ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

«Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ Η ΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ Τ.Π.Ε. ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ»

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΣΑΠΟΥΝΑ

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επόπτη καθηγητή μου κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη ο οποίος στάθηκε δίπλα μου καθ΄ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Τόσο με το υλικό που μου παρείχε όσο και με τις προσωπικές του συμβουλές, με βοήθησε να φέρω σε πέρας την πρώτη μου προσπάθεια σύνταξης μίας πτυχιακής εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δύο μαθητές της Στ΄Δημοτικού που συμμετείχαν στην πειραματική φάση της έρευνας, Λευτέρη και Αφροδίτη, χωρίς την συμβολή των οποίων, η ολοκλήρωση της εργασίας δεν θα είχε πραγματοποιηθεί. Τέλος, την οικογένεια μου που με στήριξε μέχρι τέλους τόσο ηθικά όσο και οικονομικά στον προσωπικό μου αγώνα.

Περίληψη

Η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης δύο μαθητών της Στ΄Δημοτικού. Πρόκειται για μία εναλλακτική προσέγγιση μάθησης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Μίας προσέγγισης βασισμένη κατά κανόνα, στη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών τα οποία δίνουν έμφαση στην αναπαράσταση των δύο πράξεων. Μαθητές και εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται στα κλάσματα, ο καθένας από ξεχωριστό πρίσμα, γεγονός που παρουσιάζεται στο πρώτο μέρος της εργασίας. Οι δύο μαθητές κλήθηκαν να ανταποκριθούν σε σειρά δραστηριοτήτων προκειμένου να διαπιστωθεί, κατά πόσο έχουν καλλιεργημένη την αίσθηση της αναπαράστασης στα κλάσματα. Δραστηριότητες, οι οποίες εκτελέστηκαν με τη χρήση ενός Η/Υ σε αντίθεση με την μέχρι τώρα παραδοσιακή προσέγγιση των Μαθηματικών. Συνεχίζοντας, ερωτήματα όπως ποια είναι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών γύρω από τα κλάσματα και το σπουδαιότερο, ποιος μπορεί να είναι ο ρόλος της Τεχνολογίας στην εκπαίδευση, αποτελούν τους βασικούς προβληματισμούς που εξετάζει η έρευνα. Επιπρόσθετα,όσον αφορά στα αποτελέσματα της έρευνας, αυτά δείχνουν, ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την αναπαράσταση των δύο κλασματικών πράξεων. Ωστόσο παρουσιάζουν ενθαρρυντικά σημεία βελτίωσης, τα οποία μέσα από την υποστήριξη του εκπαιδευτικού, δύνανται να αλλάξουν καθολικά τον τρόπο σκέψης των μαθητών στη σημασία μίας πράξης κλασμάτων. Κλείνοντας, η παρούσα έρευνααπαντά στο ερώτημα, κατά πόσο η χρήση των Τ.Π.Ε μπορεί να οδηγήσει σε θετική στάση όσον αφορά στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Εισαγωγή

Η διδασκαλία των κλασμάτων αποτελεί ένα από τα πιο σύνθετα προβλήματα που έχει να αντιμετωπίσει ο εκπαιδευτικός στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ένας από τους σημαντικότερους λόγους που συμβαίνει αυτό, είναι το γεγονός ότι οι μαθητές αδυνατούν να συλλάβουν τα κλάσματα ως αριθμούς αντίστοιχους με τους ακέραιους. Η παρούσα έρευνα πραγματοποιείται προκειμένου να διαπιστωθεί, κατά πόσο η χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών είναι ικανή να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη διδασκαλία των κλασμάτων. Πρόκειται για μία διαφορετική και καινοτόμα προσέγγιση μέσω της οποίας,επιχειρείται η ουσιαστική συνεισφορά στη μάθηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων.

Αναλυτικότερα, στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, αναφέρονται οι δυσκολίες – παρανοήσεις των εκπαιδευτικών και μαθητών, πάνω στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Ακόμη, η χρήση της Τεχνολογίας Πληροφοριών και Επικοινωνίας (Τ.Π.Ε) στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και συγκεκριμένα στα Μαθηματικά. Γίνεται λόγος για τα λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν προς την διεκπεραίωση της έρευνας και στο τέλος της εισαγωγής, παρατίθενται τα ερωτήματα και οι υποθέσεις. Όσον αφορά στη Μεθοδολογία της εργασίας, παρουσιάζονται τα στοιχεία των μαθητών που συμμετείχαν στη μελέτη περίπτωσης καθώς επίσης και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Τέλος προβάλλονται τα αποτελέσματα της έρευνας και το κατά πόσο ταυτίστηκαν με τις αρχικές προσδοκίες και υποθέσεις.

Κάνοντας μία μικρή αναφορά στα κλάσματα, αναφέρουμε ότι μαζί με τους δεκαδικούς αριθμούς και τα ποσοστά ανήκουν στους ρητούς αριθμούς. Ως ρητοί αριθμοί ορίζονται όλοι οι αριθμοί οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή κλάσματος α/β με α και β ακεραίους αριθμούς και β ≠0 (Lemonidis, 2013). Τα κλάσματα συγκεκριμένα τα οποία αποτελούν και το αντικείμενο της μελέτης μας, διδάσκονται στο Δημοτικό σχολείο από την Τρίτη δημοτικού έως και την Έκτη δημοτικού. Εμείς θα επικεντρωθούμε κυρίως στον πολλαπλασιασμό αλλά θα αγγίξουμε και περιοχές της διαίρεσης των κλασμάτων.

Λέξεις κλειδιά: πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων, ΤΠΕ, δυσκολίες μαθητών και εκπαιδευτικών στα κλάσματα, αίσθηση της αναπαράστασης των κλασμάτων, εκπαιδευτικοί*NationalLibraryOfVirtualManipulatives (NLVM), γνήσια – καταχρηστικά κλάσματα.*

Θεωρητικό πλαίσιο

Οι δυσκολίες – παρανοήσεις εκπαιδευτικών και μαθητών στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων

Οι δυσκολίες των εκπαιδευτικών Α' Βαθμίδας στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων

Όπως προαναφέραμε, τα κλάσματα αποτελούν ένα γνωστικό χώρο δύσκολο όχι μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Έρευνες επισημαίνουν τα σημεία στα οποία οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται στη διδακτική των κλασμάτων. Έρευνα (Fischbein, Deri, Nello&Marino, 1989) βρήκε ότι απόφοιτοι δάσκαλοι, φαίνεται πως δυσκολεύονται στη μετακίνηση από μοτίβα πρόσθεσης σε αυτά του πολλαπλασιασμού. Την παραπάνω περίπτωση προσπαθεί να ερμηνεύσει ο Taber (1999) μέσω του «multipliereffect». Σύμφωνα με αυτό οι μαθητές σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων αντιδρούσαν με τον εξής τρόπο. Όταν πίστευαν ότι ο ζητούμενος αριθμός του προβλήματος ήταν μεγαλύτερος από αυτόν που δίνονταν αρχικά, τότε εκτελούσαν πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ή αφαίρεση και διαίρεση αντίστοιχα. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν εγγυάται και την ορθότητα της λύσης. Ακόμη, σε άλλη έρευνα (Ball, 1990a, 1990b;1993) παρατηρούμε πως οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αναπαριστάνουν (με μοτίβα) προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Αυτό με τη σειρά του προκαλεί ανασφάλεια όσον αφορά την πρωτοβουλία των εκπαιδευτικών, στη δημιουργία προβλημάτων και στη συνέχεια επεξήγηση αυτών (Ball, 1990a, 1990b, Simon, 1993, Tirosh&Graeber 1991). Συνεχίζοντας, παρατηρήθηκε (Luo, 2009) ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συχνά ως πολλαπλασιασμό την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση κάτι που μπορεί να καταστεί προβληματικό εάν χρησιμοποιήσουν μία ποσότητα κλάσματος τη φορά. Στο κομμάτι της διαίρεσης, πολλοί εκπαιδευτικοί αν και ήταν σε θέση να εφαρμόσουν τον αντίστοιχο αλγόριθμο, ωστόσο λίγοι ήταν εκείνοι που μπορούσαν να εξηγήσουν τι σημαίνει (Ball, 1990a). Πολλοί μάλιστα δεν είχαν το κίνητρο να προβούν σε μία τέτοια διαδικασία από τη στιγμή που ο αλγόριθμος δουλεύει (Olanoff, Lo, Tobias, 2014). Ομοιότητα με την περίπτωση αυτή, παρουσιάζει μία έρευνα στην οποία 46 απόφοιτοι Παιδαγωγικής Σχολής κλήθηκαν να εξηγήσουν τον αλγόριθμο των πράξεων 2/3 : 2 = 1/3, 2/3 : 1/6 = 4. Το 26 % των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε εικονιστικές αναπαραστάσεις ως επεξήγηση, το 22 % πραγματοποίησε αντιστροφή και πολλαπλασιασμό ενώ κανένας από τους εκπαιδευτικούς δεν ήταν σε θεση να εξηγήσει πως ακριβώς δουλεύει ο αλγόριθμος (Lia&Kulm, 2008).

Παραμένοντας στο πεδίο δράσης των εκπαιδευτικών, παρατηρείται υπεργενίκευση των κανόνων που ισχύουν στους ακέραιους αριθμούς με αυτούς των ρητών αριθμών αντίστοιχα. Σύμφωνα με το «multipliereffect» του Taber (1999), οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι στους ρητούς αριθμούς, ο πολλαπλασιασμός πάντα παράγει μεγαλύτερο γινόμενο και η διαίρεση μικρότερο πηλίκο (Graeberetal., 1989, Tirosh&Graeber, 1991). Στη παραπάνω θέση προτείνεται «γνωστική σύγκρουση» μέσα από την οποία γίνεται προσπάθεια να κατανοήσουν οι εκπαιδευτικοί ότι στους ρητούς αριθμούς, η διαίρεση δε παράγει μικρότερο πηλίκο λ.χ 4 : ½ = 8 (Tirosh&Graeber (1990a). Επιπλέον, η αίσθηση της αναπαράστασης των εκπαιδευτικών, σε μοτίβα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, φαίνεται να μην είναι καλλιεργημένη. Κάτι τέτοιο συμβαίνει λόγω του ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τη μονάδα (μέρος-όλο) και να δώσουν εξηγήσεις (Lo&Grant, 2012). Έρευνα σχετική με τη γνώση των κλασμάτων των αποφοίτων εκπαιδευτικών (Yang, ReysandRay's, 2008), έδειξε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν ήταν σε θέση να συγκρίνουν κλάσματα χρησιμοποιώντας την «αίσθηση του αριθμού». Εν ολίγοις, η έρευνα ανέδειξε την αδυναμία των εκπαιδευτικών να συγκρίνουν λογικά μία σχέση κλασμάτων, τη στιγμή που οι ίδιοι μπορούσαν να ανταποκριθούν πλήρως στην διαδικαστική γνώση αναφορικά με τη σύγκριση κλασμάτων. Περαιτέρω έρευνα (Young&Zientek, 2011) έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ευέλικτοι όσον αφορά την πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Προκειμένου να εκτελέσουν μία πράξη πολλαπλασιασμού, μετέτρεπαν σε κοινούς, τους παρονομαστές των κλασμάτων, πράγμα που δεν υπόκειται στη μεθοδολογία εκτέλεσης της πράξης. Ομοιότητα παρουσιάζει μία έρευνα (Newton, 2008; Young&Zientek, 2011) στην οποία φάνηκε οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιούν την τακτική του πολλαπλασιασμού χιαστί «cross- multiply» για πράξη πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Όσον αφορά τη μοντελοποίηση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να έχουν έλλειψη της αίσθησης αναπαράστασης (Caglayan&Olive, 2011). Όταν κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τον πολλαπλασιασμό ½ x 1/3 με τη χρήση μοτίβων, οι περισσότεροι σχημάτισαν δύο μοτίβα και όχι ένα, τοποθετώντας το σύμβολο του πολλαπλασιασμού στη μέση. Τέλος από την έρευνα των (Muir&Livy, 2012) συμπεραίνουμε πως οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να μετατρέψουν τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς. Από ένα δείγμα 279 αποφοίτων μόνο το 15 % ήταν σε θέση να βρει το αποτέλεσμα 3/7. Οι περισσότεροι διαιρούσαν αντί του 3 με το 7, το 7 με το 3 (Muir&Livy, 2012).

Πώς μπορούν να βελτιωθούν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των κλασμάτων ;

Όπως είδαμε παραπάνω οι δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί στο χώρο των κλασμάτων είναι αξιοσημείωτες. Η βάση του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι δίνεται βαρύτητα σε καταστάσεις διαδικαστικής γνώσης αντί της εννοιολογικής. Ξεκινώντας από τα ΑΕΙ, οι καθηγητές οφείλουν να επενδύσουν σε κίνητρα και ερεθίσματα, μέσω των οποίων οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί να καταφέρουν να ξεφύγουν από τον αλγόριθμο και να δούνε στην ουσία την κάθε πράξη. Συγκεκριμένα στο χώρο των κλασμάτων μιλάμε για καλλιέργεια της αίσθησης της αναπαράστασης. Η μοντελοποίηση διαφορετικά, πρόκειται για μία διαδικασία μέσα από την οποία ο εκπαιδευτικός θα καταφέρει να αποτυπώσει ουσιαστικά μία πράξη πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ποικίλους τρόπους ιδίως σήμερα με την αρωγή της Τεχνολογίας (περισσότερα στη συνέχεια). Έπειτα, οι εκπαιδευτικοί που ήδη διδάσκουν, αρμόζει να επιμορφωθούν, καθώς στο χώρο της εκπαίδευσης τα δεδομένα μεταβάλλονται ραγδαία με αποτέλεσμα η βραδύτητα και οι παλαιές μέθοδοι διδασκαλίας να δυσκολεύουν το έργο των ίδιων αλλά και των μαθητών. Ορθό λοιπόν για τους εκπαιδευτικούς, είναι να εμπλουτίσουν τις γνώσεις τους πάνω στα κλάσματα και συγκεκριμένα πάνω στην εννοιολογική γνώση των κλασμάτων (Tsai- Weiet. al, 16/2/2016).

Οι δυσκολίες – παρανοήσεις των μαθητών στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων

Όπως ήδη προαναφέραμε, οι πράξεις ρητών αριθμών δυσκολεύουν αρκετά τους μαθητές. Συγκεκριμένα παρακάτω θα δούμε τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών έτσι όπως διαγράφηκαν μέσα από το χώρο της έρευνας.

Ξεκινώντας λοιπόν μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται να μεταβούν από την πρόσθεση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Fischbein, Deri, Nello&Marino, 1985; Tirosh&Graeber, 1989). Σύμφωνα με τον Taber (1999), η δυσκολία αυτη ονομάζεται « multipliereffect» και την συναντήσαμε και προηγουμένως στους εκπαιδευτικούς. Ομοιότητα με τους τελευταίους, καθίσταται και το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν την τάση να υπεργευνικεύουν κανόνες που ισχύουν για τους ακεραίους, στους ρηρούς αριθμούς και συγκεκριμένα στα κλάσματα. Κατ΄αυτόν τον τρόπο ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων μεγαλώνει το κλάσμα ενώ η διαίρεση το μικραίνει (Brown, 1981; Ekenstam&Greger, 1983). Ακόμη, ένας λόγος που οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα είναι και η πολλαπλή διάσταση του ίδιου του κλάσματος. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι το κλάσμα παρουσιάζεται ως μέρος όλου, ως λόγος, ως μέτρο, ως διαίρεση και ως πολλαπλασιαστής (Kieren 1976; Behr,Lesh, Post and Silver 1983; Sinicrope & Mick 1998, Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., Σπύρου, Π., 2004). Αναλυτικότερα:

- Ως μέρος όλου θεωρείται λ.χ το μέρος μίας επιφάνειας ενός σχήματος ¾ ενός οικοπέδου.
- Το κλάσμα ως λόγος αφορά στη σύγκριση δύο ποσοτήτων.
- Ως μέτρο αφορά στην αριθμογραμμή πάνω στην οποία μπορεί να αναπαρασταθεί ένα κλάσμα μεταξύ δύο ακεραίων (Lamon, 1999).
- Ως διαίρεση, το κλάσμα θεωρείται το αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή και τέλος
- Ως πολλαπλασιαστής σημαίνει ότι «για το γινόμενο 4 x 3/5 ο πολλαπλασιασμός 4 x 3 προηγείται της διαίρεσης με το 5 (Α. Γαγάτσης κ.ά., 2006).

Βάσει των παραπάνω διαστάσεων λοιπόν, κατανοούμε ότι οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν το κλάσμα σε πολλές εκφάνσεις κάτι που καθιστά ακόμη πιο σύνθετο ο έργο του εκπαιδευτικού. Πάραυτα, σημαντικά λάθη των μαθητών οφείλονται στο επιστημολογικό εμπόδιο των φυσικών αριθμών. Βλέπουμε εν ολίγοις λάθη όπως 6 : ½ = 3 και ½ : 1/3 = 1/5. Λάθη ακόμη εννοιολογικής φύσης, οφείλονται στην «πυκνή δομή» των ρητών αριθμών. Ενώ στους φυσικούς αριθμούς οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν έναν μονοδιάστατο αριθμό, ωστόσο στους ρητούς αριθμούς και δει στα κλάσματα έχουν τον αριθμητή, παρονομαστή και την κλασματική γραμμή (Γαγάτσης κ.ά, 2006). Μια από τις βασικές παρανοήσεις των μαθητών είναι το ότι θεωρούν, πως μεταξύ δύο κλασματικών αριθμών δεν υπάρχει επόμενος (Γαγάτσης κ.ά, 2006). Κάτι τέτοιο οφείλεται στην πρωταρχική θέση που έχει η διδασκαλία των φυσικών αριθμών έναντι των ρητών (Sophian, 2000). Πολλοί μαθητές ακόμη, αντιλαμβάνονται τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς, ανεξάρτητοι μεταξύ τους (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, Σιακαλλη, 2001). Όλα τα παραπάνω λάθη επομένως οφείλονται στη διαρκή και υποσυνείδητη σύγκριση που κάνουν οι μαθητές μεταξύ φυσικών και ρητών αριθμών. Απόρροια της σύγκρισης αυτής είναι ακόμη και η αντίληψη ότι το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι και το μικρότερο και το αντιθέτως (Χαιρέτη, 2009).Σημαντικό σφάλμα των εκπαιδευτικών με επιπτώσεις στους μαθητές, είναι το ότι προσεγγίζουν τα κλάσματα με το σκεπτικό ενός ενήλικα. Έτσι δίνουν έμφαση στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας τους με κυρίαρχο στοιχείο τη μηχανική εκμάθηση του αλγορίθμου. Οι μαθητές επομένως, προσεγγίζουν τα κλάσματα μέσω της διαδικαστικής γνώσης μη μπορώντας να καταλάβουν το γιατί «δουλεύει» ο αλγόριθμος ή το που χρησιμεύει (Hart, 1981; Kerslake,1986; Ni,2001. Στο:Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., Σπύρου, Π., 2004). Αρνητικό χαρακτηριστικό της διδασκαλίας των κλασμάτων είναι το γεγονός ότι δεν πραγματοποιείται σύνδεση μεταξύ της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης των κλασματικών αριθμών. Η εκμάθηση του αλγορίθμου που προαναφέρθηκε δε συνδέεται με πραγματολογικές καταστάσεις με αποτέλεσμα να γίνεται μηχανικά και ανούσια (Philippou&Christou, 1994). Ο τρόπος παρουσίασης των αναπαραστάσεων τείνει να γίνεται στερεοτυπικός από τη στιγμή που οι αναπαραστάσεις ακολουθούν το ίδιο μοτίβο. Ως παραδείγματα σχετικής έρευνας (Γαγάτσης κ.ά, 2006) φέρουμε τα ¾ ενός κύκλου τα οποία εξ΄αρχής χωρίζονται σε τέσσερα κομμάτια. Όταν δίνονται ήδη σχεδιασμένα τα κομμάτια ενός συνόλου, οι μαθητές χρωματίζουν όσα τους ζητούνται δίνοντας βάση μόνο στο μέρος του κλάσματος και όχι στο όλο (Γαγάτσης κ.ά, 2006).

Συνεχίζοντας, παρανοήσεις των μαθητών σχετίζονται την αντίληψη της σχέσης μέρους – μέρους αντί της σχέσης μέρους – όλου. Όπως σχολιάσαμε πρωτύτερα, μία από τις διαστάσεις του κλάσματος είναι αυτή του μέτρου. Στη διδασκαλία του κλάσματος ως μέτρου, οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τη μονάδα αναφοράς του κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή. Επιπρόσθετα, προκαλείται σύγχυση στους μαθητές όταν αυτοί έχουν να αντιμετωπίσουν προβλήματα, στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Η μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και την εικονική αναπαράσταση των όσων περιγράφει η αριθμητική γραμμή, φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές (Behr et al.1983; Bright et al.1988, Γαγάτσης, Α. Μιχαηλίδου, Ε. Σιακαλλή, Μ. 2001). Ας συλλογιστούμε ότι μία αριθμογραμμή πάνω στην οποία τοποθετούνται φυσικοί και ρητοί αριθμοί, χρειάζεται επεξήγηση. Το έργο αυτό όταν δεν υλοποιείται επαρκώς από τον εκπαιδευτικό, τότε προκαλείται σύγχυση στη σχολική τάξη. Μαθητές σε έρευνα (Γαγάτσης κ.άΗμερομηνία) φάνηκαν να μη μπορούν να κατανοήσουν το κλάσμα ως διαίρεση. Λ.χ έχουμε τέσσερις σοκολάτες και θέλουμε να τις δώσουμε σε έξι παιδιά. Πηγαίνοντας τώρα στον πολλαπλασιασμό συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να αδυνατούν να κατανοήσουν τον αλγόριθμο στην ουσία του (Χαιρέτη, 2009). Ενώ στον πολλαπλασιασμό των ακέραιων αριθμών έχουμε ουσιαστικά επανάληψη της πρόσθεσης, στα κλάσματα οι μαθητές δεν δύνανται να αποδώσουν το νόημα της πράξης. Έτσι λοιπόν οδηγούνται στη μηχανική εκτέλεση της. ως επέκταση έχουμε σφάλματα όπως:

- 7/8 χ ¾ = 7/8 χ 6/8 = 42/8
- 5 1/3 χ 6 ¾ = 30 3/12

Στην πρώτη περίπτωση, οι μαθητές μπερδεύουν τους αλγόριθμους της πρόσθεσης και αφαίρεσης με αποτέλεσμα να προσπαθούν να δημιουργήσουν κοινούς παρονομαστές και έπειτα πολλαπλασιάζουν. Στον πολλαπλασιασμό που κάνουν όμως αφήνουν τον ίδιο παρονομαστή χωρίς να τον πολλαπλασιάσουν όπως αρμόζει. (Ashlock, 1994) (Raber, 1999). Στη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές πολλαπλασιάζουν τους ακέραιους μεταξύ τους και έπειτα τους κλασματικούς όρους. Το ορθό θα ήταν να πολλαπλασίαζαν τον κάθε ακέραιο με το κλάσμα του και έπειτα τα δύο νέα κλάσματα να τα πολλαπλασίαζαν προκειμένου να βρεθεί το γινόμενο. Στη συνέχεια, όσον αφορά στη διαίρεση των κλασμάτων, φαίνεται να αποτελεί τη δυσκολότερη πράξη για τους μαθητές καθώς αδυνατούν να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο δουλεύει ο αλγόριθμος (Yusof, 2003). Κάτι τέτοιο, σε συνδυασμό με την αδυναμία των εκπαιδευτικών να εξηγήσουν για το τι ακριβώς συμβαίνει, όταν αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε το δεύτερο κλάσμα, προκαλεί σύγχυση στους μαθητές. Εκείνοι με τη σειρά τους οδηγούνται στη μηχανιστική εκτέλεση της πράξης της διαίρεσης. Επίσης οι μαθητές πολλές φορές έχουν την αντίληψη ότι η διαίρεση ενός μικρότερου αριθμού με έναν μεγαλύτερο δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί. (Yusof, 2003). Ως προέκταση της παραπάνω αντίληψης, πιστεύουν ότι ο διαιρετέος πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερος του διαιρέτη. Μεταφερόμαστε στο χώρο των προβλημάτων όπου έρευνα έδειξε (Fischbein, 1985; Bell, 1989) ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη δημιουργία προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Ο μεγάλος βαθμός δυσκολίας αφορα στην περίπτωση όπου ο διαιρέτης ενός κλάσματος είναι μικρότερος της μονάδας ή όταν ο διαιρετέος είναι μικρότερος του διαιρέτη. Ειδικά στη δεύτερη περίπτωση επικρατεί η αντίληψη ότι τα 3/6 είναι η ίδια ποσότητα με τα 6/3. Κλείνοντας με τις παρανοήσεις των μαθητών φάνηκε (Neimi, 1996) ότι ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών είναι τυποποιημένος με αποτέλεσμα οι μαθητές να μη μπορούν να είναι ευέλικτοι. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ένα φύλλο παρατήρησης στην ίδια έρευνα, όπου στο ερώτημα τι είναι κλάσμα, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν λέγοντας ότι «κλάσμα είναι το κομμάτι από κάτι που τρώνε». Η απάντηση των μαθητών αντικειμενικά ευσταθεί μόνο που ο εκπαιδευτικός δεν περίμενε αυτού του είδους την απάντηση.

