαδή να μπορούν να εφαρμόζουν την ιδιότητα: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Πέντε μαθητές/τριες καταφέρνουν να απαντήσουν σωστά και στα δυο υποερωτήματα του θέματος. Οι δυο από αυτούς μάλιστα παρουσίασαν μια διαφορετική λύση, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι δυο μαθητές/τριες προσπάθησαν να υπολογίσουν τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για τον υπολογισμό της ζητούμενης τιμής.

6.1.6 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Γ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Γ

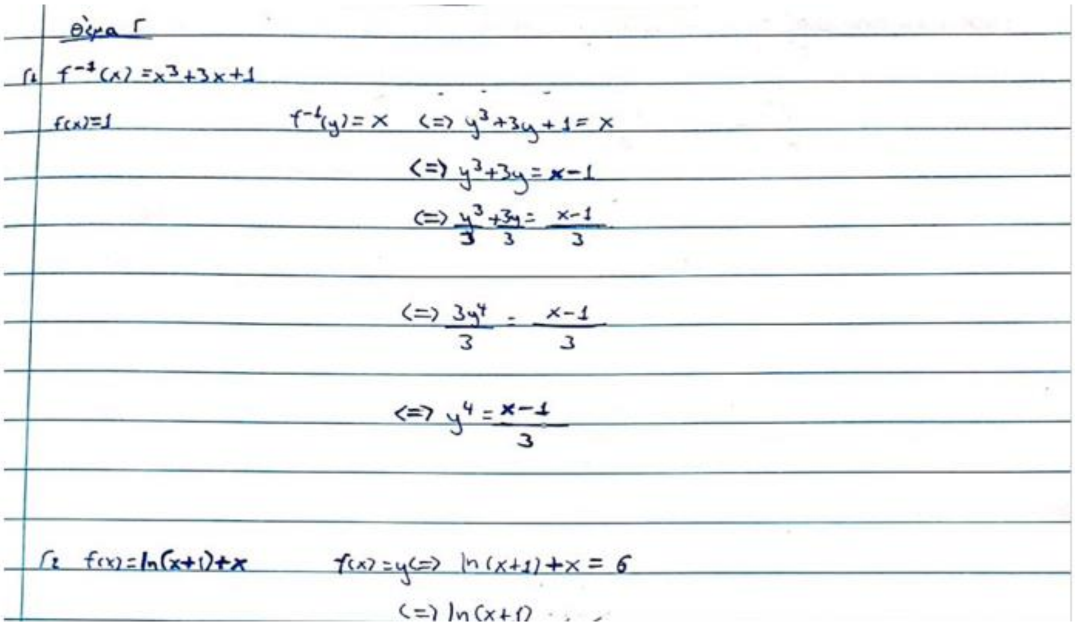
Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση

$f^{-1}(x)=x^3+3x+1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1.

Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+x$,να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x)=6$

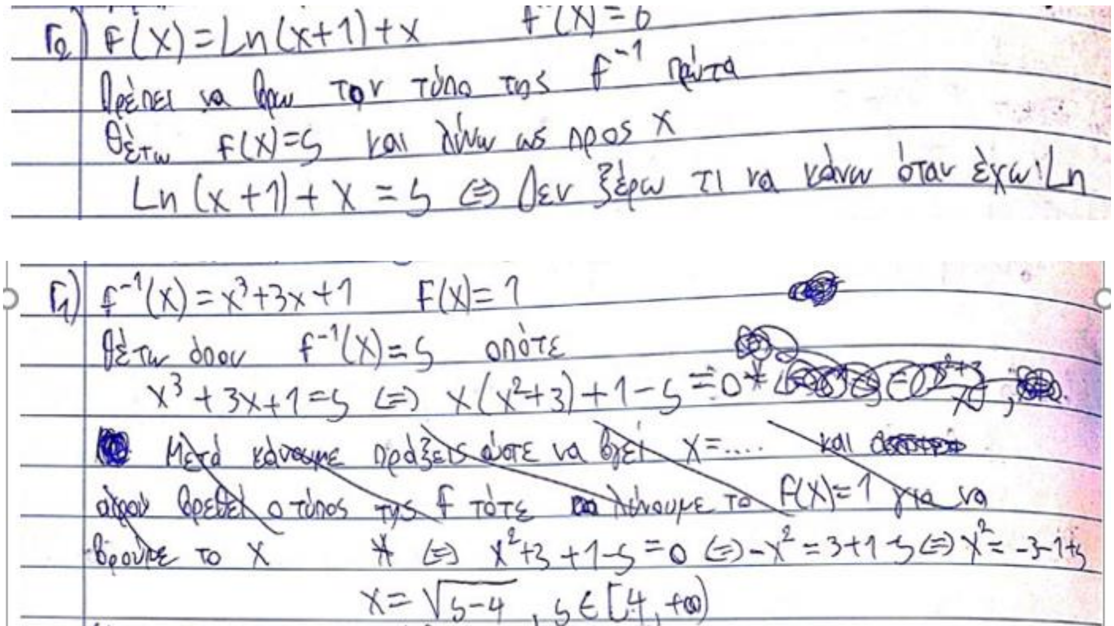
Η εργαλειοποίηση της θεωρίας από τους μαθητές/τριες μελετήθηκε μέσω του θέματος αυτού. Οι μαθητές/τριες τείνουν να εφαρμόζουν τον αλγόριθμο της εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης κάθε φορά που τους/τις δίνεται η συνάρτηση, ακόμα και σε ερωτήματα που αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Ο μαθητής Μ4 και ο μαθητής Μ9 ακολουθούν την παραπάνω διαδικασία χωρίς αποτέλεσμα.


Θέμα Γ
Γ1 $f^{-1}(x)=x^3+3x+1$
$f(x)=1$ $f^{-1}(y)=x \iff y^3+3y+1=x$
$\iff y^3+3y=x-1$
$\iff \frac{y^3}{3}+\frac{3y}{3}=\frac{x-1}{3}$
$\iff \frac{3y^4}{3}=\frac{x-1}{3}$
$\iff y^4=\frac{x-1}{3}$
Γ2 $f(x)=\ln(x+1)+x$ $f(x)=y \iff \ln(x+1)+x=6$
$\iff \ln(x+1)$

Εικόνα 35:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Γ του pre-test

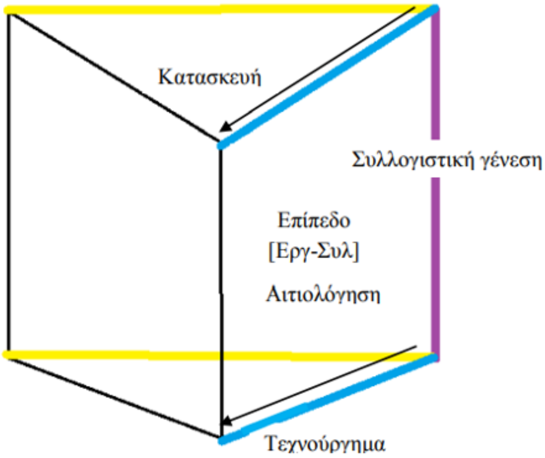
Μάλιστα ο μαθητής Μ9 αναφέρει την αδυναμία του να οδηγηθεί στο κατάλληλο αποτέλεσμα.


Γ2) $f(x)=Ln(x+1)+x$ $f(x)=6$
Πρέπει να βρω τον τύπο της f^{-1} πρώτα
Θέτω $f(x)=y$ και λύνω ως προς x
$Ln(x+1)+x=y \iff$ Δεν ξέρω τι να κάνω όταν έχω Ln

Γ1) $f^{-1}(x)=x^3+3x+1$ $F(x)=1$
Θέτω όπου $f^{-1}(x)=y$ οπότε
$x^3+3x+1=y \iff x(x^2+3)+1-y=0$
Μετά κάνουμε πράξεις ώστε να βρεί x=.... και αφού βρεθεί ο τύπος της f τότε λύνουμε το f(x)=1 για να βρούμε το x
$\iff x^2+3+1-y=0 \iff -x^2=3+1-y \iff x^2=-3-1+y$
$x=\sqrt{y-4}$, $y\in[4,+\infty)$
Θέμα Δ $f(x)=\sqrt{x-4}$, $x\in[4,+\infty)$

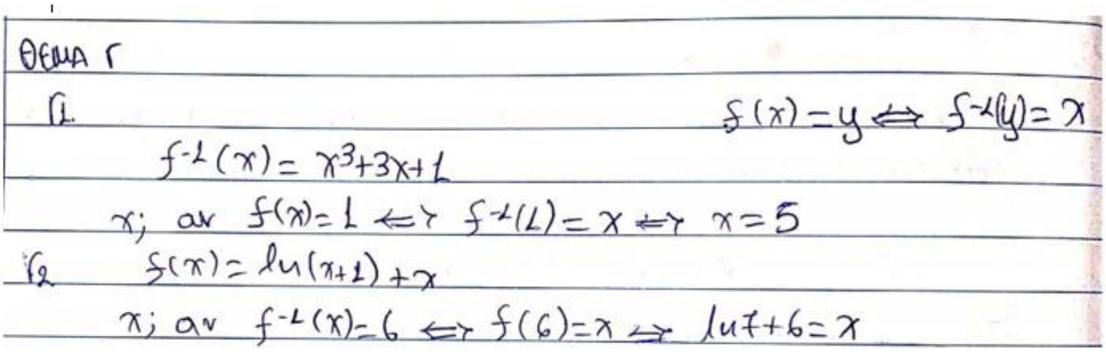
Εικόνα 36:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Γ του pre-test

Η ερευνήτρια, λοιπόν, ήθελε να μελετήσει την αλληλεπίδραση λεκτικής- εργαλειακής γένεσης.



Σχήμα 11:Μετάβαση από την λεκτική γένεση στην εργαλειακή γένεση.

Η μαθήτρια Μ7 ακολουθεί ακριβώς αυτή τη διαδικασία.



Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

$f^{-1}(x)=x^3+3x+1$

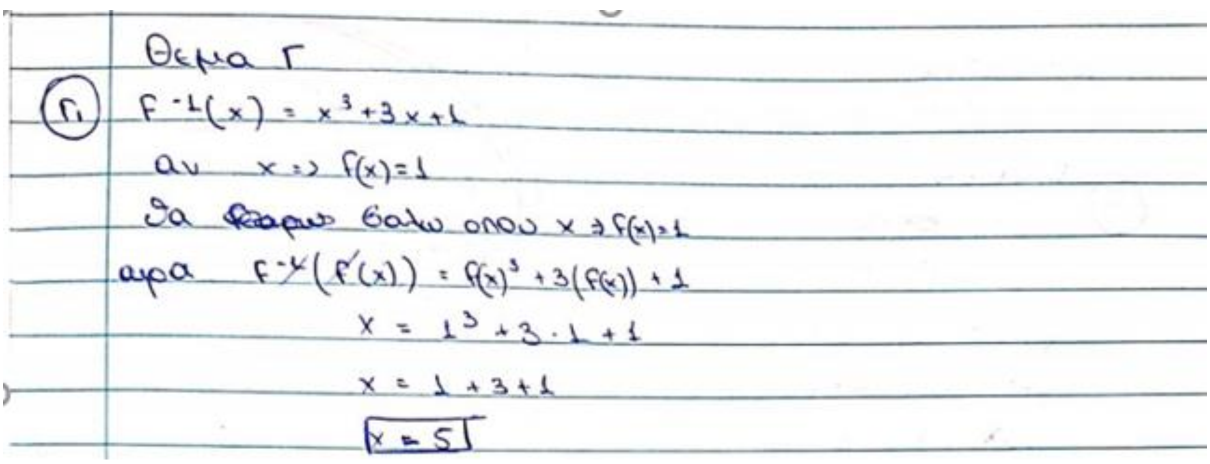
x; αν $f(x)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=x \Leftrightarrow x=5$

Γ2 $f(x)=\ln(x+1)+x$

x; αν $f^{-1}(x)=6 \Leftrightarrow f(6)=x \Leftrightarrow \ln 7+6=x$

Εικόνα 37:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ του pre-test

Οι μαθήτριες Μ6 και Μ10 παρουσιάζουν μια διαφορετική αλλά σωστή λύση.



Θεμα Γ

Γ1 $f^{-1}(x)=x^3+3x+1$

αν $x : f(x)=1$

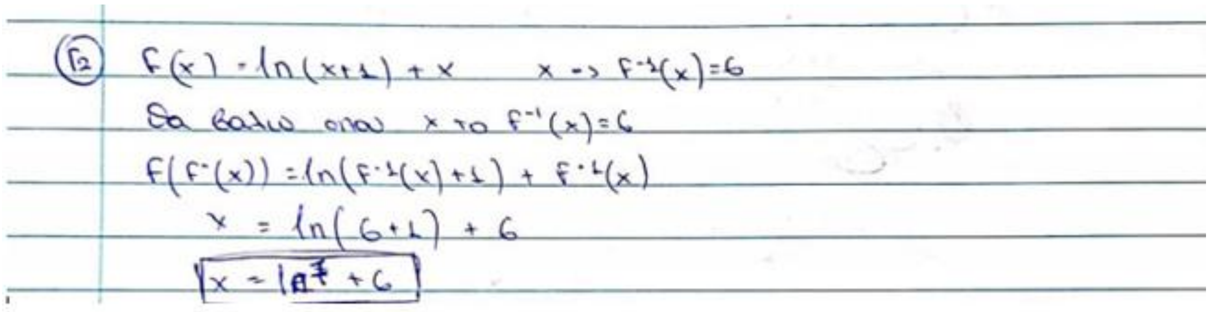
θα βαλω οπου $x \to f(x)=1$

αρα $f^{-1}(f(x)) = f(x)^3+3(f(x))+1$

$x = 1^3+3\cdot 1+1$

$x = 1+3+1$

$\boxed{x=5}$



Εικόνα 38:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 στο Θέμα Γ του pre-test

Το εργαλείο της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων που χρησιμοποιούν εμφανίζεται ως μεθοδολογία σε πολλά βοηθήματα μαθηματικών και δίνει σωστά αποτελέσματα.

6.1.7 Αποτελέσματα του Θέματος Δ

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Η δοθείσα συνάρτηση εμφανίστηκε στο Θέμα Β των Πανελλήνιων εξετάσεων του 2020 και παρόμοια άσκηση υπάρχει και στο σχολικό εγχειρίδιο. Η ιδιαιτερότητα του συγκεκριμένου θέματος είναι ότι η συνάρτηση μελετάται σε ένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της, το οποίο επηρεάζει και το πεδίο ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης. Επίσης, τα επόμενα ερωτήματα του θέματος εξετάζουν τις βασικές ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης, δηλαδή την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης μέσω του πεδίου ορισμού της αντίστροφης, την σύνθεση της συνάρτησης με την αντίστροφη της και αντίστροφα και τέλος την μονοτονία των δυο συναρτήσεων.

Στο Δ1 ερώτημα εννέα μαθητές/τριες απέδειξαν ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται χρησιμοποιώντας το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού ενώ ένας μαθητής απέδειξε με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και αντιστρέφεται. Από τους παραπάνω μαθητές/τριες μόνο τρεις κατάφεραν να ορίσουν σωστά την αντίστροφη συνάρτηση ενώ μια μαθήτρια καθόρισε σωστά τον τύπο αλλά όχι και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Στο Δ2 ερώτημα τρεις μαθητές/τριες προσδιόρισαν σωστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της. Ο μαθητής Μ1 ανέφερε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και ότι το σύνολο τιμών της αντίστροφης θα είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά δεν έγραψε τα ζητούμενα σύνολα παρότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης υπήρχε στην εκφώνηση της άσκησης. Ο μαθητής Μ8 χρησιμοποιεί την γνώση αυτήν και δίνει σωστά το σύνολο τιμών της αντίστροφης αλλά ενώ έχει βρει το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, δεν το αναφέρει ως το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Τέλος ο μαθητής Μ9 έχει βρει λάθος συνάρτηση στο προηγούμενο ερώτημα αλλά με βάση αυτήν την συνάρτηση απαντά σωστά σε αυτό το ερώτημα.

Στο Δ3 ερώτημα τρεις μαθητές/τριες κάνουν σωστή χρήση της θεωρίας και καταλήγουν στην ταυτοτική συνάρτηση μετά την σύνθεση των δυο συναρτήσεων. Ο ένας από αυτούς δεν αναφέρει τα πεδία ορισμού των δυο συνθέσεων. Δυο μαθητές/τριες ορίζουν την σύνθεση των δυο συναρτήσεων αναλυτικά, χωρίς χρήση της αντίστοιχης ιδιότητας. Ο μαθητής Μ13 βρίσκει σωστά το πεδίο ορισμού των συνθέσεων αλλά κάνει λάθος στις αντικαταστάσεις των συναρτήσεων και δεν οδηγείτε στην ταυτοτική συνάρτηση. Η μαθήτρια Μ14 ορίζει σωστά και τις δυο συνθέσεις μετά από προσεκτικές και αναλυτικές πράξεις.

Στο Δ4 ερώτημα ένας μαθητής κατάφερε να αποδείξει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με τη βοήθεια του λογού μεταβολής. Την απόδειξη αυτήν την παρουσίασε στο ερώτημα Δ1 και με τον τρόπο αυτό απέδειξε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Όπως ανέφεραν οι μαθητές/τριες μετά τη διεξαγωγή του pre-test, δε σκέφτηκαν να θεωρήσουν δεδομένο τον μετασχηματισμό της συνάρτησης που τους/τις δινόταν στην εκφώνηση του ερωτήματος και στη συνέχεια να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο της μονοτονίας. Τέλος, κανένας μαθητής/τρια δεν ανέφερε ότι η συνάρτηση και η αντίστροφη της έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

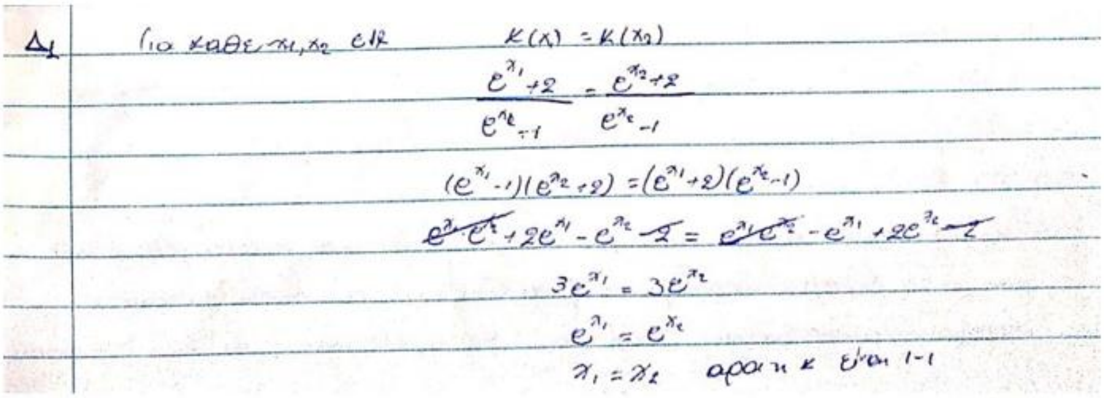
6.1.8 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Δ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $k(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}, x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

Η ερευνήτρια μέσω του ερωτήματος αυτού ήθελε να διερευνήσει κατά ποσό οι μαθητές/τριες της έχουν κατανοήσει το βασικό τεχνούργημα του επιστημολογικού επιπέδου, δηλαδή το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού και μπορούν να οδηγηθούν μέσω κατάλληλων ισοδυναμιών στην ισότητα $x_1 = x_2$.Οχτώ μαθητές/τριες ακολουθούν την ίδια διαδικασία με τον μαθητή Μ1.



Δ1 Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad k(x_1)=k(x_2)$

$$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}$$

$$(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+2)=(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)$$

$$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+2e^{x_1}-e^{x_2}-\cancel{2}=\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_1}+2e^{x_2}-\cancel{2}$$

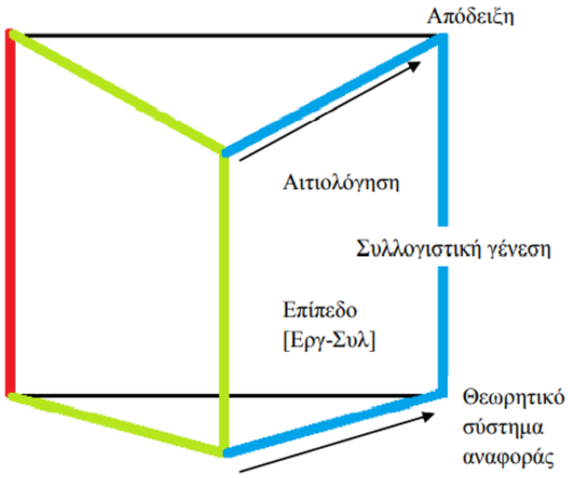
$$3e^{x_1}=3e^{x_2}$$

$$e^{x_1}=e^{x_2}$$

$x_1=x_2$ άρα η k είναι 1-1

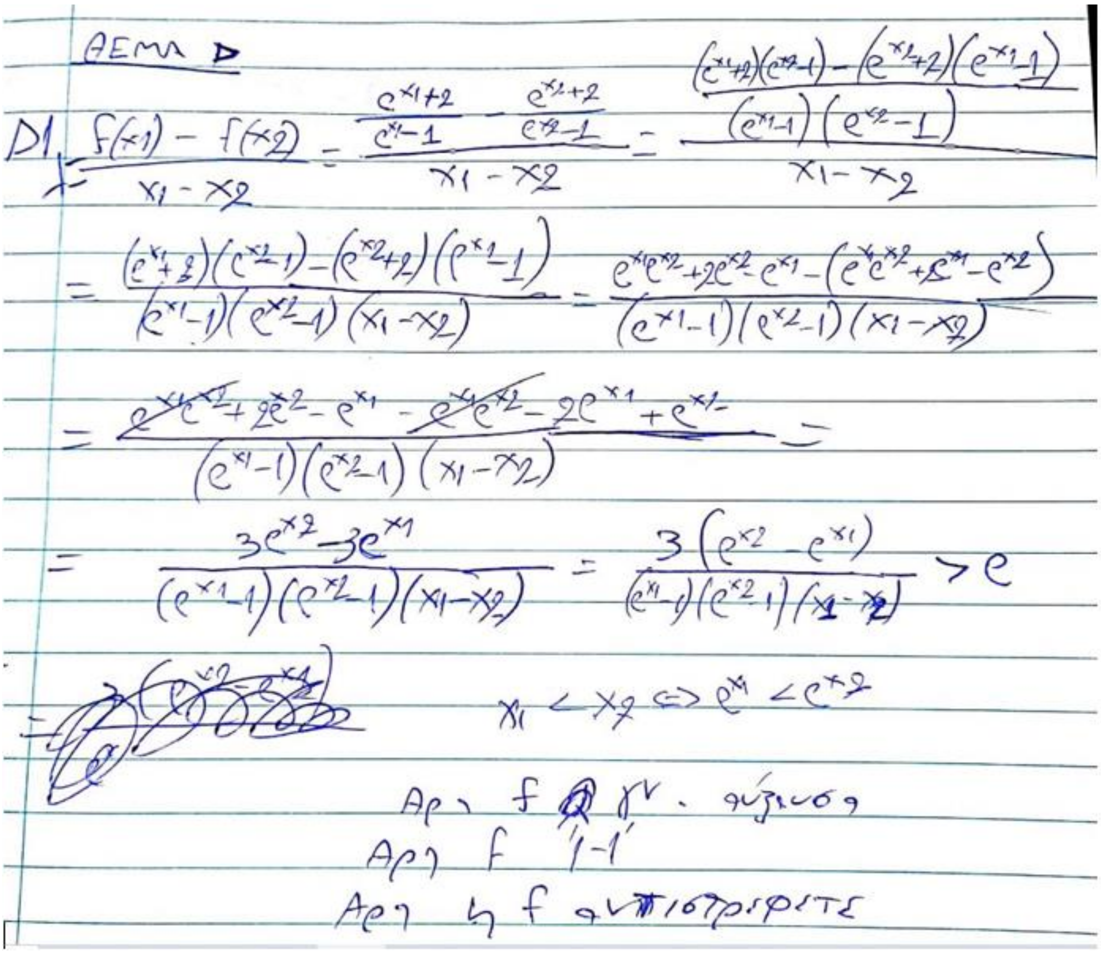
Εικόνα 39:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Δ1 του pre-test

Ακολουθούν λοιπόν την παρακάτω μετάβαση.



Σχήμα 12::Μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στην λεκτική γένεση.

Ο μαθητής Μ8 επιλεγεί να ασχοληθεί με την μονοτονία της συνάρτησης. Δημιουργεί τον λόγο μεταβολής και καταλήγει στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} - \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)-(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)}}{x_1-x_2}$

$= \frac{(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)-(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)(x_1-x_2)} = \frac{e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_2}-e^{x_1}-(e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2})}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)(x_1-x_2)}$

$= \frac{\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+2e^{x_2}-e^{x_1}-\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-2e^{x_1}+e^{x_2}}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)(x_1-x_2)} =$

$= \frac{3e^{x_2}-3e^{x_1}}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)(x_1-x_2)} = \frac{3(e^{x_2}-e^{x_1})}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)(x_1-x_2)} > 0$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

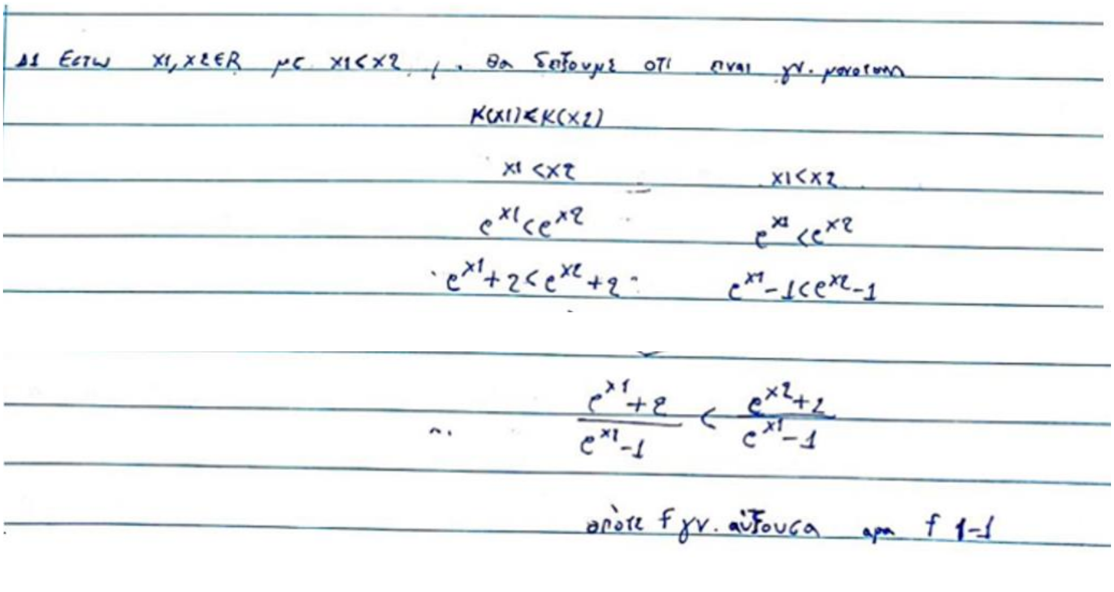
Άρα f γν. αύξουσα

Άρα f '1-1'

Άρα η f αντιστρέφεται

Εικόνα 40:Απάντηση του μαθητή Μ8 στο Θέμα Δ1 του pre-test

Ο μαθητής Μ4 καταλήγει στο ίδιο συμπέρασμα αλλά με λάθος τρόπο.



Δ1 Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$, θα δείξουμε ότι είναι γν. μονότονη

$K(x_1)<K(x_2)$

$x_1<x_2$ $\qquad x_1<x_2$

$e^{x_1}<e^{x_2}$ $\qquad e^{x_1}<e^{x_2}$

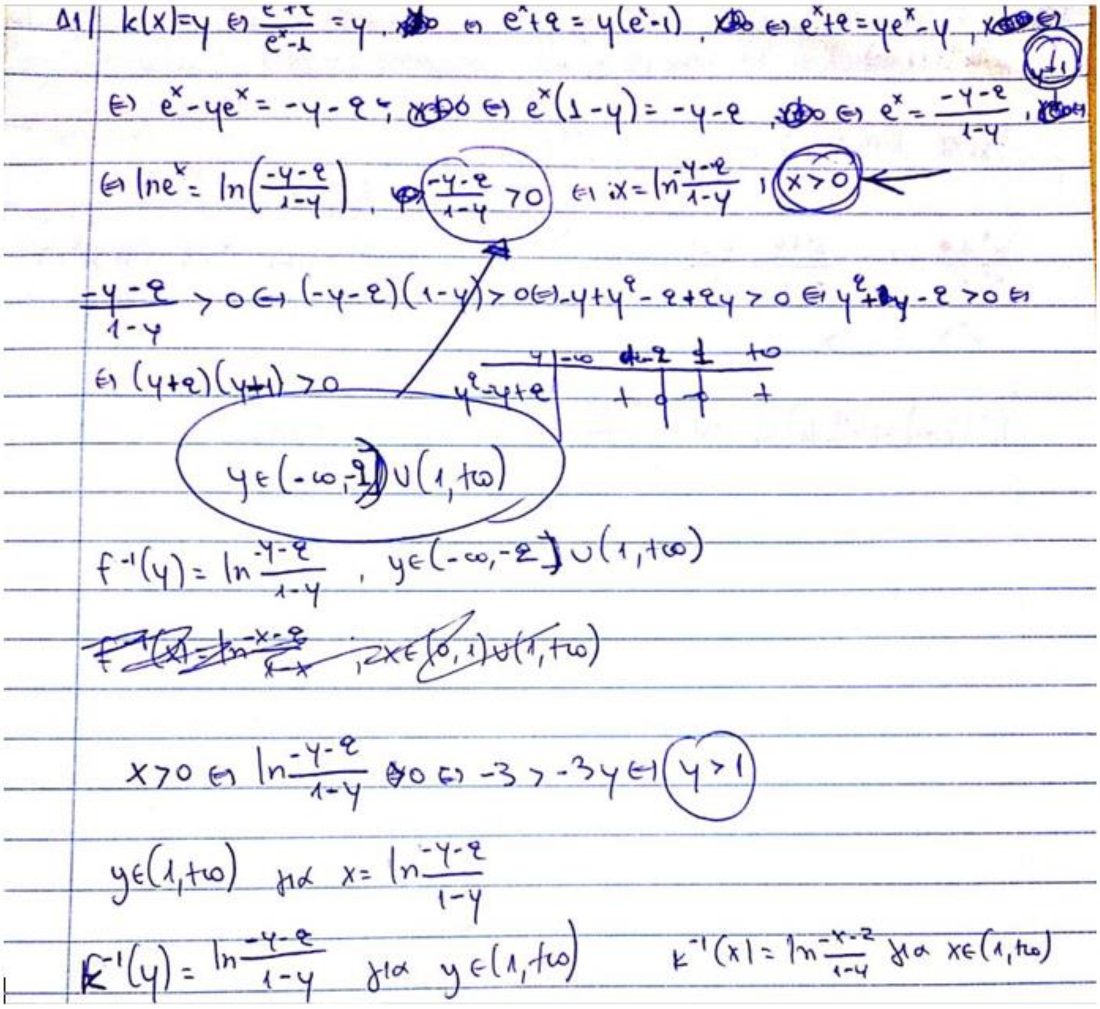
$e^{x_1}+2<e^{x_2}+2$ $\qquad e^{x_1}-1<e^{x_2}-1$

$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} < \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_1}-1}$

οπότε f γν. αύξουσα άρα f 1-1

Εικόνα 41:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Δ1 του pre-test

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να ορίσουν την αντίστροφη συνάρτηση. Όπως παρατηρήθηκε και στα στατιστικά αποτελέσματα των Πανελλήνιων εξετάσεων του 2020 ενώ οι μαθητές/τριες προσδιόριζαν σωστά τον τύπο της συνάρτησης , δεν προσδιόριζαν σωστά και το πεδίο ορισμού της. Τέσσερις μαθητές/τριες παρουσίασαν ολοκληρωμένη λύση. Παρακάτω δίνεται η λύση του μαθητή Μ13.



Δ1/ $k(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1}=y \Leftrightarrow e^x+2=y(e^x-1) \Leftrightarrow e^x+2=ye^x-y$

$\Leftrightarrow e^x-ye^x=-y-2 \Leftrightarrow e^x(1-y)=-y-2 \Leftrightarrow e^x=\frac{-y-2}{1-y}$

$\Leftrightarrow \ln e^x=\ln\left(\frac{-y-2}{1-y}\right),\ \frac{-y-2}{1-y}>0 \Leftrightarrow x=\ln\frac{-y-2}{1-y},\ x>0$

$\frac{-y-2}{1-y}>0 \Leftrightarrow (-y-2)(1-y)>0 \Leftrightarrow -y+y^2-2+2y>0 \Leftrightarrow y^2+y-2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+2)(y-1)>0$

$y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

$f^{-1}(y)=\ln\frac{-y-2}{1-y},\ y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

$x>0 \Leftrightarrow \ln\frac{-y-2}{1-y}>0 \Leftrightarrow -3>-3y \Leftrightarrow y>1$

$y\in(1,+\infty)$ για $x=\ln\frac{-y-2}{1-y}$

$k^{-1}(y)=\ln\frac{-y-2}{1-y}$ για $y\in(1,+\infty)$ $\quad k^{-1}(x)=\ln\frac{-x-2}{1-x}$ για $x\in(1,+\infty)$

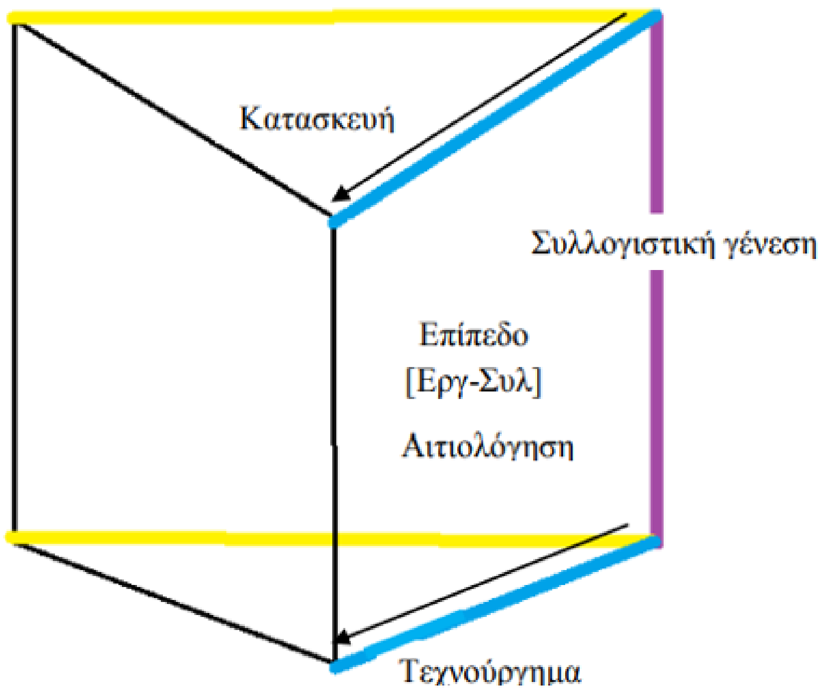
r

Εικόνα 42:Απάντηση του μαθητή Μ13 στο Θέμα Δ1 του pre-test

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις αποτέλεσαν την αιτία για την αδυναμία των μαθητών/τριών να οδηγηθούν στο σωστό αποτέλεσμα και σε μια επιτυχή εργαλειακή γένεση.

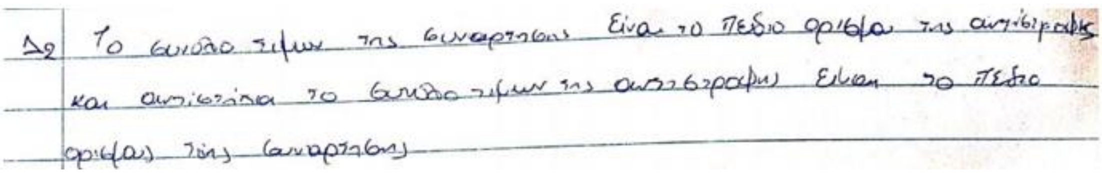
Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της.

Η ερευνήτρια με το ερώτημα αυτό ήθελε να εξετάσει την γνώση της θεωρίας. Οι μαθητές/τριες έχουν διδαχθεί στην Β' λυκείου την λογαριθμική συνάρτηση ως αντίστροφη της εκθετικής και έχουν μάθει ότι το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής ταυτίζεται με το σύνολο τιμών της εκθετικής. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' λυκείου η ιδιότητα αυτή επαναλαμβάνεται αλλά δεν βρίσκεται σε κάποιο πλαίσιο. Οι μαθητές/τριες έχει παρατηρηθεί ότι δεν δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στην εκμάθηση της θεωρίας εκτός πλαισίων. Η αποτυχία λοιπόν αυτής της λεκτικής γένεσης είχε ως αποτέλεσμα να μην πραγματωθεί και η εργαλειακή γένεση.



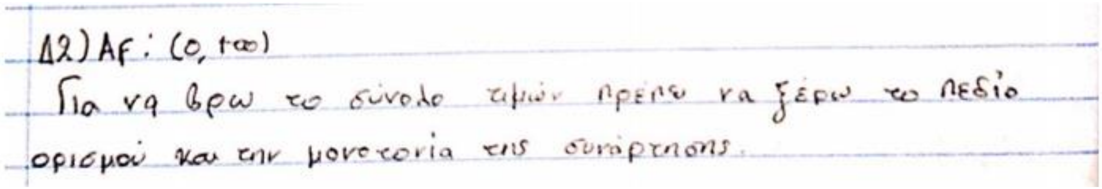
Σχήμα 13:Μετάβαση από την λεκτική γένεση στην εργαλειακή γένεση.

Ο μαθητής Μ1 πραγματοποιεί την λεκτική γένεση αλλά δεν μπορεί να μεταβεί στην εργαλειακή γένεση.


Δ2 Το σύνολο τιμών της συνάρτησης Είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και αντίστοιχα το σύνολο τιμών της αντίστροφης Είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Εικόνα 43:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Δ2 του pre-test

Η μαθήτρια Μ3 χρησιμοποιεί την ιδιότητα των συνέχων συναρτήσεων. Προφανώς βρίσκεται στα φροντιστηριακά μαθήματα που παρακολουθεί στην ενότητα της συνέχειας παρόλα αυτά δεν αναφέρει το προαπαιτούμενο της συνέχειας αλλά μόνο της μονοτονίας.


Δ2) Af: (0, +∞)
Για να βρω το σύνολο τιμών πρέπει να ξέρω το πεδίο ορισμού και την μονοτονία της συνάρτησης.

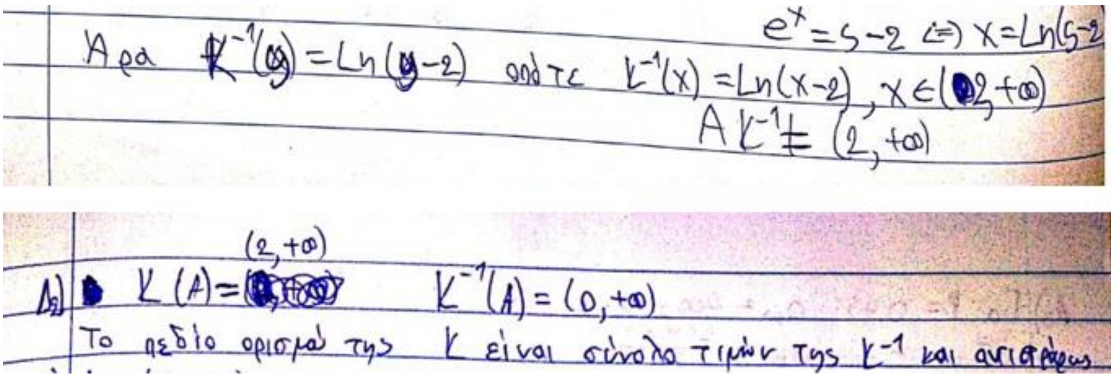
Εικόνα 44:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Δ2 του pre-test

Ο μαθητής Μ8 δεν έχει καταφέρει να βρει τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης αλλά γνωρίζοντας το πεδίο ορισμού της αρχικής, απαντά σωστά για το σύνολο τιμών της αντίστροφης.


Δ2) $K(A_{K'}) = (0, +\infty)$

Εικόνα 45:Απάντηση του μαθητή Μ8 στο Θέμα Δ2 του pre-test

Ο μαθητής Μ9 έχει λάθος τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση αλλά παρόλα αυτά έχει κατανοήσει τη θεωρία και μπορεί να τη χρησιμοποιήσει με επιτυχία.

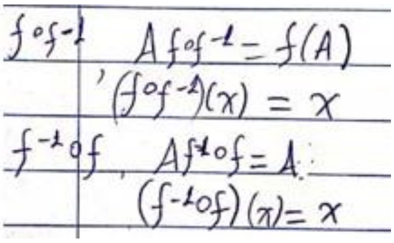

$e^x = y-2 \Leftrightarrow x = Ln(y-2)$
Άρα $K^{-1}(y) = Ln(y-2)$ οπότε $K^{-1}(x) = Ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$
$A_{K^{-1}} = (2, +\infty)$

Δ2) $K(A) = (2, +\infty)$ $K^{-1}(A) = (0, +\infty)$
Το πεδίο ορισμού της K είναι σύνολο τιμών της K^{-1} και αντίστροφα

Εικόνα 46:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Δ2 του pre-test

Δ3. Να ορίσετε την σύνθεση της συνάρτησης k με την αντίστροφη της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης k με την συνάρτηση.

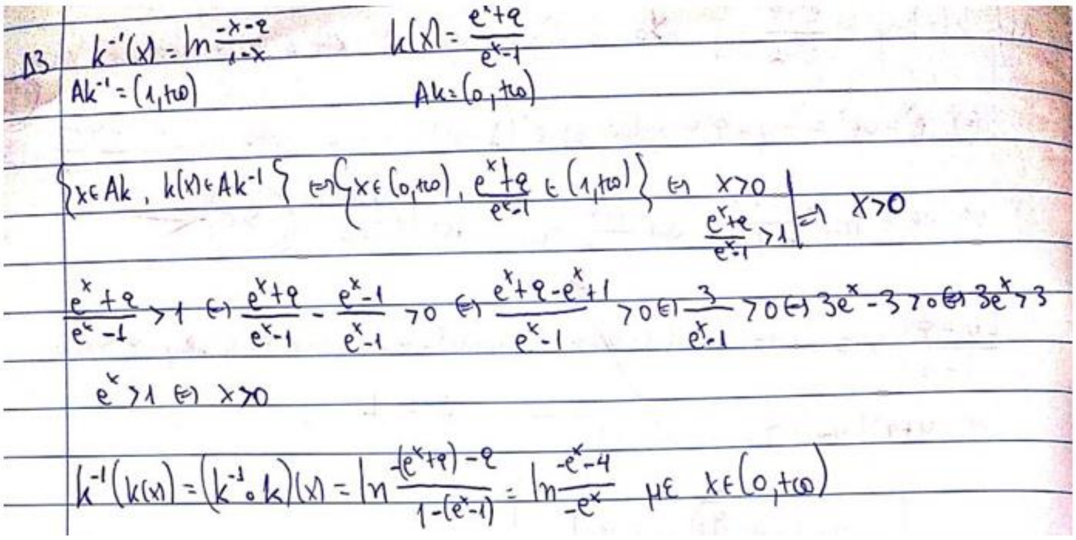
Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, ο στόχος ήταν η χρήση της ιδιότητας της σύνθεσης που μαθαίνουν οι μαθητές/τριες στη θεωρία, όπως παρατηρείται στην απάντηση της μαθήτριας Μ7.



$f\circ f^{-1}$	$A_{f\circ f^{-1}} = f(A)$, $(f\circ f^{-1})(x) = x$
$f^{-1}\circ f$	$A_{f^{-1}\circ f} = A$, $(f^{-1}\circ f)(x) = x$

Εικόνα 47:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Δ3 του pre-test

Ο μαθητής Μ13 και η μαθήτρια Μ14 ακολουθήσαν διαφορετική πορεία σκέψης. Αρχικά, ορίζουν το πεδίο ορισμού της σύνθεσης και στη συνέχεια τον τύπο της. Παρατηρείται, λοιπόν, μια εργαλειακή γένεση η οποία δε συνδυάζεται με τη λεκτική γένεση. Όπως παρατηρούμε ο μαθητής Μ13 δε φτάνει στο σωστό αποτέλεσμα αλλά δεν το αντιλαμβάνεται, καθώς δεν γνωρίζει ότι πρέπει να καταλήξει στην ταυτοτική συνάρτηση.



