# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

## ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**Δ.Π.Μ.Σ. Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των μαθηματικών**

**Μαθηματική Εκπαίδευση Α΄ Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρονών)**


## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

**«Διδακτική προσέγγιση για την ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης με τη χρήση των pattern blocks: μία μελέτη επικεντρωμένη στις εξελισσόμενες κανονικότητες»**


**Λάζογλου Ζαφειρώ**

**Α.Μ.:00973**


**Φλώρινα 2022**

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

## ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**Δ.Π.Μ.Σ. Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των μαθηματικών**

**Μαθηματική Εκπαίδευση Α΄ Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρονών)**

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

**«Διδακτική προσέγγιση για την ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης με τη χρήση των pattern blocks: μία μελέτη επικεντρωμένη στις εξελισσόμενενες κανονικότητες»**

**Λάζογλου Ζαφειρώ**

**Α.Μ.:00973**

**Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια**

**Εξεταστική επιτροπή:**

**Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια**

**Καλδρυμίδου Μαρία, καθηγήτρια**

**Χρήστου Κωνσταντίνος, αναπληρωτής καθηγητής**

Στον Κώστα και στο γιο μας,

Αλέξανδρο

## Περίληψη

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις ικανότητες μαθητών προσχολικής ηλικίας (4-6 ετών), στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες με σκοπό τη γενίκευση. Για τις ανάγκες αυτής της μελέτης συμμετείχαν 9 νήπια και προνήπια μιας κλασσικής τάξης δημόσιου νηπιαγωγείου στην επαρχεία. Πριν τη μελέτη ανιχνεύθηκαν οι αριθμητικές ικανότητες των μαθητών, ώστε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο ελλιπών γνώσεων ως προς τους αριθμούς. Στη συνέχεια η διαδικασία συλλογής δεδομένων, έγινε με αρχική εξέταση (pre-test) με έργα στη βάση της συνέντευξης, ώστε να διερευνηθεί το επίπεδο ικανοτήτων των παιδιών ως προς την εννοιολογική προέγγιση των κανονικοτήτων. Ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση με υλικό και ερωτήσεις γενικευσης απο τοπικό σε γενικό επίπεδο, ώστε να καταλήξουν σε γενικά συμπερασματα. Τέλος η τελική εξέταση (post-test) με έργα στη βάση της συνέντευξης ως προς την εύρεση του κανόνα με σκοπό τη γενίκευση. Τα ερευνητικά εργαλεία αποτέλεσαν τα pre-test και post-test, τα δείγματα εργασιών, το ημερολόγιο καταγραφής, η παρατήρηση, η ηχογράφηση και η απομαγνητοφώνηση και το φωτογραφικό υλικό. Η μελέτη έδειξε ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν ικανότητες γενίκευσης με την κατάλληλη ποιοτική διδακτική προσέγγιση, η οποία στηρίζεται σε επικοινωνιακό πλαίσιο, ερωτήσεις γενίκευσης απο τοπικό σε γενικό επίπεδο, σειρά δράσεων κανονικοτήτων, συνεργατική τάξη, κοινωνική αλληλεπίδραση και κατάλληλο χειραπτικό υλικό.

Λέξεις κλειδιά: προσχολική ηλικία, κανονικότητες, γενίκευση, ικανότητες γενίκευσης χειραπτικό υλικό.

Abstract

The present study focuses on the abilities of preschool students (4-6 years old), in the evolving geometric and numerical regularities with the aim of generalization. For the needs of this study, 9 toddlers and pre-toddlers of a classical class of a public kindergarten in the province participated. Before the study, the students' numerical abilities were detected, in order to rule out the possibility of insufficient knowledge in terms of numbers. Then the data collection process was done with an initial examination (pre-test) with projects based on the interview, in order to investigate the level of children's abilities in terms of the conceptual approach to normality. This was followed by the didactic intervention with material and generalization questions from the local to the general level, in order to reach general conclusions. Finally, the final examination (post-test) with projects based on the interview in order to find the rule for the purpose of generalization. The research tools were the pre-test and post-test, the work samples, the recording diary, the observation, the audio recording and transcription and the photographic material. The study showed that students can develop generalization skills with the appropriate qualitative teaching approach, which is based on a communicative framework, generalization questions from the local to the general level, series of regularity actions, cooperative class, social interaction and appropriate hands-on material.

Key words: preschool age, regularities, generalization, generalization skills, hands-on material.

# Περιεχόμενα

## Εισαγωγή

Στο χώρο της εκπαίδευσης τα τελευταία χρόνια από την προσχολική έως και την πρώτη σχολική ηλικία, εισάγονται οι έννοιες των κανονικοτήτων, οι οποίες παρουσιάζονται μετά από συστηματικές έρευνες της δεκαετίας του ΄90 ως σημαντικό στοιχείο της Μαθηματικής δραστηριότητας (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019) και σύμφωνα με τον Rivera (2013), οδηγούν στην ανάπτυξη ικανοτήτων γενίκευσης. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες με σκοπό τη γενίκευση. Η αναγκαιότητα της μελέτης έγκειται στο γεγονός ότι στον ελληνικό χώρο δεν έχουν μελετηθεί συστηματικά και αρκέτα οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας, α) ως προς τις εξελισσόμενες κανονικότητες και β) ως προς τη γενίκευση.

Δύο είναι τα ερευνητικά ερωτηματα αυτής της μελέτης. Το πρώτο αφορά στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες και πιο συγκεκριμένα στην αναπαραγωγή, την επέκταση, τη μεταφορά σε άλλο υλικό, την εύρεση στοιχείου που λείπει και τη δημιουργία μια νέας κανονικότητας. Το δεύτερο αφορά, σε ποιο βαθμό θα μπορούσε μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση ενός χειραπτικού υλικού (pattern blocks) να βελτιώσει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γενικεύσεις στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες και πιο συγκεκριμένα στην εύρεση του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας.

Η παρούσα μελέτη χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση του θεωρητικού-βιβλιογραφικού πλαισίου και χωρίζεται σε τρεις υποενότητες. Στην πρώτη υποενότητα γίνεται μία ανασκόπηση στη χρήση και τη χρησιμότητα των χειραπτικών υλικών στην εκπαίδευση γενικά, με περιεχόμενα τα χειραπτικά υλικά στην εκπαίδευση και στις μαθηματικές κανονικότητες και πιο ειδικά η χρήση του χειραπτικού υλικού pattern blocks στις μαθηματικές κανονικότητες. Στη δεύτερη υποενότητα γίνεται ανασκόπηση στις μαθηματικές κανονικότητες στην προσχολική ηλικία με περιεχόμενο τους ορισμούς και τα είδη των μαθηματικών κανονικοτήτων, τα ευρήματα διδασκαλίας και μάθησης των κανονικοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα τους ορισμούς των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και τα ευρήματα διδασκαλίας και μάθησης στην προσχολική ηλικία, τα προγράμματα των μαθηματικών κανονικοτήτων στις ηλικίες 4-6 ετών και τέλος οι κανονικότητες και η σχέση τους με την αλγεβρική σκέψη στην προσχολική ηλικία. Στην τρίτη υποενότητα του πρώτου κεφαλαίου γίνεται μία ανασκόπηση στη γενίκευση των κανονικοτήτων στις μικρές ηλικίες με περιεχόμενο τους ορισμούς της γενίκευσης και τα είδη της, τη γενίκευση κανονικοτήτων στις μικρές ηλικίες, τις στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά αλλά και τα ευρήματα διδασκαλίας και μάθησης με τη χρήση υλικού με σκοπό τη γενίκευση κανονικοτητών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το μεθοδολογικό πλαίσιο της μελέτης και χωρίζεται σε τρεις υποενότητες. Στην πρώτη υποενότητα διατυπώνονται οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Στη δεύτερη υποενότητα παρουσιάζεται το εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας με περιεχόμενο τα είδη των δράσεων των κανονικοτήτων, τους ορισμούς και τη δομή των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων, το υλικό των pattern blocks και η χρήση του στις κανονικότητες και τέλος οι ικανότητες των μαθητών στη γενίκευση εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων. Στην τρίτη υποενότητα παρουσιάζεται το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας, με περιεχόμενο τη σημαντικότητα της μελέτης, τη μέθοδο προσέγγισης, τους συμμετέχοντες, τη δεοντολογία, τη διαδικασία συλλογής δεδομένων, την τεχνική, το ερευνητικό εργαλειο, τα pre-test και post-test και τέλος τη διδακτική προσέγγιση των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ερευνητικά αποτελέσματα της μελέτης και χωρίζεται σε τέσσερις υποενότητες όπου παρουσιάζονται στην πρώτη οι αριθμητικές ικανότητες των μαθητών πριν την ενασχόλησή τους με τις κανονικότητες. Στη δεύτερη υποενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος που αφορούν στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς τις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση και γίνεται και παρουσίαση του περιεχομένου της διδακτικής παρέμβασης. Στην τρίτη υποενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος και αφορούν τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς τη γενίκευση των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών ικανοτήτων. Τέλος στην τέταρτη υποενότητα παρουσιάζονται οι ικανότητες  των μαθητών ως προς τις εφτά κατηγορίες γενίκευσης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τα αποτελέσματα της έρευνας πλαισιώνονται απο ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, ώστε να φαίνεται η εννοιολογική κατανόηση πριν και μετά, αλλά και η ορθότητα της αντιστοιχίας της ομαδοποίησης των απαντήσεων των μαθητών αλλά και η αντιστοιχία με τις 7 κατηγορίες γενίκευσης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της μελέτης όπου απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα, αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας και γίνονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

# Πρώτο κεφάλαιο: Θεωρητικό-Βιβλιογραφικό πλαίσιο

## Α.1. Ανασκόπηση στη χρήση και στη χρησιμότητα των χειραπτικών υλικών

### Α.1.1. Τα χειραπτικά υλικά στην εκπαίδευση

Το παιχνίδι των μικρών παιδιών είναι ένα σημαντικό στοιχείο για την ανάπτυξή τους, αποτελεί την πηγή των πρώτων μαθηματικών εμπειριών τους, αλλά και τη σύνδεσή τους με τις δραστηριότητες της καθημερινής ζωής τους (Clements & Sarama, 2005). Στις σημερινές τάξεις, τα χειραπτικά υλικά χρησιμοποιούνται συχνά και αποτελούν ένα εργαλείο του εκπαιδευτικού, ώστε να αναπτύξουν τη συνειδητή και την ασυνείδητη μαθηματική σκέψη των παιδιών, με σκοπό να προσεγγίσουν με αισθητηριακό τρόπο (Swan & Marshall 2010), μέσω της επιλογής του κατάλληλου χειραπτικού υλικού, της διερεύνησης και των εμπειριών τους τις αφηρημένες έννοιες των μαθηματικών (Golafshani , 2013). Τα χειραπτικά υλικά είναι φυσικά αντικείμενα, τα οποία οι μαθητές δύναται να αγγίξουν, να περιστρέψουν και να αναδιατάξουν, διεγείροντας τις αισθήσεις τους. Η ενασχόληση των παιδιών με χειραπτικά υλικά στο ελεύθερο παιχνίδι τους, στην προσχολική εκπαίδευση, έχει δείξει ότι τα τελευταία ασχολούνται με άτυπες μορφές μαθηματικών εννοιών. Έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες που αφορούν μοτίβα/κανονικότητες, σχήματα, συγκρίνουν μεγέθη, μετρούν πράγματα, ομαδοποιούν, ταξινομούν ή κατηγοριοποιούν κάποια αντικείμενα στηριζόμενα σε κάποια χαρακτηριστικά. Αυτές οι πρώτες εμπειρίες των μικρών μαθητών αποτελούν μία διαισθητική προσέγγιση μαθηματικών εννοιών, αποτελούν και το θεμέλιο λίθο για της μαθηματικής εκπαίδευσης αλλά και τη σύνδεση μιας καθημερινής δραστηριότητας με τον κόσμο των μαθηματικών (Sarama & Clements, 2009; Clements & Sarama, 2005).

Στην προσχολική εκπαίδευση οι νηπιαγωγοί θεωρούν απαραίτητη τη χρήση του χειραπτικού υλικού στην εκπαιδευτική διαδικασία και στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και το χρησιμοποιούν πάντα ή πολύ συχνά για να διδάξουν σύμφωνα με τις Δεσλή και Κωστελίδου (2008), όπως αναφέρουν οι Καλαφατά, Σκουμπουρδή, & Χρυσανθή (2016). Οι λόγοι που επικαλούνται οι νηπιαγωγοί σχετίζονται με την αφηρημένη φύση των μαθηματικών εννοιών αλλά και τη δημιουργία ενός ελκυστικού περιβάλλοντος μάθησης (Καλαφατά, Σκουμπουρδή, & Χρυσανθή, 2016). Οι μαθητές με τη χρήση των χειραπτκών υλικών, τα οποία αποτελούν και το οπτικό τους βοήθημα, προσεγγίζουν τις μαθηματικές έννοιες με πιο ελκυστικό και δημιουργικό τρόπο και αναπαριστούν τη μαθησιακή διαδικασία με μεγαλύτερη ευκολία (Σκουμιός & Σκουμπουρδή, 2018).

Οι Swan & Marshall (2010) ορίζουν το χειραπτικό υλικό στα μαθηματικά ως «ένα αντικείμενο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από ένα άτομο με αισθητηριακό τρόπο κατά τη διάρκεια του οποίου η συνειδητή και η ασυνείδητη μαθηματική σκέψη να αναπτυχθούν» (Swan & Marshall, 2010).

Τα χειραπτικά υλικά επιδρούν θετικά στην εκπαιδευτική διαδικασία και στην μάθηση σύμφωνα με τις απόψεις εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, (Καλαφατά, Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2016), στην καλλιέργεια κοινωνικών, επικοινωνιακών και συναισθηματικών δεξιοτήτων (Σκουμπουρδή & Μαλαματένιου, 2015 & Καλαφατά, Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2016), στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σύμφωνα με τον Clements (2004) και τον Neesam, (2005) όπως αναφέρουν αντίστοιχα οι Σκουμπουρδή & Μαλαματένιου (2015) και Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2018), στην ανάπτυξη στρατηγικών μαθηματικής και κριτικής σκέψης σύμφωνα με τους Jacobs & Kusiak (2006) όπως αναφέρουν οι Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2018), υπολογιστικών δεξιοτήτων (Golafshani, 2013), δημιουργικότητας (Siew & Chong, 2014) και στην εξερεύνηση νέων ιδεών, στην καλλιέργεια θετικής στάσης σκέψης σύμφωνα με τους Jacobs & Kusiak (2006) όπως αναφέρουν οι Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2018) & Siew & Chong (2014) και αυτοπεποίθησης σύμφωνα με τους Jacobs & Kusiak (2006), όπως αναφέρουν οι Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2018), στην παροχή κινήτρων σύμφωνα με τους Jacobs & Kusiak, (2006) όπως αναφέρουν οι Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2018), στην βελτίωση της επίδοσης όλων των μαθητών (Liggett, 2017; Swan & Marsall, 2010) και στον εμπλουτισμό των γνώσεων των μαθητών, καθώς το μάθημα γίνεται ελκυστικό και ενδιαφέρον (Swan & Marshall, 2010; Καλαφατά, Σκουμπουρδή & Χρυσανθή, 2016; Siew & Chong, 2014; Σκουμιός & Σκουμπουρδή, 2018).

Σύμφωνα με την Golafshani (2013), η οποία στηρίχτηκε σε πρόταση του Piazet, με κατάλληλες δράσεις και με τη χρήση κατάλληλου υλικού αλλά και με αναστοχασμό πάνω στη δράση, οι μαθητές μπορεί να οδηγηθούν στην ανάπτυξη σημαντικών μαθηματικών ιδεών και εννοιών.

Συνεπώς η χρήση τους στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών, πρέπει να γίνεται με την επιλογή του κατάλληλου χειραπτικού υλικού για τη μαθηματική έννοια που πρέπει να διδαχτεί, με το σχεδιασμό της μαθησιακής διαδικασίας αλλά και με την ενορχήστρωση του τρόπου χρήσης του από τον εκπαιδευτικό, ώστε να επέλθει η γνώση που επιδιώκεται (Golafshani, 2013). Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενισχύσουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από μέρους των μαθητών, μέσω ερωτήσεων που προκαλούν διευκρινήσεις, επεκτάσεις και ανάπτυξη νέων κατανοήσεων (Clements & Sarama, 2005). Απαραίτητη προϋπόθεση για τα παραπάνω, αποτελεί η καλή γνώση των ιδιαιτεροτήτων του υλικού αλλά και των μαθηματικών ιδεών που αναδύονται από αυτό (Clements, 2000), με σκοπό τη σύνδεση της εμπράγματης αναπαράστασης με τη μαθηματική ιδέα και τη δημιουργία γενικεύσεων. (Σκουμπουρδή, 2014).

### Α.1.2. Η χρήση χειραπτικών υλικών στα μαθηματικές κανονικότητες

Η ενασχόληση των παιδιών με τις κανονικότητες αρχίζει να καλλιεργείται από την προσχολική ηλικία, με ρυθμικές, μουσικές, λεκτικές κ.α. κανονικότητες (Sarama & Clements, 2009; Clements & Sarama, 2005) και η αναγνώριση και η επέκταση τους είναι σημαντική διαδικασία της αλγεβρικής σκέψης. Τα παιδιά χρησιμοποιούν επίσης εμπράγματα υλικά όπως χρωματιστά πλακίδια, pattern blocks, σχήματα, διάφορα σχέδια, για να επεκτείνουν και να αντιγράψουν μία επαναλαμβανόμενη κανονικότητα (Van de Walle, Karp, Lovin, & Bay-Williams, 2017), να τη συμβολίσουν με γράμματα αλλά και να την περιγράψουν με αριθμούς δημιουργώντας έτσι τις πρώτες σχέσεις μεταξύ των κανονικοτήτων, των αριθμών και της άλγεβρας (Sarama & Clements, 2009). Είναι πολύ σημαντικό, παρόλο που πολλά σχολικά βιβλία νηπιαγωγείου και δημοτικού περιέχουν σχέδια κανονικοτήτων, οι δραστηριότητες αυτές να γίνονται με τη χρήση απτών υλικών, ώστε να επιτρέπεται στα παιδιά η δοκιμή και το σφάλμα και να αποφεύγουν το χαρακτηρισμό του σωστού/λάθους (Van de Walle, Karp, Lovin, & Bay-Williams, 2017).

Σύμφωνα με τους Blanton & Kaput, (2004) η χρήση των χειραπτικών υλικών στη δημιουργία προτύπων/μοτίβων/κανονικοτήτων βοηθά στην ανάπτυξη της ικανότητας γενίκευσης. Η χρήση ποικίλων υλικών βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που δομούν τον κανόνα καθώς προσφέρουν τη δυνατότητα σφαιρικής αντίληψης της έννοιας σύμφωνα με τους Jacobs & Kusiak (2006), όπως αν. οι Σκουμιός & Σκουμπουρδή (2018).

### Α.1.3. Η χρήση των Pattern Blocks στις μαθηματικές κανονικότητες

Τα *pattern blocks* είναι ένα χειραπτικό υλικό το οποίο αναπτύχθηκε στη δεκαετία του 1960. Είναι σετ από 6 έγχρωμα γεωμετρικά σχήματα, το οποίο αποτελείται από πορτοκαλί τρίγωνα, πράσινα τετράγωνα, λευκούς ρόμβους, κίτρινα εξάγωνα, μπλε πλάγια παραλληλόγραμμα και κόκκινα τραπέζια. Τα μπλοκ είναι έτσι σχεδιασμένα, ώστε όλες οι πλευρές των σχημάτων να είναι 2,5 εκ. εκτός από την μεγάλη πλευρά του τραπεζίου που είναι διπλάσια όλων, δηλαδή 5 εκ. Οι γωνίες όλων σχημάτων αντιστοιχούν σε μοίρες που είναι διαιρέτες των 360 -120°, δηλαδή 90°, 60°, 30°. Διαφοροποιείται μόνο η μεγάλη γωνία του ρόμβου, η οποία είναι 150° αλλά προσθετικά σχετίζεται με όλες τις άλλες, καθώς αποτελεί το άθροισμα των γωνιών 90° και 60°. Ο σχεδιασμός του παραπάνω υλικού ως προς τις σχέσεις των πλευρών και των γωνιών καθιστά το ταίριασμα εύκολο το ταίριασμα των γεωμετρικών μπλοκ μαζί ώστε να δημιουργήσουν διάφορα σχέδια πλακιδίων.

Η χρήση των pattern blocks βοηθά τους μαθητές να εξερευνήσουν πολλά μαθηματικά θέματα όπως: σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, ομοιότητες, συμμετρία, εμβαδόν, περίμετρο, κανονικότητες, συναρτήσεις, κλάσματα και γραφήματα, σε γενικές γραμμές με τη χρήση τους οι μαθητές μπορούν να έρθουν σε επαφή με την χρήση τους, με τους αριθμούς, την άλγεβρα, τη γεωμετρία και τη μέτρηση, τη χωρική συλλογιστική, την πιθανότητα και την τριγωνομετρία (Caglayan, 2020).

Η χρήση στη μαθηματική διαδικασία αυτού του χειραπτικού υλικού παρέχει μια ευκαιρία στους μαθητές νηπιαγωγείου και δημοτικού να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενες και εξελισσόμενες κανονικότητες με σχήματα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να δημιουργήσουν αντίγραφα διαφορετικών κανονικοτήτων, να δημιουργήσουν με τη σύνθεσή και αποσύνθεση τους διάφορα σχέδια και εικόνες, γραμμικά σχέδια, να λειτουργήσουν σαν μονάδα (μεμονωμένα σχήματα) αλλά και ως μονάδα ομαδοποιημένων αντικειμένων (σύνθετα σχήματα), η χρήση των σχημάτων βοηθά στη δυναμική σύνδεση με τις αριθμητικές αναπαραστάσεις (Clements, 2000; Sarama & Clements, 2002), οι μαθητές με τη χρήση τους μπορούν να περιγράψουν τη δημιουργία τους, να διαμοιράσουν τη στρατηγική της σκέψης τους στην ολομέλεια, να έχουν την ευκαιρία για μία αυθεντική αξιολόγηση, να δημιουργήσουν ποικίλες και πολύπλοκες κανονικότητες και τέλος η χρήση του να αποτελέσει και τη γέφυρα με τις εικονικές αναπαραστάσεις των κανονικοτήτων με αποτέλεσμα οι μαθητές να αποκτήσουν ευκολότερη πρόσβαση στο περιεχόμενο του τρόπου οργάνωσης των κανονικοτήτων (Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005). Από την άλλη μεριά παρέχουν την αίσθηση στον εκπαιδευτικό του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζουν οι μαθητές την μαθηματική έννοια, τη σκέψη τους (Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005) αλλά και τα ατομικά τους στυλ μάθησης καθώς δίνει την ευκαιρία για αξιολόγηση παρατήρησης.

**Καταλήγοντας**

Η επιλογή της χρήση του χειραπτικού υλικού των Pattern Blocks γενικότερα στην μαθηματική εκπαίδευση και ειδικότερα στις μαθηματικές κανονικότητες αποτελεί ένα κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό, οικείο στα παιδιά, το οποίο μπορεί σε κατάλληλες δραστηριότητες να προσφέρει μία μαθηματική διάσταση και να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση των σχέσεων των στοιχείων των κανονικοτήτων και τελικά στην εύρεση των κανόνων τους, μέσω της εμπράγματης αναπαράστασης του αλλά και της σφαιρικής αντίληψης της έννοιας που μπορεί να προσφέρει.

## Α.2. Μαθηματικές κανονικότητες στην προσχολική ηλικία

Στο χώρο της εκπαίδευσης τα τελευταία χρόνια από την προσχολική έως και την πρώτη σχολική ηλικία, εισάγονται οι έννοιες των κανονικοτήτων, οι οποίες παρουσιάζονται μετά από συστηματικές έρευνες της δεκαετίας του ΄90 ως σημαντικό στοιχείο της Μαθηματικής δραστηριότητας (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019). Η εξοικείωση των μαθητών ειδικότερα στις ηλικίες 4-8 ετών με τις κανονικότητες αποτελούν σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής τους ανάπτυξης, καθώς όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι (2019) σύμφωνα με τους Clements και Sarama (2009) τους βοηθούν στην κατανόηση σύνθετων μαθηματικών εννοιών, των αριθμών και της άλγεβρας (Clements & Sarama, 2005) αλλά και σύμφωνα με τον Rivera (2013), στην ανάπτυξη ικανοτήτων γενίκευσης. Τι είναι όμως οι κανονικότητες;

### Α.2.1 Ορισμοί και είδη μαθηματικών κανονικοτήτων

Η έννοια των κανονικοτήτων αποδίδεται στα ελληνικά και με τους όρους πρότυπα και μοτίβα, ενώ στην αγγλική βιβλιογραφία συναντάται με τον όρο “patterns”. Στην παρούσα μελέτη θα αναφερόμαστε στο όρο κανονικότητες.

Έχουν δοθεί αρκετοί ορισμού στην έννοια των κανονικοτήτων, ενδεικτικά αναφέρουμε τους παρακάτω. Η Fox (2005), ορίζει τη μαθηματική κανονικότητα *«ως κάτι που παραμένει σταθερό μέσα σε μια ομάδα αριθμών, σχημάτων ή χαρακτηριστικών μαθηματικών συμβόλων ή εννοιών»,* και η παράθεση αυτών των στοιχείων της ομάδας διέπετε από έναν κανόνα, ο οποίος και επαναλαμβάνεται. Σύμφωνα με τους Mulligan, Mitchelmore, English & Robertson (2010) μαθηματική κανονικότητα ορίζεται «*οποιαδήποτε προβλέψιμη κανονικότητα που περιλαμβάνει αριθμό, χώρο ή μέτρο*». Σύμφωνα με τους Papic & Mulligan (2005) μία κανονικότητα μπορεί να οριστεί «ως αριθμητική ή χωρική κανονικότητα και η σχέση που διέπει τα στοιχεία της κανονικότητας αποτελεί τη δομή της». Για τις Τζεκάκη & Κουλελή (2007) όπως αν. οι Δεσλή & Γαϊτανέρη (2017), η κανονικότητα αποτελεί «ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά τα οποία παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων». Οι Papic, Mulligan & Mitchelmore (2011) όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι (2019) (σελ 277) όρισαν τις μαθηματικές κανονικότητες σε τρεις άξονες: α) *ως μια κανονικότητα σε ένα αντικείμενο, με κάποια στοιχεία του οποίου να σχετίζονται με ένα συστηματικό τρόπο, β) ως ένα διατεταγμένο σύνολο αντικειμένων, κάθε στοιχείο του οποίου συνδέεται με το προηγούμενο με μια συγκεκριμένη σχέση, γ) δύο διατεταγμένα σύνολα αντικειμένων, τα στοιχεία των οποίων βρίσκονται σε αντιστοιχία.* Μελετώντας του διάφορους ορισμούς γίνεται κατανοητό ότι το θεμελιώδες συστατικό της δομής των κανονικοτήτων είναι *οι σχέσεις* που τις αποτελούν, είτε αυτές απλά οργανώνουν τη δομή μίας κανονικότητας, είτε αυτές βοηθούν να αντιληφθεί κάποιος και να προβλέψει τους επόμενους όρους μια διαδοχής (Radford, 2008; Warren & Cooper, 2008)

Η κατανόηση του τρόπου οργάνωσης των μαθηματικών κανονικοτήτων, δηλαδή η αναζήτηση ενός προτύπου, η περιγραφή, η μετατροπή και η επέκταση του προωθούν την αλγεβρική σκέψη των μαθητών (Van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams,2017; Warren, 2005), την ανάπτυξη των δεξιοτήτων της σκέψης τους, την επαγωγική συλλογιστική (Papic & Mulligan, 2005) και του μαθηματικού συλλογισμού τους (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Η ενασχόληση των μαθητών με κανονικότητες εμπλέκει σε δραστηριότητες παρατήρησης, ανάλυσης σχέσεων, μελέτης αλλαγών, γενίκευσης, επίλυσης προβλημάτων, μοντελοποίησης, αιτιολόγησης, απόδειξης και πρόβλεψης (Papic & Mulligan, 2005).

Στη μαθηματική εκπαίδευση προτείνεται ως εύρεση κανονικότητας η ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να μεγαλώνουν ή γενικότερα να σχετίζονται μεταξύ τους με έναν κανόνα (Τζεκάκη, 2007, σ. 251).

Σύμφωνα με την ίδια ερευνήτρια (Τζεκάκη, 2010), η ενασχόληση των παιδιών με τις κανονικότητες δεν πρέπει να περιορίζεται μόνο σε μαθηματική δράση αλλά να επεκτείνεται στην *εύρεση, στον εντοπισμό του κανόνα* που τα διέπει.

- Στην αναγνώριση, αναπαραγωγή και συνέχιση μιας κανονικότητας από υλικά, παραστάσεις, ήχους, κίνηση, λέξεις ή αριθμούς.
- Στην εύρεση στοιχείου που λείπει σε μια κανονικότητα
- Στη μεταφορά από τη μία μορφή υλικού σε άλλη
- Στην περιγραφή ποιοτικών και ποσοτικών αλλαγών στην εξέλιξη των κανονικοτήτων
- Στην περιγραφή και γενίκευση του κανόνα, ο οποίος προσδιορίζει την κανονικότητα (Τζεκάκη, 2010, σελ 190).

Σύμφωνα με τους Lünken (2018) και Threlfall (1999), όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι (2019) αλλά και οι Mulligan, Mithelmore & Prescott, (2006) υπάρχουν τρεις κατηγορίες κανονικοτήτων, *οι επαναλαμβανόμενες*, *οι αναπτυσσόμενες ή εξελισσόμενες* κανονικότητες και οι κανονικότητες με μορφή *σχέσης*.

*Οι επαναλαμβανόμενες κανονικότητες,* περιέχουν μία διακριτή μονάδα επανάληψης και σύμφωνα με τον Liljedahl (2004), *«η κανονικότητα έχει κυκλική δομή* *που μπορεί να δημιουργηθεί με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή μικρότερου τμήματος της κανονικότητας».* Υπάρχουν τρία είδη επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων: *οι γραμμικές, οι κυκλικές και οι Hopscotch κανονικότητες* (Papic, 2007). Η διάκριση των επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων γίνεται με βάση τον τύπο της μονάδας επανάληψης (π.χ. ΑΒΑΒ, ΑΒΑΑΒΑ) και με βάση τις παραμέτρους που μεταβάλλονται (π.χ. το σχήμα της κανονικότητας ή το μέγεθος και το σχήμα της) σύμφωνα με τους Fyfe, Evans, Matz, Hunt & Alibali, (2017), όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι (2019) και η Σκουμπουρδή (2013).

*Οι εξελισσόμενες κανονικότητες,* περιέχουν μία βασική μονάδα η οποία επαναλαμβάνεται αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται ή μειώνεται συστηματικά, π.χ. κατά ένα (ν+1 και ν-1 αντίστοιχα), περιέχουν μία σειρά ξεχωριστών στοιχείων, που το κάθε στοιχείο συνδέεται με το προηγούμενο και το επόμενο σύμφωνα με έναν κανόνα (Warren, 2005; Δεσλή & Γαϊτάνέρη, 2017; Papic, 2007). Οι Rivera & Becker (2009) τα ομαδοποιούν σε δύο κατηγορίες στα *προσθετικά* και στα *πολλαπλασιαστικά* και ο Rivera (2013) τα ταξινομεί με βάση τη μορφή τους σε *αριθμητικά* και *γεωμετρικά.* Η Warren (2005) συμπληρώνει μορφές σχημάτων, χρωμάτων, κινήσεων, αίσθησης και ήχου και αναφέρεται κυρίως σε μικρές ηλικίες. Οι Mulligan, Mitchelmore & Prescott (2006) προσθέτουν *αλγεβρικές μορφές* π.χ. τριγωνικούς σχηματισμούς με αριθμούς, *μετρικούς σχηματισμούς* π.χ. επανάληψη μοναδιαίων στοιχείων και *διαγράμματα* και οι Mulligan, Mitchelmore, English & Crevensten (2013), *δισδιάστατους ή τρισδιάστατους σχηματισμούς*, όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι (2019). Τέλος η Ma (2009) κάνει λόγο για εικονομορφικά μοτίβα π.χ γεωμετρικά που οδηγούν στη διατύπωση λεκτικών κανόνων.

Οι εξελισσόμενες κανονικότητες μπορούν να αναπτυχθούν με δύο τρόπους. Με ένα γραμμικό τρόπο ανάπτυξης, ο οποίος είναι και ο πιο συνηθισμένος μέσα στα σχολικά βιβλία (Ma, 2009), όπου η εξέλιξη του μπορεί να γίνει με την πρόσθεση ή την αφαίρεση τμημάτων με σταθερό αριθμό αντικειμένων σε κάθε επόμενο στάδιο, είτε αυτό αναπτύσσεται γραμμικά οριζόντια, κάθετα ή και διαγώνια (Papic, 2007; Ma, 2009) και με μη γραμμικό τρόπο, όπου η εξέλιξη του μπορεί να γίνει με την πρόσθεση αυξανόμενου αριθμού τμημάτων σε κάθε στάδιο.

Οι κανονικότητες σε μορφή *σχέσης* αναφέρονται στη *σχέση* που υπάρχει μεταξύ των συνόλων των κανονικοτήτων, π.χ. ένα μηχανάκι έχει δύο τροχούς, τα δύο μηχανάκια τέσσερις τροχούς. Πόσους τροχούς έχουν τα τρία μηχανάκια;

Οι Τζεκάκη, Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2019) και Τζεκάκη (2010) κατηγοριοποιούν τη μεγάλη αυτή ποικιλία των μορφών των κανονικοτήτων στους ακόλουθους άξονες με μαθηματικό περιεχόμενο: α) *Περιεχόμενο ή φύση των στοιχείων των κανονικοτήτων*: σε αυτόν τον άξονα εντάσσουν π.χ. τις εικονομορφικές, σχηματικές, γεωμετρικές, αριθμητικές, αλγεβρικές, αριθμητικές, μεγέθους, χρώματος κ.α μορφές των κανονικοτήτων. β) *Εξέλιξη:* εντάσσουν τις επαναλαμβανόμενες ή τις εξελισσόμενες μορφές, τις γραμμικές ή τις κυκλικές μορφές, γ) *Χωρικές διαστάσεις της εξέλιξης:* μονοδιάστατες, δισδιάστατες και τρισδιάστατες μορφές, δ) *Δομή κανονικότητας: (μορφή, κανόνας)* στις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες π.χ. ΑΒ, ΑΒΑ, ΑΑΒΒ κ.α. και στις εξελισσόμενες κανονικότητες π.χ. αθροιστική ή πολλαπλασιαστική μορφή, και ε) *Υλικά:* χρήση χειραπτικών/εμπράγματων, εικονικών ή και συμβολικών υλικών, λεκτικών, κινητικών ή ηχητικών. Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2010) για να μπορέσει ένας εκπαιδευτικός να οργανώσει μια διδακτική προσέγγιση που να αφορά στις κανονικότητες θα πρέπει να λάβει υπόψη του την παραπάνω κατηγοριοποίηση ώστε να μπορέσει να προσεγγίσει τη μαθηματική τους διάσταση.

**Καταλήγοντας**

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε ως προς το *περιεχόμενο* με τις γεωμετρικές και τα αριθμητικές κανονικότητες, ως προς την *εξέλιξη* με τις εξελισσόμενες και γραμμικές μορφές, ως προς τις *χωρικές διατάσεις της εξέλιξης* τις δισδιάστατες μορφές και ως προς το *υλικό*, με τη χρήση του χειραπτικού υλικού των Pattern Blocks.

### Α.2.2 Ευρήματα διδασκαλίας και μάθησης κανονικοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση

Για την Burns (2007) η αναζήτηση των κανονικοτήτων είναι φυσική για τα μικρά παιδιά. Στη μελέτη των Ginsburg, Inoue, & Seo (1999) όπ. αν. η Παπαδοπούλου (2012) διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας σε αυθόρμητες δραστηριότητες επιλέγουν να ασχοληθούν με δραστηριότητες προτύπων κατά 30% σε σχέση με άλλες μαθηματικές δραστηριότητες και σύμφωνα με τις Τζεκάκη και Κουλελή (2007) τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν και να ακολουθήσουν μία κανονικότητα αλλά δεν αντιλαμβάνονται τον κανόνα, γεγονός το οποίο μπορεί να αναπτυχθεί μόνο με διδακτική παρέμβαση, όπ. αν. η Παπαδοπούλου (2012).

Η ενασχόληση των παιδιών με τις κανονικότητες πρέπει να ξεκινά ως προέκταση της καθημερινότητας τους (Δεσλή & Γαϊτανέρη, 2017) και με τη χρήση φυσικών υλικών σύμφωνα με τον Rustigian (όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra, 2015), καθώς η εύρεσή τους είναι ευκολότερη από μια εικονική αναπαράσταση. Πολλά παιδιά δημιουργούν αυθόρμητα απλές επαναλαμβανόμενες κανονικότητες χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά που βρίσκουν στην τάξη ή διακοσμούν με αυτά διάφορες δημιουργίες τους σύμφωνα με τον Threlfall (1999), όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra (2015) και είναι ήδη εξοικειωμένα με την κυκλική δομή των επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων, καθώς έρχονται σε επαφή με την κυκλική μορφή των ημερών της εβδομάδας και των ωρών της ημέρας.

Οι έρευνες που αφορούν κυρίως τις μικρές ηλικίες (Skoumpourdi, 2013; Παπαδοπούλου 2012; Warren & Cooper, 2008) έχουν επικεντρωθεί στις επιδόσεις των παιδιών στις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες ενώ λείπει η προσοχή των ερευνών στις εξελισσόμενες κανονικότητες (Wijns, Torbeyns, Bakker, De Smedt, & Verschaffel, 2019). Η Τζεκάκη (2018) αναφέρει πως τα μικρά παιδιά ανταποκρίνονται σε δράσεις των επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων, χωρίς όμως να επικεντρώνονται στη μονάδα επανάληψης και στη δομή των στοιχείων, γεγονός απαραίτητο για τη μαθηματική ανάπτυξη.

Σημαντικό ρόλο λοιπόν στην ανάπτυξη αυτή αποτελεί ο δάσκαλος (Fox, 2005). Ωστόσο σύμφωνα με τον Watters (2004), όπως αναφέρουν οι Papic & Mulligan (2007), οι γνώσεις των εκπαιδευτικών ως προς τη γνώση περιεχόμενου της έννοιας των κανονικοτήτων είναι περιορισμένη, καθώς πρέπει να γνωρίζουν καλύτερα τους τύπους, το επίπεδο και την πολυπλοκότητα των κανονικοτήτων. Σύμφωνα με την μελέτη των Hunting & Pearn (2003), όπως αναφέρεται από τους Papic & Mulligan (2005) και την έρευνα που έγινε σε εκπαιδευτικούς, οι τελευταίοι δεν έχουν συνειδητοποιήσει τη σημασία των κανονικοτήτων στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής με αποτέλεσμα να μην δίνουν την απαιτούμενη βαρύτητα στη διδασκαλία των κανονικοτήτων.

Για να μπορέσει ο εκπαιδευτικός να οργανώσει μια διδασκαλία πάνω στις κανονικότητες θα πρέπει να έχει υπόψη του τις παρακάτω δράσεις, οι οποίες είναι το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ερευνών που αφορούν στις κανονικότητες (Τζεκάκη και άλλοι (2019). Για τις μικρές λοιπόν ηλικίες οι δραστηριότητες κάθε μορφής κανονικοτήτων πρέπει να περιλαμβάνουν τις παρακάτω δράσεις: *αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως, συνέχιση ή επέκταση, και αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων.* Προστέθηκαν η *δημιουργία κανονικότητας* (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011) όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι (2019), *η εύρεση των στοιχείων που λείπουν* (Warren 2005), *η μεταφορά σε άλλο υλικό* (Clements & Sarama, 2009) όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι (2019), *η αναγνώριση της μονάδας επανάληψης και η περιγραφή της* (Mulligan, Mitchelmore, English & Crevensten, 2013; Clements & Sarama, 2009) όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι (2019), *αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης*, και *γενίκευση* η οποία προϋποθέτει τη διάκριση της μονάδας και την πρόβλεψη κοντινών ή μακρινών όρων (Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou & Savva, 2006; Lannin 2005, όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019 και η Ma, 2009).

Έχουν γίνει έρευνες που μελετούν επίσης τις αντιλήψεις των παιδιών ως προς τη δομή μίας κανονικότητας και έχει διαπιστωθεί ότι το επίπεδο που βρίσκεται το κάθε ένα δεν σχετίζεται με την ηλικία του. Στις έρευνές τους οι Mulligan, Prescott & Mitchelmore (2005) και Mulligan, Prescott, Mitchelmore & Outhred (2005) περιγράφουν τέσσερα στάδια δομικής ανάπτυξης από τα οποία περνούν τα παιδιά είτε εστιάζοντας στη δομή μιας κανονικότητας, είτε στα επιφανειακά χαρακτηριστικά της: Στο 1$^{ο}$, *προ-δομικό στάδιο* (pro-structural)*:* οι αναπαραστάσεις των παιδιών δεν έχουν καμία ένδειξη μαθηματικής ή χωρικής δομής, παρουσιάζουν μόνο περιγραφικά, ιδιοσυγκρασιακά ή επιφανειακά χαρακτηριστικά. Τα παιδιά σε αυτό το στάδιο εστιάζουν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των στοιχείων και όχι στη μαθηματική δομή των αντικειμένων ή των καταστάσεων που τα διέπουν. Στο 2$^{ο}$, *αναδυόμενο-εφευρετικό στάδιο δομής* (emergent*):* οι αναπαραστάσεις των παιδιών δείχνουν κάποια στοιχεία δομής. Τα παιδιά σε αυτό το στάδιο δείχνουν κάποια βελτίωση ως προς την δομή των στοιχείων. Στο 3$^{ο}$, *στάδιο μερικής δομής* (partial)*:* οι αναπαραστάσεις των παιδιών απεικονίζουν μόνο ένα μέρος του μαθηματικού συμβολισμού και των χωρικών χαρακτηριστικών. Στο 4ο, *στάδιο ανάπτυξης της δομής* (structural)*:* οι αναπαραστάσεις των παιδιών εμπεριέχουν ξεκάθαρα μαθηματικά και χωρικά δομικά χαρακτηριστικά.

