



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Κωνσταντίνος Β. Ράλλης
Διπλ. Ηλεκτρολόγος Μηχανικός ΔΠΘ, MSc

Ηλεκτρομαγνητική μελέτη υπόγειων αγωγών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Κοζάνη 2012

στην Κατερίνα
στους Βασίλη και Αλίκη Αλεξάνδρα

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Θεόδωρος Θεοδουλίδης	Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων)
Δημήτριος Λαμπρίδης	Καθηγητής
Γρηγόριος Παπαγιάννης	Αναπληρωτής Καθηγητής

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Δημήτριος Λαμπρίδης	Καθηγητής
Θεόδωρος Θεοδουλίδης	Αναπληρωτής Καθηγητής
Αντώνιος Τουρλιδάκης	Αναπληρωτής Καθηγητής
Γρηγόριος Παπαγιάννης	Αναπληρωτής Καθηγητής
Νικόλαος Κανταρτζής	Επίκουρος Καθηγητής
Γεώργιος Χριστοφορίδης	Επίκουρος Καθηγητής
Θεόδωρος Ζυγκιρίδης	Λέκτορας

Πρόλογος

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο Τμήμα των Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας στην Κοζάνη κατά το χρονικό διάστημα Σεπτέμβριος 2008 - Οκτώβριος 2012.

Με την ολοκλήρωση της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Θεόδωρο Θεοδουλίδη, που φρόντισε όλο αυτό το διάστημα να υπάρχει άριστο κλίμα στη συνεργασία μας, βασιζοντάς την στην ουσιαστική επικοινωνία σε ισότιμη βάση και στην απρόσκοπτη διάχυση της γνώσης, έχοντας σταθερό προσανατολισμό στην κατεύθυνση της κατάκτησης της επιστημονικής αλήθειας. Θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Δημήτριο Λαμπρίδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γρηγόριο Παπαγιάννη, μέλη της επιβλέπουσας επιτροπής, για την άριστη συνεργασία τους. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον Λέκτορα κ. Θεόδωρο Ζυγκιρίδη για τη βοήθεια που μου πρόσφερε και τους καλούς μου φίλους και συναδέλφους Γιώργο Κωνσταντά και Ανδρέα Καραλιώτη για τη βοήθεια και τη στήριξή τους.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στη σύζυγο μου Σοφία και την κόρη μου Κατερίνα, για την κατανόηση και τη στήριξη που μου πρόσφεραν όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	3
Εισαγωγή	7
1 Το πεδίο του στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου	11
1.1 Εισαγωγή	11
1.2 Οι πεδιακές εξισώσεις και το Διάνυσμα Hertz	13
1.3 Το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο	15
1.4 Το πρόβλημα των οριακών τιμών για τον υπολογισμό των καρτεσιανών συνιστωσών του διανύσματος Hertz	16
1.5 Κατακόρυφο στοιχειώδες δίπολο	16
1.5.1 Δίπολο στη γη	18
1.5.2 Δίπολο στον αέρα	19
1.6 Οριζόντιο στοιχειώδες δίπολο	21
1.6.1 Δίπολο στη γη	22
1.6.2 Δίπολο στον αέρα	23
1.7 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του διπόλου, κατακόρυφο δίπολο	24
1.8 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του διπόλου, οριζόντιο δίπολο	26
2 Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους	29
2.1 Εισαγωγή	29
2.2 Μεθοδολογία	30
2.3 Ανάλυση του προβλήματος	31
2.3.1 Παράλληλοι αγωγοί	32
2.3.2 Κάθετοι αγωγοί	35
2.3.3 Αγωγοί υπό γωνία	37
2.4 Εναλλακτική προσέγγιση με χρήση της μεθόδου DCIM	37
2.5 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς γ , παράλληλοι αγωγοί	38
2.6 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς γ , κάθετοι αγωγοί	44
2.7 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς λ	45

2.8	Αποτελέσματα αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης	48
2.9	Συμπεράσματα	52
3	Μελέτη χαρακτηριστικών γείωσης κατακόρυφου γειωτή	54
3.1	Εισαγωγή	54
3.2	Περιγραφή του προβλήματος και ανάπτυξη υπολογιστικού μοντέλου	55
3.3	Υπολογισμός με πεπερασμένα στοιχεία	59
3.4	Αποτελέσματα - Συμπεράσματα	61
4	Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson για τη σύνθετη αντίσταση υπόγειων και εναέριων αγωγών με επιστροφή γης	65
4.1	Εισαγωγή - βιβλιογραφία	65
4.2	Τα ολοκληρώματα Pollaczek	67
4.3	Λύση των ολοκληρωμάτων Pollaczek με χρήση της μεθόδου DCIM	69
4.3.1	Υπόγειοι αγωγοί	69
4.3.2	Υπέργειος και υπόγειος αγωγός	75
4.4	Λύση του ολοκληρώματος Carson με χρήση της μεθόδου DCIM .	78
4.5	Συμπεράσματα	83
5	Υπολογισμός του πεδίου που παράγεται από πλήγμα κεραυνού	85
5.1	Εισαγωγή - βιβλιογραφία	85
5.2	Περιγραφή του προβλήματος	89
5.3	Μοντέλα του πλήγματος επιστροφής	91
5.4	Τα μοντέλα Engineering	92
5.5	Εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του κεραυνού - Υπόγειο Πεδίο	94
5.6	Εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του κεραυνού - Υπέργειο Πεδίο	98
5.7	Το ρεύμα βάσης	100
5.8	Επίλυση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων	103
5.9	Η τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης	105
5.10	Ο υπολογιστικός αλγόριθμος - η τεχνική της παρεμβολής	108
5.11	Παρουσίαση αποτελεσμάτων-Υπόγειο πεδίο	111
5.12	Παρουσίαση αποτελεσμάτων-Υπέργειο πεδίο	118
5.13	Επίδραση του κεραυνικού πλήγματος σε υπόγειους αγωγούς	125
5.14	Υπολογισμός του επαγόμενου κύματος ρεύματος σε υπόγειο καλώδιο	128
5.15	Συμπεράσματα	132
	Επίλογος	134

Παράρτημα	138
A' Ο αλγόριθμος Generalized Pencil of Function (GPOF)	138
B' Abstract	140
Βιβλιογραφία	142

Εισαγωγή

Ο προσδιορισμός της ηλεκτρομαγνητικής σύζευξης πεδίου με τις γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας είναι ένα πολύ σημαντικό αντικείμενο του επιστημονικού κλάδου της ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας. Το ίδιο πρόβλημα παρουσιάζεται και σε μια σειρά από υποδομές του σύγχρονου τεχνικού κόσμου όπως τα σιδηροδρομικά συστήματα, τα συστήματα γείωσης, οι τηλεπικοινωνιακές γραμμές και οι ηλεκτρονικές συσκευές που περιλαμβάνουν τυπωμένα κυκλώματα, όταν υπάρχει έκθεσή τους σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται από πλήγματα κεραυνού, μεταβατικά φαινόμενα, σφάλματα μεταγωγής, ή άλλες αιτίες. Στην παρούσα διατριβή διερευνούμε μια σειρά από προβλήματα που σχετίζονται με τον υπολογισμό μεγεθών που είναι συνυφασμένα με τη μελέτη των υπόγειων αγωγών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας καθώς και των τηλεπικοινωνιακών γραμμών. Αναπτύσσουμε εκφράσεις για τον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης υπόγειων αγωγών. Η γνώση του μεγέθους αυτού είναι πολύ σημαντική όταν μελετάται η αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών αγωγών, ειδικά κατά τη διάρκεια μεταβατικών φαινομένων. Προτείνουμε μια μέθοδο για ταχεία λύση των γνωστών ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση υπόγειων και εναέριων αγωγών. Μελετάμε το πρόβλημα του υπολογισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που αναπτύσσεται από το πλήγμα του κεραυνού, αντικείμενο που σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα της ανάπτυξης ανεπιθύμητων δυναμικών σε γειτονικούς αγωγούς και γενικά αγωγήμες υποδομές.

Η προσέγγιση που ακολουθούμε σε όλα τα προβλήματα που μας απασχολούν είναι αμιγώς ηλεκτρομαγνητική, αξιοποιώντας κλασσικές ηλεκτρομαγνητικές τεχνικές όπως η τεχνική των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων. Η τεχνική αυτή βασίζεται στη γνώση του πεδίου που παράγεται από το στοιχειώδες δίπολο. Γνωρίζοντας τη ρευματική κατανομή κατά μήκος μιας οποιασδήποτε γεωμετρίας, είμαστε σε θέση, με τη βοήθεια της αρχής της υπέρθεσης, να υπολογίσουμε το παραγόμενο από τη γεωμετρία πεδίο. Η χρήση της τεχνικής των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων κατέχει κεντρική θέση στη διδακτορική διατριβή. Για αυτό το λόγο το πρώτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην ανάπτυξη των εκφράσεων που δίνουν το πεδίο που παράγεται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς προσανατολισμού και θέσης του διπόλου σε σχέση

με τη γη. Οι εκφράσεις αυτές αξιοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια της διατριβής για την επίλυση του προβλήματος της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης υπόγειων αγωγών, της κατανομής των ρευμάτων σε κατακόρυφο γειωτή και τον υπολογισμό του πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού. Ένα δεύτερο πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της παρούσας διατριβής είναι η χρήση της μεθόδου Discrete Complex Image Method (DCIM). Πρόκειται για μέθοδο που έχει αναπτυχθεί για εφαρμογή σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού υψηλών συχνοτήτων, όπως τη μοντελοποίηση κεραιών μικροταινίας. Η μέθοδος επιτρέπει το ‘μετασχηματισμό’ των ολοκληρωμάτων τύπου Sommerfeld σε ολοκληρώματα κλειστής μορφής με γνωστές αναλυτικές λύσεις. Η μέθοδος στηρίζεται στην προσέγγιση της προς ολοκλήρωση συνάρτησης με μια σειρά από μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Για την υλοποίηση αυτής της προσέγγισης χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Generalized Pencil of Function (GPOF).

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις εκφράσεις για το πεδίο που παράγεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, κατακόρυφο ή οριζόντιο, το οποίο είναι τοποθετημένο μέσα στη γη ή έξω από αυτή. Διατυπώνουμε το πρόβλημα οριακών τιμών του συστήματος δίπολο διεπιφάνειας αέρα-γης, με σκοπό αρχικά τον προσδιορισμό των καρτεσιανών συνιστωσών του διανύσματος Hertz και στη συνέχεια τον υπολογισμό των συνιστωσών του πεδίου που παράγεται από το δίπολο. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνουμε συγκεντρωτικούς πίνακες με το πεδίο του διπόλου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς προσανατολισμού και θέσης διπόλου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους και τυχαίου προσανατολισμού. Με τη βοήθεια της τεχνικής των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων, αναπτύσσουμε φόρμουλες για τον ακριβή υπολογισμό της αμοιβαίας αντίστασης οι οποίες όμως έχουν τη μορφή άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων και η επίλυσή τους γίνεται χρησιμοποιώντας εξελεγμένες ρουτίνες ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε μια εναλλακτική μέθοδο για την επίλυσή τους που εμπλέκει τη χρήση ολοκληρωμάτων Sommerfeld και την τεχνική DCIM, με σκοπό τη βελτίωση του απαιτούμενου χρόνου υπολογισμού. Με τη βοήθεια της τεχνικής αυτής, τα ολοκληρώματα Sommerfeld των εκφράσεων, ‘μετασχηματίζονται’ σε ημίπειρα ολοκληρώματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσέγγιση των προς ολοκλήρωση συναρτήσεων με αθροίσματα κατάλληλων μιγαδικών εκθετικών. Δίνουμε τελικές εκφράσεις για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση υπόγειων αγωγών όπου η επίδραση της διεπιφάνειας αέρα γης υπολογίζεται με αναλυτική λύση, αποφεύγοντας την αριθμητική ολοκλήρωση και πετυχαίνοντας σημαντική βελτίωση των χρόνων υπολογισμού που απαιτούνται. Τέλος δίνονται πίνακες αποτελεσμάτων της τιμής της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης για διάφορες περιπτώσεις και για την επαλήθευση της ορθότητας των εκφράσεων που αναπτύξαμε γίνεται σύγκριση με αποτελέσματα που προκύπτουν

από την κοινώς αποδεκτή φόρμουλα του Pollaczek.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον υπολογισμό της ρευματικής κατανομής κατά μήκος ενός κατακόρυφου γειωτή. Το απαραίτητο μαθηματικό μοντέλο αναπτύσσεται με τη βοήθεια της τεχνικής των στοιχειωδών ηλεκτρικών δίπολων, ενώ στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος των ροπών (Method of Moments) ώστε από την ολοκληρωτική ηλεκτρομαγνητική εξίσωση να διαμορφωθεί ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων που μπορεί εύκολα να λυθεί με τη βοήθεια πινάκων. Παράλληλα με την ανάπτυξη του μοντέλου, ακολουθούμε και την οδό των αριθμητικών μεθόδων με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (FEM method) με χρήση του ειδικού λογισμικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων COMSOL. Γίνεται σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις δύο μεθόδους με σκοπό την επαλήθευση της μεθόδου που προτείνουμε.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της διατριβής ασχολούμαστε με τον υπολογισμό της φόρμουλας Pollaczek και Carson για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης υπόγειων και εναέριων αγωγών, θέμα που συγκεντρώνει μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον με πολύ μεγάλο αριθμό βιβλιογραφικών αναφορών. Οι δύο φόρμουλες υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου DCIM. Προκειμένου να πετύχουμε την προσέγγιση των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων με άθροισμα εκθετικών, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο GPOF καθώς και τη μέθοδο GPOF δύο επιπέδων. Η δεύτερη επιτυγχάνει πιο πυκνή δειγματοληψία στην αρχική περιοχή που η συνάρτηση παρουσιάζει έντονη μεταβολή, ενώ γίνεται λιγότερο πυκνή στη υπόλοιπη περιοχή όπου η συνάρτηση αποκτά μια πιο ομαλή και προβλέψιμη μορφή. Αυτό οδηγεί στην πιο καλή προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης και σαν συνέπεια τα παραγόμενα αποτελέσματα της αμοιβαίας αντίστασης είναι μεγαλύτερης ακρίβειας. Οι τελικές εκφράσεις που παρουσιάζονται έχουν τη μορφή απλών αθροισμάτων τα οποία περιλαμβάνουν μικρό αριθμό όρων. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ελέγχεται με σύγκριση αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και αναλυτική λύση του ολοκληρώματος Carson.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον υπολογισμό του πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού, τόσο κάτω όσο και επάνω από την επιφάνεια της γης, μέγεθος καθοριστικής σημασίας για την κατανόηση των ανεπιθύμητων αλληλεπιδράσεων με συστήματα γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας και τηλεπικοινωνιακών γραμμών. Η δυσκολία που υπάρχει με τις εκφράσεις του πεδίου είναι ότι αυτές έχουν τη μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld με ιδιόζουσα συμπεριφορά και η διαδικασία της ολοκλήρωσής τους είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Με τη μέθοδο που προτείνουμε, για την αριθμητική ολοκλήρωση, αντί να ολοκληρώσουμε κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών, ακολουθούμε μια κατάλληλα τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Η διαδρομή αυτή αποφεύγει πόλους και σημεία κλάδου στο μιγαδικό επίπεδο, που αποτελούν την αιτία της ιδιόζουσας συμπεριφοράς αυτών των ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, η μέθοδος συνδυάζεται και με την τεχνική της παρεμβολής για να απο-

φύγουμε τον πολλαπλό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων για διάφορες τιμές της συχνότητας που απαιτεί η ανάλυση Fourier για την παραγωγή αποτελεσμάτων στο πεδίο του χρόνου. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο ακριβής υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε χρόνους πολύ καλύτερους από αυτούς που καταγράφονται σε σχετικές δημοσιεύσεις άλλων ερευνητών.

Η βιβλιογραφική έρευνα δεν παρουσιάζεται στο παρόν εισαγωγικό κείμενο, αλλά δίνεται στην αρχή του κάθε κεφαλαίου της διατριβής, ώστε να συνοδεύει το επιμέρους ερευνητικό αντικείμενο του κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1

Το πεδίο του στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου

1.1 Εισαγωγή

Η χρήση των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων αποτελεί μια αποτελεσματική τεχνική για την επίλυση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, ειδικά όταν τα προβλήματα αυτά συνδυάζονται με την παρουσία γης. Κλασικές εφαρμογές της τεχνικής αποτελούν η μελέτη κεραιών, συστημάτων γείωσης και γραμμών μεταφοράς και γενικά η επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης συστημάτων και ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας. Στην παρούσα διατριβή, η χρήση της τεχνικής των στοιχειωδών διπόλων κατέχει κεντρικό ρόλο, με χρήση της μεθόδου σε όλες σχεδόν τις επιμέρους ενότητες της διατριβής. Στο παρόν κεφάλαιο δίνουμε τις εκφράσεις για το πεδίο που παράγεται από στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα για όλους τους προσανατολισμούς και όλες τις σχετικές θέσεις διπόλου και γης. Γνωρίζοντας τις εκφράσεις του πεδίου του διπόλου, μπορούμε να εξάγουμε το πεδίο που παράγεται από οποιοδήποτε ρεύμα ή ρευματική κατανομή, αντικαθιστώντας τα με μία σειρά από στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα.

Πρώτος ο Sommerfeld ασχολήθηκε με το πρόβλημα του πεδίου που παράγεται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο [Sommerfeld, 1949]. Ο Alfredo Banos στο κλασικό του σύγγραμμα με τίτλο *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-space* [Banos, 1966], παρουσιάζει αναλυτικά το πρόβλημα του προσδιορισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που προέρχεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο σε χώρο που αποτελείται από δύο ομογενή και ισοτροπικά μέσα με διαφορετικές ιδιότητες. Το ένα μέσο είναι αγωγίμο και βρίσκεται στο κάτω μέρος του χώρου, ενώ το δεύτερο μέσο είναι διηλεκτρικό και βρίσκεται στο επάνω μέρος του χώρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1a. Η προσέγγιση του Banos για την επίλυση αυτού του προβλήματος οριακών τιμών περιλαμβάνει την αντιπρο-

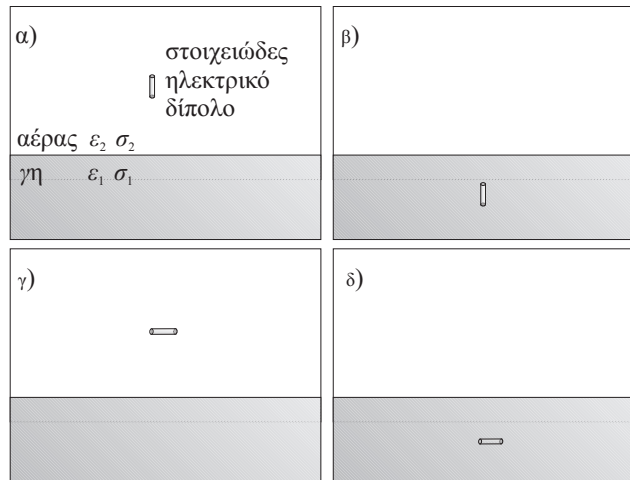
σώπευση των ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών του διπόλου, με χρήση κατάλληλων ολοκληρωμάτων Fourier, ώστε το πρόβλημα να μετατρέπεται σε πρόβλημα προσδιορισμού ορισμένων θεμελιωδών ολοκληρωμάτων, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε όλες τις συνιστώσες του παραγόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Αρχικά δίνονται οι εξισώσεις του πεδίου του διπόλου για ομογενές ιστροπικό άπειρο μέσο και εκφράζονται συναρτήσει του διανύσματος Hertz. Οι συνιστώσες του διανύσματος Hertz ικανοποιούν την ομογενή και μη ομογενή εξίσωση Helmholtz στο αντίστοιχο μέσο, ανάλογα με το σε ποιο μέσο βρίσκεται το δίπολο. Το διάνυσμα Hertz αναλύεται σε άθροισμα δύο κατάλληλων συνιστωσών και στη συνέχεια διαμορφώνονται οι εκφράσεις των καρτεσιανών συνιστωσών του διανύσματος Hertz. Τέλος, η συνέχεια των καρτεσιανών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στη διεπιφάνεια των δύο μέσων χρησιμοποιούνται για την τελική διαμόρφωση των εκφράσεων του διανύσματος Hertz.

Ιστορικά, το πρόβλημα της ακτινοβολίας του διπόλου σε αγωγίμο ημιχώρο εξετάστηκε από τον Sommerfeld [Sommerfeld, 1909], ο οποίος χρησιμοποίησε το διάνυσμα Hertz ή δυναμικό πόλωσης για να περιγράψει το πεδίο ενός κάθετου ηλεκτρικού διπόλου που βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα, εκφράζοντας το παραγόμενο διάνυσμα Hertz με μορφή κυλινδρικών κυμάτων. Στις εφαρμογές που απασχολούν την παρούσα διδακτορική διατριβή, το κάτω από τα δύο μέσα του προβλήματος αποτελεί την πεπερασμένα αγωγίμη γη ενώ το επάνω μέσο την ατμόσφαιρα. Οι τελικές πεδιακές εκφράσεις δίνονται για οριζόντια ή κατακόρυφη θέση του στοιχειώδους διπόλου είτε αυτό βρίσκεται στο διηλεκτρικό είτε στο πεπερασμένα αγωγίμο μέσο και για οποιαδήποτε θέση του σημείου παρατήρησης. Στο σχήμα 1.1 δίνεται η γεωμετρία του προβλήματος και οι πιθανοί συνδυασμοί θέσης και προσανατολισμού του στοιχειώδους διπόλου.

Η μεγάλη αξία της γνώσης του πεδίου που προκαλείται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο είναι ότι, έχοντας στη διάθεση μας τις εκφράσεις των πεδιακών μεγεθών που προέρχονται από το δίπολο, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο που παράγεται από πηγές σύνθετης γεωμετρίας. Γνωρίζοντας την κατανομή του ηλεκτρικού ρεύματος πάνω στις γεωμετρίες αυτές, είναι δυνατό να προσδιορίσουμε το παραγόμενο πεδίο με άθροιση ή ολοκλήρωση των επιμέρους διπόλων που συνθέτουν τη γεωμετρία σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας.

Αυτή την τεχνική θα εφαρμόσουμε στην παρούσα διατριβή για τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ υπόγειων αγωγών στο κεφάλαιο 2, για τη ρευματική κατανομή σε κατακόρυφο γειωτή στο κεφάλαιο 3, καθώς και για τον υπολογισμό του υπόγειου και υπέργειου ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από το πλήγμα του κεραυνού στο κεφάλαιο 5. Σε σχέση με το Σχήμα 1.1 η περίπτωση α αντιστοιχεί στο πρόβλημα του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από τον κεραυνό, όπου το κάθετο στοιχειώδες δίπολο στον αέρα χρησιμοποιείται για την προσομοίωση του ρευματικού καναλιού του κεραυνού. Αντίστοιχα, η



Σχήμα 1.1: Στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο σε χώρο που αποτελείται από γη και αέρα σε όλους τους συνδυασμούς θέσης και προσανατολισμού

περίπτωση β του ίδιου σχήματος χρησιμοποιείται για την μελέτη του κατακόρυφου γειωτή. Τέλος, η περίπτωση δ του σχήματος χρησιμοποιείται για το πρόβλημα του υπολογισμού της αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ υπόγειων αγωγών, όπου το οριζόντιο δίπολο μέσα στη γη αξιοποιείται για την αντιπροσώπευση των υπόγειων αγωγών.

1.2 Οι πεδιακές εξισώσεις και το Διάνυσμα Hertz

Θεωρούμε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο που εκτείνεται στο άπειρο, το οποίο χαρακτηρίζεται από σταθερές τιμές της αγωγιμότητας σ , της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ και της μαγνητικής διαπερατότητας μ . Υποθέτουμε διέγερση της γνωστής μορφής $e^{-i\omega t}$, όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα της πηγής. Τα θεμελιώδη διανυσματικά ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} , της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} , της ηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} και τέλος της έντασης του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} , δίνονται από τις γνωστές εξισώσεις του Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega \mathbf{D} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

όπου το γινόμενο $\sigma \mathbf{E}$ είναι το ρεύμα αγωγής \mathbf{J} στο μέσο, ενώ ρ είναι η πυκνότητα του ελεύθερου φορτίου. Τα δύο μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση της

συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho \quad (1.5)$$

Το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} σχετίζεται με την ηλεκτρική πόλωση \mathbf{P} με την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.6)$$

ενώ η μαγνητική επαγωγή με την ένταση του μαγνητικού πεδίου με τη σχέση

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (1.7)$$

Η πυκνότητα του ρεύματος πόλωσης είναι ίση με τη χρονική παράγωγο της πόλωσης

$$\mathbf{J}^0 = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{P} \quad (1.8)$$

Η σταθερά διάδοσης για το επίπεδο κύμα είναι:

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma \quad (1.9)$$

Εισάγουμε δύο βοηθητικά μεγέθη, την εσωτερική σύνθετη αντίσταση ζ και την εσωτερική σύνθετη αγωγιμότητα n του μέσου, για τα οποία ισχύουν

$$k\zeta = \omega\mu \quad kn = \omega\varepsilon + i\sigma \quad (1.10)$$

Με τη βοήθεια αυτών των μεγεθών και με τη χρήση των (1.6) και (1.8) οι εξισώσεις (1.1)-(1.4) παίρνουν την παρακάτω μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik\zeta\mathbf{H} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ikn\mathbf{E} + \mathbf{J}^0 \quad (1.13)$$

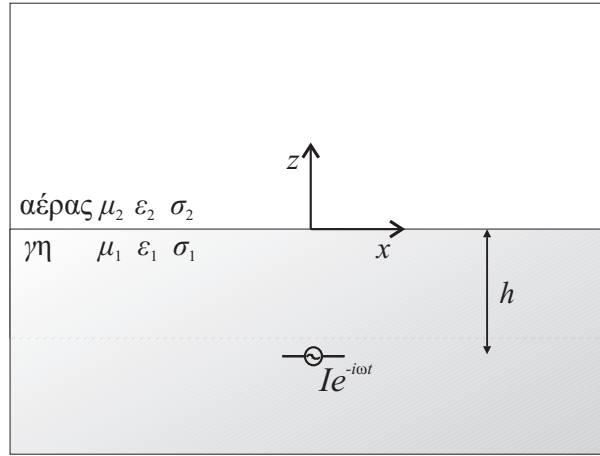
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}^0}{ikn} \quad (1.14)$$

Τώρα, η ρευματική πυκνότητα \mathbf{J}^0 περιλαμβάνει το σύνολο των πηγών που προκαλούν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η παραπάνω ομάδα των εξισώσεων επιτρέπει τη διαμόρφωση της λύσης του συστήματος των εξισώσεων σαν συνάρτηση του διανύσματος Hertz, που συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbf{\Pi}$

$$\mathbf{H} = -ikn\nabla \times \mathbf{\Pi} \quad \mathbf{E} = \nabla^2 \cdot \mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi} \quad (1.15)$$

Τέλος, το διάνυσμα Hertz ικανοποιεί την παρακάτω μη ομογενή διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{\Pi} = \frac{i\mathbf{J}^0}{kn} \quad (1.16)$$



Σχήμα 1.2: Στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο τοποθετημένο μέσα στη γη.

1.3 Το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο

Το Σχήμα 1.2 παρουσιάζει ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο το οποίο είναι τοποθετημένο μέσα στη γη. Το δίπολο είναι τοποθετημένο σε οριζόντια θέση, παράλληλο του άξονα x και βρίσκεται σε βάθος h . Αποτελείται από ένα μονωμένο τμήμα αγωγού με μήκος Δl . Στο μέσον του αγωγού έχει ενσωματωθεί μια πηγή ρεύματος η οποία εισάγει ένα ημιτονοειδές ρεύμα $Ie^{-i\omega t}$ κατά μήκος του. Υποθέτουμε ότι το πλάτος του ρεύματος I είναι σταθερό κατά μήκος του αγωγού, δεδομένου του ότι το μήκος του τμήματος Δl είναι μικρό συγκρινόμενο με μήκος κύματος στο αγωγίμο μέσο. Το διάνυσμα της ρευματικής πυκνότητας του στοιχειώδους δίπολου εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{J}^0 = I[u(x + 1/2\Delta l) - u(x - 1/2\Delta l)]\delta(y)\delta(z + h)\mathbf{x} \quad (1.17)$$

Όπου \mathbf{x} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x , $u(x)$ είναι η βηματική συνάρτηση και τέλος $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση Dirac.

Συνήθως το σημείο παρατήρησης που ενδιαφέρει βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση συγκρινόμενη με το μήκος Δl . Για αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε την πηγή σαν στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με ροπή $p = I\Delta l$. Θεωρώντας το μήκος Δl πολύ μικρό μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα του ρεύματος ως εξής:

$$\mathbf{J}^0 = p\delta(x)\delta(y)\delta(z + h)\mathbf{x} \quad (1.18)$$

το οποίο εκφράζει ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο πάνω στον άξονα x σε βάθος h . Για την περίπτωση που το στοιχειώδες δίπολο βρίσκεται στον αέρα, αλλάζουμε το πρόσημο του h στην προηγούμενη σχέση, ενώ εάν θέλουμε το δίπολο να είναι κάθετο αλλάζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{x} με το \mathbf{z} .

1.4 Το πρόβλημα των οριακών τιμών για τον υπολογισμό των καρτεσιανών συνιστωσών του διανύσματος Hertz

Αρχικά, ανάλογα με τον προσανατολισμό του διπόλου, οριζόντιο ή κάθετο, διαμορφώνουμε την έκφραση του διανύσματος Hertz $\mathbf{\Pi}$ για το κάθε μέσο ξεχωριστά, γη και αέρα. Ανάλογα με τη θέση του διπόλου, στον αέρα ή στη γη και με το σε ποιο μέσο αναζητούμε το πεδίο, ικανοποιούνται η ομογενής ή μη ομογενής εξίσωση Helmholtz. Η επιβολή των οριακών συνθηκών στο επίπεδο $z = 0$, που αποτελεί την επιφάνεια διαχωρισμού των δύο μέσων, επιτρέπει τη διαμόρφωση των απαραίτητων σχέσεων ανάμεσα στις καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος Hertz, ώστε να διαμορφωθεί η μοναδική λύση του προβλήματος. Από το διάνυσμα Hertz εξάγουμε τις καρτεσιανές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και της έντασης του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} .

Για την περίπτωση του κάθετου διπόλου χρησιμοποιείται μόνο η z συνιστώσα του διανύσματος Hertz, η οποία ικανοποιεί σε κάθε μέσο την ομογενή ή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz, ανάλογα με το σε ποιο μέσο βρίσκεται το δίπολο και σε ποιο μέσο βρίσκεται το σημείο παρατήρησης. Για την περίπτωση του οριζόντιου διπόλου χρησιμοποιούμε τις x και z συνιστώσες του διανύσματος Hertz. Η x συνιστώσα ικανοποιεί σε κάθε μέσο την ομογενή ή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz, ανάλογα με τη θέση του δίπολου. Η z συνιστώσα ικανοποιεί σε κάθε μέσο την ομογενή εξίσωση Helmholtz.

1.5 Κατακόρυφο στοιχειώδες δίπολο

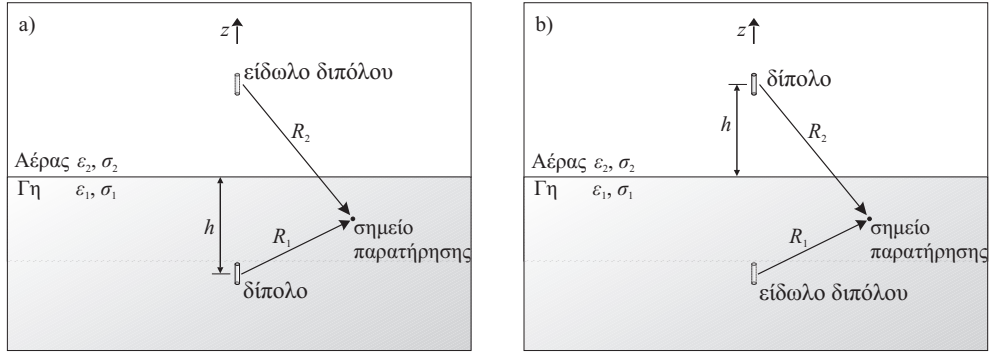
Το διάνυσμα Hertz που προκαλείται από το κατακόρυφα τοποθετημένο δίπολο για τα δύο μέσα, τη γη και τον αέρα δίνεται παρακάτω. Τα μεγέθη που σχετίζονται με το μέσο της γης έχουν το δείκτη 1, ενώ αυτά που σχετίζονται με τον αέρα το δείκτη 2, Σχήμα 1.3.

$$\mathbf{\Pi}_1 = \Pi_{1z}\mathbf{z} \quad -\infty < z \leq 0, \quad \mathbf{\Pi}_2 = \Pi_{2z}\mathbf{z} \quad 0 \leq z < \infty \quad (1.19)$$

Οι συνιστώσες Π_1 και Π_2 ικανοποιούν την ομογενή ή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz (1.16) που με τη βοήθεια της (1.18) και ανάλογα με το σε ποιο μέσο βρίσκεται το δίπολο και το σημείο παρατήρησης, προκύπτει:

Δίπολο στη γη ήτοι δίπολο στον χώρο 1, Σχήμα 1.3a

$$(\nabla^2 + k_1^2)\Pi_{1z} = -\frac{ip}{k_1\eta_1}\delta(x)\delta(y)\delta(z+h) \quad (\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2z} = 0 \quad (1.20)$$



Σχήμα 1.3: Κατακόρυφο στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, α) τοποθετημένο μέσα στη γη, β) τοποθετημένο στον αέρα.

όπου

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r + i \omega \mu_0 \sigma, \quad k_1 \eta_1 = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r + i \sigma \quad (1.21)$$

k_1 είναι ο κυματάρημος στη γη, σ είναι η αγωγιμότητά της και ε_r είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά της. p είναι η ροπή του ηλεκτρικού δίπολου το οποίο είναι τοποθετημένο σε βάθος h .

Δίπολο στον αέρα ήτοι δίπολο στο μέσο 2, Σχήμα 1.3b

$$(\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2z} = -\frac{ip}{k_2 \eta_2} \delta(x)\delta(y)\delta(z-h) \quad (\nabla^2 + k_1^2)\Pi_{1z} = 0 \quad (1.22)$$

όπου

$$k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0, \quad k_2 \eta_2 = \omega \varepsilon_0 \quad (1.23)$$

k_2 είναι ο κυματάρημος στον αέρα, p είναι η ροπή του ηλεκτρικού δίπολου το οποίο είναι τοποθετημένο σε ύψος h πάνω από τη γη. Με χρήση των σχέσεων (1.15) και (1.19) υπολογίζονται οι καρτεσιανές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και της έντασης του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} στη γη και στον αέρα. Στη συνέχεια επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες για τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών των \mathbf{E} και \mathbf{H} στα δύο μέσα. Από την επιβολή αυτή προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$k_1^2 \Pi_{1z} = k_2^2 \Pi_{2z}, \quad \frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} \quad (1.24)$$

Τελικά το ζητούμενο είναι η αναζήτηση λύσεων των εξισώσεων (1.20) ή (1.22), ανάλογα με τη θέση του δίπολου, επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες (1.24).

1.5.1 Δίπολο στη γη

Για την περίπτωση του διπόλου στη γη, η z συνιστώσα του διανύσματος Hertz μέσα στη γη Π_{1z} της (1.20), που ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz, μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δύο στοιχείων

$$\Pi_{1z} = \Pi_{1z}^0 + \Pi'_{1z} \quad (1.25)$$

Όπου Π_{1z}^0 είναι ειδικό ολοκλήρωμα της μη ομογενούς εξίσωσης (1.20) ενώ Π'_{1z} είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$(\nabla^2 + k_1^2)\Pi'_{1z} = 0 \quad (1.26)$$

Η λύση αυτής της ομογενούς εξίσωσης εκφρασμένη σε μορφή διπλού ολοκληρώματος Fourier δίνεται παρακάτω

$$\Pi'_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{8\pi^2k_1^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) e^{-\gamma_1(h-z)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \quad (1.27)$$

όπου $\gamma_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_1^2}$, ξ και η είναι οι μεταβλητές του μετασχηματισμού Fourier, ενώ η συνάρτηση $g_1(\xi, \eta)$ θα προσδιοριστεί με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών (1.24).

Για το Π_{1z}^0 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση Green για τον άπειρο χώρο

$$\Pi_{1z}^0 = \frac{ip}{4\pi k_1 \eta_1} \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} \quad (1.28)$$

όπου R_1 είναι η απόσταση από το δίπολο μέχρι το σημείο παρατήρησης. Από τις σχέσεις (1.25), (1.27) και (1.28) προκύπτει η έκφραση για την z συνιστώσα του διανύσματος Hertz μέσα στη γη, Π_{1z}

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \left[\frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) e^{-\gamma_1(h-z)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \right] \quad (1.29)$$

Η συνάρτηση Green στην προηγούμενη σχέση μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή διπλού ολοκληρώματος

$$\frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{-\gamma_1|h+z|+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \quad (1.30)$$

Η z συνιστώσα του διανύσματος Hertz στον αέρα Π_{2z} , προκύπτει από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (1.20) η οποία δίνεται παρακάτω εκφρασμένη σε μορφή διπλού ολοκληρώματος Fourier

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{8\pi^2k_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi, \eta) e^{-\gamma_1 h - \gamma_2 z + i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (1.31)$$

Οι συναρτήσεις $g_1(\xi, \eta)$ και $g_2(\xi, \eta)$ προκύπτουν με την επιβολή των οριακών συνθηκών. Έτσι, επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες (1.24) για $z = 0$ στις (1.29) και (1.31) εξάγουμε τις τιμές των συναρτήσεων

$$g_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\gamma_1} + \frac{2k_2^2}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2}, \quad g_2(\xi, \eta) = \frac{2k_2^2}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2} \quad (1.32)$$

Αντικαθιστώντας τα $g_1(\xi, \eta)$ και $g_2(\xi, \eta)$ στις (1.29) και (1.31), καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για το διάνυσμα Hertz σε γη και αέρα

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} (G_{11} - G_{12} + k_2^2 V_{11}), \quad \Pi_{2z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi} V_{12} \quad (1.33)$$

Όπου G_{11} και G_{12} είναι οι γνωστές συναρτήσεις Green, που μας δίνουν το πεδίο της πηγής και της εικόνας αυτής στην περίπτωση του άπειρα εκτεινόμενου χώρου, και είναι

$$G_{11} = \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1}, \quad G_{12} = \frac{e^{ik_1 R_2}}{R_2} \quad (1.34)$$

R_1 και R_2 είναι οι αποστάσεις του σημείου παρατήρησης από την πηγή και το είδωλό της αντίστοιχα. Τα V_{11} και V_{12} είναι συναρτήσεις των r και z που αντιπροσωπεύουν την επίδραση της διεπιφάνειας γης-αέρα και η τιμή τους δίνεται παρακάτω

$$V_{11} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\gamma_1(h-z)}}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad V_{12} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\gamma_1 h - \gamma_2 z}}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.35)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, J_0 και J_1 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα. Τώρα, που είναι γνωστά τα διανύσματα Hertz σε γη και αέρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου με τη βοήθεια των (1.15) όπως θα αναφέρουμε αναλυτικά στην ενότητα 1.7.

1.5.2 Δίπολο στον αέρα

Για την περίπτωση του διπόλου στον αέρα (Σχήμα 1.3b), η z συνιστώσα του διανύσματος Hertz Π_{2z} της (1.22), που ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση Helmholtz, μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δύο στοιχείων

$$\Pi_{2z} = \Pi_{2z}^0 + \Pi_{2z}' \quad (1.36)$$

όπου Π_{2z}^0 είναι ειδικό ολοκλήρωμα της μη ομογενούς εξίσωσης (1.22) και Π_{2z}' είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$(\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2z}' = 0 \quad (1.37)$$

Η λύση αυτής της ομογενούς εξίσωσης, εκφρασμένη σε μορφή διπλού ολοκληρώματος Fourier, δίνεται παρακάτω.

$$\Pi'_{2z} = \frac{i\omega p \mu_0}{8\pi^2 k_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi, \eta) e^{-\gamma_2(h+z)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \quad (1.38)$$

όπου $\gamma_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_2^2}$, η συνάρτηση $g_2(\xi, \eta)$ θα προσδιοριστεί με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών (1.24).

Για το Π_{2z}^0 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Green για τον άπειρο χώρο.

$$\Pi_{2z}^0 = \frac{ip}{4\pi k_2 \eta_2} \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} \quad (1.39)$$

όπου R_2 είναι η απόσταση από το δίπολο μέχρι το σημείο παρατήρησης. Από τις σχέσεις (1.36) (1.38) και (1.39) προκύπτει για το Π_{2z}

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \left[\frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi, \eta) e^{-\gamma_2(h+z)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \right] \quad (1.40)$$

Το Π_{1z} προκύπτει από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (1.22), η οποία δίνεται παρακάτω εκφρασμένη σε μορφή διπλού ολοκληρώματος Fourier.

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega p \mu_0}{8\pi^2 k_1^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) e^{-\gamma_1 z - \gamma_2 h + i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (1.41)$$

Και πάλι επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες (1.24) για $z = 0$ στις (1.40) και (1.41) εξάγουμε τις συναρτήσεις g_1 και g_2 :

$$g_1(\xi, \eta) = \frac{2k_1^2}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2}, \quad g_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{\gamma_2} + \frac{2k_1^2}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} \quad (1.42)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των $g_1(\xi, \eta)$ και $g_2(\xi, \eta)$ στις (1.40) και (1.41), καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για το διάνυσμα Hertz σε γη και αέρα.

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} V_{21}, \quad \Pi_{2z} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} (G_{22} - G_{21} + k_1^2 V_{11}) \quad (1.43)$$

Όπου G_{22} και G_{21} είναι οι γνωστές συναρτήσεις Green, που μας δίνουν το πεδίο της πηγής και της εικόνας αυτής στην περίπτωση του άπειρα εκτεινόμενου χώρου, και είναι

$$G_{22} = \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2}, \quad G_{21} = \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} \quad (1.44)$$

R_2 και R_1 είναι οι αποστάσεις του σημείου παρατήρησης από την πηγή και το είδωλό της αντίστοιχα, Σχημα 1.3b. Τα V_{11} και V_{12} είναι συναρτήσεις των r και

z που αντιπροσωπεύουν την επίδραση της διεπιφάνειας γης-αέρα και η τιμή τους δίνεται παρακάτω

$$V_{22} = \int_0^\infty \frac{2e^{\gamma_2(h+z)}}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad V_{21} = \int_0^\infty \frac{2e^{\gamma_1 z + \gamma_2 h}}{k_2^2\gamma_1 + k_1^2\gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.45)$$

Και πάλι, όπως και πριν, γνωρίζοντας τα διανύσματα Hertz σε γη και αέρα μπορούμε με χρήση της (1.15), να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

1.6 Οριζόντιο στοιχειώδες δίπολο

Για την περίπτωση του οριζόντιου δίπολου, το διάνυσμα Hertz έχει δύο συνιστώσες όπως περιγράφεται παρακάτω.

$$\mathbf{\Pi}_1 = \Pi_{1x}\mathbf{x} + \Pi_{1z}\mathbf{z} \quad -\infty < z \leq 0, \quad \mathbf{\Pi}_2 = \Pi_{2x}\mathbf{x} + \Pi_{2z}\mathbf{z} \quad 0 \leq z < \infty \quad (1.46)$$

Οι συνιστώσες Π_{1z} και Π_{2z} ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση Helmholtz στο αντίστοιχο μέσο, ήτοι

$$(\nabla^2 + k_1^2)\Pi_{1z} = 0, \quad (\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2z} = 0 \quad (1.47)$$

Οι συνιστώσες Π_{1x} και Π_{2x} ικανοποιούν την ομογενή ή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz (1.16) και με τη βοήθεια της σχέσης (1.18) και ανάλογα με το σε ποιο μέσο βρίσκεται το δίπολο, προκύπτει:

Δίπολο στη γη Σχήμα 1.4a,

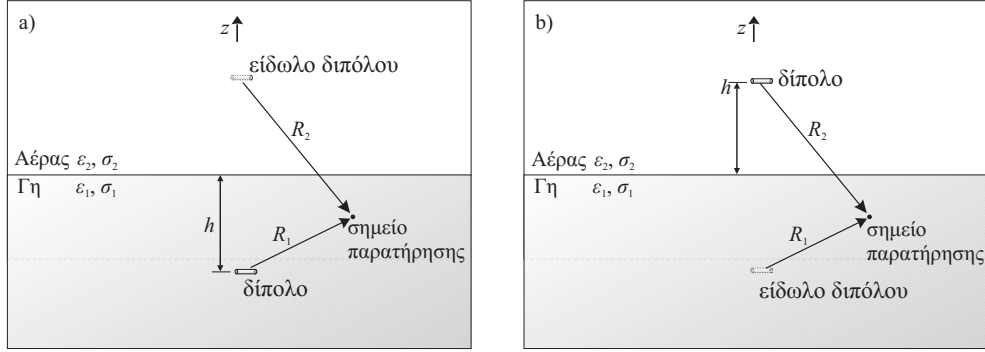
$$(\nabla^2 + k_1^2)\Pi_{1x} = -\frac{ip}{k_1\eta_1}\delta(x)\delta(y)\delta(z+h), \quad (\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2x} = 0 \quad (1.48)$$

Δίπολο στον αέρα Σχήμα 1.4b,

$$(\nabla^2 + k_2^2)\Pi_{2x} = -\frac{ip}{k_2\eta_2}\delta(x)\delta(y)\delta(z-h), \quad (\nabla^2 + k_1^2)\Pi_{1x} = 0 \quad (1.49)$$

Με χρήση των σχέσεων (1.15) και (1.46) υπολογίζονται οι καρτεσιανές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και της έντασης του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} σε κάθε μέσο, γη και αέρα, και ακολούθως επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες για τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών στα δύο μέσα. Από την επιβολή αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις.

$$k_1^2\Pi_{1x} = k_2^2\Pi_{2x}, \quad k_1^2\frac{\partial\Pi_{1x}}{\partial z} = k_2^2\frac{\partial\Pi_{2x}}{\partial z} \quad (1.50)$$



Σχήμα 1.4: Οριζόντιο στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, a) τοποθετημένο μέσα στη γη, b) τοποθετημένο στον αέρα.

$$k_1^2 \Pi_{1z} = k_2^2 \Pi_{2z}, \quad \frac{\Pi_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\Pi_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} \quad (1.51)$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως και στην προηγούμενη ενότητα, για το κατακόρυφο δίπολο, αναλύουμε τις συνιστώσες Π_{1x} ή Π_{2x} ανάλογα με τη θέση του διπόλου σε άθροισμα δύο συνιστωσών ώστε να εισάγουμε τις συναρτήσεις Green για άπειρο χώρο προκειμένου να εκφράσουμε τα Π_{1x}^0 και Π_{2x}^0 .

1.6.1 Δίπολο στη γη

Η γεωμετρία του οριζόντιου διπόλου μέσα στη γη δίνεται στο Σχήμα 1.4a. Με τρόπο ανάλογο όπως και στην περίπτωση του κατακόρυφου διπόλου, από τη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1.48), οι x συνιστώσες του διανύσματος Hertz στη γη και στον αέρα μπορούν να γραφούν σε ολοκληρωτική μορφή όπως παρακάτω.

$$\Pi_{1x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \left[\frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) e^{\gamma_1(z-h)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \right] \quad (1.52)$$

$$\Pi_{2x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{8\pi^2 k_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi, \eta) e^{-\gamma_1 h - \gamma_2 z + i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (1.53)$$

Με επιβολή των οριακών συνθηκών (1.50) για $z = 0$ στις παραπάνω εκφράσεις, προκύπτουν οι τιμές των συναρτήσεων f_1 και f_2 .

$$f_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\gamma_1} + \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad f_2(\xi, \eta) = -\frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (1.54)$$

Οι κάθετες συνιστώσες του διανύσματος Hertz για τη γη και τον αέρα προκύπτουν από τη λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων (1.47) και σε μορφή ολοκληρώματος δίνονται παρακάτω.

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{8\pi^2 k_1^2} \iint_{-\infty}^{\infty} i\xi g_1(\xi, \eta) e^{\gamma_1(z-h)+i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta \quad (1.55)$$

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{8\pi^2 k_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} i\xi g_2(\xi, \eta) e^{\gamma_1 h - \gamma_2 z + i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (1.56)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην οριακή συνθήκη (1.51) τα Π_{1x} και Π_{2x} από τις (1.52) και (1.53) με χρήση της (1.54) καθώς και τα Π_{1z} και Π_{2z} από τις (1.55) και (1.56). Έτσι, προκύπτουν οι συναρτήσεις g_1 και g_2 ως εξής

$$g_1(\xi, \eta) = g_2(\xi, \eta) = \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} \quad (1.57)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των $f_1(\xi, \eta)$ και $f_2(\xi, \eta)$ καθώς και των $g_1(\xi, \eta)$ και $g_2(\xi, \eta)$, καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος Hertz σε γη και αέρα.

$$\Pi_{1x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} (G_{11} - G_{12} + U_{11}), \quad \Pi_{2x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} U_{12} \quad (1.58)$$

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \frac{\partial W_{11}}{\partial x}, \quad \Pi_{2z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\partial W_{12}}{\partial x} \quad (1.59)$$

Όπου

$$U_{11} = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-\gamma_1(h-z)}}{\gamma_1 + \gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad U_{12} = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-\gamma_1 h - \gamma_2 z}}{\gamma_1 + \gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.60)$$

$$W_{11} = \int_0^{\infty} \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} e^{-\gamma_1(h-z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.61)$$

$$W_{12} = \int_0^{\infty} \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} e^{-\gamma_1 h - \gamma_2 z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.62)$$

1.6.2 Δίπολο στον αέρα

Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με την προηγούμενη περίπτωση και οι συνιστώσες του διανύσματος Hertz προκύπτουν με αντιστροφή των δεικτών των εκφράσεων της προηγούμενης υποενότητας. Οι τελικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος Hertz, για το οριζόντιο τοποθετημένο ηλεκτρικό δίπολο στον αέρα δίνονται παρακάτω.

$$\Pi_{2x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} (G_{22} - G_{21} + U_{22}), \quad \Pi_{1x} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} U_{21} \quad (1.63)$$

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\partial W_{22}}{\partial x}, \quad \Pi_{1z} = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \frac{\partial W_{21}}{\partial x} \quad (1.64)$$

Όπου

$$U_{22} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\gamma_2(h+z)}}{\gamma_1 + \gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad U_{21} = \int_0^\infty \frac{2e^{\gamma_1 z - \gamma_2 h}}{\gamma_1 + \gamma_2} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.65)$$

$$W_{22} = \int_0^\infty \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} e^{-\gamma_2(h+z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.66)$$

$$W_{21} = \int_0^\infty \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} e^{\gamma_1 z - \gamma_2 h} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.67)$$

1.7 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του διπόλου, κατακόρυφο δίπολο

Με εξασφαλισμένες πλέον τις καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος Hertz στο αγωγίμο και διηλεκτρικό μέσο, που προκαλούνται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τις συνιστώσες του πεδίου στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Για την περίπτωση του κάθετου διπόλου από τις σχέσεις (1.15) προκύπτουν οι συνιστώσες του πεδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:

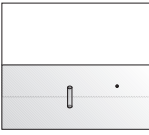


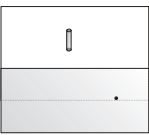
$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad (1.68)$$

$$E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi_z \quad (1.69)$$

$$H_\phi = \frac{ik^2}{\omega \mu_0} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \quad (1.70)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εκφράσεις τις (1.33) για την περίπτωση που το δίπολο βρίσκεται στη γη και τις (1.43) για την περίπτωση του διπόλου στον αέρα, μπορούμε να εξάγουμε το σύνολο των συνιστωσών του πεδίου που παράγεται από το δίπολο για κάθε περίπτωση του κατακόρυφου διπόλου. Στον Πίνακα 1.1 δίνουμε τις εκφράσεις του πεδίου, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για κάθε συνδυασμό θέσης διπόλου και σημείου παρατήρησης. Όπως είναι αναμενόμενο και προκύπτει και από τον πίνακα, υπάρχει συμμετρία μεταξύ των περιπτώσεων α και γ καθώς και β και δ. Οι ομάδες των σχέσεων για τις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν εύκολα η μία από την άλλη με αντιστροφή των δεικτών των διαφόρων μεγεθών τους.

