



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ**

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

**Συντακτικός χειρισμός και σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων: ικανότητες και
δυσκολίες των μαθητών Γυμνασίου**

**Ατματσίδου Αντιγόνη
Α.Ε.Μ. 995**

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής Αριστοτελείου Πανεπιστημίου
Θεσσαλονίκης

Φλώρινα, 2022

Περιεχόμενα

Περίληψη	4
Abstract	5
1 ^ο Κεφάλαιο - Θεωρητικό πλαίσιο	6
1.1 Εισαγωγή	6
1.2 Σύμβολα και η ερμηνεία τους	7
1.3 Δομή των παραστάσεων	8
1.3.1 Η αίσθηση της δομής	9
1.4 Παρενθέσεις	10
1.5 Παρενθέσεις και προτεραιότητα των πράξεων	11
1.6 Οι παρενθέσεις στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια	11
1.7 Αποτελέσματα ερευνών	14
1.7.1 Συμβολισμός και σύνταξη	15
1.7.2 Χειρισμός των παρενθέσεων σε σχέση με τη δομή των παραστάσεων	16
1.7.3 Παρενθέσεις σε υπολογισμό ή επεξεργασία αριθμητικής παράστασης	18
1.7.4 Μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αλγεβρική παράσταση	22
1.7.5 Νοηματοδότηση αλγεβρικής έκφρασης	23
1.8 Σύνοψη 1 ^{ου} κεφαλαίου	24
1.9 Αναγκαιότητα της έρευνας	26
2 ^ο Κεφάλαιο – Μεθοδολογία	28
2.1 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα	28
2.2 Μέθοδος	28
2.3 Δείγμα	28
2.4 Διαδικασία	29
2.5 Εργαλείο	30
3 ^ο Κεφάλαιο – Αποτελέσματα	38
3.1 Αποτελέσματα ανά μαθητή	38
3.2 Αποτελέσματα ανά κατηγορία ερωτήσεων	60
3.2.1 Αντίληψη της έννοιας των παρενθέσεων	60
3.2.2 Χειρισμός παραστάσεων χωρίς παρενθέσεις	61
3.2.3 Χειρισμός παραστάσεων με παρενθέσεις	62

3.2.4 Συντακτικός χειρισμός-ρόλος των παρενθέσεων στον συντακτικό χειρισμό	64
3.2.5 Σημασιολογική ερμηνεία	66
3.3 Σύνθεση αποτελεσμάτων.....	69
4 ^ο Κεφάλαιο – Συζήτηση και συμπεράσματα.....	73
Περιορισμοί της έρευνας	79
Βιβλιογραφία	80
Παράρτημα 1 - Εργαλείο	84
Παράρτημα 2 - Αποτελέσματα ανά ερώτηση	86
Παράρτημα 3 - Άδεια από γονείς.....	88
Παράρτημα 4 - Απομαγνητοφωνήσεις	89
M1 - Β΄ Γυμνασίου.....	89
M2 - Β΄ Γυμνασίου.....	103
M3 - Β΄ Γυμνασίου.....	113
M4 - Γ΄ Γυμνασίου.....	121
M5 - Γ΄ Γυμνασίου.....	132

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια μελέτης των συμπεριφορών των μαθητών κατά τον χειρισμό των παρενθέσεων. Η έρευνα επιχειρεί να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται τις αριθμητικές παραστάσεις ως προς την προτεραιότητα των πράξεων σε σχέση με το αν υπάρχουν ή όχι παρενθέσεις και αν οι παρενθέσεις έχουν σημαντικό ρόλο για τους μαθητές. Επιπλέον, θα μελετηθεί η ικανότητα των μαθητών για σημασιολογική διαφοροποίηση των μαθηματικών αντικειμένων εντός των παρενθέσεων και η ικανότητα δημιουργίας λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση και νοηματοδότησης παράστασης σε σχέση με δοθέν λεκτικό πρόβλημα. Είναι μια μελέτη περιορισμένων περιπτώσεων σε μικρό δείγμα και τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ενός ερωτηματολογίου το οποίο απαντήθηκε μέσω συνεντεύξεων. Στην έρευνα συμμετείχαν 5 μαθητές Β΄ και Γ΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές νιώθουν ασφάλεια με την ύπαρξη των παρενθέσεων. Όταν υπάρχουν παρενθέσεις στην αριθμητική παράσταση, οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα ξεκινάνε υπολογίζοντας τις πράξεις μέσα σε αυτές και έπειτα συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά. Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις συχνά δεν ακολουθούν την προτεραιότητα των πράξεων. Επιπλέον, σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι μαθητές του δείγματος της έρευνας καταφέρνουν να νοηματοδοτήσουν απλές αριθμητικές παραστάσεις αλλά δυσκολεύονται να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά τις παρενθέσεις. Τέλος, κατά την μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αριθμητική παράσταση συχνά δεν χρησιμοποιούν αναγκαίες παρενθέσεις ή χρησιμοποιούν περιττές.

Λέξεις κλειδιά: παρενθέσεις, προτεραιότητα πράξεων, χειρισμός παρενθέσεων, λεκτικά προβλήματα

Abstract

In this work, an attempt is made to study students' behaviors when handling parentheses. The research aims to investigate how students handle numerical expressions in terms of the priority of operations in relation to whether or not parentheses are present and whether parentheses have an important role for students. In addition, students' ability to semantically differentiate the mathematical objects within parentheses and the ability to create a verbal problem from a numerical representation and give meaning to a representation in relation to a given verbal problem will be studied. It is a limited case study in a small sample and the data was collected through a questionnaire which was answered through interviews. Five (5) middle school students participated in the research. The results of the survey showed that students feel safe with the existence of parentheses. When there are parentheses in the number expression, students who participated in the study, start by calculating the operations inside them and then continue from left to right. In performances without parentheses, they often do not follow the order of operations. In addition, according to the results, the subjects manage to give meaning to simple numerical expressions but have difficulty in semantically differentiating parentheses. Finally, when converting a verbal problem into a numerical expression, they often do not use necessary parentheses or use unnecessary ones.

Keywords: parentheses, precedence of operations, handling parentheses, word problems

1^ο Κεφάλαιο - Θεωρητικό πλαίσιο

1.1 Εισαγωγή

Ένα σημαντικό θέμα που απασχολεί τους ερευνητές του τομέα της άλγεβρας είναι οι παρανοήσεις των μαθητών οι οποίες προκύπτουν από την λανθασμένη ή τη μη κατανόηση της λειτουργίας των βασικών συμβόλων της άλγεβρας. Ένα βασικό εμπόδιο στην κατανόηση της άλγεβρας είναι η προϋπάρχουσα γνώση για την οποία μπορεί να υπάρχουν παρανοήσεις (Booth & Koedinger, 2008). Σύμφωνα με τον Welder (2012), κατά τη μάθηση της άλγεβρας προκύπτουν κάποιες δυσκολίες και παρανοήσεις. Όπως ο ίδιος υποστηρίζει, οι εκπαιδευτικοί παίζουν πολύ μεγάλο ρόλο στη μάθηση της άλγεβρας και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζουν το περιεχόμενο της αριθμητικής που διδάσκουν συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό και πολλές φορές αρνητικά στην μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Οι παρενθέσεις αποτελούν βασικό σύμβολο της άλγεβρας. Το γεγονός ότι έχουν περισσότερες από μια λειτουργίες δημιουργεί κάποιες δυσκολίες στους μαθητές (Gunnarsson & Karlsson, 2015· Gunnarsson, Hernell & Sönnnerhed, 2012· Welder, 2012). Η εννοιολογική κατανόηση του συμβόλου της παρένθεσης είναι πολύ σημαντική στην προτεραιότητα των πράξεων και παρατηρείται ότι υπάρχει μεγάλη σύγχυση σε μαθητές όλων των ηλικιών (Kieran, 1985 στο Welder, 2012).

Με αφορμή τα παραπάνω, στην παρούσα εργασία γίνεται μία προσπάθεια μελέτης των ικανοτήτων και των παρανοήσεων των μαθητών για τις παρενθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετηθεί ο συντακτικός χειρισμός και η σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων από μαθητές Γυμνασίου.

Στο 1^ο μέρος της εργασίας γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος. Αναλυτικότερα, μετά από την εισαγωγή παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο για τα σύμβολα, τη συντακτική δομή στην άλγεβρα, τις παρενθέσεις και την προτεραιότητα των πράξεων. Έπειτα, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζονται οι παρενθέσεις στα σχολικά εγχειρίδια και στη συνέχεια, στην ενότητα «1.7 Αποτελέσματα ερευνών» γίνεται μια παρουσίαση συμπεριφορών των μαθητών κατά τον χειρισμό των παρενθέσεων αναφορικά με το συντακτικό, τη δομή, την προτεραιότητα των πράξεων και τη σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων. Συλλέγονται οι ικανότητες, οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών σε σχέση με τις παρενθέσεις. Τέλος, γίνεται μια ανασκόπηση στις συμπεριφορές των μαθητών που αναφέρονται στη βιβλιογραφία και στον τρόπο με τον οποίο ίσως να συνδέονται με τη διδασκαλία των παρενθέσεων στα σχολικά εγχειρίδια.

Το 2^ο μέρος περιλαμβάνει τα κεφάλαια 2, 3 και 4, στα οποία παρουσιάζεται η εμπειρική έρευνα. Αρχικά, διατυπώνεται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, γίνεται αναφορά στη μεθοδολογία της έρευνας και παρουσιάζεται αναλυτικά το εργαλείο. Στη συνέχεια, αναλύονται και κατηγοριοποιούνται τα αποτελέσματα της έρευνας και τέλος παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

1.2 Σύμβολα και η ερμηνεία τους

Τα σύμβολα αποτελούν οντότητες που αντιπροσωπεύουν ή αντικαθιστούν κάτι άλλο. Οι οντότητες αυτές μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές, μπορεί να είναι συγκεκριμένα αντικείμενα ή να είναι γραπτά σημάδια σε χαρτί (Hiebert, 1988).

Διάφοροι ερευνητές ασχολήθηκαν με τη μελέτη της κατανόησης των συμβόλων από τους μαθητές (Karut, Blanton & Moreno, 2008· Arcavi, 1994· Skemp, 1987). Ο Skemp (1987), σε βιβλίο του που αφορά στην ψυχολογία του ατόμου κατά την εκμάθηση των Μαθηματικών αναφέρεται στην συμβολική κατανόηση. Σύμφωνα με τον ίδιο, ο όρος «συμβολική» δεν αφορά σε ένα σύμβολο αλλά σε ένα σύστημα συμβόλων. Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει ένα σύνολο από έννοιες (concepts) σε συνδυασμό με τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα σύμβολα σε αντιστοίχιση με τις σχέσεις ανάμεσα στις έννοιες. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει ως παράδειγμα τους αριθμούς «2» και «3», οι οποίοι με βάση το μέγεθος και την θέση του ψηφίου έχουν άλλη έννοια όπως για παράδειγμα στους αριθμούς «2³» και «23». Παρουσιάζοντας το παραπάνω παράδειγμα, ο Skemp καταλήγει στο συμπέρασμα πως η συμβολική κατανόηση αποτελείται από δύο μέρη, το συμβολικό σύστημα και μια κατάλληλη εννοιολογική δομή. Σύμφωνα με τους Karut, Blanton & Moreno (2008) η διαδικασία του συμβολισμού συνδέεται άμεσα με την διαδικασία της εννοιολογικής κατανόησης. Όταν ο συμβολισμός μιας γενίκευσης εδραιωθεί τότε τα ίδια τα σύμβολα μπορούν να βοηθήσουν στη διαδικασία συλλογισμού επειδή έχουν χαρακτηριστικά των γενικεύσεων.

Το 1994, ο Arcavi θέλησε να περιγράψει την «αντίληψη του συμβόλου» ισχυριζόμενος ότι δεν θα ήταν εύκολο να δοθεί ένας ορισμός για την έννοια αυτή. Σύμφωνα με τον ίδιο η «αντίληψη του συμβόλου» περιλαμβάνει

-την κατανόηση της δύναμης των συμβόλων, δηλαδή πού και πότε μπορούν και πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να γίνονται φανερά οι ιδιότητές τους,

-την αναγνώριση της στιγμής που κάποιος πρέπει να εγκαταλείψει τα σύμβολα που χρησιμοποιεί ώστε να επιλέξει μια πιο κομψή και γρήγορη στρατηγική επίλυσης,

-την ικανότητα να διαχειρίζεται αλλά και να «διαβάσει» εκφράσεις με σύμβολα ως δύο συμπληρωματικές πτυχές στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων,

-την επίγνωση ότι κάποιος μπορεί να «χτίσει» συμβολική έκφραση μέσα από ένα λεκτικό ή γραφικό πρόβλημα,

-την ικανότητα να επιλέξει τη σωστή συμβολική παράσταση για κάποιο πρόβλημα,

-την αναγνώριση ότι τα σύμβολα μπορεί να έχουν διαφορετική ερμηνεία σε διαφορετικά πλαίσια.

Τονίζει βέβαια ότι παρόλο που δεν περιορίζεται σε έναν ορισμό και περιγράφει την «αντίληψη του συμβόλου» μέσα από αρκετές προτάσεις υπάρχουν και πάλι περιορισμοί καθώς δεν μπορεί να οριστεί από μια «λίστα» (catalogue), όπως την ονομάζει.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το συμβολικό σύστημα περιλαμβάνει ένα σύνολο από έννοιες σε συνδυασμό με τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα σύμβολα (Skemp, 1982). Η αναφορά αυτή δημιουργεί την ανάγκη για την εισαγωγή στην έννοια της δομής η οποία συνδέεται με την έννοια του συμβόλου και τη συμβολική κατανόηση. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται οι έννοιες της δομής και της αίσθησης της δομής, όπως αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

1.3 Δομή των παραστάσεων

Αρχικά, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο όρος δομή, όπως χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, αναφέρεται στη συντακτική δομή των αλγεβρικών παραστάσεων και εκφράσεων, δηλαδή στο συντακτικό της αλγεβρικής γλώσσας. Σύμφωνα με την Warren (2003), η μαθηματική δομή αφορά στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων (αν κάποια ποσότητα είναι μεγαλύτερη, αν είναι ίσες κ.α.), τις ιδιότητες των πράξεων (προσεταιριστική, αντιμεταθετική κ.α.) και τις σχέσεις μεταξύ των πράξεων (ποια πράξη προηγείται). Οι Hoch και Dreyfus (2005) διατυπώνουν έναν δικό τους ορισμό για την δομή. Δομή, για τους ίδιους, είναι η ανάλυση του τρόπου με τον οποίο μια οντότητα στα μαθηματικά έχει σχηματιστεί, με βάση τα μέρη από τα οποία αποτελείται. Η ανάλυση αυτή αφορά στην θέση των αντικειμένων (π.χ. τον όρων μιας παράστασης) και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση αποτελεί μια αλγεβρική δομή. Ο τρόπος που παρουσιάζεται η έκφραση δίνει πληροφορίες για μια εσωτερική τάξη (order). Η τάξη αυτή εξαρτάται από τις ποσότητες που περιλαμβάνει η πρόταση και τις πράξεις που συμβαίνουν μεταξύ των ποσοτήτων (Hoch κ.α., 2005). Με βάση τα παραπάνω, η δομή σε μια αριθμητική έκφραση αφορά στο είδος των πράξεων και των ποσοτήτων που περιλαμβάνονται σε μια πρόταση και στη σειρά με την οποία αυτά εμφανίζονται. Παραδείγματα παραστάσεων με διαφορετική δομή είναι οι «3+8» και «8+3» οι οποίες έχουν ίδιο αποτέλεσμα αλλά και οι «(3+8)·2» και «3+8·2» που έχουν διαφορετικό αποτέλεσμα λόγω των ιδιοτήτων των πράξεων.

Ο τρόπος με τον οποίο θα εξετάσει κάποιος τη δομή μια έκφρασης διαφέρει ανάλογα με αυτό που επιλέγει να είναι το επίκεντρο της δομής. Μπορεί το επίκεντρο να είναι οι αριθμοί ή οι πράξεις ενώ σε κάποιες περιπτώσεις να είναι και τα δύο. Για παράδειγμα, στις παραστάσεις «3+2», «3·2» οι αριθμοί παραμένουν οι ίδιοι ενώ η πράξη αλλάζει. Αντίθετα, στις παραστάσεις «3-2» και «2-3» η πράξη παραμένει ίδια ενώ οι αριθμοί αλλάζουν θέση.

1.3.1 Η αίσθηση της δομής

Ο όρος αίσθηση της δομής (structure sense) χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τους Linchevski και Livneh (1999) όταν θέλησαν να περιγράψουν τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα που προκύπτουν από την έλλειψη κατανόησης της δομής των αριθμητικών εκφράσεων (Gunnarsson κ.α., 2015· Hoch κ.α., 2005· Hoch, 2003). Οι Linchevski και Livneh (1999) υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικό οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με διαφορετικές δομές αλγεβρικών εκφράσεων. Θεωρούν ότι οι μαθητές έχουν κατακτήσει την αίσθηση της δομής όταν είναι σε θέση να χρησιμοποιούν ισοδύναμες δομές μιας έκφρασης με ευελιξία και δημιουργικότητα. Το 2003, ο Hoch παρουσιάζει έναν ορισμό για την αίσθηση της δομής. Σύμφωνα με τον ίδιο, αίσθηση της δομής είναι η ικανότητα του ατόμου, χάρη από την ικανότητα υπολογισμού, που επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν καλύτερη χρήση αλγεβρικών τεχνικών που έχουν μάθει παλαιότερα. Με άλλα λόγια, όταν ένας μαθητής χρησιμοποιεί αποτελεσματικές και κομψές μεθόδους για να λύσει κάποιο πρόβλημα, τότε έχει κατακτήσει την αίσθηση της δομής. Σε επόμενο άρθρο, ο Hoch και ο Dreyfus (2005), προσθέτουν στον προηγούμενο ορισμό του Hoch, ότι ένας μαθητής έχει κατακτήσει την αίσθηση της δομής όταν πλέον είναι ικανός να δει μια αλγεβρική πρόταση ως μια οντότητα και να διαιρέσει μια οντότητα σε υποδομές.

Ο Liebenberg και οι συνεργάτες του (1998), χρησιμοποιούν τους όρους «επιφανειακή δομή» και «κρυμμένη δομή» («surface» και «hidden» αντιστοίχως) και εξηγούν πως η κατανόηση της δομής μιας αριθμητικής έκφρασης προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης και των δύο αυτών δομών. Για παράδειγμα, στην παράσταση « $2 \times 4 + 3 \times 8 + 7 \times 1$ », η «επιφανειακή» του δομή είναι ότι υπάρχουν έξι αριθμοί στην παράσταση ενώ η «κρυμμένη» είναι ότι η παράσταση περιέχει τρεις αριθμούς καθώς η παράσταση είναι ισοδύναμη της « $8 + 24 + 7$ ».

1.3.2 Προτάσεις για την ανάπτυξη της κατανόησης της δομής των αριθμητικών παραστάσεων

Οι Gunnarsson και Karlsson (2015) υποστηρίζουν ότι για να αναπτυχθεί πλήρως η αίσθηση της δομής, πρέπει πρώτα να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο οι όροι ομαδοποιούνται και πώς οι διάφορες πράξεις λειτουργούν σε συνδυασμό. Επιπλέον, προσθέτουν ότι είναι σημαντικό, κατά την εισαγωγή των μαθητών στις παρενθέσεις, πρέπει να τονιστούν οι ιδιότητες αυτών και όχι μόνο η θέση τους στην προτεραιότητα των πράξεων. Επισημαίνουν ότι είναι σημαντικό να τονιστεί στους μαθητές το γεγονός ότι οι παρενθέσεις εμφανίζονται ως διατεταγμένο ζεύγος στο οποίο για κάθε μεμονωμένη παρένθεση που ανοίγει υπάρχει η αντίστοιχη που την κλείνει και αντίστροφα. Όπως επίσης και ότι οι παρενθέσεις μπορεί να αλλάξουν τη δομή της έκφρασης αλλά χωρίς να είναι απαραίτητο ότι θα συμβεί (Gunnarsson κ.α., 2015).

Οι μαθητές δεν δίνουν σημασία στις πράξεις αλλά στους αριθμούς διαχωρίζοντάς τους από τις πράξεις (Linchevski κ.α., 1999). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο αποκτούν δυσκολίες

στην κατανόηση της προτεραιότητας των πράξεων. Για να δοθεί η απαραίτητη σημασία, προτείνεται η χρήση παρενθέσεων ακόμη και όταν δεν είναι απαραίτητες ώστε να γίνονται κατανοητά τα δομικά χαρακτηριστικά της προτεραιότητας. Προτείνουν ότι η εισαγωγή παρενθέσεων έμφασης βοηθάει στην κατανόηση της δομής σε εκφράσεις της μορφής $a \pm b \cdot \gamma$. Πολλοί ερευνητές, ακόμη, ισχυρίζονται πως οι άχρηστες, μαθηματικά, παρενθέσεις (παρενθέσεις έμφασης) βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση της προτεραιότητας των πράξεων και στην σωστότερη επίλυση αριθμητικών παραστάσεων ακόμη και των πολύ απλών (Gunnarsson κ.α., 2015· Gunnarsson κ.α., 2012· Marchini & Papadopoulos, 2011· Hoch κ.α., 2004).

1.4 Παρενθέσεις

Ο Freudenthal (1973) ανέφερε ότι οι παρενθέσεις είναι ένα βασικό σύμβολο για την αλγεβρική δομή, αποτελούν ουσιαστικό μέρος της άλγεβρας και μαζί με την προτεραιότητα πράξεων διακρίνουν την αλγεβρική γλώσσα από την καθομιλουμένη (στο Gunnarsson κ.α., 2015). Οι Hoch και Dreyfus (2005) συμφωνούν πως οι παρενθέσεις βοηθούν τον μαθητή στην κατανόηση της δομής και τονίζουν πως ένα σημαντικό μέρος της αντίληψης της δομής της παράστασης βρίσκεται σε αυτό που παρατηρεί κάποιος πριν ξεκινήσει να πράττει. Σύμφωνα με τους ίδιους, οι παρενθέσεις δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να ξεχωρίσουν τους όμοιους όρους και «να σπάσουν την μεγάλη γραμμή συμβόλων». Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι παρενθέσεις αποτελούν ένα σύμβολο το οποίο μπορεί να επηρεάσει την δομή μιας έκφρασης αλλά χωρίς αυτό να είναι βέβαιο πως θα συμβεί (Gunnarsson κ.α., 2015).

Πέρα από τον ρόλο των παρενθέσεων στη δομή των εκφράσεων, οι παρενθέσεις στα μαθηματικά έχουν διάφορες λειτουργίες. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε εκφράσεις χωρίς να έχουν κάποιο μαθηματικό νόημα όπως για παράδειγμα στην παράσταση « $\frac{1}{(x+1)}$ », όπου οι παρενθέσεις είναι περιττές. Επιπλέον, συχνά οι παρενθέσεις εμφανίζονται σε εκφράσεις που είναι απαραίτητες και χωρίς αυτές θα άλλαζε το νόημα, όπως για παράδειγμα στην έκφραση « $2 \cdot (4+3)$ », όπου με την παρένθεση προτεραιότητα έχει η πρόσθεση ενώ χωρίς αυτήν θα είχε ο πολλαπλασιασμός (Gunnarsson κ.α., 2015· Gunnarsson κ.α., 2012). Οι παρενθέσεις επίσης, αποτελούν σύμβολο ομαδοποίησης ή μπορεί να συμβολίζουν τον πολλαπλασιασμό με αρνητικό αριθμό, όπως για παράδειγμα στην παράσταση « $3-(4+6)$ » (Das, 2020). Ένας επιπλέον τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι παρενθέσεις είναι για να δηλώσουν τους αρνητικούς αριθμούς και να το διαφοροποιήσουν από την πράξη της αφαίρεσης. Για παράδειγμα, στον αριθμό « (-4) », οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται για να δείξουν ότι πρόκειται για τον αρνητικό αριθμό και όχι για αφαίρεση με το 4 (Kilhamn, 2011). Οι Linchevski και Livneh (1999) προτείνουν τη χρήση παρενθέσεων σε παραστάσεις όπως η « $5+6 \times 10$ » (δηλ. $5+(6 \times 10)$). Λόγος ύπαρξης της παρένθεσης που προτείνουν είναι να αποσυνδέσει ο μαθητής τον αριθμό 6 από την πράξη της πρόσθεσης.

Ως προς τον συμβολισμό, οι παρενθέσεις αποτελούν διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων όπου για κάθε σύμβολο που ανοίγει υπάρχει αντίστοιχο και μοναδικό σύμβολο που κλείνει (Gunnarsson κ.α., 2015). Επιπλέον, πρόκειται για σύμβολο το οποίο μπορεί να έχει περιεχόμενο.

1.5 Παρενθέσεις και προτεραιότητα των πράξεων

Στην αριθμητική οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται για να δείξουν ποια πράξη έχει προτεραιότητα (Welder, 2012). Οι παρενθέσεις δείχνουν στους μαθητές τα βήματα κατά τον υπολογισμό μιας παράστασης (Radford, 2003). Διδάσκονται ταυτόχρονα με την προτεραιότητα των πράξεων και συχνά περιγράφονται απλά με την πρόταση-κανόνα «υπολογίζουμε πρώτα ό,τι βρίσκεται μέσα σε παρένθεση». Ο Gunnarsson και η Karlsson όμως (2015), τονίζουν πως αυτό δεν είναι πάντα απαραίτητο καθώς σε μια παράσταση που περιέχει παρένθεση μπορεί να είναι εφικτό να εκτελεστούν και πράξεις έξω από την παρένθεση πριν από αυτή. Για παράδειγμα, στην παράσταση « $4+5-(2+3)$ » ο υπολογισμός του αθροίσματος $4+5$ πριν από την παρένθεση δεν οδηγεί σε λάθος αποτέλεσμα.

Παρόλα αυτά υπάρχουν παραστάσεις στις οποίες η ύπαρξη παρενθέσεων είναι απαραίτητη και ο υπολογισμός πράξεων που βρίσκονται εκτός παρένθεσης θα οδηγούσε σε λάθος. Για παράδειγμα στην παράσταση « $3-2\cdot(4-6)$ », θα ήταν λάθος κάποιος να εκτελέσει πρώτα την πράξη της αφαίρεσης πριν από την παρένθεση εφόσον ο πολλαπλασιασμός προηγείται της αφαίρεσης.

Οι παρενθέσεις, πέρα από καταστάσεις που μπορεί να είναι απαραίτητες για την προτεραιότητα είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν και με σκοπό να δώσουν έμφαση στην προτεραιότητα των πράξεων χωρίς να είναι αναγκαίες, όπως για παράδειγμα στην παράσταση « $(2\cdot3)+4$ » όπου οι παρενθέσεις είναι περιττές από τη στιγμή που ο πολλαπλασιασμός έχει ούτως ή άλλως προτεραιότητα (Gunnarsson κ.α., 2015· Gunnarsson κ.α., 2012).

1.6 Οι παρενθέσεις στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια

Πριν παρουσιαστούν οι δυσκολίες των μαθητών που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία όσον αφορά στις παρενθέσεις, θεωρήθηκε αναγκαίο να γίνει μια μελέτη για τον τρόπο με τον οποίο οι παρενθέσεις παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών οι παρενθέσεις παρουσιάζονται πρώτη φορά στο βιβλίο μαθητή της Γ΄ τάξης του Δημοτικού όπου γίνεται μια σύντομη αναφορά στην επιμεριστική ιδιότητα (άτυπα) χωρίς να γίνεται συγκεκριμένα αναφορά στις παρενθέσεις. Στη συνέχεια, (Εικόνα 1) παρουσιάζεται το τμήμα του βιβλίου όπου της Γ΄ τάξης του Δημοτικού όπου παρουσιάζονται οι παρενθέσεις.

μαθαίνω

Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 15×5 , χωρίζουμε το 15 σε 10 και 5, πολλαπλασιάζουμε το καθένα με το 5 και προσθέτουμε τα γινόμενα.

$$15 \times 5 = (10 + 5) \times 5 = 10 \times 5 + 5 \times 5 = 50 + 25 = 75$$

Εικόνα 1. Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Βιβλίο μαθητή, Κεφ. 17°

Περισσότερο αναλυτική αναφορά των παρενθέσεων γίνεται στην ΣΤ' τάξη του Δημοτικού. Ο τίτλος του κεφαλαίου στο σχολικό εγχειρίδιο είναι «Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις» και οι μαθητές σε αυτό το κεφάλαιο εισάγονται στον κόσμο της προτεραιότητας πράξεων και μαθαίνουν να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις. Η **Εικόνα 2**, αποτελεί το απόσπασμα του κεφαλαίου στο οποίο παρουσιάζεται η προτεραιότητα των πράξεων.

Αριθμητικές παραστάσεις	Παραδείγματα
Μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων λέγεται αριθμητική παράσταση .	$45 + 6 + 3,2 + 0,9 + 65$ $8 \cdot 2,5 + 40$
Σε ένα πρόβλημα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μια ποσότητα, πρέπει να κάνουμε κάποιες πράξεις με συγκεκριμένη σειρά. Όλα αυτά μπορούμε να τα εκφράσουμε με μια αριθμητική παράσταση.	Αγόρασα 2 παγωτά των 0,90 € το καθένα και 3 μπουκαλάκια νερό των 0,45 € το καθένα. Πόσο πλήρωσα; Λύση: $2 \cdot 0,90 + 3 \cdot 0,45 = 1,80 + 1,35 = 3,15$
Στις αριθμητικές παραστάσεις, οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με μια ορισμένη σειρά:	$15 : 3 \cdot 5 + 3,5 = 5 \cdot 5 + 3,5 = 25 + 3,5 = 28,5$ (αφού η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός έχουν την ίδια προτεραιότητα, εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και μετά την πρόσθεση)
α) πρώτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις και β) μετά προσθέσεις και αφαιρέσεις	
Αν υπάρχουν παρενθέσεις , κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την ίδια σειρά.	$(117,6 + 98,4) : (40 - 22) = 216 : 18 = 12$

Εικόνα 2. Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Βιβλίο μαθητή, Κεφ. 8°

Αναλύοντας το βιβλίο του μαθητή της ΣΤ' τάξης, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα, παρατηρείται ότι η αναφορά στις παρενθέσεις είναι μικρή και παρουσιάζονται διαδικαστικά ως μέρος κανόνα, χωρίς να αναφέρονται οι διάφορες λειτουργίες των παρενθέσεων.

Έπειτα, στο σχολικό βιβλίο της Α' Γυμνασίου παρουσιάζεται σε ένα μικρό βαθμό η επίλυση αλγεβρικών παραστάσεων και η προτεραιότητα των πράξεων. Παρόλο που υπάρχει αναφορά στην προτεραιότητα των πράξεων στην Α' Γυμνασίου η υποενότητα αυτή είναι εκτός ύλης. Θεωρούμε ότι παρόλο που η ενότητα είναι εκτός ύλης ο μαθητής έχει την ευκαιρία να ανατρέξει σε αυτή ώστε να θυμηθεί την προτεραιότητα των πράξεων και για αυτό τον λόγο είναι σκόπιμο να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι παρενθέσεις. Στην Εικόνα

3 παρουσιάζεται το κομμάτι της θεωρίας που θυμίζει στους μαθητές την προτεραιότητα των πράξεων.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- ◆ Σε μία αριθμητική παράσταση συμφωνούμε η προτεραιότητα των πράξεων να είναι η ακόλουθη:
 1. Υπολογισμός **δυνάμεων**.
 2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**
 3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά. Το τελικό αποτέλεσμα που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση το λέμε τιμή της.

Εικόνα 3. Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βιβλίο μαθητή, Κεφ.1.3

Από την Εικόνα 3 παρατηρούμε ότι οι παρενθέσεις παρουσιάζονται και πάλι διαδικαστικά, ως κανόνας ο οποίος είναι ο εξής: «*Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (...)*».

Τέλος, στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου στο πρώτο επαναληπτικό κεφάλαιο, με τίτλο «Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς», παρουσιάζεται η επίλυση αριθμητικών παραστάσεων. Η προτεραιότητα των πράξεων υπενθυμίζεται στους μαθητές μέσα από λυμένο παράδειγμα – εφαρμογή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6$$

$$B = (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3)$$

Λύση

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

$$\begin{aligned} A &= (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 - 25 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 50 : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 10 - 6 = \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= (2 \cdot 5 - 9) + 2 \cdot (8 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= 10 - 9 + 2 \cdot 4 - 12 : (-3) = \\ &= 1 + 8 + 4 = \\ &= 9 + 4 = \\ &= 13 \end{aligned}$$

Εικόνα 4. Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλίο μαθητή, Κεφ.1.1

Η προτεραιότητα πράξεων, λοιπόν, παρουσιάζεται ως βήματα επίλυσης αριθμητικής παράστασης. Συνεπώς, παρουσιάζεται περισσότερο ως διαδικασία που ακολουθεί κάποιος για να υπολογίσει μια αριθμητική παράσταση χωρίς να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν την σημασία της προτεραιότητας πράξεων. Οι παρενθέσεις παρουσιάζονται και πάλι ως μέρος της διαδικασίας και ως εργαλείο για την προτεραιότητα των πράξεων.

Από τα παραπάνω, γίνεται εύκολα αντιληπτό το γεγονός ότι στα σχολικά εγχειρίδια οι παρενθέσεις διδάσκονται διαδικαστικά μαζί με την προτεραιότητα των πράξεων. Δεν γίνεται αναφορά στην λειτουργία του συμβόλου και στα δομικά του χαρακτηριστικά παρά μόνο στην προτεραιότητα που έχουν όταν υπάρχουν σε μια αριθμητική παράσταση, το οποίο έρχεται σε συμφωνία με ισχυρισμό των Gunnarsson και Karlsson (2015). Στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, ο κανόνας που δίνεται στους μαθητές για τις παρενθέσεις είναι πως «όταν η παράσταση περιέχει παρενθέσεις υπολογίζουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σε αυτές» ενώ δεν γίνεται αναφορά στη σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων.

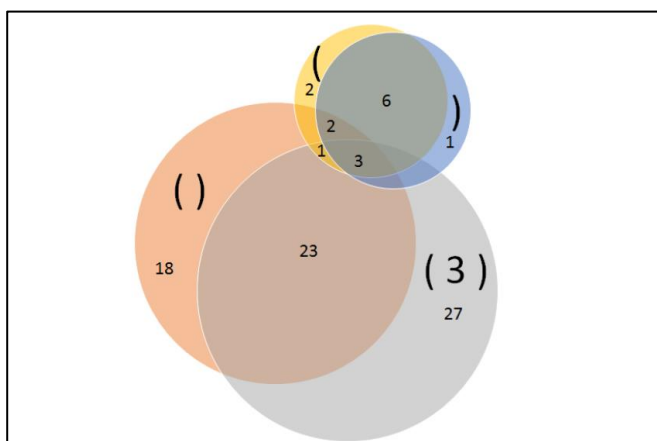
1.7 Αποτελέσματα ερευνών

Στα προηγούμενα κεφάλαια έγινε μια παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου όσον αφορά στη δομή, στον ρόλο των παρενθέσεων στην άλγεβρα και στη συμβολική γλώσσα αλλά και στην προτεραιότητα των πράξεων. Επιπλέον, έγινε μια ανασκόπηση στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού και του Γυμνασίου στα οποία αναφέρονται οι παρενθέσεις, με σκοπό να γίνει ορατός ο τρόπος με τον οποίο αυτές παρουσιάζονται στους μαθητές καθώς όπως θα αναφερθεί και παρακάτω, κάποιοι ερευνητές θεωρούν πως ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται η έννοια επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο εργάζονται οι μαθητές (Tabak, 2019· Joseph, 2014). Οι διαφορετικές λειτουργίες των παρενθέσεων που παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο οδηγούν τους μαθητές σε παρανοήσεις και λάθη (π.χ. πολλαπλασιαστικός παράγοντας, σύμβολο ομαδοποίησης, σύμβολο έμφασης, εργαλείο για την προτεραιότητα των πράξεων).

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ομαδοποιημένα συμπεριφορές των μαθητών που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία όσον αφορά στον συμβολισμό των παρενθέσεων, στον τρόπο με τον οποίο χειρίζονται τις παρενθέσεις σε σχέση με τη δομή των παραστάσεων και την προτεραιότητα των πράξεων και στη μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αριθμητική παράσταση και αντίστροφα, στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση. Κάποιες από τις συμπεριφορές που περιγράφονται στην ενότητα αυτή είναι η μη τήρηση της προτεραιότητας πράξεων σε παραστάσεις με και χωρίς παρενθέσεις και ο υπολογισμός παραστάσεων εκτελώντας πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά. Παρατηρείται, επίσης, η αντίληψη ότι σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις δεν ισχύει η προτεραιότητα των πράξεων και η δυσκολία μετατροπής λεκτικού προβλήματος σε αριθμητική παράσταση και το αντίστροφο.

