

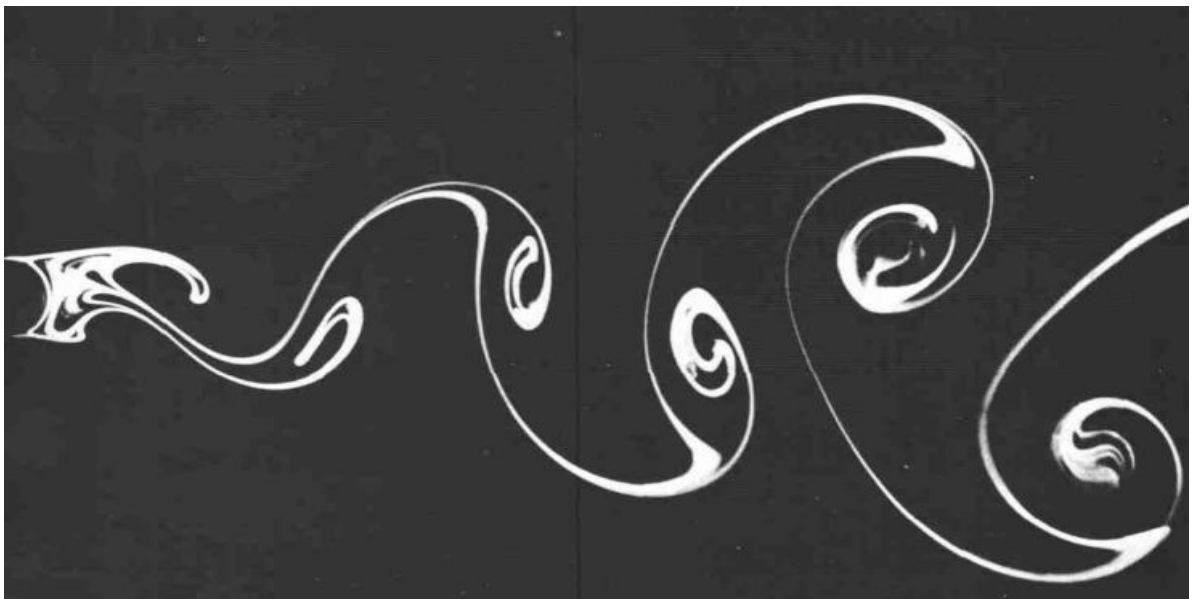
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Μοντελοποίηση Μηχανικού Συστήματος για την Εξόρυξη  
Υδραυλικής Ενέργειας από Ρευστοδυναμικά Επαγόμενες  
Ταλαντώσεις**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Ηρώ Μαλεφάκη, ΑΕΜ: 1419

**Επιβλέπων Καθηγητής:** Ευστάθιος Κωνσταντινίδης



Κοζάνη, Νοέμβριος 2017

## Περίληψη

Στην εργασία που ακολουθεί, παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο για τον υπολογισμό της ισχύος που παράγεται από τις ρευστοδυναμικά επαγόμενες ταλαντώσεις ενός λείου περιστρεφόμενου κυλίνδρου που υποβάλλεται στο ρευστοδυναμικό φαινόμενο Vortex Induced Vibration (VIV). Συνήθως, οι δομές που υπόκεινται στο Vortex Induced Vibration σχεδιάζονται με σκοπό να ελαχιστοποιείται η κόπωση που προκαλείται λόγω αυτού, με ανάπτυξη μοντέλων που προβλέπουν την απόκρισή τους. Πρόσφατα, προτάθηκε η ιδέα να ενισχυθούν οι ταλαντώσεις αυτές, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η συγκομιδή ενέργειας από το ρευστό. Η συσκευή περιλαμβάνει έναν προσδεδεμένο κύλινδρο κυκλικής διατομής, ο οποίος μπορεί να εκτελεί γωνιακές ταλαντώσεις ανάλογα με την τοποθέτηση του στροφέα σε σχέση με το ελεύθερο ρεύμα ρευστού, το οποίο διατηρείται κάθετα. Συνεπώς, εξετάζονται δύο περιπτώσεις, όταν το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο ανάντη του κυλίνδρου, κι όταν είναι τοποθετημένο κατάντη αυτού. Η μηχανική απόκριση του μηχανισμού αυτού, εξετάζεται μέσω ενός μη γραμμικού υδροδυναμικού μοντέλου. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην αποικοδόμηση της υδροδυναμικής δύναμης σε δύναμη λόγω αντίδρασης και δύναμη λόγω ανύψωσης και στο διαχωρισμό της δύναμης αντίδρασης σε οπισθέλκουσα και δύναμη λόγω προστιθέμενης μάζας, με βάση την εξίσωση Morison. Σε αυτό το σημείο έγκειται και η κύρια διαφοροποίηση με τα υπόλοιπα μαθηματικά μοντέλα. Η μοντελοποίηση αυτή, εισάγει στο πρόβλημα την επίδραση της προστιθέμενης μάζας στη δυναμική συμπεριφορά του κυλίνδρου και μη γραμμικότητες οι οποίες δε λαμβάνονται υπόψη στα υπόλοιπα μαθηματικά μοντέλα, διαφοροποιώντας κατά πολύ τη φυσική του προβλήματος. Πραγματοποιήθηκαν αρκετές προσομοιώσεις αριθμητικά, προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση του μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$ , του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  στην απόκριση του πλάτους ταλάντωσης, ταχύτητας και στον ενεργειακό βαθμό απόδοσης του συστήματος. Τα αποτελέσματα από το παρόν μοντέλο, συγκρίνονται ικανοποιητικά με τα πειραματικά δεδομένα από τη βιβλιογραφία.



## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	6 -
1.1 Περιγραφή του φαινομένου Vortex Induced Vibration (VIV).....	7 -
1.2 Η συχνότητα έκλυσης δινών.....	11 -
1.3 Το φαινόμενο του συντονισμού (Lock-in).....	12 -
1.4 Η έννοια της προστιθέμενης μάζας.....	14 -
1.5 Οι επιπτώσεις του Vortex Induced Vibration .....	16 -
1.6 Το Vortex Induced Vibration για την εξόρυξη υδραυλικής ενέργειας.....	18 -
2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	23 -
2.1 Τα εμπειρικά μοντέλα.....	23 -
2.2 Τα ημιεμπειρικά μοντέλα-wake oscillator models .....	26 -
2.3 Τα θεωρητικά μοντέλα .....	33 -
3. Το υδροδυναμικό μοντέλο- Θεωρητικό μέρος.....	38 -
3.1 Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο ανάντη του κυλίνδρου.....	41 -
3.1.1 Κινητική.....	41 -
3.1.2 Δυναμική.....	43 -
3.1.3 Εξίσωση Κίνησης .....	49 -
3.1.4 Ισχύς .....	59 -
3.2 Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο κατάντη του κυλίνδρου. ....	62 -
3.2.1 Κινητική.....	62 -
3.2.2 Δυναμική.....	63 -
3.2.3 Εξίσωση κίνησης.....	69 -
3.2.4 Ισχύς .....	73 -
4. Αποτελέσματα.....	75 -
4.1 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων.....	77 -
4.2 Επίδραση μήκους μοχλοβραχίονα.....	81 -
4.3 Επίδραση συντελεστή απόσβεσης.....	85 -
4.4 Επίδραση αδιάστατου λόγου μαζών.....	88 -
4.5 Ισοκαμπύλες απόδοσης.....	92 -
5. Συμπεράσματα – Προτάσεις .....	99 -

<b>Παράρτημα Α.....</b>	<b>- 101 -</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>- 105 -</b>

## Συμβολισμοί

$\theta$  Γωνιακή απόκριση ταλάντωσης συστήματος ( $rad$ )

$\theta_{\max}^*$  Γωνιακό πλάτος ταλάντωσης συστήματος

$U_{\max}^*$  Ταχύτητα της ταλάντωσης

$\eta$  Ενεργειακός βαθμός απόδοσης του συστήματος

$c$  Συντελεστής απόσβεσης  $\left( \frac{N}{m/s} \right)$

$C_A$  Συντελεστής προστιθέμενης μάζας

$C_L$  Συντελεστής διέγερσης

$C_D$  Συντελεστής αντίστασης

$D$  Διάμετρος αγωγού ( $m$ )

$f_N$  Φυσική συχνότητα στο κενό ( $Hz$ )

$f$  Συχνότητα ταλάντωσης ( $Hz$ )

$f_s$  Συχνότητα έκλυσης δινών ( $Hz$ )

$f^*$  Αδιάστατος λόγος συχνοτήτων

$k$  Συντελεστής στιβαρότητας  $\left( \frac{N}{m} \right)$

$L$  Μήκος αγωγού ( $m$ )

$m$  Μάζα αγωγού ( $kg$ )

$m_a$  Προστιθέμενη μάζα ( $kg$ )

$m_d$	Εκτοπιζόμενη μάζα (kg)
$m^*$	Αδιάστατος λόγος μαζών
Re	Αριθμός Reynolds
St	Αριθμός Strouhal
$\zeta$	Αδιάστατος λόγος απόσβεσης
$\mu$	Δυναμικό ιξώδες (kg/ms)
$\nu$	Κινηματικό ιξώδες ( $m^2/s$ )
$U_\infty$	Ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος ροής ρευστού (m/s)
$U^*$	Αδιάστατη ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος ροής ρευστού
$U_{rel}$	Σχετική ταχύτητα αγωγού (m/s)
$U_C$	Γραμμική ταχύτητα αγωγού (m/s)
$\rho$	Πυκνότητα ρευστού ( $kg/m^3$ )
$\omega_N$	Φυσική γωνιακή ταχύτητα στο κενό (rad/s)
$\omega$	Γωνιακή ταχύτητα συστήματος (rad/s)
$\varphi$	Γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{U}_C$ και $\vec{U}_{rel}$
$\alpha$	Γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{U}_C$ και $\vec{U}_\infty$
$\psi$	Γωνία φάσης μεταξύ της δύναμης άνωσης και της μετατόπισης
$r$	Μήκος μοχλοβραχίονα (m)
$L^*$	Αδιάστατο μήκος μοχλοβραχίονα ( $L^* = r/D$ )

# 1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα επιχειρηθεί μια διερεύνηση της δυνατότητας παραγωγής ενέργειας από τις ρευστοδυναμικά επαγόμενες ταλαντώσεις που προκαλούνται από το Vortex Induced Vibration (VIV). Επίσης, θεωρείται σκόπιμο να γίνει και μια ποιοτική και τεχνική περιγραφή και επεξήγηση των αρχών που διέπουν το φαινόμενο αυτό, προκειμένου να δοθεί μια ευρύτερη εικόνα του ρευστοδυναμικού φαινομένου που μελετάται, καθώς και των επιπτώσεών του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο που ακολουθεί, γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των διάφορων μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη του VIV, τα οποία με βάση το βαθμό ανάδρασής τους με τα πειραματικά δεδομένα κατηγοριοποιούνται σε εμπειρικά, ημιεμπειρικά και θεωρητικά.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται συνοπτικά πως προέκυψαν θεωρητικά οι εξισώσεις κίνησης και ισχύος που περιγράφουν το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται και για τις δύο περιπτώσεις που διερευνώνται, ανάντη και κατάντη του κυλίνδρου.

Εν συνεχεία, στο τέταρτο κεφάλαιο, δίνονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που διεξήχθησαν. Γίνεται μελέτη της επίδρασης του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$ , του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  στην ενεργειακή απόδοση του συστήματος.

Τέλος, παρουσιάζεται το πέμπτο κεφάλαιο όπου γίνεται αναφορά των συμπερασμάτων που προέκυψαν, καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.



## 1.1 Περιγραφή του φαινομένου Vortex Induced Vibration (VIV)

Για την βαθύτερη και πιο ουσιαστική κατανόηση του φαινομένου VIV, θεωρείται να αναλυθούν και να εξηγηθούν ορισμένα μεγέθη τα οποία είναι σημαντικά για την περιγραφή του.

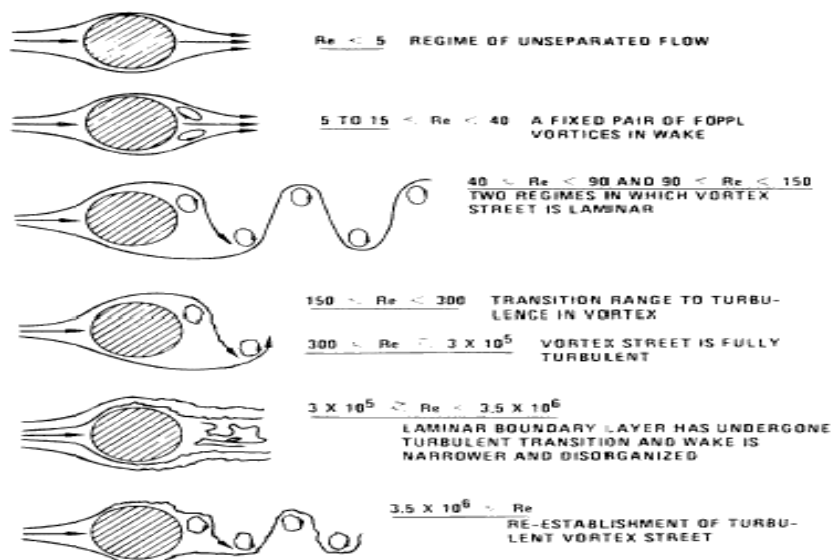
Όπως πολλά ρευστομηχανικά φαινόμενα, η ροή γύρω από τον ομόρρου εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό Reynolds. Ο αριθμός Reynolds αποτελεί μια αδιάστατη ποσότητα, η οποία χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη του ροϊκού πεδίου σε διάφορες περιπτώσεις ροών. Ο αριθμός Reynolds, ορίζεται ως ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις ιξώδους, και κατά συνέπεια, ποσοτικοποιεί τη σχετική σημασία αυτών των δύο τύπων δυνάμεων για δεδομένες συνθήκες ροής. Ο αριθμός Reynolds συχνά χρησιμοποιείται στην αδιαστατοποίηση των προβλημάτων αλλά και στο χαρακτηρισμό της ροής ως στρωτής ή τυρβώδους. Η μαθηματική έκφρασή του είναι:

$$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu}$$

(1)

,όπου:

- $U_{\infty}$  είναι η ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος ρευστού,
- $D$  η διάμετρος του κυλίνδρου και
- $\nu$  το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.



Σχήμα 1.1: Ανάπτυξη της ροής στον ομόρρου του κυλίνδρου.

Στο όριο των μικρών αριθμών Reynolds, τα ιξώδη φαινόμενα κυριαρχούν στη δυναμική της ροής κοντά στο στερεό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι γραμμές ροής να προσαρμόζονται στην καμπυλότητα και το σχήμα του κυλίνδρου, κάτι που ονομάζεται ροή ερπυσμού (creeping flow). Το προφίλ της ροής κατάντη του μη αεροδυναμικού σώματος είναι πολύ ομοιόμορφο και δεν ποικίλει ανάλογα με το χρόνο.

Αντιστρόφως, στους υψηλούς αριθμούς Reynolds, η μεγάλη έκλυση δινών δε διαχέεται στον ομόρρου και το προφίλ της ροής κατάντη του κυλίνδρου δείχνει δύο στρώματα διάτμησης.

Μια διατμητική στρώση είναι ασταθής, μέσω ενός καθαρά μη ιξώδους μηχανισμού (Ho και Huerre, 1984).

Μια τέτοια αστάθεια έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή δινών. Παράγονται, λοιπόν, δύο στρώματα αντίθετου στροβιλισμού στις δύο άκρες του ομόρρου, αλληλεπιδρώντας σε συζευγμένη αστάθεια, με αποτέλεσμα τη δημιουργία των εναλλασσόμενων στροβίλων, που ονομάζεται έκλυση δινών (vortex shedding) οι οποίοι δημιουργούν, τελικά, μια αυτοδιεγερόμενη ταλάντωση.

Οι πρώτες παρατηρήσεις και αναλύσεις αυτού του φαινομένου έγιναν από τους Benard (1908) και von Karman (1911).

Πιο απλά, το φαινόμενο VIV συνδέεται με περιοδικές αταξίες στον ομόρρου. Όταν  $Re > 40$ , δημιουργείται δίνη στη μία πλευρά του ομόρρου και αποκόλληση ροής στην άλλη, γεγονός που προκαλεί τη δύναμη ανύψωσης/διέγερσης (lift force) προς τη διεύθυνση στην οποία εμφανίζονται τα φύλλα στροβιλότητας. Η διαρκής εναλλαγή των θέσεων των στροβίλων, προκαλεί ταλαντωτική κίνηση εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης του ρευστού. Εξηγώντας αναλυτικά, όπως παρατηρούμε και στο Σχήμα 1.1,

- Για αριθμούς Reynolds  $Re < 5$ , η ροή μπορεί να προσεγγιστεί με στρωτή ροή, καθώς οι γραμμές ροής καμπυλώνουν γύρω από την κυκλική διατομή και δεν παρατηρείται καμία διαταραχή, δηλαδή δεν έχουμε φαινόμενα στροβιλότητας. Το ρευστό περιβάλλει πλήρως τον κύλινδρο με ομαλό τρόπο και ακολουθεί την καμπυλότητά του.

Κατά τη στρωτή ροή, οι γειτονικές στρώσεις του ρευστού κινούνται σχηματίζοντας λείες (όχι απαραίτητα ευθείες) γραμμές ροής, χωρίς να πραγματοποιείται ανάμιξη μακροσκοπικής κλίμακας μεταξύ δύο γειτονικών στρώσεων.

- Για αριθμούς Reynolds στα διαστήματα  $[5,40)$ , αρχίζει η ανάπτυξη του οριακού στρώματος (boundary layer), με συνέπεια να εμφανίζονται δύο σταθερές δίνες στον ομόρρου.
- Για ακόμη μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds  $[40,150]$  αρχίζει να γίνεται ασύμμετρη η ροή στον ομόρρου και προκαλείται στρωτή διάδοση δινών, γνωστή ως Von Karman vortex street.
- Στο εύρος αριθμών Reynolds  $[150, 3 \times 10^5]$ , το στρωτό οριακό στρώμα διατηρείται ως το σημείο αποκόλλησης, ενώ ο ομόρρους αρχίζει να γίνεται τυρβώδης, δηλαδή οι δυνάμεις αδράνειας αρχίζουν να είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις συνεκτικότητας (ή ιξώδους).

Στην τυρβώδη ροή, τα ρευστά σωματίδια έχουν ακανόνιστη, σχεδόν τυχαία, διακυμαινόμενη κίνηση. Η ταχύτητα σε κάθε σημείο του ρευστού μεταβάλλεται με το χρόνο τόσο κατά μέγεθος, όσο και κατά διεύθυνση. Η ροή κατά στρώσεις με λείες γραμμές ροής που παρατηρείται στη στρωτή ροή, διασπάται πλήρως.

Η αποκόλληση ροής εμφανίζεται περίπου σε  $\theta=80^\circ$  όταν το οριακό στρώμα είναι στρωτό και περίπου σε  $\theta=140^\circ$  όταν το οριακό στρώμα είναι τυρβώδες. Η καθυστέρηση της αποκόλλησης κατά την τυρβώδη ροή οφείλεται στις γρήγορες διακυμάνσεις του ρευστού στην εγκάρσια διεύθυνση.

- Η περιοχή αριθμών Reynolds [ $3 \times 10^5$ ,  $3.5 \times 10^6$ ] αποτελεί την περιοχή μετάβασης στην τυρβώδη ροή, η οποία αναπτύσσεται πλήρως για ακόμη μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds.

Σε πολλές εργασίες, εξετάζεται η περίπτωση ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου, ο οποίος είναι περιορισμένος να μετακινείται εγκάρσια προς τη ροή.

Η έρευνα του Feng (1968), ήταν μια μελέτη-σημείο αναφοράς για την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ του πλάτους ταλάντωσης και της συχνότητας του ρευστού σε συνάρτηση με τις δομικές παραμέτρους τους συστήματος και τη συχνότητα της ροής.

Στην περίπτωση όπου ένας κύλινδρος εξαναγκάζεται να κινηθεί περιοδικά μέσα σε ένα ρευστό μέσο, το σχήμα του ομόρρου (και της φόρτισης αντίστοιχα) καθορίζεται από το πλάτος της ταλάντωσης και τη συχνότητα διέγερσης που επιβάλλεται στο σύστημα.

Στην περίπτωση, όμως, της ελεύθερης κίνησης ενός κυλίνδρου, όπως στην προκειμένη, η κίνηση συντελείται λόγω των ασκούμενων και μεταβαλλόμενων δυνάμεων της ροής, δηλαδή υφίσταται μια εξαιρετικά ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ της κατασκευής και του ρευστού. Έτσι, λοιπόν, ο ομόρρος και η φόρτιση καθορίζουν τις ταλαντώσεις του κυλίνδρου.

## 1.2 Η συχνότητα έκλυσης δινών

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της ροής γύρω από κύλινδρο είναι η έκλυση των δινών (vortex shedding), η οποία συμβαίνει όταν  $Re > 40$  (όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1). Για αυτές τις τιμές του αριθμού Reynolds, οι παραγόμενες δίνες είναι μεγαλύτερες και ισχυρότερες από τις αρχικές. Οι παραγόμενες δίνες οφείλονται στην αποκόλληση του οριακού στρώματος, η οποία οφείλεται στην τοπική αλλαγή γεωμετρίας, από την επιφάνεια του κυλίνδρου. Η περιοδική απόσπαση δινών δημιουργεί μεταβολή της πίεσης, με συνέπεια, την περιοδική εξάσκηση δύναμης πάνω στον κύλινδρο.

Η συχνότητα με την οποία αποκολλώνται οι δίνες στον ομόρρου ονομάζεται **συχνότητα έκλυσης δινών (vortex shedding frequency)** και συνδέεται με τα άλλα στοιχεία της ροής μέσω του αδιάστατου αριθμού Strouhal, που δίδεται από τη σχέση:

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty}$$

(2)

όπου:

- $f_s$ , η συχνότητα έκλυσης δινών (vortex shedding frequency),
- $D$  η εξωτερική διάμετρος του κυλίνδρου και
- $U_\infty$  η ταχύτητα της ροής.

Ο αριθμός Strouhal μπορεί να προσεγγιστεί με την τιμή περίπου 0.2. Γενικά, η εξίσωση αυτή ισχύει για  $Re > 250$ , δηλαδή για την περιοχή στην οποία εμφανίζονται τα φαινόμενα Vortex Induced Vibration (VIV).

Σύμφωνα με τον Williamson (1996), για αριθμούς  $Re$  έως την τιμή  $Re=1000$ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$St = 0,2417 - 0,8328 Re^{-0,00189 Re} \quad (3)$$

### 1.3 Το φαινόμενο του συντονισμού (Lock-in)

Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα της ροής ( $U_\infty$ ), επιτυγχάνεται μια κατάσταση όπου η συχνότητα σχηματισμού των στροβίλων ( $f_s$ ) προσεγγίζει αρκετά τη φυσική συχνότητα του συστήματος, έτσι ώστε οι αστάθμητες πιέσεις των δινών να προκαλούν την απόκριση του σώματος. Ορισμένες μορφές του ομόρρου μπορούν να προκληθούν από την κίνηση του σώματος, όπως είναι η 2S (2 στροβίλους ανά κύκλο, όπως η κλασική von Karman vortex street) και η 2P (που περιλαμβάνει δύο ζεύγη στροβίλων σε κάθε κύκλο κίνησης του σώματος), όπως περιγράφεται στην αντίστοιχη εργασία των Williamson & Roshko (1988). Είναι ενδιαφέρον πως μια εξαναγκασμένη ταλάντωση μπορεί να οδηγήσει και σε άλλες μορφές του ομόρρου όπως είναι η μορφή P & S, που δεν μπορεί να προκαλέσει την ελεύθερη ταλάντωση του σώματος.

Το εύρος συχνοτήτων των δυνάμεων που προκαλούνται από την έκλυση των δινών περιλαμβάνει και τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Συνεπώς, σε ένα κύλινδρο ελεύθερο να κινηθεί εγκάρσια, όταν η συχνότητα ταλαντώσεων του κυλίνδρου συμπέσει

ή προσεγγίσει την τιμή της φυσικής συχνότητας του κυλίνδρου  $\left( \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$ , λαμβάνει

χώρα ένα φαινόμενο που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του πλάτους ταλάντωσης, γνωστό ως **συντονισμός (lock-in)**.

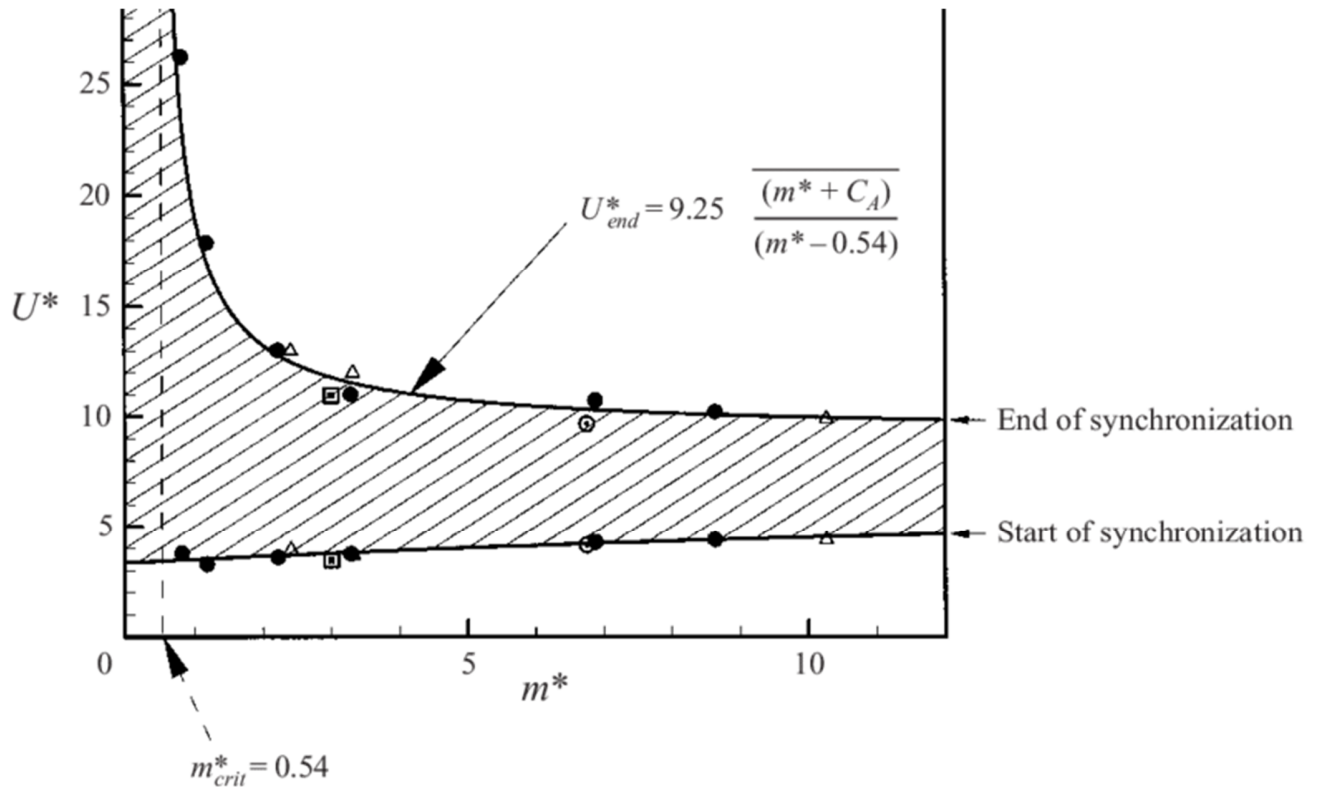
Το lock-in, είναι παρόμοιο με το γραμμικό συντονισμό στο ότι τα πλάτη των κραδασμών αυξάνονται καθώς η συχνότητα έκλυσης των δινών προσεγγίζει τη φυσική συχνότητα του κυλίνδρου. Ωστόσο, οι διαφορές είναι σημαντικές, καθώς το lock-in είναι ένα εξαιρετικά μη γραμμικό φαινόμενο και δεν προκύπτει όταν η φυσική συχνότητα ταυτιστεί ακριβώς με τη συχνότητα Strouhal, όπως συμβαίνει στο γραμμικό συντονισμό. Αποτελεί, δηλαδή, ένα φαινόμενο αυτοπεριοριζόμενο και αυτόνομο.

Η αδιάστατη παράμετρος που χρησιμοποιείται ευρέως στις πειραματικές μελέτες για τη μέτρηση του πλάτους ταλάντωσης, είναι η αδιάστατη ταχύτητα  $U^*$ , η οποία περιγράφεται από τη σχέση:

$$U^* = \frac{U_\infty}{f_N D} \quad (4)$$

Για τιμές της συχνότητας Strouhal,  $f_s$ , κοντά στη φυσική συχνότητα του συστήματος, από τη σχέση Strouhal ( $St = \frac{f_s D}{U}$ ) προκύπτει πως η  $U^*$  είναι ίση με  $1/St$  ή περίπου 5.

Χρησιμοποιώντας αυτό ως σημείο αναφοράς, πειραματικά δεδομένα έχουν δείξει πως υπάρχει lock-in για τιμές  $3 < U^* < 8$  (Blevins), γεγονός που συνεπάγεται στο ότι οι συχνότητες έκλυσης δινών που κυμαίνονται στο εύρος  $\pm 30\%$  της φυσικής συχνότητας, μπορούν να οδηγήσουν σε lock-in.