Πίνακας 1.1: Εκφράσεις του πεδίου που παράγει το κατακόρυφο δίπολο, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για κάθε συνδυασμό θέσης διπόλου και σημείου παρατήρησης.

θέση διπόλου και σημείου παρατήρησης	Εκφράσεις πεδίου που παράγεται από το δίπολο
α) 	$E_r = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (G_{11} - G_{12} + k_2^2 V_{11}) \right]$ $E_z = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_1^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) (G_{11} - G_{12} + k_2^2 V_{11}) \right]$ $H_\phi = -\frac{p}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (G_{11} - G_{12} + k_2^2 V_{11}) \right]$
β) 	$E_r = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r \partial z}$ $E_z = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) V_{12} \right]$ $H_\phi = -\frac{pk_2^2}{4\pi} \frac{\partial V_{12}}{\partial r}$
γ) 	$E_r = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (G_{22} - G_{21} + k_1^2 V_{22}) \right]$ $E_z = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi k_2^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) (G_{22} - G_{21} + k_1^2 V_{22}) \right]$ $H_\phi = -\frac{p}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (G_{22} - G_{21} + k_1^2 V_{22}) \right]$
δ) 	$E_r = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 V_{21}}{\partial r \partial z}$ $E_z = \frac{i\omega\rho\mu_0}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) V_{21} \right]$ $H_\phi = -\frac{pk_1^2}{4\pi} \frac{\partial V_{21}}{\partial r}$

1.8 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του διπόλου, οριζόντιο δίπολο

Για την περίπτωση του οριζόντιου διπόλου έχουμε την παρουσία δύο συνιστωσών για το διάνυσμα Hertz, τις Π_x και Π_z . Το διάνυσμα Hertz σε κυλινδρικές συντεταγμένες προκύπτει από την (1.46) δεδομένου του ότι ισχύει $\mathbf{x} = \cos \phi \mathbf{r} - \sin \phi \phi$ και είναι:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{r}\Pi_x \cos \phi - \phi \Pi_x \sin \phi + \mathbf{z}\Pi_z \quad (1.71)$$

Σε συνδυασμό με τις (1.15) μπορούμε να εξάγουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τις κυλινδρικές συνιστώσες του πεδίου.

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) + k^2 \Pi_x \cos \phi \quad (1.72)$$

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - k^2 \Pi_x \sin \phi \quad (1.73)$$

$$E_z = \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) + k^2 \Pi_z \quad (1.74)$$

$$H_r = -\frac{ik^2}{\omega\mu_0} \left(\sin \phi \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \phi} \right) \quad (1.75)$$

$$H_\phi = -\frac{ik^2}{\omega\mu_0} \left(\cos \phi \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \quad (1.76)$$



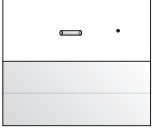
$$H_z = \frac{ik^2}{\omega\mu_0} \sin \phi \frac{\partial \Pi_x}{\partial r} \quad (1.77)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εκφράσεις τις τιμές των Π_{1x} , Π_{2x} , Π_{1z} και Π_{2z} από τις (1.58) και (1.59) για δίπολο στη γη ή τις (1.63) και (1.64) για δίπολο στον αέρα, μπορούμε να εξάγουμε το σύνολο των συνιστωσών του πεδίου για την περίπτωση του οριζόντιου διπόλου στη γη. Στους Πίνακες 1.2 και 1.3 δίνουμε τις εκφράσεις του πεδίου, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για κάθε συνδυασμό θέσης διπόλου και σημείου παρατήρησης. Όπως και στην περίπτωση του κατακόρυφου διπόλου, έτσι και εδώ υπάρχει συμμετρία ανάμεσα στις περιπτώσεις α και γ καθώς και β και δ .

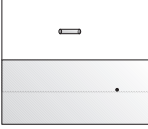
Στους Πίνακες 1.1, 1.2 και 1.3 τα G_{11} και G_{12} καθώς και τα V_{11} και V_{12} δίνονται στις (1.34) και (1.35), ενώ οι εκφράσεις για τα G_{22} και G_{21} καθώς και τα V_{22} και V_{21} δίνονται στις (1.44) και (1.45). Οι εκφράσεις για τα U_{11} και U_{12} καθώς και τα W_{11} και W_{12} δίνονται στις (1.60), (1.61) και (1.62), ενώ οι U_{22} και U_{21} καθώς και οι W_{22} και W_{21} δίνονται στις (1.65), (1.66) και (1.67).

Στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας διατριβής θα χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω εκφράσεις του πεδίου που παράγεται από στοιχειώδες δίπολο, για την

Πίνακας 1.2: Εκφράσεις του πεδίου που παράγει το οριζόντιο δίπολο, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για κάθε συνδυασμό θέσης διπόλου και σημείου παρατήρησης.

θέση διπόλου και σημείου παρατήρησης	Εκφράσεις πεδίου που παράγεται από το δίπολο
<p>α)</p> 	$E_r = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_1^2} \cos \phi \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_{11} - G_{12} + k_1^2 V_{11}) + k_1^2 (G_{11} - G_{12} + U_{11}) \right]$ $E_\phi = -\frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_1^2} \sin \phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (G_{11} - G_{12} + k_1^2 V_{11}) + k_1^2 (G_{11} - G_{12} + U_{11}) \right]$ $E_z = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_1^2} \cos \phi \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (G_{11} + G_{12} - k_2^2 V_{11}) \right]$ $H_r = \frac{p}{4\pi} \sin \phi \left[\frac{\partial}{\partial z} (G_{11} - G_{12} + U_{11}) - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{11}}{\partial r} \right]$ $H_\phi = \frac{p}{4\pi} \cos \phi \left[\frac{\partial}{\partial z} (G_{11} - G_{12} + U_{11}) - \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial r^2} \right]$ $H_z = -\frac{p}{4\pi} \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} (G_{11} - G_{12} + U_{11})$
<p>β)</p> 	$E_r = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi} \cos \phi \left(\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r^2} + U_{12} \right)$ $E_\phi = -\frac{i\omega p\mu_0}{4\pi} \sin \phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_{12}}{\partial r} + U_{12} \right)$ $E_z = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi} \cos \phi \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial z \partial r}$ $H_r = \frac{p}{4\pi} \sin \phi \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{12}}{\partial r} \right)$ $H_\phi = \frac{p}{4\pi} \cos \phi \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial z} - \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial r^2} \right)$ $H_z = -\frac{p}{4\pi} \sin \phi \frac{\partial U_{12}}{\partial r}$
<p>γ)</p> 	$E_r = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_2^2} \cos \phi \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_{22} - G_{21} + k_2^2 V_{22}) + k_2^2 (G_{22} - G_{21} + U_{22}) \right]$ $E_\phi = -\frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_2^2} \sin \phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (G_{22} - G_{21} + k_2^2 V_2) + k_2^2 (G_{22} - G_{21} + U_{22}) \right]$ $E_z = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k_2^2} \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (G_{22} + G_{21} - k_1^2 V_{22})$ $H_r = \frac{p}{4\pi} \sin \phi \left[\frac{\partial}{\partial z} (G_{22} - G_{21} + U_{22}) - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{22}}{\partial r} \right]$ $H_\phi = \frac{p}{4\pi} \cos \phi \left[\frac{\partial}{\partial z} (G_{22} - G_{21} + U_{22}) - \frac{\partial^2 W_{22}}{\partial r^2} \right]$ $H_z = -\frac{p}{4\pi} \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} (G_{22} - G_{21} + U_{22})$

Πίνακας 1.3: Εκφράσεις του πεδίου που παράγει το οριζόντιο δίπολο, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, για κάθε συνδυασμό θέσης διπόλου και σημείου παρατήρησης (συνέχεια από Πίνακα 1.2).

θέση διπόλου και σημείου παρατήρησης	Εκφράσεις πεδίου που παράγεται από το δίπολο
δ) 	$E_r = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \cos \phi \left(\frac{\partial^2 V_{21}}{\partial r^2} + U_{21} \right)$ $E_\phi = -\frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \sin \phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_{21}}{\partial r} + U_{21} \right)$ $E_z = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \cos \phi \frac{\partial^2 V_{21}}{\partial z \partial r}$ $H_r = \frac{p}{4\pi} \sin \phi \left(\frac{\partial U_{21}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{21}}{\partial r} \right)$ $H_\phi = \frac{p}{4\pi} \cos \phi \left(\frac{\partial U_{21}}{\partial z} - \frac{\partial^2 W_{21}}{\partial r^2} \right)$ $H_z = -\frac{p}{4\pi} \sin \phi \frac{\partial U_{21}}{\partial r}$

ανάπτυξη των απαραίτητων μοντέλων, με σκοπό τον υπολογισμό των ζητούμενων ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2 θα χρησιμοποιηθούν οι εκφράσεις της περίπτωσης α του Πίνακα 1.2 για τον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους και τυχαίου προσανατολισμού. Στο Κεφάλαιο 3 χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις της περίπτωσης α του Πίνακα 1.1 για τον υπολογισμό των ρευμάτων κατά μήκος ενός κατακόρυφου γειωτή. Οι σχέσεις δ του Πίνακα 1.1 αξιοποιούνται στο Κεφάλαιο 5 για την προσομοίωση της υπόγειας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από ρευματικό κανάλι του πλήγματος του κεραυνού, ενώ οι σχέσεις γ και δ του ίδιου πίνακα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του υπέργειου και του υπόγειου πεδίου του κεραυνού αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους

2.1 Εισαγωγή

Στον τομέα των συστημάτων μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, η γνώση της τιμής της αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ υπόγειων αγωγών είναι πολύ σημαντική για τη μελέτη των γραμμών μεταφοράς και των συστημάτων γείωσης και ειδικά για τη μελέτη της συμπεριφοράς τους κατά τη διάρκεια μεταβατικών φαινομένων. Ένα δεύτερο μεγάλο αντικείμενο που σχετίζεται με τη γνώση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης είναι το θέμα των αλληλεπιδράσεων γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας με υπόγειες τηλεπικοινωνιακές γραμμές και γενικά η μελέτη του προβλήματος της ανάπτυξης ανεπιθύμητων τάσεων από επαγωγή σε γειτονικούς αγωγούς ή γενικότερα αγωγίμες δομικές κατασκευές.

Το θέμα του ακριβούς υπολογισμού της αμοιβαίας αντίστασης υπόγειων αγωγών απασχολεί τους ερευνητές από το 1926, όταν ο Pollaczek πρότεινε τις πολύ γνωστές φόρμουλες του, [Pollaczek, 1926], που δίνουν, σε μορφή άπειρων ολοκληρωμάτων, την αμοιβαία αντίσταση μεταξύ υπέργειων και υπόγειων αγωγών. Οι φόρμουλες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι αγωγοί έχουν άπειρο μήκος και είναι μεταξύ τους παράλληλοι.

Η σημαντική συνεισφορά του συγκεκριμένου κεφαλαίου της διδακτορικής έρευνας είναι η ανάπτυξη εκφράσεων για τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης για την περίπτωση που οι αγωγοί έχουν πεπερασμένο μήκος και σχηματίζουν μεταξύ τους τυχαία γωνία. Στο βαθμό που γνωρίζουμε δεν υπάρχει κάποια ανάλογη επιστημονική εργασία εκτός από τη δουλειά του Sunde όπου όμως παρουσιάζονται κάποιες γενικές εκφράσεις [Sunde, 1968]. Επίσης ο υπολο-

γισμός της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης για περιπτώσεις άπειρων αγωγών υπό γωνία έχουν αντιμετωπιστεί με τρόπο προσεγγιστικό σε παλιότερες δημοσιεύσεις [Dawalibi and Southey, 1989].

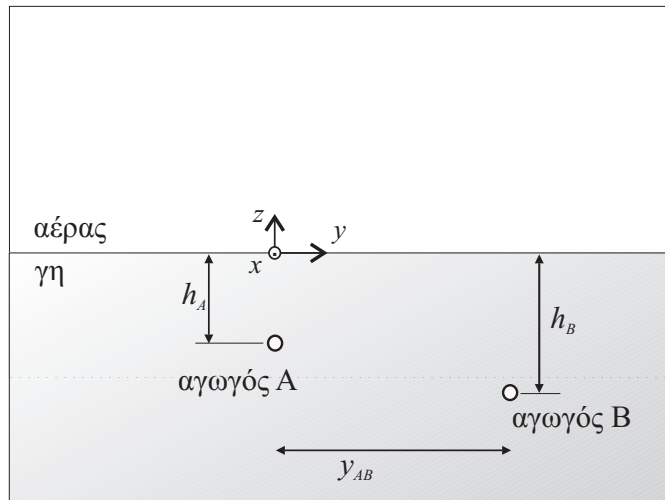
Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε εκφράσεις με σκοπό τον ακριβή υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους και τυχαίου προσανατολισμού με τρόπο γρήγορο και αποτελεσματικό [Rallis and Theodoulidis, 2009], [Rallis and Theodoulidis, 2011b]. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αναπτύσσουμε αυτές τις εκφράσεις και για τον αριθμητικό υπολογισμό τους χρησιμοποιούμε ρουτίνες ολοκλήρωσης, που υπάρχουν ενσωματωμένες σε γνωστά λογισμικά πακέτα μαθηματικών εφαρμογών. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε εναλλακτικές εκφράσεις, που αναπτύξαμε με τη βοήθεια της μεθόδου Discrete Complex Images Method, οι οποίες επιτρέπουν τον ταχύτερο υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης.

2.2 Μεθοδολογία

Στην προσέγγιση του προβλήματος που ακολουθούμε, οι υπόγειοι αγωγοί αντιπροσωπεύονται με τη βοήθεια στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων. Θεωρούμε ότι ο υπόγειος αγωγός αποτελείται από μια σειρά συνεχόμενων στοιχειωδών διπόλων. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για τα μεγέθη του πεδίου που δημιουργείται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο οριζόντια τοποθετημένου μέσα στη γη. Οι εκφράσεις αυτές παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και δίνονται συγκεντρωμένες στην περίπτωση α του Πίνακα 1.2. Οι σχέσεις αυτές δίνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ενώ για το παρόν πρόβλημα είναι απαραίτητη η χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων του ηλεκτρικού πεδίου, για αυτό το λόγο θα αξιοποιήσουμε εκφράσεις του διανύσματος Hertz σε καρτεσιανές συντεταγμένες, που παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.6 για το οριζόντιο δίπολο μέσα στη γη.

Υποθέτουμε, αρχικά, ότι ο πρώτος αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής τιμής. Με τη βοήθεια των εκφράσεων του στοιχειώδους διπόλου υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το ρεύμα αυτό. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το δυναμικό που αναπτύσσεται στον δεύτερο αγωγό από επαγωγή λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του πρώτου αγωγού. Ο λόγος της αναπτυσσόμενης τάσης στο δεύτερο αγωγό προς το ρεύμα που διαρρέει τον πρώτο αγωγό αποτελεί τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των δύο αγωγών.

Οι εκφράσεις που προκύπτουν για την αμοιβαία αντίσταση έχουν τη μορφή άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων. Τα ολοκληρώματα αυτά έχουν ιδιάζουσα συμπεριφορά και η αριθμητική τους ολοκλήρωση είναι δύσκολη λόγω της τάσης που παρουσιάζουν για ταλάντωση. Παρόλα αυτά, τα ολοκληρώματα μπορούν να λυθούν ακολουθώντας προηγμένους αλγόριθμους (adaptive quadratures) που είναι



Σχήμα 2.1: Γεωμετρία του προβλήματος της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους, παράλληλοι αγωγοί.

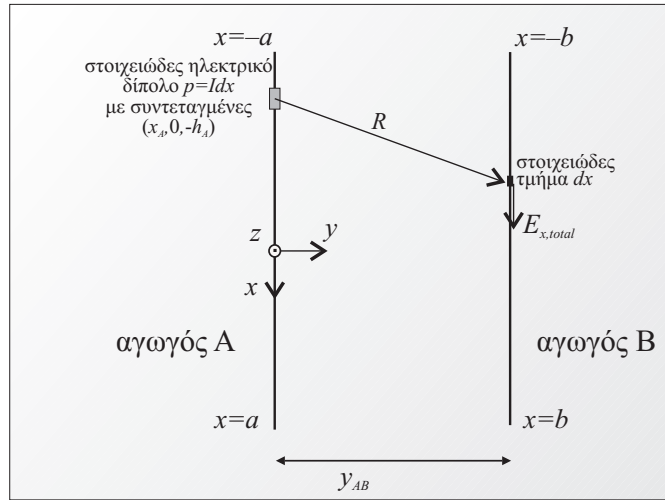
ενσωματωμένοι στα λογισμικά πακέτα μαθηματικών εφαρμογών όπως η Mathematica και το Matlab. Και σε αυτήν όμως την περίπτωση η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι δύσκολη και η διαδικασία χρονοβόρα.

Για το λόγο αυτό αναπτύξαμε μια εναλλακτική μέθοδο, όπου χρησιμοποιούμε τα ολοκληρώματα Sommerfeld για να εκφράσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από τα στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα του πρώτου αγωγού. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε μια νέα μέθοδο για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Sommerfeld στο πεδίο του χώρου [Aksun, 1996], η οποία εμπλέκει την τεχνική Discrete Complex Images Method. Η μέθοδος αυτή έχει αναπτυχθεί για εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων όπως ο σχεδιασμός ολοκληρωμένων κυκλωμάτων υψηλών συχνοτήτων.

Στην προσέγγιση που ακολουθούμε, χρησιμοποιούμε επίσης τη μέθοδο Generalized Pencil of Function (GPOF), [Hua and Sarkar, 1989], ώστε να εκφράσουμε προσεγγιστικά τον πυρήνα του ολοκληρώματος Sommerfeld με μια σειρά από μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Αυτό μας επιτρέπει να ‘μετασχηματίσουμε’ τα ολοκληρώματα Sommerfeld σε ολοκληρώματα κλειστής μορφής με γνωστές αναλυτικές λύσεις.

2.3 Ανάλυση του προβλήματος

Στην ανάλυση που ακολουθεί εξετάζουμε διεξοδικά τις δύο βασικές περιπτώσεις που οι αγωγοί είναι μεταξύ τους παράλληλοι και κάθετοι. Όλες οι λοιπές περιπτώσεις του προσανατολισμού των αγωγών προκύπτουν από τον συνδυασμό



Σχήμα 2.2: Κάτοψη της γεωμετρίας, παράλληλοι αγωγοί.

αυτών των δύο. Η γεωμετρία του προβλήματος για την περίπτωση των παράλληλων αγωγών φαίνεται στα Σχήματα 2.1 και 2.2, ενώ των κάθετων στα Σχήματα 2.3 και 2.4. Οι αγωγοί είναι τοποθετημένοι σε γη με αγωγιμότητα σ , ενώ η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu_r = 1$. Σε όλο το κεφάλαιο θεωρούμε ότι οι αγωγοί είναι μονωμένοι χωρίς απώλεια ρεύματος προς τη γη και επίσης θεωρούμε ότι η γη είναι ομογενής με σταθερή τιμή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σε όλη την έκτασή της. Σε όλη την ανάλυση που παρουσιάζουμε στο παρόν κεφάλαιο, έχουμε αγνοήσει την ύπαρξη των ρευμάτων μετατόπισης.

2.3.1 Παράλληλοι αγωγοί

Οι δύο αγωγοί είναι παράλληλοι μεταξύ τους και παράλληλοι προς την επιφάνεια διαχωρισμού γης αέρα. Ο αγωγός A είναι τοποθετημένος σε βάθος h_A , ενώ ο B σε βάθος h_B , Σχήμα 2.1. Η μεταξύ τους οριζόντια απόσταση είναι y_{AB} . Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται η κάτοψη της υπό εξέταση γεωμετρίας. Οι συντεταγμένες των δύο αγωγών για το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, που φαίνεται στα σχήματα, δίνονται παρακάτω:

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad -a < x_A < a, \quad y_A = 0, \quad z_A = -h_A \quad (2.1)$$

$$B(x_B, y_B, z_B), \quad -b < x_B < b, \quad y_B = y_{AB}, \quad z_B = -h_B \quad (2.2)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση, υποθέτουμε ένα στοιχειώδες ρεύμα I_A κατά μήκος του αγωγού A. Ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται εξαιτίας του ρεύματος I_A , και το αποτέλεσμα είναι η ανάπτυξη

ενός δυναμικού από επαγωγή V_B στον αγωγό B. Ο λόγος V_B προς I_A , είναι η σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των δύο αγωγών.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο επάνω στον αγωγό A, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Το δίπολο αυτό παράγει ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια του διανύσματος Hertz. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία που παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.6 του κεφαλαίου 1 για το οριζόντιο δίπολο μέσα στη γη και συγκεκριμένα τις εκφράσεις (1.52) και (1.55) που μας δίνουν τις καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος Hertz μέσα στη γη. Οι εκφράσεις αυτές, προσαρμοσμένες στον παρόν πρόβλημα, για το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, διαμορφώνονται όπως παρακάτω.

$$\Pi_x = \frac{i\omega p\mu_0}{4\pi k^2} \left[\frac{e^{ikR}}{R} + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{\gamma(z-h_A)+i(\xi(x-x_A)+\eta y)} d\xi d\eta \right] \quad (2.3)$$

$$\Pi_z = \frac{i\omega p\mu_0}{8\pi^2 k^2} \iint_{-\infty}^{\infty} i\xi g(\xi, \eta) e^{\gamma(z-h_A)+i(\xi(x-x_A)+\eta y)} d\xi d\eta \quad (2.4)$$

όπου

$$f(\xi, \eta) = -\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\gamma + \lambda}, \quad g(\xi, \eta) = \frac{2(\lambda - \gamma)}{k^2 \lambda}$$

και $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $k^2 = i\omega\mu_0\sigma$, ω είναι η γωνιακή συχνότητα του ρεύματος, σ είναι η αγωγιμότητα της γης, p είναι η ροπή του στοιχειώδους ηλεκτρικού δίπολου $p = I_A dx$, ενώ R είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από την πηγή, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο. Για όλη την ανάλυσή μας θεωρούμε ότι έχουμε αρμονική διέγερση της μορφής $e^{-i\omega t}$. Να διευκρινίσουμε ότι το πρόσημο του k^2 στη σχέση $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, σχετίζεται με το είδος της διέγερσης που έχουμε επιλέξει δηλαδή με το εάν η διέγερση είναι $e^{-i\omega t}$ ή $e^{i\omega t}$. Σε κάθε περίπτωση όμως, η επιλογή αυτή δεν επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα των υπολογισμών μας. Ο πρώτος όρος της (2.3) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της σχέσης (1.30), προσαρμοσμένης στην παρούσα γεωμετρία, όπως παρακάτω.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma|z-z_A|+i(\xi(x-x_A)+\eta y)} d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Στην παραπάνω σχέση, το σημείο παρατήρησης που μας ενδιαφέρει είναι ο αγωγός B, που έχει τοποθετηθεί σε μεγαλύτερο βάθος από τον A και συνεπώς ο εκθετικός όρος σε απόλυτη τιμή διαμορφώνεται σε $e^{-\gamma|z-z_A|} = e^{\gamma(z+h_A)}$.

Γνωρίζοντας τις συνιστώσες Π_x και Π_z του διανύσματος Hertz σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου (x, y, z) που απέχει απόσταση R από το στοιχειώδες δίπολο, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της συνιστώσας x της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, μέγεθος απαραίτητο για τον υπολογισμό του αναπτυσσόμενου

δυναμικού στον αγωγό B. Από τη σχέση (1.15), η x συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σχετίζεται με τις x και z συνιστώσες του διανύσματος Hertz ως εξής

$$E_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x \partial z} \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας τα Π_x και Π_z από τις (2.3) και (2.4) αντίστοιχα, παίρνουμε για το E_x

$$E_x = \frac{i\omega I \mu_0}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\gamma} e^{\gamma(z+h_A)} + f(\xi, \eta) e^{-\gamma(z-h_A)} - \frac{\xi^2}{k^2 \gamma} e^{\gamma(z+h_A)} - \frac{\xi^2 f(\xi, \eta)}{k^2} e^{\gamma(z-h_A)} - \frac{\gamma \xi^2 g(\xi, \eta)}{k^2} e^{\gamma(z-h_A)} \right] e^{i(\xi(x-x_A)+\eta y)} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

Η σχέση (2.7) δίνει τη x συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο του Σχήματος 2.2. Για να υπολογίσουμε τη συνολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από τον αγωγό A, ολοκληρώνουμε πάνω στο συνολικό μήκος του αγωγού A.

$$E_{x,total} = \int_{x_A=-a}^{x_A=a} E_x dx_A \quad (2.8)$$

Ένα στοιχειώδες δυναμικό dV αναπτύσσεται πάνω σε ένα στοιχειώδες τμήμα dx του αγωγού B, Σχήμα 2.2. Το συνολικό δυναμικό που αναπτύσσεται πάνω στον αγωγό B το υπολογίζουμε ολοκληρώνοντας το στοιχειώδες δυναμικό dV πάνω στο σύνολο του μήκους του αγωγού B.

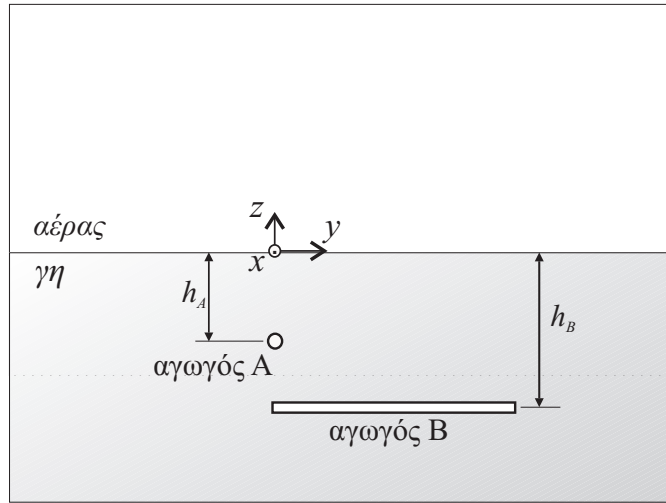
$$V_B = \int_{x=-b}^{x=b} E_{x,total} dx, \quad y = y_B = y_{AB}, \quad z = z_B = -h_B \quad (2.9)$$

Το ζητούμενο μέγεθος της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης Z_{AB} είναι το πηλίκο της V_B με το πλάτος ρεύματος I_A του ηλεκτρικού δίπολου. Μετά τις αντικαταστάσεις και ολοκληρώσεις, η αμοιβαία αντίσταση μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω.

$$Z_{AB} = Z_0 + \Delta Z \quad (2.10)$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} (k^2 - \xi^2) \frac{e^{\gamma(h_A-h_b)+i\eta y_{AB}}}{\gamma \xi^2} \sin(a\xi) \sin(b\xi) d\xi d\eta$$

$$\Delta Z = \frac{i\omega \mu_0}{2\pi^2 k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[k^2 f(\xi, \eta) - \xi^2 f(\xi, \eta) - \gamma \xi^2 g(\xi, \eta) \right] \frac{e^{-\gamma(h_A+h_b)+i\eta y_{AB}}}{\xi^2} \sin(a\xi) \sin(b\xi) d\xi d\eta$$



Σχήμα 2.3: Τομή της γεωμετρίας του προβλήματος της αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους, κάθετοι αγωγοί.

Ο όρος Z_0 εκφράζει την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ των αγωγών για την περίπτωση που δεν υπάρχουν χωρικά όρια και όλος ο χώρος καταλαμβάνεται από την ομογενή γη. Ο όρος ΔZ αντιπροσωπεύει την επίδραση από την παρουσία της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ των δύο χώρων, του αέρα και της γης.

Οι όροι Z_0 και ΔZ έχουν τη μορφή άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων και ο υπολογισμός τους είναι δύσκολος. Παρόλα αυτά η ολοκλήρωσή τους είναι δυνατή, αν και χρονοβόρα, με τη χρήση ειδικών αλγορίθμων (adaptive quadratures) που είναι διαθέσιμοι στα λογισμικά πακέτα μαθηματικών υπολογισμών.

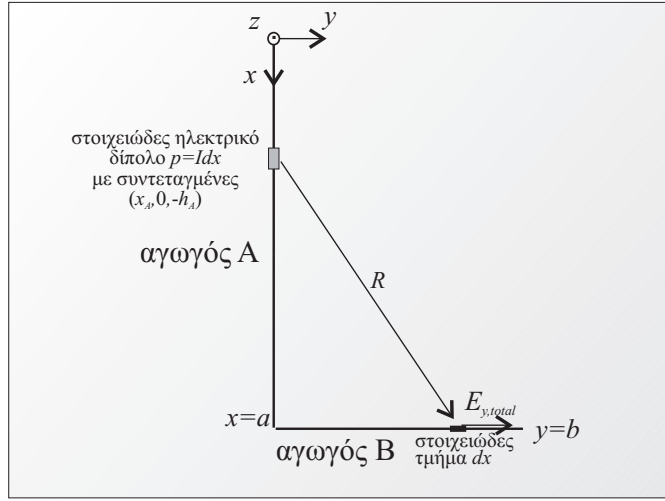
2.3.2 Κάθετοι αγωγοί

Την ίδια τακτική ακολουθούμε και για την περίπτωση των κάθετων αγωγών, οι οποίοι και πάλι είναι τοποθετημένοι σε διαφορετικά βάθη. Η σχετική γεωμετρία φαίνεται στο Σχήμα 2.3 όπου δίνεται η τομή της γεωμετρίας και στο Σχήμα 2.4 όπου δίνεται η κάτοψή της. Οι θέσεις των δύο αγωγών σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθείται στο Σχήμα 2.4 είναι οι ακόλουθες

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad 0 < x_A < a, \quad y_A = 0, \quad z_A = -h_A \quad (2.11)$$

$$B(x_B, y_B, z_B), \quad x_B = a, \quad 0 < y_B < b, \quad z_B = -h_B \quad (2.12)$$

Οι σχέσεις (2.3), (2.4) και (2.5) ισχύουν όπως και στην προηγούμενη περίπτωση των παράλληλων αγωγών, δεδομένου του ότι σχετίζονται με το πεδίο του στοιχειώδους δίπολου που και πάλι βρίσκεται στην ίδια θέση.



Σχήμα 2.4: Κάτοψη της γεωμετρίας του προβλήματος της αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους, κάθετοι αγωγοί.

Η y συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που ενδιαφέρει σε αυτήν την περίπτωση, προκύπτει σύμφωνα με την (1.15) ως εξής

$$E_y = \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y \partial z} \quad (2.13)$$

Μετά τις αντικαταστάσεις των Π_x και Π_z , από τις (2.3) και (2.4) και πραγματοποιώντας τις παραγωγίσεις, προκύπτει η y συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο.

$$E_y = -\frac{i\omega I \mu_0}{8\pi^2 k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\gamma} e^{\gamma(z+h_A)} + f(\xi, \eta) e^{\gamma(z-h_A)} + g(\xi, \eta) \gamma e^{\gamma(z-h_A)} \right] \times \xi \eta e^{i(\xi(x-x_A)+\eta y)} d\xi d\eta \quad (2.14)$$

Και πάλι όπως και πριν, η συνολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλεί ο αγωγός A προκύπτει από την ολοκλήρωση της (2.14) κατά μήκος του αγωγού A.

$$E_{y,total} = \int_{x_A=0}^{x_A=a} E_y dx_A \quad (2.15)$$

Το συνολικό δυναμικό που αναπτύσσεται στον αγωγό B είναι

$$V_B = -\int_{y=0}^{y=b} E_{y,total} dy, \quad x = x_B = a, \quad z = z_B = -h_B \quad (2.16)$$

Τελικά, η έκφραση για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των κάθετων αγωγών είναι

$$Z_{AB} = Z_0 + \Delta Z \quad (2.17)$$

$$Z_0 = \frac{i\omega\mu_0}{8\pi^2k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{h_A-h_B}}{\gamma} (e^{ia\xi} - 1)(e^{ib\eta} - 1) d\xi d\eta$$

$$\Delta Z = \frac{i\omega\mu_0}{8\pi^2k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi, \eta) + \gamma g(\xi, \eta)] e^{-\gamma(h_A+h_B)} (e^{ia\xi} - 1)(e^{ib\eta} - 1) d\xi d\eta$$

Όπως και προηγουμένως, ο όρος Z_0 εκφράζει την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ των αγωγών για την περίπτωση που δεν υπάρχουν χωρικά όρια και όλος ο χώρος καταλαμβάνεται από την ομογενή γη. Ο όρος ΔZ αντιπροσωπεύει την επίδραση από την παρουσία της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ των δύο χώρων, του αέρα και της γης. Οι όροι Z_0 και ΔZ έχουν τη μορφή άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων και ο υπολογισμός τους γίνεται με τη χρήση ειδικών αλγορίθμων.

2.3.3 Αγωγοί υπό γωνία

Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε ανάλογες εκφράσεις για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για την περίπτωση που οι δύο αγωγοί σχηματίζουν μεταξύ τους μια γωνία θ . Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από τον πρώτο αγωγό σε αυτήν την περίπτωση δίνεται παρακάτω.

$$\mathbf{E} = \cos \theta E_{x,total} \mathbf{x} + \sin \theta E_{y,total} \mathbf{y} \quad (2.18)$$

όπου τα $E_{x,total}$ και $E_{y,total}$ δίνονται από τις σχέσεις (2.8) και (2.15) αντίστοιχα. Το αναπτυσσόμενο δυναμικό πάνω στο δεύτερο αγωγό υπολογίζεται με την ολοκλήρωση του \mathbf{E} κατά μήκος του δεύτερου αγωγού. Τελικά, ο υπολογισμός της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης γίνεται ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε προηγουμένως για την περίπτωση των παράλληλων και των κάθετων αγωγών.

2.4 Εναλλακτική προσέγγιση με χρήση της μεθόδου DCIM

Όπως προκύπτει από τις (2.10) και (2.17), οι τελικές εκφράσεις που μας δίνουν την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ των υπόγειων αγωγών έχουν τη μορφή άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων. Τα ολοκληρώματα αυτά έχουν ιδιάζουσα συμπεριφορά και η αριθμητική τους ολοκλήρωση είναι χρονοβόρα και απαιτεί τη χρήση ειδικών αλγορίθμων ολοκλήρωσης.

Για να αποφύγουμε αυτές τις δυσκολίες, χρησιμοποιούμε μια εναλλακτική μέθοδο για τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ των υπόγειων αγωγών. Σκοπός της νέας μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τις εκφράσεις που μας δίνουν τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση, με τρόπο αναλυτικό. Η μέθοδος εμπλέκει την τεχνική Discrete Complex Images Method (DCIM) [Aksun, 1996]. Η τεχνική αυτή έχει αναπτυχθεί για εφαρμογές μικροηλεκτρονικής υψηλών συχνοτήτων όπως η μοντελοποίηση κεραίων τύπου μικροταινίας. Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση με μια σειρά από μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να μετατρέψουμε τα αρχικά ολοκληρώματα σε ολοκληρώματα διαφορετικής μορφής τα οποία έχουν γνωστή αναλυτική λύση.

Για να εκφράσουμε τις υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις με μια σειρά από μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Generalized Pencil of Function (GPOF), [Hua and Sarkar, 1989]. Με αυτόν τον τρόπο μία συνάρτηση $f(x)$, μπορεί να εκφραστεί με πολύ καλή προσέγγιση με μία σύντομη σειρά από μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις όπως φαίνεται παρακάτω.

$$f(x) \approx \sum c_n e^{x s_n} \quad (2.19)$$

Οι τιμές των πόλων s_n και των υπολοίπων c_n υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου GPOF. Ο αλγόριθμος περιλαμβάνει τη δειγματοληψία της αρχικής συνάρτησης $f(x)$. Με τα δεδομένα που προκύπτουν από τη διαδικασία της δειγματοληψίας συγκροτούνται κάποιοι ειδικοί πίνακες. Στη συνέχεια οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n προκύπτουν από τη λύση του γενικευμένου προβλήματος των ιδιοτιμών αυτών των πινάκων.

Η μέθοδος GPOF διαφέρει από την πολύ γνωστή μέθοδο Prony στο ότι βρίσκει τους πόλους απευθείας, λύνοντας ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, αντί για την προσέγγιση δύο βημάτων που ακολουθεί η Prony, όπου αρχικά λύνει την εξίσωση πινάκων και στη συνέχεια αναζητά τις ρίζες του πολυωνύμου. Η GPOF είναι πιο σταθερή και υπολογιστικά πιο αποδοτική από τη μέθοδο Prony. Μεγαλύτερη ανάλυση για τον αλγόριθμο GPOF παραθέτουμε στο Παράρτημα Α'.

2.5 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς γ , παράλληλοι αγωγοί

Για τις ανάγκες της εναλλακτικής μεθόδου χρησιμοποιούμε εκφράσεις των συνιστωσών x και y της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, εκφρασμένες σε μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις του πεδίου του στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Έτσι, στις εκφράσεις της έντα-

σης του ηλεκτρικού πεδίου, έχουμε πλέον την παρουσία μονών ολοκληρωμάτων με όρια ολοκλήρωσης από μηδέν έως άπειρο. Επίσης, έχουμε την παρουσία της γνωστής συνάρτησης Bessel.

Η x συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ένα στοιχειώδες δίπολο πάνω στον αγωγό A, προκύπτει από τις συνιστώσες E_ϕ και E_r του ηλεκτρικού πεδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες σύμφωνα με την παρακάτω σχέση.

$$E_x = \cos \phi E_r - \sin \phi E_\phi \quad (2.20)$$

Οι εκφράσεις των E_ϕ και E_r που προκαλεί το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο δίνονται στον Πίνακα 1.2 περίπτωση α και είναι

$$E_r = \frac{i\omega I \mu_0}{4\pi k^2} \cos \phi \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_{11} - G_{12} + k^2 V_{11}) + k^2 (G_{11} - G_{12} + U_{11}) \right] \quad (2.21)$$

$$E_\phi = -\frac{i\omega I \mu_0}{4\pi k^2} \sin \phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (G_{11} - G_{12} + k^2 V_{11}) + k^2 (G_{11} - G_{12} + U_{11}) \right] \quad (2.22)$$

όπου G είναι η συνάρτηση Green στον άπειρο χώρο και εκφράζει τη συνεισφορά της πηγής και του ειδώλου, ενώ οι συναρτήσεις V και U εκφράζουν τη συνεισφορά της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ γης και αέρα. Οι δείκτες στις συναρτήσεις εκφράζουν τα δύο μέσα όπου 1 είναι η γη και 2 ο αέρας. Ο πρώτος δείκτης αντιπροσωπεύει τη θέση του σημείου παρατήρησης, ενώ ο δεύτερος τη θέση της πηγής ή του ειδώλου που προκαλεί το πεδίο. Έτσι, G_{11} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται σε σημείο μέσα στη γη, από το δίπολό μας που είναι επίσης τοποθετημένο μέσα στη γη και συγκεκριμένα πάνω στον αγωγό A. Ενώ G_{12} εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο της γης που προκαλείται από το είδωλο του διπόλου μας που βρίσκεται στον αέρα. Πιο συγκεκριμένα οι συναρτήσεις είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{e^{ikR_1}}{R_1} = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma|h_A-z|} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\ G_{12} &= \frac{e^{ikR_2}}{R_2} = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma|h_A+z|} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\ V_{11} &= \frac{2}{k^2} \int_0^\infty e^{-\gamma(h_A-z)} J_0(\lambda r) d\lambda \\ U_{11} &= 2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma + \lambda} e^{-\gamma(h_A-z)} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

Μετά την αντικατάσταση των (2.21) και (2.22) στην (2.20) και πραγματοποιώντας

τις σχετικές ομαδοποιήσεις καταλήγουμε στην παρακάτω παράσταση

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{i\omega I\mu_0}{4\pi k^2} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \right. \\
& + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r} \int_0^\infty F_1 \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(h_A - z)} J_1(\lambda r) d\lambda \\
& - \cos^2 \phi \int_0^\infty F_1 \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma(h_A - z)} J_0(\lambda r) d\lambda \\
& \left. + k^2 \int_0^\infty F_2 \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma(h_A - z)} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (2.23)
\end{aligned}$$

όπου

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

λ τώρα είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης και

$$F_1 = (2\gamma - \lambda) \lambda, \quad F_2 = \frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \quad (2.24)$$

J_1 και J_0 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτης και μηδενικής τάξης αντίστοιχα. Για την παραγωγή των συναρτήσεων G , V και U χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} J_0(\lambda r) = -\frac{\partial \lambda}{\partial r} J_1(\lambda r) = -\lambda^2 \left[J_0(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \right] \quad (2.25)$$

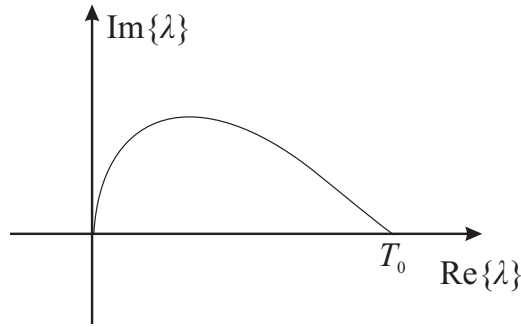
Οι συναρτήσεις F_1 και F_2 προσεγγίζονται από ένα σύνολο μιγαδικών εκθετικών της μορφής $\sum c_n e^{\gamma s_n}$. Οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n προσδιορίζονται με χρήση της μεθόδου GPOF όπως εξηγήθηκε παραπάνω. Στη μέθοδο αυτή, για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτησή μας με εκθετικά ως προς γ πρέπει να κάνουμε δειγματοληψία της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τιμές του γ που προκύπτουν με γραμμική εξάρτηση ως προς μία πραγματική παράμετρο t , σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\gamma = P_a t + P_b, \quad t \in [0, 1] \quad (2.26)$$

Οι τιμές των P_a και P_b προκύπτουν έχοντας σαν δεδομένο ότι ισχύει όταν $t = 0$ τότε $\lambda = 0$ και όταν $t = 1$ τότε $\lambda = T_0$. Συγχρόνως είναι $\gamma = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$, οπότε τελικά προκύπτει

$$P_a = \sqrt{k^2 + T_0^2} - k \quad P_b = k \quad (2.27)$$

Με τον τρόπο αυτό, όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.5 αντί για πραγματικές τιμές του λ προκύπτουν μιγαδικές τιμές ξεκινώντας από την τιμή $\lambda = 0$ και καταλήγοντας σε μια τιμή $\lambda = T_0$ πάνω στον άξονα των πραγματικών. Η επιλογή της

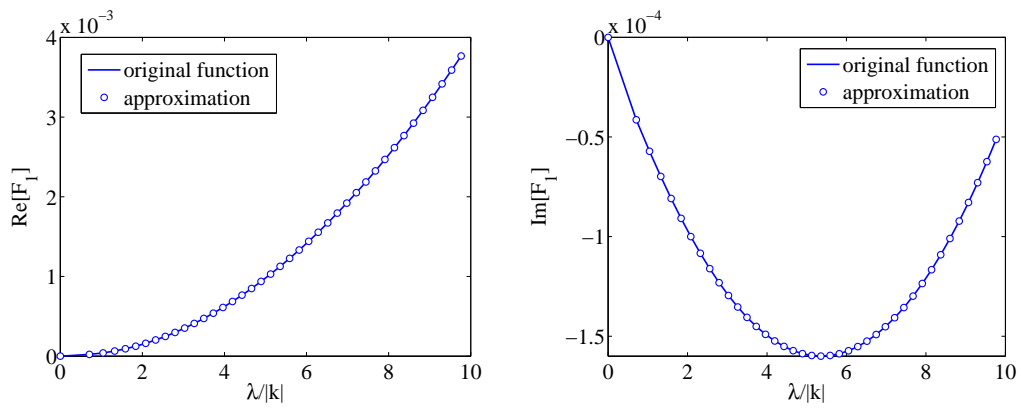


Σχήμα 2.5: Καμπύλη δειγματοληψίας της προς προσέγγιση μιγαδικής συνάρτησης.

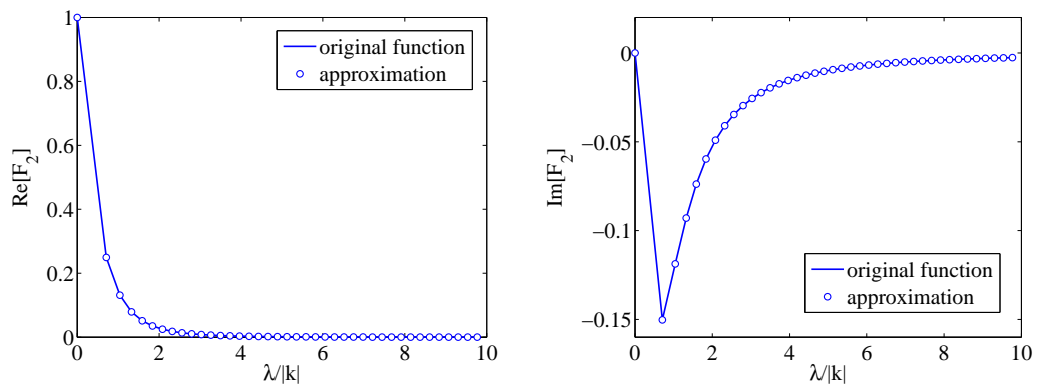
τιμής T_0 δεν είναι κρίσιμη και συνήθως τη θέτουμε μεταξύ δέκα με είκοσι φορές μεγαλύτερη του μέτρου της σταθεράς διάδοσης k . Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται συχνά στα προβλήματα υψηλής συχνότητας όπου το ζητούμενο είναι να ακολουθήσουμε μια τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο, ώστε να αποφύγουμε τους πόλους που βρίσκονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι τιμές της συνάρτησης που προκύπτουν από τη δειγματοληψία, μαζί με το διάνυσμα t , που έχει διάσταση ίση με τον αριθμό των δειγμάτων N_i , και τον επιθυμητό αριθμό των εκθετικών όρων M , θα αξιοποιηθούν από τον αλγόριθμο GPOF για να προκύψουν οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n . Για τις περισσότερες περιπτώσεις ένας αριθμός δειγμάτων $N_i = 100$ και αριθμός εκθετικών όρων $M = 8$ είναι αρκετός για να πάρουμε πολύ ακριβή προσέγγιση της μιγαδικής συνάρτησης. Η ρουτίνα του αλγόριθμου GPOF που χρησιμοποιήσαμε υπάρχει σε παράρτημα διδακτορικής διατριβής [Fischer, 2003] στην οποία κάναμε κάποιες μικρές βελτιώσεις. Έτσι, μετά την χρήση της ρουτίνας GPOF, έχουμε για τις μιγαδικές συναρτήσεις F_i

$$F_i \approx \sum_{n=1}^M c_{n,i} e^{\gamma s_{n,i}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.28)$$

Στα Σχήματα 2.6 και 2.7 δίνονται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των συναρτήσεων F_1 και F_2 αντίστοιχα, καθώς και των προσεγγίσεών τους ώστε να γίνει η σχετική σύγκριση. Η συγκεκριμένη προσέγγιση έγινε με δειγματοληψία $N_i = 40$ σημείων και για αριθμό όρων του εκθετικού αθροίσματος $M = 8$. Όπως προκύπτει από τα δύο σχήματα, η προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης από το άθροισμα των εκθετικών, που επιτυγχάνεται με την βοήθεια της τεχνικής GPOF, είναι πάρα πολύ καλή. Να τονίσουμε ότι προκειμένου να ελαττώσουμε τους υπολογιστικούς χρόνους μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των δειγμάτων N_i και τον αριθμό των όρων M χωρίς να έχουμε αισθητή μείωση της ακρίβειας της προσέγγισης.



Σχήμα 2.6: Συνάρτηση F_1 και προσέγγιση με το άθροισμα των εκθετικών, πραγματικό και φανταστικό μέρος.



Σχήμα 2.7: Συνάρτηση F_2 και προσέγγιση με το άθροισμα των εκθετικών, πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Μετά την αντικατάσταση των F_1 και F_2 από τα αντίστοιχα αθροίσματα, η (2.23) διαμορφώνεται όπως παρακάτω.

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{i\omega I\mu_0}{8\pi k^2} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \right. \\
& + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r} \sum_n c_{n,1} \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} e^{\gamma(z+s_{n,1}-h_A)} J_1(\lambda r) d\lambda \\
& - \cos^2 \phi \sum_n c_{n,1} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma} e^{\gamma(z+s_{n,1}-h_A)} J_0(\lambda r) d\lambda \\
& \left. + k^2 \sum_n c_{n,2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma} e^{\gamma(z+s_{n,2}-h_A)} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (2.29)
\end{aligned}$$

όπου $\{s_{n,i}, c_{n,i}\}$ είναι τα ζευγάρια των πόλων και υπολοίπων που χρησιμοποιήθηκαν για να προσεγγιστούν οι συναρτήσεις F_i . Τώρα είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τις αναλυτικές λύσεις των ολοκληρωμάτων που δίνονται παρακάτω [Gradshteyn and Ryzhik, 2007], για τον υπολογισμό της (2.29).

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma} e^{\gamma z} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{ikR} - e^{-ikz}}{ikr} \quad (2.30)$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma z} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (2.31)$$

Με τη χρήση των προηγούμενων ταυτοτήτων στην (2.29) παίρνουμε για το E_x .

$$\begin{aligned}
E_x = & \frac{i\omega I\mu_0}{8\pi k^2} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \right. \\
& + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r^2} \sum_n c_{n,1} \frac{e^{ikR_{n,1}} - e^{-ik(z+s_{n,1}-h_A)}}{ik} \\
& \left. - \cos^2 \phi \sum_n c_{n,1} \frac{e^{ikR_{n,1}}}{R_{n,1}} + k^2 \sum_n c_{n,2} \frac{e^{ikR_{n,2}}}{R_{n,2}} \right] \quad (2.32)
\end{aligned}$$

όπου $R_{n,i} = \sqrt{r^2 + (z + s_{n,i} - h_A)^2}$, και $\{c_{n,i}, s_{n,i}\}$ είναι οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν για να προσεγγιστούν οι F_i . Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε την σύνθετη αμοιβαία αντίσταση, ολοκληρώνουμε αριθμητικά την (2.32) ως προς x και x_A με όρια $-a, a$ και $-b, b$ αντίστοιχα, όπως και προηγουμένως, θέτοντας στην (2.32) $z = -h_B$ και $y = y_{AB}$.

Η μέθοδος είναι γνωστή ως Discrete Complex Images επειδή το πεδιακό μέγεθος γράφεται σαν άθροισμα των πεδίων που παράγονται από μιγαδικές εικόνες πηγών σε άπειρο χώρο. Αυτές οι εικόνες ονομάζονται μιγαδικές επειδή τα $R_{n,i}$ εκφράζουν 'μιγαδικές αποστάσεις' λόγω της παρουσίας των μιγαδικών πόλων $s_{n,i}$.

