ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

<u>ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

Τίτλος: Εισάγοντας τη διαίρεση μέτρησης στο Νηπιαγωγείο: μια διδακτική παρέμβαση

"Introducing quotitive division in Kindergarten: a teaching intervention"

Ονοματεπώνυμο: Αναστασία Κανδύλη

Α.Ε.Μ.: 3849

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Χρήστου

Β΄ Βαθμολογήτρια: Βασιλική Πλιόγκου

ΙΟΥΝΙΟΣ, 2022

Περιεχόμενα

Λίστα Εικόνων

Λίστα Πινάκων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα από καρδιάς να ευχαριστήσω τον κύριο Κωνσταντίνο Χρήστου, ο οποίος επέβλεπε την πτυχιακή μου εργασία και με καθοδηγούσε σε όλη τη διάρκεια υλοποίησής της. Μου προσέφερε πληθώρα γνώσεων και χωρίς την πολύτιμη βοήθειά του δεν θα κατάφερνα να ολοκληρώσω την εργασία αυτή.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Νηπιαγωγό, κυρία Κωνσταντίνα, και τα παιδιά του $1^{ου}$ Ολοήμερου Νηπιαγωγείου Άργους Ορεστικού Καστοριάς, διότι με τη συμμετοχή τους στην έρευνά μου, συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας. Βέβαια, ευχαριστώ πολύ και τους γονείς των μαθητών, γιατί επέτρεψαν τη συμμετοχή των παιδιών τους στην έρευνά μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία στάθηκε δίπλα μου και με υποστήριξε, προκειμένου να ανταπεξέλθω στις όποιες δυσκολίες υπήρξαν.

Εισάγοντας τη διαίρεση μέτρησης στο Νηπιαγωγείο: μια διδακτική παρέμβαση

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο τα παιδιά του Νηπιαγωγείου μπορούν να κατανοήσουν τη διαίρεση μέτρησης. Επίσης, να εξεταστεί κατά πόσο μπορούν να βοηθηθούν, προκειμένου να κατανοήσουν την έννοια της διαίρεσης μέτρησης από μια παρέμβαση με ένα ομαδικό παιχνίδι, στο οποίο τα παιδιά μπαίνουν σε ομάδες συγκεκριμένου πλήθους. Στην έρευνα συμμετείχαν δεκατέσσερα παιδιά Νηπιαγωγείου. Η έρευνα έγινε σε τρεις φάσεις, στον προ-έλεγχο, την παρέμβαση και τον μετα-έλεγχο. Στον προ-έλεγχο δόθηκαν στα παιδιά τέσσερα έργα με διαιρέσεις μέτρησης. Στην παρέμβαση έπαιξαν το μαθηματικό παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle). Το παιχνίδι αυτό είναι ένα ομαδικό παιχνίδι, στο οποίο τα παιδιά του Νηπιαγωγείου κλήθηκαν να μπουν σε ισοπληθείς ομάδες, να καταμετρήσουν τόσο τις ομάδες όσο και τα άτομα ανά ομάδα και να εξάγουν συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσά τους. Τέλος, στον μετα-έλεγχο δόθηκαν τέσσερα έργα παρόμοια με εκείνα του προ-ελέγχου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά δυσκολεύτηκαν αρχικά με τις δραστηριότητες, όμως τελικά οι επιδόσεις τους βελτιώθηκαν. Φάνηκε ότι μερικά παιδιά μπόρεσαν να κατανοήσουν κάποια βασικά στοιχεία της διαίρεσης μέτρησης και την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο, μια έννοια αρκετά δύσκολη για μικρά παιδιά.

Λέξεις- κλειδιά: διαίρεση μέτρησης, διαίρεση, πολλαπλασιασμός, παρέμβαση

Abstract

The purpose of the study was to test whether kindergarten children may understand the quotitive division. Also, whether an intervention based on a game in which the whole group of children from the classroom participates, could help them in this direction. In the intervention, the game «Mingle» was played where the children were asked to make groups of equal number of people per group, count the groups and the number of children per group and discuss about the relations. Fourteen primary school children from one kindergarten classroom participated in the study. The study took place at three phases: the pre-test, the intervention, and the post-test. In the pre-test, children were given four tasks about quotitive division. They were asked to say how many groups of items we get when a whole amount of items is putting in groups of the same numbers of items per group. In the intervention, children played the group mathematic game «Mingle» and finally, in the post-game were given four tasks like those of the pre-test. The results showed that the children initially had difficulty with the activities, but in the end their performance was better. That is, they could understand main aspects of quotitive division some could refer explicitly to inverse relationship of the divisor to the quotient, a concept quite difficult for young children.

Key- words: quotitive division, division, multiplication, intervention

1. Εισαγωγή

Η διαίρεση θεωρείται δύσκολη ως μαθηματική πράξη, ιδιαίτερα για τα παιδιά του Νηπιαγωγείου (Κορνηλάκη & Nunes, 1999). Λόγω της αυξανόμενης δυσκολίας προτιμάται να διδάσκεται τελευταία από όλες τις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός) (Καράλης, 2018).

Παρ’ όλα αυτά, σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα του Νηπιαγωγείου, η διαίρεση πρέπει να διδάσκεται στο Νηπιαγωγείο. Μέσω της επίλυσης δραστηριοτήτων διαίρεσης, τα παιδιά θα ενεργούν με μαθηματικό τρόπο σκέψης, ο οποίος θα τους βοηθήσει να ανταπεξέλθουν στα όποια προβλήματα συναντήσουν μελλοντικά στη ζωή τους. Ακόμη, θα αποκτήσουν τη δυνατότητα να ομαδοποιούν και να μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες κ.ο.κ. (ΔΕΠΠΣ, 2003· ΠΣΝ, 2011· ΑΠΣΝ, 2014 & ΠΣΝ, 2021).

Υπάρχουν δύο βασικά είδη διαίρεσης, τα οποία διδάσκονται συστηματικά στο σχολείο. Η διαίρεση μερισμού και η διαίρεση μέτρησης. Στη διαίρεση μερισμού, μία ποσότητα χωρίζεται σε ίσα μέρη. Ενώ στη διαίρεση μέτρησης, οι μαθητές αναζητούν πόσες ομάδες ίσου πλήθους δημιουργούνται από μία μεγαλύτερη συλλογή (Βικάρη, 2021). Γενικά, τα παιδιά χρησιμοποιούν ποικίλες στρατηγικές, προκειμένου να λύσουν επιτυχώς τις δραστηριότητες διαίρεσης. Για παράδειγμα, επιλέγουν τη στρατηγική της «ένα προς ένα» απόδοσης (Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2017).

Οι τροχιές μάθησης είναι θεωρητικά εργαλεία, τα οποία δημιουργούν μια ιεραρχημένη διάταξη των μαθηματικών στόχων ανάλογα με την ηλικία και διακρίνονται σε τρεις κύκλους (Τζεκάκη, 2011). Αναφορικά με την τροχιά μάθησης της διαίρεσης υπάρχουν ηλικίες ορόσημα, στις οποίες τα παιδιά αποκτούν συγκεκριμένες γνώσεις. Για παράδειγμα, τα παιδιά δύο ετών έχουν τη δυνατότητα να μοιράζουν μία ποσότητα αντικειμένων (π.χ. δέκα καραμέλες) σε μία ομάδα ανθρώπων, όχι όμως ισόποσα. Έπειτα, τα παιδιά ηλικίας τριών ετών, όταν έχουν μία συγκεκριμένη ποσότητα (μικρότερη του πέντε), μπορούν να τη μοιράσουν ίσα σε δύο άτομα και στο τέλος να πουν πόσα έδωσαν στον καθένα («Learning Trajectories for Primary Grades Mathematics Developmental Levels», 2022).

Η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι δύο πράξεις αντίστροφες. Ο πολλαπλασιασμός γίνεται πιο εύκολα κατανοητός, ως πράξη, από τους μαθητές. Γι’ αυτό στο σχολείο διδάσκονται πρώτα τον πολλαπλασιασμό και μετά τη διαίρεση (Καράλης, 2018).

Η διαίρεση μερισμού διαφέρει από τη διαίρεση μέτρησης. Στη διαίρεση μερισμού, η οποία διδάσκεται πρώτη στα παιδιά, ένα αντικείμενο διαιρείται σε ίσα τμήματα. Ενώ, στη διαίρεση μέτρησης οι μαθητές γνωρίζουν το πλήθος της κάθε ομάδας, όπως και το συνολικό πλήθος και πρέπει να βρουν το πλήθος των ομάδων (Λεμονίδης, 2016). Η διαίρεση μέτρησης δυσκολεύει αρκετά τα παιδιά, γιατί δεν αντιλαμβάνονται εύκολα την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη και του πηλίκου (Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2017).

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μια διδακτική παρέμβαση στο Νηπιαγωγείο, όπου τα παιδιά καλούνται να παίξουν το ομαδικό μαθηματικό παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle). Στο παιχνίδι αυτό, τα παιδιά δημιουργούν ισοπληθείς ομάδες, μετά απαριθμούν και τις ομάδες και τα άτομα ανά ομάδα και τέλος, εξάγουν συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσά τους. Στόχος αυτής της παρέμβασης είναι να διαπιστωθεί εάν και κατά πόσο τα παιδιά του Νηπιαγωγείου δυσκολεύονται με το συγκεκριμένο είδος διαίρεσης. Ακόμη, στόχος είναι να διαπιστωθεί εάν μέρος των δυσκολιών αυτών μπορεί να αρθεί μετά από την ενασχόληση με ένα ομαδικό παιχνίδι, όπου τα παιδιά δημιουργούν διαφορετικές σε πλήθος ομάδες, έχοντας σταθερό το συνολικό πλήθος. Για να απαντηθεί αυτό το ερευνητικό ερώτημα, στα παιδιά του Νηπιαγωγείου δόθηκαν έργα διαίρεσης μέτρησης σε προ-έλεγχο και μετα-έλεγχο, αμέσως μετά την παρέμβαση και αναλύθηκαν οι διαφορές στις επιδόσεις.

2. Διαίρεση

2.1. Ορισμός

Η διαίρεση (division) αποτελεί μια διαδικασία χωρισμού μιας ποσότητας (ή ενός συνόλου) σε ίσα μέρη. Η διαίρεση στο Νηπιαγωγείο είναι γνωστή και ως «μοίρασμα». Έτσι, δημιουργείται η προδιάθεση ότι στο Νηπιαγωγείο διδάσκεται μόνο η διαίρεση μοιρασμού. Γενικά, η διαίρεση θεωρείται δύσκολη ως διαδικασία, ειδικά για τα παιδιά του Νηπιαγωγείου (Κορνηλάκη & Nunes, 1999), γι' αυτό τον λόγο διδάσκεται τελευταία στο σχολείο. Τα παιδιά διδάσκονται, δηλαδή πρώτα την πρόσθεση και την αφαίρεση, μετά τον πολλαπλασιασμό και τέλος, τη διαίρεση (Καράλης, 2018).

Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι για να εκπονούν με επιτυχία οι μαθητές δραστηριότητες διαίρεσης, θα πρέπει πρώτα να έχουν κατανοήσει την έννοια του αριθμού. Δηλαδή θα πρέπει να γνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών (Schulz & Leuders, 2018).

Παλιότερα, κυριαρχούσε η πεποίθηση ότι τα παιδιά δεν γνωρίζουν τίποτα σχετικά με τη διαίρεση, προτού τη διδαχθούν στο σχολείο. Πρόσφατες έρευνες απέδειξαν το αντίθετο. Τα μικρά παιδιά έχουν τη δυνατότητα να ανταπεξέλθουν σε ασκήσεις διαίρεσης, ακόμη πριν τη διδαχή της στο σχολείο (Cheeseman, Downton, Roche & Ferguson, 2020) και χωρίς να γνωρίζουν το σύμβολο της διαίρεσης (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017), καθώς από τα τέσσερα τους έτη έχουν τη δυνατότητα να μοιράζονται δίκαια και με μεγάλη ευκολία τα πράγματα με τους φίλους τους (Κορνηλάκη & Nunes, 1999). Πιο αναλυτικά, τα παιδιά όταν είναι τριών χρονών έχουν την ικανότητα να μοιράζουν μια μικρή ποσότητα σε έναν μικρό αριθμό αποδεκτών. Επιπλέον, όταν είναι τεσσάρων χρονών, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μπορούν να μοιράζουν δίκαια μία ορισμένη ποσότητα που τους δίνεται σε έναν συγκεκριμένο αριθμό αποδεκτών. Τέλος, από τα πέντε τους χρόνια και έπειτα, είναι ικανά να μοιράζουν μία ποσότητα αντικειμένων σε μία μεγαλύτερη ομάδα ατόμων (Αλεξανδράκη, 2020). Βέβαια, αυτό δε σημαίνει ότι κατανοούν πλήρως το τι ακριβώς είναι η διαίρεση (Κορνηλάκη & Nunes, 1999). Το γεγονός ότι έχουν την ικανότητα να μοιράζουν δίκαια και σωστά μία συγκεκριμένη ποσότητα σε ορισμένο αριθμό αποδεκτών, δε σημαίνει ότι έχουν κατανοήσει πλήρως τη μαθηματική έννοια της διαίρεσης. Το παιδί, όταν πραγματοποιεί το μοίρασμα μιας ποσότητας, έχει ως στόχο να μοιράσει στους αποδέκτες δίκαια την ποσότητα. Όμως, όταν πρόκειται για τη διαίρεση, το ισόποσο μοίρασμα της ποσότητας στους αποδέκτες είναι βασική προϋπόθεση για να γίνει σωστά η διαίρεση (Δεσλή & Κορνηλάκη, 2013). Κομβικό σημείο για να αντιληφθούμε εάν όντως τα παιδιά γνωρίζουν την έννοια της διαίρεσης, είναι να κατανοούν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου (Κορνηλάκη & Nunes, 1999). Δηλαδή, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο διαιρέτης τόσο μικρότερο είναι το πηλίκο ή όσο μικρότερος είναι ο διαιρέτης τόσο μεγαλύτερο είναι το πηλίκο. Η κατανόηση της σχέσης αυτής θεωρείται σημαντική προϋπόθεση για την κατανόηση της πράξης της διαίρεσης (Κορνηλάκη, 2001).

Πολύ σημαντικό για να κατανοήσουν οι μικροί μαθητές τη διαίρεση, είναι να επιλέγονται προβλήματα πλοκής. Δηλαδή οι μαθητές να εξασκούνται σε προβλήματα, τα οποία έχουν πλούσιο περιεχόμενο για να διατηρούν το ενδιαφέρον τους. Επιπλέον, είναι καλύτερα να μην επιλέγονται προβλήματα όπου θα εκτελείται διαίρεση με το 0, γιατί οι εκπαιδευόμενοι δυσκολεύονται να κατανοήσουν τέτοιου είδους διαιρέσεις (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017).

2.2. Διαίρεση στα Αναλυτικά Προγράμματα του Νηπιαγωγείου

Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο (ΔΕΠΠΣ, 2003) δε γίνεται αναφορά στην πράξη της διαίρεσης και σε στόχους για την κατανόησή της. Απλώς, στο συγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών επισημαίνεται πως στόχος είναι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας, μέσω διαφόρων δραστηριοτήτων Μαθηματικών, να ενστερνιστούν τις πρότερες μαθηματικές γνώσεις.

Από την άλλη, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου (2011) και με το Αναθεωρημένο Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου (2014), στα Μαθηματικά που διδάσκονται στο Νηπιαγωγείο συμπεριλαμβάνονται όλες οι μαθηματικές έννοιες, οι οποίες αφορούν τη συνολική μαθηματική εκπαίδευση. Από την προσχολική ηλικία ξεκινά η ανάπτυξη αυτών των εννοιών, η οποία θα ολοκληρωθεί στο Λύκειο. Έπειτα, αναφορικά με την έννοια της διαίρεσης, στόχοι των προγραμμάτων αυτών είναι τα παιδιά να έχουν τη δυνατότητα να ομαδοποιούν, αλλά και να μοιράζουν τα αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες κ.ο.κ.