Τα παιδιά που βρίσκονται στα δύο τελευταία στάδια παρουσιάζουν επίγνωση της δομής των κανονικοτήτων και ενδείξεις πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (Παπαδοπούλου 2017)

Οι Kyriakides & Gagatsis (2003) όπ. αν. η Τζεκάκη (2010) πρότειναν τρία επίπεδα κατάταξης ικανοτήτων των μαθητών, πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση των κανονικοτήτων, τα οποία αφορούν όλες τις ηλικίες και εντοπίζονται από την προσχολική ηλικία. Στο 1ο επίπεδο: οι μαθητές μπορούν απλά να συνεχίσουν μία κανονικότητα. Στο 2ο επίπεδο: οι μαθητές μπορούν να προβλέψουν μελλοντικές θέσεις και στο 3ο επίπεδο μπορούν να γενικεύσουν εκφράζοντας τον κανόνα της κανονικότητας με συμβολικό ή λεκτικό τρόπο.

Σύμφωνα με τους Warren και Cooper (2006) όπως αναφέρει η Papic (2007) η εμπειρία των παιδιών με επαναλαμβανόμενες και εξελισσόμενες κανονικότητες μπορεί να τα βοηθήσει να αναπτύξουν τη λειτουργική τους σκέψη, όταν αυτά παρουσιάζονται με ποικιλία διαφορετικών τρόπων, συμβολισμών και μορφών και όταν η ενασχόληση τους αυτή εστιάζει στην αναζήτηση των σχέσεων μεταξύ των συνόλων των δεδομένων. Αυτή η ενασχόληση βοηθάει τα παιδιά να αντιληφθούν τη δυνατότητα γενίκευσης των κανονικοτήτων ως «μονάδα επανάληψης» ανεξαρτήτως του τρόπου λειτουργίας τους, "επανάληψη" του κανόνα σε επαναλαμβανόμενες κανονικότητες και "αλλαγή" του κανόνα με συστηματική αύξηση ή μείωση, στις εξελισσόμενες κανονικότητες, δημιουργώντας έτσι τη δυνατότητα για πρώιμη αλγεβρική σκέψη.

Οι πτυχές με τις οποίες θα πρέπει να έρχονται σε επαφή τα παιδιά σύμφωνα με τους ερευνητές Mulligan et all (2010) και Papic, Mulligan & Mitchelmore (2011) είναι η έκθεση των παιδιών σε μια ποικιλία κανονικοτήτων που αφορούν τη μορφή, την ποικιλία και τον προσανατολισμό και σύμφωνα με τους Palhares και Mamede (2002), όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra (2015) και Papic et all (2011), τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας ίδιας κανονικότητας, έτσι ώστε τα παιδιά να μπορούν να γενικεύσουν.

***Καταλήγοντας***

Στην παρούσα εργασία και λαμβάνοντας υπόψη τα λίγα ερευνητικά δεδομένα που αναφέρονται στις εξελισσόμενες κανονικότητες (Wijns et all, 2019; Τζεκάκη & άλλοι, 2019), θα επικεντρωθούμε σε αυτό το είδος στο νηπιαγωγείο αλλά και στην εύρεση του κανόνα τους με το σχεδιασμό μίας διδακτικής παρέμβασης. Η διδακτική παρέμβαση θα εμπεριέχει την παρακάτω οργάνωση: α) αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως, β) στη συνέχιση ή επέκταση και στην αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων, γ) στη δημιουργία κανονικότητας, δ) στην εύρεση στοιχείων που λείπουν, ε) στη μεταφορά σε άλλο υλικό, στ) στην αναγνώριση της δομής του κανόνα (επανάληψη μονάδας και αλλαγής μονάδας) και στην περιγραφή της ζ) στην αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης και τέλος η) στη γενίκευση (Τζεκάκη & άλλοι, 2019). Η διδασκαλία θα περιέχει ένα επικοινωνιακό πλαίσιο, οικείο προς τα παιδιά αυτής της ηλικίας, η ενασχόλησή τους θα σχεδιαστεί ως προέκταση της καθημερινότητας τους (Δεσλή & Γαϊτανέρη, 2017) και με τη χρήση ενός εμπράγματου υλικού οικείου προς αυτά, ώστε με τη φυσική αυτή οπτική αναπαράσταση να μπορούν να βρουν πιο εύκολα των κανόνα που τα διέπει (σύμφωνα με τον Rustigian, όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra, 2015).

### Α.2.3 Ορισμοί εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων

Οι εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες έχουν απασχολήσει τους ερευνητές κυρίως στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης των παιδιών αλλά και στα μεγαλύτερα παιδιά ως δραστηριότητες για εισαγωγή στην άλγεβρα και έχουν αγνοηθεί σε μεγάλο βαθμό από το επίκεντρο των ερευνών που ασχολούνται με την προσχολική ηλικία (Wijns et all, 2019) καθώς η κατανόηση τους από μαθητές προσχολικής ηλικίας θεωρείται πιο απαιτητική διαδικασία. Τι είναι όμως οι εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες;

#### Α.2.3.1 Οι εξελισσόμενες γεωμετρικές κανονικότητες

Σύμφωνα με τον Huntzinger (2008) όπως αναφέρει ο Markworth (2010), μία γεωμετρική εξελισσόμενη κανονικότητα μπορεί να οριστεί ως «μία ακολουθία αριθμών στις οποίες τα αντικείμενα στο σχήμα αλλάζουν από τον ένα όρο στον άλλο με κάποιον προβλέψιμο τρόπο, έχοντας ως βάση μια εξαρτημένη μεταβλητή η οποία μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και με ένα σύστημα καταμέτρησης το οποίο λειτουργεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή μπορεί να ταυτοποιηθεί η θέση του σχήματος-σχεδίου των εικονογραφημένων κανονικοτήτων». Οι γεωμετρικές εξελισσόμενες κανονικότητες λόγο της δομής τους και της μοναδικότητας τους είναι ιδανικές για την ανάπτυξη της λειτουργικής σκέψης των μαθητών, η οποία και αποτελεί μία μορφή της αλγεβρικής σκέψης (Markworth, 2010; Wilkie & Clarke 2016). Λέγοντας λειτουργική σκέψη σύμφωνα με τον Smith (2008) όπως αναφέρει ο Markworth (2010) εννοούμε τη σκέψη των μαθητών που εστιάζει στις σχέσεις μεταξύ δύο διαφορετικών ποσοτήτων και αυτές οι σκέψεις οδηγούν από συγκεκριμένες σχέσεις κάποιων στοιχείων σε μία γενίκευση αυτών, σε διαφορετικές περιπτώσεις. Σε τέτοιες μορφές σκέψεις μπορούν να οδηγηθούν οι μαθητές μέσα από την ενασχόληση τους με εξελισσόμενες κανονικότητες καθώς παρατηρούν και συγκρίνουν τα στοιχεία της αρχικής του δομής και τα στοιχεία κάποιου μετέπειτα σταδίου της γεωμετρικής κανονικότητας ανάπτυξης. Σύμφωνα με τον ίδιο ερευνητή για να φτάσουν οι μαθητές σε ένα τέτοιο επίπεδο σκέψης πρέπει να ξεκινήσουν την εξερεύνησή τους από κανονικότητες με αναπαραστάσεις εμπράγματων υλικών και σύμφωνα με τους Kaput (1999) όπως αναφέρουν οι Wilkie – Clarke (2016) με τη χρήση οικείων πλαισίων, ώστε οι μαθητές να μάθουν για τις λειτουργικές σχέσεις στην πραγματική ζωή, παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων αποτελούν π.χ. οι σχέσεις συνάρτησης της ανάπτυξης των φυτών και των ανθρώπων με την πάροδο του χρόνου, η τιμή κάποιου προιόντος με το πλήθος αυτών που θα αγοραστούν.

Σε έρευνα τους οι Wilkie & Clerke (2016) ασχολήθηκαν με το σχεδιασμό εργασιών γεωμετρικών κανονικοτήτων και πως τα τελευταία βοήθησαν τους μαθητές μέσω της οπτικοποίησης και των διαφορετικών τους αναπαραστάσεων να αναπτύξουν ικανότητες λειτουργικής σκέψης στους μαθητές. Οι ερευνητές στηρίχθηκαν στην οπτικοποίηση με βάση τον Fischbein (1987) καθώς η τελευταία βοηθάει τους μαθητές να οργανώσουν καλύτερα τη δομή τους, ώστε να μπορέσουν να την αναλύσουν και να την αιτιολογήσουν, με απώτερο στόχο να βρουν τη λύση της δομής τους (Wilkie & Clarke, 2016). Στην ίδια έρευνα δόθηκαν ευκαιρίες στους μαθητές να απεικονίσουν την ανάπτυξη των γεωμετρικών κανονικοτήτων με πολλούς τρόπους και με διαφορετικό χρωματισμό των αυξανόμενων στοιχείων ώστε να μπορέσουν να γενικεύσουν τη λειτουργική τους σχέση περιγραφικά ή συμβολικά. Τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν διαφορετικές στρατηγικές σκέψης των παιδιών και ότι με τη χρωματική διαφοροποίηση της ανάπτυξης των κανονικοτήτων, οι μαθητές μπόρεσαν να επικεντρωθούν στη δομή, να συσχετίσουν τα μέρη του, να τα προσεγγίσουν εννοιολογικά και να γενικεύσουν.

#### Α.2.3.2 Οι εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες.

Σύμφωνα με τον Liljedahl (2004) μία αριθμητική κανονικότητα μπορεί να οριστεί *«μία οποιοδήποτε κανονικότητα, η οποία είναι κατασκευασμένη από αριθμούς αλλά στην οποία η αριθμητική τιμή της κανονικότητας είναι σημαντική και δεν μπορεί να λάβει άλλη μορφή»,* να μεταφερθεί δηλαδή σε μία άλλη μη αριθμητική κανονικότητα π.χ. μία κανονικότητα με αριθμούς 1,2,3,4,3,2,1, μπορεί να συμβολιστεί και με α,β,γ,δ,γ,β,α. Σε αυτή τη μετατροπή η έννοια της αριθμητικής κανονικότητας δεν περιέχει την αξία και τη σχέση των αριθμών μεταξύ τους αλλά χρησιμοποιεί τους αριθμούς απλά σα μεμονομένα στοιχεία. Για τον παραπάνω λόγο οι αριθμητικές κανονικότητες που μπορούν να οριστούν ως εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες πρέπει να περιέχουν τα στοιχεία των αριθμών ως σχέσεις μεταξύ τους και να έχουν τις παρακάτω μορφές:

- 1,2,3,4,5,6 κ.α. (ν+1)
- 6,5,4,3,2,1 (ν-1)
- 2,4,6,8,10 κ.α. (ν+2)
- 10, 8,6,4,2 (ν-2)
- 3,6,9,12 κ.α. (ν+3)
- ……….

Στις παραπάνω κανονικότητες εμφανίζεται η σχεσιακή σχέση των αριθμών στις κανονικότητες ανάπτυξης και μέσω της παρατήρησης τους μπορεί να βρεθεί ο κανόνας της αυξητικής ή της φθίνουσας πορεία τους. Στις παραπάνω περιπτώσεις κάθε στοιχείο της κανονικότητας εξαρτάται, ως προς την εύρεση του, από την αριθμητική τιμή του προηγούμενου στοιχείου, συνεπώς οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων δημιουργούν και την εξελισσόμενη αριθμητική κανονικότητα.

Η εισαγωγή των αριθμητικών κανονικοτήτων γίνεται στα πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου και οι μαθητές καλούνται να ανταποκριθούν σε τέσσερις εργασίες: στην πρώτη εργασία καλούνται να βρουν τον κανόνα της εξελισσόμενης κανονικότητας και να τον εκφράσουν ανεπίσημα ή τυπικά, στη δεύτερη εργασία να επεκτείνουν ή να συνεχίσουν την κανονικότητα, στη τρίτη εργασία να προσδιορίσουν ένα στοιχείο της κανονικότητας και στην τέταρτη και τελευταία να δημιουργήσουν μία δική τους εξελισσόμενη αριθμητική κανονικότητα, Liljedahl (2004).

Στην έρευνά τους οι Wijns et all (2019) κατασκεύασαν ένα εργαλείο ελέγχου αριθμητικής ικανότητας το οποίο βασίστηκε σε σχετικές έρευνες της προσχολικής ηλικίας (Andrews & Sayers, 2015; Jordan et all, 2006; Purpura & Lonigan, 2013) και το οποίο κάλυψε διάφορες πτυχές της αριθμητικής ικανότητα τους λεκτικά. Το μοντέλο περιείχε:

1. τη λεκτική μέτρηση (οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν μέχρι όπου μπορούν, ώστε να διαπιστωθεί το εύρος της προφορικής τους μέτρησης)
2. την απαρίθμηση κουκίδων (οι μαθητές καλούνται να αντιστοιχίσουν ποσότητα και αριθμό)
3. αντικειμενική μέτρηση (οι μαθητές καλούνται να συγκεντρώσουν ένα συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων, π.χ. για τον αριθμό 5 πρέπει να συγκεντρώσουν πέντε αντικείμενα)
4. συμβολική και μη συμβολική σύγκριση (οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από ένα άλλο)
5. σειρά αριθμών (οι μαθητές καλούνται να ονομάσουν ποιος αριθμός βρίσκεται πριν και ποιος μετά από ένα δοσμένο αριθμό)
6. αναγνώριση συμβόλου αριθμού (οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν ποιος αριθμός είναι ο δοσμένος αριθμός)
7. λεκτική αριθμητική (οι μαθητές καλούνται να βρουν το αποτέλεσμα ενός αριθμού αντικειμένων με την πρόσθεση ή των αφαίρεση ενός “ν” αριθμού).

Το παραπάνω μοντέλο θα μας βοηθήσει να διαπιστώσουμε το επίπεδο αριθμητικής ικανότητας των παιδιών και με βάση αυτό να εξηγήσουμε τις τυχόν δυσκολίες των παιδιών προσχολικής εκπαίδευσης στις εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες.

### Α.2.4 Ευρήματα διδασκαλία και μάθησης εξελισσόμενων κανονικοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση

Σύμφωνα με τους Hunting & Pearn (2003), όπως αναφέρουν οι Papic & Mulligan (2005) και τα αποτελέσματα των εξελίξεων στη γνωστική επιστήμη, αποκαλύπτουν ότι μικρά παιδιά είναι πιο ικανά να ανταποκριθούν σε διδασκαλίες που απαιτούν μεγαλύτερες μαθηματικές ικανότητες από αυτές που απαιτούν οι τρέχουσες εκπαιδευτικές πρακτικές και ότι η διδασκαλία πιο απαιτητικών προγραμμάτων μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στη σχολικής τους μάθηση.

Σύμφωνα με τους Papic, Mulligan & Mitchelmore (2009), όπως αναφέρουν οι Mulligan, Mitchelmore, English & Robertson (2010), τα παιδιά προσχολικής ηλικίας που έχουν περισσότερες ευκαιρίες ενασχόλησης με μαθηματικές εμπειρίες που προωθούν την αναδυόμενη γενίκευση, είναι ικανά να ασχοληθούν και με πολύπλοκες κανονικότητες. Σε πρόγραμμα παρέμβασης 6 μηνών η Papic (2007) διαπίστωσε ότι τα μισά παιδιά του προγράμματος ήταν σε θέση να συνεχίσουν εξελισσόμενες κανονικότητες (Mulligan et all, 2010) κάτι που τα παιδιά της ομάδας σύγκρισης δεν μπορούσαν να κάνουν. Σύμφωνα με τους Papic & Mulligan (2007) τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν πιο σύνθετες ιδέες κανονικοτήτων πριν την επίσημη εκπαίδευση.

Οι επιδόσεις των μαθητών στην προσχολική ηλικία, στις εξελισσόμενες κανονικότητες, δεν έχουν μελετηθεί συστηματικά (Τζεκάκη και άλλοι, 2019), καθώς αποτελούν για αυτά ένα πιο απαιτητικό πεδίο. Σύμφωνα με τα ευρήματα της μελέτης της Warren (2005) όπως αναφέρει η Papic (2007), η δυσκολία των παιδιών στην ανάπτυξη των εξελισσόμενων κανονικοτήτων δεν οφείλεται στην απουσία τους από τη διδακτική διαδικασία αλλά ούτε και στην επικράτηση των επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων σε αυτήν (διδακτική διαδικασία), αλλά οφείλεται στην αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν τη μονάδα επανάληψης της δομής λόγω κακής κατανόησης, καθώς όταν οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν τις επαναλαμβανόμενές κανονικότητες αγνοούν τη δομής τους ή την παρερμηνεύουν.

Η δυσκολία της κατανόηση τους δεν έγκειται στο γεγονός των δυνατοτήτων της κάθε ηλικιακής ομάδας αλλά στη διαφορετική δομής λειτουργίας των κανονικοτήτων. Η ενασχόληση των μαθητών στα σχολικά τους χρόνια γίνεται κυρίως με επαναλαμβανόμενες μορφές κανονικοτήτων και αυτό τους οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα, καθώς εστιάζουν μόνο στην επαναληπτική φύση τους με αποτέλεσμα να γενικεύουν, ότι όλα τα είδη των κανονικοτήτων απλά επαναλαμβάνουν τη βασική τους μονάδα. Πιο συγκεκριμένα τα παιδιά στις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες επικεντρώνονται στον κανόνα που παραμένει ίδιος αλλά επαναλαμβάνεται ενώ στις εξελισσόμενες πρέπει να επικεντρωθούν στην ‘‘αλλαγη’’ του κανόνα, στην αύξηση ή στη μείωση αυτού με βάση των σχέσεων που τις διέπουν (Wijns et all (2019). Οι γεωμετρικές εξελισσόμενες κανονικότητες σύμφωνα με τους Jordan, Kaplan, Nabors Olah, & Locuniak, 2006; McKillip, 1970, όπως αναφέρουν οι Wijns et all (2019) είναι τα πρώτα με τα οποία θα πρέπει να έρθουν σε επαφή τα παιδιά προσχολικής ηλικίας καθώς είναι για αυτά μία προσβάσιμη μορφή εξελισσόμενης κανονικότητας αλλά και ο προάγγελος, καθώς μπορούν να αποτελέσουν τη γέφυρα για την κατανόηση των εξελισσόμενων αριθμητικών κανονικοτήτων.

Σύμφωνα με τους Papic και Mulligan (2007) και τα αποτελέσματα της μελέτης τους, η επιτυχία των παιδιών στις εξελισσόμενες κανονικότητες αποδίδεται στην ενασχόληση τους με επαναλαμβανόμενες κανονικότητες και στην ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τη δομή τους (κατανόηση της επαναληπτικότητας της μονάδας τους) ακόμα και όταν αυτή αναπαριστάται σε διαφορετικές μορφές. Οι εμπειρίες των παιδιών με τις κανονικότητες δείχνουν ότι τα βοηθούν να δουν τη δομή της απλής επανάληψης, χρησιμοποιώντας τη «μονάδα επανάληψης/στοιχείο» αλλά και να αναπαραστήσουν κανονικότητες σε διάφορες μορφές. Η ενασχόληση των παιδιών με τις κανονικότητες προωθεί πολλαπλασιαστικές σκέψεις και ενισχύει τις ικανότητες μετασχηματισμού. Στην έρευνα της Warren (2005) διαπίστωσε ότι η χρήση χειραπτικών υλικών σε εξελισσόμενες κανονικότητες οδήγησε τους μαθητές να βρουν τα στοιχεία που έλειπαν καθώς η οπτικοποίηση των υλικών βοήθησε τα παιδιά να συνδέσουν το σχήμα της κανονικότητας με τη θέση του καθώς τους δόθηκαν οι πρώτοι δύο όροι και ο πέμπτος όρος και τους ζητήθηκε να προσθέσουν στην κανονικότητά τους όρους που λείπουν.

**Καταλήγοντας**

Καταλήγοντας και σύμφωνα με τα ήδη ερευνητικά δεδομένα και από την απουσία αυτών, των ικανοτήτων των μαθητών προσχολικής ηλικίας στις εξελισσόμενες κανονικότητες, θα ήταν ενδιαφέρον να ασχοληθούμε με τις εξελισσόμενες κανονικότητες στην ηλικιακή ομάδα των παιδιών της προσχολικής εκπαίδευσης, ώστε να διαπιστώσουμε το επίπεδο των ικανοτήτων τους. Αρχικά τα παιδιά θα έρθουν σε επαφή με τις γεωμετρικές κανονικότητες και στη συνέχεια με τις αριθμητικές, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά αυτής της ηλικίας στην κατανόηση των εξελισσόμενων αριθμητικών κανονικοτήτων (Wijns et all, 2019) μέσω της οπτικοποίησης των γεωμετρικών με τη χρήση εμπράγματου υλικού και την κατανόηση των σχέσεων των στοιχείων τους αρχικά ως ποσότητες και στη συνέχεια με τη χρήση συμβόλων των αριθμών.

### A.2.5 Προγράμματα μαθηματικών κανονικοτήτων για τις ηλικίες 4-6 ετών

Τα σύγχρονα προγράμματα του εξωτερικού (NCC, 1991; Australian Curriculum Framework, 1998; NCTM, 2000; PCGPE, 1997; κ.α) όπως και τα δύο τελευταία εγκεκριμένα ελληνικά προγράμματα (Δαφέρμου, Κουλούρη, & Μπασαγιάννη, 2006 & Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003) ενθαρρύνουν την αναγνώριση των κανονικοτήτων και των κανόνων τους και τη θεωρούν ως ένα βασικό μαθηματικό άξονα που στηρίζει τόσο την αριθμητική όσο και την αλγεβρική σκέψη (Τζεκάκη, 2010; Rodrigues & Serra, 2015). Τα πρόγραμμά του εξωτερικού ενθαρρύνουν *την ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων* που εμπεριέχουν έναν κανόνα και σύμφωνα με αυτόν μεγαλώνουν ή επαναλαμβάνονται*, π.χ. στον τομέα της μουσικής, μουσική ή ρυθμική κανονικότητα, στον τομέα της γλώσσας, γλωσσικοί ρυθμοί, ποιήματα, ιστορίες κ.α.* (Τζεκάκη, 2010; Rodrigues & Serra, 2015). Ο Οδηγός νηπιαγωγού (Διαφέρμου και άλλοι, 2006) ενθαρρύνει τη *σημασία συστηματικής διερεύνησης μαθηματικών ιδεών όπως είναι οι σχέσεις και κανονικότητες* και ως κανονικότητα ορίζει τον αγγλικό όρο "pattern" που αναφέρεται ως τον «κανόνα» που διέπει μια κατάσταση ή ένα φαινόμενο (Διαφερμου και άλλοι, 2006, οπ., σ. 161). Το τελευταίο και ισχύον ελληνικό πρόγραμμα ενθαρρύνει σαν μία ικανότητα που επιδιώκεται να αναπτυχθεί από τα παιδιά μέσα από ποικίλες δραστηριότητες και διδακτικές παρεμβάσεις, *να αντιλαμβάνονται και να αναπαράγουν δεδομένες κανονικότητες.* Με περιεχόμενο να *ενθαρρύνονται να αντιλαμβάνονται, να επεκτείνουν, να διπλασιάζουν και να αναπαράγουν διάφορους συνδυασμούς με ποικιλία υλικών.*

### A.2.6 Οι κανονικότητες και η σχέση τους με την αλγεβρική σκέψη στην προσχολική ηλικία

Αρκετές μελέτες ερευνητών (Garrick, Threlfall, &Orton, 1999; Threlfall, 1999), όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra (2015), έχουν διαπιστώσει τη σημασία της πρώιμης ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης, ξεκινώντας από τη μελέτη των κανονικοτήτων (Threlfall, 1999; Borralho, Cabrita, Palhares, & Vale, 2007) από την προσχολική ηλικία. Σύμφωνα με τους Borralho, Cabrita, Palhares, & Vale (2007) όπως αναφέρουν οι Rodrigues & Serra (2015) η εκμάθηση του μαθηματικού περιεχομένου των κανονικοτήτων στην προσχολική ηλικία βοηθά στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης με αποτέλεσμα να δημιουργεί τις βάσεις για τη μελλοντική εκμάθηση της άλγεβρας.

Με την άλγεβρα οι μαθητές διερευνούν σχέσεις, περιγράφουν, οργανώνουν και κατανοούν (Markworth, 2010; Kieran, 2004). Η άλγεβρα είναι ένας τρόπος σκέψης, ένα σύνολο εννοιών που παρέχει στους μαθητές δεξιότητες και τους επιτρέπει να γενικεύσουν (Markworth, 2010; Kieran, 2004). Τι είναι όμως η αλγεβρική σκέψη;

Η Kieran (2004) ορίζει την  αλγεβρική σκέψη *«ως την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης μέσα σε μια δραστηριότητα, που δεν είναι καθαρά αλγεβρική αλλά στην οποία ο αλγεβρικός συμβολισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο».* Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι η παρατήρηση της δομής, η ανάλυση των σχέσεων, η γενίκευση, η πρόβλεψη, η δικαιολόγηση κ.α. αλλά από τις οποίες μπορεί να λείπει και ο αλγεβρικός συμβολισμός. Ο Mason (1996) όπως αναφέρουν οι Zazkis & Liljedahl (2002) διαχωρίζει την αλγεβρική σκέψη από τον αλγεβρικό συμβολισμό, καθώς αναφέρει την αλγεβρική σκέψη ως δραστηριότητα και τον αλγεβρικό συμβολισμό ως τη γλώσσα που δίνει φωνή στη σκέψη, ως τη γλώσσα που εκφράζει τη γενικότητα (Zazkis & Liljedahl, 2002). Οι Zazkis & Liljedahl (2002) και Radford (2008) τονίζουν ότι οι δύο έννοιες δεν είναι αλληλένδετες. Η παρουσία του αλγεβρικού συμβολισμού δεν πρέπει να ληφθεί ως ένδειξη παρουσίας αλγεβρικής σκέψης αλλά και η έλλειψη του αλγεβρικού συμβολισμού δε πρέπει να ληφθεί ως αδυναμία της αλγεβρικής σκέψης.

Η εξάσκηση όμως των μαθητών στην αλγεβρική σκέψη θέλει χρόνο έτσι η ανάπτυξή της πρέπει να ξεκινά νωρίς, ακόμα και από τα πρώτα χρόνια της σχολικής ζωής, την προσχολική εκπαίδευση (Markworth, 2010; Kieran, 2004). Σύμφωνα με την Kieran (2004) η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες άλγεβρας από την προσχολική εκπαίδευση, τους δίνει τη δυνατότητα περισσότερων εμπειριών με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός σταθερού θεμέλιου κατανόησης με φυσικό επακόλουθο την ομαλή και πιο εύκολη εισαγωγή στην άλγεβρα των μεγαλύτερων και πιο απαιτητικών τάξεων. Οι μαθητές πρέπει να εκτίθενται σε διάφορες μορφές αλγεβρικής σκέψης αλλά με τρόπους κατάλληλους για την ηλικιακή τους ομάδα (Markworth, 2010). Σύμφωνα με τον Kaput (2008) όπως αναφέρουν οι Χειμωνή & Πίττα-Πανταζή (2015) η αλγεβρική σκέψη σε όλες τις ηλικίες διαθέτει κάποια κύρια χαρακτηριστικά: την αναγνώριση, τη συστηματική έκφραση και την αιτιολόγηση γενικεύσεων με τρόπους που γίνονται προοδευτικά πιο τυπικοί. Η παραπάνω διαδικασία συναντάται σε τρεις παράγοντες της αλγεβρικής σκέψης. *1. Στη Γενικευμένη αριθμητική,* η οποία αναφέρεται σε αριθμητικά συγκείμενα και σύμφωνα με τον Blanton & Kaput (2005), όπως αναφέρουν οι Χειμωνή & Πίττα-Πανταζή (2015) περιλαμβάνει τη διαχείριση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, την ανάλυση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους, την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας, την επίλυση εξισώσεων και τη χρήση των γραμμάτων για τη γενίκευση σχέσεων. *2. Στο Συλλογισμό με μεταβλητές*, ο οποίος αναφέρεται στην αναγνώριση και περιγραφή σχέσεων συνάρτησης που περιλαμβάνουν ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές και περιλαμβάνει σύμφωνα με την Kieran (2011) όπως αναφέρουν οι Χειμωνή & Πίττα-Πανταζή (2015), εντάσσονται οι έννοιες της μεταβολής, των κανονικοτήτων, της έννοιας των συμβόλων και η χρήση τους στο συμβολισμό ποσοτήτων, κ.α. *3. Η Μοντελοποίηση,* η οποία αναφέρεται στην έκφραση των γενικεύσεων που προκύπτουν από μαθητικοποιημένες καταστάσεις μέσα στα μαθηματικά ή καταστάσεις της καθημερινής ζωής σύμφωνα με τους Blanton & Kaput (2005), όπως αναφέρουν οι Χειμωνή & Πίττα-Πανταζή (2015).

Σύμφωνα με τους ερευνητές Kieran (2004), Warren (2004), και Markworth (2010) ένας τρόπος εισαγωγής και κατανόησης της Άλγεβρας αποτελεί η ενασχόληση των παιδιών από τα πρώτα χρόνια της ζωής τους με δραστηριότητες που εμπλέκουν και περιέχουν κανονικότητες, αλλά οι δραστηριότητες αυτές θα πρέπει να έχουν ως σκοπό τη γενίκευση τους. Σύμφωνα με τους Mason, Drury & Bills (2007), η έκφραση της γενίκευσης βρίσκεται στην καρδιά της σχολικής άλγεβρας και η ουσία της αλγεβρικής σκέψης, είναι η αναζήτηση, η εύρεση των σχέσεων και η δημιουργία μιας δομής με τις σχέσεις αυτές (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2017) και αυτό γιατί σύμφωνα με τους Malara & Navarra (2003) η αλγεβρική σκέψη αφορά σε διαδικασίες και όχι σε αποτελέσματα πράξεων (Malara & Navarra, 2003).

Τα τελευταία χρόνια στα αναλυτικά προγράμματα μεγάλη έμφαση δίνεται στην κατανόηση της μαθηματικής δομής για την ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού. Η κατανόηση της μαθηματικής δομής στον τομέα της Άλγεβρας επέρχεται μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με τα αριθμητικά συστήματα (η άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική) και οι κανονικότητες, αλλά προϋποθέτει την κατανόηση και την αναγνώριση των κανόνων που τα δομούν, την αναγνώριση των χαρακτηριστικών τους αλλά και την τυποποίηση αυτών με σκοπό τη γενίκευση (Παπαδοπούλου, 2017). Σύμφωνα με τους Blanton (2008) και Kaput (2008) όπως αναφέρουν οι Van de Walle et all (2017), η αλγεβρική συλλογιστική αποτελείται από τρία κύρια στοιχεία τα οποία συνδυάζουν τη γενίκευση και τη συμβολική αναπαράσταση: 1. τη μελέτη των δομών του αριθμητικού συστήματος, 2. Τη μελέτη των κανονικοτήτων, των σχέσεων και των συναρτήσεων και 3. Τη διαδικασία της μαθηματικής αναπαράστασης, όπου περιλαμβάνεται η κατάλληλη χρήση των συμβόλων (Vande Walle et all, 2017 σελ. 589). Τα παιδιά από την ηλικία της προσχολικής εκπαίδευσης μέχρι τη Β΄ Δημοτικού μπορούν να κάνουν γενικεύσεις, να αναπτύσσουν την αλγεβρική τους σκέψη κάνοντας γενίκευση των εμπειριών που έχουν με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς, επισημοποιώντας τις ιδέες αυτές με αναπαραστάσεις και σύμβολα και διερευνώντας τις έννοιες μίας κανονικότητας (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2017). Στα προγράμματα τα τελευταία χρόνια δίνεται έμφαση στις κανονικότητες, οι οποίες και ενσωματώνονται για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακόμα και από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης (Τζεκάκη, 2007). Στα αποτελέσματα των ερευνών της Warren (2005) και της Παπαδοπούλου (2012) που αφορούν σε ηλικίες σχολικής εκπαίδευσης (παιδιά ηλικίας 9,5 ετών) αλλά και προσχολικής εκπαίδευσης (5 ετών) αντίστοιχα, μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη καθώς μπορούν να εκπαιδευτούν στην αναγνώριση κανονικοτήτων και στη εύρεση του κανόνα των κανονικοτήτων, ώστε να περάσουν σε ένα πρώτο επίπεδο γενίκευσης από αυτές τις μικρές ηλικίες με αποτέλεσμα την ομαλή εισαγωγή τους στις αλγεβρικές έννοιες και την αποφυγή των δυσκολιών στην κατανόηση της (Warren 2004).

**Καταλήγοντας**

Η ενασχόληση των μαθητών με τις κανονικότητες, η αναγνώριση του λειτουργικού τους κανόνα και άρα η πρόβλεψη οποιουδήποτε στοιχείου της κανονικότητας αποτελεί μαθηματικά σημαντική λειτουργική σκέψη. Στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε με τις γεωμετρικές και τις αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες στο νηπιαγωγείο και με τον δεύτερο παράγοντα της αλγεβρικής σκέψης, το συλλογισμό με μεταβλητές και τις κατηγορίες έργων που αφορούν στον εντοπισμό της δομής – της μικρότερης μονάδας των κανονικοτήτων (Mulligan, Mitchelmore, English & Crevensten, 2013; Cl;ements & Sarama, 2009; όπως αναφέρουν οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019) αλλά και με την πρόβλεψη μεταγενέστερων όρων των κανονικοτήτων (Μα, 2009). Η αναγνώριση από μέρους των μαθητών εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και η γενίκευση αυτών είναι ένας αναγνωρισμένος τρόπος που οδηγεί στην ανάπτυξη της λειτουργικές σκέψης που αποτελεί μέρος της αλγεβρικής σκέψης (Wilkie & Clarke, 2016). Τα παιδιά θα έρθουν σε επαφή με τις κανονικότητες ως προς τις σχέσεις της δομής τους αλλά και ως προς τις σχέσεις των αριθμών στο αριθμητικό σύστημα.

## Α.3. Γενίκευση κανονικοτήτων στις μικρές ηλικίες

### Α.3.1. Ορισμοί γενίκευσης και είδη γενίκευσης

Η έννοια της γενίκευσης αποτελεί για τους Mason, Drury & Bills (2007) ένα μάθημα με μαθηματικό περιεχόμενο και η έκφραση της αποτελεί μία φυσική διεργασία για τους ανθρώπους. Όσο πιο συχνά και πιο σύντομα οι άνθρωποι και πιο συγκεκριμένα οι μαθητές αποκτήσουν περισσότερες εμπειρίες γενίκευσης και τους δοθεί η ευκαιρία να εκφράσουν μια γενίκευση τόσο πιο γρήγορα θα μπορέσουν να σκεφτούν αλγεβρικά. Πολλοί ερευνητές έχουν δώσει κάποιους ορισμούς σχετικά με την έννοια της γενίκευσης. Σύμφωνα με τους Radford & Peirce (2006) η γενίκευση είναι «*η παρατήρηση ενός κοινού τοπικού χαρακτηριστικού και η γενίκευση του σε όλους τους όρους της ακολουθίας*» και σύμφωνα με τους Carraher, Martinez, &

Schiemann (2008), όπως αναφέρει η Παπαδοπούλου (2018) *«κατά τη μαθηματική γενίκευση, κάποια ιδιότητα ή τεχνική ισχύει για ένα μεγάλο σύνολο μαθηματικών αντικειμένων ή καταστάσεων».* Σύμφωνα με τον Kaput (1999), *«στην αλγεβρική γενίκευση, η εστίαση φεύγει από τις καταστάσεις αυτές καθ' αυτές και περνά στις κανονικότητες, στις διαδικασίες, στις δομές και στις σχέσεις δια μέσου και ανάμεσα από αυτές».* Η έννοια της γενίκευσης περιλαμβάνει την αφαίρεση κάποιων στοιχείων από ένα πλαίσιο, αλλά και τη γενίκευσή αυτών, στο πλαίσιο αυτό (Mason et all, 2007).

Σύμφωνα με την Stacey (1989) όπως αναφέρουν η Ma (2009) και οι Wilkie & Clarke (2016) και σύμφωνα με τους Confrey & Smith (1994) όπως αναφέρουν οι Wilkie & Clarke (2016) υπάρχουν δύο είδη γενίκευσης *η πλησίον ή κοντινή γενίκευση*, που περιλαμβάνει όρους μέχρι τη δέκατη ή την εικοστή θέση, όπου οι μαθητές βρίσκουν το επόμενο στοιχείο βλέποντας το ήδη δοσμένο σχέδιο της δομής, περιγράφοντας τη σχέση των στοιχείων διαδοχικά ή μετρώντας βήμα προς βήμα και *η μακρινή γενίκευση*, που περιλαμβάνει πιο μακρινούς όρους π.χ. 100 όρο., όπου οι μαθητές κάνοντας αντιστοίχηση των όρων της κανονικότητας σαν δύο σχέσεις μεταξύ δύο ποσοτήτων βρίσκουν το γενικό κανόνα και τον εφαρμόζουν σε οποιοδήποτε στοιχείο της ακολουθίας.

### Α.3.2 Γενίκευση κανονικοτήτων στις μικρές ηλικίες

Σύμφωνα με τους Burton (1982) Threlfall (1999) όπως αναφέρει ο Liljedahl (2004) «η ικανότητα του να μπορεί να διακρίνεις μια κανονικότητα είναι πρόδρομος της ικανότητας γενίκευσης και αφαίρεσης».

Τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο δραστηριότητες και δράσεις αλλά είναι η σκέψη πάνω στη δράση (Masonetal., 2007) Σύμφωνα με τον Duval (2000)*«… η εκμάθηση των Μαθηματικών δεν είναι μόνο η απόκτηση μιας πρακτικής με μια συγκεκριμένη έννοια/αντικείμενο ή η εφαρμογή αλγορίθμων, είναι επίσης η ανάπτυξη διαδικασιών σκέψης που επιτρέπουν σε έναν μαθητή να κατανοήσει τις έννοιες και τις εφαρμογές τους...» (σ. 56) (Τζεκάκη, 2018).*

Η γενίκευση αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής δραστηριότητας από την προσχολική ηλικία καθώς οποιαδήποτε προσπάθεια από μέρους των μαθητών να κατανοήσουν κάποια μαθηματική έννοια αλλά και από μέρος των εκπαιδευτικών προτάσεων που στοχεύουν σε κατανόηση αυτών πρέπει να προϋποθέτει την ενασχόληση των μαθητών με ευκαιρίες που οδηγούν στη γενίκευση (Mason et all., 2007). Σύμφωνα με τις Παπαδοπούλου και Τζεκάκη (2017) τα μικρά παιδιά μπορούν να κινηθούν από ένα τοπικό επίπεδο σε ένα πιο γενικό επίπεδο. Σύμφωνα με τον Mason (1996), όπως αναφέρουν οι Lannin, Barker & Townsend (2006) τα παιδιά από μικρή ηλικία κάνουν γενικεύσεις μέσα στον κόσμο τον οποίο ζουν και σύμφωνα με τους Lannin, Barker & Townsend (2006) π.χ. ταξινομούν τα είδη των ζώων ανάλογα με κάποιο κοινό χαρακτηριστικό τους και γενικεύουν, ο σκύλος και η γάτα είναι ζώα που ζουν στο αγρόκτημα και άρα οποιοδήποτε ζώο κατοικεί στο αγρόκτημα ανήκει στην ίδια κατηγορία, ενώ π.χ. μία αρκούδα που ζει στο δάσος δεν ανήκει στην παραπάνω κατηγορία.

Σύμφωνα με την Παπαδοπούλου (2012) και τους Blanton & Kaput, (2004), η αναγνώριση της δομής μιας γενίκευσης μπορεί να αναπτυχθεί από την προσχολική ηλικία, καθώς τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν σχεσιακά, αλλά με την κατάλληλη διδακτική υποστήριξη (Warren, 2004) αλλά και να εκφράσουν αυτές τις σχέσεις με έναν αφηρημένο τύπο (Warren, 2005). Η ενασχόληση των μαθητών με τις μαθηματικές κανονικότητες είναι μια καλή ευκαιρία να έρθουν σε μια πρώτη επαφή με τα στοιχεία της άλγεβρας αλλά από μόνα τους δεν επαρκούν, καθώς για να αποκτήσουν μαθηματικό περιεχόμενο πρέπει να εκφράσουν μία γενικότητα (Mason, Drury & Bills, 2007; και σύμφωνα με τους Greenes et all, (2001) όπως αναφέρουν οι Wilkie & Clarke, 2016) Σύμφωνα με τους Mason et all., (1985) όπως αναφέρει η Μα (2009) τα πρώτα προβλήματα γενίκευσης απαιτούν από τους μαθητές να δουν, να πουν και να δοκιμάσουν μία κανονικότητα με απώτερο σκοπό την κατανόηση της κανονικότητας ή της σχέση των στοιχείων που τη διέπουν. Σε έρευνες της η Warren (Warren, 2000; όπ. αν η Παπαδοπούλου ,2018; Copper & Warren, 2008) και η Μα (2009) στο πεδίο της άλγεβρας όπου εξερεύνησε το ρόλο της απεικόνισης των κανονικοτήτων κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η τελευταία βοηθά τα παιδιά να γενικεύσουν, καθώς τους βοηθά να βγάλουν το νόημα των αναπαραστάσεων κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών μέσω της αισθητηριακής όραση.

