



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

«Διπλωματική Εργασία»

**Ανάπτυξη και μελέτη αποτελεσματικότητας ειδικών
διαγραμμάτων ελέγχου ποιότητας**

Ονοματεπώνυμο: Παπαγεωργίου Αρχόντα

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Παναγιωτίδου Σοφία

Κοζάνη, Ιούλιος 2021



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

«Διπλωματική Εργασία»

**Ανάπτυξη και μελέτη αποτελεσματικότητας ειδικών
διαγραμμάτων ελέγχου ποιότητας**

Όνοματεπώνυμο: Παπαγεωργίου Αρχόντα

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Παναγιωτίδου Σοφία

Κοζάνη, Ιούλιος 2021

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη μελέτη ενός ειδικού διαγράμματος ελέγχου ποιότητας. Βασικός στόχος του διαγράμματος είναι ο έλεγχος της μέσης τιμής, του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας, η οποία ενδέχεται να μεταβληθεί. Η μεταβολή αυτή προκαλείται από την εμφάνιση μιας συστηματικής αιτίας οδηγώντας σε παραγωγή προϊόντων με χαρακτηριστικά που αποκλίνουν από τα επιθυμητά. Για την ανάπτυξη του διαγράμματος αυτού, χρησιμοποιείται το θεώρημα Bayes σύμφωνα με το οποίο αναθεωρούνται οι προγενέστερες πιθανότητες in και out of control μετά από κάθε δειγματοληψία. Η παρακολούθηση συνεχών παραγωγικών διαδικασιών καθιστά αναγκαία την προσέγγιση του διαγράμματος μέσω Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ο τρόπος με τον οποίο παρακολουθείται και ελέγχεται η λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας, επηρεάζεται σημαντικά από τις παραμέτρους του εκάστοτε διαγράμματος. Βελτιστοποιώντας, λοιπόν, τις παραμέτρους αυτές, προκύπτουν οικονομικά αποτελέσματα τα οποία συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του απλού διαγράμματος Shewhart. Τα αποτελέσματα αυτά, επιβεβαιώνονται μέσω του προσομοιωτικού μοντέλου που αναπτύχθηκε για το υπό μελέτη διάγραμμα και αφορούν περιπτώσεις δειγματοληψιών αποτελούμενες από μία μεμονωμένη μέτρηση αλλά και από πλήθος μετρήσεων. Η σύγκριση αυτή, πραγματοποιείται με σκοπό την αποτίμηση της αποτελεσματικότητας του ειδικού διαγράμματος έναντι του απλού, από οικονομικής κυρίως πλευράς.

Λέξεις κλειδιά: Έλεγχος ποιότητας, Θεώρημα Bayes, Διάγραμμα Shewhart, Οικονομική βελτιστοποίηση

Abstract

The present thesis focuses on the development of a special quality control chart. The main target of this chart is to control the mean value of the quality characteristic. An assignable cause may appear and shift the mean value of products' characteristic to an undesirable value. For this production process, at each sampling instance, the probability of operating in and out of control are updated using the Bayes theorem. The monitoring mechanism as well as the operation of this process is described through the use of Markov chain. The values of the control chart parameters can significantly influence the whole operation and monitoring of the process. Therefore, through the minimization of the expected cost per time unit, the control chart parameters are optimized and the resulting economic outcome is compared with that of the simple Shewhart chart. The results are confirmed through the development of a simulation model for various cases, including both multi-unit and unitary samples. This way, the economic effectiveness of the proposed special control chart compared to a simple Shewhart chart is evaluated.

Key words: Quality control, Bayes Theorem, Shewhart control chart, Economic optimization

Πνευματικά Δικαιώματα

ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΜΗ ΠΡΟΣΒΟΛΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ

Δηλώνω ρητά ότι η παρούσα Διπλωματική Εργασία με τίτλο:

“Ανάπτυξη και μελέτη αποτελεσματικότητας ειδικών διαγραμμάτων ελέγχου ποιότητας”

καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της εργασίας και αναφέρονται ρητώς μέσα στο κείμενο που συνοδεύουν και η οποία έχει εκπονηθεί στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, υπό την επίβλεψη της κα Παναγιωτίδου Σοφίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή / και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και μόνο.

Copyright © Αρχόντα Παπαγεωργίου & Σοφία Παναγιωτίδου

Ημερομηνία: 05/07/2021

Πόλη: Κοζάνη

Ευχαριστίες

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα. Παναγιωτίδου Σοφία για την πολύτιμη βοήθειά της αλλά και την καθοδήγηση που μου παρείχε με σκοπό να ολοκληρώσω την παρούσα διπλωματική εργασία. Ακόμη, οφείλω να εκφράσω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου, που με στηρίζουν και στέκονται δίπλα μου καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	ii
Πνευματικά Δικαιώματα	iii
Ευχαριστίες	iv
Περιεχόμενα	v
Κατάλογος Εικόνων	vii
Κατάλογος Διαγραμμάτων	vii
Κατάλογος Πινάκων	vii
Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή	9
1.1 Έλεγχος Ποιότητας	9
1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας	10
1.3 Βιβλιογραφική επισκόπηση.....	11
Κεφάλαιο 2^ο: Περιγραφή του Προβλήματος	15
Κεφάλαιο 3^ο: Μοντελοποίηση	17
3.1 Παραδοχές.....	17
3.2 Θεώρημα Bayes	17
3.3 Θεωρητική προσέγγιση και ανάλυση του μοντέλου	17
3.3.1 Ανάλυση διαγραμμάτων Shewhart	18
3.3.2 Ανάλυση ειδικού διαγράμματος και υπολογισμός αναθεωρημένων πιθανοτήτων (Bayes).....	19
3.3.3 Συναρτήσεις κόστους	21
3.3.3.1 Συνάρτηση κόστους του διαγράμματος Shewhart	22
3.3.3.2 Συνάρτηση κόστους του ειδικού διαγράμματος	24
3.4 Μοντέλο Προσομοίωσης	26
3.4.1 Περιγραφή του μοντέλου προσομοίωσης	26
3.4.2 Αριθμητικά παραδείγματα	29
3.4.2.1 Αριθμητικό παράδειγμα ενός κύκλου (false alarm)	30
3.4.2.2 Αριθμητικό παράδειγμα ενός κύκλου (true alarm)	31
3.4.3 Διάστημα Εμπιστοσύνης	32

3.4.4 Αριθμητικό παράδειγμα μιας προσομοίωσης	33
Κεφάλαιο 4^ο: Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	37
4.1 Ελαχιστοποίηση Κόστους	37
4.2 Σύγκριση βέλτιστων πολιτικών	38
4.2.1 Ελεύθερο μέγεθος δείγματος.....	39
4.2.2 Μεμονωμένη μέτρηση ($n = 1$)	43
4.2.3 Συγκριτικά αποτελέσματα	46
4.2.4 Διαγράμματα Κόστους	47
4.2.4.1 Ελεύθερο μέγεθος δείγματος	48
4.2.4.2 Μεμονωμένη μέτρηση ($n = 1$).....	51
Κεφάλαιο 5^ο: Συμπεράσματα μελέτης.....	55
Παραρτήματα.....	57
Βιβλιογραφία.....	63

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1: Περιγραφή λειτουργίας	16
Εικόνα 2: Περιγραφή λειτουργίας	21
Εικόνα 3: Λογικό διάγραμμα προσομοίωσης.....	28

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1: Διάγραμμα ελέγχου ποιότητα ενός κύκλου (<i>false alarm</i>).....	30
Διάγραμμα 2: Διάγραμμα ελέγχου ποιότητας ενός κύκλου (<i>true alarm</i>).....	31
Διάγραμμα 3: Ιστόγραμμα τιμών Κόστους.....	34
Διάγραμμα 4: Ιστόγραμμα τιμών Διάρκειας.....	34
Διάγραμμα 5: Επίδραση παραμέτρων για ελεύθερο n	42
Διάγραμμα 6: Επίδραση παραμέτρων για μεμονωμένη μέτρηση	46
Διάγραμμα 7: Κόστος συναρτήσει δ (n ελεύθερο)	49
Διάγραμμα 8: Κόστος συναρτήσει λ (n ελεύθερο)	50
Διάγραμμα 9: Κόστος συναρτήσει δ ($n=1$).....	52
Διάγραμμα 10: Κόστος συναρτήσει λ ($n=1$).....	53

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Διαστήματα Εμπιστοσύνης	35
Πίνακας 2: Σετ παραμέτρων	39
Πίνακας 3: Βελτιστοποίηση διαγράμματος Shewhart (n ελεύθερο)	40
Πίνακας 4: Βελτιστοποίηση ειδικού διαγράμματος (n ελεύθερο).....	41
Πίνακας 5: Ποσοστό μείωσης Κόστους (n ελεύθερο)	41
Πίνακας 6: Βελτιστοποίηση διαγράμματος Shewhart ($n=1$).....	43
Πίνακας 7: Βελτιστοποίηση ειδικού διαγράμματος ($n=1$)	44
Πίνακας 8: Ποσοστό μείωσης Κόστους ($n=1$).....	44
Πίνακας 9: Τιμές παραμέτρων	48
Πίνακας 10: Κόστος για μεταβαλλόμενο δ (n ελεύθερο)	49
Πίνακας 11: Κόστος για μεταβαλλόμενο λ (n ελεύθερο).....	50
Πίνακας 12: Κόστη για μεταβαλλόμενο δ ($n=1$).....	51
Πίνακας 13: Κόστη για μεταβαλλόμενο λ ($n=1$).....	53

Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή

1.1 Έλεγχος Ποιότητας

Ο όρος ποιότητα δεν αποτελεί, σε καμία περίπτωση, καινούρια ιδέα για τις σύγχρονες επιχειρήσεις. Από πολύ παλιά, έχουν παρατηρηθεί προσπάθειες εφαρμογής διαφόρων μεθόδων οι οποίες στόχευαν στην διασφάλισή της. Από τότε έως και σήμερα, η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων ή/και υπηρεσιών, αποτελεί βασική μέριμνα της εκάστοτε επιχείρησης, καθώς θεωρείται ως ο βασικός παράγοντας προσέλκυσης πελατών.

Βέβαια, η έννοια της ποιότητας δεν είναι μονοσήμαντη, αλλά κατά καιρούς, έχουν δοθεί για αυτήν, διάφοροι ορισμοί. Σύμφωνα με το διεθνές πρότυπο ISO 8402 (1986): «Ποιότητα είναι το σύνολο των ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών ενός προϊόντος, διαδικασίας ή υπηρεσίας που καθορίζουν την ικανότητα ανταπόκρισης σε δηλωμένες ή εννοούμενες ανάγκες». Επιπλέον, με βάση τον Garvin (1987), οι κυριότερες διαστάσεις της ποιότητας ενός προϊόντος σχετίζονται με τα παρακάτω χαρακτηριστικά (Montgomery, 2009):

- Απόδοση, η οποία συνδέεται με την ικανότητα του προϊόντος να διεκπεραιώσει τις προκαθορισμένες, για αυτό, λειτουργίες.
- Αξιοπιστία, δηλαδή το πόσο συχνά το προϊόν χρήζει επισκευής.
- Διάρκεια ζωής του προϊόντος.
- Ευκολία επισκευής, η οποία είναι συνυφασμένη τόσο με το κόστος που απαιτείται για την επισκευή του, όσο και με τον χρόνο που αυτή προϋποθέτει.
- Αισθητική, δηλαδή εξωτερική εμφάνιση-σχεδιασμός του προϊόντος.
- Χαρακτηριστικά, τα οποία αναφέρονται κυρίως σε ιδιότητες που μπορεί να έχει το προϊόν πέραν των προκαθορισμένων.
- Φήμη, τόσο της επιχείρησης όσο και του ίδιου του προϊόντος.
- Συμμόρφωση ως προς τις προδιαγραφές που ορίζει ο κατασκευαστής.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πως η ποιότητα δεν μπορεί να οριστεί ως κάτι συγκεκριμένο και απόλυτο, αλλά βασίζεται στην ικανότητα του εκάστοτε προϊόντος να εκπληρώσει τις απαιτήσεις του καταναλωτή του.

Σε κάθε παραγωγική διαδικασία, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι επιτυγχάνεται ένα ορισμένο επίπεδο ποιότητας, κρίνεται απαραίτητος ο έλεγχός της, ο οποίος διενεργείται με τη μορφή επιθεώρησης και αξιολόγησης. Ο Walter Shewhart ήταν αυτός που εφάρμοσε τον στατιστικό έλεγχο

ποιότητας (Statistical Quality Control-SQC), χρησιμοποίησε, δηλαδή, στατιστικές μεθόδους με στόχο τον εντοπισμό προβλημάτων ποιότητας στην παραγωγική διαδικασία και τη διασφάλιση ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Για τη διεκπεραίωση του ελέγχου ποιότητας, χρησιμοποιείται μια σειρά εργαλείων/μεθόδων οι οποίες αναφέρονται παρακάτω (ΤΑΓΑΡΑΣ, 2001):

1. Διάγραμμα διαδικασίας (flowchart)
2. Διάγραμμα αιτίας-αποτελέσματος (cause-and-effect diagram)
3. Φύλλο καταχώρησης (checksheet)
4. Ιστόγραμμα (histogram)
5. Διάγραμμα Pareto (Pareto diagram)
6. Διάγραμμα διασποράς (scatterplot)
7. Διάγραμμα ελέγχου (control chart)

Τα τελευταία χρόνια, ολοένα και περισσότερες επιχειρήσεις στρέφονται στον έλεγχο της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων τους, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην διασφάλισή της. Αδιαμφισβήτητα, η ποιότητα παίζει καθοριστικό ρόλο στην ικανοποίηση των πελατών, επηρεάζοντας, έτσι, τόσο το κόστος όσο και το συνολικό κέρδος της επιχείρησης. Επομένως, κρίνεται δόκιμο να δοθεί η απαραίτητη προσοχή στην κατάλληλη επιλογή μεθόδων και διαδικασιών, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν, ώστε να επιτευχθεί ο ποιοτικός έλεγχος που είναι άμεσα συνδεδεμένος με το κέρδος της κάθε επιχείρησης.

1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Ο ποιοτικός έλεγχος κάθε παραγωγικής διαδικασίας αποτελεί τη σημαντικότερη ενέργεια που εφαρμόζεται, με σκοπό τον έγκαιρο εντοπισμό συστηματικών αιτιών οι οποίες οδηγούν στην παραγωγή ελαττωματικών προϊόντων. Το απλούστερο διάγραμμα ελέγχου ποιότητας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από την εκάστοτε επιχείρηση, είναι το διάγραμμα Shewhart. Ωστόσο, ορισμένες αλλαγές πάνω στο συγκεκριμένο διάγραμμα μπορούν να επιφέρουν σημαντικές βελτιώσεις με άμεσο αποτέλεσμα τη μείωση του συνολικού κόστους της εταιρείας.

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, επικεντρώνεται στην ανάπτυξη ενός ειδικού διαγράμματος ελέγχου ποιότητας στο οποίο γίνεται χρήση του μετασχηματισμού Bayes για τον υπολογισμό συγκεκριμένων πιθανοτήτων. Πρωτίστως, αφού προσεγγιστεί το δεδομένο διάγραμμα σε θεωρητικό επίπεδο θα υπολογιστεί αναλυτικά η συνάρτηση κόστους, από την οποία προκύπτει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου που διέπει κάθε κύκλο λειτουργίας. Τελικά, με χρήση Η/Υ και

γνώμονα την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους θα προκύψουν οι βέλτιστες παράμετροι που ενδείκνυται να χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή του εν λόγω διαγράμματος.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται η τεχνική της προσομοίωσης, η οποία αποτελεί ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία της επιστημονικής κοινότητας, με στόχο την αναπαράσταση μιας παραγωγικής διαδικασίας. Κατά την προσομοίωση, με την βοήθεια Η/Υ, καταγράφεται ένα πλήθος συμβάντων που εμφανίζονται, με τυχαίο τρόπο, στη διάρκεια μιας παραγωγικής διαδικασίας και εν τέλει, προκύπτουν αντίστοιχα αποτελέσματα με την φυσική παρακολούθησή της. Έτσι, με την τεχνική αυτή, μπορεί να προσεγγιστεί από οικονομική πλευρά το διάγραμμα ελέγχου ποιότητας, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν από τη θεωρητική προσέγγιση του μοντέλου.

Εφόσον έχει προηγηθεί ανάπτυξη και ανάλυση του μοντέλου τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και από πλευράς κόστους, κρίνεται δόκιμο να παρουσιαστούν ορισμένα ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα. Στο σημείο αυτό, θα ελαχιστοποιηθούν οι συναρτήσεις κόστους, του ειδικού διαγράμματος αλλά και του απλού διαγράμματος Shewhart και θα συγκριθούν τα αποτελέσματα μεταξύ τους. Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθούν διάφορες τιμές παραμέτρων, ώστε να υπάρξει πληθώρα αποτελεσμάτων και η σύγκριση να καλύπτει ένα μεγάλο εύρος τιμών κόστους.

Αναλυτικά, τα κεφάλαια που διέπουν την συγκεκριμένη διπλωματική είναι τα εξής:

- Περιγραφή του προβλήματος. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται το μοντέλο του διαγράμματος ελέγχου που πραγματεύεται η εν λόγω εργασία.
- Μοντελοποίηση. Στο κεφάλαιο αυτό, αναλύονται διεξοδικά σε θεωρητικό επίπεδο τα δύο διαγράμματα και αναπτύσσεται το μοντέλο προσομοίωσης του ειδικού διαγράμματος.
- Αριθμητικά αποτελέσματα. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα των δύο διαγραμμάτων και συγκρίνονται μεταξύ τους.
- Συμπεράσματα.

1.3 Βιβλιογραφική επισκόπηση

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας κρίθηκε απαραίτητη η βιβλιογραφική επισκόπηση διαφόρων επιστημονικών άρθρων τα οποία αφορούν κυρίως ειδικά διαγράμματα ελέγχου ποιότητας.

Αρχικά, ο Nenes το 2011 ανέπτυξε ένα πλήρως δυναμικό διάγραμμα ελέγχου, το οποίο βασίζεται στον μετασχηματισμό Bayes για την αναθεώρηση πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα, το μοντέλο που παρουσίασε αφορούσε τον έλεγχο της μέσης τιμής ενός χαρακτηριστικού ποιότητας μιας συνεχούς παραγωγικής διαδικασίας. Η εμφάνιση μιας συστηματικής αιτίας μεταβάλλει μόνο τη μέση τιμή, με

άμεσο αποτέλεσμα την παραγωγή προϊόντων με χαρακτηριστικά που αποκλίνουν από τα επιθυμητά. Η ανάπτυξη του διαγράμματος αυτού, βασίζεται στο θεώρημα Bayes σύμφωνα με το οποίο για κάθε δειγματοληψία αναθεωρούνται οι πιθανότητες in και out of control. Αρχικά, ανέλυσε το διάγραμμα ελέγχου για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- $\alpha = 0$, όταν η απόφαση, κατά τη δειγματοληψία, είναι να αφεθεί η διαδικασία να λειτουργεί χωρίς καμία επέμβαση.
- $\alpha = 1$, όταν η απόφαση, κατά τη δειγματοληψία, είναι να πραγματοποιηθεί περαιτέρω έλεγχος για τον εντοπισμό της συστηματικής αιτίας.
- p : πιθανότητα λειτουργίας της παραγωγικής διαδικασίας υπό την επίδραση της αιτίας.

Η πιθανότητα αυτή, p , αναθεωρείται σύμφωνα με το θεώρημα Bayes, ορίζεται πλέον ως p' και αποτελεί τη μεταβλητή βάσει της οποίας αποφασίζεται η περαιτέρω έρευνα ή όχι ($\alpha = 0$ ή $\alpha = 1$). Συγκεκριμένα, ορίζονται δύο τιμές p_R και p_S οι οποίες αποτελούν τα όρια σύγκρισης για την αναθεωρημένη πιθανότητα. Πιο αναλυτικά, αν:

- $p' < p_R$: Δεν πραγματοποιείται καμία επέμβαση στην παραγωγική διαδικασία και η επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από h_1 χρονικές μονάδες με μέγεθος δείγματος ίσο με n_1 .
- $p_R < p' \leq p_S$: Δεν πραγματοποιείται καμία επέμβαση στην παραγωγική διαδικασία και η επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από h_2 ($h_2 < h_1$) χρονικές μονάδες με μέγεθος δείγματος ίσο με n_2 ($n_2 > n_1$).
- $p' > p_S$: Πραγματοποιείται έλεγχος ο οποίος αποκαλύπτει την ύπαρξη ή μη της αιτίας και η επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται και πάλι μετά από h_1 χρονικές μονάδες με μέγεθος δείγματος ίσο με n_1 .

Για τη θεωρητική ανάλυση του διαγράμματος αυτού, προσέγγισε το μοντέλο με βάση μια μαρκοβιανή αλυσίδα και τελικά κατέληξε στην οικονομική βελτιστοποίησή του, έχοντας ως στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους ανά χρονική μονάδα. Τελικά, μέσω της οικονομικής βελτιστοποίησης συγκρίθηκε το ειδικό, αυτό, διάγραμμα Bayes, τόσο με το απλό διάγραμμα Shewhart με σταθερές παραμέτρους (Fp), όσο και με διάγραμμα Shewhart μεταβλητών παραμέτρων (Vp). Εν τέλει, η μελέτη αυτή οδήγησε σε αποτελέσματα που υποδεικνύουν σημαντικές οικονομικές βελτιώσεις για τη χρήση διαγραμμάτων που βασίζονται στο θεώρημα Bayes.

