



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΛΗΠΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΤΗΡΗΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ  
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ.

Νούση Γκενάιντο Α.Ε.Μ. 1839

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σοφία Παναγιωτίδου

Κοζάνη, Ιούλιος 2021





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΛΗΠΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΤΗΡΗΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ  
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ.

Νούση Γκενάιντο Α.Ε.Μ. 1839

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σοφία Παναγιωτίδου

Κοζάνη, Ιούλιος 2021

## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Σοφία Παναγιωτίδου για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές που μου προσέφερε κατά την διάρκεια συγγραφής της παρούσας εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Σοφία Παναγιωτίδου και τον κ. Γιώργο Νενέ που με βοήθησαν κατά την διάρκεια της πορείας μου ως φοιτητής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου, που με στήριξαν σε αυτή την ιδιαίτερη περίοδο της ζωής μου.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται ένα πρόβλημα ελέγχου και προληπτικής συντήρησης, ενός συστήματος με διακριτές καταστάσεις λειτουργίας, χρησιμοποιώντας την θεώρηση του delay time concept. Το μοντέλο απαρτίζεται από δύο καταστάσεις λειτουργίας που αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό υποκαταστάσεων (προϊόντα που μπορεί να παραχθούν σε κάθε κατάσταση). Αρχικά εξάγονται οι μαθηματικές εξισώσεις κέρδους που εξαρτώνται από την συχνότητα ελέγχου και τη χρονική στιγμή που πραγματοποιείται η προληπτική συντήρηση, οι οποίες περιγράφουν το μοντέλο. Το σημείο μέγιστου κέρδους δίνεται από τον βέλτιστο συνδυασμό αυτών και αποτελεί τη βέλτιστη λύση. Η επαλήθευση της ορθότητας των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε μέσω προσομοίωσης, η οποία υλοποιήθηκε μέσω του MATLAB.

Στην συνέχεια, μελετήθηκε η επίδραση των στοιχείων κόστους στην βέλτιστη λύση και στο αναμενόμενο κέρδος. Τα στοιχεία κόστους που μελετήθηκαν είναι το κόστος ελέγχου, κόστος ελαττωματικής λειτουργίας, κόστος προληπτικής συντήρησης και κόστος αντικατάστασης. Επίσης, μελετάται η επίδραση που έχουν οι παραδοχές που θεωρήθηκαν για την εξαγωγή των εξισώσεων. Τέλος, εξάγονται τα συμπεράσματα της εργασίας.

## Abstract

This thesis presents a study aimed at modeling and optimizing the maintenance and inspection procedures in a discrete-state system. We consider a two-state process, the first state is the normal operating state, i.e., from the beginning until the point of an identifiable defect, while the second state is the delay time state, i.e., from the defect occurrence to failure,. We develop a mathematical model to determine the optimal inspection and maintenance policy. We validate the results through a simulation code in MATLAB.

Based on the mathematical model we study the impact of the different costs on the optimal policy. Such costs are the inspection cost, the defective operation cost, the preventive maintenance cost and the cost of correcting a failure. Furthermore, we study if the assumptions of perfect inspections and the existence of an upper bound to the time of the defect occurrence have a significant effect on the results. Finally, we present the conclusion of this thesis.

# ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΜΗ ΠΡΟΣΒΟΛΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ

Δηλώνω ρητά ότι η παρούσα Διπλωματική Εργασία με τίτλο: Μελέτη διαδικασιών ελέγχου και προληπτικής συντήρησης συστήματος με διακριτές καταστάσεις λειτουργίας καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της εργασίας και αναφέρονται ρητώς μέσα στο κείμενο που συνοδεύουν και η οποία έχει εκπονηθεί στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, υπό την επίβλεψη της κα. Σοφίας Παναγιωτίδου, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή / και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και μόνο.

Copyright (C) Γκενάιντο Νούση & Σοφία Παναγιωτίδου, Ιούλιος 2021, Κοζάνη

## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	iii
Περίληψη.....	iv
Abstract.....	iv
ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΜΗ ΠΡΟΣΒΟΛΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ.....	v
1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Συντήρηση.....	1
1.2 Έλεγχος του εξοπλισμού.....	3
1.2 Delay time concept.....	4
2. Περιγραφή του προβλήματος.....	5
3. Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση.....	9
3.1 Μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης.....	10
3.2 Παραδοχές του μοντέλου.....	11
3.3 Εξισώσεις κέρδους.....	12
4. Αριθμητική επίλυση.....	17
4.1 Κέρδος ανά προϊόν που παράγεται στην κατάσταση 2.....	19
4.2 Κόστος αντικατάστασης.....	21
4.3 Κόστος συντήρησης.....	23
4.4 Κόστος ελέγχου.....	25
5. Μοντέλο προσομοίωσης.....	29
5.1 Μεταβλητές $b1$ και $b2$ .....	29
5.2 Μεταβλητή $z$ .....	29
5.3 Μεταβλητή $y$ .....	30
5.4 Υπολογισμός κέρδους και διάρκεια του κύκλου.....	30
5.5 Μέσο κέρδος ανά προϊόν.....	33
5.6 Διάστημα εμπιστοσύνης.....	33
5.7 Περιγραφή κύκλου.....	34
5.8 Σύγκριση της αριθμητικής επίλυσης με την προσομοίωση.....	35
6. Επεκτάσεις του βασικού μοντέλου.....	39

6.1 Έλεγχος με ενδεχόμενο σφάλμα β είδους .....	39
6.2 Μη πεπερασμένος αριθμός προϊόντων .....	45
7. Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα .....	49
7.1 Συμπεράσματα.....	49
7.2 Μελλοντική έρευνα.....	49
8. Βιβλιογραφία.....	51
Παραρτήματα.....	53
Κώδικας αναλυτικού υπολογισμού .....	53
Κώδικας προσομοίωσης.....	58



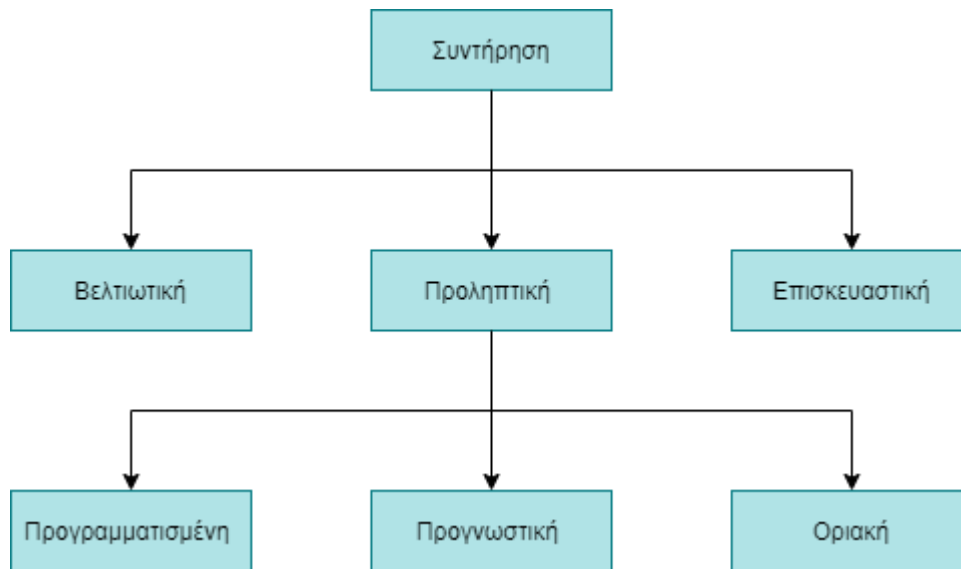
# 1. Εισαγωγή

Τα περισσότερα μηχανήματα και εξοπλισμοί δεν λειτουργούν πάντα υπό τις ίδιες συνθήκες με την πάροδο του χρόνου, αντίθετα μπορεί να υποστούν βλάβες λόγω φθοράς, συνθηκών στο περιβάλλον εργασίας, κακής χρήσης κ.α. Για αυτόν τον λόγο σε μια παραγωγική διαδικασία πέρα από την βασική λειτουργία που είναι η παραγωγή προϊόντων υπάρχουν και άλλες που συμβαίνουν παράλληλα και επηρεάζουν και αυτές σημαντικά το κόστος. Τέτοιες είναι οι διαδικασίες ελέγχου και συντήρησης του εξοπλισμού. Ο σκοπός αυτών των ενεργειών είναι να διατηρούν τον εξοπλισμό σε καλή κατάσταση ώστε τα παραγόμενα προϊόντα να προσφέρουν το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

## 1.1 Συντήρηση

Η συντήρηση έχει ως σκοπό την καλή λειτουργία του εξοπλισμού, περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως ο έλεγχος, οι δοκιμές, οι μετρήσεις, οι αντικαταστάσεις, οι ρυθμίσεις εξαρτημάτων, οι επισκευές και σε μερικές περιπτώσεις διοικητικές αποφάσεις [6]. Ο σχεδιασμός της διαδικασίας συντήρησης και οι ενέργειες που μπορούν να εφαρμοστούν εξαρτώνται από το τελικό επιθυμητό αποτέλεσμα και τη φύση της παραγωγικής διαδικασίας (εξοπλισμός, προϊόντα κ.α.). Επομένως, με την εφαρμογή της αντιμετωπίζουμε τα διάφορα ελαττώματα που μπορεί να εντοπιστούν αλλά και την αποκατάσταση ενδεχόμενης βλάβης. Κάποιες μορφές συντήρησης είναι:

- Συντήρηση με αποκατάσταση βλαβών
- Προγραμματισμένη συντήρηση
- Βελτιωτική συντήρηση
- Προληπτική συντήρηση
- Συντήρηση βάσει κατάστασης
- Ολική παραγωγική συντήρηση



**Εικόνα 1 – Είδη συντήρησης**

Επισκευαστική συντήρηση: Η επισκευαστική συντήρηση δεν αποτελεί σύστημα ενεργειών αλλά αποτελεί σε πολλές περιπτώσεις ένα μεγάλο μέρος της συντήρησης. Η επισκευή είναι ένα αναπόφευκτο κομμάτι της παραγωγικής διαδικασίας, αλλά θα πρέπει να είναι μέρος ενός ευρύτερου προγραμματισμού και όχι απλά αντιμετώπιση βλαβών. Βελτιωμένα είδη συντήρησης μειώνουν το κόστος λειτουργίας και δίνουν μεγαλύτερη δυνατότητα ελέγχου και μελέτης των αιτιών που οδηγούν σε βλάβη.

Βελτιωτική συντήρηση: Σκοπός της βελτιωτικής συντήρησης είναι η ελάττωση ή εξάλειψη των βλαβών που οφείλονται κυρίως στις συνθήκες λειτουργίας. Με την εφαρμογή μιας τέτοιας διαδικασίας εντοπίζονται οι παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά στην εμφάνιση βλαβών με σκοπό την βελτίωση των παραγόντων αυτών. Επομένως, ο αριθμός των βλαβών που απαιτούν συντήρηση ελαττώνεται, καθώς και ο ρυθμός εμφάνισης τους. Δηλαδή να γίνεται πρόληψη και όχι επιδιόρθωση των βλαβών.

Προληπτική συντήρηση: Η προληπτική συντήρηση έχει ως σκοπό να προλαμβάνει την εμφάνιση βλάβης διορθώνοντας ελαττώματα που πιθανώς να θέσουν σε κίνδυνο την ομαλή λειτουργία του εξοπλισμού. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω προγραμματισμένων συστηματικών ελέγχων. Είναι πιο οικονομικό ένα κομμάτι εξοπλισμού να συντηρηθεί προληπτικά από το να έχει προκαλέσει αναπάντεχο σταμάτημα της παραγωγής. Η προληπτική συντήρηση και ο έλεγχος δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας μακροχρόνιων προγραμμάτων, συλλογή στατιστικών στοιχείων και βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας μέσω των αποτελεσμάτων. Η προληπτική συντήρηση χωρίζεται σε τρεις επιμέρους κατηγορίες όπως φαίνεται στην εικόνα 1. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με τη προγνωστική συντήρηση βάσει κατάστασης του εξοπλισμού.

Προγραμματισμένη συντήρηση: Αυτό το σύστημα αποτελείται από την πραγματοποίηση περιοδικών ελέγχων και επεμβάσεων που έχουν ως σκοπό την αντικατάσταση ή την αποκατάσταση λειτουργίας του εξοπλισμού.

Οριακή συντήρηση: Η οριακή συντήρηση όταν είναι αναγκαίο. Απαιτείται λεπτομερής έλεγχος καθώς και ορισμός συγκεκριμένων οριακών τιμών. Αυτά χρειάζονται ώστε να είναι σαφές το πότε αρχίζει να υπάρχει πρόβλημα.

Προγνωστική συντήρηση: Σε αυτό το σύστημα χρησιμοποιούνται στατιστικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό του χρόνου ζωής του εξοπλισμού και συνεπώς του χρόνου μεταξύ βλαβών. Ένα τέτοιο σύστημα απαιτεί την εφαρμογή τακτικών ελέγχων. Με αυτό τον τρόπο προσδιορίζεται η κατάσταση του εξοπλισμού και προβλέπεται ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος λειτουργίας του και προσδιορίζεται η συντήρηση. Ένα τέτοιο σύστημα βοηθάει να παίρνονται λογικές αποφάσεις αντικατάστασης.

Ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη, το οποίο βασίζεται στο θεωρητικό σύστημα της προβλεπτικής συντήρησης είναι η συντήρηση βάσει κατάστασης. Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο ενέργειες συντήρησης πραγματοποιούνται μόνο όταν η φθορά του εξοπλισμού έχει φτάσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Για να είναι εφικτή μια τέτοια μεθοδολογία απαιτείται συχνός έλεγχος της κατάστασης του εξοπλισμού.

## 1.2 Έλεγχος του εξοπλισμού

Ο στόχος του ελέγχου είναι να αναγνωρίσει εάν ένα κομμάτι εξοπλισμού της παραγωγικής διαδικασίας λειτουργεί υπό κανονικές συνθήκες ή όχι, ώστε να προγραμματιστούν και να πραγματοποιηθούν οι κατάλληλες ενέργειες συντήρησης, ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση βλάβης με σκοπό να ελαχιστοποιήσει τον αντίκτυπο στις διαδικασίες και το συνολικό κόστος. Ο έλεγχος μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στα προϊόντα δειγματοληπτικά είτε και απευθείας στον εξοπλισμό. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε ένα σύστημα προβλεπτικής συντήρησης, που μας ενδιαφέρει η κατάσταση του εξοπλισμού, συνήθως ο έλεγχος γίνεται πάνω στον εξοπλισμό μέσω μη καταστροφικών ελέγχων. Κάποιοι από του τρόπους ελέγχου που χρησιμοποιούνται συχνά στη βιομηχανία είναι:

- Ακουστική εκπομπή
- Ανάλυση δόνησης
- Θερμογραφία
- Ραδιογραφία
- Υπέρηχοι
- Διεισδυτικά υγρά
- Έλεγχος με δινορεύματα

Ο έλεγχος επιφέρει κάποιο κόστος, με αποτέλεσμα να μην είναι πάντα σκόπιμο να πραγματοποιούμε έλεγχο μετά από κάθε προϊόν που παράγεται. Επομένως, οι έλεγχοι συμβαίνουν με κάποια συχνότητα, που εξαρτάται από το κόστος του ελέγχου, το κέρδος των προϊόντων, την πιθανότητα εμφάνισης κάποιου ελαττώματος και πόσο αυτό επιδρά στο συνολικό κόστος. Συμπερασματικά, η συχνότητα ελέγχου χρήζει βελτιστοποίησης.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό ο έλεγχος και η συντήρηση συνδέονται άμεσα, ειδικά στην περίπτωση που η μορφή συντήρησης που χρησιμοποιούμε είναι προληπτική συντήρηση βάσει κατάστασης. Σε αυτήν την περίπτωση προσπαθούμε να αποτρέψουμε την εμφάνιση βλάβης

επεμβαίνοντας επιδιορθωτικά στον εξοπλισμό. Οπότε χρησιμοποιούμε τον έλεγχο για να εντοπίσουμε όσο το δυνατό νωρίτερα τη μετάβαση στην ελαττωματική λειτουργία και τότε να συντηρήσουμε προληπτικά τον εξοπλισμό.

Η αλληλεπίδραση του ελέγχου και της συντήρησης, αλλά και η επίδρασή τους στο συνολικό κόστος αποτυπώνεται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων. Μέσα από αυτά τα μοντέλα γίνεται η προσπάθεια να αποτυπωθεί η λειτουργία της διαδικασίας μέσω μαθηματικών εξισώσεων, που λαμβάνουν υπόψη όλες τις σταθερές παραμέτρους (κόστους και πιθανοτήτων), με απώτερο σκοπό να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική συντήρησης η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος λειτουργίας.

## 1.2 Delay time concept

Μια απλουστευμένη περίπτωση είναι να υποθέσουμε ότι ο εξοπλισμός μπορεί να βρίσκεται είτε σε καλή λειτουργία ή να έχει υποστεί βλάβη, με τον εξοπλισμό να αντικαθίσταται. Ωστόσο, μία τέτοια θεώρηση μπορεί να είναι πολύ περιοριστική καθώς ένα μηχάνημα μπορεί να βρεθεί σε αρκετές ελαττωματικές καταστάσεις πριν υποστεί βλάβη.

Ως delay time [5] ονομάζουμε το χρονικό διάστημα από την εμφάνιση κάποιου ελαττώματος έως την εμφάνιση βλάβης, ουσιαστικά θεωρείται πως η βλάβη αποτελείται από δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο ξεκινάει με την εμφάνιση του ελαττώματος έως την εμφάνιση της βλάβης που ο εξοπλισμός παύει να λειτουργεί. Το πρώτο στάδιο μπορεί να εντοπιστεί μέσω ελέγχου ενώ η βλάβη είναι άμεσα ορατή. Αυτή η θεώρηση διευκολύνει την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων κέρδους χωρίς να αποκλίνει δραματικά από την πραγματικότητα, καθώς διασφαλίζει ότι ο εξοπλισμός δεν μπορεί να υποστεί βλάβη ενώ βρίσκεται σε τέλεια κατάσταση αλλά πρέπει να έχει εμφανίσει κάποια σημάδια φθοράς.

Η συνηθέστερη και πιο μελετημένη περίπτωση είναι αυτή της άμεσης εφαρμογής της προληπτικής συντήρησης μετά την ένδειξη μετάβασης στην κατάσταση delay time, όμως εάν το μηχάνημα έχει κάποιο μικρό ελάττωμα η καθυστέρησή της ίσως να είναι οικονομικά προτιμότερη όσον αφορά το κόστος του κύκλου.