Στις έρευνες τους οι Warren (2005) και Παπαδοπούλου (2018) κατηγοριοποίησαν τις απαντήσεις των παιδιών στις έρευνες τους ως προς τη γενίκευση σε 7 κατηγορίες, με βάση αν αναγνωρίζουν και διατυπώνουν τον κανόνα μιας κανονικότητας, αλλά και των σχέσεων των στοιχείων που τις δομούν.

Κατηγορία 1. Το παιδί δεν αναγνωρίζει καμία σχέση ανάμεσα στα στοιχεία μιας κανονικότητας, η δεν δίνει καμία απάντηση.

Κατηγορία 2. Αναγνωρίζει κάποιες σχέσεις οι οποίες όμως δε δομούν τον κανόνα.

Κατηγορία 3. Αναγνωρίζει περισσότερες σχέσεις οι οποίες και εδώ δε δομούν τον κανόνα και απλά δηλώνει ότι η κανονικότητα αναπτύσσεται και μεγαλώνει

Κατηγορία 4. Αναγνωρίζει όλες τις σχέσεις, αλλά δεν πρόκειται για σχέσεις που δομούν τον κανόνα, περιγράφει απλά μια σχέση μέσα στην κανονικότητα αλλά αυτή η σχέση προκύπτει από την αντιστοίχιση των στοιχείων.

Κατηγορία 5: Αρχίζει να αναγνωρίζει κάποιες σχέσεις που δομούν τον κανόνα, ποσοτικοποιώντας αυτές τις σχέσεις και δηλώνοντας ότι π.χ. αναπτύσσεται ανά ένα, δύο ή τρία στοιχεία .

Κατηγορία 6. Αναγνωρίζει τις σχέσεις που δομούν τον κανόνα, τον διατυπώνει σωστά, αλλά κάνει λάθος σε κάποια επανάληψη όταν κατασκευάζει την κανονικότητα, ή δείχνει λάθος σε ένα σημείο όπου «κόβεται» η επανάληψη.

Κατηγορία 7. Αναγνωρίζει τις σχέσεις που δομούν τον κανόνα και τον διατυπώνει λεκτικά.

Την ίδια κατηγοριοποίηση σχεδόν κάνει και η Ma (2008) στηριζόμενη στην πρόταση των Orton και Orton (1999), όπως αναφέρει η ίδια στο Ma (2009) αλλά με τη διαφορά ότι αναφέρεται συγκεκριμένα σε γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες με εικονογραφικό περιεχόμενο και αναφέρεται σε παιδιά των μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού. Παρουσιάζει λοιπόν τέσσερις κατηγορίες με υποκατηγορίες.

Κατηγορία 1: Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται το επίπεδο 0 και 1 τα οποία αναφέρονται στην αισθητηριακή αντίληψη των μαθητών μέσω της όρασής τους. Στο επίπεδο 0 οι μαθητές δεν εμφανίζουν καμία πρόοδο ενώ στο επίπεδο 1 αρχίζουν να παρατηρούν απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμών που παρουσιάζονται στην κανονικότητα.

Κατηγορία 2: Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται τα επίπεδο 2 και 3$^{α}$ τα οποία αναφέρονται στην αναζήτηση των κανονικοτήτων και οι μαθητές βρίσκονται ακόμα στο επίπεδο της αριθμητικής σκέψης. Στο επίπεδο 2 ο μαθητές παρατηρεί την κανονικότητα αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει και άρα δεν μπορεί να ανακαλύψει και τον επόμενο αριθμό, ενώ στο επίπεδο 3α αναγνωρίζει μία σχέση μεταξύ των όρων του αλλά δίνει μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα.

Κατηγορία 3: Σε αυτή την κατηγορία εντάσσεται το επίπεδο 3β το οποίο και αναφέρεται στην αναγνώριση των κανονικοτήτων και οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο κάνουν μια μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη, καθώς αναγνωρίζουν τη σχέση αλλά και τη δομή της κανονικότητας. Αυτό το στάδιο αποτελεί και την πρώτη κατηγορία γενίκευσης από μέρους των μαθητών καθώς μπορούν να κατανοήσουν τον τρόπο και να επιτύχουν να προσεγγίσουν μία κοντινή/σχεδόν γενίκευση.

Κατηγορία 4: Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται τα επίπεδα 4α,4β και 4γ τα οποία αναφέρονται σε γενίκευση, οι μαθητές δείχνουν κατανόηση των σχέσεων των κανονικοτήτων, εκφράζοντας αλγεβρική σκέψη με την διατύπωση ενός κανόνα, με την έκφραση ενός αλγεβρικού τύπου και πετυχαίνουν μία μακρινή γενίκευση. Στο επίπεδο 4α μαθητής κάνει μια σωστή λεκτική δήλωση, στο επίπεδο 4β κάνει μια αξιόλογη προσπάθεια για μια αλγεβρική έκφραση και στο 4γ κάνει μια σωστή αλγεβρική αναπαράσταση (Ma, 2009; Papadopoulou, 2017)

### Α.3.3 Στρατηγικές των παιδιών στη γενίκευση κανονικοτήτων

Οι στρατηγικές γενίκευσης των παιδιών προσχολικής ηλικίας είναι δύο, σύμφωνα με τους Blanton και Kaput (2004) οι οποίοι στην έρευνά τους μελέτησαν τη συναρτησιακή σκέψη μαθητών σε σχέση με την ηλικία τους. Στην έρευνά τους αυτή διαπίστωσαν ότι οι μικροί μαθητές του νηπιαγωγείου περιέγραφαν τις κανονικότητες διαγραμμάτων βλέποντας *προσθετικές σχέσεις*, και κάποια μερίδα αυτών χρησιμοποιούσε *πολλαπλασιαστικές σχέσεις* με τη μορφή των προσφιλών λέξεων στα παιδιά αυτής της ηλικίας “διπλάσιο” και “τριπλάσιο”.

*Οι* Becker & Rivera (2005), Rivera & Becker (2003) και Radford (2006; 2008) ταξινόμησαν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές στη γενίκευση των κανονικοτήτων σε τρεις κατηγορίες. Οι πρώτες δύο κατηγορίες είναι κοινές για τους ερευνητές αλλά διαφοροποιήθηκαν στην τρίτη κατηγορία γενίκευσης. Έτσι οι πρώτες δύο κατηγορίες είναι: *1. Η αριθμητική στρατηγική (numeric),* στην οποία οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους, ως στρατηγική ομοιότητας. Ο

Radford (2006; 2008) όμως συμπληρώνει ότι οι μαθητές σε αυτή την στρατηγική γενικεύουν αλλά μέχρι κάποιο σημείο καθώς δεν μπορούν να γενικεύσουν σε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας, βρίσκονται ακόμα στον κόσμο της απλής αριθμητικής. *2. Σχηματική/αλγεβρική στρατηγική (figural)* οι μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές αντιληπτικής ομοιότητας και εστιάζουν στις σχέσεις των στοιχείων/αριθμών, *με τον* Radford (2006; 2008) να συμπληρώνει ότι οι μαθητές μπορούν να γενικεύσουν σε όλους τους όρους της ακολουθίας ακόμα και όταν αυτοί οι όροι ξεπερνούν το αντιληπτικό πεδίο των παιδιών. Για τους Becker & Rivera (2005), Rivera & Becker (2003) την τρίτη κατηγορία αποτελεί η 3. *Πραγματική στρατηγική (pragmatic).* Οι μαθητές εδώ χρησιμοποιούν και τις δύο προαναφερθείσες στρατηγικές και εστιάζουν στις ιδιότητες αλλά και στη σχέση των στοιχείων/αριθμών. Οι μαθητές που αποτυγχάνουν να γενικεύσουν συνήθως χρησιμοποιούν αριθμητικές στρατηγικές και βρίσκονται στη διαζευκτική γενίκευση (disjunctive generalization). Για τον Radford (2006; 2008) την τρίτη κατηγορία αποτελούν *οι 3. Απλοϊκές επαγωγές*, τις οποίες χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν μαντεύουν τον κανόνα των κανονικοτήτων και η εύρεση αυτού του κανόνα αποτελεί επαγωγική διαδικασία, βασιζόμενη στην πιθανή αιτιολόγηση.

### Α.3.4 Ευρήματα διδασκαλίας και μάθησης με χρήση υλικού με σκοπό τη γενίκευση κανονικοτήτων

Η σύγχρονη διδακτική προσέγγιση στηρίζεται στη σύνδεση του πραγματικού κόσμου με τον κόσμο των Μαθηματικών, στην επεξεργασία των πληροφοριών, στην ανάπτυξη της σκέψης και στην εφαρμογή των γνώσεων σε πραγματικές καταστάσεις σύμφωνα με τους Τζεκάκη & Οικονόμου (2000) και Κλαουδάτο (1992), όπως αναφέρει η Παπαδοπούλου (2017).

Στηριζόμενοι στις αντιλήψεις αυτές θα πρέπει να δούμε με πιο τρόπο ο εκπαιδευτικός θα μπορέσει να οργανώσει μια διδακτική προσέγγιση με σκοπό τη γενίκευση. Πολλοί ερευνητές εστίασαν στα *ποιοτικά χαρακτηριστικά* αλλά και *στους παράγοντες* που πρέπει να έχει μία ποιοτική διδασκαλία.

Σύμφωνα με τον Brown (1999) όπως αναφέρει η Παπαδοπούλου (2017), μία *ποιοτική διδασκαλία* πρέπει να περιέχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- *Ερωτήσεις επικεντρωμένες στην ανάπτυξη της σκέψης*

- *Στη σύνδεση νοημάτων, μαθηματικών ιδεών και περιεχομένων*
- *Σε μία τάξη συνεργατική*
- *Στην παραχώρηση αυτονομίας στους μαθητές, με σκοπό την ανάπτυξη της γνώσης.*

Σύμφωνα με τον Clarke (1997) όπως αναφέρει η Παπαδοπούλου (2017), μία ποιοτική διδασκαλία πρέπει να περιέχει τους παρακάτω *παράγοντες*:

- *Οργάνωση προβλημάτων που δεν είναι συνηθισμένα αλλά και που δεν γίνονται υποδείξεις για τη λύση τους*
- *Εποπτικό υλικό και διδακτικά μέσα που εστιάζουν στον πυρήνα περιεχομένου του διδακτικού αντικειμένου.*
- *Οργάνωση της τάξης σε μικρές ομάδες, ολομέλεια αλλά και ατομικά*
- *Αναγνώριση και εστίαση στις μεγάλες ιδέες των μαθηματικών*
- *Διευκόλυνση μαθητών στη σκέψη και στη δράση*
- *Χρήση άτυπων μορφών αξιολόγησης*
- *Λειτουργία της τάξης ως μαθητική κοινότητα με τον δάσκαλο να αποτελεί μέρος της αλλά να ενθαρρύνει το μαθητικό διάλογο και την ανάπτυξη στρατηγικών και ιδεών.*

Σύμφωνα με τη Τζεκάκη (2007; 2010) η διδασκαλία μαθηματικών πρέπει να απαρτίζεται από τη μαθηματική δραστηριότητα, τη σκέψη πάνω στη δράση κάνοντας αναστοχασμό, τη λεκτική διατύπωση, τη διαχείριση του λάθους, της αυτορρυθμιζόμενης μάθησης/μεταγνώση και το ρόλο του εκπαιδευτικού (Παπαδοπούλου 2017).

Όπως αναφέρει η Παπαδοπούλου (2018) οι διδακτικές δραστηριότητες των μαθηματικών που έχουν σκοπό την ανάπτυξη της γενίκευσης σύμφωνα με τον Radford (2006) πρέπει να περιέχουν κοινωνική αλληλεπίδραση δηλαδή ανταλλαγή ιδεών και λύσεων μεταξύ των μαθητών, διεξαγωγή συζητήσεων, επεξηγήσεις και τεκμηρίωση και σύμφωνα με τους Pappas, Ginsburg, & Jiang, 2003, ανάπτυξη διαδικασιών αναστοχασμού και αναγνώριση λαθών. Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2010) ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει ρόλο βοηθητικό, ώστε τα παιδιά να μπορούν να εκφράσουν τα συμπεράσματα τους. Θα πρέπει κατά τη διάρκεια αλλά και στο τέλος της δραστηριότητας να ενθαρρύνει τα παιδιά να σκεφτούν πάνω στις δράσεις τους, να βρουν κοινά στοιχεία, ομοιότητες ή διαφορές, να επικεντρωθούν στα σχεσιακά και στα δομικά στοιχεία των αντικειμένων, του υλικού ή της κατάστασης, να συζητήσουν τις μεθόδους τους, να εξηγήσουν τις επιλογές τους και τις αποφάσεις τους ώστε να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα και να αντιληφθούν μια κατάσταση σε ένα πιο γενικευμένο επίπεδο (Τζεκάκη, 2018).

Αρχικά θα μπορούσαν τα παιδιά να ξεκινήσουν από *το πρώτο επίπεδο γενίκευσης:* θα μπορούσαν να αναφερθούν σε ένα πρώτο συμπέρασμα που να αφορά μία δράση τους ή ένα υλικό, που αφορά σε αναγνώριση κάποιων χαρακτηριστικών ή δράσεων τους π.χ. ερώτηση πρώτης γενίκευσης που αφορά σε κανονικότητα είναι η ακόλουθη «τι παρατηρείς σε αυτό το μοτίβο, ποιο είναι το σχέδιό του….»

Σε ένα *δεύτερο επίπεδο* ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει δηλώσεις που αφορούν πάλι αναγνώριση χαρακτηριστικών αλλά με μαθηματικές ιδέες και κανόνες που έχουν σαν σκοπό μία ευρύτερη εφαρμογή. Π.χ. «τι παρατηρείς σε αυτό το μοτίβο, ποιο είναι το σχέδιό του....»

Σε ένα *τρίτο επίπεδο*, που είναι και το υψηλότερο ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη διατύπωση κανόνων και προτάσεων που αφορούν μαθηματικές έννοιες. Σύμφωνα με την Παπαδοπούλου (2017) τα μικρά παιδιά μπορούν να φτάσουν σε αυτό το τελικό στάδιο της γενίκευσης μετά από συστηματική ενασχόληση με δραστηριότητες γενίκευσης (Παπαδοπούλου (2017) όπως αναφέρει η Τζεκάκη 2018; Tzekaki & Papadopoulou, 2016).

**Καταλήγοντας**

Στην παρούσα μελέτη θα επικεντρωθούμε στην κοντινή ή πλησίον/αναδρομική γενίκευση λόγο της ηλικιακής ομάδας των μαθητών και θα αναζητήσουμε τη γενίκευση εξελισσόμενων κανονικοτήτων με όρους που φτάνουν μέχρι τη θέση όρου 10, ώστε να έρθουν αρχικά σε επαφή με την έννοια της γενίκευσης διαισθητικά και να ασκηθούν σε αυτή. Η διδακτική παρέμβαση θα σχεδιαστεί με βάση τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αλλά και τους παράγοντες που διέπουν μια ποιοτική διδασκαλία.

**Συνοψίζοντας**

Η πλειοψηφία των ερευνών ως προς την αλγεβρική σκέψη έχει επικεντρωθεί στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Warren, Trigueros & Ursini, 2016; Hitt & Gonzales-Marin, 2016; Becker & Rivera, 2008; Lannin, 2005; Bills and Rowland, 1999) όπως αναφέρουν οι Tzekaki & Papadopoylou (2016) ωστόσο οι έρευνες που αφορούν την προσχολική εκπαίδευση επικεντρώνονται κυρίως στη χρήση κανονικοτήτων και στην ικανότητα των μικρών παιδιών να εντοπίζουν τις σχέσεις που τα διέπουν (Vighi, 2013; Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011) όπως αναφέρουν οι Tzekaki & Papadopoylou (2016). Πλήθος ερευνών έχουν επικεντρωθεί κυρίως στις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες και όχι στις εξελισσόμενες καθώς αποτελούν ένα πιο απαιτητικό πεδίο με αποτέλεσμα να έχει δοθεί λιγότερη έμφαση σε αυτό. Οι εξελισσομενες κανονικότητες όμως αποτελούν την πρώτη μορφή δραστηριοτήτων που εισάγει του μαθητές στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη, όταν η ενασχόληση τους με αυτά έχει σαν στόχο τη γενίκευση αλλά χρειάζεται περαιτέρω έρευνα ώστε να προσδιοριστεί το επίπεδο γενίκευσης στο οποίο μπορούν να φτάσουν τα παιδιά ηλικιακής ομάδας της προσχολικής εκπαίδευσης και κατά πόσο τα τελευταία μπορούν να ασκηθούν στη γενίκευση μέσω μιας διδακτικής παρέμβασης.

# Δεύτερο κεφάλαιο: Εννοιολογικό πλαίσιο

## Β.1 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να εξεταστεί η ανάπτυξη ικανότητων των μαθητών προσχολικής ηλικίας στην κατανόηση του κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων με σκοπό τη γενίκευση, με βάση μία διδακτική παρέμβαση. Με βάση το σκοπό της μελέτης, τέθηκαν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

Ερευνητικά ερωτήματα:

1ο Ερευνητικό ερώτημα: Ποιες είναι οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γεωμετρικές και αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες (αναπαραγωγή, επέκταση, μεταφορά σε άλλο υλικό, εύρεση στοιχείου που λείπει, δημιουργία);

2ο Ερευνητικό ερώτημα: Σε ποιο βαθμό μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση των Pattern Blocks βελτιώνει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γενικεύσεις στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες (εύρεση του κανόνα και πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας);

## Β.2. Εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας

Στην παρούσα μελέτη οι βασικοί όροι που χρησιμοποιούνται είναι: τα είδη των δράσεων των κανονικοτήτων, οι εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, η δομή των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων, το υλικό των pattern blocks και η χρήση του στις κανονικότητες, οι ικανότητες των μαθητών στις εξελισσόμενες κανονικότητες και οι ικανότητες των μαθητών στη γενίκευση των εξελισσόμενων κανονικοτήτων.

### Β.2.1.Τα είδη των δράσεων των κανονικοτήτων

Η προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου στην παρούσα εργασία θα γίνει στηριζόμενη στα παρακάτω είδη δράσεων τα οποία προέρχονται από μια σύνθεση ερευνών στις μικρές ηλικίες (Τζεκάκη και άλλοι, 2019): α) αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ' όψεως μιας εξελισσόμενης κανονικότητας, β) συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας, γ) μεταφορά μίας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους (Clements & Sarama, 2009, όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019), δ) εύρεση στοιχείου που λείπει (Warren, 2005), ε) δημιουργία μιας δική τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011, όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019), στ) η διάκριση της αλλαγής του κανόνα και η γενίκευση της με την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας των εξελισσόμενων κανονικοτήτων. (Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou & Savva, 2006; Lannin 2005, οπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019 και η Μα, 2009)

### Β.2.2.Ορισμοί των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων

Ως εξελισσόμενες γεωμετρικές κανονικότητες στην παρούσα εργασία ορίζονται *«οι κανονικότητες που τα στοιχεία τους αποτελούνται από γεωμετρικά σχήματα, με τη σύνθεση των οποίων δημιουργείται μια εικόνα/φιγούρα/μορφή ενός στοιχείου του κόσμου που μας περιβάλλει και αυτή η φιγούρα αλλάζει από τον ένα όρο στον άλλο της γεωμετρικής ακολουθίας, με την πρόσθεση ή μείωση ενός ή δύο στοιχείων. Ο μαθητής είναι ικανός να ποσοτικοποιήσει τα στοιχεία αυτά, να απομονώσει το μικρό τμήμα που κάθε φορά αλλάζει και να διαπιστώσει τον κανόνα της ποσοτικής αλλαγής των στοιχείων(ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) στο σύνολο των στοιχείων από τον ένα όρο της ακολουθίας στον άλλο».*

Ως εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες ορίζονται *«οι κανονικότητες που τα στοιχεία τους αποτελούνται από αναπαραστάσεις αριθμών μικρής κλίμακας ως προς την αριθμητική τιμή τους (μέχρι το 20) με μεμονωμένα γεωμετρικά σχήματα και αυτές οι αριθμητικές αναπαραστάσεις αλλάζουν από τον ένα όρο στον άλλο με την πρόσθεση ή μείωση ενός ή δύο στοιχείων. Ο μαθητής είναι ικανός να ποσοτικοποιήσει την αλλαγή των όρων με την απομόνωση του μικρού τμήματος της αλλαγής και να διαπιστώσει τον κανόνα τους με την πρόσθεση ή την αφαίρεση κάθε φορά ενός στοιχείου ή δύο στοιχείων αντίστοιχα στην αύξουσα ή φθίνουσα αριθμητική ακολουθία των κανονικοτήτων π.χ. 1,2,3,4,5,6…, για (ν+1) και αντίστροφα για (ν-1) και 2,4,6,8….για (ν+2)και αντίστροφα για (ν-2)».*

### B.2.3. Η Δομή των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων

Η δομή των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων στην παρούσα εργασία θα έχει προσθετική μορφή και ο κανόνας της θα έχει τη δομή αύξουσας πορείας (ν+1) και (ν+2) και φθίνουσας πορείας (ν-1) και (ν-2). Στις εξελισσόμενες γεωμετρικές κανονικότητες αύξουσας πορείας (+1) και (+2) και φθίνουσας πορείας (-1) και (-2) θα είναι της μορφής ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ ΑΒΒΒΒ και ΑΒΒ ΑΒΒΒΒ ΑΒΒΒΒΒΒ ΑΒΒΒΒΒΒΒΒ αντίστοιχα και αντίστροφα και στις εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες αύξουσας πορείας (+1) και (+2) και φθίνουσας πορείας (-1) και (-2) θα είναι της μορφής Α ΑΑ ΑΑΑ ΑΑΑΑ και ΑΑ ΑΑΑΑ ΑΑΑΑΑΑ ΑΑΑΑΑΑΑΑ αντίστοιχα και αντίστροφα.

### B.2.4.Το υλικό των pattern blocks και η χρήση του στις κανονικότητες.

Πρόκειται για ένα οικείο προς τους μαθητές χειραπτικό υλικό που με τη χρήση του θα έρθουν σε επαφή με γεωμετρικές και αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες. Το υλικό θα χρησιμοποιηθεί ως οπτικό μέσο για την αναπαράσταση των κανονικοτήτων με εμπράγματη αλλά και εικονική μορφή και θα χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους: ως μεμονωμένα σχήματα (ως μονάδες) αλλά και ως εικόνες/φιγούρες σύνθετων σχημάτων (με τη σύνθεση σχημάτων). Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το υλικό σε όλες τις δράσεις των κανονικοτήτων όπως αυτές αναφέρθηκαν παραπάνω στη υποενότητα του εννοιολογικού πλαισίου ως «*Τα είδη των δράσεων των κανονικοτήτων*»

### B.2.5.Οι ικανότητες των μαθητών στις εξελισσόμενες κανονικότητες με σκοπό τη γενίκευση.

Ως προς τα παραπάνω είδη δράσεων και δομών των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων εξετάζονται οι παρακάτω ικανότητες των μαθητών οι οποίες προέκυψαν από τη σύνθεση και την προσαρμογή αυτών, των κατηγοριών ικανοτήτων των εργαλείων των Warren (2005) και Παπαδοπούλου (2018) που αφορούν στις γεωμετρικές εξελισσόμενες κανονικότητες και των κατηγοριών ικανοτήτων των εργαλείων της Ma(2008) η οποία στηρίχθηκε στην πρόταση των Orton & Orton (1999) όπως αναφέρει η Ma (2009) και της Papadopoulou (2017) που αφορούν στις αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες.

| Κατηγορίες ικανότητας μαθητών<br>στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες | |
|---|---|
| Κατηγορία 1 | ***Μη αντίληψη:*** Ο μαθητής δεν αναγνωρίζει καμία σχέση ανάμεσα στα στοιχεία της κανονικότητας, δε δίνει καμία απάντηση, δεν εμφανίζει καμία πρόοδο. |
| Κατηγορία 2 | ***Οπτική ολιστική αντίληψη:*** Αναγνωρίζει κάποιες σχέσεις, παρατηρεί απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα. |
| Κατηγορία 3 | ***Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής:*** Παρατηρεί την κανονικότητα αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει, αναγνωρίζει περισσότερες σχέσεις οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα, απλά δηλώνει ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας αλλά δεν μπορεί να βρει τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. |
| Κατηγορία 4 | ***Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου:*** Αναγνωρίζει σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, δίνει μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προκύπτει από την αντιστοίχιση στοιχείων. |
| Κατηγορία 5 | ***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης:*** Αναγνωρίζει τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις δηλώνοντας ότι εξελίσσεται ανά ένα ή ανά δύο στοιχεία. |
| Κατηγορία 6 | ***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης αλλά σε κοντινούς όρους:*** Αναγνωρίζει τη σχέση της κανονικότητας, τη διατυπώνει σωστά, αλλά κάνει λάθος σε κάποιο μεταγενέστερο όρο της ακολουθίας |

| | |
|---|---|
| Κατηγορία 7 | ***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης σε μακρινούς όρους:*** Αναγνωρίζει τις σχέσεις που δομούν τον κανόνα και τις διαπιστώνει σωστά σε οποιοδήποτε όρο της κανονικότητας κάνοντας μία κοντινή/σχεδόν γενίκευση. |

Ως γενίκευση εξελισσόμενων κανονικοτήτων στην παρούσα εργασία μπορεί να οριστεί «*η αναγνώριση της σχέσης από μέρους του μαθητή της "αλλαγής" των δομικών στοιχείων μιας εξελισσόμενης κανονικότητας ποσοτικά, να είναι ικανός να κατανοήσει/αναγνωρίσει την "αύξουσα αλλαγή" (+1) και (+2) των δομικών στοιχείων μιας κανονικότητας, ότι δηλαδή σε κάθε όρο της ακολουθίας προστίθεται κάθε φορά ακόμα ένα ή δύο στοιχεία αντίστοιχα ή την "φθίνουσα αλλαγή" (-1) και (-2) των δομικών στοιχείων της κανονικότητας, ότι δηλαδή σε κάθε όρο της ακολουθίας μειώνονται κάθε φορά ακόμα ένα ή δύο στοιχεία αντίστοιχα, και να μεταφέρει αυτή τη σχέση από το τοπικό αυτό επίπεδο, σε ένα γενικό επίπεδο κοντινής γενίκευσης, να είναι δηλαδή ικανός να προβλέψει το σύνολο των στοιχείων οποιουδήποτε μελλοντικού όρου της ακολουθίας ανάλογα με τη θέση που το κάθε στοιχείο έχει μέχρι τον 20ο όρο κάθε ακολουθίας». Θα πρέπει λοιπόν ο μαθητής σε ένα τοπικό επίπεδο προσθετικής αλλαγής αύξουσας πορείας (+1) και (+2) μιας κανονικότητας να είναι ικανός να αντιστοιχίσει το σύνολο των στοιχείων με τη θέση τους μέσα στην κανονικότητα, δηλαδή π.χ. 1ος όρος- 1 στοιχείο ή 2 στοιχεία, 2ος όρος - 2 στοιχεία ή 4 στοιχεία, 3ος όρος - 3 στοιχεία ή 6 στοιχεία κ.ο.κ. και άρα πόσα στοιχεία έχει ο 10ος όρος; Έχει 10 στοιχεία ή 20 στοιχεία. Πόσα έχει ο 15ος όρος; Έχει 15 στοιχεία ή 30 στοιχεία και αντίστοιχα σε ένα τοπικό επίπεδο αλλαγής φθίνουσας πορείας (-1) και (-2) μιας κανονικότητας να είναι ικανός να αντιστοιχίσει το σύνολο των στοιχείων με τη θέση τους μέσα στην κανονικότητα, δηλαδή 1ος όρος – 10 στοιχεία, 2ος όρος – 9 στοιχεία ή 8 στοιχεία, 3ος όρος – 8 στοιχεία ή 6 στοιχεία κ.ο.κ. και άρα πόσα στοιχεία έχει ο 5ος όρος; Έχει 6 στοιχεία ή 2 στοιχεία.*

## B.3. Μεθοδολογικό πλαίσιο έρευνας

### B.3.1. Σημαντικότητα μελέτης

Η παρούσα μελέτη, μέσω μίας διδακτικής παρέμβασης, αποτελεί μια προσπάθεια να παρέχει ποιοτικές πληροφορίες στη κατανόηση του κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων από μαθητές προσχολικής ηλικίας με σκοπό τη γενίκευση του σε μεταγενέστερους όρους. Στην ελληνική βιβλιογραφία δεν έχουν μελετηθεί συστηματικά, αρχικά οι επιδόσεις των μικρών παιδιών στις εξελισσόμενες κανονικότητες (Τζεκακη και άλλοι, 2019), αλλά και το πόσο μπορεί να αναπτυχθεί το επίπεδο της γενίκευσης αυτής της ηλικιακής ομάδας μέσω μιας διδακτικής παρέμβασης (Tzekaki & Papadopoulou, 2016).

### B.3.2. Μέθοδος - Στρατηγική προσέγγισης της έρευνας

Η παρούσα μελέτη είναι ποιοτική και έχει διερευνητικό χαρακτήρα εφόσον μελετά τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας, ως προς την κατανόηση της δομής των εξελισσόμενων κανονικοτήτων με απώτερο σκοπό την κοντινή γενίκευσή τους (Bell, 2007, σελ 26). Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρόκειται για μία διδακτική παρέμβαση, η οποία απευθύνεται σε μία συγκεκριμένη ομάδα νηπίων. Αυτό το είδος της έρευνας έχει στο κέντρο του τους μαθητές και επιχειρεί να κατανοήσει τις ικανότητές τους πριν τη διδακτική παρέμβαση (Cohenetall, 2008), μέσω της παρατήρησης και της συνέντευξης μέσω ανοιχτών ερωτήσεων σε διαγνωστικό τεστ (προ έλεγχος) και μετά τη διδακτική προσέγγιση (μετά έλεγχος), το οποίο έχει σχεδιαστεί από την ερευνήτρια και το οποίο θα μας βοηθήσει να οργανώσουμε τις πληροφορίες που μας δίνουν οι μαθητές για κάθε σκέλος των ερευνητικών ερωτημάτων (Creswell, 2015). Τα αποτελέσματα του τεστ θα συγκριθούν ώστε να διερευνηθεί η ικανότητα γενίκευσης των μαθητών.

### B.3.3. Το δείγμα - συμμετέχοντες της έρευνας

Στην έρευνα συμμετέχουν παιδιά προσχολικής ηλικίας (4-6) ετών που φοιτούν σε ένα 2/θεσιο τυπικό δημόσιο νηπιαγωγείο του οικισμού Καρδιάς της Πτολεμαΐδας. Ο αριθμός των μαθητών του σχολείου είναι μικρός, καθώς πρόκειται για σχολείο που ανήκει σε μικρό οικισμό. Η ερευνήτρια είναι εκπαιδευτικός του δεύτερου πρωϊνού τμήματος του σχολείου και ο αριθμός των συμμετεχόντων – μαθητών της στην έρευνα είναι μικρός, πρόκειται για 9 μαθητές εκ των οποίων τα 5 είναι κορίτσια (3 νήπια και 2 προνήπια) και τα 4 είναι αγόρια (νήπια). Για τον σχεδιασμό των τεστ και της διδακτικής προσέγγισης λήφθηκε υπόψη η ηλικία των μαθητών και σύμφωνα με αυτό καθορίστηκε η ανάλυση της εννοιολογικής προσέγγισης των κανονικοτήτων, της γενίκευσης, το επιλεγόμενο χειραπτικό υλικό, το επικοινωνιακό πλαίσιο που θα το στηρίξει και η κοινωνική αλληλεπίδραση.

Η στρατηγική της δειγματοληψίας που επιλέχθηκε είναι η "βολική" δειγματοληψία καθώς η ερευνήτρια έχει ευκολότερη πρόσβαση στους μαθητές αυτού του σχολείου καθώς είναι η ίδια εκπαιδευτικός του ενός τμήματος. Η εν λόγο στρατηγική δειγματοληψίας θεωρήθηκε, επίσης κατάλληλη για μια μελέτη διδακτικής παρέμβασης, καθώς η εκπαιδευτικός γνωρίζει τα ενδιαφέροντα των παιδιών της τάξης της και με αυτά θα σχεδιάσει το επικοινωνιακό πλαίσιο των δραστηριοτήτων, όπως και τα οικεία υλικά με τα οποία παίζουν τα παιδιά.

### Β.3.4.Δεοντολογία της έρευνας

Για να μπορέσει να διεξαχθεί η μελέτη πρέπει να ακολουθηθούν κάποιοι κανόνες δεοντολογίας. Αρχικά θα γίνει ενημέρωση των συναδέλφων εκπαιδευτικών για τους στόχους και τους σκοπούς της μελέτης, καθώς και η διαδικασία που θα ακολουθηθεί. Στη συνέχεια θα ενημερωθούν οι γονείς των παιδιών για τη διαδικασία της έρευνας και θα διασφαλιστεί η ανωνυμία των παιδιών αλλά και των προσώπων τους. Τέλος θα ζητηθεί και η έγγραφη έγκρισή τους. Στη συνέχεια θα γίνει μία προσέγγιση των νηπίων με σκοπό την ενημέρωσή τους για τη συμμετοχή τους στη μελέτη και στις δραστηριότητες τις οποίες έχουμε ετοιμάσει με το χειραπτικό υλικό των pattern Blocks.

### Β.3.5. Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων

Στην παρούσα μελέτη η ερευνήτρια διερεύνησε το επίπεδο ικανοτήτων των παιδιών προσχολικής ηλικίας, σε έναν ήσυχο χώρο του σχολείου, αρχικά ατομικά με τη χρήση ενός τεστ (pre-test), με έργα στη βάση συνέντευξης, τα οποία δομήθηκαν στη βάση των μαθηματικών δράσεων των κανονικοτήτων με σκοπό τη γενίκευση. Οι ικανότητες των μαθητών, ως προς τις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, εντάχθηκαν σε κάποια από τις κατηγορίες των ικανοτήτων των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων των Warren (2005) και Παπαδοπούλου (2018) και των Μα (2008) και Papadopoulou (2017) αντίστοιχα πριν τη διδακτική παρέμβαση και μετά. Αναφορικά με τα τεστ τα νήπια κλήθηκαν ατομικά και διερευνηθηκαν οι γνώσεις τους. Απασχολήθηκαν για 30 περίπου λεπτά κατά μέσο όρο και απάντησαν στα 6 έργα του ερωτηματολογίου. Τα τρία αφορούσαν σε εξελισσόμενες γεωμετρικες κανονικότητες ενώ τα άλλα τρία σε εξελισσόμενες αριθμητικές κανονικότητες. Στη συνέχεια και στην ολομέλεια της τάξης έγινε η διδακτική παρέμβαση με το χειραπτικό υλικό των pattern Blocks και με ερωτήσεις αρχικά τοπικού επιπέδου γενίκευσης και στη συνέχεια με ερωτήσεις γενίκευσης γενικού επιπέδου και κατέληξαν σε γενικά συμπεράσματα.

Τέλος διερευνηθηκαν και πάλι ατομικά, με τη χρήση του ίδιου εργαλείου, με τη χρήση ενός τεστ με έργα στη βάση συνέντευξης και στον ίδιο ήσυχο χώρο του σχολείου, το επίπεδο της ικανότητας γενίκευσης των παιδιών με την εύρεση του κανόνα αλλαγής των εξελισσόμενων κανονικοτήτων και την εφαρμογή του σε μεταγενέστερους όρους της ακολουθίας.

### Β.3.6. Η Τεχνική συλλογής δεδομένων

Οι πληροφορίες που απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα συλλεχθηκαν από ποικίλες πηγές. Η πρώτη πηγή αφορά στο εργαλείο του τεστ με έργα στη βάση συνέντευξης, το οποίο δόθηκε πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (pre-testing και post-testing), στα δείγματα εργασιών που φωτογραφήθηκαν, στην παρατήρηση των διαδικασιών, στο ημερολόγιο καταγραφής που τηρήθηκε για όλα τα παιδιά στα δυο τεστ αλλα και στη ομαδική διδακτική παρέμβαση, και τέλος στην μαγνητοσκόπηση όλων των διαδικασιών.

### Β.3.7. Ερευνητικό εργαλείο

Οι ικανότητες των μαθητών ως προς την αναγνώριση του κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων και τη γενίκευση του, διερευνήθηκαν ατομικά με τη χρήση τεστ πριν (pre-test) και μετά (post-test) το πέρας της διδακτικής παρέμβασης.

Οι δοκιμασίες και η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκαν με βάση τέσσερις άξονες που αφορούν στις κανονικότητες, στα ***είδη των δράσεων***, στο ***περιεχόμενο των κανονικοτήτων***, στο ***είδος της δομής*** και στο ***υλικό χρήσης***. Παρακάτω περιγράφονται συνοπτικά το τεστ διερεύνησης ικανοτήτων και η διδακτική παρέμβαση.

### B.3.7.1. Pre –test και Post-test

Οι παρακάτω δράσεις των τεστ υποστηρίχτηκαν από δύο ξεχωριστά επικοινωνιακά πλαίσια που αφορούν στις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες τα οποία και θα τις πλαισιώσουν. Πριν την διεξαγωγή του τεστ διερευνήθηκαν οι αριθμητικές ικανότητες των μαθητών με βάση το μοντέλο[1] των Wijns et all (2019), το οποίο βασίστηκε σε έρευνες προσχολικής ηλικίας.

Στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 1) παρατίθενται συνολικά οι πιθανές δράσεις, οι πιθανές μορφές, οι πιθανές δομές και τα πιθανά υλικά του τεστ, ώστε να ελεγχθεί η πληρότητα των περιπτώσεων.

**Πίνακας 1: Οι δράσεις των pre-test και post-test συνολικά**

| **Δράσεις** | **Γεωμετρική** | **Αριθμητική** | **Δομή** | **Υλικό** |
|---|---|---|---|---|
| *Αναπαραγωγή* | X | | ν+1 | Pattern Block |
| *Συνέχιση* | | X | ν+2 | Pattern Block |
| *Μεταφορά σε υλικό* | X | | ν-1 | Pattern Block |
| *Στοιχεία που λείπουν* | | X | ν-2 | Pattern Block |
| *Δημιουργία* | | | | Pattern Block |
| *Γενίκευση Μακρινή* | X | | ν+1 | Pattern Block |

Στους παρακάτω πίνακες (πίνακες 2,3,4,5,6 και7) παρουσιάζονται αναλυτικά οι δράσεις.

**Πίνακας 2: Η Α΄ Δράση των pre-test και post-test αναλυτικά**

| **Δράση 1η: Αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ΄ όψεως – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+1) |
| Υλικό: | Pattern Blocks |

[1] Το εργαλείο ελέγχου αριθμητικής ικανότητας των Wijns et all (2019), βρίσκεται αναλυτικά στο παράρτημα.

| | |
|---|---|
| | Καρτέλα Α3 με αναπαράσταση γεωμετρικής κανονικότητας |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |
| Τεστ – ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να κάνεις ένα ίδιο με αυτό που βλέπεις; Πως σκέφτηκες να το κάνεις; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

**Πίνακας 3: Η Β΄ Δράση των pre-test και post-test αναλυτικά**

| **Δράση 2η: Συνέχιση ή επέκταση κανονικότητας – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Αριθμητική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+2) |
| Υλικό: | Καρτέλα Α3 με αναπαράσταση αριθμητικής κανονικότητας και τα Pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |
| Τεστ – ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να το συνεχίσεις το σχέδιο που βλέπεις; Πως σκέφτηκες να το κάνεις; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

**Πίνακας 4: Η Γ΄ Δράση των pre-test και post-test αναλυτικά**

| **Δράση 3η: Μεταφορά σε άλλο υλικό- Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν-1) |
| Υλικό: | Καρτέλα Α5 με γεωμετρική κανονικότητα και το υλικό Pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |
| Τεστ – ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να κάνεις το ίδιο σχέδιο άλλα με άλλο υλικό; Πως σκέφτηκες να το κάνεις; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

Πίνακας 5: Η Δ΄ Δράση των pre-test και post-test αναλυτικά

| **Δράση 4η: Εύρεση στοιχείων που λείπουν – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Αριθμητική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν-2) |
| Υλικό: | Καρτέλα Α3 με αριθμητική κανονικότητα αλλά με κάποιο στοιχείο να λείπει και το υλικό των pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |
| Τεστ– ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να βρεις τα στοιχεία που λείπουν ώστε συνεχιστεί το σχέδιο; Πως σκέφτηκες να το κάνεις; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

Πίνακας 6: Η Ε΄ δράση των pre-test και post-test αναλυτικά

| **Δράση 5η: Δημιουργία κανονικότητας – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρικές ή αριθμητικές κανονικότητες |
| Δομή: | |
| Υλικό: | Pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |
| Τεστ – ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να φτιάξεις ένα δικό σου σχέδιο; Πως σκέφτηκες να το κάνεις; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

Πίνακας 7: Η ΣΤ΄ δράση των pre-test και post-test αναλυτικά

| **Δράση 6η: Γενίκευση: πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας των εξελισσόμενων κανονικοτήτων- περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+1) |
| Υλικό: | Α3 καρτέλα με κανονικότητα σχηματισμένη μέχρι την τέταρτη θέση και κενές τις υπόλοιπες μέχρι το δέκα, το υλικό των Pattern Blocks, ένας μαρκαδόρος λευκοπίνακα. |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ατομικά |

| | |
|---|---|
| Τεστ – ερωτήματα εκπαιδευτικού | Μπορείς να βρεις πόσα στοιχεία θα έχει το σχέδιο στην 6η θέση; Στην 8η; Στη 10η; Πως το σκέφτηκες; Είναι σωστό; Πως θα εξηγήσεις σε ένα άλλο παιδί τι έκανες εδώ; |

### Β.3.7.2. Διδακτική προσέγγιση εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων

Η διδακτική προσέγγιση που πραγματοποιηθηκε, αφορούσε σε δράσεις στην ολομέλεια και σε δράσεις μικρών ομάδων (την ομάδα που παίζει και την ομάδα που ελέγχει) και αφορούσε την ανάπτυξη της ικανότητας κοντινής γενίκευσης μέχρι τον 20ο όρο, λόγο της μικρής ηλικιακής ομάδας και της αριθμητικής τους ικανότητας.