1.7.1 Συμβολισμός και σύνταξη

Οι Gunnarsson και Karlsson (2015) παρουσίασαν τα αποτελέσματα μιας έρευνας που διεξήγαγαν με συμμετέχοντες μαθητές 14-15 χρόνων. Σκοπός της έρευνάς τους ήταν να εξετάσουν την αντίληψη των μαθητών για τις παρενθέσεις. Ένα μέρος της εργασίας αφορούσε αποκλειστικά στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια «παρενθέσεις» και σύμφωνα με τους ερευνητές, εντοπίστηκαν κάποιες παρανοήσεις. Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν μέσω γραπτού ερωτηματολογίου που περιλάμβανε 10 έργα. Ένα έργο του ερωτηματολογίου ζητούσε από τους μαθητές να επιλέξουν ποιος ή ποιοι από τους συμβολισμούς «(», «)», «()» και «(3)» αναπαριστούν παρενθέσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών αντιλαμβάνεται την λέξη παρενθέσεις ως κάτι που έχει περιεχόμενο μέσα ή που μπορεί να έχει περιεχόμενο, όπως παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 5. Απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση «Ποιο ή ποια από τα παρακάτω αποτελεί παράδειγμα παρένθεσης;» (Gunnarsson και Karlsson, 2015: 49)

Συγκεκριμένα, 27 από τους 84 μαθητές επέλεξαν μόνο τον συμβολισμό «(3)», 18 επέλεξαν τον συμβολισμό «()» και 23 μαθητές τους συμβολισμούς «()» και «(3)». Πολύ μικρό ποσοστό μαθητών (9/84) επιλέγει ως παρενθέσεις τα σύμβολα «(» ή «)» ή και τα δύο ενώ από αυτούς οι 6/84 επέλεξαν και τα δύο σύμβολα «(» και «)». Οι υπόλοιποι μαθητές επέλεξαν συνδυασμούς των επιλογών αυτών. Συμπερασματικά, με βάση τη συγκεκριμένη έρευνα οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις ως διπλό σύμβολο που περιέχει ή που μπορεί να περιέχει κάτι, οι μισοί περίπου από το σύνολο των μαθητών δέχονται το κενό ανάμεσα στις παρενθέσεις ενώ λίγοι είναι αυτοί που το αντιλαμβάνονται ως μονό σύμβολο (Gunnarsson κ.α., 2015, Karlsson & Gunnarsson, 2013). Οι Gunnarsson και Karlsson (2015) υποστηρίζουν πως είναι πιθανό η καθημερινή τους χρήση από τους μαθητές (π.χ. για να δηλώσουν την χαμογελαστή φάτσα :-)) να οδηγεί στο να αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις ως μονό σύμβολο, αριστερή ή δεξιά παρένθεση.

Επιπρόσθετα, οι ερευνητές εντοπίζουν το φαινόμενο κατά το οποίο ακόμη και μαθητές που αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις ως ζεύγος μπορεί να μην τις αντιλαμβάνονται ως

διατεταγμένο ζεύγος, δηλαδή να μην αναγνωρίζουν ποιες παρενθέσεις είναι ζευγάρια όταν υπάρχουν από δύο και πάνω. Σε έργο που περιλάμβανε το ερωτηματολόγιο της έρευνας ζητούνταν από τους μαθητές να διαγράψουν τις περιττές παρενθέσεις σε δοθείσες αριθμητικές παραστάσεις. Οι ερευνητές παρατήρησαν πως υπάρχουν μαθητές που αγνοούν ότι για κάθε παρένθεση που ανοίγει υπάρχει και μοναδική που την κλείνει και αντίστροφα (Gunnarsson κ.α., 2015). Παραδείγματα αυτής της συμπεριφοράς παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.

(b) $\cancel{*}(7\cancel{*} - \cancel{*}3 \cdot 2)\cancel{*}$

(c) $\cancel{7} + (3 - 3)\cancel{}$

Εικόνα 6. Παράδειγμα μη αναγνώρισης του συμβόλου ως διατεταγμένο ζεύγος (Gunnarsson και Karlsson , 2015: 50)

Μια ακόμη συμπεριφορά των μαθητών που περιγράφεται στη βιβλιογραφία και αφορά στη συντακτική δομή μιας αλγεβρικής παράστασης είναι πως οι μαθητές συχνά την πρόταση «ό,τι είναι μέσα σε παρένθεση υπολογίζεται πρώτο» την διαβάζουν ως «οι παρενθέσεις πρέπει να εμφανίζονται πρώτες» κάνοντας χρήση τον κανόνα του υπολογισμού από αριστερά προς τα δεξιά (Kieran, 1979, στο Gunnarsson κ.α., 2015). Για αυτό τον λόγο, οι μαθητές μετακινούν τις παρενθέσεις στα αριστερά για να τις υπολογίσουν πρώτες.

1.7.2 Χειρισμός των παρενθέσεων σε σχέση με τη δομή των παραστάσεων

Οι Hoch και Dreyfus (2005) πραγματοποίησαν έρευνα με στόχο να μελετήσουν αν οι μαθητές έχουν αίσθηση της δομής σε αλγεβρικές παραστάσεις, όπως επίσης, και αν η αίσθηση της δομής επηρεάζεται από την ύπαρξη και την απουσία των παρενθέσεων. Η έρευνα προσανατολίστηκε σε 92 ισραηλινούς μαθητές Β΄ Λυκείου και η συγκέντρωση των δεδομένων έγινε μέσω ενός ερωτηματολογίου ενώ τέσσερις από τους μαθητές των οποίων οι απαντήσεις είχαν ενδιαφέρον για περαιτέρω μελέτη πέρασαν και από τη διαδικασία των συνεντεύξεων. Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε τις εξισώσεις που παρουσιάζονται στην Εικόνα 7.

A.	$1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{110}$	X.	$\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right)$
B.	$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{132}$	Y.	$\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right) - x = 6 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right)$
C.	$1 - \frac{1}{n+3} - 1 + \frac{1}{n+3} = \frac{1}{72}$	Z.	$\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 7 + \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}$

Εικόνα 7. Ερωτηματολόγιο έρευνας των Hoch και Dreyfus (2005: 3-51).

Το εργαλείο σχεδιάστηκε έτσι ώστε να περιλαμβάνει εξισώσεις με κανένα, ένα ή δύο σετ παρενθέσεων. Από τους μαθητές ζητήθηκε να λύσουν δύο από αυτές τις εξισώσεις όπου κάθε μια θα περιλάμβανε διαφορετικό αριθμό παρενθέσεων. Απαντήσεις που θεώρησαν οι ερευνητές ότι έγινε χρήση της δομής ήταν αυτές που, για παράδειγμα στην εξίσωση B, οι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι τα περιεχόμενα των παρενθέσεων είναι ίδια και συνεπώς το αποτέλεσμα είναι μηδέν και άρα φαίνεται πως κατανοούν τη δομή. Αντίθετα, οι μαθητές οι οποίοι έκαναν απαλοιφή παρενθέσεων και προχώρησαν σε δημιουργία ομώνυμων κλασμάτων θεωρήθηκε από τους ερευνητές ότι δεν κατανοούν τη δομή. Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρήθηκε ότι μικρό ποσοστό των μαθητών έλυσε τις εξισώσεις κάνοντας χρήση της δομής και φαίνεται οι παρενθέσεις να βοηθούν στην κατανόηση της. Συγκεκριμένα στην εξίσωση Y (Εικόνα 7) που περιλαμβάνει δύο ζεύγη παρενθέσεων το ποσοστό των μαθητών που έκανε χρήση της δομής κατά την επίλυση ήταν 18,2% ενώ αντίθετα στην εξίσωση C (Εικόνα 7) που δεν περιλαμβάνει παρενθέσεις το ποσοστό ήταν 0%. Στις εξισώσεις που περιλαμβάνουν μόνο ένα ζεύγος παρενθέσεων τα ποσοστά είναι 12,5% και 14,8%. Συνεπώς, το συνολικό ποσοστό των μαθητών που αντιλαμβάνονται τη δομή είναι εξαιρετικά χαμηλό και οι περισσότεροι μαθητές που δεν έδωσαν σημασία στη δομή έκαναν υπολογιστικά λάθη και δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν άμεσα αδύνατες λύσεις. Αντίθετα, οι μαθητές που είχαν καλύτερη αίσθηση της δομής απάντησαν γρήγορα και με ακρίβεια αποφεύγοντας, έτσι, ευκαιρίες για λάθη που μπορεί να προκύψουν από τους πολλούς υπολογισμούς (Hoch κ.α., 2005).

Σύμφωνα με τους Hoch και Dreyfus (2005), λοιπόν, κατά την επίλυση εξισώσεων οι μαθητές συμπεριφέρονται διαφορετικά στις εξισώσεις με παρενθέσεις και σε αυτές χωρίς. Επομένως, η ύπαρξη των παρενθέσεων λειτουργεί θετικά στην καλύτερη αίσθηση της δομής ως εργαλείο για το πού να κοιτάζουν πρώτα. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η παρουσία παρενθέσεων φαίνεται, επίσης, να βοηθά τους μαθητές να δουν τη δομή εστιάζοντας την προσοχή τους σε όμοιους όρους. Ωστόσο, τα στοιχεία σχετικά με την επίδραση των παρενθέσεων είναι ασαφή, καθώς ορισμένοι μαθητές φαίνεται να προτιμούν να τις εξαλείψουν από την εξίσωση (Hoch κ.α., 2005).

1.7.3 Παρενθέσεις σε υπολογισμό ή επεξεργασία αριθμητικής παράστασης

Η σιωπηρή σύγκρουση ανάμεσα στην λειτουργία των παρενθέσεων ως μέρος του κανόνα προτεραιότητας και ως σύμβολο έμφασης της προτεραιότητας μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες στην εκμάθηση της προτεραιότητας των πράξεων (Gunnarsson κ.α., 2012). Αν οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την προτεραιότητα πράξεων υπάρχει περίπτωση να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα να βρίσκουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις σε κάποιο πρόβλημα ή σε αριθμητικές παραστάσεις. Ανάλογα με την πράξη που επιλέγουν να εκτελέσουν πρώτα, το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό. Πολλοί ερευνητές έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν κατανοούν την χρησιμότητα της προτεραιότητας των πράξεων με αποτέλεσμα να μην ακολουθούν τους κανόνες αυτής και να επιλέγουν να κάνουν τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά (Blando, Kelly, Schneider & Sleeman, 1989; Linchevski & Livneh, 1999). Επιπλέον, φαίνεται οι μαθητές να θεωρούν πως όταν δεν υπάρχουν παρενθέσεις δεν ισχύει η προτεραιότητα των πράξεων (Gunnarsson κ.α., 2015).

Ο Blando με τους συνεργάτες του (1989), διεξήγαγαν έρευνα με στόχο να αποκαλυφθούν παρανοήσεις για τις παρενθέσεις, την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις με ακέραιους αριθμούς και την ομαδοποίηση στους μαθητές Α΄ Γυμνασίου. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ενός γραπτού τεστ που περιλάμβανε 30 έργα και τις τέσσερις πράξεις. Τα 18 από τα 30 έργα είχαν παρενθέσεις. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι μαθητές είναι πιο πιθανό να δώσουν λανθασμένη απάντηση σε παραστάσεις της μορφής $\alpha+\beta\cdot\gamma$ όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης από ότι στις μορφές $\alpha\cdot\beta+\gamma$ όπου βρίσκεται στην αρχή.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά δυσκολίες και λάθη των μαθητών που αναφέρονται σε έρευνες που αφορούν στη διαχείριση της προτεραιότητας των πράξεων σε παραστάσεις χωρίς και με παρενθέσεις.

1.7.3.1 Προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Το 2019, ο Sanem Tabak, θέλησε να μελετήσει τις παρανοήσεις των μαθητών στις αριθμητικές παραστάσεις όσον αφορά στην προτεραιότητα των πράξεων. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια 240 μαθητών Γυμνασίου από μια πόλη της Τουρκίας. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω γραπτής εξέτασης σε τεστ που περιλάμβανε 25 έργα. Τα 13 από αυτά ήταν επίλυση αριθμητικών εκφράσεων με και χωρίς παρενθέσεις, τα 4 ήταν αναγνώριση αληθούς ισότητας, 4 έργα σωστού/λάθους, 1 ανοιχτής απάντησης, 1 μετατροπή αριθμητικής έκφρασης σε λεκτικό πρόβλημα και 2 μετατροπή από λεκτικό πρόβλημα σε αριθμητικό και επίλυση των προβλημάτων. Μετά από ανάλυση των αποτελεσμάτων, ο ερευνητής κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις, οι μαθητές, εκτελούν συνήθως τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά, αγνοώντας την προτεραιότητα πράξεων. Τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στην επίλυση αριθμητικών παραστάσεων χωρίς παρενθέσεις παρουσιάζονται στην Εικόνα 8.

Table 1. Student Responses to Symbolic Expressions Question Types

Problem	Correct Answers		Incorrect Answers		Blank		Total	
	f	%	f	%	f	%	f	%
1) $6 + 5 \times 2 = ?$	45	19	195	81	-	-	240	100
2) $25 \times 4 - 38 = ?$	203	85	37	15	-	-	240	100
3) $30 + 6 \times 4 - 5 = ?$	48	20	192	80	-	-	240	100
4) $265 - 12 \times 4 + 68 = ?$	46	19	194	81	-	-	240	100
5) $68 + 34 - 20 \times 4 = ?$	52	21	188	79	-	-	240	100
6) $60 \div 4 + 23 = ?$	222	93	18	7	-	-	240	100
7) $89 - 60 \div 3 = ?$	46	19	194	81	-	-	240	100
8) $69 + 65 \div 5 - 18 = ?$	37	15	203	85	-	-	240	100
9) $185 + 89 - 56 \div 4 = ?$	33	14	194	81	13	5	240	100
10) $196 \div 14 + 56 - 25 = ?$	198	82	42	18	-	-	240	100
11) $27 + 5 \times 16 - 8 \div 2 = ?$	34	14	188	78	18	8	240	100

Εικόνα 8. Απαντήσεις μαθητών σε αριθμητικές παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις (Tabak, 2019: 366)

Σύμφωνα με τον πίνακα, όταν η πρώτη πράξη που εμφανιζόταν στην παράσταση ήταν πολλαπλασιασμός ή διαίρεση το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν πολύ μεγάλο (85%, 93% και 92%). Αντίθετα, όταν ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση ήταν δεύτερη ή επόμενη πράξη το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν πολύ χαμηλότερο (14%, 15%, 19%, 20% και 21%). Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι περισσότεροι μαθητές αγνοούν την προτεραιότητα πράξεων και εκτελούν τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά.

Αυτό συμβαίνει επειδή οι μαθητές, συχνά, ακολουθούν τον κανόνα από αριστερά προς τα δεξιά (Tabak, 2019· Blando κ.α., 1989). Σε πολλές χώρες της Ευρώπης, όπως και στην Ελλάδα, στην διδασκαλία της προτεραιότητας πράξεων οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν έναν μνημονικό κανόνα ο οποίος περιγράφει ότι οι πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση γίνονται με την εξής σειρά: «πρώτα οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, έπειτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις και τέλος προσθέσεις και αφαιρέσεις». Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι ότι ο μνημονικός κανόνας προτεραιότητας πράξεων δεν περιλαμβάνει τον κανόνα από αριστερά προς τα δεξιά, καθώς περιλαμβάνει μόνο τα ονόματα των πράξεων, δεν υποστηρίζει την εννοιολογική κατανόηση, δεν συνδέει την προϋπάρχουσα γνώση και δεν χρησιμοποιούνται προβλήματα της πραγματικής ζωής για την διδασκαλία τους (Joseph, 2014). Επομένως, ο λόγος που προκύπτουν οι παρανοήσεις των μαθητών για την προτεραιότητα των πράξεων είναι η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης (Tabak, 2019).

Ο λανθασμένος υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις ερμηνεύεται από τους ερευνητές ότι μπορεί να οφείλεται στη χρήση και προσθήκη νοερών παρενθέσεων (Παπαδόπουλος & Ελευθεριάδης, 2019· Linchevski κ.α., 1999). Διεξήχθη έρευνα σε μαθητές ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου από το Ισραήλ και τον Καναδά με σκοπό να μελετήσει αν λάθη που προκύπτουν σε αλγεβρικό πλαίσιο εμφανίζονται και σε ένα καθαρά αριθμητικό (Linchevski κ.α., 1999). Ζητήθηκε από τους μαθητές χωρίς να εκτελέσουν πράξεις να αποφασίσουν ποιες από τις δοθείσες παραστάσεις που εμφανίζονται στην Εικόνα 9 έχουν ίδιο αποτέλεσμα.

$$(a) 926 + 167 - 167 = ?$$

$$(c) 926 - 167 + 167 = ?$$

$$(b) 926 - 167 - 167 = ?$$

$$(d) 926 - (167 + 167) = ?$$

Εικόνα 9. Έργο από την έρευνα των Linchevski και Livneh (1999: 183)

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που δεν θεώρησαν ότι τα ερωτήματα (a) και (c) έχουν ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποίησαν νοερές παρενθέσεις στην παράσταση (c) δίνοντάς της τη μορφή « $926 - (167 + 167)$ ». Επίσης, υπήρξαν μαθητές που για τον ίδιο λόγο θεώρησαν πως οι παραστάσεις (c) και (d) έχουν ίδιο αποτέλεσμα. Όταν ένας μαθητής ρωτήθηκε πώς οι παραστάσεις αυτές έχουν ίδιο αποτέλεσμα αφού στη μια έχει παρενθέσεις, απάντησε πως ενώ έχουν διαφορετική μορφή όταν ξεκινήσεις να το υπολογίζεις οι πράξεις γίνονται με την ίδια σειρά.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται απαντήσεις μαθητών που φαίνεται να γίνεται πιθανώς χρήση νοερών παρενθέσεων από την έρευνα των Παπαδόπουλου και Ελευθεριάδη (2019) σε μαθητές Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του δημοτικού.

1) $\frac{12}{4} + 2 = \underline{12:4} + 2 = 3+2 = 5$

2) $\frac{12}{4+2} = \underline{12:4+2} = 12:6 = 2$

3) $\frac{8+12}{3+2} = \underline{8+12}:3+2 = 4$

4) $\frac{20}{\frac{4}{2}} = \underline{20:4:2} = 20:2 = 10$

Εικόνα 10. Παραδείγματα χρήσης νοερών παρενθέσεων (Παπαδόπουλος & Ελευθεριάδης, 2019: 36)

Από την παραπάνω εικόνα, είναι εύκολο να παρατηρηθεί η απόσταση που δημιουργείται από τους μαθητές ανάμεσα στα σύμβολα και τους αριθμούς. Είναι ένας τρόπος για τους μαθητές να δηλώσουν ομαδοποίηση και οι ερευνητές θεωρούν πως ίσως η συμπεριφορά αυτή να δηλώνει ότι γίνεται χρήση νοερών παρενθέσεων. Η συμπεριφορά αυτή παρουσιάζεται σε μικρό ποσοστό των μαθητών (17/226). Σύμφωνα με τους ερευνητές οι νοερές παρενθέσεις βοηθούν τους μαθητές να διατηρήσουν τη δομή της πρότασης ακόμη και αν παραβιάζεται η προτεραιότητα των πράξεων.

1.7.3.2 Προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Όσον αφορά στις αριθμητικές παραστάσεις με παρενθέσεις, στην έρευνα του Tabak (2019), οι περισσότεροι μαθητές εκτελούν πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις και έπειτα συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά. Στην Εικόνα 11 παρουσιάζονται δύο έργα που αφορούν στον υπολογισμό αριθμητικής παράστασης με παρενθέσεις (12 & 13) και δύο ερωτήσεις Σ/Λ (18 & 21).

Problem	Correct Answers		Incorrect Answers		Blank		Total	
	f	%	f	%	f	%	f	%
12) $9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$	27	11	191	80	22	9	240	100
13) $37 + 8 - (9 \times 9) \div 3 = ?$	25	10	182	76	33	14	240	100

Problem	Correct Answer		Incorrect Answer		Blank		Total	
	f	%	f	%	f	%	f	%
18) $6 \times (12 \times 5) - (9 \times 3) =$ equation is the same as $6 \times 12 \times 5 - 9 \times 3 =$ equation	33	14	207	86	-	-	240	100
21) $9 \times (6 - 2) \div (7 - 4) = 12$ is this answer true or false?	218	91	22	9	-	-	240	100

Εικόνα 11. Απαντήσεις μαθητών σε αριθμητικές παραστάσεις με παρενθέσεις (Tabak, 2019: 366-367)

Είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων σε σύνθετες παραστάσεις με μόνο αναγκαίες παρενθέσεις είναι εξαιρετικά χαμηλό (11%, 10% και 14%). Από τις λανθασμένες απαντήσεις λίγο καλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (14%) έχει το έργο 18 στο οποίο προηγείται, στην παράσταση, η πράξη του πολλαπλασιασμού και έπεται η πρόσθεση σε αντίθεση με τα έργα 12 και 13 στα οποία οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης βρίσκονται στο τέλος της πρότασης ενώ η πρόσθεση βρίσκεται στην αρχή της πρότασης. Υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων έχει το έργο 21 το οποίο επειδή περιλαμβάνει τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ανάμεσα στους όρους, εφόσον υπολογιστούν οι παρενθέσεις, η προτεραιότητα θα είναι ίδια. Σύμφωνα με τον Tabak (2019), οι περισσότεροι μαθητές εκτελούν τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και έπειτα συνεχίζουν τους υπολογισμούς από αριστερά προς τα δεξιά, συμπεριφορά την οποία έχει παρατηρήσει και η Bush το 2011. Διεξήγαγε έρευνα με συμμετέχοντες έναν ειδικό στα Μαθηματικά του γραφείου του Υπουργείου Παιδείας της πολιτείας, έναν δάσκαλο Μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού και έναν καθηγητή Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Τους ζητήθηκε να σχολιάσουν για διάφορα θέματα των Μαθηματικών παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές τους. Όσον αφορά στην προτεραιότητα των πράξεων, δυο από αυτούς ανέφεραν το γεγονός ότι οι μαθητές σε παραστάσεις με παρενθέσεις ξεκινούν από τις πράξεις μέσα σε αυτές και έπειτα συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά.

Στο ίδιο συμπέρασμα έχουν καταλήξει και οι Linchevski και Linneh (1999), ότι δηλαδή οι μαθητές γνωρίζουν πως προτεραιότητα έχουν οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις αλλά δεν γνωρίζουν την προτεραιότητα των υπόλοιπων πράξεων. Μια παρανόηση που παρατήρησαν είναι πως η πρόσθεση προηγείται της αφαίρεσης και ο πολλαπλασιασμός της διαίρεσης. Αυτό προκύπτει λόγω της ελλειπούς εννοιολογικής κατανόησης το οποίο είναι αποτέλεσμα του τρόπου διδασκαλίας των κανόνων αυτών (Tabak, 2019· Joseph, 2014).

Μια άλλη συμπεριφορά που εντόπισε η Booth (1988) είναι ότι οι μαθητές συχνά δεν κάνουν χρήση των παρενθέσεων καθώς θεωρούν ότι οι πράξεις γίνονται από αριστερά προς τα δεξιά (στο Bush, 2011). Πραγματοποίησε έρευνα που διήρκεσε δύο χρόνια με σκοπό να μελετήσει τις στρατηγικές και τα λάθη των μαθητών στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Με την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές αγνοούν τα σύμβολα ομαδοποίησης κυρίως επειδή τα θεωρούν περιττά. Υποστηρίζει, επίσης, οι μαθητές θεωρούν ότι το πλαίσιο του προβλήματος καθορίζει την προτεραιότητα των πράξεων. Όταν δεν υπάρχει συγκεκριμένο πλαίσιο, οι πράξεις εκτελούνται από αριστερά προς τα δεξιά. Τέλος, οι μαθητές θεωρούν ότι με όποια σειρά και να εκτελέσουν τις πράξεις θα καταλήξουν σε ίδιο αποτέλεσμα. (Booth, 1984, p. 86 στο Bush, 2011)

Η συμπεριφορά να αγνοούν τις παρενθέσεις κατά την επίλυση αριθμητικών παραστάσεων με παρενθέσεις, εντοπίζεται από πολλούς ερευνητές (Gunnarsson κ.α., 2012· Linchevski κ.α., 1999· Payne & Squibb, 1990· Blando κ.α., 1989). Συγκεκριμένα, σε έρευνα του Blando και των συνεργατών του (1989) στην παράσταση «(6-4)(10-5)» ένας μαθητής αγνόησε τη δεύτερη παρένθεση και δεν χρησιμοποίησε την επιμεριστική ιδιότητα και έγραψε « $2 \cdot 10 = 20 - 5 = 15$ ».

1.7.4 Μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αλγεβρική παράσταση

Οι μαθητές, κατά την μετάφραση λέξεων σε σύμβολα, δεν λαμβάνουν υπόψη τη δομή μιας έκφρασης. Πολύ συχνά, δεν δίνεται σημασία στις δομικές ιδιότητες των παρενθέσεων.

Οι διαφορετικοί τρόποι αντίληψης του συμβόλου των παρενθέσεων, ως ζεύγος, ως μεμονωμένο σύμβολο, ως άδειο ή ως κάτι με περιεχόμενο ή που μπορεί να έχει περιεχόμενο, οδηγούν σε παρανοήσεις κατά την μετάφραση κειμένου σε αλγεβρικές εκφράσεις (Hewitt, 2005). Ο Hewitt, διεξήγαγε έρευνα σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου - Β΄ Λυκείου με σκοπό να μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μεταφράζουν λεκτικά προβλήματα σε αριθμητικές παραστάσεις και το αντίθετο. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι μαθητές συχνά μεταφράζουν κυριολεκτικά ότι διαβάζουν. Για παράδειγμα σε έργο που ζητούσε να μετατρέψουν την πρόταση «οκτώ μείον παρενθέσεις δύο συν τρία ισούται με τρία» παρατηρήθηκε η συμπεριφορά μαθητών να μεταφράζουν λέξη προς λέξη και να γράφουν « $8 - (2 + 3 = 3)$ ».

Σε συμφωνία με τον Hewitt (2005), ο Gunnarsson και η Karlsson (2015) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές κατά την μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε αριθμητικές παραστάσεις συχνά χρησιμοποιούν μονό σύμβολο ή άδειο ζεύγος παρενθέσεων ή ζεύγος που περιέχει κάτι μέσα. Οι ίδιες κατηγορίες προέκυψαν και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις ως σύμβολο.

Οι Cruz και Lapinid (2014) εντόπισαν ότι κατά την μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε μαθηματικές εκφράσεις εμφανίζονται δυσκολίες όπως απροσεξία, μη κατανόηση του περιεχομένου του προβλήματος, άγνωστες λέξεις και αντιστροφή τιμών κατά την πράξη (30-50 αντί 50-30). Παρατηρούν ότι είναι πιθανό οι μαθητές να εκτελούν ικανοποιητικά δοθείσες πράξεις και, την ίδια στιγμή, όταν το πρόβλημα δίνεται σε λεκτική μορφή οι μαθητές να δυσκολεύονται. Αυτό, σύμφωνα με τους Cruz και Lapinid (2014), συμβαίνει επειδή πρέπει πρώτα να μουν στη διαδικασία να κατανοήσουν ποιες πράξεις εμπλέκονται στο πρόβλημα και στη συνέχεια να μπορέσουν να δημιουργήσουν την κατάλληλη αριθμητική έκφραση. Οι Verschaffel, Greer και De Corte (2000), παρατήρησαν πως για πολλούς μαθητές τα σχολικά Μαθηματικά δεν έχουν καμία σύνδεση με την πραγματική ζωή και πως κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων οι μαθητές περιορίζονται σε υπολογισμούς χωρίς να κάνουν χρήση της κοινής λογικής.

1.7.5 Νοηματοδότηση αλγεβρικής έκφρασης

Σε έρευνά τους, οι Marchini και Papadopoulos (2011) είχαν στόχο να εξετάσουν αν και πώς οι παρενθέσεις επηρεάζουν τους μαθητές δευτέρας και τρίτης Δημοτικού κατά την επίλυση απλών εξισώσεων και να μελετήσουν αν υπάρχει σχεσιακή συλλογιστική και πώς αυτή επηρεάζεται από τις παρενθέσεις. Οι ίδιοι, ορίζουν τη σχεσιακή συλλογιστική ως «*τη σκέψη των μαθητών που χρησιμοποιεί τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της πρότασης και τις προτάσεις ως ολόκληρες αντί για διαδικασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν βήμα προς βήμα*». Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η ύπαρξη των παρενθέσεων επηρέασε θετικά τις απαντήσεις των μαθητών.

Στην έρευνά του ο Tabak (2019), συμπεριέλαβε έργο το οποίο ζητούσε από τους μαθητές να μεταφράσουν μια αριθμητική έκφραση σε λεκτικό πρόβλημα. Η εκφώνηση ήταν η εξής: «Γράψε μια πρόταση σύμφωνα με τη συμβολική πρόταση $6 \times 2 + 5 \times 3 = 27$ ». Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στην Εικόνα 12.

Problem	Correct Answer		Incorrect Answer		Blank		Total	
	f	%	f	%	f	%	f	%
23) Write a problem sentence in accordance with the symbolic equation $6 \times 2 + 5 \times 3 = 27$	58	24	75	31	107	45	240	100

Εικόνα 12. Από αριθμητική έκφραση σε λεκτικό πρόβλημα (Tabak, 2019)

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, μόνο το 24% των μαθητών δημιούργησαν σωστό πρόβλημα ενώ το 31% δημιούργησε πρόβλημα που δεν ανταποκρινόταν στην συμβολική έκφραση και δεν κατάφεραν να αποδώσουν λεκτικά την προτεραιότητα των πράξεων. Την ίδια στιγμή το 45% των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα δεν απάντησαν στην ερώτηση. Από τα παραπάνω, ο ερευνητής διακρίνει τη δυσκολία των μαθητών να εκφράσουν με λόγια την προτεραιότητα των πράξεων στην περίπτωση που η παράσταση περιλαμβάνει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Σε έρευνά τους οι Özal, İpek, Özdemir και Tuğrul (2018), θέλησαν να μελετήσουν την ικανότητα των μαθητών Δημοτικού στη δημιουργία προβλήματος από αριθμητική έκφραση. Στην έρευνα συμμετείχαν 96 μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού. Από τους μαθητές ζητήθηκε να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα για αριθμητικές εκφράσεις (π.χ. $5+6 \times 4$). Οι ερευνητές, αναλύοντας τα αποτελέσματα κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η χαμηλή απόδοση των μαθητών στη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων από αριθμητικές παραστάσεις οφείλεται στην δυσκολία τους να συνδέσουν τις πράξεις και τα σύμβολα με την καθημερινή ζωή.

1.8 Σύνοψη 1^{ου} κεφαλαίου

Στην παρούσα ενότητα γίνεται μια προσπάθεια κατανόησης των λόγων που προκύπτουν οι δυσκολίες των μαθητών με τις παρενθέσεις. Όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία, για πολλές δυσκολίες ευθύνεται ο τρόπος διδασκαλίας των παρενθέσεων (Tabak, 2019· Joseph, 2014). Αρχικά στον **Πίνακα 1** συγκεντρώνονται όλες οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τις παρενθέσεις και την προτεραιότητα των πράξεων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Στη συνέχεια, γίνεται μια προσπάθεια να παρατηρηθεί ποιες από αυτές είναι πιθανό να προκύπτουν από τον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας των παρενθέσεων στα σχολικά εγχειρίδια.

Πίνακας 1. Δυσκολίες των μαθητών στις παρενθέσεις και στην προτεραιότητα πράξεων

Δυσκολίες	Βιβλιογραφία
1. Μονό σύμβολο ή μη διατεταγμένο ζεύγος.	Gunnarsson & Karlsson, 2015
2. Ό,τι είναι μέσα σε παρένθεση υπολογίζεται πρώτο = οι παρενθέσεις πρέπει να εμφανίζονται πρώτες.	Kieran, 1979 στο Gunnarsson & Karlsson, 2015
3. Δυσκολία κατανόησης της δομής όταν δεν υπάρχουν παρενθέσεις. Χρήση νοερών παρενθέσεων.	Hoch & Dreyfus, 2005 Παπαδόπουλος & Ελευθεριάδης, 2019· Linchevski & Livneh, 1999
4. Με όποια σειρά και αν εκτελέσουν τις πράξεις θα καταλήξουν σε ίδιο αποτέλεσμα.	Booth, 1984, p. 86 στο Bush, 2011
5. Μπορεί να υπάρχει διαφορετικό αποτέλεσμα ανάλογα με την επιλογή πράξης.	Gunnarsson, Hernell & Sönnnerhed, 2012
6. Δεν ακολουθείται η προτεραιότητα πράξεων, πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά. Αγνόηση παρενθέσεων όταν υπάρχουν.	Tabak, 2019· Blando κ.α., 1989· Linchevski & Livneh, 1999· Gunnarsson Hernell & Sönnnerhed , 2012· Payne & Squibb, 1990
7. Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις δεν ισχύει η προτεραιότητα των πράξεων.	Gunnarsson & Karlsson, 2015
8. Σε παραστάσεις με παρενθέσεις ξεκινούν από τις πράξεις μέσα σε αυτές και έπειτα συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά.	Tabak, 2019· Linchevski & Livneh , 1999
9. Η πρόσθεση προηγείται της αφαίρεσης και ο πολλαπλασιασμός της διαίρεσης.	Linchevski & Livneh , 1999
10. Κατά την μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε αριθμητικές παραστάσεις συχνά χρησιμοποιούν μόνο σύμβολο ή άδειο ζεύγος παρενθέσεων.	Gunnarsson & Karlsson , 2015
11. Δυσκολία μετάφρασης λεκτικού προβλήματος σε αριθμητική παράσταση.	Gunnarsson & Karlsson , 2015· Cruz & Lapinid, 2014· Hewitt, 2005
12. Δυσκολία δημιουργίας λεκτικού προβλήματος από αριθμητική έκφραση. Δυσκολία να συνδέσουν τις πράξεις και τα σύμβολα με την καθημερινή ζωή.	Tabak, 2019· Öçal κ.α., 2018· Verschaffel, Greer & De Corte, 2000

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούνται δυσκολίες που αφορούν στον συμβολισμό, τη λειτουργία και τη σημασιολογική ερμηνεία του συμβόλου των παρενθέσεων από τους μαθητές.

Αρχικά, είναι σημαντικό να σχολιαστεί ότι στα σχολικά εγχειρίδια, όπως παρουσιάζεται στην ενότητα «1.6 Οι παρενθέσεις στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια» κατά την παρουσίαση της έννοιας στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια δεν γίνεται περιγραφή του συμβολισμού των παρενθέσεων. Για αυτό τον λόγο πιθανώς κάποιοι μαθητές δεν γνωρίζουν πως πρόκειται για διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων (δυσκολίες 1 & 2 του Πίνακα 1).

Η προτεραιότητα πράξεων στα σχολικά βιβλία είναι αρκετά σαφής για παραστάσεις με και χωρίς παρενθέσεις. Στα σχολικά εγχειρίδια πραγματοποιείται περιγραφή της διαδικασίας χωρίς να γίνεται επεξήγηση για τη σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων και της προτεραιότητας των πράξεων. Επομένως, ίσως αυτός να είναι ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές δεν ακολουθούν την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις (δυσκολία 7) και όταν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούν τις πράξεις μέσα σε αυτές και έπειτα συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά (δυσκολία 8). Για τον ίδιο λόγο, οι μαθητές δεν είναι σε θέση να μεταφράσουν ένα λεκτικό πρόβλημα σε αριθμητική παράσταση και το αντίθετο (δυσκολίες 11, 12, & 13).

Όσον αφορά στη δυσκολία 10, ίσως να προκύπτει από το γεγονός ότι δεν γίνεται αναφορά στον συμβολισμό των παρενθέσεων στα σχολικά εγχειρίδια.

Τέλος, για την δυσκολία 9 του πίνακα, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 13Π στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού επισημαίνεται συγκεκριμένα ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση έχουν ίδια προτεραιότητα όπως επίσης και η πρόσθεση με την αφαίρεση.

Στις αριθμητικές παραστάσεις, οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με μια ορισμένη σειρά:

$$15 : 3 \cdot 5 + 3,5 = 5 \cdot 5 + 3,5 = 25 + 3,5 = 28,5$$

α) πρώτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις και
β) μετά προσθέσεις και αφαιρέσεις

(αφού η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός έχουν την ίδια προτεραιότητα, εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και μετά την πρόσθεση)

Εικόνα 13. Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού, Κεφ.8° - Επίλυση αριθμητικής παράστασης

1.9 Αναγκαιότητα της έρευνας

Όπως παρουσιάστηκε στο 1^ο κεφάλαιο, πολλοί ερευνητές (Tabak, 2019· Gunnarsson & Karlsson, 2015· Linchevski & Livneh, 1999· Blando κ.α., 1989, κ.α.) έχουν μελετήσει τις δυσκολίες των μαθητών για τις παρενθέσεις σε σχέση με τον τρόπο που τις αντιλαμβάνονται και τις χειρίζονται σε διάφορες καταστάσεις. Στη βιβλιογραφία παρατηρούνται διαφορετικές συμπεριφορές κατά τον χειρισμό αριθμητικών παραστάσεων ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι των

παρενθέσεων (Tabak, 2019· Blando κ.α., 1989· Linchevski & Livneh, 1999· Gunnarsson, Hernell & Sönnnerhed , 2012· Payne & Squibb, 1990) και δυσκολίες στην δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση και το αντίστροφο (Tabak, 2019· Öçal κ.α., 2018· Gunnarsson & Karlsson, 2015· Cruz & Lapinid, 2014· Hewitt, 2005· Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Ο εντοπισμός και η ανάλυση των δυσκολιών που παρουσιάζονται στους μαθητές καθιστά ευκολότερη τη δημιουργία εργαλείων αντιμετώπισής τους. Για τον λόγο αυτό και με στόχο την συνεισφορά στην έρευνα που γίνεται αναφορικά με τις δυσκολίες των μαθητών στις παρενθέσεις και την προτεραιότητα των πράξεων, αποφασίστηκε να πραγματοποιηθεί η παρούσα έρευνα. Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά η εμπειρική έρευνα που πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια σε μια προσπάθεια ανάλυσης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του δείγματος με τις παρενθέσεις και την προτεραιότητα των πράξεων.

2^ο Κεφάλαιο – Μεθοδολογία

Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της εμπειρικής έρευνα μικρού δείγματος που πραγματοποιήθηκε. Αρχικά παρουσιάζονται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα και η μεθοδολογία της έρευνας. Στη μεθοδολογία της έρευνας παρουσιάζεται το δείγμα, γίνεται περιγραφή της διαδικασίας και αναλυτική παρουσίαση του ερευνητικού εργαλείου.