Τέλος, στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου (2021) λόγος γίνεται γενικώς για τα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων τα παιδιά εξασκούνται να λειτουργούν στην καθημερινότητά τους με βάση τη «μαθηματική σκέψη». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να ανταπεξέρχονται με επιτυχία και αποτελεσματικότητα στις δυσκολίες που συναντούν. Όμως στο συγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών επισημαίνεται ρητά και ο στόχος της διαίρεσης στο Νηπιαγωγείο. Πιο αναλυτικά, αναφέρεται ότι στόχος του προγράμματος είναι τα παιδιά να έχουν τη δυνατότητα να ομαδοποιούν και να μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες κ.ο.κ., κάτω από οποιαδήποτε συνθήκη εργάζονται (π.χ. στρατηγικές επαναλαμβανομένης πρόσθεσης ή αφαίρεσης, αναλογίας ή διανομής με διαφορετικές αναπαραστάσεις, χωρίς να μετρούν).

2.3. Μοντέλα- Είδη Διαίρεσης

Είναι αναγκαίο οι μαθητές να γνωρίζουν τα βασικά στοιχεία μιας διαίρεσης. Τα στοιχεία αυτά είναι ο διαιρέτης, ο διαιρετέος, το υπόλοιπο και το πηλίκο. Από εκεί και έπειτα, είναι δυνατή η εισαγωγή των ειδών της διαίρεσης (Καράλης, 2018). Σύμφωνα με τον Van de Walle (2004), εάν οι μαθητές αντιληφθούν τον όρο «μέγεθος», τότε θα μπορούν να αντιληφθούν και τα στοιχεία της διαίρεσης (Αλεξανδράκη, 2020). Τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας αρχικά, αντιλαμβάνονται τη διαίρεση ως μια διαδικασία κατά την οποία η ποσότητα μειώνεται (γνωστό ως έμμεσο μοντέλο της διαίρεσης) (Λεμονίδης, 2016).

Στο Νηπιαγωγείο εστιάζουμε στη διδασκαλία δύο ειδών διαίρεσης. Αρχικά, η διαίρεση μερισμού αφορά μία ποσότητα, η οποία χωρίζεται σε ίσα μέρη. Για παράδειγμα, σε δύο παιδιά δίνονται δέκα καραμέλες. Τα παιδιά πρέπει να τις μοιραστούν και να πάρουν ίσο αριθμό καραμελών. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται διαίρεση μερισμού (Βικάρη, 2021).

Το άλλο είδος διαίρεσης είναι η διαίρεση μέτρησης, στην οποία τα παιδιά καλούνται να μετρήσουν πόσες φορές «χωράει» ένας αριθμός σε έναν άλλο αριθμό. Για παράδειγμα, η Μαρία έχει δέκα μαρκαδόρους και θέλει να τους βάλει μέσα σε κασετίνες. Στην κάθε κασετίνα θα βάλει πέντε μαρκαδόρους. Πόσες κασετίνες θα χρειαστεί; Η διαδικασία αυτή λέγεται διαίρεση μέτρησης (Βικάρη, 2021). Η διαίρεση μέτρησης είναι γνωστή ως «στρατηγική της διανομής» (Αλεξανδράκη, 2020).

Περαιτέρω, εντοπίζονται άλλα δύο είδη διαίρεσης. Λόγος γίνεται για τη διαίρεση στη σύγκριση ομοειδών μεγεθών. Το παιδί στη διαίρεση αυτή καλείται να μετρήσει πόσο μεγαλύτερη (ή μικρότερη) είναι η ποσότητα ενός μεγέθους, από μία άλλη ποσότητα του ίδιου μεγέθους. Παραδείγματος χάριν, η Φιλίππα έχει δύο αρκουδάκια, το Α και το Β. Το αρκουδάκι Α έχει ύψος 12 cm. Το αρκουδάκι Β έχει το μισό ύψος από το αρκουδάκι Α. Πόσο είναι το ύψος (σε cm) από το αρκουδάκι Β; (Βικάρη, 2021).

Επιπλέον, άλλο ένα είδος διαίρεσης είναι η λεγόμενη διαίρεση ως εκφραστής της σχέσης μεταξύ μιας ποσότητας ενός μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης μιας άλλης ποσότητας ενός άλλου μεγέθους. Η διαίρεση αυτή είναι ιδιαίτερα δύσκολη και γι' αυτό δε διδάσκεται στο Νηπιαγωγείο, αλλά ούτε και στο Δημοτικό (Βικάρη, 2021). Σε αυτές τις δραστηριότητες για το συγκεκριμένο είδος διαίρεσης χρησιμοποιείται η αριθμογραμμή. Τα παιδιά μπορούν με ευκολία να μετράνε την απόσταση μεταξύ των σημείων πάνω στην αριθμογραμμή, προκειμένου να βρουν το μήκος τους (Κόπτση, 2021).

Τα παιδιά χρησιμοποιούν ποικίλες στρατηγικές, για να ανταπεξέλθουν σε δραστηριότητες διαίρεσης. Ανάλογα με το αναπτυξιακό στάδιο στο οποίο βρίσκονται, εφαρμόζουν διαφορετικές μεθόδους όπως να μετράνε με τα δάχτυλα των χεριών τους (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017). Συνήθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν την απόδοση «ένα προς ένα», για να επιτύχουν σε δραστηριότητες μοιρασιάς. Δηλαδή, αποδίδουν μία ποσότητα πραγμάτων σε έναν συγκεκριμένο αριθμό αποδεκτών (Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2017).

Επίσης, πολλοί μαθητές βασιζόμενοι στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και αφαίρεση, ως στρατηγικές, ολοκληρώνουν με επιτυχία τις δραστηριότητες της διαίρεσης. Γι' αυτό τον λόγο, με βάση τη ρεαλιστική προσέγγιση είναι απαραίτητο να ενθαρρύνουμε την ενασχόληση των παιδιών με δραστηριότητες διαίρεσης μερισμού, κατά την αρχική επαφή τους με την πράξη της διαίρεσης, καθώς οι δραστηριότητες αυτές συνδέονται πιο εύκολα με τις άτυπες στρατηγικές των μαθητών (Κολέζα, 2017). Το ίδιο ισχύει και με τις δραστηριότητες του πολλαπλασιασμού (Schulz & Leuders, 2018). Όμως, αυτό δε σημαίνει ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση θεωρούνται σύνθετες εκδοχές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αντίστοιχα. Μάλιστα, η διαίρεση στηρίζει τις απαρχές της στο σχήμα του μερισμού. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα παιδιά από πολλή μικρή ηλικία έχουν άριστες επιδόσεις σε δραστηριότητες, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται η μοιρασιά ποσοτήτων (Δεσλή & Κορνηλάκη, 2013).

3. Τροχιά Μάθησης για τη διαίρεση

Οι τροχιές μάθησης είναι θεωρητικά εργαλεία, που δημιουργούν μια ιεραρχημένη διάταξη των μαθηματικών στόχων ανά τις ηλικίες. Κάθε τροχιά μάθησης διακρίνεται σε τρεις κύκλους, ανάλογα με την ηλικία. Οι τρεις κύκλοι διάκρισης είναι οι εξής: α) πρώτος κύκλος, για παιδιά ηλικίας 5 έως 8 ετών (μαθητές Νηπιαγωγείου, Α΄ Δημοτικού και Β΄ Δημοτικού), β) δεύτερος κύκλος, για παιδιά ηλικίας 8 έως 12 ετών (μαθητές Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού) και γ) τρίτος κύκλος, για παιδιά ηλικίας 12 έως 15 ετών (μαθητές Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου) (Τζεκάκη, 2011).

Ο όρος «τροχιά μάθησης» («learning trajectory»), υπάρχει εδώ και 20 χρόνια, όμως η πηγή του συνδέεται με τρόπους διδασκαλίας και αναλυτικά προγράμματα παλιότερων χρόνων. Συγκεκριμένα, η τροχιά μάθησης σχετίζεται με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget (τα οποία μιλούν για το πώς εξελίσσονται η σκέψη και η λογική των παιδιών) και με τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) του Vygotsky (η οποία προβάλλει τις μεθόδους, με τις οποίες τα παιδιά αποκτούν γνώση, μέσω κοινωνικής υποστήριξης και «κατακτούν» ανώτερα επίπεδα σκέψης) (Αρσενίδου, 2018). Η ονομασία «τροχιά μάθησης» χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Marty Simon (1995). Με βάση τα λεγόμενά του, η τροχιά μάθησης (ή αλλιώς υποθετική τροχιά μάθησης, όπως αναφέρει) είναι μια ακολουθούμενη πορεία διδασκαλίας, μέσω της οποίας ο εκπαιδευτικός καταλαβαίνει ποιο είναι το επίπεδο των διδασκομένων και προς ποια κατεύθυνση έχει ο ίδιος τη δυνατότητα να τους κατευθύνει. Από την άλλη, οι Clements και Sarama (2004) υποστηρίζουν ότι οι τροχιές μάθησης είναι «οι περιγραφές της σκέψης και μάθησης των παιδιών σε έναν μαθηματικό τομέα και μια υποθετική πορεία, μέσω πολλών διδακτικών δραστηριοτήτων, με σκοπό να ενεργοποιήσουν τους μαθητές μέσα από την ανάπτυξη των επιπέδων της σκέψης τους» (Σακέτου, 2018).

Κάθε τροχιά μάθησης διαθέτει τρία μέρη: α) τον μαθηματικό στόχο, β) μια αναπτυξιακή διαδρομή, κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσουν τη γνώση τους, προκειμένου να επιτύχουν τον μαθηματικό στόχο και γ) ένα σύνολο από εκπαιδευτικές δραστηριότητες, οι οποίες συνδυάζονται με τα επίπεδα της σκέψης σε αυτή τη διαδρομή και υποστηρίζουν τους μαθητές, ώστε να αναπτύσσουν υψηλότερα επίπεδα της σκέψης. Οι μαθηματικοί στόχοι αναφέρονται στις μεγάλες μαθηματικές ιδέες, δηλαδή στο πλήθος εννοιών και δεξιοτήτων, που έχουν μεταξύ τους συνοχή. Επίσης, ενδυναμώνουν τη μεταγνώση των μαθηματικών και τον αναστοχασμό του εκπαιδευτικού πάνω στις μεθόδους διδασκαλίας, τις οποίες χρησιμοποιεί (Αρσενίδου, 2018). Αυτές οι ιδέες προέρχονται για παράδειγμα, από το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Υπουργείου, από μεγάλα project του National Math Panel κ.ά. (Σακέτου, 2018). Όσον αφορά τα επίπεδα της σκέψης της αναπτυξιακής διαδρομής, καθένα από αυτά είναι πιο εξελιγμένο από το προηγούμενο. Αυτά τα επίπεδα της σκέψης συμβάλλουν στην πραγματοποίηση του μαθηματικού στόχου. Δηλαδή, η διαδρομή αυτή κάνει λόγο για μια πορεία, την οποία ακολουθούν οι μαθητές, στην ανάπτυξη κατανόησης και δεξιοτήτων των Μαθηματικών. Βέβαια, η διαδρομή μιας τροχιάς μάθησης δεν είναι πάντα καθορισμένη, γιατί υπάρχουν πολλοί παράγοντες (όπως ο τρόπος που μαθαίνει το κάθε παιδί, διαφορές στην τυπική και άτυπη μάθηση κ.ά.), οι οποίοι επηρεάζουν την ανάπτυξή της. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι σε θέση να αναπροσαρμόζει τις στρατηγικές του, προκειμένου να συμβαδίζουν με την προϋπάρχουσα γνώση, τις ικανότητες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών (Αρσενίδου, 2018). Τέλος, αναφορικά με τις διδακτικές δραστηριότητες, πρόκειται για ένα σύνολο υλικών και δραστηριοτήτων αντίστοιχων των επιπέδων σκέψης της αναπτυξιακής διαδρομής, που υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν υψηλότερα επίπεδα σκέψης.

Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι υπάρχει μία αναλογική σχέση μεταξύ της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και της ηλικίας, όπως και της τάξης, στην οποία φοιτούν. Έπειτα, αναφέρουν πως οι μεγάλες μεταβολές έρχονται μέσα από ικανοποιητικό αριθμό μικρών μεταβολών. Τέλος, καταλήγουν στο ότι όσα ειπώθηκαν προηγουμένως, οδηγούν στη σωστή πορεία μιας τροχιάς, η οποία έχει τη δυνατότητα να ορίσει τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών (Αρσενίδου, 2018).

Όσον αφορά την τροχιά μάθησης (learning trajectory) στην προϋπάρχουσα γνώση της διαίρεσης, καθώς και στην καινούρια γνώση που θα αποκτηθεί, ανάλογα με την ηλικία, διαπιστώθηκαν τα εξής (Πίνακας Ι) («Learning Trajectories for Primary Grades Mathematics Developmental Levels», 2022):

Ηλικία	**Περιγραφή**
2 ετών	Τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να μοιράζουν μία ποσότητα αντικειμένων (π.χ. δέκα καραμέλες) σε μία ομάδα ανθρώπων. Όμως, δεν μπορούν ακόμη να τη μοιράσουν ισόποσα. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να έχει έξι καραμέλες και να τις μοιράσει σε τρία άτομα. Αντί να δώσει δύο καραμέλες σε κάθε άτομο, δίνει μία καραμέλα στο ένα άτομο, τέσσερις καραμέλες στο δεύτερο άτομο και μία καραμέλα στο τρίτο άτομο.
3 ετών	Όταν δίνεται στο παιδί μία ποσότητα (μικρότερη του πέντε) είναι ικανό να τη μοιράσει ίσα σε δύο άτομα και στο τέλος να πει πόσα έδωσε στον καθένα.
4 ετών	Το παιδί δύναται να δημιουργήσει μικρές ισάριθμες ομάδες αντικειμένων (τα αντικείμενα που καλείται να μοιράσει πρέπει να είναι μέχρι έξι). Το παιδί μοιράζεται τα αντικείμενα με έναν φίλο του, κρατώντας ένα αντικείμενο γι' αυτό και δίνοντας ένα αντικείμενο στον φίλο του. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μοιράσει όλα τα αντικείμενα. Έτσι, και το παιδί και ο φίλος του έχουν τον ίδιο αριθμό αντικειμένων, όμως δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι παρήγαγε ισάριθμο μοίρασμα.
5 ετών	Το παιδί έχει την ικανότητα να μοιράζει έως και είκοσι αντικείμενα σε δύο έως πέντε άτομα, χωρίς όμως να κατανοεί ότι μοιράζει ισόποσα τα αντικείμενα στα άτομα.
6 ετών	Το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη και του πηλίκου.
7 ετών	Το παιδί μπορεί να κατανοήσει (κάνοντας όμως μερικά λάθη) τη διαίρεση μέτρησης, δηλαδή πόσες ομάδες ενός αριθμού υπάρχουν σε έναν άλλο αριθμό.
8 ετών	Το παιδί έχει τη δυνατότητα να αναγνωρίσει από μία ομάδα αντικειμένων πόσα θα πάρει το κάθε άτομο. Για παράδειγμα, εάν το παιδί έχει είκοσι σοκολάτες και πρέπει να τις μοιράσει σε τέσσερα άτομα, θα πει: «Το κάθε άτομο θα πάρει πέντε σοκολάτες, γιατί τέσσερις ομάδες των πέντε μάς κάνει είκοσι»

Πίνακας Ι: Τροχιά μάθησης για τη διαίρεση

4. Σχέση Διαίρεσης και Πολλαπλασιασμού

Ο πολλαπλασιασμός θεωρείται πιο εύκολος ως πράξη από τη διαίρεση, γι' αυτό τον λόγο διδάσκεται νωρίτερα στα σχολεία (Καράλης, 2018). Όμως, αρκετοί μελετητές θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση καλό θα είναι να διδάσκονται παράλληλα (Αλεξανδράκη, 2020). Ο Piaget υποστήριζε ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους, μιας και είναι δύο πράξεις αντίστροφες. Όποιος κατανοεί δηλαδή τη διαίρεση, σημαίνει ότι πρώτα έχει κατανοήσει τον πολλαπλασιασμό (Δεσλή & Κορνηλάκη, 2013). Το ίδιο ακριβώς πίστευε και ο John Van de Walle (2004). Συγκεκριμένα, επικρατεί η άποψη πως η διδασκαλία της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού κατά την προσχολική ηλικία, συμβάλλει στην ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Αλεξανδράκη, 2020). Αυτό συμβαίνει γιατί η διαίρεση είναι το μοίρασμα ενός συνόλου πραγμάτων σε μικρότερα σύνολα, ενώ ο πολλαπλασιασμός είναι ακριβώς το αντίστροφο (Καράλης, 2018). Άλλοι επιστήμονες, όμως, ισχυρίζονται πως ο πολλαπλασιασμός δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές (Αλεξανδράκη, 2020).