Δ3 $k^{-1}(x) = \ln\frac{-x-2}{1-x}$ $\quad k(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$

$A_{k^{-1}}=(1,+\infty)$ $\quad A_k=(0,+\infty)$

$\{x\in A_k,\ k(x)\in A_{k^{-1}}\} \Leftrightarrow \{x\in(0,+\infty),\ \frac{e^x+2}{e^x-1}\in(1,+\infty)\} \Leftrightarrow x>0$, $\frac{e^x+2}{e^x-1}>1 \Rightarrow x>0$

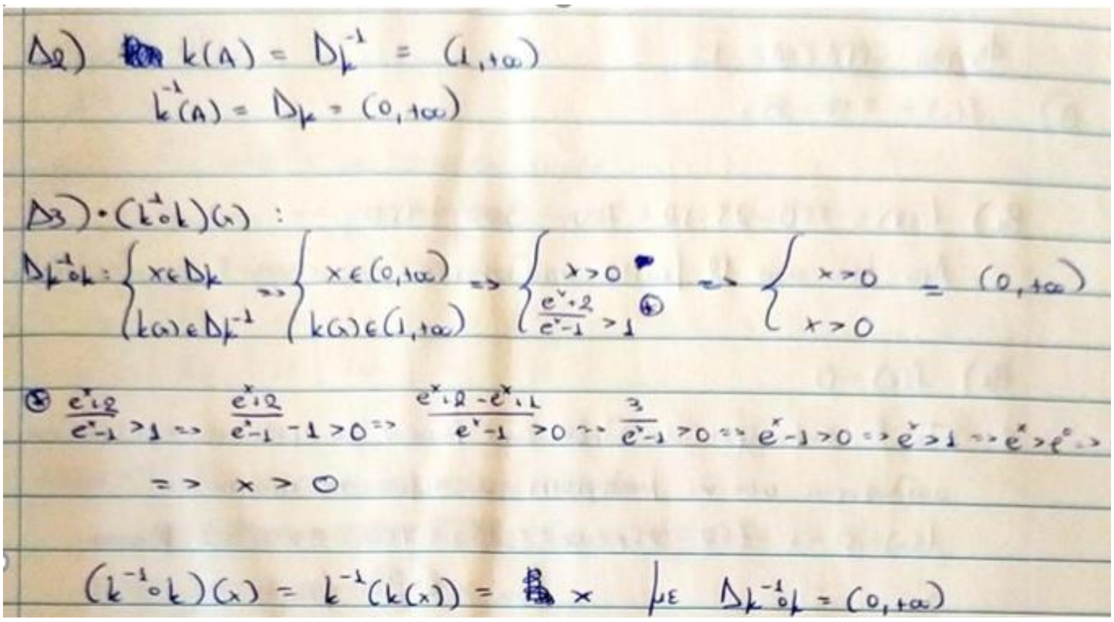
$\frac{e^x+2}{e^x-1}>1 \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1}-\frac{e^x-1}{e^x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{e^x+2-e^x+1}{e^x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{3}{e^x-1}>0 \Leftrightarrow 3e^x-3>0 \Leftrightarrow 3e^x>3$

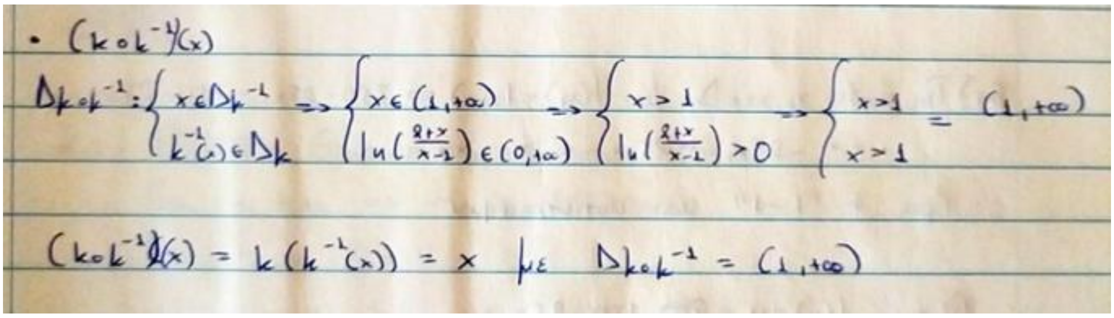
$e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

$k^{-1}(k(x)) = (k^{-1}\circ k)(x) = \ln\frac{-(e^x+2)-2}{1-(e^x-1)} = \ln\frac{-e^x-4}{-e^x}$ με $x\in(0,+\infty)$

Εικόνα 48:Απάντηση του μαθητή Μ13 στο Θέμα Δ3 του pre-test

Η μαθήτρια Μ14 καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα μετά την εκτέλεση απαιτητικών αλγεβρικών πράξεων. Η κατασκευαστική λύση που παρουσιάζει δε συνδυάζεται και με την γνώση της θεωρίας. Στην απάντηση της μαθήτριας αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα.





Εικόνα 49:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Δ3 του pre-test

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση k μπορεί να πάρει τη μορφή $k(x)=1+\dfrac{3}{e^x-1}, x>0$ και να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της.

Η ερευνήτρια μέσω του ερωτήματος ήθελε να παρατηρήσουν οι μαθητές/τριες της ότι η αρχική συνάρτηση μπορεί να μετασχηματιστεί στη συνάρτηση που τους δίνεται. Θα έπρεπε να παρατηρήσουν ότι προσθαφαιρώντας στον αριθμητή τη μονάδα προκύπτει η τελική μορφή της συνάρτησης. Το τεχνούργημα αυτό διευκολύνει τη μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης που ακολουθεί. Η εργαλειακή αυτή γένεση δεν πραγματώθηκε όμως από τους μαθητές/τριες, παρότι έχει εφαρμοστεί στην προηγούμενη ενότητα. Επίσης, κανένας μαθητής/τρια δεν ανέφερε την ιδιότητα της μονοτονίας της αντίστροφης. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' Λυκείου δεν αναφέρεται η ιδιότητα αυτή στη θεωρία αλλά αποτελεί μια βασική παρατήρηση κατά τη διδασκαλία αυτής της ενότητας. Οι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι δεν είχαν μελετήσει την ιδιότητα αυτή στα φροντιστηριακά μαθήματα που παρακολουθούν.

6.2 Η κατασκευή του κατάλληλου ΜΧΕ

Η διδακτική παρέμβαση περιείχε παραδείγματα της Αριθμητικής- Γεωμετρικής Ανάλυσης και της Υπολογιστικής Ανάλυσης. Στόχος της ήταν να γεφυρώσει το κενό μεταξύ επιστημολογικών και γνωστικών στοιχείων στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Η διδακτική παρέμβαση διαρθρώνεται αναμεσά στο ΜΧΕ της Άλγεβρας με επίλυση τύπων, χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού και εκτέλεση πράξεων και στο ΜΧΕ της Ανάλυσης με την εμπλοκή των εννοιών και των ιδιοτήτων της συνάρτησης, της αντίστροφης συνάρτησης και των μεταβλητών. Η εξέλιξη της παρέμβασης αναμένεται να αναπτυχθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ περιλαμβάνοντας διαδικασίες εξερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των θεμάτων. Όπως αναφέρεται και στο πρόγραμμα σπουδών, βασικός στόχος της διδασκαλίας της Ανάλυσης οφείλει να είναι η σύνδεση της με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα. Με σημείο αναφοράς, λοιπόν, τον Νομό της ζήτησης, που γνωρίζουν οι μαθητές/τριες από το μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας και ένα λεκτικό πρόβλημα θα γίνει η εισαγωγή στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Οι μαθητές/τριες θα εργαστούν σε αντικείμενα- εργαλεία του επιστημολογικού επιπέδου, όπως είναι η γραφική παράσταση, ο πίνακας τιμών, το σύνολο διατεταγμένων ζευγών και ο τύπος μιας συνάρτησης και θα χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς, τις ιδιότητες, τα θεωρήματα και τα πορίσματα που αφορούν τη συνάρτηση και την αντίστροφη συνάρτηση, για να επικυρώσουν τα αποτελέσματα τους.

Οι μαθητές/τριες εργάζονταν ατομικά ο καθένας στο φύλλο εργασίας του/της και στην συνέχεια παρουσίαζαν τα συμπεράσματα τους στην ολομέλεια της τάξης. Καθ’ όλη τη διαδικασία η ερευνήτρια περιφερόταν μεταξύ των μαθητών/τριών και κατέγραφε τις αντιδράσεις τους και τον τρόπο εργασίας τους. Το μαθηματικό λογισμικό GeoGebra ήταν διαθέσιμο κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και χρησιμοποιήθηκε όπου κρίθηκε απαραίτητο από την ερευνήτρια.

6.2.1 Φύλλο εργασίας 1

6.2.1.1 Αποτελέσματα της Εισαγωγική Δραστηριότητα της Αντίστροφης Συνάρτησης

Πριν την εισαγωγική δραστηριότητα δόθηκε στους μαθητές/τριες ένα απόσπασμα από το σχολικό εγχειρίδιο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας που αναφερόταν στον Νόμο της ζήτησης. Οι μαθητές/τριες αντέδρασαν και θεώρησαν ότι δεν υπάρχει κάποια σύνδεση με τις έννοιες των μαθηματικών που έχουν διδαχθεί. Παρόλο που γνώριζαν τον Νόμο της ζήτησης και γνώριζαν ότι αυτός μπορεί να παρασταθεί μέσω μια γραμμικής συνάρτησης ή μιας ισοσκελούς υπερβολής, δεν ήταν σε θέση να δικαιολογήσουν γιατί αυτές οι δυο συναρτήσεις ήταν γνησίως φθίνουσες και να ερμηνεύσουν τις παραμέτρους που εμφανίζονταν στους αλγεβρικούς τύπους κάθε συνάρτησης. Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες να ανατρέξουν στους ορισμούς της μονοτονίας και να αποκωδικοποιήσουν την έκφραση :« *όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα του, και, όταν η τιμή του αυξάνεται, μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα από το αγαθό αυτό, όταν οι άλλοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση παραμένουν σταθεροί.».* Στη συνέχεια, η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να ανατρέξουν στη μελέτη των βασικών συναρτήσεων που είχε προηγηθεί. Κατέληξαν, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η παράμετρος α της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης εκφράζει τη ζητούμενη ποσότητα όταν η τιμή του προϊόντος είναι ίση με μηδέν και η παράμετρος β την κλίση της ευθείας, δηλαδή τον λόγο μεταβολής της ποσότητας προς την τιμή ενώ η παράμετρος Α το γινόμενο της ζητούμενης ποσότητας επί την αντίστοιχη τιμή του προϊόντος.

Οι μαθητές/τριες επεσήμαναν στην ερευνήτρια ότι στο μάθημα της Οικονομίας η εξίσωση της ευθείας έχει αντεστραμμένες τις παραμέτρους α, β και ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ζήτησης η ανεξάρτητη μεταβλητή εμφανίζεται στον κατακόρυφο άξονα ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή στον οριζόντιο. Την επισήμανση αυτή η ερευνήτρια θα την χρησιμοποιήσει παρακάτω στη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

6.2.1.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων της εισαγωγικής δραστηριότητας υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Εισαγωγική δραστηριότητα

Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης καθορίζει την ζήτηση αυτής από τους καταναλωτές. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές σε ευρώ ανά λίτρο αμόλυβδης βενζίνης σε δυο χώρες της Ευρώπης και η αντίστοιχη ημερήσια ζήτηση λίτρων σε εκατομμύρια λίτρα.

Χώρα Α

Τιμή	0	0,75	0,90	1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6
Ημερήσια ζήτηση	400	362,5	355	350	345	340	335	325	320

Χώρα Β

Τιμή	0,74	0,85	0,94	1	1,15	1,24	1,35	1,44	1,55
Ημερήσια ζήτηση	343,3162	298,8871	270,2702	254,054	220,9165	204,8823	188,1881	176,4264	163,9058

Α1. Να παραστήσετε τα δεδομένα κάθε πίνακα σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων και να εξετάσετε αν η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από μια γραμμική εξίσωση ή από μια ισοσκελή υπερβολή.

Α2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.

Α3. Ποια θα είναι η ημερήσια ζήτηση σε κάθε χώρα, αν η τιμή του λίτρου είναι:

i) 0,93€ ii) 1,25€ iii) 1,47€ αντίστοιχα;

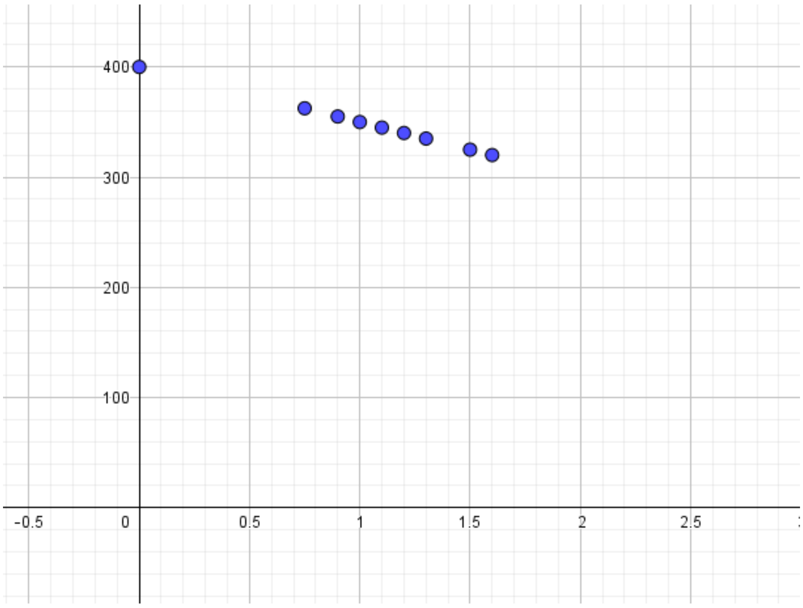
Α4. Ποια θα είναι η τιμή του λίτρου σε κάθε χώρα, αν η ημερήσια ζήτηση λίτρων είναι

i) 360 ii) 310 iii) 290 εκατομμύρια λίτρα αντίστοιχα;

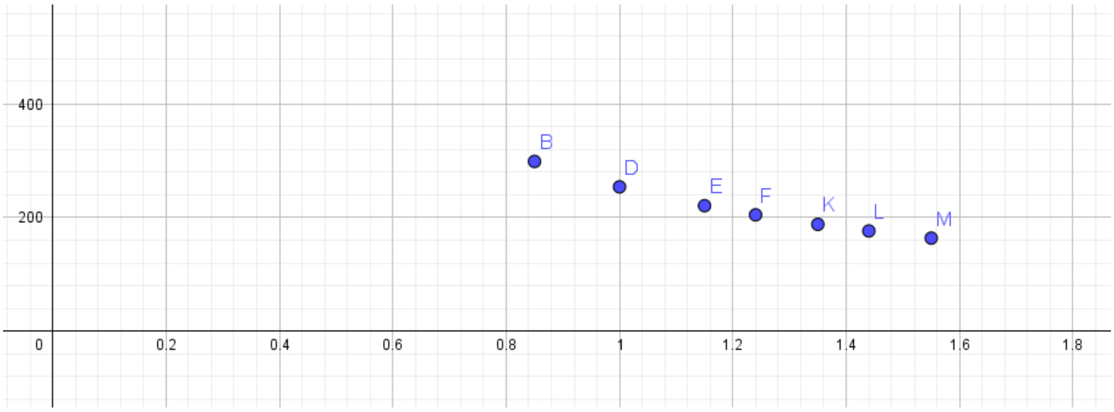
Α5. Να βρείτε τη συνάρτηση της τιμής του λίτρου ως προς την ημερήσια ζήτηση για κάθε χώρα και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή ή ισοσκελής υπερβολή.

Α6. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των παραπάνω συναρτήσεων;

Το συγκεκριμένο θέμα αποτελεί παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Η διδακτική παρέμβαση είχε ως αφετηρία μια σημειωτική γένεση. Η ερευνήτρια παρουσίασε στο λογισμικό το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών από τους δυο πίνακες και οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται στην πρώτη περίπτωση από μια γραμμική εξίσωση ενώ στη δεύτερη περίπτωση από μια ισοσκελής υπερβολή.



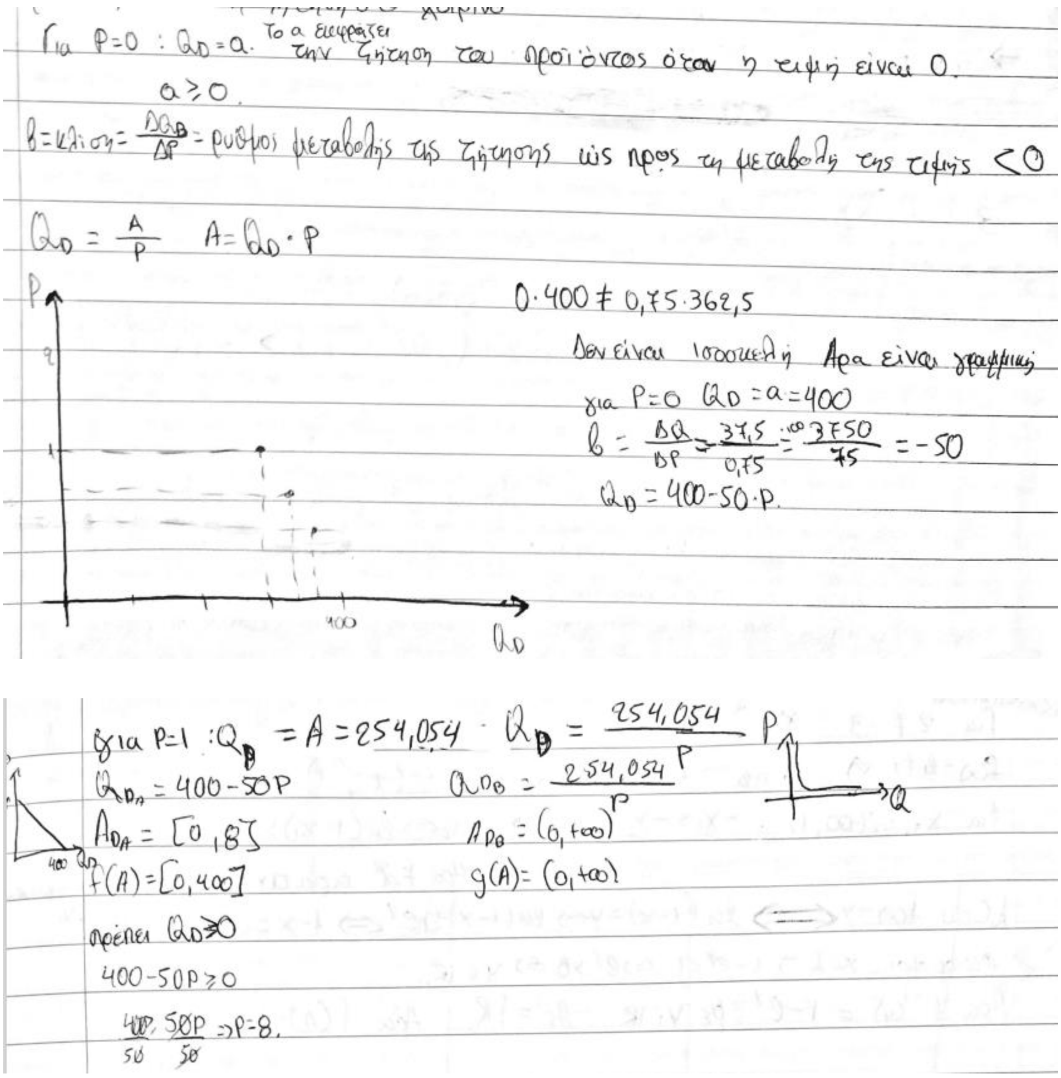
Εικόνα 50:Σύνολο διατεταγμένων ζευγών του Πίνακα 1



Εικόνα 51:Σύνολο διατεταγμένων ζευγών του Πίνακα 2

Στη συνέχεια μέσω της εξίσωσης της γραμμικής συνάρτησης και της ισοσκελούς υπερβολής και τις κατάλληλες τιμές των δυο πινάκων, προσδιόρισαν τους τύπους των δυο συναρτήσεων και με αντικαταστάσεις σε αυτούς υπολόγισαν την ημερήσια ζήτηση σε κάθε χώρα καθώς και την τιμή του λίτρου. Η εργαλειακή γένεση που πραγματώθηκε σε αυτά τα ερωτήματα, τους οδήγησε στην λεκτική γένεση του επόμενου ερωτήματος. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση ως εργαλείο προσδιόρισαν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης. Επικύρωσαν τα αποτελέσματα τους με τη χρήση της θεωρίας από το σχολικό εγχειρίδιο και τη φύση των μεταβλητών των συναρτήσεων.

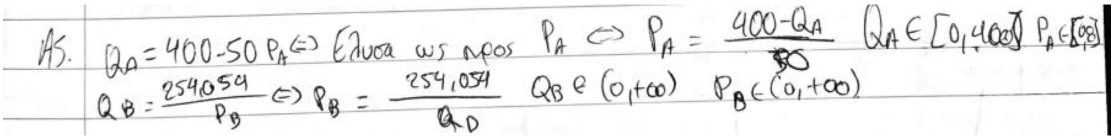
Παρακάτω δίνεται ενδεικτικά η απάντηση της μαθήτριας Μ2.



Εικόνα 52:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στα ερωτήματα Α1 και Α2 της εισαγωγικής δραστηριότητας στην αντίστροφη συνάρτηση του Φύλλου εργασίας 1

Η εργασία των μαθητών/τριών εξελίχθηκε και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ, δίνοντας τους την ευκαιρία για εξερεύνηση, πειραματισμό αλλά και επικύρωση των αποτελεσμάτων τους.

Στο Α5 ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να ορίσουν τις συναρτήσεις της τιμής του λίτρου ως προς την ημερήσια ζήτηση σε κάθε περίπτωση και μέσω αυτού του ερωτήματος να οδηγηθούν στον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης.



Εικόνα 53:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο ερώτημα Α5 της εισαγωγικής δραστηριότητας στην αντίστροφη συνάρτηση του Φύλλου εργασίας 1

6.2.1.3 Αποτελέσματα του Θέματος Β

Το Θέμα Β δόθηκε στους μαθητές/τριες ως εργασία για το σπίτι. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι οι μαθητές/τριες κατάφεραν να λύσουν τα ερωτήματα που αφορούσαν υπολογισμούς αλλά δεν ήταν σε θέση και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα αυτά στο πλαίσιο του προβλήματος.

6.2.1.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Β υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Όταν ένα προϊόν βγαίνει στην κυκλοφορία, η τιμή του μειώνεται συνάρτηση του χρόνου που βρίσκεται στην αγορά. Η εταιρεία BestPrice για να υπολογίσει την τιμή f σε ευρώ ενός κινητού τηλεφώνου x μήνες μετά την κυκλοφορία του χρησιμοποιεί την συνάρτηση : $f(x) = 750 - 25x$

Β1. Υπολογίσετε το f(12) και ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο του προβλήματος.

Β2. Πως ερμηνεύεται το β στην ισότητα f(β)=0; Υπολογίσετε την τιμή του β.

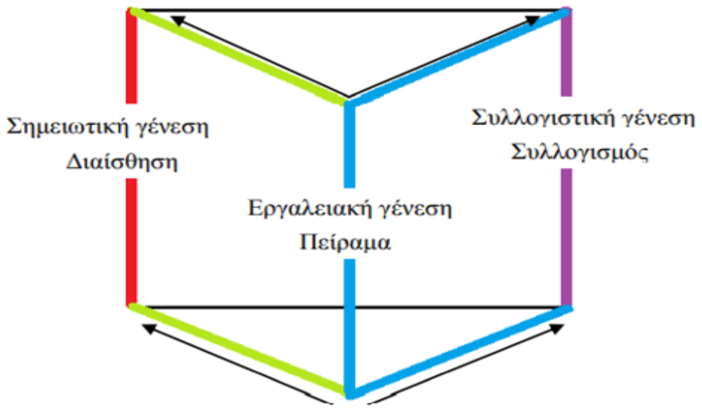
Β3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

Β4. Η συνάρτηση f είναι 1-1; Αν ναι, να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

Β5. Πως ερμηνεύεται το γ στην ισότητα $f^{-1}(\gamma)=20$; Υπολογίσετε την τιμή του γ.

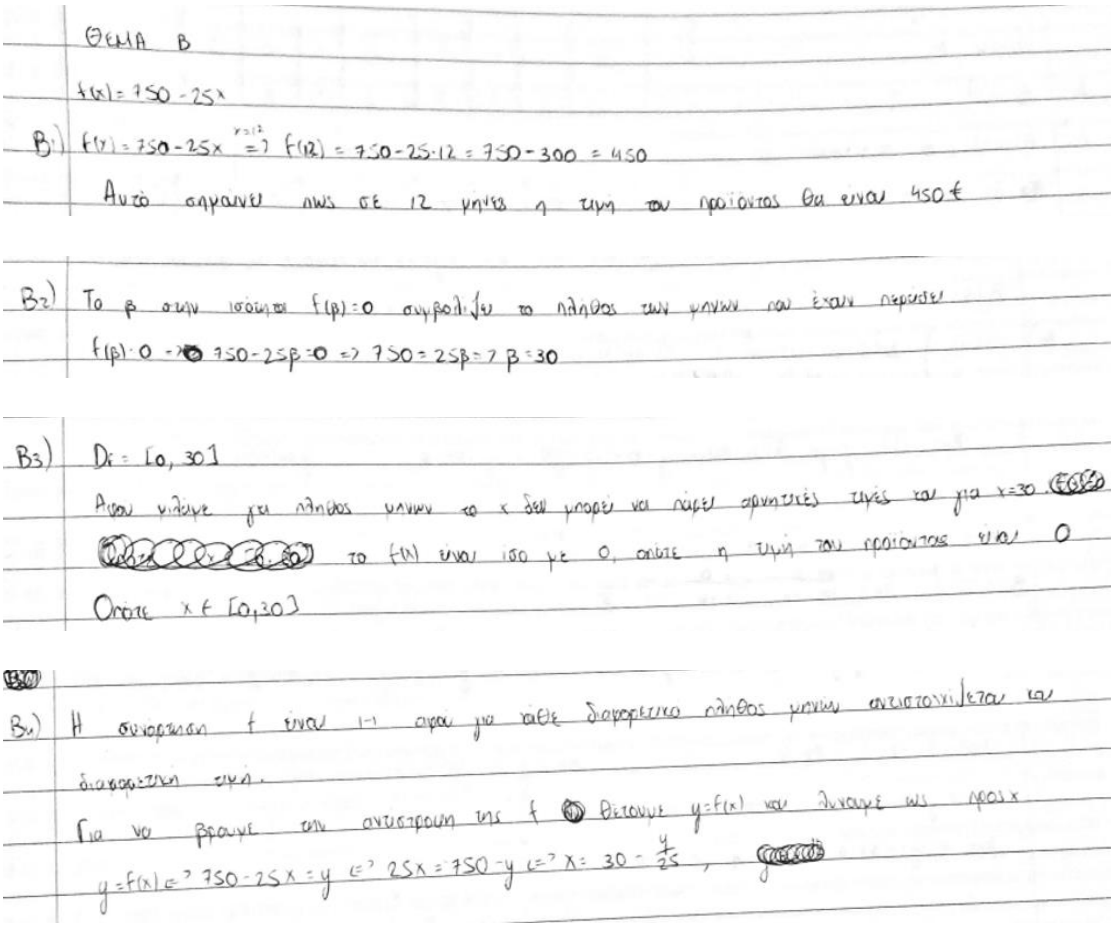
Β6. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f;

Το θέμα αυτό επίσης αποτελεί ένα παράδειγμα της αριθμητικής ή υπολογιστικής ανάλυσης. Όπως αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών, η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρουν μια επιπλέον νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Μέσω του θέματος Β, η ερευνήτρια προσπάθησε να εκπληρώσει το στόχο αυτό. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές/τριες στο θέμα δεν αποτέλεσαν έκπληξη για αυτήν. Η συζήτηση που ακολουθήσε στην ολομέλεια της τάξης είχε ως αποτέλεσμα να ερμηνεύσουν οι μαθητές/τριες τις τιμές των μεταβλητών στο πλαίσιο του προβλήματος και να οδηγηθούν από την εργαλειακή γένεση τόσο στη σημειωτική όσο και στη λεκτική γένεση.



Σχήμα 14:Μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στη σημειωτική και στη λεκτική γένεση.

Παρακάτω δίνεται η απάντηση της μαθήτριας Μ6. Η μαθήτρια αντιλαμβάνεται τη φύση των μεταβλητών και ερμηνεύει σωστά τα αποτελέσματά της.



ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 750 - 25x$

Β1) $f(x) = 750 - 25x \overset{x=12}{\Rightarrow} f(12) = 750 - 25 \cdot 12 = 750 - 300 = 450$

Αυτό σημαίνει πως σε 12 μήνες η τιμή του προϊόντος θα είναι 450 €

Β2) Το β στην ισότητα $f(β) = 0$ συμβολίζει το πλήθος των μηνών που έχουν περάσει

$f(β) = 0 \Rightarrow 750 - 25β = 0 \Rightarrow 750 = 25β \Rightarrow β = 30$

Β3) $D_f = [0, 30]$

Αφού μιλάμε για πλήθος μηνών το x δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και για x=30

το f(x) είναι ίσο με 0, οπότε η τιμή του προϊόντος είναι 0

Οπότε $x \in [0, 30]$

Β4) Η συνάρτηση f είναι 1-1 αφού για κάθε διαφορετικό πλήθος μηνών αντιστοιχίζεται και διαφορετική τιμή.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x

$y = f(x) \Leftrightarrow 750 - 25x = y \Leftrightarrow 25x = 750 - y \Leftrightarrow x = 30 - \frac{y}{25}$,

Εικόνα 54:Απάντηση της μαθήτριας Μ6 στο Θέμα Β του Φύλλου εργασίας 1

6.2.1.5 Αποτελέσματα του Θέματος Γ

Οι μαθητές/τριες ήρθαν σε επαφή με το θέμα αυτό με τους τρεις διαφορετικούς τρόπους περιγραφής μιας συνάρτησης. Αρχικά, παρατήρησαν τους τρεις πίνακες και εξέτασαν αν οι διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Με τον τρόπο αυτό επικύρωσαν τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης και κατασκεύασαν τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν και οι μαθητές/τριες που δεν είχαν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά και δε συμμετέχουν συχνά στο μάθημα. Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες ασχολήθηκαν με τρεις βασικές συναρτήσεις, μια πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, μια σύνθετη λογαριθμική και με μια σύνθετη εκθετική και εξέτασαν αν είναι συναρτήσεις 1-1. Κατά την εύρεση του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης αντιμετωπίστηκαν τυχόν γνωστικές ελλείψεις. Τέλος, εξέτασαν τα τρία σύνολα διατεταγμένων ζευγών και κατέληξαν σε ανάλογα συμπεράσματα. Ορισμένοι μαθητές/τριες κατασκεύασαν τον αντίστοιχο πίνακα τιμών για να ελέγξουν αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

6.2.1.6 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Γ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Γ

Μια συνάρτηση περιγράφεται παρακάτω με τρεις διαφορετικούς τρόπους: πίνακα τιμών, εξίσωση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Να εξετάσετε για κάθε περίπτωση αν αντιστρέφεται και να περιγράψετε την αντίστροφη της με τον ίδιο τρόπο. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

1ος τρόπος: Πίνακας τιμών

x	1	2	5	10	15	20
g(x)	19,8	19,6	19	18	17	16

x	-1	0	1	2	5	10
f(x)	-4	0	6	12	7	6

x	1,1	2,2	5,4	6	7,8	12
h(x)	-7	-6	-7	-4	-3	-2

Π1 : η συνάρτηση g είναι 1-1 γιατί τα διαφορετικά x αντιστοιχούν σε διαφορετικά y.

y	19,8	19,6	19	18	17	16
$g^{-1}(y)$	1	2	5	10	15	20

Π2: η συνάρτηση δεν είναι 1-1 γιατί για $1 \neq 10$ το $f(1) = f(10)$ άρα δεν αντιστρέφεται η συνάρτηση

Π3: η συνάρτηση δεν είναι 1-1 γιατί για $1,1 \neq 5,4$ το $h(1,1) = h(5,4)$ άρα η συνάρτηση δεν αντιστρέφεται

Εικόνα 55:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ1 του Φύλλου εργασίας 1

2^{ος} τρόπος: Εξίσωση

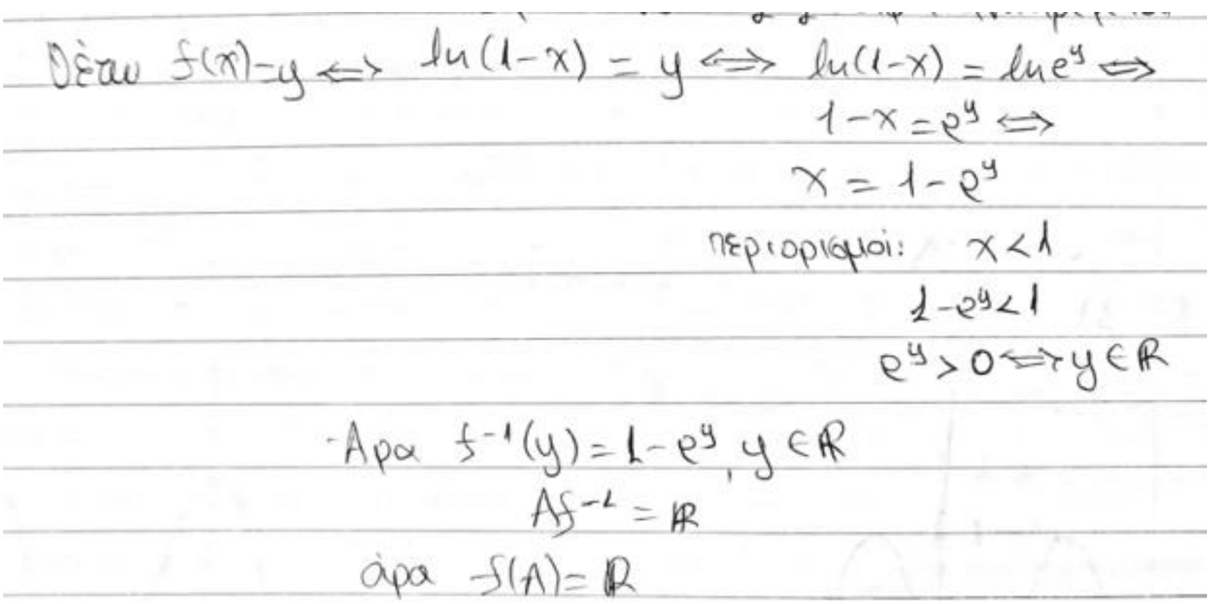
$g(x) = (x-2)(x+3)+1$

Εξ1 : Η g δεν είναι 1-1 γιατί για $2 \neq -3$ το $g(2) = g(-3)$

Εικόνα 56:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ1(α) του Φύλλου εργασίας 1

$f(x) = \ln(1-x)$

Εξ.2 : $\ln(1-x)$
πρέπει $1-x>0$
$x<1$
$A_f = (-\infty, 1)$
Για $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$-x_1 > -x_2$
$1-x_1 > 1-x_2$
$\ln(1-x_1) > \ln(1-x_2)$
$f(x_1) > f(x_2)$
άρα η f γν. φθίνουσα στο A_f
άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται


Θέτω $f(x)=y \Leftrightarrow \ln(1-x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln e^y \Leftrightarrow$

$1-x = e^y \Leftrightarrow$

$x = 1-e^y$

περιορισμοί: $x<1$

$1-e^y<1$

$e^y>0 \Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$

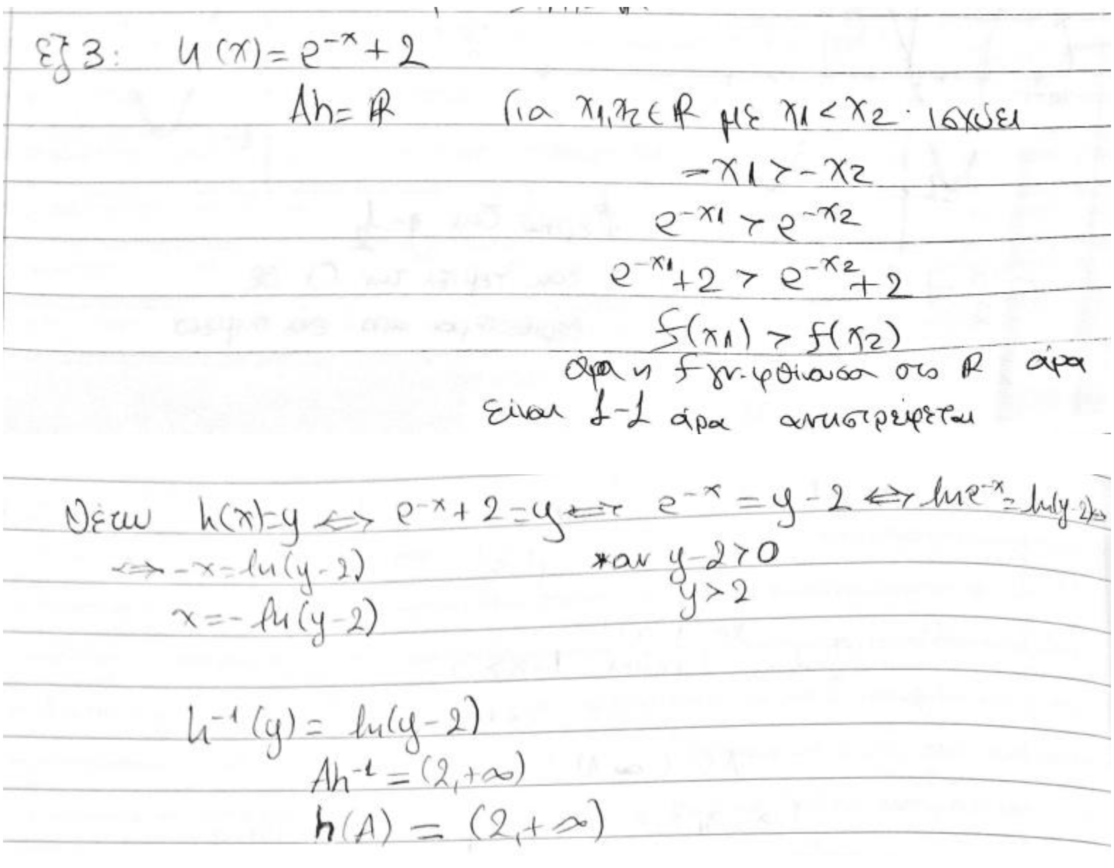
Άρα $f^{-1}(y)=1-e^y,\ y\in\mathbb{R}$

$A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

άρα $f(A)=\mathbb{R}$

Εικόνα 57:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ2 (β) του Φύλλου εργασίας 1

$h(x)=e^{-x}+2$


εξ 3: $h(x)=e^{-x}+2$

$A_h=\mathbb{R}$ Για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$-x_1>-x_2$

$e^{-x_1}>e^{-x_2}$

$e^{-x_1}+2>e^{-x_2}+2$

$f(x_1)>f(x_2)$

άρα η f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται

Θέτω $h(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \Leftrightarrow \ln e^{-x}=\ln(y-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)$ *αν $y-2>0$

$x=-\ln(y-2)$ $y>2$

$h^{-1}(y)=\ln(y-2)$

$A_{h^{-1}}=(2,+\infty)$

$h(A)=(2,+\infty)$

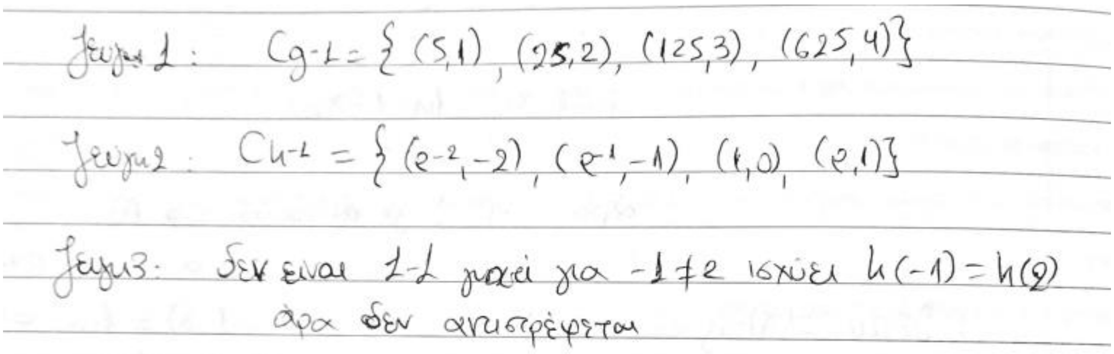
Εικόνα 58:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ2 (γ) του Φύλλου εργασίας 1

3^{ος} τρόπος: Σύνολο διατεταγμένων ζευγών

$$C_g = \{(1,5),(2,25),(3,125),(4,625)\}$$

$$C_f = \{(-2,e^{-2}),(-1,e^{-1}),(0,1),(1,e)\}$$

$$C_h = \left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,0),\left(2,\frac{1}{2}\right),(8,8)\right\}$$


Ζεύγος 1: $C_{g^{-1}} = \{(5,1), (25,2), (125,3), (625,4)\}$

Ζεύγος 2: $C_{h^{-1}} = \{(e^{-2},-2), (e^{-1},-1), (1,0), (e,1)\}$

Ζεύγος 3: Δεν είναι 1-1 γιατί για $-1 \neq 2$ ισχύει $h(-1)=h(2)$
άρα δεν αντιστρέφεται

Εικόνα 59:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Γ3 του Φύλλου εργασίας 1

Το θέμα αυτό αποτελεί επίσης ένα παράδειγμα της αριθμητικής ή υπολογιστικής ανάλυσης. Η εργασία των μαθητών/τριών εξελίχθηκε στο κατακόρυφο επίπεδο σημειωτικής-εργαλειακής γένεσης όπου τα βασικά στοιχεία της συνάρτησης από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων αλλά και τεχνουργήματα οδηγούν στην οπτικοποίηση και τελικά στην κατασκευή των αντίστοιχων αναπαραστάσεων της αντίστροφης συνάρτησης. Ο ορισμός της 1-1 αντιστοίχισης και της βασικής ισοδυναμίας των δυο συναρτήσεων γίνεται εργαλείο για την επικύρωση των αποτελεσμάτων. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιείται και μια μετάβαση από τη λεκτική γένεση στην εργαλειακή γένεση.

6.2.1.7 Αποτελέσματα του Θέματος Δ

Το θέμα αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια παρουσίασε με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra τη γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και στη συνέχεια τη γραφική παράσταση αυτών στο αντίστοιχο διάστημα που δινόταν. Παρότι οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται από το γράφημα ότι η συνάρτηση δεν αντιστρέφεται στο πεδίο ορισμού της αλλά αντιστρέφεται σε ένα περιορισμό αυτού, δεν αποδέχονται το αποτέλεσμα αυτό καθώς δεν μπορούν να ορίσουν τον τύπο της αντίστροφης. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί και με την έρευνα των Paoletti et al., 2015. Στην συνέχεια του θέματος οι μαθητές/τριες προσπάθησαν να κατασκευάσουν το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης. Αρκετοί μαθητές/τριες πρότειναν να κατασκευαστεί ένας πίνακας τιμών για την τριγωνομετρική συνάρτηση και στη συνέχεια να κατασκευαστεί ο αντίστοιχος πίνακας τιμών της αντίστροφης. Στο σημείο αυτό η ερευνήτρια συζήτησε με τους μαθητές/τριες της ιδιότητες του τριγωνομετρικού κύκλου και καλυφθήκαν οι όποιες γνωστικές ελλείψεις. Όπως ανέφεραν οι μαθητές/τριες δεν είχαν ασχοληθεί με την αντίστροφη συνάρτηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

6.2.1.8 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Δ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Η γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτέλεσε το μέσο για τη διαδικασία της οπτικοποίησης και τη μετάβαση στο γνωστικό επίπεδο. Οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι η ευθεία y=0,5 έχει με το γράφημα κάθε τριγωνομετρικής συνάρτησης τουλάχιστον δυο κοινά σημεία. Η παρατήρηση αυτή τους/τις οδήγησε σε μια λεκτική γένεση και στο συμπέρασμα ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται στο πεδίο ορισμού τους. Στη συνέχεια σχεδίασαν τα γραφήματα σε κάθε διάστημα και μέσω της μονοτονίας επικύρωσαν ότι οι συναρτήσεις αντιστρέφονται στο αντίστοιχο διάστημα. Η ερευνήτρια παρουσίασε στο GeoGebra τα αποτελέσματα του θέματος και συζητήθηκαν στην ολομέλεια της τάξης οι ιδιότητες των συναρτήσεων σε κάθε περίπτωση. Αρκετοί μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι οι δυο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας καθώς και ότι οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x. Το θέμα αυτό αποτέλεσε μια εισαγωγική δραστηριότητα για το επόμενο φύλλο εργασίας.