2.1 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της έρευνας είναι να μελετήσει το νόημα που αποδίδουν οι μαθητές Γυμνασίου στις παρενθέσεις και το περιεχόμενό τους, την ικανότητα χειρισμού τους και τη επίδραση αυτών στον υπολογισμό - αριθμητικών παραστάσεων με ή χωρίς παρενθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, τα ερωτήματα που θέτω είναι:

1. Πώς χειρίζονται οι μαθητές τις αριθμητικές παραστάσεις ως προς την προτεραιότητα των πράξεων σε σχέση με το αν υπάρχουν ή όχι παρενθέσεις;
2. Παίζουν ρόλο οι παρενθέσεις για τους μαθητές; Ποιος είναι ο ρόλος τους στο συντακτικό χειρισμό;
3. Ποιες είναι οι δυνατότητες των μαθητών για σημασιολογική διαφοροποίηση των μαθηματικών αντικειμένων εντός των παρενθέσεων;
4. Ποια είναι η δυνατότητα δόμησης/νοηματοδότησης παράστασης σε σχέση με λεκτικά προβλήματα;

2.2 Μέθοδος

Για τη συλλογή των δεδομένων επιλέχθηκε ποιοτική μέθοδος και πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις. Επίσης, η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε ποιοτικά πραγματοποιώντας ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων κειμένων από τις συνεντεύξεις. Η παρούσα μελέτη είναι μια μελέτη περιορισμένων περιπτώσεων σε μικρό δείγμα για τον εντοπισμό των καταστάσεων που δημιουργούν δυσκολίες και των στάσεων που κυριαρχούν στους μαθητές. Ο λόγος που αποφασίστηκε να πραγματοποιηθεί ποιοτική έρευνα έναντι της ποσοτικής είναι η ανάγκη για διερεύνηση σε βάθος, με λεπτομέρεια και από κάθε πλευρά η αντίληψη των μαθητών για την έννοια των παρενθέσεων (Ισαρη & Πουρκός, 2015).

2.3 Δείγμα

Οι συμμετέχοντες της έρευνας είναι 5 μαθητές Β΄ και Γ΄ τάξης Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, έλαβαν μέρος 1 μαθήτρια και 1 μαθητής της Β΄ Γυμνασίου και 1 μαθήτρια και 2 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Στην πιλοτική έρευνα συμμετείχαν 1 μαθήτρια Β΄ Γυμνασίου και 1 μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές είναι από Πτολεμαΐδα, Θεσσαλονίκη και Ξάνθη. Το δείγμα είναι

ευκολίας, καθώς οι συνεντεύξεις έγιναν σε μαθητές στους οποίους είχε πρόσβαση η ερευνήτρια.

Οι παρενθέσεις και οι ιδιότητες αυτών στην προτεραιότητα των πράξεων διδάσκονται στην ΣΤ΄ Δημοτικού, και παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Για τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο η προτεραιότητα των πράξεων θεωρείται προαπαιτούμενη γνώση. Ο λόγος που αποφασίστηκε από την ερευνήτρια το δείγμα της έρευνας να είναι της Β΄ και Γ΄ τάξης Γυμνασίου είναι για να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται και χειρίζονται τις παρενθέσεις οι μαθητές που σύντομα θα μεταβούν στο Λύκειο.

2.4 Διαδικασία

Μετά τη μελέτη του θεωρητικού πλαισίου, σχεδιάστηκε το εργαλείο. Αποφασίστηκε να γίνει μια πιλοτική έρευνα με σκοπό να ελεγχθεί αν υπάρχουν ερωτήσεις που δεν είναι κατανοητές στους μαθητές και αν οι ερωτήσεις του εργαλείου είναι κατάλληλες ώστε να απαντήσουν στα ερευνητικά ερωτήματα. Πραγματοποιήθηκε, αρχικά, μια πιλοτική συνέντευξη με μαθήτρια της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου που έδειξε προθυμία να συμμετέχει στην έρευνα. Το περιεχόμενο της συνέντευξης απομαγνητοφωνήθηκε ώστε να γίνει μια πρώτη ανάλυση από την οποία αντλήθηκαν συμπεράσματα για την καταλληλότητα του εργαλείου και αλλαγές που θα έπρεπε να πραγματοποιηθούν. Στη συνέχεια, μετά από αλλαγές που έγιναν στο εργαλείο λήφθηκε δεύτερη πιλοτική συνέντευξη από μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου. Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων και της δεύτερης πιλοτικής συνέντευξης έγιναν αλλαγές και δόθηκε στο εργαλείο η τελική του μορφή.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στις τελικές συνεντεύξεις ήταν ανάλογη των πιλοτικών. Αφού εντοπίστηκαν οι μαθητές που με προθυμία δέχτηκαν να συμμετέχουν στην έρευνα κανονίστηκε διαδικτυακή συνάντηση σε ώρα και μέρα της προτίμησής τους στην οποία και πραγματοποιήθηκε η συνέντευξη. Έπειτα από την συγκατάθεση των μαθητών και των γονέων τους, οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και είχαν μέση διάρκεια τα 45 λεπτά. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι για την συμμετοχή των μαθητών και των μαθητριών στην έρευνα λήφθηκε εξαρχής άδεια (Παράρτημα 3) από τους γονείς μέσα από βεβαίωση που μοιράστηκε στους μαθητές.

Οι συνεντεύξεις λήφθηκαν από την ερευνήτρια από τον Μάρτιο έως τον Μάιο του 2021.

Αφού συλλέχθηκαν οι συνεντεύξεις ακολούθησε η διαδικασία της μετεγγραφής του περιεχομένου των συνεντεύξεων. Τα γραπτά, πλέον, κείμενα μελετήθηκαν και αναλύθηκαν με σκοπό να συγκεντρωθούν τα αποτελέσματα της έρευνας.

2.5 Εργαλείο

Για τη συλλογή των δεδομένων σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο (Παράρτημα 1) το οποίο απαντήθηκε μέσω συνεντεύξεων. Το εργαλείο σχεδιάστηκε με βάση τις δυσκολίες που συλλέχθηκαν στη βιβλιογραφία και με προσοχή ώστε να απαντά στα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας. Τα έργα 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 βασίστηκαν στην έρευνα της Karlsson (2011), το έργο 10 από την έρευνα του Tabak (2019) και τα έργα 1 και 2 σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια. Οι έρευνες των Tabak (2019) και Karlsson (2011) από τις οποίες λήφθηκαν τα περισσότερα έργα για το εργαλείο αποτελούν έρευνες που μελέτησαν τις παρανοήσεις των μαθητών για την έννοια των παρενθέσεων.

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά το εργαλείο με τους λόγους για τους οποίους προστέθηκε κάθε έργο.

Το εργαλείο σχεδιάστηκε και οργανώθηκε σε 5 ερευνητικούς άξονες. Οι τέσσερις από αυτούς αντιστοιχούν στα ερευνητικά ερωτήματα. Αναλυτικά, οι άξονες είναι οι εξής:

1^{ος} άξονας: Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές το σύμβολο των παρενθέσεων;

2^{ος} άξονας: Χειρισμός των παρενθέσεων (προτεραιότητα πράξεων) από τους μαθητές σε αριθμητικές παραστάσεις με ή χωρίς παρενθέσεις;

3^{ος} άξονας: Παίζουν ρόλο οι παρενθέσεις για τους μαθητές; Ποιος είναι ο ρόλος τους στο συντακτικό χειρισμό;

4^{ος} άξονας: Σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων και των εσωτερικών αυτών

5^{ος} άξονας: Ικανότητα δόμησης/νοηματοδότησης παράστασης σε σχέση με λεκτικά προβλήματα

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα έργα που περιλαμβάνει ο κάθε άξονας. Παρόλα αυτά, πολλά από αυτά τα έργα ανήκουν σε περισσότερους από έναν άξονες.

1^{ος} άξονας: Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές το σύμβολο των παρενθέσεων;

Αρχικά θεωρήθηκε σημαντικό να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύμβολο και τη λειτουργία των παρενθέσεων. Για τον λόγο αυτό η συνέντευξη ξεκινάει με τα δύο έργα της Εικόνα 14.

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;

Εικόνα 15. Έργο 5 του εργαλείου

Μέσω του έργου αυτού θα εξεταστεί αναλυτικά η σκέψη των μαθητών κατά την επίλυση αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθεση επειδή θα πρέπει να εξηγήσουν με ποιον τρόπο βγαίνει το ένα αποτέλεσμα και όχι το άλλο και ποιο είναι το σωστό.

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - 5 + 5 = 5$ Ναι / Όχι.

β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι.

δ. $12 : 4 = 12 : 6 - 2$ Ναι / Όχι.

Εικόνα 16. Έργο 7 του εργαλείου

Το έργο 7, βοηθάει και πάλι να γίνει ορατός ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις οι μαθητές και πόσο χρήσιμες τις θεωρούν. Θα εξεταστεί αν οι μαθητές χρησιμοποιούν την προτεραιότητα των πράξεων και κατανοούν πότε χρειάζεται να προσθέσουν παρενθέσεις ώστε να αλλάξουν την προτεραιότητα.

Αναλυτικά, το έργο 7 περιλαμβάνει τις ισότητες α', γ' και δ' οι οποίες είναι αναληθείς και απαιτούν παρενθέσεις και την ισότητα β' η οποία είναι αληθής. Στο ερώτημα γ' οι μαθητές που εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να τηρούν την προτεραιότητα των πράξεων θα επιλέξουν λανθασμένα πως η ισότητα είναι αληθής επειδή η πράξη που χρειάζεται να εκτελεστεί πρώτη βρίσκεται στην αρχή της παράστασης. Επιπλέον, στο ερώτημα γ' η αναγκαία παρένθεση βρίσκεται στο 1^ο μέλος της παράστασης ενώ στο δ' ερώτημα βρίσκεται στο 2^ο μέλος της παράστασης για να εξεταστεί αν οι απαντήσεις των μαθητών θα είναι ίδιες και στα δύο ερωτήματα ή θα διαφοροποιηθούν.

Επιπλέον, στο εργαλείο συμπεριλήφθηκε το έργο 8.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51+72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι/Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι/Όχι.

γ. $18 + (9-4) = 18 + 9 - 4$ Ναι/Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5+3)$ Ναι/Όχι.

Εικόνα 17. Έργο 8 του εργαλείου

Από τις απαντήσεις των μαθητών θα γίνει κατανοητό αν οι μαθητές κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζουν οι παρενθέσεις την δομή της πρότασης. Θα εξεταστεί αν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν πότε οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες και πότε όχι ανάλογα με την προτεραιότητα των πράξεων. Για τον λόγο αυτό, συμπεριλήφθηκαν στο έργο 8 δύο αληθείς ισότητες (β' & γ') και δύο ψευδής (α' & δ'). Επίσης επιλέχθηκαν μεγάλοι αριθμοί για τις παραστάσεις ώστε να μην καταφέρουν ασυναίσθητα οι μαθητές να κάνουν υπολογισμούς.

Επίσης, για να υπάρξει διαφοροποίηση και να είναι πιο εύκολο να παρατηρηθεί η συμπεριφορά των μαθητών σε διάφορα είδη παραστάσεων αποφασίστηκε οι δύο πρώτες παραστάσεις να περιέχουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης και της πρόσθεσης (με μία από αυτές αληθή) ενώ οι δύο τελευταίες περιέχουν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με διαφορετική σειρά στο κάθε ερώτημα (με μία από αυτές αληθή) για να εξεταστεί η παρανόηση που παρατηρείται στη βιβλιογραφία ότι η πρόσθεση προηγείται της αφαίρεσης και ο πολλαπλασιασμός της διαίρεσης (Linchevski κ.α., 1999).

Τέλος, το έργο 10 δίνει πολλές πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις όπως στα έργα της έρευνας του Tabak (2019).

10. $9 + 6 \cdot (11-7) : 4 = ;$

Εικόνα 18. Έργο 10 του εργαλείου

Η αριθμητική παράσταση του έργου 10 είναι μια παράσταση με παρένθεση. Από τον τρόπο επίλυσης της παράστασης από τους μαθητές θα εξεταστεί αν ξεκινάνε τις πράξεις από τις παρενθέσεις και αν στη συνέχεια τηρούν την προτεραιότητα των πράξεων ή αν εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά. Επιλέχθηκε η συγκεκριμένη αριθμητική παράσταση από την έρευνα του Tabak (2019) επειδή η παράσταση ξεκινάει με την πράξη της πρόσθεσης και έπεται μια διαίρεση μετά την αφαίρεση. Με αυτό τον τρόπο θα εξεταστεί αν οι μαθητές τηρούν την προτεραιότητα των πράξεων ή εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά.

3^{ος} άξονας: Παίζουν ρόλο οι παρενθέσεις για τους μαθητές; Ποιος είναι ο ρόλος τους στο συντακτικό χειρισμό;

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα έργα που επιτρέπουν να διερευνηθεί ο ρόλος που έχουν οι παρενθέσεις για τους μαθητές.

Στο έργο 3 ζητείται από τους μαθητές να δώσουν την αριθμητική παράσταση για κάθε λεκτική πρόταση που τους δίνεται. Μέσω του έργου αυτού θα γίνει κατανοητό αν οι μαθητές γνωρίζουν τότε οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες κατά την λεκτική περιγραφή μιας αριθμητικής παράστασης.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. _____

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. _____

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. _____

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. _____

Εικόνα 19. Έργο 3 του εργαλείου

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα έργα 4 και 11 τα οποία συμπεριλήφθηκαν στο εργαλείο με σκοπό να εξετάσουν τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τις παρενθέσεις. Από τις απαντήσεις τους θα φανεί αρχικά αν κατανοούν ότι οι παρενθέσεις είναι ζεύγος αλλά και πως είναι διατεταγμένο ζεύγος. Αν, δηλαδή όταν διαγράφουν ένα σύμβολο που ανοίγει διαγράφουν και το σωστό σύμβολο που κλείνει την παρένθεση. Επιπλέον, θα γίνει κατανοητό το πόσο χρήσιμες θεωρούν οι μαθητές τις παρενθέσεις και αν θεωρούν πως επηρεάζουν την προτεραιότητα των πράξεων.

Τα δύο έργα μεταξύ τους είναι όμοια. Η διαφορά είναι πως στο έργο 4 υπάρχουν παραστάσεις με ένα ζεύγος παρενθέσεων ενώ στο έργο 11 υπάρχουν δύο ή τρία ζεύγη παρενθέσεων. Ο λόγος που αποφασίστηκε να χωριστούν σε δύο έργα είναι η συμπεριφορά των μαθητών που παρατηρείται στη βιβλιογραφία, να διαγράφουν τις παρενθέσεις όταν υπάρχει ένα ζεύγος ενώ όταν υπάρχουν περισσότερα να κρατάνε τουλάχιστον ένα (Gunnarsson & Karlsson, 2015).

4. Να διαγράψεις όλες τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + (3 : 2)$

β. $7 - (3 \cdot 3)$

γ. $(7 \cdot 3) - 3$

δ. $(7+3) \cdot 2$

Εικόνα 20. Έργο 4 του εργαλείου

Το έργο 4 περιέχει τρία ερωτήματα (α', β' & γ') τα οποία δεν χρειάζονται τις παρενθέσεις καθώς η πράξη που βρίσκεται στην παρένθεση έχει ούτως ή άλλως προτεραιότητα εφόσον πρόκειται για πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Στα ερωτήματα α' και β' η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης ενώ στα ερωτήματα γ' και δ' βρίσκεται στην αρχή. Οι παραστάσεις επιλέχθηκαν με αυτό τον τρόπο ώστε να αναγνωριστεί αν οι μαθητές εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά και να εξεταστεί αν θα κατανοήσουν ότι στο ερώτημα δ' οι παρενθέσεις είναι αναγκαίες. Μαθητές που εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά θα την θεωρήσουν περιττή.

11. Να διαγράψεις όλες τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $-(7 - (3-3))$

β. $((7) - (3 \cdot 2))$

γ. $7 - ((3:2))$

δ. $(7 : (3+2))$

Εικόνα 21. Έργο 11 του εργαλείου

Το έργο 11, περιλαμβάνει παραστάσεις στις οποίες όλα τα ζεύγη των παρενθέσεων είναι περιττά (β' & γ'), όλα τα ζεύγη των παρενθέσεων είναι αναγκαία (α') και μια στην οποία το ένα μόνο ζεύγος είναι απαραίτητο (δ'). Ο λόγος που επιλέχθηκε να είναι διαφορετικά μεταξύ τους είναι για να διερευνηθεί αν οι μαθητές έχουν κάποια ίδια συμπεριφορά προς όλες τις παραστάσεις με δύο ή παραπάνω ζεύγη παρενθέσεων, αν για παράδειγμα διαγράφουν όλες τις παρενθέσεις ή κρατάνε τουλάχιστον ένα ζεύγος. Επιπλέον, στο ερώτημα ένα είναι εύκολο να παρατηρηθεί αν κατανοούν την λειτουργία των παρενθέσεων ως πολλαπλασιαστικό παράγοντα, να εξεταστεί αν κατανοούν ότι το «-» έξω από την εξωτερική παρένθεση δεν είναι μόνο του αριθμού 7.

4^{ος} άξονας: Σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων και των εσωτερικών αυτών

Μέσω του έργου 6 θα εξεταστεί αν οι μαθητές είναι ικανοί να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά το εσωτερικό των παρενθέσεων.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$

β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$

δ. $50 - 10 + 20$

Εικόνα 22. Έργο 6 του εργαλείου

Στο πρόβλημα 6 σωστές αναπαραστάσεις είναι οι εκφράσεις α' και β'. Ένα παράδειγμα που θα έδειχνε ικανότητα σημασιολογικής διαφοροποίησης θα ήταν αν κάποιος σχολίαζε ότι η παράσταση α' συμβολίζει την αγορά των γλυκών και του κέικ από ένα κατάστημα ενώ στην παράσταση με την παρένθεση, θα μπορούσε η παρένθεση να δηλώνει ότι τα γλυκά και το κέικ αγοράστηκαν από το ίδιο κατάστημα.

5^{ος} άξονας: Ικανότητα δόμησης/νοηματοδότησης παράστασης σε σχέση με λεκτικά προβλήματα

Τα έργα 9 και 12 συμπεριλήφθηκαν στο ερευνητικό εργαλείο με σκοπό να μελετηθεί η ικανότητα των μαθητών να νοηματοδοτούν αριθμητικές παραστάσεις.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:

α. $(3+2) \cdot 5$

β. $3 + 2 \cdot 5$

Εικόνα 23. Έργο 9 του εργαλείου

Στο έργο 9, υπάρχει η ίδια παράσταση τη μια φορά με παρένθεση και την άλλη χωρίς. Έτσι θα γίνει κατανοητό πως οι μαθητές νοηματοδοτούν το εσωτερικό της παρένθεσης και αν αυτό αλλάζει για την παράσταση που δεν έχει παρενθέσεις. Επιπλέον, η πράξη που έχει προτεραιότητα στην παράσταση β' βρίσκεται στο τέλος της πρότασης οπότε θα εξεταστεί αν οι μαθητές κατανοούν ποια πράξη πρέπει να δηλώσουν πρώτα στο πρόβλημα που θα δημιουργήσουν.

12. Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ.

Ο Κώστας έδωσε τη λύση α' και ο Γιώργος τη λύση β'. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;

α. $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$

β. $11 - (120 \div 20) = 5$

Εικόνα 24. Έργο 12 του εργαλείου

Το έργο 12 περιλαμβάνει σύνθετες παραστάσεις με μεγαλύτερους αριθμούς και πιο σύνθετο πρόβλημα σε σχέση με το έργο 6. Η παράσταση α' είναι μεγαλύτερη και μέσα η παρένθεση περιλαμβάνει δύο πράξεις ενώ η παράσταση β' είναι λιγότερο σύνθετη καθώς περιλαμβάνει μια πράξη λιγότερη μέσα στις παρενθέσεις.

Από τα έργα 9 και 12 γίνει κατανοητό αν οι μαθητές είναι το ίδιο ικανοί να νοηματοδοτήσουν απλές και σύνθετες παραστάσεις.

3^ο Κεφάλαιο – Αποτελέσματα

Το 3^ο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της έρευνας.

Στο 1^ο μέρος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για κάθε μαθητή με αναφορά στις ικανότητές του και με μεγαλύτερη έμφαση στα λάθη και τις δυσκολίες του. Για κάθε μαθητή στο τέλος, γίνεται μια σύνοψη των ικανοτήτων και των δυσκολιών του.

Στο 2^ο μέρος παρουσιάζονται σε πίνακες τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων και σχολιάζονται οι καταστάσεις που δημιούργησαν πρόβλημα στους μαθητές.

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων θα αποφευχθεί η αναφορά στο φύλο του μαθητή εφόσον δεν αποτελεί μεταβλητή της έρευνας. Επιπλέον, οι μαθητές αναφέρονται με τους κωδικούς M1, M2, M3, M4 και M5 με βάση τη σειρά που λήφθηκαν οι συνεντεύξεις.

3.1 Αποτελέσματα ανά μαθητή

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται, ανά μαθητή, απαντήσεις των μαθητών με παραδείγματα σε περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται δυσκολίες. Τα αποτελέσματα για κάθε μαθητή ομαδοποιήθηκαν στις εξής κατηγορίες:

1. **Γνώση και αντίληψη του συμβόλου:** Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύμβολο των παρενθέσεων, αν το αντιλαμβάνονται ως διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων ή ως μονό σύμβολο και αν γνωρίζουν τη λειτουργία των παρενθέσεων. Από αυτή την κατηγορία προκύπτουν πληροφορίες ώστε να απαντηθεί το 2^ο ερευνητικό ερώτημα.
2. **Συντακτικός χειρισμός των παρενθέσεων:** Ο συντακτικός χειρισμός των παρενθέσεων αφορά στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές συμπεριφέρονται σε παραστάσεις με και χωρίς παρενθέσεις. Επιπλέον, η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει και την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν πότε οι παρενθέσεις είναι αναγκαίες και πότε όχι. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτή την κατηγορία θα βοηθήσουν ώστε να απαντηθούν το 1^ο και το 2^ο ερευνητικό ερώτημα.
3. **Σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων:** Στην τελευταία κατηγορία εντάσσονται η ικανότητα των μαθητών να μετατρέπουν λεκτικά προβλήματα σε αριθμητικές παραστάσεις και το αντίθετο, όπως επίσης και η ικανότητά τους για σημασιολογική διαφοροποίηση των παρενθέσεων και μέσω αυτής της κατηγορίας θα απαντηθούν το 3^ο και το 4^ο ερευνητικό ερώτημα.

M1

1. Γνώση και αντίληψη του συμβόλου

Ο/Η Μ1 θεωρεί πως οι παρενθέσεις «Είναι για να χωρίζεις πράγματα, για να σε διευκολύνει...».

Όσον αφορά στον συμβολισμό, από έργα που απαιτούν από τους μαθητές την προσθήκη απαραίτητων παρενθέσεων ή τη διαγραφή περιττών φαίνεται ότι αντιλαμβάνεται τις παρενθέσεις ως διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων καθώς ως ζεύγος τις εισάγει ή τις διαγράφει. Σύμφωνα με τον/την Μ1, οι συμβολισμοί «()» και «(3)» παριστάνουν παρενθέσεις καθώς το σύμβολο «(» θα μπορούσε να είναι μια τυχαία γραμμή που σχεδιάστηκε από λάθος και για αυτήν δεν σημαίνει κάτι, όπως φαίνεται στην απάντησή της στο έργο 2.

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;

α. (

β.)

γ. ()

δ. (3)

Εικόνα 25. Απάντηση του/της Μ1 στο έργο 2

«Το α μπορεί να είναι μια απλώς γραμμή που να είναι κατά λάθος ή να είναι.. πώς να το εξηγήσω...εμ μου βγάζει σαν να είναι ξέρω 'γω όλο το κείμενο σε παρένθεση χωρίς λόγο.»

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η μαθήτρια κατανοεί ότι οι παρενθέσεις εμφανίζονται σε ζεύγος το οποίο περιέχει κάτι ή μπορεί να περιέχει κάτι. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι:

«...στην ουσία δείχνει, στο δ ας πούμε δείχνει ότι έχει κάτι μέσα και αυτό είναι σε παρένθεση. Ξέρω 'γω...μπορείς να βάλεις κάτι μέσα στην παρένθεση.»

2. Συντακτικός χειρισμός

Προτεραιότητα πράξεων σε πράξεις χωρίς παρενθέσεις

Παρακάτω παρουσιάζεται το έργο 5 και απόσπασμα από την απάντηση του/της Μ1 όπου φαίνεται ότι σε παράσταση χωρίς παρένθεση εκτελεί υπολογισμούς ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά..

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;

$$2 + 4 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

Εικόνα 26. Απάντηση του/της Μ1 στο έργο 5

«Ε: Και γιατί επιλέγεις να κάνεις πρώτα την πρόσθεση;

M1: Μμμ, δεν ξέρω απλώς έτσι ήθελα να το πάρω με τη σειρά. Θα μπορούσα να το κάνω και αντιστρόφως. Ο καθένας νομίζω όπως θέλει μπορεί να το κάνει.»

Από το ίδιο απόσπασμα, γίνεται ορατή η αντίληψη ότι οι πράξεις μπορούν να γίνουν με όποιον τρόπο προτιμάει ο λύτης και στην ερώτηση αν θα μπορούσαν να είναι σωστές και οι δύο λύσεις απαντάει καταφατικά.

Παρακάτω παρουσιάζεται η απάντηση του/της M1 στο ερώτημα α' του έργου 8.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:			
α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$	Ναι / Όχι	β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$	Ναι / Όχι.
γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$	Ναι / Όχι.	δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$	Ναι / Όχι.

Εικόνα 27. Απάντηση του/της M1 στο έργο 8

«Ε: Οκ, και στο 2ο μέλος τί θα έκανες πρώτα.

M1: Αυτό που θα μου φαινόταν ίδιο. Θα άρχιζα από την αρχή πιστεύω. $40 \cdot 51$.

E: Τυχαία; για ευκολία; όπως σε βολεύει;

M1: Ναι, το κάνω και γι' αυτό αλλά το κάνω κι επειδή, στις περισσότερες ασκήσεις, θα το έκανα απ' την αρχή, από μπροστά προς τα πίσω.»

Στο ερώτημα «7β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ » πρέπει να χαρακτηρίσει την ισότητα ως αληθή ή μη αληθή. Ο τρόπος που επιλέγει να εργαστεί ο/η M1 είναι να εκτελέσει τις πράξεις στο 1^ο μέλος ξεκινώντας από την πιο εύκολη για την ίδια, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

«E: Και γιατί επέλεξες το $5 \cdot 3$ πρώτα;

M1: Επειδή θα μου έβγαινε πιο μικρός ο αριθμός. Και μετά θα μπορούσα να το αφαιρέσω με το 20. Αν έκανα το αντίθετο, δηλαδή αν έκανα $20 - 5$ θα μου έβγαινε πιο μεγάλος αριθμός.

E: Αχά, οκ άρα για ευκολία το επέλεξες.

M1: Ναι».

Έχει ενδιαφέρον το γεγονός πως παρόλο που ο/η M1 εργάζεται από αριστερά προς τα δεξιά, ορισμένες φορές, είναι σε θέση να αναγνωρίσει τις απαραίτητες παρενθέσεις. Για παράδειγμα στο ερώτημα «7γ. $3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3$ » η μαθήτρια κατανοεί πως δεν είναι αληθής η ισότητα και

πως το άθροισμα $3+2$ χρειάζεται να μπει σε παρενθέσεις. Παρόλα αυτά σε αντίστοιχη παράσταση η μαθήτρια θεωρεί τις παρενθέσεις περιττές (π.χ. στο ερώτημα «4 δ. $(7+3) \cdot 2$ »).

Συνεπώς, ο/η M1 δεν έχει σταθερή συμπεριφορά και άλλοτε λειτουργεί σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων και άλλοτε όχι, εργαζόμενος/η είτε προς τα αριστερά προς τα δεξιά είτε με τους πιο εύκολους υπολογισμούς.

Προτεραιότητα σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Στα έργα που απαιτούν την προσθήκη αναγκαίων παρενθέσεων ή την αναγνώριση αληθών ισοτήτων, η M1 δίνει σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα (έργα 7&8, σελ.95 & 97μ αντίστοιχα). Η μαθήτρια γνωρίζει πως όταν έχει παρενθέσεις πρέπει να γίνουν πρώτα οι πράξεις μέσα σε αυτές λέγοντας πως «M1: Κάθε άσκηση που έχει παρένθεση θα κάνω πρώτα την παρένθεση.»

Δομή των παραστάσεων

Από την απάντησή του/της σε έργο (έργο 7, σελ.95), όπου ζητείται η προσθήκη απαραίτητων παρενθέσεων ώστε να είναι αληθείς οι ισότητες, φαίνεται πως κατανοεί ότι η ύπαρξη ή όχι επηρεάζει τη δομή της παράστασης και σωστά προσθέτει όλες τις απαραίτητες παρενθέσεις. Ακόμη και στο ερώτημα «7δ. $12 : 4 = 12 : 6 - 2$ » στο οποίο η μαθήτρια αρχικά δυσκολεύτηκε να απαντήσει τελικά σωστά τοποθέτησε παρενθέσεις στη διαφορά « $6-2$ » ώστε τα δύο μέλη να έχουν την ίδια μορφή.

Η μαθήτρια στο έργο 4, στην οποία ζητείται από τους μαθητές να διαγράψουν τις περιττές παρενθέσεις, διαγράφει όλες τις παρενθέσεις χωρίς να δίνει σημασία στον τρόπο με τον οποίο θα επηρεαστεί το αποτέλεσμα των παραστάσεων. Έχει ενδιαφέρον να σχολιαστεί ότι, στο ερώτημα «4δ. $(7+3) \cdot 2$ », η μαθήτρια διαγράφει τις παρενθέσεις επειδή τις θεωρεί περιττές και ισχυρίζεται ότι θα πολλαπλασίαζε το 2 με το 3.

3. Σημασιολογική ερμηνεία

Στο έργο 9, όπου πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν λεκτικά προβλήματα με βάση μια παράσταση με παρενθέσεις και την ίδια χωρίς, ξεκινάει δίνοντας λάθος απάντηση για την παράσταση «α. $(3+2) \cdot 5$ » η οποία περιέχει παρένθεση. Το πρόβλημα που δημιουργεί ο/η M1 περιέχει τους αριθμούς της παράστασης αλλά δεν είναι κατάλληλο.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:

α. $(3+2) \cdot 5$

β. $3 + 2 \cdot 5$

Εικόνα 28. Έργο 9 του εργαλείου

Για το ερώτημα «β. $3+2 \cdot 5$ » αρχικά ισχυρίζεται πως θα έλεγε το ίδιο αλλά στη συνέχεια προσθέτει ότι «θα μπορούσα στο β να κάνω το αντίθετο. Αντί να αρχίσω από μπροστά να αρχίσω από πίσω.» Επομένως κατανοεί ότι αφού λείπουν οι παρενθέσεις δεν πρέπει να γίνει πρώτα η πρόσθεση. Μετά από σκέψη καταλήγει σε πρόβλημα το οποίο είναι σωστό με περιθώρια βελτίωσης στη διατύπωσή του, δίνοντας την απάντηση «Είμαστε.. έχουμε 5 τραπέζια και το κάθε τραπέζι έχει δύο καρέκλες και είμαστε +3 άτομα, πώς θα κάτσουμε ο καθένας.»

Συνεπώς, γίνεται φανερό ότι η μαθήτρια δυσκολεύεται να νοηματοδοτήσει τις παραστάσεις και τις παρενθέσεις και το περιεχόμενο αυτών.

Σύνοψη για τον/την M1

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι ο/η M1:

- Αντιλαμβάνεται τις παρενθέσεις ως σύμβολο που χρησιμοποιεί το άτομο για να χωρίζει παραστάσεις, για να τον διευκολύνει.
 - Διπλό σύμβολο με περιεχόμενο ή που μπορεί να έχει περιεχόμενο.
- Δεν έχει στο μυαλό της την προτεραιότητα πράξεων όταν δεν υπάρχουν παρενθέσεις.
 - Εκτελεί πρώτα την πράξη που του/της φαίνεται πιο εύκολη.
 - Λύνει από αριστερά προς τα δεξιά.
- Σε παράσταση με παρενθέσεις ξεκινάει υπολογίζοντας πρώτα αυτές και συνεχίζει με έναν από τους δύο παραπάνω τρόπους.
- Φαίνεται ότι οι παρενθέσεις δεν έχουν σημαντικό ρόλο για τη μαθήτρια.
 - Προτιμάει να μην χρησιμοποιεί παρενθέσεις.
- Δεν είναι σε θέση να ερμηνεύσει σημασιολογικά το περιεχόμενο των παρενθέσεων.
- Δυσκολεύεται να δομήσει και να νοηματοδοτήσει αριθμητική παράσταση.

M2

1. Γνώση και αντίληψη του συμβόλου

Ο Μ2 δεν είναι σε θέση να αποδώσει λεκτικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται τις παρενθέσεις και επιλέγει να απαντήσει λέγοντας πως «είναι σίγουρα κάτι χρήσιμο επειδή τα μαθηματικά όλα είναι χρήσιμα». Παρόλα αυτά σε μαθητή Δημοτικού θα του έλεγε ότι οι παρενθέσεις υπάρχουν για να δηλώσουν την προτεραιότητα.

Όσον αφορά στον συμβολισμό των παρενθέσεων, ο μαθητής αρχικά απαντάει πως όλες οι επιλογές παριστάνουν παρενθέσεις. Έπειτα από την ερώτηση αν δει κάπου το σύμβολο «(» το αναγνωρίζει ως παρενθέσεις απαντά «Όχι πρέπει να κλείσουν κιάλας, άρα δεν είναι το α και το β. Ναι αλλά και η παρένθεση πρέπει να έχει κάτι μέσα, σωστά; (...) Αυτό, το δ θεωρώ εγώ.»

2. Συντακτικός χειρισμός

Προτεραιότητα πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Ο/Η Μ2 επιλέγει να χρησιμοποιεί παρενθέσεις ακόμη και όταν αυτές δεν είναι απαραίτητες ώστε να δηλώσει προτεραιότητα (έργο 3 & έργο 7). Όταν του γίνεται ερώτηση αν όλες οι παρενθέσεις που χρησιμοποιεί είναι απαραίτητες αναγνωρίζει εύκολα τις περιττές και τις αφαιρεί. Επιπλέον, στα έργα στα οποία του ζητείται να διαγράψει τις περιττές παρενθέσεις (έργα 4 & 11) σωστά αφαιρεί όλες τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες καθώς γνωρίζει ότι λόγω προτεραιότητας των πράξεων οι πράξεις αυτές έχουν ήδη προτεραιότητα. Τέλος, σε έργο (έργο 10) που ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν μια αριθμητική παράσταση που περιέχει παρένθεση και τις τέσσερις πράξεις ο/η Μ2 ακολουθεί την προτεραιότητα των πράξεων για παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

10. $9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$

$$9 + 6 \times 4 : 4 = 9 + 24 : 4 = 9 + 6 = 15$$

Εικόνα 29. Απάντηση του/της Μ1 στο έργο 10

Στο έργο 8 στα ερωτήματα α' και β' που περιέχουν μια πράξη πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης και μια πρόσθεσης ο μαθητής απαντάει σωστά. Στα ερωτήματα γ' και δ', ο/η Μ2 απαντάει λάθος. Στις δύο αυτές παραστάσεις υπάρχουν μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Ο μαθητής απαντάει λανθασμένα πως η ισότητα γ' είναι μη αληθής εξηγώντας πως «(...) επειδή πρέπει πάντα από τα αριστερά προς δεξιά να πάμε άμα είναι ίσα, ας πούμε. Άρα δεν θα έχω το ίδιο.»

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι / Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

Εικόνα 30. Απάντηση του/της M2 στο έργο 8

Στο ερώτημα «δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ », απαντάει λανθασμένα πως η ισότητα είναι αληθής για τον ίδιο λόγο.

Ο/Η M2 προηγουμένως σχολίασε πως εφόσον η προτεραιότητα είναι ίδια τότε εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά. Στην πραγματικότητα όμως οι απαντήσεις του μαθητή, οι οποίες δεν είναι σε συμφωνία στα ερωτήματα γ' και δ', ίσως να φανερώνουν πως συνηθίζει να εκτελεί την πράξη της πρόσθεσης πριν από την αφαίρεση σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις. Επίσης, δεν δίνει σημασία στη λειτουργία του συμβόλου «-» πριν από μία παρένθεση.

Προτεραιότητα σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Παρακάτω παρουσιάζεται η απάντηση του/της M2 στο έργο 6 που δείχνει ότι βρίσκει και τις δύο σωστές απαντήσεις.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$ β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$ δ. $50 - 10 + 20$

Εικόνα 31. Απάντηση του/της M2 στο έργο 6

Σωστές επιλογές είναι οι α' και β'. Ο μαθητής με ταχύτητα απαντά πως η β' επιλογή είναι σωστή και ο λόγος που την επιλέγει είναι «Γιατί 10 και 20 κάνει 30 μείον το 50...20». Στη συνέχεια αναγνώρισε και τη δεύτερη σωστή επιλογή.

Δομή των παραστάσεων

Όσον αφορά στη δομή των παραστάσεων, φαίνεται ότι ο/η M2 κατανοεί ότι οι παρενθέσεις μπορούν να επηρεάσουν τη δομή τους και προτιμάει να τις χρησιμοποιεί ακόμη και όταν δεν είναι αναγκαίες.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. $(2 + 5) + 4$

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. $(4 : 2) + 3$

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. $(2 + 5) \cdot 4$

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. $6 + 7 - 10$

Εικόνα 32. Απάντηση του/της M2 στο έργο 3

Για παράδειγμα, στο έργο 3 όπου ο μαθητής πρέπει να μετατρέψει λεκτικά προβλήματα σε αριθμητικές παραστάσεις, αρχικά επιλέγει να χρησιμοποιήσει παρενθέσεις στα ερωτήματα α' και β' αλλά όταν του γίνεται η ερώτηση αν θα είχε διαφορετικό αποτέλεσμα χωρίς αυτές αντιλαμβάνεται ότι είναι περιττές και αποφασίζει να μην τις χρησιμοποιήσει.