Πώς μπορούν να αποτραπούν τα λάθη των μαθητών στα κλάσματα;

Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στο χώρο των κλασμάτων ποικίλουν. Προβάλλαμε ήδη πολλά από αυτά νωρίτερα. Ωστόσο οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα μπορούν και πρέπει να περιοριστούν. Ερευνητές (Γαγάτσης Α., Μιχαηλίδου Ε., και Σιακαλλή Μ., 2001) υποστηρίζουν ότι πρωτίστως πρέπει να υπάρξει σαφής εικόνα των παρανοήσεων των μαθητών. Προτείνεται επομένως η «thinkaloud» προσέγγιση μέσω της οποίας θα δίνεται η δυνατότατα στον εκπαιδευτικό να δει τον τρόπο με τον οποίο σκέπτονται οι μαθητές. Αφού ανιχνεύσει το λάθος τότε θα είναι και σε θέση να παράσχει την κατάλληλη υποστήριξη. Ακόμη ενδείκνυται η έμφαση στην προϋπάρχουσα γνώση πάνω στα κλάσματα. Οι μαθητές στην περίπτωση αυτή καλούνται να μεταφέρουν στην τάξη τα όποια ερεθίσματα έχουν σχετικά με τα κλάσματα μέσα από τη δομημένη καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Επίσης η χρήση εικονικών, συμβολικών και λεκτικών αναπαραστάσεων θα βοηθήσει τους μαθητές να καλλιεργήσουν την αίσθηση της αναπαράστασης. Έρευνα (Γαγάτσης κ.ά) καταδεικνύει την ανάγκη να δοθεί έμφαση στην αριθμητική γραμμή και τη διδασκαλία της. Η αριθμητική γραμμή δίνει τη δυναμική στον εκπαιδευτικό να τοποθετήσει τα κλάσματα πάνω σε αυτήν και να τα συγκρίνει είτε μεταξύ άλλων κλασμάτων είτε μεταξύ κλασμάτων και ακεραίων. Ακόμη με τη χρησιμοποίηση της, μπορεί να δείξει πως μεταξύ δύο ρητών αριθμών υπάρχουν άπειροι ρητοί. Τέλος μέσα από την αξιολόγηση των μαθητών πάνω στην αριθμητική γραμμή, εντοπίζονται οι παρανοήσεις τους καθιστώντας ευκολότερη την αντιμετώπιση τους με κλάσματα (Keijzer & Terwel, 2000: Keijzer & Terwel, 2001: Ni,2000. Στο: Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία, Σπύρου, , 2004). Στο κομμάτι του πολλαπλασιασμού, προτείνεται (Sadi, 2007) η εστίαση σε πραγματικές καταστάσεις που να δείχνουν για ποιον λόγο δουλεύει ο αλγόριθμος. Κάτι τέτοιο επιδιώχθηκε στη μελέτη περίπτωσης, πράγμα που θα δούμε στη συνέχεια. Κλείνοντας, προτείνεται (Yusof, 2003), οι εκπαιδευτικοί να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξωτερικεύουν ή και να βελτιώνουν της δικές τους απόψεις γύρω από τα κλάσματα παρά να τους δίνουν στερεοτυπικά μοντέλα κλασμάτων. Η τελευταία τακτική, αποθαρρύνει τους μαθητές από το να καλλιεργήσουν την αίσθηση του μέρους – όλου και μέρους – μέρους από τη στιγμή που η σκέψη τους κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό.

Η χρήση των Τ.Π.Ε στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Η χρήση των ΤΠΕ στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ξεκίνησε την δεκαετία 1980-90.Στην δεκαετία αυτή πραγματοποιήθηκε η τρίτη φάση ένταξης των ΤΠΕ στην εκπαίδευση έχοντας προηγηθεί η πρώτη πριν το 1970 σε Γυμνάσια και Λύκεια της χώρας και η δεύτερη 1970-80 σε επίπεδο Λυκείου. Η παρούσα φάση αφορά και στις δύο σχολικές βαθμίδες. Τη στιγμή που μιλάμε, διανύουμε την τέταρτη φάση (1990-) Μπαλκίζας, Ν., (2007). Σκοπός της ένταξης των ΤΠΕ στο χώρο της Παιδείας είναι ο εκσυγχρονισμός της εκπαίδευσης στο σχολείο και στην παρούσα φάση στο Δημοτικό με όλα τα πλεονεκτήματα που παρέχει. Η χρήση των ΤΠΕ στα Μαθηματικά δίνει στον εκπαιδευτικό τη δυναμική να προσεγγίσει την εκπαιδευτική διαδικασία με καινοτόμο και ενδιαφέρων τρόπο, προσφέροντας παράλληλα στους μαθητές ένα πιο ευχάριστο περιβάλλον μάθησης. Πλέον ο μαθητής βρίσκεται στο επίκεντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας ενώ ο δάσκαλος χαίρει καθήκοντα διαμεσολαβητή. Ακόμη αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση των ΤΠΕ δίνει τη δυνατότητα να γίνει κατανοητή από τους μαθητές «η αίσθηση του αριθμού» σε σχέση με το όλο μέσα από ποικίλες αναπαραστάσεις. Το μάθημα αποκτά χαρακτήρα παιγνιώδη και παραγωγικό.

Η χρήση των Τ.Π.Ε στα Μαθηματικά

Η τεχνολογία στις μέρες μας, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της κοινωνίας. Η νέα πραγματικότητα στην εκπαίδευση καλεί το Σχολείο να εκσυγχρονιστεί. Τα τεχνολογικά επιτεύγματα στο χώρο της εκπαίδευσης είναι αξιόλογα και αρμόζει να απορροφηθούν από τα εκπαιδευτικά ιδρύματα με μεθοδικότητα. Συγκεκριμένα, στο μάθημα των μαθηματικών, υπάρχουν αρκετά αξιόπιστα λογισμικά με τα οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να πραγματοποιήσει αποτελεσματικότερα τη διδασκαλία. Ένα από αυτά είναι και το «National Library Of Virtual Manipulatives» που θα περιγράψουμε εκτενώς στη συνέχεια. Το μεγάλο στοίχημα που καλείται να κερδίσει το Σχολείο είναι η σύνδεση της θεωρίας με την πράξη. Οι μαθητές όπως προαναφέραμε αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές μπορούν να περιοριστούν με τη σωστή αξιοποίηση συγκεκριμένων εκπαιδευτικών λογισμικών.

Ειδικότερα, σχετικά με τα λογισμικά πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, επιδιώκεται η καλλιέργεια της αίσθησης της αναπαράστασης κάτι που εκλείπει σήμερα από την εκπαιδευτική διαδικασία. Οι μαθητές μέσω αυτών,πειραματίζονται, εξερευνούν το διαδραστικό περιβάλλον τους και σχολιάζουν (Cannon, Heal, & Wellman, 2000). Ακόμη, μια από τις δυνατότητες που προσφέρουν τα διαδραστικά λογισμικά είναι η αναίρεση των επιλογών των μαθητών. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να επαναπροσδιορίζουν τις κινήσεις τους. Έρευνα (Goldman & Pellegrino, 1987; Okolo, Bahr, & Reith, 1993) έδειξε ότι οι μαθητές που μαθαίνουν χρησιμοποιώντας εκπαιδευτικά λογισμικά, ασχολούνται περισσότερο και μαθαίνουν περισσότερα πράγματα απ΄ότι να αρκούνταν στην παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης στην ίδια έρευνα φαίνεται πως επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα. Συνεχίζοντας,παρατηρείται το φαινόμενο κατά το οποίο οι μαθητές υστερούν σε εμπειρίες ρητών αριθμών από την καθημερινότητα τους. Τα περισσότερα ερεθίσματα γύρω τους αφορούν σε ακέραιους αριθμούς, πράγμα που καθιστά απαραίτητη την παροχή ερεθισμάτων από τον εκπαιδευτικό, ώστε να εξοικειωθούν εξίσου με τους ρητούς αριθμούς. Από τη στιγμή που επιτευχθεί η παραπάνω σύνδεση, τότε το χάσμα μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης θα γεφυρωθεί (National Research Council, 2001).

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε σαφή τον τρόπο ενσωμάτωσης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Σε καμία περίπτωση οποιοδήποτε τεχνολογικό επίτευγμα δε μπορεί να αμφισβητήσει ή και να αναιρέσει το ρόλο του εκπαιδευτικού στη σχολική τάξη. Ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που οργανώνει τη ροή του μαθήματος, θέτει προβληματισμούς στους μαθητές, καθοδηγεί και εμπνέει. Ωστόσο βάσει της θεωρίας του Κονστρουκτιβισμού, παύει να είναι αυθεντία και ο ρόλος του είναι πέρα από τα παραπάνω καθοδηγητικός και εμψυχωτικός. Βάσει των όσων ειπώθηκαν, επιτρέπεται η υποστηρικτική χρήση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση για να επιτευχθούν τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Οι Sowell, 1989 και Suydam, 1985, 1986, υποστηρίζουν πως ο συνδυασμός από τη μία, φυσικών και εικονικών αναπαραστάσεων και από την άλλη διαδραστικών αναπαραστάσεων με χρήση Η/Υ στη διδασκαλία των κλασμάτων, επιφέρουν ουσιώδη βελτίωση στη μαθηματική γνώση των μαθητών (Clements & Sarama, 2007b). Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα, ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών γενικότερα και των κλασμάτων (πολλ/σμός και διαίρεση) ειδικότερα με τη χρήση ΤΠΕ, μπορεί να επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα στους μαθητές. Το ερώτημα είναι, κατά πόσο ο εκπαιδευτικός εμπιστεύεται τέτοιου είδους λογισμικά και κατά πόσο ο ίδιος είναι σε θέση να τα προωθήσει στη σχολική τάξη.

NationalLibraryOfVirtualManipulatives (NLVM)

Το (NLVM) ή αλλιώς «NationalLibraryofVirtualManipulatives»,πρόκειται για ένα πρότζεκτ που έτρεξε η επιστημονική ομάδα του Πανεπιστημίου της Γιούτα, υπό την υποστήριξη του Εθνικού Ιδρύματος Επιστημών των ΗΠΑ. Ξεκίνησε το 1999 με σκοπό τη δημιουργία μίας διαδραστικής βιβλιοθήκης μέσα στην οποία θα υπάρχουν ηλεκτρονικές εφαρμογές για στο μάθημα των Μαθηματικών. Πλέον, η ηλεκτρονική βιβλιοθήκη είναι διαθέσιμη στο ευρύ κοινό και καλύπτει όλες τις τάξεις της Α΄Βαθμίδας. Ακόμη περιλαμβάνει εφαρμογές σε περιοχές των μαθηματικών όπως τα κλάσματα, οι δεκαδικοί αριθμοί και η γεωμετρία. Μέχρι σήμερα εξέλειπαν λογισμικά που να επιτρέπουν ουσιαστικά την κατανόηση του περιεχομένου των Μαθηματικών. Πλέον μέσα από το χώρο της έρευνας , δημιουργούνται ιστότοποι οι οποίοι επιτρέπουν σε ένα μεγάλο βαθμό την εμπλοκή των μαθητών στη μάθηση και κατανόηση των Μαθηματικών. Ένας τέτοιος ιστότοπος είναι και το «NLVM». Βασικός σκοπός της βιβλιοθήκης αυτής, είναι να ενσωματώσει ουσιαστικά τους μαθητές στις γνωστικές περιοχές των μαθηματικών με κύριο χαρακτηριστικό την έκθεση τους σε οπτικές αναπαραστάσεις. Οι υπεύθυνοι του προγράμματος, υποστηρίζουν ότι η μάθηση και η κατανόηση του περιεχομένου των Μαθηματικών μπορεί να επιτευχθεί μέσα από εποπτικά περιβάλλοντα μάθησης πετυχαίνοντας μάλιστα τους ισάξιους στόχους με αυτούς που θέτει η παραδοσιακή διδασκαλία. Ολοκληρώνοντας, η ηλεκτρονική βιβλιοθήκη είναι στη διάθεση τόσο των εν ενεργεία εκπαιδευτικών όσο και των μελλοντικών. Στη δικιά μας έρευνα θα ασχοληθούμε με δύο από τα διαθέσιμα λογισμικά, ένα αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων και ένα με τη διαίρεση. Περισσότερες λεπτομέρειες για τα λογισμικά αυτά θα παραθέσουμε στη Μέθοδο. (http://nlvm.usu.edu/en/nav/siteinfo.html, 23/2/2016).

Ερευνητικές υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα.

Ερευνητικές υποθέσεις

Στο σημείο αυτό θεωρείται σκόπιμο να παρουσιαστούν οι υποθέσεις της έρευνας. Αναμένεται στους μαθητές που εξετάζονται: :

- Μία σχετική βελτίωση όσον αφορά στην αίσθηση της αναπαράστασης των κλασμάτων και
- Εξοικείωση με τα εκπαιδευτικά λογισμικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων.

Αναφορικά με τα την πρώτη υπόθεση, πιστεύεται ότι οι μαθητές θα επιτύχουν μία μικρή αλλά σημαντική βελτίωση ως προς την αίσθηση της αναπαράστασης των κλασμάτων. Τα λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν επιτρέπουν στους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις πράξεις των κλασμάτων και να αντιληφθούν τι σημαίνει στην ουσία του ο εκάστοτε αλγόριθμος. Ωστόσο, λέμε σχετική βελτίωση καθώς οι μεγάλες εννοιολογικές αλλαγές στη μάθηση, είναι προϊόν μακρόχρονης διδασκαλία και όχι μιας παρέμβασης περιορισμένου χρόνου.

Σχετικά τώρα με την δεύτερη υπόθεση, είναι σαφές πως οι μαθητές θα εξοικειωθούν με τη χρήση των λογισμικών στην ενασχόληση τους με τα κλάσματα. Μέχρι σήμερα η χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία αποτελούσε «ταμπού» λόγω της απειρίας και έντονης καχυποψίας που επικρατούσε στο χώρο των εκπαιδευτικών. Από τη στιγμή λοιπόν που οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την Τεχνολογία – η οποία όπως προαναφέρθηκε αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας τους – είναι θετικά προσκείμενοι προς αυτή.

Ερευνητικά ερωτήματα

Μαζί με τις υποθέσεις, τίθενται και τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Κατά πόσο η χρήση των ΤΠΕ μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων;
- Έχουν τα εκπαιδευτικά λογισμικά την δυναμική να αντικαταστήσουν εξ΄ολοκλήρου, τον εκπαιδευτικό ρόλο του εκπαιδευτικού μέσα στη σχολική τάξη;
- Δύναται η χρήση των ΤΠΕ να οδηγήσει στην καλλιέργεια θετικής στάσης προς τα Μαθηματικά γενικότερα και τα κλάσματα ειδικότερα;

Πριν περάσουμε στο κομμάτι της μεθόδου να αναφέρουμε ότι οι παραπάνω υποθέσεις και τα ερωτήματα θα σχολιαστούν στο κλείσιμο της εργασίας, έτσι ώστε να παρατηρηθεί κατά πόσο ικανοποίησαν τις ανάγκες και προσδοκίες της έρευνας.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε συμμετείχαν δύο μαθητές της Στ΄τάξης του Δημοτικού Σχολείου, ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Πέραν από πρακτικούς λόγους, οι μαθητές επιλέχθηκαν από την τελευταία τάξη του Δημοτικού, προκειμένου να εξασφαλίσουμε μεγαλύτερες πιθανότητες αποτελεσματικότητας στη συνολική διαδικασία. Τονίζουμε ότι συστηματικά τα κλάσματα διδάσκονται από την Γ΄τάξη. Όσον αφορά τα κίνητρα που είχαν οι μαθητές, ήταν το ότι θα έβλεπαν τα Μαθηματικά από μία διαφορετική σκοπιά. Η τεχνολογία έχει διεισδύσει πλήρως στις ζωές των μαθητών. Όταν λοιπόν πλαισιώνεται από στόχους και σκοπούς που θέτει ο εκάστοτε εκπαιδευτικός, μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στους μαθητές. Ακόμη, το γεγονός ότι οι μαθητές συνδέουν την Τεχνολογία στην εκπαίδευση με το παιχνίδι, φέρνει εκπαιδευτικό και μαθητή πιο κοντά στον βασικό στόχο που είναι η μάθηση μέσα από ένα ευχάριστο και αλληλεπιδραστικό περιβάλλον.

Σχετικά με την μέθοδο αρχικής αξιολόγησης των μαθητών ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

Αρχικά δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο αξιολόγησης με ασκήσεις γενικού τύπου πάνω στα κλάσματα. Σκοπός του ερευνητή, ήταν να διαπιστώσει το επίπεδο των μαθητών πάνω στη γνωστική περιοχή των κλασμάτων. Το ίδιο φύλλο αξιολόγησης θα συμπλήρωναν και στο τελευταίο στάδιο της τελικής αξιολόγησης προκειμένου να διαπιστωθούν τυχόν αλλαγές. Όσον αφορά το κομμάτι της έρευνας που αναφέρεται στα λογισμικά, η συλλογή του δείγματος έγινε μέσα από ερωταποκρίσεις και την παρατήρηση. Αναλυτικότερα, ο ερευνητής έβαζε τους μαθητές στη διαδικασία να εκτελούν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων και έπειτα εκείνος ρωτώντας, ανακάλυπτε το σκεπτικό πίσω από την κάθε κίνηση των μαθητών. Στην συνέχεια σημείωνε τις απαντήσεις σε φύλλο παρατήρησης, μέσα από το οποίο έβγαζε τα τελικά συμπεράσματα. Προκειμένου να αποφευχθούν τυχόν σφάλματα στη συνολική διαδικασία, πάρθηκαν ορισμένα μέτρα. Στο πρώτο κομμάτι της έρευνας οι μαθητές όφειλαν να πειραματιστούν πάνω στα λογισμικά δίχως καμία διευκρίνιση του ερευνητή. Και αυτό για να διαπιστωθεί το αν η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και λογισμικού ήταν ικανοποιητική. Στη συνέχεια λοιπόν, ο ερευνητής θα έδινε εξηγήσεις, οδηγώντας τους μαθητές στο τελικό κομμάτι της έρευνας. Περισσότερα όμως στοιχεία για τη διεξαγωγή του πειράματος, θα δοθούν στην διαδικασία συλλογής δεδομένων.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Στο συγκεκριμένο σημείο γίνεται σαφής αναφορά σε όλα εκείνα τα μέσα με τα οποία επιτεύχθηκε η συλλογή των δεδομένων από τον ερευνητή.

Φύλλο Αξιολόγησης

Αρχικά λοιπόν όπως παρατηρήθηκε, δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο αξιολόγησης (βλέπε παράρτημα (σελ. 52). Να τονίσουμε ότι προηγουμένως, οι μαθητές δε ενημερώθηκαν για το περιεχόμενο του φύλλου αξιολόγησης άρα και δεν προετοιμάστηκαν γι΄αυτό. Οι ασκήσεις που περιλάμβανε αφορούσαν στην ισοδυναμία και στη σύγκριση κλασμάτων. Ακόμη, στις τέσσερις πράξεις των κλασμάτων και κλείνοντας τους δόθηκε μία άσκηση αναπαράστασης δύο πράξεων, ενός πολλαπλασιασμού και μίας διαίρεσης των κλασμάτων. Με τον όρο αναπαράσταση εννοείται, η ικανότητα των μαθητών να σχεδιάζουν μία πράξη εικονιστικά, δίχως να χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο αλγόριθμο. Με τον τρόπο αυτό επιδιώχθηκε να διαπιστωθεί ο βαθμός καλλιέργειας της αίσθησης αναπαράστασης που είχαν κατακτήσει οι μαθητές μέχρι τότε στο Σχολείο. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον σχετικά με την συσχέτιση του φύλλου αξιολόγησης και των λογισμικών, παρατηρήθηκε στη συγκεκριμένη άσκηση κάτι που θα δούμε και στη συνέχεια.

Φύλλο παρατήρησης

Κατά τη διάρκεια του πειραματισμού, ο ερευνητής είχε στην κατοχή του ένα φύλλο παρατήρησης στο οποίο σημείωνε όσα θεωρούσε σημαντικά από τις αντιδράσεις των μαθητών στα λογισμικά. Εκείνα τα δεδομένα τα οποία συνέλεξε, ανταποκρίνονται σε μία σειρά από ερωτήματα τα οποία αναφέρονται τόσο στην πρώτη επαφή των μαθητών με τα λογισμικά, όσο και μετά από την παρέμβαση. Τα ερωτήματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω:

Ερωτήματα	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
➢ Είναι καλλιεργημένη η αίσθηση της αναπαράστασης στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων;		
➢ Χρειάστηκε αρκετό χρόνο για την ολοκλήρωση μίας αναπαράστασης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων;		
➢ Κατανοεί τη σημασία των χρωμάτων στο λογισμικό του πολλαπλασιασμού;		
➢ Κατανοεί το λόγο που πολλαπλασιάζουμε τα κουτάκια του ενός τεταρτημόριου και όχι των τεσσάρων, στα καταχρηστικά κλάσματα;		
➢ Είναι ευχάριστα στο μαθητή/ τρια, τα λογισμικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης;		
➢ Μπορεί να κατανοήσει τη σχέση της κλασματικής		

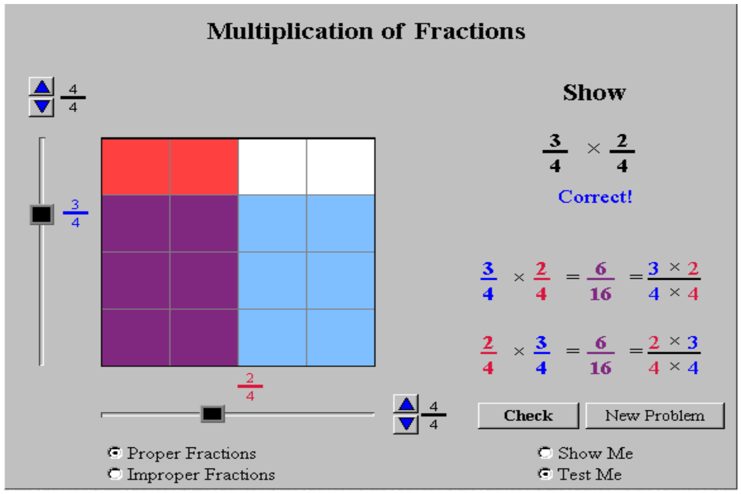
αριθμογραμμής με τις κάθετες γραμμές, στο λογισμικό της διαίρεσης; ➢ Μπορεί να κατανοήσει τη σημασία του μεγέθους της κάθε μπάρας στο λογισμικό της διαίρεσης; ➢ Ποια η προϋπάρχουσα γνώση του μαθητή/τριας πάνω στα κλάσματα γενικότερα και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ειδικότερα;		

Οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα δίνονται παρακάτω, στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων όπου παρουσιάζεται πιο λεπτομερώς η συμπεριφορά των δύο μαθητών.