## 2. Περιγραφή του προβλήματος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται μία παραγωγική διαδικασία η οποία υπόκειται σε βλάβη, λόγω φθοράς, μέσω της θεώρησης του delay time modeling. Σκοπός της εργασίας είναι η οικονομική βελτιστοποίηση της παρακολούθησης και συντήρησης του εξοπλισμού.

Η υπό μελέτη παραγωγική διαδικασία απαρτίζεται από δύο καταστάσεις λειτουργίας και μια κατάσταση βλάβης [3]. Συγκεκριμένα,

- η κατάσταση 1 είναι η κατάσταση κανονικής λειτουργίας, όπου θεωρούμε ότι τα χαρακτηριστικά του εξοπλισμού δεν έχουν επηρεαστεί από την φθορά που έχει υποστεί.
- Η κατάσταση 2 (delay time) αποτελεί την κατάσταση ελαττωματικής λειτουργίας όπου η φθορά έχει επηρεάσει την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων,
- η κατάσταση 3 σημαίνει ότι ο εξοπλισμός έχει υποστεί βλάβη και απαιτείται αντικατάσταση.

Τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν την κατάσταση 1 είναι:

- Όλα τα προϊόντα που παράγονται ενώ ο εξοπλισμός βρίσκεται υπό κανονική λειτουργία έχουν αξία  $P_{rn}$
- Ο μέγιστος αριθμός των προϊόντων που μπορούν να παραχθούν είναι πεπερασμένος και ισούται με  $N$
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου (αριθμού τεμαχίων) μέχρι την εμφάνιση του ελαττώματος είναι  $f(x)$

Τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν την κατάσταση 2 είναι:

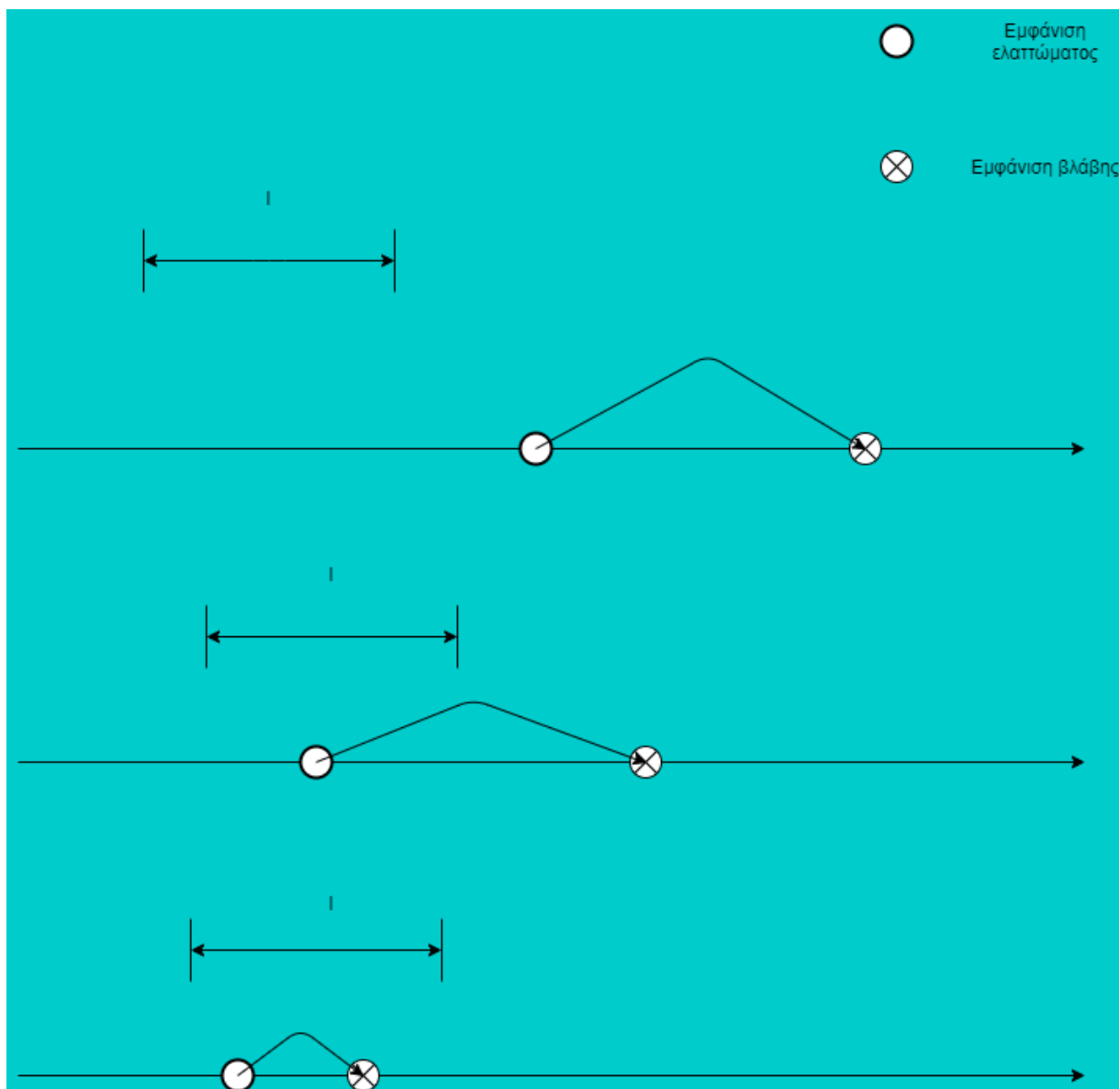
- Όλα τα προϊόντα που παράγονται ενώ ο εξοπλισμός βρίσκεται υπό κανονική λειτουργία έχουν αξία  $P_{rh}$
- Ο μέγιστος αριθμός των προϊόντων που μπορούν να παραχθούν είναι πεπερασμένος και ισούται με  $H$
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου (αριθμού τεμαχίων) μέχρι την εμφάνιση της βλάβης είναι  $h(x)$
- Η ελαττωματική λειτουργία εντοπίζεται μέσω ελέγχου

Τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν την κατάσταση 3 είναι:

- Ο εξοπλισμός σταματάει να λειτουργεί
- Η βλάβη είναι άμεσα ορατή
- Ο εξοπλισμός αντικαθίσταται άμεσα

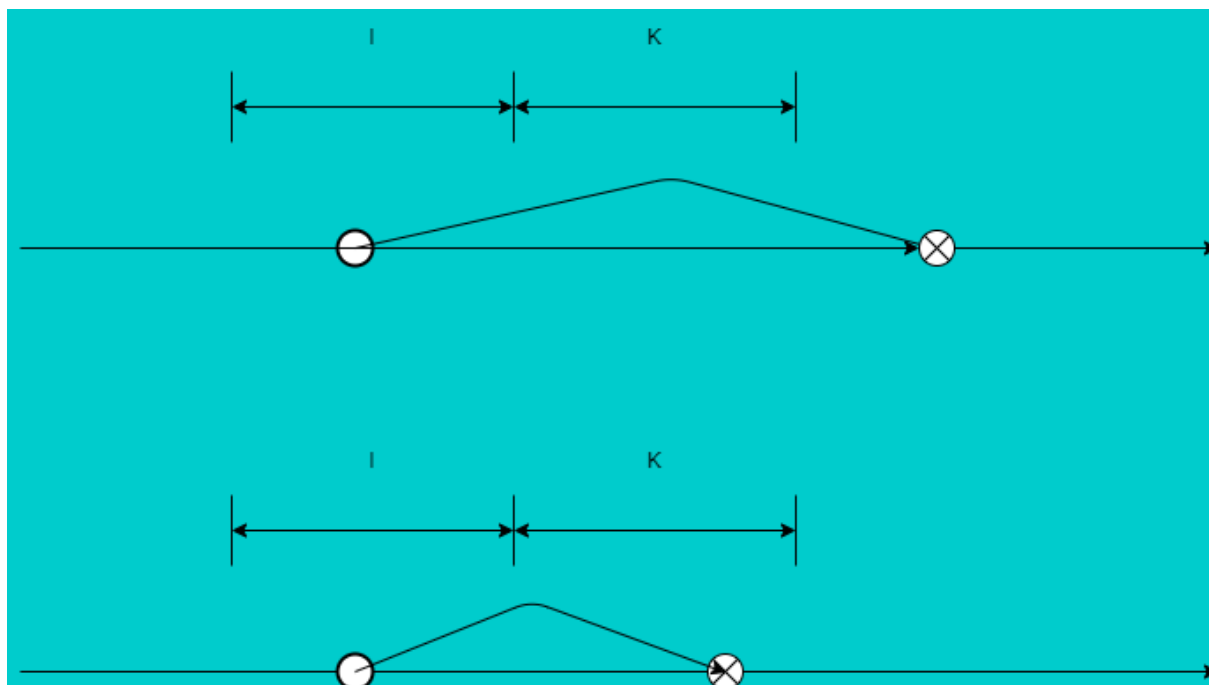
Όπως γίνεται αντιληπτό εάν δεν πραγματοποιούνται βελτιωτικές κινήσεις η μέση ανταμοιβή ανά προϊόν θα εξαρτάται μόνο από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και από τα στοιχεία κόστους. Οι καταστάσεις που είναι εφικτό να επέμβουμε είναι οι 1 και 2, καθώς εάν έχει επέλθει η βλάβη τότε η αντικατάσταση είναι η μόνη επιτρεπτή κίνηση για να συνεχιστεί η λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας. Οι ενέργειες, που μελετιούνται σε αυτήν την εργασία,

όπου συνεισφέρουν στο κόστος και μπορούν να το μειώσουν είναι η συχνότητα ελέγχου και η προληπτική συντήρηση του εξοπλισμού. Ο έλεγχος συμβαίνει στην κατάσταση 1 ενώ η συντήρηση στην κατάσταση 2 [4].



Εικόνα 2 - Τα τρία ενδεχόμενα μετά τον έλεγχο

Ο σκοπός του ελέγχου είναι να προσδιορίζει σε ποια κατάσταση λειτουργίας βρίσκεται ο εξοπλισμός μας, οι έλεγχοι πραγματοποιούνται με σταθερή συχνότητα και επαναλαμβάνονται μέχρι να δώσουν την ένδειξη ότι έχουμε μεταβεί στην κατάσταση 2. Η συχνότητα ελέγχου επιδρά άμεσα στο κόστος του κύκλου, καθώς εάν η συχνότητα ελέγχου είναι μεγαλύτερη υπάρχει μεγαλύτερη ευελιξία όσον αφορά την απόφαση της συντήρησης και την πρόληψη της βλάβης αλλά αυξάνει το κόστος ελέγχου. Αντίθετα, με μικρότερη συχνότητα μειώνεται το κόστος ελέγχου αλλά αυξάνεται το κόστος συντήρησης. Όταν, ο έλεγχος εντοπίσει την μετάβαση τότε λαμβάνεται η απόφαση για το πότε πραγματοποιούμε προληπτική συντήρηση. Εάν η απόφαση είναι να μην πραγματοποιηθεί η συντήρηση αμέσως μετά τον εντοπισμό της μετάβασης [2], τότε λαμβάνουμε υπόψη την πιθανότητα να συμβεί η βλάβη πριν την προγραμματισμένη προληπτική συντήρηση. Στις εικόνες 2 και 3 παρουσιάζονται τα ενδεχόμενα κατά τον έλεγχο και την προληπτική συντήρηση αντίστοιχα.



Εικόνα 3 - Τα ενδεχόμενα αφού εντοπιστεί το ελάττωμα





### 3. Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία μοντελοποίησης της παραγωγικής διαδικασίας με σκοπό την εξαγωγή των εξισώσεων κέρδους που την χαρακτηρίζουν. Η βελτιστοποίηση αυτών των εξισώσεων αποτελεί την οικονομικά βέλτιστη στρατηγική συντήρησης. Το μοντέλο περιγράφεται με τη χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων, όπου μέσω αυτών υπολογίζονται οι πιθανότητες μετάβασης.

Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται οι παράμετροι, οι συμβολισμοί και τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται καθώς και μια σύντομη περιγραφή τους.

$f(x)$	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης στην κατάσταση 2 από την κατάσταση 1, για $1 \leq x \leq N$
$h(x)$	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης στην κατάσταση 3 από την κατάσταση 2, για $1 \leq x \leq H$
$p_{x \rightarrow y}^{(i)}$	Η πιθανότητα μετά από χρόνο (βήματα) $i$ να μεταβούμε από το προϊόν $x$ στο προϊόν $y$
$q(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x - 1)}$	Η πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας, κατά την παραγωγή του προϊόντος $x$ , από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2, για $1 \leq x \leq N$
$g(x) = \frac{h(x)}{1 - H(x - 1)}$	Η πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας, κατά την παραγωγή του προϊόντος $x$ , από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3, για $1 \leq x \leq H$
$Prn$	Κέρδος ανά παραγόμενο προϊόν στην κατάσταση 1
$Prh$	Κέρδος ανά παραγόμενο προϊόν στην κατάσταση 2
$cr$	Κόστος προληπτικής συντήρησης
$cf$	Κόστος αποκατάστασης βλάβης
$ci$	Κόστος ελέγχου

Πίνακας 3.1- Πίνακας συμβολισμών

### 3.1 Μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης

Η παραγωγική διαδικασία περιγράφεται επαρκώς από μία μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων και στάσιμες πιθανότητες μετάβασης. Οι πιθανότητες μετάβασης παρατίθενται στο μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης (πίνακας 3.2), οι οποίες

- για  $1 \leq x \leq N$  (κατάσταση 1) περιγράφονται από την  $q(x)$ ,
- για  $N + 1 \leq x \leq H$  (κατάσταση 2) περιγράφονται από την  $g(x)$
- και για  $x = N + H + 1$  (κατάσταση 3) η πιθανότητα μετάβασης ισούται με 1.

Όπως γίνεται αντιληπτό εάν δεν εφαρμοστεί κάποια στρατηγική συντήρησης, το μητρώο θα αποτελείται από  $N + H$  μεταβατικές καταστάσεις και μία απορροφητική κατάσταση και το μέσο κόστος του κύκλου θα ισούται με

$$V = E(n) \cdot Prn + E(h) \cdot Prh + Cf \quad (3.1)$$

ενώ η μέση διάρκεια του κύκλου θα ισούται με

$$T = E(n) + E(h) \quad (3.2)$$

όπου  $E(n)$  και  $E(h)$  ,είναι ο μέσος αριθμός παραγόμενων προϊόντων στην κατάσταση 1 και κατάσταση 2 αντίστοιχα.

Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι η κατάσταση 3 δεν είναι απορροφητική, αλλά όταν φτάσουμε σε αυτή επιστρέφουμε στην αρχή της κατάστασης 1. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το μητρώο να περιγράφει παραπάνω από έναν κύκλο, όπου για όλους θα ισχύουν οι σχέσεις **3.1** και **3.2**.

	Κατάσταση 1					Κατάσταση 2				Βλάβη	
	1.n	2.n	...	N-1.n	N.n	1.w	2.w	...	H-1.w	H.w	D
1.n	0	1-q(1)	...	0	0	q(1)	0	...	0	0	0
2.n	0	0	...	0	0	q(2)	0	...	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
N-1.n	0	0	...	0	1-q(N-1)	q(N-1)	0	...	0	0	0
N.n	0	0	...	0	0	1	0	...	0	0	0
1.w	0	0	...	0	0	0	1-g(1)	...	0	0	g(1)
2.w	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	g(2)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
H-1.w	0	0	...	0	0	0	0	...	0	1-g(H-1)	g(H-1)
H.w	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	1
D	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	1

Πίνακας 3.2 - Μητρώο μεταβάσεων

Στην περίπτωση που μετά την βλάβη επιστρέφουμε στην πρώτη κατάσταση του μητρώου και έχουμε έναν νέο κύκλο, αυτό που αλλάζει είναι η τελευταία γραμμή του μητρώου όπου γίνεται ίδια με την πρώτη.

### 3.2 Παραδοχές του μοντέλου

Οι παραδοχές, του μοντέλου, που θεωρήθηκαν για την εξαγωγή των εξισώσεων του κεφαλαίου 3.3 είναι οι εξής :

- Η παραγωγική διαδικασία περνάει πάντα από την κατάσταση 2 (delay time), δηλαδή η πιθανότητα να μεταβούμε από ένα προϊόν της κατάστασης 1 στην βλάβη είναι 0.
- Ο αριθμός των προϊόντων που μπορεί να παραχθούν στις καταστάσεις 1 και 2 είναι πεπερασμένος και ισούται με N και H αντίστοιχα.
- Η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 γίνεται μετά την παραγωγή του προϊόντος οπότε θεωρούμε ότι αυτό έχει αξία  $P_{rn}$ .

- Η μετάβαση από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3 γίνεται κατά την παραγωγή του προϊόντος οπότε θεωρούμε ότι αυτό δεν παράγεται.
- Ο έλεγχος δείχνει με ακρίβεια σε ποια κατάσταση είμαστε.
- Όταν μεταβούμε στην κατάσταση 3 η παραγωγική διαδικασία διακόπτεται αυτόματα και γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί βλάβη.

### 3.3 Εξισώσεις κέρδους

Οι εξισώσεις που ακολουθούν αποτελούνται από αθροιστικούς όρους με αρκετούς δείκτες για αυτό ακολουθεί ένας πίνακας με την εξήγησή τους.

$i$	Σύνολο των ελέγχων που έχουν πραγματοποιηθεί έως αυτό το προϊόν
$j$	Σύνολο των προϊόντων που έχουν παραχθεί στην κατάσταση 2 πριν εντοπιστεί η μετάβαση
$r$	Σύνολο των προϊόντων που έχουν παραχθεί στην κατάσταση 2 αφού έχει εντοπιστεί η μετάβαση
$s$	Σύνολο των προϊόντων που έχουν παραχθεί στην κατάσταση 1 όταν συμβεί η βλάβη ανάμεσα σε 2 διαδοχικούς ελέγχους
$a$	Σύνολο των προϊόντων που έχουν παραχθεί στην κατάσταση 2 όταν συμβεί η βλάβη ανάμεσα σε 2 διαδοχικούς ελέγχους

Πίνακας 3.3 - Δείκτες των αθροιστών

Το μέγιστο κέρδος της παραγωγικής διαδικασίας επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της βέλτιστης στρατηγικής συντήρησης, η στρατηγική αποτελείται από την επιλογή δύο παραμέτρων:

- $I$ , συχνότητα ελέγχου στην κατάσταση 1
- και  $k$ , χρόνος παραμονής (αριθμός προϊόντων) στην κατάσταση 2 μέχρι να εφαρμοστεί η συντήρηση.