Γενικά, τα δυναμικά διαγράμματα ελέγχου ποιότητας έχουν απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό την επιστημονική κοινότητα σε μια προσπάθεια ανάπτυξης αποτελεσματικών εργαλείων και τακτικών ελέγχου της παραγωγικής διαδικασίας. Κοινό χαρακτηριστικό, όλων των διαγραμμάτων αυτών, είναι πως οι παράμετροί τους μπορεί να μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια λειτουργίας της παραγωγικής

διαδικασίας. Μία μελέτη που επικεντρώνεται σε τέτοιου είδους διαγράμματα είναι αυτή που αναπτύχθηκε από τους Tagaras και Nikolaidis το 2001. Συγκεκριμένα, έχοντας ως δεδομένες όλες τις παραδοχές που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, μελέτησαν την επίδραση που μπορεί να έχουν οι μεταβαλλόμενες τιμές των παραμέτρων που σχετίζονται με τη συχνότητα δειγματοληψίας (h) ή με το μέγεθος του δείγματος (n). Συγκεκριμένα, αναθεωρώντας την πιθανότητα out of control, σύμφωνα με το θεώρημα Bayes, μελετώνται τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

- Σταθερές παράμετροι (h, n), με αποτέλεσμα να αναθεωρείται απλώς η πιθανότητα out of control, γεγονός που διαφοροποιεί το διάγραμμα αυτό από το απλό Shewhart.
- Σταθερή συχνότητα δειγματοληψίας και μεταβλητό μέγεθος δείγματος. Μετά από κάθε δειγματοληψία, οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν αφορούν τη συνέχιση της παραγωγικής διαδικασίας χωρίς επέμβαση ή τη διακοπή της, με σκοπό τον περαιτέρω έλεγχο για εντοπισμό της συστηματικής αιτίας, αλλά και το μέγεθος δείγματος από το οποίο θα αποτελείται η επόμενη μέτρηση.
- Σταθερό μέγεθος δείγματος και μεταβλητές διάρκειες μεταξύ των δειγματοληψιών. Στην περίπτωση αυτή οι αποφάσεις αφορούν και πάλι τη συνέχιση ή όχι της παραγωγικής διαδικασίας και επιπλέον τη χρονική στιγμή κατά την οποία θα πραγματοποιηθεί η αμέσως επόμενη δειγματοληψία.
- Μεταβλητό μέγεθος δείγματος και μεταβλητή συχνότητα δειγματοληψιών. Η περίπτωση αυτή είναι και η πιο περίπλοκη καθώς πρέπει να προσαρμοστούν και οι δύο παράμετροι. Έτσι, λαμβάνονται οι κατάλληλες αποφάσεις συμπεριλαμβανομένου του μεγέθους του επόμενου δείγματος αλλά και της χρονικής στιγμής κατά την οποία αυτό θα ληφθεί (πλήρως δυναμικό διάγραμμα, Nenes 2011).

Με γνώμονα την οικονομική βελτιστοποίηση κάθε διαγράμματος ελέγχου, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως η εφαρμογή του θεωρήματος Bayes επιφέρει σημαντικές βελτιώσεις. Αξίζει να αναφερθεί πως ακόμα και για τις σταθερές παραμέτρους (1^η περίπτωση) το διάγραμμα που βασίζεται στο θεώρημα Bayes καταλήγει σε μικρότερα συνολικά κόστη, συγκρινόμενο με το απλό διάγραμμα Shewhart, ωστόσο οι βελτιώσεις αυτές κυμαίνονται σε χαμηλά επίπεδα. Από την άλλη πλευρά οι μέγιστες βελτιώσεις και κατ'επέκταση τα χαμηλότερα αναμενόμενα κόστη επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας το πλήρως δυναμικό διάγραμμα με μεταβλητές και τις δύο παραμέτρους (4^η περίπτωση), όπως είναι αναμενόμενο. Ωστόσο, η εφαρμογή του τελευταίου αυτού διαγράμματος είναι και η πιο περίπλοκη, γεγονός που οδηγεί στην ανάγκη η μία από τις δύο παραμέτρους να παραμένει σταθερή. Συγκρινόμενες οι περιπτώσεις 2 και 3, το μερικώς δυναμικό διάγραμμα με μεταβλητή συχνότητα δειγματοληψιών είναι αυτό που επιφέρει σημαντικότερες βελτιώσεις. Τα

αποτελέσματα του διαγράμματος αυτού, είναι συγκρίσιμα με αυτά του πλήρως δυναμικού διαγράμματος με σημαντικότερο πλεονέκτημα την ευκολότερη εφαρμογή του. Επομένως, η απλότητά του αλλά και τα σημαντικά οφέλη που παρουσιάζει στις αναμενόμενες τιμές του κόστους, αποτελούν σημαντική ένδειξη πως η χρήση του προτιμάται στις περισσότερες περιπτώσεις.

Τέλος, οι Nenes και Tagaras, το 2007, μελέτησαν τη βελτιστοποίηση των διαγραμμάτων CUSUM συγκρίνοντάς τα με τα απλά διαγράμματα Shewhart. Από τη μελέτη αυτή, προέκυψαν και πάλι σημαντικές οικονομικές βελτιώσεις κυρίως για περιπτώσεις κατά τις οποίες η δειγματοληψία αποτελείται από μία μόνο μέτρηση. Είναι σύνηθες το φαινόμενο, σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, η δειγματοληψία να αποτελείται από μία μοναδική μέτρηση ή το μέγεθος του δείγματος να κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα. Στις περιπτώσεις αυτές, ορισμένες παραλλαγές πάνω στο διάγραμμα ελέγχου ποιότητας οδηγούν τελικά σε σημαντικές βελτιώσεις όσον αφορά το κόστος της εκάστοτε επιχείρησης.

Κεφάλαιο 2^ο: Περιγραφή του Προβλήματος

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τον έλεγχο μιας παραγωγικής διαδικασίας, εξετάζοντας ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό ποιότητας X , των παραγόμενων, από αυτή, προϊόντων. Κύριο εργαλείο για τον σκοπό αυτό, αποτελεί ένα διάγραμμα ελέγχου μέσης τιμής, το οποίο χρησιμοποιεί αναθεωρημένες πιθανότητες, σύμφωνα με το θεώρημα Bayes. Κύριος στόχος του ελέγχου αυτού, είναι ο έγκαιρος εντοπισμός και απομάκρυνση της συστηματικής αιτίας, η εμφάνιση της οποίας προκαλεί παρεκκλίσεις στο χαρακτηριστικό ποιότητας από τις επιθυμητές τιμές του.

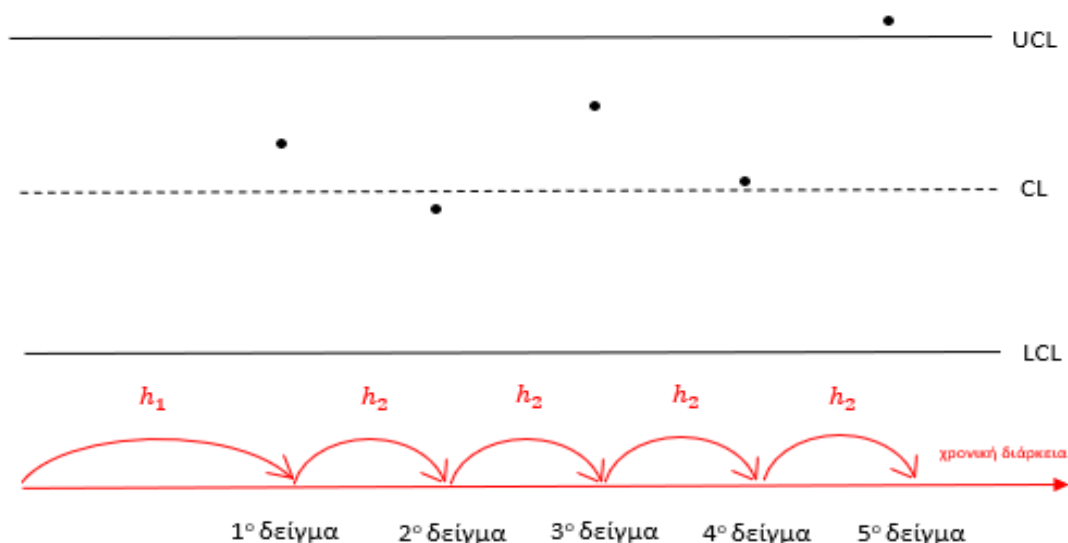
Αρχικά, θεωρείται πως η παραγωγική διαδικασία ξεκινάει λειτουργώντας σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου (in-control), η οποία ορίζεται ως κατάσταση 0. Για τον έλεγχο και την παρακολούθηση της παραγωγικής διαδικασίας, επιλέγεται ένα χαρακτηριστικό ποιότητας X το οποίο μελετάται. Θεωρείται πως η τυχαία, αυτή, μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_0$ και τυπική απόκλιση σ , όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0. Συγκεκριμένα, υπό την κατάσταση αυτή, παράγονται προϊόντα με τις επιθυμητές προδιαγραφές, δηλαδή με μέση τιμή εντός των ορίων ελέγχου. Έτσι, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, λαμβάνεται ορισμένη ποσότητα προϊόντων, η οποία αποτελεί το δείγμα προς ανάλυση και υπολογίζεται η μέση τιμή τους. Ωστόσο, είναι αδύνατον να παραμείνει η διαδικασία στην κατάσταση αυτή, η οποία είναι και η επιθυμητή, καθώς υπάρχει πιθανότητα να εμφανιστεί μια συστηματική αιτία η οποία μεταβάλλει τη μέση τιμή των παραγόμενων προϊόντων σε $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta \cdot \sigma$. Αξίζει να σημειωθεί, πως η σταθερά δ χρησιμοποιείται για να εκφράσει το μέγεθος της μεταβολής της μέσης τιμής από την επιθυμητή τιμή της, σε αριθμό τυπικών αποκλίσεων της μετρούμενης μεταβλητής X . Στην περίπτωση αυτή, λέμε πως η διαδικασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (out-of-control), που ορίζεται ως κατάσταση 1.

Στο σημείο αυτό, κρίνεται σημαντικό να αναλυθεί η διαδικασία που ακολουθείται κατά τη λήψη ενός δείγματος. Εφόσον πραγματοποιηθεί, λοιπόν, δειγματοληψία, υπολογίζεται η μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας που μελετάται και συγκρίνεται με τα δεδομένα όρια ελέγχου. Συγκεκριμένα, όταν η μέση τιμή λαμβάνεται μεταξύ του άνω (UCL) και κάτω (LCL) ορίου ελέγχου, τότε θεωρείται πως η διαδικασία βρίσκεται in control και αφήνεται να συνεχίσει τη λειτουργία της χωρίς καμία επιδιορθωτική επέμβαση. Αντιθέτως, όταν η μέση τιμή που υπολογίζεται βρίσκεται εκτός των παραπάνω ορίων, είναι απαραίτητο να διενεργηθεί έλεγχος, ώστε να εντοπιστεί και απομακρυνθεί η συστηματική αιτία. Ωστόσο, κατά τον έλεγχο υπάρχει το ενδεχόμενο να διαπιστωθεί πως η διαδικασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου, δεν έχει επιδράσει δηλαδή η συστηματική αιτία και στην περίπτωση αυτή πρόκειται για λανθασμένη ένδειξη (false alarm). Η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως πιθανότητα σφάλματος πρώτου είδους. Μια άλλη εναλλακτική που ενδέχεται να

προκύψει κατά τον έλεγχο, είναι να εξακριβωθεί πως η συστηματική αιτία έχει όντως επιδράσει και εν τέλει να απομακρυνθεί.

Μετά από κάθε δειγματοληψία και αφού έχει αναλυθεί το μετρούμενο δείγμα, διενεργούνται συγκεκριμένες ενέργειες. Αναλυτικά, στην περίπτωση που ο έλεγχος του δείγματος αποκαλύψει πως η ένδειξη του διαγράμματος ελέγχου ήταν εσφαλμένη, λόγω σφάλματος πρώτου είδους, η παραγωγική διαδικασία θα συνεχίσει τη λειτουργία της χωρίς καμία επέμβαση. Στο σημείο αυτό, για την εκτίμηση της πιθανότητας λειτουργίας της διαδικασίας υπό την επίδραση της συστηματικής αιτίας, χρησιμοποιείται το θεώρημα Bayes και η πιθανότητα αυτή αναθεωρείται. Εφόσον μετά τον έλεγχο του δείγματος προκύψει πως η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1, υπό την επίδραση της συστηματικής αιτίας, πραγματοποιούνται ενέργειες ώστε να αποκατασταθεί το πρόβλημα και η διαδικασία να ξεκινήσει και πάλι τη λειτουργία της από την κατάσταση 0.

Όσον αφορά την αναθεωρημένη πιθανότητα (έστω p) που σχετίζεται με τη λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου, θεωρητικά δύναται να λάβει τιμές από 0 έως 1. Ωστόσο, για τη μελέτη του συγκεκριμένου διαγράμματος θεωρείται πως η πιθανότητα αυτή, η οποία υπολογίζεται μετά από κάθε δειγματοληψία, είναι ίδια για όλες τις δειγματοληψίες και ίση με μία οριακή τιμή, η οποία ορίζεται ως p_{cr} . Η παραδοχή αυτή, οδηγεί σε μεταβαλλόμενα χρονικά διαστήματα μεταξύ των δειγματοληψιών, μέχρι να ληφθεί μέση τιμή δείγματος εκτός των επιθυμητών ορίων η οποία και αποτελεί ένδειξη δυσλειτουργίας. Συγκεκριμένα, η πρώτη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από h_1 χρονικές μονάδες ενώ η διάρκεια που μεσολαβεί μεταξύ των υπολοίπων δειγματοληψιών ισούται με h_2 χρονικές μονάδες ($h_2 < h_1$). Η λειτουργία μιας παραγωγικής διαδικασίας, βασιζόμενη σε όσα αναφέρθηκαν, παριστάνεται σχηματικά στην εικόνα 1, ώστε να καταστεί ευκολότερη η κατανόησή της.



Εικόνα 1: Περιγραφή λειτουργίας

Κεφάλαιο 3^ο: Μοντελοποίηση

3.1 Παραδοχές

Για την προσέγγιση του προβλήματος της δεδομένης εργασίας, έχουν οριστεί κάποιες παραδοχές οι οποίες περιγράφονται παρακάτω. Πρώτα απ' όλα, είναι απαραίτητο να αναφερθεί πως ενδεχόμενη εμφάνιση μιας συστηματικής αιτίας, επηρεάζει και μεταβάλλει μόνο τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας, χωρίς να έχει επίδραση στη μεταβλητότητά του. Επίσης, θεωρείται πως τα χρονικά διαστήματα ανάμεσα σε διαδοχικές εμφανίσεις της συστηματικής αιτίας ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$. Για τον λόγο αυτό, η πιθανότητα εμφάνισής της, σε ένα χρονικό διάστημα h είναι ίση με $P_{AC} = 1 - e^{-\lambda \cdot h}$. Επιπλέον, σε διαγράμματα ελέγχου που εφαρμόζονται κατά κόρον στη βιομηχανία, η ένδειξη σημείου εκτός των ορίων, δεν αποτελεί τη μοναδική περίπτωση στην οποία πραγματοποιείται έρευνα για εντοπισμό της συστηματικής αιτίας. Είναι συχνό το φαινόμενο, τα σημεία να βρίσκονται όλα εντός των ορίων ελέγχου, αλλά η διάταξή τους να είναι τέτοια, ώστε να προϋδεάζει για πιθανή ύπαρξη συστηματικής αιτίας και επομένως να κρίνεται απαραίτητη η περαιτέρω διερεύνηση. Ωστόσο, στο υπό μελέτη διάγραμμα, η μόνη ένδειξη για πιο ενδελεχή έλεγχο της κατάστασης της παραγωγικής διαδικασίας, θα αποτελεί μονάχα η σύγκριση της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού ποιότητας με τα υπάρχοντα όρια.

3.2 Θεώρημα Bayes

Η συγκεκριμένη ενότητα, έχει ως στόχο την παρουσίαση των βασικών στατιστικών εννοιών που χρησιμοποιούνται παρακάτω, ώστε να καταστεί ευκολότερη η κατανόηση του υπό μελέτη συστήματος. Για την ανάλυση, λοιπόν, του ειδικού διαγράμματος ελέγχου που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία της στατιστικής, το Θεώρημα Bayes. Βέβαια, ο δύσκολος χειρισμός του, είναι αυτός που αποτρέπει την επιστημονική κοινότητα να το εφαρμόζει σε μεγάλο βαθμό.

Το θεώρημα αυτό, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό υπό συνθήκη πιθανοτήτων, εφόσον διατίθενται περαιτέρω πληροφορίες. Συγκεκριμένα, είναι εφικτό να υπολογιστεί η πιθανότητα να ισχύει το ενδεχόμενο A , δεδομένου ότι ισχύει το ενδεχόμενο B . Η πιθανότητα αυτή ισούται με:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

3.3 Θεωρητική προσέγγιση και ανάλυση του μοντέλου

Στη συγκεκριμένη ενότητα, περιγράφεται και αναλύεται το ειδικό διάγραμμα ελέγχου, που χρησιμοποιεί αναθεωρημένες πιθανότητες σύμφωνα με το θεώρημα Bayes, με στόχο την καλύτερη

κατανόησή του σε θεωρητικό επίπεδο. Για το σκοπό αυτό, κρίνεται απαραίτητο να περιγραφεί, σε πρώτο στάδιο, το απλό διάγραμμα ελέγχου ποιότητας ή διάγραμμα Shewhart.

3.3.1 Ανάλυση διαγραμμάτων Shewhart

Ο στατιστικός έλεγχος της θέσης της κατανομής του χαρακτηριστικού ποιότητας X που μελετάται, ονομάζεται έλεγχος μέσης τιμής και γίνεται με τη βοήθεια διαγραμμάτων ελέγχου μέσης τιμής (διαγράμματα Shewhart). Βασική φιλοσοφία των διαγραμμάτων αυτών είναι η συλλογή, ανά τακτά χρονικά διαστήματα h , δειγμάτων μεγέθους n , ο υπολογισμός της μέσης τιμής και η σύγκριση με τα υπάρχοντα όρια ελέγχου. Ειδικότερα, ένα διάγραμμα ελέγχου μέσης τιμής αποτελείται από την κεντρική γραμμή (ΚΓ), το άνω (AOE ή UCL) και κάτω όριο ελέγχου (KOE ή LCL). Θεωρούμε πως η κεντρική γραμμή είναι η επιθυμητή τιμή μ_0 της μέσης τιμής του δείγματος και τα όρια ελέγχου απέχουν από αυτή k τυπικές αποκλίσεις. Πιο συγκεκριμένα:

- $AOE = \mu_0 + k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $KOE = \mu_0 - k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Βασικός σκοπός των διαγραμμάτων αυτών, είναι να ελέγχουν πότε η μέση τιμή του δείγματος ισούται όντως με μ_0 και πότε η τιμή αυτή έχει μεταβληθεί σε $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta \cdot \sigma$, δηλαδή αποκλίνει από την επιθυμητή.

Θεωρώντας ένα κλασικό διάγραμμα Shewhart ορίζονται οι παρακάτω πιθανότητες:

- $P_{in/0}$ ή $(1 - \alpha)$: Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος να είναι εντός των ορίων ελέγχου (in) δεδομένου ότι η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο (0).
- $P_{out/0}$ ή α : Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος να είναι εκτός των ορίων ελέγχου (out) δεδομένου ότι η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο (0).
- $P_{in/1}$ ή β : Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος να είναι εντός των ορίων ελέγχου (in) δεδομένου ότι η παραγωγική διαδικασία δε βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, δηλαδή έχει επιδράσει η συστηματική αιτία (1) .
- $P_{out/1}$ ή $(1 - \beta)$: Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος να είναι εκτός των ορίων ελέγχου (out) δεδομένου ότι η παραγωγική διαδικασία δε βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, δηλαδή έχει επιδράσει η συστηματική αιτία (1).

Αναλυτικά, οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής:

- $P_{in/0} = P\left(\mu_0 - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = P(-k < z < k) = \Phi(k) - \Phi(-k)$

- $P_{out/0} = 1 - P_{in/0} = 1 - [\Phi(k) - \Phi(-k)]$
- $P_{in/1} = P\left(\mu_0 - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\mu_0 - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < z < \frac{\mu_0 + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P(k - \delta \cdot \sqrt{n}) - P(-k - \delta \cdot \sqrt{n}) = \Phi(k - \delta \cdot \sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta \cdot \sqrt{n})$
- $P_{out/1} = 1 - P_{in/1} = 1 - [\Phi(k - \delta \cdot \sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta \cdot \sqrt{n})]$

3.3.2 Ανάλυση ειδικού διαγράμματος και υπολογισμός αναθεωρημένων πιθανοτήτων (Bayes)

Στο εξεταζόμενο σύστημα, θα γίνει χρήση του Θεωρήματος Bayes με σκοπό να αναθεωρηθούν οι προγενέστερες πιθανότητες in και out of control μετά από κάθε δειγματοληψία. Έτσι, για κάθε δείγμα i ορίζονται κάποιες πιθανότητες που αφορούν:

- τη στιγμή ακριβώς πριν τη μέτρηση του δείγματος i
- τη στιγμή της μέτρησης
- ακριβώς μετά τη μέτρηση του δείγματος i και δεδομένου ότι η μέση τιμή του δείγματος που μετρήθηκε ήταν in control

Συγκεκριμένα, για δείγμα i :

i. Λίγο πριν τη μέτρηση:

- P_{0i} : Πιθανότητα ακριβώς πριν τη μέτρηση του δείγματος i η παραγωγική διαδικασία να βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου (in control).
- P_{1i} : Πιθανότητα ακριβώς πριν τη μέτρηση του δείγματος i να έχει επιδράσει η συστηματική αιτία και άρα η παραγωγική διαδικασία να μη βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο (out of control).

ii. Κατά την μέτρηση i :

- $P_{in}(i)$: Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος i που θα ληφθεί να βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου.
- $P_{out}(i)$: Πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος i που θα ληφθεί να βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου.

iii. Μετά τη μέτρηση του δείγματος i και δεδομένου ότι η μέση τιμή του δείγματος που μετρήθηκε ήταν εντός των ορίων :

- $P_0(i)$: Πιθανότητα ακριβώς μετά τη μέτρηση i η παραγωγική διαδικασία να βρίσκεται όντως υπό στατιστικό έλεγχο (in control).

- $P_1(i)$: Πιθανότητα ακριβώς μετά τη μέτρηση i η παραγωγική διαδικασία να μη βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο (out of control).

Για να υπολογιστούν οι πιθανότητες αυτές, θεωρείται δεδομένο πως από τη δειγματοληψία που μόλις πραγματοποιήθηκε έχει προκύψει σημείο εντός των ορίων ελέγχου. Για τον λόγο αυτό, οι προγενέστερες πιθανότητες εμφάνισης της συστηματικής αιτίας αναθεωρούνται σύμφωνα με το θεώρημα Bayes.