Θέμα Δ

Δ1. Α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=\eta\mu x,\ x\in[-2\pi,2\pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

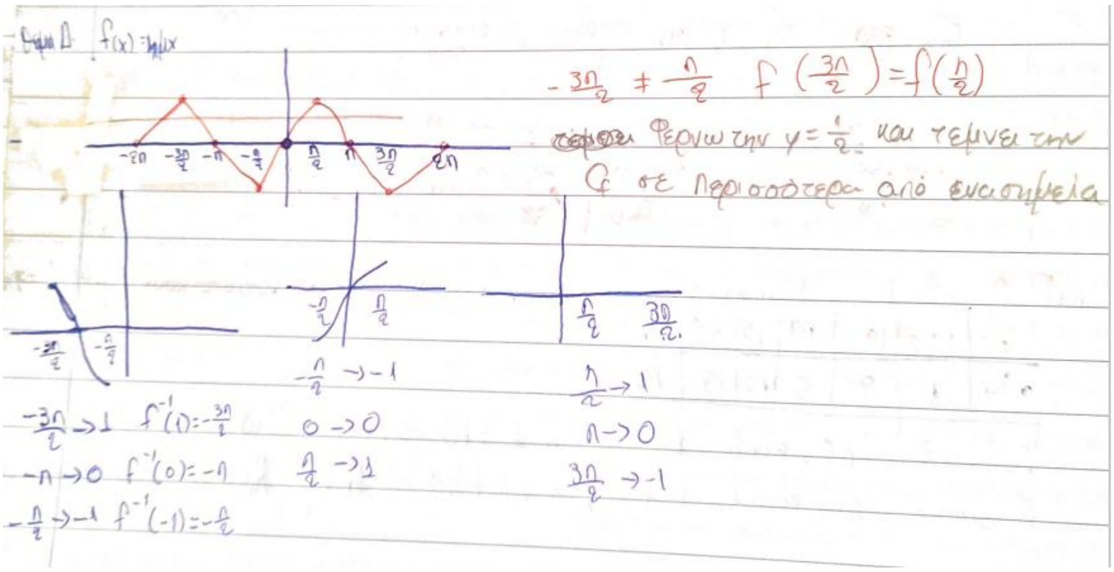
Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f_1(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$$

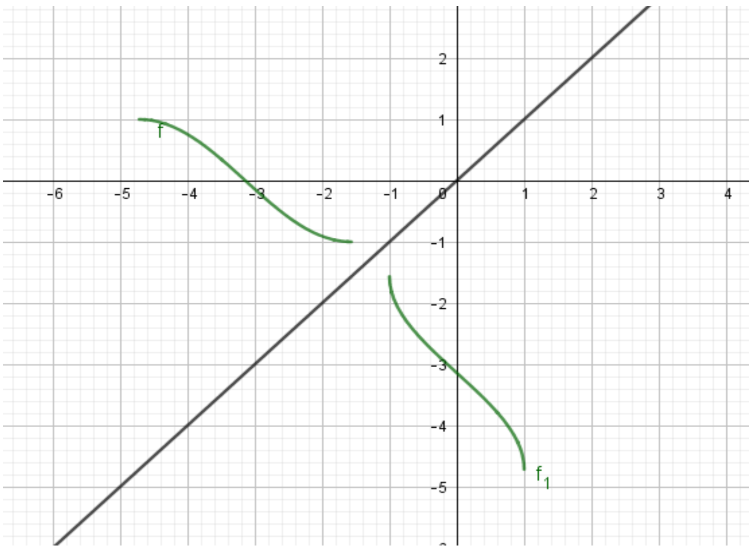
$$f_2(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_3(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

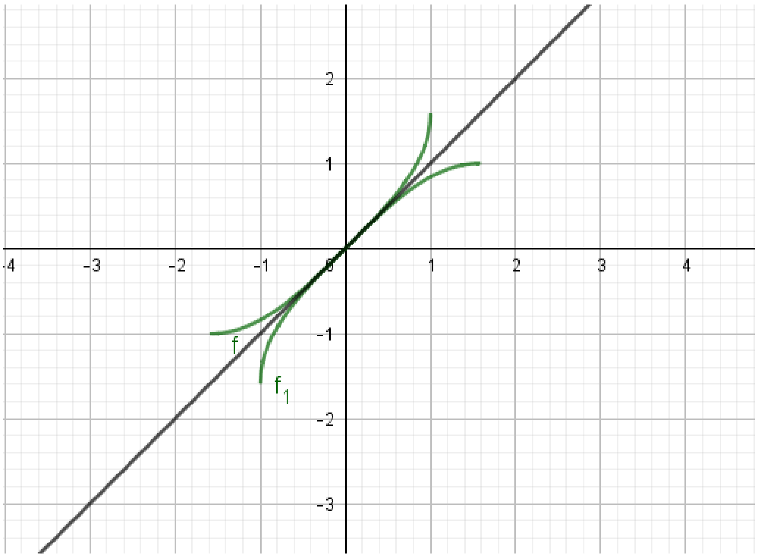
και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.



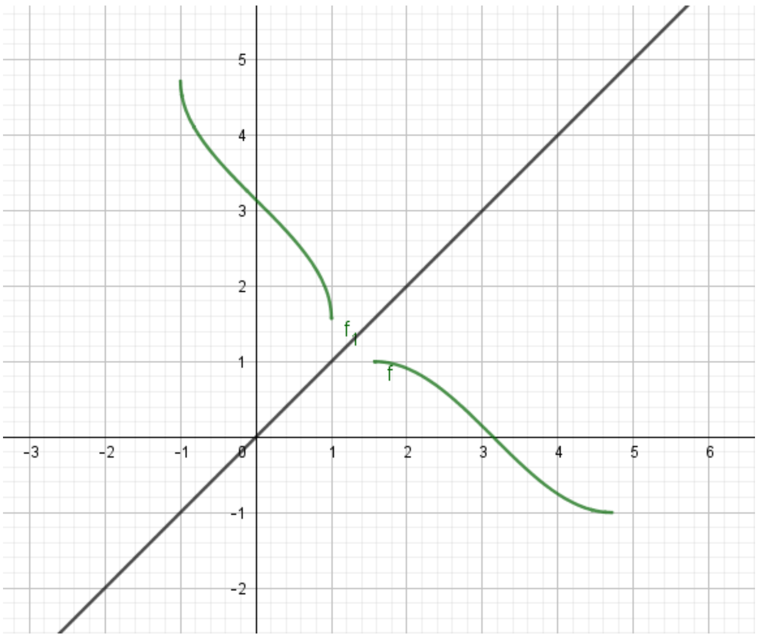
Εικόνα 60:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Δ1 του Φύλλου εργασίας 1



Εικόνα 61:Απάντηση στο Θέμα Δ1. Β.1 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



Εικόνα 62:Απάντηση στο Θέμα Δ1. Β.2 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



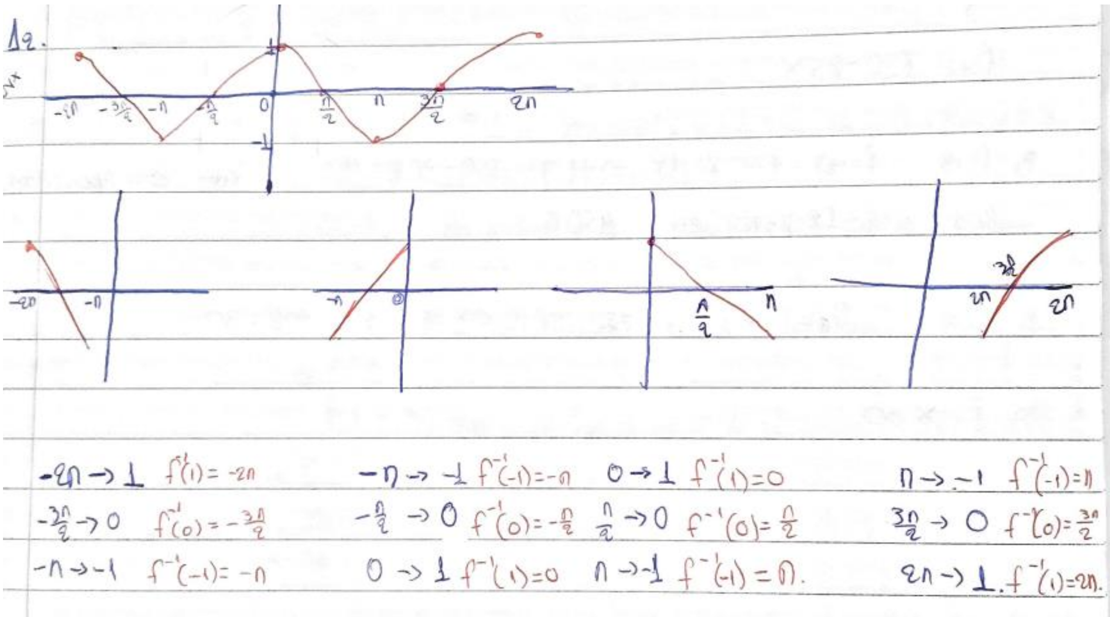
Εικόνα 63:Απάντηση στο Θέμα Δ1. Β.3 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra

Δ2. Α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-2\pi, 2\pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

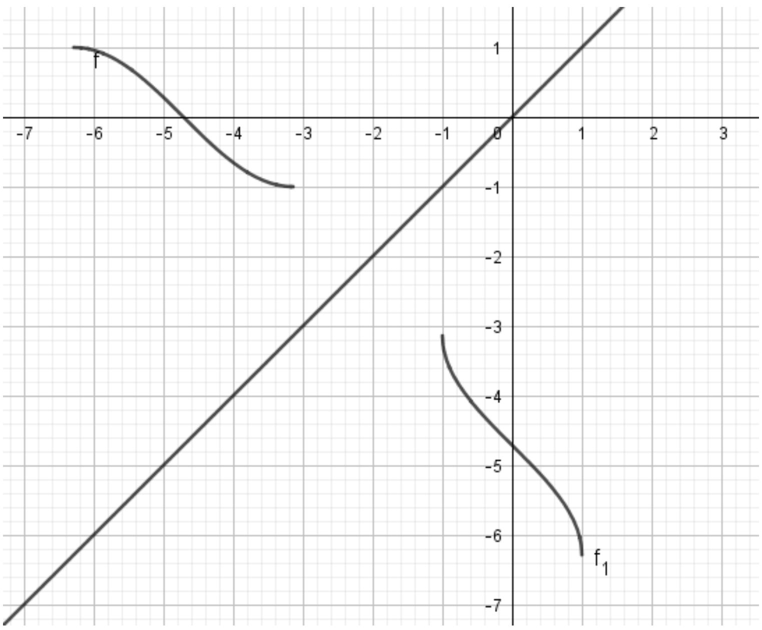
Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$g_1(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[-2\pi,-\pi]$$
$$g_2(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[-\pi,0]$$
$$g_3(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$$
$$g_4(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[\pi,2\pi]$$

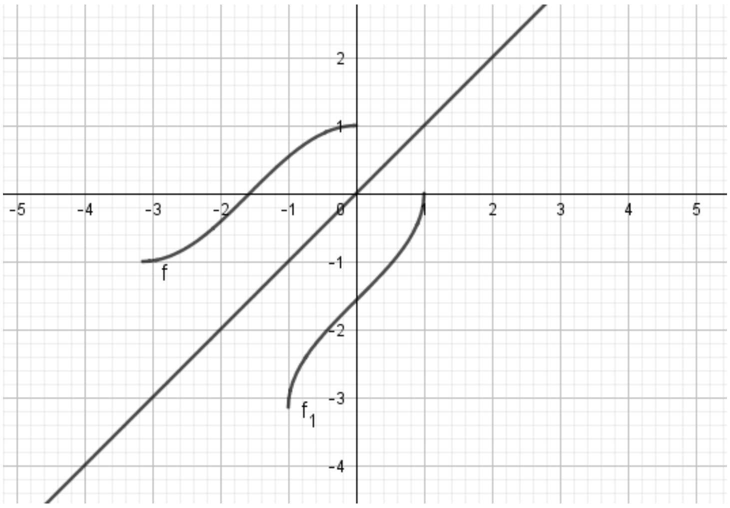
και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.



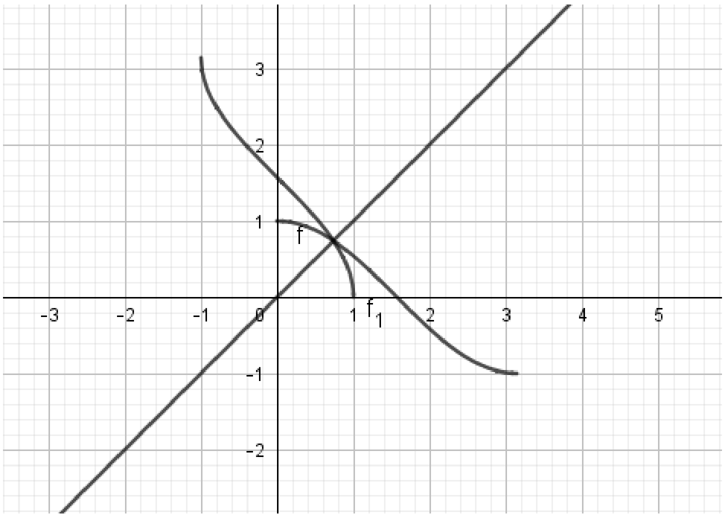
Εικόνα 64:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Δ2 του Φύλλου εργασίας 1



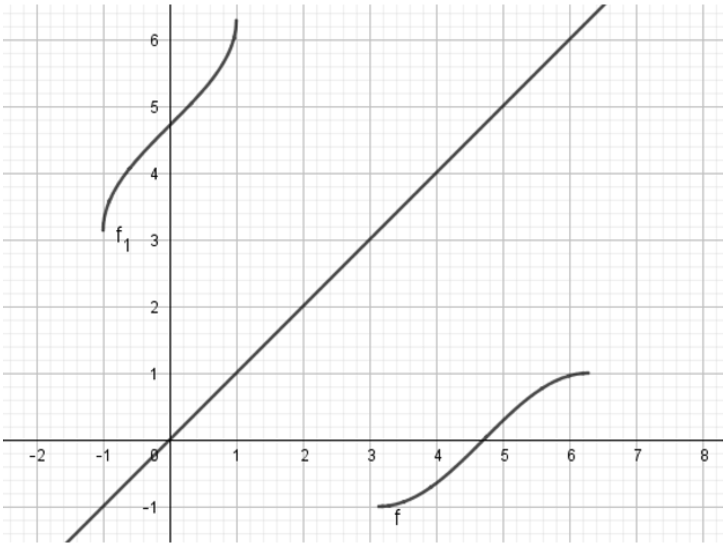
Εικόνα 65:Απάντηση στο Θέμα Δ2. Β.1 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



Εικόνα 66:Απάντηση στο Θέμα Δ2. Β.2 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



Εικόνα 67:Απάντηση στο Θέμα Δ2. Β.3 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



Εικόνα 68:Απάντηση στο Θέμα Δ2. Β.4 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra

Εικόνα: Απάντηση στο Θέμα Δ2. Β.4 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra

Δ3. Α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

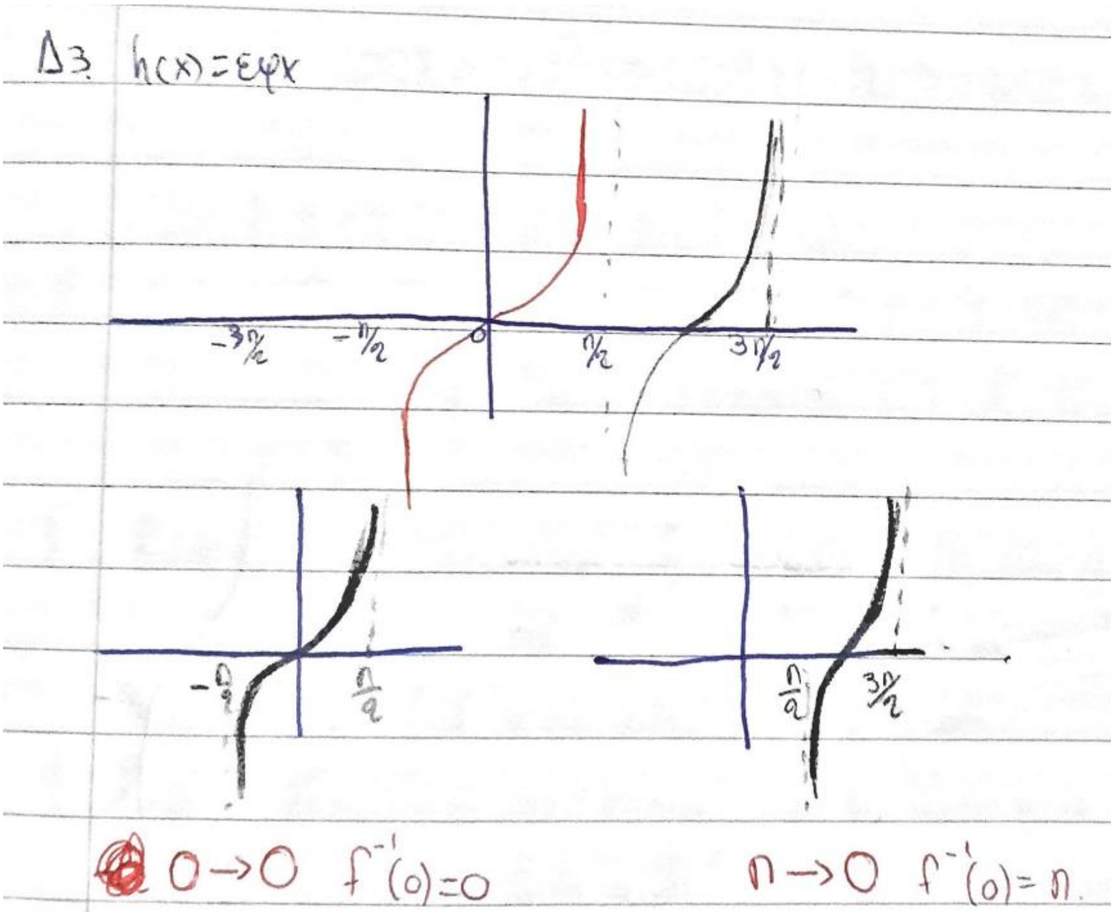
$h(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

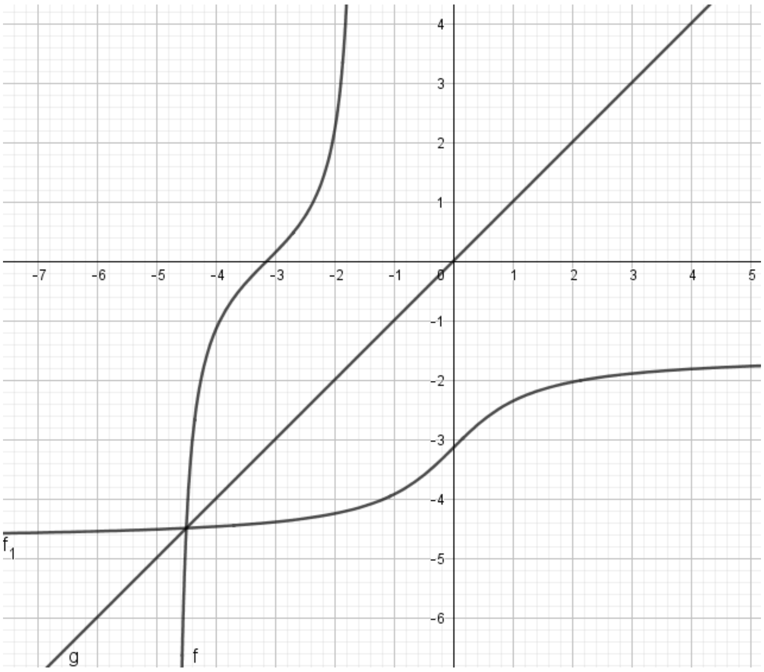
$h_1(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$h_2(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

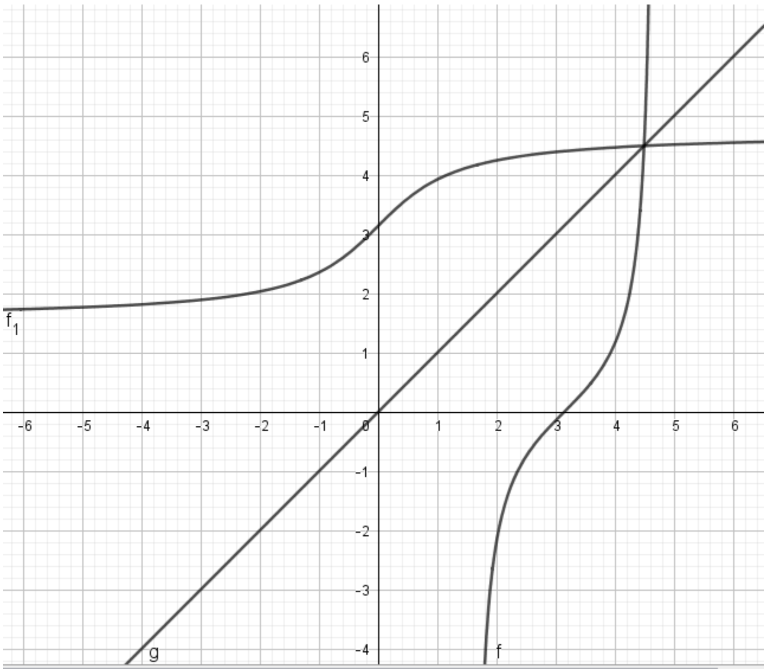
και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.



Εικόνα 69:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Δ3 του Φύλλου εργασίας 1



Εικόνα 70:Απάντηση στο Θέμα Δ3. Β.1 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra



Εικόνα 71:Απάντηση στο Θέμα Δ3. Β.2 του Φύλλου εργασίας 1 στο GeoGebra

6.2.2 Φύλλο εργασίας 2

6.2.2.1 Αποτελέσματα του Θέματος Α

Τα ερωτήματα Α1 και Α3 του θέματος αυτού αποτελούν παραδείγματα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης ενώ τα ερωτήματα Α2 και Α4 παραδείγματα υπολογιστικής ανάλυσης. Αρχικά, συζητήθηκε στην ολομέλεια της τάξης η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς σημείο. Αρκετοί μαθητές/τριες ανέφεραν τη συμμετρία των γραφικών παραστάσεων μιας συνάρτησης με την αντίθετη της συνάρτησης ως προς τον άξονα x'x. Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες παρατήρησαν το σχήμα του Α1 ερωτήματος και σημείωσαν πάνω στο σχήμα το συμμετρικό σημείο του σημείου Α ως προς τη διχοτόμο των γωνιών xOy και x'Oy'. Ένας από αυτούς πρότεινε τη διαδικασία της δίπλωσης για την εύρεση του σημείου.

Στο Α2 ερώτημα οι μαθητές/τριες δεν κατάφεραν να παρουσιάσουν μια ολοκληρωμένη λύση. Η ερευνήτρια παρατήρησε σοβαρές γνωστικές ελλείψεις στην έννοια της ευθείας. Για το λόγο αυτό παρουσίασε αναλυτικά τη λύση και ταυτόχρονα με το λογισμικό GeoGebra έδειξε βήμα βήμα τη διαδικασία.

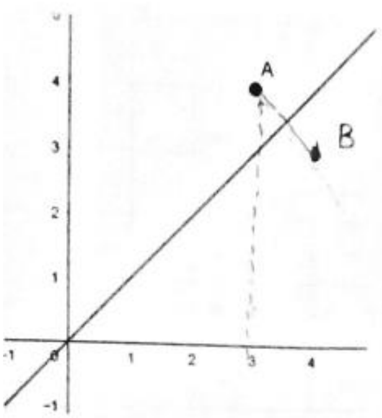
Στο Α3 ερώτημα οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι ένα σημείο της ευθείας είναι και σημείο της ευθείας y=x, οπότε το συμμετρικό του ως προς αυτήν την ευθεία θα είναι το ίδιο σημείο. Στην συνέχεια βρήκαν ακόμη ένα συμμετρικό σημείο ως προς την ευθεία y=x και ενώνοντας τα δυο σημεία κατασκεύασαν την ευθεία που τους ζητήθηκε. Τέλος κατασκεύασαν τις εξισώσεις των δυο ευθείων και ορισμένοι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι αν λυθεί η εξίσωση της μιας ευθείας ως προς x θα προκύψει η εξίσωση της δεύτερης ευθείας. Κατέληξαν λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η μια γραμμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της άλλης.

6.2.2.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Α υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Α

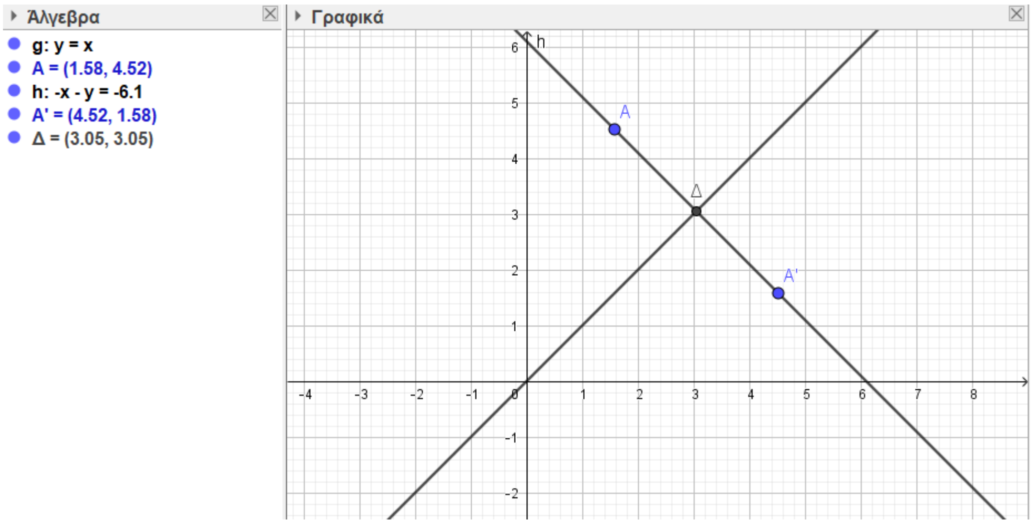
Η εργασία των μαθητών/τριών εξελίχθηκε και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ αλλά και στις αλληλεπιδράσεις αυτών. Οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν μέσω μιας σημειωτικής γένεσης από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου στη διαδικασία της οπτικοποίησης του γνωστικού επιπέδου. Η διαίσθηση λοιπόν τους οδήγησε στο συμμετρικό σημείο ως προς την ευθεία y=x. Στην συνέχεια, από το πλαίσιο αναφοράς της αναλυτικής γεωμετρίας χρησιμοποίησαν την εξίσωση της ευθείας, τις συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος, την ιδιότητα των κάθετων ευθείων και του σημείου τομής δυο ευθείων και οδηγήθηκαν μέσω της λεκτικής γένεσης στην απόδειξη ότι το συμμετρικό σημείο του σημείου με συντεταγμένες (α, β) θα είναι το σημείο με συντεταγμένες (β, α). Τα αποτελέσματα της οπτικοποίησης και της απόδειξης οδήγησαν τους μαθητές/τριες στη διαδικασία της κατασκευής της συμμετρικής ευθείας ως προς την ευθεία y=x και στην εύρεση των δυο εξισώσεων των ευθειών. Η εργασία των μαθητών/τριών ολοκληρώθηκε και με μια εργαλειακή γένεση με την οποία η χρήση του τεχνουργήματος της επίλυσης της εξίσωσης της πρώτης γραμμικής συνάρτησης ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή του οδήγησε στην εξίσωση της γραμμικής συνάρτησης της δεύτερης και τελικά στο συμπέρασμα ότι η μια συνάρτηση είναι η αντίστροφη της άλλης. Οι μαθητές/τριες κινήθηκαν αμφίδρομα και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

Α1. Στο παρακάτω σύστημα ορθογωνίων αξόνων να βρείτε το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(3,4) ως προς τη διχοτόμο των γωνιών xOy και x’Oy’.



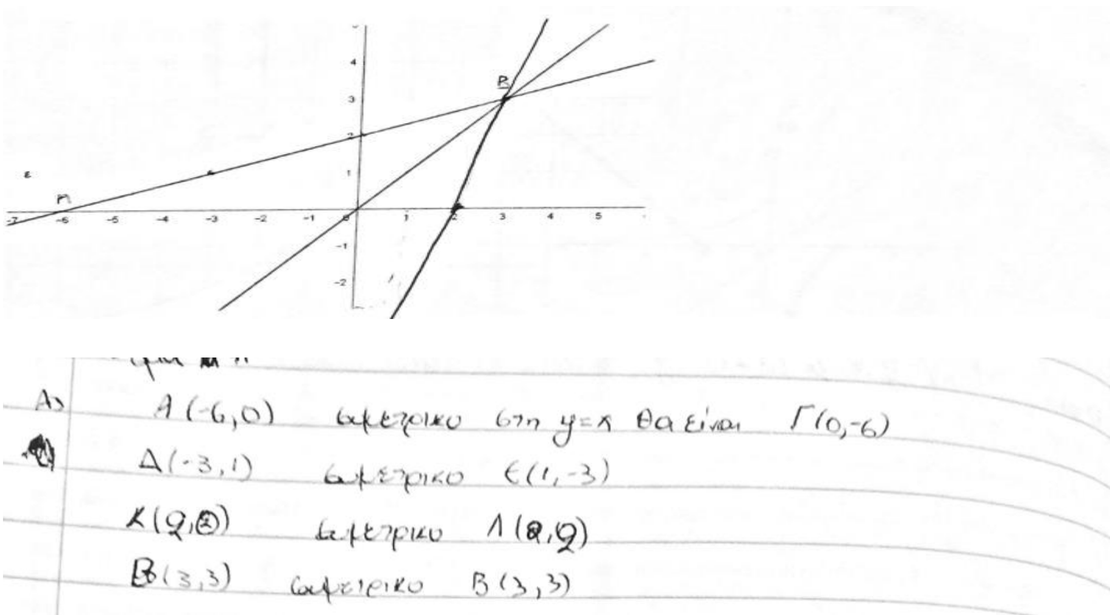
Εικόνα 72:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Α1 του Φύλλου εργασίας 2

Α2. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(α, β) ως προς την ευθεία y=x έχει συντεταγμένες (β, α).



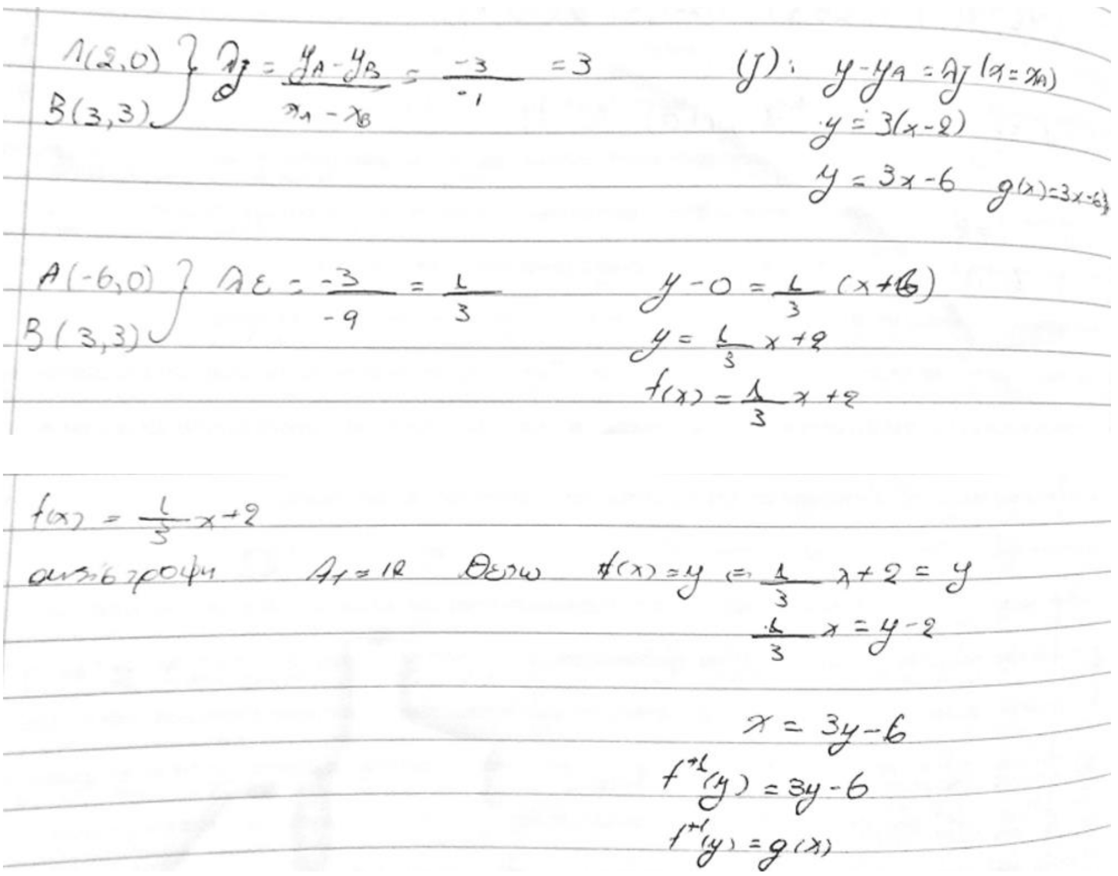
Εικόνα 73:Απάντηση στο Θέμα Α2 του Φύλλου εργασίας 2 στο GeoGebra

Α3. Να σχεδιάσετε τη συμμετρική ευθεία (ζ) της ευθείας (ε) ως προς την ευθεία y=x. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



Εικόνα 74:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Α3 του Φύλλου εργασίας 2

Α4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και (ζ). Ποια σχέση έχουν οι δυο αυτές γραμμικές συναρτήσεις;



$A(2,0)$, $B(3,3)$: $\lambda_f = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3}{-1} = 3$

$(f): y - y_A = \lambda_f (x - x_A)$

$y = 3(x-2)$

$y = 3x - 6$ $g(x) = 3x - 6$

$A(-6,0)$, $B(3,3)$: $\lambda_\varepsilon = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

$y - 0 = \frac{1}{3}(x+6)$

$y = \frac{1}{3}x + 2$

$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

αντίστροφη $A_f = \mathbb{R}$ Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 2 = y$

$\frac{1}{3}x = y - 2$

$x = 3y - 6$

$f^{-1}(y) = 3y - 6$

$f^{-1}(y) = g(x)$

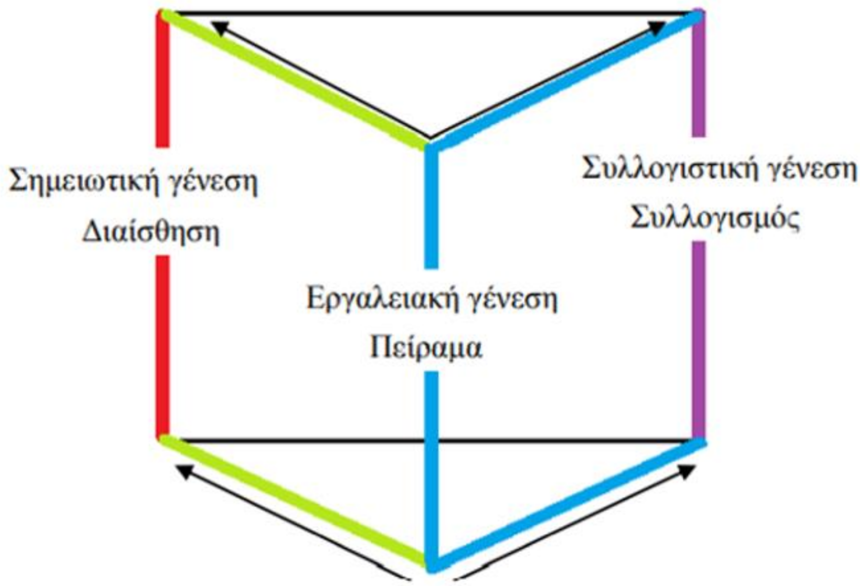
Εικόνα 75:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Α4 του Φύλλου εργασίας 2

6.2.2.3 Αποτελέσματα του Θέματος Β

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Όλοι οι μαθητές/τριες αναγνώρισαν ποιες από τις συναρτήσεις είναι 1-1 και δικαιολογήσαν σωστά την απάντηση τους. Στην συνέχεια σχεδίασαν την ευθεία y=x και προσπάθησαν να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Η μαθήτρια Μ2 πρότεινε να κατασκευάσουν ένα πίνακα τιμών από κάποια χαρακτηριστικά σημεία της δοθείσας γραφικής παράστασης και στη συνέχεια με τη βοήθεια του πίνακα αυτού να κατασκευάσουν τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης και τη γραφική της παράσταση. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι ακόμη και οι μαθητές/τριες που δυσκολεύονται με το μάθημα ήταν πλέον σε θέση να κατασκευάζουν τους δυο πίνακες.

6.2.2.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Β υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

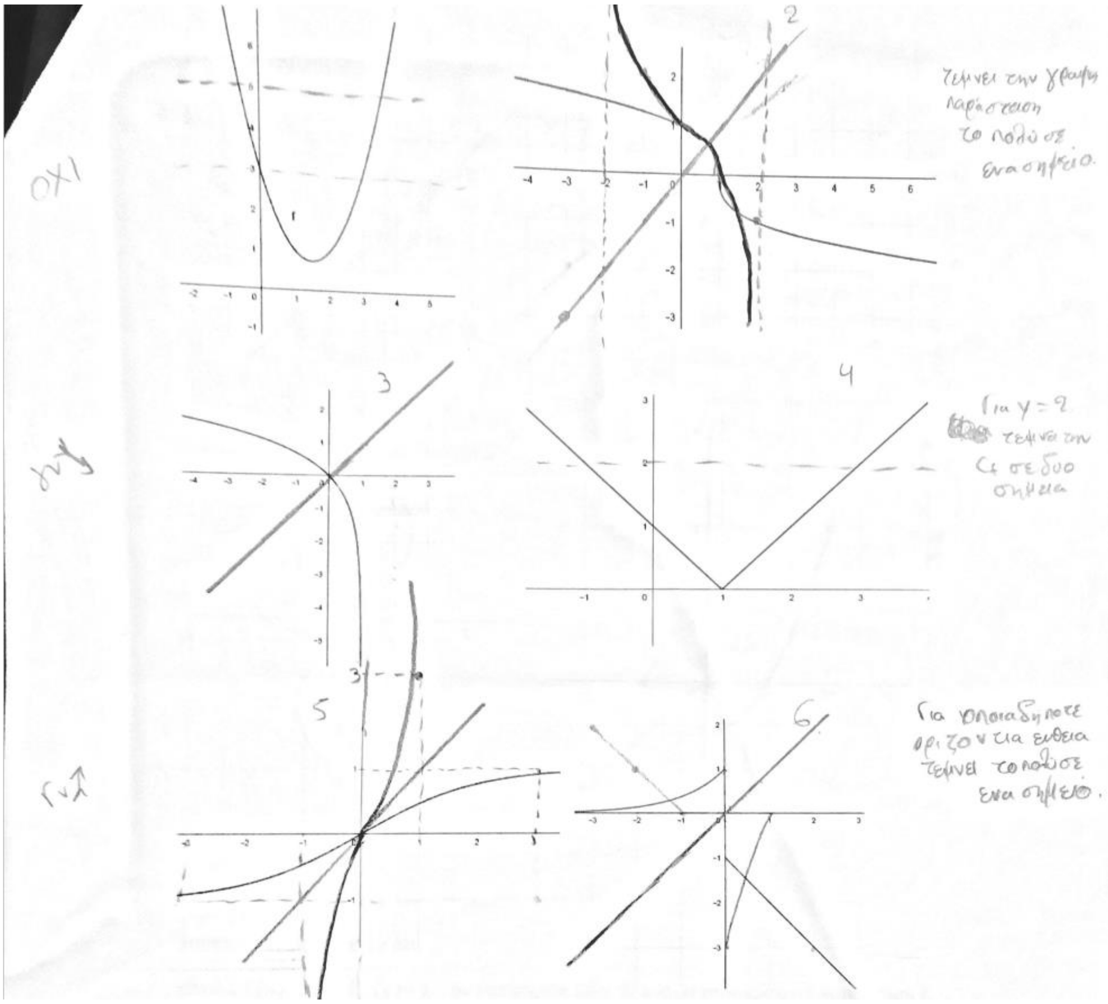
Οι μαθητές/τριες χρησιμοποίησαν το τεχνούργημα των παράλληλων ευθειών στον οριζόντιο άξονα για να πραγματοποιήσουν μια εργαλειακή γένεση που τους οδήγησε τόσο σε μια σημειωτική γένεση όσο και σε μια λεκτική γένεση για να δικαιολογήσουν ποιες από τις συναρτήσεις αντιστρέφονται. Στη συνέχεια μέσω του τεχνουργήματος της συμμετρίας ως προς ευθεία αλλά και της ισοδυναμίας της συνάρτησης με την αντίστροφη της οδηγήθηκαν στην κατασκευή του κατάλληλου πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Η πορεία της εργασίας των μαθητών/τριών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 15:Μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στη σημειωτική και στη λεκτική γένεση.

Θέμα Β

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμία από αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης.



Εικόνα 76:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β του Φύλλου εργασίας 2

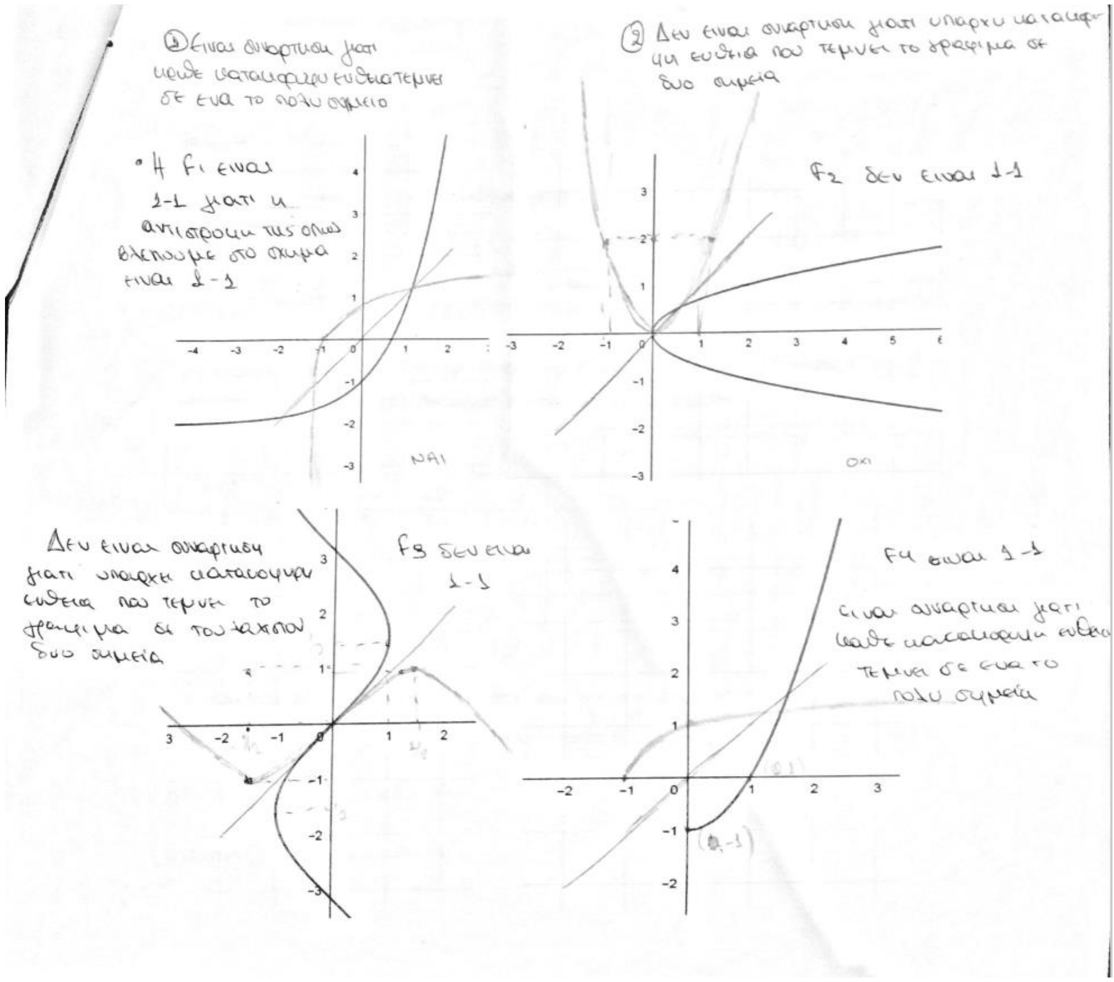
6.2.2.5 Αποτελέσματα του Θέματος Γ

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης. Οι μαθητές/τριες παρατήρησαν τα γραφήματα και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το δεύτερο και τρίτο γράφημα δεν αποτελούν γράφημα συνάρτησης καθώς υπάρχει κατακόρυφη ευθεία που τέμνει το γράφημα σε δυο τουλάχιστον σημεία ενώ το πρώτο και το τέταρτο αποτελούν γράφημα συνάρτησης καθώς κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει το γράφημα σε ένα το πολύ σημείο. Στη συνέχεια κατασκεύασαν την ευθεία y=x και το συμμετρικό γράφημα της δοθείσας ως προς αυτήν. Η ερευνήτρια παρότρυνε τους μαθητές/τριες που αδυνατούσαν να κατασκευάσουν το συμμετρικό γράφημα, να κατασκευάσουν πρώτα ένα πίνακα τιμών. Η διαδικασία αυτή παρατήρησε ότι είχε αποτέλεσμα και όλοι οι μαθητές/τριες κατάφεραν να κατασκευάσουν τα γραφήματα. Τέλος όλοι οι μαθητές/τριες αναγνώρισαν ποιες από τις συναρτήσεις αντιστρέφονται. Οι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι δεν είχαν ασχοληθεί με κάτι παρόμοιο.