Σχήμα 1.2: Αδιάστατη ταχύτητα  $U^*$  vs λόγο μαζών  $m^*$  (Williamson and Govardhan).

Οι Williamson & Govardhan (2004), έδειξαν πως στην περιοχή που δημιουργείται ο συντονισμός υπάρχει ισχυρή εξάρτηση από την αδιάστατη παράμετρο  $m^* = \frac{m_{cylinder}}{m_d}$ , όπου  $m_d$  είναι η εκτοπιζόμενη μάζα του ρευστού ή απλώς ο όγκος του κυλίνδρου πολλαπλασιασμένος με την πυκνότητα του ρευστού.

Όπως παρατηρείται στο Σχήμα 1.2, για μεγάλες τιμές  $m^*$  η περιοχή συντονισμού δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα, ενώ όταν η τιμή του αρχίζει να προσεγγίζει την τιμή 2, το ανώτερο όριο της περιοχής αυξάνεται εκθετικά.

Οι Williamson & Govardhan, επίσης, υπολόγισαν πως το πλάτος της ταλάντωσης προσεγγίζει το άπειρο όταν  $m^* = 0.56$  και συνεπώς κατέληξαν στο συμπέρασμα πως υφίσταται στην τιμή αυτή μια «κρίσιμη μάζα», που την ονομάζουν  $m_{CRT}^*$ . Ωστόσο, σημειώνουν πως το φαινόμενο αυτό λαμβάνει χώρα υπό συνθήκες μικρής μάζας και απόσβεσης, ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο  $(m^* + C_A)\zeta < 0.05$ .

## 1.4 Η έννοια της προστιθέμενης μάζας

Σ' ένα γενικό πλαίσιο, όποτε ένα σώμα επιταχύνεται σε ρευστό, δέχεται μια πρόσθετη αδρανειακή δύναμη, η οποία προστίθεται στην επιτάχυνση. Κατά συνέπεια, το σώμα συμπεριφέρεται σα να έχει μάζα μεγαλύτερη από την πραγματική. Η πρόσθετη αυτή μάζα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **προστιθέμενη ή υδροδυναμική μάζα**. Σε μη ιξώδη ροή, τα σωματίδια του ρευστού που συμπαρασύρονται από την κίνηση του σώματος δεν επιστρέφουν στην αρχική τους θέση: αυτή η μόνιμα εκτοπιζόμενη μάζα υγρού αντιπροσωπεύει την προστιθέμενη μάζα  $\Delta m$  και εξαρτάται από τη γεωμετρία. (Sarpkaya, 2004). Ο αντίστοιχος συντελεστής, δίνεται από τη σχέση:

$$C_a = \frac{\Delta m}{\rho V} \quad (5)$$

Όπου:



- $\rho$  , είναι η πυκνότητα του ρευστού, και
- $V$  , ο όγκος του σώματος.

Δηλαδή,  $C_a = \frac{\Delta m}{\frac{1}{4}\pi\rho D^2 L}$  , όπου:

- $D$  , είναι η διάμετρος του κυλίνδρου, και
- $L$  , το μήκος του.

Ωστόσο, όπως αναφέρει και ο Sarpkaya (2004), «σε ασταθή (ιξώδη) ροή ούτε η οπισθέλκουσα ισούται με την τιμή της σταθερής κατάστασης ούτε η προστιθέμενη μάζα είναι ίση με την τιμή της εισερχόμενης ροής, αλλά και οι δύο επηρεάζονται από το ιξώδες και την επιτάχυνση».

Στο νερό, ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας  $C_a$  μπορεί να αποκτήσει πολύ μικρές, ακόμη και αρνητικές τιμές (Vikestad κ.α, 2000). Αυτό εξηγεί, τη διαπίστωση των Bishop & Hassan (1964), πως η εγκάρσια δύναμη που απαιτείται για την ταλάντωση κυλίνδρου σ' ένα ορισμένο εύρος πλάτους, είναι μεγαλύτερη από αυτήν που προκλήθηκε από την έκλυση των δινών. Οι διακυμάνσεις του  $C_a$ , οδηγούν επίσης σε μια παραλλαγή της συχνότητας στην περιοχή του συντονισμού (lock-in). Εξαλείφοντας αυτές τις διακυμάνσεις, η ελεύθερη ταλάντωση είναι δυνατόν να προσομοιωθεί από ημιτονοειδείς εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Συνεπώς, η πλασματική μάζα ενός επιταχυνόμενου κυλίνδρου βυθισμένου μέσα σε ρευστό, δημιουργείται από την πραγματική μάζα του σώματος συν τη συνεισφορά λόγω προστιθέμενης μάζας.

## 1.5 Οι επιπτώσεις του Vortex Induced Vibration

Οι αλληλεπιδράσεις ρευστού-κατασκευής είναι πολύ σημαντικές σε πληθώρα εφαρμογών της μηχανικής. Ο αέρας μπορεί να δημιουργήσει ισχυρές και ενδεχομένως επικίνδυνες δυνάμεις καταπόνησης σε κατασκευές, όπως καμινάδες ή γέφυρες ενώ τα θαλάσσια ρεύματα μπορούν παρομοίως να προκαλέσουν μεγάλο πλάτος και συχνότητα ταλαντώσεων σε υπεράκτιες κατασκευές όπως είναι οι πλατφόρμες και οι υποβρύχιοι αγωγοί, με αποτέλεσμα την κόπωση των κατασκευών. Αυτό συνεπάγεται σε μείωση της διάρκειας ζωής τους και κατά συνέπεια τεράστια οικονομικά κόστη για τη βιομηχανία.

Το φαινόμενο αυτό, της πρόκλησης δονήσεων εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης του ρευστού μέσου, ονομάζεται Vortex Induced Vibration (VIV).

Όταν συντελείται το φαινόμενο Vortex Induced Vibration, το υλικό υπόκειται σε κυκλικές τάσεις κάμψης, προκαλώντας μεγάλες στατικές μετατοπίσεις και δυνάμεις εφελκυσμού με συνέπεια την ανάπτυξη ρωγμών με την πάροδο του χρόνου και τελικά αστοχία λόγω κόπωσης.

Η κατανόηση της δυναμικής των δινών και της κατανομής της δύναμης στους θαλάσσιους σωλήνες ανύψωσης είναι θεμελιώδους σημασίας για τη βιομηχανία που δραστηριοποιείται σε αυτόν τον τομέα.

Το πεδίο της ναυτικής τεχνολογίας είναι ένας σημαντικός τομέας εφαρμογής για την έρευνα αλληλεπιδράσεων ρευστών / κατασκευής και γι' αυτόν ακριβώς το λόγο τα τελευταία χρόνια, υπήρξαν ποικίλες εκτεταμένες μελέτες, πειραματικές και θεωρητικές, με στόχο να κατακτηθεί μια ευρύτερη εικόνα και καλύτερη αντίληψη για το φαινόμενο VIV. Οι κατασκευές για τις οποίες μελετάται το VIV, είναι αγωγοί που λειτουργούν σε βάθη μέχρι 2000m και εξαιτίας του μεγάλου λόγου πλάτους προς ύψος, είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες στη δυναμική φόρτιση που προκαλείται από τα κύματα και τα ωκεάνια ρεύματα, τα οποία προκαλούν μεγάλες δυνάμεις μετατόπισης και ταλαντώσεις, οδηγώντας σε φθορά.

Η συντήρηση των αγωγών μεγάλου μήκους στα βάθη των ωκεανών είναι πάρα πολύ δύσκολη διαδικασία, ενώ οι αστοχίες τους συνοδεύονται από τεράστιο οικονομικό κόστος και ,ενδεχομένως, καταστροφικές συνέπειες για τα θαλάσσια οικοσυστήματα.

Κατ' επέκταση, λόγω της αστοχίας που μπορεί δυνητικά να προκληθεί από την κόπωση, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι απαραίτητο η πρόβλεψη του φαινομένου VIV να λαμβάνεται υπόψη στη σχεδίαση των αντίστοιχων κατασκευών, με στόχο την ελαχιστοποίηση των ταλαντώσεων που το προκαλούν και κατ' επέκταση όλων των προαναφερθέντων σοβαρών οικονομικών και περιβαλλοντολογικών επιπτώσεων.

Παρ' όλα αυτά, όπως θα αναφερθεί και στο επόμενο κεφάλαιο, έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές υποσχόμενες μελέτες όχι για την ελαχιστοποίηση των δονήσεων, αλλά αντίθετα για την ενίσχυσή τους, για την παραγωγή ενέργειας.



Σχήμα 1.3: Πλατφόρμα Genesis Spar

## 1.6 Το Vortex Induced Vibration για την εξόρυξη υδραυλικής ενέργειας

Η διαφαινόμενη εξάντληση των ενεργειακών αποθεμάτων του πλανήτη, που βασίζονται σχεδόν στο σύνολό τους στη χρήση συμβατικών καυσίμων κυρίως γαιάνθρακες (ανθρακίτης, λιγνίτης, λιθάνθρακας), πετρέλαιο, φυσικό αέριο και σχάσιμα υλικά, σε συνδυασμό με την ολοένα και αυξανόμενη ζήτηση ενέργειας, αλλά και τη βαθμιαία επιδείνωση των περιβαλλοντικών καταστροφών και προβλημάτων, οδήγησε την κοινωνία να στραφεί αφενός σε τεχνικές εξοικονόμησης και ορθολογικής χρήσης της ενέργειας και αφετέρου στην αξιοποίηση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (ΑΠΕ). Οι ΑΠΕ έχουν κύρια χαρακτηριστικά ότι είναι άφθονες και με ελάχιστες αρνητικές επιπτώσεις στο περιβάλλον. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν η ηλιακή ενέργεια, η αιολική ενέργεια, η βιομάζα, η γεωθερμία, οι ενέργειες της θάλασσας και η υδραυλική ενέργεια. Είναι οι πρώτες ενέργειες που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος και μέχρι τις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα, οπότε και στράφηκε στην έντονη χρήση του άνθρακα.

Τα υδάτινα σώματα της Γης, αντιπροσωπεύουν τεράστιο τμήμα του πλανήτη και η αργή και σταθερή κίνησή τους, αντιπροσωπεύει, επίσης, έναν πολύ μεγάλο, αλλά μέχρι στιγμής αναξιοποίητο ενεργειακό πόρο. Σήμερα, υφίστανται πολλές τεχνολογίες εξόρυξης υδροκινητικής ενέργειας, αλλά δε βρίσκονται σε θέση να ανταποκριθούν πραγματικά λόγω των ποικίλων αυτοπεριορισμών. Το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας που αξιοποιείται, προκύπτει από τη χρήση φραγμάτων σε συνδυασμό με υδροηλεκτρικές γεννήτριες. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως απαιτείται νεότερη και λιγότερο περιβαλλοντολογικά παρεμβατική τεχνολογία για την υποστήριξη της αυξανόμενης ζήτησης ενέργειας.

Μια υποσχόμενη νέα τεχνολογία που πληροί αυτά τα κριτήρια, αξιοποιεί τις ρευστοδυναμικά επαγόμενες ταλαντώσεις από το φαινόμενο Vortex Induced Vibration (VIV) για να εξαγάγει ενέργεια. Συνήθως, οι δομές που υπόκεινται στο VIV σχεδιάζονται με σκοπό να ελαχιστοποιούνται οι δονήσεις που προκαλείται λόγω αυτού, με ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων που προβλέπουν την απόκρισή τους. Πρόσφατα, προτάθηκε η

ιδέα να ενισχυθούν οι ταλαντώσεις αυτές, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η συγκομιδή ενέργειας από τη ροή του ρευστού.

Η τεχνολογία αυτή λειτουργεί χρησιμοποιώντας ένα κύλινδρο οριζόντια στο νερό και περιορίζοντάς τον σ' ένα βαθμό ελευθερίας, με κίνηση κάθετη στο επίπεδο της ταχύτητας του ρέοντος ρευστού. Όταν  $Re > 100$ , δημιουργείται δίνη στη μία πλευρά του ομόρρου και αποκόλληση ροής στην άλλη, γεγονός που προκαλεί τη δύναμη διέγερσης (lift force) προς τη διεύθυνση στην οποία εμφανίζονται τα φύλλα στροβιλότητας. Η διαρκής εναλλαγή των θέσεων των στροβίλων, προκαλεί ταλαντωτική κίνηση εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης του ρευστού (VIV). Ασκούνται, λοιπόν, εναλλασσόμενες δυνάμεις ανύψωσης στον κύλινδρο, ωθώντας τον πάνω και κάτω. Αυτή η κίνηση μετατρέπεται στη συνέχεια σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω ενός ηλεκτρικού συστήματος εκμετάλλευσης.

Η τεχνολογία αυτή, ενδεχομένως να υπερέχει από τις παραδοσιακές από κάποιες πλευρές. Παραδοσιακά, οι υδροστρόβιλοι χρησιμοποιούνται για την εξόρυξη ενέργειας από τα ρεύματα νερού, με χαρακτηριστικά παραδείγματα τους Francis (για διάφορα ύψη και παροχές), Pelton (μεγάλες υψομετρικές διαφορές), Kaplan (μικρά μανομετρικά ύψη) κ.α, συσκευές με υψηλή απόδοση. Παρ' όλα αυτά, εμφανίζουν ορισμένα αξιοσημείωτα μειονεκτήματα. Ένα σημαντικό μειονέκτημα έγκειται σε ενδεχόμενη αστοχία στην κατασκευή που μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή φραγμάτων. Επίσης, η λάσπη που συσσωρεύεται, συνεπάγεται σε περιορισμένο χρόνο ζωής. Για παράδειγμα, η χωρητικότητα του Hoover Dam στον ποταμό Colorado έχει μειωθεί σημαντικά από τη συσσώρευση λάσπης στα 65 χρόνια λειτουργίας του φράγματος, ενώ μπορεί να προκληθεί μικροσεισμικότητα και περιορισμένη αλλαγή του τοπικού κλίματος, πλημμύριση μεγάλων καλλιεργήσιμων εκτάσεων. Τέλος, οι περισσότεροι μετατροπείς που βασίζονται σε υδροστρόβιλους λειτουργούν αποτελεσματικά μόνο σε ρεύματα μεγαλύτερα από 2m/s. Αντίθετα, ένας μετατροπέας που εκμεταλλεύεται την έκλυση των δινών, ενδεχομένως, να μπορεί να ανταπεξέλθει και σε βραδέως κινούμενα ρεύματα. Σε αντίθεση με τη χρήση φραγμάτων σε συνδυασμό με υδροηλεκτρικές γεννήτριες, υπάρχει η δυνατότητα για παραγωγή ενέργειας χωρίς να υπάρξει παρέμβαση και αλλοίωση του φυσικού περιβάλλοντος, ενώ θα έλυne μεγάλα προβλήματα παροχής ενέργειας σε παράκτιες περιοχές, όπως αρκετές περιοχές στις Η.Π.Α.

Οι Wang κ.α (2012), εκμεταλλεύτηκαν τις διακυμάνσεις της πίεσης του ομόρρου ενός τραπεζοειδούς μη αεροδυναμικού σώματος για την ταλάντωση ενός εύκαμπτου διαφράγματος που συνδέεται με ένα μόνιμο μαγνήτη. Εν συνεχεία, ανέπτυξαν ένα θεωρητικό μοντέλο για τη μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων του συστήματος στην παραγωγή ενέργειας.

Οι Mehmood κ.α (2013), ερεύνησαν αριθμητικά τη συγκομιδή ηλεκτρικής ενέργειας από το VIV κυλίνδρου κυκλικής διατομής, χρησιμοποιώντας ένα πιεζοηλεκτρικό μετατροπέα. Βρέθηκε πως υφίσταται μια βέλτιστη τιμή της αντίστασης του φορτίου για την οποία μεγιστοποιείται η ισχύς, αλλά η βέλτιστη αυτή περίπτωση, δε συμπίπτει με το μεγαλύτερο εύρος ταλαντώσεων.

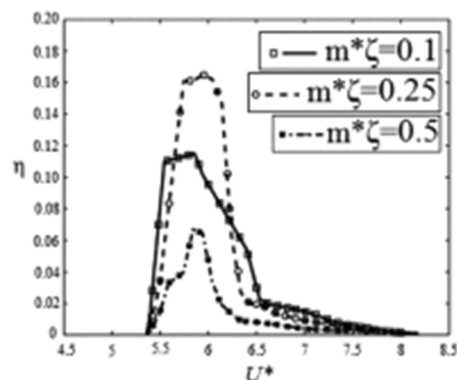
Οι Hobbs και Hu (2012), διερεύνησαν πειραματικά την εξόρυξη ενέργειας από μια γραμμική συστοιχία τεσσάρων κυλίνδρων, όπου κάθε κύλινδρος ήτο προσαρτημένος σ' έναν αισθητήρα πιεζοηλεκτρικής ενέργειας. Έγινε μελέτη της επίδρασης της απόστασης μεταξύ των κυλίνδρων και της ταχύτητας της ροής στην παραγόμενη ισχύ. Οι κύλινδροι που ήταν τοποθετημένοι κατάντη, βρέθηκε ότι παράγουν μεγαλύτερη ποσότητα ενέργειας από αυτούς που ήταν τοποθετημένοι ανάντη. Επίσης, διαπιστώθηκε πως η ισχύς αυξάνεται μόνο μέχρι τον τρίτο κύλινδρο για χαμηλές ταχύτητες ανέμου, αλλά συνεχίζει να αυξάνεται για υψηλότερες ταχύτητες ανέμου, γεγονός που υποδηλώνει πως ο βέλτιστος αριθμός συσκευών συγκομιδής ενέργειας εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds.

Οι Barrero-Gil κ.α (2012), μελέτησαν τη συγκομιδή υδραυλικής ισχύος από το VIV, χρησιμοποιώντας ένα ημιεμπειρικό μοντέλο. Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε με ένα γραμμικό αποσβεστήρα, ενώ για τις ανεξάρτητες μεταβλητές της εξίσωσης κίνησης, χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από πειράματα εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Επίσης, εξετάστηκε η επίδραση του λόγου μαζών και του συντελεστή απόσβεσης στην απόδοση και βρέθηκε σχετικά υψηλή απόδοση σε ένα μεγάλο εύρος της μειωμένης ταχύτητας για μικρότερες τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών.

Ένα πολύ σημαντικό έργο για την αξιοποίηση της ενέργειας από το VIV, κατοχυρώθηκε με δίπλωμα ευρεσιτεχνίας από τους Bernitsas κ.α (2008). Ο μετατροπέας ενέργειας ονομάζεται VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy). Ο μετατροπέας

VIVACE χρησιμοποιεί την ταλάντωση ενός άκαμπτου οριζόντιου κυλίνδρου, που αποτελεί αποτέλεσμα του VIV, για τη μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική μέσω περιστροφικών ή γραμμικών γεννητριών.

Οι Lee και Bernitsas (2011), κατέληξαν μέσω πειραμάτων στο συμπέρασμα ότι η απόσβεση έχει ισχυρή επίδραση στη μέγιστη απόδοση του συστήματος. Ο λόγος μαζών, επηρεάζει το πλάτος ταλάντωσης, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.4. Συνεπώς, η μέγιστη επιτεύξιμη απόδοση επηρεάζεται από το λόγο μάζας-απόσβεσης ( $m^*\zeta$ ). Από το Σχήμα 1.4, που απεικονίζεται η εξάρτηση του βαθμού απόδοσης από τη σχέση απόσβεσης-μάζας, μπορεί να αναχθεί το συμπέρασμα ότι ο χαμηλός λόγος μαζών, οδηγεί στη διεύρυνση του εύρους της ταχύτητας ροής για σημαντική απόδοση και πως ο κατάλληλος συντελεστής απόσβεσης επιφέρει μεγάλο βαθμό απόδοσης. Με άλλους λόγους δηλαδή, η μέγιστη δυνατή απόδοση επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη αναλογία μάζας-απόσβεσης.



Σχήμα 1.4: Εξάρτηση της ενεργειακής απόδοσης από την λόγο μάζας-απόσβεσης.[Lee JH, Bernitsas, 2011]

Συνεπώς, προκύπτει εύκολα από την παραπάνω σύντομη βιβλιογραφική διερεύνηση πως η τεχνολογία της παραγωγής ενέργειας από τις δονήσεις που προκαλούνται από το VIV, είναι μια διαρκώς αναπτυσσόμενη τεχνολογία. Στην παρούσα εργασία, λοιπόν, θα διερευνηθεί αυτή η δυνατότητα, με τη χρήση ενός μαθηματικού υδροδυναμικού μοντέλου,

βασισμένου σε μια νέα προσέγγιση για την προστιθέμενη μάζα (Konstantinidis, 2013), όπως θα αναφερθεί πιο αναλυτικά και παρακάτω (Κεφάλαιο 2.3).



## 2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η τεράστια αναγκαιότητα της διαφύλαξης και της ασφαλούς λειτουργίας των εξοπλισμών και των μηχανολογικών κατασκευών προκειμένου να αποφευχθεί η κόπωση που προκαλείται από το Vortex Induced Vibration (VIV), **απαιτεί την επινόηση μαθηματικών μοντέλων για την πρόβλεψη και την ανάλυση της απόκρισης, λαμβάνοντας υπόψη τις δομικές παραμέτρους της κατασκευής και τα χαρακτηριστικά της ροής.** Τα βασικά στοιχεία και χαρακτηριστικά του προβλήματος έχουν μελετηθεί εκτεταμένα εδώ και δεκαετίες, παρ' όλα αυτά η επιτακτική ανάγκη για την πιο αποτελεσματική πρόβλεψη και βαθύτερη κατανόηση του VIV εξακολουθεί να δημιουργεί προκλήσεις.

Στα υφιστάμενα μοντέλα υπάρχουν πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις για την ανάλυση και την πρόβλεψη του VIV και στην παρούσα εργασία επιλέγεται να διαχωριστούν με κριτήριο **το βαθμό ανάδρασής τους με τα πειραματικά δεδομένα.**

### 2.1 Τα εμπειρικά μοντέλα

Μια πρώτη ομαδοποίηση αποτελούν τα **εμπειρικά μοντέλα**, τα οποία είναι πολύ διαδεδομένα και χρησιμοποιούνται **ευρέως στην υπεράκτια βιομηχανία, καθώς προσφέρουν άμεσα αποτελέσματα.** Ο Kim Vandiver (MIT) έχει αναλάβει εκτεταμένες πειραματικές μελέτες σχετικά με τη δυναμική των καλωδίων (βλ. Vandiver 1993, Vandiver & Jong 1987) και έχει αναπτύξει το πολύ γνωστό πρόγραμμα πρόβλεψης του VIV, το SHEAR7 (Vandiver 2003). Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα εργαλεία VIVA, και VIVANA. Παρ' όλες τις διαφορές μεταξύ των προαναφερθέντων μεθόδων, υπάρχουν δύο κοινά σημεία. Πρώτα απ' όλα, **πραγματοποιούνται στο πεδίο της συχνότητας (frequency domain)** και δεύτερον **χρησιμοποιούν υδροδυναμικούς συντελεστές για τη διέγερση/ανύψωση, για την απόσβεση και την προστιθέμενη μάζα,**

οι οποίοι λαμβάνονται από πειράματα με εξαναγκασμένες ταλαντώσεις άκαμπτων κυλίνδρων. Είναι γεγονός πως τα περισσότερα εμπειρικά μοντέλα βασίζονται σε λύσεις στο πεδίο συχνοτήτων και σε γραμμικά δομικά μοντέλα (Larsen, 2000). Ωστόσο, υφίστανται σημαντικές γεωμετρικές μη γραμμικότητες οι οποίες δε λαμβάνονται καθόλου υπόψη.

Ως παράδειγμα του πως λειτουργούν οι εμπειρικές μέθοδοι στο πεδίο της συχνότητας, παρέχεται μια σύντομη περιγραφή της διαδικασίας ανάλυσης VIVANA. Η κατασκευή αναλύεται με πεπερασμένα στοιχεία με τη μέθοδο άμεσης σύνθεσης των ακαμψιών από την οποία προκύπτει το μητρώο ακαμψίας. Η ανάλυση ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Στατική μη γραμμική ανάλυση για την εύρεση της μέσης θέσης της δομής λόγω βάρους, πλευστότητας.
2. Ανάλυση των ιδιοτιμών για τον εντοπισμό των φυσικών συχνοτήτων με βάση την προστιθέμενη μάζα του νερού.
3. Προσδιορισμός των συχνοτήτων απόκρισης κατά την καταγραφή της μεταβολής της προστιθέμενης μάζας. Απαιτείται επανάληψη, καθώς η πρόσθετη μάζα εξαρτάται από τη συχνότητα.
4. Επειδή πολλές από τις συχνότητες απόκρισης μπορεί να αποτελούν μέρος της λύσης, οι διαφορετικές συχνότητες κατατάσσονται σύμφωνα μ' ένα ενεργειακό κριτήριο.
5. Η απόκριση σε όλες τις πιθανές συχνότητες βρίσκεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απόκρισης συχνότητας. Οι δυνάμεις διέγερσης βασίζονται στις καμπύλες του Goralkrishnan με κάποιες τροποποιήσεις. Η απόσβεση έξω από τις ζώνες διέγερσης βασίζεται στο μοντέλο απόσβεσης του Venugopal.<sup>1</sup>
6. Η αστοχία λόγω κόπωσης υπολογίζεται με βάση υποθέσεις σχετικά με τις μεταβολές πλάτους και τους συνδυασμούς απόκρισης σε επιλεγμένες διακριτές συχνότητες.

---

<sup>1</sup> Ο Venugopal (1996) πρότεινε ένα μοντέλο απόσβεσης με τρεις εκφράσεις απόσβεσης, για στάσιμο νερό, χαμηλή μειωμένη ταχύτητα και υψηλή μειωμένη ταχύτητα.

Μια διαφορετική κατηγορία εμπειρικών μεθόδων, πραγματοποιούνται στο πεδίο του χρόνου (time domain), που σημαίνει πως προσομοιώνουν βήμα προς βήμα προς τα εμπρός στο χρόνο το πως εξελίσσονται η απόκριση και οι δυνάμεις που ασκούνται από το ρευστό. Η ABAVIV, αποτελεί μια τέτοια μέθοδο. Το πλάτος και η συχνότητα των ταλαντώσεων πρέπει να εκτιμηθούν από την προβλεπόμενη απόκριση, καθώς η προσομοίωση προχωρά, για να προκύψει το κατά πόσο θα λάβει χώρα το φαινόμενο του συντονισμού (lock-in). Έξω από την περιοχή του lock-in, η δύναμη διέγερσης ασκείται με τη συχνότητα έκλυσης δινών (συχνότητα Strouhal) υπό μια τυχαία γωνία φάσης. Όταν προκύπτει το lock-in, η δύναμη διέγερσης αρχίζει σταδιακά να έρχεται σε φάση με την ταχύτητα του κυλίνδρου, σε εκείνο το σημείο.

Μια άλλη μέθοδος που αναλύεται στο πεδίο χρόνου, προτάθηκε από τον Lie (1995) και χρησιμοποιεί υδροδυναμικούς συντελεστές από πειράματα που εξαρτώνται από τη συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης των κραδασμών και, προφανώς, αυτές οι ποσότητες πρέπει να επανεκτιμώνται για κάθε βήμα χρόνου καθώς εξελίσσεται η προσομοίωση.

Τέλος, μια διαφορετική προσέγγιση αποτελεί η χρήση εμπειρικών μοντέλων που βασίζονται στην απλή αρμονική ταλάντωση. Τέτοια μοντέλα αναπτύχθηκαν από τους Iwan και Botelho (1985) και βασίζεται σε μετρήσεις της υδροδυναμικής δύναμης από πειράματα των Sarpkaya (1977) και Feng (1968), από τον Staubli (1983) με βάση πειραματικά δεδομένα του Feng, από τον Blevins (2009) και άλλους. Τα μοντέλα αυτά, έχουν σχεδιαστεί ώστε να «λειτουργούν» με την προϋπόθεση ότι διατίθενται τα κατάλληλα πειραματικά δεδομένα, χρησιμοποιώντας βάσεις δεδομένων από εξαναγκασμένη ή ελεύθερη ταλάντωση. **Το πλεονέκτημά τους συνίσταται στο ότι η προβλεπόμενη απόκριση περιορίζεται στη θετική περιοχή της διέγερσης, κάτι το οποίο στην πράξη συμβαίνει συχνά όταν λαμβάνει χώρα η πραγματική απόκριση. Παρ' όλα αυτά, οι κατανομές των συντελεστών δύναμης στο χάρτη του κανονικοποιημένου πλάτους και συχνότητας εμφανίζουν ιδιαίτερη πολυπλοκότητα και συνεπώς δεν καθίσταται εύκολη η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.**

## 2.2 Τα ημειμπειρικά μοντέλα-wake oscillator models

Με στόχο την αναπαραγωγή και την εισαγωγή στο πρόβλημα της μη γραμμικής δυναμικής της ροής, ο ταλαντωτής Van der Pol και οι παραλλαγές του έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως, προκειμένου να μοντελοποιηθούν την ασταθή ροή (wake oscillator model). Τα μοντέλα wake oscillator έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: Ο ταλαντωτής είναι αυτοδιεγερόμενος και αυτοπεριοριζόμενος, η φυσική συχνότητα είναι ανάλογη της ταχύτητας της ροής, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση Strouhal, η κίνηση του κυλίνδρου αλληλεπιδρά με τον ταλαντωτή και βασίζονται στην παραδοχή πως ο συντελεστής ανύψωσης μπορεί να περιγραφεί από ένα μη γραμμικό ταλαντωτή van der pol. Την ιδέα αυτή εισηγήθηκαν για πρώτη φορά οι Bishop και Hassan (1964) και τροποποιήθηκε από πολλούς άλλους έκτοτε, όπως οι Hartlen και Currie (1970), οι οποίοι διατυπώνουν τα πιο αξιόλογα μοντέλα.