Ο χρόνος διάρκειας των διδασκαλιών κυμάνθηκε από 40-45 λεπτά και κάθε δράση αποτελούσε και μία δραστηριότητα με τη χρήση του χειραπτικού υλικού των pattern blocks ως εμπράγματο υλικό αλλά και ως εικονική αναπαράσταση σε καρτέλες Α3 και Α4. Οι έξι δράσεις πραγματοποιήθηκαν με τη σειρά που παρουσιάζονται παρακάτω σε διάστημα 3 ημερών, από δύο δράσεις την ημέρα με το ίδιο επικοινωνιακό πλαίσιο και κάθε δράση αποτελούσε και μία δραστηριότητα. Το επικοινωνιακό πλαίσιο παρουσιάστηκε στην ολομέλεια, όπως αυτό είχε σχεδιαστεί και στο pre-test και τα παιδιά κλήθηκαν να οργανώσουν τη δράση των κανονικοτήτων που τους ανατέθηκε σε μικρές ομάδες - τέσσερις ομάδες (δύο ομάδες που παίζουν και δύο ομάδες που ελέγχουν και αντίστροφα), οι οποίες ανέλαβαν και από ένα έργο με διαφορετική δομή – τέσσερις δομές. Κάθε έργο ελεγχόταν για την ορθότητά του από την ομάδα ελέγχου και μετέπειτα γινόταν αναδρομή του τρόπου σκέψης της ομάδας και παρουσίαση και περιγραφή της δομής της κανονικότητας στην ολομέλεια. Οι ερωτήσεις που οδήγησαν στην ανάπτυξη της σκέψης τους ήταν του τύπου:

- Πως συνεχίζει το σχέδιο;
- Ποιο στοιχείο νομίζεις είναι το επόμενο (5η θέση); Το επόμενο (6η θέση);
- Πως μεγαλώνει/ανεβαίνει ή μικραίνει/κατεβαίνει;
- Πόσα στοιχεία/σχήματα πρέπει να βάλεις/βγάλεις σε κάθε θέση για να το μεγαλώσεις/ανέβεις ή για να το μικρύνεις/κατέβεις;
- Πως περιγράφεις το σχέδιο;
- Πόσα στοιχεία έχει η δεύτερη θέση; Πόσα η τρίτη θέση; Πόσα η τέταρτη;

- Μπορείς να πεις πόσα μπορεί να έχει η έκτη θέση; Η όγδοη; Η δέκατη;…

Στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 8) παρατίθενται συνολικά οι πιθανές δράσεις, οι πιθανές μορφές, οι πιθανές δομές και τα πιθανά υλικά της διδακτικής προσέγγισης, ώστε να ελεγχθεί η πληρότητα των περιπτώσεων.

**Πίνακας 8: Οι δράσεις της διδακτικής παρέμβασης συνολικά**

| **Δράσεις** | **Γεωμετρική** | **Αριθμητική** | **Δομή** | **Υλικό** |
|---|---|---|---|---|
| *Αναπαραγωγή* | X | | (ν+1) (ν+2) (ν-1) (ν-2) | Pattern Block |
| *Συνέχιση* | X | | (ν+1) (ν+2) (ν-1) (ν-2) | Pattern Block |
| *Μεταφορά σε υλικό* | | X | (ν+1) (ν+2) (ν-1) (ν-2) | Pattern Block |
| *Στοιχεία που λείπουν* | | X | (ν+1) (ν+2) (ν-1) (ν-2) | Pattern Block |
| *Δημιουργία* | | | | Pattern Block |
| *Γενίκευση Μακρινή* | X | | (ν+1) (ν+2) (ν-1) (ν-2) | Pattern Block |

Στους παρακάτω πίνακες (πίνακες 9,10,11,12,13 και 14) καταγράφονται οι δράσεις της παρέμβασης αναλυτικά με σειρά βαθμού δυσκολίας, στηριζόμενες στις δράσεις των κανονικοτήτων όπως αυτές χρησιμοποιήθηκαν και στο pre-test και οι οποίες και αναπροσαρμόστηκαν μετά τα αποτελέσματα του post-test.

**Πίνακας 9: Η Α΄ Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά**

| **Δράση 1η: αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) |
| Υλικό: | Pattern Blocks, 4 καρτέλες Α3 με αναπαραστάσεις εξελισσόμενων γεωμετρικών κανονικοτήτων |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να αντιγράψουν τέσσερις δοσμένες γεωμετρικές κανονικότητες . |

Πίνακας 10: Η Β΄ Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά

| **Δράση 2$^η$: Συνέχιση ή επέκταση κανονικότητας - Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) |
| Υλικό: | Pattern Blocks, 4 καρτέλες Α3 με αναπαραστάσεις εξελισσόμενων γεωμετρικών κανονικοτήτων |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να συνεχίσουν τέσσερις δοσμένες γεωμετρικές κανονικότητες με την πρόσθεση στοιχείων (ν+1) και (ν+2) και με την αφαίρεση στοιχείων (ν-1) και (ν-2). |

Πίνακας 11: Η Γ΄ Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά

| **Δράση 3$^η$: Μεταφορά σε άλλο υλικό- Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Αριθμητικές κανονικότητες |
| Δομή: | (ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) |
| Υλικό: | Τέσσερις καρτέλες Α5 με δοσμένες κανονικότητες των τεσσάρων δομών και το υλικό Pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τη δομή της καρτέλας τους και να τη μεταφέρουν σε άλλο υλικό σχηματίζοντας την ίδια ακριβώς ακολουθία. |

Πίνακας 12: Η Δ΄ Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά

| **Δράση 4$^η$: Εύρεση στοιχείων που λείπουν – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Αριθμητικές κανονικότητές |
| Δομή: | (ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) |
| Υλικό: | Τέσσερις καρτέλες Α3 με τις τέσσερις δομές των κανονικοτήτων αλλά με κάποιο στοιχείο να λείπει και το υλικό των pattern Blocks |

| | |
|---|---|
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν την ακολουθία, να βρουν το στοιχείο που λείπει και να το σχηματίσουν με το υλικό των pattern Blocks. |

Πίνακας 13: Η Ε' Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά

| **Δράση 5η: Δημιουργία κανονικότητας – Περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Γεωμετρική ή αριθμητική κανονικότητα |
| Δομή: | |
| Υλικό: | Pattern Blocks |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν τη δική τους κανονικότητα, με οποιαδήποτε δομή και επικοινωνιακό πλαίσιο επιθυμούν και να την παρουσιάσουν στην ολομέλεια. |

Πίνακας 14: Η ΣΤ΄ Δράση της διδακτικής παρέμβασης αναλυτικά

| **Δράση 6η: Γενίκευση: πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας των εξελισσόμενων κανονικοτήτων- περιγραφή** | |
|---|---|
| Περιεχόμενο: | Αριθμητική κανονικότητα |
| Δομή: | (ν+1), (ν+2), (ν-1) και (ν-2) |
| Υλικό: | Τέσσερις εκτυπωμένες Α3 καρτέλες με τις τέσσερις κανονικότητες σχηματισμένες μέχρι την τέταρτη θέση και κενές τις υπόλοιπες μέχρι το δέκα (ν+2) (ν-2) και το είκοσι (ν+1) (ν-1), το υλικό των Pattern Blocks, ένας μαρκαδόρος λευκοπίνακα. |
| Διδακτική διαχείριση-οργάνωση μαθητών | Ολομέλεια και τέσσερις ομάδες: 2 ομάδες ελέγχου και 2 ομάδες που παίζουν. |
| Διδακτικός στόχος | Οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν, να σχηματίσουν και να εξηγήσουν το πλήθος μελλοντικών στοιχείων του (ν) όρου των παραπάνω εξελισσόμενων ακολουθιών. |

# Τρίτο κεφάλαιο: Ερευνητικά αποτελέσματα

## Γ.1 Οι αριθμητικές ικανότητες των μαθητών πριν την ενασχόληση τους με τις κανονικότητες

Πριν την ενασχόληση των μαθητών με τις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, κρίθηκε σκόπιμο να διερευνηθούν πρωτίστως οι αριθμητικές τους ικανότητες, ώστε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο ελλιπών γνώσεων των μαθητών ως προς τους αριθμούς. Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε (βλ. παράρτημα: εργαλείο ελέγχου αριθμητικών ικανοτήτων) κατασκευάστηκε από τους Wijns et all (2019), το οποίο βασίστηκε σε σχετικές έρευνες της προσχολικής ηλικίας (Andrews & Sayers, 2015; Jordanet all, 2006; Purpura & Lonigan, 2013). Στον πίνακα 15, φαίνεται η κατανομή των εννιά μαθητών της τάξης, ως προς τις αριθμητικές τους ικανότητες, πριν την ενασχόληση τους με τις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες.

**Πίνακας 15: Η κατανομή των μαθητών ως προς τις αριθμητικές τους ικανότητες**

| | Σωστές απαντήσεις μέχρι το 20 | Σωστές απαντήσεις μέχρι το 10 |
|---|---|---|
| Λεκτική Μέτρηση (μέχρι το 20) | 9 | 0 |
| Απαρίθμηση σχημάτων (αντιστοίχιση αριθμού με ποσότητα σχημάτων σε αριθμητική ακολουθία) | 9 | 0 |
| Αντικειμενική μέτρηση (αντιστοίχιση ποσότητας σχήματος με τυχαίο αριθμό) | 8 | 1 |
| Συμβολική και μη συμβολική σύγκριση (ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος) | 8 | 1 |
| Σειρά αριθμών (ποιος βρίσκεται πριν και ποιος μετά από ν αριθμό) | 8 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| Αναγνώριση Συμβόλου αριθμού | 7 | 2 |
| Λεκτική αρίθμηση (πρόσθεση και αφαίρεση ν+1 και ν+2 και ν-1 και ν-2 | 7 | 2 |

Αναλύοντας τα δεδομένα των αριθμητικών ικανοτήτων των μαθητών ομαδοποιήσαμε τα αποτελέσματα σε δύο κατηγορίες απαντήσεων. Η πρώτη κατηγορία αναφέρεται στις *«Σωστές απαντήσεις μέχρι το 20»* και η δεύτερη κατηγορία στις *«Σωστές απαντήσεις μέχρι το 10»*. Παρατηρούμε ότι όλοι οι μαθητές (9 μαθητές), όταν τους ζητηθεί, μπορούν να μετρήσουν λεκτικά μέχρι το είκοσι (20) και να απαριθμήσουν σχήματα κάνοντας αντιστοίχιση αριθμού με ποσότητα σχημάτων σε αριθμητική ακολουθία. Στους μαθητές έχει δωθεί προηγουμένως μία αριθμητική ακολουθία που περιέχει τους αριθμούς απο το 1 εως το 20 και καλούνται να αντιστοιχίσουν κάποιους απο τους δωθέντες αριθμούς με τα αντίστοιχα τουβλάκια.

Οχτώ (8) από τους εννιά (9) μαθητές, όταν τους ζητηθεί, κάνουν αντικειμενική μέτρηση, συγκεντρώνοντας το σωστό αριθμό στοιχείων σε τυχαίο (ν) αριθμό, κάνουν συμβολική και μη συμβολική σύγκριση μεταξύ δύο αριθμών, όταν τους ζητηθεί να πουν ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος και τέλος πάλι οχτώ (8) στους εννιά (9) μαθητές όταν τους ζητηθεί να βρουν ποιος αριθμός βρίσκεται πριν και ποιος μετά απο έναν (ν) αριθμό, ανταποκρίνονται στη σειρά των αριθμών λέγοντας ποιος προηγείται και ποιος έπεται από τον αριθμό αυτό.

Στις παραπάνω μετρήσεις δεν ανταποκρίθηκε πλήρως μόνο ένας/μία (1) μαθητής/τρια[2] φτάνοντας στην αντικειμενική μέτρηση μέχρι τον αριθμό 18, στη συμβολική και μη συμβολική σύγκριση φτάνοντας μέχρι το 10 και στη σειρά των αριθμών ανταποκρίθηκε μέχρι το 10, καθώς δείχνει πως μόνο μέχρι εκεί έχουν εδραιωθεί πλήρως οι αριθμητικές του/της ικανότητες (πρόκειται για προνήπιο).

[2] Απο εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στον/στην μαθητή/τρια ώς μαθητή και στους/στις μαθητές/τριες ως μαθητές.

Εφτά (7) στους εννιά (9) μαθητές, αναγνωρίζουν όλα τα αριθμητικά σύμβολα μέχρι το 20, όταν τους ζητήτε να τα ονομάσουν, και κάνουν λεκτική αρίθμηση, λέγοντας ποιος αριθμός προκύπτει αν βάλουμε ή βγάλουμε σε (ν) αντικείμενα +1 ή -1 και +2 ή -2 αντικείμενα. απαντώντας στην ερώτηση:

Στις παραπάνω μετρήσεις δεν ανταποκρίθηκαν μονο δυο (2) μαθητές, καθώς στην αναγνώριση συμβόλου αριθμού, αναγνωρίζουν τα σύμβολα μόνο μέχρι το 10. Πάνω απο το 10 η αναγνώριση του συμβόλου γίνεται μόνο με μέτρημα πάνω στην αριθμογραμμή και αυτό όχι πάντα σωστά καθως δε γίνεται σωστή αντιστοίχιση συμβόλου και αριθμού της ακολουθίας. Στη λεκτική αρίθμηση ανταποκρίθηκαν μέχρι το 10 και στην προσθαφαίρεση μόνο στο ν+1 και ν-1.

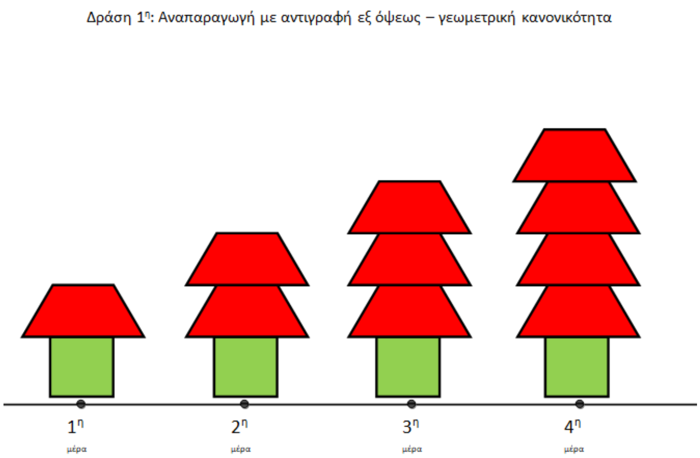
## Γ.2. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς τις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Στην παρακάτω παρουσίαση των αποτελεσμάτων προσπαθούμε να παρουσιάσουμε δεδομένα αναφορικά με το 1ο ερευνητικό μας ερώτημα: *«Ποιες είναι οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γεωμετρικές και αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες (αναπαραγωγή, επέκταση, μεταφορά σε άλλο υλικό, εύρεση στοιχείου που λείπει, δημιουργία)»*

### Γ.2.1. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας πριν τη διδακτική παρέμβαση

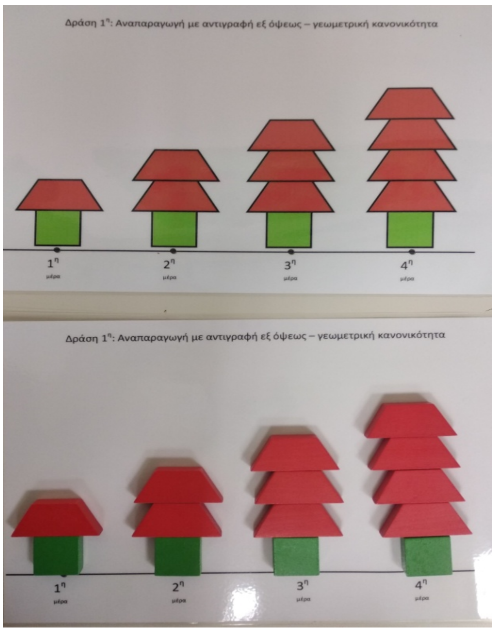
Οι ικανότητες των μαθητών εξετάζονται στα παρακάτω είδη δράσεων εξελισσόμενων κανονικοτήτων, τα οποία προέρχονται από μια σύνθεση ερευνών στις μικρές ηλικίες (Τζεκάκη και άλλοι, 2019) όπως αυτά παρουσιάστηκαν παραπάνω. Οι δράσεις της μελέτης παρουσιάζονται αρχικά μεμονομένα και με χαρακτηριστικά αλλά ενδεικτικά παραδείγματα των έργων αλλά και των αναλύσεων των μαθητών με τη σειρά που αυτές πραγματοποιήθηκαν. Στις δράσεις που αφορούσαν γεωμετρικές κανονικότητες παρατηρήθηκαν διαφορετικοί τρόποι εφαρμογής των έργων, οι οποίοι και αναφέρονται στο τέλος κάθε δράσης. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας, ώστε να είναι εμφανείς οι διαφορές στις ικανότητες των μαθητών κατά έργο.

Στην Α΄ Δράση που αφορά στην *«Αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ' όψεως μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»,* οι μαθητές πρέπει να αναπαράγουν με αντιγραφή βλέποντας μια δοσμένη εξελισσόμενη κανονικότητα της μορφής (ν+1) (βλ. εικ. 1).




**Εικόνα 1:** ***Δράση Α΄ - Αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ΄ όψεως - γεωμετρική κανονικότητα***

Όλοι οι μαθητές, ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στην Α΄ Δράση και αντέγραψαν σωστά την εξελισσόμενη κανονικότητα (ν+1) (βλ. εικ. 2), τοποθετώντας τα σχήματα του σχεδίου σωστά απο την μία μέρα στην άλλη.



**Εικόνα 2: Δράση Α΄ – *«Σωστή απάντηση»***

Στις αρχικές ερώτησεις της εφαρμογής του έργου

*Ε: Μπορείς να κάνεις και εσύ ένα σχέδιο, ίδιο, με αυτό που βλέπεις;*

*Ε: Είναι σωστό το σχέδιο που έκανες;*

Οι απαντήσεις όλων των μαθητών ήταν καταφατικές και επιβεβαιωτικές δίνοντας τις απαντήσεις:

*Μ: Ναι! Μπορώ να το κάνω ολόιδιο!*

*Μ: Ναι! Είναι ίδιο με της φίλης μας!*

Οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

Κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία που η εξηγησή τους περιέχει αριθμητικά στοιχεία με αντιστοίχιση μέρας και στοιχείων με ενδεικτική απάντηση:

  *Μ: ..το έκανα ίδιο- 1$^{η}$ μέρα = ένα τραπεζάκι και 1 τετράγωνο, 2$^{η}$ μέρα = δύο τραπεζάκια και 1 τετράγωνο…».*

- Στη δεύτερη κατηγορία που η εξήγηση των μαθητών δεν περιέχει κανένα αριθμητικό στοιχείο στο λόγο τους. Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών:

  *Μ: ...Το σκέφτηκα και το έκανα όπως το κατάλαβα- όπως το έβλεπα.*

  *Μ: ..όσο ήταν και αυτά. Γιατί έβλεπα και έκανα το ίδιο.*

  *Μ: ...Είδα το δικό της σχέδιο.*

Οι απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα:

*Ε: «Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς πως μεγάλωσε το δέντρο από τη μία μέρα στην άλλη;»*

κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- Σε αυτούς που αναφέρονται σε «σχέση μεγεθών» με ενδεικτική απάντηση

  *Μ: ....αυτό είναι μικρό, αυτό είναι μεγάλο, αυτό λίγο πιο μεγάλο, αυτό πολύ μεγάλο-μεγαλύτερο...*

- Σε αυτούς που αναφέρονται σε «σχέση μέρας με στοιχεία κανονικότητας – αντιστοίχιση μέρας και συνόλου στοιχείων»

  *Μ: 1....η μέρα-2 τουβλάκια, 2η μέρα-3 τουβλάκια, 3η μέρα-4 τουβλάκια, 4η μέρα-5 τουβλάκι...*

- Σε αυτούς που αναφέρονται σε «φυσική εξέλιξη φυτών»

  *Μ: ....το πότιζε και μετά... λίγο μεγάλωνε, απο τη μία μέρα στην άλλη!*

- Σε αυτούς που αναφέρονται σε μία «εξελικτική πορεία» δίνοντας σαν απάντηση στο ερώτημα,

  *Μ: ...Όπως μια σκαλίτσα...*

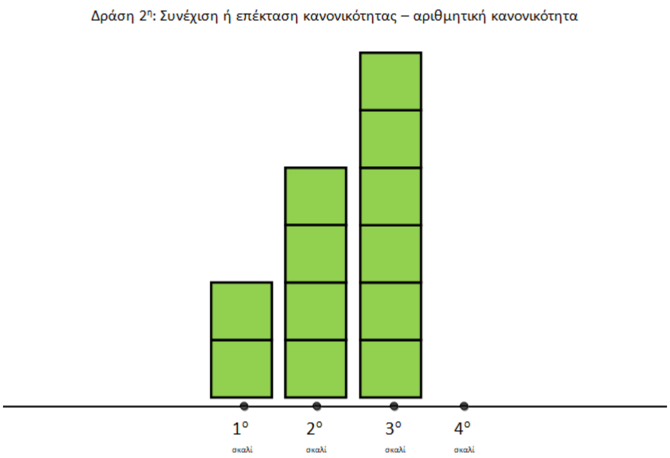
Στη συγκεκριμένη αναφορα οι μαθητές βλέπουν την αλλαγή των στοιχείων απο μέρα σε μέρα σαν σύνολα, βλέπουν τον κορμό του μαγικού δέντρου σαν σταθερό στοιχείο και στη συνέχεια παρατηρούν πως προσθέτεται ένα παραπάνω φύλλο (τραπέζιο) σε κάθε μέρα που αλλάζει.

Στην παρατήρηση της διαδικασίας του έργου απο τους μαθητές, *της αναπαραγωγής με αντιγραφή εξ' όψεως* παρατηρήθηκαν δύο τρόποι εφαρμογής/τρόποι δράσης:

- Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές τοποθέτησαν τα στοιχεία σαν αριθμητικά σύνολα σε κάθε μέρα, δηλαδή στην πρώτη μέρα ένα τετράγωνο και ένα τραπέζιο (δηλαδή δύο στοιχεία στην πρώτη μέρα), στην δεύτερη μέρα, ένα τετράγωνο και δύο τραπέζια (δηλαδή τρία στοιχεία), στην τρίτη μέρα, ένα τετράγωνο και τρία τραπέζια (δηλαδή τέσσερα στοιχεία).... και η τοποθέτηση τους γινόταν με αντιστοίχιση των σωστών στοιχείων σε ποσότητα και σχήμα στην κάθε μέρα.
- Στο δεύτερο τρόπο οι μαθητές τοποθέτησαν τα στοιχεία σαν γεωμετρικά σύνολα, ξεχωρίζοντας τα σχήματα μεταξύ τους, βλέποντάς τα ως μεμονομένα στοιχεία. Αρχικά τοποθέτησαν τα τετράγωνα σε όλες τις ημέρες και στη συνέχεια τοποθετούσαν τα τραπέζια.

Καταλήγοντας η παραπάνω δράση δεν θα αποτελεί μέρος της διδακτικής παρέμβασης, καθώς και οι εννιά (9) μαθητές ανταποκρίθηκαν σε αυτήν και αντέγραψαν σωστά την εξελισσόμενη κανονικότητα.

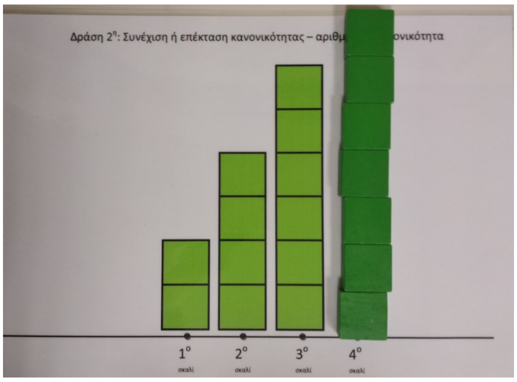
Στην Β' Δράση που αφορά στη *«Συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»* οι μαθητές καλούνται να συνεχίσουν μια εξελισσόμενη κανονικότητα της μορφής (ν+2) (βλ. εικ. 3).




**Εικόνα 3:** ***Δράση Β' – Συνέχιση ή επέκταση μια εξελισσόμενης αριθμητικής κανονικότητας***

Απο το σύνολο των 9 μαθητών, πέντε (5) μαθητές απάντησαν *«σχεδόν σωστά»* και τέσσερις μαθητές απάντησαν *«λάθος»*.

Οι απαντήσεις των μαθητών που κινήθηκαν στις *«σχεδόν σωστές»* σε ένα ποσοστό πάνω από 50% των παιδιών, όλες αφορούν στη συνέχιση της κανονικότητας αλλά με την "αλλαγή" του κανόνα από (ν+2) σε (ν+1) (βλ. εικ. 4).




**Εικόνα 4: Δράση Β΄ – «*Σχεδόν Σωστή απάντηση*»**

Έτσι λοιπόν οι μαθητες στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: .....να το κάνω πιο ψηλό! Απο το μικρότερο στο μεγαλύτερο!*

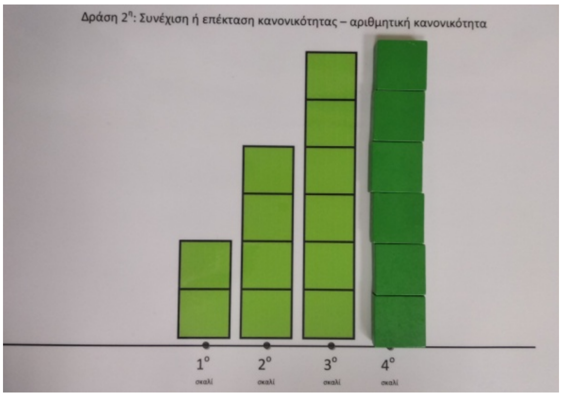
*Ε: Εξήγησέ μου λίγο παραπάνω!*

*Μ: .....το 1ο σκαλί έχει 2 σκαλοπατάκια, το 2ο (σκαλί) έχει 4 σκαλοπάτάκια, το 3ο (σκαλί) έχει 6 σκαλοπάτάκια και άρα το 4ο θα έχει εφτά...*

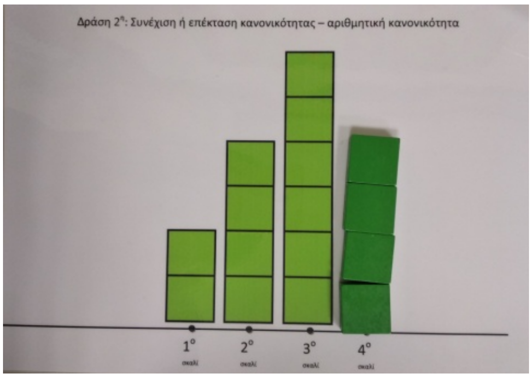
Παρατηρούμε στις απαντήσεις των μαθητών, ότι αντιλαμβάνονται, ότι το 4ο (τέταρτο) σκαλί πρέπει να εχει περισσότερα στοιχεία απο το προγενέστερο, δηλαδή το 3ο (τρίτο), τοποθετώντας σε αυτό ένα παραπάνω στοιχείο απο το προηγούμενο αλλά αδυνατούν να αντιληφθούν τον κανόνα που διέπει τα προηγούμενα σκαλοπάτια, δηλαδή τον (ν+2).

Το παραπάνω παράδειγμα μας δειχνει ότι οι ικανότητες αυτών των μαθητών βρίσκονται στη κατηγορία της *αντίληψης ποιοτικής αλλαγής*, η οποία τους επιτρεπει να παρατηρούν την κανονικότητα, αλλά να μην μπορούν να την περιγράψουν και να αναγνωρίζουν περισσότερες σχέσεις μεταξύ των αριθμών, αλλά οι σχέσεις που διακρίνουν να μην δομούν τον κανόνα και απλά να δηλώνουν και να πράττουν με τη σκέψη ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας χωρίς να μπορούν όμως να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας.

Οι *«λάθος»* απαντήσεις αφορούν στη συνέχιση της κανονικότητας χωρίς κανόνα (βλ. εικ 5 και εικ. 6).




**Εικόνα 5: Δράση Β' – *«Λάθος απάντηση»***




**Εικόνα 6: Δράση Β΄ – *«Λάθος απάντηση»***

Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας συνέχιζαν την κανονικότητα με δύο τρόπους:

- Στον πρώτο τρόπο συνέχιζαν την κανονικότητα χωρίς κάποιον κανόνα, βάζοντας στο σκαλί Νο 4 (νούμερο τέσσερα) ίδιο αριθμό στοιχείων με το σκαλί Νο 3 (νούμερο τρία) απαντώντας στην ερώτηση:

  *Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

  *Μ: ...το αντέγραψα απο αυτό το σκαλοπάτι (εννοώντας και δείχνοντας το προηγούμενο σκαλί).*

  *ή*

  *Μ: ....σκέφτηκα να κάνω το ίδιο με το προηγούμενο (εννοώντας το σκαλί Νο 3)...*

- Στον δεύτερο τρόπο συνέχιζαν την κανονικότητα χωρίς κάποιον κανόνα, αλλάζοντας ακόμα και την αύξουσα πορεία της σε φθίνουσα πορεία, καθώς έκαναν αντιστοίχιση του συμβόλου της τέταρτης μέρας, δηλαδή τον αριθμό 4 με ένα σύνολο τεσσάρων στοιχείων, απαντώντας στην ερώτηση:

  *Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

  *Μ: ...βλέπω το τέσσερα (4) και γι αυτό έβαλα 4 τετράγωνα....*

Στη συνέχεια της ερώτησης για περαιτέρω διευκρινήσεις, γίνεται προσπάθεια διόρθωσης-αλλαγής απο μέρους του/της να διορθώσει όλο το σχέδιο της κανονικότητας και να ταυτίσει τον αριθμό της θέσης με τον αριθμό ποσότητας των τετραγώνων καθώς εξηγεί:

> *Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις λίγο παραπάνω τη σκεψη σου;*
>
> *Μ: ....δηλαδή πρέπει να έχει το 1ο σκαλί – 1 τετράγωνο, το 2ο σκαλί – 2 τετράγωνα, το 3ο σκαλι – 3 τετράγωνα και το 4ο – 4 τετράγωνα....*

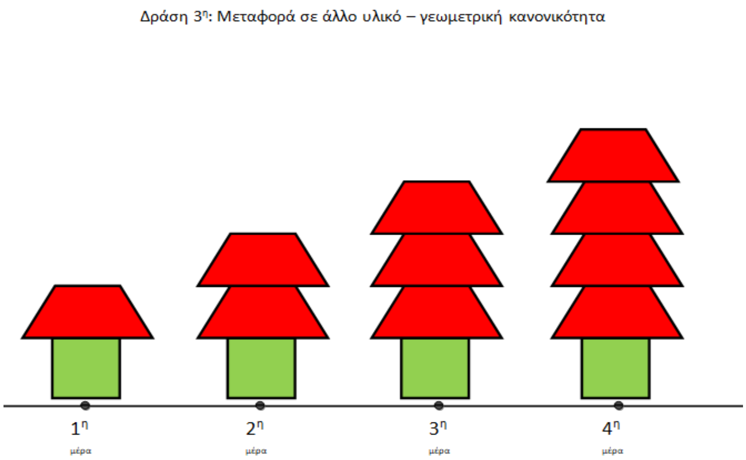
Τα παραπάνω παράδειγματα μας δειχνουν ότι οι ικανότητες αυτών των μαθητών βρίσκονται στη κατηγορία της *οπτικής ολιστικής αντίληψης*, γεγονός που τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν κάποιες σχέσεις, να παρατηρούν απλές ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν κανέναν κανόνα.

Συνοψίζοντας στην παρατήρηση της διαδικασίας του έργου απο τους μαθητές, *της συνέχισης ή επέκτασης της αριθμητικής κανονικότητας* παρατηρήθηκαν τρεις τρόποι εφαρμογής/τρόποι δράσης:

- Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα μεγαλώνοντας τη, ακολουθώντας την αύξουσα πορεία της αλλά με αλλαγή του κανόνα απο ν+2 σε ν+1 (δηλαδή δύο στοιχεία στη πρώτη μέρα, 4 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 6 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 7 στοιχεία στην τέταρτη μέρα)
- Στον δεύτερο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα αλλά βάζοντας ίδιο αριθμό στοιχείων με την προηγούμενη θέση (δηλαδή δύο στοιχεία στη πρώτη μέρα, 4 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 6 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 6 στοιχεία στην τέταρτη μέρα).
- Στον τρίτο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα αλλάζοντας την πορεία της απο αύξουσα σε φθίνουσα, ταυτίζοντας τον αριθμό της θέσης με τον αριθμό στοιχείων της (δηλαδή δύο στοιχεία στη πρώτη μέρα, 4 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 6 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 4 στοιχεία στην τέταρτη μέρα).

Καταλήγοντας, στη Β΄ Δράση παρατηρούμε ότι οι μαθητές, ως επί το πλείστον δυσκολεύονται στη συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας, καθώς κανένας δεν έχει απαντήσει σωστά και μόνο πέντε εξ' αυτών έχουν συνεχίσει την κανονικότητα απλά παραμένοντας στην αύξουσα πορεία της, χωρίς όμως να μπορούν να διακρίνουν τον κανόνα της.

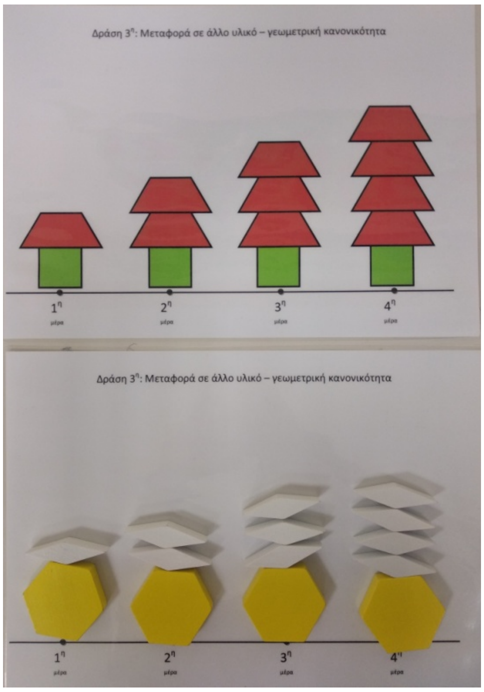
Στη Γ΄ Δράση που αφορά στη *«Μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους»* οι μαθητές καλούνται να μεταφέρουν τη μορφή μιας δοσμένης κανονικότητας και να αναπαράγουν ακριβώς την ίδια μορφή αλλά με άλλο σχήμα. Η δοσμένη κανονικότητα έχει τη μορφή (ν+1) (βλ. εικ. 7).



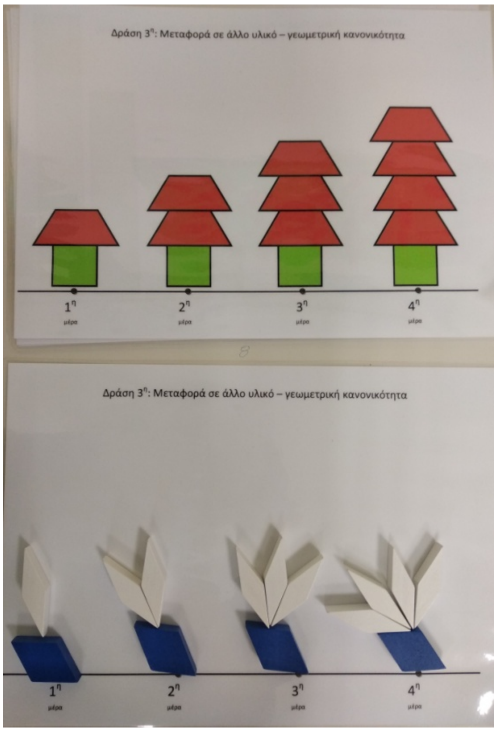

**Εικόνα 7:** ***Δράση Γ΄ - Μεταφορά σε άλλο υλικό- γεωμετρική κανονικότητα***

Απο το σύνολο των εννιά (9) μαθητών, τέσσερις (4) μαθητές απάντησαν *«σωστά»,* τρεις (3) μαθητές απάντησαν *«σχεδόν σωστά»* και δύο (2) μαθητές απάντησαν *«λάθος».*

Στην Δράση Γ΄, οι απαντήσεις των μαθητών μοιράστηκαν, καθώς τέσσερις (4) μαθητές μετέφεραν *«σωστά»* την κανονικότητα σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους (βλ. εικ. 8 και εικ.9) και δικό τους επικοινωνικό πλαίσιο.




**Εικόνα 8: Δράση Γ – «*Σωστή απάντηση*»**




**Εικόνα 9: Δράση Γ΄- «*Σωστή απάντηση*»**

Ενδεικτικά αναφέρουμε την απάντηση του μαθητή στις ερωτήσεις του έργου:

*Ε: Μπορείς να κάνεις το ίδιο σχέδιο με αυτό της φίλης μας αλλά με άλλα σχήματα;*

*Μ: ...Ναι μπορώ. Θα πάρω δύο (εννοεί δύο σχήματα)... θα φτιάξω ένα προσωπάκι με μαλλιά.*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....όπως το έκανε η κοπελίτσα (εννοεί τη φίλη από το επικοινωνιάκο πλαίσιο).*

*Ε: Εξήγησέ μου λίγο παραπάνω;*

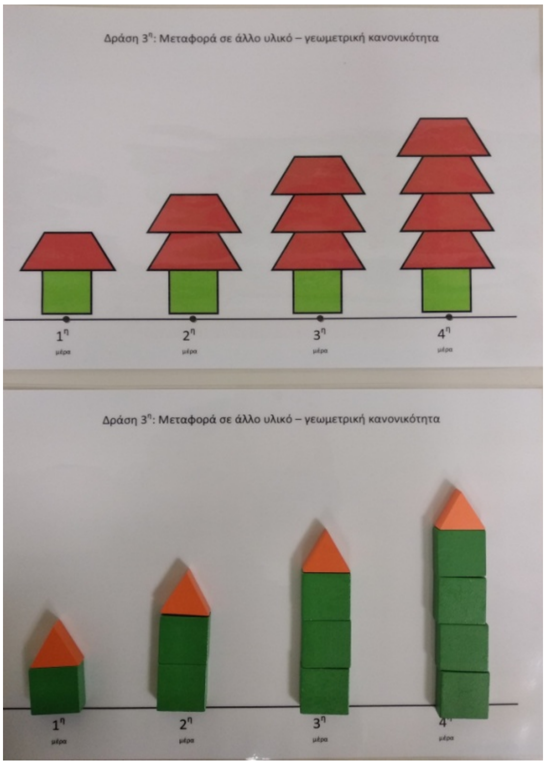
*Μ: ....μεγαλώνει (το μαλλί) όπως όλων των ανθρώπων. Μεγαλώνουν τα μαλλιά απο μέρα σε μέρα.*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως μεγαλώνουν τα μαλλιά από το προσωπάκι σου απο τη μία μέρα στην άλλη;*

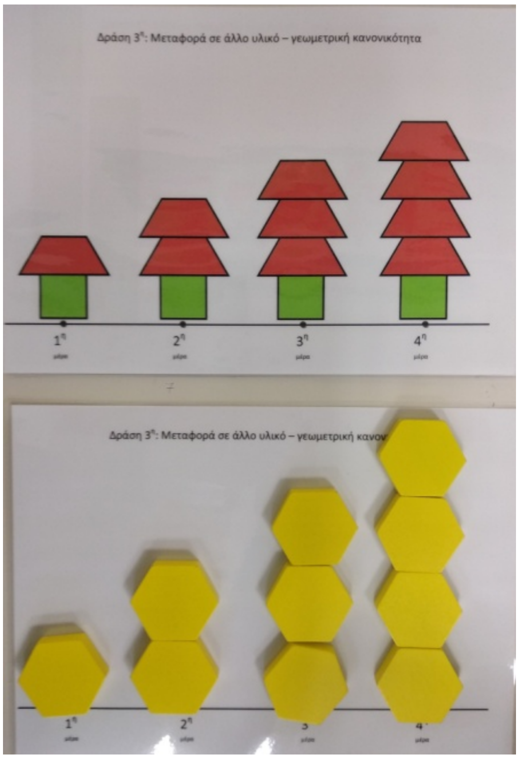
*Μ: ....μεγαλώνουν από μέρα σε μέρα. 1η μέρα: 1 προσωπάκι και 1 μαλλί, 2η μέρα: 1 προσωπάκι και δυο μαλλιά, 3η μέρα: 1 προσωπάκι και τρία μαλλιά, 4η μέρα: 1 προσωπάκι και τέσσερα μαλλιά.*

Απο τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνεται ότι οι μαθητές βρίσκονται στην 4η κατηγορία ικανοτήτων των εξελισσόμενων κανονικοτήτων καθώς βρίσκονται *στην αντίληψη αριθμητικής σχέσεις κοντινού όρου,* συνεπώς την αναγνώριση κάποιων σχέσεων, την παρατήρηση απλά κάποιων ιδιοτήτων των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα της κανονικότητας.