Το κέρδος της παραγωγικής διαδικασίας ανά προϊόν δίνεται από την σχέση 3.3.

$$V(I, k) = \frac{C_{\text{κύκλου}}}{T_{\text{κύκλου}}} \quad (3.3)$$

Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ελέγχους της παραγωγικής διαδικασίας μπορούν να συμβούν τρία διαφορετικά ενδεχόμενα:

- η διαδικασία να παραμείνει στην κατάσταση 1
- η διαδικασία να έχει μεταβεί στην κατάσταση 2
- η διαδικασία να μεταβεί στην κατάσταση 2 και μετά στην κατάσταση 3 πριν την εφαρμογή του ελέγχου.

Έστω ότι το τελευταίο προϊόν που ελέγχθηκε ήταν το  $I_1$ , τότε η πιθανότητα να συμβεί το πρώτο ενδεχόμενο είναι:

$$P_1 = p_{I_1+1 \rightarrow I_1+I+1}^{(I)} = \prod_{i=I_1+1}^{I_1+I+1} (1 - (q(i))) \quad (3.4)$$

Εάν συμβεί αυτό το ενδεχόμενο τότε πραγματοποιούμε ξανά έλεγχο μετά από χρόνο  $I$ .

Εάν η ένδειξη του ελέγχου είναι πως η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 2, τότε πρέπει να ληφθεί η απόφαση για το πότε να εφαρμοστεί η προληπτική συντήρηση. Η παράμετρος  $k$  καθορίζει πόσα προϊόντα παράγονται πριν την συντήρηση, από την στιγμή της ένδειξης του ελέγχου. Οπότε η εξίσωση κέρδους και η μέση διάρκεια του κύκλου για αυτό το ενδεχόμενο είναι:

$$C_2 = \sum_{j=0}^{I-1} \left[ p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot ((k+j) \cdot Prh - cr) + \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot ((j+r) \cdot Prh - cf) \right) + \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot (I_1 + I - j) \cdot Prn - (i+1) \cdot c_i \right] \quad (3.5)$$

$$T_2 = \sum_{j=0}^{I-1} \left[ p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot (k+j) + \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot (j+r) \right) + \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot (I_1 + I - j) \right] \quad (3.6)$$

Ενώ, η πιθανότητά μετά τον έλεγχο να έχει συμβεί το δεύτερο ενδεχόμενο είναι:

$$P_2 = \sum_{j=0}^I p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \quad (3.7)$$

Όταν το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι πως η διαδικασία βρίσκεται στην ελαττωματική κατάσταση, ο αριθμός των προϊόντων που μπορεί να έχει παραχθεί με την διαδικασία να βρίσκεται σε αυτή είναι από μηδέν έως  $I-1$ , όπου αυτά είναι και τα όρια του αθροίσματος. Στην εξίσωση **3.5** ο πρώτος όρος υπολογίζει το κέρδος, όταν η προγραμματισμένη συντήρηση προλαβαίνει την εμφάνιση βλάβης, πολλαπλασιασμένο με την πιθανότητα να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο. Ενώ, ο δεύτερος υπολογίζει το κέρδος όταν η βλάβη εμφανίζεται πριν την προγραμματισμένη συντήρηση πολλαπλασιασμένο με την πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου. Ο τρίτος όρος υπολογίζει το κέρδος από τα προϊόντα που παράχθηκαν σε κανονική λειτουργία ανάλογα με την τιμή του  $j$ . Η μορφή της **3.6** είναι παρόμοια και υπολογίζει τον αριθμό των παραγόμενων προϊόντων για τα αντίστοιχα ενδεχόμενα.

Τέλος, η πιθανότητα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ελέγχους να μεταβούμε στη κατάσταση 3, το αναμενόμενο κέρδος και η μέση διάρκεια του κύκλου, εάν συμβεί το ενδεχόμενο αυτό, δίνονται από τις σχέσεις **3.8**, **3.9** και **3.10** αντίστοιχα.

$$P_3 = p_{I_1+1 \rightarrow D}^{(I)} = \sum_{s=1}^{I-1} \left( p_{I_1+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \left( \sum_{a=1}^{I-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a-1)} \cdot g(a) \right) \right) \right) \quad (3.8)$$

$$C_3 = \sum_{s=1}^{I-1} \left[ p_{I_1+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=1}^{I-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot \left( (a-1) \cdot Prh + (I_1 + s) \cdot prn - cf - i \cdot c_i \right) \right) \right] \quad (3.9)$$

$$T_3 = \sum_{s=1}^{I-1} \left( p_{I_1+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=1}^{I-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot (I_1 + s + a - 1) \right) \right) \quad (3.10)$$

Στην περίπτωση που η διαδικασία μεταβαίνει στην κατάσταση 3 ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ελέγχους, ο αριθμός των προϊόντων που έχουν παραχθεί σε κατάσταση κανονικής λειτουργίας είναι από 1 έως  $I-1$ , ενώ σε ελαττωματική κατάσταση είναι από 1 έως  $I-s$ . Η εξίσωση **3.9** υπολογίζει το κέρδος για όλους τους συνδυασμούς  $s$  και  $a$  πολλαπλασιασμένο με την αντίστοιχη πιθανότητα. Η εξίσωση **3.10** είναι αντίστοιχη αλλά έχει μόνο τον αριθμό των προϊόντων χωρίς τα στοιχεία κόστους.

Η γενική εξίσωση κέρδους του μοντέλου, που περιγράφει κατάλληλα την παραγωγική διαδικασία προκύπτει συνδυάζοντας τις εξισώσεις **3.3** έως **3.10**. Η σχέση **3.11** είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά, για αυτό το λόγο σε αυτήν την εργασία η λύση προσεγγίζεται αριθμητικά για γνωστές κατανομές και στοιχεία κόστους.

$$V(I, k) = \frac{\sum_{i=0}^{y-1} \left( \left( p_{1 \rightarrow i, I+1}^{(i, I)} \right) (C_2 + C_3) \right) + p_{1 \rightarrow (y-1), I+1}^{((y-1), I)} \cdot \sum_{j=0}^{I-1} \left\{ p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I)} \cdot c_i \right\}}{\sum_{i=0}^{y-1} \left( \left( p_{1 \rightarrow i, I+1}^{(i, I)} \right) (T_2 + T_3) \right)} \quad (3.11)$$

$$y = \frac{N}{I} \quad (3.12)$$

$$I_1 = i \cdot I \quad (3.13)$$

Η εξίσωση **3.11** ισχύει εάν το  $y$  είναι ακέραιος αριθμός, δηλαδή ο συνολικός αριθμός των ελέγχων καλύπτει πλήρως όλα τα προϊόντα στην κατάσταση 1. Στην περίπτωση που αυτό δεν ισχύει η **3.11** διαμορφώνεται αναλόγως ώστε να περιγράψει σωστά την παραγωγική διαδικασία.

$$y' = \lfloor y \rfloor \quad (3.14)$$

$$I' = N - y' \cdot I \quad (3.15)$$

Η μεταβλητή  $y'$  προσδιορίζει τον μέγιστο αριθμό ελέγχων που μπορεί να πραγματοποιηθούν για ένα συγκεκριμένο  $I$ , ενώ η  $I'$  υπολογίζει τον αριθμό των προϊόντων που απομένουν μετά τον τελευταίο προγραμματισμένο έλεγχο. Οι παρακάτω εξισώσεις υπολογίζουν το κέρδος στην περίπτωση που το αποτέλεσμα του τελευταίου ελέγχου είναι πως βρισκόμαστε στην κατάσταση 1.

$$C'_2 = \sum_{j=0}^{I'-1} \left[ p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I')} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot ((j+r) \cdot Prh - cf) \right) + \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I')} \cdot (I_1 + I - j) \cdot Prn - (y') \cdot c_i \right] \quad (3.16)$$

$$T'_2 = \sum_{j=0}^{I'-1} \left[ p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I')} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot (j+r) \right) + \right. \\ \left. + p_{I_1+1 \rightarrow N+j+1}^{(I')} \cdot (I_1 + I - j) \right] \quad (3.17)$$

$$C'_3 = \sum_{s=1}^{I'-1} \left[ \sum_{a=1}^{I'-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot ((a-1) \cdot Prh + (I_1 + s) \cdot prn - cf - y' \cdot c_i) \right) \right. \\ \left. p_{I_1+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \right] \quad (3.18)$$

$$T'_3 = \sum_{s=1}^{l'-1} \left( p_{l_1+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=1}^{l-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot (l_1 + s + a - 1) \right) \right) \quad (3.19)$$

$$V'(l, k) = \frac{\sum_{i=0}^{y'-1} \left( \binom{i \cdot l}{1 \rightarrow i \cdot l + 1} (C_2 + C_3) \right) + p_{1 \rightarrow y' \cdot l + 1}^{(y' \cdot l)} \cdot (C'_2 + C'_3)}{\sum_{i=0}^{y'} \left( \binom{i \cdot l}{1 \rightarrow i \cdot l + 1} (T_2 + T_3) \right) + p_{1 \rightarrow y' \cdot l + 1}^{(y' \cdot l)} \cdot (T'_2 + T'_3)} \quad (3.20)$$



## 4. Αριθμητική επίλυση

Οι μαθηματικές εξισώσεις του κεφαλαίου 3 δεν είναι εύκολο να λυθούν αναλυτικά και για αυτό το λόγο η επίλυσή τους θα υλοποιηθεί αριθμητικά με χρήση του MATLAB. Συγκεκριμένα θα υπολογιστεί η βέλτιστη λύση (συχνότητα ελέγχου, χρόνος παραμονής στην ελαττωματική κατάσταση πριν τη συντήρηση) και το βέλτιστο κέρδος ανά προϊόν που προκύπτει από την εφαρμογή της. Η βέλτιστη λύση εξαρτάται από διάφορα στοιχεία κόστους που εξαρτώνται από την παραγωγική διαδικασία και δεν είναι δυνατόν να επέμβουμε ώστε να τα μεταποιήσουμε. Τα στοιχεία κόστους που μας ενδιαφέρουν είναι:

- Prn: κέρδος ανά προϊόν που παράγεται στην κατάσταση 1
- Prh: κέρδος ανά προϊόν που παράγεται στην κατάσταση 2
- cf: κόστος αντικατάστασης
- cr: κόστος συντήρησης
- ci: κόστος ελέγχου

<b>Prn</b>	5
<b>Prh</b>	4.5
<b>Cf</b>	45
<b>Cr</b>	30
<b>ci</b>	1

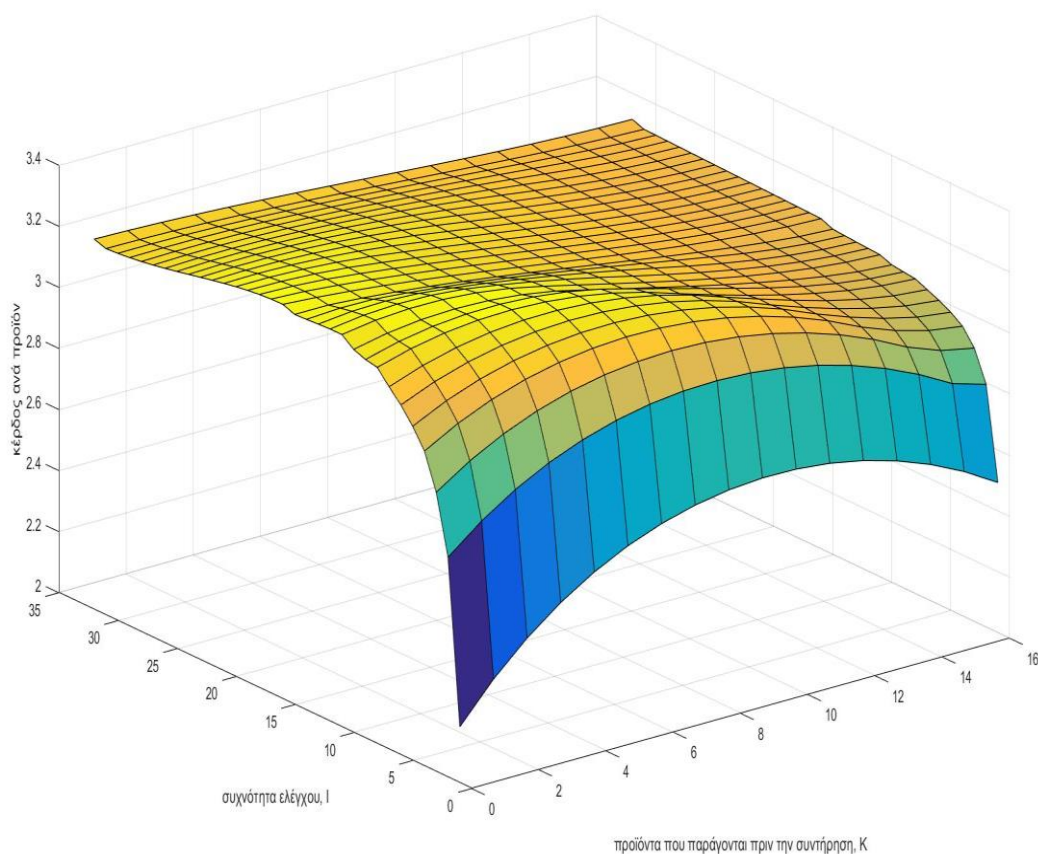
Πίνακας 4.1 – Στοιχεία κόστους για την γενική επίλυση

Επιπλέον, η βέλτιστη λύση επηρεάζεται από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβάσεων από κάθε κατάσταση  $f(x)$  και  $h(x)$  από τις οποίες προκύπτουν οι  $q(x)$  και  $g(x)$  αντίστοιχα. Θεωρήθηκε ομοιόμορφη κατανομή για τη μετάβαση από την 1 στη 2 και μία γραμμικώς αύξουσα κατανομή για τον χρόνο από τη 2 στη βλάβη. Οι συναρτήσεις που προέκυψαν και χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση είναι:

$$q(x) = \frac{1}{N - x - 1} \quad \text{για } 0 < x \leq N$$

$$g(h) = \frac{h}{\left[ \frac{H \cdot (H + 1)}{2} - \frac{h \cdot (h - 1)}{2} \right]} \quad \text{για } 0 < h \leq H$$

όπου,  $N=32$  και  $H=16$ .



**Εικόνα 4 – Γραφική απεικόνιση της αριθμητικής λύσης**

Στην Εικόνα 4 απεικονίζεται η γραφική απεικόνιση της αριθμητικής επίλυσης, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία κόστους του Πίνακα 4.1, όπου στον άξονα x είναι ο χρόνος που μεσολαβεί πριν την συντήρηση, στον y άξονα η συχνότητα ελέγχου και στον άξονα z υπάρχει το κέρδος ανά προϊόν. Το μέγιστο της καμπύλης αποτελεί το μέγιστο κέρδος ανά προϊόν και την βέλτιστη λύση καθώς επίσης προσδιορίζει τα I και k. Η βέλτιστη λύση που προκύπτει δίνεται στον Πίνακα 4.2.

<b>I</b>	<b>11</b>
<b>k</b>	<b>2</b>
<b>Κέρδος/ προϊόν</b>	<b>3.3087</b>

**Πίνακας 4.2 – Βέλτιστη λύση**

Οπότε το βέλτιστο κέρδος που μπορεί να επιτευχθεί είναι 3.3087/προϊόν, το οποίο προκύπτει εάν ελέγχουμε την διαδικασία κάθε 11 προϊόντα στην κατάσταση 1 και πραγματοποιούμε την προληπτική συντήρηση μετά την παραγωγή 2 προϊόντων στην κατάσταση 2.

Αντίθετα, η βέλτιστη λύση στην περίπτωση της άμεσης συντήρησης είναι  $I=16$  και το κέρδος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3.292. Αντιλαμβανόμαστε πως η εφαρμογή συντήρησης αμέσως μετά τον εντοπισμό της μετάβασης δεν αποτελεί την οικονομικά βέλτιστη λύση, αν και εφαρμόζεται αρκετά συχνά στην πραγματικότητα.

Θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσουμε πόσο επηρεάζει τη βέλτιστη λύση η μεταβολή των στοιχείων κόστους (Πίνακας 4.1). Για αυτό τον λόγο στις υπόλοιπες ενότητες αυτού του κεφαλαίου θα υπολογιστεί η βέλτιστη λύση για διάφορα σεντ τιμών κόστους. Σε όλες τις περιπτώσεις θα μεταβάλλεται μόνο μία τιμή τη φορά, τα στοιχεία κόστους που θα μένουν σταθερά θα έχουν τις τιμές του Πίνακα 4.1, ενώ τα  $P_{rn}$ ,  $q(x)$  και  $g(x)$  θα είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις.

#### 4.1 Κέρδος ανά προϊόν που παράγεται στην κατάσταση 2

Σε αυτή την ενότητα θα υπολογιστεί η βέλτιστη λύση μεταβάλλοντας το κέρδος ανά παραγόμενο προϊόν στην κατάσταση 2 διατηρώντας τα υπόλοιπα στοιχεία σταθερά. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον Πίνακα 4.1.