Στο γ' ερώτημα ο/η M2, με ευκολία, δημιουργεί την κατάλληλη αριθμητική παράσταση κάνοντας χρήση παρενθέσεων ώστε να δώσει προτεραιότητα στην πράξη της πρόσθεσης, όπως παρουσιάζεται και στο λεκτικό πρόβλημα και απαντάει καταφατικά στην ερώτηση αν θα άλλαζε το αποτέλεσμα της παράστασης χωρίς τη χρήση παρενθέσεων. Στο δ' ερώτημα είναι αναγκαίο να γίνει χρήση παρενθέσεων στην αριθμητική παράσταση. Ο/Η M2 κατανοεί τη δομή που πρέπει να έχει η παράσταση αλλά δεν τη μεταφέρει στην αριθμητική παράσταση καθώς δεν κάνει χρήση παρενθέσεων.

3. Σημασιολογική ερμηνεία

Μια δυσκολία που παρουσιάζεται στον/στη M2 είναι ότι κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση εκτελεί την πράξη της παρένθεσης προτού να δημιουργήσει το λεκτικό πρόβλημα, εφόσον υπάρχουν παρενθέσεις. Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά η απάντησή του στο έργο 9.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:

α. $(3+2) \cdot 5$

β. $3 + 2 \cdot 5$

Εικόνα 33. Έργο 9 του εργαλείου

Αρχικά, ο/η M2, για το α' ερώτημα, δηλώνει τους αριθμούς 3 και 2 που υπάρχουν μέσα στην παρένθεση ως 5 διαφορετικά φρούτα. Άρα, φαίνεται ότι πρώτα εκτέλεσε την πράξη της παρένθεσης στο μυαλό του. Έπειτα συνέχισε λέγοντας:

«Πήρα τη μπανάνα την φράουλα τα πορτοκάλια, τα αχλάδια και τα σταφύλια ξέρω 'γω, 5 φρούτα και πήρα ας πούμε, επί 5 κιλά. Πήρα απ' το καθένα 5 κιλά, όχι. Και όλα μαζί έκαναν 5 κιλά.»

Η πρόταση «Πήρα απ' το καθένα 5 κιλά» είναι σωστή αλλά ο M2 δεν το αναγνωρίζει και την αναιρεί. Αντίθετα, η πρόταση «Και όλα μαζί έκαναν 5 κιλά.» είναι λανθασμένη καθώς στην παράσταση δεν περιέχεται το σύμβολο της ισότητας.

Στη συνέχεια έπειτα από παρότρυνση της ερευνήτριας ο M2 συνεχίζει την προηγούμενη σκέψη του και καταφέρνει να εκφράσει τον πολλαπλασιασμό ως 5 σακούλες. Αυτό που έχει ενδιαφέρον να σχολιαστεί είναι ότι στο λεκτικό πρόβλημα που δημιουργεί περιέχεται η λέξη «επί» πράγμα που σημαίνει ότι δεν του είναι εύκολο να νοηματοδοτήσει την πράξη του πολλαπλασιασμού. Στην παράσταση χωρίς παρενθέσεις (β' ερώτημα) ο/η M2 εύκολα διασκευάζει το πρόβλημα ώστε να είναι κατάλληλο για αυτή.

Σύνοψη για τον/τη M2

Για τον/την M2 συμπεραίνονται τα εξής:

- Οι παρενθέσεις είναι σύμβολο που χρησιμοποιείται για την προτεραιότητα των πράξεων.
 - Σύμβολο που ανοίγει και κλείνει και που έχει περιεχόμενο
- Γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων όταν η παράσταση περιλαμβάνει και πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.
 - Μπερδεύεται όταν στην παράσταση υπάρχουν μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, λύνει από αριστερά προς τα δεξιά .
 - Δίνει προτεραιότητα στην πράξη της πρόσθεσης από την πράξη της αφαίρεσης.
- Σε παραστάσεις με παρενθέσεις λύνει σωστά εκτελώντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και συνεχίζει με την προτεραιότητα των πράξεων.
- Προσθέτει παρενθέσεις και όταν είναι περιττές.
 - Όπου είναι απαραίτητες τις χρησιμοποιεί πάντα.

- Δεν ερμηνεύει διαφοροποιεί σημασιολογικά το περιεχόμενο των παρενθέσεων.
- Νοηματοδοτεί απλές αριθμητικές παραστάσεις με μικρή δυσκολία στη σημασιολογική ερμηνεία των πράξεων.
 - ο Όταν οι παραστάσεις είναι σύνθετες υπάρχει δυσκολία σημασιολογικής κατανόησης του περιεχομένου των παραστάσεων.

M3

1. Γνώση και αντίληψη του συμβόλου

Ο/Η Μ3 στην προσπάθειά του να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο ο ίδιος αντιλαμβάνεται τις παρενθέσεις χρησιμοποιεί τις φράσεις «διαχωριστικό» και «βοήθημα για τα πρόσημα» τις οποίες δίνει αρκετά μονολεκτικά. Στην ερώτηση πώς θα το εξηγούσε σε ένα παιδί Δημοτικού απαντάει

«Κάτι σαν βοήθεια να...πρέπει να κάνεις πρώτα την πράξη που είναι στην παρένθεση και μετά όλα τα υπόλοιπα.».

Η περιγραφή που δίνει σε παιδί Δημοτικού για τις παρενθέσεις δείχνει ότι οι παρενθέσεις, για τον ίδιο, είναι κυρίως ένα σύμβολο που δηλώνει προτεραιότητα.

Ως προς τον συμβολισμό χαρακτηρίζει την επιλογή «(3)» ως παρενθέσεις και όχι την «()» λέγοντας χαρακτηριστικά:

«Γιατί έχει και τις παρενθέσεις αριστερά δεξιά και το 3.».

2. Συντακτικός χειρισμός

Προτεραιότητα πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Σε έργο που ο/η Μ3 πρέπει να διαγράψει μη αναγκαίες παρενθέσεις σωστά διαγράφει τις περιττές και διατηρεί τις αναγκαίες όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + \{3 : 2\}$

β. $7 - \{3 \cdot 3\}$

γ. $\{7 \cdot 3\} - 3$

δ. $(7+3) \cdot 2$

Εικόνα 34. Απάντηση του/της Μ3 στο έργο 4

Στο έργο 3 (σελ.113), φαίνεται ότι ο/η Μ3 επιλέγει να χρησιμοποιήσει παρενθέσεις σε όλες τις παραστάσεις ακόμη και όταν είναι περιττές. Ενώ γνωρίζει πολύ καλά την προτεραιότητα

των πράξεων είναι πιθανό να μπερδευτεί και να μην την ακολουθήσει. Στο παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζεται μια τέτοια συμπεριφορά.

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;

$$2 + 4 \cdot 3 = 6 \cdot 3$$

Εικόνα 35. Απάντηση του/της Μ3 στο έργο 5

Στο έργο 5, δίνει λάθος απάντηση. Εντελώς αντίστροφα με τις υπόλοιπες απαντήσεις του επιλέγει να εκτελέσει πρώτα την πράξη της πρόσθεσης παρόλο που λόγω προτεραιότητας προηγείται ο πολλαπλασιασμός και υποστηρίζει πως:

«...κανονικά θα έπρεπε να έχει μία παρένθεση εκεί πιστεύω. Επειδή αν ήταν αλλιώς θα έβγαινε λάθος.»

Φαίνεται λοιπόν ότι ο/η Μ3 χρησιμοποιεί νοητές παρενθέσεις. Επιπλέον επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός ότι ο μαθητής νιώθει ανασφάλεια χωρίς αυτές και ότι είναι πιθανό να μην ακολουθήσει την προτεραιότητα όταν οι παρενθέσεις δεν υπάρχουν.

Προτεραιότητα σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Στην επίλυση αριθμητικής παράστασης με παρενθέσεις ο μαθητής εξηγεί ότι εργάστηκε εκτελώντας «τις πράξεις στην παρένθεση πρώτα» (έργο 10, σελ.119).

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$

β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$

δ. $50 - 10 + 20$

Εικόνα 36. Απάντηση του/της Μ3 στο έργο 6

Ο/Η Μ3 απαντά πως η παράσταση που αναπαριστά το παραπάνω πρόβλημα είναι η β' και εξηγεί πως:

«Μ3:(...)10 και 20 κάνει 30 μείον το 50 20.»

Από την απάντησή του φαίνεται ότι σε παράσταση που υπάρχουν παρενθέσεις γνωρίζει ότι πρώτα εκτελούνται οι πράξεις μέσα σε αυτή.

Το γεγονός ότι δεν αναγνώρισε τη 2^η σωστή επιλογή (α'), η οποία είναι η ισοδύναμη χωρίς τις παρενθέσεις δείχνει και πάλι την προτίμησή του να υπάρχουν παρενθέσεις.

Δομή των παραστάσεων

Από την απάντησή του στο έργο 8 φαίνεται η αντίληψη της δομής των αριθμητικών παραστάσεων από τον/τη Μ3.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:	
α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ <u>Ναι / Όχι</u>	β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ <u>Ναι / Όχι</u> .
γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ <u>Ναι / Όχι</u> .	δ. $27 - (5 + 3) = 27 - (5 + 3)$ <u>Ναι / Όχι</u> .

Εικόνα 37. Απάντηση του/της Μ3 στο έργο 8

Στο έργο 8, όπου ο/η Μ3 πρέπει χωρίς πράξεις να αναγνωρίσει αν η παράσταση είναι αληθής ή όχι, ο ίδιος δεν χρησιμοποιεί την προτεραιότητα των πράξεων ως εργαλείο. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί για να αποφασίσει αν υπάρχει ισότητα αφορά, αποκλειστικά, στα δομικά χαρακτηριστικά των παραστάσεων. Παρατηρεί στις παραστάσεις στα δύο μέλη και ελέγχει αν έχουν την ίδια δομή.

Για παράδειγμα, στο ερώτημα α' εξηγεί με ευκολία ότι στο 1^ο μέλος ο αριθμός 40 πολλαπλασιάζεται με το αποτέλεσμα του αθροίσματος ενώ στο 2^ο μέλος πολλαπλασιάζεται μόνο με το 51 και πως για αυτό τον λόγο δεν ισχύει η ισότητα.

Στα ερωτήματα γ' και δ' ο μαθητής θεωρεί αναγκαίες τις παρενθέσεις και στα δύο μέλη και χαρακτηρίζει μη αληθείς και τις δύο παραστάσεις (λανθασμένα για την ισότητα γ'). Φαίνεται πως θεωρεί πως θα έχει άλλο αποτέλεσμα αν αφαιρέσει από το 18 τη διαφορά 9-4 και άλλο αν υπολογίσει την παράσταση «18+9-4».

3. Σημασιολογική ερμηνεία

Ο/Η Μ3 στο έργο 9 αρχικά δυσκολεύτηκε να σχεδιάσει πρόβλημα.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:	
α. $(3+2) \cdot 5$	β. $3 + 2 \cdot 5$

Εικόνα 38. Έργο 9 του εργαλείου

Στη συνέχεια, αφού σκέφτηκε περίπου δύο λεπτά, σχεδίασε για την παράσταση με τις παρενθέσεις το εξής πρόβλημα:

«Εεε, στο σπίτι είχα δύο μήλα, αγόρασα άλλα 3 και την επόμενη μέρα, πήρα το πενταπλάσιο απ' όσα μήλα είχα. Για το α.»

Στο πρόβλημα που δημιουργήσε φαίνεται ότι η πράξη της πρόσθεσης θα προηγηθεί του πολλαπλασιασμού, όπως είναι και στην παράσταση. Σημασιολογικά, το πρόβλημα του μαθητή παρουσιάζει την παρένθεση ως τα μήλα που αγοράστηκαν την ίδια μέρα, ενώ το συνολικό αποτέλεσμα είναι τα μήλα που αγοράστηκαν την επόμενη.

Όσον αφορά στην παράσταση χωρίς παρενθέσεις, αφού σκέφτεται δύο λεπτά ακολουθεί η παρακάτω συζήτηση με την ερευνήτρια:

Ε: Τι σε μπερδεύει εδώ;

M3: Το δύο επί πέντε δεν ξέρω τι να κάνω. Μπορώ να κάνω την πράξη;

Ε: Όχι, δεν μπορείς.

M3: Δεν ξέρω πώς να το πω.

Ε: Δοκίμασε κάτι, μπορεί να είναι εντάξει.

M3: (Ακούγεται αποφασισμένος) Πήρα δύο τσαμπιά μπανάνες, το καθένα είχε 5 μπανάνες και ένα ακόμη που είχε 3.»

Συνεπώς, καταλήγει σε σωστό πρόβλημα κάνοντας πολύ καλή «μετάφραση» της πράξης του πολλαπλασιασμού. Έχει ενδιαφέρον να σχολιαστεί ότι ο μαθητής στο πρόβλημά του δηλώνει και την πράξη 1·3 που δηλώνεται με τον αριθμό 3.

Παρόλα αυτά, ο μαθητής παρουσιάζει δυσκολία στη νοηματοδότηση των παρενθέσεων και των όρων της παράστασης σε σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα από την απάντησή του στο έργο 12 (σελ.120).

«M3: ...

Ε: Ο Κώστας τι έχει βάλει μέσα στην παρένθεση;

M3: Την ... τις μπάλες που... (απελπίζεται) Έχω μπερδευτεί.

Ε: Αν δεις το β πρώτα;

M3: Το ποσό με τις μπάλες, πόσο έκανε κάθε μπάλα.

Ε: Και όλη η παρένθεση συμβολίζει χρήματα ή μπάλες;

M3: Χρήματα.

Ε: Και στο α η παρένθεση, τι συμβολίζει; Χρήματα ή μπάλες πιστεύεις;

M3: Μπάλες.. μπάλες πιστεύω.

Ε: Γιατί λες μπάλες;

M3: Γιατί... Έχω μπερδευτεί τώρα αρκετά.»

Σύνοψη για τον/τη M3

Για τον M3:

- Οι παρενθέσεις είναι ένα σύμβολο που δηλώνει την προτεραιότητα.
 - Διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων με περιεχόμενο
- Προτιμάει να υπάρχουν πάντα παρενθέσεις.
- Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις τυχαίνει να εκτελέσει με λάθος σειρά την προτεραιότητα των πράξεων.
 - Γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις με παρενθέσεις.
 - Έχει μεγάλη αντίληψη της δομής των παραστάσεων.
 - Μπορεί να νοηματοδοτήσει απλές αριθμητικές παραστάσεις με μικρή δυσκολία στη νοηματοδότηση του πολλαπλασιασμού.
 - Δεν είναι σε θέση να νοηματοδοτήσει σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις.
- Καταφέρνει σε πρόβλημά του να διαφοροποιήσει σημασιολογικά τις παρενθέσεις.

M4

1. Γνώση και αντίληψη του συμβόλου

Ο M4 χαρακτηρίζει τις παρενθέσεις ως έναν όρο της παράστασης. Συγκεκριμένα δίνει το παράδειγμα $\alpha + \beta = \gamma$ όπου το α είναι μια παρένθεση και θεωρεί πως οι παρενθέσεις λειτουργούν ως βοηθητικές για να λύσει μια μεγαλύτερη πράξη και τον βοηθάνε για να βλέπουν πιο απλή την παράσταση.

Ως προς τον συμβολισμό, επιλέγει ως παρενθέσεις τις εκφράσεις «()» και «(3)» επειδή «έχουν και σημείο που αρχίζουν και σημείο που τελειώνουν». Συνεπώς, αντιλαμβάνεται ότι οι παρενθέσεις εμφανίζονται ως ζεύγος ενώ δεν κάνει αναφορά στο αν πρέπει ή όχι να έχουν περιεχόμενο, φαίνεται όμως ότι δεν το διαχωρίζει.

2. Συντακτικός χειρισμός των παρενθέσεων

Προτεραιότητα πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Στο έργο 3, όπου ο/η M4 πρέπει να γράψει τις μαθηματικές εκφράσεις των προτάσεων προτιμάει να χρησιμοποιεί παρενθέσεις ακόμη και όταν αυτές είναι μη αναγκαίες.

«Ε: Χρειάζεται η παρένθεση πιστεύεις;

M4: Βασικά στη συγκεκριμένη περίπτωση όχι (...)

Ε: *Ωραία άρα θα έβαζες παρένθεση ή όχι; Δεν κατάλαβα.*

M4: *Εγώ προσωπικά θα έβαζα γιατί με βοηθάει να τα ξεκαθαρίσω καλύτερα.»*

Ο/Η M4 σε παραστάσεις με παρενθέσεις στις οποίες η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της παράστασης θεωρεί περιττές τις παρενθέσεις. Παρακάτω παρουσιάζεται ο τρόπος σκέψης του/της για την απάντησή του στο έργο 4.

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + (3 : 2)$

β. $7 - (3 \cdot 3)$

γ. $(7 \cdot 3) - 3$

δ. $(7 + 3) \cdot 2$

Εικόνα 39. Απάντηση του/της M4 στο έργο 4

Στα ερωτήματα α' και β', όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης, ο/η M4 θεωρεί πως οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες καθώς χωρίς αυτές θα άλλαζε η προτεραιότητα ενώ στα ερωτήματα γ' και δ' όπου οι πράξεις που έχουν προτεραιότητα βρίσκονται στην αρχή της πρότασης θεωρεί πως οι παρενθέσεις είναι περιττές. Συγκεκριμένα για το ερώτημα γ' απαντά πως οι παρενθέσεις δεν χρειάζονται:

«Επειδή είτε έχει παρένθεση είτε όχι, έτσι κι αλλιώς λόγω ότι είναι το πρώτο που βλέπεις θα κάνεις πρώτα $7 \cdot 3$ και μετά -3 .»

Προτεραιότητα σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Ο/Η M4 στις παραστάσεις με παρενθέσεις συνήθως ξεκινάει εκτελώντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (έργο 6, σελ.116 & έργο 8, σελ.117)

Παρόλα αυτά υπάρχει και σημείο στο οποίο ενώ έχει στον νου του/της να εκτελέσει πρώτα την πράξη μέσα στην παρένθεση, πρακτικά εκτελεί πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να τηρεί την προτεραιότητα των πράξεων για παραστάσεις με παρενθέσεις. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται στην απάντηση του/της M4 στο έργο 10.

10.	$9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$
	$15 \times 4 : 4 = 60 : 4 = 15$

Εικόνα 40. Απάντηση του/της M4 στο έργο 10

Ο/Η M4 ξεκινάει από αριστερά χωρίς να λαμβάνει υπόψιν την προτεραιότητα πράξεων εκτός παρένθεσης. Παράλληλα εκτελεί και την πράξη μέσα στην παρένθεση γράφοντας

«M4: $15 \cdot 4 : 4 = 60 : 4 = 15$ »

Το αποτέλεσμα που βρίσκει είναι τυχαία σωστό, δεν ακολούθησε την προτεραιότητα των πράξεων.

Δομή των παραστάσεων

Το έργο 3, επιτρέπει με ευκολία να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις οι μαθητές τη δομή της παράστασης. Το έργο είναι το εξής:

3.	Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):
α.	Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. <u>$(2+5)+4$</u>
β.	Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. <u>$(4:2)+3$</u>
γ.	Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. <u>$(2+5) \cdot 4$</u>
δ.	Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. <u>$(6+7) - (9+1)$</u>

Εικόνα 41. Απάντηση του/της M4 στο έργο 3

Ο M4 επιλέγει να γράψει όλες τις αριθμητικές παραστάσεις χρησιμοποιώντας παρενθέσεις, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα. Για το α' ερώτημα εξηγεί πως το έγραψε έτσι

«Για τον λόγο ότι μου το έδωσε ολόκληρο το $2+5$, άμα μου έδινε έναν αριθμό δεν θα έβαζα.».

Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις φαίνεται πως ο μαθητής δεν αντιλαμβάνεται τη δομή και τις ιδιότητες των πράξεων αλλά εργάζεται διαδικαστικά εκτελώντας τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται από τις απαντήσεις του στα έργα 4 και 7.

Συνεπώς χρησιμοποιεί τις παρενθέσεις ώστε να τον βοηθήσουν να διατηρήσει τη δομή της πρότασης σύμφωνα με τις οδηγίες που του δίνονται.

3. Σημασιολογική ερμηνεία

Όταν ζητείται από τον μαθητή να περιγράψει τί αναπαριστούν οι όροι και οι πράξεις μιας παράστασης που αντιστοιχεί σε δοθέν πρόβλημα ο/η M4 καταφέρνει να απαντήσει σωστά για παραστάσεις μικρές, με λίγες πράξεις.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:

α. $(3+2) \cdot 5$

β. $3 + 2 \cdot 5$

Εικόνα 42. Έργο 9 του εργαλείου

Στο έργο 9, πρέπει να κατασκευάσει ένα πρόβλημα για κάθε μία από τις δύο παραστάσεις. Αρχικά δυσκολεύεται που δεν έχει κανένα δεδομένο. Παροτρύνεται από την ερευνήτρια να χρησιμοποιήσει αντικείμενα της καθημερινότητάς του. Για το πρόβλημα με τις παρενθέσεις μετά από σκέψη και κάποιες προσπάθειες καταλήγει στο εξής πρόβλημα:

«M4: Θα έλεγα στο προηγούμενο ότι από τα 3 πορτοκάλια που έχω στο ψυγείο και τα δύο που έχω στον πάγκο, εε, θα έλεγα ότι πάω να αγοράσω τον πενταπλάσιο αριθμό του αθροίσματός τους. Δεν ξέρω άμα βγάζει λογική αυτό...αλλά ναι.»

Για το β' ερώτημα ο/η M4 αρχικά θεωρεί ότι είναι ακριβώς ίδιο με το α' όμως σύντομα αναγνωρίζει ότι το 5 δεν πολλαπλασιάζεται με το άθροισμα όπως στο α' ερώτημα. Το πρόβλημα που δημιουργεί παρόλα αυτά για την παράσταση χωρίς τις παρενθέσεις είναι το ίδιο με διαφορά ότι ο μαθητής παρουσιάζει το ίδιο ακριβώς πρόβλημα παραλείποντας τη λέξη άθροισμα (σελ.129, σειρά 172-180).

Από τα παραπάνω φαίνεται πως ο/η M4 δεν είναι σε θέση να μεταφράσει αριθμητικές αναπαραστάσεις σε λεκτικές. Του είναι δύσκολο να νοηματοδοτήσει τον πολλαπλασιασμό και δεν καταφέρνει να δημιουργήσει σωστό πρόβλημα για την παράσταση χωρίς παρενθέσεις.

Σύνοψη για τον/τη M4

Με βάση τα παραπάνω, ο M4:

- Χαρακτηρίζει τις παρενθέσεις ως σύμβολο το οποίο απλοποιεί την παράσταση, ομαδοποίηση καθώς τις θεωρεί ως όρο.
 - Διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων
- Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις επηρεάζεται από τη θέση των πράξεων:
 - Έχει άγχος να μην μπερδέψει τη σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν οι πράξεις.
 - Εργάζεται από αριστερά προς τα δεξιά, μην κάνοντας χρήση των κανόνων της προτεραιότητας πράξεων.
- Σε παραστάσεις με παρενθέσεις συνήθως εκτελεί τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.
 - Δεν το κάνει πάντα σωστά, επειδή εργάζεται από αριστερά προς τα δεξιά μπορεί να μην τηρήσει την προτεραιότητα.
- Θεωρεί πως οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες.
 - Οι παρενθέσεις του δείχνουν τη δομή της πρότασης, δεν αναγνωρίζει τη δομή όταν δεν υπάρχουν παρενθέσεις.
- Είναι ικανός να περιγράψει τι συμβολίζουν οι παρενθέσεις και οι πράξεις σε απλές αριθμητικές παραστάσεις.
- Δυσκολεύεται να δημιουργήσει λεκτικό πρόβλημα από αριθμητική παράσταση, ειδικά όταν η παράσταση δεν περιέχει παρενθέσεις.

M5

1. Γνώση και αντίληψη του συμβόλου

Για τον/τη M5, οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται για ομαδοποίηση. Ισχυρίζεται πως τη βοηθάει όταν έχει πολλές πράξεις μαζί να αποφασίσει ποιες πράξεις θα υπολογίσει πρώτα.

Είναι η μόνη μαθήτρια που, όταν της ζητείται να περιγράψει τι είναι οι παρενθέσεις σε ένα παιδί Δημοτικού, περιγράφει αρχικά τον συμβολισμό και έπειτα περιγράφει τι σημαίνουν. Οι υπόλοιποι μαθητές κατά την περιγραφή τους σε μαθητή Δημοτικού αναφέρονται μόνο στη λειτουργία του συμβόλου. Στο παρακάτω απόσπασμα παρουσιάζεται η πολύ ολοκληρωμένη

απάντησή της στην ερώτηση που της ζητείται να περιγράψει τις παρενθέσεις σε μαθητή Δημοτικού:

«M5: Εεε, ότι οι παρενθέσεις είναι στην ουσία σαν δύο καμπύλες που ανοίγουν και κλείνουνε και μέσα σ'αυτές μπορούμε να βάζουμε πολλές πράξεις για να τις κάνουμε όλες μαζί.»

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, η μαθήτρια στην ερώτηση που αφορά στον συμβολισμό των παρενθέσεων χαρακτηρίζει παρενθέσεις τις επιλογές «α. (» , «β.)» και «γ. ()». Σύμφωνα με την ίδια η επιλογή «δ.(3)» δεν συμβολίζει παρενθέσεις αλλά συμβολίζει πράξη. Σε ερώτηση της ερευνήτριας αν έβλεπε το σύμβολο «(» κάπου αν θα το διάβαζε ως παρενθέσεις, η μαθήτρια απαντάει καταφατικά. Παρόλα αυτά, από όλες τις απαντήσεις της μαθήτριας είναι ξεκάθαρο ότι γνωρίζει πως πρόκειται για ζεύγος συμβόλων καθώς διαγράφει και εμφανίζει παρενθέσεις, αποκλειστικά, σε ζεύγη (έργο 4, σελ.135 & έργο 11, σελ.140).

2. Συντακτικός χειρισμός

Προτεραιότητα πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Ο/Η M5 μαθήτρια γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις. Παρόλα αυτά, στις παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις, όπως αναφέρει σε πολλά σημεία, φοβάται μήπως ξεχαστεί και δεν ακολουθήσει την προτεραιότητα. Συγκεκριμένα, σε ένα σημείο της συνέντευξης (έργο 3, σελ.133) για την ύπαρξη των παρενθέσεων αναφέρει πως:

«Προτιμάω ναί. Εεε, νομίζω βοηθάει πιο πολύ και δεν χρειάζεται να σκέφτεσαι κάθε φορά την προτεραιότητα.»

Το άγχος αυτό της μαθήτριας για τις παραστάσεις χωρίς παρένθεση γίνεται ορατό και στο έργο 4. Στο έργο αυτό, στα ερωτήματα α, β, γ οι παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες λόγω της προτεραιότητας των πράξεων. Στην εικόνα παρακάτω είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι, η μαθήτρια, κρατάει όλες τις μη αναγκαίες παρενθέσεις.

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\alpha. 7 + (3 : 2)$$

$$\beta. 7 - (3 \cdot 3)$$

$$\gamma. (7 \cdot 3) - 3$$

$$\delta. (7+3) \cdot 2$$

Εικόνα 43. Απάντηση του/της M5 στο έργο 4

Στην απάντησή του/της για το β' ερώτημα φαίνεται πως χωρίς τις παρενθέσεις είναι αρκετά πιθανό να εργαστεί από αριστερά προς τα δεξιά. Συγκεκριμένα, αναφέρει πως:

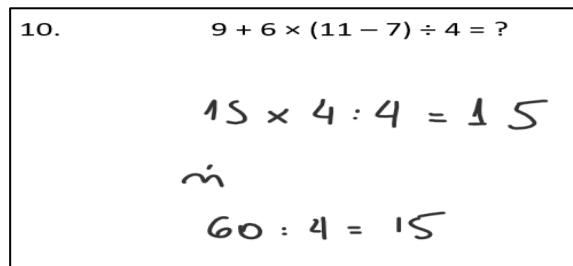
«στο β. Μισό να το σκεφτώ...Και πάλι θα τις κρατήσω γιατί είναι πολλαπλασιασμός με αφαίρεση. Άμα δεν ήτανε (οι παρενθέσεις) θα είναι 7-3 4 επί 3 12 ενώ τώρα θα γίνει 7 μείον 9.»

Ο/Η Μ5 γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις (έργο 5, σελ.136, έργο 7, σελ.137 & έργο 8, σελ.138) αλλά προτιμάει να υπάρχουν επειδή «έχοντας τις παρενθέσεις έχουμε 100% πιθανότητα να πετύχουμε το σωστό.»

Προτεραιότητα σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Από τις απαντήσεις του/της Μ5 στα έργα 6 και 8 (σελ.136 & 138, αντίστοιχα) φαίνεται καθαρά ότι γνωρίζει ότι σε παραστάσεις με παρενθέσεις προηγείται η πράξη μέσα στην παρένθεση και πως όταν υπάρχει πλην έξω από την παρένθεση επηρεάζεται το εσωτερικό της.

Παρόλα αυτά, παρουσιάζεται και σημείο στο οποίο κάνει λάθος και δεν ακολουθεί την προτεραιότητα των πράξεων.



10. $9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$

$15 \times 4 : 4 = 15$

ή

$60 : 4 = 15$

Εικόνα 44. Απάντηση του/της Μ5 στο έργο 10

Ο/Η Μ5 για το έργο 10 εξηγεί πως:

«Ε βασικά στην αρχή έκανα την πρόσθεση γιατί δεν θα επηρέαζε το αποτέλεσμα, οπότε το έκανα για να φεύγει γρήγορα αυτό και μετά έκανα την πράξη που είχα μέσα στην παρένθεση πριν κάνω οτιδήποτε άλλο, πριν κάνω τη διαίρεση ή κάτι γιατί πρώτα κάνουμε αυτό που έχουμε στην παρένθεση και μετά έκανα την διαίρεση.»

Από την απάντησή του/της φαίνεται ότι η μαθήτρια γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων σε παραστάσεις με παρενθέσεις αλλά παρόλα αυτά η απάντησή της είναι λάθος καθώς επιλέγει να εκτελέσει πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά θεωρώντας πως δεν επηρεάζεται η προτεραιότητα.

Συνεπώς, υπάρχουν στιγμές που δεν ακολουθεί την προτεραιότητα των πράξεων.

Δομή των παραστάσεων

Ο/Η Μ5 σωστά προσθέτει τις απαραίτητες παρενθέσεις και αφαιρεί τις περιττές σε έργα που του/της ζητείται όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η απάντηση της μαθήτριας στο έργο 11.

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	
α. $-(7 - (3-3))$	β. $\sqrt{(7) - (3 \cdot 2)}$
γ. $7 - \sqrt{(3:2)}$	δ. $\sqrt{7} : (3+2)$

Εικόνα 45. Απάντηση του/της Μ5 στο έργο 11

Ο/Η Μ5 διέγραψε τις περισσότερες περιττές παρενθέσεις, κρατώντας στα ερωτήματα β' και γ' αυτές που τονίζουν την προτεραιότητα των πράξεων.

Είναι σημαντικό να σχολιαστεί ότι ο/η Μ5 είναι ο/η μόνος/η που δεν διέγραψε καμία από τις παρενθέσεις στο α' ερώτημα, επειδή αναγνώρισε πως είναι αναγκαίες λόγω του πλην έξω από την παρένθεση.

Ένα λάθος του/της Μ5 εντοπίζεται κατά τη μετατροπή λεκτικού προβλήματος σε αριθμητική παράσταση, όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):	
α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4.	$2 + 5 + 4$
β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3.	$(4 : 2) + 3$
γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4.	$(2 + 5) \cdot 4$
δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$.	$6 + 7 - 9 + 1$

Εικόνα 46. Απάντηση του/της Μ5 στο έργο 3

Από την εικόνα γίνεται αντιληπτό ότι η μαθήτρια χρησιμοποίησε παρενθέσεις όταν η παράσταση περιλάμβανε μια πράξη πρόσθεσης και μια πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης. Όταν η παράσταση περιλαμβάνει μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεν χρησιμοποιεί παρενθέσεις. Για το δ' ερώτημα, σωστές απαντήσεις θα ήταν οι απαντήσεις « $6+7-(9+1)$ » και « $(6+7)-(9+1)$ » καθώς από το άθροισμα $6+7$ αφαιρείται το άθροισμα $9+1$. Η μαθήτρια απαντάει το εξής:

«και χωρίς παρένθεση μπορούμε να το γράψουμε αυτό, νομίζω. 6 συν 7 μείον 9 συν 1. Γιατί, εε, η πρόσθεση με την αφαίρεση, όχι είναι παρόμοιες πράξεις, είναι αντίθετες πράξεις. Οπότε

δεν είναι ότι θα αλλάξει το αποτέλεσμα είτε τα αφαιρέσουμε πρώτα είτε τα προσθέσουμε πρώτα.» και γράφει «6+7-9+1»

Συνεπώς, θεωρεί πως εφόσον έχουν ίδια προτεραιότητα οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσει παρενθέσεις. Πιθανώς το λάθος γίνεται κατά την ανάγνωση του λεκτικού προβλήματος όπου δεν δίνεται σημασία στη δομή του.

Από τα παραπάνω φαίνεται πως η μαθήτρια κατανοεί ότι οι παρενθέσεις επηρεάζουν τη δομή της παράστασης και άρα το αποτέλεσμά της αλλά κάποιες φορές έχει δυσκολία στην ανάγνωση του λεκτικού προβλήματος και μετάφρασή του σε αριθμητικό πρόβλημα.

3. Σημασιολογική ερμηνεία

Ο/Η Μ5 καταφέρνει να νοηματοδοτήσει τις αριθμητικές παραστάσεις των έργων 6 και 12 (σελ.136 & σελ.141, αντίστοιχα) ερμηνεύοντας κατευθείαν το περιεχόμενο των παρενθέσεων σε σχέση με το λεκτικό πρόβλημα. Είναι ο/η μόνος/η μαθητής/τρια που καταφέρνει να ερμηνεύσει σημασιολογικά και τις δύο σύνθετες παραστάσεις του έργου 12. Τέλος, καταφέρνει να δημιουργήσει λεκτικά προβλήματα από αριθμητικές παραστάσεις (έργο 9, σελ.139) και συγκεκριμένα καταφέρνει να διαφοροποιήσει σημασιολογικά την παρένθεση στο έργο 9 δηλώνοντάς την ως πακέτο με περιεχόμενο.

Σύνοψη για τον/τη Μ5

Για την Μ5 συγκεντρώνονται τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ο/Η μόνος/η που για να περιγράψει τις παρενθέσεις αναφέρεται και στον συμβολισμό και στη λειτουργία του συμβόλου.
 - Ομαδοποίηση
 - Διπλό σύμβολο που μπορεί να έχει περιεχόμενο
- Προτιμάει να υπάρχουν πάντα παρενθέσεις για να τονίζουν την προτεραιότητα των πράξεων, νιώθει ανασφάλεια χωρίς αυτές.
- Σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις γνωρίζει την προτεραιότητα των πράξεων αλλά υπάρχουν περιπτώσεις που εκτελεί πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά.
- Σε παραστάσεις με παρενθέσεις γνωρίζει ότι προτεραιότητα έχουν οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.
- Γνωρίζει ότι οι παρενθέσεις διαμορφώνουν τη δομή των παραστάσεων.
- Της είναι εύκολο να «μεταφράσει» μια αριθμητική παράσταση σε λεκτική και κατανοεί σημασιολογικά τις παρενθέσεις. Νοηματοδοτεί εύκολα το περιεχόμενο των παρενθέσεων.
- Καταφέρνει να διαφοροποιήσει σημασιολογικά παρένθεση.

3.2 Αποτελέσματα ανά κατηγορία ερωτήσεων

Στο 2^ο μέρος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται οι καταστάσεις που προκάλεσαν τις περισσότερες μερικώς ορθές απαντήσεις.

Τα αποτελέσματα στους παρακάτω πίνακες κωδικοποιούνται ως εξής:

A: ορθή απάντηση: κρατάει τις αναγκαίες, διαγράφει τις περιττές, χρησιμοποιεί σωστή διαδικασία, ακολουθεί την προτεραιότητα των πράξεων

B: μερικώς ορθή: κρατάει μη αναγκαίες παρενθέσεις

Λ: λανθασμένη απάντηση: δεν κρατάει αναγκαίες παρενθέσεις, δεν ακολουθεί την προτεραιότητα των πράξεων.

3.2.1 Αντίληψη της έννοιας των παρενθέσεων

Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις.

Πίνακας 2. Απαντήσεις μαθητών αναφορικά με την αντίληψη των παρενθέσεων

Έργο	Επιλογή	Απαντήσεις		
		A	B	Λ
1) Τί είναι οι παρενθέσεις; Αν ήθελες να εξηγήσεις σε ένα παιδί Δημοτικού τι είναι οι παρενθέσεις τι θα του έλεγες;	Εξηγεί τη λειτουργία	5	-	-
	Εξηγεί το σύμβολο	1	-	-
	Δεν μπορεί να εξηγήσει	-	-	1
	Βοηθητικό εργαλείο	3	-	-
	Προτεραιότητα	3	-	-
2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;	Ομαδοποίηση	1	-	-
	«()», «(3)»	2	-	-
	«()»	2	-	-
	«(», «)», «()»	-	-	1

Από τον παραπάνω πίνακα είναι εύκολο να εντοπιστεί και να σχολιαστεί ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι συμμετέχοντες τις παρενθέσεις ως προς τον συμβολισμό και τη λειτουργία τους.

Σύμφωνα με τον πίνακα, ένας μαθητής δεν είναι σε θέση να εξηγήσει πώς αντιλαμβάνεται τις παρενθέσεις. Οι υπόλοιποι τέσσερις μαθητές αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις ως διαχωριστικό που χρησιμοποιείται για ευκολία χωρίς να εξηγούν συγκεκριμένα τη λειτουργία τους (π.χ. εργαλείο για ομαδοποίηση, προτεραιότητα πράξεων). Ένας/μία μόνο μαθητής/τρια κατά τη διαδικασία περιγραφής της έννοιας σε μικρότερο μαθητή αναφέρεται και στη λειτουργία και στον συμβολισμό των παρενθέσεων.