Στο μοντέλο τους, χρησιμοποιείται ο μη γραμμικός ταλαντωτής Van der Pol για την περιγραφή της δύναμης ανύψωσης και συνδέεται με την κίνηση του κυλίνδρου με μια γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητά του. Το μοντέλο περιγράφεται από ένα ζευγάρι συζευγμένων αδιαστατοποιημένων διαφορικών εξισώσεων:

$$x_r'' + 2\zeta x_r' + x_r = a\omega_0^2 c_L \quad (6)$$

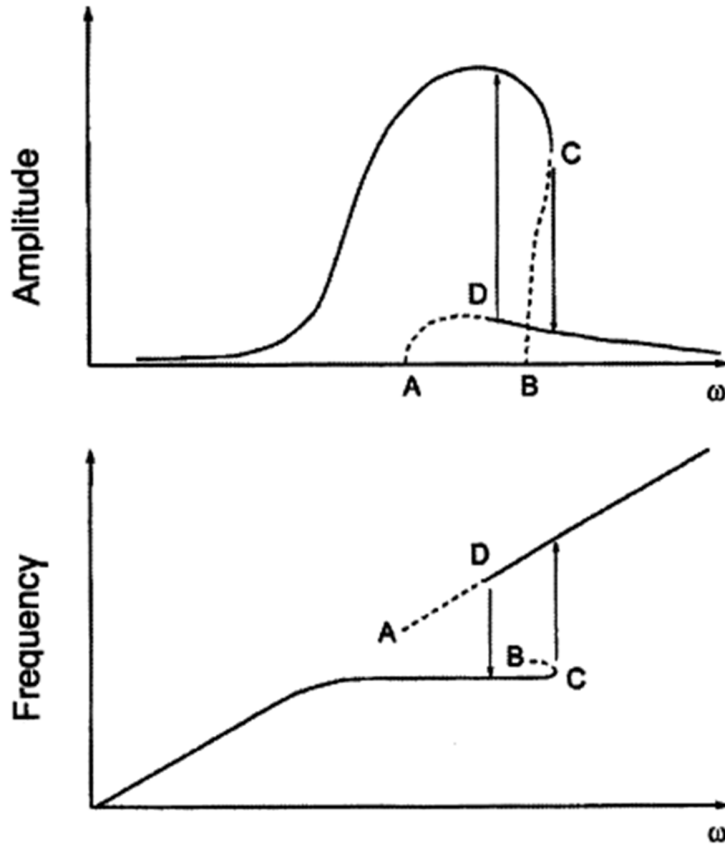
$$c_L'' - \alpha\omega_0 c_L' + \frac{\gamma}{\omega} (c_L')^3 + \omega_0^2 c_L = bx_r' \quad (7)$$

όπου το σύμβολο (') υποδηλώνει παραγωγή ως προς τον αδιάστατο χρόνο  $\tau = \omega_n t$ ,  $x_r$  η αδιαστατοποιημένη μετατόπιση του κυλίνδρου,  $c_L$  ο συντελεστής ανύψωσης,  $\omega$  ο λόγος της συχνότητας έκλυσης δινών (συχνότητα Strouhal) προς τη φυσική συχνότητα της κατασκευής,  $\omega_0 = \frac{f_o}{f_n}$ ,  $\zeta$  ο συντελεστής απόσβεσης και  $\alpha$  μια γνωστή σταθερά. Από τις μη προσδιορισμένες παραμέτρους  $\alpha$ ,  $\gamma$  και  $b$ , μόνο δύο πρέπει να επιλέγονται για να παρέχουν την καλύτερη δυνατή προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα, κάτι που

προκύπτει από το γεγονός ότι αλληλοεξαρτώνται μέσω της σχέσης  $c_{L_0} = \left( \frac{4\alpha}{3\gamma} \right)^{1/2}$ , όπου  $c_{L_0}$  είναι το εύρος διακύμανσης του  $C_L$ . Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως ο δεύτερος όρος στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (7) παρέχει την αύξηση του συντελεστή ανύψωσης, ενώ ο τρίτος όρος στην αριστερή πλευρά της ίδιας εξίσωσης περιορίζει την αύξησή του. Οι προαναφερθέντες όροι είναι εξαιρετικά σημαντικοί για την επιτυχία του μοντέλου καθώς οι ταλαντώσεις μεγάλου εύρους (χαρακτηριστικό του VIV), συνοδεύονται από σημαντική (αλλά πεπερασμένη) αύξηση του συντελεστή ανύψωσης.

Με την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, το μοντέλο των Hartlen και Currie καταγράφει ποιοτικά πολλά από τα χαρακτηριστικά που παρατηρούνται στα πειραματικά αποτελέσματα. Το Σχήμα 2.1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πλάτους και της συχνότητας της ταλάντωσης του μοντέλου για τιμές  $\zeta = 0.0015$ ,  $\alpha = 0.02$ ,  $\gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 0.002$  και  $b = 0.4$ . Παρατηρείται εύκολα, ωστόσο, στο Σχήμα 2.1, πως μεγάλο μέρος της περιοχής του συντονισμού χαρακτηρίζεται από υστέρηση, ενώ υπάρχει μεγάλη ασυμμετρία στην απόκριση του πλάτους ταλάντωσης, κάτι που προκύπτει από τη χρήση της σχέσης  $bx_r'$  στο δεξί μέλος της εξίσωσης (7).

**Οι Skop και Griffin (1973) αναπτύσσουν ένα νέο μοντέλο προκειμένου να υπερβούν τις ανεπάρκειες του μοντέλου των Hartlen και Currie, κυρίως το ότι οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται δε συνδέονται και δεν ερμηνεύονται με τη φυσική του προβλήματος. Η τροποποιημένη εξίσωση Van der Pol για τη δύναμη ανύψωσης και η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του σώματος είναι οι εξής:**



Σχήμα 2.1: Απόκριση πλάτους και συχνότητας ταλάντωσης του μοντέλου Hartlen και Currie, όπου το  $\omega$  είναι ανάλογο της ταχύτητας ροής. Οι συνεχείς γραμμές αντιπροσωπεύουν σταθερούς κλάδους της περιοδικής κίνησης, ενώ οι διακεκομμένες ασταθείς. Τα βέλη καταδεικνύουν τα άλματα του πλάτους και της συχνότητας.

$$\frac{\ddot{X}}{D} + 2\zeta\omega_n \frac{\dot{X}}{D} + \omega_n^2 \frac{X}{D} = \left( \frac{\rho V^2 L}{2M} \right) C_L = \mu\omega_s^2 C_L \quad (8)$$

$$\ddot{C}_L - \omega_s G \left[ C_{L_0}^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{\dot{C}_L}{\omega_s} \right)^2 \right] \dot{C}_L + \omega_s^2 \left[ 1 - \frac{4}{3} H \dot{C}_L^2 \right] C_L = \omega_s F \left( \frac{\dot{X}}{D} \right) \quad (9)$$

όπου  $\omega_s$  είναι η συχνότητα έκλυσης δινών,  $C_L$  ο συντελεστής ανύψωσης,  $C_{L_0}$  το εύρος διακύμανσης του  $C_L$ ,  $\omega_n$  η φυσική συχνότητα του συστήματος,  $\zeta$  η συνολική απόσβεση,  $M$  η μάζα του συστήματος και  $\mu = \frac{\rho L D^2}{8\pi^2 S^2 M}$  ο λόγος της μάζας εκτοπιζόμενου

ρευστού προς τη μάζα του κυλίνδρου, ενώ οι παράμετροι  $G, H$  και  $F$  προσδιορίζονται από πειραματικά δεδομένα.

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων στην περιοχή του συντονισμού περιγράφονται από τις σχέσεις  $X/D = aC_{L_0} \sin \omega t$  και  $C_L = AC_{L_0} \sin(\omega t + \varphi)$ , όπου  $\varphi$  η γωνία φάσης μεταξύ του συντελεστή  $C_{L_0}$  και της μετατόπισης του κυλίνδρου. Αντικαθιστώντας τις στις εξισώσεις (3),(4), δημιουργούνται σχέσεις μεταξύ των διάφορων παραμέτρων του μοντέλου. Χρησιμοποιώντας μια ποικιλία πειραματικών αποτελεσμάτων από τη βιβλιογραφία, προκύπτουν σχέσεις μεταξύ των δύο ανεξάρτητων παραμέτρων  $G, H$  και  $\zeta, \mu$ , όπως η σχέση για το  $G$ ,  $\log_{10} G = 0.23 - 0.19 \left( \frac{\zeta}{\mu} \right)$ . Εντούτοις, το γεγονός ότι οι  $G, H$  προκύπτουν για κάθε πειραματική τιμή του  $\zeta$ , μέσω της δοκιμής και του σφάλματος αποτελεί ένα μεγάλο ελάττωμα για το παρόν μοντέλο.

Με τη χρήση των παραπάνω σχέσεων, είναι δυνατό να προβλεφθούν τα αποτελέσματα διαφορετικών πειραμάτων που βρίσκονται στη βιβλιογραφία με μια λογική ακρίβεια, ωστόσο εγείρονται ερωτήματα για το πόση προγνωστική «αξία» μπορεί να εκχωρηθεί στο μοντέλο δεδομένου ότι έχει τροποποιηθεί από την αρχή.

Σε επόμενη εργασία, οι Griffin κ.α συγκρίνουν τα αποτελέσματα των δικών τους πειραμάτων με τα αποτελέσματα που προβλέπει το μοντέλο τους. Οι μετρήσεις του πλάτους και της συχνότητας γίνονται για αριθμούς Reynolds μεταξύ 350 και 1000 και διεξάγονται κάτω από συνθήκες συγχρονισμού μεταξύ της συχνότητας έκλυσης δινών και της συχνότητας έκλυσης τους κυλίνδρου, σε αεροδυναμική σήραγγα. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα θεωρητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

- Το μέγεθος και η θέση του μέγιστου πλάτους συντονισμού και η απόσβεση μεταξύ των φυσικών συχνοτήτων και των συχνοτήτων της ταλάντωσης, προβλέπονται ποσοτικά από το μοντέλο (θεωρητικό-πειραματικό).
- Ο μέγιστος συντελεστής ανύψωσης προκύπτει για ταχύτητα ροής κάπως μικρότερη από αυτή που παράγει το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (θεωρητικό).

- Η μέγιστη μεταφορά ενέργειας προς τον κύλινδρο συμβαίνει στην ταχύτητα ροής που παράγεται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (θεωρητικό-πειραματικό).
- Υφίσταται ουσιαστική μεταβολή της γωνίας φάσης μεταξύ της δύναμης ανύψωσης και της κίνησης του κυλίνδρου στην περιοχή του συντονισμού (θεωρητικό).
- Η μετάδοση θερμότητας ανά κύκλο ταλάντωσης προς τον κύλινδρο θα είναι θετική αν η δύναμη ανύψωσης συμπεριλαμβάνει ένα συντελεστή που βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα του κυλίνδρου (θεωρητικό).
- Έως 75% αύξηση του συντελεστή αντίστασης μετράται στο μέγιστο πλάτος μιας διαμέτρου (πειραματικό).

Όπως το μοντέλο των Hartlen και Currie, έτσι και το μοντέλο των Skop και Griffin αντιφάσκει με αρκετές από τις πειραματικές διαπιστώσεις του Feng. Ο Feng διαπιστώνει πως η τόσο η μέγιστη ανύψωση όσο και η μέγιστη ταχύτητα συμβαίνουν για ίδια ταχύτητα ροής, ενώ επίσης καταλήγει στο συμπέρασμα πως ο κύλινδρος θα εξακολουθήσει να ταλαντώνεται στη φυσική του συχνότητα και εκτός της περιοχής του συντονισμού.

Οι Iwan και Blevins (1974), αναπτύσσουν τις εξισώσεις του μαθηματικού τους μοντέλου, θεωρώντας πως ο κύλινδρος διεγείρεται από την έκλυση των δινών και εισάγοντας μια νέα μεταβλητή  $z$  που ενσωματώνει τα ρευστοδυναμικά φαινόμενα του προβλήματος, ενώ οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο προκύπτουν από την εξίσωση της ορμής στην  $y$ -κατεύθυνση. Οι εξισώσεις είναι:

$$\ddot{y} + 2\zeta_T \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = a_1 \ddot{z} + a_4' z \frac{U}{D} \quad (10)$$

$$\ddot{z} + K' \frac{u_i}{D} \omega_s z = (a_1' - a_4') \frac{U}{D} \dot{z} - a_2' \frac{\dot{z}^3}{UD} + a_3' \ddot{y} + a_4' \frac{U}{D} \dot{y} \quad (11)$$

όπου  $\zeta_T$  είναι ο συνολικός συντελεστής απόσβεσης (total effective damping coefficient),  $u_i$  η μεταφορική ταχύτητα του κυλίνδρου και  $K'$  μια παράμετρος που σχετίζεται με τον αριθμό Strouhal και το λόγο  $\frac{u_i}{D}$ . Ο συντελεστής απόσβεσης  $\zeta_T$  είναι το άθροισμα της δομικής απόσβεσης και της απόσβεσης του ιξώδους ρευστού.



Όλοι οι εμπειρικοί παράμετροι  $a'_i$  και  $a''_i$  προσδιορίζονται από πειραματικά δεδομένα για σταθερούς και αρμονικά εξαναγκασμένους κυλίνδρους.

Το μοντέλο των Iwan και Blevins προβλέπει πως ένας ελαστικά στηριζόμενος κύλινδρος θα παρουσιάσει μεγάλα πλάτη ταλάντωσης καθώς η συχνότητα έκλυσης στροβίλων προσεγγίζει τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Η απόκριση του κυλίνδρου βρέθηκε να συναρτάται από το λόγο της συχνότητας Strouhal προς τη φυσική συχνότητα του κυλίνδρου, της δομικής απόσβεσης και του λόγου της εκτοπιζόμενης μάζας του ρευστού προς τη μάζα του κυλίνδρου. Επίσης, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του κυλίνδρου για την περιοχή του συντονισμού εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή που ονομάζεται μειωμένη απόσβεση,  $\delta_r = \frac{4\pi m\zeta_s}{\rho D^2}$ . Το εύρος της περιοχής του συντονισμού φαίνεται να αυξάνεται με τη μειωμένη δομική απόσβεση και αυξημένο το λόγο εκτοπιζόμενης μάζας του ρευστού προς τη μάζα του κυλίνδρου, ενώ το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στο συντονισμό είναι αντιστρόφως ανάλογο της μειωμένης απόσβεσης.

Ο Landl (1975) στο μοντέλο του καταλήγει σε δύο εξισώσεις και περιλαμβάνει ένα μη γραμμικό αεροδυναμικό όρο απόσβεσης 5<sup>ης</sup> τάξης,

οι οποίες δίνονται σε αδιαστατοποιημένη μορφή ως εξής:

$$\ddot{x} + \delta x + x = a\Omega^2 c_L \quad (12)$$

$$\ddot{c}_L + (\alpha - \beta c_L^2 + \gamma c_L^4) \dot{c}_L = b\dot{x} \quad (13)$$

όπου  $\delta$  είναι μια παράμετρος απόσβεσης,  $a$  μια παράμετρος μάζας, και  $\Omega = \frac{\omega_s}{\omega_0}$  είναι ο λόγος της συχνότητας Strouhal προς τη φυσική συχνότητα του κυλίνδρου, ενώ οι παράμετροι  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $b$  είναι σταθερές.

Ο Landl θεωρεί πως η συμπερίληψη του μη γραμμικού όρου  $\gamma c_L^4 \dot{c}_L$  στις εξισώσεις μπορεί να συλλάβει και να καταγράψει καλύτερα το φαινόμενο της υστέρησης.

Οι Krenk και Nielsen προτείνουν ένα μοντέλο διπλού ταλαντωτή, βασισμένο στην υπόθεση ότι η ενέργεια ρέει ευθέως μεταξύ του ρευστού και της κατασκευής. Οι εξισώσεις (σε διαστατοποιημένη μορφή) παρουσιάζονται παρακάτω:

$$m_0 (\ddot{x} + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x) = \frac{1}{2} \rho U^2 DL \frac{\dot{w}}{U} \gamma \quad (14)$$

$$m_f \left[ \ddot{w} - 2\zeta_f \omega_s \left( 1 - \frac{w^2 + \dot{w}^2 / \omega_s^2}{w_0^2} \right) \dot{w} + \omega_s^2 w \right] = -\frac{1}{2} \rho U^2 DL \frac{\dot{x}}{U} \gamma \quad (15)$$

όπου  $x$  είναι η μετατόπιση του κυλίνδρου,  $w$  είναι η εγκάρσια κίνηση μιας αντιπροσωπευτικής μάζας ρευστού  $m_f$ ,  $\zeta_f$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης του ρευστού,  $\omega_s$  είναι η συχνότητα Strouhal,  $\gamma$  είναι μια αδιάστατη συζευγμένη παράμετρος που λαμβάνεται ως σταθερά,  $m_0$  είναι η μάζα του κυλίνδρου,  $\zeta_0$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης του μηχανικού συστήματος και  $\omega_0$  είναι η φυσική συχνότητα της κατασκευής, ενώ το  $w_0$  είναι μια παράμετρος που ελέγχει το πλάτος των αυτοεπαγόμενων ταλαντώσεων στην περίπτωση σταθερού κυλίνδρου.

**Τα μοντέλα αυτά, θεωρούνται ημιεμπειρικά δεδομένου ότι οι παράμετροι προσδιορίζονται από τα πειραματικά δεδομένα.** Μια κριτική εναντίον των μοντέλων wake oscillator είναι ότι η φυσική τους συλλογιστική είναι αμφισβητήσιμη, καθώς δε συμβαδίζουν με τη φυσική του προβλήματος, ενώ για να ενσωματώσουν τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης κατασκευής-ρευστού εισάγουν όρους που δεν ερμηνεύονται με φυσικό τρόπο. Με λίγα λόγια, ο ταλαντωτής Van der Pol εισάγει τις μη γραμμικότητες που χαρακτηρίζουν το φαινόμενο Vortex Induced Vibration χωρίς να έχει αποδειχτεί πως υπάρχει συμφωνία με τη φυσική που διέπει το πρόβλημα. Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι ουσιαστικά αντιπροσωπεύουν ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Έτσι, παρά την επιτυχημένη προσομοίωση σε ορισμένες περιοχές του χάρτη κανονικοποιημένου πλάτους και συχνότητας, δεν μπορούν να αναπαραγάγουν πιο

ολοκληρωμένα την προσαρμοστικότητα των ρευστο-ελαστικών συστημάτων, που ουσιαστικά αφορά άπειρους βαθμούς ελευθερίας.

## 2.3 Τα θεωρητικά μοντέλα

**Καθαρά θεωρητικά μοντέλα, με την αυστηρή έννοια του όρου και χωρίς καμία ανάδραση με τα πειραματικά δεδομένα δεν υφίστανται**, καθώς δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για τη διαχωρισμένη ροή γύρω από ταλαντούμενους κυλίνδρους. Ο κυριότερος λόγος είναι η αδυναμία εξαγωγής αριθμητικών προβλέψεων σε εύλογο χρόνο για τις φορτίσεις που ασκούνται μέσω της επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes (N-S) στο πεδίο του χρόνου για τυρβώδη ροή. Επίσης, στον τρισδιάστατο χώρο, **η αριθμητική επίλυση στο πεδίο του χρόνου των εξισώσεων N-S χρειάζεται πολύ λεπτή διακριτοποίηση του πεδίου του ρευστού και της ίδιας της κατασκευής κάτι που απαιτεί υψηλό υπολογιστικό κόστος, αλλά και αποτελεί μια εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία**, ενώ η βιομηχανία απαιτεί άμεσες λύσεις.

Θα μπορούσαμε να κατατάξουμε στα θεωρητικά μοντέλα, αυτά τα οποία **βασίζονται στην αποικοδόμηση της υδροδυναμικής δύναμης και στην εισαγωγή δύο μόνο συντελεστών από πειραματικά δεδομένα, των συντελεστών άνωσης και αντίστασης.**

**Ο πρώτος που εισήγαγε την αποσύνθεση της υδροδυναμικής δύναμης ως τρόπο μοντελοποίησης, είναι ο Sarpkaya.** Στο μοντέλο του, η δύναμη διέγερσης που ασκείται σε έναν ελαστικά στηριζόμενο κύλινδρο, αποσυντίθεται σε μια δύναμη αδράνειας συσχετιζόμενη με τη μετατόπιση του κυλίνδρου και μια δύναμη απόσβεσης που εξαρτάται από την ταχύτητα του κυλίνδρου. Ο συντελεστής ανύψωσης,  $C_L$ , εκφράζεται ως:

$$C_L = C_{ml} \pi^2 \frac{U_m T}{D} \left( \frac{D}{VT} \right)^2 \sin\{\omega t\} - \frac{8}{3\pi} C_{dl} \left( \frac{U_m T}{D} \right)^2 \left( \frac{D}{VT} \right)^2 \cos\{\omega t\} \quad (16)$$

όπου  $C_{ml}$  είναι ο συντελεστής αδράνειας,  $C_d$  ο συντελεστής αντίστασης,  $T$  είναι η περίοδος της εγκάρσιας κίνησης του κυλίνδρου,  $U_m = 2\pi A/D$ ,  $V_r = \bar{V}T/D$  είναι η μειωμένη ταχύτητα,  $A$  το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και  $\bar{V}$  η ταχύτητα ροής. Ενσωματώνοντας τα στην εξίσωση κίνησης ελαστικά στηριζόμενο και περιοδικά εξαναγκαζόμενο σε ταλάντωση κύλινδρο, έχουμε:

$$\ddot{x}_r + 2\zeta\dot{x}_r + x = \rho_r \Omega^2 \left( C_{ml} \sin\{\Omega\tau\} - \frac{16}{3\pi^2} X_r C_{dl} \cos\{\Omega\tau\} \right) \quad (17)$$

όπου  $x_r = x/D$ ,  $\Omega$  είναι ο λόγος της συχνότητας της ταλάντωσης του κυλίνδρου προς τη φυσική του συχνότητα  $f_c/f_n$ ,  $\rho_r$  ο λόγος της πυκνότητας του ρευστού προς την πυκνότητα του κυλίνδρου  $\rho_f/\rho_c$  και  $\tau = \omega_n t$  ο αδιαστατοποιημένος χρόνος.

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές  $C_{ml}$  και  $C_d$  από πειραματικά δεδομένα, τότε η εξίσωση (17) μπορεί να λυθεί και κατά συνέπεια να βρεθεί η απόκριση του κυλίνδρου.

**Οι Griffin και Koopman χωρίζουν την υδροδυναμική δύναμη που ασκείται από το ρευστό σ' ένα μέρος διέγερσης και σ' ένα μέρος αντίδρασης.** Σε αδιαστατοποιημένη μορφή, η εξίσωση κίνησης δίνεται ως εξής:

$$\ddot{y} + 2\omega_n \zeta_s \dot{y} + \omega_n^2 y = \mu \omega_s^2 (C_L - C_R) \quad (18)$$

όπου  $C_L$  είναι ο συντελεστής ανύψωσης,  $C_R$  ο συντελεστής αντίδρασης,  $\omega_s$  η συχνότητα Strouhal,  $\zeta_s$  ο συντελεστής απόσβεσης της κατασκευής και  $\mu$  μια παράμετρος μάζας ίση με το αντίστροφο της παραμέτρου Skop και Griffin ( $\mu = 1/S_G$ , όπου  $S_G = 8\pi^2 \zeta S^2 M / \rho D$ ). Η δύναμη αντίδρασης σε φάση αντίθετη από την ταχύτητα του κυλίνδρου υπολογίζεται ως συνάρτηση των ταχυτήτων ροής ( $Re: 300-1000$ ), συμπεριλαμβανομένης της ταχύτητας στο συντονισμό.

Ο Wang εισάγει ένα μη γραμμικό μοντέλο μοντελοποίησης της υδροδυναμικής δύναμης για το φαινόμενο VIV. Η ταλάντωση του κυλίνδρου στην  $X$ -κατεύθυνση και στην  $Y$ -κατεύθυνση αναλύεται με δύο εξισώσεις αποικοδόμησης της υδροδυναμικής δύναμης. Οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται από τη θεωρία των Euler-Bernoulli και οι επιδράσεις των ταλαντώσεων υπολογίζονται μέσω μιας προσέγγισης ανάλυσης τροχιάς και δίδονται σε αδιάστατη μορφή από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\ddot{X}_n(z,t) + 2\zeta_{sn}\omega_{n0}\dot{X}_n(z,t) + \omega_{n0}^2 X_n(z,t) = f_{xn}(z,t) / 2M_r \quad (19)$$

$$\ddot{Y}_n(z,t) + 2\zeta_{sn}\omega_{n0}\dot{Y}_n(z,t) + \omega_{n0}^2 Y_n(z,t) = f_{yn}(z,t) / 2M_r \quad (20)$$

όπου το  $z$  βρίσκεται κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου,  $\zeta_{sn}$  ο συντελεστής απόσβεσης της κατασκευής,  $M_r$  είναι η μάζα του κυλίνδρου,  $\omega_{n0}$  η φυσική του συχνότητα,  $f_{xn}(z,t)$  είναι ο συντελεστής της υδροδυναμικής δύναμης στην  $X$ -κατεύθυνση και  $f_{yn}(z,t)$  ο συντελεστής στην εγκάρσια κατεύθυνση. Για ένα σταθερό και άκαμπτο κύλινδρο (αντικαθιστώντας  $n = 1$ ) έχουμε  $f_{x1}(t) = c_D(t) - c_L(t)\dot{Y}_1(t)$  και  $f_{y1}(t) = c_D(t)\dot{Y}_1(t) - c_L(t)$ , όπου  $c_D(t)$  είναι ο συντελεστής αντίστασης και  $c_L(t)$  είναι ο συντελεστής ανύψωσης. Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί πως για έναν σταθερά στηριζόμενο άκαμπτο κύλινδρο, οι συντελεστές της εγκάρσιας και κατά μήκους δύναμης θα συμπίπτουν με τους συντελεστές ανύψωσης και αντίστασης, αντίστοιχα.

**Ο Lighthill (1979, 1986) ισχυρίστηκε πως η μη ιξώδης δύναμη αδράνειας και η ιξώδης δύναμη αντίστασης που επενεργούν σε ένα μη αεροδυναμικό σώμα λειτουργούν ανεξάρτητα και εξέφρασε την εξίσωση Morison ως εξής:**

$$F = C_a^* \rho \left( \frac{dU}{dt} \right) V_b + \frac{1}{2} \rho A_p U^2 C_d \quad (21)$$

όπου  $C_a^*$  είναι ο συντελεστής της προστιθέμενης μάζας.

Στο σημείο αυτό, υπήρξαν διαφωνίες στη βιβλιογραφία σχετικά με την εγκυρότητα αυτής της αποσύνθεσης, οι οποίες διατυπώθηκαν από τον Sarpkaya. Ο Sarpkaya υποστήριξε πως ο ισχυρισμός του Lighthill ότι η ιξώδης δύναμη αντίστασης και η μη ιξώδης δύναμη αδράνειας που επενεργούν σε ένα μη αεροδυναμικό σώμα, είναι ανεξάρτητες, δεν είναι σύμφωνη με τις ακριβείς λύσεις και τα πειραματικά δεδομένα. Χρησιμοποίησε την εξίσωση του Stokes (1851) γύρω από ένα ταλαντευόμενο εκκρεμές για να αποδείξει πως ο όρος της υδροδυναμικής δύναμης που βρίσκεται σε φάση με την επιτάχυνση δεν περιλαμβάνει μόνο τον όρο για την ιδανική ροή (χωρίς ιξώδες) αλλά και ιξώδους όρους και αποδεικνύει πως υφίσταται αλληλεξάρτηση των συντελεστών αντίστασης και προστιθέμενης μάζας ( $C_d$  και  $C_a$ , αντίστοιχα). Η ανάλυση αυτή παρατίθεται παρακάτω:

$$F(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{9}{2} (\pi\beta)^{-1/2} \right) \frac{\rho\pi D^3}{6} \frac{dU}{dt} + \left( 1 + \frac{1}{2} (\pi\beta)^{1/2} \right) (3\pi\mu DU) \quad (22)$$

$$\text{όπου } \beta = \left( \frac{D^2}{\nu} \right) \left( \frac{1}{U_m} \right) \left( \frac{dU}{dt} \right)_0$$

Η λύση της εξίσωσης Stokes για ένα κύλινδρο με κυκλική διατομή, όπως αργότερα επεκτάθηκε από τον Wang (1968), περιγράφεται ως εξής:

$$C_a = 1 + 4(\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-3/2} \quad (23)$$

$$C_d = \frac{3\pi^3}{2K} \left[ (\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-1} - \frac{1}{4} (\pi\beta)^{-3/2} \right] \quad (24)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει η σχέση,

$$\frac{C_a - 1}{KC_d} = \frac{8}{3\pi^3} \quad (25)$$

και άρα η αλληλεξάρτηση μεταξύ των συντελεστών.