Μετά από έρευνες που πραγματοποιήθηκαν με τη συμμετοχή παιδιών του Νηπιαγωγείου, έγινε φανερό πως τα παιδιά προσχολικής ηλικίας δυσκολεύονται να κατανοήσουν την αντίστροφη σχέση της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Συνοψίζοντας, γίνεται φανερό πως τα παιδιά κατανοούν μεν τα βασικά στοιχεία της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, αντιλαμβάνονται δε αρκετό καιρό αργότερα την αντίστροφη σχέση μεταξύ των δύο αυτών πράξεων (Κορνηλάκη, 2001).

5. Διαφορές διαίρεσης μέτρησης και διαίρεσης μερισμού

Η διαίρεση μερισμού (ή αλλιώς διαμεριστική διαίρεση) (Λεμονίδης, 2016) είναι το πρώτο είδος διαίρεσης, με το οποίο ασχολούνται τα παιδιά στο Νηπιαγωγείο (Βικάρη, 2021). Στη διαίρεση μερισμού ένα αντικείμενο (ή μια ομάδα αντικειμένων) διαιρείται σε ισάριθμα τμήματα (ή υποομάδες) (Λεμονίδης, 2016). Συγκεκριμένα, σε αυτό τον τύπο διαίρεσης είναι γνωστό το ποσό των πολλών μονάδων και γίνεται αναζήτηση για το ποσό της μιας μονάδας, η οποία ανήκει στην ίδια κατηγορία που ανήκουν οι πολλές μονάδες (π.χ. ευρώ) (Λεμονίδης, 2016). Με πιο απλά λόγια, στη διαίρεση μερισμού (ή δίκαιη μοιρασιά) οι μαθητές πρέπει να βρουν το μέγεθος της κάθε ομάδας (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017). Ο διαιρετέος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον διαιρέτη, ο διαιρέτης πρέπει πάντα να είναι φυσικός αριθμός και τέλος, το πηλίκο πρέπει να είναι μικρότερο από τον διαιρετέο (Λεμονίδης, 2016).

Αναφορικά με τη διαίρεση ως ισομερισμό, η στρατηγική, την οποία χρησιμοποιούν τα παιδιά είναι η «ένα προς ένα» απόδοση. Δηλαδή, μοιράζουν τα αντικείμενα ένα- ένα στους αποδέκτες. Το πηλίκο της συγκεκριμένης διαίρεσης είναι πάντοτε φυσικός αριθμός (Βικάρη, 2021) και είναι πάντα ομοειδές με τον διαιρετέο (Λεμονίδης, 2016). Τα παιδιά δυσκολεύονται στον συγκεκριμένο τύπο διαίρεσης όταν μεγαλώνει ο αριθμός της ποσότητας, την οποία καλούνται να μοιράσουν σε ορισμένο αριθμό αποδεκτών, ή όταν αυξάνεται ο αριθμός των αποδεκτών, στους οποίους πρέπει να μοιραστεί ορισμένη ποσότητα. Η πιο δύσκολη περίπτωση στις διαιρέσεις μερισμού είναι όταν πρόκειται για ατελείς διαιρέσεις. Γι’ αυτό τον λόγο, είναι καλύτερα στο Νηπιαγωγείο τα παιδιά να ασχολούνται με δραστηριότητες διαίρεσης χωρίς υπόλοιπο για να μη δυσκολευτούν ιδιαίτερα (Δεσλή & Κορνηλάκη, 2013).

Από την άλλη μεριά, στη διαίρεση μέτρησης είναι γνωστό και το ποσό της μιας μονάδας, αλλά και το ποσό των πολλών μονάδων (όλες οι μονάδες είναι του ίδιου μεγέθους, π.χ. ευρώ) και στόχος είναι η εύρεση του πλήθους των πολλών μονάδων (Λεμονίδης, 2016). Δηλαδή, στη διαίρεση μέτρησης οι μαθητές ξέρουν ποιο είναι το μέγεθος της εκάστοτε ομάδας και θα πρέπει να βρουν πόσες είναι οι ομάδες (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017). Το πηλίκο στη διαίρεση μέτρησης είναι πάντα ετεροειδής του διαιρετέου και του διαιρέτη (Βικάρη, 2021). Στη διαίρεση μέτρησης η μόνη προϋπόθεση είναι ο διαιρέτης να είναι πάντα μικρότερος από τον διαιρετέο. Στην περίπτωση που το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0 τότε, η διαίρεση μέτρησης ονομάζεται και επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Λεμονίδης, 2016). Το πρόβλημα οξύνεται στο συγκεκριμένο είδος διαίρεσης εξαιτίας της φράσης «χωράει σε». Για παράδειγμα, «το 4 χωράει στο 24». Η έκφραση αυτή δυσκολεύει τα παιδιά να σκεφτούν και να βρουν τη λύση. Καλύτερα να χρησιμοποιείται η φράση «Πόσες ομάδες των 4 υπάρχουν στο 24;». Έτσι, τα παιδιά θα κατανοήσουν καλύτερα τι ακριβώς συμβαίνει στη διαίρεση μέτρησης (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay- Williams, 2017).

Πολλοί ερευνητές, μέσα από μελέτες που πραγματοποίησαν, υποστηρίζουν πως η διαίρεση μέτρησης δυσκολεύει αρκετά τα παιδιά του Νηπιαγωγείου. Εν αντιθέσει, στις διαιρέσεις μερισμού τα παιδιά τα καταφέρνουν με μεγαλύτερη επιτυχία. Αυτό συμβαίνει, διότι τα παιδιά πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να αντιλαμβάνονται την αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου (Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2017). Τέλος, παλιότερη έρευνα έχει δείξει ότι οι δραστηριότητες μερισμού προσεγγίζονται διαισθητικά με μεγαλύτερη άνεση από τα μικρά παιδιά, ενώ οι δραστηριότητες της διαίρεσης μέτρησης προϋποθέτουν μια πιο οργανωμένη διδακτική προσέγγιση (Κολέζα, 2017).

Τα παραπάνω δείχνουν τη σημασία και τη δυσκολία της διαίρεσης μέτρησης, αλλά υπάρχουν ενδείξεις ότι τα παιδιά του Νηπιαγωγείου έχουν τη δυνατότητα να την κατανοήσουν, εάν τη διδαχθούν με κατάλληλο τρόπο (Cheeseman, Downton, Roche & Ferguson, 2020). Στόχος είναι να φανεί εάν τα παιδιά κατανοούν πόσες ομάδες ενός αριθμού (π.χ. δύο) υπάρχουν σε έναν άλλο αριθμό (π.χ. δέκα). Ακόμη, στόχος είναι να φανεί εάν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου μπορούν να αντιληφθούν ότι όσο αυξάνεται ο διαιρέτης τόσο μειώνεται το πηλίκο και αντίστροφα (αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου).

6. Μεθοδολογία έρευνας

Στη συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία πραγματοποιείται μια έρευνα για να διερευνηθεί εάν μπορούν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου να κατανοήσουν τη διαίρεση μέτρησης. Δηλαδή, στόχος είναι να εξεταστεί εάν στην ηλικία των τεσσάρων έως έξι ετών, έχουν τη δυνατότητα να πουν πόσες ομάδες ενός αριθμού (π.χ. τρία) υπάρχουν σε έναν άλλο αριθμό (π.χ. δώδεκα). Έπειτα, στόχος είναι να εξεταστεί εάν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου είναι ικανά να αντιληφθούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο διαιρέτης, τόσο μικρότερο είναι το πηλίκο της διαίρεσης και αντίστροφα (αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου). Γι’ αυτό πραγματοποιήθηκε μια διδακτική παρέμβαση στο 1^{ο} Ολοήμερο Νηπιαγωγείο Άργους Ορεστικού Καστοριάς. Η ερευνήτρια σχεδίασε δραστηριότητες διαίρεσης μέτρησης. Οι δραστηριότητες αυτές υλοποιήθηκαν στο Νηπιαγωγείο για τρεις συναπτές ημέρες, προκειμένου να φανεί η πιθανή βελτίωση της επίδοσης των παιδιών, ως αποτέλεσμα μιας διδακτικής παρέμβασης με ένα ομαδικό παιχνίδι, το οποίο εστίαζε στην δημιουργία ομάδων ίσου πλήθους μελών (διατηρώντας το συνολικό πλήθος σταθερό). Συνοψίζοντας, η συγκεκριμένη μελέτη είχε στόχο να εξετάσει τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

Α) Μπορούν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου να κατανοήσουν τη διαίρεση μέτρησης;

Β) Μπορούν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο;

Γ) Μια διδακτική παρέμβαση, η οποία βασίζεται σε ένα ομαδικό παιχνίδι, στο οποίο δημιουργούνται ισοπληθείς ομάδες, μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά του Νηπιαγωγείου στην κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης;

Στη συνέχεια, παραθέτονται κάποιες δραστηριότητες διαίρεσης μέτρησης, μέσω των οποίων θα εξεταστούν τα παραπάνω ερωτήματα.

6.1. Συμμετέχοντες

Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν τα παιδιά του Α΄ τμήματος του 1ου Ολοήμερου Νηπιαγωγείου Άργους Ορεστικού Καστοριάς. Τα παιδιά ήταν συνολικά δεκατέσσερα, ηλικίας περίπου τεσσάρων έως έξι ετών. Τα πέντε παιδιά ήταν προνήπια και τα εννιά ήταν νήπια. Πέντε ήταν τα κορίτσια και εννιά τα αγόρια. Η πλειοψηφία των παιδιών ανήκε στο μέσο κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο. Μόνο δύο από τα δεκατέσσερα παιδιά προέρχονταν από αρκετά εύπορες οικογένειες και είχαν άριστες επιδόσεις στις δραστηριότητες, παρ’ ότι ήταν προνήπια. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια πληροφορήθηκε από τη Νηπιαγωγό της τάξης ότι οι γονείς των δύο αυτών παιδιών ασχολούνται συστηματικά με την εκπαίδευση τους, δηλαδή το απόγευμα στο σπίτι εξασκούνται σε διάφορες ασκήσεις Γλώσσας και Μαθηματικών. Τα παιδιά του δείγματος ήταν ελληνικής καταγωγής εκτός από ένα κορίτσι, το οποίο καταγόταν από την Αλβανία. Το κορίτσι αυτό ήταν 6 χρονών και είχε μόλις έναν μήνα που ξεκίνησε να φοιτά σε ελληνικό σχολείο. Γι’ αυτό δυσκολευόταν λίγο στις δραστηριότητες, όμως μετά από αρκετές επαναλήψεις των οδηγιών και των ερωτήσεων από την ερευνήτρια τα κατάφερε. Τέλος, υπήρχε ένα αγόρι ηλικίας 5,4 ετών, το οποίο είχε τύφλωση. Όμως, υπήρχε η βοήθεια της Νηπιαγωγού παράλληλης στήριξης και έτσι, το παιδί ανταπεξήλθε στις δραστηριότητες.

6.2. Ερευνητικά εργαλεία- υλικά

6.2.1. Προ-έλεγχος

Στα παιδιά του Νηπιαγωγείου δόθηκαν τέσσερα φύλλα εργασίας, στα οποία περιλαμβάνονταν προβλήματα με διαίρεση μέτρησης δοσμένα με εικονικές αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα, τα παιδιά καλούνταν να τοποθετήσουν αναπαραστάσεις από καρότα μέσα σε καλάθια. Κάθε φορά τα καλάθια ήταν μεγαλύτερα και αυξάνονταν και το πλήθος των καρότων που έπρεπε να μπει μέσα στο κάθε καλάθι. Σε κάθε φύλλο εργασίας υπήρχε μια εικόνα, στην οποία απεικονιζόταν ένα καλάθι με συγκεκριμένο αριθμό καρότων (στο πρώτο έργο ένα καρότο, στο δεύτερο έργο δύο καρότα, στο τρίτο έργο τέσσερα καρότα και στο τέταρτο έργο οκτώ καρότα) και οκτώ καρότα σε τυχαία διάταξη. Τα παιδιά απαριθμούσαν τα καρότα στο καλάθι και προσπαθούσαν, με κάποιο τρόπο, να αναπαραστήσουν τα καλάθια, στα οποία θα μοιραζόταν τα οκτώ καρότα.

Στο Έργο 1 (Εικόνα 1) δόθηκε ένα πρόβλημα, όπου τα παιδιά έπρεπε να βάλουν ένα καρότο μέσα σε κάθε καλάθι. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Ο Θανάσης έχει στον κήπο του σπιτιού του κουνελάκια. Τα κουνελάκια τα ταΐζει με καρότα, τα οποία θα βάλει μέσα σε καλάθια. Τα καρότα είναι οκτώ (σε κάθε καλάθι χωράει ένα καρότο). Πόσα καλάθια θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα καλάθια». Μετά στα παιδιά έγιναν οι εξής ερωτήσεις: α) Πόσα καλάθια χρειάστηκαν; β) Πόσα καρότα ήταν σε κάθε καλάθι; και γ) Πόσα ήταν όλα τα καρότα μαζί;

Εικόνα 1: Έργο 1 του προ-ελέγχου

Στο Έργο 2 (Εικόνα 2) δόθηκε ένα πρόβλημα, όπου τα παιδιά έπρεπε να βάλουν δύο καρότα μέσα σε κάθε καλάθι. Αυτή τη φορά τα καλάθια ήταν μεγαλύτερα.

Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Ο Θανάσης πήρε μεγαλύτερα καλάθια, για να βάλει μέσα τα οκτώ καρότα. Σε κάθε καλάθι χωράνε δύο καρότα. Πόσα καλάθια θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα καλάθια». Έπειτα, τέθηκαν στα παιδιά οι εξής ερωτήσεις: α) Πόσα καλάθια χρειάστηκαν; β) Πόσα καρότα ήταν σε κάθε καλάθι; γ) Πόσα ήταν όλα τα καρότα μαζί; και δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;

Εικόνα 2: Έργο 2 του προ-ελέγχου

Στο Έργο 3 (Εικόνα 3) δόθηκε ένα πρόβλημα, στο οποίο τα παιδιά κλήθηκαν να βάλουν τέσσερα καρότα μέσα σε κάθε καλάθι. Τα καλάθια ήταν πιο μεγάλα από την προηγούμενη φορά. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Ο Θανάσης πήρε ακόμα μεγαλύτερα καλάθια για να βάλει μέσα τα οκτώ καρότα. Σε κάθε καλάθι χωράνε τέσσερα καρότα. Πόσα καλάθια θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα καλάθια». Στο τέλος, η ερευνήτρια απηύθυνε στα παιδιά τις εξής ερωτήσεις: α) Πόσα καλάθια χρειάστηκαν; β) Πόσα καρότα ήταν σε κάθε καλάθι; γ) Πόσα ήταν όλα τα καρότα μαζί; και δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;

Εικόνα 3: Έργο 3 του προ-ελέγχου

Στο Έργο 4 (Εικόνα 4) δόθηκε ένα πρόβλημα, όπου τα παιδιά χρειάζονταν να βάλουν οκτώ καρότα μέσα σε κάθε καλάθι. Αυτή τη φορά τα καλάθια ήταν πολύ μεγαλύτερα. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Ο Θανάσης τώρα πήρε πολύ μεγάλα καλάθια, για να βάλει μέσα τα οκτώ καρότα. Σε κάθε καλάθι χωράνε οκτώ καρότα. Πόσα καλάθια θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα καλάθια». Τέλος, τέθηκαν οι εξής ερωτήσεις: α) Πόσα καλάθια χρειάστηκαν; β) Πόσα καρότα ήταν σε κάθε καλάθι; γ) Πόσα ήταν όλα τα καρότα μαζί; δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά; ε) Τι γίνεται όταν μπαίνουν περισσότερα καρότα στο καλάθι; στ) Πότε θα έχουμε τα λιγότερα καλάθια; και ζ) Πόσα καρότα πρέπει να χωράει ένα καλάθι για να μην χρειαζόμαστε πολλά καλάθια;

Εικόνα 4: Έργο 4 του προ-ελέγχου

Τα συγκεκριμένα έργα σχεδιάστηκαν με τρόπο, ώστε όσο αυξάνονται τα καρότα ανά καλάθι, τόσο μειώνεται ο αριθμός των απαιτούμενων καλαθιών. Το πλαίσιο των έργων ήταν ρεαλιστικό, οπότε γίνονταν εύκολα κατανοητά από τα παιδιά του Νηπιαγωγείου. Επιπλέον, τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ευχάριστα. Δόθηκαν με αναπαραστάσεις σε τυχαία διάταξη, γι' αυτό τα παιδιά μπορούσαν να αναπτύξουν διάφορες στρατηγικές, προκειμένου να βρουν το αποτέλεσμα.

