ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Ανάλυση και σύγκριση μεταξύ των ελληνικών και γαλλικών σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου ως προς την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας»

της

Καπετανίδου Κατερίνας

Α.Ε.Μ. 1012

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.)

Εξεταστές: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής, Π.Δ.Μ.

Χρήστου Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Δ.Μ.

Θεσσαλονίκη

Νοέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και Πρόεδρο του ΔΠΜΣ «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών», για την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγησή του, τις καίριες συμβουλές του καθώς και για την αδιάκοπη συμπαράσταση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας και τον κ. Κωνσταντίνο Χρήστου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, για τις εύστοχες και παραγωγικές επισημάνσεις τους.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένειά μου για την αμέριστη ηθική συμπαράσταση που μου έχει προσφέρει κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αφιέρωση

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στη μνήμη του παππού μου, Νικούδη Ηλία, ως φόρο τιμής για την 35ετή παιδαγωγική του προσφορά στα ακριτικά σχολεία του Έβρου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών συνιστούν τον κύριο μοχλό της εκπαιδευτικής διαδικασίας επιδρώντας καταλυτικά στη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών της σχέσης εκπαιδευτικού – μαθητή. Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ένα έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από τον τρόπο ανάπτυξης της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στα σχολικά εγχειρίδια και κυρίως γύρω από τις ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη που παρέχονται από τα τελευταία. Στην παρούσα μελέτη πραγματοποιείται η αξιολόγηση ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων της Β’ και Γ’ Γυμνασίου σε θεματικές ενότητες της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας. Αρχικά, υλοποιείται μία μακρο ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου των επιλεγόμενων εγχειριδίων σύμφωνα με το πλαίσιο των Li, Chen, & An (2009). Έπειτα, πραγματοποιείται εξέταση των αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων και κωδικοποίηση των παρουσιαζόμενων έργων ανάλογα με το είδος και τη φύση της συλλογιστικής που προάγουν με βάση το μεθοδολογικό εργαλείο του Bergwall (2021). Στη συνέχεια, παρατίθενται και επεξηγούνται τα αποτελέσματα της έρευνας τα οποία αναδεικνύουν διαφοροποιήσεις ως προς τον τόπο σύλληψης των εξεταζόμενων εννοιών υπό το πρίσμα της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Κατόπιν, τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης συνοψίζονται και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα άλλων ερευνών που υιοθετούν παρόμοια μεθοδολογική βάση και αναλύουν σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της δευτεροβάθμιας από την Αμερική και την Κορέα. Τέλος, διατυπώνονται οι περιορισμοί της μελέτης μας και πιθανοί ερευνητικοί προσανατολισμοί που θα μπορούσαν να ακολουθηθούν με στόχο την περαιτέρω προώθηση της συλλογιστικής και της απόδειξης στους κόλπους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Λέξεις – Κλειδιά: σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών του Γυμνασίου, επιχειρηματολογία, αξιολόγηση ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων, ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη

Abstract

Mathematics textbooks constitute the principal keystone of the educational process influencing catalytically on the configuration of the elements of the teacher – student relationship. In recent years, there has been an intense research interest in the way that argumentation develops in school textbooks and especially in the reasoning and proving opportunities that are offered by the textbooks. In present study, we evaluate some geometrical and trigonometrical thematic units of two greek and two french textbooks that concern the last two classes of lower secondary education. Firstly, a macro analysis of the mathematical content of the selected textbooks is carried out according to the framework of Li, Chen, & An (2009). Afterwards, we examine the justifications of the expository sections and we codify the presented tasks according to the type and the nature of reasoning that they promote pursuantly the methodological tool of Bergwall (2021). Subsequently, we present and we interpret the results of the research which highlight differentiations in the way that the examined notions are conceived under the prism of mathematical argumentation. Thence, the research results of our study are summarized and compared with the research results of other studies that adopt a similar methodological basis and analyze American and Korean school mathematics textbooks. Finally, we express the limitations of our study and possible research orientations that could be followed aiming at the further promotion of reasoning and proof in the setting of mathematical education.

Key words: mathematics textbooks of lower secondary education, argumentation, evaluation of greek and french textbooks, reasoning and proving opportunites

Εισαγωγή

1) Ερευνητικό Πλαίσιο της Διπλωματικής Εργασίας

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν ένα θεμελιώδες διδακτικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στην παιδαγωγική – εκπαιδευτική διαδικασία (Čeretková et al., 2008), όντας εξίσου σημαντικοί πόροι τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς (Lepik, Grevholm, & Viholainen, 2015). Ειδικότερα, για τους πρώτους συγκαταλέγονται στους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν τις ευκαιρίες εκμάθησης μαθηματικών (Tornroos, 2005), ενώ για τους δεύτερους λειτουργούν ως προετοιμασμένα μαθήματα παρέχοντας τους εξηγήσεις, τεχνικές συζήτησης στην τάξη, προβληματισμούς σχετικά με τη μαθηματική σκέψη των μαθητών και συγκεκριμένα παραδείγματα λαθών ή παρανοήσεων των μαθητών (Elsaleh, 2010).

Στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή από τη διεθνή ερευνητική κοινότητα τις τελευταίες δεκαετίες (Fan, 2011). Ωστόσο, φαίνεται ότι, συνολικά, η έρευνα για τα εγχειρίδια των μαθηματικών ως πεδίο έρευνας βρίσκεται ακόμη σε πρώιμο στάδιο ανάπτυξης σε σύγκριση με πολλούς άλλους τομείς έρευνας στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών (Fan, 2013). Σύμφωνα με τους Charalambous et al. (2010), οι αναλύσεις σχολικών εγχειριδίων σε διεθνές επίπεδο ταξινομούνται στις εξής τρεις μεγάλες κατηγορίες: στην **οριζόντια** (horizontal), στην **κάθετη** (vertical) και στην **πλαισιωμένη** (contextual). Ειδικότερα, η οριζόντια ανάλυση επικεντρώνεται στα χαρακτηριστικά που παρουσιάζονται σε ένα εγχειρίδιο μαθηματικών, η κάθετη στον τρόπο με τον οποίο τα εγχειρίδια μαθηματικών ή οι σειρές εγχειριδίων αναπτύσσουν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες σε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα και η πλαισιωμένη στον τρόπο με τον οποίο τα εγχειρίδια των μαθηματικών χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες της τάξης των μαθηματικών (Rahimah &Visnovska, 2021).

Ένας από τους τρόπους διερεύνησης και αξιολόγησης των σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται σε μια χώρα είναι η σύγκριση των τελευταίων με σχολικά εγχειρίδια άλλων χωρών, πράγμα που αποτελεί ένα συζητήσιμο ζήτημα μεταξύ των ερευνητών (Hidayah & Forgasz, 2020). Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί ουσιαστικά και το έναυσμα που οδηγεί στη διεξαγωγή της παρούσας μελέτης με ερευνητικό αντικείμενο τη συγκριτική αξιολόγηση σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών διαφορετικών χωρών και επίπεδο ανάλυσης αυτό των έργων και των εκθεσιακών ενοτήτων, καθώς σύμφωνα με τον Bergwall (2017) αποτελούν πιθανές πηγές ευκαιριών εκμάθησης **συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη** (RP). Επιπρόσθετα, η αξιολόγηση των προαναφερθέντων μονάδων ανάλυσης που υλοποιείται στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης παρέχει τη δυνατότητα μίας πιο λεπτομερούς και συστηματικής προσέγγισης της έννοιας της επιχειρηματολογίας, η οποία λαμβάνει μία πιο ιδιόμορφη υπόσταση στους κόλπους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Κατά τον Hitt (2005), παρόλο που η **επιχειρηματολογία** (argumentation) και η **απόδειξη** (démonstration) στα μαθηματικά έχουν μελετηθεί εδώ και πολύ καιρό, παρατηρείται τα τελευταία χρόνια μία αναβίωση για το θέμα. Παράλληλα, οι Triantafillou, Spiliotopoulou, & Potari (2016) τονίζουν ότι έχουν διεξαχθεί πολυάριθμες ερευνητικές μελέτες σχετικά με την ανάλυση της συλλογιστικής, των επεξηγήσεων και της απόδειξης ή της υποστήριξης ιδεών στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, με την εστίαση που σχετίζεται με την επιχειρηματολογία στα τελευταία να συνίσταται στο είδος της συλλογιστικής και τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας που προωθείται. Δεδομένης της σημαντικότητας της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (MA & P) στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση (Sommerhoff, Ufer, & Kollar, 2015) καθώς και της πολυπλοκότητας που διέπει τις σχέσεις ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την εκμάθηση της (Schwarz, 2009, p. 92), τα εγχειρίδια θα πρέπει να αποτελέσουν σημαντικούς διδακτικούς πόρους που διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στις ευκαιρίες των μαθητών να εμπλακούν σε δραστηριότητες επιχειρηματολογίας (Triantafillou et al., 2016).

Ο ερευνητικός στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας επικεντρώνεται στην ανάλυση περιεχομένου των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων των δύο τελευταίων τάξεων του Γυμνασίου και ειδικότερα γύρω από τη διερεύνηση του βαθμού προαγωγής ανάπτυξης της έννοιας της επιχειρηματολογίας στα έργα και τις εκθεσιακές ενότητες των παραπάνω εγχειριδίων, μέσω ενός κράματος θεωρητικών προσεγγίσεων. Οι ερευνητικές κατευθύνσεις της συγκεκριμένης μελέτης έγκειται στον εντοπισμό ερευνητικού κενού στη βιβλιογραφία αναφορικά με:

α) τη συγκριτική θεώρηση των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων της Ελλάδας με αντίστοιχα εγχειρίδια άλλων χωρών,

β) την εστίαση στην έννοια της μαθηματικής επιχειρηματολογίας για την αποκωδικοποίηση του ευρύτερου γνωστικού φάσματος που χαρακτηρίζει ένα σχολικό εγχειρίδιο, μέσω υιοθέτησης ενός σύνθετου και πολυπρισματικού θεωρητικού μηχανισμού ανάλυσης.

2) Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας

Στο **πρώτο** κεφάλαιο, υλοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση. Σε πρώτο επίπεδο, μελετάται η έννοια της επιχειρηματολογίας υπό μαθηματικό πρίσμα και έπειτα εξετάζονται τα λειτουργικά καθώς και τα δομικά χαρακτηριστικά αυτής. Έπειτα, γίνεται διερεύνηση της σχέσης που διέπει τη μαθηματική επιχειρηματολογία και άλλες βασικές μαθηματικές έννοιες όπως η μαθηματική επεξήγηση και η αιτιολόγηση. Ακολουθεί μία προσέγγιση της έννοιας της απόδειξης υπό μαθηματικό πρίσμα, στη συνέχεια διερευνώνται τα λειτουργικά και δομικά χαρακτηριστικά της, ενώ παράλληλα εξετάζονται ο ρόλος και οι λειτουργίες της στους κόλπους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επιπρόσθετα, δίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην αποσαφήνιση της σχέσης ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα, υλοποιείται διερεύνηση των βασικών ερευνητικών αξόνων αποκωδικοποίησης της παραπάνω σχέσης (επιστημολογικοί, κοινωνικοί, γλωσσολογικοί, γνωστικοί και πολιτιστικοί), ενώ ταυτόχρονα γίνεται ανάλυση της έννοιας της γνωστικής ενότητας, η οποία αναδεικνύει βαθύτερες πτυχές της σχέσης επιχειρηματολογίας – απόδειξης. Τέλος, πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών που επικεντρώνονται στον τρόπο ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών διαφορετικών χωρών και εκπαιδευτικών βαθμίδων αλλά και μελετών που εστιάζουν στην εξέταση των ευκαιριών συλλογιστικής και απόδειξης.

Στο **δεύτερο** κεφάλαιο, παρουσιάζεται η μεθοδολογική προσέγγιση που έχει υιοθετηθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αρχικά γίνεται παράθεση του σκοπού και των ερευνητικών ερωτημάτων της μελέτης, ενώ έπειτα δίδονται το δείγμα της έρευνας καθώς και τα κριτήρια επιλογής του. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται η μέθοδος αξιολόγησης των σχολικών εγχειριδίων, η οποία συγκροτείται από τα θεωρητικά εργαλεία των Li, Chen & An (2009) και Bergwall (2021). Επίσης, κατά την ανάλυση των επιμέρους εννοιολογικών πτυχών των δύο προαναφερθέντων θεωρητικών πλαισίων περιγράφεται και η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την κωδικοποίηση των επιλεγόμενων μονάδων ανάλυσης στα ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια. Παράλληλα, στην παράγραφο κατάρτισης του εργαλείου του Bergwall (2021) προσεγγίζονται λεπτομερώς ορισμένα παραδείγματα κωδικοποίησης μαθηματικών έργων και εκθεσιακών ενοτήτων που προέρχονται από τα τέσσερα εξεταζόμενα εγχειρίδια, με στόχο την πλήρη αποσαφήνιση του τρόπου εφαρμογής του. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, περιγράφεται η διαδικασία διασφάλισης της εγκυρότητας και αξιοπιστίας της συγκεκριμένης έρευνας.

Στο **τρίτο** κεφάλαιο, πραγματοποιείται η ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης ανά τιθέμενο ερευνητικό ερώτημα.

Στο **τέταρτο** κεφάλαιο πραγματοποιείται η συζήτηση των ερευνητικών πορισμάτων που απορρέουν από τη διεξαγωγή της μελέτης, λαμβάνει χώρα η διατύπωση ευρύτερων συμπερασμάτων, υλοποιείται σύγκριση με μελέτες παρόμοιου ερευνητικού άξονα και γίνεται αναφορά σε πιθανούς περιορισμούς και προεκτάσεις της παρούσας μελέτης.

Τέλος, παρατίθεται η βιβλιογραφία, ελληνόγλωσση και ξενόγλωσση, που αξιοποιήθηκε για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

1.1 Μελέτη της έννοιας της επιχειρηματολογίας υπό μαθηματικό πρίσμα

Σύμφωνα με τους Van Eemeren & Grootendorst (2004), «η επιχειρηματολογία είναι μια λεκτική, κοινωνική και ορθολογική δραστηριότητα που αποσκοπεί στο να πείσει έναν έλλογο κριτή για την αποδοχή μίας άποψης μέσω διατύπωσης ενός αστερισμού προτάσεων που αιτιολογούν ή αντικρούουν την πρόταση που εκφράζεται στην άποψη» (p. 1). Με βάση την προσέγγιση των Sriraman & Umland (2020, pp. 63 - 64), η «**επιχειρηματολογία στη μαθηματική εκπαίδευση**» έγκειται:

- Στα μαθηματικά επιχειρήματα που οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί παράγουν στις τάξεις των μαθηματικών. Σε αυτό το πλαίσιο ως «**μαθηματικό επιχείρημα**» ορίζεται μια συλλογιστική γραμμή που αποσκοπεί στο να δείξει ή να επεξηγήσει γιατί ένα μαθηματικό αποτέλεσμα – το οποίο είτε μπορεί να είναι μία γενική δήλωση σχετικά με κάποια κλάση μαθηματικών αντικειμένων είτε να είναι απλά η λύση ενός τιθέμενου μαθηματικού προβλήματος- είναι ορθό. Υπό αυτή την έννοια, ένα μαθηματικό επιχείρημα μπορεί να είναι μια τυπική ή άτυπη απόδειξη, μια εξήγηση του τρόπου που ένας μαθητής ή ένας εκπαιδευτικός κατέληξε στην κατασκευή μιας συγκεκριμένης εικασίας, του τρόπου που ένας μαθητής ή ένας εκπαιδευτικός συλλογίστηκε μέσω ενός προβλήματος προκειμένου να καταλήξει σε μια λύση, ή απλά μια ακολουθία υπολογισμών που οδήγησε σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα.
- Στα επιχειρήματα που παράγουν οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά με τη φύση της εκμάθησης των μαθηματικών και την αποτελεσματικότητα της μαθηματικής διδασκαλίας σε ποικίλα πλαίσια.

Η σημαντικότητα της επιχειρηματολογίας αναδεικνύεται από πλήθος ερευνών (π.χ. Cardetti & LeMay, 2019; Gomez Marchant et al., 2021; Rumsey & Langrall, 2016; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016) που καταδεικνύουν μεταξύ άλλων ότι η επιχειρηματολογία προάγει την ανακάλυψη της μαθηματικής πληροφορίας από την πλευρά των μαθητών (Whitenack & Yackel, 2002), λειτουργώντας παράλληλα ως συνδετικός κρίκος μεταξύ της προϋπάρχουσας και της νέας μαθηματικής γνώσης (Wagner et al., 2014). Ειδικότερα, σύμφωνα με ερευνητικά πορίσματα μελετών, η εμπλοκή των μαθητών στην επιχειρηματολογία συμβάλλει στη διευκόλυνση της μαθηματικής εκμάθησής τους (Krummheuer, 2000, 2007) και στη βελτίωση συχνά της συλλογιστική τους ικανότητας, μέσω του μηχανισμού επεξήγησης και αιτιολόγησης των ιδεών που αναπτύσσουν στα πλαίσια συμμετοχής τους στην επιχειρηματολογική δραστηριότητα (Van Ness & Maher, 2019). Ωστόσο, η μεγαλύτερη μερίδα των εκπαιδευτικών μελετών που πραγματεύονται την έννοια της επιχειρηματολογίας προέρχεται από τις φυσικές επιστήμες, με την επιχειρηματολογία στα μαθηματικά να τείνει να επικεντρώνεται στην απόδειξη (Fielding - Wells & Makar, 2012).

1.1.1 Λειτουργικά και δομικά χαρακτηριστικά μαθηματικής επιχειρηματολογίας

Η Pedemonte (2012) λαμβάνοντας υπόψη τις σύγχρονες γλωσσικές και φιλοσοφικές θεωρίες προχωρά στον καθορισμό των λειτουργικών και δομικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Πιο συγκεκριμένα, ορίζει ως **λειτουργικά χαρακτηριστικά** (caractéristiques fonctionnelles) αυτά που προσδιορίζουν το σκοπό της επιχειρηματολογίας, τη χρησιμότητά της και το ρόλο της μέσα σε ένα λόγο (discours) και ως **δομικά χαρακτηριστικά** (caractéristiques structurelles) εκείνα που επιτρέπουν τον προσδιορισμό της δομής της επιχειρηματολογίας (Pedemonte, 2012).

1.1.1.1 Λειτουργικά χαρακτηριστικά

Σύμφωνα με την προσέγγιση της Pedemonte (2002, pp. 28-29), κατά την κατασκευή μίας επιχειρηματολογίας τα περιεχόμενα αλλάζουν, οι ιδέες σχηματοποιούνται, οι επιστημολογικές αξίες εξελίσσονται, προοδεύουν ή φθίνουν, πράγμα που οδηγεί στον ορισμό μίας «κατεύθυνσης» και κατά συνέπεια στην εμφάνιση της λειτουργικότητας (fonctionnalité) της επιχειρηματολογίας. Παράλληλα, η ερευνήτρια επισημαίνει χαρακτηριστικά ότι η μαθηματική επιχειρηματολογία πρέπει να απομακρυνθεί από τη **σκόπιμη σημασιολογία** (sémantique intentionnelle) με βάση την οποία ο σκοπός της επιχειρηματολογίας συνίσταται στην έκφραση των προθέσεων του ομιλητή και η οποία ενέχει τον κίνδυνο αναγωγής της τελευταίας σε ρητορική, «αφήνοντας χώρο» για την **αληθοφανή σημασιολογία** (sémantique vericonditionnelle), την αναζήτηση της αλήθειας (Pedemonte, 2002, p. 29). Κατά την Pedemonte (2012), η μαθηματική επιχειρηματολογία:

- **είναι μια ορθολογική αιτιολόγηση (justification rationnelle):** το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό που της αποδίδεται οφείλεται στο ότι η επιχειρηματολογία στο πλαίσιο των μαθηματικών αποτελεί μια προσπάθεια αιτιολόγησης μιας δήλωσης ή ενός συνόλου δηλώσεων.

- **έχει πάντα ένα στόχο που είναι η αναζήτηση της αλήθειας:** στα μαθηματικά επιχειρηματολογούμε όταν επιθυμούμε να πείσουμε κάποιον (τον εαυτό μας ή ένα συνομιλητή) για την αλήθεια μιας δήλωσης και επομένως η επιχειρηματολογία συνιστά ένα λόγο (discours) που κατασκευάζεται με στόχο την αναζήτηση του «αληθινού».
- **είναι πειστική και απευθύνεται σε ένα καθολικό ακροατήριο (auditoire universel):** Η επιχειρηματολογία που απευθύνεται σε ένα ακροατήριο μπορεί να διαθέτει διπλό σκοπό: την πεποίθηση (conviction) και την πειθώ (persuasion), δύο χαρακτηριστικά που διαφέρουν αρκετά. Η πρώτη στοχεύει στην τροποποίηση των απόψεων και των εμπιστεύσεων επικαλούμενη τον ορθολογισμό και λαμβάνοντας υπόψη τον άλλον. Αντίθετα, η δεύτερη στοχεύει στην απόκτηση της συγκατάθεσης χωρίς να κάνει απαραίτητα επίκληση στον ορθολογισμό και χωρίς να λαμβάνει υπόψη τον άλλον. Η πεποίθηση προϋποθέτει την πειθώ και όχι το αντίθετο. Στα μαθηματικά, η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας σημαίνει αλλαγή απόψεων μέσω καταφυγής στον ορθολογισμό και συνδέεται ειδικότερα με την επιθυμία να καταστεί δυνατή η αναγνώριση της αλήθειας μιας δήλωσης από την πλευρά του συνομιλητή, ο οποίος είναι η μαθηματική κοινότητα, η τάξη ή αυτός που επιχειρηματολογεί. Σε όλες τις περιπτώσεις, πρόκειται για έναν καθολικό και όχι για ένα συγκεκριμένο συνομιλητή. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για ένα έλλογο ακροατήριο το οποίο μπορεί να συμφωνεί ή να διαφωνεί με το άτομο που επιχειρηματολογεί αλλά οπωσδήποτε είναι ικανό να απαντήσει.

Ο πολύμορφος χαρακτήρας της επιχειρηματολογίας κρίνει αναγκαία τη θεώρηση της θεμελιώδους έννοιας του **πεδίου** (champ) που εισήγαγε ο Toulmin, όπου ως πεδίο θεωρείται «το συγκεκριμένο πλαίσιο ένταξης κάθε επιχειρηματολογίας» (Pedemonte, 2012, p. 15). Σύμφωνα με τον Toulmin (2003):

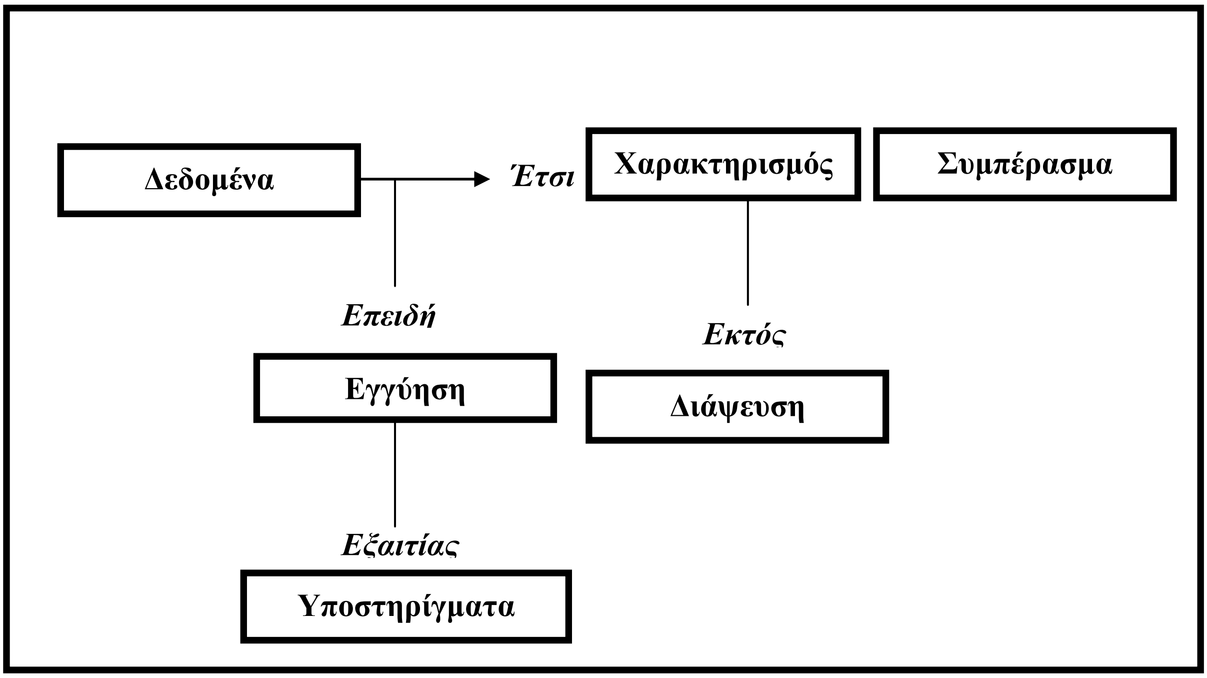
> Δύο επιχειρήματα θα λέμε ότι ανήκουν στο ίδιο πεδίο όταν τα δεδομένα και τα συμπεράσματα σε καθένα από τα δύο επιχειρήματα είναι αντίστοιχα του ίδιου λογικού τύπου: θα λέμε ότι προέρχονται από διαφορετικά πεδία όταν τα υποστηρίγματα ή τα συμπεράσματα σε καθένα από τα δύο επιχειρήματα δεν είναι του ίδιου λογικού τύπου. (p. 14)

Προφανώς, τα μαθηματικά δεν αποτελούν ένα ενιαίο πεδίο και μάλλον τα διαφορετικά πεδία των μαθηματικών είναι αυτά που επιτρέπουν το χαρακτηρισμό της μαθηματικής επιχειρηματολογίας (Pedemonte, 2002, p. 33). Το πεδίο μιας επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά οριοθετεί τα κριτήρια εγκυρότητας: τα αξιώματα για παράδειγμα που τίθενται σε εφαρμογή για την αποτίμηση της ορθότητας μιας επιχειρηματολογίας στη γεωμετρία διαφέρουν από τα αντίστοιχα που χρησιμοποιούνται σε μία επιχειρηματολογία στην άλγεβρα (Pedemonte, 2007). Ο Toulmin προχωρά στην ανάλυση των επιχειρημάτων σε συγκεκριμένα πεδία έρευνας, θέτοντας το ζήτημα της **εξάρτησης** και της **ανεξαρτησίας** των επιχειρημάτων σε σχέση με το πεδίο τους (Pedemonte, 2012). Ειδικότερα, διακρίνει τα επιχειρήματα σε αυτά που διαθέτουν χαρακτηριστικά τα οποία «εξαρτώνται από το πεδίο τους σε ορισμένες πτυχές (field-dependant)» και σε εκείνα που είναι «ανεξάρτητα του πεδίου τους σε άλλες πτυχές (field-invariant)» (Pedemonte, 2002, p. 33).

1.1.1.2 Δομικά Χαρακτηριστικά

Η **μαθηματική επιχειρηματολογία** είναι ένας **λογικός συλλογισμός** (raisonnement logique), ο οποίος μπορεί να αποσυντεθεί σε μέρη προκειμένου να αναδυθεί η δομή του (Pedemonte, 2012). Στη συνέχεια αναλύεται το μοντέλο του Toulmin (2003), το οποίο και είναι αυτό που χρησιμοποιείται πλέον συχνότερα στη μαθηματική εκπαίδευση (Hanna, 2020, p. 564), με το δημιουργό του να εστιάζει στη μελέτη της δομής των επιχειρημάτων ως προϊόν παρά στη μελέτη των διαδικασιών μέσω των οποίων αυτά παράγονται (Arzarello & Sabena, 2011). Το ενδιαφέρον του Toulmin συνίσταται στην ανάλυση της επιχειρηματολογίας **με τη βοήθεια ενός μοντέλου** το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί **σε όλα τα πεδία**: ειδικότερα, το μοντέλο που προτείνει ο Toulmin επιτρέπει το χαρακτηρισμό της δομής οποιασδήποτε επιχειρηματολογίας αλλά και τη διευκρίνιση των κριτηρίων αποδοχής της επιχειρηματολογίας (Pedemonte, 2012). Παράλληλα, μάς δίνει τη δυνατότητα να τμήσουμε την επιχειρηματολογία στα επιμέρους επιχειρήματα που την απαρτίζουν και να απεικονίσουμε ταυτόχρονα την αλυσιδωτή σύνδεσή τους (Pedemonte, 2002, p. 40). Το γεγονός αυτό κρίνεται πολύ χρήσιμο για τον **προσδιορισμό του είδους του συλλογισμού** (παραγωγικός, επαγωγικός, απαγωγικός κ.λπ.) που υπόκειται στην επιχειρηματολογία, προκειμένου να καταστεί δυνατή η σύγκρισή του με το αντίστοιχο είδος του συλλογισμού που υπόκειται στην απόδειξη (Pedemonte, 2012). Στο Διάγραμμα 1.1 δίδονται τα 6 στοιχεία του μοντέλου επιχειρηματολογίας του

Toulmin (2003, p. 97) μαζί με τη σχέση που τα διέπει, ενώ στον Πίνακα 1.1 επεξηγείται ο ρόλος του εκάστοτε στοιχείου.



Διάγραμμα 1.1: *Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου του Toulmin (2003, p. 97)*

Στοιχείο	**Ρόλος**
Δεδομένα (data)	Είναι τα θεμέλια στα οποία βασίζεται το επιχείρημα (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007) και αποτελούνται από αποδεικτικά στοιχεία, γεγονότα, πληροφορίες, παραδείγματα (Pedemonte, 2012).
Συμπέρασμα (ή ισχυρισμός) (claim)	Η δήλωση με την οποία αυτός που επιχειρηματολογεί επιθυμεί να πείσει το ακροατήριό του (Inglis et al., 2007).
Εγγύηση (warrant)	Αιτιολογεί τη σύνδεση μεταξύ δεδομένων και συμπεράσματος, μέσω της προσφυγής για παράδειγμα σε έναν κανόνα, έναν ορισμό ή μέσω της κατασκευής μιας αναλογίας (Inglis et al., 2007). Κατά τον Toulmin (2003), οι εγγυήσεις είναι «γενικές, υποθετικές δηλώσεις, που μπορούν να λειτουργήσουν ως γέφυρες και να εξουσιοδοτήσουν το είδος του βήματος στο οποίο μας δεσμεύει το συγκεκριμένο επιχείρημά μας» (p. 91). Η εγγύηση αποτελεί το «λόγο» αποδοχής ή αναίρεσης του επιχειρήματος (Pedemonte, 2012).

Στοιχείο	Ρόλος
Υποστηρίγματα (backing)	Περαιτέρω αποδεικτικά στοιχεία που υποστηρίζουν την εγγύηση (Inglis et al., 2007)
Χαρακτηρισμός (modal qualifier)	Αποτελεί «ρητή αναφορά στο βαθμό ισχύος που τα δεδομένα μας προσδίδουν στο συμπέρασμά μας δυνάμει της εγγύησής μας» (Toulmin, 2003, p. 93).
Διάψευση (rebuttal)	Ενδέχεται να αντικρούσει το συμπέρασμα αναφέροντας τις συνθήκες υπό τις οποίες δεν έχει ισχύ (Inglis et al., 2007).

Πίνακας 1.1: *Επεξήγηση του ρόλου των έξι στοιχείων του μοντέλου επιχειρηματολογίας του Toulmin (2003)*

Οι Stacey & Vincent (2009) υποστηρίζουν ότι στη μαθηματική διδασκαλία τα δεδομένα μπορεί να ποικίλλουν από πρακτικές μετρήσεις έως αξιώματα και θεωρήματα και οι εγγυήσεις ομοίως να κυμαίνονται από δηλώσεις όπως «επειδή το λέει το εγχειρίδιο» ή «επειδή φαίνεται έτσι» έως μαθηματικά νόμιμες εγγυήσεις. Ταυτόχρονα επισημαίνουν ότι η φύση των δεδομένων και των εγγυήσεων που παρουσιάζονται στις επεξηγήσεις των εγχειριδίων καθορίζουν τη μαθηματική εγκυρότητα της συλλογιστικής (Stacey & Vincent, 2009). Με βάση τον Viholainen (2011), εφαρμόζοντας το μοντέλο του Toulmin (2003), ένα επιχείρημα ορίζεται ως **τυπικό** (formal) «εάν οι εγγυήσεις του βασίζονται σε ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί, δηλαδή στα στοιχεία ενός αξιωματικού συστήματος» (p. 245), ενώ χαρακτηρίζεται **άτυπο** (informal) «εάν οι εγγυήσεις του βασίζονται σε συγκεκριμένες ερμηνείες των μαθηματικών εννοιών, οι οποίες μπορεί να εδραιώνονται σε οπτικές ή άλλες επεξηγηματικές αναπαραστάσεις» (p. 246).

Ο Krummheuer (1995) προχωρώντας σε μία ανάλυση εθνομεθοδολογικού χαρακτήρα ανέπτυξε μία προσέγγιση των μαθηματικών επιχειρημάτων που παράγονται στη σχολική τάξη αξιοποιώντας τα 4 από τα 6 στοιχεία του σχήματος Toulmin - **δεδομένα, εγγύηση, υποστηρίγματα και συμπέρασμα** - καθοδηγούμενος από την αντίληψη ότι τα στοιχεία του **χαρακτηρισμού** και της **διάψευσης** δεν παρουσιάζουν κάποιου είδους σύνδεση με τα μαθηματικά επιχειρήματα. Η συγκεκριμένη εκδοχή του Krummheuer (1995) υιοθετήθηκε ως μεθοδολογικό εργαλείο ανάλυσης του δομικού πυρήνα των μαθηματικών επιχειρημάτων που κατασκευάζονται από τους μαθητές στα πλαίσια ερευνών που διαπραγματεύονται την έννοια της απόδειξης (π.χ. Yackel, 2001), λογικές παραγωγικές συλλογιστικές πτυχές (π.χ. Hoyles & Küchemann, 2002) καθώς και από μελέτες γεωμετρικού ερευνητικού άξονα (π.χ. Pedemonte, 2006). Ωστόσο, τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης των Inglis et al. (2007) κατέδειξαν ότι **το περιορισμένο** αυτό **μοντέλο** κρίνεται **ανεπαρκές** για την ακριβή μοντελοποίηση ολόκληρου του φάσματος των μαθηματικών επιχειρημάτων που κατασκευάζονται από τους μαθητές.

Παράλληλα, εντοπίζεται και μία μερίδα ερευνών που αξιοποιεί το μοντέλο Toulmin μετατοπίζοντας το επιστημονικό της ενδιαφέρον από **το πεδίο δράσης** των μαθητών σε αυτό **των εκπαιδευτικών** διερευνώντας διάφορες πτυχές της διδακτικής τους πράξης. Για παράδειγμα, συναντώνται μελέτες που εστιάζουν στον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν σημασιολογικές εγγυήσεις για την αιτιολόγηση μαθηματικών συμπερασμάτων (Walter & Johnson, 2007) ή μελέτες που επικεντρώνονται στον τρόπο με τον οποίο οι τελευταίοι αντικρούουν τους μη έγκυρους αλγεβρικούς ισχυρισμούς που περιλαμβάνονται στις γραπτές αποδείξεις των μαθητών τους στο πλαίσιο της μαθηματικής ανάλυσης (Giannakoulias et al., 2010). Επιπρόσθετα, στο βιβλιογραφικό κορμό παρουσιάζονται και **έρευνες που ενσωματώνουν στο μοντέλο Toulmin άλλα θεωρητικά μοντέλα** και άλλες θεωρητικές δομές για την εξυπηρέτηση των ερευνητικών τους κατευθύνσεων. Χαρακτηριστική περίπτωση μιας τέτοιας προσέγγισης αποτελεί η μελέτη της Pedemonte (2008). Η ερευνήτρια, θέτοντας σε εφαρμογή ένα θεωρητικό εργαλείο που αποτελεί κράμα των μοντέλων Toulmin και ck¢, προχώρησε σε μία ανάλυση των γνωστικών συνεχειών και αποστάσεων μεταξύ της επιχειρηματολογίας που υποστηρίζει μια εικασία και της αλγεβρικής απόδειξης αυτής κατά την επίλυση ανοικτών προβλημάτων που πραγματεύονται ιδιότητες αριθμών (Pedemonte, 2008).

1.1.2 Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ μαθηματικής επιχειρηματολογίας και άλλων βασικών μαθηματικών εννοιών

Η **απόδειξη**, η **αιτιολόγηση** και η **επεξήγηση** αποτελούν σημαντικά συστατικά της μαθηματικής εκμάθησης (Silverman & Even, 2015), τα οποία συνδέονται συχνά με άλλα ουσιώδη στοιχεία των μαθηματικών και της **επιχειρηματολογίας** (π.χ. δραστηριότητες όπως η εξερεύνηση και η παραγωγή εικασιών και μαθηματικών ισχυρισμών) (Dolev & Even, 2015). Παρά την εμφανή αυτή συσχέτιση που χαρακτηρίζει την επιχειρηματολογία, την απόδειξη, την αιτιολόγηση και την επεξήγηση, η βιβλιογραφία καταδεικνύει την παρουσία λεπτών εννοιολογικών αποχρώσεων που επιτρέπουν τον εννοιολογικό διαχωρισμό τους (Conner, 2007, p. 2; Osborne & Patterson, 2011).

Σύμφωνα με την προσέγγιση της Pedemonte (2012), συχνά οι αιτιολογήσεις (justification) στα μαθηματικά συνιστούν επιχειρηματολογίες, πράγμα που δε σημαίνει ότι όλες οι μαθηματικές αιτιολογήσεις αποτελούν μαθηματικές επιχειρηματολογίες, αλλά υποδηλώνει πως μια ιδιαιτερότητα της μαθηματικής επιχειρηματολογίας είναι ο αιτιολογικός της χαρακτήρας (caractère justificatif). Η Pedemonte (2012) αναφέρει ότι δεν ενστερνίζεται τη θεώρηση της Yackel (2001) που αντιλαμβάνεται την επιχειρηματολογία και την αιτιολόγηση ως διακριτές μαθηματικές οντότητες, επισημαίνοντας ταυτόχρονα ότι «η επιχειρηματολογική αιτιολόγηση δεν είναι απλώς η τεκμηρίωση της ορθότητας για την παραδοχή ενός ισχυρισμού» (p. 8), καθώς ο συγκεκριμένος χαρακτήρας της αιτιολόγησης εκφράζεται στο συλλογισμό (raisonnement). Κατά τον Duval (1995, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2012), ο **συλλογισμός** (raisonnement) είναι «η πορεία διεξαγωγής ενός σαφούς συμπεράσματος που αντλεί την επιβεβαίωση μιας πρότασης από μία ή περισσότερες δοθείσες προτάσεις» (p. 8). Η επιχειρηματολογία γενικότερα αλλά και ειδικότερα όταν εντάσσεται στο πεδίο των μαθηματικών, αποτελεί πάνω απ 'όλα ένα συλλογισμό (raisonnement) (Pedemonte, 2012). Παράλληλα, η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά διαχωρίζεται από την επεξήγηση, καθώς η πρώτη δεν μπορεί να «ξεφύγει» από τον ορθολογισμό (rationalité), ενώ στην περίπτωση της δεύτερης αυτό είναι εφικτό (Pedemonte, 2012). Η επεξήγηση (explication) αποσκοπεί στην αποσαφήνιση πτυχών της μαθηματικής σκέψης που δεν είναι άμεσα εμφανείς στα άλλα άτομα (Yackel, 2001), ενώ η επιχειρηματολογία δεν αρκείται στην κατανόηση, επιθυμεί να πείσει (Pedemonte, 2012). Επιπρόσθετα, η επεξήγηση διακρίνεται από την αιτιολόγηση καθώς τελούν διαφορετικές λειτουργίες (Yackel, 2001), με την αιτιολόγηση να δίνεται ως απάντηση σε προκλήσεις όταν εντοπίζονται εμφανείς παραβιάσεις της κανονιστικής μαθηματικής δραστηριότητας (Cobb et al., 1992, οπ. αναφ. στο Yackel, 2001).

Επίσης, η επιχειρηματολογία σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη διατύπωση εικασιών (conjecturing) (Lin, 2018). Ο Stylianides (2009) στοιχειοθετεί την **εικασία** ως εξής:

> Μια εικασία ορίζεται ως μια αιτιολογημένη υπόθεση σχετικά με μια γενική μαθηματική σχέση που βασίζεται σε ελλιπή αποδεικτικά στοιχεία. Ο όρος «αιτιολογημένη» τονίζει το μη αυθαίρετο χαρακτήρα της υπόθεσης. Ο όρος «υπόθεση» υποδηλώνει ένα επίπεδο αβεβαιότητας αναφορικά με την αλήθεια μιας εικασίας και μαρτυρά ότι απαιτούνται περαιτέρω ενέργειες για την αποδοχή ή την απόρριψή της (Arzarello et al., 1998; Cañadas & Castro, 2005; Reid, 2002, οπ. αναφ. στο Stylianides, 2009, p. 264).

Με βάση τη θεώρηση της Pedemonte (2007), η εικασία αποτελείται από τρία συστατικά: τη **δήλωση**, την **επιχειρηματολογία** και ένα **σύστημα αντιλήψεων**. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι η εικασία δεν αποτελεί πάντα το αποτέλεσμα μίας επιχειρηματολογίας, περίπτωση στην οποία μπορεί να θεωρηθεί ως «δεδομένο» (fact) (Pedemonte, 2007). Σύμφωνα με την Pedemonte (2008), η συσχέτιση επιχειρηματολογίας και εικασίας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: α) με την **κατασκευαστική επιχειρηματολογία** (constructive argumentation) η οποία συνεισφέρει στην κατασκευή μίας εικασίας και οπότε προηγείται της δήλωσης (statement) και β) με τη **δομική επιχειρηματολογία** (structurant argumentation) η οποία αιτιολογεί μία εικασία που έχει προηγουμένως κατασκευαστεί ως ένα «δεδομένο» (fact) και έτσι αποτελεί επακόλουθο αυτής. Άξιο αναφοράς αποτελεί και το ότι η εικασία συνιστά σημείο εκκίνησης της **γενίκευσης** (generalization) , ενώ η αιτιολόγηση που εμπλέκεται στην επιχειρηματολογία «δοκιμάζει» την αλήθεια της εικασίας (Lin, 2018). Η προσέγγιση της σχέσης μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης θα πραγματοποιηθεί σε ξεχωριστό κεφάλαιο εξαιτίας των ιδιαίτερα σύνθετων εννοιολογικών συνιστωσών που τη συγκροτούν.

1.2 Μελέτη της έννοιας της απόδειξης υπό μαθηματικό πρίσμα

Η απόδειξη κατέχει κεντρική θέση στα μαθηματικά και ως εκ τούτου θα πρέπει να αποτελεί βασικό συστατικό της μαθηματικής εκπαίδευσης: η συγκεκριμένη έμφαση που δίδεται στην απόδειξη αιτιολογείται τόσο από το γεγονός ότι βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής πρακτικής όσο και από το ότι συνιστά ένα βασικό εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης (Ball et al., 2003). Σύμφωνα με τον Tall (2002), «αν και η απόδειξη είναι η κεντρική ιδέα των σύγχρονων μαθηματικών, το τι ακριβώς είναι αποτελεί ένα ζήτημα σιωπηρής παρά σαφούς συμφωνίας μεταξύ των μελών της μαθηματικής κοινότητας» (p. 93). Στην άποψη αυτή φαίνεται να συγκλίνει και ο Balacheff (2008), ο οποίος σε μεταγενέστερη μελέτη διατύπωσε τη θέση ότι η έννοια της «**μαθηματικής απόδειξης**» δε γίνεται απαραίτητα αντιληπτή με τον ίδιο τρόπο από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πράγματι, η μελέτη του βιβλιογραφικού κορμού καταδεικνύει το γεγονός ότι εννοιολογικό φορτίο της μαθηματικής απόδειξης έχει υποστεί μεταβολές με την πάροδο του χρόνου (Smith, 2006), με αποτέλεσμα την παρουσία ποικίλων θεωρητικών προσανατολισμών γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα.

Οι Steele & Rogers (2012) αξιοποιώντας ως έρεισμα την ερευνητική συνεισφορά άλλων επιστημόνων (Knuth, 2002a; Steele, 2006; Stylianides, 2007, οπ. αναφ. στο Steele & Rogers, 2012) οριοθετούν την απόδειξη «ως ένα μαθηματικό επιχείρημα που είναι γενικό για μια κλάση μαθηματικών ιδεών και που καθιερώνει την αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης βασιζόμενο σε μαθηματικά δεδομένα τα οποία είναι αποδεκτά ή έχουν προηγουμένως αποδειχθεί» (p. 161). Οι Bleiler-Baxter & Pair (2017) υιοθετώντας την εννοιολογική προσέγγιση του de Villiers (1990, οπ. αναφ. στο Bleiler-Baxter & Pair, 2017) στοιχειοθετούν την απόδειξη ως «λογικό συμπέρασμα που χρησιμοποιείται για να επαληθεύσει, να επεξηγήσει, να συστηματοποιήσει, να ανακαλύψει και να επικοινωνήσει τα μαθηματικά» (p. 16). Επιπρόσθετα, οι συγκεκριμένοι ερευνητές αναφέρουν ότι ενθυλακώνουν στον παραπάνω ορισμό τόσο το δημιούργημα της απόδειξης ως γραπτό παραγωγικό επιχείρημα όσο και την αποδεικτική πράξη (act of proving), η οποία έγκειται στις διαδικασίες που εμπλέκονται στην εξαγωγή ενός παραγωγικού επιχειρήματος (Stylianides, 2007, οπ. αναφ. στο Bleiler-Baxter & Pair, 2017). O Smith (2006) αντιλαμβάνεται την απόδειξη ως «ένα επιχείρημα που πείθει τους ειδικούς του πεδίου των μαθηματικών» (p. 75), υποστηρίζοντας ότι ο ορισμός αυτός επιτρέπει σε κάποιον να θεωρήσει τη διαδικασία εκμάθησης της απόδειξης «ως μια διαδικασία προσπολιτισμού στην ευρύτερη μαθηματική κοινότητα» (p. 75).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η προσέγγιση των Stylianides & Ball (2008), οι οποίοι προχωρούν στη μελέτη τους στον προσδιορισμό των γνωρισμάτων που διαθέτει **η απόδειξη στο πλαίσιο της κοινότητας της σχολικής τάξης των μαθηματικών** σε μία δεδομένη στιγμή, ορίζοντας την ειδικότερα ως:

Ένα μαθηματικό επιχείρημα το οποίο πληροί τρία κριτήρια:

- ❖ Χρησιμοποιεί αληθείς δηλώσεις οι οποίες είναι αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης (σύνολο αποδεκτών δηλώσεων) και οι οποίες δεν επιδέχονται περαιτέρω αιτιολόγηση.

- ❖ Εφαρμόζει μορφές συλλογιστικής (τρόπους επιχειρηματολογίας) που είναι έγκυρες και γνωστές στην κοινότητα της τάξης ή είναι εντός της εννοιολογικής της εμβέλειας.
- ❖ Επικοινωνείται με μορφές έκφρασης (τρόπους αναπαράστασης επιχειρήματος) που είναι κατάλληλες και γνωστές στην κοινότητα της τάξης ή είναι εντός της εννοιολογικής της εμβέλειας. (p. 309)

Ο παραπάνω ορισμός, μέσω της περιγραφής των επιμέρους χαρακτηριστικών που πρέπει να διέπουν τα τρία βασικά συστατικά του (σύνολο αποδεκτών δηλώσεων, τρόποι επιχειρηματολογίας και τρόποι αναπαράστασης επιχειρήματος) προκειμένου ένα επιχείρημα να χαρακτηριστεί ως απόδειξη, επιδιώκει την επίτευξη ισορροπίας ανάμεσα στα ίδια τα μαθηματικά ως κλάδο και στην εκμάθηση τους από τους μαθητές (Stylianides & Ball, 2008).

Το ζήτημα της μαθηματικής απόδειξης έχει αναλυθεί με **γνωστικό φακό εστίασης** (Tall, 1998) ενώ παράλληλα έχει εξεταστεί τόσο από **ιστορική** (Chemla, 2012) όσο και από **επιστημολογική** (Balacheff, 2002) οπτική γωνία, δύο προοπτικές που αποτελούν διαχρονικά πηγή έμπνευσης για την προσέγγιση εκπαιδευτικών ζητημάτων (Mariotti & Balacheff, 2008). Η βιβλιογραφία με ερευνητικό πυρήνα διαπραγμάτευσης αυτό της μαθηματικής απόδειξης εστιάζει κυρίως στη μελέτη:

- ❖ των ερευνητικών περιοχών της διερεύνησης και της κατηγοριοποίησης των αποδεικτικών σχημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές (π.χ. Harel & Sowder, 1998; Housman & Porter, 2003),
- ❖ του προσδιορισμού των αντιλήψεων των μαθητών (π.χ. Anapa & Şamkar, 2010; Segal, 1999) και των εκπαιδευτικών (π.χ. Lesseig, Hine, & Boardman, 2018) αναφορικά με τη μαθηματική απόδειξη,
- ❖ των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατασκευή μαθηματικών αποδείξεων (π.χ. Mujib, 2015; Weber, 2001),
- ❖ του ρόλου της αξιοποίησης των δυναμικών λογισμικών στην εκμάθηση και στη διδακτική προσέγγιση της γεωμετρικής απόδειξης (π.χ. Kovács, Recio Muñiz, & Vélez, 2018)

Ακόμη, μία αξιοσημείωτη μερίδα ερευνών προσανατολίζεται στην αποσαφήνιση του τρόπου επικύρωσης των μαθηματικών αποδείξεων (π.χ. Weber & Alcock, 2005) αλλά και στην ανάδειξη της σπουδαιότητας ενσωμάτωσης της μαθηματικής απόδειξης στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας (π.χ. Tucker, 1999). Οι μελέτες ανάλυσης εγχειριδίων που επικεντρώνονται σε πτυχές που σχετίζονται με την έννοια της απόδειξης εξετάζουν μόνο το βαθμό στον οποίο τα εγχειρίδια εκθέτουν τους μαθητές σε αποδείξεις και στη διαδικασία της απόδειξης, τα είδη των αποδείξεων που παρουσιάζονται ή απαιτούνται αλλά και τις ευκαιρίες που παρέχονται στους μαθητές για να αποδείξουν μόνοι τους μαθηματικούς ισχυρισμούς (Dolev & Even, 2015).

Δεδομένης της ερευνητικής εστίασης της παρούσας διπλωματικής εργασίας στη μελέτη της φύσης των γαλλικών μαθηματικών εγχειριδίων, θεωρείται αναγκαία η υλοποίηση της εννοιολογικής διάκρισης του σημασιολογικού φορτίου των γαλλικών όρων **preuve mathématique** και **démonstration mathématique**, οι οποίοι αποτυπώνονται εκτενώς στη γαλλική ερευνητική βιβλιογραφία που σχετίζεται με τη Διδακτική των Μαθηματικών. Ο Balacheff (1987) προχωρώντας σε μία εννοιολογική αποσαφήνιση των παραπάνω όρων διατυπώνει την εξής θέση:

> Ονομάζουμε preuve μία επεξήγηση που είναι αποδεκτή από μία δεδομένη κοινότητα σε μία δεδομένη στιγμή. Αυτή η απόφαση μπορεί να αποτελέσει το αντικείμενο μιας συζήτησης, η σημασία της οποίας είναι η απαίτηση προσδιορισμού ενός κοινού για τους συνομιλητές συστήματος επικύρωσης... Στους κόλπους της μαθηματικής κοινότητας μπορούν να γίνουν αποδεκτές ως preuve μόνο οι επεξηγήσεις που υιοθετούν μια συγκεκριμένη μορφή. Αυτές είναι μια οργανωμένη ακολουθία δηλώσεων που ακολουθεί καθορισμένους κανόνες: μια δήλωση θεωρείται αληθής ή προκύπτει από δηλώσεις που προηγούνται αυτής με τη χρήση ενός συμπερασματικού κανόνα ο οποίος έχει ληφθεί από ένα καλά ορισμένο σύνολο κανόνων. Αποκαλούμε démonstrations αυτές τις preuves. (p. 148)

1.2.1 Λειτουργικά και δομικά χαρακτηριστικά μαθηματικής απόδειξης

Ο **προσδιορισμός** των **λειτουργικών** και των **δομικών χαρακτηριστικών** της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στα μαθηματικά επιτρέπει τη **σύγκριση** και την **ανάλυση** των δύο αυτών εννοιών (Pedemonte, 2012), καθώς λαμβάνοντας υπόψη τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά **η απόδειξη** μπορεί να γίνει αντιληπτή **ως μία ειδική περίπτωση επιχειρηματολογίας** (Pedemonte, 2007). Ωστόσο, η Pedemonte (2012) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «η επιχειρηματολογία δεν είναι πάντα απόδειξη» (p. 24) επισημαίνοντας ειδικότερα ότι «η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά μπορεί να προηγηθεί της φάσης της απόδειξης, για παράδειγμα στην κατασκευή μιας εικασίας, αλλά όταν αυτή η εικασία επικυρώνεται μέσα σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επιχειρηματολογία γίνεται απόδειξη» (p. 24).

Στη συνέχεια αναπτύσσονται τα λειτουργικά και δομικά χαρακτηριστικά της απόδειξης, έτσι όπως αυτά σκιαγραφούνται από τις σύγχρονες γλωσσολογικές και φιλοσοφικές θεωρίες (Pedemonte, 2012).

1.2.1.1 Λειτουργικά χαρακτηριστικά

Με βάση την προσέγγιση της Pedemonte (2012), η απόδειξη όπως και η επιχειρηματολογία είναι μια **ορθολογική αιτιολόγηση**, η οποία παράλληλα :

- **Έχει ένα πολύ συγκεκριμένο στόχο: την επικύρωση μίας δήλωσης (valider un énoncé):** Το λειτουργικό αυτό χαρακτηριστικό αντικατοπτρίζει τον εγγενή αιτιολογικό χαρακτήρα της απόδειξης. Στο πεδίο των μαθηματικών, η επικύρωση μιας δήλωσης σημαίνει πιστοποίηση της αλήθειας της μέσα σε μια μαθηματική θεωρία. Η απόδειξη, όπως και η επιχειρηματολογία, αποσκοπεί κατά κάποιο τρόπο στην αναζήτηση των λόγων του «αληθινού» (raisons du «vrai»). Ο συλλογισμός στον οποίο υπόκειται η απόδειξη είναι της ίδιας φύσεως με τον επιχειρηματολογικό συλλογισμό. Η μόνη διαφορά εντοπίζεται στο γεγονός ότι η απόδειξη παρέχει μια αιτιολόγηση μέσα σε ένα θεωρητικό τομέα, πράγμα το οποίο δεν είναι υποχρεωτικό να υλοποιηθεί στην περίπτωση της επιχειρηματολογίας.
- **Είναι πειστική και απευθύνεται σε ένα καθολικό ακροατήριο (auditoire universel):** Ο χαρακτήρας της πεποίθησης (caractère de conviction) είναι συγκεκριμένος στην απόδειξη: ειδικότερα, η τελευταία κατασκευάζεται με στόχο να καταστήσει αδιάσειστο αυτό που υποστηρίζει. Επιπρόσθετα, η απόδειξη απευθύνεται σε έναν καθολικό συνομιλητή που εκπροσωπείται από τη μαθηματική κοινότητα στο σύνολό της. Και ως εκ τούτου, η συγκεκριμένη κοινότητα αναγνωρίζει την αξία της επικύρωσης (validation) και επομένως αυτή της πεποίθησης (conviction) σχετικά με την απόδειξη.