Όμως, η θεωρητική λύση του Stokes δείχνει ότι η πραγματική ροή είναι ενσωματωμένη στην πραγματική ιξώδη ροή και η συμβολή του πρώτου όρου μπορεί να διαχωριστεί,

όπως φαίνεται και από τον Chang (1992). Επομένως, ο **διαχωρισμός των μη ιξωδών και των ιξωδών συνεισφορών στην αδρανειακή δύναμη υποστηρίζεται πως είναι έγκυρος και ουσιαστικός.**

Η πρωτοτυπία της προσέγγισης που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, είναι ότι η δύναμη αντίδρασης δρα κατά μήκος της σχετικής ταχύτητας του κυλίνδρου (Konstantinidis, 2013). Η προσέγγιση αυτή έχει προηγουμένως χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση του φαινομένου VIV για ελαστικό στηριζόμενο κύλινδρο ο οποίος μπορεί να ταλαντώνεται με ένα βαθμό ελευθερίας κίνησης εγκάρσια προς το ελεύθερο ρεύμα (Konstantinidis, 2016). **Οι εργασίες αυτές έχουν δείξει ότι ο αναθεωρημένος όρος πρόσθετης μάζας, ο οποίος εξαρτάται από τη συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης, εισάγει μη γραμμικότητα στο σύστημα, εξαρτάται μη γραμμικά από την ταλάντωση του σώματος.** Επίσης, έχειδειχθεί ότι **ένα υδροδυναμικό μοντέλο που βασίζεται στην αναθεωρημένη προσέγγιση αναπαράγει ορθά την απόκριση VIV** όταν τροφοδοτηθεί με εμπειρικά δεδομένα για τους συντελεστές δυνάμεων (Konstantinidis, 2017). Εν αντιθέσει, το αντίστοιχο μοντέλο βάσει της κλασσικής προσέγγισης όπου η προστιθέμενη μάζα θεωρείται σταθερή αποτυγχάνει να προβλέψει πλήρως την απόκριση VIV. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται αυτό το υδροδυναμικό βάσει της αναθεωρημένης προσέγγισης για να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα περιστροφικών ρευστοδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων (VIV) ενός κυλινδρικού σώματος ως προς κάποιο άξονα περιστροφής, το οποίο αποτελεί και το σκοπό της παρούσας εργασίας.

### 3. Το υδροδυναμικό μοντέλο- Θεωρητικό μέρος

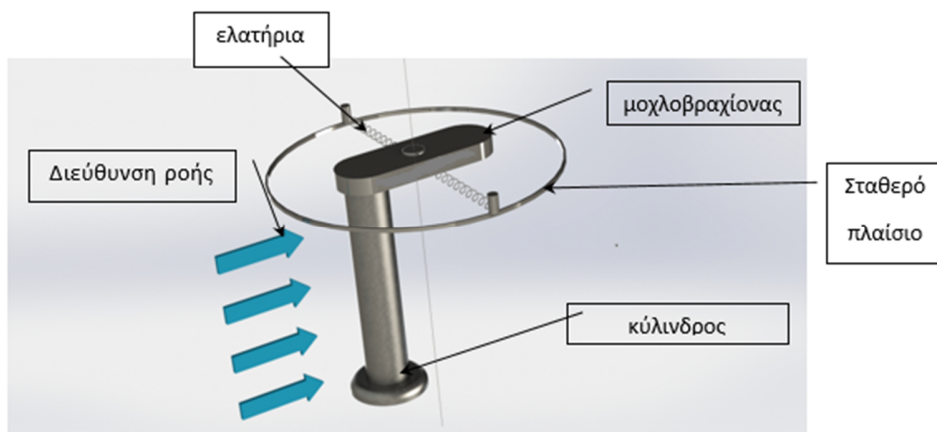
Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας αυτής, για την ανάλυση και την πρόβλεψη της απόκρισης ενός περιστρεφόμενου ελαστικά στηριζόμενου λείου κυλίνδρου εντός ρέοντος ρευστού που υποβάλλεται στο φαινόμενο Vortex Induced Vibration (VIV). Η συσκευή περιλαμβάνει προσδεδμεμένο κύλινδρο κυκλικής διατομής, ικανό να εκτελεί γωνιακές ταλαντώσεις ανάλογα με την τοποθέτηση του σημείου περιστροφής, ενώ η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος ρευστού διατηρείται κάθετα σε αυτό. Το μοντέλο βασίζεται στο διαχωρισμό της ολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο σε **δύναμη λόγω διέγερσης ( $F_L$ ) και λόγω αντίδρασης ( $F_R$ )**. Η δύναμη αντίδρασης μοντελοποιείται μέσω της εξίσωσης Morison, έτσι ώστε να εισαχθεί στο πρόβλημα η δύναμη που δημιουργείται **λόγω της επίδρασης της προστιθέμενης μάζας**. Ένας παρόμοιος διαχωρισμός, επίσης, της ολικής δύναμης που επενεργεί στον κύλινδρο, προτάθηκε από τον Sarpkaya, αλλά και από τους Griffin-Koornman (1977), όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 2.3). Παρ' όλα αυτά, και στις δύο μελέτες που βασίζονται στην κλασική προσέγγιση για την προστιθέμενη μάζα, λαμβάνονται υπόψη μόνο μερικές παράμετροι των δυνάμεων που ασκούνται στην εγκάρσια διεύθυνση, πράγμα που σημαίνει πως παραβλέπει σημαντικά στοιχεία της φυσικής του προβλήματος και αποτυγχάνουν να προβλέψουν την απόκριση του VIV.

Η κύρια διαφοροποίηση στην παρούσα εργασία έγκειται στο ότι η δύναμη αντίδρασης ενεργεί **κατά μήκος της στιγμιαίας σχετικής ταχύτητας μεταξύ του ταλαντούμενου κυλίνδρου και του ελεύθερου ρεύματος ρευστού**, με βάση μια αναθεωρημένη προσέγγιση για την προστιθέμενη μάζα (Konstantinidis, 2017). Αυτό διαφοροποιεί το πρόβλημα σε μεγάλο βαθμό τόσο από φυσική όσο και από μαθηματική άποψη, αφού **εισάγονται μη γραμμικότητες στις εξισώσεις που διέπουν το σύστημα, οι οποίες δεν υπολογίζονται και δεν λαμβάνονται υπόψη στα εμπειρικά και ημιεμπειρικά μοντέλα**.

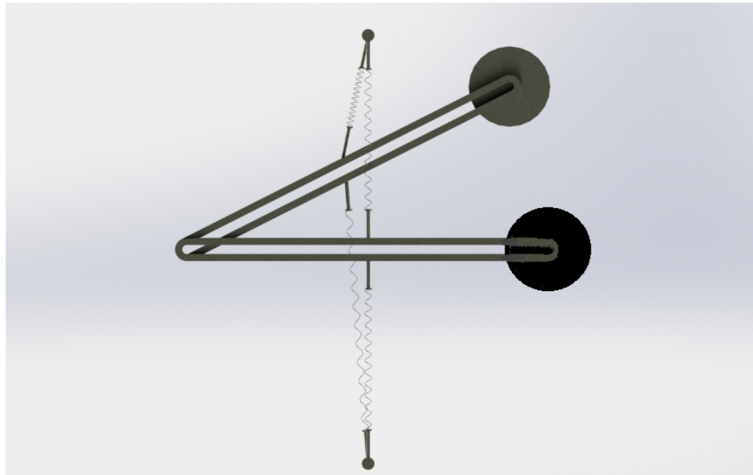


Ο κύλινδρος εξετάζεται σε δύο περιπτώσεις. Αρχικά, στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής του κυλίνδρου τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου και στη συνέχεια για την περίπτωση εκείνη που βρίσκεται κατόντη του κυλίνδρου, με σκοπό να ερευνηθεί η επίδραση της τοποθέτησης του σημείου περιστροφής και του μήκους του μοχλοβραχίονα ( $L^* = r/D$ ) στην απόκριση και στον ενεργειακό βαθμό απόδοσης του συστήματος. Στο Σχήμα 3.1, φαίνεται η διάταξη που μελετάται στον τρισδιάστατο χώρο, με το στροφέα να είναι τοποθετημένο κατόντη του περιστρεφόμενου κυλίνδρου. Ο κύλινδρος περιστρέφεται έξω από το νερό μέσω του μοχλοβραχίονα  $r$ , επιτρέποντας την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $Z$ .

Στο Σχήμα 3.2, παρουσιάζεται ο κύλινδρος σε τομή για δύο θέσεις του σώματος.



Σχήμα 3.1: Τρισδιάστατη προβολή της πειραματικής ρύθμισης, με το σημείο περιστροφής να είναι τοποθετημένο κατόντη του κυλίνδρου.



Σχήμα 3.2: Ο κύλινδρος σε τομή.

### 3.1 Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο ανάντη του κυλίνδρου

#### 3.1.1 ΚΙΝΗΤΙΚΗ

Αρχικά, θα περιγραφεί και θα αναλυθεί η σχετική ταχύτητα  $U_{rel}$  του κυλίνδρου εντός ρέοντος ρευστού με ταχύτητα διάδοσης  $U_{\infty}$ , συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας της κίνησης του κυλίνδρου, χρησιμοποιούνται οι κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , με σκοπό την απλούστευση των εξισώσεων που θα προκύψουν.

Θεωρώντας μηδενική τη γραμμική ταχύτητα στην αρχή του συστήματος αναφοράς O, η γραμμική ταχύτητα  $U_c$  του κέντρου του κυλίνδρου, το οποίο θεωρείται και το κέντρο μάζας του, εκφράζεται όπως παρακάτω.

$$\underline{U}_c = \underline{U}_{\infty} + \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{r}_{oc} = \dot{\theta} \underline{e}_z \times r \underline{e}_r = r \dot{\theta} \underline{e}_{\theta} \quad (26)$$

Ορίζοντας διανυσματικά πως  $\vec{U}_{rel} = \vec{U}_c - \vec{U}_{\infty}$  και υψώνοντας τη διανυσματική σχέση στο τετράγωνο έτσι ώστε να προκύψουν τα μέτρα των διανυσμάτων, έχουμε:

$$(\vec{U}_{rel})^2 = (\vec{U}_c - \vec{U}_{\infty})^2 \Rightarrow |U_{rel}|^2 = |U_c - U_{\infty}|^2 =$$

$$|U_c|^2 + |U_{\infty}|^2 - 2\vec{U}_c \vec{U}_{\infty} =$$

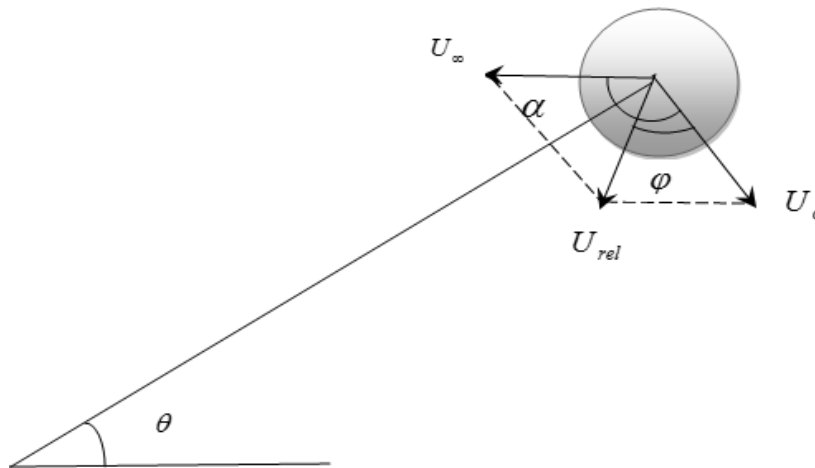
$$U_c^2 + U_{\infty}^2 - 2U_c U_{\infty} \cos a =$$

$$U_c^2 + U_{\infty}^2 - 2U_c U_{\infty} (-\sin \theta) =$$

$$U_c^2 + U_{\infty}^2 + 2U_c U_{\infty} \sin \theta \Rightarrow$$

$$U_{rel} = \sqrt{U_c^2 + U_\infty^2 + 2U_c U_\infty \sin \theta} = \sqrt{(r\dot{\theta})^2 + U_\infty^2 + 2r\dot{\theta}U_\infty \sin \theta} \quad (27)$$

,όπου  $\alpha$  είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_\infty$  και  $\cos \alpha = -\sin \theta$ , αφού  $\alpha = \pi / 2 + \theta$ , όπως υποδεικνύεται στο κάτωθεν διάγραμμα διανυσμάτων.

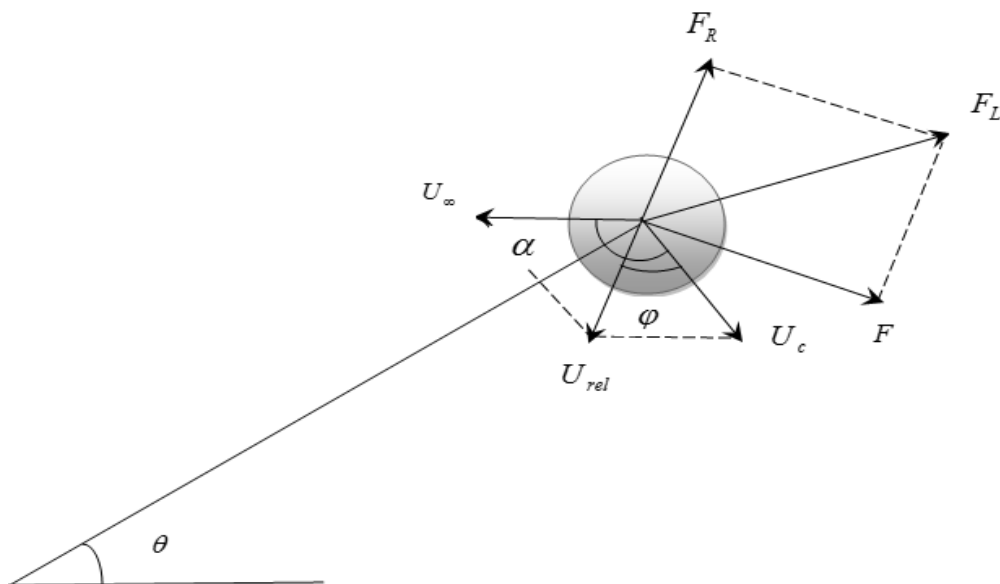


Σχήμα 3.3: Διάγραμμα διανυσμάτων ταχύτητας για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου.

### 3.1.2 ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Το παρόν μοντέλο, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στηρίζεται στο διαχωρισμό της ολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο, σε δύναμη διέγερσης (Excitation Force) και δύναμη αντίδρασης (Reaction Force). Η τελευταία επιλέγεται να μοντελοποιηθεί μέσω της εξίσωσης Morison, με σκοπό να εισαχθεί και η δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο λόγω της προστιθέμενης (ή υδροδυναμικής) μάζας.

Από το παρακάτω διάγραμμα διανυσμάτων, προκύπτει η σχέση της συνολικής δύναμης που ασκείται στο κύλινδρο συναρτήσει των δυνάμεων διέγερσης και αντίδρασης, εκφρασμένες με βάση τη γωνία  $\theta$ . Είναι προφανές πως, μας ενδιαφέρει η ολική δύναμη στον άξονα της στιγμιαίας γραμμικής ταχύτητας του κυλίνδρου και συνεπώς οι προβολές των δυνάμεων  $F_L$  και  $F_R$  στον άξονα αυτό, καθώς μόνο αυτές παράγουν ροπή.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα διανυσμάτων δύναμης και ταχύτητας στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου.

Με βάση το διάγραμμα διανυσμάτων, η προβολή της συνολικής δύναμης είναι το άθροισμα των διανυσμάτων των δυνάμεων διέγερσης και ανύψωσης:

$$\vec{F}_\theta = \vec{F}_{L_\theta} + \vec{F}_{R_\theta} \Rightarrow F_\theta = F_{L_\theta} - F_{R_\theta} = F_L \sin \varphi - F_R \cos \varphi \quad (28)$$

όπου  $\varphi$  η γωνία μεταξύ των  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_{rel}$ , ενώ  $F_{L_\theta}$  και  $F_{R_\theta}$  οι προβολές των δυνάμεων  $F_L$  και  $F_R$  αντίστοιχα, στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας.

Αρχικά, πρέπει η γωνία  $\varphi$ , που μεταβάλλεται με το χρόνο, να εκφραστεί συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ , προκειμένου να προκύψει η σχέση για τη συνολική δύναμη.

- Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{U}_c \vec{U}_{rel} &= |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{U}_c \vec{U}_{rel}}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \\ \frac{\vec{U}_c (\vec{U}_c - \vec{U}_\infty)}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} &= \frac{\vec{U}_c^2 - \vec{U}_c \vec{U}_\infty}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \frac{|\vec{U}_c|^2 - |\vec{U}_c| |\vec{U}_\infty| \cos \alpha}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \\ \frac{|\vec{U}_c| (|\vec{U}_c| - |\vec{U}_\infty| \cos \alpha)}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} &= \frac{|\vec{U}_c| - |\vec{U}_\infty| \cos \alpha}{|\vec{U}_{rel}|} = \\ \frac{U_c + U_\infty \sin \theta}{U_{rel}} \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \quad (29) \end{aligned}$$

όπου  $\alpha$  η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_\infty$  και  $\cos \alpha = -\sin \theta$  καθώς  $\alpha = \pi/2 + \theta$ .

- Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε:

$$\vec{U}_c \times \vec{U}_{rel} = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi \underline{e}_z \Rightarrow \vec{U}_c \times (\vec{U}_c - \vec{U}_\infty) = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi =$$

$$U_c \underline{e}_\theta \times (U_c \underline{e}_\theta - U_\infty \underline{e}_r - U_\infty \underline{e}_\theta) = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi \underline{e}_z =$$

$$|\vec{U}_c||\vec{U}_\infty|e_z = |\vec{U}_c||\vec{U}_{rel}|\sin\varphi e_z \Rightarrow \sin\varphi = \frac{U_\infty \cos\theta}{U_{rel}} = \frac{U_\infty \cos\theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin\theta}} \quad (30)$$

Τα εξωτερικά γινόμενα  $U_c e_{z_0} \times U_c e_{z_0}$  και  $U_c e_{z_0} \times (-U_\infty e_{z_0})$  είναι προφανώς ίσα με το μηδέν, συνεπώς μας ενδιαφέρει μόνο το διάνυσμα  $\vec{U}_\infty$  στην ακτινική διεύθυνση, που είναι ίσο με  $U_\infty \cos\theta$ .

Επομένως, η σχέση που περιγράφει την προβολή της συνολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο στον άξονα της στιγμιαίας κίνησης, περιγράφεται ως εξής:

$$F_\theta = F_L \left( \frac{U_\infty \cos\theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin\theta}} \right) - F_R \left( \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin\theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin\theta}} \right) \quad (31)$$

### Δύναμη διέγερσης

Η δύναμη διέγερσης που οφείλεται στην έκλυση των δινών, μοντελοποιήθηκε μέσω μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \sin(\omega t + \psi) \quad (32)$$

όπου  $C_L$ , ο συντελεστής ανύψωσης που εξαρτάται από την κίνηση, που εξαρτάται από το κανονικοποιημένο πλάτος και συχνότητα ταλάντωσης, καθώς και από τον αριθμό Reynolds. Υποθέτουμε πως βρισκόμαστε στην περιοχή του συντονισμού (lock-in), δηλαδή η συχνότητα με την οποία εκλύονται οι δίνες ταυτίζεται με τη συχνότητα ταλάντωσης του κυλίνδρου,  $\omega$ . Επισημαίνεται ότι η υπόθεση αυτή, δεν ισχύει πάντοτε, ωστόσο οι πιο σημαντικές ταλαντώσεις εμφανίζονται στην περιοχή αυτή. Τέλος, η φάση  $\psi$ , ανάμεσα στην άνοση και την κίνηση, θεωρείται αμελητέα.

Η προβολή της δύναμης διέγερσης  $F_L$  στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας του κυλίνδρου,  $F_{L_\theta}$ , εκφράζεται ως εξής:

$$F_{L\theta} = F_L \sin \varphi = F_L \left( \frac{U_\infty \cos \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (33)$$

Άρα,

$$F_{L\theta} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \sin(\omega t) \left( \frac{U_\infty \cos \theta}{U_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_\infty}\right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \right) \Rightarrow$$

$$F_{L\theta} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_\infty}\right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) \quad (34)$$

#### Δύναμη αντίδρασης (Reaction Force)

Η δύναμη αντίδρασης περιλαμβάνει τόσο τη δύναμη λόγω αντίστασης όσο και τη δύναμη λόγω προστιθέμενης μάζας. Συνεπώς, μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω της εξίσωσης Morison:

$$F_R = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} + \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \quad (35)$$

όπου  $C_A$  και  $C_D$  είναι οι συντελεστές προστιθέμενης μάζας και αντίστασης, αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι οι Thorsen κ.α (2014) χρησιμοποίησαν, επίσης, μια γενικευμένη εξίσωση Morison για τη μοντελοποίηση του VIV, με καθαρά εμπειρική εφαρμογή.

Η κύρια διαφοροποίηση στην παρούσα εργασία, είναι ότι **η δύναμη αντίδρασης δρα κατά μήκος της στιγμιαίας κατεύθυνσης της σχετικής ταχύτητας του ταλαντούμενου κυλίνδρου και του ελεύθερου ρεύματος ρευστού**. Ο θεωρητικός συντελεστής προστιθέμενης μάζας,  $C_A$ , έχει σταθερή τιμή και ίση με 1, 0 .

Η προβολή της δύναμης αντίδρασης στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας του κυλίνδρου, οδηγεί σε μία έντονα μη γραμμική εξίσωση, εισάγοντας στην εξίσωση κίνησης μη



γραμμικότητες οι οποίες δεν έχουν ληφθεί υπόψη σε προηγούμενες προσεγγίσεις. Η σχέση που την περιγράφει είναι η εξής:

$$F_{R_\theta} = F_R \left( \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) = \left( \frac{\left( \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} + \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \right) (r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta)}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (36)$$

Χάριν ευκολίας παρουσίασης των εξισώσεων, το τμήμα λόγω αδράνειας και λόγω αντίστασης υπολογίζονται ξεχωριστά.

### Τμήμα λόγω προστιθέμενης μάζας

Η δύναμη λόγω προστιθέμενης μάζας εκφράζεται παρακάτω:

$$F_{R_{\theta_1}} = \left( \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} \right) \left( \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (37)$$

όπου

$$\frac{dU_{rel}}{dt} = \frac{d \left( \sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta} \right)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} (r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + U_\infty r \ddot{\theta} \sin \theta + U_\infty r \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

Επομένως,

$$F_{R_{\theta_1}} = \left( \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \right) \left( \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \frac{(r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + U_\infty r \ddot{\theta} \sin \theta + U_\infty r \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} =$$

$$\frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{(r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + U_\infty r \ddot{\theta} \sin \theta + U_\infty r \dot{\theta}^2 \cos \theta) (r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta)}{\left[ U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta \right]}$$

$$\frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{r^3 \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + r^2 U_\infty \dot{\theta} \ddot{\theta} \sin \theta + U_\infty r^2 \ddot{\theta} \sin \theta + U_\infty^2 r \dot{\theta} \sin^2 \theta + U_\infty r^2 \dot{\theta}^3 \cos \theta + U_\infty^2 r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{\left[ U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta \right]}$$

Ομαδοποιώντας τους παράγοντες με  $\dot{\theta}$  και  $\ddot{\theta}$ , ώστε η εξίσωση να αποκτήσει μια μορφή πιο εύκολη προκειμένου να εισαχθεί στην εξίσωση κίνησης, παίρνουμε:

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} (r^3 \dot{\theta}^2 + 2U_\infty r^2 \dot{\theta} \sin \theta + U_\infty^2 r \sin^2 \theta) + \dot{\theta} (U_\infty r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + U_\infty^2 r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \right]}{\left[ U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta \right]}$$

Διαιρώντας με  $U_\infty^2$  έχουμε:

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} \left( \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + r \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta} \left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \quad (38)$$

### Τμήμα λόγω αντίστασης

Η εξίσωση που περιγράφει την οπισθέλκουσα δύναμη:

$$F_{R_{\theta_1}} = \left( \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \right) \left( \frac{r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta}{U_{rel}} \right) \quad (39)$$

$$\text{όπου } U_{rel} = \sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}$$

Άρα, αντικαθιστώντας:

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{2} \rho DLC_D \sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta} (r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta) \Rightarrow$$

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{2} \rho DLC_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} (r\dot{\theta} + U_\infty \sin \theta) \quad (40)$$

Έχοντας περιγράψει τις εξισώσεις των δυνάμεων ανύψωσης και αντίδρασης, μπορούμε να εκφράσουμε την προβολή της ολικής δύναμης στη διεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας του κυλίνδρου:

$$\begin{aligned}
 F_{\theta} &= \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 DLC_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}}\right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}}} \sin(\omega t) \\
 &- \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} \left( \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_{\infty}^2} + \frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}} + r \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta} \left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_{\infty}} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right) \right]}{\left[ 1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}}\right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}} \right]} \\
 &- \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}}\right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}}} (r\dot{\theta} + U_{\infty} \sin \theta)
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

### 3.1.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Οι περισσότερες υποθαλάσσιες δομές μπορούν να μοντελοποιηθούν από μια εξίσωση συστήματος με βασική μορφή τυπικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Στο παρόν πλαίσιο, λαμβάνονται υπόψη μόνο οι διανεμημένες δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα τμήμα του κυλίνδρου. Αρκεί να εξεταστεί η περίπτωση ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου. Η εξίσωση κίνησης του σώματος, λοιπόν, γράφεται ως εξής:

$$I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = F_{\theta}(t)r \tag{42}$$

όπου  $I$  είναι ο συντελεστής αδράνειας,  $c$  το μέτρο απόσβεσης,  $k$  ο συντελεστής στιβαρότητας και  $F_{\theta}$  η προβολή της συνολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο στην κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητάς του.

Αντικαθιστώντας την ολική δύναμη στην εξίσωση κίνησης (42), έχουμε:

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = & -\frac{1}{4}\rho\pi D^2 LrC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} \left( \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + r \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta} \left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \\
& -\frac{1}{2}\rho D L r C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} (r \dot{\theta} + U_\infty \sin \theta) \\
& + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ομαδοποιώντας όλους τους παράγοντες με την επιτάχυνση  $\ddot{\theta}$ , την ταχύτητα  $\dot{\theta}$  και τη μετατόπιση  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left[ I + \frac{1}{4}\rho\pi D^2 LrC_A \frac{\left( \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + r \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\
& \dot{\theta} \left[ c + \frac{1}{4}\rho\pi D^2 LrC_A \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2}\rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\
& k\theta = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) - \frac{1}{2}\rho D L r C_D U_\infty^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}
\end{aligned}$$

(43)

Όπως παρατηρείται, η εξίσωση κίνησης είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιλυθεί αναλυτικά λόγω της έντονης μη γραμμικής εξάρτησης της από τη σχετική κίνηση του κυλίνδρου,

$F_{\theta}(\ddot{\theta}, \dot{\theta})$ , γι' αυτό και κρίνεται αναγκαίο ένα μοντέλο που θα ενσωματώνει όσο περισσότερο γίνεται τη φυσική του προβλήματος.

Η τελική μορφή της εξίσωσης θα δοθεί, αφού προχωρήσουμε στην αδιαστατοποίησή της. Η διαστατική ανάλυση είναι μία τεχνική που κάνει χρήση της μελέτης των διαστάσεων για τη λύση των προβλημάτων της ρευστομηχανικής και ο σκοπός της έγκειται στην καλύτερη κατανόηση των φυσικών φαινομένων, καθώς και στη διευκόλυνση της ερμηνείας των αποτελεσμάτων των εξισώσεων που θα εισαχθούν στο Matlab.

Η διαδικασία αυτή γίνεται εκφράζοντας τα μεγέθη συναρτήσει των θεμελιωδών διαστάσεων που έχουν επιλεγεί για να περιγραφεί το πρόβλημα, όπως είναι η μάζα, η διάμετρος του κυλίνδρου, η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος ρευστού και ο χρόνος.

Για την αδιαστατοποίηση της εξίσωσης είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση τόσο της γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης όσο και του χρόνου. Η αδιαστατοποίηση των μεγεθών πλάτους ταλάντωσης, ταχύτητας ρευστού και μάζας που χρησιμοποιήθηκε είναι παρόμοια με εκείνη των Khalak & Williamson (1999) και παρατίθεται στη συνέχεια μέσω των εξισώσεων (44)-(46):

$$m^* = \frac{m}{\frac{1}{4}\pi\rho D^2 L} \quad (44)$$

$$A^* = \frac{A}{D} \quad (45)$$

$$U^* = \frac{U_{\infty}}{f_N D} \quad (46)$$

Η έννοια του **αδιάστατου λόγου μαζών**  $m^*$  (σχέση (44)) είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τους υπολογισμούς και ορίζεται ως ο λόγος μάζας του σώματος, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η μάζα του κυλίνδρου προς τη μάζα του εκτοπιζόμενου ρευστού,  $m_d$  (όπου  $m_d = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 L$ ). Ο λόγος μαζών εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου,  $D$  και  $L$  και από την πυκνότητα του ρευστού που τον περικλείει.

