ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ- ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΝΘΥΝΣΗ: Α’ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία: Μια μελέτη περίπτωσης»

της Κωφού Νατάσας

Α.Ε.Μ. 1017

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή, Αν. Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Χρήστου Κωνσταντίνος, Αν. Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτ. Μακεδονίας

Φλώρινα, 2022

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα Ξένια Βαμβακούση, για την καθοδήγηση και την ηθική υποστήριξη καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Το πάθος της για τη διδακτική των μαθηματικών θα αποτελεί πάντα πηγή έμπνευσης στη διδακτική μου πορεία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα Γεωργία Πήττα, υπ. διδάκτορα του τμήματος Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τις πολύτιμές της συμβουλές, απαραίτητες για την σωστή διεξαγωγή της έρευνας.

Δεν ξέρω πόσα γλυκά είναι αρκετά για την κόρη μου Δέσποινα και τον φίλο της Κωνσταντίνο, χωρίς τους οποίους δεν θα μπορούσα να πραγματοποιήσω την μελέτη αυτή, σε μία δύσκολη περίοδο με μεγάλες προκλήσεις.

Τέλος, είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων για τον σύζυγό μου Γιώργο, για την ηθική συμπαράσταση που μου παρείχε τα τελευταία δύο χρόνια προκειμένου να ολοκληρώσω αυτόν τον κύκλο σπουδών.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 4

1. Θεωρητικό Πλαίσιο 6

1.1 Πολλαπλασιαστική σκέψη 6

1.2 Η πολλαπλασιαστική σκέψη στην πρωτοσχολική ηλικία 7

1.3 Ικανότητες πολλαπλασιαστικού συλλογισμού των παιδιών 9

1.4 Επιδόσεις παιδιών σε έργα πολλαπλασιαστικής σκέψης με διακριτές και συνεχείς ποσότητες 12

1.5 Αναλυτικά Προγράμματα και πολλαπλασιαστική σκέψη 16

1.6 Η χρήση της γλώσσας και η επίδραση της στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης 18

1.7 Διδακτικές παρεμβάσεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία 19

2. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα 23

3. Μεθοδολογία 24

3.1 Μέθοδος 24

3.2 Διαδικασία 24

3.3 Ερευνητικά Εργαλεία 26

3.3.1 Προέλεγχος - Μεταέλεγχος 26

3.4 Περιγραφή, στόχος και άξονες της διδακτικής παρέμβασης 30

3.5 Αναλυτική περιγραφή της παρέμβασης 32

4.Ευρήματα κατά τη διάρκεια της παρέμβασης 38

4.1.Πρώτη Δραστηριότητα 38

4.2.Δεύτερη δραστηριότητα 44

4.3.Τρίτη Δραστηριότητα (Κλασματομηχανή) 50

5. Αποτελέσματα προελέγχου- μεταελέγχου 56

6. Συμπεράσματα- Συζήτηση 77

Βιβλιογραφία 81

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 86

Περίληψη

Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών όσον αφορά την πολλαπλασιαστική σκέψη μέχρι πρόσφατα επικεντρωνόταν στη διαχείριση διακριτών ποσοτήτων και τη δίκαιη μοιρασιά στην πρωτοσχολική ηλικία. Επίσης είναι περιορισμένα τα δεδομένα σχετικά με τα γλωσσικά εργαλεία που μπορούν να αναπτύξουν τα παιδιά σε αυτή την ηλικία μέσα από τον σχεδιασμό των κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εφαρμόσει τρεις δομημένες δραστηριότητες που αφορούν την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Πρόκειται για μια μελέτη περίπτωσης στην οποία συμμετείχαν δύο μαθητές της πρώτης δημοτικού. Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν, βασίστηκαν στους εξής άξονες: α) Οι συνεχείς και οι διακριτές ποσότητες παρουσιάζονται παράλληλα β) εισάγεται το κατάλληλο λεξιλόγιο για την έκφραση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, γ)οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται παράλληλα και δ) εστιάζουν στις ενέργειες του ισομερισμού, της επανάληψης μιας ποσότητας και της διαίρεσης μέτρησης. Κατά τον προέλεγχο η λειτουργική γνώση των παιδιών για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια περιοριζόταν στη χρήση του όρου «μισό» και τον «υπολογισμό» του, ενώ διέθεταν μεγαλύτερη ευχέρεια στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, ενώ απουσίαζαν στρατηγικές ισομερισμού. Κατά τον μεταέλεγχο και τα δύο παιδιά μπόρεσαν να επιλύσουν σχεδόν όλα τα έργα, χρησιμοποιώντας νοερές στρατηγικές. Επίσης ανέπτυξαν τις στρατηγικές ισομερισμού και έδωσαν ορισμούς για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια. Στις συνεχείς ποσότητες και τα δύο παιδιά εξοικειώθηκαν πιο γρήγορα στο σχηματισμό πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων ποσοτήτων περνώντας στη νοερή αναπαράσταση. Η παρούσα μελέτη περίπτωσης επιβεβαιώνει προηγούμενες έρευνες που υποστηρίζουν ότι η χρήση του κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου επιδρά στις επιδόσεις παιδιών γύρω από έργα πολλαπλασιαστικής δομής (Pitta & Vamvakoussi, 2022; Vanluydt, et al., 2021).

Λέξεις κλειδιά: πολλαπλασιαστική σκέψη, διδακτική παρέμβαση, πρωτοσχολική ηλικία, διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

Abstract

Until recently most research on multiplicative thinking has focused on the management of discrete quantities and fair sharing in early childhood. There is also limited data on the vocabulary that children can develop at this age through the design of an appropriate teaching intervention. The purpose of this case study is to implement three teaching activities related to the development of multiplicative thinking in two first grade students. The teaching activities were based on the following axes: a) Continuous and discrete quantities were presented at the same time b) appropriate vocabulary was introduced in order to express the multiplicative relationships between quantities, c) the terms for multiples and submultiples were introduced at the same time and d) they focused on the partitive division, multiplication, and quotitive division tasks. At pre-test, children's knowledge of multiples and submultiples was limited to the use of the term "half", while they had greater fluency in the context of discrete quantities. Strategies of fair sharing were absent. At post-test both children were able to solve almost all the problems using mental strategies. They also developed fair sharing strategies and gave definitions of multiples and submultiples. In continuous quantities, both children became able more quickly in forming multiple and submultiple quantities using mental representations. The present case study confirms previous research that supports the use of appropriate mathematical vocabulary to influence children's performance around multiplicative problems.

Keywords: multiplicative thinking, teaching intervention, early math education, discrete and continuous quantities

Εισαγωγή

Η κοινή άποψη και η πρακτική που επικρατεί ακόμη και σήμερα στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι ότι οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις αποτελούν ένα πολύπλοκο εννοιολογικό πεδίο για αυτό και θα πρέπει να διδάσκονται στα παιδιά αφού πρώτα έχουν διδαχθεί και κατανοήσει πλήρως την πρόσθεση και την αφαίρεση (Nunes & Bryant, 1996; Βαμβακούση και Καλδρυμίδου, 2018). Ένας άλλος λόγος για τον οποίο επικρατεί αυτή η άποψη είναι ότι ο πολλαπλασιασμός απορρέει από την πρόσθεση και αντίστοιχα η διαίρεση από την επαναλαμβανόμενη αφαίρεση. Αυτή η οπτική είναι σωστή έως ενός σημείου. Η πολλαπλασιαστική σκέψη περιλαμβάνει πολλές και πολύπλοκες έννοιες, πέρα από απλούς υπολογισμούς.

Ο Vergnaud (όπως αναφέρεται στο Βαμβακούση και Καλδρυμίδου, 2018) διαχωρίζει το προσθετικό από το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Ενώ πυρήνα του προσθετικού εννοιολογικού πεδίου αποτελεί η καταμέτρηση, στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο περιλαμβάνονται έννοιες και καταστάσεις όπως οι ρητοί αριθμοί, προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής, οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, η μέτρηση, ο λόγος, η αναλογία, χωρίς να εξαντλούνται εδώ, ενώ συνδέονται με διαφορετικές θεματικές περιοχές (π.χ. άλγεβρα, γεωμετρία κ.α.). Οι Nunes & Bryant (1996) διαχωρίζουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις σε τρεις κατηγορίες: α) τις καταστάσεις προβλημάτων πολλαπλής αντιστοιχίας, β) καταστάσεις προβλημάτων που περιέχουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και γ) καταστάσεις διαίρεσης.

Η πολυπλοκότητα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου σε συνδυασμό με την ασυμμετρία υπέρ του προσθετικού πεδίου στη διδασκαλία των μαθηματικών στην πρωτοσχολική ηλικία δημιουργεί συχνές παρανοήσεις στους μαθητές (Bell, Fischbein & Greer, 1984; Graeber, 1993; Van Dooren, Bock, Evers & Verschaffel, 2009). Για παράδειγμα οι Bell et al. (1984) διαπίστωσαν ότι δύο κοινές παρανοήσεις που κυριαρχούν στους μαθητές ηλικίας 12 έως 13 ετών είναι ότι ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει» τους αριθμούς και η διαίρεση τους «μικραίνει».

Οι παραπάνω προβληματισμοί αλλά και η συνεχής έρευνα γύρω από την πολλαπλασιαστική σκέψη των μικρών παιδιών πριν την είσοδό τους στο δημοτικό (Kornelaki & Nunes, 2005; McCrink & Spelke, 2010; 2016; Pitta, Kaldrimidou &

Vamvakoussi, 2020) αποτέλεσαν τη βάση στην οποία στηρίχθηκε η παρούσα εργασία. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση γύρω από την πολλαπλασιαστική σκέψη στην πρωτοσχολική ηλικία, τις ικανότητες και τις στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά, τις διαφορετικές επιδόσεις που παρατηρούνται βάσει του είδους της ποσότητας που καλούνται να διαχειριστούν, τη σημασία των γλωσσικών εργαλείων για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και τα αποτελέσματα διδακτικών παρεμβάσεων που έχουν εφαρμοστεί σε μαθητές.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αφορά τον σχεδιασμό της έρευνας που βασίστηκε στη βιβλιογραφική ανασκόπηση και τη μεθοδολογία της. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα ευρήματα γύρω από τις γνώσεις και τις στρατηγικές των παιδιών πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση των συμπερασμάτων και τη σύνδεσή τους με ευρήματα προηγούμενων ερευνών.

1. Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Πολλαπλασιαστική σκέψη

Η πολλαπλασιαστική σκέψη είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς αφορά ένα πολύπλοκο δίκτυο ενσωματωμένων και συνδεδεμένων μεταξύ τους εννοιών (Hurst & Hurrel, 2016). Είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών όπως τα κλάσματα, η αναλογία, τα ποσοστά, το εμβαδόν, ο όγκος, ή ανάλυση δεδομένων (Hurst & Hurrel, 2016; Mulligan & Watson, 1998).

Οι Siemon & Breed (2006) υπογραμμίζουν μέσα από την έρευνά τους την πολυπλοκότητα της πολλαπλασιαστικής σκέψης ορίζοντας την ως εξής:

- Την ικανότητα να διαχειρίζεται το άτομο με ευελιξία και αποτελεσματικότητα ένα εύρος αριθμών που περιλαμβάνουν μεγάλους σε μέγεθος ακέραιους αριθμούς, κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά.
- Την ικανότητα να αναγνωρίζει και να επιλύει προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικές και αναλογικές καταστάσεις.
- Την αποτελεσματική παρουσίαση των παραπάνω με διαφορετικούς τρόπους π.χ. διαγράμματα, συμβολικές αναπαραστάσεις, γραπτούς αλγόριθμους και κατάλληλο λεξιλόγιο.

Η πολλαπλασιαστική σκέψη αφορά την ικανότητα να εξαγάγει κάποιος συμπεράσματα μέσα από την αντιστοιχία του ένα προς πολλά (Nunes & Bryant, 1996; Nunes, Bryant, Evans & Barros, 2015; Park & Nunes, 2001). Κάποια παραδείγματα αντιστοιχίας ένα προς πολλά από την καθημερινή ζωή είναι ένα αυτοκίνητο με τέσσερις ρόδες, ένα ζευγάρι παπούτσια, κ.ο.κ. (Nunes & Bryant, 1996). Ο βασικός τύπος πολλαπλασιαστικού προβλήματος περιλαμβάνει δύο ποσότητες που συνδέονται με μια σταθερή αναλογία. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα πολλαπλασιαστικής σκέψης είναι το εξής: « Αν σε καθένα από τα 4 σπίτια ζουν 3 σκυλιά, πόσα σκυλιά ζουν σε αυτόν τον δρόμο;». Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικού συλλογισμού μπορεί να δοθεί στα παιδιά η αναλογία και να ζητηθεί το γινόμενο ή να δοθούν οι ποσότητες και να ζητηθεί η αναλογία. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα αφορά τη διαίρεση ισομερισμού μιας ποσότητας π.χ. «Υπάρχουν 20 γλυκά και 4 παιδιά. Πόσα γλυκά θα πάρει το κάθε παιδί;» (Fischbein, Deri, Nello & Marino,1985; Nunes et al., 2015). Στον τρίτο τύπο προβλημάτων πολλαπλασιαστικού συλλογισμού περιλαμβάνεται η διαίρεση μέτρησης, όπου δίνεται ως δεδομένο το μέρισμα και η αναλογία και ζητείται να υπολογιστεί η άλλη ποσότητα, π.χ. « Έχω 8 καρότα και θα δώσω από 2 καρότα στο κάθε κουνέλι. Σε πόσα κουνέλια θα δώσω καρότα;».

1.2 Η πολλαπλασιαστική σκέψη στην πρωτοσχολική ηλικία

Όλο και περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις νωρίτερα, πριν την είσοδό τους στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Barth, Baron, Spelke & Carey, 2009; Boyer, Levin & Huttenlocher, 2008; Charles & Nason, 2000; Jeong, Levine & Huttnelocher, 2008; Kornelaki & Nunes, 2005; McCrink & Spelke, 2010; 2016; Pitta, Kaldrimidou & Vamvakoussi, 2020). Η καταμέτρηση, ο υπολογισμός ενός πλήθους χωρίς καταμέτρηση με το δάχτυλο, η προσθετική και η πολλαπλασιαστική σκέψη αποτελούν ικανότητες ποσοτικοποίησης που φαίνεται να αναπτύσσονται παράλληλα στα παιδιά (Van den Heuvel- Panhuizen & Elia, 2020).

Η πολλαπλασιαστική σκέψη όπως αναφέρθηκε, αφορά την αντιστοιχία του ένα προς πολλά, τη σταθερή σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων (Park & Nunes, 2001). Η πολλαπλασιαστική και η προσθετική σκέψη αποτελούν δύο διαφορετικά εννοιολογικά πεδία, αν και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαδικασία προκειμένου να γίνουν πολλαπλασιαστικοί υπολογισμοί (Nunes & Bryant, 1996; Park & Nunes, 2001). Στην έρευνα των Park & Nunes (2001), μαθητές που φοιτούσαν στη δευτέρα δημοτικού αλλά δεν είχαν διδαχθεί ακόμη τον πολλαπλασιασμό, συμμετείχαν σε δύο ομάδες παρέμβασης. Η πρώτη ομάδα περιελάμβανε μαθητές που διδάχθηκαν τον πολλαπλασιασμό μέσα από προβλήματα τα οποία βασίζονταν στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ενώ η δεύτερη αποτελούνταν από μαθητές που τον διδάχθηκαν μέσα από προβλήματα στα οποία κυριαρχούσε η έννοια της αντιστοιχίας. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την αρχική τους υπόθεση, ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στη δεύτερη ομάδα σημείωσαν σημαντικά μεγαλύτερη πρόοδο γύρω από την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων.

Η κατανόηση της πολλαπλής αντιστοιχίας μελετήθηκε από την Κορνηλάκη (όπως αναφέρεται στο Δεσλή & Κορνηλάκη, 2013) και ειδικότερα κατά πόσο τα παιδιά ηλικίας 5, 6 και 7 ετών μπορούν να σχηματίζουν διαφορετικά πολλαπλασιαστικά γινόμενα. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε κατά πόσο τα παιδιά πιστεύουν ότι πέντε σπιτάκια με τρία κουνελάκια περιέχουν περισσότερα κουνελάκια από ότι πέντε σπίτια με δύο κουνελάκια. Επίσης τα παιδιά έπρεπε να εκτιμήσουν ποιο κέικ ήταν πιο γλυκό, εκείνο που περιείχε τέσσερις κουταλιές της σούπας ζάχαρη ή εκείνο που περιείχε τέσσερις κουταλιές του γλυκού ζάχαρη. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά ήδη από την ηλικία των 5 ετών (89%) έκαναν σωστές εκτιμήσεις επιβεβαιώνοντας ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατανοούν την πολλαπλή αντιστοιχία.

Η ενέργεια της δίκαιης μοιρασιάς εφαρμόζεται από τα παιδιά πριν την είσοδο τους στο σχολείο (Charles & Nason, 2000; Frydman & Bryant, 1988). Οι Frydman & Bryant (1988) μέσα από μια σειρά πειραμάτων παρατήρησαν ότι τα παιδιά, ήδη από 4 χρονών, μπορούν να σχηματίσουν ισομεγέθη μερίσματα μέσω της αντιστοιχίας του ένα προς ένα. Συγκεκριμένα τους ζητήθηκε να μοιράσουν δίκαια καραμέλες σε δύο, τρεις και τέσσεριςκούκλες κάθε φορά. Η δυσκολία των παιδιών αυτών προέκυψε όταν έπρεπε να μοιράσουν μια ποσότητα καραμελών αντιστοιχίζοντας μια διπλάσια σε μέγεθος καραμέλα με δυο μικρές. Παρ’ όλα αυτά οι παρατηρήσεις τους έδειξαν ότι στην ηλικία των 5 ετών, τα παιδιά ήταν σε θέση να πραγματοποιήσουν αυτή την αντιστοίχιση και να δημιουργήσουν ίδιες ποσότητες, αλλά με διαφορετικό πλήθος αντικειμένων.

Οι Barth et al. (2009) μέσα από δοκιμασίες στις οποίες συμμετείχαν παιδιά που φοιτούσαν στο νηπιαγωγείο και στην πρώτη Δημοτικού, διαπίστωσαν ότι μπορούσαν να αναγνωρίσουν τόσο τον διπλασιασμό όσο και τον υποδιπλασιασμό συνεχών και διακριτών ποσοτήτων, προτού διδαχθούν τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση. Πιο συγκεκριμένα τα παιδιά παρακολουθούσαν σε μια οθόνη υπολογιστή 4 μετασχηματισμούς. Πριν τον κάθε μετασχηματισμό, παρουσιαζόταν στο παιδί μια αρχική ποσότητα, διακριτή ή συνεχής, η οποία στη συνέχεια για μερικά δευτερόλεπτα σταματούσε να είναι ορατή. Τότε ακουγόταν ένας ήχος, ο οποίος έδινε το σήμα ότι συνέβαινε κάποιος μετασχηματισμός κατά τον οποίο η ποσότητα διπλασιαζόταν ή διαιρούνταν στο μισό. Στο τέλος οι συμμετέχοντες καλούνταν να κάνουν μια εκτίμηση για το ποια ποσότητα ήταν μεγαλύτερη, χωρίς όμως να φαίνεται η αρχική. Ένα σημαντικό εύρημα αυτής της έρευνας ήταν ότι διαπιστώθηκε η χρήση πολλαπλασιαστικών χειρισμών από μέρους των παιδιών. Αν και στην περίπτωση του διπλασιασμού τα παιδιά μπορεί να χρησιμοποιούσαν προσθετικές στρατηγικές, αυτό δεν ήταν δυνατόν να συμβαίνει στις περιπτώσεις υποδιπλασιασμού. Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώθηκαν από τις McCrink & Spelke (2010) οι οποίες χρησιμοποιώντας το ίδιο ερευνητικό εργαλείο επέκτειναν τις δοκιμασίες περιλαμβάνοντας πιο πολύπλοκα πολλαπλασιαστικά προβλήματα με πολλαπλασιαστέους το 4 και το 2,5, εξακριβώνοντας ότι τα παιδιά δεν περιορίζονται σε προσθετικές στρατηγικές, με τη διαφορά όμως ότι οι ορθές απαντήσεις αφορούσαν τις διακριτές ποσότητες. Αντίστοιχα σε προβλήματα μη συμβολικής διαίρεσης τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών μπορούσαν να αντιληφθούν πότε μια ποσότητα υποδιπλασιαζόταν ή υποτετραπλασιαζόταν (McCrink & Spelke, 2016). Η ευκολία με την οποία τα παιδιά αντιλαμβάνονταν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις από την αρχή των δοκιμασιών σε κάθε έρευνα, ενισχύει τη θεώρηση ότι τα παιδιά αναπτύσσουν την πολλαπλασιαστική σκέψη πολύ πριν τη διδαχθούν στο σχολείο και δεν αποτελεί απόρροια της προσθετικής.

Οι κατάλληλες εμπειρίες που φέρνουν σε επαφή τα παιδιά με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις φαίνεται να ενισχύουν την πολλαπλασιαστική σκέψη τους. Οι Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck (1993) επιχείρησαν να απαντήσουν στο ερώτημα κατά πόσο τα νήπια αποτυγχάνουν να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής λόγω της πολυπλοκότητάς τους ή λόγω έλλειψης αντίστοιχων εμπειριών. Έτσι λοιπόν για 8 μήνες εκπαιδευτικοί παρουσίαζαν ένα εύρος λεκτικών προβλημάτων που περιελάμβαναν προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης σε νήπια. Στο τέλος της παρέμβασης αυτής, η οποία περιείχε κάποιες γενικές κατευθύνσεις στους εκπαιδευτικούς και όχι μια αυστηρή δομή, τα νήπια έδωσαν συνεντεύξεις κατά τις οποίες κλήθηκαν να επιλύσουν μια σειρά προβλημάτων παρουσιάζοντας τις στρατηγικές τους. Από τα 70 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα τα 60 κατάφεραν να επιλύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού χρησιμοποιώντας έγκυρες στρατηγικές και κυρίως την άμεση μοντελοποίηση, τα 51 επίλυσαν σωστά προβλήματα μέτρησης και τα 49 προβλήματα μερισμού.

1.3 Ικανότητες πολλαπλασιαστικού συλλογισμού των παιδιών

Από τη δεκαετία του 1980 κι έπειτα έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες οι οποίες εστίασαν τόσο στην πολυπλοκότητα της πολλαπλασιαστικής σκέψης, όσο και στις στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά προκειμένου να διαχειριστούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, διατυπώνοντας διάφορα μοντέλα ανάπτυξής της (Clark &Kamii, 1996; Fischbein et al., 1985; Jacob &Willis, 2003; Kouba,1989; Mulligan & Mitchelmore,1997).

Οι Fischbein et al. (1985) διερεύνησαν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν 623 μαθητές ηλικίας 10-15 ετών για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης διατυπώνοντας κάποια συγκεκριμένα διαισθητικά μοντέλα που φαίνεται να επιμένουν στη σκέψη των μαθητών σε μη συνειδητό επίπεδο. Η διδασκαλία που προηγείται πιθανόν να έχει τόσο έντονη επίδραση στον τρόπο που σκέφτεται το παιδί, ώστε μετά να του είναι πολύ δύσκολο να ενσωματώσει τις νέες πληροφορίες και να αναδιαμορφώσει τα μοντέλα που ήδη χρησιμοποιεί. Μια άλλη εξήγηση είναι ότι αυτά τα πρωτογενή μοντέλα είναι τόσο δύσκολο να αλλάξουν καθώς ανταποκρίνονται σε χαρακτηριστικά της ανθρώπινης νόησης που είναι φυσικά και πρωτόγονα.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό φαίνεται να κυριαρχεί το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, ενώ όσον αφορά τη διαίρεση, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξαρτώνται από το είδος του προβλήματος που καλούνται να επιλύσουν που αφορούν τα προβλήματα μερισμού και τα προβλήματα μέτρησης. Στη διαίρεση μερισμού σύμφωνα με τα διαισθητικά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής περιορισμοί: ο διαιρέτης πρέπει να είναι φυσικός αριθμός, ενώ ο διαιρέτης και το πηλίκο πρέπει να έχουν μικρότερο μέγεθος από τον διαιρετέο. Από την άλλη πλευρά στη διαίρεση μέτρησης υπάρχει ένας μόνο περιορισμός: ο διαιρέτης και το πηλίκο πρέπει να έχουν μικρότερο μέγεθος από τον διαιρετέο.

Έρευνες δείχνουν ότι τα παιδιά μπορούν να επιλύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης συνδυάζοντας την άμεση μοντελοποίηση με την καταμέτρηση και με ικανότητες ομαδοποίησης, όπως και με στρατηγικές που βασίζονται στην πρόσθεση και την αφαίρεση (Carpenter et al., 1993; Kouba, 1989; Mulligan &Mitchelmore, 1997).

Για παράδειγμα η Kouba (1989) εστίασε στις στρατηγικές επίλυσης που πραγματικά χρησιμοποιούν οι μαθητές της πρώτης, της δευτέρας και της τρίτης τάξης σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και δεν περιορίστηκε στην επιλογή χειρισμού των προβλημάτων που διατύπωσαν οι Fischbein et al. (1985) μέσα από τα διαισθητικά μοντέλα. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από την έρευνα κατέληξε σε 5 κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης: 1) άμεση αναπαράσταση 2) διπλή καταμέτρηση 3)μεταβατική καταμέτρηση 4) προσθετική ή αφαιρετική 5) ανάκληση αριθμητικού γεγονότος.

Από την άλλη πλευρά οι τρεις στρατηγικές που εντοπίστηκαν μέσα από την έρευνα των Mulligan & Mitchelmore (1997), αυτές της άμεσης καταμέτρησης ένα προς ένα, της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης/ αφαίρεσης και των πολλαπλασιαστικών υπολογισμών, χρησιμοποιούνται από τα παιδιά τόσο στα προβλήματα πολλαπλασιασμού όσο και στα προβλήματα διαίρεσης. Βασιζόμενοι στις παραπάνω στρατηγικές οι Zeljić, Boričić & Đokić (2019) επισημαίνουν τα εμπόδια που προκύπτουν στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά, όταν ο πολλαπλασιασμός διδάσκεται ως απόρροια της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης.

Με βάση τη θεώρηση ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη αναπτύσσεται μετά την είσοδο του παιδιού στο σχολείο έρευνες επικεντρώθηκαν (Clark & Kamii, 1996; Jacob &Willis, 2003) στα αναπτυξιακά στάδια που παρατηρούνται συστηματικά στην εξέλιξη των παιδιών από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη καθώς και το επίπεδο τάξης στο οποίο η πλειοψηφία των παιδιών κατακτά την πολλαπλασιαστική σκέψη. Μέσα από συνεντεύξεις παιδιών από την πρώτη έως την πέμπτη τάξη και τις απαντήσεις που έδωσαν κατέληξαν στη διατύπωση τεσσάρων αναπτυξιακών σταδίων. Κατά το πρώτο στάδιο δεν υπάρχει καμία σταθερή ανταπόκριση ή σταθερή αναταπόκριση με ποιοτική ποσοτικοποίηση. Το παιδί σκέφτεται μόνο με τους όρους περισσότερο ή λιγότερο. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές αρχίζουν να αναπτύσσουν την προσθετική σκέψη βασισμένοι στην αριθμητική ακολουθία του +1 ή +2, ενώ στο τρίτο στάδιο έχουν ολοκληρώσει την ανάπτυξη της προσθετικής σκέψης. Τέλος το τέταρτο και το τελευταίο στάδιο αφορούν την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης διαχωρίζοντας τη μετάβαση από την πολλαπλασιαστική σκέψη που απαιτεί περισσότερο χρόνο στην πολλαπλασιαστική σκέψη που εκφράζεται αυτόματα. Όσον αφορά τα αποτελέσματα φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών της πρώτης τάξης βρίσκονται στο δεύτερο στάδιο, αυτό της προσθετικής σκέψης. Γενικά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη διαχωρίζεται από την προσθετική, ξεκινάει νωρίς, όμως εξελίσσεται αργά. Μόνο το 49% της πέμπτης τάξης έχουν πλήρως αναπτυγμένη πολλαπλασιαστική σκέψη. Παρόμοιο μοντέλο διατύπωσαν και οι Jacob &Willis (2003) μέσα από την έρευνά τους με τη διαφορά ότι χωρίζουν το στάδιο της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε δύο υποστάδια, αυτό της ανεύρεσης πολλαπλασιαστικών σχέσεων με αυτό της άμεσης ανάκλησης των πολλαπλασιαστικών γεγονότων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά αφηρημένα προβλήματα.

Παρά το γεγονός ότι τα παιδιά μπορούν να εφαρμόζουν ενέργειες ισομερισμού ενός πλήθους αντικειμένων από μικρή ηλικία σε καθημερινές καταστάσεις, η μετάβαση από αυτή τη συγκεκριμένη διαδικασία στην αφηρημένη εννοιολογική γνώση απαιτεί πολύπλοκες διεργασίες από μέρους των παιδιών. Για παράδειγμα η μετάβαση στην εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος ¾ μέσα από την δραστηριότητα κατά την οποία τα παιδιά καλούνται να μοιράσουν τρεις πίτσες σε 4 άτομα απαιτεί την εννοιολογική σύνδεση ανάμεσα στον αριθμό των ατόμων και τα μερίσματα (τέταρτα) καθώς και τη σύνδεση ανάμεσα στον διαιρετέο και των αριθμό των τετάρτων σε κάθε μέρισμα (3/4) (Charles & Nason, 2000). Οι Charles & Nason (2000) επιχείρησαν να κατηγοριοποιήσουν τις στρατηγικές ισομερισμού μέσα από συνεντεύξεις 12 παιδιών που φοιτούσαν στην τρίτη τάξη. Οι στρατηγικές αυτές ενσωματώθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιελάμβανε στρατηγικές που είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό τη σύνδεση ανάμεσα στον αριθμό παραληπτών και του αριθμητή του κλάσματος. Η δεύτερη περιελάμβανε πολλαπλασιαστικές στρατηγικές ενώ η τρίτη αφορούσε στρατηγικές επανάληψης του μερίσματος. Κάθε παιδί μπορεί να εφαρμόζει μια ποικιλία στρατηγικών που μπορεί να ανήκουν σε οποιαδήποτε από τις προαναφερθείσες κατηγορίες και αυτό εξαρτάται από το πλαίσιο του προβλήματος, το είδος και το πλήθος των αντικειμένων που πρέπει να μοιραστούν και το πλήθος των μερισμάτων.