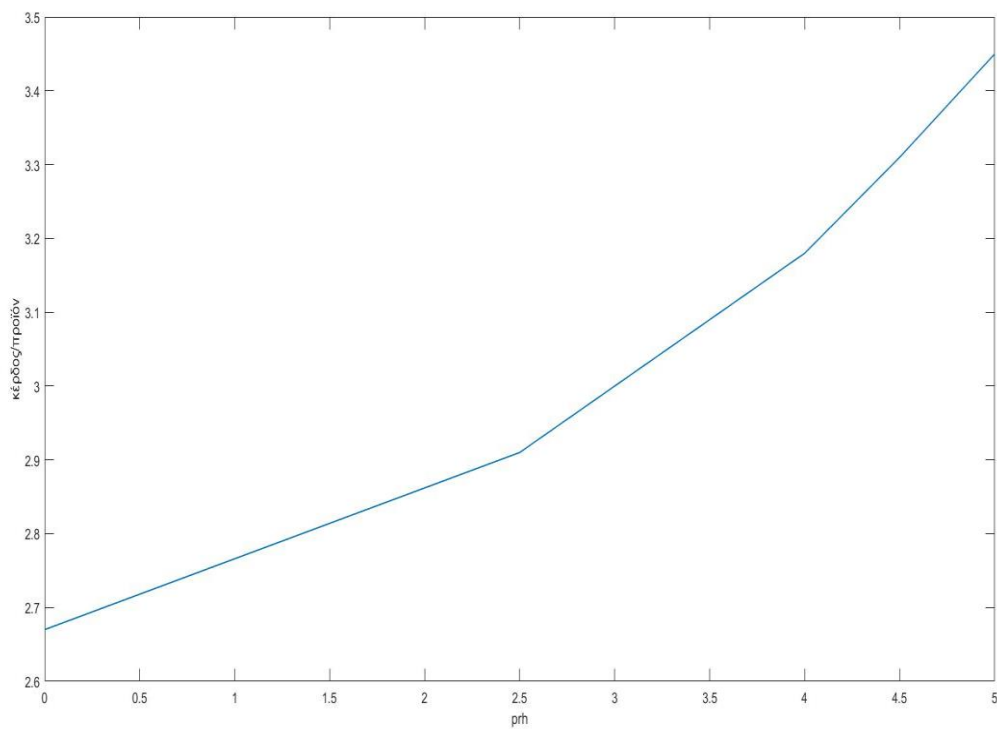
<b><math>P_{rn}</math></b>	5
<b><math>P_{rh}</math></b>	0, 2.5, 4, 4.5 και 5
<b><math>C_f</math></b>	45
<b><math>C_r</math></b>	30
<b><math>c_i</math></b>	1

Πίνακας 4.3 – Σεντ δεδομένων 1

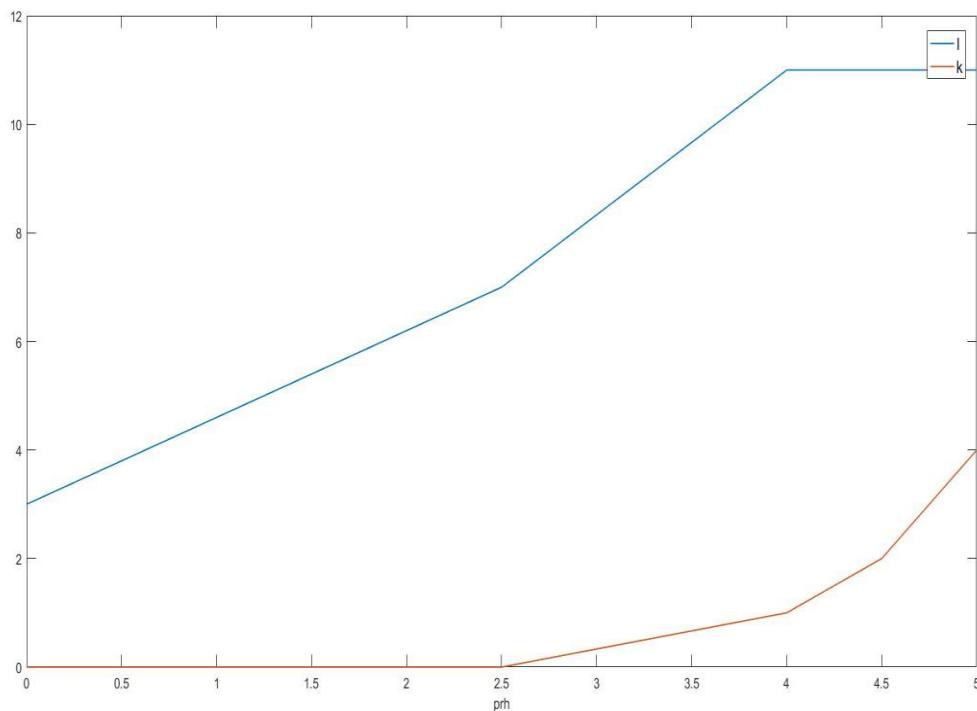
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα για το πρώτο σεντ δεδομένων καθώς και ένα διάγραμμα του κέρδους.

	<b>I</b>	<b>k</b>	<b>Κέρδος/προϊόν</b>	<b>I (k=0)</b>	<b>Κέρδος/προϊόν (k=0)</b>
<b>0</b>	3	0	2.67	3	2.67
<b>2.5</b>	7	0	2.91	7	2.91
<b>4</b>	11	1	3.18	11	3.18
<b>4.5</b>	11	2	3.31	16	3.29
<b>5</b>	11	4	3.45	16	3.42

**Πίνακας 4.4 – Αποτελέσματα για σετ 1**



**Εικόνα 5 – Διάγραμμα κέρδους για σετ 1 (P<sub>rh</sub>)**



**Εικόνα 6 – Διαγράμματα I και k για σεν 1 (Prh)**

Από τις εικόνες 5 και 6 φαίνεται πως υπάρχει μία θετική συσχέτιση του Prh με το κέρδος, όπως ήταν αναμενόμενο, επιπλέον αυτή σχέση δεν μοιάζει γραμμική αλλά εκθετική. Επίσης, όσο μικρότερη είναι η τιμή του Prh, όσο δηλαδή απομακρύνεται από το Prn τόσο μειώνεται και ο βέλτιστος χρόνος παραμονής στην κατάσταση 2 ενώ συμβαίνει το αντίθετο με την συχνότητα ελέγχου. Επιπλέον, ακόμα και στην οριακή τιμή που το Prh είναι ίσο με 5 (δηλαδή δεν έχουμε κόστος λειτουργίας στην ελαττωματική κατάσταση) το χρονικό σημείο που θα πραγματοποιηθεί η συντήρηση απαιτεί βελτιστοποίηση.

## 4.2 Κόστος αντικατάστασης

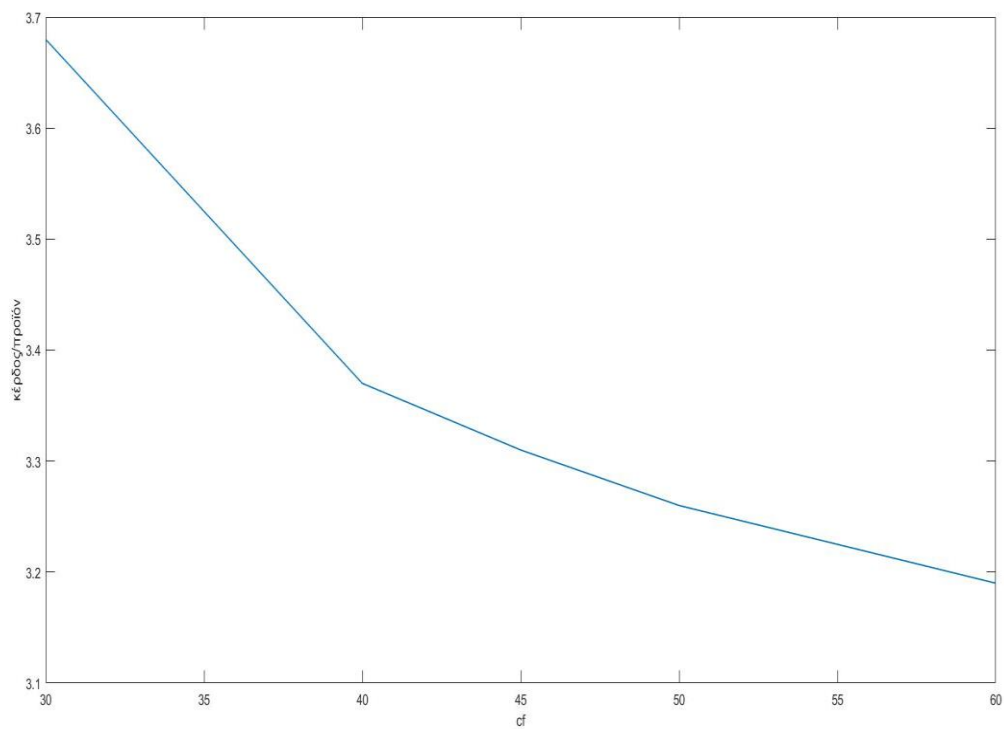
Στην συνέχεια παρατηρούμε πώς επηρεάζει τη βέλτιστη λύση η μεταβολή του κόστους αντικατάστασης  $c_f$  διατηρώντας τα υπόλοιπα στοιχεία σταθερά. Παρομοίως, με την προηγούμενη ενότητα θα δοκιμάσουμε 5 διαφορετικές τιμές για το  $c_f$  οι οποίες αναφέρονται παρακάτω.

<b>Prn</b>	5
<b>Prh</b>	4.5
<b>Cf</b>	30,40, 45,50 και 60
<b>Cr</b>	30
<b>ci</b>	1

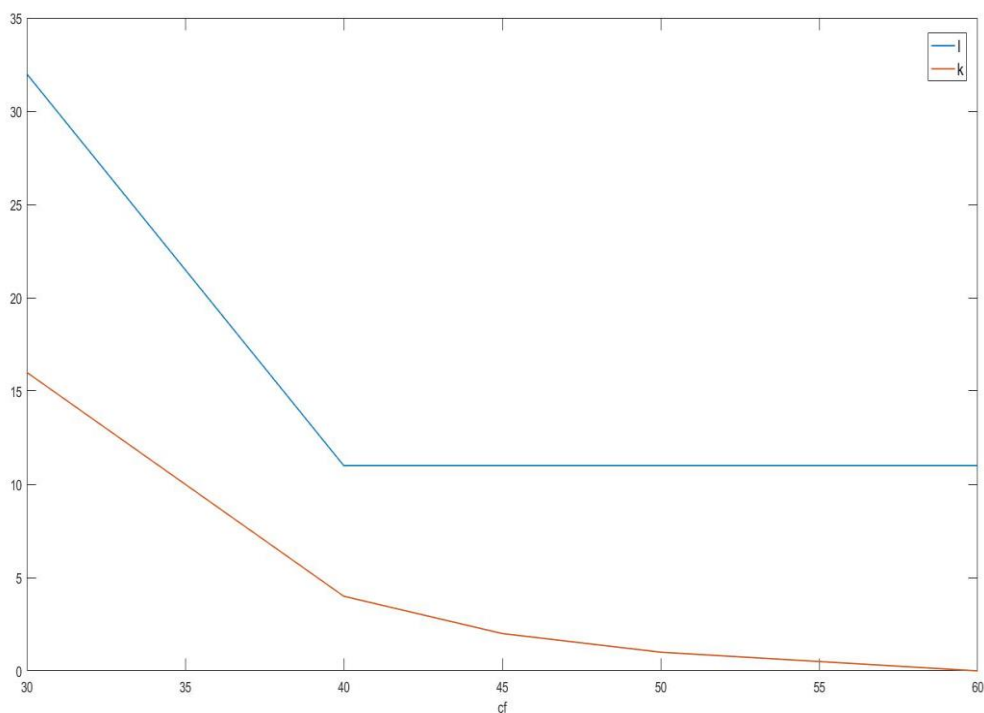
**Πίνακας 4.5 – Σεν δεδομένων 2**

	I	k	Κέρδος/προϊόν	I (k=0)	Κέρδος/προϊόν (k=0)
<b>30</b>	32	16	3.68	32	3.61
<b>40</b>	11	4	3.37	16	3.36
<b>45</b>	11	2	3.31	16	3.29
<b>50</b>	11	1	3.26	16	3.22
<b>60</b>	11	0	3.19	11	3.19

Πίνακας 4.6 – Αποτελέσματα για σεν 2



Εικόνα 7 – Διάγραμμα κέρδους για σεν 2 (Cf)



**Εικόνα 8 - Διαγράμματα l και k για σει 2 (Cf)**

Σε αυτή την περίπτωση διαπιστώνουμε ότι για αυτό το σει τιμών η μεταβολή του κόστους αντικατάστασης δεν επηρεάζει σημαντικά την συχνότητα ελέγχου, παρά μόνο στην περίπτωση όπου τα κόστη αντικατάστασης και συντήρησης είναι ίδια οπότε δεν απαιτείται έλεγχος της παραγωγικής διαδικασίας, όπως φαίνεται από την εικόνα 8. Επίσης, η αύξηση του κόστους αντικατάστασης ελαττώνει δραστικά τον βέλτιστο χρόνο που η διαδικασία παραμένει στην ελαττωματική κατάσταση πριν εφαρμοστεί η συντήρηση. Από το διάγραμμα της Εικόνας 7 διαπιστώνεται πως όσο απομακρύνεται η τιμή του  $c_f$  από αυτή το  $c_f$  μειώνεται και η επίδρασή της στη βέλτιστη λύση και συνεπώς στο κέρδος.

### 4.3 Κόστος συντήρησης

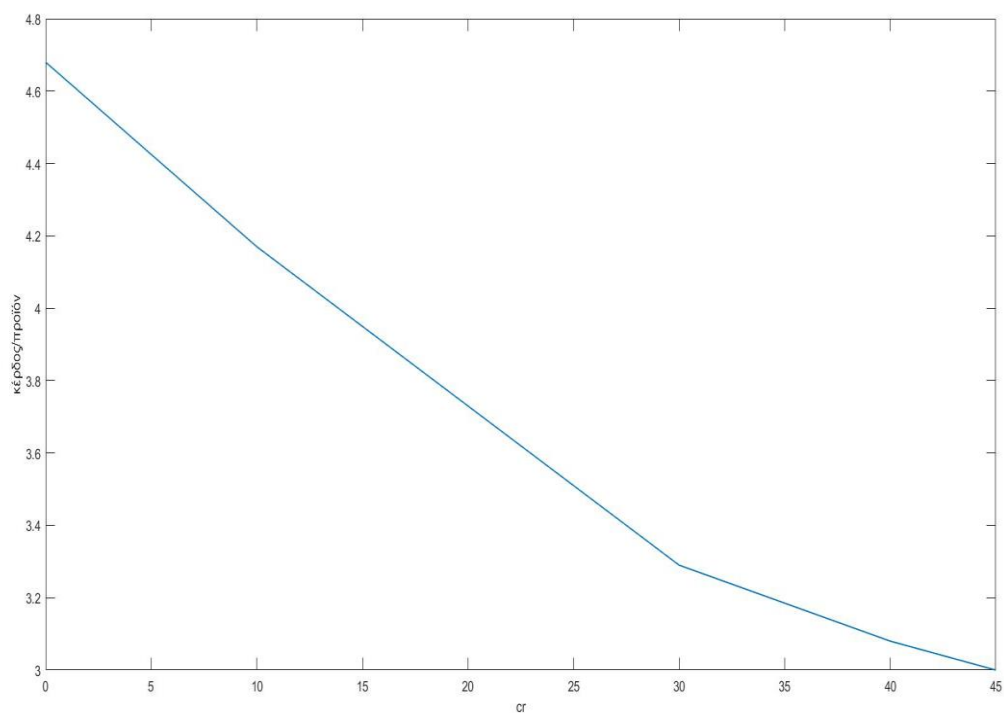
Στο τρίτο σει τιμών θα μεταβάλουμε το κόστος συντήρησης με σκοπό να εντοπίσουμε πόσο αυτό επιδρά στη βέλτιστη λύση.

<b>Prn</b>	5
<b>Prh</b>	4.5
<b>Cf</b>	45
<b>Cr</b>	0,10,30, 40 και 45
<b>ci</b>	1

**Πίνακας 4.7 – Σει τιμών 3**

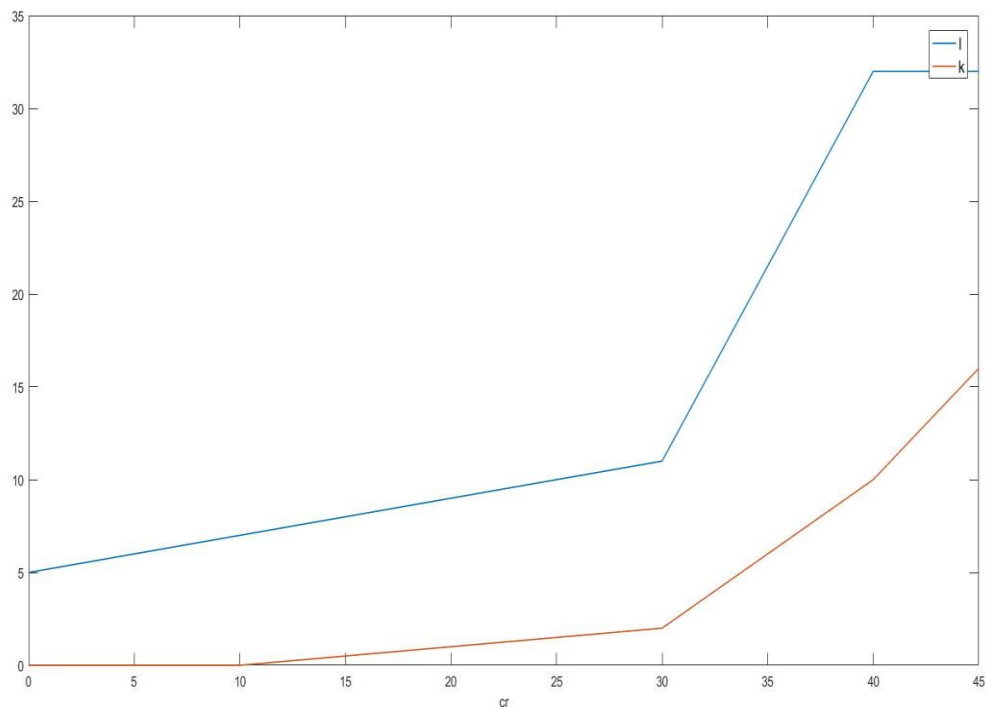
	<b>I</b>	<b>k</b>	<b>Κέρδος/προϊόν</b>	<b>I (k=0)</b>	<b>Κέρδος/προϊόν (k=0)</b>
<b>0</b>	5	0	4.68	5	4.68
<b>10</b>	7	0	4.17	7	4.17
<b>30</b>	11	2	3.31	16	3.29
<b>40</b>	32	10	3.12	32	3.08
<b>45</b>	32	16	3.11	32	3.00

**Πίνακας 4.8 – Αποτελέσματα για σετ 3**



**Εικόνα 9 – Διάγραμμα κέρδους για σετ 3 (cr)**





**Εικόνα 10 - Διαγράμματα l και k για σετ 3 (Cr)**

Σε αντίθεση με το κόστος αντικατάστασής το κόστος συντήρησης επηρεάζει δραστικά στην βέλτιστη συχνότητα ελέγχου, αναλυτικότερα όσο αυτό μειώνεται τόσο συχνότερα πρέπει να πραγματοποιούνται έλεγχοι. Από τις μεταβολές καταλαβαίνουμε ότι ανάμεσα στα δύο κόστη υπάρχει μία συσχέτιση που επηρεάζει την βέλτιστη λύση. Αυτό συμβαίνει διότι η διαφορά τους επιδρά και αυτή στην βέλτιστη λύση, αφού στην περίπτωση που το  $c_r$  είναι αρκετά μικρότερο από το  $c_f$  ο έλεγχος γίνεται πολύ αυστηρός ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο έλεγχος γίνεται πού ελαστικός, ενώ στην οριακή περίπτωση που τα δύο κόστη είναι ίσα ( $c_f=c_r$ ), δεν απαιτείται στρατηγική συντήρησης.