3.2.2 Χειρισμός παραστάσεων χωρίς παρενθέσεις

Στην ενότητα αυτή συγκεντρώθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών σε έργα που επιτρέπουν τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο χειρίζονται τις παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις.

Πίνακας 3. Απαντήσεις μαθητών σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις

Έργο	Ερώτημα	Απαντήσεις		
		A	B	Λ
3) Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):	α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4	2	3	-
	β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3	1	4	-
	γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4	4	-	1
	δ. Έχεις $6+7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9+1$	2	-	3
7) Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.	α. $15-5+5=5$	5	-	-
	β. $20-5 \cdot 3=5$	4	1	-
	γ. $3+2 \cdot 3=5 \cdot 3$	4	-	1
	δ. $12:4=12:6-2$	5	-	-
5) Επίλυση αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθέσεις.	Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2+4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;	2	-	3
8) Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:	α. $40 \cdot (51+72)=40 \cdot 51+72$	5	-	-
	β. $120:3+64=(120:3)+64$	5	-	-
	γ. $18+(9-4)=18+9-4$	3	-	2
	δ. $27-5+3=27-(5+3)$	4	-	1

Συνολικά από τον Πίνακα 3 παρατηρείται οι περισσότεροι μαθητές απαντούν σωστά όταν πρέπει να προσθέσουν αναγκαίες παρενθέσεις (έργο 7) και όταν πρέπει να αναγνωρίσουν αληθείς ισότητες (έργο 8). Μερικώς ορθές απαντήσεις (στις οποίες δηλαδή γίνεται χρήση περιττών παρενθέσεων) παρατηρούνται κατά τη μετατροπή λεκτικής πρότασης σε αριθμητική παράσταση και περισσότερο όταν η παράσταση περιλαμβάνει τις πράξεις της διαίρεσης και της πρόσθεσης με τη διαίρεση να προηγείται. Όπως αναφέρθηκε αναλυτικά και νωρίτερα οι

μαθητές έχουν άγχος ότι θα εκτελέσουν με λάθος προτεραιότητα τις πράξεις όταν δεν υπάρχουν παρενθέσεις. Η ανασφάλεια αυτή επιβεβαιώνεται από λάθη των μαθητών και διαφορετικές τους απαντήσεις σε άλλα είδη ερωτήσεων.

Μια κατάσταση που φαίνεται ότι κάποιοι μαθητές εργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά είναι όταν δεν προσθέτουν αναγκαίες παρενθέσεις στις περιπτώσεις που η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης. Για παράδειγμα, στα ερωτήματα Ε3γ και Ε7γ οι αριθμητικές παραστάσεις αποτελούν γινόμενο αθροίσματος με αριθμό και οι παρενθέσεις είναι αναγκαίες καθώς χωρίς αυτές προτεραιότητα θα είχε ο πολλαπλασιασμός. Παρόλα αυτά υπήρξε μαθητής που δεν χρησιμοποίησε παρενθέσεις και στις δύο αυτές περιπτώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις η πράξη του πολλαπλασιασμού βρίσκεται στο τέλος της πρότασης. Αντίστοιχη δυσκολία προέκυψε και στην παράσταση του Ε7β, στην οποία και πάλι ο πολλαπλασιασμός βρίσκεται στο τέλος της πρότασης. Για να είναι η ισότητα αληθής, πρέπει πρώτα να εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός. Παρόλο που ο πολλαπλασιασμός έχει προτεραιότητα, μαθητής χρειάστηκε να χρησιμοποιήσει παρενθέσεις έμφασης ώστε να μην εκτελεστούν οι πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά.

Ακόμη μια κατάσταση στην οποία παρουσιάζονται δυσκολίες από τους μαθητές είναι όταν η παράσταση περιέχει μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Φαίνεται ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μια σύγχυση ως προς το ποια πράξη θα γίνει πρώτη. Για παράδειγμα, στα ερωτήματα Ε8γ και Ε8δ οι ισότητες περιέχουν μόνο τις δύο αυτές πράξεις. Η ισότητα του Ε8γ είναι αληθής ενώ του Ε8δ είναι ψευδής. Παρόλα αυτά, κάποιοι μαθητές τις χαρακτήρισαν ως αναληθή και αληθή αντίστοιχα. Ο ένας μαθητής που χαρακτήρισε την Ε8γ ως αναληθή πιθανώς να εργάστηκε με τη μέθοδο από αριστερά προς τα δεξιά και για τον ίδιο λόγο χαρακτήρισε αναληθή και την Ε8δ. Ο δεύτερος μαθητής απάντησε λανθασμένα και στα δύο ερωτήματα. Οι απάντησή του ίσως να δείχνει ότι θεωρεί ότι η πράξη της πρόσθεσης προηγείται από την πράξη της αφαίρεσης.

Τέλος, φαίνεται ότι οι μαθητές σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις είναι πιθανό να μην ακολουθήσουν την προτεραιότητα των πράξεων όπως για παράδειγμα στο έργο 5. Στο έργο 5, ζητήθηκε από τους μαθητές να σχολιάσουν την απάντηση ενός μαθητή για μια αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις, για την οποία δίνονται δύο δυνατές απαντήσεις. Ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν τη σωστή απάντηση και να εξηγήσουν πώς βρέθηκε η δεύτερη και αν αυτή είναι σωστή. Δύο από τους πέντε μαθητές απάντησαν σωστά πως το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης « $2+4*3$ » είναι 14 ενώ οι υπόλοιποι τρεις έδωσαν ως αποτέλεσμα το 18 εκτελώντας με λάθος προτεραιότητα τις πράξεις.

3.2.3 Χειρισμός παραστάσεων με παρενθέσεις

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών σε έργα που φανερώνουν τη διαχείριση αριθμητικών παραστάσεων με παρενθέσεις.

Πίνακας 4. Απαντήσεις των μαθητών σε παραστάσεις με παρενθέσεις

Έργο	Ερώτημα	Απαντήσεις		
		Α	Β	Λ
6) Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.	α. $50-10-20$	4	-	-
	β. $50-(10+20)$	4	-	-
	γ. $50-(10-20)$	-	-	-
	δ. $50-10+20$	-	-	-
8) Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:	α. $40 \cdot (51+72)=40 \cdot 51+72$	5	-	-
	β. $120:3+64=(120:3)+64$	5	-	-
	γ. $18+(9-4)=18+9-4$	3	-	2
	δ. $27-5+3=27-(5+3)$	4	-	1
10) Αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις	$9+6 \cdot (11-7) : 4$	2	-	2-αριστερά προς τα δεξιά 1-ξεκίνησε από την παρένθεση

Από τον παραπάνω πίνακα, φαίνεται πως υπάρχει μία σύγχυση σε όλους τους μαθητές όσον αφορά στην χρήση των παρενθέσεων καθώς κανένας από τους μαθητές δεν απαντά σωστά σε όλα τα ερωτήματα. Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε δύο ομάδες, δύο από τους μαθητές απαντούν σε όλα τα ερωτήματα σωστά εκτός από τα Ε8γ και Ε8δ ενώ οι υπόλοιποι 3 απαντούν σωστά σε όλα τα ερωτήματα εκτός από την επίλυση αριθμητικής παράστασης.

Παρατηρείται λοιπόν ότι ενώ και οι πέντε μαθητές απαντούν σωστά στα περισσότερα ερωτήματα, εντοπίζεται και ερώτημα στο οποίο απαντούν λάθος.

Όσον αφορά στην αναγνώριση της αληθούς ισότητας, σύμφωνα με τον πίνακα, όλοι οι μαθητές απαντούν σωστά στα ερωτήματα που περιλαμβάνουν την πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης (Ε8α και Ε8β). Αντίθετα, στα ερωτήματα Ε4γ και Ε4δ που περιλαμβάνουν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης υπάρχει σύγχυση στους μαθητές και εντοπίζονται λάθη. Δύο από τους πέντε μαθητές απαντούν λάθος πως η παράσταση «γ. $18+(9-4)=18+9-4$ » είναι αναληθής. Την ίδια στιγμή, ένας από τους δύο θεωρεί επίσης λανθασμένα πως το ερώτημα «δ. $27-5+3=27-(5+3)$ » είναι αληθές.

Όσον αφορά στην αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις, μόνο δύο από τους πέντε μαθητές ακολούθησαν σωστή διαδικασία από την αρχή μέχρι το τέλος. Ένας μαθητής ενώ ξεκίνησε με

τις πράξεις μέσα στην παρένθεση συνέχισε τους υπολογισμούς από αριστερά προς τα δεξιά. Οι υπόλοιποι δύο ξεκίνησαν, λανθασμένα, τους υπολογισμούς από αριστερά προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να προηγηθεί η πράξη της πρόσθεσης από την πράξη μέσα στην παρένθεση.

3.2.4 Συντακτικός χειρισμός-ρόλος των παρενθέσεων στον συντακτικό χειρισμό

Στον παρακάτω πίνακα συλλέχθηκαν και ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις 4, 7 και 11 του ερωτηματολογίου με σκοπό να παρατηρηθεί ο συντακτικός χειρισμός των παρενθέσεων από τους μαθητές. Οι ερωτήσεις αυτές αφορούν στη διαγραφή μη αναγκαίων παρενθέσεων (E4 & E11) και την αναγνώριση αληθών ισοτήτων και προσθήκη παρενθέσεων για τη μετατροπή μη αληθών ισοτήτων σε αληθείς (E7). Παρακάτω γίνεται μια λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις.

Πίνακας 5. Απαντήσεις των μαθητών σε έργα που αφορούν στον συντακτικό χειρισμό

Έργο	Ερώτημα	Απαντήσεις		
		A	B	Λ
4) Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $7+(3:2)$	3	2	-
	β. $7-(3\cdot 3)$	3	2	-
	γ. $(7\cdot 3)-3$	4	1	-
	δ. $(7+3)\cdot 2$	4	-	1
11) Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $-(7-(3-3))$	1	-	4
	β. $((7)-(3\cdot 2))$	3	2	-
	γ. $7-((3:2))$	2	3	-
	δ. $(7:(3+2))$	4	-	1
7) Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.	α. $15-5+5=5$	5	-	-
	β. $20-5\cdot 3=5$	4	1	-
	γ. $3+2\cdot 3=5\cdot 3$	4	-	1
	δ. $12:4=12:6-2$	5	-	-

Αρχικά έχει αξία να σχολιαστεί πως, παρατηρώντας συνολικά τον πίνακα, οι μαθητές που απάντησαν ολόσωστα στο έργο 7, όπου ζητείται από τους μαθητές η προσθήκη αναγκαίων

παρενθέσεων, ήταν σημαντικά περισσότεροι από εκείνους που απάντησαν ολόσωστα στα έργα E4 και E11 στα οποία οι μαθητές καλούνται να διαγράψουν τις περιττές παρενθέσεις.

Ερωτήματα που δεν απαιτούν παρενθέσεις

Στα ερωτήματα E4α, E4β, E4γ, E11β και E7β που δεν απαιτούνται παρενθέσεις οι περισσότεροι μαθητές, σωστά, αφαιρούν τις περιττές παρενθέσεις. Παρόλα αυτά, και στα πέντε αυτά ερωτήματα υπάρχουν μαθητές που προτιμούν να χρησιμοποιούν περιττές παρενθέσεις. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι στην παράσταση E11δ η οποία είναι όμοια της E4β, περισσότεροι μαθητές κρατάνε μη αναγκαίες παρενθέσεις. Η επιλογή αυτή των μαθητών πιθανώς να επηρεάζεται από το γεγονός ότι στην παράσταση E11δ υπάρχουν δύο ζεύγη παρενθέσεων.

Ερωτήματα που απαιτούν παρενθέσεις

Το ερώτημα «4δ. $(7+3) \cdot 2$ » αποτελείται από τον πολλαπλασιασμό μιας παρένθεσης με τον αριθμό 2. Η παρένθεση στην παράσταση είναι απαραίτητη καθώς χωρίς αυτήν προτεραιότητα έχει ο πολλαπλασιασμός. Οι τέσσερις από τους πέντε μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση και διατήρησαν τις παρενθέσεις. Παρόλα αυτά υπήρξε και μαθητής/μαθήτρια που διέγραψε τις παρενθέσεις πιθανώς εργαζόμενος/η από αριστερά προς τα δεξιά. Επομένως, για το άτομο που απάντησε λάθος σε αυτό το ερώτημα παίζει ρόλο η θέση της πράξης που έχει προτεραιότητα στην παράσταση.

Επίσης, στο ερώτημα E11δ ένας μαθητής θεώρησε πως δεν είναι αναγκαίες οι παρενθέσεις. Από τους μαθητές, 3 ήταν οι σταθεροί που απάντησαν σωστά στα ερωτήματα E4δ και E11δ ενώ οι άλλοι δύο δεν κράτησαν αναγκαίες παρενθέσεις σε ένα δύο από τα ερωτήματα.

Ένα ερώτημα που το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών απάντησε λάθος είναι το «E11α. $-(7-(3-3))$ », στο οποίο είναι απαραίτητα και τα δύο ζεύγη παρενθέσεων. Οι τέσσερις από τους πέντε μαθητές διέγραψαν τις εξωτερικές παρενθέσεις και κράτησαν τις εσωτερικές. Στο ίδιο ερώτημα, ένας/μια μόνο από τους πέντε μαθητές διατήρησε και τα δύο ζεύγη των αναγκαίων παρενθέσεων επειδή παρατήρησε τα πρόσημα και αναγνώρισε πως η έλλειψη των παρενθέσεων θα άλλαζε το αποτέλεσμα. Η παράσταση περιλαμβάνει μόνο τις πράξεις τις αφαίρεσης και φαίνεται πως οι περισσότεροι μαθητές θεώρησαν ότι εφόσον έχουν αφαίρεση δεν χρειάζονται οι παρενθέσεις.

Στην ερώτηση 7, οι περισσότεροι μαθητές χαρακτήρισαν σωστά όλες τις ισότητες ως αληθείς ή μη αληθείς. Δυσκολία προέκυψε για έναν μαθητή στα ερωτήματα E7β και E7γ. Στο ερώτημα «E7β. $20-5 \cdot 3=5$ » ο μαθητής πρόσθεσε μη αναγκαίες παρενθέσεις στο γινόμενο ενώ στο ερώτημα «E7γ. $3+2 \cdot 3=5 \cdot 3$ » δεν πρόσθεσε τις αναγκαίες παρενθέσεις στο άθροισμα. Στην

πρώτη περίπτωση η πράξη της που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης ενώ στη δεύτερη βρίσκεται στην αρχή. Φαίνεται λοιπόν πως ο μαθητής αποφασίζει αν είναι απαραίτητες οι παρενθέσεις ή όχι εργαζόμενος από αριστερά προς τα δεξιά.

3.2.5 Σημασιολογική ερμηνεία

Τα έργα 3, 6, 9 και 12 του εργαλείου βοηθούν ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές ερμηνεύουν σημασιολογικά τις παρενθέσεις αλλά και τις πράξεις. Τα αποτελέσματα αυτών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα και σχολιάζονται σε κατηγορίες. Οι κατηγορίες είναι η μετατροπή από λεκτικό πρόβλημα σε αριθμητική έκφραση, από αριθμητική παράσταση σε λεκτικό πρόβλημα και στη σημασιολογική διαφοροποίηση των παρενθέσεων.

Πίνακας 6. Απαντήσεις των μαθητών σε έργα που αφορούν στη σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων

Έργο	Ερώτημα	Απαντήσεις		
		A	B	Λ
3) Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):	α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4	2	3	-
	β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3	1	4	-
	γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4	4	-	1
	δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$	2	-	3
6) Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.	α. $50 - 10 - 20$	4	-	-
	β. $50 - (10 + 20)$	4	-	-
	γ. $50 - (10 - 20)$	-	-	-
	δ. $50 - 10 + 20$	-	-	-

9) Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:	α. $(3+2) \cdot 5$	4	-	1
	β. $3 + 2 \cdot 5$	4	-	1
12) Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. Ο Κώστας έδωσε τη λύση α' και ο Γιώργος τη λύση β'. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;	α. $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$	1	-	4
	β. $11 - (120 \div 20) = 5$	2	-	3

Από λεκτικό πρόβλημα σε αριθμητική πρόταση

Τα έργα 3 και 6 αφορούν στην μετατροπή λεκτικής έκφρασης σε αριθμητική. Κατά την μετατροπή των λεκτικών προτάσεων σε αριθμητικές, στο έργο 3, όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά στα ερωτήματα που αφορούν σε άθροισμα αθροίσματος με αριθμό και σε άθροισμα ηλικίου με αριθμό (E3α, E3β). Στα δύο αυτά ερωτήματα, οι περισσότεροι μαθητές έγραψαν την αριθμητική παράσταση κάνοντας χρήση μη αναγκαίων παρενθέσεων.

Στο ερώτημα 3γ το οποίο πρόκειται για γινόμενο με αθροίσματος με αριθμό, οι περισσότεροι μαθητές έγραψαν σωστή αριθμητική παράσταση κάνοντας χρήση παρενθέσεων. Λάθος απάντησε ένας/μία από τους πέντε μαθητές, καθώς δεν έκανε χρήση παρενθέσεων. Στην περίπτωση αυτή, η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης. Μεγαλύτερη αδυναμία εμφάνισαν οι μαθητές στην περίπτωση του ερωτήματος E3δ. Πρόκειται για αριθμητική παράσταση που περιέχει μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδώσουν με αριθμητική παράσταση λεκτικό πρόβλημα που περιέχει τις πράξεις αυτές.

Στο έργο 6 όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν τη σωστή ή τις σωστές αριθμητικές παραστάσεις που αντιπροσωπεύουν το πρόβλημα, τρεις από τους πέντε εντόπισαν και τις δύο σωστές επιλογές. Ένας από τους μαθητές χαρακτήρισε ως σωστή μόνο την αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις και ένας άλλος χαρακτήρισε ως σωστή, μόνο την αριθμητική

παράσταση με παρενθέσεις. Όλοι οι μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν τουλάχιστον μια από τις δύο σωστές επιλογές και κανένας τους δεν επέλεξε λάθος αριθμητική παράσταση.

Από αριθμητικό παράσταση σε λεκτικό πρόβλημα

Στη συνέχεια, στο έργο 9, οι μαθητές έπρεπε να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για καθεμία από τις δοθείσες παραστάσεις, όπου η μία περιλάμβανε παρενθέσεις ενώ η άλλη, όχι. Η πλειοψηφία των μαθητών κατάφερε να δημιουργήσει πρόβλημα που αντιπροσωπεύει την παράσταση και για τις δύο επιλογές. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής μπόρεσε να δημιουργήσει πρόβλημα μόνο για την παράσταση χωρίς παρενθέσεις και ένας μόνο για την παράσταση με παρενθέσεις.

Μεγαλύτερη δυσκολία αντιμετώπισαν οι μαθητές στο έργο 12 όπου οι παραστάσεις είναι σύνθετες με περισσότερες πράξεις και μεγαλύτερους αριθμούς.

Μόνο δύο από τους πέντε μαθητές ήταν σε θέση να νοηματοδοτήσουν τουλάχιστον μια από τις δύο σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις ενώ οι υπόλοιποι δεν μπόρεσαν στη διαδικασία να ερμηνεύσουν σημασιολογικά τις παραστάσεις αλλά στάθηκαν περισσότερο σε διαδικαστική σκέψη.

Σημασιολογική διαφοροποίηση των παρενθέσεων

Από τα έργα 6 και 12 φαίνεται πως οι μαθητές δεν είναι ικανοί να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά το εσωτερικό των παρενθέσεων. Όλοι οι μαθητές απάντησαν διαδικαστικά χωρίς να αναλύουν σημασιολογικά τί σημαίνει το εσωτερικό της παρένθεσης. Όταν τους ρωτήθηκε από την ερευνήτρια τι υπάρχει μέσα στην παρένθεση οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν τι συμβολίζει το εσωτερικό των παρενθέσεων αλλά δεν το ερμηνεύουν περαιτέρω. Ένας μόνο συμμετέχοντας ακόμη και όταν ρωτήθηκε δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει το περιεχόμενο των παρενθέσεων και απάντησε ότι μέσα στην παρένθεση υπάρχει πρόσθεση.

Δύο από τους μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον ένα από τα δύο ερωτήματα του έργου 12. Ο ένας από τους δύο κατάφερε να κατανοήσει τί σημαίνει το περιεχόμενο των παρενθέσεων και άρα να εξηγήσει την παράσταση. Ενώ ο/η δεύτερος/-η, ήταν σε θέση να κατανοήσει και για τις δύο παραστάσεις τί αναπαριστά το εσωτερικό των παρενθέσεων.

Δεν είναι ορατό στον παραπάνω πίνακα αλλά στην αναλυτική περιγραφή των αποτελεσμάτων για κάθε μαθητή παρουσιάζεται ότι οι M3 και M5 καταφέρνουν κατά τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά τις παρενθέσεις (M3/σελ.49, M5/σελ.59)

3.3 Σύνοψη αποτελεσμάτων

Στην τελευταία ενότητα του 3^{ου} κεφαλαίου γίνεται μια σύνοψη των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του πίνακα 10 ο οποίος χωρίστηκε σε υποπίνακες ανάλογα με το είδος των ασκήσεων.

Πίνακας 7. Απαντήσεις των μαθητών στην επίλυση αριθμητικών παραστάσεων

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
5. Επίλυση αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθέσεις.	Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2+4\cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;	Λ	A	Λ	Λ	A
10. Επίλυση αριθμητικής παράστασης με παρενθέσεις	$9+6 * (11-7) : 4$	Λ	A	A	Λ	Λ

Σύμφωνα με τον Πίνακα 7, όλοι οι μαθητές εκτός από έναν (M2) έκαναν λάθος είτε στην επίλυση της αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθέσεις είτε σε αυτή με παρένθεσης ή και στις δύο. Στο έργο 10 οι M4 και M5 εργάστηκαν από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να ξεκινήσουν από τις παρενθέσεις ενώ ο/η M1 ξεκίνησε από τις παρενθέσεις και συνέχισε από αριστερά προς τα δεξιά.

Πίνακας 8. Απαντήσεις των μαθητών ανάλογα με την αναγκαιότητα των παρενθέσεων

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):	α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4.	A	B	B	B	A
	β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3.	A	B	B	B	B
	γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4.	Λ	A	A	A	A
	δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9+1$.	Λ	Λ	A	A	Λ
4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $7 + (3:2)$	A	A	A	B	B
	β. $7 - (3\cdot 3)$	A	A	A	B	B
	γ. $(7\cdot 3) - 3$	A	A	A	A	B
	δ. $(7+3) \cdot 2$	Λ	A	A	A	A

Επιπλέον, εντοπίστηκε ότι κατά τη μετατροπή λεκτικής πρότασης σε αριθμητική παράσταση οι μαθητές έκαναν χρήση περιττών παρενθέσεων στις περιπτώσεις που υπήρχε άθροισμα αθροίσματος με αριθμό και άθροισμα πηλίκου με αριθμό, παρόλο που στην τελευταία περίπτωση το πηλίκο βρισκόταν στην αρχή της πρότασης. Λάθη παρατηρήθηκαν στην περίπτωση που η πρόταση αποτελούσε γινόμενο αθροίσματος με αριθμό και στην διαφορά δύο αθροισμάτων.

Στην περίπτωση γινομένου αθροίσματος με αριθμό (E4δ) όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης απάντησε λάθος ο/η M1, ο/η οποίος/α όπως φαίνεται από τις απαντήσεις του/της στα έργα 3 και 4, προτιμάει να μην χρησιμοποιεί παρενθέσεις. Από την πλευρά του ο/η M4 χρειάζεται πάντα παρενθέσεις αλλά μπορεί να αναγνωρίσει τις περιττές και τις απαραίτητες παρενθέσεις στις αριθμητικές παραστάσεις όταν η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης E4γ και E4δ. Ο/Η M5 χρειάζεται παντού παρενθέσεις όταν η παράσταση περιλαμβάνει μια πράξη της πρόσθεσης και μια του πολλαπλασιασμού ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις παραστάσεις που περιέχουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι υπόλοιποι δύο χρησιμοποίησαν περιττές παρενθέσεις στη μετατροπή λεκτικής πρότασης σε αριθμητική παράσταση αλλά διέγραψαν σωστά τις περιττές παρενθέσεις στο έργο 4.

Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι στην παράσταση E3β που πρόκειται για μετατροπή λεκτικής πρότασης σε αριθμητική παράσταση και η αριθμητική παράσταση πρόκειται για άθροισμα πηλίκου με αριθμό 4 από τους 5 μαθητές χρησιμοποίησαν παρενθέσεις. Αντίθετα, στο ερώτημα E4γ που πρόκειται για διαφορά γινομένου με αριθμό και είναι ίδιου τύπου με το 3β 1 μόνο από τους 5 μαθητές χρησιμοποίησε περιττές παρενθέσεις. Πιθανώς οι μαθητές, στο έργο 3, να θέλησαν να δηλώσουν τα βήματα της διαδικασίας προσθέτοντας παρενθέσεις.

Πίνακας 9. Απαντήσεις των μαθητών στην αναγνώριση αληθούς ισότητας

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.	α. $15-5+5=5$	A	A	A	A	A
	β. $20-5\cdot 3=5$	A	A	A	B	A
	γ. $3+2\cdot 3=5\cdot 3$	A	A	A	Λ	A
	δ. $12:4=12:6-2$	A	A	A	A	A
8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:	α. $40\cdot(51+72)=40\cdot 51+72$	A	A	A	A	A
	β. $120:3+64=(120:3)+64$	A	A	A	A	A
	γ. $18+(9-4)=18+9-4$	A	Λ	Λ	A	A
	δ. $27-5+3=27-(5+3)$	A	Λ	A	A	A

Στην προσθήκη αναγκαίων παρενθέσεων, στο έργο 7, οι μαθητές δεν εμφανίζουν ιδιαίτερη δυσκολία εκτός από έναν/μια. Ο/Η M4 στην περίπτωση του ερωτήματος E7β (διαφορά γινόμενου από αριθμό), στο οποίο η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της παράστασης του 1^{ου} μέλους, έκανε χρήση περιττών παρενθέσεων και στην περίπτωση όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης (E7γ – άθροισμα αριθμού με γινόμενο) απάντησε λανθασμένα πως η ισότητα είναι αληθής.

Στο έργο 8, φαίνεται ότι δυσκολίες εμφανίστηκαν για τους μαθητές στις περιπτώσεις E8γ και E8δ όπου οι ισότητες περιλαμβάνουν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αντίθετα, στις περιπτώσεις E8α και E8β που περιλαμβάνουν την πράξη της πρόσθεσης και έναν πολλαπλασιασμό ή μια διαίρεση όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά.

Πίνακας 10. Διαγραφή περιττών παρενθέσεων

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $7 + (3:2)$	A	A	A	B	B
	β. $7 - (3 \cdot 3)$	A	A	A	B	B
	γ. $(7 \cdot 3) \cdot 3$	A	A	A	A	B
	δ. $(7+3) \cdot 2$	Λ	A	A	A	A
11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $-(7-(3-3))$	Λ	Λ	Λ	Λ	A
	β. $((7)-(3 \cdot 2))$	A	A	A	B	B
	γ. $7-((3:2))$	B	A	A	B	B
	δ. $(7:(3+2))$	A	A	Λ	A	A

Ο παραπάνω πίνακας έχει αρκετό ενδιαφέρον καθώς στο έργο 4 παρατηρείται μόνο μια λάθος απάντηση και κάποιες απαντήσεις σωστές με χρήση μη αναγκαίων παρενθέσεων ενώ στο έργο 11 οι λανθασμένες απαντήσεις είναι φανερά περισσότερες. Η διαφορά των δύο έργων μεταξύ τους είναι ότι στο έργο 4 υπάρχει μόνο ένα ζεύγος παρενθέσεων ενώ στο έργο 11 υπάρχουν δύο ή τρία. Το ερώτημα E4δ, στο οποίο ο/η M1 απάντησε λάθος ότι δεν χρειάζονται παρενθέσεις, αποτελεί γινόμενο αθροίσματος με αριθμό και η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρόσθεσης. Επιπλέον, τα περισσότερα ερωτήματα που χρησιμοποιήθηκαν περιττές παρενθέσεις ήταν τα E4α και E4β στα οποία η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης.

Στο έργο 11, τα περισσότερα λάθη έγιναν στο ερώτημα E11α το οποίο πρόκειται για διαφορά αριθμού και διαφοράς με πλην έξω από την παρένθεση. Στο ερώτημα αυτό και τα δύο ζεύγη παρενθέσεων είναι απαραίτητα. Οι 4 μαθητές που απάντησαν λάθος διέγραψαν την εξωτερική

παρένθεση και κράτησαν την εσωτερική ενώ μόνο ο/η M5 σωστά διατήρησε και τα δύο ζεύγη παρενθέσεων.

Πίνακας 11. Απαντήσεις των μαθητών στη λεκτική περιγραφή αριθμητικής παράστασης

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:	α. $(3+2) \cdot 5$	Λ	A	A	A	A
	β. $3 + 2 \cdot 5$	A	A	A	Λ	A
12. Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. Ο Κώστας έδωσε τη λύση α' και ο Γιώργος τη λύση β'. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;	α. $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$	Λ	Λ	Λ	Λ	A
	β. $11 - (120 \div 20) = 5$	Λ	Λ	Λ	A	A

Στον πίνακα 11 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα που αφορούν στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση και στη νοηματοδότηση αριθμητικής παράστασης για δοθέν πρόβλημα. Όπως παρουσιάζεται στον πίνακα οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στη νοηματοδότηση σύνθετης αριθμητικής παράστασης (έργο 12) από τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος για απλή αριθμητική παράσταση. Στην απλή αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις και χωρίς ίδιος αριθμός μαθητών απάντησε σωστά.

4^ο Κεφάλαιο – Συζήτηση και συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια αναγνώρισης των συμπεριφορών των μαθητών Γυμνασίου κατά τον χειρισμό αριθμητικών παραστάσεων σε σχέση με τις παρενθέσεις. Για την έρευνα πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις σε 5 μαθητές γυμνασίου της Βορείου Ελλάδος.

Συγκεκριμένα, η έρευνα επιχείρησε να εντοπίσει χαρακτηριστικά για τα εξής ερωτήματα:

1. Πώς χειρίζονται οι μαθητές τις αριθμητικές παραστάσεις ως προς την προτεραιότητα των πράξεων σε σχέση με το αν υπάρχουν ή όχι παρενθέσεις;
2. Παίζουν ρόλο οι παρενθέσεις για τους μαθητές; Ποιος είναι ο ρόλος τους στο συντακτικό χειρισμό;
3. Ποιες είναι οι δυνατότητες των μαθητών για σημασιολογική διαφοροποίηση των μαθηματικών αντικειμένων εντός των παρενθέσεων;
4. Ποια είναι η δυνατότητα δόμησης/νοηματοδότησης παράστασης σε σχέση με λεκτικά προβλήματα;

Πριν την παρουσίαση των συμπερασμάτων για τα ερευνητικά ερωτήματα είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι ως προς την αντίληψη των μαθητών για τις παρενθέσεις φαίνεται, από τις απαντήσεις των μαθητών, πως κατανοούν ότι πρόκειται για ζεύγος συμβόλων για το οποίο κάθε σύμβολο που ανοίγει έχει και μοναδικό που κλείνει καθώς οι μαθητές επέλεξαν τους συμβολισμούς «()» ή/και «(3)» ως παρενθέσεις (Παράρτημα 2). Ως προς τη λειτουργία των παρενθέσεων οι μαθητές τις συνέδεσαν περισσότερο με την προτεραιότητα των πράξεων και λιγότερο με την ομαδοποίηση (Πίνακας 2). Όπως παρουσιάστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, οι παρενθέσεις αναφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια σε ενότητες που αφορούν στην προτεραιότητα των πράξεων και ίσως αυτός να είναι ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές συνδέουν τις παρενθέσεις κυρίως με την προτεραιότητα των πράξεων.

Όσον αφορά το **πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία τις παραστάσεις με παρενθέσεις από αυτές χωρίς παρενθέσεις. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν σε παραστάσεις με παρενθέσεις από αυτά χωρίς καθώς γνωρίζουν ότι, εφόσον υπάρχουν παρενθέσεις, προτεραιότητα έχουν οι πράξεις μέσα σε αυτές. Στις παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις όλοι οι μαθητές παρουσιάζουν αδυναμίες και κάνουν λάθη. Από όλους τους μαθητές παρατηρήθηκε τουλάχιστον μια περίπτωση στην οποία εργάστηκε με πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά σε παράσταση χωρίς παρενθέσεις. Αναφορικά με τις παραστάσεις με

παρενθέσεις, υπήρξαν μαθητές οι οποίοι δεν υπολόγισαν πρώτα τις παρενθέσεις αλλά ξεκίνησαν από αριστερά. Επιπλέον, υπήρξαν μαθητές οι οποίοι ξεκίνησαν από τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και συνέχισαν με πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν την προτεραιότητα των πράξεων, όπως για παράδειγμα στο έργο 10 το οποίο αποτελεί επίλυση αριθμητικής παράστασης με τις παρενθέσεις να βρίσκονται στη μέση της αριθμητικής παράστασης (Πίνακας 4). Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας του Tabak (2019) και των Linchevski και Livneh (1999), οι οποίοι παρατήρησαν ότι σε παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις οι μαθητές εκτελούν πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και σε παραστάσεις με παρενθέσεις ξεκινούν από αυτές και συνεχίζουν από αριστερά προς τα δεξιά.

Επιπλέον, περισσότερες τελείως σωστές απαντήσεις δόθηκαν από τους μαθητές όταν η πράξη που είχε προτεραιότητα βρισκόταν στην αρχή της πρότασης και πάλι σε συμφωνία με την έρευνα του Tabak (2019). Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα στα έργα τα οποία απαιτούσαν τη διαγραφή μη αναγκαίων παρενθέσεων κράτησαν περιττές παρενθέσεις στις παραστάσεις στις οποίες η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης πιθανώς επειδή εργαζόμενοι από αριστερά προς τα δεξιά δεν επηρεάζεται η προτεραιότητα των πράξεων (έργο 4 , Πίνακας 10). Συγκεκριμένα, σε παραστάσεις όπως την «4γ. $(7 \cdot 3) - 3$ » όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά ότι οι παρενθέσεις στο γινόμενο $7 \cdot 3$ είναι περιττές. Αντίθετα, σε παραστάσεις όπως την «4β. $7 - (3 \cdot 3)$ » όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στο τέλος της πρότασης, παρατηρήθηκε περισσότερο η ανάγκη για διατήρηση των μη αναγκαίων παρενθέσεων στο γινόμενο $3 \cdot 3$. Στο ίδιο συμπέρασμα είχαν καταλήξει και ο Blando και οι συνεργάτες του (1989) οι οποίοι παρατήρησαν ότι είναι πιο πιθανό οι μαθητές να δώσουν σωστή απάντηση σε παραστάσεις της μορφής $\alpha \cdot \beta + \gamma$ όπου η πράξη που έχει προτεραιότητα βρίσκεται στην αρχή της πρότασης από ότι στις μορφές $\alpha + \beta \cdot \gamma$ όπου βρίσκεται στο τέλος.

Είναι πολύ σημαντικό να αναφερθεί ότι κανένας από τους μαθητές δεν ήταν σταθερός στη μέθοδο επίλυσής του. Όλοι οι μαθητές έτυχε να εκτελέσουν σωστά τις πράξεις σε παράσταση με και χωρίς παρένθεση και σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων αλλά και να μην ακολουθήσουν την προτεραιότητα σε άλλη παράσταση όπως φαίνεται καθαρά και στον Πίνακα 12 (Παράρτημα 2, σελ.86). Κάποιοι από τους μαθητές υπολόγισαν σωστά την αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις αλλά όχι την αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις ενώ κάποιοι υπολόγισαν σωστά την αριθμητική παράσταση χωρίς παρένθεση και απάντησαν λάθος στην αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις (έργα 5&10). Ένας/μία μαθητής/μαθήτρια που υπολόγισε σωστά και τις δύο παραστάσεις (με και χωρίς παρενθέσεις), απάντησε λάθος στον

χαρακτηρισμό αληθών ισοτήτων στις ισότητες που περιείχαν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (έργο 8, Πίνακας 12).

Σε σχέση με το **δεύτερο ερευνητικό ερώτημα** φαίνεται πως οι παρενθέσεις παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στον συντακτικό χειρισμό αριθμητικών παραστάσεων για την πλειοψηφία των μαθητών. Τέσσερις από τους πέντε μαθητές ανέφεραν επανειλημμένα την ανάγκη ύπαρξης παρενθέσεων για λόγους ασφάλειας ώστε να εκτελούν με σωστή προτεραιότητα τις πράξεις. Από τα αποτελέσματα φαίνεται πως οι μαθητές έχουν περισσότερο άγχος όταν οι παραστάσεις δεν περιλαμβάνουν παρενθέσεις και για τον λόγο αυτό επιλέγουν να χρησιμοποιούν παρενθέσεις κατά τη δημιουργία αριθμητικής παράστασης από λεκτική πρόταση (έργο 3, Παράρτημα 2). Όπως υποστηρίζουν και οι Hoch και Dreyfus (2005), οι παρενθέσεις βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή της παράστασης. Επιπλέον, σύμφωνα με τα αποτελέσματα για όλους τους μαθητές είναι πιο εύκολο να αναγνωρίσουν πότε κάποιες παρενθέσεις είναι απαραίτητες και να τις χρησιμοποιήσουν ώστε να μετατρέψουν μια μη αληθή ισότητα σε αληθή (έργο 7) από το να αναγνωρίσουν τις περιττές παρενθέσεις σε μια παράσταση (έργα 4 & 11, Παράρτημα 2). Αυτό ίσως συμβαίνει επειδή, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι μαθητές προτιμούν να υπάρχουν παρενθέσεις ακόμη και αν αυτές δεν είναι αναγκαίες. Τέλος, φαίνεται ότι οι μαθητές στις παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις οι μαθητές είναι πολύ πιθανό να απαντήσουν λανθασμένα, όπως για παράδειγμα στο έργο 5 (Παράρτημα 2), το οποίο πρόκειται για επίλυση αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθέσεις και 3 από τους μαθητές εκτέλεσαν τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να τηρούν την προτεραιότητα των πράξεων. Για τον λόγο αυτό οι μαθητές τονίζουν την ανάγκη να υπάρχουν παρενθέσεις ακόμη και όταν δεν είναι αναγκαίες, χωρίς, όμως, αυτό να σημαίνει ότι στις παραστάσεις με παρενθέσεις οι μαθητές απαντούν ολόσωστα.