1.4 Επιδόσεις παιδιών σε έργα πολλαπλασιαστικής σκέψης με διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

Είναι σημαντικό για τα παιδιά να αναπτύξουν τις πολλαπλασιαστικές τους ικανότητες τόσο σε διακριτές όσο και σε συνεχείς ποσότητες.

Βασιζόμενη στην έρευνα του Piaget, η Lima (οπως αναφέρεται στο Nunes & Bryant, 1996) εξέτασε κατά πόσο τα παιδιά από την ηλικία των 7 χρόνων και έπειτα, μπορούσαν να κατανοήσουν τη διαίρεση τόσο διακριτών όσο και συνεχών ποσοτήτων, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η διαίρεση διακριτών ποσοτήτων κατανοείται νωρίτερα από τα παιδιά. Σε αυτό το συμπέρασμα μπορεί να συνέβαλε το γεγονός ότι τα παιδιά ήταν εξοικειωμένα με την καταμέτρηση, την οποία χρησιμοποιούσαν ως στρατηγική όταν καλούνταν να εξάγουν συμπεράσματα για την ισότητα ή όχι των μερών που είχαν προηγουμένως διαιρεθεί.

Οι Skoumpourdi & Sofokiti (2009) φαίνεται να συμφωνούν με τα παραπάνω ευρήματα, καθώς διαπίστωσαν μέσα από δοκιμασίες δίκαιης μοιρασιάς με διαφορετικά είδη ποσοτήτων ότι τα νήπια σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στα έργα με διακριτές ποσότητες απ' ότι με συνεχείς, ενώ και οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν στο κάθε είδος ποσότητας διέφεραν.

Οι Kornilaki & Nunes (2005) επιχείρησαν να διαπιστώσουν κατά πόσο παιδιά ηλικίας 5 έως 7 ετών τα οποία κατανοούν τις αρχές της διαίρεσης ισομερισμού στις διακριτές ποσότητες, μπορούν να τις μεταφέρουν και να τις εφαρμόσουν σε προβλήματα διαίρεσης μέτρησης τόσο σε διακριτές όσο και σε συνεχείς ποσότητες. Κατά την έρευνά τους παρουσίασαν στα παιδιά προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς και προβλήματα μέτρησης τόσο με διακριτές όσο και με συνεχείς ποσότητες σε δύο διαφορετικές πειραματικές συνθήκες κάθε φορά. Αρχικά, παρουσιάστηκε ένα πρόβλημα δίκαιης μοιρασιάς όπου ο αριθμός των παραληπτών (άσπρες και καφέ γάτες) παρέμενε ο ίδιος και στα δύο είδη ποσοτήτων όπως και το μερίδιο που θα έπρεπε να μοιραστεί δίκαια. Στη συνέχεια, το ίδιο πρόβλημα παρουσιάστηκε με τη διαφορά ότι ο αριθμός των παραληπτών διέφερε κάθε φορά π.χ. οι 3 γάτες έπρεπε να μοιραστούν 12 ψάρια και στη συνέχεια 2 γάτες έπρεπε να μοιραστούν αυτήν την ίδια ποσότητα. Το ερώτημα στο οποίο έπρεπε να απαντήσουν τα παιδιά ήταν κατά πόσο πίστευαν ότι τόσο οι καφέ όσο και άσπρες γάτες θα πάρουν το ίδιο μερίδιο. Μετά την ολοκλήρωση αυτής της πρώτης πειραματικής διαδικασίας, ακολουθούσε η δεύτερη με την παρουσίαση ενός προβλήματος διαίρεσης μέτρησης όπου τα παιδιά θα έπρεπε να κρίνουν κατά πόσο θα άλλαζε ο αριθμός των παραληπτών (καφέ και άσπρες γάτες) όταν θα παρουσιάζονταν διαφορετικά μερίδια. Για τις διακριτές ποσότητες χρησιμοποιήθηκαν ψάρια, ενώ για τις συνεχείς κέικ. Οι απαντήσεις των παιδιών και στις δύο πειραματικές συνθήκες έδειξαν ότι παρά το γεγονός ότι τα παιδιά δυσκολεύονταν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, έδωσαν εξίσου σωστές απαντήσεις και στις διακριτές και στις συνεχείς ποσότητες. Αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι από τη στιγμή που τα παιδιά κατανοούν τις βασικές αρχές της διαίρεσης, μπορούν να τις εφαρμόσουν και σε διαφορετικά είδη ποσοτήτων (Kornilaki & Nunes, 2005).

Σε αντίθεση με τα παραπάνω ευρήματα οι Jeong, Levine και Huttenlocher (2007) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις και νωρίτερα ηλικιακά, σε έργα με συνεχείς ποσότητες, με τη διαφορά ότι δεν αφορούν έργα δίκαιης μοιρασιάς αλλά έργα αναλογίας. Στην έρευνα αυτή παρουσιάστηκαν στα παιδιά περιστρεφόμενες κυκλικές φιγούρες χρωματισμένες με μπλε και κόκκινο χρώμα, αλλά σε διαφορετική αναλογία η καθεμιά. Αυτές αποτελούσαν τις συνεχείς ποσότητες. Αντίστοιχα παρουσιάστηκαν κυκλικές φιγούρες οι οποίες ήταν όμως χωρισμένες σε κόκκινα και μπλε κομμάτια. Τα παιδιά ηλικίας 6, 8 και 10 ετών έπρεπε να σκεφτούν όταν παρουσιάζονταν δύο τέτοιες φιγούρες, διαφορετικού όμως μεγέθους μεταξύ τους, ποια από τις δύο είχε περισσότερο κόκκινο χρώμα σε αναλογία με το μπλε. Οι απαντήσεις τους έδειξαν ότι τα παιδιά και στις τρεις ηλικίες εκτίμησαν πιο σωστά τις αναλογίες στις συνεχείς ποσότητες.

Οι Singer- Freeman και Goswami (2003) επιβεβαίωσαν ότι παιδιά ήδη από την ηλικία των 3 ετών μπορούν να συλλογιστούν αναλογικά στις συνεχείς ποσότητες. Συγκεκριμένα πραγματοποίησαν 2 πειράματα στα οποία κλήθηκαν τα παιδιά να συγκρίνουν όχι μόνο συνεχείς και ασυνεχείς ποσότητες μεταξύ τους (πίτσα με πίτσα και κουτιά με σοκολάτες), αλλά και συνεχείς με ασυνεχείς ποσότητες (πίτσες με κουτί από σοκολάτες). Στα ισομορφικά προβλήματα ο πειραματιστής και το παιδί είχαν το ίδιο φαγητό. Κάποια στιγμή ο πειραματιστής αφαιρούσε ένα μέρος της πίτσας (2/8, 4/8, 6/8) και το παιδί έπρεπε να σκεφτεί και να αφαιρέσει το ίδιο μέρος από το δικό του φαγητό, αυτή τη φορά σε τέταρτα. Στις διακριτές ποσότητες ο πειραματιστής είχε 8 σοκολάτες ενώ το παιδί 4. Τα παιδιά σημείωσαν καλύτερα αποτελέσματα στα ισομορφικά προβλήματα και συγκεκριμένα στη σύγκριση συνεχών ποσοτήτων και όταν έπρεπε να σχηματίσουν τα 2/4 και τα 3/4. Πάντως είναι ενδιαφέρον ότι και στα μη ισομορφικά προβλήματα, όπου τα παιδιά έπρεπε να σχηματίσουν την αναλογία ανάμεσα σε μια πίτσα και ένα κουτί από σοκολάτες, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ένα μεγαλύτερο από το προσδοκώμενο ποσοστό παιδιών έδωσε σωστές απαντήσεις στις αναλογίες ¼ και ½ .

Οι Boyer & Levine (2002) επιβεβαιώνοντας ότι τα παιδιά σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις σε έργα αναλογίας συνεχών ποσοτήτων επιχείρησαν να διαπιστώσουν αν η παρουσίαση πρώτα συνεχών ποσοτήτων κι έπειτα διακριτών θα ενεργοποιούσε τις αυθόρμητες στρατηγικές που εφαρμόζουν τα παιδιά έτσι ώστε να τις χρησιμοποιήσουν στη συνέχεια και στις διακριτές ποσότητες. Έτσι λοιπόν δημιούργησαν μια πειραματική ομάδα και μια ομάδα ελέγχου στην οποία παρουσιάστηκαν μόνο διακριτές ποσότητες. Τα παιδιά που συμμετείχαν, ανήκαν σε τρεις διαφορετικές ηλικιακές ομάδες και αποτελούνταν από νήπια, μαθητές δευτέρας και τετάρτης τάξης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μόνο η πειραματική ομάδα που περιελάμβανε μαθητές της τετάρτης τάξης σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στα έργα αναλογίας διακριτών ποσοτήτων σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου.

Τα ευρήματα των δύο παραπάνω ερευνών ενισχύουν την πεποίθηση ότι η διαχείριση συνεχών ποσοτήτων αποτελεί μια αντιληπτική ικανότητα που αναπτύσσει το άτομο πολύ πριν την είσοδό του στο σχολείο (Jeong et al., 2007; Mix, Huttenlocher & Levine, 2002; Singer- Freeman & Goswami, 2003). Αυτή η διαφορά στις επιδόσεις των παιδιών μπορεί να οφείλεται σύμφωνα με τους Mix et al. (2002) στη στρατηγική της καταμέτρησης που σε έργα αναλογίας μπορεί να λειτουργήσει ως εμπόδιο. Από τις παραπάνω έρευνες φαίνεται ότι τα παιδιά πρωτοσχολικής ηλικίας σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις σε έργα αναλογίας που αφορούν συνεχείς ποσότητες, ενώ στα έργα πολλαπλασιαστικής δομής και κυρίως σε αυτά που περιλαμβάνουν δίκαιη μοιρασιά, τα παιδιά φαίνεται να είναι περισσότερο εξοικειωμένα με τις διακριτές ποσότητες.

Παρά τα διαφορετικά δεδομένα που προκύπτουν μέσα από τις μελέτες, το είδος των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων και των ποσοτήτων που καλούνται να διαχειριστούν τα παιδιά, ο Steffe (2013) υποστηρίζει ότι η μέτρηση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων θα πρέπει να παρουσιάζεται παράλληλα και όχι να διαχωρίζεται στην εκπαίδευση. Ομοίως και οι Boyer & Levine (2006) παρόλο που δεν εφάρμοσαν κάποια διδακτική παρέμβαση, παρά μόνο διερεύνησαν τις στρατηγικές των παιδιών, προτείνουν την παράλληλη ενασχόληση με συνεχείς και διακριτές ποσότητες κατά τη μαθησιακή διαδικασία τουλάχιστον για τους μαθητές της τετάρτης τάξης κι έπειτα.

1.5 Αναλυτικά Προγράμματα και πολλαπλασιαστική σκέψη

Οι στόχοι του Αναλυτικού Προγράμματος καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων αλλά και της εκπαιδευτικής διαδικασίας γενικότερα. Παρόλα αυτά διαπιστώνεται ότι στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2011, όσον αφορά το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, οι στόχοι που διατυπώνονται στο νηπιαγωγείο και τις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού εστιάζουν κυρίως στις προσθετικές σχέσεις, οι οποίες προηγούνται των πολλαπλασιαστικών. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται έμφαση στη διερεύνηση και τη δημιουργία προσθετικών καταστάσεων, στη σύγκριση και τη διάταξη αριθμών όπως το 100, όπως και τη διερεύνηση συνδυασμών που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των αριθμών μέχρι το 10, στόχοι που καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος των σχολικών εγχειριδίων. Παρά το γεγονός ότι διατυπώνονται και ρητοί στόχοι που αφορούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μέσα από τις ενέργειες που αφορούν τον ισομερισμό, την επανάληψη ποσότητας και τη μέτρηση με μονάδες διαφορετικού τύπου ήδη από το νηπιαγωγείο, οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) μέσα από μια την ανάλυση αυτών των στόχων διαπιστώνουν ότι δεν είναι ξεκάθαρο τι αφορά τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Πράγματι, ο ισομερισμός ενώ αρχικά αναφέρεται ως «μοιρασιά» και εστιάζει στους φυσικούς αριθμούς μέσα από τις διακριτές ποσότητες, αργότερα, στο πλαίσιο των κλασματικών αριθμών αναφέρεται ως «χωρισμός σε ίσα μέρη» και εστιάζει στις συνεχείς ποσότητες, διαφοροποιώντας με αυτό τον τρόπο την ίδια ενέργεια. Ακόμη, η μοιρασιά και η ομαδοποίηση αναφέρονται ως διαφορετικές ενέργειες ως προς το μέγεθος των ποσοτήτων που καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές. Η μέτρηση με επανάληψη ποσότητας περιορίζεται στο μήκος στην Α' Δημοτικού ενώ απουσιάζει εντελώς από τη Β' Δημοτικού, ενώ ένα ακόμη σημαντικό σημείο αποτελεί η μη εμβάθυνση στην πολλαπλασιαστική σχέση της υπό μέτρησης ποσότητας με τη μονάδα (όσο μεγαλύτερη η μονάδα τόσο μικρότερο αριθμητικό αποτέλεσμα).

Αυτή η ασυμμετρία υπέρ του προσθετικού πεδίου που παρατηρείται όχι μόνο στο Ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2011, αλλά και σε προγράμματα άλλων χωρών, έχει επιπτώσεις στη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού. Για παράδειγμα οι Van Dooren, De Bock & Verschaffel (2010) στην έρευνα τους που διενεργήθηκε σε σχολεία Φλαμανδών εξέτασαν κατά πόσο παιδιά τρίτης, τετάρτης και πέμπτης δημοτικού χρησιμοποιούν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές μεθόδους σε προσθετικά και σε προβλήματα αναλογίας. Το αναλυτικό τους πρόγραμμα εστιάζει στις πρώτες τάξεις του δημοτικού και ειδικά στη δευτέρα και την τρίτη τάξη, στην επίλυση απλών προβλημάτων πολλαπλασιασμού, ενώ στις επόμενες τάξεις η εστίαση μεταφέρεται στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Οι απαντήσεις των παιδιών έδειξαν ότι οι μαθητές της τρίτης τάξης έτειναν να χρησιμοποιούν προσθετικές μεθόδους ακόμη και στα προβλήματα αναλογίας, συμπεριφορά που φαίνεται να μειώνεται στις μεγαλύτερες τάξης όπου η διδασκαλία επικεντρώνεται κυρίως στην πολλαπλασιαστική σκέψη και τις αναλογίες. Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση ήταν ότι τα παιδιά ειδικά μέχρι την τετάρτη τάξη τείνουν να λαμβάνουν υπόψη πιο επιφανειακά χαρακτηριστικά, όπως το είδος των αριθμών που παρουσιάζονται σε ένα πρόβλημα προκειμένου να επιλέξουν τη μέθοδο επίλυσης.

Αντίστοιχα οι Van den Heuvel- Panhuizen & Elia (2020) εξέτασαν τις ικανότητες ποσοτικοποίησης παιδιών που φοιτούσαν σε νηπιαγωγεία της Ολλανδίας και της Κύπρου. Οι ικανότητες αυτές αφορούσαν την καταμέτρηση, τον υπολογισμό ενός πλήθους με άμεση καταμέτρηση , την προσθετική και την πολλαπλασιαστική σκέψη. Παρατήρησαν λοιπόν ότι ενώ δόθηκαν οι ίδιες δοκιμασίες σε νήπια στην Ολλανδία και στην Κύπρο, τα νήπια στην Ολλανδία επέδειξαν και τις τέσσερις παραπάνω ικανότητες συμπεριλαμβανομένης της πολλαπλασιαστικής σκέψης, κάτι που δεν παρατηρήθηκε στο δείγμα της Κύπρου. Ειδικότερα, φάνηκε από τις απαντήσεις των νηπίων στην Κύπρο στις διάφορες δοκιμασίες ότι κυριαρχεί ένα μονοδιάστατο μοντέλο ποσοτικοποίησης, που δεν περιλαμβάνει την πολλαπλασιαστική σκέψη και την άμεση καταμέτρηση. Αυτές οι διαφορετικές επιδόσεις φαίνεται να οφείλονται στις διαφορετικές μαθησιακές εμπειρίες που λαμβάνουν χώρα στα νηπιαγωγεία αλλά και στην καθημερινότητα των παιδιών (Van den Heuvel- Panhuizen & Elia, 2020).

Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι τα γλωσσικά εργαλεία για την έκφραση των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι περιορισμένα (Βαμβακούση και Καλδρυμίδου, 2018). Για παράδειγμα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2011 για το Νηπιαγωγείο δεν αναφέρονται γλωσσικές εκφράσεις που αφορούν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ούτε καν η λέξη «μισό» (Pitta, Kaldrimidou & Vamvakoussi, 2020).

1.6 Η χρήση της γλώσσας και η επίδραση της στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης

Η χρήση της κατάλληλης γλώσσας παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης από την αρχή της διδασκαλίας της και πρέπει να υποστηρίζεται με την εκτεταμένη χρήση του υλικού που θα βοηθήσει τα παιδιά κατακτήσουν σταδιακά το εννοιολογικό πεδίο της πολλαπλασιαστικής σκέψης χωρίς να περιορίζονται στις διαδικασίες (Hurst, 2015). Η Downton (2008) η οποία διαπίστωσε ότι παρέχοντας ένα κατάλληλο περιβάλλον τα παιδιά μπορούν να επιλύσουν πολύπλοκα λεκτικά προβλήματα ισομερισμού και μέτρησης, θεωρεί ότι προτεραιότητα στην εκπαιδευτική διαδικασία πρέπει να είναι η εισαγωγή των γλωσσικών εργαλείων που δίνουν έμφαση στη σχέση διαίρεσης και πολλαπλασιασμού πριν την εισαγωγή συμβόλων.

Μια από τις θεμελιώδεις έννοιες για τα παιδιά πρωτοσχολικής ηλικίας αποτελεί η έννοια του μισού. Το μισό αποτελεί το πρώτο κλάσμα που μαθαίνουν να διαχειρίζονται με ευχέρεια τα παιδιά και ξεκινάει μέσα στο κοινωνικό τους περιβάλλον μέσα από δραστηριότητες μοιράσματος και δίκαιης μοιρασιάς (Hunting & Davis, 1991). Στην ελληνική γλώσσα όμως η χρήση του όρου «μισό», όταν εισάγεται στη διδασκαλία των κλασμάτων, μπορεί λειτουργήσει ως εμπόδιο όταν τα παιδιά καλούνται να διατυπώσουν άλλους κλασματικούς όρους (Pitta & Vamvakoussi, 2022).

Το λεξιλόγιο και συγκεκριμένα το μαθηματικό λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται φαίνεται ότι επιδρά στις επιδόσεις των παιδιών από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού (Pitta& Vamvakoussi, 2022; Vanluydt, Supply, Verschaffel, & Van Dooren, 2021). Οι Vanluydt et al. (2021) διερεύνησαν κατά πόσο το μαθηματικό λεξιλόγιο που κατανοούν τα παιδιά από την πρώτη έως τη δευτέρα τάξη και συγκεκριμένα οι όροι «δίκαιο» (από τη δίκαιη μοιρασιά), «μισό», «διπλάσιο», «τρία περισσσότερα» και «τρεις φορές περισσότερο» έχουν θετική συσχέτιση με την επίδοσή τους σε έργα πολλαπλασιαστικού/ αναλογικού συλλογισμού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι όροι «μισό» και «τρία περισσότερα» αποτελούν τον πιο σημαντικό δείκτη πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών.

Η έρευνα των Gotze & Baiker (2021) επίσης εστιάζει στο μαθηματικό λεξιλόγιο που εκλαμβάνουν τα παιδιά και όχι σε αυτό που τα ίδια παράγουν. Ο λόγος που εκφέρει ο/η εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία μπορεί να δημιουργήσει εμπόδια κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά την πολλαπλασιαστική σκέψη φράσεις όπως «3 φορές το 4» δεν τονίζουν την έννοια της ένωσης, η οποία θα μπορούσε να εννοηθεί από φράσεις όπως «3 τετράδες». Οι Gotze & Baiker (2021) εξέτασαν σε ποιο βαθμό μπορεί μια διδακτική παρέμβαση διάρκειας 3 μηνών η οποία βασίστηκε στη γλώσσα που χρησιμοποιείται κατά τη διδασκαλία, να έχει αντίκτυπο στους μαθητές σε σχέση με την πολλαπλασιαστική σκέψη. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της δευτέρας τάξης που δεν είχαν προηγουμένως διδαχθεί πολλαπλασιασμό και αφορούσε τη συσχέτιση διαφορετικών μαθηματικών αναπαραστάσεων (γραφικών, προφορικών, συμβολικών, υλικών) με τη μαθηματική γλώσσα μέσα από τη συνεχή επικέντρωση στις προφορικές και γραπτές εκφράσεις. Ως υλικό χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο της τάξης ενισχυμένο με επιπλέον στοιχεία που βοηθούσαν τους εκπαιδευτικούς να συνδέσουν αναπαραστάσεις και να εμπλουτίσουν τον διάλογο με τη χρήση της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας. Το τεστ που σχεδιάστηκε για να αξιολογήσει τυχόν αλλαγές στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης περιείχε τρεις κατηγορίες: η πρώτη περιείχε απλούς πολλαπλασιασμούς και σταδιακά πιο δύσκολους. Στη δεύτερη κατηγορία οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν μια εικόνα που αντιπροσώπευε π.χ. το 3x6 και να εξηγήσουν γιατί είναι σωστή. Στην τρίτη οι μαθητές καλούνταν να αποδείξουν αν έχουν κατανοήσει την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα μέσα από στρατηγικές αποσύνθεσης. Τα αποτελέσματα του τεστ γενικά έδειξαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην πειραματική και την ομάδα ελέγχου με την πειραματική να σημειώνει σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στο τεστ και ανώτερη πολλαπλασιαστική σκέψη.

1.7 Διδακτικές παρεμβάσεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία

Παρά τη διαπίστωση ότι τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών δεν δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε σύγκριση με την προσθετική (Cheeseman, Downton, Ferguson και Roche, 2022; Pitta & Kaldrymidou, 2018) ερευνητές προσπαθούν να δουν κατά πόσο νέες διδακτικές παρεμβάσεις μπορούν να ενισχύσουν τις επιδόσεις των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας σε έργα πολλαπλασιαστικής δομής που αφορούν κυρίως διακριτές ποσότητες (Askew, 2018; Cheeseman et al., 2022; Watson, 2016; Zaranis & Alexandraki, 202).

Οι Cheeseman et al. (2022) μέσα από τη διδακτική παρέμβαση που σχεδίασαν προσπάθησαν να διερευνήσουν τη σκέψη των παιδιών ηλικίας 5-6 ετών γύρω από τις ισοπληθείς ομάδες. Ειδικότερα θέλησαν να δημιουργήσουν ένα μαθησιακό πλαίσιο που θα ενίσχυε την πολλαπλασιαστική σκέψη παιδιών προσφέροντάς τους πληροφορίες γύρω από το τι αντιλαμβάνονται για τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Στο διδακτικό αυτό πείραμα συμμετείχαν 21 παιδιά και η παρέμβαση υλοποιήθηκε από την εκπαιδευτικό της τάξης. Στην πρώτη εισαγωγική δραστηριότητα που πραγματοποιήθηκε, οι μαθητές χόρευαν και όταν η μουσική σταματούσε, έπρεπε να δημιουργήσουν ισοπληθείς ομάδες. Το μέγεθος της ομάδας το όριζε αρχικά η εκπαιδευτικός κι έπειτα τα παιδιά, ενώ ενδιαφέρον είχε ότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές παρατηρούσαν ότι «περίσσευαν» κάποιοι συμμαθητές τους. Οι δύο τελευταίες δραστηριότητες ήταν πιο απαιτητικές καθώς ζητούσαν από τα παιδιά να φανταστούν και να οπτικοποιήσουν μέσα από ζωγραφιές ισοπληθείς ομάδες. Πιο συγκεκριμένα στην τέταρτη δραστηριότητα η εκπαιδευτικός διάβασε ένα παραμύθι στα παιδιά χωρίς τη χρήση εικόνων και στο τέλος ζητούσε από αυτά να ζωγραφίσουν πώς θα χώριζαν 12 μικρές πάπιες σε ισοπληθείς ομάδες (Cheeseman et al., 2020; 2022). Η τελευταία δραστηριότητα μέσα από ένα πρόβλημα απαιτούσε από τα παιδιά να φανταστούν και να οπτικοποιήσουν ισοπληθείς ομάδες. Η εκπαιδευτικός έδειξε μια χελώνα με τέσσερα πόδια και αφού ζήτησε από τα παιδιά να την παρατηρήσουν, τα ρώτησε πόσα πόδια χελώνας υπήρχαν σε δύο μικρά κουτιά που βρίσκονταν μέσα σε ένα μεγάλο κουτί και σε καθένα από αυτά υπήρχαν δύο χελώνες.

Μέσα από τις απαντήσεις των παιδιών οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι τα παιδιά διαθέτουν μια διαισθητική κατανόηση των ισοπληθών ομάδων μέσα από τις εμπειρίες τους προτού τις διδαχθούν στο πλαίσιο της τάξης. Για παράδειγμα στο πρόβλημα με τις πάπιες, φάνηκε ότι κάποια παιδιά μπορούσαν να απαριθμήσουν τις σύνθετες ομάδες που σχεδίασαν, ενώ τα μισά παιδιά κατέδειξαν αυτόν τον τρόπο σκέψης. Ακόμη προτείνουν την οπτικοποίηση μέσα από ζωγραφιές ως μια εναλλακτική πρόταση απέναντι στη μοντελοποίηση (Cheeseman et al., 2020).

Συχνά η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης περιορίζεται στην εκμάθηση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί προσεγγίζουν τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση με αποτέλεσμα η πολλαπλασιαστική σκέψη να αφορά τη διαδικασία και όχι την εννοιολογική κατανόησή της μέσα στο σχολικό πλαίσιο (Askew, 2018). Ο Askew (2018) μέσα από την θεωρία της ανάπτυξης του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού προσπάθησε να εφαρμόσει μια παρέμβαση και συγκεκριμένα τη χρήση ενός εργαλείου σε μαθητές ηλικίας 6 ετών, οι οποίοι σημείωναν χαμηλές επιδόσεις στο μάθημα των μαθηματικών. Επιχείρησε λοιπόν σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό της τάξης μέσα από τον πρωταρχικό συλλογισμό που θα εξέφραζαν οι μαθητές γύρω από ένα πρόβλημα, να εισάγει τη χρήση της αριθμογραμμής με το διπλάσιο. Το πρόβλημα που τέθηκε ήταν το εξής: Κάποιοι φίλοι θα πήγαιναν σε ένα κινέζικο εστιατόριο και οι μαθητές θα έπρεπε να σκεφτούν πόσα ξυλάκια θα χρειάζονταν (κάθε άτομο χρειαζόταν ένα ζευγάρι ξυλάκια). Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ζευγάρια και κάθε ζευγάρι είχε υπόψη έναν διαφορετικό αριθμό φίλων που θα δειπνούσε στο εστιαστόριο. Αφού το κάθε ζευγάρι υπολόγισε με ζωγραφιές και αριθμούς τα ξυλάκια που θα χρειάζονταν, οι ερευνητές πρότειναν σε κάποιους μαθητές που σχεδίασαν το μοντέλο τους πιο μαθηματικοποιημένα, να το επαναδιατυπώσουν εισάγοντας την αριθμογραμμή και να το παρουσιάσουν στους υπόλοιπους. Η αριθμογραμμή που πρότειναν είχε στην πάνω πλευρά της τον αριθμό των ατόμων (1,2,3 κοκ) και στην κάτω πλευρά το πλήθος από ξυλάκια που θα χρειάζονταν κάθε φορά (2,4,6) εισάγοντας έτσι τη συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στα άτομα και τα ξυλάκια.

Οι παραπάνω διδακτικές παρεμβάσεις εστίασαν κατά κύριο λόγο στο πώς αναπτύσσεται ο συλλογισμός των παιδιών και ο λόγος γύρω από έργα και προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής στο σχολικό πλαίσιο. Ένα ακόμη κοινό σημείο είναι ότι αυτές οι παρεμβάσεις υλοποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων, σε έναν περιορισμένο αριθμό μαθητών και αφορούσαν μόνο διακριτές ποσότητες. Παρόλα αυτά οι Cheeseman et al. (2022) ανέπτυξαν μια σειρά δραστηριοτήτων που αφορούσαν τον σχηματισμό ισοπληθών ομάδων κατά τις οποίες ο βαθμός δυσκολίας σταδιακά αυξανόταν , σε αντίθεση με τον Askew (2018) που ουσιαστικά εισήγαγε την αριθμογραμμή ως εργαλείο αποτύπωσης συναρτησιακών σχέσεων σε μαθητές δευτέρας δημοτικού.

Μια διαφορετική παρέμβαση που βασίστηκε στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και τον σχεδιασμό ενός παιχνιδιού στον υπολογιστή εξέτασαν οι Zaranis και Alexandraki (2021). Συγκεκριμένα θέλησαν να εξετάσουν κατά πόσο η διδασκαλία μέσα στην τάξη σε συνδυασμό με αυτό το παιχνίδι, θα βελτίωνε την επίδοση παιδιών νηπιαγωγείου στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (πειραματική ομάδα), σε σύγκριση με παιδιά που θα τα διδάσκονταν με συμβατικά μέσα στο πλαίσιο της τάξης χωρίς όμως την επαφή με το παιχνίδι (ομάδα ελέγχου). Η παρέμβαση αποτελείτο από 3 φάσεις κατά τις οποίες αυξανόταν ο βαθμός δυσκολίας. Κάθε φάση ξεκινούσε με μια δραστηριότητα μέσα στην τάξη από την εκπαιδευτικό και ολοκληρωνόταν με ένα παρόμοιο παιχνίδι στον υπολογιστή. Σε κάθε δραστηριότητα διατυπώνονταν ερωτήσεις όπως «Πόσα μπλουζάκια είναι στην κρεμάστρα;», « Πόσα μπλουζάκια κρέμασε το κάθε παιδί;», «Πόσα παιδιά κρέμασαν μπλουζάκια;».