Τρεις (3) μαθητές απάντησαν *«σχεδόν σωστά»* καθώς δημιούργησαν κανονικότητες αλλά οι δύο (2) από αυτούς, μετέφεραν την κανονικότητα με τον ίδιο κανόνα (ν+1) αλλά άλλαξαν τη μορφή της κανονικότητας από ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ σε ΑΒ ΑΑΒ ΑΑΑΒ και ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ σε Α ΑΑ ΑΑΑ (βλ. εικ. 10 και εικ 11)

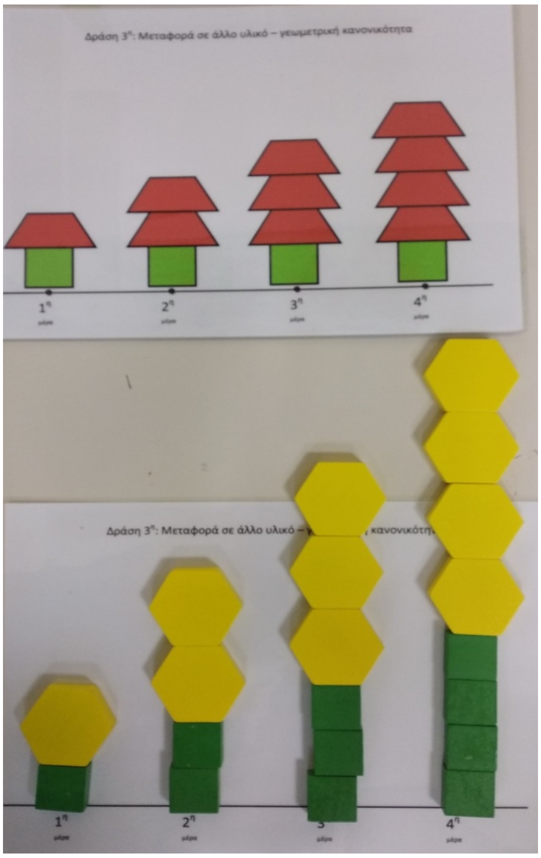



**Εικόνα 10: Δράση Γ΄- *«Σχεδόν σωστή απάντηση»***




**Εικόνα 11: Δράση Γ΄ – *«Σχεδόν σωστή απάντηση»***

και ένας (1) μαθητής άλλαξε και τον κανόνα σε (ν+2) αλλά και τη μορφή από ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ σε ΑΒ ΑΑΒΒ ΑΑΑΒΒΒ (βλ. εικ. 12).



**Εικόνα 12: Δράση Γ΄ - «*Σχεδόν σωστή απάντηση*»**

Πιο αναλυτικά ο μαθητής που μετέφερε την κανονικότητα με τον ίδιο κανόνα (ν+1) αλλά άλλαξε τη μορφή της κανονικότητας από ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ σε ΑΒ ΑΑΒ ΑΑΑΒ απάντησε στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις; Την 1η μέρα πόσα έβαλες;*

*Μ: ....τετράγωνο και τρίγωνο....*

*Ε: Τη 2η μέρα;*

*Μ: ....δύο τετράγωνα και ένα τρίγωνο...*

*Ε: Την 3η μέρα;*

*Μ3: ....τρία τετράγωνα, ένα τρίγωνο....*

*Ε: Την τέταρτη μέρα;*

*Μ3: ....τέσσερα τετράγωνα και ένα τρίγωνο...*

Στις απαντήσεις του μαθητή παρατηρείτε ότι δεν βλέπει τα στοιχεία των θέσεων της κανονικότητας σαν σύνολα αλλά σαν ξεχωριστά μέρη. Κάνει και αυτός αντιστοίχιση των αριθμών των ημερών με το ένα μέρος της κανονικότητας και απλά παραθέτει και το ένα σταθερό στοιχείο της στο τέλος που είναι το τετράγωνο. Για να τα δεί σαν σύνολα στοιχείων, πρέπει να ερωτηθεί ξεχωριστά σε κάθε θέση της κανονικότητας.

Ο μαθητής που άλλαξε τη γεωμετρική κανονικότητα σε αριθμητική κάνοντας τη μορφή απο ΑΒ ΑΒΒ ΑΒΒΒ σε Α ΑΑ ΑΑΑ απάντησε στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....μετρούσα απο μέσα μου και έβαζα όσα έλεγε ο αριθμός απο κάτω.*

Και συνεχίζει στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως μεγαλώνει και το δικό σου δέντρο απο την μια μέρα στην άλλη;*

*Μ: ....τα τέσσερα στοιχεία στην 4$^η$ μέρα, τα τρία στοιχεία στην 3$^η$ μέρα, τα δύο στοιχεία στην 2$^η$ μέρα και το ένα στοιχείο στην 1$^η$ μέρα....*

Παρατηρείτε ότι και ο συγκεκριμένος μαθητής επέλεξε την αντιστοίχιση αριθμού μέρας και αριθμού στοιχείων.

Ο μαθητής που άλλαξε τον κανόνα της κανονικότητας απο ν+1 σε ν+2 τεκμηρίωνει την πράξη του λέγοντας:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....δεν είναι ακριβώς ίδιο αλλά έχει τα ίδια σχήματα.....*

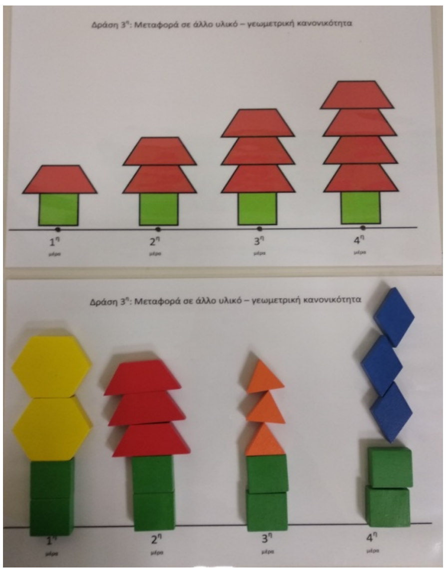
*Ε: Εξήγησέ μου λίγο παραπάνω;*

*Μ: ......εδω (δείχνει τον αριθμό 1), ένα τετράγωνο και ένα εξάγωνο για φύλλο. Εδώ (δείχνει τον αριθμό 2) δύο τετράγωνα και δύο εξάγωνα για φύλλα. Εδω (δείχνει τον αριθμό 3) τρία τετράγωνα και τρία εξάγωνα για φύλλα και εδώ (δείχνει τον αριθμό 4) τέσσερα τετράγωνα και τέσσερα εξάγωνα για φύλλα.....*

Παρατηρείτε ότι και ο συγκεκριμένος μαθητης επέλεξε την αντιστοίχιση αριθμού μέρας και αριθμού δύο διαφορετικών γεωμετρικών στοιχείων δηλαδή έκανε αντιστοίχιση του αριθμού της μέρας με δύο διαφορετικά γεωμετρικά σύνολα, αριθμός-θέση μέρας 1=1 τετράγωνο και 1 τραπέζιο, αριθμός-θέση μέρας 2=2 τετράγωνα και 2 τραπέζια, αριθμός-θέση μέρας 3=3 τετράγωνα και 3 τραπέζια κ.ο.τ. Παρατηρείτε ότι δεν βλέπει τα στοιχεία των θέσεων της κανονικότητας σαν σύνολα αλλά σαν δύο ξεχωριστά μέρη που αντιστοιχούν σαν δύο ξεχωριστά σύνολα με τον αριθμό-θέση μέρας. Κάνει και αυτός αντιστοίχιση των αριθμών των ημερών με τα δύο γεωμετρικά μερη της κανονικότητας. Δεν μπορεί να δει τα στοιχεία σαν σύνολο σε σχέση με την κάθε θέση.

Απο τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνεται ότι οι μαθητές βρίσκονται στην 3$^{η}$ κατηγορία ικανοτήτων των εξελισσόμενων κανονικοτήτων καθώς βρίσκονται *στην αντίληψη ποιοτικής αλλαγής,* συνεπώς παρατηρούν την κανονικότητα αλλα δεν μπορούν να την περιγράψουν, αναγνωρίζουν περισσότερες σχέσεις οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα, απλά δηλώνουν οτι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας αλλα δεν μπορούν να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας.

Οι *«λάθος»* απαντήσεις των μαθητών αφορούν στη μεταφορά της κανονικότητας χωρίς κανένα κανόνα (βλ. εικ. 13).




**Εικόνα 13: Δράση Γ΄ – *«Λάθος απάντηση»***

Στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...είναι ίδιο γιατί έχει τα ίδια απο κάτω και απο πάνω....*

*Ε: Μπορείς να εξηγησεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως μεγαλώνει το σχέδιό σου απο τη μία μέρα στην άλλη;*

*Μ: ...την $1^{\eta}$ μέρα – 2 κορμούς και 2 εξάγωνα, τη $2^{\eta}$ μέρα – 2 κορμούς και 3 τραπέζια, την $3^{\eta}$ μέρα- 2 κορμούς και 3 τρίγωνα, την $4^{\eta}$ μέρα – 2 κορμούς και 3 πλάγια παραλληλόγραμμα....*

Στο παραπάνω ενδεικτικό παράδειγμα *«λάθους»* δεν παρατηρείτε καμμία αύξουσα πορεία, κανένας κανόνας, καμμία δομή και μορφή στην κανονικότητα.

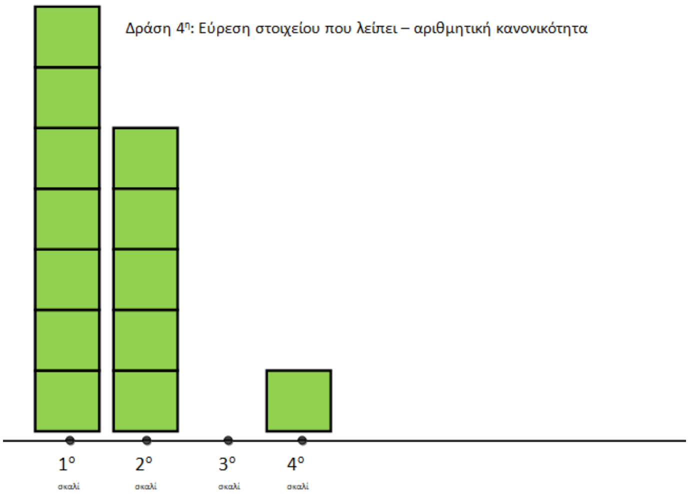
Παρατηρώντας το παράδειγμα οι μαθητές βρίσκονται στην κατηγορία της *οπτικής ολιστικής αντίληψης*, η οποία τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν κάποιες σχέσεις, να παρατηρούν απλές ιδιότητες αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν κανέναν κανόνα.

Συνοψίζοντας στην παρατήρηση της διαδικασίας του έργου απο τους μαθητές, της μεταφοράς σε άλλο υλικό της γεωμετρικής κανονικότητας παρατηρήθηκαν δύο τρόποι εφαρμογής:

- Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές τοποθετούσαν πρώτα το σταθερό γεωμετρικό τους σχήμα σε όλες τις θέσεις, δηλαδή ένα σχήμα σε κάθε θέση π.χ. $1^{\eta}$ μερα-1 τετράγωνο, $2^{\eta}$ μέρα-1 τετράγωνο, $3^{\eta}$ μέρα-1 τετράγωνο και $4^{\eta}$ μέρα-1τετράγωνο και στη συνέχεια τα άλλα τα οποία ακολουθούσαν αύξουσα πορεία, π.χ. στην $1^{\eta}$ μέρα πάνω απο το τετράγωνο έβαζαν και ένα τραπέζιο, στη $2^{\eta}$ μέρα πάνω απο το τετράγωνο δύο τραπέζια, στην $3^{\eta}$ μέρα πάνω από το τετράγωνο τρία τραπέζια....
- Στον δεύτερο τρόπο οι μαθητές τοποθετούσαν όλα τα σχήματα της θέσης σαν σύνολα, π.χ. $1^{\eta}$ μέρα-δύο στοιχεία, $2^{\eta}$ μέρα-τρία στοιχεία, $3^{\eta}$ μέρα- τέσσερα στοιχεία.

Καταλήγοντας, στη Γ’ Δράση παρατηρούμε ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται καλύτερα στη μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό, καθώς απαντούν *«σωστά»* οι τέσσερις και *«σχεδόν σωστά»* οι τρεις. Δεν μπορούν να αντιληφθούν ακόμα τον κανόνα αλλά καταφέρνουν να μεταφέρουν την κανονικότητα σε άλλο υλικό.

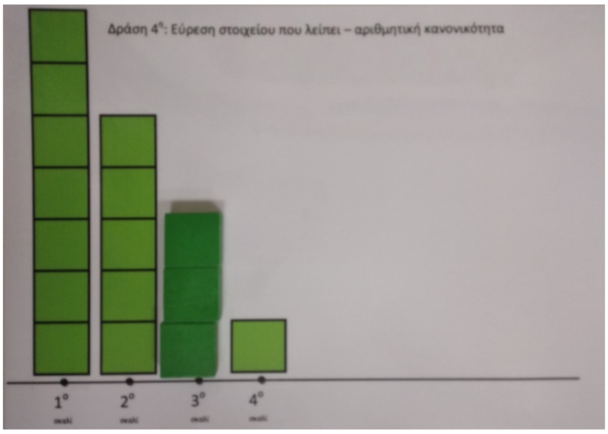
Στη Δ΄ Δράση που αφορά στην *«Εύρεση του στοιχείου που λείπει»* οι μαθητές καλούνται να βρουν και να τοποθετήσουν τον αριθμό των στοιχείων που λείπουν σε μία συγκεκριμένη θέση της κανονικότητας, ώστε να συνεχιστεί σωστά. Η δοσμένη κανονικότητα έχει τη μορφή (ν-2) (βλ. παράρτημα εικ. 14).




**Εικόνα 14:** ***Δράση Δ΄ - Εύρεση στοιχείου που λείπει σε αριθμητική κανονικότητα***

Απο το σύνολο των εννιά (9) μαθητών, δύο (2) μαθητές απάντησαν *«σωστά»,* δύο (2) μαθητές απάντησαν *«σχεδόν σωστά»* και πέντε (5) μαθητές απάντησαν *«λάθος».*

Στη Δράση Δ΄ οι απαντήσεις των μαθητών μοιράστηκαν και πάλι αλλά με τις περισσότερες να μην είναι στις *«σωστές»* ή *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις. Μόνο δύο (2) μαθητές απάντησαν *«σωστά»* (βλ. εικ. 15).




**Εικόνα 15: Δράση Δ' – *«Σωστή Απάντηση»***

Στις ερώτησεις οι παραπάνω μαθητές (με τις σωστές απαντήσεις) δήλωσαν:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

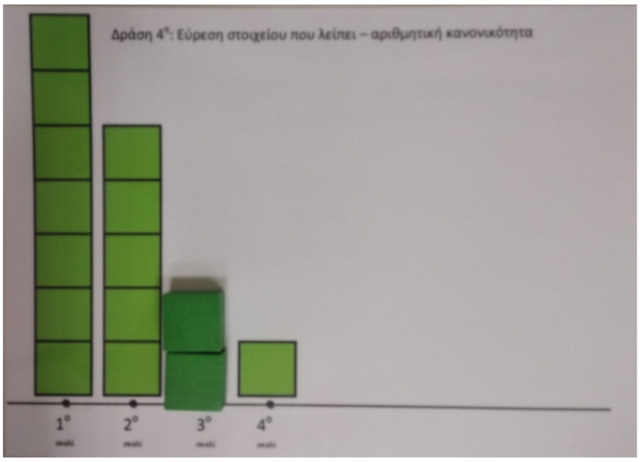
*Μ: ...έβαλα τρία γιατί έτσι ανεβαίνει σωστά η σκάλα....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως κατεβαίνει η σκάλα απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

*Μ: ....στο 1ο σκαλί έχει 7 στοιχεία, στο 2ο σκαλί έχει 5 στοιχεία, στο 3ο σκαλί έχει 3 στοιχεία και στο 4ο σκαλί έχει 1 στοιχείο....*

Παρατηρώντας το παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι οι δύο μαθητές βρίσκονται στην κατηγορία *της αντίληψης αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου*, γεγονός που τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, δίνουν μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προκύπτει από την αντιστίχιση στοιχείων.

Δύο (2) μαθητές απάντησαν *«σχεδόν σωστά»,* καθώς συνέχισαν τη φθίνουσα πορεία της κανονικότητας αλλά με λάθος πλήθος στοιχείων (βλ. εικ. 16).




**Εικόνα 16:** ***Δράση Δ' – «Σχεδόν σωστή απάντηση»***

Οι απαντήσεις των μαθητών αυτών στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

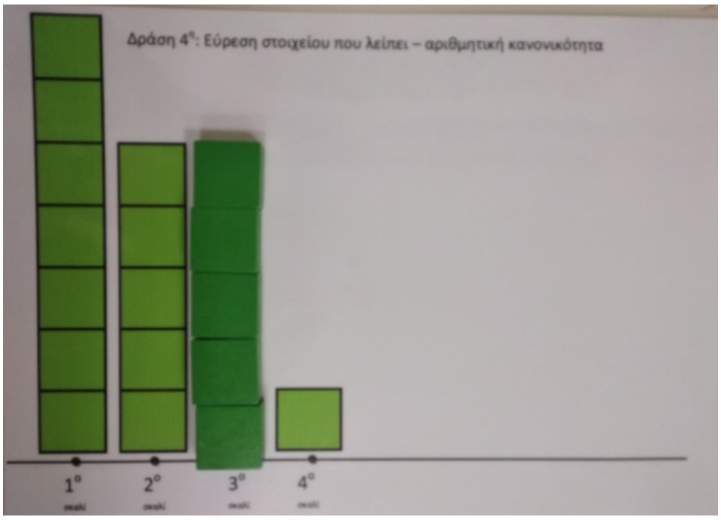
*Μ: ....αν έβαζα άλλο 1 θα ήτανε τοίχος και δεν θα μπορούσαν να ανέβουν (οι γίγαντες)....*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

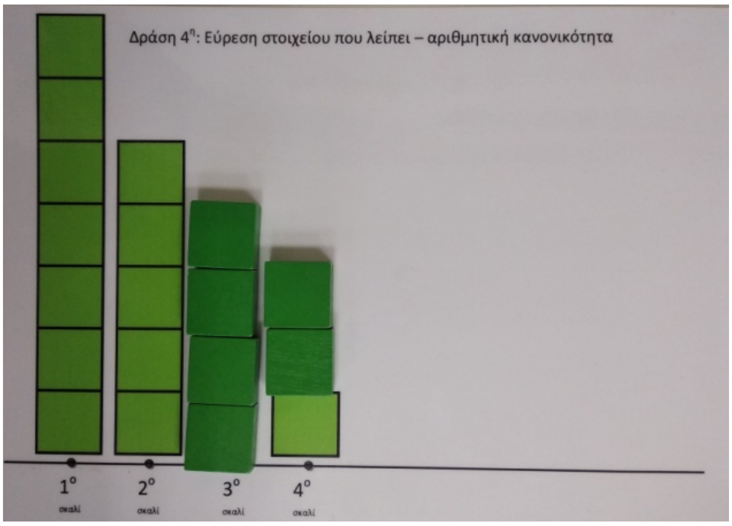
*Μ: .... επειδή ο γίναντας έχει μεγάλα πόδια, όμως στο τελευταίο θα χρειαστεί μικρό βηματάκι.*

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές συνεχίζουν τη φθίνουσα πορεία της σκάλας αλλά δεν μπορούν να βρουν το σύνολο των στοιχείων που λείπουν στην 3η θέση, συνεπώς βρίσκονται στην κατηγορία *της αντίληψης ποιοτικής αλλαγής*, δηλαδή παρατηρούν την κανονικότητα αλλά δεν μπορούν να την περιγράψουν, αναγνωρίζουν περισσότερες σχέσεις, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανονα, απλά δηλώνουν ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας αλλά δεν μπορούν να βρουν τον επόμενο αριθμό-στοιχείο της κανονικότητας.

Τέλος πέντε (5) μαθητές απάντησαν *«λάθος»* στην εύρεση του στοιχείου που λείπει, είτε με την τοποθέτηση ίσων στοιχείων με την προηγούμενη θέση της κανονικότητας (βλ. εικ. 17), είτε με την τοποθέτηση επιπλέων στοιχείων σε θέσεις της κανονικότητας (βλ. εικ. 18), ενδεικτικά αναφέρουμε το διάλογο με το συγκεκριμένο παράδειγμα.




Εικόνα 17: Δράση Δ΄ – «Λάθος απάντηση»




Εικόνα 18: Δράση Δ΄ – «Λάθος Απάντηση»

*Ε: Είναι σωστό έτσι όπως το έκανες; (έβαλε επιπλέον στοιχεία στο σκαλί Νο 1)*

*Μ: ...Ναι..*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....το σκέφτηκα, επειδή εδώ είχε εφτά σκαλάκια (εννοεί το 1ο σκαλί), εδώ είχε πέντε σκαλάκια (εννοεί το 2ο σκαλί), εδώ έχει τέσσερα σκαλάκια (εννοεί στο 3ο σκαλοπάτι, το οποίο ήταν κενό και έβαλε τέσσσερα στοιχεία) και εδώ έχει τρία σκαλάκια (εννοεί στο 4ο σκαλοπάτι στο οποίο πρόσθεσε ακόμα δύο τουβλάκια).*

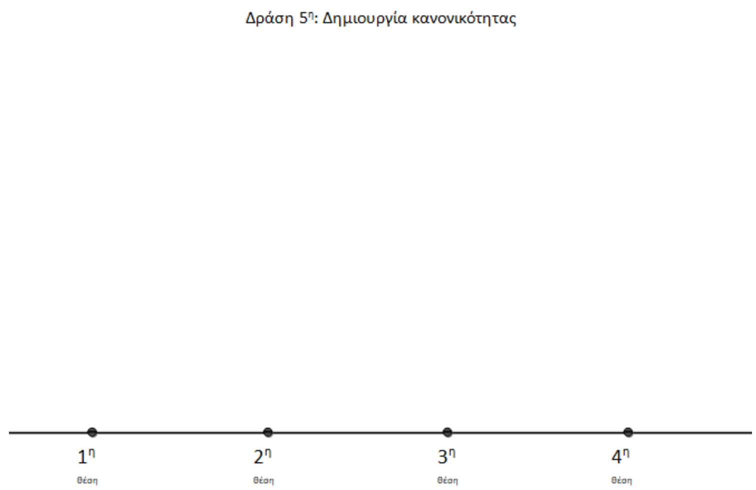
Οι παραπάνω μαθητές βρίσκονται στην κατηγορία *της οπτικής ολιστικής αντίληψης,* αναγνωρίζουν κάποιες σχέσεις, παρατηρούν απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα.

Συνοψίζοντας στην παρατήρηση της διαδικασίας του έργου απο τους μαθητές, της εύρεσης του στοιχείου που λείπει της αριθμητικής κανονικότητας παρατηρήθηκαν τρεις τρόποι εφαρμογής / τρόποι δράσης:

- Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές που έβλεπαν τα στοιχεία της κανονικότητας σαν σύνολα συνέχισαν την πορεία της φθίνουσας κανονικότητας χρησιμοποιώντας τον κανόνα της (ν-2) (δηλαδή 7 στοιχεία στη πρώτη μέρα, 5 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 3 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 1 στοιχείο στην τέταρτη μέρα)
- Στο δεύτερο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν τη φθίνουσα πορεία της κανονικότητας αλλά με λάθος αριθμό στοιχείων στην κενή θέση λιγότερα απο αυτό που απαιτούνταν (δηλαδή 7 στοιχεία στη πρώτη μέρα, 5 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 2 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 1 στοιχείο στην τέταρτη μέρα)
- Στον τρίτο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα αλλά βάζοντας ίδιο αριθμό στοιχείων με την προηγούμενη θέση (δηλαδή 7 στοιχεία στη πρώτη μέρα, 5 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 5 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 1 στοιχείο στην τέταρτη μέρα).
- Στον τέταρτο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα κρατώντας την πορεία του αλλά αλλάζοντας τον κανόνα απο (ν-2) σε (ν-1) στις τρεις θέσεις βάζοντας επιπλέον στοιχεία (δηλαδή 7 στοιχεία στη πρώτη μέρα, 5 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 4 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 3 στοιχεία στην τέταρτη μέρα).

Καταλήγοντας, στη Δ' Δράση παρατηρούμε ότι και εδώ οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά. Οι δύο (2) μαθητές βρίσκουν το σύνολο των στοιχείων που λείπουν αλλά αδυνατούν να εξηγήσουν τον κανόνα της κανονικότητας. Οι άλλοι δύο (2) μαθητές συνεχίζουν τη φθινουσα πορεία της κανονικότητας αλλά με αλλαγή του κανόνα και οι περισσότεροι απαντούν *«λάθος»,* τοποθετώντας τον ίδιο αριθμό στοιχείων με το προηγούμενο σκαλί, αντιστοιχώντας αριθμό στοιχείων και θέση κανονικότητας ή αλλάζοντας τελείως τη δομή της κανονικότητας.

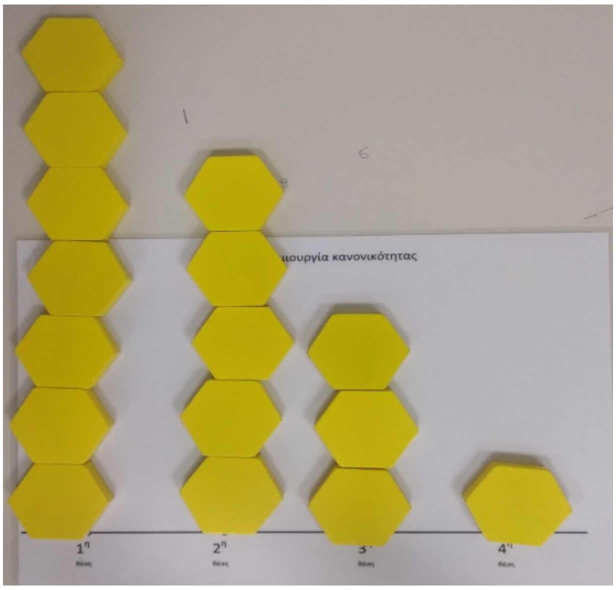
Στην Ε΄ Δράση που αφορά στη *«Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν»,* οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν μια δική τους κανονικότητα με τέσσερα σημεία-θέσεις (βλ. εικ. 19).




**Εικόνα 19:** ***Δράση Ε΄ - Δημιουργία κανονικότητας***

Απο το σύνολο των εννιά (9) μαθητών, έξι (6) μαθητές απάντησαν «σωστά», ένας (1) μαθητής απάντησε *«σχεδόν σωστά»* και δύο (2) μαθητές απάντησαν *«λάθος».*

Στη δράση αυτή ανταποκρίθηκαν σωστά τα περισσότερα παιδιά, τα έξι (6) από τα εννιά (9) παιδιά, όπως βλέπουμε στον πίνακα 6. Τα περισσότερα ακολούθησαν μία αύξουσα πορεία στις δημιουργίες τους με τον κανόνα (ν+1), μόνο ένας (1) μαθητής επέλεξε φθίνουσα πορεία με κανόνα (ν-2) (βλ. εικ. 20), παράδειγμα το οποίο και παραθέτουμε.



**Εικόνα 20: Δράση Ε΄ – «*Σωστή απάντηση*»**

*Ε: Μπορείς να φτιάξεις ένα δικό σου σχέδιο με όποιο ή όποια σχήματα θέλεις;*

*Μ: ....Ναι μπορώ! Θέλω μόνο αυτό (εξάγωνα). Θα φτιάξω μια σκάλα που θα κατεβαίνει..!*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

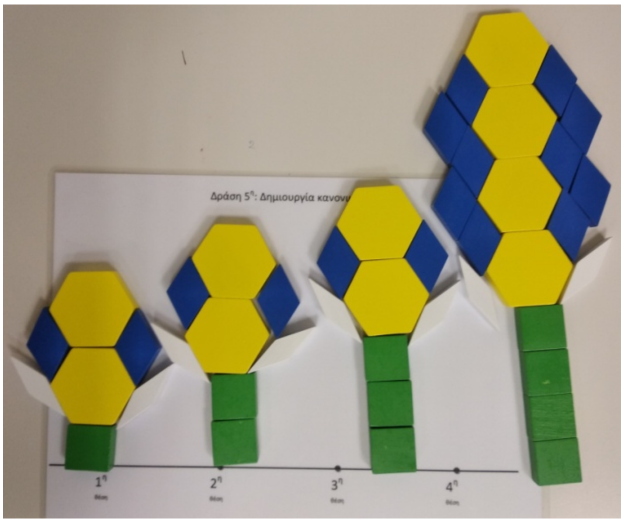
*Μ: ...θυμήθηκα ότι η σκάλα κατεβαίνει και σκέφτηκα πως κατεβαίνει, ήταν 7 στην $1^{η}$ θέση. Θυμήθηκα το 2 (δεύτερη θέση) είναι 5, επειδή κάνει μεγάλα βήματα (ο γίγαντας). Στο 3 (τρίτη θέση) είναι 3 (στοιχεία). Στο 4 (τέταρτη θέση) είναι 1 (στοιχείο). Έτσι τα θυμήθηκα!*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, τι έκανες στο έργο σου;*

*Μ: ....στην πρώτη θέση θα έχει εφτά! Στη δεύτερη θα έχει πέντε, στην Τρίτη θα έχει τρία και στην τέταρτη θα έχει ένα.....*

Παρατηρώντας το παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι τα έξι (6) παιδιά που απάντησαν σωστά σε αυτή τη δράση βρίσκονται *στην αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου,* καθώς αναγνωρίζουν τις σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, δίνουν μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προκύπτει από την αντιστοίχιση στοιχείων.

*«Σχεδόν σωστή»* απάντηση έδωσε μόνο ένας (1) μαθητής, καθώς η απάντησή του ακολουθεί ένα κανόνα στις πρώτες τρεις θέσεις, ενώ δεν τον συνεχίζει στην τέταρτη θέση (βλ. εικ. 21).



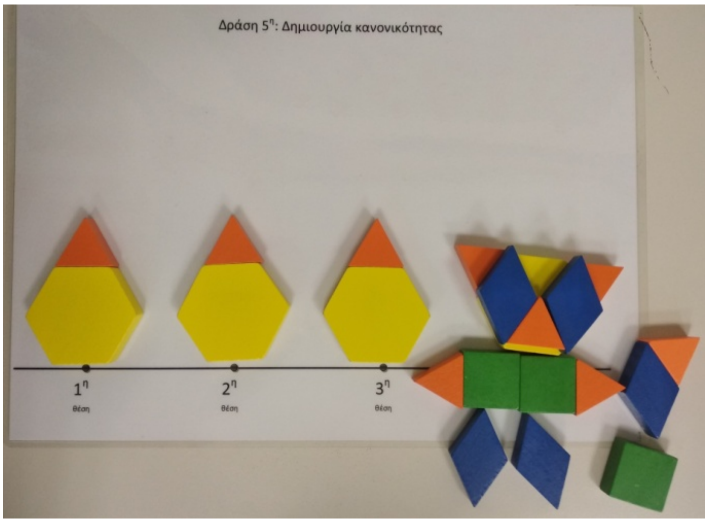

**Εικόνα 21: Δράση Ε΄ – *«Σχεδόν σωστή απάντηση»***

Βέβαια καθώς το σχέδιό του είναι πολύπλοκο, με πάρα πολλά στοιχεία σε κάθε θέση, δεν μπορεί να εξηγήσει σαφώς τη σκέψη του αλλά ούτε να το εξηγήσει με αριθμούς. Για τους παραπάνω λόγους η απάντησή του στην ερώτηση:

> *Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις; Εξήγησε μου λίγο παραπάνω.*
>
> *Μ: ....το σκέφτηκα, επειδή το είδα σε μια διαφήμιση, που έδειχνε κάποια τουβλάκια, να κάνουν κάποια δέντρα και να μεγαλώνει απο το μικρότερο στο μεγαλύτερο....*
>
> *Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, τι έκανες εδω;*
>
> *Μ: ...πρώτα βάζει το πρώτο τουβλάκι(τετράγωνο), μετά βάζεις τα δεντράκια (εξάγωνα), μετά βάζεις τους ρόμβους. Τώρα βάζεις τους ρόμβους στα άλλα (εννοεί τα πλάγια παραλληλόγραμμα).... Και μετά πάμε στο μεγαλύτερο! Μετά βάζεις αυτά τα δύο τουβλάκια (εννοεί τα τετράγωνα) και βάζει μετα τα ρομβάκια, και αυτά είναι οι μεγάλοι ρόμβοι (εννοεί τα πλάγια παραλληλόγραμμα) και αυτά είναι τα εξάγωνα.... Μετά πάμε στα μεγαλύτερα! Αυτά είναι τα τουβλάκια τα τετράγωνα, τα ρομβάκια, οι μεγάλοι ρόμβοι, τα εξαγωνάκια. Μετά βάζουμε τα τέσσερα τουβλάκια, τα τετράγωνα, μετά βάζουμε τους τέσσερις εξάγωνους και .... τους ρόμβους. Βάζουμε αυτά (Εννοεί τα πλάγια παραλληλόγραμμα) και έτοιμα...!*

Ο μαθητής με τη *«σχεδον σωστή»* απάντηση βρίσκεται στην κατηγορία της *αντίληψης ποιοτικής αλλαγής*, συνεπώς παρατηρεί την κανονικότητα αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει, αναγνωρίζει περισσότερες σχέσεις οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα, απλά δηλώνει ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώντας ή μικραίνοντας αλλά δεν μπορεί να βρει τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας.

Οι δύο *«λάθος»* απαντήσεις αφορούν στην έλλειψη παντελώς στοιχείων μιας κανονικότητας (βλ. εικ. 22) ενδεικτικά αναφέρουμε το διάλογο.




**Εικόνα 22: Δράση Ε΄ - *«Λάθος απάντηση»***

*Ε: Μπορείς να φτιάξεις ένα δικό σου σχέδιο με όποιο ή όποια σχήματα θέλεις;*

*Μ: ....δεν μπορώ να σχηματίσω κάτι δικό μου, τα εχω ξεχάσει όλα...*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...έκανα ένα ληστή. Στην 1η, 2η και 3η θέση (έκανα) κάτι σαν κερια...*

Οι λάθος απαντήσεις των μαθητών δείχνουν ότι οι μαθητές βρίσκονται στην κατηγορία της *οπτικής ολιστικής αντίληψης* και συνεπώς αναγνωρίζουν κάποιες σχέσεις, παρατηρούν απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα.

Συνοψίζοντας στην παρατήρηση της διαδικασίας του έργου απο τους μαθητές, *της δημιουργίας μιας δικής τους αριθμητικής ή γεωμετρικής κανονικότητας* παρατηρήθηκαν τρεις τρόποι εφαρμογής:

- Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές δημιούργησαν αύξουσες αριθμητικές κανονικότητες με τη χρήση του κανόνα (ν+1) κάνοντας αντιστοίχιση αριθμού θέσης και στοιχείων θέσης, βλέποντας τα στοιχεια σαν σύνολα (δηλαδή 1 στοιχείο στη πρώτη μέρα, 2 στοιχεία στη δεύτερη μέρα, 3 στοιχεία στην τρίτη μέρα και 4 στοιχεία στην τέταρτη μέρα).
- Στον δεύτερο τρόπο οι μαθητές δημιούργησαν αύξουσες γεωμετρικές κανονικότητες με τη χρήση του κανόνα (ν+1) διακρίνοντας σαν ξεχωριστά μέρη τα γεωμετρικά στοιχεία της κανονικότητας, κρατώντας σταθερο το ένα μέρος των γεωμετρικών στοιχείων και αλλάζοντας το άλλο (δηλαδή ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο και ένα ρόμβο στην πρώτη θέση, 1 πλάγιο παραλληλόγραμμο και 2 ρόμβους στη δεύτερη θέση, 1 πλάγιο παραλληλόγραμμο και 3 ρόμβους στην τρίτη θέση και τέλος 1 πλάγιο παραλληλόγραμμο και 4 ρόμβοι στην τέταρτη θέση).
- Στον τρίτο τρόπο οι μαθητές συνέχισαν την κανονικότητα κρατώντας την πορεία του αλλά έκαναν λάθος σε ένα στοιχείο της κανονικότητας, λόγω πλήθους στοιχείων.

Καταλήγοντας, στη Ε΄ Δράση παρατηρούμε ότι εδώ η πλειψηφία των μαθητών δημιουργεί δικές τους κανονικότητες, γεωμετρικές και αριθμητικές χρησιμοποιώντας ως επί το πλήστον τον κανόνα (ν+1) αλλά μη μπορώντας να τον εξηγήσουν, κάνουν μόνο περιγραφές των κανονικοτήτων τους, αντιστοιχίζοντας τη θέση της κανονικότητας τους με τον αριθμό των στοιχείων τους. *«Σχεδόν σωστή»* είναι η απάντηση ενός μαθητή με απλά “αλλαγή” του κανόνα της κανονικότητας στον τελευταίο όρο της ακολουθίας και *«λάθος»* οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν ιστορίες όπως «έχω κάνει την εξέλιξη της πεταλούδας» και «έναν άνθρωπο με κεριά».

Τελειώνοντας την ποιοτική ανάλυση των ευρημάτων πριν τη διδακτικη παρέμβαση παραθέτουμε ένα συγκεντρωτικό πίνακα, τον πίνακα 7 όπου παρουσιάζονται συνοπτικά και συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που αφορούν στις ικανότητες των μαθητών της τάξης - των εννιά (9) μαθητών προσχολικής ηλικίας πριν τη διδακτική παρέμβαση, ώστε να έχουμε μία γενική εικόνα των ικανοτήτων τους κατα έργο. Ομαδοποιώντας τις απαντήσεις των μαθητών έχουμε τις *«σωστές απαντήσεις»,* τις *«σχεδόν σωστές απαντήσεις»* και τις *«λάθος απαντήσεις»:*

- Οι *«σωστές»* απαντήσεις που αφορούν στη σωστή αναπαραγωγή, συνέχιση, μεταφορά, δημιουργία και εύρεση του στοιχείου που λείπει, χωρίς αλλαγή του κανόνα, της δομής, της μορφής της κανονικότητας.
- Οι *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις αφορούν στη συνέχιση της φθίνουσας ή αύξουσας πορείας της κανονικότητας αλλά με "αλλαγή" του κανόνα, της μορφής ή της δομής μιας κανονικότητας, ακόμα και όταν αυτή η αλλαγή παρουσιάζεται μόνο σε μία θέση της κανονικότητας.
- Οι *«λάθος»* αφορούν σε παντελής έλλειψη στοιχείων κανονικότητας.

Στον παρακάτω πίνακα, (πίνακας 16) παρουσιάζονται οι ικανότητες των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση.