Η απόδειξη σχετίζεται με ένα **θεωρητικό πεδίο** (champ théorique) που καθορίζει τα κριτήρια αποδοχής της (Pedemonte, 2002, p. 45). Σε αυτό το σημείο, οφείλουμε να τονίσουμε ότι ο Toulmin αποδέχεται την απόδειξη ως επιχειρηματολογία: σύμφωνα με το συγκεκριμένο ερευνητή, ένα αποδεικτικό βήμα (pas de démonstration) είναι ένα επιχείρημα (Pedemonte, 2012). Παράλληλα, στη μελέτη της η Pedemonte (2002) υπογραμμίζει ότι ο Toulmin προχωρά σε μία διάκριση μεταξύ αναλυτικών και πρακτικών επιχειρημάτων όπου ως **αναλυτικά επιχειρήματα** (arguments analytiques) ορίζονται αυτά στα οποία «το συμπέρασμα περιλαμβάνεται ήδη κατά κάποιο τρόπο έμμεσα ή ρητά στις προκείμενες» (p. 46) και **πρακτικά επιχειρήματα** (arguments matériels) εκείνα στα οποία «οι λόγοι δεν περιλαμβάνουν την πληροφορία που παρουσιάζεται στην πρόταση» (p. 46). Σύμφωνα με τη θεώρηση της ερευνήτριας, η θεμελιώδης διάκριση ανάμεσα στα δύο παραπάνω είδη επιχειρημάτων εντοπίζεται στην έννοια του πεδίου (Pedemonte, 2012).

1.2.1.2 Δομικά Χαρακτηριστικά

Στα πλαίσια αποσαφήνισης του δομικού πυρήνα της απόδειξης, η Pedemonte (2012) ενσωματώνει στη μελέτη της τον όρο της **δομής του αποδεικτικού βήματος** (la structure du pas de démonstration). Ειδικότερα, υπογραμμίζει ότι η απόδειξη είναι μια παραγωγική αλυσίδα βημάτων, τα οποία αποτελούνται από τους εξής τρεις όρους: τα **δεδομένα** (donneés), ένα **συμπέρασμα** (enoncé conclusion) και ένα **θεώρημα** (théorème) που επιτρέπει το πέρασμα από τα δεδομένα στο συμπέρασμα (Pedemonte, 2012). Ταυτόχρονα, επισημαίνει ότι η ανάλυση σύμφωνα με το μοντέλο του Toulmin είναι εφικτή εκτός από την επιχειρηματολογία και στην απόδειξη, λόγω της δυνατότητας κατασκευής μιας νέας δήλωσης (énoncé) από αξιώματα και πρώτες αρχές μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας: η **εγγύηση** (permis d' inférer) στην απόδειξη είναι ένα θεώρημα, ενώ το **υποστήριγμα** (support) κατασκευάζεται από τη μαθηματική θεωρία αναφοράς (théorie mathématique de référence) (Pedemonte, 2002, p. 46).

1.2.2 Ο ρόλος και οι λειτουργίες της μαθηματικής απόδειξης

Η απόδειξη διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη, στην εγκαθίδρυση και στην επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης (Rocha, 2019). Ωστόσο, ο Smith (2005) υποστηρίζει ότι ο σκοπός της απόδειξης στη μαθηματική διδασκαλία διαφοροποιείται από τον ρόλο της στο πεδίο της έρευνας των μαθηματικών. Ειδικότερα, τονίζει ότι στη **μαθηματική τάξη** ο ρόλος της απόδειξης είναι πρωτίστως **επεξηγηματικός**, πράγμα που έγκειται στην αντίληψη της απόδειξης από την πλευρά των μαθητών ως παροχή επίγνωσης του γιατί οι προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς, ενώ **σε ερευνητικό επίπεδο** ο πρωταρχικός της ρόλος συνίσταται στο **να καταδείξει την εγκυρότητα των προτάσεων και των εικασιών** (Smith, 2005). Σε αυτό το σημείο, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι παρά τη θεμελιώδη σημασία που αποδίδουν στην απόδειξη πολλοί επιστήμονες της ερευνητικής μαθηματικής κοινότητας όταν αυτή εντάσσεται στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. Dawkins & Weber, 2017; Tsamir et al., 2009), ο Knuth (2002a) εκφράζει στη μελέτη του τη θέση ότι ο ρόλος της απόδειξης στο σχολικό περιβάλλον είναι **περιφερειακός**: «Αυτή η απουσία της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά δεν πέρασε απαρατήρητη και, στην πραγματικότητα, έγινε στόχος κριτικής» (p. 61).

Όταν σκεφτόμαστε αναφορικά με τη μαθηματική απόδειξη, ένα από τα αναπόφευκτα ερωτήματα σχετίζεται με τη **λειτουργία** (function) αυτής (Rocha, 2019), δηλαδή με τη σημασία, το σκοπό και τη χρησιμότητα της (De Villiers, 1999). Σύμφωνα με τον De Villiers (1999), οι λειτουργίες που αποδίδονται στην απόδειξη είναι:

- Η **επαλήθευση** η οποία αφορά την αλήθεια μιας δήλωσης. Παραδοσιακά, η επαλήθευση (αιτιολόγηση ή πεποίθηση) της εγκυρότητας των εικασιών γίνεται αντιληπτή ως η μοναδική ουσιαστικά λειτουργία ή σκοπός της απόδειξης (De Villiers, 2012). Ένας μαθηματικός εμπλέκεται στη λειτουργία της επαλήθευσης όταν η απόδειξη χρησιμεύει ως εργαλείο πειθούς ή αιτιολόγησης της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού για τον ίδιο (ή το συνάδελφό του) (Bleiler-Baxter & Pair, 2017). Παράλληλα, ο Knuth (2002b) υποστηρίζει ότι η πλειονότητα των καθηγητών των μαθηματικών αντιλαμβάνεται μάλλον την επαλήθευση ως τη βασική λειτουργία που προσδίδεται στην απόδειξη. Κατά τους French & Stripp (2005, οπ. αναφ. στο De Villiers, 2012), η θεώρηση αυτή, εξαιρουμένης μιας ευρύτερης προοπτικής, εξακολουθεί να κυριαρχεί σε ένα μεγάλο μέρος του σχεδιασμού του προγράμματος σπουδών με τη μορφή σχολικών εγχειριδίων, μαθημάτων και υλικού αναφορικά με τη διδασκαλία της απόδειξης.
- Η **επεξήγηση** η οποία παρέχει επίγνωση του γιατί κάτι είναι αληθινό. Σύμφωνα με τους Bleiler-Baxter & Pair (2017), ο λόγος για τον οποίο μια μαθηματική δήλωση είναι αληθής μπορεί να διευκρινιστεί κατά την εμπλοκή ενός μαθηματικού με τον επεξηγηματικό ρόλο της απόδειξης, ενώ ο De Villiers (1999) υποστηρίζει ότι για μία μεγάλη μερίδα των καθηγητών των μαθηματικών η πτυχή της επεξήγησης μιας απόδειξης διαδραματίζει σπουδαιότερη σημασία από την αντίστοιχη της επαλήθευσης. Παρά το γεγονός ότι η λειτουργία της επεξήγησης συνιστά ενδυναμωτικό παράγοντα της μαθηματικής εκμάθησης των μαθητών (Rocha, 2019), ο Schoenfeld (1994, p. 75, οπ. αναφ. στο Knuth, 2002a) διαπιστώνει ότι «στα περισσότερα εκπαιδευτικά πλαίσια η απόδειξη δεν έχει κανένα προσωπικό νόημα ή επεξηγηματική δύναμη για τους μαθητές» (p. 64).
- Η **συστηματοποίηση** η οποία συνίσταται στην οργάνωση των διαφόρων αποτελεσμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, μειζόνων εννοιών και

θεωρημάτων. Κατά τον De Villiers (1986, οπ. αναφ. στο De Villiers, 1999), ορισμένες από τις πιο σημαντικές λειτουργίες μιας παραγωγικής συστηματοποίησης των γνωστών αποτελεσμάτων είναι οι ακόλουθες:

- ✓ Βοηθά στον προσδιορισμό αντιφάσεων, κυκλικών επιχειρημάτων και κρυφών ή μη σαφώς διατυπωμένων υποθέσεων.
- ✓ Ενώνει και απλοποιεί τις μαθηματικές θεωρίες μέσω της ενσωμάτωσης δηλώσεων, θεωρημάτων και εννοιών που δεν παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους, επιτυγχάνοντας έτσι μια οικονομική παρουσίαση των αποτελεσμάτων.
- ✓ Παρέχει μια χρήσιμη σφαιρική προοπτική ενός θέματος μέσω της έκθεσης της υποβόσκουσας αξιωματικής δομής εκείνου του θέματος από το οποίο μπορούν να παραχθούν όλες οι άλλες ιδιότητες.
- ✓ Είναι χρήσιμη τόσο για ενδομαθηματικές όσο και για εξωμαθηματικές εφαρμογές, καθώς καθιστά δυνατό τον έλεγχο της εφαρμογής μιας ολόκληρης σύνθετης δομής ή θεωρίας μέσω της αξιολόγησης απλώς της καταλληλότητας των αξιωμάτων και των ορισμών της.
- ✓ Οδηγεί σε συχνή βάση σε εναλλακτικά παραγωγικά συστήματα τα οποία παρέχουν νέες προοπτικές και/ή είναι πιο οικονομικά, κομψά και ισχυρά από τα ήδη υπάρχοντα.

Η απόδειξη ως μέσο συστηματοποίησης εκθέτει τις υφιστάμενες λογικές σχέσεις μεταξύ των δηλώσεων με τρόπους που η εμπειρική δοκιμή αλλά και η καθαρή διαίσθηση δεν μπορούν (De Villiers, 1999).

- ❖ Η **ανακάλυψη** η οποία σχετίζεται με την ανακάλυψη ή εφεύρεση νέων αποτελεσμάτων. Η απόδειξη για το μαθηματικό δεν αποτελεί αποκλειστικά ένα μέσο επαλήθευσης ενός ήδη ανακαλυφθέντος αποτελέσματος, αλλά αποτελεί επιπρόσθετα ένα μέσο εξερεύνησης, ανάλυσης, ανακάλυψης και επινόησης νέων αποτελεσμάτων (De Villiers, 2002). Ένας μαθηματικός που ασχολείται με τη λειτουργία της ανακάλυψης μπορεί να εξάγει ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα κατά την ολοκλήρωση μιας απόδειξης (Bleiler-Baxter & Pair, 2017). Σε αυτό το σημείο, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι με τη λειτουργία της «ανακάλυψης» της απόδειξης δεν εννοούμε αποκλειστικά μια ανακάλυψη που υλοποιείται έπειτα από προβληματισμό πάνω σε μια πρόσφατα κατασκευασμένη απόδειξη (De Villiers, 2012). Κατά τον De Villiers (1990, p.

22, 2003, pp. 68−69, οπ. αναφ. στο De Villiers, 2012), η συγκεκριμένη λειτουργία αναφέρεται επίσης γενικότερα σε καταστάσεις όπου η ανακάλυψη των νέων αποτελεσμάτων πραγματοποιείται με καθαρά λογικό τρόπο μέσω της εφαρμογής γνωστών θεωρημάτων ή αλγορίθμων χωρίς την καταφυγή σε κανένα πειραματισμό, καμία κατασκευή ή μέτρηση. Μάλιστα, ο παραπάνω ερευνητής τονίζει ότι σε ακόμη ευρύτερο πλαίσιο, με τη λειτουργία της ανακάλυψης, εννοούμε ότι μία απόδειξη μπορεί να αποκαλύψει νέες, ισχυρές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και δημιουργίας νέων θεωριών (De Villiers, 2012). Η λειτουργία της απόδειξης ως εργαλείο κατασκευής νέων μαθηματικών αποτελεσμάτων αρχίζει να διαδραματίζει πιο ουσιώδη ρόλο σε αρκετές τάξεις γεωμετρίας της δευτεροβάθμιας και κυρίως σε αυτές στις οποίες πραγματοποιείται αξιοποίηση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας από την πλευρά των μαθητών (Chazan & Yerushalmy, 1998). Το γεγονός αυτό αιτιολογείται από το ότι οι μαθητές μέσα από τις εξερευνήσεις τους παράγουν εικασίες και έπειτα προσπαθούν να επαληθεύσουν την αλήθεια αυτών των εικασιών μέσω της κατασκευής παραγωγικών αποδείξεων (Knuth, 2002a).

- Η **επικοινωνία** η οποία έγκειται στη μετάδοσης της μαθηματικής γνώσης. Κατά τον Davis (1976, οπ. αναφ. στο De Villiers, 1999), μία από τις πραγματικές αξίες της απόδειξης είναι ότι συνθέτει ένα πλαίσιο για κριτική συζήτηση. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η απόδειξη είναι ένας μοναδικός τρόπος επικοινωνίας των μαθηματικών αποτελεσμάτων μεταξύ των επαγγελματιών μαθηματικών, μεταξύ των εκπαιδευτικών και των μαθητών και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Συνεπώς, η απόδειξη ως μορφή κοινωνικής αλληλεπίδρασης περιλαμβάνει επίσης την υποκειμενική διαπραγμάτευση όχι μόνο των νοημάτων των εννοιών που θίγονται, αλλά έμμεσα και των νοημάτων των κριτηρίων που καθιστούν ένα επιχείρημα αποδεκτό. Ένα τέτοιο κοινωνικό φιλτράρισμα της απόδειξης σε διάφορες επικοινωνίες συνεισφέρει στην τελειοποίηση της και στον προσδιορισμό λαθών, καθώς και ορισμένες φορές στην απόρριψή της μέσω της ανεύρεσης ενός αντι-παραδείγματος (Davis, 1976, οπ. αναφ. στο De Villiers, 1999).

Σύμφωνα με τη Rocha (2019), όλες οι πέντε παραπάνω λειτουργίες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο για τους μαθηματικούς, αλλά **οι μαθητές στο σχολείο** έρχονται **συνήθως** σε επαφή **μόνο με τη λειτουργία της επαλήθευσης**.

Παράλληλα, η ερευνήτρια υπογραμμίζει ότι οι περιστάσεις στις οποίες λαμβάνει χώρα η επαφή με τη λειτουργία αυτή τείνουν να περιορίζονται σε διαισθητικά αποτελέσματα ή θεωρήματα που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, όπου η επαλήθευση δεν αποτελεί το πραγματικό ζητούμενο, με αποτέλεσμα τη μη κατανόηση του νοήματος της απόδειξης από την πλευρά των μαθητών (Rocha, 2019).

- Η **διανοητική πρόκληση** η οποία αναφέρεται στην αυτοπραγμάτωση (self – realization) και στην εκπλήρωση (fulfillment) που απορρέουν από την κατασκευή μιας απόδειξης και καθιστούν την τελευταία «πεδίο δοκιμής του διανοητικού σθένους και της ευφυΐας του μαθηματικού» (Davis & Hersh, 1983, p. 369, οπ. αναφ. στο De Villiers, 2002, p. 11). Σύμφωνα με την άποψη του Shongwe (2020), παράγοντες όπως οι περιορισμένες απαιτούμενες γνώσεις, οι μεροληπτικές προκαταλήψεις και οι χρονικοί περιορισμοί μπορούν να αποτελέσουν τροχοπέδη στην ανάπτυξη μαθησιακών περιβαλλόντων που προάγουν την επίτευξη διανοητικής πρόκλησης. Ωστόσο, η ενεργή εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες οι οποίες θέτουν τα θεμέλια για την υλοποίηση προόδου αναφορικά με την κατασκευή της απόδειξης (με τη λειτουργική κατανόηση δηλαδή της απόδειξης και της επιχειρηματολογίας), μπορούν να τους ενθαρρύνουν να επιχειρήσουν την κατασκευή αποδείξεων οι οποίες είναι πιθανό με τη σειρά τους να οδηγήσουν στην πραγματοποίηση διανοητικής πρόκλησης (Shongwe, 2020).

Το παραπάνω μοντέλο λειτουργιών μπορεί να επεκταθεί μέσω της ένταξης των λειτουργιών της **κατασκευής μίας εμπειρικής θεωρίας**, της **εξερεύνησης της έννοιας ενός ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης** καθώς και της **ενσωμάτωσης ενός γνωστού γεγονότος σε ένα νέο πλαίσιο και της εξέτασης του κατά συνέπεια από μία νέα οπτική γωνία**, που αναπτύσσουν οι Hanna & Jahnke (1996) στη μελέτη τους. Ακόμη, στο μοντέλο του De Villiers (1999) θα μπορούσαν να προσαρτηθούν η **αισθητική λειτουργία της απόδειξης** ή αυτή της **απομνημόνευσης και του αλγορίθμου** (Renz, 1981; Van Asch, 1993, οπ. αναφ. στο De Villiers, 1999).

1.3 Εξέταση της σχέσης ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη

Ο ρόλος και η σημασία που αποδίδεται στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη τις τελευταίες δεκαετίες έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη μιας τεράστιας ποικιλίας ερευνητικών προσεγγίσεων στο συγκεκριμένο τομέα (Antonini et al., 2015). Πιο συγκεκριμένα, μία αξιοσημείωτη μερίδα επιστημόνων της ερευνητικής κοινότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης εστιάζει στη μελέτη της σχέσης που διέπει τις δύο προαναφερθείσες έννοιες προσδίδοντάς της **σύνθετα χαρακτηριστικά γνωρίσματα** (Albano & Iacono, 2019; Barrier, Mathé, & Durand-Guerrier, 2010; Boero, 1999; Durand-Guerrier et al., 2012; Hanna, 2000; Knipping, 2012). Σύμφωνα με τους Hanna & de Villiers (2008), **ορισμένοι ερευνητές** αντιλαμβάνονται τη μαθηματική απόδειξη και την επιχειρηματολογία **ως διακριτές μαθηματικές οντότητες**, ενώ άλλοι τις θεωρούν **ως μέρη ενός συνεχούς και παρά ως διχοτόμηση**. Οι διαφορετικές αυτές απόψεις έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση των παρακάτω **σημαντικών διδακτικών επιπτώσεων** (Hanna & de Villiers, 2008):

- ❖ η πρώτη ομάδα ερευνητών θα εστιάσει κυρίως στη λογική οργάνωση των δηλώσεων σε μια απόδειξη και θα στοχεύσει στη διδασκαλία ενός εννοιολογικού πλαισίου που οικοδομεί την απόδειξη ανεξάρτητα από την επίλυση προβλήματος, **ενώ**
- ❖ η δεύτερη ομάδα θα επικεντρωθεί πρώτιστα στην παραγωγή επιχειρημάτων στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος, του πειραματισμού και της εξερεύνησης, αναμένοντας όμως αργότερα τη λογική οργάνωση των επιχειρημάτων αυτών προκειμένου να διαμορφώσουν μια έγκυρη μαθηματική απόδειξη.

1.3.1. Βασικοί ερευνητικοί άξονες αποκωδικοποίησης της σχέσης

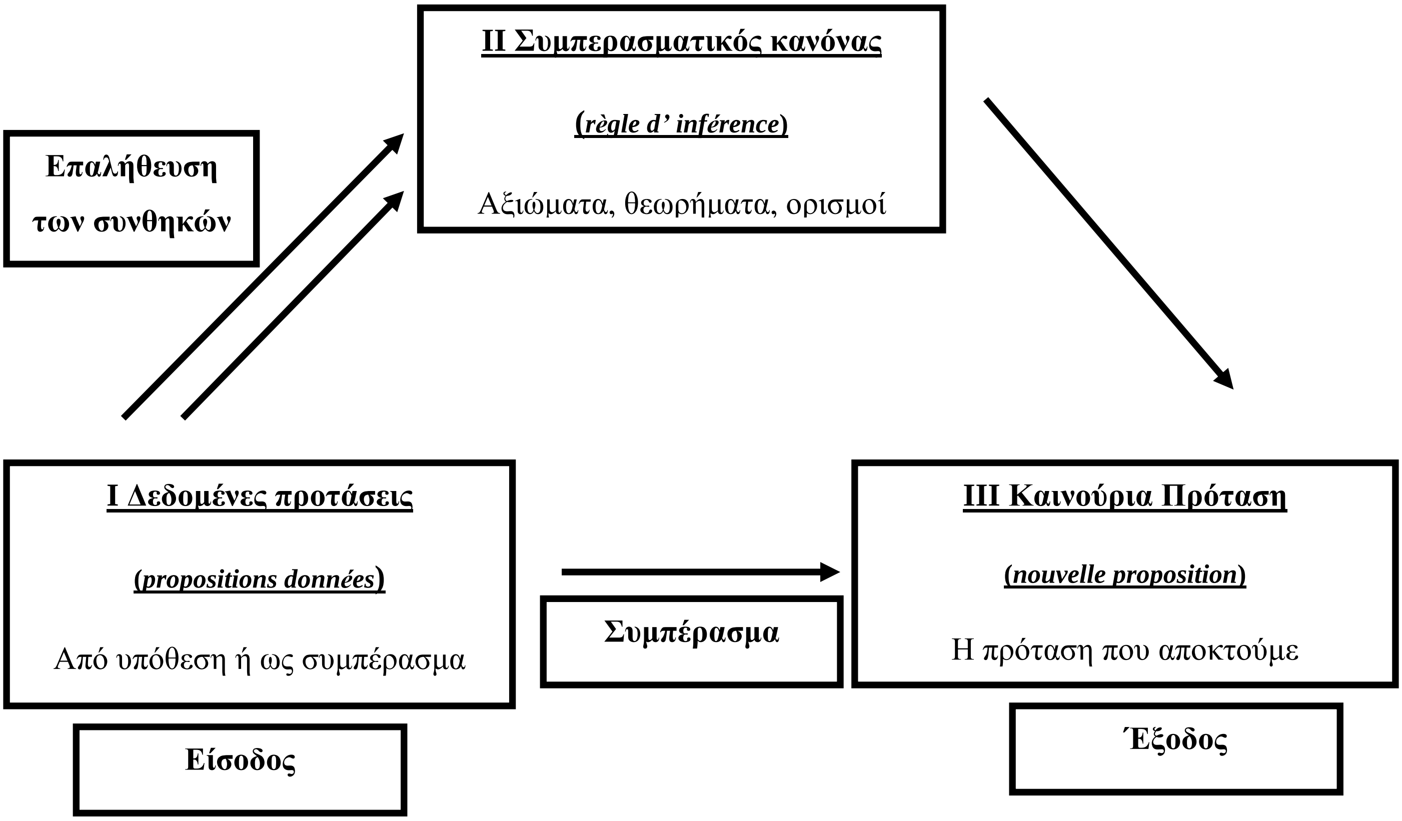
Η διερεύνηση της σχέσης που συνδέει την επιχειρηματολογία με την απόδειξη εντάσσεται σε ένα ευρύ φάσμα προσεγγίσεων που λαμβάνει υπόψη ποικίλες παραμέτρους. Σε αυτό το πλαίσιο, άξια αναφοράς αποτελεί η ερευνητική συνεισφορά του Balacheff (1988), η οποία όντας επιφορτισμένη με **επιστημολογικό** (epistemological) και **κοινωνικό** (social) πρόσημο εξάρει τον ετερόκλητο χαρακτήρα της σχέσης αυτής. Σύμφωνα λοιπόν με το Balacheff (1999), «η επιχειρηματολογία είναι για την εικασία το αντίστοιχο της απόδειξης για το θεώρημα» (p. 7), ενώ παράλληλα «η επιχειρηματολογία αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο στην εκμάθηση της μαθηματικής απόδειξης και γενικότερα της απόδειξης στα μαθηματικά» (p. 7). Ως προς την αποσαφήνιση της προαναφερθείσας σχέσης υπό κοινωνικούς όρους ο Balacheff (1991) τονίζει χαρακτηριστικά:

> Ο σκοπός της επιχειρηματολογίας είναι να αποκτήσει τη συμφωνία του ατόμου που συμμετέχει στην αλληλεπίδραση, αλλά όχι στο να καθιερώσει πρώτιστα την

> αλήθεια κάποιας δήλωσης. Ως κοινωνική συμπεριφορά είναι μια ανοιχτή διαδικασία, με άλλα λόγια επιτρέπει τη χρήση κάθε είδους μέσων: ενώ για τις μαθηματικές αποδείξεις πρέπει να προσαρμόσουμε την απαίτηση για τη χρήση της γνώσης που έχει ληφθεί από ένα σώμα γνώσης στο οποίο οι άνθρωποι (μαθηματικοί) συμφωνούν. (pp. 188 – 189)

Επιπρόσθετα, η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και μαθηματικής απόδειξης υπήρξε ερευνητικό αντικείμενο προηγούμενων μελετών από **γλωσσολογική** (linguistic) και **γνωστική** (cognitive) προοπτική, περιπτώσεις στις οποίες είναι ζήτημα διερεύνησης της γνωστικής πολυπλοκότητας του κάθε είδους, της σχέσης με τη γνώση που περιλαμβάνει ή ευνοεί, με τη μελέτη να εδραιώνεται στην ανάλυση του κειμένου και στις χρήσεις της γλώσσας (Balacheff, 1999). Ο Duval (1992 - 1993) υιοθετώντας μία προσέγγιση του παραπάνω προσανατολισμού επισημαίνει ότι «η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας ακόμη και στις πιο περίπλοκες μορφές της δεν ανοίγει ένα δρόμο προς τη μαθηματική απόδειξη» (p. 60) ενώ «μία ειδική και ανεξάρτητη εκμάθηση είναι απαραίτητη αναφορικά με τον παραγωγικό συλλογισμό» (Duval & Egret, n.d., οπ. αναφ. στο Duval, 1992, p. 60). Σε μεταγενέστερη μελέτη του (Duval, 1995, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2007), κάνει λόγο για το **δομικό κενό** (structural gap) μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, παρά το γεγονός ότι αναγνωρίζει πως ο παραγωγικός συλλογισμός και η επιχειρηματολογία εφαρμόζουν συχνά τους ίδιους συνδέσμους (connecteurs) και μεταφράζονται σε παραπλήσιες γλωσσολογικές προσεγγίσεις (Duval, 1991). Σύμφωνα με τον ερευνητή, ο δομικός κορμός της απόδειξης περιλαμβάνει βήματα που συνδέονται με μια **διαδικασία ανακύκλωσης** (Duval, 1992 - 1993): το συμπέρασμα ενός βήματος χρησιμεύει ως συνθήκη εισαγωγής στο επόμενο βήμα (Pedemonte, 2007), ενώ στην περίπτωση της επιχειρηματολογίας τα συμπεράσματα βασίζονται στο περιεχόμενο της δήλωσης, η οποία θεωρείται και ερμηνεύεται εκ νέου από διαφορετικές οπτικές γωνίες (Pedemonte, 2003).

Πιο συγκεκριμένα, ο Duval (1991) προχωρά σε ένα σαφή **διαχωρισμό** μεταξύ **επιχειρηματολογικού** (argumentatif) και **παραγωγικού** (déductif) συλλογισμού ενσωματώνοντας στην προσέγγισή του την έννοια του **συμπερασματικού βήματος** (pas de déducton). Ο ερευνητής τονίζει χαρακτηριστικά στη μελέτη του ότι η επιχειρηματολογία καταφεύγει σε άρρητους κανόνες που προέρχονται εν μέρει από τη δομή της γλώσσας και εν μέρει από τις αναπαραστάσεις των συνομιλητών και επομένως το σημασιολογικό περιεχόμενο των προτάσεων είναι πρωταρχικής σημασίας (Duval, 1991). Αντίθετα, στην περίπτωση του συμπερασματικού βήματος, οι προτάσεις συσχετίζονται μεταξύ τους με βάση τη **λειτουργική** τους **θέση** (statut opératoire) (θέση που τους έχει προηγουμένως ανατεθεί στη λειτουργία του βήματος) και όχι με βάση το περιεχόμενό τους (Duval, 1991). Σε ένα συμπερασματικό βήμα υπάρχουν μόνο τρεις πιθανές λειτουργικές θέσεις για μια πρόταση: **πρόταση εισόδου** (proposition d'entrée), **συμπερασματικός κανόνας** (règle d' inférence) ή **συμπέρασμα** (conclusion). Ουσιαστικά, το συμπερασματικό βήμα είναι το πέρασμα από κάποιες δεδομένες προτάσεις που λειτουργούν ως υποθέσεις (προτάσεις εισόδου) σε μια άλλη πρόταση (το συμπέρασμα) δυνάμει ενός κανόνα (Duval, 1991). Παρακάτω, το Διάγραμμα 1.2 αποτυπώνει την τριαδική λειτουργία ενός συμπερασματικού βήματος (Duval, 1991, p. 235). Στη συνέχεια περιγράφεται αναλυτικά ο μηχανισμός στον οποίο βασίζεται το εν λόγω βήμα με βάση τον Duval (1991).



Διάγραμμα 1.2: *Διάγραμμα που αναπαριστά την τριαδική λειτουργία ενός συμπερασματικού βήματος (Duval, 1991, p. 235)*

Σε ένα συμπερασματικό βήμα, οι προτάσεις **δεν συνδέονται με βάση τις σημασιολογικές σχέσεις** μεταξύ των αντίστοιχων περιεχομένων τους (αντίθεση, συνωνυμία, συγκεκριμενοποίηση κ.λπ.), **αλλά μόνο δυνάμει της θέσης τους** που έχει καθοριστεί προηγουμένως (αρχικές υποθέσεις ή συμπεράσματα που έχουν ήδη αποκτηθεί και συμπερασματικοί κανόνες). Αυτή η θέση μπορεί να αλλάξει ανάλογα με τις καταστάσεις: η ίδια πρόταση μπορεί να ληφθεί ως υπόθεση σε μια κατάσταση, να είναι το συμπέρασμα-στόχος σε μια άλλη και να έχει χρησιμοποιηθεί ως συμπερασματικός κανόνας σε μια τρίτη κατάσταση. Η πρόταση δεν εξαρτάται από το περιεχόμενό της. Το ευμετάβλητο αυτό της λειτουργικής θέσης μιας πρότασης εξαρτάται από το **θεωρητικό πλαίσιο** που έγινε αποδεκτό στην αρχή. Η διάκριση μεταξύ περιεχομένου και λειτουργικής θέσης μιας πρότασης αποτελεί χαρακτηριστικό του παραγωγικού συλλογισμού.

Στον **επιχειρηματολογικό συλλογισμό**, για παράδειγμα, **οι προτάσεις δεν έχουν λειτουργική θέση**. Το συμπέρασμα εκεί βασίζεται στο περιεχόμενο των προτάσεων, στις σχέσεις υπερωνυμίας ή αντωνυμίας μεταξύ των κατηγορηματικών εκφράσεών τους, στις σχέσεις δηλαδή εγκλεισμού (inclusion) ή αποκλεισμού (exclusion) μεταξύ των σημασιών. Οι σύνδεσμοι της φυσικής γλώσσας («ή», «επομένως», «αφού», «εάν …. τότε», «αλλά») χρησιμεύουν στο να διευκρινιστεί το περιεχόμενο της καθιερωμένης σχέσης μεταξύ δύο προτάσεων: αντίθεση, αιτιολόγηση, επεξήγηση, ενίσχυση, συνέπεια κτλ. (van Dijk, 1981, pp. 265-282, οπ. αναφ. στο Duval, 1991).

Παράλληλα, η σχέση επιχειρηματολογίας – απόδειξης προσεγγίστηκε και με **πολιτιστικό** (cultural) φακό εστίασης, με χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό της έρευνας του Sekiguchi (2002), η οποία υιοθέτησε την έννοια της **επικοινωνίας** (communication) ως γενικό θεωρητικό πλαίσιο. Ο Sekiguchi (2002) χρησιμοποίησε τον όρο **πολιτισμός** (culture) με τον τρόπο που αυτός αποτυπώνεται εννοιολογικά στην ανθρωπολογία. Ειδικότερα, θεώρησε τον πολιτισμό ως «μια πολύ μεγάλη και ετερογενή συλλογή μοντέλων ή …. σχημάτων» (D’ Andrade, 1995; Shore, 1996, p. 45, οπ. αναφ. στο Sekiguchi, 2002, p. 12). Σύμφωνα με τον ερευνητή, η προοπτική αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την ανάλυση γνωστικών πτυχών σε ένα πολιτιστικό περιβάλλον. Τα ευρήματα της μελέτης ανέδειξαν το γεγονός ότι η ιδέα ένταξης της εκμάθησης της μαθηματικής απόδειξης στο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας είναι **προκατειλημμένη από το δυτικό πολιτισμό**, με αποτέλεσμα τόσο τη δυσκολία για τους Ιάπωνες υλοποίησης σε πολιτιστικό επίπεδο της επιχειρηματολογίας του μοντέλου Toulmin στην τάξη όσο και τη δυσκολία διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης ως επιχειρηματολογική δραστηριότητα.

1.3.2 Ανάλυση της έννοιας της γνωστικής ενότητας (unité cognitive)

Στα πλαίσια αποκωδικοποίησης της σχέσης επιχειρηματολογίας και απόδειξης, ένα σώμα ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, & Lemut, 1998; Garuti et al., 1996) προχώρησε στην κατάρτιση του θεωρητικού εργαλείου της **γνωστικής ενότητας** (cognitive unity), προκειμένου να αποτυπώσει την παρατηρούμενη παρουσία γνωστικής συνέχειας ανάμεσα στις δύο αυτές μαθηματικές διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της γνωστικής ενότητας γεννήθηκε από μία **ιστορικό – επιστημολογική** ανάλυση που ανέδειξε στοιχεία συνέχειας ανάμεσα στη διαδικασία παραγωγής μιας εικασίας και της μετέπειτα απόδειξης αυτής (Mariotti, 2002). Οι Boero, Garuti, & Mariotti (1996) στοιχειοθετούν τη θεωρητική αυτή οντότητα εκφράζοντας την παρακάτω θέση:

> Κατά τη διάρκεια παραγωγής της εικασίας, ο μαθητής/η μαθήτρια επεξεργάζεται προοδευτικά τη δήλωσή του/της μέσω μιας έντονης επιχειρηματολογικής δραστηριότητας που αναμειγνύεται λειτουργικά με την αιτιολόγηση της αληθοφάνειας των επιλογών του/της. Κατά τη διάρκεια του αποδεικτικού σταδίου δήλωσης που ακολουθεί, ο μαθητής συνδέεται με αυτή τη διαδικασία με ένα συνεκτικό τρόπο, οργανώνοντας ορισμένα από τα επιχειρήματα που είχαν παραχθεί προηγουμένως σύμφωνα με μια λογική αλυσίδα. (p. 119)

Αναφορικά με τον προαναφερθέντα ορισμό της γνωστικής ενότητας, η Pedemonte (2005) προχωρά στην παράθεση των εξής δύο εξής παρατηρήσεων:

- Η **πρώτη** παρατήρηση συνδέεται με την πεποίθηση ότι η γνωστική ενότητα μπορεί να αναλυθεί μέσω εξέτασης ολόκληρης της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος εικασίας και απόδειξης. Η ταυτοποίηση των δύο φάσεων παραγωγής της εικασίας και κατασκευής της απόδειξης δεν είναι τόσο προφανής. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι δυνατή η παραγωγή εικασίας χωρίς καμία παραγωγή επιχειρηματολογίας (π.χ. όταν η εικασία κατασκευάζεται κατευθείαν από μία διαίσθηση ή από μία αντίληψη). Επιπρόσθετα, ο διαχωρισμός μεταξύ των φάσεων δεν είναι πάντα ορατός. Η επιλογή σύνδεσης της φύσης του τελικού προϊόντος – η απόδειξη στην ολοκληρωμένη της μορφή - με τη συνολική διαδικασία που προηγείται της απόδειξης αυτής στην επίλυση του προβλήματος, οφείλεται στη δυνατότητα προσδιορισμού της αρχής της διαδικασίας της επίλυσης του προβλήματος που ακολουθείται από ένα σύνολο δηλώσεων οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Εξάλλου, ο ορισμός της γνωστικής ενότητας έχει δοθεί μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης ως διαδικασίες. Ωστόσο, η γνωστική ενότητα έχει επίσης συχνά αναλυθεί συγκρίνοντας την επιχειρηματολογία και την απόδειξη ως προϊόντα (Garuti et al., 1998, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2005).

- Η **δεύτερη** παρατήρηση σχετίζεται με την έλλειψη ενός μέσου για τη σύγκριση των δύο φάσεων της επιχειρηματολογίας στη φάση της εικασίας και στη φάση της κατασκευής της απόδειξης (Pedemonte, 2001, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2005). Η αναγνώριση της γνωστικής ενότητας είναι δυνατή από τον ορισμό της τελευταίας, εάν μπορούμε να προσδιορίσουμε ορισμένα είδη συνέχειας μεταξύ της παραγωγής της εικασίας και της κατασκευής της απόδειξης. Εάν θέλουμε να καθορίσουμε ένα μέσο για να αναλύσουμε την επιχειρηματολογία που συνδέεται με μια εικασία και με μία απόδειξη πρέπει να γνωρίζουμε αυτό που θέλουμε να συγκρίνουμε και τον τρόπο με τον οποίο θα κάνουμε αυτή τη σύγκριση (Pedemonte, 2005).

Σε προγενέστερη μελέτη της, η Pedemonte (2002, pp. 51-52) προσδιορίζει κάποια από τα **είδη συνέχειας** (Πίνακας 1.2) που καθιστούν δυνατή την αναγνώριση της γνωστικής ενότητας στις παραγωγές των μαθητών:

Είδος Συνέχειας	**Περιγραφή**
Συνέχεια της γλώσσας (continuité du langage)	Βασίζεται στην παρατήρηση του τρόπου διατήρησης ή εξέλιξης των λεκτικών και αλγεβρικών εκφράσεων καθώς και των γεωμετρικών σχημάτων κατά το πέρασμα από τη μια διαδικασία στην άλλη. Το συγκεκριμένο είδος συνέχειας παρατηρείται από τις λέξεις, τις εκφράσεις και τις φράσεις που χρησιμοποιούνται κατά την επιχειρηματολογία και κατά την κατασκευή της απόδειξης.
Εννοιολογική συνέχεια (continuité conceptuelle)	Παρατηρείται από το **λόγο** (discours). Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας το υποκείμενο μπορεί να χρησιμοποιήσει λέξεις που αναφέρονται σε ένα θεώρημα, χωρίς να το επεξηγεί. Εάν αυτό το θεώρημα χρησιμοποιείται στη φάση της απόδειξης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει εννοιολογική συνέχεια μεταξύ των δύο φάσεων.
Συνέχεια του «πλαισίου» (continuité de « cadre ») (Douady, 1986, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2002)	Παρατηρείται από το θεωρητικό αναφερόμενο που χρησιμοποιεί το υποκείμενο στις δύο φάσεις. Αν το υποκείμενο παράγει για παράδειγμα την εικασία μέσω της συνθετικής γεωμετρίας και την απόδειξη χρησιμοποιώντας την αναλυτική γεωμετρία δεν υπάρχει συνέχεια πλαισίου μεταξύ των δύο διαδικασιών.

Είδος Συνέχειας	Περιγραφή
Ευρετική συνέχεια (continuité heuristique)	Εδραιώνεται στην παρατήρηση του εάν τα στοιχεία που ορίζονται ως μεταβλητά και αυτά που διατηρούνται σταθερά είναι τα ίδια στις δύο φάσεις. Αυτή η συνέχεια παρατηρείται από το λόγο του υποκειμένου και από το χειρισμό του σχήματος από το υποκείμενο (ιδιαίτερα στην Cabri γεωμετρία). Στην πραγματικότητα, τα στοιχεία που παίζουν το ρόλο των μεταβλητών κατά τη διαδικασία επίλυσης μπορούν να συνδεθούν μόνο με το λόγο (discours), ή αντίθετα να προσδιοριστούν από το χειρισμό του σχεδίου. Για παράδειγμα, κατά το χειρισμό του σχήματος ενός τριγώνου, μπορούμε να αποφασίσουμε να διατηρήσουμε τη μία πλευρά σταθερή και να μεταβάλλουμε τις άλλες δύο. Αν κατά τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης ο συγκεκριμένος χειρισμός περιγράφεται από το υποκείμενο μπορούμε να παρατηρήσουμε ευρετική συνέχεια.
Συνέχειες στις διανοητικές δυναμικές (continuités dans les dynamiques mentales)	Κατά την επίλυση ενός προβλήματος είμαστε διανοητικά ενεργοί, κινητοποιώντας δυναμικές εικόνες. Αυτές οι δυναμικές μπορεί να είναι: **χωρικές** (το υποκείμενο φαντάζεται το υπό εξέταση αντικείμενο από διαφορετικές οπτικές γωνίες), **χρονικές** (το υποκείμενο φαντάζεται τον εαυτό του τη στιγμή εύρεσης της λύσης, την εξερευνά και αναζητεί να ανατρέξει στις συνθήκες που επιτρέπουν την πραγματοποίησή της) (Arzarello & Bartolini Bussi, n.d., οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2002), **σχεσιακές** (μεταξύ διανοητικά προδιαμορφωμένων εικόνων και εικόνων που αναπαρίστανται στην οθόνη ή στο φύλλο, μεταξύ γνωστών ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών γνωρισμάτων γεωμετρικών αντικειμένων) κ.λπ. Αυτό το είδος συνέχειας δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμο, μένει συχνά σιωπηρό.

Πίνακας 1.2: *Ανάλυση ειδών συνέχειας (Pedemonte, 1998, οπ. αναφ. στο Pedemonte, 2002, pp. 51-52)*

Ωστόσο, οι Tchonang Youkap et al. (2019) διατυπώνουν στην έρευνά τους την άποψη ότι η γνωστική ενότητα μπορεί επίσης να παρατηρηθεί και όταν οι μαθητές επιλύουν προβλήματα τα οποία δεν οδηγούν απαραίτητα στην παραγωγή εικασίας. Ειδικότερα, οι ερευνητές εκφράζουν την πεποίθηση ότι κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος που οδηγεί στην απόδειξη ενός ισχυρισμού, ο μαθητής εμπλέκεται σε μια δραστηριότητα εξερευνητικής υπόστασης ,στη διάρκεια της οποίας παράγεται επιχειρηματολογία και τα επιχειρήματα μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν, να αναδιαρθρωθούν και να αναδιοργανωθούν στη φάση της απόδειξης (Tchonang Youkap et al., 2019).

Η αποκωδικοποίηση των εννοιολογικών παραμέτρων της γνωστικής ενότητας επιτυγχάνεται σε μεγαλύτερο βαθμό μέσω της εισαγωγής του εννοιολογικού μηχανισμού του **συστήματος αναφοράς** και της **δομής** που ενσωματώνει στη μελέτη της η Pedemonte (2007), προκειμένου να εντάξει την υλοποίηση της σύγκρισης μεταξύ απόδειξης και επιχειρηματολογίας σε ένα ευρύτερο πλαίσιο:

Το **σύστημα αναφοράς** συγκροτείται από το **σύστημα αναπαράστασης** (τη γλώσσα, τις ευρετικές (heuristic), το σχέδιο) και το **γνωστικό σύστημα** (έννοιες, θεωρήματα) **της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης** (Pedemonte, 2008). Η ανάλυση της γνωστικής ενότητας βασίζεται στη συνέχεια του συστήματος αναφοράς ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη (Pedemonte, 2002, p. 54). Για παράδειγμα, υπάρχει **συνέχεια** (continuity) μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης στο σύστημα αναφοράς εάν ορισμένες λέξεις, σχέδια και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη έχουν χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας (Martinez & Pedemonte, 2014). Αντίθετα εάν για παράδειγμα η επιχειρηματολογία και η απόδειξη κατασκευάζονται μέσω της χρήσης στοιχείων από διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς (π.χ. αριθμητική στην επιχειρηματολογία και άλγεβρα στην απόδειξη), τότε υπάρχει **ασυνέχεια** (discontinuity) μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης λαμβάνοντας υπόψη το σύστημα αναφοράς (Martinez & Pedemonte, 2014). Το σύστημα αναφοράς αντιπροσωπεύει μια προσπάθεια οργάνωσης ορισμένων στοιχείων που παρεμβαίνουν κατά την επιχειρηματολογία για να καταστεί δυνατή η προσέγγιση και η σύγκρισή τους με τη μαθηματική θεωρία που παρεμβαίνει κατά την απόδειξη (Pedemonte, 2005).

Η **δομή** είτε της επιχειρηματολογίας είτε της απόδειξης είναι η λογική γνωστική σύνδεση μεταξύ των δηλώσεων και μπορεί να είναι. απαγωγικού (abduction), επαγωγικού (induction) ή παραγωγικού (deduction) χαρακτήρα (Martinez & Pedemonte, 2014). Σύμφωνα με την Pedemonte (2007), η θεωρητική οντότητα της γνωστικής ενότητας κρίνεται μη επαρκής αναφορικά με την εξήγηση μερικών περιπτώσεων μαθητών που δε διαθέτουν την ικανότητα να κατασκευάσουν μία απόδειξη. Για το λόγο αυτό, προκύπτει η ανάγκη εξέτασης ενός είδους συνέχειας που δεν έχει ληφθεί υπόψη στο παρελθόν, αυτό της **δομικής συνέχειας** (structural continuity) (Pedemonte, 2007) και το οποίο έχει τη δυνατότητα να εξηγήσει κάποιες από τις κατασκευαστικές αυτές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές (Martinez & Pedemonte, 2014). Δομική συνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης παρατηρείται όταν τα συμπεράσματα των δύο αυτών μαθηματικών διαδικασιών συνδέονται μέσω της ίδιας δομής (Pedemonte, 2018). Ενώ μία απόδειξη έχει συνήθως παραγωγική δομή, αυτό δεν ισχύει απαραίτητα στην περίπτωση της επιχειρηματολογίας, η οποία εκτός από παραγωγική μπορεί να διαθέτει επιπρόσθετα απαγωγική ή επαγωγική δομή (Pedemonte & Buchbinder, 2011). Για την κατασκευή μιας απόδειξης, η δομή της επιχειρηματολογίας πρέπει να μετατραπεί σε παραγωγική (deduction) (Pedemonte, 2018). Συνεπώς, υπάρχει συνήθως **δομική απόσταση** (structural distance) μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης (Pedemonte, 2018), η κάλυψη της οποίας συνιστά μία από τις πιθανές πηγές δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην περίπτωση που καλούνται να κατασκευάσουν μία απόδειξη γεωμετρικού χαρακτήρα (Pedemonte, 2007).

Η τρέχουσα βιβλιογραφία παρέχει διακριτά ερευνητικά πορίσματα για την άλγεβρα και τη γεωμετρία αναφορικά με τη σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης ως προς τη δομή (Gulkilik, Kaplan, & Emul, 2019). Ειδικότερα, η μελέτη της Pedemonte (2007) με αντικείμενο διαπραγμάτευσης την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων ανέδειξε την ανεπάρκεια ορισμένες φορές από την πλευρά των μαθητών κατασκευής γεωμετρικής απόδειξης, εξαιτίας της αδυναμίας μετατροπής του απαγωγικού δομικού κορμού που συνθέτει τη δραστηριότητα της επιχειρηματολογίας στον αντίστοιχο παραγωγικό κορμό που χαρακτηρίζει την απόδειξη. Σε αντίθεση με τη γεωμετρική περίπτωση, η δομική απόσταση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης δεν είναι μία από τις πιθανές δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Pedemonte, 2018). Δεδομένου ότι η αλγεβρική απόδειξη χαρακτηρίζεται από μια ισχυρή παραγωγική δομή, τα απαγωγικά βήματα στην επιχειρηματολογική δραστηριότητα μπορεί να είναι χρήσιμα για τη σύνδεση της σημασίας των γραμμάτων που χρησιμοποιούνται στην αλγεβρική απόδειξη με τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται στην επιχειρηματολογία (Pedemonte, 2008).

1.4 Άλλες έρευνες που εξετάζουν την επιχειρηματολογία στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Sukirwan et al. (2020), στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τουλάχιστον τρία είδη ερευνών αναφορικά με την έννοια της επιχειρηματολογίας: **δομή επιχειρηματολογίας** (μελετούν το σχήμα επιχειρηματολογίας που κατασκευάζεται από τους μαθητές) (π.χ. Knipping, 2008; Toulmin, 2003), **ταξινομία αποδεικτικών σχημάτων** (προσδιορίζουν επιχειρήματα που κατασκευάζονται από τους μαθητές με βάση αφαιρετικά επίπεδα) (π.χ. Stylianou, Chae, & Blanton, 2006; Stylianides & Stylianides, 2009) και **είδη επιχειρηματολογίας** (προσδιορίζουν τις αναδυόμενες μαθηματικές αναπαραστάσεις) (π.χ. Fahse, 2017). Οι μελέτες που αναλύονται στη συνέχεια μετατοπίζουν το επιστημονικό τους ενδιαφέρον σε μία διαφορετική ερευνητική κατεύθυνση που έγκειται στη διερεύνηση **του τρόπου αποτύπωσης της έννοιας της επιχειρηματολογίας στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών διαφόρων χωρών και εκπαιδευτικών βαθμίδων**, μέσω υιοθέτησης ερευνητικών προσεγγίσεων που αναπτύσσονται στη βάση ενός κράματος θεωρητικών προσανατολισμών. Δεδομένης της κοινής παραδοχής ότι τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν μείζων ρόλο στη σχολική πρακτική τόσο προσανατολίζοντας και διαμορφώνοντας τις προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με συγκεκριμένα θέματα όσο και επηρεάζοντας παράλληλα, μέσω έργων και κειμένων, τους τρόπους σκέψης των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά, η εξέταση του τρόπου παρουσίασης της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στα σχολικά εγχειρίδια λαμβάνει διαστάσεις ερευνητικού επικέντρου (Mariotti, Durand – Guerrier, & Stylianides, 2018).

Η μελέτη του Cabassut (2005) διερεύνησε την απόδειξη και την επιχειρηματολογία στο δομικό κορμό γαλλικών και γερμανικών εγχειριδίων μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με εστίαση στην εξέταση του βαθμού ενσωμάτωσης **αληθοφανών επιχειρημάτων** (arguments of plausibility) και **επιχειρημάτων αναγκαιότητας** (arguments of necessity) στο θεματικό πυρήνα των τελευταίων. Για την υλοποίηση της σύγκρισης της **επικύρωσης** (validation) των μαθηματικών δηλώσεων στα εγχειρίδια των δύο χωρών τέθηκαν σε εφαρμογή τα δύο ακόλουθα θεωρητικά εργαλεία:

- ❖ Η θεωρία του Toulmin (1958, p. 148 οπ. αναφ. στο Cabassut, 2005) για τη δομική συγκρότηση ενός επιχειρήματος με στόχο την στοιχειοθέτηση των δύο υπό μελέτη κατηγοριών επιχειρημάτων και με βάση την οποία οριοθετήθηκαν ως:
  - ✓ **Αληθοφανή επιχειρήματα** αυτά στα οποία «η εγγύηση μάς δίνει το δικαίωμα να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας μόνο με αβεβαιότητα (χαρακτηρίζοντάς την εγγύηση αυτή με ένα «μάλλον») υπό την επιφύλαξη

πιθανών εξαιρέσεων («πιθανώς») ή υπό όρους («υπό την προϋπόθεση ότι…»)» (p. 391) και

- ✓ **Επιχειρήματα αναγκαιότητας** εκείνα στα οποία «η εγγύηση μας δίνει το δικαίωμα να υποστηρίξουμε κατηγορηματικά το συμπέρασμα» (pp. 391 - 392).

Με βάση τις παραπάνω συμβάσεις, ως «**επικύρωση**» οριοθετήθηκε εννοιολογικά «μία συλλογιστική που αποσκοπεί στο να επιβεβαιώσει, κατ' ανάγκη ή εύλογα, την αλήθεια μιας δήλωσης» (p. 392). Παράλληλα, η «**απόδειξη**» στοιχειοθετήθηκε ως «μια επικύρωση που χρησιμοποιεί μόνο επιχειρήματα αναγκαιότητας» (p. 392) ενώ η «**επιχειρηματολογία**» ορίστηκε ως «μια επικύρωση που χρησιμοποιεί επιχειρήματα αληθοφάνειας και ίσως επιχειρήματα αναγκαιότητας» (p. 392).

- ❖ Οι λειτουργίες της απόδειξης με βάση την De Villiers (1990, p.18, οπ. αναφ. στο Cabassut, 2005) που συνίστανται:

  στην επαλήθευση (αφορά την αλήθεια μιας δήλωσης), στην επεξήγηση (παρέχει επίγνωση του γιατί κάτι είναι σωστό), στη συστηματοποίηση (οργάνωση ποικίλων αποτελεσμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, μειζόνων εννοιών και θεωρημάτων), στην ανακάλυψη (ανακάλυψη ή επινόηση νέων αποτελεσμάτων) και στην επικοινωνία (μετάδοση της μαθηματικής γνώσης)» και οι οποίες επεκτάθηκαν στην έννοια της επικύρωσης στη διδασκαλία των μαθηματικών. (p. 393)

  Πιο συγκεκριμένα για τη λειτουργία της **επαλήθευσης** (verification) έγινε διάκριση των δύο παρακάτω λειτουργιών:

  - ✓ **Η λειτουργία της αληθοφάνειας** (function of plausibility) που «επαληθεύει την ευλογοφάνεια της αλήθειας ενός ισχυρισμού μέσω αληθοφανών επιχειρημάτων» (p. 393).
  - ✓ **Η λειτουργία της απόδειξης** (function of proof) που «επαληθεύει την αναγκαιότητα της αλήθειας ενός ισχυρισμού μέσω επιχειρημάτων αναγκαιότητας» (p. 393).

Στα πλαίσια ανάπτυξης της ερευνητικής του πορείας, ο Cabassut (2005) προσανατολίστηκε ειδικότερα στην εξέταση του τρόπου προσέγγισης της απόδειξης του Πυθαγορείου Θεωρήματος καθώς και της απόδειξης της ιδιότητας του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Οι δύο παραπάνω αποδείξεις αποτέλεσαν κοινή θεματική συνιστώσα ορισμένων εκ των επιλεγόμενων γαλλικών και γερμανικών σειρών εγχειριδίων. Τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης κατέδειξαν την προώθηση τόσο αληθοφανών επιχειρημάτων όσο και επιχειρημάτων αναγκαιότητας από το δομικό κορμό των εξεταζόμενων εγχειριδίων και των δύο χωρών, με το καθένα από αυτά τα επιχειρήματα να αποσκοπεί στην έκφραση διαφορετικών πτυχών του διδακτικού πυρήνα αλλά και στην αποτύπωση δύο διαφορετικών συλλήψεων της αλήθειας σε ευρύτερο πλαίσιο.