#### 4.4 Κόστος ελέγχου

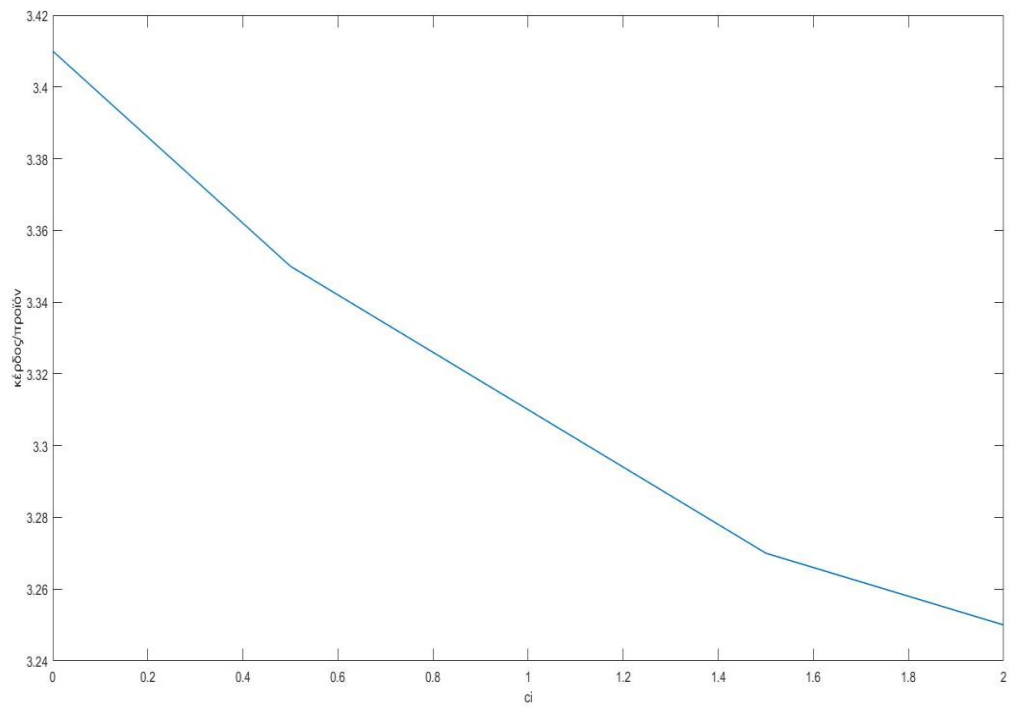
Τέλος, σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πώς επιδρά το κόστος ελέγχου  $c_i$  στην βέλτιστη λύση.

<b>Prn</b>	5
<b>Prh</b>	4.5
<b>Cf</b>	45
<b>Cr</b>	30
<b>ci</b>	0, 0.5, 1, 1.5 και 2

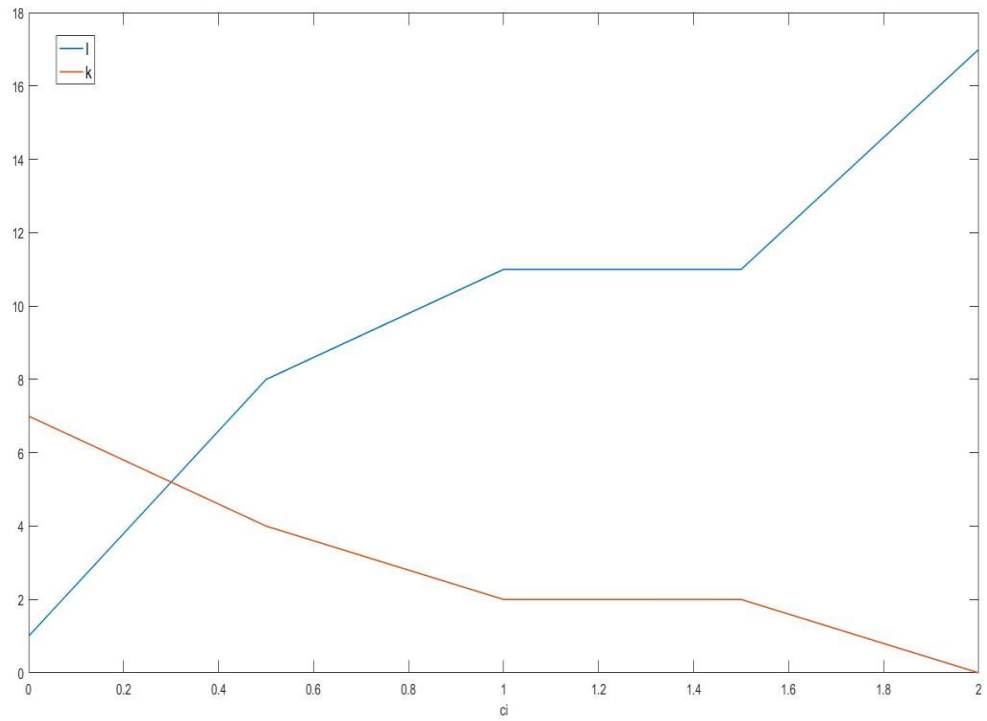
Πίνακας 4.9 – Σειτ τιμών 4

	<b>I</b>	<b>k</b>	<b>Κέρδος/προϊόν</b>	<b>I (k=0)</b>	<b>Κέρδος/προϊόν (k=0)</b>
<b>0</b>	1	7	3.41	11	3.36
<b>0.5</b>	8	4	3.35	11	3.32
<b>1</b>	11	2	3.31	16	3.29
<b>1.5</b>	11	2	3.27	16	3.26
<b>2</b>	17	0	3.25	17	3.25

Πίνακας 4.10 – Αποτελέσματα για σειτ 4



**Εικόνα 11 – Διάγραμμα κέρδους για σεν 4 ( $c_i$ )**



**Εικόνα 12 - Διαγράμματα  $l$  και  $k$  για σεν 4 ( $C_i$ )**

Η συσχέτιση του κόστους ελέγχου με την βέλτιστη λύση είναι η αναμενόμενη καθώς όταν το κόστος είναι μηδέν ελέγχουμε μετά από κάθε προϊόν και όσο αυτό αυξάνεται το διάστημα μεταξύ ελέγχων αυξάνεται, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα στην ελλατωματική κατάσταση, άρα μειώνεται και ο χρόνος μέχρι την συντήρηση. Επιπλέον, σε όλες τις παραπάνω μεταβολές των παραμέτρων κόστους, η διαφορά στο κέρδος ανάμεσα στην πολιτική άμεσης συντήρησης και καθυστερημένης συντήρησης δεν είναι σημαντικά μεγάλη αλλά επηρεάζει την βέλτιστη συχνότητα ελέγχου. Αυτό διακρίνεται ευκολότερα στα αποτελέσματα του πίνακα 4.10 καθώς ενώ έχουμε μηδενικό κόστος ελέγχου, ο συνεχής έλεγχος δεν αποτελεί βέλτιστη λύση στην περίπτωση της άμεσης συντήρησης.

## 5. Μοντέλο προσομοίωσης

Για την επαλήθευση των μαθηματικών εξισώσεων του κεφαλαίου 3 αναπτύξαμε ένα προσομοιωτικό μοντέλο [7], με σκοπό να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης και αυτών της αριθμητικής λύσης των εξισώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσεται το μοντέλο προσομοίωσης και εξηγείται αναλυτικά ο τρόπος λειτουργίας του.

Αφού αρχικά έχουν δοθεί στον κώδικα οι απαραίτητες αρχικές συνθήκες ώστε να μπορεί να τρέξει, όπως στοιχεία κόστους και κατανομές πιθανοτήτων, ξεκινάει η προσομοίωση  $N_k$  κύκλων.

### 5.1 Μεταβλητές bl1 και bl2

Στην αρχή κάθε κύκλου δίνονται δύο τυχαίοι αριθμοί στον κώδικα που θα ορίζουν μετά από πόσα προϊόντα εμφανίζονται το ελάττωμα και η βλάβη. Οι μεταβλητές που καταχωρείται αυτή η πληροφορία είναι:

- bl1: μετά από τόσα προϊόντα, από την αρχή του κύκλου, εμφανίζεται το ελάττωμα και υπολογίζεται  $rand < F(x) \rightarrow x = bl1$
- bl2: μετά από τόσα προϊόντα, από την στιγμή που εμφανίζεται το ελάττωμα, εμφανίζεται η βλάβη και υπολογίζεται  $rand < H(x) \rightarrow x = bl2$

Αφού γνωρίζουμε πότε θα εμφανιστεί το ελάττωμα στην συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί σε ποιόν έλεγχο πρέπει να εντοπιστεί, υπολογίζεται από την σχέση:  $NI = \left\lceil \left( \frac{bl1}{I} \right) \right\rceil$ .

### 5.2 Μεταβλητή z

Έπειτα πρέπει να εξετάσουμε εάν ο τελευταίος έλεγχος επιβαρύνει το συνολικό κέρδος του κύκλου, στην περίπτωση που εφαρμοστεί δηλαδή να μην έχει εμφανιστεί η βλάβη και να εντοπίσουμε το ελάττωμα. Η πληροφορία αυτή δίνεται από την μεταβλητή z:

- i.  $z=0$ , θεωρούμε ότι χρεωνόμαστε τον έλεγχο και αποτελεί την αρχική τιμή της μεταβλητής σε κάθε κύκλο
- ii.  $z=1$ , θεωρούμε ότι δεν χρεωνόμαστε τον έλεγχο, η μεταβλητή παίρνει την τιμή 1 σε δύο περιπτώσεις:
  1.  $NI > iI$ , σε αυτή την περίπτωση το σύνολο των ελέγχων δεν καλύπτει όλα τα προϊόντα και το ελάττωμα εμφανίζεται μετά τον τελευταίο έλεγχο
  2.  $NI = iI \ \& \ It = 0$ , το ελάττωμα αναμένεται να εντοπιστεί κατά τον τελευταίο έλεγχο όμως αυτό είναι γνωστό και χωρίς την εφαρμογή του οπότε δεν επιβαρυνόμαστε με τον κόστος του.

Όπου,  $iI$  είναι ο μέγιστος αριθμός ελέγχων που μπορούν να πραγματοποιηθούν και

$It = N - iI * I$  είναι ο αριθμός των προϊόντων που απομένουν να παραχθούν μετά την εφαρμογή του τελευταίου ελέγχου.

### 5.3 Μεταβλητή $y$

Η μεταβλητή  $y$  είναι η πιο σημαντική μεταβλητή του κώδικα καθώς εμπεριέχει την περισσότερη πληροφορία και βάσει αυτής υπολογίζονται το κέρδος και η διάρκεια του κύκλου. Το  $y$  παίρνει τις τιμές:

- i.  $y=0$  όταν  $(NI - 1) \cdot I + Iw \geq bl1 + bl2$ ,  
όπου  $Iw=I$  εάν  $It=0$ , αλλιώς  $Iw=It$ .  
Σε αυτή την περίπτωση το ελάττωμα και η βλάβη εμφανίζονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ελέγχους, οπότε δεν πραγματοποιείται έλεγχος και η βλάβη δεν αποτρέπεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το συνολικό κέρδος να επιβαρυνθεί με το κόστος αντικατάστασης  $cf$ .
- ii.  $y=1$  όταν  $bl2 \leq (NI - 1) \cdot I + Iw - bl1 + k$   
Όταν  $y=1$  ο έλεγχος προλαβαίνει την εμφάνιση βλάβης και εντοπίζει το ελάττωμα έγκαιρα, άρα προγραμματίζεται προληπτική συντήρηση μετά την παραγωγή  $k$  προϊόντων. Όμως η βλάβη συμβαίνει πριν την εφαρμογή της προληπτικής συντήρησης, οπότε και σε αυτή την περίπτωση επιβαρυνόμαστε με το κόστος αντικατάστασης  $cf$ .
- iii.  $y=2$  όταν  $bl2 \geq (NI - 1) \cdot I + Iw - bl1 + k$   
Τέλος, όταν το  $y=2$  ο έλεγχος εντοπίζει το ελάττωμα και η προληπτική συντήρηση προλαβαίνει την εμφάνιση βλάβης. Σε αυτή την περίπτωση το συνολικό κέρδος επιβαρύνεται με το κόστος προληπτικής συντήρησης  $cr$ .

### 5.4 Υπολογισμός κέρδους και διάρκεια του κύκλου

Το κέρδος και ο αριθμός προϊόντων που παράγονται σε κάθε κύκλο υπολογίζονται από διαφορετικές εξισώσεις που προκύπτουν από τους διάφορους συνδυασμούς των μεταβλητών  $z$  και  $y$ . Οι διαφορετικές περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν είναι οι εξής:

- **$y=0, y=1$  και  $z=1$** : Όταν το  $y=0$  οι εξισώσεις για  $z=0$  και  $z=1$  είναι κοινές.

$$c = Prn \cdot bl1 + prh \cdot (bl2 - 1) - ci \cdot (NI - 1) - cf$$

$$t = bl1 + bl2 - 1$$

- **$y=1$  και  $z=0$** :

$$c = Prn \cdot bl1 + prh \cdot (bl2 - 1) - ci \cdot NI - cf$$

$$t = bl1 + bl2 - 1$$

- **$y=2$  και  $z=0$** :

$$c = Prn \cdot bl1 + Prh \cdot (NI \cdot I - bl1 + k) - ci \cdot NI - cr$$

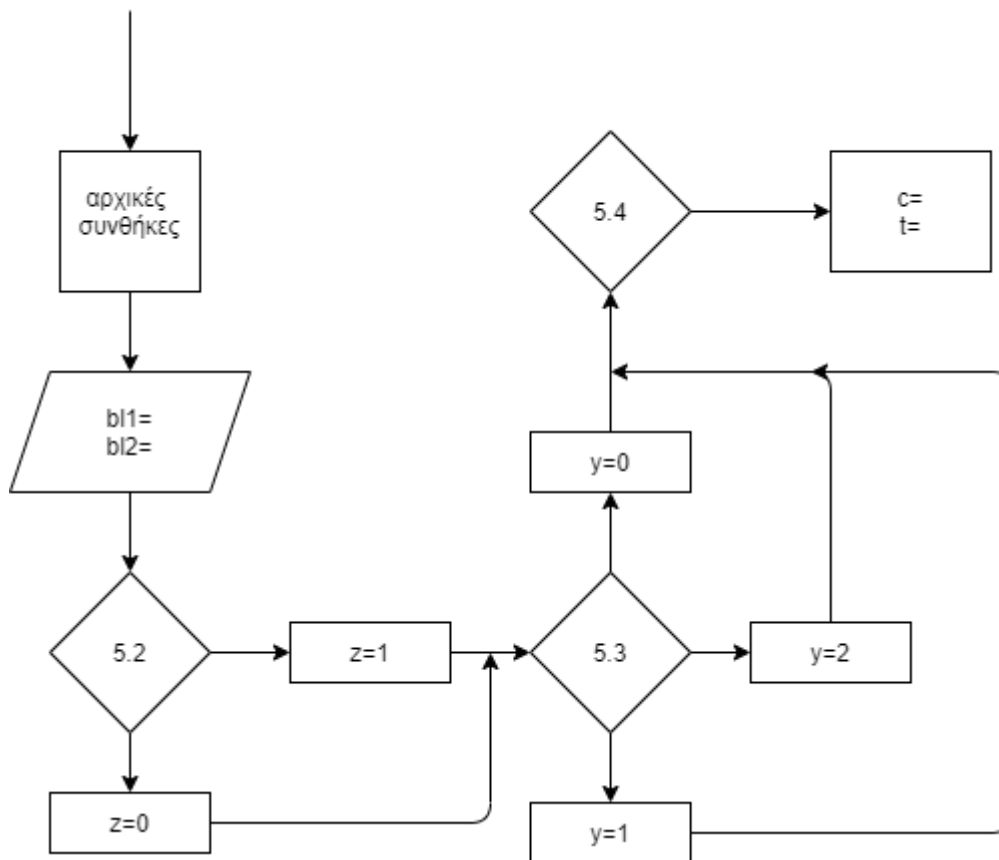
$$t = NI \cdot I + k$$

- **y=2 και z=1:**

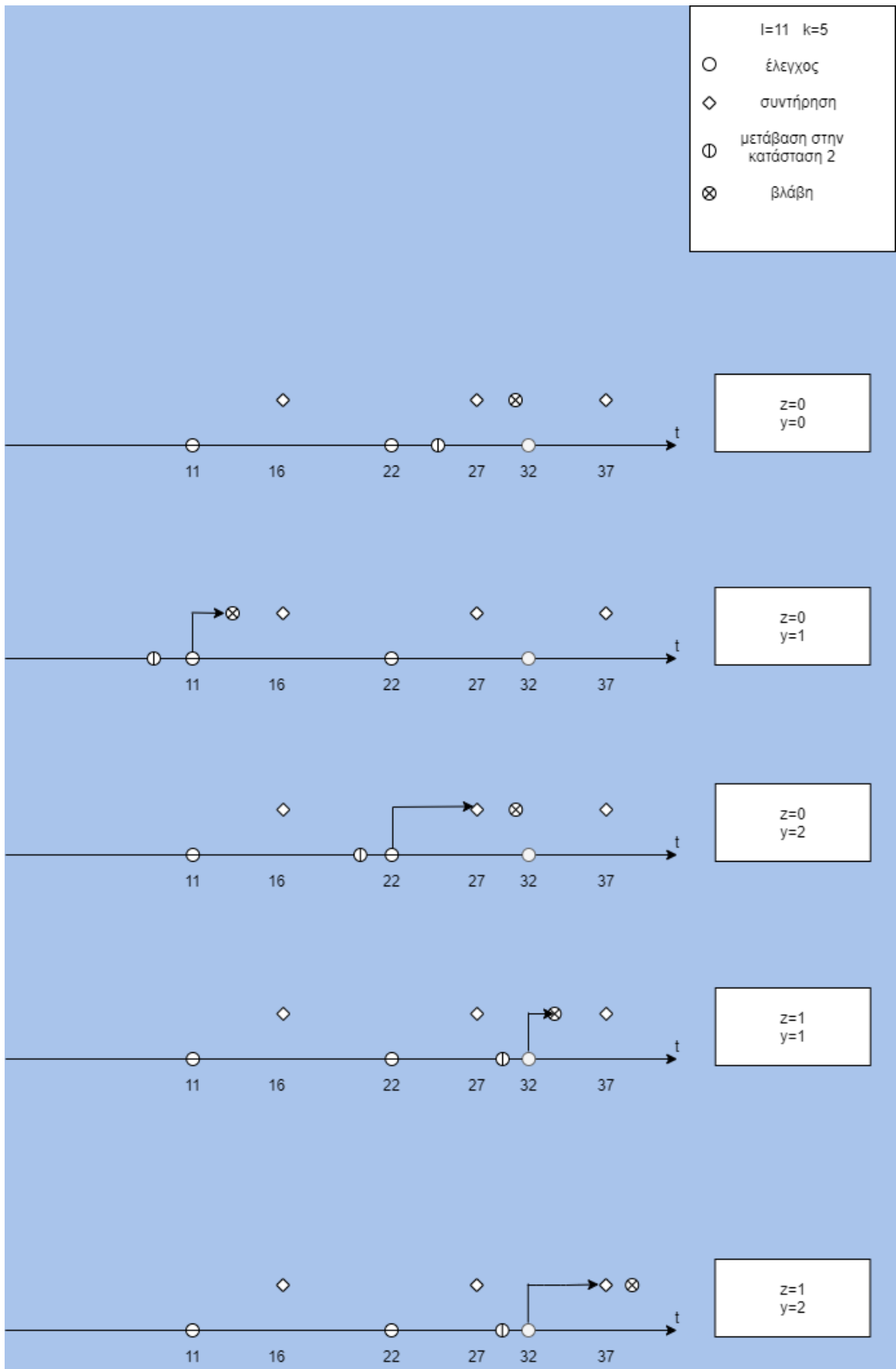
$$c = Prn \cdot bl1 + Prh \cdot ((NI - 1) \cdot I + Iw - bl1 + k) - ci \cdot (NI - 1) - cr$$

$$t = (NI - 1) \cdot I + It + k$$

Στις εικόνες 13 και 14 παρουσιάζονται το διάγραμμα ροής κάθε κύκλου καθώς και οι συνδυασμοί z και y που μπορεί να προκύψουν για γνωστά I και k.