**Πίνακας 16: Οι ικανότητες των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράσεις | *Σωστές απαντήσεις* (πριν) | *Σχεδόν Σωστές απαντήσεις* (πρν) |
|---|---|---|
| Α)Αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ' όψεως μιας εξελισσόμενης κανονικότητας | 9 | - |
| Β) Συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας | - | 5 |
| Γ) Μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους | 4 | 3 |
| Δ)Εύρεση στοιχείου που λείπει | 2 | 2 |
| Ε) Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν. | 6 | 1 |

Στον παραπάνω πίνακα (πίνακας 16) παρατηρείται ότι όλοι οι μαθητές τα καταφέρνουν στην Α΄ Δράση - *«αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ' όψεως μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»,* δεν τους δυσκόλεψε καθόλου η αντιγραφή και για το λόγο αυτό δεν συμπεριλήφθηκε στη διδακτική παρέμβαση. Θετικά αποτελέσματα παρουσιάζουν και στη Δράση Ε΄ – *«Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν»,* καθώς οι έξι (6) απο τους εννιά (9) τη δημιουργούν *«σωστά»,* επιλέγοντας οι πέντε (5) τον κανόνα (ν+1) και ένας (1) τον κανόνα (ν-2), με τους τέσσερις (4) απο αυτούς να δημιουργούν αριθμητικές κανονικότητες και τους δύο (2) γεωμετρικές και ένας (1) *«σχεδόν σωστά»* επιλέγοντας γεωμετρική κανονικότητα με χρήση του κανόνα (ν+1). Στις *«λανθασμένες απαντήσεις»* οι μαθητές δημιουργούν γεωμετρικές αναπαραστάσεις που δείχνουν εξέλιξη καταστάσεων (π.χ. την εξελιξη της πεταλουδας). Μία μέτρια κατάσταση δείχνουν τα αποτελέσματα του τεστ για τη Δράση Γ' καθώς απάντησαν *«σωστά»* μόνο τέσσερις (4) μαθητές επιλέγοντας και οι τέσσερις δύο στοιχεία για την κανονικότητα τους και χρήση του κανόνα (ν+1) και τρεις (3) έδωσαν *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις, είτε κρατώντας τον ίδιο κανόνα (ν+1) αλλα αλλάζοντας την κανονικότητα απο γεωμετρική σε αριθμητική (ένας μαθητής), είτε αλλάζοντας τον κανόνα απο (ν+1) σε (ν+2) κρατώντας όμως ίδια τη μορφή της κανονικότητας, γεωμετρική (δύο μαθητές). Στις *«λανθασμένες απαντήσεις»* οι μαθητές δημιουργούν γεωμετρικές αναπαράστασεις απλά με ίδιο αριθμό στοιχείων σε όλες τις θέσεις (δύο μαθητές). Σε γενικές γραμμές οι δράσεις Γ' και Ε΄παρουσιάζουν μία θετική εικόνα, δείχνουν ότι δεν δυσκολεύουν τόσο τους μαθητές, καθώς αντιλαμβάνονται οι περισσότεροι την εξέλιξη των κανονικοτήτων και είναι θέμα διδασκαλίας, ώστε να κατανοήσουν τον κανόνα της αλλαγής του και να απαντήσουν όλοι σωστά. Αντιθέτως η Δράση Β΄ – *«συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»* και η Δράση Δ΄ – «*Εύρεση στοιχείου που λείπει»* φαίνεται να τους δυσκόλεψαν ιδιαίτερα. Στη Δράση Β΄ κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να τη συνεχίσει *«σωστά»,* μόνο πέντε (5) τη συνέχισαν *«σχεδόν σωστά»* αλλά με αλλαγή του κανόνα απο (ν+2) σε (ν+1) με αποτέλεσμα το λάθος αριθμό-στοιχείων στη θέση Νο 4 (νούμερο τέσσερα). Οι «λανθασμένες απαντήσεις» αφορούσαν σκέψεις παρέμβασης στο σχέδιο με αντιστοίχηση αριθμού θέσης και στοιχείων θέσης – ένας (1) μαθητής και μη συνέχιση της κανονικότητας με τοποθέτηση αριθμού στοιχείων ίδιων με το προηγοηγούμενο σκαλοπάτι – τρεις (3) μαθητές. Στη Δράση Δ’ *«σωστά»* απάντησαν δύο (2) μαθητές, χωρίς ομως να μπορούν να εξηγήσουν τον κανόνα, *«σχεδόν σωστά»* απάντησαν δύο (2), αλλά αλλάζοντας τον κανόνα της κανονικότητας απο (ν-2) σε (ν-1) και με τους περισσότερους, πέντε (5), να απαντούν *«λάθος».* Οι σκέψεις των μαθητών που αφορούσαν σε *«λάθος απαντήσεις»* ήταν να επέμβουν στο σχέδιο της κανονικότητας με δύο τρόπους είτε να κάνουν και εδώ αντιστοίχιση αριθμού θέσης και στοιχείων κανονικότητας (τρεις μαθητές), είτε απλά τοποθετούσαν τον ίδιο αριθμό στοιχείων με την προηγούμενη θέση-σκαλοπάτι (δύο μαθητές).

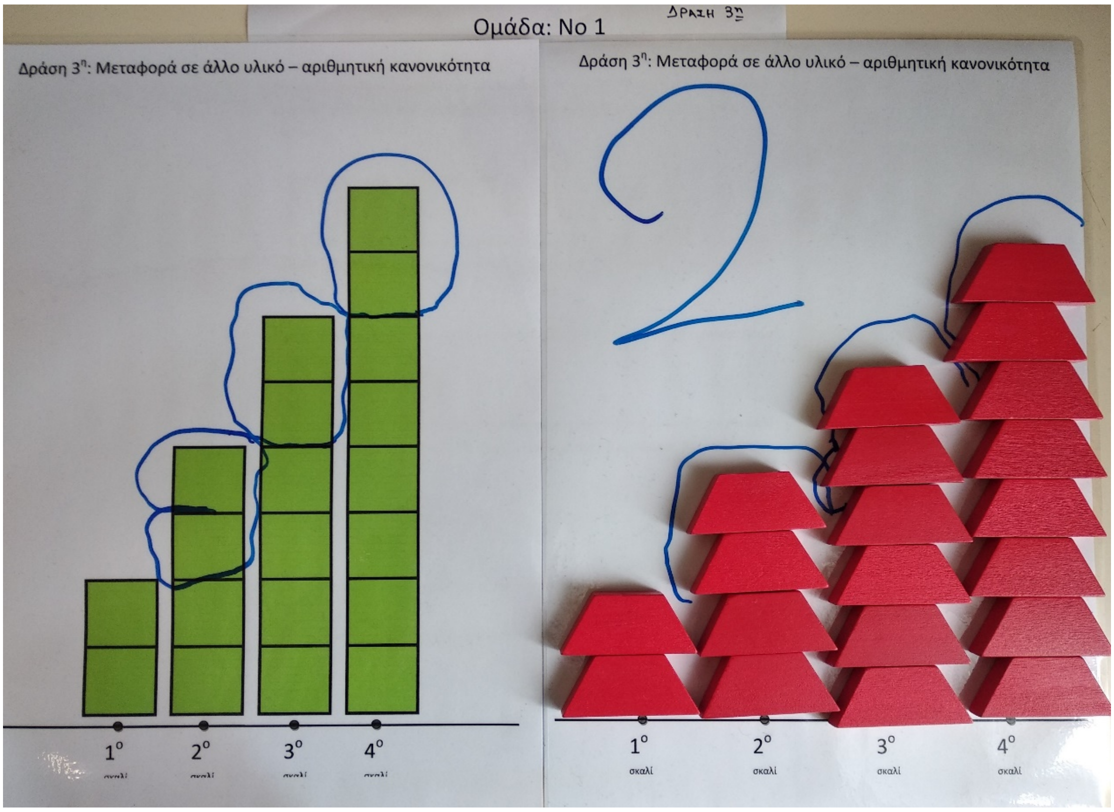
Εν κατακλείδη στην εφαρμογή του τεστ πριν τη διδακτική παρέμβαση παρατηρήθηκαν γενικότερα κάποια χαρακτηριστικά λάθη των μαθητών τα οποία και πρέπει να παραθέσουμε ώστε να ληφθούν υπόψη στη διδακτική προσέγγιση, με σκοπό να ξεπεραστούν και οι μαθητές να οδηγηθούν ευκολότερα, αρχικά στην εύρεση του κανονα των κανονικοτήτων και μετέπειτα στην γενίκευσή του σε επόμενους και κοντινούς όρους της ακολουθίας. Έτσι συγκεντρωτικά αναφέρουμε τα χαρακτηριστικά λάθη των μαθητών στην εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης των έργων τα οποία όλα αφορούν στην αντιστοίχιση:

- Αντιστοίχιση του αριθμού-σύμβολο που σε μία κανονικότητα κατείχε τον αριθμό της θέσης της κανονικότητας π.χ. 1η θέση, 2η θέση, 3η θέση, με το σύνολο των στοιχείων αυτής, δηλαδή στη θέση Νο 1 βάζουν 1 στοιχείο, στη θέση Νο 2 βάζουν 2 στοιχεία, στη θέση Νο 3 βάζουν 3 στοιχεία...
- Αντιστοίχιση του αριθμού-συμβόλου που σε μία κανονικότητα κατείχε τον αριθμό της θέσης της κανονικότητας π.χ. 2η θέση, με ένα μέρος του συνόλου της θέσης και όχι με όλο το σύνολο, δηλαδή σε μία γεωμετρική κανονικότητα που τη σύνθεσή της αποτελούν ένα τετράγωνο το οποίο είναι σταθερό μέρος σε όλες τις θέσεις και τραπέζια τα οποία έχουν εξελικτική πορεία, οι μαθητές τείνουν να αγνοούν το σταθερό σχήμα και έκαναν αντιστοίχιση αριθμού-θέσης με το σύνολο των τραπέζιων σχημάτων.
- Ίδια ποσότητα στοιχείων με την προγενέστερη θέση της κανονικότητας.

### Γ.2.2. Διδακτική παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση έγινε με βάση τον αρχικό της σχεδιασμό. Οι δράσεις συνοδεύτηκαν απο επικοινωνιακά πλαίσια, ερωτήσεις που βοηθούν και προάγουν την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών (όπως αυτές παρουσιάστηκαν στον αρχικό σχεδιασμό) και απο κατάλληλο επιλεγμένο εκπαιδευτικό υλικό (τα pattern blocks, πλαστικοποιημένους πίνακες Α4 και Α3 και μαρκαδόρους). Σε όλες τις δράσεις συμμετείχαν όλοι οι μαθητές της τάξης (9 μαθητές) και οι δράσεις διήρκησαν απο 35 έως 40 λεπτά.

Σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και με βάση αυτά που διαπιστώθηκαν στην αρχική αξιολόγηση των μαθητών, δόθηκε έμφαση στην πορεία των έργων, δηλαδή αν αυτά είχαν αύξουσα ή φθίνουσα πορεία, ώστε να γίνει πλήρως κατανοητή η πορεία τους απο τους μαθητές, γινόταν σύγκριση των στοιχείων μεταξύ τους από θέση σε θέση και σε σχέση με τη θέση που κατείχαν, ώστε να κατανοήσουν ότι από θέση σε θέση θα επέρχεται μία αλλαλή. Δόθηκε έμφαση στα στοιχεία της θέσης σαν σύνολα, χρησιμοποιώντας αριθμούς π.χ. η $2^η$ θέση – 4 στοιχεία και όχι σαν μεμονομένα συνόλα γεωμετρικών σχήματων π.χ. η $2^η$ θέση – 2 τετράγωνα και 2 τρίγωνα. Οι μαθητές καλούνταν να μη χρησιμοποιούν σχέσεις μεγεθών αλλά να μετρούν τα στοιχεία των θέσεων των κανονικοτήτων, ώστε να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και τέλος με τη χρήση ενός μαρκαδόρου μαυροπίνακα γινόταν απομόνωση των στοιχείων αλλαγής της εξέλιξης των κανονικοτήτων απο θέση σε θέση με βάση τον κανόνα τους (βλ εικ. 23).




Εικόνα 23: Δράση Γ’ – Διδακτική παρέμβαση – *“Απομόνωση του κανόνα αλλαγής”*

Η συνεργασία των μελών των ομάδων ήταν επικοδομητική καθώς βοηθούσε ο ένας τον άλλο, και προσπαθούσαν να βρουν λύση ακόμα και όταν οι απόψεις τους για το έργο ήταν διαφορετικές.

Ο έλεγχος των ομάδων απο τις ομάδες ελέγχου λειτούργησε άψογα καθώς οι μαθητές δέχονταν τις απόψεις των συμμαθητών τους και επιδέχονταν τη βοήθειά τους. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα λειτούργησε και ως αυτοδιόρθωση του σχεδίου της ομάδας ελέγχου, καθώς κατα τη διαδικασία ελέγχου του έργου της ομάδας διαπίστωσαν λάθη στο δικό τους έργο, που τελικά διόρθωσαν. Κάθε ομάδα είχε μπροστά της ένα έργο και προσπαθούσε να βρει τη λύση του, μετά ερχόταν η ομάδα ελέγχου ώστε να πει αν το έργο ήταν *«σωστό»* ή *«λάθος»* κατά τη δική της άποψη και στη συνέχεια η ομάδα που έκανε το έργο ανέλυε τη σκέψη της στην ολομέλεια. Στόχος σε κάθε ομάδα και έργο ήταν η ανάδειξη του κανόνα της κανονικότητας (αφορά όλες τις δράσεις Β’, Γ’, Δ’, Ε’ και ΣΤ’ ), η πρόβλεψη των επόμενων-κοντινών όρων της ακολουθίας, 5$^{ης}$ και 6$^{ης}$ θέσης (αφορά τις δράσεις Β’ Γ’, Δ’ και Ε’) και την πρόβλεψη κοντινών όρων της ακολουθίας με γενίκευση έως την 20η θέση (αφορά τη δράση ΣΤ’).

### Γ.2.3. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας μετά τη διδακτική παρέμβαση

Στον πίνακα 17 παρουσιάζονται συνοπτικά και συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που αφορούν στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Οι απαντήσεις των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής: στις *«σωστές απαντήσεις»* το παιδί συνεχίζει, μεταφέρει, βρίσκει το στοιχείο που λείπει και δημιουργεί μια δική του κανονικότητα σωστά, χρησιμοποιώντας έναν κανόνα. Στις *«σχεδόν σωστές απαντήσεις»* το παιδί συνεχίζει, μεταφέρει, βρίσκει το στοιχείο που λείπει και δημιουργεί μια δική του κανονικότητα, με φθίνουσα ή αύξουσα πορεία αλλά χωρίς τη χρήση του κανόνα, προσθέτοντας λιγότερα ή περισσότερα στοιχεία σε κάποιον όρο της ακολουθίας. Τέλος στις *«λάθος απαντήσεις»* το παιδί τοποθετεί στοιχεία αυθαίρετα, που δεν θυμίζουν σε τίποτα μια κανονικότητα.

**Πίνακας 17: Οι ικανότητες των μαθητών στις δράσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράσεις | *Σωστές απαντήσεις* | *Σχεδόν Σωστές απαντήσεις* |
|---|---|---|
| Β) Συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας | 8 | 1 |
| Γ) Μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους | 9 | - |
| Δ)Εύρεση στοιχείου που λείπει | 7 | 2 |
| Ε) Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν. | 9 | 0 |

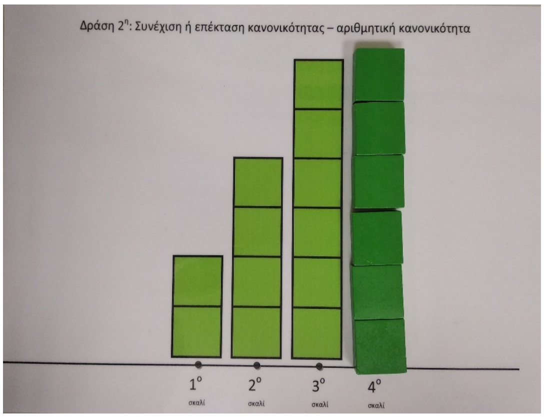
Μετά από τη μελέτη του πίνακα 17, βλέπουμε μία σημαντική βελτίωση στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς τις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, σε ποσοστά που σε κάποιες δράσεις αγγίζουν το ποσοστό του 100% των συμμετεχόντων. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις ικανότητες των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση με τα ευρήματα της μελέτης αναλυτικότερα και στο τέλος θα τα συγκρίνουμε με τις ικανότητες των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Οι ικανότητες των μαθητών αναλυτικότερα σε κάθε δράση με συγκριτικά αποτελέσματα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

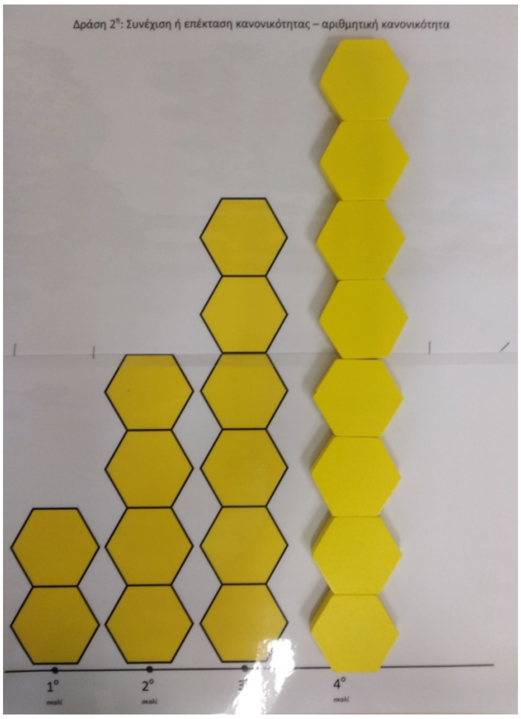
**Πίνακας 18: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση Β΄ πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράση Β΄- | Μαθητές (πριν) | Μαθητές (μετά) |
|---|---|---|
| *Σωστές απαντήσεις* | 0 | 8 |
| *Σχεδόν σωστές απαντήσεις* | 5 | 1 |
| Σύνολο μαθητών | 9 | 9 |

Στην Β΄ Δράση που αφορά στη *«Συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»* (πίνακας 18), οι μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στις ικανότητές τους, ως προς τη Β΄ Δράση, καθώς τρεις μαθητές μεταπήδησαν από τη *«λάθος απάντηση»* (βλ. εικ. 24), στη *«σωστή απάντηση»* (βλ. εικ. 25), με ενδεικτικό παράδειγμα πριν και μετά.




**Εικόνα 24: Δράση Β΄ – *«Λάθος απάντηση»* πριν τη διδακτική παρέμβαση**




**Εικόνα 25: Δράση Β΄ - «*Σωστή απάντηση*» μετά τη διδακτική παρέμβαση**

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...σκέφτηκα να το κάνω ίδιο με το προηγούμενο....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως ανεβαίνει η σκάλα απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

*Μ: ....αυτό (δείχνει το σκαλί Νο 1) έχει 2. Αυτό (δείχνει το σκαλί Νο 2) έχει 4. Αυτο (δείχνει το σκαλί Νο 3) έχει 6. Αυτό (δείχνει το σκαλί Νο 4) έχει έξι...*

Ο μαθητής πριν τη διδακτική παρέμβαση δεν αναφέρει καθόλου τη θέση σκαλοπάτι ως αριθμό θέσης, δηλαδή $1^{ο}$ σκαλί, $2^{ο}$ σκαλί .... απλά χρησιμοποιεί τη λέξη «αυτό».

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: .... η σκάλα μου ανεβαίνει...*

*Ε: Πόσα κομμάτια έβαλες στο $4^{ο}$ σκαλοπάτι και γιατί;*

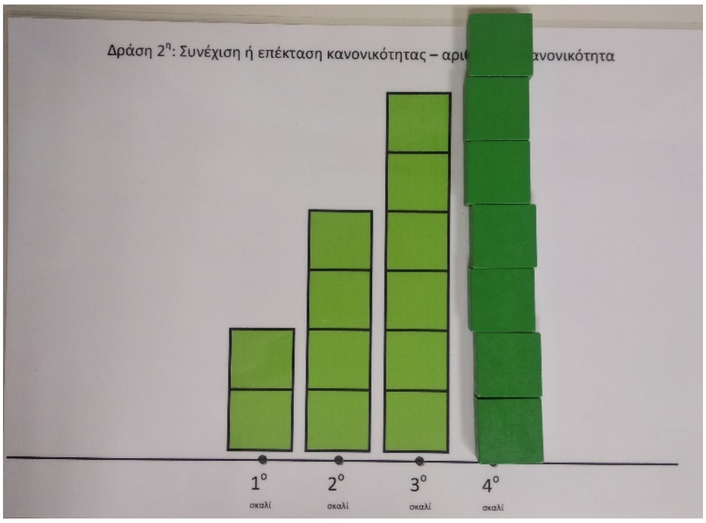
*Μ:....έβαλα οχτω.... γιατί το 3ο σκαλοπάτι είχε έξι.... το 2ο είχε τέσσερα και το 1ο είχε δύο....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε έναν φίλο σου χρησιμοποιώντας έναν αριθμό πως ανεβαίνει η σκάλα σου απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

*Μ: ..δύο...*

Το παραπάνω πάραδειγμα μας δείχνει ότι έχει επέλθει αλλαγή στις ικανότητες αυτών των μαθητών καθώς απο την *οπτική ολιστική αντίληψη*, η οποία τους επέτρεπε να αναγνωρίζουν κάποιες σχέσεις, να παρατηρούν απλές ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν κανέναν κανόνα μεταπήδησαν στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης,* γεγονός που τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις και δηλώνοντας ότι η κανονικότητα εξελίσσεται ανα δύο στοιχεία.

Πέντε μαθητές από τη *«σχεδόν σωστή απάντηση»* (βλ. εικ 26) στη *«σωστή απάντηση»* (βλ. εικ 25) με ενδεικτικό παράδειγμα:




**Εικόνα 26: Δράση Β΄ – «*Σχεδόν Σωστή απάντηση*» πριν τη διδακτική παρέμβαση**

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...να το κάνω πιο ψηλό, το σκαλί Νο 3 είχε έξι άρα το Νο 4 θα έχει εφτά...*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως ανεβαίνει η σκάλα σου απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

*Μ: ....το 1ο (σκαλί) είχε 2 σκαλοπάτια, το 2ο έχει 2+2 να είναι 4 σκαλοπάτια, το 3ο έχει 6 και μετά (στο 4ο σκαλί) πρέπει να κάνεις (βάλεις) άλλο ένα σκαλοπάτι για να ανέβει!*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...Ναι! Στο 4ο σκαλί έβαλα οχτώ!*

*Ε: Εξήγησέ μου λίγο παραπάνω!*

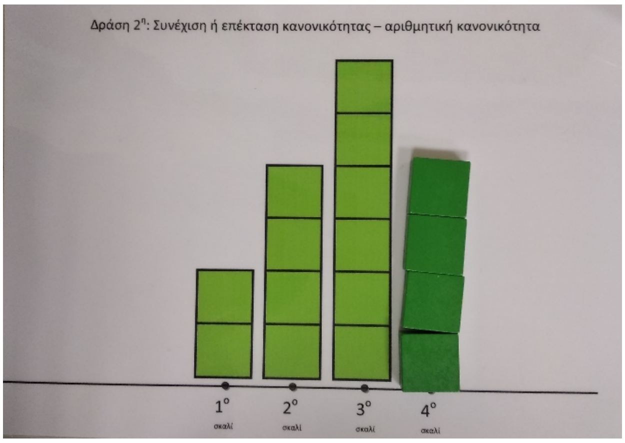
*Μ: ....είδα αυτό (εννοεί το σκαλί Νο 2) που έχει δύο παραπάνω απο το 1 (σκαλί Νο 1) και έτσι εγω έβαλα δύο παραπάνω (εννοεί στο σκαλί Νο 4 απο το σκαλί Νο 3)....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας ένα αριθμό, πως ανεβαίνει η σκάλα σου απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

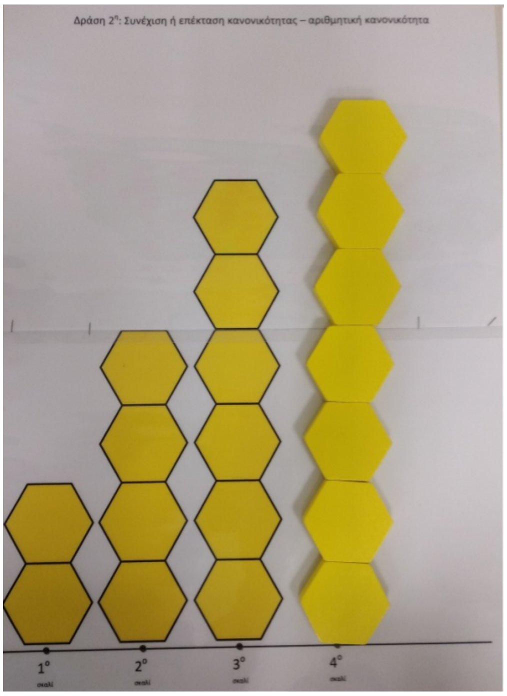
*Μ:...βάζουμε δύο.....*

Το παραπάνω πάραδειγμα μας δείχνει ότι έχει επέλθει αλλαγή στις ικανότητες αυτών των τεσσάρων (4) μαθητών καθώς απο την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής*, η οποία τους επέτρεπε να παρατηρούν την κανονικότητα, αλλά να μην μπορούν να την περιγράψουν και να αναγνωρίζουν περισσότερες σχέσεις μεταξύ των αριθμών, αλλά οι σχέσεις που διακρίνουν να μην δομούν τον κανόνα και απλά να δηλώνουν και να πράττουν με τη σκέψη ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας χωρίς να μπορούν να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας, μεταπήδησαν στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης,* γεγονός που τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις και δηλώνοντας ότι η κανονικότητα εξελίσσεται ανα δύο στοιχεία.

Τέλος μόνο μία (1) μαθήτρια από τη *«λάθος απάντηση»* (βλ. εικ. 27), μεταπήδησε στη *«σχεδόν σωστή απάντηση»* (βλ. εικ 28) με τη συνέχιση της αύξουσας κανονικότητας αλλά με μείον ένα στοιχείο στην τέταρτη θέση ενδεικτικό παράδειγμα του έργου.




**Εικόνα 27: Δράση Β – Λάθος απάντηση πριν τη διδακτική παρέμβαση**




**Εικόνα 28: Δράση Β – *«Σχεδόν σωστή απάντηση»* μετά τη διδακτική παρέμβαση**

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...βλέπω το τέσσερα (4) και γι αυτό έβαλα 4 τετράγωνα.....*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις λίγο παραπάνω τη σκεψη σου;*

*Μ: ....δηλαδή πρέπει να έχει το 1ο σκαλί – 1 τετράγωνο, το 2ο σκαλί – 2 τετράγωνα, το 3ο σκαλι – 3 τετράγωνα και το 4ο – 4 τετράγωνα....*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....μεγαλώνει η σκάλα μου... έβαλα εφτά....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας ένα αριθμό, πως ανεβαίνει η σκάλα σου απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

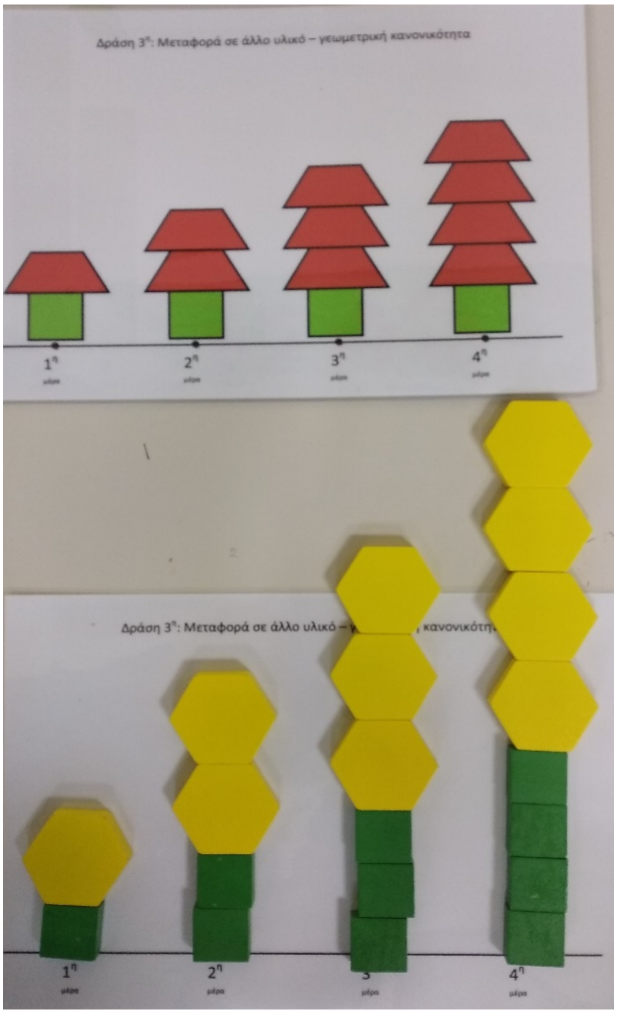
*Μ: ....απο μία μέρα... Μεγαλώνει επειδή βάζουμε 2, 4, εδώ βάζουμε, (μετράει) 1,2,3,4,5,6, (βάζουμε) 6 και εδλω έπρεπε να βάλουμε 7.....*

Το παραπάνω πάραδειγμα μας δείχνει ότι έχει επέλθει μία αλλαγή στις ικανότητες του μαθητή καθώς από την *οπτική ολιστική αντίληψη*, δηλαδή την αναγνώριση κάποιων σχέσεων, την παρατήρηση απλά κάποιων ιδιοτήτων των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα της κανονικότητας μεταπήδησε στη επόμενη κατηγορίας ικανοτήτων που αφορά την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής*, η οποία της επέτρεπει να παρατηρεί την κανονικότητα αλλά να μην μπορεί να την περιγράψει, να μην μπορεί να αναγνωρίσει περισσότερες σχέσεις μεταξύ των αριθμών, οι οποίες όμως και αυτές δεν δομούν τον κανόνα και απλά ο μαθητής δηλώνει ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας, χωρίς όμως να μπορεί να βρει τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας.

**Πίνακας 19: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση Γ΄ πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

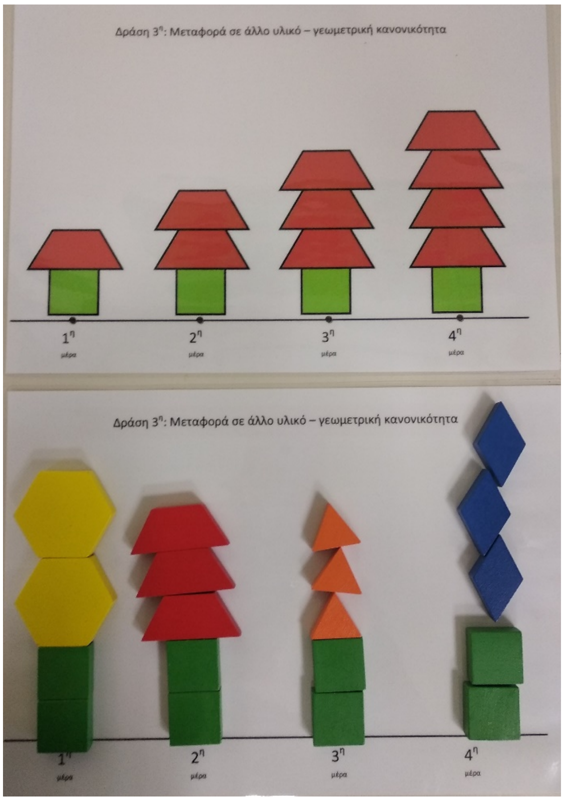
| Δράση Γ΄- | Μαθητές (πριν) | Μαθητές (μετά) |
|---|---|---|
| *Σωστές απαντήσεις* | 4 | 9 |
| *Σχεδόν σωστές απαντήσεις* | 3 | - |
| Σύνολο μαθητών | 9 | 9 |

Στην Γ' δράση που αφορά στη *«Μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους»* (πίνακας 19), οι μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στις ικανότητές τους, καθώς όλοι ολοκλήρωσαν με επιτυχία τη δράση και μετέφεραν τη δοσμένη κανονικότητα σε ένα άλλο υλικό. Οι τρεις *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις μεταπήδησαν στις *«σωστές».* Οι μαθητές αυτοί δημιούργησαν δικές τους κανονικότητες πριν τη διδακτική παρέμβαση αλλά τα σχεδιά τους ήταν *«σχέδον σωστά»* καθώς είτε άλλαξαν τον κανόνα, είτε τη μορφή, είτε τη δομή της κανονικότητας, (όπως έχουμε ήδη αναλύσει στη Γ΄ Δράση πριν τη διδακτική παρέμβαση) αλλά ακολούθησαν ένα δικό τους σωστό κανόνα σε κανονικότητες αύξουσας πορείας (βλ. εικ 29).

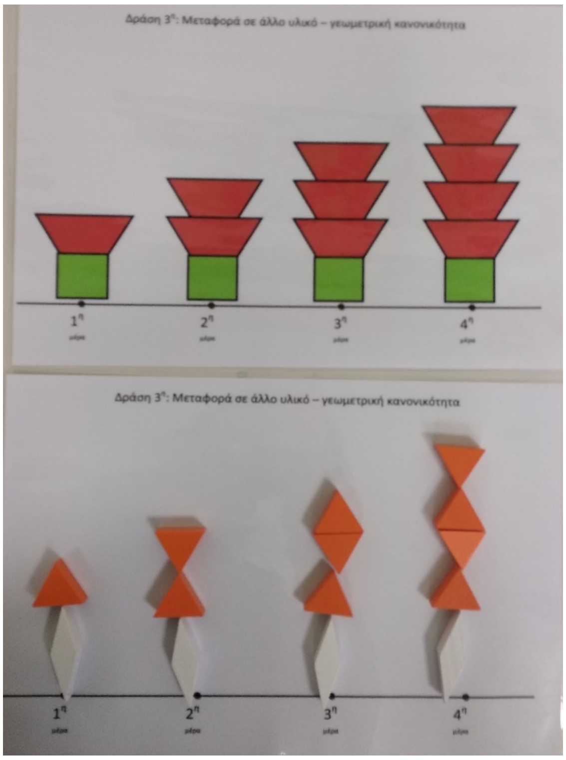



**Εικόνα 29: Δράση Γ΄ – «*Σχεδόν σωστή απάντηση*» πριν τη διδακτική προσέγγιση**

Αξίζει να αναλυθεί ο τρόπος σκέψης των μαθητών που στο συγκεκριμένο έργο είχαν δώσει *«λάθος»* απαντήσεις (βλ. εικ. 30) πριν τη διδακτική παρέμβαση και μετά τη διδακτική μεταπήδησαν στη *«σωστή απάντηση»* (βλ. εικ. 31).




**Εικόνα 30: Δράση Γ΄ – «*Λάθος απάντηση*» πριν τη διδακτική προσέγγιση**




**Εικόνα 31: Δράση Γ΄ - «*Σωστή απάντηση*» μετά τη διδακτική προσέγγιση**

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...είναι ίδιο γιατί έχει τα ίδια απο κάτω και απο πάνω....*

*Ε: Μπορείς να εξηγησεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, πως μεγαλώνει το σχέδιό σου απο τη μία μέρα στην άλλη;*

*Μ: ...την 1η μέρα – 2 κορμούς και 2 εξάγωνα, τη 2η μέρα – 2 κορμούς και 3 τραπέζια, την 3η μέρα- 2 κορμούς και 3 τρίγωνα, την 4η μέρα – 2 κορμούς και 3 πλάγια παραλληλόγραμμα....*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....το 1ο σκαλί έχει 2, το 2ο σκαλί έχει 4, το 3ο έχει 6, το 4ο έχει 8....*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φιλο σου χρησιμοποιώντας ένα αριθμό, πως ανεβαίνει η σκάλα σου απο το ένα σκαλοπάτι στο άλλο;*

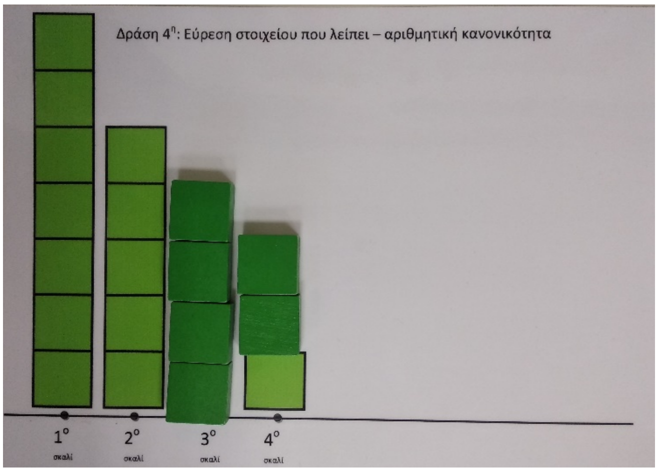
*Μ: ..με δύο.*

Το παραπάνω πάραδειγμα μας δείχνει ότι έχει επέλθει μία αλλαγή στις ικανότητες όλων των μαθητών οι οποίοι μεταπήδησαν από την *οπτική ολιστική αντίληψη* (αφορά τους μαθητές με τις *«λάθος απαντήσεις»*), την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής* (αφορά τους μαθητές με τις *«σχεδόν σωστές απαντήσεις»*) και την *αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου (*αφορά τους μαθητές με τις *«σωστές απαντήσεις»)* μεταπήδησαν στην κατηγορία της *αντίληψης της γενικής αριθμητικής σχέσης* γεγονός που τους επιτρέπει να αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις της, δηλώνοντας ότι η κανονικότητα εξελίσσεται ανα δύο στοιχεία.

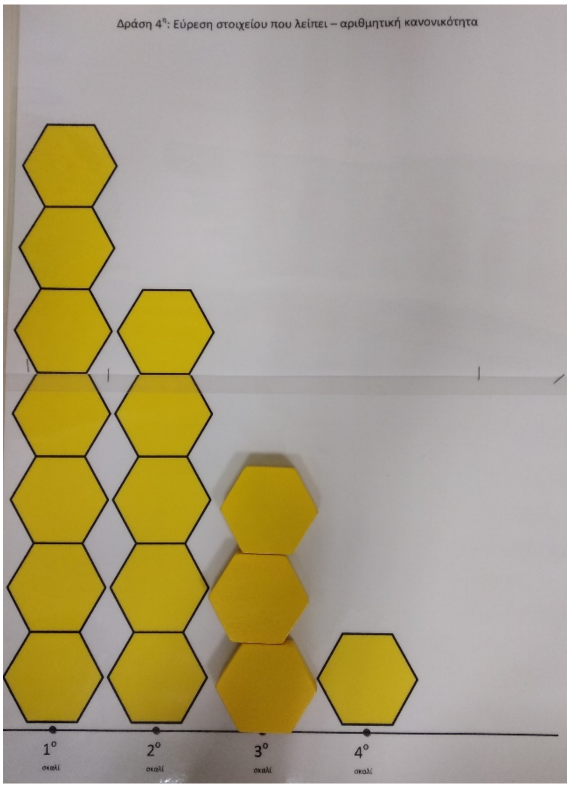
**Πίνακας 20: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση Δ΄ πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράση Δ΄- | Μαθητές (πριν) | Μαθητές (μετά) |
|---|---|---|
| *Σωστές απαντήσεις* | 2 | 7 |
| *Σχεδόν σωστές απαντήσεις* | 2 | 2 |
| Σύνολο μαθητών | 9 | 9 |

Στη Δ΄ Δράση που αφορά στην *«Εύρεση στοιχείου που λείπει»* (πίνακας 20), οι μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση βελτιώθηκαν όλοι, καθώς οι περισσότεροι μεταπήδησαν στο επόμενο στάδιο και τρεις (3) μαθητές από τη *«λάθος απάντηση»* (βλ. εικ. 32) πήγαν απευθείας στη «σωστή απάντηση» (βλ. εικ. 33).




**Εικόνα 32: Δράση Δ΄ – *«Λάθος απάντηση»* πριν τη διδακτική παρέμβαση**




**Εικόνα 33: Δράση Δ΄ - *«Σωστή απάντηση»* μετά τη διδακτική παρέμβαση**

Αξιζει και πάλι να παρατεθούν οι απαντήσεις αυτών των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Είναι σωστό έτσι όπως το έκανες; (έβαλε επιπλέον στοιχεία στο σκαλί Νο 1)*

*Μ: ...Ναι..*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...το σκέφτηκα, επειδή εδώ είχε εφτά σκαλάκια (εννοεί το 1^ο σκαλί), εδώ είχε πέντε σκαλάκια (εννοεί το 2^ο σκαλί), εδώ έχει τέσσερα σκαλάκια (εννοεί στο 3^ο σκαλοπάτι, το οποίο ήταν κενό και έβαλε τέσσσερα στοιχεία) και εδώ έχει τρία σκαλάκια (εννοεί στο 4^ο σκαλοπάτι στο οποίο πρόσθεσε ακόμα δύο τουβλάκια)....*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

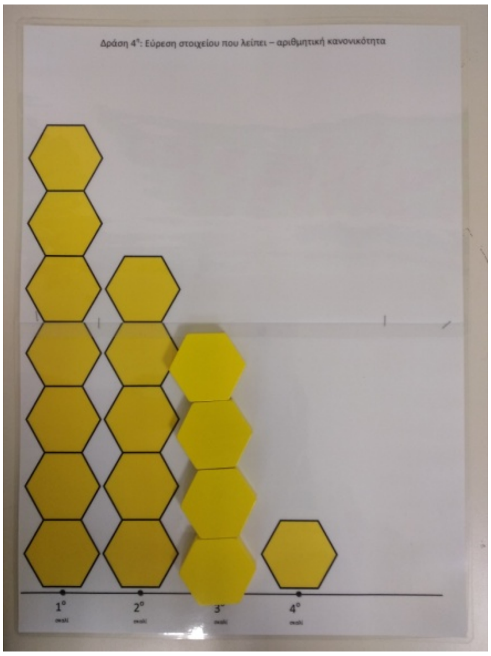
*Ε: Είναι σωστό έτσι όπως το έκανες;*

*Μ: ...Ναι...*

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ....το 1^ο σκαλί έχει (μετράει) 7, το 2^ο έχει (μετράει) 5, το 3^ο έχει 4........... (το παρατηρεί λίγο) .... όχι έχει 3..... (βγάζει το ένα) και το 4^ο έχει 1....*

Οι μαθητές που μεταπήδησαν στη *«σχεδόν σωστή απάντηση»* συνέχισαν την κανονικότητα δηλώνοντας, ότι φθίνει αλλά χωρίς να μπορούν να βρουν τον κανόνα και να τοποθετήσουν το σωστό αριθμό των στοιχείων (βλ. εικ. 34).