ΛογισμικότουΠολλαπλασιαμούκλασμάτων -RectangleMultiplication of Fractions

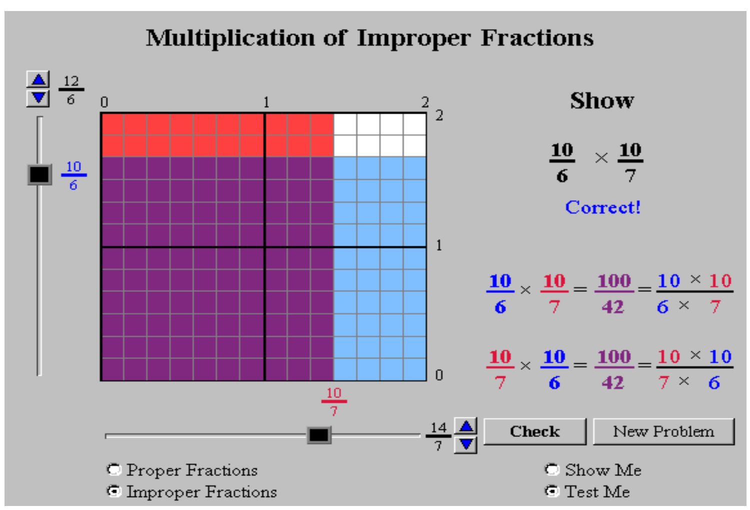
Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, για τις ανάγκες του πειράματος χρησιμοποιήθηκαν δύο εκπαιδευτικά λογισμικά της ηλεκτρονικής βιβλιοθήκης NationalLibraryOfVirtualManipulatives. Στην πρώτη περίπτωση, πεδίο δράσης αποτέλεσε το RectangleMultiplication. Πρόκειται για το λογισμικό που προσφέρει σε μαθητές και εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να μοντελοποιούν την πράξη του πολλαπλασιασμού, εξηγώντας πως ο τελευταίος «δουλεύει».

Πιο συγκεκριμένα το λογισμικό αποτελείται από δύο μεγάλες κατηγορίες – επιλογές. Η πρώτη αφορά στα γνήσια ενώ η δεύτερη στα καταχρηστικά κλάσματα. Αρχικά με την είσοδο στο λογισμικό δίνεται ένα παράδειγμα προκειμένου οι εμπλεκόμενοινα πάρουν μία πρώτη ιδέα περί τίνος πρόκειται. Στο πάνω μέρος της οθόνης δεξιά δίνεται η πράξη. Δύο μπάρες, μία οριζόντια και μία κάθετα του μοτίβου, δίνουν τη δυνατότητα στον μαθητή, να οπτικοποιήσει την ζητούμενη πράξη και να βρει το γινόμενο. Ο ρόλος της κάθε μπάρας ουσιαστικά είναι να δημιουργεί τόσα κουτάκια όσο ζητούνται την κάθε φορά. Αυτό γίνεται αυξομειώνοντας τα βελάκια που υπάρχουν τόσο πάνω όσο και κάτω από την κάθε μπάρα. Αφού λοιπόν δημιουργηθούν τα ζητούμενα κουτάκια, έπειτα μετακινώντας τους δείκτες, γεμίζουμε ακριβώς όσα χρειάζεται. Στη συνέχεια,όπως φαίνεται παρακάτω, ο κάθε κλασματικός αριθμός ταυτίζεται με ένα χρώμα. Στο σημείο που οι δύο αριθμοί εφάπτονται, δημιουργείται ένα νέο χρώμα/αριθμός που είναι και το γινόμενο της πράξης. Αφού λοιπόν οι μαθητές πραγματοποιούσαν την αναπαράσταση της πράξης, όταν τελείωναν έκαναν «κλικ» στην επιλογή check για να διαπιστώσουν αν οι κινήσεις τους ήταν σωστές.



Όταν επομένως οι κινήσεις τους ήταν σωστές, το λογισμικό τους επιβράβευε με την υπόδειξη correct και με την επίδειξη του αλγορίθμου από κάτω. Τέλος, πατώντας την επιλογή newproblem, δίνεται μία νέα πράξη έτοιμη για να αναπαρασταθεί.

Με την ίδια φιλοσοφία πραγματοποιούνται αναπαραστάσεις καταχρηστικών κλασμάτων, με την κύρια διαφορά να βρίσκεται στο περιεχόμενο του μοτίβου. Σήμα κατατεθέν για την επιτυχημένη προσπάθεια αναπαράστασης της πράξης, αποτελεί η αριθμογραμή που βρίσκεται οριζόντια και κάθετα του μοτίβου (0,1,2). Με τη βοήθεια αυτής, οι μαθητές μπορούν να βρουν τη μονάδα και έπειτα να προχωρήσουν στο ζητούμενο της πράξης. Ωστόσο όπως φανερώνει η παρούσα έρευνα, η αναπαράσταση μία πράξης πολλαπλασιασμού καταχρηστικών κλασμάτων, φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές καθώς φαίνεται να μην έχουν καθόλου ανεπτυγμένη την αίσθηση αναπαράστασης των κλασμάτων.

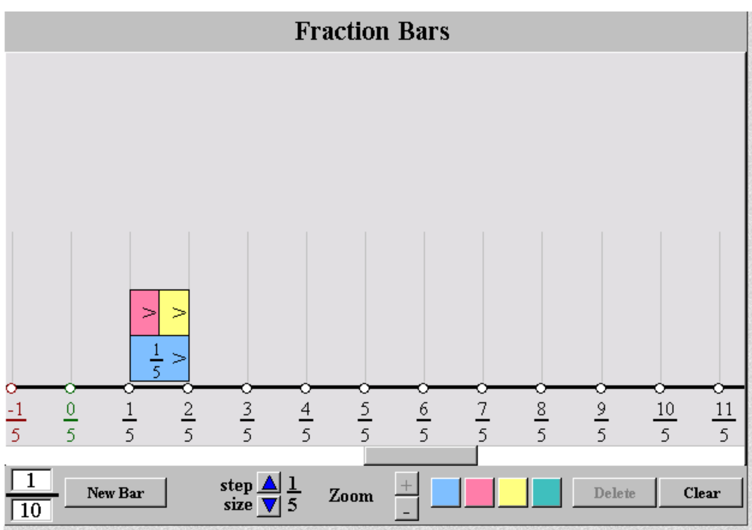


Λογισμικό της Διαίρεσης των κλασμάτων – FractionNumberLineBars

Όπως το λογισμικό του πολλαπλασιασμού, έτσι και αυτό, δίνει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να προσεγγίσουν την διαίρεση των κλασμάτων αναπαραστατικά. Με τη χρήση του, μπορεί να διαπιστωθεί πόσες φορές χωράει ένα κλάσμα μέσα σε ένα άλλο πράγμα αδύνατο με την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Το περιβάλλον επομένως έχει την εξής δομή:

Στο κάτω μέρος, δεξιά της οθόνης, ο μαθητής μπορεί να πληκτρολογήσει ένα κλάσμα και πατώντας την επιλογή newbar να το εμφανίσει στην οθόνη. Με τον τρόπο αυτό, δημιουργούνται τα κλάσματα με τη μορφή μπάρας ή αλλιώς λωρίδας. Κύριο χαρακτηριστικό του λογισμικού, αποτελεί η κλασματική αριθμογραμμή, η οποία καθορίζει την ορθότητα της αναπαράστασης ανάλογα με την ρύθμιση της. Η μεταβολή της αριθμογραμμής εξαρτάται από το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών των δύο κλασμάτων. Ο μαθητής προκειμένου να την μεταβάλει, χρησιμοποιεί τα δύο βελάκια που υπάρχουν στο κάτω μέρος της οθόνης, μικραίνοντας ή μεγαλώνοντας στην ουσία το κλάσμα. Εφ'όσον λοιπόν ο εκπαιδευτικός καλέσει τον μαθητή να δημιουργήσει δύο κλάσματα, ο τελευταίος καλείται να τοποθετήσει το ένα πάνω στο άλλο (ανάλογα με το ποιο διαιρεί ποιο) προκειμένου να διαπιστώσει πόσες φορές χωράει το ένα κλάσμα στο άλλο. Εάν ένα κλάσμα χωράει δύο φορές σε ένα άλλο τότε ο μαθητής καλείται να εισαγάγει άλλο ένα ίδιο κλάσμα και να το τοποθετήσει δίπλα στο αρχικό ώστε να επιτευχθεί η σύγκριση. Για μεγαλύτερη διευκόλυνση των μαθητών, δίνεται η δυνατότητα να αλλάξει το χρώμα της κάθε λωρίδαςώστε να ξεχωρίζουν. Τέλος πάνω από την αριθμογραμμή υπάρχουν κάθετες γραμμές οι οποίες βοηθούν το μαθητή να παρατηρήσει το πόσο ακριβώς χωράει το ένα κλάσμα στο άλλο. Όταν η σύγκριση επιτευχθεί, τότε μαρκάροντας τις λωρίδες, ο μαθητής επιλέγει το clear διαγράφοντας την αναπαράσταση, προχωρώντας έτσι σε μία άλλη. Παρακάτω ακολουθεί σχετικό παράδειγμα:



Στο παράδειγμα αυτό, παρουσιάζεται η πράξη 1/5 : 1/10. Βλέπουμε λοιπόν πως το 1/10 χωράει δύο φορές στο 1/5, πράγμα που διαπιστώνεται και στην περίπτωση που εκτελέσουμε τον αλγόριθμο: 1/5 : 1/10 = 1/5 : 10/1 = 10 : 5 = 2.

Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Στο σημείο αυτό πρόκειται να πραγματοποιηθεί η περιγραφική ανάλυση των πειραματικών συνθηκών καθώς επίσης και η σειρά διαδοχής τους.

Ξεκινώντας λοιπόν, το πρώτο κομμάτι της μελέτης περίπτωσης αφορούσε τη συμπλήρωση ενός φύλου αξιολόγησης. Ο σκοπός για τον οποίο συντάχθηκε το συγκεκριμένο μέσο παρατήρησης, ήταν αφενός για να αναδειχθεί η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών αφετέρου για να διαπιστωθεί εάν υπήρξε κάποια αλλαγή κατά τη συμπλήρωση του στο τέλος της διαδικασίας. Ο χρόνος που δόθηκε στους μαθητές ήταν 30 λεπτά. Συνεχίζοντας, οι μαθητές ήρθαν για πρώτη φορά σε γνωριμία με τα δύο εκπαιδευτικά λογισμικά. Σε πρώτη φάση απλά παρατηρούσαν το περιβάλλον του κάθε λογισμικού κάνοντας τα πρώτα σχόλια και εν συνεχεία, άρχισαν να πειραματίζονται πάνω σε αυτά. Και στις δύο περιπτώσεις, ο ερευνητής είχε καθαρά παθητικό ρόλο δίχως να δώσει την οποιαδήποτε διευκρίνιση στους μαθητές. Ο στόχος σε αυτό το σημείο, ήταν να διαγραφούν οι αντιδράσεις των μαθητών μέσα από τα ερεθίσματα που προωθούσαν τα λογισμικά. Μαζί λοιπόν με την παρατήρηση, ο ερευνητής μέσω των ερωταποκρίσεων, κρατούσε σημειώσεις οι οποίες με τη σειρά τους θα τον βοηθούσαν να σχηματίσει μία σφαιρική άποψη κατά την ολοκλήρωση του πειράματος. Η παραπάνω διαδικασία διήρκεσε περίπου 30 λεπτά.

Πάραυτα, ξεκίνησε η διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης. Ο ερευνητής ξεκινώντας με το κάθε λογισμικό ξεχωριστά, άρχισε να εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο δουλεύει. Έδειξε την κάθε δυνατή επιλογή που μπορούσε να πραγματοποιηθεί και ενθάρρυνε την όποια απορία εξέφραζαν οι μαθητές. Το σημαντικότερο σημείο στην παρούσα φάση ήταν το γεγονός ότι ο ερευνητής καλούνταν να δώσε οδηγίες, τη στιγμή που οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να πειραματιστούν οι ίδιοι πάνω στα λογισμικά. Αυτό με τη σειρά του σήμαινε πως έπρεπε να έχουν εστιασμένη την προσοχή τους στις υποδείξεις του ερευνητή για να καταφέρουν εν τέλει οι ίδιοι να αναπαράξουν τις ίδιες διαδικασίες. Η διδακτική παρέμβαση διήρκεσε περίπου 50 λεπτά.

Μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης, η πειραματική διαδικασία έφθασε σταδιακά στο τέλος της. Ακολούθησε η τελική φάση, η οποία αποτελούνταν από δύο στάδια. Το πρώτο και πιο σημαντικό ήταν η εργασία των μαθητών στα λογισμικά. Από τη στιγμή λοιπόν που πειραματίστηκαν στα λογισμικά και γνώριζαν τις οδηγίες, επανήλθαν στο προσκήνιο πραγματοποιώντας σειρά από πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Το πρώτο λογισμικό που εργάστηκαν ήταν του πολλαπλασιασμού ενώ στη συνέχεια πέρασαν σε αυτό της διαίρεσης. Και σ’ αυτό το σημείο, ο ερευνητής έχοντας το ρόλο του συντονιστή – παρατηρητή, κρατούσε σημειώσεις σχετικές με την ευελιξία των μαθητών πάνω στις αναπαραστάσεις, το χρόνο διεκπεραίωσης τους, τις δυσκολίες που συναντούσαν και τη διάθεση τους. Κατά το τέλος της διαδικασίας, οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το φύλλο αξιολόγησης που τους δόθηκε στην αρχή του πειράματος. Τυχόν αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν, θα σχολιαστούν στην ενότητα των αποτελεσμάτων. Το τελικό στάδιο της μελέτης περίπτωσης (εργασία στα λογισμικά και φύλλο αξιολόγησης), διήρκεσε κάτι παραπάνω από μία ώρα.

Αντισταθμιστικές συνθήκες

Προκειμένου η συνολική διαδικασία να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη απόκλιση από τα προσδοκώμενα αποτελέσματα, πάρθηκαν μία σειρά από μέτρα τα οποία θα παρουσιαστούν ευθύς αμέσως.

Αρχικά, τυχόν εξηγήσεις στο φύλλο αξιολόγησης δεν ήταν επιτρεπτές θέλοντας έτσι να αναδειχθεί η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών. Η ίδια λογική ακολουθήθηκε και στο πρώτο στάδιο της πειραματικής διαδικασίας (πρώτη επαφή – πειραματισμός) εφόσον στόχος ήταν να φανούν οι πρώτες αντιδράσεις και η καταγραφή τους, χωρίς να επηρεαστούν από τις οδηγίες του ερευνητή. Ακολούθως, στο τρίτο στάδιο απαγορεύθηκε οποιαδήποτε ενίσχυση στην προσπάθεια των μαθητών να ολοκληρώσουν μία αναπαράσταση, προκειμένου να γίνει αντιληπτό κατά πόσο κατανόησαν τη μεθοδολογία των λογισμικών και κατ΄επέκταση κατά πόσο μπόρεσαν να ανταποκριθούν σ΄αυτό.

Συνεχίζοντας με πιο πρακτικά μέτρα, η χρονική διαδοχή των πειραματικών συνθηκών ακολουθούσε ένα πρόγραμμα με διαλλείματα ανά στάδιο, έτσι ώστε να υπάρξει μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στο πείραμα. Τέλος, ο ερευνητής φρόντιζε να μη κρατά για πολλή ώρα τους μαθητές προσηλωμένους στον υπολογιστή προς αποφυγή σφαλμάτων επιπολαιότητας και κόπωσης.

Το χρονοδιάγραμμα της πειραματικής διαδικασίας

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε λεπτομερής ανάλυση της ροής του πειράματος. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται το χρονοδιάγραμμα έτσι όπως ακολουθήθηκε πιστά από τους εμπλεκόμενους στη διαδικασία.

- Την 1^{η} ημέρα : Συμπλήρωση Φύλλου αξιολόγησης – Γνωριμία με τα λογισμικά
  Χρ. Διάρκεια : 1 ώρα

- Την 2^{η} ημέρα: Διδακτική Παρέμβαση
  Χρ. Διάρκεια: 50 λεπτά

- Την 3^{η} ημέρα: Εργασία στα λογισμικά – Συμπλήρωση Φύλλου αξιολόγησης
  Χρ. Διάρκεια: ½ ώρα περίπου

Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μελέτης περίπτωσης

Η παρούσα έρευνα όπως διαγράφεται και παραπάνω αποτέλεσε μία μελέτη περίπτωσης. Θεωρήθηκε επιτυχημένη από τη στιγμή που τα αποτελέσματα δείχνουν θετική αλλαγή στον τομέα της μοντελοποίησης των κλασματικών πράξεων τουπολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Ωστόσο όπως σε κάθε πειραματική διαδικασία έτσι και σ΄αυτή, διακρίνονται ορισμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Αναλυτικότερα:

Πλεονεκτήματα

- Η ερευνητική πορεία είχε μία ροή με αρχή, μέση και τέλος. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως από πλευράς ερευνητή, έγινε ευκολότερα κατανοητό το τι πρόκειται να διεκπεραιώσει. Από την πλευρά των μαθητών, ήταν εξίσου σαφές το τι επρόκειτο να παρακολουθήσουν εφόσον δόθηκαν εξηγήσεις και έγινε η διάκριση στα τρία μέρη της πορείας. Άρα το περιθώριο σφάλματος περιορίστηκε σε μεγάλο βαθμό.
- Η δομή που ακολούθησε η πειραματική διαδικασία μέσω των pre – posttests, έδωσε την δυνατότητα στον ερευνητή να παρατηρήσει την πρόοδο των μαθητών μέσα από τις διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα των απαντήσεων.
- Στην πρώτη φάση του πειράματος υπενθυμίζουμε πως οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τα λογισμικά. Με αυτήν την τακτική, ήταν εφικτή η παρατήρηση των πρώτων τους αντιδράσεων σε κάτι εξ΄ολοκλήρου καινούργιο για αυτούς.
- Αποφεύχθηκε η έντονη κόπωση των μαθητών καθώς η όλη διαδικασία χωρίστηκε σε τρία μέρη, άρα τρεις ημέρες. Έτσι το ενδιαφέρον δεν χάθηκε με την πρώτη επαφή αλλά συνεχίστηκε μέχρι το τελευταίο στάδιο.

Μειονεκτήματα

- Το μεγαλύτερο μειονέκτημα που μπορεί να αντιμετωπιστεί στη μελέτη περίπτωσης έγκειται στο στάδιο της παρέμβασης. Πρόκειται για το πιο κρίσιμο σημείο της διαδικασίας καθώς δίνονται οι εξηγήσεις και οι οδηγίες στο δείγμα. Ωστόσο βάσει της συνολικής εικόνας των μαθητών δε φάνηκε να παρουσιάζεται αναποτελεσματικότητα στις κινήσεις τους.
- Το δείγμα που συμμετείχε ήταν περιορισμένο. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται πως η παρούσα έρευνα δίνει μία εικόνα για τα οφέλη της μοντελοποίησης των πράξεων στα κλάσματα αλλά δεν δύναται να οδηγήσει σε καθολικά συμπεράσματα. Κάτι τέτοιο δεν είναι απαγορευτικό, παρόλα αυτά χρειάζεται την ενίσχυση από έρευνες με μεγαλύτερο δείγμα μαθητών.
- Οι μαθητές ναι μεν αντιλήφθηκαν τη λογική πίσω από τα δύο λογισμικά, από την άλλη όμως η πρόοδος τους ήταν ανάλογη των ημερών που τα επεξεργάστηκαν και τα χρησιμοποίησαν. Στην περίπτωση που κάποιος εκπαιδευτικός επιλέξει να εντάξει στην εκπαιδευτική διαδικασία τα συγκεκριμένα λογισμικά, έχοντας περισσότερο διαθέσιμο χρόνο, θα επιτύχει ακόμη πιο ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή, θα δοθούν τα αποτελέσματα των δύο μαθητών πάνω σταpre – posttests, στα λογισμικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων και τέλος στο φύλο παρατήρησης. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα γίνει για τον κάθε μαθητή ξεχωριστά ενώ στο τελικό στάδιο, αυτό της συζήτησης, θα σχολιαστούν με σαφήνεια.

RectangleMultiplicationofFractions

Ξεκινώντας λοιπόν μετο λογισμικό του πολλαπλασιασμού, δόθηκαν στους μαθητές δέκα πράξεις γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων αντίστοιχα. Έτσι έχουμε:

Για την Αφροδίτη

Γνήσια

1/6 x 2/4 , 6/8 x 2/4, 1/3 x 2/4, 2/5 x 1/3, 2/3 x 3/7, ¾ x 2/4, 2/5 x ¾, 1/7 x 4/7, 5/7 x 1/2, 2/6 x 1/6

Καταχρηστικά

6/3 x 3/2, 9/7 x 8/4, 11/7 x 2/7, 4/2 x 10/6, 6/3 x 12/8, 8/5 x 7/6, 5/4 x 12/7, 10/6 x 6/4

Για τον Λευτέρη

Γνήσια

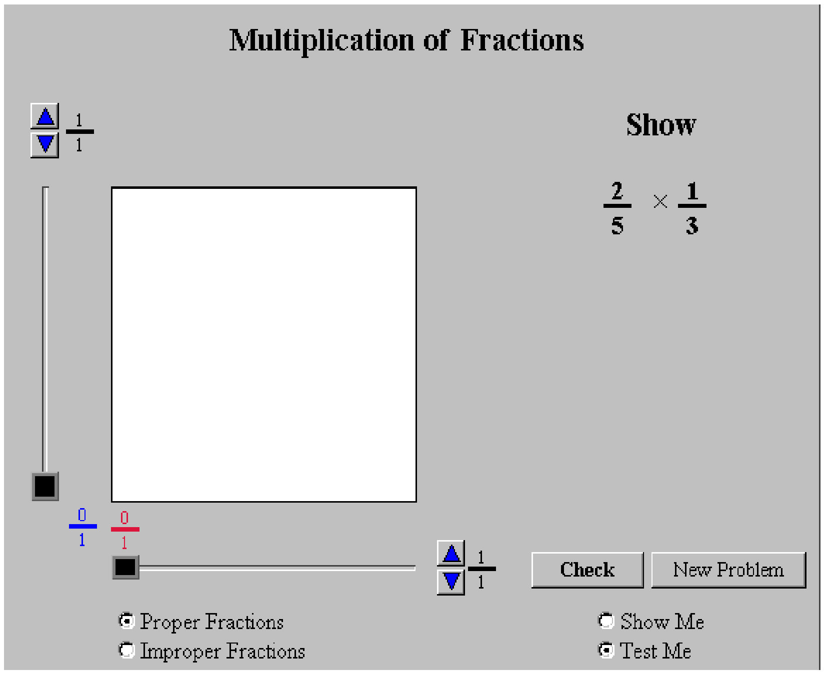
¾ x 2/5, 1/8 x 6/8, ¾ x 1/8, ¼ x 2/7, 5/7 x 1/3, 4/5 x 1/7, 3/8 x 2/5, 4/7 x 2/4, ¾ x 5/8, 5/7 x 2/5

Καταχρηστικά

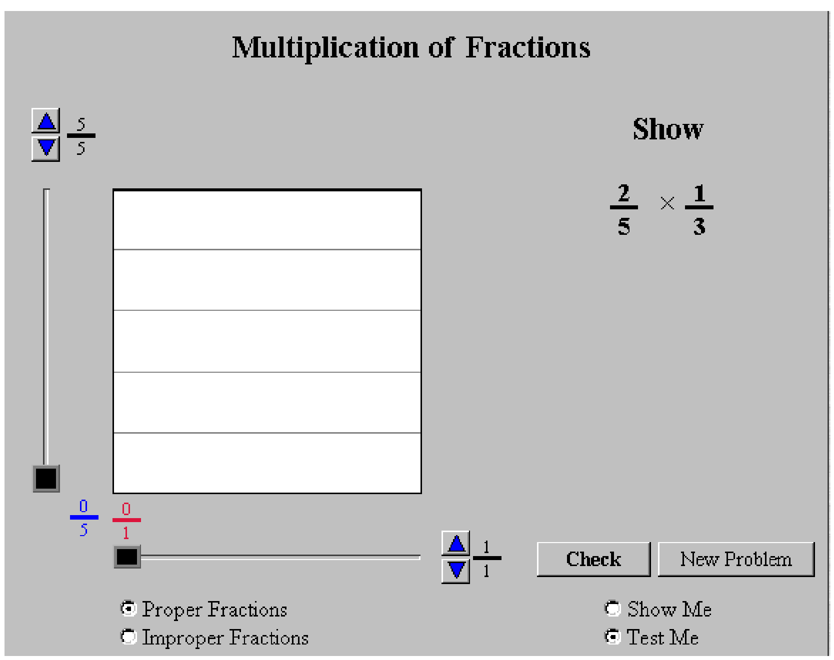
5/3 x 2/1, 7/5 x 7/4, 3/2 x 11/7, 12/8 x 2/1, 4/2 x 2/1, 10/7 x 4/3, 7/5x 3/2, 4/2 x 3/2

Παρακάτω δίνεται από ένα παράδειγμα πολλαπλασιασμού γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων. Παρουσιάζεταιοι τρόποι που ακολούθησαν οι δύο μαθητές προκειμένου να οπτικοποιήσουν την εκάστοτε πράξη.