2.6 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς γ , κάθετοι αγωγοί

Για την περίπτωση των κάθετων αγωγών χρειαζόμαστε την καρτεσιανή συνιστώσα E_y της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από ένα στοιχειώδες δίπολο. Η συνιστώσα αυτή παράγεται σε μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld με τη βοήθεια των κυλινδρικών συνιστωσών E_ϕ και E_r . Η καρτεσιανή συνιστώσα y της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου οριζόντια τοποθετημένου μέσα στη γη σε συνάρτηση με τις κυλινδρικές συνιστώσες του πεδίου δίνεται παρακάτω

$$E_y = \sin \phi E_r + \cos \phi E_\phi \quad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις κυλινδρικές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E_ϕ και E_r από τον Πίνακα 1.2 περίπτωση α) και πραγματοποιώντας τις σχετικές πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για τη συνιστώσα E_y της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_y = \frac{i\omega I \mu_0}{4\pi k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{ikR}}{R} + \sin \phi \cos \phi \left(\frac{2}{r} \int_0^\infty F_1 \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(h_A-z)} J_1(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty F_1 \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma(h_A-z)} J_0(\lambda r) d\lambda \right) \right] \quad (2.34)$$

όπου η συνάρτηση προς προσέγγιση F_1 δίνεται από την (2.24). Στην συνέχεια, μετά από χρήση των ταυτοτήτων (2.30) και (2.31) παίρνουμε τελικά.

$$E_y = \frac{i\omega I \mu_0}{4\pi k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{ikR}}{R} + \sin \phi \cos \phi \sum_n c_{n,1} \left(\frac{2e^{ikR_{n,1}} - 2e^{-ik(z+s_{n,1}-h_A)}}{ikr^2} - \frac{e^{ikR_{n,1}}}{R_{n,1}} \right) \right] \quad (2.35)$$

Αφού έχουμε εξάγει την παραπάνω αναλυτική σχέση για το E_y , μπορούμε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά ως προς y και x_A με όρια $0, b$ και $0, a$ αντίστοιχα, θέτοντας στην (2.35) $z = -h_B$ και $x = a$. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των κάθετων αγωγών.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το όφελος από την εναλλακτική μέθοδο που ακολουθήσαμε είναι ότι τώρα για τον υπολογισμό της αμοιβαίας αντίστασης αρκεί η αριθμητική ολοκλήρωση των (2.32) ή (2.35) ανάλογα με τη σχετική θέση των αγωγών. Η ολοκλήρωση αυτή είναι πολύ πιο εύκολη και γρήγορη συγκρινόμενη με την ολοκλήρωση των αντίστοιχων άπειρων διπλών ολοκληρωμάτων (2.10) και (2.17).

2.7 Προσέγγιση με εκθετικά ως προς λ

Υπάρχει η δυνατότητα να εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε προηγουμένως αλλά κάνοντας τώρα προσέγγιση των συναρτήσεων με εκθετικά του λ αντί του γ . Όπως θα προκύψει παρακάτω, αυτός ο εναλλακτικός τρόπος οδηγεί σε αναλυτική έκφραση για την τον όρο ΔZ που εκφράζει τη συνεισφορά της διαχωριστικής επιφάνειας αέρα γης στη αμοιβαία σύνθετη αντίσταση των δύο αγωγών.

Αναδιατάσσουμε την (2.23) για την x συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και τη φέρνουμε στην παρακάτω μορφή:

$$E_x = \frac{i\omega I\mu_0}{4\pi k^2} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r} \int_0^\infty F_1 \lambda J_1(\lambda r) d\lambda - \cos^2 \phi \int_0^\infty F_1 \lambda^2 J_0(\lambda r) d\lambda + k^2 \int_0^\infty F_2 \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (2.36)$$

όπου τώρα

$$F_1 = \frac{2\gamma - \lambda}{\gamma} e^{-\gamma(h_A - z)}, \quad F_2 = \frac{\gamma - \lambda}{\gamma(\gamma + \lambda)} e^{-\gamma(h_A - z)} \quad (2.37)$$

Στη συνέχεια προσεγγίζουμε τις δύο παραστάσεις F_1 και F_2 σαν αθροίσματα εκθετικών του λ της μορφής $\sum c_n e^{\lambda s_n}$. Για τον προσδιορισμό των πόλων s_n και υπολοίπων c_n χρησιμοποιούμε και πάλι τον αλγόριθμο GPOF. Για να προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις F_1 και F_2 ως προς λ , δειγματοληπτούμε το λ στο διάστημα $[0, 1]$ σύμφωνα με την παρακάτω γραμμική σχέση

$$\lambda = T_0 t, \quad t \in [0, 1] \quad (2.38)$$

Οι τιμές του γ προκύπτουν από τη σχέση ορισμού $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$. Για τις τιμές αυτές των λ και γ Θα προκύψουν οι τιμές δειγματοληψίας των F_1 και F_2 και θα αξιοποιηθούν από τον αλγόριθμο GPOF για να προκύψουν οι πόλοι και τα υπόλοιπα s_n και c_n .

Μετά την αντικατάσταση των F_1 και F_2 με τα αθροίσματα των εκθετικών του λ στην (2.36) παίρνουμε

$$E_x = \frac{i\omega I\mu_0}{4\pi k^2} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r} \sum_n c_{n,1} \int_0^\infty e^{\lambda s_{n,1}} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda - \cos^2 \phi \sum_n c_{n,1} \int_0^\infty e^{\lambda s_{n,1}} \lambda^2 J_0(\lambda r) d\lambda + k^2 \sum_n c_{n,2} \int_0^\infty e^{\lambda s_{n,2}} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (2.39)$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω αναλυτική λύση ολοκληρωμάτων Sommerfeld [Gradshteyn and Ryzhik, 2007]

$$\int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-ax} J_n(bx) dx = (-1)^{m+1} b^{-n} \frac{d^{m+1}}{da^{m+1}} \left[\frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^n}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right],$$

$$b > 0, \quad \text{Re}\{n\} > -m - 2 \quad (2.40)$$

Από την προηγούμενη ταυτότητα για $m = 0$ και $n = 1$, που αντιστοιχεί στο δεύτερο όρο της (2.39), έχουμε

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} J_1(bx) dx = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Με τον ίδιο τρόπο για $m = 1$ και $n = 0$, που αντιστοιχεί στον τρίτο όρο της (2.39), έχουμε

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{2a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{5/2}}$$

Τέλος για $m = 0$ και $n = 0$, που αντιστοιχεί στον τέταρτο όρο της (2.39), έχουμε

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Μετά την εφαρμογή των προηγούμενων στην (2.39) παίρνουμε

$$E_x = \frac{I}{4\pi\sigma} \left[\left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \right. \\ \left. + (2 \cos^2 \phi - 1) \sum_n \frac{c_{n,1}}{(s_{n,1}^2 + r^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \cos^2 \phi \sum_n c_{n,1} \frac{2s_{n,1}^2 - r^2}{(s_{n,1}^2 + r^2)^{5/2}} \right. \\ \left. - k^2 \sum_n \frac{c_{n,2} s_{n,2}}{(s_{n,2}^2 + r^2)^{3/2}} \right] \quad (2.41)$$

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των παράλληλων αγωγών ολοκληρώνουμε την (2.41) κατά μήκος των δύο αγωγών, αφού κάνουμε την αντικατάσταση του $\cos^2 \phi$ όπως παρακάτω.

$$\cos^2 \phi = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_{AB}^2}}$$

Η τελική έκφραση για την αμοιβαία αντίσταση είναι,

$$Z_{AB} = Z_0 + \Delta Z \quad (2.42)$$

$$Z_0 = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{x_A=0}^{x_A=2a} \int_{x=0}^{x=2b} \left(-k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} dx dx_A$$

$$\Delta Z = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_n \left(\frac{k^2 c_{n,2} s_{n,2} R_{n,2}}{s_{n,2}^2 + y_{AB}^2} - \frac{c_{n,1}}{R_{n,1}} \right) \Big|_{x_A=0}^{x_A=2a} \Big|_{x=0}^{x=2b}$$

όπου

$$R_{n,i} = \sqrt{s_{n,i}^2 + (x - x_A)^2 + y_{AB}^2}$$

Και πάλι ο όρος Z_0 εκφράζει την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ των αγωγών για την περίπτωση που δεν υπάρχουν χωρικά όρια και όλος ο χώρος καταλαμβάνεται από την ομογενή γη. Ο όρος ΔZ αντιπροσωπεύει την επίδραση από την παρουσία της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ των δύο χώρων, του αέρα και της γης. Το πλεονέκτημα με τη μέθοδο που μόλις παρουσιάσαμε είναι ότι τελικά καταλήξαμε σε αναλυτική έκφραση του όρου ΔZ . Πλέον δεν απαιτείται αριθμητική ολοκλήρωση ως προς x και x_A .

Για την περίπτωση των αγωγών που είναι κάθετοι μεταξύ τους, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε στην παρακάτω τελική έκφραση.

$$Z_{AB} = Z_0 + \Delta Z \quad (2.43)$$

$$Z_0 = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{x_A=0}^{x_A=a} \int_{x=0}^{x=b} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{e^{ikR}}{R} dx dx_A$$

$$\Delta Z = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_n \frac{c_n}{R_n} \Big|_{x_A=0}^{x_A=a} \Big|_{y=-0}^{y=b}$$

όπου τώρα

$$R_n = \sqrt{s_n^2 + (x - x_A)^2 + y^2}$$

Όπως προκύπτει από την τελική έκφραση για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των δύο κάθετων υπόγειων αγωγών, προσεγγίζοντας τις συναρτήσεις με εκθετικά του λ και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ταυτότητες καταλήγουμε σε αναλυτική λύση για τον ΔZ γεγονός που διευκολύνει την υπολογιστική διαδικασία και βελτιώνει τους χρόνους υπολογισμού.

Διευκρινίζουμε ότι η διαφορά στα όρια ολοκλήρωσης μεταξύ της περίπτωσης των παράλληλων αγωγών με την περίπτωση των κάθετων $2a$ αντί a και $2b$ αντί b , προκύπτει από το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση πήραμε την αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στη μέση του αγωγού A , ενώ στη δεύτερη περίπτωση στην αρχή του αγωγού A . Στους παράλληλους αγωγούς το μήκος των αγωγών είναι $2a$ και $2b$ ενώ στους κάθετους είναι a και b .

2.8 Αποτελέσματα αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε αποτελέσματα της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ των δύο υπόγειων αγωγών για την περίπτωση των παράλληλων αλλά και των κάθετων αγωγών. Επίσης πραγματοποιούμε σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέρχονται από την (2.10), με αποτελέσματα που παράχθηκαν με διαφορετικές εκφράσεις που υπάρχουν δημοσιευμένες σε παλαιότερες επιστημονικές δημοσιεύσεις. Η σύγκριση αυτή έγινε για να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα των εκφράσεων που παρουσιάζουμε στο παρόν κεφάλαιο.

Σε όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε, οι αγωγοί είναι τοποθετημένοι σε βάθος $h_A = 2\text{m}$ για τον αγωγό Α και $h_B = 10\text{m}$ για τον αγωγό Β. Η αγωγιμότητα της γης που έχουμε επιλέξει είναι $\sigma = 0.01\text{S/m}$ ($\rho = 100\text{Ohm}\cdot\text{m}$) για όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται. Οι υπολογισμοί έγιναν με χρήση του Matlab.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σχέση (2.10) για τους παράλληλους αγωγούς είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά που προκύπτουν από τις εκφράσεις με την εναλλακτική μέθοδο, τόσο με προσέγγιση εκθετικών ως προς γ , σχέση (2.32), όσο και με τα εκθετικά ως προς λ , σχέση (2.42). Το ίδιο ισχύει και για τους κάθετους αγωγούς όπου τα αποτελέσματα από την (2.17) ταυτίζονται με αυτά των (2.35) και (2.43). Σε όσα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω με τον χαρακτηρισμό ‘εναλλακτική μέθοδος’, χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (2.42) και (2.43) με εκθετικά ως προς λ , λόγω του πλεονεκτήματος της αναλυτικής λύσης που παρουσιάζουν αυτές οι εκφράσεις.

Για την περίπτωση των παράλληλων αγωγών έχουμε παράγει αποτελέσματα για διάφορες τιμές της συχνότητας, του μήκους των αγωγών Α και Β, καθώς και για διάφορες τιμές της μεταξύ τους οριζόντιας απόστασης. Τα αποτελέσματα αυτά τα παραθέτουμε στους Πίνακες 2.1, 2.2 και 2.3 αντίστοιχα. Στους πίνακες αυτούς παραθέτουμε επίσης και τους χρόνους υπολογισμού σε δευτερόλεπτα με τη σχέση (2.10) όπου γίνεται χρήση αλγόριθμου adaptive quadratures καθώς και με τη σχέση (2.42) της εναλλακτικής μεθόδου με εκθετικά ως προς λ . Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω και οι δύο μέθοδοι δίνουν ίδια ακριβώς αποτελέσματα, όμως υπάρχει πολύ μεγάλη βελτίωση των χρόνων υπολογισμού με την εναλλακτική μέθοδο. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε ένα συνηθισμένο ηλεκτρονικό υπολογιστή με επεξεργαστή 2GHz. Στον Πίνακα 2.1 δίνουμε επιπρόσθετα και το βάθος διείσδυσης δ , ενώ στον Πίνακα 2.2 δίνουμε και την ανά μονάδα μήκους σύνθετη αμοιβαία αντίσταση. Για τον αλγόριθμο GPOF χρησιμοποιήσαμε αριθμό δειγμάτων $N_i = 120$ και αριθμό όρων εκθετικών $M = 12$. Το όριο δειγματοληψίας των συναρτήσεων F_1 και F_2 (2.37) το πήραμε $T_0 = 50|k|$.

Σε όλες τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα μιας και η αύξηση της συχνότητας καθώς και η αύξηση του μήκους των αγωγών προκαλεί αύξηση της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης. Αντίθετα, αύξηση της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των αγωγών προκαλεί μείωση της αμοιβαίας αντίστασης.

Πίνακας 2.1: Παράλληλοι αγωγοί. Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για διάφορες συχνότητες. Μήκος αγωγών 90m, οριζόντια απόσταση μεταξύ τους 5m.

f (Hz)	δ (m)	Z_{AB} (Ohm)	Χρόνος υπολογισμού (sec)	
			adaptive quadrat.	εναλλακτ. μέθοδος
50	711.7	$2.56064 + 0.0101919i$	1.556	0.145
500	225.1	$2.56747 + 0.0967037i$	1.557	0.116
5000	71.7	$2.74397 + 0.8053210i$	1.687	0.128
50000	22.5	$5.59253 + 4.0547600i$	1.328	0.122

Πίνακας 2.2: Παράλληλοι αγωγοί. Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για διάφορα μήκη αγωγών. Συχνότητα 50Hz και οριζόντια απόσταση μεταξύ των αγωγών 5m.

Μήκος (m)	Z_{AB} (Ohm)	Z_{AB} (Ohm/m)	Χρόνος υπολογ. (sec)	
			quadrat.	εναλλακτ.
1	$0.0130 + 0.0017 \cdot 10^{-3}i$	$0.0130 + 0.0017 \cdot 10^{-3}i$	0.381	0.0147
5	$0.2780 + 0.0433 \cdot 10^{-3}i$	$0.0556 + 0.0086 \cdot 10^{-3}i$	0.445	0.0141
90	$2.5606 + 10.192 \cdot 10^{-3}i$	$0.0285 + 0.1132 \cdot 10^{-3}i$	1.548	0.1130
180	$2.7357 + 27.870 \cdot 10^{-3}i$	$0.0152 + 0.1548 \cdot 10^{-3}i$	2.530	0.2197

Πίνακας 2.3: Παράλληλοι αγωγοί. Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις μεταξύ των αγωγών. Συχνότητα 50Hz και μήκος αγωγών 5m.

y_{AB} (m)	Z_{AB} (Ohm)	Χρόνος υπολογισμού (sec)	
		adaptive quadrat.	εναλλακτ. μέθοδος
0	$0.40442 + 0.0000501i$	0.337	0.0229
5	$0.27802 + 0.0000433i$	0.445	0.0239
25	$0.01981 + 0.0000198i$	1.335	0.0276
50	$0.00297 + 0.0000117i$	3.097	0.0228

Πίνακας 2.4: Κάθετοι αγωγοί. Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για διάφορες τιμές της συχνότητας, μήκος αγωγών 45m.

$f(\text{Hz})$	$\delta(\text{m})$	$Z_{AB} (\text{Ohm})$
50	711.7	$1.21486 - 0.000279i$
500	225.1	$1.21485 - 0.002797i$
5000	71.7	$1.21378 - 0.027846i$
50000	22.5	$1.14488 - 0.242471i$

Πίνακας 2.5: Κάθετοι αγωγοί. Αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για διάφορα μήκη των αγωγών, συχνότητα 50Hz.

Μήκος (m)	$Z_{AB} (\text{Ohm})$
1	$0.00019 - 0.00947 \cdot 10^{-6}i$
5	$0.06320 - 3.51697 \cdot 10^{-6}i$
45	$1.21486 - 279.750 \cdot 10^{-6}i$
90	$1.43108 - 486.250 \cdot 10^{-6}i$

Στους Πίνακες 2.4 και 2.5 δίνουμε αποτελέσματα για την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ των αγωγών A και B για διάφορες συχνότητες και διάφορα μήκη, για την περίπτωση που οι αγωγοί είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα των εκφράσεων που έχουμε αναπτύξει για την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ παράλληλων υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους, πραγματοποιήσαμε σύγκριση αποτελεσμάτων με αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση της κλασσικής φόρμουλας του Pollaczek [Pollaczek, 1927], η οποία δίνεται και σε διαφοροποιημένες μορφές στις [Sunde, 1968] και [Tsiमितros et al., 2005]. Η φόρμουλα αυτή δίνει την ανά μονάδα μήκους σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο υπόγειων παράλληλων αγωγών άπειρου μήκους. Η μορφή της δίνεται παρακάτω:

$$Z_{uu} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [\mathbf{K}_0(kd) - \mathbf{K}_0(kD) + J_{uu}] \quad (2.44)$$

$$J_{uu} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-(h_1+h_2)\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} \cos(y_{AB}\lambda) d\lambda \quad (2.45)$$

όπου $k^2 = j\omega\mu_0\sigma$, ω είναι η γωνιακή συχνότητα, σ είναι η αγωγιμότητα της γης και \mathbf{K}_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου τύπου και πρώτης τάξης. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά d και D είναι η απόσταση μεταξύ των δύο

Πίνακας 2.6: Σύγκριση με τη φόρμουλα Pollaczek. Παράλληλοι αγωγοί, $f=50\text{KHz}$

Μήκος (Km)	Z_{AB} (Ohm/m), με χρήση της (2.10)
0.1	$0.060984 + 0.0462129i$
0.5	$0.052103 + 0.0548940i$
1.0	$0.050921 + 0.0560217i$
10	$0.049843 + 0.0570449i$
20	$0.049782 + 0.0571019i$
	Z_{AB} (Ohm/m), με χρήση της (2.44)
∞	$0.049722 + 0.0571590i$

Πίνακας 2.7: Σύγκριση με τη φόρμουλα Pollaczek. Παράλληλοι αγωγοί, $f=50\text{Hz}$

Μήκος (Km)	Z_{AB} (mOhm/m), με χρήση της (2.10)
0.1	$25.953 + 0.1195i$
1	$2.9000 + 0.2432i$
10	$0.3360 + 0.2832i$
100	$0.0780 + 0.2874i$
10000	$0.0500 + 0.2878i$
	Z_{AB} (mOhm/m), με χρήση της (2.44)
∞	$0.0499 + 0.2878i$

αγωγών και η απόσταση μεταξύ του πρώτου αγωγού και του ειδώλου τού δευτέρου, ενώ x είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ των αγωγών. Τα h_1 και h_2 είναι τα βάθη τοποθέτησης των δύο αγωγών. Όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 4.1 του κεφαλαίου 4, όπου υπάρχει λεπτομερής ανάλυση για την επίλυση της φόρμουλας Pollaczek. Στους Πίνακες 2.6 και 2.7 γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ της έκφρασης που αναπτύξαμε και της φόρμουλας Pollaczek, για δύο διαφορετικές τιμές της συχνότητας. Στο επάνω μέρος του κάθε πίνακα δίνονται τιμές της ανά μονάδα μήκους σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ των δύο υπόγειων παράλληλων αγωγών για διάφορα μήκη των αγωγών με χρήση της έκφρασης (2.10). Στο κάτω μέρος δίνεται η τιμή της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης με χρήση της φόρμουλας Pollaczek η οποία δίνει την αντίσταση για άπειρου μήκους αγωγούς. Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, όσο μεγαλύτερο το μήκος των αγωγών η τιμή της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συγκλίνει προς την τιμή της φόρμουλας Pollaczek. Επίσης, προκύπτει ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται πιο γρήγορα στην περίπτωση της υψηλής συχνότητας (Πίνακας 2.6) συγκριτικά με τη χαμηλή συχνότητα (Πίνακας 2.7). Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήσαμε οριζόντια απόσταση μεταξύ των αγωγών 5m, τα βάθη τοποθέτησης των αγωγών είναι 2m και 10m και η αγωγιμότητα της γης 0.01S/m.

2.9 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύξαμε και παρουσιάσαμε εκφράσεις που δίνουν την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ υπόγειων αγωγών. Η πρωτοτυπία αυτών των εκφράσεων είναι ότι ισχύουν για αγωγούς που το μήκος τους είναι πεπερασμένο και ο προσανατολισμός τους μπορεί να είναι τυχαίος. Αναπτύξαμε, σε τελική μορφή, φόρμουλες για την περίπτωση των παράλληλων και των κάθετων αγωγών, αλλά, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ αγωγών τυχαίου προσανατολισμού. Η έκφραση για τον παράλληλο προσανατολισμό επιβεβαιώθηκε ως προς την ορθότητά της με συγκρίσεις που έγιναν με την κοινώς αποδεκτή φόρμουλα του Pollaczek. Εκτός από την ανάπτυξη των εκφράσεων αυτών, προτάθηκε μια μέθοδος για την επίλυσή τους, που εμπλέκει τη χρήση ολοκληρωμάτων Sommerfeld και την τεχνική DCIM, με σκοπό τη βελτίωση του απαιτούμενου χρόνου υπολογισμού. Με τη βοήθεια της τεχνικής που αναπτύχθηκε, τα ολοκληρώματα Sommerfeld των εκφράσεων 'μετασχηματίζονται' σε ημιάπειρα ολοκληρώματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσέγγιση των προς ολοκλήρωση συναρτήσεων με αθροίσματα κατάλληλων εκθετικών συναρτήσεων. Δόθηκαν τελικές εκφράσεις για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση υπόγειων αγωγών, όπου η επίδραση της διεπιφάνειας αέρα γης υπολογίζεται με αναλυτική λύση, αποφεύγοντας την αριθμητική ολοκλήρωση και πετυχαίνοντας σημαντική βελτίωση των

χρόνων υπολογισμού που απαιτούνται.

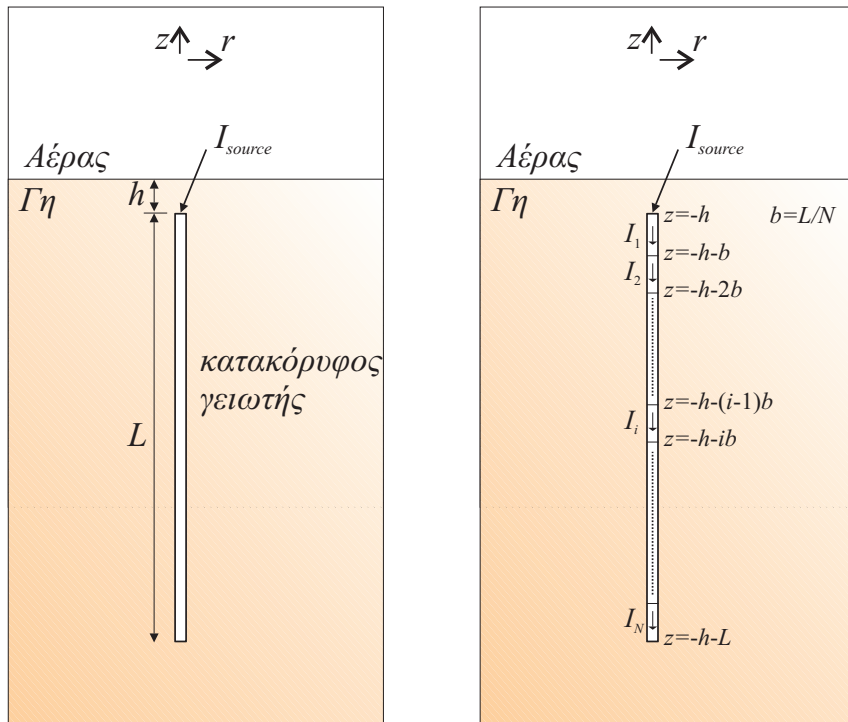
Η μέθοδος που προτείνουμε μπορεί να αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο και αποδοτικό εργαλείο, όταν εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά συστημάτων γείωσης σύνθετης γεωμετρίας [Greven and Dawalibi, 1990], [Jacqmaer and Driesen, 2006], [Arnautovski-Toseva et al., 2008]. Στις περιπτώσεις αυτές η διάταξη γείωσης διακρίτοποιείται προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος των ροπών και το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ των πολυπληθών τμημάτων με έναν τρόπο αποτελεσματικό και ταχύ.

Κεφάλαιο 3

Μελέτη χαρακτηριστικών γείωσης κατακόρυφου γειωτή

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται ο κατακόρυφος γειωτής, που αποτελεί την πιο απλή και συνηθισμένη γεωμετρία γείωσης, με τις περισσότερες εφαρμογές σε πρακτικό επίπεδο. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία χρησιμοποιείται για να διαμορφωθεί ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο που επιτρέπει τον υπολογισμό της ρευματικής κατανομής κατά μήκος του ηλεκτροδίου γείωσης. Όπως και σε όλες τις ερευνητικές ενότητες της παρούσας διατριβής, το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο έχει τον κύριο ρόλο στη διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η μέθοδος των ροπών (Method of Moments) ώστε από την ολοκληρωτική ηλεκτρομαγνητική εξίσωση να διαμορφωθεί ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων που μπορεί εύκολα να λυθεί με τη βοήθεια πινάκων [Harrington, 1993]. Η μέθοδος των ροπών έχει χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές, για την ανάπτυξη μοντέλων, με σκοπό την μελέτη μεταβατικών φαινομένων σε συστήματα γείωσης [Grcev and Dawalibi, 1990], [Jacqmaer and Driesen, 2006]. Παράλληλα με την ανάπτυξη του μοντέλου, ακολουθήθηκε και η οδός των αριθμητικών μεθόδων με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Τα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο από τους ερευνητές όλων των επιστημονικών κλάδων και αποδεικνύονται πολύ δημοφιλή για τη λύση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Για τη μελέτη της κατανομής του ρεύματος του γειωτή χρησιμοποιήσαμε ένα ειδικό λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων το COMSOL. Τα αποτελέσματα που πήραμε με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων αξιοποιήθηκαν για να γίνουν συγκρίσεις με τα αποτελέσματα που προέκυψαν με την εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύξαμε στο παρόν κεφάλαιο.



Σχήμα 3.1: Ο κατακόρυφος γειωτής χωρίζεται σε N ίσα τμήματα καθένα εκ των οποίων διαρρέεται από ρεύμα σταθερής τιμής.

3.2 Περιγραφή του προβλήματος και ανάπτυξη υπολογιστικού μοντέλου

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται η υπό εξέταση γεωμετρία. Έχουμε ένα ηλεκτρόδιο γείωσης κυκλικής διατομής με ακτίνα a και συνολικό μήκος L . Ο γειωτής είναι κατακόρυφα τοποθετημένος και εξ' ολοκλήρου βυθισμένος μέσα στη γη σε βάθος h . Η γη είναι ομοιογενής με σταθερή τιμή αγωγιμότητας σ σε όλη την έκτασή της. Στο επάνω μέρος του γειωτή εφαρμόζουμε ένα εναλλασσόμενο ρεύμα σταθερής τιμής και το ζητούμενο είναι η κατανομή του ρεύματος μέσα στο γειωτή. Το ρεύμα κατά μήκος του γειωτή δεν έχει σταθερή τιμή δεδομένης της διάχυσης ρεύματος από το γειωτή προς τη γη.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1 χωρίζουμε το γειωτή σε μικρά τμήματα, N τον αριθμό, για τα οποία θεωρούμε ότι καθένα από αυτά διαρρέεται από ρεύμα σταθερής τιμής σε όλο το μήκος του. Επίσης, θεωρούμε ότι όλο το ρεύμα που ρέει μέσα από το γειωτή είναι συγκεντρωμένο επάνω στον άξονά του (thin wire approximation). Για να υποστηριχθεί αυτή η προσέγγιση έχουμε διαλέξει μικρής διατομής γειωτή, ώστε τα επιμέρους τμήματα στα οποία τον διαιρούμε να έχουν

μεγάλο μήκος σε σχέση με τη διάμετρό τους. Τέλος, για όλη την ανάλυση που παρουσιάζουμε, έχουμε αγνοήσει την ύπαρξη των ρευμάτων μετατόπισης.

Ως πρώτο βήμα της προσέγγισης που ακολουθούμε, υπολογίζουμε την αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των επιμέρους τμημάτων του γειωτή. Το μέγεθος αυτό είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό των δυναμικών από επαγωγή επάνω στα επιμέρους τμήματα, λόγω της αλληλεπίδρασης που υπάρχει μεταξύ τους. Το δυναμικό που αναπτύσσεται κατά μήκος ενός τμήματος είναι το γινόμενο της αυτεπαγωγής του τμήματος αυτού επί το ρεύμα που διαρρέει, συν το δυναμικό που αναπτύσσεται από επαγωγή πάνω στο τμήμα αυτό. Το εξ' επαγωγής δυναμικό αναπτύσσεται λόγω της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ του υπό εξέταση τμήματος και των υπολοίπων τμημάτων που αποτελούν το γειωτή. Έτσι για το δυναμικό κατά μήκος ενός τυχαίου τμήματος i ισχύει

$$V_i = I_1 Z_{i,1} + I_2 Z_{i,2} \dots + I_i Z_{i,i} \dots + I_N Z_{i,N} \quad (3.1)$$

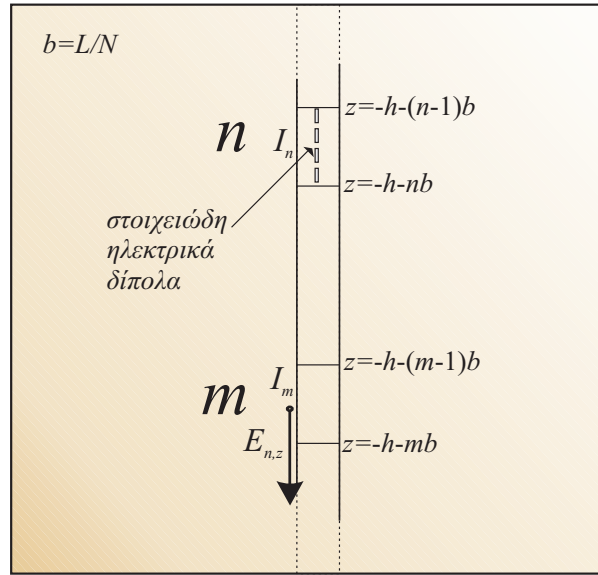
όπου I_1, I_2, \dots, I_N είναι οι σταθερές τιμές των ρευμάτων στα τμήματα $1, 2, \dots, N$, ενώ $Z_{i,1}, Z_{i,2}, \dots, Z_{i,N}$ είναι η σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των τμημάτων i και $1, i$ και 2 και ούτω καθεξής. $Z_{i,i}$ είναι η αυτεπαγωγή του τμήματος i . Η σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο τμημάτων n και m του γειωτή είναι ίση με

$$Z_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{I_n} \quad (3.2)$$

όπου $V_{m,n}$ είναι το δυναμικό από επαγωγή που αναπτύσσεται στο τμήμα m του γειωτή λόγω του ρεύματος I_n που διαρρέει το τμήμα n . Για να υπολογίσουμε το δυναμικό $V_{m,n}$ πρέπει να υπολογίσουμε τη z συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από τα ρεύματα όλων των τμημάτων του γειωτή. Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιούμε την τεχνική των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων. Στο Σχήμα 3.2 δίνουμε δύο τυχαία τμήματα του γειωτή τα n και m , όπου το ρεύμα του κάθε τμήματος έχει αντικατασταθεί από μία σειρά στοιχειωδών ηλεκτρικών δίπολων. Όπως περιγράψαμε αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής, η z συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, σε σημείο παρατήρησης μέσα στη γη, που παράγεται από κατακόρυφο στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο τοποθετημένο επίσης μέσα στη γη, δίνεται από την περίπτωση α του Πίνακα 1.1 και είναι:

$$E_z = \frac{i\omega\mu_0 p}{4\pi k_E^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_E^2 \right) (G_{11} - G_{12} + k^2 V_{11}) \right] \quad (3.3)$$

όπου ω είναι η συχνότητα, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και p είναι η ροπή του δίπολου, που είναι ίση με το γινόμενο του ρεύματος του δίπολου επί το μήκος του. k_E και k είναι οι κυματάρθρωμοι της γης και του αέρα και λόγω του ότι αγνοούμε τα ρεύματα μετατόπισης είναι $k_E^2 = i\omega\mu\sigma$ και $k = 0$, ενώ σ είναι η



Σχήμα 3.2: Το ηλεκτρικό πεδίο $E_{n,z}$ στην επιφάνεια του τμήματος m που προκαλείται από τα στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα του τμήματος n .

αγωγιμότητα της γης. Ο όρος V_{11} έχει τη μορφή ημίσειου ολοκληρώματος και εκφράζει την επίδραση της διεπιφάνειας γης-αέρα, σχέση (1.35). Ο όρος αυτός μηδενίζεται εξαιτίας του κυματάρθμου της γης. G_{11} και G_{12} είναι οι γνωστές συναρτήσεις Green που μας δίνουν το πεδίο της πηγής και της εικόνας αυτής στην περίπτωση του άπειρα εκτεινόμενου χώρου. Για την πηγή είναι

$$G_{11} = \frac{e^{ik_E R_1}}{R_1} \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad (3.4)$$

Ενώ για την εικόνα της πηγής

$$G_{12} = \frac{e^{ik_E R_2}}{R_2} \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z')^2} \quad (3.5)$$

Στα R_1 και R_2 χρησιμοποιούμε για την ακτινική συντεταγμένη $r = a$ λόγω του ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αξονική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του γειωτή. Η μεταβλητή z' εκφράζει τη θέση της πηγής. Για να υπολογίσουμε τη συνολική αξονική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το τμήμα n του γειωτή, ολοκληρώνουμε την (3.3) κατά μήκος όλου του τμήματος για να συνυπολογίσουμε τη συνεισφορά όλων των διπόλων που περιλαμβάνονται στο τμήμα. Το ρεύμα για όλο το τμήμα είναι στα-

θερό και ίσο με I_n , οπότε

$$E_{n,z} = \frac{i\omega\mu_0 I_n}{4\pi k_E^2} \int_{z'=-h-(n-1)b}^{z'=-h-nb} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k_E^2 \right) (G_{11} - G_{12}) dz' \quad (3.6)$$

Αυτή η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, υπολογισμένη στην επιφάνεια ενός άλλου τμήματος m (Σχήμα 3.2), προκαλεί από επαγωγή την ανάπτυξη ενός δυναμικού $V_{m,n}$ το οποίο είναι ίσο με

$$V_{m,n} = - \int_{z=-h-(m-1)b}^{z=-h-mb} E_{n,z} dz \quad (3.7)$$

Τώρα που γνωρίζουμε την τιμή του $V_{m,n}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.2) για να βρούμε τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των τμημάτων m και n , ήτοι

$$Z_{m,n} = - \frac{i\omega\mu_0}{4\pi k_E^2} \int_{z=-h-(m-1)b}^{z=-h-mb} \int_{z'=-h-(n-1)b}^{z'=-h-nb} \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k_E^2 \right) (G_{11} - G_{12}) dz' dz \quad (3.8)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη γνωστή οριακή συνθήκη της μηδενικής επαπτομενικής συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του γειωτή, λόγω του ότι ο γειωτής είναι κατασκευασμένος από τέλεια αγώγιμο υλικό. Το γεγονός της μηδενικής συνολικής επαπτομενικής συνιστώσας στην επιφάνεια ενός τυχαίου τμήματος i του γειωτή συνεπάγεται μηδενικό δυναμικό κατά μήκος του τμήματος i , ήτοι $V_i = 0$ για την (3.1). Εφαρμόζοντας την (3.1) για κάθε ένα από τα N τμήματα στα οποία έχουμε χωρίσει το γειωτή, προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$[Z] [I] = [B] \quad (3.9)$$

όπου

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} I_{source} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του $N \times N$ πίνακα $[Z]$ τα υπολογίζουμε από την (3.8). Κατά την υλοποίηση του κώδικα για τον υπολογισμό του πίνακα, αξιοποιούμε τις συμμετρίες που υπάρχουν στα στοιχεία του, ώστε να μειώσουμε στο ελάχιστο τις αριθμητικές

ολοκληρώσεις που απαιτούνται για τη συμπλήρωση των στοιχείων του. Εκτός από τη διαγώνια συμμετρία που παρουσιάζει ο πίνακας, τα στοιχεία του είναι διαφορά ή άθροισμα των z και z' . Ο αριθμός των μοναδικών στοιχείων που απαιτούνται για τη διαφορά των z είναι N ενώ για το άθροισμά τους είναι $2N + 1$. Το αποτέλεσμα είναι ότι τελικά αντί για N^2 διαφορετικές ολοκληρώσεις, αρκούν μόνο $N + (2N + 1)$ για τη συμπλήρωση των στοιχείων του πίνακα $[Z]$.

Τελικά ο πίνακας $[I]$, που μας δίνει την κατανομή των ρευμάτων κατά μήκος του γειωτή, υπολογίζεται με τη βοήθεια του αντίστροφου πίνακα $[Z]$, ήτοι

$$[I] = [Z]^{-1} [B] \quad (3.10)$$

Στην περίπτωση που το ηλεκτρόδιο γείωσης δεν είναι τέλειος αγωγός, η επαπτομενική στην επιφάνεια του γειωτή συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι μηδέν, με αποτέλεσμα την εμφάνιση δυναμικού κατά μήκος των επιμέρους τμημάτων. Σε αυτήν την περίπτωση το V_i της (3.1) δεν είναι μηδέν, αλλά ίσο με το γινόμενο του ρεύματος του συγκεκριμένου τμήματος επί την εσωτερική σύνθετη αντίσταση του τμήματος αυτού, ήτοι

$$V_i = I_i Z_s b \quad (3.11)$$

Z_s είναι η ανά μονάδα μήκους σύνθετη εσωτερική αντίσταση αγωγού κυκλικής διατομής και η τιμή της δίνεται παρακάτω [Stratton, 1941], ενώ b είναι το μήκος του κάθε επιμέρους τμήματος του γειωτή.

$$Z_s = \frac{\lambda}{2\pi\alpha(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)} \frac{J_0(\lambda\alpha)}{J_1(\lambda\alpha)} \quad (3.12)$$

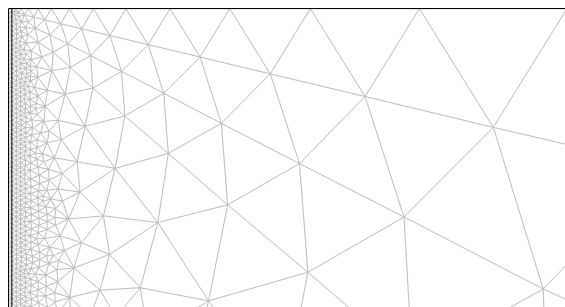
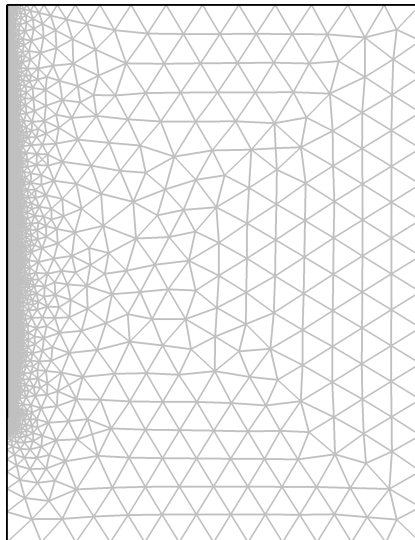
$$\lambda = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1), \quad \epsilon_i = \epsilon_i + \frac{\sigma_i}{j\omega}, \quad i = 1, 2$$

J_0 και J_1 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα, σ_2 είναι η αγωγιμότητα του γειωτή, ϵ_2 είναι η ηλεκτρική διαπερατότητα του γειωτή ενώ α είναι η ακτίνα του. σ_1 και ϵ_1 είναι τα αντίστοιχα μεγέθη της γης.

Τα στοιχεία του πίνακα $[B]$ πρέπει να τροποποιηθούν και να ενσωματώσουν αυτήν την εσωτερική πτώση τάσης λόγω της σύνθετης αντίστασης του γειωτή. Στον κώδικα που αναπτύξαμε διατηρήσαμε τον πίνακα $[B]$ ως έχει και ενσωματώσαμε την πτώση τάσης στον πίνακα $[Z]$, προσθέτοντας στα διαγώνια στοιχεία της αυτεπαγωγής τού κάθε τμήματος τον όρο $Z_s b$.

3.3 Υπολογισμός με πεπερασμένα στοιχεία

Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της κατανομής των ρευμάτων στον κατακόρυφο γειωτή πραγματοποιήσαμε τους υπολογισμούς της κατανομής των ρευμάτων κατά μήκος του γειωτή με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων



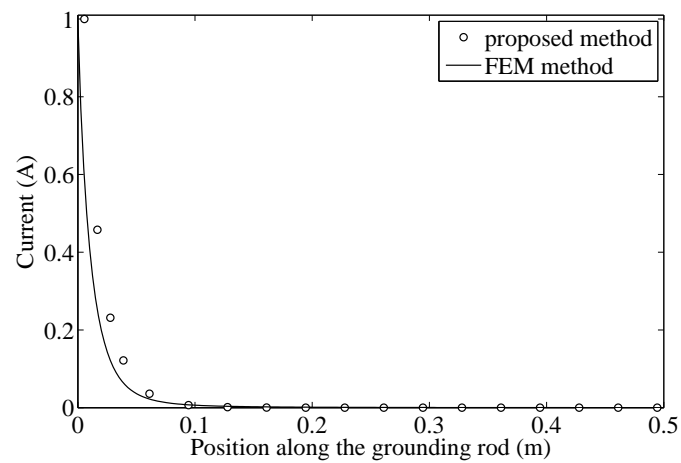
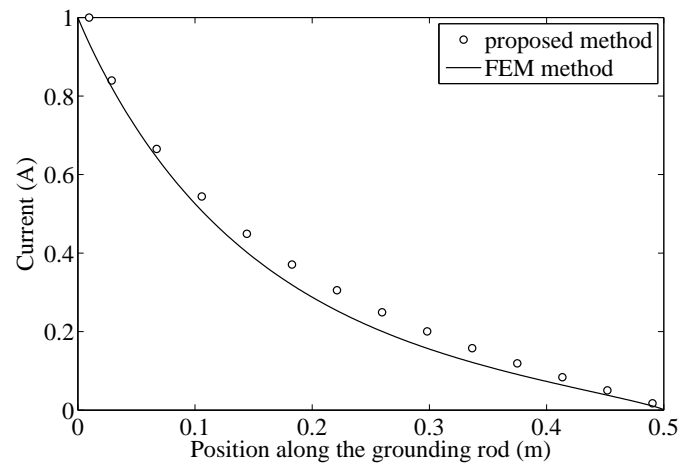
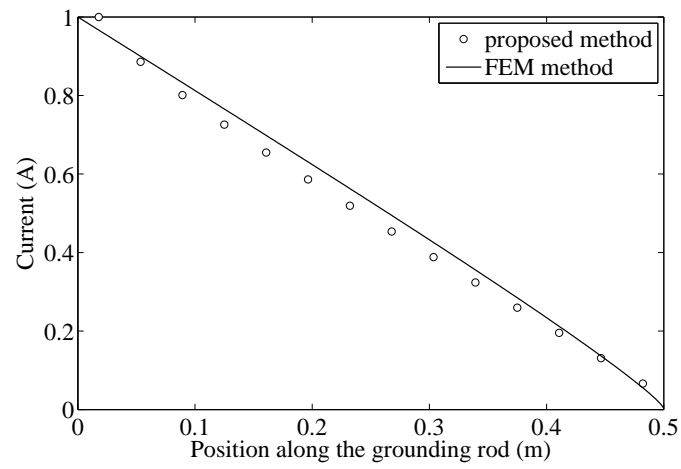
Σχήμα 3.3: Η συνολική γεωμετρία του προβλήματος με το πλέγμα διακριτοποίησης. Ο γειωτής βρίσκεται στην αριστερή ακμή της γεωμετρίας. Στο κάτω σχήμα δίνεται λεπτομέρεια του πλέγματος στο άνω τμήμα του γειωτή.

στοιχείων (FEM method). Το γνωστό λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων COMSOL χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς μας. Αρχικά, σχεδιάστηκε η γεωμετρία του προβλήματος και ορίστηκαν τα ηλεκτρομαγνητικά χαρακτηριστικά της περιοχής του γειωτή και της γης. Στη συνέχεια, έγινε η διακριτοποίηση του χώρου και η παραγωγή του πλέγματος με τη χρήση ειδικής λειτουργίας του προγράμματος. Η συμμετρία που παρουσιάζει το πρόβλημα σε σχέση με τον άξονα του γειωτή αξιοποιήθηκε ώστε να λυθεί το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις προκειμένου να έχουμε μικρό αριθμό κόμβων και να πετύχουμε χαμηλούς υπολογιστικούς χρόνους. Στο Σχήμα 3.3 φαίνεται η γεωμετρία του γειωτή μαζί με το πλέγμα διακριτοποίησης του χώρου. Στη συγκεκριμένη γεωμετρία η επάνω επιφάνεια του γειωτή έχει τοποθετηθεί στο ίδιο ύψος με την επιφάνεια της γης, ήτοι $h = 0$. Όπως φαίνεται από το σχήμα, το πλέγμα που προέκυψε είναι πολύ πυκνό κοντά στην επιφάνεια του γειωτή, όπου οι μεταβολές των φυσικών μεγεθών είναι έντονες, ενώ γίνεται όλο και πιο αραιό όσο απομακρυνόμαστε από το γειωτή. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι τύπου quadratic και ο αριθμός τους είναι 2.134 με 19.748 βαθμούς ελευθερίας. Ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος είναι 1,2sec σε έναν συνηθισμένο ηλεκτρονικό υπολογιστή.

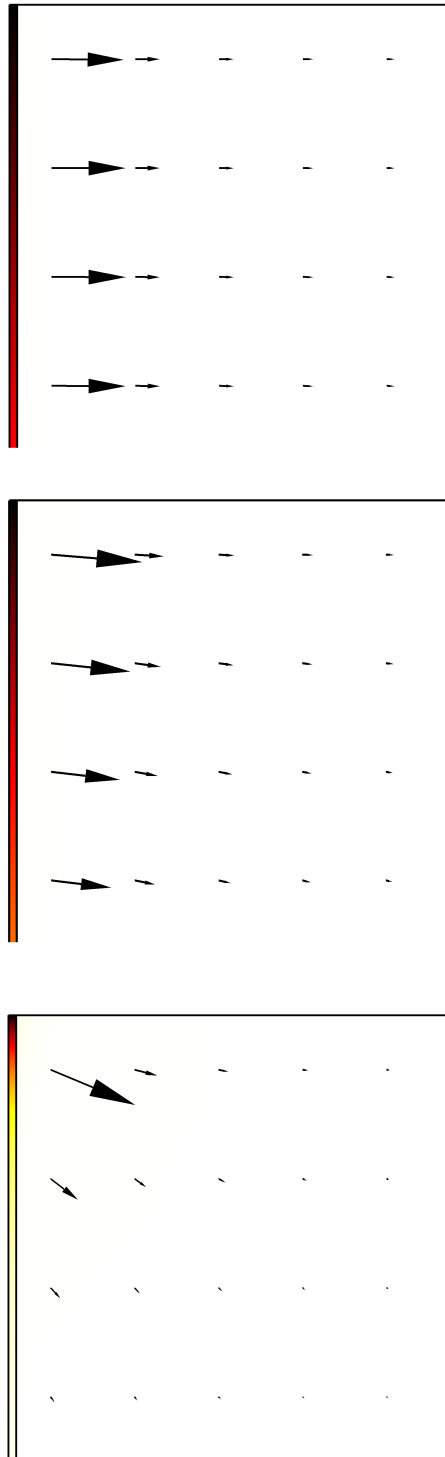
3.4 Αποτελέσματα - Συμπεράσματα

Οι υπολογισμοί που πραγματοποιήσαμε αφορούν τη ρευματική κατανομή του γειωτή. Ένα ρεύμα σταθερής τιμής εφαρμόζεται στην οριακή επιφάνεια στο επάνω μέρος του γειωτή και το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός των τιμών του ρεύματος κατά μήκος του γειωτή, δεδομένης της διάχυσης ρεύματος που υπάρχει από το γειωτή προς τη γη. Θεωρούμε ότι η γη είναι ομοιογενής με σταθερή τιμή της αγωγιμότητας σε όλη την έκτασή της $\sigma = 0.01\text{S/m}$. Σε όλους τους υπολογισμούς έχουμε επιλέξει γειωτή ακτίνας 1mm και μήκους 0.5m. Ο γειωτής είναι τοποθετημένος με την επάνω επιφάνειά του στην ίδια στάθμη με την επιφάνεια της γης ($h=0$).

Στο Σχήμα 3.4 έχουμε τα ρεύματα κατά μήκος του γειωτή με χρήση της προτεινόμενης μεθόδου, καθώς και με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων. Δίνονται τρία διαγράμματα, όπου στο πρώτο ο γειωτής θεωρείται κατασκευασμένος από υλικό πάρα πολύ υψηλής αγωγιμότητας με $\sigma = 1 \cdot 10^8\text{S/m}$. Για λόγους επιβεβαίωσης της ορθότητας της μεθόδου, πραγματοποιήσαμε και δύο ακόμα προσομοιώσεις για την υποθετική περίπτωση που ο γειωτής είναι κατασκευασμένος από υλικό χαμηλής αγωγιμότητας ή την περίπτωση που έχει υποστεί κάποια φθορά και έχουν αλλοιωθεί τα χαρακτηριστικά της αγωγιμότητάς του. Στο δεύτερο και τρίτο διάγραμμα η αγωγιμότητα του γειωτή είναι $\sigma = 1 \cdot 10^2\text{S/m}$ και $\sigma = 1 \text{S/m}$ αντίστοιχα. Και από τα τρία διαγράμματα προκύπτει αρκετά καλή συμφωνία μεταξύ της μεθόδου που αναπτύξαμε και της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.4: Κατανομή του ρεύματος κατά μήκος του γειωτή. Αγωγιμότητα γειωτή $\sigma = 1 \cdot 10^8 \text{ S/m}$ (επάνω), $\sigma = 1 \cdot 10^2 \text{ S/m}$ (ενδιάμεσα) και $\sigma = 1 \text{ S/m}$ (κάτω).



Σχήμα 3.5: Τα ρεύματα διάχυσης από το γειωτή προς τη γη. Αγωγιμότητα γειωτή $\sigma = 1 \cdot 10^8 \text{ S/m}$ (επάνω), $\sigma = 1 \cdot 10^2 \text{ S/m}$ (ενδιάμεσα) και $\sigma = 1 \text{ S/m}$ (κάτω).