6.2.2. Παρέμβαση

Τα παιδιά έπαιξαν το μαθηματικό παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle), στο οποίο δημιουργούσαν ομάδες με συγκεκριμένο αριθμό ατόμων. Δε χρησιμοποιήθηκαν υλικά.

Αρχικά, συγκεντρώθηκαν όλοι μαζί στην παρεούλα. Η ερευνήτρια εξήγησε στα παιδιά τούς κανόνες του ομαδικού μαθηματικού παιχνιδιού «Μινγκλ» (Mingle). Οι κανόνες ήταν οι εξής: α) Τα παιδιά κινούνται τυχαία μέσα στην αίθουσα και λένε τη φράση: «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ (Mingle, mingle, mingle)». β) Η ερευνήτρια λέει έναν αριθμό, π.χ. τρία και τα παιδιά πρέπει να δημιουργήσουν ομάδες με τρία άτομα η καθεμία. γ) Μόλις δημιουργηθούν οι ομάδες, τα παιδιά απαριθμούν τα μέλη της κάθε ομάδας και λένε ποιες ομάδες είναι οι «καλές» (δηλαδή πόσες έχουν τόσα άτομα όσα είπε η ερευνήτρια). Μετά απαριθμούν πόσες ομάδες δημιουργήθηκαν και με τη βοήθεια της ερευνήτριας τα παιδιά αναγνωρίζουν πόσες ισοπληθείς ομάδες, με συγκεκριμένο πλήθος ανά ομάδα, δημιουργήθηκαν από το σύνολο των παιδιών. Έτσι, γίνεται κατανοητό ότι το συνολικό πλήθος των παιδιών της τάξης μπορεί να χωριστεί με διάφορους τρόπους σε ισοπληθείς ομάδες. Επίσης, γίνεται αντιληπτό ότι όσο πιο μεγάλες είναι οι ομάδες, τόσο πιο λίγες είναι σε πλήθος. Αυτό αποτελεί την καρδιά της εννοιολογικής κατανόησης της διαίρεσης μέτρησης. δ) Τέλος, τα παιδιά που περισσεύουν, στην επόμενη φάση καθώς λένε «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ (Mingle, mingle, mingle)» θα μιμούνται ένα ζώο όπως, παπάκια, βατραχάκια κ.ο.κ.

Το παιχνίδι ξεκίνησε και τα παιδιά κινούνταν, με τυχαίο τρόπο, στον χώρο και έλεγαν τη φράση: «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ» (Mingle, mingle, mingle). Η ερευνήτρια έλεγε στα παιδιά έναν αριθμό (π.χ. τέσσερα) και εκείνα δημιουργούσαν ομάδες με τέσσερα άτομα η καθεμία. Μετά απαριθμούσαν ποιες ήταν οι «καλές» ομάδες, δηλαδή πόσες είχαν από τέσσερα άτομα και πόσες τέτοιες ομάδες δημιουργήθηκαν συνολικά. Μερικά παιδιά περίσσεψαν και στην επόμενη φάση μόλις η ερευνήτρια είπε έναν αριθμό, καθώς έλεγαν τη φράση «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ (Mingle, mingle, mingle)» μιμούνταν τα παπάκια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, να μην περιθωριοποιείται κανένα παιδί από το παιχνίδι. Έπειτα, η ερευνήτρια είπε: «Τρία». Έτσι, τα παιδιά έφτιαξαν ομάδες με τρία άτομα η καθεμία και απαρίθμησαν τα μέλη της κάθε ομάδας, ώστε να καταλήξουν στο πλήθος των «καλών» ομάδων και καταμέτρησαν και το πλήθος των ομάδων. Τα δύο παιδιά που δεν εντάχθηκαν σε κάποια «καλή» ομάδα, μιμήθηκαν τα βατραχάκια στην επόμενη φάση. Έτσι, όλα τα παιδιά διασκέδασαν με το συγκεκριμένο παιχνίδι. Η διαδικασία επαναλήφθηκε αρκετές φορές, κατά την οποία η ερευνήτρια έλεγε στα παιδιά έναν αριθμό και αυτά δημιουργούσαν ομάδες με τόσα άτομα όσο ο αριθμός που ακούγανε και απαριθμούσαν το πλήθος των ομάδων που φτιάχτηκαν. Μετά το τέλος κάθε φάσης συζητούσαν τη σχέση του πλήθους των μελών κάθε ομάδας με τον αριθμό των ομάδων που δημιουργήθηκαν και το συγκρίνανε με το αποτέλεσμα της προηγούμενης φάσης του παιχνιδιού.

Στο τέλος, όταν ολοκληρώθηκε το παιχνίδι συγκεντρώθηκαν ξανά όλοι στην παρεούλα. Πραγματοποιήθηκε μια συζήτηση αναστοχασμού σχετικά με το «Μινγκλ» (Mingle), για να γίνει αντιληπτό τι κατάλαβαν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου μέσα από το συγκεκριμένο παιχνίδι. Η ερευνήτρια έθεσε τις εξής ερωτήσεις: α) Τι μάθαμε; β) Όταν γινόμαστε πιο πολλοί σε μία ομάδα, τι συμβαίνει; γ) Όταν έχουμε περισσότερες ομάδες, η κάθε ομάδα έχει περισσότερα ή λιγότερα άτομα από όταν οι ομάδες είναι λιγότερες; και δ) Όταν ήμασταν τέσσερα άτομα σε κάθε ομάδα, οι ομάδες ήταν περισσότερες ή λιγότερες από όταν ήμασταν τρία άτομα στην κάθε ομάδα;

Το συγκεκριμένο παιχνίδι επιλέχθηκε, διότι είναι ευχάριστο και διασκεδαστικό. Το σημαντικότερο, όμως, είναι ότι πρόκειται για ένα ομαδικό βιωματικό μαθηματικό παιχνίδι, μέσω του οποίου τα παιδιά του Νηπιαγωγείου καταλαβαίνουν κάποια βασικά στοιχεία της διαίρεσης μέτρησης. Πιο συγκεκριμένα, αντιλαμβάνονται την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο (όσο αυξάνεται ο διαιρέτης, τόσο μειώνεται το πηλίκο και το αντίστροφο). Σε κάθε φάση η ερευνήτρια έλεγε έναν αριθμό και μόλις τα παιδιά δημιουργούσαν τις ομάδες, επεσήμαναν και το πλήθος ανά ομάδα και το πλήθος των ομάδων. Ακόμη, σύγκριναν την κάθε φάση με την αμέσως προηγούμενη και η ερευνήτρια ζητούσε από τα παιδιά να πουν πότε οι ομάδες ήταν περισσότερες και πότε λιγότερες.

6.2.3. Μετα-έλεγχος

Στα παιδιά δόθηκαν ξανά τέσσερα φύλλα εργασίας, στα οποία καλούνταν να τοποθετήσουν αναπαραστάσεις από μπισκότα μέσα σε κουτιά. Τα έργα ήταν αντίστοιχα του προ-ελέγχου, αλλά δοσμένα σε διαφορετικό πλαίσιο. Κάθε φορά αυξάνονταν το πλήθος των μπισκότων που έπρεπε να μπει στο εκάστοτε κουτί, με στόχο να μειώνεται ο αριθμός των απαιτούμενων κουτιών. Σε κάθε έργο τα κουτιά ήταν μεγαλύτερα. Σε κάθε φύλλο εργασίας υπήρχε μια εικόνα, στην οποία απεικονιζόταν ένα κουτί με συγκεκριμένο αριθμό μπισκότων (στο πρώτο έργο δύο μπισκότα, στο δεύτερο έργο τρία μπισκότα, στο τρίτο έργο τέσσερα μπισκότα και στο τέταρτο έργο έξι μπισκότα) και δώδεκα μπισκότα σε τυχαία διάταξη. Τα παιδιά απαριθμούσαν τα μπισκότα που βρίσκονταν μέσα στο κουτί και προσπαθούσαν να αναπαραστήσουν τα κουτιά, τα οποία χρειάζονταν για να μοιραστούν τα δώδεκα μπισκότα.

Στο Έργο 1 (Εικόνα 5) δόθηκε ένα πρόβλημα, στο οποίο τα παιδιά έπρεπε να βάλουν μέσα σε κάθε κουτί δύο μπισκότα. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Η γιαγιά έφτιαξε δώδεκα μπισκότα και θέλει να τα στείλει στα εγγόνια της. Για να τα στείλει όμως, πρέπει να τα βάλει μέσα σε κουτιά. Σε κάθε κουτί χωράνε δύο μπισκότα. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα κουτιά». Μετά τέθηκαν προς τα παιδιά οι εξής ερωτήσεις: α) Πόσα κουτιά χρειάστηκαν; β) Πόσα μπισκότα ήταν σε κάθε κουτί; και γ) Πόσα ήταν όλα τα μπισκότα μαζί;

Εικόνα 5: Έργο 1 του μετα-ελέγχου

Στο Έργο 2 (Εικόνα 6) δόθηκε ένα πρόβλημα, όπου τα παιδιά χρειάστηκε να βάλουν τρία μπισκότα μέσα σε κάθε κουτί. Τα κουτιά ήταν πιο μεγάλα. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Η γιαγιά πήρε μεγαλύτερα κουτιά, για να βάλει μέσα τα δώδεκα μπισκότα. Σε κάθε κουτί χωράνε τρία μπισκότα. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα κουτιά». Στο τέλος, τέθηκαν οι εξής ερωτήσεις: α) Πόσα κουτιά χρειάστηκαν; β) Πόσα μπισκότα ήταν σε κάθε κουτί; γ) Πόσα ήταν όλα τα μπισκότα μαζί; και δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;

Εικόνα 6: Έργο 2 του μετα-ελέγχου

Στο Έργο 3 (Εικόνα 7) δόθηκε ένα πρόβλημα, στο οποίο τα παιδιά κλήθηκαν να βάλουν τρία μπισκότα μέσα σε κάθε κουτί. Αυτή τη φορά τα κουτιά ήταν ακόμη μεγαλύτερα. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Η γιαγιά πήρε ακόμα μεγαλύτερα κουτιά, για να βάλει μέσα τα δώδεκα μπισκότα. Σε κάθε κουτί χωράνε τέσσερα μπισκότα. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα κουτιά». Μετά η ερευνήτρια έθεσε τις εξής ερωτήσεις: α) Πόσα κουτιά χρειάστηκαν; β) Πόσα μπισκότα ήταν σε κάθε κουτί; γ) Πόσα ήταν όλα τα μπισκότα μαζί; και δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;

Εικόνα 7: Έργο 3 του μετα-ελέγχου

Στο Έργο 4 (Εικόνα 8) δόθηκε ένα πρόβλημα, όπου τα παιδιά κλήθηκαν να βάλουν έξι μπισκότα μέσα σε κάθε κουτί. Τα κουτιά αυτά ήταν πολύ μεγαλύτερα από τα κουτιά των προηγούμενων προβλημάτων. Συγκεκριμένα το πρόβλημα έλεγε: «Η γιαγιά πήρε πολύ μεγάλα κουτιά, για να βάλει μέσα τα δώδεκα μπισκότα. Σε κάθε κουτί χωράνε έξι μπισκότα. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί; Ζωγραφίστε τα κουτιά». Έπειτα, η ερευνήτρια έθεσε τις εξής ερωτήσεις: α) Πόσα κουτιά χρειάστηκαν; β) Πόσα μπισκότα ήταν σε κάθε κουτί; γ) Πόσα ήταν όλα τα μπισκότα μαζί; δ) Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά; ε) Τι γίνεται όταν μπαίνουν περισσότερα μπισκότα στο κουτί; στ) Πότε θα έχουμε τα λιγότερα κουτιά; και ζ) Πόσα μπισκότα πρέπει να χωράει ένα κουτί για να μην χρειαζόμαστε πολλά κουτιά;

Εικόνα 8: Έργο 4 του μετα-ελέγχου

Τα συγκεκριμένα έργα σχεδιάστηκαν με τρόπο, ώστε όσο αυξάνονται τα μπισκότα ανά κουτί, τόσο μειώνεται ο αριθμός των απαιτούμενων κουτιών. Το πλαίσιο των έργων ήταν ρεαλιστικό και γίνονταν εύκολα κατανοητά από τα παιδιά. Επίσης, τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ευχάριστα και δόθηκαν με αναπαραστάσεις σε τυχαία διάταξη, γι' αυτό τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν διάφορες στρατηγικές για να βρουν το αποτέλεσμα.

6.3. Διαδικασία έρευνας

Αρχικά, την πρώτη μέρα πραγματοποιήθηκε ο προ-έλεγχος, κατά τον οποίο τα παιδιά ασχολήθηκαν με τέσσερα έργα, στα οποία κλήθηκαν να απαντήσουν πόσα καλάθια χρειάζονται κάθε φορά για να τοποθετηθεί μέσα ένας συγκεκριμένος αριθμός καρότων. Σε κάθε έργο τα καλάθια ήταν πιο μεγάλα και αυξάνονταν και το πλήθος των καρότων ανά καλάθι. Ο προ-έλεγχος διήρκησε μία διδακτική ώρα.

Έπειτα, τη δεύτερη μέρα πραγματοποιήθηκε η παρέμβαση. Τα παιδιά έπαιξαν ένα ομαδικό παιχνίδι με την ονομασία «Μινγκλ» (Mingle). Στο «Μινγκλ» (Mingle) τα παιδιά κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα συγκεκριμένο αριθμό ομάδων (π.χ. δύο) με ίσο πλήθος ατόμων (π.χ. εφτά). Μετά τα παιδιά απαριθμούσαν τις ομάδες που δημιουργήθηκαν για να διαπιστωθεί πόσες από αυτές ήταν «καλές», δηλαδή πόσες είχαν τον αριθμό των παιδιών που ζητήθηκε από την ερευνήτρια. Έπειτα, συζητούσαν πότε υπήρχε μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός ομάδων, ανάλογα με τα μέλη που απάρτιζαν την εκάστοτε ομάδα. Το παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle) διήρκησε μία διδακτική ώρα.

Τέλος, την τρίτη μέρα πραγματοποιήθηκε ο μετα-έλεγχος. Δόθηκαν στα παιδιά άλλα τέσσερα έργα, όμοια με τα προηγούμενα τέσσερα που δόθηκαν στον προ-έλεγχο. Στα συγκεκριμένα έργα, τα παιδιά έπρεπε να βρουν πόσα κουτιά χρειάζονταν, με στόχο να τοποθετηθούν μέσα ισάριθμες ποσότητες μπισκότων. Κάθε φορά τα κουτιά ήταν μεγαλύτερα και το πλήθος των μπισκότων, το οποίο έπρεπε να τοποθετηθεί στο κάθε κουτί ήταν και αυτό μεγαλύτερο. Ο μετα-έλεγχος διήρκησε μία διδακτική ώρα.

7. Αποτελέσματα

Στη συγκεκριμένη ενότητα της πτυχιακής εργασίας γίνεται ανάλυση των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης στο Νηπιαγωγείο.

7.1. Ημέρα 1^η: Προ-έλεγχος

Οι απαντήσεις των παιδιών του Νηπιαγωγείου στα έργα του προ-ελέγχου ήταν οι εξής:

Ο M_1 6,1 ετών, ο M_{10} 5,1 ετών, η M_{14} 4,2 ετών, η M_9 5,3 ετών, η M_{12} 4,7 ετών και η M_3 6 ετών απάντησαν σωστά και στα τέσσερα έργα του προ-ελέγχου. Μάλιστα, ο M_1, η M_3 και ο M_{10} απαντούσαν γρήγορα και σωστά στην κάθε ερώτηση χωρίς καμία δυσκολία. Ο M_4 5,9 ετών, ο M_6 5,8 ετών και η M_2 6 ετών απάντησαν σωστά στα τρία από τα τέσσερα έργα. Η M_2 μάλιστα, είχε πολύ καλή επίδοση, γιατί το κορίτσι αυτό ξεκίνησε να φοιτά σε ελληνικό σχολείο μόλις πριν έναν μήνα, χωρίς να γνωρίζει καλά την ελληνική γλώσσα. Τα παιδιά, τα οποία δυσκολεύτηκαν περισσότερο ήταν ο M_5 5,9 ετών, ο M_{11} 5 ετών, ο M_7 5,6 ετών, ο M_{13} 4,5 ετών και ο M_8 5,4 ετών (παιδί με τύφλωση). Συγκεκριμένα, ο M_8 (παιδί με τύφλωση) ασχολήθηκε μόνο με τα δύο από τα τέσσερα έργα, γιατί μετά δυσανασχέτησε λίγο και αρνήθηκε να ασχοληθεί με τα υπόλοιπα.