Αναλυτικά, οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής:

- $P_{0i} = P_0(i-1) \cdot e^{-\lambda \cdot h_i}$, δηλαδή μετά τη μέτρηση του δείγματος $i-1$ η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0 ($P_0(i-1)$) και η συστηματική αιτία δεν επιδρά στο διάστημα h_i ($e^{-\lambda \cdot h_i}$).
- $P_{1i} = P_0(i-1) \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot h_i}) + P_1(i-1)$, δηλαδή μετά τη μέτρηση του δείγματος $i-1$ η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0 ($P_0(i-1)$) και η συστηματική αιτία επιδρά στο διάστημα h_i ($1 - e^{-\lambda \cdot h_i}$) ή μετά τη μέτρηση του δείγματος $i-1$ η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1 ($P_1(i-1)$).
- $P_{in}(i) = P_{in/0} \cdot P_{0i} + P_{in/1} \cdot P_{1i}$, το σημείο που λαμβάνεται κατά τη δειγματοληψία i βρίσκεται εντός ορίων (in) ενώ στην πραγματικότητα η διαδικασία μπορεί να βρίσκεται είτε στην κατάσταση 0 είτε στην κατάσταση 1.
- $P_{out}(i) = P_{out/0} \cdot P_{0i} + P_{out/1} \cdot P_{1i}$, το σημείο που λαμβάνεται κατά τη δειγματοληψία i βρίσκεται εκτός ορίων (out) ενώ στην πραγματικότητα η διαδικασία μπορεί να βρίσκεται είτε στην κατάσταση 0 είτε στην κατάσταση 1.
- $P_0(i) = \frac{P_{in/0} \cdot P_{0i}}{P_{in}(i)}$, σύμφωνα με το θεώρημα Bayes.
- $P_1(i) = \frac{P_{in/1} \cdot P_{1i}}{P_{in}(i)}$, σύμφωνα με το θεώρημα Bayes.

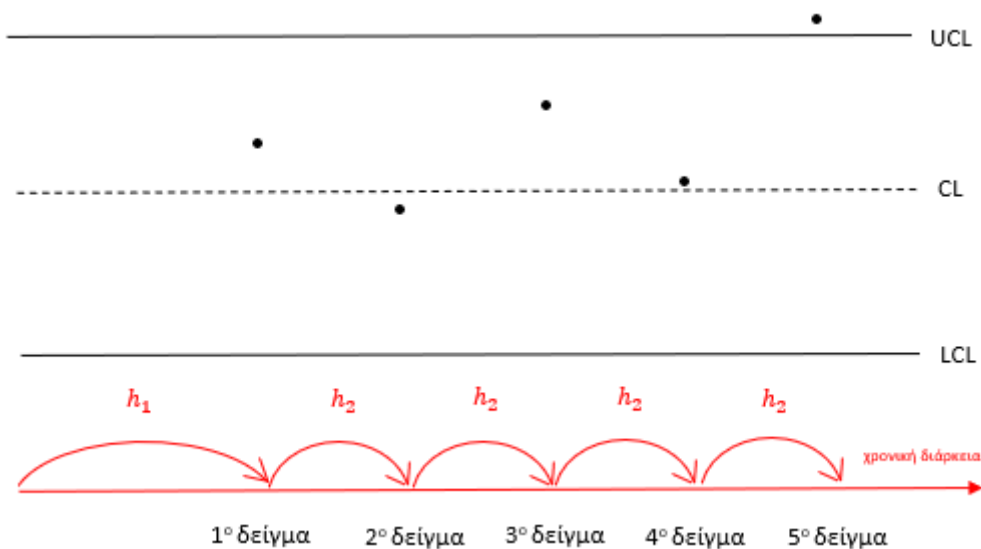
Στο σημείο αυτό, ορίζεται μία οριακή τιμή P_{cr} η οποία τίθεται ίση με κάθε $P_0(i)$. Έτσι, για τα διαστήματα h_i αποδεικνύεται ότι $h_2 = h_3 = \dots = h_i$ και ότι το h_1 είναι μεγαλύτερο από κάθε άλλο h_i . Συγκεκριμένα, για $i = 1$:

$$P_0(1) = \frac{P_{in/0} \cdot P_{01}}{P_{in}(1)} = \frac{P_{in/0} \cdot e^{-\lambda \cdot h_1}}{P_{in/0} \cdot e^{-\lambda \cdot h_1} + P_{in/1} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot h_1})} = P_{cr} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(1 + \frac{P_{in/0} \cdot (1 - P_{cr})}{P_{in/1} \cdot P_{cr}} \right)$$

Για $i = 2, 3, 4 \dots$

$$\bullet \quad P_0(i) = \frac{P_{in/o} \cdot P_{oi}}{P_{in}(i)} = \frac{P_{in/o} \cdot P_0(i-1) \cdot e^{-\lambda \cdot h_i}}{P_{in/o} \cdot P_0(i-1) \cdot e^{-\lambda \cdot h_i} + P_{in/1} \cdot P_0(i-1) \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot h_i}) + P_{in/1} \cdot P_1(i-1)} = P_{cr} \Rightarrow h_i = h_1 + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(P_{cr}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(P_{cr} + 1 + \frac{P_{in/o} \cdot (1 - P_{cr})}{P_{in/1} \cdot P_{cr}} \right)$$

Επομένως, μετά από κάθε δειγματοληψία i και δεδομένου ότι η μέση τιμή του μετρούμενου δείγματος λήφθηκε εντός των ορίων ελέγχου, η πιθανότητα η παραγωγική διαδικασία να βρίσκεται in ή out of control αναθεωρείται. Συγκεκριμένα, η απαίτηση, η πιθανότητα λειτουργίας υπό στατιστικό έλεγχο ($P_0(i)$) να ισούται πάντοτε με μία οριακή τιμή, P_{cr} , οδηγεί τελικά σε μεταβλητή συχνότητα δειγματοληψίας. Η λειτουργία, λοιπόν, του προτεινόμενου διαγράμματος ελέγχου αναπαρίσταται σχηματικά στην εικόνα 2.



Εικόνα 2: Περιγραφή λειτουργίας

Αρχικά, η παραγωγική διαδικασία ξεκινά τη λειτουργία της όντας με βεβαιότητα σε στατιστικό έλεγχο (*in control*). Ωστόσο, με την πάροδο του χρόνου η πιθανότητα αυτή αλλάζει και προφανώς μειώνεται, εφόσον ενδέχεται να εμφανιστεί η συστηματική αιτία. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την απαίτηση η πιθανότητα αυτή να ισούται με μία συγκεκριμένη, πάντα, οριακή τιμή, οδηγεί εν τέλει στη μορφή ενός διαγράμματος όπου το χρονικό διάστημα έως την πρώτη δειγματοληψία προκύπτει μεγαλύτερο από όλα τα υπόλοιπα, τα οποία μάλιστα ισούνται μεταξύ τους.

3.3.3 Συναρτήσεις κόστους

Για κάθε διάγραμμα ελέγχου, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους και η ελαχιστοποίησή της, ώστε να προκύψουν οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων της. Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά, θα αναλυθεί το κόστος που διέπει έναν κύκλο λειτουργίας, το οποίο στη συνέχεια, εφόσον οι κύκλοι είναι στοχαστικά ισοδύναμοι (*renewal reward process*), μπορεί να διαιρεθεί με τη συνολική διάρκεια ενός κύκλου και τελικά να προκύψει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Η

παραπάνω διαδικασία θα πραγματοποιηθεί πρώτα για το απλό διάγραμμα Shewhart και αμέσως μετά για το ειδικό διάγραμμα, στο οποίο χρησιμοποιούνται οι αναθεωρημένες πιθανότητες σύμφωνα με το θεώρημα Bayes. Τα επιμέρους λειτουργικά κόστη που πρέπει να οριστούν είναι τα εξής:

- a_0 : σταθερό κόστος δειγματοληψίας.
- a_1 : μεταβλητό κόστος ανά μονάδα δείγματος.
- M : κόστος, ανά μονάδα χρόνου, όταν το σύστημα λειτουργεί υπό την επίδραση της συστηματικής αιτίας.
- L_0 : κόστος έρευνας, μετά από ένδειξη εκτός λειτουργίας, η οποία όμως οφείλεται σε σφάλμα πρώτου είδους.
- L_1 : κόστος απομάκρυνσης της συστηματικής αιτίας.

Στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να αναλυθούν οι διάρκειες που σχετίζονται με έναν κύκλο λειτουργίας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται παρακάτω:

- h : χρόνος μεταξύ διαδοχικών δειγματοληψιών.
- D : χρόνος μέχρι τον εντοπισμό και απομάκρυνση της συστηματικής αιτίας, μετά από αντίστοιχη ένδειξη εκτός ελέγχου.
- $\int_0^h R(t) dt = \int_0^h e^{-\lambda t} dt = \frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda}$: αναμενόμενη διάρκεια λειτουργίας της διαδικασίας εντός ελέγχου, κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος h , όταν η διαδικασία ξεκινάει από κατάσταση εντός ελέγχου (χωρίς να έχει επιδράσει η συστηματική αιτία).
- $h - \frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda}$: αναμενόμενη διάρκεια λειτουργίας της διαδικασίας εκτός ελέγχου, κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος h , όταν η διαδικασία ξεκινάει από κατάσταση εντός ελέγχου.

3.3.3.1 Συνάρτηση κόστους του διαγράμματος Shewhart

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης του κόστους, κρίνεται απαραίτητο να οριστεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα και να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης από κάθε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη πιθανή κατάσταση. Πρωτίστως, ορίζονται οι καταστάσεις:

- 0: 0(*in*), κατάσταση κατά την οποία **δεν έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (0) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εντός** των ορίων (*in*).
- 1: 0(*out*), κατάσταση κατά την οποία **δεν έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (0) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εκτός** των ορίων (*out*).

- 2: 1(*in*), κατάσταση κατά την οποία **έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (1) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εντός** των ορίων (*in*).
- 3: 1(*out*), κατάσταση κατά την οποία **έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (1) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εκτός** των ορίων (*out*).

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι πιθανότητες μετάβασης και καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα:

	0	1	2	3
0	$e^{-\lambda h} \cdot (1 - a)$	$e^{-\lambda h} \cdot a$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot \beta$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot (1 - \beta)$
1	$e^{-\lambda h} \cdot (1 - a)$	$e^{-\lambda h} \cdot a$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot \beta$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot (1 - \beta)$
2	0	0	β	1- β
3	$e^{-\lambda h} \cdot (1 - a)$	$e^{-\lambda h} \cdot a$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot \beta$	$(1 - e^{-\lambda h}) \cdot (1 - \beta)$

Πιο αναλυτικά, για τη μετάβαση από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη δυνατή κατάσταση οι πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής:

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 0:

0 → **0**: Η συστηματική αιτία δεν επιδρά στο διάστημα h μεταξύ των δύο δειγματοληψιών ($e^{-\lambda h}$) και το σημείο μέτρησης προκύπτει εντός των ορίων ($P_{in/0}$).

0 → **1**: Η συστηματική αιτία δεν επιδρά στο διάστημα h μεταξύ των δύο δειγματοληψιών ($e^{-\lambda h}$) και το σημείο μέτρησης προκύπτει εκτός των ορίων ($P_{out/0}$) (σφάλμα α' είδους).

0 → **2**: Η συστηματική αιτία επιδρά στο διάστημα h μεταξύ των δύο δειγματοληψιών ($1 - e^{-\lambda h}$) και το σημείο μέτρησης προκύπτει εντός των ορίων ($P_{in/1}$) (σφάλμα β' είδους).

0 → **3**: Η συστηματική αιτία επιδρά στο διάστημα h μεταξύ των δύο δειγματοληψιών ($1 - e^{-\lambda h}$) και το σημείο μέτρησης προκύπτει εκτός των ορίων ($P_{out/1}$).

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 1 ή από την κατάσταση 3:

Εάν η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1, σημαίνει ότι διενεργείται έλεγχος από τον οποίο διαπιστώνεται ένδειξη λόγω σφάλματος α' είδους και η διαδικασία συνεχίζεται. Επίσης, στην περίπτωση που η παραγωγική διαδικασία βρεθεί στην κατάσταση 3 και αφού διενεργηθεί έρευνα, αποκαθίσταται η συστηματική αιτία και η διαδικασία επιστρέφει στην κατάσταση στατιστικού ελέγχου από όπου και συνεχίζει την λειτουργία της. Έτσι, οι πιθανότητες μετάβασης της δεύτερης και τέταρτης σειράς προκύπτουν πανομοιότυπες με αυτές της πρώτης.

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 2:

Όταν η διαδικασία βρεθεί στην κατάσταση 2, εφόσον το σημείο του διαγράμματος προκύπτει εντός των ορίων, η συστηματική αιτία δεν εντοπίζεται και η διαδικασία θα συνεχίσει να λειτουργεί υπό την

επίδρασή της. Για τον λόγο αυτό, δεν πραγματοποιείται καμία διορθωτική επέμβαση και άρα δεν υφίσταται μετάβαση σε κάποια από τις καταστάσεις 0 ή 1.

2 → 2: Η διαδικασία βρίσκεται ήδη υπό την επίδραση της αιτίας και άρα η πιθανότητα να ληφθεί σημείο εντός των ορίων ισούται με το σφάλμα β' είδους ($P_{in/1}$).

2 → 3: Η διαδικασία βρίσκεται ήδη υπό την επίδραση της αιτίας και άρα η πιθανότητα να ληφθεί σημείο εκτός των ορίων ισούται με $(1 - P_{in/1})$.

Με βάση τον πίνακα αυτό, υπολογίζονται οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$:

$$\Pi_0 = \frac{(1-\beta) \cdot (1-\alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot h}}{1-\beta \cdot e^{-\lambda h}} \quad \Pi_1 = \frac{(1-\beta) \cdot \alpha \cdot e^{-\lambda \cdot h}}{1-\beta \cdot e^{-\lambda h}} \quad \Pi_2 = \frac{\beta \cdot (1-e^{-\lambda \cdot h})}{1-\beta \cdot e^{-\lambda h}} \quad \Pi_3 = \frac{(1-\beta) \cdot (1-e^{-\lambda \cdot h})}{1-\beta \cdot e^{-\lambda h}}$$

Οπότε, το συνολικό μέσο κόστος ανά κύκλο $E(C)$ και η συνολική μέση διάρκειά του $E(T)$, προκύπτουν ως εξής:

- $E(C) = \Pi_1 \cdot L_0 + \Pi_3 \cdot L_1 + \Pi_2 \cdot M \cdot h + (\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_3) \cdot M \cdot (h - \frac{1-e^{-\lambda \cdot h}}{\lambda}) + a_0 + a_1 \cdot n$
- $E(T) = h + \Pi_3 \cdot D$

Εφόσον οι κύκλοι είναι στοχαστικά ισοδύναμοι, το αναμενόμενο κόστος ανά μονάδα χρόνου προκύπτει από τον λόγο $\frac{E(C)}{E(T)}$ και δίνεται παρακάτω:

$$K(h, n, k) = \frac{\Pi_1 \cdot L_0 + \Pi_3 \cdot L_1 + \Pi_2 \cdot M \cdot h + (\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_3) \cdot M \cdot (h - \frac{1-e^{-\lambda \cdot h}}{\lambda}) + a_0 + a_1 \cdot n}{h + \Pi_3 \cdot D}$$

3.3.3.2 Συνάρτηση κόστους του ειδικού διαγράμματος

Η παραπάνω διαδικασία, που ακολουθήθηκε για το απλό διάγραμμα ελέγχου Shewhart, θα χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους του ειδικού διαγράμματος ελέγχου. Η βασική τους διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στο δεύτερο, στο οποίο χρησιμοποιούνται οι αναθεωρημένες πιθανότητες κατά Bayes, τα διαστήματα μεταξύ των δειγματοληψιών δεν είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, όπως έχει αποδειχθεί νωρίτερα, στην ενότητα 3.3.2, το πρώτο διάστημα h_1 είναι μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα, τα οποία, επίσης, ισούνται μεταξύ τους. Πρώτα από όλα, πρέπει να οριστούν οι καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας και να υπολογιστούν, τόσο οι πιθανότητες μετάβασης, όσο και οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. Καταστάσεις:

- 0: κατάσταση κατά την οποία η διαδικασία ξεκινάει με βεβαιότητα από στατιστικό έλεγχο, δεν έχει επιδράσει, δηλαδή, η συστηματική αιτία και η επόμενη δειγματοληψία θα πραγματοποιηθεί μετά από h_1 χρονικές μονάδες.

- 1: 0/in, κατάσταση κατά την οποία **δεν έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (0) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εντός** των ορίων (in). Στην περίπτωση αυτή, έχει παρέλθει το χρονικό διάστημα h_1 και η επόμενη δειγματοληψία θα πραγματοποιηθεί μετά από h_2 χρονικές μονάδες.
- 2: 1/in, κατάσταση κατά την οποία **έχει** επιδράσει η συστηματική αιτία (1) και το σημείο του διαγράμματος ελέγχου προκύπτει **εντός** των ορίων (in).

Με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο κλασικό διάγραμμα Shewhart, ορίζονται οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων και ο πίνακας δίνεται παρακάτω:

	0	1	2
0	$1 - (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot h_1} - (1 - e^{-\lambda h_1}) \cdot \beta$	$(1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot h_1}$	$(1 - e^{-\lambda h_1}) \cdot \beta$
1	$1 - (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot h_2} - (1 - e^{-\lambda h_2}) \cdot \beta$	$(1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot h_2}$	$(1 - e^{-\lambda h_2}) \cdot \beta$
2	1-β	0	β

Κρίνεται απαραίτητο να αναλυθεί περαιτέρω ο τρόπος με τον οποίο συντίθενται οι πιθανότητες αυτές:

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 0:

0 → 1: Η συστηματική αιτία δεν επιδρά στο πρώτο διάστημα h_1 ($e^{-\lambda \cdot h_1}$) και το σημείο δειγματοληψίας λαμβάνεται εντός των ορίων $(1 - \alpha)$.

0 → 2: Η συστηματική αιτία επιδρά στο πρώτο διάστημα h_1 ($e^{-\lambda \cdot h_1}$) και το σημείο δειγματοληψίας λαμβάνεται εντός των ορίων (β) .

0 → 0: Η πιθανότητα αυτή προκύπτει ως η συμπληρωματική των άλλων δύο.

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 1:

Πανομοιότυπα με την κατάσταση 0, εάν η παραγωγική διαδικασία βρεθεί στην κατάσταση 1, θα συνεχίσει τη λειτουργία της χωρίς κάποια επέμβαση και η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός πως η επόμενη δειγματοληψία θα πραγματοποιηθεί σε h_2 χρονικές μονάδες. Οπότε, οι πιθανότητες μετάβασης της δεύτερης γραμμής του πίνακα, προκύπτουν ίδιες με αυτές της πρώτης αντικαθιστώντας μόνο το διάστημα h_1 με το h_2 .

Πιθανότητες μετάβασης ξεκινώντας από την κατάσταση 2:

Όταν η διαδικασία βρεθεί στην κατάσταση 2, εφόσον το σημείο του διαγράμματος προκύπτει εντός των ορίων, η συστηματική αιτία δεν εντοπίζεται και η διαδικασία θα συνεχίσει να λειτουργεί υπό την

επίδρασή της. Για τον λόγο αυτό, δεν πραγματοποιείται καμία διορθωτική επέμβαση και άρα δεν υφίσταται μετάβαση στην κατάσταση 1.

2 → 2: Η διαδικασία βρίσκεται ήδη υπό την επίδραση της αιτίας και άρα η πιθανότητα να ληφθεί σημείο εντός των ορίων ισούται με το σφάλμα β' είδους ($P_{in/1}$).

2 → 0: Η διαδικασία βρίσκεται ήδη υπό την επίδραση της αιτίας και άρα η πιθανότητα να μεταβεί στην κατάσταση 0 ισούται με την πιθανότητα να ληφθεί σημείο εκτός των ορίων ($1 - P_{in/1}$) και να γίνει διορθωτική επέμβαση.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα, υπολογίζονται οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης Π_0, Π_1, Π_2 :

$$\Pi_0 = \frac{(1-\beta)-(1-\beta)\cdot(1-\alpha)\cdot e^{-\lambda\cdot h_2}}{1-e^{-\lambda h_2}\cdot(1-\alpha)+e^{-\lambda h_1}\cdot(1-\alpha-\beta)} \quad \Pi_1 = \frac{(1-\beta)\cdot(1-\alpha)\cdot e^{-\lambda\cdot h_1}}{1-e^{-\lambda h_2}\cdot(1-\alpha)+e^{-\lambda h_1}\cdot(1-\alpha-\beta)}$$

$$\Pi_2 = 1 - \frac{(1-\beta) - (1-\beta)\cdot(1-\alpha)\cdot e^{-\lambda\cdot h_2} - (1-\beta)\cdot(1-\alpha)\cdot e^{-\lambda\cdot h_1}}{1 - e^{-\lambda h_2}\cdot(1-\alpha) + e^{-\lambda h_1}\cdot(1-\alpha-\beta)}$$

Οπότε, το συνολικό μέσο κόστος ανά κύκλο $E(C)$ και η συνολική μέση διάρκειά του, $E(T)$, προκύπτουν ως εξής:

- $E(C) = (\Pi_0 \cdot e^{-\lambda\cdot h_1} \cdot \alpha + \Pi_1 \cdot e^{-\lambda\cdot h_2} \cdot \alpha) \cdot L_0 + (\Pi_0 \cdot (1 - e^{-\lambda\cdot h_1}) \cdot (1 - \beta) + \Pi_1 \cdot (1 - e^{-\lambda\cdot h_2}) \cdot (1 - \beta) + \Pi_2 \cdot (1 - \beta)) \cdot L_1 + \Pi_2 \cdot M \cdot h_2 + \Pi_1 \cdot M \cdot (h_2 - \frac{1-e^{-\lambda\cdot h_2}}{\lambda}) + \Pi_0 \cdot M \cdot (h_1 - \frac{1-e^{-\lambda\cdot h_1}}{\lambda}) + \alpha_0 + \alpha_1 \cdot n$
- $E(T) = \Pi_0 \cdot h_1 + (\Pi_1 + \Pi_2) \cdot h_2 + [\Pi_0 \cdot (1 - e^{-\lambda\cdot h_1}) \cdot (1 - \beta) + \Pi_1 \cdot (1 - e^{-\lambda\cdot h_2}) \cdot (1 - \beta) + \Pi_2 \cdot (1 - \beta)] \cdot D$

Τελικά, το αναμενόμενο κόστος ανά μονάδα χρόνου, $K(n, k, P_{cr})$, προκύπτει από τον λόγο $\frac{E(C)}{E(T)}$.