Όπως φαίνεται στο ενδιάμεσο γράφημα του Σχήματος 3.4, η μείωση του ρεύματος τώρα δεν είναι γραμμική, αλλά είναι ταχύτερη στα πρώτα τμήματα του γειωτή. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι τώρα οι αγωγιμότητες των δύο υλικών, γειωτή και γης, έχουν αποκτήσει σχετικά ανάλογες τιμές και η διάχυση του ρεύματος προς τη γη είναι πιο γρήγορη στην περιοχή κοντά στο σημείο που εφαρμόζουμε το ρεύμα διέγερσης, δηλαδή στο επάνω μέρος του γειωτή. Ακόμα πιο έντονα φαίνεται αυτό στο κάτω διάγραμμα του Σχήματος 3.4, όπου τώρα $\sigma = 1\text{S/m}$ και πλέον το ρεύμα σχεδόν δεν ακολουθεί την όδευση του γειωτή αλλά διαχέεται σχεδόν αμέσως από το σημείο εφαρμογής του προς τη γη. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 3.5 όπου δίνουμε τα ρεύματα διάχυσης από το γειωτή προς τη γη για τις τρεις περιπτώσεις αγωγιμότητας του γειωτή. Το μέγεθος από τα βέλη που δείχνουν το ρεύμα είναι ανάλογο με το μέτρο των ρευμάτων. Επίσης στα διαγράμματα αυτά, μπορεί κάποιος να διακρίνει το μέρος του γειωτή που είναι “ενεργό” κάθε φορά, με τη βοήθεια της σκουρόχρωμης διαβάθμισης.

Με το παρόν κεφάλαιο προτείνουμε έναν τρόπο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των συστημάτων γείωσης. Η μέθοδος που προτείνουμε στηρίζεται στο διαχωρισμό της διάταξης γείωσης σε επιμέρους τμήματα που διαρρέονται από ρεύματα σταθερής τιμής και στη συνέχεια στον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ των τμημάτων. Η τεχνική των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων χρησιμοποιείται για αυτόν τον σκοπό. Στη συνέχεια, με την επιβολή οριακών συνθηκών, διαμορφώνουμε το απαραίτητο σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε μορφή πινάκων. Η λύση του συστήματος αυτού μας δίνει τις τιμές των επιμέρους ρευμάτων των τμημάτων της διάταξης γείωσης. Γνωρίζοντας κάποιος τα ρεύματα αυτά, μπορεί να υπολογίσει όλα τα μεγέθη που μπορεί να ενδιαφέρουν, όπως το ηλεκτρικό πεδίο στη γη και τα ρεύματα διάχυσης προς τη γη. Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται σε γειτονικές περιοχές του συστήματος γείωσης για την εξέταση πιθανών αλληλεπιδράσεών του με άλλα συστήματα. Παρόλο που στο παρόν κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την απλή περίπτωση του κατακόρυφου γειωτή, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα γείωσης σύνθετης γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 4

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson για τη σύνθετη αντίσταση υπόγειων και εναέριων αγωγών με επιστροφή γης

4.1 Εισαγωγή - βιβλιογραφία

Η γνώση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ υπόγειων αγωγών, εναέριων αγωγών ή συνδυασμού αυτών, έχει ιδιαίτερη σημασία για τον επιστημονικό κλάδο των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας για τη μελέτη των γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Επίσης, η γνώση της αμοιβαίας αντίστασης είναι απαραίτητη για τη μελέτη προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας, που κυρίως εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μεταβατικών φαινομένων.

Το 1926 ο Pollaczek ανέπτυξε μαθηματικές εκφράσεις για να υπολογίσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που προκαλείται από υπόγειο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε έδαφος πεπερασμένης αγωγιμότητας [Pollaczek, 1926]. Την επόμενη χρονιά ο Pollaczek παρουσίασε την ευρέως γνωστή φόρμουλα για τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ εναέριου και υπόγειου αγωγού ή μεταξύ αποκλειστικά υπόγειων αγωγών με επιστροφή γης [Pollaczek, 1927]. Την ίδια χρονική περίοδο ο Carson προτείνει τη δική του πολύ διαδεδομένη φόρμουλα για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης εναερίων γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας με επιστροφή γης [Carson, 1926]. Οι φόρμουλες αυτές έχουν τη μορφή άπειρου ολοκληρώματος και ο ακριβής υπολογισμός τους συγκεντρώνει μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον μέχρι και σήμερα.

Ιστορικά, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson ακολουθεί την εξέλιξη των διαθέσιμων κάθε φορά υπολογιστικών εργαλείων. Μέχρι τη

δεκαετία του 1980 η απουσία τέτοιων εργαλείων οδήγησε στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων, ενώ αργότερα η πρόοδος στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές μαζί με την εξέλιξη των διαθέσιμων αλγορίθμων έκανε εφικτή την απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση των ολοκληρωμάτων. Η ακρίβεια των προσεγγιστικών εκφράσεων είναι ικανοποιητική για πρακτικές εφαρμογές και αυτές γνώρισαν μεγάλη αποδοχή κυρίως λόγω της απλότητάς τους. Υπάρχουν πολλές επιστημονικές δημοσιεύσεις που προτείνουν προσεγγιστικές εκφράσεις για τον υπολογισμό της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης αγωγών [Wedepohl and Wilcox, 1973], [Takahashi et al., 1982], [Saad et al., 1996]. Στην [Petrache et al., 2005] παρουσιάζονται διάφορες προσεγγιστικές εκφράσεις για την αυτεπαγωγή αγωγών με επιστροφή γης και προτείνεται μια νέα λογαριθμική προσεγγιστική φόρμουλα. Στην [Ametani et al., 2009] γίνεται εκτενής ανάλυση του ολοκληρώματος Pollaczek και παρουσιάζεται μια προσεγγιστική φόρμουλα για τον υπολογισμό του.

Ο αριθμητικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson παρουσιάζει δυσκολίες που σχετίζονται με την ανάγκη για πρόβλεψη του κατάλληλου σημείου αποκοπής στη διαδρομή ολοκλήρωσης. Επίσης, προκύπτουν προβλήματα σύγκλισης που σχετίζονται με την τάση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης για ταλάντωση, ειδικά όταν υπάρχει μεγάλη απόσταση μεταξύ των υπό εξέταση αγωγών. Παρόλα αυτά όμως οι μοντέρνοι αλγόριθμοι που είναι ενσωματωμένοι στα υπολογιστικά εμπορικά πακέτα διαθέτουν αυτόματες ρουτίνες ολοκλήρωσης οι οποίες δεν χρειάζονται προηγούμενη γνώση της συμπεριφοράς των ολοκληρωμάτων. Έτσι δεν απαιτείται πλέον να καθοριστεί το σημείο αποκοπής του ολοκληρώματος. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τη ρουτίνα `quadgk` του Matlab και την `Integrate` της Mathematica. Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις, όταν χρησιμοποιούμε μεγάλες τιμές για τις παραμέτρους των ολοκληρωμάτων, όπως μεγάλη απόσταση μεταξύ των αγωγών, οι ρουτίνες αυτές μπορεί να αποτύχουν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Υπάρχουν πολλές επιστημονικές δημοσιεύσεις που υπολογίζουν το ολοκλήρωμα Pollaczek με τρόπο αριθμητικό [Nguyen, 1998], [Papagiannis et al., 2005], [Zou et al., 2009], [Zou et al., 2011]. Στην [Uribe et al., 2004] γίνεται εκτεταμένη ανάλυση του ολοκληρώματος Pollaczek, προτείνεται ένας αριθμητικός αλγόριθμος και παρουσιάζονται λύσεις του ολοκληρώματος σε γραφική μορφή. Στις δημοσιεύσεις [Uribe, 2005] και [Uribe, 2008] παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ εναέριων και υπόγειων γραμμών και γίνονται συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με αποτελέσματα που προκύπτουν από προσεγγιστικές φόρμουλες που έχουν προταθεί από άλλους ερευνητές. Στη δημοσίευση [Zou et al., 2011] ορίζεται ένα σημείο αποκοπής και η απόληξη του ολοκληρώματος υπολογίζεται αναλυτικά με μορφή εκθετικού ολοκληρώματος. Μια άλλη τεχνική ολοκλήρωσης παρουσιάζεται στην [Wedepohl and Wilcox, 1973] καθώς και στην [Noda, 2008] όπου το άπειρο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε πεπερασμένο με τη βοήθεια ενός κατάλληλου μετασχηματισμού της μεταβλητής

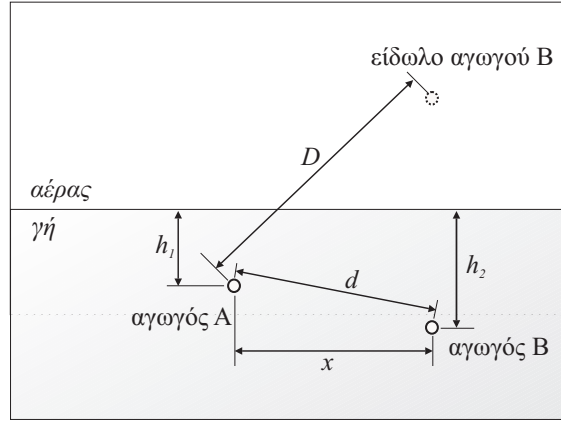
ολοκλήρωσης. Αυτή η τεχνική δείχνει να λειτουργεί καλά αλλά δεν αποφεύγει την τάση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης για ταλάντωση. Επίσης έχουν προταθεί τεχνικές για την αριθμητική ολοκλήρωση του ολοκληρώματος Pollaczek που βασίζονται στη μέθοδο Monte-Carlo [Vahidi et al., 2008] καθώς και σε συνδυασμό της Monte-Carlo με τις σειρές Van Der Corput [Legrand et al., 2008]. Στην [Tsiमितros et al., 2008] γίνεται ο υπολογισμός της σύνθετης αντίστασης για την περίπτωση που η γη δεν είναι ομογενής αλλά αποτελείται από στρώματα με διαφορετικές ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες. Επίσης έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης επιστροφής γης σε περιπτώσεις όπου η γη παρουσιάζει ασυνέχειες ή άλλου είδους ασυμμετρίες [Triantafyllidis et al., 1999]. Σε πρόσφατη δημοσίευση παρουσιάστηκαν τρεις αναλυτικές εκφράσεις του ολοκληρώματος Pollaczek σε μορφή συγκλινουσών σειρών παρά την επικρατούσα άποψη ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν έχει αναλυτική λύση [Theodoulidis, 2012].

Σχετικά με το ολοκλήρωμα του Carson έχει ακολουθηθεί ανάλογη πορεία με προσπάθεια ανάπτυξης προσεγγιστικών εκφράσεων αρχικά και ανάπτυξη αλγόριθμων για αριθμητική λύση του ολοκληρώματος αργότερα. Στη δημοσίευση [Rachidi et al., 1999] παρουσιάζεται μια λογαριθμική προσέγγιση του ολοκληρώματος για το σχηματισμό του πίνακα σύνθετων αντιστάσεων μιας εναέριης γραμμής μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας που αποτελείται από πολλούς αγωγούς. Στη [Noda, 2005] παρουσιάζεται μια απλοποιημένη φόρμουλα για τη σύνθετη αντίσταση εναέριων παράλληλων αγωγών, βασιζόμενη σε διπλή λογαριθμική προσέγγιση του ολοκληρώματος Carson. Στη [Ramirez and Uribe, 2007] παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την αριθμητική ολοκλήρωση του εν λόγω ολοκληρώματος που βασίζεται στη μέθοδο της τραπεζοειδούς ολοκλήρωσης. Τέλος, στην [Leanos et al., 2008] γίνεται αξιολόγηση σε μερικές από τις πιο δημοφιλείς προσεγγιστικές μεθόδους για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης επιστροφής γης και προτείνεται ένας αλγόριθμος για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος που συνδυάζει δυο διαφορετικές τεχνικές ολοκλήρωσης.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την επίλυση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και Carson με χρήση της μεθόδου Discrete Complex Images. Η μέθοδος αυτή εξηγήθηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 όπου εφαρμόστηκε εναλλακτικά για τον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών πεπερασμένου μήκους.

4.2 Τα ολοκληρώματα Pollaczek

Ο Pollaczek ανέπτυξε εκφράσεις που μας δίνουν τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών καθώς και μεταξύ ενός υπόγειου και ενός εναέριου αγωγού. Σε όλες τις περιπτώσεις οι αγωγοί είναι παράλληλοι μεταξύ τους



Σχήμα 4.1: Τομή της γεωμετρίας για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης δύο υπόγειων αγωγών.

και έχουν άπειρο μήκος. Για την πρώτη περίπτωση η έκφραση έχει την παρακάτω μορφή

$$Z_{uu} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [\mathbf{K}_0(kd) - \mathbf{K}_0(kD) + J_{uu}] \quad (4.1)$$

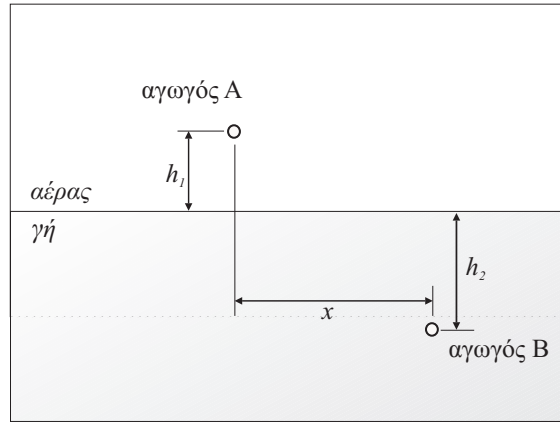
όπου $k^2 = j\omega\mu_0\sigma$, ω είναι η γωνιακή συχνότητα, σ είναι η αγωγιμότητα της γης και \mathbf{K}_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους και πρώτης τάξης. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά d και D είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αγωγών και η απόσταση μεταξύ του πρώτου αγωγού και του ειδώλου του δεύτερου, ενώ x είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ των αγωγών. Όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 4.1.

Το J_{uu} είναι το γνωστό ολοκλήρωμα Pollaczek και μετά από μερικούς απλούς μετασχηματισμούς παίρνει την παρακάτω μορφή

$$J_{uu} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-(h_1+h_2)\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.2)$$

Τα h_1 και h_2 είναι τα βάθη τοποθέτησης των δύο αγωγών και ισχύει $\gamma = \sqrt{\lambda^2+k^2}$. Το ολοκλήρωμα J_{uu} έχει ακριβή αναλυτική λύση με μορφή συγκλίνουσας σειράς, η οποία δίνεται παρακάτω [Theodoulidis, 2012]

$$J_{uu} = \frac{H^2 - x^2}{2R^4} \exp(-kH)(1 + kH) + 2\sqrt{2} \frac{kxH}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^{2n}n!} (1 - H/R)^{n+1/2} \\ \times \{ {}_1F_1 [1, n + 3/2, -k(R - H)] \left[1 - \frac{kR}{2} \frac{2n-1}{2n+1} \right] - 1 \}$$



Σχήμα 4.2: Τομή της γεωμετρίας για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης ενός εναέριου και ενός υπόγειου αγωγού.

όπου $H = h_1 + h_2$, $R = \sqrt{x^2 + H^2}$, $z = k(R - H)/2$, $Z = k(R + H)/2$ ενώ ${}_1F_1(1, n + 3/2; y)$ είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Τα διπλά παραγοντικά στην προηγούμενη έκφραση είναι το γινόμενο των ακεραίων με $(-3)!! = -1$ και $(-1)!! = 1$ εξ ορισμού.

Η αντίστοιχη έκφραση Pollaczek για την περίπτωση υπόγειου και εναέριου αγωγού έχει την παρακάτω μορφή

$$Z_{ua} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} J_{ua} \quad (4.3)$$

όπου το ολοκλήρωμα Pollaczek δίνεται παρακάτω

$$J_{ua} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-h_1\lambda - h_2\sqrt{\lambda^2 + k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.4)$$

Η γεωμετρία για αυτή την περίπτωση δίνεται στο Σχήμα 4.2.

4.3 Λύση των ολοκληρωμάτων Pollaczek με χρήση της μεθόδου DCIM

4.3.1 Υπόγειοι αγωγοί

Στην ενότητα 2.4 του κεφαλαίου 2 αναπτύχθηκε αναλυτικά η εφαρμογή της μεθόδου Discrete Complex Images. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, εκφράζουμε τη συνάρτηση του παρανομαστή της (4.2) σαν άθροισμα εκθετικών ως προς γ

($\gamma = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$), ήτοι

$$\frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \approx \sum_N c_n e^{s_n \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \quad (4.5)$$

Οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n προσδιορίζονται με χρήση της μεθόδου GPOF. Για να μπορέσουμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση του παρανομαστή ως άθροισμα εκθετικών του γ , κάνουμε δειγματοληψία του γ στο διάστημα $[0, 1]$ όπως προκύπτει από τη γραμμική εξάρτηση ως προς μια πραγματική παράμετρο t , σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\gamma = P_a t + P_b, \quad P_a = \sqrt{k^2 + T_0^2} - k, \quad P_b = k, \quad t \in [0, 1] \quad (4.6)$$

Το οριακό σημείο T_0 έχει επιλεγεί ίσο με $10|k|$, ενώ η δειγματοληψία της συνάρτησης του παρανομαστή έχει γίνει για 100 σημεία. Το πλήθος των όρων του αθροίσματος των εκθετικών το επιλέγουμε ίσο με 14. Τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο GPOF για τον προσδιορισμό των πόλων s_n και υπολοίπων c_n της (4.5). Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος της αρχικής συνάρτησης του παρανομαστή και της προσέγγισης του αθροίσματος των εκθετικών. Όπως προκύπτει από τα γραφήματα η προσέγγιση που επιτυγχάνεται με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούμε είναι πάρα πολύ ακριβής. Τώρα το ολοκλήρωμα Pollaczek (4.2) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$J_{uu} = 2 \int_0^\infty \sum_n c_n e^{-(h_1 + h_2 - s_n) \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.7)$$

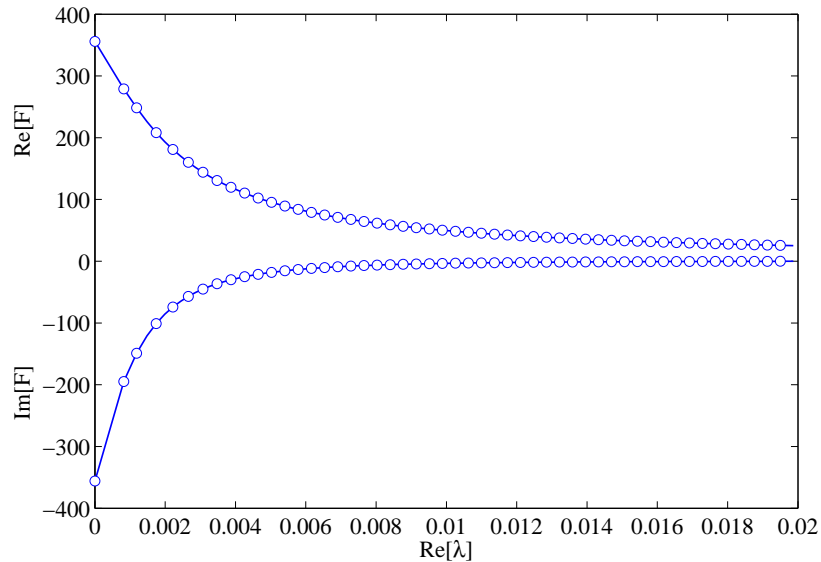
Στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω γνωστή αναλυτική λύση [Gradshteyn and Ryzhik, 2007].

$$\int_0^\infty e^{-\beta \sqrt{\gamma^2 + x^2}} \cos(bx) dx = \frac{\beta \gamma}{\sqrt{\beta^2 + b^2}} \mathbf{K}_1(\gamma \sqrt{\beta^2 + b^2}) \quad (4.8)$$

Τελικά το ολοκλήρωμα Pollaczek είναι ίσο με το παρακάτω άθροισμα

$$J_{uu} = \sum_n \frac{2c_n k H_n}{\sqrt{H_n^2 + x^2}} \mathbf{K}_1\left(k \sqrt{H_n^2 + x^2}\right), \quad H_n = h_1 + h_2 - s_n \quad (4.9)$$

Το μέγεθος H_n είναι πλέον μια μιγαδική απόσταση. Αυτό που έχουμε καταφέρει με τη μέθοδο Discrete Complex Images είναι να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα Pollaczek σε ένα κατάλληλο ολοκλήρωμα με γνωστή αναλυτική λύση την οποία στη συνέχεια εφαρμόσαμε ώστε να πάρουμε τελικά το παραπάνω άθροισμα. Το πλήθος των όρων του αθροίσματος δεν είναι μεγάλο και η πράξη έδειξε

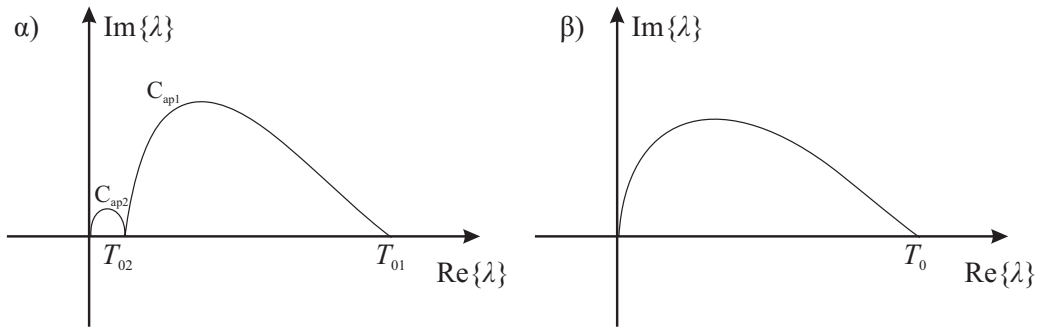


Σχήμα 4.3: Συνάρτηση του κλάσματος του ολοκληρώματος Pollaczek (συνεχόμενη γραμμή) και προσέγγιση με το άθροισμα των εκθετικών (κυκλάκια), πραγματικό και φανταστικό μέρος, $f=50\text{Hz}$, $\sigma=0.01$.

ότι για τις περισσότερες περιπτώσεις είναι αρκετό ένα πλήθος οκτώ με δέκα όρων. Για περιπτώσεις που θελήσαμε μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιήσαμε μέχρι και δεκατέσσερις όρους.

Όπως μπορούμε να δούμε από την (4.5), η συνάρτηση που προσεγγίσαμε δεν περιέχει χαρακτηριστικά της γεωμετρίας που εξετάζουμε και επομένως οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n που υπολογίσαμε είναι ανεξάρτητες από αυτά. Με αυτόν τον τρόπο οι τιμές των c_n και s_n αρκεί να υπολογιστούν μόνο μια φορά για συγκεκριμένη αγωγιμότητα γης σ . Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για διάφορα βάθη τοποθέτησης των αγωγών και μεταξύ τους απόσταση χρησιμοποιώντας την τελική έκφραση (4.9) χωρίς να χρειάζεται να υπολογίζουμε εκ νέου τους συντελεστές c_n και s_n .

Επίλυση με τεχνική GPOF δύο επιπέδων Παρά την πολύ καλή προσέγγιση της συνάρτησης του παρανομαστή του ολοκληρώματος Pollaczek που πετυχαίνουμε με τη χρήση της τεχνικής GPOF για τον προσδιορισμό των c_n και s_n , εφαρμόστηκε επιπλέον η τεχνική της GPOF δύο επιπέδων που αποτελεί μια βελτιωμένη παραλλαγή της GPOF. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία ως προς την επιλογή του ορίου δειγματοληψίας T_0 και εξασφαλίζει την πιο ακριβή προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης. Εδώ επιλέγουμε δύο οριακά σημεία το T_{02} και



Σχήμα 4.4: α) καμπύλη δειγματοληψίας για GPOF δύο επιπέδων β) καμπύλη δειγματοληψίας για απλή GPOF

το T_{01} και η χαρτογράφηση του γ ως προς την πραγματική παράμετρο t γίνεται για τις δύο διαφορετικές περιοχές σύμφωνα με τις παρακάτω εκφράσεις.

$$\gamma = P_a t + P_b, \quad t \in [0, 1]$$

$$C_{ap1} : \quad P_a = \sqrt{T_{01}^2 + k^2} + \sqrt{T_{02}^2 + k^2}, \quad P_b = \sqrt{k^2 + T_{02}^2}$$

$$C_{ap2} : \quad P_a = \sqrt{T_{02}^2 + k^2}, \quad P_b = k$$

Οι τιμές του λ που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία είναι μιγαδικές. Η διαδρομή δειγματοληψίας που προκύπτει δίνεται στο Σχήμα 4.4. Στο ίδιο σχήμα δίνεται και η καμπύλη δειγματοληψίας για την περίπτωση της απλής GPOF τεχνικής.

Τα αποτελέσματα που πήραμε με την περιγραφόμενη μέθοδο δίνονται στους παρακάτω πίνακες. Τα αποτελέσματα αφορούν τον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης δυο υπόγειων αγωγών. Σε όλες τις περιπτώσεις τα βάρη τοποθέτησης των αγωγών είναι 2 και 10 μέτρα, ενώ η αγωγιμότητα της γης είναι $\sigma = 0.01$. Τα αποτελέσματα δίνονται για διάφορες τιμές της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των δύο αγωγών και για διάφορες τιμές της συχνότητας. Τα αποτελέσματα παράχθηκαν με χρήση της απλής GPOF και GPOF δύο επιπέδων, ενώ δίνονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση του ολοκληρώματος Pollaczek.

Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες χρησιμοποιήσαμε για την GPOF και την GPOF δύο επιπέδων αριθμό δειγμάτων της συνάρτησης $N_i = 100$, πλήθος των όρων του αθροίσματος $N = 14$, και για τα όρια δειγματοληψίας $T_0 = 10|k|$ για την απλή GPOF και $T_{02} = 0.22|k|$ και $T_{01} = 10|k|$ για την GPOF δύο επιπέδων.

Στο Σχήμα 4.5 δίνεται διάγραμμα της σύνθετης αντίστασης υπολογισμένης με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους, συνάρτηση της οριζόντιας απόστασης x . Από τη μελέτη των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι η μέθοδος με την απλή GPOF αδυ-

Πίνακας 4.1: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 50Hz.

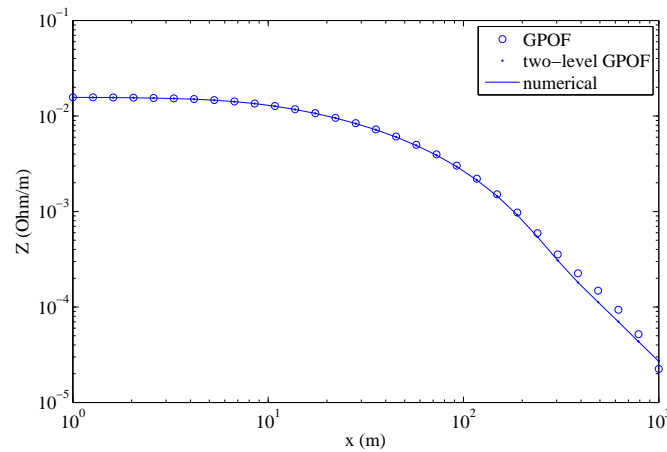
x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επι- πέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$5.0607 \cdot 10^{-5} +$ $2.9411 \cdot 10^{-4}i$	$5.0001 \cdot 10^{-5} +$ $2.9365 \cdot 10^{-4}i$	$5.0004 \cdot 10^{-5} +$ $2.9775 \cdot 10^{-4}i$
10	$5.0616 \cdot 10^{-5} +$ $2.6953 \cdot 10^{-4}i$	$4.9985 \cdot 10^{-5} +$ $2.6901 \cdot 10^{-4}i$	$4.9985 \cdot 10^{-5} +$ $2.6867 \cdot 10^{-4}i$
100	$4.9636 \cdot 10^{-5} +$ $1.4014 \cdot 10^{-4}i$	$4.8998 \cdot 10^{-5} +$ $1.3960 \cdot 10^{-4}i$	$4.8996 \cdot 10^{-5} +$ $1.3958 \cdot 10^{-4}i$
1000	$2.5535 \cdot 10^{-5} +$ $1.4098 \cdot 10^{-5}i$	$2.4902 \cdot 10^{-5} +$ $1.3595 \cdot 10^{-5}i$	$2.4900 \cdot 10^{-5} +$ $1.3595 \cdot 10^{-5}i$

Πίνακας 4.2: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 500Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επιπέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$5.180710^{-4} +$ $2.2429 \cdot 10^{-3}i$	$5.117610^{-4} +$ $2.2381 \cdot 10^{-3}i$	$5.117410^{-4} +$ $2.2394 \cdot 10^{-3}i$
10	$5.166710^{-4} +$ $1.9547 \cdot 10^{-3}i$	$5.103210^{-4} +$ $1.9497 \cdot 10^{-3}i$	$5.103010^{-4} +$ $1.9489 \cdot 10^{-3}i$
100	$4.538110^{-4} +$ $6.8478 \cdot 10^{-4}i$	$4.474810^{-4} +$ $6.7989 \cdot 10^{-4}i$	$4.474610^{-4} +$ $6.7989 \cdot 10^{-4}i$
1000	$3.643710^{-5} -$ $6.1091 \cdot 10^{-7}i$	$3.093310^{-5} -$ $2.8448 \cdot 10^{-6}i$	$3.091410^{-5} -$ $2.8439 \cdot 10^{-6}i$

Πίνακας 4.3: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο υπόγειων αγωγών για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 5000Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επιπέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$5.395510^{-3} + 1.4777 \cdot 10^{-2}i$	$5.334510^{-3} + 1.4740 \cdot 10^{-2}i$	$5.334310^{-3} + 1.4740 \cdot 10^{-2}i$
10	$5.289910^{-3} + 1.1898 \cdot 10^{-2}i$	$5.228910^{-3} + 1.1861 \cdot 10^{-2}i$	$5.228710^{-3} + 1.1861 \cdot 10^{-2}i$
100	$2.538610^{-3} + 1.0271 \cdot 10^{-3}i$	$2.478510^{-3} + 9.9270 \cdot 10^{-4}i$	$2.478310^{-3} + 9.9274 \cdot 10^{-4}i$
1000	$5.174410^{-6} - 2.1891 \cdot 10^{-5}i$	$2.670610^{-5} - 4.5769 \cdot 10^{-6}i$	$2.653810^{-5} - 4.5525 \cdot 10^{-6}i$



Σχήμα 4.5: Σύγκριση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ των παράλληλων υπόγειων αγωγών υπολογισμένη με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους, $f=5000\text{Hz}$.

νατεί να δώσει καλά αποτελέσματα για υψηλές συχνότητες και για μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των δύο αγωγών. Η δυσκολία αυτή μετριάζεται όταν αυξάνουμε τον αριθμό N_i των δειγμάτων της συνάρτησης αλλά αυτό μεγαλώνει τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού. Σε όλες τις περιπτώσεις ο χρόνος υπολογισμού με τη μέθοδο απλής GPOF είναι συντομότερος από το χρόνο που απαιτείται για τον απευθείας αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος Pollaczek. Για την GPOF δύο επιπέδων ο απαιτούμενος χρόνος είναι ανάλογος με αυτόν του αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος Pollaczek.

4.3.2 Υπέργειος και υπόγειος αγωγός

Το ολοκλήρωμα Pollaczek για τον υπολογισμό της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ ενός εναέριου και ενός υπόγειου αγωγού όπως αναφέραμε και παραπάνω έχει τη μορφή

$$J_{ua} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-h_1\lambda - h_2\sqrt{\lambda^2 + k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.10)$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο DCIM προσεγγίζουμε μέρος της προς ολοκλήρωση συνάρτησης με άθροισμα εκθετικών, αυτή τη φορά ως προς λ , ως εξής

$$\frac{e^{-h_2\gamma}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \approx \sum_N c_n e^{s_n\lambda} \quad (4.11)$$

Και πάλι οι τιμές των πόλων s_n και υπολοίπων c_n προσδιορίζονται με χρήση της μεθόδου GPOF. Για να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση ως προς λ δειγματοληπούμε το λ στο διάστημα $[0, 1]$ σύμφωνα με την παρακάτω γραμμική σχέση

$$\lambda = T_0 t, \quad t \in [0, 1] \quad (4.12)$$

Το οριακό σημείο δειγματοληψίας T_0 έχει επιλεγεί ίσο με $28|k|$ ενώ η δειγματοληψία της συνάρτησης έχει γίνει για $N = 100$ σημεία. Το πλήθος των όρων του αθροίσματος των εκθετικών το επιλέγουμε και πάλι ίσο με 14. Τώρα το ολοκλήρωμα παίρνει την παρακάτω μορφή

$$J_{ua} = 2 \sum_N c_n \int_0^{\infty} e^{-(h_1 - s_n)\lambda} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.13)$$

Στη συνέχεια κάνουμε χρήση της παρακάτω ολοκληρωτικής ταυτότητας που είναι διαθέσιμη στο [Gradshteyn and Ryzhik, 2007]

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2 + q^2} \quad (4.14)$$

Πίνακας 4.4: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ εναέριου και υπόγειου αγωγού για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 50Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επιπέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$4.970610^{-5} + 2.7243 \cdot 10^{-4}i$	$4.976310^{-5} + 2.7277 \cdot 10^{-4}i$	$4.976310^{-5} + 2.7277 \cdot 10^{-4}i$
10	$4.977810^{-5} + 2.5664 \cdot 10^{-4}i$	$4.974810^{-5} + 2.5643 \cdot 10^{-4}i$	$4.974810^{-5} + 2.5643 \cdot 10^{-4}i$
100	$4.879510^{-5} + 1.3958 \cdot 10^{-4}i$	$4.879510^{-5} + 1.3957 \cdot 10^{-4}i$	$4.879510^{-5} + 1.3957 \cdot 10^{-4}i$
1000	$2.489110^{-5} + 1.3746 \cdot 10^{-5}i$	$2.489110^{-5} + 1.3737 \cdot 10^{-5}i$	$2.489110^{-5} + 1.3737 \cdot 10^{-5}i$

Τελικά το ολοκλήρωμα Pollaczek για την αμοιβαία αντίσταση μεταξύ των δύο αγωγών μετασχηματίζεται στο παρακάτω άθροισμα

$$J_{ua} = 2 \sum_N c_n \frac{H_n}{H_n^2 + x^2}, \quad H_n = h_1 - s_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.15)$$

Στους Πίνακες 4.4, 4.5 και 4.6 παρουσιάζουμε αποτελέσματα της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ εναέριου και υπόγειου αγωγού με χρήση της μεθόδου DCIM, με τεχνική απλής και δύο επιπέδων GPOF και με αριθμητική ολοκλήρωση του ολοκληρώματος Pollaczek. Τα βάθη τοποθέτησης των αγωγών είναι 2 και 10 μέτρα, ενώ η αγωγιμότητα της γης είναι $\sigma = 0.01$. Τα αποτελέσματα δίνονται για διάφορες τιμές της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των δύο αγωγών και για διάφορες τιμές της συχνότητας. Όπως προκύπτει από τους πίνακες που παραθέτουμε, αλλά και από το Σχήμα 4.6 υπάρχει απόλυτη συμφωνία μεταξύ της μεθόδου GPOF δύο επιπέδων και της αριθμητικής λύσης ενώ η απλή GPOF δίνει μια ελάχιστη απόκλιση για μεγάλες αποστάσεις x .

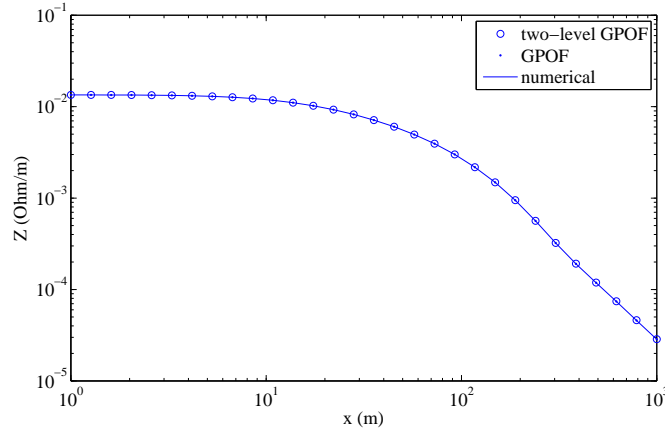
Για τον αλγόριθμο GPOF των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στους πίνακες χρησιμοποιήθηκαν αριθμός δειγμάτων της συνάρτησης $N_i = 100$, πλήθος όρων του αθροίσματος $N = 14$ και όριο δειγματοληψίας $T_0 = 28|k|$. Για την GPOF δύο επιπέδων χρησιμοποιήσαμε $N_i = 100$, $N = 14$, ενώ τα όρια δειγματοληψίας που χρησιμοποιήσαμε είναι $T_{02} = 5|k|$ και $T_{01} = 100|k|$. Για την

Πίνακας 4.5: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ εναέριου και υπόγειου αγωγού για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 500Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επιπέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$5.040710^{-4} + 1.9950 \cdot 10^{-3}i$	$5.040510^{-4} + 1.9949 \cdot 10^{-3}i$	$5.040510^{-4} + 1.9950 \cdot 10^{-3}i$
10	$5.028810^{-4} + 1.8318 \cdot 10^{-3}i$	$5.028610^{-4} + 1.8317 \cdot 10^{-3}i$	$5.028710^{-4} + 1.8317 \cdot 10^{-3}i$
100	$4.432310^{-4} + 6.8458 \cdot 10^{-4}i$	$4.432810^{-4} + 6.8449 \cdot 10^{-4}i$	$4.432810^{-4} + 6.8448 \cdot 10^{-4}i$
1000	$3.148010^{-5} - 2.1724 \cdot 10^{-6}i$	$3.146210^{-5} - 2.2490 \cdot 10^{-6}i$	$3.146210^{-5} - 2.2490 \cdot 10^{-6}i$

Πίνακας 4.6: Σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ εναέριου και υπόγειου αγωγού για διάφορες μεταξύ τους οριζόντιες αποστάσεις, συχνότητα 5000Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επιπέδων (Ohm/m)	Αριθμητική λύση (Ohm/m)
1	$5.095710^{-3} + 1.2468 \cdot 10^{-2}i$	$5.094910^{-3} + 1.2467 \cdot 10^{-2}i$	$5.095010^{-3} + 1.2467 \cdot 10^{-2}i$
10	$5.014310^{-3} + 1.0859 \cdot 10^{-2}i$	$5.013610^{-3} + 1.0858 \cdot 10^{-2}i$	$5.013610^{-3} + 1.0858 \cdot 10^{-2}i$
100	$2.475210^{-3} + 1.1150 \cdot 10^{-3}i$	$2.474410^{-3} + 1.1141 \cdot 10^{-3}i$	$2.574410^{-3} + 1.1141 \cdot 10^{-3}i$
1000	$2.842210^{-5} - 3.4627 \cdot 10^{-6}i$	$2.828510^{-5} - 3.2395 \cdot 10^{-6}i$	$2.828510^{-5} - 3.2395 \cdot 10^{-6}i$



Σχήμα 4.6: Σύγκριση της σύνθετης αντίστασης μεταξύ υπόγειου και υπέργειου αγωγού υπολογισμένη με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους, $f=5000\text{Hz}$

GPOF δύο επιπέδων προκειμένου να κάνουμε τη δειγματοληψία της συνάρτησης χρησιμοποιούμε τιμές του λ που προκύπτουν από τις παρακάτω εκφράσεις

$$\lambda = P_a t + P_b, \quad \in [0, 1]$$

$$C_{ap1} : \quad P_a = T_{01} - T_{02}, \quad P_b = T_{02}$$

$$C_{ap2} : \quad P_a = T_{02}, \quad P_b = 0$$

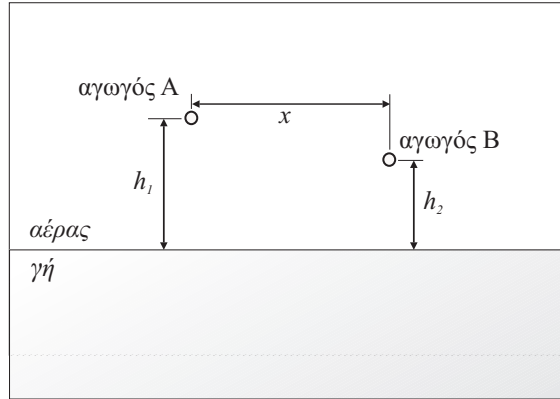
Όπως προκύπτει και από τις παραπάνω σχέσεις τώρα οι τιμές του λ είναι πραγματικές και οι δύο διαδρομές δειγματοληψίας C_{ap1} και C_{ap2} βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα $\text{Re}\{\lambda\}$ του Σχήματος 4.4.

Και πάλι ο χρόνος υπολογισμού με χρήση του απλού GPOF αλγόριθμου είναι μικρότερος από αυτόν που απαιτείται για την αριθμητική λύση του ολοκληρώματος Pollaczek ενώ για την περίπτωση της GPOF δύο επιπέδων οι δύο χρόνοι είναι ανάλογοι.

4.4 Λύση του ολοκληρώματος Carson με χρήση της μεθόδου DCIM

Η φόρμουλα του Carson [Carson, 1926] μας δίνει τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση μεταξύ δύο εναέριων αγωγών απείρου μήκους, με επιστροφή γης, οι οποίοι είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Μια τέτοια γεωμετρία δίνεται στο Σχήμα 4.7. Σύμφωνα με τη φόρμουλα η ανά μονάδα μήκους σύνθετη αμοιβαία αντίσταση είναι

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{D}{d} + J_c \right) \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.7: Υπολογισμός της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ δύο εναέριων αγωγών.

όπου d και D είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αγωγών και η απόσταση μεταξύ του πρώτου αγωγού και του ειδώλου τού δευτέρου, ενώ J_c είναι το γνωστό ολοκλήρωμα Carson

$$J_c = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-(h_1+h_2)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.17)$$

όπου $k^2 = j\omega\mu_0\sigma$, ω είναι η γωνιακή συχνότητα ενώ σ είναι η αγωγιμότητα της γης. Αν και γενικά δεν είναι γνωστό στην επιστημονική κοινότητα, το ολοκλήρωμα Carson έχει αναλυτική λύση η οποία έχει δοθεί από τον ίδιο τον Carson και έχει επισημανθεί από αρκετούς ερευνητές, όπως [Magnusson et al., 2001] και [Noda, 2005]. Η αναλυτική λύση είναι η παρακάτω:

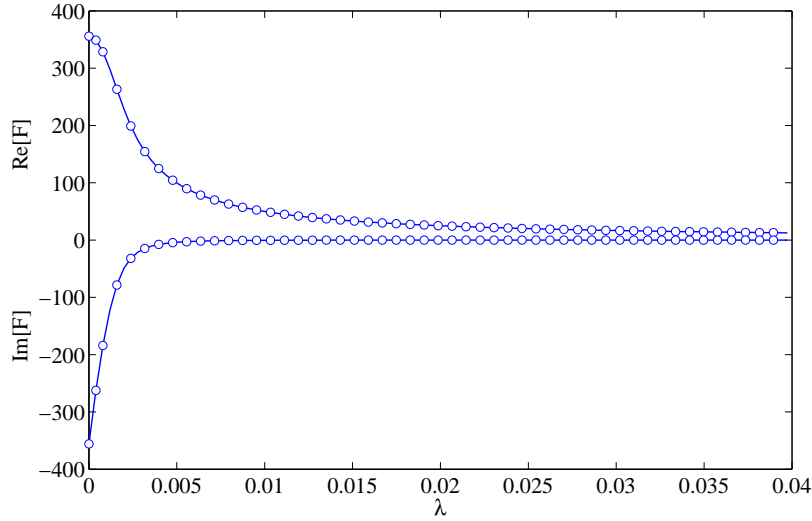
$$J_c = \frac{\pi}{2u_1} [\mathbf{H}_1(u_1) - \mathbf{Y}_1(u_1) - \frac{2}{\pi u_1}] + \frac{\pi}{2u_2} [\mathbf{H}_1(u_2) - \mathbf{Y}_1(u_2) - \frac{2}{\pi u_2}] \quad (4.18)$$

όπου $u_1 = k(H - jx)$ και $u_2 = k(H + jx)$ με $H = h_1 + h_2$ ενώ \mathbf{H}_1 είναι η συνάρτηση Struve πρώτης τάξης και \mathbf{Y}_1 είναι η συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους και πρώτης τάξης. Η παραπάνω αναλυτική λύση του ολοκληρώματος Carson μπορεί να επιβεβαιωθεί εάν κάνουμε αντικατάσταση του συνημιτόνου της (4.17) με τη γνωστή έκφραση με τα μιγαδικά εκθετικά και στη συνέχεια κάνουμε χρήση της παρακάτω αναλυτικής λύσης που υπάρχει στο [Gradshteyn and Ryzhik, 2007].

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{x + \sqrt{x^2 + \beta^2}} dx = \frac{\pi}{2\beta\mu} \left[\mathbf{H}_1(\beta\mu) - \mathbf{Y}_1(\beta\mu) - \frac{1}{(\beta\mu)^2} \right] \quad (4.19)$$

όπου πρέπει να ισχύει ότι $|\arg \beta| < \frac{\pi}{2}$ και $\text{Re} \{\mu\} > 0$, τα οποία ικανοποιούνται πάντα για την περίπτωση που εξετάζουμε.

Παρά την ύπαρξη της παραπάνω αναλυτικής λύσης, η αριθμητική λύση είναι απαραίτητη για κάποιες εφαρμογές όπως η περίπτωση της σύνθετης αμοιβαίας



Σχήμα 4.8: Συνάρτηση του παρανομαστή του ολοκληρώματος Carson (συνεχόμενη γραμμή) και προσέγγιση με το άθροισμα των εκθετικών (κυκλάκια), πραγματικό και φανταστικό μέρος, $f=50\text{Hz}$, $\sigma=0.01$.

αντίστασης όταν η γη δεν είναι ομογενής, αλλά αποτελείται από στρώματα με διαφορετικές ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες.

Εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο όπως στην ενότητα 4.3.2 και προσεγγίζουμε τον παρανομαστή της (4.17) με εκθετικά ως προς λ

$$\frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \approx \sum_N c_n e^{s_n \lambda} \quad (4.20)$$

Στο Σχήμα 4.8 για λόγους σύγκρισης παραθέτουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της αρχικής συνάρτησης του παρανομαστή και τις τιμές της προσέγγισης του αθροίσματος των εκθετικών. Όπως προκύπτει από τα γραφήματα η προσέγγιση που επιτυγχάνεται με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούμε είναι πάρα πολύ ακριβής.

Τώρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$$J_c = 2 \sum_N c_n \int_0^\infty e^{-(h_1+h_2-s_n)\lambda} \cos(x\lambda) d\lambda \quad (4.21)$$

Με χρήση της ταυτότητας (4.14) καταλήγουμε στην παρακάτω τελική έκφραση για το ολοκλήρωμα Carson

$$J_c = 2 \sum_N c_n \frac{H_n}{H_n^2 + x^2}, \quad H_n = h_1 + h_2 - s_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.22)$$

Πίνακας 4.7: Αποτέλεσμα ολοκληρώματος Carson για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις μεταξύ των δύο εναέριων αγωγών, συχνότητα 50Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επι- πέδων (Ohm/m)	Αναλυτική λύση (Ohm/m)
1	$4.8609 \cdot 10^{-5} + 2.7361 \cdot 10^{-4}i$	$4.8664 \cdot 10^{-5} + 2.7394 \cdot 10^{-4}i$	$4.8664 \cdot 10^{-5} + 2.7394 \cdot 10^{-4}i$
10	$4.8681 \cdot 10^{-5} + 2.5780 \cdot 10^{-4}i$	$4.8653 \cdot 10^{-5} + 2.5759 \cdot 10^{-4}i$	$4.8653 \cdot 10^{-5} + 2.5759 \cdot 10^{-4}i$
100	$4.7834 \cdot 10^{-5} + 1.4073 \cdot 10^{-4}i$	$4.7835 \cdot 10^{-5} + 1.4072 \cdot 10^{-4}i$	$4.7835 \cdot 10^{-5} + 1.4072 \cdot 10^{-4}i$
1000	$2.4845 \cdot 10^{-5} + 1.4466 \cdot 10^{-5}i$	$2.4845 \cdot 10^{-5} + 1.4457 \cdot 10^{-5}i$	$2.4845 \cdot 10^{-5} + 1.4457 \cdot 10^{-5}i$

Όπως προκύπτει από τις προηγούμενες εκφράσεις τα c_n και s_n είναι ανεξάρτητα από τη γεωμετρία που εξετάζουμε και συνεπώς αρκεί να τα υπολογίσουμε μόνο μία φορά. Στη συνέχεια με χρήση της (4.22) υπολογίζουμε την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση για οποιαδήποτε ζητούμενη γεωμετρία.

Στους Πίνακες 4.7, 4.8 και 4.9, δίνουμε αποτελέσματα του ολοκληρώματος Carson για δύο εναέριους παράλληλους αγωγούς με επιστροφή γης. Έγινε χρήση της μεθόδου DCIM, με τεχνική απλής και δύο επιπέδων GPOF ενώ στην τελευταία στήλη έχουμε αποτελέσματα που προκύπτουν από την αναλυτική λύση του ολοκληρώματος Carson με χρήση της (4.18). Οι αγωγοί βρίσκονται σε ύψος 2 και 10 μέτρων πάνω από την επιφάνεια της γης, ενώ η αγωγιμότητα της γης είναι $\sigma = 0.01$. Τα αποτελέσματα δίνονται για διάφορες τιμές της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των δύο αγωγών και για διάφορες τιμές της συχνότητας. Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες και για τον αλγόριθμο απλής GPOF, χρησιμοποιήθηκε αριθμός δειγμάτων της συνάρτησης $N_i = 100$, πλήθος των όρων του αθροίσματος $N = 14$ και όριο δειγματοληψίας $T_0 = 20|k|$. Για την GPOF δύο επιπέδων χρησιμοποιήσαμε $N_i = 100$, $N = 14$, ενώ τα όρια δειγματοληψίας που χρησιμοποιήσαμε είναι $T_{02} = 4|k|$ και $T_{01} = 10|k|$. Σχετικά με την επιλογή των ορίων δειγματοληψίας οι διάφορες δοκιμές έδειξαν ότι η τιμή τους δεν είναι καθοριστική καθώς ελάχιστα επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα.

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα που παραθέτουμε ήδη με την απλή GPOF η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική, ενώ στις περιπτώσεις που απαιτείται απόλυτη ακρίβεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνική GPOF δύο

Πίνακας 4.8: Αποτέλεσμα ολοκληρώματος Carson για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις μεταξύ των δύο εναέριων αγωγών, συχνότητα 500Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επι- πέδων (Ohm/m)	Αναλυτική λύση (Ohm/m)
1	$4.7290 \cdot 10^{-4} +$ $2.0310 \cdot 10^{-3}i$	$4.7291 \cdot 10^{-4} +$ $2.0310 \cdot 10^{-3}i$	$4.7291 \cdot 10^{-4} +$ $2.0310 \cdot 10^{-3}i$
10	$4.7215 \cdot 10^{-4} +$ $1.8678 \cdot 10^{-3}i$	$4.7216 \cdot 10^{-4} +$ $1.8677 \cdot 10^{-3}i$	$4.7216 \cdot 10^{-4} +$ $1.8677 \cdot 10^{-3}i$
100	$4.2313 \cdot 10^{-4} +$ $7.1843 \cdot 10^{-4}i$	$4.2414 \cdot 10^{-4} +$ $7.1834 \cdot 10^{-4}i$	$4.2414 \cdot 10^{-4} +$ $7.1834 \cdot 10^{-4}i$
1000	$3.4147 \cdot 10^{-5} +$ $10.118 \cdot 10^{-7}i$	$3.4148 \cdot 10^{-5} +$ $9.4128 \cdot 10^{-7}i$	$3.4148 \cdot 10^{-5} +$ $9.4128 \cdot 10^{-7}i$

Πίνακας 4.9: Αποτέλεσμα ολοκληρώματος Carson για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις μεταξύ των δύο εναέριων αγωγών, συχνότητα 5000Hz.

x (m)	GPOF (Ohm/m)	GPOF δύο επι- πέδων (Ohm/m)	Αναλυτική λύση (Ohm/m)
1	$4.3557 \cdot 10^{-3} +$ $1.3531 \cdot 10^{-2}i$	$4.3557 \cdot 10^{-3} +$ $1.3530 \cdot 10^{-2}i$	$4.3557 \cdot 10^{-3} +$ $1.3530 \cdot 10^{-2}i$
10	$4.3121 \cdot 10^{-3} +$ $1.1915 \cdot 10^{-2}i$	$4.3122 \cdot 10^{-3} +$ $1.1914 \cdot 10^{-2}i$	$4.3122 \cdot 10^{-3} +$ $1.1914 \cdot 10^{-2}i$
100	$2.4482 \cdot 10^{-3} +$ $1.7868 \cdot 10^{-3}i$	$2.4482 \cdot 10^{-3} +$ $1.7859 \cdot 10^{-3}i$	$2.4482 \cdot 10^{-3} +$ $1.7859 \cdot 10^{-3}i$
1000	$3.7316 \cdot 10^{-5} +$ $5.3420 \cdot 10^{-6}i$	$3.7142 \cdot 10^{-5} +$ $5.4071 \cdot 10^{-6}i$	$3.7142 \cdot 10^{-5} +$ $5.4071 \cdot 10^{-6}i$

επιπέδων με μια μικρή επιβάρυνση στον υπολογιστικό χρόνο.

