ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΔΠΜΣ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)

Διπλωματική Εργασία

«Υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά: Ο ρόλος του πλαισίου»

«Computational estimations with percentages: The role of contex»

της

Τσιάτση Χριστίνας

Α.Ε.Μ: 1033

<u>Επιβλέπουσα καθηγήτρια:</u> Δεσλή Δέσποινα, Αν. Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ

<u>Εξεταστές:</u> Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. του Π.Δ.Μ

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επ. Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε. του Α.Π.Θ

Φλώρινα, Νοέμβριος 2022

Στον Αριστείδη

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα. Δεσλή Δέσποινα, για την αμέριστη υποστήριξη, υπομονή και καθοδήγησή της καθ’ όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Οι πολύτιμες γνώσεις και οι ουσιαστικές συμβουλές της αποτέλεσαν κινητήρια δύναμη στη μακρά πορεία και ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και τον κ. Χρήστου Κωνσταντίνο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δικούς μου ανθρώπους για τη συμπαράσταση, την κατανόηση και την ενθάρρυνσή τους, ώστε να πετύχω τους στόχους μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των παιδιών στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά και τον ρόλο του πλαισίου σε αυτές. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε 42 παιδιά (22 της Στ΄ τάξης και 20 της Β΄ Γυμνασίου) δύο έργα, τα οποία ζητούσαν από αυτά να πραγματοποιήσουν κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ποσοστά σε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (Έργο 1) και σε δοκιμασίες με πλαίσιο (Έργο 2). Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων βρέθηκε ικανοποιητική και δεν επηρεάστηκε από την ηλικία, καθώς οι μαθητές των δύο τάξεων σημείωσαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας. Αν και δεν εντοπίστηκαν ηλικιακές διαφορές στη γενική επίδοση, οι δύο ηλικιακές ομάδες επηρεάστηκαν διαφορετικά από την ύπαρξη πλαισίου. Ενώ οι μαθητές μικρότερης ηλικίας κατέληξαν σε λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες με πλαίσιο, η επίδοση των μαθητών μεγαλύτερης ηλικίας δεν διαφοροποιήθηκε από την παρουσία πλαισίου. Ωστόσο, οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων ευνοήθηκαν σημαντικά από το μικρό μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά (κάτω του 50%). Τέλος, οι συμμετέχοντες κατέφυγαν κυρίως σε αλγοριθμικές στρατηγικές για την εκτέλεση των κατ' εκτίμηση υπολογισμών.

ABSTRACT

The purpose of the present study was to examine students' performance and strategies and the role of context in computational estimations with percentages. For this purpose, two tasks were designed and presented to 42 children (22 6th graders and 20 8th graders), asking them to estimate computational results with percentages in six non-context-based problems (Task 1) and six context-based problems (Task 2). Participants' overall performance was satisfactory and wasn't affected by age, with the students of both grades having similar success rates. Although no age differences were identified, both age groups were differently affected by the presence of context. While younger participants made less successful estimations in context-based problems, the performance of the older ones was not differentiated by the presence of context. However, estimations provided by both age groups were significantly favored by the small size of the involved numbers concerning percentages (under 50%). Last, participants used mostly algorithmic strategies for their computational estimations.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ IV

ABSTRACT V

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ VIII

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ IX

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ 6

1.1. Εκτίμηση 6

1.1.1. Ορισμός 6

1.1.2. Είδη εκτίμησης 7

1.1.3. Χρησιμότητα εκτίμησης 8

1.2. Υπολογιστική εκτίμηση 9

1.2.1. Ορισμός 9

1.2.2. Υπολογιστική εκτίμηση και νοεροί υπολογισμοί 12

1.2.3. Υπολογιστική εκτίμηση και αίσθηση αριθμού 13

1.2.4. Η υπολογιστική εκτίμηση στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών 15

1.3. Επιδόσεις και στρατηγικές σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης 16

1.3.1. Επιδόσεις παιδιών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης 16

1.3.2. Παράγοντες που επηρεάζουν τις επιδόσεις σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων 20

1.3.3. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης 26

1.3.4. Χρήση στρατηγικών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης 29

1.3.5. Παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης 31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 33

2.1. Συμμετέχοντες 33

2.2. Σχεδιασμός- Εργαλείο έρευνας 33

2.3. Διαδικασία 35

2.4. Κωδικοποίηση και ανάλυση δεδομένων 36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 37

3.1. Γενική επίδοση 37

3.1.1. Γενική επίδοση και ηλικιακή ομάδα ____ 37
3.1.2. Γενική επίδοση και φύλο ____ 37
3.1.3. Γενική επίδοση και σειρά παρουσίασης ____ 39
3.2. Επιμέρους επιδόσεις ____ 39
3.2.1. Επίδοση ως προς την ύπαρξη ή την απουσία πλαισίου ____ 39
3.2.2. Επίδοση και είδος των δοκιμασιών ____ 39
3.2.3. Επίδοση και μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά ____ 41
3.3. Στρατηγικές των συμμετεχόντων ____ 42
3.3.1. Περιγραφή στρατηγικών ____ 42
3.3.2. Συχνότητα χρήσης στρατηγικών ____ 44
3.4. Χρήση στρατηγικών και επιτυχία στις δοκιμασίες ____ 45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ____ 47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ____ 52
Ξενόγλωσση ____ 52
Ελληνόγλωση ____ 59
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ____ 61
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β ____ 66

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1. Εργαλείο έρευνας ____ 35

Πίνακας 2. Συσχέτιση της χρήσης στρατηγικών και της γενικής επίδοσης ____ 46

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Γράφημα 1. Γενική επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα ____________________38

Γράφημα 2. Γενική επίδοση ως προς το φύλο _____________________________38

Γράφημα 3: Επίδοση ως προς την παρουσία πλαισίου και την ηλικιακή ομάδα____40

Γράφημα 4: Επίδοση ως προς το είδος των δοκιμασιών και την ηλικιακή ομάδα __41

Γράφημα 5: Επίδοση ως προς το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά και την ηλικιακή ομάδα ____ 42

Γράφημα 6: Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών από το σύνολο των συμμετεχόντων 44

Γράφημα 7: Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα____45

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι υπολογιστικές εκτιμήσεις συνιστούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής αλλά και της επαγγελματικής ζωής των ανθρώπων, καθώς σε πολλές περιστάσεις απαιτείται η προσεγγιστική επίλυση ενός προβλήματος, κυρίως λόγω ευκολίας, αναγκαιότητας ή αδυναμίας εύρεσης μιας ακριβούς λύσης (Rosenstein, Caldwell & Crown, 1996· Segovia & Castro, 2009). Η επισκόπηση των προγραμμάτων σπουδών για τα Μαθηματικά σε εθνικό και διεθνές επίπεδο αναδεικνύει την έμφαση που δίνεται στην καλλιέργεια δεξιοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης ως επιμέρους στόχο προς την απόκτηση μιας καλής αίσθησης του αριθμού (National Council of Teachers of Mathematics, 2000· Rosenstein et al., 1996), καθώς πρόκειται για δύο άρρηκτα συνδεδεμένες έννοιες (McIntosh, 2004).

Πιο συγκεκριμένα, η υπολογιστική εκτίμηση αφορά στη νοερή, προσεγγιστική λύση ενός αριθμητικού προβλήματος χωρίς την εκτέλεση ενός ακριβούς υπολογισμού και απαιτεί την κατανόηση της σημασίας και των ιδιοτήτων των αριθμητικών πράξεων (Fung & Latulippe, 2010). Η υπολογιστική εκτίμηση σε συνδυασμό με την εκτίμηση μέτρησης και την εκτίμηση πλήθους συνθέτουν την έννοια της εκτίμησης, η οποία συνιστά βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η ελληνική και διεθνής βιβλιογραφία μαρτυρά το ενδιαφέρον για τη μελέτη των επιδόσεων και των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης τόσο των ενηλίκων όσο και των παιδιών. Δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί[1] είναι υπεύθυνοι για την εφαρμογή του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, η διαπίστωση των γνώσεων και των ικανοτήτων τους στην εκτέλεση υπολογιστικών εκτιμήσεων δύναται να συμβάλει στη βελτίωση της διδακτικής πρακτικής τους και, κατ’ επέκταση, στην επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (Fung & Latulippe, 2010· Mildenhall, Hackling & Swan, 2010· Tsao & Pan, 2013). Παρόλα αυτά, αν και οι εκπαιδευτικοί χαρακτηρίζουν σημαντική τη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης (Anestakis & Desli, 2014· Δεσλή & Ανεστάκης, 2014), η επιτυχία τους σε ανάλογα έργα ποικίλλει.

Αναλυτικότερα, όσον αφορά τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς, η έρευνα των Lemonidis και Kaimakami (2013) έδειξε ότι παρουσιάζουν χαμηλή ή μέτρια ικανότητα σε υπολογιστικές εκτιμήσεις συμφωνώντας με τα ευρήματα των Son, Hu,

[1] Στην παρούσα εργασία οποιαδήποτε αναφορά στους όρους «μαθητής/μαθητές», «εκπαιδευτικός/εκπαιδευτικοί» και «ερευνητής/ερευνητές» υπονοεί και τα δύο φύλλα.

και Lim (2019). Αντιθέτως, οι Δεσλή και Ανεστάκης (2014) κατέγραψαν υψηλές επιδόσεις των προ-υπηρεσίας εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης. Σε παρόμοια αποτελέσματα με τους τελευταίους κατέληξαν οι Lemonidis, Mouratoglou και Pnevmatikos (2014) για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, οι οποίοι, εκτός από αποτελεσματικότητα, επέδειξαν ευρεία χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Δεδομένης, όμως, της σύνδεσης των ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας αυτής, συστήνεται η διαμόρφωση προγραμμάτων επαγγελματικής κατάρτισης που στοχεύουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού των εκπαιδευτικών και, κατά συνέπεια, στην ενδυνάμωση των ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών (Tsao & Pan, 2013· Anestakis & Desli, 2014· Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Η παραπάνω πρόταση δικαιολογείται από το πλήθος των ερευνών που επιβεβαιώνουν τις δυσκολίες των μαθητών στις εκτιμήσεις (Aytekin & Toluk Uçar, 2014· Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Lemonidis, Nolka, & Nikolantonakis, 2014· Liu & Neber, 2012· Tsao & Pan, 2011). Οι επιδόσεις τους σε έργα εκτίμησης είναι εμφανώς χαμηλότερες έναντι εκείνων που απαιτούν ακριβείς υπολογισμούς και αυτό πιθανώς οφείλεται στην περιορισμένη εμπειρία τους σε προβλήματα υπολογιστικών εκτιμήσεων (Tsao & Pan, 2013) που συνεπάγεται δυσκολία στην επινόηση στρατηγικών και μη ευέλικτη χρήση τους (Desli & Lioliou, 2020· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014).

Στην προσπάθεια να εξακριβωθούν οι λόγοι για τους οποίους παρατηρείται η μειωμένη ικανότητα εκτίμησης στα παιδιά, μελετήθηκαν διάφοροι παράγοντες. Η ηλικία φαίνεται να ασκεί θετική επίδραση, καθώς η επίδοση και η ευελιξία των ατόμων καλυτερεύουν με την πάροδο του χρόνου (Desli & Lioliou, 2020· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Sekeris, Empsen, Verschaffel & Luwel, 2020· Sekeris, Verschaffel & Luwel, 2019· Siegler & Booth, 2005). Ωστόσο, η Dolma (2002) υποστήριξε ότι η πρόοδος δεν συντελείται πάντοτε ηλικιακά εγείροντας ερωτήματα για την ύπαρξη δυνατοτήτων υπολογιστικών εκτιμήσεων σε νεαρότερη ηλικία από εκείνη που παραδοσιακά συναντάται στη βιβλιογραφία.

Επιπρόσθετα, η επίδοση σε έργα εκτίμησης καθορίζεται από το είδος των αριθμών που περιέχονται σε αυτά. Τόσο οι μαθητές (Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Tsao & Pan, 2011) όσο και οι εκπαιδευτικοί (Desli & Lioliou, 2020· Lemonidis & Kaimakami, 2013· Son et al., 2019) πετυχαίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε δοκιμασίες με ακέραιους παρά με ρητούς αριθμούς. Σύμφωνα με τη Dolma (2002), σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ρητούς, ο βαθμός δυσκολίας φθίνει από τα ποσοστά και τις αναλογίες στα κλάσματα και στους δεκαδικούς.

Επιπλέον, η παρουσία πλαισίου θεωρείται από τους εκπαιδευτικούς καίριος παράγοντας για την επιτυχημένη επίλυση ενός προβλήματος υπολογιστικής εκτίμησης και, συνεπώς, προτείνεται η ενσωμάτωση προβλημάτων με σενάριο στη διδασκαλία της (Anestakis & Desli, 2014· Fung & Latulippe, 2010· Mildenhall et al., 2010· Tsao & Pan, 2011, 2013). Προς επίρρωση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, οι Irwin (2001), Δεσλή (2011) και Liu και Neber (2012) συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι τα προβλήματα με πλαίσιο ή σενάριο διαδραματίζουν θετικό ρόλο στην επίδοση των μαθητών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς διαφωνώντας με τους Yang και Li (2008), Yang και Wu (2012) και Can και Özdemir (2020) που ανακάλυψαν το αντίθετο. Οι τελευταίοι, μάλιστα, ισχυρίζονται ότι τα παιδιά αποδίδουν καλύτερα σε μαθηματικά έργα χωρίς πλαίσιο, τονίζοντας την αδύναμη αίσθηση του αριθμού ακόμη και σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις. Σε αντίθεση, ωστόσο, με τις αντιφατικές απόψεις αναφορικά με το θετικό ή αρνητικό πρόσημο της επίδρασης του πλαισίου, οι Δεσλή και Παπαχρήστος (2019) αναφέρουν ότι η επίδοση των παιδιών στους νοερούς υπολογισμούς δε διαφοροποιείται από την ύπαρξη σεναρίου ή πλαισίου.

Πέραν των χαμηλών επιδόσεων, οι μαθητές επιδεικνύουν εξίσου ελλιπή ικανότητα στη χρήση στρατηγικών εκτίμησης (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014). Η πιο οικεία και συνηθέστερη στρατηγική εκτίμησης των παιδιών, όπως και των ενηλίκων, είναι η στρογγυλοποίηση, ενώ οι υπόλοιπες στρατηγικές χρησιμοποιούνται σε περιορισμένο βαθμό (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014). Οι Desli και Lioliou (2020), όμως, επισημαίνουν ότι, συγκριτικά με τα παιδιά, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συχνότερα τη στρογγυλοποίηση, ενώ οι Son et al. (2019) προσθέτουν ότι η επιλογή της στρατηγικής τους εξαρτάται από το είδος των αριθμών. Αν και η στρογγυλοποίηση κυριαρχεί σε έργα με ακέραιους αριθμούς, η στρατηγική των σημείων αναφοράς προτιμάται στους ρητούς αριθμούς.

Η αποτυχία των παιδιών σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να εξηγείται από την εμμονή τους για εκτέλεση υπολογισμών με ακρίβεια και την εσφαλμένη χρήση στρατηγικών εκτίμησης (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019·

Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014). Οι πρακτικές αυτές συνηγορούν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές στερούνται εννοιολογικής κατανόησης της υπολογιστικής εκτίμησης (Sekeris et al., 2019). Καθώς, όμως, η εννοιολογική γνώση αναπτύσσεται βαθμιαία (Siegler & Booth, 2005), τα παιδιά προβαίνουν στη χρήση πιο σύνθετων στρατηγικών, σε ευστοχότερες επιλογές αυτών και ορθότερη εφαρμογή τους (Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Sekeris et al., 2019).

Παρόλο που η προσοχή των ερευνητών έχει στραφεί στη μελέτη της υπολογιστικής εκτίμησης, η έρευνα σχετικά με τις ικανότητες των παιδιών στην εκτίμηση υπολογισμών με ρητούς αριθμούς και κυρίως με ποσοστά είναι ιδιαίτερα περιορισμένη. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά και τον ρόλο του πλαισίου σε αυτές. Η επίτευξή του θα πραγματοποιηθεί μέσω της εξέτασης των παρακάτω ερευνητικών ερωτημάτων:

1. Ποιες είναι οι ικανότητες των παιδιών της Στ΄ τάξης Δημοτικού και της Β΄ Γυμνασίου στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά;

Με βάση τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών που τονίζουν τις αδυναμίες των παιδιών στους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς (Aytekin & Toluk Uçar, 2014· Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Bana & Dolma, 2004· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Liu & Neber, 2012· Tsao & Pan, 2011), αναμένεται ότι οι μαθητές θα παρουσιάσουν μέτρια ή χαμηλή ικανότητα πραγματοποίησης υπολογιστικών εκτιμήσεων.

2. Ποιες είναι οι διαφορές στις επιδόσεις και τις στρατηγικές των παιδιών ως προς την τάξη φοίτησής τους με ποσοστά;

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των ατόμων βελτιώνονται με την πάροδο της ηλικίας (Desli & Lioliou, 2020· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Sekeris et al., 2020· Sekeris et al., 2019· Siegler & Booth, 2005· Χαλεπάκη, 2016), οπότε οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου προβλέπεται ότι θα επιδείξουν καλύτερες επιδόσεις και πιο σύνθετες στρατηγικές συγκριτικά με τους μαθητές της Στ’ τάξης Δημοτικού.

3. Το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά επηρεάζει τις επιδόσεις των παιδιών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης;

Παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχουν έρευνες σχετικά με το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ποσοστά, αναμένεται ότι οι μικροί αριθμοί θα ευνοήσουν την επίδοση των μαθητών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης, όπως προκύπτει από τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών που αφορούν σε εκτιμήσεις με ακέραιους αριθμούς (Dowker, 1997· Liu, 2009· Sekeris et al., 2020).

4. Οι επιδόσεις των παιδιών επηρεάζονται από την ύπαρξη πλαισίου για τα προβλήματα;

Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα των ερευνών για τον ρόλο του πλαισίου είναι αντιφατικά, το συγκεκριμένο ερώτημα είναι διερευνητικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Το παρόν κεφάλαιο απαρτίζεται από τρεις ενότητες και αποσκοπεί στην παρουσίαση δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών για τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των μαθητών σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης. Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα γίνεται λόγος για τον ορισμό, τα είδη και τη χρησιμότητα των εκτιμήσεων. Έπειτα, στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται οι διάφοροι ορισμοί της υπολογιστικής εκτίμησης, η σχέση αυτής με τους νοερούς υπολογισμούς αλλά και την αίσθηση του αριθμού, καθώς και η θέση των κατ' εκτίμηση υπολογισμών στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Τέλος, η τρίτη ενότητα αναφέρεται αφενός στις επιδόσεις και στις στρατηγικές των μαθητών σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης με ρητούς και ακέραιους αριθμούς και αφετέρου στους παράγοντες που επιδρούν στην ικανότητα των μαθητών για υπολογιστικές εκτιμήσεις και στην επιλογή των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

1.1. Εκτίμηση

1.1.1. Ορισμός

Η έννοια της εκτίμησης έχει δεχθεί πλήθος ερμηνειών διαχρονικά από διάφορους ερευνητές, κυρίως λόγω της πολυδιάστατης φύση της. Σύμφωνα με την Thompson (1979), ως εκτίμηση περιγράφεται μια βάσιμη υπόθεση για τον προσδιορισμό μιας ποσότητας, η τιμή της οποίας είναι άγνωστη. Πρόκειται για μια νοερή διαδικασία, η οποία συντελείται χωρίς τη χρήση εργαλείων (Bright, 1976, στο Λεμονίδης, 2020) και παρέχει μια άτυπη λύση σε ένα πρόβλημα μέτρησης ή καταμέτρησης (Siegel, Goldsmith & Madson, 1982). Προϋποθέτει την απλοποίηση του προβλήματος ώστε να δοθεί μια προσεγγιστική, αλλά όσο το δυνατόν πιο κοντά στην ακριβή, απάντηση (LeFevre, Greenham & Waheed, 1993). Μέσω αυτής κρίνεται το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης ή της μέτρησης μιας ποσότητας (Segovia, Castro, Rico & Castro, 1989, στο Segovia & Castro, 2009). Οι Siegler και Booth (2005) ορίζουν την εκτίμηση ως «μια διαδικασία μετάφρασης μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων η μία τουλάχιστον είναι ανακριβής» (σ.198). Οι ίδιοι διακρίνουν δύο κύριες κατηγορίες εκτίμησης: την αριθμητική, όταν οι αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν αριθμούς (π.χ., το 75x29 ισούται περίπου με 2.200), και τη μη-αριθμητική, όταν καμία αναπαράσταση δεν είναι αριθμητική (π.χ. η φωτεινότητα μιας λάμπας αναπαρίσταται οπτικο-χωρικά σε μια κλίμακα διαβάθμισης).

Η αδυναμία απόδοσης ενός αυστηρού ορισμού της εκτίμησης έχει ως αποτέλεσμα να συγχέεται συχνά με την έννοια της προσέγγισης. Ωστόσο, οι δύο όροι δεν ταυτίζονται, καθώς διαθέτουν διαφορετικά χαρακτηριστικά. Πιο συγκεκριμένα, η εκτίμηση οδηγεί σε μια μη ακριβή λύση ενός πραγματικού προβλήματος μέσω νοερών διεργασιών, ενώ η προσέγγιση επιχειρεί να πλησιάσει όσο το δυνατόν ακριβέστερα την τιμή ενός αριθμητικού προβλήματος με τη χρήση κάποιου εργαλείου (Siegel et al., 1982· Thompson, 1979).

Αδιαμφισβήτητα, όμως, η προσέγγιση και η εκτίμηση συνδέονται στενά, με την πρώτη να συνιστά πολλές φορές συστατικό των σύνθετων προβλημάτων εκτίμησης (Siegel et al., 1982). Η σχέση αυτή αντικατοπτρίζεται ευκρινώς στις δραστηριότητες εκτίμησης που λαμβάνουν χώρα στις σχολικές τάξεις, όπου οι μαθητές καλούνται να προβούν, πρωτίστως, σε εκτιμήσεις και, έπειτα, στην εύρεση προσεγγιστικών τιμών (Sowder, 1992). Άλλωστε, ο συνδυασμός της εκτίμησης και της προσέγγισης είναι απαραίτητος για την επίλυση διάφορων καταστάσεων τόσο στο σχολικό όσο και στο εξωσχολικό περιβάλλον.