Αξιόλογη ερευνητική συγκρότηση παρουσιάζει και η μελέτη των Triantafillou et al. (2016) η οποία πραγματεύτηκε τις συλλογιστικές δομές και τις πρακτικές επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιούνται είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα σε 8 ελληνικά σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης – 4 μαθηματικών και 4 φυσικής - κατά την οργάνωση και ανάπτυξη νέας γνώσης αναφορικά με ζητήματα που συνδέονται με την έννοια της περιοδικότητας. Για την επίτευξη του ερευνητικού στόχου αξιοποιήθηκε ο μεθοδολογικός μηχανισμός της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory) ενώ υλοποιήθηκε επαγωγική ανάλυση περιεχομένου (inductive content analysis) σε 71 θεματικές ενότητες (29 μαθηματικών και 42 φυσικής) με αντικείμενο διαπραγμάτευσης αυτό της περιοδικότητας. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης μελέτης η επιχειρηματολογία γινόταν αντιληπτή ως **η αλληλουχία των μορφών συλλογιστικής** (MsoR) που αναπτύσσει ο συγγραφέας σε ένα κείμενο κατά τη συγκρότηση και παρουσίαση ενός καινούριου σώματος γνώσης. Δεδομένης της προαναφερθείσας εννοιολογικής οριοθέτησης, οι ερευνήτριες προχώρησαν στην κατάρτιση ενός συστήματος κωδικοποίησης των κατηγοριών και υποκατηγοριών των μορφών συλλογιστικής που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων υπό τη μορφή ενός συστημικού δικτύου (systemic network). Συνολικά, η έρευνα ανέδειξε 4 βασικές κατηγορίες MsoR, καθεμία από τις οποίες διαδραμάτιζε διαφορετικό ρόλο στη σύλληψη των εννοιολογικών πτυχών της περιοδικότητας. Ο Πίνακας 1.3 συνοψίζει τα πυρηνικά χαρακτηριστικά του παραγόμενου συστήματος κωδικοποίησης.

Κατηγορία MsoR	Περιγραφή
Εμπειρική	Περιλαμβάνει τμήματα κειμένων στα οποία η συλλογιστική εδραιώνεται σε **αποδεικτικά στοιχεία** (evidence) που είτε οδηγούν στην ανάκληση των εμπειριών της καθημερινής ζωής ενός ατόμου είτε βασίζονται σε μία συστηματική περιγραφή ή απόδειξη μιας πειραματικής δραστηριότητας ή μίας κατάστασης του καθημερινού βίου.

Κατηγορία MsoR	Περιγραφή
Λογικο – εμπειρική	Περιλαμβάνει τμήματα κειμένων στα οποία οι συνδέσεις των αποδεικτικών στοιχείων που εμπεριέχονται στην ενότητα με τα λογικά στοιχεία κυριαρχούν σε μεγαλύτερο βαθμό, με τα παραδείγματα και τις συγκεκριμένες καταστάσεις που θεωρούνται «έμμεσες εμπειρίες» (second- hand experiences) να χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή ή τη διευκρίνιση γενικών δηλώσεων (statement). Διακρίνεται στις εξής τρεις υποκατηγορίες: ➢ **Γενικό – ειδική** (general-specific): αναφέρεται σε εφαρμογές ενός νόμου ή μίας γενικής δήλωσης (π.χ. ορισμός) που αναφέρθηκε προηγουμένως στην ενότητα. ➢ **Ειδικό – γενική** (specific-general): περιλαμβάνει συλλογιστική που προϋποθέτει την ανάλυση και την ερμηνεία παραδειγμάτων επιστημονικών καταστάσεων (φαινομένων) ή οργανωμένων εμπειρικών δεδομένων με στόχο την εξαγωγή του ορθού συμπεράσματος ή μιας γενίκευσης. Εμπεριέχει τα δύο παρακάτω σύνολα συλλογιστικής: i) **Πειραματικά αποδεικτικά στοιχεία** (experimental evidence): η συλλογιστική βασίζεται σε παραδείγματα πειραματικών δραστηριοτήτων που παρουσιάζονται κυρίως μέσω της χρήσης οπτικών αναπαραστάσεων. ii) **Μαθηματικά αποδεικτικά στοιχεία** (mathematical evidence): η συλλογιστική εδραιώνεται σε μαθηματικές αναπαραστάσεις (π.χ. γραφήματα, οργανωμένα αριθμητικά δεδομένα) ή σε μαθηματικά μοντέλα (π.χ. μοναδιαίος κύκλος). ➢ **Επεξηγηματική** (Explanatory): Περιλαμβάνει κείμενα που επιχειρούν να επεξηγήσουν θεωρητικές ιδέες ή να αξιοποιήσουν επινοημένες καταστάσεις με στόχο την επεξήγηση ενός συγκεκριμένου φαινομένου.
Νομολογική	Περιλαμβάνει τμήματα κειμένων που είναι γενικές δηλώσεις (π.χ. θεωρήματα, νόμοι ή ορισμοί) και απαρτίζεται από τις εξής 3 υποκατηγορίες: i) **Αρχικός ισχυρισμός** (initial claim): χρησιμοποιεί δηλώσεις που βασίζονται σε ένα γνωστό νόμο ή σε μια γενική αρχή και οι οποίες λειτουργούν κυρίως ως το σημείο εκκίνησης της συλλογιστικής στην επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται σε μια θεματική ενότητα.

Κατηγορία MsoR	Περιγραφή
	ii) **Βασικός ισχυρισμός** (main claim): χρησιμοποιεί δηλώσεις οι οποίες έχουν διατυπωθεί ως αποτέλεσμα προηγούμενων λογικών πράξεων συλλογιστικής που είναι κεντρικής σημασίας σε μια θεματική ενότητα. Συνήθως παρατίθεται στο κείμενο με διακριτό τρόπο (π.χ. έντονη γραμματοσειρά), προκειμένου να προσελκύσει την προσοχή του αναγνώστη. iii) **Ταξινομικός ισχυρισμός** (taxonomic): περιλαμβάνει δηλώσεις που αποσαφηνίζουν κατηγορίες περιοδικών συμπεριφορών. Η συγκεκριμένη υποκατηγορία ζητά από τον αναγνώστη να κατηγοριοποιήσει, να περιγράψει και να ταξινομήσει διαφορετικά είδη περιοδικών φαινομένων με ιεραρχικό τρόπο.
Μαθηματική	Περιλαμβάνει τμήματα κειμένου που βασίζονται στην εφαρμογή μαθηματικών σχέσεων και τεχνικών τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική: εδώ η έμφαση δίδεται στον **οργανικό** (instrumental) και **λειτουργικό** (functional) χαρακτήρα της συλλογιστικής. Εμπεριέχει τις δύο παρακάτω υποκατηγορίες: i) **Τεχνικές** (techniques): η συλλογιστική βασίζεται σε μαθηματικές τεχνικές που συνήθως είναι γνωστές (π.χ. σχεδιασμός γραφικής παράστασης από δοσμένο πίνακα τιμών, γραφική επίλυση εξίσωσης ή παροχή ακολουθίας αριθμητικών πράξεων) . ii) **Αποδείξεις** (proofs): η συλλογιστική διαθέτει ένα στείρο παραγωγικό (deductive) χαρακτήρα και στις υπό ανάλυση ενότητες βασίζεται κυρίως στη διενέργεια αλγεβρικών χειρισμών.

Πίνακας 1.3: *Περιγραφή κατηγοριών MsoR (Triantafillou et al., 2016)*

Ειδικότερα, η ερευνητική προσέγγιση των θεματικών ενοτήτων «Σχεδιασμός γραφικής παράστασης της ημιτονοειδούς συνάρτησης» από το εγχειρίδιο μαθηματικών της Β’ Λυκείου και «Ορισμός της απλής αρμονικής ταλάντωσης» από το εγχειρίδιο φυσικής της ίδιας τάξης κατέδειξε:

- **οντολογικές διαφορές** ανάμεσα στα δύο γνωστικά αντικείμενα σχετικά με την έννοια των αποδεικτικών στοιχείων (evidence). Ειδικότερα, τα πειραματικά στοιχεία στο εγχειρίδιο φυσικής ενισχύονταν από τη συλλογή και αξιοποίηση νέων δεδομένων, ενώ τα μαθηματικά στοιχεία στο εγχειρίδιο μαθηματικών θεωρούνταν αδιαμφισβήτητα και κατά συνέπεια δεν απαιτούνταν περαιτέρω ενίσχυση τους.
- **πραγματιστικές διαφορές** ανάμεσα στα δύο αυτά γνωστικά πεδία αναφορικά με την κατανόηση ενός κειμένου σε σχέση με τον **επιστημονικό επιχειρηματολογικό λόγο** (scientific argumentation discourse). Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο της φυσικής, ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούνταν τα μαθηματικά εργαλεία στη συλλογιστική ήταν ελλειπτικός και η κατανόηση του κειμένου βασίζονταν σε «κρυφές πράξεις ομιλίας» (π.χ. η εξήγηση ότι η παραγόμενη καμπύλη είναι η ημιτονοειδής καμπύλη). Αντίθετα, το μαθηματικό κείμενο ακολουθούσε μία γραμμική και συνεκτική συλλογιστική ως προς τη λογική, χρησιμοποιώντας με συνέπεια το μαθηματικό λόγο ενώ παράλληλα παραμελήθηκε η αξιοποίηση εμπειρικών μορφών συλλογιστικής.

Ένα διεπιστημονικό ερευνητικό μήκος κύματος υιοθετήθηκε και από τη μελέτη των Hellgren, Bergqvist, & Österholm (2018) η οποία είχε ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των κειμένων που παρουσιάζονται σε 20 σελίδες ενός εγχειριδίου βιολογίας, ενός εγχειριδίου χημείας και ενός εγχειριδίου μαθηματικών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με την ποσότητα εμφάνισης **ρητής επιχειρηματολογίας** (explicit argumentation). Ως επιχειρηματολογία στοιχειοθετήθηκε εννοιολογικά «η πράξη ή η διαδικασία παροχής αιτιολόγησης υπέρ ή κατά κάποιου πράγματος» (merriam-webster.com, οπ. αναφ. στο Hellgren et al., 2018, p. 227). Παράλληλα, οι ερευνητές προχώρησαν στην αξιοποίηση της έννοιας της **επιχειρηματολογικής δομής** (argumentative structure), η οποία βασίζεται στη θεωρία του Toulmin (1958, οπ. αναφ. στο Hellgren et al., 2018) και απαρτίζεται από τα εξής συστατικά: το **συμπέρασμα** (conclusion), την **υπόθεση** (premise) και το **δείκτη επιχειρηματολογίας** (argumentation marker). Ειδικότερα, η μελέτη εστίασε στην κατηγορία των ρητών επιχειρηματολογιών, σε καταστάσεις δηλαδή στις οποίες υπάρχει ένας δείκτης επιχειρηματολογίας που είναι δυνατό να προσδιοριστεί με ξεκάθαρο τρόπο. Για τη σύγκριση των εγχειριδίων υπολογίστηκε ο αριθμός των επιχειρηματολογικών δομών ανά δηλωτική (declarative) πρόταση. Αρχικά, καταμετρήθηκε για κάθε σελίδα ο συνολικός αριθμός των δηλωτικών προτάσεων (εξαιρέθηκαν εντολές, ερωτήσεις και θαυμαστικά). Στη συνέχεια, αναζητήθηκαν σε κάθε δηλωτική πρόταση επιχειρηματολογικές δομές. Επίσης, για τη σύγκριση της ποσότητας της ρητής επιχειρηματολογίας μεταξύ των τριών εγχειριδίων, υλοποιήθηκαν προκαταρκτικές αναλύσεις με τη χρήση ανεξάρτητων δειγμάτων t-tests με μονάδα ανάλυσης αυτή της σελίδας του εγχειριδίου. Τα ερευνητικά πορίσματα κατέδειξαν ότι το εγχειρίδιο των μαθηματικών περιέχει περισσότερες επιχειρηματολογικές δομές από τα αντίστοιχα της χημείας και της βιολογίας, ενώ δεδομένης της σύνδεσης που χαρακτηρίζει την αναγνωστική κατανόηση με τη συνοχή του κειμένου (McNamara et al., 1996, οπ. αναφ. στο Hellgren et al., 2018), τα ευρήματα ανέδειξαν επιπρόσθετα ότι η κατανόηση των κειμένων από τους μαθητές στα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα μπορεί να ποικίλλει.

Επιπρόσθετα, η αναδίφηση της βιβλιογραφίας ανέδειξε και την παρουσία ερευνών που προσέγγισαν τη φύση της αναπτυσσόμενης στα εγχειρίδια μαθηματικών επιχειρηματολογίας μέσω ενός εξελικτικού φακού εστίασης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μελέτη των Lianos & Otero (2018) που εστίασε στην εξέταση 137 σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Αργεντινής (12 – 17 ετών) τα οποία εκδόθηκαν από το 1940 έως το 2007. Ειδικότερα, η έρευνα επικεντρώθηκε στη διερεύνηση των μεταβολών στη **σχέση μεταξύ της ανάπτυξης επιχειρηματολογίας** (arguing) **και των εικόνων** (images) που παρουσιάζονται στα επιλεγόμενα προς εξέταση εγχειρίδια. Η ανάλυση υλοποιήθηκε με επαγωγικό (inductive) τρόπο βασιζόμενη στις τρεις μετα-κατηγορίες των Πινάκων 1.4, 1.5 και 1.6:

Α1. Σημείο εκκίνησης ανάπτυξης επιχειρηματολογίας: Αφορά τον τρόπο με τον οποίο ξεκινά κάθε κεφάλαιο .	**Α2. Είδος ανάπτυξης επιχειρηματολογίας:** Σχετίζεται με το είδος του επιχειρήματος που υιοθετείται από τα εγχειρίδια.	**Α3. Βαθμός ανάπτυξης επιχειρηματολογίας: πρόκειται για τη γνωστική σύγκρουση που προωθείται από το κείμενο, η οποία θα μπορούσε να επιλυθεί ή όχι αργότερα, ή συνδέεται με το εάν το κείμενο επιδιώκει μόνο να πληροφορήσει.**
Α1.1 Ερωτήσεις: εγχειρίδια που διατυπώνουν μια ερώτηση ή μια κατάσταση, η οποία γενικά θα απαντηθεί αργότερα.	**Α2.1 Παραγωγικό τυπικό** (deductive formal)**:** εγχειρίδια που χρησιμοποιούν παραγωγικά μαθηματικά επιχειρήματα ενός λιγότερου ή περισσότερου τυπικού χαρακτήρα, τα οποία και αναγνωρίζονται από: ορισμό, θεώρημα, υπόθεση, θεωρία, απόδειξη, αντίστροφο θεώρημα και ασκήσεις εφαρμογής.	**Α3.1 Υψηλός:** αντιστοιχεί σε εγχειρίδια που προσπαθούν να παράξουν ρητά κάποιου είδους αντιπαράθεση, χωρίς καμία λύση απόκλισης στο κείμενο.
Α1.2 Ορισμός: εγχειρίδια που χρησιμοποιούν ορισμούς για να εισάγουν τη γνώση.	**Α2.2 Παραγωγικό άτυπο** (deductive informal)**:** εγχειρίδια που χρησιμοποιούν επιχειρηματολογίες παραγωγικής φύσεως, χωρίς όμως να προσεγγίζουν το φορμαλισμό των αποδείξεων της υποκατηγορίας Α2.1.	**Α3.2 Χαμηλός:** αντιστοιχεί σε εγχειρίδια που προσπαθούν να παράξουν ρητά μια γνωστική σύγκρουση, η οποία επιλύεται αργότερα.
Α1.3 Παραδείγματα: χρησιμοποιούνται για να εισάγουν ένα περιεχόμενο, μέσω του οποίου η γνώση μπορεί να διατυπωθεί και να γενικευτεί.	**Α2.3 Επαγωγικό** (inductive)**:** εγχειρίδια που γενικεύουν από την ανάλυση παραδειγμάτων ή μέσω μετασχηματισμών αναφορικά με ένα μόνο παράδειγμα που λαμβάνεται ως αντιπροσωπευτικό.	**Α3.3 Απών:** χαρακτηρίζεται από τα εγχειρίδια που πληροφορούν χωρίς προβληματισμό.

Πίνακας 1.4: *(Α) Χαρακτηριστικά ανάπτυξης επιχειρηματολογίας (Lianos & Otero, 2018, p. 99)*

B1. Χρήση εικόνων: γίνεται διάκριση μεταξύ των εικόνων που χρησιμοποιούνται για να διευκολύνουν την κατανόηση του κειμένου και των εικόνων που έχουν αισθητικό σκοπό.	**B2. Είδος εικόνας**	**B3. Γραμματικό στυλ εικόνων με βάση τους Kress & Van Leween (2006, οπ. αναφ. στο Llanos & Otero, 2018).**	**B4. Σχέση με τον «πραγματικό κόσμο»:** ταξινόμηση των εικόνων με βάση τη συσχέτιση ή όχι με πτυχές του εμπειρικού κόσμου.
B1.1 Διακοσμητικές: εικόνες που χαρακτηρίζουν τα εγχειρίδια τα οποία χρησιμοποιούν κυρίως εικόνες με διακοσμητικό σκοπό και μη αυστηρά συσχετιζόμενες με το περιεχόμενο.	**B2.1 Μαθηματικές Αναπαραστάσεις:** αφορά εικόνες που συνδέονται με μαθηματικά συστήματα αναπαράστασης.	**B3.1 Εννοιολογικές:** εικόνες που αντιπροσωπεύουν σχέσεις και καθορισμένα χαρακτηριστικά μεταξύ των αναπαριστώμενων στοιχείων.	**B4.1 Νατουραλιστικές:** εικόνες που αναφέρονται στον εμπειρικό κόσμο. Είναι λεπτομερείς και περίπλοκες.
B.1.2 Επιχειρηματολογικού χαρακτήρα (argument): εικόνες που χρησιμοποιούνται στα εγχειρίδια ως πηγή πληροφοριών, εικόνες από τις οποίες μπορεί να παραχθεί γνώση.	**B2.2 Μη μαθηματικές αναπαραστάσεις:** αφορά εικόνες που δε σχετίζονται με μαθηματικό περιεχόμενο.	**B3.2 Αφηγηματικές:** εικόνες που επιτρέπουν τον εντοπισμό ενεργειών μεταξύ των αντικειμένων και την κατασκευή μιας ιστορίας που αντιπροσωπεύει μια σχέση μεταξύ των αντικειμένων που περιλαμβάνονται στην εικόνα.	**B4.2 Αφηρημένες:** εικόνες που δεν αναφέρονται στον κόσμο που βιώνουμε.

Πίνακας 1.5: *(B) Σχέση μεταξύ εικόνων και ανάπτυξης επιχειρηματολογίας με βάση το θεωρητικό και μεθοδολογικό μηχανισμό των Otero et. al. (2002, οπ. αναφ. στο Llanos & Otero, 2018, p. 99 - 100) για την προσέγγιση των χαρακτηριστικών των εικόνων*

C1. Ημερομηνία έκδοσης:	C2. Εκπαιδευτικό επίπεδο:	C3. Παραδόσεις με βάση το πλαίσιο των τριών διαφορετικών τρόπων σύλληψης και αιτιολόγησης των μαθηματικών στα εγχειρίδια των Klimovsky & Boido (2005):
C1.1 Περίοδος 1: εγχειρίδια με περίοδο έκδοσης 1940 – 1973.	**C2.1 Επίπεδο 1:** εγχειρίδια που απευθύνονται στα τρία πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές 12 – 14 ετών).	**C3.1 Υπολογιστική Παράδοση:** εγχειρίδια που πραγματεύονται εκείνα τα μαθηματικά που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων και τον υπολογισμό, ή με αριθμούς, και τις πράξεις που γίνονται με αυτούς.
C1.2 Περίοδος 2: εγχειρίδια με περίοδο έκδοσης 1974-1994.	**C2.2 Επίπεδο 2:** εγχειρίδια που απευθύνονται στα τρία τελευταία χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές 15–17 ετών).	**C3.2 Αξιωματική παράδοση:** εγχειρίδια που χρησιμοποιούν ορθές μορφές συλλογιστικής και παρουσιάζουν αποδεικτικά βήματα.
C1.3 Περίοδος 3: εγχειρίδια με περίοδο έκδοσης 1995-2007, μετά την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση.	**C2.3 Επίπεδο 3:** εγχειρίδια μεταβατικού χαρακτήρα μεταξύ δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πανεπιστημίου (μαθητές άνω των 18 ετών).	**C3.3 Στρουκτουραλιστική παράδοση:** εγχειρίδια που δείχνουν τη μαθηματική εργασία ως αναζήτηση κανονικοτήτων που πληρούν τις ίδιες προϋποθέσεις.

Πίνακας 1.6: *(Γ) Χαρακτηριστικά εγχειριδίων (Lianos & Otero, 2018, p. 100)*

Πιο συγκεκριμένα, τέθηκε σε εφαρμογή παραγοντική ανάλυση πολλαπλών αντιστοιχιών (factorial analysis of multiple correspondences) με στόχο την εύρεση των κύριων ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των εγχειριδίων, την υλοποίηση ανάλυσης κατά συστάδες (cluster analysis) και την πραγματοποίηση μιας πιθανής ταξινόμησης. Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψαν τρεις κλάσεις εγχειριδίων:

- Η **κλάση 1** (N=53) που συγκέντρωνε τα «**μη συγκρουσιακά και αφηρημένα**» εγχειρίδια. Ουσιαστικά επρόκειτο για εγχειρίδια ενημερωτικού χαρακτήρα τα οποία δεν έδιναν ρητά συγκρούσεις που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν από τον αναγνώστη. Σημείο εκκίνησης ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας αποτελούσαν οι ορισμοί ενώ το είδος των κυρίαρχων επιχειρημάτων ήταν παραγωγικό (deductive). Τα συγκεκριμένα εγχειρίδια ταυτίζονταν με την αξιωματική παράδοση, χρησιμοποιώντας την ορθή μορφή συλλογιστικής (παραγωγικό μαθηματικό επιχείρημα). Οι παρουσιαζόμενες εικόνες ήταν μαθηματικές, εννοιολογικές και αφηρημένες αναπαραστάσεις. Η περίοδος έκδοσης των εγχειριδίων αυτών ήταν κυρίως η 1940 – 1973. Το στυλ ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας χαρακτηριζόταν μη συγκρουσιακό.

- Η **κλάση 2** (N=35) που περιλάμβανε τους «**λιγότερο αμφιλεγόμενους χαρακτήρες**». Πιο συγκεκριμένα τα εγχειρίδια της κλάσης αυτής παρουσίαζαν ποικιλία απόψεων, χωρίς όμως να προχωρούν στην ανάλυση εναλλακτικών απόψεων. Το επιχείρημα εκκινούσε με μια ερώτηση που υποδεικνύει την προσπάθεια των εγχειριδίων να προβληματίσουν και άλλες ερωτήσεις με αντίστοιχη απάντηση. Τα εγχειρίδια αυτά ταυτίζονταν κυρίως με τη στρουκτουραλιστική παράδοση και προσπαθούσαν να παράξουν ρητά μια γνωστική σύγκρουση, η οποία επιλυόταν αργότερα. Ταυτόχρονα, έδιναν στον αναγνώστη τη δυνατότητα να αποφασίσει αν θα επιλύσει μόνος του το επιχείρημα ή αν θα συμφωνήσει με τη δοσμένη στο εγχειρίδιο απάντηση. Οι εικόνες ήταν μαθηματικές, εννοιολογικές και αφηρημένες αναπαραστάσεις και χρησιμοποιούνταν επίσης με στόχο την εξυπηρέτηση επιχειρηματολογικών σκοπών. Η περίοδος έκδοσης των εγχειριδίων ήταν κυρίως η 1974 - 1994.
- Η **κλάση 3** (N= 49) που απαρτιζόταν από τα «**μη συγκρουσιακά και αισθητικά εγχειρίδια**». Τα εγχειρίδια αυτά ταυτίζονταν με την υπολογιστική παράδοση και στόχευαν κυρίως στην πληροφόρηση χωρίς να παραθέτουν ερωτήσεις. Το επιχείρημα εκκινούσε με παραδείγματα και ορισμούς, κυρίως μέσω της λήψης ενός μόνο παραδείγματος ως αντιπροσωπευτικό. Οι κυρίαρχες παρουσιαζόμενες εικόνες δε σχετίζονταν με το μαθηματικό περιεχόμενο, ήταν αποκλειστικά διακοσμητικού χαρακτήρα και κατηγοριοποιούνταν σε αφηγηματικές ή νατουραλιστικές τυπικότητες. Τα εγχειρίδια αυτής της κλάσης εκδόθηκαν μετά την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση το 1994.

Τα σχολικά εγχειρίδια της περιόδου 1940 - 1973 χαρακτηρίζονταν από την αξιωματική παράδοση, οι αποδείξεις κατείχαν κεντρική θέση και όλες οι δηλώσεις δικαιολογούνταν με παραγωγικό τρόπο. Εκτός από τα θεωρήματα, τις αποδείξεις και τους ορισμούς υπήρχαν ασκήσεις και δραστηριότητες. Η πλειοψηφία των νέων σχολικών εγχειριδίων, ειδικά αυτών που εκδόθηκαν μετά τη μεταρρύθμιση του 1994, πρότειναν μία αναγωγή των μαθηματικών σε αριθμούς, πράξεις και αποτελέσματα με αριθμούς. Η επιχειρηματολογία ήταν κυρίως επαγωγική από παραδείγματα και στις περισσότερες περιπτώσεις αναπτυσσόταν από τη λήψη ενός μόνο παραδείγματος ως αντιπροσωπευτικό. Το γεγονός αυτό ανέδειξε ότι τα πιο σύγχρονα εγχειρίδια είναι αποκλειστικά παραδοσιακής χροιάς, αφού παρατηρήθηκε σε αυτά αναγωγή της μαθηματικής διδασκαλίας σε διαδικασία (ορισμός, παράδειγμα, εφαρμογή και κυρίως αριθμητικά αποτελέσματα).

Επίσης, με την πάροδο του χρόνου παρατηρήθηκε αύξηση του αισθητικού λειτουργικού φορτίου των εικόνων τόσο σε ποιότητα όσο και σε ποσότητα. Ο στόχος των περισσότερων σχολικών εγχειριδίων φάνηκε να είναι πληροφοριακός, πράγμα που εξηγεί την απουσία προβληματισμού και συζήτησης αναφορικά με πολλές απόψεις καθώς και το χαμηλό επίπεδο εύρεσης επιχειρηματολογίας και ποικιλίας απόψεων. Γενικά, οι κύριες παρατηρούμενες διαφορές δίδονται από τις αλλαγές σχετικά με την επιστημολογική αντίληψη των μαθηματικών και τα χαρακτηριστικά των εικόνων, ειδικά στα πιο σύγχρονα εγχειρίδια.

Η ρηξικέλευθη ερευνητική κατεύθυνση της μελέτης του τρόπου ανάπτυξης της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στο δομικό κορμό των εγχειριδίων είναι πολλά υποσχόμενη, αν και η πρωτοτυπία του θεματικού πυρήνα της δημιουργεί μια σειρά **μεθοδολογικών προβλημάτων**, όπως για παράδειγμα, αναφορικά με τον **τρόπο επιλογής της μονάδας ανάλυσης** (π.χ. έργο, μάθημα, κεφάλαιο κ.λπ.) και τον **τρόπο προσδιορισμού έργων απόδειξης και επιχειρηματολογίας στα εγχειρίδια** (π.χ. αναζήτηση λέξεων-κλειδιών όπως «απόδειξε» ή «δείξε») (Mariotti, Durand-Guerrier & Stylianides, 2018).

1.5 Έρευνες που εξετάζουν τη συλλογιστική και την απόδειξη στα εγχειρίδια των μαθηματικών

Κατά τον Stylianides (2014), η δραστηριότητα της «**συλλογιστικής και της απόδειξης**» μπορεί να χρησιμεύσει ως «όχημα» για την οικοδόμηση μαθηματικών νοημάτων όντας κατά συνέπεια σημαντική για την εκμάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τους Wong & Sutherland (2018), τα τελευταία χρόνια έχουν διεξαχθεί πολλές μελέτες σε διαφορετικές χώρες με στόχο την εξέταση των ευκαιριών που παρέχονται στους μαθητές από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για την εκμάθηση της **συλλογιστικής και της απόδειξης** (**RP**). Το εξεταζόμενο μαθηματικό περιεχόμενο των μελετών του συγκεκριμένου ερευνητικού άξονα είναι άλλοτε στείρα αλγεβρικό (π.χ. Davis et al., 2014; Dituri, 2013), άλλοτε αποκλειστικά γεωμετρικό (π.χ. Fujita & Jones, 2014; Hunte, 2018; Sears & Chavez, 2014) και άλλοτε μεικτής υπόστασης (π.χ. Bieda et al., 2014). Ωστόσο, οι Zhang & Qi (2019) διαπιστώνουν ότι δεν υιοθετείται από όλους τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης η ίδια ακριβώς εννοιολογική οριοθέτηση του όρου **RP** στα πλαίσια διεξαγωγής των αναλύσεών τους, ενώ παράλληλα οι Bergwall & Hemmi (2017) υποστηρίζουν ότι σε γενική κλίμακα οι **ευκαιρίες εκμάθησης RP** που παρέχονται από τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών είναι λίγες σε αριθμό. Παρακάτω, υλοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση μελετών με ερευνητικό άξονα αυτό της εξέτασης των **ευκαιριών εκμάθησης RP** που δίδονται από τα εγχειρίδια μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η μελέτη των Bieda et al. (2014) εστίασε στη διερεύνηση της φύσης των **ευκαιριών για συλλογιστική και απόδειξη** που αντικατοπτρίζονται στα έργα 7 αμερικάνικων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της 5ης τάξης (ηλικίες 9 – 11 ετών). Σύμφωνα με τους ερευνητές, η επιλογή της συγκεκριμένης τάξης βασίστηκε στην υπόθεση ότι αντιπροσωπεύει το πιο προχωρημένο μαθηματικό περιεχόμενο του ανώτερου μαθηματικού προγράμματος σπουδών που προβλέπεται για το δημοτικό, με μεγαλύτερη κατά συνέπεια την πιθανότητα εμπλοκής των μαθητών σε έργα **συλλογιστικής και αποδεικτικής** (**RP**) **υπόστασης**. Ειδικότερα, η έρευνα καθοδηγήθηκε από τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιες **ευκαιρίες για εκμάθηση σχετικά με τη μαθηματική συλλογιστική και απόδειξη** υπάρχουν στα προγράμματα σπουδών του δημοτικού;
- Ποιες **πτυχές της συλλογιστικής και της απόδειξης** προάγονται από τα έργα στα προγράμματα σπουδών του δημοτικού και πόσο συχνά και συστηματικά παρουσιάζονται **οι ευκαιρίες αυτές** στα υλικά κειμένου;

Για την ανάλυση και τη σύγκριση του περιεχομένου των εγχειριδίων επιλέχθηκε η μέθοδος της ανάλυσης περιεχομένου (content analysis), ενώ παράλληλα αξιοποιήθηκαν οι εννοιολογικές συνιστώσες που απέδωσαν στον όρο **RP** οι Bieda et al. (2014). Σύμφωνα με την εννοιολογική προσέγγιση των ερευνητών, η **συλλογιστική** περιελάμβανε την εμπλοκή σε διαδικασίες γενίκευσης μαθηματικών φαινομένων και/ή εικασίας αναφορικά με μαθηματικές σχέσεις, ενώ η **απόδειξη** περιλάμβανε την αιτιολόγηση ενός μαθηματικού ισχυρισμού ως αληθή για τον τομέα στον οποίο ισχύει αυτός ο ισχυρισμός, μέσω της χρήσης λογικά έγκυρης συλλογιστικής. Στα πλαίσια διεξαγωγής της μελέτης χρησιμοποιήθηκε στις περιπτώσεις που κρινόταν αναγκαίο και ο οδηγός του εκπαιδευτικού ή άλλα υποστηρικτικά υλικά. Το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης αποτέλεσε προϊόν μιας συνδυαστικής προσέγγισης των αναλυτικών πλαισίων των Thompson, Senk, & Johnson (2012) και Stylianides (2009). Ειδικότερα, έπειτα από κατάλληλη αξιοποίηση των επιμέρους κατευθύνσεων των προαναφερθέντων θεωρητικών πλαισίων προέκυψαν οι κατηγορίες που εμφανίζονται στον Πίνακα 1.7:

Κατηγορίες	Είδος Προβλήματος	Σκοπός RP Προβλήματος	Επιδιωκόμενο αποτέλεσμα του RP Προβλήματος	Είδος εξαγόμενου επιχειρήματος
Κωδικοί	Αφηγηματική ενότητα Άσκηση μαθητή Επεκτάσεις Αξιολόγηση	Διατύπωση ισχυρισμών Αιτιολόγηση ισχυρισμών Διατύπωση και αιτιολόγηση ισχυρισμών Αξιολόγηση ισχυρισμών	Επιχείρημα αποδεικτικού τύπου Επιχείρημα μη αποδεικτικού τύπου	Απόδειξη Γενικό Παράδειγμα Εμπειρικό Ορθολογικό

Πίνακας 1.7: *Αναλυτικό πλαίσιο ανάλυσης των εγχειριδίων (Bieda et al., 2014, p. 74)*

Τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης κατέδειξαν την κατηγορία διατύπωση και αιτιολόγηση ισχυρισμών ως το κυρίαρχο είδος προβλήματος **RP** σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια, ενώ ταυτόχρονα σε κανένα από τα 7 εγχειρίδια μαθηματικών δε ζητήθηκε από τους μαθητές να προχωρήσουν στην αξιολόγηση ισχυρισμών. Επιπρόσθετα, το εμπειρικό αναδείχθηκε ως το πιο συχνά εμφανιζόμενο είδος εξαγόμενου επιχειρήματος στα προβλήματα που περιλάμβαναν τη διατύπωση και την αιτιολόγηση ισχυρισμών σε επίπεδο ανάλυσης όλων των κειμένων. Επίσης, εντοπίστηκε ότι οι περιπτώσεις στις οποίες ζητήθηκε ρητά από τους μαθητές να δώσουν παραδείγματα για να επεξηγήσουν τη συλλογιστική τους ήταν λίγες, ενώ τις περισσότερες φορές ο τομέας εφαρμογής του προβλήματος ήταν είτε μια μεμονωμένη περίπτωση είτε αρκετές περιπτώσεις, με την εγγύηση να εξασφαλίζεται μέσω μιας εμπειρικής ή λογικής αιτιολόγησης. Παράλληλα, διαπιστώθηκε ότι τα σχολικά εγχειρίδια η συγγραφή των οποίων βασίστηκε σε ερευνητικά δεδομένα και στη στοχοθεσία των προτύπων του προγράμματος σπουδών αλλά και των προτύπων διδασκαλίας περιείχαν περισσότερα έργα τύπου **RP** εντός των αφηγηματικών ενοτήτων και των ενοτήτων που απαρτίζονταν από τις ασκήσεις των μαθητών συγκριτικά με άλλα κείμενα. Συνολικά, η μελέτη ανέδειξε ότι το μέσο ποσοστό των έργων που συνδέονταν με την **απόδειξη και τη συλλογιστική** στα εξεταζόμενα σχολικά εγχειρίδια ανήρθε μόνο σε 3,7%.

Η έρευνα των Fujita & Jones (2014) επιχείρησε να δώσει απάντηση στο εξής ερευνητικό ερώτημα: «Τι χαρακτηρίζει τον τρόπο με τον οποίο οι ιδέες της **συλλογιστικής και της απόδειξης** εισάγονται και αναπτύσσονται στα κεφάλαια γεωμετρίας ενός επιλεγμένου εγχειριδίου της 8ης τάξης από την Ιαπωνία;». Για την εξυπηρέτηση του ερευνητικού στόχου της μελέτης αναπτύχθηκε μια μέθοδος ανάλυσης της **RP** στα μαθηματικά που επέτρεψε την εξέταση τόσο των συνόλων των ασκήσεων για τους μαθητές όσο και άλλων μερών του σχολικού εγχειριδίου όπως τα μπλοκ αφήγησης. Ειδικότερα, κωδικοποιήθηκαν 34 μαθήματα (299 μπλοκ συνολικά) που προέρχονταν από τα δύο κεφάλαια γεωμετρίας του εγχειριδίου. Το 1 εξ’ αυτών έχει τίτλο «Παραλληλισμός και ισότητα» και αποτελείται από τις επιμέρους ενότητες «Παράλληλες ευθείες και γωνίες» και «Ίσα σχήματα». Το άλλο κεφάλαιο ονομάζεται «Τρίγωνα και τετράπλευρα» και αποτελείται από τις επιμέρους ενότητες «Τρίγωνα» και «Παραλληλόγραμμα». Το θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης προήρθε κυρίως από το έργο που σχετίζεται με την Τρίτη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Επιστημών (TIMSS), και ειδικότερα από το έργο των Robitaille et al. (1993) και Valverde et al. (2002). Προκειμένου όμως να δοθεί μια εις βάθος εστίαση στην **RP**, ενισχύθηκε ένα στοιχείο του πλαισίου TIMMS, μέσω της χρήσης μιας εννοιολόγησης της **RP** που αντλήθηκε από το έργο των Stylianides (2009) και Thompson et al. (2012). Ο Πίνακας 1.8 αναπτύσσει λεπτομερώς το θεωρητικό πλαίσιο που αξιοποιήθηκε:

Κατηγορία	Περιγραφή κωδικού
Είδος μπλοκ	1. Κεντρική διδακτική αφήγηση
	2. Σχετική διδακτική αφήγηση
	3. Μη σχετική διδακτική αφήγηση
	4. Σχετικό γραφικό
	5. Μη σχετικό γραφικό
	6α. Σετ ασκήσεων με διάγραμμα
	6β. Σετ ασκήσεων χωρίς διάγραμμα
	7α. Μη σχετικό σύνολο ασκήσεων με διάγραμμα

	7β. Μη σχετικό σύνολο ασκήσεων χωρίς διάγραμμα 8α. Δραστηριότητα με διάγραμμα 8β. Δραστηριότητα χωρίς διάγραμμα 9α. Λυμένο παράδειγμα με διάγραμμα 9β. Λυμένο παράδειγμα χωρίς διάγραμμα 10. Άλλο
Περιεχόμενο	1.1. Γεωμετρία: θέση, οπτικοποίηση και σχήμα 1.1.1. Δισδιάστατη γεωμετρία: γεωμετρία συντεταγμένων 1.1.2. Δισδιάστατη γεωμετρία: βασικά (σημείο, ευθεία και γωνίες) 1.1.3. Δισδιάστατη γεωμετρία: πολύγωνα και κύκλοι 1.1.4. τρισδιάστατη γεωμετρία 1.1.5. Διανύσματα 1.2. Γεωμετρία: συμμετρία, ισότητα και ομοιότητα 1.2.1. Μετασχηματισμός 1.2.2. Συμμετρία 1.2.3. Ισότητα 1.2.4. Ομοιότητα 1.2.5. Κατασκευές με χάρακα και πυξίδα 1.3. Μέτρηση 1.3.1. Περίμετρος, εμβαδόν και όγκος 1.3.2. Γωνία και γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα Βορράς – Νότος (bearing)
Προσδοκίες απόδοσης για RP	2.1. Γνωρίζω 2.1.1. Αναπαράσταση 2.1.2. Αναγνώριση ισοδύναμων 2.1.3. Ανάκληση ιδιοτήτων και θεωρημάτων 2.1.4. Παγίωση σημειογραφίας και λεξιλογίου 2.1.5. Ανάπτυξη σημειογραφίας και λεξιλογίου (απόδειξη) 2.1.6. Αναγνώριση των στόχων των μαθημάτων 2.2. Χρήση διαδικασιών ρουτίνας 2.2.1. Χρήση εξοπλισμού 2.2.2. Εκτέλεση διαδικασιών ρουτίνας 2.2.3. Χρήση πιο σύνθετων διαδικασιών 2.3. Συλλογιστική και απόδειξη 2.3.1. Αναγνώριση μοτίβων 2.3.2. Εικασία και ανακάλυψη 2.3.3. Μη-αποδεικτικό επιχείρημα: εμπειρικό 2.3.4. Μη-αποδεικτικό επιχείρημα: ορθολογικό 2.3.5. Αποδεικτικό επιχείρημα: ευθεία απόδειξη 2.3.6. Αποδεικτικό επιχείρημα: άλλη συλλογιστική

Πίνακας 1.8: *Αναλυτικοί κωδικοί - Προσδοκίες απόδοσης για RP(Fujita & Jones, 2014, p. 85)*

Η ανάλυση των ερευνητικών πορισμάτων της μελέτης ανέδειξε ότι στα ιαπωνικά εγχειρίδια, τα επιχειρήματα ευθείας απόδειξης παρέχονται κυρίως στα σύνολα ασκήσεων και στα λυμένα παραδείγματα. Ωστόσο, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με διάφορες πτυχές της **RP** στα αφηγηματικά μπλοκ, όπου αναπτύσσουν για παράδειγμα τη γνώση τους σχετικά με ορισμούς, γεγονότα, θεωρήματα κ.λπ., και αναφορικά με τις διαφορές μεταξύ επιχειρημάτων αποδεικτικού και μη-αποδεικτικού χαρακτήρα. Παράλληλα, οι μαθητές εξοικειώνονται με τις ποικίλες συνιστώσες της **RP** και στα μπλοκ δραστηριοτήτων τα οποία χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση εικασιών. Άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι η ισότητα διαδραματίζει βασικό ρόλο στην παροχή **ευκαιριών RP**. Τέλος, η έρευνα κατέδειξε κάποια αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά σχετικά με τις γενικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία της **RP** στη γεωμετρία στην Ιαπωνία. Πιο συγκεκριμένα, τα μαθήματα ξεκινούν από μια κατάσταση επίλυσης προβλήματος, με τα γεωμετρικά γεγονότα να αποδεικνύονται και να μαθαίνονται συχνά αργότερα, ενώ η ακολουθία εικασία - απόδειξη κατέχει σημαντική θέση στη διαδικασία της **RP** στο εγχειρίδιο.

Η μελέτη των Otten et al. (2014) υλοποιήθηκε με στόχο να απαντήσει τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- ❖ Ποια είναι η φύση και ο βαθμός εμφάνισης των **ευκαιριών συλλογιστικής και απόδειξης** που εμπεριέχονται στα εγχειρίδια γεωμετρίας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης;
- ❖ Πώς οι **ευκαιρίες συλλογιστικής και απόδειξης** που συναντώνται στο εκθεσιακό μέρος των εγχειριδίων γεωμετρίας συγκρίνονται με τις αντίστοιχες ευκαιρίες στις ασκήσεις των μαθητών;

Ειδικότερα, για την υλοποίηση της έρευνας εξετάστηκαν έξι αμερικανικά σχολικά εγχειρίδια σχεδιασμένα για αυτόνομα μαθήματα γεωμετρίας για μαθητές ηλικίας περίπου 13-16 ετών. Συνολικά αναλύθηκαν 212 εκθεσιακά μαθήματα, 73 ανασκοπήσεις κεφαλαίων και 12.468 ασκήσεις. Αναφορικά με το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης, οι Otten et al. (2014) υιοθέτησαν το αναλυτικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Thompson et al. (2012) με κάποιες μικρές τροποποιήσεις, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.9.

Εκθεσιακό μέρος		Ασκήσεις μαθητή	
	Ιδιότητες, Θεωρήματα ή Ισχυρισμοί	**Σχετίζεται με μαθηματικούς ισχυρισμούς**	**Σχετίζεται με μαθηματικά επιχειρήματα**
Μαθηματική Δήλωση ή Κατάσταση	**i) Γενικό:** Δήλωση που αφορά μία ολόκληρη κλάση μαθηματικών αντικειμένων ή καταστάσεων χωρίς εξαίρεση. **ii) Συγκεκριμένο:** Δήλωση που αφορά ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο ή κατάσταση (ή ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων).	**i) Γενική** **ii)Συγκεκριμένη** **iii)Γενική με παρεχόμενη συγκεκριμένη υπόδειξη:** Δήλωση που αφορά μία ολόκληρη κλάση μαθηματικών αντικειμένων αλλά για την οποία ένα συγκεκριμένο μέλος της κλάσης υποδεικνύεται για χρήση από την πλευρά των μαθητών στη συλλογιστική.	**i)Γενική** **ii) Συγκεκριμένη** **iii) Γενική με παρεχόμενη συγκεκριμένη υπόδειξη**
Αναμενόμενη Δραστηριότητα από το μαθητή		**i) Κάνε μία εικασία, βελτίωσε μία δήλωση ή εξήγαγε ένα συμπέρασμα:** Οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν ένα μαθηματικό ισχυρισμό ή να τροποποιήσουν μια ψευδή εικασία σε μία αληθή. Εάν οι μαθητές καλούνται επίσης να υποστηρίξουν τον ισχυρισμό που προκύπτει, ένας επιπλέον κωδικός ή κωδικοί αποδίδουν την υποστηρικτική αυτή	**i)Κατασκεύασε μία απόδειξη:** Αναφέρεται σε εκείνα τα στοιχεία στα οποία οι συγγραφείς των εγχειριδίων επικαλούνται ρητά την έννοια της απόδειξης. Οι όροι «να αποδείξετε» ή «να συμπεράνετε» συσχετίζονται με αυτή την κατηγορία. **ii) Ανάπτυξε μία λογική ή ένα άλλο επιχείρημα μη αποδεικτικού χαρακτήρα:** Ζητείται

Εκθεσιακό μέρος		Ασκήσεις μαθητή	
		δραστηριότητα. **ii) Συμπλήρωσε τα κενά μιας εικασίας:** Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν μια μαθηματική εικασία της οποίας ένα μέρος παρέχεται ήδη. **iii) Διερεύνησε μία εικασία ή μια δήλωση:** Οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν την αληθοφάνεια μίας δοσμένης εικασίας ή ενός πράγματος που μόλις έχουν εικάσει οι ίδιοι.	από τους μαθητές να εξηγήσουν ή να αιτιολογήσουν μια απάντηση ή ένα αποτέλεσμα με τρόπο που δεν είναι απαραίτητα απόδειξη. **iii) Σκιαγράφησε μία απόδειξη ή κατασκεύασε μία απόδειξη δοθέντος ενός περιγράμματος:** Οι μαθητές καλούνται να δώσουν ένα περίγραμμα μιας απόδειξης ή να γράψουν μια πλήρη απόδειξη με βάση ένα δοσμένο περίγραμμα. **iv) Συμπλήρωσε τα κενά ενός επιχειρήματος ή μιας απόδειξης:** Δίδεται στους μαθητές ένα μερικώς διαμορφωμένο επιχείρημα ή μια μερικώς διαμορφωμένη απόδειξη και τους ζητείται να συμπληρώσουν τα στοιχεία που λείπουν, σχηματίζοντας έτσι ένα πλήρες επιχείρημα ή μία πλήρη απόδειξη. **v) Αξιολόγησε ή διόρθωσε ένα επιχείρημα ή μια απόδειξη:** Οι μαθητές καλούνται να

Εκθεσιακό μέρος		Ασκήσεις μαθητή	
			προσδιορίσουν αν ένα παρουσιαζόμενο επιχείρημα ή μία παρουσιαζόμενη απόδειξη είναι έγκυρα ή καλούνται να βρουν τα λάθη και να τα διορθώσουν. **<u>vi) Βρες ένα αντιπαράδειγμα:</u>** Οι μαθητές καλούνται να δώσουν ένα αντιπαράδειγμα που καταρρίπτει ένα δοσμένο μαθηματικό ισχυρισμό.
Αιτιολόγηση (ή περιβάλλον για ανακάλυψη)	**<u>i) Παραγωγική:</u>** Το εγχειρίδιο παρέχει ένα λογικό επιχείρημα που οικοδομείται στη βάση ορισμών, αξιωμάτων ή προηγούμενων καθιερωμένων αποτελεσμάτων για να υποστηρίξει ή να αποδείξει ένα μαθηματικό ισχυρισμό. **<u>ii) Εμπειρική:</u>** Το εγχειρίδιο παρέχει ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει ένα μαθηματικό ισχυρισμό ή συμπεραίνει την αλήθεια ενός ισχυρισμού από ένα υποσύνολο σχετικών περιπτώσεων. **<u>iii) Σκιαγράφηση</u>**: Το	**<u>i) Παραγωγική (ρητή)</u>**: Το αντικείμενο απαιτεί ρητά ένα «παραγωγικό επιχείρημα» ή μια «λογική αλυσίδα» αιτιολογήσεων. **<u>ii) Εμπειρική (ρητή)</u>**: Το αντικείμενο απαιτεί ρητά μετρήσεις ή παραδείγματα επιβεβαίωσης. **<u>iii) Κρυφή:</u>** Το αντικείμενο ζητά από τους μαθητές να εμπλακούν με τη συλλογιστική και την απόδειξη (π.χ. «Να αποδείξετε ...» ή «Να εξηγήσετε γιατί ...») χωρίς να προσδιορίσει ρητά τη φύση του	**<u>i) Παραγωγική (ρητή)</u>** **<u>ii) Εμπειρική (ρητή)</u>** **<u>iii) Κρυφή</u>**

Εκθεσιακό μέρος		**Ασκήσεις μαθητή**	
	εκθεσιακό μέρος περιέχει ένα περίγραμμα μιας απόδειξης ή το βασικό βήμα μιας απόδειξης που θα καθιερώσει την αλήθεια ενός μαθηματικού ισχυρισμού. **<u>iv) Παρελθοντική ή μελλοντική</u>***<u>:</u>* Αντί να παρέχεται μία αιτιολόγηση στο εκθεσιακό μέρος των εγχειριδίων, αναφέρεται ρητά ότι μια απόδειξη ή άλλη μορφή αιτιολόγησης μπορεί να βρεθεί σε προηγούμενο ή μελλοντικό μάθημα ή σε κάποια εξωτερική πηγή (π.χ. Διαδίκτυο). **<u>v) Αφήνεται στο μαθητή</u>***<u>:</u>* Αντί να παρέχεται μία αιτιολόγηση στο εκθεσιακό μέρος, δηλώνεται ρητά ότι οι μαθητές είναι αυτοί που θα δώσουν την αιτιολόγηση (π.χ. αργότερα σε ένα σετ ασκήσεων). **<u>vi) Καμία</u>***<u>:</u>* Δεν υπάρχει καμία αιτιολόγηση για ένα δοσμένο μαθηματικό ισχυρισμό στο	επιχειρήματος που πρέπει να παραχθεί.	

Εκθεσιακό μέρος		Ασκήσεις μαθητή	
	εκθεσιακό μέρος και δε δηλώνεται ρητά αν οι μαθητές θα παράξουν αργότερα μία αιτιολόγηση.		
	Δηλώσεις σχετικά με τη συλλογιστική και απόδειξη	**Ασκήσεις σχετικά με τη συλλογιστική και απόδειξη**	

Πίνακας 1.9: *Αναλυτικό πλαίσιο για συλλογιστική και απόδειξη στα εγχειρίδια γεωμετρίας (Otten et al., 2014, p. 58)*

Αναφορικά με την ανάλυση σε επίπεδο εκθεσιακών ενοτήτων, σημειώθηκε η παρουσία περίπου 2,5 έως 5 δηλώσεων **συλλογιστικού και αποδεικτικού** χαρακτήρα ανά εκθεσιακό μάθημα, εκ των οποίων περίπου τα ¾ πραγματεύονταν μία γενική κλάση μαθηματικών αντικειμένων. Παράλληλα, εντοπίστηκε ένας σχετικά μικρός αριθμός δηλώσεων συγκεκριμένης φύσης και μάλιστα όταν αυτές δίδονταν είχαν συνήθως τη μορφή λυμένων παραδειγμάτων. Επιπρόσθετα, οι αιτιολογήσεις κατανεμήθηκαν αρκετά ομοιόμορφα μεταξύ των κατηγοριών παραγωγικά επιχειρήματα, εμπειρικά επιχειρήματα, αφήνεται στο μαθητή και καμία αιτιολόγηση. Ωστόσο, τρία από τα εξεταζόμενα εγχειρίδια επέλεξαν να κατανείμουν με διαφορετικό τρόπο τις αιτιολογήσεις τους, παραλείποντας ή προάγοντας σε μεγαλύτερο βαθμό κάποιες από τις προαναφερθείσες κατηγορίες αιτιολόγησης. Οι περισσότερες ασκήσεις **συλλογιστικής και απόδειξης** πραγματοποιήθηκαν γύρω από συγκεκριμένες μαθηματικές δηλώσεις, ενώ ένα σημαντικό μέρος από το μικρό αριθμό γενικών δηλώσεων που εντοπίστηκαν παρείχε συγκεκριμένες υποδείξεις στους μαθητές. Παρόλα' αυτά, δύο εγχειρίδια προχώρησαν σε μία ισορροπημένη στο θεματικό κορμό τους ενσωμάτωση γενικών και ειδικών δηλώσεων. Ακόμη, ο προσδιορισμός της αληθοφάνειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού και η παροχή εξηγήσεων ή άλλων μη αποδεικτικών αιτιολογήσεων αναφορικά με κάποιες μαθηματικές δηλώσεις αποτέλεσαν τις πιο συνήθεις δραστηριότητες **συλλογιστικής και απόδειξης** που ζητήθηκαν από τους μαθητές. Άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι σε δύο εγχειρίδια τουλάχιστον το ένα τέταρτο των ασκήσεων **συλλογιστικής και απόδειξης** ζητούσε από τους μαθητές να κατασκευάσουν μια απόδειξη, ενώ στα υπόλοιπα τέσσερα εγχειρίδια οι ασκήσεις αυτού του τύπου ανέρχονταν μόνο σε 13% -15%. Επίσης, από τις ασκήσεις που αφορούσαν ρητά την απόδειξη, όλα τα εγχειρίδια εκτός από ένα πραγματεύονταν μια συγκεκριμένη παρά μία γενική μαθηματική δήλωση στις ασκήσεις αυτές.

Ταυτόχρονα, τα ερευνητικά πορίσματα ανέδειξαν μια έντονη αντίθεση μεταξύ των ειδών των μαθηματικών δηλώσεων που παρουσιάζονται στις εκθεσιακές ενότητες των εγχειριδίων και εκείνων που εμφανίζονται στις ασκήσεις των μαθητών: τουλάχιστον τα 2/3 των αντικειμένων **συλλογιστικής και απόδειξης** στα εκθεσιακά μέρη και τα 4/5 αυτών ήταν γενικής φύσεως. Αντίθετα, μόλις το ένα πέμπτο των δηλώσεων στις ασκήσεις **συλλογιστικής και απόδειξης** ήταν γενικού χαρακτήρα. Μάλιστα, το χάσμα αυτό αυξανόταν περισσότερο όταν συνεκτιμούνταν παράγοντες όπως τα λυμένα παραδείγματα και οι συγκεκριμένες υποδείξεις. Από τους μαθηματικούς ισχυρισμούς που παρουσιάζονται στις εκθεσιακές ενότητες των εγχειριδίων, πολλοί δικαιολογήθηκαν τόσο παραγωγικά όσο και εμπειρικά. Ωστόσο, εντός των ασκήσεων, το είδος της αιτιολόγησης που έπρεπε να παράσχει ο μαθητής παρέμενε τις περισσότερες φορές κρυφός (implicit). Τέλος, αναφορικά με τις δηλώσεις ή τις ασκήσεις σχετικά με την πρακτική της **συλλογιστικής και της απόδειξης**, παρατηρήθηκε έντονη ομοιότητα μεταξύ των εκθεσιακών ενοτήτων και των ασκήσεων των μαθητών, υπό την έννοια του ότι ευκαιρίες αυτού του τύπου ήταν σπάνιες και στα δύο μέρη.