3.4 Μοντέλο Προσομοίωσης

Η ενότητα αυτή, περιλαμβάνει τη λεπτομερή ανάλυση και παρουσίαση του μοντέλου προσομοίωσης, σύμφωνα με το οποίο προκύπτει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου μιας παραγωγικής διαδικασίας η οποία λειτουργεί με βάση το υπό μελέτη σύστημα ελέγχου ποιότητας. Ολόκληρος ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση περιλαμβάνεται στο παράρτημα Α.

3.4.1 Περιγραφή του μοντέλου προσομοίωσης

Αρχικά, επισημαίνεται πως με το εν λόγω μοντέλο, υπολογίζεται η μέση διάρκεια και το μέσο κόστος ενός κύκλου. Ως «κύκλος», ορίζεται η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών ενδείξεων (alarm), είτε αυτές είναι αληθείς είτε οφείλονται σε σφάλμα πρώτου είδους. Για τον λόγο αυτό, κάθε

φορά που λαμβάνεται σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, η συστηματική αιτία, εφόσον υπάρχει, απομακρύνεται και ξεκινά η λειτουργία ενός νέου κύκλου με την παραγωγική διαδικασία να βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου (κατάσταση 0).

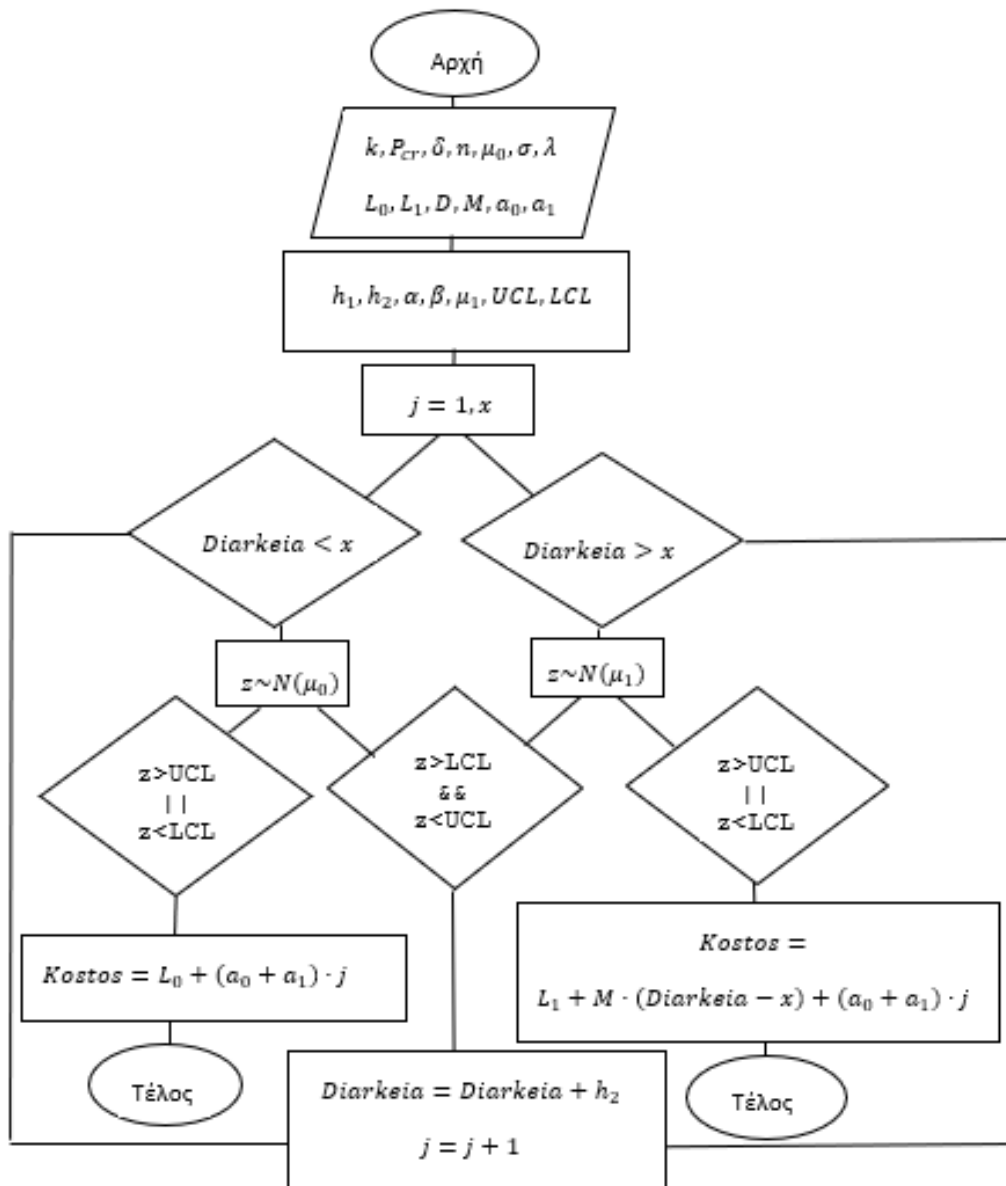
Πρωτίστως, ορίζονται οι σταθερές παράμετροι που σχετίζονται με τη φύση του συστήματος και μπορεί να διαφέρουν για κάθε ξεχωριστή παραγωγική διαδικασία. Έτσι, για ένα σετ παραμέτρων, υπολογίζεται η χρονική στιγμή κατά την οποία επιδρά η συστηματική αιτία. Εφόσον είναι γνωστό πως η εμφάνιση της αιτίας αυτής ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , η χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζεται, λαμβάνεται ως μια τυχαία τιμή της εκθετικής. Αφού η πρώτη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από h_1 χρονικές μονάδες, ελέγχεται εάν η εμφάνιση της συστηματικής αιτίας προηγείται ή όχι της δειγματοληψίας. Σε κάθε περίπτωση, λαμβάνεται μια τυχαία τιμή από μια κανονική κατανομή, με μέση τιμή μ_1 ή μ_0 αντίστοιχα, η οποία αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του μετρούμενου δείγματος. Εάν η τιμή αυτή προκύψει εκτός των δεδομένων ορίων ελέγχου, τότε ο κύκλος σταματά και υπολογίζονται τόσο η διάρκειά του, όσο και το κόστος του. Αντιθέτως, εάν η τιμή που έχει ληφθεί από την κανονική κατανομή προκύψει εντός των ορίων, η παραγωγική διαδικασία συνεχίζει τη λειτουργία της και η επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από h_2 χρονικές μονάδες. Όπως και παραπάνω, η νέα διάρκεια του κύκλου ($h_1 + h_2$) συγκρίνεται με τη χρονική στιγμή εμφάνισης της συστηματικής αιτίας προκειμένου να ληφθεί τυχαία τιμή από την κατάλληλη κανονική κατανομή με την αντίστοιχη μέση τιμή. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να ληφθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, γεγονός που σηματοδοτεί και τη λήξη του κύκλου. Επομένως, με βάση την προσομοίωση, υπολογίζονται τα κόστη και οι διάρκειες για ένα εκατομμύριο κύκλους, ώστε να υπολογιστούν στη συνέχεια το μέσο κόστος και η μέση διάρκεια μιας παραγωγικής διαδικασίας η οποία λειτουργεί σύμφωνα με το μοντέλο αυτό. Εν τέλει, εφόσον οι κύκλοι είναι στοχαστικά πανομοιότυποι, το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου προκύπτει διαιρώντας το μέσο κόστος με τη μέση διάρκεια όλων των κύκλων.

Στο σημείο αυτό, για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου που παρουσιάστηκε παραπάνω, δημιουργείται και αναλύεται το λογικό διάγραμμα της διαδικασίας της προσομοίωσης. Λεπτομερώς, τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

1. Είσοδος δεδομένων παραμέτρων που σχετίζονται με τη φύση της παραγωγικής διαδικασίας ($k, P_{cr}, \delta, n, \mu_0, \sigma, \lambda$) αλλά και με τα λειτουργικά κόστη που διέπουν κάθε κύκλο (L_0, L_1, D, M, a_0, a_1).
2. Υπολογισμός συγκεκριμένων τιμών ($h_1, h_2, \alpha, \beta, \mu_1, UCL, LCL$), που σχετίζονται και επηρεάζονται από τα δεδομένα του προηγούμενου βήματος και υπολογισμός χρονικής στιγμής εμφάνισης της συστηματικής αιτίας (x). Η μεταβλητή j αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δειγματοληψιών που πραγματοποιούνται καθ' όλη τη διάρκεια ενός κύκλου.

3. Σύγκριση της εκάστοτε διάρκειας δειγματοληψίας (πρώτη δειγματοληψία μετά από h_1 χρονικές μονάδες), με τη δεδομένη χρονική στιγμή εμφάνισης της συστηματικής αιτίας (x).
4. Λήψη της μέσης τιμής του μετρούμενου δείγματος (z), δεδομένου του αποτελέσματος του προηγούμενου βήματος.
5. Σύγκριση της μέσης τιμής με τα υπάρχοντα όρια ελέγχου (UCL, LCL).
6. Περίπτωση λήψης μέσης τιμής εντός των ορίων ($LCL < z < UCL$):
Αύξηση διάρκειας κύκλου κατά h_2 χρονικές μονάδες και επανάληψη βημάτων 3, 4, 5, 6.
- Περίπτωση λήψης μέσης τιμής εκτός των ορίων ελέγχου ($z > UCL$ ή $z < LCL$):
Λήξη του κύκλου και υπολογισμός του κόστους έως και τη δεδομένη χρονική στιγμή.

Τα συγκεκριμένα βήματα παρουσιάζονται σχηματικά στην εικόνα 3:



Εικόνα 3: Λογικό διάγραμμα προσομοίωσης

3.4.2 Αριθμητικά παραδείγματα

Η προσομοίωση του διαγράμματος ελέγχου που μελετάται, αποτελεί την αναπαράσταση μιας παραγωγικής διαδικασίας και τα αποτελέσματά της είναι πανομοιότυπα με αυτά της φυσικής παρακολούθησής της. Προκειμένου να καταστεί ευκολότερη η ανάλυση του προσομοιωτικού μοντέλου, ακολουθούν δύο παραδείγματα με αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν για τη λειτουργία δύο ξεχωριστών κύκλων. Προτού παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, κρίνεται απαραίτητο να αποσαφηνιστούν οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στον κώδικα. Πιο συγκεκριμένα:

- x : χρονική στιγμή εμφάνισης της συστηματικής αιτίας
- z : μέση τιμή μετρούμενου δείγματος
- $lamda$: μέση τιμή του ρυθμού εμφάνισης της συστηματικής αιτίας (λ)
- m_0 : μέση τιμή χαρακτηριστικού ποιότητας, όταν η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου
- m_1 : μέση τιμή χαρακτηριστικού ποιότητας, όταν η παραγωγική διαδικασία δε βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου
- s : τυπική απόκλιση χαρακτηριστικού ποιότητας
- $smean$: τυπική απόκλιση της μέσης τιμής του μετρούμενου δείγματος
- UCL : άνω όριο ελέγχου
- LCL : κάτω όριο ελέγχου
- $Kostos$: μετρούμενη τιμή του κόστους ενός κύκλου
- $Diarkeia$: μετρούμενη τιμή της διάρκειας ενός κύκλου

Για να ξεκινήσει, λοιπόν, η προσομοίωση, ορίζονται πρωτίστως οι σταθερές $n, k, P_{cr}, \delta, \lambda$, σύμφωνα με τις οποίες προκύπτουν τα σφάλματα α' και β' είδους, καθώς και τα χρονικά διαστήματα h_1 και h_2 . Επιπλέον, ορίζονται οι παράμετροι της διαδικασίας που σχετίζονται με τα λειτουργικά κόστη και οι τιμές που αφορούν τη μέση τιμή του εκάστοτε μετρούμενου δείγματος.

```
%παράμετροι  
D=0.25;  
L0=4.85;  
L1=8;  
M=260;  
a0=0.08;  
a1=0.25;  
lamda=0.01;
```

```

d=1;
n=6;
k=3;
a=1-(normcdf(k,0,1)-normcdf(-k,0,1));
b=normcdf((k-d*sqrt(n)),0,1)-normcdf((-k-d*sqrt(n)),0,1);
Pcr=0.9;
h1=(1/lamda)*log(1+(1-a)*(1-Pcr)/(b*Pcr));
h2=h1-(1/lamda)*log(1/Pcr);
m0=15;
s=0.5;
smean=s/sqrt(n);
m1=m0+d*s;
%όρια ελέγχου
UCL=m0+k*smean; LCL=m0-k*smean;

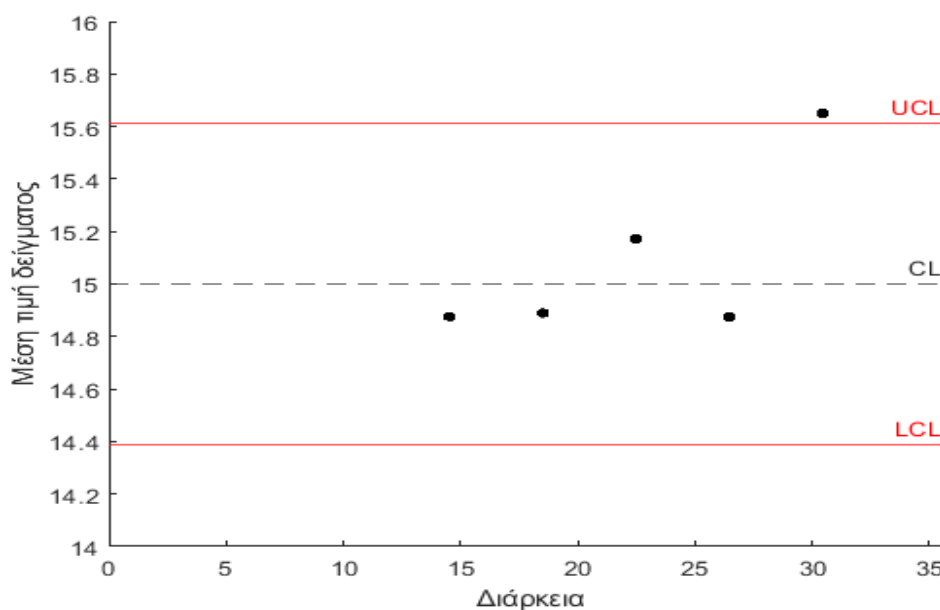
```

Σύμφωνα με τις σταθερές παραμέτρους που έχουν οριστεί, προκύπτουν οι τιμές τόσο για τα όρια ελέγχου όσο και για τις χρονικές διάρκειες μεταξύ των δειγματοληψιών:

- $h_1 = 14.5216$
- $h_2 = 3.9855$
- $UCL = 15.6124$
- $LCL = 14.3876$

3.4.2.1 Αριθμητικό παράδειγμα ενός κύκλου (false alarm)

Στο σημείο αυτό, αναλύεται η λειτουργία ενός προσομοιωτικού κύκλου, ο οποίος λήγει με ένδειξη που οφείλεται σε σφάλμα πρώτου είδους. Το διάγραμμα ελέγχου ποιότητας, του κύκλου αυτού, αναπαρίσταται στο διάγραμμα 1.



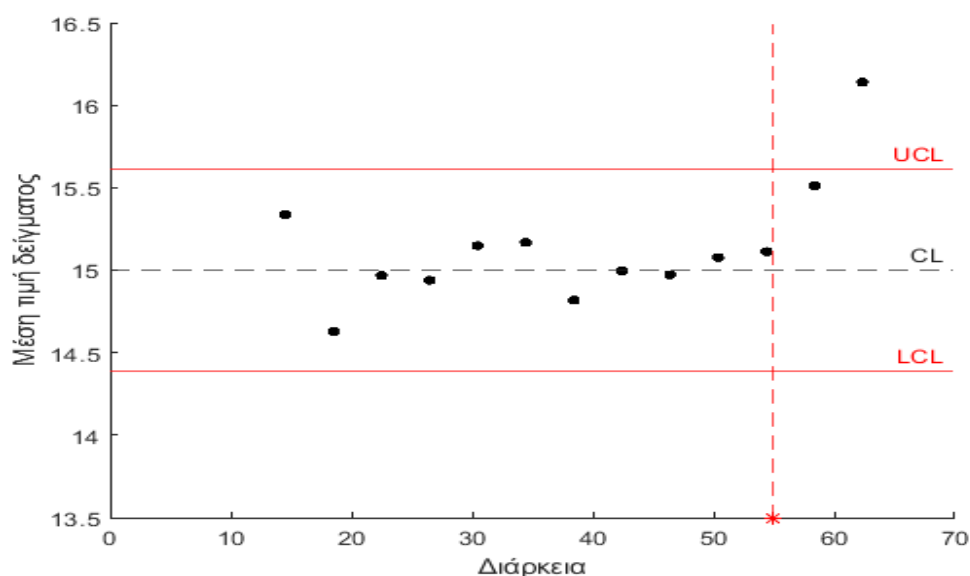
Διάγραμμα 1: Διάγραμμα ελέγχου ποιότητα ενός κύκλου (false alarm)

Αρχικά, λαμβάνεται μία τυχαία τιμή, $x = 90.7371$, από την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.01$, η οποία αντιπροσωπεύει τη χρονική στιγμή κατά την οποία πραγματοποιείται η εμφάνιση της συστηματικής αιτίας. Η πρώτη δειγματοληψία πραγματοποιείται σε h_1 χρονικές μονάδες και εφόσον η συστηματική αιτία δεν έχει, ακόμα, εμφανιστεί ($x > h_1$), η μέση τιμή του δείγματος z (πρώτο σημείο διαγράμματος), προκύπτει από την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και συγκρίνεται με τα υπάρχοντα όρια ελέγχου. Το πρώτο, αυτό, ελεγχόμενο σημείο βρίσκεται εντός των ορίων, οπότε η διαδικασία αφήνεται να λειτουργήσει για άλλες h_2 χρονικές μονάδες, όπου πραγματοποιείται η δεύτερη δειγματοληψία. Η νέα πλέον διάρκεια, ($h_1 + h_2 = 18.5071$), τοποθετείται χρονολογικά πριν από την εμφάνιση της αιτίας, γι' αυτό και η μέση τιμή του νέου δείγματος (δεύτερο σημείο) λαμβάνεται από την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι τη στιγμή που η μέση τιμή ενός μετρούμενου δείγματος θα προκύψει εκτός των ορίων ελέγχου (πέμπτο σημείο). Τη στιγμή αυτή, η διαδικασία διακόπτεται και η υπολογίζεται η διάρκεια του κύκλου, η οποία ισούται με 30.46 χρονικές μονάδες. Παρόλα αυτά, η στιγμή αυτή, προηγείται και πάλι, της συστηματικής αιτίας, οπότε διαπιστώνεται πως η ένδειξη που λήφθηκε από το σύστημα οφειλόταν σε σφάλμα α' είδους. Έτσι, το κόστος του κύκλου μέχρι το σημείο αυτό, απαρτίζεται από το κόστος όλων των δειγματοληψιών και το κόστος λόγω λανθασμένης ένδειξης. Οπότε, υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Κόστος} = (a_0 + a_1 \cdot n) \cdot 5 + L_0 = 12.75 \text{ χρηματικές μονάδες}$$

3.4.2.2 Αριθμητικό παράδειγμα ενός κύκλου (true alarm)

Στο σημείο αυτό, πραγματοποιείται ανάλυση ενός κύκλου του οποίου η λειτουργία φαίνεται στο διάγραμμα 2.



Διάγραμμα 2: Διάγραμμα ελέγχου ποιότητας ενός κύκλου (true alarm)

Ένας νέος κύκλος ξεκινά τη λειτουργία του, οπότε λαμβάνεται μία νέα τιμή από την εκθετική κατανομή, $x = 54.9628$, η οποία υποδεικνύει τη στιγμή κατά την οποία θα εμφανιστεί η συστηματική αιτία. Η στιγμή αυτή, αναπαρίσταται στο παραπάνω διάγραμμα, από την κάθετη διακεκομμένη ευθεία. Η παραγωγική διαδικασία ξεκινά να λειτουργεί από κατάσταση στατιστικού ελέγχου και το πρώτο δείγμα λαμβάνεται μετά από h_1 χρονικές μονάδες. Η στιγμή αυτή, της πρώτης δειγματοληψίας, προηγείται της εμφάνισης της αιτίας, ($h_1 < x$), άρα η μέση τιμή του μετρούμενου δείγματος προκύπτει από την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 . Το πρώτο σημείο του διαγράμματος ελέγχου, βρίσκεται ανάμεσα από τα όρια και η επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από άλλες h_2 χρονικές μονάδες. Η νέα πλέον διάρκεια, ($h_1 + h_2 = 18.5071$), τοποθετείται χρονολογικά πριν από την εμφάνιση της αιτίας, γι' αυτό και η μέση τιμή του νέου δείγματος (δεύτερο σημείο) λαμβάνεται και πάλι από την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι τη στιγμή που η μέση τιμή ενός μετρούμενου δείγματος θα προκύψει εκτός των ορίων ελέγχου (δέκατο τρίτο σημείο). Τη χρονική αυτή στιγμή, η διαδικασία διακόπτεται και ο έλεγχος που διενεργείται αποκαλύπτει την ύπαρξη της συστηματικής αιτίας. Επομένως, υπολογίζεται η διάρκεια του κύκλου έως και το σημείο αυτό, η οποία ισούται με 62.3476 χρονικές μονάδες και το κόστος του δεδομένου κύκλου. Συγκεκριμένα, το κόστος αυτό απαρτίζεται από το κόστος των επιμέρους δειγματοληψιών, το κόστος απομάκρυνσης της αιτίας και το κόστος που οφείλεται στη λειτουργία της διαδικασίας υπό την επίδραση της αιτίας. Αναλυτικά υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Κόστος} = (a_0 + a_1 \cdot n) \cdot 13 + L_1 + (62.3476 - 54.9628) \cdot M = 1948.6 \text{ χρηματικές μονάδες}$$

3.4.3 Διάστημα Εμπιστοσύνης

Σύμφωνα με το μοντέλο της προσομοίωσης που αναλύθηκε παραπάνω, η αναπαράσταση της παραγωγικής διαδικασίας και κατ' επέκταση το υπολογιζόμενο *Κόστος/χρονική μονάδα*, βασίζεται σε τυχαίες τιμές και μεταβάλλεται κάθε φορά που πραγματοποιείται ένα πλήθος νέων διαφορετικών επαναλήψεων (κύκλων) προσομοίωσης. Για τον λόγο αυτό, σημαντικό ρόλο παίζει η διαμόρφωση ενός διαστήματος εμπιστοσύνης, το οποίο υποδηλώνει τα όρια ανάμεσα από τα οποία θα κυμαίνεται η μέση τιμή του κόστους ανά χρονική μονάδα. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον υπολογισμό των ορίων του διαστήματος εμπιστοσύνης, αποτελεί η γνώση του συντελεστή $1 - \alpha$. Στις περισσότερες εφαρμογές, χρησιμοποιείται $\alpha = 0.05$ ή $\alpha = 0.01$. Έτσι, το $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης της υπό μελέτη μεταβλητής, θα περιέχει την πραγματική τιμή της, με εμπιστοσύνη $1 - \alpha$. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, η μεταβλητή απόκρισης που μελετάται, είναι το *Κόστος/χρονική μονάδα*, για τη μέση τιμή του οποίου θα υπολογιστούν τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Με βάση το προσομοιωτικό μοντέλο, για τον υπολογισμό του κόστους επαναλαμβάνονται ένα εκατομμύριο κύκλοι μιας παραγωγικής διαδικασίας και προκύπτουν οι τιμές για τη διάρκεια και το κόστος κάθε κύκλου. Στο σημείο αυτό, ορίζονται οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση του διαστήματος εμπιστοσύνης.