Στην έρευνα συμμετείχαν 119 παιδιά ηλικίας 4 έως 6 ετών. Τα αποτελέσματα του μεταελέγχου έδειξαν ότι τα νήπια σημείωσαν σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους σε αντίστοιχα έργα, ειδικά τα νήπια που είχαν σημειώσει ιδιαίτερα χαμηλές επιδόσεις στον προέλεγχο. Παρόλα αυτά, η διαφορά με τις προηγούμενες έρευνες είναι ότι δεν εστίασε και δεν έδωσε πληροφορίες σχετικά με τον συλλογισμό και τον λόγο που αναπτύχθηκε από τα νήπια γύρω από τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που αντιμετώπισαν.

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες διδακτικές παρεμβάσεις οι Pitta, Kaldrimidou και Vamvakoussi (2020) θέλησαν να σχεδιάσουν μια δραστηριότητα στην οποία οι διακριτές και οι συνεχείς ποσότητες αντιμετωπίζονται παράλληλα. Για τη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε εμπράγματο υλικό μέσα από την παρουσίαση μιας ομάδας παικτριών όπου τα παιδιά άρχισαν να διατυπώνουν τη σχέση ανάμεσα σε δύο παίκτριες με όρους πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων μέσα από τη σύγκριση του ύψους τους (π.χ. «Είμαι διπλάσια από εσένα/ Εγώ είμαι το 1/2»). Τα νήπια που συμμετείχαν βασίστηκαν στις προηγούμενες εμπειρίες τους κι έτσι άρχισαν να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τους παραπάνω όρους. Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης ότι γρήγορα υιοθέτησαν τις προσδοκώμενες στρατηγικές και άρχισαν να λεκτικοποιούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που παρατηρούσαν, κυρίως για τη σχέση 2:1 και 1:2.

2. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Μέσα από την παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών όσον αφορά την πολλαπλασιαστική σκέψη μέχρι πρόσφατα επικεντρωνόταν στη διαχείριση διακριτών ποσοτήτων και τη δίκαιη μοιρασιά στην πρωτοσχολική ηλικία. Επίσης είναι περιορισμένα τα δεδομένα σχετικά με τα γλωσσικά εργαλεία που μπορούν να αναπτύξουν τα παιδιά σε αυτή την ηλικία μέσα από τον σχεδιασμό των κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων. Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο που προκύπτει από τα έως τώρα δεδομένα είναι ότι ενώ τα παιδιά από μικρή ηλικία έρχονται σε επαφή με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στην καθημερινότητά τους, αυτό δε σημαίνει ότι απαραίτητα αναγνωρίζουν και κατανοούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που προκύπτουν ανάμεσα σε δύο ποσότητες.

Σκοπός λοιπόν της παρούσας έρευνας είναι να εφαρμόσει τρεις δομημένες δραστηριότητες που αφορούν την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε μαθητές της 1ης Δημοτικού έτσι ώστε να διερευνηθεί κατά πόσο μπορούν να προσεγγίσουν και να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ συνεχών και διακριτών ποσοτήτων αναπτύσσοντας παράλληλα τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω διατυπώθηκαν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι αρχικές ικανότητες πολλαπλασιαστικού συλλογισμού των παιδιών και τι επίδραση έχει μια στοχευμένη παρέμβαση στις ικανότητες αυτές;
- Ποια είναι η απόκριση των παιδιών στις δραστηριότητες και το συνοδευτικό υλικό;
- Τι είδους και ποιες αλλαγές στη συμπεριφορά και τη λεκτική έκφραση των παιδιών παρατηρούνται κατά τη διάρκεια της παρέμβασης;
- Τι βελτιώσεις ή επεκτάσεις απαιτούνται στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων;

3. Μεθοδολογία

3.1 Μέθοδος

Η έρευνα που διεξήχθη αποτελεί μια θεματικά εστιασμένη έρευνα σχεδιασμού (Graivemeijer & Prediger, 2019). Η θεματικά εστιασμένη έρευνα σχεδιασμού αποτελεί μια κατηγορία της έρευνας σχεδιασμού και επικεντρώνεται σε διδακτικά ζητήματα καθώς προσπαθεί να απαντήσει στο πώς διδάσκεται μια θεματική, στο τι πρέπει να διδάσκεται και με ποια δομή. Πρωταρχικός στόχος του σχεδιασμού έρευνας είναι η ανάπτυξη μιας θεωρίας που υπερβαίνει τη διδασκαλία στη σχολική αίθουσα. Ουσιαστικά βρίσκεται στην τομή του σχεδιασμού διδασκαλίας και της εκπαιδευτικής έρευνας.

Συμμετέχοντες

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης στην οποία συμμετείχαν δύο μαθητές της 1ης Δημοτικού που φοιτούσαν στο ίδιο τμήμα, σε δημόσιο σχολείο της Αν. Θεσσαλονίκης, μέσης ηλικίας 6 ετών και 5 μηνών περίπου. Και τα δύο παιδιά προέρχονται από οικογένειες με μέσο- ανώτερο κοινωνικοοικονομικό επίπεδο και ανώτατη πανεπιστημιακή εκπαίδευση.

3.2 Διαδικασία

Στην πρώτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε ο προέλεγχος κατά τον οποίο έγινε η αρχική διερεύνηση των ικανοτήτων των παιδιών γύρω από τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και την κατανόηση των αντίστοιχων όρων μέσα από εμπράγματο και εικονικό υλικό. Ο προέλεγχος υλοποιήθηκε τον Ιανουάριο του 2022 μέσα από ατομικές συνεντεύξεις οι οποίες διήρκεσαν 30 λεπτά περίπου η καθεμία.

Στη δεύτερη φάση υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση η οποία αποτελούνταν από τρεις δραστηριότητες οι οποίες βασίστηκαν σε ένα κοινό σενάριο. Για το σύνολο των δραστηριοτήτων χρειάστηκαν έντεκα συναντήσεις με διάρκεια 45-50 λεπτά η καθεμία. Οι συναντήσεις ολοκληρώθηκαν σε διάστημα δέκα εβδομάδων, από τον Μάρτιο έως και τον Μάιο του 2022. Η πρώτη δραστηριότητα είχε ως στόχο την εισαγωγή των όρων των πολλαπλασίων και των υποπολλαπλασίων. Σταθερό ζητούμενο αποτελούσε η έκφραση σχέσης με όρους πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων από τα παιδιά. Η πρώτη δραστηριότητα ολοκληρώθηκε σε τέσσερις συναντήσεις και η καθεμία διήρκησε 45- 50 λεπτά.

Για τη δεύτερη δραστηριότητα χρειάστηκαν τέσσερις συναντήσεις. Σε αυτή τη δραστηριότητα η οποία είχε ως αντικείμενο την αναλογική μοιρασιά, τα παιδιά κλήθηκαν να μεταφέρουν τις γνώσεις για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια σε ένα νέο πλαίσιο στο οποίο τώρα θα κατασκεύαζαν τα ίδια πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια σε συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Για την υποστήριξη αυτής της δραστηριότητας χρησιμοποιήθηκε εμπράγματη αναπαράσταση λόγου ως εργαλείο.

Η τρίτη δραστηριότητα που αφορούσε την πολλαπλασιαστική μεταβολή ολοκληρώθηκε σε τρεις συναντήσεις. Για την υλοποίησή της σχεδιάστηκε ένα εργαλείο βασισμένο στις κλασματομηχανές των Hunting & Davis (1991) με τη διαφορά ότι αυτή η μηχανή της παρέμβασης πολλαπλασιάζει και υποπολλαπλασιάζει συνεχείς και διακριτές ποσότητες, ενώ η είσοδος και η έξοδος εναλλάσσονται. Σε αυτή τη δραστηριότητα τα παιδιά τόσο ως ζευγάρι όσο και ατομικά κλήθηκαν να αναγνωρίσουν σχέσεις, να κάνουν προβλέψεις, να ελέγξουν, αλλά και να χρησιμοποιήσουν το κατάλληλο λεξιλόγιο.

Στην τρίτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε ο μεταέλεγχος ο οποίος περιείχε τα ίδια έργα με τον προέλεγχο. Λόγω των αναπτυγμένων ικανοτήτων των παιδιών γύρω από τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε αυτό το στάδιο, χρειάστηκαν δύο συναντήσεις για το κάθε παιδί διάρκειας 30 λεπτών περίπου. Σε αυτή τη φάση διερευνήθηκαν κατά πόσο έχουν βελτιωθεί οι ικανότητες των παιδιών, η κατανόηση των όρων και οι στρατηγικές που εφάρμοσαν στα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Από την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης μεσολάβησε ένας μήνας μέχρι να υλοποιηθεί ο μεταέλεγχος, προκειμένου να διαπιστωθεί σε ποιο βαθμό τα παιδιά έχουν κατανοήσει τους όρους και μπορούν να διαχειριστούν προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής.

3.3 Ερευνητικά Εργαλεία

3.3.1 Προέλεγχος - Μεταέλεγχος

Στην έρευνα πραγματοποιήθηκε προέλεγχος και μεταέλεγχος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, προκειμένου να αξιολογηθούν οι αρχικές ικανότητες των παιδιών γύρω από έργα πολλαπλασιαστικής δομής, αλλά και η διδακτική παρέμβαση συγκρίνοντας τυχόν αλλαγές στις απαντήσεις των παιδιών κατά τον μεταέλεγχο. Κατά τον προέλεγχο και μεταέλεγχο της έρευνας το κάθε παιδί κλήθηκε να απαντήσει ατομικά σε μια σειρά έργων προκειμένου να διερευνηθούν οι αρχικές και οι μετέπειτα ικανότητες των παιδιών. Τα έργα αυτά χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες (Α, Β και Γ) και αφορούσαν α) επίπεδα κατανόησης της αριθμητικής ακολουθίας, β) επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής και γ) έργα αναγνώρισης όρων των πολλαπλασίων (διπλάσιο, τριπλάσιο και τετραπλάσιο) και υποπολλαπλασίων (1/2, 1/3, 1/4). Το εργαλείο του προελέγχου και του μεταελέγχου παρατίθεται στο Παράρτημα Ι.

Πιο συγκεκριμένα τα έργα της κατηγορίας Α είχαν ως στόχο να εξεταστεί το επίπεδο κατανόησης της αριθμητικής ακολουθίας των παιδιών και βασίστηκε στο εργαλείο αξιολόγησης που ανέπτυξαν οι Wright, Martland και Stafford (2006). Το Ε1 αφορά την προφορική απαγγελία αριθμών με έναρξη από το 1, έπειτα από το 5, ενώ σταδιακά αυξάνεται ο βαθμός δυσκολίας, καθώς ζητείται από τα παιδιά να ξεκινήσουν από μεγαλύτερους αριθμούς. Στόχος είναι να εξεταστεί σταδιακά κατά πόσο μπορεί το κάθε παιδί να ξεκινήσει να απαγγέλει τους αριθμούς και να συνεχίσει π.χ. πέρα από το 49, να περάσει στην επόμενη δεκάδα με ευχέρεια και τέλος από το 79 κι έπειτα. Στο Ε2 τα παιδιά καλούνται να πουν προφορικά τον επόμενο αριθμό από αυτόν που ακούν. Ο στόχος αυτού του έργου ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο το παιδί μπορεί π.χ. να πει ποιος αριθμός είναι μετά το 9 αμέσως ή με μια μικρή χρονική καθυστέρηση, εντοπίζοντας τη στρατηγική που χρησιμοποιεί, αν δηλαδή ξεκινάει την καταμέτρηση από το 1 για να φτάσει στον ζητούμενο αριθμό ή απαντάει αμέσως. Το Ε3 αφορά προβλήματα προσθετικής δομής με «κρυφούς» προσθετέους προκειμένου να εντοπιστούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιεί το κάθε παιδί. Το κάθε πρόβλημα διατυπώνεται προφορικά ως εξής: «Αν έχω δύο καραμέλες και προσθέσω άλλες τρεις, πόσες καραμέλες θα έχω;». Αρχικά, κανένας από τους δύο προσθετέους δεν είναι ορατός. Στην περίπτωση που το παιδί δεν απαντήσει, φανερώνεται ο δεύτερος προσθετέος. Αν αποτύχει πάλι, φανερώνεται και ο πρώτος προσθετέος. Αν το παιδί απαντήσει σωστά σε ένα πρόβλημα, ακολουθούν προβλήματα με μεγαλύτερους αριθμούς έως το 21. Το παιδί έπρεπε να εξηγήσει την απάντηση έδωσε σε κάθε πρόβλημα.

Στην κατηγορία Β ανήκουν τα 3 προβλήματα [διαίρεσης μερισμού (ισομερισμός, Ε4.1, Ε4.2), πολλαπλασιασμού (επανάληψη ποσότητας, Ε5.1, Ε5.2) και διαίρεσης μέτρησης (μέτρηση, Ε 6.1, Ε6.2)] που αντιστοιχούν στις καταστάσεις ισοπληθών ομάδων (για διακριτές ποσότητες) και ίσων μέτρων (για συνεχείς ποσότητες).

Και στα τρία είδη προβλημάτων η συνεχής ποσότητα παρουσιαζόταν ως σοκολάτα και η διακριτή ως καραμέλες. Στις συνεχείς ποσότητες, στα παιδιά δίνονταν πέντε επιλογές από τις οποίες έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή. Στις διακριτές ποσότητες, λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης των παιδιών με αυτές σε προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής, δεν δίνονταν πέντε επιλογές απαντήσεων, παρά μόνο αν το παιδί δυσκολευόταν να απαντήσει.

Το πρώτο πρόβλημα δίκαιης μοιρασιάς (Ε4.1.1) για τις συνεχείς ποσότητες ήταν το εξής: «Ο Γιώργος και το αδερφάκι του θα μοιραστούν δίκαια αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος; Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό;». Αν το παιδί απαντούσε σωστά οι παραλήπτες αυξάνονταν σε 3 (Ε4.1.2) κι έπειτα σε 4 (Ε4.1.2). Το αντίστοιχο πρόβλημα δίκαιης μοιρασιάς για τις διακριτές ποσότητες (Ε4.2.1) ήταν το εξής: «Η Ελένη και η αδερφή της θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις 12 καραμέλες. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα; Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες;» Όπως και στις συνεχείς αν το παιδί απαντούσε σωστά οι παραλήπτες αυξάνονταν σε 3 (Ε4.2.2) κι έπειτα σε 4 (Ε4.2.2).

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε το πρόβλημα της επανάληψης της ποσότητας το οποίο για τις συνεχείς ποσότητες (Ε5.1.1) ήταν το εξής: «Η Ελένη μοίρασε μια σοκολάτα σε 2 φίλες της. Σε κάθε φίλη της έδωσε αυτό το κομμάτι. Ποια ήταν ολόκληρη η σοκολάτα; Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή η σοκολάτα;». Αν η απάντηση που έδινε το παιδί ήταν σωστή, επαναδιατυπωνόταν το πρόβλημα με 3 φίλες (Ε5.1.2) κι έπειτα με 4 (Ε5.1.3). Αντίστοιχα όσον αφορά τις διακριτές ποσότητες (Ε5.2.1) το πρόβλημα ήταν το εξής: «Η Ελένη αγόρασε καραμέλες για τις 2 φίλες της. Όταν τις συνάντησε, χάρισε στην καθεμιά 3 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έδωσε και στις 2 φίλες της; Πώς το ξέρεις ότι έδωσε τόσες;». Παρόμοια με τις διακριτές ποσότητες, αν το παιδί απαντούσε σωστά, οι παραλήπτες αυξάνονταν σε 3 (Ε5.2.2) και σε 4 (Ε5.2.3).

Όπως και στο προηγούμενο έργο, στα παιδιά δίνονταν πέντε επιλογές απαντήσεων στις συνεχείς ποσότητες, ενώ στις διακριτές δινόταν πρώτα χρόνος ώστε το παιδί να απαντήσει χωρίς να του δίνονται πιθανές απαντήσεις.

Το τρίτο είδος προβλημάτων αφορούσε τη μέτρηση. Το πρώτο πρόβλημα (Ε6.1.1.) για τις συνεχείς ποσότητες ήταν το εξής: « Η γιαγιά μοίρασε δίκαια αυτή τη σοκολάτα στα εγγόνια της (παρουσιάζεται η σοκολάτα σε χαρτόνι). Κάθε εγγονάκι πήρε αυτό το κομμάτι (1/2 της αρχικής σοκολάτας που το βλέπουν σε χαρτόνι). Πόσα ήταν τα εγγόνια που πήραν σοκολάτα; (στα παιδιά παρουσιάζονται διάφορα ανθρωπάκια κατασκευασμένα από ρολό χαρτιού και το παιδί καλείται να επιλέξει πόσα από αυτά είναι τα εγγόνια που πήραν σοκολάτα). Πώς το ξέρεις ότι ήταν τόσα;». Αν το παιδί απαντούσε σωστά, το πρόβλημα επαναδιατυπωνόταν με το 1/4 της αρχικής σοκολάτας (Ε6.1.2) κι έπειτα με το 1/3 (Ε6.1.3). Αντίστοιχα το πρώτο πρόβλημα (Ε6.2.1) με τις διακριτές ποσότητες διατυπωνόταν ως εξής: « Ο Γιώργος μοίρασε δίκαια 6 καραμέλες στους φίλους του (καραμέλες σε κανονική μορφή). Κάθε φίλος του πήρε 3 καραμέλες (στα παιδιά παρουσιάζονται διάφορα ανθρωπάκια κατασκευασμένα από ρολό χαρτιού). Σε πόσους φίλους τις μοίρασε; Πώς το ξέρεις ότι τις μοίρασε σε τόσους φίλους;». Αν ο συμμετέχων απαντούσε σωστά το πρόβλημα επαναδιατυπωνόταν με έξι καραμέλες και τρεις παραλήπτες (Ε6.2.2) κι έπειτα με οχτώ καραμέλες και τέσσερις παραλήπτες (Ε6.2.3).

Στην Γ κατηγορία περιλαμβάνονταν έργα που εξέταζαν άμεσα αν τα παιδιά αναγνωρίζουν όρους για πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια, αν μπορούν να υποδείξουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια διακριτών και συνεχών ποσοτήτων και αν μπορούν να εξηγήσουν λεκτικά τους όρους.

Αρχικά στα πρώτα προβλήματα στα οποία αναφέρονται οι όροι «1/2», «1/3» και «1/4», δεν δίνονται επιλογές απαντήσεων στα παιδιά προκειμένου να διερευνήσουν μόνα τους την απάντηση. Στη συνέχεια, σε περίπτωση που δεν μπορούσαν να βρουν την απάντηση, παρουσιάζονταν επιλογές διαφορετικού μεγέθους της αρχικής σοκολάτας, ½, ¼, ¾, 1, 1,5 και το κάθε παιδί έπρεπε να επιλέξει το κομμάτι που αντιστοιχούσε στον όρο.

Το προβλήματα για τα υποπολλαπλάσια ήταν διατυπωμένα ως εξής: σχετικά με τον όρο ½ ήταν το εξής: «Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα (*σχεδιασμένη σε χαρτόνι*). Θα σου δώσω (*ένα μέρος, εκφρασμένο ως κλάσμα*). Ποιο θα είναι το κομμάτι που θα πάρεις;». Εξετάστηκαν οι όροι μισό/ένα δεύτερο (Ε7.1.1) και, εφόσον το παιδί απαντούσε σωστά, οι όροι «ένα τέταρτο» (Ε7.1.2) και «ένα τρίτο» (Ε7.1.3). Τα αντίστοιχα έργα για τις διακριτές ποσότητες αφορούσαν καραμέλες ((Ε7.2.1), (Ε7.2.2), (Ε7.2.3)), αντίστοιχα) Μετά από κάθε απάντηση το παιδί έπρεπε να εξηγήσει τι εννοούσε με τον όρο ½ κοκ.

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία, σε παρόμοιο πλαίσιο. Τα παιδιά κλήθηκαν αρχικά να απαντήσουν για το «διπλάσιο» ((Ε8.1.1) για συνεχείς, (Ε8.2.1) για διακριτές ποσότητες) και, με την προϋπόθεση της σωστής απάντησης κλήθηκαν να απαντήσουν για το «τριπλάσιο» ((Ε8.1.2 για συνεχείς, (Ε8.2.2) για διακριτές ποσότητες) και το «τετραπλάσιο» ((Ε8.1.3) για συνεχείς, (Ε8.2.3) για διακριτές ποσότητες).

Υπήρξε μια διαφοροποίηση στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο σε σχέση με τον όρο «μισό». Κατά τον προέλεγχο χρησιμοποιήθηκε από την έρευνα ο όρος «μισό», ο οποίος όμως κατά τη διδακτική παρέμβαση και τον μεταέλεγχο αντικαταστάθηκε από την έκφραση «ένα δεύτερο». Η απόφαση αυτή βασίστηκε στα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης των Pitta & Vamvakoussi (2022) οι οποίες συμπεραίνουν ότι ο όρος «μισό» λειτούργησε τελικά ως εμπόδιο στην κατασκευή των υπόλοιπων υποπολλαπλασίων από μέρους των παιδιών. Είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα του παιδιού που αντικατέστησε τον όρο «ένα τρίτο» με το «τρία σου μισό» (Pitta & Vamvakoussi, 2022).

Η διερεύνηση της στρατηγικής που χρησιμοποιούσε το παιδί σε κάθε έργο ελεγχόταν μέσα από ανοιχτές ερωτήσεις «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό;» ή «Πώς το σκέφτηκες;». Η συλλογή δεδομένων στις δύο αυτές φάσεις έγινε μέσα από ατομικές συνεντεύξεις, ενώ για την παρουσίαση των έργων χρησιμοποιούνταν πάντα εμπράγματο υλικό (π.χ. κούκλες, σοκολάτα σχεδιασμένη σε χαρτόνι, καραμέλες). Χρησιμοποιήθηκαν σύγχρονα (βιντεοσκόπηση) και ασύγχρονα μέσα καταγραφής (σημειώσεις αμέσως μετά τη συνάντηση).

3.4 Περιγραφή, στόχος και άξονες της διδακτικής παρέμβασης

Ο σκοπός της διδακτικής παρέμβασης ήταν να δημιουργήσει ένα κατάλληλο μαθησιακό πλαίσιο μέσα στο οποίο δύο παιδιά 1ης δημοτικού να έρθουν σε επαφή με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα σε δύο ποσότητες, είτε διακριτές είτε συνεχείς, να προβλέψουν, να ελέγξουν και να κατασκευάσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις χρησιμοποιώντας παράλληλα τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία.

Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν, βασίστηκαν σε τρεις άξονες για τους οποίους απουσιάζει η ρητή αναφορά στο Αναλυτικό Πρόγραμμα (2011) όπως έχουν επισημάνει η Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018). Ο πρώτος άξονας αφορά την παράλληλη εμπλοκή τόσο διακριτών όσο και συνεχών ποσοτήτων στην παρέμβαση. Το αναλυτικό Πρόγραμμα του 2011 δεν εστιάζει στη σημασία της διδασκαλίας των πολλαπλασιαστικών σχέσεων παράλληλα και στις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες (Βαμβακούση και Καλδρυμίδου, 2018). Όπως επισημαίνουν οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2011) ο ισομερισμός ο οποίος διατυπώνεται ως μοιρασιά περιορίζεται στις διακριτές ποσότητες, ενώ στο πλαίσιο των κλασματικών αριθμών ο ισομερισμός αναφέρεται και σε συνεχείς και σε διακριτές ποσότητες. Παρ’ όλα αυτά τα δεδομένα δείχνουν ότι τα παιδιά πρωτοσχολικής ηλικίας κατανοούν τις βασικές αρχές διαίρεσης ισομερισμού και μέτρησης τόσο στις διακριτές όσο και στις συνεχείς ποσότητες (Kornilaki & Nunes, 2005), ενώ σύμφωνα με τον Steffe (2013) στην εκπαίδευση θα πρέπει να εισάγονται παράλληλα τα δύο είδη ποσοτήτων.

Ο δεύτερος άξονας αφορά τη χρήση του κατάλληλου λεξιλογίου για την έκφραση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων μέσα από την παράλληλη εισαγωγή των όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια. Σύμφωνα με τους Hunting & Davis (όπως αναφέρεται στο Pitta, Kaldrimidou & Vamvakoussi, 2020) είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τα παιδιά να αναπτύξουν τα απαραίτητα γλωσσικά εργαλεία που θα τους επιτρέψουν να μεταφέρουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που αναγνωρίζουν και σε διαφορετικά πλαίσια.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να εισαχθούν όροι για πολλαπλάσια και υπο-πολλαπλάσια παράλληλα και συμμετρικά, δηλαδή, οι αντίστοιχοι όροι χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την ίδια σχέση, αλλά από δύο προοπτικές (π.χ. το Α είναι το τριπλάσιο του Β / Το Β είναι το ένα τρίτο του Α). Πρόκειται για μια επιλογή που έχει σημασία για τη νοηματοδότηση του πολλαπλασιασμού στο πλαίσιο των μη-φυσικών αριθμών. Πράγματι, ο πολλαπλασιασμός νοηματοδοτείται συνήθως ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ένα νόημα που δε μεταφέρεται στην περίπτωση που ο πολλαπλασιαστής είναι μη φυσικός αριθμός, ιδιαίτερα, μικρότερος της μονάδας. Έτσι, μια αριθμητική πρόταση όπως η «3x5=15» παίρνει το νόημα «5+5+5». Η εναλλακτική που προωθείται εδώ είναι η εξής: «Το τριπλάσιο του 5 είναι 15». Η έκφραση αυτή περιγράφει μια σχέση μεταξύ των δύο (αριθμητικών) ποσοτήτων, η οποία έχει τη συμμετρική της («το ένα τρίτο του 15 είναι το 5») που αντιστοιχεί στην αριθμητική προταση «1/3x15 = 5”).

Τέλος, η διδακτική παρέμβαση βασίστηκε στις τρεις θεμελιώδεις ενέργειες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, στον ισομερισμό, τη μέτρηση με διαφόρων ειδών μονάδες και την επανάληψη μιας ποσότητας. Οι ενέργειες αυτές συνδέονται άμεσα με την πολλαπλασιαστική κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων», την πιο τυπική κατάσταση που εισάγεται ήδη από το νηπιαγωγείο. Οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) επισημαίνουν ότι από μια συνθήκη π.χ. 20 αντικείμενα μοιράζονται δίκαια σε 5 άτομα και το κάθε άτομο παίρνει 4 αντικείμενα μπορούν να προκύψουν τρία προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής ανάλογα με το ζητούμενο. Αν το ζητούμενο είναι το μερίδιο τότε απαιτείται ισομερισμός, αν το ζητούμενο είναι το πλήθος των παραληπτών απαιτείται μέτρηση της ποσότητας με σύνθετη μονάδα και αν το ζητούμενο είναι το σύνολο των αντικειμένων απαιτείται επανάληψη της ποσότητας. Οι αντίστοιχες ενέργειες απαιτούνται και στην αντίστοιχη περίπτωση στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων και, συγκεκριμένα, της πολλαπλασιαστικής κατάστασης των «ίσων μέτρων». Επιπλέον, οι ενέργειες αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν στην πραγμάτευση και άλλων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, όπως αυτήν της «πολλαπλασιαστικής σύγκρισης», της «αναλογικής μοιρασιάς» και της «πολλαπλασιαστικής αλλαγής».

Σημειώνεται ότι ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων έγινε συνεργατικά με την υποψήφια διδάκτορα του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών Γεωργία Πήττα και την Αν. Καθηγήτρια του ίδιου Τμήματος Ξένα Βαμβακούση, στο πλαίσιο του επανα-σχεδιασμού μιας ακολουθίας δραστηριοτήτων για την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην προ- και πρωτο-σχολική ηλικία.

3.5 Αναλυτική περιγραφή της παρέμβασης

1η Εισαγωγική δραστηριότητα

Οι τρεις δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν βασίστηκαν σε ένα κοινό σενάριο. Στο σενάριο αυτό πρωταγωνιστούν αθλητικές ομάδες με φανταστικά πλάσματα. Τα πλάσματα αυτά σχεδιάστηκαν σε χαρτόνι, σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλόγραμμου με ίδιο πλάτος και διαφορετικό μήκος. Σχεδιάστηκαν δύο ομάδες πλασμάτων, η ομάδα των «Παμ» και η ομάδα των «Πομ» με μονάδα μήκους 4 εκ. και 6 εκ. αντίστοιχα. Κάθε ομάδα αποτελούνταν από 10 παίκτες με μήκος 1-10 μ.μ. , ενώ ως Παμ και Πομ ορίστηκαν τα πλάσματα με 1 μ.μ. Πέρα από τις ομάδες, για τις ανάγκες της δραστηριότητας, σχεδιάστηκαν «φανέλες» από χαρτόνι για τους παίκτες και ικανός αριθμός από μονάδες για την κάθε ομάδα.

Για την εισαγωγική δραστηριότητα διατυπώθηκαν οι εξής τοπικές υποθέσεις:

1. Τα παιδιά θα αξιοποιήσουν τις κανονικότητες που διέπουν την αριθμητική ακολουθία (απόλυτα και τακτικά αριθμητικά) για να μάθουν και να παράξουν τους όρους για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια συνδέοντας τα ηχητικά με τα αριθμητικά μοτίβα.
2. Θα νοηματοδοτήσουν τους όρους σε σύνδεση με τις ενέργειες της επανάληψης ποσότητας και της μέτρησης.