Η έρευνα των Hong & Choi (2018) αποσκοπούσε στην ανάλυση και σύγκριση των **ευκαιρίες συλλογιστικής και απόδειξης** που συναντώνται σε δύο αμερικανικά εγχειρίδια μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που βασίζονται σε πρότυπα και σε τρία κορεατικά εγχειρίδια επίσης της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης. Ειδικότερα, η μελέτη καθοδηγήθηκε από τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- ❖ Ποια είναι η φύση των **ευκαιριών συλλογιστικής και απόδειξης** στα κορεατικά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας και στα αμερικανικά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας που βασίζονται σε πρότυπα;
  - ✓ Τι είδους αιτιολογήσεις χρησιμοποιούνται στα εγχειρίδια;
  - ✓ Τι είδους **ευκαιρίες συλλογιστικής και απόδειξης** παρέχονται στα εγχειρίδια;

❖ Ποιες ομοιότητες και διαφορές παρατηρούνται στις **ευκαιρίες συλλογιστικής και απόδειξης** στα κορεατικά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας και στα αμερικανικά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας που βασίζονται σε πρότυπα;

Συνολικά, αναλύθηκαν και κωδικοποιήθηκαν 161 σελίδες, 74 δηλώσεις και 940 προβλήματα από τα αμερικανικά εγχειρίδια και 211 σελίδες, 180 δηλώσεις και 758 προβλήματα από τα αντίστοιχα κορεατικά. Οι τίτλοι των κεφαλαίων που αξιολογήθηκαν από τα αμερικανικά εγχειρίδια είναι οι «Μοτίβο σε σχήματα», «Συλλογιστική και Απόδειξη», «Ομοιότητα και Ισότητα» και οι αντίστοιχοι από τα κορεατικά εγχειρίδια είναι οι «Τα βασικά στο πολύγωνο», «Δισδιάστατα και Τρισδιάστατα Σχήματα», «Ιδιότητες Πολυγώνου και Ομοιότητα Πολυγώνου» και «Πυθαγόρειο Θεώρημα». Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας βασίστηκε στο αναλυτικό πλαίσιο της μελέτης των Otten et al. (2014) και αποτυπώνεται στον Πίνακα 1.10:

	Εκθεσιακό Μέρος	**Άσκηση**
Είδος δήλωσης	Συγκεκριμένο Γενικό Γενικό με παρεχόμενη συγκεκριμένη υπόδειξη	Συγκεκριμένο Γενικό Γενικό με παρεχόμενη συγκεκριμένη υπόδειξη
Αναμενόμενη Δραστηριότητα		Κάνε μία εικασία Διερεύνησε μία εικασία Αξιολόγησε ένα επιχείρημα Κατασκεύασε μια απόδειξη Συμπλήρωσε τα κενά Βρες ένα αντιπαράδειγμα
Είδη αιτιολόγησης	Παραγωγικό Εμπειρικό Καμία αιτιολόγηση	

Πίνακας 1.10: *Αναλυτικό Πλαίσιο (Hong & Choi, 2018, p. 85)*

Τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης ανέδειξαν ότι τα κορεατικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν περισσότερες ανά μάθημα δηλώσεις που σχετίζονται με τη **συλλογιστική και την απόδειξη** στο εκθεσιακό τους μέρος. Παράλληλα, διαπιστώθηκε ότι αντί τα αμερικανικά εγχειρίδια να παρέχουν αποδείξεις για διαφορετικές δηλώσεις και θεωρήματα, ζητείται από τους μαθητές τα εικάσουν και να τα αποδείξουν. Αντίθετα, τα κορεατικά εγχειρίδια αποδεικνύουν δηλώσεις και θεωρήματα τη στιγμή διατύπωσής τους. Αναφορικά με τα είδη των δηλώσεων στις εκθεσιακές ενότητες, η μελέτη ανέδειξε ότι στα εγχειρίδια και των δύο χωρών κυριαρχούν περισσότερο οι γενικές δηλώσεις. Ειδικότερα, τα κορεατικά εγχειρίδια παρέχουν αποδείξεις στις εκθεσιακές τους ενότητες προκειμένου να καταδείξουν τον τρόπο με τον οποίο οι γενικές δηλώσεις μπορούν να αποδειχθούν, ενώ τα αμερικανικά εγχειρίδια διατυπώνουν προβλήματα που σχετίζονται με την απόδειξη στις ενότητες ασκήσεων. Σχετικά με το είδος των αιτιολογήσεων στις εκθεσιακές ενότητες παρατηρήθηκε ότι τα κορεατικά εγχειρίδια συνήθως παραθέτουν δηλώσεις και θεωρήματα και τα αποδεικνύουν παραγωγικά. Αντίθετα, μόνο ένας περιορισμένος αριθμός δηλώσεων **συλλογιστικού και αποδεικτικού** χαρακτήρα αιτιολογείται στα αμερικανικά εγχειρίδια. Τα τελευταία αφήνουν τους μαθητές να δουλεύουν πάνω σε διάφορα προβλήματα. Αντί λοιπόν να παρέχουν αποδείξεις στα εκθεσιακά τους μέρη, τα αμερικανικά εγχειρίδια επιτρέπουν στους μαθητές να κάνουν εικασίες και να τις αποδείξουν. Επίσης, περίπου το 82% των δηλώσεων των αμερικανικών εγχειριδίων δεν έλαβαν αιτιολόγηση, ενώ το 74% των δηλώσεων **συλλογιστικής και αποδεικτικής** φύσεως στα κορεατικά εγχειρίδια αιτιολογούνταν.

Συνολικά, διαπιστώθηκε ότι το ποσοστό των προβλημάτων που ζητούν δραστηριότητες **συλλογιστικής και απόδειξης** ανέρχεται σε 40% στα αμερικανικά εγχειρίδια και 20% στα αντίστοιχα κορεατικά. Αναφορικά με το είδος των προβλημάτων **συλλογιστικής και αποδεικτικής** υπόστασης, εντοπίστηκε ότι οι συγκεκριμένες δηλώσεις είναι επικρατέστερες στις ασκήσεις των εγχειριδίων. Σχετικά με τα είδη δραστηριοτήτων **συλλογιστικής και αποδεικτικής** χροιάς στις ασκήσεις, η μελέτη κατέδειξε ότι στα αμερικανικά εγχειρίδια οι δύο κυρίαρχες κατηγορίες είναι η «Αξιολόγηση συγκεκριμένων επιχειρημάτων» και «Κατασκευή μιας απόδειξης», ενώ στα αντίστοιχα κορεατικά πρωταρχική κατηγορία είναι η «Αξιολόγηση συγκεκριμένων επιχειρημάτων». Συγκριτικά με τα κορεατικά εγχειρίδια, τα αμερικανικά περιλαμβάνουν διάφορες δραστηριότητες **συλλογιστικής και απόδειξης**. Εκτός από διαφορετικά είδη δραστηριοτήτων, τα αμερικανικά εγχειρίδια επιτρέπουν στους μαθητές να κάνουν και να διερευνήσουν εικασίες, ενώ τα κορεατικά εγχειρίδια σπάνια το επιτρέπουν. Επιπρόσθετα, τα προβλήματα στα κορεατικά εγχειρίδια παρέχουν ευκαιρίες για διερεύνηση εικασιών, αλλά οι ευκαιρίες για διατύπωση εικασιών είναι πολύ σπάνιες. Άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι στα κορεατικά εγχειρίδια δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα που να ζητάει από το μαθητή να κατασκευάσει μια απόδειξη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα εν λόγω εγχειρίδια αντί για τη λέξη «να αποδείξετε» χρησιμοποιείται η λέξη «να εξηγήσετε» τόσο στις εκθεσιακές ενότητες όσο και στις ενότητες των ασκήσεων.

Η έρευνα του Bergwall (2021) μελέτησε το χαρακτήρα των **ευκαιριών εκμάθησης της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη**, όπως αυτός παρουσιάζεται στις εκθεσιακές ενότητες και στα έργα σουηδικών και φιλανδικών σειρών εγχειριδίων της ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με εστίαση ειδικότερα στο μαθηματικό περιεχόμενο των λογαρίθμων και της συνδυαστικής. Το θεωρητικό υπόβαθρο και οι διαδικασίες που υιοθετήθηκαν για τη διεξαγωγή της έρευνας προσαρμόστηκαν στα αναλυτικά πλαίσια των μελετών των Thompson et al. (2012) και Bergwall & Hemmi (2017). Σχετικά με την εξέταση των εκθεσιακών ενοτήτων, ως μονάδα ανάλυσης επιλέχθηκε αυτή του κύριου αποτελέσματος μαζί με την αιτιολόγηση που το ακολουθούσε. Ως **κύριο αποτέλεσμα** στοιχειοθετήθηκε μία «αληθής μαθηματική δήλωση που οι συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων τονίζουν π.χ. με ένα έγχρωμο φόντο ή με ένα πλαίσιο, ή μέσω του χαρακτηρισμού της ως θεώρημα, αρχή ή κανόνα» (p. 736), ενώ ως **αιτιολόγηση** ορίστηκε «οποιοδήποτε εμπειρικό ή παραγωγικό επιχείρημα που αποσκοπεί να πείσει τον αναγνώστη για την αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης» (p. 735). Το είδος της συλλογιστικής με βάση το οποίο ταξινομήθηκαν όλες οι αιτιολογήσεις των κύριων αποτελεσμάτων συγκροτήθηκε από τις ακόλουθες κατηγορίες: **Γενική Απόδειξη (G)**, **Ειδική περίπτωση ή άλλη αιτιολόγηση μη αποδεικτικού χαρακτήρα (S)**, **Αφήνεται στο μαθητή (L)** και **Καμία Αιτιολόγηση (N)**. Ταυτόχρονα, λήφθηκε υπόψη ο τρόπος χαρακτηρισμού των κύριων αποτελεσμάτων και των αιτιολογήσεων καθώς και η θέση των τελευταίων. Αναφορικά με την εξέταση των έργων, τη μονάδα ανάλυσης συναποτέλεσαν οι ασκήσεις των μαθητών, οι δραστηριότητες καθώς και όλα τα λυμένα παραδείγματα που εμπεριέχονταν στις εκθεσιακές ενότητες των εγχειριδίων, τα οποία και κατηγοριοποιήθηκαν είτε **ως σχετικά με την απόδειξη (proof-related/RP)** είτε **ως μη σχετικά με την απόδειξη (not proof-related/N)**. Ένα έργο θεωρήθηκε ότι σχετίζεται με την απόδειξη στην περίπτωση που περιελάμβανε κάποια από τις εξής φύσεις συλλογιστικής: **διατύπωση εικασίας (M)**, **διερεύνηση εικασίας (I)**, **ανάπτυξη επιχειρήματος (D)**, **αξιολόγηση επιχειρήματος (E)**, **διόρθωση ή εντοπισμός λάθους (C)**, **παροχή αντιπαραδείγματος (X)**, **σκιαγράφηση απόδειξης**

(P), πραγματοποίηση κάποιας άλλης συλλογιστικής ενέργειας (O). Παράλληλα, εκτός από τη φύση διερευνήθηκε και το είδος της συλλογιστικής των παρουσιαζόμενων έργων και πιο συγκεκριμένα το αν τα τελευταία διέπονται από μία συλλογιστική που συνδέεται με μία **συγκεκριμένη (S)** ή **μια γενική (G) περίπτωση**.

Τα ερευνητικά πορίσματα ανάλυσης των εκθεσιακών ενοτήτων κατέδειξαν ότι σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια και των δύο χωρών, τα εντοπιζόμενα κύρια αποτελέσματα περιέγραφαν γενικές ιδιότητες (ιδιότητες για μη πεπερασμένες κλάσεις αντικειμένων) και χαρακτηρίζονταν στην πλειοψηφία τους από τους συγγραφείς ως αρχές (principles) ή νόμοι (laws). Το φινλανδικό εγχειρίδιο διαθέτει πιο λεπτομερείς εκθεσιακές ενότητες σε σχέση με τα αντίστοιχα σουηδικά, αναπτύσσει περισσότερα κύρια αποτελέσματα και εισάγει επίσης με πιο άμεσο τρόπο τα γενικά αποτελέσματα. Ωστόσο, τα σουηδικά εγχειρίδια προσφέρουν συνήθως εισαγωγικές δραστηριότητες και ασκήσεις μέσω των οποίων οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν και να εικάσουν γενικές ιδιότητες. Τόσο στα 2 σουηδικά όσο και στο 1 φινλανδικό εγχειρίδια, τα κύρια αποτελέσματα διατυπώνονται μετά την παρουσίαση μιας αιτιολόγησης και δικαιολογούνται με την ίδια περίπου συχνότητα. Καμία από τις δοθείσες αιτιολογήσεις δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό. Στην περίπτωση των φινλανδικών εγχειριδίων οι αιτιολογήσεις είναι σχεδόν πάντα γενικές αποδείξεις και χρησιμοποιούνται συχνά φράσεις όπως «αποδεικνύουμε». Στα αντίστοιχα σουηδικά εγχειρίδια κυριαρχούν επιχειρήματα ειδικού χαρακτήρα. Επιπλέον, λυμένα παραδείγματα που σχετίζονται με την απόδειξη βρίσκονται μόνο στα σουηδικά εγχειρίδια. Σε γενική κλίμακα, η μελέτη ανέδειξε τη σε μεγαλύτερο βαθμό εμφάνιση αποδείξεων στα φιλανδικά εγχειρίδια, τα οποία παρείχαν περισσότερες ευκαιρίες εκμάθησης του τυπικού, παραγωγικού συλλογισμού σε αντίθεση με τα σουηδικά εγχειρίδια τα οποία προσέφεραν καλύτερες ευκαιρίες ανακάλυψης των γενικών ιδιοτήτων.

Αναφορικά με το ποσοστό των έργων που σχετίζονταν με την απόδειξη, αυτό ανήρθε σε 14% στα σουηδικά εγχειρίδια και σε 5% στα αντίστοιχα φιλανδικά. Στο φινλανδικό εγχειρίδιο, όλα τα έργα εκτός από 1 είναι γενικής χροιάς, ενώ στα σουηδικά εγχειρίδια είναι κυρίως ειδικής χροιάς. Σε ευρύτερο πλαίσιο διαπιστώθηκε πως τα σουηδικά εγχειρίδια προσέφεραν περισσότερες **ευκαιρίες εκμάθησης της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη** και κάλυπταν περισσότερες κατηγορίες φύσεως της συλλογιστικής, όντας περισσότερο προσανατολισμένα στην εικασία, στην αξιολόγηση επιχειρημάτων και στην αξιοποίηση εμπειρικών αποδεικτικών σχημάτων. Αντίθετα, το φινλανδικό εγχειρίδιο προσανατολίζονταν στη χρήση παραγωγικών αποδεικτικών σχημάτων. Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι κανένα εξεταζόμενο εγχειρίδιο δεν εμπεριείχε έργα που να απαιτούν την παροχή ενός αντιπαραδείγματος ή τη σκιαγράφηση μιας απόδειξης.

Κεφάλαιο 2. Μεθοδολογία

2.1 Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα παρούσας μελέτης

Ο **βασικός σκοπός** της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της χρήσης της έννοιας της επιχειρηματολογίας σε ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια μαθηματικών της Β' και Γ' Γυμνασίου. Ειδικότερα, η μελέτη προσανατολίζεται στην εξέταση των ευκαιριών που παρέχονται στους μαθητές, να εμπλακούν στη συλλογιστική διαδικασία που σχετίζεται με την απόδειξη σε έργα και εκθεσιακές ενότητες της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας. Παρά τη δυσκολία υλοποίησης της διδασκαλίας της απόδειξης και της γεωμετρικής συλλογιστικής στο Γυμνάσιο (Zhang & Qi, 2019), ο λόγος επικέντρωσης στην εκπαιδευτική αυτή βαθμίδα βασίζεται στο γεγονός ότι αποτελεί κρίσιμο σημείο καμπής για τους μαθητές αναφορικά με το διδακτικό αντικείμενο των μαθηματικών (Bacallao & Lacefield, 2005). Ακόμη, η έμφαση στις συγκεκριμένες τάξεις δίδεται λόγω της σημαντικότητας της φύσης των μαθηματικών εννοιών που εισάγονται και στις δύο χώρες για τη μετέπειτα μαθηματική πορεία των μαθητών στο Λύκειο. Η επικέντρωση στην έννοια της επιχειρηματολογίας γίνεται εξαιτίας του ουσιώδους ρόλου που αυτή διαδραματίζει στη μαθηματική εκπαίδευση. Το ερευνητικό ενδιαφέρον εξέτασής του σχολικού μαθηματικού εγχειριδίου πηγάζει από την περιορισμένη ερευνητική δραστηριότητα γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα. Παράλληλα, η εξέταση σχολικών εγχειριδίων δύο διαφορετικών χωρών αποσκοπεί στη συγκριτική αποτίμηση της μαθηματικής φιλοσοφίας δύο διαφορετικών εκπαιδευτικών συστημάτων υπό το πρίσμα της επιχειρηματολογίας.

Σύμφωνα με τον σκοπό της έρευνας θέτουμε τα ακόλουθα **ερευνητικά ερωτήματα**:

(**ΕΕ1**): Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;

(**ΕΕ2**): Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;

2.2 Το δείγμα και τα κριτήρια επιλογής του

Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας εξετάστηκαν με βάση τον επιλεγόμενο μεθοδολογικό μηχανισμό ανάλυσης τα εγχειρίδια που καταγράφονται στον Πίνακα 2.1:

Τίτλος	Εκδότης	Συγγραφείς	Έτος	Κωδικός
Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή	**Διόφαντος**	**Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, Ρεκούμης**	**2018**	**GR1**
Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή	**Διόφαντος**	**Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης**	**2017**	**GR2**
Myriade – mathématiques 4e * Manuel de l'élève	**Bordas**	**Boullis, Percot, Cambon, Gallien, Herrmann, Soto**	**2021**	**FR1**
Myriade – mathématiques 3e * Manuel de l'élève	**Bordas**	**Boullis, Percot, Cambon, Gallien, Herrmann, Soto**	**2021**	**FR2**

Πίνακας 2.1: *Εξεταζόμενα ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια*

Οι λόγοι επιλογής των συγκεκριμένων γαλλικών σειρών εγχειριδίων μαθηματικών είναι ποικίλοι και αντλούνται από την ιστοσελίδα διάθεσής τους (www.editions-bordas.fr). Αρχικά, ένας σημαντικός παράγοντας για την επιλογή μας ήταν η σύνθεση της συγγραφικής ομάδας η οποία αποτελείται από **καθηγητές που διδάσκουν καθημερινά σε ποικίλα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα**, πράγμα που συνεπάγεται την αλληλεπίδραση με μαθητές που διαθέτουν διαφορετικούς μηχανισμούς μαθηματικής εκμάθησης. Επιπρόσθετα, τα παραπάνω εγχειρίδια διακρίνονται και για τη **συνειδητοποίηση του ετερογενούς χαρακτήρα των μαθηματικών τάξεων** της 3^{e} και 4^{e}, κάτι που θεωρούμε ότι επηρεάζει άμεσα τον τρόπο επικοινωνίας της μαθηματικής πληροφορίας στους μαθητές και επομένως είναι ιδιαίτερης ερευνητικής αξίας. Ακόμη, πληρούν **τα πιο πρόσφατα σημεία αναφοράς προόδου (2019) του μαθηματικού προγράμματος σπουδών** των εξεταζόμενων τάξεων, ενώ παράλληλα περιλαμβάνουν **έργα που συγκροτούνται αποκλειστικά στη βάση αξιοποίησης των επιμέρους εννοιολογικών κατευθύνσεων των 6 μαθηματικών ικανοτήτων** που προβλέπονται από το γαλλικό ΑΠ.. Τέλος, δίδουν **ιδιαίτερη έμφαση στην εκμάθηση της απόδειξης**.

Οι θεματικές ενότητες που εξετάζονται είναι από τη γεωμετρία και την τριγωνομετρία και καταγράφονται λεπτομερώς στον Πίνακα 2.2:

Εγχειρίδιο	Θεματικές Ενότητες
Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή	**1.4 Πυθαγόρειο Θεώρημα** **2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας** **2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας** **2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης** **2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^{o}, 45^{o} και 60^{o}**
Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή	**1.1 Ισότητα τριγώνων** **1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων** **1.3 Θεώρημα του Θαλή** **1.5.Β Όμοια τρίγωνα** **2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας** **Γενικές Ασκήσεις 1^{ου} Κεφαλαίου** **Γενικές Ασκήσεις 2^{ου} Κεφαλαίου**
Myriade – mathématiques 4e * Manuel de l'élève	**Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα** **Χαρακτηρίζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την ισότητα του Πυθαγόρα** **Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου** **Αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ή δεν είναι ορθογώνιο** **Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή** **Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες** **Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**

Εγχειρίδιο	Θεματικές Ενότητες
Myriade – mathématiques 3e * Manuel de l'élève	**Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή**
	Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες
	Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα
	Γνωρίζω το συνημίτονο, το ημίτονο και την εφαπτομένη μιας γωνίας
	Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου
	Προσδιορίζω το μέτρο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου
	Ισότητα του Πυθαγόρα
	Το θεώρημα του Θαλή και/ή το αντίστροφό του
	Γωνίες, Ημίτονο, Συνημίτονο, Εφαπτομένη

Πίνακας 2.2: *Εξεταζόμενες θεματικές ενότητες*

Η επιλογή επικέντρωσης σε γεωμετρικά περιεχόμενα έγινε εξαιτίας της επικράτησης σε μεγαλύτερο βαθμό της συλλογιστικής και της απόδειξης στα περιεχόμενα αυτά (Otten et al., 2014). Επιπρόσθετα, οι λόγοι εστίασης σε μαθηματικές ιδέες της τριγωνομετρίας εδράζονται τόσο στην παρατήρηση περιορισμένου ερευνητικού ενδιαφέροντος γύρω από την τελευταία παρά τη σπουδαιότητά της (Akkok, 2008), όσο και στη διαπίστωση της δυσκολίας και του αφηρημένου χαρακτήρα που αυτή παρουσιάζει για τους μαθητές συγκριτικά με τους υπόλοιπους μαθηματικούς τομείς (Mensah, 2017). Πράγματι, η αναδίφηση της βιβλιογραφίας αναδεικνύει την παρουσία ερευνητικών πορισμάτων που καταδεικνύουν τη διενέργεια πολλών διαφορετικών λαθών συλλογιστικής φύσεως από την πλευρά των μαθητών στη συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή (Gur, 2009). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω ερευνητικά ευρήματα σε συνδυασμό με το σημαντικό ρόλο που εξακολουθούν να κατέχουν οι τριγωνομετρικές έννοιες στο μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου (May & Courtney, 2016), κρίθηκε αναγκαία η συμπερίληψη και της τριγωνομετρίας στο ερευνητικό μας πλαίσιο.

Στην εργασία αυτή η ανάλυση πραγματοποιείται αφενός στις **εκθεσιακές ενότητες** (expository sections) και αφετέρου στα **έργα** (tasks) που παρουσιάζονται στα εξεταζόμενα κεφάλαια του εκάστοτε εγχειριδίου των δύο χωρών.

Ως **εκθεσιακές ενότητες** ορίζονται τα τμήματα εκείνα στα οποία οι συγγραφείς εισάγουν τις νέες μαθηματικές έννοιες, προχωρούν στη διατύπωση αλλά και στην αιτιολόγηση μαθηματικών δηλώσεων και παρουσιάζουν λυμένα παραδείγματα. Ειδικότερα, για τη διερεύνηση του συλλογιστικού προσανατολισμού των συγκεκριμένων ενοτήτων υιοθετήθηκε ως μονάδα ανάλυσης αυτή του κύριου αποτελέσματος μαζί με την αιτιολόγησή του. Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε την εννοιολογική προσέγγιση του Bergwall (2021) και θεωρούμε:

- ως **κύριο αποτέλεσμα** (main result) «μία αληθή μαθηματική δήλωση που οι συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων τονίζουν π.χ. με ένα έγχρωμο φόντο ή με ένα πλαίσιο, ή μέσω του χαρακτηρισμού της ως θεώρημα, αρχή ή κανόνα» (p. 736).
- ως **αιτιολόγηση** (justification) «οποιοδήποτε εμπειρικό ή παραγωγικό επιχείρημα που αποσκοπεί να πείσει τον αναγνώστη για την αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης» (p. 735).

Ως **μαθηματικά έργα** θεωρούμε το σύνολο των διακριτών υποερωτημάτων των λυμένων και άλυτων εργασιών. Για παράδειγμα, αν μία εργασία απαρτίζεται από τα υποερωτήματα α), β), γ) κωδικοποιείται ως τρία έργα. Στα ελληνικά εγχειρίδια μαθηματικών τη συγκεκριμένη μονάδα ανάλυσης συγκροτούν οι *Δραστηριότητες*, οι *Εφαρμογές,* τα *Παραδείγματα – Εφαρμογές* , οι *Ερωτήσεις Κατανόησης,* οι *Προτεινόμενες Ασκήσεις – Προβλήματα,* οι *Ασκήσεις,* οι *Γενικές Ασκήσεις,* οι μαθηματικοί γρίφοι με τίτλο *Για διασκέδαση* και οι ενότητες με τίτλο *Ένα θέμα από την ιστορία των μαθηματικών*. Στα αντίστοιχα γαλλικά, η παραπάνω μονάδα ανάλυσης απαρτίζεται από τις *Δραστηριότητες* των ενοτήτων *Ας ψάξουμε μαζί* καθώς και από τις ασκήσεις των ενοτήτων *Στόχος 1*, *Στόχος 2*, *Στόχος 3*, *Ασκούμαι μόνος/η μου*, *Επιλύω προβλήματα*, *Αναπτύσσω τις ικανότητές μου*, *Χρησιμοποιώ τις ικανότητές μου*, *Πολύπλοκες εργασίες*, *Θέματα προηγούμενων ετών για τη λήψη του διπλώματος (brevet)*, *Στο δρόμο για το δίπλωμα (brevet)*.

Συνολικά, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας κωδικοποιήθηκαν 1.255 έργα (325 ελληνικά και 930 γαλλικά) και 94 κύρια αποτελέσματα (57 ελληνικά και 37 γαλλικά).

2.3. Μέθοδος αξιολόγησης των σχολικών εγχειριδίων

Η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας βασίζεται αφενός στο θεωρητικό εργαλείο της μελέτης του Bergwall (2021) και αφετέρου στις τέσσερις πτυχές του μάκρο επιπέδου των Li, Chen, & An (2009). Το κάθε ένα από τα δύο παραπάνω μεθοδολογικά εργαλεία δίνει τη δυνατότητα αποκωδικοποίησης διαφορετικών πτυχών των εξεταζόμενων εγχειριδίων εντάσσοντας με αυτό τον τρόπο τη μελέτη μας σε ένα πιο πλήρες πλαίσιο νοηματοδότησης.

2.3.1 Το εργαλείο των Li, Chen, & An

Το εργαλείο των Li, Chen, & An (2009) επιτρέπει την ανάλυση της δομής των εξεταζόμενων εγχειριδίων των δύο χωρών καθώς επικεντρώνεται σε μία μελέτη στο μάκρο επίπεδο. Σύμφωνα με τους Li, Chen, & An (2009), μία τέτοια ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου δείχνει το **πότε** και το **πώς** μπορεί **να αναπτυχθεί και να ενδυναμωθεί η εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές**. Ο Πίνακας 2.3 παρουσιάζει τις τέσσερις πτυχές στις οποίες εστιάζει η ανάλυση σε μάκρο επίπεδο των Li, Chen, & An (2009).

Πτυχή	Επεξήγηση
Προηγούμενο Κεφάλαιο	**Τι διδάσκεται πριν** από τη μελετώμενη μαθηματική έννοια
Σελίδες που χρησιμοποιούνται	**i)** Ο **αριθμός των σελίδων** που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση της μελετώμενης μαθηματικής έννοιας στο κάθε εγχειρίδιο **ii)** Το **ποσοστό των σελίδων** που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση του μελετώμενου μαθηματικού περιεχομένου
Οργάνωση μαθηματικού περιεχομένου σε επίπεδο εγχειριδίου	**i) Συνδυασμός** μελετώμενης έννοιας με κάποια άλλη **ii) Παρουσίαση** μελετώμενης έννοιας ως ανεξάρτητο κεφάλαιο **iii) Παρουσίαση** μελετώμενης έννοιας ως μάθημα σε ένα κεφάλαιο
Οργάνωση ενοτήτων που αφορούν τη μελετώμενη μαθηματική έννοια σε επίπεδο εγχειριδίου	**i) Κεφάλαια/Ενότητες** που αφιερώνονται για την παρουσίαση της μελετώμενης μαθηματικής έννοιας **ii) Δομική οργάνωση** κεφαλαίων/ενοτήτων

Πίνακας 2.3: *Πτυχές ανάλυσης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων στο μάκρο επίπεδο (Li, Chen, & An, 2009, p. 814)*

Για την πραγματοποίηση της αξιολόγησης των εγχειριδίων σε μάκρο επίπεδο υιοθετήθηκε η ακόλουθη διαδικασία. Αρχικά, προσδιορίσαμε την τάξη στην οποία αναπτύσσονται οι μελετώμενες μαθηματικές έννοιες στα επιλεγόμενα ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια μαθηματικών. Στη συνέχεια επιβεβαιώσαμε τη θέση του εξεταζόμενου κάθε φορά μαθηματικού περιεχομένου στηριζόμενοι στο ΑΠ των μαθηματικών των δύο χωρών. Έπειτα, αναλύσαμε την εκάστοτε μαθηματική έννοια με βάση τις τέσσερις συνιστώσες του Πίνακα 2.3.

2.3.2 Το εργαλείο του Bergwall

Το εργαλείο του Bergwall (2021) αξιοποιείται με στόχο την προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων υπό το πρίσμα της επιχειρηματολογίας. Αρχικά, η επιλογή του κρίθηκε ιδιαίτερα κατάλληλη για την εξυπηρέτηση του ερευνητικού μας στόχου, διότι προέκυψε από το συνδυασμό και την κατάλληλη προσαρμογή των μεθοδολογιών που εφαρμόστηκαν στις μελέτες των Thompson et al. (2012) και Bergwall & Hemmi (2017). Σύμφωνα με τον Bergwall (2021), οι **αναθεωρήσεις** και οι **τροποποιήσεις των υπαρχόντων πλαισίων** είναι **θεωρητικής αξίας** όπως επίσης και **αναλυτικής σημασίας**, καθώς αντιπροσωπεύουν μια **εννοιολόγηση των πτυχών της συλλογιστικής που είναι σημαντικές αναφορικά με την απόδειξη**. Επίσης, ο μεθοδολογικός μηχανισμός του Bergwall (2021) επιτρέπει τη σφαιρική αποσαφήνιση του συλλογιστικού φάσματος που αποτυπώνεται στα μελετώμενα εγχειρίδια, λόγω της εστίασής του στην ανάλυση των έργων αλλά και των εκθεσιακών ενοτήτων. Σύμφωνα με τους Bergwall & Hemmi (2017), η οικοδόμηση μιας **πλήρους** και **συνεκτικής εικόνας των ευκαιριών για την εκμάθηση της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη** απαιτεί την εξέταση ενός τομέα ανάλυσης που συντίθεται **τόσο από τα έργα όσο και από τις εκθεσιακές ενότητες** των εγχειριδίων.

2.3.2.1 Διαδικασία και πλαίσιο για την αξιολόγηση των εκθεσιακών ενοτήτων

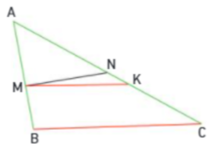
Για τον προσδιορισμό της συλλογιστικής φύσης των εκθεσιακών ενοτήτων πραγματοποιήθηκε αρχικά ο εντοπισμός όλων των κύριων αποτελεσμάτων των εξεταζόμενων ενοτήτων. Στη συνέχεια, κωδικοποιήθηκαν οι αιτιολογήσεις αυτών με βάση τις κατηγορίες του Πίνακα 2.4, οι οποίες αντικατοπτρίζουν το είδος της συλλογιστικής που κάθε φορά προάγεται. Ο Πίνακας 2.5 αποσαφηνίζει περαιτέρω τις κατηγορίες κωδικοποίησης του Πίνακα 2.4, μέσω παράθεσης και επεξήγησης παραδειγμάτων που αντλούνται από τις αναλυόμενες ενότητες των εγχειριδίων των δύο χωρών. Επιπρόσθετα, μελετήθηκαν: α) **ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα κύρια αποτελέσματα και οι αιτιολογήσεις τους** (π.χ. με έγχρωμο πλαίσιο, φόντο), β) **ο τρόπος με τον οποίο χαρακτηρίζονται τα κύρια αποτελέσματα** (π.χ. ιδιότητα, κριτήριο, θεώρημα) **και οι αιτιολογήσεις τους** (π.χ. απόδειξη), γ) **η θέση των αιτιολογήσεων και ειδικότερα το αν αυτές παρατίθενται πριν ή μετά τη διατύπωση των μαθηματικών δηλώσεων που συνοδεύουν**.

Κωδικός	Είδος Αιτιολόγησης	Περιγραφή
G	**Γενική απόδειξη**	Η δήλωση αιτιολογείται **με μια απόδειξη.**
S	**Ειδική περίπτωση ή άλλη αιτιολόγηση μη αποδεικτικού χαρακτήρα**	Η δήλωση αιτιολογείται **μέσω ενός παραγωγικού επιχειρήματος** το οποίο βασίζεται **σε μια ειδική περίπτωση** ή διαθέτει **άλλα «ψεγάδια»** (π.χ. πολύ χαμηλό επίπεδο αυστηρότητας ή φορμαλισμού, επιχείρημα που βασίζεται σε ασαφείς ή διαισθητικές ιδέες ή σε οπτικές εντυπώσεις από διαγράμματα) που το καθιστούν μια αιτιολόγηση μη αποδεικτικού χαρακτήρα.
L	**Αφήνεται στο μαθητή**	**Ζητείται ρητά από το μαθητή να προχωρήσει στην παροχή αιτιολόγησης της δήλωσης**, συνήθως με ένα πρόβλημα στις ασκήσεις για το οποίο απαιτείται η ανάπτυξη κάποιου είδους αιτιολόγησης.
N	**Καμία Αιτιολόγηση**	**Δεν παρέχεται καμία αιτιολόγηση** και **δεν αναφέρεται πουθενά ρητά ότι η αιτιολόγηση της δήλωσης αφήνεται στο μαθητή.**

Πίνακας 2.4: *Πλαίσιο για την κωδικοποίηση του είδους συλλογιστικής των αιτιολογήσεων των κύριων αποτελεσμάτων (Bergwall, 2021, p. 737)*

Κωδικός	Μαθηματική Δήλωση	Αιτιολόγηση	Εξήγηση
G	Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας περιέχεται πάντα μεταξύ 0 και 1.	**Απόδειξη:** Ο λόγος $\frac{\text{Προσκείμενη πλευρά στη γωνία}}{\text{Υποτείνουσα}}$ είναι μεγαλύτερος από το 0 επειδή είναι ένα πηλίκο δύο μέτρων μηκών, επομένως δύο θετικών αριθμών. Η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου, επομένως η προσκείμενη	Η αιτιολόγηση της δήλωσης χαρακτηρίζεται ρητά από τους συγγραφείς του εγχειριδίου ως **démonstration** (απόδειξη).

Κωδικός	Μαθηματική Δήλωση	Αιτιολόγηση	Εξήγηση
	(FR1, p. 237)	πλευρά στη γωνία είναι πάντα μικρότερη από την υποτείνουσα. Συμπεραίνουμε ότι ο λόγος $\frac{\text{Προσκείμενη πλευρά στη γωνία}}{\text{Υποτείνουσα}}$ είναι πάντα μικρότερος από το 1.	
S	**Γενικά:** Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$. (GR2, p. 201)	 Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 9cm και ΓΔ = 3cm, τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 3$. Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ = 6cm και ΗΘ = 2cm, τότε ο λόγος του ΕΖ προς το ΗΘ είναι $\frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$, δηλαδή ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του ΕΖ προς το ΗΘ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΗΘ.	Εδώ, μία **ειδική περίπτωση** (μελέτη του λόγου ευθυγράμμων τμημάτων συγκεκριμένου μήκους) λειτουργεί ως **μέσο καθιέρωσης μιας δήλωσης γενικής ισχύος** (δήλωση που δίδει την προϋπόθεση που πρέπει να πληρούν οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα προκειμένου να είναι ανάλογα). Σύμφωνα με τον Bergwall (2021), «εάν μια ειδική περίπτωση χρησιμοποιείται ως πεποίθηση για μια καθολική δήλωση, πρόκειται για ένα παράδειγμα **εμπειρικού αποδεικτικού σχήματος**» (p. 735).
L	**Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή:**	Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Μ ανήκει στην (ΑΒ), το σημείο Κ είναι το σημείο τομής μεταξύ της παραλλήλου στη (BC) που διέρχεται από το	Ο μαθητής καλείται να προχωρήσει στην απόδειξη του

Κωδικός	Μαθηματική Δήλωση	Αιτιολόγηση	Εξήγηση
	Δίδεται ένα τρίγωνο ABC, ένα σημείο M πάνω στην (AB) και ένα σημείο N πάνω στην (AC) . Αν $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ τότε οι ευθείες (MN) και (BC) είναι παράλληλες. (FR1, p. 237)	σημείο M και της πλευράς (AC). Το σημείο N είναι το σημείο της (AC) τέτοιο ώστε $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$. a) Να αποδείξετε ότι τα μήκη AN και AK είναι ίσα. b) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα σημεία N και K; c) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις ευθείες (MN) και (BC); 	αντιστρόφου του εν λόγω θεωρήματος στα πλαίσια επίλυσης κάποιου έργου που διαπραγματεύεται το συγκεκριμένο θεματικό άξονα. Στην εν λόγω περίπτωση, η απόδειξη του **αντιστρόφου του θεωρήματος του Θαλή** εμφανίζεται με τη μορφή εισαγωγικής δραστηριότητας που δίδεται πριν από την παράθεση των θεωρητικών στοιχείων του αντίστοιχου κεφαλαίου.
N	Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο: Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.	–	Η συγκεκριμένη ιδιότητα δεν αιτιολογείται από τους συγγραφείς του εγχειριδίου και ούτε ζητείται από τους μαθητές να προχωρήσουν στην απόδειξη της στα πλαίσια επίλυσης κάποιου έργου.

Κωδικός	Μαθηματική Δήλωση	Αιτιολόγηση	Εξήγηση
	(GR2, p. 192)		

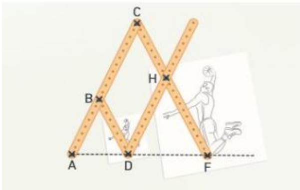
Πίνακας 2.5: *Παραδείγματα των κατηγοριών κωδικοποίησης του είδους συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των κύριων αποτελεσμάτων των εξεταζόμενων ενοτήτων των εγχειριδίων των δύο χωρών*

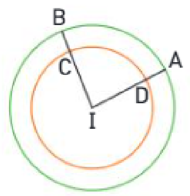
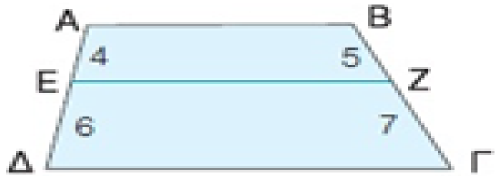
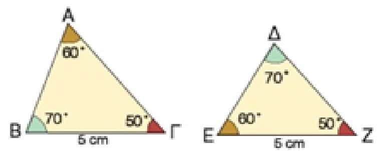
2.3.2.2 Διαδικασία και πλαίσιο για την αξιολόγηση των έργων

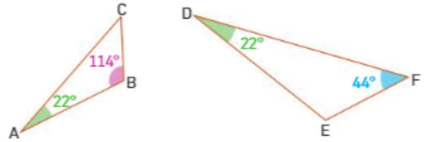
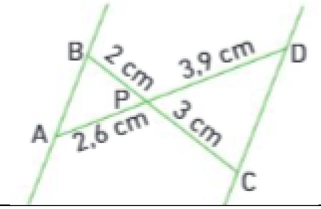
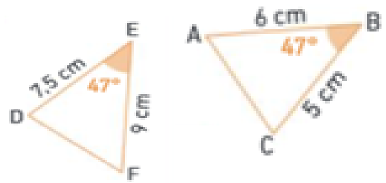
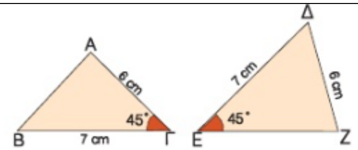
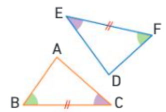
Αρχικά, όλα τα υπό ανάλυση έργα χαρακτηρίστηκαν **ως σχετικά (PR)** ή **μη σχετικά με την απόδειξη (N)**. Προκειμένου ένα έργο να κωδικοποιηθεί ως **PR**, θα πρέπει να πληροί τα επιμέρους εννοιολογικά χαρακτηριστικά **των οχτώ πρώτων κατηγοριών της φύσεως της συλλογιστικής** που περιγράφονται στον Πίνακα 2.6. Παράλληλα, το κάθε ένα από τα εξεταζόμενα έργα αξιολογήθηκε με βάση **το είδος της συλλογιστικής** που ενθαρρύνει και ειδικότερα με βάση το αν εμπλέκει **συλλογιστική σχετικά με μια συγκεκριμένη (S) ή μια γενική (G) περίπτωση**. Για παράδειγμα, το έργο: «*Να αποδείξετε ότι:* $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$ *(GR2, p. 243)*» εμπλέκει συλλογιστική σχετικά με μία **γενική** περίπτωση (G), καθώς η προς απόδειξη ισότητα έχει ισχύ για **οποιαδήποτε τιμή** της γωνίας ω. Αντίθετα, το έργο: «*Το παραλληλόγραμμο MNOP είναι τέτοιο ώστε MP = 4,2 cm, PN = 7 cm και OP = 5,6 cm. Αυτό το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο; (FR1, p. 221)*» εμπλέκει συλλογιστική σχετικά με μία **ειδική** περίπτωση (S), διότι ο προς διερεύνηση ισχυρισμός απαιτεί τη διαχείριση πλευρών **συγκεκριμένων αριθμητικών τιμών**. Το μεθοδολογικό πλαίσιο που αναπτύσσεται στον Πίνακα 2.6 διευκρινίζεται περαιτέρω μέσω παραδειγμάτων έργων από τα τέσσερα εγχειρίδια των δύο χωρών τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.7. Στη συνέχεια ακολουθεί μία αναλυτική παρουσίαση των κατηγοριών της φύσης της συλλογιστικής μέσω μιας πιο λεπτομερούς προσέγγισης των παραδειγμάτων αυτών. Στο σημείο αυτό, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι τα έργα εκείνα τα οποία απαιτούσαν ρητά από το μαθητή να υλοποιήσει μαθηματικές ενέργειες που προϋπέθεταν την εφαρμογή διαφορετικών φύσεων ή ειδών συλλογιστικής έλαβαν τόσους κωδικούς όσες και οι συλλογιστικές πτυχές που εξέφραζαν.

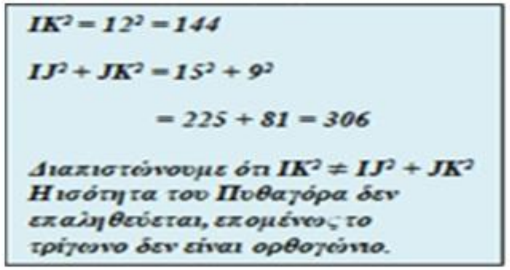
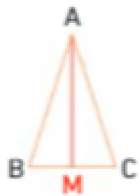
Κωδικός	Φύση συλλογιστικής	Έργο στο οποίο ο μαθητής καλείται να
M	**Κάνε μία εικασία**	**κατασκευάσει μία εικασία,** να **διατυπώσει μια ορθή μαθηματική δήλωση** ή να **βρει τις ακριβείς συνθήκες** για να είναι μία συγκεκριμένη δήλωση αληθής.
I	**Διερεύνησε μία εικασία**	**διερευνήσει** εάν μια δοσμένη εικασία ή δήλωση είναι αληθής ή ψευδής.
D	**Ανάπτυξε ένα επιχείρημα**	**αιτιολογήσει ή να εξηγήσει** γιατί μια συγκεκριμένη δήλωση έχει ισχύ.
E	**Αξιολόγησε ένα επιχείρημα**	**αξιολογήσει** εάν μια συγκεκριμένη αιτιολόγηση ή λύση είναι σωστή.
C	**Διόρθωσε ή εντόπισε ένα λάθος**	**βρει και/ ή να διορθώσει** ένα λάθος σε ένα επιχείρημα ή σε μία λύση.
X	**Αντιπαράδειγμα**	**βρει ένα αντιπαράδειγμα** σε μία ψευδή μαθηματική δήλωση.
P	**Σκιαγράφησε μια απόδειξη**	**σκιαγραφήσει ένα επιχείρημα** χωρίς τις λεπτομέρειες μιας πλήρους απόδειξης.
O	**Άλλη**	**χρησιμοποιήσει κάποιο άλλο στοιχείο** της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη.
N	**Μη σχετική με την απόδειξη**	κάνει **κάτι που δε σχετίζεται με την απόδειξη.**

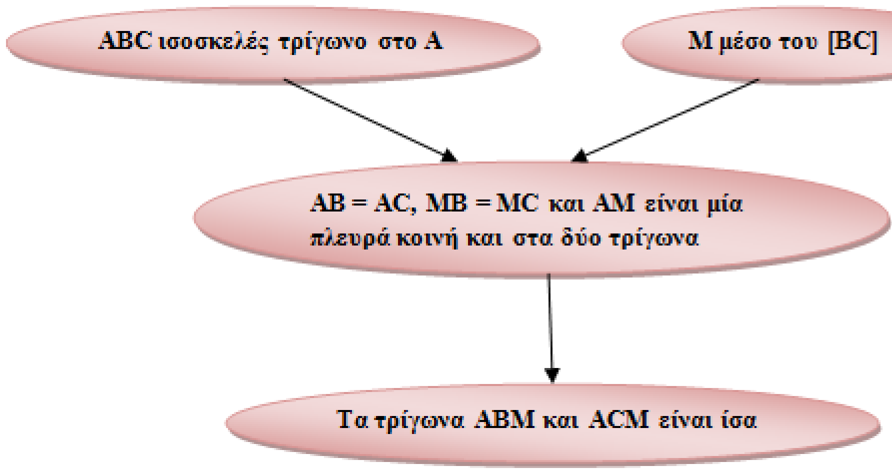
Πίνακας 2.6: *Πλαίσιο για τη φύση της συλλογιστικής στα έργα των εγχειριδίων (Bergwall, 2021, p. 737)*

Παράδειγμα (Π)	Έργο	Κωδικός
1	**1.<u>Να υπολογίσετε</u>** το $(\sin x)^2 + (\cos x)^2$ για περισσότερες τιμές του x που περιέχονται αυστηρά μεταξύ 0^o και 90^o. **2.<u>Ποια εικασία</u>** μπορούμε να κάνουμε; **3.<u>Θεωρούμε</u>** ένα τρίγωνο ABC ορθογώνιο στο A. **A**. **<u>Να κάνετε</u>** ένα σχήμα. **B.<u>Να γράψετε</u>** τα sinx και cosx σε συνάρτηση με τα AB, AC και BC. **C**. **<u>Να εκφράσετε</u>** το $(\sin x)^2 + (\cos x)^2$ σε συνάρτηση με τα AB, AC και BC και **<u>να συνάξετε μια απόδειξη</u>** της εικασίας που διατυπώσατε στην ερώτηση 2. **4.** Σε ένα τρίγωνο DEF,ορθογώνιο στο E,γνωρίζουμε ότι $\cos \widehat{D} = 0{,}8$. **<u>Να υπολογίσετε</u>** τα $\sin \widehat{D}$ και $\tan \widehat{D}$. (FR2, p. 250)	1.**N** 2.**GM** 3A)**N** 3B)**GM** 3C)**GMD** 4.**N**
2	Ο παντογράφος είναι ένα εργαλείο που επιτρέπει να αναπαράξουμε, να μεγεθύνουμε ή να σμικρύνουμε σχήματα. Το σημείο A είναι σταθερό και μπορούμε να ρυθμίσουμε τη θέση των σημείων B και H αλλά σε κάθε περίπτωση (BD)//(CF), (DH)//(AC) και τα σημεία A, D και F είναι στην ίδια ευθεία.  **<u>Πώς πρέπει</u>** να τοποθετήσουμε το σημείο B **<u>έτσι ώστε</u>** το σχήμα που χαράσσεται από το σημείο D να έχει ως διαστάσεις το 25% των διαστάσεων του αρχικού σχήματος στο οποίο επιστρέφουμε με το σημείο F. (FR1, p. 249)	**GM**

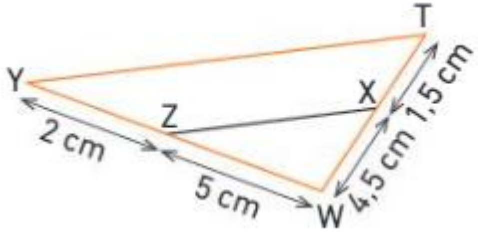
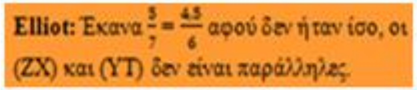
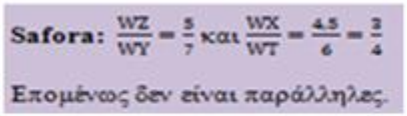
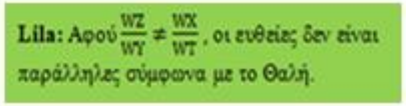
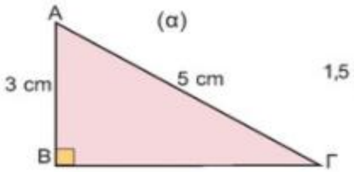
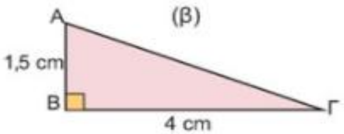
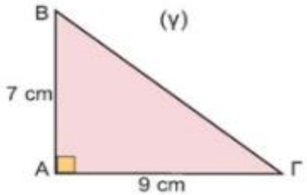
Παράδειγμα (Π)	Έργο	Κωδικός
3	**<u>Να περιγράψετε με μια φράση</u>** τις ακόλουθες εκφράσεις: a) AB^2 b) ab^2 c) $(a + b)^2$ d) AB^2+EF^2 γνωρίζοντας ότι τα AB και EF είναι μήκη και ότι τα a και b είναι αριθμοί. (FR1, p. 226)	a)**N** b)**N** c)**N** d)**N**
4	Χαράσσουμε δύο ομόκεντρους κύκλους κέντρου I και δύο ακτίνες του πιο μεγάλου κύκλου (AI) και (BI) έτσι ώστε η (AB) να μην είναι διάμετρος του κύκλου. Ομόκεντροι κύκλοι είναι οι κύκλοι οι οποίοι έχουν το ίδιο κέντρο. Σημειώνουμε C και D τα αντίστοιχα σημεία τομής των (AI) και (BI) με τον πιο μικρό από τους δύο κύκλους. Σε κάθε περίπτωση οι (CD) και (AB) είναι παράλληλες. **<u>Σωστό ή Λάθος</u>**. Να δώσετε μια απόδειξη.(FR1, p. 246)  	**GI**
5	Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. **<u>Είχε δίκιο;</u>** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (GR2, p. 208)  	**SI**
6	**<u>Είναι ίσα</u>** τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος**<u>;</u>** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (GR2, p. 193)  	**SI**

Παράδειγμα (Π)	**Έργο**	**Κωδικός**
7	**<u>Να δείξετε</u>** ότι τα τρίγωνα ABC και DEF είναι όμοια. (FR2, p. 202) 	**SD**
8	**<u>Να αποδείξετε</u>** ότι οι ευθείες (AB) και (CD) είναι παράλληλες. (FR2, p. 200) 	**SD**
9	**<u>Τα τρίγωνα</u>** ABC και DEF **<u>είναι όμοια;</u>** Να αιτιολογήσετε. (FR2, p. 208) 	**SI**
10	Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση. (GR2, p. 193) 	**SD**
11	Στον πίνακα, ο Jasim πρέπει να απεικονίσει την ακόλουθη ιδιότητα περίπτωσης ισότητας: «Αν δύο τρίγωνα έχουν ανά δύο μία γωνία του ίδιου μέτρου περιεχόμενη μεταξύ δύο πλευρών του ίδιου μήκους, τότε είναι ίσα». Ιδού αυτό που σχεδιάζει:  Ο Jasim **<u>έχει δίκιο;</u>** Ειδάλλως **<u>να προτείνετε μία σωστή απεικόνιση</u>**. (FR1, p. 199)	**GEC**

Παράδειγμα (Π)	Έργο	Κωδικός
12	Ο Jérôme συνέταξε τη λύση της πλαϊνής άσκησης:  $IK^2 = 12^2 = 144$ $IJ^2 + JK^2 = 15^2 + 9^2$ $= 225 + 81 = 306$ Διαπιστώνουμε ότι $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$ Η ισότητα του Πυθαγόρα δεν επαληθεύεται, επομένως το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.  Η Aurélie του λέει ότι υπάρχει ένα λάθος συλλογιστικού χαρακτήρα. **<u>Ποιο είναι</u>** αυτό **<u>το λάθος;</u>** (FR1, p. 220)	**SC**
13	Ο Isidor και η Cynthia έκαναν την ακόλουθη άσκηση: Το τρίγωνο IJK είναι ορθογώνιο στο J τέτοιο ώστε IJ=7cm και JK=3cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς (KI). Χωρίς να υπολογίσουμε το μήκος του (KI), **<u>γιατί</u>** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι **<u>οι δύο απαντήσεις</u>** τους **<u>είναι λανθασμένες</u>**; (FR1, p. 218)  	**SD**
	Το ABC είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο στο A και M είναι το μέσο του τμήματος (BC).  1. **<u>Να δείξετε</u>** ότι τα τρίγωνα ABM και ACM είναι ίσα. Για αυτό, να ακολουθήσετε το παρακάτω οργανόγραμμα και να συνάξετε την απόδειξη αιτιολογώντας κάθε στάδιο.	