Εικόνα 13 - Διάγραμμα ροής



Εικόνα 14 – Πιθανά ενδεχόμενα και τιμές των z και y



## 5.5 Μέσο κέρδος ανά προϊόν

Οι εξισώσεις της προηγούμενης ενότητας υπολογίζουν το συνολικό κέρδος και τον αριθμό των προϊόντων που παράγονται κατά την διάρκεια ενός κύκλου. Η εξίσωση της οποίας το μέγιστο αντιπροσωπεύει την βέλτιστη στρατηγική συντήρησης είναι:

$$mc(I, k) = \frac{\sum_{u=1}^{N_k} c}{\sum_{u=1}^{N_k} t}$$

Όπου ο αριθμητής είναι το άθροισμα του κέρδους για όλους τους κύκλους και ο παρονομαστής το άθροισμα των παραγόμενων προϊόντων για όλους τους κύκλους. Τους κύκλους τους επαναλαμβάνουμε για όλους τους συνδυασμούς  $I$  και  $k$  που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε. Το μέσο κέρδος ανά προϊόν που προκύπτει από την προσομοίωση συγκρίνεται με τα αποτελέσματα των θεωρητικών εξισώσεων. Για να είναι επιστημονικά τεκμηριωμένη η σύγκριση χρησιμοποιούμε το διάστημα εμπιστοσύνης των τιμών που προκύπτουν από την προσομοίωση.

## 5.6 Διάστημα εμπιστοσύνης

Το διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου κέρδους ανά προϊόν σε μία διαδικασία ανανέωσης-ανταμοιβής δίνεται από τους παρακάτω τύπους [1]. Αρχικά χρειάζεται να υπολογίσουμε τις διασπορές των δειγμάτων:

$$s_{11}^2 = \frac{1}{N_k - 1} \cdot \sum_{u=1}^{N_k} (c_i - \bar{c})^2$$

$$s_{22}^2 = \frac{1}{N_k - 1} \cdot \sum_{u=1}^{N_k} (t_i - \bar{t})^2$$

Έπειτα υπολογίζουμε την συνδυασμένη διασπορά των δειγμάτων και στη συνέχεια την διασπορά που χρησιμοποιείται στον τύπο του διαστήματος εμπιστοσύνης :

$$s_{12}^2 = \frac{1}{N_k - 1} \cdot \sum_{u=1}^{N_k} [(c_i - \bar{c})(t_i - \bar{t})]$$

$$s^2 = s_{11}^2 - 2 \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \cdot s_{12}^2 + s_{22}^2 \cdot \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2$$

Οπότε το διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$\bar{Z} - \frac{K_\alpha \cdot s}{Z \cdot \sqrt{N_k}} \leq \bar{Y} \leq \bar{Z} + \frac{K_\alpha \cdot s}{Z \cdot \sqrt{N_k}}$$

Όπου το  $K_\alpha$  είναι σταθερά η οποία προκύπτει από πίνακες κανονικής κατανομής ανάλογα με τον συντελεστή εμπιστοσύνης που επιθυμούμε.

## 5.7 Περιγραφή κύκλου

Για την καλύτερη κατανόηση του προσομοιωτικού μοντέλου σε αυτή την ενότητα θα εξετασθεί το παράδειγμα ενός κύκλου. Σε αυτό το παράδειγμα υποθέτουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το κέρδος για  $I=14$  και  $k=4$ . Αρχικά παίρνουμε δύο τυχαίες τιμές για τα  $b11$  και  $b12$  οι οποίες προέκυψαν 18 και 7 αντίστοιχα.

```
pros=rand(ep,2);b11(ep)=0; b12(ep)=0;

for i=1:ep
    b11(i)=find(F>pros(i,1),1);
    b12(i)=find(G>pros(i,2),1);
end
```

Στην συνέχεια υπολογίζουμε σε ποιόν έλεγχο εντοπίζεται η μετάβαση στην ελαττωματική κατάσταση, αυτή η πληροφορία αποθηκεύεται στην μεταβλητή  $NI$  και ισούται με 2. Έπειτα, προσδιορίζουμε την τιμή της μεταβλητής  $z$ , εφόσον  $NI=iI$  αλλά  $It \neq 0$  ( $It=4$ ) η  $z$  παίρνει την τιμή 0. Τέλος, χγια να μπορεί να υπολογισθεί το κέρδος πρέπει να βρεθεί και η τιμή της μεταβλητής  $y$ , εφόσον  $b11+b12 < NI \cdot I$  η  $y$  παίρνει την τιμή 0.

```
I=14; k=4; iI=floor(N/I);It=N-iI*I;

NI=ceil(b11/I); y(ep)=0;z(ep)=0;

for i=1:ep
    Iw=I;
    if NI(i)>iI
        Iw=It;
        z(i)=1;
    elseif NI(i)==iI & It==0
        z(i)=1;
    end
    if (NI(i)-1)*I+Iw>=b11(i)+b12(i)
        y(i)=0;
    elseif b12(i)<=(NI(i)-1)*I+Iw-b11(i)+k
        y(i)=1;
    else
        y(i)=2;
    end
end
```

Πλέον αφού γνωρίζουμε την τιμή των  $z$  και  $y$  μπορούμε να υπολογίσουμε το κέρδος του κύκλου. Αφού  $y=0$  η διαδικασία μεταβαίνει στην κατάσταση βλάβης πριν πραγματοποιηθεί ο δεύτερος έλεγχος που θα εντόπιζε την μετάβαση, επομένως έχουμε αντικατάσταση και πραγματοποιήθηκε ένας έλεγχος, ενώ παρήχθησαν 18 και 6 προϊόντα στην κανονική και στην ελαττωματική κατάσταση αντίστοιχα. Επομένως, το κέρδος του κύκλου ισούται με 57 και τα προϊόντα που παράχθηκαν είναι 24.

```

for i=1:ep
    c(i)=b11(i)*pn;
    if y(i)==0
        c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i)-1)*ci;
        t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
    elseif y(i)==1
        if z(i)==0
            c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i))*ci;
            t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
        else
            c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i)-1)*ci;
            t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
        end
    else
        if z(i)==0
            c(i)=c(i)+(NI(i)*I-b11(i)+k)*ph+cr+(NI(i))*ci;
            t(i)=NI(i)*I+k;
        else
            if It==0
                It=I;
            end
            c(i)=c(i)+((NI(i)-1)*I+It-b11(i)+k)*ph+cr+(NI(i)-1)*ci;
            t(i)=(NI(i)-1)*I+It+k;
        end
    end
end

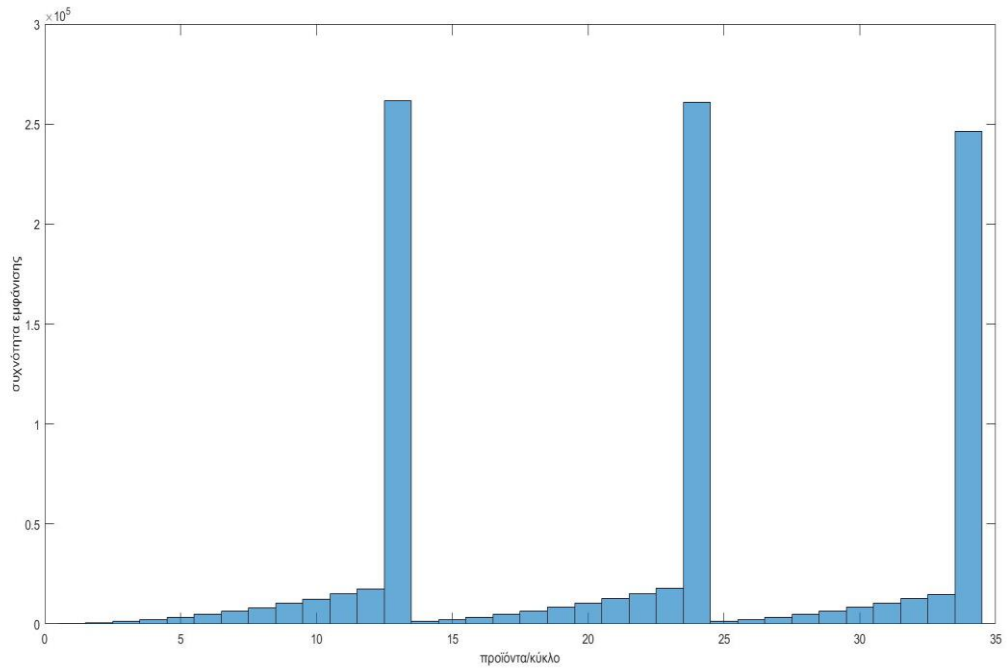
```

## 5.8 Σύγκριση της αριθμητικής επίλυσης με την προσομοίωση

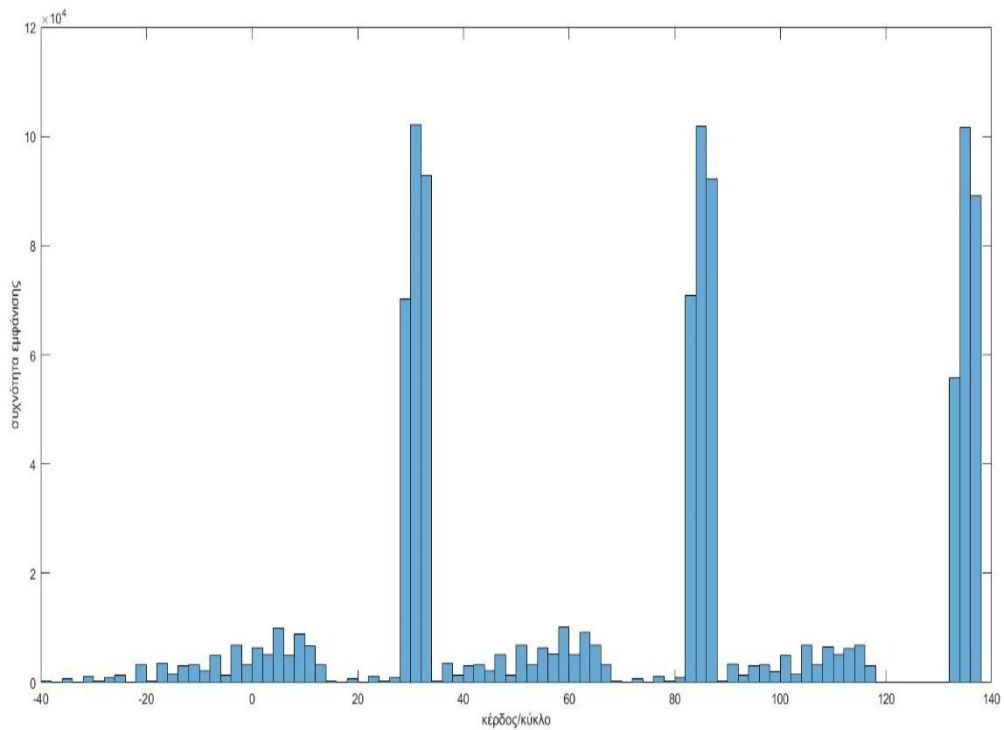
Για να ελεγχθεί εάν οι εξισώσεις είναι ακριβείς προσομοιώθηκε η διαδικασία, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία κόστους που δίνονται στον Πίνακα 4.1, επιπλέον οι  $q(x)$  και  $g(x)$  χρησιμοποιήθηκαν αυτές που υπάρχουν στο κεφάλαιο 4. Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Αριθμητική λύση	Προσομοίωση
<b>I</b>	2	2
<b>k</b>	11	11
<b>Κέρδος/προϊόν</b>	3.3087	3.3085

Πίνακας 5.1 – Σύγκριση των αποτελεσμάτων



**Εικόνα 15 – Ιστόγραμμα προϊόντων/κύκλο**



**Εικόνα 16 - Ιστόγραμμά κέρδος/κύκλο**

Πραγματοποιώντας ένα εκατομμύριο κύκλους προέκυψε πως το μέσο κέρδος ανά κύκλο ισούται με 74.3853 ενώ παράγονται 22.4832 προϊόντα ανά κύκλο, επιπλέον η βέλτιστη

στρατηγική συντήρησης είναι  $l=11$  και  $k=2$ . Από την εικόνα 15 αντιλαμβανόμαστε πως τις περισσότερες φορές παράγονται 13, 25 και 34 προϊόντα ανά κύκλο δηλαδή ο κύκλος τερματίζεται 2 προϊόντα μετά τον έλεγχο. Επομένως, τα  $l$  και  $k$  είναι καθοριστικά στην λειτουργία του κύκλου αφού εντοπίζεται η εμφάνιση του ελαττώματος και η συντήρηση προλαβαίνει την εμφάνιση της βλάβης. Αντίστοιχα, στην εικόνα 16 παρατηρούμε τρεις κορυφές που εμφανίζονται για  $y=2$  ανάλογα με το πότε εμφανίζεται το ελάττωμα.

Τέλος, τα 95% όρια εμπιστοσύνης υπολογίστηκαν σύμφωνα με τις σχέσεις της ενότητας 5.7 και ισούνται με 3.252 και 3.365 αντίστοιχα. Η τιμή της αριθμητική λύσης είναι ανάμεσα στα όρια οπότε φαίνεται να επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.



## 6. Επεκτάσεις του βασικού μοντέλου

Το delay time concept είναι μία θεώρηση που δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα, καθώς τα περισσότερα εξαρτήματα παρουσιάζουν σημάδια φθοράς προτού υποστούν βλάβη. Επομένως, αποτελεί ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων συντήρησης σε πραγματικές παραγωγικές διαδικασίες, με την προϋπόθεση ότι οι υπόλοιπες παραδοχές, που θεωρούνται για να είναι το πρόβλημα επιλύσιμο, να μην αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό από τις πραγματικές συνθήκες. Οι παραδοχές που ορίστηκαν για την επίλυση του υπό μελέτη προβλήματος παρατίθενται στην ενότητα 3.2

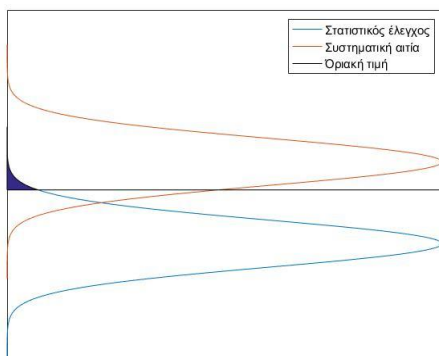
Από το σύνολο των παραδοχών που έχουν οριστεί, οι δύο που περιορίζουν το πρόβλημα και το καθιστούν μη ρεαλιστικό είναι ο πεπερασμένος μέγιστος αριθμός προϊόντων που παράγονται σε κάθε φάση και το γεγονός πως δεν υπάρχει ενδεχόμενο σφάλματος στην ένδειξη του ελέγχου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα τροποποιηθεί κατάλληλα το μοντέλο ώστε να μην επιβαρύνεται με αυτές τις παραδοχές, με σκοπό την εξαγωγή νέων εξισώσεων και να συγκριθούν τα αποτελέσματά τους όσον αφορά τη βέλτιστη λύση και το αναμενόμενο κέρδος ανά προϊόν που προκύπτει. Θα εξετασθούν δύο νέα μοντέλα όπου στο καθένα θα απαλειφθεί μία εκ των δύο παραδοχών αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι δε θα μελετηθεί μοντέλο που να απουσιάζουν και οι δύο παραδοχές, καθώς αυτό είναι δύσκολο να επιλυθεί αναλυτικά και ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτής της εργασίας.

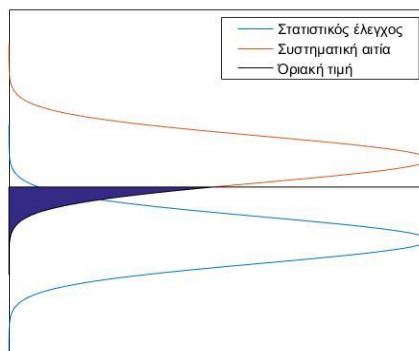
### 6.1 Έλεγχος με ενδεχόμενο σφάλμα β είδους

Στον μεγαλύτερο αριθμό ελέγχων που πραγματοποιούνται σε πραγματικές παραγωγικές διαδικασίες υπάρχει το ενδεχόμενο σφάλματος. Υπάρχουν αρκετοί παράγοντες που μπορεί να οδηγήσουν στην εσφαλμένη ένδειξη ελέγχου, όμως στην περίπτωση που υποθέσουμε πως δεν επηρεάζουν εξωτερικοί παράγοντες, ο κυριότερος λόγος σφάλματος είναι η στοχαστικότητα της παραμέτρου που μετρείται. Δηλαδή, στην περίπτωση που το μηχάνημα βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο (κατάσταση κανονικής λειτουργίας), το αποτέλεσμα του ελέγχου ακολουθεί μια κατανομή που εξαρτάται από μία μέση τιμή και μία τυπική απόκλιση. Ενώ, όταν το μηχάνημα λειτουργεί υπό την επίδραση κάποιας συστηματικής αιτίας (ελαττωματική κατάσταση λειτουργίας) αυτές οι παράμετροι μπορεί να μεταβληθούν, με αποτέλεσμα να αλλάξει η κατανομή πιθανοτήτων της ένδειξης. Τα δύο σφάλματα που μπορεί να προκύψουν είναι:

- **A είδους:** σε αυτή την περίπτωση το μηχάνημα λειτουργεί υπό στατιστικό έλεγχο αλλά το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι πως έχει επίδραση κάποια συστηματική αίτια.
- **B είδους:** σε αυτή την περίπτωση το μηχάνημα λειτουργεί υπό την επίδραση κάποιας συστηματικής αιτίας αλλά το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι πως είμαστε υπό στατιστικό έλεγχο.