1.1.2. Είδη εκτίμησης

Η εκτίμηση βρίσκει πρακτική εφαρμογή σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής, οι οποίες απαιτούν διαφορετικά είδη εκτίμησης. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικοί τύποι εκτίμησης, καθένας από τους οποίους προϋποθέτει διαφορετικές γνώσεις και λειτουργίες (Siegler & Booth, 2005· Sowder, 1992). Οι τύποι είναι οι εξής: η υπολογιστική εκτίμηση, η εκτίμηση πλήθους και η εκτίμηση μέτρησης.

Πρώτον, η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation) αφορά τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό του αποτελέσματος ενός αριθμητικού υπολογισμού. Δεύτερον, η εκτίμηση πλήθους ή πληθικότητας (quantity or numerosity estimation) αναφέρεται στον κατά προσέγγιση προσδιορισμό του αριθμού των στοιχείων ενός συνόλου. Τρίτον, η εκτίμηση μέτρησης (measurement estimation) σχετίζεται με τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής μιας μέτρησης χωρίς τη χρήση εργαλείων μέτρησης (van de Walle, 2007). Τέλος, οι Siegler και Booth (2005) προσθέτουν έναν ακόμη τύπο εκτίμησης, την εκτίμηση αριθμογραμμής (number line estimation).Το συγκεκριμένο είδος εκτίμησης συνδέεται με τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της θέσης ενός αριθμού πάνω σε μία αριθμογραμμή ή την εκτίμηση του αριθμού που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σημείο μιας αριθμογραμμής, ενώ θεωρείται από αρκετούς ερευνητές υπότυπος της εκτίμησης πλήθους (Δεσλή, 2021).

1.1.3. Χρησιμότητα εκτίμησης

Η παρουσία των εκτιμήσεων σε ποικίλα πλαίσια αναδεικνύει τη χρησιμότητά τους και, κατ' επέκταση, τη σημασία της συστηματικής διδασκαλίας τους. Αφουγκραζόμενα την ανάγκη αυτή, τα εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως συμπεριέλαβαν την εκτίμηση στους βασικούς μαθησιακούς στόχους των νέων αναλυτικών τους προγραμμάτων.

Η πρακτικότητα των εκτιμήσεων οφείλεται σε τέσσερις κύριους λόγους κατά τους Segovia και Castro (2009). Καταρχάς, δεν είναι πάντοτε εφικτή η γνώση μιας ακριβούς τιμής, όπως, για παράδειγμα, ο αριθμός των αυτοκινήτων που ταξίδεψαν σε μία μέρα. Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η επίλυση ενός προβλήματος δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με ακριβείς υπολογισμούς, καθώς οι εμπλεκόμενοι αριθμοί είναι δύσκολα διαχειρίσιμοι, όπως είναι οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί. Αρκετές, μάλιστα, είναι οι καταστάσεις στις οποίες, δεδομένου ότι δεν απαιτείται μεγάλος βαθμός ακρίβειας, οι προσεγγιστικές απαντήσεις αποδεικνύονται επαρκείς, ενώ, παράλληλα, γίνονται περισσότερο αντιληπτές. Παραδείγματος χάριν, στην καθημερινή ζωή τα άτομα προβαίνουν σε εκτιμήσεις ποσοτήτων (π.χ., χρημάτων, χρόνου) προκειμένου να κατανοήσουν διάφορες καταστάσεις και να πάρουν αποφάσεις.

Πέρα από τα πρακτικά οφέλη της εκτίμησης, αναγνωρίζεται και η εκπαιδευτική της αξία. Η εκτίμηση συνιστά αναπόσπαστο κομμάτι της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 2004· Segovia & Castro, 2009· Sowder, 1992), εφόσον προϋποθέτει την ευέλικτη εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης έναντι των στείρων, μηχανιστικών διαδικασιών (Siegler & Booth, 2005). Άλλωστε, σύμφωνα με τη Sowder (1992), η ευελιξία σκέψης και η χρήση ποικίλων στρατηγικών επίλυσης προβλήματος χαρακτηρίζουν τους καλούς εκτιμητές. Η βασική τους διαφορά με εκείνους που υστερούν στην αίσθηση του αριθμού έγκειται στην ικανότητά τους να κατανοούν τους αριθμούς και τη σχέση τους με τις αριθμητικές πράξεις, να εφαρμόζουν αυτή τη γνώση σε προβληματικές καταστάσεις, να αντιλαμβάνονται το είδος της απάντηση που ζητείται (ακριβής υπολογισμός ή εκτίμηση) και, συνεπώς, να επιλέγουν τις κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης (McIntosh, 2004· Rosenstein et al., 1996).

Από τα παραπάνω διαφαίνεται η συσχέτιση της εκτίμησης με την επίλυση προβλήματος. Η έκθεση των μαθητών σε καταστάσεις εκτιμήσεων βελτιώνει την αποτελεσματικότητά τους στη διαχείριση ανάλογων πρακτικών προβλημάτων ενισχύοντας την κριτική σκέψη και τον λογικό συλλογισμό (Thompson, 1979). Συνεπώς, η εκτίμηση αποτελεί δομικό στοιχείο των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Siegel et al., 1982).

1.2. Υπολογιστική εκτίμηση

1.2.1. Ορισμός

Η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation) φαίνεται να υστερεί σε αυστηρότητα ορισμού συγκριτικά με τα άλλα είδη εκτίμησης. Η Dowker (1992) περιγράφει την υπολογιστική εκτίμηση ως «τη διατύπωση λογικών εικασιών σχετικά με τις προσεγγιστικές απαντήσεις σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς ή πριν από την εκτέλεση ακριβών υπολογισμών» (σ. 45). Από την άλλη πλευρά, οι Lemaire και Lecacheur (2002), απορρίπτοντας το στοιχείο της εικασίας, ορίζουν τον κατ' εκτίμηση υπολογισμό ως τη διαδικασία «εύρεσης μιας προσεγγιστικής απάντησης σε αριθμητικά προβλήματα χωρίς ή πριν από την εκτέλεση ακριβών υπολογισμών» (σ. 282). Με παρόμοια οπτική, οι Siegler και Booth (2005) σημειώνουν ότι η υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται στην «προσέγγιση του ακριβούς μεγέθους και όχι στον υπολογισμό μιας ακριβούς απάντησης» (σ. 199).

Σε μια συγκριτική ανάγνωση των προηγούμενων ορισμών, διαπιστώνεται ότι και οι τρεις επισημαίνουν τη σύνδεση της υπολογιστικής εκτίμησης με την προσέγγιση. Ωστόσο, μόνο ο πρώτος ορισμός περιέχει την έννοια της «εικασίας» υπονοώντας μια τυχαία και όχι μια συστηματική διαδικασία. Με την πάροδο του χρόνου, ο όρος του μαντέματος παραγκωνίστηκε, καθώς φάνηκε ότι η υπολογιστική εκτίμηση προϋποθέτει αρκετούς τύπους εννοιολογικής κατανόησης, αλλά και ένα σύνολο μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων (LeFevre et al., 1993· Hogan & Brezinski, 2003· Sowder, 1992· Sowder & Wheeler, 1989).

Οι LeFevre et al. (1993) υποστήριξαν τη συστηματικότητα της υπολογιστικής εκτίμησης προτείνοντας ένα μοντέλο για την περιγραφή της εκτέλεσης των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Σε αυτό περιλαμβάνονται τρεις κύριες διαδικασίες και επιμέρους βήματα που επαναλαμβάνονται κυκλικά ώσπου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική λύση σε ένα αριθμητικό πρόβλημα (για λεπτομερή περιγραφή του μοντέλου, βλ. Δεσλή, 2021). Για τους ίδιους, η υπολογιστική εκτίμηση αφορά στην «απλοποίηση ενός αριθμητικού προβλήματος με τη χρήση ενός συνόλου κανόνων ή διαδικασιών με σκοπό να παραχθεί μία προσεγγιστική αλλά ικανοποιητική απάντηση μέσω νοερού υπολογισμού» (σ. 95). Εξ ορισμού, λοιπόν, η υπολογιστική εκτίμηση στηρίζεται στην εννοιολογική κατανόηση των αριθμών και των πράξεων (Sowder, 1992).

Η πολυπλοκότητα της υπολογιστικής εκτίμησης έχει επισημανθεί από τις Sowder και Wheeler (1989), οι οποίες πραγματοποίησαν μια ανάλυση των δομικών στοιχείων της. Σύμφωνα με αυτή, τα δομικά στοιχεία διακρίνονται σε τέσσερις διακριτές ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελεί τα εννοιολογικά στοιχεία της υπολογιστικής εκτίμησης. Σε αυτά ανήκουν ο ρόλος των προσεγγιστικών αριθμών, το πλήθος των διαδικασιών και των αποτελεσμάτων που δύνανται να εξαχθούν, καθώς και ο βαθμός καταλληλότητας μιας εκτίμησης, ο οποίος εξαρτάται αφενός από το πλαίσιο πραγματοποίησης και αφετέρου από την επιθυμητή ακρίβεια της απάντησης. Οι απαιτούμενες δεξιότητες συνιστούν το δεύτερο στοιχείο, ενώ οι συναφείς έννοιες και δεξιότητες το τρίτο. Η τέταρτη ομάδα αφορά στις συναισθηματικές συνιστώσες των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών, όπως είναι η εμπιστοσύνη στις εκτιμήσεις και στη χρησιμότητά τους αλλά και η ανεκτικότητα του λάθους.

Παρομοίως, οι Siegler και Booth (2005) τονίζουν ότι η επιτυχία μιας υπολογιστικής εκτίμησης εξαρτάται από τέσσερις τύπους εννοιολογικής κατανόησης. Αρχικά, η εκτίμηση στοχεύει στην εύρεση μιας απάντησης σχετικά κοντά στην ακριβή. Δεύτερον, η χρήση των προσεγγιστικών αριθμών είναι απαραίτητη για την επίτευξη του παραπάνω στόχου. Τρίτον, η εκτίμηση περιλαμβάνει την εφαρμογή διαφορετικών προσεγγίσεων και την εύρεση πολλών λογικών απαντήσεων. Τέλος, το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις καθορίζει την επάρκειά τους.

Η προαναφερθείσα σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με συγκεκριμένους τύπους εννοιολογικής κατανόησης αποτυπώνεται, επίσης, στον ορισμό του Neill (2005). Με στόχο να διατυπώσει έναν σαφή και ολοκληρωμένο ορισμό, ο Neill διευκρίνισε τι είναι και τι δεν είναι η υπολογιστική εκτίμηση. Σύμφωνα με τον ίδιο, η υπολογιστική εκτίμηση αποσκοπεί στον προσδιορισμό μιας απάντησης αρκετά κοντά στη σωστή με την υιοθέτηση ποικίλων στρατηγικών και την εκτέλεση απλουστευμένων, νοερών υπολογισμών αξιοποιώντας την αίσθηση του αριθμού. Αντιθέτως, δεν εμπεριέχει εικασίες και δεν στοχεύει σε ακριβείς λύσεις, ενώ αποκλείεται η χρήση εξωτερικών μέσων, όπως το χαρτί και το μολύβι ή οι αριθμομηχανές. Παρόλο, όμως, που η υπολογιστική εκτίμηση επιτρέπει μια ευελιξία κινήσεων, οι μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα του Neill (2005) εμφάνισαν αρνητική στάση απέναντί της, ενώ παρουσίασαν ιδιαίτερη προσκόλληση στους γραπτούς υπολογισμούς. Βάσει αυτών των αποτελεσμάτων, ο Neill (2005) υπογράμμισε τον ρόλο της υπολογιστικής εκτίμησης ως μέσο ελέγχου του ακριβούς αποτελέσματος ενός προβλήματος.

Αξίζει να αναφερθεί, βέβαια, ότι το στοιχείο της λογικότητας είχε αναφερθεί πρωτύτερα και από άλλους ερευνητές (Dowker, 1992· LeFevre et al., 1993· McIntosh, 2004· Siegler & Booth, 2005· Thompson, 1979· van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Η υπολογιστική εκτίμηση μπορεί να αξιοποιηθεί ως μέσο ελέγχου είτε κατά τη διάρκεια είτε έπειτα από την επίλυση ενός αριθμητικού προβλήματος. Ειδικότερα, κατά την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης ο λύτης είναι σε θέση να ελέγξει την ορθότητα του υπολογισμού του για να διαπιστώσει αν ακολουθεί τη σωστή κατεύθυνση (LeFevre et al., 1993). Αν η υπολογιστική εκτίμηση ολοκληρωθεί, ο λύτης μπορεί να εξακριβώσει τη λογικότητα του αποτελέσματός του συγκρίνοντάς το με μία προσεγγιστική απάντηση (McIntosh, 2004· Siegler & Booth, 2005· van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Οι Reys et al. (2017) θεωρούν τη συμβολή της υπολογιστικής εκτίμησης καίρια σε οποιαδήποτε φάση της επίλυσης προβλήματος.

Ο διαγνωστικός ρόλος ενός κατ’ εκτίμηση υπολογισμού ερείδεται στην αλληλοσυσχέτιση της υπολογιστικής εκτίμησης και ενός ακριβούς υπολογισμού (Lübke, 2015· van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Για την Lübke (2015) η εκτίμηση αποτελεί ένα μοντέλο ακριβών υπολογισμών, όπου οι λύτες καλούνται να ερμηνεύσουν μία εκτίμηση για να οδηγηθούν στη σωστή απάντηση ενός προβλήματος. Συγχρόνως, απαραίτητη προϋπόθεση για έναν κατ’ εκτίμηση υπολογισμό συνιστούν οι επαρκείς αριθμητικές ικανότητες, διότι η πορεία ανάπτυξης της υπολογιστικής εκτίμησης είναι συνυφασμένη με την πορεία εξέλιξης των ακριβών υπολογισμών (van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Σε περιπτώσεις, όπου οι μαθητές αδυνατούν να εκτελέσουν υπολογισμούς με ακρίβεια, δε δύνανται να πραγματοποιήσουν ούτε εκτιμήσεις. Άλλωστε, η εκτίμηση συνιστά ένδειξη ανώτερης αριθμητικής ικανότητας. Δικαιολογημένα, επομένως, η κατανόηση της σχέσης των κατ’ εκτίμηση και των ακριβών υπολογισμών συγκαταλέγεται στις εννοιολογικές συνιστώσες της υπολογιστικής εκτίμησης (Lübke, 2015· van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

1.2.2. Υπολογιστική εκτίμηση και νοεροί υπολογισμοί

Νοερός χαρακτηρίζεται ο υπολογισμός που συντελείται με τον νου, χωρίς να χρησιμοποιούνται εξωτερικά εργαλεία (McIntosh, Reys & Reys, 1997), και αποσκοπεί στην ακριβή απάντηση ενός αριθμητικού προβλήματος (Sowder, 1988). Από τον παραπάνω ορισμό απορρέουν δύο διακριτά χαρακτηριστικά των νοερών υπολογισμών (Reys, 1984). Πρώτον, καταλήγουν σε μια ακριβή απάντηση και, δεύτερον, εκτελούνται νοερά. Επιπλέον, περιλαμβάνουν τη χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών, οι οποίες είτε επινοούνται από τους λύτες είτε προσομοιάζουν σε εκείνες των γραπτών υπολογισμών (McIntosh et al., 1997). Αρκετά συχνά, ωστόσο, η έννοια των νοερών υπολογισμών ταυτίζεται με την έννοια των κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Λεμονίδης, 2020), πιθανώς επειδή και οι δύο πραγματοποιούνται νοερά (Δεσλή, 2021).

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρόπος επίλυσης ενός αριθμητικού προβλήματος εξαρτάται από τη φύση του και από το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών (Reys, 1984· Sowder, 1988). Όταν το ζητούμενο είναι μία ακριβής απάντηση ή οι αριθμοί είναι μικροί, τότε συστήνεται ο νοερός υπολογισμός. Αντιθέτως, στην περίπτωση που η επιθυμητή απάντηση είναι προσεγγιστική ή το μέγεθος των αριθμών είναι μεγάλο, τότε απαιτείται η εκτίμηση. Ωστόσο, η εκτίμηση περιλαμβάνει τον νοερό υπολογισμό όπως υποστηρίζουν οι ορισμοί της Sowder (1988) και των LeFevre et al. (1993) για την υπολογιστική εκτίμηση. Σύμφωνα με τους ίδιους, η υπολογιστική εκτίμηση αποτελείται από δύο συγκεκριμένες εργασίες: αρχικά, τη μετατροπή των αριθμών σε προσεγγιστικούς και, έπειτα, την πραγματοποίηση νοερών υπολογισμών με αυτούς.

Ο Reys (1984) επιβεβαιώνει τη σχέση των παραπάνω εννοιών αναφέροντας ότι οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν «τον ακρογωνιαίο λίθο για τις διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες που απαιτούνται στην υπολογιστική εκτίμηση» (σ. 548). Με άλλα λόγια, σε καταστάσεις εκτίμησης οι λύτες ενδέχεται να προβούν σε υπολογισμούς με το μυαλό σαν ένα πρώτο βήμα για την ολοκλήρωσή της (McIntosh et al., 1997). Άλλωστε, η ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς συμβάλλει στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων (Reys et al., 2017· van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010).

1.2.3. Υπολογιστική εκτίμηση και αίσθηση αριθμού

Ως αίσθηση του αριθμού ορίζεται η «γενική κατανόηση των αριθμών και των πράξεων μαζί με την ικανότητα και την τάση για ευέλικτη χρήση αυτής της κατανόησης ώστε κανείς να διατυπώσει μαθηματικούς ισχυρισμούς και να αναπτύξει αποδοτικές στρατηγικές για τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων» (McIntosh et al., 1997, σ. 322). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές με καλή αίσθηση του αριθμού μπορούν να αντιληφθούν αφενός τις πολλαπλές ερμηνείες και αναπαραστάσεις των αριθμών και των πράξεων και αφετέρου τις σχέσεις μεταξύ τους, να αναγνωρίσουν το σχετικό μέγεθος των αριθμών, να προβούν σε συγκρίσεις αυτών, καθώς και να εκτελέσουν νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις (Gersten & Chard, 1999· National Mathematics Advisory Panel, 2008· Rosenstein et al., 1996). Με μια ευρύτερη έννοια, πρόκειται για μια στέρεη γνωστική βάση που επιτρέπει στο άτομο να αναγνωρίζει τη σύνδεση των αριθμών και των ιδιοτήτων των πράξεων με σκοπό την επίλυση ενός αριθμητικού προβλήματος με δημιουργικό και ευέλικτο τρόπο (Sowder, 1988).

Η αίσθηση του αριθμού, συνεπώς, συνιστά μια πολυδιάστατη και σημαντική έννοια, η οποία ξεκινάει να αναπτύσσεται βαθμιαία πριν από τη φοίτηση του παιδιού στο σχολείο (McIntosh, Reys & Reys, 1992), μέσω της καθημερινής εμπλοκής του σε αριθμητικές καταστάσεις (Rosenstein et al., 1996· Treffers, 2001). Ωστόσο, η πρόωρη εμφάνισή της δεν εγγυάται απαραίτητα τη μετέπειτα επαρκή ανάπτυξή της, με αποτέλεσμα αρκετά παιδιά να παρουσιάζουν δυσκολίες στην αίσθηση του αριθμού (McIntosh et al., 1992· Rosenstein et al., 1996). Μια εξήγηση της ελλιπούς αίσθησης αριθμού είναι η έμφαση της τυπικής εκπαίδευσης στη διαδικαστική γνώση. Η προσκόλληση, δηλαδή, των μαθητών σε τυποποιημένους αλγόριθμους αποτρέπει τη χρήση ευέλικτων, μη τυπικών στρατηγικών επίλυσης ενός προβλήματος, οι οποίες αποτελούν, άλλωστε, και την πεμπτουσία της αίσθησης του αριθμού.

Η σημασία μιας καλής αίσθησης του αριθμού έγκειται στο ρόλο της ως δείκτης πρόβλεψης της μαθηματικής επιτυχίας (McIntosh, 2004· National Mathematics Advisory Panel, 2008). Επομένως, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη διδασκαλία των στοιχείων που την απαρτίζουν. Τόσο οι νοεροί όσο και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί συνιστούν καίριες πτυχές της αίσθησης του αριθμού και συνεπικουρούν στην ανάπτυξή της (McIntosh, 2004· McIntosh et al., 1992, 1997· National Research Council, 2001· Reys, 1984· Sowder, 1988, 1992).

Εκτός των ορισμών της αίσθησης του αριθμού, η σχέση της με την υπολογιστική εκτίμηση και τους νοερούς υπολογισμούς μπορεί να αναζητηθεί στο είδος της γνώσης που προσφέρει η μαθηματική εκπαίδευση (Δεσλή, 2021). Μέχρι πρόσφατα, η τυπική εκπαίδευση επικεντρωνόταν στη διαδικαστική γνώση των μαθηματικών, δηλαδή στη γνώση των διαδικασιών και των κανόνων που απαιτούνται για την εκτέλεση μιας άσκησης (van de Walle, 2007), σε βάρος της εννοιολογικής κατανόησης που αφορά στη σύλληψη εννοιών, διαδικασιών και σχέσεων (National Research Council, 2001). Η εννοιολογική κατανόηση επιτρέπει στο άτομο να αντιληφθεί ποια μαθηματική ιδέα και τεχνική είναι χρήσιμη κάθε φορά και, ως εκ τούτου, του δίνει τη δυνατότητα να προσαρμοστεί στην εκάστοτε κατάσταση. Έτσι, το άτομο μπορεί να συσχετίσει τα μαθηματικά του σχολείου με εκείνα της καθημερινής ζωής, δεξιότητα που διαθέτουν όσοι έχουν άνεση στη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων (Case, 1998 στο Gersten & Chard, 1999).