- Y_i : Κόστος ενός κύκλου
- Z_i : Διάρκεια ενός κύκλου
- \bar{Y} : Μέσο κόστος όλων των κύκλων
- \bar{Z} : Μέση διάρκεια όλων των κύκλων
- $E(X)$: Μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου

Όπως είναι ήδη γνωστό, το ζητούμενο κόστος προκύπτει ως εξής:

$$\text{Κόστος/χρονική μονάδα} = \frac{\text{Μέσο κόστος κύκλων}}{\text{Μέση διάρκεια κύκλων}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$$

Δεδομένου ότι πρόκειται για μια διαδικασία ανανέωσης-ανταμοιβής (renewal-reward process), για τον υπολογισμό των ορίων του διαστήματος εμπιστοσύνης χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις (Hillier & Lieberman, n.d.).

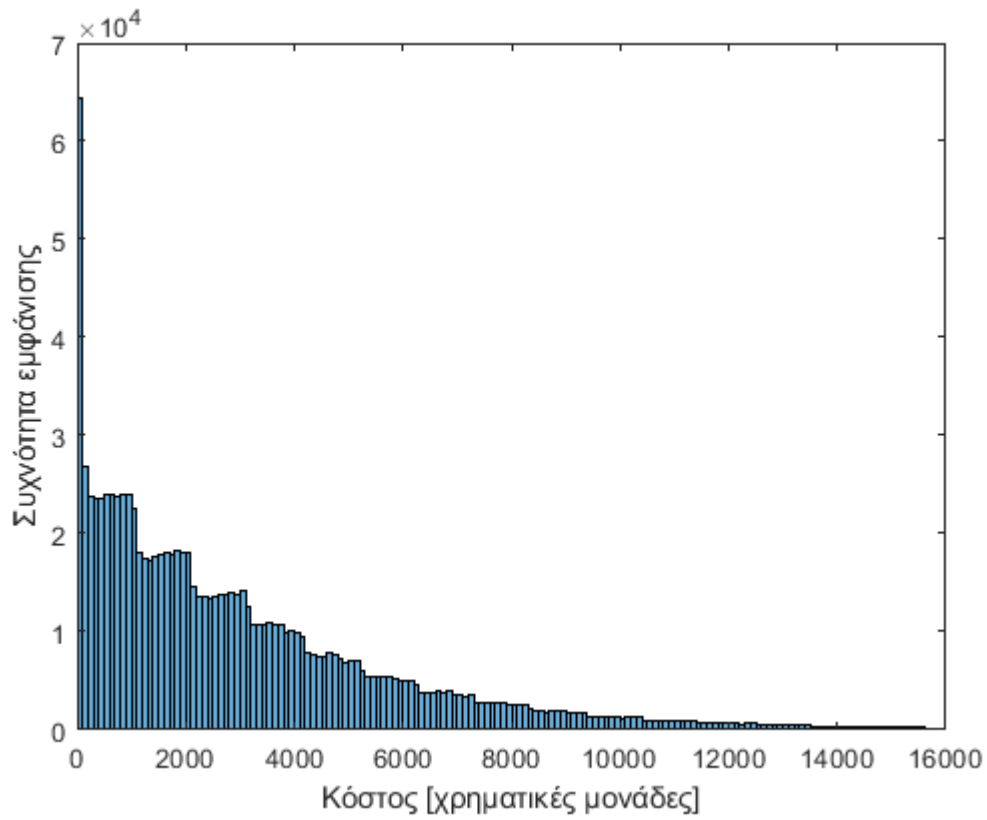
- $s_{11}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$
- $s_{22}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$
- $s_{12}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) \cdot (Z_i - \bar{Z})$
- $s^2 = s_{11}^2 - 2 \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \cdot s_{12}^2 + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \cdot s_{22}^2$

Η μεταβλητή n στις παραπάνω σχέσεις αντιπροσωπεύει τον αριθμό των επαναλήψεων της προσομοίωσης βάσει των οποίων προκύπτει το τελικό κόστος. Επομένως, για $n = 1000000$ επαναλήψεις προκύπτουν 1000000 τιμές για το κόστος ενός κύκλου ($Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{1000000}$) και 1000000 τιμές για τη διάρκειά του ($Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{1000000}$). Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει τελικά το διάστημα εμπιστοσύνης του κόστους του διαγράμματος ελέγχου:

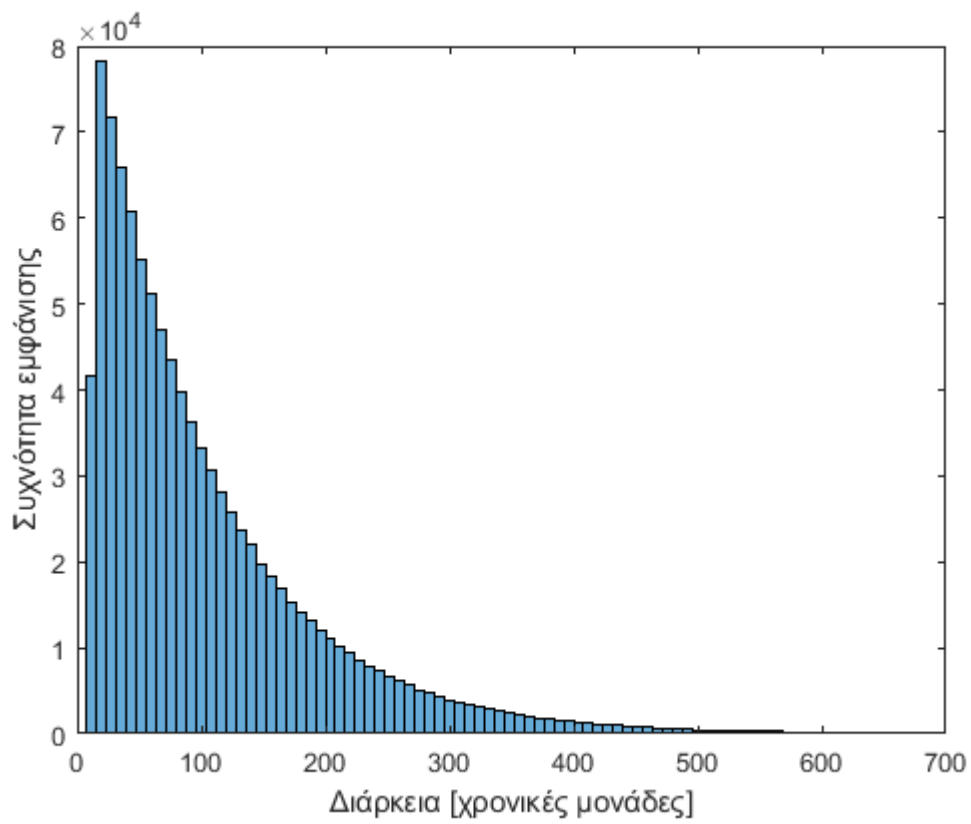
$$\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{\bar{Z} \cdot \sqrt{n}} \leq E(X) \leq \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{\bar{Z} \cdot \sqrt{n}}$$

3.4.4 Αριθμητικό παράδειγμα μιας προσομοίωσης

Με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες που δίνονται στην ενότητα 3.4.2, πραγματοποιείται η προσομοίωση για ένα εκατομμύριο κύκλους και προκύπτει τόσο το κόστος όσο και η διάρκεια για τον εκάστοτε κύκλο. Όλες οι τιμές αυτές φαίνονται σχηματικά στα διαγράμματα 3 και 4:



Διάγραμμα 3: Ιστόγραμμα τιμών Κόστους



Διάγραμμα 4: Ιστόγραμμα τιμών Διάρκειας

Εφόσον οι κύκλοι είναι στοχαστικά πανομοιότυποι, η μέση τιμή του Κόστους ανά χρονική μονάδα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση:

$$\text{Κόστος/χρονική μονάδα} = \frac{\text{Μέσο κόστος κύκλων}}{\text{Μέση διάρκεια κύκλων}} = \frac{3109.3061}{106.3813} = 29.2279 \text{ χρηματικές μονάδες}$$

Στο σημείο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να υπολογιστούν τα διαστήματα εμπιστοσύνης, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%, ώστε να προκύψουν τα όρια μεταξύ των οποίων θα κυμαίνεται η τιμή του *Κόστους/χρονική μονάδα* που υπολογίστηκε προσομοιωτικά. Σύμφωνα, λοιπόν, με τις σχέσεις που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτουν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 1:

	Limit 1	Limit 2
95%	29.1547	29.3012
99%	29.1317	29.3241

Πίνακας 1: Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Κεφάλαιο 4^ο: Αριθμητικά Αποτελέσματα

Το κεφάλαιο αυτό, επικεντρώνεται στην παρουσίαση και τον σχολιασμό των αριθμητικών αποτελεσμάτων που προκύπτουν τόσο για το απλό διάγραμμα Shewhart όσο και για το υπό μελέτη ειδικό διάγραμμα ελέγχου. Πραγματοποιείται, λοιπόν, μια αριθμητική ανάλυση, προκειμένου να αποτιμηθεί η βελτίωση του κόστους, όταν η παραγωγική διαδικασία λειτουργεί σύμφωνα με το ειδικό διάγραμμα ελέγχου ποιότητας, έναντι του απλού διαγράμματος.

4.1 Ελαχιστοποίηση Κόστους

Σε κάθε εφαρμογή ενός διαγράμματος ελέγχου, σημαντικό ρόλο παίζει το κόστος που διέπει τη λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας, όταν αυτή εφαρμόζει, για τον ποιοτικό έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων της, το εκάστοτε διάγραμμα. Συγκεκριμένα, η θεωρητική ανάλυση, τόσο του απλού διαγράμματος Shewhart όσο και του ειδικού διαγράμματος, έχουν παρουσιαστεί στην υποενότητα 3.3.3, όπου από τη δεδομένη ανάλυση, προκύπτει το *Κόστος/χρονική μονάδα* για τα δύο διαγράμματα ελέγχου. Για διαφορετικούς συνδυασμούς αρχικών παραμέτρων, το κόστος αυτό, προφανώς διαφοροποιείται. Εκτός από τα επιμέρους λειτουργικά κόστη, οι παράμετροι που επηρεάζουν το τελικό κόστος είναι:

- Διάγραμμα Shewhart: n, k, h
- Ειδικό διάγραμμα: n, k, P_{cr}

Επομένως, βασική μέριμνα αποτελεί η εύρεση του βέλτιστου σετ παραμέτρων, για το εκάστοτε διάγραμμα, το οποίο τελικά ελαχιστοποιεί το *Κόστος/χρονική μονάδα*. Οι κώδικες που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό, παρατίθενται στα παραρτήματα Β (απλό διάγραμμα) και Γ (ειδικό διάγραμμα). Για να καταστεί ευκολότερη και γρηγορότερη αυτή η διαδικασία, επιλέγεται μια διακριτοποίηση για τα μεγέθη k , h και P_{cr} . Συγκεκριμένα, τα δύο πρώτα μεγέθη ορίζονται ως πολλαπλάσια του 0.01, ενώ η μεταβλητή P_{cr} ως πολλαπλάσιο του 0.0001. Τέλος, επισημαίνεται πως το μέγεθος δείγματος n λαμβάνει πάντοτε θετικές ακέραιες τιμές, εφόσον αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μετρούμενων προϊόντων/τεμαχίων.

Πρωτίστως, τα λειτουργικά κόστη αλλά και οι παράμετροι που σχετίζονται με τη χρονική εξέλιξη της παραγωγικής διαδικασίας (λ, δ), ορίζονται στην αρχή του κώδικα και πρέπει να ταυτίζονται για τα δύο διαφορετικά διαγράμματα, ώστε τα αποτελέσματα που προκύπτουν να είναι συγκρίσιμα. Στη συνέχεια, για διαφορετικές τιμές των σταθερών παραμέτρων υπολογίζεται το ζητούμενο κόστος και τελικά επιλέγονται οι τιμές των μεταβλητών που ελαχιστοποιούν το κόστος αυτό. Πολλές φορές, κατά τη διαδικασία εύρεσης του βέλτιστου σετ μεταβλητών παραμέτρων, ενδέχεται να προκύψει μηδενική τιμή για τη μεταβλητή k . Το γεγονός αυτό, υποδεικνύει ουσιαστικά την απουσία ορίων ελέγχου με

αποτέλεσμα να θεωρείται ως βέλτιστη πολιτική ο προληπτικός έλεγχος για τον εντοπισμό της συστηματικής αιτίας. Συγκεκριμένα, κατά τη χρονική στιγμή που θεωρητικά θα πραγματοποιούνταν δειγματοληψία, δε λαμβάνεται δείγμα, αλλά πραγματοποιείται σε κάθε περίπτωση προληπτική έρευνα.

Στο σημείο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να τονιστεί πως συχνά, σε πολλές παραγωγικές διαδικασίες, το κάθε δείγμα που λαμβάνεται αποτελείται από μία μόνο μέτρηση ($n = 1$). Οι λόγοι που οδηγούν στην απόφαση αυτή, μπορεί να σχετίζονται είτε με τη φύση της παραγωγικής διαδικασίας και των προϊόντων που αυτή παράγει, είτε με τα υψηλά κόστη ανά μονάδα μετρούμενου δείγματος. Για τον λόγο αυτό, στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τόσο για την περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος δύναται να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή, όσο και για την περίπτωση μεμονωμένης μέτρησης ($n = 1$).

4.2 Σύγκριση βέλτιστων πολιτικών

Στη συγκεκριμένη ενότητα, επιλέγονται διαφορετικοί συνδυασμοί που αφορούν τα λειτουργικά κόστη, τον ρυθμό εμφάνισης της συστηματικής αιτίας αλλά και τη μεταβολή της μέσης τιμής και προκύπτουν οι περιπτώσεις που αναγράφονται στον πίνακα 2 οι οποίες θα μελετηθούν. Σε κάθε περίπτωση, το κόστος ελέγχου ανά μονάδα δείγματος ισούται με 1 χρ.μον. ($a_1 = 1$) και μετά από κάθε ένδειξη δυσλειτουργίας η διάρκεια μέχρι τον εντοπισμό και απομάκρυνση της αιτίας θεωρείται αμελητέα ($D = 0$), ενώ το κόστος απομάκρυνσης της αιτίας ισούται με 200 χρ.μον ($L_1 = 200$). Ακολουθεί ο πίνακας που περιέχει όλες τις περιπτώσεις για τους διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων.

α/α_0	α_0	M	L_0	λ	δ	α/α_0	α_0	M	L_0	λ	δ
1	0	100	100	0.01	0.5	25	0	100	100	0.1	1
2	0	100	200	0.01	0.5	26	0	100	200	0.1	1
3	0	1000	100	0.01	0.5	27	0	1000	100	0.1	1
4	0	1000	200	0.01	0.5	28	0	1000	200	0.1	1
5	5	100	100	0.01	0.5	29	5	100	100	0.1	1
6	5	100	200	0.01	0.5	30	5	100	200	0.1	1
7	5	1000	100	0.01	0.5	31	5	1000	100	0.1	1
8	5	1000	200	0.01	0.5	32	5	1000	200	0.1	1
9	0	100	100	0.1	0.5	33	0	100	100	0.01	2
10	0	100	200	0.1	0.5	34	0	100	200	0.01	2
11	0	1000	100	0.1	0.5	35	0	1000	100	0.01	2
12	0	1000	200	0.1	0.5	36	0	1000	200	0.01	2
13	5	100	100	0.1	0.5	37	5	100	100	0.01	2
14	5	100	200	0.1	0.5	38	5	100	200	0.01	2
15	5	1000	100	0.1	0.5	39	5	1000	100	0.01	2
16	5	1000	200	0.1	0.5	40	5	1000	200	0.01	2
17	0	100	100	0.01	1	41	0	100	100	0.1	2
18	0	100	200	0.01	1	42	0	100	200	0.1	2
19	0	1000	100	0.01	1	43	0	1000	100	0.1	2
20	0	1000	200	0.01	1	44	0	1000	200	0.1	2
21	5	100	100	0.01	1	45	5	100	100	0.1	2
22	5	100	200	0.01	1	46	5	100	200	0.1	2
23	5	1000	100	0.01	1	47	5	1000	100	0.1	2
24	5	1000	200	0.01	1	48	5	1000	200	0.1	2

Πίνακας 2: Σειτ παραμέτρων

Για κάθε μία περίπτωση από αυτές του πίνακα 2, ελαχιστοποιείται, αρχικά, το *Κόστος/χρονική μονάδα* ($= E(C)$) της παραγωγικής διαδικασίας, όταν αυτή βασίζεται στη λειτουργία σύμφωνα με το απλό διάγραμμα Shewhart και καταγράφεται το βέλτιστο σετ μεταβλητών παραμέτρων που το πετυχαίνει αυτό. Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία και για το ειδικό διάγραμμα και παρατίθενται οι νέες, πλέον, βέλτιστες παράμετροι και το αντίστοιχο ελάχιστο *Κόστος/χρονική μονάδα*. Στις υποενότητες 4.2.1 και 4.2.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, τόσο για ελεύθερο μέγεθος δείγματος n όσο και για σταθερό $n = 1$. Προτού παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, επισημαίνεται πως στις περιπτώσεις εκείνες όπου δεν ορίζεται το μέγεθος του δείγματος (*), θεωρείται ως βέλτιστη πολιτική ο προληπτικός έλεγχος, γεγονός που οφείλεται σε μηδενική προκύπτουσα τιμή για τη μεταβλητή k .

4.2.1 Ελεύθερο μέγεθος δείγματος

Στην ενότητα αυτή, παρατίθενται τα αποτελέσματα για την περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος είναι δυνατό να λάβει οποιαδήποτε τιμή.