6.2.2.6 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Γ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Γ

Δίνονται τα συμμετρικά γραφήματα των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 ως προς την ευθεία y=x. Να εξετάσετε αν τα γραφήματα αυτά είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στην συνέχεια να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f_1 , f_2 , f_3 , f_4 είναι 1-1.



Εικόνα 77:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 στο Θέμα Γ του Φύλλου εργασίας 2

Οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν μέσω μιας σημειωτικής γένεσης από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου στη διαδικασία της οπτικοποίησης του γνωστικού επιπέδου. Παρατήρησαν τα γραφήματα και στην συνέχεια με χρήση της ιδιότητας από το πλαίσιο αναφοράς της συνάρτησης ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο οδηγήθηκαν σε μια λεκτική γένεση. Τέλος, με το τεχνούργημα της συμμετρίας ως προς τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου κατασκεύασαν τις αρχικές συναρτήσεις και παρατήρησαν ποιες από αυτές είναι 1-1. Η εργαλειακή γένεση τους οδήγησε, λοιπόν, σε μια λεκτική γένεση και στη διατύπωση μιας πρότασης που θα λειτουργούσε ως ιδιότητα. Οι μαθητές/τριες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, όταν το συμμετρικό γράφημα δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, τότε η αρχική συνάρτηση δεν αντιστρέφεται.

6.2.2.7 Αποτελέσματα του Θέματος Δ

Το ερώτημα Δ1 του θέματος αυτού αποτελεί ένα παράδειγμα αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης ενώ το ερώτημα Δ2 αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι όλοι οι μαθητές/τριες ασχολήθηκαν με επιτυχία με το συγκεκριμένο θέμα και μάλιστα όλοι κατάφεραν να παρατηρήσουν ότι η σύνθεση μιας συνάρτησης με την αντίστροφη της αλλά και της αντίστροφης με την συνάρτηση καταλήγει στην ταυτοτική συνάρτηση. Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες να προσδιορίσουν το πεδίο ορισμού κάθε σύνθεσης, ώστε να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές/τριες της να ξεκαθαρίσουν ότι τελικά αυτές οι συνθέσεις δεν είναι πάντα ίσες συναρτήσεις. Στο ερώτημα Δ2 αρκετοί μαθητές/τριες κατέληξαν σε λανθασμένα συμπεράσματα.

6.2.2.8 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Δ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

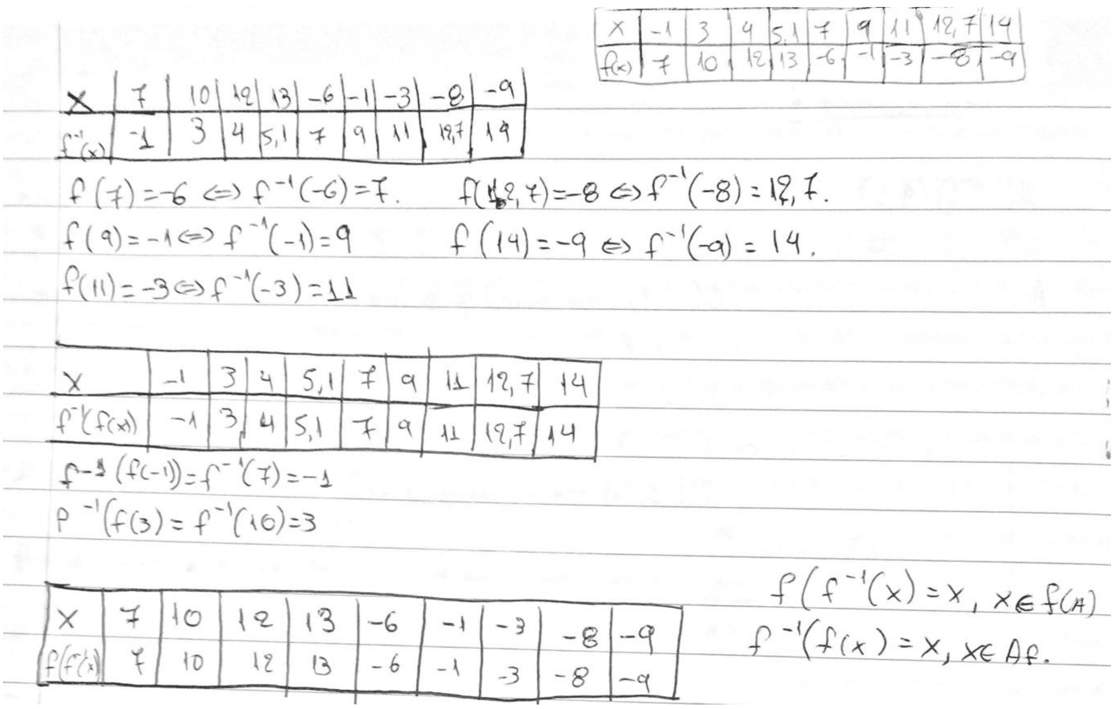
Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας 1-1 συνάρτησης f.

x	-1	3	4	5,1	7	9	11	12,7	14
f(x)	7	10	12	13	-6	-1	-3	-8	-9

Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες. Τι παρατηρείτε;

Η εργασία των μαθητών/τριών εξελίχθηκε αμφίδρομα στο κατακόρυφο επίπεδο σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης. Με χρήση του τεχνουργήματος της ισοδυναμίας $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οι μαθητές/τριες κατασκεύασαν τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Στη συνέχεια παρατηρώντας τους δυο πίνακες και εφαρμόζοντας τη διαδικασία της σύνθεσης κατασκεύασαν και τους ζητούμενους πίνακες. Οδηγήθηκαν σε μια λεκτική γένεση που τους επιβεβαίωσε την ιδιότητα από το πλαίσιο αναφοράς της αντίστροφης συνάρτησης.



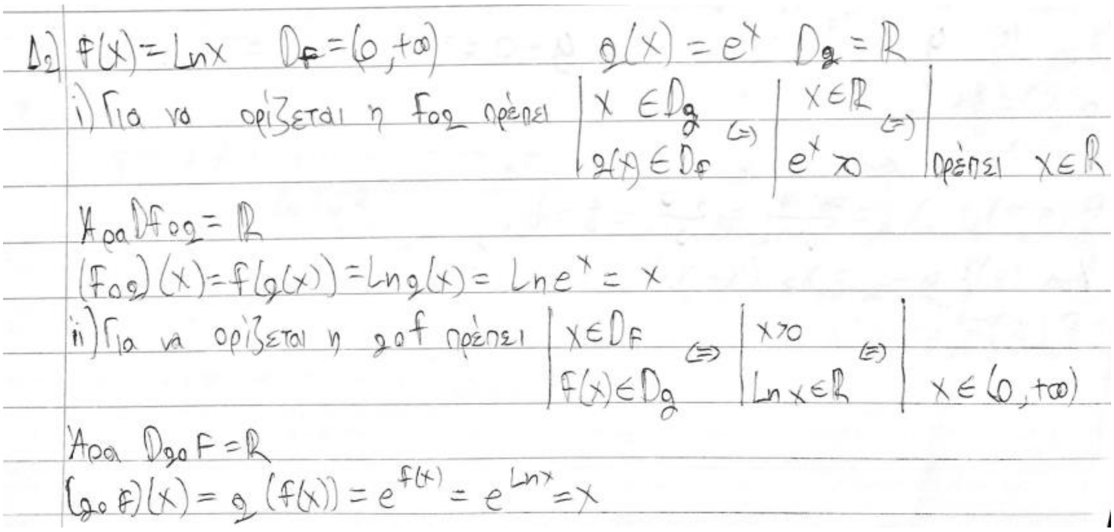
Εικόνα 78:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Δ1 του Φύλλου εργασίας 2

Δ2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x$. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς ή ψευδείς και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

i) Ισχύει $(fog)(x)=x, x\in R$.

ii) Ισχύει $(gof)(x)=x, x\in R$

Οι μαθητές/τριες χρησιμοποίησαν από το πλαίσιο αναφοράς της σύνθεσης δυο συναρτήσεων τον τρόπο καθορισμού του πεδίου ορισμού της και από το πλαίσιο αναφοράς της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης τις βασικές ιδιότητες τους. Απέδειξαν με το τρόπο αυτό τις ιδιότητες που γνώριζαν από την προηγουμένη τάξη και επιβεβαίωσαν την παρατήρηση που είχε προηγηθεί ότι οι δυο συνθέσεις δεν είναι ίσες συναρτήσεις. Η λεκτική γένεση που πραγματοποιήθηκε αποτέλεσε ένα εργαλείο, ώστε να προσδιορίζουν απευθείας τη σύνθεση της συνάρτησης με την αντίστροφη της και της αντίστροφης με τη συνάρτηση.


Δ2) $f(x)=Lnx$ $D_f=(0,+\infty)$ $g(x)=e^x$ $D_g=R$

i) Για να ορίζεται η fog πρέπει $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ e^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ πρέπει $x\in R$

Άρα $D_{fog}=R$

$(fog)(x)=f(g(x))=Ln\,g(x)=Ln\,e^x=x$

ii) Για να ορίζεται η gof πρέπει $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ Lnx\in R \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

Άρα $D_{gof}=R$

$(gof)(x)=g(f(x))=e^{f(x)}=e^{Lnx}=x$

Εικόνα 79:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Δ2 του Φύλλου εργασίας 2

6.2.3 Φύλλο εργασίας 3

6.2.3.1 Αποτελέσματα του Θέματος Α

Το θέμα αυτό αποτελεί παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια μέσω του θέματος αυτού ήθελε να τονίσει στους μαθητές/τριες της ότι ο περιορισμός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης θα περιορίσει τελικά και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της. Αρχικά οι μαθητές/τριες εργάστηκαν μόνοι τους και παρουσίασαν τα αποτελέσματα τους στην ολομέλεια της τάξης. Όλοι οι μαθητές/τριες κατάφεραν να αποδείξουν ότι οι συναρτήσεις αντιστρέφονται είτε με τη χρήση του ορισμού είτε με τη χρήση της μονοτονίας. Επίσης, με ευκολία κατάφεραν να κατασκευάσουν τον τύπο της αντίστροφης για την πρώτη και τρίτη συνάρτηση ενώ μόνο τρεις από αυτούς προσδιόρισαν σωστά τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για την δεύτερη συνάρτηση. Η ερευνήτρια παρουσίασε μέσω του λογισμικού GeoGebra τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων καθώς και των αντίστροφων τους και ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να προσδιορίσουν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης. Οι μαθητές/τριες συνειδητοποίησαν ότι τα αποτελέσματα που βρήκαν δε συμφωνούν με τον τρόπο καθορισμού του πεδίου ορισμού της αντίστροφης. Η συζήτηση που ακολουθήσε είχε ως αποτέλεσμα να εντοπίσουν τις παραλήψεις τους στη λύση που ακολούθησαν και να διορθώσουν τα λάθη τους. Τέλος ορισμένοι μαθητές/τριες όρισαν αναλυτικά τη σύνθεση των δυο συναρτήσεων και μάλιστα η μαθήτρια Μ14 παρουσίασε μια ολοκληρωμένη λύση για τη σύνθεση της δεύτερης συνάρτησης με την αντίστροφη της. Η λύση αυτή αποτέλεσε αφορμή, για να τονιστεί ο τρόπος εύρεσης της σύνθεσης μιας δίκλαδης συνάρτησης με μια συνάρτηση.

6.2.3.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Α υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Οι μαθητές/τριες κινήθηκαν αμφίδρομα στο κατακόρυφο επίπεδο εργαλειακής - λεκτικής γένεσης. Με χρήση της ιδιότητας της μονοτονίας, του αντιθετοαντίστροφου του ορισμού αλλά και του τεχνουργήματος της επίλυσης τύπου ως προς μια μεταβλητή οδηγήθηκαν στην κατασκευή του τύπου της αντίστροφης. Στη συνέχεια οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αλλά και των αντίστροφων τους αποτέλεσαν αφορμή για μια σημειωτική γένεση, η οποία τεκμηριώθηκε αλγεβρικά. Τέλος η ιδιότητα της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων αποτέλεσε για κάποιους μαθητές/τριες εργαλείο για την κατασκευή της αλλά ταυτόχρονα για κάποιους άλλους η αναλυτική κατασκευή της σύνθεσης αποτέλεσε απόδειξη της ιδιότητας.

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h με :

$f(x)=\frac{2}{3}x-12$ με -2<x<3 ,

$g(x)=3(x+2)^3$,

$h(x)=\frac{1}{x-3}$ με x<3

Α1. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αντιστρέφονται.

Α2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση για καθεμιά από τις συναρτήσεις.

Α3. Να ορίσετε την σύνθεση καθεμίας από τις παραπάνω συναρτήσεις με την αντίστροφη τους καθώς και τη σύνθεση της αντίστροφης με την συνάρτηση. Τι παρατηρείτε;

Θέμα Α

$f(x) = \frac{2}{3}x - 12$, $-2 < x < 3$ $\quad A_f(-2,3)$

για $x_1, x_2 \in (-2,3)$ με $x_1 < x_2$

$2/3\,x_1 < 2/3\,x_2 \Leftrightarrow 2/3\,x_1 - 12 < 2/3\,x_2 - 12 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Άρα $f \uparrow$ στο A_f

άρα 1-1 άρα αντιστρέψιμη

Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 12 \Leftrightarrow 3y = 2x - 36$

$\Leftrightarrow 2x = 3y + 36 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y + 18$

επειδή $-2 < x < 3 \Leftrightarrow -2 < \frac{3}{2}y + 18 < 3 \Leftrightarrow \cancel{f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 18}$

$\Leftrightarrow -4 < \frac{3}{2}y + 36 < 6 \Leftrightarrow -40 < 3y < -30 \Leftrightarrow -\frac{40}{3} < y < -10$

$f^{-1}(y) = \frac{3}{2}y + 18 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 18$, $A_{f^{-1}} = \left(-\frac{40}{3}, -10\right)$

$f(A) = \left(-\frac{40}{3}, -10\right)$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{3}{2}f(x) + 18 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x - 12\right) + 18 = x - 18 + 18 = x \quad x \in A_f(-2,3)$

Εικόνα 80:Απάντηση του μαθητή Μ12 στο Θέμα Α του Φύλλου εργασίας 3

β) $g(x) = 3(x+2)^3$

Α1) Για καθε $x \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow (x_1+2)^3 < (x_2+2)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x_1+2)^3 < 3(x_2+2)^3 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Άρα $g \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη

Α2) $y = g(x)$

$y = 3(x+2)^3 \Rightarrow (x+2)^3 = \frac{y}{3} \Rightarrow$

$x + 2 = \sqrt[3]{\frac{y}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{3}} - 2$, $\frac{y}{3} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

$x + 2 = -\sqrt[3]{-\left(\frac{y}{3}\right)} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{-\frac{y}{3}} - 2$, $\frac{y}{3} < 0 \Rightarrow y < 0$

Άρα $g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 2, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{3}} - 2, & x < 0 \end{cases}$

A3) • $g^{-1} \circ g$

[illegible] Θέτω $g_1^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}-2}$, $D_{g_1^{-1}} = [0, +\infty)$

$g_2^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-\frac{x}{3}-2}$, $D_{g_2^{-1}} = (-\infty, 0)$

• $g_1^{-1} \circ g$

$D_{g_1^{-1} \circ g}: \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_{g_1^{-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 3(x+2)^3 \geq 0 \; (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq -2 \end{cases}$

$(*)$ $3(x+2)^3 \geq 0 \Rightarrow (x+2)^3 \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$(g_1^{-1} \circ g)(x) = g_1^{-1}(g(x)) = \sqrt[3]{\frac{3(x+2)^3}{3}} - 2 = \sqrt[3]{(x+2)^3} - 2 = x+2-2 = x, \; x \geq -2$

• $g_2^{-1} \circ g$

$D_{g_2^{-1} \circ g}: \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_{g_2^{-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 3(x+2)^3 < 0 \; (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x < -2 \end{cases}$

$(*)$ $3(x+2)^3 < 0 \Rightarrow (x+2)^3 < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$

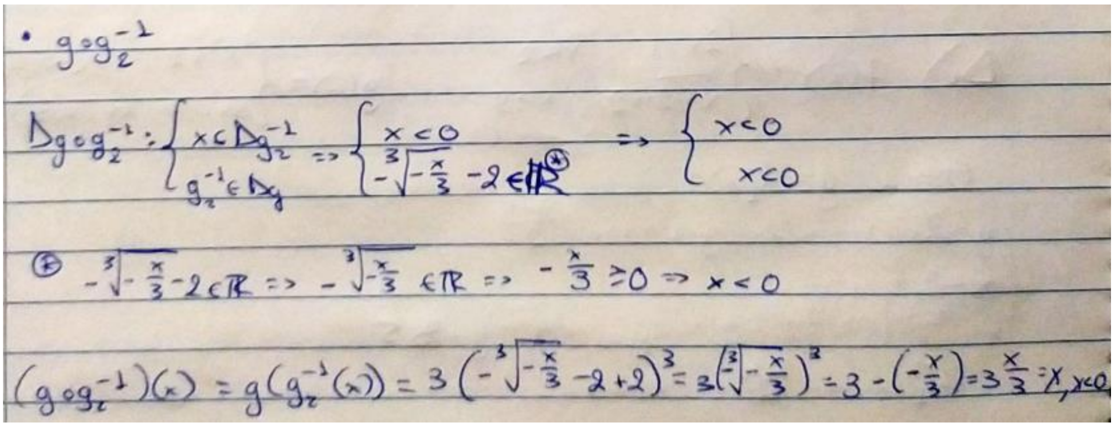
$(g_2^{-1} \circ g)(x) = g_2^{-1}(g(x)) = -\sqrt[3]{-\frac{3(x+2)^3}{3}} - 2 = -\sqrt[3]{-(x+2)^3} - 2 = x+2-2 = x, \; x < -2$

• $g \circ g_1^{-1}$

$D_{g \circ g_1^{-1}}: \begin{cases} x \in D_{g_1^{-1}} \\ g_1^{-1}(x) \in D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 2 \in \mathbb{R} \; (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$(*)$ $\sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x}{3}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x}{3} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$(g \circ g_1^{-1})(x) = g(g_1^{-1}(x)) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 2 + 2\right)^3 = 3\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)^3 = 3\,\frac{x}{3} = x, \; x \geq 0$



Εικόνα 81:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Α του Φύλλου εργασίας 3

6.2.3.3 Αποτελέσματα του Θέματος Β

Το θέμα αυτό αποτελεί επίσης ένα παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Οι μαθητές/τριες όρισαν αρχικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και στη συνέχεια καθορίσαν σωστά τη μονοτονία της. Παρατήρησαν ότι η συνάρτηση είναι 1-1 άρα θα αντιστρέφεται οπότε η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι η αντίστροφή της. Αρκετοί μαθητές/τριες σχολίασαν μάλιστα ότι πρώτη φορά τους ζητείται να καθορίσουν την αντίστροφη συνάρτηση με τέτοια διατύπωση. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι οι περισσότεροι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν να λύσουν την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x καθώς δεν αντικαθιστούσαν το e^{-x} με $\frac{1}{e^x}$. Αποφάσισε, λοιπόν, να παρουσιάσει αναλυτικά τη λύση στον πίνακα. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης με κατάλληλες ερωτήσεις αρκετοί μαθητές/τριες οδηγήθηκαν μόνοι τους στον τύπο της αντίστροφης. Παρατήρησε, όμως, ότι αρκετοί από αυτούς/τες έχουν ελλείψεις σε βασικές έννοιες της άλγεβρας. Τέλος, ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να ανατρέξουν στα προηγούμενα φύλλα εργασίας και να παρατηρήσουν το είδος της μονοτονίας της αντίστροφης. Όλοι οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι η αντίστροφη έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την αρχική συνάρτηση στο σύνολο τιμών της αρχικής. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε με την απόδειξη μέσω του ορισμού της μονοτονίας. Οι μαθητές/τριες ξεκίνησαν την απόδειξη όπως συνηθίζουν να κάνουν, δηλαδή με την ανισότητα $x_1 < x_2$. Η ερευνήτρια τους παρότρυνε να ξεκινήσουν, όμως, με την ανεξάρτητη μεταβλητή της αντίστροφης, δηλαδή με την ανισότητα $y_1 < y_2$.Η παρατήρηση αυτή είχε ως αποτέλεσμα αρκετοί από αυτούς να οδηγηθούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

6.2.3.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Β υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Β

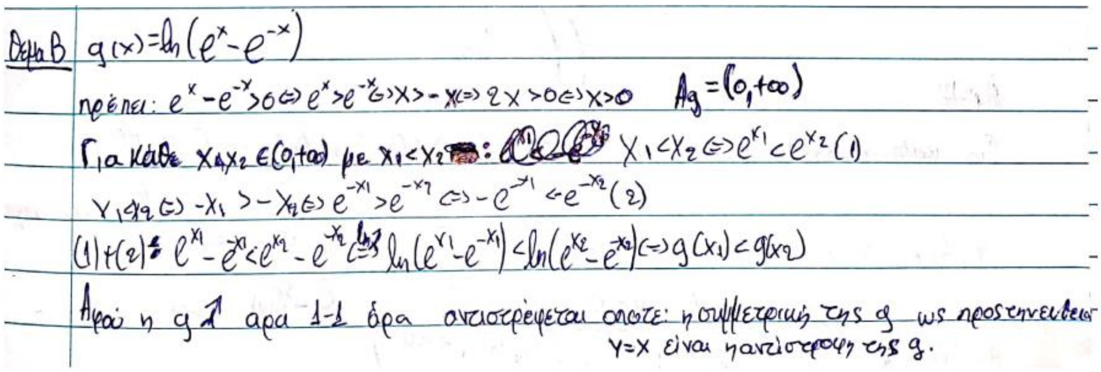
Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln\left(e^{x} - e^{-x}\right)$.

Β1. α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g και να ορίσετε τη συμμετρική συνάρτηση h της g ως προς την ευθεία y=x.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

γ. Να εξετάσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης h στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Η εργασία των μαθητών/τριών εξελίχθηκε στο ΜΧΕ της Άλγεβρας και της Ανάλυσης και στο κατακόρυφο επίπεδο εργαλειακής- λεκτικής γένεσης. Η ερευνήτρια είχε ως στόχο μέσω του θέματος αυτού να διερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές/τριες της έχουν κατανοήσει τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης καθώς και τις βασικές τεχνικές, για να αποδείξουν ότι μια συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσουν την αντίστροφη της.


Θέμα Β $g(x)=\ln(e^{x}-e^{-x})$

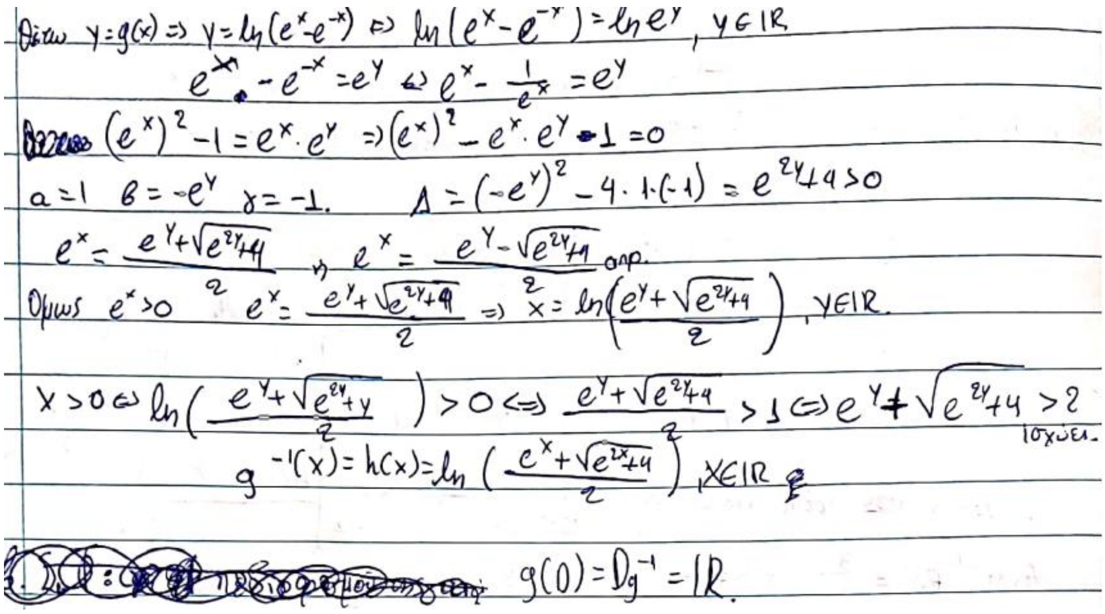
πρέπει: $e^{x}-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^{x}>e^{-x} \Leftrightarrow x>-x \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$ $A_g=(0,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$: $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (2)

(1)+(2): $e^{x_1}-e^{-x_1}<e^{x_2}-e^{-x_2} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} \ln(e^{x_1}-e^{-x_1})<\ln(e^{x_2}-e^{-x_2}) \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Αφού η g ↗ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται οπότε: η συμμετρική της g ως προς την ευθεία y=x είναι η αντίστροφη της g.



Θέτω $y=g(x) \Rightarrow y=\ln(e^x-e^{-x}) \Leftrightarrow \ln(e^x-e^{-x})=\ln e^y,\ y\in\mathbb{R}$

$e^x-e^{-x}=e^y \Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=e^y$

$(e^x)^2-1=e^x\cdot e^y \Rightarrow (e^x)^2-e^x\cdot e^y-1=0$

$\alpha=1 \quad \beta=-e^y \quad \gamma=-1. \qquad \Delta=(-e^y)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=e^{2y}+4>0$

$e^x=\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ ή $e^x=\frac{e^y-\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ απ.

Όμως $e^x>0 \quad e^x=\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2} \Rightarrow x=\ln\left(\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}\right),\ y\in\mathbb{R}$

$x>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}>1 \Leftrightarrow e^y+\sqrt{e^{2y}+4}>2$ ισχύει.

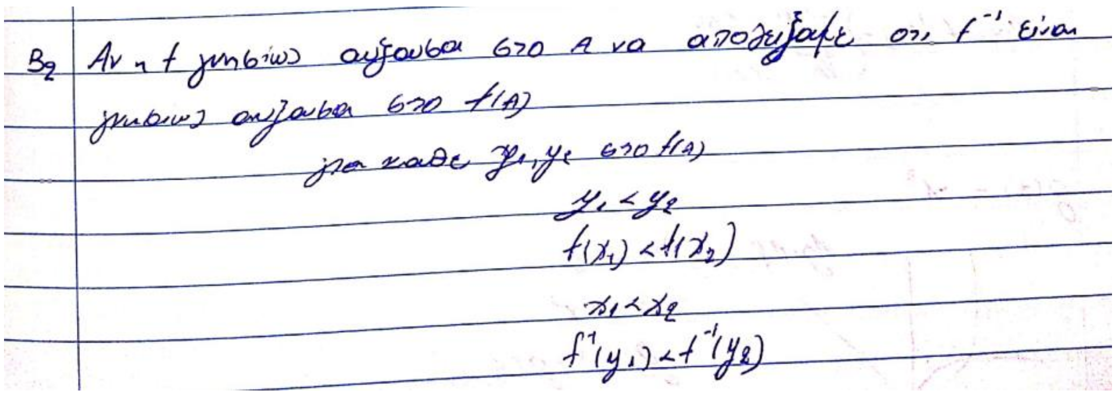
$g^{-1}(x)=h(x)=\ln\left(\frac{e^x+\sqrt{e^{2x}+4}}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}$

$g(0)=D_{g^{-1}}=\mathbb{R}.$

Εικόνα 82:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β του Φύλλου εργασίας 3

Β2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε και η αντίστροφη της είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο τιμών της συνάρτησης με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Στο ερώτημα αυτό οι μαθητές/τριες γνωρίζοντας τον ορισμό της μονοτονίας συνάρτησης από το πλαίσιο αναφοράς της έπρεπε να οδηγηθούν μέσω μιας λεκτικής γένεσης στην απόδειξη ότι η αντίστροφη συνάρτηση έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με αυτήν στο σύνολο τιμών της αρχικής. Η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές/τριες ξεπεράστηκε, όταν η εφαρμογή του ορισμού ξεκίνησε από την εξαρτημένη μεταβλητή y.



Β2 Αν η f γνησίως αύξουσα στο A να αποδείξετε ότι f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)

για κάθε y_1, y_2 στο f(A)

$y_1<y_2$

$f(x_1)<f(x_2)$

$x_1<x_2$

$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Εικόνα 83:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Β2 του Φύλλου εργασίας 3

6.2.3.5 Αποτελέσματα του Θέματος Γ

Το θέμα αυτό αποτελεί, επίσης, παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Οι μαθητές/τριες σχεδίασαν αρχικά τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων και στη συνέχεια με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας απέδειξαν ότι οι συναρτήσεις αντιστρέφονται. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι οι περισσότεροι μαθητές/τριες δεν κατάφεραν να ορίσουν σωστά το τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Κατά την επίλυση της εξίσωσης $x^3 = y$ ως προς x, οι περισσότεροι μαθητές/τριες κατέληξαν στον τύπο $x = \sqrt[3]{y}$. Στη συνέχεια η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να επιλύσουν την εξίσωση $x^3 = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. Αρκετοί μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι στην περίπτωση που ο αριθμός α είναι αρνητικός τότε $x = -\sqrt[3]{-\alpha}$. Η διαδικασία αυτή είχε ως αποτέλεσμα να ορίσουν σωστά την αντίστροφη συνάρτηση.

Στο ερώτημα Γ3 οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι τα κοινά σημεία της πρώτης συνάρτησης με την αντίστροφη της ταυτίζονται με τα κοινά σημεία καθεμίας με την ευθεία y=x, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο και με την δεύτερη συνάρτηση. Την παρατήρησή τους αυτή την επιβεβαίωσαν και μέσω των γραφικών παραστάσεων.

Στο ερώτημα Γ4 η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να αποδείξουν την παραπάνω παρατήρηση τους. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στην μέθοδο επαγωγής σε άτοπο και τους/τις δυσκόλεψε αρκετά παρόλο που η ερευνήτρια τους/τις βοήθησε.

6.2.3.6 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Γ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = -x^3$.

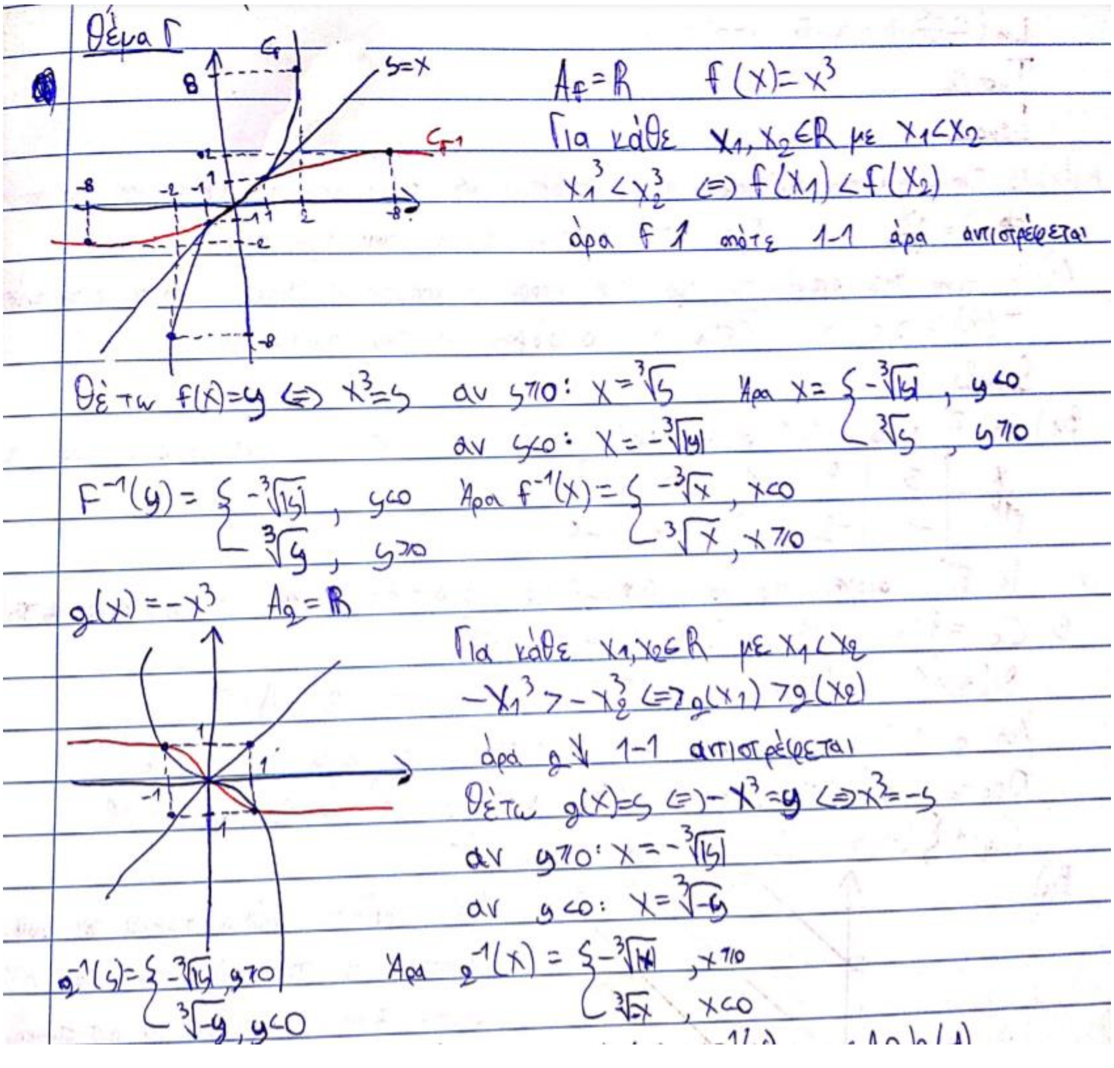
Γ1. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης g και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία κάθε συνάρτησης με την ευθεία y=x και με την αντίστροφη της. Τι παρατηρείτε;

Γ4. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε οι εξισώσεις: $h(x) = x$, $h^{-1}(x) = x$ και $h(x) = h^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες στο διάστημα $\Delta \cap h(\Delta)$.

Στο ερώτημα Γ1 οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν μέσω μιας σημειωτικής γένεσης από την γραφική παράσταση της συνάρτησης σε μια εργαλειακή γένεση και στην κατασκευή της αντίστροφης συνάρτησης. Στα επόμενα δυο ερωτήματα οι μαθητές/τριες κινήθηκαν στο επίπεδο εργαλειακής- σημειωτικής γένεσης και προσδιόρισαν τα ζητούμενα σημεία μέσω της γραφικής παράστασης. Στο τελευταίο ερώτημα δεν κατάφεραν να πραγματοποιήσουν την σημειωτική γένεση που θα τους οδηγούσε στην απόδειξη ότι οι τρεις εξισώσεις είναι ισοδύναμες στο δεδομένο διάστημα.

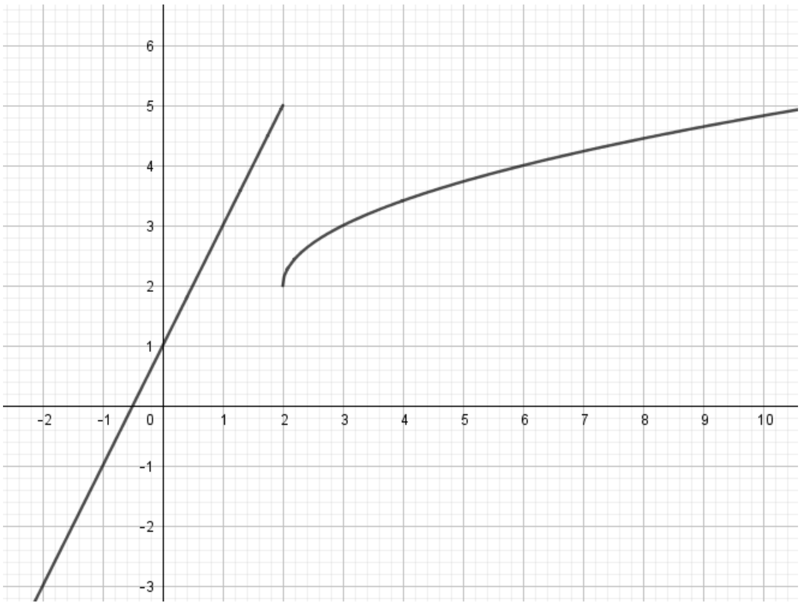


Εικόνα 84:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Γ του Φύλλου εργασίας 3

6.2.3.7 Αποτελέσματα του Θέματος Δ

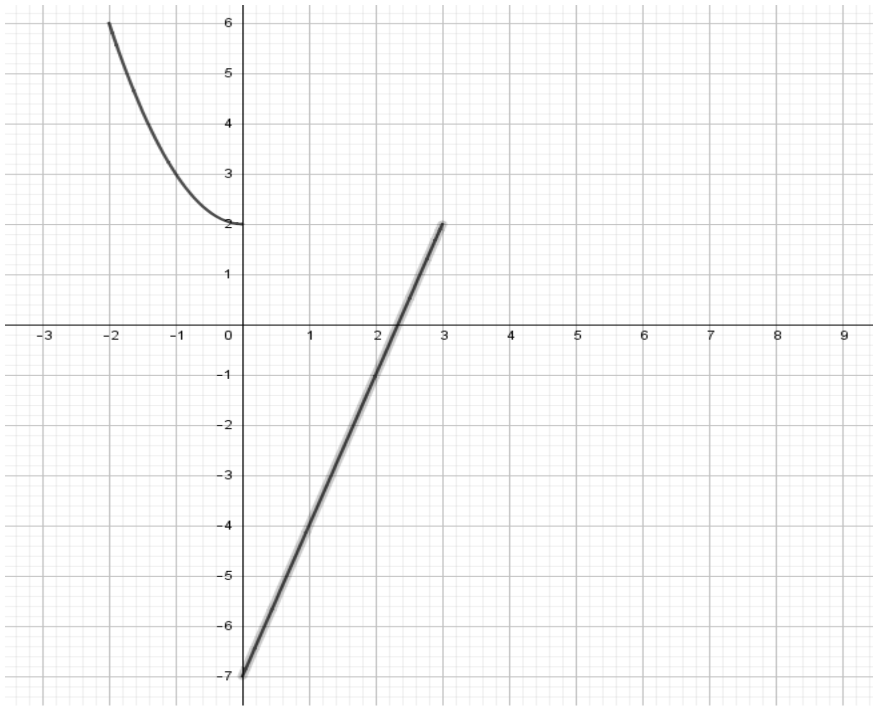
Το θέμα αυτό αποτελεί επίσης ένα παράδειγμα υπολογιστικής ανάλυσης. Η ερευνήτρια αποσκοπούσε μέσω του πρώτου ερωτήματος του θέματος αυτού να επισημάνει στους μαθητές/τριες της τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να εξετάζουν αν μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου αντιστρέφεται και να προσδιορίζουν τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Στο σχολικό εγχειρίδιο δεν υπάρχει κάποιο παρόμοιο θέμα. Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές/τριες έλυσαν κάποιες εξισώσεις με την βοήθεια των ιδιοτήτων της αντίστροφης συνάρτησης.

Αρχικά η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της να επιλύσουν το πρώτο ερώτημα και στη συνέχεια τους παρουσίασε στο μαθηματικό λογισμικό GeoGebra τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων. Η μαθήτρια Μ14 σχολίασε ότι είχε αποδείξει ότι η πρώτη συνάρτηση αντιστρέφεται αλλά παρατήρησε στην συνέχεια μέσω της γραφικής παράστασης ότι δεν αντιστρέφεται. Η ερευνήτρια ζήτησε από τη μαθήτρια να παρουσιάσει τη λύση της στο πίνακα. Η συζήτηση που ακολουθήσε στην ολομέλεια της τάξης είχε ως αποτέλεσμα να αντιληφθούν όλοι οι μαθητές/τριες ότι τα πεδία ορισμού των δυο τύπων της αντίστροφης που όρισε η μαθήτρια Μ14 συναλήθευαν με αποτέλεσμα τελικά η διαδικασία αυτή να μην αποτελεί συνάρτηση.



Εικόνα 85:Απάντηση στο Θέμα Δ1(α) του Φύλλου εργασίας 3 στο GeoGebra

Η επίδοση των μαθητών/τριών βελτιώθηκε στο επόμενο ερώτημα. Οι μαθητές/τριες επιβεβαίωσαν τον ισχυρισμό τους ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και μέσω του γραφήματος που τους παρουσιάστηκε.



Εικόνα 86:Απάντηση στο Θέμα Δ1(β) του Φύλλου εργασίας 3 στο GeoGebra

Στο ερώτημα Δ2 όλοι οι μαθητές/τριες κατάφεραν να αποδείξουν ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Ορισμένοι/νες θέλησαν να προσδιορίσουν πρώτα τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης και στη συνέχεια να επιλύσουν τις εξισώσεις. Αρκετοί πρότειναν ότι κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο και με τη βοήθεια της προφανούς ρίζας αλλά και της ισοδυναμίας $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ κατάφεραν να προσδιορίσουν απευθείας τη ρίζα της εξίσωσης. Στη τελευταία εξίσωση οι περισσότεροι μαθητές/τριες δεν αναγνώρισαν την αρχική συνάρτηση. Η μαθήτρια Μ14 πρότεινε τη χρήση της βασικής ιδιότητας της λογαριθμικής συνάρτησης και με κατάλληλες ισοδυναμίες κατέληξε σε μια αλγεβρική εξίσωση. Το θέμα αυτό αποτέλεσε αφορμή για την ερευνήτρια να τονίσει τη χρήση της αντίστροφης συνάρτησης στην επίλυση εξισώσεων.