Ο **αδιάστατος λόγος**  $A^*$  (σχέση (45)) αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα στις αναλύσεις αγωγών που υπόκεινται στο φαινόμενο VIV και εκφράζει τη μετατόπιση του αγωγού λόγω της άσκησης της δύναμης στον κύλινδρο στην κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητάς του.

Η **αδιάστατη ταχύτητα**  $U^*$  (σχέση (46)) εκφράζει μια πολύ σημαντική σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα ροής του ρευστού και της ιδιοσυχνότητας ( $f_N$ ) του σώματος.

Η αδιαστατοποίηση του χρόνου επιλέγεται να γίνει μέσω της φυσικής συχνότητας  $f_N$

$$\text{δηλαδή: } t^* = f_N t \Rightarrow t = \frac{t^*}{f_N} \quad (47)$$

Με τη βοήθεια της (47), η γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\theta}$  και επιτάχυνση  $\ddot{\theta}$ , γίνονται:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = f_N \frac{d\theta}{dt^*} = f_N \dot{\theta}^* \quad (48)$$

$$\text{και } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{d\left(\frac{t^*}{f_N}\right)^2} = f_N^2 \frac{d^2\theta}{dt^{*2}} = f_N^2 \ddot{\theta}^* \quad (49)$$

Αναφορικά με τη ροπή αδράνειας, θέτοντας ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων (σημείο O) και θεωρώντας κέντρο μάζας  $G$  του συστήματος το κέντρο του κυλίνδρου ( $I_{zz}^G = \frac{1}{2} mR^2$ ), η ροπή από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, προκύπτει ως εξής:

$$I_{zz}^O = I_{zz}^G + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{1}{2} mR^2 + m(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) =$$

$$\frac{1}{2} mR^2 + mr^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} mR^2 + mr^2$$

αφού  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  και οι αποστάσεις των συντεταγμένων του σημείου  $G$ ,  $x_G$  και  $y_G$ , είναι  $r \cos \theta$  και  $r \sin \theta$ , αντίστοιχα.

Παραγοντοποιώντας προκύπτει η σχέση:

$$I_{zz}^O = \frac{1}{2}m \frac{D^2}{4} + mr^2 = m \frac{D^2}{8} + mr^2 = mr^2 \left( \frac{D^2}{8r^2} + 1 \right) \quad (50)$$

Εφόσον το πηλίκο  $\frac{D}{r} \ll 1$ , θεωρούμε πως  $I_{zz}^O \approx mr^2$ .

Ο **συντελεστής στιβαρότητας** αντικαθίσταται από τη σχέση  $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{I}}$ , από την οποία παίρνουμε:

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{I}} \Rightarrow k = \omega_N^2 I = 4\pi^2 f_N^2 I \quad (51)$$

Το **μέτρο απόσβεσης** αντικαθίσταται από τη σχέση  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kI}}$ , όπου  $\zeta$  ο συντελεστής

απόσβεσης, από την οποία παίρνουμε:  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kI}} \Rightarrow c = 2\zeta\sqrt{kI}$  και αντικαθιστώντας

$$k = 4\pi^2 f_N^2 I \quad \eta \quad \text{σχέση} \quad \text{παίρνει} \quad \text{τη} \quad \text{μορφή} \quad c = 4\pi\zeta f_N I \quad (52)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση κίνησης και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (51) και (52), έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left[ I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + r \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\
& \dot{\theta} \left[ 4\pi \zeta f_N I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2} \rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\
& 4\pi^2 f_N^2 I \theta = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}
\end{aligned}$$

(53)

Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left[ I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r^2 C_A \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\
& \dot{\theta} \left[ 4\pi \zeta f_N I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A U_\infty \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty^2} + \frac{r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{U_\infty} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2} \rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\
& 4\pi^2 f_N^2 I \theta = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}
\end{aligned}$$

(54)

Διαιρώνοντας με τον παράγοντα  $\frac{1}{4} \pi \rho D^2 L U_\infty^2$  η εξίσωση παίρνει τη μορφή:



$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}^* \left[ \frac{m^* \left(\frac{r}{D}\right)^2}{U^{*2}} + \left(\frac{r}{D}\right)^2 \frac{C_A}{U^{*2}} \frac{\left[ \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) + \sin^2(\theta^*) \right]}{\left[ 1 + \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} \right] + \\
& \dot{\theta}^* \left[ \frac{4\pi m^* \zeta \left(\frac{r}{D}\right)^2}{U^{*2}} + \frac{r}{D} \frac{C_A}{U^*} \frac{\left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 \cos(\theta^*) + \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \cos(\theta^*)}{\left[ 1 + \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \frac{C_D}{U^*} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)} \right] \\
& + \frac{4\pi^2 m^* \left(\frac{r}{D}\right)^2}{U^{*2}} \theta^* = \frac{2}{\pi} \frac{r}{D} C_L \frac{\cos(\theta^*)}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}} \sin(2\pi U^* S t^*) \\
& - \frac{2}{\pi} \frac{r}{D} C_D \sin(\theta^*) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}\right)^2 + 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}
\end{aligned}$$

(55)

Θέτοντας  $\frac{r}{D} = L^*$ , η εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}^* \left[ \frac{m^* L^{*2} + L^* \frac{C_A}{U^{*2}} \left[ \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) + \sin^2(\theta^*) \right]}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} \right] + \\
& \dot{\theta}^* \left[ \frac{4\pi m^* \zeta L^{*2} + L^* \frac{C_A}{U^*} \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 \cos(\theta^*) + L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \cos(\theta^*)}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} + \frac{2}{\pi} L^{*2} \frac{C_D}{U^*} \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)} \right] \\
& + \frac{4\pi^2 m^*}{U^{*2}} L^{*2} \theta^* = \frac{2}{\pi} L^* C_L \frac{\cos(\theta^*)}{\sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}} \sin(2\pi U^* S t^*) \\
& - \frac{2}{\pi} L^* C_D \sin(\theta^*) \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}
\end{aligned}$$

(56)

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας με  $U^{*2}$ , η εξίσωση παίρνει την τελική της μορφή:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}^* \left[ m^* L^{*2} + L^{*2} C_A \frac{\left[ \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) + \sin^2(\theta^*) \right]}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} \right] + \\
& \dot{\theta}^* \left[ 4\pi m^* \zeta L^{*2} + L^* U^* C_A \frac{\left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 \cos(\theta^*) + L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \cos(\theta^*)}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} + \frac{2}{\pi} L^{*2} U^* C_D \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)} \right] \\
& + 4\pi^2 m^* L^{*2} \theta^* = \frac{2}{\pi} L^* U^{*2} C_L \frac{\cos(\theta^*)}{\sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}} \sin(2\pi U^* St^*) \\
& - \frac{2}{\pi} L^* U^{*2} C_D \sin(\theta^*) \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 + 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}
\end{aligned}$$

(57)

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, πως τόσο η αδράνεια του ρευστού όσο και η απόσβεση εξαρτώνται από την κίνηση και παρουσιάζονται τέσσερις ανεξάρτητες παράμετροι, η ανηγμένη μάζα  $m^*$ , η δομική απόσβεση  $\zeta$ , η ανηγμένη ταχύτητα  $U^*$  (όπου  $U^* = \frac{U_\infty}{f_N D}$ ) και το μέγεθος  $L^*$  (όπου  $L^* = r/D$ ), που συσχετίζεται με το μήκος του μογλοβραχίονα.

Συνεπώς, η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά στο χρόνο, προκειμένου να βρεθεί η απόκριση του κυλίνδρου, ενσωματώνοντας τις κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές ανύψωσης και αντίστασης,  $C_L$  και  $C_D$  αντίστοιχα, καθώς και για τον αριθμό Strouhal,  $S$ . Το μοντέλο, όπως μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό, παρουσιάζει έντονη μη γραμμικότητα λόγω της εξάρτησης της σχετικής ταχύτητας  $U_{rel}$ ,  $\left( U_{rel} = \sqrt{U_c^2 + U_\infty^2 + 2U_c U_\infty \sin \theta} = \sqrt{(r\dot{\theta})^2 + U_\infty^2 + 2r\dot{\theta} U_\infty \sin \theta} \right)$ , από το τετράγωνο της γραμμικής ταχύτητας του κυλίνδρου.

Τέλος, αν θεωρήσουμε προσεγγιστικά, πως  $\sin(\theta) = \theta$  και μεταφέρουμε τον όρο της αντίστασης στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης κίνησης (54), προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left[ I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r^2 C_A \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\ & \dot{\theta} \left[ 4\pi \zeta f_N I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A U_\infty \frac{\left( \frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty^2} + \frac{r\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{U_\infty} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2} \rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\ & \theta \left( 4\pi^2 f_N^2 I + \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right) = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (58)$$

Από τη σχέση (58), συνάγεται το συμπέρασμα πως ο συντελεστής στιβαρότητας του συστήματος, δεν είναι πλέον  $k$ , αλλά  $k'$ , ο οποίος νέος συντελεστής στιβαρότητας ορίζεται ως εξής:

$$k' = k + \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \quad (59)$$

Ο νέος αυτός συντελεστής του ελατηρίου, παρατηρώντας την εξίσωση (59), μας δίνει την πληροφορία ότι ο όρος της αντίστασης συμβάλλει στην αύξηση του συνολικού συντελεστή στιβαρότητας (added stiffness).

Δηλαδή, στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής βρίσκεται ανάντη του κυλίνδρου, ο

όρος  $\frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 + \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}$  της εξίσωσης (54) που αποτελεί

συστατικό της ροπής αντίστασης, δρα ως ροπή αποκατάστασης και ως επιπλέον ροπή

επαναφοράς, η οποία βρίσκεται στην ίδια κατεύθυνση με τη ροπή της δύναμης του ελατηρίου. Τείνει ,δηλαδή, να σταθεροποιεί την κίνηση του κυλίνδρου και να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση.

### 3.1.4 ΙΣΧΥΣ

Η στιγμιαία ισχύς του μηχανικού συστήματος  $P$ , επιλέγεται να μοντελοποιηθεί σύμφωνα με τη σχέση  $P(t) = F_{\theta}(t)U_c(t)$ , όπου  $F_{\theta}$  είναι η προβολή της συνολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο στην κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας και  $U_c$  είναι η γραμμική ταχύτητα του κυλίνδρου.

Η εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου είναι  $I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = F_{\theta}(t)r$  και λύνοντας ως προς τη δύναμη προκύπτει η σχέση:

$$F_{\theta}(t) = \frac{I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t)}{r} \quad (60)$$

όπου:

- $F_{\theta}(t)$ , η προβολή της ολικής δύναμης στον άξονα της στιγμιαίας γραμμικής ταχύτητας του αγωγού,
- $I$ , η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου,
- $C$ , ο συντελεστής απόσβεσης του μηχανικού συστήματος,
- $k$ , ο συντελεστής στιβαρότητας, και
- $r$ , το μήκος του μοχλοβραχίονα από το κέντρο του κυλίνδρου.

Η γραμμική ταχύτητα  $U_c$  περιγράφεται από τη σχέση  $U_c = r\dot{\theta}(t)$  και συνεπώς η ισχύς προκύπτει:

$$P(t) = \frac{I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t)}{r} r\dot{\theta}(t) = I\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) + c\dot{\theta}^2(t) + k\theta(t)\dot{\theta}(t) \quad (61)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση το συντελεστή απόσβεσης  $c=4\pi\zeta f_N I$  και το συντελεστή στιβαρότητας  $k=\omega^2_N I=4\pi^2 f^2_N I$ , παίρνει τη μορφή:

$$P(t) = I\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) + 4\pi\zeta f_N I\dot{\theta}^2(t) + 4\pi^2 f^2_N I\dot{\theta}(t)\theta(t) \quad (62)$$

Στη συνέχεια, η εξίσωση της ισχύος αδιαστατοποιείται προκειμένου να διευκολυνθεί η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, ορίζοντας την αδιάστατη ισχύ  $P^*$ :

$$P^* = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho D L U_\infty^3}$$

Η αδιάστατη ισχύς  $P^*$ , όπως είναι εύκολα αντιληπτό, είναι ίση με το βαθμό απόδοσης του μηχανικού συστήματος,  $\eta_b$  αφού  $P_{fluid} = \frac{1}{2}\rho D L U_\infty^3$ .

Προχωρώντας στην εκτέλεση των πράξεων, η εξίσωση της αδιάστατης ισχύος γίνεται:

$$P^* = \frac{1}{2}\pi \frac{m^*}{U^{*3}} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \ddot{\theta}^* \dot{\theta}^* + \frac{2\pi^2 \zeta m^*}{U^{*3}} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \dot{\theta}^{*2} + \frac{2\pi^3 m^*}{U^{*3}} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \dot{\theta}^* \theta^* \quad (63)$$

Με αντικατάσταση,  $L^* = \frac{r}{D}$ :

$$P^* = \frac{1}{2}\pi \frac{m^*}{U^{*3}} L^{*2} \ddot{\theta}^* \dot{\theta}^* + \frac{2\pi^2 \zeta m^*}{U^{*3}} L^{*2} \dot{\theta}^{*2} + \frac{2\pi^3 m^*}{U^{*3}} L^{*2} \dot{\theta}^* \theta^* \Rightarrow$$

$$P^* = \frac{m^*}{U^{*3}} L^{*2} \left( \frac{1}{2}\pi \ddot{\theta}^* \dot{\theta}^* + 2\pi^2 \zeta \dot{\theta}^{*2} + 2\pi^3 \dot{\theta}^* \theta^* \right) \quad (64)$$

Η στιγμιαία ισχύς ως φυσικό μέγεθος έχει περιορισμένη εφαρμογή και μας ενδιαφέρει η **μέση ισχύς** (ή πραγματική ισχύς) εντός  $N$  περιόδων.

Η μέση ισχύς εντός μιας περιόδου  $T$  είναι η μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος  $P(t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int P(t) dt$$

Δηλαδή, αντικαθιστώντας την εξίσωση:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int I \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) + 4\pi\zeta f_N I \dot{\theta}^2(t) + 4\pi^2 f_N^2 I \dot{\theta}(t) \theta(t) dt \quad (65)$$

Συνεπώς, η αδιάστατη μέση ισχύς  $\langle P^* \rangle$  με βάση τις σχέσεις (66) και (67) για ακέραιο πολλαπλάσιο κύκλων:

$$\langle P^* \rangle = 2\pi^2 m^* \zeta \frac{L^{*2}}{U^{*3}} \left( \frac{1}{T} \int \dot{\theta}^{*2} dt \right) \quad (66)$$

Ορίζοντας  $t^* = f_N t \Rightarrow t = \frac{t^*}{f_N}$ , η εξίσωση γίνεται:

$$\langle P^* \rangle = 2\pi^2 m^* \zeta \frac{L^{*2}}{U^{*3}} \left( \frac{1}{f_N T} \int \dot{\theta}^{*2} dt^* \right) \quad (67)$$

Επειδή  $f_N T = N$ , όπου  $N$  είναι ακέραιος αριθμός κύκλων, η τελική μορφή της σχέσης της αδιάστατης μέσης ισχύος, είναι:

$$\langle P^* \rangle = 2\pi^2 m^* \zeta \frac{L^{*2}}{U^{*3}} \left( \frac{1}{N} \int \dot{\theta}^{*2} dt^* \right) \quad (68)$$

## 3.2 Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο κατάντη του κυλίνδρου.

### 3.2.1 ΚΙΝΗΤΙΚΗ

Ανάλογα με την πρώτη περίπτωση, θεωρώντας μηδενική τη γραμμική ταχύτητα στην αρχή του συστήματος αναφοράς  $O$  και κυλινδρικές συντεταγμένες, η γραμμική ταχύτητα  $U_c$  του κέντρου του κυλίνδρου, το οποίο θεωρείται και το κέντρο μάζας του, εκφράζεται ως εξής:

$$\underline{U}_c = \underline{U}_o + \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{r}_{oc} = \dot{\theta} \underline{e}_z \times (r \underline{e}_r) = r \dot{\theta} \underline{e}_\theta \quad (69)$$

Ορίζοντας διανυσματικά πως  $\vec{U}_{rel} = \vec{U}_c - \vec{U}_\infty$  και υψώνοντας τη διανυσματική σχέση στο τετράγωνο έτσι ώστε να προκύψουν τα μέτρα των διανυσμάτων, έχουμε:

$$(\vec{U}_{rel})^2 = (\vec{U}_c - \vec{U}_\infty)^2 \Rightarrow |U_{rel}|^2 = |U_c - U_\infty|^2 =$$

$$|\vec{U}_c|^2 + |\vec{U}_\infty|^2 - 2\vec{U}_c \vec{U}_\infty =$$

$$U_c^2 + U_\infty^2 - 2U_c U_\infty \cos a =$$

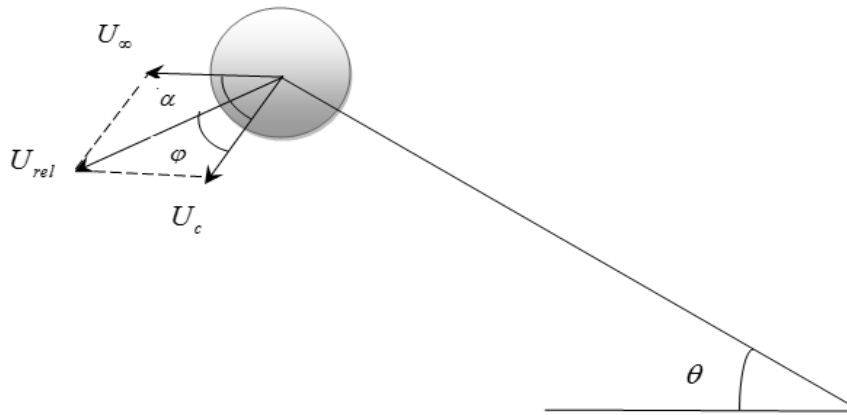
$$U_c^2 + U_\infty^2 + 2U_c U_\infty (\sin \theta) =$$

$$U_c^2 + U_\infty^2 - 2U_c U_\infty \sin \theta \Rightarrow$$

$$U_{rel} = \sqrt{U_c^2 + U_\infty^2 - 2U_c U_\infty \sin \theta} = \sqrt{(r\dot{\theta})^2 + U_\infty^2 - 2r\dot{\theta} U_\infty \sin \theta} \quad (70)$$

όπου  $a$  είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_\infty$  και  $\cos a = \sin \theta$ , αφού  $\alpha = \pi/2 - \theta$ .





Σχήμα 3.5: Διάγραμμα διανυσμάτων ταχύτητας για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.

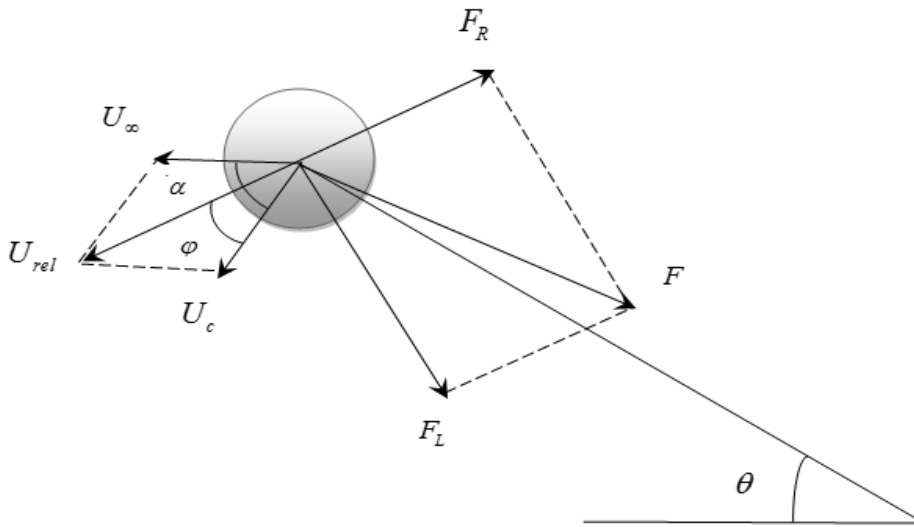
### 3.2.2 ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Από το διάγραμμα διανυσμάτων (Σχήμα 3.6), προκύπτει η ολική δύναμη που ασκείται στο κύλινδρο συναρτήσει των δυνάμεων διέγερσης και αντίδρασης, εκφρασμένων συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ .

Με βάση το διάγραμμα διανυσμάτων, η προβολή της συνολικής δύναμης στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας του κυλίνδρου είναι το άθροισμα των διανυσμάτων των δυνάμεων διέγερσης και ανύψωσης:

$$F_{\theta} = F_{L_{\theta}} - F_{R_{\theta}} = F_L \sin \varphi - F_R \cos \varphi \quad (71)$$

όπου  $\varphi$  η γωνία μεταξύ των  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_{rel}$ ,  $F_{L_{\theta}}$  και  $F_{R_{\theta}}$  οι προβολές στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας των δυνάμεων  $F_L$  και  $F_R$  αντίστοιχα.



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα διανυσμάτων δύναμης και ταχύτητας στην περίπτωση το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.

Αρχικά, πρέπει η γωνία  $\varphi$ , που μεταβάλλεται με το χρόνο, να εκφραστεί συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ , προκειμένου να προκύψει η σχέση για τη συνολική δύναμη.

- Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε:

$$\vec{U}_c \vec{U}_{rel} = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{U}_c \vec{U}_{rel}}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} =$$

$$\frac{\vec{U}_c (\vec{U}_c - \vec{U}_\infty)}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \frac{\vec{U}_c^2 - \vec{U}_c \vec{U}_\infty}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \frac{|\vec{U}_c|^2 - |\vec{U}_c| |\vec{U}_\infty| \cos \alpha}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} =$$

$$\frac{|\vec{U}_c| (|\vec{U}_c| - |\vec{U}_\infty| \cos \alpha)}{|\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}|} = \frac{|\vec{U}_c| - |\vec{U}_\infty| \cos \alpha}{|\vec{U}_{rel}|} =$$

$$\frac{U_c - U_\infty (+ \sin \theta)}{U_{rel}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{r\dot{\theta} - U_\infty \sin \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \quad (72)$$

όπου  $\alpha$  η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{U}_c$  και  $\vec{U}_\infty$  και  $\cos \alpha = \sin \theta$  καθώς  $\alpha = \pi/2 - \theta$ .

- Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{U}_c \times \vec{U}_{rel} &= |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi \underline{e}_z \Rightarrow -\vec{U}_c \times (\vec{U}_c - \vec{U}_\infty) = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi \underline{e}_z = \\ &= -U_c \underline{e}_\theta \times (U_c \underline{e}_\theta - U_\infty \underline{e}_r - U_\infty \underline{e}_\theta) = |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi = \\ |\vec{U}_c| |\vec{U}_\infty| \underline{e}_z &= |\vec{U}_c| |\vec{U}_{rel}| \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{U_\infty \cos \theta}{U_{rel}} = \frac{U_\infty \cos \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \end{aligned} \quad (73)$$

Τα εξωτερικά γινόμενα  $-U_c \underline{e}_\theta \times (U_c \underline{e}_\theta)$  και  $-U_c \underline{e}_\theta \times (-U_\infty \underline{e}_\theta)$  είναι προφανώς ίσα με το μηδέν, συνεπώς μας ενδιαφέρει μόνο το διάνυσμα  $\vec{U}_\infty$  στην ακτινική διεύθυνση, που είναι ίσο με  $U_\infty \cos \theta$ .

Επομένως, η δύναμη εκφράζεται όπως παρακάτω:

$$F_\theta = F_L \left( \frac{U_\infty \cos \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) - F_R \left( \frac{-U_\infty \sin \theta + r\dot{\theta}}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (74)$$

### Δύναμη διέγερσης

Η δύναμη διέγερσης που οφείλεται στην έκλυση των δινών, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, περιγράφεται μέσω μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \sin(\omega t + \psi) \quad (75)$$

Η προβολή της δύναμης διέγερσης  $F_L$  στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας,  $F_{L_\theta}$ ,

$$\text{εκφράζεται ως εξής: } F_{L_\theta} = F_L \sin \varphi = F_L \left( \frac{U_\infty \cos \theta}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right)$$

Άρα,

$$F_{L_\theta} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \sin(\omega t) \left( \frac{U_\infty \cos \theta}{U_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_\infty}\right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \right) \Rightarrow$$

$$F_{L_\theta} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 DLC_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_\infty}\right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) \quad (76)$$

### Δύναμη αντίδρασης

Η δύναμη αντίδρασης που περιλαμβάνει τόσο τη δύναμη λόγω αντίστασης όσο και τη δύναμη λόγω προστιθέμενης μάζας μοντελοποιείται μέσω της εξίσωσης Morison:

$$F_R = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} + \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \quad (77)$$

Η προβολή της δύναμης αντίδρασης στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας, περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$F_{R_\theta} = F_R \left( \frac{-U_\infty \sin \theta + r\dot{\theta}}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) = \left( \frac{(-U_\infty \sin \theta + r\dot{\theta}) \left( \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} + \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \right)}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (78)$$

Όπως και στην 1<sup>η</sup> περίπτωση, τα τμήματα αδράνειας και αντίστασης, υπολογίζονται χωριστά.