Διάγραμμα Shewhart

α/α	n	k	h	$E(C)$	α/α	n	k	h	$E(C)$
1	24	1.62	7.14	11.762	25	10	2.18	1.67	35.8929
2	32	1.92	8.17	12.6421	26	12	2.43	1.83	36.8895
3	25	1.65	2.19	33.9005	27	10	2.21	0.44	78.2252
4	33	1.95	2.5	36.7919	28	12	2.47	0.48	81.9381
5	27	1.59	8.39	12.4051	29	11	2.1	2.19	38.4758
6	34	1.9	9.12	13.2173	30	13	2.37	2.31	39.2985
7	28	1.62	2.57	36.006	31	12	2.18	0.59	87.7988
8	36	1.94	2.82	38.677	32	14	2.45	0.62	90.8927
9	21	1.5	2.77	45.4615	33	4	2.76	2.78	5.3081
10	28	1.8	3.17	47.697	34	4	2.93	2.72	5.4614
11	24	1.62	0.71	117.6218	35	4	2.77	0.86	12.6195
12	32	1.92	0.82	126.4217	36	4	2.93	0.84	13.1184
13	23	1.44	3.26	47.1162	37	5	2.73	4.55	6.7073
14	30	1.76	3.16	49.1665	38	5	2.88	4.52	6.811
15	27	1.59	0.84	124.0513	39	5	2.73	1.41	17.1267
16	34	1.9	0.91	132.173	40	5	2.89	1.4	17.4677
17	10	2.21	4.4	7.8225	41	4	2.75	1.01	29.249
18	12	2.47	4.79	8.1938	42	4	2.91	1	29.6553
19	10	2.22	1.35	20.8124	43	4	2.76	0.28	53.0822
20	13	2.5	1.55	22.0164	44	4	2.93	0.27	54.6145
21	12	2.18	5.93	8.7798	45	5	2.71	1.67	33.1073
22	14	2.45	6.23	9.0892	46	5	2.86	1.67	33.3714
23	12	2.19	1.82	23.9102	47	5	2.73	0.46	67.0753
24	14	2.46	1.91	24.9157	48	5	2.88	0.45	68.1102

Πίνακας 3: Βελτιστοποίηση διαγράμματος Shewhart (n ελεύθερο)

Ειδικό διάγραμμα

α/α	n	k	P_{cr}	h_1	h_2	$E(C)$	α/α	n	k	P_{cr}	h_1	h_2	$E(C)$
1	23	1.62	0.978	8.82	6.6	11.7232	25	10	2.19	0.9645	1.97	1.61	35.8571
2	32	1.93	0.9801	9.91	7.9	12.6184	26	12	2.44	0.9645	2.13	1.77	36.8575
3	24	1.65	0.9936	2.7	2.06	33.8127	27	10	2.22	0.9905	0.53	0.43	78.1654
4	33	1.96	0.9942	3.02	2.44	36.7482	28	12	2.47	0.9906	0.57	0.47	81.8903
5	26	1.58	0.981	9.83	7.91	12.3769	29	11	2.1	0.969	2.44	2.12	38.4518
6	34	1.9	0.9817	10.73	8.88	13.198	30	13	2.38	0.9683	2.56	2.24	39.276
7	27	1.61	0.9945	3.01	2.45	35.9417	31	12	2.18	0.9931	0.66	0.59	87.7692
8	35	1.93	0.9947	3.27	2.74	38.6418	32	14	2.45	0.9929	0.69	0.62	90.8682
9	19	1.51	0.8958	3.38	2.28	45.2332	33	4	2.76	0.9966	3.11	2.77	5.3075
10	27	1.82	0.9022	3.81	2.79	47.5236	34	4	2.93	0.9954	3.19	2.72	5.4604
11	23	1.62	0.978	0.88	0.66	117.2311	35	4	2.77	0.9989	0.97	0.86	12.6186
12	32	1.93	0.9801	0.99	0.79	126.184	36	4	2.93	0.9986	0.98	0.84	13.1171
13	22	1.45	0.9084	3.81	2.85	46.9531	37	5	2.73	0.998	4.77	4.57	6.7072
14	29	1.77	0.9087	4.18	3.22	49.0324	38	5	2.89	0.9972	4.81	4.53	6.8108
15	26	1.58	0.9809	0.98	0.79	123.7684	39	5	2.74	0.9994	1.46	1.4	17.1265
16	34	1.9	0.9817	1.07	0.89	131.9801	40	5	2.89	0.9992	1.48	1.4	17.4672
17	10	2.22	0.9905	5.26	4.3	7.8165	41	4	2.75	0.9875	1.13	1	29.244
18	12	2.47	0.9906	5.68	4.74	8.189	42	4	2.92	0.9833	1.15	0.98	29.6465
19	10	2.22	0.9971	1.62	1.33	20.8008	43	4	2.76	0.9966	0.31	0.28	53.075
20	12	2.48	0.9971	1.75	1.46	22.0094	44	4	2.93	0.9954	0.32	0.27	54.6033
21	12	2.18	0.9931	6.56	5.86	8.777	45	5	2.71	0.9926	1.74	1.66	33.1058
22	14	2.45	0.9929	6.93	6.22	9.0868	46	5	2.86	0.9898	1.75	1.65	33.3686
23	12	2.18	0.9979	2.03	1.82	23.906	47	5	2.73	0.998	0.47	0.45	67.0708
24	14	2.46	0.9978	2.12	1.9	24.9118	48	5	2.88	0.9973	0.48	0.45	68.1061

Πίνακας 4: Βελτιστοποίηση ειδικού διαγράμματος (n ελεύθερο)

α/α	Ποσοστό μείωσης %	α/α	Ποσοστό μείωσης %	α/α	Ποσοστό Μείωσης %	α/α	Ποσοστό μείωσης%
1	0.33	13	0.35	25	0.1	37	0
2	0.19	14	0.27	26	0.09	38	0
3	0.26	15	0.23	27	0.08	39	0
4	0.12	16	0.15	28	0.06	40	0
5	0.23	17	0.08	29	0.06	41	0.02
6	0.15	18	0.06	30	0.06	42	0.03
7	0.18	19	0.06	31	0.03	43	0.01
8	0.09	20	0.03	32	0.03	44	0.02
9	0.5	21	0.03	33	0.01	45	0
10	0.36	22	0.03	34	0.02	46	0.01
11	0.33	23	0.02	35	0.01	47	0.01
12	0.19	24	0.02	36	0.01	48	0.01

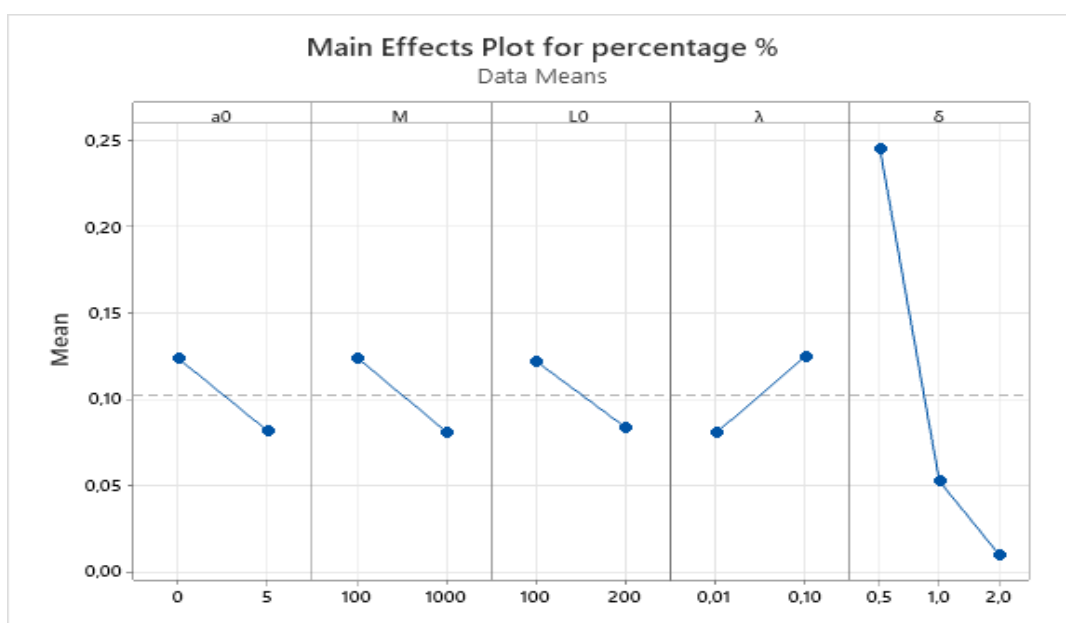
Πίνακας 5: Ποσοστό μείωσης Κόστους (n ελεύθερο)

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μεταβλητό, η μείωση του κόστους ανά χρονική μονάδα, που παρατηρείται όταν η διαδικασία λειτουργεί με βάση το

προτεινόμενο διάγραμμα, δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 5, το ποσοστό μείωσης του κόστους κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή του κατά την περίπτωση 9 του πίνακα 1, η οποία ισούται με 0.5%. Πιο αναλυτικά, όταν η μεταβολή της μέσης τιμής λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή της ($\delta = 0.5$), το ποσοστό μείωσης του κόστους που μελετάται, είναι αντιστρόφως ανάλογο με τις μεταβλητές M και L_0 , για όλες τις τιμές του λ αλλά και του α_0 . Επιπλέον, το ποσοστό λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές κατά τις περιπτώσεις όπου το σταθερό κόστος δειγματοληψίας θεωρείται αμελητέο. Τέλος, επισημαίνεται πως στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου η μεταβλητή δ ισούται με 0.5, η μείωση του κόστους παρουσιάζει τις σημαντικότερες βελτιώσεις και το ποσοστό λαμβάνει τις μεγαλύτερες τιμές συγκριτικά με όλες τις 48 διαφορετικές περιπτώσεις που μελετώνται.

Όσον αφορά τους συνδυασμούς στους οποίους η συστηματική αιτία μεταβάλλει τη μέση τιμή κατά μία τυπική απόκλιση ($\delta = 1$), τα αποτελέσματα σχετικά με το ποσοστό μείωσης του κόστους είναι πανομοιότυπα με αυτά που περιεγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Βέβαια, το ποσοστό λαμβάνει χαμηλότερες τιμές οι οποίες κυμαίνονται από 0.016% έως 0.1%. Τέλος, όταν η μεταβλητή δ λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή της, ($\delta = 2$), από αυτές που μελετήθηκαν συνολικά, τότε τα δύο διαγράμματα δε φαίνεται να παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές όσον αφορά την ελάχιστη τιμή του κόστους ανά χρονική μονάδα, με αποτέλεσμα τα ποσοστά μείωσης να θεωρούνται αμελητέα.

Στις παραπάνω περιπτώσεις μελετήθηκε η επίδραση που έχει κάθε παράμετρος, αλλά και ο συνδυασμός τους, στην τελική τιμή του Κόστους. Η επίδραση, αυτή, κάθε υπό μελέτη μεταβλητής, στη μέση βελτίωση του Κόστους παρουσιάζεται σχηματικά στο διάγραμμα 5.



Διάγραμμα 5: Επίδραση παραμέτρων για ελεύθερο n

Όπως γίνεται αντιληπτό, χωρίς να μελετάται η αλληλεπίδραση των επιμέρους μεταβλητών, η αύξηση των παραμέτρων α_0 , M και L_0 οδηγεί σε χαμηλότερα ποσοστά μείωσης του Κόστους. Αντιθέτως, όπως έχει ήδη αναφερθεί και παραπάνω, αύξηση της μεταβλητής λ φαίνεται να προκαλεί και αύξηση στο ποσοστό. Τέλος, είναι φανερό πως τα μεγαλύτερα δυνατά οφέλη προκύπτουν κατά την περίπτωση που η παράμετρος δ βρίσκεται στο χαμηλότερο επίπεδό της. Παρ' όλα αυτά, τα ποσοστά μείωσης του Κόστους των δύο διαγραμμάτων, όταν το μέγεθος του δείγματος αφήνεται να λάβει οποιαδήποτε ακέραια τιμή, δεν είναι υψηλά, με αποτέλεσμα οι οικονομικές βελτιώσεις του διαγράμματος Bayes έναντι του Shewhart να μην είναι ιδιαίτερα σημαντικές.

4.2.2 Μεμονωμένη μέτρηση ($n = 1$)

Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου η εκάστοτε δειγματοληψία αποτελείται από ένα μόνο προϊόν/τεμάχιο.

Διάγραμμα Shewhart

α/α	n	k	h	$E(C)$	α/α	n	k	h	$E(C)$
1	*	0	14.93	14.7338	25	1	2.15	0.32	46.3559
2	*	0	21.47	19.3216	26	1	2.39	0.28	52.1499
3	*	0	4.54	45.3644	27	1	2.22	0.07	124.4611
4	*	0	6.46	62.5753	28	1	2.45	0.06	151.8519
5	*	0	14.93	14.7338	29	*	0	5.67	48.9422
6	*	0	21.47	19.3216	30	*	0	8.24	56.1497
7	*	0	4.54	45.3644	31	*	0	1.49	147.3384
8	*	0	6.46	62.5753	32	1	1.74	0.27	187.6529
9	*	0	5.67	48.9422	33	1	2.59	0.82	6.7879
10	*	0	8.24	56.1497	34	1	2.8	0.72	7.6519
11	*	0	1.49	147.3384	35	1	2.6	0.25	17.4843
12	*	0	2.15	193.216	36	1	2.81	0.22	20.3237
13	*	0	5.67	48.9422	37	1	1.95	2.93	9.6293
14	*	0	8.24	56.1497	38	1	2.2	2.63	10.8846
15	*	0	1.49	147.3381	39	1	1.97	0.88	26.8808
16	*	0	2.15	193.216	40	1	2.22	0.78	31.0829
17	1	2.23	0.69	12.4458	41	1	2.56	0.32	33.0243
18	1	2.47	0.57	15.1814	42	1	2.78	0.28	35.237
19	1	2.25	0.2	36.479	43	1	2.6	0.08	67.8873
20	1	2.5	0.16	45.9135	44	1	2.81	0.07	76.5252
21	*	0	14.93	14.7338	45	1	1.88	1.22	40.1105
22	1	1.73	2.73	18.7647	46	1	2.13	1.13	43.0895
23	*	0	4.54	45.3644	47	1	1.96	0.29	96.2952
24	1	1.78	0.74	58.69048	48	1	2.21	0.26	108.847

Πίνακας 6: Βελτιστοποίηση διαγράμματος Shewhart ($n=1$)

Ειδικό διάγραμμα

α/α	n	k	P_{cr}	h_1	h_2	$E(C)$	α/α	n	k	P_{cr}	h_1	h_2	$E(C)$
1	1	1.31	0.8899	12.45	0.78	14.7199	25	1	2.1	0.7866	2.65	0.25	44.1955
2	1	1.77	0.8556	16.19	0.6	18.9996	26	1	2.34	0.724	3.44	0.21	49.403
3	1	1.39	0.9658	3.7	0.22	45.1792	27	1	2.18	0.9415	0.66	0.06	118.0762
4	1	1.84	0.9552	4.75	0.17	61.0106	28	1	2.43	0.9246	0.83	0.05	144.3055
5	*	0	0.8613	14.93	14.93	14.7338	29	*	0	0.5673	5.67	5.67	48.9422
6	*	0	0.8068	21.47	21.47	19.3216	30	1	1.48	0.6408	5.38	0.93	54.9024
7	*	0	0.9556	4.54	4.54	45.3644	31	1	1.32	0.9243	1.03	0.24	142.6455
8	*	0	0.9374	6.46	6.46	62.5753	32	1	1.68	0.9021	1.24	0.21	174.7984
9	*	0	0.5673	5.67	5.67	48.9422	33	1	2.59	0.9785	2.97	0.79	6.7426
10	1	1.36	0.5118	7.02	0.33	56.1409	34	1	2.8	0.9733	3.4	0.7	7.597
11	1	1.31	0.8899	1.24	0.08	147.199	35	1	2.59	0.9933	0.92	0.25	17.3821
12	1	1.77	0.8556	1.62	0.06	189.9965	36	1	2.81	0.9917	1.05	0.21	20.2144
13	*	0	0.5673	5.67	5.67	48.9422	37	1	1.95	0.9714	5.66	2.75	9.5387
14	*	0	0.4385	8.24	8.24	56.1497	38	1	2.2	0.963	6.25	2.48	10.7689
15	*	0	0.8613	1.49	1.49	147.3381	39	1	1.96	0.9912	173	0.84	26.6496
16	*	0	0.8068	2.15	2.15	193.216	40	1	2.22	0.9886	1.89	0.75	30.82
17	1	2.18	0.9415	6.63	0.6	11.8076	41	1	2.56	0.9221	1.1	0.3	32.7725
18	1	2.43	0.9246	8.34	0.5	14.4305	42	1	2.78	0.9029	1.28	0.26	34.8916
19	1	2.2	0.982	1.99	0.18	34.5934	43	1	2.59	0.9785	0.3	0.08	67.426
20	1	2.45	0.9768	2.5	0.15	43.8043	44	1	2.8	0.9733	0.34	0.07	75.9702
21	1	1.32	0.9243	10.28	2.4	14.2646	45	1	1.9	0.8935	2.18	1.06	39.7142
22	1	1.68	0.9021	12.36	2.06	17.4798	46	1	2.15	0.8616	2.45	0.96	42.5068
23	1	1.36	0.9768	3.06	0.71	43.1899	47	1	1.95	0.9714	0.57	0.28	95.3866
24	1	1.72	0.9701	3.64	0.6	54.7739	48	1	2.2	0.963	0.62	0.25	107.6888

Πίνακας 7: Βελτιστοποίηση ειδικού διαγράμματος ($n=1$)

α/α	Ποσοστό μείωσης %	α/α	Ποσοστό μείωσης %	α/α	Ποσοστό μείωσης %	α/α	Ποσοστό μείωσης %
1	0.09	13	0	25	4.66	37	0.94
2	1.67	14	0	26	5.27	38	1.06
3	0.41	15	0	27	5.13	39	0.86
4	2.5	16	0	28	4.97	40	0.85
5	0	17	5.13	29	0	41	0.76
6	0	18	4.95	30	2.22	42	0.98
7	0	19	5.17	31	3.19	43	0.68
8	0	20	4.59	32	6.85	44	0.73
9	0	21	3.18	33	0.67	45	0.99
10	0.02	22	6.85	34	0.72	46	1.35
11	0.09	23	4.79	35	0.58	47	0.94
12	1.67	24	6.67	36	0.54	48	1.06

Πίνακας 8: Ποσοστό μείωσης Κόστους ($n=1$)

Με βάση τα αποτελέσματα των Πινάκων 6 – 8, γίνεται αντιληπτό πως στην περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος ισούται με τη μονάδα, οι βελτιώσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας το

ειδικό διάγραμμα ελέγχου είναι αρκετά σημαντικές. Συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις όπου η μεταβολή της συστηματικής αιτίας λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή της ($\delta = 0.5$), όσο η τιμή του κόστους M ή L_0 αυξάνεται, το ποσοστό μείωσης του *Κόστους/χρονική μονάδα* αυξάνεται και αυτό, πόσο μάλλον όταν και οι δύο μεταβλητές αυξάνονται ταυτόχρονα. Αυτό παρατηρείται για όλες τις τιμές του λ που μελετήθηκαν, με απαραίτητη προϋπόθεση, όμως, το σταθερό κόστος δειγματοληψίας να θεωρηθεί αμελητέο. Για τις περιπτώσεις όπου το κόστος της δειγματοληψίας λαμβάνει τιμή, προκύπτει ως βέλτιστη πολιτική και για τα δύο διαγράμματα ο προληπτικός έλεγχος, χωρίς δειγματοληψία, γεγονός που οδηγεί στις ίδιες τιμές κόστους.

Όσον αφορά τις περιπτώσεις όπου η εμφάνιση της συστηματικής αιτίας αυξάνει σε μεγάλο βαθμό τη μέση τιμή ($\delta = 2$), τα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση της μεταβλητής L_0 δε φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά με αυτά που αναλύθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Αντιθέτως, αύξηση της μεταβλητής M προκαλεί μείωση στο ποσοστό διαφοράς κόστους των δύο διαγραμμάτων, για οποιαδήποτε τιμή του σταθερού κόστους δειγματοληψίας. Βέβαια, πρέπει να τονιστεί, πως όταν το σταθερό κόστος της δειγματοληψίας είναι το μοναδικό που αυξάνεται, με τις υπόλοιπες παραμέτρους να παραμένουν σταθερές, παρατηρείται και πάλι μια μικρή αύξηση στο ποσοστό. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο, για τις ίδιες μεταβολές παραμέτρων, οι βελτιώσεις που προκύπτουν για μεγαλύτερο λ είναι καλύτερες από αυτές για μικρότερη τιμή του λ .

Στο σημείο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να τονιστεί πως οι σημαντικότερες βελτιώσεις του ειδικού διαγράμματος που μελετάται, έναντι του απλού διαγράμματος Shewhart, παρατηρούνται στις περιπτώσεις όπου η εμφάνιση της συστηματικής αιτίας μεταβάλλει τη μέση τιμή κατά μία τυπική απόκλιση ($\delta = 1$). Συγκεκριμένα, το μεγαλύτερο ποσοστό μείωσης του *Κόστους/χρονική μονάδα* που προέκυψε, παρατηρήθηκε για τις μεγαλύτερες δυνατές τιμές όλων των παραμέτρων, από αυτές που μελετώνται (περίπτωση 32) και ισούται με 6.85%. Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί πως η μείωση του κόστους είναι σημαντική κατά τις περιπτώσεις όπου η βέλτιστη πολιτική για το απλό διάγραμμα έχει προκύψει να είναι ο προληπτικός έλεγχος, ενώ αντίστοιχα για το ειδικό διάγραμμα η λήψη δείγματος ($n = 1$).

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να καταστούν πιο κατανοητά τα αποτελέσματα που περιεγράφηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, παρουσιάζονται σχηματικά στο διάγραμμα 6. Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα αυτό, φαίνεται η μέση βελτίωση του Κόστους, σε κάθε επίπεδο κάθε μιας από τις παραμέτρους που μελετήθηκαν.



Διάγραμμα 6: Επίδραση παραμέτρων για μεμονωμένη μέτρηση

Όλα όσα έχουν σχολιαστεί προηγουμένως, γίνονται φανερά και στο συγκεκριμένο διάγραμμα. Φαίνεται, λοιπόν, πως τα υψηλότερα ποσοστά προκύπτουν όταν η μεταβλητή δ βρίσκεται στο μεσαίο επίπεδο της ($\delta = 1$), ενώ για τα άλλα δύο επίπεδά της το ποσοστό μειώνεται αρκετά. Επιπλέον, σημαντικότερες βελτιώσεις, δηλαδή μεγαλύτερες τιμές του ποσοστού, προκύπτουν αυξάνοντας την παράμετρο M ή L_0 . Αντίθετα, με αύξηση των μεταβλητών α_0 ή λ η μείωση του κόστους των δύο διαγραμμάτων κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα.

4.2.3 Συγκριτικά αποτελέσματα

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν στις υποενότητες 4.2.1 και 4.2.2, γίνεται αντιληπτό πως στην πλειοψηφία των περιπτώσεων που μελετήθηκαν, η λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας σύμφωνα με το υπό μελέτη ειδικό διάγραμμα παρουσιάζει βελτιώσεις έναντι της λειτουργίας σύμφωνα με το απλό διάγραμμα. Συγκεκριμένα, οι βελτιώσεις αυτές αναφέρονται στο κόστος ανά χρονική μονάδα της διαδικασίας, το οποίο, σαφώς, προκύπτει χαμηλότερο. Κατά τις περιπτώσεις όπου το μέγεθος του δείγματος δύναται να λάβει οποιαδήποτε ακέραια θετική τιμή, το ποσοστό μείωσης του κόστους κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα, της τάξης του 0.01% έως και 0.5%. Το ποσοστό αυτό, αυξάνεται σημαντικά όταν η δειγματοληψία αποτελείται από μία μόνο μέτρηση, γεγονός που είναι σύνηθες σε πολλές επιχειρήσεις. Συγκεκριμένα, για ένα μεγάλο πλήθος συνδυασμών οι τιμές του ποσοστού μείωσης του κόστους ξεπερνούν το 4%, με βέλτιστη περίπτωση τη μείωση σχεδόν κατά 7%. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί, πως υπάρχουν και συνδυασμοί παραμέτρων οι οποίοι οδηγούν σε βέλτιστη πολιτική προληπτικού ελέγχου και για τα δύο διαγράμματα, με αποτέλεσμα οι τιμές του κόστους να ταυτίζονται.