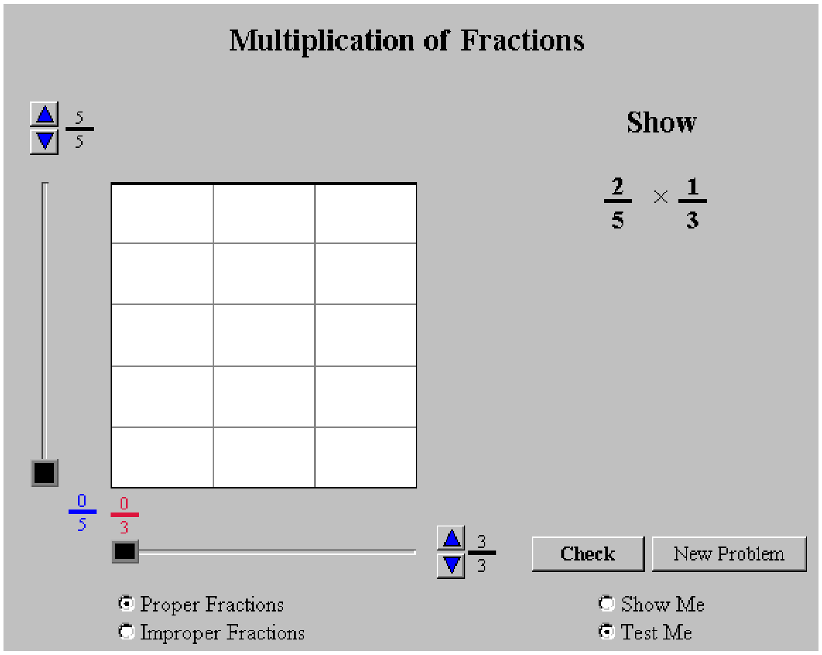
Βήμα 1ο



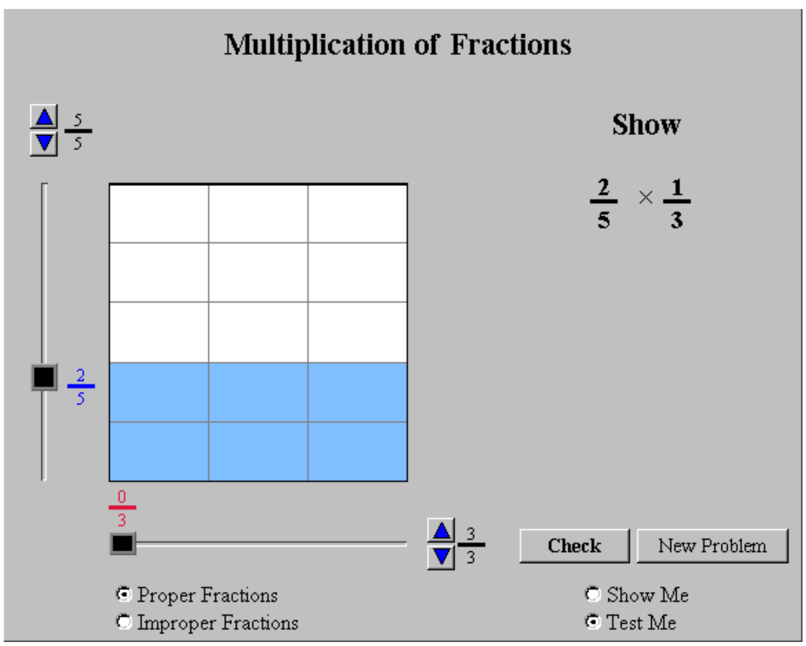
Βήμα 2ο



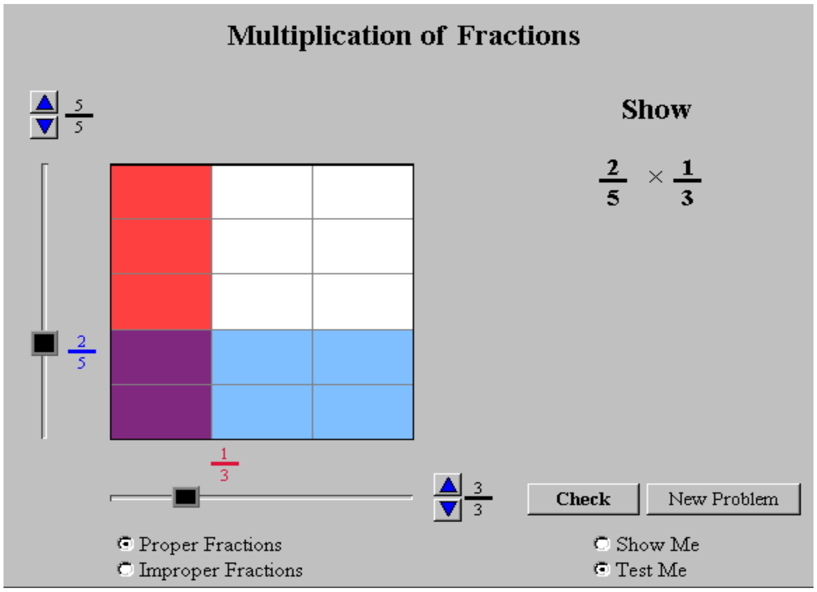
Βήμα 3ο



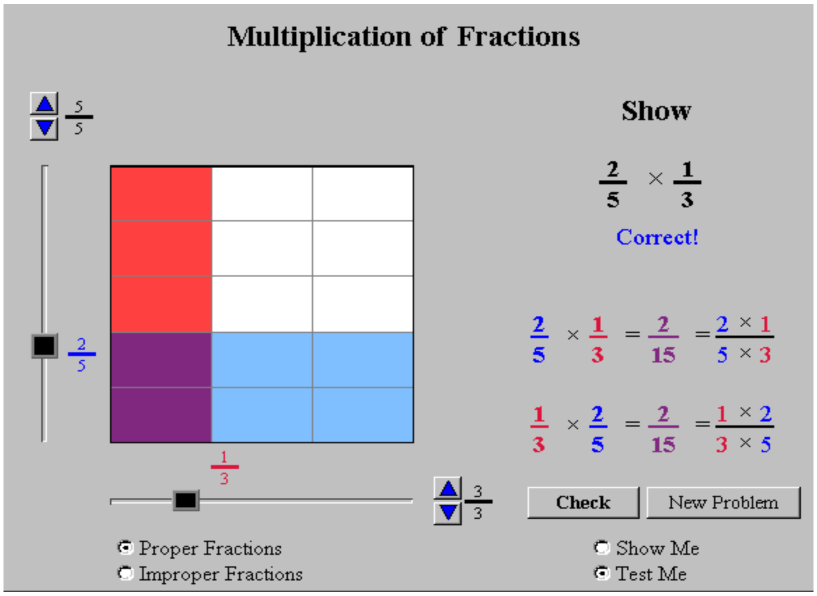
Βήμα 4ο



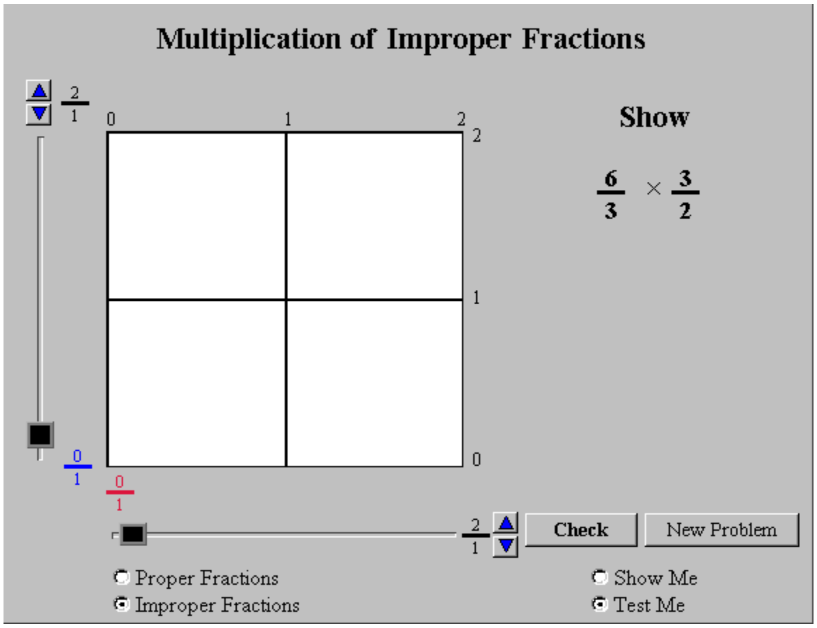
Βήμα 5^o



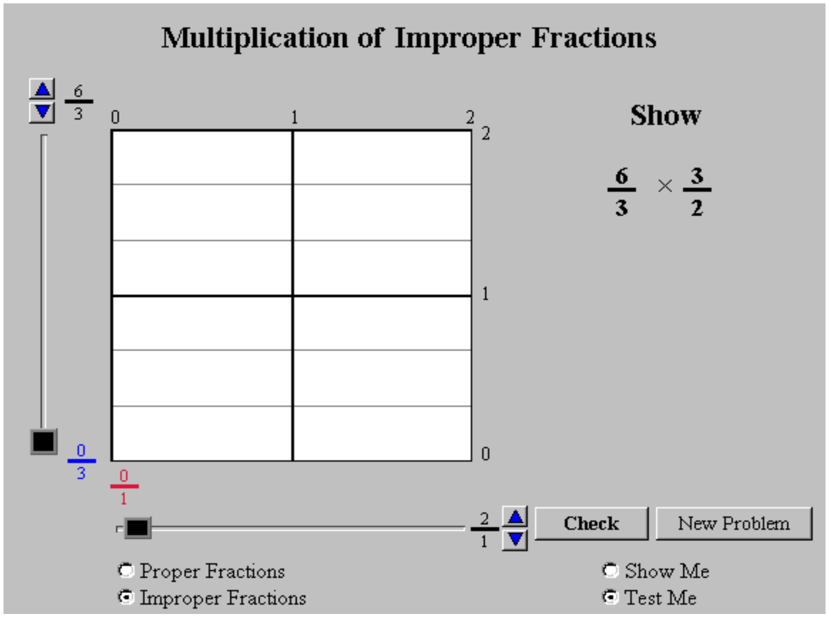
Βήμα 6^o



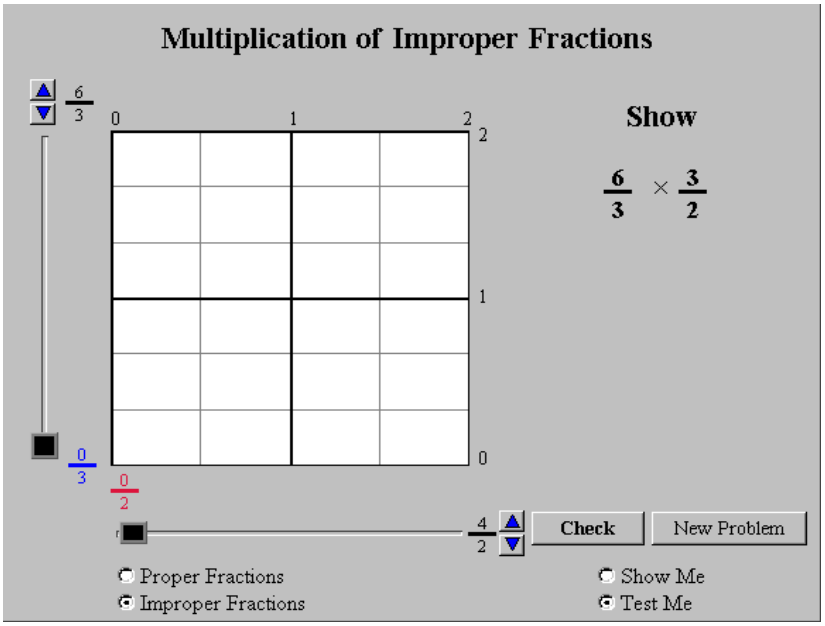
Βήμα 1ο



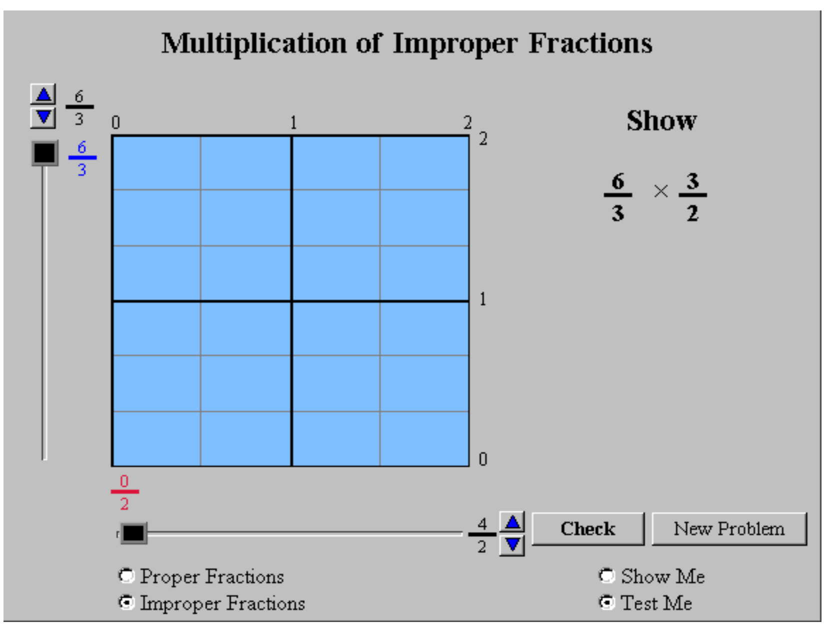
Βήμα 2ο



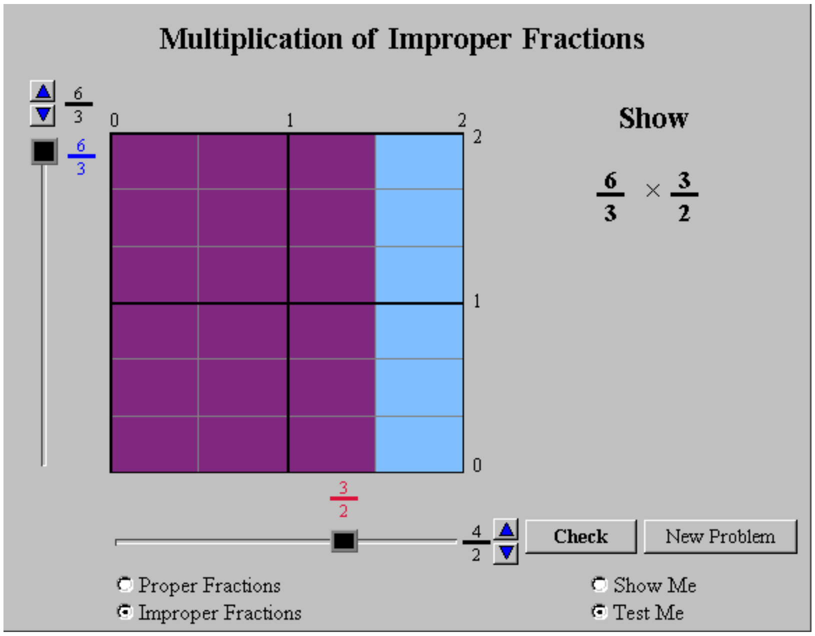
Βήμα 3ο



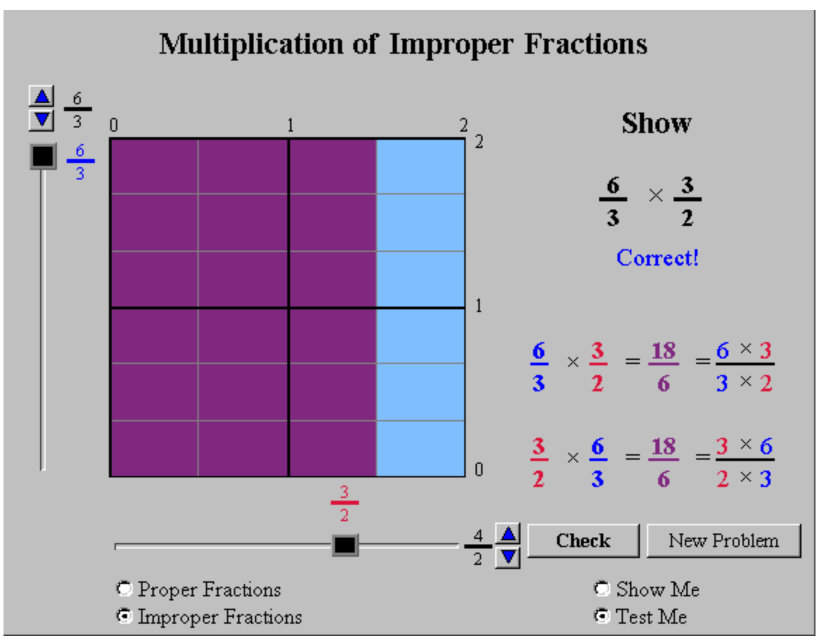
Βήμα 4ο



Βήμα 5^o



Βήμα 6^o



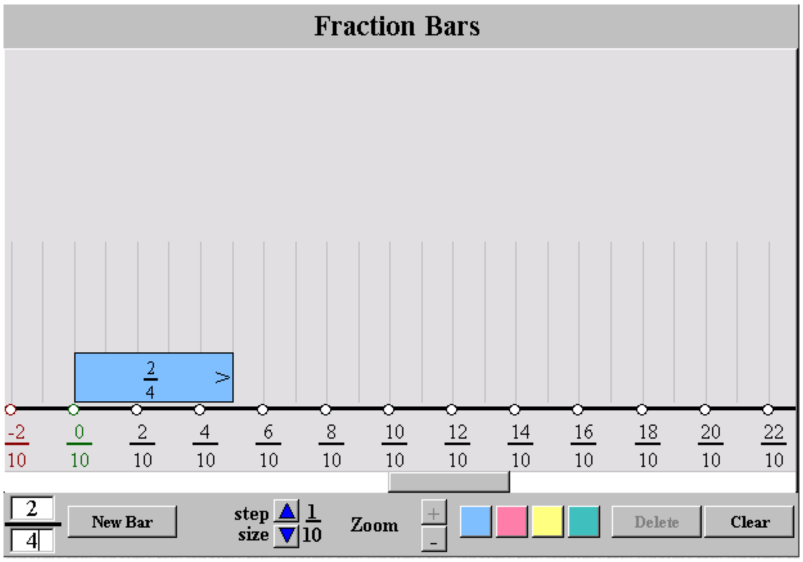
FractionNumberLineBars

Συνεχίζοντας με τη διαίρεση των κλασμάτων, δόθηκαν οι εξής διαιρέσεις και στους μαθητές:

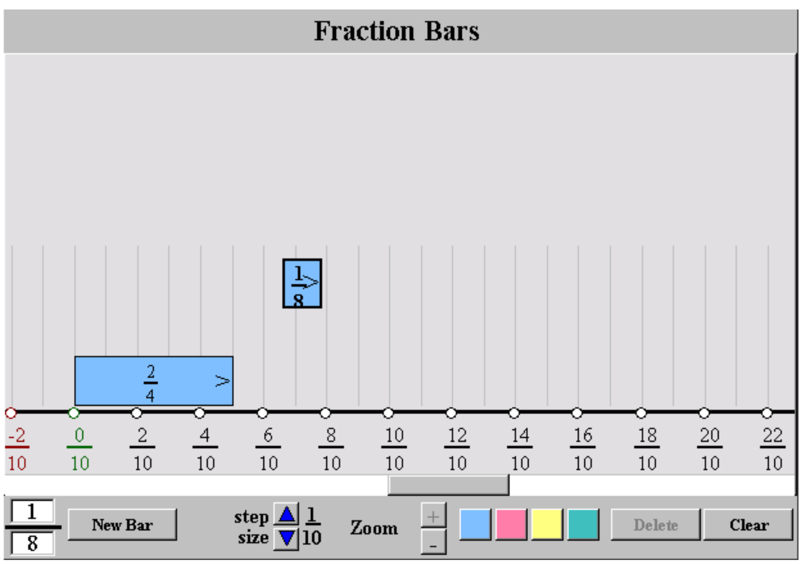
2/4 : 1/8, ½ : 5/20, 7/5 : ½, 7/6 : 5/6, 3/6 : 5/12, 3/5 : 2/10, 4/3 : ½, 2/1 : 2/3