Η αίσθηση του αριθμού, συνεπώς, αντανακλά την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον McIntosh (2004), οι μαθητές με ανεπτυγμένη αίσθηση αριθμού «κατανοούν το ζητούμενο ενός προβλήματος, επιλέγουν τον κατάλληλο τρόπο επίλυσής του χάρη στο πλήθος των στρατηγικών που γνωρίζουν και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους με εκτίμηση» (σ. 11). Η ευέλικτη σκέψη, το ρεπερτόριο στρατηγικών και ο έλεγχος της λογικότητας αποτελούν κοινά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού και της υπολογιστικής εκτίμησης. Οι δύο έννοιες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, καθώς η υπολογιστική εκτίμηση ενισχύει την επίγνωση και την ευρηματικότητα με τους αριθμούς και τις πράξεις (Dowker, 2003), ενώ, παράλληλα, στηρίζεται στην εις βάθος κατανόηση αυτών (Andrews, Sunde et al., 2021· Sowder, 1992).

Η ανάλυση των Sowder και Wheeler (1989) επισημαίνει, επιπλέον της αίσθησης του αριθμού, και τους νοερούς υπολογισμούς ως συστατικό των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Με τη σειρά τους, οι υπολογισμοί με τον νου προωθούν την ανάπτυξη ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης και την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού ενδυναμώνοντας τον δημιουργικό τρόπο διαχείρισης των αριθμών (Reys, 1984). Αβίαστα, λοιπόν, συνάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια στενή σχέση ανάμεσα στην αίσθηση του αριθμού, στην υπολογιστική εκτίμηση και στους νοερούς υπολογισμούς, όπου καθένα συμπληρώνει το άλλο.

1.2.4. Η υπολογιστική εκτίμηση στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών

Για πολλά χρόνια τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά επικεντρώνονταν στη διδασκαλία των γραπτών υπολογισμών και, συγκεκριμένα, στην ανάπτυξη της ταχύτητας και της ακρίβειας αυτών. Τα οφέλη, όμως, των νοερών υπολογισμών γέννησαν το δίλημμα για το είδος των υπολογισμών το οποίο έχρηζε μεγαλύτερης βαρύτητας. Πλέον το ερώτημα αυτό δεν υφίσταται, εφόσον πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι η απόκτηση της αίσθησης του αριθμού (Mclntosh, 2004). Η συμβολή των κατ' εκτίμηση υπολογισμών στην ανάπτυξη καλής αίσθησης του αριθμού (National Research Council, 2001), η θετική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας για εκτιμήσεις και των επιδόσεων στα μαθηματικά (Desli & Lioliou, 2020· Dowker, 2003· Rosenstein et al., 1996· Siegler & Booth, 2005) και η χρησιμότητα των εκτιμήσεων σε ποικίλα πλαίσια της καθημερινής ζωής (LeFevre et al., 1993· Sekeris et al., 2019· Siegler & Booth, 2005· Sowder, 1992) είχαν ως αποτέλεσμα να ενσωματωθεί, έστω και διστακτικά, στα αναλυτικά προγράμματα διεθνώς.

Στο αγγλικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Department for Education, 2013), ενώ οι εκτιμήσεις μετρήσεων εισάγονται ήδη από τη δευτέρα τάξη (ηλικία 6-7), η ικανότητα για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς συγκαταλέγεται στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα λίγο αργότερα. Πιο συγκεκριμένα, στην τρίτη και την τετάρτη τάξη (ηλικία 7-9) τα παιδιά θα πρέπει να είναι ικανά να εκτιμούν το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού, ενώ μέχρι το τέλος του Δημοτικού (ηλικία 10-11) αναμένεται τα παιδιά να μπορούν να αξιοποιούν τις εκτιμήσεις για τον έλεγχο των απαντήσεών τους και για τον προσδιορισμό του κατάλληλου βαθμού ακρίβειας με βάση το πλαίσιο του προβλήματος. Παράλληλα, αν και στις τρεις τελευταίες τάξεις δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διαδικασία της στρογγυλοποίησης φυσικών και δεκαδικών αριθμών, η σύνδεσή της με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς είναι σχεδόν ανύπαρκτη (Sayers, Petersson, Rosenqvist & Andrews, 2020).

Ο ρόλος της στρογγυλοποίησης στην πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων περιγράφεται διαφορετικά από τα εκάστοτε αναλυτικά προγράμματα όπως φαίνεται και από την ανάλυση των Andrews, Xenofontos και Sayers (2021), οι οποίοι εξέτασαν τα προγράμματα της Αγγλίας, της Βόρειας Ιρλανδίας, της Σκωτίας και της Ουαλίας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι, παρόλο που η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνεται και στα τέσσερα, κυρίως ως μέσο ελέγχου των υπολογισμών, η σχέση της με τη στρογγυλοποίηση διαφέρει σε καθένα από αυτά. Ειδικότερα, ενώ η στρογγυλοποίηση απουσιάζει από το αναλυτικό πρόγραμμα της Βόρειας Ιρλανδίας, στα προγράμματα της Αγγλίας και της Ουαλίας παρουσιάζεται ανεξάρτητα από την υπολογιστική εκτίμηση. Μόνο το πρόγραμμα σπουδών της Σκωτίας αντιλαμβάνεται τη στρογγυλοποίηση ως κομμάτι των κατ' εκτίμηση υπολογισμών.

Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά (ΔΕΠΠΣ, 2003) οι υπολογιστικές εκτιμήσεις περιλαμβάνονται αποκλειστικά στους διδακτικούς στόχους των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού. Αναλυτικότερα, στην πέμπτη τάξη οι μαθητές επιδιώκεται να «ελέγχουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μίας πράξης» και «να στρογγυλοποιούν φυσικούς αριθμούς, όπου είναι δυνατόν» (σ. 269). Η πρακτική της επαλήθευσης ενός αποτελέσματος αναφέρεται επίσης στην έκτη τάξη, όπου η στρογγυλοποίηση αποτελεί διδακτικό στόχο τόσο για τους φυσικούς όσο και για τους δεκαδικούς αριθμούς. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αφενός οι εκτιμήσεις λειτουργούν ως μέσο ελέγχου της ορθότητας ενός υπολογισμού και αφετέρου η στρογγυλοποίηση συστήνεται ως μοναδική στρατηγική των υπολογιστικών εκτιμήσεων. Τέλος, όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021), η σύνδεση της υπολογιστικής εκτίμησης και της επίλυσης προβλήματος γίνεται αντιληπτή στην τρίτη και την έκτη τάξη, όπου οι μαθητές επιδιώκεται «να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος» (ΔΕΠΠΣ, 2003, σ.260 και σ.272, αντίστοιχα).

1.3. Επιδόσεις και στρατηγικές σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης

1.3.1. Επιδόσεις παιδιών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης

Αρκετές μελέτες δείχνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Bana & Dolma, 2004· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Liu & Neber, 2012· Tsao & Pan, 2011). Οι αδυναμίες τους ενδεχομένως να οφείλονται στην ελλιπή εννοιολογική κατανόηση της εκτίμησης (Lübke, 2015· Siegler & Booth, 2005) ή στην περιορισμένη εμπειρία τους με αντίστοιχα προβλήματα (Bana & Dolma, 2004· Tsao & Pan, 2011).

Μία από τις ερευνήτριες που δραστηριοποιήθηκε έντονα στο πεδίο των υπολογιστικών εκτιμήσεων υπήρξε η Dowker (1997), η οποία μελέτησε τις αναπτυξιακές αλλαγές στην ικανότητα των παιδιών για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς σε προβλήματα πρόσθεσης με κριτήρια το επίπεδο των αριθμητικών τους δεξιοτήτων και τον βαθμό δυσκολίας των προβλημάτων. Στην έρευνά της συμμετείχαν παιδιά ηλικίας 5 έως 9 ετών από τέσσερα σχολεία της Οξφόρδης, τα οποία κλήθηκαν να απαντήσουν σε τρία διαφορετικά είδη έργων. Αρχικά, αφού έλυσαν προσθετικά προβλήματα που απαιτούσαν νοερούς υπολογισμούς, βαθμολογήθηκαν και κατατάχθηκαν σε πέντε επίπεδα αύξουσας υπολογιστικής ικανότητας. Στη συνέχεια, πρώτα αξιολόγησαν τις εκτιμήσεις ορισμένων αθροισμάτων και έπειτα παρήγαγαν τις δικές τους εκτιμήσεις σε προσθετικά έργα κατ' εκτίμηση υπολογισμών ανώτερου επιπέδου από εκείνο των υπολογιστικών τους δεξιοτήτων.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα των παιδιών για υπολογιστικές εκτιμήσεις εξαρτάται εξίσου από το επίπεδο των αριθμητικών τους δεξιοτήτων και από τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, ενώ η επίδοση των παιδιών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς αυξανόταν όσο αυξανόταν το επίπεδο των υπολογιστικών τους δεξιοτήτων, η ακρίβεια και η λογικότητα των εκτιμήσεών τους μειώνονταν όσο μεγάλωνε το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στην πρόσθεση. Τα ευρήματα αυτά ερμηνεύτηκαν από την ερευνήτρια με βάση τη ζώνη μερικής γνώσης και κατανόησης στο πλαίσιο της οποίας τα παιδιά μπορούν να πραγματοποιούν επιτυχείς εκτιμήσεις σε έργα των οποίων το επίπεδο δυσκολίας βρίσκεται ακριβώς πάνω από το επίπεδο της υπολογιστική τους ικανότητα.

Η Δεσλή (2011), επεκτείνοντας το έργο της Dowker (1997), εξέτασε τον τρόπο με τον οποίο παιδιά νηπιαγωγείου διαχειρίζονται καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης. Στους μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα μοιράστηκαν προσθετικά προβλήματα κατ' εκτίμηση υπολογισμών βασισμένα στο εργαλείο της Dowker (1997) και προσαρμοσμένα στην ηλικία των συμμετεχόντων. Έτσι, τα παιδιά κλήθηκαν, στην αρχή, να κρίνουν αν η εκτίμηση ενός αθροίσματος μικρότερου του 10 ήταν καλή ή κακή χρησιμοποιώντας μια κλίμακα στην οποία απεικονιζόταν ένα πρόσωπο σε πέντε διαβαθμίσεις. Έπειτα, τους ζητήθηκε να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε προσθέσεις με δύο αριθμούς των οποίων τα αθροίσματα δεν ξεπερνούσαν το 15.

Βρέθηκε ότι οι μαθητές έκριναν καλύτερα τις εκτιμήσεις των αθροισμάτων που βρίσκονταν πολύ κοντά στην ακριβή απάντηση (π.χ., 4+1=6) ή πολύ πιο πάνω από αυτή (π.χ., 4+2=10) συγκριτικά με εκείνες που βρίσκονταν πολύ πιο κάτω από την ακριβή απάντηση (π.χ., 4+4=5). Ωστόσο, τα αποτελέσματα των παιδιών ήταν ακόμη καλύτερα όταν έπρεπε να προβούν σε δικές τους εκτιμήσεις. Όπως εξηγεί η ερευνήτρια, η διαφορά αυτή οφείλεται ενδεχομένως στο γεγονός ότι στη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές ερμηνεύουν καλύτερα την εκάστοτε κατάσταση και προβαίνουν σε λογικότερους συλλογισμούς.

Με σκοπό να διερευνήσουν τις αναπτυξιακές αλλαγές στην ικανότητα των παιδιών για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς κατά τη μετάβασή τους από την προσχολική στη σχολική εκπαίδευση, οι Sekeris et al. (2020) διεξήγαγαν μια διαχρονική μελέτη με μαθητές όταν φοιτούσαν στο νηπιαγωγείο και στην πρώτη τάξη του δημοτικού. Βασισμένοι στη θεωρία της ζώνης μερικής γνώσης και κατανόησης της Dowker (1997), μοίρασαν στους μαθητές προσθετικά προβλήματα, πρώτα, ακριβών υπολογισμών για τη διαπίστωση του επιπέδου της αριθμητικής τους ικανότητας και, έπειτα, κατ' εκτίμηση υπολογισμών πάνω από το εύρος των υπολογιστικών τους δεξιοτήτων. Η μετάβαση από το νηπιαγωγείο στο δημοτικό ενίσχυσε τη χρήση υπολογισμών με ακρίβεια, ωστόσο η πλειοψηφία των μαθητών παρήγαγε εκτιμήσεις όταν η προσεγγιστική απάντηση ήταν το ζητούμενο. Επιπλέον, η ακρίβεια των εκτιμήσεων αυξήθηκε με την πάροδο της ηλικίας, αλλά περιορίστηκε εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους των εμπλεκόμενων αριθμών. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι τα παιδιά πολύ μικρών ηλικιών έχουν τη δυνατότητα για επιτυχείς κατ' εκτίμηση υπολογισμούς πριν από την έναρξη της τυπικής μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως φάνηκε και από τις έρευνες των Dowker (1997) και Δεσλή (2011). Η διαπίστωση αυτή αντιτίθεται στα ευρήματα άλλων ερευνών που επισημαίνουν ότι η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης εμφανίζεται σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας (Siegler & Booth, 2005· Sowder & Wheeler, 1989).

Όσον αφορά μαθητές μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού, οι Tsao και Pan (2011) θέλησαν να ερευνήσουν το επίπεδο της ικανότητας και τη στάση απέναντι στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ταϊβάν. Το δείγμα τους απαρτιζόταν από μαθητές ηλικίας 10-11 ετών, οι οποίοι δοκιμάστηκαν σε προβλήματα τεσσάρων πράξεων με ακέραιους και ρητούς αριθμούς, δηλαδή δεκαδικούς και κλάσματα. Η συνολική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν μέτρια με τις περισσότερες σωστές απαντήσεις να εντοπίζονται στα έργα με ακέραιους αριθμούς και τις λιγότερες σωστές στα έργα που περιλάμβαναν κλάσματα. Τα αποτελέσματα δεν προκαλούν ιδιαίτερη έκπληξη δεδομένου ότι το μεγαλύτερο μέρος του διδακτικού περιεχομένου αφορά τους ακέραιους αριθμούς και, ως εκ τούτου, οι μαθητές έχουν περιορισμένη εμπειρία με τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Η αδυναμία τους να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και των πράξεων, που συνιστά ένδειξη μειωμένης αίσθησης του αριθμού, οδήγησε στη χρήση τυποποιημένου αλγόριθμου και στην εύρεση μιας ακριβούς απάντηση στις διαιρέσεις έναντι της εκτίμησης. Παρά τις δυσκολίες τους, η στάση τους απέναντι στην υπολογιστική εκτίμηση ήταν θετική.

Σε παρόμοια ευρήματα κατέληξαν οι Liu και Neber (2012) στη μελέτη τους με Κινέζους και Πολωνούς μαθητές της τελευταίας τάξης του δημοτικού (ηλικία 11-12). Οι επιδόσεις τους σε προσθετικά και πολλαπλασιαστικά έργα με κλάσματα ήταν κακή, παρόλο που θεωρούσαν την εκτίμηση χρήσιμη για τα μαθηματικά. Η μειωμένη ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών μπορεί πιθανώς να αποδοθεί στην έλλειψη αντίστοιχων δραστηριοτήτων από τα προγράμματα σπουδών της Κίνας και της Πολωνίας. Ωστόσο, μεταξύ των δύο χωρών, οι Κινέζοι μαθητές παρουσίασαν καλύτερη κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης και, συνεπώς, σημείωσαν υψηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τους Πολωνούς συνομήλικούς τους.

Στην Ελλάδα οι Lemonidis, Nolka και Nikolantonakis (2014) εξέτασαν την ικανότητα των μαθητών της πέμπτης και της έκτης τάξης σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Τα παιδιά, τα οποία συμμετείχαν εθελοντικά σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό με έργα κατ' εκτίμηση υπολογισμών που περιλάμβαναν φυσικούς και ρητούς αριθμούς, σημείωσαν αξιοσημείωτα χαμηλή επίδοση. Παρεμφερές ήταν το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της έκτης τάξης, που πήραν μέρος στην έρευνα των Γκάτζιου και Μισαηλίδου (2019), σε δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, μεικτούς και δεκαδικούς αριθμούς. Η επίδοση τους καθορίστηκε σημαντικά από το είδος των πράξεων και το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών. Οι μαθητές, δηλαδή, τα πήγαν καλύτερα σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης όπως και σε έργα με μικρούς αριθμούς.

Θέλοντας να διερευνήσουν τη σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης και της επίλυσης προβλήματος, οι Desli και Lioliou (2020) πραγματοποιήσαν έρευνα με μαθητές της τελευταίας τάξης του δημοτικού και ενήλικες, οι οποίοι εκτίμησαν τα αποτελέσματα σε προβλήματα τεσσάρων πράξεων με ρητούς και φυσικούς αριθμούς. Τα ευρήματα επιβεβαίωσαν τη θετική συσχέτιση των κατ' εκτίμηση υπολογισμών και της επίλυσης προβλήματος για κάθε ηλικιακή ομάδα, εφόσον οι συμμετέχοντες που παρήγαγαν επιτυχείς εκτιμήσεις είχαν την τάση να επιλύουν σωστά τα προβλήματα, παρόλο που οι ενήλικες επέδειξαν υψηλότερη ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης.

Αποθαρρυντικά φαίνονται και τα δεδομένα για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην έρευνά τους οι Aytekin και Toluk Uçar (2014) μελέτησαν την ικανότητα μαθητών ηλικίας 11 έως 14 ετών για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με κλάσματα και τους παράγοντες που σχετίζονται με αυτή. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι 1 στους 3 μαθητές αδυνατούσε να πραγματοποιήσει επιτυχείς εκτιμήσεις, ενώ η ηλικία διαφοροποίησε τις επιδόσεις τους, με τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων να σημειώνουν υψηλότερα ποσοστά επιτυχημένων εκτιμήσεων. Σύμφωνα με τους ερευνητές, η χαμηλή επίδοση των παιδιών οφείλεται στην έμφαση που δίνεται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων, η οποία δυσχεραίνει την κατανόηση και την ευέλικτη διαχείρισή τους από τα παιδιά.

Η παραπάνω θέση υιοθετείται επίσης από τις Bana και Dolma (2004) στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, τα οποία έδειξαν ότι οι μαθητές ηλικίας 12-13 χρονών είναι ικανότεροι στο να υπολογίζουν παρά να εκτιμούν, ενδεχομένως λόγω του χρόνου που αφιερώνεται στην εκμάθηση των τυπικών αλγόριθμων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η μειωμένη, όμως, επιτυχία σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς δεν αφορά αποκλειστικά τους μαθητές του γυμνασίου, αλλά φαίνεται ότι χαρακτηρίζει την επίδοση των παιδιών ακόμη και στις τάξεις του λυκείου, όπως προκύπτει από την έρευνα της Χαλεπάκη (2016). Η περιορισμένη ικανότητα, λοιπόν, για υπολογιστικές εκτιμήσεις είναι διακριτή σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης υποδεικνύοντας την ανάγκη αλλαγής στη διδακτική αντιμετώπιση του συγκεκριμένου θέματος.

1.3.2. Παράγοντες που επηρεάζουν τις επιδόσεις σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων

Οι αδυναμίες του μαθητικού πληθυσμού στην πραγματοποίηση κατ' εκτίμηση υπολογισμών προκάλεσαν το ενδιαφέρον των ερευνητών για την αποσαφήνιση των παραγόντων που επηρεάζουν τις επιδόσεις των παιδιών, όπως η ηλικία (Desli & Lioliou, 2020· LeFevre et al., 1993· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Χαλεπάκη, 2016), το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών (Bana & Dolma, 2004· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Tsao & Pan, 2011· Χαλεπάκη, 2016), το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών (Dowker, 1997· Liu, 2009· Sekeris et al., 2020) και το πλαίσιο των προβλημάτων (Liu, 2009· Liu & Neber, 2012· Yang & Li, 2008· Yang & Wu, 2012).

Αναφορικά με την ηλικία, οι LeFevre et al. (1993) μελέτησαν τις αναπτυξιακές αλλαγές στις επιδόσεις και στην εννοιολογική γνώση της υπολογιστικής εκτίμησης σε μαθητές και ενήλικες. Όσον αφορά τους συμμετέχοντες, συνολικά 56 παιδιά της τετάρτης τάξης, της έκτης τάξης και της Β΄ Γυμνασίου, και 20 ενήλικες πήραν μέρος σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα κατ' εκτίμηση υπολογισμών με ακέραιους αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση της ικανότητας και, ιδιαιτέρως, της εννοιολογικής κατανόησης των υπολογιστικών εκτιμήσεων με την πάροδο της ηλικίας. Αναλυτικότερα, τα μεγαλύτερα παιδιά επέδειξαν καλύτερη επίδοση συγκριτικά με τα παιδιά της τετάρτης τάξης, ενώ οι ενήλικες παρείχαν ακριβέστερες εκτιμήσεις σε σχέση με τους μαθητές. Η αυξητική τάση των επιδόσεων συμβαδίζει με την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης της υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς οι ενήλικες φαίνεται να διαθέτουν μια σαφέστερη αντίληψη των αρχών της απλοποίησης και της εγγύτητας που διέπουν την υπολογιστική εκτίμηση σε σύγκριση με τους μαθητές. Οι τελευταίοι, αν και δε θεωρούν ιδιαίτερα σημαντική την εύρεση μιας απάντησης όσο το δυνατόν πιο κοντά στη σωστή, κατανοούν την ανάγκη απλοποίησης ενός αριθμητικού προβλήματος, ήδη από την τετάρτη τάξη.

Με γνώμονα το ερευνητικός της ενδιαφέρον για την επίδραση της ηλικίας στην ανάπτυξη της ικανότητας της υπολογιστικής εκτίμησης, η Χαλεπάκη (2016) πραγματοποίησε μελέτη σε μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς και σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Ειδικότερα, μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης, της Α΄ και της Β΄ Λυκείου αλλά και φοιτητές δοκιμάστηκαν σε έργα κατ' εκτίμηση υπολογισμών με πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ακέραιων και δεκαδικών αριθμών. Η ερευνήτρια παρατήρησε ότι η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν χαμηλή και επηρεάστηκε από την ηλικία. Πιο συγκεκριμένα, αν και δεν υπήρξε διαφοροποίηση στην επίδοση των παιδιών της πέμπτης και της έκτης τάξης, οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου, οι οποίοι τα πήγαν χειρότερα από τα παιδιά της Β΄ Λυκείου, ενώ οι φοιτητές παρήγαγαν τις περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις. Αυτές οι ηλικιακές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων επιβεβαιώνουν την εξελικτική πορεία της ικανότητας των ατόμων να εκτιμούν αριθμητικά αποτελέσματα.