Εικόνα 17 – Σφάλμα α είδους



Εικόνα 18 – Σφάλμα β είδους

Τα παραπάνω σφάλματα προκύπτουν καθώς κάποιες ενδείξεις μπορεί να προέρχονται και από τις δύο κατανομές, η απόφαση για την κατάσταση του μηχανήματος λαμβάνεται μέσω μίας οριακής τιμής, όπως φαίνεται στις εικόνες 17 και 18.

Οι εξισώσεις που θα παρουσιαστούν σε αυτό το κεφάλαιο θα συμπεριλαμβάνουν το ενδεχόμενο ο έλεγχος να δώσει εσφαλμένο αποτέλεσμα, με την παραδοχή πως η πιθανότητα να έχουμε σφάλμα α είδους να είναι ίση με το μηδέν. Άρα, προσθέτουμε στις εξισώσεις το ενδεχόμενο σφάλματος β είδους. Για την εξαγωγή των νέων εξισώσεων θα χρειαστεί να οριστούν δύο νέες μεταβλητές:

- $P_\beta$ : η πιθανότητα να έχουμε μεταβεί στην ελαττωματική κατάσταση και το αποτέλεσμα του ελέγχου να είναι εσφαλμένο
- $\theta$ : το σύνολο των εσφαλμένων ενδείξεων μέχρι να εντοπιστεί η μετάβαση ή ο εξοπλισμός να υποστεί βλάβη.

Η πιθανότητα ο έλεγχος να δείξει ότι η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1 είναι:

$$P_{1,\beta} = \sum_{\theta=0}^l (P_\beta)^\theta \cdot p_{1 \rightarrow (i-\theta) \cdot I+1}^{(i-\theta)} \quad (6.1)$$

Εάν το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι ότι έχουμε μεταβεί στην κατάσταση 2 οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε είναι:

$$P_{2,\beta} = \sum_{\theta=0}^i \left[ (1 - P_\beta) \cdot \sum_{j=0}^{(\theta+1) \cdot I - 1} p_{(i-\theta) \cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \right] \quad (6.2)$$



$$C_{2,\beta} = \sum_{j=0}^{(\theta+1) \cdot I - 1} \left[ p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot ((j+r) \cdot Prh - cf) \right) + p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot ((k+j) \cdot Prh - cr) + p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot (I_1 + I - j) \cdot Prn - (i+1) \cdot c_i \right] \quad (6.3)$$

$$T_{2,\beta} = \sum_{j=0}^{(\theta+1) \cdot I - 1} \left[ p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot (j+r) \right) + p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot (k+j) + p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot (I_1 + I - j) \right] \quad (6.4)$$

Τέλος, εάν ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ελέγχους ο εξοπλισμός υποστεί βλάβη οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι δύο κλάδων, για  $\theta=0$  ισχύουν οι 3.8, 3.9 και 3.10, ενώ για  $\theta>0$  οι εξισώσεις που περιγράφουν το ενδεχόμενο είναι:

$$P_{3,\beta} = \sum_{s=1}^I \left( p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \left( \sum_{a=\theta \cdot I - s + 1}^{(\theta+1) \cdot I - s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a-1)} \cdot g(a) \right) \right) \right) \quad (6.5)$$

$$C_{3,\beta} = \sum_{s=1}^I \left[ p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=\theta \cdot I - s + 1}^{(\theta+1) \cdot I - s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot ((a-1) \cdot Prh + (I_1 + s) \cdot prn - cf - i \cdot c_i) \right) \right] \quad (6.6)$$

$$T_{3,\beta} = \sum_{s=1}^{I-1} \left( p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=\theta \cdot I - s + 1}^{(\theta+1) \cdot I - s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot (I_1 + s + a - 1) \right) \right) \quad (6.7)$$

Οπότε, το κέρδος υπολογίζεται από την σχέση:

$$V_{\beta}(I, k) = \frac{\sum_{i=0}^{y-1} \left( P_{1,\beta} \cdot ((1 - P_{\beta}) \cdot C_2 + C_3) \right)}{\sum_{i=0}^{y-1} \left( P_{1,\beta} \cdot ((1 - P_{\beta}) \cdot T_2 + T_3) \right)} + \frac{\sum_{\theta=0}^y (P_{\beta})^{\theta} \cdot p_{1 \rightarrow (y-\theta) \cdot I + 1} \cdot \sum_{j=0}^{(\theta+1) \cdot I - 1} \left\{ p_{(i-\theta) \cdot I + 1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta+1) \cdot I} \cdot c_i \right\}}{\sum_{i=0}^{y-1} \left( P_{1,\beta} \cdot (T_2 + T_3) \right)} \quad (6.8)$$

Παρόμοια με τις εξισώσεις του κεφαλαίου 3, οι εξισώσεις 6.1 έως 6.8 ισχύουν στην περίπτωση που ο τελευταίος έλεγχος πραγματοποιείται στο τελευταίο προϊόν της κατάστασης 1. Σε αντίθετη περίπτωση το κέρδος υπολογίζεται από την εξίσωση 6.13 με την βοήθεια των σχέσεων 6.9 έως 6.12. Οι σχέσεις 6.9 έως 6.12 είναι και αυτές δύο κλάδων, για  $\theta=0$  παίρνουν την μορφή των εξισώσεων 3.16 έως 3.19 ενώ για  $\theta>0$  έχουν την μορφή που βλέπουμε παρακάτω.

$$C'_{2,\beta} = \sum_{j=I'+(\theta-1)\cdot I}^{\theta\cdot I+I'} \left[ \begin{aligned} & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot ((k+j) \cdot Prh - cr) + \\ & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot ((j+r) \cdot Prh - cf) \right) \\ & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot (I_1 + I - j) \cdot Prn - (y') \cdot c_i \end{aligned} \right] \quad (6.9)$$

$$T'_{2,\beta} = \sum_{j=I'+(\theta-1)\cdot I}^{\theta\cdot I+I'} \left[ \begin{aligned} & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot (k+j) + \\ & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot (j+r) \right) + \\ & p_{(i-\theta)\cdot I+1 \rightarrow N+j+1}^{(\theta\cdot I+I')} \cdot (I_1 + I - j) \end{aligned} \right] \quad (6.10)$$

$$C'_{3,\beta} = \sum_{s=1}^I \left[ \begin{aligned} & p_{(i-\theta)+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \\ & \sum_{a=\theta\cdot I-s+1}^{\theta\cdot I+I'-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot ((a-1) \cdot Prh + (I_1 + s) \cdot prn - cf - y' \cdot c_i) \right) \end{aligned} \right] \quad (6.11)$$

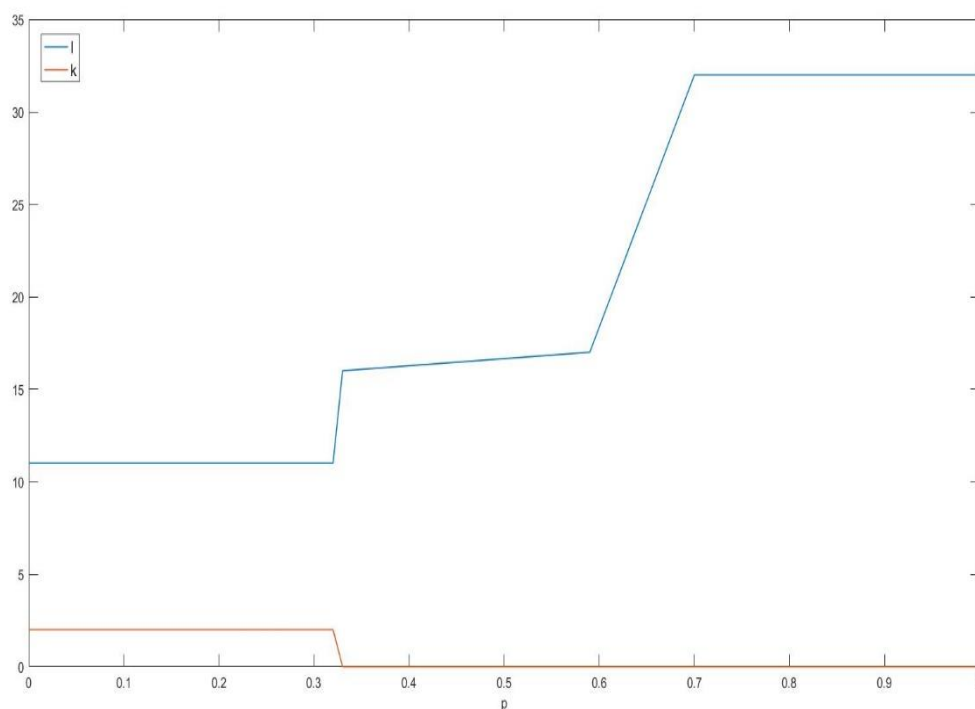
$$T'_{3,\beta} = \sum_{s=1}^I \left( p_{(i-\theta)+1 \rightarrow N+1}^{(s)} \cdot \sum_{a=\theta\cdot I-s+1}^{\theta\cdot I+I'-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot (I_1 + s + a - 1) \right) \right) \quad (6.12)$$

$$V'_{\beta}(I, k) = \frac{\sum_{i=0}^{y'-1} \left( P_{1,\beta} \cdot ((1 - P_{\beta}) \cdot C_{2,\beta} + C_{3,\beta}) \right) + p_{1 \rightarrow (y'-\theta)\cdot I+1}^{(y'-\theta)\cdot I} \cdot P_{\beta}^{\theta} (C'_{2,\beta} + C'_{3,\beta})}{\sum_{i=0}^{y'} \left( P_{1,\beta} \cdot ((1 - P_{\beta}) \cdot T_{2,\beta} + T_{3,\beta}) \right) + p_{1 \rightarrow (y'-\theta)\cdot I+1}^{(y'-\theta)\cdot I} \cdot P_{\beta}^{\theta} \cdot (T'_{2,\beta} + T'_{3,\beta})} \quad (6.13)$$

Στη συνέχεια θα υπολογιστεί αριθμητικά η βέλτιστη λύση για διάφορες τιμές του  $P_\beta$  χρησιμοποιώντας τα στοιχεία κόστους που δίνονται στον πίνακα 4.1 και τις κατανομές  $f(x)$  και  $g(x)$  που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 4.

$P_\beta$	$I$	$k$	Κέρδος/προϊόν
$P_\beta < 0.32$	11	2	3.26( $P_\beta=0.33$ )→3.31( $P_\beta=0$ )
$0.33 < P_\beta < 0.58$	16	0	3.23→3.25
$0.59 < P_\beta < 0.7$	17	0	3.20→3.22
$> 0.7$	32(=N)	-	<3.18

Πίνακας – 6.1 Αποτελέσματα γενικής λύσης για διαφορετικές τιμές  $P_\beta$



Εικόνα 19 – Διάγραμμα  $I$  και  $k$  για οριακά  $P_\beta$

Τα αποτελέσματα του πίνακα 6.1 και της εικόνας 19 προέρχονται λύνοντας τις εξισώσεις εξετάζοντας όλο το δυνατό εύρος τιμών του  $P_\beta$  (0 έως 1) με βήμα 0.01, εξετάζοντας μικρότερες διαφορές θα μπορούσαμε να διακρίνουμε όλες τις οριακές τιμές του  $P_\beta$  για τα υπό μελέτη χαρακτηριστικά. Από τα αποτελέσματα διακρίνουμε πως με την προσθήκη του σφάλματος  $\beta$  είδους η συχνότητα ελέγχου μειώνεται μέχρι  $P_\beta=0.7$  όπου η βέλτιστη λύση είναι να μην εφαρμοστεί στρατηγική συντήρησης. Επιπλέον, για  $P_\beta=0$  το πρόβλημα παίρνει την μορφή που

είχε στα προηγούμενα κεφάλαια. Τέλος, όπως αναμενόταν, ακόμα και όταν η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια, το κέρδος ανά προϊόν μειώνεται όσο η πιθανότητα σφάλματος αυξάνεται.

Τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης εξακριβώθηκαν με χρήση προσομοίωσης, αντίστοιχη αυτής που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 5. Το κομμάτι του κώδικα που διαφοροποιήθηκε έχει να κάνει με τον έλεγχο που εντοπίζεται η μετάβαση στην κατάσταση 2:

$$NI = \left[ \left( \frac{bl1}{I} \right) \right] + sf$$

Όπου η μεταβλητή  $sf$  είναι το σύνολο των σφαλμάτων  $\beta$  είδους που προκύπτουν πριν εντοπιστεί η μετάβαση ή συμβεί η βλάβη.

Στον πίνακα 6.2 δίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης αυτών. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίστηκαν σύμφωνα με τις εξισώσεις της ενότητας 5.6.

$P_{\beta}$	$I$	$k$	Κέρδος/προϊόν	Διάστημα εμπιστοσύνης
<b>0.32</b>	11	2	3.265	(3.205 , 3.325)
<b>0.33</b>	16	0	3.22	(3.16 , 3.30)
<b>0.59</b>	17	0	3.19	(3.13 , 3.25)
<b>0.7</b>	32	-	3.17	(3.11 , 3.23)

Πίνακας 6.2 – Αποτελέσματα προσομοίωσης

## 6.2 Μη πεπερασμένος αριθμός προϊόντων

Σε αυτή την ενότητα μελετάται η παραγωγική διαδικασία χωρίς τη θεώρηση της παραδοχής του πεπερασμένου αριθμού προϊόντων στην κανονική κατάσταση λειτουργίας, ενώ στην ελαττωματική κατάσταση λειτουργίας ο μέγιστος αριθμός των προϊόντων παραμένει πεπερασμένος.

Για την περιγραφή μιας τέτοιας παραγωγικής διαδικασίας απαιτείται να αλλάξουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθεί η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2. Στις εξισώσεις που εξάγονται παρακάτω, θεωρείται πως η μετάβαση ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p_\mu$ . Για την περιγραφή της κατάστασης 2 χρησιμοποιούμε το μητρώο από τον πίνακα 3.2 αφαιρώντας τα προϊόντα της κατάστασης 1.

$l(x)$	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης στην κατάσταση 2 από την κατάσταση 1
$L(x)$	Αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $l(x)$

**Πίνακας 6.3 – Συναρτήσεις γεωμετρικής κατανομής**

$$l(x) = (1 - p_\mu)^{x-1} \cdot p_\mu \quad (6.14)$$

$$L(x) = 1 - (1 - p_\mu)^x \quad (6.15)$$

Αντίστοιχα με τις προηγούμενες ενότητες παρακάτω δίνονται οι εξισώσεις που υπολογίζουν τις πιθανότητες και τα αναμενόμενα κέρδη και παραγόμενα προϊόντα.

$$P_{1,i} = 1 - L(i \cdot I) \quad (6.16)$$

$$P_{2,i} = \sum_{j=0}^{I-1} l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \quad (6.17)$$

$$C_{2,i} = \sum_{j=0}^{I-1} l(I-j) \left[ \begin{aligned} & l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot ((k+j) \cdot Prh - cr) + \\ & \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot ((j+r) \cdot Prh - cf) \right) + \\ & l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot (I_1 + I - j) \cdot Prn - (i+1) \cdot c_i \end{aligned} \right] \quad (6.18)$$

$$T_{2,i} = \sum_{j=0}^{I-1} l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \left( p_{N+j+1 \rightarrow N+j+r+1}^{(r)} \cdot g(j+r+1) \cdot (j+r) \right) + \left[ \begin{aligned} & l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot p_{N+j+1 \rightarrow N+j+k+1}^{(k)} \cdot (k+j) + \\ & l(I-j) \cdot p_{1 \rightarrow j+1}^{(j)} \cdot (I_1 + I - j) \end{aligned} \right] \quad (6.19)$$

$$P_{3,i} = \sum_{s=0}^{I-1} \left[ l(s) \cdot \sum_{a=1}^{I-s} p_{1 \rightarrow a}^{(a-1)} \cdot g(a) \right] \quad (6.20)$$

$$C_{3,i} = \sum_{s=1}^{I-1} \left[ \begin{aligned} & l(s) \cdot \\ & \sum_{a=1}^{I-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot ((a-1) \cdot Prh + (I_1 + s) \cdot prn - cf - i \cdot c_i) \right) \end{aligned} \right] \quad (6.21)$$

$$T_{3,i} = \sum_{s=1}^{I-1} \left( l(s) \cdot \sum_{a=1}^{I-s} \left( p_{N+1 \rightarrow N+a}^{(a)} \cdot g(a) \cdot (I_1 + s + a - 1) \right) \right) \quad (6.22)$$

$$V_i(I, k) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (P_{1,i} \cdot (C_{2,i} + C_{3,i}))}{\sum_{i=0}^{\infty} (P_{1,i} \cdot (T_{2,i} + T_{3,i}))} \quad (6.23)$$

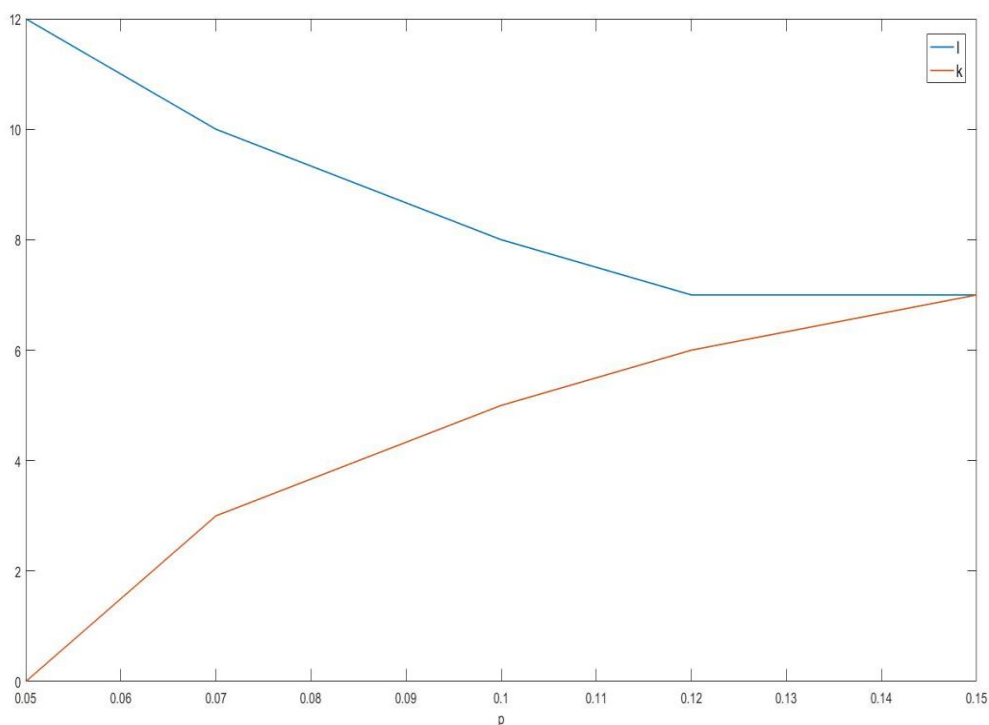
Η διαφορά των παραπάνω εξισώσεων σε σχέση με τις εξισώσεις του κεφαλαίου 3 είναι πως δεν χρειάζεται να τροποποιήσουμε τις εξισώσεις ανάλογα με το πότε συμβαίνει ο τελευταίος έλεγχος, καθώς ο αριθμός των ελέγχων μπορεί να είναι άπειρος.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση του μοντέλου είναι παρόμοιος με αυτόν του κεφαλαίου 5 με δύο διαφορές. Η μεταβλητή bl1 παράγεται με την μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού τις  $L(x)$ .