Εκτέλεση της πράξης 2/4 : 1/8

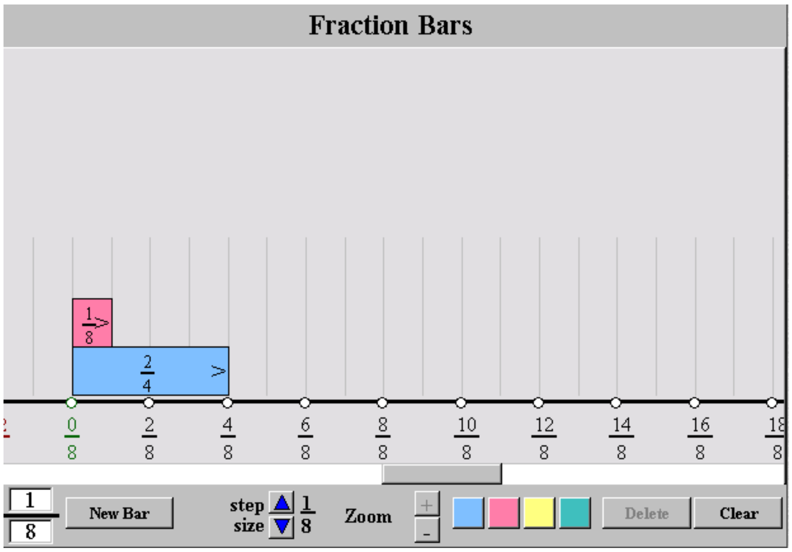
Βήμα 1ο



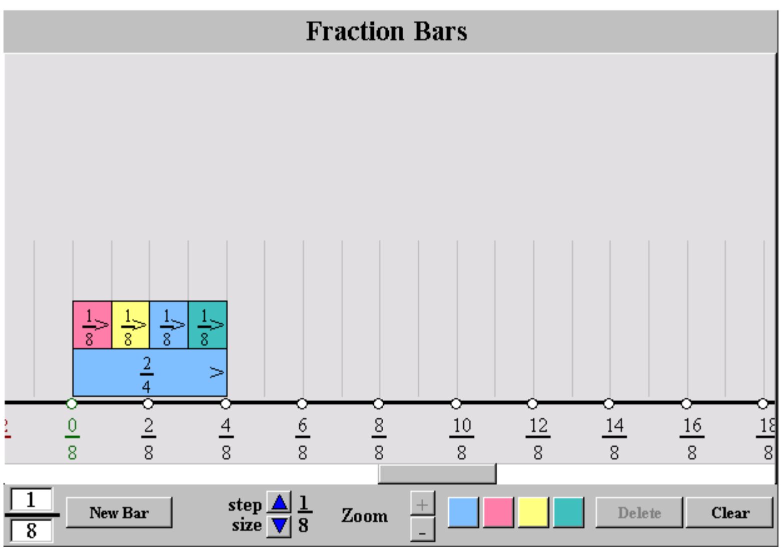
Βήμα 2ο



Βήμα 3^ο



Βήμα 4^ο



Παρουσίαση αποτελεσμάτων φύλλου παρατήρησης

Ερωτήματα	**ΠΡΙΝ**	**ΜΕΤΑ**	**ΠΡΙΝ**	**ΜΕΤΑ**
➢ Είναι καλλιεργημένη η αίσθηση της αναπαράστασης στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης των κλασμάτων;	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
➢ Χρειάστηκε αρκετό χρόνο για την ολοκλήρωση μίας αναπαράστασης πολλαπλασιασμού διαίρεσης κλασμάτων;	(Δεν έχει εφαρμογή)	ΟΧΙ	(Δεν έχει εφαρμογή)	ΟΧΙ
➢ Κατανοεί τη σημασία των χρωμάτων στο λογισμικό του πολλαπλασιασμού;	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
➢ Κατανοεί το λόγο που πολλαπλασιάζουμε τα κουτάκια του ενός τεταρτημόριου και όχι των τεσσάρων, στα καταχρηστικά κλάσματα;	(Δεν έχει εφαρμογή)	Μερικές φορές	(Δεν έχει εφαρμογή)	Μερικές φορές
➢ Είναι ευχάριστα στο μαθητή/ τρια, τα λογισμικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης;	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
➢ Μπορεί να κατανοήσει τη σχέση της κλασματικής αριθμογραμμής με τις κάθετες γραμμές αντίστοιχα, στο λογισμικό της διαίρεσης;	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
➢ Μπορεί να κατανοήσει τη σημασία του μεγέθους της κάθε μπάρας στο λογισμικό της διαίρεσης;	ΟΧΙ	Μερικές φορές	ΟΧΙ	Μερικές φορές

➢ Ποια η προϋπάρχουσα γνώση της μαθήτριας πάνω στα κλάσματα γενικότερα και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ειδικότερα;	Περιορισμένη	(-)	Ικανοποιητική	(-)

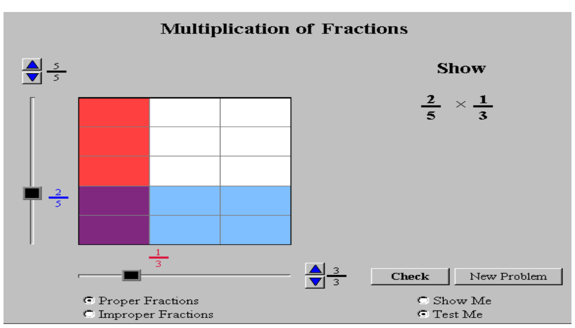
Ανάλυση των αποτελεσμάτων του φύλλου παρατήρησης

Είναι αναπτυγμένη η αίσθηση της αναπαράστασης στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων;

Αφροδίτη

Η καλλιέργεια της αίσθησης αναπαράστασης στους μαθητές αποτελεί μία από τις σημαντικότερες προκλήσεις του εκπαιδευτικού.

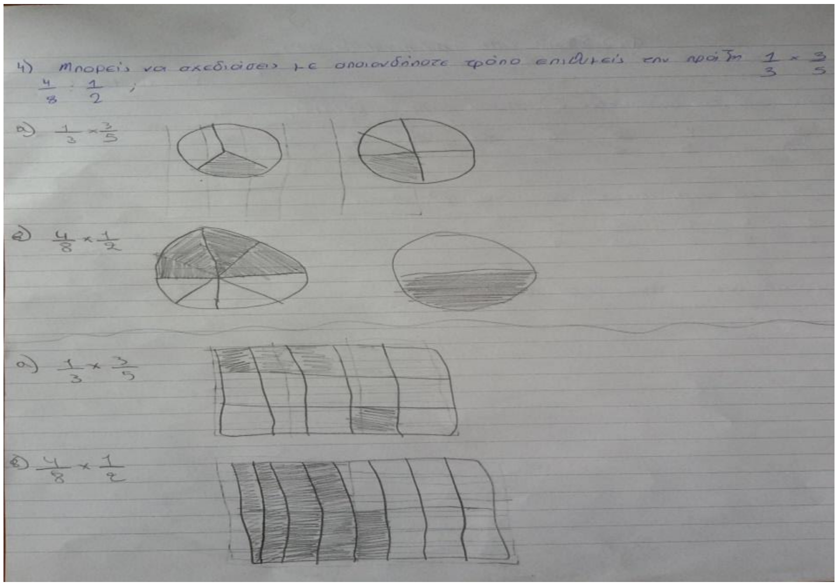
Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε τόσο στην πράξη του πολλαπλασιασμού όσο και της διαίρεσης των κλασμάτων, παρατηρήθηκε πως στην αρχή η Αφροδίτη δεν την είχε αναπτυγμένη. Κάτι τέτοιο θεωρείται αναμενόμενο για τα ελληνικά δεδομένα καθώς όπως φάνηκε από την έρευνα, δίνεται βαρύτητα στον αλγόριθμο και όχι στην σημασία της πράξης. Πρώτο στοιχείο επομένως που αποδεικνύει ελλειπή αίσθηση αναπαράστασης, ήταν η τέταρτη δραστηριότητα του φύλλου αξιολόγησης (βλ. Σελ 30). Εκεί παρατηρώντας κανείς τα ζητούμενα της άσκησης και τις απαντήσεις, θα καταλάβει ότι επικρατεί μία σύγχυση στη σκέψη της μαθήτριας. Σχεδιάζει την πράξη 1/3 x3/5 με τους κλασματικούς αριθμούς να είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλον. Έπειτα, στο περιβάλλον των καταχρηστικών κλασμάτων, δεν αντιλήφθηκε τη σημασία της κάθετης και οριζόντιας αριθμογραμμής. Τέλος, στην πρώτη επαφή με το λογισμικό του πολλαπλασιασμού, αν και αντιλήφθηκε ότι το κόκκινο και το γαλάζιο χρώμα αφορούν στα δύο κλάσματα, ωστόσο αδυνατούσε να κατανοήσει την απεικόνιση του γινόμενου στο μοτίβο (μωβ χρώμα).



Στη διαίρεση των κλασμάτων το πρόβλημα της αναπαράστασης ήταν ακόμη πιο έντονο. Ο τρόπος χρησιμοποίησης του αλγόριθμου έχει ακόμη πιο αρνητικές συνέπειες στην κατανόηση της πράξης. Έτσι λοιπόν στην τέταρτη δραστηριότητα η Αφροδίτη αναπαρίστανε την πράξη 4/8 : ½ με τον ίδιο τρόπο όπως και στον πολλαπλασιασμό. Συμπεραίνουμε δηλαδή, ότι είτε αδυνατούσε να σκεφτεί έναν διαφορετικό τρόπο αναπαράστασης της διαίρεσης είτε δεν μπορούσε να ξεχωρίσει στο μυαλό της, την πράξη του πολλαπλασιασμού από αυτήν της διαίρεσης. Όσον αφορά στο πεδίο του λογισμικού, αρχικά δεν κατάλαβε τη σπουδαιότητα του ως προς την αναπαράσταση μίας πράξης διαίρεσης κλασμάτων. Δεν σκέφτηκε καθόλου ότι με τη βοήθεια - διαφορετικού χρώματος και μεγέθους μπάρας - μπορούμε να αναπαραστήσουμε μία πράξη διαίρεσης κλασμάτων.

Μετά την φάση της παρέμβασης παρατηρήθηκε μία σχετική βελτίωση ως προς την αίσθηση αναπαράστασης του αριθμού, γεγονός που επιβεβαιώνει την πρώτη υπόθεση της έρευνας.

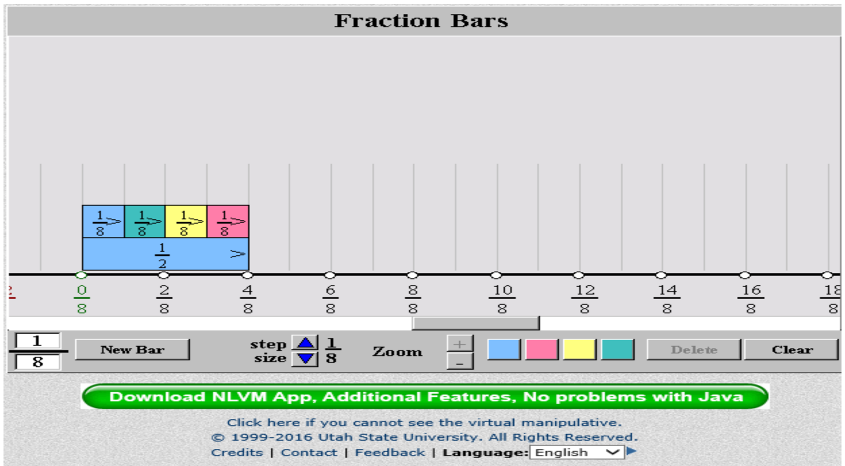
Ξεκινάμε από τον πολλαπλασιασμό και συγκεκριμένα από το λογισμικό. Μετά τις οδηγίες που δόθηκαν στην Αφροδίτη, εκείνη φάνηκε να είναι ικανή να διεκπεραιώνει τις ζητούμενες πράξεις – αναπαραστάσεις. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε παραπάνω (βλ. Σελ. 20) ανταποκρινόταν με επιτυχία σε κάθε μία πράξη. Αρχικά χώριζε τα κουτάκια ανάλογα με τους εκάστοτε κλασματικούς αριθμούς και έπειτα έβρισκε το γινόμενο (μωβ κουτάκια). Το κρίσιμο σημείο στη χρήση του λογισμικού ήταν η μαθήτρια να κατανοήσει πως όταν μιλάμε για μία κλασματική πράξη πρόκειται για μία αλληλεπίδραση. Επομένως στην συγκεκριμένη περίπτωση μία πράξη πολλαπλασιασμού έπρεπε να παρουσιαστεί στο ίδιο μοτίβο και όχι ξεχωριστά όπως είδαμε στην τέταρτη δραστηριότητα του pretest. Κάτι ανάλογο προσπάθησε να κάνει η Αφροδίτη στην ίδια δραστηριότητα του posttest αν και όχι εντελώς επιτυχημένα. Αυτό που έχει όμως σημασία είναι το γεγονός ότι ξεκίνησε να επεξεργάζεται διαφορετικά δύο κλασματικούς αριθμούς σε μία πράξη πολλαπλασιασμού.



Στην παραπάνω εικόνα παρατηρούμε πως η μαθήτρια δίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους την αναπαράσταση της πράξης 1/3 χ 3/5. Στην πρώτη περίπτωση επαναλαμβάνει το πρώτο λάθος. Στην δεύτερη όμως επιχειρεί έστω και εσφαλμένα, να κάνει την αναπαράσταση με τον τρόπο που έμαθε από το λογισμικό του πολλαπλασιασμού. Αρχικά χωρίζει σωστά το μοτίβο σε τρεις λωρίδες. Ακολουθεί την ίδια διαδικασία χωρίζοντας κάθετα το μοτίβο σε πέντε λωρίδες. Ωστόσο στη συνέχεια αδυνατεί να σχεδιάσει το γινόμενο της πράξης. Μαυρίζει τα τρία από τα πρώτα πέντε κουτιά της πρώτης στήλης, θεωρώντας ότι αυτά είναι τα 3/5. Αντ΄ αυτού έπρεπε να μαυρίσει και τα έξι υπόλοιπα κουτάκια που βρίσκονται κάτω από τα τρία ήδη μαυρισμένα κουτάκια. Στη συνέχεια αυθαίρετα μαυρίζει ένα κουτάκια από την τελευταία στήλη θεωρώντας το 1/3. Πρόοδος σημειώθηκε και στα καταχρηστικά κλάσματα και πιο συγκεκριμένα στο κομμάτι της αριθμογραμμής. Μετά την εξάσκηση της μαθήτριας πάνω σε πράξεις καταχρηστικών κλασμάτων, μπορούσε - με τη βοήθεια της αριθμογραμμής - και αναγνώριζε τη μονάδα σε κάθε περίπτωση.

Στο λογισμικό της διαίρεσης τα αποτελέσματα φάνηκε να είναι πιο ενθαρρυντικά από αυτά του πολλαπλασιασμού. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται και αναπαριστάνονται οι κλασματικοί αριθμοί στο περιβάλλον του λογισμικού, οδηγούν τον μαθητή στην ουσιαστική κατανόηση μίας πράξης διαίρεσης. Η κατασκευή του λογισμικού είναι προσανατολισμένη με τέτοιον τρόπο ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν ότι ουσιαστικά η διαίρεση δύο κλασμάτων πρόκειται για τη σύγκριση αυτών. Πόσες φορές «χωράει» ο διαιρέτης στο διαιρετέο. Η

Αφροδίτη μετά την παρέμβαση, φάνηκε αρκετά ευέλικτη στη διεκπεραίωση των πράξεων,σχολιάζοντας το κάθε της βήμα. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα:



Δίνεται η πράξη ½ : 1/8. Αφού εξαγάγει τα δύο κλάσματα, έπειτα τοποθετεί τον διαιρετέο ½ κάτω και τον διαιρέτη 1/8 πάνω από τον διαιρετέο. Εκεί επομένως διακρίνει το πόσες φορές «χωράει» το 1/8 στο ½ και αναλόγως προσθέτει. Από τη στιγμή που συνολικά βρήκε ότι χωράει τέσσερις φορές, αυτό είναι και το πηλίκο της διαίρεσης. Εκτελώντας τον αντίστοιχο αλγόριθμο, επαληθεύεται το αποτέλεσμα.

Κλείνοντας με το κομμάτι της αίσθησης αναπαράστασης των αριθμών, η Αφροδίτη αν και κατανόησε τη μεθοδολογία στο λογισμικό, ωστόσο δεν φάνηκε να ανταποκρίνεται στην τέταρτη δραστηριότητα του φύλλου αξιολόγησης, κάνοντας το ίδιο λάθος με το pretest. Μία εξήγηση έγκειται στην πίεση του χρόνου από πλευράς μαθήτριας καθώς έπρεπε να εκτελέσει σειρά πράξεων σε χρονικό διάστημα τριών ημερών. Κάτι τέτοιο μπορεί να οδήγησε σε συσσώρευση γνώσεων και πληροφοριών άρα και αναποτελεσματική εφαρμογή αυτών. Από την άλλη ίσως να αποτέλεσε λάθος επιπολαιότητας κάτι που θα μπορέσει να εξεταστεί σε επόμενη έρευνα.

Λευτέρης

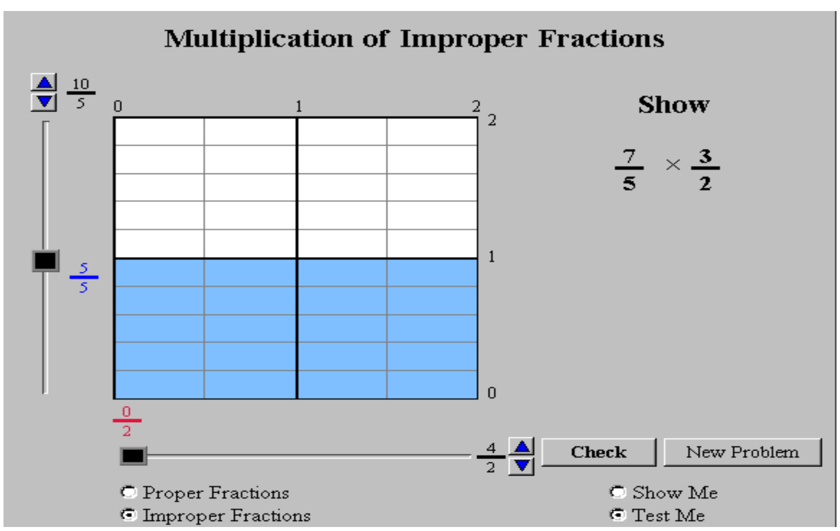
Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως ο Λευτέρης αρχικά υστερούσε ως προς την αίσθηση της αναπαράστασης στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Όπως και η Αφροδίτη, στην τέταρτη δραστηριότητα (βλ. Τάδε σελ.) αναπαρίστανε την πράξη 1/3 x 3/5, με τους δύο όρους χωριστά τον έναν από τον άλλον. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ο Λευτέρης τοποθέτησε τους δύο αριθμούς και τα σχήματα τους, τον έναν κάτω από τον άλλον. Και στις δύο περιπτώσεις το σύμβολο της πράξης απουσίαζε. Ωστόσο σχετικά με το λογισμικό του πολλαπλασιασμού φάνηκε να κατανοεί την ύπαρξη δύο κλασματικών αριθμών και τη μεταξύ τους πράξη. Ακόμη, αν και αντιλήφθηκε ότι το μωβ χρώμα σχετίζεται με γινόμενο της πράξης, ωστόσο αδυνατούσε να το ερμηνεύσει πλήρως. Στο περιβάλλον των καταχρηστικών κλασμάτων αρχικά δεν αντιλήφθηκε το ρόλο της αριθμογραμμής πράγμα ιδιαίτερα σημαντικό για την καλλιέργεια της αναπαράστασης της πράξης.

Στη διαίρεση των κλασμάτων ήταν φανερό ότι ο μαθητής αδυνατούσε να αναπαραστήσει την πράξη 4/8 : ½. Η μεθοδολογία του ήταν ακριβώς η ίδια με αυτή που ακλούθησεστην πράξη του πολλαπλασιασμού. Άρα λοιπόν μπορούμε και σε αυτή την περίπτωση να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα που αναφέραμε στην περίπτωση της Αφροδίτης (βλ. Σελ). Σχετικά με το λογισμικό της διαίρεσης, ο μαθητής δεν αντιλήφθηκε εξ αρχής ότι επρόκειτο για ένα μέσο αναπαράστασης μίας πράξης της διαίρεσης. Ναι μεν αναγνώρισε κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά του λογισμικού (θα σχολιαστούν σε επόμενα ερωτήματα) αλλά όχι την κύρια σημασία του.

<u>*Μετά τη φάση της παρέμβασης*</u>

Μετά το τέλος της δεύτερης φάσης, αυτή της παρέμβασης, παρατηρήθηκε μία αξιοσημείωτη αλλαγή ως προς αίσθηση της αναπαράστασης. Ξεκινώντας από το λογισμικό του πολλαπλασιασμού, σημειώνουμε ότι ο μαθητής μπορούσε και έδειχνε αυτό που σκεπτόταν και έβλεπε. Λόγου χάρη στο ερώτημα « Πως μπορείς να αναπαραστήσεις τα 3/8;», ο μαθητής ανέφερε χαρακτηριστικά ότι «(...)*θα κάνω με τα βελάκια οκτώ στήλες οριζόντια και θα χρωματίσω τις τρεις*». Ακόμη, μπορούσε και ερμήνευε πλέον το γινόμενο της πράξης (μωβ κουτί). Όσον αφορά στα καταχρηστικά κλάσματα, μπορεί και αναγνωρίζει τη μονάδα ενός κλάσματος με τη βοήθεια της αριθμογραμμής. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται το ρόλο αυτής στο λογισμικό.

Σχετικό παράδειγμα:



Στη φάση της παρέμβασης όταν οι μαθητές έφθαναν στο σημείο της μονάδας, ο ερευνητής τους καλούσε να παρατηρήσουν αυτό που σχεδίαζαν. Έτσι όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα ο Λευτέρης στην πορεία του προς τα 7/5, αντιλαμβάνεται προηγουμένως, ότι τα 5/5 αντιστοιχούν με μία μονάδα πράγμα που φαίνεται και στην κάθετη αριθμογραμμή. Ωστόσο παρά τις βελτιώσεις στις παραπάνω περιπτώσεις, στην τέταρτη δραστηριότητα του φύλλου αξιολόγησης, ο μαθητής δεν παρουσίασε κάποια επιθυμητή αλλαγή. Τουναντίον, τοποθέτησε τον κλασματικό αριθμό και το κυκλικό του γράφημα δίπλα στον άλλον. Βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων, θα περιμέναμε κάποια αλλαγή στη συμπεριφορά του μαθητή. Κάτι τέτοιο όμως δεν συνέβη γεγονός που θεωρώ ότι οφείλεται σε επιπολαιότητα του ίδιου. Και αυτό γιατί κατά τη διάρκεια των εφαρμογών, παρουσίαζε ικανοποιητικά αποτελέσματα που σε καμία περίπτωση δεν αντιστοιχούν σ΄αυτά του φύλλου αξιολόγησης.

Στην πράξη της διαίρεσης και συγκεκριμένα στο αντίστοιχο λογισμικό επήλθαν ορισμένες βελτιώσεις ως προς την κατανόηση της χρησιμότητας του. Έτσι λοιπόν ο Λευτέρης στην τελική φάση ήταν σε θέση να καταλάβει ότι το λογισμικό της διαίρεσης πρόκειται για ένα μέσο σύγκρισης δύο ή περισσότερων κλασμάτων. Μπορούσε και τοποθετούσε τα κλάσματα το ένα πάνω στο άλλο ανάλογα με το ποιο θα διαιρούσε ποιο και έπειτα έκανε τη σύγκριση. Ωστόσο κοινό αρνητικό στοιχείο αποτέλεσε η αναπαράσταση της πράξης 4/8 : ½. Ο μαθητής δεν ήταν σε θέση να εφαρμόσει αυτά τα οποία έπραττε στο λογισμικό (αναπαράσταση με μπάρες). Έτσι δημιούργησε δύο κυκλικά γραφήματα με τους αντίστοιχους αριθμούς από κάτω. Η ενέργεια του θεωρείται λανθασμένη καθώς δεν υπάρχει κάποιο μέσο σύγκρισης των δύο αριθμών ούτε το σύμβολο της πράξης.

Κλείνοντας, ένα γενικό συμπέρασμα είναι ότι η αλλαγή στον τρόπο αναπαράστασης μίας πράξης δύο κλασματικών αριθμών πρόκειται για ένα μεγάλο άλμα στον τρόπο σκέψης των μαθητών. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο σημείο αλλαγές εννοιολογικής φύσεως επέρχονται με την πάροδο του χρόνου και σε καμία περίπτωση μέσα σε λίγες ημέρες.