4.5 Συμπεράσματα

Η γνώση της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ αγωγών με επιστροφή γης είναι πολύ σημαντική για πολλούς τομείς της επιστήμης του ηλεκτρολόγου. Από τη στιγμή που παρουσιάστηκαν οι φόρμουλες του Pollaczek και του Carson οι οποίες περιλαμβάνουν τα ομώνυμα ολοκληρώματα, η επιστημονική κοινότητα ασχολήθηκε κατά κόρον με τη λύση των ολοκληρωμάτων αυτών. Όπως παρουσιάστηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, οι προσπάθειες για το γρήγορο και ακριβή υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι πολλές και στηρίζεται τόσο σε προσεγγιστικές μεθόδους όσο και στην ανάπτυξη ειδικών αλγορίθμων για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Παρά τις προσπάθειες αυτές, σε πρόσφατη δημοσίευση αναδείχθηκε το θέμα της ύπαρξης αναλυτικής λύσης των ολοκληρωμάτων [Theodoulidis, 2012]. Παρά το γεγονός της ύπαρξης των αναλυτικών λύσεων, παραμένει το ενδιαφέρον για αριθμητική λύση των ολοκληρωμάτων για εφαρμογές όπως η περίπτωση της στρωματοποιημένης γης όπου η γη δεν είναι ομογενής αλλά αποτελείται από στρώματα με διαφορετικές ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τη λύση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και του Carson με τη χρήση της μεθόδου DCIM. Η μέθοδος περιλαμβάνει την προσέγγιση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης με ένα άθροισμα εκθετικών που αποτελείται από λίγους όρους. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει το μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων σε ολοκληρώματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις τις οποίες εφαρμόζουμε για τον τελικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Προκειμένου να πετύχουμε την προσέγγιση των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τη μέθοδο GPOF καθώς και τη μέθοδο GPOF δύο επιπέδων. Η δεύτερη είναι μια βελτίωση της απλής GPOF και περιλαμβάνει τη δειγματοληψία της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης σε δύο διαδοχικές περιοχές με διαφορετικό βήμα δειγματοληψίας. Έτσι η δειγματοληψία της συνάρτησης είναι πιο πυκνή στην αρχική περιοχή που η συνάρτηση παρουσιάζει έντονη μεταβολή, ενώ γίνεται λιγότερο πυκνή στη δεύτερη περιοχή όπου η συνάρτηση αποκτά μια πιο ομαλή και προβλέψιμη μορφή. Αυτό οδηγεί στην πιο καλή προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης και ως συνέπεια τα παραγόμενα αποτελέσματα της αμοιβαίας αντίστασης είναι μεγαλύτερης ακρίβειας.

Οι τελικές εκφράσεις που παράχθηκαν έχουν τη μορφή απλών αθροισμάτων τα οποία περιλαμβάνουν μικρό αριθμό όρων. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ελέγχθηκε με σύγκριση που έγινε με αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και αναλυτική λύση του ολοκληρώματος Carson. Αποτελέσματα παράχθηκαν για διάφορες τιμές της συχνότητας και διάφορες τιμές της οριζόντιας

απόστασης μεταξύ των δύο αγωγών. Σε όλες τις περιπτώσεις η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή με τη χρήση της απλής GPOF τεχνικής ενώ με την GPOF δύο επιπέδων η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι άριστη. Οι χρόνοι υπολογισμού είναι καλύτεροι από τους χρόνους αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος Pollaczek για την απλή GPOF τεχνική και ανάλογοι για την GPOF δύο επιπέδων.

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι για τις περιπτώσεις των δύο εναέριων αγωγών ο προσδιορισμός των πόλων s_n και υπολοίπων c_n για την προσέγγιση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης γίνεται μόνο μία φορά, ενώ για την περίπτωση των δύο υπόγειων αγωγών γίνεται μόνο μία φορά για συγκεκριμένη αγωγιμότητα της γης. Συνεπώς, η GPOF εφαρμόζεται μόνο μια φορά και οι τιμές της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης προκύπτουν με απλή χρήση των τελικών εκφράσεων για όλες τις πιθανές ζητούμενες γεωμετρίες. Έτσι, τα αποτελέσματα της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης παράγονται σε χρόνους σχεδόν μηδενικούς.

Κεφάλαιο 5

Υπολογισμός του πεδίου που παράγεται από πλήγμα κεραυνού

5.1 Εισαγωγή - βιβλιογραφία

Ο υπολογισμός του πεδίου που δημιουργείται από τις ατμοσφαιρικές ηλεκτρικές εκκενώσεις αποτελεί αντικείμενο που συγκεντρώνει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Οι συνέπειες των κεραυνικών πληγμάτων είναι πολλών κατηγοριών και περιλαμβάνουν από φυσικές καταστροφές στην κοντινή περιοχή που γίνεται η εκτόνωση του ηλεκτρικού φορτίου μέχρι την ανάπτυξη, από επαγωγή, ανεπιθύμητων ηλεκτρικών δυναμικών σε γειτονικές αγωγίμες υποδομές όπως μεταλλικά δομικά υλικά, μεταλλικά υδραυλικά δίκτυα, αγωγούς μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας και τηλεπικοινωνιακές γραμμές. Επίσης, η ανάγκη για καλύτερη γνώση των συνεπειών από τους κεραυνούς ενισχύεται από την ανάγκη προστασίας των ολοένα αυξανόμενων ηλεκτρονικών διατάξεων που υποστηρίζουν τις γραμμές ηλεκτρικής ενέργειας αλλά και τις τηλεπικοινωνιακές υποδομές. Για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων δυναμικών από επαγωγή είναι αναγκαία η γνώση του πεδίου που αναπτύσσεται εξαιτίας του κεραυνού.

Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι ο ακριβής και ταχύς υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από το κεραυνικό πλήγμα. Ειδικότερα ασχολούμαστε με την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου λόγω του ότι αυτή είναι η πιο σημαντική όταν μελετάμε ανάπτυξη ανεπιθύμητων δυναμικών και γενικότερα προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας που προκύπτουν από το φαινόμενο του κεραυνού.

Για την ανάπτυξη των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων του πεδίου του κεραυνού χρησιμοποιούμε σαν υπόβαθρο τις γνωστές εξισώσεις των Sommerfeld και Banos. Ο Sommerfeld για πρώτη φορά μελέτησε την επίδραση της άπειρα εντεινόμενης ομογενούς γης με πεπερασμένη αγωγιμότητα στο ηλεκτρομαγνητικό πε-

δίο που παράγεται από ένα δίπολο και έδωσε το πεδίο σε μορφή παραγώγων της συνάρτησης Green [Sommerfeld, 1949]. Ο Banos μελέτησε πιο συστηματικά το πρόβλημα αυτό, βασιζόμενος στη λύση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων του Maxwell και στα δύο μέσα και εφαρμόζοντας στη συνέχεια τις οριακές συνθήκες πάνω στη διεπιφάνεια γης-αέρα [Banos, 1966]. Οι εξισώσεις αυτές μας δίνουν το πεδίο που προκαλείται από την παρουσία ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση πάνω από την πεπερασμένα αγώγιμη γη. Οι τελικές εξισώσεις του πεδίου που προκαλείται από τον κεραυνό είναι ημιάπειρα ολοκληρώματα στο πεδίο της συχνότητας και έχουν τη μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld. Η συμπεριφορά τους είναι ιδιάζουσα και ο αριθμητικός υπολογισμός τους αποτελεί διαδικασία δύσκολη και χρονοβόρα. Το πρόβλημα αυτό είναι πολλαπλώς μεγαλύτερο όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο πεδίο του χρόνου. Σε αυτήν την περίπτωση είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και συνεπώς πρέπει να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα για πάρα πολύ μεγάλο αριθμό διαφορετικών συχνοτήτων. Μεγάλη δυσκολία υπάρχει και όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό που αναπτύσσεται από επαγωγή πάνω σε έναν αγωγό εξαιτίας του κεραυνού. Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία του αγωγού, έτσι ώστε ολοκληρώνοντας κατά το συνολικό μήκος του αγωγού, να υπολογίσουμε το αναπτυσσόμενο δυναμικό.

Για να αποφύγουν οι ερευνητές την επίλυση αυτών των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαν διάφορες προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις ή ανέπτυξαν ειδικούς υπολογιστικούς αλγόριθμους κατάλληλους για την επίλυση των ολοκληρωμάτων αυτών. Ο στόχος των προσεγγιστικών μεθόδων είναι η παραγωγή όσο το δυνατόν ακριβέστερων αποτελεσμάτων με το πλεονέκτημα του πολύ μικρού υπολογιστικού κόστους. Πρωτοπόρος στην ανάπτυξη απλοποιημένων υπολογιστικών εκφράσεων για τον υπολογισμό του πεδίου που αναπτύσσεται από ηλεκτρικό δίπολο είναι ο K. A. Norton [Norton, 1937], οι εκφράσεις του οποίου βελτιώθηκαν στη συνέχεια [King, 1969], [Wait, 1998] και ο P. B. Bannister [Bannister, 1984].

Η πιο γνωστή όμως προσεγγιστική φόρμουλα είναι η φόρμουλα του V. Cooray [Cooray, 1992], [Cooray, 2001] για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνού κάτω από την επιφάνεια της γης. Η εργασία αυτή συμπληρώθηκε από τον Rubinstein που παρουσίασε μια ανάλογη φόρμουλα, γνωστή ως φόρμουλα Cooray - Rubinstein, για τον υπολογισμό του πεδίου πάνω από την επιφάνεια της γης [Rubinstein, 1996]. Αργότερα η φόρμουλα αυτή βελτιώθηκε από τον Cooray ώστε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση της να είναι πολύ κοντά στην ακριβή λύση [Cooray, 2002]. Το χαρακτηριστικό όλων αυτών των εκφράσεων είναι ότι δίνουν την οριζόντια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου. Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει από το συνδυασμό του πεδίου στην επιφάνεια της γης και του πεδίου στην περίπτωση που η γη είναι τέλεια αγώγιμη. Οι φόρμουλες αυτές γνώρισαν

πολύ μεγάλη αποδοχή κυρίως λόγω της απλότητάς τους και χρησιμοποιήθηκαν σαν μέθοδος αναφοράς στη σχετική βιβλιογραφία. Ο ίδιος ερευνητής σε πρόσφατη δημοσίευσή του συγκρίνει αποτελέσματα που προκύπτουν από τη φόρμουλά του με αποτελέσματα από άλλες αναλυτικές προσεγγιστικές σχέσεις [Cooray, 2010]. Μια ακόμη προσεγγιστική φόρμουλα για την οριζόντια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου προτείνεται στην εργασία [Barbosa and Paulino, 2007]. Η προτεινόμενη αναλυτική έκφραση δίνεται στο πεδίο του χρόνου, ενώ συγχρόνως παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα με τη φόρμουλα Cooray - Rubinstein. Συμπληρωματική εργασία πάνω στη φόρμουλα Cooray - Rubinstein έχει παρουσιαστεί στην [Caligaris et al., 2008] ενώ στην [Li et al., 2011] έχει αναπτυχθεί μια πιο γενική μορφή της εν λόγω φόρμουλας. Τέλος στο [Rachidi et al., 1996] γίνεται μια συστηματική ανάλυση των διαφόρων προσεγγιστικών μεθόδων.

Παράλληλα με τις προσπάθειες για τον υπολογισμό του πεδίου με τρόπο προσεγγιστικό, παρουσιάστηκε και μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον για την ανάπτυξη μεθόδων για την αριθμητική λύση των ολοκληρωμάτων που δίνουν το πεδίο με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια και με τη μικρότερη δυνατή υπολογιστική προσπάθεια. Αυτό μπορεί να γίνει με την ανάπτυξη ειδικών αλγόριθμων που μπορούν να χειριστούν τις ιδιαιτερότητες των ολοκληρωμάτων Sommerfeld τα οποία παρουσιάζουν έντονη τάση για ταλάντωση. Αρχικά οι προσπάθειες αυτές έγιναν για εφαρμογές που δε σχετίζονται με το πεδίο του κεραυνού αλλά με το πρόβλημα των κεραιών πάνω από πεπερασμένα αγωγίμη γη. Τις προσπάθειες αυτές βοήθησε η ραγδαία εξέλιξη στο χώρο των υπολογιστών που έδωσε στους ερευνητές τη μεγάλη υπολογιστική ισχύ που απαιτείται για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Οι δημοσιευμένες εργασίες, που υπολογίζουν το πεδίο λύνοντας τις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις, μπορούν να διαχωριστούν σε αυτές που προσδιορίζουν το πεδίο πάνω από την επιφάνεια της γης και σε αυτές που προσδιορίζουν το υπόγειο πεδίο. Η πρώτη κατηγορία είναι λίγο μεγαλύτερη αριθμητικά λόγω κυρίως του ενδιαφέροντος που υπάρχει για την κατανόηση των μηχανισμών αλληλεπίδρασης του πεδίου του κεραυνού με τους εναέριους αγωγούς μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Μια από τις πιο αντιπροσωπευτικές εργασίες της πρώτης κατηγορίας είναι η [Delfino et al., 2008a], όπου γίνεται συζήτηση για τις δυσκολίες που παρουσιάζονται για την ολοκλήρωση των εξισώσεων του πεδίου του κεραυνού. Προτείνεται ένας αλγόριθμος για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, που βασίζεται στον επιμερισμό του διαστήματος ολοκλήρωσης και στη χρήση της τεχνικής ολοκλήρωσης Romberg. Στο δεύτερο μέρος της ίδιας δημοσίευσης παρουσιάζονται πάρα πολλά αποτελέσματα της απόκρισης στο χρόνο της ακτινικής συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου για διάφορα σημεία παρατήρησης [Delfino et al., 2008b]. Σε όλα τα αποτελέσματα γίνεται σύγκριση με αποτελέσματα που προκύπτουν από τη φόρμουλα Cooray - Rubinstein. Στις [Zou et al., 2010] και [Lee et al., 2011] προτείνεται ένας αλγόριθμος, για τον υπο-

λογισμό του πεδίου που δημιουργείται από ηλεκτρικό δίπολο πάνω από τη γη, που περιλαμβάνει την αποδόμηση του ολοκληρώματος Sommerfeld σε δύο όρους, όπου ο ένας λύνεται αναλυτικά και ο άλλος υπολογίζεται αριθμητικά. Επίσης δίνονται αποτελέσματα που συγκρίνονται με αποτελέσματα προσεγγιστικών μεθόδων. Στη [Delfino et al., 2010] μελετάται το πεδίο του κεραυνού στην περίπτωση όπου η γη αποτελείται από στρώσεις με διαφορετικές τιμές της αγωγιμότητας και της διηλεκτρικής σταθεράς. Σε πρόσφατη δημοσίευση, προτείνεται μια μέθοδος για την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, ακολουθώντας μια κατάλληλα τροποποιημένη διαδρομή, που επιτρέπει τη γρήγορη σύγκλισή τους [Rallis et al., 2012]. Τέλος, μια σύνοψη των υπολογιστικών μεθόδων του πεδίου πάνω από την επιφάνεια της γης υπάρχει στη [Shoory et al., 2011], όπου επίσης αναλύεται και το θέμα της μέτρησης του πεδίου του κεραυνού.

Μια από τις πιο γνωστές δημοσιεύσεις της δεύτερης κατηγορίας αποτελεί η [Delfino et al., 2007] όπου παρουσιάζεται ένας αριθμητικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του υπόγειου πεδίου που προκαλείται από τον κεραυνό. Επίσης δίνονται πάρα πολλά αποτελέσματα της ακτινικής συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου για διάφορα σημεία παρατήρησης. Το υπόγειο πεδίο του κεραυνικού πλήγματος υπολογίζεται στην [Rallis and Theodoulidis, 2011a] με τρόπο ακριβή και ταχύ. Ένας ακόμα αλγόριθμος για τον υπολογισμό του υπόγειου πεδίου προτείνεται στην [Andreotti et al., 2008], ενώ στην [Mimouni et al., 2007] γίνεται μια συστηματική σύγκριση μεταξύ τριών διαφορετικών προσεγγίσεων για το υπόγειο πεδίο. Στην [Petrache et al., 2005] δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην αλληλεπίδραση του πεδίου του κεραυνού με τους υπόγειους αγωγούς. Η αλληλεπίδραση του κεραυνού με τα εναέρια όμως ηλεκτρικά δίκτυα εξετάζεται αναλυτικά στην [Paolone et al., 2009]. Στην εργασία [Delfino et al., 2009] εξετάζεται το πρόβλημα του προσδιορισμού του πεδίου του κεραυνού στην περίπτωση που η αγωγιμότητα και η διηλεκτρική σταθερά της γης δεν είναι σταθερές αλλά η τιμή τους μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

Μια άλλη κατηγορία δημοσιεύσεων αποτελούν αυτές που για τη λύση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, χρησιμοποιούν πιο σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους που είναι διαδεδομένες στα προβλήματα ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD). Ενδεικτικά αναφέρουμε εργασίες της κατηγορίας αυτής [Baba and Rakov, 2007], [Ding et al., 2010], [Mimouni et al., 2007], [Petrache et al., 2005] και [Rallis et al., 2012]. Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος του προσδιορισμού του πεδίου του κεραυνού ακολουθείται στην [Shoory et al., 2005], όπου για την προσομοίωση του καναλιού του κεραυνού δεν χρησιμοποιείται κάποιο γνωστό μοντέλο κατανομής του ρεύματος, αλλά θεωρείται το κανάλι ως μια μονοπολική κεραία. Οι ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις επιλύονται με τη μέθοδο των ροπών και γίνεται ο προσδιορισμός της κατανομής των ρευμάτων στο κανάλι ενώ στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που προκαλείται από το πλήγμα του κεραυνού. Ο υπολογισμός γίνεται με τρόπο ακριβή, λύνοντας τις πρωτότυπες ολοκληρωτικές εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που προκαλείται από το ρευματικό κανάλι του κεραυνού, χωρίς να χρησιμοποιούμε κάποιου είδους προσεγγίσεις ή παραδοχές. Η συνεισφορά της εργασίας που παρουσιάζουμε στο παρόν κεφάλαιο είναι ότι ο υπολογισμός των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων γίνεται πολύ γρήγορα, ξεπερνώντας τις γνωστές δυσκολίες των ολοκληρωμάτων Sommerfeld που σχετίζονται με την ιδιάζουσα συμπεριφορά τους και έχουν σαν αποτέλεσμα τη δύσκολη και χρονοβόρα επίλυσή τους. Αυτό το επιτυγχάνουμε χρησιμοποιώντας μια τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης που επιτρέπει τη γρήγορη αριθμητική ολοκλήρωση των ολοκληρωμάτων. Το δεύτερο στοιχείο της μεθόδου που προτείνουμε είναι η χρήση της τεχνικής της παρεμβολής η οποία οδηγεί σε μεγάλη εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου. Οι πεδιακές εξισώσεις που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι στο πεδίο της συχνότητας, αλλά, στις περισσότερες περιπτώσεις, το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός των αποτελεσμάτων στο πεδίο του χρόνου. Συνεπώς, πρέπει να παραχθούν αποτελέσματα για πάρα πολλές τιμές της συχνότητας, ώστε στη συνέχεια, με χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, να περάσουμε στο πεδίο του χρόνου. Η παρεμβολή χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία της παραγωγής αποτελεσμάτων της ολοκληρωτικής εξίσωσης, ώστε να μειωθεί ο αριθμός των υπολογισμών που πραγματοποιούμε. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο ακριβής υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε χρόνους πολύ καλύτερους από αυτούς που δίνονται σε σχετικές δημοσιεύσεις άλλων ερευνητών. Ο υπολογισμός του πεδίου γίνεται τόσο επάνω όσο και κάτω από την επιφάνεια της γης.

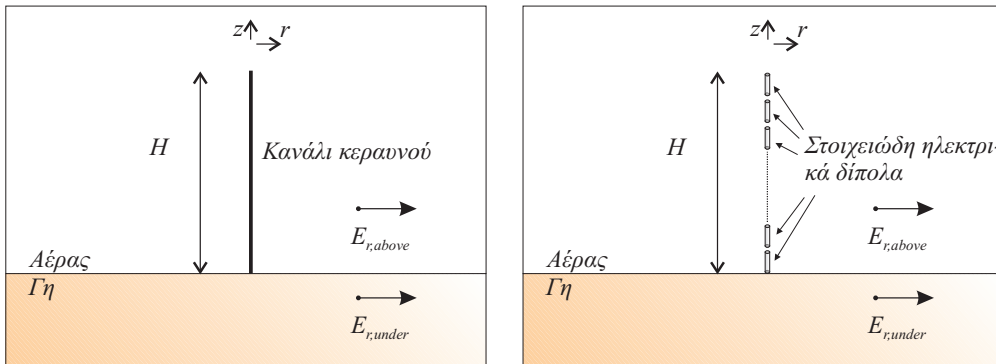
5.2 Περιγραφή του προβλήματος

Το πρόβλημα του υπολογισμού του πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού περιγράφεται στο Σχήμα 5.1. Ο κεραυνός προσομοιώνεται από ένα κανάλι ρεύματος το οποίο είναι ευθύγραμμο και έχει ύψος H . Το ζητούμενο του προβλήματος είναι να προσδιορίσουμε το πεδίο που αναπτύσσεται από το ρευματοφόρο κανάλι σε ένα σημείο παρατήρησης που βρίσκεται μέσα στη γη καθώς και σε ένα σημείο πάνω από αυτήν. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου αλλά εμείς το αναλύουμε στο πεδίο των συχνοτήτων και παίρνουμε την τελική λύση στο πεδίο του χρόνου με τη βοήθεια της ανάλυσης Fourier. Επίσης, το πρόβλημα παρουσιάζει αξονική συμμετρία ως προς τον άξονα z .

Το υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζομαστε για τον υπολογισμό του πεδίου που προκαλείται από το ρευματοφόρο κανάλι του κεραυνού είναι οι γνωστές εξισώσεις του Sommerfeld [Sommerfeld, 1949] και του Banos [Banos, 1966]. Οι εξισώσεις αυτές δίνουν τις συνιστώσες του πεδίου που παράγεται από ένα στοιχειώ-



Σχήμα 5.1: Το πλήγμα του κεραυνού προσομοιώνεται από ένα ευθύγραμμο ρευματικό κανάλι.



Σχήμα 5.2: Το ρευματικό κανάλι του κεραυνού αντικαθίσταται από μια σειρά από στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα.

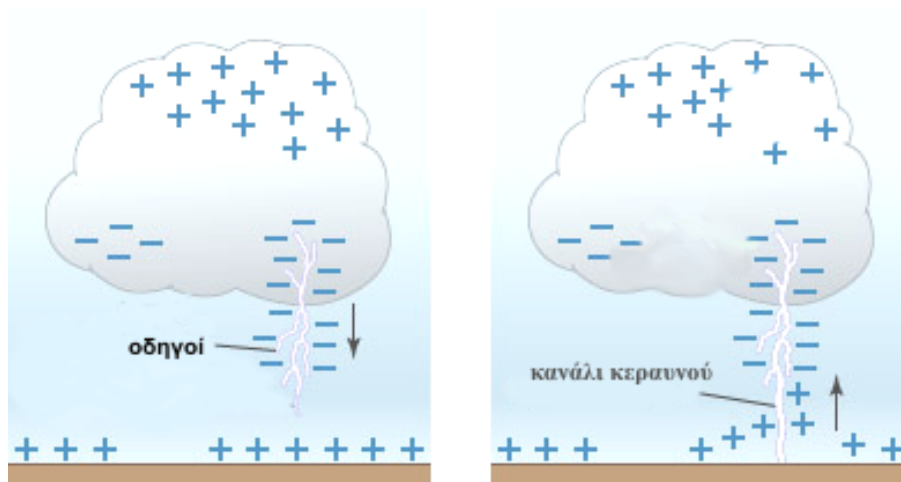
δες ηλεκτρικό δίπολο, που βρίσκεται κατακόρυφα τοποθετημένο πάνω από την επιφάνεια της γης. Θεωρούμε ότι το κανάλι του κεραυνού αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό από συνεχόμενα στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα, Σχήμα 5.2. Μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε το πεδίο του κεραυνού σε ένα δεδομένο σημείο παρατήρησης θεωρώντας ότι το πεδίο είναι το αποτέλεσμα της συνεισφοράς των στοιχειωδών δίπολων που αποτελούν το ρευματοφόρο κανάλι του κεραυνού.

Η κατανομή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού δεν είναι σταθερή και για τον προσδιορισμό της έχουν προταθεί από τους ερευνητές διάφοροι τύποι μοντέλων, οι οποίοι περιγράφονται στην επόμενη ενότητα.

5.3 Μοντέλα του πλήγματος επιστροφής

Όταν ένα αρνητικά φορτισμένο, στο κάτω μέρος του, σύννεφο βρίσκεται επάνω από την επιφάνεια της γης, τότε ένα αντίστοιχο θετικό ηλεκτρικό φορτίο δημιουργείται επάνω στη γη στην περιοχή κάτω από το σύννεφο. Σε μια περιοχή του σύννεφου με μεγάλη συγκέντρωση αρνητικού φορτίου, με τη βοήθεια της υγρασίας του σύννεφου, αρχίζουν να δημιουργούνται τοπικές εκφορτίσεις που οδηγούν στον ιονισμό του αέρα της περιοχής αυτής. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται κανάλια εκφόρτισης που είναι γνωστά ως “οδηγοί”. Τα κανάλια σταδιακά ενώνονται μεταξύ τους και δημιουργούν μεγαλύτερα κανάλια εκφόρτισης που κινούνται προς τα κάτω με έναν τρόπο σταδιακό. Κατά τη διάρκεια αυτής της πορείας, μπορούν να προκύψουν διακλαδώσεις των καναλιών, ενώ η εξέλιξη του φαινομένου και η πορεία προς τα χαμηλότερα υψόμετρα είναι σχετικά αργή. Το ρεύμα που αναπτύσσεται στα κανάλια αυτά είναι σχετικά μικρής τιμής και το φαινόμενο δεν είναι ορατό. Όταν τα κανάλια πλησιάσουν την θετικά φορτισμένη γη τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που αναπτύσσεται ανάμεσα σε αυτά και στη γη είναι πολύ μεγάλη. Το πεδίο είναι ακόμα μεγαλύτερο σε κορυφές δέντρων ή κατασκευών όπου βρίσκονται πιο κοντά στο αρνητικά φορτισμένο σύννεφο. Το ισχυρό πεδίο που αναπτύσσεται δημιουργεί ένα κανάλι ιονισμού που ουσιαστικά αποτελεί μια αγωγική διαδρομή ανάμεσα στο σύννεφο και στη γη. Τότε δημιουργείται μια πολύ μεγάλη εκφόρτιση και τεράστιας τιμής ηλεκτρικά ρεύματα αναπτύσσονται ανάμεσα στη θετικά φορτισμένη γη και στο αρνητικά φορτισμένο σύννεφο. Αυτό το ρεύμα με φορά από τη γη προς το σύννεφο ονομάζεται πλήγμα επιστροφής (return stroke) και είναι το πιο ορατό στάδιο του φαινομένου του κεραυνού. Η επαρκής γνώση των χαρακτηριστικών του πλήγματος επιστροφής είναι καθοριστικής σημασίας για την έρευνα και κατανόηση του φαινομένου αλλά και για την επιλογή των κατάλληλων ηλεκτρομαγνητικών εκφράσεων για την περιγραφή του.

Προκειμένου να μελετηθούν οι επιπτώσεις από τους κεραυνούς και να υπολογιστούν οι τάσεις που επάγονται σε αγωγικές υποδομές, αναπτύχθηκαν από τους ερευνητές διάφορα μοντέλα για το πλήγμα επιστροφής του κεραυνού. Ένα καλό μοντέλο του πλήγματος επιστροφής πρέπει να περιγράφει με ακρίβεια την κατανομή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού ώστε με τη σειρά του να επιτρέπει την ακριβή προσομοίωση του παραγόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τα μοντέλα που έχουν προταθεί από τους ερευνητές μπορούν να κατανεμηθούν στις εξής τέσσερις κατηγορίες [Rakov and Uman, 1998]: Τα φυσικά μοντέλα, τα μοντέλα κατανεμημένου κυκλώματος, τα μοντέλα engineering και τέλος τα ηλεκτρομαγνητικά μοντέλα. Τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα από τους ερευνητές που ασχολούνται με τον υπολογισμό του πεδίου που αναπτύσσεται από τον κεραυνό είναι τα engineering και τα ηλεκτρομαγνητικά μοντέλα. Τα μοντέλα engineering εισάγουν μια μαθηματική έκφραση που συνδέει την κατανομή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού με την τιμή του ρεύματος στη



Σχήμα 5.3: Το φαινόμενο του κεραυνού

βάση του καναλιού. Στην παρακάτω ενότητα δίνονται αναλυτικές πληροφορίες για τα μοντέλα αυτά. Τα ηλεκτρομαγνητικά μοντέλα βασίζονται στη θεωρία των κεραιών, όπου γίνεται επίλυση των εξισώσεων του Maxwell, ώστε να βρεθεί η κατανομή του ρεύματος κατά μήκος του καναλιού του κεραυνού με χρήση της μεθόδου των ροπών (MoM) ή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD). Περισσότερες πληροφορίες για αυτήν την κατηγορία μοντέλων μπορούν να βρεθούν στο [Baba and Rakon, 2008].

5.4 Τα μοντέλα Engineering

Η βασική ιδέα των μοντέλων engineering είναι ότι, με τη βοήθεια μιας μαθηματικής έκφρασης, το κατά μήκος ρεύμα του καναλιού $I(z', t)$ σε οποιοδήποτε ύψος z' και οποιαδήποτε χρονική στιγμή t σχετίζεται με το ρεύμα στη βάση του καναλιού $I(0, t)$ όπου $z' = 0$. Το ρεύμα αυτό ονομάζεται ρεύμα βάσης.

Τα μοντέλα Engineering μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, τα τύπου γραμμής μεταφοράς (Transmission - Line ή TL) και τα τύπου κύματος ρεύματος (Traveling - Current - Source ή TCS). Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει το TL μοντέλο [Thottappillil et al., 1997] και τις δύο παραλλαγές του, το τροποποιημένο μοντέλο με γραμμική εξασθένηση ρεύματος (MTLL) [Rakon and Dulzon, 1987] καθώς και το τροποποιημένο μοντέλο με εκθετική εξασθένηση ρεύματος (MTLE) [Nucci et al., 1988]. Τα μοντέλα της κατηγορίας αυτής ενσωματώνουν την παρουσία μιας πηγής ρεύματος στη βάση του καναλιού, η οποία εισάγει ένα κύμα ρεύματος στο κανάλι. Το κύμα αυτό διαδίδεται προς τα επάνω χωρίς εξασθένηση για την περίπτωση του TL και με εξασθένηση συγκεκριμένης μορφής για τα MTLL

Πίνακας 5.1: Τιμές των $P(z')$ και v για τα διάφορα μοντέλα Engineering

Μοντέλο	$P(z')$	v
TL	1	v_f
MTLL	$(1 - z'/H)$	v_f
MTLE	$exp(-z'/a)$	v_f
TCS	1	$-c$
BG	1	∞

και MTLE.

Η δεύτερη κατηγορία των μοντέλων περιλαμβάνει το TCR μοντέλο που εισήχθει από τον [Heidler, 1985b] και το μοντέλο Diendorfer-Uman (DU) το οποίο για να προσομοιώσει τη ρευματική κατανομή στο κανάλι του κεραυνού χρησιμοποιεί δύο κύματα ρεύματος [Diendorfer and Uman, 1990]. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και το μοντέλο των Bruce-Golde (BG) [Bruce and Golde, 1941]. Οι προσπάθειες όλων αυτών των μοντέλων είναι ο προσδιορισμός της εξασθένησης του ρεύματος και της ταχύτητας διάδοσης του ρεύματος με τρόπο ώστε να προσομοιάζουν την κατανομή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού όσο το δυνατόν ακριβέστερα σε σχέση με το πραγματικό φαινόμενο του κεραυνού.

Τα μοντέλα που περιγράψαμε παραπάνω μπορούν να παρασταθούν με την παρακάτω γενική μαθηματική έκφραση

$$I(z', t) = u \left(t - \frac{z'}{v_f} \right) P(z') I \left(0, t - \frac{z'}{v} \right) \quad (5.1)$$

όπου u είναι η βηματική συνάρτηση, η οποία είναι ίση με την μονάδα για $t \geq z'/v_f$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. $P(z')$ είναι η καθ ύψος συνάρτηση εξασθένησης του ρεύματος, v_f είναι η προς τα επάνω ταχύτητα διάδοσης που ονομάζεται και ταχύτητα πλήγματος επιστροφής, ενώ v είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος ρεύματος. Στον Πίνακα 5.1 δίνονται οι τιμές των $P(z')$ και v για τα διάφορα μοντέλα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Με H συμβολίζεται το ύψος του καναλιού του κεραυνού, ενώ a είναι η σταθερά εξασθένησης του ρεύματος, c είναι η ταχύτητα του φωτός.

Το μοντέλο που υιοθετήσαμε στην εργασία μας είναι το engineering MTLE κυρίως λόγω του ότι έχει χρησιμοποιηθεί από όλους τους άλλους ερευνητές που ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό του υπέργειου και υπόγειου ηλεκτρικού πεδίου και αυτό διευκολύνει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με τα αντίστοιχα δημοσιευμένα αποτελέσματα αυτών των ερευνητών. Η έκφραση για τη ρευματική κατανομή πάνω στο κανάλι του κεραυνού με τη χρήση του MTLE μοντέλου στο

πεδίο της συχνότητας είναι

$$I(z', \omega) = P(z')I(0, \omega) e^{j\omega z'/v_f} \quad (5.2)$$

όπου $I(z', \omega)$ το ρεύμα πάνω στο κανάλι στη θέση z' , με $z' = 0$ στη βάση του καναλιού, $P(z')$ είναι η καθ' ύψος συνάρτηση εξασθένησης του ρεύματος ενώ $I(0, \omega)$ είναι το ρεύμα στη βάση του καναλιού, v_f είναι η ταχύτητα του πλήγματος επιστροφής.

5.5 Εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του κεραυνού - Υπόγειο Πεδίο

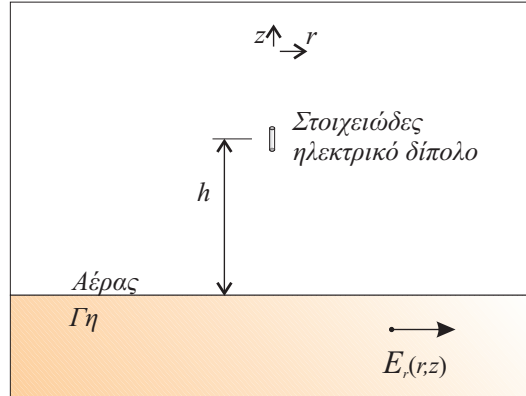
Προκειμένου να αναπτύξουμε τις εκφράσεις που μας δίνουν τις συνιστώσες του πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού πρέπει να ξεκινήσουμε, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, από τις εξισώσεις που δίνουν το πεδίο που παράγεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο πάνω από τη γη. Στη συνέχεια, το συνολικό πεδίο που παράγεται από το κανάλι του κεραυνού προκύπτει με υπέρθεση των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων από τα οποία αποτελείται το ρευματοφόρο κανάλι. Την τιμή του ρεύματος του κάθε στοιχειώδους διπόλου τη γνωρίζουμε από το μοντέλο πλήγματος επιστροφής που έχουμε επιλέξει, που στην περίπτωσή μας είναι το MTL Engineering Model. Για λόγους συντομίας στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε μόνο με την ανάπτυξη της μαθηματικής έκφρασης για την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία είναι και η συνιστώσα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, γιατί αυτή κυρίως δημιουργεί αλληλεπιδράσεις με συστήματα στη γειτονική περιοχή του πλήγματος του κεραυνού, με αποτέλεσμα τις γνωστές δυσκολίες ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας και την ανάπτυξη δυναμικών που προκαλούν δυσλειτουργίες ή και ζημιές στις ηλεκτρονικές υποδομές.

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 5.4, η οριζόντια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο σε ένα σημείο παρατήρησης μέσα στη γη σύμφωνα με την περίπτωση δ του Πίνακα 1.1 είναι

$$E_r(r, z) = \frac{j\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} V(r, z) \quad (5.3)$$

$$V(r, z) = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{\mu_E z + \mu h}}{k^2 \mu_E + k_E^2 \mu} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (5.4)$$

όπου $\mu_E^2 = \lambda^2 - k_E^2$, $\mu^2 = \lambda^2 - k^2$ ενώ $k_E^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 + j\omega \mu_0 \sigma$ και $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ είναι οι κυματάρθρωμοι στη γη και στον αέρα αντίστοιχα, ω είναι η γωνιακή συχνότητα και σ είναι η αγωγιμότητα της γης. J_0 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, p είναι η ροπή του διπόλου για την οποία ισχύει $p = I \Delta l$, όπου



Σχήμα 5.4: Το υπόγειο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο κατακόρυφα τοποθετημένο πάνω από τη γη.

I το ρεύμα του διπόλου και Δl το στοιχειώδες μήκος του. Κάνοντας την αντικατάσταση του V και μετά την διπλή παραγωγή ως προς r και z καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$E_r(r, z) = -\frac{jI\Delta l}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_E \lambda^2}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E^2 z + \mu h} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.5)$$

όπου $n^2 = k_E^2/k^2$ και J_1 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και πρώτης τάξης. Η έκφραση αυτή δίνει την οριζόντια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το κάθετο στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο που βρίσκεται τοποθετημένο σε ύψος $z' = h$ πάνω από τη γη (Σχήμα 5.4). Για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από τον κεραυνό, πρέπει να υπολογίσουμε τη συνεισφορά όλων των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων που συνθέτουν το κανάλι ρεύματος του κεραυνού. Αυτό επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας την (5.5) σε όλο το μήκος του καναλιού του κεραυνού ήτοι από $z' = 0$ που αντιστοιχεί στη βάση του καναλιού έως $z' = H$, όπου H το ύψος του καναλιού του κεραυνού (Σχήμα 5.2)

$$E_{r,tot}(r, z) = \int_0^H E_r(r, z, z') dz' \quad (5.6)$$

Για να πραγματοποιήσουμε την παραπάνω ολοκλήρωση πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού, πληροφορία που προσφέρεται από το μοντέλο του πλήγματος επιστροφής του κεραυνού. Όπως εξηγήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, το μοντέλο που υιοθετήσαμε στην παρούσα είναι το Engineering model και συγκεκριμένα η παραλλαγή MTL [Nucci et al., 1988]. Η ρευματική κατανομή σύμφωνα με το μοντέλο αυτό προκύπτει από την (5.2) για

$P(z') = e^{-z'/a}$ σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1. Η έκφραση για την κατανομή είναι

$$I(z', \omega) = I(0, \omega) e^{z'(-\frac{1}{\alpha} + \frac{j\omega}{v_f})} \quad (5.7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $I(0, \omega)$ είναι το ρεύμα στη βάση του καναλιού, α είναι η σταθερά εξασθένησης του ρεύματος, ενώ v_f είναι η ταχύτητα του πλήγματος επιστροφής που για λόγους απλότητας από εδώ και πέρα θα συμβολίζεται με v . Μετά την αντικατάσταση του ρεύματος καναλιού στην (5.5) παίρνουμε για τη συνολική τιμή της οριζόντιας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το κεραυνικό πλήγμα

$$E_{r,tot}(r, z) = -\frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_E \lambda^2}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E z} \left[\int_0^H e^{z'(\frac{j\omega}{v} - \frac{1}{\alpha} + \mu)} dz' \right] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.8)$$

Το ολοκλήρωμα κατά μήκος του καναλιού που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες της (5.8) στη βιβλιογραφία συνήθως συμβολίζεται ως $Q(\lambda)$ και το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης δίνεται παρακάτω

$$Q(\lambda) = \left[\exp\left(j\frac{\omega}{v} - \mu - \frac{1}{\alpha}\right) H - 1 \right] / \left(j\frac{\omega}{v} - \mu - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (5.9)$$

Για να υπολογίσουμε τις άλλες δύο συνιστώσες του υπόγειου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παράγονται από τον κεραυνό εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο. Ξεκινάμε από την αξονική και την γωνιακή συνιστώσα του πεδίου που προκαλείται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό κατακόρυφο δίπολο πάνω από τη γη (περίπτωση δ Πίνακα 1.1)

$$E_z(r, z) = \frac{j\omega p \mu_0}{4\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_E^2 \right) V(r, z) \quad (5.10)$$

$$H_\phi(r, z) = -\frac{pk_E^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} V(r, z) \quad (5.11)$$

$$V(r, z) = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{\mu_E z + \mu h}}{k^2 \mu_E + k_E^2 \mu} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (5.12)$$

Εκτελώντας τις παραπάνω παραγωγίσεις καταλήγουμε στις εκφράσεις της αξονικής και της γωνιακής συνιστώσας του πεδίου που δημιουργεί το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο. Στη συνέχεια, όπως και πριν, ολοκληρώνουμε τις εκφράσεις αυτές για όλο το μήκος του καναλιού του κεραυνού, χρησιμοποιώντας τη ρευματική κατανομή του μοντέλου MTL (5.7). Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στις τελικές εκφράσεις της αξονικής και της γωνιακής συνιστώσας του πεδίου. Παρακάτω δίνουμε συγκεντρωμένες και τις τρεις συνιστώσες του υπόγειου πεδίου που προκαλείται από τον κεραυνό.

$$E_z(r, z) = \frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^3}{n^2\mu + \mu_E} e^{\mu_E z} J_0(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.13)$$

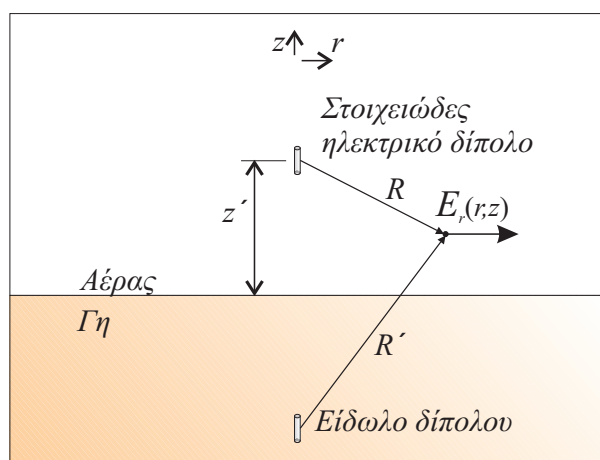
$$E_r(r, z) = -\frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2\mu + \mu_E} e^{\mu_E z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.14)$$

$$H_\phi(r, z) = -\frac{n^2 I(0, \omega)}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{n^2\mu + \mu_E} e^{\mu_E z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.15)$$

όπου $\mu_E^2 = \lambda^2 - k_E^2$, $\mu^2 = \lambda^2 - k^2$ ενώ $k_E^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 + j\omega \mu_0 \sigma$ και $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ είναι οι κυματάρια στη γη και στον αέρα αντίστοιχα, $n^2 = k_E^2/k^2$. ω είναι η γωνιακή συχνότητα και σ είναι η αγωγιμότητα της γης ενώ J_0 και J_1 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα. $I(0, \omega)$ είναι το ρεύμα στη βάση του καναλιού στο πεδίο των συχνοτήτων ενώ $Q(\lambda)$ είναι το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης κατά μήκος του καναλιού ώστε να συμπεριληφθεί η συνεισφορά όλων των στοιχειωδών ηλεκτρικών δίπολων που συνθέτουν το κανάλι του κεραυνού. Το αποτέλεσμα του $Q(\lambda)$ δίνεται στην (5.9) όπου H είναι το ύψος του καναλιού του κεραυνού, α είναι η σταθερά εξασθένησης του ρεύματος, ενώ ν είναι η ταχύτητα του πλήγματος επιστροφής.

Όπως προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις, οι συνιστώσες του υπόγειου πεδίου που παράγονται από τον κεραυνό έχουν τη μορφή ημι-άπειρων ολοκληρωμάτων, τύπου Sommerfeld, στο πεδίο των συχνοτήτων. Η συμπεριφορά τους είναι ιδιόζουσα και ο αριθμητικός υπολογισμός τους αποτελεί διαδικασία δύσκολη και χρονοβόρα. Η ιδιόζουσα συμπεριφορά τους σχετίζεται κυρίως με την παρουσία της συνάρτησης Bessel, η οποία παρουσιάζει τάση για ταλάντωση. Η τάση για ταλάντωση γίνεται πολύ έντονη όταν έχουμε μεγάλες τιμές της ακτινικής απόστασης r δηλαδή όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις από το κανάλι ρεύματος του κεραυνού. Ένα δεύτερο στοιχείο του ολοκληρώματος, που δημιουργεί δυσκολία στον υπολογισμό του, σχετίζεται με την ύπαρξη του πόλου της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης. Όπως θα δείξουμε σε επόμενη παράγραφο, ο πόλος αυτός βρίσκεται στο θετικό φανταστικό ημιχώρο του μιγαδικού επιπέδου, πολύ κοντά στον άξονα των θετικών πραγματικών αριθμών. Συνεπώς, όταν ολοκληρώνουμε κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών, “περνάμε” πολύ κοντά από τον πόλο, πράγμα που δυσκολεύει τη διαδικασία ολοκλήρωσης. Αυτές οι δυσκολίες είναι που οδήγησαν τους ερευνητές στην ανάπτυξη προσεγγιστικών αναλυτικών εκφράσεων που δίνουν απευθείας τις συνιστώσες του πεδίου καθώς και στην ανάπτυξη ειδικών υπολογιστικών αλγορίθμων για τη λύση των (5.13)-(5.15), όπως εξηγήθηκε αναλυτικά στην Ενότητα 5.1.

Το πρόβλημα αυτό είναι πολλαπλώς μεγαλύτερο όταν θέλουμε να πάρουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο πεδίο του χρόνου. Σε αυτήν την περίπτωση είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και συνεπώς



Σχήμα 5.5: Το υπέργειο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο κατακόρυφα τοποθετημένο πάνω από τη γη.

πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για πάρα πολύ μεγάλο αριθμό διαφορετικών συχνοτήτων. Μεγάλη δυσκολία υπάρχει και όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ανεπιθύμητο δυναμικό που αναπτύσσεται από επαγωγή πάνω σε έναν γειτονικό αγωγό εξαιτίας του κεραυνού. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε όλα τα σημεία του αγωγού προκειμένου να ολοκληρώσουμε κατά μήκος του αγωγού, ώστε να πάρουμε το αναπτυσσόμενο δυναμικό.

5.6 Εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του κεραυνού - Υπέργειο Πεδίο

Προκειμένου να εξάγουμε τις μαθηματικές εκφράσεις για το υπέργειο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που παράγεται από τον κεραυνό εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο με την προηγούμενη ενότητα. Οι τρεις συνιστώσες του υπέργειου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παράγεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο κάθετα τοποθετημένο πάνω από τη γη (Σχήμα 5.5), δίνονται από την περίπτωση γ του Πίνακα 1.1. Παρακάτω δίνουμε τις εκφράσεις αυτές με ελαφρώς τροποποιημένο συμβολισμό για λόγους απλότητας.

$$E_z(r, z) = \frac{j\omega p \mu_0}{4\pi k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) [G_2 - G_1 + k_E^2 V(r, z)] \quad (5.16)$$

$$E_r(r, z) = \frac{j\omega p \mu_0}{4\pi k^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [G_2 - G_1 + k_E^2 V(r, z)] \quad (5.17)$$

$$H_\phi(r, z) = -\frac{p}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} [G_2 - G_1 + k_E^2 V(r, z)] \quad (5.18)$$

$$V(r, z) = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-\mu(z'+z)}}{k^2 \mu_E + k_E^2 \mu} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (5.19)$$

Τα G_1 και G_2 που εμφανίζονται στο παραπάνω σετ των εξισώσεων εκφράζουν την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο και από το είδωλο αυτού, στην περίπτωση που ο χώρος που καταλαμβάνει η γη είναι άπειρα εκτεινόμενος και είναι

$$G_1 = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad \text{και} \quad G_2 = \frac{e^{-jkR'}}{R'} \quad (5.20)$$

όπου $R = \sqrt{r^2 + (z' - z)^2}$ είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από το δίπολο, ενώ $R' = \sqrt{r^2 + (z' + z)^2}$ είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από το είδωλο του δίπολου, Σχήμα 5.5. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το κανάλι του κεραυνού αποτελείται από μια σειρά από στοιχειώδη δίπολα. Η τιμή του ρεύματος του κάθε δίπολου δίνεται από τη ρευματική κατανομή του μοντέλου MTLE σύμφωνα με την (5.7). Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά όλων των διπόλων ολοκληρώνουμε τις (5.16), (5.17) και (5.18) σε όλο το ύψος του καναλιού του κεραυνού. Αφού κάνουμε την αντικατάσταση του $V(r, z)$, πραγματοποιήσουμε τις μερικές παραγωγίσεις και στη συνέχεια τις ολοκληρώσεις, καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις που μας δίνουν τις τρεις συνιστώσες του υπέργειου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού.

$$E_z(r, z) = E_{z,ideal} - \frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_E}{n^2\mu + \mu_E} \frac{\lambda^3}{\mu} e^{-\mu z} J_0(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.21)$$

$$E_r(r, z) = E_{r,ideal} - \frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2\mu + \mu_E} e^{-\mu z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.22)$$

$$H_\phi(r, z) = H_{\phi,ideal} - \frac{I(0, \omega)}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_E}{n^2\mu + \mu_E} \frac{\lambda^2}{\mu} e^{-\mu z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.23)$$

όπου

$$E_{z,ideal} = \frac{\mu_0 I(0, \omega)}{4\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \int_0^H e^{z'(-\frac{1}{\alpha} + \frac{j\omega}{v})} \left\{ e^{jkR} \left[\frac{2(z-z')^2 - r^2}{R^4} \left(1 - \frac{1}{jkR}\right) + jk\frac{r^2}{R^3} \right] + e^{jkR'} \left[\frac{2(z+z')^2 - r^2}{R'^4} \left(1 - \frac{1}{jkR'}\right) + jk\frac{r^2}{R'^3} \right] \right\} dz' \quad (5.24)$$

$$E_{r,ideal} = \frac{\mu_0 I(0, \omega)}{4\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \int_0^H e^{z'(-\frac{1}{\alpha} + \frac{j\omega}{v})} \left\{ e^{jkR} \left[\frac{3r(z-z')}{R^4} \left(1 - \frac{1}{jkR}\right) - jk\frac{r(z-z')}{R^3} \right] + e^{jkR'} \left[\frac{3r(z+z')}{R'^4} \left(1 - \frac{1}{jkR'}\right) - jk\frac{r(z+z')}{R'^3} \right] \right\} dz' \quad (5.25)$$

$$H_{\phi,ideal} = -\frac{I(0, \omega)}{4\pi} \int_0^H e^{z'(-\frac{1}{\alpha} + \frac{j\omega}{v})} \left(\frac{r}{R^3} - jk\frac{r}{R^2} + \frac{r}{R'^3} - jk\frac{r}{R'^2} \right) dz' \quad (5.26)$$

Οι όροι *ideal* εκφράζουν το πεδίο που δημιουργεί ο κεραυνός στην ιδανική περίπτωση που η γη έχει άπειρη αγωγιμότητα. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως είναι γνωστό από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, το πεδίο που προκύπτει είναι το άθροισμα του πεδίου της πηγής και του αντίστοιχου ειδώλου της. Οι δεύτεροι όροι, που έχουν τη μορφή ημι-άπειρων ολοκληρωμάτων, εκφράζουν τη συνεισφορά της επίδρασης που έχει η πεπερασμένη αγωγιμότητα της γης. Οι όροι *ideal* δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία στον υπολογισμό τους και η αριθμητική τους ολοκλήρωση γίνεται πολύ γρήγορα με τις συνηθισμένες ρουτίνες ολοκλήρωσης που είναι ενσωματωμένες στα λογισμικά πακέτα μαθηματικών υπολογισμών, όπως είναι η Mathematica και το Matlab. Αντιθέτως, τα ημι-άπειρα ολοκληρώματα των (5.21) - (5.23) παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία στην ολοκλήρωσή τους όπως εξηγήθηκε και στην προηγούμενη ενότητα.