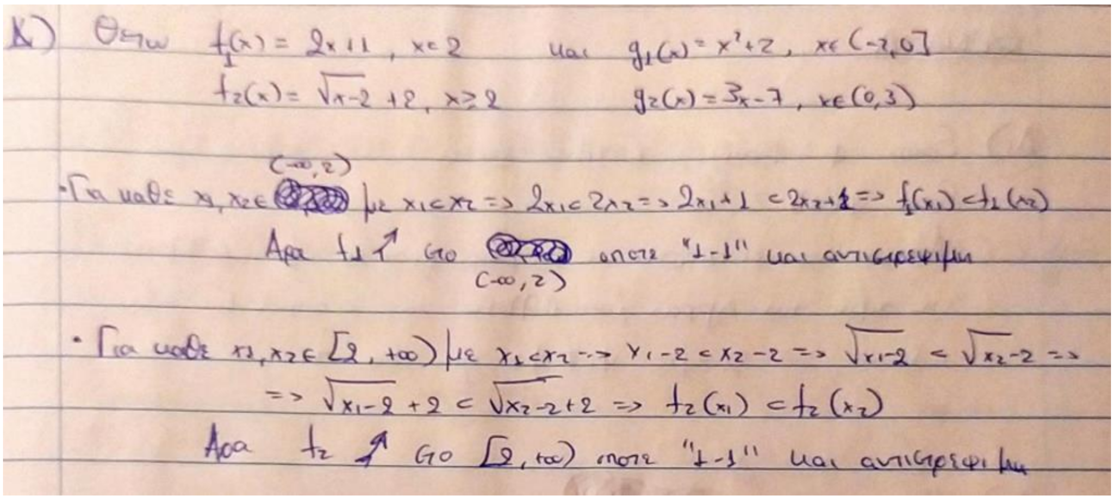
6.2.3.8 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Δ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Θέμα Δ

Δ1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση τους.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x<2 \\ \sqrt{x-2}+2, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{αν } x\in(-2,0] \\ 3x-7, & \text{αν } x\in(0,3) \end{cases}$$

Στο ερώτημα Δ1 οι μαθητές/τριες κινήθηκαν στο επίπεδο εργαλειακής- λεκτικής γένεσης. Όπως φαίνεται και από την απάντηση της μαθήτριας Μ14, αποδεικνύει ότι κάθε κλάδος της δοθείσας συνάρτησης αντιστρέφεται με χρήση του εργαλείου της μονοτονίας και στη συνέχεια προσδιορίζει τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για το κάθε κλάδο καθώς και το αντίστοιχο πεδίο ορισμού του.



Δ) Θέτω $f_1(x) = 2x+1,\ x<2$ και $g_1(x)=x^2+2,\ x\in(-2,0]$

$f_2(x)=\sqrt{x-2}+2,\ x\geq 2$ $g_2(x)=3x-7,\ x\in(0,3)$

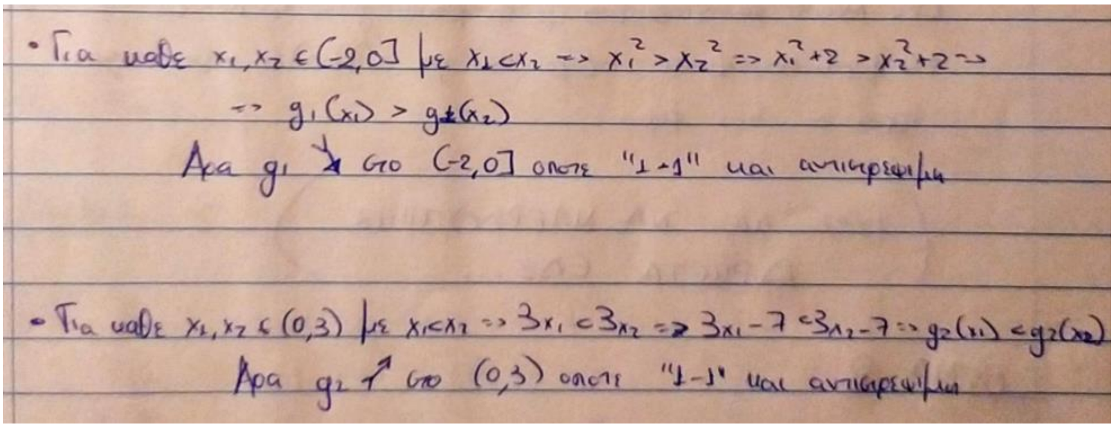
• Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,2)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1+1<2x_2+1 \Rightarrow f_1(x_1)<f_1(x_2)$

Άρα $f_1 \nearrow$ στο $(-\infty,2)$ οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη

• Για κάθε $x_1,x_2\in[2,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2-2 \Rightarrow \sqrt{x_1-2}<\sqrt{x_2-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x_1-2}+2<\sqrt{x_2-2}+2 \Rightarrow f_2(x_1)<f_2(x_2)$

Άρα $f_2 \nearrow$ στο $[2,+\infty)$ οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη



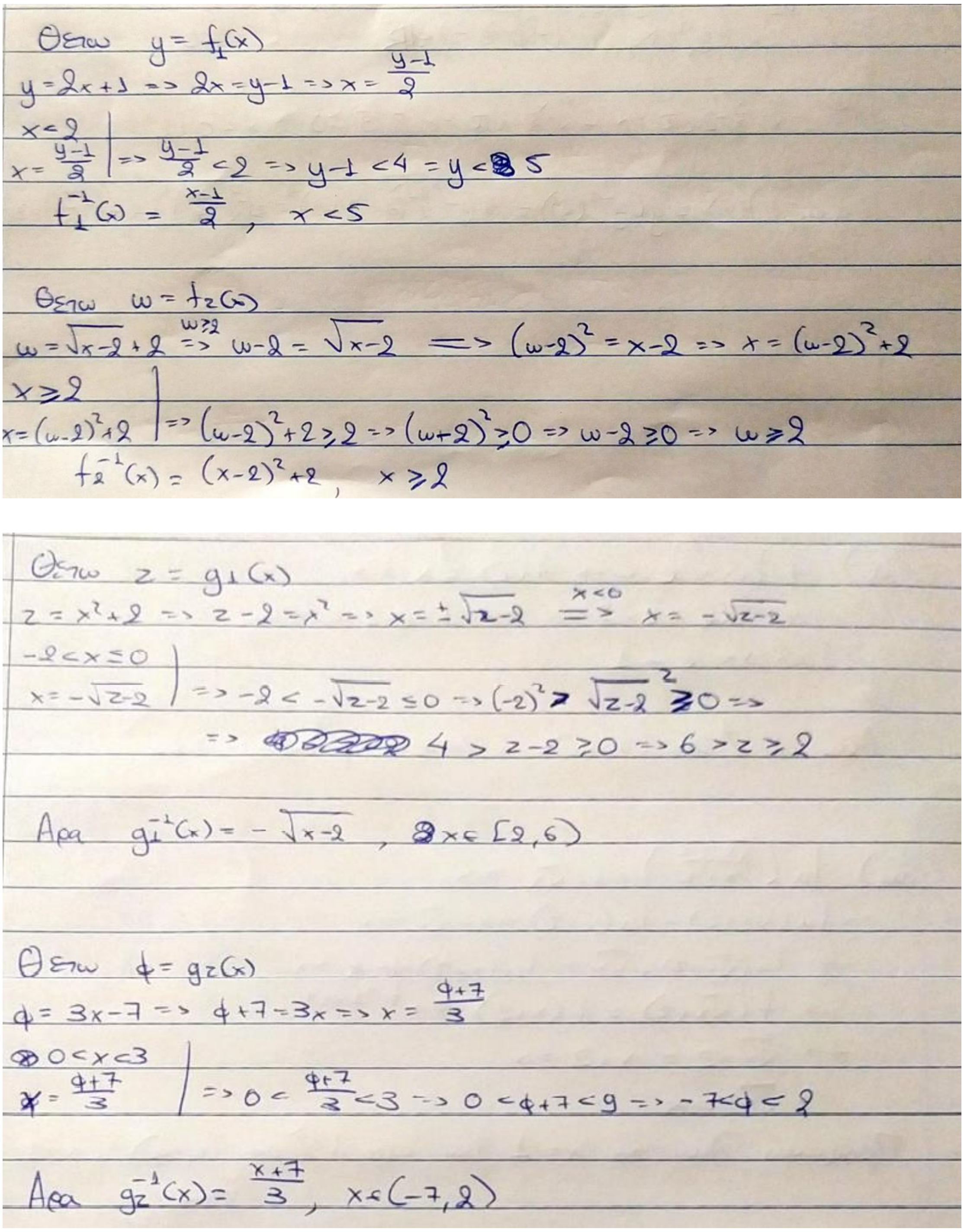
• Για κάθε $x_1,x_2\in(-2,0]$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2>x_2^2 \Rightarrow x_1^2+2>x_2^2+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1(x_1)>g_1(x_2)$

Άρα $g_1 \searrow$ στο $(-2,0]$ οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη

• Για κάθε $x_1,x_2\in(0,3)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow 3x_1-7<3x_2-7 \Rightarrow g_2(x_1)<g_2(x_2)$

Άρα $g_2 \nearrow$ στο $(0,3)$ οπότε "1-1" και αντιστρέψιμη



Θέτω $y = f_1(x)$

$y = 2x+1 \Rightarrow 2x = y-1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$

$x<2$, $x = \frac{y-1}{2}$ $\Rightarrow \frac{y-1}{2} < 2 \Rightarrow y-1 < 4 \Rightarrow y < 5$

$f_1^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, \quad x<5$

Θέτω $w = f_2(x)$

$w = \sqrt{x-2}+2 \overset{w \geq 2}{\Rightarrow} w-2 = \sqrt{x-2} \Rightarrow (w-2)^2 = x-2 \Rightarrow x = (w-2)^2+2$

$x \geq 2$, $x = (w-2)^2+2$ $\Rightarrow (w-2)^2+2 \geq 2 \Rightarrow (w+2)^2 \geq 0 \Rightarrow w-2 \geq 0 \Rightarrow w \geq 2$

$f_2^{-1}(x) = (x-2)^2+2, \quad x \geq 2$

Θέτω $z = g_1(x)$

$z = x^2+2 \Rightarrow z-2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z-2} \overset{x<0}{\Rightarrow} x = -\sqrt{z-2}$

$-2 < x \leq 0$, $x = -\sqrt{z-2}$ $\Rightarrow -2 < -\sqrt{z-2} \leq 0 \Rightarrow (-2)^2 > \sqrt{z-2}^{\,2} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 > z-2 \geq 0 \Rightarrow 6 > z \geq 2$

Άρα $g_1^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}, \quad x \in [2,6)$

Θέτω $\phi = g_2(x)$

$\phi = 3x-7 \Rightarrow \phi+7 = 3x \Rightarrow x = \frac{\phi+7}{3}$

$0<x<3$, $x = \frac{\phi+7}{3}$ $\Rightarrow 0 < \frac{\phi+7}{3} < 3 \Rightarrow 0 < \phi+7 < 9 \Rightarrow -7 < \phi < 2$

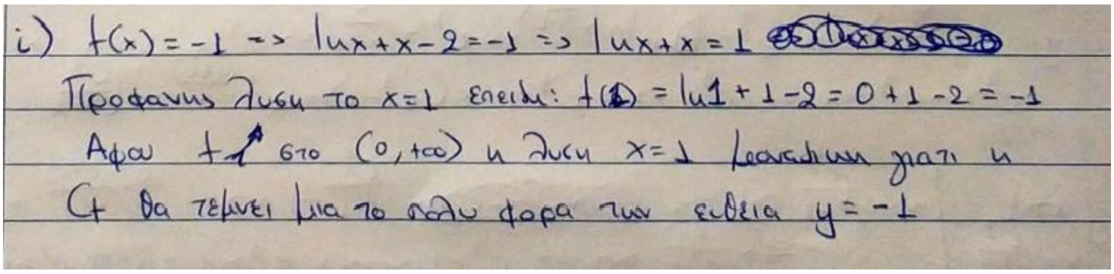
Άρα $g_2^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}, \quad x \in (-7, 2)$

Εικόνα 87:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Δ1 του Φύλλου εργασίας 3

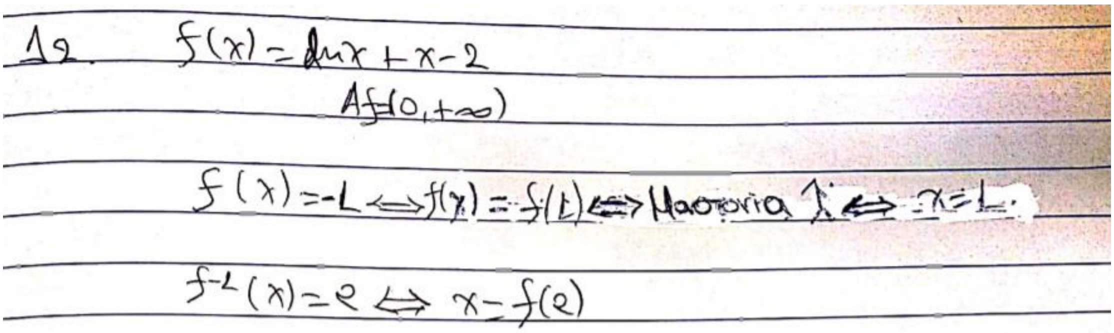
Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 2$

Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = -1$, $f^{-1}(x) = e$ και $\ln\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2}\right) = x - \sqrt{x}$, με $x > 0$.

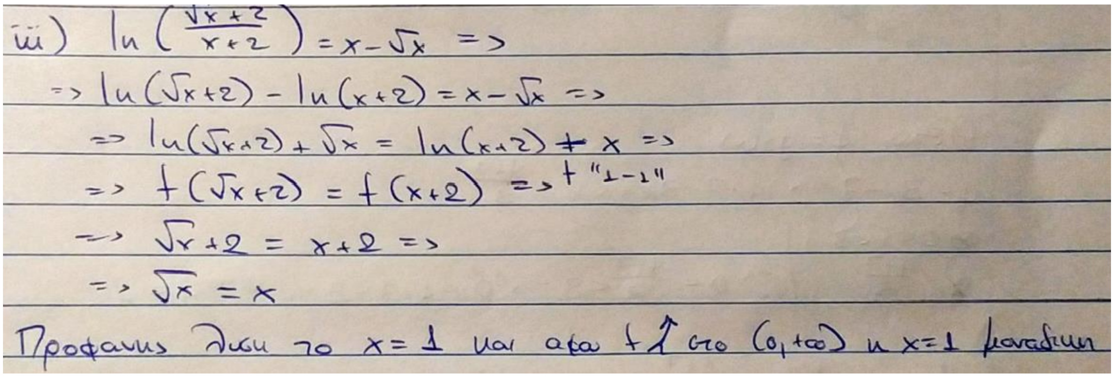
Στο ερώτημα Δ2 οι μαθητές/τριες κινούνται αρχικά στο επίπεδο εργαλειακής-σημειωτικής γένεσης και αποδεικνύουν ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Στη συνέχεια πραγματοποιούν μια σημειωτική γένεση και μέσω της ιδιότητας της γραφικής παράστασης των αντιστρέψιμων συναρτήσεων οδηγούνται στην λεκτική γένεση και στην επίλυση της εξίσωσης. Τέλος με χρήση της ισοδυναμίας $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ οδηγούνται από την εργαλειακή γένεση στην λεκτική γένεση.


i) $f(x) = -1 \Rightarrow \ln x + x - 2 = -1 \Rightarrow \ln x + x = 1$
Προφανως λυση το $x=1$ επειδη: $f(1) = \ln 1 + 1 - 2 = 0 + 1 - 2 = -1$
Αφου $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ η λυση $x=1$ μοναδικη γιατι η
C_f θα τεμνει μια το πολυ φορα την ευθεια $y=-1$

Εικόνα 88:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Δ2 του Φύλλου εργασίας 3


Δ2. $f(x) = \ln x + x - 2$
$A_f = (0,+\infty)$
$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow$ Μονοτονία $\uparrow$ $\Leftrightarrow x = 1$.
$f^{-1}(x) = e \Leftrightarrow x = f(e)$

Εικόνα 89:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Δ2 του Φύλλου εργασίας 3


iii) $\ln\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2}\right) = x - \sqrt{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln(\sqrt{x}+2) - \ln(x+2) = x - \sqrt{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x} = \ln(x+2) + x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\sqrt{x}+2) = f(x+2) \xRightarrow{f \text{ "1-1"}}$
$\Rightarrow \sqrt{x}+2 = x+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} = x$
Προφανως λυση το $x=1$ και αφου $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ η $x=1$ μοναδικη

Εικόνα 90:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Δ2 του Φύλλου εργασίας 3

6.3 Η διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών/τριών μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Μετά τη διδακτική παρέμβαση δόθηκε στους μαθητές/τριες το post-test με θέματα παρόμοια με το pre-test. Τα αποτελέσματα του post-test έδειξαν σημαντική διαφοροποίηση στα περισσότερα ερωτήματα σε σχέση με τα αποτελέσματα του pre-test.

6.3.1 Αποτελέσματα του Θέματος Α

Στο Α1 ερώτημα του τεστ που δόθηκε στους μαθητές/τριες μετά τη διδακτική παρέμβαση και αποτελούσε ένα πρόβλημα της οικονομίας, δηλαδή του προσανατολισμού στον οποίο ανήκουν οι μαθητές/τριες του δείγματος, οι δέκα απάντησαν σωστά αλλά μόνο πέντε από αυτούς δικαιολόγησαν σωστά την απάντηση τους.

Τέλος, στο Α2 ερώτημα του post-test, οχτώ μαθητές/τριες απάντησαν σωστά και από αυτούς μόνο οι τρεις δικαιολόγησαν την απάντηση τους επαρκώς μέσω του ορισμού της συνάρτησης είτε μοντελοποιώντας το πρόβλημα με έναν τύπο ή έναν πίνακα τιμών και την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Το πρόβλημα αναμένεται να διαρθρωθεί και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του μοντέλου περιλαμβάνοντας διαδικασίες εξερεύνησης, συλλογισμού και τεκμηρίωσης των απαντήσεων. Το θέμα αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα της αριθμητικής ή γεωμετρικής ανάλυσης.

Στο Θέμα Α του pre-test έντεκα μαθητές/τριες απάντησαν σωστά και στα δυο ερωτήματα ενώ μόνο τρεις κατάφεραν το ίδιο στο post-test. Ο μαθητής Μ3 κατάφερε να απαντήσει σωστά σε όλα τα ερωτήματα και να δικαιολογήσει πλήρως τις απαντήσεις του.

6.3.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Α υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

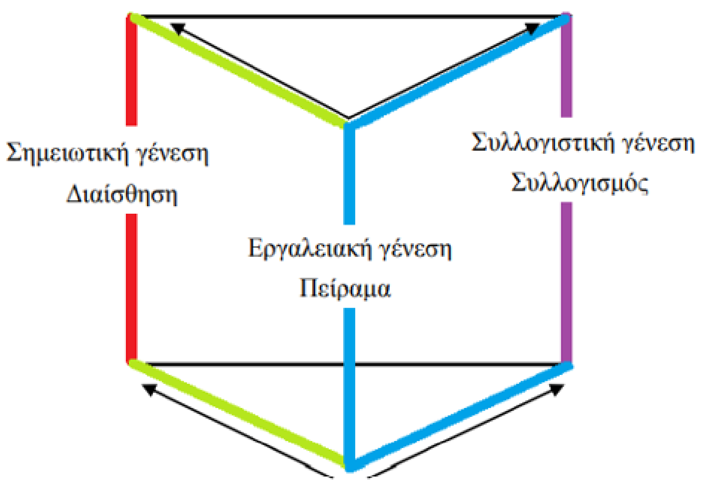
Δώδεκα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν φόρο επί των πωλήσεων 6%. Δηλαδή, για κάθε ευρώ που δαπανάται για αγορά σε ένα κατάστημα, θα πρέπει να αποδίδονται στο δημόσιο 6 λεπτά.

Α1. Μπορεί ο φόρος επί των πωλήσεων να εκφραστεί ως συνάρτηση της τιμής αγοράς των προϊόντων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α2. Μπορεί η τιμή της αγοράς των προϊόντων να εκφραστεί ως συνάρτηση του φόρου επί των πωλήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

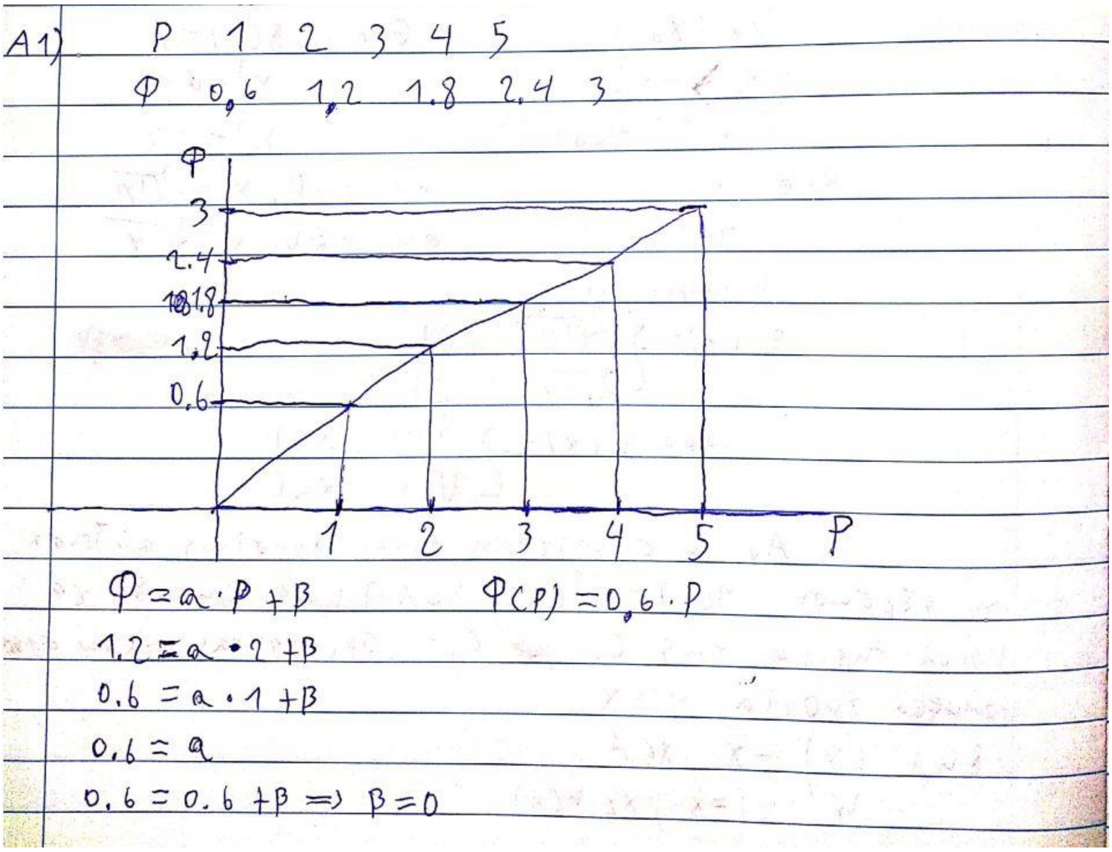
Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα λεκτικό πρόβλημα από το τομέα της οικονομίας και ειδικότερα των ποσοστών. Στόχος της ερευνήτριας ήταν να διαπιστώσει κατά πόσο οι μαθητές/τριες του προσανατολισμού οικονομίας και πληροφορικής μπορούν να μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με τη βοήθεια μιας συνάρτησης. Οι μαθητές/τριες έπρεπε να αναφέρουν ότι κάθε τιμή αγοράς αντιστοιχίζεται σε έναν ακριβώς φόρο, που είναι το έξι τοις εκατό της τιμής, ενώ κάθε φόρος αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή, που είναι τα εκατό έκτα του φόρου. Από τους δέκα μαθητές/τριες που απάντησαν σωστά στο Α1 μόνο τρεις απάντησαν σωστά και στο Α2, διότι, όπως ανέφεραν στη συνέχεια στην ερευνήτρια, θεώρησαν ότι η αντίστροφη διαδικασία δε θα αποτελεί συνάρτηση όπως είχε συμβεί και με το ερώτημα Α2 του pre-test. Οι παραπάνω μαθητές/τριες κινήθηκαν στο επίπεδο λεκτικής– σημειωτικής γένεσης προσπαθώντας να προσαρμόσουν τον ορισμό της συνάρτησης στο πλαίσιο του προβλήματος.

Τρεις από τους δεκαεπτά μαθητές/τριες παρουσίασαν μια ολοκληρωμένη λύση που μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα του μοντέλου του ΜΧΕ. Η διαδικασία της εργαλειοποίησης επιτυγχάνεται από τους/τις μαθητές/τριες αυτούς/τες μέσω ενός πίνακα τιμών, ενός γραφήματος και ενός τύπου και ανατροφοδοτεί τις άλλες δυο γενέσεις ώστε να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα και να αποδειχθεί το ζητούμενο ερώτημα.



Σχήμα 16:Μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στη σημειωτική και στη λεκτική γένεση.

Ο μαθητής Μ17 παρουσιάζει σε έναν πίνακα τιμών τον φόρο για τις διάφορες τιμές του προϊόντος. Παρατηρούμε ότι κάνει λάθος στον υπολογισμό του ποσοστού.



A1) P 1 2 3 4 5
Φ 0,6 1,2 1.8 2.4 3

$\Phi = a \cdot P + \beta$ $\qquad \Phi(P) = 0{,}6 \cdot P$

$1.2 = a \cdot 2 + \beta$

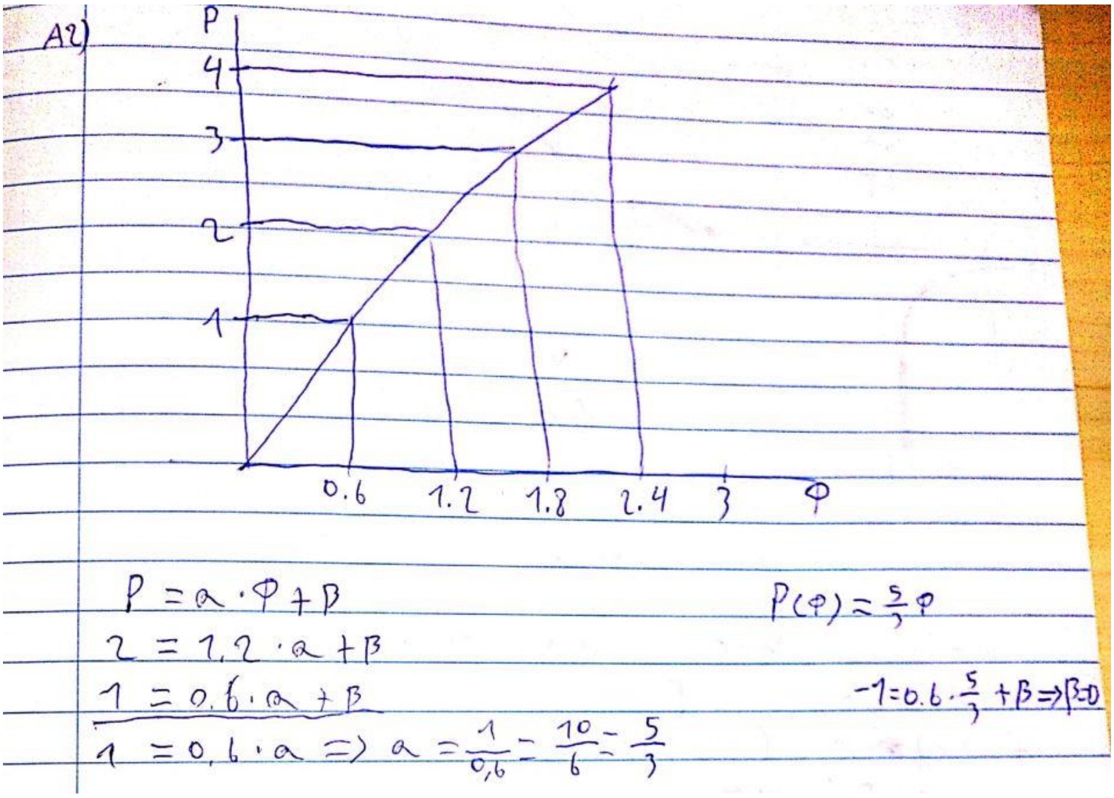
$0.6 = a \cdot 1 + \beta$

$0{,}6 = a$

$0.6 = 0.6 + \beta \Rightarrow \beta = 0$

Εικόνα 91:Απάντηση του μαθητή Μ17 στο Θέμα Α1 του post-test

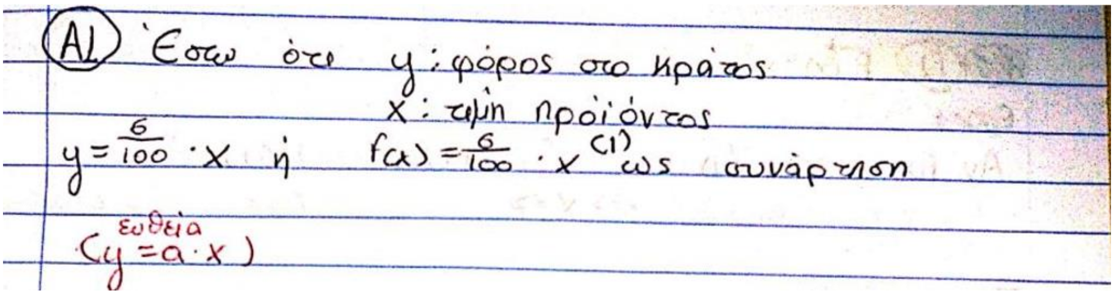
Στη συνέχεια παρουσιάζει τα ζεύγη του πίνακα σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Παρατηρεί ότι σχηματίζεται μια ευθεία και από δυο σημεία της ευθείας καταφέρνει να προσδιορίσει την εξίσωση της. Στο Α2 ερώτημα αντιστρέφει τους άξονες και σχεδιάζει το γράφημα φόρου – τιμής και με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο ερώτημα προσδιορίζει τον τύπο της συνάρτησης.

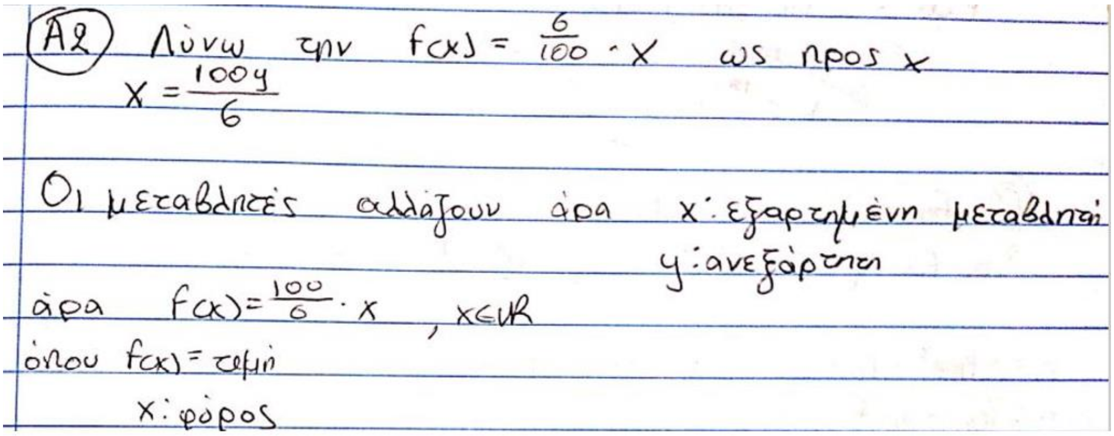


Εικόνα 92:Απάντηση του μαθητή Μ17 στο Θέμα Α2 του post-test

Η μαθήτρια Μ3 αντιστοιχίζει με δυο μεταβλητές το φόρο και την τιμή και στην συνέχεια κατασκευάζει την εξίσωση που τις συνδέει. Οδηγείται έτσι με μια λεκτική γένεση, χρησιμοποιώντας από το θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς την εξίσωσης της συνάρτησης στην απόδειξη ότι η ευθεία αποτελεί συνάρτηση.

Στο ερώτημα Α2 λύνει την παραπάνω εξίσωση του φόρου ως προς την τιμή και παρατηρεί ότι η εξαρτημένη τιμή είναι η τιμή του προϊόντος και η ανεξάρτητη τιμή είναι ο φόρος. Κατασκευάζει, λοιπόν, τη συνάρτηση της τιμής ως προς το φόρο. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιεί τον ίδιο συμβολισμό για την καινούρια συνάρτηση ενώ θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει κάποιο άλλο γράμμα ή ακόμα και το σύμβολο της αντίστροφης συνάρτησης της αρχικής.



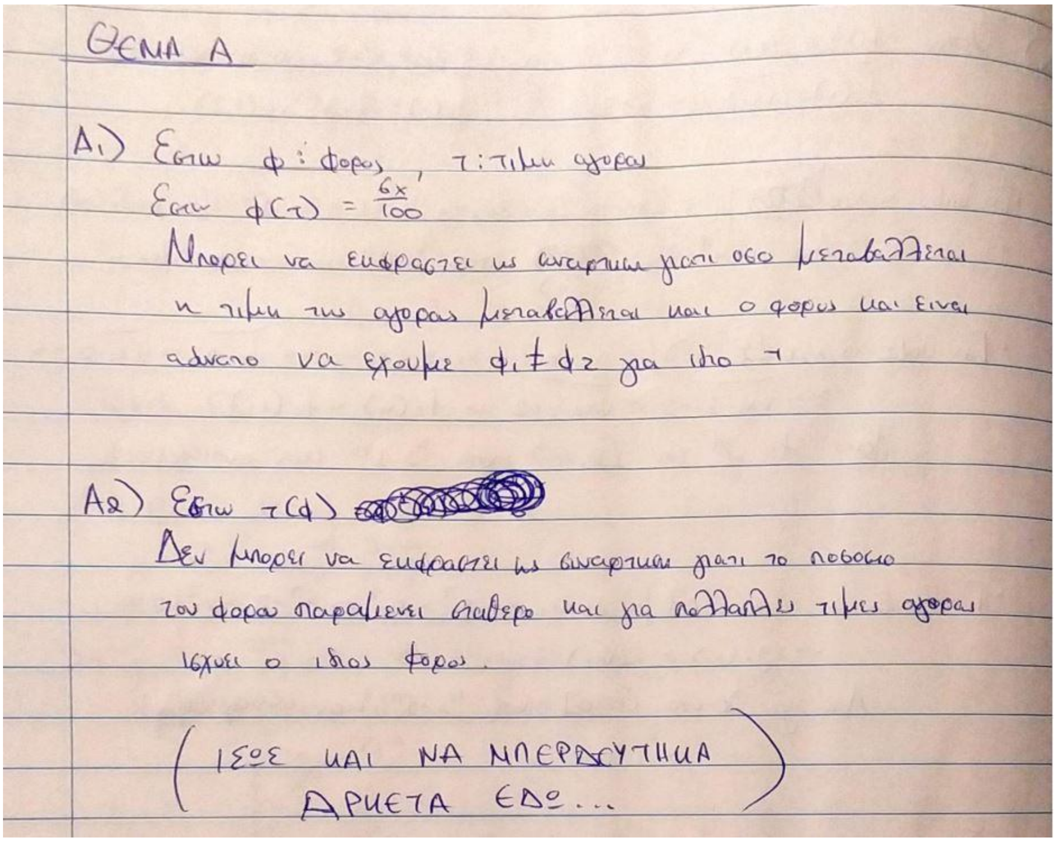


A2) Λύνω την $f(x) = \frac{6}{100} \cdot x$ ως προς x
$x = \frac{100y}{6}$

Οι μεταβλητές αλλάζουν άρα x: εξαρτημένη μεταβλητή
y: ανεξάρτητη
άρα $f(x) = \frac{100}{6} \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$
όπου f(x) = τιμή
x: φόρος

Εικόνα 93:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Α του post-test

Τέλος, η μαθήτρια Μ14 παρουσιάζει την παρακάτω λύση.



ΘΕΜΑ Α

Α1) Εστω φ: φορος , τ: τιμη αγορας
Εστω $φ(τ) = \frac{6x}{100}$
Μπορει να εκφραστει ως συναρτηση γιατι οσο μεταβαλλεται η τιμη της αγορας μεταβαλλεται και ο φορος και ειναι αδυνατο να εχουμε $φ_1 \neq φ_2$ για ιδιο τ

Α2) Εστω τ(φ)
Δεν μπορει να εκφραστει ως συναρτηση γιατι το ποσοστο του φορου παραμενει σταθερο και για πολλαπλες τιμες αγορας ισχυει ο ιδιος φορος.

(ΙΣΩΣ ΚΑΙ ΝΑ ΜΠΕΡΔΕΥΤΗΚΑ ΑΡΚΕΤΑ ΕΔΩ...)

Εικόνα 94:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Α του post-test

Ενώ αντιστοιχεί το φόρο και την τιμή σε δυο μεταβλητές, στον τύπο ως ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιεί τη μεταβλητή x. Δεν αναγνωρίζει ότι ο τύπος αυτός αποτελεί συνάρτηση και στη συνέχεια δικαιολογεί σωστά την απάντησή της βάσει του ορισμού. Στο ερώτημα Α2 όπως και η ίδια αναφέρει, μπερδεύεται και δεν απαντά σωστά.

6.3.3 Αποτελέσματα του Θέματος Β

Στο Β1 ερώτημα δεκαέξι μαθητές/τριες απάντησαν ότι είναι συνάρτηση 1-1 δικαιολογώντας την απάντησή τους είτε με τον ορισμό είτε περιγραφικά. Ένας μαθητής δικαιολόγησε λανθασμένα ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Όσοι μαθητές/τριες απάντησαν σωστά συμπλήρωσαν σωστά και τον πίνακα απλώς η μαθήτρια Μ2 δε χρησιμοποίησε σωστές μεταβλητές στον πίνακά της, όπως είχε κάνει και στο pre-test. Ένας μαθητής έγραψε την βασική ισοδυναμία που συνδέει τις δυο συναρτήσεις αλλά δε συμπλήρωσε τον πίνακα της αντίστροφης.

Στο Β2 ερώτημα δεκαπέντε μαθητές/τριες απάντησαν ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και δικαιολόγησαν σωστά την απάντηση τους, παρουσιάζοντας σωστά το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Οι επτά από αυτούς δικαιολόγησαν την απάντησή τους περιγραφικά. Ένας μαθητής δικαιολόγησε την απάντησή του με το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού.

Στο Β3 ερώτημα δώδεκα μαθητές/τριες απαντούν ότι η συνάρτηση είναι 1-1. Οι πέντε από αυτούς δικαιολογούν την απάντησή τους με τη βοήθεια των οριζόντιων ευθειών που τέμνουν τη γραφική παράσταση της δεδομένης συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο, τρεις αναφέρουν ότι και η αντίστροφη της είναι 1-1 ενώ οι υπόλοιποι δε δικαιολογούν της απάντηση τους. Εννέα μαθητές/τριες καταφέρνουν να σχεδιάσουν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, οι πέντε από αυτούς μέσω σημείων της δεδομένης συνάρτησης βρίσκουν σημεία της αντίστροφης συνάρτησης και τα ενώνουν ενώ οι υπόλοιποι χρησιμοποιούν την ιδιότητα της συμμετρίας. Ένας μαθητής σχεδιάζει τη συμμετρική συνάρτηση ως προς τον άξονα x'x.

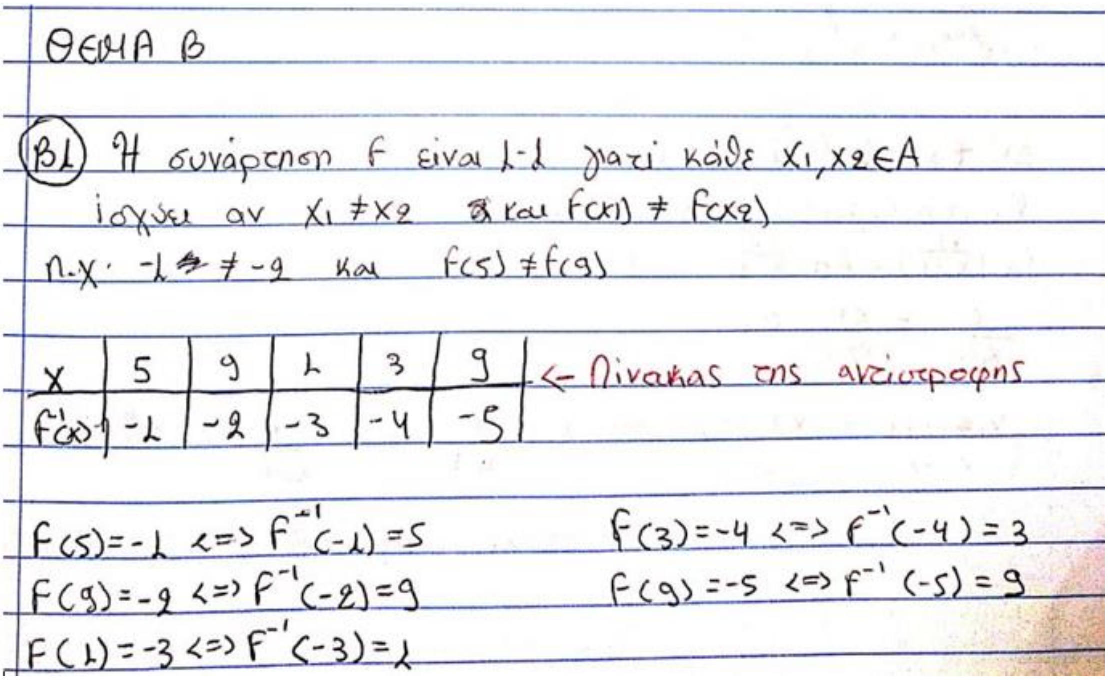
Στο Β4 ερώτημα έντεκα μαθητές/τριες απάντησαν ότι η συνημιτονοειδής συνάρτηση αντιστρέφεται δικαιολογώντας την απάντηση τους μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Οι πέντε από αυτούς χρησιμοποίησαν τη μονοτονία, τρεις χρησιμοποίησαν την ιδιότητα ότι οι παράλληλες ευθείες στον άξονα x'x τέμνουν τη γραφική παράσταση σε ένα το πολύ σημείο και οι άλλοι τρεις δε δικαιολόγησαν την απάντησή τους αλλά έκαναν το γράφημα της συνάρτησης. Εννέα μαθητές/τριες έδωσαν σωστά τις τιμές της αντίστροφης συνάρτησης μέσω των τιμών της αρχικής συνάρτησης.

6.3.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Β υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

x	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	5	9	1	3	7

Η μαθήτρια Μ3 αξιοποιεί τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης, δίνει ένα παράδειγμα για να τον επιβεβαιώσει, εργαλειοποιεί την βασική ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και συμπληρώνει σωστά τον πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Η εργασία της εξελίσσεται και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ.


ΘΕΜΑ Β

(Β1) Η συνάρτηση f είναι 1-1 γιατί κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει αν $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$

π.χ. $-1 \neq -2$ και $f(5) \neq f(9)$

x	5	9	1	3	9
$f^{-1}(x)$	-1	-2	-3	-4	-5

← Πινακας της αντιστροφης

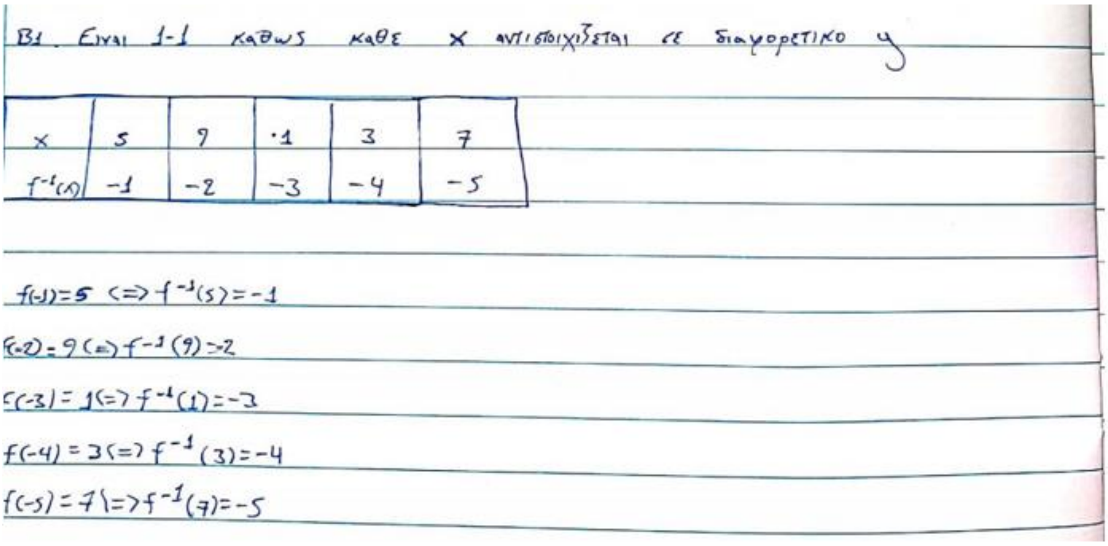
$f(5)=-1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1)=5$ $\quad$ $f(3)=-4 \Leftrightarrow f^{-1}(-4)=3$

$f(9)=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2)=9$ $\quad$ $f(9)=-5 \Leftrightarrow f^{-1}(-5)=9$

$f(1)=-3 \Leftrightarrow f^{-1}(-3)=1$

Εικόνα 95:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Β1 του post-test

Ο μαθητής Μ4 δικαιολογεί περιγραφικά ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και συμπληρώνει τον πίνακα χρησιμοποιώντας το εργαλείο της ισοδυναμίας των δυο συναρτήσεων. Παρατηρείται λοιπόν μια αλληλεπίδραση σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης.