<table>
<tr><th>Παράδειγμα
(Π)</th><th>Έργο</th><th>Κωδικός</th></tr>
<tr><td>14</td><td>


2. <u>Να προτείνετε ένα άλλο οργανόγραμμα</u> το οποίο να περιλαμβάνει γωνίες και <u>να συντάξετε μια άλλη απόδειξη</u> για να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και ACM είναι ίσα.
3. Να αντιγράψετε και <u>να συμπληρώσετε</u> τον παρακάτω πίνακα:
<table>
<tr><th>Ομόλογες κορυφές</th><th>Ομόλογες πλευρές</th><th>Ομόλογες γωνίες</th></tr>
<tr><td>A και …
B και …
M και …</td><td>[AB] και …
[AM] και …
[BM] και …</td><td>$\widehat{ABM}$ και …
$\widehat{AMB}$ και …
$\widehat{BAM}$ και …</td></tr>
</table>
(FR1, p. 205)
</td><td>1.GD
2.GP
3.GO</td></tr>
</table>

Παράδειγμα (Π)	Έργο	Κωδικός
15	Για να συντάξουμε σωστά ένα συλλογισμό πρέπει να επαληθεύσουμε τις συνθήκες χρήσης του θεωρήματος που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε, να πούμε το θεώρημα και στο τέλος το συμπέρασμα που εξάγουμε. **<u>Οι ευθείες</u>** (ZX) και (YT) **<u>είναι παράλληλες;</u>** (FR1, p. 248) 	**SI**
16	**<u>Να επισημάνετε τα δυνατά και τα αδύναμα σημεία</u>** των ακόλουθων απαντήσεων στην άσκηση 70. (FR1, p. 248) 1.  Elliot: Έκανα $\frac{5}{7}=\frac{4.5}{6}$ αφού δεν ήταν ίσο, οι (ZX) και (YT) δεν είναι παράλληλες. 2.  Safora: $\frac{WZ}{WY}=\frac{5}{7}$ και $\frac{WX}{WT}=\frac{4.5}{6}=\frac{3}{4}$ Επομένως δεν είναι παράλληλες. 3.  Lila: Αφού $\frac{WZ}{WY}\neq\frac{WX}{WT}$, οι ευθείες δεν είναι παράλληλες σύμφωνα με το Θαλή.	1.**SO** 2.**SO** 3.**SO**
17	**<u>Να υπολογίσετε</u>** τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα. (GR1, p. 146)   	α)**N** β) **N** γ) **N**

Πίνακας 2.7: *Παραδείγματα έργων στα ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια μαθηματικών που αποτυπώνουν το είδος και τη φύση της συλλογιστικής που προάγεται*

- Τα **Μ** έργα εστιάζουν στο **τι** είναι αληθές και συνδέονται ειδικότερα με τη **διατύπωση ορθών μαθηματικών δηλώσεων** η οποία βασίζεται συνήθως στην **επαγωγική συλλογιστική** και στη γενίκευση. Στην περίπτωση των **Μ** έργων ο μαθητής καλείται **να κατασκευάσει μια εικασία** (Πίνακας 2.7/ Π.1.(2)) που εδραιώνεται στην αναγνώριση ενός μοτίβου (Πίνακας 2.7/ Π.1.(1)). Επιπλέον, στη συγκεκριμένη κατηγορία κατατάσσονται και όσα έργα περιλαμβάνουν **την εύρεση των ακριβών συνθηκών προκειμένου μία δήλωση να είναι αληθής** (Πίνακας 2.7/ Π.2), πράγμα που συνιστά μία σημαντική πτυχή της παραγωγής εικασιών. Έργα τα οποία απαιτούν αποκλειστικά μετασχηματισμούς μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων δεν κωδικοποιούνται ως έργα Μ (Πίνακας 2.7/ Π.3).
- Τα **Ι** έργα ρωτούν **αν** κάτι είναι αληθές (Πίνακας 2.7/ Π.6): ο μαθητής καλείται δηλαδή να προσδιορίσει **την αληθοφάνεια μιας** παρουσιαζόμενης **δήλωσης** (Πίνακας 2.7/ Π.4) ή να καθορίσει **εάν μια δήλωση είναι σωστή ή όχι** (Πίνακας 2.7/ Π.5).
- Τα **D** έργα ρωτούν **γιατί** μια δήλωση είναι αληθής (Πίνακας 2.7/ Π.10). Η επικέντρωση δίδεται στην **παραγωγική** (deductive) **συλλογιστική**, στον τρόπο με τον οποίο τα πράγματα συνδέονται μεταξύ τους καθώς και στον τρόπο με τον οποίο αυτά έπονται το ένα από το άλλο. Το αποτέλεσμα για το οποίο απαιτείται ανάπτυξη επιχειρηματολογίας πρέπει να είναι ρητά διατυπωμένο στο έργο. Τα αποδεικτικά έργα, δηλαδή τα έργα στα οποία ζητείται από τα μαθητή **να δείξει** (Πίνακας 2.7/ Π.7) ή **να αποδείξει** (Πίνακας 2.7/ Π.8) μια συγκεκριμένη δήλωση εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία. Όταν η προσταγή «να δείξετε» αναφέρεται στην περιγραφή μιας διαδικασίας, τότε το έργο κωδικοποιείται ως μη σχετικό με την απόδειξη. Βέβαια, στις περιπτώσεις ύπαρξης αμφιβολιών σχετικά με τις προθέσεις των συγγραφέων των εγχειριδίων, τα έργα κωδικοποιούνται ως **D** παρά ως μη σχετικά με την απόδειξη. Επιπρόσθετα, εάν ζητείται από τους μαθητές η επεξήγηση της σκέψης τους σε κάποιο έργο που ανήκει σε άλλη κατηγορία φύσεως συλλογιστικής δε γίνεται χρήση διπλών κωδικών (Πίνακας 2.7/ Π.9).
- Τα **Ε** έργα παρουσιάζουν ένα **επιχείρημα** στο μαθητή και του ζητούν **να αξιολογήσει την εγκυρότητά του** (Πίνακας 2.7/ Π.11). Ωστόσο, δεν πρέπει να είναι προφανές από τα μορφολογικά χαρακτηριστικά της εκφώνησης του έργου εάν το δοθέν επιχείρημα είναι σωστό ή όχι. Στην περίπτωση του Π.11 (Πίνακας

2.7) καλούμαστε να αξιολογήσουμε την εγκυρότητα ενός **οπτικού επιχειρήματος** και να προτείνουμε ένα ορθό σε περίπτωση που αυτό δεν ανταποκρίνεται στην αναγραφόμενη μαθηματική ιδιότητα (λόγω της επιπλέον αυτής υπόδειξης που ζητείται από τη διατύπωση της άσκησης , επισυνάπτεται επιπρόσθετα στο έργο και ο κωδικός **C** που αναλύεται μετέπειτα). Σύμφωνα με τους Inglis & Mejía-Ramos (2009), τα οπτικά επιχειρήματα βασίζονται σε εικόνες (σχεδιασμένες εικόνες, σχήματα και διαγράμματα που δημιουργούνται με τη βοήθεια του υπολογιστή, νοητικές εικόνες) οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμα ευρετικά εργαλεία που προτείνουν τρόπους κατανόησης των αποδείξεων.

- Τα **C** έργα παρουσιάζουν στο μαθητή μία **ψευδή δήλωση ή** ένα **μη έγκυρο επιχείρημα** και του ζητούν **να εντοπίσει με ακρίβεια τα λάθη** που υπάρχουν. Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία αυτή εντάσσονται τα έργα εκείνα στα οποία ο μαθητής καλείται **να δώσει μία ευλογοφανή αιτιολογία πίσω από μια εσφαλμένη απάντηση ή να επισημάνει ένα «ψεγάδι» σε ένα επιχείρημα**, και όχι απλώς να προχωρήσει στην παράθεση μίας ορθής απάντησης ή ενός ορθού επιχειρήματος. Στην περίπτωση του παραδείγματος Π.12 (Πίνακας 2.7) ζητείται από τους μαθητές να προσδιορίσουν το λάθος που υπάρχει στην απάντηση του Jérôme η οποία έχει **δομικό κορμό επιχειρήματος** καθώς σε αυτή α) **περιγράφεται μία κατάσταση** (μαθηματικοί υπολογισμοί που υλοποιούνται με βάση τα γνωρίσματα ενός συγκεκριμένου τριγώνου), β) **εξάγεται ένα συμπέρασμα** («Επομένως, το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο») και γ) **παρουσιάζεται μία εγγύηση για το συμπέρασμα αυτό που διατυπώνεται** («Η ισότητα του Πυθαγόρα δεν επαληθεύεται»).
- Τα **X** έργα απαιτούν ρητά από το μαθητή να παράσχει ένα **αντιπαράδειγμα σε μια ψευδή δήλωση καθολικής χροιάς**. Άλλα έργα στα οποία ζητείται από το μαθητή **να αποδείξει ότι κάτι είναι λάθος ή να επεξηγήσει γιατί κάτι δε λειτουργεί** (Πίνακας 2.7/ Π.13) κατατάσσονται στην κατηγορία **D**.
- Τα **P** έργα απαιτούν από το μαθητή **να σκιαγραφήσει μια απόδειξη χωρίς** όμως να προχωρήσει **στην παροχή του επιπέδου των λεπτομερειών** εκείνων που κρίνονται απαραίτητες **για να καταστήσουν την απόδειξη αυτή πλήρη** (Πίνακας 2.7/ Π.14.(2)). Η αντίθετη περίπτωση, δηλαδή ένα έργο το οποίο σκιαγραφεί μια απόδειξη και ζητά από τον μαθητή να συμπληρώσει τις λεπτομέρειες προκειμένου η απόδειξη αυτή να λάβει μία πιο ολοκληρωμένη

υπόσταση (Πίνακας 2.7/ Π.14.(1)), ταξινομείται στην κατηγορία **D**. Το ζητούμενο προς κατάρτιση διάγραμμα στο Π.14.(2) (Πίνακας 2.7) δε συνιστά απόδειξη στην ολοκληρωμένη της μορφή καθώς απουσιάζουν ορισμένες λεπτομέρειες που την καθιστούν πλήρη. Οι λεπτομέρειες αυτές είναι οι συνδετικές λέξεις οι οποίες προσδίδουν αλληλουχία στον αναπτυσσόμενο μαθηματικό συλλογισμό, νοηματοδοτώντας κατά συνέπεια την απόδειξη σε ένα πιο ολοκληρωμένο πλαίσιο. Ο μαθητής καλείται να παράσχει αυτού του είδους τις λεπτομέρειες στο Π.14.(1) (Πίνακας 2.7) στα πλαίσια σύνταξης ενός συλλογισμού ο οποίος αξιοποιεί τα μαθηματικά συστατικά του δοθέντος οργανογράμματος.

- Τα **O** έργα δεν πληρούν τα κριτήρια ένταξης καμίας από τις εφτά προηγούμενες κατηγορίες κωδικοποίησης, αλλά περιλαμβάνουν **άλλα στοιχεία συλλογιστικής** τα οποία θεωρούνται **ουσιώδη για την αποδεικτική διαδικασία**. Ως έργα αυτής της κατηγορίας θεωρούνται τα Π.16.1, Π.16.2 και Π.16.3 του Πίνακα 2.7 τα οποία αποτελούν απαντήσεις στο Π.15 (Πίνακας 2.7) που κατατάσσεται στην κατηγορία **I**, καθώς σε κάθε ένα από αυτά ζητείται η σφαιρική αποκωδικοποίηση της συλλογιστικής πορείας που αποτυπώνεται στην εκάστοτε δοθείσα απάντηση. Για την επίτευξη αυτού απαιτείται η αξιοποίηση των γνωρισμάτων που συνθέτουν την **ορθή σύνταξη ενός συλλογισμού** και περιγράφονται πάνω από το σχήμα του έργου Π.15. (Πίνακας 2.7). Έτσι, η εστίαση μετατοπίζεται σε μορφές συλλογιστικής που διαφέρουν από αυτές των προαναφερθέντων κατηγοριών κωδικοποίησης.
- Τα **N** έργα είναι όλα τα εναπομείναντα έργα και θεωρούνται ως «**μη σχετικά με την απόδειξη**» (Πίνακας 2.7/ Π.17).

2.4 Εγκυρότητα παρούσας μελέτης

Για την εξασφάλιση της εγκυρότητας της έρευνάς μας υιοθετήθηκε η εξής διαδικασία. Αρχικά, έγινε προσπάθεια εύρεσης δύο εκπαιδευτικών που να διδάσκουν το διδακτικό αντικείμενο των μαθηματικών στη Β’ και στη Γ’ Γυμνασίου και να γνωρίζουν ταυτόχρονα τη γαλλική γλώσσα έτσι ώστε να διευκολυνθεί η πορεία διεξαγωγής της παρούσας μελέτης. Επειδή όμως αυτό δεν ήταν εφικτό, υλοποιήθηκε μετάφραση στα ελληνικά του ¼ των μαθηματικών έργων και των εκθεσιακών ενοτήτων των θεματικών παραγράφων που αναλύθηκαν στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας και έπειτα ακολούθησε η αξιολόγησή τους από δύο μαθηματικούς που διδάσκουν στις προαναφερθείσες τάξεις. Ειδικότερα, σε πρώτο επίπεδο, πραγματοποιήθηκε συζήτηση με τους δύο εκπαιδευτικούς με στόχο την αποσαφήνιση όλων των κατηγοριών κωδικοποίησης που απαρτίζουν τα δύο θεωρητικά εργαλεία ανάλυσης της έρευνάς μας. Σε δεύτερο επίπεδο, ο κάθε εκπαιδευτικός κωδικοποίησε ξεχωριστά τις επιλεγόμενες μονάδες ανάλυσης. Τέλος, εξετάστηκε το ποσοστό ταύτισης των δύο εκπαιδευτικών.

2.5 Αξιοπιστία παρούσας μελέτης

Οι κατηγορίες που αξιοποιούνται για την κωδικοποίηση του μαθηματικού περιεχομένου των επιλεγόμενων ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων τόσο ως προς τη δομή όσο και ως προς την επιχειρηματολογία προτείνονται από έγκυρη διεθνή βιβλιογραφία. Ειδικότερα, η δομή εξετάζεται με βάση τις τέσσερις πτυχές του μάκρο επιπέδου που αντλούνται από τη μελέτη των Li, Chen, & An (2009), ενώ η επιχειρηματολογία εξετάζεται σύμφωνα με τις κατηγορίες της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη οι οποίες αναπτύσσονται στη μελέτη του Bergwall (2021).

Κεφάλαιο 3. Αποτελέσματα

3.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης της θεματικής περιοχής της ισότητας τριγώνων

3.1.1 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο των Lin, Chen, & An (2009).

(**ΕΕ1**): «Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;»

Αρχικά, οι δύο χώρες διαφοροποιούνται ως προς την τάξη στην οποία προσεγγίζουν την ισότητα τριγώνων. Ειδικότερα, στην Ελλάδα μελετάται στην τελευταία τάξη του Γυμνασίου και συνιστά την ανεξάρτητη ενότητα με τίτλο «**1.1 Ισότητα τριγώνων**» του κεφαλαίου «**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**» του **GR2**. Προηγουμένως, παρουσιάζεται το **«Κεφάλαιο 5ο: Πιθανότητες»**. Στον αντίποδα, στη Γαλλία, μελετάται στην προτελευταία τάξη του Γυμνασίου και αποτελεί τη δεύτερη θεματική ενότητα με τίτλο «**Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα**» του κεφαλαίου 8: «**Γεωμετρία στο επίπεδο**» του **FR1**. Η ενότητα που προηγείται ονομάζεται «**Μετασχηματίζω ένα σχήμα μέσω μετάθεσης**». Νωρίτερα συγκροτείται το **«Κεφαλαίο 7: Στατιστική και πιθανότητες»**. Επιπρόσθετα, τα εγχειρίδια των δύο χωρών διαφοροποιούνται και ως προς την έννοια που πραγματεύονται πριν από την ισότητα τριγώνων. Ειδικότερα, το **GR2** εξετάζει τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αλλά και τους βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, ενώ το **FR2** μελετά τους μετασχηματισμούς διαφόρων σχημάτων μέσω μετάθεσης.

Ακόμη, οι εξεταζόμενες ενότητες των μελετώμενων εγχειριδίων διαφέρουν και σε επίπεδο εσωτερικής δομικής συγκρότησης. Σχετικά με τον τρόπο κατάρτισης της ενότητας **1.1** του **GR2** ακολουθείται η εξής πορεία. Αρχικά, παρατίθεται μία εισαγωγική δραστηριότητα που επιχειρεί να μυήσει το μαθητή στον εννοιολογικό πυρήνα της ενότητας και κατόπιν ένα εκθεσιακό μέρος που απαρτίζεται από 4 επιμέρους θεωρητικές παραγράφους. Στη συνέχεια, εμφανίζεται 1 τμήμα που περιλαμβάνει λυμένες ασκήσεις. Έπειτα συναντώνται 3 τμήματα που περιλαμβάνουν άλυτα έργα. Μάλιστα το 1 εξ' αυτών αποτελεί ιστορικό σημείωμα. Το αντίστοιχο γαλλικό εγχειρίδιο υιοθετεί το ίδιο μοτίβο αλλά εμφανίζει μεγαλύτερη ποικιλία στα τμήματα που συγκροτεί για την κατασκευή άλυτων έργων. Ειδικότερα, η ενότητα

«**Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα**» του **FR1** ξεκινά με μία εισαγωγική δραστηριότητα εξερεύνησης των εμπλεκόμενων εννοιών και στη συνέχεια αναπτύσσει ένα θεωρητικό μέρος με ορισμούς, ιδιότητες και παρατηρήσεις. Αργότερα, συγκροτείται 1 τμήμα με λυμένα έργα. Κατόπιν παρουσιάζονται 12 τμήματα με άλυτα έργα, εκ των οποίων τα 2 χωρίζονται σε υποτμήματα. Σχετικά με τον αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση του εν λόγω μαθηματικού περιεχομένου, τα εξεταζόμενα εγχειρίδια διαφέρουν κατά δύο μόνο σελίδες ως προς τη συνολική έκταση που αφιερώνουν. Πιο συγκεκριμένα, το **GR2** χρησιμοποιεί 13 σελίδες (4, 92%) για την προσέγγιση του, ενώ το **FR1** χρησιμοποιεί 15 σελίδες (5, 21%).

Στο **γαλλικό εγχειρίδιο**, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια εντάσσεται στην **κονστρουκτιβιστική αντίληψη.** Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους όλο το θεωρητικό πυρήνα της ενότητας πριν την παράθεσή του, στα πλαίσια επίλυσης μίας εισαγωγικής δραστηριότητας που βασίζεται σε χρήση λογισμικού και απαιτεί από τους ίδιους να οδηγηθούν στα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων έπειτα από διαδοχικές δοκιμές και παρατηρήσεις. Επίσης και οι ασκήσεις του εν λόγω εγχειριδίου προάγουν το **μαθητοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας**. Ειδικότερα, τα έργα είναι κατασκευασμένα στη βάση της **καθοδηγούμενης ανακάλυψης**, διότι περιλαμβάνουν πολλά υποερωτήματα που κατευθύνουν το μαθητή στο είδος των νοητικών διεργασιών που πρέπει να ενεργοποιήσει προκειμένου να εξάγει το ζητούμενο μαθηματικό αποτέλεσμα. Κάποια μάλιστα εξ’ αυτών στοχεύουν αποκλειστικά στην καλλιέργεια συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων που σχετίζονται με την **επιχειρηματολογία**. Παράλληλα, ενθαρρύνεται ιδιαίτερα η διδασκαλία ενός πλαισίου που οικοδομεί την απόδειξη μέσα από την **επίλυση προβλήματος** και μέσα από **ρεαλιστικές καταστάσεις.** Επιπρόσθετα, δίδεται βαρύτητα στην κατάρτιση έργων που προάγουν τη διερευνητική μάθηση μέσω της **χρήσης ΤΠΕ.** Εκεί οι μαθητές προσεγγίζουν την ισότητα τριγώνων υπό το πρίσμα του γεωμετρικού σχηματισμού της μετατόπισης και «οικοδομούν» τη γνώση μέσα από διαδοχικούς πειραματισμούς σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας. Ταυτόχρονα, μαθαίνουν πώς να συντάσσουν ένα **πρόγραμμα με το Scratch**.

Στο **ελληνικό εγχειρίδιο**, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια προσανατολίζεται περισσότερο στη **δασκαλοκεντρική προσέγγιση.** Ο τρόπος παρουσίασης της θεωρίας (πυκνογραμμένο κείμενο με πολλά θεωρητικά στοιχεία) καθιστά τον καθηγητή ως το πρόσωπο που πρέπει να δώσει έτοιμες τις παρατιθέμενες μαθηματικές πληροφορίες στους μαθητές, αφήνοντάς τους ελάχιστα περιθώρια ενεργούς συμμετοχής. Η εισαγωγική δραστηριότητα που προηγείται του θεωρητικού μέρους δεν προσφέρει τα κατάλληλα ερεθίσματα στο μαθητή προκειμένου να ανακαλύψει ο ίδιος τις εμπλεκόμενες θεωρητικές ιδέες. Επίσης, οι ασκήσεις του εγχειριδίου προϋποθέτουν ιδιαίτερα αναπτυγμένο **μεθοδολογικό υπόβαθρο** από τους μαθητές και βαθιά κατανόηση των **μαθηματικών εργαλείων** που νωρίτερα έχουν παρουσιαστεί. Τέλος, το ελληνικό εγχειρίδιο στην εμπλουτισμένη του μορφή δίνει τη δυνατότητα **αξιοποίησης του λογισμικού Geogebra,** με στόχο την πιο διερευνητική προσέγγιση του αναπτυσσόμενου μαθηματικού περιεχομένου τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο από το μαθητή.

Συνοπτικά, οι θεωρητικές ιδέες που αφορούν την ισότητα τριγώνων εμφανίζουν μια πιο ισορροπημένη πορεία ανάπτυξης στο **ελληνικό εγχειρίδιο** εξαιτίας της πιο σφαιρικής και ιεραρχημένης προσέγγισης που υιοθετείται ως προς την παρουσίαση των θεωρητικών ιδεών. Ειδικότερα, ακολουθείται η αλληλουχία: κύρια στοιχεία τριγώνου, άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου, τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές, δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου, εννοιολογική οριοθέτηση της ισότητας τριγώνων, 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων, 3 κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου, σημείων μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος και σημείων διχοτόμου μιας γωνίας. Αντίθετα, η πρακτική εφαρμογή των εμπλεκόμενων θεωρητικών ιδεών εμφανίζει πιο αρμονική πορεία εξέλιξης στο **γαλλικό εγχειρίδιο,** εξαιτίας της μεγαλύτερης διαβάθμισης που παρατηρείται ως προς τη δυσκολία των έργων και της μεγαλύτερης ποικιλίας του συλλογιστικού προφίλ τους.

3.1.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο του Bergwall (2021)

(ΕΕ2): «Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;»

3.1.2.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης εκθεσιακών ενοτήτων

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
GR2	**Ισότητα τριγώνων**	**13**	**-**	**7**	**6**	**25**
FR1	**Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα**	**2**	**-**	**3**	**-**	**5**

Πίνακας 3.1: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 3 κύρια αποτελέσματα στο **GR2** λαμβάνουν δύο **S** αιτιολογήσεις. Σε δύο περιπτώσεις στο **GR2** η ίδια **S** αιτιολόγηση αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικά κύρια αποτελέσματα και γι' αυτό το λόγο οι εν λόγω αιτιολογήσεις προσμετρούνται μόνο μία φορά. Ο συνολικός αριθμός των διακριτών αιτιολογήσεων του **GR2** ανέρχεται σε 13.

	Κύρια Αποτελέσματα						Αιτιολογήσεις						
		Χαρακτηρισμός						Χαρακτηρισμός				Θέση	
Εγχειρίδια	Αριθμός κύριων αποτελεσμάτων	Κριτήριο	Ιδιότητα	Ορισμός	Καθόλου	Άλλος	Αριθμός αιτιολογούμενων αποτελεσμάτων	Απόδειξη	Επιχείρημα	Άλλο	Κανένας	Πριν	Μετά
GR2	**25**	**5**	**5**	-	**13**	**6**	**12**	-	-	-	**13**	**11**	**4**
FR1	**5**	-	**3**	**1**	-	**1**	**3**	-	-	**3**	-	-	**3**

Πίνακας 3.2: *Χαρακτηρισμός και τοποθεσία των κύριων αποτελεσμάτων και αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 2 κύρια αποτελέσματα στο **GR2** έλαβαν διπλό χαρακτηρισμό, 1 κύριο αποτέλεσμα στο **GR2** έλαβε τριπλό χαρακτηρισμό, 2 κύρια αποτελέσματα στο **GR2** έλαβαν μία αιτιολόγηση πριν και μία αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή τους, 1 κύριο αποτέλεσμα στο **GR2** έλαβε δύο αιτιολογήσεις μετά τη διατύπωσή του.

3.1.2.1.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα αντλούνται από τις ενότητες «**1.1**» και «**Γενικές Ασκήσεις του 1ου Κεφαλαίου**», ανέρχονται σε 25 και κατατάσσονται στις κατηγορίες **N** (13), **S** (7) και **G** (6) (Πίνακας 3.1). Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στα πορίσματα του Πίνακα 3.2, ενώ παράλληλα υιοθετεί την πορεία κατάρτισης του εκθεσιακού μέρους του **GR2**. Αρχικά, παρουσιάζονται 7 αποτελέσματα που δεν λαμβάνουν κάποιο χαρακτηρισμό, δεν αιτιολογούνται και πραγματεύονται το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου και τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές. Έπειτα δίδονται 3 αποτελέσματα που χαρακτηρίζονται ως «**Δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου**» και δεν αιτιολογούνται. Στη συνέχεια, παρατίθεται ένα αποτέλεσμα που εξασφαλίζει την ισότητα δύο τριγώνων που διατυπώνεται ως: «Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα». Αυτό δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό και αιτιολογείται μέσω μίας εμπειρικής απόδειξης πριν τη διατύπωσή του. Παράλληλα, δίδεται και το αντίστροφο αυτού χωρίς αιτιολόγηση και χαρακτηρισμό. Στη συνέχεια, αναπτύσσονται 3 αποτελέσματα που χαρακτηρίζονται κατά σειρά ως **1ο Κριτήριο Ισότητας/ (Π-Γ-Π)/βασική ιδιότητα ισότητας**, **2ο Κριτήριο Ισότητας/ (Γ-Π-Γ)** και **3ο Κριτήριο Ισότητας/ (Π-Π-Π)** και λαμβάνουν το καθένα από δύο **S** αιτιολογήσεις. Στην περίπτωση του 1ου κριτηρίου παρατίθενται μετά τη διατύπωσή του, ενώ στις περιπτώσεις του 2ου και του 3ου κριτηρίου η μία δίδεται πριν και η άλλη μετά την παρουσίαση του εκάστοτε κριτηρίου. Μετά την παρουσίαση του 1ου και 2ου κριτηρίου αναπτύσσονται τα αποτελέσματα «Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες» και «Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές», που λαμβάνουν από μία **S** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή τους. Εδώ, οφείλουμε να τονίσουμε ότι οι αιτιολογήσεις των προηγούμενων αποτελεσμάτων συμπίπτουν με τη μία εκ των δύο **S** αιτιολογήσεων του 1ου και 2ου κριτηρίου ισότητας. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται 2 αποτελέσματα που χαρακτηρίζονται ως «**Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων**» και αιτιολογούνται μέσω γενικών αποδείξεων (**G**) πριν τη διατύπωσή τους. Επίσης, εμφανίζονται 6 αποτελέσματα στο τμήμα «**Παραδείγματα – Εφαρμογές**» της «**1.1**». Τα 2 εξ' αυτών αφορούν τις γωνίες της βάσης και τα δευτερεύοντα στοιχεία των ισοσκελών τριγώνων, αιτιολογούνται μέσω γενικής απόδειξης πριν τη διατύπωσή τους και δε χαρακτηρίζονται. Τα υπόλοιπα 4 επισημαίνονται ως « **Χαρακτηριστική Ιδιότητα**» και αποτελούν ιδιότητες των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος και των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας. Τα 2 από αυτά αποτελούν ευθείες διατυπώσεις που αιτιολογούνται μέσω γενικής απόδειξης πριν την παρουσίασή τους. Τα υπόλοιπα 2 συνιστούν τις αντίστροφες διατυπώσεις τους και δεν αιτιολογούνται. Από τις 13 αιτιολογήσεις της «**1.1**», καμία δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό.

3.1.2.1.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα της ενότητας «**Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα**» ανέρχονται σε 5 και ερμηνεύονται με βάση τους πίνακες 3.1 και 3.2. Τα 3 από αυτά συνιστούν κριτήρια που εξασφαλίζουν την ισότητα τριγώνων και λαμβάνουν το χαρακτηρισμό «**Ιδιότητα**». Επίσης, αποδεικνύονται μετά την παράθεσή τους μέσω εμπειρικών επιχειρημάτων (**S**), που τους αποδίδεται ο χαρακτηρισμός «**Παράδειγμα**». Τα υπόλοιπα 2 αποτελέσματα δεν αιτιολογούνται. Το ένα εξ' αυτών συνιστά στοιχειοθέτηση της ισότητας τριγώνων και χαρακτηρίζεται ως «**Ορισμός**». Το άλλο αποτέλεσμα αναπτύσσεται ως «Τα ίσα τρίγωνα έχουν επομένως τα ίδια μέτρα γωνιών και τα ίδια μήκη πλευρών», επισημαίνεται ως «**Παρατήρηση**» και δίδεται με σκοπό την περαιτέρω αποσαφήνιση του προαναφερθέντος ορισμού.

Η παραπάνω ανάλυση μαρτυρά τον τρόπο με τον οποίο το εγχειρίδιο της εκάστοτε χώρας επιχειρεί να μυήσει τους μαθητές στη μαθηματική επιχειρηματολογία. Στην **Ελλάδα**, ο μαθητής προσεγγίζει τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων μέσω δύο εμπειρικών αποδείξεων που παρέχονται από το εγχειρίδιο. Ειδικότερα, καλείται να κατανοήσει τα εν λόγω κριτήρια μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος στη μία περίπτωση και μέσω της έννοιας της μετατόπισης ενός τριγώνου στην άλλη. Παράλληλα, εξοικειώνεται και με τον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό. Αυτό αιτιολογείται από το ότι οι αποδείξεις των κριτηρίων ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων και άλλων μαθηματικών ιδιοτήτων που παρέχονται από το εγχειρίδιο αξιοποιούν αυτό το είδος συλλογισμού. Στη **Γαλλία**, οι μαθητές καλούνται να εστιάσουν κυρίως στα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων και να τα κατανοήσουν μέσω των 3 εμπειρικών αποδεικτικών σχημάτων που δίνονται από το εγχειρίδιο και συνιστούν αριθμητικά παραδείγματα. **Σε καμία από τις δύο χώρες**, ο μαθητής δεν παρακινείται από το εγχειρίδιο να συντάξει την απόδειξη κάποιου κριτηρίου ή ιδιότητας. Κατ' επέκταση, ο εκπαιδευτικός στην **Ελλάδα** έχει τη δυνατότητα να αναδείξει στη διδασκαλία του τις διαφορές ανάμεσα στην εμπειρική και την τυπική απόδειξη, προκειμένου οι μαθητές του να είναι σε θέση να παράξουν επιχειρήματα και των δύο παραπάνω τύπων. Αντίθετα, στη **Γαλλία**, ο εκπαιδευτικός ωθείται στην υιοθέτηση αποκλειστικά του εμπειρικού σχήματος στη διδασκαλία του με στόχο τη διευκόλυνση της κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές.

3.1.2.2 Αποτελέσματα αξιολόγησης έργων

				Τύπος συλλογιστικής				Φύση συλλογιστικής					
Εγχειρίδια	Ενότητα	Συνολικός αριθμός έργων	PR έργα	S	G	M	I	D	E	C	X	P	O
GR2	Ισότητα τριγώνων & Γενικές Ασκήσεις του 1ου Κεφαλαίου	54	50	12	38	-	7	41	-	-	-	-	6
FR1	Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα	60	48	11	37	6	15	20	1	1	-	1	5

Πίνακας 3.3: *Είδος και φύση συλλογιστικής των έργων των εγχειριδίων που σχετίζονται με την απόδειξη*

Παρατήρηση: 4 έργα στο **GR2** έλαβαν διπλή κωδικοποίηση (3**DO** και 1**DI**) και 1 έργο στο **FR1** έλαβε τη διπλή κωδικοποίηση **EC**.

3.1.2.2.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του ελληνικού εγχειριδίου πραγματοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.3. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα των ενοτήτων «**1.1**» και «**Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου**» του **GR2** ανέρχονται σε 54, με τα 50 εξ' αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR)**. Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 50 **PR** έργα είτε κατατάσσονται στις κατηγορίες **D**(41), **I** (7) και **O** (6) είτε λαμβάνουν διπλή κωδικοποίηση (3**DO** και 1**DI**). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, κυριαρχούν τα έργα γενικού χαρακτήρα (**G**) που είναι 38 σε αριθμό έναντι των έργων ειδικού χαρακτήρα (**S**) που είναι 12.

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 41 με τα 33 εξ' αυτών να είναι γενικής συλλογιστικής υπόστασης (**G**) και τα 8 ειδικής (**S**). Όσα εξ' αυτών είναι επεξηγηματικού τύπου («Να εξηγήσετε γιατί», «Να αιτιολογήσετε (γιατί)») συνδέονται ρητά με την ισότητα τριγώνων. Αντίθετα, στα **D** αποδεικτικά έργα («Να αποδείξετε ότι»), η παραπάνω έννοια αξιοποιείται έμμεσα για την απόδειξη άλλων μαθηματικών καταστάσεων (ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων, ισότητα γωνιών, είδος τριγώνου ως προς τις γωνίες). Τα 4 εκ των 41 **D** έργων απαιτούν την απόδειξη ιδιοτήτων που συνδέονται με τα ισοσκελή τρίγωνα, τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας και τις απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου. Ακόμη, η κατηγορία **D** εμφανίζεται σε συνδυασμό με τη **I** σε 1 έργο και την **O** σε 3 έργα. Όλα τα **D** έργα είναι ενδομαθηματικού χαρακτήρα, εκτός από 1 έργο ιστορικής χροιάς που καλεί τους μαθητές να αποδείξουν έναν υπολογισμό του Θαλή.

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 7 με τα 5 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**G**) και τα 2 ειδικού (**S**). Η πλειοψηφία των **I** έργων (4) παρουσιάζονται με τη μορφή μαθηματικών δηλώσεων που πρέπει να χαρακτηριστούν ως (Σ) ή (Λ). Τα 2 **S** έργα της **I** κατηγορίας ζητούν από το μαθητή να εξετάσει το αν ικανοποιούν ή όχι τη συνθήκης ισότητας δύο παρατιθέμενα τρίγωνα. Επιπρόσθετα, συναντάται 1 έργο που λαμβάνει την κωδικοποίηση **DI**, καθώς ζητά από το μαθητή α) να αποδείξει ότι αν οι χορδές του ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες, τότε και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ είναι ίσα (**D**) και β) να διερευνήσει το αν ισχύει ή όχι το αντίστροφο του α) (**I**). Όλα τα **I** έργα είναι ενδομαθηματικής φύσεως. Τα **O** έργα ανέρχονται σε 6 με τα 2 εξ' αυτών να είναι γενικής φύσεως (**G**) και τα 4 ειδικής (**S**). Ειδικότερα, τα 3 εξ' αυτών αποσκοπούν στη μύηση του μαθητή στον ολοκληρωμένο επιχειρηματολογικό λόγο και πραγματεύονται είτε τη σύγκριση δύο δοσμένων τριγώνων είτε την εύρεση του ζεύγους των ίσων τριγώνων ανάμεσα σε τρία παρατιθέμενα τρίγωνα. Τα εναπομείναντα 3 **O** έργα εμφανίζονται σε συνδυασμό με την κατηγορία **D** και καλούν το μαθητή να εξηγήσει αρχικά γιατί δύο δοσμένα τρίγωνα (**D**) είναι ίσα και έπειτα να συμπληρώσει κάποιες ισότητες που αφορούν τα κύρια στοιχεία των τριγώνων αυτών (**O**). Η απάντηση στο β' σκέλος των παραπάνω έργων εδραιώνεται στην αντιστοίχιση των δομικών χαρακτηριστικών των δοθέντων τριγώνων με τις προϋποθέσεις κάποιου εκ των τριών κατηγοριών ισότητας τριγώνων. Τέλος, όλα τα **O** έργα εντάσσονται σε ένα καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

3.1.2.2.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του γαλλικού εγχειριδίου υλοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.3. Τα εξεταζόμενα έργα της ενότητας « **Αναγνωρίζω ίσα τρίγωνα** » ανέρχεται σε 60, με τα 48 εξ' αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR)**. Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 48 **PR** έργα κατατάσσονται σε όλες τις κατηγορίες συλλογιστικής (**D**(20), **I** (15), **M**(6), **O**(5) και **P**(1)) εκτός από τη **X**. Επίσης, παρουσιάζεται και 1 έργο που λαμβάνει τη διπλή κωδικοποίηση **EC**. Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, υπερτερούν τα έργα γενικού χαρακτήρα (**G**) που είναι 37 σε αριθμό έναντι των έργων ειδικού χαρακτήρα (**S**) που είναι 11.

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 20 με τα 18 εξ' αυτών να είναι γενικής συλλογιστικής φύσεως (**G**) και τα 2 ειδικής (**S**). Στα 4 από τα 20 έργα η ισότητα τριγώνων λειτουργεί ως εργαλείο αντιμετώπισης άλλων μαθηματικών καταστάσεων (ισότητα δύο δοσμένων πλευρών ή γωνιών, είδος τριγώνου, μέσο ευθύγραμμου τμήματος). Τα 16 από τα 20 έργα περιγράφουν αποκλειστικά στείρες ενδομαθηματικές καταστάσεις, ενώ τα υπόλοιπα 4 εκφράζουν καταστάσεις του καθημερινού βίου. Τα **M** έργα ανέρχονται σε 6 με τα 5 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού χαρακτήρα (**G**) και το 1 ειδικού (**S**). Όλα τα **M** έργα ζητούν ρητά από το μαθητή να προχωρήσει στη διατύπωση ορθών μαθηματικών δηλώσεων (καταγραφή ζεύγους ίσων τριγώνων ή ίσων γωνιών, ιδιότητας, μαθηματικής σχέσης). Από τα 6 **M** έργα μόνο το 1 είναι ενδομαθηματικής φύσεως. Τα **I** έργα ανέρχονται σε 15 με τα 9 εξ' αυτών να είναι γενικής συλλογιστικής υπόστασης (**G**) και τα 6 ειδικής (**S**). Από αυτά, τα 7 απαιτούν από το μαθητή να εξετάσει εάν δύο δοσμένα τρίγωνα είναι ίσα ή όχι. Παράλληλα, εντοπίζονται 5 έργα που συντάσσονται ως Σωστό ή Λάθος και 2 έργα που διατυπώνονται ως ερωτήσεις του τύπου Ναι/Όχι. Τέλος, παρουσιάζεται 1 έργο που συνίσταται στη διερεύνηση της αντιστοιχίας της μαθηματικής δήλωσης ενός χαρακτήρα του εγχειριδίου με τα χαρακτηριστικά μιας απεικονιζόμενης μαθηματικής κατάστασης. Από τα 15 **I** έργα, συναντάται 1 έργο που σχετίζεται με ζητήματα της καθημερινής ζωής και 1 έργο που βασίζεται στην αξιοποίηση του λογισμικού Scratch.

Τα **O** έργα ανέρχονται σε 5 με τα 3 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**G**) και τα 2 ειδικού (**S**). Αναφορικά με τα 3 έργα τύπου **G**, το 1 εξ' αυτών συνιστά μαθηματικό γρίφο, ενώ τα υπόλοιπα 2 συνδέονται με την εύρεση των ομόλογων κύριων στοιχείων δύο δοθέντων τριγώνων με στόχο τη συμπλήρωση ενός δοσμένου πίνακα. Σχετικά με τα 2 έργα τύπου **S**, αυτά απαιτούν τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής κάποιων εκ των κυρίων στοιχείων δύο δοθέντων τριγώνων μέσω αποκλειστικής αντιστοίχισης των δομικών χαρακτηριστικών τους με τις προϋποθέσεις κάποιου εκ των 3 κριτηρίων ισότητας. Όλα τα **O** έργα εκτός από 1 είναι ενδομαθηματικά. Ακόμη, εντοπίζεται 1 έργο ειδικού τύπου (**S**) που λαμβάνει το διπλό κωδικό **EC**, είναι ενδομαθηματικού χαρακτήρα και έγκειται στην εξέταση της ορθότητας ενός δοθέντος οπτικού επιχείρημα (**E**) και τη διόρθωσή του σε περίπτωση που είναι λανθασμένο (**C**). Επιπλέον, συναντάται 1 **P** έργο τύπου **G** που είναι ενδομαθηματικής χροιάς και απαιτεί από το μαθητή να κατασκευάσει μία απόδειξη ισότητας δύο δοθέντων τριγώνων με τη μορφή οργανογράμματος.

Και στις δύο χώρες οι μαθητές εκτίθενται περισσότερο σε αφηρημένες μαθηματικές καταστάσεις. Παράλληλα νοηματοδοτούν την καινούρια μαθηματική πληροφορία μέσω διερεύνησης διαφόρων περιγραφόμενων μαθηματικών καταστάσεων. Επιπλέον, αναπτύσσουν κυρίως την εννοιολογική τους γνώση σχετικά με την ισότητα τριγώνων. Ωστόσο, η κάθε χώρα προσφέρει και κάποιες επιπλέον διαφορετικού χαρακτήρα ευκαιρίες εκμάθησης. Πιο συγκεκριμένα, **στην Ελλάδα** ο μαθητής αντιμετωπίζει περισσότερα έργα συλλογιστικής και απόδειξης. Επιπρόσθετα, ανακαλύπτει το τριαδικό δομικό μοντέλο του μαθηματικού επιχειρήματος και μαθαίνει πώς να διαχειρίζεται ταυτόχρονα περισσότερες από μία κατηγορίες φύσεως της συλλογιστικής για την επίλυση ενός έργου. Αντίθετα, **στη Γαλλία** ο μαθητής εξοικειώνεται με περισσότερες πτυχές της συλλογιστικής. Ταυτόχρονα, ενεργοποιεί πιο σύνθετες νοητικές διεργασίες, όπως αυτής της διατύπωσης ορθών μαθηματικών συμπερασμάτων, της αξιολόγησης και της διόρθωσης επιχειρημάτων και της σύνταξης αποδείξεων συγκεκριμένης μορφής (οργανόγραμμα). Επιπλέον, κατανοεί το πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών σε άλλες επιστήμες και στην καθημερινή ζωή.

Το **γαλλικό** εγχειρίδιο βοηθά τον εκπαιδευτικό να καταδείξει μέσω των λυμένων παραδειγμάτων του το μεθοδολογικό υπόβαθρο που πρέπει να υιοθετήσουν οι μαθητές για την εξαγωγή του ζητούμενου μαθηματικού αποτελέσματος. Αυτό συνίσταται στον τρόπο καταγραφής και ιεράρχησης των μαθηματικών ιδεών καθώς και στην επιλογή της ορθής μαθηματικής ορολογίας. Επίσης, το εν λόγω εγχειρίδιο αποτελεί μία ισχυρή βάση για την αναδιοργάνωση των διδακτικών στόχων των εκπαιδευτικών, λόγω της παρουσίας όλων σχεδόν των συνιστωσών που σχετίζονται με τη συλλογιστική και την απόδειξη στα άλυτα του έργα, με στόχο την πιο αποτελεσματική διδασκαλία της επιχειρηματολογίας στους μαθητές. Το **ελληνικό** εγχειρίδιο δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να δώσει βαρύτητα μέσω των λυμένων παραδειγμάτων του στα μορφολογικά χαρακτηριστικά της απόδειξης (π.χ. απαρίθμηση μαθηματικών ιδεών με κουκίδες). Επιπλέον, τον οδηγεί μέσω των άλυτων έργων του στο να αναδείξει όλο το φάσμα των εννοιολογικών εργαλείων που έχουν παρατεθεί στο θεωρητικό μέρος με εστίαση στις πιο πολύπλοκες συλλογιστικές πτυχές του. **Και τα δύο εγχειρίδια** δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να αξιοποιήσει εκπαιδευτικά λογισμικά για να βοηθήσει το μαθητή να αποκωδικοποιήσει ευκολότερα τη γνώση (στην Ελλάδα μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου).

3.2 Αποτελέσματα αξιολόγησης της θεματικής περιοχής της ομοιότητας τριγώνων

3.2.1 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο των Lin, Chen, & An (2009)

(**ΕΕ1**): «Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;»

Αρχικά, και οι 2 χώρες εισάγουν την ομοιότητα τριγώνων στην τελευταία τάξη του Γυμνασίου, εμφανίζοντας διαφορές στον τρόπο με τον οποίο την οργανώνουν στο εσωτερικό των εγχειριδίων τους. Στην Ελλάδα, η ομοιότητα τριγώνων συνιστά την υποενότητα «**1.5.Β. Ομοιότητα τριγώνων**» της ενότητας «**1.5. Ομοιότητα»** του κεφαλαίου «**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**» του **GR2**. Η υποενότητα που προηγείται είναι η «**1.5.Α. Όμοια πολύγωνα».** Αντίθετα, στη Γαλλία, η εν λόγω έννοια αποτελεί την τρίτη ενότητα με τίτλο «**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**» του κεφαλαίου 8: «**Όμοια τρίγωνα – Θεώρημα του Θαλή**» του **FR2**. Οι δύο ενότητες που προηγούνται είναι οι «**Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή»** και «**Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**». Παράλληλα, τα δύο εγχειρίδια διαφοροποιούνται και ως προς τη μαθηματική έννοια που πραγματεύονται πριν από την ομοιότητα τριγώνων. Πιο συγκεκριμένα, το **GR2** μελετά νωρίτερα τους ορισμούς δύο όμοιων πολυγώνων, τις ομόλογες πλευρές δύο όμοιων πολυγώνων, το λόγο ομοιότητας και κάποιες ιδιότητες των όμοιων πολυγώνων. Αντίθετα, το **FR2** μελετά το θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφο του. Στο σημείο αυτό, πραγματοποιείται ανάλυση του εσωτερικού δομικού μηχανισμού των εξεταζόμενων ενοτήτων του **GR2** και του **FR2**. Σχετικά με τον τρόπο συγκρότησης της υποενότητας **1.5** του **GR2** ακολουθείται η παρακάτω πορεία. Αρχικά, παρατίθεται ένα θεωρητικό μέρος στο οποίο οριοθετούνται τα όμοια τρίγωνα και αποδεικνύεται ένα κριτήριο ομοιότητας. Στη συνέχεια, εμφανίζεται 1 τμήμα με λυμένες ασκήσεις. Έπειτα συναντώνται 3 τμήματα που περιλαμβάνουν άλυτα έργα, με το ένα εξ’ αυτών να αποτελεί ιστορικό σημείωμα. Η ενότητα «**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**» του **FR2** παρουσιάζει πιο ιεραρχημένη δομική οργάνωση. Πρώτα απ’ όλα παραθέτει μία εισαγωγική δραστηριότητα που αποσκοπεί στη μύηση του μαθητή στη ζητούμενη έννοια και έπειτα αναπτύσσει ένα θεωρητικό μέρος με ιδιότητες και ορισμούς. Στη συνέχεια, συγκροτείται 1 τμήμα με λυμένες ασκήσεις και κατόπιν 13 τμήματα με άλυτα έργα, τα 2 εκ των οποίων χωρίζονται σε υποτμήματα. Σχετικά με τον αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση του εν λόγω μαθηματικού περιεχομένου, παρατηρείται ότι το **FR2** αφιερώνει σχεδόν τις διπλάσιες σελίδες (15) (4, 93%) σε σχέση με το **GR2** που αφιερώνει 7 (2, 65%).

Στο **γαλλικό εγχειρίδιο**, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια εντάσσεται στην **κονστρουκτιβιστική ευρετική.** Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους όλα τα θεωρητικά στοιχεία της ενότητας πριν την παρουσίασή τους, στα πλαίσια επίλυσης μίας εισαγωγικής δραστηριότητας. Εκεί οι μαθητές καλούνται να χειριστούν κατάλληλα 6 δοθέντα τρίγωνα και να παράξουν εικασίες, προκειμένου να διατυπώσουν μόνοι τους τον ορισμό της ομοιότητας τριγώνων. Επίσης και τα έργα του εν λόγω εγχειριδίου εξυπηρετούν το **μαθητοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας.** Πιο συγκεκριμένα, οι ασκήσεις είναι δομημένες με βάση την **καθοδηγούμενη ανακάλυψη,** διότι παραθέτουν πολλά υποερωτήματα που κατευθύνουν το μαθητή στο είδος των νοητικών σχημάτων που πρέπει να κινητοποιήσει προκειμένου να καταλήξει στο περιγραφόμενο μαθηματικό ζητούμενο. Κάποιες μάλιστα εξ' αυτών στοχεύουν αποκλειστικά στην καλλιέργεια μαθηματικών δεξιοτήτων που συνδέονται με την **επιχειρηματολογία** και τον **υπολογισμό.** Παράλληλα, δίδεται έμφαση στην προαγωγή της συλλογιστικής και της απόδειξης μέσω **ρεαλιστικών καταστάσεων** και της **επίλυσης προβλήματος.** Ακόμη, συναντώνται και έργα που ενσωματώνουν στον πυρήνα τους τη χρήση **εκπαιδευτικών λογισμικών** τα οποία στηρίζονται στη λογική του **επικοδομισμού,** αφού η γνώση παράγεται από το μαθητή μέσω διαδοχικών διερευνήσεων δοθέντων απεικονίσεων. Ορισμένα εξ' αυτών διδάσκουν και δεξιότητες **σύνταξης ενός προγράμματος με το Scratch.**

Στο **ελληνικό εγχειρίδιο**, ο μαθητής εισάγεται στην έννοια μέσω ενός μικρού θεωρητικού μέρους, το περιεχόμενο του οποίου δεν έχει τη δυνατότητα να το ανακαλύψει μόνος του μέσω κάποιας εισαγωγικής δραστηριότητας. Αναφορικά με τις παρουσιαζόμενες ασκήσεις, αυτές ωθούν το μαθητή στο να προβεί σε σύνθετες νοητικές διεργασίες προκειμένου να ανταποκριθεί στο ζητούμενο κάθε φορά μαθηματικό αποτέλεσμα, ενώ ορισμένες φορές εντάσσονται σε ένα **ρεαλιστικό πλαίσιο.** Ωστόσο, το εγχειρίδιο στην εμπλουτισμένη του μορφή παρέχει και μία δραστηριότητα που προσφέρει την ευκαιρία στο μαθητή να εμπλακεί σε μία διερευνητική διαδικασία, μέσω **σύνταξης ενός προγράμματος** με βάση μία μαθηματική κατάσταση που αποτυπώνεται σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας.

Συνοπτικά, οι θεωρητικές ιδέες που αφορούν την ομοιότητα τριγώνων παρουσιάζουν μια πιο ισορροπημένη πορεία ανάπτυξης στο **ελληνικό εγχειρίδιο**. Ειδικότερα, εκεί υιοθετείται μία πιο λογική συνέχεια γιατί ο μαθητής εξοικειώνεται νωρίτερα σε προηγούμενη υποενότητα με την ευρύτερη έννοια της ομοιότητας των πολυγώνων και στη συνέχεια έρχεται αντιμέτωπος με την πιο λεπτομερή προσέγγιση της παραπάνω έννοιας σε μια ειδική κατηγορία πολυγώνων, τα τρίγωνα. Αντίθετα, η πρακτική εφαρμογή τους παρουσιάζει μία πιο ισορροπημένη αλληλουχία στο **γαλλικό εγχειρίδιο**, λόγω της μεγαλύτερης προσοχής που δίδεται στην ιεράρχηση των νοητικών διεργασιών (από την απλούστερη στην πιο σύνθετη) που πρέπει να ενεργοποιήσουν οι μαθητές με στόχο την επίλυση των έργων.

3.2.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο του Bergwall (2021)

(ΕΕ2): «Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;»

3.2.2.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης εκθεσιακών ενοτήτων

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
GR2	**Όμοια τρίγωνα**	-	-	**1**	-	**1**
FR2	**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**	**1**	**1**	**1**	-	**3**

Πίνακας 3.4: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων*

	Κύρια Αποτελέσματα	Χαρακτηρισμός					Αιτιολογήσεις	Χαρακτηρισμός				Θέση	
Εγχειρίδια	Αριθμός κύριων αποτελεσμάτων	Κριτήριο	Ιδιότητα	Ορισμός	Καθόλου	Άλλος	Αριθμός αιτιολογούμενων αποτελεσμάτων	Απόδειξη	Επιχείρημα	Άλλο	Κανένας	Πριν	Μετά
GR2	**1**	-	-	-	**1**	-	**1**	-	-	-	**1**	**1**	-
FR2	**3**	-	**2**	**1**	-	-	**2**	**1**	-	**1**	-	**1**	**1**

Πίνακας 3.5: *Χαρακτηρισμός και τοποθεσία των κύριων αποτελεσμάτων και αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 1 αιτιολόγηση στο **FR2** που εντάσσεται στην κατηγορία **L** δίδεται με τη μορφή εισαγωγικής δραστηριότητας και λαμβάνει το χαρακτηρισμό «πριν», διότι το αποτέλεσμα στο οποίο αντιστοιχεί διατυπώνεται στο θεωρητικό μέρος της ενότητας που έπεται των εισαγωγικών δραστηριοτήτων.

3.2.2.1.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Τα αποτελέσματα για το **GR2** αποτυπώνονται στους Πίνακες 3.4 και 3.5 και αναλύονται με βάση αυτούς. Ειδικότερα, η ενότητα «**1.5.Β**» του **GR2** αναπτύσσει μόνο το κύριο αποτέλεσμα: «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια», το οποίο συνιστά ουσιαστικά κριτήριο ομοιότητας. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό και αιτιολογείται μέσω μιας εμπειρικής απόδειξης (**S**), η οποία δε χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο και δίδεται πριν από την παράθεση του.

3.2.2.1.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα της ενότητας «**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**» ανέρχονται σε 3 και ερμηνεύονται με βάση τους Πίνακες 3.4 και 3.5. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΟΡΙΣΜΟΣ**», δεν αιτιολογείται και στοιχειοθετεί τα όμοια τρίγωνα. Το δεύτερο αποτέλεσμα επισημαίνεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και αναπτύσσεται ως: «Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε τα μήκη των πλευρών τους είναι ανάλογα». Ακόμη, λαμβάνει πριν από τη διατύπωσή του μία αιτιολόγηση που χαρακτηρίζεται ως «**Απόδειξη**». Αυτή εντάσσεται στην κατηγορία **L**, καθώς ο μαθητής είναι αυτός που πρέπει να προχωρήσει στην παροχή της σε μία εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας. Το τρίτο αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και διατυπώνεται ως: «Αν τα μήκη των πλευρών δύο τριγώνων είναι ανά δύο ανάλογα, τότε αυτά τα δύο τρίγωνα είναι όμοια». Ουσιαστικά πρόκειται για κριτήριο ομοιότητας. Το εν λόγω αποτέλεσμα, λαμβάνει μία αιτιολόγηση ειδικής φύσεως (**S**) μετά τη διατύπωσή του που επισημαίνεται ως «**Παράδειγμα**».

Η παραπάνω ανάλυση υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το εγχειρίδιο της εκάστοτε χώρας επιχειρεί να εμπλέξει τους μαθητές στη μαθηματική επιχειρηματολογία. Στην **Ελλάδα**, ο μαθητής αντιλαμβάνεται την ομοιότητα τριγώνων αποκλειστικά μέσω της εμπειρικής απόδειξης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αιτιολόγησης που παραθέτει το εγχειρίδιο για την απόδειξη ενός κριτηρίου ομοιότητας, η οποία στηρίζεται στην έννοια της μετατόπισης τριγώνου. Στη **Γαλλία**, ο μαθητής εξοικειώνεται με το εμπειρικό σχήμα που στηρίζεται στη χρήση αριθμητικού παραδείγματος και παρέχεται από το ίδιο το εγχειρίδιο με στόχο την αιτιολόγηση μιας ιδιότητας. Παράλληλα, μαθαίνει πώς να κατασκευάζει ο ίδιος την απόδειξη μιας ιδιότητας. Εδώ οφείλουμε να τονίσουμε ότι στην τελευταία περίπτωση το εγχειρίδιο είναι αυτό που καθοδηγεί το μαθητή μέσω των διαδοχικών υποερωτημάτων ενός άλυτου έργου στο πώς να αποδείξει το ζητούμενο. Από την πλευρά τους οι μαθητές καλούνται να προβούν στην πραγματοποίηση των απαραίτητων διερευνήσεων και εικασιών. **Σε καμία από τις δύο χώρες**, ο μαθητής δεν έρχεται σε επαφή με τα γνωρίσματα του τυπικού και παραγωγικού συλλογισμού. Κατ’ επέκταση, ο εκπαιδευτικός στην **Ελλάδα** ενθαρρύνεται από το εγχειρίδιο να υιοθετήσει μία προσέγγιση που στηρίζεται στην εμπειρική απόδειξη. Αντίθετα, στη **Γαλλία**, ο καθηγητής πέρα από την παραπάνω προσέγγιση ενθαρρύνεται επιπρόσθετα να εμπλέξει το μαθητή στη διαδικασία κατασκευής της απόδειξης.