Στην αρχή της εισαγωγικής δραστηριότητας παρουσιάζονται οι παίκτριες και γίνονται κάποιες ερωτήσεις στα παιδιά σχετικά με το μέγεθός τους (π.χ. «Τι παρατηρείτε; Έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους;», «Ποιο πιστεύετε ότι είναι το επόμενο στη σειρά; Γιατί;»). Στη συνέχεια αποσύρονται τα διάφορα πλάσματα και παραμένει η «Παμ», η αρχηγός της ομάδας που αντιστοιχεί στη μονάδα. Ζητείται από τα παιδιά να γράψουν τον αριθμό στη φανέλα της, στην οποία ήδη αναγράφεται το όνομά της (1 Παμ). Έπειτα καλούνται οι επόμενες παίκτριες, όπου στο όνομα της κάθε επόμενης προστίθεται μια συλλαβή «Παμ» (π.χ. «ΠαμΠαμ», «ΠαμΠαμΠαμ» κοκ). Η παρουσίαση της κάθε επόμενης παίκτριας γίνεται με τη χρήση των τακτικών αριθμητικών επιθέτων (π.χ. δεύτερη, τρίτη κοκ) ενώ τα παιδιά καλούνται να φωνάζουν το όνομα της κάθε παίκτριας χτυπώντας τόσα παλαμάκια όσα και οι συλλαβές του κάθε ονόματος. Τα παιδιά, από την τρίτη παίκτρια και μετά, καλούνται να προβλέψουν το όνομα της επόμενης.

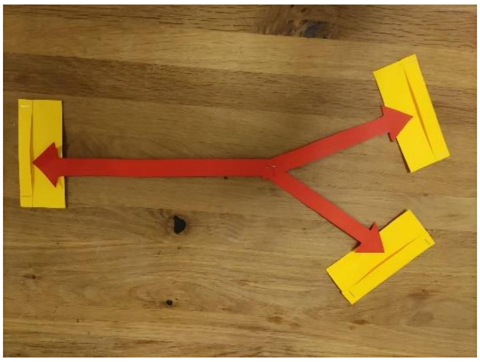
Καθώς αυξάνονται οι συλλαβές των ονομάτων των επόμενων Παμ, η εκφώνησή τους δυσχεραίνει, οπότε και εισάγονται τα υποκοριστικά τους. Τα υποκοριστικά σχηματίζονται από το κατάλληλο αριθμητικό πρόθεμα (π.χ. δι-, τρι-, κ.λπ.) και την κατάληξη «Παμ». Έτσι προκύπτουν τα υποκοριστικά ΔιΠαμ, ΤριΠαμ κ.λπ. Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό της παίκτριας στη φανέλα της (3 Παμ), ως προοίμιο για τη συμβολική έκφραση ενός αποτελέσματος μέτρησης πολλαπλασιαστικά. Κάθε παίκτρια που εισάγεται, συγκρίνεται με τη αρχηγό «Παμ» ως προς το μήκος της . Η ερώτηση που απευθύνεται προς τα παιδιά είναι η εξής: « Τι σχέση έχει η ΠενταΠαμ με την Παμ;». Η σχέση περιγράφεται αρχικά ως εξής: «Η ΠενταΠαμ είναι ίσαμε πέντε Παμ.», έτσι ώστε στη συνέχεια εισάγεται ο όρος του αντίστοιχου πολλαπλάσιου (πενταπλάσιο). Στο τέλος οι δύο παίκτριες λεκτικοποιούν τη σχέση τους (π.χ. «Είμαι το πενταπλάσιό σου- Είμαι το ένα σου πέμπτο»).

Αφού τα παιδιά ορίσουν τα υποκοριστικά όλων των παικτριών και σχεδιάσουν τις φανέλες τους, καλούνται είτε να βρουν την παίκτρια ενώ τους δίνεται το υποκοριστικό της, είτε να βρουν το υποκοριστικό της δίνοντας τους την παίκτρια χωρίς τη φανέλα της. (Π.χ. « Ποια είναι; Πώς το ξέρεις; Πως μπορείς να είσαι βέβαιος ότι αυτό είναι το όνομα της; Με ποια Παμ πρέπει να τη συγκρίνεις; Πόσες Παμ χρειάστηκες για να φτιάξεις την 4-Παμ; Να της φτιάξουμε την φανέλα; Πως λέγεται η Παμ όταν χωράει στη 2-Παμ; Στη 3- Παμ; κτλ.»). Η έκφραση της πολλαπλασιαστικής σχέσης ανάμεσα στην οποιαδήποτε παίκτρια και την αρχηγό της αποτελεί σταθερό ζητούμενο. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται στη συνέχεια με την παρουσίαση της ομάδας «Πομ», με τη διαφορά ότι η παρουσίαση των παικτών με τυχαία σειρά ξεκινά σχεδόν αμέσως (π.χ. «Έρχεται ένας άγνωστος Πομ. Ξέρεις μήπως ποιος είναι; Κάνε μια πρόβλεψη. Πώς θα βεβαιωθούμε; Με ποιον Πομ πρέπει να τον συγκρίνεις; Πόσους Πομ χρειάστηκες για να φτιάξεις τον 4-Πομ; Να του φτιάξουμε την φανέλα;»).

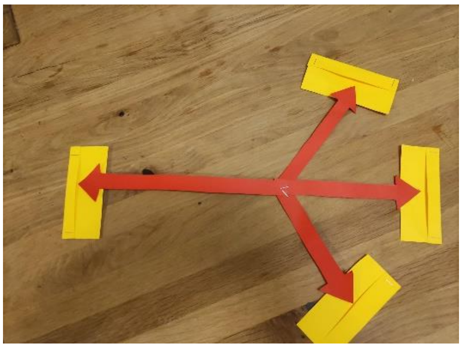
Η ταυτοποίηση της «παίκτριας», όταν αυτή παρουσιάζεται με τυχαία σειρά προϋποθέτει τη μέτρησή της με τη μονάδα, ενώ η αναζήτηση της παίκτριας όταν είναι γνωστό το «όνομά» της συνδέεται με την επανάληψη της μονάδας προκειμένου να κατασκευαστεί.

2η Δραστηριότητα

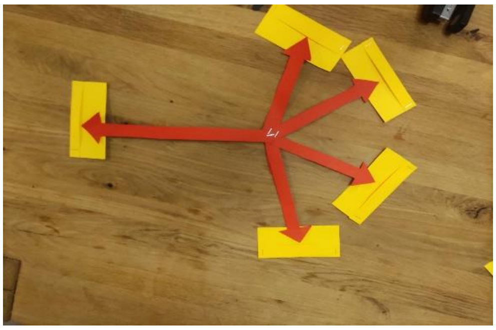
Η δεύτερη δραστηριότητα έχει ως κεντρική μαθηματική ιδέα την αναλογική μοιρασιά. Τα παιδιά καλούνται να κατασκευάσουν πολλαπλάσιες και υποπολλαπλάσιες ποσότητες, συνεχείς και διακριτές. Ως υποστηρικτικό υλικό σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε μια εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου. Πιο συγκεκριμένα για κάθε πολλαπλασιαστική σχέση (1:2/2:1, 1:3/3:1, 1:4/4:1) σχεδιάστηκε με χαρτόνι ένα «εργαλείο» το οποίο θα βοηθήσει τα παιδιά να δουν και να κατανοήσουν πώς μια ποσότητα μπορεί να πολλαπλασιαστεί/υποπολλαπλασιαστεί:



Εικόνα 1
Αναπαράσταση λόγου 1:2/2:1



Εικόνα 2
Αναπαράσταση λόγου 1:3/3:1



Εικόνα 3
Αναπαράσταση λόγου 1:4/4:1

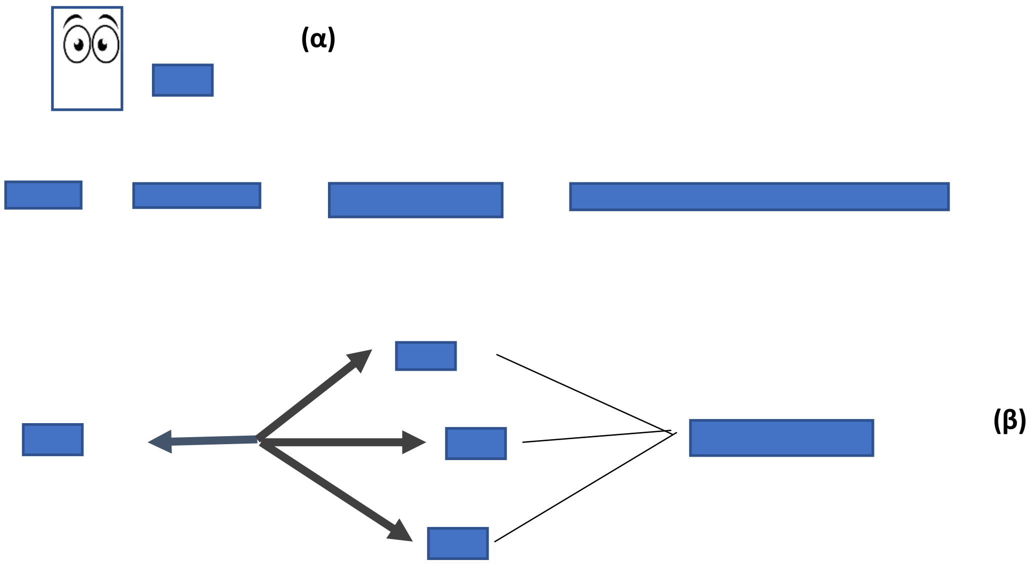
Για αυτή τη δραστηριότητα διατυπώθηκαν οι εξής τοπικές υποθέσεις:

1. Τα παιδιά θα μεταφέρουν τους νέους όρους και τις ενέργειες σε ένα νέο πλαίσιο.
2. Το «εργαλείο» θα υποστηρίξει την κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων.

Το σενάριο έχει ως εξής: «Ο σοφός γερο- γιατρός της ομάδας μάζεψε τα πιο υγιεινά φρούτα, τα πιο δυναμωτικά λαχανικά, τα πιο θρεπτικά όσπρια και σιτηρά. Μπήκε στο εργαστήριό του μαζί με τους βοηθούς του και έφτιαξαν σούπερ-βιταμίνες και υπερ-ενεργειακές μπάρες. Άρχισε λοιπόν να κάνει δοκιμές προκειμένου να βρει τη σωστή δόση για την αρχηγό, Παμ. Αφού τη βρήκε, θα έπρεπε να βρει τη δόση και για τις υπόλοιπες παίκτριες της ομάδας. Όσο πιο ψηλή είναι η επόμενη Παμ, τόσο πιο μεγάλη και η δόση της.»

Έτσι λοιπόν όταν εμφανίζεται μια από τις επόμενες Παμ, π.χ. η ΤριΠαμ, τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν αρχικά σε ερωτήσεις όπως: «Ποια είναι αυτή; Τι σχέση έχει με την Παμ; Τι σχέση έχει η Παμ με την ΤριΠαμ; Θα πάρει μικρότερη ή μεγαλύτερη δόση από την Παμ;». Στα πολλαπλάσια τα παιδιά θα καταλήξουν ότι αφού η Παμ θα πάρει τη δόση που τους παρουσιάζεται, η ΤριΠαμ πρέπει να πάρει τρεις τέτοιες δόσεις. Για παράδειγμα στις συνεχείς ποσότητες πρώτα παρουσιάζεται στα παιδιά η Παμ μαζί με την υπερ- ενεργειακή μπάρα που θα φάει (Εικόνα 1α).

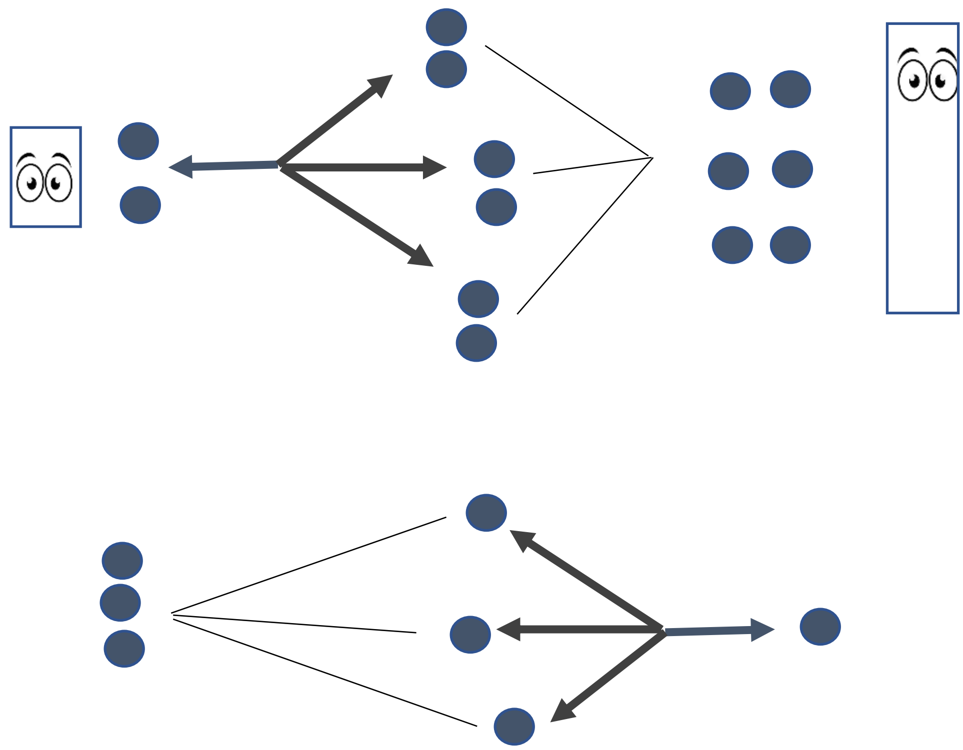
Σε αυτό το σημείο τα παιδιά με τη βοήθεια του εργαλείου που σχεδιάστηκε και απεικονίζεται στην εικόνα 2, προσπαθούν να βρουν την αναλογία και την μπάρα που αντιστοιχεί στην ΤριΠαμ (Εικόνα 1β).



Εικόνα 1

Αντίστροφα στα υποπολλαπλάσια τα παιδιά με τη βοήθεια του εργαλείου πάλι, θα πρέπει να ισομερίσουν την μπάρα και να βρουν τη σωστή ποσότητα της Παμ, η οποία είναι το 1/3 σε σχέση με την ΤριΠαμ άρα και η μπάρα που θα φάει θα πρέπει να είναι το 1/3 της μπάρας που παρουσιάζεται στα παιδιά ως δόση της ΤριΠαμ.

Στις διακριτές ποσότητες, στα πολλαπλάσια, τίθενται τα εξής ερωτήματα προς τα παιδιά: «Τι σχέση έχει η ΤριΠαμ με την Παμ; Θα πάρει περισσότερες ή λιγότερες βιταμίνες από την Παμ; Πόσες πιστεύεις θα πάρει; Γιατί;». Στις περιπτώσεις των διακριτών ποσοτήτων δεν δίνονται επιλογές από τις οποίες πρέπει να επιλέξουν την απάντηση τα παιδιά, αλλά προσπαθούν να βρουν την αναλογία μόνο με τη βοήθεια του εργαλείου, επαναλαμβάνοντας την ποσότητα (Εικόνα 2α, β). Τα παιδιά κλήθηκαν να υπολογίσουν τις δόσεις έως και την ΤετραΠαμ τόσο στις συνεχείς όσο και στις διακριτές ποσότητες.



Εικόνα 2

3η Δραστηριότητα

Η τρίτη δραστηριότητα της πολλαπλασιαστικής μεταβολής, βασίστηκε στην ιδέα των κλασματομηχανών (Hunting & Davis,1991) με κάποιες προσαρμογές. Ειδικότερα σε αυτές τις μηχανές η είσοδος και η έξοδος «εναλλάσσονται» έτσι ώστε να είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός και υποπολλαπλασιασμός ποσοτήτων. Για τις ανάγκες της δραστηριότητας αυτής σχεδιάστηκαν με χαρτόνι τρεις κλασματομηχανές, μία για κάθε σχέση (1:2/2:1, 1:3/3:1, 1:4/4:1).

Για αυτή τη δραστηριότητα διατυπώθηκαν οι εξής τοπικές υποθέσεις:

1. Τα παιδιά θα μεταφέρουν τους όρους και τις ενέργειες που επεξεργάστηκαν στις προηγούμενες δραστηριότητες σε αυτήν. Πιο συγκεκριμένα:
   α) Τα παιδιά θα αναγνωρίσουν τις σχέσεις πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων μεταξύ των ποσοτήτων που μεταβάλλονται με τη χρήση της κλασματομηχανής.
   β) Θα προβλέψουν και θα ελέγξουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που προκύπτουν με τη χρήση της κλασματομηχανής τόσο για τις συνεχείς όσο και τις διακριτές ποσότητες.
   γ) Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας θα χρησιμοποιούν τις κατάλληλες γλωσσικές εκφράσεις.
2. Οι στρατηγικές των παιδιών όσον αφορά τον ισομερισμό θα εξελιχθούν, από τη εφαρμογή της στρατηγικής «δοκιμή και λάθος», σε στρατηγικές που περιλαμβάνουν νοερή εκτίμηση (των συνεχών ή διακριτών μερών).

Η δραστηριότητα ξεκινάει ως εξής: « Η κυρία Διάνοια, μια φοβερή εφευρέτης, έφτιαξε μια μηχανή που όμοιά της δεν έχετε ξαναδεί! Σε αυτήν μπορείς να βάλεις είτε βιταμίνες είτε υπερενεργειακές μπάρες. Ανάλογα με το ποιο κουμπί θα πατήσεις κάνει κάτι μαγικό! Για δείτε! Βάζω από αυτή την είσοδο αυτή την μπάρα, πατάω αυτό το κουμπί και βγαίνει αυτή η μπάρα. Μήπως μπορείτε να καταλάβετε τι κάνει;».

Στην αρχή παρουσιάζεται η μηχανή για τη σχέση 1:2/2:1. Δίνεται μία συνεχής ποσότητα (υπερ-ενεργειακή μπάρα), η ερευνήτρια πατάει ένα από τα δύο πλήκτρα και στη συνέχεια βγαίνει από την έξοδο μια άλλη μπάρα. Τότε τίθεται το εξής ερώτημα: «Μπορείτε να καταλάβετε τι έκανε μόλις τώρα η μηχανή της κυρίας Διάνοιας; Πώς το ξέρετε;». Στη συνέχεια ακολουθούν και άλλα παραδείγματα όπου τα παιδιά προσπαθούν να προβλέψουν και να ελέγξουν την ποσότητα που θα βγει από την έξοδο. Όπως και στη δεύτερη δραστηριότητα, έτσι κι εδώ στις συνεχείς ποσότητες δίνονται διαφορετικές επιλογές και τα παιδιά πρέπει να ελέγξουν ποια είναι η διπλάσια ποσότητα. Οι δύο ποσότητες (αρχική και διπλάσια) είναι ορατές καθόλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Στην περίπτωση του υποπολλαπλασιασμού, γίνεται μια εναλλαγή, καθώς η έξοδος γίνεται πλέον είσοδος και η ερευνήτρια πατάει το δεύτερο πλήκτρο. Αφού παρουσιαστεί η λειτουργία της μηχανής, τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν κάποιο σύμβολο ή ο,τι τα ίδια επιθυμούν προκειμένου να γίνεται διακριτή η διαφορετική λειτουργία των δύο πλήκτρων.

Στη δεύτερη φάση γίνεται η αντίστοιχη παρουσίαση για τις διακριτές ποσότητες. Στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού, τα παιδιά αφού αναγνωρίσουν τη σχέση 2:1, θα πρέπει να προβλέψουν σε επόμενα παραδείγματα ποια θα είναι η διπλάσια δόση. Έτσι στην έξοδο όπου εμφανίζεται η δόση διπλάσια θα έπρεπε να σχηματίσουν δύο ίδιες ποσότητες, τοποθετώντας τη μία κάτω από την άλλη. Αντίστροφα στον υποδιπλασιασμό θα έπρεπε να σχηματίσουν δύο ισοπληθείς ομάδες προκειμένου να σχηματίσουν τη σωστή δόση στην έξοδο. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τις σχέσεις 1:3/3:1, 1:4/4:1 με τη διαφορά ότι μετά τη σχέση 1:2/2:1 παρουσιάστηκε η σχέση 1:4/4:1 κι έπειτα η σχέση 1:3/3:1. Στο τέλος της δραστηριότητας αφού εξοικειωθούν με τη χρήση της κάθε κλασματομηχανής, τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν τη δική τους κλασματομηχανή και να την λειτουργήσουν όπως και τις προηγούμενες.

4.Ευρήματα κατά τη διάρκεια της παρέμβασης

4.1.Πρώτη Δραστηριότητα

Κατά τη διάρκεια της πρώτης δραστηριότητας, αφού παρουσιάστηκε η Παμ και η Παμ- Παμ (ΔιΠαμ), τα παιδιά αυθόρμητα προέβλεψαν ποιες θα είναι οι επόμενες Παμ χρησιμοποιώντας την ακολουθία των φυσικών αριθμών, όπως φαίνεται από τα Επεισόδια 1.1 και 1.2. Επιπλέον, στα ίδια επεισόδια φαίνεται ότι τα παιδιά αρχίζουν άμεσα να παράγουν τα συμπτυγμένα ονόματα των παικτριών.

Ερευνήτρια: Ποια λέτε θα είναι η επόμενη της ΠαμΠαμ; Κωνσταντίνος: Θα είναι η Τρι- Παμ! Η Παμ- Παμ- Παμ! Ερευνήτρια: Σωστά! Πώς το κατάλαβες; Κωνσταντίνος: Πρώτα ήταν η Παμ, μετά η Παμ-Παμ, ε τώρα θα είναι η Παμ- Παμ- Παμ, η ΤριΠαμ.

Επεισόδιο 1.1. *Πρόβλεψη της επόμενης (3ης) παίκτριας και του ονόματός της*

Ερευνήτρια: Μετά την Τρι- Παμ ποια παίκτρια θα έρθει;

Δέσποινα: Η Παμ- Παμ- Παμ- Παμ!
Ερευνήτρια: Ωραία! Πόσες φορές είπες Παμ;
Δέσποινα: Τέσσερις.
Ερευνήτρια: Και πώς λέτε ότι θα την φωνάζουν οι φίλοι της;
Κωνσταντίνος: Τετρα-Παμ.

Επεισόδιο 1.2: *Πρόβλεψη της επόμενης (4ης) παίκτριας και του ονόματός της*

Τα παιδιά από πολύ νωρίς ξεκινούν να χρησιμοποιούν διαδικασίες μέτρησης για να συγκρίνουν το ύψος των παικτριών, επιλέγοντας την Παμ ως μονάδα μέτρησης, όπως φαίνεται στο Επεισόδιο 1.3.

Ερευνήτρια: Τι παρατηρείτε λοιπόν τώρα για την Παμ και την Δι- Παμ;
Δέσποινα: Ότι η Παμ είναι πιο κοντή από την Δι-Παμ.
Ερευνήτρια: Πόσο πιο κοντή είναι;
Κωνσταντίνος: Λίγο.
Ερευνήτρια: Πώς θα βρούμε πόσο πιο ψηλή είναι η Δι-Παμ;
Δέσποινα: Θα το μετρήσουμε.
Ερευνήτρια: Πώς θα το μετρήσουμε;
Δέσποινα: Με μέτρο;
Ερευνήτρια: Δεν έχουμε όμως μέτρο μαζί μας. Υπάρχει άλλος τρόπος;
Κωνσταντίνος: Είναι ένα-δύο (δείχνει με το δάχτυλό του)
Ερευνήτρια: Τι είναι αυτό το ένα-δύο;
Δέσποινα: Τόσες Παμ χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε τη ΔιΠαμ. Εδώ βάζουμε άλλη μία. Σύνολο δύο.

Επεισόδιο 1.3. *Σύγκριση ύψους μέσω μέτρησης, με επιλογή κατάλληλης μονάδας.*

Αυτήν τη σκέψη σχετικά με τις διαδοχικές Παμ, εξέφραζαν καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας καθώς ήθελαν πάντα να τις βάζουν σε σειρά. Επιπλέον, αξιοποιώντας την ακολουθία των φυσικών αριθμών τα παιδιά επίσης προέβλεπαν το ύψος όχι μόνο της επόμενης Παμ, αλλά και οποιασδήποτε τυχαίας Παμ την οποία καλούνταν να αναγνωρίσουν. Κάποιες φορές χρησιμοποιούσαν μια από τις προηγούμενες Παμ ως μέτρο σύγκρισης προκειμένου να υπολογίσουν την άγνωστη

Παμ, εφαρμόζοντας εκτίμηση, μέσω νοερής μέτρησης, όπως φαίνεται στο Επεισόδιο 1.4.

Δέσποινα: Είναι η ΕξαΠαμ. Όχι η ΕφταΠαμ. Ερευνήτρια: Πώς το βρήκες; Δέσποινα: Από το ύψος. Ερευνήτρια: Τι σκέφτηκες δηλαδή; Δέσποινα: Σκέφτηκα ότι αφού αυτή είναι η ΠενταΠαμ, αυτή θα είναι η ΕφταΠαμ. Φαντάστηκα ότι την μετράω με αυτά εδώ (δείχνει τις Παμ). Ερευνήτρια: Μπορείς να μου το δείξεις; Η Δέσποινα βάζει το χέρι της κάθετα στην ΕφταΠαμ στο σημείο που τελειώνει η ΠενταΠαμ και μετράει. Δέσποινα: Έξι, εφτά.

Επεισόδιο 1.4. *Εκτίμηση μέσω νοερής μέτρησης για τον προσδιορισμό της παίκτριας.*

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, τα παιδιά φάνηκε να προσαρμόζονται αρκετά γρήγορα στη χρήση των αντίστοιχων όρων από την πρώτη κιόλας συνάντηση, σε αντίθεση με τα υποπολλαπλάσια, για τα οποία χρειάστηκε περισσότερος χρόνος προκειμένου να εξοικειωθούν και να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση τους:

Ερευνήτρια: Φτιάχνουμε την φανέλα της; Τι παρατηρείτε; Τι σχέση έχουν η Παμ με την Τρι- Παμ; Δέσποινα: Η Παμ-παμ- παμ είναι πιο μεγάλη. Ερευνήτρια: Πόσο πιο μεγάλη είναι; Πόσες Παμ χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε την Παμ-Παμ- Παμ; Δέσποινα: Τρεις. Ερευνήτρια: Σωστά. Μπορείτε να σκεφτείτε τι λέμε ότι είναι η ΤριΠαμ σε σχέση με την Παμ; Με μια λέξη; Κωνσταντίνος: Τριπλάσια. Ερευνήτρια: Μήπως μπορείτε να σκεφτείτε τι είναι η Παμ σε σχέση με την Τρι-Παμ; Κωνσταντίνος: Είμαι το τρίτο μισό σου. Ερευνήτρια: Θυμάστε πώς είπαμε ότι θα λέμε το όνομά του; Δέσποινα: Είναι το ένα από τα τρία.

Ερευνήτρια: Ναι και θα το λέμε «ένα τρίτο».

Επεισόδιο 1.5. *Χρήση όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια.*

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται η δυσκολία που παρουσιάζουν τα παιδιά στη χρήση των όρων των υποπολλαπλασίων σε σχέση με τα πολλαπλάσια. Ο όρος «μισό» χρησιμοποιήθηκε από τον Κωνσταντίνο αρχικά, όταν του ζητήθηκε να ορίσει την Παμ σε σχέση με τη ΔιΠαμ. Χωρίς να γίνει κάποια διόρθωση, η ερευνήτρια εξήγησε στα παιδιά ότι το μισό, είναι το ένα από τα δύο, το ένα δεύτερο. Ο Κωνσταντίνος ξαναχρησιμοποίησε τον όρο «μισό» όταν κλήθηκε να ονομάσει το ένα τρίτο. Παρόλα αυτά στις επόμενες συναντήσεις, κανένα από τα δύο παιδιά δεν ξαναχρησιμοποίησε τον όρο μισό και φάνηκε ότι έκαναν τη σύνδεση από το ένα δεύτερο στο ένα τρίτο κ.ο.κ. χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Η εξοικείωση και των δύο παιδιών με τους όρους των πολλαπλάσιων και των υποπολλαπλάσιων γίνεται φανερή ιδιαίτερα όταν εισάγεται η ομάδα των Πομ, όπου καλούνται να κάνουν εκτιμήσεις σχετικά με το ύψος του κάθε παίκτη και με βάση αυτήν την εκτίμηση να τους ονομάσουν, να κάνουν συγκρίσεις και να χρησιμοποιήσουν την μονάδα (Πομ) προκειμένου να εξακριβώσουν ποιος Πομ παρουσιάζεται κάθε φορά (Επεισόδιο 1.6).

Ερευνήτρια: Ο ΤετραΠομ σε σχέση με τον Πομ τι είναι; Κωνσταντίνος: Τετραπλάσιος. Ερευνήτρια: Ωραία.Γιατί; Δέσποινα: Είναι τέσσερις φορές ο Πομ. Ερευνήτρια: Για να βάλουμε τον Πομ δίπλα στον ΔεκαΠομ. Παρατήρησέ τους. Τι είναι ο Πομ; Δέσποινα: Το ένα δέκατο. Ερευνήτρια: Πώς το ξέρεις; Κωνσταντίνος: Το ξέρω γιατί ο Πομ είναι ο ένας από τους δέκα που κάνουν τον ΔεκαΠομ.

Επεισόδιο 1.6.: *Εκτίμηση και προσδιορισμός παίκτη με αναφορά στον Πομ ως μονάδα μέτρησης.*

Η ευχέρεια με τα πολλαπλάσια φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα όπου τα παιδιά αρχίζουν αυθόρμητα να παράγουν και να χρησιμοποιούν όρους πέρα από το δεκαπλάσιο:

Ερευνήτρια: Δέσποινα, μπορείς να κάνεις μια εκτίμηση; Ποιος πιστεύεις ότι είναι αυτός ο Πομ; Δέσποινα: Δεν ξέρω. Ερευνήτρια: Πως θα το βρεις; Δέσποινα: Θα το μετρήσω με τους Πομ. Είναι ο ΠένταΠομ. Είναι πενταπλάσιος. Αυτά με τα πενταπλάσια και τα δεκαπλάσια… Κωνσταντίνος: Και τα εκατοπλάσια… Ερευνήτρια: Δηλαδή για να είναι εκατονταπλάσιος ένας Πομ πόσους Πομ χρειαζόμαστε; Κωνσταντίνος: Εκατό.