Τα ευρήματα των LeFevre et al. (1993) και της Χαλεπάκη (2016) που παρουσιάστηκαν πρωτύτερα έρχονται σε συμφωνία με εκείνα αντίστοιχων ερευνών σε εθνικό και διεθνές επίπεδο (Desli & Lioliou, 2020· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014). Για παράδειγμα, οι Desli και Lioliou (2020) στην ερευνητική τους εργασία με μαθητές και ενήλικες βρήκαν ότι η ακρίβεια στις εκτιμήσεις αυξάνεται με την ηλικιακή ωρίμανση των ατόμων και, παράλληλα, ενισχύεται η ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων. Εκτός από την ακρίβεια, οι Lemaire και Lecacheur (2011) παρατήρησαν επίσης αύξηση στην ταχύτητα της εκτέλεσης των εκτιμήσεων, καθώς οι μαθητές 12-13 ετών ήταν γρηγορότεροι από εκείνους ηλικίας 10-11, οι οποίοι με τη σειρά τους ήταν ταχύτεροι από τους μαθητές 8-9 ετών. Επιπλέον, μικρή αλλά υπαρκτή διαφορά στην επίδοση συμμετεχόντων διαφορετικής ηλικίας παρατήρησαν οι Lemonidis, Nolka και Nikolantonakis (2014) ανάμεσα σε μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης. Μάλιστα, όταν σύγκριναν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους με τα αντίστοιχα υποψήφιων δασκάλων που εργάστηκαν στα ίδια προβλήματα εκτίμησης (Lemonidis & Kaimakami, 2013), ανακάλυψαν ότι οι ενήλικες σημείωσαν καλύτερη επίδοση.

Ένας δεύτερος παράγοντας που καθορίζει την επιτυχία των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών είναι το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών στα έργα εκτίμησης αποτελέσματος. Στο σύνολό τους οι έρευνες δείχνουν πως οι ρητοί αριθμοί εντείνουν την δυσκολία επίλυσης ενός προβλήματος σε σύγκριση με τους φυσικούς αριθμούς, με τους οποίους τα παιδιά τείνουν να παράγουν επιτυχέστερους προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, η Χαλεπάκη (2016) παρατήρησε ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης επέδειξαν μεγαλύτερη ευχέρεια στην εκτίμηση αποτελεσμάτων σε έργα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με φυσικούς αριθμούς παρά με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα ερευνών που περιλάμβαναν δοκιμασίες τεσσάρων πράξεων με φυσικούς και ρητούς αριθμούς. Οι μαθητές, δηλαδή, δυσκολευτήκαν περισσότερο να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις είτε με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα (Bana & Dolma, 2004· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002· Tsao & Pan, 2011) είτε με ποσοστά και αναλογίες (Dolma, 2002) σε σύγκριση με τους φυσικούς αριθμούς.

Διαφορές, αδιαμφισβήτητα, εντοπίζονται και εντός των ρητών αριθμών αναφορικά με το είδος τους. Η μελέτη της Dolma (2002) σε παιδιά τριών ηλικιακών ομάδων (ηλικίες 10-11, 12-13, 14-15 χρονών) έδειξε ότι οι δεκαδικοί αριθμοί ήταν ευκολότεροι από τα κλάσματα για τους μαθητές κάθε τάξης, εύρημα που ταυτίζεται με τα δεδομένα της έρευνας των Bana και Dolma (2004) σε παιδιά 12 έως 13 ετών αλλά και των Tsao και Pan (2011) σε παιδιά της πέμπτης τάξης. Προς επίρρωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων, οι Yang και Li (2008) στη μελέτη τους με μαθητές της τρίτης τάξης παρατήρησαν ότι αυτοί αδυνατούσαν να διαχειριστούν βασικά στοιχεία της έννοιας των κλασμάτων, όπως οι σχέσεις μέρους-όλου. Συνεπώς, ο λόγος που αρκετοί ερευνητές διέκριναν σοβαρές δυσκολίες στις εκτιμήσεις με κλάσματα μπορεί να αναζητηθεί στην περιορισμένη εννοιολογική γνώση των παιδιών για αυτά, με αποτέλεσμα να παρεμποδίζεται η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και, κατ’ επέκταση, της ικανότητας για εκτιμήσεις (Yang & Li, 2008). Στις μεγαλύτερες τάξεις στις οποίες διδάσκονται οι αναλογίες και τα ποσοστά η επίτευξη εκτιμήσεων δυσχεραίνεται ακόμη περισσότερο. Σε μια διαβαθμισμένη κλίμακα η δυσκολία μεγαλώνει από τους δεκαδικούς αριθμούς στα κλάσματα και έπειτα στα ποσοστά καταλήγοντας τελικά στις αναλογίες (Dolma, 2002).

Εκτός από το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών, και το μέγεθος αυτών επηρεάζει τις επιδόσεις των παιδιών σε καταστάσεις κατ’ εκτίμηση υπολογισμών. Αρκετές είναι οι έρευνες που υποστηρίζουν ότι η επιτυχία των εκτιμήσεων μειώνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών (Dowker, 1997· Liu, 2009· Sekeris et al., 2020· van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Πιο συγκεκριμένα, η Dowker (1997) στην έρευνά της διαπίστωσε ότι η ακρίβεια και η λογικότητα των προσεγγιστικών υπολογισμών έφθινε καθώς τα παιδιά απομακρύνονταν από το επίπεδο των υπολογιστικών τους δεξιοτήτων και ο βαθμός δυσκολίας των προβλημάτων εντεινόταν. Για παράδειγμα, τα παιδιά που εκτελούσαν σωστά νοερές προσθέσεις διψήφιων αριθμών με άθροισμα μικρότερο του 25 (π.χ., 8+6), μπορούσαν να εκτιμήσουν με μεγαλύτερη επιτυχία αθροίσματα μικρότερα του 100 (π.χ., 52+41) πάρα να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις με τριψήφιους αριθμούς (π.χ., 279+386).

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε ο Liu (2009), ο οποίος μελέτησε την ικανότητα Κινέζων μαθητών της τρίτης και της πέμπτης τάξης του Δημοτικού για κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα και τους παράγοντες που επιδρούν σε αυτή. Προκειμένου να διαπιστώσει αν το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών καθορίζει την επιτυχία της εκτίμησης ενός γινόμενου, αξιοποίησε 32 μαθηματικά έργα πολλαπλασιασμού, τα οποία ισάριθμα περιλάμβαναν έναν από τους τέσσερις συνδυασμούς αριθμών με βάση το πλήθος των ψηφίων τους: μονοψήφιος με διψήφιο (π.χ., 9x12), μονοψήφιος με τριψήφιο (π.χ., 8x179), διψήφιος με διψήφιο (π.χ., 12x82) και διψήφιος με τριψήφιο (π.χ., 55x135). Τα παιδιά και των δύο ηλικιακών ομάδων τα πήγαν καλύτερα στα προβλήματα του πρώτου συνδυασμού παραγόντων, μονοψήφιος με διψήφιο, και χειρότερα στα προβλήματα του τελευταίου συνδυασμού παραγόντων, διψήφιος με τριψήφιο. Η δυσκολία παραγωγής επιτυχών εκτιμήσεων σε έργα πολλαπλασιασμού, τα οποία χαρακτηρίζονται από αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας, είχε επισημανθεί νωρίτερα, από την van den Heuvel-Panhuizen (2001), η οποία υποστήριξε ότι οι μεγάλοι αριθμοί, λόγω των μηδενικών τους, δυσχεραίνουν τους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς, κυρίως στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση.

Η αρνητική συσχέτιση του μεγέθους των αριθμών και της επίδοσης σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων διαπιστώθηκε και από την έρευνα των Sekeris et al. (2020). Τα προσθετικά προβλήματα κατ’ εκτίμηση υπολογισμών που μοιράστηκαν στα παιδιά του δείγματος διακρίνονταν σε τέσσερις κατηγορίες με βάση το εύρος των εκτιμώμενων αθροισμάτων: από 11 έως 15 (π.χ., 2+13), από 16 έως 20 (π.χ., 7+9), από 21 έως 25 (π.χ., 11+13) και από 26 έως 30 (π.χ., 7+19). Συγκριτικά, η πρώτη κατηγόρια συγκέντρωσε τις ακριβέστερες εκτιμήσεις με το ποσοστό ακρίβειας να ελαττώνεται προοδευτικά στις επόμενες κατηγορίες. Με άλλα λόγια, όσο μεγάλωνε το μέγεθος των αριθμών τόσο μειωνόταν η επίδοση των παιδιών στους προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Το φαινόμενο αυτό, δηλαδή η παραγωγή λιγότερο επιτυχημένων εκτιμήσεων όταν τα αριθμητικά προβλήματα δυσκολεύουν, είναι γνωστό ως «επίδραση του μεγέθους του αριθμού» (Δεσλή, 2021· Λεμονίδης, 2020).

Η παρουσία του πλαισίου ενδέχεται να επηρεάσει την παραγωγή επιτυχημένων εκτιμήσεων. Ωστόσο, τα δεδομένα σχετικά με τη χρήση πλαισιωμένων (context-based ή contextual problems) και μη πλαισιωμένων (non-context-based ή numerical problems) προβλημάτων σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων είναι αντιφατικά. Πολλοί εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι η διδασκαλία των εκτιμήσεων σε πλαίσια που φαίνονται οικεία στους μαθητές μπορεί να ενισχύσει την εννοιολογική γνώση των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών (Anestakis & Desli, 2014· Mildenhall et al., 2010· Tsao & Pan, 2013). Ένα μέρος της ερευνητικής βιβλιογραφίας υποστηρίζει τη θέση των παιδαγωγών υπέρ της αξιοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων στη διδασκαλία των προσεγγιστικών υπολογισμών. Παραδείγματος χάρη, οι μαθητές της έκτης τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα των Liu και Neber (2012) αντιμετώπισαν περισσότερες δυσκολίες στην εκτίμηση μη πλαισιωμένων προβλημάτων με κλάσματα συγκριτικά με εκείνα που είχαν σενάριο. Σε παρεμφερή συμπεράσματα κατέληξε η Irwin (2001), η οποία, θέλοντας να εξετάσει τον ρόλο του πλαισίου στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς, σχεδίασε μία διδακτική παρέμβαση για παιδιά ηλικίας 11-12 ετών. Οι μαθητές που εργάστηκαν με πλαισιωμένα μαθηματικά έργα σημείωσαν αξιόλογη βελτίωση στη διαχείριση των δεκαδικών αριθμών σε σχέση με τους μαθητές των οποίων η διδασκαλία δεν προέβλεπε ρεαλιστικές δραστηριότητες.

Παρόλο που το πλαίσιο σε έργα εκτιμήσεων φαίνεται ότι διευκολύνει την πραγματοποίησή τους σε ορισμένες περιπτώσεις, η παρουσία του μπορεί να λειτουργήσει ανασταλτικά σε κάποιες άλλες. Για παράδειγμα, οι Yang και Li (2008) διαπίστωσαν τη δυσκολία 8χρονων παιδιών να κατανοήσουν το πλαίσιο των προβλημάτων, οπότε συνηθίζουν να επικεντρώνονται αποκλειστικά στα αριθμητικά δεδομένα και στις λέξεις-κλειδιά καταλήγοντας τελικά σε μια λανθασμένη απάντηση. Η αδυναμία των παιδιών να διαχειριστούν τους αριθμούς ακόμη και σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις αναδεικνύεται, επίσης, από την έρευνα των Can και Özdemir (2020). Οι 9χρονοι μαθητές στηρίχτηκαν κατά κόρον σε στρατηγικές βασισμένες σε κανόνες και αλγόριθμους για την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων. Ωστόσο, πέτυχαν υψηλότερες επιδόσεις σε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο που δεν προϋπόθεταν την αναγνώριση των σχέσεων των αριθμών και των πράξεων. Όπως ισχυρίζονται οι ερευνητές, η επίδειξη μειωμένης αίσθησης αριθμού στα πλαισιωμένα προβλήματα ενδεχομένως οφείλεται σε μειωμένες γλωσσικές ικανότητες, οι οποίες διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαχείριση τέτοιων προβλημάτων.

Οι Yang και Wu (2012) συμφωνούν με την ερμηνεία των Can και Özdemir (2020) για την αδυναμία των παιδιών να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε πλαισιωμένα προβλήματα. Οι ίδιοι, μελετώντας την ικανότητα μαθητών της Β΄ Γυμνασίου για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς σε πλαισιωμένα και μη πλαισιωμένα προβλήματα, βρήκαν ότι η επίδοσή τους στα έργα χωρίς πλαίσιο ήταν καλύτερη συγκριτικά με τα έργα με πλαίσιο. Κατά τους ερευνητές, η μειωμένη ικανότητα των παιδιών στα πλαισιωμένα προβλήματα οφείλεται στην αδυναμία τους να ερμηνεύσουν τα δεδομένα ώστε να προβούν στους κατάλληλους υπολογισμούς. Από την άλλη πλευρά, τα προβλήματα χωρίς πλαίσιο δεν απαιτούν ερμηνεία των πληροφοριών, καθώς αυτές δίνονται με ξεκάθαρο και σαφή τρόπο. Ως εκ τούτου, οι μαθητές προέβαιναν αμεσότερα και ευκολότερα στην επίλυσή τους.

Εκτός από τη διπολικότητα των θέσεων των ερευνητών αναφορικά με την επίδραση ή όχι του πλαισίου στις εκτιμήσεις, υπάρχουν φωνές που υποστηρίζουν ότι η παρουσία ή απουσία του δε διαφοροποιεί τις επιδόσεις των παιδιών.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνιστούν οι Δεσλή και Παπαχρήστος (2019) οι οποίοι πρόσφατα εξέτασαν τον ρόλο του πλαισίου στην επίδοση και τις στρατηγικές ενηλίκων και παιδιών σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Αν και η συγκεκριμένη μελέτη δεν αναφέρεται άμεσα στις υπολογιστικές εκτιμήσεις, η ερευνητική της σημασία στα πλαίσια της παρούσας εργασίας έγκειται στη σύνδεση των νοερών και των κατ' εκτίμηση υπολογισμών όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Η επίδοση των συμμετεχόντων σε έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης νοερών υπολογισμών με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα διαφοροποιήθηκε από το είδος των αριθμών και την ηλικία αλλά όχι από το πλαίσιο. Συγκεκριμένα, όλοι οι συμμετέχοντες έδειξαν μεγαλύτερη ευχέρεια στους νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς παρά με κλάσματα, με τους ενήλικες να καταγράφουν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε σύγκριση με τα παιδιά. Ωστόσο, η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν παρόμοια σε προβλήματα με πλαίσιο ή χωρίς πλαίσιο.

1.3.3. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες των παιδιών να πραγματοποιήσουν κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι πολλοί ερευνητές έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στη μελέτη των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων (Cochran & Dugger, 2013· Desli & Lioliou, 2020· LeFevre et al., 1993· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Sekeris et al., 2019· Sowder & Wheeler, 1989). Οι Reys, Rybolt, Bestgen και Wyatt (1982) πρότειναν μία διάκριση αυτών των στρατηγικών σε τρεις ευρείες κατηγορίες: την ανασύνθεση (reformulation), τη μετάφραση (translation) και την αντιστάθμιση (compensation), στις οποίες εμπεριέχονται επιμέρους στρατηγικές κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Οι στρατηγικές που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία ομαδοποιήθηκαν με βάση τις παραπάνω τρεις κατηγορίες από τη Δεσλή (2021) όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Αναλυτικότερα, η ανασύνθεση (reformulation) αναφέρεται στη μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων ενός προβλήματος σε μια πιο διαχειρίσιμη μορφή προκειμένου να διευκολυνθεί ο προσεγγιστικός υπολογισμός. Για τη διαδικασία της ανασύνθεσης οι εκτιμητές επιλέγουν μία ή και περισσότερες από τις εξής στρατηγικές:

1. Στρογγυλοποίηση των αριθμών (rounding). Αποτελεί την πλέον χαρακτηριστική στρατηγική και αφορά στη μετατροπή όλων ή κάποιων από τους αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα, χιλιάδα κ.λπ. Μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, βάσει του αριθμητικού κανόνα (rule based rounding) σύμφωνα με τον οποίο ένας αριθμός στρογγυλοποιείται είτε προς τα πάνω (rounding-up) είτε προς τα κάτω (rounding-down) ανάλογα με το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από εκείνο στο οποίο θα γίνει η στρογγυλοποίηση. Δεύτερον, βάσει των απαιτήσεων του προβλήματος (situation-based rounding), όπου δεν είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί πιστά ο προηγούμενος κανόνας και η στρογγυλοποίηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με πιο ευέλικτο τρόπο. Και στις δύο περιπτώσεις, όμως, πρέπει να γίνει κατανοητό από τους εκτιμητές ότι αφενός η στρογγυλοποίηση αποσκοπεί στην αλλαγή του προβλήματος ώστε να υπολογιστεί ευκολότερα το αποτέλεσμα και αφετέρου η στρογγυλοποίηση μπορεί να συντελεστεί με διαφορετικούς τρόπους στο εκάστοτε πρόβλημα (Reys, 1984).

2. Στρατηγική των αρχικών ψηφίων ή στρατηγική εμπρόσθιου άκρου (front – end strategy). Εστιάζει στα αρχικά ψηφία των αριθμών, δηλαδή αυτά που βρίσκονται στο αριστερό άκρο, αγνοώντας τα υπόλοιπα. Αφού υπολογιστούν ακριβώς τα αρχικά ψηφία, το αποτέλεσμα προσαρμόζεται λαμβάνοντας υπόψη την αξία θέσης τους. Για παράδειγμα, στην εκτίμηση του αθροίσματος 327+516+128 μπορεί πρώτα να προστεθούν τα αρχικά ψηφία των αριθμών, δηλαδή 3+5+1=9, και έπειτα να προσδιοριστεί η θεσιακή τους αξία, δηλαδή οι εκατοντάδες. Οπότε το αποτέλεσμα είναι περίπου 900.

3. Αποκοπή (truncation). Πρόκειται για έναν συνδυασμό των δύο προαναφερθέντων στρατηγικών. Τα πρώτα ψηφία παραμένουν σταθερά, ενώ τα υπόλοιπα δε λαμβάνονται υπόψη, οπότε η στρογγυλοποίηση πραγματοποιείται προς τα κάτω.

4. Στρατηγική των συμβατών αριθμών (compatible numbers strategy). Εδώ δημιουργούνται ομάδες αριθμών που είναι «ταιριαστοί» και μπορούν εύκολα να υπολογισθούν νοερά. Αν χρειαστεί, οι εμπλεκόμενοι αριθμοί μπορούν να τροποποιηθούν ελαφρώς προκειμένου να σχηματιστούν τα κατάλληλα ζευγάρια. Οι συμβατοί αριθμοί αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμοι τόσο στη διαίρεση όσο και στην πρόσθεση με πολλούς προσθετέους (Reys, 1984).

5. Στρατηγική των ειδικών αριθμών ή σημείων αναφοράς (special number strategy or benchmarks strategy). Η στρατηγική αυτή σχετίζεται με τη χρήση

αριθμητικών σημείων αναφοράς, όπως το 0, το 1, το $\frac{1}{2}$, δυνάμεις του 10, κοντά στα οποία βρίσκονται οι εμπλεκόμενοι αριθμοί και μπορούν να διευκολύνουν τους υπολογισμούς.

6. Στρατηγική εκτίμησης του εύρους (range strategy). Αποσκοπεί στον υπολογισμό του εύρους μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται ένα αποτέλεσμα.

7. Παραγοντοποίηση (factorization). Οι αριθμοί αναλύονται σε απλούστερη μορφή είτε με τη διάσπασή τους σε παράγοντες είτε με τη διαίρεση όλων με έναν κοινό παράγοντα.

8. Επιμεριστικότητα (distributivity). Προηγείται η στρογγυλοποίηση ενός αριθμούς και έπειτα εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Η δεύτερη γνωστική διαδικασία, δηλαδή η μετάφραση (translation), αφορά στην αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος ώστε να γίνει πιο διαχειρίσιμη. Είναι πιο ευέλικτη σε σχέση με την ανασύνθεση και προϋποθέτει πιο προηγμένο επίπεδο εννοιολογικής γνώσης, καθώς οι μαθητές επικεντρώνονται στη σφαιρική αντίληψη του προβλήματος και όχι στους εμπλεκόμενους αριθμούς (Reys et al., 1982). Στις στρατηγικές μετάφρασης εντάσσονται:

1. Η στρατηγική του μέσου όρου (averaging strategy). Συναντάται επίσης με το όνομα «στρατηγική της συσσώρευσης» (clustering strategy) και χρησιμοποιείται για αριθμούς με παρόμοιο μέγεθος. Πιο συγκεκριμένα, αφού εκτιμηθεί ένας αντιπροσωπευτικός μέσος όρος, στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με το πλήθος των εμπλεκόμενων αριθμών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται μετατροπή των αριθμών του προβλήματος αλλά και του είδους της αριθμητικής πράξης. Πρόκειται για μια στρατηγική με περιορισμένο πεδίο εφαρμογής, δεδομένου ότι αξιοποιείται μόνο για την εκτίμηση του αθροίσματος ενός συνόλου αριθμών με παραπλήσιο μέγεθος (van de Walle et al., 2010).

2. Η στρατηγική της αλλαγής της σειράς των πράξεων (changing order strategy). Οι αριθμοί αλλάζουν σε συμβατές ισοδύναμες μορφές και η σειρά των πράξεων τροποποιείται ώστε ο υπολογισμός να εκτελεστεί με περισσότερη άνεση.

Η αντιστάθμιση (compensation) σχετίζεται με προσαρμογές στις εκτιμήσεις προκειμένου να γίνουν ακριβέστερες και συντελείται μέσω δύο κύριων στρατηγικών.