Χρειάστηκε αρκετό χρόνο για την ολοκλήρωση μίας αναπαράστασης πολλαπλασιασμού διαίρεσης κλασμάτων;

Αφροδίτη

Στο παραπάνω ερώτημα δε μπορεί να δοθεί απάντηση όσον αφορά στην προ πειραματισμού φάση, καθώς οι μαθητές δεν γνώριζαν τη μεθοδολογία στα δύο λογισμικά. Επομένως, μετά τη φάση της παρέμβασης, η Αφροδίτη ήταν σε θέση να ανταποκριθεί στις επακόλουθες αναπαραστάσεις.
Ξεκινώντας με το λογισμικό του πολλαπλασιασμού, η μαθήτρια δεν αντιμετώπισε κάποια αξιοσημείωτη δυσκολία, όσον αφορά στα γνήσια κλάσματα. Κάτι τέτοιο συνέβη καθώς οι οδηγίες και η εξάσκηση στη φάση της παρέμβασης, βοήθησαν τη μαθήτρια να κατανοήσει αποτελεσματικότερα τη μεθοδολογία γύρω από την αναπαράσταση μία πράξης πολλαπλασιασμού. Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω (Βλ. σελ. 20) οι μαθητές ακολουθούσαν συγκεκριμένα βήματα τη στιγμή που παράλληλα εξηγούσαν τις κινήσεις τους. Όσον αφορά στα καταχρηστικά κλάσματα οι διαδικασίες ήταν σχεδόν οι ίδιες. Η μαθήτρια ακολουθώντας τη μεθοδολογία των γνήσιων κλασμάτων κατασκεύαζε την αναπαράσταση. Ωστόσο η κατανόηση

των καταχρηστικών κλασμάτων δεν επιτεύχθηκε στο βαθμό των γνήσιων κλασμάτων για τους λόγους που θα σχολιαστούν στη συνέχεια.
Ακολούθως, στο λογισμικό της διαίρεσης, η Αφροδίτη φάνηκε να αναπαριστάνει τις προγραμματισμένες πράξεις μέσα στα χρονικά όρια. Άλλωστε η σπουδαιότητα του συγκεκριμένου λογισμικού έγκειται όχι μόνο στην διαδικασία αναπαράστασης της πράξης αυτής καθ΄αυτής, αλλά και στην ερμηνεία της από τους μαθητές.

Λευτέρης

Η εκτέλεση των αναπαραστάσεων δεν απαιτούσε πολύ χρόνο για τον Λευτέρη. Όπως συνέβη και στην περίπτωση της Αφροδίτης, ακολούθησε τα βήματα που έμαθε στη φάση της παρέμβασης ολοκληρώνοντας έτσι, όποια πράξη του εμφάνιζε το λογισμικό. Στο περιβάλλον των καταχρηστικών κλασμάτων, ο μαθητής δεν συνάντησε κάποια ιδιαίτερη δυσκολία ως προς την επίλυση της πράξης εξίσου. Σχετικά όμως με την κατανόηση των ιδιαιτεροτήτων των καταχρηστικών κλασμάτων, υπήρχαν φορές που δυσκολευόταν, πράγμα που θα σχολιαστεί παρακάτω.

Όπως στον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα και στη διαίρεση των κλασμάτων, ο Λευτέρης ανταποκρίθηκε μέσα σε φυσιολογικά χρονικά πλαίσια. Δεν παρουσιάστηκε κάποια δυσκολία ικανή να τον καθυστερήσει στην αναπαράσταση μίας πράξης.

Επομένως συμπαιρένουμε πως τόσο στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού, όσο και σ΄ αυτήν της διαίρεσης των κλασμάτων, ο μαθητής δε χρειάστηκε πολύ χρόνο προκειμένου να μοντελοποιήσει τις πράξεις.

Κατανοεί τη σημασία των χρωμάτων στο λογισμικό του πολλαπλασιασμού;

Αφροδίτη

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά τα οποία καθοδηγούν τους μαθητές στην κατανόηση της αναπαράστασης είναι τα διαφορετικά χρώματα του κάθε κλασματικού αριθμού. Όπως σχολιάστηκε προηγουμένως, το κάθε χρώμα αφορά και έναν κλασματικό αριθμό. Ο συνδυασμός των δύο χρωμάτων άρα και κλασματικών αριθμών, πρόκειται για το γινόμενο αυτών. Αυτό, διακρίνεται με ένα διαφορετικό χρώμα.
Όλα τα παραπάνω δεδομένα παρουσιάζονται προκειμένου οι αναγνώστες να κατανοήσουν, ότι είναι τα στοιχεία αυτά που διέκριναν εξ αρχής οι μαθητές. Συγκεκριμένα η Αφροδίτη διαπίστωσε από την αρχή ότι το γαλάζιο και το κόκκινο χρώμα αφορούν στους δύο κλασματικούς αριθμούς. Ωστόσο πριν τη φάση της παρέμβασης αν και αντιλήφθηκε ότι το τρίτο χρώμα, το μωβ, πρόκειται για έναν νέο αριθμό, ωστόσο δεν ήταν σε θέση να κατανοήσει πως ήταν το γινόμενο της πράξης – αναπαράστασης.
Μετά τη φάση της παρέμβασης η αδυναμία της μαθήτριας καλύφθηκε. Συνειδητοποίησε πως το μωβ χρώμα συμβολίζει την ένωση ή αλληλεπίδραση των δύο κλασματικών αριθμών άρα και το

γινόμενο αυτών. Σε γενικές γραμμές επομένως η μαθήτρια διέκρινε όλα τα χρώματα του λογισμικού ενώ στην τελική φάση ήταν σε θέση να περιγράφει τις κινήσεις της όταν της ζητούνταν.

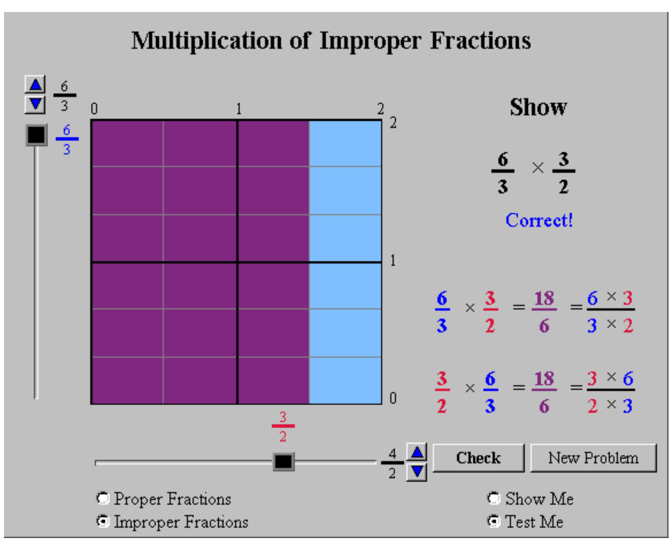
Λευτέρης

Ο Λευτέρης με τη σειρά του κατανόησε από την πρώτη στιγμή το ρόλο και των τριών χρωμάτων. Το μωβ χρώμα το ερμήνευσε ως «(...) *το αποτέλεσμα της πράξης*» ενώ το κόκκινο και το γαλάζιο τους δύο κλασματικούς όρους αντίστοιχα. Αλλαγή στη τελική φάση δεν υπήρξε από τη στιγμή που ο μαθητής είχε κατανοήσει από την αρχή τη σπουδαιότητα και των τριών χρωμάτων. Το μόνο χαρακτηριστικό που αξίζει να αναφερθεί είναι το γεγονός ότι ενώ πρωτύτερα το μωβ χρώμα το αιτιολογούσε ως το αποτέλεσμα της πράξης, μετά τη φάση της παρέμβασης το χαρακτήριζε ως το γινόμενο της πράξης.

Κατανοεί το λόγο που πολλαπλασιάζουμε τα κουτάκια του ενός τεταρτημόριου και όχι των τεσσάρων, στα καταχρηστικά κλάσματα;

Αφροδίτη

Στις αναπαραστάσεις των καταχρηστικών κλασμάτων παρατηρήθηκε μία αξιόλογη συμπεριφορά στην Αφροδίτη. Ενώ απέδειξε μέσα από τη μεθοδικότητα της πως γνωρίζει τον τρόπο αναπαράστασης μίας πράξης πολλαπλασιασμού, από την άλλη έδειξε να υστερεί ως προς την ερμηνεία αυτής. Εν ολίγοις σε έναν μεγάλο βαθμό, εργάστηκε μηχανικά. Συγκεκριμένα αν και είχε κατανοήσει τα βήματα ολοκλήρωσης της αναπαράστασης δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει το γινόμενο της πράξης. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα από τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας:



Στην εικόνα που δίνεται, η Αφροδίτη αναπαριστάνει επιτυχημένα την πράξη 6/3 x 3/2. Ωστόσο δεν κατανοεί με την πρώτη, ότι πρόκειται για 18/**6** και όχι για 18/**24.** Αρχικά έτεινε να βρίσκει τον παρονομαστή του νέου κλάσματος πολλαπλασιάζοντας το σύνολο των κουτιών (4 χ 6). Προκειμένου να αντιμετωπίσει την παραπάνω δυσκολία της δόθηκε το εξής παράδειγμα:

Ένας μαθητής κάλεσε στο πάρτυ του 18 συμμαθητές του. Η μητέρα του παρήγγειλε πίτσες οι οποίες είχαν από 6 κομμάτια το κάθε κουτί. Χρειάστηκε επομένως να πάρει 3 πίτσες. **Άρα συνολικά τα κομμάτια και των τριών κουτιών ήταν 18 ενώ το κάθε κουτί της πίτσας είχε 6 κομμάτια το κάθε ένα. Επομένως έχουμε 18/6.**

Με την παραπάνω εξήγηση, η μαθήτρια κατανόησε το λόγο που δεν πολλαπλασιάζουμε τα κουτιά από όλο το μοτίβο, παρά μόνο εκείνα του ενός τεταρτημόριου. Παρόλα αυτά και σε επόμενες εφαρμογές παρατηρήθηκε το ίδιο φαινόμενο. Η έλλειψη χρόνου εξάσκησης και η κόπωση της μαθήτριας, ήταν οι δύο βασικοί παράγοντες που οδήγησαν στη συμπεριφορά αυτή.

Λευτέρης

Όπως και στην περίπτωση της Αφροδίτης, έτσι και ο Λευτέρης παρουσίασε μηχανιστική συμπεριφορά ως προς την εκτέλεση των καταχρηστικών κλασμάτων. Συνήθιζε αρχικά να πολλαπλασιάζει όλα τα κουτάκια του μοτίβου και όχι εκείνα του ενός τεταρτημόριου. Δόθηκε λοιπόν το παράδειγμα εκείνο της Αφροδίτης (Σελ.) βοηθώντας τον έτσι να κατανοήσει ουσιαστικά την αναπαράσταση. Παρόλα αυτά ο Λευτέρης φάνηκε να κατανοεί ταχύτερα το παράδειγμα καθώς έπειτα δεν επανέλαβε το ίδιο λάθος. Εξάγεται επομένως το συμπέρασμα ότι, ο μαθητής εν τέλει κατανόησε το λόγο που πολλαπλασιάζουμε τα κουτάκια του ενός τεταρτημόριου και όχι ολόκληρου του μοτίβου.

Είναι ευχάριστα στο/στη μαθητή/τρια, τα λογισμικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης;

Αφροδίτη

Η μαθήτρια τόσο στο λογισμικό του πολλαπλασιασμού, όσο και σε αυτό της διαίρεσης φαίνεται να απολαμβάνει τη διαδικασία. Το Σχολείο σήμερα – όσον αφορά στο κομμάτι των Μαθηματικών – ακολουθεί την τακτική της μηχανιστικής εκτέλεσης των αλγορίθμων. Οι μαθητές εκτελούν πράξεις χωρίς να κατανοούν την καθε κίνηση. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται πως δεν είναι εξοικειωμένοι σε εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδακτική των Μαθηματικών. Έτσι λοιπόν αναφορικά με το λογισμικό του πολλαπλασιασμού, η Αφροδίτη έδειχνε έντονο ενδιαφέρον καθόλη τη διάρκεια της ενασχόλησης της με τα Μαθηματικά αποτελώντας για αυτήν, μία καινούργια εμπειρία.

Τα χαρακτηριστικά εκείνα που της τράβηξαν περισσότερο το ενδιαφέρον ήταν η δυνατότητα να δημιουργεί η ίδια γραμμές και κουτάκια αντίστοιχα. Όπως χαρακτηριστικά ανέφερε « (...) *μπορείς να φτιάξεις την πράξη μόνος σου από την αρχή».* Τα χρώματα με τη σειρά τους συνετέλεσαν σε ένα ευχάριστο περιβάλλον μάθησης. Εξ΄ αρχής όπως παρατηρήθηκε παραπάνω, η μαθήτρια κατανόησε πως οι δύο κλασματικοί όροι αφορούν σε διαφορετικά χρώματα. Τέλος σημαντική λεπτομέρεια αποτελεί το γεγονός ότι ήταν σε θέση να δείχνει αυτό που έβλεπε. Κάτι τέτοιο ήταν εφικτό λόγω της λειτουργικότητας του λογισμικού καθώς όλες οι κινήσεις που είχε τη δυνατότητα να εκτελέσει, γίνονταν εύκολα ορατές.

Συνεχίζοντας, το λογισμικό της διαίρεσης με τη σειρά του, αποτέλεσε ένα ευχάριστο πεδίο δράσης για τη μαθήτρια. Και στην περίπτωση αυτή, το πρώτο βασικό χαρακτηριστικό που της τράβηξε το ενδιαφέρον ήταν η ποικιλία των χρωμάτων. Ο συνδυασμός των χρωμάτων με τη δυνατότητα δημιουργίας και τοποθέτησης της μίας μπάρας πάνω στην άλλη, ήταν ο κύριος λόγος που η Αφροδίτη αναπαρίστανε ευχάριστα την εκάστοτε πράξη διαίρεσης. Μέσα από τη δυνατότητα αυτή, ήταν σε θέση να καταλάβει εύκολα το πόσες φορές «χωρούσε» το ένα κλάσμα σε ένα άλλο. Αυτό με τη σειρά του την ευχαριστούσε γιατί έδειχνε να κατανοεί ουσιαστικά τη διαίρεση των κλασμάτων μέσα από το παιχνίδι. Επιπλέον, ένας ακόμη λόγος που το λογισμικό της διαίρεσης ήταν ευχάριστο στην Αφροδίτη, ήταν το ότι δίπλα σε μία μπάρα μπορούσε να τοποθετήσει τραβώντας με το ποντίκι, όσες χρειαζόταν προκειμένου να καλυφθεί το κενό σε κάθε περίπτωση. Η ευελιξία με άλλα λόγια που προσέφερε το λογισμικό απομάκρυνε το ενδεχόμενο ανίας από την πλευρά της μαθήτριας.

Λευτέρης

Ο Λευτέρης από την πρώτη στιγμή που πληροφορήθηκε ότι θα ασχοληθεί με τα Μαθηματικά μέσα από την προσέγγισης της Τεχνολογίας ήταν ενθουσιασμένος.

Όπως και στην περίπτωση της Αφροδίτης, έτσι και εδώ, τα χρώματα τράβηξαν κατευθείαν το ενδιαφέρον του μαθητή. Συνειδητοποίησε πως τα τρία χρώματα αφορούν στους δύο κλασματικούς όρους και στο γινόμενο της πράξης. Άρα λοιπόν ως προς τη λειτουργικότητα των χρωμάτων στο λογισμικό του πολλαπλασιασμού, θεωρείται επιτυχημένη. Επιπροσθέτως, ένας ακόμη λόγος που ο Λευτέρης βρήκε ευχάριστο το συγκεκριμένο λογισμικό ήταν το γεγονός ότι «(...) *μπορούσε να κάνει περισσότερες κινήσεις και είχε περισσότερη δράση».* Εδώ παρατηρείται μία σύγκριση από πλευράς μαθητή ανάμεσα στα δύο λογισμικά. Ο μαθητής λοιπόν αναγνωρίζει ότι στο παρόν λογισμικό μπορεί και αυξομειώνει την κάθετη και οριζόντια μπάρα, δημιουργώντας περισσότερα και λιγότερα κουτάκια αντίστοιχα. Ακόμη στην επιλογή των καταχρηστικών κλασμάτων το περιβάλλον είναι ακόμη πιο πλουραλιστικό με την εισαγωγή της αριθμογραμμής και στους δύο άξονες. Τα παραπάνω αυτά χαρακτηριστικά επομένως, οδηγούν τον Λευτέρη στο συμπέρασμα ότι το λογισμικό του πολλαπλασιασμού εμπεριέχει μεγαλύτερο βαθμό διαδραστικότητας.

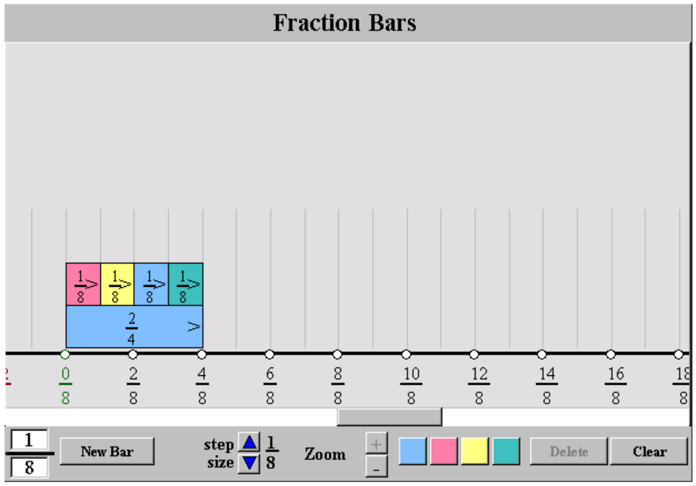
Το λογισμικό της διαίρεσης από την πλευρά του άφησε εξίσου θετικά σχόλια στο μαθητή. Και σε αυτό, «πρωταγωνιστικό» στις εντυπώσεις του, έπαιξε η ποικιλία των χρωμάτων. Στο Λευτέρη, αυτό το λογισμικό του φάνηκε δυσκολότερο απ΄ότι του πολλαπλασιασμού. Ωστόσο δε φάνηκε να τον αποθαρρύνει καθώς όπως μαρτυρά, το λογισμικό της διαίρεσης «(...) *μου άρεσε που είναι πιο δύσκολο και έχει περισσότερα χρώματα».* Πράγματι η ικανοποίηση κατά τη διάρκεια διεκπεραίωσης των αναπαραστάσεων, ήταν φανερή, τη στιγμή που ο μαθητής πραγματοποιούσε εναλλαγές στα χρώματα της κάθε μπάρας προκειμένου να ξεχωρίζει η μία από την άλλη. Επίσης, ομοιότητα συναντάται με την περίπτωση της Αφροδίτης αναφορικά με τη δυνατότητα συρσίματος της κάθε μπάρας με το ποντίκι. Ο βαθμός δηλαδή διαδραστικότητας και στην περίπτωση του παρόντος λογισμικού βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα. Ακολούθως, ευχάριστη διαδικασία για το μαθητή αποτελούσε η δυνατότητα σύγκρισης που παρείχε το λογισμικό. Η τοποθέτηση δηλαδή της μίας μπάρας πάνω από την άλλη και η μετέπειτα σύγκριση των δύο, άφηνε ένα συναίσθημα ικανοποίησης προς το μαθητή.

Κλείνοντας λοιπόν παρατηρείται πως και στις δύο περιπτώσεις των μαθητών, η ποικιλία των χρωμάτων ήταν ένα από τα κύρια στοιχεία που τράβηξαν την προσοχή τους. Ακόμη ο μεγάλος βαθμός διαδραστικότητας των λογισμικών (αυξομειώσεις μπάρας, σύρσιμο με το ποντίκι κ.ά.) ενέτεινε το ενδιαφέρον τους. Το γενικό συμπέρασμα που εξάγεται επομένως, είναι πως όλες οι αναπαραστάσεις τόσο του πολλαπλασιασμού, όσο και της διαίρεσης των κλασμάτων επέφεραν θετικά αποτελέσματα όχι μόνο προς την επίδοση των μαθητών αλλά και στην στάσηπου καλλιέργησαν οι μαθητές για τη χρήση των λογισμικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Μπορεί να κατανοήσει τη σχέση της κλασματικής αριθμογραμμής με τις κάθετες γραμμές, στο λογισμικό της διαίρεσης;

Αφροδίτη

Η Αφροδίτη, παρά το γεγονός ότι τοποθετούσε επιτυχώς τη μία μπάρα πάνω στην άλλη, ωστόσο δεν έδειχνε να κατανοεί ουσιαστικά το ρόλο της κλασματικής γραμμής. Αν και στη φάση της διδακτικής παρέμβασης δόθηκαν οι κατάλληλες διευκρινίσεις, η μαθήτρια αδυνατούσε να κατανοήσει τη σύνδεση της αριθμογραμμής με τη διαδικασία σύγκρισης των κλασμάτων. Η αλληλεπίδραση της κλασματικής αριθμογραμμής με τις κάθετες γραμμές αφορά στη διευκόλυνση της σύγκρισης των δύο κλασματικών όρων. Προϋπόθεση για τη σωστή εκτέλεση των αναπαραστάσεων καθίσταται η εύρεση του Ε.Κ.Π των παρονομαστών των δύο όρων. Με τη διαδικασία αυτή, ρυθμίζεται η κλασματική αριθμογραμμή στο Ε.Κ.Π. των δύο παρονομαστών με αποτέλεσμα να ρυθμίζονται αντίστοιχα και οι κάθετες γραμμές. Έτσι όταν τοποθετηθούν το ένα κλάσμα πάνω στο άλλο, μπορούμε να βρούμε επακριβώς πόσες φορές «χωράει» το ένα στο άλλο. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα:



Στο παραπάνω παράδειγμα το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών 8, 4 είναι το 8. Επομένως η κλασματική αριθμογραμμή ρυθμίζεται στα όγδοα. Αναλόγως ρυθμίζεται και το πλάτος των κάθετων γραμμών έτσι ώστε να χωράνε ακριβώς τα νέα κλάσματα – μπάρες που προκύπτουν, επιτρέποντας έτσι ομαλά, τη σύγκριση των κλασμάτων.

Η Αφροδίτη λοιπόν σε κάθε περίπτωση αναπαράστασης θυμόταν ότι έπρεπε να βρει το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών, μόνο που το έπραττε μηχανιστικά. Ουσιαστικά λοιπόν δεν κατανόησε τη σχέση της κλασματικής γραμμής με τις κάθετες γραμμές μέσα στο μοτίβο.