Επεισόδιο 1.7. *Παραγωγή νέων όρων πολλαπλασίων.*

Τα παιδιά φαίνεται να γενίκευσαν τη σχέση ½ και διπλάσιο και για ποσότητες πέραν αυτών που περιλάμβαναν τη μοναδιαία ποσότητα. Στο παρακάτω απόσπασμα παρουσιάζονται δίπλα δίπλα η ΤριΠαμ και η ΕξαΠαμ στα παιδιά. Ακολουθεί ο εξής διάλογος (Επεισόδιο 1.8):

Ερευνήτρια: Μπορείτε να μου πείτε ποια είναι αυτή η Παμ; (Δείχνει την ΤριΠαμ) Δέσποινα: Αυτή είναι η ΤριΠαμ και αυτή ΕξαΠαμ. Ξέρεις πώς το βρήκα; Έκανα πρόσθεση μαθηματικών. Τρία εδώ (δείχνει την ΤριΠαμ) και άλλα τρία (δείχνει την Εξαπάμ) μας κάνουν έξι. Ερευνήτρια: Δηλαδή μετά την ΤριΠαμ πόσες άλλες Παμ χρειάζεσαι για να κάνεις την ΕξαΠαμ; Δέσποινα: Άλλες τρεις. Ερευνήτρια: Μπορείς να μου πεις η ΕξαΠαμ σε σχέση με την ΤριΠαμ τι είναι; Ποια είναι μεγαλύτερη; Δέσποινα: Αυτή (δείχνει την ΕξαΠαμ). Είναι δύο φορές η ΤριΠαμ. Ερευνήτρια: Πολύ σωστά.

Δέσποινα: Είναι διπλάσια. Ερευνήτρια: Ναι και αυτή (δείχνει την ΤριΠαμ) σε σχέση με την ΕξαΠαμ τι είναι; Κωνσταντίνος: Το ένα δεύτερο.

Επεισόδιο 1.8. *Γενίκευση της σχέσης 1:2/2:1*

Η κατανόηση της μονάδας είναι ένα επίσης σημαντικό σημείο που διατυπώνεται αυθόρμητα από τα παιδιά. Η Δέσποινα, όταν παρουσιάζεται η ομάδα των Πομ, κάνει την εξής παρατήρηση:

Ερευνήτρια: Αφού τελειώσαμε την ομάδα με τις Παμ, θα συνεχίσουμε με την ομάδα των Πομ, γιατί αυτές οι δύο ομάδες θα παίξουν ποδόσφαιρο. Οι Πομ είναι οι αντίπαλοί τους. Να τοι έρχονται! (Παρουσιάζονται αρχικά τέσσερις Πομ) Δέσποινα: Αυτός θα είναι ο αρχηγός. (Δείχνει τον Πομ με το πιο μικρό μέγεθος) Ερευνήτρια: Και γιατί νομίζεις ότι θα είναι αυτός ο Πομ; Δέσποινα: Γιατί αυτός είναι ο πιο μικρός και με αυτόν θα φτιάξουμε και τους άλλους Πομ.

Επεισόδιο 1.9. *Κατανόηση της μονάδας*

Στη συνέχεια όταν τα παιδιά καλούνται να κάνουν εκτιμήσεις γύρω από τους Πομ που τους παρουσιάζονται, τα παιδιά αναπτύσσουν δικές τους στρατηγικές. Ο Κωνσταντίνος στο παρακάτω απόσπασμα χρησιμοποιεί την παλάμη του για να μετρήσει το ύψος του ΔεκαΠομ, ενώ σε ένα άλλο σημείο η Δέσποινα τοποθετεί το χέρι της κάθετα, σαν να κόβει την Παμ σε κομμάτια προκειμένου να κάνει τη δική της εκτίμηση.

Ερευνήτρια: Τώρα μπορείτε να σκεφτείτε ποιος είναι αυτός ο Πομ; Κωνσταντίνος: Ο ΔεκαΠομ. Ερευνήτρια: Και πώς το ξέρεις ότι είναι αυτός ο Πομ; *Ο Κωνσταντίνος παίρνει την παλάμη του και αρχίζει να μετράει τον Πομ που του δόθηκε φτάνοντας στο δέκα. Την ίδια στιγμή η Δέσποινα παίρνει τους Πομ και τοποθετεί τον έναν μετά τον άλλον πάνω στον Πομ.* Δέσποινα: Είναι δέκα Πομ. Κωνσταντίνος: Είναι πολύ μεγάλος. Ερευνήτρια: Ναι είναι. Ο ΔεκαΠομ σε σχέση με τον Πομ τι είναι;

Δέσποινα: Δεκαπλάσιος.

Επεισόδιο 1.10. *Στρατηγικές για την εύρεση του ονόματος των παικτών*

Από τα ευρήματα της πρώτης δραστηριότητας φαίνεται να επιβεβαιώνονται οι τοπικές υποθέσεις που διατυπώθηκαν αρχικά. Τα παιδιά αξιοποίησαν τις κανονικότητες που διέπουν την αριθμητική ακολουθία αποκτώντας γρήγορα ευχέρεια στη χρήση των κατάλληλων όρων που αφορούν κυρίως τα πολλαπλάσια κι έπειτα τα υποπολλαπλάσια. Παρόλο που και τα δύο παιδιά εξοικειώθηκαν πιο γρήγορα με τους όρους των πολλαπλασίων σε σχέση με τους αντίστοιχους των υποπολλαπλασίων, σταδιακά ξεπέρασαν τη δυσκολία που αρχικά αντιμετώπισαν. Αυτή η δυσκολία συνδεόταν κυρίως με την χρήση του όρου «μισό», ίσως επειδή κυριαρχούσε μέχρι τότε στο καθημερινό λεξιλόγιο των παιδιών. Η παραπάνω υπόθεση ενισχύεται από το γεγονός ότι και τα δύο παιδιά παρουσίασαν την ίδια δυσκολία. Τέλος, και τα δύο παιδιά κατάφεραν να συνδέσουν τους όρους με τις ενέργειες της επανάληψης της ποσότητας και της μέτρησης, στρατηγικές που αναδείχθηκαν αυθόρμητα από τα ίδια, χωρίς παρέμβαση.

4.2.Δεύτερη δραστηριότητα

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης δραστηριότητας τα παιδιά μετέφεραν τους όρους και τις ενέργειες της πρώτης δραστηριότητας στο νέο πλαίσιο που αφορούσε την αναλογική μοιρασιά διακριτών και συνεχών ποσοτήτων. Συγκεκριμένα τα παιδιά άρχισαν να κατασκευάζουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια με τη χρήση της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου και να εξηγούν τις απαντήσεις τους.

Στο Επεισόδιο 2.1 που ακολουθεί, η Δέσποινα αναγνωρίζει, εκφράζει λεκτικά και εξηγεί (ατελώς, καθώς δεν αναφέρει ότι τα δύο μέρη πρέπει να είναι ίσα) τη σχέση της μπάρας της ΔιΠαμ με αυτήν της Παμ. Επιπλέον, η Δέσποινα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των μπαρών της Παμ και της ΔιΠαμ με έναν τρόπο που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως πρώιμη περιγραφή μιας αναλογικής σχέσης.

Ερευνήτρια: Αυτό το κομμάτι Δέσποινα, τι είναι σε σχέση με την μπάρα που θα πάρει η ΔιΠαμ; Δέσποινα: Το ένα δεύτερο.

Ερευνήτρια: Γιατί;
Δέσποινα: Γιατί χρειάζεται ακόμα ένα κομμάτι για να πάρει αυτό που θα πάρει η ΔιΠαμ. Αυτό το κομμάτι (*το ένα δεύτερο της μπάρας της ΔιΠαμ*) είναι σαν να είναι η Παμ και αυτό (*η μπάρα της* ΔιΠαμ) σαν να είναι η ΔιΠαμ.
Ερευνήτρια: Πολύ σωστά, το ένα δεύτερο, δηλαδή το ένα από τα δύο. Αν βάλω ακόμα ένα ίδιο κομμάτι μπάρας εδώ θα φτιάξω την μπάρα της ΔιΠαμ. Έτσι όπως η Παμ είναι το ένα δεύτερο της ΔιΠαμ, έτσι και η δόση της Παμ είναι το ένα δεύτερο της δόσης της ΔιΠαμ.

Επεισόδιο 2.1. *Μεταφέροντας και εξηγώντας τον όρο «ένα δεύτερο».*

Από την αρχή της δραστηριότητας παρατηρήθηκαν διαφορές στην ευχέρεια των παιδιών στις διακριτές έναντι των συνεχών ποσοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, στις διακριτές ποσότητες, οι προσθετικές σχέσεις με τις οποίες τα παιδιά είναι περισσότερο εξοικειωμένα φαίνεται να λειτουργούν ως εμπόδιο αρχικά στην κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων. Στο Επεισόδιο 2.2 παρουσιάζεται ένας διάλογος από την πρώτη συνάντηση μετά την εισαγωγή της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου. Η εντύπωση που προκαλείται από την απάντηση του Κωνσταντίνου είναι ότι επανέρχεται η ερμηνεία τος όρου «διπλάσιο» ως «η αρχική ποσότητα συν δύο», την οποία είχε εκφράσει κατά τον προέλεγχο.

Ερευνήτρια: Αν ο σοφός γερο γιατρός διαπίστωνε ότι αυτή δεν είναι η σωστή δόση για την Παμ και μετά από πειράματα έβρισκε ότι η κατάλληλη δόση είναι αυτή (*3 βιταμίνες*), ποια θα ήταν η δόση της ΔιΠαμ;
Κωνσταντίνος: Πέντε.
Ερευνήτρια: Δοκιμάστε να το βρείτε με το εργαλείο του σοφού γερο-γιατρού.
[*Τα παιδιά τοποθετούν τις βιταμίνες της Παμ κι έπειτα προσπαθούν να βάλουν τη διπλάσια δόση, όμως αρχικά μπερδεύονται. Η Δέσποινα τοποθετεί 4 βιταμίνες. Ο Κωνσταντίνος διορθώνει τη δόση*]
Κωνσταντίνος: Έξι θα πάρει.

Επεισόδιο 2.2. *Ερμηνεύοντας το «διπλάσιο» ως «συν δύο».*

Αντίθετα, όσον αφορά την κατασκευή πολλαπλασίων στις συνεχείς ποσότητες, όπου η «αριθμητικοποίηση» της κατάστασης δεν ήταν άμεσα εφικτή, τα παιδιά εφάρμοσαν εξ αρχής στρατηγικές μέτρησης. Στο Επεισόδιο 2.3 παρουσιάζεται ένα σχετικό παράδειγμα που, επιπλέον, δείχνει ότι , αντίθετα με τον Κωνσταντίνο, η Δέσποινα δεν έχει σταθεροποιήσει ακόμα την αρχή ότι οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Κωνσταντίνος: Θα πάρει αυτή γιατί είναι το διπλάσιο μέγεθος.
Ερευνήτρια: Πώς ξέρεις ότι είναι το διπλάσιο μέγεθος; Πώς θα βρείτε ότι είναι το διπλάσιο;
Δέσποινα: Είναι αυτό γιατί αν βάλω αυτό από πάνω (τοποθετεί την αρχική δόση πάνω σε μια μεγαλύτερη μπάρα) θα μείνει αυτό κενό.
Κωνσταντίνος: Ναι αλλά δεν είναι ίδιο με το άλλο, είναι πιο μικρό. (Παίρνει την αρχική μπάρα και τη βάζει πάνω στην λανθασμένη επιλογή που διάλεξε η Δέσποινα). Άρα είναι αυτό (επιλέγει τη διπλάσια μπάρα από τις επιλογές που τους δόθηκαν).
Ερευνήτρια: Σωστά, αυτή θα πάρει γιατί αυτή η μεγαλύτερη μπάρα είναι διπλάσια, είναι δύο φορές αυτή η μπάρα (η μπάρα της Παμ).

Επεισόδιο 2.3. *Βρίσκοντας το «διπλάσιο» στις συνεχείς ποσότητες*

Και τα δύο παιδιά φάνηκε να εξοικειώνονται πιο γρήγορα με την εύρεση υποπολλαπλασίων στις συνεχείς ποσότητες σε σύγκριση με τις διακριτές. Στα Επεισόδια 2.3 και 2.4 αναδεικνύεται αυτή η διαφορά για το ¼, την πρώτη φορά που κλήθηκαν τα παιδιά να το κατασκευάσουν.

Ερευνήτρια: Η μπάρα που θα πάρει η Παμ σε σχέση με την ΤετραΠαμ πώς θα είναι;
Δέσποινα: Μικρότερη.
Ερευνήτρια: Πόσο μικρότερη;
Δέσποινα: Τέσσερις φορές.
Ερευνήτρια: Το ένα από τα τέσσερα. Άρα σε πόσα κομμάτια θα το μοιράσεις;
Κωνσταντίνος: Σε τέσσερα.
Ερευνήτρια: Σε ποια τέσσερα κομμάτια πιστεύεις ότι μπορείς να μοιράσεις την μπάρα;

Η Δέσποινα αρχικά επιλέγει μια μπάρα που χωράει τρεις φορές και στη συνέχεια το διορθώνει και παίρνει μια άλλη μετρώντας την τέσσερις φορές πάνω στην μπάρα της Παμ.

Δέσποινα: Αυτή θα πάρει. Όπως η Παμ είναι η μία από τις τέσσερις της ΤετραΠαμ, έτσι και η μπάρα θα είναι το ένα από τα τέσσερα.

Ερευνήτρια: Η Δέσποινα λοιπόν πήρε την μπάρα της ΤετραΠαμ, τη χώρισε σε τέσσερα ίσα μέρη και πήρε το ένα.

Επεισόδιο 2.3: *Βρίσκοντας το ένα τέταρτο μιας συνεχούς ποσότητας*

Ερευνήτρια: Θέλω τώρα να δοκιμάσετε και να μου πείτε, αν σας δώσω τη δόση της ΤετραΠαμ (4 βιταμίνες), ποια θα είναι η δόση της Παμ;

Κωνσταντίνος: Τις δύο.

Ερευνήτρια: Αν η Παμ είναι το ¼ της ΤετραΠαμ όπως είπαμε, πόση θα είναι και η δόση που θα πάρει;

Κωνσταντίνος:1.

Δέσποινα: 1, αφού είναι το ¼.

Ερευνήτρια: Αν αλλάξω τη δόση της ΤετραΠαμ και πάρει οχτώ βιταμίνες, πόσες θα πάρει η Παμ; Πώς θα το βρούμε;

(*Τα παιδιά προσπαθούν να το βρουν υποδιπλασιάζοντας την ποσότητα και καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι οι βιταμίνες θα είναι 4. Εισάγεται λοιπόν το εργαλείο της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου*).

Ερευνήτρια: Αυτό είναι το εργαλείο που θα μας βοηθήσει να βρούμε τη δόση της Παμ σε σχέση με τη δόση της ΤετραΠαμ. Έχουμε λοιπόν οχτώ βιταμίνες. Η Παμ σε σχέση με την ΤετραΠαμ τι είναι;

Κωνσταντίνος: Το ¼

Ερευνήτρια: Άρα και η δόση πόση θα είναι;

Κωνσταντίνος: Το ¼.

Ερευνήτρια: Πώς θα βρω το ¼ αυτής της δόσης; Σκεφτείτε τι κάνατε με τις μπάρες. Σε πόσες μοιράζατε τη μεγάλη μπάρα που παίρνατε;

Κωνσταντίνος: Σε τέσσερις.

Ερευνήτρια: Ναι, τις χώριζες σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Μπορείς τις βιταμίνες να τις χωρίσουμε σε 4 ίσα μέρη;

Κωνσταντίνος: Ναι. Σε 2+2+2+2.

Επεισόδιο 2.4: *Βρίσκοντας το ένα τέταρτο μιας διακριτής ποσότητας*

Σχετικά με τα Επεισόδια 2.3 και 2.4 αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου είναι απαραίτητη στην περίπτωση των διακριτών, αλλά όχι των συνεχών, ποσοτήτων. Επιπλέον, από το Επεισόδιο 2.4 διαφαίνεται μια τάση των παιδιών να καταφεύγουν στον υποδιπλασιασμό, εκφράζοντας το αποτέλεσμα αριθμητικά. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι τα παιδιά φαίνεται να επωφελούνται από την προτροπή της ερευνήτριας να σκεφτούν ανάλογα με την περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο ισομερισμός διακριτών ποσοτήτων ήταν, αναμενόμενα, η μεγαλύτερη πρόκληση που αντιμετώπισαν τα παιδιά στη Δραστηριότητα 2. Η τάση του υποδιπλασιασμού, ανεξάρτητα από το ζητούμενο υποπολλαπλάσιο, αλλά και «αριθμητικοποίησης» της κατάστασης (κυρίως από τη μεριά του Κωνσταντίνου), ήταν παρούσες και στην περίπτωση εύρεσης του 1/3 μιας διακριτής ποσότητας, όπως φαίνεται στο Επεισόδιο 2.5. Στο ίδιο επεισόδιο φαίνεται και η προσαρμογή της στρατηγικής της 1-1 μοιρασιάς στη νέα κατάσταση. Πράγματι, ενώ αρχικά η πρώτη αυθόρμητη απάντηση του Κωνσταντίνου ήταν να υποδιπλασιάσει, στη συνέχεια άρχισαν και τα δύο παιδιά να κατασκευάζουν δυάδες και τις υπόλοιπες να τις μοιράζουν μία προς μία μέχρι να τελειώσουν, ενώ σε μία περίπτωση κατασκεύασαν απευθείας τριάδες. Αυτή η εξέλιξη της στρατηγικής παρουσιάζεται σε όλες τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις (1:2/2:1, 1:3/3:1,1:4/4:1):

Ερευνήτρια: Αν η ΤριΠαμ πάρει αυτές τις βιταμίνες (έξι), θέλω να μου βρείτε πόσες θα πάρει η Παμ.

Κωνσταντίνος: Τρεις θα πάρει.

Ερευνήτρια: Γιατί;

Κωνσταντίνος: Όχι, θα πάρει δύο.

Ερευνήτρια: Γιατί;

Κωνσταντίνος: Γιατί 2+2+2 μας κάνει έξι.

Ερευνήτρια: Δείξε μου λίγο τι έκανες. Τι έκανες τις έξι βιταμίνες;

Κωνσταντίνος: Τις έβαλα σε 2+2+2. Τις χώρισα.

Ερευνήτρια: Τις χώρισες δίκαια σε τρεις ίσες ομάδες. Δέσποινα, αν η ΤριΠαμ πάρει αυτές τις βιταμίνες (εννιά), πόσες θα πάρει η Παμ; Η Παμ τι είναι σε σχέση με την ΤριΠαμ, θυμάσαι;

Δέσποινα: Το ένα τρίτο.

Ερευνήτρια: Άρα και η δόση που θα πάρει θα είναι το 1/3 της ΤριΠαμ. Θέλω με τη βοήθεια του εργαλείου να βρεις πόσες βιταμίνες θα πάρει η Παμ.

Η Δέσποινα χωρίζει αρχικά τις βιταμίνες σε 2+2+2 και της περισσεύουν τρεις. Τις υπόλοιπες τρεις που περισσεύουν τις τοποθετεί από μία σε κάθε θήκη.

Επεισόδιο 2.5. *Βρίσκοντας το 1/3 διακριτών ποσοτήτων*

Σημειώνουμε ότι η χρήση της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου για την κατασκευή των πολλαπλασίων στις συνεχείς ποσότητες γρήγορα αποσύρθηκε καθώς τα παιδιά άρχισαν να ενεργούν νοερά σχηματίζοντας τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια.

Ερευνήτρια: Αν η Παμ φάει αυτή την μπάρα, πώς θα βρούμε ποια μπάρα θα πάρει η ΤετραΠαμ από αυτές; Κάντε πρώτα μια εκτίμηση. Ποια πιστεύετε ότι θα είναι η δόση της ΤετραΠαμ;

Ο Κωνσταντίνος επιλέγει σωστά την μπάρα που θα πάρει η ΤετραΠαμ και το επαληθεύει με την μπάρα της Παμ, τοποθετώντας την διαδοχικά τέσσερις φορές πάνω στην μπάρα, χωρίς να χρησιμοποιήσει το εργαλείο.

Επεισόδιο 2.6 *Νοερός σχηματισμός της τετραπλάσιας ποσότητας*

Η γενίκευση της σχέσης ½ και διπλάσιο για ποσότητες πέραν αυτών που περιλάμβαναν τη μοναδιαία ποσότητα που παρατηρήθηκε στην πρώτη δραστηριότητα, μεταφέρθηκε από τα παιδιά και στη δεύτερη.

Στο τέλος τοποθετούνται η ΔιΠαμ και η ΤετραΠαμ δίπλα δίπλα χωρίς τις φανέλες τους.

Ερευνήτρια: Ποιες Παμ έχουμε εδώ;

Κωνσταντίνος: Την ΔιΠαμ και την ΤετραΠαμ. Η ΤετραΠαμ είναι διπλάσια από τη ΔιΠαμ.

Δέσποινα: Ναι, γιατί αν είχα ακόμα μια ΔιΠαμ θα την έβαζα από πάνω και θα έφτιαχνα την ΤετραΠαμ.

Ερευνήτρια: Σωστά! Και η ΔιΠαμ τι είναι σε σχέση με την ΤετραΠαμ;
Κωνσταντίνος: Το ½.
Ερευνήτρια: Άρα αν πάρει η ΔιΠαμ τρεις βιταμίνες, πόσες θα πάρει η ΤετραΠαμ; Αφού είναι διπλάσια, θα πάρει και τη διπλάσια δόση.
Δέσποινα: Θα πάρει έξι.
Ερευνήτρια: Αν τώρα η ΤετραΠαμ θα πάρει τέσσερις βιταμίνες, πόσες βιταμίνες θα πάρει η ΔιΠαμ; Η ΔιΠαμ σε σχέση με την ΤετραΠαμ τι είναι;
Δέσποινα: Το ½.
Ερευνήτρια: Άρα και η δόση θα είναι το ½ από τις τέσσερις. Πόσες θα πάρει;
Κωνσταντίνος: Δύο, γιατί 2+2 μας κάνει τέσσερα.

Επεισόδιο 2.7 *Γενίκευση της σχέσης 1:2/2:1*

Συμπερασματικά, φαίνεται να επιβεβαιώνονται και οι δύο τοπικές υποθέσεις της δεύτερης δραστηριότητας. Πράγματι και τα δύο παιδιά μετέφεραν τους νέους όρους και τις ενέργειες στο νέο πλαίσιο, ενώ το εργαλείο λειτούργησε υποστηρικτικά στην κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων ιδιαίτερα στις διακριτές ποσότητες. Αντίθετα παρατηρήθηκε ότι και τα δύο παιδιά σύντομα άρχισαν να εκτιμούν νοερά τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια στις συνεχείς ποσότητες με αποτέλεσμα να καταργήσουν τη χρήση του εργαλείου. Μία διαφορά που εντοπίστηκε στα δύο παιδιά είναι ότι ο Κωνσταντίνος φάνηκε να κατανοεί γρηγορότερα την αναγκαιότητα του ισομερισμού στον σχηματισμό των υποπολλαπλάσιων στις συνεχείς ποσότητες. Η στρατηγική της μέτρησης ήταν κυρίαρχη στην κατασκευή πολλαπλασίων συνεχών ποσοτήτων, ενώ στις διακριτές ποσότητες ο ισομερισμός αποτέλεσε την κύρια δυσκολία και για τα δύο παιδιά. Τέλος, μέσα από την ευχέρεια που απέκτησαν τα δύο παιδιά κατά τη δεύτερη δραστηριότητα, παρατηρήθηκε μια σημαντική εξέλιξη στις στρατηγικές διαμερισμού καθώς από το ένα προς ένα διαμερισμό που αρχικά εφάρμοζαν, πέρασαν στο δύο προς δύο ακόμη και στο τρία προς τρία, στο τέλος της δραστηριότητας.

4.3.Τρίτη Δραστηριότητα (Κλασματομηχανή)

Από την έναρξη της τρίτης δραστηριότητας τα παιδιά μπόρεσαν να αναγνωρίσουν τις σχέσεις τόσο των πολλαπλασίων όσο και των υποπολλαπλασίων που παρουσιάζονταν μέσα από τη μηχανή χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες λεκτικές εκφράσεις. Τα πρώτα παραδείγματα πολλαπλασιαστικής μεταβολής που παρουσιάστηκαν και στις τρεις μηχανές αφορούσαν συνεχείς ποσότητες:

Ερευνήτρια: Τώρα έβαλα αυτό το κομμάτι και πάτησα αυτό το κουμπί και βγήκε αυτό το κομμάτι. Τι το έκανε αυτό το κομμάτι; *Ο Κωνσταντίνος επιλέγει το κομμάτι που αντιστοιχεί στο ¼ και αφού βρήκε κομμάτια στο ίδιο μέγεθος τα ένωσε κι έφτιαξε το αρχικό.* Ερευνήτρια: Άρα αυτό το κομμάτι τι σχέση έχει με αυτό; Κωνσταντίνος: Είναι το ¼. Δέσποινα: Ναι, αυτό το κομμάτι μπαίνει τέσσερις φορές σε αυτό. Κωνσταντίνος: Και το αντίστροφο έγινε πριν. Ερευνήτρια: Δηλαδή αυτή η μηχανή και τετραπλασιάζει και υποτετραπλασιάζει, βγάζει δηλαδή το ¼.

Επεισόδιο 3.1 *Αναγνώριση πολλαπλασιαστικής μεταβολής*

Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν ξανά τον όρο «μισό», όπως στην αρχή της εισαγωγικής δραστηριότητας και πλέον αναγνωρίζουν ότι είναι ταυτόσημος με το «ένα δεύτερο»:

Ερευνήτρια: Θα χρειαστούμε μια άλλη μηχανή για να την τριπλασιάσει. Να δούμε τι κάνει και το άλλο κουμπί; Για δείτε λίγο… Και βγαίνει από αυτή τη μεριά τώρα αυτή η μπάρα. Κωνσταντίνος: Το ίδιο κάνει, αλλά το αντίθετο. Ερευνήτρια: Ποιο είναι το αντίθετο; Τι την κάνει, Κωνσταντίνε; Κωνσταντίνος: Μείωσε το διπλάσιο. Ερευνήτρια: Τι το έκανε δηλαδή; Κωνσταντίνος: Αυτό το κομμάτι το διέλυσε και έκανε το μισό του. Ερευνήτρια: Σωστά. Ή αλλιώς το μισό του πώς το λέμε; Και οι δύο μαζί: Το ένα δεύτερο!

Επεισόδιο 3.2 *Κατανόηση των ταυτόσημων όρων ½ και μισού*

Τα παιδιά προέβλεψαν κι έλεγξαν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις συνεχείς ποσότητες σε όλες τις μηχανές που τους παρουσιάστηκαν. Οι στρατηγικές στις οποίες στηρίχτηκαν για να επιβεβαιώσουν τις εκτιμήσεις τους ήταν τις περισσότερες φορές είτε με επανάληψη της ποσότητας με το χέρι στα πολλαπλάσια, είτε με ισομερισμό της ποσότητας με το χέρι. Στις περιπτώσεις που δυσκολεύονταν, αυτό συνέβαινε όταν έπρεπε να βρουν το τετραπλάσιο ή το ¼, ένωναν ισομεγέθη κομμάτια (υπερενεργειακές μπάρες) και τα τοποθετούσαν κάτω από την μπάρα που τους δίνονταν για να επαληθεύσουν την εκτίμησή τους. Στο Επεισόδιο 3.3 παρουσιάζεται η κοινή στρατηγική που χρησιμοποίησαν η Δέσποινα και ο Κωνσταντίνος κατά τον προσδιορισμό του τριπλάσιου και του ενός τρίτου μιας συνεχούς ποσότητας. Αρχικά, εκτιμούν και στη συνέχεια επαληθεύουν με μέτρηση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι δε χρησιμοποιούν τα αντίγραφα της μονάδας, αλλά τοποθετούν ένα κομμάτι και στη συνέχεια επαναλαμβάνουν το μήκος του, χρησιμοποιώντας τα χέρια τους για βοήθεια.

Ερευνήτρια: Αν βάλουμε αυτό το κομμάτι από αυτή την είσοδο, και πατήσω αυτό το κουμπί (τριπλασιασμού) ποιο κομμάτι θα βγει από την έξοδο;

Η Δέσποινα κάνει μια εκτίμηση και επιλέγει ένα κομμάτι από τα διαθέσιμα. Στη συνέχεια ελέγχει την επιλογή της τοποθετώντας το αρχικό κομμάτι κάτω από αυτό που επέλεξε και με το δάχτυλό της επαναλαμβάνει τη μέτρηση άλλες δύο φορές.

Δέσποινα: Αυτό θα βγει. Αυτό είναι το τριπλάσιο.

Ερευνήτρια: Τώρα θα βάλω από αυτή την είσοδο αυτό το κομμάτι και θα πατήσω αυτό το κουμπί (1:3). Μπορείτε να βρείτε ποιο από αυτά τα πέντε κομμάτια θα βγει από την έξοδο;

Ο Κωνσταντίνος κάνει μια αρχική εκτίμηση από τα διαθέσιμα κομμάτια και προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ίδια στρατηγική όμως δεν κάνει σωστή μέτρηση.

Ερευνήτρια: Μπορείς να βρεις και άλλα κομμάτια στο ίδιο μέγεθος και να τα βάλεις δίπλα δίπλα για να ελέγξεις την απάντησή σου.

Κωνσταντίνος: Αυτό το κομμάτι θα βγει.

Ερευνήτρια: Πώς το κατάλαβες;

Κωνσταντίνος: Έβαλα αυτά τρία κομμάτια κι έφτιαξα αυτό (το αρχικό κομμάτι), άρα αυτό είναι το ένα από τα τρία.

Ερευνήτρια: Το ένα τρίτο.