1. Η προγενέστερη ή ενδιάμεση αντιστάθμιση (prior or intermediate compensation). Πραγματοποιείται πριν ή κατά τη διάρκεια του προσεγγιστικού υπολογισμού και αφορά στην τροποποίηση του μεγέθους των αριθμών

στρογγυλοποιώντας τους προς την αντίθετη κατεύθυνση για να εξασφαλισθεί ένα αποτέλεσμα πιο κοντά στο πραγματικό.

2. Η μεταγενέστερη αντιστάθμιση (post compensation). Έπεται της ανασύνθεσης ή της μετάφρασης, καθώς πραγματοποιείται μετά το τέλος της εκτίμησης με σκοπό τη διόρθωσή της. Η περιγραφόμενη στρατηγική απαιτεί ικανότητα αναγνώρισης της σχέσης μεταξύ της εκτίμησης και της ακριβούς απάντησης (Reys et al., 1982), αν και συνήθως οι μαθητές πραγματοποιούν προσαρμογές βασισμένοι στη διαίσθησή τους (Reys, 1984). Όσο περισσότερο εξασκούνται στη μεταγενέστερη αντιστάθμιση τόσο ικανότεροι γίνονται σε αυτή πετυχαίνοντας ακριβέστερες εκτιμήσεις (Reys, 1984).

Στις προαναφερθείσες στρατηγικές συγκαταλέγεται και η στρατηγική του τυπικού αλγόριθμου της αριθμητικής πράξης (proceeding algorithmically). Πρόκειται για μια μηχανιστική στρατηγική κατά την οποία οι εκτιμητές εφαρμόζουν νοερά έναν τυποποιημένο αλγόριθμο. Ο διαδικαστικός χαρακτήρας και η στήριξή της σε κανόνες αποτρέπουν την ευχερή διαχείριση των αριθμών και των πράξεων παρεμποδίζοντας την ανάπτυξη της ευέλικτης σκέψης που είναι απαραίτητη για την επιτυχία σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων (Δεσλή, 2021).

1.3.4. Χρήση στρατηγικών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης

Με μία επισκόπηση των αποτελεσμάτων από τις έρευνες για την ικανότητα των παιδιών και τη χρήση στρατηγικών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης καταφαίνεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η αποτυχία τους οφείλεται στην τάση που έχουν να εφαρμόζουν τυπικούς αλγόριθμους, προφανώς επηρεασμένοι από τη διδασκαλία τους στη σχολική τάξη (Sowder & Wheeler, 1989· Yang & Wu, 2012). Για παράδειγμα, οι Lemonidis, Nolka και Nikolantonakis (2014) βρήκαν ότι τα περισσότερα παιδιά της πέμπτης και της έκτης τάξης, τα οποία παρουσίασαν γενικά χαμηλή επίδοση σε έργα προσεγγιστικών υπολογισμών με φυσικούς και ρητούς, χρησιμοποίησαν ακριβείς υπολογισμούς. Αναλύοντας τα λάθη των μαθητών, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων που οφείλονταν στην εσφαλμένη εφαρμογή των γραπτών αλγόριθμων ξεπερνούσε σημαντικά τα λάθη στους προσεγγιστικούς υπολογισμούς, τα οποία αποδίδονται στην ανεπαρκή εννοιολογική γνώση της εκτίμησης. Η υπολογιστική εκτίμηση ως αναπόσπαστο κομμάτι της αίσθησης του αριθμού προϋποθέτει βαθιά κατανόηση και ευέλικτη χρήση των αριθμών και των πράξεων, στοιχεία που αντικατοπτρίζονται στη μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών που τείνουν να εκτιμούν. Με άλλα λόγια, οι μαθητές που προέβησαν σε εκτιμήσεις μπορούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψη τους με σαφήνεια, ενώ εκείνοι που επέμειναν στους γραπτούς υπολογισμούς αδυνατούσαν να δικαιολογήσουν τον συλλογισμό τους. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της έρευνας για τη σύνδεση της υπολογιστικής εκτίμησης με τη μεταγνωστική ικανότητα και τη θετική συσχέτισή τους με την επίλυση προβλήματος, συμπεραίνεται ότι οι καλοί λύτες είναι σε θέση να παράγουν και να τεκμηριώνουν τις εκτιμήσεις τους.

Παρόμοια ήταν τα ευρήματα των Γκάτζιου και Μισαηλίδου (2019) στην έρευνα τους με μαθητές της έκτης τάξης, οι οποίοι αδυνατούσαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις κατά κύριο λόγο εξαιτίας της εκτέλεσης ακριβών υπολογισμών και της αναποτελεσματικής χρήσης στρατηγικών εκτίμησης. Κύρια αιτία, όμως, των λανθασμένων απαντήσεων αναδείχθηκαν τα υπολογιστικά λάθη. Όπως ανακάλυψαν οι Cochran και Dugger (2013), εκτός από τους μαθητές της έκτης τάξης, και οι μαθητές της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου δυσκολεύτηκαν σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης με φυσικούς και ρητούς αριθμούς λόγω της εξάρτησής τους από την εφαρμογή ακριβών υπολογισμών.

Όταν τα παιδιά δεν πραγματοποιούν εκτιμήσεις με αλγοριθμικό τρόπο, στρατηγική η οποία αμφισβητείται τα τελευταία χρόνια (Δεσλή, 2021), τείνουν να στρογγυλοποιούν, καθώς ένα μεγάλο μέρος της ερευνητικής βιβλιογραφίας έχει αναδείξει τη στρογγυλοποίηση ως κυρίαρχη στρατηγική των κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Cochran & Dugger, 2013· Desli & Lioliou, 2020· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Neill, 2005). Ωστόσο, πολλές φορές η στρογγυλοποίηση συνδυάζεται με τους ακριβείς υπολογισμούς ή εφαρμόζεται λανθασμένα (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019). Όπως εξηγούν οι Sowder και Wheeler (1989), τα παιδιά επηρεάζονται από τη διδασκαλία της στρογγυλοποίησης στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης, η οποία εστιάζει στη διαδικαστική γνώση της παραπάνω στρατηγικής, οπότε δε δύνανται να αποδεχθούν την ύπαρξη πολλαπλών τρόπων στρογγυλοποίησης για το εκάστοτε πρόβλημα. Οι Cochran και Dugger (2013), αν και αναγνωρίζουν τη σημασία της στρογγυλοποίησης σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων, τονίζουν την ανάγκη για ευελιξία στη χρήση στρατηγικών ανάλογα με το πλαίσιο του προβλήματος.

1.3.5. Παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ανάπτυξη και η χρήση διαφορετικών στρατηγικών εκτίμησης συνιστά χαρακτηριστικό των καλών εκτιμητών (Andrews, Sunde et al., 2021· Dowker, 1992· Neill, 2005· Reys et al., 2017· van de Walle et al., 2010), η εξακρίβωση των παραγόντων που καθορίζουν την επιλογή τους μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης των ατόμων σε έργα κατ' εκτίμηση υπολογισμών.

Αρχικά, η ηλικία δύναται να επιδράσει θετικά στην καταλληλότητα επιλογής και στην εκτέλεση των στρατηγικών εκτίμησης σε αριθμητικά προβλήματα με προσεγγιστικούς υπολογισμούς (Sekeris et al., 2019· Siegler & Booth, 2005). Με άλλα λόγια, όσο οι μαθητές μεγαλώνουν και αποκτούν περισσότερη μαθηματική εμπειρία γίνονται ικανότεροι εκτιμητές. Για παράδειγμα, οι Lemaire και Lecacheur (2002) μελέτησαν τη χρήση της στρογγυλοποίησης προς τα πάνω και της στρογγυλοποίησης προς τα κάτω από ενήλικες και παιδιά, ηλικίας 9-10 και 11-12 ετών, σε προσθετικά έργα υπολογιστικής εκτίμησης. Διαπίστωσαν ότι, παρόλο που όλοι οι συμμετέχοντες χρησιμοποιήσαν και τις δύο στρατηγικές, οι ενήλικες επέδειξαν μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα και συστηματικότητα στη χρήση των στρατηγικών σε αντίθεση με τα παιδιά. Επιπλέον, η ηλικία επηρέασε την ταχύτητα και την ακρίβεια των στρατηγικών εκτίμησης, καθώς οι ενήλικες ήταν γρηγορότεροι και ακριβέστεροι σε σύγκριση με τους μαθητές ηλικίας 11-12 ετών, οι οποίοι υπερτερούσαν των νεαρότερων μαθητών, ηλικίας 9-10 ετών.

Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα συμφωνούν με εκείνα που προέκυψαν από μεταγενέστερη μελέτη των ίδιων ερευνητών με παιδιά από 8 έως 13 ετών. Οι Lemaire και Lecacheur (2011) παρατήρησαν ότι αφενός η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής και αφετέρου η ακρίβεια και ο χρόνος εκτέλεσή της βελτιώνονται σημαντικά με την ηλικιακή ωρίμανση. Παράλληλα, βέβαια, με τη βαθμιαία διεύρυνση του ρεπερτορίου των στρατηγικών εκτίμησης, η οποία αναδεικνύεται και από τις έρευνες των Desli και Lioliou (2020) και LeFevre et al. (1993), εντείνεται και η πολυπλοκότητά τους. Δηλαδή, όσο αυξάνεται η ηλικία των εκτιμητών τόσο συχνότερη είναι η αξιοποίηση πιο σύνθετων στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, όπως εκείνες της αντιστάθμισης (LeFevre et al., 1993· Reys et al., 1982· Sowder & Wheeler, 1989). Λαμβάνοντας υπόψη ότι στόχος των στρατηγικών αντιστάθμισης είναι η προσαρμογή των εκτιμήσεων ώστε να πλησιάσουν όσο το δυνατόν πιο κοντά στην ακριβή απάντηση, η προτίμησή τους από τα μεγαλύτερα σε ηλικία άτομα ενδεχομένως να οφείλεται στη μειωμένη ανεκτικότητα λάθους που αυτά παρουσιάζουν (Liu, 2009· Sowder & Wheeler, 1989).

Η επιλογή της στρατηγικής σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς καθορίζεται, επίσης, από το είδος των αριθμών ενός προβλήματος. Οι μαθητές 12-13 χρονών που πήραν μέρος στην έρευνα της Boz (2009) κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε αριθμητικά προβλήματα με ακέραιους αριθμούς, δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα. Τα ευρήματα αποκάλυψαν ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε κατά κόρον στρατηγικές ανασύνθεσης τόσο στα έργα με ρητούς αριθμούς όσο και σε εκείνα με ακέραιους αριθμούς. Ωστόσο, οι ερευνητές διέκριναν ότι υπήρξε διαφοροποίηση στον τύπο των στρατηγικών ανασύνθεσης ανάλογα με το είδος των ρητών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, η στρογγυλοποίηση με βάση αριθμητικούς κανόνες κυριάρχησε στα προβλήματα με ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς, ενώ στα κλάσματα οι μαθητές εκτέλεσαν κυρίως ακριβείς υπολογισμούς, ενώ όσοι πραγματοποίησαν εκτιμήσεις χρησιμοποιήσαν σχεδόν ισάριθμα την περικοπή και τη στρατηγική των ειδικών αριθμών.

Ένας ακόμη παράγοντας που ενεργοποιεί τη χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι το πλαίσιο των προβλημάτων. Οι McIntosh et al. (1997) υποστηρίζουν ότι τα παιδιά συνηθίζουν να χρησιμοποιούν τυπικούς αλγόριθμους σε μη πλαισιωμένα έργα, ενώ είναι πιθανότερο να επινοήσουν αυτοσχέδιες στρατηγικές όταν το πρόβλημα φέρει ρεαλιστικά στοιχεία. Αντιθέτως, οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου στην έρευνα των Yang και Wu (2012) προτίμησαν τους γραπτούς υπολογισμούς και στα δύο είδη προβλημάτων. Ωστόσο, όσοι από αυτούς εφάρμοσαν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, επέλεξαν την ανασύνθεση για τα προβλήματα χωρίς σενάριο και τη μετάφραση για τα προβλήματα με σενάριο.

Συνοψίζοντας, τα μέχρι τώρα δεδομένα της ερευνητικής βιβλιογραφίας σχετικά με την επίδοση και τις στρατηγικές των παιδιών σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων με ρητούς αριθμούς αφορούν κυρίως στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Σε ελάχιστες έρευνες οι δοκιμασίες κατ' εκτίμηση υπολογισμών περιλαμβάνουν ποσοστά, πόσο μάλλον επικεντρώνονται αποκλειστικά σε αυτά. Λαμβάνοντας υπόψη την παρουσία των ποσοστών σε διάφορες καταστάσεις της σύγχρονης καθημερινής ζωής αλλά και της χρησιμότητας των εκτιμήσεων σε αυτές, θεωρείται σκόπιμη η μελέτη της ικανότητας και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν τα παιδιά σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων με ποσοστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το παρόν κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες και στοχεύει στη λεπτομερή παρουσίαση της μεθοδολογικής πορείας που ακολουθήθηκε για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση της παρούσας έρευνας. Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα περιγράφονται οι συμμετέχοντες, ενώ στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται ο σχεδιασμός του εργαλείου της έρευνας. Στην τρίτη ενότητα αναλύεται η διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας και, τέλος, στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος κωδικοποίησης των δεδομένων.

2.1. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα πήραν μέρος συνολικά 42 παιδιά, από τα οποία τα 22 (52,4%) φοιτούσαν στη Στ΄ τάξη και τα υπόλοιπα 20 (47,6%) στη Β΄ Γυμνασίου. Από τα παιδιά της Στ΄ τάξης, τα 6 (27,3%) ήταν αγόρια και τα 16 (72,7%) ήταν κορίτσια, με μέσο όρο ηλικίας τα 11 έτη και 9 μήνες (με ελάχιστο τα 11 έτη και 5 μήνες και μέγιστο τα 12 έτη και 4 μήνες). Αναφορικά με τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου, αυτά ήταν ισάριθμα μοιρασμένα σε αγόρια και κορίτσια, με μέσο όρο ηλικίας τα 14 έτη (με ελάχιστο τα 13 έτη και 5 μήνες και μέγιστο τα 14 έτη και 4 μήνες).

Όλοι οι συμμετέχοντες φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία και γυμνάσια της ευρύτερης περιοχής του νομού Ημαθίας. Κάλυπταν διάφορα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα και εμφάνιζαν ποικιλία σχολικών επιδόσεων, χωρίς αυτό να αποτελεί ουσιαστικό κριτήριο της επιλογής τους. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για την επιλογή των συμμετεχόντων ήταν η βολική δειγματοληψία.

2.2. Σχεδιασμός- Εργαλείο έρευνας

Για τον σκοπό της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο έργα, καθένα από τα οποία τους ζητούσε να προβούν νοερά σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ποσοστά, χωρίς τη χρήση οποιουδήποτε εργαλείου. Μετά την πραγματοποίηση κάθε εκτίμησης, οι συμμετέχοντες καλούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

Προκειμένου να εξεταστεί αν η παρουσία πλαισίου επηρεάζει τις υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά, το ένα έργο (Έργο 1) περιλάμβανε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (π.χ., «Εκτιμήστε το 82% του 250»), ενώ το άλλο έργο (Έργο 2) περιείχε δοκιμασίες με πλαίσιο (π.χ., «Σε 150 γραμμάρια σοκολάτας περιέχεται 78% κακάο. Πόσα γραμμάρια περίπου είναι το κακάο που περιέχεται στη σοκολάτα αυτή;»). Κάθε έργο αποτελούνταν από 6 δοκιμασίες, οι οποίες χωρίζονταν ισάριθμα, ανά δύο, σε τρεις κατηγορίες: η πρώτη κατηγορία αφορούσε δοκιμασίες εύρεσης μέρους, η δεύτερη κατηγορία περιλάμβανε δοκιμασίες αύξησης όλου και στην τρίτη κατηγορία ανήκαν δοκιμασίες μείωσης όλου.

Σε όλες τις δοκιμασίες χρησιμοποιήθηκαν ακέραιοι τριψήφιοι αριθμοί, οι οποίοι στις μισές από αυτές έληγαν σε 00 (π.χ. 300), ενώ στις άλλες μισές οι αριθμοί έληγαν σε 50 (π.χ., 250), ώστε να περιοριστεί η πιθανότητα να επηρεαστούν οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί από τη φύση των αριθμών. Επιπλέον, στο σύνολο των δοκιμασιών τα ποσοστά πλησίαζαν σε στρόγγυλους αριθμούς, με τις μισές δοκιμασίες να περιλαμβάνουν ποσοστά άνω του 50% (π.χ., 82%, 78%), ενώ στις υπόλοιπες μισές τα ποσοστά ήταν μικρότερα του 50% (π.χ., 21%, 16%). Αποφεύχθηκε η χρήση ποσοστών κοντά στο 50% που θα διευκόλυναν την εκτέλεση πράξεων.

Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση της επίδοσης των παιδιών σε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (Έργο 1) και σε δοκιμασίες με πλαίσιο (Έργο 2), οι δοκιμασίες μεταξύ των έργων παρουσίαζαν παρόμοιες γνωστικές απαιτήσεις αναφορικά με το μέγεθος και το είδος των αριθμών που επιλέχθηκαν. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία 3 του Έργου 1 («Εκτιμήστε πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%») και στη δοκιμασία 3 του Έργου 2 («Πέρυσι το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 350€. Φέτος αυξήθηκε 16%. Πόσα περίπου χρήματα είναι φέτος το ενοίκιο αυτού του σπιτιού;»), χρησιμοποιήθηκαν αριθμοί που έληγαν σε 50 (750 και 350, αντίστοιχα), ενώ οι αριθμοί για τα ποσοστά ήταν μικρότεροι του 50% (14% και 16%, αντίστοιχα).

Αναλυτικά οι δοκιμασίες που χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο έργα παρατίθενται στον Πίνακα 1.

Για την παρουσίαση των έργων δημιουργήθηκαν δύο σειρές: η σειρά παρουσίασης Α, στην οποία οι συμμετέχοντες απάντησαν πρώτα στις δοκιμασίες του Έργου 1 και έπειτα στις δοκιμασίες του Έργου 2, και η σειρά παρουσίασης Β, όπου πρώτα δόθηκε το Έργο 2 και στη συνέχεια το Έργο 1. Τα μισά παιδιά από κάθε ηλικιακή ομάδα κατανεμήθηκαν τυχαία στη σειρά παρουσίασης Α και τα άλλα μισά στη σειρά παρουσίασης Β. Ο λόγος για την ύπαρξη δύο σειρών παρουσίασης των έργων ήταν για να αποφευχθεί η πιθανότητα η κόπωση των συμμετεχόντων να επηρεάσει την επίδοσή τους στις δοκιμασίες του Έργου 2 που θα παρουσιάζονταν τελευταίες.

Πίνακας 1. *Εργαλείο έρευνας*

Έργο 1 (Χωρίς πλαίσιο)	Έργο 2 (Με πλαίσιο)	Κατηγορία δοκιμασιών
1. Εκτιμήστε το 82% του 250	Σε 150 γραμμάρια σοκολάτας περιέχεται 78% κακάο. Πόσα γραμμάρια περίπου είναι το κακάο που περιέχεται στη σοκολάτα αυτή;	Εύρεση μέρους
2. Εκτιμήστε το 21% του 300	Ο λογαριασμός μιας παρέας σε ένα εστιατόριο της Γαλλίας είναι 200€. Σύμφωνα με τον νόμο, το 18% του λογαριασμού δίνεται ως φιλοδώρημα στους σερβιτόρους. Πόσα περίπου χρήματα θα δοθούν στους σερβιτόρους;	
3. Εκτιμήστε πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%	Πέρυσι το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 350€. Φέτος αυξήθηκε 16%. Πόσα περίπου χρήματα είναι φέτος το ενοίκιο αυτού του σπιτιού;	Αύξηση όλου
4. Εκτιμήστε πόσο είναι το 300 αν αυξηθεί 62%	Ένα λιοντάρι στο ζωολογικό κήπο του Λονδίνου ζυγίζει 200 κιλά. Ένας γορίλας στο ίδιο πάρκο ζυγίζει 64% περισσότερο. Πόσα περίπου κιλά είναι ο γορίλας;	
5. Εκτιμήστε πόσο είναι το 800 αν μειωθεί 26%	Ένας παραγωγός συγκέντρωσε από ένα χωράφι 600 κιλά ροδάκινα. Το 24% αυτών ήταν σάπια. Πόσα περίπου κιλά ροδάκινα του έμειναν;	Μείωση όλου
6. Εκτιμήστε πόσο είναι το 350 αν μειωθεί 74%	Στην προηγούμενη απογραφή πληθυσμού οι κάτοικοι ενός απομακρυσμένου χωριού ήταν 250. Κατά την πρόσφατη απογραφή πληθυσμού, οι κάτοικοι του χωριού είναι 76% λιγότεροι. Πόσοι περίπου κάτοικοι ζουν πλέον στο χωριό;	

2.3. Διαδικασία

Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά σε έναν χώρο όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να διασφαλιστεί η δυνατότητα συγκέντρωσης και ελεύθερης έκφρασης. Η συμμετοχής τους στην έρευνα ήταν ανώνυμη, εκούσια, έπειτα από την ενυπόγραφη συγκατάθεση του γονέα/κηδεμόνα τους, και ανεξάρτητη από την αξιολόγησή τους στα σχολικά μαθήματα. Επίσης, κάθε συμμετέχων μπορούσε να σταματήσει τη διαδικασία και να αποσυρθεί οποιαδήποτε στιγμή. Ωστόσο, δεν υπήρξε τέτοια περίπτωση.