3.2.2.2 Αποτελέσματα αξιολόγησης έργων

		Τύπος συλλογιστικής					Φύση συλλογιστικής						
Εγχειρίδια	**Ενότητα**	**Συνολικός αριθμός έργων**	**PR έργα**	**S**	**G**	**M**	**I**	**D**	**E**	**C**	**X**	**P**	**O**
GR2	**Όμοια τρίγωνα & Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου**	**32**	**23**	**12**	**11**	**4**	**7**	**9**	**-**	**-**	**-**	**-**	**4**
FR2	**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**	**68**	**44**	**29**	**15**	**12**	**15**	**12**	**-**	**-**	**-**	**-**	**5**

Πίνακας 3.6: *Είδος και φύση συλλογιστικής των έργων των εγχειριδίων που σχετίζονται με την απόδειξη*

Παρατήρηση: 1 έργο του **GR2** έλαβε τη διπλή κωδικοποίηση **DM**.

3.2.2.2.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του ελληνικού εγχειριδίου πραγματοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.6. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα των ενοτήτων «**1.5**» και «**Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου**» του **GR2** ανέρχονται σε 32, με τα 23 εξ' αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 23 **PR** έργα είτε ταξινομούνται στις κατηγορίες **D** (9), **I** (7), **M** (4), **O** (4) είτε λαμβάνουν διπλή κωδικοποίηση (1 **DM**). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, παρουσιάζονται 12 έργα ειδικού χαρακτήρα (**S**) και 11 έργα γενικού χαρακτήρα (**G**).

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 9 με τα 8 εξ' αυτών να είναι ειδικής συλλογιστικής υπόστασης (**S**) και το 1 γενικής (**G**). Στα 7 εκ των 9 **D** έργων ζητείται η απόδειξη της ομοιότητας δύο ζητούμενων τριγώνων ή της παραλληλίας δύο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Τα υπόλοιπα 2 έργα είναι επεξηγηματικά και απαιτούν τον προσδιορισμό του λόγου για τον οποίο δύο δοσμένα τρίγωνα είναι όμοια. Ακόμη, η κατηγορία **D** εμφανίζεται σε συνδυασμό με την **M** σε 1 έργο. Τέλος, όλα τα **D** έργα είναι στείρου ενδομαθηματικού χαρακτήρα. Τα **I** έργα ανέρχονται σε 7 με τα 6 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού προφίλ (**G**) και το 1 ειδικού (**S**). Σχεδόν όλα τα **I** έργα (6) αποτελούν μαθηματικές δηλώσεις που πρέπει να χαρακτηριστούν ως (Σ) ή (Λ). Το 1 έργο που απομένει ζητά την εξέταση της ισχύος μίας μαθηματικής πρότασης. Όλα τα **I** έργα περιορίζονται στη διαπραγμάτευση στείρων ενδομαθηματικών καταστάσεων. Τα **M** έργα ανέρχονται σε 4 με τα 3 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού προσήμου (**G**) και το 1 ειδικού (**S**). Όλα τα **M** έργα εκφράζουν αποκλειστικά ενδομαθηματικά ζητήματα και βασίζονται στην καταγραφή ίσων λόγων. Παράλληλα, η κατηγορία **M** εμφανίζεται σε συνδυασμό με την **D** σε 1 έργο που απαιτεί από το μαθητή να αποδείξει πρώτιστα ότι δύο τρίγωνα που έχει σχεδιάσει είναι όμοια (**D**) και έπειτα να γράψει τους ίσους λόγους που προκύπτουν (**M**).

Τα **O** έργα ανέρχονται σε 4. Τα 3 εξ' αυτών είναι ειδικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**S**) και εντάσσονται σε ένα στείρο ενδομαθηματικό πλαίσιο, ενώ το 1 είναι γενικής φύσεως (**G**) και διαθέτει ιστορικές προεκτάσεις. Σχετικά με τα 3 έργα τύπου **S**, αυτά ζητούν από το μαθητή να βρει ποια από τα 3 παρουσιαζόμενα ζεύγη τριγώνων είναι όμοια, μέσω αντιστοίχισης των δομικών χαρακτηριστικών τους με τον εννοιολογικό πυρήνα της συνθήκης: «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια». Αναφορικά με το μοναδικό έργο τύπου **G**, αυτό απαιτεί την επεξήγηση του μηχανισμού σκέψης πίσω από έναν παρουσιαζόμενο υπολογισμό του Θαλή.

3.2.2.2.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του γαλλικού εγχειριδίου γίνεται με βάση τον Πίνακα 3.6. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα της ενότητας « **Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα** » ανέρχονται σε 68, με τα 44 εξ' αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 44 **PR** έργα εντάσσονται στις κατηγορίες **I** (15), **D** (12), **M**(12), **O**(5)**.** Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, τα έργα ειδικού χαρακτήρα (**S**) είναι σχεδόν διπλάσια σε αριθμό (29) από τα έργα γενικού χαρακτήρα (**G**) που είναι 15.

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 15 με τα 10 εξ' αυτών να είναι ειδικής συλλογιστικής υπόστασης (**S**) και τα 5 γενικής (**G**). Ειδικότερα, εντοπίζονται 6 έργα που ζητούν από το μαθητή να διερευνήσει αν δύο τρίγωνα είναι όμοια και 2 έργα που αποτελούν ερωτήσεις του τύπου Ναι/Όχι. Επίσης, συναντώνται 2 έργα εξέτασης της αληθοφάνειας μαθηματικών δηλώσεων των ηρώων του εγχειριδίου. Παράλληλα, εντοπίζονται 3 έργα που συντάσσονται ως Σωστό ή Λάθος και 2 έργα διερεύνησης της ισχύος μιας μαθηματικής πρότασης. Από τα 15 **I** έργα, μόνο τα 2 σχετίζονται με ζητήματα της καθημερινής ζωής. Τα **M** έργα ανέρχονται σε 12 με τα 7 εξ' αυτών να είναι ειδικού συλλογιστικού χαρακτήρα (**S**) και τα 5 γενικού (**G**). Όλα εδραιώνονται στη διατύπωση ορθών μαθηματικών δηλώσεων. Αυτές σχετίζονται με την καταγραφή ισοτήτων λόγων μηκών, τον καθορισμό ίσων γωνιών και ανάλογων πλευρών, την καταγραφή όμοιων τριγώνων, τη μελέτη της φύσεως των πλευρών δύο όμοιων τριγώνων και τη γραφή του ορισμού των όμοιων τριγώνων. Τα 10 από τα 12 **M** έργα περιγράφουν αποκλειστικά στείρες ενδομαθηματικές καταστάσεις, ενώ τα υπόλοιπα 2 εκφράζουν καταστάσεις που συνδέονται με ζητήματα του καθημερινού βίου.

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 12 με τα 11 εξ' αυτών να είναι ειδικής συλλογιστικής φύσεως (**S**) και το 1 γενικής (**G**). Τα 10 εξ' αυτών είναι αποδεικτικής χροιάς και τα 2 επεξηγηματικής. Όλα τα **D** έργα εκτός από 1 εντάσσονται σε ένα καθαρά ενδομαθηματικό περιβάλλον. Τα **O** έργα ανέρχονται σε 5.Τα 4 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**G**) και το 1 ειδικού (**S**). Ειδικότερα, εντοπίζονται 2 **O** έργα που βασίζονται στον επαγωγικό συλλογισμό και απαιτούν τη συμπλήρωση δοσμένων μαθηματικών ιδιοτήτων με την κατάλληλη λέξη.

Επιπρόσθετα, συναντάται 1 **Ο** έργο συμπλήρωσης δοθέντων λόγων ίσων μηκών δύο όμοιων τριγώνων και 1 **Ο** έργο εύρεσης όμοιων τριγώνων σε μία δοθείσα απεικόνιση, μέσω εφαρμογής της συνθήκης «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια». Τέλος, εντοπίζεται 1 **Ο** έργο εύρεσης του θεωρήματος που επαληθεύεται έπειτα από την τοποθέτηση ενός τριγώνου πάνω σε ένα άλλο, μέσω αντιστοίχισης των δομικών χαρακτηριστικών τους με τις προϋποθέσεις κάποιου εκ των διδασκόμενων θεωρημάτων. Όλα τα **Ο** έργα εκτός από 1 είναι ενδομαθηματικά.

Και στις δύο χώρες οι μαθητές αντιμετωπίζουν κυρίως έργα ειδικού συλλογιστικού προσανατολισμού. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουν και επεξηγούν διάφορα μαθηματικά ζητήματα, ενώ παράλληλα προσεγγίζουν την ομοιότητα τριγώνων υπό το πρίσμα άλλων μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, αναπτύσσουν βαθιά εννοιολογική γνώση γύρω από διδασκόμενα θεωρήματα, ιδιότητες, κριτήρια, εμπλέκονται σε διερευνητικές διαδικασίες και παρακινούνται να διατυπώσουν ορθές μαθηματικές δηλώσεις. Ωστόσο, η κάθε χώρα προσφέρει και κάποιες επιπλέον διαφορετικής χροιάς ευκαιρίες εκμάθησης. **Στην Ελλάδα**, ο μαθητής αντιμετωπίζει περισσότερα έργα συλλογιστικής και απόδειξης. Ειδικότερα, μαθαίνει πώς να αποκωδικοποιεί ένα δοσμένο μηχανισμό σκέψης και πώς να διαχειρίζεται ταυτόχρονα περισσότερες από μία κατηγορίες φύσεως της συλλογιστικής για την επίλυση ενός έργου. Αντίθετα, **στη Γαλλία** ο μαθητής εξάγει συμπεράσματα μέσω πειραματισμού σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας και προβληματίζεται γύρω από τον τρόπο οριοθέτησης της έννοιας της ομοιότητας τριγώνων. Επιπλέον, ανακαλύπτει τις ιδιαιτερότητες του επαγωγικού συλλογισμού και αντιλαμβάνεται τη σημαντικότητα της διδασκόμενης έννοιας στην καθημερινότητα και σε άλλες επιστήμες.

Το **γαλλικό** εγχειρίδιο βοηθά τον εκπαιδευτικό να καταδείξει μέσω των λυμένων παραδειγμάτων του το μεθοδολογικό μοτίβο που πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές του για την αντιμετώπιση έργων που απαιτούν την απόδειξη ή τη διερεύνηση της ομοιότητας. Το **ελληνικό** εγχειρίδιο προσανατολίζει τον καθηγητή μέσω των λυμένων εφαρμογών του να εστιάσει στη διδασκαλία τόσο υπολογιστικών όσο και αποδεικτικών τεχνικών που συνδέονται με την ομοιότητα. **Και τα δύο εγχειρίδια** προσφέρουν στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να διδάξει «λεπτές» πτυχές του συλλογισμού μέσω των άλυτων έργων τους αλλά και να αξιοποιήσει εκπαιδευτικά λογισμικά προκειμένου να εμπλέξει τους μαθητές του σε μια διερευνητική διαδικασία (στην Ελλάδα αυτό είναι εφικτό μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου).

3.3 Αποτελέσματα αξιολόγησης της θεματικής περιοχής του Πυθαγορείου Θεωρήματος

3.3.1 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο των Lin, Chen, & An (2009)

(**ΕΕ1**): «Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;»

Αρχικά, και οι δύο χώρες εισάγουν το πυθαγόρειο θεώρημα στην προτελευταία τάξη του Γυμνασίου, διαφοροποιώντας τον τρόπο με τον οποίο την οργανώνουν στο εσωτερικό των εγχειριδίων τους. Στην Ελλάδα, το πυθαγόρειο θεώρημα συνιστά την ενότητα «**1.4 Πυθαγόρειο Θεώρημα**» του κεφαλαίου «**ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ**» του **GR1**. Η ενότητα που προηγείται είναι η «**1.3. Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων».** Αντίθετα, στη Γαλλία, η εν λόγω έννοια αποτελεί το κεφάλαιο 9: «**Θεώρημα του Πυθαγόρα**» του **FR1** που απαρτίζεται από τις ενότητες: «**Χαρακτηρίζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την ισότητα του Πυθαγόρα», «Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου»** και **«Αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ή δεν είναι ορθογώνιο».** Το κεφάλαιο που προηγείται ονομάζεται **«Κεφάλαιο 8: Γεωμετρία στο επίπεδο**». Σε αυτό το σημείο προχωρούμε στη μελέτη του τρόπου εσωτερικής δομικής συγκρότησης των εξεταζόμενων ενοτήτων του **GR1** και του **FR1**. Αναφορικά με τον τρόπο συγκρότησης της ενότητας **1.4** του **GR1** παρατηρείται η υιοθέτηση του εξής μοτίβου. Αρχικά, συναντάται μία εισαγωγική δραστηριότητα που λειτουργεί ως απόδειξη του ΠΘ το οποίο διατυπώνεται αργότερα. Έπειτα αναπτύσσεται μία θεωρητική παράγραφος που πραγματεύεται το αντίστροφο του ΠΘ. Στη συνέχεια, εμφανίζονται ένα τμήμα λυμένων εφαρμογών και τρία τμήματα άλυτων έργων. Κατόπιν, παρατίθεται ένα ιστορικό σημείωμα και μία παράγραφος που ανακεφαλαιώνει όλες τις κεντρικές ιδέες του κεφαλαίου στο οποίο εντάσσεται η **1.4**. Αντίθετα, οι τρεις ενότητες του **FR1** που πραγματεύονται το ΠΘ εμφανίζουν πιο σύνθετη εσωτερική οργάνωση. Πρώτα απ’ όλα το εννοιολογικό τους φορτίο αποσαφηνίζεται μέσω 4 άλυτων εισαγωγικών δραστηριοτήτων. Έπειτα η κάθε ενότητα αναπτύσσει ξεχωριστά το θεωρητικό της κορμό. Στη συνέχεια, οι θεωρητικές ιδέες των 3 μελετώμενων ενοτήτων αξιοποιούνται ταυτόχρονα για την κατάρτιση λυμένων και άλυτων έργων. Ειδικότερα, συγκροτείται 1 τμήμα με λυμένες ασκήσεις και κατόπιν 12 τμήματα με άλυτες ασκήσεις, τα 2 εκ των οποίων χωρίζονται υποτμήματα. Ταυτόχρονα, τα δύο εγχειρίδια διαφέρουν και ως προς τη μαθηματική έννοια που πραγματεύονται πριν από το ΠΘ. Πιο συγκεκριμένα, το **GR1** μελετά τους τύπους του εμβαδού ενός τετραγώνου, ενός ορθογωνίου, ενός παραλληλογράμμου, ενός τυχαίου τριγώνου, ενός ορθογωνίου τριγώνου και ενός τραπεζίου. Αντίθετα, το **FR1** εξετάζει το μετασχηματισμό ενός σχήματος μέσω μετάθεσης και την ισότητα τριγώνων. Αναφορικά με τον αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιούνται για τη συγκρότηση του πυθαγορείου θεωρήματος, το **FR1** (7, 64%) χρησιμοποιεί 22 σελίδες, ενώ το **GR1** (2,36%) χρησιμοποιεί μόνο 6. Εδώ, οφείλουμε να επισημάνουμε και το ότι το εν λόγω μαθηματικό περιεχόμενο αναπτύσσεται και σε 1 σελίδα του **FR2** στο τμήμα των επαναληπτικών ασκήσεων.

Στο **γαλλικό εγχειρίδιο**, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια εντάσσεται στην **κονστρουκτιβιστική αντίληψη.** Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους όλο το θεωρητικό υπόβαθρο της ενότητας πριν την παράθεσή του, στα πλαίσια επίλυσης 4 εισαγωγικών δραστηριοτήτων. Στην $1^{η}$ κατασκευάζουν με τη βοήθεια ενός λογισμικού εικασίες, η γενίκευση των οποίων τους βοηθά να εξάγουν τον τύπο της πυθαγόρειας ισότητας. Στη $2^{η}$ αποδεικνύουν οι ίδιοι το ΠΘ και στην $3^{η}$ καλλιεργούν τη διαδικαστική τους γνώση. Στην $4^{η}$ διερευνούν εάν ένα τρίγωνο είναι ή όχι ορθογώνιο μέσα από διερευνήσεις που υλοποιούνται με βάση ένα **ιστορικό πλαίσιο.** Επίσης, και τα έργα του εν λόγω εγχειριδίου προάγουν το **μαθητοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας,** διότι η δομή τους βασίζεται στην αρχή της **καθοδηγούμενης ανακάλυψης.** Πιο συγκεκριμένα, υιοθετείται η λογική της ανάπτυξης πολλών υποερωτημάτων που κατευθύνουν τα νοητικά σχήματα που πρέπει να εφαρμόσει ο μαθητής για να εξάγει την κατάλληλη μαθηματική πληροφορία. Κάποιες μάλιστα εξ' αυτών στοχεύουν αποκλειστικά στην καλλιέργεια μαθηματικών δεξιοτήτων που συνδέονται με την **επιχειρηματολογία** και την **επικοινωνία.** Παράλληλα, δίδεται βαρύτητα στη εξέταση της απόδειξης μέσω **ρεαλιστικών καταστάσεων** και της **επίλυσης προβλήματος.** Ακόμη, συναντώνται και έργα που ενσωματώνουν στον πυρήνα τους τη χρήση **εκπαιδευτικών λογισμικών** τα οποία στηρίζονται στη λογική του **επικοδομισμού,** αφού παρέχουν τα κατάλληλα «**ερεθίσματα**» προκειμένου ο μαθητής να «χτίσει» μόνος του τη γνώση μέσα από τη παραγωγή και τον έλεγχο εικασιών. Ορισμένα εξ' αυτών διδάσκουν και δεξιότητες **σύνταξης ενός προγράμματος με το Scratch** και **μοντελοποίησης.**

Στο **ελληνικό εγχειρίδιο**, η έννοια προσεγγίζεται μέσω μίας εισαγωγικής δραστηριότητας, η οποία συνιστά απόδειξη του ΠΘ. Εδώ, η ανακάλυψη της έννοιας δε συντελείται από το μαθητή, καθώς οι συγγραφείς παραθέτουν τη λύση της εν λόγω δραστηριότητας και επομένως δίδουν έτοιμη τη μαθηματική πληροφορία. Αναφορικά με τις παρουσιαζόμενες ασκήσεις, αυτές στοχεύουν κυρίως στην ανάπτυξη από την πλευρά του μαθητή ενός μεθοδολογικού υποβάθρου που δίδει έμφαση στη διαδικαστική γνώση και στην εξοικείωση με ρεαλιστικές καταστάσεις. Τέλος, το ελληνικό εγχειρίδιο στην εμπλουτισμένη του μορφή δίνει τη δυνατότητα **αξιοποίησης των λογισμικών Geogebra** και **Scratch,** με στόχο την πιο διερευνητική προσέγγιση του αναπτυσσόμενου μαθηματικού περιεχομένου τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο από το μαθητή. Οι ασκήσεις αυτού του τύπου κινητοποιούν το μαθητή να κατασκευάσει αποδείξεις που αφορούν το ΠΘ και το αντίστροφό του σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας και να εφαρμόσει τις δεξιότητες του στον προγραμματισμό μέσω σύνταξης προγραμμάτων.

Συνοπτικά, οι θεωρητικές ιδέες που αφορούν το ΠΘ εμφανίζουν μια πιο ισορροπημένη πορεία ανάπτυξης στο **γαλλικό εγχειρίδιο**, εξαιτίας της πιο αναλυτικής και ιεραρχημένης προσέγγισης που υιοθετείται ως προς την παρουσίαση των θεωρητικών ιδεών. Ειδικότερα, ακολουθείται η αλληλουχία: οριοθέτηση ορθογωνίου τριγώνου και των πλευρών του, ευθεία και αντίστροφη διατύπωση του ΠΘ, συνέπεια του ΠΘ. Επιπλέον, σε συνδυασμό με τα παραπάνω μελετώνται και οι έννοιες του τετραγώνου και της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού. Αναφορικά με την πρακτική εφαρμογή των εμπλεκόμενων θεωρητικών ιδεών, αυτή επίσης παρουσιάζει μια πιο ισορροπημένη και λεπτομερή πορεία εξέλιξης στο **γαλλικό εγχειρίδιο,** εξαιτίας της πιο σφαιρικής αποτύπωσης στα έργα των νοητικών διεργασιών που απαιτούνται για την πλήρη αφομοίωση του ΠΘ.

3.3.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο του Bergwall (2021)

(ΕΕ2): «Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;»

3.3.2.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης εκθεσιακών ενοτήτων

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
GR1	Πυθαγόρειο Θεώρημα	2	-	1	-	3
FR1	Χαρακτηρίζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την ισότητα του Πυθαγόρα	3	-	-	-	3
FR1	Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου	1	2	2	-	4
FR1	Αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ή δεν είναι ορθογώνιο	-	-	-	2	2

Πίνακας 3.7: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 1 κύριο αποτέλεσμα στην ενότητα στο **FR1** λαμβάνει διπλή αιτιολόγηση

	Κύρια Αποτελέσματα						Αιτιολογήσεις						
		Χαρακτηρισμός						Χαρακτηρισμός				Θέση	
Εγχειρίδια	Αριθμός κύριων αποτελεσμάτων	Κριτήριο	Ιδιότητα	Ορισμός	Καθόλου	Άλλος	Αριθμός αιτιολογούμενων αποτελεσμάτων	Απόδειξη	Επιχείρημα	Άλλο	Κανένας	Πριν	Μετά
GR1	**3**	-	-	-	-	**3**	**1**	-	-	-	**1**	**1**	-
FR1	**9**	-	**3**	**2**	**3**	**5**	**5**	**4**	-	**1**	**1**	**1**	**5**

Πίνακας 3.8: Χαρακτηρισμός και τοποθεσία των κύριων αποτελεσμάτων και αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων

Παρατήρηση: 4 κύρια αποτελέσματα στο **FR1** λαμβάνουν διπλό χαρακτηρισμό, 1 κύριο αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις εκ των οποίων η μία δίδεται πριν και η άλλη μετά τη διατύπωσή του.

3.3.2.1.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα αντλούνται από την ενότητα «**1.4**» του **GR1**, ανέρχονται σε 3 και ερμηνεύονται με βάση τους Πίνακες 3.7 και 3.8. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ**» και αιτιολογείται μέσω ενός εμπειρικού επιχειρήματος πριν τη διατύπωσή του. Το δεύτερο επισημαίνεται ως «**Παρατήρηση**», δεν αιτιολογείται και συνιστά τη γεωμετρική ερμηνεία του ΠΘ. Το τρίτο χαρακτηρίζεται ως «**Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος**» και δεν αιτιολογείται.

3.3.2.1.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα των 3 ενοτήτων του Κεφαλαίου 9: «**Πυθαγόρειο Θεώρημα**» του **FR1** ανέρχονται σε 9 και αποτυπώνονται στους Πίνακες 3.7 και 3.8. Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Χαρακτηρίζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την ισότητα του Πυθαγόρα**» περιέχει 3 αποτελέσματα. Το πρώτο στοιχειοθετεί την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, χαρακτηρίζεται ως «**ΟΡΙΣΜΟΣ**» και δεν αιτιολογείται. Το δεύτερο επισημαίνεται ως «**ΟΡΙΣΜΟΣ**» και ως «**Ισότητα του Πυθαγόρα** » και δεν αποδεικνύεται. Το τρίτο οριοθετεί το τετράγωνο ενός αριθμού, δε χαρακτηρίζεται και δεν αιτιολογείται. Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου**» παραθέτει 4 αποτελέσματα. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Θεώρημα του Πυθαγόρα**» και λαμβάνει μία αιτιολόγηση πριν και μία μετά τη διατύπωσή του. Αυτές χαρακτηρίζονται ως «**Απόδειξη**» και εντάσσονται στην κατηγορία **L**, καθώς ο μαθητής είναι αυτός που πρέπει να τις συντάξει κατά τη διαχείριση άλυτων ασκήσεων. Το δεύτερο αποτέλεσμα αποτελεί τεχνική υπολογισμού του μήκους μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου με το ΠΘ και δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο. Επίσης, λαμβάνει μια **S** αιτιολόγηση μετά την παράθεσή του που χαρακτηρίζεται ως «**Εφαρμογή**». Το τρίτο αποτέλεσμα στοιχειοθετεί την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού, δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο και λαμβάνει μία **S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωση του. Το τέταρτο αποτέλεσμα παραθέτει τις τετραγωνικές ρίζες των τέλειων τετραγώνων που περιέχονται μεταξύ 1 και 144, χαρακτηρίζεται ως «**Να ξέρω**» και δεν αιτιολογείται. Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ή δεν είναι ορθογώνιο**» αναπτύσσει 2 αποτελέσματα. Το ένα επισημαίνεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Αντίστροφο του θεωρήματος του Πυθαγόρα**». Παράλληλα λαμβάνει μία γενική αιτιολόγηση που επισημαίνεται ως «**Απόδειξη**» και βρίσκεται στο site του εγχειριδίου. Ο μαθητής παραπέμπεται σε αυτήν μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος. Το άλλο αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Συνέπεια του θεωρήματος του Πυθαγόρα**». Επιπλέον, λαμβάνει μία γενική αιτιολόγηση μετά την παρουσίασή του που χαρακτηρίζεται ως «**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**».

Η παραπάνω ανάλυση καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το εγχειρίδιο της εκάστοτε χώρας δημιουργεί τις κατάλληλες προϋποθέσεις για την εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική επιχειρηματολογία. Στην **Ελλάδα**, ο μαθητής εξοικειώνεται με το εμπειρικό σχήμα, εξαιτίας της εμπειρικής απόδειξης του ΠΘ που δίδεται από το εγχειρίδιο. Αυτή βασίζεται στα εμβαδά πολυγώνων. Επιπλέον, δεν έχει τη δυνατότητα να κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν η γεωμετρική ερμηνεία και το αντίστροφο του ΠΘ, εξαιτίας της μη ανάπτυξης των αποδείξεων τους από το εγχειρίδιο. Επίσης, δεν παρακινείται να συντάξει ο ίδιος μια απόδειξη για όσα θεωρητικά στοιχεία δεν αιτιολογούνται. Στη **Γαλλία**, ο μαθητής έρχεται σε επαφή με ποικίλες συνιστώσες της απόδειξης. Ειδικότερα, καλείται να συντάξει ο ίδιος την απόδειξη του ΠΘ και της γεωμετρικής ερμηνείας του μέσω απόκρισης σε διαδοχικά ερωτήματα άλυτων έργων. Εκεί διερευνά, διατυπώνει παρατηρήσεις, κατασκευάζει εικασίες και προβαίνει σε υπολογισμούς. Ταυτόχρονα, αντιμετωπίζει εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα κατά την αιτιολόγηση κύριων αποτελεσμάτων που είτε αναδεικνύουν το πεδίο εφαρμογής του ΠΘ είτε σχετίζονται με αλγεβρικές έννοιες (τετραγωνική ρίζα αριθμού). Τέλος, εξοικειώνεται με τον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό μέσω της απόδειξη του αντίστροφο του ΠΘ που δίδεται από το εγχειρίδιο καθώς και με τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο μέσω της απόδειξη της συνέπειας του ΠΘ που επίσης παρατίθεται από το εγχειρίδιο. Κατ' επέκταση, ο εκπαιδευτικός στην **Ελλάδα** έχει τη δυνατότητα να δώσει βαρύτητα σε εμπειρικές αποδεικτικές μεθόδους. Αντίθετα, στη **Γαλλία**, ο εκπαιδευτικός έχει την ευκαιρία στα πλαίσια της διδασκαλίας του να εξοικειώσει τους μαθητές του τόσο με την εμπειρική όσο και με την τυπική απόδειξη και να παράσχει τα κατάλληλα ερείσματα στους μαθητές του προκειμένου να τους εμπλέξει ενεργά στην αποδεικτική διαδικασία.

3.3.2.2. Αποτελέσματα αξιολόγησης έργων

				Τύπος συλλογιστικής			Φύση συλλογιστικής						
Εγχειρίδια	**Ενότητα**	**Συνολικός αριθμός έργων**	**PR έργα**	**S**	**G**	**M**	**I**	**D**	**E**	**C**	**X**	**P**	**O**
GR1	**Πυθαγόρειο Θεώρημα**	**22**	**8**	**8**	**-**	**-**	**1**	**7**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
FR1	**Κεφάλαιο 9: Θεώρημα του Πυθαγόρα**	**226**	**101**	**62**	**39**	**34**	**39**	**13**	**-**	**2**	**-**	**-**	**14**
FR2	**Ισότητα του Πυθαγόρα**	**5**	**2**	**2**	**-**	**-**	**-**	**2**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**

Πίνακας 3.9: *Είδος και φύση συλλογιστικής των έργων των εγχειριδίων που σχετίζονται με την απόδειξη*

Παρατήρηση: 1 έργο στο **FR1** έλαβε τη διπλή κωδικοποίηση **MD**.

3.3.2.2.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του ελληνικού εγχειριδίου γίνεται με βάση τον Πίνακα 3.9. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα της ενότητας «**1.4**» ανέρχονται σε 22, με τα 8 εξ’ αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR)**. Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 8 **PR** έργα κατατάσσονται όλα στην κατηγορία **D** εκτός από 1 που εντάσσεται στη **I.** Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, όλα τα **PR** έργα είναι ειδικού χαρακτήρα (**S**). Τα **D** έργα ανέρχονται σε 7 και είναι όλα ειδικού συλλογιστικού προφίλ (**S**). Τα 5 από αυτά ζητούν να αποδειχθεί ότι ένα ή περισσότερα τρίγωνα είναι ορθογώνια. Επιπρόσθετα, εντοπίζεται 1 έργο που απαιτεί την επαλήθευση του ΠΘ σε ένα δοσμένο τρίγωνο καθώς και 1 έργο επεξηγηματικού χαρακτήρα που αφορά τη γωνία που σχηματίζουν δύο ξύλινα δοκάρια. Όλα τα **D** έργα εκτός από 1 εκφράζουν στείρες ενδομαθηματικές καταστάσεις. Το μοναδικό **I** έργο είναι ειδικής χροιάς (**S**), αφορά ζήτημα του καθημερινού βίου και απαιτεί από το μαθητή να εξετάσει την ισχύ μιας δοθείσας συνθήκης.

3.3.2.2.2 Γαλλικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων των δύο γαλλικών εγχειριδίων γίνεται με βάση τον Πίνακα 3.9. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα του κεφαλαίου 9: «**Πυθαγόρειο Θεώρημα**» του **FR1** καθώς και της επαναληπτικής ενότητας **«Ισότητα του Πυθαγόρα»** του **FR2** ανέρχονται σε 231, με τα 103 εξ’ αυτών να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 103 **PR** έργα κατατάσσονται στις κατηγορίες **I** (39), **M**(34), **D**(15), **O**(14) και **C**(2), ενώ παρουσιάζεται και 1 έργο που λαμβάνει τη διπλή κωδικοποίηση **MD**. Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, υπερτερούν τα έργα ειδικού χαρακτήρα (**S**) που είναι 64 σε αριθμό έναντι των έργων γενικού χαρακτήρα (**G**) που είναι 39.

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 39 με τα 32 εξ’ αυτών να είναι ειδικής συλλογιστικού χαρακτήρα (**S**) και τα 7 γενικού (**G**). Τα 16 εξ’ αυτών απαιτούν τη διερεύνηση της ισχύος δηλώσεων που περιγράφουν ποικίλες μαθηματικές καταστάσεις. Επιπρόσθετα, εμφανίζονται 11 έργα εξέτασης του εάν ορισμένα τρίγωνα είναι ορθογώνια ή όχι. Παράλληλα, εντοπίζονται 8 έργα χαρακτηρισμού δηλώσεων ως (Σ) ή (Λ). Επίσης, παρουσιάζονται 2 έργα διερεύνησης της αληθοφάνειας μαθηματικών δηλώσεων ηρώων του εγχειριδίου και 1 έργο που διατυπώνεται ως ερώτηση του τύπου Ναι/Όχι. Τέλος, συναντάται 1 έργο εξέτασης της εγκυρότητας μιας εικασίας. Από το 39 **I** έργα, εντοπίζονται 26 έργα στείρου ενδομαθηματικού χαρακτήρα και 13 έργα που σχετίζονται με την καθημερινότητα. Τα **M** έργα ανέρχονται σε 34. Τα 23 εξ’ αυτών είναι γενικής συλλογιστικής χροιάς (**G**) και τα 11 ειδικής (**S**). Όλα τα **M** έργα εκτός από 8 εντάσσονται σε ένα αυστηρό ενδομαθηματικό πλαίσιο. Τα 29 εξ’ αυτών απαιτούν τη διατύπωση μαθηματικών δηλώσεων που συνδέονται με την ονομασία ορθογωνίων τριγώνων και τη γραφή είτε της πυθαγόρειας ισότητας είτε άλλων μαθηματικών ισοτήτων. Ταυτόχρονα, παρουσιάζονται 2 έργα διατύπωσης μιας εικασίας και 3 έργα εύρεσης των ακριβών συνθηκών προκειμένου μια δήλωση να είναι αληθής. Τέλος, η κατηγορία **M** εμφανίζεται σε συνδυασμό με την **D** σε 1 έργο. Τα **C** έργα είναι 2 και αποτυπώνουν ενδομαθηματικές καταστάσεις. Ειδικότερα, πρόκειται για έργα ειδικού τύπου (**S**) που απαιτούν τον εντοπισμό των λαθών στον επιχειρηματολογικό κορμό δύο χαρακτήρων του εγχειριδίου.

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 15.Τα 11 εξ' αυτών είναι ειδικής συλλογιστικής υπόστασης (**S**) και τα 4 γενικής (**G**). Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται 4 έργα αιτιολόγησης του είδους δύο δοσμένων τριγώνων ως προς τις γωνίες και 1 έργο επεξήγησης του εσφαλμένου χαρακτήρα των απαντήσεων δύο ηρώων του εγχειριδίου. Επιπρόσθετα, εντοπίζονται 6 **D** αποδεικτικά έργα που σχετίζονται είτε με τη φύση ενός δοσμένου τριγώνου είτε με μία ισότητα που εμπλέκει εμβαδά ημικυκλίων. Ακόμη, συναντώνται 2 **D** έργα χαρακτήρα επαλήθευσης που αφορούν το είδος ενός τριγώνου ως προς τις γωνίες και την ισχύ μιας μεθόδου. Από τα 15 **D** έργα τα 2 αποτελούν αποδείξεις του ΠΘ που αναπτύσσεται στο θεωρητικό μέρος της ενότητας. Η κατηγορία **D** εμφανίζεται σε 1 έργο σε συνδυασμό με τη **M**. Όλα τα **D** έργα εκτός από 2 έχουν καθαρά ενδομαθηματικό πρόσημο. Τα **O** έργα ανέρχονται σε 14. Τα 8 εξ' αυτών είναι ειδικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**S**) και τα 6 γενικού (**G**). Όλα βασίζονται στην πλήρη αφομοίωση των προϋποθέσεων του ευθέος και του αντιστρόφου του ΠΘ αλλά και του ορισμού του ορθογωνίου τριγώνου. Ειδικότερα, συναντώνται 4 έργα συμπλήρωσης μίας δοθείσας μαθηματικής ισότητας που εμπλέκει τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με το σωστό αριθμό, 2 έργα επιλογής του ορθού εκ των τριών δοθέντων μαθηματικών συμπερασμάτων και 1 έργο εύρεσης της ορθής πυθαγόρειας ισότητας ανάμεσα σε τρεις παρουσιαζόμενες ισότητες. Επίσης, παρουσιάζονται 2 έργα προσδιορισμού της φύση ενός δοθέντος τετραπλεύρου και 2 έργα αντιστοίχισης είτε δοσμένων ισοτήτων με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό συμπέρασμα είτε δοσμένων μαθηματικών πληροφοριών μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, εμφανίζεται 1 έργο που πραγματεύεται τη σύνδεση μεταξύ της σχηματικής και της συμβολικής αναπαράστασης του ΠΘ και 1 έργο που συνιστά σπαζοκεφαλιά. Τέλος, ανιχνεύεται 1 έργο εύρεσης της 1 ανάμεσα σε 4 δηλώσεις που δεν αντιστοιχεί σε μία περιγραφόμενη μαθηματική κατάσταση. Από τα 14 **O** έργα, μόνο τα 2 αφορούν ζητήματα του καθημερινού βίου.

Και στις δύο χώρες οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τη γνώση μέσω των διαδικασιών της απόδειξης, της επεξήγησης και της επαλήθευσης μαθηματικών ζητημάτων. Ωστόσο, η κάθε χώρα προσφέρει και κάποιες επιπλέον διαφορετικής υπόστασης ευκαιρίες εκμάθησης. **Στην Ελλάδα**, ο μαθητής εκτίθεται αποκλειστικά σε αφηρημένες μαθηματικές καταστάσεις και αναπτύσσει κυρίως τις υπολογιστικές του δεξιότητες. Επίσης, αποκωδικοποιεί την πληροφορία σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από μία μέσα από τη διεπιστημονική μελέτη. Αντίθετα, **στη**

Γαλλία ο μαθητής αντιμετωπίζει περισσότερα έργα συλλογιστικής και απόδειξης και έρχεται σε επαφή με περισσότερες συλλογιστικές πτυχές. Ακόμη, εξασκείται κυρίως σε ενδομαθηματικό πλαίσιο και σε έργα που τις περισσότερες φορές είναι αφηρημένου χαρακτήρα και πολύ υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Επιπλέον, εξοικειώνεται με πιο πολύπλοκες συλλογιστικές συνιστώσες όπως αυτές της διόρθωσης επιχειρημάτων, της διατύπωσης μιας δήλωσης, της κατασκευής εικασιών και της εύρεσης των ακριβών συνθηκών προκειμένου μια δήλωση να είναι αληθής. Παράλληλα, οικοδομεί τη γνώση συνήθως μέσα από τη διερευνητική διαδικασία, αξιοποιεί εκπαιδευτικά λογισμικά για την πραγματοποίηση των διαφόρων νοητικών διεργασιών του και ενεργοποιεί την εννοιολογική του γνώση για την απόκριση στα πιο σύνθετα μαθηματικά ζητήματα. Ακόμη, μαθαίνει να συνδυάζει περισσότερες από μία συνιστώσες της συλλογιστικής για την επίλυση ενός έργου.

Το **γαλλικό** εγχειρίδιο βοηθά τον εκπαιδευτικό να καταδείξει μέσω των λυμένων παραδειγμάτων του τη μεθοδολογική βάση που πρέπει να καλλιεργήσουν οι μαθητές του για την αντιμετώπιση έργων υπολογιστικού και διερευνητικού χαρακτήρα καθώς και έργων που στηρίζονται στην ορθή καταγραφή της πυθαγόρειας ισότητας με βάση ένα δοσμένο σχήμα. Αυτό οφείλεται στο λεπτομερή κορμό επίλυσής τους που περιλαμβάνει αναλυτική απαρίθμηση των σταδίων (étapes) επίλυσης, την με ακρίβεια χρήση των μαθηματικών εγγυήσεων (ευθύ και αντίστροφο του ΠΘ) και την παροχή επιπρόσθετων επεξηγήσεων για τη διευκρίνιση των πιο δυσνόητων σημείων. Έτσι, οι εν λόγω ασκήσεις μπορούν να αποτελέσουν για τον καθηγητή το κατάλληλο έρεισμα για τη διδασκαλία του τρόπου σύνταξης ενός σωστού μαθηματικού επιχειρήματος. Σχετικά με τα άλυτα έργα του, αυτά επιτρέπουν στον καθηγητή να καλύψει ένα ευρύ μαθηματικό φάσμα, αναδεικνύοντας ιδιαιτερότητες του συλλογισμού. Το **ελληνικό** εγχειρίδιο δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό μέσω των λυμένων εφαρμογών του να επικεντρωθεί κυρίως στη διδασκαλία έργων απόδειξης ή επαλήθευσης του ΠΘ. Αναφορικά με τις άλυτες ασκήσεις, αυτές προσανατολίζουν περισσότερο τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία τεχνικών υπολογισμού. **Και τα δύο εγχειρίδια** δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να χρησιμοποιήσει εκπαιδευτικά λογισμικά για να υποστηρίξει το μαθητή στη μαθησιακή του διαδικασία (στην Ελλάδα αυτό είναι εφικτό μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου).

3.4 Αποτελέσματα αξιολόγησης της θεματικής περιοχής του Θεωρήματος του Θαλή

3.4.1 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο των Lin, Chen, & An (2009)

(**ΕΕ1**): «Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;»

Αρχικά, οι δύο χώρες διαφέρουν ως προς την τάξη στην οποία αναπτύσσουν το θεώρημα του Θαλή. Στην Ελλάδα, προσεγγίζεται μόνο στην τελευταία τάξη του Γυμνασίου, ενώ στη Γαλλία μελετάται τόσο στην προτελευταία όσο και στην τελευταία τάξη του Γυμνασίου. Επίσης, διαφοροποιείται και η οργάνωση του παραπάνω μαθηματικού περιεχομένου σε επίπεδο εγχειριδίου στις δύο εκπαιδευτικές πραγματικότητες. Ειδικότερα, η εν λόγω έννοια στην Ελλάδα αναπτύσσεται στις δύο ανεξάρτητες ενότητες «**1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων**» και «**1.3 Θεώρημα του Θαλή**» του κεφαλαίου «**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**» του **GR2**. Νωρίτερα παρουσιάζεται η ενότητα «**1.1 Ισότητα τριγώνων**». Αντίθετα, στη Γαλλία, το θεώρημα του Θαλή αναπτύσσεται πάντα ως ενότητα ενός κεφαλαίου που πραγματεύεται και άλλες έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, στο **FR1** παρουσιάζεται στις ενότητες «**Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή**» και «**Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**», οι οποίες μαζί με την ενότητα «**Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**» συγκροτούν το **Κεφάλαιο 10: «Θεώρημα του Θαλή – Συνημίτονο»**. Αναφορικά με το **FR2**, το παραπάνω θεώρημα καταρτίζεται στις ενότητες «**Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή»** και «**Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**», οι οποίες μαζί με την ενότητα «**Χρησιμοποιώ όμοια τρίγωνα**» συγκροτούν το **Κεφάλαιο 8**: «**Όμοια τρίγωνα – Θεώρημα του Θαλή**».

Επιπρόσθετα, τα εξεταζόμενα εγχειρίδια των δύο χωρών διαφέρουν και ως προς την έννοια που αναπτύσσουν πριν από το θεώρημα του Θαλή. Σχετικά με το **GR2**, αυτό πραγματεύεται νωρίτερα τα στοιχεία και τα είδη τριγώνων, τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, τις ιδιότητες των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος και των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας. Αντίθετα, το **FR1** προσεγγίζει προηγουμένως το ευθύ, το αντίστροφο και τη συνέπεια του πυθαγορείου θεωρήματος και το **FR2** μελετά έννοιες της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Αναφορικά με τον εσωτερικό δομικό μηχανισμό του **GR2**, τόσο η **1.2** όσο και **1.3** ιεραρχούνται με τον ίδιο τρόπο. Αρχικά, παραθέτουν μία εισαγωγική δραστηριότητα που αποσκοπεί στο να μυήσει το μαθητή στις ζητούμενες έννοιες και έπειτα αναπτύσσουν τις κεντρικές τους θεωρητικές ιδέες. Μάλιστα, στην περίπτωση της **1.2** ο παρουσιαζόμενος θεωρητικός μηχανισμός οργανώνεται σε 4 διακριτές παραγράφους. Κατόπιν, τόσο στην **1.2** όσο και στην **1.3** συγκροτείται 1 τμήμα που εμπεριέχει λυμένα έργα και στη συνέχεια συναντώνται 2 τμήματα που περιλαμβάνουν άλυτα έργα. Αντίθετα, οι ενότητες των **FR1** και **FR2** διαθέτουν έναν πιο λεπτομερή δομικό χαρακτήρα συγκριτικά με τις αντίστοιχες ελληνικές. Ειδικότερα, οι εννοιολογικές κατευθύνσεις των μελετώμενων ενοτήτων των γαλλικών εγχειριδίων αναπτύσσονται αρχικά σε 3 εισαγωγικές δραστηριότητες. Έπειτα ακολουθεί για την κάθε ενότητα ένα θεωρητικό μέρος με ιδιότητες, ορισμούς, παρατηρήσεις και θεωρήματα. Στη συνέχεια, οι θεωρητικές ιδέες των ενοτήτων των δύο εγχειριδίων αξιοποιούνται ταυτόχρονα για την κατασκευή λυμένων και άλυτων έργων. Ειδικότερα, συγκροτείται στο κάθε εγχειρίδιο 1 τμήμα με λυμένες ασκήσεις που αφορούν τις αναπτυσσόμενες ενότητες του. Κατόπιν εμφανίζονται 12 τμήματα άλυτων ασκήσεων στην περίπτωση του **FR1** και 13 στην περίπτωση του **FR2**, τα οποία συνδέονται με τις πραγματευόμενες ενότητές τους. Σχετικά με τον αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιούνται για τη συγκρότηση του εν λόγω μαθηματικού περιεχομένου, τα τρία εξεταζόμενα εγχειρίδια παρουσιάζουν διαφορές ως προς τη συνολική έκταση που επιλέγουν να αφιερώσουν. Πιο συγκεκριμένα, το **GR2** χρησιμοποιεί 13 σελίδες (4,92%) για την προσέγγιση του θεωρήματος του Θαλή, ενώ τόσο το **FR1** όσο και το **FR2** αναπτύσσουν το καθένα την προαναφερθείσα έννοια σε 19 σελίδες (6,6% στο **FR1** και 6,25% στο **FR2**).

Στα ***γαλλικά εγχειρίδια***, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια εντάσσεται στην **κονστρουκτιβιστική ευρετική.** Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους όλο το θεωρητικό πυρήνα του εκάστοτε εγχειριδίου πριν την παράθεσή του, στα πλαίσια επίλυσης εισαγωγικών δραστηριοτήτων. Σε αυτές ο μαθητής είτε κατασκευάζει μόνος του μεθόδους, είτε αναπτύσσει τις υπολογιστικών του δεξιότητες είτε αποδεικνύει κάποιο θεώρημα. Επίσης και τα έργα των εν λόγω εγχειριδίων εξυπηρετούν το **μαθητοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας.** Ειδικότερα, τα έργα είναι κατασκευασμένα στη βάση της

καθοδηγούμενης ανακάλυψης, διότι εμπεριέχουν πολλά υποερωτήματα που κατευθύνουν το μαθητή σχετικά με το είδος των νοητικών σταδίων που πρέπει να ακολουθήσει προκειμένου να εξάγει το ζητούμενο μαθηματικό αποτέλεσμα. Κάποια μάλιστα εξ' αυτών στοχεύουν αποκλειστικά στην καλλιέργεια συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων που συνδέονται με την **επικοινωνία,** την **επιχειρηματολογία** και τον **υπολογισμό.** Παράλληλα, ενθαρρύνεται ιδιαίτερα η διδασκαλία ενός πλαισίου που οικοδομεί την απόδειξη μέσα από την **επίλυση προβλήματος** και μέσα από **ρεαλιστικές καταστάσεις.** Επιπρόσθετα, δίδεται βαρύτητα στην κατάρτιση έργων που προάγουν τη διερευνητική μάθηση μέσω της **χρήσης των εκπαιδευτικών λογισμικών Geogebra** και **Scratch.** Στα συγκεκριμένα δυναμικά περιβάλλοντα, ο μαθητής «οικοδομεί» τη γνώση μέσω παραγωγής εικασιών αναπτύσσοντας παράλληλα **ικανότητες σύνταξης αλγορίθμων.**

Στο **ελληνικό εγχειρίδιο**, η έννοια προσεγγίζεται μέσω δύο άλυτων εισαγωγικών δραστηριοτήτων, ο τρόπος διατύπωσης των οποίων δεν ενθαρρύνει ιδιαίτερα την αυτενέργεια του μαθητή. Το θεωρητικό μέρος που πλαισιώνει την εξεταζόμενη έννοια προάγει περισσότερο τη **δασκαλοκεντρική προσέγγιση** δεδομένου του όγκου των παρατιθέμενων πληροφοριών και του γεγονότος ότι δε δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να ανακαλύψει τον περιγραφόμενο θεωρητικό πυρήνα κατά την επίλυση των εισαγωγικών δραστηριοτήτων. Αναφορικά με τις παρουσιαζόμενες ασκήσεις, αυτές ωθούν το μαθητή στο να αναπτύξει συλλογισμούς, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις η βαρύτητα δίνεται στην καλλιέργεια των υπολογιστικών του δεξιοτήτων. Τέλος, το ελληνικό εγχειρίδιο στην εμπλουτισμένη του μορφή δίνει τη δυνατότητα **αξιοποίησης του λογισμικού Geogebra,** με στόχο την πιο διερευνητική προσέγγιση των βασικότερων μαθηματικών ιδεών τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο από το μαθητή. Οι ασκήσεις αυτού του τύπου κινητοποιούν το μαθητή στο να εξάγει μαθηματικά συμπεράσματα μέσω διαδοχικών πειραματισμών και να εξασκήσει τις δεξιότητες του στον προγραμματισμό μέσω σύνταξης προγραμμάτων.

Συνοπτικά, οι θεωρητικές ιδέες που αφορούν το θεώρημα του Θαλή παρουσιάζουν μια πιο αρμονική πορεία ανάπτυξης στο **ελληνικό εγχειρίδιο** λόγω της ευρύτερης και πιο ιεραρχημένης προσέγγισης που υιοθετείται. Ο μαθητής δηλαδή εξοικειώνεται πρώτα με τα ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών, έπειτα μαθαίνει να διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα τμήματα, στη συνέχεια κατανοεί τις έννοιες του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων και των ανάλογων ευθυγράμμων τμημάτων, κατόπιν μαθαίνει τις σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών και τέλος μελετά το θεώρημα του Θαλή, το αντίστροφό του και τις συνέπειες του. Ωστόσο, τα **γαλλικά εγχειρίδια** δίνουν τη δυνατότητα στο μαθητή να οικοδομήσει πιο ισχυρή εννοιολογική γνώση γύρω από την εν λόγω έννοια, καθώς τη μελετά σε περισσότερα επίπεδα (στη γενική της μορφή και σε τρίγωνο), παρουσιάζει περισσότερες ιδιότητες που απορρέουν από αυτή και αναδεικνύει περισσότερες μεθοδολογικές πτυχές της (αποσαφήνιση των ακριβών περιστάσεων χρήσης του θεωρήματος του Θαλή και του αντιστρόφου του). Αναφορικά με την πρακτική εφαρμογή των εμπλεκόμενων θεωρητικών ιδεών, αυτή εμφανίζει πιο αρμονική πορεία εξέλιξης στα **γαλλικά εγχειρίδια** λόγω των περισσότερων οπτικών γωνιών που υιοθετούν τα έργα του για να αποκωδικοποιήσουν τις πιο ιδιόμορφες πτυχές της διδασκόμενης έννοιας.

3.4.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο του Bergwall (2021)

(ΕΕ2): «Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;»

3.4.2.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης εκθεσιακών ενοτήτων

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
GR2	**Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων**	**3**	**-**	**5**	**4**	**10**
GR2	**Θεώρημα του Θαλή**	**1**	**-**	**-**	**2**	**3**
FR1	**Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή**	**2**	**-**	**-**	**1**	**3**
FR1	**Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι**	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
	παράλληλες					
FR2	**Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή**	**-**	**1**	**1**	**1**	**1**
FR2	**Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**	**-**	**1**	**2**	**-**	**3**

Πίνακας 3.10: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 2 αποτελέσματα στο **GR2** λαμβάνουν από δύο **S** αιτιολογήσεις , 1 αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει 1**G** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή του και 1**S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει 1 **L** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή του και 1 **S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει 3 αιτιολογήσεις (1 **L** πριν τη διατύπωσή του, 1 **G** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή του και 1 **S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του), 1 αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει 2 **S** αιτιολογήσεις (η μία δίδεται πριν και η άλλη μετά τη διατύπωσή του).

	Κύρια Αποτελέσματα						**Αιτιολογήσεις**						
	Χαρακτηρισμός							**Χαρακτηρισμός**				**Θέση**	
Εγχειρίδια	Αριθμός κύριων αποτελεσμάτων	Κριτήριο	Ιδιότητα	Ορισμός	Καθόλου	Άλλος	Αριθμός αιτιολογούμενων αποτελεσμάτων	Απόδειξη	Επιχείρημα	Άλλο	Κανένας	Πριν	Μετά
GR2	**13**	-	**3**	-	**9**	**1**	**9**	-	-	-	**11**	**10**	**1**
FR1	**6**	-	**3**	-	**1**	**3**	**3**	**3**	-	**2**	-	**1**	**4**
FR2	**4**	-	**2**	-	-	**2**	**2**	**3**	-	**3**	-	**4**	**3**

Πίνακας 3.11: *Χαρακτηρισμός και τοποθεσία των κύριων αποτελεσμάτων και αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 1 αποτέλεσμα στο **GR2** λαμβάνει διπλό χαρακτηρισμό, 1 αποτέλεσμα στο **GR2** λαμβάνει δύο **S** αιτιολογήσεις πριν τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **GR2** λαμβάνει 1 **S** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωση του και 1 **S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει διπλό χαρακτηρισμό, 2 αποτελέσματα στο **FR2** λαμβάνουν διπλό χαρακτηρισμό, 1 αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει 2 αιτιολογήσεις μετά τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **FR1** λαμβάνει 1 αιτιολόγηση πριν και 1 αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του, 1 αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει 3 αιτιολογήσεις (2 πριν και 1 μετά τη διατύπωσή του), 1 αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει 1 αιτιολόγηση πριν και 1 αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του.

3.4.2.1.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση του **GR2** υλοποιείται με βάση τους Πίνακες 3.10 και 3.11. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα αντλούνται από τις ενότητες «**1.2**» και «**1.3**» του **GR2**, ανέρχονται σε 13 και κατατάσσονται στις κατηγορίες **G** (6), **S** (5) και **N** (4). Το εκθεσιακό μέρος της «**1.2**» απαρτίζεται από 10 αποτελέσματα. Η ενότητα ξεκινά με ένα αποτέλεσμα που υποστηρίζει ότι παράλληλες ευθείες, εφόσον ισαπέχουν, ορίζουν ίσα τμήματα σε οποιαδήποτε ευθεία τις τέμνει. Αυτό δε χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο και λαμβάνει γενική απόδειξη πριν τη διατύπωσή του. Έπειτα, αναπτύσσεται ένα αποτέλεσμα που μελετά τη φύση μιας ευθείας που φέρουμε από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου και είναι παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του. Δίδεται χωρίς επισήμανση και αιτιολογείται μέσω μιας γενικής απόδειξης πριν την παράθεσή του. Μετά, διατυπώνεται χωρίς κάποιο χαρακτηρισμό ένα αποτέλεσμα που ορίζει το λόγο ενός ευθύγραμμου τμήματος και λαμβάνει δύο **S** αιτιολογήσεις πριν την παρουσίασή του. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται ένα αποτέλεσμα που δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο και λαμβάνει μία **S** αιτιολόγηση πριν και μία **S** αιτιολόγηση μετά τη διατύπωσή του. Αυτό αφορά τον τρόπο υπολογισμού του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Κατόπιν, εμφανίζεται ένα αποτέλεσμα που αποσαφηνίζει πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό και αιτιολογείται με ειδικό τρόπο πριν την παράθεσή του. Έπειτα δίδονται με την επισήμανση «**ιδιότητα**» και χωρίς αιτιολόγηση οι 3 σημαντικότερες ιδιότητες αναλογιών. Τέλος, στο τμήμα «**Παραδείγματα – Εφαρμογές**» παρατίθενται δύο αποτελέσματα που συνδέονται με τη μαθηματική συμπεριφορά του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου και της διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου.