5.7 Το ρεύμα βάσης

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, στα μοντέλα Engineering η κατανομή του ρεύματος πάνω στο κανάλι του κεραυνού ουσιαστικά ανάγεται στη γνώση του ρεύματος στη βάση του καναλιού. Επίσης, οι εκφράσεις που δίνουν τις συνιστώσες του υπόγειου και υπέργειου πεδίου εμπλέκουν την παρουσία του μεγέθους αυτού $I(0, \omega)$. Συνεπώς, η ακριβής γνώση του ρεύματος βάσης είναι καθοριστικής σημασίας στους υπολογισμούς των επιδράσεων του φαινομένου του κεραυνού. Οι ερευνητές προσπάθησαν να αξιοποιήσουν πειραματικά δεδομένα

Πίνακας 5.2: Τιμές των παραμέτρων για τον υπολογισμό του ρεύματος βάσης με τη φόρμουλα Heidler για το πρώτο πλήγμα και το επακόλουθο πλήγμα.

	I_{01} (kA)	τ_{11} (μ s)	τ_{12} (μ s)	n_1	I_{02} (kA)	τ_{21} (μ s)	τ_{22} (μ s)	n_2
Πρώτο πλήγμα	28	1.8	95	2	-	-	-	-
Επακόλουθο πλήγμα	10.7	0.25	2.5	2	6.5	2	230	2

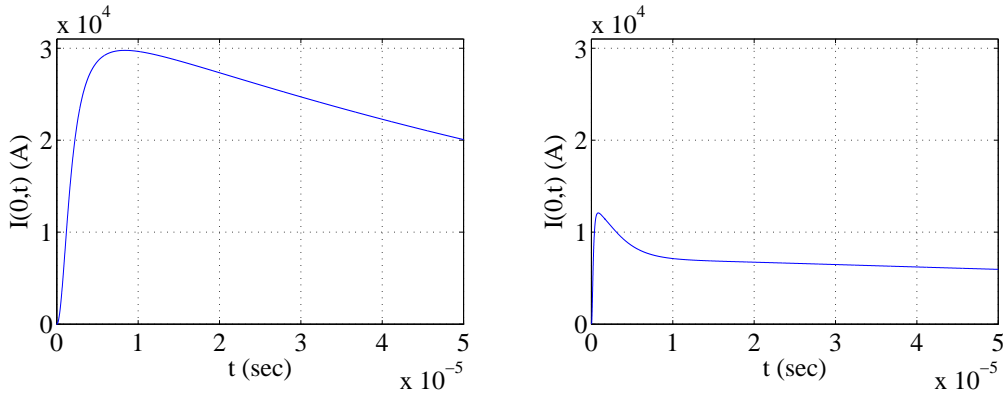
για να αναπτύξουν μία μαθηματική σχέση που να εκφράζει με ακρίβεια το ρεύμα βάσης του κεραυνού. Ο Heidler το 1985 [Heidler, 1985a] πρότεινε μία σχέση που αναπαράγει το φυσικό μηχανισμό του ρεύματος καλύτερα από τα κλασικά μοντέλα που περιλαμβάνουν διπλά εκθετικά. Η σχέση του Heidler δεν παρουσιάζει ασυνέχειες και κατάφερε να υιοθετηθεί από πολλά διεθνή πρότυπα όπως το IEC 61312-1 [IEC, 1995] και το VG 95371-10 [VG, 2011] καθώς και από το International Council on Large Electric Systems (CIGRE). Η φόρμουλα του Heidler για το ρεύμα βάσης του κεραυνού στο πεδίο του χρόνου έχει την παρακάτω μορφή

$$I(0, t) = \frac{I_{01}}{\eta_1} \left(\frac{t}{\tau_{11}} \right)^{n_1} \frac{\exp(-t/\tau_{12})}{1 + (t/\tau_{11})^{n_1}} + \frac{I_{02}}{\eta_2} \left(\frac{t}{\tau_{21}} \right)^{n_2} \frac{\exp(-t/\tau_{22})}{1 + (t/\tau_{21})^{n_2}} \quad (5.27)$$

Στην παραπάνω και για $m = 1, 2$, I_{0m} είναι το πλάτος του ρεύματος βάσης, τ_{m1} και τ_{m2} είναι η αύξουσα και η φθίνουσα σταθερά χρόνου αντίστοιχα, ενώ η_m είναι ο παράγοντας διόρθωσης του πλάτους που δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$$\eta_m = \exp \left[- (\tau_{m1}/\tau_{m2}) (n_m \tau_{m2}/\tau_{m1})^{1/n_m} \right], \quad m = 1, 2 \quad (5.28)$$

Όπως περιγράφηκε και σε προηγούμενη ενότητα, το πλήγμα του κεραυνού είναι το αποτέλεσμα ανάπτυξης αγωγίμης διαδρομής ανάμεσα στη θετικά φορτισμένη γη και στο αρνητικά φορτισμένο σύννεφο, κάτω από την επίδραση ενός πολύ ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Οι εκφορτίσεις που πραγματοποιούνται μέσω του αγωγίμου καναλιού τις περισσότερες φορές είναι παραπάνω από μία. Η επισημονική κοινότητα έχει καταλήξει στην τυποποίηση των πληγμάτων του κεραυνού σε δύο κατηγορίες, το πρώτο πλήγμα ή first stroke και στο επακόλουθο πλήγμα ή subsequent stroke. Οι τιμές των παραμέτρων της φόρμουλας Heidler για το πρώτο πλήγμα και το επακόλουθο πλήγμα δίνονται στον Πίνακα 5.2. Στις διάφορες προσομοιώσεις που πραγματοποιήσαμε για τον υπολογισμό της οριζόντιας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιήσαμε τα δύο αυτά πλήγματα και για τον υπολογισμό του ρεύματος βάσης χρησιμοποιήσαμε τη



Σχήμα 5.6: Το ρεύμα βάσης του κεραυνού στο πεδίο του χρόνου, πρώτο πλήγμα (αριστερά), επακόλουθο πλήγμα (δεξιά).

φόρμουλα Heidler. Όπως θα εξηγήσουμε αναλυτικά σε επόμενη ενότητα, για τον υπολογισμό του πεδίου του κεραυνού εργαστήκαμε στο πεδίο των συχνοτήτων και στη συνέχεια περάσαμε στο πεδίο του χρόνου με τη βοήθεια της ανάλυσης Fourier. Η σχέση (5.27) δίνει το ρεύμα βάσης στο πεδίο του χρόνου, συνεπώς χρησιμοποιήσαμε μετασχηματισμό Fourier για να πάρουμε το ρεύμα βάσης στο πεδίο των συχνοτήτων. Στο Σχήμα 5.6 δίνουμε το γράφημα του ρεύματος βάσης στο χρόνο για το πρώτο πλήγμα καθώς και για επακόλουθο πλήγμα. Τα γραφήματα παράχθηκαν με χρήση της (5.27) για τις παραμέτρους του Πίνακα 5.2 για το πρώτο και το επακόλουθο πλήγμα.

Εναλλακτικά μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει την παρακάτω σχέση για το ρεύμα βάσης [Andreotti et al., 2005].

$$I(\omega) = \frac{I_0\tau_1}{\eta p} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k p) \exp(-u_k p) E_1(-u_k p) - \frac{2\pi j}{n} \sum_{k=k_0}^{n-1} (u_k p) \exp(-u_k p) u(f - f_k) \right] \quad (5.29)$$

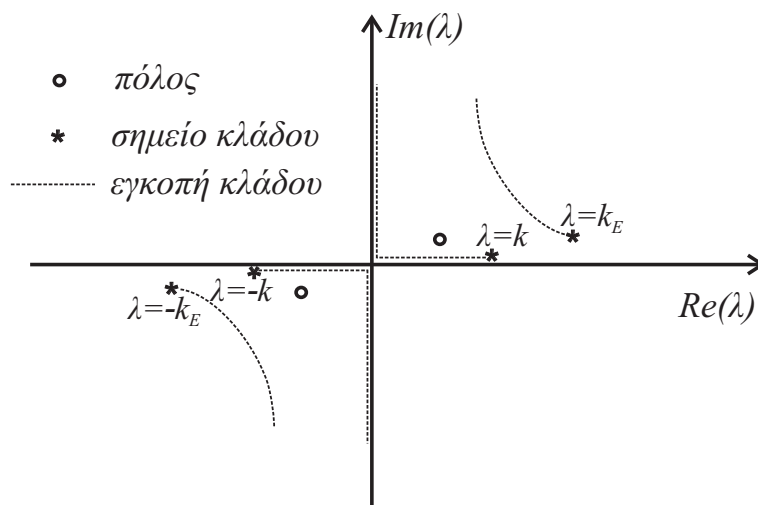
όπου η συνάρτηση E_1 είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα και είναι

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |argz| < \pi \quad (5.30)$$

u είναι η βηματική συνάρτηση και

$$p = \frac{\tau_1}{\tau_2} + j\omega\tau_1, \quad f_k = -\frac{1}{2\pi\tau_2} \tan\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right), \quad k_0 = \frac{3n+2}{4}$$

$$u_k = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right] + j\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right], \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, n-1$$



Σχήμα 5.7: Πόλοι και σημεία κλάδου της προς ολοκλήρωση συνάρτησης στο μιγαδικό επίπεδο λ .

Η σχέση (5.29) μας δίνει το ρεύμα βάσης κατευθείαν στο πεδίο της συχνότητας και μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά για να αποφύγουμε το μετασχηματισμό Fourier της (5.27) με τρόπο αριθμητικό.

5.8 Επίλυση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα, οι εξισώσεις που δίνουν το πεδίο που αναπτύσσεται από το πλήγμα του κεραυνού κάτω και επάνω από τη γη είναι ολοκληρώματα με ιδιάζουσα συμπεριφορά, με αποτέλεσμα η ολοκλήρωσή τους να είναι πολύ δύσκολη. Η προσέγγιση που αναπτύξαμε εμείς για τη λύση τους περιλαμβάνει την αριθμητική ολοκλήρωσή τους ακολουθώντας μια κατάλληλα τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Η διαδρομή αυτή επιτρέπει την ταχεία σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων. Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί στο παρελθόν για άλλες εφαρμογές ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, όπως είναι η μοντελοποίηση των κεραιών. Η μέθοδος που αναπτύξαμε, συνδυάζεται με την τεχνική της παρεμβολής, για να μειώσουμε τον αριθμό των διαφορετικών συχνοτήτων για τις οποίες είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, ώστε με τη βοήθεια της σύνθεσης Fourier να πάρουμε την απόκριση στο χρόνο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Το σετ των εξισώσεων (5.13)-(5.15) που μας δίνουν το υπόγειο πεδίο περιλαμβάνει τη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικής και πρώτη τάξης $J_0(\lambda r)$ και $J_1(\lambda r)$. Οι συναρτήσεις αυτές παρουσιάζουν τάση για ταλάντωση, η οποία γίνεται πολύ έντονη όταν το r παίρνει μεγάλες τιμές, δηλαδή όταν προσπαθούμε

να βρούμε το πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις από το ρευματοφόρο κανάλι του κεραυνού. Ο παρανομαστής της συνάρτησης προς ολοκλήρωση των (5.13)-(5.15) παρουσιάζει πόλους, η θέση των οποίων απεικονίζεται στο Σχήμα 5.7. Η τιμή των πόλων λ_0 είναι

$$\lambda_0 = \pm \sqrt{\frac{n^4 k^2 - k_E^2}{n^4 - 1}} \quad (5.31)$$

Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνονται και τα σημεία κλάδου, όπου ισχύει $\lambda = \pm k_E$ και $\lambda = \pm k$ με αποτέλεσμα το μηδενισμό των μ_E και μ στα σημεία αυτά. Ο παρανομαστής της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης παρουσιάζει ασυνέχεια κατά μήκος των εγχοπών κλάδου, οι οποίες ορίζονται από τα αντίστοιχα σημεία κλάδου και παριστάνονται στο Σχήμα 5.7 με διακεκομμένη γραμμή. Τα σημεία εγχοπής $\lambda = \pm k$ βρίσκονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και οι αντίστοιχες εγχοπές κλάδου ταυτίζονται με τον άξονα των πραγματικών και φανταστικών, πράγμα που δεν αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.7 για λόγους ευκρίνειας και κατανόησης του σχήματος.

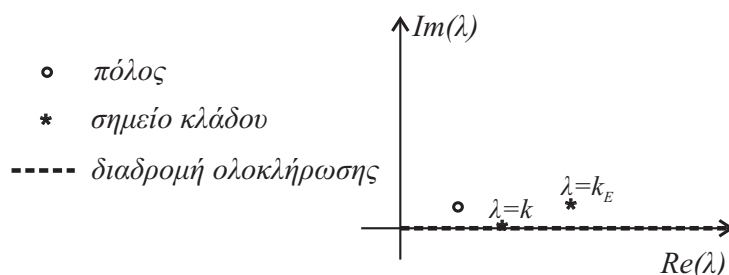
Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής επικεντρωθήκαμε στον υπολογισμό της οριζόντιας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το πλήγμα του κεραυνού. Η συνιστώσα αυτή είναι η πιο σημαντική για τον υπολογισμό των ανεπιθύμητων δυναμικών που αναπτύσσονται σε γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας καθώς και σε γραμμές τηλεπικοινωνιών, λόγω του ότι οι γραμμές αυτές είναι συνήθως οριζόντια τοποθετημένες, με αποτέλεσμα τη μέγιστη αλληλεπίδραση με την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Όπως είναι φυσικό, η μέθοδος που αναπτύξαμε είναι εξίσου κατάλληλη και για τον υπολογισμό της αξονικής και γωνιακής συνιστώσας του πεδίου του κεραυνού. Παρακάτω υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις για τον υπολογισμό της οριζόντιας συνιστώσας του πεδίου κάτω από τη γη $E_{r,u}(r, z)$ και πάνω από τη γη $E_{r,o}(r, z)$

$$E_{r,u}(r, z) = -\frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.32)$$

$$E_{r,o}(r, z) = E_{r,ideal} - \frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{-\mu z} J_1(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.33)$$

Όταν επιχειρούμε να ολοκληρώσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις από το μηδέν έως το άπειρο πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών του μιγαδικού επιπέδου λ τότε συναντάμε το σημείο κλάδου $\lambda = k$, επιπροσθέτως δε, περνάμε πολύ κοντά από τον πόλο της συνάρτησης, Σχήμα 5.8. Το γεγονός αυτό μαζί με την παρουσία της συνάρτησης Bessel στις παραπάνω εκφράσεις κάνει τον υπολογισμό τους πάρα πολύ δύσκολο και επιβάλλει τη χρήση ειδικών αλγόριθμων σχεδιασμένων για τα συγκεκριμένα ολοκληρώματα.

Το πρώτο βήμα της μεθόδου που αναπτύξαμε περιλαμβάνει την αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και πρώτης τάξης με τη συνάρτηση



Σχήμα 5.8: Διαδρομή ολοκλήρωσης των (5.32), (5.33) από μηδέν έως άπειρο κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών

Hankel πρώτου είδους και πρώτης τάξης. Αυτή η αντικατάσταση γίνεται σύμφωνα με την παρακάτω γνωστή ισότητα

$$\int_0^{+\infty} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^{(1)}(\lambda r) d\lambda \quad (5.34)$$

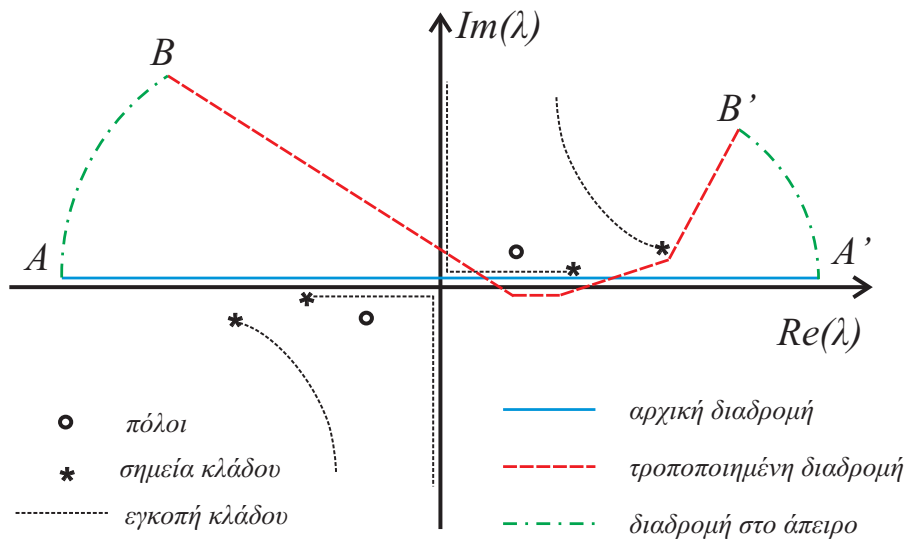
Με την αντικατάσταση αυτή η (5.32) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$E_r(r, z) = -\frac{jI(0, \omega)}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E z} H_1^{(1)}(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.35)$$

Για λόγους συντομίας δεν αναφερόμαστε στην (5.33) που μας δίνει το υπέργειο ηλεκτρικό πεδίο μιας και η μορφή του ολοκληρώματος είναι ίδια. Κάνοντας την παραπάνω αλλαγή έχουμε το πλεονέκτημα ότι η συνάρτηση Hankel παρουσιάζει πολύ μικρότερη τάση για ταλάντωση και ειδικά στο θετικό φανταστικό ημιχώρο του μιγαδικού επιπέδου λ , που κυρίως μας ενδιαφέρει, όπως θα φανεί παρακάτω. Επιπλέον, με την παραπάνω αλλαγή, έχουν μεταβληθεί τα όρια ολοκλήρωσης από $[0, +\infty)$ σε $(-\infty, +\infty)$. Αυτή η αλλαγή επιτρέπει να αλλάξουμε τη διαδρομή της ολοκλήρωσης και να ακολουθήσουμε μία κατάλληλα τροποποιημένη διαδρομή στο μιγαδικό επίπεδο λ .

5.9 Η τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης

Μετά την αλλαγή της συνάρτησης Bessel σε Hankel έχουμε επιτύχει την αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης και έτσι τώρα για την ολοκλήρωση της (5.35) μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδρομή $(-\infty, +\infty)$ κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Βέβαια, σε αυτήν την περίπτωση, αντιμετωπίζουμε και πάλι τη δυσκολία των σημείων κλάδου και της προσέγγισης των πόλων, και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό, λόγω του ότι αντιμετωπίζουμε και το σημείο κλάδου



Σχήμα 5.9: Επιλεγμένη κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο.

$\lambda = -k$ καθώς και τον πόλο που βρίσκεται στο αρνητικό μιγαδικό τεταρτημόριο. Για να αποφύγουμε αυτά τα εμπόδια θα επιλέξουμε μια ισοδύναμη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο με τη βοήθεια της μιγαδικής ανάλυσης και του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy. Στο Σχήμα 5.9 παρουσιάζουμε μια κλειστή καμπύλη που έχουμε επιλέξει στο μιγαδικό επίπεδο. Σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy για μία συνάρτηση που είναι αναλυτική πάνω σε μια κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης πάνω στην κλειστή καμπύλη είναι ίσο με μηδέν εάν η καμπύλη δεν περιέχει πόλους της συνάρτησης [Churchill and Brown, 2001]. Έτσι, για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης C που αποτελείται από τα τμήματα AB , BB' , $B'A'$ και $A'A$ του Σχήματος 5.9 ισχύει

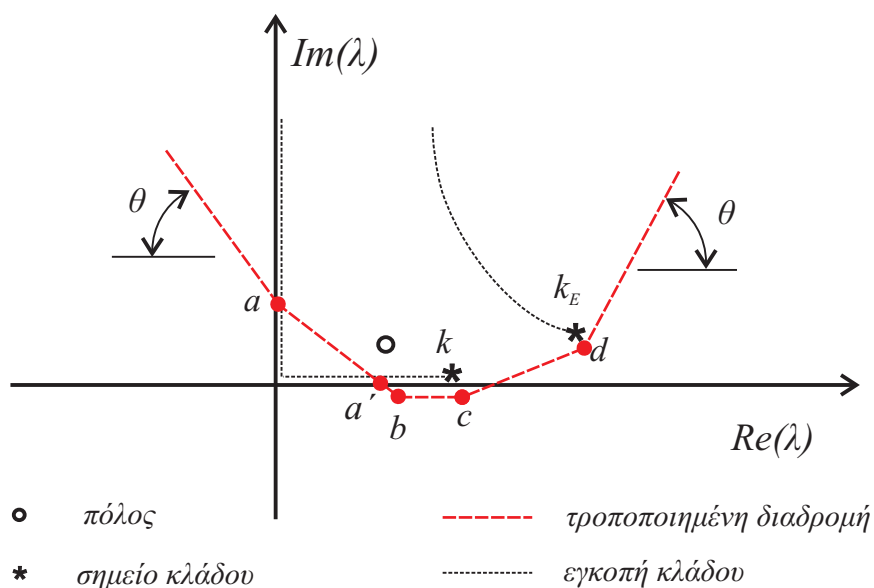
$$\oint_C f(\lambda) d\lambda = 0 \quad (5.36)$$

λόγω του ότι η καμπύλη C που επιλέξαμε “αφήνει” έξω τους δύο πόλους της συνάρτησης. $f(\lambda)$ είναι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση της (5.35), ήτοι

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E z} H_1^{(1)}(\lambda r) Q(\lambda) \quad (5.37)$$

Προχωρώντας περαιτέρω την (5.36) έχουμε

$$\oint_c f(\lambda) d\lambda = \int_A^B f(\lambda) d\lambda + \int_B^{B'} f(\lambda) d\lambda + \int_{B'}^{A'} f(\lambda) d\lambda + \int_{A'}^A f(\lambda) d\lambda = 0 \quad (5.38)$$



Σχήμα 5.10: Τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Τα τμήματα AB και $B'A'$ έχουν επιλεγεί να βρίσκονται πολύ μακριά, στο άπειρο. Συνεπώς τα ολοκληρώματα κατά μήκος αυτών των τμημάτων είναι ίσα με μηδέν λόγω του ότι η συνάρτηση $f(\lambda)$ μηδενίζεται σε αυτές τις αποστάσεις. Μετά από αυτόν το μηδενισμό, αυτό που προκύπτει από την (5.38) είναι

$$\int_A^{A'} f(\lambda) d\lambda = \int_B^{B'} f(\lambda) d\lambda \quad (5.39)$$

Το πρώτο μέλος της ισότητας είναι το αρχικό μας ολοκλήρωμα (5.35) μιας και τα A και A' έχουν επιλεγεί να είναι στο $+\infty$ και $-\infty$ και επομένως η διαδρομή ολοκλήρωσης ταυτίζεται με τον άξονα των πραγματικών αριθμών όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.9. Επομένως, αυτό που προκύπτει από την παραπάνω ισότητα είναι ότι το αρχικό μας ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ολοκλήρωμα κατά μήκος της τροποποιημένης διαδρομής BB' . Ακολουθώντας αυτήν την τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης, η σύγκλιση του υπολογισμού του ολοκληρώματος είναι πολύ γρήγορη λόγω του ότι αποφεύγουμε τους πόλους, τα σημεία κλάδου και την ολοκλήρωση κατά μήκος τμημάτων των εγκοπών κλάδου.

Στο Σχήμα 5.10 φαίνεται με λεπτομέρεια η τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης που ακολουθούμε. Τα σημεία a , a' , b , c και d δεν έχουν σταθερή τιμή αλλά έχουν συναρτηθεί με τα k και k_E . Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η σταθερή τους σχετική θέση ως προς τους πόλους και τα σημεία κλάδου στο μιγαδικό επίπεδο λ ανεξάρτητα από την τιμή της κυκλικής συχνότητας ω . Παρακάτω δίνονται

οι τιμές των σημείων a , a' , b , c και d .

$$\begin{aligned} a &= j0.4k, & a' &= 0.4k, & b &= (0.6 + j0.02)k, \\ c &= (1.02 + j0.02)k, & d &= 1.01\text{Re}\{k_E\} + j0.99\text{Im}\{k_E\}, \end{aligned}$$

Επίσης η τιμή της γωνίας θ έχει επιλεγεί ώστε να προκύπτει η μεγαλύτερη δυνατή απόσβεση στην τάση για ταλάντωση και η προκύπτουσα διαδρομή ολοκλήρωσης είναι γνωστή ως διαδρομή μέγιστης κλίσης (Steepest Descent Path, SDP) [Kuester and Chang, 1979]. Η τιμή της θ είναι

$$\theta = \tan^{-1}(r/z) \quad (5.40)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι κατά την ολοκλήρωση της (5.35) κατά μήκος του τμήματος aa' πρέπει να πάρουμε το μ με αρνητικό πρόσημο και αυτό γιατί στο τμήμα αυτό της διαδρομής διασχίζουμε την εγκοπή κλάδου και περνάμε σε ένα άλλο φύλλο Riemann. Η επιλογή των τιμών των σημείων a , a' , b , c και d μπορούμε να πούμε ότι είναι επιλογή 'Engineering' και έγινε με γνώμονα την αποφυγή πόλων και σημείων κλάδου στο μιγαδικό επίπεδο. Για την επιλογή τους αξιοποιήσαμε παλιότερη δημοσίευση που πραγματεύεται τη μοντελοποίηση κεραιών κοντά στο έδαφος [Burke et al., 1981]. Η ίδια τεχνική χρησιμοποιείται και στο γνωστό κώδικα επίλυσης προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας NEC, όπου απαιτείται αριθμητική ολοκλήρωση ανάλογων ολοκληρωμάτων [Burke and Roggio, 1981]. Η ιδέα της χρήσης τροποποιημένης διαδρομής ολοκλήρωσης για την αποφυγή πόλων και σημείων κλάδου για την αριθμητική ολοκλήρωση των τύπου Sommerfeld ολοκληρωμάτων παρουσιάζεται πολύ αναλυτικά από τους Kuester και Chang [Kuester and Chang, 1979].

5.10 Ο υπολογιστικός αλγόριθμος - η τεχνική της παρεμβολής

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση Bessel που εμφανίζεται στις αρχικές εκφράσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του κερανού με τη συνάρτηση Hankel, εξασφαλίζουμε τον περιορισμό της τάσης για ταλάντωση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης. Συγχρόνως, ακολουθώντας την τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο λ αποφεύγουμε τους πόλους και τα σημεία κλάδου, με αποτέλεσμα η σύγκλιση του υπολογισμού των πεδιακών ολοκληρωμάτων να είναι πολύ γρήγορη. Είναι ενδεικτικό ότι, για την ολοκλήρωση κατά μήκος της τροποποιημένης διαδρομής, χρησιμοποιούμε συνηθισμένες ρουτίνες ολοκλήρωσης, που υπάρχουν διαθέσιμες στα λογισμικά μαθηματικών εφαρμογών, χωρίς να είναι πλέον απαραίτητη η χρήση περίπλοκων αλγόριθμων ολοκλήρωσης, που

έχουν αναπτυχθεί ειδικά για την επίλυση των συγκεκριμένων πεδιακών εκφράσεων [Delfino et al., 2007], [Delfino et al., 2008b]. Επίσης, δεν είναι απαραίτητη η προσφυγή σε απλοποιημένες αναλυτικές εκφράσεις, που μας δίνουν το πεδίο του κεραυνού με τρόπο προσεγγιστικό. Θυμίζουμε παρακάτω τις εκφράσεις της οριζόντιας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, που αποτελεί τη συνιστώσα του πεδίου που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον λόγω του ότι είναι αποκλειστικά υπεύθυνη για την αλληλεπίδραση με οριζόντιους αγωγούς καθώς και κάθε είδους αγωγίμες κατασκευές με οριζόντιο προσανατολισμό.

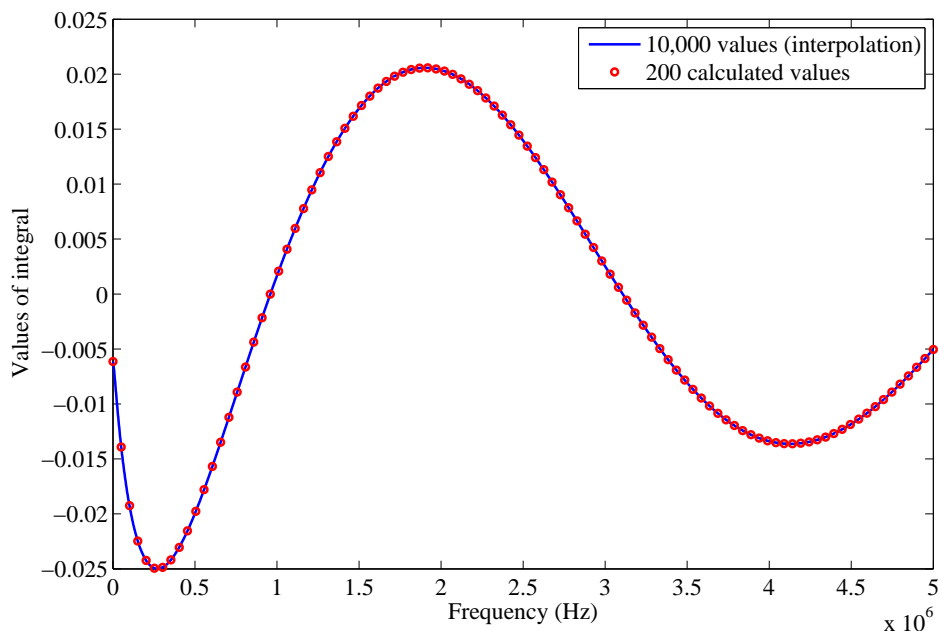
$$E_{r,u}(r, z) = -\frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{\mu_E z} H_1^{(1)}(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.41)$$

$$E_{r,o}(r, z) = E_{r,ideal} - \frac{jI(0, \omega)}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} e^{-\mu z} H_1^{(1)}(\lambda r) Q(\lambda) d\lambda \quad (5.42)$$

Οι εκφράσεις αυτές είναι στο πεδίο της συχνότητας αλλά το ζητούμενο είναι αποτελέσματα στο πεδίο του χρόνου. Συνεπώς, πρέπει να εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, πράγμα που μας υποχρεώνει να υπολογίσουμε τα ολοκλήρωμα για πάρα πολλές διαφορετικές τιμές της συχνότητας ω . Ο όρος $E_{r,ideal}$ που εμφανίζεται στην έκφραση για το υπέργειο ηλεκτρικό πεδίο είναι το ολοκλήρωμα (5.25) που εκφράζει την ιδανική περίπτωση της άπειρα αγωγίμης γης όπου το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει με τη γνωστή τεχνική των ειδώλων. Το ολοκλήρωμα αυτό δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα στον υπολογισμό του και η αριθμητική του ολοκλήρωση γίνεται εύκολα με τις συνηθισμένες υπολογιστικές ρουτίνες. Αντίθετα, το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στις παραπάνω εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου έχει ιδιαίζουσα συμπεριφορά και για τη λύση του χρησιμοποιούμε την τεχνική που έχουμε αναπτύξει, που περιλαμβάνει την τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης.

Το ρεύμα βάσης του κεραυνού $I(0, \omega)$ το παίρνουμε με τη βοήθεια της φόρμουλας του Heidler, όπως εξηγήσαμε σε προηγούμενη ενότητα, με χρήση των (5.27) και (5.28). Υπολογίζουμε το ρεύμα στο πεδίο του χρόνου και στη συνέχεια εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Fourier για να πάρουμε τις τιμές του ρεύματος βάσης στο πεδίο των συχνοτήτων. Τις τιμές αυτές τις πολλαπλασιάζουμε με τις τιμές που έχουμε πάρει από τη λύση του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας πάντα την τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το φάσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και στη συνέχεια εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να καταλήξουμε στο ζητούμενό μας, που είναι η οριζόντια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από τον κεραυνό στο πεδίο του χρόνου. Για το μετασχηματισμό Fourier χρησιμοποιούμε 5.000 δείγματα για το υπόγειο πεδίο και 10.000 δείγματα για το υπέργειο πεδίο, από 0 έως 10MHz.

Με τη μέθοδο που αναπτύξαμε, το ολοκλήρωμα των (5.41) και (5.42) λύνεται



Σχήμα 5.11: Η τεχνική της παρεμβολής

σε χρόνο μερικών msec σε έναν συνηθισμένο ηλεκτρονικό υπολογιστή. Παρά την πολύ γρήγορη αυτή επίδοση, η ανάγκη που δημιουργεί ο μετασχηματισμός Fourier για υπολογισμό του ολοκληρώματος για 10.000 διαφορετικές τιμές της συχνότητας, κάνει τη συνολική διαδικασία εξαιρετικά χρονοβόρα. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια της τεχνικής της παρεμβολής. Αντί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για όλες τις απαιτούμενες τιμές του ω , το υπολογίζουμε με τη μέθοδο που αναπτύξαμε για πολύ λιγότερες τιμές και όλες οι ενδιάμεσες εξασφαλίζονται με παρεμβολή. Η πράξη έδειξε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μόνο για 200 τιμές είναι αρκετός για να έχουμε άριστα αποτελέσματα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο πεδίο του χρόνου. Στο Σχήμα 5.11 φαίνεται η διαδικασία της παρεμβολής. Με τα κυκλικά σημεία δείχνουμε τις τιμές του ολοκληρώματος που έχουν προκύψει με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος με χρήση της μεθόδου μας, ενώ όλες οι ενδιάμεσες τιμές είναι οι 10.000 τιμές που προκύπτουν με την παρεμβολή. Τον κώδικα για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου τον αναπτύξαμε σε Matlab και για την υλοποίηση της παρεμβολής χρησιμοποιούμε την εντολή `interp1`, ενώ η ολοκλήρωση γίνεται με την ρουτίνα `quadgk`.

5.11 Παρουσίαση αποτελεσμάτων-Υπόγειο πεδίο

Για τον υπολογισμό της οριζόντιας συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κάτω από την επιφάνεια της γης επιλύουμε την (5.41) ακολουθώντας την τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης BB' του Σχήματος (5.9) στο μιγαδικό επίπεδο λ . Η ολοκλήρωση γίνεται σε τμήματα, με όρια τα σημεία a, a', b, c και d του Σχήματος 5.10 με χρήση της ρουτίνας ολοκλήρωσης `quadgk`. Για το πρώτο τμήμα από το $-\infty$ έως το σημείο a , χρησιμοποιούμε μια βοηθητική μεταβλητή ολοκλήρωσης t σύμφωνα με τη σχέση

$$\lambda = te^{-i\theta} + a$$

όπου θ είναι η γωνία που επιλέξαμε για να ακολουθήσουμε το SDP και η τιμή της δίνεται στη (5.40). Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς t από $-\infty$ έως 0 . Με τον ίδιο τρόπο λειτουργούμε για την ολοκλήρωση κατά το τμήμα από το σημείο d έως το $+\infty$. Τώρα η βοηθητική μεταβλητή είναι

$$\lambda = te^{i\theta} + d$$

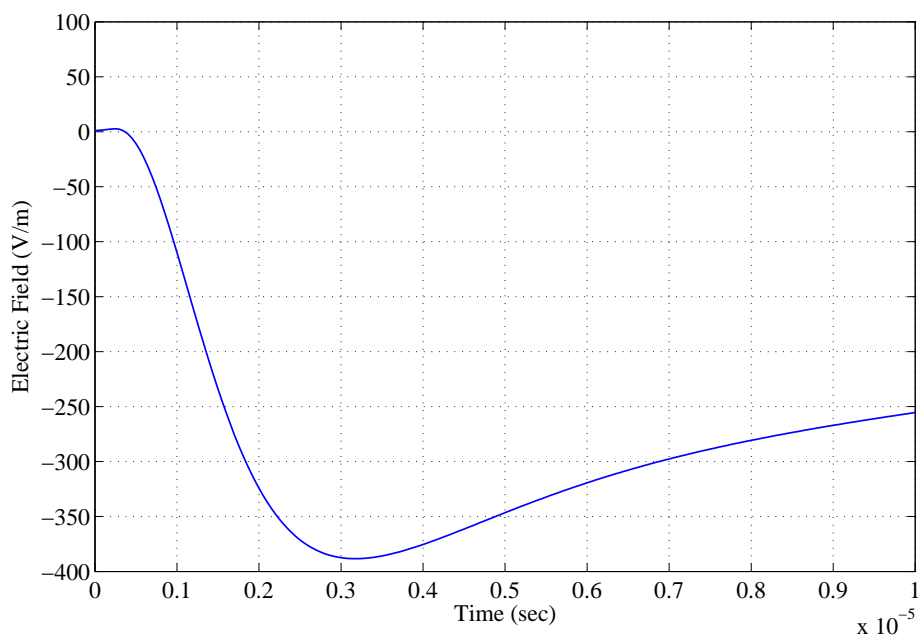
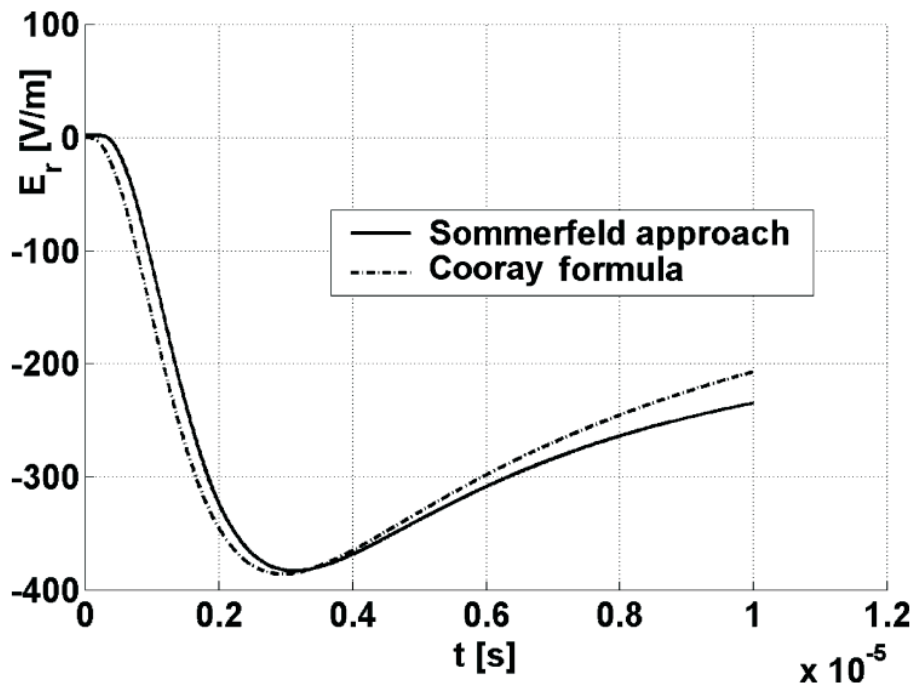
και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς t από μηδέν έως άπειρο.

Με τη μέθοδο που αναπτύξαμε πήραμε μια σειρά από αποτελέσματα για διάφορα είδη πλήγματος του κεραυνού, για διάφορα σημεία παρατήρησης καθώς και για διάφορες τιμές της αγωγιμότητας της γης. Τα αποτελέσματα αφορούν την υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο πεδίο του χρόνου.

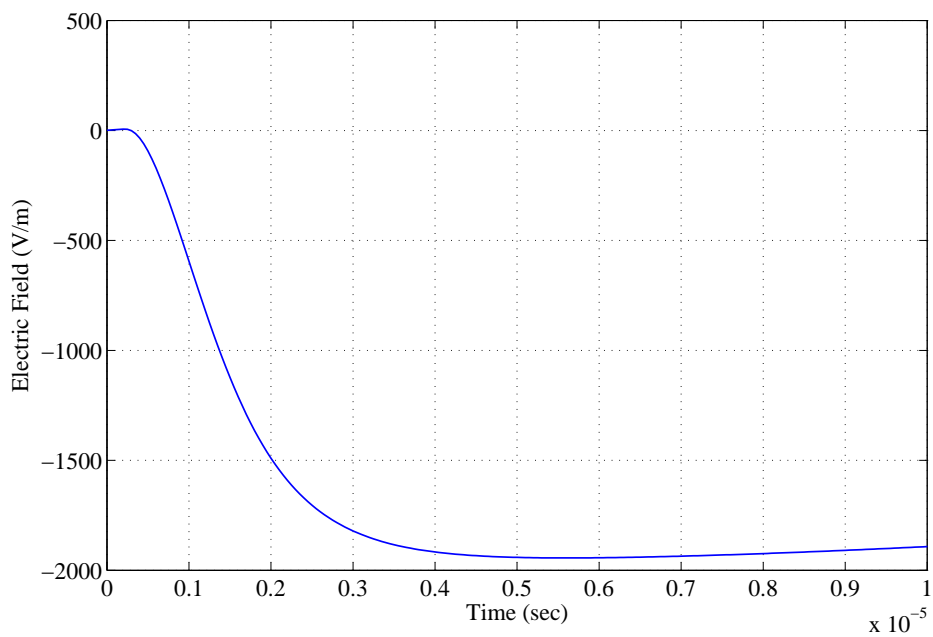
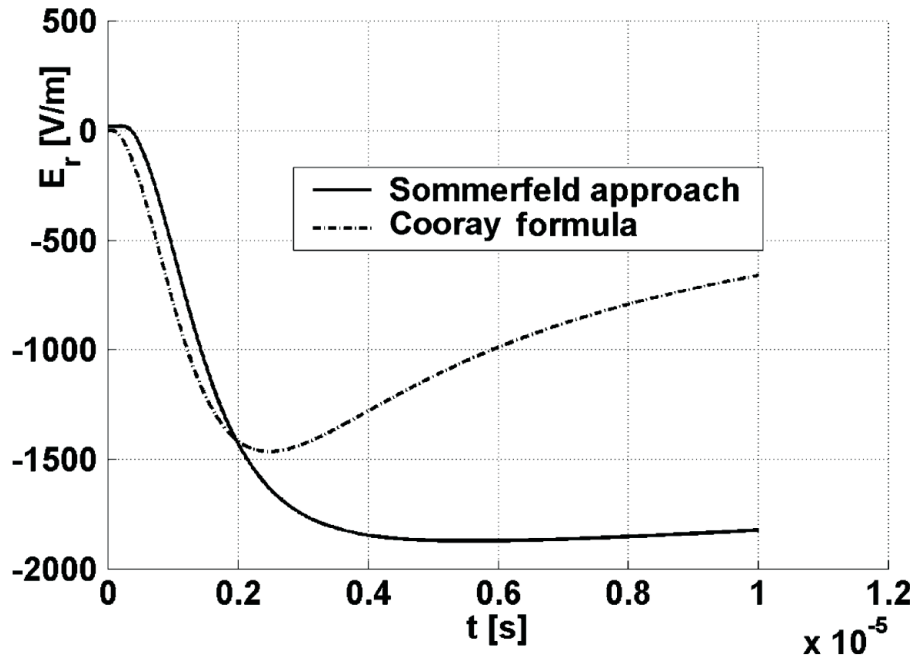
Για τον υπολογισμό του ρεύματος βάσης του κεραυνού $I(0, \omega)$ χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα Heidler με τη χρήση των (5.27) και (5.28). Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στις σχέσεις αυτές για την παραγωγή του ρεύματος βάσης που προκαλείται από το πρώτο πλήγμα και το επακόλουθο πλήγμα δίνονται στον Πίνακα 5.2. Το ύψος του ρευματοφόρου καναλιού το παίρνουμε $H = 8$ km, η ταχύτητα του πλήγματος επιστροφής είναι $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/sec ενώ η σταθερά εξασθένησης του ρεύματος του πλήγματος είναι $\alpha = 2$ km.

Για το μετασχηματισμό Fourier χρησιμοποιήσαμε 5.000 σημεία με συχνότητες από 0 έως 10MHz. Σε όλες τις περιπτώσεις αποτελεσμάτων θεωρούμε ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά της γης είναι $\epsilon_r = 5$, επίσης θεωρούμε ότι η γη είναι ομογενής και ότι έχει σταθερή τιμή της αγωγιμότητας σ σε όλη την έκτασή της.