Επεισόδιο 3.3 *Βρίσκοντας το τριπλάσιο και το 1/3 στις συνεχείς ποσότητες.*

Παρόλο που τα παιδιά μπόρεσαν να αναγνωρίσουν τις σχέσεις και στις διακριτές ποσότητες, όταν τους ζητήθηκε να προβλέψουν πόση θα είναι η ποσότητα που θα πολλαπλασιαστεί ή θα υποπολλαπλασιαστεί, έκαναν λανθασμένες προβλέψεις. Από τις απαντήσεις που έδωσαν φάνηκε ότι η αρχική παρανόηση σύμφωνα με την οποία το τριπλάσιο σημαίνει +3, ή ο υποδιπλασιασμός σημαίνει -2, επιμένει: Η δυσκολία αυτή τεκμηριώνεται στα Επεισόδια 3.4 και 3.5.

Ερευνήτρια: Αν τώρα βάλω από εδώ δέκα βιταμίνες και πατήσω το κουμπί για να τις υποδιπλασιάσω, πόσες θα βγουν από την έξοδο; *Η Δέσποινα τοποθετεί οχτώ βιταμίνες στην έξοδο.* Ερευνήτρια: Η μηχανή και αυτό το κουμπί τις υποδιπλασιάζει, ψάχνουμε το ½. Τι σημαίνει το ½; Θυμάσαι τι κάναμε με τις μπάρες; τη χωρίζαμε σε δύο μέρη που ήταν ίσα. Μπορείς να χωρίσεις αυτές τις βιταμίνες σε δύο ίσες ομάδες; Δέσποινα: Θα τις χωρίσω σε 5 +5 Ερευνήτρια: Ωραία, τις χώρισες σε δύο πεντάδες. Και πόσες είναι λοιπόν το ½; Δέσποινα: Το ½ του 10 είναι το 5.

Επεισόδιο 3.4 *Ερμηνεύοντας το ½ ως «μείον δύο»*

Ερευνήτρια: Τώρα αν βάλω αυτές τις βιταμίνες (τέσσερις) και πατήσω το κουμπί που τις διπλασιάζει τι θα βγει από την άλλη έξοδο; Κωνσταντίνος: Έξι. Ερευνήτρια: Δέσποινα συμφωνείς; Δέσποινα: Θα βγουν οχτώ. Ερευνήτρια: Γιατί; Δέσποινα: Γιατί 4 +4 μας κάνει 8.

Επεισόδιο 3.5 *Ερμηνεύοντας το διπλάσιο ως «συν δύο»*

Όσον αφορά τον σχηματισμό των υποπολλαπλασίων στις διακριτές ποσότητες, τα παιδιά σχημάτιζαν αρχικά δυάδες κι έπειτα όσες περίσσευαν, τις πρόσθεταν μία προς μία σε κάθε δυάδα μέχρι να εξαντληθούν. Όταν εξοικειώθηκαν με τη διαδικασία, άρχισαν να σχηματίζουν και τριάδες όπως είχαν δοκιμάσει και στη δεύτερη δραστηριότητα. Η παραπάνω στρατηγική αφορούσε τους όρους του 1:3 και του 1:4.

Στο σχηματισμού του 1:2 ισομέριζαν απευθείας την ποσότητα που τους δίνονταν. Τα παραδείγματα που επεξεργάστηκαν ήταν έως 14 βιταμίνες στο 1:2, έως 15 βιταμίνες στο 1:3 και έως 16 βιταμίνες στο 1:4. Στο Επεισόδιο 3.6 τα παιδιά υπολογίζουν το ένα τέταρτο του 8 και του 12. Ο Κωνσταντίνος, ενώ λέει ότι οι 8 καραμέλες πρέπει να χωριστούν σε 4 ομάδες, τις χωρίζει σε 2 ομάδες από 4 καραμέλες. Ενδεχομένως πρόκειται για μια σύγχυση ανάμεσα στο πλήθος των ομάδων και στο πλήθος των στοιχείων των ομάδων.

Ερευνήτρια: Κι αν βάλω αυτές τις βιταμίνες (οχτώ) και πατήσω το ίδιο κουμπί (1:4), πόσες θα βγουν; Σε πόσες ομάδες πρέπει να τις χωρίσω;
Κωνσταντίνος: Σε τέσσερις.
Ο Κωνσταντίνος τις χωρίζει σε δύο μέρη.
Ερευνήτρια: Εσύ τις χώρισες σε δύο μέρη. Να σας δείξω πάλι το σύμβολο με το εργαλείο του σοφού γερο- γιατρού;
Κωνσταντίνος: Ήταν πιο εύκολο με το εργαλείο.
Δέσποινα: Να τις χωρίσω εγώ;
Η Δέσποινα χωρίζει τις βιταμίνες σε τέσσερις δυάδες.
Ερευνήτρια: Ωραία, σχημάτισες τέσσερις δυάδες, πόσες είναι λοιπόν το ¼;
Κωνσταντίνος: Οι δύο.
Ερευνήτρια: Τώρα αν βάλω αυτές τις βιταμίνες (δώδεκα) και πατήσω αυτό το κουμπί (1/4), πόσες θα βγουν από την έξοδο;
Η Δέσποινα σχηματίζει τέσσερις τριάδες.
Κωνσταντίνος: Είναι τρεις.
Ερευνήτρια: Η Δέσποινα σχημάτισε τέσσερις τριάδες και το ¼ όπως πολύ σωστά είπες Κωνσταντίνε είναι οι τρεις βιταμίνες.

Επεισόδιο 3.6 *Βρίσκοντας το ¼ στις διακριτές ποσότητες*

Ως επέκταση της δραστηριότητας ζητήθηκε από τα παιδιά να φτιάξουν μια δική τους μηχανή. Έτσι συμφώνησαν να σχεδιάσουν μια μηχανή που θα υπολόγιζε το οχταπλάσιο και το 1/8, ενώ στη συνέχεια σχημάτισαν τα αντίστοιχα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια διακριτών και συνεχών ποσοτήτων.

Ερευνήτρια: Τώρα που τη σχεδιάσατε θα πρέπει να τη δοκιμάσετε και να δείτε αν λειτουργεί σωστά. Αν δηλαδή από αυτή την είσοδο βάλω αυτές τις βιταμίνες (2), και πατήσω αυτό το κουμπί, πόσες θα βγουν από εδώ;

Ο Κωνσταντίνος αρχίζει να σχηματίζει οχτώ δυάδες.

Δέσποινα: Θα μας φτάσουν οι βιταμίνες που έχουμε;

Κωνσταντίνος: Θα βγουν 16. Ίσα ίσα μας έφτασαν. Να κόψουμε με το χαρτόνι κι άλλες για να έχουμε μπόλικες.

Αφού αποφάσισαν να φτιάξουν κι άλλες βιταμίνες (σύνολο 24), τους ζητήθηκε να βρουν το 1/8 από αυτές.

Ερευνήτρια: Τώρα υπάρχει τρόπος να βρείτε πόσες βιταμίνες θα βγουν αν πατήσουμε το κουμπί του 1/8;

Κωνσταντίνος: Θα πρέπει να τις μοιράσουμε σε οχτώ ομάδες.

Στη συνέχεια αρχίζει να σχηματίζει τριάδες ώσπου τελειώνουν.

Κωνσταντίνος: Θα βγουν τρεις από αυτή την έξοδο!

Ερευνήτρια: Σωστά άρα τι σχέση έχει το 3 με το 24;

Κωνσταντίνος: Είναι το 1/8!

Ερευνήτρια: Και για δείτε τις δύο εξόδους! Άρα και το 24 τι σχέση έχει με το 3;

Κωνσταντίνος: Είναι το οχταπλάσιο!

Επεισόδιο 3.7 *Σχηματισμός πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων ποσοτήτων πέρα από τη σχέση 1:4/4:1*

Συμπερασματικά, τα παιδιά αναγνώρισαν τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν αρχικά από τις κλασματομηχανές χωρίς δυσκολία, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία. Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι μετέφεραν τις στρατηγικές διαμερισμού των διακριτών ποσοτήτων που ανέπτυξαν από τη δεύτερη δραστηριότητα στην τρίτη, ενώ στον υποδιπλασιασμό και τα δύο παιδιά διαμέριζαν την ποσότητα απευθείας. Επίσης οι διαφορές που εντοπίστηκαν στον σχηματισμό πολλαπλασίων/υποπολλαπλασίων διακριτών και συνεχών ποσοτήτων φαίνεται να επανεμφανίζονται τουλάχιστον στην αρχή της δραστηριότητας όπου και τα δύο παιδιά συγχέουν την έννοια π.χ. του τριπλασιασμού ως +3 ή του υποδιπλασιασμού ως -2. Αντίθετα στις συνεχείς ποσότητες τα παιδιά προέβλεπαν νοερά τον πολλαπλασιασμό και υποπολλαπλασιασμό ποσοτήτων.

5. Αποτελέσματα προελέγχου- μεταελέγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν τα αποτελέσματα του προελέγχου και του μεταελέγχου προκειμένου να διαπιστωθούν αλλαγές στις σωστές απαντήσεις των παιδιών και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν. Οι απαντήσεις που δόθηκαν αναλύθηκαν ως προς:

- Την ορθότητα της απάντησης.
- Τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν.
- Την εξήγηση/αιτιολόγηση της απάντησης.
- Την ερμηνεία των όρων.

Αποτελέσματα Α κατηγορίας

Τα έργα της κατηγορίας Α (Ε1, Ε2 και Ε3) εξέτασαν το επίπεδο κατανόησης της αριθμητικής ακολουθίας. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις και στα Ε1, Ε2, Ε3.

Στους Πίνακες 1 και 2 παρουσιάζονται οι απαντήσεις της πρώτης δραστηριότητας όπως και οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά. Η λανθασμένη απάντηση κωδικοποιήθηκε ως 0 και η σωστή ως 1. Όσον αφορά τις στρατηγικές, κωδικοποιήθηκαν η στρατηγική της αυτόματης ανάκλησης ως 1 ,ενώ η απουσία της λόγω λανθασμένης απάντησης ως 0.

		ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Α	1.1	1	1	1	1
	1.2	1	1	1	1
	1.3	1	1	1	1
	1.4	1	1	1	1
	1.5	1	1	1	1
	1.6	1	0	1	1
	2.1	1	1	1	1
	2.2	1	1	1	1
	2.3	1	1	1	1
	2.4	1	1	1	1
	2.5	0	1	1	1
Υπόμνημα					

Απαντήσεις στα έργα: 1 Σωστό, 0 Λάθος

Πίνακας 1: Επίδοση σε έργα αριθμητικής ακολουθίας κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο.

		ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ**			
		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Α	1.1	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	1.2	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	1.3	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	1.4	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	1.5	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	1.6	Σ1	0	Σ1	Σ1
	2.1	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	2.2	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	2.3	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	2.4	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	2.5	0	Σ1	Σ1	Σ1
Υπόμνημα Στρατηγικές: Σ1 αυτόματη ανάκληση, 0 απουσία στρατηγικής.					

Πίνακας 2: Στρατηγικές κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο στα έργα αριθμητικής ακολουθίας.

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα των δύο πρώτων δραστηριοτήτων δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις και τις στρατηγικές των δύο παιδιών καθώς οι περισσότερες είναι σωστές εκτός από τα 2 ερωτήματα «Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 49;» και « Μπορείς να μετρήσεις ανά 10;» στα οποία απάντησαν λανθασμένα η Δέσποινα και ο Κωνσταντίνος αντίστοιχα κατά τον προέλεγχο. Τα αποτελέσματα του μεταελέγχου δείχνουν ότι τα παιδιά απάντησαν σωστά σε όλα τα ερωτήματα, ενώ εντοπίστηκε μια μόνο στρατηγική, αυτή της αυτόματης ανάκλησης.

Το Ε3 αφορούσε τα προβλήματα προσθετικής δομής με «κρυφούς» προσθετέους. Κι εδώ όπως θα παρατηρήσει κανείς στους Πίνακες 3 και 4, δεν υπάρχουν διαφοροποιήσεις, καθώς τα παιδιά στον προέλεγχο απάντησαν σωστά χωρίς να χρειαστεί να αποκαλυφθεί κανένας από τους προσθετέους στα περισσότερα προσθετικά προβλήματα, εκτός του τελευταίου στο οποίο το σύνολο υπερέβαινε τις 20 καραμέλες (« Αν έχω 16 καραμέλες και προσθέσω άλλες 5, πόσες καραμέλες θα έχω;»), στο οποίο απάντησε λανθασμένα η Δέσποινα. Όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες όσον αφορά τις απαντήσεις, οι λανθασμένες κωδικοποιήθηκαν ως 0 και οι σωστές ως 1. Ως προς τις στρατηγικές εντοπίστηκαν δύο: η αυτόματη ανάκληση η οποία κωδικοποιήθηκε ως Σ1 και η καταμέτρηση με δάχτυλα ξεκινώντας από τον δεύτερο προσθετέο ως Σ2.

		ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Α	3.1	1	1	1	1
	3.2	1	1	1	1
	3.3	1	1	1	1
	3.4	0	1	1	1
Υπόμνημα Απαντήσεις στα προβλήματα: 1 Σωστό, 0 Λάθος					

Πίνακας 3: Επίδοση σε προβλήματα προσθετικής δομής κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο.

	ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ			**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ**			
		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Α	3.1	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	3.2	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	3.3	Σ1	Σ1	Σ1	Σ1
	3.4	Σ2	Σ1	Σ1	Σ1
Υπόμνημα Στρατηγικές: Σ1 (Αυτόματη ανάκληση) Σ2 (Καταμέτρηση με δάχτυλα, ξεκινώντας από τον δεύτερο προσθετέο)					

Πίνακας 4: Στρατηγικές στα προβλήματα προσθετικής δομής κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο.

Αποτελέσματα Κατηγορίας Β: Επιδόσεις

Οι απαντήσεις των παιδιών στα έργα της κατηγορίας Β εξετάστηκαν ως προς την ορθότητά τους και βαθμολογήθηκαν με 0 (λανθασμένη απάντηση) και 1 (σωστή απάντηση). Στους Πίνακες 5 και 6 παρουσιάζεται η βαθμολογία του κάθε παιδιού, ανά έργο και υποέργο, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο, για τις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, αντίστοιχα.

		ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
Β		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝ/ΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤ/ΝΟΣ
Διαίρεση μερισμού	4.1.1	1	0	1	1
	4.1.2	0	-	1	1
	4.1.3	-	-	1	1
Μερικό Σύνολο		**1**	**0**	**3**	**3**
Πολλαπλασιασμός	5.1.1	0	0	1	1
	5.1.2	-	-	1	1
	5.1.3	-	-	1	1
Μερικό Σύνολο		**0**	**0**	**3**	**3**
Διαίρεση μέτρησης	6.1.1	1	0	1	1
	6.1.2	1	-	1	1
	6.1.3	0	-	1	1
Μερικό Σύνολο		**2**	**0**	**3**	**3**
Σύνολο		**3**	**0**	**9**	**9**
Υπόμνημα: Απαντήσεις στα έργα: 1 Σωστό, 0 Λάθος, - Δεν απάντησε					

Πίνακας 5: Επίδοση στα έργα της κατηγορίας Β, συνεχείς ποσότητες

	ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ			ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΕΡΓΟ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
Β		ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝ/ΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝ/ΝΟΣ
Διαίρεση μερισμού	4.2.1	1	1	1	1
	4.2.2	0	-	1	1
	4.2.3	-	-	1	1
Μερικό σύνολο		**1**	**1**	**3**	**3**
Πολλαπλασιασμός	5.2.1	1	1	1	1
	5.2.2	1	1	1	1
	5.2.3	1	1	1	1
Μερικό σύνολο		**3**	**3**	**3**	**3**
Διαίρεση μέτρησης	6.2.1	1	1	1	1
	6.2.2	1	1	1	1
	6.2.3	1	1	1	1
Μερικό σύνολο		**3**	**3**	**3**	**3**
Σύνολο		**7**	**7**	**9**	**9**
Υπόμνημα: Απαντήσεις στα έργα: 1 Σωστό, 0 Λάθος, - Δεν απάντησε					

Πίνακας 6: Επίδοση στα έργα της κατηγορίας Β, διακριτές ποσότητες

Από τα στοιχεία των Πινάκων 5 και 6 φαίνεται μια διαφοροποίηση των επιδόσεων των παιδιών στον προέλεγχο, όσον αφορά τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Κατά τον προέλεγχο στα 9 προβλήματα με συνεχείς ποσότητες δόθηκαν συνολικά 3 σωστές απαντήσεις από τη Δέσποινα και καμία από τον Κωνσταντίνο. Αντίθετα στις διακριτές ποσότητες και τα δύο παιδιά σημείωσαν ως επί το πλείστον σωστές απαντήσεις κατά τον προέλεγχο, με εξαίρεση τα προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς. Κατά τον μεταέλεγχο και τα δύο παιδιά απάντησαν σωστά σε όλα τα προβλήματα και στα δύο είδη ποσοτήτων, σημειώνοντας μια αξιοσημείωτη αύξηση στη συνολική τους επίδοση.

Αποτελέσματα Κατηγορίας Β: Στρατηγικές

Στους Πίνακες 7 και 8 παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές που χρησιμοποίησε η Δέσποινα και ο Κωνσταντίνος, αντίστοιχα, στα έργα της κατηγορίας Β για τις διακριτές ποσότητες, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο.

Όπως φαίνεται από τα στοιχεία του Πίνακα 7, στα προβλήματα διαίρεσης μερισμού η Δέσποινα στον προέλεγχο εφάρμοσε μια στρατηγική που προσομοιάζει σε στρατηγική εκτίμησης του μέσου ενός διαστήματος, στην περίπτωση των δύο παραληπτών:

> *Δέσποινα: Δεν το ήξερα, στην τύχη το είπα. Στην αρχή σκέφτηκα ότι αυτή* (δείχνει την καραμέλα) *φαίνεται στη μέση κι είπα ότι η μια ομάδα θα μπορούσε να φάει αυτές εδώ και η άλλη αυτές (χωρίζει τις καραμέλες σε δύο ομάδες).*

Στο μεταέλεγχο, στα αντίστοιχα προβλήματα η Δέσποινα εφαρμόζει με συνέπεια τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης αντιστοίχισης είτε ένα-προς ένα, είτε ένα προς πολλά για να ισομερίσει τις διακριτές ποσότητες.

Στα προβλήματα πολλαπλασιασμού, η Δέσποινα φαίνεται να κατανοεί την κατάσταση ήδη από τον προέλεγχο. Αξιοποιεί τα χειραπτικά υλικά για να αναπαραστήσει την κατάσταση και, ανάλογα με το πλήθος που διαχειρίζεται, είτε υπολογίζει άμεσα (5.2.1), είτε μετράει μία προς μία τις συνολικές καραμέλες. Στο μεταέλεγχο, η Δέσποινα δε χρειάζεται να αναπαραστήσει την κατάσταση με το υλικό στα 5.2.1 και 5.2.2. Φαίνεται ότι την αναπαριστά νοερά, όπως νοερά υπολογίζει και το αποτέλεσμα, μοντελοποιώντας απευθείας με μια αριθμητική πρόταση. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας ότι η μία φίλη πήρε 3 καραμέλες, προσδιόρισε άμεσα πόσες καραμέλες θα πάρουν οι δύο φίλες («Έδωσε έξι. Τρία και τρία κάνουν έξι»). Αντίθετα, στο 5.2.3 με μεγαλύτερους παράγοντες (4x3), η Δέσποινα επανέρχεται στη χρήση του υλικού και την καταμέτρηση με απλή μονάδα. Παρόμοια, τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης δε δυσκόλεψαν τη Δέσποινα στον προέλεγχο. Φαίνεται ότι χρησιμοποιεί το υλικό που αναπαριστά τους παραλήπτες κυρίως επιβεβαιωτικά. Στον μεταέλεγχο, η χρήση τους δεν τής είναι απαραίτητη, καθώς αναπαριστά την κατάσταση νοερά, ήδη από τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος.

Παρόμοια με τη Δέσποινα, ο Κωνσταντίνος στον προέλεγχο δε φαίνεται να διαθέτει κάποια συστηματική στρατηγική για να ισομερίσει διακριτές ποσότητες καθώς επιτυγχάνει μόνο στη μοιρασιά σε δύο παραλήπτες (4.2.1). Στο μεταέλεγχο φαίνεται να έχει αναπτύξει τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης αντιστοίχισης ένα προς ένα (4.2.3) ή ένα συνδυασμό αυτής της στρατηγικής με τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης αντιστοίχισης ένα προς πολλά ή ένα συνδυασμό τους για να ισομερίσει τις διακριτές ποσότητες (4.2.2). Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζεται πιο αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο ο Κωνσταντίνος συνδυάζει αυτές τις δύο στρατηγικές για να μοιράσει 12 καραμέλες σε 3 παραλήπτες.

Ε: Μπορείς να μου δείξεις πόσες από αυτές τις καραμέλες (12) θα πάρει η καθεμία από τις φίλες;
Ο Κωνσταντίνος χωρίζει απευθείας σε δυάδες τις καραμέλες και τις υπόλοιπες τις μοιράζει μία προς μία στην καθεμιά από τις τρεις φίλες.
Κωνσταντίνος: Θα πάρει τέσσερις καραμέλες.

Ο Κωνσταντίνος αντιμετώπισε με επιτυχία όλα τα προβλήματα πολλαπλασιασμού, εφαρμόζοντας αριθμητικές στρατηγικές ήδη από τον προέλεγχο («Αυτές τις τρεις και αυτές τις τρεις. Έξι»). Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι τα το τριπλάσιο (5.2.1) και το τετραπλάσιο του τρία (5.2.2) τα υπολογίζει με καταμέτρηση. Στο μεταέλεγχο υπολογίζει τα αντίστοιχα αθροίσματα νοερά («Τρία και τρία και τρία και τρία μας κάνουν δώδεκα»).

Παρόμοια με τη Δέσποινα, ο Κωνσταντίνος φαίνεται να κατανοεί την κατάσταση της διαίρεσης μέτρησης ήδη από τον προέλεγχο. Χρησιμοποιεί το υλικό που αναπαριστά τους παραλήπτες κυρίως επιβεβαιωτικά στην περίπτωση των δύο και των τριών παραληπτών (6.2.1, 6.2.2), καθώς ομαδοποιεί σε δυάδες και καταμετρά τις δυάδες νοερά. Στην περίπτωση των τεσσάρων παραληπτών (6.2.3), το χρησιμοποιεί βοηθητικά για να καταμετρήσει τις δυάδες. Στο μεταέλεγχο, ο Κωνσταντίνος μοντελοποιεί εκ των προτέρων νοερά τις δυο πρώτες καταστάσεις με αριθμητικές προτάσεις («Σε τρεις, γιατί δύο και δύο και δύο κάνει έξι») και χρησιμοποιεί το υλικό που αναπαριστά τις καραμέλες για επιβεβαίωση.

Στους Πίνακες 9 και 10 παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν η Δέσποινα και ο Κωνσταντίνος, αντίστοιχα, στα έργα της κατηγορίας Β για τις συνεχείς ποσότητες, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο.

Από τον Πίνακα 9 φαίνεται ότι, στον προέλεγχο, η Δέσποινα αντιμετωπίζει τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού (4.1.1, 4.1.2, 4.1.3) με παρόμοιο τρόπο, όπως και τα αντίστοιχα στις διακριτές ποσότητες: Για δύο παραλήπτες, εκτιμώντας το μέσο ενός «διαστήματος», ενώ για τρεις παραλήπτες επιλέγοντας ένα τυχαίο μικρότερο κομμάτι. Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται πώς η Δέσποινα επέλεξε το σωστό κομμάτι στην περίπτωση των δύο παραληπτών:

Ε: Ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος;

Δέσποινα: Ο Γιώργος θα πάρει αυτό το κομμάτι (χωρίζει τη σοκολάτα με το χέρι), γιατί το χώρισα στη μέση.

Αντίθετα, το πρόβλημα πολλαπλασιασμού στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων φαίνεται να μην είναι κατανοητό, ούτε στην πιο απλή περίπτωση (του διπλασιασμού, 5.2.1) για την οποία η Δέσποινα προβλέπει μόνο ότι το ζητούμενο κομμάτι είναι «μεγαλύτερο». Τέλος, τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης ήταν αυτά που η Δέσποινα αντιμετώπισε πιο αποτελεσματικά στον προέλεγχο. Φαίνεται ότι αναγνώρισε την κατάσταση ως μέτρηση, την οποία εκτέλεσε όχι πάντα με ακρίβεια ή επιτυχία.

Στο μεταέλεγχο, η Δέσποινα αντιμετωπίζει όλα τα προβλήματα με παρόμοια τακτική. Φαίνεται να εκτιμά νοερά στην αρχή, να επιλέγει με βάση την εκτίμησή της και να επαληθεύει, με μεγαλύτερη προσοχή στη διαδικασία. Από το παρακάτω παράδειγμα διαφαίνεται ότι η Δέσποινα πραγματοποιεί νοερά τη μέτρηση που καταλήγει στη διαμέριση του τμήματος σε δύο ίσα μέρη, καθώς εξηγεί πώς επέλεξε το κομμάτι:

Ε: Πόσα ήταν τα εγγόνια που πήραν σοκολάτα;

Δέσποινα: (Παίρνει το κομμάτι που της δόθηκε και το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα). Δύο!

Ε: Πώς το ξέρεις;

Δέσποινα: Γιατί έβαλα αυτό το κομμάτι εδώ πάνω και μέτρησα από μέσα μου 1, 2. Άρα δύο εγγονάκια πήραν σοκολάτα.

Ακριβώς την ίδια τακτική ακολουθεί και ο Κωνσταντίνος στο μεταέλεγχο (Πίνακας 10), εκτός από την περίπτωση του «μισού» και του «διπλάσιου», στην οποία δεν αισθάνεται την ανάγκη να επαληθεύσει. Στον προέλεγχο, ο Κωνσταντίνος αντιμετώπισε με επιτυχία μόνο το πρόβλημα «δίκαιης μοιρασιάς» στα δύο, κάνοντας μια πολύ αδρή εκτίμηση, όπως εξήγησε και ο ίδιος:

Το ξέρω γιατί αυτό (δείχνει μία από τις επιλογές) είναι πολύ μεγαλύτερο και το αυτό το κομμάτι είναι πολύ μικρότερο. Άρα θα είναι αυτό (δείχνει το σωστό κομμάτι).

Αντίθετα, στο μεταέλεγχο οι εκτιμήσεις του Κωνσταντίνου φαίνεται να βασίζονται σε νοερές ενέργειες. Στο παρακάτω παράδειγμα, ο Κωνσταντίνος εξηγεί πώς επέλεξε τη σοκολάτα που μοιράστηκαν δύο παραλήπτες, με δεδομένο το ένα μερίδιο.

Ε: Σε κάθε μία από τις δυο φίλες της έδωσε αυτό το κομμάτι (1/2 της σοκολάτας, που παρουσιάζεται σε χαρτόνι). Ποια ήταν ολόκληρη η σοκολάτα;

Ο Κωνσταντίνος παρατηρεί τις επιλογές που έχει και επιλέγει απευθείας τη σωστή χωρίς να την επαληθεύσει.

Ε: Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό;

Κωνσταντίνος: Είναι αυτό γιατί σκέφτηκα ότι ολόκληρη η σοκολάτα, θα είναι δύο τέτοια κομμάτια.

Συμπερασματικά, μετά την παρέμβαση, τα παιδιά ανέπτυξαν στρατηγικές αντιμετώπισης των προβλημάτων του τύπου των ισοπληθών ομάδων / ίσων μέτρων ή εξέλιξαν τις ήδη υπάρχουσες στρατηγικές τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και τα δύο παιδιά ανέπτυξαν στρατηγικές για τον ισομερισμό ποσοτήτων που δεν διέθεταν στον προέλεγχο (επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση ένα-προς-ένα, συνδυασμό αυτής της στρατηγικής με την επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση ένα-προς-πολλά). Στα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέτρησης, τα παιδιά φαίνεται να άρχισαν να αναπαριστούν μερικώς ή πλήρως νοερά τις ποσότητες και τις ενέργειες της επανάληψης της ποσότητας και της ανάλυσης σε σύνθετες μονάδες δεδομένου πλήθους. Το γεγονός αυτό τεκμαίρεται από τη μειούμενη χρήση του υλικού, ή τη χρήση του επιβεβαιωτικά, από τη μοντελοποίηση των καταστάσεων από αριθμητικές προτάσεις, αλλά και από τις εξηγήσεις των παιδιών.

.