Βέβαια, και για τις δύο περιπτώσεις, τόσο για ελεύθερο μέγεθος δείγματος όσο και για μεμονωμένες μετρήσεις, τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις διάφορες βέλτιστες τιμές των παραμέτρων (n, k, h) είναι παρόμοια. Πιο αναλυτικά, οι βέλτιστες τιμές κάθε μιας παραμέτρου για το ειδικό διάγραμμα δε διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από τις αντίστοιχες τιμές του απλού διαγράμματος. Έτσι, για κάθε σετ παραμέτρων δεν αναμένεται μεγάλη διαφορά στις τιμές της μεταβλητής k , αλλά ούτε και στις χρονικές διάρκειες μεταξύ των δειγματοληψιών. Ωστόσο, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, το ειδικό διάγραμμα χρησιμοποιεί διαφορετική διάρκεια για την πρώτη δειγματοληψία έναντι των υπολοίπων ($h_1 \neq h_2$). Από τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν, προκύπτει πως η χρονική στιγμή της πρώτης δειγματοληψίας (h_1) του ειδικού διαγράμματος, διαφέρει και είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη βέλτιστη τιμή του απλού διαγράμματος. Ωστόσο, κάθε επόμενη δειγματοληψία πραγματοποιείται μετά από διάρκεια h_2 , η τιμή της οποίας δεν παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση από την αντίστοιχη βέλτιστη του διαγράμματος Shewhart. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός πως κατά την περίπτωση μεταβλητού μεγέθους δείγματος, η βελτιστοποίηση κάθε διαγράμματος, για κάθε μία από τις 48 διαφορετικές περιπτώσεις, οδηγεί και πάλι σε ίδια βέλτιστα μεγέθη n , με διαφορά της τάξης του ± 1 προϊόντος/τεμαχίου.

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να παρουσιαστεί η επίδραση που έχει κάθε μία από τις επιμέρους μεταβλητές στην τελική τιμή του *Κόστους/χρονική μονάδα*. Πρωτίστως, τόσο κατά την περίπτωση ελεύθερου μεγέθους δείγματος όσο και μεμονωμένης μέτρησης, το κόστος φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από τα επιμέρους λειτουργικά κόστη. Είναι λοιπόν λογικό, η αύξηση οποιασδήποτε μεταβλητής, (α_0, M, L_0), να επιφέρει αύξηση στην αναμενόμενη τιμή του κόστους τόσο για το απλό διάγραμμα Shewhart όσο και για το ειδικό διάγραμμα ελέγχου. Βέβαια, η τιμή του κόστους επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό και από τα «φυσικά χαρακτηριστικά» της παραγωγικής διαδικασίας. Έτσι, αναμένονται υψηλότερες τιμές κόστους όταν ο ρυθμός εμφάνισης της συστηματικής αιτίας είναι μεγαλύτερος (λ) αλλά και όταν η εμφάνιση, αυτή, της αιτίας επιφέρει μεγαλύτερη μεταβολή (δ) στη μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας που μελετάται. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί η διαφορά που παρουσιάζουν τα επιμέρους κόστη και των δύο διαγραμμάτων στις περιπτώσεις όπου το δείγμα αποτελείται από μία μόνο μέτρηση. Πιο αναλυτικά, όταν το μέγεθος του δείγματος αφήνεται να λάβει οποιαδήποτε ακεραία τιμή, η βέλτιστη τιμή του κόστους προκύπτει μικρότερη συγκριτικά με την αντίστοιχη βέλτιστη κατά την περίπτωση μεμονωμένης μέτρησης. Παρόλα αυτά, κατά την τελευταία αυτή περίπτωση, η ποσοστιαία διαφορά κόστους μεταξύ των δύο διαγραμμάτων κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα.

4.2.4 Διαγράμματα Κόστους

Στην ενότητα αυτή, προκειμένου να καταστεί πιο σαφής και κατανοητή η επίδραση που έχουν οι επιμέρους παράμετροι στην τελική τιμή του κόστους, παρουσιάζονται ορισμένα διαγράμματα.

Συγκεκριμένα, στα διαγράμματα αυτά αναπαρίσταται γραφικά η βέλτιστη τιμή του *Κόστους/χρονική μονάδα* και των δύο διαγραμμάτων, αλλά και η ποσοστιαία διαφορά τους, συγκριτικά με τις μεταβλητές δ και λ ανά περίπτωση. Αρχικά, ορίζονται οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων:

a_0	a_1	M	L_0	L_1	D
0	1	100	100	200	0

Πίνακας 9: Τιμές παραμέτρων

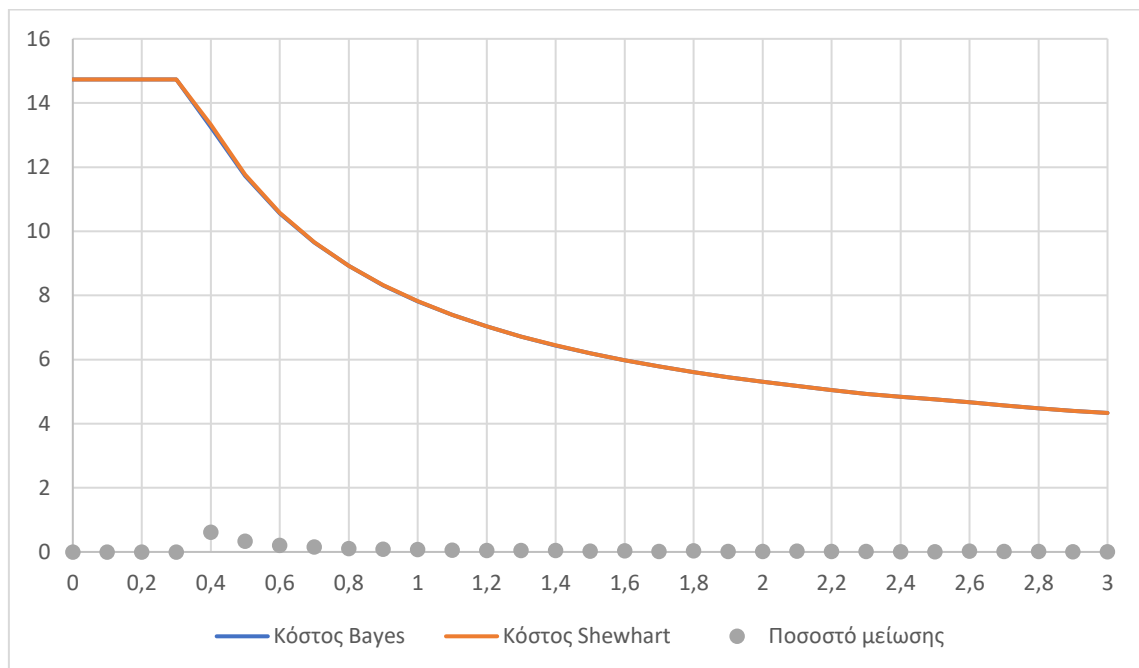
Με δεδομένες τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στον πίνακα 9, ορίζεται μια σταθερή τιμή για τον ρυθμό εμφάνισης της συστηματικής αιτίας ($\lambda = 0.01$) και η μεταβλητή δ λαμβάνει διάφορες τιμές. Για κάθε μία τιμή του δ , προκύπτει ένας νέος συνδυασμός παραμέτρων για τον οποίο ελαχιστοποιείται το *Κόστος/χρονική μονάδα* και των δύο διαγραμμάτων. Στη συνέχεια, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία ορίζοντας σταθερή τιμή για την μεταβολή της μέσης τιμής ($\delta = 1$) και μεταβάλλοντας ανά περίπτωση την τιμή του λ . Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στις υποενότητες 4.2.4.1 και 4.2.4.2, τόσο για ελεύθερο μέγεθος δείγματος όσο και για μεμονωμένη μέτρηση.

4.2.4.1 Ελεύθερο μέγεθος δείγματος

Με σταθερή τιμή $\lambda = 0.01$ και μεταβαλλόμενο δ προκύπτουν τα επιμέρους κόστη που φαίνονται στον πίνακα 10 και το σχηματικό τους διάγραμμα (διάγραμμα 7).

α/α	δ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %	α/α	δ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %
1	0	14.7338	14.7338	0	17	1.6	5.9744	5.9764	0.033
2	0.1	14.7338	14.7338	0	18	1.7	5.7838	5.7849	0.019
3	0.2	14.7338	14.7338	0	19	1.8	5.6071	5.6089	0.032
4	0.3	14.7338	14.7338	0	20	1.9	5.4427	5.4438	0.02
5	0.4	13.2422	13.3237	0.612	21	2	5.3075	5.3081	0.011
6	0.5	11.7231	11.762	0.331	22	2.1	5.1767	5.1782	0.029
7	0.6	10.5592	10.5813	0.209	23	2.2	5.0426	5.0436	0.02
8	0.7	9.6471	9.6626	0.16	24	2.3	4.9294	4.9301	0.014
9	0.8	8.9159	8.9254	0.106	25	2.4	4.8343	4.8347	0.008
10	0.9	8.3165	8.3234	0.083	26	2.5	4.7548	4.755	0.004
11	1	7.8165	7.8225	0.077	27	2.6	4.6655	4.6667	0.026
12	1.1	7.3924	7.3966	0.057	28	2.7	4.5646	4.5655	0.02
13	1.2	7.0289	7.0322	0.047	29	2.8	4.4767	4.4773	0.013
14	1.3	6.7129	6.7158	0.043	30	2.9	4.4003	4.4007	0.009
15	1.4	6.4387	6.4416	0.045	31	3	4.3341	4.3344	0.007
16	1.5	6.1959	6.1975	0.026					

Πίνακας 10: Κόστος για μεταβαλλόμενο δ (n ελεύθερο)

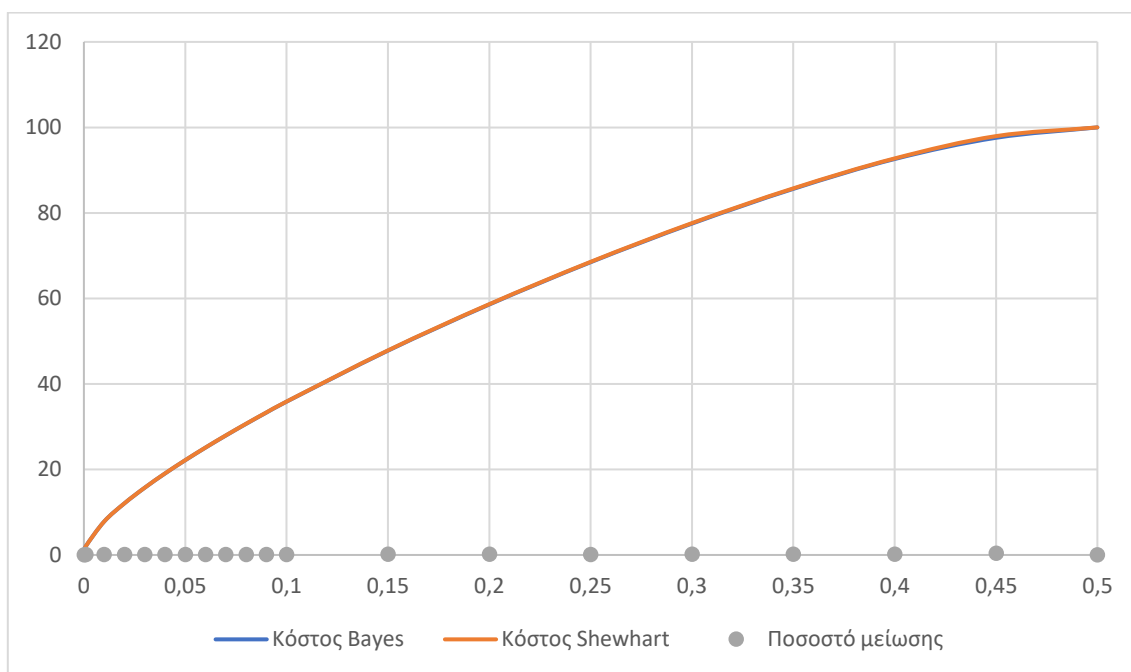


Διάγραμμα 7: Κόστος συναρτήσει δ (n ελεύθερο)

Με σταθερή την τιμή του $\delta = 1$ και μεταβαλλόμενο λ προκύπτουν τα επιμέρους κόστη που φαίνονται στον πίνακα 11 και το σχηματικό τους διάγραμμα (διάγραμμα 8).

α/α	λ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %	α/α	λ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %
1	0.0001	0.6174	0.6177	0.049	11	0.09	33.2936	33.3267	0.099
2	0.001	2.0801	2.0812	0.053	12	0.1	35.8571	35.8928	0.099
3	0.01	7.8165	7.8225	0.077	13	0.15	47.7802	47.8459	0.137
4	0.02	12.0764	12.0867	0.085	14	0.2	58.5779	58.6567	0.134
5	0.03	15.7259	15.7401	0.09	15	0.25	68.474	68.5593	0.124
6	0.04	19.049	19.0668	0.093	16	0.3	77.4995	77.6167	0.151
7	0.05	22.1566	22.1778	0.096	17	0.35	85.6262	85.7431	0.136
8	0.06	25.1061	25.1305	0.097	18	0.4	92.6091	92.7464	0.148
9	0.07	27.9316	27.959	0.098	19	0.45	97.5733	97.9579	0.393
10	0.08	30.6555	30.6859	0.099	20	0.5	100	100	0

Πίνακας 11: Κόστος για μεταβαλλόμενο λ (n ελεύθερο)



Διάγραμμα 8: Κόστος συναρτήσει λ (n ελεύθερο)

Σύμφωνα με τους πίνακες 10 και 11, τόσο κατά τις περιπτώσεις για μεταβαλλόμενο δ όσο και για μεταβαλλόμενο λ , τα κόστη των δύο διαγραμμάτων προκύπτουν σχεδόν πανομοιότυπα. Οι βελτιώσεις στις τιμές του Κόστους είναι αρκετά μικρές με αποτέλεσμα να μη διακρίνονται διαφορές στις γραφικές παραστάσεις. Το ποσοστό μείωσης κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή του (0.393%) για την περίπτωση 19 του πίνακα 11. Ωστόσο, οι βελτιώσεις φαίνεται να είναι σημαντικότερες όταν η μεταβλητή λ λαμβάνει αρκετά υψηλές τιμές, χωρίς όμως αυτές να θεωρούνται και πάλι αξιοσημείωτες. Τελικά, από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει το

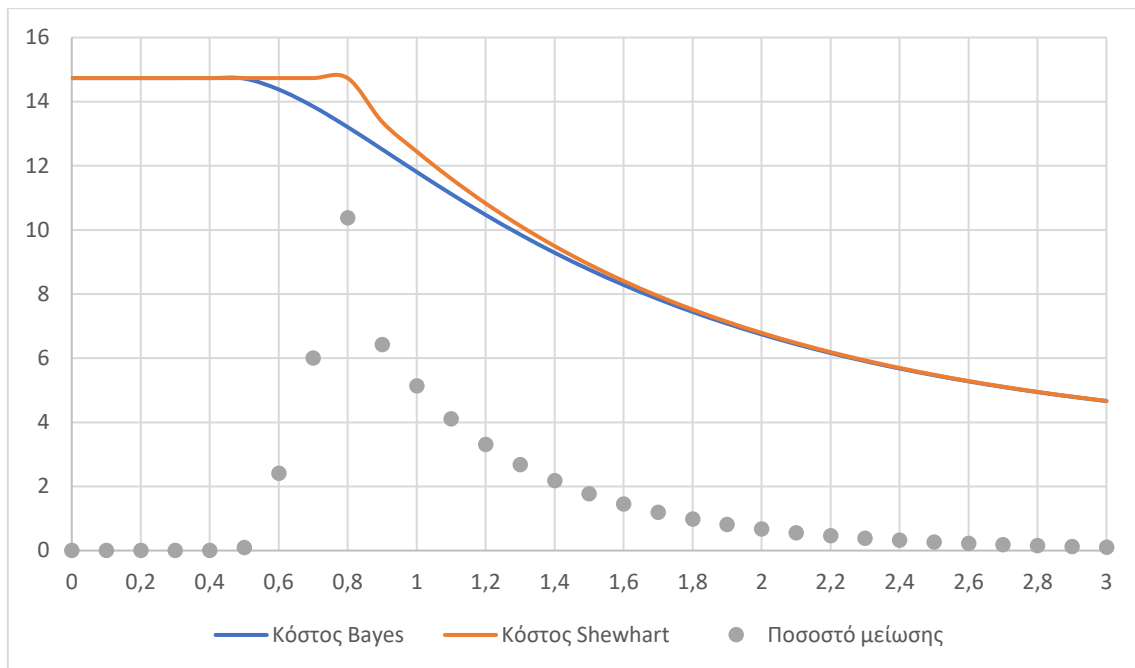
συμπέρασμα πως όταν το μέγεθος του δείγματος δύναται να λάβει οποιαδήποτε τιμή, τα δύο διαγράμματα ελέγχου δε διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από οικονομικής πλευράς.

4.2.4.2 Μεμονωμένη μέτρηση ($n = 1$)

Με σταθερή τιμή $\lambda = 0.01$ και μεταβαλλόμενο δ προκύπτουν τα επιμέρους κόστη που φαίνονται στον πίνακα 12 και το σχηματικό τους διάγραμμα (διάγραμμα 9).

α/α	δ	Κόστος <i>Bayes</i>	Κόστος <i>Shewhart</i>	ποσοστό μείωσης %	α/α	δ	Κόστος <i>Bayes</i>	Κόστος <i>Shewhart</i>	ποσοστό μείωσης %
1	0	14.7338	14.7338	0	17	1.6	8.2841	8.406	1.45
2	0.1	14.7338	14.7338	0	18	1.7	7.8444	7.389	1.19
3	0.2	14.7338	14.7338	0	19	1.8	7.4428	7.5164	0.98
4	0.3	14.7338	14.7338	0	20	1.9	7.0765	7.1341	0.8
5	0.4	14.7338	14.7338	0	21	2	6.7426	6.7879	0.67
6	0.5	14.7199	14.7338	0.09	22	2.1	6.4383	6.4742	0.56
7	0.6	14.379	14.7338	2.41	23	2.2	6.1609	6.1893	0.46
8	0.7	13.8496	14.7338	6	24	2.3	5.9082	5.9308	0.38
9	0.8	13.2064	14.7338	10.37	25	2.4	5.6777	5.6957	0.32
10	0.9	12.5115	13.3697	6.42	26	2.5	5.4676	5.482	0.26
11	1	11.8076	12.4458	5.13	27	2.6	5.2758	5.2874	0.22
12	1.1	11.1215	11.5987	4.11	28	2.7	5.1009	5.1101	0.18
13	1.2	10.4685	10.8271	3.31	29	2.8	4.9412	4.9486	0.15
14	1.3	9.8564	10.1277	2.68	30	2.9	4.7954	4.8013	0.12
15	1.4	9.2883	9.4949	2.18	31	3	4.6623	4.6671	0.1
16	1.5	8.7646	8.9229	1.77					

Πίνακας 12: Κόστη για μεταβαλλόμενο δ ($n=1$)



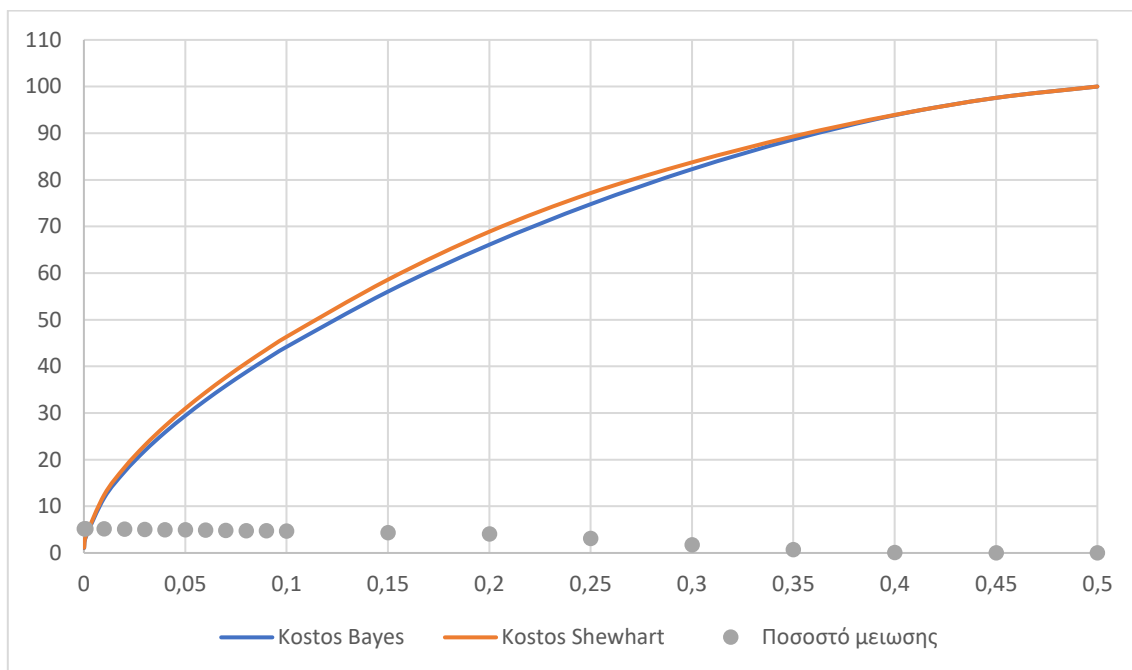
Διάγραμμα 9: Κόστος συναρτήσει δ ($n=1$)

Από το διάγραμμα αυτό, γίνεται αρχικά αντιληπτό πως η τιμή του *Κόστους/χρονική μονάδα* μειώνεται με την αύξηση της μεταβλητής δ . Δηλαδή, όσο πιο εμφανή είναι τα αποτελέσματα της συστηματικής αιτίας στα παραγόμενα προϊόντα (αύξηση δ) τόσο γρηγορότερα θα εντοπιστεί η ύπαρξη της αιτίας και άρα το κόστος της παραγωγικής διαδικασίας είναι χαμηλότερο. Για μικρές τιμές του δ , προκύπτει και για τα δύο διαγράμματα ως βέλτιστη πολιτική ο προληπτικός έλεγχος, με αποτέλεσμα τα κόστη να ταυτίζονται. Η μέγιστη ποσοστιαία διαφορά μεταξύ των δύο διαγραμμάτων (10.37%) προκύπτει κατά την περίπτωση 9 του πίνακα 10, όπου για το απλό διάγραμμα η βέλτιστη απόφαση εξακολουθεί να είναι ο προληπτικός έλεγχος ενώ στο ειδικό διάγραμμα συνίσταται λήψη δείγματος ($n = 1$).