Σχετικά με το **τρίτο ερευνητικό ερώτημα**, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι υπάρχει δυσκολία από τους μαθητές να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά τις πράξεις των παραστάσεων και το περιεχόμενο των παρενθέσεων καθώς μόνο δύο από αυτούς το κατάφεραν. Ο ένας από τους δύο μαθητές χαρακτήρισε το άθροισμα « $3+2\cdot 5$ » ως τσαμπιά με μπανάνες όπου το ένα έχει πάνω τρεις μπανάνες και τα άλλα δύο έχουν πέντε ενώ ο δεύτερος μαθητής, για να περιγράψει την παράσταση « $(3+2)\cdot 5$ » χαρακτήρισε την παρένθεση ως πακέτα και δήλωσε πως έχει πέντε πακέτα που το καθένα περιέχει τρία μολύβια και δύο σβήστρες.

Αναφορικά με την νοηματοδότηση δοθείσας αριθμητικής παράστασης σε δοθέν λεκτικό πρόβλημα οι απαντήσεις των μαθητών είναι περισσότερο διαδικαστικές χωρίς να διαφοροποιούν σημασιολογικά τις παρενθέσεις. Το αποτέλεσμα αυτό ίσως να συνδέεται με τον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται η έννοια των παρενθέσεων στα

ελληνικά σχολικά εγχειρίδια. Στην ενότητα 1.6 παρουσιάστηκαν αναλυτικά τμήματα των σχολικών εγχειριδίων στα οποία αναφέρεται η έννοια των παρενθέσεων. Όπως αναφέρθηκε, στην ενότητα αυτή, η έννοια των παρενθέσεων παρουσιάζεται κυρίως διαδικαστικά χωρίς να γίνεται αναφορά στη σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων και της προτεραιότητας των πράξεων και ίσως αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν σημασιολογικά τις παρενθέσεις σε μια παράσταση.

Για το **τέταρτο και τελευταίο ερευνητικό ερώτημα**, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι κατά την μετατροπή λεκτικής έκφρασης σε αριθμητική, παρουσιάστηκαν δυσκολίες οι οποίες παρουσιάζονται είτε με τη μη χρήση αναγκαίων παρενθέσεων είτε με τη χρήση περιττών. Περισσότερα λάθη παρατηρήθηκαν όταν η πρόταση που έπρεπε να μετατρέψουν οι μαθητές σε αριθμητική περιλάμβανε μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης όπως για παράδειγμα στο έργο 3γ για το οποίο η σωστή αριθμητική παράσταση θα ήταν η « $(6 + 7) - (9 + 1)$ » ή « $6 + 7 - (9 + 1)$ » και συχνή απάντηση ήταν η « $6 + 7 - 9 + 1$ ». Αναφορικά με τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση φάνηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές απαντούν σωστά όταν πρόκειται για απλές παραστάσεις (με 2 πράξεις και μικρούς αριθμούς) με μεγαλύτερη δυσκολία στις απλές παραστάσεις με παρενθέσεις. Όταν όμως πρόκειται για σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις με παρενθέσεις (με περισσότερες πράξεις και μεγαλύτερους αριθμούς) το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών αντιμετωπίζει δυσκολία κατά τη νοηματοδότηση της αριθμητικής παράστασης (έργα 9 & 12, Πίνακας 11). Ο Özal με τους συνεργάτες του (2018), σε έρευνα που διεξήγαγαν σε μαθητές δημοτικού είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η δυσκολία των μαθητών στην δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση πιθανώς να προκύπτει από τη δυσκολία τους να συνδέσουν τις πράξεις και τα σύμβολα με την καθημερινή ζωή. Επομένως, η δυσκολία να αποδώσουν λεκτικά τις πράξεις σε συμφωνία με την καθημερινή ζωή ίσως να είναι ο λόγος που οι μαθητές παρουσιάζουν αδυναμία στη δημιουργία λεκτικού προβλήματος από αριθμητική παράσταση και στη νοηματοδότηση αριθμητικής παράστασης.

Συνολικά, από τα παραπάνω φαίνεται πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών δεν έχει αντίληψη του συμβόλου» όπως την αναφέρει ο Arcavi (1994) καθώς δεν πληρούνται κάποια στοιχεία του ορισμού. Φαίνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν τη δύναμη των παρενθέσεων και κατανοούν πότε πρέπει να τις χρησιμοποιήσουν ώστε να εκμεταλλευτούν τις ιδιότητές τους. Επίσης, όλοι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να επιλέξουν τη σωστή συμβολική παράσταση για δοθέν πρόβλημα με δύο από αυτούς να επιλέγουν μόνο την παράσταση με παρενθέσεις ή μόνο την παράσταση χωρίς παρενθέσεις (Πίνακας 6, έργο 6). Παρόλα αυτά έχουν την ανάγκη να κάνουν χρήση παρενθέσεων ακόμη και όταν δεν είναι αναγκαίο. Επιπλέον, από την περιγραφή των

μαθητών για τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις παρενθέσεις φαίνεται ότι δεν αναγνωρίζουν τις διαφορετικές πτυχές των παρενθέσεων (π.χ. πολλαπλασιαστικός παράγοντας, σύμβολο ομαδοποίησης) καθώς το θεωρούν κυρίως σύμβολο για την προτεραιότητα των πράξεων (Πίνακας 2). Η συμπεριφορά αυτή όπως αναφέρθηκε και παραπάνω είναι πιθανό να προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται οι παρενθέσεις στα σχολικά εγχειρίδια στα οποία οι παρενθέσεις παρουσιάζονται ως σύμβολο που δηλώνει την προτεραιότητα των πράξεων με τον κανόνα «ό,τι βρίσκεται μέσα στην παρένθεση υπολογίζεται πρώτο».

Από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας που παρουσιάστηκαν παραπάνω, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα για το κάθε ερευνητικό ερώτημα. Αρχικά, αναφορικά με **το πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία παραστάσεις με παρενθέσεις από αυτές χωρίς παρενθέσεις. Ενδιαφέρον έχει βέβαια, το γεγονός ότι λάθη παρατηρήθηκαν και στα δύο είδη παραστάσεων, με και χωρίς παρενθέσεις. Σε πολλές περιπτώσεις, παρατηρήθηκε η χρήση λανθασμένης στρατηγικής υπολογισμού η οποία είναι ο υπολογισμός από αριστερά προς τα δεξιά. Η στρατηγική αυτή παρατηρήθηκε ακόμη και σε περιπτώσεις όπου οι παραστάσεις περιλαμβάνουν παρενθέσεις όπου προτεραιότητα έχουν οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ασχέτως με τη θέση που έχουν μέσα στην παράσταση.

Όσον αφορά στον ρόλο των παρενθέσεων και **το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, φαίνεται πως για τους μαθητές οι παρενθέσεις λειτουργούν ως εργαλείο για την έμφαση στην προτεραιότητα των πράξεων. Από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται πως οι μαθητές έχουν μεγάλη ανάγκη την ύπαρξη των παρενθέσεων ώστε να καταλήξουν σε σωστή απάντηση. Παρόλα αυτά, λανθασμένες απαντήσεις, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, παρατηρήθηκαν και σε παραστάσεις με παρενθέσεις.

Επιπλέον, σε σχέση με **το τρίτο ερευνητικό ερώτημα**, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι υπήρξαν μαθητές που κατάφεραν να διαφοροποιήσουν σημασιολογικά τα μαθηματικά αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σε παρένθεση. Οι υπόλοιποι μαθητές περιορίστηκαν σε περισσότερο διαδικαστικές απαντήσεις με προσανατολισμό στην ανάγνωση των πράξεων χωρίς να μούνε στη διαδικασία σημασιολογικής διαφοροποίησης των αντικειμένων που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων.

Αναφορικά με **το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα**, τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσιάζουν δυσκολία στη μετατροπή λεκτικής έκφρασης σε αριθμητική παράσταση. Όσον αφορά στην νοηματοδότηση αριθμητικής παράστασης οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη ευκολία

στις απλές παραστάσεις με λίγες πράξεις από τις σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις που περιλαμβάνουν περισσότερες από δύο πράξεις.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι κανένας από τους μαθητές δεν είναι παντού ολόσωστος και σταθερός. Όλοι εμφανίζουν αδυναμίες είτε με τη μορφή τελείως λάθους είτε με το να κρατάνε παραπάνω παρενθέσεις ή να μην μπορούν να ερμηνεύσουν τις παρενθέσεις.

Συμπερασματικά, ως προς τον συντακτικό χειρισμό παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές του δείγματος χρησιμοποιούν τις παρενθέσεις ως εργαλείο έμφασης της προτεραιότητας πράξεων και ως προς την σημασιολογική ερμηνεία των παρενθέσεων παρουσιάζουν αδυναμία.

Περιορισμοί της έρευνας

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η παρούσα μελέτη υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς. Ένας βασικός περιορισμός της έρευνας είναι το μέγεθος του δείγματος (5 μαθητές). Λόγω του μικρού δείγματος, δεν είναι εύκολο να γενικευθούν τα συμπεράσματα της έρευνας. Ένας επιπλέον περιορισμός είναι το γεγονός ότι οι μαθητές που συμμετείχαν ήταν μαθητές που εθελοντικά και με ευκολία συμφώνησαν να συμμετέχουν στην έρευνα και κατά συνέπεια ίσως να είχαν καλύτερες επιδόσεις από μαθητές που θα επιλεγόντουσαν τυχαία ή από μαθητές όλων των επιπέδων. Μια αδυναμία της έρευνας είναι το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της συνέντευξης δεν έγιναν κάποιες απαραίτητες ερωτήσεις οι οποίες θα βοηθούσαν στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Οι ερωτήσεις αυτές αφορούν στην κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι συνεντεύξεις λήφθηκαν εξ αποστάσεως δεν προσέφερε γραπτό υλικό στην συλλογή των δεδομένων. Θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθούν οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών παράλληλα με τη συνέντευξη. Τέλος, οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν μέσω διαδικτύου και η ερευνήτρια δεν ήταν σε θέση να παρακολουθεί ταυτόχρονα τις σημειώσεις των μαθητών.

Για επόμενη έρευνα, θα είχε πολύ ενδιαφέρον αρχικά να επιλεγθούν μαθητές από διάφορα επίπεδα απόδοσης. Η επιλογή αυτή ίσως να έδινε περισσότερα φαινόμενα άξια σχολιασμού. Επιπλέον, θα ήταν περισσότερο εύκολο να γενικευθούν τα συμπεράσματα από ένα τέτοιο δείγμα. Επίσης, είναι σημαντικό σε επόμενη έρευνα η συνέντευξη να γίνει δια ζώσης οπότε ο ερευνητής να μπορεί να παρακολουθεί και να σχολιάζει τα γραπτά των μαθητών κατά τη διάρκεια αυτής. Τέλος, θα είχε ενδιαφέρον να γίνει αντίστοιχη μελέτη σε μαθητές χώρας όπου το σύστημα γραφής τους είναι από δεξιά προς τα αριστερά ώστε να διερευνηθεί αν γίνεται μεγαλύτερη εφαρμογή της προτεραιότητας των πράξεων.

Βιβλιογραφία

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Blando, J. A., Kelly, A. E., Schneider, B. R., & Sleeman, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3) 301-308. <https://doi.org/10.2307/749518>

Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. In B. C. Love, K. McRae, & V. M. Sloutsky (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. .571-576). Austin, TX: Cognitive Science Society

Bush, S. B. (2011). *Analyzing common algebra-related misconceptions and errors of middle school students* [Unpublished doctoral dissertations]. The University of Louisville. <https://doi.org/10.18297/etd/187>

Cruz, J. K. B. D., & Lapinid, M. R. C. (2014, March). Students' difficulties in translating worded problems into mathematical symbols. In *The DLSU Research Congress Proceeding*. Ανακτήθηκε από:
<https://www.dlsu.edu.ph/wp-content/uploads/pdf/conferences/research-congress-proceedings/2014/LLI/LLI-I-009-FT.pdf>

Das, K. (2020). A Study on Misconception of Using Brackets in Arithmetic Expression. *Shanlax International Journal of Education*, 8(4), 76-80.

Gunnarsson, R., & Karlsson, A. (2015). Brackets and the structure sense. In O. Helenius, A. Engström, T. Meaney, P. Nilsson, E. Norén, J. Sayers & M. Österholm (Eds.), *Proceedings of the 9th Swedish Mathematics Education Research Seminar* (pp. 47-55). Umea, Sweden: MADIF.

Gunnarsson, R., Hernell, B., & Sönnnerhed, W. W. (2012). Useless brackets in arithmetic expressions with mixed operations. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 275–282). Taipei, Taiwan: PME.

Hewitt, D. (2005). Chinese whispers - algebra style: Grammatical, notational, mathematical and activity tensions. In H. L. Chick and J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129–136). Melbourne, Australia: PME.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational studies in mathematics*, 19(3), 333-355.

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.) *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, (CD). Bellaria, Italy: ERME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp.49-56). Bergen, Norway: PME. Ανακτήθηκε από: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489561.pdf>

Joseph, K. N. (2014). *College students' misconceptions of the order of operations*. Unpublished Doctoral dissertation. University of New York at Fredonia, USA.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carragher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19– 55). New York: Routledge.

Karlsson, A. (2011). Parentheses in connection with priority rules: How they are perceived and used by students in year 8. Published thesis, Jönköping University, School of Learning and Communication. Ανακτήθηκε από: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:505184/FULLTEXT02>

Karlsson, A., & Gunnarsson, R. (2013). Students' perceptions of brackets. In Lindmeier, A.M. and A. Heinze. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, p. 85. Kiel, Germany: PME. Ανακτήθηκε από: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:639954/FULLTEXT01.pdf>

Kilhamn, C. (2011). Making sense of negative numbers. Published doctoral dissertation. Göteborg: National Centre of Mathematics Education, University of Gothenburg. Ανακτήθηκε από: <https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151>

Liebenberg, R., Linchevski, L., Olivier, A., & Sasman, M. (1998). *Laying the foundation for algebra: Developing an understanding of structure*. Paper presented at the 4th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA) (pp. 276-282). Pietersburg, South Africa.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, 40(2), 173-196.

Marchini, C., & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful tools for teaching? In B. Ubus (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Öçal, M. F., İpek, A. S., Özdemir, E., & Kar, T. (2018). Investigation of elementary school students' problem posing abilities for arithmetic expressions in the context of order of operations. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(2), 170-191.

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive science*, 14(3), 445-481.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.

Skemp, R.R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition* (1st ed.). New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203396391>

Tabak, S. (2019). 6th, 7th and 8th Grade Students' Misconceptions about the Order of Operations. *International Journal of Educational Methodology*, 5(3), 363-373. <https://doi.org/10.12973/ijem.5.3.363>

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Lisse, The Netherlands*, 224, 224.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics education research journal*, 15(2), 122-137.

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School science and mathematics*, 112(4), 255-264.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2011). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου: Βιβλίο μαθητή*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγιάς, Χ., Φερεντίνος, Σ., Μαρκάκης Ν. (2011). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου: Βιβλίο μαθητή*. Διαδραστικά σχολικά βιβλία. Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2748/Mathimatika_A-Gymnasiou_html-empl/

Ίσαρη Φ. και Μ. Πουρκός, 2015, *Ποιοτική μεθοδολογία έρευνας. Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση*, Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Ανακτήθηκε από: <https://repository.kallipos.gr/handle/11419/5826>

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2009). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού: Βιβλίο μαθητή*. Διαδραστικά σχολικά βιβλία. Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2186/Mathimatika_ST-Dimotikou_html-empl/

Παπαδόπουλος, Ι., & Ελευθεριάδης, Ι. (2019). Η επίδραση του πλαισίου σύνταξης των αριθμητικών παραστάσεων στον τρόπο υπολογισμού τους: η περίπτωση των νοερών παρενθέσεων. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (12), 23-41. Ανακτήθηκε από: <https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/article/view/21143>

Παράρτημα 1 - Εργαλείο

1. Τι είναι οι παρενθέσεις;

Αν ήθελες να εξηγήσεις σε ένα παιδί δημοτικού τι είναι οι παρενθέσεις τι θα του έλεγες;

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;

- | | |
|--------|--------|
| α. (| β.) |
| γ. () | δ. (3) |

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. _____

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. _____

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. _____

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. _____

4. Να διαγράψεις όλες τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + (3 : 2)$

β. $7 - (3 \cdot 3)$

γ. $(7 \cdot 3) - 3$

δ. $(7+3) \cdot 2$

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14.

Ποια είναι η γνώμη σου;

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$

β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$

δ. $50 - 10 + 20$

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - 5 + 5 = 5$ Ναι / Όχι. β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι. δ. $12 : 4 = 12 : 6 - 2$ Ναι / Όχι.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι. β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι / Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:

α. $(3+2) \cdot 5$

β. $3 + 2 \cdot 5$

10. $9 + 6 \cdot (11-7) : 4 = ;$

11. Να διαγράψεις όλες τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $-(7 - (3 - 3))$

β. $((7) - (3 \cdot 2))$

γ. $7 - ((3:2))$

δ. $(7 : (3+2))$

12. Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ.

Ο Κώστας έδωσε τη λύση α και ο Γιώργος τη λύση β. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;

α. $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$

β. $11 - (120 \div 20) = 5$

Παράρτημα 2 - Αποτελέσματα ανά ερώτηση

Πίνακας 12. Απαντήσεις μαθητών ανά ερώτηση

Έργο	Ερώτημα	M1	M2	M3	M4	M5
2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;	α. (-	-	-	-	Λ
	β.)	-	-	-	-	Λ
	γ. ()	A	-	-	A	A
	δ. (3)	A	A	A	A	-
3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):	α. Έχεις 2 + 5 και πρέπει να προσθέσεις 4.	A	B	B	B	A
	β. Έχεις 4 : 2 και πρέπει να προσθέσεις 3.	A	B	B	B	B
	γ. Έχεις 2 + 5 και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4.	Λ	A	A	A	A
	δ. Έχεις 6 + 7 και πρέπει να αφαιρέσεις 9+1.	Λ	Λ	A	A	Λ
4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $7 + (3:2)$	A	A	A	B	B
	β. $7 - (3 \cdot 3)$	A	A	A	B	B
	γ. $(7 \cdot 3) - 3$	A	A	A	A	B
	δ. $(7+3) \cdot 2$	Λ	A	A	A	A
5. Επίλυση αριθμητικής παράστασης χωρίς παρενθέσεις.	Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2+4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;	Λ	A	Λ	Λ	A
6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.	α. $50-10-20$	A	A	-	A	A
	β. $50-(10+20)$	-	A	A	A	A
	γ. $50-(10-20)$	-	-	-	-	-
	δ. $50-10+20$	-	-	-	-	-
7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.	α. $15-5+5=5$	A	A	A	A	A
	β. $20-5 \cdot 3=5$	A	A	A	B	A
	γ. $3+2 \cdot 3=5 \cdot 3$	A	A	A	Λ	A
	δ. $12:4=12:6-2$	A	A	A	A	A

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:	α. $40 \cdot (51+72)=40 \cdot 51+72$	A	A	A	A	A
	β. $120:3+64=(120:3)+64$	A	A	A	A	A
	γ. $18+(9-4)=18+9-4$	A	Λ	Λ	A	A
	δ. $27-5+3=27-(5+3)$	A	Λ	A	A	A
9. Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω:	α. $(3+2) \cdot 5$	Λ	A	A	A	A
	β. $3 + 2 \cdot 5$	A	A	A	Λ	A
10. Επίλυση αριθμητικής παράστασης με παρενθέσεις	$9+6 * (11-7) : 4$	Λ	A	A	Λ	Λ
11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:	α. $-(7-(3-3))$	Λ	Λ	Λ	Λ	A
	β. $((7)-(3 \cdot 2))$	A	A	A	B	B
	γ. $7-((3:2))$	B	A	A	B	B
	δ. $(7:(3+2))$	A	A	Λ	A	A
12. Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. Ο Κώστας έδωσε τη λύση α' και ο Γιώργος τη λύση β'. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;	α. $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$	Λ	Λ	Λ	Λ	A
	β. $11 - (120 \div 20) = 5$	Λ	Λ	Λ	A	A

Παράρτημα 3 - Άδεια από γονείς

Αγαπητέ γονέα,

Στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών με τίτλο «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας εκπονώ μια έρευνα που αφορά στον χειρισμό και στην ερμηνεία των παρενθέσεων από τους μαθητές Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, θέλω να μελετήσω το νόημα που αποδίδουν οι μαθητές Γυμνασίου στις παρενθέσεις και το περιεχόμενό τους, την ικανότητα χειρισμού τους και τη επίδραση αυτών στην επίλυση σύνθετων αριθμητικών παραστάσεων με ή χωρίς παρενθέσεις. Για την πραγματοποίηση της έρευνας θα χρειαστεί να πάρω συνεντεύξεις από μαθητές Γυμνασίου τις οποίες και θα μαγνητοφωνήσω. Η μαγνητοφώνηση θα ακουστεί μόνο από εμένα και θα γίνει απομαγνητοφώνηση αυτής με μοναδικό σκοπό την ανάλυση των απαντήσεων. Οι μαθητές θα απαντήσουν σε μαθηματικά προβλήματα και η συμμετοχή τους θα είναι ανώνυμη.

Εάν συμφωνείτε να συμμετέχει το παιδί σας στην έρευνα, συμπληρώστε την παρακάτω δήλωση. Η συνέντευξη θα διαρκέσει 30-45 λεπτά και θα πραγματοποιηθεί διαδικτυακά ώρα και μέρα που βολεύει το παιδί.

Μη διστάσετε να επικοινωνήσετε μαζί μου αν χρειάζεστε επιπλέον πληροφορίες ή αν θέλετε να δείτε το ερωτηματολόγιο.

Σας ευχαριστώ για την υποστήριξή σας,
Αντιγόνη Ατματσίδου
Μαθηματικός Α.Π.Θ.

antigoni.atmatsidou@gmail.com

κιν.6973184761

Δηλώνω ότι επιθυμώ το παιδί μου να συμμετάσχει στην έρευνα

..... (Υπογραφή)

Παράρτημα 4 - Απομαγνητοφωνήσεις

M1 - Β΄ Γυμνασίου

1. E: Ωραία, να σου πω αρχικά κάποιες οδηγίες. Εγώ θα σου κάνω τις ερωτήσεις και θα μου λες φωναχτά τη σκέψη σου. Μπορεί κάποιες στιγμές να χρειαστεί να γράψεις.
2. M1: Εντάξει
3. E: Είναι 12 ερωτήσεις, σου το λέω για να ξέρεις περίπου που βρισκόμαστε. Και επίσης δεν θα σου λέω αν είναι σωστό ή λάθος και δεν έχει χρόνο. Αυτά. Πάμε να ξεκινήσουμε. Η πρώτη ερώτηση είναι «Τι είναι οι παρενθέσεις;» Για σένα, τι πιστεύεις ότι είναι οι παρενθέσεις;
4. M1: Οι παρενθέσεις είναι για να χωρίζω κάποια πράγματα, υπάρχει ένα ολόκληρο κείμενο για παράδειγμα, μπορώ να το κάνω αυτό έτσι;
5. E: Ναι ναι
6. M1: Να κάνω παραδείγματα
7. E: Ναι εννοείται, το θέλω αυτό.
8. M1: Για παράδειγμα υπάρχει ένα μεγάλο κείμενο και θέλω να πάρω τη μικρή πρόταση και με τις παρενθέσεις μπορώ να τη χωρίσω αυτή την πρόταση.
9. E: Αχά, στα μαθηματικά πώς τις σκέφτεσαι τις παρενθέσεις;
10. M1: Εε, αν υπάρχει δηλαδή ξέρω 'γω άσκηση με νούμερα, πολλά νούμερα, και με μπερδεύει αυτό εε, θα βάλω παρενθέσεις για να μπορώ καλύτερα να την κάνω.
11. E: Τι σου δείχνουν οι παρενθέσεις; Πώς θα σε βοηθήσουν δηλαδή να το λύσεις καλύτερα;
12. M1: Για παράδειγμα θα πάρω το 1+2 θα το βάλω σε μια παρένθεση και από δίπλα θα βάλω άλλη μία παρένθεση και θα βάλω τον άλλον αριθμό που έχει.
13. E: Αυτό το κάνεις για να τους χωρίσεις δηλαδή;
14. M1: Ναι και να το κάνω σε σειρά, για να είναι πιο εύκολο.
15. E: Οκ, και αν ήθελες να εξηγήσεις σε ένα παιδί Δημοτικού τι είναι οι παρενθέσεις τι θα του έλεγες;
16. M1: Δεν ξέρω νομίζω αυτό θα έλεγα. Είναι για να χωρίζεις πράγματα, για να σε διευκολύνει..
17. E: Οκ εντάξει. Πάμε στην επόμενη ερώτηση. Η 2η είναι «ποιο από τα παρακάτω ή ποια δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων; » Για σένα δηλαδή όπως το έχεις στο μυαλό σου, όταν τα βλέπεις ποιο λες ότι είναι παρενθέσεις;
18. M1: Το γ και τ δ.
19. E: Γιατί προτιμάς αυτά από τα δύο πάνω;

20. M1: Εε, επειδή το α μπορεί να είναι μια απλώς γραμμή που να είναι κατά λάθος ή να είναι.. πώς να το εξηγήσω...εεμ μου βγάζει σαν να είναι ξέρω 'γω όλο το κείμενο σε παρένθεση χωρίς λόγο. Ενώ στην ουσία δείχνει, στο δ ας πούμε δείχνει ότι έχει κάτι μέσα και αυτό είναι σε παρένθεση. Ξέρω γω...μπορείς να βάλεις κάτι μέσα στην παρένθεση.

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;

α. (β.)
γ. () δ. (3)

- 21.
22. E: Εντάξει ευχαριστώ πολύ. Η 3 λέει: «Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού.»
23. M1: Θα πρέπει να σας πω πόσο βγαίνει το καθένα;
24. E: Όχι, δεν θα κάνεις πράξεις. Θέλω να το γράψεις σε παράσταση.
25. M1: Α
26. E: Έχεις $2+5$ και πρέπει να προσθέσεις 4.
27. M1: (σκέφτεται) Όποτε είμαι έτοιμη να σας τα πω;
28. E: Ναι, έκανες το πρώτο;
29. M1: Εε, το πρώτο το έβγαλα 11..
30. E: Δεν θέλω να κάνεις πράξεις, θέλω απλά να το γράψεις.
31. M1: Ααα, το πως θα το πω; Δηλαδή $2+5+4$;
32. E: Ναι αυτό.
33. M1: Α
34. E: Άρα αυτό θα έγραφες; $2+5+4$;
35. M1: Ναι. Το β έκανα $4:2+3$.
36. E: Αχά
37. M1: Το γ έκανα $2+5*4$.
38. E: Ωραία
39. M1: Και το δ έκανα $6+7-9+1$.
40. E: Λοιπόν, ας τα πάρουμε ένα ένα. Ας ξεκινήσουμε από το τελευταίο. Το τελευταίο λέει έχει το $6+7$ και πρέπει να αφαιρέσεις το $9+1$. Άρα όπως το έχεις γράψει από το $6+7$ αφαιρείς το $9+1$ ε;
41. M1: Ναι
42. E: Δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα πιστεύεις;
43. M1: Όχι
44. E: Αν το έκανες πράξη τι θα έκανες;
45. M1: Θα έκανα το $6+7$ αυτό που θα έβρισκα θα του αφαιρούσα το 9 και αυτό που θα έβρισκα θα το έκανα $+1$.

46. E: Εντάξει, στο γ. Λέει έχεις $2+5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. Για δες το και πες αν σου φαίνεται οκ.
47. M1: Εντάξει είναι.
48. E: Εδώ άρα το 4 το πολλαπλασιάζεις με το $2+5$;
49. M1: Εε, θα έκανα το $2+5$ πρώτα και μετά όσο έβρισκα θα το πολλαπλασίαζα με το 4.
50. E: Αν σε άλλη στιγμή έβλεπες $2+5*4$ πώς θα το έλυνες;
51. M1: Έτσι όπως σας είπα, θα έκανα το $2+5$ και μετά επί 4.
52. E: Εντάξει. Στο β. Πως θα το έλυνες άμα ήθελες να το λύσεις;
53. M1: Το ίδιο με το γ.
54. E: Άρα πρώτα τι;
55. M1: Θα έκανα φυσικά πρώτα το πιο εύκολο, αν είναι το $4:2$ πιο εύκολο να το κάνω, θα το έκανα, και μετά θα έκανα $+3$.
56. E: Άμα ήταν πιο εύκολο το $2+3$ θα έκανες αυτό;
57. M1: Ναι θα έβγαζα πόσο είναι αυτό και μετά θα το έκανα $:4$. Νομίζω το ίδιο πράγμα θα έβγαине. Μπορεί να έκανα και τις 2 να δω ποιο είναι πιο σωστό.
58. E: Στο πρώτο, τα πρόσθεσες όλα μαζί;
59. M1: Ναι

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. $2 + 5 + 4$

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. $4 : 2 + 3$

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. $2 + 5 \cdot 4$

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. $6 + 7 - 9 + 1$

- 60.
61. E: Εντάξει αυτό ήταν, δεν έχω να ρωτήσω κάτι άλλο γι' αυτό το έργο. Πάμε στο 4. Το έργο 4 λέει «Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις.» Δηλαδή, όπου μπορείς να τις διαγράψεις να τις διαγράψεις. Όπου δεν αλλάζει το αποτέλεσμα σου δηλαδή.
62. M1: Εεε, σε όλες θα τα έβγαζα.
63. E: Τις βγάζεις σε όλες;
64. M1: Ναι επειδή δεν νομίζω να μ επηρέαζε σε καμία.
65. E: Εντάξει, ας τις δούμε μία μια. Οκ άρα στην πρώτη λες ότι δεν πειράζει να βγάλεις την παρένθεση.
66. M1: Όχι
67. E: Οκ άρα αν είχες το $7+3:2$ θα ήταν το ίδιο.

68. M1: Ναι, συνολικά θα έκανα πάλι έτσι όπως είναι με τις αγκύλες. Θα έκανα πρώτα το $3:2$ και μετά θα το έκανα με το 7 . Όπως θα έκανα και με τις αγκύλες, το ίδιο πράγμα.
69. E: Ωραία, γιατί θα το έκανες αυτό; Γιατί θα έκανες πρώτα τη διαίρεση;
70. M1: Γιατί θα έκανα πρώτα αυτό που ήταν μαζί η διαίρεση, σαν να είναι μαζί και αυτό που ήταν μόνο του και φαινότανε θα το έκανα μετά. Θα μπορούσα βέβαια να κάνω και $7+3$ και μετά αυτό που θα έβρισκα θα το έκανα με το.. :2.
71. E: Θα έβγαινε το ίδιο;
72. M1: Δεν ξέρω, λογικά.
73. E: Οκ, πάμε στο β. Λες τις βγάζεις γιατί δεν χρειάζονται.
74. M1: Το ίδιο πράγματα είναι.
75. E: Άρα στο $7-3*3$ επιλέγεις να κάνεις πρώτα τον πολλαπλασιασμό;
76. M1: Εε, θα μπορούσα και την αφαίρεση, ό,τι θέλει ο καθένας. Εγώ θα έκανα, ναι, τον πολλαπλασιασμό.
77. E: Γιατί πιστεύεις επιλέγεις τον πολλαπλασιασμό;
78. M1: Εεε, μου φαίνεται πιο εύκολο.
79. E: Και πριν στη διαίρεση σου φαίνεται πιο εύκολο; γι' αυτό επιλέγεις τη διαίρεση;
80. M1: Ναι
81. E: Εντάξει το επόμενο είναι $7*3-3$. Κι εδώ επιλέγεις τον πολλαπλασιασμό να κάνεις πρώτα;
82. M1: Ναι
83. E: Πριν διαγράψεις την παρένθεση, τον πολλαπλασιασμό θα επέλεγες;
84. M1: Ε ναι
85. E: Γιατί;
86. M1: Εε, νομίζω...μου φαίνεται εύκολο. Μπορώ να το κάνω με το μυαλό μου έτσι πως μου φαίνεται και το θέλω εύκολο να το κάνω.
87. E: Εντάξει πάμε στο τελευταίο. Το $7+3*2$ είναι το ίδιο πιστεύεις με το αρχικό;
88. M1: Εεε, ναι; Ναι.
89. E: Στο πάνω (αρχικό) τι θα έκανες πρώτα; Ποια πράξη;
90. M1: Τον πολλαπλασιασμό.
91. E: $2*$ πόσο δηλαδή
92. M1: $2*3$
93. E: Εντάξει, θα έκανες $2*3$ και μετά $+7$;
94. M1: Ναι

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + \{3 : 2\}$

β. $7 - \{3 \cdot 3\}$

γ. $\{7-3\} - 3$

δ. $\{7+3\} \cdot 2$

95.

96. E: Εντάξει. Πάμε στην 5. Η 5 λέει «Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2+4*3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;»
97. M1: Να απαντήσω με ναι ή όχι; Ή να εξηγώ;
98. E: Θα το εξηγήσεις έτσι κι αλλιώς. Εσύ πώς θα το έλυνες;
99. M1: Θα έκανα πρώτα 2 - Έκανα 4 επί 3 και θα έβρισκα πόσο είναι.
100. E: +4 είναι
101. M1: Α...+4 είναι. Εμ... Περιμένετε λίγο. (Σκέφτεται) Δεν ισούται με κανένα.
102. E; Πόσο σου βγαίνει εσένα;
103. M1: Εεε...Μου βγαίνει πλην, συν 4, συν 10.
104. E: +10;
105. M1: Ναι
106. E: Θες να μου πεις λίγο τι πράξεις έκανες για να το δω κι εγώ;
107. M1: $2+4$ (παύση) *3
108. E: Ωραία, μετά.
109. M1: Περιμένετε λίγο. Επειδή το είχα αφήσει -4. 14!
110. E: Εντάξει, άρα τι πράξεις έκανες;
111. M1: $2+4$ επί 3
112. E: Άρα πρώτα κάνεις το $2+4$;
113. M1: Ναι
114. E: Άρα λες $6*3$;
115. M1: Αχά
116. E: Πόσο κάνει αυτό;
117. M1: 18.
118. E: Και γιατί επιλέγεις να κάνεις πρώτα την πρόσθεση;
119. M1: μμμ, δεν ξέρω απλώς έτσι ήθελα να το πάρω με τη σειρά. Θα μπορούσα να το κάνω και αντιστρόφως. Ο καθένας νομίζω όπως θέλει μπορεί να το κάνει.
120. E: Έτσι σκέφτηκες τώρα να το κάνεις και το έκανες έτσι.
121. M1: Ναι
122. E: Μπορείς να καταλάβεις γιατί απάντησε 14;
123. M1: Δεν ξέρω...μμ μαθηματικά, είναι μυστήριο.
124. E: Είναι μυστήριο;
125. M1: Ναι
126. E: Άμα έκανες πρώτα τον πολλαπλασιασμό και μετά την πρόσθεση τι θα έβγαίνε;
127. M1: 14!
128. E: Μπορεί να είναι και 18 και 14;
129. M1: Όχι
130. E: Τι σου φαίνεται περίεργο στο να είναι και 18 και 14;
131. M1: Που στο $6*3$ βγαίνει άλλος αριθμός και στο $3*4$ βγαίνει άλλος αριθμός.

132. E: Σου κάνει εντύπωση που βγαίνουν δύο τιμές;
 133. M1: Ε λίγο.
 134. E: Μπορούν να βγαίνουν δύο τιμές πιστεύεις;
 135. M1: Ναι
 136. E: Ανάλογα με το ποια πράξη θα επιλέξεις πρώτα να κάνεις;
 137. M1: Ναι.