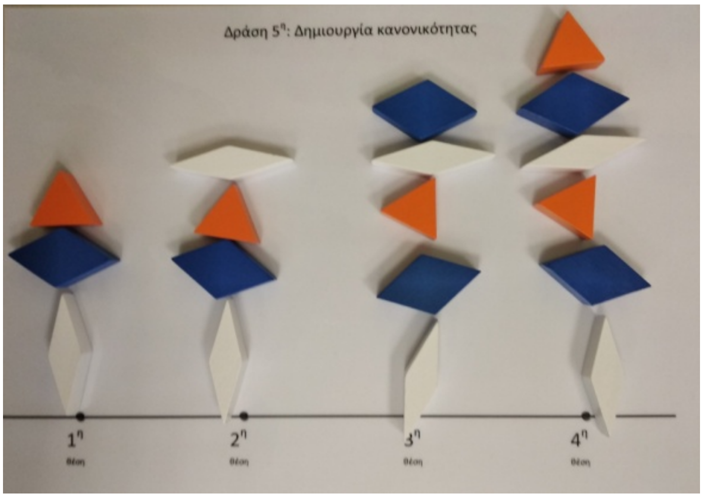

Εικόνα 34: Δράση Δ' – «*Σχεδόν σωστή απάντηση*» μετά τη διδακτική παρέμβαση

Στην παραπάνω δρασή φαίνεται ότι το έργο της εύρεσης στοιχείου που λείπει δυσκόλευε τους μαθητές καθώς μόνο δύο (2) μαθητες βρήκαν το στοιχείο που λείπει πριν τη διδακτική παρέμβαση, δύο (2) είχαν *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις και όλοι οι υπόλοιποι έδωσαν *«λάθος»* απάντηση. Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρούμε ότι βελτιώθηκαν οι ικανότητες σχεδόν όλων των μαθητών και μεταπήδησαν οι εφτά (7) απο τους εννιά (9) στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, καθώς αναγνώρισαν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις δηλώνοντας ότι εξελίσσεται – κατεβαίνοντας ανα δύο στοιχεία. Οι δύο (2) μαθήτριες μεταπήδησαν απο την *οπτική ολιστική αντίληψη* στην *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής,* καθώς δηλώνουν ότι η κανονικότητα μικραίνει αλλά δεν μπορούν να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας.

Πίνακας 21: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση Ε΄ πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

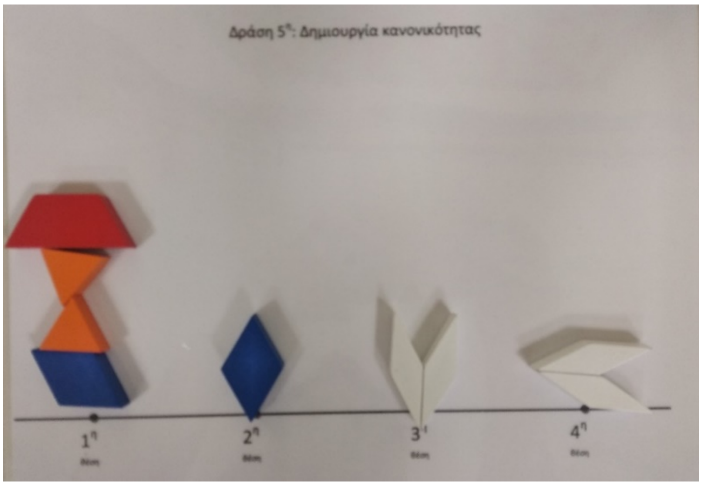
| Δράση Ε΄ | Μαθητές (πριν) | Μαθητές (μετά) |
|---|---|---|
| *Σωστές απαντήσεις* | 6 | 9 |
| *Σχεδόν σωστές απαντήσεις* | 1 | - |
| Σύνολο μαθητών | 9 | 9 |

Στην Ε’ Δράση που αφορά στη *«Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν»* (πίνακας 21), οι μαθητές παρουσίασαν *«σωστές», «σχεδόν σωστές»* και *«λάθος»* απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση. Η δράση αυτή δεν φάνηκε να τους δυσκολεύει ιδιαίτερα, καθώς πριν την διδακτική παρέμβαση έξι (6) μαθητές δημιούργησαν *«σωστά»* μία δικής τους κανονικότητα, ένας (1) μαθητής δημιούργησε μία *«σχεδόν σωστή»* κανονικότητα και δύο (2) μαθητές δημιουργησαν σχέδια που ήταν *«λάθος».* Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρουσίασαν βελτίωση οι μαθητές που σχέδον τα είχαν καταφέρει με *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις αλλά και οι μαθητές που δεν τα είχαν καταφέρει καθόλου δημιουργώντας ένα σχέδιο το οποίο δεν θύμιζε σε τίποτα μία κανονικότητα. Αυτό είχαν ως αποτέλεμα όλοι οι μαθητές να πετύχουν στα έργα τους δημιουργώντας *«σωστά»* σχέδια κανονικοτήτων. (βλ. εικ. 35).

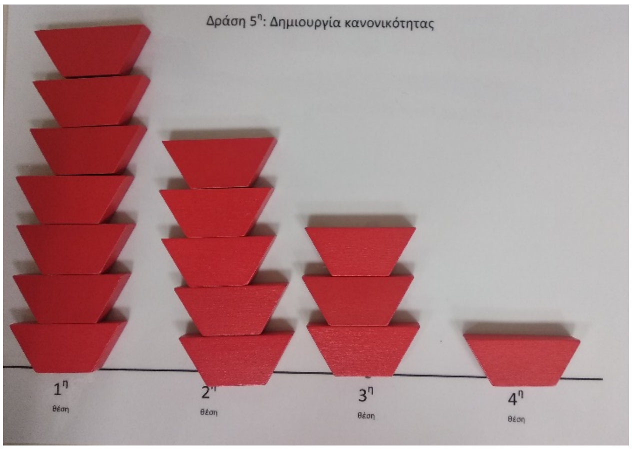



**Εικόνα 35: Δράση Ε΄ - *«Σωστή απάντηση»* μετά τη διδακτική παρέμβαση**

Αξίζει και πάλι να παρουσιαστεί ένα διάλογος μαθητή ο οποίος έχει μεταπηδήσει απο τη *«λάθος»* απάντηση (βλ. εικ. 36) στη *«σωστή»* απάντηση στη δημιουργία μιας εξελισσόμενης κανονικότητας (βλ. εικ 37).




**Εικόνα 36: Δράση Ε΄ – «*Λάθος απάντηση*» πριν τη διδακτική παρέμβαση (εξελίξη της πεταλούδας)**




**Εικόνα 37: Δράση Ε΄ - «*Σωστή απάντηση*» μετά τη διδακτική παρέμβαση (της ίδιας μαθήτριας)**

Πριν τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: .....μια μέρα είχαμε μάθει για τις πεταλούδες.... έφτιαξα μια πεταλούδα πως μεγαλώνει...*

*Ε: Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμούς, τι έκανες εδω;*

*Μ: ....Ναι. Την $1^η$ μέρα είναι κάμπια, τη $2^η$ μέρα μπαίνει μεσα στο κουκούλι της, την $3^η$ μέρα γίνεται πεταλούδα, την $4^η$ μέρα πετάει στον ουρανό.....*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως σκέφτηκες να το κάνεις;*

*Μ: ...ναι... έφτιαξα ποτηράκια, το ένα πάνω στο άλλο.... κατεβαίνουν....στην 1η θέση – 7, στη 2η θέση – 5 στην 3η θέση 3 και στην 4η θέση 1....*

*Ε: Μπορεί να εξηγήσεις σε ένα φίλο σου χρησιμοποιώντας αριθμό, τι έκανες εδω; Πως κατεβαίνει το έργο σου;*

*Μ: ...δύο .. δύο παραπάνω... (αναφέρεται στην εξέλιξη του εργου αλλά ανάποδα)....*

Στην παραπάνω δρασή, τη δράση Ε΄ όλοι οι μαθητές κατέληξαν στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, καθώς αναγνώρισαν και εδώ τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις δηλώνοντας ότι εξελίσσεται ανεβαίνοντας ή κατεβαίνοντας ανα δύο στοιχεία ή ένα στοιχεία ανάλογα με τη δημιουργία του καθένα. Πριν τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές που είχαν κάνει σωστές δημιουργίες βρισκόντουσαν στην *Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου και στην αντίληψη ποιοτικής αλλαγής,* δηλαδή, αντίστοιχα, αναγνώριζαν σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, απλά δήλωναν ότι η κανονικότητα εξελίσσεται και αναγνώριζαν σχεσεις αλλά όχι πάλι αυτές που δομούν τον κανόνα, η σχέση που προέκυπτε στα στοιχεία τους, προέκυπτε απο την αντιστοίχιση στοιχείων μεταξύ τους. Οι μαθητές που έδωσαν «λάθος» απαντήσεις βρίσκονταν στην *οπτική ολιστική αντίληψη* καθώς αναγνώριζαν μόνο την αριθμητική εξέλιξη των αριθμών της σειρά του έργου τους, δηλαδή αναγνώριζαν κάποιες σχέσεις, παρατηρούσαν απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα.

Καταλήγοντας, στον πίνακα 22, παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά τις ικανότητες των μαθητών που παρουσιάστηκαν αναλυτικά παραπάνω, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση ώστε να φαίνονται οι διαφορές κατα έργο.

**Πίνακας 22**

| Δράσεις | *Σχεδόν Σωστό* (Πριν) | *Σωστό* (πριν) | *Σχεδόν Σωστό* (Μετά) | *Σωστό* (Μετά) |
|---|---|---|---|---|
| Β) Συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας | 5 | - | 1 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Γ) Μεταφορά μιας κανονικότητας σε άλλο υλικό-σχήμα της αρεσκείας τους | 3 | 4 | - | 9 |
| Δ)Εύρεση στοιχείου που λείπει | 2 | 2 | 2 | 7 |
| Ε) Δημιουργία μιας δικής τους εξελισσόμενης κανονικότητας με όποια σχέση αυτά επιθυμούν. | 1 | 6 | - | 9 |

Στο παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη πρόοδος συνέβη στη Δράση Β΄ στη *«συνέχιση μιας εξελισσόμενης κανονικότητας»* καθώς όλοι οι μαθητές παρουσίασαν αλματώδη εξέλιξη στις ικανότητές τους, καθώς ήταν μια δράση που φαινόταν ότι δυσκόλευε αρκετά του μαθητες, καθώς πριν τη διδακτική παρέμβαση κανένας μαθητής δεν είχε απαντήσει σωστά στη δράση. Έτσι μετά τη διδακτική παρέμβαση πέντε (5) μαθητές μεταπήδησαν απο τη *«σχεδόν σωστή»* στη *«σωστή»* απάντηση, δυο (2) μαθητές απο τη *«λάθος»* στη *«σωστή»* και ένας (1) μαθητής απο τη *«λάθος»* στη *«σχεδόν σωστή».* Ακολουθεί η Δράση Δ΄ που αφορά στην *«εύρεση στοιχείου που λείπει»,* μία δράση που και αυτή είχε δυσκολέψει μεγάλο μέρος των μαθητών, καθώς μόνο δύο (2) απάντησαν σωστά πριν τη διδακτική πρέμβαση, με το μεγαλύτερο αριθμό των μαθητών να απαντά *«λάθος».* Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι *«σωστές»* απάντησεις έγιναν εφτά (7), καθώς δύο (2) μαθητές απο τη *«σχεδόν σωστή»* απάντηση μεταπήδησαν στη «σωστή», τρεις (3) μαθητές απο τη *«λάθος»,* στη *«σωστή»* και δύο (2) μαθητές απο τη *«λάθος»* στη *«σχεδόν σωστή».* Στις Γ' και Ε' Δράσεις η επιτυχία ήταν καθολική, καθώς απάντησαν *«σωστά»* και οι εννιά (9) μαθητές. Σε αυτές τις δράσεις υπήρχαν *«σωστές»* απαντήσεις και *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση από εφτά (7) παιδιά σε κάθε μία και μόνο δύο (2) μαθητές σε κάθε μία, απάντησαν *«λάθος».* Οι μαθητές φαίνεται ότι δεν αντιμετώπιζαν ιδιαίτερες δυσκολίες σε αυτές τις δράσεις, απλά χρειαζόντουσαν μόνο λίγη καθοδήγηση με τη διδακτική προσέγγιση, ώστε να τις κατακτήσουν πλήρως. Αξίζει να σημειωθεί ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση και σε καμμία δράση δεν είχαμε *«λάθος»* απάντηση μαθητή, καθώς όλοι σε όλες τις δράσεις μεταπήδησαν στις *«σχεδόν σωστές»* και *«σωστές»* απαντήσεις.

Στον πίνακα 23, παρουσιάζεται συγκεντρωτικά η κατανομή των μαθητών ως προς τρόπο αντίληψής τους, συνεπώς τις ικανότητες τους στις 7 κατηγορίες γενίκευσης στις Δράσεις Β, Γ, Δ και Ε, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Θα ήταν σκόπιμο να αναφερθεί πως οι μαθητές στις παραπάνω δράσεις δεν ερωτήθηκαν για πρόβλεψη στοιχείων σε κοντινους και μακρινούς όρους (ρωτήθηκαν μόνο στη ΣΤ΄ Δράση) καθώς στις πρώτες αυτές δράσεις δόθηκε έμφαση, ως τελικό προιόν, η εύρεση του σωστού στοιχείου και η δήλωση απο τη μεριά των μαθητών της αύξουσας ή φθίνουσας εξέλιξης τους κατά ένα ή δύο στοιχεία, γεγονός που καθιστά άκαιρη την κατάταξη τους στις δυο τελευταίες κατηγορίες ικανοτήτων.

**Πίνακας 23: Η κατανομή των μαθητών στις 7 κατηγορίες ικανοτητων γενίκευσης στις δράσεις πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράσεις Β’,Γ’, Δ’, Ε’ - Κατηγορίες ικανοτήτων γενίκευσης | Σ. Μ.[3] Δρ. Β’[4] (πριν) | Σ.Μ. Δρ. Β΄ (μετά) | Σ. Μ. Δρ. Γ’ (πριν) | Σ.Μ. Δρ. Γ΄ (μετά) | Σ.Μ. Δρ. Δ’ (πριν) | Σ.Μ. Δρ. Δ’ (μετά) | Σ. Μ. Δρ. Ε’ (πριν) | Σ.Μ. Δρ. Ε΄ (μετα) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Κατηγορία 7 –** *Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε μακρινούς όρους* | - | | - | | - | | - | |
| **Κατηγορία 6 –** *Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε κοντινους όρους* | - | | - | | - | | - | |

[3] Όπου Σ.Μ. – Σύνολα Μαθητών
[4] Όπου Δρ. - Δράση

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Κατηγορία 5** – *Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης* | - | 8 | - | 9 | - | 7 | - | 9 |
| **Κατηγορία 4** – *Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου* | - | - | 4 | - | 2 | - | 6 | - |
| **Κατηγορία 3** – *Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής* | 5 | 1 | 3 | - | 2 | 2 | 1 | - |
| **Κατηγορια 2** - *Οπτική ολιστική αντίληψη* | 4 | - | 2 | - | 5 | - | 2 | - |
| **Κατηγορία 1** - *Μη αντίληψη* | - | - | - | - | - | - | - | - |

Στον παραπάνω πίνακα (πίνακας 23) παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ικανότητες των μαθητών στις 7 κατηγορίες γενίκευσης πριν και μετά τη διδακτική παρεμβαση. Παρατηρείται μία σημαντική βελτίωση στις ικανότητές τους.

Στη Δράση Β΄διαπιστώνεται μία σημαντική αλλαγή στον τρόπο αντίληψης των παιδιών ώς προς τη συνέχιση ή επέκταση της κανονικότητας, καθώς οχτώ (8) από τους εννιά (9) καταλήγουν στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης* προερχόμενοι τρεις (3) απο την *οπτική ολιστική αντίληψη* και πέντε (5) απο την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής.* Πριν τη διδακτική παρέμβαση οι τρεις απο αυτούς δεν αναγνώριζαν καποιες σχέσεις απλά παρατηρούσαν κάποιες ιδιότητες μεταξύ των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούσαν κανένα κανόνα και οι πέντε απο αυτούς παρατηρούσαν την κανονικότητα αλλα δεν μπορούσαν να την περιγράψουν, αναγνώριζαν περισσότερες σχέσεις μεταξύ των αριθμών αλλά χωρίς αυτές να είναι ικανές να δομήσουν έναν κανόνα, απλά οι μαθητές δήλωναν ότι η κανονικότητα μεγαλώνει αλλα δεν μπορούσαν να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι οχτώ (8) μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις και δηλώνοντας ότι η κανονικότητα εξελίσσεται ανα δύο στοιχεία.

Σημαντική αλλαγή στον τρόπο αντίληψης των μαθητών διαπιστώνεται και στη Δράση Γ΄ καθώς όλοι οι μαθητές παρουσίασαν σημαντική βελτίωση. Δύο (2) μαθητές μεταπήδησαν απο την *οπτική ολιστική αντίληψη* στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, πριν τη διδακτική παρέμβαση αναγνώριζαν κάποιες σχέσεις των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα της κανονικότητας. Τρεις (3) μαθητές μεταπήδησαν από την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής,* στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, πριν τη διδακτική παρέμβαση παρατηρούσαν απλά την κανονικότητα αλλά δεν μπορούσαν να την περιγράψουν, αναγνώριζαν σχέσεις οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα απλά δήλωναν ότι η κανονικότητα μεγαλώνει μη μπορώντας όμως να βρουν σωστά τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Τέλος τέσσερις (4) μαθητές μεταπήδησαν απο την *αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου* στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, πριν τη διδακτική παρέμβαση αναγνώριζαν σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα και έδιναν απλά την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικόιτητα, η σχέση αυτή προέκυπτε από την αντιστοίχιση στοιχείων. Και οι εννιά (9) μαθητές μεταπήδησαν στην κατηγορία της *αντίληψης της γενικής αριθμητικής σχέσης* γεγονός που τους επιτρέπει μετά τη διδακτική παρέμβαση να αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις της, δηλώνοντας ότι η κανονικότητα εξελίσσεται ανα δύο στοιχεία.

Αλλαγή στον τρόπο σκέψης των μαθητών παρατηρούμε και στη Δράση Δ΄, καθώς οι περισσότεροι μαθητές, οι εφτά (7) απο τους εννιά (9) μεταπήδησαν και εδώ στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, με αποτέλεσμα να αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας ποσοτικοποιώντας τις σχεσεις και δηλώνοντας ότι η κανονικότητα μικραίνει ανα δύο στοιχεία. Οι τρεις (3) απο τους εφτά (7) μεταπήδησαν από την *οπτική ολιστική αντίληψη*, γεγονός που σημαινει ότι πριν τη διδακτική παρέμβαση αναγνώριζαν απλά κάποιες σχέσεις και παρατηρούσαν απλά κάποιες ιδιότητες των αριθμων, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα. Οι δύο (2) μεταπήδησαν απο την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής*, μία ικανότητα που αφορά την παρατήρηση της κανονικότητας αλλα χωρίς την περιγραφή της, την αναγνώριση περισσότερων σχέσεων οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα απλά οι μαθητές μπορούν και δηλώνουν ότι η κανονικότητα μικραίνει, αλλά ο μαθητής δεν μπορεί να βρει τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Τέλος οι δύο (2) από τους 7 μεταπήδησαν απο την *αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου*, γεγονός που σημαίνει ότι πριν τη διδασκτική παρέμβαση αναγνώρισαν σχέσεις στην κανονικότητα αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα της, έδιναν μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προέκυπτε από την αντιστοίχιση στοιχείων. Μόνο δύο (2) μαθητές παρουσίασαν μικρή εξέλιξη στις ικανότητες τους καθώς από την *οπτική ολιστική αντίληψη* μεταπήδησαν στην *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής*, παρουσίασαν βελτίωση στις ικανότητές τους καθώς μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρούσαν την κανονικότητα χωρίς όμως να μπορούν να την περιγράψουν, αναγνωρίζοντας περισσότερες όμως σχέσεις οι οποίες δεν δομούν τον κανόνα και απλά μπορούσαν να δηλώσουν ότι η κανονικότητα μειώνεται αλλα χωρίς να μπορούν να βρουν τον επόμενο σωστό αριθμό-στοιχείο της κανονικότητας.

Τέλος, οι μαθητές παρουσίασαν σημαντική βελτίωση και στη Δράση Ε’ καθώς όλοι οι μαθητες μεταπήδησαν στην *αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης*, συνεπώς μετά τη διδακτική παρέμβαση αναγνωρίζουν τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις και δηλώνοντας ότι η δημιουργία τους εξελίσσεται ανα ένα ή δύο στοιχεία αντίστοιχα. Οι έξι (6) απο τους εννιά (9) μαθητές μεταπήδησαν από την *αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινου όρου*, πριν τη διδακτική παρέμβαση αναγνώριζαν κάποιες σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα και έδιναν την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα αλλα η σχέση αυτή προέκυπτε από την αντιστοίχιση στοιχείων. Ο ένας (1) μεταπήδησε απο την *αντίληψη ποιοτικής αλλαγής*, πριν τη διδακτική παρέμβαση παρατηρούσε την κανονικότητα αλλά δεν μπορούσε να την περιγράψει, αναγνώριζε κάποιες σχέσεις αλλα όχι αυτές που δομούν τον κανόνα απλά δήλωνε πως η κανονικότητα εξελίσσεται, μη μπορώντας όμως να βρει τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Και τέλος οι δύο (2) απο τους εννιά (9) μεταπήδησαν από την *οπτική ολιστική αντίληψη* καθώς πριν τη διδακτική παρέμβαση αναγνώριζαν κάποιες σχέσεις, παρατηρούσαν απλά κάποιες ιδιότητες μεταξύ των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα της κανονικότητας.

Συνοψίζοντας διαπιστώνουμε ότι έχει επέλθει σημαντική αλλαγή στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς το 1ο ερευνητικό μας ερώτημα: *«Ποιες είναι οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γεωμετρικές και αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες (αναπαραγωγή, επέκταση, μεταφορά σε άλλο υλικό, εύρεση στοιχείου που λείπει, δημιουργία)».* Διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να ακολουθήσουν μια κανονικότητα πριν τη διδακτική παρέμβαση χωρίς όμως να μπορούν να αντιληφθούν τον κανόνα της, σύμφωνα με τις Τζεκάκη και Κουλελή (2007), οπ. αν. η Παπαδοπούλου (2012), δηλαδή χωρίς να μπορούν να αντιληφθούν τις σχέσεις που διέπουν τα στοιχεία της αλλά και την “αλλαγή” που έπερχεται μεταξύ των στοιχείων της, γεγονός το οποίο μπορεί να αναπτυχθεί μόνο με διδακτική παρέμβαση, σύμφωνα με τις ίδιες ερευνήτριες. Στηριζόμενοι λοιπόν σε μία ποιοτική διδακτική παρέμβαση που διέπεται απο:

- το κατάλληλο επικοινωνιακό πλαίσιο, ένα πλαίσιο το οποίο δημιουργήθηκε με σκοπό να είναι οικείο στους μαθητές, έτσι ώστε να μάθουν για τις λειτουργικές σχέσεις στην πραγματική τους ζωή, π.χ. η σχέση συνάρτησης της ανάπτυξης των φυτών με την πάροδο του χρόνου (σύμφωνα με τους Kaput (1999) όπ. αν. Οι Wilkie-Clarke, 2016),
- το κατάλληλο χειραπτικό υλικό, το υλικό των pattern blocks, ένα υλικό οικείο στα παιδιά, το οποίο ήδη χρησιμοποιούν οι μαθητές στο ελεύθερο παιχνίδι τους όταν ασχολούνται με κανονικότητες σύμφωνα με τους (Van de Walle, Karp, Lovin, & Bay-Williams, 2017) και η χρήση τους σε συνδυασμό με τη δημιουργία κανονικοτήτων

οδηγεί στην γενίκευση σύμφωνα με τους Blanton & Kaput (2004) καθώς κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων. Από τη μία η χρήση αυτού του υλικού επιτρέπει στους μαθητές τη δοκιμή και το λάθος αλλά και να δημιουργήσουν με τη σύνθεση και αποσύνθεσή τους διάφορά σχέδια και εικόνες του κόσμου, με σκοπό τη σύνδεση της εμπράγματης αναπαράστασης, λειτουργώντας σαν μεμονωμένα σχήματα αλλά σαν μία μονάδα και σαν σύνθετα σχήματα λειτουργώντας ως μονάδα ομαδοποιημένων σχημάτων, με τη μαθηματική ιδέα, τη σύνδεσή τους δηλαδή με τις αριθμητικές αναπαραστάσεις και τη δημιουργία γενικεύσεων (Σκουμπουρδή, 2014; Clements, 2000; Sarama & Clements, 2002). Από την άλλη επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει τη σκέψη των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές του έχουν προσεγγίσει την υπο διδασκαλία έννοια (Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005).

- την ενορχηστρωμένη διδασκαλία των κανονικοτήτων που δεν περιορίζεται μόνο σε μαθηματική δράση αλλά σε μία ακολουθία-σειρά δράσεων, οι οποίες είναι αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ερευνών των Τζεκάκη και άλλοι (2019) και αφορούν τις μικρές ηλικίες και πρέπει να περιλαμβάνονται σε κάθε μορφή δραστηριότητας που αφορά στις κανονικότητες: *αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως, συνέχιση ή επέκταση, και αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων,* η *δημιουργία κανονικότητας* (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011, όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019), *η εύρεση των στοιχείων που λείπουν* (Warren 2005), *η μεταφορά σε άλλο υλικό* (Clements & Sarama, 2009) όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι (2019), *η αναγνώριση της μονάδας επανάληψης και η περιγραφή της* (Mulligan, Mitchelmore, English & Crevensten, 2013; Clements & Sarama, 2009) όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι (2019), *αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης*, και *γενίκευση* η οποία προϋποθέτει τη διάκριση της μονάδας και την πρόβλεψη κοντινών ή μακρινών όρων (Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou & Savva, 2006; Lannin 2005,όπ. αν. οι Τζεκάκη και άλλοι, 2019 και η Ma, 2009).

- τις ερωτήσεις από τοπικό σε γενικό επίπεδο που προκαλούν διευκρινήσεις, επεκτάσεις και ανάπτυξη νέων καταστάσεων ώστε να ενισχυθεί η κατανόηση των νέων μαθηματικών εννοιών (Clements & Sarama, 2005), τις ερωτήσεις που επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της σκέψης και στη σύνδεση του περιεχομένου και των μαθηματικών ιδεών (Brown, 1999, οπ. αν. η Παπαδοπούλου, 2017)
- σε μία τάξη συνεργαστική (Brown, 1999, οπ. αν. η Παπαδοπούλου, 2017) με οργάνωση σε μικρες ομάδες, ολομέλεια αλλά και ατομικά (Clarke, 1997, οπ. αν. η Παπαδοπούλου, 2017).
- με εποπτικό υλικό και διδακτικά μέσα που εστιάζουν στον πυρήνα του περιεχομένου του διδακτικού αντικειμένου (Clarke, 1997, οπ. αν. η Παπαδοπούλου, 2017).
- με κοινωνική αλληλεπίδραση με ανταλλαγή ιδεών και λύσεων μεταξύ των μαθητών (Radford, 2006), διεξαγωγή συζητήσεων, επεξήγηση και τεκμηρίωση της δράσης και της σκέψης (Pappas, Ginsburg & Jiang, 2003) και της αναγώρισης των λαθών.
- και τέλος το βοηθητικό ρόλο του εκπαιδευτικού, ώστε οι μαθητές να μπορούν να εκφράσουν τα συμπεράσματα τους (Τζεκάκη, 2010),

διαπιστώνουμε ότι μπορεί να επέλθει σημαντική αλλαγή στις ικανότητες των μαθητών που αφορούν στις κανονικότητες, μία αλλαγή που αφορά το εννοιολογικό περιεχόμενο των κανονικοτήτων και την εύρεση της αλλαγής του κανόνα τους. Η αλλαγή δεν σχετίζεται με τις δυνατότητες της κάθε ηλικιακής ομάδας των μαθητών, ούτε με την εμπειρία τους που αφορά κυρίως σε επαναλαμβανόμενες κανονικότητες αλλά με το γεγονός ότι πρέπει να επικεντρωθούν στην "αλλαγή" του κανόνα, στην αύξηση ή στη μείωση αυτού με βάση τα στοιχεία που τον διέπουν (Wijns et all (2019).

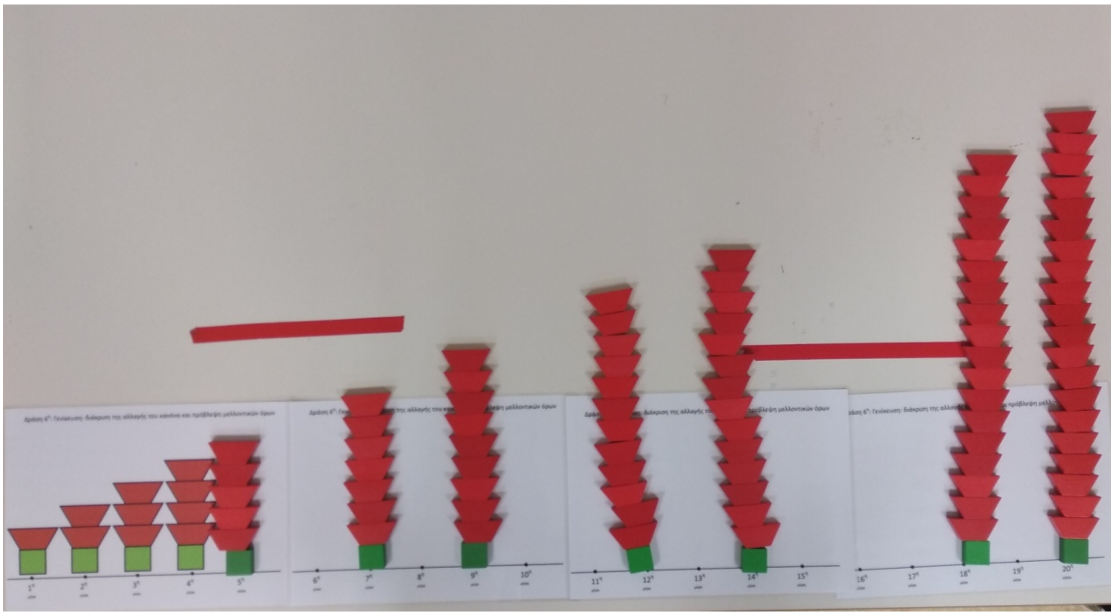
## Γ.3. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας ως προς τη γενίκευση στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες

Στην παρακάτω παρουσίαση των αποτελεσμάτων προσπαθούμε να απαντήσουμε στο $2^{ο}$ ερευνητικό μας ερώτημα: *Σε ποιο βαθμό μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση των Pattern Blocks βελτιώνει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γενικεύσεις στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες (εύρεση του κανόνα και πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας);*

## Γ.3.1. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας πριν τη διδακτική παρέμβαση

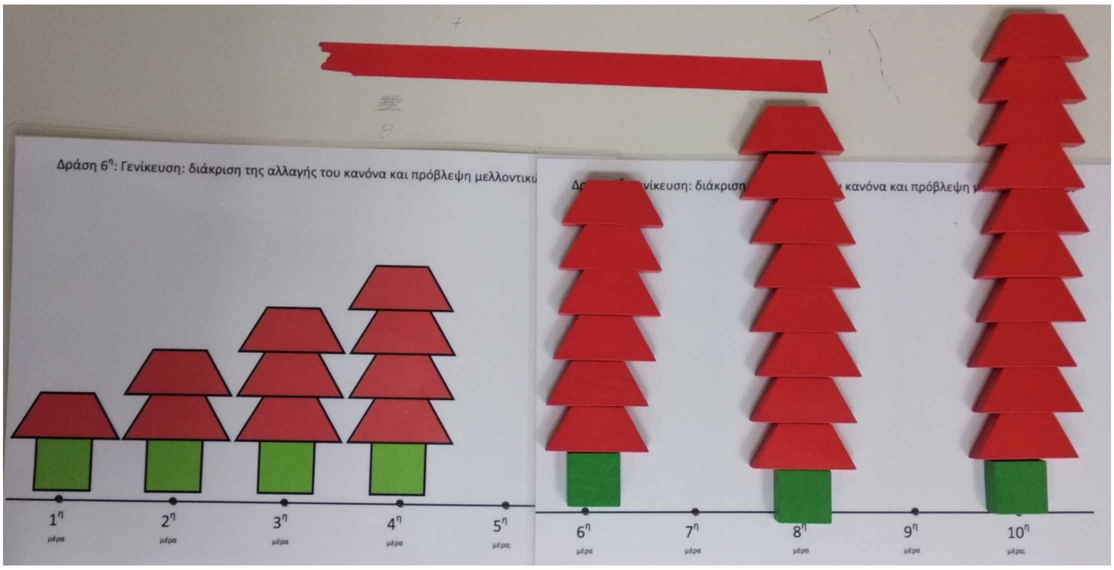
Στην ΣΤ΄ Δράση που αφορά στη *«Διάκριση της αλλαγής του κανόνα και στην πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθία»* πριν τη διδακτική παρέμβαση, σχεδόν όλοι οι μαθητές, οι οχτώ (8) από τους εννιά (9), παρουσίασαν *«σχεδόν σωστές»* απαντήσεις και μόνο ένας μαθητής παρουσίασε *«λάθος»* απάντηση. Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν ως εξής:

Στις *«σωστές απαντήσεις»* καταγράφονται οι απαντήσεις των παιδιών με την εύρεση του κανόνα της κανονικότητας και την πρόβλεψη των μελλοντικών στοιχείων με τη χρήση του κανόνα (βλ. εικ. 38).



**Εικόνα 38: Δράση ΣΤ' – *«Σωστή απάντηση»***

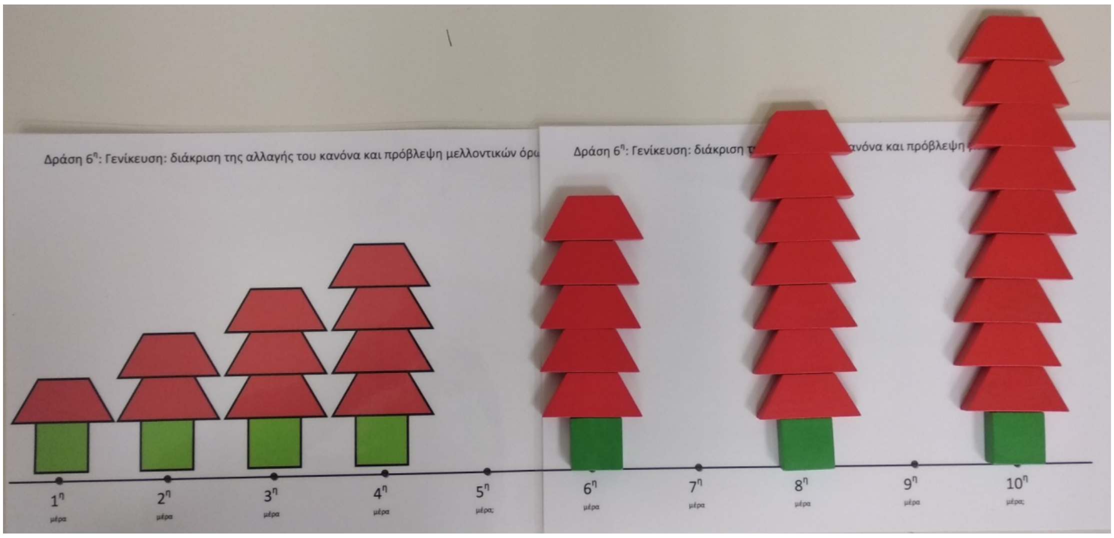
Στις *«σχεδόν σωστές απαντήσεις»* καταγράφονται οι απαντήσεις των παιδιών που αναγνωρίζουν σχέσεις ανάμεσα στις σειρές και τα στοιχεία αλλά δεν αναγνωρίζουν τον κανόνα, στις απαντήσεις αυτές η σχέση που χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι η σχέση της αντιστοίχισης της θέσης/σειράς της κανονικότητας με τον αριθμό των στοιχείων αυτής, καθώς κάνουν ή αντιστοίχιση των φυλλωμάτων του δέντρου με τον αριθμό της σειράς, χωρίς να συμπεριλαμβάνουν στη μέτρηση των στοιχείων τον κορμό του δέντρου (βλ. εικ. 39) και εξηγούν:




**Εικόνα 39: Δράση ΣΤ΄ – *«Σχεδόν σωστή απάντηση»***

> *Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο απο μέρα σε μέρα με ένα αριθμό;*
>
> *Μ: ....Ναι...Παρατηρώ ότι βάζουμε μόνο ένα τετράγωνο σε κάθε θέση και μετά τα ¨τραπεζάκια¨ (τραπέζια), την 1η μέρα έχει 1 τραπεζάκι, τη 2η μέρα έχει 2 τραπεζάκια, την 3η μέρα ένα 3 τραπεζάκια......»*

ή κάνουν αντιστοίχιση του αριθμού θέσης με το σύνολο των στοιχείων (βλ. εικ. 40) και εξηγούν:

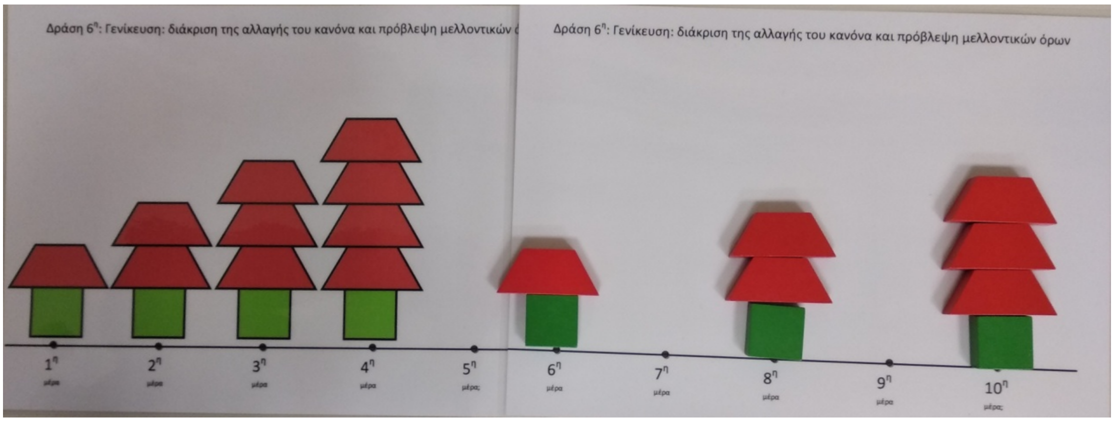



Εικόνα 40: Δράση ΣΤ΄ – *«Σχεδόν σωστή απάντηση»*

*Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο απο μέρα σε μέρα με ένα αριθμό;*

*Μ: ...ναι.... τόσα στοιχεία θα έχει αυτή η θέση γιατί τόσα γράφει ο αριθμός της θέσης....*

Στις *«λάθος απαντήσεις»* καταγράφονται οι απαντήσεις των μαθητών που δεν βρίσκουν καμία σχέση ανάμεσα στα στοιχεία και τη θέση της κανονικότητας, τοποθετούν τα στοιχεία αυθαίρετα χωρίς να μπορούν να αιτιολογήσουν την πράξη τους (βλ. εικ. 41) και εξηγούν:




Εικόνα 41: Δράση ΣΤ΄ - *«Λάθος απάντηση»*

*Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο απο μέρα ε μέρα με ένα αριθμό;*

*Μ: .... το ποτίζουμε και μεγαλώνει...*

### Γ.3.2. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας μετά τη διδακτική παρέμβαση

Στον πίνακα 24 παρουσιάζονται συνοπτικά και συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που αφορούν στη Δράση ΣΤ΄ και αφορούν στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση ως προς τη διάκριση του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας.

**Πίνακας 24: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση ΣΤ΄ πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράση ΣΤ΄ | Μαθητές (πριν) | Μαθητές (μετά) |
|---|---|---|
| Σωστές απαντήσεις | 0 | 7 |
| Σχεδόν σωστές απαντήσεις | 8 | 2 |
| Σύνολο μαθητών | 9 | 9 |

Στον πίνακα 24 παρατηρούμε την ανοδική πορεία των μαθητών, αφού οι περισσότεροι, οι εφτά (7) από τους εννιά (9), μετά τη διδακτική παρέμβαση απάντησαν *«σωστά»,* βρίσκοντας τον κανόνα και γενικεύοντας προβλέποντας επόμενους όρους, ενδεικτικά αναφέρουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Πριν τη διδακτική παρεμβαση:

*Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο απο μέρα σε μέρα;*

*Μ: ....είναι μαγικό, την 1η μέρα – 1 γλαστρούλα και 1 φύλλο, τη 2η μέρα – 1 γλαστρούλα και 2 φύλλα....*

*Ε: μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δέντρο την 6η μέρα; Την 8; Τη 10;*

*Μ: .....μία γλαστρούλα με πολλά φύλλα, πάρα πολλά φύλλα...*

*Ε: Εξήγησέ μου λίγο παραπάνω*

*Μ: ...επειδή.... γιατί δείχνει το 8 και συνήθως όταν δείχνει απο κάτω το 8 έχει οχτώ φύλλα...*

*Ε: Πως θα εξηγήσεις σε ένα φίλο σου την ανάπτυξη του δέντρο σε σχέση με την κάθε μέρα;*

*Μ: ....ανεβαίνει επειδή είναι μεγάλο και δείχνει να ανεβαίνει απο το ένα στο άλλο....*

Μετά τη διδακτική παρέμβαση:

*Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο απο μέρα σε μέρα με έναν αρθμό;*

*Μ: ...ένα..*

*Ε: Μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δέντρο (πόσα στοιχεία-σχήματα θα έχει) την 6η μέρα;, την 8η; Την 10η; ....*

*Μ: ... την 5η (θα έχει 6), την 6η ένα παραπάνω.... 7 κομμάτια, την 8η 9 .....*

*Ε: Πως θα εξηγήσεις σε ένα φίλο σου την ανάπτυξη του δέντρου σε σχέση με την κάθε μέρα;*

*Μ: .....ένα!*

Ένας (1) μαθητής παρέμεινε στη *«σχεδόν σωστή απάντηση»* καθώς δεν κατάφερε να βρει τον κανόνα αλλά συνέχιζε την κανονικότητα κάνοντας αντιστοίχιση στοιχείων με τη θέση της κανονικότητας και ένας μαθητής μεταπήδησε από τη *«λάθος»* απάντηση στη *«σχεδόν σωστή»* απάντηση, καθώς μετά τη διδακτική παρέμβαση αναγνωρίζει κάποια σχέση ανάμεσα στα στοιχεία και τη θέση της κανονικότητας κάνοντας και αυτός αντιστοίχιση.