B1. Ειναι 1-1 καθως καθε x αντιστοιχιζεται σε διαφορετικο y

x	5	9	1	3	7
$f^{-1}(x)$	−1	−2	−3	−4	−5

$f(-1)=5 \Leftrightarrow f^{-1}(5)=-1$

$f(-2)=9 \Leftrightarrow f^{-1}(9)=-2$

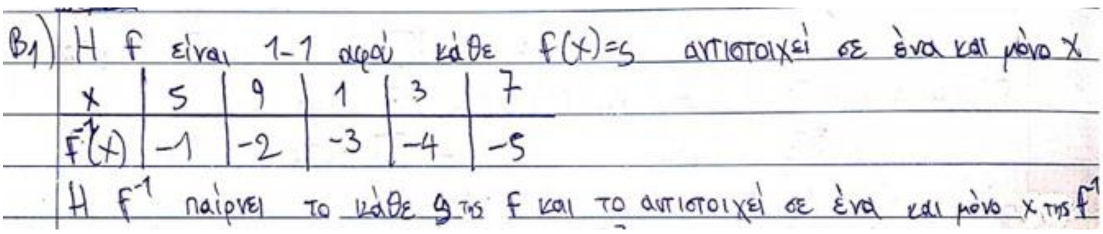
$f(-3)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=-3$

$f(-4)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(3)=-4$

$f(-5)=7 \Leftrightarrow f^{-1}(7)=-5$

Εικόνα 96:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Β1 του post-test

Ο μαθητής Μ9 δεν δικαιολογεί σωστά την απάντηση του αλλά περιγραφικά παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο συμπλήρωσε τον πίνακα. Οι ελλείψεις του μαθητή στην θεωρία τον εμποδίζουν να μεταβεί στο γνωστικό επίπεδο.



B1) Η f είναι 1-1 αφού κάθε f(x)=5 αντιστοιχεί σε ένα και μόνο x

x	5	9	1	3	7
$f^{-1}(x)$	−1	−2	−3	−4	−5

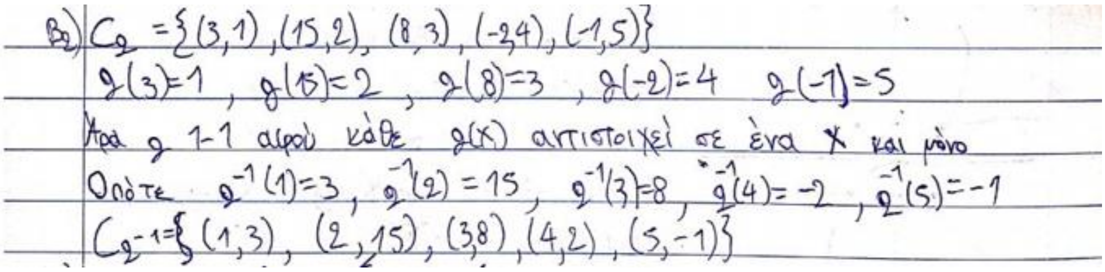
Η f^{-1} παίρνει το κάθε y της f και το αντιστοιχεί σε ένα και μόνο x της f^{-1}

Εικόνα 97:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Β1 του post-test

Β2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$C_g = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ο μαθητής Μ9 παρουσιάζει τις τιμές της συνάρτησης, παρατηρεί ότι κάθε τιμή της συνάρτησης αντιστοιχεί σε μια και μόνο τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, κάνει χρήση της βασικής ισοδυναμίας και βρίσκει τα σημεία της αντίστροφης συνάρτησης. Τα τεχνουργήματα του επιστημολογικού επιπέδου τον οδηγούν στην κατασκευή του γνωστικού επιπέδου.



B2) $C_g = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$

$g(3)=1$, $g(15)=2$, $g(8)=3$, $g(-2)=4$ $g(-1)=5$

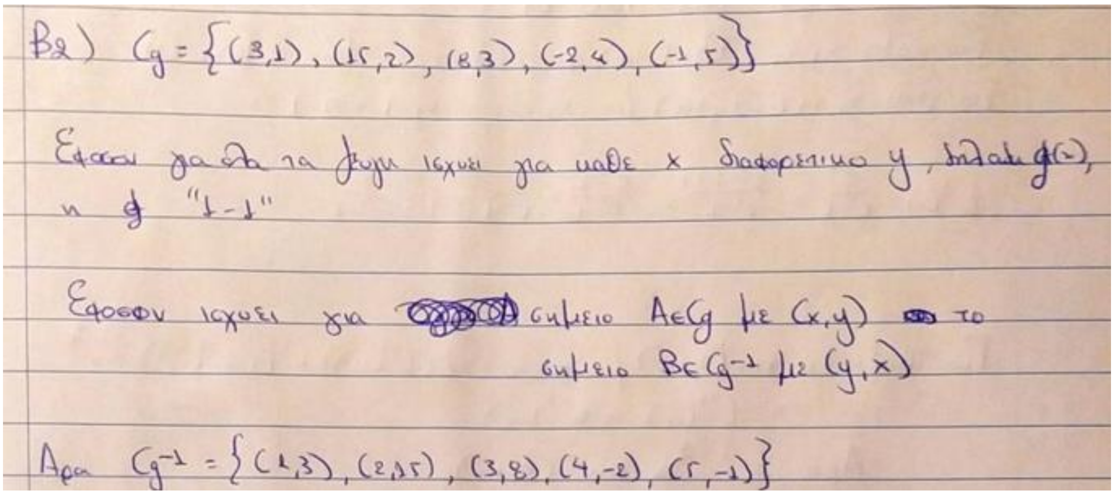
Άρα g 1-1 αφού κάθε g(x) αντιστοιχεί σε ένα x και μόνο

Οπότε $g^{-1}(1)=3$, $g^{-1}(2)=15$, $g^{-1}(3)=8$, $g^{-1}(4)=-2$, $g^{-1}(5)=-1$

$C_{g^{-1}}=\{(1,3),(2,15),(3,8),(4,2),(5,-1)\}$

Εικόνα 98:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Β2 του Post-test

Η μαθήτρια Μ14 πραγματοποιεί μια λεκτική γένεση, αξιοποιώντας από το σύστημα αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου την ιδιότητα που έχουν οι συντεταγμένες των σημείων της αντίστροφης συνάρτησης με τις συντεταγμένες των σημείων της συνάρτησης μεταβαίνει με επιτυχία στο γνωστικό επίπεδο και παρουσιάζει το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης.



B2) $C_g=\{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$

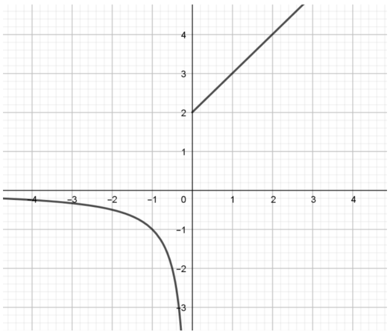
Εφόσον για όλα τα ζεύγη ισχύει για κάθε x διαφορετικό y, δηλαδή g(x), η g "1-1"

Εφόσον ισχύει για σημείο $A\in C_g$ με (x,y) το σημείο $B\in C_{g^{-1}}$ με (y,x)

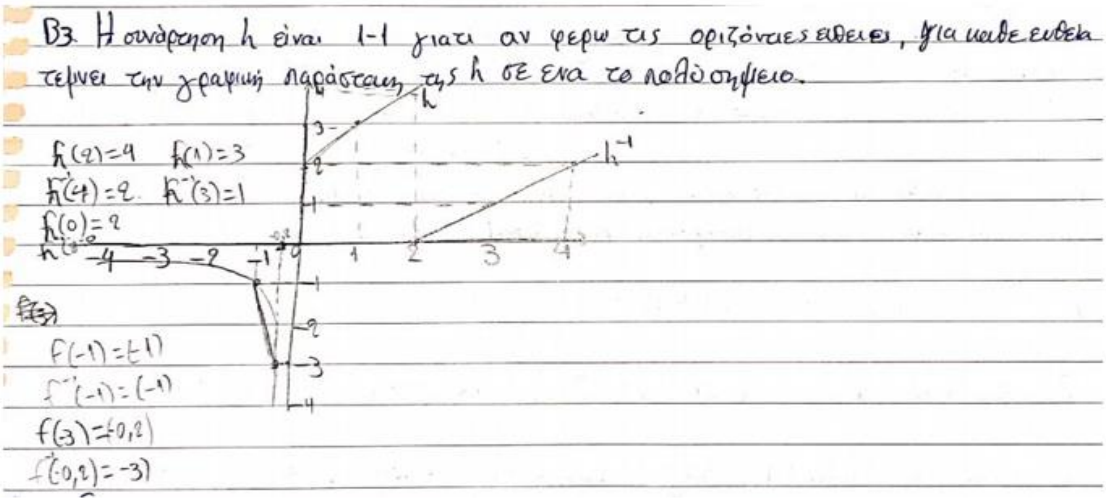
Άρα $C_{g^{-1}}=\{(1,3),(2,15),(3,8),(4,-2),(5,-1)\}$

Εικόνα 99:Απάντηση του μαθητή Μ14 στο Θέμα Β2 του post-test

Β3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτησης είναι 1-1 και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

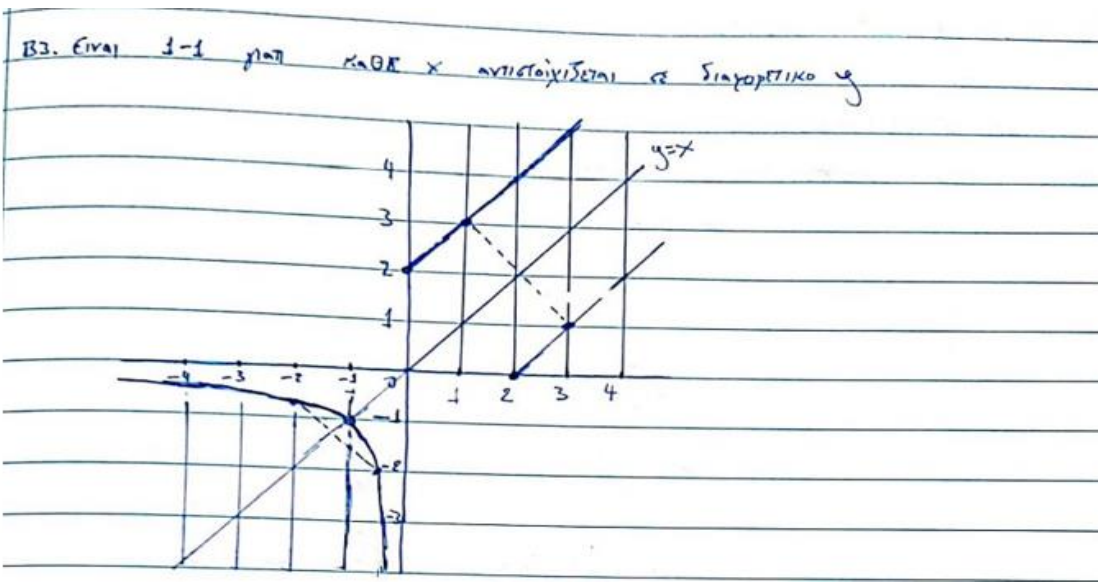


Η μαθήτρια Μ2 παρατηρεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο σημειωτικής- λεκτικής γένεσης και στη συνέχεια στο κατακόρυφο επίπεδο σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης. Τα συμπεράσματα της τα αποτυπώνει με επιτυχία στη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.



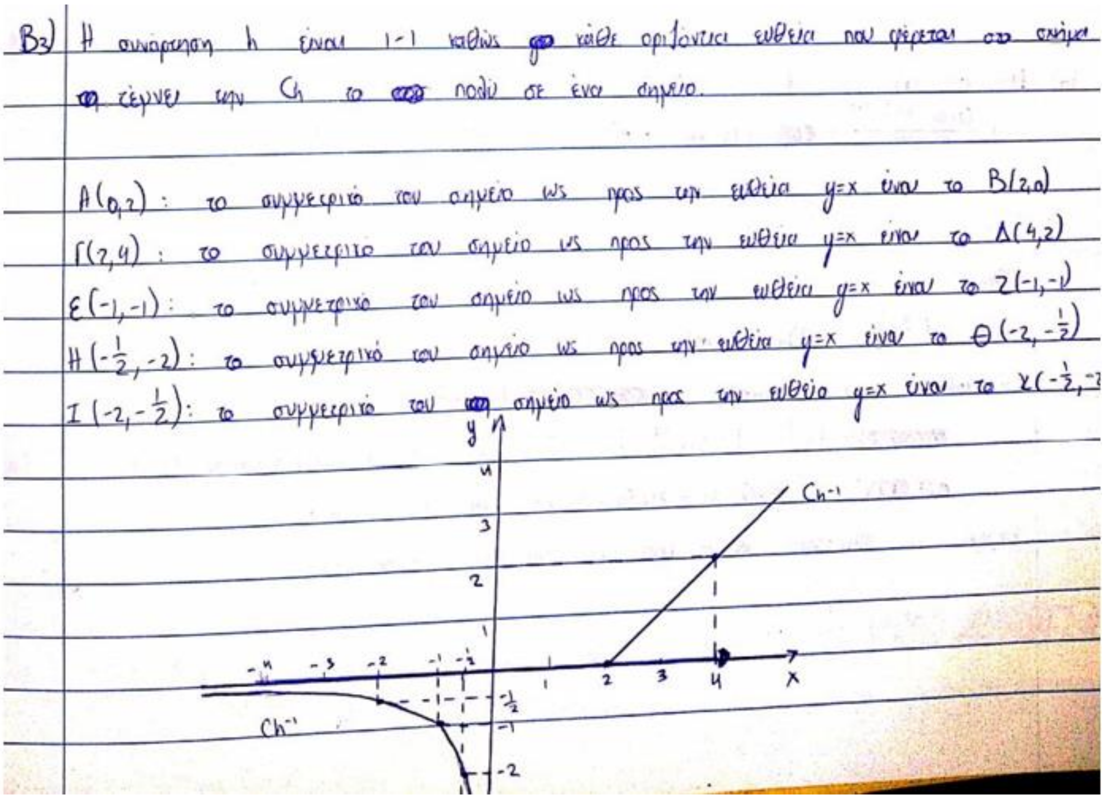
Εικόνα 100:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β3 του post-test

Ο μαθητής Μ4 σχεδιάζει την ευθεία y=x και στη συνέχεια τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης συμμετρικά ως προς την ευθεία αυτή. Πραγματοποιεί μια εργαλειακή γένεση, η οποία όμως δεν συνοδεύεται από μια λεκτική γένεση. Στη γραφική παράσταση που σχεδιάζει το σημείο (1,3) της αρχικής συνάρτησης το αντιστοιχεί στο σημείο (3,1) της αντίστροφης συνάρτησης. Το ίδιο κάνει και για το σημείο (-2,-1) που το αντιστοιχεί στο σημείο (-1,-2).



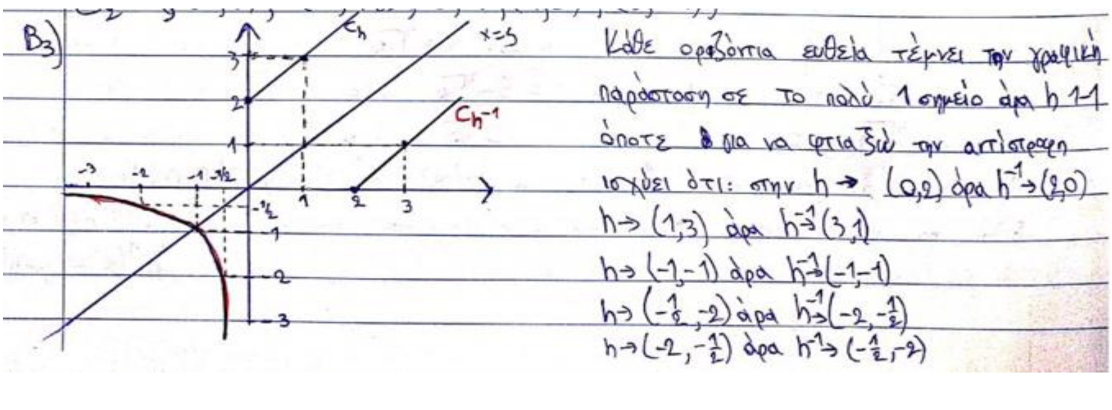
Εικόνα 101:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Β3 του post-test

Η μαθήτρια Μ6 παρουσιάζει αναλυτικά τη διαδικασία κατασκευής της γραφικής παράστασης της αντίστροφης συνάρτησης. Παρατηρεί τη γραφική παράσταση που δίνεται και από πέντε σημεία της αρχικής κατασκευάζει τα συμμετρικά τους ως προς την ευθεία y=x. Με τη βοήθεια των σημείων αυτών σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της αντίστροφης. Κινείται και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ.



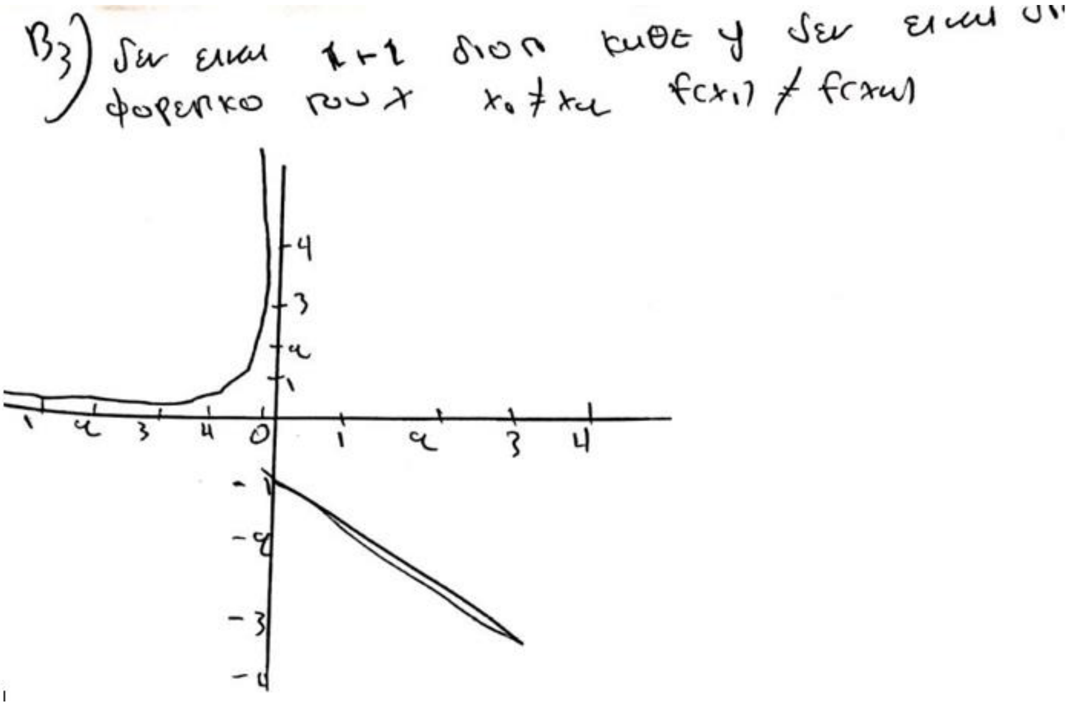
Εικόνα 102:Απάντηση της μαθήτριας Μ6 στο Θέμα Β3 του post-test

Ο μαθητής Μ9 παρουσιάζει μια παρόμοια λύση με τη παραπάνω μαθήτρια αλλά δε δικαιολογεί την εργασία του. Μεταβαίνει, λοιπόν, από τη σημειωτική γένεση στην εργαλειακή αλλά όχι και στη λεκτική γένεση.



Εικόνα 103:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Β3 του post-test

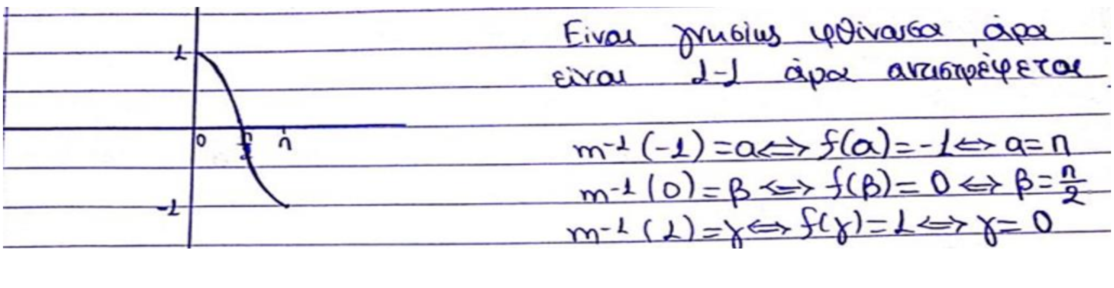
Ο μαθητής Μ16 θεωρεί ότι η συνάρτηση δεν είναι 1-1 αλλά δε δικαιολογεί την απάντησή του. Στη συνέχεια κατασκευάζει τη συμμετρική γραφική παράσταση ως προς τον άξονα x'x. Δεν έχει κατανοήσει τη θεωρία και μπορεί να μεταβεί με επιτυχία στο γνωστικό επίπεδο του ΜΧΕ.



Εικόνα 104:Απάντηση του μαθητή Μ16 στο Θέμα Β3 του post-test

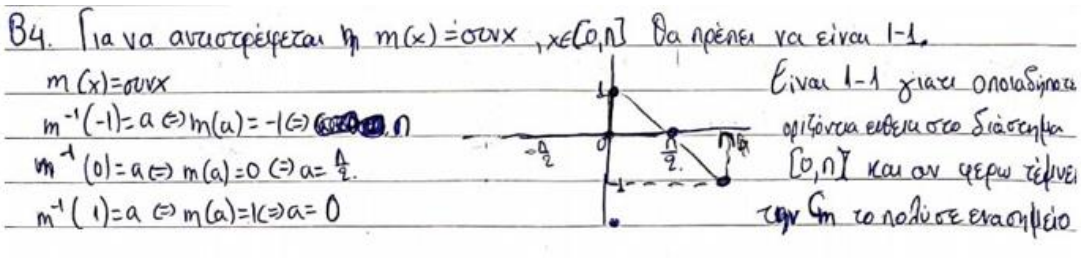
Β4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x) = συνx,\ x \in [0, \pi]$ αντιστρέφεται και αν ναι, υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1.

Η μαθήτρια Μ7 κατασκευάζει τη γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης του συνημίτονου, παρατηρεί ότι είναι γνησίως αύξουσα, διαπιστώνει ότι είναι 1-1 αρά θα αντιστρέφεται. Κινείται, λοιπόν, αμφίδρομα στα δυο οριζόντια επίπεδα του ΜΧΕ και στη συνέχεια χρησιμοποιεί το τεχνούργημα του επιστημολογικού επιπέδου, για να υπολογίσει σωστά τις τιμές της αντίστροφης συνάρτησης.



Εικόνα 105:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Β4 του post-test

Η μαθήτρια Μ2 παρουσιάζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου ως ευθεία γνησίως φθίνουσα και μέσω των οριζόντιων ευθείων επιβεβαιώνει ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Παρόλο που δεν κατασκευάζει σωστά την κυρτότητα της συνάρτησης, διατηρεί τις ιδιότητες της. Στην εργασία της μαθήτριας παρατηρείται μια αλληλεπίδραση και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΜΧΕ.



Εικόνα 106:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Β4 του post-test

6.3.5 Αποτελέσματα του Θέματος Γ

Δεκαέξι από τους δεκαεπτά μαθητές/τριες απάντησαν σωστά στο Γ1 ερώτημα. Οι δυο από αυτούς χρησιμοποίησαν την ιδιότητα της σύνθεσης της συνάρτησης και της αντίστροφης συνάρτησης ενώ οι υπόλοιποι την ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$. Στο ερώτημα Γ2 δυο μαθητές/τριες αντιγράφουν λανθασμένα τον τύπο της δοθείσας συνάρτησης αλλά βάσει της συνάρτησης που χρησιμοποιούν καταλήγουν σε σωστό αποτέλεσμα. Δεκατρείς μαθητές/τριες απαντούν σωστά στο ερώτημα αυτό, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του προηγούμενου ερωτήματος. Ένας μαθητής καταλήγει σε λάθος αποτέλεσμα.

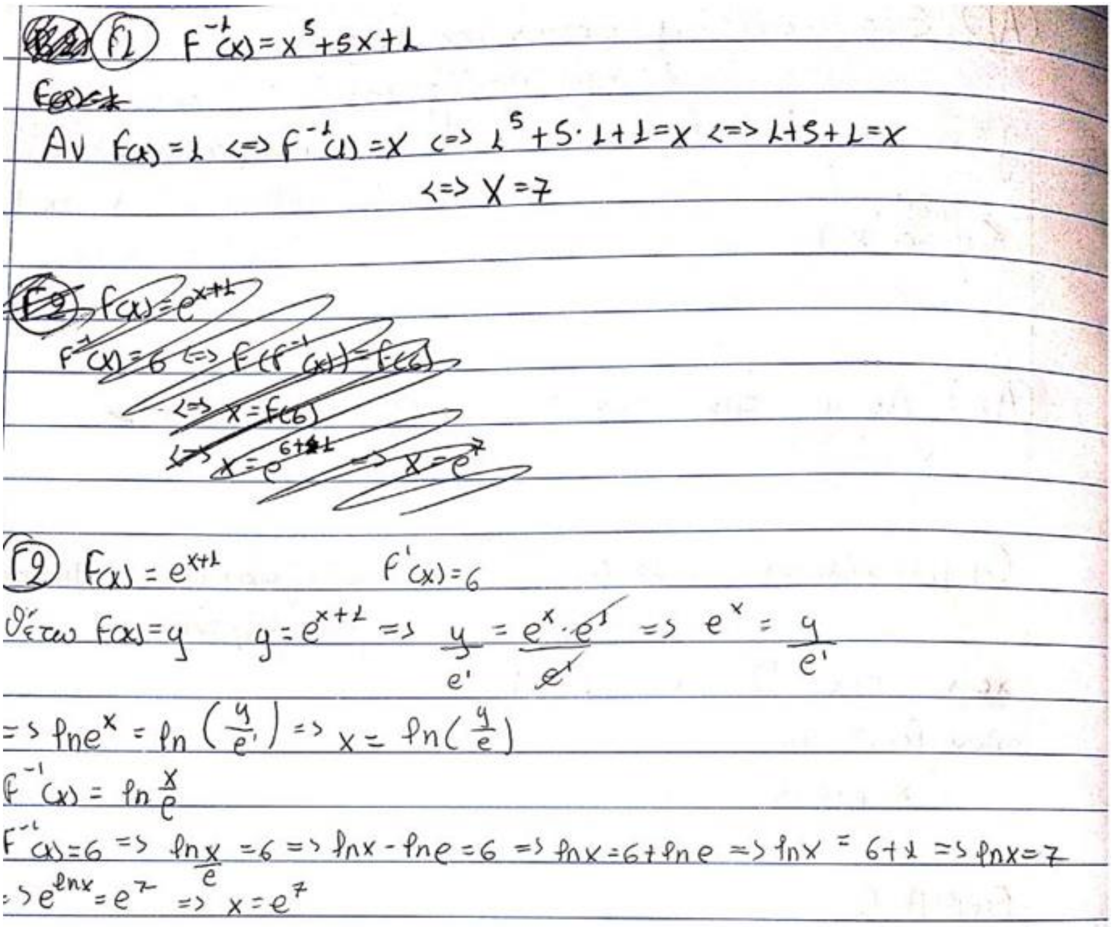
6.3.6 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Γ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση

$f^{-1}(x)=x^5+5x+1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1.

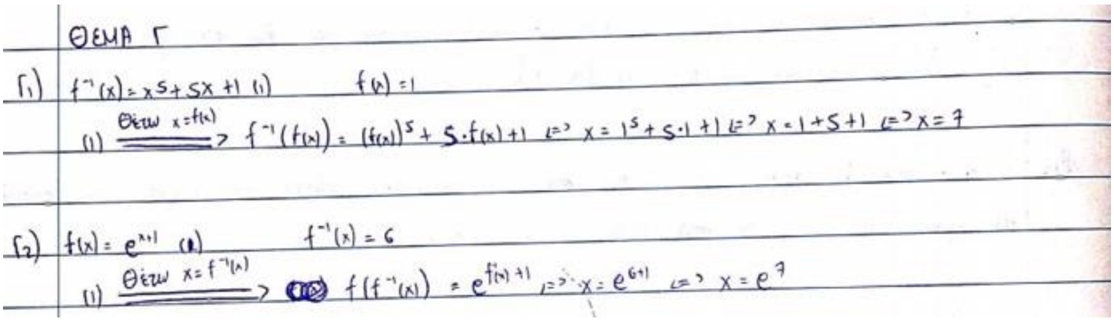
Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x+1}$, να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x)=6$.

Η μαθήτρια Μ3 χρησιμοποιεί στο ερώτημα Γ1 το τεχνούργημα της ισοδυναμίας και υπολογίζει την ζητούμενη τιμή της μεταβλητής x ενώ στο ερώτημα Γ2 τον αλγόριθμο της εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης. Και στα δυο ερωτήματα μεταβαίνει με επιτυχία στο επιθυμητό αποτέλεσμα μέσω μιας εργαλειακής γένεσης.



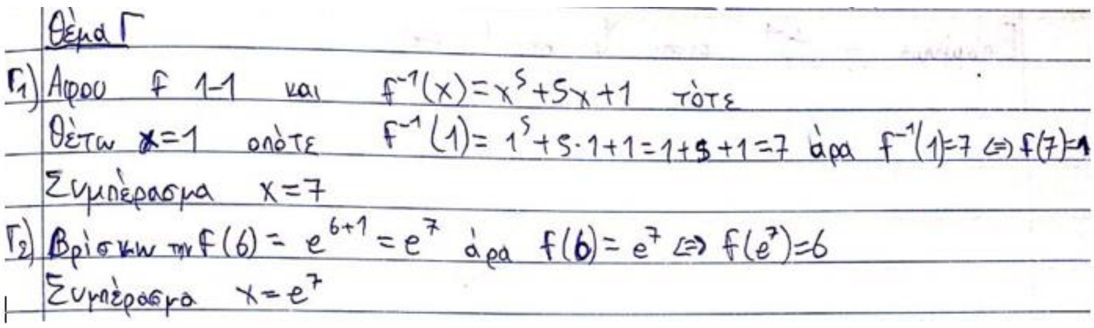
Εικόνα 107:Απάντηση της μαθήτριας Μ3 στο Θέμα Γ του post-test

Η μαθήτρια Μ6 χρησιμοποιεί όπως και στο pre-test το τεχνούργημα της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων και υπολογίζει την τιμή της μεταβλητής x.



Εικόνα 108:Απάντηση της μαθήτριας Μ6 στο Θέμα Γ του post-test

Ο μαθητής Μ9 παρουσιάζει μια διαφορετική λύση. Θέτει στη δοθείσα συνάρτηση την τιμή της συνάρτησης που του ζητείται και στη συνέχεια μέσω της γνωστής ισοδυναμίας υπολογίζει την τιμή της μεταβλητής x. Πραγματοποιεί αρχικά μια σημειωτική γένεση και μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο για τον υπολογισμό της μεταβλητής.



Θέμα Γ

Γ1) Αφού f 1-1 και $f^{-1}(x)=x^5+5x+1$ τότε

Θέτω $x=1$ οπότε $f^{-1}(1)=1^5+5\cdot 1+1=1+5+1=7$ άρα $f^{-1}(1)=7 \Leftrightarrow f(7)=1$

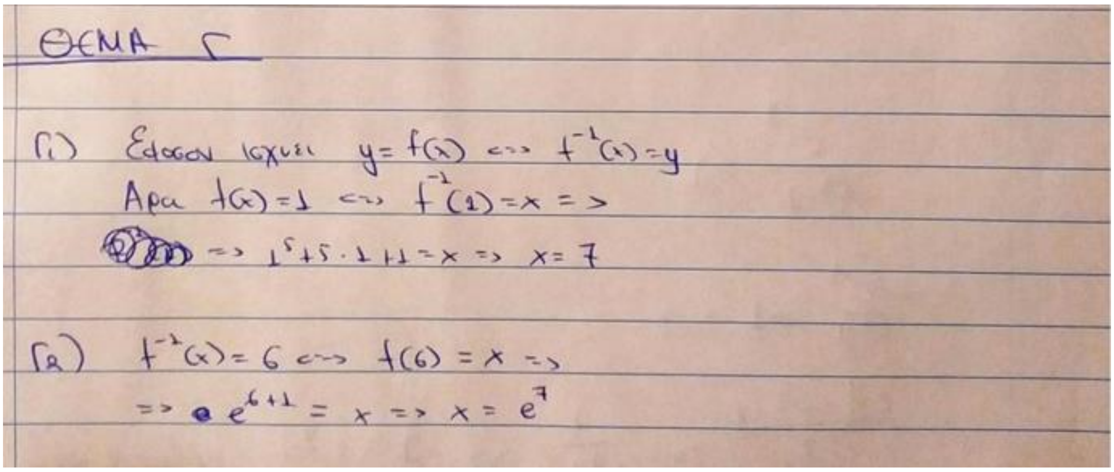
Συμπέρασμα $x=7$

Γ2) Βρίσκω την $f(6)=e^{6+1}=e^7$ άρα $f(6)=e^7 \Leftrightarrow f(e^7)=6$

Συμπέρασμα $x=e^7$

Εικόνα 109:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Γ του post-test

Η μαθήτρια Μ14 ξεκινώντας από το σύστημα αναφοράς της αντίστροφης συνάρτησης, εργαλειοποιεί τη θεωρία και οδηγείται μέσω της λεκτικής γένεσης στην εργαλειακή γένεση.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Εφόσον ισχύει $y=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=y$

Άρα $f(x)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1^5+5\cdot 1+1=x \Rightarrow x=7$

Γ2) $f^{-1}(x)=6 \Leftrightarrow f(6)=x \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{6+1}=x \Rightarrow x=e^7$

Εικόνα 110:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Γ του post-test

6.3.7 Αποτελέσματα του Θέματος Δ

Στο Δ1 ερώτημα έντεκα μαθητές/τριες αποδεικνύουν με τη βοήθεια του αντιθετοαντίστροφου του ορισμού ότι η συνάρτηση είναι 1-1. Τρεις μαθητές/τριες προσπάθησαν να αποδείξουν ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη με λάθος αλγεβρικές πράξεις. Οι εννέα από τους παραπάνω μαθητές/τριες καταφέρνουν να βρουν και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Ο μαθητής Μ17 δεν αποδεικνύει ότι η συνάρτηση είναι 1-1 αλλά υπολογίζει τον τύπο της αντίστροφης. Από τους δέκα μαθητές/τριες που κατέληξαν στο σωστό τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση, μόνο τρεις ορίσαν σωστά και το πεδίο ορισμού της. Τέσσερις από τους υπόλοιπους μαθητές/τριες δεν παρατήρησαν ότι η αρχική συνάρτηση ορίζεται σε ένα περιορισμό του πεδίου ορισμού της που τελικά περιορίζει και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Στο Δ2 ερώτημα η μαθήτρια Μ2 αναφέρει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και ότι το σύνολο τιμών της αντίστροφης θα είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά δεν ορίζει κανένα από τα δυο σύνολα. Τέσσερις μαθητές/τριες ορίζουν σωστά τα δυο σύνολα αλλά δεν δικαιολογούν την απάντηση τους ενώ έξι μαθητές/τριες στηρίζονται στην θεωρία και ορίζουν τα δυο σύνολα.

Στο Δ3 ερώτημα τέσσερις μαθητές/τριες βασίζονται στην ιδιότητα που αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο και ορίζουν σωστά τις δυο συνθέσεις. Ένας μαθητής ορίζει μόνο τον τύπο των συνθέσεων αλλά δεν αναφέρει το πεδίο ορισμού τους. Τέλος έξι μαθητές/τριες ορίζουν αναλυτικά το πεδίο ορισμού των συνθέσεων και οι τρεις από αυτούς μετά από προσεκτικές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουν στην ταυτοτική συνάρτηση.

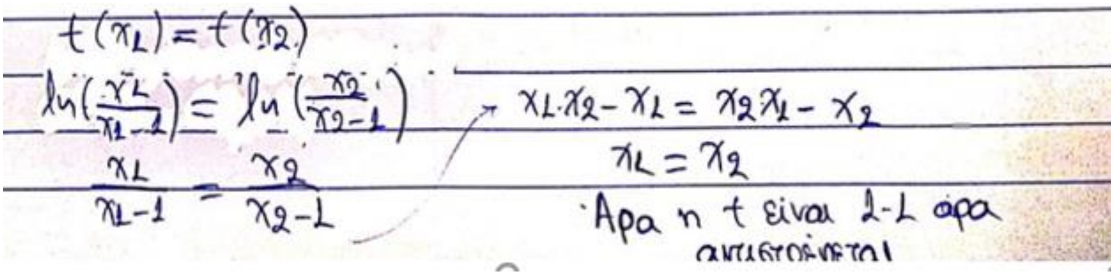
Στο Δ4 ερώτημα επτά μαθητές/τριες μετασχηματίζουν τη συνάρτηση, εννέα αποδεικνύουν ότι είναι γνησίως φθίνουσα με χρήση του νέου τύπου της συνάρτησης και έξι από αυτούς αποδεικνύουν ότι και η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, θεωρητικά και όχι μέσω του τύπου της.

6.3.8 Ανάλυση αποτελεσμάτων του Θέματος Δ υπό το πρίσμα του ΜΧΕ

Δίνεται η συνάρτηση $t(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right), x>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

Η μαθήτρια Μ7 χρησιμοποιεί με επιτυχία τα τεχνουργήματα της αντίστροφης συνάρτησης, για να αποδείξει ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και να υπολογίσει τον τύπο της συνάρτησης αλλά δεν παρατηρεί το περιορισμό της μεταβλητής x που αναφέρεται στην εκφώνηση με αποτέλεσμα να μην ορίσει σωστά το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.


$t(x_1)=t(x_2)$

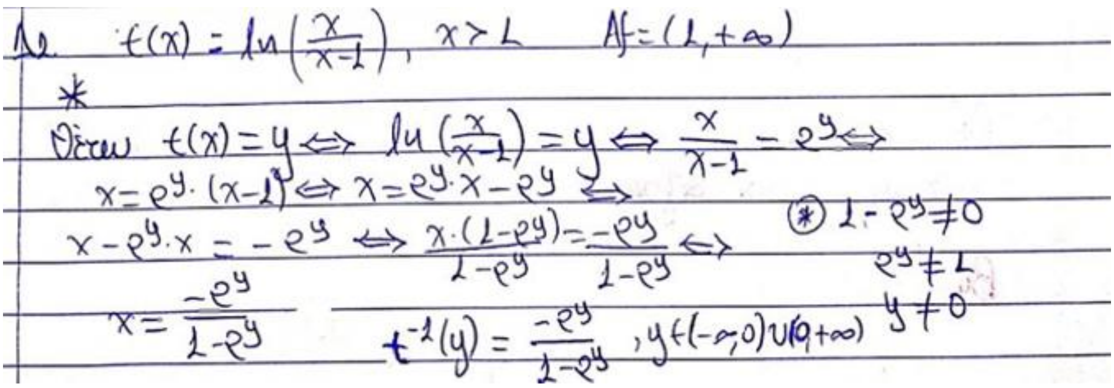
$\ln\left(\frac{x_1}{x_1-1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{x_2-1}\right)$

$\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2}{x_2-1}$

$x_1 \cdot x_2 - x_1 = x_2 x_1 - x_2$

$x_1 = x_2$

Άρα η t είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται



$\Delta 1.\quad f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right),\ x>1 \qquad A_f=(1,+\infty)$

$*$

Θέτω $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=y \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}=e^y \Leftrightarrow$

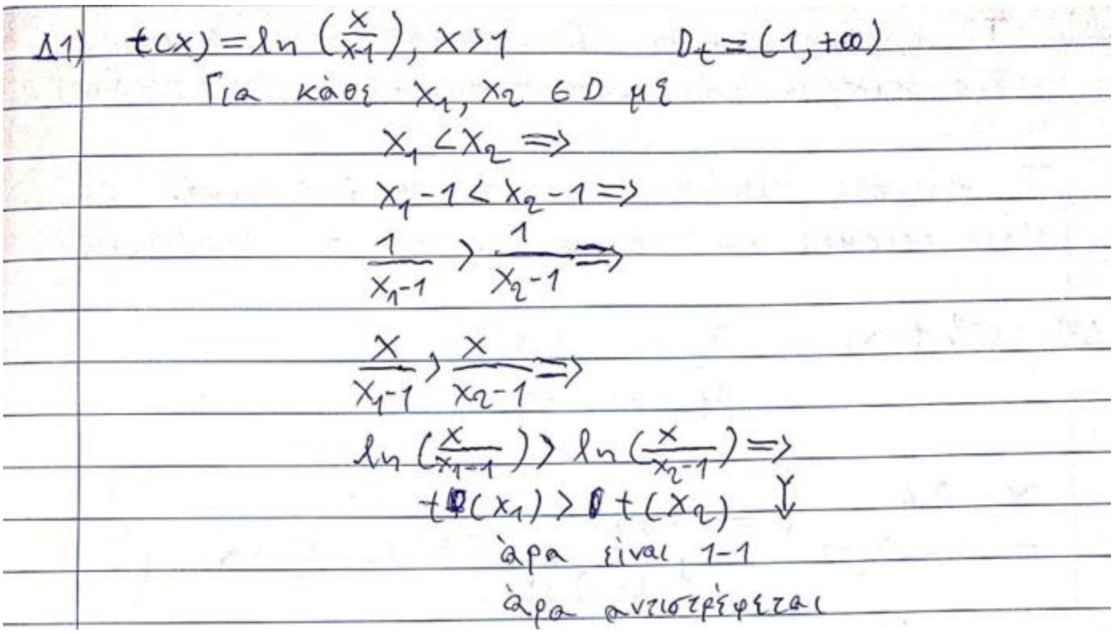
$x=e^y\cdot(x-1) \Leftrightarrow x=e^y\cdot x-e^y \Leftrightarrow$

$x-e^y\cdot x=-e^y \Leftrightarrow \frac{x\cdot(1-e^y)}{1-e^y}=\frac{-e^y}{1-e^y} \Leftrightarrow$ $\quad (*)\ 1-e^y\neq 0,\ e^y\neq 1,\ y\neq 0$

$x=\frac{-e^y}{1-e^y} \qquad f^{-1}(y)=\frac{-e^y}{1-e^y},\ y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Εικόνα 111:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Δ1 του post-test

Ο μαθητής Μ17 προσπαθεί να αποδείξει ότι η συνάρτηση είναι 1-1 μέσω της μονοτονίας. Στην πορεία της λύσης παρουσιάζονται κάποιες αδυναμίες στη χρήση αυτού του τεχνουργήματος που δεν οδηγεί σε μια επιτυχημένη εργαλειακή γένεση.