Κανένα από τα δύο αυτά αποτελέσματα δε λαμβάνει κάποιο χαρακτηρισμό, ενώ και τα δύο αιτιολογούνται μέσω γενικής απόδειξης πριν τη διατύπωσή τους. Καμία από τις δοθείσες αιτιολογήσεις της **1.2** δε λαμβάνει κάποια επισήμανση. Το εκθεσιακό μέρος της «**1.3»** περιλαμβάνει 3 αποτελέσματα. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**πρόταση**» και ως «**θεώρημα του Θαλή**», ενώ αιτιολογείται μέσω μιας γενικής απόδειξης πριν τη διατύπωσή του η οποία δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο. Το δεύτερο αποτέλεσμα εξασφαλίζει μέσω της παραλληλίας δύο ευθειών την ισότητα των λόγων των πλευρών δύο τριγώνων. Λαμβάνει μία αιτιολόγηση γενικού χαρακτήρα πριν τη διατύπωσή του που δίδεται χωρίς χαρακτηρισμό. Το τρίτο αποτέλεσμα αποτελεί το αντίστροφο του δεύτερου αποτελέσματος και δεν αιτιολογείται.

3.4.2.1.2 Γαλλικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση 2 ενοτήτων του **FR1** και 2 ενοτήτων του **FR2** υλοποιείται με βάση τους Πίνακες 3.10 και 3.11. Ειδικότερα, τα συνολικά εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα ανέρχονται σε 10 και ταξινομούνται στις κατηγορίες **S**(5), **N**(3), **G**(3) και **L**(3). Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή**» του **FR1** συντίθεται από 3 αποτελέσματα. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και συνδέεται με τα χαρακτηριστικά των τριγώνων που αποκτούμε όταν μία ευθεία «κόβει» ένα τυχαίο τρίγωνο όντας παράλληλη σε μία από τις πλευρές του. Επιπρόσθετα, λαμβάνει μία **G** αιτιολόγηση που παρουσιάζεται στο site του εγχειριδίου και επισημαίνεται ως «**Απόδειξη**». Οι μαθητές παραπέμπονται σε αυτή μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος. Το δεύτερο αποσαφηνίζει τη σχετική θέση 5 σημείων μίας δοθείσας απεικόνισης, δεν επισημαίνεται και δεν αιτιολογείται. Το τρίτο χαρακτηρίζεται ως «**Παρατήρηση**», δεν αιτιολογείται και σχετίζεται με την έκφραση της αναλογικότητας των πλευρών δύο τριγώνων με τη βοήθεια κλασμάτων. Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**» του **FR1** απαρτίζεται από 3 αποτελέσματα. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και συνδέει την μη ισότητα 2 εκ των 3 πιθανών λόγων των πλευρών δύο τριγώνων με τη μη παραλληλία δύο ευθειών. Επιπρόσθετα, λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις μετά τη διατύπωσή του: μία **G** που χαρακτηρίζεται ως «**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**» και μία **S** που επισημαίνεται ως «**Παράδειγμα**». Πρώτα δίδεται η **G** και έπειτα η **S** αιτιολόγηση. Το δεύτερο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Αντίστροφο του θεωρήματος**

του Θαλή» και λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις. Η μία δίδεται πριν τη διατύπωσή του, χαρακτηρίζεται ως «**Απόδειξη**» και εντάσσεται στην κατηγορία **L**, καθώς ο μαθητής καλείται να την αναπτύξει σε μία εισαγωγική δραστηριότητα. Η άλλη είναι ειδικού χαρακτήρα, παρατίθεται μετά τη διατύπωσή του και χαρακτηρίζεται ως «**Παράδειγμα**». Το τρίτο αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται ως «**Παρατήρηση**», δεν αιτιολογείται και προσδιορίζει τους λόγους των πλευρών δύο τριγώνων που δεν μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή**» του **FR2** αποτελείται από 1 μόνο αποτέλεσμα που επισημαίνεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Θεώρημα του Θαλή** ». Παράλληλα, λαμβάνει 3 αιτιολογήσεις. Η πρώτη εντάσσεται στην κατηγορία **G**, επισημαίνεται ως «**Απόδειξη**» και εντοπίζεται στο site του εγχειριδίου. Οι μαθητές παραπέμπονται σε αυτήν πριν την παρουσίαση του αποτελέσματος. Η δεύτερη δίδεται πριν την παρουσίαση του αποτελέσματος, χαρακτηρίζεται ως «**Απόδειξη**» και εντάσσεται στην κατηγορία **L**, αφού ο μαθητής πρέπει να την αναπτύξει στη δεύτερη εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας. Η τρίτη παρέχεται μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος, κατατάσσεται στην κατηγορία **S** και χαρακτηρίζεται ως «**Παράδειγμα**». Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**» του **FR2** διατυπώνει 3 αποτελέσματα. Το πρώτο αναδεικνύει το θεώρημα του Θαλή ως εργαλείο απόδειξης της μη παραλληλίας δύο ευθειών και δε χαρακτηρίζεται. Ωστόσο, αιτιολογείται μέσω ενός εμπειρικού επιχειρήματος μετά τη διατύπωσή του που επισημαίνεται ως «**Παράδειγμα**». Το δεύτερο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και ως «**Αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**» και λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις. Η μία εξ’ αυτών δίδεται πριν τη διατύπωσή του, χαρακτηρίζεται ως «**Απόδειξη**» και εντάσσεται στην κατηγορία **L**, καθώς ο μαθητής οφείλει να τη συντάξει στην τρίτη εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας. Η άλλη αιτιολόγηση είναι ειδικής φύσεως, παρατίθεται μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος και χαρακτηρίζεται ως «**Παράδειγμα**». Τέλος, το τρίτο αποτέλεσμα δε χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο και αναδεικνύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή ως εργαλείο απόδειξης της παραλληλίας δύο ευθειών. Ακόμη, λαμβάνει πριν την παράθεσή του μία **S** αιτιολόγηση, που ταυτίζεται με την αντίστοιχη **S** αιτιολόγηση του δεύτερου αποτελέσματος που αναπτύχθηκε προηγουμένως.

Η παραπάνω ανάλυση αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το εγχειρίδιο της εκάστοτε χώρας ενθαρρύνει την εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική επιχειρηματολογία. Στην **Ελλάδα**, ο μαθητής εξοικειώνεται με τον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό, εξαιτίας της επιλογής του εγχειριδίου απόδειξης του θεωρήματος του Θαλή μέσω μιας αιτιολόγησης που έχει τα χαρακτηριστικά του παραπάνω συλλογισμού. Παράλληλα, έρχεται σε επαφή και με την εμπειρική απόδειξη, λόγω της παρουσίασης από το εγχειρίδιο αιτιολογήσεων κύριων αποτελεσμάτων (π.χ. λόγος 2 ευθυγράμμων τμημάτων) που διαθέτουν εμπειρικά αποδεικτικά γνωρίσματα. Επιπλέον, οι μαθητές δεν έχουν τη δυνατότητα να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή, εξαιτίας της μη παροχής της απόδειξής του από το εγχειρίδιο. Επίσης, δεν παρακινούνται να συντάξουν οι ίδιοι κάποια απόδειξη για τα θεωρητικά στοιχεία που αναπτύσσονται και δεν αιτιολογούνται. Στη **Γαλλία**, ο μαθητής μελετά συνήθως την έννοια υπό το πρίσμα πολλών διαφορετικών αποδεικτικών διαδικασιών. Πιο συγκεκριμένα, κατανοεί το θεώρημα του Θαλή μέσω τριών διαφορετικών αποδείξεων. Η μία στηρίζεται στον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό, η άλλη στη χρήση εμπειρικού σχήματος που βασίζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα και η τρίτη παρέχεται από τον ίδιο το μαθητή μέσω πειραματισμού σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας. Ο μαθητής συναντά ένα σύνθετο αποδεικτικό μοτίβο και στο αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή. Από τη μία πλευρά εξοικειώνεται με το εμπειρικό αποδεικτικό μοντέλο, εξαιτίας της παρουσίασης από τα εγχειρίδια δύο εμπειρικών αποδείξεων που στηρίζονται στη χρήση αριθμητικού παραδείγματος. Από την άλλη καλείται ο ίδιος να αποδείξει το εν λόγω θεώρημα με δύο διαφορετικούς τρόπους σε δύο άλυτα έργα. Εδώ, μέσω της κατάλληλης από τα εγχειρίδια καθοδήγησης, ο μαθητής διερευνά, διατυπώνει συμπεράσματα, παράγει εικασίες και αποδεικνύει τελικά το ζητούμενο. Κατ’ επέκταση, στην **Ελλάδα** το εγχειρίδιο δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να αποσαφηνίσει στη διδασκαλία του τις συλλογιστικές αποχρώσεις που διακρίνουν την εμπειρική από την τυπική απόδειξη. Αντίθετα, στη **Γαλλία**, το εγχειρίδιο επιτρέπει στον καθηγητή πέρα από την υλοποίηση του παραπάνω διαχωρισμού να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές του να κινητοποιηθούν κατάλληλα προκειμένου να κατασκευάσουν οι ίδιοι αποδείξεις αλλά και να αναδείξει τη σημασία απόδειξης ενός κύριου αποτελέσματος με πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

3.4.2.2 Αποτελέσματα αξιολόγησης έργων

				Τύπος συλλογιστικής		Φύση συλλογιστικής							
Εγχειρίδια	Ενότητα	Συνολικός αριθμός έργων	PR έργα	S	G	M	I	D	E	C	X	P	O
GR2	Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων, Θεώρημα του Θαλή & Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου	74	32	13	19	1	16	11	-	1	-	-	3
FR1	Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή & Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες	116	70	46	24	7	39	9	-	2	-	-	17
FR2	Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή, Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες & Το θεώρημα του Θαλή και/ή το αντίστροφό του	128	72	56	16	16	35	19	-	-	-	-	3

Πίνακας 3.12: *Είδος και φύση συλλογιστικής των έργων των εγχειριδίων που σχετίζονται με την απόδειξη*

Παρατήρηση: 4 έργα στο **FR1** λαμβάνουν τη διπλή κωδικοποίηση **IO**, 1 έργο στο **FR2** λαμβάνει τη διπλή κωδικοποίηση **MI**

3.4.2.2.1 Ελληνικό εγχειρίδιο

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των έργων του ελληνικού εγχειριδίου πραγματοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.12. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα έργα των ενοτήτων «**1.2**», «**1.3**» και «**Γενικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου**» του **GR2** ανέρχονται σε 74, με τα 32 εκ των 74 έργων να θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, 32 **PR** έργα ταξινομούνται στις κατηγορίες **I** (16), **D** (11), **O** (3), **M** (1) και **C** (1). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, παρουσιάζονται 13 έργα ειδικής υπόστασης (**S**) και 19 έργα γενικής υπόστασης (**G**).

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 16 με τα 10 εξ' αυτών να είναι γενικής συλλογιστικής υπόστασης (**G**) και τα 6 ειδικής (**S**). Τα περισσότερα **I** έργα (11) συνιστούν δηλώσεις που πρέπει να χαρακτηριστούν ως (Σ) ή (Λ). Ακόμη, εντοπίζονται 3 έργα διερεύνησης της ισχύος μιας μαθηματικής πρότασης και 1 έργο που δίδεται ως ερώτηση του τύπου Ναι/Όχι. Τέλος, εμφανίζεται 1 έργο εξέτασης της αληθοφάνειας δηλώσεων ηρώων του εγχειριδίου. Όλα τα **I** έργα είναι ενδομαθηματικά. Τα **D** έργα ανέρχονται σε 11. Τα 8 εξ' αυτών είναι γενικής συλλογιστικής φύσεως (**G**) και τα 3 ειδικής (**S**). Ειδικότερα, εντοπίζονται 10 αποδεικτικά έργα που σχετίζονται με ποικίλα μαθηματικά ζητήματα (μέσα πλευρών, αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων, μαθηματική ισότητα που εμπλέκει ευθύγραμμα τμήματα ή εμβαδά σχημάτων). Επιπλέον, εντοπίζεται 1 έργο χαρακτήρα διαπίστωσης σχετικά με τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τρεις διαδοχικές γραμμές. Όλα τα **D** έργα εντάσσονται σε ένα στείρο ενδομαθηματικό πλαίσιο.

Τα **O** έργα ανέρχονται σε 3, είναι ειδικού συλλογιστικού χαρακτήρα (**S**) και εκφράζουν ενδομαθηματικές καταστάσεις. Πρόκειται για έργα που απαιτούν τον υπολογισμό και τη σύγκριση του μήκους συγκεκριμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Παρά τη φαινομενικά διαδικαστική χροιά της εκφώνηση τους, η επίλυσή βασίζεται αποκλειστικά στη στείρα εφαρμογή της συνθήκης «Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιασδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει». Το μοναδικό **M** έργο είναι γενικού χαρακτήρα (**G**), διαπραγματεύεται ζητήματα της καθημερινής ζωής και ζητά την κατασκευή εικασιών. Το μοναδικό **C** έργο είναι ειδικής χροιάς (**S**), συνδέεται με τον καθημερινό βίο και απαιτεί τον εντοπισμό του λάθους σε ένα δοσμένο οπτικό επιχείρημα.

3.4.2.2.2 Γαλλικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των 244 έργων των δύο γαλλικών εγχειριδίων υλοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.12. Ειδικότερα, αξιολογούνται 116 έργα των ενοτήτων «**Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή**» και «**Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**» του **FR1** και 128 έργα των ενοτήτων **«Υπολογίζω ένα μήκος με το θεώρημα του Θαλή», «Αποδεικνύω ότι δύο ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες»** και **«Το θεώρημα του Θαλή και/ή το αντίστροφό του»** του **FR2**. Από αυτά τα, 142 θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 142 **PR** έργα ταξινομούνται στις κατηγορίες **I** (74), **D** (28), **M** (23), **O** (20) και **C** (2). Ακόμη, 5 έργα λαμβάνουν διπλό κωδικό (4 **IO**, 1**MI**). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, παρουσιάζονται 102 έργα ειδικού χαρακτήρα (**S**) και 40 έργα γενικού (**G**).

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 74 με τα 64 εξ' αυτών να είναι ειδικού συλλογιστικού προφίλ (**S**) και τα 10 γενικού (**G**). Τα 41 εξ' αυτών ζητούν την εξετάσει της παραλληλίας ή όχι δύο δοσμένων ευθειών. Επίσης, συναντώνται 13 έργα εξέτασης της αληθοφάνειας δοσμένων ισχυρισμών και 12 έργα που απαιτούν το χαρακτηρισμό Σωστό ή Λάθος δοσμένων δηλώσεων. Ακόμη, εμφανίζονται 2 έργα διερεύνησης της δυνατότητας υπολογισμού του μήκους δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων αλλά και 2 έργα εξέτασης της ισότητας δύο δοσμένων πηλίκων. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται 4 έργα εξέτασης της σχετικής θέσης δύο ευθειών, του είδους ενός τριγώνου και της ορθότητας της αντιστοιχίας μίας ισότητας με μία δοσμένη απεικόνιση. Η κατηγορία **I** εμφανίζεται μαζί με τη **M** σε 1 έργο και την **O** σε 4 έργα. Όλα τα **I** έργα εκτός 13 από πραγματεύονται στείρα ενδομαθηματικά ζητήματα. Τα **D** έργα ανέρχονται σε 28. Τα 9 εξ' αυτών είναι γενικής συλλογιστικής υπόστασης (**G**) και τα 19 ειδικής (**S**). Ειδικότερα, εντοπίζονται 24 αποδεικτικά έργα που αφορούν την παραλληλία ευθειών, την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων, την εξίσωση που εκφράζει ένα δοσμένο μαθηματικό πρόβλημα, το είδος ενός τριγώνου ως προς τις γωνίες, τη σχετική θέση ενός σημείου. Ακόμη, αποτυπώνονται 3 έργα αιτιολόγησης είτε μιας εικασίας που ο μαθητής έχει κατασκευάσει αναφορικά με τη σχετική θέση δύο ευθειών είτε της παραλληλίας δύο δοσμένων ευθειών. Τέλος, εμφανίζεται 1 έργο επαλήθευσης της ισχύος μιας εικασίας που ο μαθητής έχει παράξει αναφορικά με τη σχετική θέση δύο ευθειών. Από τα 28 **D** έργα, μόνο τα 7 επεκτείνονται πέρα από το αυστηρό ενδομαθηματικό πλαίσιο. Τα **O** έργα ανέρχονται σε 20. Τα 8 εξ' αυτών είναι γενικής φύσεως (**G**) και τα 12 ειδικής (**S**). Ειδικότερα, παρουσιάζονται 4 έργα αναγνώρισης του θεωρήματος που επιτρέπει την αποσαφήνιση της σχετικής θέσης δύο δοσμένων ευθειών και 3 έργα εύρεσης των δυνατών και των αδύναμων σημείων στο γραπτό ενός μαθητή. Επιπρόσθετα, δίδονται 4 έργα επιλογής του σωστού εκ των τριών δοθέντων λόγων με βάση το ευθύ ή το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή. Ακόμη, συναντάται 1 έργο επιλογής της απεικόνισης που δεν πληροί το θεώρημα του Θαλή και 1 έργο συμπλήρωσης των ισοτήτων λόγων μηκών πλευρών δύο τριγώνων. Παράλληλα, υπάρχουν 3 έργα κατασκευής και αναλυτικής περιγραφής μίας μεθόδου που δίδει την περίμετρο ενός τριγώνου συγκεκριμένων χαρακτηριστικών. Επιπλέον, εμφανίζονται 2 έργα επαλήθευσης του θεωρήματος του Θαλή σε μία δοθείσα απεικόνιση. Τέλος, εμφανίζεται 1 έργο που έχει μορφή μαθηματικής σπαζοκεφαλιάς και 1 έργο επεξήγησης μιας οφθαλμαπάτης. Από τα 20 **O** έργα μόνο τα 2 εκφράζουν πτυχές της καθημερινής ζωής.

Τα **M** έργα ανέρχονται σε 23. Τα 12 εξ' αυτών είναι ειδικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**S**) και τα 11 γενικού (**G**). Τα περισσότερα (16) απαιτούν τη διατύπωση μιας δήλωσης. Αυτή μπορεί να αφορά την καταγραφή ή τη μελέτη της συμπεριφοράς λόγων με βάση ένα δοσμένο τρίγωνο ή δύο δοσμένες ευθείες, την εξαγωγή συμπεράσματος αναφορικά με τη σχετική θέση ευθειών και σημείων και τη γραφή του κατάλληλου μαθηματικού τύπου. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται 4 έργα εύρεσης των ακριβών συνθηκών προκειμένου μία δήλωση να είναι αληθής και 3 έργα κατασκευής εικασιών αναφορικά με τη σχετική θέση δύο ευθειών. Από τα 23 **M** έργα, τα 4 μόνο σχετίζονται με τον καθημερινό βίο. Τα **C** έργα ανέρχονται σε 2. Είναι γενικού συλλογιστικού υποβάθρου (**G**) και ενδομαθηματικά. Ειδικότερα, πρόκειται για δύο διακριτά υποερωτήματα της ίδιας άσκησης που απαιτεί την εύρεση και τη διόρθωση των λαθών που υπάρχουν στη γραπτή παραγωγή μίας μαθήτριας. Η άσκηση αυτή πραγματεύεται μία ισότητα που βασίζεται στην αξιοποίηση του θεωρήματος του Θαλή σε ένα παρατιθέμενο τρίγωνο.

Και στις δύο χώρες οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τη γνώση μέσω διερεύνησης και απόδειξης μαθηματικών ζητημάτων. Επιπλέον, παράγουν εικασίες, εντοπίζουν τα λάθη σε δοσμένα επιχειρήματα και εφαρμόζουν την εννοιολογική τους γνώση γύρω από το θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του για την αντιμετώπιση των πιο σύνθετων παρουσιαζόμενων μαθηματικών καταστάσεων. Ακόμη, οι φορές που μελετούν υπό διεπιστημονικό πρίσμα τη διδασκόμενη έννοια είναι πολύ λίγες. Ωστόσο, η κάθε χώρα προσφέρει και κάποιες επιπλέον διαφορετικού χαρακτήρα ευκαιρίες εκμάθησης. **Στην Ελλάδα**, ο μαθητής μαθαίνει να διαχειρίζεται κυρίως αφηρημένα μαθηματικά ζητήματα ενεργοποιώντας στις περισσότερες περιπτώσεις τη διαδικαστική του γνώση. Αντίθετα, ο μαθητής **στη Γαλλία** αντιμετωπίζει περισσότερα έργα συλλογιστικής και απόδειξης, τα οποία είναι κυρίως ειδικού συλλογιστικού τύπου. Ειδικότερα, διερευνά ένα ευρύτερο μαθηματικό φάσμα, επεξηγεί, επαληθεύει, συνδυάζει περισσότερες από μία συλλογιστικές συνιστώσες για την επίλυση ενός έργου και προβληματίζεται γύρω από την κατασκευή κατάλληλων μεθόδων που θα οδηγήσουν στο ζητούμενο μαθηματικό αποτέλεσμα. Ακόμη, διατυπώνει συμπεράσματα και αναζητά τις ακριβείς συνθήκες προκειμένου μία δήλωση να είναι αληθής. Ορισμένες μάλιστα φορές, ο μαθητής πραγματοποιεί τις δύο προαναφερθείσες διαδικασίες έπειτα από πειραματισμό σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας.

Τα **γαλλικά** εγχειρίδια βοηθούν τον εκπαιδευτικό μέσω των λυμένων παραδειγμάτων του να καλλιεργήσει το μεθοδολογικό υπόβαθρο που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές για την αντιμετώπιση έργων που βασίζονται στον υπολογισμό, την απόδειξη, τη διερεύνηση και την αξιολόγηση ισχυρισμών. Επίσης, δίνουν τη δυνατότητα διδασκαλίας των 3 βημάτων σύνθεσης του μαθηματικού συλλογισμού (επαλήθευση των συνθηκών χρήσης του θεωρήματος που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε, επίκληση του θεωρήματος, διατύπωση συμπεράσματος που εξάγεται), καθώς αυτά διατυπώνονται ρητά στην εκφώνηση ορισμένων εκ των λυμένων ασκήσεων. Σχετικά με τα άλυτα έργα των εγχειριδίων, αυτά ενθαρρύνουν τον καθηγητή να προσεγγίσει το θεώρημα του Θαλή μέσω σύνθετων συλλογιστικών οπτικών γωνιών. Το **ελληνικό** εγχειρίδιο δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό μέσω των λυμένων εφαρμογών του να εμπλέξει τους μαθητές του κυρίως στην αποδεικτική διαδικασία. Αναφορικά με τα άλυτα έργα του εγχειριδίου, αυτά προσανατολίζουν τον καθηγητή στο να αναπτύξει τη συλλογιστική ικανότητα των μαθητών του δίνοντας όμως λίγο περισσότερη έμφαση στη διδασκαλία τεχνικών υπολογισμού. **Και τα τρία εγχειρίδια** δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να χρησιμοποιήσει εκπαιδευτικά λογισμικά για να εμπλέξει τους μαθητές του σε μια διαδικασία ανακάλυψης της γνώσης (στην Ελλάδα αυτό είναι εφικτό μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου).

3.5 Αποτελέσματα αξιολόγησης της θεματικής περιοχής της Τριγωνομετρίας

3.5.1 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο των Lin, Chen, & An (2009)

(**ΕΕ1**): «Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά και η πορεία ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου των εγχειριδίων των δύο χωρών και πώς αυτά δημιουργούν το κατάλληλο πλαίσιο για την παρουσίαση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας στους μαθητές;»

Αρχικά, τα εξεταζόμενα εγχειρίδια των δύο χωρών αναπτύσσουν τις τριγωνομετρικές έννοιες στις δύο τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου, διαφοροποιώντας τον τρόπο με τον οποίο τις οργανώνουν στο εσωτερικό τους. Ειδικότερα, στη Β' Γυμνασίου στην Ελλάδα αναπτύσσονται στις εξής τέσσερις ενότητες : «**2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας**», «**2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας**», «**2.3**

Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης» και **«2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^o, 45^o και 60^o»** του κεφαλαίου «**Τριγωνομετρία - Διανύσματα**». Η ενότητα που προηγείται ονομάζεται «**1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα**». Αντίθετα, στην αντίστοιχη τάξη του Γυμνασίου της Γαλλίας (4^e), οι τριγωνομετρικές έννοιες διδάσκονται σε συνδυασμό με το θεώρημα του Θαλή. Πιο συγκεκριμένα, στο **FR1** η τριγωνομετρία αναπτύσσεται στην ενότητα «**Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**», η οποία μαζί με τις ενότητες «**Υπολογίζω μήκη με το θεώρημα του Θαλή**» και «**Αποδεικνύω ότι οι ευθείες είναι ή δεν είναι παράλληλες**» που παρουσιάζονται νωρίτερα συναποτελούν το «**Κεφάλαιο 10: Θεώρημα του Θαλή – Συνημίτονο**» του εγχειριδίου. Σε επίπεδο Γ' Γυμνασίου, η τριγωνομετρία καταρτίζεται στην Ελλάδα σε 4 διακριτές ενότητες, που συγκροτούν το «**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Τριγωνομετρία**». Ωστόσο, η έρευνα μας επικεντρώνεται μόνο στην ενότητα «**2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας**», διότι οι υπόλοιπες τρεις ενότητες μελετούν την τριγωνομετρία υπό το πρίσμα εννοιών που διδάσκονται σε επίπεδο Λυκείου στη Γαλλία. Η ενότητα που προηγείται της **2.3** είναι η «**2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών**». Στον αντίποδα, , στην αντίστοιχη τάξη του Γυμνασίου της Γαλλίας (3^e), η τριγωνομετρία συνιστά το αυτόνομο κεφάλαιο «**Κεφάλαιο 10: Τριγωνομετρία**» που συντίθεται από τις ενότητες: «**Γνωρίζω το συνημίτονο, το ημίτονο και την εφαπτομένη μιας γωνίας», «Υπολογίζω το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου» και «Προσδιορίζω το μέτρο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**». Νωρίτερα, αναπτύσσεται το «**Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμοί του επιπέδου – Περιστροφή και Ομοιοθεσία**».

Επίσης, τα εξεταζόμενα εγχειρίδια των δύο χωρών διαφοροποιούνται και ως προς την έννοια που πραγματεύονται πριν την τριγωνομετρία. Σε επίπεδο Β' Γυμνασίου, το **GR1** εξετάζει το ευθύ και το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος, ενώ το **FR1** μελετά το θεώρημα του Θαλή. Σε επίπεδο Γ' Γυμνασίου, το **GR2** εξετάζει το λόγο του εμβαδού ομοίων σχημάτων, ενώ το **FR2** μελετά τις έννοιες της συμμετρίας, της μετάθεσης, της ομοιοθεσίας και της περιστροφής. Στη συνέχεια υλοποιείται ανά τάξη, η σύγκριση της εσωτερικής δομικής συγκρότησης των υπό αξιολόγηση ενοτήτων. Αναφορικά με την οργάνωση των **4** εξεταζόμενων ενοτήτων του **GR1** ακολουθείται το ίδιο διαρθρωτικό μοντέλο. Αρχικά, κάθε ενότητα αναπτύσσει μία εισαγωγική δραστηριότητα που λειτουργεί ως απόδειξη ορισμένων εκ των κεντρικών θεωρητικών ιδεών που διατυπώνονται αργότερα. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η ενότητα **2.4** που δίδει 2 εισαγωγικές δραστηριότητες αντί για μία. Στη συνέχεια, η εκάστοτε ενότητα συγκροτεί 1 τμήμα λυμένων εφαρμογών και έπειτα 2 τμήματα άλυτων έργων. Εδώ οφείλουμε να τονίσουμε ότι η **2.2** είναι η μονή εκ των 4 ενοτήτων η οποία μετά την κατάρτιση των προαναφερθέντων τμημάτων προχωρά στην παράθεση ενός ιστορικού σημειώματος. Η ενότητα **«Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου»** του **FR1** ακολουθεί το ίδιο δομικό μοτίβο με τις ενότητες του **GR1**, αλλά εμφανίζει μεγαλύτερη ποικιλία στα τμήματα που συγκροτεί για την κατασκευή άλυτων έργων. Πρώτα απ' όλα, οι εννοιολογικές συνιστώσες της ενότητας του **FR1** αναπτύσσονται σε 1 εισαγωγική δραστηριότητα, ενώ στη συνέχεια καταρτίζεται ένα θεωρητικό μέρος με ιδιότητες, ορισμούς και παρατηρήσεις. Αργότερα ακολουθεί 1 τμήμα λυμένων έργων. Κατόπιν, εμφανίζονται 12 τμήματα άλυτων ασκήσεων, τα 2 εκ των οποίων χωρίζονται σε υποτμήματα. Σχετικά με τον τρόπο δομικής οργάνωσης της **2.3** του **GR2** υιοθετείται η ακόλουθη πορεία. Αρχικά, δίδεται μία εισαγωγική δραστηριότητα που αποτελεί απόδειξη των δύο τριγωνομετρικών ταυτοτήτων που παρατίθενται αργότερα. Στη συνέχεια, εμφανίζεται 1 τμήμα με λυμένα έργα και έπειτα παρουσιάζονται 2 τμήματα με άλυτα έργα. Αντίθετα, οι 3 εξεταζόμενες ενότητες του **Κεφαλαίου 10** του **FR2** είναι πιο σύνθετης εσωτερικής δομικής φυσιογνωμίας. Αρχικά, το εννοιολογικό τους περιεχόμενο αναπτύσσεται σε 3 εισαγωγικές δραστηριότητες, ενώ κατόπιν η εκάστοτε ενότητα αναπτύσσει το δικό της θεωρητικό μέρος με ιδιότητες, θεωρήματα και αλγοριθμικές διαδικασίες . Στη συνέχεια, οι θεωρητικές ιδέες των 3 ενοτήτων αξιοποιούνται συνδυαστικά για την κατασκευή λυμένων και άλυτων έργων. Ειδικότερα, συγκροτείται 1 τμήμα με λυμένες ασκήσεις και 13 τμήματα με άλυτες εργασίες, τα 2 εκ των οποίων χωρίζονται σε υποτμήματα. Σχετικά με τον αριθμό των σελίδων που χρησιμοποιούνται για την κάλυψη της τριγωνομετρίας, τα εξεταζόμενα εγχειρίδια των δύο χωρών διαφοροποιούνται ως προς τη συνολική έκταση που αφιερώνουν. Ειδικότερα, σε επίπεδο Β' Γυμνασίου, το **GR1** χρησιμοποιεί 22 σελίδες (8, 66%) για την προσέγγιση του παραπάνω περιεχομένου, ενώ το **FR1** μόνο 9 (3,13%). Σε επίπεδο Γ' Γυμνασίου, το **GR2** χρησιμοποιεί 6 σελίδες (2,27%) για τη μελέτη των τριγωνομετρικών εννοιών, ενώ το **FR2** εξετάζει τις τελευταίες σε 23 σελίδες (7, 57%).

Στα **γαλλικά εγχειρίδια**, η μέθοδος που υιοθετείται για την εισαγωγή στην έννοια εντάσσεται στην **κονστρουκτιβιστική προσέγγιση.** Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους όλες τις θεωρητικές ιδέες του εκάστοτε εγχειριδίου πριν την ανάπτυξή τους, στα πλαίσια επίλυσης εισαγωγικών δραστηριοτήτων. Σε αυτές ο μαθητής είτε καλλιεργεί τις υπολογιστικές του δεξιότητες είτε αποδεικνύει κάποιο μαθηματικό τύπο έπειτα από γενίκευση των εικασιών που ο ίδιος έχει παράξει. Επίσης και οι ασκήσεις του εν λόγω εγχειριδίου προάγουν το **μαθητοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας.** Ειδικότερα, τα έργα είναι κατασκευασμένα στη βάση της **καθοδηγούμενης ανακάλυψης**, διότι παραθέτουν πολλά υποερωτήματα που κατευθύνουν το μαθητή στο είδος των νοητικών διεργασιών στις οποίες πρέπει να προβεί προκειμένου να εξάγει τη ζητούμενη μαθηματική πληροφορία. Κάποια μάλιστα εξ' αυτών στοχεύουν αποκλειστικά στην καλλιέργεια συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων που συνδέονται με την **επιχειρηματολογία,** τη **μοντελοποίηση** και τον **υπολογισμό.** Επιπρόσθετα, ενθαρρύνεται ιδιαίτερα η διδασκαλία ενός πλαισίου που οικοδομεί την απόδειξη μέσα από την **επίλυση προβλήματος** και μέσα από **ρεαλιστικές καταστάσεις.** Ακόμη, δίδεται βαρύτητα στην κατάρτιση έργων που προάγουν τη **διερευνητική μάθηση** μέσω της **χρήσης του εκπαιδευτικού λογισμικού Scratch.** Πιο συγκεκριμένα, ο μαθητής αξιοποιεί το εν λόγω δυναμικό περιβάλλον είτε για **να μοντελοποιήσει μια κατάσταση που συνδέεται με την καθημερινότητα** είτε για να **κατασκευάσει ένα πρόγραμμα.**

Στα **ελληνικά εγχειρίδια**, οι τριγωνομετρικές έννοιες προσεγγίζονται μέσω πέντε εισαγωγικών δραστηριοτήτων στη Β' Γυμνασίου και μίας εισαγωγικής δραστηριότητας στη Γ' Γυμνασίου. Στην περίπτωση της Β' Γυμνασίου, η ανακάλυψη των εννοιών δεν πραγματοποιείται από το μαθητή, καθώς οι συγγραφείς παραθέτουν τη λύση των εν λόγω δραστηριοτήτων και επομένως δίδουν έτοιμες τις μαθηματικές πληροφορίες στους μαθητές. Ωστόσο, υιοθετείται σε μεγάλο βαθμό το **ρεαλιστικό πλαίσιο.** Αντίθετα, στη Γ' Γυμνασίου, η εισαγωγική δραστηριότητα προσφέρει την ευκαιρία στο μαθητή μέσω κατάλληλα δομημένων υποερωτημάτων να ανακαλύψει όλες τις έννοιες που αναπτύσσονται έπειτα από το εγχειρίδιο. Αναφορικά με τις παρουσιαζόμενες ασκήσεις, αυτές αναπτύσσουν τη συλλογιστική ικανότητα των μαθητών κυρίως στη Γ' Γυμνασίου. Τέλος, το ελληνικό εγχειρίδιο στην εμπλουτισμένη του μορφή δίνει τη δυνατότητα **αξιοποίησης του λογισμικού**

Geogebra, με στόχο την πιο διερευνητική προσέγγιση των βασικότερων μαθηματικών ιδεών τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο από το μαθητή. Οι ασκήσεις αυτές συμβάλλουν στην εξοικείωση του μαθητή με ερωτήσεις υπολογιστικού, διερευνητικού και κατασκευαστικού χαρακτήρα, ενώ παράλληλα συμβάλλουν και στην ανάπτυξη των προγραμματιστικών του ικανοτήτων μέσω σύνταξης προγραμμάτων.

Συνοπτικά, σε επίπεδο **Β' Γυμνασίου,** οι θεωρητικές ιδέες που αφορούν την τριγωνομετρία αλλά και η πρακτική εφαρμογή τους εμφανίζουν μια πιο αρμονική πορεία ανάπτυξης στο **ελληνικό εγχειρίδιο**. Αυτό οφείλεται στο ότι καλύπτεται μέσω μιας πιο λογικής αλληλουχίας και λεπτομερούς προσέγγισης ένα ευρύτερο μαθηματικό φάσμα. Ειδικότερα, μελετώνται περισσότεροι τριγωνομετρικοί αριθμοί και όχι μόνο το συνημίτονο, όπως γίνεται στο αντίστοιχο γαλλικό εγχειρίδιο. Υπό αυτό το πρίσμα, εξετάζονται επιπρόσθετα οι μεταβολές των τριγωνομετρικών αριθμών αλλά και των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών (30^o, 45^o, 60^o). Σε επίπεδο **Γ' Γυμνασίου,** τόσο σε θεωρητική όσο και σε πρακτική κλίμακα τα εγχειρίδια **και των δύο χωρών** υιοθετούν το καθένα μια ισορροπημένη πορεία ανάπτυξης του τριγωνομετρικού περιεχομένου, σε σχέση με τον τρόπο που το εξετάζουν στην προηγούμενη τάξη. Παρόλα αυτά, το **ελληνικό εγχειρίδιο** παρουσιάζει πιο αυξημένο βαθμό δυσκολίας ως προς την προσέγγισή των τριγωνομετρικών εννοιών, διότι αυτή γίνεται υπό το πρίσμα εννοιών που διδάσκονται στην Α' Λυκείου στη Γαλλία (συντεταγμένες, τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών, νόμος ημιτόνων – συνημιτόνων).

3.5.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με βάση το εργαλείο του Bergwall (2021)

(**ΕΕ2**): «Ποιες πτυχές της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη συναντώνται στα έργα και στις εκθεσιακές ενότητες των ελληνικών και γαλλικών εγχειριδίων μαθηματικών και πώς αυτές συμβάλλουν σε μια καλύτερη διδασκαλία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας;»

3.5.2.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης εκθεσιακών ενοτήτων

Εγχειρίδιο	Ενότητα	Καμία Αιτιολόγηση (N)	Αφήνεται στο μαθητή (L)	Ειδική περίπτωση (S)	Γενική απόδειξη (G)	Συνολικός αριθμός κύριων αποτελεσμάτων
GR1	**Εφαπτομένη οξείας γωνίας**	**1**	**-**	**1**	**1**	**3**
GR1	**Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας**	**-**	**-**	**3**	**1**	**4**
GR1	**Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης**	**3**	**-**	**1**	**2**	**4**
GR1	**Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30ο, 45ο και 60ο**	**-**	**-**	**2**	**1**	**2**
GR2	**Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας**	**-**	**-**	**-**	**2**	**2**
FR1	**Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**	**2**	**-**	**-**	**2**	**4**
FR2	**Γνωρίζω το συνημίτονο, το ημίτονο και την εφαπτομένη μιας γωνίας**	**1**	**6**	**2**	**1**	**6**

Πίνακας 3.13: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 1 αποτέλεσμα στο **GR1** παίρνει τρεις αιτιολογήσεις, 1 αποτέλεσμα στο **GR1** παίρνει δύο αιτιολογήσεις, 1 αποτέλεσμα στο **FR2** παίρνει δύο αιτιολογήσεις, 1 αποτέλεσμα στο **FR2** παίρνει τέσσερις αιτιολογήσεις

	Κύρια Αποτελέσματα						Αιτιολογήσεις						
		Χαρακτηρισμός						Χαρακτηρισμός				Θέση	
Εγχειρίδια	Αριθμός κύριων αποτελεσμάτων	Κριτήριο	Ιδιότητα	Ορισμός	Καθόλου	Άλλος	Αριθμός αιτιολογούμενων αποτελεσμάτων	Απόδειξη	Επιχείρημα	Άλλο	Κανένας	Πριν	Μετά
GR1	**13**	**-**	**-**	**-**	**13**	**-**	**9**	**-**	**-**	**-**	**12**	**9**	**3**
GR2	**2**	**-**	**-**	**-**	**-**	**2**	**2**	**-**	**-**	**-**	**2**	**2**	**-**
FR1	**4**	**-**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**-**	**-**	**-**	**-**	**2**
FR2	**6**	**-**	**2**	**3**	**-**	**1**	**5**	**3**	**-**	**-**	**6**	**3**	**6**

Πίνακας 3.14: *Χαρακτηρισμός και τοποθεσία των κύριων αποτελεσμάτων και αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων*

Παρατήρηση: 1 κύριο αποτέλεσμα στο **GR1** λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις πριν τη διατύπωσή του, 1 κύριο αποτέλεσμα στο **GR1** λαμβάνει τρεις αιτιολογήσεις (1 πριν και 2 μετά τη διατύπωσή του), 1 κύριο αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει δύο αιτιολογήσεις μετά τη διατύπωσή του, 1 κύριο αποτέλεσμα στο **FR2** λαμβάνει τέσσερις αιτιολογήσεις μετά τη διατύπωσή του.

3.5.2.1.1 Ελληνικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση 4 ενοτήτων του **GR1** και 1 ενότητας του **GR2** υλοποιείται με βάση τους Πίνακες 3.13 και 3.14. Ειδικότερα, τα εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα ανέρχονται σε 15 και κατατάσσονται στις κατηγορίες **G** (7), **S** (7) και **N** (4). Το εκθεσιακό μέρος της «**2.1**» του **GR1** αποτελείται από 3 αποτελέσματα. Το πρώτο πραγματεύεται τον ορισμό της εφαπτομένης μιας γωνίας και λαμβάνει **S** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή του. Το δεύτερο ορίζει τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίς να αιτιολογείται. Το τρίτο αφορά την κλίση της ευθείας $y = αx$ και λαμβάνει γενική απόδειξη πριν από την παράθεσή του. Κανένα από τα 3 παραπάνω αποτελέσματα και καμία από τις 2 προαναφερθείσες αιτιολογήσεις δε χαρακτηρίζεται. Το εκθεσιακό μέρος της «**2.2**» του **GR1** αποτελείται από 4 αποτελέσματα. Το πρώτο συνδέεται με τον ορισμό του ημιτόνου μιας γωνίας και λαμβάνει μία **S** αιτιολόγηση πριν τη διατύπωσή του. Το δεύτερο πραγματεύεται τον ορισμό του συνημιτόνου μιας γωνίας και λαμβάνει μία **S** αιτιολόγηση πριν την ανάπτυξή του. Το τρίτο αφορά τις ανισώσεις $0 < ημω < 1$, $0 < συνω < 1$, οι οποίες αιτιολογούνται ταυτόχρονα μέσω γενικής απόδειξης πριν την παράθεσή τους. Το τέταρτο οριοθετεί την εφαπτομένη μιας γωνίας και αιτιολογείται με ειδικό τρόπο πριν τη διατύπωσή του. Κανένα από τα 4 παραπάνω αποτελέσματα και καμία από τις 4 προαναφερθείσες αιτιολογήσεις δε χαρακτηρίζεται. Το εκθεσιακό μέρος της «**2.3**» του **GR1** απαρτίζεται από 4 αποτελέσματα. Το πρώτο αφορά τον τρόπο μεταβολής των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οξείας γωνίας όταν το μέτρο της αυξάνεται. Δε χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο αλλά λαμβάνει 3 αιτιολογήσεις: μία **S** αιτιολόγηση αλγεβρικής φύσεως πριν τη διατύπωσή του και δύο γενικές αποδείξεις γεωμετρικής φύσεως μετά. Καμία από αυτές δε χαρακτηρίζεται. Κατόπιν, αναπτύσσονται 3 αποτελέσματα που δεν αιτιολογούνται και μελετούν τη συμπεριφορά δύο οξειών γωνιών όταν έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες. Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**2.4**» του **GR1** εμπεριέχει 2 αποτελέσματα. Το πρώτο συνιστά συγκεντρωτικό πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30^o, 45^o και 60^o. Επίσης, δε χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο και λαμβάνει δύο **S** αιτιολογήσεις πριν την παράθεσή του: η $1^η$ αφορά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 45^o, ενώ η $2^η$ αφορά τους αντίστοιχους αριθμούς των 30^o και 60^o. Καμία από αυτές δε χαρακτηρίζεται. Το δεύτερο αποτέλεσμα δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο και δίδει τους τύπους του ύψους και του εμβαδού ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α. Επίσης, η αιτιολόγηση του συνιστά γενική απόδειξη, δε χαρακτηρίζεται και αναπτύσσεται μετά την παράθεση του. Το εκθεσιακό μέρος της «**2.3**» του **GR2** περιλαμβάνει 2 αποτελέσματα. Το πρώτο είναι η ισότητα «$ημ^2ω + συν^2ω = 1$» που χαρακτηρίζεται ως «**βασική τριγωνομετρική ταυτότητα**» και αιτιολογείται μέσω μίας γενικής απόδειξης πριν τη διατύπωσή της. Το δεύτερο είναι η ισότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ που επισημαίνεται ως «**βασική τριγωνομετρική ταυτότητα**» και αιτιολογείται με γενικό τρόπο πριν την παρουσίασή της. Και στις δύο περιπτώσεις, οι αιτιολογήσεις δε χαρακτηρίζονται με κάποιο τρόπο.

3.5.2.1.2 Γαλλικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των 2 γαλλικών εγχειριδίων υλοποιείται με βάση τους Πίνακες 3.13 και 3.14. Ειδικότερα, τα συνολικά εξεταζόμενα κύρια αποτελέσματα ανέρχονται σε 10 και προέρχονται από μία ενότητα του **FR1** και μία ενότητα του **FR2.** Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**» του **FR1** αποτελείται από 4 αποτελέσματα. Το πρώτο χαρακτηρίζεται ως «**ΟΡΙΣΜΟΣ**» και οριοθετεί το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας. Λαμβάνει μία αιτιολόγηση γενικού χαρακτήρα που χαρακτηρίζεται ως «**Απόδειξη**» και αναπτύσσεται στο site του εγχειριδίου. Οι μαθητές παραπέμπονται σε αυτή μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος. Το δεύτερο χαρακτηρίζεται ως «**Παρατήρηση**», δεν αιτιολογείται και μελετά τη σχέση που διέπει το πηλίκο που δίνει το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας με την τιμή αυτής. Το τρίτο στοιχειοθετεί τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Δεν επισημαίνεται ούτε αιτιολογείται με κάποιο τρόπο. Το τέταρτο χαρακτηρίζεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και δίδει τις πιθανές τιμές του συνημίτονο μιας οξείας γωνίας. Αιτιολογείται μέσω ενός γενικού επιχειρήματος μετά τη διατύπωση του που επισημαίνεται ως «**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**». Το εκθεσιακό μέρος της ενότητας «**Γνωρίζω το συνημίτονο, το ημίτονο και την εφαπτομένη μιας γωνίας**» του **FR2** αποτελείται από 6 αποτελέσματα. Τα 3 εξ' αυτών χαρακτηρίζονται ως «**ΟΡΙΣΜΟΣ»** και στοιχειοθετούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας. Όλα λαμβάνουν αιτιολόγηση τύπου **L**, διότι ο μαθητής καλείται να τα αποδείξει στην πρώτη εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας που προηγείται του θεωρητικού μέρους. Κατόπιν, συναντάται ένα αποτέλεσμα που χαρακτηρίζεται ως «**Παρατήρηση**», δεν αιτιολογείται και φορά τη φύση των προσεγγίσεων των πηλίκων των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών που δίνουν τα κομπιουτεράκια. Στη συνέχεια διατυπώνεται ένα αποτέλεσμα που επισημαίνεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**» και δίδει τις πιθανές τιμές που λαμβάνουν το συνημίτονο και το ημίτονο μιας οξείας γωνίας. Στο εν λόγω αποτέλεσμα αντιστοιχούν δύο αιτιολογήσεις: η μία επισημαίνεται ως «**Απόδειξη**» και εντάσσεται στην κατηγορία **L**, διότι ο μαθητής πρέπει να τη συντάξει σε μία άλυτη άσκηση που ακολουθεί, ενώ η δεύτερη δεν επισημαίνεται με κάποιο τρόπο, παρατίθεται μετά τη διατύπωση του αποτελέσματος και δίδεται ως γενική απόδειξη. Τέλος, συναντάται ένα αποτέλεσμα που αναπτύσσει τις ισότητες «$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$» και συντάσσεται ως «**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**». Και στις δύο αυτές ισότητες αντιστοιχούν από α) μία αιτιολόγηση τύπου **L** (ο μαθητής αποδεικνύει την καθεμία σε μία άλυτη άσκηση με τίτλο «**Απόδειξη**» που συναντάται μετέπειτα) και β) μία αιτιολόγηση τύπου **S**, που δεν χαρακτηρίζεται με κάποιο τρόπο και δίδεται μετά τη διατύπωσή τους.

Η παραπάνω ανάλυση καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το εγχειρίδιο της εκάστοτε χώρας δημιουργεί τις κατάλληλες συνθήκες για την εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική επιχειρηματολογία. Στην **Ελλάδα**, ο μαθητής εξοικειώνεται τόσο με την εμπειρική όσο και με τη γενική απόδειξη. Ειδικότερα, ο μαθητής έρχεται σε επαφή με τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα που συνιστούν αριθμητικά παραδείγματα, μέσω του τρόπου αιτιολόγησης από το εγχειρίδιο των τύπων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας και του τύπου εφω = $\frac{ημω}{συνω}$. Στην πρώτη μάλιστα περίπτωση η παρουσιαζόμενη απόδειξη αντλεί στοιχεία από την καθημερινή ζωή και μαθαίνει στους μαθητές πώς να καταλήξουν σε μία γενίκευση μέσω διαδοχικών υπολογισμών. Επίσης, ο μαθητής ανακαλύπτει τον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό μέσω του τρόπου απόδειξης από το εγχειρίδιο των ισοτήτων $ημ^2ω + συν^2ω = 1$, εφω = $\frac{ημω}{συνω}$ και των ανισοτήτων 0 < ημω <1 και 0 < συνω <1. Παράλληλα, τα ελληνικά εγχειρίδια μαθαίνουν στο μαθητή πώς να διαχειρίζεται πιο πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες. Αυτό οφείλεται στο ότι στην περίπτωση της απόδειξης των δύο ισοτήτων γίνεται χρήση συντεταγμένων, οι οποίες διδάσκονται στο Λύκειο στη Γαλλία και στην περίπτωση της απόδειξης των δύο ανισοτήτων πραγματοποιείται μελέτη της συμπεριφοράς των πηλίκων που δίνουν το ημω και το συνω. Ωστόσο, ο μαθητής δεν παρακινείται να κατασκευάσει ο ίδιος μια απόδειξη. Στη **Γαλλία**, ενθαρρύνονται τα δύο είδη αποδείξεων που προάγονται και στην Ελλάδα (εμπειρική, τυπική), αλλά ο μαθητής είναι αυτός που διαθέτει τον πιο ενεργό ρόλο στην αποδεικτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν στο εγχειρίδιο τις εμπειρικές αποδείξεις των $ημ^2ω + συν^2ω = 1$, εφω = $\frac{ημω}{συνω}$ οι οποίες λαμβάνουν αυτό το χαρακτηρισμό λόγω του ελλιπούς φορμαλισμού τους. Έτσι, οι μαθητές μαθαίνουν πώς να εντοπίζουν τα στοιχεία εκείνα που προσδίδουν αυστηρότητα και ακρίβεια σε μια απόδειξη. Παράλληλα, εξοικειώνονται με τον παραγωγικό συλλογισμό, εξαιτίας του τρόπου αιτιολόγησης από το εγχειρίδιο των ανισοτήτων 0 < ημω <1 και 0 < συνω <1. Πάνω απ' όλα όμως οι μαθητές είναι αυτοί που πρέπει να αποδείξουν τα περισσότερα από τα μαθηματικά ζητήματα που αντιμετωπίζουν. Ειδικότερα, οδηγούνται στη σύνταξη της απόδειξης είτε μέσω κατασκευής εικασιών, διερευνήσεων και εξαγωγή συμπερασμάτων (απόδειξη τύπων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας) είτε μέσω διαδοχικών υπολογισμών που καταλήγουν σε γενίκευση ($ημ^2ω + συν^2ω = 1$, εφω = $\frac{ημω}{συνω}$, 0 < ημω <1, 0 < συνω <1). Κατ' επέκταση, ο εκπαιδευτικός στην **Ελλάδα** έχει τη δυνατότητα να δώσει έμφαση στη διδασκαλία του στη διάκριση ανάμεσα στην εμπειρική και την τυπική απόδειξη. Αντίθετα, στη **Γαλλία**, ο εκπαιδευτικός έχει την ευκαιρία να αναδείξει περισσότερα είδη αποδείξεων στη διδασκαλία του και να καταστήσει το μαθητή από παρατηρητή σε δημιουργό της απόδειξης.

3.5.2.2. Αποτελέσματα αξιολόγησης έργων

				Τύπος συλλογιστικής		Φύση συλλογιστικής							
Εγχειρίδια	Ενότητα	Συνολικός αριθμός έργων	PR έργα	S	G	M	I	D	E	C	X	P	O
GR1	2.1, 2.2, 2.3 & 2.4	113	39	25	14	9	20	9	-	-	-	-	1
GR2	2.3 & Γενικές Ασκήσεις $2^{ου}$ Κεφαλαίου	30	24	1	23	-	5	19	-	-	-	-	-
FR1	Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου	67	17	14	3	4	2	2	-	-	1	-	14
FR2	Κεφάλαιο 10: Τριγωνομετρία & Γωνίες, Ημίτονο, Συνημίτονο, Εφαπτομένη	260	82	54	28	50	16	8	-	2	-	-	2

Πίνακας 3.15: *Είδος και φύση συλλογιστικής των έργων των εγχειριδίων που σχετίζονται με την απόδειξη*

Παρατήρηση: 1 έργο στο FR1 λαμβάνει τη διπλή κωδικοποίηση **IX** και 1 έργο στο FR2 λαμβάνει τη διπλή κωδικοποίηση **MD.**

3.5.2.2.1 Ελληνικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των 143 έργων των δύο ελληνικών εγχειριδίων πραγματοποιείται με βάση τον Πίνακα 3.15. Ειδικότερα, τα 113 εξ’ αυτών αντλούνται από τις ενότητες **2.1**, **2.2**, **2.3**, **2.4** του **GR1** και τα 30 από τις ενότητες **2.3** και **Γενικές Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου** του **GR2.** Ως **σχετικά με την απόδειξη (PR)** θεωρούνται μόνο τα 63, τα οποία και αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής ταξινομούνται στις κατηγορίες **D** (28), **I** (25), **M** (9), **O** (1). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, παρουσιάζονται 37 έργα γενικής χροιάς (**G**) και 26 έργα ειδικής (**S**).

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 28. Τα 22 εξ' αυτών είναι γενικής συλλογιστικής υπόστασης (**G**) και τα 6 ειδικής (**S**). Όλα είναι αποδεικτικά και πραγματεύονται το είδος ενός τριγώνου ως προς τις γωνίες του, ισότητες και ανισότητες που εμπλέκουν τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών, τύπους που δίνουν το εμβαδό ή το ύψος ενός τριγώνου και μαθηματικές εξισώσεις. Μόνο το 1 εκ των 28 **D** έργων εκφράζει πτυχή του καθημερινού βίου. Τα **I** έργα ανέρχονται σε 25. Τα 14 εξ' αυτών να είναι γενικού συλλογιστικού χαρακτήρα (**G**) και τα 11 ειδικού (**S**). Όλα τα **I** έργα εκτός από 1 απαιτούν χαρακτηρισμό (Σ) ή (Λ) ισοτήτων και ανισοτήτων που πραγματεύονται τριγωνομετρικούς αριθμούς διαφόρων γωνιών. Το 1 που απομένει ζητά την εξέτασης της αληθοφάνειας του ισχυρισμού ενός μαθητή. Κανένα από τα **I** έργα δεν αντλείται από την καθημερινότητα. Τα **M** έργα ανέρχονται σε 9. Είναι όλα ειδικής συλλογιστικής χροιάς (**S**) και απαιτούν τη διατύπωση ορθών δηλώσεων. Αυτές μπορεί να αφορούν την εξαγωγή του τύπου που δίνει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, την καταγραφή ισότητας που εμπλέκει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο διαφορετικών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τη διάταξη των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας και την έκφραση μιας ζητούμενης απόστασης ή ενός τριγωνομετρικού αριθμού μιας γωνίας ως συνάρτηση μιας άγνωστης πλευράς ενός τριγώνου. Από τα 9 **M** έργα, τα 5 πραγματεύονται καταστάσεις της καθημερινότητας. Το μοναδικό **O** έργο που εντοπίζεται είναι γενικής χροιάς (**G**) και ενδομαθηματικό. Εδώ, ο μαθητής πρέπει να υπολογίσει το συνημίτονο της γωνίας θ ενός τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζεται στο εσωτερικό ενός σχεδιασμένου κύβου για να κυκλώσει τη σωστή απάντηση. Ωστόσο, ο ζητούμενος υπολογισμός δε βασίζεται στη διενέργεια πράξεων αλλά στη συνδυαστική αξιοποίηση των ιδιοτήτων του τετραγώνου.