		Προέλεγχος	Μεταέλεγχος
Διαίρεση μερισμού	4.2.1	Οι καραμέλες είναι παρατεταγμένες στη σειρά. Η Δέσποινα τις παρατηρεί, χωρίς να τις μετρήσει, φαίνεται να υπολογίζει περίπου πού χωρίζονται στη μέση και βάζει εκεί το χέρι της .	Μοιράζει τις καραμέλες ανά δύο σε κάθε κούκλα μέχρι να εξαντληθούν. Στο τέλος μετράει ανα δύο τις καραμέλες που έχει η μία κούκλα και δίνει την απάντηση.
	4.2.2	Χωρίς να χωρίσει τις καραμέλες, ούτε να τις μετρήσει δίνει την απάντηση "τρεις".	Μοιράζει τις καραμέλες ανά μία σε κάθε παραλήπτη μέχρι να εξαντληθούν. Στο τέλος μετράει ανα δύο τις καραμέλες που έχει η μία κούκλα και δίνει την απάντηση.
	4.2.3		Μοιράζει τις καραμέλες ανά μία σε κάθε παραλήπτη μέχρι να εξαντληθούν. Στο τέλος μετράει ανα δύο τις καραμέλες που έχει η μία κούκλα και δίνει την απάντηση.
Πολ/σμός	5.2.1	Παίρνει τρεις καραμέλες από τις καραμέλες που βλέπει μπροστά της και τις τοποθετεί μπροστά από τη μία κούκλα. Επαναλαμβάνει το ίδιο και για τη δεύτερη κούκλα. Λέει το αποτέλεσμα "έξι", χωρίς να τις μετρήσει μία μία.	Δίνει την απάντηση προφορικά χωρίς να χρησιμοποιήσει τις καραμέλες.
	5.2.2	Βάζει απευθείας τρεις καραμέλες μπροστά από κάθε κούκλα και λέει "Τρία και τρία και τρία". Στη συνέχεια μετράει όλες τις καραμέλες για να πει "εννιά".	Δίνει την απάντηση απευθείας χωρίς να χρησιμοποιήσει τις καραμέλες.
	5.2.3	Βάζει απευθείας τρεις καραμέλες μπροστά από κάθε κούκλα. Στη συνέχεια τις μετράει μία μία και λέει "Δώδεκα".	Δημιουργεί τέσσερις τριάδες και στη συνέχεια τις μετράει όλες μία-μία.
Διαίρεση μέτρησης	6.2.1	Παίρνει τις έξι καραμέλες και τις χωρίζει απευθείας σε δύο τριάδες και δίνει κατευθείαν την απάντηση"δύο". Έπειτα παίρνει δύο "παραλήπτες" και τις τοποθετεί μπροστά τους.	Το πρόβλημα ειπώθηκε προφορικά. Πριν παρουσιαστούν οι τρεις καραμέλες που πήρε ο κάθε φίλος, η Δέσποινα χώρισε τις καραμέλες σε δύο τριάδες και είπε "Τις μοίρασε σε δύο".
	6.2.2	Χωρίζει απευθείας τις έξι καραμέλες σε τρεις δυάδες. Στη συνέχεια μετράει πόσες δυάδες έφτιαξε και δίνει την απάντηση "τρεις". Παίρνει τρεις "παραλήπτες" και τοποθετεί μπροστά από τον καθένα μία δυάδα.	Το πρόβλημα ειπώθηκε προφορικά. Πριν παρουσιαστούν οι καραμέλες που πήρε ο κάθε φίλος, η Δέσποινα σχημάτισε τρεις δυάδες και έδωσε τη σωστή απάντηση: "Σε τρεις".
	6.2.3	Σχηματίζει τέσσερις δυάδες και παίρνει έναν "παραλήπτη" για κάθε δυάδα τοποθετώντας τον μπροστά της. Στο τέλος δίνει την απάντηση "Σε τέσσερις".	Σχημάτισε απευθείας τέσσερις δυάδες και έδωσε τη σωστή απάντηση "Σε τέσσερις".

Πίνακας 7: Οι στρατηγικές επίλυσης της Δέσποινας, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο στις διακριτές ποσότητες

Διαίρεση μερισμού	4.2.1	Παρουσιάζεται το πρόβλημα με 6 καραμέλες (δεν μπόρεσε να το επιλύσει με 12 καραμέλες), τις οποίες με το που τις παρατηρεί, τις μετράει "με το μάτι" και στη συνέχεια τις χωρίζει απευθείας σε δύο τριάδες.	Κοιτάει τις καραμέλες και κατευθείαν απαντάει "Θα πάρει έξι".
	4.2.2		Σχηματίζει τρεις δυάδες και τις υπόλοιπες τις μοιράζει ανά μία ώσπου να εξαντληθούν.
	4.2.3		Μοιράζει τις καραμέλες ανά μία σε κάθε παραλήπτη μέχρι να εξαντληθούν. Στο τέλος μετράει τις καραμέλες που έχει η μία κούκλα και δίνει την απάντηση
Πολ/μός	5.2.1	Σχηματίζει απευθείας δύο τριάδες και λέει: "Αυτές τις τρεις κι αυτές τις τρεις. Έξι."	Δίνει την απάντηση προφορικά χωρίς να χρησιμοποιήσει τις καραμέλες λέγοντας "3+3 μας κάνουν 6".
	5.2.2	Σχηματίζει απευθείας τρεις τριάδες και λέει: "Τρεις και τρεις και τρεις". Στη συνέχεια τις μετράει μία μία και λέει το σύνολο: "Εννιά".	Κι εδώ δίνει την απάντηση απευθείας χωρίς να χρησιμοποιήσει τις καραμέλες λέγοντας " 3+3+3 μας κάνουν 9".
	5.2.3	Σχηματίζει απευθείας τέσσερις τριάδες και στη συνέχεια τις μετράει μία μία και λέει το σύνολο: "Δώδεκα".	Κι εδώ δίνει την απάντηση απευθείας χωρίς να χρησιμοποιήσει τις καραμέλες λέγοντας "3+3+3+3 μας κάνουν 12".
Διαίρεση μέτρησης	6.2.1	Παρατηρεί τις έξι καραμέλες και δίνει κατευθείαν την απάντηση "Σε δύο".	Κοίταξε τις καραμέλες και απάντησε κατευθείαν "Σε δύο γιατί το 6 χωρίζεται σε 3 και 3".
	6.2.2	Χωρίζει απευθείας τις έξι καραμέλες σε τρεις δυάδες. Στη συνέχεια παίρνει τρεις "παραλήπτες" και τοποθετεί μπροστά από τον καθένα μία δυάδα.	Κοίταξε τις καραμέλες και απάντησε κατευθείαν "Σε τρεις γιατί 2+2+2 κάνει 6". Στη συνέχεια σχημάτισε τρεις δυάδες.
	6.2.3	Σχηματίζει τέσσερις δυάδες και παίρνει έναν "παραλήπτη" για κάθε δυάδα τοποθετώντας τον μπροστά της. Στο τέλος δίνει την απάντηση "Σε τέσσερις".	Σχημάτισε αμέσως τέσσερις δυάδες και αμέσως απάντησε "Σε τέσσερις".

Πίνακας 8: Οι στρατηγικές επίλυσης του Κωνσταντίνου, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο στις διακριτές ποσότητες

Διαίρεση μερισμού	4.1.1	Βάζει το χέρι της στη μέση, χωρίζοντας τη σοκολάτα σε δύο μέρη που φαίνονται ίσα.	Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι δύο φορές βάζοντας το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η πρώτη μονάδα.
	4.1.2	Επιλέγει τυχαία ένα μικρότερο από την αρχική σοκολάτα κομμάτι.	Ομοίως, επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση και μετράει τρεις φορές το κομμάτι στη σοκολάτα βάζοντας σημάδι με το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα..
	4.1.3		Ομοίως, επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση και μετράει τέσσερις φορές το κομμάτι στη σοκολάτα βάζοντας σημάδι με το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα..
Πολ/μός	5.1.1	Επιλέγει τη μεγαλύτερη "σοκολάτα" από τις επιλογές που έχει, τοποθετεί πάνω της το αρχικό κομμάτι που της δόθηκε και το μετράει τέσσερις φορές. Φαίνεται να πιστεύει ότι αφού χωράει μέσα στη μεγάλη σοκολάτα αυτή είναι και η σωστή απάντηση.	Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι δύο φορές βάζοντας το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η πρώτη μονάδα..
	5.1.2		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι τρεις φορές βάζοντας το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα.
	5.1.3		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι τέσσερις φορές βάζοντας το δάχτυλό της στο σημείο που τελειώνει η κάθε μέτρηση.
Διαίρεση μέτρησης	6.1.1	Παίρνει το κομμάτι που της δόθηκε και το τοποθετεί πάνω στη "σοκολάτα" δύο φορές. Το κάνει "χοντρικά", χωρίς να βάζει π.χ. το δάχτυλο στο σημείο που τελείωσε η πρώτη μέτρηση. Λέει την απάντηση "δύο" χωρίς να χρησιμοποιεί τις κούκλες.	Παίρνει το κομμάτι που της δόθηκε, το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα και το μετράει δύο φορές. Χρησιμοποιεί το δάχτυλό της για να κρατήσει το σημείο που τελειώνει η μία μονάδα κι αρχίζει η επόμενη. Στη συνέχεια δίνει τη σωστή απάντηση.
	6.1.2	Ακολουθεί την ίδια ακριβώς στρατηγική μετρώντας το κομμάτι τέσσερις φορές πάνω στη "σοκολάτα".	Παίρνει το κομμάτι που της δόθηκε, το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα και το μετράει τέσσερις φορές. Χρησιμοποιεί το δάχτυλό της για να κρατήσει το σημείο που τελειώνει η μία μονάδα. κι αρχίζει η επόμενη. Στη συνέχεια δίνει τη σωστή απάντηση.
	6.1.3	Επαναλαμβάνει τη ίδια στρατηγική, χωρίς αυτή τη φορά να παρατηρεί που τελειώνει η κάθε μέτρηση, για αυτό και μετράει το κομμάτι πέντε φορές αντί για τρεις.	Παίρνει το κομμάτι που της δόθηκε, το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα και το μετράει τρεις φορές. Χρησιμοποιεί το δάχτυλό της για να κρατήσει το σημείο που τελειώνει η μία μονάδα. κι αρχίζει η επόμενη. Στη συνέχεια δίνει τη σωστή απάντηση.

Πίνακας 9: Οι στρατηγικές επίλυσης της Δέσποινας, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο. στις συνεχείς ποσότητες

		Προέλεγχος	**Μεταέλεγχος**
Διαίρεση μερισμού	4.1.1	Παρατηρεί τις επιλογές και δείχνει μια από τις επιλογές χωρίς να κάνει κάποιον έλεγχο της απάντησής του. Στη συνέχεια λέει ότι το ένα κομμάτι είναι πολύ μεγαλύτερο και το άλλο πολύ μικρότερο από τη σοκολάτα, οπότε έτσι επέλεξε την απάντησή του.	Επιλέγει "με το μάτι" τη σωστή απάντηση χωρίς να την επαληθεύσει.
	4.1.2		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση και μετράει τρεις φορές το κομμάτι στη σοκολάτα βάζοντας σημάδι με το δάχτυλό του στο σημείο που τελειώνει η κάθε μέτρηση.
	4.1.3		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση και μετράει τέσσερις φορές το κομμάτι στη σοκολάτα βάζοντας σημάδι με το δάχτυλό του στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα.
Πολ/σμός	5.1.1	Επιλέγει μία από τις διαθέσιμες επιλογές στην τύχη και απαντά:" Αυτή γιατί είναι πολύ μεγάλη".	Επιλέγει "με το μάτι" τη σωστή απάντηση χωρίς να την επαληθεύσει.
	5.1.2		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι τρεις φορές βάζοντας το δάχτυλό του στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα.
	5.1.3		Επιλέγει με το "μάτι" τη σωστή απάντηση, και την επαληθεύει βάζοντας το κομμάτι κάτω από την σοκολάτα. Μετράει το κομμάτι τέσσερις φορές βάζοντας το δάχτυλό του στο σημείο που τελειώνει η κάθε μονάδα.
Διαίρεση μέτρησης	6.1.1	Χωρίς να ελέγξει τα κομμάτια, επέλεξε όσους παραλήπτες έβλεπε μπροστά του και είπε "Οχτώ".	Παρατηρεί το κομμάτι που του δόθηκε και ολόκληρη τη σοκολάτα και απαντάει απευθείας "Σε δύο", χωρίς να το επαληθεύσει.
	6.1.2		Παίρνει το κομμάτι που του δόθηκε, το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα και το μετράει τέσσερις φορές. Χρησιμοποιεί το δάχτυλό του για να κρατήσει το σημείο που τελειώνει η μία μονάδα κι αρχιζει η επόμενη. Στη συνέχεια δίνει τη σωστή απάντηση.

	6.1.3		Παίρνει το κομμάτι που του δόθηκε, το τοποθετεί πάνω στη σοκολάτα και το μετράει τρεις φορές. Χρησιμοποιεί το δάχτυλό του για να κρατήσει το σημείο που τελειώνει η μία μονάδακι αρχιζει η επόμενη. Στη συνέχεια δίνει τη σωστή απάντηση.

Πίνακας 10: Οι στρατηγικές επίλυσης του Κωνσταντίνου, στα έργα της κατηγορία Β, στις συνεχείς ποσότητες.

Αποτελέσματα Γ Κατηγορίας

Τα έργα της Γ κατηγορίας αφορούσαν την κατανόηση των όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια με συνεχείς και διακριτές ποσότητες και τον υπολογισμό πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων διακριτών και συνεχών ποσοτήτων. Επισημαίνουμε ότι ο όρος «υπολογισμός» δεν αναφέρεται απαραίτητα σε αριθμητικό υπολογισμό. Για τις διακριτές ποσότητες, αναφέρεται στην κατασκευή ενός πολλαπλασίου ή υποπολλαπλασίου της δεδομένης ποσότητας είτε νοερά είτε με το υλικό. Για τις συνεχείς ποσότητες, ο όρος αναφέρεται στην επιλογή με εκτίμηση ενός πολλαπλασίου ή υποπολλαπλασίου της δεδομένης ποσότητας, είτε νοερά είτε με το υλικό.

			ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΕΡΓΟ	**ΣΧΕΣΗ**	**ΠΟΣΟΤΗΤΑ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
			ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
7.1.1	1:2	Συνεχής	1	1	1	1
7.2.1	1:2	Διακριτή	1	1	1	1
7.1.2	1:4	Συνεχής	0	0	1	1
7.2.2	1:4	Διακριτή	0	1	0	1
7.1.3	1:3	Συνεχής	-	-	1	1
7.2.3	1:3	Διακριτή	-	-	1	0

Πίνακας 11: Επίδοση του κάθε παιδιού στα έργα της κατηγορίας Γ που αφορούν τα υποπολλαπλάσια, για διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

			ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ		**ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ**	
ΕΡΓΟ	**ΣΧΕΣΗ**	**ΠΟΣΟΤΗΤΑ**	**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**		**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**	
			ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
8.1.1	2:1	Συνεχής	0	0	1	1
8.2.1	2:1	Διακριτή	0	0	1	1
8.1.2	3:1	Συνεχής	-	-	1	1
8.2.2	3:1	Διακριτή	-	-	1	1
8.1.3	4:1	Συνεχής	-	-	1	1
8.2.3	4:1	Διακριτή	-	-	1	1

Πίνακας 12**:** Επίδοση του κάθε παιδιού στα έργα της κατηγορίας Γ που αφορούν τα πολλαπλάσια, για διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

Από τους Πίνακες 11 και 12 παρατηρούμε ότι στον προέλεγχο και τα δύο παιδιά υπολόγισαν μόνο το «μισό» τόσο για τη διακριτή, όσο και για τη συνεχή ποσότητα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν τη διπλάσια ποσότητα στην περίπτωση της διακριτής ποσότητας (8.1.1, 3 καραμέλες), και τα δύο παιδιά έφτιαξαν ένα σχηματισμό από 5 καραμέλες, ερμηνεύοντας έτσι άρρητα τον όρο του διπλάσιου ως «συν 2».

Στο μεταέλεγχο τα παιδιά υπολόγισαν σωστά όλα τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια, και για τα δύο τύπους ποσοτήτων. Αξίζει να αναφερθεί ότι στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, και τα δύο παιδιά αντιμετώπισαν αρχικά δυσκολίες σε μία περίπτωση το καθένα και χρειάστηκαν διευκρινιστικές ερωτήσεις από την ερευνήτρια προκειμένου να καταφέρουν να επιλύσουν το πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα, η Δέσποινα αντιμετώπισε δυσκολία στο «ένα τέταρτο» στις διακριτές ποσότητες, στην περίπτωση που η αρχική ποσότητα ήταν τέσσερις καραμέλες. Συγκεκριμένα είπε: « Από τις 4 καραμέλες θα δώσουμε και τις 4 αφού αυτό μας ζητάει». Όταν της ζητήθηκε να εξηγήσει τι σημαίνει το ¼ είπε: «Από τις 4 ομάδες παίρνουμε τη 1». Στη συνέχεια της ζητήθηκε να επαληθεύσει την απάντηση με τη χρήση του εργαλείου αναπαράστασης του λόγου 1:4 που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διδακτική παρέμβαση βοηθώντας την να χωρίσει τις καραμέλες σε 4 ομάδες και να καταλήξει ότι πρέπει να δώσει τη μία.

Ο Κωνσταντίνος κατά τον μεταέλεγχο δυσκολεύτηκε αρχικά στον υπολογισμό του ενός τρίτου των 6 καραμελών. Η αρχική του απάντηση ήταν: « Οι 3 από τις 6». Όταν του ζητήθηκε να δείξει πώς βρήκε το 1/3 είπε: «Θα πρέπει να χωρίσω τις καραμέλες σε 3 καραμέλες. Όχι, σε 3 ομάδες.» Αφού τις χώρισε 3 δυάδες και τις έδειξε στην ερευνήτρια τότε ρωτήθηκε: «Πόσες καραμέλες λοιπόν είναι το 1/3 από τις 6;». Τότε ο Κωνσταντίνος απάντησε «Δύο».

Από τα δύο παραπάνω επεισόδια, κατά τα οποία τα παιδιά έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις φάνηκε ότι και τα δύο προσπάθησαν αρχικά να υπολογίσουν νοερά το ¼ και 1/3, ενδεχομένως συγχέοντας τον παρονομαστή με το ζητούμενο. Η Δέσποινα δηλαδή ακούγοντας τον όρο «ένα τέταρτο» απάντησε κατευθείαν «τέσσερις καραμέλες», ενώ και ο Κωνσταντίνος ακούγοντας τον όρο «ένα τρίτο» απάντησε «τρεις από τις έξι». Οι απαντήσεις και στις δύο περιπτώσεις αφορούσαν τα υποπολλαπλάσια στις διακριτές ποσότητες, ενώ στις συνεχείς τα δύο παιδιά δεν έκαναν κανένα λάθος, επαληθεύοντας όμως την απάντηση μόνοι τους εκτιμώντας πρώτα νοερά το σωστό κομμάτι.

Τέλος, είναι σημαντική η βελτίωση που σημείωσαν και τα δύο παιδιά στις απαντήσεις που αφορούσαν τα πολλαπλάσια και ιδιαίτερα στις διακριτές ποσότητες δίνοντας σωστούς ορισμούς και σχηματίζοντας τις σωστές ποσότητες.

Στους Πίνακες 13 και 14 παρουσιάζονται οι λεκτικές περιγραφές που έδωσαν η Δέσποινα και ο Κωνσναντίνος, αντίστοιχα, για τους όρους, στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο.

Ποσότητα	**Όρος**	**Προέλεγχος**	**Μεταέλεγχος**
Διακριτή	μισό/ ένα δεύτερο	Σημαίνει ότι τις χωρίζεις στη μέση (δείχνει με το χέρι της).	Σημαίνει έχω δύο ίσες ομάδες και παίρνω τη μία ομάδα. Το ένα από τα δύο
	ένα τρίτο		Χωρίζω σε τρεις ίσες ομάδες και παίρνω τη μία ομάδα.
	ένα τέταρτο		Από τις τέσσερις ομάδες παίρνουμε τη μία.
Συνεχής	μισό/ ένα δεύτερο	Παίρνω αυτό το κομμάτι (δείχνει το μισό της σοκολάτας, ενώ το έχει χωρίσει στη μέση με το χέρι της), αλλά δεν παίρνω αυτό το κομμάτι (δείχνει το άλλο μισό της σοκολάτας).	Σημαίνει έχω δύο κομμάτια και παίρνω το ένα.
	ένα τρίτο	-	Σημαίνει ότι έχω αυτή τη σοκολάτα και παίρνω ένα μικρότερο κομμάτι στην τύχη, αλλά πρέπει αυτό το κομμάτι να χωράει τρεις φορές.
	ένα τέταρτο	Παίρνω ένα μικρό κομμάτι	Σημαίνει έχω μία σοκολάτα και παίρνω ένα κομμάτι και πρέπει αυτό το κομμάτι να έχει τέσσερις θέσεις στην μπάρα.
Διακριτή	διπλάσιο	-	Σημαίνει δύο φορές οι καραμέλες.
	Τριπλάσιο	-	Σημαίνει τρεις φορές οι καραμέλες.
	τετραπλάσιο	-	Σημαίνει τέσσερις φορές αυτές οι καραμέλες.
Συνεχής	διπλάσιο	-	Σημαίνει δύο φορές η σοκολάτα

	τριπλάσιο	-	Σημαίνει τρεις φορές μία σοκολάτα .
	τετραπλάσιο	-	Σημαίνει τέσσερις φορές μία σοκολάτα.

Πίνακας 13**:** Οι λεκτικές περιγραφές της Δέσποινας για τους όρους των πολλαπλασίων και των υποπολλαπλασίων, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο.

Ποσότητα	**Όρος**	**Προέλεγχος**	**Μεταέλεγχος**
Διακριτή	μισό/ ένα δεύτερο	Σημαίνει ότι αυτές τις καραμέλες τις χωρίζω στη μέση, σε δύο και δύο, και ο καθένας θα πάρει από δύο.	Σημαίνει το ένα από τα δύο, αλλά επειδή είναι τέσσερις καραμέλες πρέπει να πάρουμε τις 2 από τις τέσσερις.
	ένα τρίτο	-	Σημαίνει το ένα από τα τρία.
	ένα τέταρτο	Σημαίνει το μισό από ένα μισό.	Σημαίνει παίρνεις ένα από τα τέσσερα.
Συνεχής	μισό/ ένα δεύτερο	Είναι όταν είναι κάτι κομμένο στη μέση.	Σημαίνει ένα από τα δύο κομμάτια.
	ένα τρίτο	-	Σημαίνει ένα από τα τρία κομμάτια.
	ένα τέταρτο	-	Σε αυτή τη σοκολάτα χωράνε τέσσερα τέτοια κομμάτια (δείχνει το 1/4).Σημαίνει το ένα από τα τέσσερα.
Διακριτή	διπλάσιο	Είναι δύο φορές πιο μεγάλο	Σημαίνει δύο φορές αυτές οι καραμέλες.
	τριπλάσιο	-	Σημαίνει τρεις φορές.
	τετραπλάσιο	-	Σημαίνει τέσσερις φορές αυτές οι καραμέλες. Είναι τρεις οι αρχικές καραμέλες και εγώ θα βάλω τέσσερις φορές το τρία.
Συνεχής	διπλάσιο	Είναι δύο φορές μεγαλύτερο	Σημαίνει δύο τέτοια κομμάτια (δείχνει το αρχικό κομμάτι).
	τριπλάσιο	-	Σημαίνει τρεις φορές αυτό το κομμάτι.
	τετραπλάσιο	-	Σημαίνει τέσσερις φορές αυτό το κομμάτι.

Πίνακας 14: Οι λεκτικές περιγραφές του Κωνσταντίνου για τους όρους των πολλαπλασίων και των υποπολλαπλασίων, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο.

Από τους παραπάνω πίνακες διαπιστώνουμε ότι ήδη στον προέλεγχο έχουν μια αρχική κατανόηση για τον όρο «μισό», τόσο στις διακριτές όσο και στις συνεχείς ποσότητες και μπορούν να το υπολογίσουν. Και για τα δύο είδη ποσοτήτων, τα παιδιά φαίνεται να έχουν μια χωρική αίσθηση για το σημείο που χωρίζει στη «μέση» μια γραμμική διάταξη από διακριτά στοιχεία, ή ένα μήκος. Ο Κωνσταντίνος εξέφρασε αριθμητικά τη σχέση στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων («Σημαίνει ότι αυτές τις καραμέλες τις χωρίζω στη μέση, σε δύο και δύο, και ο καθένας θα πάρει από δύο»). Επιπλέον, ο Κωνσταντίνος εξήγησε τον όρο «ένα τέταρτο ως το «μισό από ένα μισό», υπολογίζοντάς το σωστά. Από την άλλη μεριά, η Δέσποινα εξήγησε τον όρο «ένα τέταρτο» ως «παίρνω ένα μικρό κομμάτι», αναφερόμενη σε μια απόλυτη και όχι μια σχετική ποσότητα.

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, κανένας όρος δεν ήταν οικείος στη Δέσποινα, Αντίθετα, ο Κωνσταντίνος περιέγραψε λεκτικά το διπλάσιο ως «δύο φορές πιο μεγάλο» (διακριτές ποσότητες) και «δύο φορές μεγαλύτερο». Υπενθυμίζουμε ότι, παρά τη λεκτική περιγραφή που ήταν σε θέση να δώσει ο Κωνσταντίνος στο προέλεγχο, κατασκεύασε λανθασμένα το πολλαπλάσιο της διακριτής ποσότητας ως «η αρχική ποσότητα συν δύο», ενώ δεν έδωσε απάντηση στην περίπτωση της συνεχούς ποσότητας.

Στο μεταέλεγχο, και τα δύο παιδιά εξήγησαν όλους τους όρους, τόσο για τις διακριτές, όσο και για τις συνεχείς ποσότητες. Στις διακριτές ποσότητες, για τα υποπολλαπλάσια, η Δέσποινα βασίστηκε στη σχέση μέρους-όλου, αναφερόμενη με συνέπεια στα μέρη ως «ομάδες» (Πίνακας 13).   Ο Κωνσταντίνος επίσης περιέγραψε μια σχέση μέρους-όλου, χωρίς ρητή αναφορά σε ομάδες (Πίνακας 14). Στην περίπτωση του «ενός δευτέρου» ήταν πιο αναλυτικός αναφέροντας το πλήθος των στοιχείων της κάθε ομάδας («σημαίνει το ένα από τα δύο, αλλά επειδή είναι τέσσερις καραμέλες πρέπει να πάρουμε τις δύο από τις τέσσερις».

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, και τα δύο παιδιά εξήγησαν τους όρους αναφερόμενα στην επανάληψη της εκάστοτε ποσότητας πολλαπλασιαστικά (χρησιμοποιώντας τη λέξη «φορές»). Για παράδειγμα, η Δέσποινα περιέγραψε το «τετραπλάσιο» ως «τέσσερις φορές αυτές οι καραμέλες» (Πίνακας 13) Ο Κωνσταντίνος χρησιμοποίησε την ίδια ακριβώς έκφραση και, επιπλέον, μοντελοποίησε αριθμητικά την κατάσταση («Είναι τρεις οι αρχικές καραμέλες και εγώ θα βάλω τέσσερις φορές το τρία», Πίνακας 14).

Στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων, για τα υποπολλαπλάσια, η Δέσποινα (Πίνακας 13) βασίστηκε στη σχέση μέρους-όλου για το «ένα δεύτερο» χωρίς να αναφέρει την προϋπόθεση της ισότητας των κομματιών. Για το «ένα τρίτο» και το «ένα τέταρτο» αναφέρθηκε στη μέτρηση («(…)πρέπει αυτό το κομμάτι να χωράει τρεις φορές»), «πρέπει αυτό το κομμάτι να έχει τέσσερις θέσεις στη μπάρα»). Ο Κωνσταντίνος (Πίνακας 14) βασίστηκε στη σχέση μέρους-όλου για το «ένα δεύτερο» και το «ένα τρίτο» («ένα από τα δύο κομμάτια» και «ένα από τα τρία κομμάτια», αντίστοιχα), χωρίς επίσης να αναφέρει την προϋπόθεση της ισότητας των «κομματιών». Αναφέρθηκε στη μέτρηση στην περίπτωση του «ενός τετάρτου» ,επισημαίνοντας ότι «σε αυτή τη σοκολάτα χωράνε τέσσερα τέτοια κομμάτια».

Στην περίπτωση των πολλαπλασίων στις συνεχείς ποσότητες, και τα δύο παιδιά χρησιμοποίησαν την έκφραση «φορές», παρόμοια με τις διακριτές ποσότητες (Πίνακας 13, Πίνακας 14).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξηγήσεις που έδωσαν τα δύο παιδιά για τις απαντήσεις τους στα προβλήματα είναι, σε μεγάλο βαθμό, συνεπείς με τους «ορισμούς» που δίνουν για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια, αλλά υπάρχουν και ορισμένες διαφοροποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα, η Δέσποινα, συνεπής με τους «ορισμούς» της, βασίστηκε στη σχέση μέρους-όλου σε όλα τα προβλήματα με διακριτές ποσότητες που αφορούσαν υποπολλαπλάσια, καθώς και για το 1/2 στις συνεχείς. Στις συνεχείς ποσότητες διαφοροποιήθηκε ελαφρά για το 1/3 και 1/4 όπου αναφέρθηκε στη σχέση μέρους- όλου σε συνδυασμό με τη μέτρηση.

Αντίθετα με τους «ορισμούς» που έδωσε η Δέσποινα για τα πολλαπλάσια, οι οποίοι όλοι βασίζονταν στην επανάληψη της ποσότητας κατάλληλες «φορές» (Πίνακας 13), οι εξηγήσεις της Δέσποινας για την επίλυση διαφοροποιήθηκαν και, μάλιστα, ανάλογα με τον τύπο της ποσότητας. Έτσι, στις διακριτές ποσότητες, η Δέσποινα εξήγησε βασιζόμενη στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, σε όλες τις περιπτώσεις.

Ερευνήτρια: Αν η Ελένη έχει αυτές τις καραμέλες (3 καραμέλες) κι εγώ έχω τις τριπλάσιες, πόσες καραμέλες έχω;

Δέσποινα: Εννιά.

Ερευνήτρια: Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες;

Δέσποινα: Επειδή 3+3 κάνει 6 και άλλα 3 μας κάνει 9.

Ερευνήτρια: Ξέρεις τι σημαίνει «τριπλάσιο»;

Δέσποινα: Σημαίνει τρεις φορές οι καραμέλες.

Στις συνεχείς ποσότητες, οι εξηγήσεις της βασίστηκαν στη μέτρηση. Για παράδειγμα, εξήγησε πώς υπολόγισε το τριπλάσιο της δεδομένης ποσότητας λέγοντας «είναι το τριπλάσιο γιατί χωράνε τρία τέτοια κομμάτια».

Ο Κωνσταντίνος, από την άλλη μεριά, στηρίχθηκε σε έναν μόνο τύπο εξήγησης στα υποπολλαπλάσια, αυτόν της σχέσης μέρους- όλου, ανεξαρτήτως του είδους της ποσότητας που παρουσιάζεται στα προβλήματα.