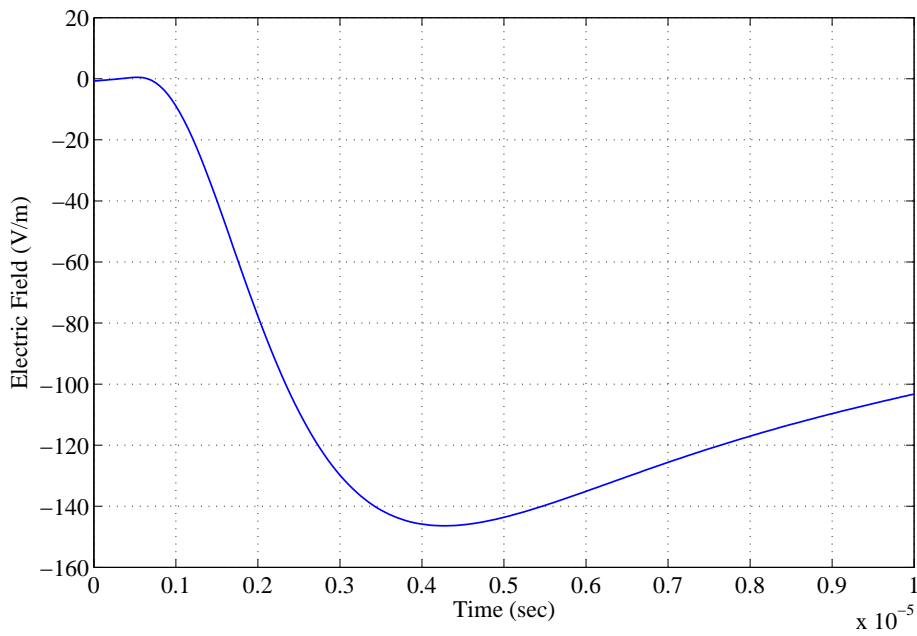
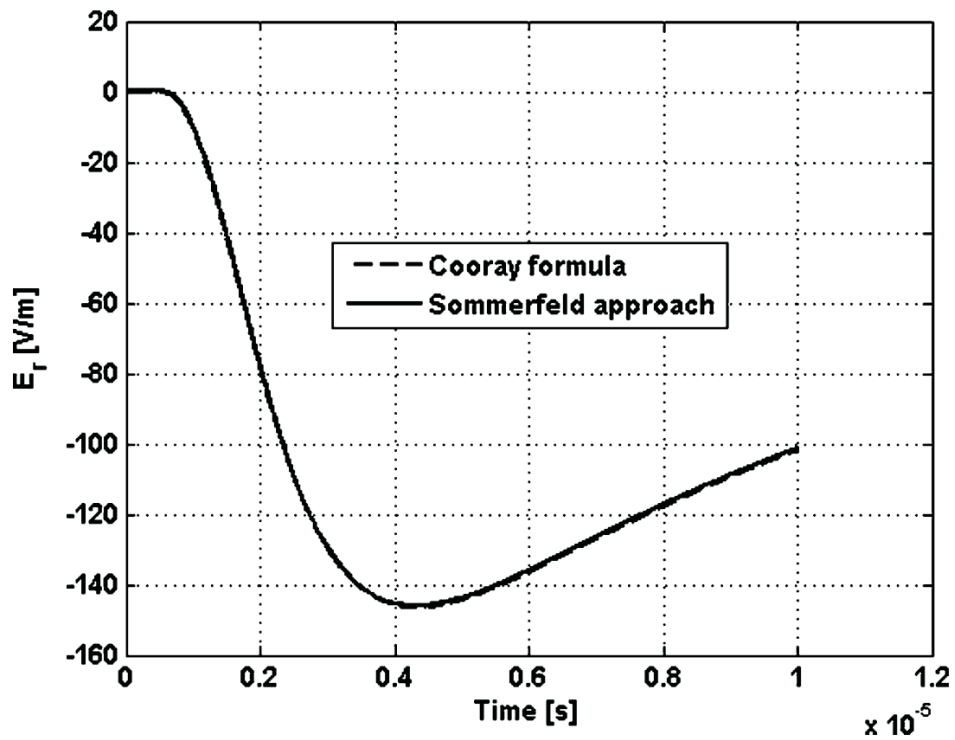
Για λόγους σύγκρισης, όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στις επόμενες σελίδες συνοδεύονται από αντίστοιχα γραφήματα που υπάρχουν δημοσιευμένα στην εργασία [Delfino et al., 2007]. Σε όλα τα γραφήματα της εργασίας αυτής, εκτός από τα αποτελέσματα που προκύπτουν με την μέθοδο που προτείνεται, υπάρχουν επιπλέον αποτελέσματα που προκύπτουν από τη προσεγγιστική φόρμουλα του Cooray, τα οποία δίνονται με διακεκομμένη γραμμή. Στο Σχήμα 5.12,



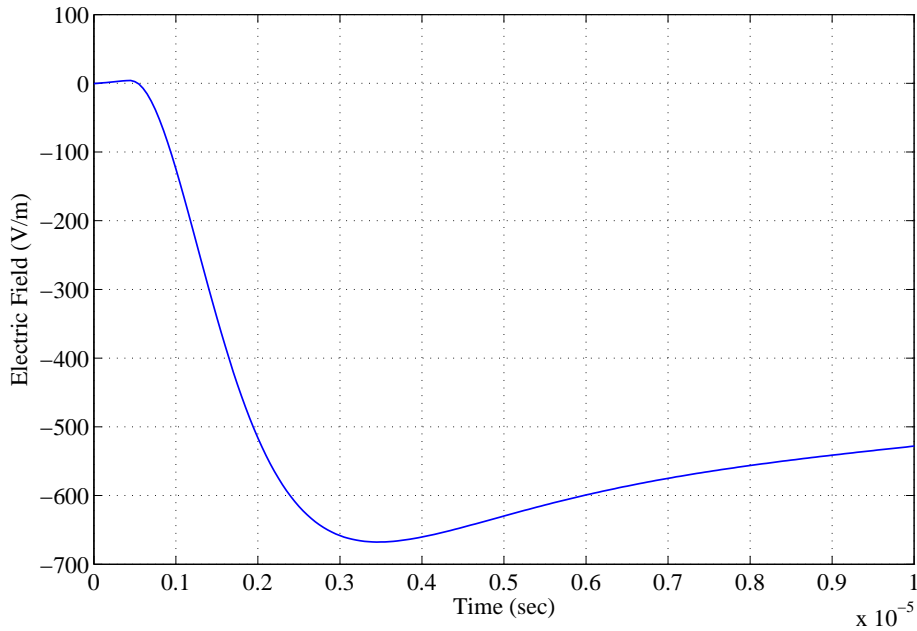
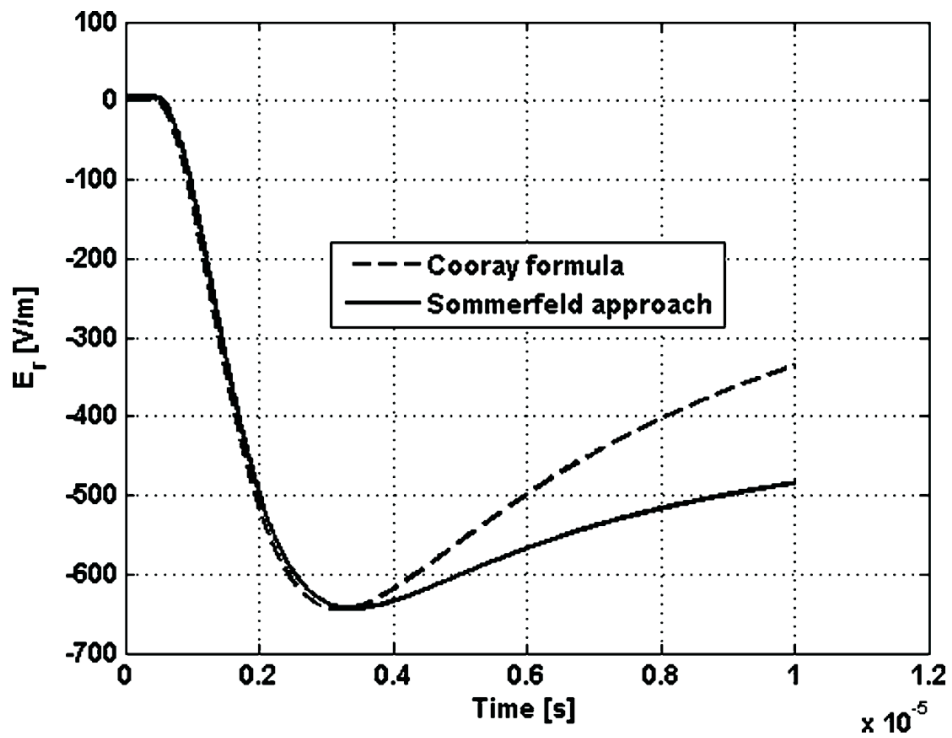
Σχήμα 5.12: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 50\text{m}$, $z = -5\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



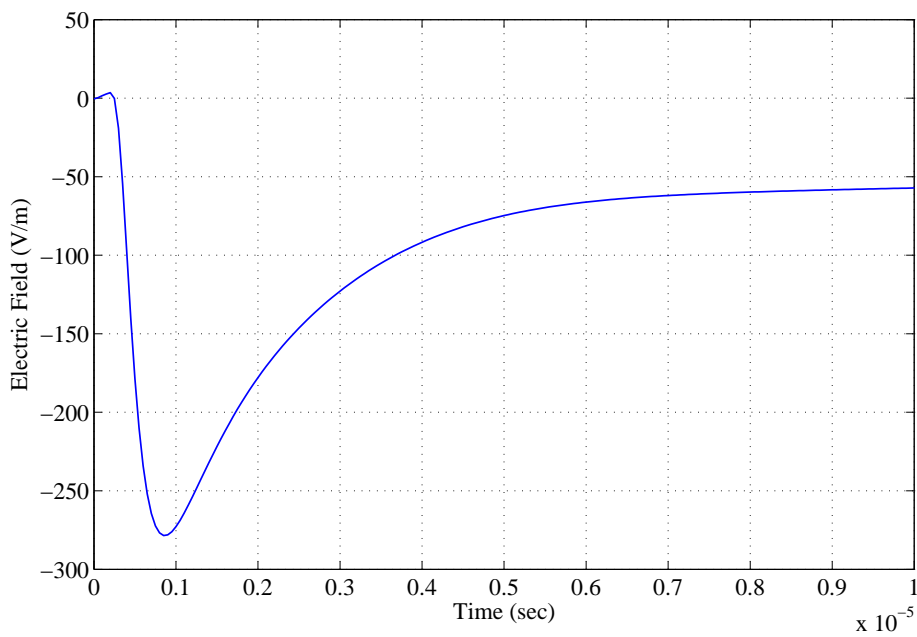
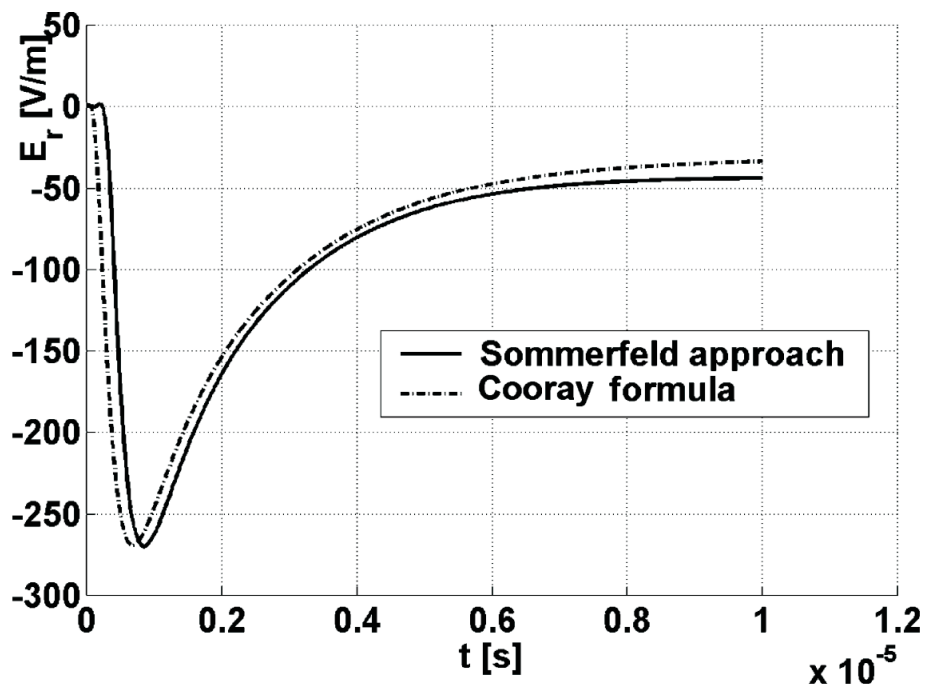
Σχήμα 5.13: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 50\text{m}$, $z = -5\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



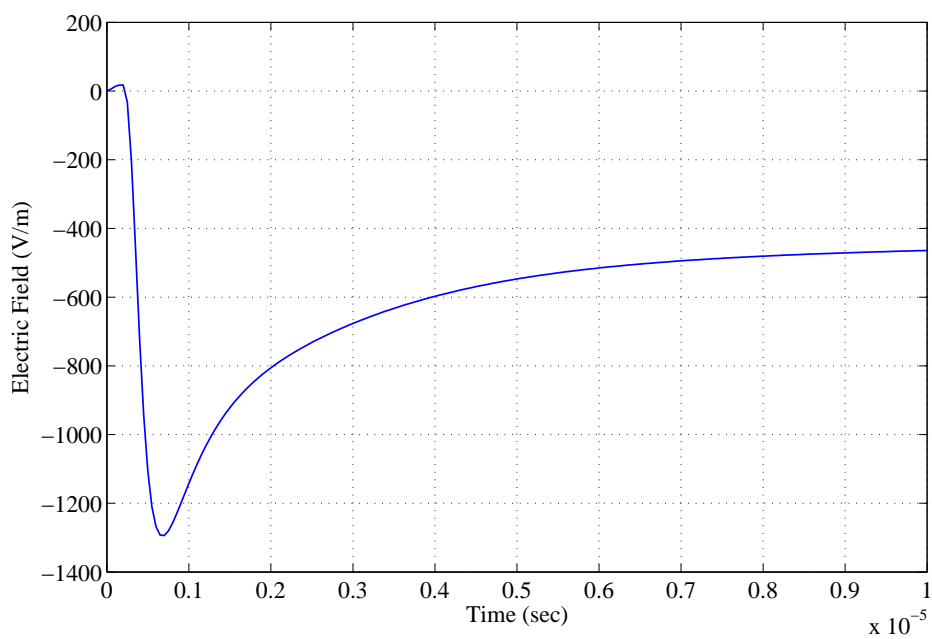
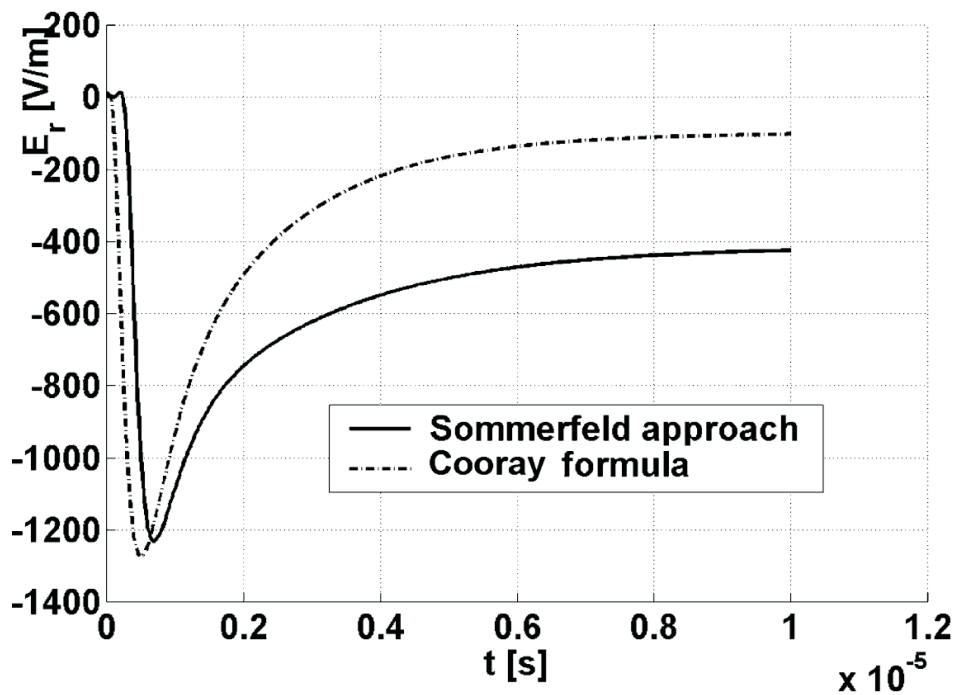
Σχήμα 5.14: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = -10\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.15: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = -10\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.16: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το επακόλουθο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 50\text{m}$, $z = -5\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.17: Υπόγεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το επακόλουθο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 50\text{m}$, $z = -5\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2007] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).

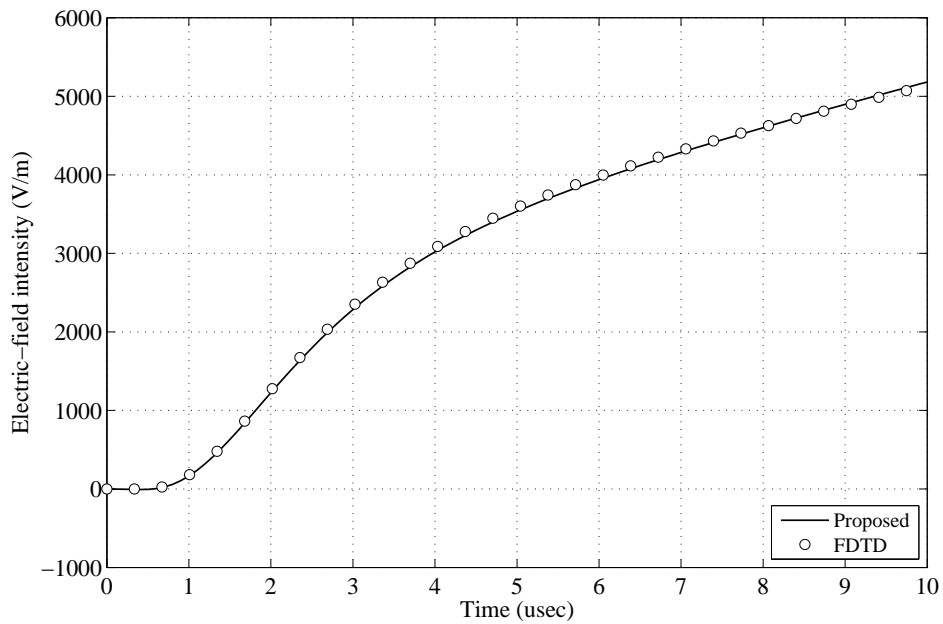
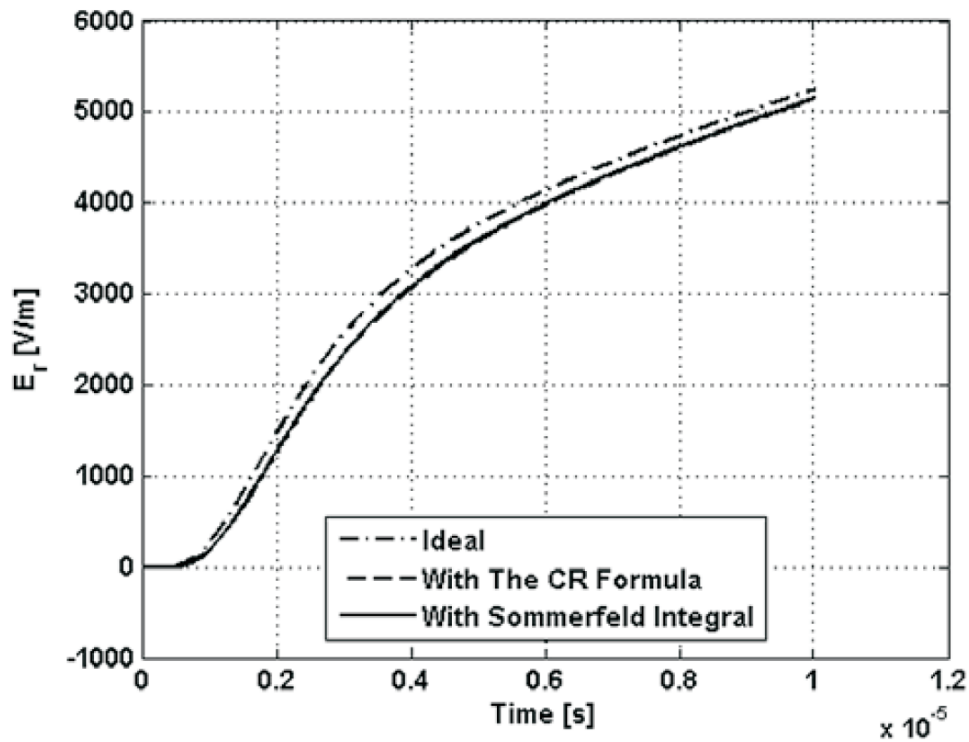
δίνεται η ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το πρώτο πλήγμα του κεραυνού, σε ένα σημείο παρατήρησης 50m μακριά από το κανάλι ρεύματος του κεραυνού και σε βάθος 5m κάτω από την επιφάνεια της γης. Η αγωγιμότητα της γης είναι $\sigma=0.01\text{S/m}$. Στο επόμενο σχήμα 5.13, έχουμε το ίδιο πλήγμα και σημείο παρατήρησης αλλά με αγωγιμότητα της γης $\sigma=0.001\text{S/m}$. Τα Σχήματα 5.14 και 5.15 δίνουν το πεδίο που δημιουργείται από το πρώτο πλήγμα, αλλά τώρα το σημείο παρατήρησης βρίσκεται 100m μακριά από το ρευματικό κανάλι του κεραυνού και σε βάθος 10m, για αγωγιμότητες $\sigma=0.01\text{S/m}$ και $\sigma=0.001\text{S/m}$ αντίστοιχα. Τέλος στα Σχήματα 5.16 και 5.17 έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το επακόλουθο πλήγμα του κεραυνού σε ένα σημείο παρατήρησης 50m μακριά από το κανάλι του κεραυνού και 5m βάθος, για δύο διαφορετικές τιμές της αγωγιμότητας της γης.

Τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει με την τεχνική που έχουμε αναπτύξει είναι σε συμφωνία με αποτελέσματα που υπάρχουν δημοσιευμένα σε εργασίες άλλων ερευνητών τόσο για την περίπτωση του πρώτου πλήγματος όσο και του επακόλουθου πλήγματος. Συγκεκριμένα υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα της εργασίας των Delfino και λοιπών συγγραφέων [Delfino et al., 2007]. Επίσης υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα της [Cooray, 2010]. Τέλος υπάρχει καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα που είναι δημοσιευμένα στην [Andreotti et al., 2008] για την περίπτωση όπου η αγωγιμότητα της γης είναι $\sigma=0.01\text{S/m}$ αλλά με μια μικρή διαφοροποίηση για την περίπτωση $\sigma=0.001\text{S/m}$.

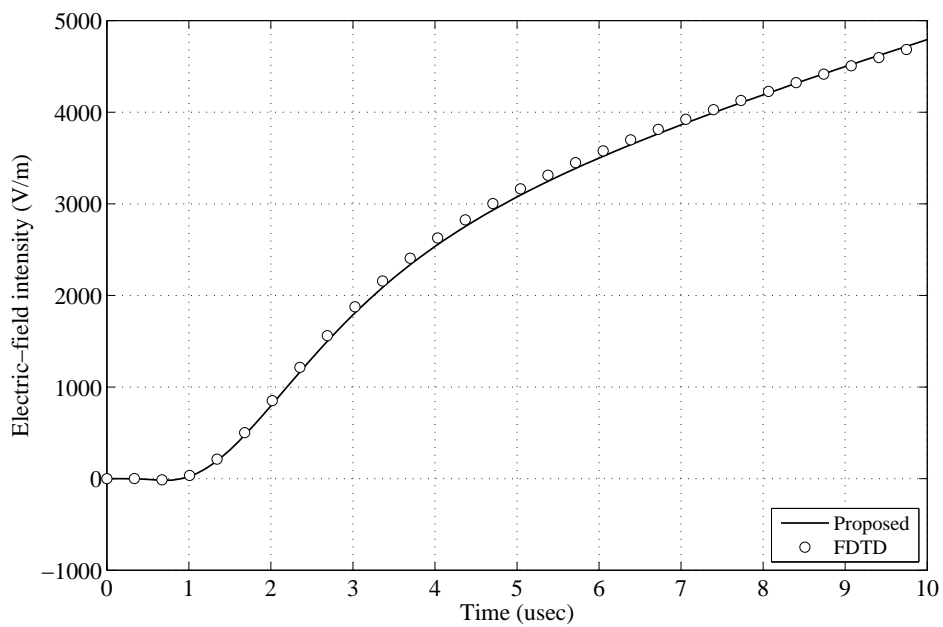
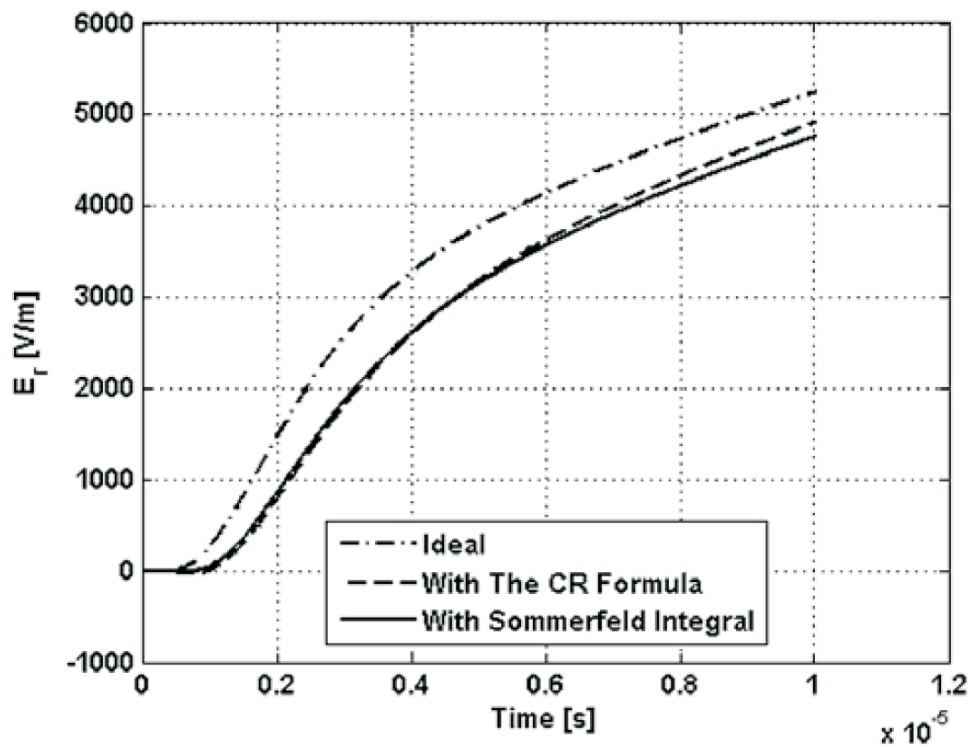
Σε όλες τις δημοσιευμένες εργασίες αναφέρονται χρόνοι παραγωγής για κάθε μία προσομοίωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου περίπου 1 min. Με τη μέθοδο που αναπτύξαμε κάθε μία από τις προσομοιώσεις των Σχημάτων 5.12 - 5.17 παράγονται σε 2 sec σε συνηθισμένο ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη βοήθεια του Matlab.

5.12 Παρουσίαση αποτελεσμάτων-Υπέργειο πεδίο

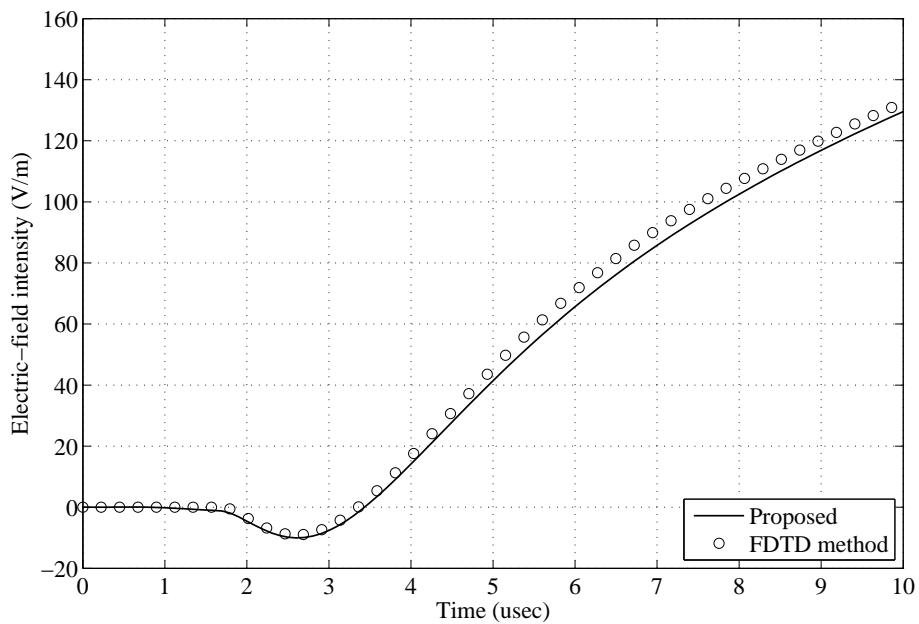
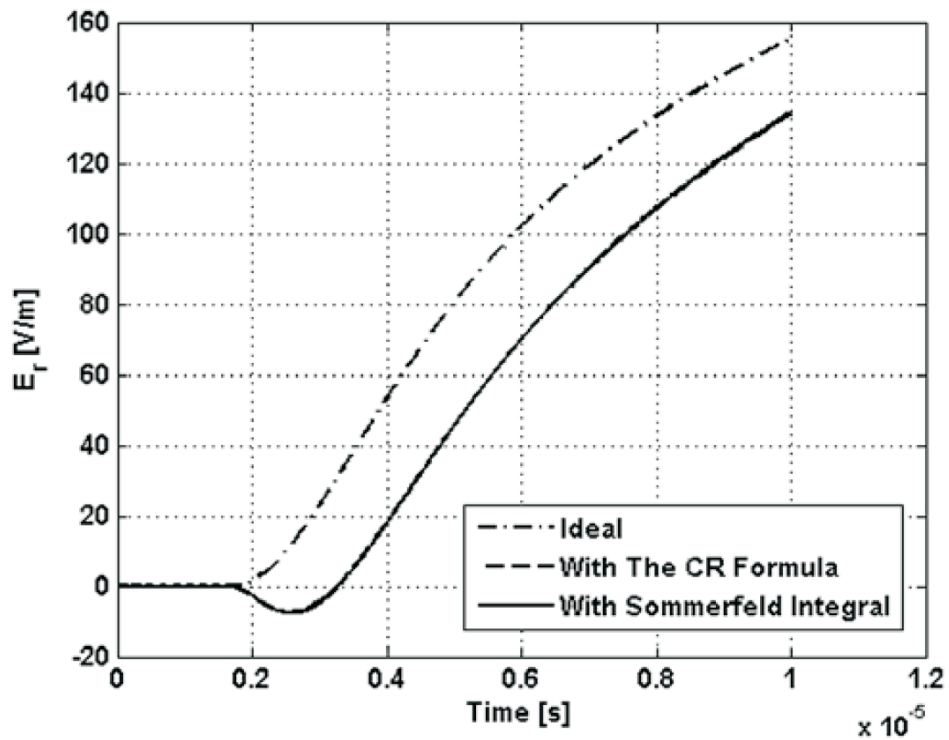
Για να υπολογίσουμε την ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνού πάνω από την επιφάνεια της γης, επιλύουμε την (5.42). Το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου της έκφρασης $E_{r,ideal}$ δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα και η αριθμητική του ολοκλήρωση είναι πολύ εύκολη. Το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου το λύνουμε με τη βοήθεια της τεχνικής που αναπτύξαμε με τη χρήση της τροποποιημένης διαδρομής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο λ αντί για την ολοκλήρωση κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Και πάλι για το ρεύμα βάσης $I(0, \omega)$ χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα του Heidler, με χρήση των παραμέτρων του Πίνακα 5.2. Το ύψος του καναλιού το παίρνουμε $H = 8\text{ km}$, την ταχύτητα $v = 1.5 \cdot 10^8\text{m/sec}$ ενώ τη σταθερά εξασθένησης $\alpha = 2\text{ km}$. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά της γης είναι $\epsilon_r = 5$. Για το μετασχηματισμό Fourier



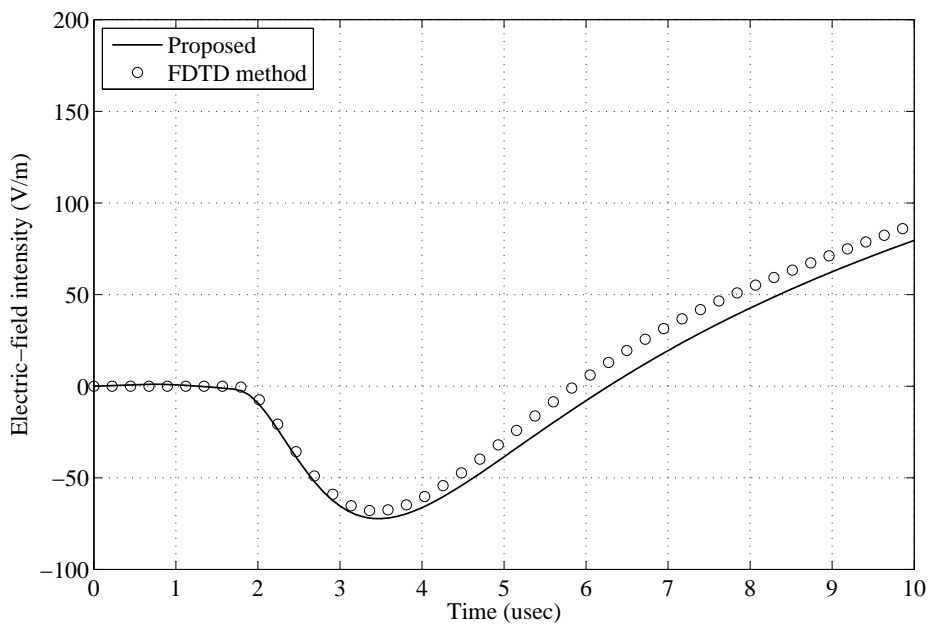
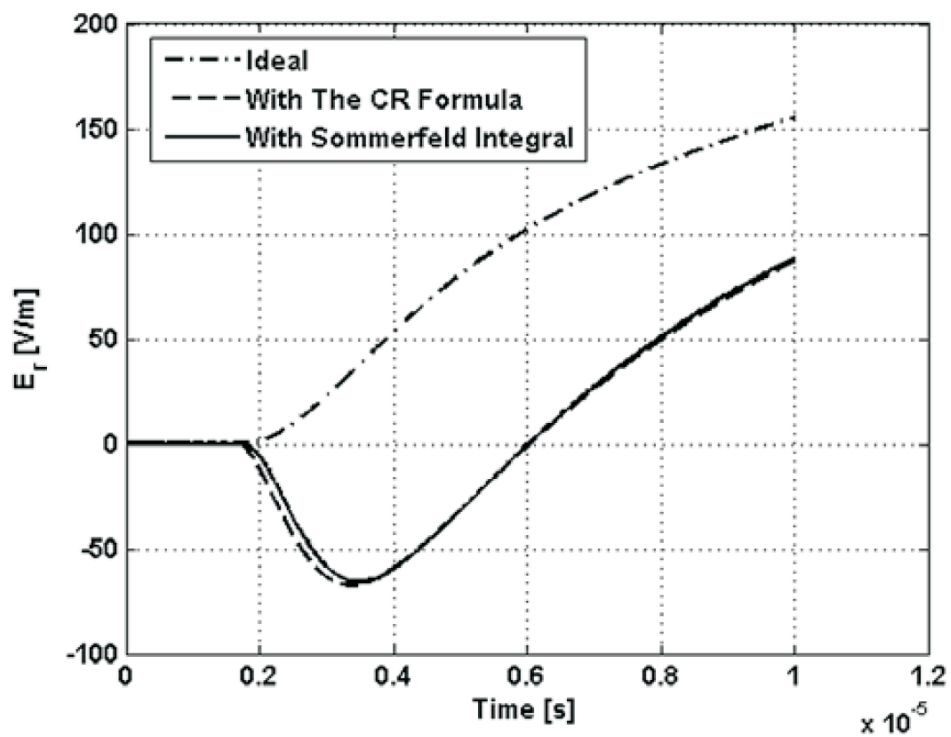
Σχήμα 5.18: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



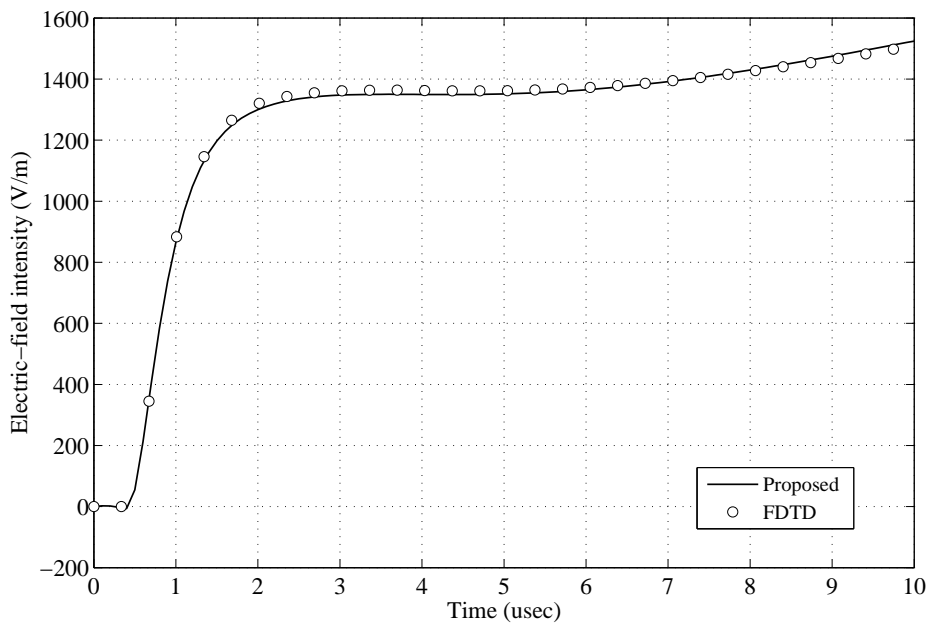
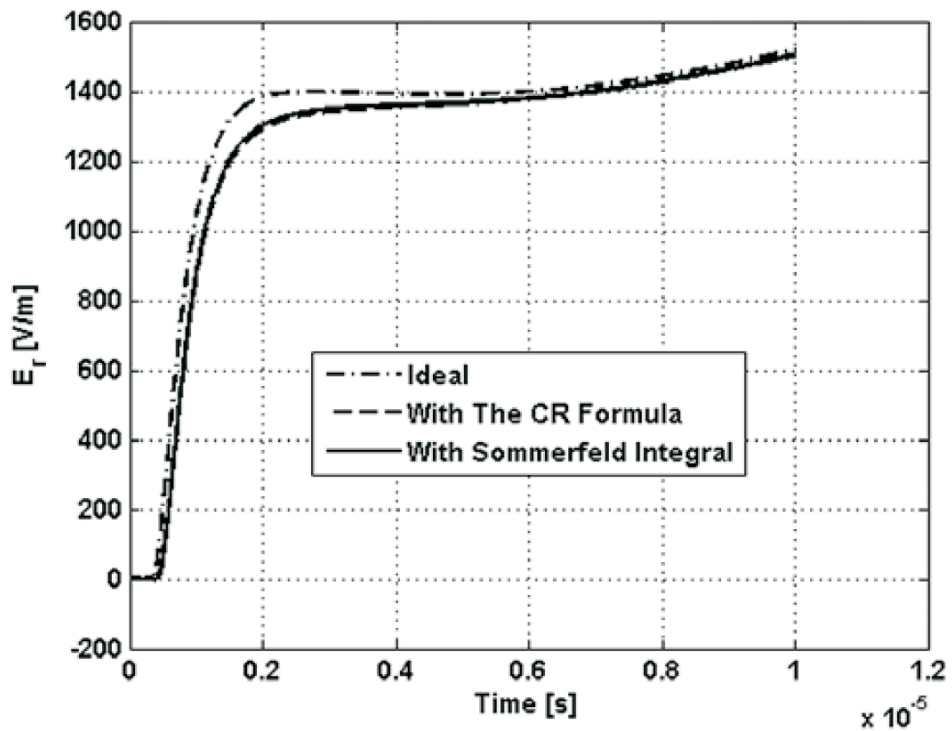
Σχήμα 5.19: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$, από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



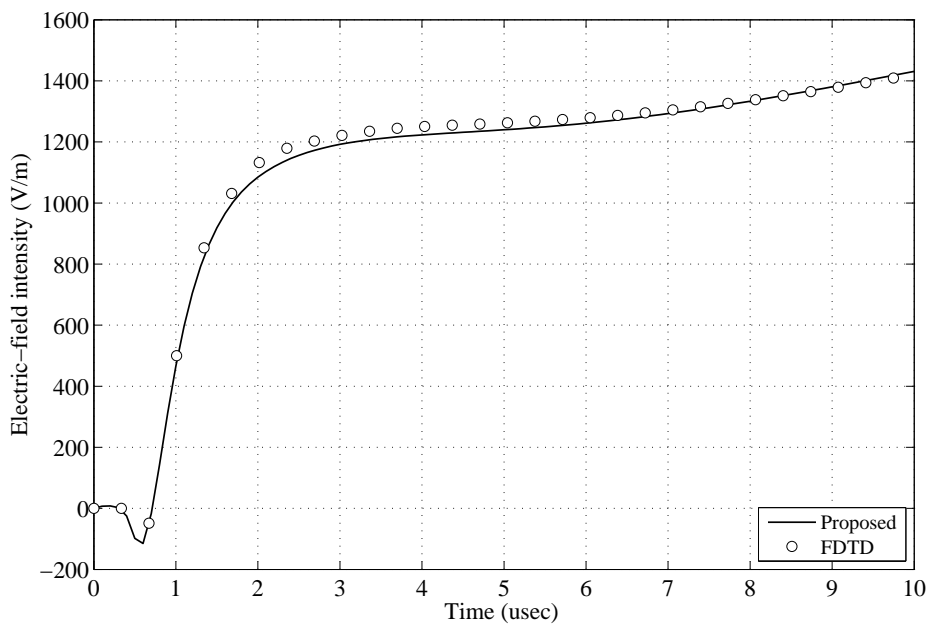
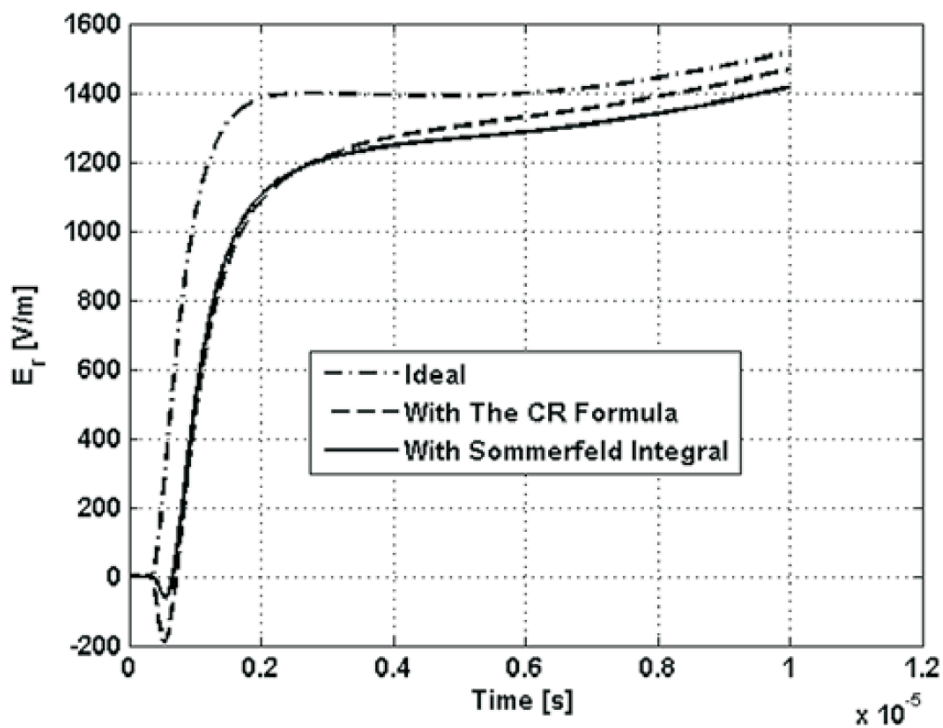
Σχήμα 5.20: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 500\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$ από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.21: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πρώτο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 500\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$ από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.22: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το επακόλουθο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.01\text{S/m}$ από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).



Σχήμα 5.23: Υπέργεια ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το επακόλουθο πλήγμα, σημείο παρατήρησης $r = 100\text{m}$, $z = 10\text{m}$, $\sigma = 0.001\text{S/m}$ από την εργασία [Delfino et al., 2008b] (επάνω) και με την προτεινόμενη μέθοδο (κάτω).

χρησιμοποιήσαμε 10.000 σημεία με συχνότητες από 0 έως 10MHz.

Και πάλι για λόγους σύγκρισης, όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε συνοδεύονται από αντίστοιχα γραφήματα που υπάρχουν δημοσιευμένα στην εργασία [Delfino et al., 2008b]. Στα προς σύγκριση αποτελέσματα δίνονται τρία γραφήματα. Αυτό που είναι ακριβές και συγκρινόμενο με τα αποτελέσματα της μεθόδου που προτείνουμε είναι το 'with Sommerfeld approach' που δίνεται με συνεχόμενη γραμμή. Τα άλλα δύο γραφήματα είναι με χρήση της φόρμουλας Cooray - Rubinstein [Rubinstein, 1996] και με την απλούστευση της τέλεια αγωγίμης γης. Στο Σχήμα 5.18, δίνεται η ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το πρώτο πλήγμα του κεραυνού, σε ένα σημείο παρατήρησης 100m μακριά από το κανάλι ρεύματος του κεραυνού και σε ύψος 10m επάνω από την επιφάνεια της γης με αγωγιμότητα $\sigma=0.01\text{S/m}$. Στο επόμενο σχήμα 5.19, έχουμε το ίδιο πλήγμα και σημείο παρατήρησης αλλά με αγωγιμότητα της γης $\sigma=0.001\text{S/m}$. Τα Σχήματα 5.20 και 5.21 δίνουν το πεδίο που δημιουργείται από το πρώτο πλήγμα, αλλά τώρα το σημείο παρατήρησης βρίσκεται 500m μακριά από το ρευματικό κανάλι του κεραυνού και σε ύψος 10m, για αγωγιμότητες $\sigma=0.01\text{S/m}$ και $\sigma=0.001\text{S/m}$ αντίστοιχα. Τέλος στα Σχήματα 5.22 και 5.23 έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το επακόλουθο πλήγμα του κεραυνού σε ένα σημείο παρατήρησης 100m μακριά από το κανάλι του κεραυνού και 10m ύψος, για δύο διαφορετικές τιμές της αγωγιμότητας της γης.

Για λόγους σύγκρισης και επιβεβαίωσης της ορθότητας της μεθόδου, για όλες τις περιπτώσεις των προσομοιώσεων που δίνονται στα παραπάνω γραφήματα έγινε παράλληλα παραγωγή αποτελεσμάτων με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD) [Zygidis, 2012]. Στα παραπάνω διαγράμματα με κυκλικά σημάδια απεικονίζονται τα αποτελέσματα από τη χρήση της FDTD. Σε όλες τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα που εξάγαμε είναι ίδια με αυτά που υπάρχουν δημοσιευμένα σε εργασίες άλλων ερευνητών όπως στη δημοσίευση [Delfino et al., 2008b]. Και πάλι τονίζουμε ότι με τη μέθοδο που αναπτύξαμε ο χρόνος παραγωγής της προσομοίωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι μειωμένος κατά μία με δύο τάξεις μεγέθους, δεδομένου ότι στην [Delfino et al., 2008b] αναφέρονται χρόνοι υπολογισμού 1,5 min, αντί για 2 sec που απαιτείται με χρήση της μεθόδου που αναπτύξαμε.

5.13 Επίδραση του κεραυνικού πλήγματος σε υπόγειους αγωγούς

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της γνώσης του πεδίου που παράγεται από τον κεραυνό είναι η μελέτη της αλληλεπίδρασης με γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Το

μέγεθος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνού επάγει τάσεις πάνω στους αγωγούς με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ανεπιθύμητων κυμάτων ρεύματος και τάσης. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε το θεωρητικό πλαίσιο για τον υπολογισμό αυτών των μεγεθών και στην επόμενη ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του κύματος ρεύματος σε έναν υπόγειο αγωγό που προκαλείται από ένα γειτονικό κεραυνικό πλήγμα.

Προκειμένου να μελετήσουμε την ανάπτυξη ανεπιθύμητων τάσεων και ρευμάτων σε έναν υπόγειο αγωγό εξαιτίας του πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού, υποθέτουμε την παρουσία ενός υπόγειου καλωδίου μήκους L που είναι οριζόντια τοποθετημένο σε βάθος d , στη διεύθυνση του άξονα x του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Οι τάσεις και τα ρεύματα από επαγωγή κατά μήκος του καλωδίου μπορούν να υπολογιστούν από τις γνωστές τηλεγραφικές εξισώσεις στο πεδίο της συχνότητας [Petrache et al., 2005] [Rachidi et al., 1996].

$$\frac{dV(x)}{dx} + Z'I(x) = E_x^e(x, z = -d) \quad (5.43)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} + Y'V(x) = 0 \quad (5.44)$$

όπου E_x^e είναι η x συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το πλήγμα του κεραυνού, ενώ τα Z' και Y' είναι η διαμήκης σύνθετη αντίσταση και η εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα της γραμμής αντίστοιχα και οι εκφράσεις τους δίνονται παρακάτω.

$$Z' = j\omega L' + Z'_w + Z'_g, \quad Y' = \frac{(G' + j\omega C')Y'_g}{(G' + j\omega C') + Y'_g} \quad (5.45)$$

Τα L' και C' είναι η ανά μονάδα μήκους διαμήκης αυτεπαγωγή και εγκάρσια χωρητικότητα αντίστοιχα του καλωδίου και οι τιμές τους δίνονται παρακάτω.

$$L' \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad C' \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{ri}}{\ln(b/a)} \quad (5.46)$$

όπου a και b είναι η ακτίνα του αγωγού και του μονωτικού μανδύα αντίστοιχα και ϵ_{ri} είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μονωτικού υλικού του μανδύα.

Z'_w είναι η ανά μονάδα μήκους σύνθετη εσωτερική αντίσταση αγωγού κυκλικής διατομής και η τιμή της δίνεται παρακάτω [Ramo et al., 1994]. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έκφραση (3.12) του κεφαλαίου 3, [Stratton, 1941].

$$Z'_w = \frac{\gamma_w}{2\pi a \sigma_w} \frac{J_0(\gamma_w a)}{J_1(\gamma_w a)} \quad (5.47)$$

$$\gamma_w^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{rw} + j\omega \mu_0 \sigma_w$$

J_0 και J_1 είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα, σ_w είναι η αγωγιμότητα του αγωγού, ε_{rw} είναι η σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα του αγωγού.

Το μέγεθος G' της (5.45) είναι η ανά μονάδα μήκους εγκάρσια αγωγιμότητα του καλωδίου και είναι

$$G' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ri}} C' \quad (5.48)$$

Z'_g και Y'_g είναι οι ανά μονάδα μήκους σύνθετη αντίσταση γης και σύνθετη αγωγιμότητα γης αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης στη σχετική βιβλιογραφία προτείνεται η χρήση της γνωστής λογαριθμικής προσεγγιστικής σχέσης του Sunde, της οποίας η μορφή δίνεται παρακάτω [Sunde, 1968], [Petrache et al., 2005]:

$$Z'_g \approx \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + k_E b}{k_E b} \right) \quad (5.49)$$

Εμείς προτιμήσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ακριβή σχέση του Pollaczek (4.1), επιλύοντάς την με τη μέθοδο που προτείναμε στο Κεφάλαιο 4. Για τη σύνθετη αγωγιμότητα της γης ισχύει κατά προσέγγιση [Teschke et al., 1997]

$$Y'_g \approx \frac{k_E}{Z'_g} \quad (5.50)$$

Μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις πεδίου-γραμμής μεταφοράς (5.43) και (5.44) είτε στο πεδίο των συχνοτήτων είτε στο πεδίο του χρόνου. Στην προσέγγιση που ακολουθούμε, χρησιμοποιούμε το πεδίο των συχνοτήτων με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Η συνάρτηση Green συσχετίζει, συναρτήσει της συχνότητας, κάθε ξεχωριστή πηγή σε κάθε σημείο του αγωγού, με την αναπτυσσόμενη τάση ή ρεύμα κατά μήκος του αγωγού. Στην περίπτωσή μας οι ξεχωριστές πηγές προέρχονται από την ανάπτυξη δυναμικού από επαγωγή, λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνικού πλήγματος. Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση και το ρεύμα σε όποιο σημείο του αγωγού επιλέξουμε, ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση Green κατά μήκος του αγωγού πάνω στον οποίο κατανέμονται οι επιμέρους πηγές. Συγκεκριμένα, το ρεύμα και η τάση πάνω σε ένα σημείο x του υπόγειου καλωδίου που προκαλείται από το πεδίο διέγερσης E_x^e , υπολογίζονται από τα παρακάτω ολοκληρώματα των συναρτήσεων Green [Teschke et al., 1997].

$$I(x) = \int_0^L G_I(x, x_s) E_x^e(x_s, z = -d) dx_s \quad (5.51)$$

$$V(x) = \int_0^L G_V(x, x_s) E_x^e(x_s, z = -d) dx_s \quad (5.52)$$

όπου οι $G_I(x, x_s)$ και $G_V(x, x_s)$ είναι οι συναρτήσεις Green που μας δίνουν το ρεύμα και την τάση αντίστοιχα, σε κάποιο σημείο x του αγωγού, εξαιτίας μίας πηγής μοναδιαίας τιμής που βρίσκεται στη θέση x_s . Οι εκφράσεις των συναρτήσεων δίνονται παρακάτω

$$G_I(x, x_s) = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma L}}{2Z_c(1 - \rho_1\rho_2e^{-2\gamma L})} (e^{-\gamma(x_s-L)} - \rho_2e^{\gamma(x_s-L)}) (e^{\gamma x} - \rho_1e^{-\gamma x}) & \text{για } x < x_s \\ \frac{e^{-\gamma L}}{2Z_c(1 - \rho_1\rho_2e^{-2\gamma L})} (e^{-\gamma(x-L)} - \rho_2e^{\gamma(x-L)}) (e^{\gamma x_s} - \rho_1e^{-\gamma x_s}) & \text{για } x > x_s \end{cases}$$

$$G_V(x, x_s) = \begin{cases} \frac{-e^{-\gamma L}}{2(1 - \rho_1\rho_2e^{-2\gamma L})} (e^{-\gamma(x_s-L)} - \rho_2e^{\gamma(x_s-L)}) (e^{\gamma x} + \rho_1e^{-\gamma x}) & \text{για } x < x_s \\ \frac{e^{-\gamma L}}{2(1 - \rho_1\rho_2e^{-2\gamma L})} (e^{-\gamma(x-L)} + \rho_2e^{\gamma(x-L)}) (e^{\gamma x_s} - \rho_1e^{-\gamma x_s}) & \text{για } x > x_s \end{cases}$$

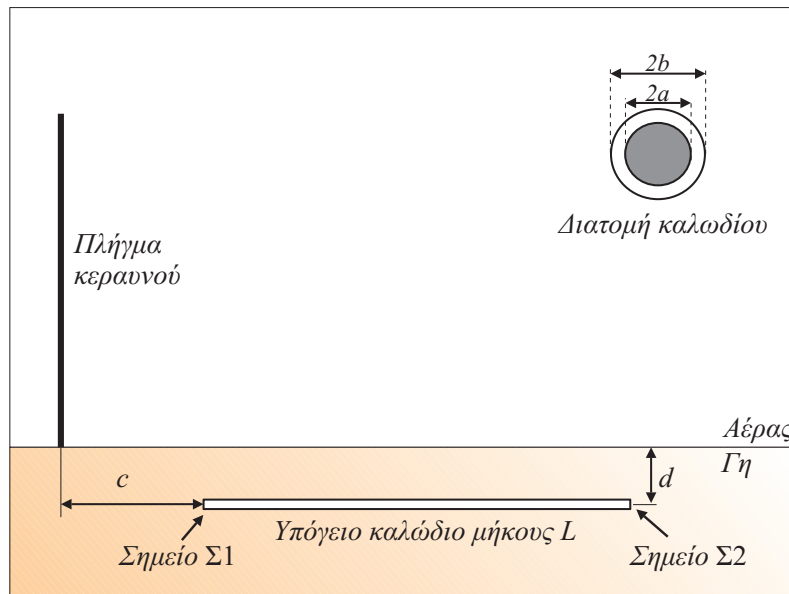
όπου $\gamma = \sqrt{Z'Y'}$ είναι η μιγαδική σταθερά διάδοσης του καλωδίου, ενώ $Z_c = \sqrt{Z'/Y'}$ είναι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση του καλωδίου. ρ είναι οι σταθερές ανάκλασης τάσης, οι οποίες είναι για τα δύο άκρα του καλωδίου:

$$\rho_i = \frac{Z_{Li} - Z_c}{Z_{Li} + Z_c}, \quad i = 1, 2 \quad (5.53)$$

όπου Z_{Li} είναι η αντίσταση τερματισμού για τα δύο άκρα της γραμμής.