Αφού προηγούταν μια τυπική γνωριμία, η ερευνήτρια ενημέρωνε τους συμμετέχοντες πως το ζητούμενο των δοκιμασιών ήταν οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί με ποσοστά, που θα γίνονταν χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Στη συνέχεια, κάθε δοκιμασία παρουσιαζόταν σε μια λευκή καρτέλα ξεχωριστά και παρέμενε μπροστά στα παιδιά έως ότου δώσουν την απάντησή τους. Στο τέλος κάθε δοκιμασίας οι συμμετέχοντες καλούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Οι απαντήσεις και οι αιτιολογήσεις τους καταγράφονταν σε ειδικό πρωτόκολλο, που σχεδιάστηκε για την παρούσα έρευνα και διέφερε ανάλογα με τη σειρά παρουσίασης των έργων (βλ. Παράρτημα Α). Αν ο συμμετέχων ανήκε στη σειρά παρουσίασης Α, απαντούσε πρώτα στις δοκιμασίες του Έργου 1 και μετά σε εκείνες του Έργου 2. Στην περίπτωση της σειράς παρουσίασης Β, γινόταν το αντίστροφο.

Παρά το γεγονός ότι δεν υπήρχε χρονικός περιορισμός για την απάντηση στις δοκιμασίες, η συνολική διαδικασία διήρκησε περίπου 20΄- 30΄ για κάθε συμμετέχοντα.

2.4. Κωδικοποίηση και ανάλυση δεδομένων

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κωδικοποιήθηκαν και αναλύθηκαν ποσοτικά με τη χρήση του στατιστικού πακέτου «IBM SPSS Statistics 28.0».

Κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογήθηκε με 0 και κάθε σωστή απάντηση με 1. Συνεπώς, δεδομένου ότι υπήρχαν συνολικά 12 δοκιμασίες, το σύνολο των σωστών απαντήσεων που μπορούσε να συγκεντρώσει ένας συμμετέχων ήταν 12. Σε κάθε δοκιμασία ως αποδεκτή απάντηση θεωρήθηκε εκείνη με ποσοστιαία απόκλιση έως 20% του ακριβούς αποτελέσματος (βλ. Παράρτημα Β). Για παράδειγμα, στη δοκιμασία που ζητείται το 82% του 250 και η ακριβής απάντηση είναι το 205, το εύρος των αποδεκτών απαντήσεων κυμαίνεται από το 164 μέχρι το 246.

Επιπλέον, οι αιτιολογήσεις των μαθητών για τον τρόπο εύρεσης της εκάστοτε απάντησης ταξινομήθηκαν σε έξι κατηγορίες που αντιστοιχούν σε έξι στρατηγικές υπολογιστικών εκτιμήσεων (βλ. υποενότητα 3.3.1. στο Κεφάλαιο 3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κεφάλαιο 3 απαρτίζεται από τέσσερις ενότητες και αφορά στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων όπως προέκυψαν από τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων. Στην πρώτη ενότητα περιγράφεται η γενική επίδοση των μαθητών ως προς την ηλικιακή ομάδα, το φύλο και τη σειρά παρουσίασης των έργων. Η δεύτερη ενότητα πραγματεύεται τις επιμέρους επιδόσεις των παιδιών ως προς την ύπαρξη πλαισίου, το είδος των δοκιμασιών και το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά. Στην τρίτη ενότητα περιγράφονται οι στρατηγικές των συμμετεχόντων για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις και η συχνότητα χρήσης τους. Τέλος, στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων.

3.1. Γενική επίδοση

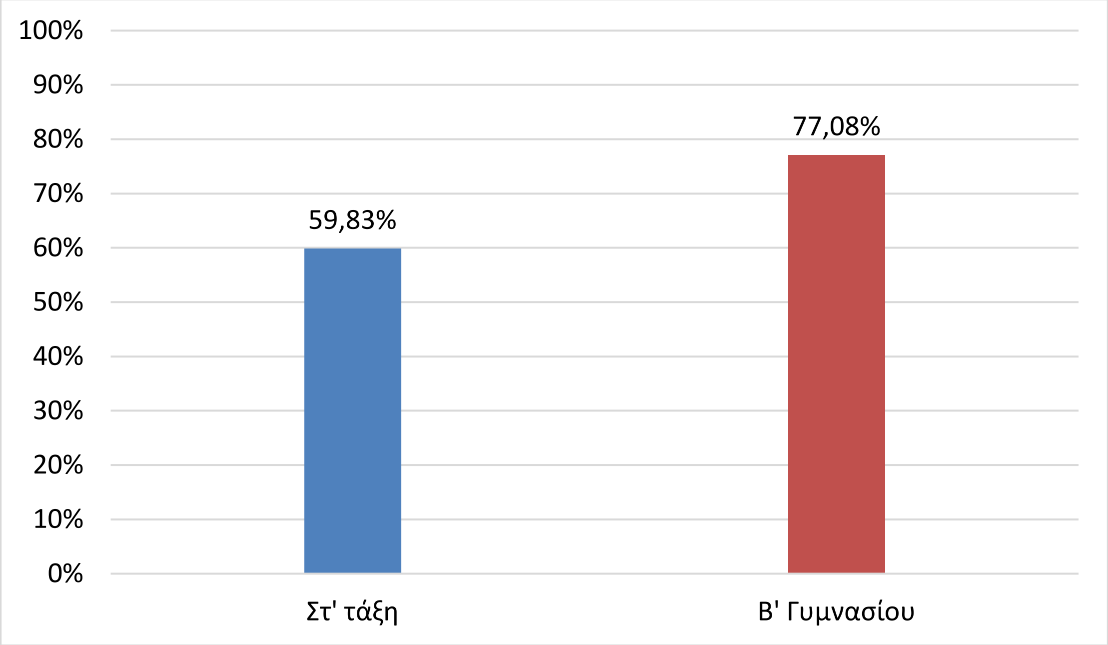
Η γενική επίδοση όλων των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών βρέθηκε ικανοποιητική με ποσοστό επιτυχίας που υπερέβη το 68% (68,4%).

3.1.1. Γενική επίδοση και ηλικιακή ομάδα

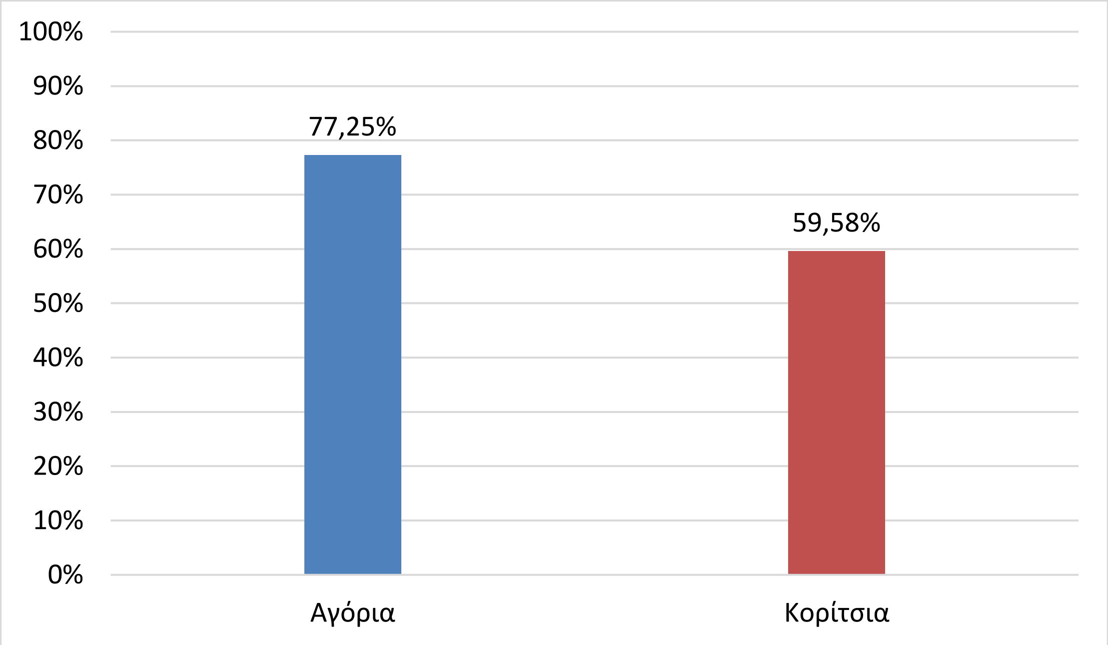
Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες επηρεάστηκε από την ηλικία, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης και την επίδοση των παιδιών της Β΄ Γυμνασίου ($t(40) = -1{,}753$, $p = .329$). Δηλαδή, τα παιδιά των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν παρόμοια επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών (59,83% και 77,08%, αντίστοιχα για τη ΣΤ΄ τάξη και τη Β΄ Γυμνασίου). Το Γράφημα 1 που ακολουθεί παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

3.1.2. Γενική επίδοση και φύλο

Με σκοπό να διερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών διαφοροποιήθηκε ως προς το φύλο, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών ανάμεσα στα δύο φύλα ($t(40) = 1{,}959$, $p = .060$). Αναλυτικότερα, αν και οι συμμετέχοντες σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας από τις συμμετέχουσες (77,25% και 59,58%, αντίστοιχα), όπως απεικονίζεται στο Γράφημα 2, αυτές οι διαφορές οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές.



Γράφημα 1: Γενική επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα



Γράφημα 2: Γενική επίδοση ως προς το φύλο

3.1.3. Γενική επίδοση και σειρά παρουσίασης

Για να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών επηρεάστηκε από τη σειρά παρουσίασης των έργων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς τη σειρά παρουσίασης των έργων ($t(40) = -2{,}184$, $p = .398$). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά που απάντησαν στις δοκιμασίες με τη σειρά παρουσίασης Α εμφάνισαν παρόμοια επίδοση με τα παιδιά που απάντησαν στις δοκιμασίες με τη σειρά παρουσίασης Β (57,5% και 78,58%, αντίστοιχα).

3.2. Επιμέρους επιδόσεις

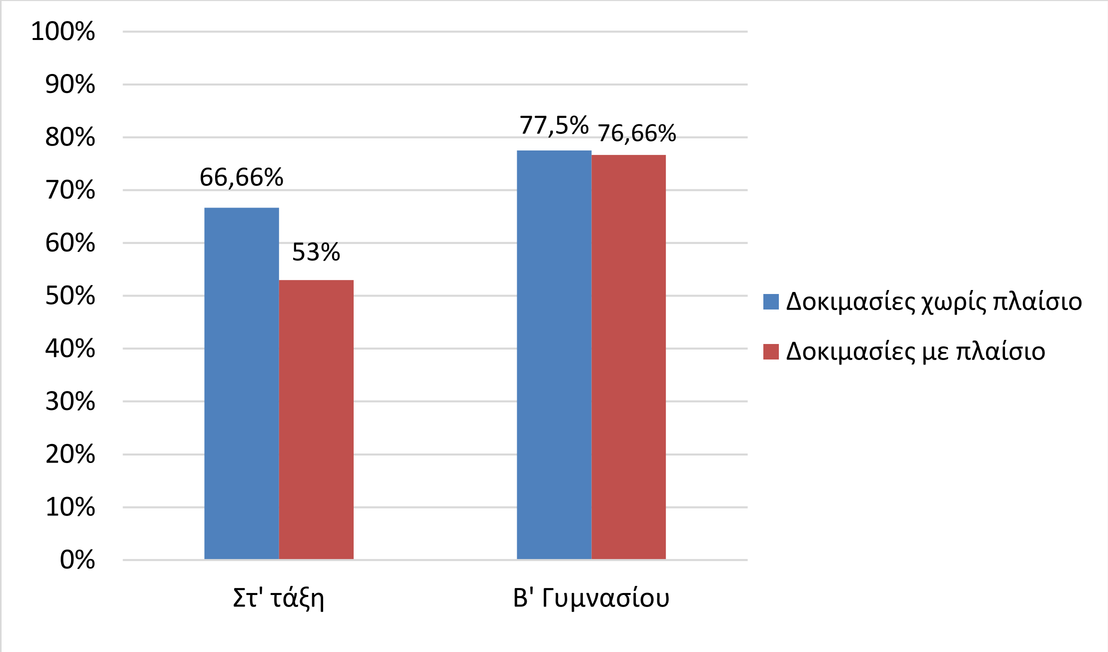
3.2.1. Επίδοση και ύπαρξη ή απουσία πλαισίου

Προκειμένου να ελεγχθεί αν η ύπαρξη πλαισίου στις δοκιμασίες επηρεάζει την επίδοση των μαθητών, εφαρμόστηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την παρουσία ή μη πλαισίου ($t(41) = 2{,}148$, $p < .05$). Ειδικότερα, οι συμμετέχοντες πέτυχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο έναντι εκείνων με πλαίσιο (71,83% και 64,33%, αντίστοιχα).

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Στ΄ τάξης, τα οποία βρέθηκαν να έχουν στατιστικά σημαντικά περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο ($t(21) = 2{,}324$, $p < .05$) σε σχέση με τις δοκιμασίες με πλαίσιο. Ωστόσο, τέτοιες διαφορές δεν παρατηρήθηκαν για τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου ($t(19) = .271$, $p = .395$), τα οποία εμφάνισαν παρόμοια επίδοση στις δοκιμασίες με πλαίσιο και στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο. Τα δεδομένα αυτά αποτυπώνονται στο Γράφημα 3.

3.2.2. Επίδοση και είδος των δοκιμασιών

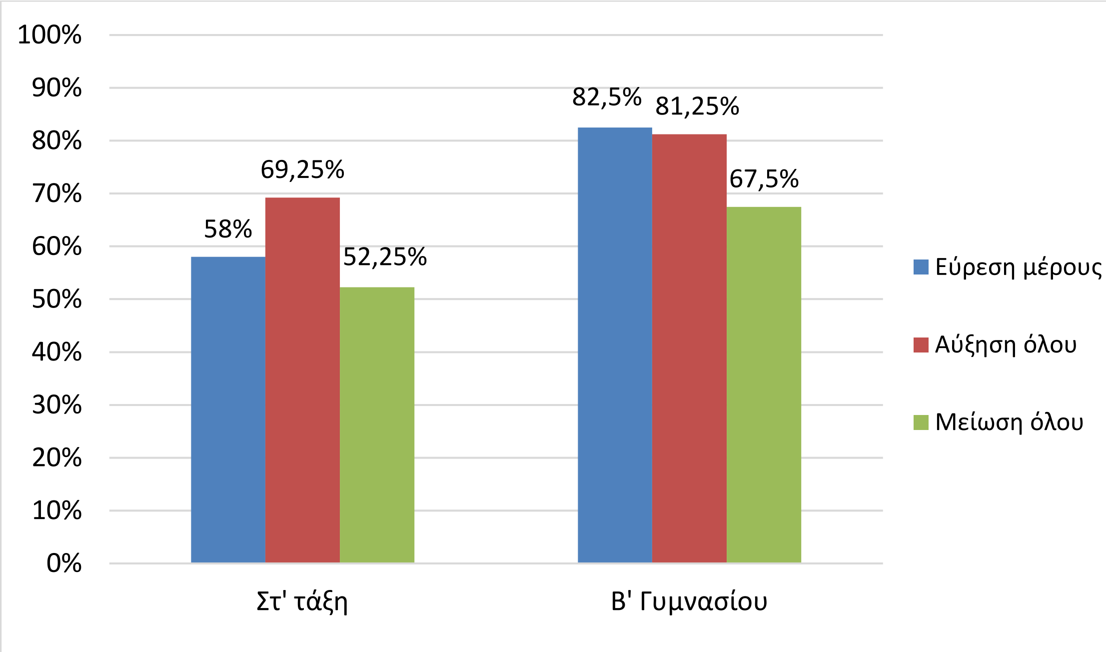
Με σκοπό να εξεταστεί αν η συνολική επίδοση των συμμετεχόντων εξαρτάται από το είδος των δοκιμασιών (εύρεσης μέρους, αύξησης όλου, μείωσης όλου), διενεργήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε ότι οριακά δεν



Γράφημα 3: Επίδοση ως προς την παρουσία πλαισίου και την ηλικιακή ομάδα

υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση των παιδιών στις δοκιμασίες εύρεσης μέρους και την επίδοση στις δοκιμασίες αύξησης όλου ($t(41) = -1,502$, $p = .070$). Αντιθέτως, σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές τόσο ανάμεσα στην επίδοσή των παιδιών στις δοκιμασίες εύρεσης μέρους και τις δοκιμασίες μείωσης όλου ($t(41) = 2,473$, $p < .01$) όσο και ανάμεσα στην επίδοσή τους στις δοκιμασίες μείωσης όλου και τις δοκιμασίες αύξησης όλου ($t(41) = 3,877$, $p < .001$). Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες εκτέλεσαν περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες αύξησης όλου (75%) και λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες μείωσης όλου (59,5%).

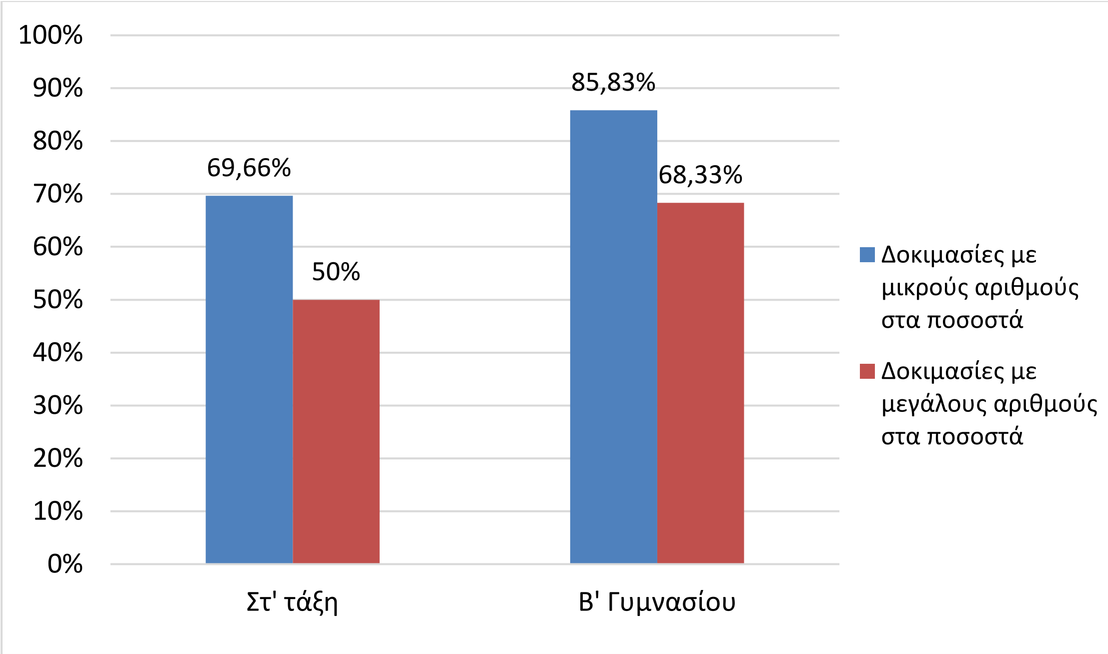
Επιπλέον, η ίδια διαδικασία πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα επαληθεύοντας τα προαναφερθέντα αποτελέσματα στο σύνολό τους για τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου και εν μέρει για τα παιδιά της Στ΄ τάξης. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοσή τους τόσο ανάμεσα στις δοκιμασίες εύρεσης μέρους και τις δοκιμασίες μείωσης όλου ($t(19) = 2,565$, $p < .05$) όσο και μεταξύ δοκιμασιών μείωσης όλου και αύξησης όλου ($t(19) = 2,773$, $p < .01$). Παρόμοια, η επίδοση των μαθητών της Στ΄ τάξης διαφοροποιήθηκε στατιστικά σημαντικά ανάμεσα στις δοκιμασίες μείωσης όλου και τις δοκιμασίες αύξησης όλου ($t(21) = 2,732$, $p < .01$) και, επιπρόσθετα, μεταξύ δοκιμασιών εύρεσης μέρους και αύξησης όλου ($t(21) = -1,936$, $p < .05$). Συμπερασματικά, οι δοκιμασίες μείωσης όλου συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων κάθε ηλικιακής ομάδας (58% για την Στ΄ τάξη και 67,5% για τη Β΄ Γυμνασίου), όπως απεικονίζεται στο Γράφημα 4. Για τα παιδιά της Στ΄ τάξης, οι δοκιμασίες αύξησης όλου ήταν αυτές στις οποίες τα πήγαν καλύτερα, ενώ τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου δεν εμφάνισαν διαφορές στις επιδόσεις τους ανάμεσα στις δοκιμασίες εύρεσης μέρους και τις δοκιμασίες αύξησης όλου.



Γράφημα 4: Επίδοση ως προς το είδος των δοκιμασιών και την ηλικιακή ομάδα

3.2.3. Επίδοση και μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά

Για να διερευνηθεί αν το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν στα ποσοστά (αριθμοί μεγαλύτεροι ή μικρότεροι του 50%) διαφοροποίησε την επίδοση των παιδιών συνολικά, εφαρμόστηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις ανάλογα με το μέγεθος των ποσοστών που περιλαμβάνονταν στην εκάστοτε δοκιμασία ($t(41) = 5{,}975$, $p < .001$). Δηλαδή, οι συμμετέχοντες διευκολύνθηκαν στην επίλυση δοκιμασιών με μικρά ποσοστά, κάτω του 50%, παρά σε δοκιμασίες με μεγάλα ποσοστά, άνω του 50% (77,33% και 58,66%, αντίστοιχα). Όπως φαίνεται στο Γράφημα 5, η επανάληψη της ίδιας ανάλυσης ξεχωριστά για την Στ΄ τάξη και τη Β΄ Γυμνασίου επιβεβαίωσε τα προηγούμενα αποτελέσματα ($t(21) = 4{,}695$, $p < .001$ και $t(19) = 3{,}679$, $p < .001$, αντίστοιχα).



Γράφημα 5: Επίδοση ως προς το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά και την ηλικιακή ομάδα

3.3. Στρατηγικές των συμμετεχόντων

3.3.1. Περιγραφή στρατηγικών

Ανεξάρτητα από το αν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες ήταν σωστές ή λανθασμένες, ζητήθηκε από αυτούς να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Οι αιτιολογήσεις αυτές αναδεικνύουν τις στρατηγικές που υιοθέτησαν. Αυτές κωδικοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν σε έξι κατηγορίες:

<u>1: «Χωρίς αιτιολόγηση».</u> Στην κατηγορία αυτή συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που αδυνατούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους (π.χ., «Γιατί έτσι», «Δεν ξέρω») ή θεωρούσαν πως κατέληξαν τυχαία σε μια εκτίμηση (π.χ., «Το είπα στην τύχη»).