Αντίθετα, στα πολλαπλάσια, ο τύπος εξήγησης που δίνει εξαρτάται από την ποσότητα. Στα προβλήματα με διακριτές ποσότητες ο Κωνσταντίνος εξηγεί πώς υπολογίζει τα πολλαπλάσια, επαναλαμβάνοντας κατάλληλες «φορές» την αρχική ποσότητα, παρόμοια με τους «ορισμούς» του για τα πολλαπλάσια (Πίνακας 14). Για παράδειγμα, εξηγεί πώς υπολόγισε το τετραπλάσιο των 3 καραμελών λέγοντας «πήρα αυτές τις τρεις καραμέλες και μετά τις έβαλα 4 φορές»

Τέλος, στις συνεχείς ποσότητες η εξήγηση που χρησιμοποιεί ο Κωνσταντίνος για τα πολλαπλάσια βασίζεται πάντα στη μέτρηση, όπως και η Δέσποινα, ένας τύπος εξήγησης που διαφοροποιείται από τους ορισμούς τους για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα, ο Κωνσταντίνος εξήγησε πώς υπολόγισε τη διπλάσια μιας συνεχούς ποσότητας (μία σοκολάτα) λέγοντας «γιατί σε αυτή χωράνε δύο τέτοιες σοκολάτες».

Συνοψίζοντας, τα δύο παιδιά ξεκίνησαν γνωρίζοντας τον όρο «μισό» και με την ικανότητα να το υπολογίσουν βασιζόμενα σε μια «χωρική» αίσθηση του «μέσου» μιας γραμμικής διάταξης διακριτών στοιχείων ή ενός μήκους. Παρά το γεγονός ότι ο Κωνσταντίνος μπορούσε να δώσει έναν «ορισμό» για το διπλάσιο, δεν ήταν σε θέση να το υπολογίσει. Ειδικότερα, στις διακριτές ποσότητες, ο Κωνσταντίνος, όπως και η Δέσποινα, χρησιμοποίησε άρρητα έναν ορισμό για το διπλάσιο ως «η αρχική ποσότητα συν δύο» στις διακριτές ποσότητες.

Στο μεταέλεγχο, και τα δύο παιδιά ήταν σε θέση να υπολογίσουν (με την έννοια που προαναφέρθηκε) πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια συνεχών και διακριτών ποσοτήτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι δυσκολίες εμφανίστηκαν σε δύο περιπτώσεις, και οι δύο στις διακριτές ποσότητες.

Και τα δύο παιδιά ήταν σε θέση να δώσουν «ορισμούς» για τους όρους. Επισημαίνεται ότι οι «ορισμοί» αυτοί δεν ήταν απαραίτητα πάντα πλήρεις, ιδιαίτερα για τα υποπολλαπλάσια. Για παράδειγμα, και τα δύο παιδιά σε κάποιες περιπτώσεις παραλείπουν την προϋπόθεση της ισότητας των μερών στη λεκτική τους περιγραφή, Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη συνολικά τους ορισμούς, σε συνδυασμό με τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων, φαίνεται να λαμβάνουν υπόψη τους τις βασικές προϋποθέσεις. Η ερμηνεία των υποπολλαπλασίων στους «ορισμούς» των παιδιών βασίζεται, κατά κύριο λόγο, στη σχέση μέρους-όλου, ενώ των πολλαπλασίων στην επανάληψη της αρχικής ποσότητας κατάλληλες «φορές». Αξίζει να σημειωθεί ότι στο πλαίσιο του υπολογισμού, τα παιδιά δίνουν εξηγήσεις που δείχνουν ότι διαθέτουν και εναλλακτικούς «ορισμούς» για τους όρους, ανάλογα με το πλαίσιο του προβλήματος. Για παράδειγμα, η Δέσποινα αξιοποιεί και την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για τα πολλαπλάσια στις διακριτές ποσότητες. Επίσης, στις συνεχείς ποσότητες και τα δύο παιδιά αξιοποιούν και τη μέτρηση για τα υποπολλαπλάσια, ενώ αξιοσημείωτο είναι ότι το πλαίσιο της μέτρησης αξιοποιείται συστηματικά και από τα δύο παιδιά για να εξηγήσουν πώς γνωρίζουν ότι μια ποσότητα είναι πολλαπλάσιο μιας άλλης.

6. Συμπεράσματα- Συζήτηση

Η παρούσα εργασία εστίασε στη διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης δύο παιδιών πρώτης δημοτικού πριν και μετά την υλοποίηση μιας διδακτικής παρέμβασης διάρκειας έντεκα διδακτικών ωρών οι οποίες κατανεμήθηκαν σε διάστημα δέκα εβδομάδων. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από τρεις δομημένες δραστηριότητες επιχειρήθηκε να διερευνηθεί κατά πόσο τα παιδιά αυτά θα μπορέσουν να προσεγγίσουν και να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Οι δραστηριότητες εστίασαν στην ανάπτυξη του κατάλληλου λεξιλογίου για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια και στην παράλληλη επεξεργασία τους σε διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και τις ικανότητες πολλαπλασιαστικού συλλογισμού πριν και μετά την παρέμβαση, τα ευρήματα έδωσαν κάποια ενδιαφέροντα στοιχεία. Και τα δύο παιδιά είχαν ήδη αναπτυγμένο επίπεδο κατανόησης της αριθμητικής ακολουθίας καθώς αντιμετώπισαν με ευχέρεια τις δοκιμασίες των Wright et al. (2006), ακόμα και τα προβλήματα «κρυφού προσθετέου» για μεγάλο εύρος αριθμών. Επιπλέον, ήταν σε θέση να αντιμετωπίσουν προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής (του τύπου των «ισοπολοηθών ομάδων») με διακριτές ποσότητες, ήδη από τον προέλεγχο. Η διαπίστωση αυτή φαίνεται να συμφωνεί με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Lima, όπως αναφέρεται στο Nunes & Bryant, 1996;

Skoumpourdi & Sofokiti, 2009) που υποστηρίζουν ότι τα παιδιά μετά την είσοδό τους στο δημοτικό, φαίνεται να επιλύουν πιο εύκολα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής με διακριτές ποσότητες. Παρόλα αυτά αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή την μελέτη περίπτωσης και τα δύο παιδιά κατά τον προέλεγχο έδωσαν περισσότερες σωστές απαντήσεις στα προβλήματα διαιρεσης μέτρησης από ότι στα προβλήματα μερισμού, επίδοση που δεν συμφωνεί με προηγούμενες μελέτες (Charles & Nason, 2000; Frydman & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005). Ειδικότερα η Δέσποινα έδωσε περισσότερες σωστές απαντήσεις στα προβλήματα μέτρησης και στις συνεχείς ποσότητες. Μια υπόθεση που μπορεί να υποστηρίξει το παραπάνω εύρημα είναι ότι τα δύο παιδιά ίσως ήρθαν σε επαφή με ομαδοποιήσεις αντικειμένων κατά τη φοίτησή τους στο νηπιαγωγείο, υπόθεση που δεν μπορεί όμως να επιβεβαιωθεί.

Η διδακτική παρέμβαση φάνηκε να επιδρά θετικά στις ικανότητες πολλαπλασιαστικού συλλογισμού και των δύο παιδιών εξίσου και στα δύο είδη ποσοτήτων. Και τα δύο παιδιά απάντησαν σωστά σε όλα τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής κατά τον μεταέλεγχο. Αλλαγή όμως παρατηρήθηκε και στα προβλήματα στα οποία τα παιδιά απάντησαν σωστά ήδη από τον προέλεγχο, καθώς οι στρατηγικές τους βελτιώθηκαν και έγιναν πιο συστηματικές. Πιο συγκεκριμένα στις διακριτές ποσότητες ανέπτυξαν τις στρατηγικές της αντιστοίχισης ένα προς ένα, ένα προς πολλά, ακόμη και τον συνδυασμό αυτών των στρατηγικών. Η μερικώς ή πλήρης νοερή αναπαράσταση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων είναι ιδιαίτερα εμφανής κατά τον μεταέλεγχο στα προβλήματα μέτρησης και πολλαπλασιασμού, ενώ σε όλα τα ερωτήματα τα παιδιά τεκμηρίωσαν τις απαντήσεις τους. Φάνηκε λοιπόν ότι παράλληλη διαχείριση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων βοήθησε στην ανάπτυξη πολλαπλών στρατηγικών πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, εύρημα που συμφωνεί και με προηγούμενες έρευνες (Boyer & Levine, 2006; Kornilaki & Nunes, 2005; Pitta, Kaldrimidou & Vamvakoussi, 2020; Steffe, 2013).

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και την απόκριση των παιδιών κατά τη διδακτική παρέμβαση τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά για τον σχεδιασμό και των τριών δραστηριοτήτων. Τα παιδιά κατάφεραν από την πρώτη δραστηριότητα να αναπτύξουν ευχέρεια στη χρήση των κατάλληλων όρων που αφορούσαν τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια, ακόμη και να ξεπεράσουν το εμπόδιο που προκαλεί ο όρος «μισό», στην παραγωγή των όρων των υπόλοιπων υποπολλαπλασίων αντικαθιστώντας τον με τον όρο «ένα δεύτερο». Ένα σημαντικό στοιχείο είναι ότι αρκετές συναντήσεις μετά την εισαγωγή αυτού του όρου, στην τρίτη δραστηριότητα, τα παιδιά φάνηκε ότι είχαν κατανοήσει πια ότι οι όροι «μισό» και «ένα δεύτερο» είναι ταυτόσημοι. Γενικότερα φάνηκε ότι τα παιδιά απέκτησαν πιο σύντομα ευχέρεια με τους όρους των πολλαπλασίων παρά με τους όρους των υποπολλαπλασίων.

Η εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου φάνηκε να λειτουργεί υποστηρικτικά ιδιαίτερα στις διακριτές ποσότητες, όπου οι στρατηγικές καταμέτρησης στο σχηματισμό υποπολλαπλάσιων ποσοτήτων λειτούργησαν αρχικά ως εμπόδιο. Αντίθετα στις συνεχείς ποσότητες και τα δύο παιδιά εξοικειώθηκαν πιο γρήγορα στο σχηματισμό πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων ποσοτήτων περνώντας στη νοερή αναπαράσταση. Αυτή η παρατήρηση έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς στον προέλεγχο τα δύο παιδιά έδωσαν συνολικά πολύ λιγότερες σωστές απαντήσεις στα προβλήματα με συνεχείς ποσότητες. Γενικότερα τα παιδιά μετέφεραν τις γνώσεις που απέκτησαν από τη μία δραστηριότητα στην επόμενη, εξελίσσοντας κάθε φορά τις στρατηγικές ισομερισμού και μέτρησης.

Οι αλλαγές στη λεκτική έκφραση των παιδιών που αφορούν το τρίτο ερευνητικό ερώτημα διαπιστώθηκαν ήδη από τη διδακτική παρέμβαση και επιβεβαιώθηκαν κατά τον μεταέλεγχο. Όπως αναφέρθηκε, τα παιδιά απέκτησαν ευχέρεια στη χρήση των κατάλληλων όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια ήδη από την πρώτη δραστηριότητα. Ενδιαφέρον έχει η παρατήρηση ότι κατά τον προέλεγχο όπως και κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης τα παιδιά κάποιες στιγμές ερμήνευαν τους όρους επηρεασμένα από τις προσθετικές σχέσεις. Για παράδειγμα, κατά τον προέλεγχο και τα δύο παιδιά επιχείρησαν να σχηματίσουν τη διπλάσια ποσότητα ερμηνεύοντας την ως «συν δύο». Μια υπόθεση για αυτή την ερμηνεία είναι ότι κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς στην πρώτη δημοτικού, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις προσθετικές σχέσεις, με λίγες μόνο αναφορές στις πολλαπλάσιες και στις υποπολλαπλάσιες ποσότητες. Παρόλα αυτά στον μεταέλεγχο και τα δύο παιδιά έδωσαν πλήρεις ή μερικώς ολοκληρωμένους ορισμούς των όρων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρέμβαση τους οποίους τεκμηρίωσαν μέσα από τις εξηγήσεις που έδωσαν για να στηρίξουν τις απαντήσεις τους, δείχνοντας έτσι ότι λαμβάνουν υπόψη τα απαραίτητα στοιχεία των όρων. Σε δύο περιπτώσεις, όταν τους ζητήθηκε να βρουν το 1/3 και το ¼ μιας διακριτής ποσότητας τα παιδιά έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, ίσως σε μια προσπάθεια να «αριθμητικοποιήσουν» γρήγορα την απάντηση με αποτέλεσμα να επηρεαστούν από τους «αριθμούς» που άκουσαν (ένα τρίτο= 3 καραμέλες/ ένα τέταρτο= 4 καραμέλες). Ένα ακόμη γλωσσικό στοιχείο αφορά τη λέξη «φορές» που χρησιμοποίησαν τα παιδιά όταν κλήθηκαν κατά τον μεταέλεγχο να δώσουν τους αντίστοιχους ορισμούς στα πολλαπλάσια. Το εν λόγω γλωσσικό στοιχείο εισήχθη κατά τη διδακτική παρέμβαση στην οποία τα παιδιά παρατηρούσαν και συζητούσαν μαζί με την ερευνήτρια τι συμβαίνει στον σχηματισμό πολλαπλάσιων ποσοτήτων. Συνοψίζοντας η παρούσα μελέτη περίπτωσης επιβεβαιώνει προηγούμενες έρευνες που υποστηρίζουν ότι η χρήση του κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου επιδρά στις επιδόσεις παιδιών γύρω από έργα πολλαπλασιαστικής δομής (Pitta & Vamvakoussi, 2022; Vanluydt, et al., 2021).

Κλείνοντας με το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα, φαίνεται ότι τα στοιχεία που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, αλλά και στον μεταέλεγχο, δεν επαρκούν για να οδηγήσουν σε ασφαλή συμπεράσματα για τις βελτιώσεις που ίσως χρειαστούν στις δραστηριότητες. Από τον προέλεγχο φάνηκε ότι τα συγκεκριμένα παιδιά μπορούσαν να διαχειριστούν τα έργα σε ένα πολύ καλό για την ηλικία τους επίπεδο. Επίσης οι συνθήκες της παρέμβασης ήταν ιδιαίτερα ευνοϊκές καθώς η εκπαιδευτικός- ερευνήτρια της παρούσας εργασίας εφάρμοσε την παρέμβαση σε μόνο δύο παιδιά, γεγονός που της επέτρεπε να ακολουθεί τη σκέψη των παιδιών, να εντοπίζει εγκαίρως παρανοήσεις και δυσκολίες στην κατανόηση και να παρεμβαίνει είτε με το κατάλληλο υλικό είτε διαθέτοντας τον απαραίτητο χρόνο στο κάθε παιδί να επανεξετάσει τις στρατηγικές του. Τα παραπάνω σημεία αποτελούν και τους περιορισμούς της εν λόγω έρευνας για αυτό και δεν μπορούν να γενικευτούν τα συμπεράσματά της, Είναι σημαντικό λοιπόν αυτή η παρέμβαση να εφαρμοστεί σε συνθήκες τάξης η οποία θα αποτελείται από παιδιά διαφορετικών επιπέδων μαθηματικής ανάπτυξης. Ενδεχομένως τέτοιες εφαρμογές να αποκαλύψουν τις απαραίτητες αλλαγές, βελτιώσεις κι επεκτάσεις που απαιτούνται.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Askew, M. (2018). Multiplicative reasoning: Teaching primary pupils in ways that focus on functional relations. *The Curriculum Journal*, *29*(3), 406-423.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E., & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(4), 441-454.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational studies in Mathematics*, *15*(2), 129-147.

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental psychology*, *51*(5), 615.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 428-441.

Charles, K., & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational studies in mathematics*, *43*(2), 191-221.

Cheeseman, J., Downton, A., Ferguson, S., & Roche, A. (2022). Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 1-32.

Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A., & Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, 100817.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41-51.

Den Heuvel-Panhuizen, V., & Elia, I. (2020). Mapping kindergartners' quantitative competence. *ZDM*, *52*(4), 805-819.

Dooren, W. V., Bock, D. D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381.

Downton, A. (2008). Links between children's understanding of multiplication and solution strategies for division. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), Navigating currents and charting directions (Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). Brisbane: MERGA.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3-17.

Frydman, O., & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive development*, *3*(4), 323-339.

Graeber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic Teacher*, *40*(7), 408-412.

Götze, D., & Baiker, A. (2021). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: Results of an intervention study in the second grade. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 263-275.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education*, (pp. 33-57) Springer Nature.

Hurst, C. (2015). The multiplicative situation. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *20*(3), 10-16.

Hurst, C., & Hurrell, D. (2016). Multiplicative thinking: Much more than knowing multiplication facts and procedures. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(1), 34-38.

Jacob, L. & Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley (Eds.) Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity: Proceedings of the 26th

Annual Conference in Mathematics Education Research Group of Australasia, (Vol.2, pp. 306- 313). Melbourne, VIC, Australia: Deakin University.

Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, *8*(2), 237-256.

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20*(3), 388-406.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for research in Mathematics Education*, *20*(2), 147-158.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. Oxford University Press.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for research in Mathematics Education*, *28*(3), 309-330.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition*, *116*(2), 204-216.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, *142*, 66-82.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Wiley-Blackwell.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Barros, R. (2015). Assessing quantitative reasoning in young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2-3), 178-196.

Park, J. H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive development*, *16*(3), 763-773.

Pitta, G., Kaldrimidou, M., & Vamvakoussi, X. (2020). Enhancing the development of multiplicative reasoning in early childhood education: a case study.

Siemon, D., & Breed, M. (2006). Assessing multiplicative thinking using rich tasks. In *annual Conference of the Australian Association for Research in Education*.

Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates?: Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, *16*(3), 811-829.

Skoumpourdi, C., & Sofikiti, D. (2009). Young children's material manipulating strategies in division tasks. In *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 137-145).

Steffe, L. P. (2013). On children's construction of quantification. In *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education: Papers from an International STEM Research Symposium. Laramie, Wyoming: University of Wyoming*.

Vanluydt, E., Supply, A. S., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). The importance of specific mathematical language for early proportional reasoning. *Early Childhood Research Quarterly*, *55*, 193-200.

Watson, K. (2016). Laying the foundation for multiplicative thinking in Year 2. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(3), 16-20.

Wright, R. J., Martland, J., & Stafford, A. K. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention*. Sage.

Zaranis, N., & Alexandraki, F. (2021). Game-Based Learning for Teaching Multiplication and Division to Kindergarten Students. In *Smart Pedagogy of Game-based Learning* (pp. 85-101). Springer, Cham.

Zeljić, M., Boričić, M. D., & Đokić, O. (2019, August). Multiplication strategies: progressive development and (or) systematic teaching. In *International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (p. 418).

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Ξ. & Καλδρυμίδου Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.). *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: « Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σελ.302-311), Ρόδος: Εργαστήριο μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ.

ΚΑΙ Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ψηφιακή Έκδοση, ISBN: 978-960- 86791-9-1.

Δεσλή , Δ., & Κορνηλάκη , Α. (2013). Η ανάδυση του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού σκ_έψη των μικρών παιδιών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<u>Δραστηριότητες Προελέγχου- Μεταελέγχου</u>

<u>Όνομα Παιδιού:</u>

<u>Ηλικία:</u>

<u>Ημερομηνία Συνέντευξης:</u>

Α) Έργα που σχετίζονται με την αριθμητική ακολουθία

Έργο 1 (Ε1):

1.1) Μπορείς να ξεκινήσεις να μετράς από το 1; Θα σου πω εγώ πότε να σταματήσεις.

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

1.2) Μπορείς να ξεκινήσεις να μετράς από το 5; Θα σου πω εγώ πότε να σταματήσεις.

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

1.3) Μπορείς να ξεκινήσεις να μετράς από το 12;

Θα σου πω εγώ πότε να σταματήσεις.

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

1.4) Μπορείς να ξεκινήσεις να μετράς από το 27;

Θα σου πω εγώ πότε να σταματήσεις.

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

1.5) Μπορείς να ξεκινήσεις να μετράς από το 54;

Θα σου πω εγώ πότε να σταματήσεις.

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

1.6) Μπορείς να μετρήσεις ανά 10;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
Έφτασε μέχρι	

Έργο 2 (Ε2):

2.1) Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 6;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

2.2) Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 9;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

2.3) Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 11;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

2.4)Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 19;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

2.5)Ποιος αριθμός έρχεται μετά το 49;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

Έργο 3 (Ε3):

3.1) Αν έχω 2 καραμέλες και προσθέσω άλλες 3, πόσες καραμέλες θα έχω; (Πρώτα δεν είναι ορατές οι καραμέλες και αν χρειαστεί φανερώνω τις 3. Αν δεν δώσει απάντηση φανερώνω και τα δύο μέρη).

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

3.2) (ΑΝ ΑΠΑΝΤΗΘΕΙ ΣΩΣΤΑ ΤΟ 3.1)

Αν έχω 5 καραμέλες και προσθέσω άλλες 2, πόσες καραμέλες θα έχω; (Πρώτα δεν είναι ορατές οι καραμέλες και αν χρειαστεί φανερώνω τις 2).

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

3.3) (ΑΝ ΑΠΑΝΤΗΘΕΙ ΣΩΣΤΑ ΤΟ 3.2)

Αν έχω 9 καραμέλες και προσθέσω άλλες 4, πόσες καραμέλες θα έχω;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

3.4) (ΑΝ ΑΠΑΝΤΗΘΕΙ ΣΩΣΤΑ ΤΟ 3.3)

Αν έχω 16 καραμέλες και προσθέσω άλλες 5, πόσες καραμέλες θα έχω;

Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση

Β) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ

4)Πρόβλημα «δίκαιης μοιρασιάς»:

4.1) Συνεχείς Ποσότητες:

4.1.1) Στα παιδιά παρουσιάζεται το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος και το αδερφάκι του (παρουσιάζονται ως ανθρωπάκια κατασκευασμένα από χαρτόνι) θα μοιραστούν δίκαια αυτή τη σοκολάτα», η οποία είναι σχεδιασμένη σε ένα χαρτόνι. Οι επιλογές που τους δίνονται είναι διαφορετικού μέρους της αρχικής σοκολάτας (½, ¼, ¾, 1, 1,5) σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που θα γίνουν στα παιδιά είναι οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος»; Και «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό το κομμάτι»;

………

………

………

………

………

4.1.2) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά, το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για δίκαιη μοιρασιά της σοκολάτας σε 3 παραλήπτες.

4.1.3) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για δίκαιη μοιρασιά της σοκολάτας σε 4 παραλήπτες.

4.2) Διακριτές Ποσότητες:

4.2.1)Στα παιδιά παρουσιάζεται το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη και η αδερφή της (παρουσιάζονται ως ανθρωπάκια κατασκευασμένα από χαρτόνι) θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις 12 καραμέλες», οι οποίες παρουσιάζονται στην κανονική τους μορφή. Οι ερωτήσεις που θα γίνουν στα παιδιά είναι οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;» και «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες»;

Στην αρχή δεν δίνονται επιλογές προκειμένου να διερευνηθεί αν το παιδί μπορεί να κάνει τη μοιρασιά μόνο του. Αν δεν τα καταφέρει του δίνονται επιλογές διαφορετικού πλήθους της αρχικής ποσότητας (2, 4, 6, 8, 10).

Σε περίπτωση που το παιδί δυσκολεύεται με τις 12 καραμέλες, επαναλαμβάνω το πρόβλημα με 6 καραμέλες.

……

……

……

……

……

4.2.2) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για δίκαιη μοιρασιά από τις καραμέλες σε 3 παραλήπτες.

……

……

……

………

………………………………………………………………………………………………………

4.2.3) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για δίκαιη μοιρασιά από τις καραμέλες σε 4 παραλήπτες.

5)Πρόβλημα επανάληψης ποσότητας

5.1) Συνεχείς Ποσότητες:

5.1.1) Η Ελένη μοίρασε μια σοκολάτα σε 2 φίλες της (οι φίλες παρουσιάζονται ως κουκλάκια). Σε κάθε φίλη της έδωσε αυτό το κομμάτι (1/2 της σοκολάτας, που παρουσιάζεται σε χαρτόνι). Ποια ήταν ολόκληρη η σοκολάτα; (παρουσιάζονται επιλογές σε χαρτόνι διαφορετικού μεγέθους π.χ. το αρχικό κομμάτι, το διπλάσιο του αρχικού κομματιού, το τριπλάσιο και το τετραπλάσιο). Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή η σοκολάτα;

5.1.2)Αν απαντήσει σωστά, το πρόβλημα παρουσιάζεται με 3 φίλες.

5.1.3)Αν απαντήσει σωστά, το πρόβλημα παρουσιάζεται με 4 φίλες.

5.2) Διακριτές ποσότητες

5.2.1) «Η Ελένη αγόρασε καραμέλες για τις 2 φίλες της (οι φίλες παρουσιάζονται ως κουκλάκια). Όταν τις συνάντησε, χάρισε στην καθεμιά 3 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έδωσε και στις 2 φίλες της; Πως το ξέρεις ότι έδωσε τόσες;» Στην αρχή δεν δίνονται επιλογές, αλλά ένα σύνολο από καραμέλες. Αν δεν απαντήσει σωστά, τους παρουσιάζονται οι εξής επιλογές (3, 6, 9, 12).

5.2.2) Αν απαντήσει σωστά επαναλαμβάνω το πρόβλημα με 3 φίλες.

5.2.3) Αν απαντήσει σωστά επαναλαμβάνω το πρόβλημα με 4 φίλες.

6)Πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης

6.1) Συνεχείς ποσότητες

6.1.1) Στα παιδιά θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: « Η γιαγιά μοίρασε δίκαια αυτή τη σοκολάτα στα εγγόνια της (παρουσιάζεται η σοκολάτα σε χαρτόνι). Κάθε εγγονάκι πήρε αυτό το κομμάτι (1/2 της αρχικής σοκολάτας που το βλέπουν σε χαρτόνι). Πόσα ήταν τα εγγόνια που πήραν σοκολάτα; (στα παιδιά παρουσιάζονται διάφορα ανθρωπάκια κατασκευασμένα από ρολό χαρτιού και το παιδί καλείται να επιλέξει πόσα από αυτά είναι τα εγγόνια που πήραν σοκολάτα). Πώς το ξέρεις ότι ήταν τόσα;»

6.1.2)Αν το παιδί απαντήσει σωστά επαναλαμβάνω το πρόβλημα με το 1/4.

6.1.3) Αν απαντήσει και σε αυτό σωστά επαναλαμβάνω με το 1/3 .

6.2) Διακριτές ποσότητες

6.2.1) Στα παιδιά θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: « Ο Γιώργος μοίρασε δίκαια 6 καραμέλες στους φίλους του (καραμέλες σε κανονική μορφή). Κάθε φίλος του πήρε 3 καραμέλες (στα παιδιά παρουσιάζονται διάφορα ανθρωπάκια κατασκευασμένα από ρολό χαρτιού). Σε πόσους φίλους τις μοίρασε; Πώς το ξέρεις ότι τις μοίρασε σε τόσους φίλους;»

6.2.2)Αν το παιδί απαντήσει σωστά, επαναλαμβάνω το πρόβλημα με 6 καραμέλες και 3 παραλήπτες.

6.2.3)Αν απαντήσει σωστά, επαναλαμβάνω με 8 καραμέλες και 4 παραλήπτες.

7) Έργα Αναγνώρισης όρων- Υποπολλαπλάσια:

7.1) Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού:

7.1.1) Στα παιδιά που θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: « Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα (σχεδιασμένη σε χαρτόνι). Θα σου δώσω τη μισή. Ποιο θα είναι το κομμάτι που θα πάρεις; (Στην αρχή δεν δίνονται επιλογές και δίνεται λίγος χρόνος να διερευνήσει το παιδί με τη σοκολάτα που του έχει παρουσιαστεί. Στη συνέχεια παρουσιάζονται επιλογές διαφορετικού μεγέθους της αρχικής σοκολάτας, ½, ¼, ¾, 1, 1,5 και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.)

Οι ερωτήσεις που θα γίνουν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρεις»; ,«Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό το κομμάτι»; Και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη μισό;»

……

……

……

……

……

7.1.2) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες ζητώντας από τα παιδιά το ¼.

7.1.3) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες ζητώντας από τα παιδιά το 1/3.

7.2) Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού:

7.2.1)Στα παιδιά θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: «Έχω εδώ αυτές τις 4 καραμέλες (σε κανονική μορφή). Θα δώσω τις μισές στην Ελένη. Πόσες λες ότι θα της δώσω; Στην αρχή δεν παρουσιάζονται επιλογές στο παιδί. Αν δυσκολευτεί και δεν απαντήσει, οι επιλογές που θα του δοθούν είναι διαφορετικού πλήθους της αρχικής ποσότητας (2, 3, 4, 5, 7).

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες»; Και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη μισό;»

……

……

……

………

………

7.2.2)Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά στα έργα Α και Β το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις καραμέλες, ζητώντας από τα παιδιά το ¼.

7.2.3)Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για 6 καραμέλες ζητώντας από τα παιδιά το 1/3.

………

………

………

………

………

Δραστηριότητα 8- Αναγνώριση όρων- Πολλαπλάσια:

8.1) Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου:

8.1.1) Στα παιδιά θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα (σχεδιασμένη σε χαρτόνι). Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από τη σοκολάτα του Γιώργου. Οι επιλογές που θα τους δοθούν είναι πολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας (x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που θα δοθούν στα παιδιά είναι οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποια είναι η δική μου;», «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη διπλάσιο;»

………

………

………

………

8.1.2)Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες ζητώντας από τα παιδιά το **τριπλάσιο**.

8.1.3)Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες ζητώντας από τα παιδιά το **τετραπλάσιο**.

8.2) Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου:

8.2.1)Στα παιδιά θα παρουσιαστεί το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη έχει αυτές τις 3 καραμέλες. Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από αυτήν (όλες σε κανονική μορφή). (Στην αρχή δεν δίνονται επιλογές παρά μόνο ένα σύνολο από καραμέλες. Αν δεν μπορεί να απαντήσει το παιδί τότε οι επιλογές που θα δοθούν είναι πολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας (x1, x2, x3, x4) και πάλι θα παρουσιαστούν σε κανονική μορφή.)

Οι ερωτήσεις που θα γίνουν στα παιδιά είναι οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες έχω;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες οι καραμέλες;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη Διπλάσιο;»

………

………

………

………

………

8.2.2) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις καραμέλες, ζητώντας από τα παιδιά το **τριπλάσιο**.

………

………

………

………

………

8.2.3) Αν τα παιδιά απαντήσουν σωστά το πρόβλημα επαναλαμβάνεται για τις καραμέλες, ζητώντας από τα παιδιά το **τετραπλάσιο**.