### Τμήμα λόγω προστιθέμενης μάζας

Η δύναμη λόγω προστιθέμενης μάζας εκφράζεται παρακάτω:

$$F_{R_{\theta_1}} = \left( \frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{dU_{rel}}{dt} \right) \left( \frac{U_\infty \sin \theta - r\dot{\theta}}{\sqrt{U_\infty^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_\infty r\dot{\theta} \sin \theta}} \right) \quad (79)$$

όπου

$$\frac{dU_{rel}}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2} - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta\right)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2} - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta} \left(r^2\ddot{\theta} + U_{\infty}r\ddot{\theta}\sin\theta - U_{\infty}r\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

Επομένως,

$$F_{R_{\theta_1}} = \left(\frac{1}{4}\rho\pi D^2 LC_A\right) \left(\frac{-U_{\infty}\sin\theta + r\dot{\theta}}{\sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2} - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta}\right) \frac{(r^2\ddot{\theta} - U_{\infty}r\ddot{\theta}\sin\theta - U_{\infty}r\dot{\theta}^2\cos\theta)}{\sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2} - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta} =$$

$$\frac{1}{4}\rho\pi D^2 LC_A \frac{(r^2\ddot{\theta} - U_{\infty}r\ddot{\theta}\sin\theta - U_{\infty}r\dot{\theta}^2\cos\theta)(-U_{\infty}\sin\theta + r\dot{\theta})}{\left[U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta\right]} =$$

$$\frac{1}{4}\rho\pi D^2 LC_A \frac{r^3\dot{\theta}^2\ddot{\theta} - r^2U_{\infty}\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin\theta - U_{\infty}r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin\theta + U_{\infty}^2r\dot{\theta}\sin^2\theta - U_{\infty}r^2\dot{\theta}^3\cos\theta + U_{\infty}^2r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta}{\left[U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta\right]}$$

Ομαδοποιώντας τους παράγοντες με  $\dot{\theta}$  και  $\ddot{\theta}$ :

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{4}\rho\pi D^2 LC_A \frac{\left[\ddot{\theta}(r^3\dot{\theta}^2 - 2U_{\infty}r^2\dot{\theta}\sin\theta + U_{\infty}^2r\sin^2\theta) + \dot{\theta}(-U_{\infty}r^2\dot{\theta}^2\cos\theta + U_{\infty}^2r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)\right]}{\left[U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_{\infty}r\dot{\theta}\sin\theta\right]}$$

Και διαιρώντας με  $U_{\infty}^2$  έχουμε:

$$F_{R_{\theta_1}} = \frac{1}{4}\rho\pi D^2 LC_A \frac{\left[\ddot{\theta}\left(-\frac{2r^2\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}} + \frac{r^3\dot{\theta}^2}{U_{\infty}^2} + r\sin^2\theta\right) + \dot{\theta}\left(-\frac{r^2\dot{\theta}^2\cos\theta}{U_{\infty}} + r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right)\right]}{\left[1 + \left(\frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}}\right)^2 - \frac{2r\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}}\right]}$$

(80)

### Τμήμα λόγω αντίστασης

Η εξίσωση που περιγράφει την οπισθέλκουσα δύναμη:

$$F_{R_{\theta 11}} = \left( \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{rel}^2 \right) \left( \frac{-U_{\infty} \sin \theta + r\dot{\theta}}{U_{rel}} \right) \quad (81)$$

$$\text{Όπου } U_{rel} = \sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_{\infty} r\dot{\theta} \sin \theta}$$

Άρα, αντικαθιστώντας:

$$F_{R_{\theta 11}} = \frac{1}{2} \rho DLC_D \sqrt{U_{\infty}^2 + (r\dot{\theta})^2 - 2U_{\infty} r\dot{\theta} \sin \theta} (-U_{\infty} \sin \theta + r\dot{\theta}) \quad (82)$$

Και διαιρώντας με  $U_{\infty}^2$ , η εξίσωση παίρνει την τελική μορφή:

$$F_{R_{\theta 11}} = \frac{1}{2} \rho DLC_D U_{\infty} \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}}} (-U_{\infty} \sin \theta + r\dot{\theta}) \quad (83)$$

Έχοντας περιγράψει τις εξισώσεις των δυνάμεων ανύψωσης και αντίδρασης, μπορούμε να εκφράσουμε την προβολή της ολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο:

$$F_{\theta} = -\frac{1}{4} \rho \pi D^2 LC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} \left( -\frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}} + \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_{\infty}^2} + r \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta} \left( -\frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_{\infty}} + r\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}} \right]}$$

$$-\frac{1}{2} \rho DLC_D U_{\infty} \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}}} (-U_{\infty} \sin \theta + r\dot{\theta})$$

$$+\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 DLC_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin \theta}{U_{\infty}}}} \sin(\omega t)$$

(84)

### 3.2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η εξίσωση κίνησης με βάση το διανυσματικό διάγραμμα, εκφράζεται ως εξής:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = F_{\theta}r, \quad (85)$$

όπου  $I$  είναι ο συντελεστής αδράνειας,  $C$  το μέτρο απόσβεσης,  $k$  είναι ο συντελεστής στιβαρότητας και  $F_{\theta}$  η προβολή της συνολικής δύναμης στον άξονα της στιγμιαίας ταχύτητας του κυλίνδρου. Αντικαθιστώντας τη συνολική δύναμη στην εξίσωση κίνησης, έχουμε:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = -\frac{1}{4}\rho\pi D^2 LrC_A \frac{\left[ \ddot{\theta} \left( -\frac{2r^2\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}} + \frac{r^3\dot{\theta}^2}{U_{\infty}^2} + r\sin^2\theta \right) + \dot{\theta} \left( -\frac{r^2\dot{\theta}^2\cos\theta}{U_{\infty}} + r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}} \right]}$$

$$-\frac{1}{2}\rho D L r C_D U_{\infty} \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2} - \frac{2r\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}} (-U_{\infty}\sin\theta + r\dot{\theta}) + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 D L r C_L \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta}\sin\theta}{U_{\infty}}}} \sin(\omega t)$$

(86)

Ομαδοποιώντας τους παράγοντες με την επιτάχυνση  $\ddot{\theta}$ , την ταχύτητα  $\dot{\theta}$  και τη μετατόπιση  $\theta$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left[ 1 + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( -\frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + r \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\
& \dot{\theta} \left[ c + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( -\frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2} \rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\
& k \theta = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}
\end{aligned}$$

(87)

Προχωρώντας στην αδιαστατοποίηση, όπως και στην 1<sup>η</sup> περίπτωση, όπου το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου, η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}^* \left[ \frac{m^*}{U^{*2}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 + \left( \frac{r}{D} \right)^2 \frac{C_A}{U^{*2}} \frac{\left[ \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) + \sin^2(\theta^*) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} \right] + \\
& \dot{\theta}^* \left[ \frac{4\pi m^* \zeta}{U^{*2}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 + \frac{r}{D} \frac{C_A}{U^*} \frac{\left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \cos(\theta^*) - \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 \cos(\theta^*) \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{r}{D} \right)^2 \frac{C_D}{U^*} \sqrt{1 + \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)} \right] \\
& + \frac{4\pi^2 m^*}{U^{*2}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 \theta^* = \frac{2}{\pi} \frac{r}{D} C_L \frac{\cos(\theta^*)}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}} \sin(2\pi U^* S t^*) \\
& + \frac{2}{\pi} \frac{r}{D} C_D \sin(\theta^*) \sqrt{1 + \left( \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{D} \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}
\end{aligned}$$

(88)



Τέλος, αντικαθιστώντας την ποσότητα  $\frac{r}{D} = L^*$ :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\theta}^* \left[ \frac{m^*}{U^{*2}} L^{*2} + L^* \frac{C_A}{U^{*2}} \frac{\left[ \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) + \sin^2(\theta^*) \right]}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} \right] + \\
 & \left[ \frac{4\pi m^* \zeta}{U^{*2}} L^{*2} + L^* \frac{C_A}{U^*} \frac{\left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \cos(\theta^*) - \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 \cos(\theta^*) \right)}{\left[ 1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*) \right]} + \frac{2}{\pi} L^{*2} \frac{C_D}{U^*} \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)} \right] \\
 & + \frac{4\pi^2 m^*}{U^{*2}} L^{*2} \theta^* = \frac{2}{\pi} L^* C_L \frac{\cos(\theta^*)}{\sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}} \sin(2\pi U^* St^*) \\
 & + \frac{2}{\pi} L^* C_D \sin(\theta^*) \sqrt{1 + \left( L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \right)^2 - 2L^* \frac{\dot{\theta}^*}{U^*} \sin(\theta^*)}
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

Από την εξίσωση (87), θεωρώντας προσεγγιστικά πως  $\sin\theta = \theta$  και ομαδοποιώντας τον

όρο της αντίστασης,  $\frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sin\theta \sqrt{1 + \left( \frac{r\dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r\dot{\theta} \sin\theta}{U_\infty}}$ , με τη γωνιακή

μετατόπιση  $\theta$  στο αριστερό μέλος της εξίσωσης προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} \left[ I + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( -\frac{2r^2 \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} + \frac{r^3 \dot{\theta}^2}{U_\infty^2} + r \sin^2 \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} \right] + \\
& \dot{\theta} \left[ c + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 L r C_A \frac{\left( -\frac{r^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta}{U_\infty} + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty} \right]} + \frac{1}{2} \rho D L r^2 C_D U_\infty \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right] + \\
& \left( k - \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \right) \theta = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L r C_L \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}}} \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

(90)

Από την εξίσωση κίνησης (90), μπορεί να συναχθεί το συμπέρασμα πως ο συντελεστής στιβαρότητας δεν είναι πλέον  $k$ , αλλά  $k'$ , ο οποίος νέος συντελεστής στιβαρότητας ορίζεται ως εξής:

$$k' = k - \frac{1}{2} \rho D L r C_D U_\infty^2 \sqrt{1 + \left( \frac{r \dot{\theta}}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2r \dot{\theta} \sin \theta}{U_\infty}} \quad (91)$$

Ο νέος αυτός συντελεστής ελατηρίου, παρατηρώντας τη σχέση (91), μειώνεται. Αυτό, μας δίνει την πληροφορία πως το σύστημα, όταν το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου, είναι σταθερό όσο η στιβαρότητα του ελατηρίου είναι αρκετά μεγάλη για να ξεπεράσει τη δύναμη οπισθέλκουσας και πως εάν η δύναμη αντίστασης είναι μεγάλη σε σχέση με του ελατηρίου, εμποδίζει το ελατήριο να επαναφέρει τον κύλινδρο.

### 3.2.4 ΙΣΧΥΣ

Η στιγμιαία ισχύς του μηχανικού συστήματος  $P$ , όπως και στην πρώτη περίπτωση, ισούται με τη σχέση  $P(t) = F_{\theta}(t)U_c(t)$ , όπου  $F_{\theta}$  είναι η προβολή της συνολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο στην κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας και  $U_c$  είναι η γραμμική ταχύτητα του κυλίνδρου.

Η εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου είναι  $I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = F_{\theta}(t)r$  και λύνοντας ως προς τη δύναμη προκύπτει η σχέση:

$$F_{\theta}(t) = \frac{I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t)}{r} \quad (92)$$

Η γραμμική ταχύτητα  $U_c$  περιγράφεται από τη σχέση  $U_c = r\dot{\theta}(t)$  και συνεπώς η ισχύς προκύπτει:

$$P(t) = \frac{I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t)}{r} r\dot{\theta}(t) = I\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) + c\dot{\theta}^2(t) + k\dot{\theta}(t)\theta(t) \quad (93)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση το συντελεστή απόσβεσης  $c = 4\pi\zeta f_N I$  και το συντελεστή στιβαρότητας  $k = \omega_N^2 I = 4\pi^2 f_N^2 I$ , παίρνει τη μορφή:

$$P(t) = I\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) + 4\pi\zeta f_N I\dot{\theta}^2(t) + 4\pi^2 f_N^2 I\dot{\theta}(t)\theta(t) \quad (94)$$

Στη συνέχεια, η εξίσωση της ισχύος αδιαστατοποιείται προκειμένου να διευκολυνθεί η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, ορίζοντας την αδιάστατη ισχύ  $P^*$ :

$$P^* = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho DLU_{\infty}^3}$$

Προχωρώντας στην εκτέλεση των πράξεων, η εξίσωση της αδιάστατης ισχύος γίνεται:

$$P^* = \frac{1}{2} \pi \frac{m^*}{U^{*3}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 \ddot{\theta}^* \dot{\theta}^* + \frac{2\pi^2 \zeta m^*}{U^{*3}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 \dot{\theta}^{*2} + \frac{2\pi^3 m^*}{U^{*3}} \left( \frac{r}{D} \right)^2 \dot{\theta}^* \theta^* \quad (95)$$

Αντικαθιστώντας  $L^* = \frac{r}{D}$ :

$$P^* = \frac{m^*}{U^{*3}} L^{*2} \left( \frac{1}{2} \pi \dot{\theta}^* \ddot{\theta}^* + 2\pi^2 \zeta \dot{\theta}^{*2} + 2\pi^3 \dot{\theta}^* \theta^* \right) \quad (96)$$

Τέλος, η μέση ισχύς εκφράζεται από τη σχέση:

$$\langle P^* \rangle = 2\pi^2 m^* \zeta \frac{L^{*2}}{U^{*3}} \left( \frac{1}{N} \int \dot{\theta}^{*2} dt^* \right) \quad (97)$$

## 4. Αποτελέσματα

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο επιλύονται αριθμητικά στο χρόνο στο Matlab. Επιλέγεται η χρήση της εντολής ode23, εντολή για τη χρήση της μεθόδου Runge-Kutta, διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> τάξης, στο διάστημα  $[1,100]$  και με βήμα χρόνου 1. Η εξαγωγή των διαγραμμάτων έγινε για τιμές της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  από 1 έως 14 και χωρίστηκε σε διάστημα  $1/70$  για τους υπολογισμούς. Η εξαγωγή των ισοκαμπυλών απόδοσης (contour plots) έγινε για τιμές του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα από 0.4 έως 3.16 και χωρίστηκε, επίσης, σε διάστημα  $1/70$ . Η αριθμητική ολοκλήρωση έγινε με τον κανόνα του τραπεζοειδούς ο οποίος, αν και απαιτεί περισσότερο χρόνο επεξεργασίας, δίνει καλύτερα αποτελέσματα από αυτά που υπολογίζονται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, καθώς το σφάλμα είναι μικρότερο (σχεδόν μια τάξη μεγέθους).

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε, θα πρέπει να ενσωματώνει τη φυσική του προβλήματος VIV και την αλληλεπίδραση ροής-στερεού και να αναπαράγει την πραγματική απόκριση του συστήματος, συμβαδίζοντας με τα πειραματικά αποτελέσματα και λαμβάνοντας υπόψη τις δομικές παραμέτρους και τις παραμέτρους της ροής.

Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από προσομοιώσεις και παρατίθενται τα αντίστοιχα διαγράμματα και για τις δύο περιπτώσεις τοποθέτησης του σημείου περιστροφής με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης των διάφορων παραμέτρων του συστήματος, όπως του μήκους του μοχλοβραχίονα  $L^*$  (όπου  $L^* = \frac{r}{D}$ ), του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$ , στην ενεργειακή απόδοση, διατηρώντας σταθερή στιβαρότητα ελατηρίου και αυξάνοντας σταδιακά τα αδιάστατα μεγέθη του μήκους  $L^*$  και της ταχύτητας  $U^*$ . Τέλος, συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των Arionfard-Nishi (2017).

Οι Arionfard και Nishi (2017) στην εργασία τους, μελετούν την επίδραση της τοποθέτησης του σημείου περιστροφής, του λόγου μήκους βραχίονα ( $L^* = l/D$ ) και της φυσικής συχνότητας του συστήματος ( $f_N$ ), σ' ένα εύρος αριθμών Reynolds,  $2880 \leq Re \leq 22300$ .

Τα πειράματά τους διεξήχθησαν για  $L^*$  μεταξύ 0.47 και 3.16 και χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές στιβαρότητες ελατηρίου, ώστε να μεταβληθεί η φυσική συχνότητα. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως η μέγιστη ισχύς του συστήματος, επηρεάζεται κυρίως από το λόγο  $L^*$  όταν ο στροφέας είναι τοποθετημένος αντίθετα στην ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος, ενώ όταν είναι τοποθετημένος σύμφωνα με τη διεύθυνση της ταχύτητας του ρέοντος ρευστού επηρεάζεται βασικά από τη μειωμένη ταχύτητα. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει μια βέλτιστη τιμή του  $L^*$  και στις δύο περιπτώσεις ανάλογα με την τοποθέτηση του στροφέα και τη στιβαρότητα του ελατηρίου και με βάση εμπειρικές παρατηρήσεις αυτός είναι μεγαλύτερος στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής βρίσκεται στην κατεύθυνση του ρεύματος. Η μέγιστη απόδοση 31,4% βρέθηκε για περιστροφή κατάντη του κυλίνδρου εκμεταλλευόμενη τη δύναμη οπισθέλκουσας, ενώ για την περιστροφή σύμφωνα με τη διεύθυνση βρέθηκε 2%. Σ' αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί πως στην προκείμενη εργασία δεν έχουν δημοσιευτεί οι τιμές των συντελεστών απόσβεσης  $\zeta$ , αντίστασης  $C_D$  και ανύψωσης  $C_L$  και του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$ , οπότε για να συγκριθούν τα αποτελέσματα, γίνεται χρήση αυθαίρετων τιμών, υποθέτοντας πως ο λόγος μαζών  $m^*$  κινείται στην περιοχή τιμών (1–10), πως ο συντελεστής απόσβεσης  $\zeta$  είναι μικρός της τάξης του 0.01 και πως οι συντελεστές  $C_D$  και  $C_L$  είναι ίσοι με 1. Ο θεωρητικός συντελεστής προστιθέμενης μάζας,  $C_A$ , έχει σταθερή τιμή και ίση με 1,0. Επίσης, ο τρόπος προσέγγισης της ισχύος είναι εξαιρετικά αμφισβητήσιμος, καθώς η σχέση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέγιστης ισχύος  $P_{\max}$ ,

$$P_{\max} = \frac{I_l (l A_L U^2)^2 \omega_n^3}{4 \zeta l}$$

από την εργασία των Williams και Yates (1996), αφορά ένα

εντελώς διαφορετικό φυσικό πρόβλημα απ' αυτό που μελετάμε. Συγκεκριμένα, αναφέρεται σε παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από μηχανικό σύστημα όταν

ενσωματώνεται σε δονητικό μέσο, που δεν έχει καμία συσχέτιση με το παρόν σύστημα. Επιπρόσθετα, η σχέση από την οποία υπολογίζεται η μέγιστη ισχύς στην εργασία των

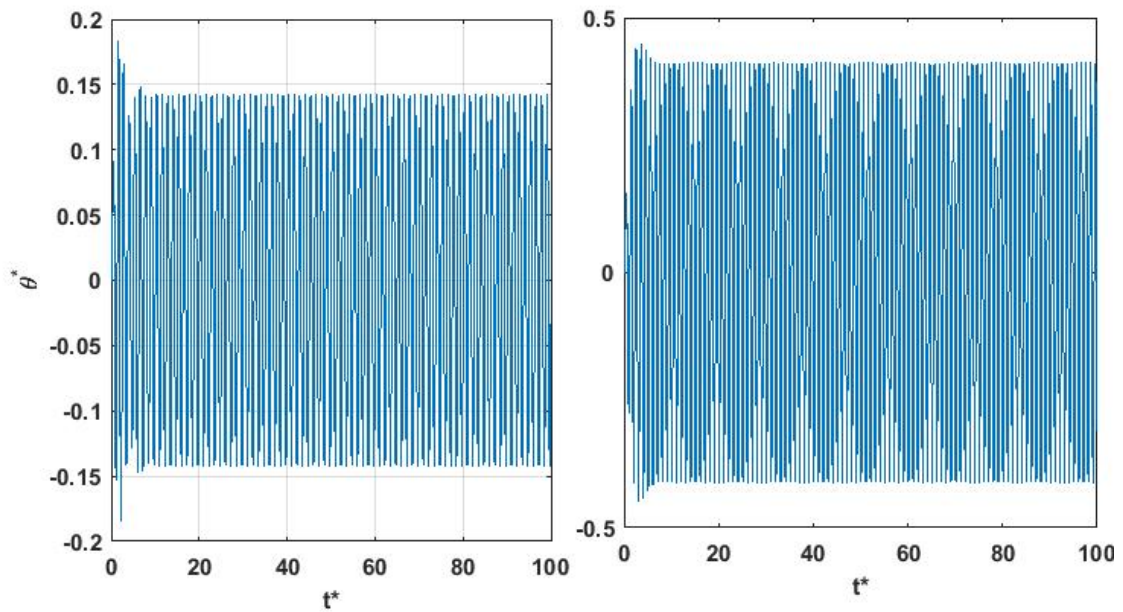
Williams-Yates είναι η  $P_{\max} = m\zeta_t\omega_n^3 Z_{\max}^2$  και όχι η  $P_{\max} = \frac{I_t (lA_L U^2)^2 \omega_n^3}{4\xi_t}$ , από την

οποία εξάγουν τη μέγιστη ισχύ οι Arionfard-Nishi.

## 4.1 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων

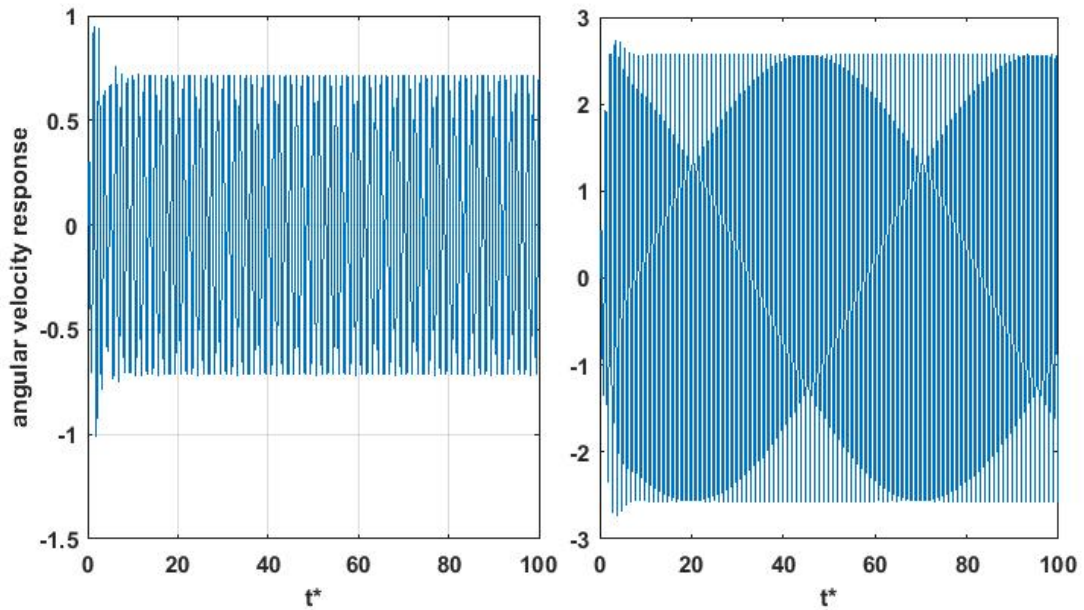
Προκειμένου να διαπιστωθεί κατά πόσο το μοντέλο αναπαράγει την πραγματική απόκριση του κυλίνδρου, παρουσιάζονται γραφικά στα Διαγράμματα 4.1.1, 4.1.2 και 4.1.3 τα μεγέθη της απόκρισης πλάτους ταλάντωσης  $\theta^*$ , της απόκρισης της γωνιακής ταχύτητας  $\dot{\theta}^*$  και της γωνιακής επιτάχυνσης  $\ddot{\theta}^*$  αντίστοιχα, συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου ( $t^*$ ), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ , για την περίπτωση που ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου, για μήκος μοχλοβραχίονα  $L^* = 1.3$  και για την περίπτωση που ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη για  $L^* = 0.8$ . Στο Διάγραμμα 4.1.4, διακρίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα της εργασίας των Arionfard-Nishi (2017).

Παρατηρώντας τη μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης από το Διάγραμμα 4.1.1 που προκύπτει από το θεωρητικό μοντέλο, παρόλο που οι τιμές των παραμέτρων του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  και του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  που κάνουν χρήση στα πειράματά τους οι Arionfard-Nishi δεν είναι γνωστές, εύκολα διαπιστώνεται πως το πλάτος ταλάντωσης προκύπτει στην ίδια τάξη μεγέθους, γεγονός που συνεπάγεται ότι το μαθηματικό μοντέλο συμβαδίζει με τα πειραματικά αποτελέσματα και αναπαράγει την πραγματική απόκριση του συστήματος αρκετά ικανοποιητικά.

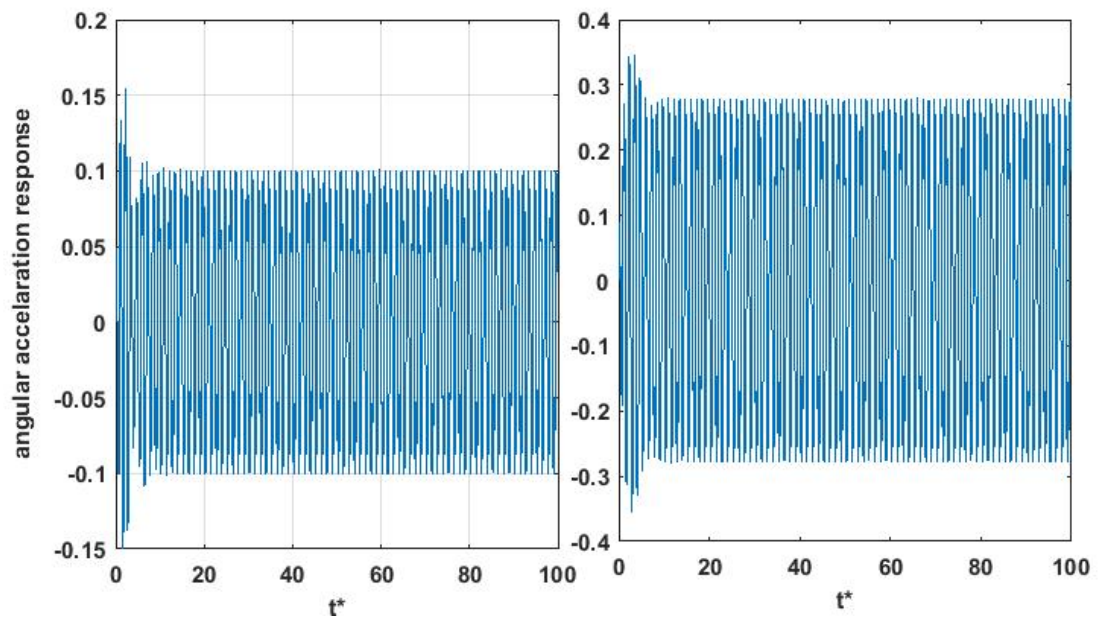


Διάγραμμα 4.1.1: Μεταβολή της απόκρισης πλάτους ταλάντωσης  $\theta^*$  (σε *rad*) ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου  $t^*$ , για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Πάνω: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου και για αδιάστατο μήκος μοχλόβραχίονα  $L^* = 1.3$ . Κάτω: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .

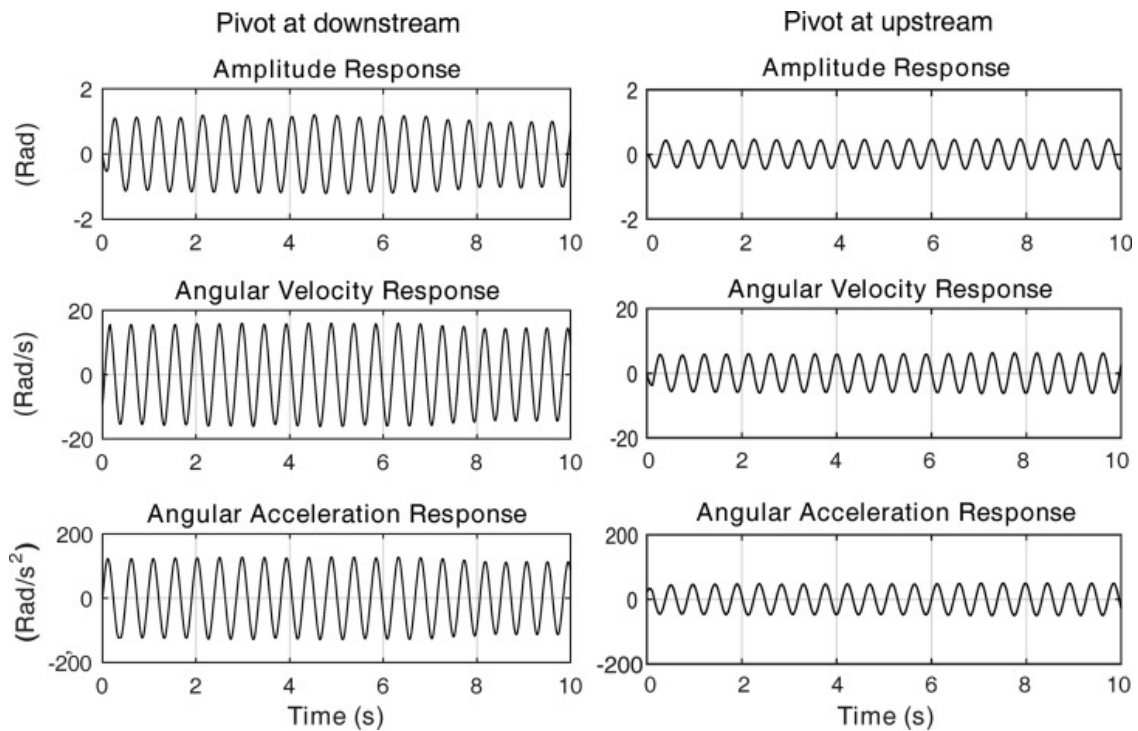




Διάγραμμα 4.1.2: Μεταβολή της απόκρισης της γωνιακής ταχύτητας της ταλάντωσης  $\dot{\theta}^*$ , ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου  $t^*$  για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο τροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για αδιάστατο μήκος μοχλόβραχίονα  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο τροφέας είναι τοποθετημένος κατόντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .



Διάγραμμα 4.1.3: Μεταβολή της απόκρισης της γωνιακής επιτάχυνσης της ταλάντωσης  $\ddot{\theta}^*$ , ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου  $t^*$ , για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο τροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για αδιάστατο μήκος μοχλοβραχίονα  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο τροφέας είναι τοποθετημένος κατόντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .



Διάγραμμα 4.1.4: Αποτελέσματα μετρήσεων για δύο περιπτώσεις με την υψηλότερη ισχύ εξόδου. Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 0.8$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 1.3$ .

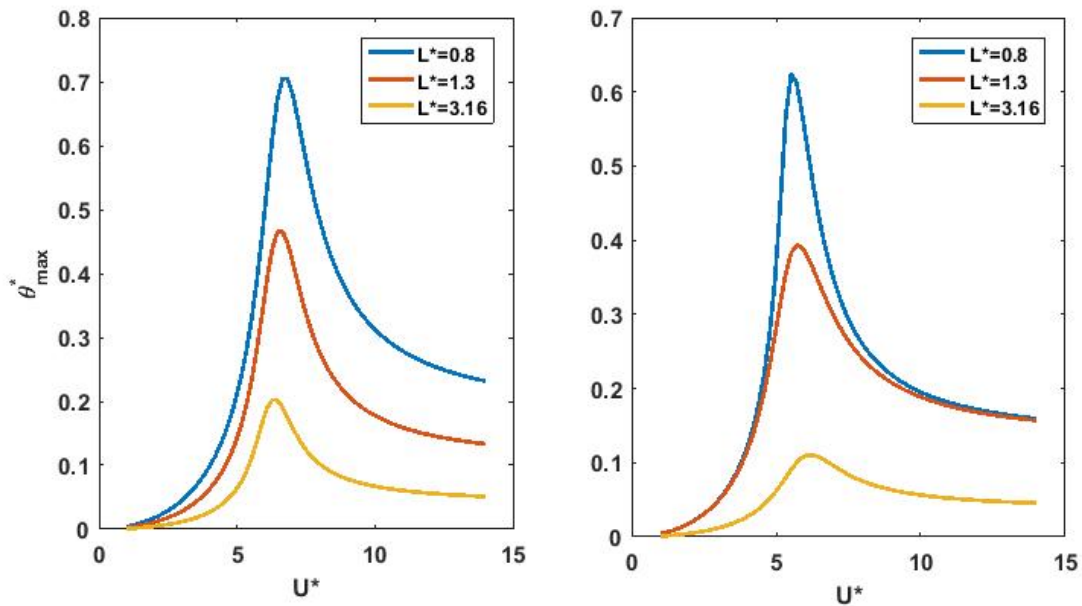
## 4.2 Επίδραση μήκους μοχλοβραχίονα

Στα Διαγράμματα 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.3, απεικονίζεται γραφικά η μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$ , ταχύτητας ταλάντωσης  $U_{\max}^*$  και του βαθμού απόδοσης  $\eta$  αντίστοιχα, συναρτήσει της αδιάστατης ταχύτητας του ρευστού  $U^*$ , για διαφορετικές τιμές του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  ( $L^* = 0.8, 1.3, 3.16$ ), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ , με σκοπό να εξεταστεί η επίδραση του μοχλοβραχίονα στο βαθμό απόδοσης του συστήματος.