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;

$$2 + 4 \cdot 3 =$$

$$6 \cdot 3 = 18$$

138.
 139. E: Εντάξει ευχαριστώ. Θα συνεχίσουμε. Πάμε στην 6. «Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ;»
 140. M1: Μπορώ να διαλέξω δύο;
 141. E: Ναι
 142. M1: Το β και το δ. Βασικά... (σκέφτεται)
 143. E: Τι σκέφτεσαι;
 144. M1: Σκέφτομαι, αν έχω 50 ευρώ και πάω να αγοράσω πράγματα που είναι 20 και 10 ή έχω 20 και 10.
 145. E: Τι είναι το 10 και το 20;
 146. M1: Το 10 είναι για να αγοράσω τα γλυκά και κέικ για 20. Οπότε θα είναι το α και το γ.
 147. E: Το α και το γ λες. Για εξήγησέ μου το α.
 148. M1: Εεε, έχω 50 οπότε το 50 πρέπει να το αφαιρέσω με το 10 και μετά, ξέρω γω, αφού μου έχουν χαμηλώσει τα χρήματα, αφού έχω βγάλει τα 10 θα αγοράσω και 20 οπότε πρέπει να αφαιρέσω το 20 με το 50. Επειδή έχουν φύγει από τα 50 τα 20.
 149. E: Εντάξει. Για εξήγησέ μου και το γ, γιατί επιλέγεις το γ;
 150. M1: Επειδή θα μπορούσα, ξέρω γω, να κάνω αφαίρεση το 10 με το 20 και αυτό που θα έβγαине να το έκανα αφαίρεση με το 50.
 151. E: Το 10 με το 20 αν κάνεις την αφαίρεση πόσο θα σου δώσει;
 152. M1: 10. Οπότε είναι μόνο το α.
 153. E: Δεν ξέρω εσύ θα μου πεις.
 154. M1: Αν έβγαζα το 20 με το 10 θα μου έβγαине 10.
 155. E: Θα έκανες 20-10 δηλαδή;
 156. M1: Ναι, αφού πάντα μπαίνει από πάνω ο μεγαλύτερος.
 157. E: Αχά
 158. M1: Και θα μου έβγαине 10, μετά θα το αφαιρέσουμε απ' το 50. Άρα...Αυτό.
 159. E: Άρα τι λες γι' αυτό;

160. M1: Άρα θα μου έβγαινε λάθος το αυτό
161. E: Το αποτέλεσμα;
162. μ: Ναι
163. E; Τα άλλα δύο τα είδες;
164. M1: Δεν τα είδα βασικά αλλά κατάλαβα ότι αν κάνω πρόσθεση και τα αφαιρέσω... δεν τα είδα. Θα τα ελέγξω.
165. E: Στο β τι δηλώνει η παρένθεση;
166. M1: Στο β θα ...απλώς μεγαλώνει το ποσό.
167. E: Γενικά από όλη την πράξη θα μεγαλώσει το αποτέλεσμα ή μέσα στην παρένθεση.
168. M1: Θα μεγαλώσει το ποσό, από όλη την πράξη.
169. E: Άρα θεωρείς λάθος το β;
170. M1: Ναι, και το δ.
171. E: Επειδή θα μεγαλώσει το ποσό κι εδώ;
172. M1: Ναι.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$	β. $50 - (10 + 20)$
γ. $50 - (10 - 20)$	δ. $50 - 10 + 20$
$20 - 10$	

- 173.
174. E: Εντάξει, πάμε στην επόμενη. 7. Εδώ θέλω να ελέγξεις άμα είναι αληθείς και αν δεν είναι να χρησιμοποιήσεις παρενθέσεις για να τις κάνεις αληθείς.
175. M1: (Σκέφτεται) Εμ... Το πρώτο είναι λάθος. Είναι όχι.
176. E: Γιατί πόσο βγαίνει το 1ο;
177. M1: Μου βγαίνει 15.
178. E: Αχά, Και πως μπορείς να το κάνεις να βγει σωστό.
179. M1: Εμ... (σκέφτεται)
180. E: Οι παρενθέσεις πως θα μπορούσαν να σε βοηθήσουν ώστε να βγει σωστό;
181. M1: Εμ... Δεν νομίζω να μπορούσα.. να το κάνω.
182. E: Αχά
183. M1: Α! Θα έβαζε παρένθεση στο $5 + 5$. Ανάμεσα σε αυτά τα δύο.
184. E: Έτσι; $(5+5)$
185. M1: Ναι, για να μου βγει...5.
186. E: Τώρα βγαίνει σωστό;
187. M1: Ναι.
188. E: Ωραία, εντάξει. Πάμε στο β.
189. M1: Εμμ, ναι.
190. E: Ναι είναι σωστό λες;

191. M1: Ναι
192. E: Ωραία, γιατί ποια πράξη κάνεις πρώτα;
193. M1: Εεε, το $20 - 5$.
194. E: Έκανες $20-5$ και μετά $*3$;
195. M1: Ναι
196. E: Και σου βγήκε 5;
197. M1: Α όχι, εγώ το έκανα απλώς όλο μαζί.
198. E: Για πες τι έκανες εσύ;
199. M1: Πήρα $5*3$ και το έκανα -20 .
200. E: Και γιατί επέλεξες το $5*3$ πρώτα;
201. M1: Επειδή θα μου έβγαινε πιο μικρός ο αριθμός. Και μετά θα μπορούσα να το αφαιρέσω με το 20. Αν έκανα το αντίθετο, δηλαδή αν έκανα $20 - 5$ θα μου έβγαινε πιο μεγάλος αριθμός.
202. E: Αχά, οκ άρα για ευκολία το επέλεξες.
203. M1: Ναι
204. E: Εντάξει, πάμε και στο γ. Πρώτα ελέγχεις άμα είναι αληθής η ισότητα και μετά πως να τη διορθώσεις.
205. M1: (Σκέφτηκε λίγο) Εεε, το ίσον είναι $5*3$;
206. E: Ναι
207. M1: Εεε, όχι.
208. E: Όχι λες δεν είναι ίσα. Μπορείς να τα κάνεις να είναι ίσα; Με παρενθέσεις.
209. M1: (Σκέφτεται) Δεν νομίζω όχι. Δεν βγαίνει.
210. E: Δοκίμασες κάπως να βάλεις παρενθέσεις και δεν βγαίνει;
211. M1: Εε, έκανα την παρένθεση $3+2$ και $2*3$ αλλά δεν μου βγήκε. Μου βγαίνει μόνο κανονικός αριθμός. Δεν μου βγαίνει...
212. E: Πόσο θες να σου βγάζουν και τα 2 μέλη για να είναι ίσα;
213. M1: (ακούγεται εντυπωσιασμένη από αυτό που σκέφτηκε) Μπορώ να κάνω $5*3$;
214. E: Δεν ξέρω, γιατί να μην μπορείς;
215. M1: Ααα, επειδή μου βγαίνει 15. Δεν ξέρω...
216. E: Σου ξαναθυμίζω, μπορείς να βάλεις κάπου παρενθέσεις ώστε να είναι αληθής η ισότητα;
217. M1: Εεε, στο $3+2$.
218. E: Άρα άμα βάλεις εδώ παρένθεση βγαίνει ίδιο;
219. M1: Ναι
220. E: Εντάξει, πάμε στο δ.
221. M1: ...
222. E: Πόσο βγάζει το πρώτο μέλος;
223. M1: Μου βγαίνει ,124.

224. E: Το 12:4 κάνεις;
 225. M1: Ναι
 226. E: 12:4 πόσο είπες βγαίνει;
 227. M1: 0,124.
 228. E: OK. Κάνεις 4:12;
 229. M1: Όχι 12: 4.
 230. E: Ok εντάξει, το 2ο μέλος πόσο σου βγάζει;
 231. M1: Δεν το έχω κάνει περιμένετε...Εμμ, μου βγαίνει 0,0412.
 232. E: Άρα λες ότι δεν είναι ίσα;
 233. M1: Ναι
 234. E: Μπορείς να μου πεις στο 2ο μέλος ποια πράξη έκανες πρώτα; Έκανες 12 : 6 ή 6-2 πρώτα;
 235. M1: 6-2, 6-2 μου έβγαξε 4 και μετά το διαίρεσα το 4 με το 12.
 236. E: 4:12;
 237. M1: Ναι. Έκανα και το 12: 6 και το αφαίρεσα με το 2 αλλά μετά μου έβγαине 1,24.
 238. E: Να σε ρωτήσω κάτι, κάνεις 6:12 (γράφω κάθετα)
 239. M1: Ναι
 240. E: Και στο άλλο 4:12; (γράφω κάθετα)

$$\boxed{4 \overline{)12}}$$

241.
 242. M1: Ναι
 243. E: Ok, αυτά μπορείς κάπως να τα κάνεις να είναι ίδια;
 244. M1: Α, αλλάζοντας..
 245. E: Με παρένθεση, αν μπορείς με παρένθεση να είναι ίδια.
 246. M1: (σκέφτεται 30'') Εεε, στο 6-2.
 247. E: Άρα λες θα βγαίνουν ίδια, γιατί θα βγαίνουν ίδια;
 248. M1: Θα μου έβγαине 4, θα έκανα αφαίρεση και μετά το 4 θα το διαιρούσα με το 12.

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - (5 + 5) = 5$ Ναι / Όχι. β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $\sqrt{3 + 2} \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι. δ. $12 : 4 = 12 : (6 - 2)$ Ναι / Όχι.

249.
 250. E: Εντάξει, πάμε να προχωρήσουμε. Η 8 λέει «Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, να ελέγξεις άμα είναι αληθείς.» Είναι σαν το προηγούμενο αλλά δεν θέλω να κάνεις υπολογισμούς. Όπως τα κοιτάς να αποφασίζεις αν είναι αληθείς ή όχι.
 251. M1: Στην τύχη δηλαδή.

252. E: Ε όχι στην τύχη, κάπως θα το εξηγήεις. Δες, ας πούμε, το α και θα το συζητήσουμε μετά.
253. M1: Ε, το α όχι (απάντησε κατευθείαν).
254. E: Γιατί;
255. M1: Γιατί δεν μπορούν να μείνουν έτσι όπως είναι, θα πρέπει ή να χαμηλώσει ή να μεγαλώσει ο αριθμός δεν μπορεί να μείνει έτσι.
256. E: Εμ, κάτσε να δω αν κατάλαβα.
257. M1: Να χαμηλώσει ή να ψηλώσει ο αριθμός. Δεν μπορεί να μείνει ίδιος.
258. E: Αυτό γιατί το λες;
259. M1: Γιατί αν κάνεις $51+72$ θα μεγαλώσει ο αριθμός, δεν θα μπορεί να μείνει ίδιο.
260. E: άρα σ' ενοχλεί που είναι μέσα στην παρένθεση στο ένα το $51+72$ και στο άλλο δεν είναι;
261. M1: Ε ναι
262. E: Στο πρώτο μέλος ποια πράξη θα έκανες πρώτα;
263. M1: Την παρένθεση. Κάθε άσκηση που έχει παρένθεση θα κάνω πρώτα την παρένθεση.
264. E: Οκ, και στο 2ο μέλος τι θα έκανες πρώτα.
265. M1: αυτό που θα μου φαινόταν ίδιο. Θα άρχιζα από την αρχή πιστεύω. $40*51$.
266. E: Τυχαία; για ευκολία; Όπως σε βολεύει;
267. M1: Ναι, το κάνω και γι' αυτό αλλά το κάνω κι επειδή, στις περισσότερες ασκήσεις, θα το έκανα απ' την αρχή, από μπροστά προς τα πίσω.
268. E: Οκ, και γιατί όμως θα έβγαζε διαφορετικό αποτέλεσμα το πρώτο με το δεύτερο μέλος;
269. M1: Εεε, επειδή νομίζω αν κάνεις εε πρόσθεση θα σου έβγαζε μεγαλύτερο αριθμό και αν σου έδινε, ξέρω γω, $40*51$ θα σου έδινε ή μεγαλύτερο αριθμό απ' την πρόσθεση ή μικρότερο.
270. E: Τι εννοείς μεγαλύτερο αριθμό απ' την πρόσθεση ή μικρότερο; Εννοείς από το αν είχες $40+51$;
271. M1: Εεε, ναι. Θα μου έβγαζε, ξέρω γω, ναι.
272. E: Ας πούμε αν είχες μικρούς αριθμούς πως θα το έκανες; Για πες μου ένα παράδειγμα.
273. M1: Αν έκανα $1+2$ που θα μου έβγαζε 3 και το έκανα επί 2 πάλι. (σκέφτεται) Ναι αυτό αν έκανα $1+2 *3$ θα έκανα πρώτα το $1+2$ και θα μου έβγαζε 3. Και αν το 3 το πολλαπλασίαζα με το 3 θα μου έβγαζε 9. Ενώ αν έκανα, εε, έβαζα παρένθεση $2*3$ και το άρχιζα από αυτό θα μου έβγαζε έξι και το έξι θα έπρεπε να το προσθέσω με το ένα οπότε θα έβγαζε 7.
274. E: Οκ, κατάλαβα. Άρα έχει σημασία το με ποια σειρά θα κάνεις τις πράξεις εννοείς.

275. M1: Ναι
276. E: Οκ πάμε στο β. Χωρίς να κάνεις πράξεις, θυμίζω.
277. M1: Μμ, ναι.
278. E: Ναι είναι ίδιο λες, γιατί;
279. M1: Για τον ίδιο λόγο με το α.
280. E: Θα κάνεις πρώτα ποια πράξη στο 1ο μέλος;
281. M1: Εεε, θα άρχιζα πρώτα με το 120:3 στο πρώτο και στο 2ο επειδή είναι η παρένθεση θα έκανα το ίδιο πράγμα.
282. E: Οκ πάμε στο γ.
283. M1: (Σκέφτεται) Μμμ, ναι.
284. E: Ναι λες, γιατί;
285. M1: Γιατί, θα μπορούσε να έχουν και τα δύο την ίδια...πως να το πω.. το ίδιο σύνολο στο τέλος, όπως και να το κάνεις. Μπροστά και πίσω.
286. E: Αχά, οκ πάμε στο δ.
287. M1: ΕΕΕ, όχι.
288. E: Όχι γιατί;
289. M1: Για τον ίδιο λόγο με το α και το β.
290. E: Ποια η διαφορά από το γ.
291. M1: Εεε, δεν ξέρουμε πόσο θα είναι... δεν ξέρουμε πόσο θα είναι το σύνολο.
292. E: Είναι κάτι που σε ενοχλεί σε σχέση με το γ πιστεύεις;
293. M1: Στο γ το $9 \cdot 2$ μου θυμίζει να είναι.. να ισούται μαζί του, να ισούται με το..18 ενώ το 3 ή το 5 δεν ισούται με το 27.
294. E: Δεν μπορείς να κάνεις εύκολη πράξη μαζί του εννοείς;
295. M1: Ναι
296. E: Τι εννοείς να ισούται το 9 με το 18;
297. M1: Εεε, θα υπάρχει ένα νούμερο που μαζί με το 9..μπορείς ή να το προσθέσεις ή να το αφαιρέσεις, θα σου φέρει 18.
298. E: Οκ
299. M1: Και με το 5 και το 3 αλλά τώρα στην τέτοια, εδώ πέρα, στην άσκηση.
8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι/Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι/Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι/Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι/Όχι.
- 300.
301. E: Εντάξει, πάμε στην 9. Λοιπόν, η 9 λέει «Γράψε ένα σενάριο που να περιγράφει κάθε μία από τις δύο εκφράσεις που βλέπεις παρακάτω.» Προσπάθησε να σκεφτείς ένα προβληματάκι.
302. M1: Δηλαδή, να κάνω ξέρω γω $3 \cdot 2 + 5$ έτσι;

303. E: $(3+2)*5$; Θέλω να κάνεις ένα πρόβλημα που θα δηλώνεται αυτή η σχέση.
304. M1: Ααα, δύο μητέρες...
305. E: Ναι
306. M1: Είχανε η καθεμία από 5 σοκολατάκια για τα 3 παιδιά τους και έπρεπε να τα μοιράσουν, σε πόσα θα έπρεπε να τα μοιράσουν;
307. E: Οκ, άρα δύο μητέρες, η καθεμία είχε 3 παιδιά και από 5 σοκολατάκια;
308. M1: Και από 5 σοκολατάκια και έπρεπε να τα μοιράσουν.
309. E: Αχά, οκ εντάξει. Για δοκίμασε και στο β.
310. M1: Μμμ, νομίζω το ίδιο πράγμα θα έκανα. Θα το έβαζα έτσι, αλλά θα μπορούσα να αλλάξω σενάριο, ξέρω γω. Να πω... εε, υπάρχουνε 5 τραπέζια και είμαστε 3 άτομα και περιμένουμε άλλα δύο.
311. E: Αχά
312. M1: Αυτό δεν νομίζω να βγάζει νόημα, αλλά...'
313. E: Άρα το δύο επί 5 τι δηλώνει σε αυτό που λες;
314. M1: Ότι θα μπορούσα στο β να κάνω το αντίθετο. Αντί να αρχίσω από μπροστά να αρχίσω από πίσω.
315. E: Εσύ αν ξεκινούσες να το λύσεις από που θα το έλυνες;
316. M1: Από το $3+2$
317. E: Οκ, θες να ξαναναφέρεις το πρόβλημά σου αν το θυμάσαι;
318. M1: Έχω 5 τραπέζια και είμαστε 3 άτομα και περιμένουμε άλλα δύο άτομα και πρέπει να κάτσει...Α! Περίμενε περίμενε θα το αλλάξω. Είμαστε...έχουμε 5 τραπέζια και το κάθε τραπέζι έχει δύο καρέκλες και είμαστε +3 άτομα, πώς θα κάτσουμε ο καθένας.
319. E: Οκ, πάμε στο 10. Το 10 πρέπει να το λύσεις.
320. M1: Να λύσω το 10. Εεε, θα αρχίσω με την παρένθεση. Και αυτό που θα βγει το 11 με το 7 θα το κάνω δια 4. Μμμ (δεν μιλάει 30')
321. E: Τι λες;
322. M1: Πάω να το αρχίσω από την παρένθεση και μου βγαίνει 4
323. E: Ναι
324. M1: Και αν το διαιρέσω το 4 με το 4 θα μου βγει 0,044. Αλλά δεν ξέρω τώρα, τι να κάνω με το επί που έχει το 6.
325. E: $4:4$ ΣΟΥ ΒΓΑΙΝΕΙ 0,044;
326. M1: Ναι
327. E: Οκ, και τι σε μπερδεύει αυτό;
328. M1: Έχει το 6 από δίπλα το επί και δεν ξέρω τι να το κάνω.
329. E: Πώς θα συνέχιζες από εδώ τις πράξεις;
330. M1: Θα έκανα πρώτα $9+6$ και αυτό που θα μου...κι αυτό που θα μου έβγαине θα το διαιρούσα με το 0,044.
331. E: Άρα τι έχεις μετά;

332. M1: $15 : 0,044$
333. E: Θα το διαιρούσες μετά;
334. M1: Ναι
335. E: Γιατί το διαιρείς;
336. M1: Γιατί κάπως πρέπει να χρησιμοποιήσω τον πολλαπλασιασμό.
337. E: Και τον πολλαπλασιασμό τον κάνεις διαίρεση;
338. M1: Α! Το έκανα διαίρεση;
339. E: Ναι
340. M1: Περιμένετε περιμένετε, α εντάζει εντάζει θα το πολλαπλασιάσω με το $0,044$ και θα μου βγει $0,66$.
341. E: Άρα $15 * 0,44$ βγαίνει $0,66$;
342. M1: Ναι
343. E: Οκ, άρα έκανες πρώτα την πράξη μέσα στη διαίρεση, μετά διαίρεσες το 4 με το 4 και μετά κάνεις $9 + 6$ που βγαίνει 15 επί $0,44$.
344. M1: Ναι
345. E: Το έχεις σημειώσει αυτό; Για να μου το στείλεις μετά.
346. M1: Ναι
347. E: Δύο ασκησούλες μένουνε. Στο 11 θέλω να διαγράψεις πάλι τις αγκύλες που είναι περιττές.
348. M1: Εεε, στο α είναι περιττή η αγκύλη που έχει το 7 . Και η δεύτερη αγκύλη που έχει
349. E: Η τελευταία;
350. M1: Ναι
351. E: Γιατί θεωρείς ότι δεν αλλάζει το αποτέλεσμα ε;
352. M1: Ναι, εε, στο β η πρώτη αγκύλη και η τελευταία.
353. E: Αχά
354. M1: Εεμ στο γ , οι δύο αγκύλες, η πρώτη πάλι και η τελευταία. Και στο δ η τελευταία αγκύλη και η πρώτη.
355. E: Εντάζει για έλεγξέ τα, Στο πρώτο η μέσα που κράτησες χρειάζεται;
356. M1: Εμ, ναι...αν θέλω...ναι.
357. E: Εδώ το - είναι από το 7 ;
358. M1: Ναι
359. E: Το - έξω από την παρένθεση πηγαίνει στο 7 ;
360. M1: Ναι
361. E: Οκ, στο β , έβγαλες τις ακριανές, οι άλλες χρειάζονται;
362. M1: Στο $3 * 2$ ναι, στο 7 νομίζω όχι δεν χρειάζονται.
363. E: Στο $3 * 2$ αν δεν υπήρχαν θα άλλαζε το αποτέλεσμα;
364. M1: (σκέφτεται) Εμμ, όχι.
365. E: Άρα μπορείς και να τις βγάλεις;

366. M1: Εμ, ναι. Δεν θα αλλάξει το πρόβλημα, μπορώ να τις βγάλω.
 367. E: Στο γ οι άλλες χρειάζονται;
 368. M1: Ναι νομίζω, θα χρειαστούν
 369. E: Οκ, για να κάνεις πρώτα τη διαίρεση;
 370. M1: Ναι
 371. E: Άμα δεν υπήρχαν τι θα έκανες πρώτα;
 372. M1: 7-3, θα ήθελα να το αρχίσω από την αρχή.
 373. E: Οκ, θα το ξεκινούσες από την αρχή, εντάξει. Και στο τελευταίο χρειάζονται
 λες.
 374. M1: Ναι
 375. E: Άμα δεν υπήρχανε τι θα έκανες πρώτα
 376. M1: Νομίζω και πάλι από την αρχή, θα άρχιζα από μπροστά.

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $-(7 - (3-3))$

β. $-(7) - (3-2)$

γ. $7 - (3:2)$

δ. $-(7 : (3+2))$

377.
 378. E: Ωραία, πάμε και στην τελευταία. Μια τελευταία ανάσα πάρε. Λοιπόν, η 12 λέει: «Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. » Ο Κώστας έδωσε τη λύση α και ο Γιώργος τη λύση β για το πρόβλημα. Θέλω να μελετήσετε πως το σκέφτηκε ο καθένας και γιατί έδωσε αυτή την απάντηση.
 379. M1: Μμμ
 380. E: Ξαναδιάβασε το πρόβλημα για να το καταλάβεις κι εσύ.
 381. M1: Νομίζω ότι το α το έκανε, άρχισε με το $12 * 20$
 382. E: $11 * 20$ ναι
 383. M1: και μετά αυτό που βρήκε το έκανε αφαίρεση με το 20.
 384. E: Με το 120. Α! Διαίρεση μήπως θες να πεις;
 385. M1: Εεε, ναι αυτό. Και μετά αυτό που βγήκε το έκανε επί 120.
 386. E: Επί 120;
 387. M1: Ναι
 388. E: Στο 1ο;
 389. M1: Ναι
 390. E: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι σημαίνει η παρένθεση; Και στα 2. Για τον καθένα τι σημαίνει; Τι έβαλε μέσα στην παρένθεση;
 391. M1: Ε, στο πρώτο νομίζω ήθελε απλώς να αρχίσει, μμμ...
 392. E: Διάβασε ακόμη μία φορά το πρόβλημα άμα θες.

393. M1: Ε, το β έχει ξεχάσει το, ένα νούμερο. Οπότε έβαλε την παρένθεση για να αρχίσει με κάτι και να μπορέσει να βγει 5. Και στο α έβαλε όλους τους αριθμούς αλλά έβαλε την παρένθεση για να τον διευκολύνει να βρει πως να βρει το 5. Δηλαδή πως
394. Ε: Οκ, και στο β ποιον αριθμό ξεχάσε;
395. M1: Ε, ξεχάσε το εικο... περιμένετε.. α όχι, επειδή.. είδα άλλο. Το 5 δεν έπρεπε να μπει μέσα;
396. Ε: Στην ουσία πρέπει να εξετάσεις τη σημασία της παράστασης. Τι έχει κάνει ο καθένας.
397. M1: Τότε ο α έβαλε ένα παραπάνω 20 απ' ότι έπρεπε.
398. Ε: Οκ. Αυτά! Τελειώσαμε. Ευχαριστώ πάρα πολύ!

M2 - Β' Γυμνασίου

1. Ε: Λοιπόν, θα σου πω κάποιες οδηγίες. Απλά θα σου διαβάσω τις ερωτήσεις και θα μου λες φωναχτά τη σκέψη σου. Άμα χρειαστεί σε κάποιο σημείο να γράψεις μετά θα μου το στείλεις φωτογραφία. Εντάξει;
2. M2: Ναι
3. Ε: Είναι περίπου 12 ερωτήσεις, στο λέω για να έχεις στον νου σου περίπου που βρισκόμαστε και δεν έχει χρόνο. Επίσης, δεν με νοιάζει αν είναι σωστό ή λάθος, θέλω απλά να μου λες τι σκέφτεσαι.
4. M2: Ναι
5. Ε: Ωραία, αρχικά θέλω να σε ρωτήσω, τι πιστεύεις ότι είναι οι παρενθέσεις;
6. Πώς τις έχεις εσύ στο μυαλό σου;
7. M2: Εμ..ντάξει οι παρενθέσεις για κάποιο λόγο μπήκανε, γι' αυτό θεωρώ ότι είναι σωστό. Δηλαδή ότι έχει μέσα.. τα μαθηματικά είναι σωστά για μένα. Δηλαδή.. για κάποιο λόγο μπήκανε.
8. Ε: Και πιστεύεις ότι βοηθάνε κάπως οι παρενθέσεις;
9. M2: Ε, ντάξει δεν ξέρω τώρα, εντάξει. Απλά ξέρω ότι για κάποιο λόγο μπήκανε.
10. Ε: Αχά. Αν εξηγούσες δηλαδή σε ένα παιδί Δημοτικού τι είναι οι παρενθέσεις τι θα του έλεγες; Στον αδερφό σου άμα έπρεπε να το εξηγήσεις;
11. M2: Εεε, τι θα του έλεγα; (Σκέφτεται)
12. Ε: Τι κάνουν για σένα οι παρενθέσεις;
13. M2: Είναι προτεραιότητα ας πούμε, αυτό.
14. Ε: Εντάξει, δηλώνουν προτεραιότητα λες.
15. M2: Ναι
16. Ε: Εντάξει, πάμε στην επόμενη ερώτηση. Θέλω να μου πεις, όπως τα βλέπεις ποιο πιστεύεις δηλώνει τις παρενθέσεις;

46. M2: Τη διαίρεση.
 47. E: Οκ
 48. M2: Άρα δεν χρειάζεται.
 49. E: Ούτε στο πρώτο θα έβαζες παρένθεση τελικά;
 50. M2: Στο πρώτο νομίζω θα έβαζα, ή όχι;... Όχι! Επειδή είναι το ίδιο, οπότε...
 51. E: Εντάξει, οπότε δεν βάζεις,,,
 52. M2: Ναι
 53. E: Πάμε στο γ.
 54. M2: Στο γ θα έβαζα $2+5*4$ και το...(την παρένθεση) στο $2+5$ επειδή πρέπει να κάνει το +.
 55. E: Ναι, γιατί;
 56. M2: Για να προηγηθεί τέτοιο, ας πούμε. Για να κάνω $2+5$ 7 και $7*4$.
 57. E: Οκ, αν το έγγραφες χωρίς παρένθεση τι θα γινότανε πρώτα;
 58. M2: Το $5*4$.
 59. E: Γιατί;
 60. M2: Γιατί έχει προτεραιότητα
 61. E: Εντάξει. Πάμε στο δ.
 62. M2: Εεε, κάνεις ας πούμε $6+7 - 10$.
 63. E: Οκ αλλά πριν κάνεις την πρόσθεση, πώς θα το έγγραφες;
 64. M2: Εε, $6+7 - 9+1$
 65. E: Έτσι; (όπως πάνω)
 66. M2: Ναι
 67. E: Βγαίνει - 10;
 68. M2: Όχι, θα το έγγραφα -10.
 69. E: Αχά. Θα μπορούσαν να σε βοηθήσουν κάπως οι παρενθέσεις;
 70. M2: Εεμ, όχι. Θα έκανα αυτό που είπα πριν το $6+7-10$.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. $(2+5)+4$

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. $(4:2)+3$

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. $(2+5) \cdot 4$

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. $6+7-10$

$6+7-9+1$

71.

72. E: Εντάξει, πάμε στο επόμενο. Εδώ θέλω να τις διαβάσεις και όποιες παρενθέσεις δεν θεωρείς σημαντικές να τις διαγράψεις, που θα μπορούσαν να μην υπάρχουν δηλαδή.
73. M2: Ωραία. (σκέφτεται) Θα έβγαζα και, το α το β και το γ.
74. E: Αχά
75. M2: Επειδή έχουν ήδη προτεραιότητα, οπότε δεν χρειάζονται.
76. E: Οκ, και στο τελευταίο;
77. M2: Όχι δεν θα το έβγαζα.
78. E: Γιατί αλλιώς τι θα είχε προτεραιότητα;
79. M2: Το επί.

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + \{3 : 2\}$

β. $7 - \{3 \cdot 3\}$

γ. $\{7 \cdot 3\} - 3$

δ. $(7+3) \cdot 2$

- 80.
81. E: Οκ. Μετά, στο 5. «Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2+4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14.» Θέλω να μου πεις ποια είναι η δική σου γνώμη;»
82. M2: Πόσο βγαίνει;
83. E: Ναι και αν μπορεί να βγαίνει και 18 και 14.
84. M2: (σκέφτεται) Εε, δεν θα είναι 18, ούτε μπορεί να είναι... 14 μόνο! Επειδή πρώτα κάνεις τον πολλαπλασιασμό $4 \cdot 3$ 12 και 2 14. Οπότε μόνο το 14.
85. E: Αχά, ξέρεις πως βρήκε 18;
86. M2: Ναι, έκανε $2+4 \cdot 6$ επί 3 18. Και αυτό είναι λάθος επειδή έκανε πρώτα το +.
87. E: Οκ. Συνεχίζω. «Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ;» Άρα από αυτές ποια ή ποιες εκφράζουν το παραπάνω πρόβλημα.
88. M2: Εεε, (παύση) Νομίζω το β.
89. E: Οκ γιατί;
90. M2: Γιατί πρώτα κάνεις την παρένθεση που είναι 30 και μετά κάνεις ας πούμε $50 - 30$ που βγαίνει 20 ευρώ που έμειναν. Εγώ θεωρώ το β είναι.
91. E: Άρα η παρένθεση τι δηλώνει για εσένα; Τι σημαίνει για το πρόβλημα;
92. M2: Είναι προτεραιότητα πράξεων.
93. E: Τι υπάρχει μέσα στην παρένθεση;
94. M2: Το +
95. E: Σε σχέση με το πρόβλημα, τι έχεις μέσα στην παρένθεση; Σε τι αντιστοιχεί;

96. M2: Είναι αυτά τα λεφτά που έδωσα. Και τα πρόσθεσα όλα μαζί και μετά τα αφάιρεσα με το 50.
97. E: Εντάξει για δεξ και τα υπόλοιπα.
98. M2: Eεε, το α.
99. E: Γιατί;
100. M2: Γιατί από τα 50 που είχε ας πούμε έβαλε -10 για τα γλυκά και μετά όταν πήγε να πάρει τα 20 για το κέικ.
101. E: Αχά.
102. M2: Το γ και το δ δεν είναι. Το α και το β είναι.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$

β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$

δ. $50 - 10 + 20$

- 103.
104. E: Ωραία. Πάμε στην 7. Η 7 λέει ότι έχεις αυτές τις ιδιότητες. Πρέπει να δεις αν είναι αληθείς, αν δεν είναι πρέπει να χρησιμοποιήσεις παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.
105. M2: Α, εε...Πρέπει να κάνουμε.. να βάλουμε παρένθεση στο $5 + 5$. $5+5$ 10 και μετά $15-10$ 5.
106. E: Εντάξει, άρα όχι λες και έβαλες παρενθέσεις και το διόρθωσες. Πάμε στο β.
107. M2: Μμμ. Περιμένετε να σκεφτώ. Θα βάλω παρένθεση στο $5*3$ όπως την άλλη φορά και μετά θα το κάνω μείον 20 και πάλι όχι.
108. E: Εντάξει, άμα δεν είχε παρένθεση θα έβγαине διαφορετικό αποτέλεσμα;
109. M2: Ορίστε;
110. E: Άμα δεν έχει παρένθεση, βγαίνει διαφορετικό αποτέλεσμα;
111. M2: Ναι
112. E: Γιατί τι πράξη κάνεις πρώτα;
113. M2: Κάνω ας πούμε εε, αα όχι δεν χρειάζεται παρένθεση.
114. E: Για δεξ το ξανά.
115. M2: Όχι δεν χρειάζεται παρένθεση.
116. E: Εντάξει. Άρα ποια πράξη κάνεις πρώτα;
117. M2: $5*3$ μείον... 15 και μετά 20 μείον 15 5.
118. E: Ωραία
119. M2: Το γ. Eεε (παύση) Eεε. (Σκέφτεται και κάνει υπολογισμούς χαμηλόφωνα)
Δεν το κατάλαβα.
120. E: Πότε είναι αληθής η ιδιότητα;
121. M2: Δεν κατάλαβα το αποτέλεσμα που έβγαλε, $5*3$.
122. E: Πόσο κάνει αυτό;

123. M2: 15; Άρα είναι 15 το τέτοιο; (2ο μέλος)
124. E: Ναι.
125. M2: Άρα πρέπει να βάλουμε παρένθεση στο 3 και στο +2.
126. E: Στο 3+2;
127. M2: Ναι
128. E: Εντάξει, οπότε τώρα τι βγαίνει.
129. M2: 15
130. E: Άρα έτσι δηλώνεις προτεραιότητα, τι θα κάνεις πρώτα;
131. M2: Ναι
132. E: Εντάξει, πάμε στο δ.
133. M2: Ωραία. (Παύση, σκέφτεται) Νομίζω δεν χρειάζεται κάτι. Όχι περιμένετε περιμένετε. Άμα βάλουμε...γίνεται να βάλουμε παρένθεση στο ίσον, ας πούμε, στο 6-2;
134. E: Όπου θες βάζεις παρένθεση.
135. M2: Άρα εκεί θέλω να βάλω για να είναι μηδέν όλα.
136. E: Εδώ εννοείς; (6-2)
137. M2: Ναι
138. E: Μηδέν όλα, τι εννοείς;
139. M2: Δηλαδή, άμα βάλω παρένθεση, και το κάνω 4, θα είναι 12: 4 θα κάνει 3 και το άλλο όμως που είναι 12: 4 θα είναι 3 και θα έχουμε 3 και 3.
140. E: Εντάξει. Και αυτό το κάνεις γιατί ποια πράξη θα κάνεις πρώτα;
141. M2: Το 6-2
142. E: Ενώ χωρίς την παρένθεση;
143. M2: Το 12:6.
144. E: Γιατί;
145. M2: Γιατί;
146. E: Γιατί θα έκανες πρώτα την διαίρεση και όχι την αφαίρεση;
147. M2: Γιατί είναι προτεραιότητα πράξεων η...η διαίρεση.

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 \left(5 + 5 \right) = 5$ Ναι / Όχι. β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $\sqrt{3 + 2} \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι. δ. $12 : 4 = 12 \left(6 - 2 \right)$ Ναι / Όχι.

- 148.
149. E: Οκ. Πάμε στην 8. Η 8 τώρα θέλω, χωρίς να υπολογίσεις, τώρα δεν θα κάνεις πράξεις, απλά θέλω όπως τα κοιτάς να αναγνωρίζεις αν είναι αληθείς οι σχέσεις ή όχι.
150. M2: Α, όχι το 1. (α) (απάντησε κατευθείαν)

151. E: Γιατί;
152. M2: E δεν πρόλαβα να το κοιτάξω γι' αυτό λέω όχι.
153. E: Καλά για δεξ το και πες μου.
154. M2: Επειδή πρώτα θα κάνεις ας πούμε στο α θα κάνεις το 51 +72 και μετά ότι βγει θα κάνεις πολλαπλασιασμό με το 40 και το άλλο ας πούμε είναι, θα κάνεις $40*51+7219:54$
155. E: Ωραία, άρα θα έχεις διαφορετικό αποτέλεσμα;
156. M2: Ναι
157. E: Εντάξει. Πάμε στο β.
158. M2: Εεε, νομίζω, εε...ναι. Θα έχω το ίδιο.
159. E: Αχά
160. M2: Το ίδιο θα έχω.
161. E: Οκ, γιατί;
162. M2: Επειδή έτσι κι αλλιώς και χωρίς παρένθεση πάλι θα προηγούνται το δια απ' το συν.
163. E: Ωραία πάμε στο γ.
164. M2: Στο γ...πάλι ναι. Το ίδιο είναι.
165. E: Δεν έχει διαφορά το τι θα κάνεις πρώτα ε;
166. M2: Α όχι όχι
167. E: Εγώ ερωτήσεις κάνω, μη σε μπερδεύω. Εσύ θα μου πεις. Χωρίς να κάνεις πράξεις θυμίζω.
168. M2: Όχι, σκέφτομαι. Μμμ, όχι. Εφόσον... επειδή πρέπει πάντα από τα αριστερά προς δεξιά να πάμε άμα είναι ίσα, ας πούμε. Άρα δεν θα έχω το ίδιο.
169. E: Οκ, έχει σημασία η πράξη που έχεις πιστεύεις;
170. M2: Μμ, όχι δεν είναι, ας πούμε, πιο μεγάλη η πιο μικρή, ένα από τα δύο αλλά με τη σειρά δεν το κάνουμε;
171. E: Άρα εδώ (δεύτερο μέλος) σε μπερδεύει που...πώς θα το κάνεις ενώ εδώ θα πάει $18+9$ ενώ αυτό (δεν;) θα πάει έτσι;
172. M2: Ναι
173. E: Οκ
174. M2: Το δ...Λέω πως πάλι όχι. Όχι καθίστε, όχι περιμένετε. Ναι, θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα.
175. E: Οκ, θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα λες. Πιστεύεις ότι έχει σημασία ότι έξω από τη μία παρένθεση έχει + και έξω από την άλλη έχει πλην; (γ και δ)
176. M2: Μμ, ναι. Ναι επειδή είναι διαφορετικά ναι.
177. E: Οκ άρα είπες ότι το γ είναι όχι και το δ είναι ναι, ότι είναι αληθής.
178. M2: Ναι

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι / Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

- 179.
180. E: Οκ, πάμε στην 9.
181. M2: Και πόσα έχουμε; 12;
182. E: Ναι. Λοιπόν θέλω εδώ πέρα να σκεφτείς ένα σενάριο που να περιγράφει την α και ένα σενάριο για τη β.
183. M2: Τι εννοείτε σενάριο;
184. E: Να φτιάξεις εσύ ένα πρόβλημα που θα εκφράζει αυτή την παράσταση.
185. M2: Ωραία ας πούμε, $5+3$ σε παρένθεση, διά 2.
186. E: Όχι, δες λίγο. Έχεις το $(2+3)*5$. Θέλω ένα πρόβλημα που θα μιλάει για αυτή την παράσταση.
187. M2: Ναι...ναι.
188. E: Ή δοκίμασε να κάνεις το β πρώτα αν πιστεύεις ότι σου είναι πιο εύκολο.
189. M2: Δεν κατάλαβα τι πρέπει να κάνουμε όμως.
190. E: Λοιπόν, είναι το αντίστροφο από το 6, που είχες ένα πρόβλημα και έπρεπε να βρεις ποια παράσταση την εκφράζει. Είναι το αντίστροφο. Έχεις την παράσταση και πρέπει να την εκφράσεις με λόγια.
191. M: Ναι...δηλαδή πρέπει να το περιγράψω;
192. E: Ναι να το περιγράψεις. Να βγάλεις ένα για αυτό πρέπει. (δείχνω την παράσταση)
193. M2: Ααα, κατάλαβα, κατάλαβα. Ας πούμε...(σκέφτεται 20") Ας πούμε, εγώ πήγα να πάρω...5 είδη φρούτων ας πούμε και πήρα μπανάνες πορτοκάλια μήλα αχλάδια και φράουλες ας πούμε. Και...ας πούμε, πήρα...εε...και όχι. Πήρα, ας πούμε, 3 κιλά μπανάνες και δύο κιλά φράουλες και..., όχι καθίστε. Πήρα τη μπανάνα την φράουλα τα πορτοκάλια, τα αχλάδια και τα σταφύλια ξέρω γω, 5 φρούτα και πήρα ας πούμε, επί 5 κιλά. Πήρα απ' το καθένα 5 κιλά, όχι. Και όλα μαζί έκαναν 5 κιλά.
194. E: Για προσπάθησε να μηδενίσεις τη σκέψη σου. Θα σε πάω λίγο στην αρχή που είπες ότι πήρες τρία κιλά μήλα, δεν θυμάμαι ακριβώς πώς το είπες, και 2 κιλά μπανάνες. Πώς μπορείς να δηλώσεις το επί 5;
195. M2: Παίρνοντας, ας πούμε...εμμ...Παίρνοντας, ας πούμε επί 5 σακούλες;
196. E: 5 σακούλες που η καθεμία περιέχει;
197. M2: ...
198. E: Αυτά που είπες.