Στους πίνακες 6.4 και 6.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης και της προσομοίωσης αντίστοιχα. Τα στοιχεία κόστους που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον πίνακα 4.1.

$\rho_\mu$	I	K	Κέρδος/προϊόν
0.05	12	0	3.51
0.07	10	3	3.13
0.1	8	5	2.69
0.12	7	6	2.46
0.15	7	7	2.20

Πίνακας 6.4 – Αποτελέσματα αριθμητικής επίλυσης για διάφορες τιμές της  $\rho_\mu$



Εικόνα 20 – Διάγραμμα I και k για διάφορα  $\rho_\mu$

Από τα αποτελέσματα του πίνακα 6.4 και εικόνα 20 προκύπτει πως όσο μικρότερη είναι η  $p_{\mu}$  η συχνότητα των ελέγχων μειώνεται, ενώ και το  $k$  μειώνεται λόγω της αβεβαιότητας που υπάρχει σε ένα σύστημα με αραιούς ελέγχους.

$p_{\mu}$	$l$	$k$	Κέρδος/προϊόν	Διάστημα εμπιστοσύνης
<b>0.05</b>	12	0	3.51	(3.38 , 3.64)
<b>0.07</b>	10	3	3.12	(3.04 , 3.20)
<b>0.1</b>	8	5	2.69	(2.64 , 2.74)
<b>0.12</b>	7	6	2.46	(2.42 , 2.50)
<b>0.15</b>	7	7	2.20	(2.17 , 2.22)

Πίνακας 6.5 – αποτελέσματα προσομοίωσης για διάφορες τιμές της  $p_{\mu}$



## 7. Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

### 7.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα ενότητα παρατίθενται τα συμπεράσματα που εξάγονται από την ανάλυση των αποτελεσμάτων για κάθε μοντέλο.

Στην βιομηχανία πολύ συχνά με το που εντοπίζεται κάποια συστηματική αιτία πραγματοποιείται προληπτική συντήρηση, κάτι που δεν αποτελεί πάντα βέλτιστη λύση σύμφωνα με τα αποτελέσματα των παραπάνω κεφαλαίων. Συγκεκριμένα, για τις κατανομές πιθανοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν στην συγκεκριμένη εργασία, η άμεση συντήρηση αποτελεί βέλτιστη λύση μόνο στις περιπτώσεις που οι έλεγχοι πραγματοποιούνται σε μικρότερη συχνότητα και όταν το κόστος αντικατάστασης είναι αρκετά μεγαλύτερο σε σχέση με το κόστος προληπτικής συντήρησης. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα για τον χρόνο που η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε ελαττωματική λειτουργία, ενώ στη δεύτερη θέλουμε να αποφύγουμε το κόστος αντικατάστασης. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι οικονομικά σκοπιμότερο να προγραμματιστεί συντήρηση μετά την παραγωγή κάποιων προϊόντων.

Από τις μεταβολές των  $C_f$  και  $C_r$  συμπεραίνουμε πως το  $C_f$  δεν επηρεάζει ιδιαίτερα την συχνότητα ελέγχου, αλλά όταν αυξάνεται το μοντέλο προσπαθεί να αποφυγεί την εμφάνιση βλάβης επισπεύδοντας την προληπτική συντήρηση. Αντίθετα με την μείωση του  $C_r$  και η συχνότητα των ελέγχων αυξάνεται αλλά και ο χρόνος μέχρι να πραγματοποιηθεί η προληπτική συντήρηση μειώνεται.

Με την προσθήκη του σφάλματος  $\beta$  είδους, προστέθηκε ένα επιπλέον κόστος στον έλεγχο με αποτέλεσμα η πραγματοποίηση ελέγχων σε μικρότερη συχνότητα να αποτελεί το βέλτιστο. Για τα δεδομένα της εργασίας όμως η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει για  $\rho_\beta < 0.32$ , που αποτελεί ένα μεγάλο ποσοστό, οπότε η παραδοχή του ελέγχου χωρίς σφάλματα δεν επηρεάζει αισθητά το αποτέλεσμα του μοντέλου. Αυτό πολύ πιθανό να μην ισχύει εάν προστεθεί και το ενδεχόμενο σφάλματος  $\alpha$  είδους.

### 7.2 Μελλοντική έρευνα

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται ένα πρόβλημα που είναι υπαρκτό στη βιομηχανία και χρήζει βελτιστοποίησης. Συνολικά, η μοντελοποίηση, η ανάλυση και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων πραγματοποιούνται σε έναν ικανοποιητικό βαθμό. Ωστόσο, οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται περιορίζουν το πρόβλημα, επομένως κάποια θέματα που αξίζει να μελετηθούν μελλοντικά είναι:

- Εισαγωγή σφάλματος  $\alpha$  είδους στις εξισώσεις, ώστε να αποτυπώνεται η πραγματική επίδραση του ελέγχου στην παραγωγική διαδικασία και στη βέλτιστη λύση.
- Άπειρος αριθμός προϊόντων και στην κατάσταση ελαττωματικής λειτουργίας, ώστε να μην περιορίζεται ο χρόνος μέχρι την συντήρηση.

Η μελέτη των παραπάνω έχει ως σκοπό την σύνθεση μοντέλου που περιλαμβάνει σφάλματα στον έλεγχο και άπειρα προϊόντα που θα περιγράψει σε μεγάλο βαθμό μια πραγματική παραγωγική διαδικασία. Αφού έχει δημιουργηθεί το μοντέλο θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθούν:

- Η απόκλιση του από το μοντέλο της παρούσας εργασίας και να αξιολογηθεί η βαρύτητα των παραδοχών.
- Να εξετασθούν περισσότερες κατανομές πιθανοτήτων, οι οποίες θα εκφράζουν πραγματικές καταστάσεις.
- Να προστεθούν και άλλες καταστάσεις ελαττωματικής λειτουργίας.

## 8. Βιβλιογραφία

[1]	Hillier S.F., Liberman G.J., INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH (7 <sup>th</sup> Edition), McGraw-Hill, 2000.
[2]	van Oosterom C.D., Elwany A.H., Celebi D., van Houtum G.J, Optimal policies for delay time model with postponed replacement, European Journal of Operational Research 232 (2014) 186-197, 2014.
[3]	Wang W., An inspection model based on a three-stage failure process, Reliability Engineering and System Safety 96 (2011) 838-848, 2011.
[4]	Wang W., An inspection model for a process with two types of inspection and repairs, Reliability Engineering and System Safety 94 (2009) 526-533, 2009.
[5]	Wang W., An overview of the recent advances in delay-time-based maintenance modeling, Reliability Engineering and System Safety 106 (2012) 165-178, 2012.
[6]	Μπακούρος Ι.Λ., Αξιοπιστία και συντήρηση τεχνολογικών συστημάτων, Εκδόσεις σοφία, 2009.
[7]	ΡΟΥΜΕΛΙΩΤΗΣ Μ., ΣΟΥΡΑΒΛΑΣ Σ.Ι., ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ: Θεωρία και εφαρμογές (2 <sup>η</sup> Έκδοση), Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2015.



# Παραρτήματα

## Κώδικας αναλυτικού υπολογισμού

```
clc
clear all
n=1:32; N=length(n); p=1./(N-n+1);%state 0;
h=1:16; H=length(h);
q=h./((H*(H+1)/2)-h.*((h-1)./2));
%q(H-1)=0; q(H)=1;%state 1
t=markov_table(p,N,H,q); % fun, Markov table
cf=-50; ci=-2; cr=-30; pn=5; ph=pn-0.5;
for I=1:32
eI=floor(N/I);
pt2=t^I;
for k=0:H
pt3=t^k;
for i=0:eI-1 %a
pt1=t^(i*I); p1=pt1(1,i*I+1);
[vh1(I,k+1,i+1),vh1e(I,k+1,i+1)]=vh(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,q,pt2,pt3,ph,ci);
[vf1(I,k+1,i+1),vf1e(I,k+1,i+1)]=vf(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,h,pt2,pt3,ph,ci,q);
V(I,k+1,i+1)=p1*(vh1(I,k+1,i+1)+vf1(I,k+1,i+1));
Ve(I,k+1,i+1)=p1*(vh1e(I,k+1,i+1)+vf1e(I,k+1,i+1));
end%a
i=eI; pt1=t^(i*I);In=N-eI*I; p1=pt1(1,N-In+1);
[vhend1,vhendle]=vhend(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,q,pt2,pt3,ph,ci,eI);
[vfend1,vfendle]=vfend(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,h,pt2,pt3,ph,ci,q,eI);
V(I,k+1,i+1)=p1*(vhend1+vfend1);
Ve(I,k+1,i+1)=p1*(vhendle+vfendle);
VV(I,k+1)=sum(V(I,k+1,:));
VVe(I,k+1)=sum(Ve(I,k+1,:));
end
end
final=VV./VVe;
surf(0:16,1:32,final)
```

```

function [vh1,vhle]=vh(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,q,pt2,pt3,ph,ci)
Vh(I)=0; o=min(H-1,I-1);
for j=0:o %b
    if k<H-j
        p2=pt2(i*I+1,N+j+1);
        %
        p3=pt3(N+j+1,N+j+k+1);
        value1=(k+j)*ph+cr;
        sv1=p3*value1;
        sv1e=p3*(k+j);
        %
        sv2=0;
        sv2e=0;
        for r=0:k-1 %c
            pt4=t^r;
            p4=pt4(N+j+1,N+j+r+1);
            value2=(r+j)*ph+cf;
            sv2=sv2+p4*q(j+r+1)*(value2);
            sv2e=sv2e+p4*q(j+r+1)*(j+r);
        end%c
    else
        p2=pt2(i*I+1,N+j+1);
        sv1=0;
        sv1e=0;
        sv2=0;
        sv2e=0;
        for r=0:H-j-1 %c
            pt4=t^r;
            p4=pt4(N+j+1,N+j+r+1);
            value2=(r+j)*ph+cf;
            sv2=sv2+p4*q(j+r+1)*(value2);
            sv2e=sv2e+p4*q(j+r+1)*(j+r);
        end%c
    end
    %
    tt=(i+1)*I-j;
    value3=tt*pn;
    if i*I==N
        Vh(j+1)=p2*(sv1+sv2+value3+(i)*ci);
    else
        Vh(j+1)=p2*(sv1+sv2+value3+(i+1)*ci);
        vhe(j+1)=p2*(sv1e+sv2e+tt);
    end
    pppp=pppp+p2;
end %b
vh1=sum(Vh);
vhle=sum(vhe);
function [vf1,vfle]=vf(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,h,pt2,pt3,ph,ci,q)

```

```

function [vf1,vfle]=vf(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,h,pt2,pt3,ph,ci,q)
for s=1:I-1%e
    pt5=t^s;
    p5=pt5(i*I+1,N+1);
    sv5=0;
    sv5e=0;
    oo=min(H,I-s);
    value6=(i*I+s)*pn;
    v6e=(i*I+s);
    for a=1:oo%f
        pt6=t^(a-1);
        p6=pt6(N+1,N+a)*q(a);
        pppp=pppp+p5*p6;

        value5=(a-1)*ph+cf+value6+i*ci;
        sv5=sv5+p6*value5;
        sv5e=sv5e+p6*(a-1+v6e);
    end%f

    Vf(s)=p5*(sv5);
    Vfe(s)=p5*(sv5e);
end%e
if isempty(s)
    vf1=0;
    vfle=0;
else
    vf1=sum(Vf);
    vfle=sum(Vfe);
end

```

```

function [vfend1,vfendle]=vfend(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,h,pt2,pt3,ph,ci,q,eI)
In=N-eI*I;
for s=1:In-1%e
    pt5=t^s;
    p5=pt5(N-In+1,N+1);
    sv5=0;
    sv5e=0;
    oo=min(H,In-s);
    value6=(N-In+s)*pn;
    value6e=(N-In+s);
    for a=1:oo%f
        pt6=t^(a-1);
        p6=pt6(N+1,N+a)*q(a);
        value5=(a-1)*ph+cf+value6+eI*ci;
        sv5=sv5+p6*value5;
        value5e=(a-1)+value6e;
        sv5e=sv5e+p6*value5e;
    end%f
end%e

```

```

end%f

Vfend(s)=p5*(sv5);
Vfende(s)=p5*(sv5e);
end%e
if isempty(s)
    vfind1=0;
    vfind1e=0;
else
vfind1=sum(Vfend);
vfind1e=sum(Vfende);
end

```

```

function [vhend1,vhend1e]=vhend(i,I,t,N,H,k,pn,cr,cf,q,pt2,pt3,ph,ci,eI)
In=N-eI*I;
o=min(H-1,In-1);
for j=0:o %b
    if k<H-j
        pt2=t^In;
        p2=pt2(N-In+1,N+j+1);
        %
        p3=pt3(N+j+1,N+j+k+1);
        value1=(k+j)*ph+cr;
        value1e=k+j;
        sv1=p3*value1;
        sv1e=p3*value1e;
        %
        sv2=0;
        sv2e=0;
        for r=0:k-1 %c
            pt4=t^r;
            p4=pt4(N+j+1,N+j+r+1);
            value2=(r+j)*ph+cf;
            value2e=r+j;
            sv2=sv2+p4*q(j+r+1)*(value2);
            sv2e=sv2e+p4*q(j+r+1)*(value2e);
        end%c
    else
        pt2=t^In;
        p2=pt2(N-In+1,N+j+1);
        %
        sv1=0;
        sv1e=0
        %
        sv2=0;
        sv2e=0;
    end
end

```



```

for r=0:H-j-1 %c
    pt4=t^r;
    p4=pt4(N+j+1,N+j+r+1);
    value2=(r+j)*ph+cf;
    value2e=(r+j);
    sv2=sv2+p4*q(j+r+1)*(value2);
    sv2e=sv2e+p4*q(j+r+1)*(value2e);
end%c
end
%
    tt=N-j;
    value3=tt*pn;
    Vhend(j+1)=p2*(sv1+sv2+value3+(eI)*ci);
    Vhende(j+1)=p2*(sv1e+sv2e+tt);
end %e
if isempty(j)
    vhend1=0;
    vhend1e=0;
else
    vhend1=sum(Vhend);
    vhend1e=sum(Vhende);
end

```

## Κώδικας προσομοίωσης

```
clc
clear all

n=1:32; N=length(n); p=1./(N-n+1);%state 0;

h=1:16; H=length(h);
q=h./((H*(H+1)/2)-h.*((h-1)./2));
cf=-50; ci=-2; cr=-30; pn=5; ph=pn-0.5;
ep=10^7;
f(1:N)=0;
for i=1:N
    f(i)=p(i)*(1-sum(f(1:i-1)));
    F(i)=sum(f);
end
g(1:H)=0;
for i=1:H
    g(i)=q(i)*(1-sum(g(1:i-1)));
    G(i)=sum(g);
end

pros=rand(ep,2);b11(ep)=0; b12(ep)=0;

for i=1:ep
    b11(i)=find(F>pros(i,1),1);
    b12(i)=find(G>pros(i,2),1);
end
%-----
I=16; iI=floor(N/I);It=N-iI*I;
k=12;
NI=ceil(b11/I);
y(ep)=0;z(ep)=0;
for i=1:ep
    Iw=I;
    if NI(i)>iI
        Iw=It;
        z(i)=1;
    elseif NI(i)==iI & It==0
        z(i)=1;
    end
    if (NI(i)-1)*I+Iw>=b11(i)+b12(i)
        y(i)=0;
    elseif b12(i)<=(NI(i)-1)*I+Iw-b11(i)+k
        y(i)=1;
    else
        y(i)=2;
    end
end
end
```

```

%----
c(ep)=0;t(ep)=0;

for i=1:ep
    c(i)=b11(i)*pn;
    if y(i)==0
        c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i)-1)*ci;
        t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
    elseif y(i)==1
        if z(i)==0
            c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i))*ci;
            t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
        else
            c(i)=c(i)+(b12(i)-1)*ph+cf+(NI(i)-1)*ci;
            t(i)=b11(i)+(b12(i)-1);
        end
    else
        if z(i)==0
            c(i)=c(i)+(NI(i)*I-b11(i)+k)*ph+cr+(NI(i))*ci;
            t(i)=NI(i)*I+k;
        else
            if It==0
                It=I;
            end
            c(i)=c(i)+((NI(i)-1)*I+It-b11(i)+k)*ph+cr+(NI(i)-1)*ci;
            t(i)=(NI(i)-1)*I+It+k;
        end
    end
    %b(i)=c(i)/t(i);
end
mct=sum(c)/sum(t);
mc=mean(c); mt=mean(t); mcc=(c-mc); mtt=(t-mt);
s2cc=sum(mcc.^2)/(ep-1);
s2tt=sum(mtt.^2)/(ep-1);
s2ct=sum(mcc.*mtt)/(ep-1);
s2=s2cc-2*mc*s2ct+mc^2*s2tt; s=sqrt(s2);
ka=1.96;
b1=mct-(ka*s)/(mt*sqrt(ep));
b2=mct+(ka*s)/(mt*sqrt(ep));

```