Με σταθερή την τιμή του $\delta = 1$ και μεταβαλλόμενο λ προκύπτουν τα επιμέρους κόστη που φαίνονται στον πίνακα 13 και το σχηματικό τους διάγραμμα (διάγραμμα 10).

α/α	λ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %	α/α	λ	Κόστος Bayes	Κόστος Shewhart	ποσοστό μείωσης %
1	0.0001	1.0648	1.1228	5.17	11	0.09	41.5394	43.595	4.72
2	0.001	3.4593	3.6479	5.17	12	0.1	44.1955	46.3559	4.66
3	0.01	11.8076	12.4458	5.13	13	0.15	56.0358	58.5974	4.37
4	0.02	17.3847	18.3151	5.08	14	0.2	66.0904	68.8769	4.05
5	0.03	21.8996	23.0588	5.03	15	0.25	74.7796	77.1568	3.08
6	0.04	25.8495	27.2031	4.98	16	0.3	82.2826	83.7374	1.74
7	0.05	29.4284	30.9533	4.93	17	0.35	88.6533	89.3024	0.73
8	0.06	32.7366	34.4136	4.87	18	0.4	93.8506	93.9196	0.07
9	0.07	35.8335	37.6486	4.82	19	0.45	97.5733	97.5733	0
10	0.08	38.7587	40.699	4.77	20	0.5	100	100	0

Πίνακας 13: Κόστη για μεταβαλλόμενο λ ($n=1$)



Διάγραμμα 10: Κόστος συναρτήσει λ ($n=1$)

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, η επίδραση που έχει η μεταβλητή λ στην τιμή του Κόστους/χρονική μονάδα είναι αντίθετη από αυτά που παρουσιάστηκαν για τη μεταβλητή δ . Με την αύξηση, λοιπόν, της τιμής του λ αυξάνεται και η πιθανότητα εμφάνισης της συστηματικής αιτίας και τελικά η τιμή του κόστους του εκάστοτε διαγράμματος προκύπτει υψηλότερη. Γενικά, όσο μικρότερη είναι η τιμή της μεταβλητής λ παρατηρείται μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά στα κόστη των δύο διαγραμμάτων. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί, πως κατά την περίπτωση μεταβαλλόμενου λ η ποσοστιαία βελτίωση του Κόστους είναι πιο σταθερή, συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση

όπου η μεταβαλλόμενη παράμετρος ήταν το δ . Εν τέλει, μόνο όταν η μεταβλητή λ λαμβάνει αρκετά υψηλές τιμές η ποσοστιαία διαφορά του Κόστους των δύο διαγραμμάτων μειώνεται αισθητά.

Κεφάλαιο 5^ο: Συμπεράσματα μελέτης

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε και αναλύθηκε η αποτελεσματικότητα ενός ειδικού διαγράμματος ελέγχου ποιότητας το οποίο χρησιμοποιεί το θεώρημα Bayes για την αναθεώρηση ορισμένων πιθανοτήτων. Τα διαγράμματα αυτού του τύπου, είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση παραγωγικών διαδικασιών με σκοπό τον έγκαιρο εντοπισμό συστηματικών αιτιών, η εμφάνιση των οποίων οδηγεί σε ανεπιθύμητα αποτελέσματα.

Τα διαγράμματα που βασίζονται στη χρήση του θεωρήματος Bayes έχουν απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό την επιστημονική κοινότητα καθώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την οικονομική βελτιστοποίησή τους είναι αρκετά σημαντικά. Τέτοιου είδους διαγράμματα χρησιμοποιούν το θεώρημα Bayes για την αναθεώρηση συγκεκριμένων πιθανοτήτων με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται η εφαρμογή τους συγκριτικά με τα απλά Shewhart. Συγκεκριμένα, όσον αφορά το υπό μελέτη διάγραμμα, το σημαντικότερο πλεονέκτημα είναι η αναθεώρηση της πιθανότητας, για την παραγωγική διαδικασία, να λειτουργεί σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου. Το γεγονός ότι η πιθανότητα αυτή είναι γνωστή με μεγαλύτερη βεβαιότητα, λόγω της χρήσης του θεωρήματος, απ' ότι στο απλό διάγραμμα Shewhart, οδηγεί στην καλύτερη αξιοποίηση των πληροφοριών του συστήματος και τελικά οδηγεί σε καλύτερα οικονομικά αποτελέσματα. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως έχουν προταθεί, κατά καιρούς, πολλά διαφορετικά διαγράμματα τα οποία συγκρινόμενα με τα Shewhart οδηγούν σε οικονομικότερες λύσεις και πολιτικές. Ωστόσο, η χρήση αυτών καταλήγει να είναι αρκετά περίπλοκη και τελικά η εφαρμογή τους αποφεύγεται.

Γενικά, τα απλά διαγράμματα Shewhart έχουν καθιερωθεί ως τα πλέον συνηθέστερα για τον ποιοτικό έλεγχο των παραγωγικών διαδικασιών χωρίς, όμως, να αποτελούν και τη βέλτιστη πολιτική. Η εύκολη εφαρμογή τους, η οποία οφείλεται στη σταθερή συχνότητα δειγματοληψίας ($h = \text{σταθερό}$), είναι ίσως και ο λόγος που έχει οδηγήσει τις επιχειρήσεις να στραφούν στην πρακτική αυτή. Παρ' όλα αυτά, το διάγραμμα που μελετήθηκε στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία δε διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από τα διαγράμματα Shewhart καθώς η εφαρμογή τους είναι εξίσου απλή. Η μοναδική διαφορά που προκύπτει από τη σύγκριση των δύο αυτών διαγραμμάτων έγκειται στο γεγονός πως κατά τη χρήση του υπό μελέτη διαγράμματος οι χρονικές διάρκειες μεταξύ των δειγματοληψιών διαφέρουν μεταξύ τους. Μάλιστα, το γεγονός αυτό δεν οδηγεί σε μεταβαλλόμενα χρονικά διαστήματα καθ' όλη τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας, παρά μόνο στη διαφοροποίηση μεταξύ της χρονικής στιγμής της πρώτης δειγματοληψίας και των υπολοίπων. Έτσι, το προτεινόμενο «απλουστευμένο» διάγραμμα αποτελεί μια απλή παραλλαγή των απλών διαγραμμάτων Shewhart με σημαντικές όμως οικονομικές βελτιώσεις σε κάποιες περιπτώσεις.

Τα σημαντικότερα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση επικεντρώνονται στην αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου διαγράμματος από οικονομικής, κυρίως, πλευράς. Πρωτίστως, η μελέτη έχει πραγματοποιηθεί τόσο για την περίπτωση σταθερού μεγέθους δείγματος ($n = 1$) όσο και για δειγματοληψίες χωρίς περιορισμό σχετικά με τον αριθμό των μετρούμενων προϊόντων. Το προτεινόμενο διάγραμμα φαίνεται να παρουσιάζει σημαντικές οικονομικές βελτιώσεις όταν η δειγματοληψία αποτελείται από μία μεμονωμένη μέτρηση, φαινόμενο που έχει παρατηρηθεί άλλωστε και σε περιπτώσεις άλλων ειδικών διαγραμμάτων ελέγχου (Cusum, EWMA). Κατά την περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη μέση τιμή του κόστους προκύπτει χαμηλότερη, συγκριτικά με την αντίστοιχη του απλού διαγράμματος Shewhart. Το αποτέλεσμα αυτό κρίνεται αρκετά σημαντικό, δεδομένου ότι είναι σύνηθες φαινόμενο για τις επιχειρήσεις να καταφεύγουν σε έλεγχο δείγματος που αποτελείται από ένα και μόνο προϊόν, είτε λόγω της φύσης των παραγόμενων προϊόντων είτε λόγω υψηλών τιμών κόστους ανά μετρούμενο τεμάχιο. Έτσι, στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση των ειδικών διαγραμμάτων, έχει πολλά να προσφέρει στην εκάστοτε επιχείρηση, εφόσον η λειτουργία τους δεν είναι ιδιαίτερα περίπλοκη.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α

```
%ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
clear all; clc;
format long;
%παραμετροι
D=0.25;
L0=4.85;
L1=8;
M=260;
a0=0.08;
a1=0.25;
lamda=0.01;
d=1;
n=6;
k=3;
a=1-(normcdf(k,0,1)-normcdf(-k,0,1));
b=normcdf((k-d*sqrt(n)),0,1)-normcdf((-k-d*sqrt(n)),0,1);
Pcr=0.9;
h1=(1/lamda)*log(1+(1-a)*(1-Pcr)/(b*Pcr));
h2=h1-(1/lamda)*log(1/Pcr);

%in control                                out of control
m0=15; s=0.5; smean=s/sqrt(n);             m1=m0+d*s;

%όρια ελέγχου
UCL=m0+k*smean;  LCL=m0-k*smean;

epan=1000000;
for i=1:epan
    x(i)=-(1/lamda)*log(1-rand()); %quality shift
    j=0;
    if h1<x(i)
        z(i)=norminv(rand(),m0,smean);
        if z(i)>UCL || z(i)<LCL
            %false alarm
            Kostos(i)=L0+(a0+a1*n);
            Diarkeia(i)=h1;
        end
    elseif h1>x(i)
        z(i)=norminv(rand(),m1,smean);
        if z(i)>UCL || z(i)<LCL
            %true alarm
            Kostos(i)=L1+(a0+a1*n)+(h1-x(i))*M;
            Diarkeia(i)=h1+D;
        end
    end
end
```

```

        end
    end

    while z(i)>LCL && z(i)<UCL
        j=j+1;
        if h1+h2*j<x(i)
            z(i)=norminv(rand(),m0,smean);
            if z(i)>UCL || z(i)<LCL
                %false alarm
                Kostos(i)=L0+(a0+a1*n)*(j+1);
                Diarkeia(i)=h1+h2*j;
            end
        elseif h1+h2*j>x(i)
            z(i)=norminv(rand(),m1,smean);
            if z(i)>UCL || z(i)<LCL
                %true alarm
                Kostos(i)=L1+(a0+a1*n)*(j+1)+((h1+h2*j)-x(i))*M;
                Diarkeia(i)=h1+h2*j+D;
            end
        end
    end
end
end
meso_Kostos_kyklou=mean(Kostos)
mesh_Diarkeia=mean(Diarkeia)
meso_Kostos_ana_monada_xronou=meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia

%διάστημα εμπιστοσύνης
s11=std(Kostos);
s22=std(Diarkeia);
YZ=Kostos.*Diarkeia;

s12_2=sum(YZ)/(epan-1)-(sum(Kostos)*sum(Diarkeia))/(epan*(epan-1));
s_2=s11^2-
2*s12_2*(meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia)+(s22^2)*((meso_Kostos_kyklou/mesh_D
iarkeia)^2);
s=sqrt(s_2);
a_95=0.05; a_99=0.01;
z_check_95=norminv(1-(a_95)/2); z_check_99=norminv(1-(a_99)/2);

limit1_95=(meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia)-
((z_check_95)*(sqrt(s_2)))/((mesh_Diarkeia)*(sqrt(epan)))

limit2_95=(meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia)+((z_check_95)*(sqrt(s_2)))/((mesh
_Diarkeia)*(sqrt(epan)))

limit1_99=(meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia)-
((z_check_99)*(sqrt(s_2)))/((mesh_Diarkeia)*(sqrt(epan)))

```

```
limit2_99=(meso_Kostos_kyklou/mesh_Diarkeia)+((z_check_99)*(sqrt(s_2)))/((mesh_Diarkeia)*(sqrt(epsilon)))
```

Παράρτημα Β

```
%SHEWHART
clear all; clc;
format long;

%είσοδος παραμέτρων
D=0;L1=200;a1=1;
a0=0;
M=100;
L0=100;
lamda=0.01;
d=0.5;

for n=0:40

    k=[0:0.01:4];
    kk=1:1:length(k);
    a=zeros(1,length(k));
    b=zeros(1,length(k));
    a(kk)=1-(normcdf(k,0,1)-normcdf(-k,0,1));
    b(kk)=normcdf((k-d*sqrt(n)),0,1)-normcdf((-k-d*sqrt(n)),0,1);

    h=[0.01:0.01:60];
    P0=zeros(length(k),length(h));
    P1=zeros(length(k),length(h));
    P2=zeros(length(k),length(h));
    P3=zeros(length(k),length(h));
    K=zeros(length(k),length(h));

    for j=1:1:length(h)

        P0(1,j)=(1-b(1)).*(1-a(1)).*exp(-lamda.*h(j))./
            (1-b(1).*exp(-lamda.*h(j)));
        P1(1,j)=(1-b(1)).*a(1).*exp(-lamda.*h(j))./(1-b(1).*exp(-lamda.*h(j)));
        P2(1,j)=b(1).*(1-exp(-lamda.*h(j)))./(1-b(1).*exp(-lamda.*h(j)));
        P3(1,j)=(1-exp(-lamda.*h(j))).*(1-b(1))./(1-b(1).*exp(-lamda.*h(j)));
        K(1,j)=(P1(1,j)*L0+P3(1,j)*L1+P2(1,j)*M*h(j)+(P0(1,j)+P1(1,j)+
            P3(1,j))*M*(h(j)-(1-exp(-lamda*h(j)))/lamda))/(h(j)+P3(1,j)*D);

    for i=2:1:length(k)
        P0(i,j)=(1-b(i)).*(1-a(i)).*exp(-lamda.*h(j))./
            (1-b(i).*exp(-lamda.*h(j)));
        P1(i,j)=(1-b(i)).*a(i).*exp(-lamda.*h(j))./(1-b(i).*exp(-lamda.*h(j)));
        P2(i,j)=b(i).*(1-exp(-lamda.*h(j)))./(1-b(i).*exp(-lamda.*h(j)));
        P3(i,j)=(1-exp(-lamda.*h(j))).*(1-b(i))./(1-b(i).*exp(-lamda.*h(j)));
    end
end
```

```

        K(i,j)=(P1(i,j)*L0+P3(i,j)*L1+P2(i,j)*M*h(j)+(P0(i,j)+P1(i,j)+
            P3(i,j))*M*(h(j)-(1exp(lamda*h(j)))/lamda)+a0+a1*n)/(h(j)+P3(i,j)*D);
    end
end
minK=min(min(K));
[gr_min,st_min]=find(K==minK);
hbeltisto=(st_min)*0.01;
kbeltisto=(gr_min-1)*0.01;

lysh(n+1,:)=[minK,hbeltisto,kbeltisto] ;
end

kosth=lysh(:,1);
z=find(kosth==min(kosth));
kbeltisto=lysh(z,3);

if kbeltisto~=0
    beltisto_kostos=round(lysh(z,1),4)
    beltisto_k=lysh(z,3)
    beltisto_h=lysh(z,2)
    beltisto_n=z-1
end

if kbeltisto==0
    beltisto_k=0
    beltisto_n=0
    a=0;
    b=0;
    beltisto_kostos=round(lysh(1,1),4)
    beltisto_h=lysh(1,2)
end
end

```

Παράρτημα Γ

```

%BAYES
clear all; clc;
format long;

%είσοδος παραμέτρων
D=0;L1=200;a1=1;
a0=0;
M=100;
L0=100;
lamda=0.5;
d=1;

for n=0:40

    k=[0:0.01:4];
    a=zeros(1,length(k));

```

```

b=zeros(1,length(k));
a(1)=1-(normcdf(0,0,1)-normcdf(0,0,1));
b(1)=normcdf((0-d*sqrt(n)),0,1)-normcdf((-0-d*sqrt(n)),0,1);

kk=2:1:length(k);
a(kk)=1-(normcdf(k(kk),0,1)-normcdf(-k(kk),0,1));
b(kk)=normcdf((k(kk)-d*sqrt(n)),0,1)-normcdf((-k(kk)-d*sqrt(n)),0,1);

Pcr=[0.0001:0.0001:0.9999];
h1=zeros(length(k),length(Pcr));
h2=zeros(length(k),length(Pcr));
P0=zeros(length(k),length(Pcr));
P1=zeros(length(k),length(Pcr));
P2=zeros(length(k),length(Pcr));

K=zeros(length(k),length(Pcr));
Dia=zeros(length(k),length(Pcr));
Kostos=zeros(length(k),length(Pcr));

for j=1:1:length(Pcr)

    h1(1,j)=(1/lamda)*log(1/Pcr(j)); h2(1,:)=h1(1,:);
    P0(1,j)=(1-b(1)-(1-b(1))*(1-a(1))*exp(-lamda*h2(1,j)))/
        (1-exp(-lamda*h2(1,j))*(1-a(1))+exp(-lamda*h1(1,j))*
        (1-a(1)-b(1)));
    P1(1,j)=(1-a(1))*(1-b(1))*exp(-lamda*h1(1,j))/
        (1-exp(-lamda*h2(1,j))*(1-a(1))+exp(-lamda*h1(1,j))*
        (1-a(1)-b(1)));
    P2(1,j)=1-P0(1,j)-P1(1,j);
    K(1,j)=(P0(1,j)*exp(-lamda*h1(1,j))*a(1,1)+P1(1,j)*
        exp(-lamda*h2(1,j))*a(1,1))*L0+(P0(1,j)*
        (1-exp(-lamda*h1(1,j)))*(1-b(1,1))+P1(1,j)*
        (1-exp(-lamda*h2(1,j)))*(1-b(1,1))+P2(1,j)*
        (1-b(1,1)))*L1+P2(1,j)*M*h2(1,j)+P1(1,j)*M*(h2(1,j)-
        (1-exp(-lamda*h2(1,j)))/lamda)+P0(1,j)*M*(h1(1,j)-
        (1-exp(-lamda*h1(1,j)))/lamda);
    Dia(1,j)=(P0(1,j)*(1-exp(-lamda*h1(1,j)))*(1-b(1))+P1(1,j)*
        (1-exp(-lamda*h2(1,j)))*(1-b(1))+P2(1,j)*
        (1-b(1)))*D+P0(1,j)*h1(1,j)+h2(1,j)*(P1(1,j)+P2(1,j));
    Kostos(1,j)=K(1,j)/Dia(1,j);

    for i=2:1:length(k)
        h1(i,j)=(1/lamda)*log(1+(1-a(i))*
            (1-Pcr(j))/(b(i)*Pcr(j)));
        h2(i,j)=h1(i,j)-(1/lamda)*log(1/Pcr(j));

        P0(i,j)=(1-b(i)-(1-b(i))*(1-a(i))*exp(-lamda*h2(i,j)))/
            (1-exp(-lamda*h2(i,j))*(1-a(i))+
            exp(-lamda*h1(i,j))*(1-a(i)-b(i)));
        P1(i,j)=(1-a(i))*(1-b(i))*exp(-lamda*h1(i,j))/

```

```

        (1-exp(-lamda*h2(i,j))*(1-a(i))+exp(-lamda*
        h1(i,j))*(1-a(i)-b(i)));
    P2(i,j)=1-P0(i,j)-P1(i,j);
    K(i,j)=(P0(i,j)*exp(-lamda*h1(i,j))*a(1,i)+P1(i,j)*
        exp(-lamda*h2(i,j))*a(1,i))*L0+(P0(i,j)*
        (1-exp(-lamda*h1(i,j)))*(1-b(1,i))+P1(i,j)*
        (1-exp(-lamda*h2(i,j)))*(1-b(1,i))+P2(i,j)*
        (1-b(1,i)))*L1+P2(i,j)*M*h2(i,j)+P1(i,j)*M*
        (h2(i,j)-(1-exp(lamda*h2(i,j)))/lamda)+P0(i,j)*M*
        (h1(i,j)-(1-exp(-lamda*h1(i,j)))/lamda)+a0+a1*n;
    Dia(i,j)=(P0(i,j)*(1-exp(-lamda*h1(i,j)))*(1-b(i))+
        P1(i,j)*(1-exp(-lamda*h2(i,j)))*(1-b(i))+
        P2(i,j)*(1-b(i)))*D+P0(i,j)*h1(i,j)+h2(i,j)*
        (P1(i,j)+P2(i,j)));
    Kostos(i,j)=K(i,j)/Dia(i,j);
    end
end
minK=min(min(Kostos));
[gr_min,st_min]=find(Kostos==minK);
Pcr_beltisto=st_min*0.0001;
kbeltisto=(gr_min-1)*0.01;

lysh(n+1,:)=[minK,Pcr_beltisto,kbeltisto] ;

end
kosth=lysh(:,1);
z=find(kosth==min(kosth));
beltisto_k=lysh(z,3)

if beltisto_k~=0
    beltisto_n=z-1
    beltisto_b=normcdf((beltisto_k-d*sqrt(beltisto_n)),0,1)-
        normcdf((-beltisto_k-d*sqrt(beltisto_n)),0,1);
    beltisto_a=1-(normcdf(beltisto_k,0,1)-normcdf(-beltisto_k,0,1));
    beltisto_Pcr=lysh(z,2)
    beltisto_h1=(1/lamda)*log(1+(1-beltisto_a)*
        (1-beltisto_Pcr)/(beltisto_b*beltisto_Pcr))
    beltisto_h2=beltisto_h1-(1/lamda)*log(1/beltisto_Pcr)

    beltisto_kostos=round(lysh(z,1),4)
elseif beltisto_k==0
    a=0;
    b=0;
    beltisto_Pcr=lysh(1,2)
    beltisto_h1=(1/lamda)*log(1/beltisto_Pcr)
    beltisto_h2=beltisto_h1
    beltisto_n=0
    beltisto_kostos=round(lysh(1,1),4)
end

```


Βιβλιογραφία

Hillier, F. S. & Lieberman, G. J., n.d. *Introduction to Operations Research*. 9th ed. s.l.:s.n.

Montgomery, D. C., 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. 6th ed. United States: WILEY.

Nenes, G., 2011. Optimisation of fully adaptive Bayesian \bar{X} charts for infinite-horizon processes. *International Journal of Systems Science*, May.

Nenes, G. & Tagaras, G., 2007. An economic comparison of CUSUM and Shewhart charts.

Tagaras, G. & Nikolaidis, Y., 2001. Comparing the Effectiveness of Various Bayesian \bar{X} control charts.

ΡΟΥΜΕΛΙΩΤΗΣ, Μ. & ΣΟΥΡΑΒΛΑΣ, Σ., χ.χ. *ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Θεωρία & Εφαρμογές*. 2η επιμ. s.l.:ΤΖΙΟΛΑ.

ΤΑΓΑΡΑΣ, Γ., 2001. *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.