3.5.2.2.2 Γαλλικά εγχειρίδια

Η ανάλυση των πορισμάτων που προκύπτουν από την αξιολόγηση των 327 έργων των δύο γαλλικών εγχειριδίων λαμβάνει χώρα με βάση τον Πίνακα 3.15. Ειδικότερα, αξιολογούνται 67 έργα της ενότητας «**Γνωρίζω και χρησιμοποιώ το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου**» του **FR1** και 260 έργα των ενοτήτων του κεφαλαίου 10: **«Τριγωνομετρία»** και της ενότητας **«Γωνίες, Ημίτονο, Συνημίτονο, Εφαπτομένη»** του **FR2.** Από αυτά, τα 99 θεωρούνται **σχετικά με την απόδειξη (PR).** Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής, τα 99 **PR** έργα ταξινομούνται στις κατηγορίες **I**(18), **D**(10), **M**(54), **O** (16), **C**(2) και **X**(1), ενώ παράλληλα συναντώνται και 2 έργα που λαμβάνουν διπλή κωδικοποίηση (1 **GIX**, 1 **GMD**). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής, παρουσιάζονται 68 έργα ειδικής χροιάς (**S**) και 31 έργα γενικής (**G**).

Τα **M** έργα ανέρχονται σε 54. Τα 30 εξ' αυτών είναι ειδικού συλλογιστικού προφίλ (**S**) και τα 24 γενικού (**G**). Όλα απαιτούν τη διατύπωση δηλώσεων που κυρίως αφορά την καταγραφή των κύριων στοιχείων ενός ορθογωνίου τριγώνου ή των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών του. Ακόμη, ζητείται η καταγραφή: α) των όμοιων τριγώνων μιας δοσμένης απεικόνισης, β) της σχέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων, γ) των λόγων που προκύπτουν από την εφαρμογή του Θαλή σε ένα τρίγωνο, δ) της σχέσης κατάταξης των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας και ε) των γενικών τύπων των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας. Επιπρόσθετα, εντοπίζονται έργα εξαγωγής συμπεράσματος αναφορικά με το μέτρο δύο γωνιών, τη φύση ενός λόγου ή της αριθμητικής απόκλισης μεταξύ δύο λόγων. Παράλληλα, εντοπίζονται 6 έργα εύρεσης των ακριβών συνθηκών προκειμένου να ισχύει μια μαθηματική κατάσταση και 2 έργα διατύπωσης μιας εικασίας. Η κατηγορία **M** συνδυάζεται με την **D** σε 1 έργο. Από τα 53 **M** έργα, εντοπίζονται 9 που αφορούν τον καθημερινό βίο και 1 πολιτισμικού χαρακτήρα (μελέτη του τρόπου εξέλιξης της γωνίας κλίσης του πύργου της Πίζας από το έτος κατασκευής του).

Τα **I** έργα ανέρχονται σε 18. Τα 13 εξ' αυτών είναι ειδικού συλλογιστικού υποβάθρου (**S**) και τα 5 γενικού (**G**). Όλα έχουν χαρακτήρα διερεύνησης. Ειδικότερα, ζητούν την εξέταση είτε της ισχύος ισχυρισμών και συνθηκών που εκφράζουν διάφορες μαθηματικές καταστάσεις, είτε του πεδίου εφαρμογής ήδη κατασκευασμένων αποδείξεων σε ένα άλλο μαθηματικό περιβάλλον, είτε της αληθοφάνειας δηλώσεων ηρώων του εγχειριδίου. Από τα 18 **I** έργα, μόνο τα 2 πραγματεύονται ζητήματα της καθημερινότητας. Τα **O** έργα ανέρχονται σε 16 με τα 15 εξ' αυτών να είναι ειδικής συλλογιστικής χροιάς (**S**) και 1 γενικής (**G**). Τα περισσότερα (9) προχωρούν στην παρουσίαση τριγώνων και ζητούν από το μαθητή να βρει όσες γωνίες μπορούν να υπολογιστούν. Εδώ η απάντηση βασίζεται στην ορθή ανάγνωση της παρουσιαζόμενης κατάστασης και στην αντιστοίχιση των δομικών χαρακτηριστικών της με τις συνιστώσες διδασκόμενων θεωρημάτων. Ακόμη, συναντώνται 4 έργα προσδιορισμού της φύσης δύο δοσμένων τριγώνων, 2 έργα που σχετίζονται με την πολυγωνική θεώρηση του Αρχιμήδη για την προσέγγιση του π και

1 έργο που έχει χαρακτήρα μαθηματικού γρίφου. Από τα 16 **O** έργα, τα 4 εντάσσονται σε ένα ιστορικό πλαίσιο μελέτης.

Τα **D** έργα ανέρχονται σε 10. Τα 8 εξ' αυτών είναι ειδικής συλλογιστικής υπόστασης (**S**) και τα 2 γενικής (**G**). Η ανάλυση ανέδειξε 8 αποδεικτικά έργα που πραγματεύονται διατυπωμένες εικασίες, μήκη πλευρών, όμοια τρίγωνα, ισότητες λόγων, 1 έργο επαλήθευσης της ορθότητας μιας περιγραφόμενης μεθόδου και 1 έργο επεξηγηματικού χαρακτήρα. Η κατηγορία **D** εμφανίζεται μαζί με τη **M** σε 1 έργο. Από τα 10 **D** έργα, εντοπίζεται 1 έργο που συνδέεται με τον καθημερινό βίο και 1 έργο ιστορικού χαρακτήρα. Τα **C** έργα ανέρχονται σε 2. Είναι ειδικού συλλογιστικού προσανατολισμού (**S**) και ενδομαθηματικά. Ειδικότερα, πρόκειται για έργα που ζητούν τη διόρθωση του λάθους που υπάρχει στις συλλογιστικές πορείες δύο ηρώων του εγχειριδίου. Το μοναδικό **X** έργο που παρουσιάζεται είναι γενικού τύπου (**G**) και ζητείται ως αιτιολόγηση του **I** έργου: «Το συνημίτονο μιας γωνίας είναι ανάλογο του μέτρου αυτής της γωνίας;». Παρόλο που δεν απαιτείται ρητά η εύρεση αντιπαραδείγματος για την επίλυση του εν λόγω **I** έργου, η προτεινόμενη από το βιβλίο του εκπαιδευτικού απάντηση στηρίζεται σε αντιπαράδειγμα.

Και στις δύο χώρες οι μαθητές προσεγγίζουν το νέο σώμα γνώσης μέσω διερεύνησης και απόδειξης ζητημάτων ποικίλων μαθηματικών αξόνων. Επίσης, μαθαίνουν να διατυπώνουν ορθές μαθηματικές δηλώσεις και να εφαρμόζουν την εννοιολογική τους γνώση είτε για την επίλυση των πιο πολύπλοκων έργων είτε για την απόκριση σε ασκήσεις που είναι φαινομενικά υπολογιστικού χαρακτήρα. Ωστόσο, η κάθε χώρα προσφέρει και κάποιες επιπλέον διαφορετικής φύσεως ευκαιρίες εκμάθησης. **Στην Ελλάδα**, ο μαθητής αντιμετωπίζει περισσότερα έργα συλλογιστικής και απόδειξης, τα οποία αφορούν κυρίως αφηρημένες μαθηματικές καταστάσεις και ανακαλύπτει τη νέα γνώση μέσα από τις διαδικασίες της επεξήγησης και της επαλήθευσης. Αντίθετα, **στη Γαλλία** ο μαθητής έρχεται σε επαφή με περισσότερες συλλογιστικές πτυχές και με καταστάσεις κυρίως ειδικού συλλογιστικού προφίλ. Παράλληλα, χρησιμοποιεί την τριγωνομετρία ως εργαλείο ερμηνείας και ανάλυσης διαφόρων μαθηματικών ζητημάτων και κατασκευάζει τη γνώση μέσα από την παραγωγή εικασιών. Επιπρόσθετα, εξοικειώνεται με πιο ιδιόμορφες πτυχές όπως αυτής της αναζήτησης αντιπαραδείγματος για την απόρριψη ενός δοσμένου ισχυρισμού, της εύρεσης των ακριβών συνθηκών προκειμένου μία δήλωση να είναι αληθής και της διόρθωση των λαθών σε ένα δοσμένο συλλογισμό.

Τα **γαλλικά** εγχειρίδια βοηθούν τον εκπαιδευτικό μέσω των λυμένων παραδειγμάτων τους να εφοδιάσει τους μαθητές του με τα κατάλληλα μεθοδολογικά εργαλεία για την αντιμετώπιση έργων που βασίζονται στον υπολογισμό, την επιχειρηματολογία, τη μοντελοποίηση και την ορθή καταγραφή μαθηματικών σχέσεων. Σχετικά με τα άλυτα έργα τους, αυτά επιτρέπουν στον καθηγητή να προσεγγίσει τις τριγωνομετρικές έννοιες υπό το πρίσμα διάφορων συλλογιστικών συνιστωσών. Τα **ελληνικά** εγχειρίδια δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό μέσω των λυμένων εφαρμογών του να διδάξει στους μαθητές του μεθόδους υπολογισμούς, σχεδιασμού γωνιών και απόδειξης τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Αναφορικά με τα άλυτα έργα τους, αυτά προσανατολίζουν τον καθηγητή στο να εστιάσει τη διδασκαλία του σε εκείνες τις συλλογιστικές πτυχές που συνδέονται περισσότερο με την απόδειξη τριγωνομετρικών ισοτήτων και ανισοτήτων καθώς και τη διερευνητική προσέγγιση των τριγωνομετρικών εννοιών. **Τα εγχειρίδια και των δύο χωρών** δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να χρησιμοποιήσει εκπαιδευτικά λογισμικά για να εμπλέξει τους μαθητές του σε μια διαδικασία εξερεύνησης της γνώσης. Στην Ελλάδα αυτό υλοποιείται μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου.

Κεφάλαιο 4. Συζήτηση – Συμπεράσματα

4.1 Ευρύτερος σχολιασμός των πορισμάτων της μελέτης και σύνδεση με τη βιβλιογραφία

Στο εν λόγω μέρος της διπλωματικής εργασίας πραγματοποιείται συζήτηση των πορισμάτων της μελέτης ανά τιθέμενο ερευνητικό ερώτημα και σε σχέση με τους θεωρητικούς άξονες που έχουν μελετηθεί στα πλαίσια υλοποίησης της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Παράλληλα, διατυπώνονται και κάποια συμπεράσματα για τη μάθηση και τη διδασκαλία.

Αναφορικά με το **πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, διαπιστώθηκε ότι τόσο τα γαλλικά όσο και τα ελληνικά εγχειρίδια υιοθετούν το ίδιο εσωτερικό δομικό μοτίβο που περιγράφεται από την αλληλουχία: Εισαγωγική Δραστηριότητα, Θεωρητικό μέρος, Λυμένα έργα, Άλυτα έργα. Ωστόσο, τα γαλλικά εγχειρίδια διαθέτουν πιο σύνθετη εσωτερική δομική οργάνωση στο τμήμα των άλυτων έργων επειδή εκεί αναπτύσσονται πολλά επιμέρους τμήματα, τα οποία στοχεύουν στην καλλιέργεια συγκεκριμένων δεξιοτήτων του μαθητή όπως η επιχειρηματολογία, η επικοινωνία, η μοντελοποίηση και ο υπολογισμός. Έτσι ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να καλλιεργήσει ένα πιο ολοκληρωμένο μαθηματικό υπόβαθρο και ο εκπαιδευτικός να εξειδικεύσει ακόμη περισσότερο τους διδακτικούς του στόχους στη βάση ανάπτυξης συγκεκριμένων μαθηματικών ικανοτήτων. Επιπρόσθετα, τα εγχειρίδια των δύο χωρών εμφανίζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις ως προς τις έννοιες που πραγματεύονται πριν την ανάπτυξη των νέων μαθηματικών πληροφοριών. Σχετικά με την πορεία εξέλιξης του μαθηματικού περιεχομένου, παρατηρήθηκε ότι στις ενότητες της ισότητας τριγώνων, της ομοιότητας τριγώνων και του θεωρήματος του Θαλή τα ελληνικά εγχειρίδια εμφανίζουν μια πιο ισορροπημένη αναπτυξιακή πορεία σε θεωρητικό επίπεδο λόγω της πιο σφαιρικής προσέγγισης που υιοθετείται. Αντίθετα, τα γαλλικά εγχειρίδια εμφανίζουν πιο αρμονική αναπτυξιακή πορεία σε πρακτική κλίμακα στις εν λόγω ενότητες εξαιτίας της πιο προσεκτικής ιεράρχησης των νοητικών διεργασιών που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές για τη επίλυση των έργων τους . Εξαίρεση αποτελούν το ΠΘ και η Τριγωνομετρία της Β' Γυμνασίου όπου πιο ισορροπημένη εξελικτική πορεία τόσο στο θεωρητικό όσο και στο πρακτικό κομμάτι ακολουθούν τα γαλλικά εγχειρίδια στην πρώτη περίπτωση και τα αντίστοιχα ελληνικά στη δεύτερη. Όσον αφορά την Τριγωνομετρία της Γ' Γυμνασίου, τα εγχειρίδια και των δύο χωρών υιοθετούν το καθένα μια λογική αναπτυξιακή πορεία τόσο σε θεωρητικό όσο και πρακτικό επίπεδο συγκριτικά με τον τρόπο με τον οποίο την εξετάζουν στην προηγούμενη τάξη.

Επιπρόσθετα, διαπιστώθηκε ότι τα γαλλικά εγχειρίδια υπηρετούν την κονστρουκτιβιστή αντίληψη σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο μεταχειρίζονται τις εξεταζόμενες έννοιες. Ο μαθητής στα πλαίσια εισαγωγικών δραστηριοτήτων μπορεί να ανακαλύψει μόνος του όλες τις θεωρητικές ιδέες που αναπτύσσονται στο εγχειρίδιο, μέσω δομημένων υποερωτημάτων που τον φέρνουν σε γνωστική σύγκρουση και τον οδηγούν να διαμορφώσει σταδιακά ένα σώμα γνώσης. Η ιδέα αυτή της ανακάλυψης διαπνέει και τα υπόλοιπα έργα των εγχειριδίων. Παράλληλα, η χρήση των εκπαιδευτικών λογισμικών που υιοθετείται σε ορισμένες περιπτώσεις συμβάλλει επίσης στην οικοδόμηση και στην κατάκτηση της γνώσης από το μαθητή, εξαιτίας της δυνατότητας που προσφέρει στον τελευταίο να παράξει εικασίες και να τις ελέγξει σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας. Αντίθετα, στα ελληνικά εγχειρίδια γίνονται κάποιες προσπάθειες στο να ανακαλύψει ο μαθητής στα πλαίσια εισαγωγικών δραστηριοτήτων τις θεωρητικές ιδέες που αναπτύσσονται στα εκθεσιακά μέρη χωρίς όμως επιτυχία, εξαιτίας της δομικής συγκρότησης που εμφανίζουν οι δραστηριότητες αυτές. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι τα δομικά χαρακτηριστικά των θεωρητικών παραγράφων τους ευνοούν περισσότερο τη δασκαλοκεντρική προσέγγιση. Όσον αφορά τα παρουσιαζόμενα έργα, η έρευνα ανέδειξε ότι αυτά είναι υψηλού γνωστικού προσανατολισμού και ωθούν το μαθητή στο να κινητοποιήσει σύνθετους γνωστικούς μηχανισμούς τόσο συλλογιστικού όσο και υπολογιστικού χαρακτήρα για να ανταποκριθεί. Ταυτόχρονα, η μελέτη κατέδειξε ότι η εμπλουτισμένη μορφή των ελληνικών εγχειριδίων προσφέρει στους μαθητές κάποια ερείσματα για εκμάθηση μέσω διερεύνησης εξαιτίας της ενσωμάτωσης εκπαιδευτικών λογισμικών στον πυρήνα τους.

Αναφορικά με το **δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, διαπιστώθηκε ότι σε ευρύτερο επίπεδο, οι εκθεσιακές ενότητες των γαλλικών εγχειριδίων προσφέρουν στο μαθητή τη δυνατότητα να εξοικειωθεί με περισσότερες συνιστώσες της αποδεικτικής διαδικασίας σε σχέση με τα ελληνικά εγχειρίδια. Ακόμη, οι μαθητές στη Γαλλία καλούνται από παρατηρητές μίας δοσμένης από το εγχειρίδιο απόδειξης να γίνουν κατασκευαστές της, μέσω επίλυσης έργων τα ερωτήματα των οποίων καθοδηγούν κατάλληλα τις διεργασίες των μαθητών. Αναφορικά με τις έννοιες της ισότητας τριγώνων, της τριγωνομετρίας και του θεωρήματος του Θαλή οι μαθητές καλλιεργούν τις γνώσεις τους γύρω από την απόδειξη σε μεγαλύτερο βαθμό στην Ελλάδα, λόγω της παρουσίας περισσότερων αιτιολογήσεων που πληρούν τα χαρακτηριστικά του τυπικού και παραγωγικού συλλογισμού. Σχετικά με το ΠΘ, τα γαλλικά εγχειρίδια είναι αυτά που προσφέρουν στους μαθητές τη δυνατότητα να εξοικειωθούν με τις ιδιαιτερότητες της απόδειξης. Όσον αφορά την ομοιότητα τριγώνων, σε καμία από τις δύο χώρες ο μαθητής δεν έρχεται σε επαφή με τον τυπικό και παραγωγικό συλλογισμό. Τα εγχειρίδια και των δύο χωρών προσφέρουν μέσω των έργων τους έναν αξιόλογο αριθμό ευκαιριών της συλλογιστικής που σχετίζεται με την απόδειξη (**PR**), πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τη διαπίστωση ότι σε γενική κλίμακα τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών προσφέρουν λίγες ευκαιρίες του παραπάνω τύπου (Bergwall & Hemmi, 2017). Ειδικότερα, τα ελληνικά εγχειρίδια υπερτερούν σε **PR** έργα στις έννοιες της ισότητας και της ομοιότητας τριγώνων καθώς και της τριγωνομετρίας, ενώ τα αντίστοιχα γαλλικά υπερτερούν σε **PR** έργα στο θεώρημα του Θαλή και στο πυθαγόρειο θεώρημα. Επίσης, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με περισσότερες πτυχές της συλλογιστικής στα γαλλικά εγχειρίδια. Εξαίρεση αποτελούν οι έννοιες της ομοιότητας τριγώνων και του θεωρήματος του Θαλή όπου και στις δύο χώρες οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις ίδιες κατηγορίες συλλογιστικής, με διαφοροποιήσεις ωστόσο ως προς τις επιμέρους συνιστώσες τους. Τα ελληνικά εγχειρίδια δίνουν βαρύτητα στην εξοικείωση του μαθητή κυρίως με τα αποδεικτικά **PR** έργα και έπειτα με τα **PR** έργα που είναι διερευνητικού χαρακτήρα. Τα αντίστοιχα γαλλικά προάγουν σε μεγάλο βαθμό τη διδακτική πρακτική της παραγωγής επιχειρημάτων στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος, του πειραματισμού και της εξερεύνησης, αναμένοντας αργότερα τη λογική οργάνωση των επιχειρημάτων αυτών από τους μαθητές με στόχο τη διαμόρφωση μιας έγκυρης μαθηματικής απόδειξης (Hanna & de Villiers, 2008). Ταυτόχρονα, άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι τα γαλλικά εγχειρίδια δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στον εννοιολογικό διαχωρισμό των όρων **preuve mathématique** και **démonstration mathématique** που γίνεται από τη βιβλιογραφία (Balacheff, 1987). Αυτό αντικατοπτρίζεται τόσο στον τρόπο που χαρακτηρίζουν τις αιτιολογήσεις των κύριων αποτελεσμάτων που παραθέτουν (preuve/ démonstration) όσο και στον τρόπο διατύπωσης των εκφωνήσεων των έργων τους (démontrer/ prouver).

Στα εγχειρίδια και των δύο χωρών, η επιχειρηματολογία λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος μεταξύ της προϋπάρχουσας και της καινούριας μαθηματικής γνώσης (Wagner et al., 2014), ενώ παράλληλα οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη λειτουργία της απόδειξης ως επαλήθευση, επεξήγηση και ανακάλυψη μαθηματικών πληροφοριών (De Villiers, 1999). Εδώ οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η ανακαλυπτική λειτουργία της απόδειξης επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης ΤΠΕ από τα εγχειρίδια (στην Ελλάδα μέσω του εμπλουτισμένου βιβλίου). Ειδικότερα, τα εκπαιδευτικά λογισμικά δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές μέσα από τις εξερευνήσεις τους σε δυναμικά περιβάλλοντα να παράξουν εικασίες και έπειτα να προσπαθήσουν να επαληθεύσουν την αλήθεια αυτών των εικασιών μέσω κατασκευής παραγωγικών αποδείξεων (Knuth, 2002a). Ωστόσο, στα γαλλικά εγχειρίδια οι μαθητές είναι πιθανό να έρθουν επιπρόσθετα και σε επαφή με τη λειτουργία της απόδειξης ως διανοητική πρόκληση, διότι παρακινούνται να κατασκευάσουν οι ίδιοι αποδείξεις θεωρημάτων, ιδιοτήτων ή γενικών μαθηματικών τύπων (Shongwe, 2020). Εδώ οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η παραπάνω ανάλυση των λειτουργιών της απόδειξης που προάγονται από τα ελληνικά και τα γαλλικά εγχειρίδια θα μπορούσε να υποστηρίξει τους εκπαιδευτικούς στην επιλογή εργασιών στην τάξη που τονίζουν συγκεκριμένες πτυχές της απόδειξης (Steele & Rogers, 2012). Σε αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να δημιουργήσουν τα κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα που να αναδεικνύουν μία πιο ιδιόμορφη λειτουργία της απόδειξης, αυτής της επικοινωνίας των μαθηματικών αποτελεσμάτων μεταξύ εκπαιδευτικών - μαθητών και μεταξύ των ίδιων των μαθητών (De Villiers, 1999).

4.2 Σύγκριση με τα αποτελέσματα από άλλες παρόμοιες έρευνες

Δεδομένου ότι το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης μας που προέρχεται από τη μελέτη του Bergwall (2021) αποτελεί συνδυασμό των μεθοδολογικών πλαισίων των Otten et al. (2014) καθώς και των Thompson et al. (2012), κρίνεται σκόπιμο να επεκτείνουμε τη συγκριτική μας προσέγγιση συμπεριλαμβάνοντας και άλλες έρευνες που ακολουθώντας παρόμοιο μεθοδολογικό προσανατολισμό αξιολογούν εγχειρίδια άλλων χωρών. Ειδικότερα, προχωρούμε σε μία σύγκριση των ερευνητικών πορισμάτων της μελέτης μας με τα αντίστοιχα της μελέτης των Otten et al. (2014) καθώς και της μελέτης των Hong & Choi (2018) που επίσης βασίζεται με κάποιες μικρές τροποποιήσεις στο αναλυτικό πλαίσιο των Otten et al. (2014). Και οι δύο προαναφερθείσες έρευνες εστιάζουν στον τομέα της γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση. Επίσης, έχει πραγματοποιηθεί η βιβλιογραφική ανασκόπηση και των δύο εν λόγω ερευνών στην παράγραφο **1.5** του βιβλιογραφικού μέρους της εργασίας μας. Παρακάτω δίδονται στους Πίνακες 4.1 και 4.2 τα αποτελέσματα από την ανάλυση των αιτιολογήσεων των εκθεσιακών ενοτήτων και των **PR** έργων ανά χώρα.

	Είδος αιτιολόγησης			
Χώρα και μαθηματική περιοχή	**G**	**S**	**L**	**N**
Ελλάδα, γεωμ, τριγ.	33%	37%	0%	40%
Γαλλία, γεωμ., τριγ.	22%	35%	32%	35%
ΗΠΑ, γεωμ, (Otten et al., 2014) (*)	19%-42%	9%-55%	4%-34%	9%-28%
Κορέα, γεωμ. (**)	62, 7%	12, 7%	-	25, 5 %
ΗΠΑ, γεωμ. (Hong & Choi , 2018) (**)	14, 3%	3, 6%	-	82, 1%

Πίνακας 4.1: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων ανά χώρα*

Παρατήρηση: Όλα τα ποσοστά υπολογίζονται σε σχέση με το συνολικό αριθμό των αναπτυσσόμενων κύριων αποτελεσμάτων (*) Δεδομένα από Otten et al. (2014, p. 67), (**) Δεδομένα από Hong & Choi (2018, p. 90).

		Είδος συλλογιστικής			Φύση συλλογιστικής			
Χώρα και μαθηματική περιοχή	**PR έργα**	**S**	**G**	**M**	**I**	**D**	**X**	**Άλλη**
Ελλάδα, γεωμ, τριγ.	54%	40%	60%	8%	32%	55%	0%	8,5%
Γαλλία, γεωμ., τριγ.	47%	63%	37%	30%	37%	19%	0, 23%	16%
ΗΠΑ, γεωμ. (Otten et al., 2014) (*)	20%-38%	48%-72%	20%-45%	8%-20%	30%-46%	55%-76%	1%-26%	3%-16%
Κορέα, γεωμ. (**)	21,9%	92, 7%	7, 2%	1, 2%	25, 9%	60, 2%	1, 2%	11, 4%
ΗΠΑ, γεωμ. (Hong & Choi , 2018) (**)	40,4%	71, 8%	18, 9%	7, 6%	14, 6%	45, 3%	2, 1%	29, 9%

Πίνακας 4.2: *Είδος συλλογιστικής στις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων ανά χώρα*

Παρατήρηση: Όλα τα ποσοστά του είδους και της φύσεως της συλλογιστικής υπολογίζονται σε σχέση με το συνολικό αριθμό των **PR** έργων. (*) Δεδομένα από Otten et al. (2014, pp. 69-70), (**) Δεδομένα από Hong & Choi (2018, pp. 91-93).

Αναφορικά με τις αιτιολογήσεις των εκθεσιακών ενοτήτων, το μεγαλύτερο ποσοστό γενικών επιχειρημάτων (**G**) παρουσιάζεται στα κορεατικά εγχειρίδια (62, 7%), ενώ το ποσοστό των περισσότερων μη αιτιολογούμενων κύριων αποτελεσμάτων (**N**) συγκεντρώνουν τα αμερικανικά εγχειρίδια της μελέτης των Hong & Choi (2018) (82, 1%). Επίσης, παρατηρείται ότι μόνο από τα γαλλικά εγχειρίδια αλλά και τα αμερικανικά εγχειρίδια της έρευνας των Otten et al. (2014) ζητείται από τους μαθητές να προχωρήσουν οι ίδιοι στη σύνταξη της αιτιολόγησης κάποιου κύριου αποτελέσματος (**L**). Μάλιστα, το 1 εκ των 6 προαναφερθέντων εξεταζόμενων αμερικανικών εγχειριδίων συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ποσοστό στην εν λόγω κατηγορία (34%) και αμέσως μετά ακολουθούν σε ποσοστό 32% τα γαλλικά εγχειρίδια. Όσον αφορά τις αιτιολογήσεις ειδικού χαρακτήρα (**S**), αυτές αποτυπώνονται σε μεγαλύτερο βαθμό σε 1 εκ των 6 εξεταζόμενων αμερικανικών εγχειριδίων της μελέτης των Otten et al. (2014) (55%) και έπειτα αναπτύσσονται περισσότερο στα ελληνικά εγχειρίδια (37%).

Το μεγαλύτερο ποσοστό των **PR** έργων συναντάται στα ελληνικά εγχειρίδια (54%). Σχετικά με το είδος της συλλογιστικής των **PR** έργων, τα περισσότερα γενικά (**G**) **PR** έργα αναπτύσσονται στα ελληνικά εγχειρίδια (60%), ενώ τα περισσότερα ειδικά (**S**) **PR** έργα στα κορεατικά εγχειρίδια (92, 7%). Επίσης, σε όλα τα εγχειρίδια εκτός από τα ελληνικά και 1 αμερικανικού εγχειριδίου της μελέτης των Otten et al. (2014) υπερτερούν τα **PR** έργα ειδικού χαρακτήρα (**S**). Αναφορικά με τη φύση της συλλογιστικής των **PR** έργων, τα γαλλικά εγχειρίδια είναι αυτά που δίνουν τη μεγαλύτερη από όλα τα εγχειρίδια έμφαση σε έργα διατύπωσης εικασιών (**M**), σημειώνοντας το ποσοστό του 30%. Επιπλέον, η κατηγορία διερεύνηση εικασίας (**I**) συγκροτείται σε μεγαλύτερο βαθμό σε 4 εκ των 6 εξεταζόμενων αμερικανικών εγχειριδίων της έρευνας των Otten et al. (2014) και έπειτα στα γαλλικά εγχειρίδια (37%). Επιπρόσθετα, η κατηγορία **D** με εξαίρεση τα γαλλικά εγχειρίδια (19%) είναι η πιο συχνά αναπτυσσόμενη κατηγορία φύσεως της συλλογιστικής σε όλα τα εγχειρίδια. Στο σημείο αυτό οφείλουμε να προχωρήσουμε σε ορισμένες διευκρινίσεις. Τα **D** έργα στη μελέτη των Otten et al. (2014) είναι εκείνα τα έργα που ζητούν από τους μαθητές είτε να «κατασκευάσουν μία απόδειξη» είτε να προχωρήσουν στην «ανάπτυξη μίας λογικής (rationale) ή ενός άλλου επιχειρήματος μη αποδεικτικού χαρακτήρα», ενώ στην έρευνα των Hong & Choi (2018) ως **D** έργα θεωρούνται εκείνα που καλούν τους μαθητές να «αξιολογήσουν ένα επιχείρημα».

Όσον αφορά την κατηγορία **X**, διαπιστώνεται ότι τα αμερικανικά εγχειρίδια της μελέτης των Otten et al. (2014) με εξαίρεση 1 είναι αυτά που επικεντρώνονται περισσότερο στην κατάρτιση έργων εύρεσης αντιπαραδείγματος. Μάλιστα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στα ελληνικά εγχειρίδια δε συναντάται κανένα έργο αυτού του τύπου. Τέλος, το μεγαλύτερο ποσοστό των έργων που έγκεινται στην ανάπτυξη άλλης συλλογιστικής παρουσιάζεται στα αμερικανικά εγχειρίδια της έρευνας των Hong & Choi (2018). Πρόκειται για έργα που ανέρχονται σε ποσοστό 29, 9% και απαιτούν είτε την κατασκευή απόδειξης είτε τη συμπλήρωση κενών. Στην περίπτωση της δικής μας έρευνας η κατηγορία «Άλλη» του Πίνακα 4.2 απαρτίζεται από τις κατηγορίες **O, P, C, E** του θεωρητικού μας πλαισίου και στην περίπτωση της έρευνας των Otten et al. (2014) απαρτίζεται από τις εναπομείναντες κατηγορίες που περιγράφονται στον Πίνακα 1.9 της παραγράφου **1.5** του **Κεφαλαίου 1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.**

Περιορισμοί και επεκτάσεις της έρευνας

Η παρούσα μελέτη εξέτασε τον τρόπο αποτύπωσης της έννοιας της επιχειρηματολογίας σε ελληνικά και γαλλικά εγχειρίδια μαθηματικών της Β’ και Γ’ Γυμνασίου, δίδοντας ειδικότερα έμφαση στις ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη που παρέχονται από τα έργα και τις εκθεσιακές ενότητες γεωμετρικού και τριγωνομετρικού περιεχομένου των τελευταίων. Ωστόσο, τα ερευνητικά πορίσματα της μελέτης που σχετίζονται με την αξιολόγηση των δύο γαλλικών εγχειριδίων δεν μπορούν να γενικευτούν και να αποτελέσουν αντιπροσωπευτικό δείγμα των ευκαιριών εκμάθησης **PR** που προωθούνται σε ευρύτερη κλίμακα από τα εγχειρίδια του γυμνασίου στη Γαλλία. Προκειμένου να σχηματιστεί μια πιο λεπτομερής και ολοκληρωμένη εικόνα των ευκαιριών αυτού του χαρακτήρα, είναι απαραίτητη η ανάλυση περισσότερων σχολικών εγχειριδίων της εκπαιδευτικής αυτής βαθμίδας που προέρχονται από διαφορετικούς εκδοτικούς οίκους της Γαλλίας.

Με βάση την ερευνητική μεθοδολογία που υιοθετήθηκε για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα μπορούσε να διεξαχθεί ανάλογη συγκριτική έρευνα στα ελληνικά και γαλλικά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών του Λυκείου, προκειμένου να διερευνηθεί η εξελικτική πορεία αποτύπωσης της έννοιας της επιχειρηματολογίας σε αυτά. Παράλληλα, θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον η αξιολόγηση όσων έργων καταρτίζονται στη βάση χρήσης δυναμικών λογισμικών, μέσω υιοθέτησης ενός πιο εμπλουτισμένου θεωρητικού πλαισίου από αυτό που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη, με στόχο την πιο λεπτομερή και συστηματική εξέταση του ρόλου της τεχνολογίας στη δημιουργία ευκαιριών για συλλογιστική και απόδειξη (στην Ελλάδα μέσω εξέτασης των εμπλουτισμένων εγχειριδίων). Παράλληλα, σημαντική κρίνεται και η διεξαγωγή μιας μελέτης που να εξετάζει το είδος της μαθηματικής επιχειρηματολογίας που αναπτύσσουν οι μαθητές στη σχολική τάξη προκειμένου να προσεγγίσουν τα διδασκόμενα μαθηματικά ζητήματα. Μάλιστα, ιδιαίτερη εκπαιδευτική αξία θα είχε η εξέταση του χαρακτήρα εξέλιξης των μαθηματικών επιχειρημάτων που αυτοί κατασκευάζουν κατά τη μετάβαση τους από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για παράδειγμα, η μελέτη των Flegas & Lemonidis (2013) η οποία διερεύνησε τις δεξιότητες συλλογισμού και απόδειξης που ανέπτυξαν μαθητές της Στ' τάξης ενός ελληνικού δημόσιου δημοτικού σχολείου κατά την απόκριση σε ερωτήσεις αλγεβρικού και γεωμετρικού χαρακτήρα, ανέδειξε κάποια αξιόλογα ευρήματα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές διαμορφώνουν τη συλλογιστική τους πορεία. Ειδικότερα, κατέδειξε την προτίμηση από την πλευρά των μαθητών ανάπτυξης αιτιολογήσεων αφηγηματικού και εμπειρικού χαρακτήρα κατά την κατασκευή αποδείξεων, την απουσία τυπικής μαθηματικής γλώσσας στην παραγωγή των επιχειρημάτων τους τη δυσκολία αξιοποίησης γνωστών γεωμετρικών εννοιών καθώς και την ελλιπή εξοικείωση τους με την κοινωνική πτυχή της απόδειξης. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω πορίσματα, θα είχε ιδιαίτερη ερευνητική αξία να μελετηθούν τα σχήματα επιχειρηματολογίας που αναπτύσσουν οι μαθητές στο Γυμνάσιο, προκειμένου να αποτιμηθεί ο βαθμός βελτίωσης του τρόπου συγκρότησης της συλλογιστικής τους πορείας. Επιπλέον, αξιοσημείωτη ερευνητική σημασία θα είχε και η υλοποίηση μιας μελέτης που να εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν το εγχειρίδιο προκειμένου να εμπλακούν σε δραστηριότητες συλλογιστικής και απόδειξης στη σχολική τάξη. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα εγχειρίδια μπορούν να έχουν σημαντική επίδραση στην πρακτική στην τάξη και στις ευκαιρίες των μαθητών να μάθουν την απόδειξη (Bergwall, 2021, p. 30), μία μελέτη αυτού του τύπου θα παρείχε μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα αναφορικά με το μαθηματικό περιβάλλον που διαμορφώνεται στη σχολική τάξη.

Ωστόσο, δεν πρέπει να αγνοούμε ότι ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει βασικό ρόλο στο να επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο οι πηγές που παρέχονται από το εγχειρίδιο εφαρμόζονται στην πράξη (Lepik, Grevholm, & Viholainen, 2015). Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε σκόπιμο να ερευνηθεί μελλοντικά και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί αξιοποιούν τα εγχειρίδια στη διδακτική τους πράξη, έτσι ώστε να αποκωδικοποιηθούν τυχόν διαφορές στη διδακτική τους φιλοσοφία. Για παράδειγμα, η έρευνα των Thompson & Senk (2014) που εξέτασε τον τρόπο χρήσης ενός εγχειριδίου γεωμετρίας από 12 εκπαιδευτικούς από 9 διαφορετικές πολιτείες της Αμερική με εστίαση στην έννοια της ισότητας, ανέδειξε διαφοροποιήσεις στον αριθμό και στη φύση των μαθημάτων που διδάχθηκαν ή παραλείφθηκαν, στις προσδοκίες για τις εργασίες στο σπίτι και στο διδακτικό ύφος. Βέβαια, έρευνες που εξετάζουν τη σχέση εκπαιδευτικός – εγχειρίδιο θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν και σε επίπεδο διαφορετικών χωρών, δεδομένου του ότι στη βιβλιογραφία εντοπίζονται και μελέτες που αναδεικνύουν σαφείς διαφορές στον τρόπο αντίληψης του εγχειριδίου στα πλαίσια της μαθηματικής εκμάθησης και διδασκαλίας (π.χ. Pepin

& Haggarty, 2001). Τέλος, η παρούσα μελέτη θα μπορούσε να επαναληφθεί και σε εγχειρίδια άλλων χωρών, προκειμένου να σκιαγραφηθεί ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η έννοια της συλλογιστικής και της απόδειξης στα πλαίσια διαχείρισης των ίδιων γεωμετρικών και τριγωνομετρικών εννοιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2017). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή*. Αθήνα: ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2018). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

ΑΓΓΛΟΦΩΝΗ

Albano, G., & Iacono, U. D. (2019). A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *16*(1), 1-12. doi: 10.1186/s41239-019-0134-5

Anapa, P., & Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 2700-2706. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.03.399

Antonini, S., Buchbinder, O., Pfeiffer, K., & Stylianides, G. (2015, February). Introduction to the papers of TWG01: Argumentation and proof. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 67-70). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 189-206. doi: 10.1007/s10649-010-9280-3

Bacallao, M. K., & Lacefield, W. O. (2005). Using Spreadsheets for Mathematics Teacher Education. In C. Crawford, R. Carlsen, I. Gibson, K. McFerrin, J. Price, R. Weber & D. Willis (Eds.), *Proceedings of SITE 2005--Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp.

3438-3440). Phoenix, AZ, USA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-2195-0_9

Balacheff, N. (1999, May/June). *Is Argumentation an Obstacle? Invitation to a Debate.* Retrieved from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM, 40*(3), 501-512. doi: 10.1007/s11858-008-0103-2

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. In T. Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002* (Vol. 3, pp. 907-922). Beijing, China: Higher Education Press. doi: 10.48550/arXiv.math/0305021

Barrier, T., Mathé, A. C., & Durand-Guerrier, V. (2010). Argumentation and Proof: A discussion about Toulmin's and Duval's models. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 191-200). Lyon, France: INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PEDAGOGIQUE (INRP).

Bergwall, A. (2017). *Conceptualizing reasoning-and-proving opportunities in textbook expositions: Cases from secondary calculus*. Paper presented at the CERME 10. Dublin, Ireland, February, 1-5.

Bergwall, A. (2021). *Proof-related reasoning in upper secondary mathematics textbooks: Characteristics, comparisons, and conceptualizations* (Doctoral dissertation). Mälardalen University, Västerås.

Bergwall, A. (2021). Proof-related reasoning in upper secondary school: characteristics of Swedish and Finnish textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(5), 731-751. doi: 10.1080/0020739X.2019.1704085

Bergwall, A., & Hemmi, K. (2017). The state of proof in Finnish and Swedish mathematics textbooks—Capturing differences in approaches to upper-secondary integral calculus. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(1), 1-18. doi: 10.1080/10986065.2017.1258615

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 71-80. doi: 10.1016/j.ijer.2013.06.005

Bleiler-Baxter, S. K., & Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 16-34. doi: 10.1016/j.jmathb.2017.05.005

Boero, P. (1999, July/August). *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education.* Retrieved from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128).Valencia, Spain: Universitat de Valencia, Dept. de Didactica de la Matematica.

Cabassut, R. (2005). Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 391–400). Sant Feliu de Guíxols, Spain: ERME.

Cardetti, F., & LeMay, S. (2019). Argumentation: Building students’ capacity for reasoning essential to learning mathematics and sciences. *PRIMUS*, *29*(8), 775-798. doi:10.1080/10511970.2018.1482581

Čeretková, S., Šedivý, O., Molnár, J., & Petr, D. (2008). The role and assessment of textbooks in mathematics education. *Problems of Education in the 21st Century*, *6*, 27 - 37.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117-151. doi: 10.1080/10986060903460070

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (1998). Charting a course for secondary geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 67–90). Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Chemla, K. (Ed.). (2012). *The history of mathematical proof in ancient traditions.* Cambridge: Cambridge University Press.

Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms* (Doctoral dissertation). The Pennsylvania State University, Pennsylvania.

Davis, J. D., Smith, D. O., Roy, A. R., & Bilgic, Y. K. (2014). Reasoning-and-proving in algebra: The case of two reform-oriented US textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 92-106. doi: 10.1016/j.ijer.2013.06.012

Dawkins, P. C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 123-142. doi: 10.1007/s10649-016-9740-5

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking proof with Sketchpad*, 3-10.

De Villiers, M. (2002). *Developing understanding for different roles of proof in dynamic geometry*. Paper presented at ProfMat2002. Visue, Portugal, October, 2-4.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, *33*(3), 1-8. doi: 10.4102/pythagoras.v33i3.193

Dituri, P. (2013). *Proof and reasoning in secondary school algebra textbooks* (Doctoral dissertation). Columbia University, New York.

Dolev, S., & Even, R. (2015). Justifications and explanations in Israeli 7th grade math textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 309-327. doi: 10.1007/s10763-013-9488-7

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Elsaleh, I. (2010). Teachers' interactions with curriculum materials in mathematics. *School Science and Mathematics*, *110*(4), 177-180. doi:10.1111/j.1949-8594.2010.00020.x

Fahse, C. (2017). *Issues of a quasi-longitudinal study on different types of argumentation in the context of division by zero*. Paper presented at the CERME 10. Dublin, Ireland, February, 1-5.

Fan, L. (2011). *Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks*. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks. Shanghai, China, October, 12 – 14.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, *45*(5), 765-777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6

Fielding-Wells, J., & Makar, K. (2012). *Developing primary students' argumentation skills in inquiry-based mathematics classrooms*. Paper presented at the 10th

International Conference of the Learning Sciences: The Future of Learning. Sydney, Australia, July, 2-6.

Flegas, K., & Lemonidis, C. (2013). Exploring Logical Reasoning and Mathematical Proof in Grade 6 Elementary School Students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(1), 70–89. doi: 10.1080/14926156.2013.758326

Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, *64*, 81-91. doi: 10.1016/j.ijer.2013.09.014

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998, July): Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII* (Vol. 2, pp. 345-352). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX* (Vol. 2, pp. 113-120). Valencia, Spain: Universitat de Valencia, Dept. de Didactica de la Matematica.

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 160-168. doi: 10.1016/j.jmathb.2010.07.001

Gomez Marchant, C. N., Park, H., Zhuang, Y., Foster, J. K., & Conner, A. (2021). Theory to practice: Prospective mathematics teachers' recontextualizing discourses surrounding collective argumentation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(6), 671-699. doi: 10.1007/s10857-021-09500-9

Gulkilik, H., Kaplan, H. A., & Emul, N. (2019). Investigating the relationship between argumentation and proof from a representational perspective. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *20*(2), 131-148.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67-80.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 561-566). Cham, Switzerland: Springer.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*(2), 329-336. doi: 10.1007/s11858-008-0073-4

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 877 – 908). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi:10.1007/978-94-009-1465-0_24

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Hellgren, J., Bergqvist, E., & Österholm, M. (2018). Argumentation in university textbooks. *Perspectives on professional development of mathematics teachers*, *11*, 227-228.

Hidayah, M., & Forgasz, H. (2020). A Comparison of Mathematical Tasks Types Used in Indonesian and Australian Textbooks Based on Geometry Contents. *Journal on Mathematics Education*, *11*(3), 385-404. doi: 10.22342/jme.11.3.11754.385-404

Hong, D. S., & Choi, K. M. (2018). Reasoning and Proving Opportunities in Textbooks: A Comparative Analysis. *International Journal of Research in Education and Science*, *4*(1), 82-97. doi:10.21890/ijres.382937

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(2), 139-158. doi:10.1023/A:1025541416693

Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 193-223. doi: 10.1023/A:1023629608614

Hunte, A.A. (2018). Opportunities for Reasoning and Proving in Geometry in Secondary School Textbooks from Trinidad and Tobago. In P. Herbst, U. Cheah, P. Richard & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (pp. 39 – 58). Cham, Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-77476-3_4

Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2009). On the persuasiveness of visual arguments in mathematics. *Foundations of Science*, *14*(1), 97-110. doi:10.1007/s10699-008-9149-4

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3-21. doi:10.1007/s10649-006-9059-8

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, *40*(3), 427-441. doi:10.1007/s11858-008-0095-y

Knipping, C. (2012, May). *The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms.* Retrieved from: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/Conferences/ICME/ICME12/www.icme12.org/upload/submission/1935_F.pdf

Knuth, E. J. (2002a). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, *5*(1), 61-88. doi:10.1023/A:1013838713648

Knuth, E. J. (2002b). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405. doi:10.2307/4149959

Kovács, Z., Recio Muñiz, T., & Vélez, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *25*(2), 33-50. doi: 10.1564/tme_v25.2.03

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229 – 269). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the learning of mathematics*, *20*(1), 22-32.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82. doi:10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 129-156.

Lesseig, K., Hine, G., & Boardman, K. (2018). Preservice Secondary Mathematics Teachers' Perceptions of Proof in the Secondary Mathematics Classroom. In T. E. Hodges, G. J. Roy & A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 671 - 678). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM*, *41*(6), 809-826. doi:10.1007/s11858-009-0177-5

Lin, P. J. (2018). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação & Realidade*, *43,* 1171-1192. doi:10.1590/2175-623676887

Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2018). Characteristics and Changes in the Mathematics Textbooks for the Secondary School in Argentina along 67 Years. *International Journal of Research in Education and Science*, *4*(1), 98-105. doi:10.21890/ijres.382938

Mariotti, M. A. & Balacheff, N (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM*, *40*, 341–344. doi:10.1007/s11858-008-0107-y/

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education* (pp. 75-89). London, UK: Routledge.

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational studies in mathematics*, *86*(1), 125-149. doi:10.1007/s10649-013-9530-2

May, V., & Courtney, S. (2016). Developing meaning in trigonometry. *Illinois Mathematics Teacher*, *63*(1), 25-33.

Mensah, F. S. (2017). Ghanaian senior high school students' error in learning of trigonometry. *International Journal Of Environmental & Science Education*, *12*(8), 1709-1717.

Mujib, A. (2015, October). Analysis of student difficulties in constructing mathematical proof on discrete mathematics course. In T. Hidayat, A. Widodo, W. Sopandi, R. Rosjanuardi, A. Jupri, …, & L. S. Riza (Eds.), *Proceedings of International Seminar on Mathematics, Science, and Computer Science Education* (Vol. 1, pp. 49-55). Bandung, Indonesia: Universitas Pendidikan Indonesia, Faculty of Mathematics and Science Education.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. doi:10.1007/s10649-011-9345-y

Osborne, J. F., & Patterson, A. (2011). Scientific argument and explanation: A necessary distinction?. *Science Education*, *95*(4), 627-638. doi:10.1002/sce.20438

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(1), 51-79. doi:10.1080/10986065.2014.857802

Pedemonte, B. (2003). *What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation.* Paper presented at the Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italy, February, 28 – March, 3.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23-41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, *40*(3), 385-400. doi:10.1007/s11858-008-0085-0

Pedemonte, B. (2018). Strategic vs Definitory Rules: their role in abductive argumentation and their relationship with deductive proof. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9), 1-17. doi:10.29333/ejmste/92562

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM*, *43*(2), 257-267. doi:10.1007/s11858-011-0311-z

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(5), 158-175. doi:10.1007/BF02656616

Rahimah, D., & Visnovska, J. (2021). Analysis of mathematics textbook use: An argument for combining horizontal, vertical, and contextual analyses. *Journal of Physics: Conference Series*, *1731*(1), 1-5. doi: 10.1088/1742-6596/1731/1/012048

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, *377*(2140), 1-12. doi:10.1098/rsta.2018.0045

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, *22*(7), 412-419. doi: 10.5951/teacchilmath.22.7.0412

Schwarz, B. B. (2009). Argumentation and learning. In N. Muller Mirza, AN. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education* (pp. 91-126). Boston, MA, USA: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-98125-3_4

Sears, R., & Chávez, O. (2014). Opportunities to engage with proof: the nature of proof tasks in two geometry textbooks and its influence on enacted lessons. *ZDM*, *46*(5), 767-780. doi:10.1007/s11858-014-0596-9

Segal, J. (1999). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 191-210. doi:10.1016/S0732-3123(99)00028-0

Sekiguchi, Y. (2002). Mathematical proof, argumentation, and classroom communication: from a cultural perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, *21*, 11-20.

Shongwe, B. (2020, January). INVESTIGATING GRADE 11 STUDENTS'SELF-EFFICACY IN A PROOF-RELATED TASK WITH SPECIAL ATTENTION TO INTELLECTUAL CHALLENGE. In P. Vale, L. Westaway, Z. Nhase & I. Schudel (Eds.), *Book of Proceedings of the 28 th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (p. 156). Eastern Cape, South Africa: SAARMSTE.

Silverman, B., & Even, R. (2015, February). Textbook explanations: Modes of reasoning in 7 th grade Israeli mathematics textbooks. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 205-212). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Smith, J. C. (2005). A Sense-making Approach to Proof: Initial Strategies of Students in Traditional and Problem-based Number Theory Courses. *SNU Journal of Education Research*, *14*, 45-76. doi:10.1016/j.jmathb.2005.11.005

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 73-90. doi:10.1016/j.jmathb.2005.11.005

Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2015). Research on mathematical argumentation: A descriptive review of PME proceedings. In K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Eds.), *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Vol. 4, pp. 193-200). Hobart, Australia: PME.

Sriraman, B., & Umland, K. (2020). Argumentation in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 63-66). Cham, Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-030-15789-0_11

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 271-288. doi:10.1007/s10649-009-9193-1

Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159-180. doi:10.1007/s10857-012-9204-5

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288. doi:10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, *64*, 63-70. doi:10.1016/j.ijer.2014.01.002

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(4), 307-332. doi:10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Leiden, The Netherlands: Brill.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 237-253. doi:10.1007/s10649-009-9191-3

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006, November). Students proof schemes: a closer look at what characterizes students proof conceptions. In S. Alatorre, J.L Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 54-60). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Sukirwan, S., Muhtadi, D., Saleh, H., & Warsito, W. (2020). PROFILE OF STUDENTS'JUSTIFICATIONS OF MATHEMATICAL ARGUMENTATION. *Infinity Journal*, *9*(2), 197-212. doi:10.22460/infinity.v9i2.p197-212

Tall, D. O. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (Vol. 4, 117–136). Reston, Virginia, USA: NCTM.

Tall, D. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. In Lin, F-L. (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 91-107). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Tchonang Youkap, P., Njomgang Ngansop, J., Tieudjo, D., & Nchia Ntam, L. (2019). Influence of Drawing and Figures on Secondary School Students' Argumentation and Proof: An Investigation on Parallelogram. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2), 133-144. doi: 10.24193/adn.11.2.10

Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2014). The same geometry textbook does not mean the same classroom enactment. *ZDM*, *46*(5), 781-795. doi:10.1007/s11858-014-0622-y

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in educational evaluation*, *31*(4), 315-327. doi:10.1016/j.stueduc.2005.11.005

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V., & Potari, D. (2016). The nature of argumentation in school mathematics and physics texts: The case of periodicity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 681-699. doi:10.1007/s10763-014-9609-y

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., & Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 58-67. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.002

Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, *36*, 31-35.

Van Eemeren, F. H., & Grootendorst, R. (2004). *A systematic theory of argumentation: The pragma-dialectical approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Van Ness, C. K., & Maher, C. A. (2019). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 13-41. doi:10.1016/j.jmathb.2018.04.004

Viholainen, A. (2011). The view of mathematics and argumentation. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 243-252). Rzeszñw, Poland: CERME.

Wagner, P. A., Smith, R. C., Conner, A., Singletary, L. M., & Francisco, R. T. (2014). Using Toulmin's model to develop prospective secondary mathematics teachers' conceptions of collective argumentation. *Mathematics Teacher Educator*, *3*(1), 8-26. doi:10.5951/mathteaceduc.3.1.0008

Walter, J. G., & Johnson, C. (2007). Elementary teachers' linguistic inventions and semantic warrants for mathematical inferences. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 233-240). Seoul, Korea: PME.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics*, *48*(1), 101-119. doi:10.1023/A:1015535614355

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 34-51.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2002). Principles and Standards (2002): Making Mathematical Arguments in the Primary Grades. *Teaching Children Mathematics*, *8*(9), 524-527. doi:10.5951/TCM.8.9.0524

Wong, K. C., & Sutherland, R. (2018). Reasoning-and-proving in algebra in school mathematics textbooks in Hong Kong. In A. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 185-198). Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-70996-3_13

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms. In M. Van den Heyvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25* (Vol. 4, pp. 33 – 40). Utrecht, The Netherlands: Utrecht University, Faculty of Mathematics and Computer Science.

Zhang, D., & Qi, C. (2019). Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*, *98*, 77-90. doi:10.1016/j.ijer.2019.08.015

ΓΑΛΛΟΦΩΝΗ

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18*(2), 147-176. doi:10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Boullis, M., Cambon, M., Gallien, V., Herrmann, E., Percot, S., & Soto, A. (2021). *Myriade- mathématiques 4e * Manuel de l'élève.* Paris: bordas éditeur.

Boullis, M., Cambon, M., Gallien, V., Herrmann, E., Percot, S., & Soto, A. (2021). *Myriade- mathématiques 3e * Manuel de l'élève.* Paris: bordas éditeur.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in mathematics*, *22*(3), 233-261. doi:10.1007/BF00368340

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. Repéré à https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/31x5_1570192011747-pdf

Hitt, F. (2005). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques: Des entités conflictuelles? Une lettre de Godefroy-Guillaume Leibniz à Chrétien Wolf (1713). In D. Tanguay (Ed.), *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2005* (pp. 135-146). Montréal, Canada: UQAM.

Mariotti, M. A. (2002). La preuve en mathématique. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(4), 132-145. doi:10.1007/BF02655807

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier-Grenoble I, Grenoble.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l’analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. Recherche en Didactique des Mathématiques, 25(3), 313–348.

Pedemonte, B. (2012). L'argumentation en mathématiques et sa relation avec la démonstration. *Quadrante, 21*(2), 5-28. doi:10.48489/quadrante.22882