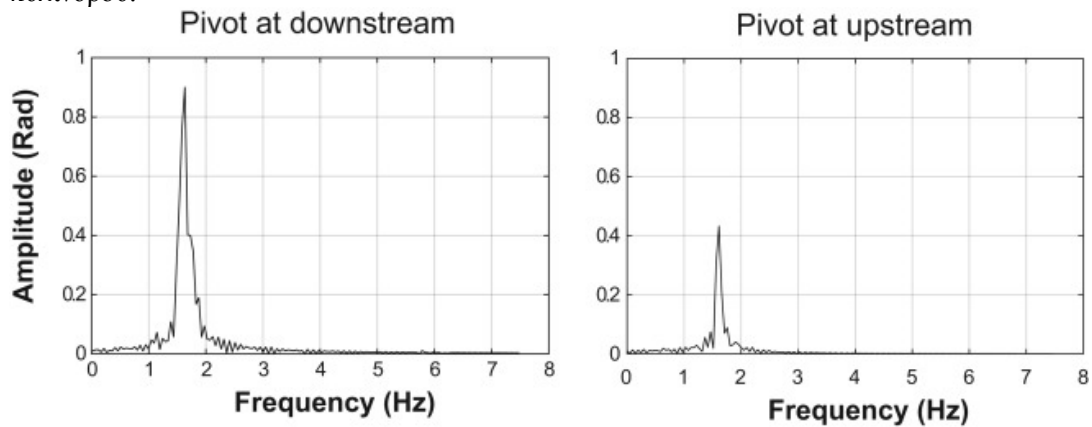
Όπως παρατηρούμε στο Διάγραμμα 4.2.1, όπου απεικονίζεται γραφικά το αδιάστατο πλάτος ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$ , συναρτήσει της ταχύτητας  $U^*$ , για ένα εύρος τιμών

$U^* = (1-14)$  προκύπτει εύκολα το συμπέρασμα πως όσο μειώνεται ο μοχλοβραχίονας  $L^*$ , αυξάνεται η μέγιστη απόκριση του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα, η μείωση του  $L^*$  από 1.3 σε 0.8, δηλαδή ποσοστό μείωσης κατά 38,46%, συνεπάγεται αύξηση του πλάτους ταλάντωσης από 0.45 σε 0.75, δηλαδή ποσοστό αύξησης κατά 40%. Αντίστοιχα, για μείωση από 3.16 σε 1.3 αντιστοιχεί αύξηση από 0.15 σε 0.45, δηλαδή ποσοστό αύξησης γύρω στο 67%. Συνεπώς, το μήκος του μοχλοβραχίονα  $L^*$ , επιδρά πολύ σημαντικά και σχεδόν «γραμμικά» στην απόκριση του συστήματος. Ανάλογα, και η γωνιακή ταχύτητα  $U_{\max}^*$  μειώνεται όσο αυξάνεται το μήκος μοχλοβραχίονα  $L^*$ , ενώ ο βαθμός απόδοσης  $\eta$  αυξάνεται όσο αυξάνεται ο μοχλοβραχίονας, δηλαδή μια «αντιστρόφως ανάλογη» μεταβολή. Μεγαλύτερος βαθμός απόδοσης, βρέθηκε για την περίπτωση που ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη και για  $L^* = 3.16$ .

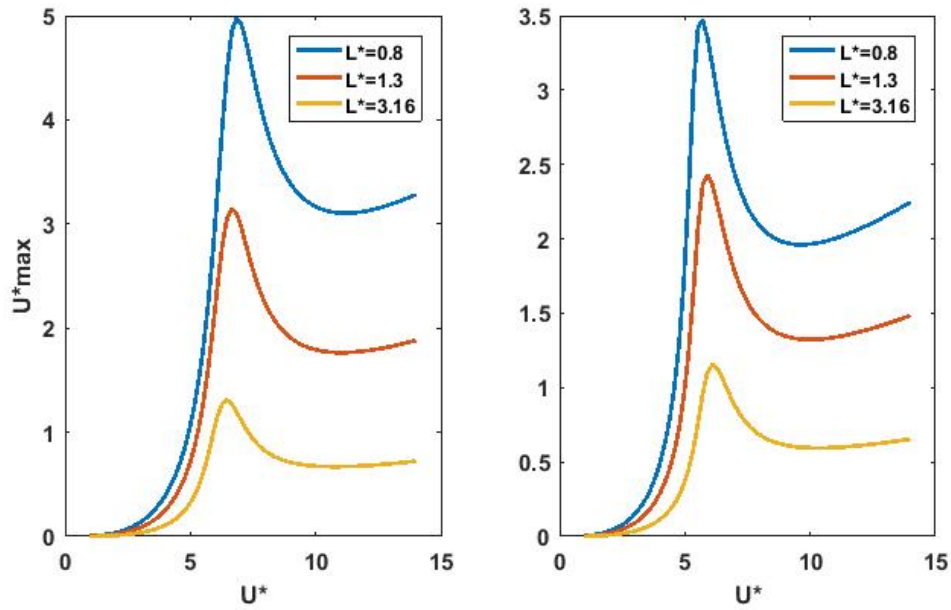
Επίσης, συγκρίνοντας το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης με τα αποτελέσματα των Agionfard-Nishi, για  $L^* = 1.3$ , (Διάγραμμα 4.2.2) διαπιστώνουμε πως οι τιμές είναι πάρα πολύ κοντά, γύρω στο 0.4. Αυτό, συνεπάγεται ότι το θεωρητικό μοντέλο, παρόλο που δεν είναι γνωστές οι τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  και του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$ , που χρησιμοποιούν οι Agionfard-Nishi, ενσωματώνει πολύ ικανοποιητικά τη φυσική του προβλήματος.



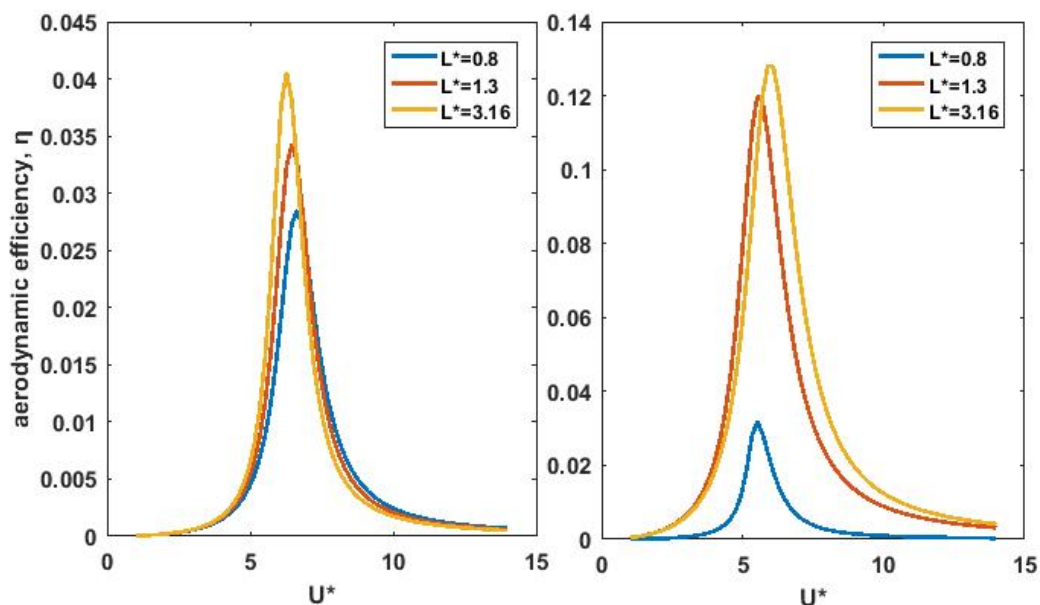
Διάγραμμα 4.2.1: Μεταβολή του αδιάστατου πλάτους ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τρεις τιμές του μοχλοβραχίονα  $L^*$  ( $L^* = 0.8, 1.3, 3.16$ ), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου. Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου.



Διάγραμμα 4.2.2: Μέγιστη απόκριση συστήματος συναρτήσει της συχνότητας. Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου και για  $L^* = 0.8$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 1.3$ . (Arionfard-Nishi, 2017).



Διάγραμμα 4.2.3: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*_{\max}$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τρεις τιμές του μοχλοβραχίονα  $L^*$  ( $L^* = 0.8, 1.3, 3.16$ ), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου. Δεξιά: Το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατόντη του κυλίνδρου.

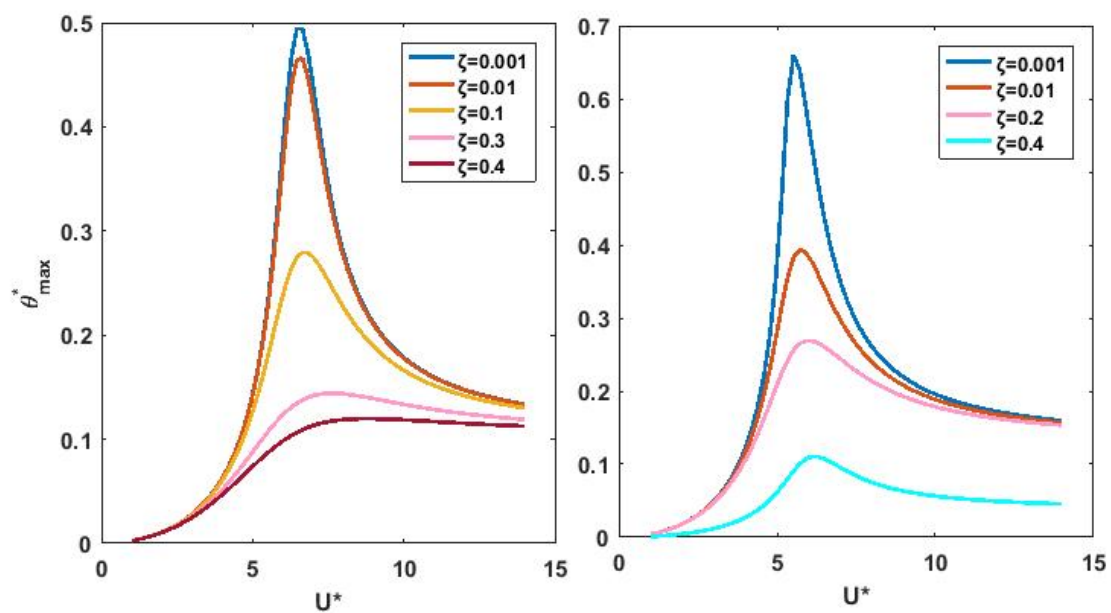


Διάγραμμα 4.2.4: Μεταβολή της αδιάστατης μέσης ισχύος, δηλαδή του βαθμού απόδοσης  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τρεις τιμές του μοχλοβραχίονα  $L^*$  ( $L^* = 0.8, 1.3, 3.16$ ), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο ανάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο κατάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 0.8$ .

### 4.3 Επίδραση συντελεστή απόσβεσης

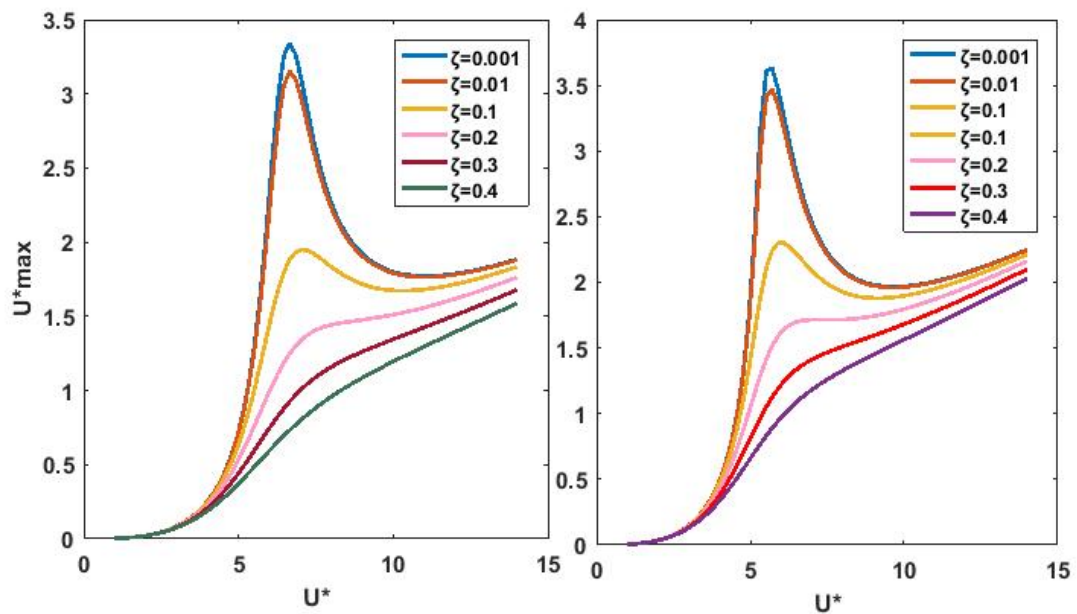
Στα Διαγράμματα 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, παρουσιάζονται γραφικά η μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$ , της ταχύτητας ταλάντωσης  $U_{\max}^*$  και του βαθμού απόδοσης  $\eta$ , συναρτήσει της αδιάστατης ταχύτητας του ρευστού  $U^*$ , για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Όπως φαίνεται (Διαγράμματα 4.3.1, 4.3.2), καθώς αυξάνεται ο συντελεστής απόσβεσης, μειώνονται το πλάτος και η ταχύτητα της ταλάντωσης. Το ενδιαφέρον σε αυτό το σημείο, όμως, έγκειται στο ότι τα αποτελέσματα δείχνουν πως ο βαθμός απόδοσης  $\eta$ , γίνεται μέγιστος για  $\zeta = 0.1$  και για  $\zeta > 0.1$  αρχίζει να μειώνεται, δηλαδή υφίσταται μια βέλτιστη τιμή συνολικής

απόσβεσης (μέρος της οποίας είναι και η μηχανική απόσβεση), κατά την οποία μεγιστοποιείται η ενεργειακή απόδοση του συστήματος. Το γεγονός αυτό σε πρακτικό επίπεδο, συνεπάγεται ότι το μηχανικό στοιχείο της συνολικής απόσβεσης πρέπει να ελαχιστοποιηθεί και ο ηλεκτρικός μετατροπέας που θα μετατρέπει την υδραυλική ενέργεια σε ηλεκτρική, θα πρέπει να εισάγει ηλεκτρική απόσβεση μέχρι κάποιο όριο.

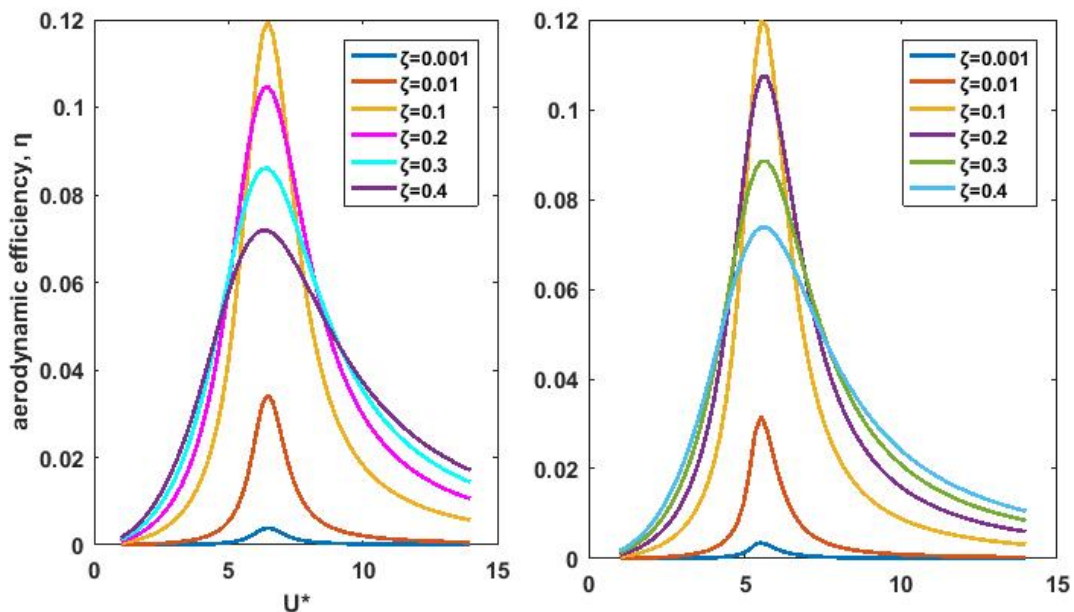


Διάγραμμα 4.3.1: Μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης  $\theta^*_{max}$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  ( $\zeta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ), και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .





Διάγραμμα 4.3.2: Μεταβολή του αδιάστατου πλάτους ταχύτητας  $U^*_{\max}$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  ( $\zeta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ), και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .



Διάγραμμα 4.3.3: Μεταβολή της αδιάστατης μέσης ισχύος, δηλαδή του βαθμού απόδοσης  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  ( $\zeta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ), και για αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .

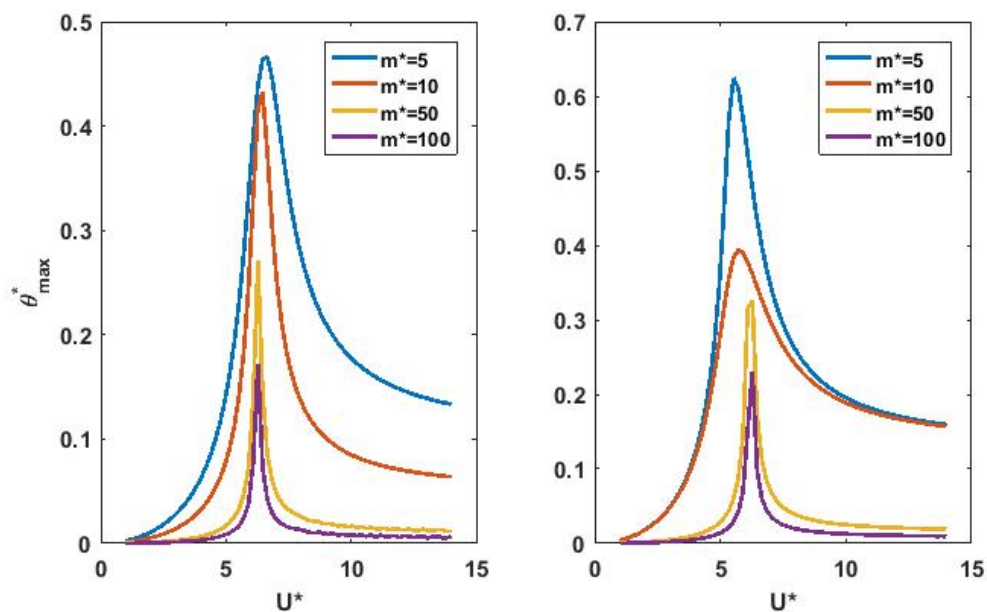
#### 4.4 Επίδραση αδιάστατου λόγου μαζών

Στα Διαγράμματα 4.4.1, 4.4.2 και 4.4.3, απεικονίζεται γραφικά η μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης  $\dot{\theta}_{\max}^*$  (σε  $rad$ ), του πλάτους ταχύτητας  $U_{\max}^*$  και της μηχανικής απόδοσης  $\eta$ , συναρτήσει της ταχύτητας  $U^*$  του ελεύθερου ρεύματος ρευστού για τέσσερις διαφορετικές τιμές του λόγου μαζών  $m^*$  ( $m^* = 5, 10, 50, 100$ ) και για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$ . Στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο ανάντη του κυλίνδρου, η προσομοίωση πραγματοποιείται για  $L^* = 1.3$ , ενώ στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου, για  $L^* = 0.8$ . Γενικά, ο λόγος μαζών παίζει πρωτεύοντα ρόλο καθώς καθορίζει το ρευστό που χρησιμοποιείται, το

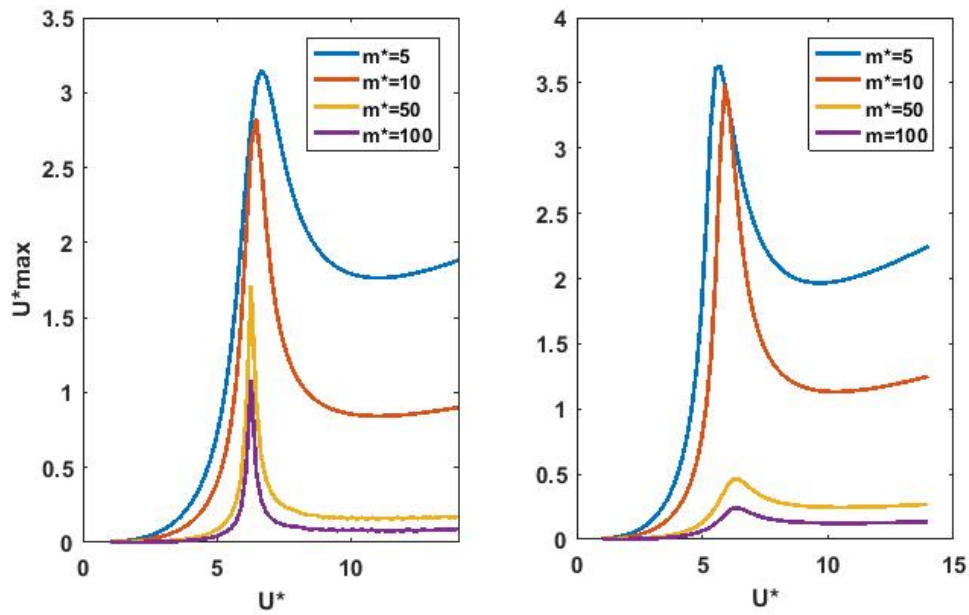
οποίο νερό (χαμηλές τιμές του  $m^*$ ) επιδρά διαφορετικά στην απόκριση του συστήματος, σε αντίθεση με την περίπτωση του αέρα ως ρευστό (υψηλές τιμές του  $m^*$ ).

Όπως παρατηρείται, όσο αυξάνεται ο αδιάστατος λόγος μαζών  $m^*$ , τόσο μειώνεται το πλάτος και η ταχύτητα της ταλάντωσης,  $\dot{\theta}_{\max}^*$  και  $U_{\max}^*$ , αντίστοιχα, παρουσιάζοντας μια «γραμμική εξάρτηση».

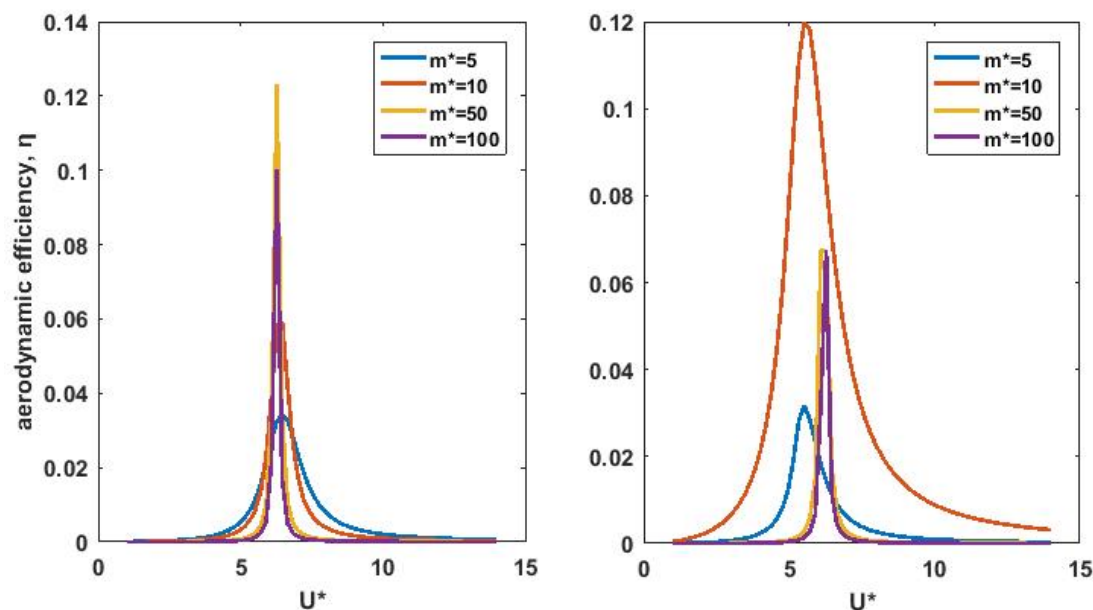
Το ενδιαφέρον σ' αυτό το σημείο έγκειται στο ότι στις καμπύλες για λόγο μαζών  $m^* = 50,100$  (Διάγραμμα 4.4.3, δεξιά), η τιμή της ταχύτητας  $U^*$  για την οποία παρουσιάζεται ο μέγιστος βαθμός απόδοσης δε συμπίπτει με την τιμή της  $U^*$  που προκύπτει η μεγαλύτερη τιμή ισχύος για  $m^* = 5,10$  και είναι μεγαλύτερη από αυτήν. Δηλαδή, ενώ τα πλάτη ταλάντωσης και ταχύτητας εξαρτώνται «γραμμικά» από το λόγο μαζών όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 4.4.1 και 4.4.2 αντίστοιχα, ο βαθμός απόδοσης  $\eta$  φαίνεται να παρουσιάζει έντονη «μη γραμμική εξάρτηση» από αυτόν στη δεύτερη περίπτωση, που ο στροφέας είναι τοποθετημένος αντίθετα από τη διεύθυνση της ταχύτητας διάδοσης του ρέοντος ρευστού.



Διάγραμμα 4.4.1: Μεταβολή του αδιάστατου πλάτους ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τέσσερις ενδεικτικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  ( $m^* = 5, 10, 50, 100$ ) και για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για μήκος μοχλοβραχίονα  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$



Διάγραμμα 4.4.2: Μεταβολή του αδιάστατου της ταχύτητας της ταλάντωσης  $U^*_{max}$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τέσσερις ενδεικτικές τιμές του λόγου μαζών  $m^*$  ( $m^* = 5, 10, 50, 100$ ), και για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για αδιάστατο μήκος μοχλοβραχίονα  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .



Διάγραμμα 4.4.3: Μεταβολή της αδιάστατης μέσης ισχύος, δηλαδή του βαθμού απόδοσης  $\eta$  ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$ , για τέσσερις ενδεικτικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  ( $m^* = 5, 10, 50, 100$ ), και συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$ . Αριστερά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος ανάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 1.3$ . Δεξιά: Ο στροφέας είναι τοποθετημένος κατάντη του κυλίνδρου για  $L^* = 0.8$ .

## 4.5 Ισοκαμπύλες απόδοσης

Στο υποκεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η μεταβολή του βαθμού απόδοσης του συστήματος  $\eta$  συναρτήσει της αδιάστατης ταχύτητας της ροής  $U^*$  και του μοχλοβραχίονα  $L^*$  και για τις δύο περιπτώσεις τοποθέτησης του σημείου περιστροφής, ανάντη και κατάντη του κυλίνδρου.

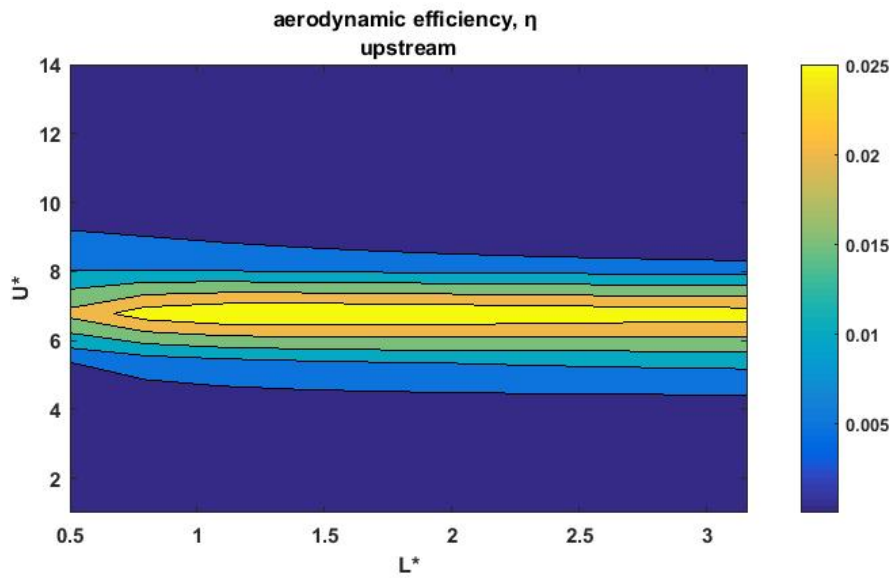
Στην πρώτη περίπτωση, όπου το σημείο περιστροφής βρίσκεται ανάντη του κυλίνδρου, (Διάγραμμα 4.5.1), για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$ , παρατηρούμε πως ο μέγιστος βαθμός απόδοσης (2,5%) προκύπτει για μεγάλο εύρος του μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  και για μικρό εύρος της μειωμένης ταχύτητας  $U^*$ , κάτι που πρακτικά συνεπάγεται στο ότι υφίσταται ταλάντωση για πολλά μήκη μοχλοβραχίονα, αν η ταχύτητα της ροής δεν είναι αρκετά υψηλή για να καταστείλει την

κίνηση. Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση (Διάγραμμα 4.5.4), που το σημείο περιστροφής βρίσκεται στον κατάντη του κυλίνδρου, ο μέγιστος βαθμός απόδοσης, προκύπτει για πολύ μικρό εύρος του μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  και μικρό εύρος της ταχύτητας της ροής  $U^*$ . Αυτό σημαίνει πως η βελτιστοποίηση του μήκους μοχλοβραχίονα είναι σημαντική για την επίτευξη υψηλών βαθμών απόδοσης.