$\Delta 1)\quad f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right),\ x>1 \qquad D_f=(1,+\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in D$ με

$x_1<x_2 \Rightarrow$

$x_1-1<x_2-1 \Rightarrow$

$\frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1} \Rightarrow$

$\frac{x}{x_1-1}>\frac{x}{x_2-1} \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{x}{x_1-1}\right)>\ln\left(\frac{x}{x_2-1}\right) \Rightarrow$

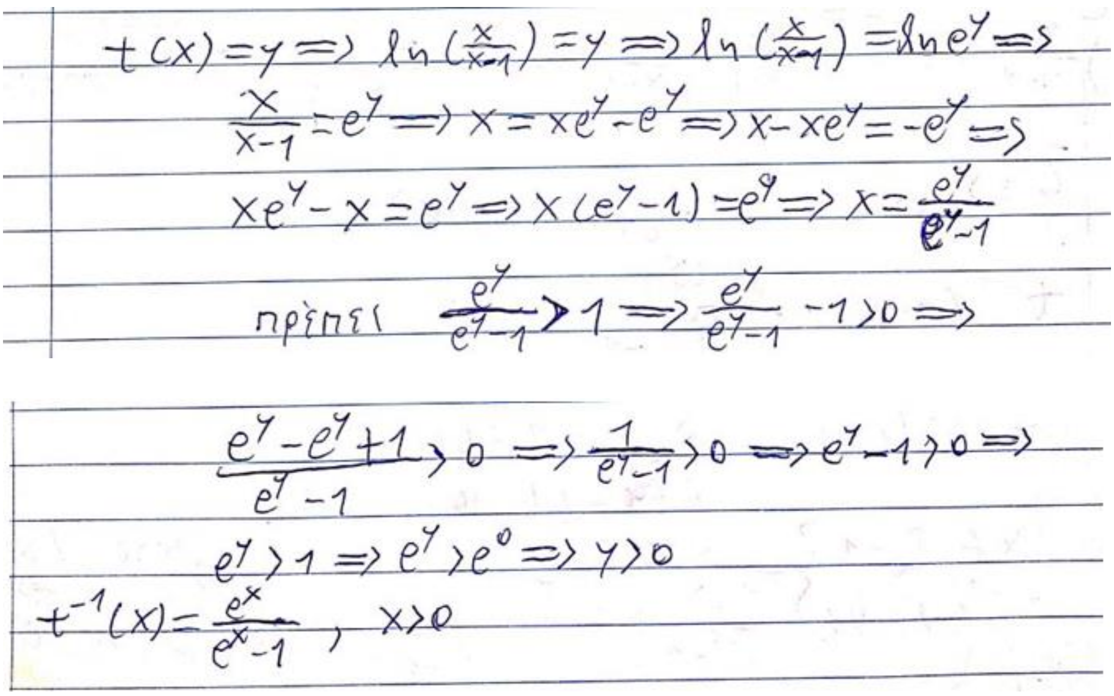
$f(x_1)>f(x_2)\ \downarrow$

άρα είναι 1-1

άρα αντιστρέφεται

Εικόνα 112:Απάντηση του μαθητή Μ17 στο Θέμα Δ1 του post-test

Στη συνέχεια, όμως, καταφέρνει να λύσει με επιτυχία την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς την μεταβλητή x και να ορίσει σωστά και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

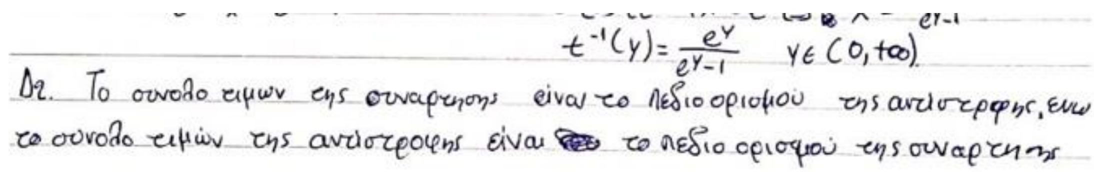


$$f(x)=y \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=y \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=\ln e^y \Rightarrow$$
$$\frac{x}{x-1}=e^y \Rightarrow x=xe^y-e^y \Rightarrow x-xe^y=-e^y \Rightarrow$$
$$xe^y-x=e^y \Rightarrow x(e^y-1)=e^y \Rightarrow x=\frac{e^y}{e^y-1}$$
πρέπει $\frac{e^y}{e^y-1}>1 \Rightarrow \frac{e^y}{e^y-1}-1>0 \Rightarrow$
$$\frac{e^y-e^y+1}{e^y-1}>0 \Rightarrow \frac{1}{e^y-1}>0 \Rightarrow e^y-1>0 \Rightarrow$$
$$e^y>1 \Rightarrow e^y>e^0 \Rightarrow y>0$$
$$f^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x-1},\ x>0$$

Εικόνα 113:Απάντηση του μαθητή Μ17 στο Θέμα Δ1 του post-test

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της.

Η μαθήτρια Μ2 γνωρίζει τη θεωρία αλλά δε δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό παρόλο που έχει προσδιορίσει το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και είναι δεδομένο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Παρατηρείται, λοιπόν, η αδυναμία της να μεταβεί από το επιστημολογικό στο γνωστικό επίπεδο.



$f^{-1}(y)=\frac{e^y}{e^y-1}$ $y\in(0,+\infty)$

Δ2. Το συνολο τιμων της συναρτησης είναι το πεδιο ορισμού της αντιστροφης, ενω το συνολο τιμών της αντιστροφης είναι το πεδιο ορισμού της συναρτησης

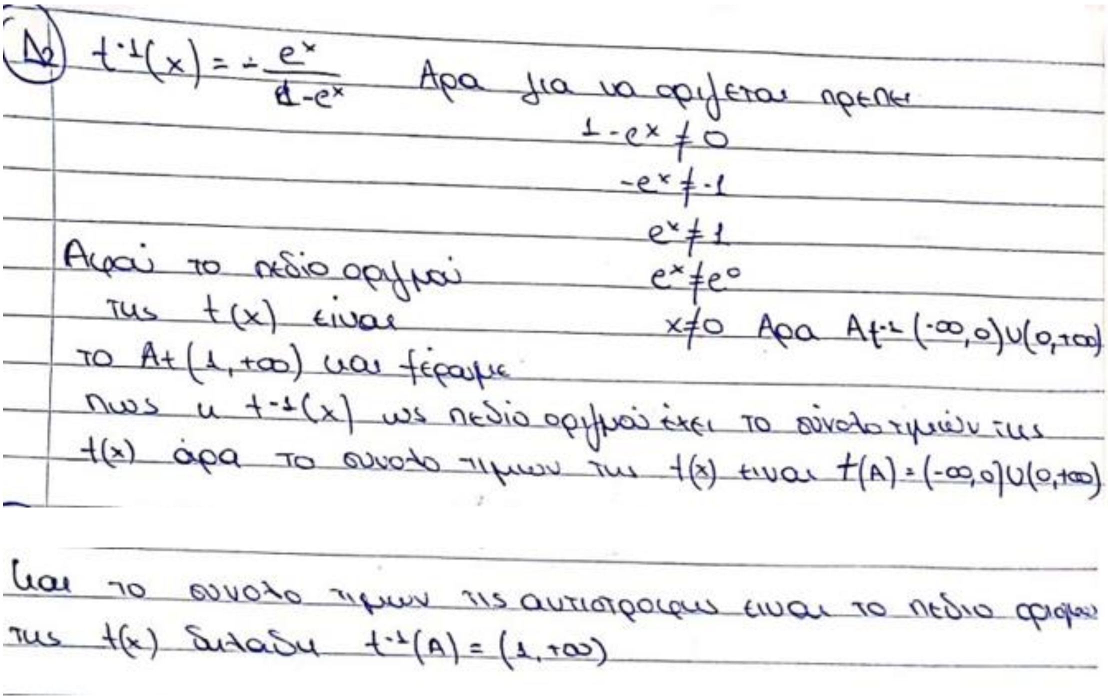
Εικόνα 114:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 στο Θέμα Δ2 του post-test

Ο μαθητής Μ9 δίνει απευθείας την απάντησή του και δε στηρίζεται στη θεωρία.

Δ2 $f(A)=\mathbb{R}^*$ και $f^{-1}(A)=(1,+\infty)$

Εικόνα 115:Απάντηση του μαθητή Μ9 στο Θέμα Δ2 του post-test

Η μαθήτρια Μ10 ορίζει το πεδίο ορισμού της αντίστροφης μέσω του τύπου και όχι μέσω της διαδικασίας εύρεσης της αντίστροφης και του περιορισμού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Η λεκτική γένεση είναι επιτυχής.



Δ2) $t^{-1}(x) = -\frac{e^x}{1-e^x}$ Αρα για να οριζεται πρεπει

$1-e^x \neq 0$

$-e^x \neq -1$

$e^x \neq 1$

$e^x \neq e^0$

$x \neq 0$ Αρα $A_{t^{-1}}(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

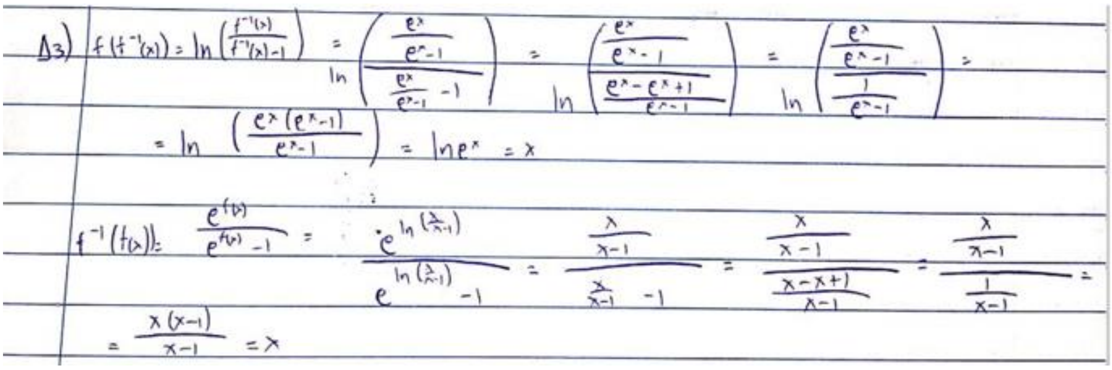
Αφού το πεδιο ορισμού της t(x) ειναι το At(1,+∞) και ξέρουμε πως η $t^{-1}(x)$ ως πεδιο ορισμού έχει το σύνολο τιμών της t(x) άρα το συνολο τιμων της t(x) ειναι $t(A)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

και το συνολο τιμων της αντιστροφης ειναι το πεδιο ορισμου της t(x) δηλαδη $t^{-1}(A)=(1,+\infty)$

Εικόνα 116:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 στο Θέμα Δ2 του post-test

Δ3. Να ορίσετε την σύνθεση της συνάρτησης t με την αντίστροφη της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης t με την συνάρτηση.

Η μαθήτρια Μ6 ορίζει τους τύπους των συνθέσεων αλλά δεν αναφέρει το πεδίο ορισμού τους. Παρατηρείται μια εργαλειακή γένεση η οποία όμως δε συνδυάζεται από την αντίστοιχη λεκτική γένεση.



Δ3) $f(f^{-1}(x)) = \ln\left(\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)-1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{e^x}{e^x-1}-1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{e^x-e^x+1}{e^x-1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{e^x-1}}\right) =$

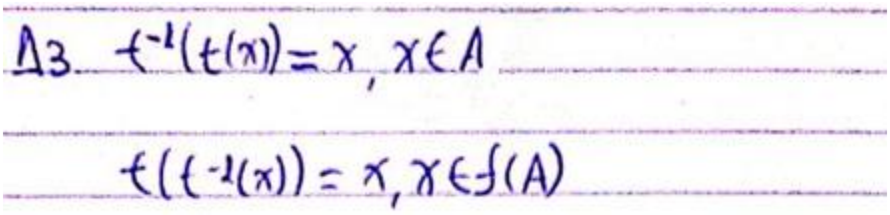
$= \ln\left(\frac{e^x(e^x-1)}{e^x-1}\right) = \ln e^x = x$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}-1} = \frac{e^{\ln(\frac{x}{x-1})}}{e^{\ln(\frac{x}{x-1})}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} =$

$= \frac{x(x-1)}{x-1} = x$

Εικόνα 117:Απάντηση της μαθήτριας Μ6 στο Θέμα Δ3 του post-test

Η μαθήτρια Μ7 γνωρίζει τη θεωρία αλλά δεν την εφαρμόζει. Στην απάντησή της εμφανίζεται η ιδιότητα όπως αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο.

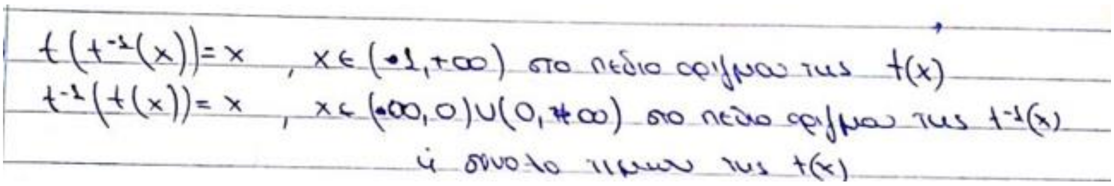


Δ3. $f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A$

$f(f^{-1}(x))=x,\ x\in f(A)$

Εικόνα 118:Απάντηση της μαθήτριας Μ7 στο Θέμα Δ3 του post-test

Η μαθήτρια Μ10 δε χρησιμοποιεί σωστά τη θεωρία.



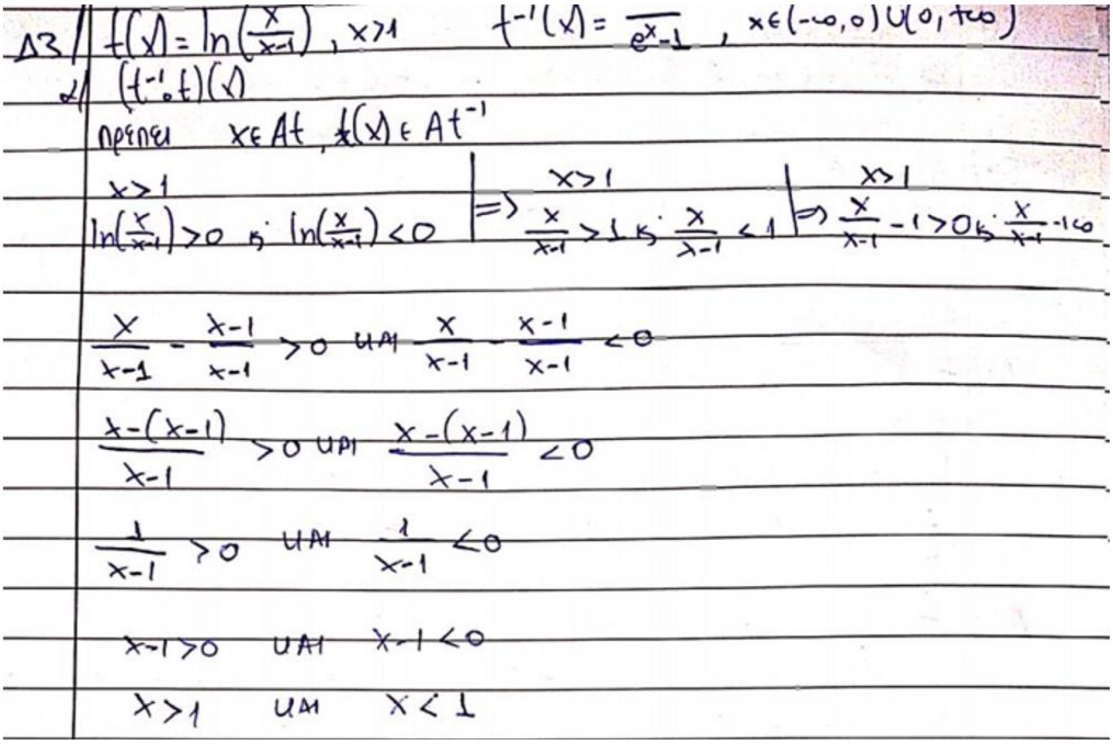
$f(f^{-1}(x))=x$, $x\in(-1,+\infty)$ στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

$f^{-1}(f(x))=x$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ στο πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$

ή σύνολο τιμών της $f(x)$

Εικόνα 119:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 στο Θέμα Δ3 του post-test

Ο μαθητής Μ13 ορίζει αναλυτικά τις δυο συνθέσεις αλλά δεν καταλήγει στην ταυτοτική συνάρτηση. Δεν παρατηρείται, λοιπόν, μια μετάβαση από την εργαλειακή γένεση στην λεκτική γένεση και αυτό οφείλεται στην αδυναμία του να εκτελέσει αλγεβρικές πράξεις.



Δ3 $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right),\ x>1$ $\quad f^{-1}(x)=\frac{}{e^x-1},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

α) $(f^{-1}\circ f)(x)$

πρέπει $x\in A_f,\ f(x)\in A_{f^{-1}}$

$x>1$

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$ ή $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0 \Rightarrow$ $x>1$, $\frac{x}{x-1}>1$ ή $\frac{x}{x-1}<1 \Rightarrow$ $x>1$, $\frac{x}{x-1}-1>0$ ή $\frac{x}{x-1}-1<0$

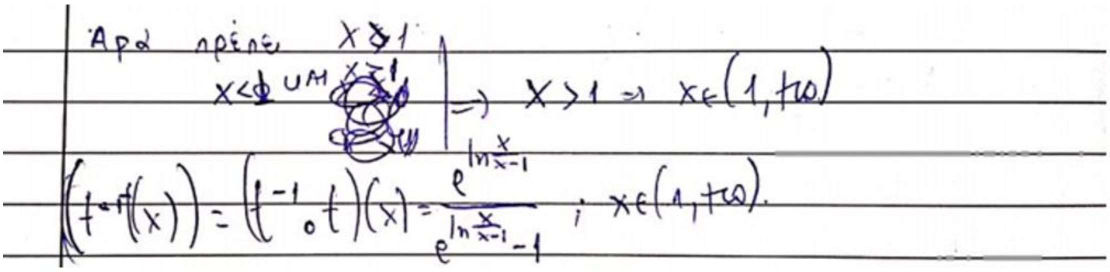
$\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}>0$ και $\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}<0$

$\frac{x-(x-1)}{x-1}>0$ και $\frac{x-(x-1)}{x-1}<0$

$\frac{1}{x-1}>0$ και $\frac{1}{x-1}<0$

$x-1>0$ και $x-1<0$

$x>1$ και $x<1$

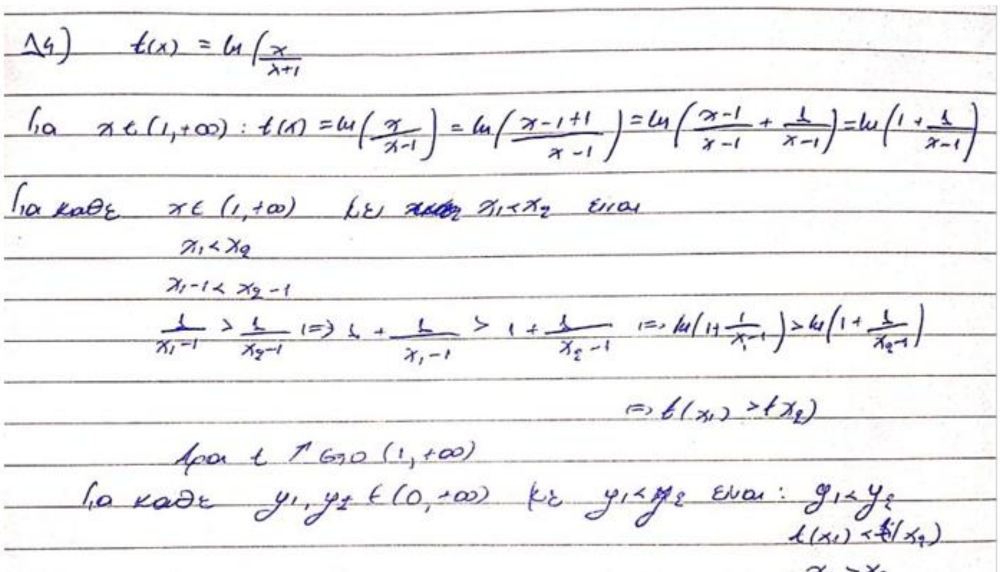

Άρα πρέπει $x \neq 1$
$x<0$ ή $x>1$ $\Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in(1,+\infty)$

$(t^{-1}(x)) = (t^{-1}\circ t)(x) = \dfrac{e^{\ln\frac{x}{x-1}}}{e^{\ln\frac{x}{x-1}}-1}$; $x\in(1,+\infty)$.

Εικόνα 120:Απάντηση του μαθητή Μ13 στο Θέμα Δ3 του post-test

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t μπορεί να πάρει τη μορφή $t(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right), x>1$ και να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της.

Οι μαθητές/τριες που αντιμετώπισαν με επιτυχία το παραπάνω ερώτημα, ακολούθησαν την πορεία σκέψης του μαθητή Μ1. Στη λύση που παρουσιάζει ξεκινάει από το τεχνούργημα της προσθαφαίρεσης και μετασχηματίζει τη συνάρτηση. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο της μονοτονίας και με χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων καταλήγει στην μονοτονία της συνάρτησης. Τέλος, χρησιμοποιεί τον ορισμό της μονοτονίας και με χρήση της απόδειξης που παρουσιάστηκε στην τάξη κατά τη διδακτική παρέμβαση αποδεικνύει ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Οι μαθητές/τριες παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στην επίδοση τους σε σχέση με το αντίστοιχο ερώτημα του pre-test και κινούνται με επιτυχία στο κατακόρυφο επίπεδο εργαλειακής- λεκτικής γένεσης και αντίστροφα.


Δ4) $t(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right.$

Για $x\in(1,+\infty)$: $t(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$x_1<x_2$

$x_1-1<x_2-1$

$\frac{1}{x_1-1} > \frac{1}{x_2-1} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1-1} > 1+\frac{1}{x_2-1} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{x_2-1}\right)$

$\Rightarrow t(x_1) > t(x_2)$

Άρα t ↘ στο $(1,+\infty)$

Για κάθε $y_1,y_2\in(0,+\infty)$ με $y_1<y_2$ είναι: $y_1<y_2$

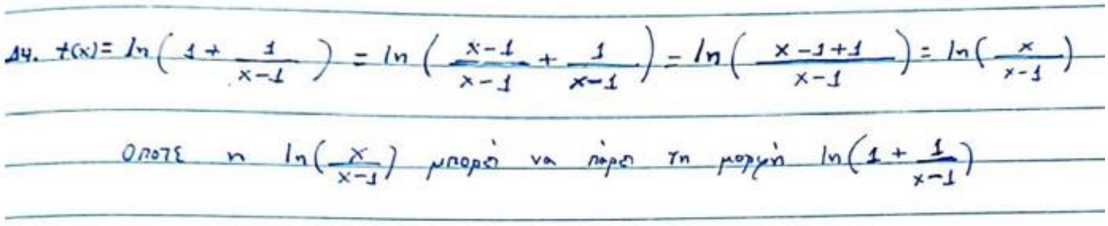
$t(x_1) < t(x_2)$

$x_1 > x_2$

Επομένως η t^{-1} είναι ↘ στο $(0,+\infty)$ $t^{-1}(y_1) > t^{-1}(y_2)$

Εικόνα 121:Απάντηση του μαθητή Μ1 στο Θέμα Δ4 του post-test

Ο μαθητής Μ4 επαληθεύει ότι η συνάρτηση μπορεί να πάρει τη μορφή που του ζητείται και δεν το αποδεικνύει. Συχνά παρατηρείται και στις απαντήσεις των μαθητών/τριών στα θέματα των Πανελλήνιων εξετάσεων να γίνεται επαλήθευση αντί για απόδειξη.

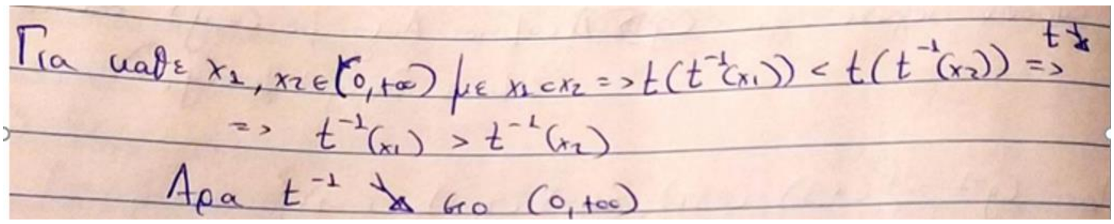


Δ4. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Οποτε η $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$

Εικόνα 122:Απάντηση του μαθητή Μ4 στο Θέμα Δ4 του post-test

Τέλος, η μαθήτρια Μ14 παρουσιάζει μια διαφορετική απόδειξη για την μονοτονία της αντίστροφης μέσω της ιδιότητας της σύνθεσης.



Για καθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xRightarrow{f \searrow}$

$\Rightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

Αρα $f^{-1} \searrow$ στο $(0,+\infty)$

Εικόνα 123:Απάντηση της μαθήτριας Μ14 στο Θέμα Δ4 του post-test

7. Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα της έρευνας που προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των δυο τεστ και θα απαντήσουμε στα δυο ερευνητικά ερωτήματα· δηλαδή στο ποιος ήταν ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση πριν τη διδακτική παρέμβαση και στο πώς αυτός διαμορφώθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση.

7.1 Συμπεράσματα για το Θέμα Α

Το Θέμα Α είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που στην περίπτωση του pre-test δόθηκε μέσω μιας εικόνας ενώ στο post-test μέσω κειμένου. Η επίδοση των μαθητών/τριών ήταν σαφώς καλύτερη στο pre-test. Οι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν να δικαιολογήσουν αν η αντιστοίχιση των μεταβλητών μεγεθών που τους/τις ζητήθηκε αποτελεί συνάρτηση. Παρατηρήθηκε αδυναμία στη χρήση του ορισμού της συνάρτησης. Μάλιστα, στο Θέμα Α που αποτελούσε πρόβλημα της Οικονομίας, οι μαθητές/τριες δεν κατάφεραν να οδηγηθούν σε σωστά συμπεράσματα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα ανησυχητικό αν σκεφτούμε ότι οι μαθητές/τριες του δείγματος ανήκουν στον προσανατολισμό Οικονομίας και Πληροφορικής.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες έχουν περιορισμένη και αδύναμη εννοιολογική εικόνα της συνάρτησης που οφείλεται, όπως αναφέρουν και πολλοί ερευνητές στη γνωστική, επιστημολογική και αναπαραστατική πολυμορφία που διακατέχει τη φύση της (Freudental, 1973; Janvier, 1978; Tall & Vinner, 1981; Leinhardt, et al., 1990; Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierbinska, 1992; Kalchman & Case, 1998; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Duval, 2002; Eisenberg, 2002; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Rabadi, 2015 κ.α.).

Παρόλο που στη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές/τριες εργάστηκαν σε προβλήματα της Οικονομίας και από την αρχή της σχολικής χρονιάς η ερευνήτρια αφιέρωνε διδακτικές ώρες για την επίλυση προβλημάτων, οι μαθητές/τριες δε βελτίωσαν την επίδοση τους. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί και με τα στατιστικά αποτελέσματα των πανελληνίων εξετάσεων σε θέματα προβλημάτων αλλά και με τις έρευνες των Wilson et al., 2011 και Minh και Lagrange, 2016 οι οποίοι αναφέρουν ότι η ουσία του προβλήματος είναι κυρίως ότι η αντίστροφη συνάρτηση χρησιμοποιείται με μεθοδεύσεις από τους μαθητές/τριες χωρίς να είναι εφικτή η πλήρης κατανόησης της.

Συμπερασματικά, προκύπτει ότι πρέπει να ενισχυθεί το δομικό πλαίσιο της αντίστροφης συνάρτησης μέσω του ορισμού της συνάρτησης και της ιδιότητας ένα προς ένα, ώστε οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα και να αναγνωρίζουν σε αυτά τις ιδιότητες των συναρτήσεων (Bayazit & Gray, 2004). Όπως αναφέρουν και οι Freudenthal (1983), Enen (1989) και Silver (1986), όταν η γνώση εφαρμόζεται με δυναμικό τρόπο για την επίλυση ενός προβλήματος, ο τρόπος σύνδεσης εννοιολογικών και διαδικαστικών πλαισίων βελτιώνεται ακόμη περισσότερο.

7.2 Συμπεράσματα για το Θέμα Β

Στο Θέμα Β παρουσιάστηκαν οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης και ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να εξετάσουν αν αυτή είναι 1-1 και να ορίσουν την αντίστροφη τής, αν αυτή ορίζεται. Στο Θέμα αυτό οι μαθητές/τριες είχαν υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τα υπόλοιπα και μάλιστα στο post-test η επίδοση ακόμα και των αδυνάμων μαθητών/τριών ήταν σαφώς καλύτερη.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές/τριες ασχολήθηκαν με παρόμοια θέματα και έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ενδεχομένως διότι δεν ήταν πολύπλοκα. Η ενασχόληση τους, όμως, με αυτά τα θέματα είχε θετικά αποτελέσματα στην επίδοσή τους και σε πιο πολύπλοκα θέματα. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί και με την έρευνα του Delastri et al., 2019. Αυτή η πρότερη γνώση που χρειάζεται για το άλμα σε πιο ειδικές περιπτώσεις απουσίαζε ή είχε πραγματοποιηθεί με αρκετά μεθοδικό τρόπο πριν τη διδακτική παρέμβαση ενώ μετα από αυτήν συμπλήρωσε το εννοιολογικό πλαίσιο της αντίστροφης συνάρτησης.

Η επίλυση αρκετών θεμάτων, όπου οι μαθητές/τριες αντιστοιχούσαν τιμές του πεδίου ορισμού της συνάρτησης προς το σύνολο τιμών της, έλεγχαν αν οι διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής καταλήγουν σε διαφορετικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής και στη συνέχεια ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία έβρισκαν τις τιμές της αντίστροφης συνάρτησης αντί να διδαχθούν απευθείας τη μεθοδολογία της επίλυσης της εξίσωσης της συνάρτησης ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές/τριες να πέτυχουν υψηλότερες βαθμολογίες στο post-test. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί και με ευρήματα της έρευνας του Nolasco, 2018.

Η παράβλεψη των διδασκόντων/διδασκουσών σε κομβικά σημεία, όπως είναι η διαδικασία της εννοιολογικής εμβάθυνσης με σκοπό την αντίληψη μιας αφηρημένης έννοιας σε συνδυασμό με τη λειτουργία της και τη μαθηματική της υπόσταση, δημιουργεί ασάφειες σε πολύ μεγάλο βαθμό (Kilpartrick et al., 2001; Wearne & Hiebert, 1988).

Το τελευταίο ερώτημα του θέματος αυτού αφορούσε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στο pre-test έξι από τους μαθητές/τριες έδωσαν σωστές αλλά ελλείπεις απαντήσεις ενώ στο δεύτερο, έντεκα κατάφεραν να παρουσιάσουν ολοκληρωμένες λύσεις. Όπως ανέφεραν και οι μαθητές/τριες στην ερευνήτρια, δεν είχαν διδαχθεί στο φροντιστήριο το θέμα αυτό. Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης παρουσιάστηκε αναλυτικά η αντίστροφη συνάρτηση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης σε κατάλληλο πεδίο ορισμού. Παρότι οι μαθητές/τριες αντιλήφθηκαν από το γράφημα ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται, δεν αποδέχτηκαν το αποτέλεσμα αυτό, καθώς δεν μπορούσαν να βρουν τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από τη βιβλιογραφία (Akkoc, 2008; Hertel & Cullen, 2011; Moore & LaForest, 2014; Weber, 2005).

7.3 Συμπεράσματα για το Θέμα Γ

Στο Θέμα Γ ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να υπολογίσουν την τιμή της συνάρτησης, όταν γνωρίζουν τον τύπο της αντίστροφής της και την τιμή της αντίστροφης συνάρτησης, όταν γνωρίζουν τον τύπο της συνάρτησης. Στο pre-test μόνο πέντε μαθητές/τριες απάντησαν σωστά. Δυο από τους υπόλοιπους προσπάθησαν να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης συνάρτησης. Όπως είχαν παρατηρήσει και ο Paoleti et al., 2018, πολλοί/ες μαθητές/τριες, όταν δοκιμάζονται σε διαγωνίσματα, εφαρμόζουν τεχνικές για τον προσδιορισμό αντίστροφων συναρτήσεων που βασίζονται σε συγκεκριμένη μεθοδολογία. Στο post-test δεκαπέντε μαθητές/τριες απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα και δεκατρείς στο δεύτερο. Παρατηρήθηκε σαφώς υψηλότερη επίδοση στη βαθμολογία των μαθητών/τριών στο post-test η οποία οφείλεται στην κατανόηση της βασικής ισοδυναμίας που συνδέει τις δυο συναρτήσεις και στην ενασχόληση των μαθητών/τριών με παρόμοια παραδείγματα κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Τα διαγράμματα βέλους ως βοηθητικός παράγοντας για την εύρεση των τιμών της συνάρτησης ή της αντίστροφης έδρασαν θετικά στην επίδοση των μαθητών/τριών, όπως ακριβώς παρατήρησε και ο Nolasco, 2018.

7.4 Συμπεράσματα για το Θέμα Δ

Στο Θέμα Δ ζητήθηκε από τους μαθητές/τριες να αποδείξουν ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσουν την αντίστροφή της σε ένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της. Παρατηρήθηκε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών/τριών στο post-test. Στο pre-test μόνο τρεις κατάφεραν να ορίσουν σωστά τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης ενώ στο δεύτερο δέκα από αυτούς/τες. Παρόλα αυτά και στα δυο τεστ οι μαθητές/τριες δεν όρισαν σωστά και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Στα επόμενα ερωτήματα οι μαθητές/τριες μελέτησαν τις ιδιότητες των δυο συναρτήσεων. Η διδακτική παρέμβαση βελτίωσε αισθητά την επίδοσή τους στο post-test. Μάλιστα σε αντίθεση με την έρευνα των Paoleti et al. (2018) η πλειονότητα των μαθητών/τριών αποδεικνύει ότι η σύνθεση των δυο συναρτήσεων καταλήγει στην ταυτοτική συνάρτηση και ορίζει σωστά και το πεδίο ορισμού κάθε σύνθεσης.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα των μαθητών/τριών και στο Θέμα Δ των δυο τεστ συμφωνούν με τη μελέτη των Breen et al, 2015. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάστηκε η αντίστροφη συνάρτηση από την ερευνήτρια διαφέρει από αυτόν με τον οποίο είχε παρουσιαστεί στους μαθητές/τριες της στα φροντιστηριακά μαθήματα που παρακολουθούν. Τα αποτελέσματα έδειξαν να μην έχουν αρκετά κοινά σημεία. Οι μαθητές/τριες δείχνουν μια σαφέστερη κατανόηση στις ιδιότητες της συνάρτησης στο post-test.

7.5 Ποιος ήταν ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση πριν τη διδακτική παρέμβαση

Ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση πριν τη διδακτική παρέμβαση καθορίστηκε από τα φροντιστηριακά μαθήματα που έχουν παρακολουθήσει και περιέχει τις ενέργειες που έκανε ο μαθητής/τρια στο πλαίσιο του ΜΧΕ, ώστε να ανταποκριθεί στα θέματα του pre-test.

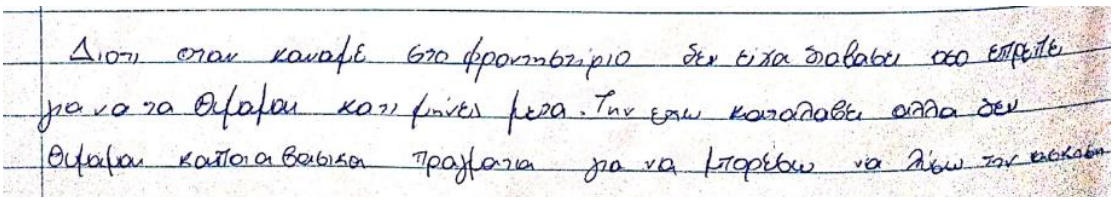
Το επιστημολογικό επίπεδο των μαθητών/τριών πριν τη διδακτική παρέμβαση ήταν ελλιπές κυρίως στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων καθώς και στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς. Τα αποτελέσματα στο Θέμα Α και το Θέμα Δ οδηγούν στο παραπάνω συμπέρασμα. Το πλαίσιο των τεχνουργημάτων τους ήταν σαφώς πιο οργανωμένο αλλά κυρίως περιείχε τον αλγόριθμο εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι οι μαθητές/τριες της δεν είχαν ευχέρεια στη συμπλήρωση πινάκων τιμών, στην εύρεση τιμών της αντίστροφης συνάρτησης, στη συμμετρία ως προς την ευθεία y=x και τη σύνθεση της συνάρτησης με την αντίστροφή της.

Το γνωστικό επίπεδο των μαθητών/τριών πριν τη διδακτική παρέμβαση που αφορά τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η σκέψη και η περαιτέρω πορεία μάθησης τους δεν περιείχε τη διαδικασία της οπτικοποίησης, δηλαδή τη διαδικασία της δόμησης της πληροφορίας η οποία παρέχεται από εικόνες, διαγράμματα και σύμβολα. Δεν κατάφεραν να αποκωδικοποιήσουν και να ερμηνεύσουν την εικόνα που τους δόθηκε στο Θέμα Α και να αναπτύξουν μια τυπική ή μη επιχειρηματολογία. Περιείχε μερικώς τη λειτουργία της κατασκευής και τη λεκτική διαδικασία.

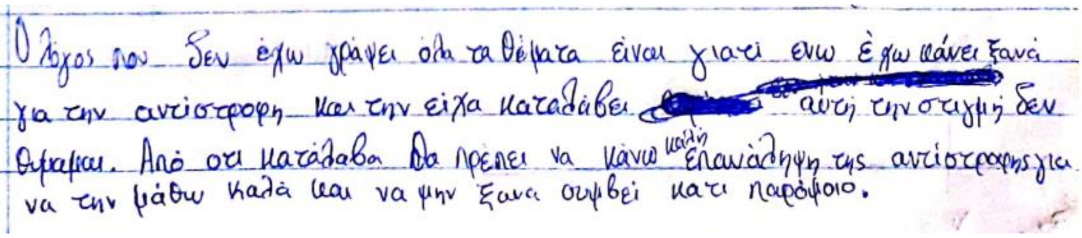
Οι μαθητές/τριες δεν είχαν αναπτύξει επαρκώς την εννοιολογική δομή της αντίστροφης συνάρτησης βασιζόμενη στην αντίληψη των αισθήσεων τους, δεν κατάφεραν να δώσουν στα εργαλεία γνωστική υπόσταση και να αναπτύξουν μαθηματικό συλλογισμό για την παραγωγή μιας έγκυρης απόδειξης. Η πορεία ανάπτυξης εννοιολογικής γνώσης μέσω των γένεσεων των επιστημολογικών στοιχείων και των γνωστικών διαδικασιών δεν ολοκληρώθηκε επιτυχώς.

Το μαθηματικό έργο θεωρείται πλήρες, όταν αφενός υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στα επιστημολογικά και γνωστικά στοιχεία τα οποία συνιστούν την προς μάθηση γνώση και όταν αφετέρου οι τρεις κατακόρυφες γενέσεις του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας οργανώνονται και αναπτύσσονται κατάλληλα (Kuzniak et al., 2016a). Τα αποτελέσματα του pre-test έδειξαν ότι η πλειονότητα των μαθητών/τριών δεν κατάφεραν να ανταπεξέρθουν με επιτυχία στα θέματα, διότι τα φροντιστηριακά μαθήματα που είχαν παρακολουθήσει δεν ενεργοποίησαν τις ποικίλες διαστάσεις της μαθηματικής εργασίας που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά της αντίστροφης συνάρτησης και με τα εργαλεία και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για επίλυση τους.

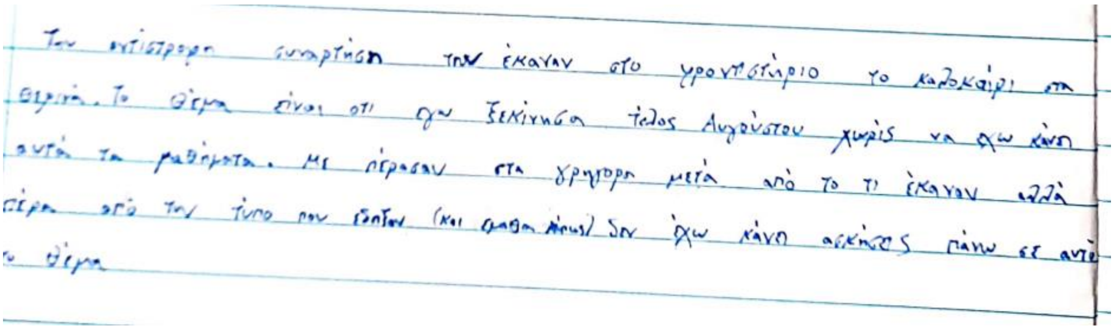
Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές/τριες της στο τέλος του pre-test να της αναφέρουν τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά τη διάρκεια του και το λόγο που δεν κατάφεραν να αποδώσουν στα θέματα. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές/τριες.


Διοτι οταν κανάμε στο φροντιστήριο δεν ειχα διαβασει οσο επρεπε
για να τα θυμαμαι και μείνει μεσα. Την εχω καταλαβει αλλα δεν
θυμαμαι καποια βασικα πραγματα για να μπορέσω να λύσω την ασκηση

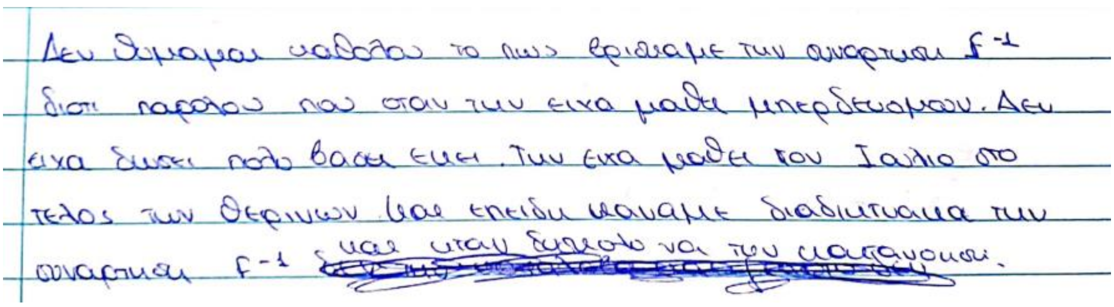
Εικόνα 124: Απάντηση του μαθητή Μ1 για το pre-test


Ο λόγος που δεν έχω γράψει όλα τα θέματα είναι γιατί ενώ έχω κάνει ξανά για την αντίστροφη και την είχα καταλάβει αυτή την στιγμή δεν θυμάμαι. Από ότι κατάλαβα θα πρέπει να κάνω καλή επανάληψη της αντίστροφης για να την μάθω καλά και να μην ξανά συμβεί κάτι παρόμοιο.

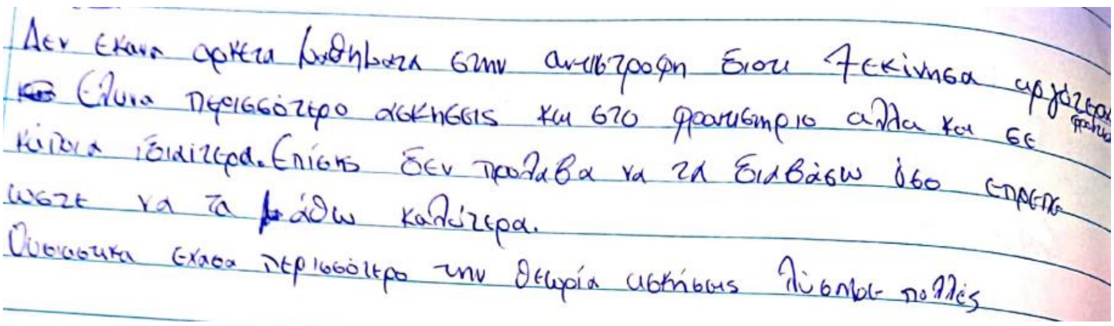
Εικόνα 125:Απάντηση της μαθήτριας Μ2 για το pre-test


Την αντίστροφη συνάρτηση την έκαναν στο φροντιστήριο το καλοκαίρι στα θερινά. Το θέμα είναι ότι εγώ ξεκίνησα τέλος Αυγούστου χωρίς να έχω κάνει αυτά τα μαθήματα. Με πέρασαν στα γρήγορα μετά από το τι έκαναν αλλά πέρα από τον τύπο που βγάζει [illegible] δεν έχω κάνει ασκήσεις πάνω σε αυτό το θέμα

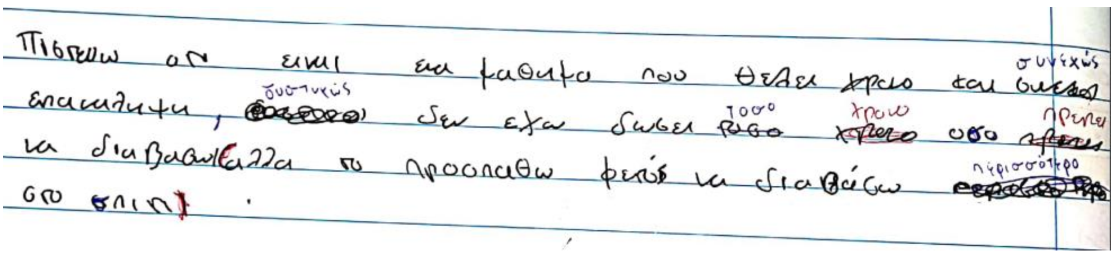
Εικόνα 126:Απάντηση του μαθητή Μ4 για το pre-test


Δεν θυμάμαι καθόλου το πως βρίσκαμε την συνάρτηση f^{-1} διότι παρόλο που όταν την είχα μάθει μπερδευόμουν. Δεν είχα δώσει πολύ βάση εκεί. Την είχα μάθει τον Ιούνιο στο τέλος των θερινών και επειδή κάναμε διαδικτυακά την συνάρτηση f^{-1} και όταν ξεχαστώ να την καταλαβαίνω.