Στον πίνακα 25 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στη Δράση ΣΤ΄, πιο αναλυτικά, όπως αυτά κωδικοποιήθηκαν και αφορούν στην *«εύρεση του κανόνα και στη γενίκευσή του με την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας».* Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν ως εξής: *«Βρίσκει τον κανόνα»:* οι μαθητές ονομάζουν με ένα αριθμό τον κανόνα της κανονικότητας, *«Γενικεύει μόνο στον επόμενο όρο»:* οι μαθητές βρίσκουν μόνο τον επόμενο-5ο όρο της ακολουθίας, *«Γενικεύει μέχρι το 10»:* οι μαθητές γενικεύουν σε οποιοδήποτε αριθμό μέχρι το δέκα και τέλος *«Γενικεύει μέχρι το 20»:* οι μαθητές γενικεύουν σε οποιοδήποτε αριθμό μέχρι το 20.

Πίνακας 25: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση ΣΤ΄ ως προς την εύρεση του κανόνα και στη γενίκευσή του με την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας μετά τη διδακτική παρέμβαση

| Δράση ΣΤ’ | Μαθητές | Σύνολο μαθητών |
|---|---|---|
| Δεν Βρίσκει τον κανόνα | 2 | 9 |
| Βρίσκει τον κανόνα | 7 | 9 |
| Γενικεύει μόνο στον επόμενο όρο | 1 | 9 |
| Γενικεύει μέχρι το 10 | 3 | 9 |
| Γενικεύει μέχρι το 20 | 3 | 9 |

Η ανάλυση του περιεχομένου της γενίκευσης του κανόνα στηρίχτηκε στις παρακάτω ερωτήσεις γενίκευσης. Η εύρεση του κανόνα στηρίχτηκε στην ερώτηση

*Ε: «Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο από μέρα σε μέρα;»,*

όπου οι μαθητές καλούνταν να ορίσουν λεκτικά τον κανόνα και η εύρεση της γενίκευσης του κανόνα στηρίχθηκε στην ερώτηση

*Ε: Μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δέντρο την 6η μέρα, την 8η, την 10η… την 20η;»*

όπου οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν με την εύρεση των μελλοντικών όρων της ακολουθίας και τη χρήση χειραπτικού υλικού.

Παρατηρούμε ότι μόνο δύο (2) από τους εννιά (9) μαθητές δεν κατάφεραν να βρουν τον κανόνα, να αναγνωρίσουν και να κατανοήσουν δηλαδή την “αύξουσα αλλαγή” των στοιχείων της κανονικότητας και κατ’ επέκταση να προβλέψουν και τους μελλοντικούς όρους της ακολουθίας. Στις απαντήσεις αυτές των μαθητών εντάσσονται αυτές που δεν μπορούν να διακρίνουν την αλλαγή του κανόνα (ν+1) σε κάθε σειρά, απλά δηλώνουν ότι η κανονικότητα μόνο μεγαλώνει. Παρατηρώντας το εργαλείο ελέγχου της αριθμητικής ικανότητας των δύο μαθητών διαπιστώνουμε ότι ο ένας μαθητής υπολείπεται ως προς τις αριθμητικές του ικανότητες ως προς την “αντικειμενική μέτρηση”, “τη συμβολικη και μη συμβολική σύγκριση”, “τη σειρά των αριθμών”, “την αναγνώριση συμβόλου αριθμού” και “τη λεκτική αρίθμηση” φτάνοντας μόνο μέχρι το 10 και κάποιες αναφορές σε αριθμούς πάνω απο το 10 γινόντουσαν με χρήση της αριθμογραμμής και αυτό τις περισσότερες φορές λανθασμένα. Ο άλλος μαθητής υπολείπεται ως προς τις αριθμητικές του ικανότητες ως προς την “αναγνώριση συμβόλου αριθμού” και τη “λεκτική αρίθμηση” καθώς φτάνει μόνο μέχρι το 10, οι αναφορές σε αριθμούς πάνω απο το 10 γινόντουσαν και από αυτόν το μαθητή με τη χρήση της αριθμογραμμής αλλά με μέτρημα. Εφτά (7) μαθητές κατάφεραν να βρούν τον κανόνα και να γενικεύουν στον επόμενο όρο της ακολουθίας. Και οι εφτά (7) αυτοί μαθητές είχαν άριστες αριθμητικές ικανότητες. Απο αυτούς τους εφτά (7) μαθητές μόνο ο ένας (1) μαθητής γενίκευσε μόνο στον επόμενο όρο της ακολουθίας ($5^{ο}$ όρο), δηλώνοντας στους επόμενους όρους τόσα στοιχεία όσα και η θέση της κανονικότητας (δηλαδή η $6^{η}$ μέρα έχει 6 στοιχεία…). Τρεις (3) μαθητές απο τους εφτά (7) κατάφεραν να γενικεύσουν μέχρι το δέκα ($10^{ο}$ όρο), δηλώνοντας ότι δυσκολεύονται πάνω απο το 10, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να προβλέψουν επόμενους όρους. Για αυτούς τους τέσσερις (4) μαθητές ο λόγος της δυσκολίας τους δεν αφορά στις αριθμητικές τους ικανότητες καθώς ήταν άριστες. Χρειάζονται απλά περαιτέρω ενασχόλησή με τις εξελισσόμενες κανονικότητες, γεγονός που θα τους οδηγήσει στην εύρεση του κανόνα και στην πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας. Τέλος μόνο τρεις (3) μαθητές απο τους εφτά (7) κατάφεραν να γενικεύσουν βρίσκοντας οποιοδήποτε μελλοντικό όρο της ακολουθίας μέχρι και το 20, καθώς κατάφεραν να εντοπίσουν τον κανόνα της αλλαγής και να αντιστοιχίσουν το σύνολο των στοιχείων με τη θέση τους μέσα στην κανονικότητα, δηλώνοντας ότι π.χ. η $5^{η}$ μέρα έχει 6 στοιχεία, η $8^{η}$ έχει 9 … η $18^{η}$ έχει 19 και η $20^{η}$ έχει 21.

## Γ.4. Οι ικανότητες των μαθητών στη γενίκευση εξελισσόμενων κανονικότητων ως προς τις εφτά κατηγορίες γενίκευσης

### Γ.4.1. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας πριν τη διδακτική προσέγγιση

Στον πίνακα 26 παρουσιάζεται συγκεντρωτικά η κατανομή των μαθητών, ως προς τις ικανότητες τους, ως προς την εύρεση της αλλαγής του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας στη Δράση Στ΄ στις 7 κατηγορίες γενίκευσης, πριν τη διδακτική παρέμβαση μαζί με τις απαντήσεις τους. Οι 7 κατηγορίες γενίκευσης που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη και παρουσιάστηκαν παραπάνω προέκυψαν από τη σύνθεση και την προσαρμογή αυτών, των κατηγοριών ικανοτήτων των μοντέλων των Warren (2005) και Παπαδοπούλου (2018) που αφορούν στις γεωμετρικές εξελισσόμενες κανονικότητες και των κατηγοριών ικανοτήτων των μοντέλων της Ma (2008) η οποία στηρίχθηκε στην πρόταση των Orton & Orton (1999) όπως αναφέρει η Ma (2009) και της Papadopoulou (2017) που αφορούν στις αριθμητικές εξελισσόμενες κανονικότητες.

**Πίνακας 26: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση ΣΤ΄ ως προς την εύρεση του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας στις 7 κατηγορίες γενίκευσης πριν τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράση ΣΤ΄ | Σύνολα μαθητών |
|---|---|
| Κατηγορία 7 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε μακρινούς όρους | - |
| Κατηγορία 6 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε κοντινους όρους | - |
| Κατηγορία 5 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης | - |
| Κατηγορία 4 – Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου | 4 |
| Κατηγορία 3 – Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής | 4 |
| Κατηγορια 2 - Οπτική ολιστική αντίληψη | 1 |
| Κατηγορία 1 - Μη αντίληψη | - |

Παρατηρώντας τον πίνακα 26 και αναλύοντας τις απαντήσεις των μαθητών διαπιστώνουμε ότι κανένας μαθητής δεν βρίσκεται στην **1η Κατηγορία γενίκευσης (Μη αντίληψη),** καθώς όλοι αναγνώριζαν κάποια σχέση ανάμεσα στα στοιχεία και όλοι είχαν να δώσουν μία απάντηση.

**Στην Κατηγορία 2 (*Οπτική ολιστική αντίληψη)*** ο μαθητής αναγνωρίζει κάποιες σχέσεις και κάποιες ιδιότητες μεταξύ των αριθμών, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα της κανονικότητας. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκεται μόνο ένας (1) μαθητής ο οποίος «απλά αναγνωρίζει την αριθμητική εξέλιξη των αριθμών» και δηλώνει:

*Μ: ...στην 1η θέση...., 2η θέση....., 3η θέση....., 4η θέση.....*

**Στην κατηγορία 3 (*Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής)*** Οι μαθητές παρατηρούν την κανονικότητα αλλά δεν μπορούν να την περιγράψουν, αναγνωρίζουν περισσότερες σχέσεις, οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα, απλά δηλώνουν, ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας αλλά δεν μπορούν να βρουν τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται τέσσερις (4) μαθητές και δηλώνουν:

*Μ: ....απλά μεγαλώνει από το ένα στο δύο, από το δύο στο τρία…*

ή συνδέουν τις μέρες ανάπτυξης με το φύλλωμα του φυτού (παραβλέποντας τον κορμό του) και δηλώνουν:

*Μ:....την 1η μέρα έχει ένα φύλλο, τη 2η μέρα δύο φύλλα…,*

ή μετρώντας και τον κορμό, δηλώνοντας:

*Μ: ....την 1η μέρα έχει ένα κορμό και ένα φύλλο, τη 2η έχει ένα κορμό και δύο φύλλα…».*

**Στην κατηγορία 4 (*Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου)*** οι μαθητές αναγνωρίζουν σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, δίνουν μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προκύπτει από την αντιστοίχιση στοιχείων και θέσης στοιχείου. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται τέσσερις (4) μαθητές και δηλώνουν:

*Μ: ...την 1η μέρα ένα φύλλο, την δεύτερη δύο φύλλα, την τρίτη ….. την πέμπτη πέντε φύλλα..*

Στην παραπάνω περίπτωση οι μαθητές επιλέγουν να αγνοούν τον κορμό και επικεντρώνονται στη σχέση των στοιχείων με τη θέση τους κάνοντας αντιστοίχιση. Σε δεύτερη περίπτωση έχουμε πάλι αντιστοίχιση στοιχείων και θέσης αλλά αυτή τη φορά με όλα τα στοιχεία και δηλώνουν:

*Μ: .....παρατηρώ ότι βάζουμε ένα τετραγωνάκι σε κάθε θέση και μετά ένα τραπεζάκι την πρώτη μέρα, δύο τραπεζάκια τη δεύτερη ,τρία την Τρίτη …. Πέντε τραπεζάκια την Πέμπτη μέρα....*

Πριν τη διδακτική παρέμβαση δεν καταγράφηκε καμμιά απάντηση παιδιού που να αντιστοιχεί στις κατηγορίες: κατηγορία 5: (***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής***

***σχέσης)***, κατηγορία 6: ***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης αλλά σε κοντινούς όρους:*** και κατηγορία 7: (***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης σε μακρινούς όρους).***

### Γ.4.2. Οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας μετά τη διδακτική παρέμβαση

Στον πίνακα 27 παρουσιάζεται συγκεντρωτικά η κατανομή των μαθητών ως προς τις ικανότητες τους στις 7 κατηγορίες γενίκευσης στη Δράση ΣΤ΄, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με τις απαντήσεις των μαθητών μετά την παρέμβαση.

**Πίνακας 27: Οι ικανότητες των μαθητών στη Δράση ΣΤ΄ ως προς την εύρεση του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας στις 7 κατηγορίες γενίκευσης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση**

| Δράση ΣΤ΄ - Κατηγορίες ικανοτήτων γενίκευσης | Σύνολα μαθητών<br><br>Πριν | Σύνολα μαθητών<br><br>Μετά |
|---|---|---|
| Κατηγορία 7 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε μακρινούς όρους | - | 3 |
| Κατηγορία 6 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσεις αλλά σε κοντινους όρους | - | 3 |
| Κατηγορία 5 – Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης | - | 1 |
| Κατηγορία 4 – Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου | 4 | 1 |
| Κατηγορία 3 – Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής | 4 | 1 |
| Κατηγορια 2 - Οπτική ολιστική αντίληψη | 1 | - |
| Κατηγορία 1 - Μη αντίληψη | - | - |

Μετά τη διδακτική παρέμβαση δεν καταγράφηκε καμιά απάντηση παιδιού στις κατηγορίες: κατηγορία 1: (***Μη αντίληψη)***, και κατηγορία 2: ***(Οπτική ολιστική αντίληψη)***.

Στην κατηγορία 3: (***Αντίληψη ποιοτικής αλλαγής)***, ο μαθητής, παρατηρεί την κανονικότητα αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει, αναγνωρίζει περισσότερες σχέσεις οι οποίες όμως δεν δομούν τον κανόνα, απλά δηλώνει ότι η κανονικότητα εξελίσσεται μεγαλώνοντας αλλά δεν μπορεί να βρει τον επόμενο αριθμό-στοιχείων της κανονικότητας. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκεται μόνο ένας (1) μαθητής και δηλώνει ότι το έργο:

*Μ: ...απλά μεγαλώνει...*

Στην ερώτηση ..

*Ε: … μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δέντρο (*πόσα στοιχεία-σχήματα θα έχει*) την $5^η$; την $7^η$ …*
*Μ: … η $1^η$ θέση έχει δυο (*στοιχεία*), η $2^η$ έχει 3, η $3^η$ …, (*σκέφτεται και λέει*), έπρεπε να βάλουμε 3 αλλά βάλαμε τέσσερα, στην $4^η$ θα πρέπει να βγάλουμε ένα (καθώς έχει πέντε στοιχεία) και να έχει 4.*

...παρατηρούμε ότι η απάντηση του μαθητή παραμένει σε σχέση αντιστοίχισης θέσης και αριθμού στις επόμενες θέσεις

Στην κατηγορία 4: (***Αντίληψη αριθμητικής σχέσης κοντινού όρου)*** ο μαθητής αναγνωρίζει σχέσεις αλλά όχι αυτές που δομούν τον κανόνα, δίνει μόνο την απάντηση του όρου που συνεχίζει την κανονικότητα και η σχέση αυτή προκύπτει από την αντιστοίχιση στοιχείων και θέσης στοιχείου. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκεται ένας (1) μαθητής και δηλώνει ότι:

*Μ: .....το δέντρο, απλά μεγαλώνει, μεγαλώνει, μεγαλώνει...,*

χωρίς όμως να μπορεί να βρει τον κανόνα (ν+1). Στη δεύτερη ερώτηση απαντά βρίσκοντας τα στοιχεία και τις θέσεις μέχρι το 10 ($10^ο$ όρο), αλλά με αντιστοίχιση στοιχείων με τη θέση τους και δηλώνει:

*Ε: Μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δεντρο (πόσα στοιχεία-σχήματα θα έχει) την $5^η$ μέρα; Την $7^η$; Την $9^η$;....*

*Μ: .....την $5^η$ μέρα - έξι, την $7^η$ μέρα 8 και την $9^η$ μέρα – 10....*

Στην κατηγορία 5 (***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης)*** ο μαθητής αναγνωρίζει τη σχέση και τη δομή της κανονικότητας, ποσοτικοποιώντας τις σχέσεις δηλώνοντας ότι εξελίσσεται ανά ένα ή ανά δύο στοιχεία. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκεται ένας (1) μαθητής και δηλώνει:

*Μ: ....Μεγαλώνει βάζοντας κάθε φορά από ένα......*

Στην κατηγορία 6 (***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης αλλά σε κοντινούς όρους)*** οι μαθητές αναγνωρίζουν τη σχέση της κανονικότητας, τη διατυπώνουν σωστά, αλλά κάνουν λάθος σε κάποιο μεταγενέστερο όρο της ακολουθίας. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται τρεις (3) μαθητές και δηλώνουν στην ερώτηση:

*Ε: Μπορείς να πεις πως μεγαλώνει το δέντρο από τη μία μέρα στην άλλη με έναν αριθμό;*

*Μ: ....Βάζουμε κάθε φορά ένα τουβλάκι παραπάνω...*

και στην ερώτηση απαντούν:

*Ε: Μπορείς να βρεις πόσο θα έχει μεγαλώσει το δέντρο (πόσα στοιχεία θα έχει) την 5η; μέρα, την 7; …. την 20η;*

*Μ: ....την 5η μέρα θα έχει 6 τουβλάκια, την 7η θα έχει 8 τουβλάκια την 9η θα έχει 10 τουβλάκια.....*

Στις μεταγενέστερες μέρες οι αριθμοί είναι σχεδόν αυθαίρετοι είτε με ένα λιγότερα, είτε με πολλά περισσότερα στοιχεία καθώς δηλώνουν αδυναμία να βρουν το αποτέλεσμα, με τη φράση

*Μ: ....Δεν ξέρω*[5]*.....*

Στην κατηγορία 7 (***Αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης σε μακρινούς όρους)*** αναγνωρίζουν τις σχέσεις που δομούν τον κανόνα και τις διαπιστώνουν σωστά σε οποιοδήποτε όρο της κανονικότητας, κάνοντας μία κοντινή/σχεδόν γενίκευση που στη συγκεκριμένη μελέτη φτάνει μέχρι και τον εικοστό όρο της ακολουθίας. Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται τρεις (3) μαθητές και δηλώνουν

*Μ: «Μεγαλώνει βάζοντας ένα παραπάνω»*

και ως προς τους μεταγενέστερους όρους δηλώνουν

---

[5] Από τους τρεις αυτούς μαθητές μόνο ένας από αυτούς υπολείπεται στις αριθμητικές του ικανότητες καθώς οι ικανότητες του είναι μέχρι το δέκα, ως προς την Αντικειμενική μέτρηση (αντιστοίχιση ποσότητας σχήματος με τυχαίο αριθμό), τη Συμβολική και μη συμβολική σύγκριση (ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος), Σειρά αριθμών (ποιος βρίσκεται πριν και ποιος μετά από ν αριθμό), Αναγνώριση Συμβόλου αριθμού, Λεκτική αρίθμηση (πρόσθεση και αφαίρεση ν+1 και ν+2 και ν-1 και ν-2. Και μέχρι το 20 είναι μόνο η Λεκτική Μέτρηση (μέχρι το 20) και η Απαρίθμηση σχημάτων (αντιστοίχιση αριθμού με ποσότητα σχημάτων σε αριθμητική ακολουθία).

*Μ: «την 5$^{η}$ μέρα – 6 στοιχεία, την 7$^{η}$ μέρα – 8 στοιχεία, την 9$^{η}$ μέρα – 10 στοιχεία, τη 12$^{η}$ – 13 στοιχεία, τη 14$^{η}$ – 15 στοιχεία, την 18$^{η}$ μέρα – 19 στοιχεία και την 20$^{η}$ μέρα – 21 στοιχεία» .*

Παρατηρώντας τον πίνακα 27, διαπιστώνουμε ότι όλοι οι μαθητές βελτίωσαν τις ικανότητες τους. Η πορεία όλων ήταν ανοδική, ομαδοποιήσαμε λοιπόν την άνοδό τους σε τέσσερις πορείες, ώστε να είναι πιο ξεκάθαρα τα θετικά αποτελέσματα της μελέτης. Στον πίνακα 28, παρατίθενται τα αποτελέσματα της πορείας των μαθητών ομαδοποιημένα.

**Πίνακας 28: Η ανοδική πορεία των μαθητών στις 7 κατηγορίες γενίκευσης**

| | Σύνολα μαθητών |
|---|---|
| Πορεία 1: Ανοδική πορεία μαθητών κατά μία κατηγορία ικανοτήτων | 2 |
| Πορεία 2: Ανοδική πορεία μαθητών κατα δύο κατηγορίες ικανοτήτων | 3 |
| Πορεία 3: Ανοδική πορεία μαθητών κατά τρεις κατηγορίες ικανοτήτων | 3 |
| Πορεία 4: Ανοδική πορεία μαθητών κατά τέσσερις κατηγορίες ικανοτήτων | 1 |

Παρατηρούμε στον πίνακα 28, δύο (2) περιπτώσεις μαθητών έχουν ανοδική πορεία, κατά ***μία*** κατηγορία ικανοτήτων. Τρεις (3) περιπτώσεις μαθητών μεταπήδησαν κατά ***δύο*** κατηγορίες. Τρεις (3) περιπτώσεις μαθητών μεταπήδησαν ***τρεις*** κατηγορίες και μία (1) περίπτωση μαθητή, μεταπήδησε **τέσσερις** κατηγορίες ικανοτήτων.

# Τέταρτο κεφάλαιο: Συμπεράσματα

## Δ.1 Γενικά Συμπεράσματα στα ερευνητικά ερωτήματα

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας στις εξελισσόμενες κανονικότητες με σκοπό τη γενίκευση. Δύο ήταν τα ερευνητικά ερωτηματα αυτής της μελέτης. Το πρώτο αφορά στις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες και πιο συγκεκριμένα στην αναπαραγωγή, την επέκταση, τη μεταφορά σε άλλο υλικό, την εύρεση στοιχείου που λείπει και τη δημιουργία μια νέας κανονικότητας. Το δεύτερο αφορά, σε ποιο βαθμό θα μπορούσε μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση ενός χειραπτικού υλικού (pattern blocks) να βελτιώσει τις ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τις γενικεύσεις στις εξελισσόμενες γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, και πιο συγκεκριμένα στην εύρεση του κανόνα και την πρόβλεψη μελλοντικών όρων της ακολουθίας.

Απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερωτήματα και σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι μαθητές προσχολικής ηλικίας, ηλικίας 4-6 ετών μπορούν να κατανοήσουν εννοιολογικά τις εξελισσόμενες κανονικότητες με επιτυχία ακολουθώντας μία ποιοτική μέθοδο διδασκαλίας με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά όπως:

- Επιλογή κατάλληλου χειραπτικού υλικού, το οποίο θα είναι οικείο στους μαθητες, θα επιτρέπει τη δοκιμή και το λάθος, θα μπορεί να προσφέρει μια μαθηματική διάσταση και να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση των σχέσεων, των στοιχείων μιας κανονικότητας και τελικά στην εύρεση του κανόνα της, μέσω της εμπράγματης αναπαράσταση αλλά και της σφαιρικής αντίληψη της έννοιας που προσφέρει, ώστε με τη φυσική αυτή οπτική αναπαράσταση να μπορούν να βρουν πιο εύκολα των κανόνα που τα διέπει (σύμφωνα με τον Rustigian, όπ. αν. οι Rodrigues & Serra, 2015). Συνεπώς το χειραπτικό υλικό των pattern Blocks βοήθησε στην κατανόηση των κανονικοτήτων, καθώς οι μαθητές δημιούργησαν γεωμετρικές κανονικότητες με τη σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και αριθμητικές κανονικότητες βλέποντας τα γεωμετρικά σήματα σαν σύνολα, δημιουργώντας στοιχεία-συνθέσεις του κόσμου που μας περιβάλλει, καθώς λόγο της φύσης του υλικού, επέτρεψε στους μαθητές να δοκιμάσουν, να δημιουργήσουν συνθέσεις, να αλλάξουν εύκολα ένα πιθανό λάθος τους, να κατανοήσουν την αλλαγή του κανόνα βλέποντας τη φυσική αναπαράσταση των στοιχείων του με εμφανή τη διαφορά των στοιχείων απο τη μία θέση στην άλλη (της κανονικότητας).

- Σχεδιασμός μιας κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης που περιέχει την παρακάτω οργάνωση των δράσεων α) αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως, β) στη συνέχιση ή επέκταση και στην αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων, γ) στην εύρεση στοιχείων που λείπουν δ) στη δημιουργία κανονικότητας, ε) στη μεταφορά σε άλλο υλικό, στ) στην αναγνώριση της δομής του κανόνα (αλλαγή μονάδας) και στην περιγραφή της ζ) στην αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης και τέλος η) στη γενίκευση (Τζεκάκη και άλλοι, 2019). Συνεπώς και με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης, ο παραπάνω σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση της ''αλλαγής'' του κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων και οδηγεί στη γενίκευση του, όταν πλαισιώνεται με ερωτήσεις αρχικά επικεντρωμένες σε τοπικό επίπεδο και στη συνέχεια σε γενικό επίπεδο και οι ικανότητες των περισσότερων μαθητών βελτιώνονται σημαντικά, φτάνοντας στις υψηλότερες κατηγορίες ικανοτήτων αντίληψης (αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχέσης σε κοντινούς όρους και αντίληψη της γενικής αριθμητικής σχεσης σε μακρινούς όρους)
- Διδασκαλία με ένα επικοινωνιακό πλαίσιο, οικείο προς τα παιδιά αυτής της ηλικίας και η ενασχόλησή τους να σχεδιαστεί ως προέκταση της καθημερινότητας τους (Δεσλή & Γαϊτανέρη (2017).
- Συνεργατική τάξη (Brown, 1999, οπ. αν. η Παπαδοπούλου 2017) με οργάνωση σε μικρές ομάδες, ατομικά αλλά και στην ολομέλεια (Clarke, 1997, οπ. αν. η Παπαδοπούλου, 2017).
- Με κοινωνική αλληλεπίδραση και ανταλλαγή ιδεών και λύσεων μεταξύ των μαθητων (Radford, 2006), συζητήσεων και επεξήγηση και τεκμηρίωση της δράσης και τη σκέψης (Pappas, Ginsburg & Jiang, 2003) και αναγνώριση των λαθών.
- Τέλος ο ρόλος του εκκπαιδευτικού να είναι βοηθητικός, ώστε οι μαθητές να μπορούν να εκφράσουν τα συμπεράσματά τους, (Τζεκάκη, 2010)

Η ενασχόληση των μαθητών με τις κανονικότητες, η αναγνώριση του λειτουργικού τους κανόνα, στην παρούσα μελέτη της “αλλαγής” του κανόνα των εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και άρα η πρόβλεψη οποιουδήποτε στοιχείου της κανονικότητας αποτελεί μαθηματικά σημαντική λειτουργική σκέψη. Η αναγνώριση από μέρους των μαθητών εξελισσόμενων γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και η γενίκευση αυτών είναι ένας αναγνωρισμένος τρόπος που οδηγεί στην ανάπτυξη της λειτουργικής σκέψης που αποτελεί μέρος της αλγεβρικής σκέψης (Wilkie & Clarke, 2016).

Συνοψίζοντας οι μαθητές προσχολικής ηλικίας μπορούν να βελτιώσουν τις ικανότητες τους ως προς την αναπαραγωγή, την επέκταση, τη μεταφορά σε άλλο υλικό, την εύρεση στοιχείου που λείπει και τη δημιουργία μια νέας κανονικότητας, που αφορά στις εξελισσόμενες κανονικότητες λαμβάνοντας υπόψην και σχεδιάζοντας μία ποιοτική διδασκαλία που περιέχει όλα τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

Απαντώντας στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ερευνας διαπιστώνουμε ότι οι μαθητες μπορουν να αντιληφθούν τον κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων, κατανοώντας μέσα απο την κατάλληλη ποιοτική διδασκαλία, την “αλλαγή” των στοιχείων που διέπουν τον κανόνα, με αποτέλεσμα να μπορούν να προβλέψουν κοντινούς/πλησίον όρους της ακολουθίας, απαντώντας σε ερωτήσεις απο τοπικό σε γενικό επίπεδο, βγάζοντας συμπεράσματα και καταγράφοντας τα ώστε να φαίνεται η “αλλαγή” του κανόνα. Οι μαθητές αυτής της ηλικιακής ομάδας, της προσχολικής ηλικίας, μπορούν να εξασκηθούν στην κοντινή η πλησίον/αναδρομική γενίκευση με όρους που φτάνουν μέχρι τη θέση του όρου 10 για κανονικότητες της μορφής (ν+2) και (ν-2) και μέχρι τη θέση του όρου 20 για κανονικότητες της μορφής (ν+1) και (ν-1), ώστε να έρθουν σε επαφή με την έννοια της γενίκευσης και να εξασκηθούν διαισθητικά σε αυτή. Στην παρούσα μελέτη φάνηκε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών βρίσκει τον κανόνα, γενικεύει στον επόμενο όρο της ακολουθίας αλλα μπορεί να γενικεύσει μέχρι και τον όρο δέκα. Αντίθετα η γενίκευση του κανόνα που αφορά μέχρι τον όρο 20 δείχνει να δυσκολεύει τους μαθητές καθώς τα κατάφερε μόνο ένα μικρό ποσοστό.

Συνοψίζοντας οι μαθητές προσχολικής ηλικίας μπορούν να αντιληφθούν τον κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων αρκεί να τους επιστήσουμε την προσοχή στην "αλλαγή" του κανόνα των εξελισσόμενων κανονικοτήτων και μπορούν να προβλέψουν μελλοντικούς όρους της ακολουθίας, εάν ασκηθούν στις εξελισσόμενες κανονικότητες με σκοπό τη γενίκευση μέσω κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης, συνεπώς σε αυτή τη μορφή λειτουργικής σκέψης, της αλγεβρικής σκέψης.

## Δ.2. Περιορισμοί της έρευνας

Η διδακτική παρέμβαση και το ερευνητικό εργαλείο εφαρμόστηκαν σε μία τάξη δημόσιου νηπιαγωγείου που αποτελούνταν απο 9 μαθητές (νήπια και προνηπια) και στο τρίτο διδακτικό τρίμηνο. Συνεπώς τα αποτελέσματα της έρευνας που αφορούν στη διδακτική παρέμβαση αλλα και στην επιτυχία των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση των κανονικοτήτων, στην εύρεση του κανόνα και στην γενίκευσή του, δεν μπορούν να γενικευτούν.

## Δ.3. Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Με βάση τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης, θα είχαν ενδιαφέρον οι παρακάτω προτάσεις για μελλοντική έρευνα:

- Θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι ικανότητες των μαθητών προσχολικής ηλικίας σε ένα μεγαλύτερο δείγμα μαθητών, σε άλλα νηπιαγωγεία και άλλες χρονικές περιόδους με τη διδακτική προσέγγιση και το ίδιο ερευνητικό εργαλείο της παρούσας μελέτης.
- Θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι ικανότητες των μαθητών πρώτης σχολικής ηλικίας με τη συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση και το ίδιο ερευνητικό εργαλείο της παρούσας μελέτης.

# Βιβλιογραφία

**Βιβλιογραφικές ξενόγλωσσες Αναφορές**


Becker, J. R., &Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 121-128.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education*.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *36*(5), 412-446.

Burns, M. (2007). *About teaching mathematics: A K-8 resource*. Sausalito: Math solutions publications.

Caglayan, G. (2020). Pattern Blocks Art. *Journal of Humanistic Mathematics*, *10*(2), 511-526.

Clements, D. H. (2000). 'Concrete 'manipulatives, concrete ideas. *Contemporary issues in early childhood*, *1*(1), 45-60.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2005). Math play. *Scholastic Early Childhood Today*.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In *Early algebraization* (pp. 187-214). Springer, Berlin, Heidelberg.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education.

Fox, J. (2005). Child-Initiated Mathematical Patterning in the Pre-Compulsory Years. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 313-320.

Fox, J. (2005). Child-Initiated Mathematical Patterning in the Pre-Compulsory Years. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 313-320.

Golafshani, N. (2013). Teachers' beliefs and teaching mathematics with manipulatives précis. *Canadian Journal of Education, 36*(3), 137 - 158

Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Oláh, L., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child development*, *77*(1), 153-175.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. Στο T. Romberg, & E. Fennema (Επιμ.), *Mathematics classroom that promotes understanding* (σσ. 133-155). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139-151.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Liggett, R. S. (2017). The Impact of Use of Manipulatives on the Math Scores of Grade 2 Students. Brock Education Journal, 26(2), 87–101.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics*, *26*(3), 24-42.

Ma, H. L. (2009). Characterizing students' algebraic thinking in linear pattern with pictorial contents. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56).

Malara, N. A., & Navarra, G. (2002). ArAl: A project for an early approach to algebraic thinking. *GREM, Department of Mathematics, University of Modena-Reggio E., Italy*.

Markworth, K. A. (2010). Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns.

Mason, J., Drury, H., & Bills, L. (2007). Studies in the Zone of Proximal Awareness. *Jane Watson & Kim Beswick*, 42.

Moyer, P. S., Niezgoda, D., & Stanley, J. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematical representations. Technology-supported mathematics learning environments, 1, 17.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., & Robertson, G. (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP) in Kindergarten. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. E. (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics. *PME*.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. E. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian Pattern and Structure Awareness Project (PASMAP). In *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.

Mulligan, J., Prescott, A., Mitchelmore, M., & Outhred, L. ( 2005 ). Taking a Closer Look at Young Students' Images of Area Measurement. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *10*(2), 4-8.

Papadopoulou, E.C. (2017). *Teaching interventions for mathematical generalization in children 5-7years*. (Unpublished doctoral dissertation). Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki/School of Early Childhood Education.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-More than just alternating colours! .*Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*(3), 8.

Papic, M., &Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, *40*(1), 83-96.

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter (Vol. 1, pp. 2-21).

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Proceeding of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education. 2, pp.59-101. Me/rida: Universidad Pedago/gica Nacional.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 63-70.

Rivera, F. D. (2013). Pattern generalization processing of younger and older Stundents: similarities and differences.USA:National Science Foundation

Rodrigues, M., &Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. In *International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST)* (pp. 120-134). IJEMST.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2002). Building blocks for young children's mathematical development. *Journal of educational computing research*, *27*(1), 93-110.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Building blocks and cognitive building blocks: Playing to know the world mathematically. *American Journal of Play*, *1*(3), 313-337.

Siew N. M., Chong C. L. (2014). Fostering students' creativity through Van Hiele's 5 phase-based tangram activities. *Journal of Education and Learning*, 3(2), 66-80.Retrieved 26 October, 2019

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance on patterning. *International Journal for Mathematics in Education*, *5*, 108-131.

Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(2), 13-19.

Tzekaki, M. & Papadopoylou, E. (2016). Generalizing in Early Childhood. Paper presented at the 40th International Conference of PME, Vol. 1, 252. Szeged, Hungary: PME.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., &Bay-Williams, J.M., (2017) Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο. Αθήνα: Gutenberg.

Warren, E. (2004). Generalising arithmetic: supporting the process in the early years. (M. Hoines, & A. Fuglestad, Eds.) Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, pp. 417-427

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 305-312.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in mathematics*, *67*(2), 171-185.

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 223-243.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002 ). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, *49*(3), 379-402.

**Βιβλιογραφικές ελληνόγλωσσες Αναφορές**

Δεσλή, Δ., &Γαϊτανέρη, Δ. (2017). Η κατανόηση των μαθηματικών μοτίβων από παιδιά Γ'καιΔ'τάξης δημοτικού σχολείου και οι στρατηγικές σκέψης τους. *Προσχολική και Σχολική Εκπαίδευση*, *5*(IKEEART-2017-886), 63-83.

Καλαφατά, Μ., Σκουμπουρδή, Χ., &Χρυσανθή, Π. Τ. (2016). Απόψεις υποψήφιων και εν ενεργεία εκπαιδευτικών για το υλικό στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά Συνεδρίου*, 391.

Παπαδοπούλου, Ε. (2012). Μία διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης κανονικοτήτων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. ΠαιδαγωγικήΕπιθεώρηση, 53, σελ. 123-137.

Παπαδοπούλου, Ε. (2018). Μαθηματική γενίκευση στην προσχολική ηλικία: το εκπαιδευτικό υλικό στο πεδίο των κανονικοτήτων. Στο Σκουμπουρδή, Χ. &Σκουμιός. Μ. (Επιμ.) Πρακτικά του *3ου Πανελληνίου Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή "Εκπαιδευτικό Υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις διασταυρούμενες πορείες μάθησης*,282-291. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Παπαδοπούλου, Ε.. (2017). Διδακτική παρέμβαση για τη μαθηματική γενίκευση. Διδακτορική Διατριβή. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σκουμιός, Μ. &Σκουμπουρδή, Χ. (2018). Χρήση εκπαιδευτικού υλικού Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: απόψεις εκπαιδευτικών. Στο Σκουμπουρδή, Χ. &Σκουμιός. Μ. (Επιμ.) Πρακτικά του *3ου Πανελληνίου Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή "Εκπαιδευτικό Υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις διασταυρούμενες πορείες μάθησης*,14-65. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Σκουμπουρδή, Χ. &Μαλαματένιου, Π.,-Κ. (2015). Παιχνίδι κάλυψης επιφάνειας για το νηπιαγωγείο. Στο Χ. Σκουμπουρδή& Μ. Σκουμιός (Επιμ.) Στο *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, 238-246. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Σκουμπουρδή, Χ. (2014). Ο ρόλος των εκπαιδευτικών υλικών στα μαθηματικά της πρώτης σχολικής ηλικίας. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) Τα μαθηματικά στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση: 12ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, 31-55.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. *Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός*.

Τζεκάκη, Μ. (2018). Δημιουργική χρήση υλικού στη μαθηματική εκπαίδευση: ο ρόλος της γενίκευσης. Στο Σκουμπουρδή, Χ. &Σκουμιός. Μ. (Επιμ.) Πρακτικά του *3ου Πανελληνίου Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή "Εκπαιδευτικό Υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις διασταυρούμενες πορείες μάθησης*,292-301. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Τζεκάκη, Μ., Βαμβακούση, Ξ., Καλδρυμίδου, Μ., (2019). Κανονικότητες (Patterning) στις μικρές ηλικίες – Συνθετική Παρουσίαση ερευνών. Στο Χρίστου. Κ. (Επιμ.) Πρακτικά του *8ου* Πανελλήνιου Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.): Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών, 276- 284. Κύπρος: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία

Χειμωνή, Μ., & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2015). Ικανότητες αλγεβρικής σκέψης: Η φύση και τα χαρακτηριστικά τους. Στο Δεσλή, Δ. Παπαδόπουλος, Ι. & Τζεκάκη, Μ. (Επιμ.) Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν. Ε. Δι. Μ.): Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις , 668-677. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο

**Βιβλιογραφικές Μεταφρασμένες Αναφορές**

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Lovin, L. H., & Bay-Williams, J. M. (2017). Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με Επίκεντρο το Παιδί και την Ανάπτυξή του. Αθήνα: Gutenberg.

**Προγράμματασπουδών**

Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Π., & Μπασαγιάννη, Ε. (2006). Οδηγός νηπιαγωγού. εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί. Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. & Π.Ι. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο. Προγράμματα σχεδιασμού και ανάπτυξης δραστηριοτήτων*. Αθήνα: Υπ.Ε.Π.Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## 1. Εργαλείο ελέγχου αριθμητικών ικανοτήτων

Μαθητής/Μαθήτρια: ______________________

Ηλικία:__________________________________

<table>
<tr><td></td><td>Ναι/Όχι</td></tr>
<tr><td>-Λεκτική μέτρηση (Μπορείς να μετρήσεις μέχρι το 20;)</td><td></td></tr>
<tr><td>-Απαρίθμηση σχημάτων (Μπορείς να αντιστοιχήσεις τους αριθμούς με την κατάλληλη ποσότητα διαφόρων σχημάτων; - δίνεται στους μαθητές η παρακάτω αριθμητική ακολουθία και ζητείται από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν με την κατάλληλη ποσότητα σχημάτων)
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>-Αντικειμενική μέτρηση (Μπορείς να συγκεντρώσεις το συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων π.χ. 5 – δίνεται στους μαθητές μία τυχαία κάρτα και καλούνται να συγκεντρώσουν τα αντικείμενα)</td><td></td></tr>
<tr><td>- Συμβολική και μη συμβολική σύγκριση (Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος)</td><td></td></tr>
<tr><td>-Σειρά αριθμών (Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός βρίσκεται πριν και ποιος μετά από τον (ν) αριθμό;</td><td></td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| -Αναγνώριση συμβόλου αριθμού (Μπορείς να μου ονομάσεις αυτόν τον (ν) αριθμό;) | |
| -Λεκτική αρίθμηση (Μπορείς να μου βρεις ποιος αριθμός προκύπτει αν βάλουμε σε (ν) αντικείμενα άλλο ένα; Αν βάλουμε άλλα δύο; - Πρόσθεση και αφαίρεση ν+1 και ν+2. | |