Στο Διάγραμμα 4.5.2, παρουσιάζεται η απόδοση συναρτήσει  $U^*$  και  $L^*$ , χωρίς προσέγγιση για τη ροπή αδράνειας του συστήματος, δηλαδή για  $I = mr^2 + \frac{mD^2}{8}$  αντί για  $I = mr^2$ , για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο κατάντη του κυλίνδρου. Συγκρίνοντας το με το Διάγραμμα 4.5.1, εύκολα διαπιστώνεται πως οι διαφορές είναι μικρές, με το εύρος ταχύτητας  $U^*$  που προκύπτει η μέγιστη απόδοση να είναι ελάχιστα μικρότερο στην περίπτωση που δε χρησιμοποιείται προσέγγιση.

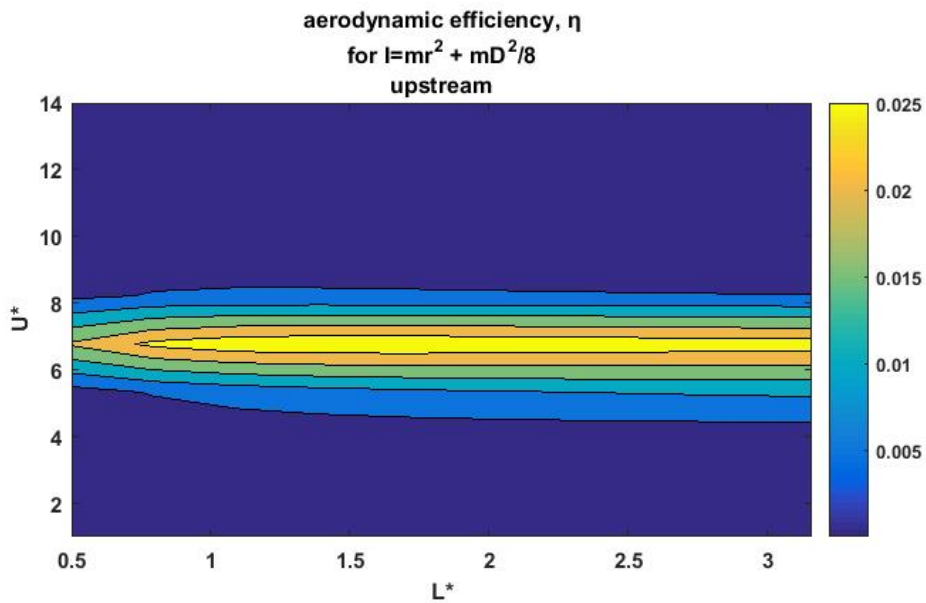
Στο Διάγραμμα 4.5.5, απεικονίζεται η αντίστοιχη περίπτωση όταν το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου. Σε αντίθεση με προηγουμένως, οι διαφορές με το Διάγραμμα 4.5.4 (με προσέγγιση), είναι σημαντικές. Οι υψηλές αποδόσεις αντιστοιχούν σε μεγαλύτερο εύρος των τιμών  $L^*$  και  $U^*$ , ενώ ο βαθμός απόδοσης δεν αυξάνει σ' όλα τα σημεία γραμμικά. Δηλαδή, σ' όλο το εύρος των τιμών του μοχλοβραχίονα, οι βαθμοί απόδοσης που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή του, είναι μεγαλύτεροι απ' ότι όταν χρησιμοποιείται η προσέγγιση για τη ροπή αδράνειας.

Τέλος, στα Διαγράμματα 4.5.3 και 4.5.6, παρουσιάζεται η σχέση του βαθμού απόδοσης με την ταχύτητα της ροής και το μήκος μοχλοβραχίονα για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.1$ , τη βέλτιστη τιμή δηλαδή του  $\zeta$  για την οποία προκύπτει η μέγιστη ενεργειακή απόδοση. Στην πρώτη περίπτωση (Διάγραμμα 4.5.3), ο μέγιστος βαθμός απόδοσης (11%) εμφανίζεται για πολύ μικρό εύρος της ταχύτητας της ροής, σε αντίθεση με το Διάγραμμα 4.5.1 (όπου  $\zeta = 0.01$ ). Στη δεύτερη περίπτωση (Διάγραμμα 4.5.6), η μέγιστη απόδοση εμφανίζεται επίσης για πάρα πολύ μικρό εύρος ταχύτητας.

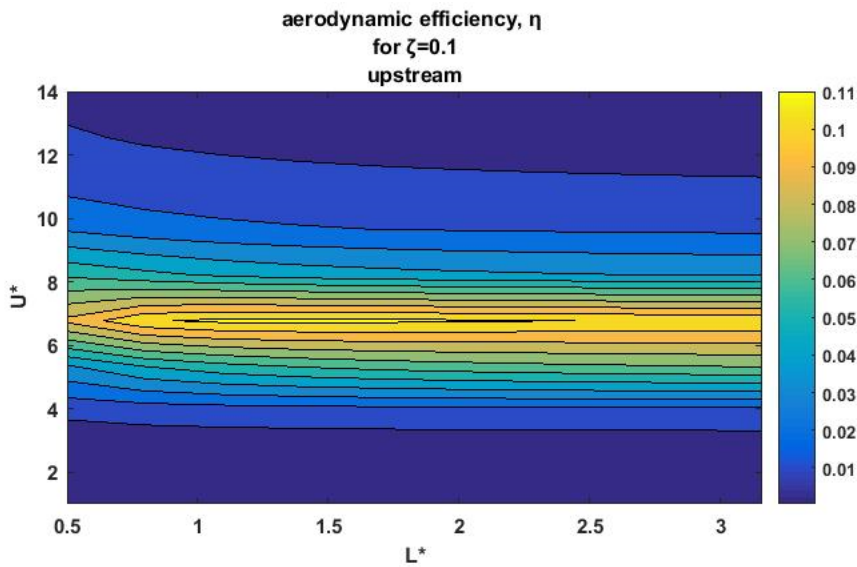


Διάγραμμα 4.5.1: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου.

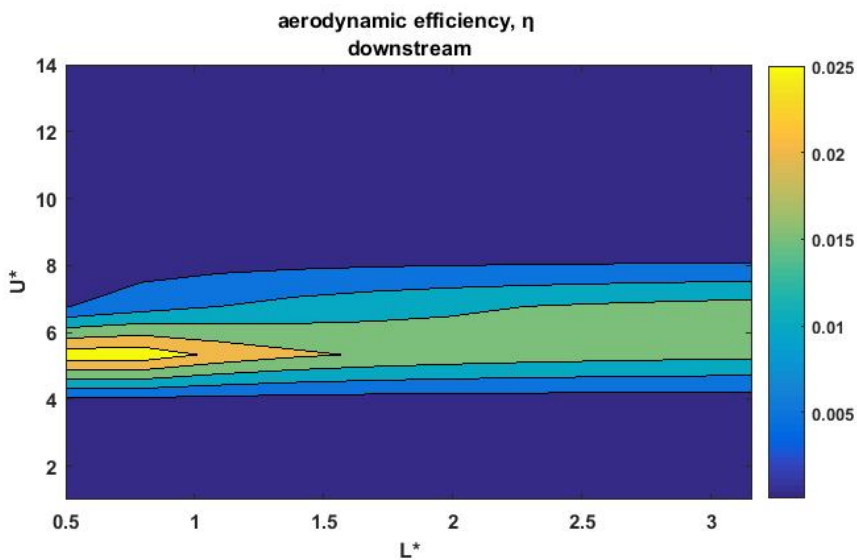




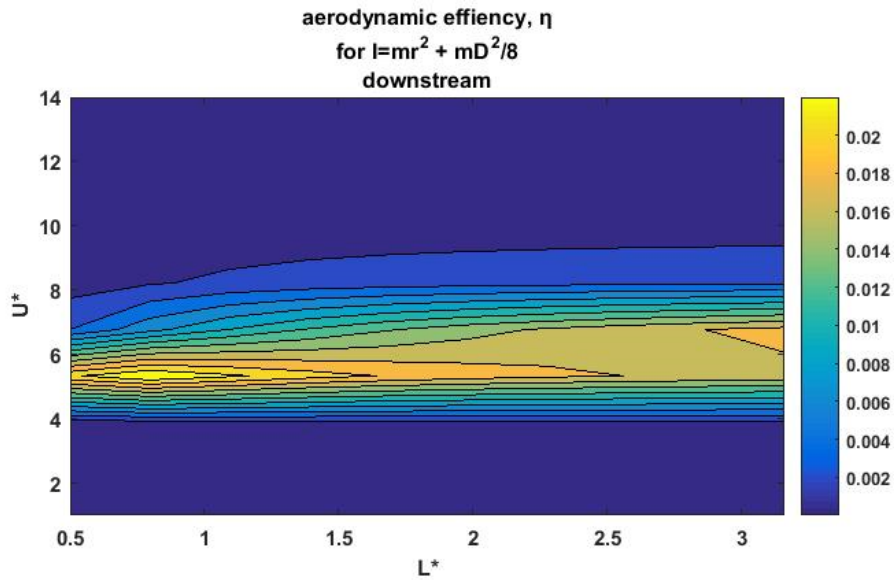
Διάγραμμα 4.5.2: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που δε θεωρούμε προσέγγιση για τη ροπή αδράνειας αλλά  $I = mr^2 + \frac{mD^2}{8}$  και το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου.



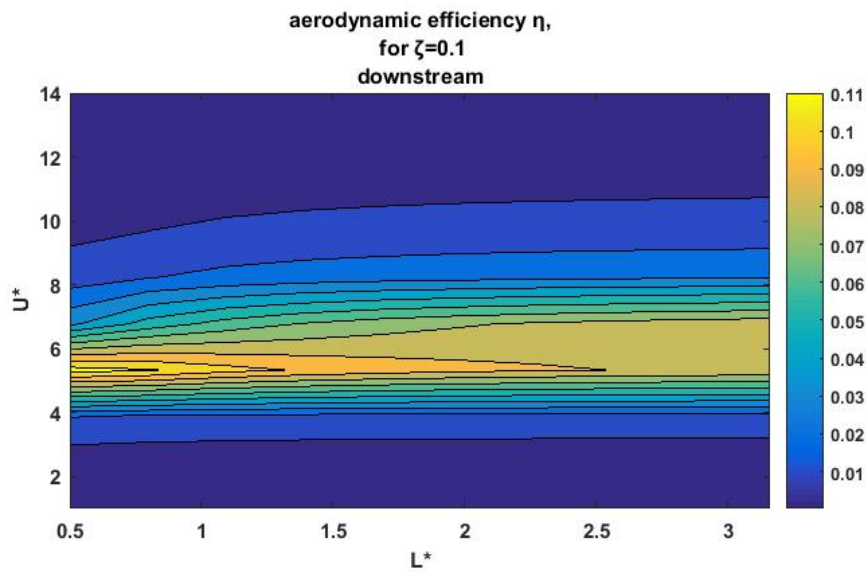
Διάγραμμα 4.5.3: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για τη βέλτιστη τιμή του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.1$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου.



Διάγραμμα 4.5.4: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.



Διάγραμμα 4.5.5: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.01$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που δε θεωρούμε προσέγγιση για τη ροπή αδράνειας αλλά  $I = mr^2 + \frac{mD^2}{8}$  και το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.



Διάγραμμα 4.5.6: Μεταβολή του βαθμού απόδοσης,  $\eta$ , ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας  $U^*$  και του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$  για τη βέλτιστη τιμή του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta = 0.1$  και αδιάστατο λόγο μαζών  $m^* = 5$  για την περίπτωση που το σημείο περιστροφής τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.

## 5. Συμπεράσματα – Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία, αναπτύχθηκε ένα θεωρητικό μοντέλο για τον υπολογισμό του ενεργειακού βαθμού απόδοσης από την εκμετάλλευση υψίσυχων ρευστοδυναμικά επαγόμενων ταλαντώσεων προσδεμένου κυκλικού κυλίνδρου, ο οποίος μπορεί να εκτελεί γωνιακές ταλαντώσεις ανάλογα με την τοποθέτηση του σημείου περιστροφής. Μελετήθηκε η επίδραση του αδιάστατου μήκους μοχλοβραχίονα  $L^*$ , του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και αδιάστατου λόγου μαζών  $m^*$  στο πλάτος ταλάντωσης  $\theta_{\max}^*$ , ταχύτητας  $U_{\max}^*$  και στην ενεργειακή απόδοση του συστήματος,  $\eta$ . Ο κύλινδρος εξετάστηκε για δύο περιπτώσεις: στην περίπτωση που ο στροφέας τοποθετείται ανάντη του κυλίνδρου και στην περίπτωση, που τοποθετείται κατάντη του κυλίνδρου.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του παρόντος μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα από τη βιβλιογραφία (Arionfard-Nishi), καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως αναπαράγεται αρκετά ικανοποιητικά η πραγματική απόκριση του συστήματος.

Στη συνέχεια, εξετάστηκε η επίδραση του μοχλοβραχίονα  $L^*$  και φάνηκε πως επιδρά «γραμμικά» στα εξεταζόμενα μεγέθη, δηλαδή όταν αυξάνεται το  $L^*$ , μειώνεται το πλάτος και η συχνότητα της ταλάντωσης. Αντίθετα, ο βαθμός απόδοσης του συστήματος αυξάνεται. Ο βέλτιστος βαθμός απόδοσης, γύρω στο 12%, βρέθηκε στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής είναι τοποθετημένο κατάντη του κυλίνδρου και για  $L^* = 3.16$ .

Εν συνεχεία, παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα για διάφορους συντελεστές απόσβεσης, και βρέθηκε πως επιδρούν σημαντικά στον ενεργειακό βαθμό απόδοσης. Ενώ τα πλάτη ταλάντωσης και ταχύτητας μειώνονται όσο αυξάνεται ο συντελεστής απόσβεσης, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων έδειξαν πως η απόδοση αυξάνεται μέχρι  $\zeta = 0.1$ , κι έπειτα μειώνεται, δηλαδή πως υπάρχει μια βέλτιστη τιμή της συνολικής απόσβεσης που μεγιστοποιεί την ενεργειακή απόδοση του συστήματος, η οποία όμως δε συμπίπτει με το μεγαλύτερο εύρος ταλαντώσεων. Αυτό, πρακτικά σημαίνει πως το ηλεκτρικό σύστημα εκμετάλλευσης θα πρέπει να εισάγει ηλεκτρική απόσβεση μέχρι κάποιο όριο, ενώ η

μηχανική απόσβεση πρέπει να είναι ελάχιστη. Βρέθηκε, επίσης, πως ο βαθμός απόδοσης εμφανίζει έντονη «μη γραμμική» εξάρτηση από τον αδιάστατο λόγο μαζών, σε αντίθεση με το πλάτος και την ταχύτητα της ταλάντωσης.

Τέλος, με την παρουσίαση του βαθμού απόδοσης συναρτήσει του μήκους μοχλοβραχίονα και της ταχύτητας και για τις δύο περιπτώσεις τοποθέτησης του στροφέα, ανάγεται το συμπέρασμα πως στην πρώτη περίπτωση (ανάντη) απαιτείται βελτιστοποίηση του μήκους του βραχίονα για την επίτευξη υψηλότερης απόδοσης, ενώ στην περίπτωση που το σημείο περιστροφής βρίσκεται κατόντη, η μη χρήση της προσέγγισης της ροπής αδράνειας,  $I = mr^2$ , παρουσιάζει αξιοσημείωτες διαφορές. Προκύπτουν υψηλές αποδόσεις για μεγαλύτερο εύρος  $L^*, U^*$ . Θα μπορούσαν να μελετηθούν οι ισοκαμπύλες απόδοσης και για περισσότερους λόγους μαζών.

Ωστόσο, μια κοινή δυσκολία, όπως συμβαίνει και με τα περισσότερα θεωρητικά μαθηματικά μοντέλα, αποτελεί πως οι συντελεστές διέγερσης  $C_L$  και αντίστασης  $C_D$ , είναι άγνωστοι, a priori. Άρα, η εκχώρηση τιμών γι' αυτούς τους συντελεστές γίνεται μέσω ανάδρασης με τα πειραματικά δεδομένα. Επομένως, μια πρόταση για περαιτέρω διερεύνηση θα ήταν η μοντελοποίηση των συντελεστών αυτών και η μελέτη της επίδρασής τους στην απόκριση του συστήματος και την ισχύ, δηλαδή μια ανάλυση ευαισθησίας αυτών των παραμέτρων για την εξέταση των συνεπειών που υφίσταται το μοντέλο, ως συνέπεια αλλαγών στις τιμές των  $C_L$  και  $C_D$ . Από τη συμφωνία των αποτελεσμάτων του θεωρητικού μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα, παρόλο που οι συντελεστές ανύψωσης και αντίστασης δεν ήτο γνωστοί, μπορούμε να ανάγουμε το συμπέρασμα πως το παρόν μοντέλο δεν παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στους συντελεστές αυτούς, κάτι που αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με τα εμπειρικά και τα ημιεμπειρικά μοντέλα, άρα οι διαφορές θα είναι μικρής κλίμακας.

## Παράρτημα Α

### Το αρμονικό μοντέλο

#### Προέλευση των αδιάστατων συντελεστών $A^*$ , $f^*$

Οι αδιάστατοι συντελεστές  $A^*$  και  $f^*$  είναι αλληλεξαρτώμενοι και συνεπώς ο ένας δεν μπορεί να προκύψει απουσία του άλλου, παρ' όλα αυτά, χάριν ευκολίας, παρουσιάζονται και υπολογίζονται χωριστά.

Η εξίσωση κίνησης κυλίνδρου ενός βαθμού ελευθερίας είναι:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F \quad (98)$$

$$\text{όπου } F = F_0 \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos \varphi \cos \omega t - F_0 \sin \varphi \sin \omega t$$

Και η απόκριση του κυλίνδρου:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_N t) \quad (99)$$

$$\dot{y}(t) = -y_0 \omega_N \sin(\omega_N t) \quad (100)$$

$$\ddot{y}(t) = -y_0 \omega_N^2 \cos(\omega_N t) \quad (101)$$

Αρχικά, υπολογίζουμε το συντελεστή στιβαρότητας  $k$  και το συντελεστή απόσβεσης  $c$ .

$$\omega_N = 2\pi f_N$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega_N^2 m = 4\pi^2 f_N^2 m$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \Rightarrow c = 2\zeta \sqrt{km} = 4\pi\zeta f_N m$$

Διαιρούμε την εξίσωση κίνησης  $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F$  με το συντελεστή  $\frac{1}{2}\rho U^2 DL$  και

προκύπτει:

$$\frac{m\ddot{y}(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} + \frac{b\dot{y}(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} + \frac{ky(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} = \frac{F_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL}$$

Ορίζουμε  $c_L = \frac{F_0}{\frac{1}{2}\rho U^2 D}$  και άρα:

$$\frac{m\ddot{y}(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} + \frac{b\dot{y}(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} + \frac{ky(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} = c_L \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L \cos(\omega t + \varphi) = m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) \quad (102)$$

Αντικαθιστώντας,  $k = \omega_N^2 m = 4\pi^2 f_N^2 m$  και  $c = 2\zeta \sqrt{km} = 4\pi\zeta f_N m$  προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L \cos(\omega t + \varphi) = m\ddot{y}(t) + 4\pi\zeta f_N m \dot{y}(t) + 4\pi^2 f_N^2 m y(t)$$

Αντικαθιστώντας και τις σχέσεις (99), (100) και (101):

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L \cos(\omega t + \varphi) = m\ddot{y}(t) = -m y_0 \omega^2 \cos(\omega t) - 4\pi\zeta f_N m y_0 \omega \sin(\omega t) + 4\pi^2 f_N^2 m y_0 \cos(\omega t) \quad (103)$$

Ισχύει ότι  $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t$  και συνεπώς,

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L (\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t) = (4\pi^2 f_N^2 m y_0 - m y_0 \omega^2) \cos \omega t - 4\pi\zeta f_N m y_0 \omega \sin(\omega t) \quad (104)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των (103) και (104) προκύπτουν οι παρακάτω 2 εξισώσεις:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L \cos \varphi = 4\pi^2 f_N^2 m y_0 - m y_0 \omega^2 \quad (105)$$

Και

$$\frac{1}{2}\rho U^2 DL c_L \sin \varphi = 4\pi\zeta f_N m y_0 \omega \quad (106)$$



Η εξίσωση (106), μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{1}{2} \rho U^2 L c_L \sin \varphi = \frac{4\pi \zeta f_N m y_0 \omega}{D}, \text{ όπου } A^* = \frac{y_0}{D}, \text{ άρα}$$

$$\frac{1}{2} \rho U^2 L c_L \sin \varphi = 4\pi \zeta f_N m \omega A^* \Rightarrow$$

$$A^* = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 D^2 L c_L \sin \varphi}{4\pi \zeta f_N m \omega D^2}$$

Ισχύει ότι,

$$m^* = \frac{m}{\pi \rho D^2 \frac{L}{4}}$$

$$\frac{m}{\rho \frac{L}{4}} = \frac{\pi m}{\pi \rho \frac{L}{4}} = \frac{\pi m D^2}{\pi \rho \frac{L}{4} D^2} = \pi m m^*$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$A^* = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 c_L \sin \varphi}{\pi^2 m^* \zeta f_N \omega D^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 c_L \sin \varphi f_N}{\pi^2 m^* \zeta f_N^2 m \omega D^2} = \frac{U^{*2} c_L \sin \varphi f_N}{2\pi^2 m^* \zeta \omega}$$

$$\text{, αφού } U^* = \frac{U}{f_N D}.$$

$$\frac{U^{*2} c_L \sin \varphi f_N}{2\pi^2 m^* \zeta 2\pi f} = \frac{U^{*2} c_L \sin \varphi}{4\pi^3 m^* \zeta f^*} \Rightarrow A^* = \frac{1}{4\pi^3} \frac{c_L \sin \varphi}{m^* \zeta} \frac{U^{*2}}{f^*}$$

(107)

Η εξίσωση (105), μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho U^2 D L c_L \cos \varphi}{f_N^2} = 4\pi^2 m y_0 - m y_0 4\pi^2 \frac{f^2}{f_N^2} = 4\pi^2 m y_0 - m y_0 4\pi^2 f^{*2}$$

$$\Rightarrow f^{*2} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 D L c_L \cos \varphi}{m y_0 4\pi^2 f_N^2}$$

$$\frac{4m}{\rho D L} = \frac{4m\pi}{\pi \rho D L} = \frac{4m\pi D}{\pi \rho D^2 L} = m^* \pi D$$

Άρα,

$$f^* = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{U^2 c_L \cos \varphi}{f_N^2 \pi^3 y_0 m^* D}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{U^2 D c_L \cos \varphi}{f_N^2 D^2 \pi^3 y_0 m^*}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{U^{*2} c_L \cos \varphi}{\pi^3 A^* m^*}} \quad (108)$$

## Βιβλιογραφία

Arionfard, H., Nishi, Y. Experimental Investigation of a Drag Assisted Vortex-Induced Vibration Energy Converter, *Journal of Fluids and Structures* 68 (2017) 48–57.

Barrero-Gil, A., Pindado, S., Avila, S., 2012. Extracting energy from vortex-induced vibrations: a parametric study. *Appl. Math. Model.* 36, 3153–3160.

Bernitsas, M.M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., Garcia, E.M.H., 2008. VIVACE (vortex induced vibration aquatic clean energy): a new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. *J. Offshore Mech. Arct. Eng.* 130 (4), 1–15.

Bishop, A.Y. Hassan, The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid, *Proceedings of the Royal Society Series A*, (1963)

Blevins, R. D., 2009. “Models for vortex-induced vibration of cylinders based on measured forces”. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 131(10), pp. 1–9. 101203.

Chang, C.-C., 1992. “Potential flow and forces for incompressible viscous flow”. *Proceedings of the Royal Society London A*, 437, pp. 517–525.

Feng, The Measurement of Vortex-induced Effects in Flow Past Stationary and Oscillating Circular and D-section Cylinders, Master’s Thesis, University of British Columbia, 1968

Gopalkrishnan, R., 1993. Vortex induced forces on oscillating bluff cylinders. Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, MIT, Cambridge, MA, USA.

Govardhan, C.H.K. Williamson, Modes of vortex formation and frequency response Of a freely vibrating cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, (2000).

Griffin, R.A. Skop, G.H. Koopman, The vortex-excited resonant vibrations of circular cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, (1973).

Griffin, O. M., and Koopmann, G. H., 1977. “The vortex-excited lift and reaction forces on resonantly vibrating cylinders”, *Journal of Sound and Vibration*, 54(3), pp. 435–448.

Hartlen, I.G. Currie, Lift-oscillator model of vortex induced vibration, *Journal of the Engineering Mechanics* (1970).

Hobbs, W.B., Hu, D.L., 2012. Tree-inspired piezoelectric energy harvesting. *J. Fluids Struct.* 28, 103–114.

Iwan, R.D. Blevins, A model for vortex-induced oscillation of structures, *Journal of Applied Mechanics*, (1974).

Iwan, The vortex induced oscillation of elastic structures, *Journal of Engineering for Industry*, (1975).

Iwan, The vortex-induced oscillation of non-uniform structural systems, *Journal of Sound and Vibration*, (1981).

Khalak, C.H.K. Williamson, Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping, *Journal of Fluids and Structures*, (1996).

Khalak, C.H.K. Williamson, Fluid forces and dynamics of a hydroelastic structure with very low mass and damping, *Journal of Fluids and Structures*, (1997).

Khalak, C.H.K. Williamson, Investigation of relative effects of mass and damping in vortex-induced vibration of a circular cylinder, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, (1997).

Konstantinidis E, (2013). "Added mass of a circular cylinder oscillating in a free stream." *Proceedings of the Royal Society A* 469: 2156, art. no. 135.

Konstantinidis E, (2016). "A new forced-excitation model for the prediction of maximum response in vortex-induced vibration." 11th Intl Conference on Flow-Induced Vibration, TNO, The Hague, The Netherlands.

Konstantinidis E, (2017). "A physics-based model for VIV analysis." OMAE2017-62483, *Proceedings of the ASME 2017 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, June 25-30, 2017, Trondheim, Norway.

Landl, A mathematical model for vortex-excited vibrations of bluff bodies, *Journal of Sound and Vibration*, (1975) -447.

Larsen, C.M. (2000): "Empirical VIV models". Invited lecture at Workshop on Vortex Induced Vibrations of Offshore Structures, Sao Paulo.

Lee JH, Bernitsas MM. High-damping, high-Reynolds VIV tests for energy harnessing using the VIVACE converter. *Ocean Eng* 2011;38(16):1697–712.

Lighthill, M.J., 1986. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. *Journal of Fluid Mechanics* 173, 667–681.

Mehmood et al., 2013, A. Mehmood, A. Abdelkefi, M. Hajj, A. Nayfeh, I. Akhtar, A. Nuhait, Piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibrations of circular cylinder, *J. Sound Vib.*, 332 (2013), pp. 4656-4667.

Sarpkaya, T., 2001. "On the force decompositions of Lighthill and Morison". *Journal of Fluids and Structures*, 15, pp. 227–233.

Sarpkaya, T., 2004. "A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations". *Journal of Fluids and Structures*, 19(4), pp. 389 – 447.

Skop, O.M. Griffin, A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, (1973)

Skop, O.M. Griffin, On a theory for the vortex-excited oscillations of flexible cylindrical structures, *Journal of Sound and Vibration*, (1975).

- Skop, S. Balasubramanian, A new twist on an old model for vortex-excited vibrations, *Journal of Fluids and Structures*, (1997).
- Staubli, T., 1983. Calculation of the vibration of an elastically mounted cylinder using experimental data from forced oscillation. *ASME Journal of Fluids Engineering* 105, 225–229.
- Stokes, G.G., (Sir) 1851. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9, 8–106.
- Thorsen, M., Svik, S., and Larsen, C., 2014. “A simplified method for time domain simulation of cross-flow vortex-induced vibrations”. *Journal of Fluids and Structures*, 49, pp. 135 – 148.
- Vandiver, J.K., Jong, J.-Y., 1987. The relationship between in-line and cross-flow vortex-induced vibration of cylinders. *Journal of Fluids and Structures* 1, 381–399.
- Vandiver, J.K., 1993. Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. *Journal of Fluids and Structures* 7, 423–455.
- Vikestad, K., Vandiver, J.K., Larsen, C.M., 2000. Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibrations and external disturbance. *Journal of Fluids and Structures* 14, 1071–1088.
- Wang et al., 2012 D.A. Wang, C.Y. Chiu, H.T. Pham, Electromagnetic energy harvesting from vibrations induced by Kármán vortex street, *Mechatronics*, 22 (2012), pp. 746-756.
- Williams, C.B., Yates, R.B., 1996. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. *Sens. Actuators* 52 (1996), 8–11.
- Williamson, A. Roshko, Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder, *Journal of Fluids and Structures*, (1988).