Λευτέρης

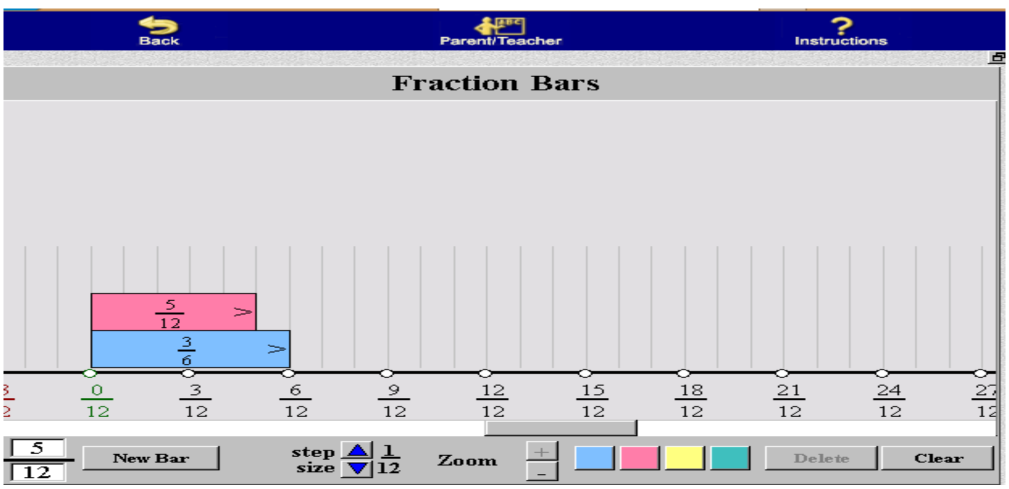
Σε αντίθεση με την περίπτωση της Αφροδίτης, ο Λευτέρης κατανόησε από την αρχή το ρόλο της κλασματικής γραμμής όχι όμως και των κάθετων γραμμών. Συγκεκριμένα το πρώτο πράγμα που παρατήρησε στο λογισμικό της διαίρεσης ήταν η αριθμογραμμή. Κατά τη διάρκεια του πειραματισμού, μετακινούσε την αριθμογραμμή δεξιά και αριστερά. Στη φάση της παρέμβασης αφ΄ότου δόθηκαν εξηγήσεις σχετικά με την ανάγκη εύρεσης του Ε.Κ.Π των παρονομαστών, διέκρινε τη σχέση της κλασματικής αριθμογραμμής με τις κάθετες γραμμές εξίσου. Συμπερασματικά λοιπόν, ο Λευτέρης κατανόησε πως οι κάθετες γραμμές αποτελούν ένα εργαλείο σύγκρισης των εκάστοτε κλασματικών όρων υπό την προϋπόθεση να υπολογιστεί πρώτα το Ε.Κ.Π των όρων αυτών. Με τον σκεπτικό αυτό, έδρασε σε κάθε περίπτωση.

Μπορεί να κατανοήσει τη σημασία του μεγέθους της κάθε μπάρας στο λογισμικό της διαίρεσης;

Αφροδίτη

Η κάθε μία μπάρα που δημιουργούσαν οι μαθητές είχεδιαφορετικό μέγεθος. Το κριτήριο που καθόριζε το μέγεθος της κάθε μπάρας, ήταν το κλάσμα που αυτή αντιπροσώπευε.

Η Αφροδίτη τόσο πριν, όσο και μετά τη φάση παρέμβασης αδυνατούσε να κατανοήσει το λόγο που η μία μπάρα ήταν μεγαλύτερη από την άλλη ή το αντίστροφο. Ορισμένες μόνο φορές μπορούσε να αιτιολογήσει το μέγεθος μίας μπάρας σε σχέση με μία άλλη, όταν αυτό ήταν αρκετά φανερό. Για παράδειγμα στη διαίρεση 2/1 : 2/3, η μαθήτρια κατανόησε τη σημασία του μεγέθους της κάθε μπάρας. Βέβαια κάτι τέτοιο συνέβη καθώς το κλάσμα 2/1 αποτελεί ένα καταχρηστικό κλάσμα, άρα υπερβαίνει τη μονάδα. Η μαθήτρια από τη στιγμή που γνώριζε για τα καταχρηστικά κλάσματα μπορούσε εύκολα να αναγνωρίσει το λόγο που το συγκεκριμένο κλάσμα συμβολιζόταν με μπάρα μεγαλύτερου μεγέθους, απ΄ ότι το κλάσμα 2/3. Ωστόσο το παραπάνω αποτελεί μία από τις συνολικές περιπτώσεις αναπαράστασης πράξεων της διαίρεσης. Έτσι λόγου χάριν στην περίπτωση 5/12 : 3/6,αδυνατούσε να κατανοήσει το μέγεθος της κάθε μπάρας. Ο λόγος που συνέβαινε κάτι τέτοιο ήταν το ότι δεν συλλογιζόταν πως το μέγεθος της κάθε μπάρας σχετίζεται με την κλασματική αριθμογραμμή άρα και με το Ε.Κ.Π. Στην παραπάνω περίπτωση το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι το 12. Το 3/6 πρόκειται ακριβώς για το μισό της ποσότητας 6/6. Από την άλλη το 5/12 είναι κάτι λιγότερο από το μισό, 6/12. Άρα είναι λογικό το 3/6 να είναι μεγαλύτερο από το 5/12. Παρακάτω δίνεται το παράδειγμα:



Συμπεραίνουμε επομένως πως εάν η μαθήτρια είχε κατανοήσει τη σχέση κλασματικής αριθμογραμμής – μεγέθους μπάρας τότε θα ήταν σε θέση να ερμηνεύει το λόγο που σε κάθε περίπτωση, η μία μπάρα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την άλλη.

Λευτέρης

Η κατάσταση του Λευτέρη είναι όμοια με αυτή της Αφροδίτης. Ο Λευτέρης αδυνατούσε εξίσου να κατανοήσει ουσιαστικά, τη σημασία του μεγέθους της κάθε μπάρας. Μπορούμε και σε αυτή την περίπτωση να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα σύγκρισης του καταχρηστικού κλάσματος καθώς τότε ο μαθητής ήταν σε θέση να διαπιστώσει το λόγο που τα 2/1 είναι μεγαλύτερη ποσότητα από τα 2/3. Από την άλλη πλευρά όμως στο παράδειγμα 5/12 : 3/6 συνάντησε παρόμοιες αδυναμίες όπως και η Αφροδίτη, καθώς δεν πραγματοποίησε στο μυαλό του τη σύνδεση κλασματικής αριθμογραμμής με το μέγεθος της κάθε μπάρας. Μία αξιόλογη παρατήρηση που μπορεί να γίνει στο σημείο αυτό είναι το ότι αν και ο Λευτέρης κατανόησε τη σύνδεση κλασματικής γραμμής – κάθετων γραμμών ωστόσο δεν συνέβη το ίδιο και σ΄αυτήν την περίπτωση.

Εξάγεται λοιπόν ενδεχομένως, το συμπέρασμα ότι λόγω της πίεσης του χρόνου οι μαθητές δεν κατάφεραν να εφαρμόσουν όλα όσα τους επισημάνθηκαν κατά τη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Ακόμη, εάν επιθυμία του ερευνητή είναι η επίτευξη καλύτερων αποτελεσμάτων τότε θεωρείται δεδομένο ότι χρειάζεται περισσότερος χρόνος στη διάθεση του ίδιου και των μαθητών.

Ποια η προϋπάρχουσα γνώση του/της μαθητή/τριας πάνω στα κλάσματα γενικότερα και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ειδικότερα;

Αφροδίτη

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε πως τόσο η Αφροδίτη όσο και ο Λευτέρης διδάσκονται τα κλάσματα από την Γ΄τάξη του Δημοτικού σε συστηματική βάση. Είχαν διδαχθεί τόσο τον πολλαπλασιασμό, όσο και την διαίρεση των κλασμάτων στην Ε' τάξη.

Το φύλλο αξιολόγησης που δόθηκε στην Αφροδίτη, μαρτυρούσε το γεγονός ότι επικρατούσε μία σύγχυση στο μυαλό της μαθήτριας. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν αφορούσαν στα ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση κλασμάτων, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων και τέλος στην αναπαράσταση μίας πράξης πολλαπλασιασμού και μίας διαίρεσης κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα του pretest της μαθήτριας, σε γενικές γραμμές, δεν ήταν ενθαρρυντικά. Αναλυτικότερα στην 1η δραστηριότητα, αυτή της σύγκρισης των κλασμάτων (βλ. Σελ. 51), τα πήγε πολύ καλά σε σχέση με τις υπόλοιπες, σημειώνοντας σωστά τέσσερις από τις πέντε περιπτώσεις. Στη 2η δραστηριότητα αυτή της σύγκρισης κλασμάτων (2/4 ½, 4/2 ½, 2/3 3/4) σημείωσε σωστά μία από τις τρεις περιπτώσεις. Εδώ αξίζει να σταθούμε στο λάθος που πραγματοποιήθηκε στην περίπτωση σύγκρισης των 2/3 με τα ¾. Η μαθήτρια δε σκέφτηκε να μετατρέψει τα κλάσματα σε ομώνυμα προκειμένου να βοηθηθεί, σημειώνοντας έτσι πως τα δύο κλάσματα είναι ίσα.Στην 3η δραστηριότητα αυτή των πράξεων στα κλάσματα παρατηρήθηκαν τα μεγαλύτερα σφάλματα. Η μαθήτρια από τις 6 περιπτώσεις έκανε και τις 6 λάθος. Τέλος στην πολυσυζητημένη 4η δραστηριότητα, αυτή της αναπαράστασης των πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης — η μαθήτρια έμεινε στην τοποθέτηση των γραφημάτων το ένα δίπλα στο άλλο. Έτσι αναπαρίστανε τα κλάσματα 1/3 x 3/5 και 4/8 : ½ αντίστοιχα, δημιουργώντας δύο κυκλικα γραφήματα. Ανάμεσα δεν υπήρχε κάποιο στοιχείο – σύμβολο που να υποδηλώνει την ύπαρξη μίας πράξης (βλ. σελ. 52).

Όσον αφορά τα αποτελέσματα του posttest αν και σημειώθηκε ορισμένες αλλαγές, ωστόσο στο σύνολο τους δεν ήταν σημαντικές. Στην 1η και τη 2η δραστηριότητα, οι απαντήσεις ήταν οι ίδιες. Στην 3η δραστηριότητα αν και η μαθήτρια άλλαξε τη μέθοδο υπολογισμού σε όλες τις περιπτώσεις, τα αποτελέσματα ήταν λανθασμένα στο σύνολο τους. Τέλος στην 4η δραστηριότητα όπως προαναφέρθηκε, αναπαρίστανε με δύο τρόπους τις πράξεις 1/3 χ 3/5 και

4/8 : ½ προσεγγίζοντας στη δεύτερη περίπτωση τη μέθοδοτου λογισμικού του πολλαπλασιασμού.

Τα παραπάνω δεδομένα μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως η μαθήτρια αντιμετωπίζει δυσκολίες στα κλάσματα γενικότερα. Όπως περιγράφεται εκτενώς στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, το Ελληνικό Σχολείο δίνει έμφαση στη μηχανική επίλυση ασκήσεων και αλγορίθμων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μπερδεύουν τον έναν αλγόριθμο με τον άλλο, μη μπορώντας ουσιαστικά να κατανοήσουν τη σημασία του. Συμπερασματικά, αν και η Αφροδίτη είχε διδαχθεί στο παρελθόν όλο το φάσμα το κλασμάτων, από την άλλη δεν ήταν σε θέση να κατανοήσει τη σημασία τους. Η στείρα γνώση αλγόριθμων την οδήγησε στο να εκτελεί πράξεις μηχανικά μη μπορώντας να συνδέσει τη θεωρία με την πράξη. Σχετικό παράδειγμα αποτελεί η πράξη 1/3 x3/5. Στο pretest, η Αφροδίτη εκτελεί την πράξη με «καπελάκια» πάνω από τους αριθμητές τη στιγμή που στο posttest πολλαπλασιάζει «χιαστί» τους δύο κλασματικούς όρους.

Κλείνοντας λοιπόν η αρχική γνώση της Αφροδίτης πάνω στα κλάσματα γενικότερα και στις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ειδικότερα, ήταν περιορισμένη. Η μαθήτρια αν και είχε διδαχθεί στο παρελθόν τα κλάσματα, αδυνατούσε να εφαρμόσει τις γνώσεις της στο φύλλο αξιολόγησης. Αυτό με τη σειρά του θεωρείται μία προειδοποίηση προς τους εκπαιδευτικούς και το εκπαιδευτικό σύστημα ότι οφείλουν να εφαρμόσουν πιο παραγωγικές διαδικασίες μάθησης που να ανταποκρίνονται στις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών.

Λευτέρης

Τα αποτελέσματα του Λευτέρη τόσο στο pretest όσο και στο posttest ήταν αρκετά ικανοποιητικά. Ο μαθητής φάνηκε να έχει ξεκαθαρισμένα στο μυαλό του τα κλάσματα και τον τρόπο εκτέλεσης των αλγορίθμων.

Αναλυτικότερα στην 1^{η} δραστηριότητα σημείωσε σωστά 6/6 των περιπτώσεων. Στη 2^{η} φάνηκε να δυσκολεύεται σημειώνοντας 0/3 περιπτώσεις. Στην 3^{η} δραστηριότητα εκτέλεσε σωστά 5/6 των περιπτώσεων ενώ στην δραστηριότητα της αναπαράστασης των δύο πράξεων, αρκέστηκε στο σχεδιασμό δύο γραφημάτων, το ένα κάτω από το άλλο χωρίς κάποιο χαρακτηριστικό όπως π.χ. το σύμβολο της πράξης.

Στα αποτελέσματα του posttest υπήρξαν μικρές διαφοροποιήσεις με θετικό πρόσημο. Συγκεκριμένα στην 1^{η} και 2^{η} δραστηριότητα παρατηρήθηκαν τα ίδια αποτελέσματα. Στην 3^{η} δραστηριότητα, ο μαθητής εκτέλεσε σωστά όλες τις πράξεις πετυχαίνοντας 6/6 των περιπτώσεων. Τέλος στην 4^{η} δραστηριότητα δε παρατηρήθηκε κάποια διαφοροποίηση παρά μόνο η τοποθέτηση των γραφημάτων το ένα δίπλα στο άλλο αντί από κάτω.

Οι επιδόσεις του μαθητή, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είχε κατανοήσει αρκετά από τις έννοιες σχετικά με τα κλάσματα. Με εξαίρεση τη σύγκριση των κλασμάτων, στις υπόλοιπες δραστηριότητες ανταποκρίθηκε επιτυχώς. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται πως η αρχικήγνώση του Λευτέρη γύρω από τα κλάσματα ήταν αρκετά ανεπτυγμένη.

Ωστόσο χαρακτηριστικό γνώρισμα και των δύο μαθητών ήταν το γεγονός ότι η αίσθηση αναπαράστασης στα κλάσματα ήταν σε χαμηλό επίπεδο. Αν και βάσει δεδομένων, οι δύο μαθητές κατανόησαν τη μέθοδοστα λογισμικά, ωστόσο κανένας από τους δύο δεν ήταν σε θέση να πραγματοποιήσει εντελώς επιτυχημένα τις ζητούμενες αναπαραστάσεις. Η μηχανική προσέγγιση των αλγορίθμων σε βάθος χρόνων έχει επιφέρει δυσκολίες αναπροσαρμογής στους μαθητές. Ακόμη μία φορά λοιπόν γίνεται κατανοητό πως ο χρόνος είναι ένας από τους βασικότερους παράγοντες αλλαγής στον τρόπο μάθησης.

Συμπεράσματα

Ξεκινώντας, η πρώτη υπόθεση της έρευνας αφορούσε στην βελτίωση της αίσθησης της αναπαράστασης των κλασμάτων των δύο μαθητών. Μέσα από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και των δύο μαθητών, παρατηρήθηκε ότι αρχικά η αποτύπωση της πράξης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων, βρισκόταν σε αρχικό στάδιο. Τόσο ο Λευτέρης, όσο και η Αφροδίτη αρκούνταν στη δημιουργία δύο κυκλικών γραφημάτων το ένα δίπλα στο άλλο που έδειχναν ξεχωριστά το καθένα τους όρους του πολλαπλασιασμού. Πιθανά, την παραπάνω διαδικασία να την πράττουνπολλοί μαθητές σήμερα, λόγω της διδακτικής προσέγγισης των κλασμάτων. Σήμερα,η καλλιέργεια της αναπαράστασης μίας κλασματικής πράξης δεν διδάσκεται στο Ελληνικό Σχολείο. Η έμφαση στον αλγόριθμο, εγκλωβίζει την σκέψη των μαθητών οι οποίοι ακολούθως, συναντούν προβλήματα οπτικοποίησης μίας πράξης κλασμάτων. Πάνω λοιπόν στο συγκεκριμένο φαινόμενο – πρόβλημα της ελληνικής πραγματικότητας, η πρώτη υπόθεση φάνηκε να δικαιώνει τον ερευνητή και αυτό γιατί έπειτα από την εξάσκηση και ενασχόληση των μαθητών στα δύο λογισμικά, παρατηρήθηκε βελτίωση στην αίσθηση της αναπαράστασης των κλασμάτων και στους δύο μαθητές. Ωστόσο ένα εύλογο ερώτημα μπορεί να είναι «Για ποιο λόγο δεν εφάρμοσαν σωστά τις αναπαραστάσεις του φύλου αξιολόγησης;». Ναι μεν οι μαθητές φάνηκε να κατανοούν τις διαδικασίες γύρω από την αναπαράσταση των κλασμάτων όμως προκειμένου να είναι σε θέση να αναπαριστάνουν επιτυχώς μία κλασματική πράξη απαιτείται χρόνος και εξάσκηση. Παρόλα αυτά όπως είδαμε και οι δύο μαθητές μπήκαν στην διαδικασία αλλαγής του τρόπου σκέψης γύρω από την αναπαράσταση των κλασμάτων.

Οι μαθητές άραγε, εξοικειώθηκαν με τα εκπαιδευτικά λογισμικά; Το παραπάνω ερώτημα φαίνεται να συναντά θετική ανταπόκριση. Αρχικά όπως προαναφέρθηκε επανειλημμένα, οι μαθητές στις μέρες μας, μεγαλώνουν σε ένα πλήρως ψηφιακό περιβάλλον με την ανάγκη του σχολείου να ακολουθήσει την πραγματικότητα αυτή, να θεωρείται επιτακτική. Από τη στιγμή λοιπόν που οι μαθητές καλούνται να αλληλεπιδράσουν με προϊόντα της τεχνολογίας, αυτό από μόνο του σηματοδοτεί θετικές αντιδράσεις. Κάτι τέτοιο βεβαίως δε σημαίνει ότι μπορεί να θεωρηθεί και επιτυχημένο καθώς χρειάζονται οι σωστοί χειρισμοί και οι κατάλληλες διαδικασίες. Οι παραπάνω προϋποθέσεις καλύφθηκαν από το σχέδιο που εφάρμοσε ο ερευνητής. Σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές υπό την ορθή καθοδήγηση του ερευνητή, κατάφεραν να διεκπεραιώσουν όλες τις αναπαραστάσεις που τους είχαν ανατεθεί. Τέλος τα περιβάλλοντα μάθησης και στα δύο λογισμικά ήταν κατανοητά κάτι που συνετέλεσε στην ταχύτερη κατανόηση των διαδικασιών λειτουργίας.

Ένα από τα πάγια σύγχρονα ερωτήματα είναι το κατά πόσο μπορεί η χρήση των Τ.Π.Ε να συμβάλει στην κατανόηση των Μαθηματικών. Ένα από τα τρία ερευνητικά ερωτήματα εστιάζει στον παραπάνω προβληματισμό μιλώντας όμως πιο συγκεκριμένα για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Μέχρι σήμερα είδαμε πως οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας των κλασμάτων δε επιφέρουν ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Με έμφαση στη διαδικαστική γνώση και τη μηδαμινή σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα των μαθητών, τα κλάσματα παραμένουν ένα γνωστικό πεδίο όπου οι μαθητές φοβούνται να ενεργοποιηθούν. Με αυτά τα στοιχεία γίνεται αντιληπτό ότι χρειάζεται μία αλλαγή στον τρόπο προσέγγισης των κλασμάτων. Από τη στιγμή λοιπόν που η Τεχνολογία έχει προοδεύσει σε τέτοιο βαθμό, ώστε να δημιουργούνται διαρκώς εφαρμογές και λογισμικά που προσεγγίζουν την γνώση εναλλακτικά, τότε και η κατάκτηση της γνώσης είναι εφικτή. Αρκεί όπως είδαμε, να υπάρχει ένα πλαίσιο οργάνωσης και καθοδήγησης των μαθητών έτσι ώστε να αποφευχθεί η σύγχυση και ο αποπροσανατολισμός. Πιο συγκεκριμένα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των κλασμάτων χρειάζονται ένα ευέλικτο και πλουραλιστικό περιβάλλον δράσης. Ένα περιβάλλον που στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού να τονίζει τη σχέση αλληλεπίδρασης των δύο όρων, όπως το παρόν λογισμικό με το χαρακτηριστικό μωβ χρώμα. Από την πλευρά της διαίρεσης, είναι αναγκαίο να τονίζεται σε κάθε περίπτωση η σημασία της σύγκρισης, δύο ή περισσότερων κλασμάτων με ποικίλα χρώματα, σχήματα κλπ. Όλα τα παραπάνω παρατίθενται καθώς είναι χαρακτηριστικά που μπορούν να αποτυπωθούν με μεγαλύτερη ευκολία και αποτελεσματικότητα σε έναν υπολογιστή κ.α, παρά σε ένα σχολικό πίνακα.

Με την ολοκλήρωση της ανάλυσης του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, διατυπώνεται ένας ακόμη προβληματισμός. Έχουν τα εκπαιδευτικά λογισμικά τη δυναμική να αντικαταστήσουν εξολοκλήρου, τον ρόλο του εκπαιδευτικού μέσα στην σχολική τάξη; Σαφώς και το ερώτημα αυτό δεν μπορεί να λάβει μία θετική απάντηση. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη σχολική τάξη είναι καθοριστικός. Όπως προαναφέρθηκε στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, ο ρόλος του εκπαιδευτικού σήμερα έχει αλλάξει. Από αυθεντία έχει γίνει συμμέτοχος στην κατασκευή της νέας γνώσης. Αυτό όμως σε καμία περίπτωση δε σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός μπορεί να παραληφθεί από την εκπαιδευτική διαδικασία και τη θέση του να πάρουν εφαρμογές και λογισμικά. Και αυτό γιατί οι μαθητές σε κάθε τους βήμα χρειάζονται την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και το σημαντικότερο· την ανάπτυξη προβληματισμού γύρω από τη νέα γνώση. Ιδίως το τελευταίο δεν μπορεί να εκτελεστεί από ένα λογισμικό παρά μόνο από τον εκπαιδευτικό ο οποίος γνωρίζει όλα τα σημεία εκείνα που πρέπει να επιμείνει σε κάθε μαθητή, τις αδυναμίες και τα προτερήματα του. Στην παρούσα έρευνα, οι μαθητές δεν θα ήταν δυνατό να εκτελέσουν από τη μία τις αναπαραστάσεις και από την άλλη να κατανοήσουν το νόημα αυτών εάν δεν υπήρχε η καθοδήγηση του ερευνητή. Άρα λοιπόν το ερώτημα αυτό δε μπορεί να απαντηθεί θετικά και πιστεύεται πως δε θα μπορέσει να απαντηθεί θετικά ούτε στο μέλλον καθώς ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν είναι και θα συνεχίσει να είναι καθοριστικός στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Δύναται η χρήση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση να οδηγήσει στην καλλιέργεια θετικής στάσης προς τα Μαθηματικά γενικότερα και τα κλάσματα ειδικότερα; Δε θα μπορούσαμε να είμαστε πιο θετικοί σ΄αυτό το ερώτημα ιδίως στο σημείο αυτό όπου ολοκληρώνεται η έρευνα μας. Επανειλημμένα έχει αναφερθεί ότι οι μαθητές υστερούν της ουσιαστικής κατανόησης του εννοιολογικού περιεχομένου των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά φοβίζουν και αποτελούν ένα από τα μαθήματα με τη μικρότερη προτίμηση από την πλευρά τωνμαθητών. Η παραπάνω αντίληψη έχει εδραιωθεί για τα καλά στην ελληνική πραγματικότητα και είναι απόρροια της υιοθέτησης αναποτελεσματικών μεθόδων προσέγγισης της μάθησης. Τόσο το εκπαιδευτικό σύστημα όσο και οι εκπαιδευτικοί, προωθούν τη νοοτροπία της στείρας αποστήθισης, της μηχανικής εκτέλεσης αλγορίθμων, την έμφαση εν ολίγοις, στη διαδικαστική γνώση. Η ορθή χρήση της Τεχνολογίας στο χώρο των Μαθηματικών καλείται να φέρει την αλλαγή στα Μαθηματικά. Μία αλλαγή που αφορά στην ουσιαστική κατανόηση της κάθε κίνησης πίσω από τον αλγόριθμο. Προκειμένου να επιτευχθεί όμως κάτι τέτοιο, όλοι οι φορείς που σχετίζονται με την εκπαίδευση, από την Πολιτεία μέχρι και τους γονείς, θα πρέπει να είναι συμμέτοχοι σε μία τέτοια αλλαγή προκειμένου να βγει ένα τελικό προϊόν άξιο του λόγου δημιουργίας των λογισμικών αυτών. Αν οι παραπάνω φορείς καταφέρουν και συνεργαστούν, τότε και η στάση των μαθητών απέναντι τόσο στα Μαθηματικά όσο και στα κλάσματα θεωρείται πως θα αλλάξει προς το καλύτερο. Αρκεί οι εκπαιδευτικοί να μη διδάσκουν την ύλη για την ύλη και να ξεφύγουν από το «ταμπού» ότι η Τεχνολογία είναι αγκάθι στην εκπαίδευση. Κλείνοντας, η γενική εικόνα τόσο της Αφροδίτης όσο και του Λευτέρη, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές μπορούν να αγαπήσουν τα Μαθηματικά αρκεί να υπάρχει το ενδιαφέρον του εκπαιδευτικού και ο σωστός σχεδιασμός της κάθε δραστηριότητας.