Παρακάτω, παρατίθεται ο Πίνακας 1, στον οποίο παρουσιάζονται οι επιδόσεις όλων των παιδιών της τάξης στα τέσσερα έργα του προ-ελέγχου.

1η φάση: Προ-έλεγχος					
Παιδιά	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3	Έργο 4	Σύνολο σωστών
M_1 (6,1 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_2 (6 ετών)	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	3/4
M_3 (6 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_4 (5,9 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	3/4
M_5 (5,9 ετών)	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	2/4
M_6 (5,8 ετών)	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	3/4
M_7 (5,6 ετών)	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Σωστό	2/4
M_8 παιδί με τύφλωση (5,4 ετών)	Σωστό	Σωστό	Δεν απάντησε	Δεν απάντησε	2/4
M_9 (5,3 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{10} (5,1 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{11} (5 ετών)	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Λάθος	1/4
M_{12} (4,7 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{13} (4,5 ετών)	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Λάθος	1/4
M_{14} (4,2 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
Σύνολο	12/14	12/14	7/14	9/14	40/14

Πίνακας 1: Αποτελέσματα των παιδιών του Νηπιαγωγείου στα έργα του προ-ελέγχου της έρευνας

Όσον αφορά τα έργα του προ-ελέγχου της έρευνας, η πλειονότητα των παιδιών τα κατάφερε επαρκώς, αφού τρία παιδιά σημείωσαν βαθμολογία τρία στα τέσσερα έργα σωστά και έξι παιδιά είχαν απαντήσει τέσσερα στα τέσσερα έργα σωστά. Μάλιστα, οι απαντήσεις τους στις ερωτήσεις της ερευνήτριας έδειξαν ότι δε δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα να καταλάβουν τι ακριβώς έκαναν στο κάθε έργο και γιατί το έκαναν. Όμως όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, όσο οξύνονταν η δυσκολία στα έργα, δηλαδή όσο αυξάνονταν τα ποσά της διαίρεσης, τόσο μειώνονταν οι επιδόσεις των παιδιών.

Ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών ήταν οι εξής: «Πιο λίγα καρότα, πιο πολλά καλάθια», «Πολλά καρότα, λίγα καλάθια». Βέβαια, ορισμένα παιδιά (κυρίως ηλικίας τεσσάρων έως πέντε ετών) πίστευαν ότι όσο αυξάνονται τα καρότα ανά καλάθι τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των απαιτούμενων καλαθιών. Για παράδειγμα, ο M_{11} (5 ετών) είπε: «Πολλά καρότα, πολλά καλάθια». Γενικώς, καλύτερες επιδόσεις σημείωσαν τα παιδιά ηλικίας άνω των πέντε ετών σε σχέση με τα παιδιά ηλικίας τεσσάρων έως πέντε ετών. Τα μικρότερα παιδιά απαριθμούσαν τα καλάθια τα οποία ζωγράφιζαν, προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση της ερευνήτριας: «Πόσα καλάθια χρειάστηκαν;». Αλλά, τα μεγαλύτερα παιδιά απαντούσαν χωρίς να τα απαριθμούν ξανά.

Στο δεύτερο έργο η ερευνήτρια ρώτησε τα παιδιά: «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Η M_3 απάντησε: «Τώρα, που είχαμε δύο καρότα σε κάθε καλάθι και ήταν πιο μεγάλα τα καλάθια, χρειαστήκαμε πιο λίγα. Όταν βάλαμε ένα καρότο σε κάθε καλάθι χρειαστήκαμε πολλά καλάθια. Οπότε, όσο πιο πολλά καρότα βάζουμε μέσα στο καλάθι, τόσο πιο λίγα καλάθια χρειαζόμαστε». Στο τρίτο έργο η ερευνήτρια ρώτησε ξανά: «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Κάποιοι απάντησαν: «Τώρα που ήταν μεγαλύτερα τα καλάθια και βάλαμε τέσσερα καρότα στο κάθε καλάθι, χρειαστήκαμε πιο λίγα καλάθια από πριν που βάλαμε δύο καρότα σε κάθε καλάθι. Δηλαδή πολλά καρότα, λίγα καλάθια». Τέλος, στο τέταρτο έργο η ερευνήτρια ρώτησε τα παιδιά: «Τι έγινε τώρα που είχαμε ακόμη μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Κάποια παιδιά τής απάντησαν: «Τώρα που είχαμε πολύ μεγάλα καλάθια και χωρούσαν οκτώ καρότα στο καλάθι χρειαστήκαμε μόνο ένα καλάθι, ενώ πριν θέλαμε περισσότερα καλάθια. Οπότε, όταν βάζουμε μέσα πολλά καρότα, χρειαζόμαστε πιο λίγα καλάθια».

7.2. Ημέρα 2η: Παρέμβαση

Τη δεύτερη ημέρα, στην παρέμβαση τα παιδιά έπαιξαν το ομαδικό μαθηματικό παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle). Η ερευνήτρια εξήγησε τις οδηγίες στα παιδιά. Τα παιδιά περπατούσαν τυχαία μέσα στην αίθουσα και έλεγαν τη φράση «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ (Mingle, mingle, mingle)». Μόλις η ερευνήτρια έλεγε έναν αριθμό (π.χ. δύο), τότε τα παιδιά προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ομάδες με τον συγκεκριμένο αριθμό ατόμων (δηλαδή η κάθε ομάδα να έχει για παράδειγμα δύο άτομα).

Αρχικά, στην πρώτη φάση η ερευνήτρια τούς είπε: «Τέσσερα». Τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες με τέσσερα άτομα η καθεμία. Μετά απαρίθμησαν ποιες ήταν οι «καλές» ομάδες, δηλαδή ποιες ομάδες είχαν τέσσερα άτομα όπως ακριβώς τους είπε η ερευνήτρια. Καθώς απαριθμούσαν, συνειδητοποίησαν ότι μία ομάδα είχε μόνο δύο άτομα. Οπότε είπαν ότι η συγκεκριμένη ομάδα ήταν λάθος, γιατί δεν είχε τέσσερα άτομα όπως έπρεπε. Μετά καταμετρήθηκαν οι ομάδες που είχαν τέσσερα άτομα και ειπώθηκε ρητά ότι δημιουργήθηκαν τρεις ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Τα δύο αυτά παιδιά που περίσσεψαν στην επόμενη φάση, καθώς έλεγαν «Μινγκλ, μινγκλ, μινγκλ (Mingle, mingle, mingle)» μιμήθηκαν τα παπάκια.

Έπειτα στη δεύτερη φάση, η ερευνήτρια είπε στα παιδιά: «Τρία». Έτσι, τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες με τρία άτομα η καθεμία. Μόλις δημιούργησαν τις ομάδες, τις απαρίθμησαν για να διαπιστώσουν πόσες ήταν οι «καλές» (πόσες είχαν τρία άτομα) και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπήρχαν τέσσερις ομάδες με τρία άτομα και μια ομάδα με δύο άτομα. Άρα, τέσσερις ήταν οι «καλές» ομάδες. Τα δύο παιδιά που περίσσεψαν, στην επόμενη φάση μιμήθηκαν τα βατραχάκια. Έπειτα, θυμήθηκαν τι είχε γίνει στην προηγούμενη φάση, που δημιουργήθηκαν ομάδες των τεσσάρων και συγκρίνανε πόσες ομάδες φτιάχτηκαν τότε και πόσες τώρα.

Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια ρώτησε τα παιδιά: «Τώρα οι ομάδες που φτιάξατε ήταν περισσότερες από πριν. Η κάθε ομάδα είχε περισσότερα ή λιγότερα άτομα από την προηγούμενη φορά; Γιατί νομίζετε ότι έγινε αυτό;». Κάποια παιδιά είπαν ότι αυτή τη φορά η κάθε ομάδα είχε λιγότερα άτομα από την προηγούμενη φορά και κατάλαβαν ότι όταν «μεγαλώνουν» οι ομάδες, τότε «μικραίνουν» τα άτομα στην κάθε ομάδα.

Καθώς το παιχνίδι συνεχιζόταν, τα παιδιά έδειχναν όλο και πιο ενθουσιασμένα. Στην τρίτη φάση η ερευνήτρια είπε: «Εφτά». Τα παιδιά έφτιαξαν τις ομάδες με εφτά άτομα η καθεμία. Όπως και τις προηγούμενες φορές, απαρίθμησαν τις ομάδες για να βρουν ποιες ήταν οι «καλές» και ποιες ήταν λάθος. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όλες οι ομάδες ήταν «καλές», αφού είχαν από εφτά άτομα και οι δύο ομάδες. Κανένα παιδί δεν περίσσεψε οπότε κανείς δεν μιμήθηκε κάποιο ζώο στην επόμενη φάση. Συζητήθηκε εκ νέου τι έγινε σε σχέση με τις προηγούμενες φάσεις και γιατί δημιουργήθηκαν μόνο δύο ομάδες ενώ, τις άλλες φορές δημιουργούνταν πολλές ομάδες.

Επιπλέον στην τέταρτη φάση, η ερευνήτρια είπε: «Δύο». Οπότε, τα παιδιά δημιούργησαν ομάδες με δύο άτομα η καθεμία. Τα παιδιά, δηλαδή χωρίστηκαν σε ζευγαράκια, απαρίθμησαν τα μέλη της κάθε ομάδας και κατέληξαν στο γεγονός ότι όλες οι ομάδες είχαν δύο άτομα, οπότε ήταν «καλές» και κανένας δεν μιμήθηκε κάποιο ζώο στην επόμενη φάση. Μετά η ερευνήτρια ρώτησε τα παιδιά: «Τώρα οι ομάδες που φτιάξατε ήταν περισσότερες από πριν. Η κάθε ομάδα είχε περισσότερα ή λιγότερα άτομα από την προηγούμενη φορά; Γιατί νομίζετε ότι έγινε αυτό;». Κάποια παιδιά είπαν ότι, αυτή τη φορά η κάθε ομάδα είχε λιγότερα άτομα από την προηγούμενη φορά και κατάλαβαν ότι όταν οι ομάδες είναι πολλές, τότε τα άτομα στην κάθε ομάδα είναι λιγότερα.

Τέλος στην πέμπτη φάση, η ερευνήτρια είπε: «Δεκατέσσερα». Οπότε τα παιδιά έπρεπε να φτιάξουν ομάδες με δεκατέσσερα άτομα η καθεμία. Τα παιδιά πιάστηκαν χέρι- χέρι και έγιναν όλα μαζί μια ομάδα. Απαρίθμησαν τα μέλη και είπαν ότι όλοι μαζί έχουν μια «καλή» ομάδα.

Μόλις τελείωσε το παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle), κάθισαν στην παρεούλα και πραγματοποιήθηκε συζήτηση για αναστοχασμό. Η ερευνήτρια έθεσε ορισμένες ερωτήσεις όπως, «Τι μάθαμε;», «Όταν γινόμαστε πιο πολλοί σε μία ομάδα, τι συμβαίνει;», «Όταν έχουμε περισσότερες ομάδες, η κάθε ομάδα έχει περισσότερα ή λιγότερα άτομα από όταν οι ομάδες είναι λιγότερες;», «Όταν ήμασταν τέσσερα άτομα σε κάθε ομάδα, οι ομάδες ήταν περισσότερες ή λιγότερες από όταν ήμασταν τρία άτομα στην κάθε ομάδα;». Κάποια από τα παιδιά είπαν ότι όταν είναι πολλά άτομα σε μία ομάδα, τότε οι ομάδες που δημιουργούνται είναι λιγότερες και όταν υπάρχουν λίγα άτομα σε μία ομάδα, τότε οι ομάδες που δημιουργούνται είναι περισσότερες.

Μερικά παιδιά όμως, μπέρδευαν τα άτομα με τις ομάδες. Δηλαδή, όταν η ερευνήτρια ρωτούσε: «Πόσα παιδιά υπήρχαν σε κάθε ομάδα όταν ήταν δύο οι ομάδες; Περισσότερα ή λιγότερα από όταν ήταν τρεις οι ομάδες;». Τότε, μερικοί μπερδεύονταν και απαντούσαν ότι στην περίπτωση των δύο ομάδων υπήρχαν λιγότερα άτομα σε κάθε ομάδα από την περίπτωση των τριών ομάδων. Όταν ρωτήθηκαν γιατί το πιστεύουν αυτό, απάντησαν: «Επειδή όταν έχουμε πολλές ομάδες, υπάρχουν περισσότερα άτομα». Κυρίως ένας μαθητής, ο M_8 (5,8 ετών), μπερδεύονταν πολύ αναφορικά με τα άτομα και τις ομάδες.

7.3. Ημέρα 3η: Μετα-έλεγχος

Οι απαντήσεις των παιδιών στα έργα του μετα-ελέγχου ήταν οι εξής:

Ο M_1 6,1 ετών, η M_9 5,3 ετών, η M_{12} 4,7 ετών, η M_3 6 ετών και ο M_{10} 5,1 ετών απάντησαν σε όλα τα έργα σωστά, όπως ακριβώς και στον προ-έλεγχο της έρευνας. Σε όλες τις ερωτήσεις της ερευνήτριας απαντούσαν γρήγορα με αυτοπεποίθηση, χωρίς να χρειάζονται περαιτέρω επαναλήψεις των οδηγιών και των ερωτήσεων από την ερευνήτρια. Αυτό σημαίνει ότι κατάλαβαν από την αρχή τι έπρεπε να πράξουν και γιατί. Ο M_4 5,9 ετών απάντησε σωστά στα τρία από τα τέσσερα έργα. Στο τελευταίο έργο μπερδεύτηκε και σημείωσε ότι χρειάζονται πέντε κουτιά αντί για δύο, όπως ήταν το σωστό. Από την άλλη, ο M_5 5,9 ετών, ο M_{11} 5 ετών, ο M_7 5,6 ετών, ο M_{13} 4,5 ετών, ο M_6 5,8 ετών και ο M_8 5,4 ετών έκαναν λιγότερα ή καθόλου λάθη σε σχέση με τον προ-έλεγχο της έρευνας. Πιθανόν, λόγω της επαναλαμβανόμενης ενασχόλησης με δραστηριότητες διαίρεσης μέτρησης για τρεις συναπτές ημέρες εξασκήθηκαν και ξεπέρασαν τις όποιες δυσκολίες αντιμετώπιζαν στην αρχή. Αντιθέτως, η M_2 6 ετών και η M_{14} 4,2 ετών έκαναν περισσότερα λάθη σε σχέση με τον προ-έλεγχο. Ίσως η μεγάλη δυσκολία της M_2 να καταλάβει τις δραστηριότητες, να οφείλεται στο γεγονός ότι φοιτά μόλις έναν μήνα σε ελληνικό σχολείο. Η M_{14} είναι προνήπιο και η μικρότερη όλων ηλικιακά, οπότε ίσως και αυτή δικαιολογημένα δυσκολεύτηκε.

Παρακάτω, παρατίθεται ο Πίνακας 2, στον οποίο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα όλων των παιδιών του Νηπιαγωγείου στον μετα-έλεγχο:

3η φάση: Μετα-έλεγχος					
Παιδιά	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3	Έργο 4	Σύνολο σωστών
M_1 (6,1 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_2 (6 ετών)	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	2/4
M_3 (6 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_4 (5,9 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	3/4
M_5 (5,9 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_6 (5,8 ετών)	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	3/4
M_7 (5,6 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_8 παιδί με τύφλωση (5,4 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_9 (5,3 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{10} (5,1 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{11} (5 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{12} (4,7 ετών)	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	4/4
M_{13} (4,5 ετών)	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Σωστό	2/4
M_{14} (4,2 ετών)	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	2/4
Σύνολο	12/14	13/14	12/14	11/14	48/14

Πίνακας 2: Αποτελέσματα των παιδιών του Νηπιαγωγείου κατά τον μετα-έλεγχο της έρευνας

Στον μετα-έλεγχο της έρευνας τα παιδιά είχαν πολύ καλές επιδόσεις. Οι περισσότεροι σημείωσαν βελτίωση, καθώς δεν έκαναν τα ίδια λάθη που πραγματοποίησαν στον προ-έλεγχο. Τα παιδιά σημείωσαν ανοδική πορεία, γιατί είχαν εξασκηθεί στη διαίρεση μέτρησης κατά τη διάρκεια του προ-ελέγχου και της παρέμβασης. Μόνο δύο παιδιά έκαναν περισσότερα λάθη στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο. Μάλιστα, το ένα από τα δύο παιδιά κάθε φορά στις ερωτήσεις του τέταρτου έργου: «Πότε θα έχουμε τα λιγότερα κουτιά;» και «Πόσα μπισκότα πρέπει να χωράει ένα κουτί για να μη χρειαζόμαστε πολλά κουτιά;», μπερδεύονταν και απαντούσε ότι όταν υπάρχουν πολλά μπισκότα σε ένα κουτί, τότε χρειάζονται περισσότερα κουτιά. Οπότε δεν είχε αντιληφθεί ότι όσο περισσότερα μπισκότα χωράνε στο κάθε κουτί, τόσο λιγότερα κουτιά χρειάζονται (αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου). Τα μικρότερα ηλικιακά παιδιά απαριθμούσαν τα κουτιά τα οποία ζωγράφιζαν, προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση της ερευνήτριας: «Πόσα κουτιά χρειάστηκαν;» Αλλά, τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας δεν τα απαριθμούσαν.