5.14 Υπολογισμός του επαγόμενου κύματος ρεύματος σε υπόγειο καλώδιο

Στην παρούσα ενότητα θα υπολογίσουμε το κύμα ρεύματος που επάγεται σε ένα υπόγειο καλώδιο εξαιτίας ενός κεραυνικού πλήγματος που συμβαίνει σε κοντινή απόσταση. Ο υπολογισμός θα γίνει στο πεδίο των συχνοτήτων με τη βοήθεια της συνάρτησης Green ρεύματος $G_I(x, x_s)$ με χρήση της (5.51). Για τον υπολογισμό της ακτινικής συνιστώσας του υπόγειου ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνού $E_x^e(x_s, z = -d)$, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στο παρόν κεφάλαιο, που περιλαμβάνει την αριθμητική ολοκλήρωση της έκφρασης του πεδίου κατά μήκος της τροποποιημένης διαδρομής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο λ . Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, θα υποθέσουμε ότι ο υπόγειος

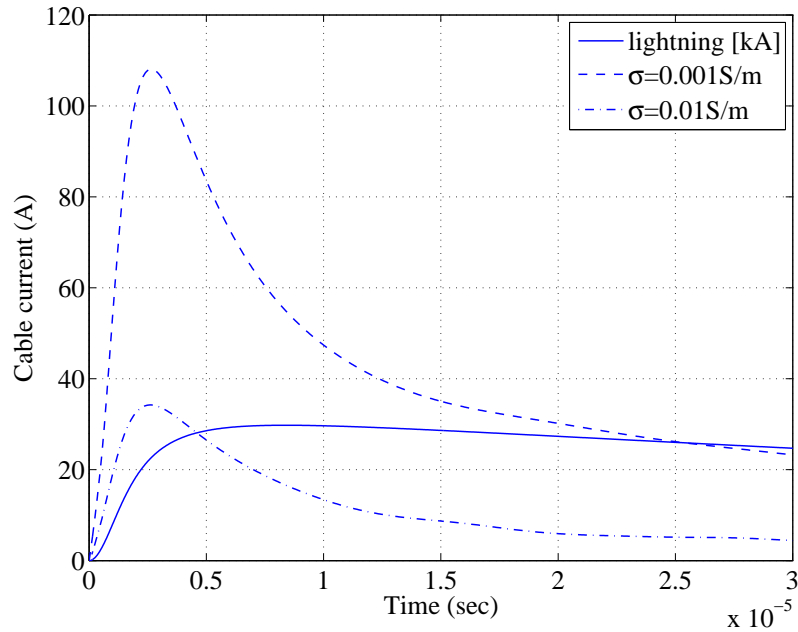


Σχήμα 5.24: Υπολογισμός επαγόμενου κύματος ρεύματος σε υπόγειο καλώδιο εξαιτίας κεραυνικού πλήγματος.

αγωγός βρίσκεται σε ακτινική διεύθυνση ως προς το σημείο της γης όπου συμβαίνει το πλήγμα. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η x συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που απαιτεί η (5.51) μπορεί εύκολα να προκύψει από την ακτινική συνιστώσα με γεωμετρικό τρόπο.

Στο Σχήμα 5.24 φαίνεται η υπό εξέταση γεωμετρία. Το καλώδιο έχει μήκος $L=100\text{m}$ και είναι τοποθετημένο σε ακτινική απόσταση $c = 150\text{m}$ από το σημείο του πλήγματος. Το καλώδιο είναι τοποθετημένο οριζόντια σε βάθος $d=1\text{m}$. Λόγω της οριζόντιας θέσης του καλωδίου η μοναδική συνιστώσα του πεδίου του κεραυνού που αλληλεπιδρά με το καλώδιο είναι η ακτινική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E_r . Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και η διατομή του καλωδίου, η ακτίνα του αγωγού έχει τιμή a ενώ η εξωτερική ακτίνα του μονωτικού μανδύα είναι b . Η γη θεωρείται ομογενής με αγωγιμότητα σ_g και με σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_{rg} . Θεωρήσαμε ότι το κάθε άκρο του αγωγού τερματίζεται με μια ωμική αντίσταση των $150\ \Omega$.

Για τους υπολογισμούς θα θεωρήσουμε ένα καλώδιο με αγωγό χαλκού και μόνωση πολυαιθυλενίου. Η ακτίνα του αγωγού είναι $a=2\ \text{cm}$ και η εξωτερική ακτίνα του μονωτικού μανδύα θεωρείται $b=2.2\ \text{cm}$. Τα μεγέθη της ανά μονάδα μήκους διαμήκους αυτεπαγωγής L' και της εγκάρσιας χωρητικότητας του καλωδίου C' τα υπολογίζουμε από τις σχέσεις (5.46). Η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μονωτικού μανδύα είναι $\varepsilon_{ri}=2$. Για την ανά μονάδα μήκους σύνθετη αντίσταση γης χρησιμοποιούμε την φόρμουλα του Pollaczek, ενώ για την ανά μονάδα μήκους



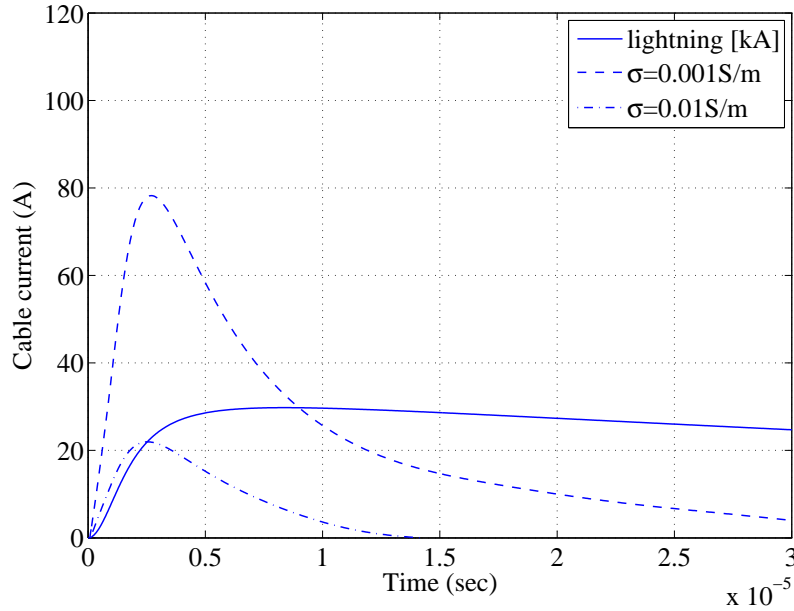
Σχήμα 5.25: Επαγόμενο κύμα ρεύματος στο σημείο Σ1 του υπόγειου καλωδίου εξαιτίας κεραυνικού πλήγματος (lightning σε kA), για δύο τιμές της αγωγιμότητας γης.

σύνθετη αγωγιμότητα γης τη σχέση (5.50). Η διαμήκης σύνθετη αντίσταση Z' και η εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα Y' του καλωδίου υπολογίστηκαν από τις (5.45), αγνοώντας την ανά μονάδα μήκους εγκάρσια αγωγιμότητα G' και την ανά μονάδα μήκους σύνθετη εσωτερική αντίσταση Z'_w .

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά του κεραυνού, το ύψος του ρευματοφόρου καναλιού επιλέγεται $H = 8$ km, η ταχύτητα του πλήγματος επιστροφής $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/sec ενώ η σταθερά εξασθένησης του ρεύματος του πλήγματος $\alpha = 2$ km. Για το ρεύμα βάσης του ρευματικού καναλιού του κεραυνού, χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο του πρώτου πλήγματος, εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Heidler (5.27), με τις παραμέτρους που δίνονται στον Πίνακα 5.2. Το γράφημα του ρεύματος βάσης του πρώτου πλήγματος δίνεται στο Σχήμα 5.6.

Για το μετασχηματισμό Fourier που χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να έχουμε αποτελέσματα του ρεύματος στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιήσαμε 10.000 σημεία με συχνότητες από 0 έως 20 MHz. Σε όλες τις περιπτώσεις αποτελεσμάτων θεωρούμε ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά της γης είναι $\epsilon_{rg} = 5$, επίσης θεωρούμε ότι η γη είναι ομογενής και ότι έχει σταθερή τιμή της αγωγιμότητας σ σε όλη την έκτασή της. Για την ολοκλήρωση της (5.51), χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο του τραπεζίου.

Στο Σχήμα 5.25 φαίνεται το ρεύμα που αναπτύσσεται λόγω του κεραυνού, στο



Σχήμα 5.26: Επαγόμενο κύμα ρεύματος στο σημείο Σ2 του υπόγειου καλωδίου εξαιτίας κεραυνικού πλήγματος (lightning σε kA), για δύο τιμές της αγωγιμότητας γης.

πεδίο του χρόνου, στο άκρο Σ1 του καλωδίου (Σχήμα 5.24). Ο υπολογισμός έγινε για δύο αγωγιμότητες γης, $\sigma = 0.001 \text{ S/m}$ και $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$. Στο Σχήμα 5.26 δίνουμε το ρεύμα για το απομακρυσμένο άκρο του καλωδίου Σ2. Στα διαγράμματα αυτά δίνουμε και το ρεύμα βάσης του κεραυνού, σε kA, που είναι υπεύθυνο για την ανάπτυξη του κύματος ρεύματος στο καλώδιο. Από τη σύγκριση των δύο σχημάτων προκύπτει το συμπέρασμα ότι το αναπτυσσόμενο ρεύμα έχει μεγαλύτερη τιμή στο σημείο Σ1 από ότι στο Σ2. Επίσης προκύπτει από υπολογισμούς που πραγματοποιήσαμε ότι το επαγόμενο ρεύμα παίρνει μικρότερες τιμές για μεγαλύτερες αποστάσεις c από το σημείο όπου συμβαίνει το πλήγμα του κεραυνού.

Εάν το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του κύματος ρεύματος και τάσης αποκλειστικά στα άκρα του καλωδίου, μπορεί εναλλακτικά αντί των συναρτήσεων Green να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω εξίσωση πινάκων, γνωστή ως εξίσωση Baum-Liu-Tesche (BLT) [Baum et al., 1978]. Η εξίσωση BLT αναπτύχθηκε το 1978 για τον υπολογισμό ρευμάτων και τάσεων στους κόμβους ενός δικτύου μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ I(L) \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} 1 - \rho_1 & 0 \\ 0 & 1 - \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_1 & e^{\gamma L} \\ e^{\gamma L} & -\rho_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Όπου $[S]$ είναι το διάνυσμα διέγερσης και είναι

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \int_0^L e^{\gamma x_s} E_x^e(x_s, h) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^h E_z^e(0, z) dz - \frac{e^{\gamma L}}{2} \int_0^h E_z^e(L, z) dz \\ -\frac{1}{2} \int_0^L e^{\gamma(L-x_s)} E_x^e(x_s, h) dx_s - \frac{e^{\gamma L}}{2} \int_0^h E_z^e(0, z) dz + \frac{1}{2} \int_0^h E_z^e(L, z) dz \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Οι δεύτεροι και τρίτοι όροι του διανύσματος $[S]$ αφορούν την περίπτωση που ο αγωγός είναι εναέριος σε ύψος h και υπάρχει αγωγίμος τερματισμός γης στην αρχή και το τέλος του αγωγού. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει αλληλεπίδραση και σε αυτά τα τμήματα με την αξονική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κεραυνού E_z^e , που πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν στο υπολογιστικό μοντέλο.

5.15 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάσαμε την ανάπτυξη μιας μεθόδου για τον υπολογισμό των σχέσεων που δίνουν το πεδίο που αναπτύσσεται από το πλήγμα του κεραυνού. Η γνώση του αναπτυσσόμενου πεδίου από τον κεραυνό είναι καθοριστικής σημασίας για την κατανόηση των ανεπιθύμητων αλληλεπιδράσεων του πεδίου του κεραυνού σε συστήματα γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας και τηλεπικοινωνιακών γραμμών, δεδομένης και της όλο και αυξανόμενης ενσωμάτωσης ευαίσθητων ηλεκτρονικών διατάξεων σε αυτά τα συστήματα. Η πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι ερευνητές που ασχολούνται με αυτό το αντικείμενο είναι το γεγονός ότι οι πεδιακές εκφράσεις του πεδίου του κεραυνού έχουν τη μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld με ιδιαίζουσα συμπεριφορά και η διαδικασία της ολοκλήρωσής τους είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Αρχικά, η δυσκολία αυτή αντιμετωπίστηκε με την ανάπτυξη προσεγγιστικών αναλυτικών εκφράσεων για τα μεγέθη του πεδίου, ενώ αργότερα, με την πρόοδο των ηλεκτρονικών υπολογιστών, προτάθηκαν ειδικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι όμως είναι πολύπλοκοι και δύσκολοι στη χρήση τους, χωρίς να πετυχαίνουν πάντα γρήγορη σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων.

Με τη μέθοδο που προτείνουμε επιτυγχάνουμε τον υπολογισμό των πεδιακών μεγεθών, χρησιμοποιώντας τις γνωστές ρουτίνες ολοκλήρωσης που υπάρχουν ενσωματωμένες σε όλα τα λογισμικά πακέτα μαθηματικών υπολογισμών. Η σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι πολύ γρήγορη και η εξοικονόμηση χρόνου που επιτυγχάνεται σε σχέση με άλλες δημοσιευμένες εργασίες είναι μίας με δύο τάξεις μεγέθους. Η γρήγορη σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι αποτέλεσμα εν μέρει της μείωσης της τάσης για ταλάντωση με την αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel από τη συνάρτηση Hankel και εν μέρει λόγω της ειδικά τροποποιημένης διαδρομής ολοκλήρωσης που ακολουθούμε

στο μιγαδικό επίπεδο αντί να ολοκληρώνουμε κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Η διαδρομή που ακολουθούμε αποφεύγει πόλους και σημεία κλάδου στο μιγαδικό επίπεδο, που αποτελούν την αιτία της ιδιάζουσας συμπεριφοράς αυτών των ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, η μέθοδος συνδυάζεται και με την τεχνική της παρεμβολής για να αποφύγουμε τον πολλαπλό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων για διάφορες τιμές της συχνότητας που απαιτεί η ανάλυση Fourier για την παραγωγή αποτελεσμάτων στο πεδίο του χρόνου.

Η αρχική προσέγγιση που ακολουθήσαμε για το πρόβλημα του υπολογισμού του πεδίου του κεραυνού ήταν η λύση των ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο DCIM που χρησιμοποιήσαμε σε άλλες ερευνητικές ενότητες της παρούσας διατριβής με μεγάλη επιτυχία. Στην παρούσα όμως εφαρμογή η μέθοδος δεν μπόρεσε να αποδώσει τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Την αδυναμία χρήσης της μεθόδου στην εφαρμογή των ολοκληρωμάτων των εκφράσεων του κεραυνού την αποδίδουμε κυρίως στο γεγονός της παρουσίας του ρεύματος μετατόπισης που είναι ενσωματωμένο στις εκφράσεις αυτές και στην ανάγκη που υπάρχει για υπολογισμό των ολοκληρωμάτων σε υψηλές συχνότητες.

Τέλος, στις δύο τελευταίες ενότητες του κεφαλαίου γίνεται μια προσπάθεια για την αξιοποίηση της μεθόδου που αναπτύξαμε, με σκοπό την πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή της μελέτης της επίδρασης του πεδίου του κεραυνού σε γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Παρουσιάζεται το σχετικό υπολογιστικό υπόβαθρο και γίνεται υπολογισμός του αναπτυσσόμενου κύματος ρεύματος από επαγωγή σε υπόγειο καλώδιο, λόγω ενός γειτονικού κεραυνικού πλήγματος.

Επίλογος

Στην παρούσα διατριβή διερευνήσαμε μια σειρά από προβλήματα που συναντώνται σε ενεργειακά συστήματα και τα οποία μελετήσαμε μέσω ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Αναπτύξαμε εκφράσεις που δίνουν τη αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ υπόγειων αγωγών. Η πρωτοτυπία αυτών των εκφράσεων είναι ότι ισχύουν για αγωγούς που το μήκος τους είναι πεπερασμένο και ο προσανατολισμός τους μπορεί να είναι τυχαίος. Αναπτύξαμε, σε τελική μορφή, φόρμουλες για την περίπτωση των παράλληλων και των κάθετων αγωγών, αλλά, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ αγωγών τυχαίου προσανατολισμού. Η έκφραση για τον παράλληλο προσανατολισμό επιβεβαιώθηκε ως προς την ορθότητά της με συγκρίσεις που έγιναν με την κοινώς αποδεκτή φόρμουλα του Pollaczek. Εκτός από την ανάπτυξη των εκφράσεων αυτών, προτάθηκε μια μέθοδος για την επίλυσή τους, που εμπλέκει τη χρήση ολοκληρωμάτων Sommerfeld και την τεχνική DCIM, με σκοπό τη βελτίωση του απαιτούμενου χρόνου υπολογισμού. Με τη βοήθεια της τεχνικής που αναπτύχθηκε, τα ολοκληρώματα Sommerfeld των εκφράσεων ‘μετασχηματίζονται’ σε ημίαιρα ολοκληρώματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσέγγιση των προς ολοκλήρωση συναρτήσεων με αθροίσματα κατάλληλων εκθετικών συναρτήσεων. Δόθηκαν τελικές εκφράσεις για τη σύνθετη αμοιβαία αντίσταση υπόγειων αγωγών, όπου η επίδραση της διεπιφάνειας αέρα γης υπολογίζεται με αναλυτική λύση, αποφεύγοντας την αριθμητική ολοκλήρωση και πετυχαίνοντας σημαντική βελτίωση των χρόνων υπολογισμού που απαιτούνται.

Η μέθοδος που προτείνουμε μπορεί να αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο και αποδοτικό εργαλείο, όταν εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά συστημάτων γείωσης σύνθετης γεωμετρίας. Στις περιπτώσεις αυτές η διάταξη γείωσης διακριτοποιείται προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος των ροπών και το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ των πολυπληθών τμημάτων με έναν τρόπο αποτελεσματικό και ταχύ.

Στο τρίτο κεφάλαιο της διατριβής προτείνουμε έναν τρόπο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των συστημάτων γείωσης. Η μέθοδος που προτείνουμε στηρίζεται στο διαχωρισμό της διάταξης γείωσης σε επιμέρους τμήματα που διαρρέονται από ρεύματα σταθερής τιμής και στη συνέχεια στον υπολογισμό της σύνθετης αμοι-

βαίας αντίστασης μεταξύ των τμημάτων. Η τεχνική των στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων χρησιμοποιείται για αυτόν τον σκοπό. Στη συνέχεια, με την επιβολή οριακών συνθηκών, διαμορφώνουμε το απαραίτητο σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε μορφή πινάκων. Η λύση του συστήματος αυτού μας δίνει τις τιμές των επιμέρους ρευμάτων των τμημάτων της διάταξης γείωσης. Γνωρίζοντας κάποιος τα ρεύματα αυτά, μπορεί να υπολογίσει όλα τα μεγέθη που μπορεί να ενδιαφέρουν, όπως το ηλεκτρικό πεδίο στη γη και τα ρεύματα διάχυσης προς τη γη. Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται σε γειτονικές περιοχές του συστήματος γείωσης για την εξέταση πιθανών αλληλεπιδράσεων του με άλλα συστήματα. Παρόλο που ασχοληθήκαμε με την απλή περίπτωση του κατακόρυφου γειωτή, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα γείωσης σύνθετης γεωμετρίας.

Η γνώση της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης μεταξύ αγωγών με επιστροφή γης είναι πολύ σημαντική για πολλούς τομείς της επιστήμης του ηλεκτρολόγου. Από τη στιγμή που παρουσιάστηκαν οι φόρμουλες του Pollaczek και του Carson, οι οποίες περιλαμβάνουν τα ομώνυμα ολοκληρώματα, η επιστημονική κοινότητα ασχολήθηκε κατά κόρον με τη λύση των ολοκληρωμάτων αυτών. Οι προσπάθειες για τον γρήγορο και ακριβή υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι πολλές και στηρίζονται τόσο σε προσεγγιστικές μεθόδους όσο και στην ανάπτυξη ειδικών αλγορίθμων για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Παρά τις προσπάθειες αυτές, σε πρόσφατη δημοσίευση αναδείχθηκε το θέμα της ύπαρξης αναλυτικής λύσης των ολοκληρωμάτων [Theodoulidis, 2012]. Παρά το γεγονός της ύπαρξης των αναλυτικών λύσεων, παραμένει το ενδιαφέρον για αριθμητική λύση των ολοκληρωμάτων για εφαρμογές όπως η περίπτωση της στρωματοποιημένης γης όπου η γη δεν είναι ομογενής αλλά αποτελείται από στρώματα με διαφορετικές ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τη λύση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και του Carson με τη χρήση της μεθόδου DCIM. Η μέθοδος περιλαμβάνει την προσέγγιση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης με ένα άθροισμα εκθετικών που αποτελείται από λίγους όρους. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει το μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων σε ολοκληρώματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις τις οποίες εφαρμόζουμε για τον τελικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Προκειμένου να πετύχουμε την προσέγγιση των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τη μέθοδο GPOF καθώς και τη μέθοδο GPOF δύο επιπέδων. Η δεύτερη είναι μια βελτίωση της απλής GPOF και περιλαμβάνει τη δειγματοληψία της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης σε δύο διαδοχικές περιοχές με διαφορετικό βήμα δειγματοληψίας. Έτσι η δειγματοληψία της συνάρτησης είναι πιο πυκνή στην αρχική περιοχή που η συνάρτηση παρουσιάζει έντονη μεταβολή, ενώ γίνεται λιγότερο πυκνή στη δεύτερη περιοχή όπου η συνάρτηση αποκτά μια πιο ομαλή και προβλέψιμη μορφή. Αυτό οδηγεί στην πιο καλή προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης και ως συνέπεια τα παραγόμενα αποτελέσματα της αμοιβαίας αντίστασης είναι μεγαλύτερης ακρί-

βειας.

Οι τελικές εκφράσεις που παράχθηκαν έχουν τη μορφή απλών αθροισμάτων τα οποία περιλαμβάνουν μικρό αριθμό όρων. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ελέγχθηκε με σύγκριση που έγινε με αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων Pollaczek και αναλυτική λύση του ολοκληρώματος Carson. Αποτελέσματα παράχθηκαν για διάφορες τιμές της συχνότητας και διάφορες τιμές της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των δύο αγωγών. Σε όλες τις περιπτώσεις η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή με τη χρήση της απλής GPOF τεχνικής ενώ με την GPOF δύο επιπέδων η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι άριστη. Οι χρόνοι υπολογισμού είναι καλύτεροι από τους χρόνους αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος Pollaczek για την απλή GPOF τεχνική και ανάλογοι για την GPOF δύο επιπέδων.

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι για τις περιπτώσεις των δύο εναέριων αγωγών ο προσδιορισμός των πόλων s_n και υπολοίπων c_n για την προσέγγιση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης γίνεται μόνο μία φορά, ενώ για την περίπτωση των δύο υπόγειων αγωγών γίνεται μόνο μία φορά για συγκεκριμένη αγωγιμότητα της γης. Συνεπώς η GPOF εφαρμόζεται μόνο μια φορά και οι τιμές της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης προκύπτουν με απλή χρήση των τελικών εκφράσεων για όλες τις πιθανές ζητούμενες γεωμετρίες. Έτσι τα αποτελέσματα της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης παράγονται σε χρόνους σχεδόν μηδενικούς.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε την ανάπτυξη μιας μεθόδου για τον υπολογισμό των σχέσεων που δίνουν το πεδίο που αναπτύσσεται από το πλήγμα του κεραυνού. Η γνώση του αναπτυσσόμενου πεδίου από τον κεραυνό είναι καθοριστικής σημασίας για την κατανόηση των ανεπιθύμητων αλληλεπιδράσεων του πεδίου του κεραυνού σε συστήματα γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας και τηλεπικοινωνιακών γραμμών, δεδομένης και της όλο και αυξανόμενης ενσωμάτωσης ευαίσθητων ηλεκτρονικών διατάξεων σε αυτά τα συστήματα. Η πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι ερευνητές που ασχολούνται με αυτό το αντικείμενο είναι το γεγονός ότι οι πεδιακές εκφράσεις του πεδίου του κεραυνού έχουν τη μορφή ολοκληρωμάτων Sommerfeld με ιδιαίζουσα συμπεριφορά και η διαδικασία της ολοκλήρωσής τους είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Αρχικά, η δυσκολία αυτή αντιμετωπίστηκε με την ανάπτυξη προσεγγιστικών αναλυτικών εκφράσεων για τα μεγέθη του πεδίου, ενώ αργότερα, με την πρόοδο των ηλεκτρονικών υπολογιστών, προτάθηκαν ειδικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι όμως είναι πολύπλοκοι και δύσκολοι στη χρήση τους, χωρίς να πετυχαίνουν πάντα γρήγορη σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων.

Με τη μέθοδο που προτείνουμε επιτυγχάνουμε τον υπολογισμό των πεδιακών μεγεθών, χρησιμοποιώντας τις γνωστές ρουτίνες ολοκλήρωσης που υπάρχουν ενσωματωμένες σε όλα τα λογισμικά πακέτα μαθηματικών υπολογισμών. Η σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι πολύ γρήγορη και η εξοικονόμηση χρόνου που επιτυγχάνεται σε σχέση με άλλες δημοσιευμένες εργασίες

είναι μίας με δύο τάξεις μεγέθους. Η γρήγορη σύγκλιση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι αποτέλεσμα εν μέρει της μείωσης της τάσης για ταλάντωση με την αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel από τη συνάρτηση Hankel και εν μέρει λόγω της ειδικά τροποποιημένης διαδρομής ολοκλήρωσης που ακολουθούμε στο μιγαδικό επίπεδο αντί να ολοκληρώνουμε κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Η διαδρομή που ακολουθούμε αποφεύγει πόλους και σημεία κλάδου στο μιγαδικό επίπεδο, που αποτελούν την αιτία της ιδιάζουσας συμπεριφοράς αυτών των ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, η μέθοδος συνδυάζεται και με την τεχνική της παρεμβολής για να αποφύγουμε τον πολλαπλό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων για διάφορες τιμές της συχνότητας που απαιτεί η ανάλυση Fourier για την παραγωγή αποτελεσμάτων στο πεδίο του χρόνου.

Η αρχική προσέγγιση που ακολουθήσαμε για το πρόβλημα του υπολογισμού του πεδίου του κεραυνού ήταν η λύση των ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο DCIM που χρησιμοποιήσαμε σε άλλες ερευνητικές ενότητες της παρούσας διατριβής με μεγάλη επιτυχία. Στην παρούσα όμως εφαρμογή η μέθοδος δεν μπόρεσε να αποδώσει τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Την αδυναμία χρήσης της μεθόδου στην εφαρμογή των ολοκληρωμάτων των εκφράσεων του κεραυνού την αποδίδουμε κυρίως στο γεγονός της παρουσίας του ρεύματος μετατόπισης που είναι ενσωματωμένο στις εκφράσεις αυτές και στην ανάγκη που υπάρχει για υπολογισμό των ολοκληρωμάτων σε υψηλές συχνότητες.

Τέλος έγινε μια προσπάθεια για την αξιοποίηση της μεθόδου που αναπτύξαμε, με σκοπό την πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή της μελέτης της επίδρασης του πεδίου του κεραυνού σε γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Παρουσιάζεται το σχετικό υπολογιστικό υπόβαθρο και γίνεται υπολογισμός του αναπτυσσόμενου κύματος ρεύματος από επαγωγή σε υπόγειο καλώδιο, λόγω ενός γειτονικού κεραυνικού πλήγματος.

Παράρτημα Α΄

Ο αλγόριθμος Generalized Pencil of Function (GPOF)

Όταν μας δίνεται ένα σύνολο από N στον αριθμό διακριτές τιμές $\{f_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(t)$, ο αλγόριθμος GPOF υπολογίζει M ζευγάρια μιγαδικών υπολοίπων και μιγαδικών πόλων $\{c_n, s_n, n = 1, 2, \dots, M\}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$f_i = f(t_i) = \sum_{n=1}^M c_n e^{s_n t_i}, \quad M < N \quad (\text{A} \prime .1)$$

όπου $t_i = i\Delta t$, και Δt το βήμα διακριτοποίησης ή διάστημα δειγματοληψίας. Η μέθοδος GPOF είναι ανάλογη με την γνωστή μέθοδο Prony. Η διαφορά τους είναι ότι η GPOF βρίσκει τους πόλους s_n απευθείας, λύνοντας ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, αντί για την προσέγγιση δύο βημάτων που ακολουθεί η Prony, όπου αρχικά λύνει την εξίσωση πινάκων και στη συνέχεια αναζητά τις ρίζες του πολυωνύμου. Η GPOF είναι πιο σταθερή και υπολογιστικά πιο αποδοτική από τη μέθοδο Prony.

Ο αλγόριθμος GPOF που αναπτύχθηκε από τους Y. Hua και T. Sarkar περιλαμβάνει την παρακάτω διαδικασία [Hua and Sarkar, 1989]. Έστω ότι διαθέτουμε ένα διάνυσμα από διακριτά δεδομένα $\{f_i\}$ της παρακάτω μορφής

$$\mathbf{F}_i = [f_i \ f_{i+1} \ \dots \ f_{i+N-L-1}]^T, \quad 0 \leq i \leq L \quad (\text{A} \prime .2)$$

στη συνέχεια δημιουργούμε τους παρακάτω πίνακες μεγέθους $(N - L) \times L$

$$[\mathbf{Y}_1] = [\mathbf{F}_0 \ \mathbf{F}_1 \ \dots \ \mathbf{F}_{L-1}], \quad [\mathbf{Y}_2] = [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \dots \ \mathbf{F}_L] \quad (\text{A} \prime .3)$$

Με βάση τους πίνακες $[\mathbf{Y}_1]$ και $[\mathbf{Y}_2]$ παράγουμε τον παρακάτω πίνακα $[\mathbf{Z}]$, από τις ιδιοτιμές του οποίου θα υπολογίσουμε τους ζητούμενους μιγαδικούς πόλους s_n .

$$[\mathbf{V}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{U}]^H = \text{svd}[\mathbf{Y}_1], \quad [\mathbf{Z}] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{U}]^H[\mathbf{Y}_2][\mathbf{V}] \quad (\text{A'.4})$$

Η πράξη svd αντιστοιχεί στην ανάλυση ιδιαζουσών ιδιοτιμών και υπάρχει με μορφή εντολής στο Matlab. Ο δείκτης H αντιστοιχεί στον συζυγή ανάστροφο ενός πίνακα. Οι ζητούμενοι πόλοι υπολογίζονται από τις ιδιοτιμές z_n του πίνακα $[\mathbf{Z}]$ σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$s_n = \frac{\log(z_n)}{\Delta t}, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\text{A'.5})$$

Τέλος, οι τιμές των μιγαδικών υπολοίπων c_n , προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

Παράρτημα Β΄

Abstract

Electromagnetic Study of Underground Conductors

The aim of this doctoral thesis is to study electromagnetic compatibility problems dealing with field couplings to underground transmission lines, communication systems or electronic devices. As an overview: (i) we develop expressions for the accurate computation of mutual impedances between two underground conductors of finite length, (ii) we use a modern technique to solve the well known Pollaczek and Carson formulas for the evaluation of the earth-return impedance for underground and overground conductors, (iii) we present a method for calculating the electromagnetic field generated by a lightning stroke for studying the problem of induced over-voltage on lines and electronic devices both in power and telecommunication systems, (iv) we deal with the computation of the current distribution along a vertical grounding rod. In all cases, our approach is purely electromagnetic with the use of the elementary electric dipoles technique. More specifically:

In the first chapter we provide the expressions for the field generated by a vertical or horizontal elementary electric dipole placed in air or in ground. We form the boundary problem of the system dipole and air-ground interface for the calculation of the Hertz vector components generated by the dipole and the calculation of the electromagnetic field. We also provide tables with the cylindrical components of the produced field.

In the second chapter we study the problem of the mutual impedance between two underground conductors of finite length and arbitrary position. With the use of the elementary dipoles technique we derive expressions for the accurate calculation of the mutual impedance that have the form of double infinite improper integrals and we evaluate them by using advanced integration algorithms. We then follow an alternative approach which involves the computation of the equivalent Sommerfeld type integrals by using the Discrete Complex Image Method (DCIM). This method

allows the transformation of the Sommerfeld integrals to semi infinite integrals with known analytical solutions. This is possible by approximating the integrand by a sum of complex exponentials. We finally give results of the mutual impedance and carry out comparisons in order to validate our expressions.

In the third chapter we deal with the computation of the current distribution along a vertical grounding rod. We derive the mathematical model by applying the elementary dipoles technique and then we use the Method of Moments for solving the electric field integral equation. For the validation of the developed model, we solve the problem with the FEM method by using the software package COMSOL.

In the fourth chapter we evaluate the well known Pollaczek and Carson formulas for the earth-return impedance for underground and overground conductors. The integrals are solved by using again the DCIM method. For the approximation of the integrand with a sum of exponentials we use the Generalized Pencil of Function (GPOF) method (one and two level). The results of the impedance are compared with results derived with numerical integration of the Pollaczek integral and the analytical solution of Carson's integral.

In chapter five we evaluate the electromagnetic field generated by the lightning stroke in an observation point above and underground. The knowledge of the field is very important when we study couplings with power lines or telecommunication conductors. The expressions for the lightning field have the form of semi-infinite improper integrals in frequency domain, and their numerical computation poses a computational challenge. The problem is more demanding in the case of time domain response, where a large number of computations for a frequency range is required, in order to carry out the required inverse Fourier transform. We propose an efficient method for calculating the lightning integrals, based on their numerical calculation along a deformed path of integration. The method is combined with an interpolation technique in order to reduce the number of frequencies required in the Fourier synthesis of the time domain electric field. The result is a very fast and straightforward tool for the calculation of the underground and overground lightning field, without the use of specially developed numerical algorithms or analytical approximations.

Βιβλιογραφία

- [Aksun, 1996] Aksun, M. I. (1996). A robust approach for the derivation of closed – form Green’s functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 44(5):651–658.
- [Ametani et al., 2009] Ametani, A., Yoneda, T., Baba, Y., and Nagaoka, N. (2009). An investigation of earth-return impedance between overhead and underground conductors and its approximation. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 51(3):860–867.
- [Andreotti et al., 2008] Andreotti, A., Assante, D., Mottola, F., and Verolino, L. (2008). Fast and accurate evaluation of the underground lightning electromagnetic field. *International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC Europe, 2008*, pages 1–6.
- [Andreotti et al., 2005] Andreotti, A., Falco, S., and Verolino, L. (2005). Some integrals involving Heidler’s lightning return stroke current expression. *Electrical Engineering*, (87):121–128.
- [Arnautovski-Toseva et al., 2008] Arnautovski-Toseva, V., Greev, L., Kacarska, M., and Drissi, K. (2008). Electromagnetic model for transient analysis of impedance to ground of horizontal grounding systems in two-layer soil. *MedPower2008, MED08/079, Thessaloniki, Greece, November 2008*.
- [Baba and Rakov, 2007] Baba, Y. and Rakov, V. (2007). Electromagnetic fields at the top of a tall building associated with nearby lightning return strokes. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 49(3):632 – 643.
- [Baba and Rakov, 2008] Baba, Y. and Rakov, V. (2008). Applications of electromagnetic models of the lightning return stroke. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 23(2):800–810.
- [Bannister, 1984] Bannister, P. R. (1984). Extension of finitely conducting earth-image-theory results to any range. *Naval Underwater Systems Center, New London, CT, Tech. Rep., A441931*.

- [Banos, 1966] Banos, A. J. (1966). *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space*. Pergamon Press.
- [Barbosa and Paulino, 2007] Barbosa, C. F. and Paulino, J. O. S. (2007). An approximate time-domain formula for the calculation of the horizontal electric field from lightning. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 49(3):593–601.
- [Baum et al., 1978] Baum, E., Liu, T. K., and Tesche, F. M. (1978). On the analysis of general multiconductor transmission-line networks. *Interaction Note*, 350.
- [Bruce and Golde, 1941] Bruce, C. E. R. and Golde, R. H. (1941). The lightning discharge. *J. Inst. Elect. Eng.—Pt. 2.*, 88:487–520.
- [Burke et al., 1981] Burke, G. J., Miller, E. K., Brittingham, J. N., Lager, D. L., Lytle, R. J., and Okada, J. (1981). Computer modelling of antennas near ground. *Electromagnetics*, 1:29–49.
- [Burke and Poggio, 1981] Burke, G. J. and Poggio, A. J. (1981). Numerical Electromagnetics Code (NEC) – method of moments, Part II: program description – code.
- [Caligaris et al., 2008] Caligaris, C., Delfino, F., and Procopio, R. (2008). Cooray-Rubinstein formula for the evaluation of lightning radial electric fields: derivation and implementation in the time domain. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 50(1):194–197.
- [Carson, 1926] Carson, J. R. (1926). Wave propagation in overhead wires with ground return. *Bell System Technical Journal*, 5:539–554.
- [Churchill and Brown, 2001] Churchill, R. and Brown, J. (2001). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- [Cooray, 1992] Cooray, V. (1992). Horizontal fields generated by return strokes. *Radio Science*, 27:529–537.
- [Cooray, 2001] Cooray, V. (2001). Underground electromagnetic field generated by the return stroke of lightning flashes. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 43(1):75–84.
- [Cooray, 2002] Cooray, V. (2002). some considerations on the “Cooray – Rubinstein” formulation used in deriving the horizontal electric field of lightning return strokes over finitely conducting ground. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 44(4):560–566.

- [Cooray, 2010] Cooray, V. (2010). Horizontal electric field above and underground produced by lightning flashes. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 52(4):936–942.
- [Dawalibi and Southey, 1989] Dawalibi, F. P. and Southey, R. D. (1989). Analysis of electrical interference from power lines to gas pipelines part 1: Computation methods. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(3):1840–1846.
- [Delfino et al., 2008a] Delfino, F., Procopio, R., and Rossi, M. (2008a). Lightning return stroke current radiation in presence of a conducting ground: I. Theory and numerical evaluation of the electromagnetic fields. *Journal of Geophysical Research*, 113. D05110, DOI:10.1029/2007JD008553,2008.
- [Delfino et al., 2009] Delfino, F., Procopio, R., Rossi, M., and Rachidi, F. (2009). Influence of frequency-dependent soil electrical parameters on the evaluation of lightning electromagnetic fields in air and underground. *Journal of Geophysical Research*, 114. D11113, DOI:10.1029/2008JD011127,2009.
- [Delfino et al., 2007] Delfino, F., Procopio, R., Rossi, M., Rachidi, F., and Nucci, C. (2007). An algorithm for the exact evaluation of the underground lightning electromagnetic fields. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 49(2):401 – 411.
- [Delfino et al., 2008b] Delfino, F., Procopio, R., Rossi, M., Rachidi, F., and Nucci, C. A. (2008b). Lightning return stroke current radiation in presence of a conducting ground: II. Validity assessment of simplified approaches. *Journal of Geophysical Research*, 113. D05111, DOI:10.1029/2007JD008567,2008.
- [Delfino et al., 2010] Delfino, F., Procopio, R., Rossi, M., Shoory, A., and Rachidi, F. (2010). The effect of a horizontally stratified ground on lightning electromagnetic fields. *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC) 2010*, pages 45 – 50.
- [Diendorfer and Uman, 1990] Diendorfer, G. and Uman, M. A. (1990). An improved return stroke model with specified channel-base current. *Journal of Geophysical Research*, 95:13,621–13,644.
- [Ding et al., 2010] Ding, T., Zhang, S., and Wu, Q. (2010). Effects of channel length on calculation accuracy of lightning return stroke electromagnetic fields. *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC) 2010*, pages 374 – 377.
- [Fischer, 2003] Fischer, C. (2003). *Multistatisches Radar zur Lokalisierung vor Objekten im Boden*. PhD thesis, Universitaet Friderician Karlsruhe, p.153-155.

- [Gradshteyn and Ryzhik, 2007] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier (Singapore) Pte Ltd, Edited by Jeffrey, A. and Zwillinger, D., seventh edition.
- [Grcev and Dawalibi, 1990] Grcev, L. and Dawalibi, F. (1990). An electromagnetic model for transients in grounding systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(4):1773–1781.
- [Harrington, 1993] Harrington, R. F. (1993). *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press.
- [Heidler, 1985a] Heidler, F. (1985a). Analytische blitzstromfunktion zur lempberechnung. *18th International Conference in Lightning Protection, Munich, Germany, 1985*, pages 63–66.
- [Heidler, 1985b] Heidler, F. (1985b). Traveling current source model for lemp calculation. *Proceedings 6th International Zurich Symposium in Electromagnetic Compatibility, Zurich, Switzerland, Mar. 1985*, pages 157–162.
- [Hua and Sarkar, 1989] Hua, Y. and Sarkar, T. K. (1989). Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an em system from its transient response. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 37(2):229–234.
- [IEC, 1995] IEC (1995). Iec 61312–1 protection against lightning electromagnetic impulse. part 1: General principles.
- [Jacqmaer and Driesen, 2006] Jacqmaer, P. and Driesen, J. L. (2006). Modelling of grounding systems with the method of moments. In *3rd IEEE Benelux young researchers symposium in electrical power engineering, 27-28 April 2006, Ghent, Belgium*.
- [King, 1969] King, R. J. (1969). Electromagnetic wave propagation over a constant impedance plane. *Radio Science*, 4:255–268.
- [Kuester and Chang, 1979] Kuester, E. F. and Chang, D. C. (1979). Evaluation of sommerfeld integrals associated with dipole sources above earth. *Scientific report No. 43*. Electromagnetic Laboratory, Department of Electrical Engineering, University of Colorado.
- [Leanos et al., 2008] Leanos, O. R., Naredo, J., and Moreno, P. (28-30 Sept. 2008). Assessment of approximate formulas for calculating overhead - line earth-impedances. In *Power Symposium, 2008. NAPS '08. 40th North American*, Calgary.

- [Lee et al., 2011] Lee, J., Zou, J., Wan, J., and Chang, S. (2011). Fast evaluating the electromagnetic fields generated by a vertical electric dipole over the lossy ground using Sommerfeld integral without truncation. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 53(4):977 – 986.
- [Legrand et al., 2008] Legrand, X., Xemard, A., Fleure, G., Auriol, P., and Nucci, C. A. (2008). A quasi-Monte Carlo integration method applied to the computation of the Pollaczek integral. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 23(3):1527–1534.
- [Li et al., 2011] Li, D., Wang, C., and Liu, X. (2011). General time-domain formula for horizontal electric field excited by lightning. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 53(2):395–400. note.
- [Magnusson et al., 2001] Magnusson, P. C., Alexander, G. C., Tripathi, V. K., and Weisshaar, A. (2001). *Transmission Lines and Wave Propagation*. 4th ed. Boca Raton, FL:CRC.
- [Mimouni et al., 2007] Mimouni, A., Delfino, F., Procopio, R., and Rachidi, F. (2007). On the computation of underground electromagnetic fields generated by lightning: A comparison between different approaches. *Power Tech, 2007 IEEE Lausanne*, pages 772 – 777.
- [Nguyen, 1998] Nguyen, T. T. (1998). Earth return path impedances of underground cables — Part I: Numerical integration of infinite integrals. *IEE Proceedings Generation Transmission Distribution*, 145(6):621–626.
- [Noda, 2005] Noda, T. (2005). A double logarithmic approximation of Carson’s ground-return impedance. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 21(1):472–479.
- [Noda, 2008] Noda, T. (2008). Numerical techniques for accurate evaluation of overhead line and underground cable constants. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 3.
- [Norton, 1937] Norton, K. A. (1937). Propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere. *Proc. Inst. Radio Eng.*, 25:1203–1236.
- [Nucci et al., 1988] Nucci, C. A., Mazzetti, C., Rachidi, F., and Ianoz, M. (1988). On lightning return stroke models for lemp calculations. *Proceedings 19th International Conference on Lightning Protection, Graz, Austria, Apr. 1988*.
- [Paolone et al., 2009] Paolone, M., Rachidi, F., Borghetti, A., Nucci, C., Rubinstein, M., Rakov, V., and Uman, M. (2009). Lightning electromagnetic

- field coupling to overhead lines: Theory, numerical simulations, and experimental validation. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 51(3):532 – 547.
- [Papagiannis et al., 2005] Papagiannis, G. K., Tsiamitros, D. A., Labridis, D. P., and Dokopoulos, P. S. (2005). Direct numerical evaluation of earth return path impedances of underground cables. *IEE Proceedings Generation Transmission Distribution*, 152(3):321–327.
- [Petrache et al., 2005] Petrache, E., Rachidi, F., Paolone, M., Nucci, C. A., Rakov, V. A., and Uman, M. A. (2005). Lightning induced disturbances in buried cables—Part I : Theory. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 47(3):498–508.
- [Pollaczek, 1926] Pollaczek, F. (1926). Ueber das Feld einer unendlich langen wechselstromflossenen Einfachleitung. *Elektrische Nachrichtentechnik*, 3(9).
- [Pollaczek, 1927] Pollaczek, F. (1927). Ueber die induktionswirkungen einer wechselstromeinfach - leitung. *Elect. Nachrichtentechnik.*, 4(1):18–30.
- [Rachidi et al., 1996] Rachidi, F., Nucci, A., Ianoz, M., and Mazzetti, C. (1996). Influence of a lossy ground on lightning - induced voltages on overhead lines. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 38(3):250–264.
- [Rachidi et al., 1999] Rachidi, F., Nucci, C., and Ianoz, M. (1999). Transient analysis of multiconductor lines above a lossy ground. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14(1):294–302.
- [Rakov and Dulzon, 1987] Rakov, V. A. and Dulzon, A. A. (1987). Calculated electromagnetic fields of lightning return stroke. *Tekh. Elektrodinam.*, (1):87–89.
- [Rakov and Uman, 1998] Rakov, V. A. and Uman, M. A. (1998). Review and evaluation of lightning return stroke models including some aspects of their application. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 40(4):403–426.
- [Rallis and Theodoulidis, 2009] Rallis, K. and Theodoulidis, T. (2009). Calculation of mutual impedance between buried conductors of finite length. *ISTET'09, XV International Symposium on Theoretical Engineering, Luebeck Germany, June 2009*.
- [Rallis and Theodoulidis, 2011a] Rallis, K. and Theodoulidis, T. (2011a). Efficient calculation of the lightning generated underground electric field. *7th Asia-Pacific International Conference on Lightning 2011, Chengdu, China*.

- [Rallis and Theodoulidis, 2011b] Rallis, K. and Theodoulidis, T. (2011b). Mutual impedance calculation between buried conductors of finite length. *COMPEL - the International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 30(4):1248–1259.
- [Rallis et al., 2012] Rallis, K., Theodoulidis, T., and Zygiridis, T. (2012). Efficient calculation of the lightning generated electric field above ground. *EMC Europe, Rome, September '12*.
- [Ramirez and Uribe, 2007] Ramirez, A. and Uribe, F. (2007). A broad range algorithm for the evaluation of Carson's integral. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 22(2):1188–1193.
- [Ramo et al., 1994] Ramo, S., Whinnery, J. R., and Duzer, T. V. (1994). *Fields and Waves in Communications Electronics*. Wiley Interscience, New York.
- [Rubinstein, 1996] Rubinstein, M. (1996). An approximate formula for the calculation of the horizontal electric field from lightning at close, intermediate and long range. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 38(3):531–535.
- [Saad et al., 1996] Saad, O., Gaba, G., and Giroux, M. (1996). A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 11(3):1536–1545.
- [Shoory et al., 2005] Shoory, A., Moini, R., Sadeghi, S. H. H., and Rakov, V. A. (2005). Analysis of lightning-radiated electromagnetic fields in the vicinity of lossy ground. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 47(1):131–145.
- [Shoory et al., 2011] Shoory, A., Rachidi, F., Rubinstein, M., and Thottappillil, R. (2011). On the measurement and calculation of horizontal electric fields from lightning. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 53(3):792 – 801.
- [Sommerfeld, 1909] Sommerfeld, A. (1909). Über die ansbreitung der wellen in der drahtlosen telegraphie. *Ann. Physik*, 28:665–737.
- [Sommerfeld, 1949] Sommerfeld, A. (1949). *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic.
- [Stratton, 1941] Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill.
- [Sunde, 1968] Sunde, E. D. (1968). *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*. Dover Publications, New York.

- [Takahashi et al., 1982] Takahashi, S., Ohya, S., and Mori, T. (1982). Earth-return mutual impedance between overhead power line and underground communication line. *Res. Rep. Ikutoku Tech. Univ. B, Sci. Technol.*, volume(7):173–178.
- [Tesche et al., 1997] Tesche, F., Ianoz, M., and Karlsson, T. (1997). *EMC Analysis Methods and Computational Models*. Wiley Interscience, New York.
- [Theodoulidis, 2012] Theodoulidis, T. (2012). Exact Solution of Pollaczek’s Integral for Evaluation of Earth-Return Impedance for Underground Conductors. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 54(4):806–814. in press.
- [Thottappillil et al., 1997] Thottappillil, R., Rakov, V. A., and Uman, M. A. (1997). Distribution of charge along the lightning channel: Relation to remote electric and magnetic fields and to return-stroke models. *Journal of Geophysical Research*, 102:6,887–7,006.
- [Triantafyllidis et al., 1999] Triantafyllidis, D. G., Papagiannis, G. K., and Labridis, D. P. (1999). Calculation of overhead transmission line impedances. a finite element approach. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14(1):287–293.
- [Tsiमितros et al., 2005] Tsiमितros, D., Papagiannis, G., Labridis, D., and Dokopoulos, P. (2005). Earth return path impedances of underground cables for the two-layer earth case. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(3):2174–2181.
- [Tsiमितros et al., 2008] Tsiमितros, D. A., Papagiannis, G. K., and Dokopoulos, P. S. (2008). Earth return impedances of conductor arrangements in multilayer soils—Part I: Theoretical model. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 23(4):2392–2400.
- [Uribe et al., 2004] Uribe, F., Naredo, J. L., Moreno, P., and Guardado, L. (2004). Algorithmic evaluation of underground cable earth impedances. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19(1):316–322.
- [Uribe, 2005] Uribe, F. A. (2005). Mutual ground impedances between overhead and underground transmission cables. In *IPST’05*, Montreal, Canada.
- [Uribe, 2008] Uribe, F. A. (2008). Calculating mutual ground impedances between overhead and buried cables. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 50(1):198–203.

- [Vahidi et al., 2008] Vahidi, B., Hemmatian, B., and Hosseinian, S. H. (2008). Monte Carlo method application to evaluate the infinite integrals of underground cable earth-return path impedance. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 27(6):1438–1450.
- [VG, 2011] VG (2011). Vg 95371–10, electromagnetic compatibility (emc) including electromagnetic pulse (emp) and lightning protection - fundamentals - part 10: Threat levels for nemp and lightning.
- [Wait, 1998] Wait, J. R. (1998). The ancient and modern history of em ground-wave propagation. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 40(5):7–24.
- [Wedepohl and Wilcox, 1973] Wedepohl, L. M. and Wilcox, D. J. (1973). Transient analysis of underground power-transmission systems. system-model and wave propagation characteristics. *Proceedings IEE*, 120(2):253–260.
- [Zou et al., 2010] Zou, J., Jiang, T. N., Lee, J. B., and Chang, S. H. (2010). Fast calculation of the electromagnetic field by a vertical electric dipole over a lossy ground and its application in evaluating the lightning radiation field in the frequency domain. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 52(1):147 – 154.
- [Zou et al., 2009] Zou, J., Lee, J. B., and Chang, S. H. (2009). An efficient algorithm for calculating the earth return mutual impedance of conductors with asymptotic extraction technology. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 51(2):416–419.
- [Zou et al., 2011] Zou, J., Li, J. J., Lee, J. B., and Chang, S. H. (2011). Fast and highly accurate algorithm for calculating the earth-return impedance of underground conductors. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 53(1):237–240.
- [Zygiridis, 2012] Zygiridis, T. (2012). Προσωπική επικοινωνία.