Προτάσεις

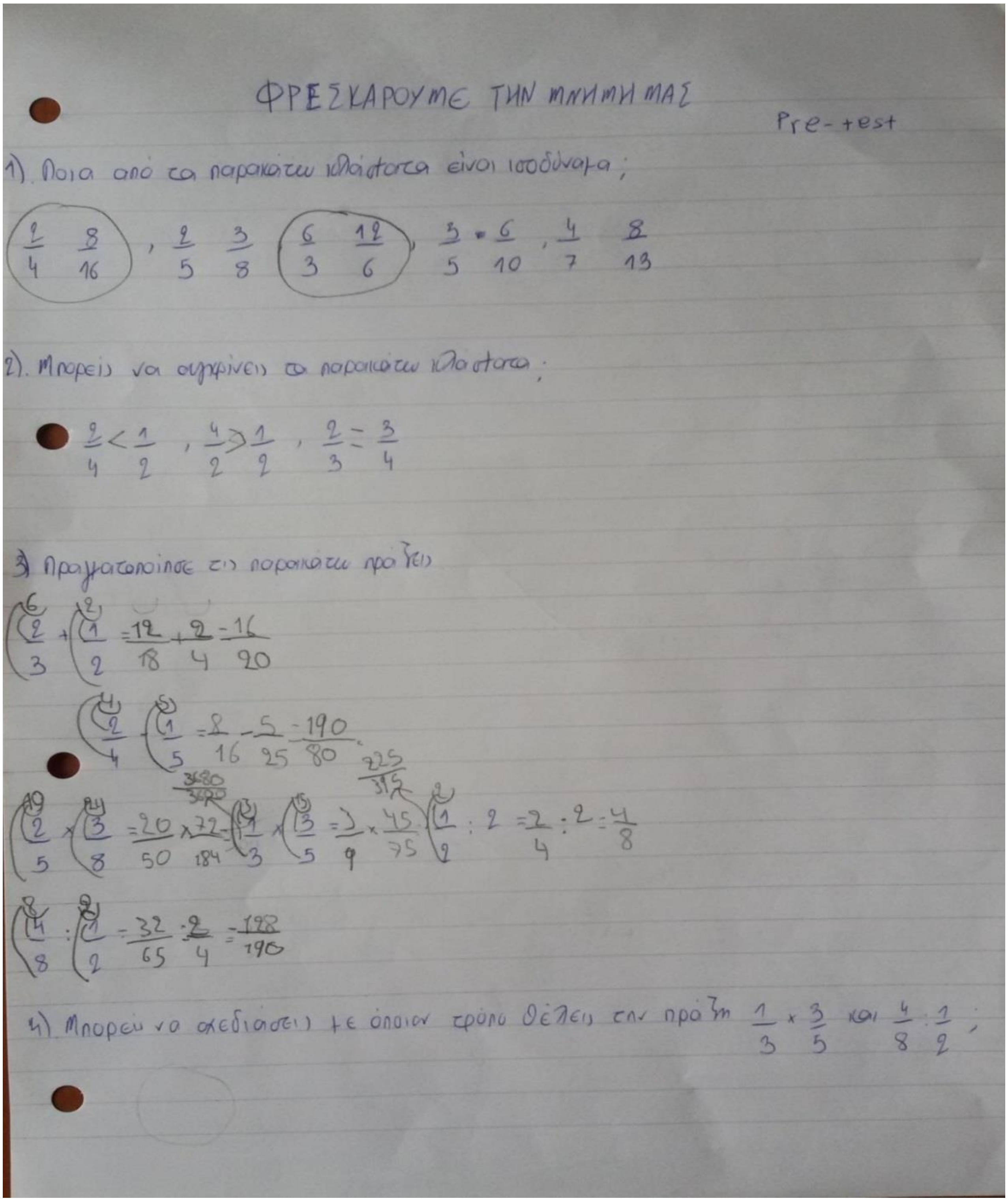
Η συγκεκριμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε κάτω από κάποιες συνθήκες. Αναλυτικότερα, το δείγμα των μαθητών ήταν περιορισμένο, μόλις δύο ατόμων, η χρονική διάρκεια ήταν τριών ημερών και τέλος η εφαρμογή έγινε πάνω σε δύο λογισμικά, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Προκειμένου να έχουμε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα και να είμαστε σε θέση να εξάγουμε ασφαλέστερα συμπεράσματα, η όλη διαδικασία μπορεί να προσεγγιστεί διαφορετικά. Ξεκινώντας, το δείγμα των μαθητών μπορεί να είναι μεγαλύτερο, όσοι και οι μαθητές μίας σχολικής τάξης. Ο χρόνος των τριών φάσεων προτείνεται να είναι περισσότερος ώστε οι μαθητές αφενός να εξοικειωθούν με τα λογισμικά, αφετέρου ο εκπαιδευτικός να έχει την άνεση να δώσει εξηγήσεις και να επιμείνει όπου χρειαστεί στη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Τέλος η συνολική διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μετά από διάστημα δύο μηνών για να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές κατανόησαν το περιεχόμενο των λογισμικών. Ο παραπάνω πειραματισμός μπορεί να πλαισιωθεί πέρα από μία ερευνητική ομάδα και από το Ελληνικό Σχολείο. Βάσει του Αναλυτικού Προγράμματος για το Δημοτικό Σχολείο, διατίθενται ώρες για το μάθημα της Ευέλικτης Ζώνης. Η Ευέλικτη Ζώνη μπορεί και πρέπει να αποτελέσει για τον εκπαιδευτικό πεδίο εναλλακτικών δράσεων στα πλαίσια της διαθεματικότητας και της καινοτομίας. Έτσι λοιπόν ο εκπαιδευτικός της εκάστοτε τάξης σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό της Πληροφορικής, μπορεί να οργανώσει την πειραματική διαδικασία που παρουσιάστηκε, σε βάθος ενός τριμήνου συνολικά (εντάσσεται και η δεύτερη φάση). Έτσι τα αποτελέσματα που θα αντληθούν θα είναι πιο βέβαια, τα περιθώρια λάθους μικρότερα και τα τελικά συμπεράσματα ασφαλέστερα. Επιπλέον από τη στιγμή που η διαδραστική βιβλιοθήκη «*NationalLibraryOfVirtualManipulatives»,* διαθέτει λογισμικά πάνω σε όλες τις πράξεις των κλασμάτων και όχι μόνο, τότε ο πειραματισμός μπορεί να επεκταθεί στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, ακολουθώντας τις ίδιες διαδικασίες. Ως επακόλουθο, οι μαθητές θα είναι εξοικειωμένοι τόσο με τη χρήση της Τεχνολογίας όσο και με τα κλάσματα που έως σήμερα αντιμετωπίζουν με φόβο και ανασφάλεια.

Ως κατακλείδα της εργασίας να επισημάνουμε για ακόμη μία φορά ότι όσες καινοτομίες και να εισάγουμε στην εκπαίδευση, χρειάζεται η καθολική υποστήριξη των φορέων που εμπλέκονται, για να αφομοιωθούν πλήρως στο Σχολείο. Ακόμη, χρειάζεται χρόνος και διαρκής ενασχόληση με κάθε τι νέο ώστε τόσο μαθητές, όσο και εκπαιδευτικοί να αποκτήσουν την αυτοπεποίθηση και τη σιγουριά που χρειάζεται. Τα κλάσματα λόγω του τρόπου που διδάσκονται και της ασυνέχειας στη διδακτέα ύλη,δυσκολεύουν μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η παραπάνω μελέτη περίπτωσης θεωρείται μία μόνο μικρή βοήθεια προς τον κάθε εκπαιδευτικό που επιθυμεί να προσεγγίσει παραστατικά, αυτήν την - ιδιαίτερα περίπλοκη - γνωστική περιοχή των Μαθηματικών.

Παράρτημα

Pre- post test – Αφροδίτη



ΦΡΕΣΚΑΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗ ΜΑΣ

Pre-test

1). Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$\frac{2}{4}\ \frac{8}{16}$, $\frac{2}{5}\ \frac{3}{8}$ $\frac{6}{3}\ \frac{12}{6}$, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{4}{7}\ \frac{8}{13}$

2). Μπορείς να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα;

$\frac{2}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{4}{2} > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

3) Πραγματοποίησε τις παρακάτω πράξεις

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{12}{18} + \frac{2}{4} = \frac{16}{20}$

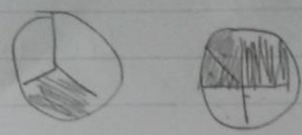
$\frac{2}{4} - \frac{1}{5} = \frac{8}{16} - \frac{5}{25} = \frac{190}{80}$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{20}{50} \times \frac{72}{184}$ $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{9} \times \frac{45}{75}$ $\frac{1}{2} : 2 = \frac{2}{4} : 2 = \frac{4}{8}$

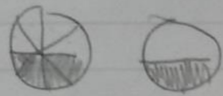
$\frac{4}{8} : \frac{1}{2} = \frac{32}{65} : \frac{2}{4} = \frac{198}{190}$

4) Μπορείς να σχεδιάσεις με όποιον τρόπο θέλεις την πράξη $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$ και $\frac{4}{8} : \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$



$\frac{4}{8} \div \frac{1}{2}$



ΦΡΕΣΚΑΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗ ΜΑΣ

Post - test

1) Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$\frac{2}{4} \quad \frac{8}{16}$, $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{8}$, $\frac{6}{3} \quad \frac{12}{6}$, $\frac{3}{5} \quad \frac{6}{10}$, $\frac{4}{7} \quad \frac{8}{13}$

2) Μπορείς να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα;

$\frac{2}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{4}{2} > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

3) Πραγματοποίησε τις παρακάτω πράξεις.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$

$\frac{2}{4} - \frac{1}{5} = \frac{2}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{3}$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{16}{15}$

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{5}{9}$

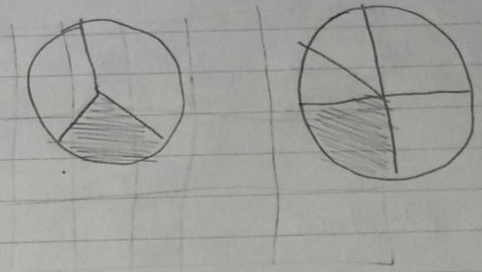
$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$

$\frac{4}{8} : \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$

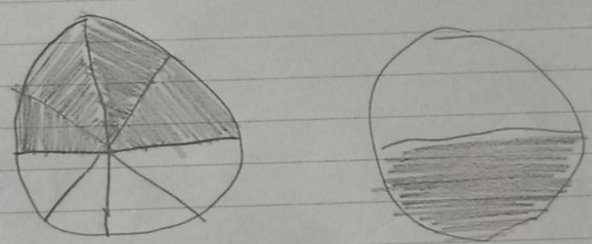
4) Μπορείς να σχεδιάσεις με οποιονδήποτε τρόπο επιλύεις την πράξη $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$

$\frac{4}{8} \cdot \frac{1}{2}$;

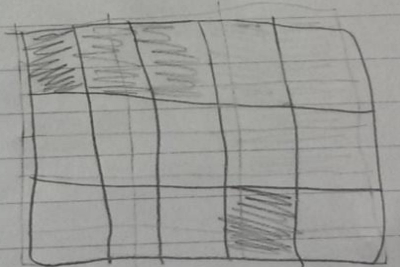
α) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$



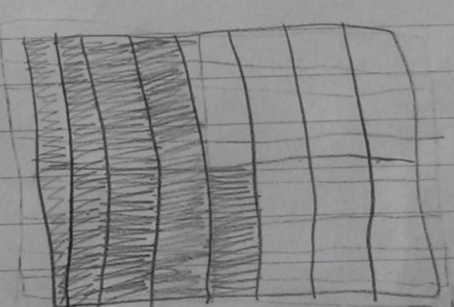
β) $\frac{4}{8} \times \frac{1}{2}$



α) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$



β) $\frac{4}{8} \times \frac{1}{2}$



Pre – post test Λευτέρη

ΦΡΕΣΚΑΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗ ΜΑΣ

Pre-test

1) Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$\frac{2}{4}\ \frac{8}{16}$, $\frac{2}{5}\ \frac{3}{8}$, $\frac{6}{3}\ \frac{6}{6}$, $\frac{3}{5}\ \frac{6}{10}$, $\frac{4}{7}\ \frac{8}{13}$

2) Μπορείς να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα;

$\frac{2}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{4}{2} < \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} > \frac{3}{4}$

3) Πραγματοποίησε τις παρακάτω πράξεις:

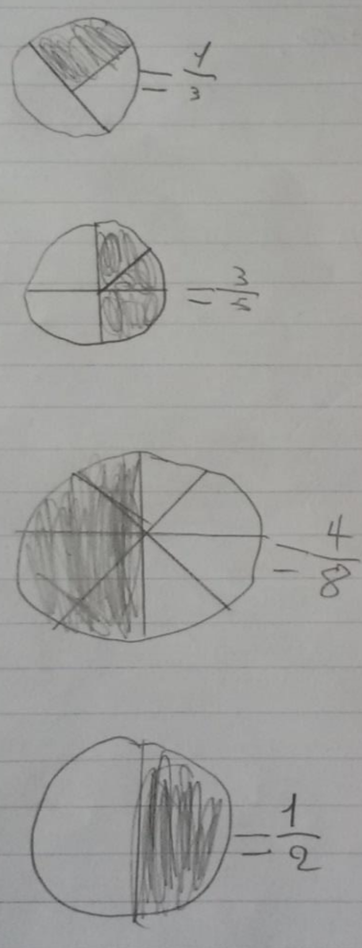
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

$\overset{5}{\frac{2}{4}} - \overset{4}{\frac{1}{5}} = \frac{10}{20} - \frac{4}{20} = \frac{6}{20}$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40}$ $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{15}$ $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{8} : \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{8} = 1$

4) Μπορείς να σχεδιάσεις με οποιονδήποτε τρόπο τις πράξεις $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$ και $\frac{4}{8} : \frac{1}{2}$;



ΦΡΕΣΚΑΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗ ΜΑΣ

Post-test

1) Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$\frac{2}{4}\quad\frac{8}{16}$, $\frac{2}{5}\quad\frac{3}{8}$, $\frac{6}{3}\quad\frac{6}{6}$, $\frac{3}{5}\quad\frac{6}{10}$, $\frac{4}{7}\quad\frac{8}{13}$

2) Μπορείς να συγκρίνεις τα παρακάτω κλάσματα;

$\frac{2}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{4}{2} < \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} > \frac{3}{4}$

3) Πραγματοποίησε τις παρακάτω πράξεις:

$\overset{(2)}{\frac{2}{3}} + \overset{(3)}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

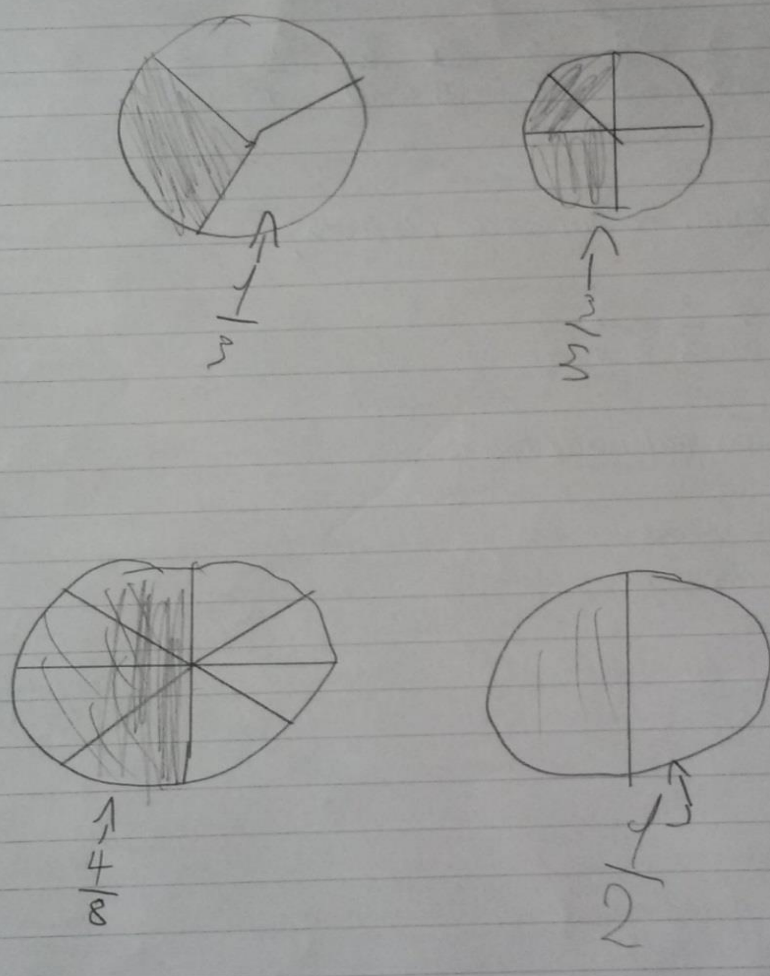
$\overset{(5)}{\frac{2}{4}} - \overset{(4)}{\frac{1}{5}} = \frac{10}{20} - \frac{4}{20} = \frac{6}{20}$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40}$

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{15}$

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{8} : \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{8} = 1$

Μπορείς να σχεδιάσεις με οποιονδήποτε τρόπο τις πράξεις $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$ και $\frac{4}{8} : \frac{1}{2}$;



Βιβλιογραφία

Ελληνική

- Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου Ε., και Σιακαλλή Μ. (2001).Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Κύπρου,Λευκωσία.
- Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α. , Ηλία Ι., Σπύρου Π. (2004). Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών; Λευκωσία: Intercollage Press.
- Φιλίππου,Γ.,& Χρίστου Κ.(1995). Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Δαρδανός.
- Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., & Μοδέστου, Μ. (2006). 'Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο'. Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 2-3 Ιουνίου, 2006, Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου. Στο: Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Κωνσταντίνου – Σιημητρά, Α., Χρυστοδουλίδου, Ό. (2006). ΓΙΑΤΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ;. ανακτήθηκε από : http://www.pek.org.cy/
- Χαιρέτη, Μ. (2009). *Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.
- Lemonidis, Ch. (2013). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ: ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ. ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΥΓΟΣ.

Ξένη

- Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90, 449 – 466.*
- Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understandings of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21 (2), 132 – 144.*
- Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and tworths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T.P. Carpenter E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 157 – 196). Hillsdale NJ : Erlbaum.
- Caglayan, G., & Olive, J. (2011). Referential commutativity: Pre service K – 8 teachers' visualization of fraction operations using pattern block. In L.R. Wiest & T. Lamberg (Eds.). Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 303 – 311). Reno, NV: University of Nevada, Reno.
- Cannon, L. O., Heal, E. R., & Wellman, R. (2000). Serendipity in interactive mathematics: Virtual (electronic) manipulatives for learning elementary mathematics. Proceedings of the Society for Information Technology and Teacher Education International Conference, USA, 2000, 1083-1088.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007b). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. Journal for Research in Mathematics Education, 38(2), 136-163.

- Gelman, R.,& Williams, E. (1998). Enabling constrains for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. In W. Damon, D. Kuhn, & R. S. Siegler (Eds.), Handbook of child psychology. New York: Wiley.
- Goldman, J., & Pellegrino, J. W. (1987). Information processing and microcomputer technology: Where do we go from here? Journal of Learning Disabilities, 20, 336-340.
- Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Pre service teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20 (1), 95 – 102.*
- Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and error in secondary mathematics project. Widson, England: NFER- Nelson.
- Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter. E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lamon, S. J.(1999). Teaching Fractions and Ratios for Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre – service Mathematics teachers: The case of fraction division. ZDM Mathematics Education, 40, 833 – 843.
- Lo, J.- J., & Grant, T. (2012). Prospective elementary teachers' conceptions of fractional units. In T.Y. Tso (Ed.). Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 169 – 176). Taipei, Taiwan: PME.
- Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre – services elementary teachers' abilities to construct world problems for fractions. *Journal of Mathematics Education, 2, 83 – 98.*
- Moscal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. Educational Studies in Mathematics, 43, 313-335.
- Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and breakers: New approaches to teaching the rational number system. In M. S. Donovan & J.D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom(pp. 121-162). Washington, DC: National Academic Press.
- Muir, T. & Livy, S. (2012, December 5). What do they know? A comparison of pre – service teachers' and in – service teachers' decimal mathematical content of knowledge. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/muir2.pdf
- National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), Mathematics Learning Study Committee,

Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press

- Olanoff, D. Lo, J. J., Tobias, J. M. (2014). *Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions.* TME, vol. 11, no 2, p. 267.
- Sadi, A.(2007). Misconceptions in numbers. UGRU journal,5.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. Journal for Research in Mathematics Education, 24 (3), 233 – 254.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understandings of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14, 503-518.
- Taber, S. B. (1999). Understandings multiplication with fractions: An analysis of problem features and students strategies. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21 (2), 1 – 27.*
- Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1990a). Evoking cognitive conflict to explore pre- service teacher's thinking about division. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 98-108.
- Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on pre service elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics, 91 (4), 157 – 163.*
- Yang, D-C. Reys, R. E., & Reys, B.J. (2008). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. International Journal of Science and Mathematics Education, 7, 383- 403.
- Young, E. & Zientek, L. R. (2011). Fraction operation: An examination of prospective teachers' errors, confidence, and bias. *Investigations in Mathematics Learning, 4(1), 1 - 23.*
- Yusof, J.(2003). Mathematical errors in fractions work : A longitudinal study of primary level pupils in Brunei [Electronic Version]. Retrieved in 18/12/2008
- Suh, J., Moyer, P. S, & Heo, H - J. (2005). Examining Technology Uses in the Classroom: Developing Fraction Sense Using Virtual Manipulative Concept Tutorials,3. Ανακτήθηκεαπό: Journal of Interactive Online Learning
- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. Journal for Research in mathematics Education, 20(5), 498-505.
- Suydam, M. N. (1985). Research on instructional materials for mathematics. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. (ERIC Document Reproduction Service No. 276 569).
- Suydam, M. N. (1986). Manipulative materials and achievement. Arithmetic Teacher, 33(6), 10, 32
- Tsai-Wei, H., Shiang- Tung, L., Cheng- Yao, L. Teacher's mathematical knowledge of fractions http://www.aabri.com/manuscripts/09253.pdf (Προσπελάστηκε 16/2/2016).