<u>2: «Ακριβής υπολογισμός - πρόσθεση/αφαίρεση».</u> Η συγκεκριμένη στρατηγική αφορά στην εκτέλεση του τυπικού αλγόριθμου της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης νοερά. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία 3 του Έργου 1 («Πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%;»), ένας μαθητής της Στ΄ τάξης πρόσθεσε νοερά το 750 με το 14 και απάντησε «Είναι 764».

3: «Ακριβής υπολογισμός - απλή μέθοδος των τριών». Όσοι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν αυτή την στρατηγική, πραγματοποίησαν εκτιμήσεις με αλγοριθμικό τρόπο αξιοποιώντας την απλή μέθοδο των τριών. Ενδεικτικός είναι ο τρόπος σκέψης ενός μαθητή της Β΄ Γυμνασίου στη δοκιμασία 2 του Έργου 1 («Εκτιμήστε το 21% του 300»). Ο συμμετέχων είπε ότι «Στα 100 είναι 21. Στα 300 είναι x.» και έλυσε ως προς το x πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τα παραπάνω ποσά με τον νου, δηλαδή «100 · x = 21 · 300. Άρα, $x = 21 \cdot \frac{300}{100}$. Διαιρώ το 300 με το 100, οπότε x = 21 · 3». Στο τέλος απάντησε «Είναι 63».

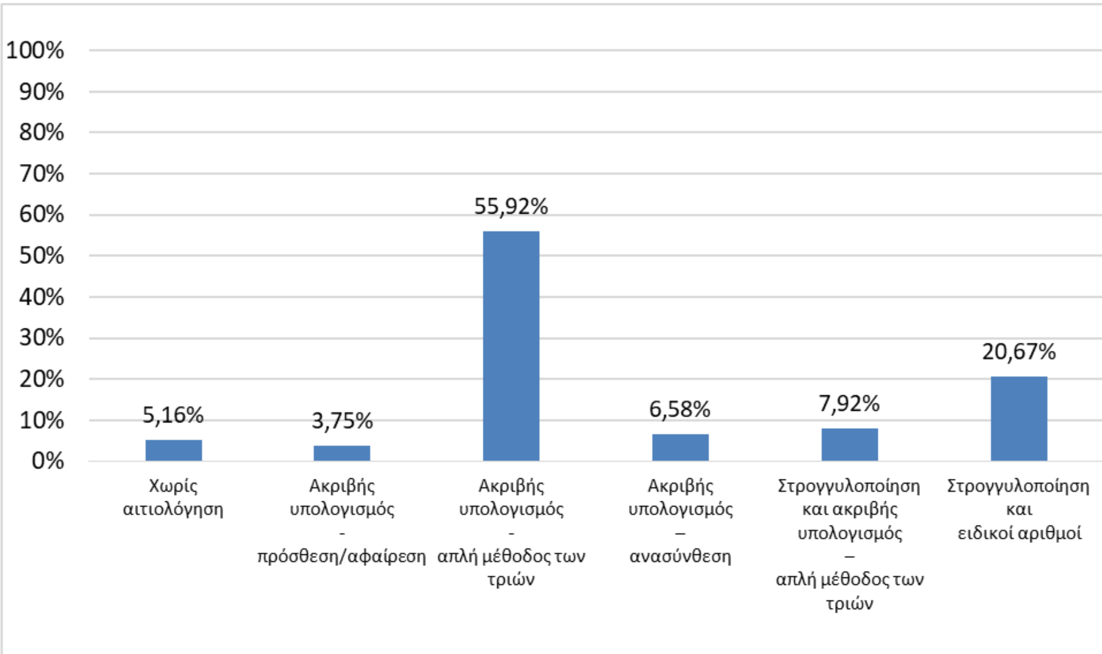
4: «Ακριβής υπολογισμός – ανασύνθεση του ποσοστού». Οι εκτιμητές που προτίμησαν τη στρατηγική της ανασύνθεσης μετέτρεψαν τον έναν ή και τους δύο αριθμούς της εκάστοτε δοκιμασίας σε περισσότερο διαχειρίσιμη μορφή, ώστε να εκτελέσουν στη συνέχεια έναν ακριβή υπολογισμό με μεγαλύτερη ευχέρεια. Παραδείγματος χάριν, μία μαθήτρια της Στ΄ τάξης στη δοκιμασία 5 του Έργου 1 («Εκτιμήστε πόσο είναι το 800 αν μειωθεί 26%) σκέφτηκε «Το 26% ισούται με 10% + 10% + 5% + 1%». Έπειτα, υπολόγισε κάθε ποσοστό ξεχωριστά λέγοντας «Το 10% του 800 είναι $\frac{10}{100} \cdot 800 = \frac{8000}{100} = 80$, το 5% του 800 είναι $\frac{5}{100} \cdot 800 = \frac{4000}{100} = 40$, και το 1% του 800 είναι $\frac{1}{100} \cdot 800 = \frac{800}{100} = 8$. Άρα, το 26% του 800 είναι 80 + 80 + 40 + 8 = 208». Στη συνέχεια, αφαίρεσε το 208 από το 800 και απάντησε «Είναι 592».

5: «Στρογγυλοποίηση και ακριβής υπολογισμός – απλή μέθοδος των τριών». Επιλέγοντας τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, οι μαθητές μετέτρεπαν τα ποσοστά στην πλησιέστερη δεκάδα και, έπειτα, χρησιμοποιούσαν τον νέο αριθμό για την επίτευξη μιας εκτίμησης με αλγοριθμικό τρόπο μέσω της απλής μεθόδου των τριών. Για παράδειγμα, μια μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου στη δοκιμασία 4 του Έργου 2 («Ένα λιοντάρι στο ζωολογικό κήπο του Λονδίνου ζυγίζει 200 κιλά. Ένας γορίλας στο ίδιο πάρκο ζυγίζει 64% περισσότερο. Πόσα περίπου κιλά είναι ο γορίλας;») σκέφτηκε «Το 64% είναι περίπου 60%.» και, έπειτα, ακολούθησε την απλή μέθοδο των τριών. Πιο συγκεκριμένα, είπε «Στα 100 είναι 60. Στα 200 είναι x. Άρα, 100 · x = 60 · 200. Άρα, $x = 60 \cdot \frac{200}{100}$. Διαιρώ το 200 με το 100, οπότε x = 60 · 2 = 120». Στο τέλος, πρόσθεσε το 120 στο 200 δίνοντας ως απάντηση το «320».

6: «Στρογγυλοποίηση και ειδικοί αριθμοί». Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης υλοποιείται και σε αυτήν την κατηγορία όπως στην κατηγορία 5. Δηλαδή, τα ποσοστά στρογγυλοποιούνταν στην πλησιέστερη δεκάδα και, ακολούθως, αξιοποιούνταν αριθμητικά σημεία αναφοράς, όπως το 50% ή το $\frac{1}{4}$, καταλήγοντας σε μία εκτίμηση. Παραδείγματος χάρη, μια μαθήτρια της Στ΄ τάξης στη δοκιμασία 4 του Έργου 1 κλήθηκε να εκτιμήσει το 300 αν αυξηθεί 62%. Σκέφτηκε «Το 62% είναι περίπου 60%. Πρώτα, θα βρω το 50% του 300 που είναι το μισό, δηλαδή 150. Οπότε, το 60% είναι περίπου 180, γιατί το 60% είναι λίγο παραπάνω από το 50%.». Στο τέλος, πρόσθεσε το 180 με το 300 καταλήγοντας στο «480».

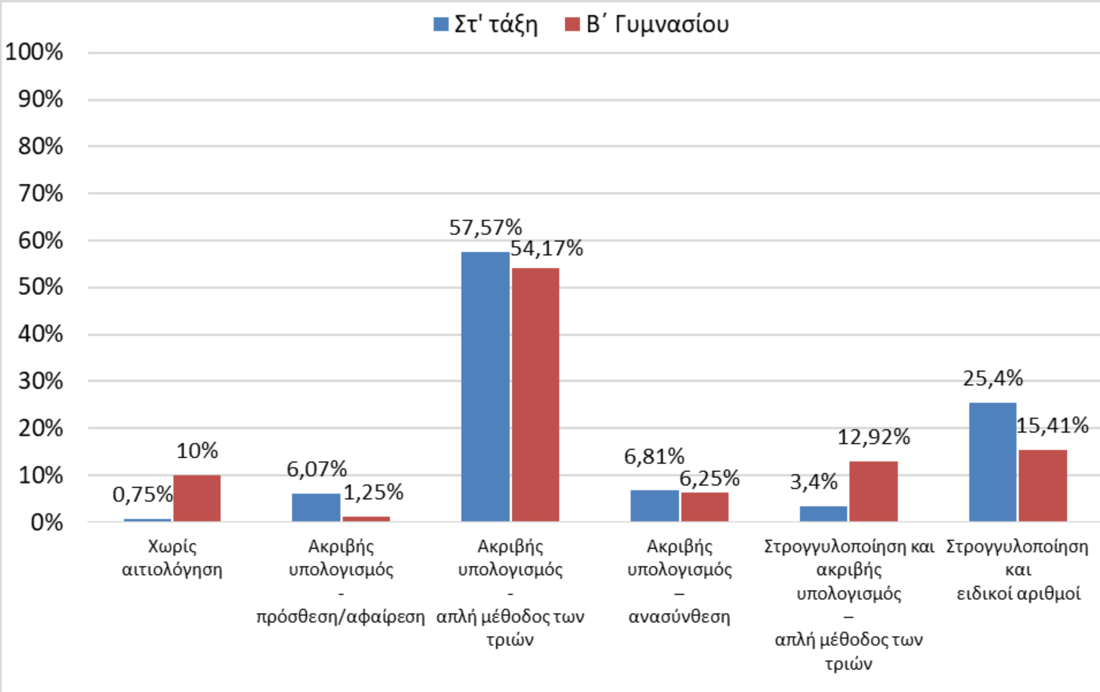
3.3.2. Συχνότητα χρήσης στρατηγικών

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τη συχνότητα χρήσης των στρατηγικών από τους συμμετέχοντες ανέδειξαν τη στρατηγική «Ακριβής υπολογισμός με απλή μέθοδο των τριών» (στρατηγική 3) ως τη δημοφιλέστερη όλων (55,92%), ανεξαρτήτως της ηλικίας των μαθητών, και τη στρατηγική «Στρογγυλοποίηση και ειδικοί αριθμοί» (στρατηγική 6) να έπεται με ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό χρήσης (20,67%), όπως φαίνεται στο Γράφημα 6. Ειδικότερα, τα παιδιά της Στ΄ τάξης επέλεξαν κυρίως τη στρατηγική 3 και, δευτερευόντως, τη στρατηγική 6, ενώ τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου προτίμησαν κατά κόρον τη στρατηγική 3 και, στη συνέχεια, υιοθέτησαν σχεδόν ισόποσα τις στρατηγικές 6, 5 («Στρογγυλοποίηση και ακριβής υπολογισμός με απλή μέθοδο των τριών») και 1 («Χωρίς αιτιολόγηση»).



Γράφημα 6: Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών από το σύνολο των συμμετεχόντων

Προκειμένου να ελεγχθεί αν η συχνότητα χρήσης καθεμίας στρατηγικής διαφέρει ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι οι προτιμήσεις των συμμετεχόντων διαφοροποιήθηκαν ως προς την ηλικία για τη στρατηγική 1 ($t(40) = -1{,}400$, $p < .01$), τη στρατηγική 2 ($t(40) = 1{,}093$, $p < .05$), τη στρατηγική 5 ($t(40) = -1{,}676$, $p < .01$) και τη στρατηγική 6 ($t(40) = 1{,}070$, $p < .05$). Πιο συγκεκριμένα, οι στρατηγικές 1 και 5 χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο από τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου, ενώ οι στρατηγικές 2 και 6 αξιοποιήθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό από την Στ΄ τάξη. Αντίθετα, οι στρατηγικές 3 και 4 ($t(40) = .256$, $p = .577$ και $t(40) = .121$, $p = .880$, αντίστοιχα) χρησιμοποιήθηκαν με παρόμοια συχνότητα από τις δύο ηλικιακές ομάδες. Τα παραπάνω στοιχεία φαίνονται αναλυτικά στο Γράφημα 7 που ακολουθεί.



Γράφημα 7: Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.4. Χρήση στρατηγικών και επιτυχία στις δοκιμασίες

Με σκοπό να εξεταστεί αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στη χρήση καθεμίας στρατηγικής και την επιτυχία στις εκτιμήσεις, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχέτισης (Pearson Correlation). Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχει αρνητική συνάφεια ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής «Ακριβής υπολογισμός - πρόσθεση/αφαίρεση» (στρατηγική 2) και τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων (*Pearson's r* =

-,313, *p* < .05). Δηλαδή, όσο περισσότερο οι συμμετέχοντες επέλεγαν να εκτελούν προσθέσεις ή αφαιρέσεις με ακρίβεια ακολουθώντας τον αλγόριθμο τόσο περισσότερο έτειναν να παράγουν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις. Αρνητική συσχέτιση επίσης βρέθηκε ανάμεσα στη χρήση της ίδιας στρατηγικής και την επίδοση σε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (*Pearson's r* = -,382, *p* < .05). Δηλαδή, η χρήση της στρατηγικής του ακριβούς υπολογισμού οδηγούσε σε λανθασμένες εκτιμήσεις. Αντιθέτως, δεν εντοπίστηκε καμία συνάφεια αναφορικά με τη χρήση των υπόλοιπων στρατηγικών. Με άλλα λόγια, η χρήση τους οδηγούσε τους συμμετέχοντες άλλοτε σε επιτυχείς και άλλοτε σε μη επιτυχείς απαντήσεις. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει αναλυτικά αυτά τα στοιχεία.

Πίνακας 2. *Συσχέτιση της χρήσης στρατηγικών και της γενικής επίδοσης*

Στρατηγικές	**Γενική επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών**	**Επίδοση σε δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο**	**Επίδοση σε δοκιμασίες με πλαίσιο**
1. Χωρίς αιτιολόγηση	-,241	-,249	-,209
2. Ακριβής υπολογισμός - πρόσθεση/αφαίρεση	-,313*	-,382*	-,218
3. Ακριβής υπολογισμός - απλή μέθοδος των τριών	-,035	-,102	,029
4. Ακριβής υπολογισμός – ανασύνθεση του ποσοστού	,223	,239	,185
5. Στρογγυλοποίηση και ακριβής υπολογισμός – απλή μέθοδος των τριών	,286	,295	,248
6. Στρογγυλοποίηση και ειδικοί αριθμοί	,082	,201	-,035

**Στατιστική σημαντικότητα στο p < .05*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με ποσοστά και τον ρόλο του πλαισίου σε αυτές. Έπειτα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, αναδείχθηκαν τέσσερα κύρια ευρήματα που απαντούν στα αντίστοιχα ερευνητικά ερωτήματα.

Πρώτον, η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών ήταν ικανοποιητική (68,4%) και δεν επηρεάστηκε από την ηλικία. Με άλλα λόγια, περίπου 7 στους 10 μαθητές της Στ΄ τάξης και της Β΄ Γυμνασίου φάνηκε να διαθέτουν σε ικανοποιητικό βαθμό την ικανότητα για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ποσοστά. Παρόμοια αποτελέσματα είχαν αναδείξει οι Liu και Neber (2012) για την επίδοση των μαθητών σε έργα προσεγγιστικών υπολογισμών με κλάσματα. Ωστόσο, αντίθετα αποτελέσματα έχουν σημειωθεί από τους Aytekin και Toluk Uçar (2014), στην έρευνα των οποίων οι μαθητές σε έργα υπολογιστικών εκτιμήσεων με κλάσματα παρουσίασαν χαμηλή επίδοση (35%). Σε έρευνες που περιλάμβαναν τόσο εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς όσο και εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς, οι μισοί (Tsao & Pan, 2011) και λιγότεροι από τους μισούς μαθητές αδυνατούσαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις είτε με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα (Bana & Dolma, 2004· Desli & Lioliou, 2020· Dolma, 2002) είτε με ποσοστά και αναλογίες (Dolma, 2002) σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς. Σε ορισμένες, μάλιστα, περιπτώσεις η επίδοση των μαθητών σε έργα κατ' εκτίμηση υπολογισμών με ρητούς αριθμούς ήταν ιδιαίτερα χαμηλή, όπως στην έρευνα της Χαλεπάκη (2016), όπου μόνο ένα στα πέντε παιδιά κατέληγε σε επιτυχή εκτίμηση με δεκαδικούς αριθμούς.

Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι η συνολική επίδοση των παιδιών δεν διαφοροποιήθηκε από την ηλικία δείχνει ότι οι εκτιμήσεις με ποσοστά πραγματοποιούνται με παρόμοιο τρόπο τόσο από τα παιδιά της Στ΄ τάξης όσο και από τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου. Αν και η μη εύρεση ηλικιακών διαφορών αντιτίθεται με αρκετά από τα ευρήματα πρωτύτερων ερευνών, στις οποίες είχε βρεθεί ότι η ικανότητα πραγματοποίησης κατ' εκτίμηση υπολογισμών βελτιώνεται με την πάροδο του χρόνου και την ηλικιακή ωρίμανση (Desli & Lioliou, 2020· LeFevre et al., 1993· Lemaire & Lecacheur, 2002, 2011· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Sekeris et al., 2020· Sekeris et al., 2019· Siegler & Booth, 2005), αυτή η ομοιότητα στην επίδοση των παιδιών μπορεί να εξηγείται από δύο λόγους. Πρώτον, μπορεί να οφείλεται στην παρόμοια εξοικείωση που έχουν οι μαθητές των δύο τάξεων με τα ποσοστά, δεδομένου ότι πρόκειται για μία μαθηματική έννοια η οποία στο ελληνικό ΑΠΣ (2003) για τα Μαθηματικά εισάγεται στην Ε΄ Δημοτικού, διδάσκεται εκτενέστερα και πιο συστηματικά στην Στ΄ Δημοτικού και επαναλαμβάνεται στην Α΄ Γυμνασίου. Ένας δεύτερος λόγος για αυτή την ομοιότητα αποτελεί ο τρόπος διδασκαλίας των ποσοστών, που είναι συχνά παρόμοιος και παραπέμπει σε ακριβείς υπολογισμούς, γεγονός που, όπως φαίνεται από τις στρατηγικές που θα αναφερθούν στη συνέχεια, έχει μεγάλη επίδραση στις εκτιμήσεις των παιδιών.

Αν και δε βρέθηκαν ηλικιακές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων, οι δύο ηλικιακές ομάδες επηρεάστηκαν διαφορετικά από την παρουσία του πλαισίου. Πιο συγκεκριμένα, ενώ οι μαθητές της Στ΄ τάξης κατέληξαν σε λιγότερες επιτυχείς εκτιμήσεις στις δοκιμασίες με πλαίσιο (53%) παρά σε εκείνες χωρίς πλαίσιο (66,6%), για τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου δεν φάνηκε να ισχύει κάτι τέτοιο. Δηλαδή, εμφάνισαν παρόμοια επιτυχία στις δοκιμασίες με πλαίσιο (76,6%) και στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (77,5%). Παρεμφερή ευρήματα είχαν αναδείξει οι Δεσλή και Παπαχρήστος (2019), στην έρευνα των οποίων η επίδοση σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς ήταν ανεξάρτητη από την παρουσία ή την απουσία σεναρίου. Ενδεχομένως, ο λόγος που οι μαθητές της Στ΄ τάξης δυσκολεύτηκαν στην επίλυση πλαισιωμένων προβλημάτων είναι η αδυναμία τους να ερμηνεύσουν τις πληροφορίες από το συγκείμενο ενός προβλήματος για να προβούν στους κατάλληλους υπολογισμούς (Yang & Wu, 2012), τους οποίους τείνουν να πραγματοποιούν με τη χρήση τυπικών αλγόριθμων (Δεσλή, 2021). Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, όντας πιο ώριμοι και έμπειροι στη διαχείριση προβλημάτων, μπορούν να κατανοήσουν το πλαίσιο ενός προβλήματος και να αντλήσουν τις αριθμητικές πληροφορίες που χρειάζονται για την εύρεση του ζητούμενου.

Το παραπάνω εύρημα προστίθεται στα αντιφατικά δεδομένα που έχουν καταγραφεί στην ερευνητική βιβλιογραφία για τον ρόλο του πλαισίου. Υπάρχουν έρευνες που δείχνουν ότι η παρουσία του πλαισίου ευνοεί την εκτέλεση των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Για παράδειγμα, οι Liu και Neber (2012) βρήκαν ότι οι μαθητές παράγουν επιτυχέστερες εκτιμήσεις με κλάσματα όταν τα προβλήματα διαθέτουν σενάριο. Το εύρημα αυτό ενισχύει τη θέση της Irwin (2001) υπέρ της αξιοποίησης ρεαλιστικών καταστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών καθώς, όπως διαπίστωσε στην έρευνά της, η εμπλοκή των παιδιών σε διδακτικές παρεμβάσεις με πλαισιωμένα προβλήματα βελτίωσε την ικανότητά τους στη διαχείριση των δεκαδικών αριθμών. Άλλες έρευνες, ωστόσο, δείχνουν ότι η ύπαρξη σεναρίου επηρεάζει αρνητικά την επιτυχία των παιδιών σε έργα αίσθησης του αριθμού και υπολογιστικών εκτιμήσεων. Όπως εξηγούν οι Yang και Li (2008), τις περισσότερες φορές οι μαθητές στηρίζονται μόνο στα αριθμητικά δεδομένα ενός προβλήματος και δε λαμβάνουν υπόψη τους το πλαίσιο, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λανθασμένους υπολογισμούς. Η αδυναμία των παιδιών να κατανοήσουν το πλαίσιο έχει βρεθεί και από τους Can και Özdemir (2020), οι οποίοι, μελετώντας την αίσθηση του αριθμού, παρατήρησαν ότι οι μαθητές παρουσίασαν καλύτερη επίδοση σε μη πλαισιωμένα προβλήματα με κλάσματα και φυσικούς αριθμούς. Παρόμοια ήταν τα ευρήματα της έρευνας του Liu (2009), στην οποία τα παιδιά εκτίμησαν καλύτερα τα γινόμενα φυσικών αριθμών σε προβλήματα χωρίς πλαίσιο παρά σε λεκτικά προβλήματα.