Εικόνα 127:Απάντηση της μαθήτριας Μ10 για το pre-test


Δεν έκανα αρκετή μελέτη στην αντίστροφη διότι ξεκίνησα αρχίζοντας φροντιστήριο να λύνω περισσότερο ασκήσεις και στο φροντιστήριο αλλά και σε κάποια ιδιαίτερα. Επίσης δεν πρόλαβα να τα διαβάσω όσο έπρεπε ώστε να τα μάθω καλύτερα.
Συνοπτικά έχασα περισσότερο την θεωρία ασκήσεις λύσαμε πολλές

Εικόνα 128:Απάντηση του μαθητή Μ12 για το pre-test


Πιστεύω ότι είναι ένα μάθημα που θέλει χρόνο και συνεχή επανάληψη, δυστυχώς δεν έχω δώσει τόσο χρόνο όσο πρέπει να διαβάσω αλλά το προσπαθώ φέτος να διαβάζω περισσότερο στο σπίτι.

Εικόνα 129:Απάντηση του μαθητή Μ16 για το pre-test

Όπως φαίνεται και από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών, η χαμηλή τους επίδοση στο pre-test οφείλεται στο γεγονός ότι διδάχθηκαν την αντίστροφη συνάρτηση στα θερινά μαθήματα, δεν είχαν μελετήσει όσο θα έπρεπε την θεωρία και είχαν δουλέψει κυρίως θέματα εύρεσης του τύπου της. Οι απαντήσεις τους συμφωνούν και με τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης, κατά την οποία οι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι δεν είχαν ασχοληθεί με παρόμοια θέματα.

7.6 Πώς διαμορφώθηκε ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση μετά τη διδακτική παρέμβαση

Ο προσωπικός χώρος εργασίας των μαθητών/τριών στην αντίστροφη συνάρτηση μετά τη διδακτική παρέμβαση παρουσίασε σημαντικές αλλαγές σε σχέση με αυτόν πριν τη διδακτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα του post-test έδειξαν μια βελτίωση στην επίδοση των μαθητών/τριών αλλά και στον τρόπο που εργάζονται και δικαιολογούν τις απαντήσεις τους. Συνδυάζουν με άνεση τα στοιχεία επιστημολογικής και γνωστικής φύσης αλλά και τις διαφορετικές συνδέσεις με τις οποίες τα στοιχεία επικοινωνούν (Delgadillo & Vivier, 2016).

Το επιστημολογικό τους επίπεδο έχει εμπλουτιστεί στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων, μέσω γεωμετρικών σχημάτων, συμβόλων και λεκτικών προβλημάτων, στο πλαίσιο των τεχνουργημάτων με περισσότερα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων αλλά και στο θεωρητικό πλαίσιο με ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα και αξιώματα που αφορούν την αντίστροφη συνάρτηση. Η προσθήκη των εργαλείων αυτών στο επιστημολογικό επίπεδο των μαθητών/τριών αξιοποιήθηκε σε ικανοποιητικό βαθμό από αυτούς στην ολοκλήρωση των θεμάτων του post-test.

Καθώς, όμως, η μαθηματική δραστηριότητα είναι πρωτίστως ανθρώπινη δραστηριότητα, είναι σημαντικό να μελετήσουμε την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών/τριών. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι η ενασχόληση των μαθητών/τριών με προβλήματα λεκτικά ή μη, πίνακες τιμών, σύνολα διατεταγμένων ζευγών, γραφικές παραστάσεις και όχι αποκλειστικά με τύπους συναρτήσεων, όπως είχαν συνηθίσει να εργάζονται οι μαθητές/τριες στα φροντιστηριακά τους μαθήματα, είχε θετικά αποτελέσματα τόσο στη διαδικασία της οπτικοποίησης όσο και στη λειτουργία της κατασκευής. Η λεκτική διαδικασία δεν παρουσίασε σημαντική βελτίωση αλλά πλέον βασίστηκε σε θεωρητικές προτάσεις που μελετήθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Τέλος, στις απαντήσεις των μαθητών/τριών του post-test η πλειονότητα αυτών αναδεικνύουν τις αλληλεπιδράσεις των τριών γενέσεων του μοντέλου του ΜΧΕ. Ο μετασχηματισμός των τεχνουργημάτων σε γνωστικά όργανα, οι διαδικασίες εξερεύνησης και πειραματισμού οι οποίες βασίζονται σε θεωρητικές προτάσεις , η θεωρητική επικύρωση των αποτελεσμάτων μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας η οποία βασίζεται σε αποκωδικοποίηση των πληροφοριών αλλά και αντίστροφα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μαθηματικό έργο των μαθητών/τριών είναι πληρέστερο μετά τη διδακτική παρέμβαση σε σχέση με την πρότερη κατάσταση τους.

7.6 Η συμβολή της διδακτικής παρέμβασης στην ανάπτυξη του προσωπικού χώρου εργασίας των μαθητών/τριών

Η συμβολή της διδακτικής παρέμβασης στην ανάπτυξη όλων των διαστάσεων της μαθηματικής εργασίας των μαθητών/τριών υπήρξε καθοριστική όπως έδειξαν και τα αποτελέσματα της έρευνας. Η επιλογή των δραστηριοτήτων, η οποία έγινε με βάση το μοντέλο του ΜΧΕ έτσι ώστε να διαφαίνονται οι γενέσεις μεταξύ των στοιχείων του επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου καθώς και οι αλληλεπιδράσεις των κατακόρυφων επιπέδων που δημιουργούνται, βοήθησαν τους/τις μαθητές/τριες σε διαδικασίες εξερεύνησης, συλλογισμού και τεκμηρίωσης των απαντήσεων τους.

Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν μέσα από το πλαίσιο των αναπαραστάσεων του επιστημολογικού επιπέδου του ΜΧΕ να αποκωδικοποιήσουν και να ερμηνεύσουν τα σύμβολα με στόχο την κατασκευή εσωτερικών αναπαραστάσεων και σχέσεων. Εργάστηκαν σε αντικείμενα- εργαλεία του επιστημολογικού επιπέδου και ενεργοποίησαν και τις τρεις διαστάσεις του μοντέλου.

Μια από τις δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης άρα και της αντίστροφης συνάρτησης αποτελούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της. Οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης που επιλέχθηκαν, βοήθησαν τους/τις μαθητές/τριες να οπτικοποιήσουν τον ορισμό της συνάρτησης και της αντίστροφης συνάρτησης και να ελέγξουν την ισχύ του. Η σημειωτική γένεση οδήγησε τους περισσότερους μαθητές/τριες στη λεκτική γένεση, η οποία μετέτρεψε τον ορισμό από το πλαίσιο αναφοράς του επιστημολογικού επιπέδου σε ένα τεχνούργημα και μέσω της εργαλειακής γένεσης τους επέτρεψε να κατασκευάσουν την κατάλληλη αναπαράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

Η χρήση του μαθηματικού λογισμικού GeoGebra κατά τη διάρκεια της παρέμβασης ήταν καθοριστική στην ανάπτυξη της ικανότητας ανακάλυψης της λύσης του μαθηματικού έργου. Η αλληλεπίδραση σημειωτικής- εργαλειακής γένεσης οδήγησε στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων της αντίστροφης συνάρτησης. Μέσω των κατάλληλων εργαλείων και τεχνουργημάτων του επιστημολογικού επιπέδου ανάπτυξαν την κατάλληλη επιχειρηματολογία για την απόδειξη των ιδιοτήτων.

Συμπερασματικά, λοιπόν, οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας εκπλήρωσαν τον στόχο τους. Η βελτίωση στην επίδοση των μαθητών/τριών στο post- test οφείλεται στο γεγονός ότι πλέον οι μαθητές/τριες κινούνται με επιτυχία στο κατακόρυφο επίπεδο εργαλειακής-λεκτικής γένεσης και αντίστροφα αλλά στη διασύνδεση της σημειωτικής με την εργαλειακή γένεση και την λεκτική γένεση.

8. Περιορισμοί της έρευνας

Οι κυριότεροι περιορισμοί της έρευνας ήταν η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος και η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Όπως έχει αναφερθεί πραγματοποιήθηκε βολική δειγματοληψία και όχι τυχαία, καθώς επίσης το μέγεθος του δείγματος ήταν μόλις δεκαεπτά μαθητές/τριες Γ’ Λυκείου του Προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής. Η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης καθορίστηκε από το πρόγραμμα σπουδών και τις απαιτήσεις του για ολοκλήρωση της ύλης και όχι από το επίπεδο των μαθητών/τριών και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην έννοια της συνάρτησης και της αντίστροφης συνάρτησης. Όσον αφορά τα θέματα των δυο τεστ, ήταν αρκετά και αυτό ίσως να δυσκόλεψε τους/τις μαθητές/τριες στη σωστή διαχείριση του χρόνου που απαιτούσαν για να τα απαντήσουν.

9. Προτάσεις για Μελλοντική έρευνα

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολήθηκε με τον ΜΧΕ της Ανάλυσης και συγκεκριμένα το ΜΧΕ της αντίστροφης συνάρτησης σε μαθητές/τριες του Προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής. Θα αποτελούσε ενδιαφέρον για μια μελλοντική έρευνα να εφαρμοστεί η διδακτική παρέμβαση και σε μαθητές/τριες του Θετικού Προσανατολισμού και να πραγματοποιηθεί μια συγκριτική μελέτη του προσωπικού χώρου εργασίας των δυο δειγμάτων.

Επίσης, όπως παρατηρήθηκε κατά την βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν έχουν πραγματοποιηθεί στην Ελλάδα αρκετές έρευνες με χρήση του μοντέλου του ΜΧΕ της

Ανάλυσης. Μια πρόταση για μελλοντική έρευνα θα αποτελούσε η χρήση του μοντέλου για την κατασκευή διδακτικών παρεμβάσεων με έννοιες της ανάλυσης που δυσκολεύουν τους μαθητές/τριες όπως είναι το όριο, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης.

Τέλος, θα ήταν σκόπιμο να μελετηθεί στο μέλλον ο προσωπικός χώρος εργασίας των εκπαιδευτικών υπό το πρίσμα του ΜΧΕ και ο κατάλληλος μαθηματικός χώρος εργασίας μέσα στο οποίο αναπτύσσεται κάθε φορά η δραστηριότητα.

10. Βιβλιογραφία

Ελληνική

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2010). ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ : *Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ.* Αθήνα : ΟΕΔΒ.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2012). ΑΛΓΕΒΡΑ : *Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ.* Αθήνα : Διόφαντος.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (2013). Μαθηματικά Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου : *Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα : Διόφαντος.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2009). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ : *Β' Γυμνασίου.* $4^{η}$ Ed. Αθήνα : Πατάκης.

Γαρουφαλίδης, Φ. (2018). *Το μοντέλο του μαθηματικού χώρου εργασίας και το πέρασμα από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική σκέψη* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.

ΔΕΠΠΣ, (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών, ΦΕΚ

303Β/13-03-2003; ΦΕΚ 304Β/13-03-2003.

ΙΕΠ - ΤΜΗΜΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ & ΣΥΜΒΑΣΕΩΝ 05/ 2014 26/157 Ανοικτός Τακτικός Διαγωνισμός «Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού για τα νέα μαθήματα του Γενικού Λυκείου» του Υποέργου 3 της Πράξης «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών» των Αξόνων Προτεραιότητας 1 , 2 & 3 -Οριζόντια Πράξη» , 05/2014.

Κατσαργύρης Β. , Μεντής Κ. , Παντελίδης Γ. , & Σουρλάς Κ. (1992). *Ανάλυση Γ' Λυκείου*. ΟΕΔΒ.

Ματσαγγούρας, Η. (2006). Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική αξιολόγηση της Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας τους. Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση, 7, 60-92.

Μπουμπουνάρα, Χ. (2020). *Η Ανάλυση και ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.

Πέλλα, Π. (2018). *Η γεωμετρική απόδειξη με μαθητές/τριες Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Φλώρινα.

Φλουρής, Γ. (1997). Αναλυτικά Προγράμματα για μια νέα εποχή στην Εκπαίδευση. (5η έκδοση). Αθήνα: Γρηγόρης.

Χατζηγεωργίου, Γ. (2004). Γνώθι το Curriculum. Αθήνα: Ατραπός

Ξενόγλωσση

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(7), 857-878.

Almog, N., & Ilany, B. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 347–364.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Attorps, I., Björk, K., Radic, M., & Viirman, O. (2013). Teaching inverse functions at tertiary level. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2533). Ankara: Middle East Technical University.

Bayazit, I., & Gray, E. (2004). UNDERSTANDING INVERSE FUNCTIONS: THE RELATIONSHIP BETWEEN TEACHING PRACTICE AND STUDENT LEARNING. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 103–110.

Beguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems*, 12(1), 1.

Beke, E. (1914). Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires, *L'Enseignement Mathématiques*, Vol. 16. Genève.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217–235.

Bisanz, J., & LeFevre, J. (1992). Understanding elementary mathematics. In J. I. D. Campbell (Ed.). *The nature and origins of mathematical skills*. Amsterdam: North Holland Elsevier Science, 113–136.

Breen, S., Larson, N., Ann O'Shea, A., & Pettersson, K. (2015). Students' Concept Images of Inverse Functions. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic*. pp.2228-2234.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles ιpistιmologiques et les problθmes en mathιmatique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4(2), 165–198.

Brown, C. A., & Reynolds, B. (2007). Delineating Four Conceptions of Function: A Case of Composition and Inverse. *Conference Papers -- Psychology of Mathematics & Education of North America*, 1-193.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2nd edn 1991). Grenoble, France: La Pensιe sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In St Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 170–174). London: Springer.

Cornu, B. (1991). Limits. In A. J. Bishop (Managing Ed.) & D. Tall (Vol. Ed.). *Mathematics Education Library: Advanced mathematical thinking*, 11, pp. 153–166. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Delastri, L., Purwanto, Subanji, & Muksar, M. (2019). Students' conceptual understanding on inverse function concept. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1157*. IOP Publishing. Doi :10.1088/1742-6596/1157/4/042075

Delgadillo, E. M. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico : profesores en formación inicial. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 227–247.

Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM, doi: 10.1007/s11858-016-0777-9*

DeMarois, P. (1996). Beginning algebra students' images of the function concept. doi: 10.1.1.46.5260.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy,* (pp. 85-106). U.S.A.: M.A.A.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue. Difficultıs majeures pour une notion mineure. *Petit x, 3*, 43–67.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Engelke, N., Oehrtman, M. C., & Carlson, M. P. (2005). Composition of Functions:

Precalculus Students' Understandings. *Conference Papers - Psychology of Mathematics & Education of North America*, 1-8.

Eisenberg, T. (2002). *Functions and associated learning difficulties*. In Advanced mathematical thinking (pp. 140-152). Springer, Dordrecht.

Eisner, E. W. (1987). Why the textbook influences curriculum? *Curriculum Review,*

26(3), 11-13.

Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM*, 48, pp. 895–907.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117–146.

Even, R. (1992). The inverse function: Prospective teachers' use of "undoing". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23:4, 557-562, DOI: 10.1080/0020739X.1992.10715689

Even, R. (1989). Prospective secondary teachers' knowledge and understanding about

mathematical functions. (Ph. D). Michigan State University, East Lansing, MI.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Gagatsis, A., & Thomaidis, Y. (1995). *Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag [A study of a historical design, development and didactic transposition of the term "absolute value"].* Journal fur Mathematik—Didaktik, 16, 3–46.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology,* 24(5), pp. 645-657.

Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 45(2), 159–173.

Hertel, J. T., & Cullen, C. (2011). Teaching trigonometry: A directed length approach. In L. R. Wiest & T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1400-1407). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Heibert (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics*, (Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates), pp. 199–223.

Hodgson, B.R. (1994). Le calcul infinitésimal, In D.F. Robitaille, D.H. Wheeler et C. Kieran, dir (Eds.), *Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7)*, Presses de l'Université Laval (pp. 157–170).

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'etude de l'enseignement de la geometrie en formation de maitres. *Educational Studies in Mathematics,* 40, 283-312.

Inhelder, B., & Sinclair, H. (1969). Learning Cognitive Structures, in P. H. Mussen, J. Langer., & M. Covington (Eds.), *Trends and issues in developmental psychology*, pp. 2-21. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 79-103.

Johansson, M. (2005). *Mathematics textbooks – the link between the intended and the implemented curriculum?* Lulea: Department of Mathematics.

Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle school: An approach based on neo-Piagetian theory. *Scientia paedagogica experimentalis*, 35(1), 7-54.

Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and Metacognitive Factors Involved in the Learning of Mathematics: The Case of Graphic Representations of Functions. In H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi & A. Sierpinska (Eds), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288). Reston, Virginia: NCTM.

Kilpartrick, J., Swafford S., & Findell B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC : National Academy Press.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2010). A French look on the Greek geometrical working space at secondary school level. *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 686-695).

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1-64.

Lucus, C. A. (2005). *Composition of Functions and Inverse Function of a Function: Main ideas as perceived by teachers and preservice teachers.* (Doctor of Philosophy Dissertation), Simon Fraser University, BC, Canada.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. *In Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 378-385).

McKnight, C. C., Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., Kifer, E., Swafford, J. O., Travers, K. J., & Cooney, T. J. (1987). *The underachieving curriculum: Assessing U.S. school mathematics from an international perspective*. Champaign, IL : Stipes.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., & Parraguez, M. (2015). *El obstáculo epistemológico del infinito actual : persistencia, resistencia y* *categorías de análisis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 329–358.

Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48, 793–807.

Miranda, V. C., Pluvinage, F., & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM*, 48(6), 809-826.

Moore, K. C., & LaForest, K. L. (2014). The circle approach to trigonometry. *Mathematics Teacher, 107(8), 616-623.*

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Virginia, USA: NCTM.

Nolasco, J. (2018). THE STRUGGLE WITH INVERSE FUNCTIONS DOING AND UNDOING PROCESS. California State University, California.

Oktac, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, J. -B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue*, chapter 4, (pp. 87–122). Switzerland: Springer.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L. F., Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2015). Pre-service teachers' inverse function meanings. In T. Fukawa-Connelly, N. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 853-867). Pittsburgh, PA: West Virginia University.

Peacock, A., & Cleghorn, A. (2004). Missing the meaning: *The Development and Use of Print and NonPrint Text Materials in Diverse School Settings*. New York: Palgrave Macmillan.

Peaker, G. F. (1971). *The Plowden children four year later*. London: National Foundation for Educational Research in England and Wales.

Rabadi, N. (2015). Overcoming difficulties and misconsceptions in calculus (Doctoral dissertation, Teachers College, Columbia University).

Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48(6), 925-933.

Rittaud, B., & Vivier, L. (2014). Different praxeologies for rational numbers in decimal system—the 0, 9 case. *In Proceedings of Cerme 8*, Antalya.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*, North Holland.

Schneider, M. (2014). Epistemological obstacles in mathematics education. In St Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, (pp. 214–217). London: Springer.

Sfard, A. (1992). Operatinal origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). U.S.A.: MMA.

Silver, E. A. (1986). in *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, In J. Hiebert (Ed.). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5–67.

Sierprinska, A. (1992). On the understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). U.S.A.: MAA.

Stupel, M. (2013). A special application of absolute value techniques in authentic problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(4), 587–595.

Tall, D. O., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.

Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. *In Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Berkeley.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks*. Dordrecht, The Netherlands.

Vandebrouck F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note d'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. In E. Dubinsky, D. Mathews, & B. E. Reynolds (Eds.), *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics,* 44, pp. 175-196.

Washington, DC US: The Mathematical Association of America.

Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers J. *for Research in Mathematics Education 19,* (5), 371–384.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 21.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5–28.

Wilson, F., Adamson, S., Cox., T. & O'Bryan, A. (2011). Inverse functions. What our teachers didn't tell us. *Mathematics Teachers,* 104(7), 501-507.

Παράρτημα Α’

Φύλλο Εργασίας 1

Ο Νόμος της Ζήτησης – Καμπύλη Ζήτησης

Σύμφωνα με το Νόμο της Ζήτησης :

«*Όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητά του, και, όταν η τιμή του αυξάνεται, μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα από το αγαθό αυτό, όταν οι άλλοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση παραμένουν σταθεροί (ceteris paribus).*»

Να δώσετε παραδείγματα που να επιβεβαιώνουν τον παραπάνω νόμο της Οικονομίας.

Η συνάρτηση Ζήτησης

Όταν μελετάμε τις μεταβολές στις ζητούμενες ποσότητες ενός προϊόντος καθώς μεταβάλλεται η τιμή του, δεχόμαστε ότι όλοι οι άλλοι παράγοντες οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση του προϊόντος αυτού παραμένουν σταθεροί. Αυτήν την παραδοχή (συνθήκη) στην οικονομία τη διατυπώνουμε με την έκφραση “ceteris paribus”, που σημαίνει: τα άλλα ίσα ή σταθερά.

Θεωρώντας σταθερούς τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης (π.χ. τις προτιμήσεις ή το εισόδημα των καταναλωτών κτλ.) μπορούμε να παραστήσουμε τη σχέση ανάμεσα στη ζητούμενη ποσότητα και την τιμή ενός προϊόντος με τη μορφή συνάρτησης:

$Q_D = f(P)$, όπου Q_D = η ζητούμενη ποσότητα

P = η τιμή του προϊόντος

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι η καμπύλη ζήτησης.

Η συνάρτηση ζήτησης μπορεί να πάρει διάφορες αλγεβρικές μορφές.

Για ευκολία θα εξετάσουμε δυο απλές μορφές συναρτήσεων.

i) Γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

Η γραμμική συνάρτηση ζήτησης έχει τον τύπο: $Q_D = \alpha + \beta P$.

Με δεδομένα ότι η ζητούμενη ποσότητα και η τιμή δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, θα πρέπει: $Q_D \geq 0$ και $P \geq 0$.

Τι εκφράζει η παράμετρος α και ποιο είναι το πρόσημο της;

Τι εκφράζει η παράμετρος β και ποιο είναι το πρόσημο της;

ii) Η ισοσκελής υπερβολή

Η συνάρτηση ζήτησης έχει τύπο: $Q_D = \frac{A}{P}$, όπου A σταθερός θετικός αριθμός. Το διάγραμμά της είναι ισοσκελής υπερβολή με ασύμπτωτους τους άξονες Q_D και P.

Τι εκφράζει η παράμετρος A;

Εισαγωγική Δραστηριότητα Αντίστροφης Συνάρτησης

Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης καθορίζει την ζήτηση αυτής από τους καταναλωτές. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές σε ευρώ ανά λίτρο αμόλυβδης βενζίνης σε δυο χώρες της Ευρώπης και η αντίστοιχη ημερήσια ζήτηση λίτρων σε εκατομμύρια λίτρα.

Χώρα Α

Τιμή	0	0,75	0,90	1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6
Ημερήσια ζήτηση	400	362,5	355	350	345	340	335	325	320

Χώρα Β

Τιμή	0,74	0,85	0,94	1	1,15	1,24	1,35	1,44	1,55
Ημερήσια ζήτηση	343,3162	298,8871	270,2702	254,054	220,9165	204,8823	188,1881	176,4264	163,9058

Α1. Να παραστήσετε τα δεδομένα κάθε πίνακα σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων και να εξετάσετε αν η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από μια γραμμική εξίσωση ή από μια ισοσκελή υπερβολή.

Α2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.

Α3. Ποια θα είναι η ημερήσια ζήτηση σε κάθε χώρα, αν η τιμή του λίτρου είναι:

i) 0,93€ ii) 1,25€ iii) 1,47€ αντίστοιχα;

Α4. Ποια θα είναι η τιμή του λίτρου σε κάθε χώρα, αν η ημερήσια ζήτηση λίτρων είναι :

i) 360 ii) 310 iii) 290 εκατομμύρια λίτρα αντίστοιχα;

Α5. Να βρείτε την συνάρτηση της τιμής του λίτρου ως προς την ημερήσια ζήτηση για κάθε χώρα και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή ή ισοσκελής υπερβολή.

Α6. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των παραπάνω συναρτήσεων;

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι:

αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A), μιας συνάρτησης f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x)=y, δηλαδή αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to R$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το f(A), σύνολο τιμών το A και ισχύει η ισοδυναμία : $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η συνάρτηση g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η συνάρτηση g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Θέμα Β

Όταν ένα προϊόν βγαίνει στην κυκλοφορία, η τιμή του μειώνεται συνάρτηση του χρόνου που βρίσκεται στην αγορά. Η εταιρεία BestPrice για να υπολογίσει την τιμή f σε ευρώ ενός κινητού τηλεφώνου x μήνες μετα την κυκλοφορία του χρησιμοποιεί την συνάρτηση : $f(x) = 750 - 25x$

Β1. Υπολογίσετε το f(12) και ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο του προβλήματος.

Β2. Πως ερμηνεύεται το β στην ισότητα f(β)=0; Υπολογίσετε την τιμή του β.

Β3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

Β4. Η συνάρτηση f είναι 1-1; Αν ναι, να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

Β5. Πως ερμηνεύεται το γ στην ισότητα $f^{-1}(\gamma)=20$; Υπολογίσετε την τιμή του γ.

Β6. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f;

Θέμα Γ

Μια συνάρτηση περιγράφεται παρακάτω με τρεις διαφορετικούς τρόπους: πίνακα τιμών, εξίσωση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Να εξετάσετε για κάθε περίπτωση αν αντιστρέφεται και να περιγράψετε την αντίστροφη της με τον ίδιο τρόπο. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

1ος τρόπος: Πίνακας τιμών

x	1	2	5	10	15	20
g(x)	19,8	19,6	19	18	17	16

x	-1	0	1	2	5	10
f(x)	-4	0	6	12	7	6

x	1,1	2,2	5,4	6	7,8	12
h(x)	-7	-6	-7	-4	-3	-2

$2^{ος}$ τρόπος: Εξίσωση

$$g(x)=(x-2)(x+3)+1$$

$$f(x)=\ln(1-x)$$

$$h(x)=e^{-x}+2$$

$3^{ος}$ τρόπος: Σύνολο διατεταγμένων ζευγών

$$C_g=\{(1,5),(2,25),(3,125),(4,625)\}$$
$$C_f=\left\{\left(-2,e^{-2}\right),\left(-1,e^{-1}\right),(0,1),(1,e)\right\}$$
$$C_h=\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,0),\left(2,\frac{1}{2}\right),(8,8)\right\}$$

Θέμα Δ

Δ1. Α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x,\ x\in[-2\pi,2\pi]$ και

να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$$
$$f_2(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$f_3(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.

Δ2. Α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-2\pi, 2\pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$g_1(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-2\pi, -\pi]$$
$$g_2(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-\pi, 0]$$
$$g_3(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [0, \pi]$$
$$g_4(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [\pi, 2\pi]$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.

Δ3. Α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$h(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αντιστρέφεται.

Β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$h_1(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

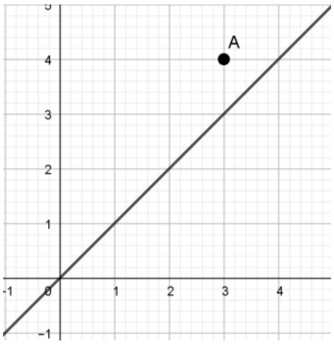
$$h_2(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

και να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης για κάθε συνάρτηση.

Φύλλο Εργασίας 2

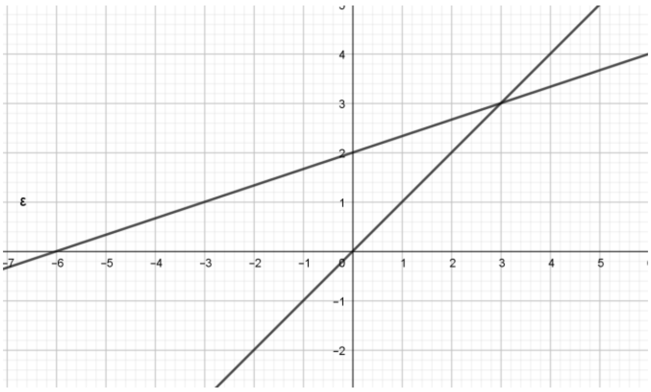
Θέμα Α

Α1. Στο παρακάτω σύστημα ορθογωνίων αξόνων να βρείτε το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(3,4) ως προς τη διχοτόμο των γωνιών xOy και x'Oy'.



Α2. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Β του σημείου Α(α, β) ως προς την ευθεία y=x έχει συντεταγμένες (β,α).

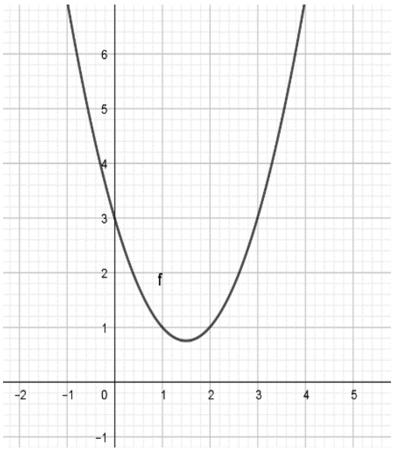
Α3. Να σχεδιάσετε την συμμετρική ευθεία (ζ) της ευθείας (ε) ως προς την ευθεία y=x. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

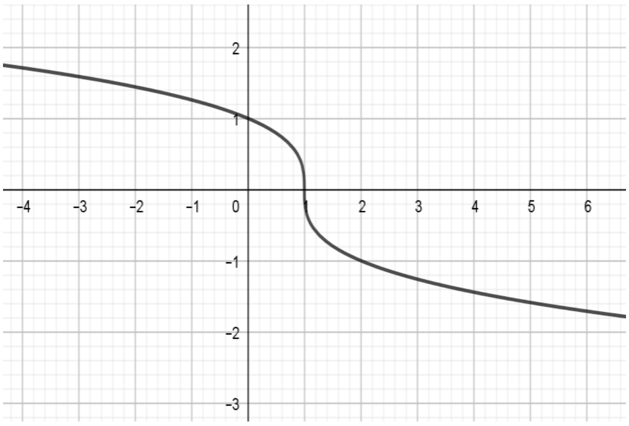


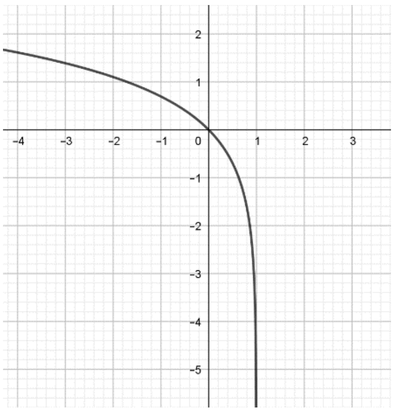
Α4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και (ζ). Ποια σχέση έχουν οι δυο αυτές γραμμικές συναρτήσεις;

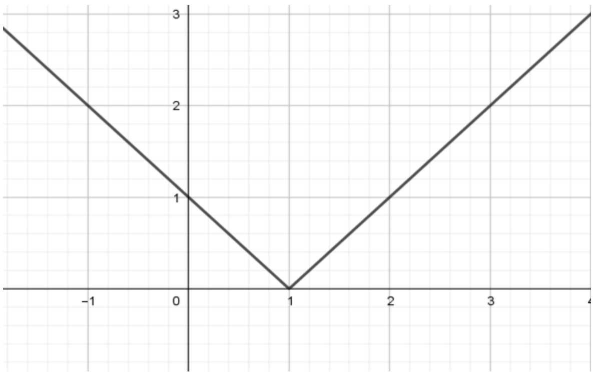
Θέμα Β

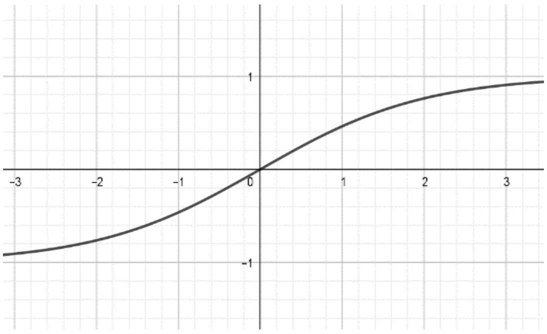
Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμία από αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης.

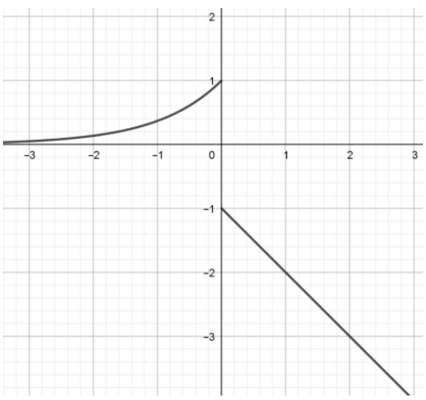

f





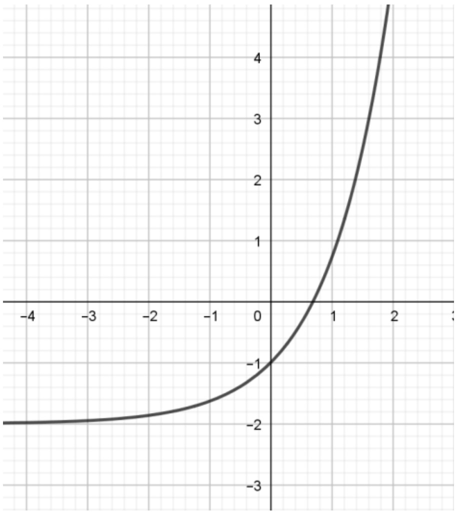


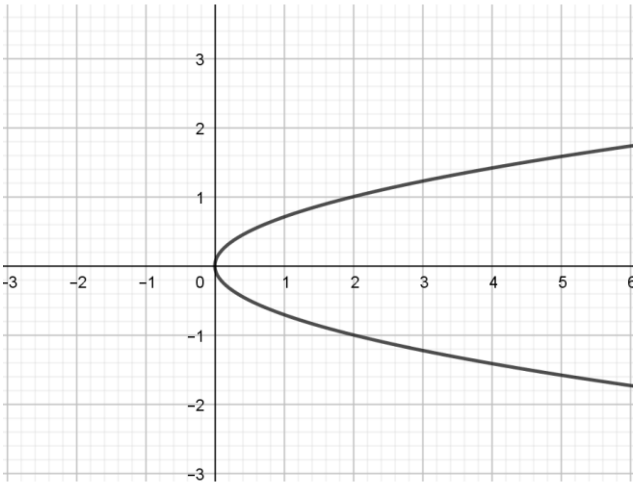


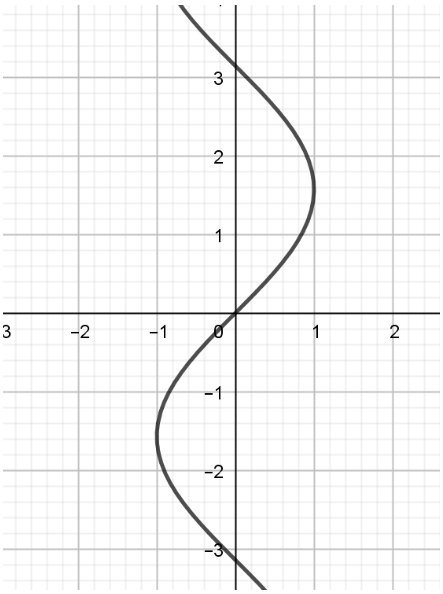


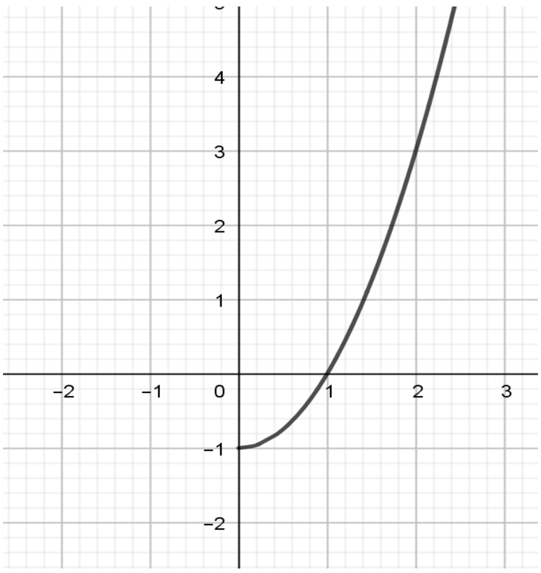
Θέμα Γ

Δίνονται τα συμμετρικά γραφήματα των συναρτήσεων f_1 , f_2 , f_3 , f_4 ως προς την ευθεία y=x. Να εξετάσετε αν τα γραφήματα αυτά είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στην συνέχεια να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f_1 , f_2 , f_3 , f_4 είναι 1-1.









Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι:

επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στην γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ'(β,α) θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις Cκαι C' της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας 1-1 συνάρτησης f.

x	-1	3	4	5,1	7	9	11	12,7	14
f(x)	7	10	12	13	-6	-1	-3	-8	-9

Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και στην συνέχεια να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες. Τι παρατηρείτε;

x	-1	3	4	5,1	7	9	11	12,7	14
$f^{-1}(f(x))$									

x	7	10	12	13	-6	-1	-3	-8	-9
$f(f^{-1}(x))$									

Δ2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς ή ψευδείς και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

i) Ισχύει $(fog)(x) = x, x \in R$.

ii) Ισχύει $(gof)(x) = x, x \in R$

Φύλλο Εργασίας 3

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h με :

$f(x)=\frac{2}{3}x-12$ με $-2<x<3$,

$g(x)=3(x+2)^3$,

$h(x)=\frac{1}{x-3}$ με $x<3$

Α1. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αντιστρέφονται.

Α2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση για καθεμιά από τις συναρτήσεις.

Α3. Να ορίσετε την σύνθεση καθεμίας από τις παραπάνω συναρτήσεις με την αντίστροφη τους καθώς και την σύνθεση της αντίστροφης με την συνάρτηση. Τι παρατηρείτε;

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$f^{-1}(f(x))=x, x\in A$ και $f(f^{-1}(x))=x, x\in f(A)$

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln(e^x-e^{-x})$.

Β1. α. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης g και να ορίσετε την συμμετρική συνάρτηση h της g ως προς την ευθεία y=x.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

γ. Να εξετάσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης h στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Β2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε και η αντίστροφη της είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο τιμών της συνάρτησης με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=-x^3$.

Γ1. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης g και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

Γ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία κάθε συνάρτησης με την ευθεία y=x και με την αντίστροφη της. Τι παρατηρείτε;

Γ4. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε οι εξισώσεις: $h(x)=x,\ h^{-1}(x)=x$ και $h(x)=h^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες στο διάστημα $\Delta\cap h(\Delta)$

Θέμα Δ

Δ1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση τους.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x<2 \\ \sqrt{x-2}+2, & \text{αν } x\ge 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{αν } x\in(-2,0] \\ 3x-7, & \text{αν } x\in(0,3) \end{cases}$$

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-2$

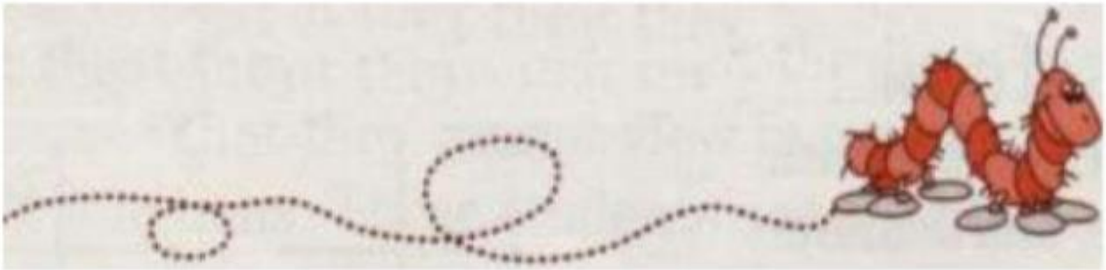
Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x)=-1$, $f^{-1}(x)=e$ και $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2}\right)=x-\sqrt{x}$, με $x>0$.

Παράρτημα Β’

Τεστ 1

Θέμα Α

Μια κάμπια σέρνεται πάνω σε ένα χαρτί όπως φαίνεται στο σχήμα.



A1. Εάν θέλαμε να προσδιορίσουμε τη θέση της κάμπιας πάνω στο χαρτί σε σχέση με το χρόνο, μπορεί η θέση να περιγράφει ως μια συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Α2. Μπορεί ο χρόνος να περιγράφει ως μια συνάρτηση της θέσης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Θέμα Β

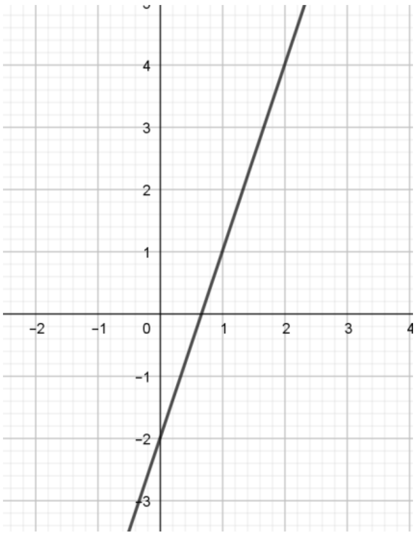
Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

x	1	2	3	4	5
f(x)	7	3	1	9	5

Β2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$C_g = \{(1,3),(2,15),(3,8),(4,-2),(5,-1)\}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτησης είναι 1-1 και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)



Β4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ αντιστρέφεται και αν ναι, να υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 3x + 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x$, να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x) = 6$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $k(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}, x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ3. Να ορίσετε την σύνθεση της συνάρτησης k με την αντίστροφη της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης k με την συνάρτηση. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση k μπορεί να πάρει τη μορφή $k(x)=1+\frac{3}{e^x-1}, x>0$ και να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 20)

Τεστ 2

Θέμα Α

Δώδεκα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν φόρο επί των πωλήσεων 6%. Δηλαδή, για κάθε ευρώ που δαπανάται για αγορά σε ένα κατάστημα, θα πρέπει να αποδίδονται στο δημόσιο 6 λεπτά.

Α1. Μπορεί ο φόρος επί των πωλήσεων να εκφραστεί ως συνάρτηση της τιμής αγοράς των προϊόντων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Α2. Μπορεί η τιμη της αγορας των προϊόντων να εκφραστεί ως συνάρτηση του φορου επι των πωλησεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Θέμα Β

Β1. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα της αντίστροφης συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

x	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	5	9	1	3	7

Β2. Δίνεται το σύνολο διατεταγμένων ζευγών της συνάρτησης g

$C_g = \{(3,1),(15,2),(8,3),(-2,4),(-1,5)\}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 και να

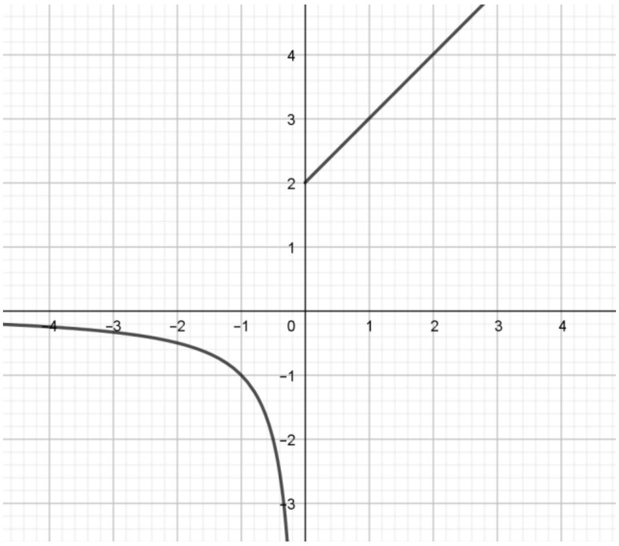
κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της αντίστροφης

συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h. Να εξετάσετε αν η συνάρτησης είναι

1-1 και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)



Β4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $m(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [0, \pi]$ αντιστρέφεται και αν ναι, να

υπολογίσετε τις τιμές της αντίστροφης για x=-1, 0, 1.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση

$f^{-1}(x) = x^5 + 5x + 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του x αν f(x)=1. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1}$, να υπολογίσετε την τιμή του x αν $f^{-1}(x) = 6$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $t(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right), x>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφης της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ3. Να ορίσετε την σύνθεση της συνάρτησης t με την αντίστροφη της και τη σύνθεση της αντίστροφης της συνάρτησης t με την συνάρτηση. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t μπορεί να πάρει τη μορφή $t(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right), x>1$ και να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης και της αντίστροφης της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 20)