Στο δεύτερο έργο η ερευνήτρια ρώτησε τα παιδιά: «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Τα περισσότερα παιδιά απάντησαν: «Τώρα που είχαμε τρία μπισκότα σε κάθε κουτί και ήταν πιο μεγάλα τα κουτιά, χρειαστήκαμε πιο λίγα κουτιά. Όταν βάλαμε δύο μπισκότα σε κάθε κουτί χρειαστήκαμε πολλά κουτιά». Στο τρίτο έργο η ερευνήτρια ρώτησε ξανά: «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Μερικά παιδιά απάντησαν: «Τώρα που πήραμε μεγαλύτερα κουτιά και βάλαμε τέσσερα μπισκότα μέσα στο κάθε κουτί, χρειαστήκαμε πιο λίγα κουτιά από πριν που βάλαμε τρία μπισκότα σε κάθε κουτί». Τέλος, στο τέταρτο έργο η ερευνήτρια τούς ρώτησε: «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα κουτιά; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;». Κάποιοι τής απάντησαν: «Τώρα που είχαμε πολύ μεγάλα κουτιά και βάλαμε έξι μπισκότα μέσα, χρειαστήκαμε λίγα κουτιά. Αυτή τη φορά είχαμε τα λιγότερα κουτιά από όλα τα έργα». Μέσω των απαντήσεων των παιδιών έγινε αντιληπτό ότι έχουν καταλάβει πως όσο αυξάνεται το μέγεθος των κουτιών (διαιρέτης) τόσο μειώνεται ο αριθμός των κουτιών που χρειάζονται κάθε φορά (πηλίκο), γιατί στο κάθε κουτί αντιστοιχούν περισσότερα μπισκότα.

7.4. Σύγκριση του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου ανά άτομο

Τα περισσότερα παιδιά είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στον μετα-έλεγχο αναφορικά με τον προ-έλεγχο. Παρακάτω γίνεται αναφορά της επίδοσης του εκάστοτε παιδιού χωριστά.

Αρχικά, ο M_1 (6,1 ετών) απάντησε σωστά σε όλα τα έργα και στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο. Το αγόρι απαντούσε σωστά σε κάθε ερώτηση, χωρίς να δυσκολεύεται ιδιαίτερα. Ο M_1 κύκλωνε στο κάθε έργο τον απαιτούμενο αριθμό καρότων / μπισκότων και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι / κουτί. Προφανώς, η στρατηγική αυτή τον βοήθησε, ώστε να μην κάνει κανένα λάθος. Στην Εικόνα 9 φαίνεται η στρατηγική, με την οποία λειτούργησε ο M_1.

Εικόνα 9: Η προσπάθεια του M_1 στα έργα του προ-ελέγχου

Η M_2 (6 ετών), η οποία κατάγονταν από την Αλβανία, δυσκολεύτηκε λίγο και στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο διότι, δε γνώριζε πολύ καλά την ελληνική γλώσσα. Όσον αφορά τον προ-έλεγχο, τα κατάφερε καλύτερα σχετικά με τον μετα-έλεγχο. Στον προ-έλεγχο έκανε σωστά τα τρία από τα τέσσερα έργα. Στο πρώτο έργο κύκλωνε τα καρότα και τον κάθε κύκλο τον αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι. Την ίδια ακριβώς στρατηγική χρησιμοποίησε και στο δεύτερο αλλά και στο τέταρτο έργο. Η στρατηγική αυτή τη βοήθησε πολύ, μιας και απάντησε σωστά σε αυτά τα συγκεκριμένα έργα. Όμως, στο τρίτο έργο προσπάθησε να ζωγραφίσει τα καλάθια και να αντιστοιχίσει στο καθένα τον απαιτούμενο αριθμό καρότων. Η στρατηγική αυτή ίσως τη δυσκόλεψε, γιατί μπερδεύτηκε και δεν μπόρεσε να βρει τη σωστή απάντηση. Σε μερικά καλάθια αντιστοιχούσε ένα καρότο, σε άλλα καλάθια δύο καρότα και μόνο σε ένα καλάθι αντιστοίχησε τέσσερα καρότα, όπως ήταν το σωστό. Στον μετα-έλεγχο απάντησε σωστά στα δύο από τα τέσσερα έργα. Στα τέσσερα έργα του μετα-ελέγχου το κορίτσι ζωγράφιζε τα κουτιά και αντιστοιχούσε, τραβώντας γραμμές, τα μπισκότα που χρειάζονταν στο εκάστοτε κουτί. Στο πρώτο και το δεύτερο έργο απάντησε σωστά, αλλά στα άλλα δύο έργα μπερδεύτηκε και έδωσε την ίδια απάντηση με το έργο δύο. Στην Εικόνα 10 παρουσιάζεται η προσπάθεια της M_2 στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 10: Η προσπάθεια της M_2 στα έργα του προ-ελέγχου

Η M_3 (6 ετών) έδωσε τη σωστή απάντηση των έργων και στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο της έρευνας. Χρησιμοποίησε και αυτή τη στρατηγική, με την οποία κύκλωνε όσα καρότα / μπισκότα χρειάζονταν και ο κάθε κύκλος ήταν ένα καλάθι / κουτί. Από μόνη της κιόλας έκανε την εξής σημείωση: «Κυρία, στο κάθε έργο χρειάζεται λιγότερα καλάθια / κουτιά από το προηγούμενο έργο, γιατί βάζουμε μέσα πιο πολλά καρότα / μπισκότα». Στην Εικόνα 11 παρουσιάζεται η προσπάθεια της M_3 στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 11: Η προσπάθεια της M_3 στα έργα του προ-ελέγχου

Ο M_4 (5,9 ετών) στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο της έρευνας έδωσε σωστές απαντήσεις στα τρία από τα τέσσερα έργα. Χρησιμοποίησε τη στρατηγική, που κύκλωνε τα καρότα / μπισκότα και ο εκάστοτε κύκλος ήταν ένα καλάθι / κουτί. Στο πρώτο, το δεύτερο και το τρίτο έργο του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου απάντησε σωστά, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Μάλιστα, στις ερωτήσεις της ερευνήτριας απαντούσε άμεσα και με σιγουριά, οπότε μάλλον κατάλαβε κάποια βασικά στοιχεία της διαίρεσης μέτρησης και αντιλήφθηκε την αντίστροφη σχέση που έχει ο διαιρέτης με το πηλίκο. Στο τέταρτο έργο του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου δεν απάντησε σωστά, γιατί κύκλωσε λάθος αριθμό καρότων και μπισκότων αντίστοιχα. Στην Εικόνα 12 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_4 στα έργα του μετα-ελέγχου.

Εικόνα 12: Η προσπάθεια του M_4 στα έργα του μετα-ελέγχου

Ο M_5 (5,9 ετών) στον προ-έλεγχο απάντησε σωστά στα δύο από τα τέσσερα έργα. Στα πρώτα δύο έργα κύκλωνε τον απαιτούμενο αριθμό καρότων και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι. Την ίδια στρατηγική χρησιμοποίησε και στα άλλα δύο έργα, όμως δεν απάντησε σωστά. Ο ίδιος είπε ότι δυσκολεύτηκε αρκετά, γιατί τα καρότα βρίσκονταν σε τυχαία διάταξη και όχι σε σειρά, οπότε μπερδεύτηκε και κύκλωσε λάθος αριθμό καρότων. Στον μετα-έλεγχο της έρευνας απάντησε σωστά και στα τέσσερα έργα ακολουθώντας την ίδια στρατηγική, την οποία χρησιμοποίησε στον προ-έλεγχο της έρευνας. Στην Εικόνα 13 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_5 στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 13: Η προσπάθεια του M_5 στα έργα του προ-ελέγχου

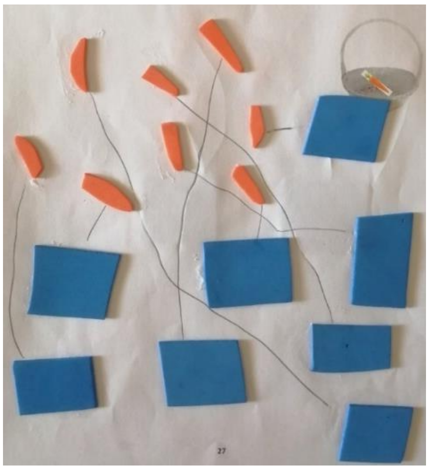
Ο M_6 (5,8 ετών) δυσκολεύτηκε λίγο περισσότερο στα έργα του προ-ελέγχου. Στον προ-έλεγχο απάντησε σωστά στα δύο από τα τέσσερα έργα. Προσπάθησε να ζωγραφίσει πολλά καλάθια και μετά αντιστοιχούσε τον αριθμό των καρότων που χρειάζονταν στο εκάστοτε καλάθι. Στο πρώτο έργο δοκίμασε να αντιστοιχίσει νοητά τα καρότα στα καλάθια και γι’ αυτό τον λόγο μπερδεύτηκε, όπως είπε, και ξέχασε να συμπεριλάβει ένα καρότο. Στα υπόλοιπα έργα τραβούσε γραμμές για να τοποθετήσει τα καρότα στα καλάθια, ώστε να μην μπερδευτεί. Έτσι, απάντησε σωστά. Στον μετα-έλεγχο έκανε λάθος μόνο στο πρώτο έργο. Ζωγράφισε τέσσερα κουτιά και αντιστοίχησε στο εκάστοτε κουτί από δύο μπισκότα. Όμως, συνειδητοποίησε ότι μερικά μπισκότα περίσσεψαν και αντί να ζωγραφίσει και άλλα κουτιά, έβαλε τα μπισκότα στα ήδη υπάρχοντα κουτιά. Στα άλλα τρία έργα έδωσε τις σωστές απαντήσεις. Γενικά, δυσκολεύτηκε πολύ να δώσει απαντήσεις στις ερωτήσεις, τις οποίες έθετε η ερευνήτρια. Όταν η ερευνήτρια ρωτούσε: «Πόσα καρότα / μπισκότα πρέπει να βάλουμε σε κάθε καλάθι / κουτί για να έχουμε λιγότερα καλάθια / κουτιά;», το παιδί κόμπιαζε να απαντήσει και δεν μπόρεσε να αντιληφθεί την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο. Δηλαδή πίστευε ότι όσο πιο πολλά καρότα / μπισκότα βάζουν στο καλάθι / κουτί, τόσο πιο πολλά καλάθια / κουτιά χρειάζονται. Στην Εικόνα 14 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_6 στα έργα του μετα-ελέγχου.

Εικόνα 14: Η προσπάθεια του M_6 στα έργα του μετα-ελέγχου

Ο M_7 (5,6 ετών) στον προ-έλεγχο της έρευνας απάντησε σωστά στα δύο από τα τέσσερα έργα. Σε όλα τα έργα ζωγράφιζε ένα καλάθι με καρότα, όπως απεικονιζόταν στην εικόνα της κάθε σελίδας. Ακόμη, στο πρώτο έργο κύκλωσε τον απαιτούμενο αριθμό καρότων και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι. Η στρατηγική αυτή βοήθησε τον συγκεκριμένο μαθητή να απαντήσει σωστά. Στο δεύτερο και το τρίτο έργο κύκλωνε ένα- ένα τα καρότα, όπως έκανε στο πρώτο έργο. Όμως, στο τέταρτο έργο προσπάθησε να δοκιμάσει μια διαφορετική στρατηγική και ζωγράφισε ένα καλάθι με οκτώ καρότα, όπως εκείνο που έβλεπε στην εικόνα. Στον μετα-έλεγχο το παιδί σημείωσε καλύτερη επίδοση, αφού απάντησε σωστά σε όλα τα έργα. Στο εκάστοτε έργο κύκλωνε τον απαιτούμενο αριθμό μπισκότων και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα κουτί. Ο M_7 εν τέλει κατανόησε τη διαδικασία και μάλιστα, στις ερωτήσεις απαντούσε σωστά, οπότε τελικά κατάφερε να προσεγγίσει τη διαδικασία της διαίρεσης, έστω και με δυσκολία. Στην Εικόνα 15 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_7 στα έργα του προ-ελέγχου.

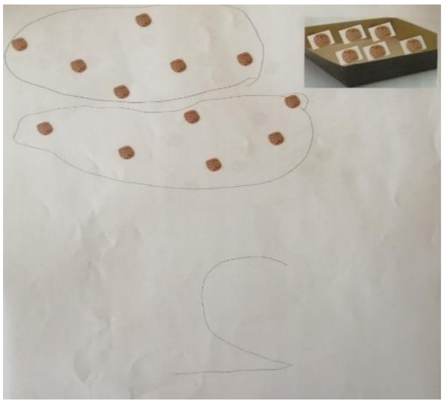
Εικόνα 15: Η προσπάθεια του M_7 στα έργα του προ-ελέγχου

Ο M_8 (5,4 ετών) ήταν ένα παιδί με τύφλωση. Γι' αυτό ασχολήθηκε με τα έργα του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου με τη βοήθεια της Νηπιαγωγού παράλληλης στήριξης. Το παιδί στον προ-έλεγχο ασχολήθηκε μόνο με τα δύο από τα τέσσερα έργα. Με τα άλλα δύο δεν ήθελε να ασχοληθεί και η επιθυμία του έγινε σεβαστή. Όμως, απάντησε σωστά και στα δύο έργα. Η Νηπιαγωγός παράλληλης στήριξης τον ρωτούσε και εκείνος της απαντούσε επιτυχώς. Στον μετα-έλεγχο ασχολήθηκε και με τα τέσσερα έργα, στα οποία απάντησε σωστά. Η ερευνήτρια παρακολουθούσε την επικοινωνία του M_8 με τη Νηπιαγωγό παράλληλης στήριξης και εντόπισε πως το παιδί κατανόησε το νόημα των δραστηριοτήτων και ότι όσο αυξάνονταν τα καρότα / μπισκότα ανά καλάθι / κουτί, τόσο μειώνονταν ο ζητούμενος αριθμός αυτών. Η Νηπιαγωγός παράλληλης στήριξης πήρε ειδικό υλικό, το οποίο χρησιμοποιείται στις δραστηριότητες για παιδιά με τύφλωση και το τοποθέτησε πάνω στις εικόνες που είχε η κάθε σελίδα. Ο M_8 άγγιζε το συγκεκριμένο υλικό και με το μολύβι του, είτε τραβούσε γραμμές στα ήδη κατασκευασμένα από το ειδικό υλικό καλάθια / κουτιά είτε κύκλωνε τα καρότα / μπισκότα που έπρεπε. Όταν χρησιμοποιούσε τον δεύτερο τρόπο, μόλις κύκλωνε τα καρότα / μπισκότα τα άγγιζε ξανά προκειμένου να απαντήσει στην ερώτηση: «Πόσα καρότα / μπισκότα ήταν σε κάθε καλάθι / κουτί;». Στην αρχή το παιδί δυσκολεύτηκε αρκετά, όμως στον μετα-έλεγχο τα κατάφερε χωρίς ιδιαίτερο πρόβλημα, γιατί είχε αντιληφθεί ήδη από τον προ-έλεγχο τον τρόπο που χρειάζονταν να λειτουργήσει στις δραστηριότητες. Στην Εικόνα 16 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_8 στα έργα του προ-ελέγχου.