Ένα τρίτο σημαντικό εύρημα που προκύπτει είναι ότι το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών στα ποσοστά αναδείχθηκε καθοριστικός παράγοντας για την επιτυχία των συμμετεχόντων. Αναλυτικότερα, τα μικρά ποσοστά, κάτω του 50%, ευνόησαν τις εκτιμήσεις των μαθητών και των δύο τάξεων (77,3%) έναντι των μεγάλων ποσοστών, πάνω του 50%, που δυσκόλεψαν τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς των παιδιών (58,6%). Το συγκεκριμένο εύρημα συμφωνεί με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Dowker, 1997· Liu, 2009· Sekeris et al., 2020) που επισημαίνουν ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών τόσο αυξάνεται ο βαθμός δυσκολίας των προβλημάτων και, συνεπώς, μειώνεται η επιτυχία σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων. Πιθανώς, αυτή η διαφορά ανάμεσα στα μικρά και τα μεγάλα ποσοστά εξηγείται από το γεγονός ότι οι μικρότεροι αριθμοί είναι πιο διαχειρίσιμοι και οδηγούν τους μαθητές σε επιτυχέστερους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς καθώς, πολλές φορές, οι μεγαλύτεροι αριθμοί δυσχεραίνουν τις πράξεις (van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Τέλος, οι στρατηγικές που εφαρμόστηκαν περισσότερο από τους συμμετέχοντες ήταν στην πλειοψηφία τους διαδικαστικές (περίπου 75%), δηλαδή ήταν στρατηγικές που βασίζονται στη χρήση τυποποιημένων αλγόριθμων, όπως οι στρατηγικές «Ακριβής υπολογισμός-πρόσθεση/αφαίρεση» (στρατηγική 2), «Ακριβής υπολογισμός-Απλή μέθοδος των τριών» (στρατηγική 3), «Ακριβής υπολογισμός-ανασύνθεση του ποσοστού» (στρατηγική 4) και «Στρογγυλοποίηση και ακριβής υπολογισμός-απλή μέθοδος των τριών» (στρατηγική 5). Με άλλα λόγια, 3 στους 4 μαθητές, παρόλο που τους ζητήθηκε να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις, κατέφυγαν σε ακριβείς υπολογισμούς νοερά, με διαφορές όμως στην αξιοποίησή τους (π.χ., απλή μέθοδος των τριών, πρόσθεση/αφαίρεση, ανασύνθεση, στρογγυλοποίηση). Για ορισμένους ερευνητές οι στρατηγικές που στηρίζονται σε αλγόριθμους δεν συνιστούν στρατηγικές εκτίμησης (Lemonidis & Likidis, 2019). Η αγκίστρωση των παιδιών σε αλγοριθμικές μεθόδους μαρτυρείται από πλήθος ερευνών (Γκάτζιου & Μισαηλίδου, 2019· Can & Özdemir 2020· Cochran & Dugger, 2013· Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014· Neil, 2005· Yang & Wu, 2012) και μπορεί να εξηγηθεί από την έμφαση που δίνεται στη διαδικαστική γνώση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές, δηλαδή, νιώθουν μεγαλύτερη ασφάλεια με τη χρήση κανόνων και αλγόριθμων λόγω της εμπειρίας που έχουν αποκτήσει κατά την επίλυση προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου, όπου προτείνεται κατά κόρον η αξιοποίηση μηχανικών στρατηγικών.

Πολύ λιγότερο χρησιμοποιήθηκαν οι εννοιολογικές στρατηγικές (20,6%), δηλαδή εκείνες που στηρίζονται στην αίσθηση του αριθμού, όπως η «Στρογγυλοποίηση και ειδικοί αριθμοί» (στρατηγική 6). Παρόλο που οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων υιοθέτησαν παρόμοιες στρατηγικές για την εκτέλεση των κατ' εκτίμηση υπολογισμών, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σχεδόν 1 στους 4 μαθητές της Στ΄ τάξης χρησιμοποίησε τη στρατηγική «Στρογγυλοποίηση και ειδικοί αριθμοί» βασιζόμενος στην αίσθηση του αριθμού. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί ένδειξη της τάσης των μαθητών να εγκαταλείπουν με την πάροδο του χρόνου τις εννοιολογικές στρατηγικές και να προσκολλώνται σε ακριβείς υπολογισμούς, όπως, άλλωστε, μαρτυρείται από τις έρευνες των LeFevre et al. (1993) και Liu (2009). Ενδεχομένως, η προσήλωση της διδασκαλίας των μαθηματικών στη μηχανιστική γνώση, η οποία εντείνεται από βαθμίδα σε βαθμίδα εκπαίδευσης, οδηγεί τα παιδιά των μεγαλύτερων τάξεων στη χρήση αυτοματοποιημένων διαδικασιών, ενώ εκείνα των μικρότερων τάξεων βασίζονται κυρίως σε διαισθητικές στρατηγικές, προκειμένου να νοηματοδοτήσουν τα αριθμητικά δεδομένα και να διευκολύνουν τους υπολογισμούς τους.

Η παρούσα έρευνα σχετικά με τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των παιδιών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων με ποσοστά διεξήχθη κατά την ισχύ των υγειονομικών μέτρων λόγω της πανδημίας «COVID-19». Οι τότε επικρατούσες συνθήκες δυσκόλεψαν την πρόσβαση στη συλλογή δεδομένων, οπότε το δείγμα της έρευνας ήταν σχετικό μικρό και βολικό. Η επανάληψή της σε ένα μεγαλύτερο δείγμα ατόμων, από διαφορετικές περιοχές της Ελλάδας, θα επέτρεπε την εκτενέστερη μελέτη των ευρημάτων και, κατ' επέκταση, τη γενίκευσή τους για τον ευρύτερο μαθητικό πληθυσμό.

Αν και τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έρχονται να συμπληρώσουν ένα κενό σχετικά με την έρευνα για τις εκτιμήσεις και τα ποσοστά, υπάρχει ανάγκη και ερευνητικό ενδιαφέρον για περαιτέρω έρευνα. Για παράδειγμα, θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί η ικανότητα των ατόμων στην πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων σε καταστάσεις που χρησιμοποιούνται διαφορετικά είδη ρητών αριθμών (π.χ., ποσοστά, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί) προκειμένου να διευκρινιστεί αν το είδος των ρητών αριθμών επηρεάζει τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Επίσης, ιδιαίτερα σημαντικό θα ήταν να μελετηθούν οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των μαθητών ύστερα από την εμπλοκή τους σε διδακτική παρέμβαση εστιασμένη στις εκτιμήσεις με ποσοστά, ώστε να αποσαφηνιστεί η ύπαρξη ή η απουσία επίδρασης της διδασκαλίας στην επιτυχία των παιδιών για υπολογιστικές εκτιμήσεις. Δεδομένου ότι το ΑΠΣ (2003) δεν προβλέπει τη συστηματική διδασκαλία των εκτιμήσεων, ενδεχομένως μια εστίαση στη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια μπορεί να ενισχύσει και να διευρύνει ακόμη περισσότερο τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα της παρούσας εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Andrews, P., Sunde, P., Nosrati, M., Petersson, J., Rosenqvist, E., Sayers, J. & Xenofontos, C. (2021). Computational estimation and mathematics education: A Narrative Literature Review. *Journal of Mathematics Education. 14*(6), 6-27.

Andrews, P., Xenofontos, C., & Sayers, J. (2021). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. *53*(8), 2199-2225.

Anestakis, P., & Desli, D. (2014). Computational estimation in primary school: tasks proposed for its teaching. *MENON: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue,* 75-89.

Aytekin, C., & Toluk Uçar, Z. (2014). Investigation of middle school students' estimation ability with fractions. *Elementary Education Online, 13*(2), 546-563.

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA.

Boz, B. (2009). *An investigation of seventh grade students' computational estimation strategies and factors associated with them* [Doctoral dissertation]. Retrieved from: http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/3/12611276/index.pdf

Can, D., & Özdemir, İ. E. (2020). An examination of fourth-grade elementary school students' number sense in context-based and non-context-based problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1333–1354.

Cochran, J., & Dugger, M. (2013). Taking the guesswork out of computational estimation. *The Mathematics Educator, 23*(1), 60–73.

Department for Education (2013). *The national curriculum in England: key stages 1 and 2 framework document.*

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), 1-15.

Dolma, P. (2002). *The relationship between estimation skill and computational ability of students in years 5, 7 and 9 for whole and rational numbers* [Master thesis, Edith Cowan University]. Research online. https://ro.ecu.edu.au/theses/742

Dowker, A. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55.

Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition, 3*(2), 140–153.

Dowker, A. (2003). Young children's estimates for addition: The zone of partial knowledge and understanding. In A.J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 243-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fung, M., & Latulippe, C. (2010). Computational estimation. *Teaching Children Mathematics, 17*(3), 170-176.

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense. *The Journal of Special Education, 33*(1), 18–28.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259–280.

Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 399-420.

LeFevre, J.-A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, *11*(2), 95–132.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82(*4), 281–304.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2011). Age-related changes in children's executive functions and strategy selection: A study in computational estimation. *Cognitive Development*, *26*(3), 282-294. doi:10.1016/j.cogdev.2011.01.002

Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research, 2b*, 86-98.

Lemonidis, Ch. & Likidis, N. (2019). An integrated hierarchical model of 5th grade students' computational estimation strategies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*, 1-23.

Lemonidis, Ch., Mouratoglou, A., & Pnevmatikos, D. (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems.. *MENON: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue,* 144-158. Retrieved from http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/menon_issue_1st_special_2014.pdf

Lemonidis, Ch., Nolka, E., & Nikolantonakis, K. (2014). Students' behaviors in computational estimation correlated with their problem-solving ability. *MENON: Journal Of Educational Research, 1st Thematic Issue*, 46-60. Retrieved from http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/menon_issue_1st_special_2014.pdf

Liu, F. (2009). Computational estimation performance on whole-number multiplication by third- and fifth-grade Chinese students. *School Science and Mathematics*, *109*(6), 325–337.

Liu, W. & Neber, H. (2012). Estimation skills of Chinese and Polish grade 6 students on pure fraction tasks. *Journal of Mathematics Education*, *5*(1), 1-14. Retrieved from https://educationforatoz.com/images/1_Weiping_Liu.pdf

Lübke, S. (2015). Investigating fourth graders' conceptual understanding of computational estimation using indirect estimation question. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p.p. 302–308). Prague: CERME.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh, & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp.3-14). Perth: MASTEC.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/281091335

McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(5), 322-327. doi: 10.5951/mtms.2.5.0322

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P. (2010). Computational estimation in the primary school: A single case study of one teacher's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd conference of the Mathematics Education Research Group, Australia* (pp. 407-413). Fremantle,WA: MERGA

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education. Retrieved from http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Neill, A. (2005). Estimation exposed. *Set: Research Information for Teachers*, 1, 48–53. Retrieved from https://www.nzcer.org.nz/system/files/journals/set/downloads/set2005_1_048_0.pdf

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547–557. doi: 10.1086/461383

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., Smith, N., Rogers, A., & Cooke, A., Ewing, B., Robson, K. & Bennett, S. (2017). *Helping children learn mathematics* (2nd ed.). Milton, Queensland: John Wiley & Sons Australia.

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183–201.

Rosenstein, J. G., Caldwell, J. H., & Crown, W. D. (1996*). New Jersey mathematics curriculum framework.* New Brunswick: New Jersey Mathematics Coalition.

Sayers, J., Petersson, R., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2020). Estimation: An inadequately operationalised national curriculum competence. In R. Marks (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (1st ed., Vol. 40, p. Article 14).

Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 499-536.

Sekeris, E., Empsen, M., Verschaffel, L. & Luwel, K. (2020). The development of computational estimation in the transition from informal to formal mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 36*, 845-864.

Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review, 27*(1), 1-14.

Siegel, A.W., Goldsmith, L., & Madson, C.R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 211-232.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197–212). New York: Psychology Press.

Son, J.-W., Hu, Q., & Lim, W. (2019). Computational estimation skill of preservice teachers: operation type and teacher view. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(5), 682–706.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D, A, Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

Sowder, J. T. & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(*2), 130.

Thompson, A. G. (1979). Estimating and approximating. *School Science and Mathematics, 79*(7), 575–580. doi:10.1111/j.1949-8594.1979.tb13899.x

Treffers, A. (2001). Kindergarten 1 and 2—Growing number sense. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 31–43). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Tsao, Y. L., & Pan, T. R., (2011). Study on the computational estimation performance and computational estimation attitude of elementary school fifth graders in Taiwan. *US-China Education Review, 8*(3), 264–275. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED519565.pdf

Tsao, Y. L., & Pan, T .R. (2013).The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies, 11*, 1-15. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1097140.pdf

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Estimation. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 173–202). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. 7th ed.* Boston: Allyn & Bacon.

van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Yang, D., & Li, M. F. (2008). An investigation of 3rd-grade Taiwanese students' performance in number sense. *Educational Studies, 34*(5), 443–455. doi:10.1080/03055690802288494

Yang, D.-C., & Wu, S.-S. (2012). Examining the differences of the 8th-Graders' estimation performance between contextual and numerical problems. *US-China Education Review A, 12*, 1061–1067. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED539349.pdf

Ελληνόγλωση

Γκάτζιου, Μ. & Μισαηλίδου, Χ. (2019). Επίδοση και στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Στ΄ Δημοτικού σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Στα *Πρακτικά του 36ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας* (σ.σ. 182-195). Λάρισα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών.* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δεσλή, Δ. (2011). Ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Στα *Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. Στο Χ. Λεμονίδης, & Κ. Νικολαντωνάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δεσλή, Δ. & Παπαχρήστος, Γ. (2019). Επίδοση και στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς: ο ρόλος του πλαισίου. Στα *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 285-294). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου και Εν.Ε.Δι.Μ.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις: Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Χαλεπάκη, Γ. (2016). Επίδοση μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς και φοιτητών σε κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. *Επιστήμες Αγωγής,* 43-64. Ανακτήθηκε από https://ejournals.lib.uoc.gr/index.php/edusci/article/view/1205/1098

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΠΡΩΤΟΚΟΛΛΑ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Πρωτόκολλο καταγραφής απαντήσεων των συμμετεχόντων – Σειρά παρουσίασης Α

Α/Α: ____ Φύλο: ____ Ημερομηνία γέννησης: __________

Τάξη: ___ Σειρά παρουσίασης: Α

Έργο 1 (χωρίς πλαίσιο)	**Πώς το βρήκες;**
1. Εκτιμήστε το 82% του 250	
2. Εκτιμήστε το 21% του 300	
3. Εκτιμήστε πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%	
4. Εκτιμήστε πόσο είναι το 300 αν αυξηθεί 62%	
5. Εκτιμήστε πόσο είναι το 800 αν μειωθεί 26%	
6. Εκτιμήστε πόσο είναι το 350 αν μειωθεί 74%	

Έργο 2 **(με πλαίσιο)**	**Πώς το βρήκες;**
1. Σε 150 γραμμάρια σοκολάτας περιέχεται 78% κακάο. Πόσα γραμμάρια περίπου είναι το κακάο που περιέχεται στη σοκολάτα αυτή;	
2. Ο λογαριασμός μιας παρέας σε ένα εστιατόριο της Γαλλίας είναι 200€. Σύμφωνα με τον νόμο, το 18% του λογαριασμού δίνεται ως φιλοδώρημα στους σερβιτόρους. Πόσα περίπου χρήματα θα δοθούν στους σερβιτόρους;	
3. Πέρυσι το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 350€. Φέτος αυξήθηκε 16%. Πόσα περίπου χρήματα είναι φέτος το ενοίκιο αυτού του σπιτιού;	
4. Ένα λιοντάρι στο ζωολογικό κήπο του Λονδίνου ζυγίζει 200 κιλά. Ένας γορίλας στο ίδιο πάρκο ζυγίζει 64% περισσότερο. Πόσα περίπου κιλά είναι ο γορίλας;	
5. Ένας παραγωγός συγκέντρωσε από ένα χωράφι 600 κιλά ροδάκινα. Το 24% αυτών ήταν σάπια. Πόσα περίπου κιλά ροδάκινα του έμειναν;	
6. Στην προηγούμενη απογραφή πληθυσμού οι κάτοικοι ενός απομακρυσμένου χωριού ήταν 250. Κατά την πρόσφατη απογραφή πληθυσμού, οι κάτοικοι του χωριού είναι 76% λιγότεροι. Πόσοι περίπου κάτοικοι ζουν πλέον στο χωριό;	

Πρωτόκολλο καταγραφής απαντήσεων των συμμετεχόντων – Σειρά παρουσίασης Β

Α/Α: ____ Φύλο: ____ Ημερομηνία γέννησης: __________

Τάξη: ___ Σειρά παρουσίασης: Β

Έργο 2 **(με πλαίσιο)**	**Πώς το βρήκες;**
1. Σε 150 γραμμάρια σοκολάτας περιέχεται 78% κακάο. Πόσα γραμμάρια περίπου είναι το κακάο που περιέχεται στη σοκολάτα αυτή;	
2. Ο λογαριασμός μιας παρέας σε ένα εστιατόριο της Γαλλίας είναι 200€. Σύμφωνα με τον νόμο, το 18% του λογαριασμού δίνεται ως φιλοδώρημα στους σερβιτόρους. Πόσα περίπου χρήματα θα δοθούν στους σερβιτόρους;	
3. Πέρυσι το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 350€. Φέτος αυξήθηκε 16%. Πόσα περίπου χρήματα είναι φέτος το ενοίκιο αυτού του σπιτιού;	
4. Ένα λιοντάρι στο ζωολογικό κήπο του Λονδίνου ζυγίζει 200 κιλά. Ένας γορίλας στο ίδιο πάρκο ζυγίζει 64% περισσότερο. Πόσα περίπου κιλά είναι ο γορίλας;	
5. Ένας παραγωγός συγκέντρωσε από ένα χωράφι 600 κιλά ροδάκινα. Το 24% αυτών ήταν σάπια. Πόσα περίπου κιλά ροδάκινα του έμειναν;	
6. Στην προηγούμενη απογραφή πληθυσμού οι κάτοικοι ενός απομακρυσμένου χωριού ήταν 250. Κατά την πρόσφατη απογραφή πληθυσμού, οι κάτοικοι του χωριού είναι 76% λιγότεροι. Πόσοι περίπου κάτοικοι ζουν πλέον στο χωριό;	

Έργο 1 **(χωρίς πλαίσιο)**	**Πώς το βρήκες;**
1. Εκτιμήστε το 82% του 250	
2. Εκτιμήστε το 21% του 300	
3. Εκτιμήστε πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%	
4. Εκτιμήστε πόσο είναι το 300 αν αυξηθεί 62%	
5. Εκτιμήστε πόσο είναι το 800 αν μειωθεί 26%	
6. Εκτιμήστε πόσο είναι το 350 αν μειωθεί 74%	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Εύρος αποδεκτών απαντήσεων

	Δοκιμασία	Ακριβής απάντηση	Αποδεκτές απαντήσεις
Έργο 1 (χωρίς πλαίσιο)	1. Εκτιμήστε το 82% του 250	205	164 - 246
	2. Εκτιμήστε το 21% του 300	63	50,4 - 75,6
	3. Εκτιμήστε πόσο είναι το 750 αν αυξηθεί 14%	855	750 - 1.026[2]
	4. Εκτιμήστε πόσο είναι το 300 αν αυξηθεί 62%	486	388,8 - 583,2
	5. Εκτιμήστε πόσο είναι το 800 αν μειωθεί 26%	592	473,6 - 710,4
	6. Εκτιμήστε πόσο είναι το 350 αν μειωθεί 74%	91	72,8 - 109,2
Έργο 2 (με πλαίσιο)	1. Σε 150 γραμμάρια σοκολάτας περιέχεται 78% κακάο. Πόσα γραμμάρια περίπου είναι το κακάο που περιέχεται στη σοκολάτα αυτή;	117	93,6 - 140,4
	2. Ο λογαριασμός μιας παρέας σε ένα εστιατόριο της Γαλλίας είναι 200€. Σύμφωνα με τον νόμο, το 18% του λογαριασμού δίνεται ως φιλοδώρημα στους σερβιτόρους. Πόσα περίπου χρήματα θα δοθούν στους σερβιτόρους;	36	28,8 - 43,2
	3. Πέρυσι το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 350€. Φέτος αυξήθηκε 16%. Πόσα περίπου χρήματα είναι φέτος το ενοίκιο αυτού του σπιτιού;	406	350 - 487,2[3]
	4. Ένα λιοντάρι στο ζωολογικό κήπο του Λονδίνου ζυγίζει 200 κιλά. Ένας γορίλας στο ίδιο πάρκο ζυγίζει 64% περισσότερο. Πόσα περίπου κιλά είναι ο γορίλας;	328	262,4 - 393,6
	5. Ένας παραγωγός συγκέντρωσε από ένα χωράφι 600 κιλά ροδάκινα. Το 24% αυτών ήταν σάπια. Πόσα περίπου κιλά ροδάκινα του έμειναν;	456	364,8 - 547,2
	6. Στην προηγούμενη απογραφή πληθυσμού οι κάτοικοι ενός απομακρυσμένου χωριού ήταν 250. Κατά την πρόσφατη απογραφή πληθυσμού, οι κάτοικοι του χωριού είναι 76% λιγότεροι. Πόσοι περίπου κάτοικοι ζουν πλέον στο χωριό;	60	48 - 72

[2] Λόγω της ιδιαιτερότητας της συγκεκριμένης δοκιμασίας που ζητά τον υπολογισμό της αύξησης του όλου, σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν εκείνες που είχαν 20% απόκλιση από την ακριβή τιμή και ήταν μεγαλύτερες του 750.

[3] Λόγω της ιδιαιτερότητας της συγκεκριμένης δοκιμασίας που ζητά τον υπολογισμό της αύξησης του όλου, σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν εκείνες που είχαν 20% απόκλιση από την ακριβή τιμή και ήταν μεγαλύτερες του 350.