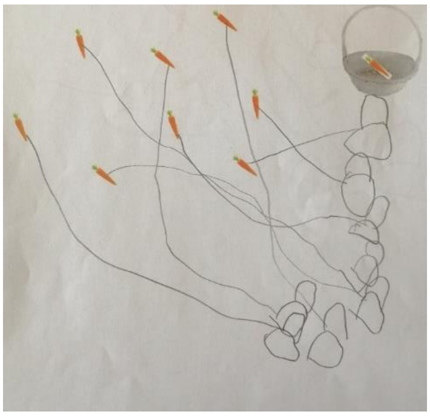
Εικόνα 16: Η προσπάθεια του M_8 στα έργα του προ-ελέγχου

Η M_9 (5,3 ετών) και στον προ-έλεγχο, αλλά και στον μετα-έλεγχο της έρευνας απάντησε σωστά σε όλα τα έργα. Στον προ-έλεγχο ζωγράφιζε καλάθια και τραβούσε γραμμές για να αντιστοιχίσει τον απαιτούμενο αριθμό καρότων. Στον μετα-έλεγχο κύκλωνε τον αριθμό των μπισκότων που έπρεπε και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα κουτί. Χρησιμοποίησε δύο διαφορετικές στρατηγικές, οι οποίες φάνηκε ότι τη βοήθησαν πολύ. Στις ερωτήσεις έδινε πάντα τη σωστή απάντηση, χωρίς να μπερδεύεται και χωρίς να δυσκολεύεται καθόλου. Οπότε, κατάφερε να προσεγγίσει τη διαίρεση μέτρησης και να αντιληφθεί την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο. Δηλαδή όσο αυξάνεται ο διαιρέτης τόσο μειώνεται το πηλίκο και αντίστροφα. Στην Εικόνα 17 παρουσιάζεται η προσπάθεια της M_9 στα έργα του μετα-ελέγχου.



Εικόνα 17: Η προσπάθεια της M_9 στα έργα του μετα-ελέγχου

Ο M_{10} (5,1 ετών) ήταν άψογος και στα έργα του προ-ελέγχου και στα έργα του μετα-ελέγχου. Οι απαντήσεις του ήταν όλες σωστές. Η στρατηγική που επέλεξε ήταν η ζωγραφική καλαθιών / κουτιών και η αντιστοίχιση των καρότων / μπισκότων που απαιτούνταν κάθε φορά. Το παιδί αυτό ήδη από το δεύτερο έργο του προ-ελέγχου κατάλαβε ότι θα αυξάνεται η ποσότητα στα καλάθια και γι’ αυτό θα μειώνεται ο αριθμός των ζητούμενων καλαθιών. Συγκεκριμένα, είπε στην ερευνήτρια: «Κυρία, είμαι σίγουρος ότι στις άλλες ασκήσεις θα βάζουμε μέσα πιο πολλά καρότα και θα χρειαζόμαστε λιγότερα καλάθια». Στην Εικόνα 18 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_{10} στα έργα του προ-ελέγχου.



Εικόνα 18: Η προσπάθεια του M_{10} στα έργα του προ-ελέγχου

Ο M_{11} (5 ετών) στον προ-έλεγχο απάντησε σωστά στα δύο από τα τέσσερα έργα. Στο πρώτο έργο ζωγράφισε ένα καλάθι με ένα καρότο, αλλά εν τέλει προτίμησε να κυκλώσει τα καρότα και τους κύκλους να τους αντιστοιχίσει σε καλάθια. Όμως μπερδεύτηκε και αντί να κυκλώνει ένα καρότο τη φορά, κύκλωνε τα καρότα σε ζευγάρια. Το ίδιο έκανε στο δεύτερο και το τρίτο έργο. Βέβαια, στο δεύτερο και το τέταρτο έργο απάντησε σωστά. Στον μετα-έλεγχο της έρευνας απάντησε σωστά και στα τέσσερα έργα χρησιμοποιώντας την ίδια στρατηγική, την οποία χρησιμοποίησε στον προ-έλεγχο. Από τις απαντήσεις του, φάνηκε ότι στον μετα-έλεγχο τα κατάφερε επιτυχώς χωρίς να δυσκολευτεί πολύ. Στην Εικόνα 19 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_{11} στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 19: Η προσπάθεια του M_{11} στα έργα του προ-ελέγχου

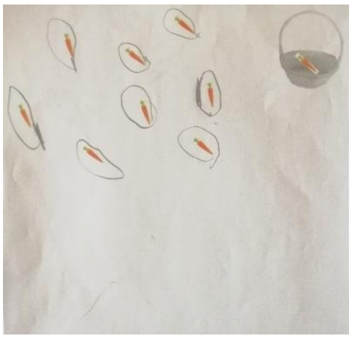
Η M_{12} (4,7 ετών) απάντησε σωστά σε όλα τα έργα στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο. Χρησιμοποίησε τη στρατηγική, κατά την οποία κύκλωνε όσα καρότα / μπισκότα έπρεπε και ο κάθε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι / κουτί. Οι απαντήσεις της στις ερωτήσεις ήταν στοχευμένες, δείχνοντας ότι κατάλαβε τι έπρεπε να κάνει και για ποιον λόγο. Αντιλήφθηκε ότι όσο αυξάνονταν ο αριθμός των καρότων / μπισκότων σε κάθε καλάθι / κουτί, τόσο μειώνονταν ο απαιτούμενος αριθμός των καλαθιών / κουτιών. Στην Εικόνα 20 παρουσιάζεται η προσπάθεια της M_{12} στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 20: Η προσπάθεια της M_{12} στα έργα του προ-ελέγχου

Ο M_{13} (4,5 ετών) δυσκολεύτηκε πολύ, τόσο στον προ-έλεγχο όσο και στον μετα-έλεγχο. Βέβαια στον μετα-έλεγχο τα κατάφερε λίγο καλύτερα απ' ότι στον προ-έλεγχο, καθώς στον πρώτο έδωσε τις σωστές απαντήσεις στα δύο από τα τέσσερα έργα. Χρησιμοποίησε τη στρατηγική κατά την οποία κύκλωνε τον απαιτούμενο αριθμό καρότων / μπισκότων και ο εκάστοτε κύκλος αντιστοιχούσε σε ένα καλάθι / κουτί. Στον προ-έλεγχο της έρευνας απάντησε σωστά μόνο στο πρώτο έργο, στο οποίο κύκλωνε ένα καρότο τη φορά. Στο δεύτερο έργο κύκλωνε ανά δύο τα καρότα, αλλά δύο από αυτά δεν τα συμπεριέλαβε καθόλου. Στο τρίτο και το τέταρτο έργο κύκλωνε ανά ένα τα καρότα, όπως στο πρώτο έργο. Στον μετα-έλεγχο κύκλωνε τον σωστό αριθμό των μπισκότων, όμως στο πρώτο και το δεύτερο έργο ξέχασε να συμπεριλάβει μερικά μπισκότα. Αυτό συνέβη διότι, όπως είπε, τον μπέρδευε η τυχαία διάταξη των μπισκότων. Ακόμη, στο τρίτο και το τέταρτο έργο, στα οποία απάντησε σωστά, έκανε αρκετές διορθώσεις την ώρα που κύκλωνε τα μπισκότα, γιατί είπε ότι μπερδευόταν και είτε ξεχνούσε μερικά είτε μπερδευόταν με τον αριθμό των μπισκότων που έπρεπε να έχει ο κάθε κύκλος. Το συγκεκριμένο παιδί δυσκολεύτηκε να καταλάβει ότι όσο αυξάνονταν η ποσότητα μέσα στα καλάθια / κουτιά, τόσο πιο λίγα καλάθια / κουτιά χρειάζονταν. Συνεπώς, δεν μπόρεσε να προσεγγίσει με ευκολία τη διαδικασία της διαίρεσης και να καταλάβει πως όσο αυξάνεται ο διαιρέτης, τόσο μειώνεται το πηλίκο και αντίστροφα. Στην Εικόνα 21 παρουσιάζεται η προσπάθεια του M_{13} στα έργα του προ-ελέγχου.

Εικόνα 21: Η προσπάθεια του M_{13} στα έργα του προ-ελέγχου

Η M_{14} (4,2 ετών) στον προ-έλεγχο απάντησε σωστά σε όλα τα έργα. Χρησιμοποίησε τη στρατηγική, στην οποία κύκλωνε τα καρότα και ο κάθε κύκλος θεωρούνταν ένα καλάθι. Όμως, παρ' όλο που απάντησε σωστά στην ερώτηση «Πόσα καλάθια χρειάστηκαν;», στις υπόλοιπες ερωτήσεις (π.χ. «Τι έγινε τώρα που είχαμε μεγαλύτερα καλάθια; Ήταν περισσότερα ή λιγότερα από την προηγούμενη φορά;», «Τι γίνεται όταν μπαίνουν περισσότερα καρότα στο καλάθι;», «Πότε θα έχουμε τα λιγότερα καλάθια;», «Πόσα καρότα πρέπει να χωράει ένα καλάθι για να μην χρειαζόμαστε πολλά καλάθια;») δυσκολεύονταν να απαντήσει. Στον μετα-έλεγχο της έρευνας, η M_{14} απάντησε σωστά μόνο στα δύο από τα τέσσερα έργα, στο πρώτο και το δεύτερο. Στα δύο τελευταία έργα κύκλωνε λάθος αριθμό μπισκότων και μερικά δεν τα κύκλωνε καθόλου. Τέλος, στις ερωτήσεις απαντούσε λάθος. Συγκεκριμένα είπε «Δεν ξέρω πόσα μπισκότα να βάλω στο κάθε κουτί, γιατί μπερδεύομαι όπως είναι ανακατεμένα». Εννοούσε ότι δυσκολεύτηκε λόγω της τυχαίας διάταξης των μπισκότων. Στην Εικόνα 22 παρουσιάζεται η προσπάθεια της M_{14} στα έργα του προ-ελέγχου.



Εικόνα 22: Η προσπάθεια της M_{14} στα έργα του προ-ελέγχου

Παρακάτω, παρατίθεται ο Πίνακας 3, στον οποίο παρουσιάζεται το σύνολο των σωστών απαντήσεων τού κάθε παιδιού ανά έργο του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου:

Αποτελέσματα κάθε παιδιού ανά έργο στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο		
Παιδιά	Σύνολο σωστών στον προ-έλεγχο / 4	Σύνολο σωστών στον μετα-έλεγχο / 4
M_1 (6,1 ετών)	4	4
M_2 (6 ετών)	3	2
M_3 (6 ετών)	4	4
M_4 (5,9 ετών)	3	3
M_5 (5,9 ετών)	2	4
M_6 (5,8 ετών)	3	3
M_7 (5,6 ετών)	2	4
M_8 παιδί με τύφλωση (5,4 ετών)	2	4
M_9 (5,3 ετών)	4	4
M_{10} (5,1 ετών)	4	4
M_{11} (5 ετών)	2	4
M_{12} (4,7 ετών)	4	4
M_{13} (4,5 ετών)	1	2
M_{14} (4,2 ετών)	4	2
Σύνολο	40/14	48/14

Πίνακας 3: Αποτελέσματα κάθε παιδιού ανά έργο στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο

Στη συνέχεια, στον Πίνακα 4 γίνεται σύγκριση των σωστών απαντήσεων τού συνόλου των παιδιών ανά έργο του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου:

Σύγκριση των σωστών απαντήσεων των παιδιά στα έργα του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου					
	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3	Έργο 4	Σύνολο
Προ-έλεγχος (14 παιδιά)	12/14	12/14	7/14	9/14	40/14
Μετα-έλεγχος (14 παιδιά)	12/14	13/14	12/14	11/14	48/14

Πίνακας 4: Σύγκριση των σωστών απαντήσεων τών παιδιών στα έργα του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 φαίνεται ότι τα πρώτα έργα ήταν ευκολότερα, γι' αυτό απάντησαν σωστά περισσότερα παιδιά, ενώ τα υπόλοιπα έργα ήταν δυσκολότερα. Όμως, παρά το δύσκολο επίπεδο των συγκεκριμένων έργων υπήρχε αύξηση των σωστών απαντήσεων. Η αύξηση των σωστών απαντήσεων δείχνει ότι η παρέμβαση είχε θετικά αποτελέσματα στον τρόπο σκέψης και λειτουργίας των παιδιών.

8. Συζήτηση- Συμπεράσματα

Στη συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε μια διδακτική παρέμβαση για τη διαίρεση μέτρησης στο Νηπιαγωγείο. Στη μελέτη συμμετείχαν δεκατέσσερα παιδιά Νηπιαγωγείου. Η μελέτη διεξάχθηκε επιτυχώς, καθώς όλα τα παιδιά του Νηπιαγωγείου συμμετείχαν με προθυμία.

Σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια δραστηριότητες διαίρεσης μέτρησης, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε τρεις φάσεις, στον προ-έλεγχο, την παρέμβαση και τον μετα-έλεγχο.

Στον προ-έλεγχο δόθηκαν στα παιδιά τέσσερα έργα, στα οποία μετρούσαν πόσα καλάθια χρειάζονταν κάθε φορά για να βάλουν μέσα έναν συγκεκριμένο αριθμό καρότων. Σε κάθε έργο αυξάνονταν το πλήθος των καρότων, που έπρεπε να τοποθετηθεί μέσα στο κάθε καλάθι.

Έπειτα, στην παρέμβαση τα παιδιά έπαιξαν το «Μινγκλ» (Mingle). Το «Μινγκλ» (Mingle) είναι ένα ομαδικό μαθηματικό παιχνίδι, στο οποίο τα παιδιά δημιουργούσαν ομάδες με ίσο πλήθος ατόμων (π.χ. δύο ομάδες με εφτά άτομα η καθεμία). Μόλις γίνονταν οι ομάδες τα παιδιά τις απαριθμούσαν, προκειμένου να γίνει φανερό πόσες ήταν «καλές». Δηλαδή πόσες είχαν τον αριθμό των παιδιών που ζητήθηκε από την ερευνήτρια. Μετά συζητούσαν πότε ήταν περισσότερες ή λιγότερες οι ομάδες, με βάση τα μέλη που είχε η καθεμία.

Τέλος, στον μετα-έλεγχο δόθηκαν στα παιδιά τέσσερα ακόμη έργα, όμοια με εκείνα του προ-ελέγχου, αλλά σε διαφορετικό πλαίσιο. Στα συγκεκριμένα έργα τα παιδιά έπρεπε να βρουν πόσα κουτιά χρειάζονται, με στόχο να τοποθετηθούν μέσα ισάριθμες ποσότητες μπισκότων. Κάθε φορά το πλήθος των μπισκότων ανά κουτί ήταν μεγαλύτερο.

Όσον αφορά τις επιδόσεις των παιδιών, οι περισσότεροι είχαν πολύ καλά αποτελέσματα στα έργα του προ-ελέγχου. Ειδικά μετά το «Μινγκλ» (Mingle), όπου δημιουργούσαν ομάδες συζητώντας μεταξύ τους, την τρίτη ημέρα στον μετα-έλεγχο τα κατάφεραν ακόμη καλύτερα. Ελάχιστοι σημείωσαν μεγαλύτερη επιτυχία κατά τον προ-έλεγχο και μικρότερη κατά τον μετα-έλεγχο. Συγκεκριμένα, μόνο δύο κορίτσια έκαναν περισσότερα λάθη στον μετα-έλεγχο. Βέβαια, τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν ακριβώς τι έπρεπε να κάνουν και γιατί, ήδη από τον προ-έλεγχο. Οι περισσότεροι ζωγράφιζαν καλάθια και αντιστοιχούσαν τον απαιτούμενο αριθμό καρότων στο εκάστοτε καλάθι. Άλλοι κύκλωναν τα καρότα και νοητά τα αντιστοιχούσαν σε ένα καλάθι. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο πραγματοποίησαν και τα τέσσερα έργα του μετα-ελέγχου με τα μπισκότα και με τα κουτιά. Στο τέλος κάθε έργου τα παιδιά, τα οποία γνώριζαν να γράφουν τους αριθμούς, έγραφαν τον αριθμό των καλαθιών / κουτιών που χρειάστηκαν. Όμως, όσα παιδιά δεν μπορούσαν να γράψουν τους αριθμούς, έλεγαν στην ερευνήτρια τον κάθε αριθμό και εκείνη τον σημείωνε. Γενικά, στο «Μινγκλ» (Mingle) τα παιδιά τα κατάφεραν καλύτερα, ίσως γιατί συζητούσαν ομαδικά και αποφάσιζαν πώς θα χωριστούν σε ομάδες και γιατί. Όμως, στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο, όπου ο καθένας ενεργούσε ατομικά υπήρχε μεγαλύτερη δυσκολία.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά στον μετα-έλεγχο έδωσαν τη σωστή απάντηση σε περισσότερα έργα σε σχέση με τα έργα του προ-ελέγχου. Επιπλέον, η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν πολλές και διαφορετικές στρατηγικές, προκειμένου να απαντήσουν στα έργα του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου. Όμως υπήρχαν και παιδιά που μπερδεύονταν και έκαναν λάθη.

Στο πλαίσιο της πτυχιακής έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε σε σύντομο χρονικό διάστημα, υπήρχαν μερικοί περιορισμοί στη μελέτη που διεξήχθη. Οι περιορισμοί ήταν ότι το παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle) έγινε μόνο για μία διδακτική ώρα. Καλύτερο θα ήταν το παιχνίδι να επαναλαμβανόταν περισσότερες ημέρες, ώστε να εξοικειωθούν πιο πολύ τα παιδιά με την έννοια της διαίρεσης.

Επίσης, το δείγμα της μελέτης δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του συνολικού πληθυσμού, διότι ήταν πολύ μικρό. Συμμετείχαν μόνο δεκατέσσερα παιδιά. Όμως, δεν υπήρχε η δυνατότητα για συμμετοχή περισσότερων ατόμων. Επιπροσθέτως, μια αδυναμία της μελέτης είναι ότι δεν έγινε μεταγενέστερος έλεγχος μετά το πέρας κάποιας μεγαλύτερης περιόδου, προκειμένου να φανεί εάν διατηρήθηκαν οι γνώσεις που αποκτήθηκαν. Ακόμη, η τυχαία διάταξη των αντικειμένων, που έπρεπε να μοιραστούν ισόποσα δε βοηθούσε πάντα τα παιδιά να τα βάλουν σε ομάδες. Αυτό ίσως να τα δυσκόλεψε περισσότερο. Σε μελλοντική έρευνα θα επιλεγόταν μία διάταξη, η οποία θα στηριζόταν περισσότερο σε πιθανές στρατηγικές μοιρασμού που χρησιμοποιούν τα παιδιά. Τέλος, θα χρησιμοποιούνταν πιο δύσκολες διαιρέσεις ίσως και χωρίς τη χρήση υλικού, για να γίνει πιο εμφανής μια πιθανή επίδραση της συγκεκριμένης παρέμβασης σε παιδιά, τα οποία αρχικά δυσκολεύονταν περισσότερο με τα έργα.

Γενικά τα παιδιά δυσκολεύτηκαν με τη διαίρεση μέτρησης και δεν κατανόησαν εύκολα την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο (διαίρεση μέτρησης). Αυτό δε φάνηκε τόσο στις τελικές τους απαντήσεις, που ήταν σωστές σε υψηλό βαθμό ακόμη και στον προ-έλεγχο, αλλά στο γεγονός ότι για να καταλήξουν σε αυτές τα παιδιά δέχθηκαν αρκετή υποστήριξη μέσα από την επανάληψη των ερωτήσεων και των δεδομένων της κάθε άσκησης από την ερευνήτρια. Προφανώς αυτό συνέβη γιατί η διαίρεση μέτρησης είναι δύσκολη ως πράξη και δεν είναι τόσο διαισθητική όσο η δίκαιη μοιρασιά, όπως έχουν δείξει και άλλες μελέτες (Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2017).

Εν κατακλείδι, παρ' όλο που η διαίρεση μέτρησης θεωρείται δύσκολη ως πράξη, τα παιδιά του Νηπιαγωγείου έχουν τη δυνατότητα να καταλάβουν κάποια βασικά στοιχεία της και να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη με το πηλίκο. Η εμπλοκή τους με κατάλληλες δραστηριότητες και υλικά, συμβάλλει στο να γίνει η διαίρεση μέτρησης πιο εύκολα κατανοητή. Για παράδειγμα, όπως φάνηκε από την παρούσα διδακτική παρέμβαση, το ομαδικό μαθηματικό παιχνίδι «Μινγκλ» (Mingle) βοηθάει αρκετά στην κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης. Είναι ένα παιχνίδι βιωματικό, ευχάριστο, διασκεδαστικό και εύκολο. Γι' αυτό καλό θα είναι να διδάσκεται συστηματικά στο Νηπιαγωγείο.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ξενόγλωσσες βιβλιογραφικές αναφορές

Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A. & Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, pp. 1-16. doi: 10.1016/j.jmathb.2020.100817

Learning Trajectories for Primary Grades Mathematics Developmental Levels. (2022, Ιανουάριος 3). Ανακτήθηκε από https://www.otffeo.on.ca/en/wp-content/uploads/sites/2/2017/05/Learning_trajectories_math.pdf

Mingle & Count: A Game of Number Sense. (2022, Φεβρουάριος 5). Ανακτήθηκε από https://learn.teachingchannel.com/video/mingle-count-a-game-of-number-sense

Schulz, A. & Leuders, T. (2018). Learning trajectories towards strategy proficiency in multi-digit division – A latent transition analysis of strategy and error profiles. *Learning and Individual Differences*, *66*, pp. 54-69. doi: 10.1016/j.lindif.2018.04.014

Van de Walle, J., Lovin, L. H., Karp, K. S. & Bay- Williams, J. M. (2017). Στο επιμ. Τρ. Τριανταφυλλίδης, *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με Επίκεντρο το Παιδί και την Ανάπτυξή του.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Ελληνόγλωσσες βιβλιογραφικές αναφορές

Αλεξανδράκη, Φ. (2020). *Η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στην Προσχολική Εκπαίδευση με τη βοήθεια ΤΠΕ, βασισμένη στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά* (Διδακτορική Διατριβή). Πανεπιστήμιο Κρήτης Σχολή Επιστημών της Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Ρέθυμνο.

Αρσενίδου, Β. (2018). *Η αξιοποίηση των τροχιών μάθησης στη διδασκαλία των κλασμάτων στην Ε' τάξη του Δημοτικού Σχολείου* (Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης). Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης Σχολή Επιστημών Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αλεξανδρούπολη.

Βικάρη, Μ. Α. (2021). *Τρόποι αξιοποίησης της λογοτεχνίας στην κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης σε παιδιά Δημοτικού* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Αιγαίου Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Ρόδος.

Δεσλή, Δ. & Κορνηλάκη, Α. (2013). Η ανάδυση του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού στη σκέψη των μικρών παιδιών. Στο Μ. Καλδρυμίδου, Χ. Σακονίδης & Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), *Διδακτική των Μαθηματικών: θεωρητικές και ερευνητικές προσεγγίσεις* (σσ. 1-25).

Καράλης, Π. Ν. (2018). *«Κατανοώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης»: Μια διδακτική πρόταση για την Γ' Δημοτικού* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόπτση, Ι. (2021). *Γιατί «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»; Δοκιμάζοντας μια νέα διδακτική προσέγγιση στη διαίρεση κλασμάτων με ένα πείραμα σχεδιασμού* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας Παιδαγωγική Σχολή Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών», Θεσσαλονίκη.

Κορνηλάκη, Α. (2001). Η κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από τα μικρά παιδιά. Στο Α. Κοντογιάννη & Ε. Ντολιοπούλου (Επιμ.), *3. ΜΕΤΑ-πτυχιακά: Εξελίξεις και προοπτικές στην προσχολική και πρωτοσχολική αγωγή* (σσ. 261-276). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κορνηλάκη, Α. & Nunes, T. (1999). Οι απαρχές κατανόησης της διαίρεσης. Στο Ε. Κούρτη (Επιμ.), *Τριήμερο Πανελλήνιο Συνέδριο «Η Έρευνα στην Προσχολική Εκπαίδευση. Ψυχολογικές και Κοινωνικές Προσεγγίσεις, Τόμος Β΄», 21-23 Οκτωβρίου 1999* (σσ. 141-151). Ρέθυμνο: Εκδόσεις Τυπωθήτω- Γιώργος Δαρδανός.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Περίπατος στη μάθηση της στοιχειώδους αριθμητικής*. Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη Εκδόσεις Α.Ε.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο*. Ανακτήθηκε 10 Ιανουαρίου, 2022, από http://ebooks.edu.gr/info/cps/27deppsaps_Nipiagogiou.pdf

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου*. Ανακτήθηκε 22 Δεκεμβρίου, 2021, από https://www.pdeionion.gr/wp-content/uploads/2019/03/2011-2o-

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2014). *Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου*. Ανακτήθηκε 2 Ιανουαρίου, 2022, από https://www.pdeionion.gr/wp-content/uploads/2019/03/2014-

Πρόγραμμα Σπουδών Προσχολικής Εκπαίδευσης- Νηπιαγωγείου. (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για την Προσχολική Εκπαίδευση*. Ανακτήθηκε 21 Φεβρουαρίου, 2022, από https://edu.klimaka.gr/sxoleia/nipiagogio/3528-programma-spoudwn-nipiagogeiou

Σακέτου, Π. Α. (2018). *«Οντολογία Εκπαιδευτικών Σημασιολογικών Τροχιών»* (Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς.

Σκουμπουρδή, Χ. & Χρυσανθή, Π. Τ. (2017). Εικονογραφημένο Βιβλίο με Καταστάσεις Επαναλαμβανόμενης Μοιρασιάς και οι Δράσεις των Νηπίων. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 0* (9), σσ. 59 - 82. doi: 10.12681/enedim.14181

Τζεκάκη, Μ. (2011). *«Επιμόρφωση Εκπαιδευτών Εκπαιδευτικών. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση»* (e-book). Ανακτήθηκε 22 Δεκεμβρίου, 2021, από http://ebooks.edu.gr/info/newps/

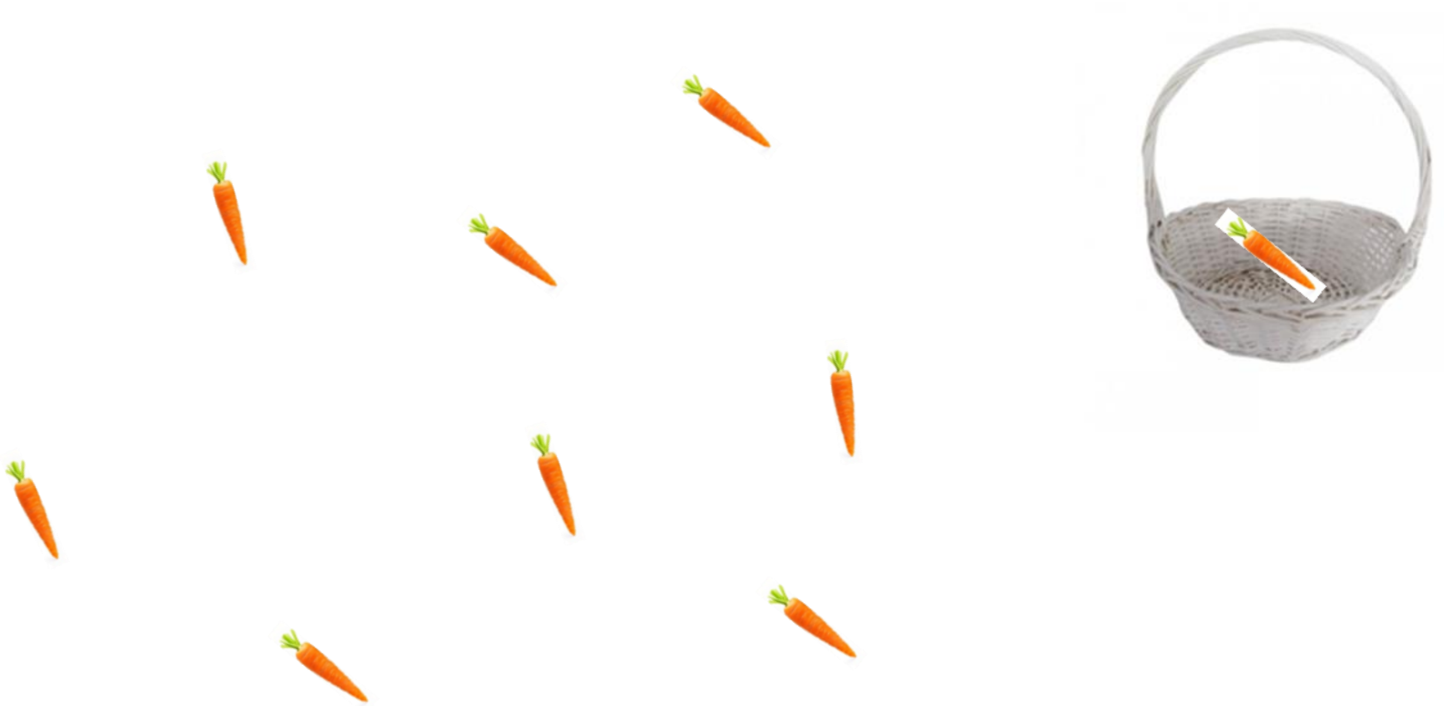
Παράρτημα

Όνομα:…………………………….. Ηλικία:………..

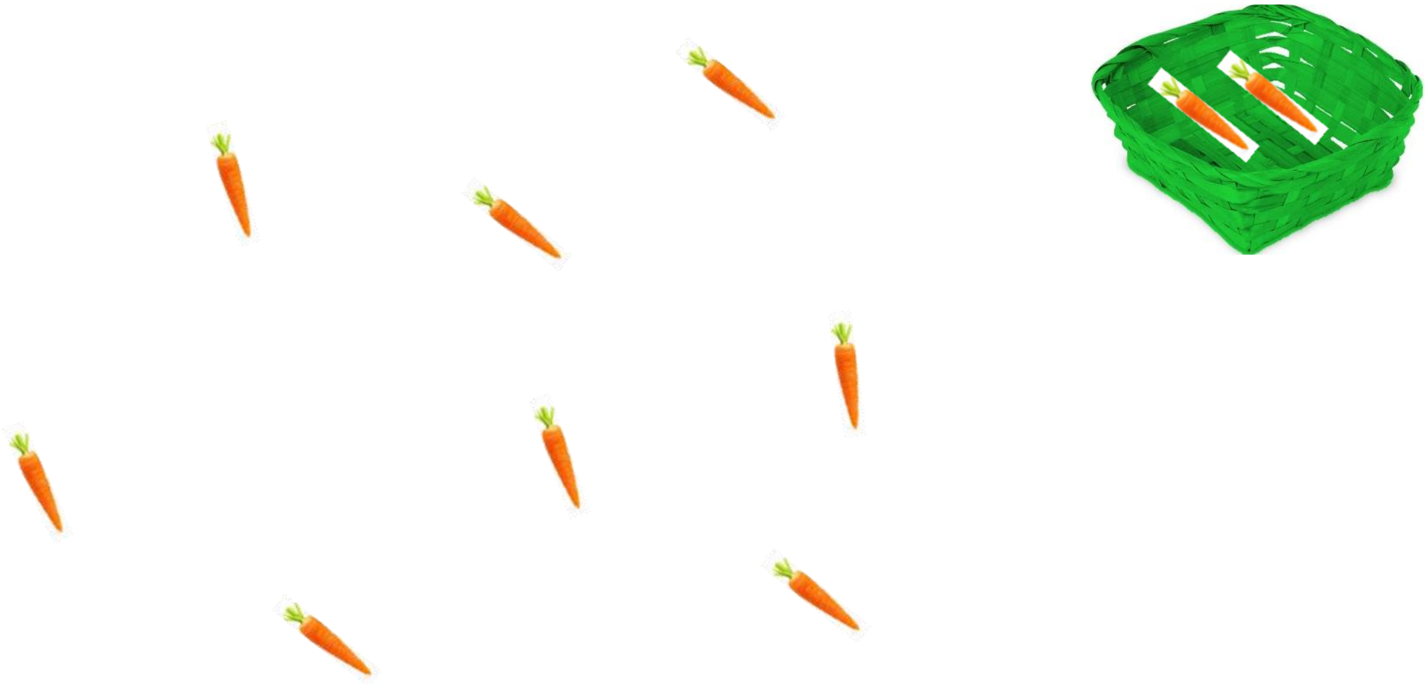
$1^{η}$ φάση

Προ-έλεγχος

<u>Σενάριο 1</u>



Σενάριο 2



Σενάριο 3

Σενάριο 4

Όνομα:…………………………… Ηλικία:………

3η φάση

Μετα-έλεγχος

<u>Σενάριο 1</u>

Σενάριο 2

Σενάριο 3

<u>Σενάριο 4</u>