199. M2: Ναι
200. E: Εντάξει, τώρα έχεις το β. Μπορείς να αλλάξεις το πρόβλημα που πρότεινες για να δηλώνει αυτή την παράσταση.
201. M2: Ωραία, πήρα δύο φρούτα, μπανάνα και φράουλες, από 5 σακούλες και μου έδωσε δώρο 3 κιλά.
202. E: 3 κιλά τι;
203. M2: 1,5 κιλό ας πούμε μπανάνες και 1,5 κιλό φράουλες.
204. E: Οκ. Εντάξει πάμε στο 10. Θέλω να λύσεις αυτή την παράσταση.
205. M2: Ωραία, περιμένετε. (κάνει προετοιμασία για να γράψει) Το επί είναι το χ;
206. E: Ναι ναι
207. M2: Ωραία. (παύση) Εμ...εεμ. (λύνει)
208. E: Θεε να μου πεις και τι κάνεις;
209. M2: Ναι τώρα, το λύνω. Νομίζω βγαίνει...15.
210. E: Οκ, για πες μου τι έκανες πρώτα.
211. M2: Έκανα ας πούμε, 9 συν 6 επί 4 διά 4. Εε, μετά έκανα $9+24$, που βγήκε το $6 \cdot 4$, διά 4 και μετά έκανα $9+6=15$.

$$10. \quad 9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$$

$$9 + 6 \times 4 : 4 = 9 + 24 : 4 = 9 + 6 = 15$$

- 212.
213. E: Εντάξει. Πάμε στην 11. Θέλω να διαγράψεις τις παρενθέσεις όπου δεν είναι απαραίτητες.
214. M2: Ωραία. Την...αυτή την παρένθεση στο 7, αυτή που είναι στο 3 τη δεύτερη.
215. E: Άρα την 7 την πρώτη λες;
216. M2: Ναι
217. E: Στο 3 αυτήν; Την ενδιάμεση ή την τελευταία;
218. M2: Την τελευταία, η 2η. (β) Απ' το 7 την πρώτη και απ' το 2 το τελευταίο.
219. E: Οκ
220. M2: Απ' το γ την πρώτη και την τελευταία. δ την 7 την πρώτη και την τελευταία.
221. E: Εντάξει, για ξαναδές τα μια τώρα και δεξ άμα συμφωνείς και αν πρέπει να διαγράψεις κάτι ακόμη ή αν διέγραψες κάτι παραπάνω.
222. M2: Νομίζω...αν διέγραψα κάτι παραπάνω;
223. E: Ναι. Στο δ θα είχε άλλο αποτέλεσμα αν έβγαζες και τη δεύτερη παρένθεση;
224. M2: E ναι αφού έχουμε τέτοιο...διαίρεση.
225. E: Οκ, στο β; Θα είχε διαφορά αν έβγαιναν όλες οι παρενθέσεις;
226. M2: A όχι, άρα τις διαγράφουμε όλες στο β.
227. E: Στο γ;

228. M2: Στο γ...πάλι όχι. Θα τις διέγραφα.
 229. E: Και κρατάς μόνο στο α είπες. Γιατί τις κρατάς στο α;
 230. M2: Δεν ξέρω έτσι μου...μου έρχεται. Δεν ξέρω.

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $\cancel{7} - (3-3)\cancel{\lambda}$ β. $\cancel{7}\cancel{\lambda} - (3-2)\cancel{\lambda}$

γ. $7 - \cancel{(3-2)}\cancel{\lambda}$ δ. $\cancel{7} : (3+2)\cancel{\lambda}$

231.
 232. E: Εντάξει. Πάμε στο τελευταίο και τελειώσαμε. «Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ.» Τώρα έχω δύο λύσεις. Ο Κώστας έδωσε την λύση α και ο Γιώργος έδωσε τη λύση β. Θέλω να τα διαβάσεις και να μου πεις πως το υπολόγισε ο καθένας. Γιατί έκαναν αυτές τις πράξεις δηλαδή; Τι δηλώνουν; Ξαναδιάβασε το πρόβλημα άμα θες για να το καταλάβεις.
 233. M2: Ποιος είναι πιο σωστός; Το α ή το β;
 234. E: Είναι και τα δύο σωστά, θέλω να μου πεις πως σκέφτηκε ο καθένας.
 235. M2: Α, έκανε ας πούμε, ο α, έκανε 11 οι μπάλες του μπάσκετ επί τα ευρώ, δηλαδή...και μείον τα 20 οι μπάλες ποδοσφαίρου.
 236. E:120
 237. M2: όλα αυτά και μετά έκανε διαίρεση τα...με τα 20 ευρώ και του βγήκαν 5 ευρώ.
 238. E: Καταλαβαίνεις γιατί κάνει ό,τι κάνει;
 239. M2: Εεε, δεν το ξέρω αυτό.
 240. E: Η παρένθεση δηλώνει αριθμό μπαλών ή χρήματα;
 241. M2: Νομίζω λεφτά.
 242. E: Γιατί το λες αυτό;
 243. M2: Δεν το ξέρω αυτό.
 244. E: Εντάξει. Δες και το β.
 245. M2: Το β είναι, ας πούμε, οι 11 μπάλες μείον την παρένθεση που είναι τα 120 ευρώ που έδωσε για τις μπάλες ποδοσφαίρου, διά τα 20 ευρώ. Που του έμειναν...και του έμειναν 5.
 246. E: Και τι δηλώνει η παρένθεση;
 247. M2: Τα 120 ευρώ που έδωσε συνολικά και τα 20 ευρώ που έδωσε για τη μία.
 248. E: Αχά. Εδώ η παρένθεση δηλώνει μπάλες ή λεφτά;
 249. M2: Το λέει πάνω, ευρώ.
 250. E: Όλη η παρένθεση;
 251. M2: Εεε, δεν ξέρω.
 252. E: Το 11 τι είπες είναι;

253. M2: Εεε, για τις 11 μπάλες του μπάσκετ.
254. E: Η παρένθεση τι δηλώνει;
255. M2: Αυτά που έχει ήδη.
256. E: Αχά. Οκ. Εδώ θα τελειώσουμε. Ευχαριστώ πάρα πολύ!

M3 - Β΄ Γυμνασίου

1. E: Θα σου πω μόνο κάποιες οδηγίες στην αρχή. Εγώ θα σου διαβάσω τις ερωτήσεις και θα μου λες φωναχτά τη σκέψη σου. Είναι 12 ερωτήσεις, στο λέω για να ξέρεις περίπου που θα βρίσκεσαι. Και δεν θα σου λέω αν είναι σωστό ή λάθος γιατί δεν με ενδιαφέρει αυτό αυτή τη στιγμή και επίσης δεν έχει χρόνο. Εντάξει;
2. M3: Ναι
3. E: Τέλεια! Πάμε να δούμε την πρώτη ερώτηση. Η πρώτη ερώτηση είναι «Τι είναι για σένα οι παρενθέσεις»;
4. M3: Οι παρενθέσεις; Στην παράσταση;
5. E: Εσύ όταν ακούς παρενθέσεις, τι σου έρχεται στο μυαλό;
6. M3: Ε...διαχωριστικό.. κάτι τέτοιο.
7. E: Λειτουργεί ως διαχωριστικό λες.
8. M3: Και σαν βοήθημα και με τα πρόσημα.
9. E: Και άμα το εξηγούσες σε ένα παιδί Δημοτικού τι θα του έλεγες ότι είναι οι παρενθέσεις;
10. M3: Κάτι σαν βοήθεια να.. πρέπει να κάνεις πρώτα την πράξη που είναι στην παρένθεση και μετά όλα τα υπόλοιπα.
11. Εντάξει, ευχαριστώ. Πάμε στην 2η ερώτηση. «Ποιο από τα παρακάτω ή ποια δείχνει ή δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων»
12. M3: Το δ.
13. E: Το δ, γιατί διαλέγεις αυτό;
14. M3: Γιατί έχει και τις παρενθέσεις αριστερά δεξιά και το 3.
15. E: Άρα επειδή έχει κάτι μέσα σε αντίθεση με το γ;
16. M3: Ναι

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;

- | | |
|--------|--------|
| α. (| β.) |
| γ. () | δ. (3) |

- 17.
18. E: Ωραία, πάμε στην 3. Στην 3 λέει: «Γράψε μία παράσταση για τα ακόλουθα χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού».

19. M3: Μπερδεύτηκα...
20. E: Έχεις το $2+5$ και πρέπει να προσθέσεις το 4. Πως θα το έγραφε αυτό;
21. M3: 2 συν 5 συν 4, παρένθεση στο 2 με το 5.
22. E: Άρα έτσι; $(2+5)+4$
23. M3: Ναι
24. E: Αχά, γιατί έβαλες σε παρένθεση το $2+5$;
25. M3: Για να ξέρω ποια πράξη να κάνω πρώτα.
26. E: Οκ, άρα πρώτα πρέπει να κάνεις το $2+5$;
27. M3: ...
28. E: Εγώ αυτό θα κάνω συνέχεια, θα σε ρωτάω. M3η σε μπερδεύω.
29. M3: (Σκέφτεται...)
30. E: Έχει σημασία με ποια σειρά θα κάνεις τις πράξεις;
31. M3: Ναι ναι (δεν ήξερε να απαντήσει γιατί το έβαλε σε παρένθεση, απλά για να το κάνει πρώτο)
32. E: Οκ, πάμε στο β.
33. M3: $(4:2) +3$
34. E: Γιατί βάζεις παρένθεση στο $4:2$; E: Άρα άμα είχες $4:2+3$ θα έκανες το $2+3$.
35. M3: Ναι ναι.
36. E: Οκ, γιατί;
37. M3: Γιατί... Νομίζω τα μπερδεύω...
38. E: Δεν πειράζει, άμα θες ξαναπάρτο απ'την αρχή άμα νομίζεις ότι θα σκεφτόσουν διαφορετικά.
39. M3: Πολλαπλασιασμοί-διαίρεσεις και προσθέσεις αφαιρέσεις. (Σκέφτεται φωναχτά)
40. E: Άρα ποια πράξη θα έκανες πρώτα εδώ;
41. M3: Τη διαίρεση.
42. E: Επειδή έχει προτεραιότητα;
43. M3: Ναι.
44. E: Θα έβαζες πάλι όμως τις παρενθέσεις;
45. M3: Ναι, όχι τόσο πολύ απλά για να το ξεχωρίσω κάπως.
46. E: Άρα μπορείς και να μην τις έχεις αλλά τις βάζεις για να το ξεχωρίσεις;
47. M3: Ναι.
48. E: Ωραία, πάμε στο επόμενο.
49. M3: Θα έκανα $2+5$ σε παρένθεση και μετά επί 4.
50. E: Ωραία και γιατί έβαλες παρένθεση εδώ;
51. M3: Για να κάνω το αποτέλεσμα από αυτά τα δύο πολλαπλασιασμό.
52. E: Οκ, πάμε στο δ.
53. M3: Οκ.. Τώρα, θα βάλω σε παρένθεση το.. και τα δύο βασικά σε παρένθεση.
54. E: Γιατί έβαλες παρένθεση;

55. M3: Γιατί πρώτα θα γίνουν οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και μετά τα υπόλοιπα.
56. E: Μπορούσες κάπου να μην βάλεις παρένθεση πιστεύεις;
57. M3: E.. Σε ένα από τα δύο ναι.
58. E: Σε ποιο;
59. M3: Στο $9+1$.
60. E: Στο $9+1$ δεν θα πείραζε και να μην έχεις παρενθέσεις λες.
61. M3: Ναι
62. E: Γιατί; Θα είχες αυτό μετά $(6+7)-9+1$. Έτσι;
63. M3: Ναι
64. E: Γιατί εδώ δεν χρειάζεται και στο πρώτο χρειάζεται; (στο $6+7$)
65. M3: Γιατί... δεν ξέρω πώς να το εξηγήσω. (Σκέφτηκε αρκετή ώρα)
66. E: Καλά δεν πειράζει.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4 . $(2+5)+4$

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3 . $(4:2) + 3$

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4 . $(2+5) \cdot 4$

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. $(6+7) - (9+1)$

$(6+7) - 9+1$

- 67.
68. E: Λοιπόν, πάμε στην 4. Εδώ θέλω να διαγράψεις όσες αγκύλες δεν θεωρείς απαραίτητες.
69. M3: Εε...Στο γ πιστεύω...και στο α. Αυτά.
70. E: Ωραία, γιατί θεωρείς ότι δεν χρειάζονται σ αυτά τα δύο;
71. M3: Ωραία, γιατί πάλι, προτεραιότητα των πράξεων. Πρώτα η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός και μετά οι προσθέσεις και αφαιρέσεις.
72. E: Οκ, στο β γιατί χρειάζονται;
73. M3: Και στο β θα τις βγάλουμε.
74. E: Γιατί τις βγάζεις;
75. M3: Γιατί πάλι προτεραιότητα.
76. E: Εντάξει, και στο δ γιατί τις κρατάς
77. M3: Γιατί το αποτέλεσμα που θα κάνω στα δύο το πολλαπλασιάζω...θα πολλαπλασιάσω μετά το αποτέλεσμα.
78. E: Οκ, άρα πρέπει να βρεις πρώτα το αποτέλεσμα μέσα;
79. M3: Ναι

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + \{3 : 2\}$

β. $7 - \{3 \cdot 3\}$

γ. $\{7 \cdot 3\} - 3$

δ. $(7+3) \cdot 2$

- 80.
81. E: Αχά. Ωραία, πάμε στην 5. «Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 * 3$ ισούται και με 18 και με 14, εσένα ποια είναι η γνώμη σου;»
82. M3: Είναι λάθος και τα δύο.. όχι α επί 3! Το 18 είναι μόνο σωστό.
83. E: Το 18 είναι σωστό; Πώς το βρήκες;
84. M3: Γιατί $2+4$ μας κάνει 6 και επί 3 18.
85. E: Οκ, στο $2+4*3$ γιατί επέλεξες να κάνεις πρώτα την πρόσθεση;
86. E: Ωραία πώς το βρήκες;
87. M3: Γιατί...κανονικά θα έπρεπε να έχει μία παρένθεση εκεί πιστεύω. Επειδή αν ήταν αλλιώς θα έβγαινε λάθος.
88. E: Πώς πιστεύεις ότι βγήκε το 14; Γιατί είπε και 18 και 14; Τι μπορεί να έκανε διαφορετικό;
89. M3: (Σκέφτηκε 10") Εεε.. έκανε πρώτα $4*3$. Και μετά πρόσθεσε το 2.
90. E: Οκ, και αυτό είναι λάθος;
91. M3: Ναι.
92. E: Οκ, ωραία, λοιπόν. Πάμε στην επόμενη (6). Έχει τέσσερις παραστάσεις. «Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ;»
93. M3: (Σκέφτεται) Ποιο είναι το σωστό;
94. E: Ναι. Ποιο ή ποια περιγράφουν αυτό το πρόβλημα.
95. M3: Το β.
96. E: Γιατί επιλέγεις το β;
97. M3: Γιατί 10 και 20 κάνει 30 μείον το 50 20.
98. E: Και τί είναι άρα αυτά που έχεις μέσα στην παρένθεση;
99. M3: Τα χρήματα που ξόδεψα.
100. E: Αχά, έλεγξε και τα άλλα πριν προχωρήσουμε.
101. M3: Μπορεί και το δ να ήτανε αλλά ήθελε να έχει παρένθεση.
102. E: Οκ, τα άλλα.
103. M3: Το γ έχει λάθος.. έπρεπε να έχει πρόσθεση ενώ έχει αφαίρεση (μέσα στην παρένθεση) και το α θα έπρεπε να έχει πρόσθεση και παρένθεση.
104. E: Θα έπρεπε να είναι πρόσθεση και παρένθεση λες ε; Σαν το β.
105. M3: Ναι

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$

β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$

δ. $50 - 10 + 20$

- 106.
107. E: Οκ. Προχωράμε στην επόμενη. Στην 7 θέλω να δεις αν οι σχέσεις που σου δίνω είναι αληθείς. Αν δεν είναι πρέπει να βάλεις εσύ παρένθεση για να τις κάνεις αληθείς.
108. M3: E, στο α είναι λάθος. Έπρεπε να έχει παρένθεση στο 5+5.
109. E: Ωραία, συνέχισε
110. M3: Είναι σωστό πιστεύω το β
111. E: Αχά, γιατί ποια πράξη κάνεις πρώτα;
112. M3: Τον πολλαπλασιασμό. Χρειάζεται μια παρένθεση το γ.
113. E: Που;
114. M3: Στο 3 και 2.
115. E: Ναι
116. M3: Και στο δ.. είναι λάθος.
117. E: Που θέλει παρένθεση;
118. M3: Στο... θέλει παρένθεση στο 6 και το 2, στο 6-2.
119. E: Τώρα είναι εντάξει;
120. M3: (Σκέφτεται) Έχω μπερδευτεί τώρα.
121. E: M3ην μπερδεύεσαι που σε ξαναρωτάω.
122. M3: ...
123. E: Εντάξει προχωράμε.

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - (5 + 5) = 5$ Ναι / Όχι

β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι

γ. $(3 + 2) \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι

δ. $12 : 4 = 12 : (5 - 2)$ Ναι / Όχι

- 124.
125. E: Ωραία, λοιπόν πάμε στο 8. Τώρα θέλω χωρίς να κάνεις πράξεις, θέλω όπως τα κοιτάς να αναγνωρίζεις αν είναι αληθείς ή όχι οι σχέσεις.
126. M3: ...
127. E: Χωρίς να κάνεις πράξεις ε;
128. M3: Το πρώτο... λάθος.
129. E: Γιατί;

130. M3: Γιατί όπως είναι εκεί το πρώτο, πριν το = στα αριστερά, όπως έχει παρένθεση πρέπει να έχει και στα δεξιά.
131. E: Στο πρώτο μέλος το 41 με τι πολλαπλασιάζεται;
132. M3: Με το αποτέλεσμα του 51 και του 72.
133. E: Ενώ στο 2ο;
134. M3: Με το 51 πολλαπλασιάζεται.
135. E: Εντάξει ευχαριστώ, πάμε στο β.
136. M3: Δεν χρειάζεται παρενθέσεις.
137. E: Άρα λες είναι σωστό.
138. M3: Ναι
139. E: Εντάξει, πάμε στο γ.
140. M3: Εδώ χρειάζεται παρενθέσεις, ναι.
141. E: Έπρεπε να είχε τις ίδιες παρενθέσεις εδώ;
142. M3: Ναι
143. E: Θα είχε άλλο αποτέλεσμα λες αν δεν είχε τις παρενθέσεις;
144. M3: Ναι.
145. E: Άρα θεωρείς ότι πρέπει να γίνει και στα δύο μέλη πρώτα η πράξη 9-4; Γι' αυτό χρειάζονται οι παρενθέσεις;
146. M3: Ναι
147. E: Εντάξει, πάμε στο δ.
148. M3: Εδώ θέλει παρενθέσεις στο 5+3.
149. E: Θα είχε διαφορετικό αποτέλεσμα χωρίς αυτές;
150. M3: Ναι

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $\underline{40} \cdot (51 + 72) = \underline{40} \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + \underline{9 - 4}$ Ναι / Όχι. δ. $27 - \underline{5 + 3} = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

- 151.
152. E: Εντάξει, πάμε στο 9. Στην 9 θέλω εσύ να γράψεις ένα σενάριο για αυτές τις δύο εκφράσεις, ένα μικρό προβληματάκι δηλαδή που θα εκφράζει αυτές τις δύο.
153. M3: (Σκέφτηκε αρκετή ώρα) Τώρα...δεν είμαι σίγουρος για αυτό που θα πω. Οτι μου 'ρθε τώρα έτσι.
154. E: Εντάξει, πες μου.
155. M3: Η γάτα μας γέννησε και έκανε 3 παιδιά. Μ3έσα στον επόμενο μήνα πολλαπλασιάστηκαν επί 5.
156. E: Για ξανά πες το μου γιατί δεν άκουσα την αρχή.

157. M3: Η γάτα μας γέννησε και έκανε 3 παιδιά και τώρα είναι 5. Μέσα στον επόμενο μήνα πολλαπλασιάστηκαν... Τα 'χω μπερδέψει τώρα. (Σκέφτεται...)
158. E: Ωραία, αυτά είναι. Για δοκίμασε.
159. M3: (Σκέφτεται αρκετή ώρα, περίπου 2 λεπτά) Εεε, στο σπίτι είχα δύο μήλα, αγόρασα άλλα 3 και την επόμενη μέρα, πήρα το πενταπλάσιο απ' όσα μήλα είχα. Για το α.
160. E: Εντάξει..
161. M3: (Για το β) $2*5$ δεν γράφει;
162. E: Ναι, $3+2*5$.
163. M3: (Σκέφτεται 1')
164. E: Μπορείς να δοκιμάσεις να διαμορφώσεις το ίδιο πρόβλημα για να σημαίνει το β.
165. M3: Τα...μπερδεψα τώρα.
166. E: Σκέψου από την αρχή.
167. M3: (Περνάει μισό λεπτό)
168. E: Τι σε μπερδεύει εδώ;
169. M3: Το δύο επί πέντε δεν ξέρω τι να κάνω. Μπορώ να κάνω την πράξη;
170. E: Όχι, δεν μπορείς.
171. M3: Δεν ξέρω πώς να το πω.
172. E: Δοκίμασε κάτι, μπορεί να είναι εντάξει.
173. M3: (Ακούγεται αποφασισμένος) Πήρα δύο τσαμπιά μπανάνες, το καθένα είχε 5 μπανάνες και ένα ακόμη που είχε 3.
174. E: Ωραία, πάμε στο 10. Στην 10 θέλω να λύσεις αυτή την παράσταση.
175. M3: (Λύνει μόνος του για 2 λεπτά.) Την έκανα.
176. E: Πόσο βρήκες;
177. M3: 55
178. E: Και για πες μου κι εμένα τι έκανες;
179. M3: Δεν έβαλα κάπου παρενθέσεις. Έκανα την πράξη 14-7...
180. E: 11-7, αυτήν λες;
181. M3: Είμαι τυφλός... (ξαναλύνει) 43
182. E: Οκ για πες μου τι έκανες.
183. M3: Εμ...πάλι παρενθέσεις δεν έβαλα κάπου.
184. E: Αχά
185. M3: Έκανα τις πράξεις στην παρένθεση πρώτα, μετά έκανα την πράξη $6*4$ και μετά πρόσθεσα ό,τι έμεινε.
186. E: Αυτό είναι δια 4 εδώ το έχεις δει;
187. M3: Μ3ου φαινόταν σαν +4.
188. E: Οπότε έχεις $9+24:4$.
189. M3: Τώρα θα διαιρέσουμε το $24:4$. Άρα θα μας κάνει 6. $9+6$ 15.

$$10. \quad 9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$$

$$9 + 6 \times 4 : 4 = 9 + 24 : 4 = 9 + 6 = 15$$

- 190.
191. E: Εντάξει, πάμε στο 11. Στην 11 θέλω να διαγράψεις πάλι τις παρενθέσεις που είναι περιττές. Που δεν αλλάζουν το αποτέλεσμα δηλαδή.
192. M3: Εεε, η μεγάλη παρένθεση στο 7
193. E: Η έξω έξω; (διαγράφω μόνο την πρώτη που ανοίγει)
194. M3: Ναι. Η μεγάλη παρένθεση στο β.
195. E: Διαγράφω αυτήν που είναι μπροστά;
196. M3: Ναι. Και στο β την μπροστά. Και στο γ την πρώτη. Και στο δ το ίδιο.
197. E: Εντάξει για δεξ τα τώρα πάλι. Δες αν από αυτές που έμειναν μπορεί να φύγει και κάποια ακόμη.
198. M3: Α όχι μόνο τις μπροστά, εννοούσα και τις πίσω.
199. E: Άρα σε όλα και τις πίσω;
200. M3: Ναι ναι
201. E: Όλες οι άλλες χρειάζονται;
202. M3: Και στο β πάλι το 7 που έχει. Στο 3×2 δεν χρειάζονται (β). Και στο δ, δεν χρειάζονται.
203. E: Εντάξει τι βγάζω. Λες ότι δεν αλλάζουν το αποτέλεσμα αν υπάρχουν ή δεν υπάρχουν;
204. M3: Ναι, και στο γ. Αυτά.

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. ~~$7 - (3-3)$~~

β. ~~$(7) - (3-2)$~~

γ. ~~$7 - (3:2)$~~

δ. ~~$7 : (3+2)$~~

- 205.
206. E: Εντάξει, αυτά από εδώ. Πάμε στο τελευταίο έργο. Το έργο λέει: «Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. Για να δηλώσουν το παραπάνω πρόβλημα ο Κώστας έδωσε τη λύση α και ο Γιώργος τη λύση β. Πώς το υπολόγισε ο καθένας;» Είναι σωστές και οι δύο λύσεις. Θέλω να μου πεις πως σκέφτηκες ο καθένας. Μπορείς να ξαναδιαβάσεις το πρόβλημα για να το καταλάβεις.
207. M3: ...
208. E: Ο Κώστας τι έχει βάλει μέσα στην παρένθεση;
209. M3: Την ... τις μπάλες που... (απελπίζεται) Έχω μπερδευτεί.

210. E: Αν δεις το β πρώτα;
211. M3: Το ποσό με τις μπάλες, πόσο έκανε κάθε μπάλα.
212. E: Και όλη η παρένθεση συμβολίζει χρήματα ή μπάλες;
213. M3: Χρήματα.
214. E: Και στο α η παρένθεση, τι συμβολίζει; Χρήματα ή μπάλες πιστεύεις;
215. M3: Μπάλες.. μπάλες πιστεύω.
216. E: Γιατί λες μπάλες;
217. M3: Γιατί... Έχω μπερδευτεί τώρα αρκετά.
218. E: Δεν πειράζει. Θες να το σκεφτείς κι άλλο ή να προχωρήσουμε;
219. M3: Να προχωρήσουμε καλύτερα.
220. E: Τελειώσαμε, ευχαριστώ πάρα πολύ!

M4 - Γ΄ Γυμνασίου

1. E: Κάποιες οδηγίες στην αρχή. Να σου πω ότι θα σου διαβάσω τις ερωτήσεις και θα εκφράζεις φωναχτά τη σκέψη σου. Είναι 12 ερωτήσεις, στο λέω για να ξέρεις περίπου που βρισκόμαστε. Και δεν θα σου λέω αν είναι σωστό ή λάθος και δεν έχει χρόνο. Εντάξει; Έχεις κάποια απορία;
2. M4: Όχι όχι
3. E: Ωραία. Η πρώτη ερώτηση είναι «Τι είναι για σένα οι παρενθέσεις»;
4. M4: Για τα μαθηματικά μιλάμε;
5. E: Ναι
6. M4: Οι παρενθέσεις είναι για... στην ουσία να μετρήσουμε μια πράξη σαν έναν όρο, σαν έναν όρο μιας πράξης.
7. E: Να φτιάξεις έναν όρο..
8. M4: Εεε, για παράδειγμα ότι θέλουμε.. ότι για παράδειγμα $a+b=c$ και το a σ αυτή την περίπτωση είναι μια παρένθεση. Εννοώ παρένθεση επειδή μετράει όλη η πράξη μέσα στην παρένθεση σαν a .
9. E: Ωραία, και άμα ήθελες να το εξηγήσεις σε ένα παιδί Δημοτικού τι θα έλεγες ότι είναι οι παρενθέσεις;
10. M4: Στην ουσία θα του έλεγα ότι, εε, όπως είναι οι κανονικές οι πράξεις που κάνει, είναι ακριβώς αυτό απλά σε μία μεγαλύτερη πράξη. Είναι ένα βήμα για να λύσει μία μεγαλύτερη πράξη.
11. E: Και άρα πως σε βοηθάει η παρένθεση;
12. M4: Εεε, υποθέτω για να...για να σου είναι πιο απλά τα πράγματα; όταν το βλέπεις με το μάτι σου στην πράξη; Ναι
13. E: Εντάξει, πάμε στο 2ο. «Ποιο από τα παρακάτω ή ποια δείχνει ή δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων»

14. M4: Εεε, παραδείγματα παρενθέσεων;
15. E: Εννοώ ότι όπως τα κοιτάς ποιο λες ότι «α αυτό είναι παρενθέσεις»;
16. M4: Το γ και το δ για τον λόγο ότι έχουν και σημείο που αρχίζουν και σημείο που τελειώνουν.
17. E: Αχά, άρα το α και το β δεν είναι επειδή δεν κλείνει και δεν ανοίγει αντίστοιχα;
18. M4: (Γνέφει καταφατικά)

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;

α. (

β.)

γ. ()

δ. (3)

- 19.
20. E: Ωραία, πάμε στο 3ο. Στην 3η θέλω να γράψεις μία παράσταση για τα ακόλουθα χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού. Είναι 4 παραστάσεις στην ουσία.
21. M4: Τι ακριβώς πρέπει να κάνω;
22. E: Αν σου έλεγα ότι έχεις το 3 και σε αυτό προσθέτεις το 2 τι θα έγραφες;
23. M4: 3+2
24. E: Αυτό θέλω να κάνεις κι εδώ.
25. M4: Α, οπότε 2+5 και πρέπει να προσθέσεις 4 οπότε (2+5)+4;
26. E: Ναι αυτό. Γιατί βάζεις παρένθεση;
27. M4: Για τον λόγο ότι μου το έδωσε ολόκληρο το 2+5, άμα μου έδινε έναν αριθμό δεν θα έβαζα.
28. E: Οκ, πάμε στο επόμενο;
29. M4: Έχεις 4:2 και πρέπει να προσθέσεις 3. Εεε κι εδώ πέρα σε παρένθεση 4:2 κλείνει η παρένθεση + 3.
30. E: Χρειάζεται η παρένθεση πιστεύεις;
31. M4: Βασικά στη συγκεκριμένη περίπτωση όχι, για τον λόγο ότι είναι διαίρεση οπότε έτσι κι αλλιώς, πως να το πω; Πρώτα θα τελειώσουμε με την παρένθεση και θα μας βγει 2 συν 3 θα μας βγει 5. Οπότε στην ουσία είναι με το αποτέλεσμα της πράξης.
32. E: Ωραία άρα θα έβαζες παρένθεση ή όχι; Δεν κατάλαβα.
33. M4: Εγώ προσωπικά θα έβαζα γιατί με βοηθάει να τα ξεκαθαρίσω καλύτερα.
34. E: Εντάξει, πάμε στο γ.
35. M4: Έχεις 2+5 και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. Εεε, αυτό το βάζω έτσι κι αλλιώς σε παρένθεση και πολλαπλασιάζω με το 4.
36. E: Σε παρένθεση το 2+5;

37. M4: Ναι
38. E: Γιατί;
39. M4: Βασικά, κυρίως εγώ δεν έχω καταλάβει άμα μιλάμε για το αποτέλεσμα της πράξης που μου δίνει ή απλά πάνω σε αυτό να .. να βάλω αυτή τη συνέχεια (παράσταση).
40. E: Εσύ πώς θα το έγραφες σαν αριθμητική παράσταση. Έχει νόημα το αποτέλεσμα. Έχεις το $2+5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4, πώς θα το έγραφες;
41. M4: Έτσι όπως το έχω γράψει γιατί το $2+5$ πρέπει όλο να το πολλαπλασιάσω με το 4. Αυτό.
42. E: Εντάξει, πάμε στο δ.
43. M4: $6+7$ και πρέπει να αφαιρέσεις... Θα έβαζα παρένθεση $6+7$ μείον παρένθεση $9+1$ ένα.
44. E: Εντάξει, γιατί έβαλες παρενθέσεις;
45. M4: Επειδή πρώτα έχει προτεραιότητα κάνουμε τις πράξεις των παρενθέσεων ώστε να μπορούμε στάνταρ να αφαιρέσουμε έναν αριθμό από κάποιον άλλο.
46. E: Αχά, και μπορούσες να παραλείψεις κάποια παρένθεση πιστεύεις;
47. M4: Από αυτές που έχω γράψει;
48. E; Ναι
49. M4: Στο πρώτο (εννοεί το α ερώτημα)
50. E: Γιατί;
51. M4: Για τον λόγο ότι είτε το βάλω σε παρένθεση είτε όχι θα βγει το ίδιο πράγμα.
52. E: Ωραία ενώ το 2ο;
53. M4: Το 2ο... το γ και το δ σίγουρα είναι... με τη δική μου λογική αυτό είναι, έτσι όπως το βλέπω.
54. E: Εντάξει, έχεις να πεις κάτι άλλο;
55. M4: Όχι

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να προσθέσεις 4. $(2+5)+4$

β. Έχεις $4 : 2$ και πρέπει να προσθέσεις 3. $(4:2)+3$

γ. Έχεις $2 + 5$ και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. $(2+5) \cdot 4$

δ. Έχεις $6 + 7$ και πρέπει να αφαιρέσεις $9 + 1$. $(6+7)-(9+1)$

- 56.
57. E: Πάμε στο 4ο. Στην 4η θέλω να δεις τις παραστάσεις και να διαγράψεις όσες δεν είναι απαραίτητες. Να μην αλλάζουν την απάντηση δηλαδή.

58. M4: Να μην αλλάζουν την απάντηση (;).
59. E: Ναι εννοώ να μπορείς να τις βγάλεις χωρίς να επηρεάζουν την απάντηση, το αποτέλεσμα.
60. M4: Τις παρενθέσεις;
61. E: Ναι τις παρενθέσεις.
62. M4: Εεε, στα δύο πρώτα χρειάζονται...
63. E: Άμα είχες το $7+3:2$ θα είχες διαφορετικό αποτέλεσμα;
64. M4: Ναι γιατί πρώτα κάνεις το $7+3$ και βγαίνει δέκα: $2 \cdot 5$. Ενώ, όταν έχουμε $7+(3:2)$ πρώτα κάνουμε το $3:2$ που θα βγει ενάμισι και μετά το προσθέτουμε με το 7.
65. E: Ωραία και γιατί εδώ αποφασίζεις να κάνεις το $7+3$ πρώτα;
66. M4: Για τον λόγο ότι δεν έχει παρένθεση να μου δείξει ότι υπάρχει κάποια προτεραιότητα της πράξης οπότε παίρνεις στην ουσία την παράσταση στη σειρά. Από την αρχή την πηγαίνεις μέχρι το τέλος.
67. E: Και στο β το ίδιο;
68. M4: Ναι
69. E: Στο γ;
70. M4: Εεε.. στο γ δεν χρειάζεται. Είναι για τον ίδιο λόγο. Επειδή είτε έχει παρένθεση είτε όχι, έτσι κι αλλιώς λόγω ότι είναι το πρώτο που βλέπεις θα κάνεις πρώτα $7*3$ και μετά -3 .
71. E: Εντάξει, και στο τελευταίο;
72. M4: Επίσης δεν χρειάζονται, για ακριβώς τον ίδιο λόγο.
73. E: Άρα στο $7+3*2$ κάνεις το $7+3$ πρώτα
74. M4: Ναι

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + (3 : 2)$

β. $7 - (3 \cdot 3)$

γ. $(7 \cdot 3) - 3$

δ. $7 + 3 \cdot 2$

- 75.
76. E: Εντάξει, πάμε στο 5. «Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 * 3$ ισούται και με 18 και με 14, εσένα ποια είναι η γνώμη σου;»
77. M4: Ότι.. το $2+4*3$;
78. E: Ναι;
79. M4: Ότι.. εγώ πιστεύω ισούται με 18.
80. E: Γιατί;
81. M4: Γιατί με τη λογική μου πρώτα θα έκανα $2=4$ που θα έβγαине 6 και μετά $6*3$ που θα έβγαине 18.
82. E: Οκ. Και πώς έβγαλε το δεκατέσσερα πιστεύεις;
83. M4: Εεε, έκανε $4*3$ που βγήκε δώδεκα και μετά πρόσθεσε το 2 και βγήκε δώδεκα.

84. E: Και είναι λάθος να είναι και δεκατέσσερα και δεκα8;
85. M4: Ναι
86. E: Και πιστεύεις ήταν λάθος ο τρόπος του να κάνει $3*4$ και μετά $+2$;
87. M4: Δεν ξέρω ακριβώς άμα θα ήταν λάθος αλλά...δηλαδή εγώ άμα το έβλεπα αυτό σαν μια καθημερινή πράξη στο σχολείο μου έτσι θα το έκανα, πρώτα την πρόσθεση και μετά τον πολλαπλασιασμό για τον λόγο ότι προηγείται η πρόσθεση στην παράσταση, μας δίνει πρώτα το $2+4$ και μετά $*3$.
88. E: Προηγείται επειδή την βλέπουμε πρώτη εννοείς ε;
89. M4: Ναι
90. E: Εντάξει, οκ. πάμε στο 6. «Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ;»
91. M4: 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για δέκα ευρώ και...Εεε, να ρωτήσω πρώτα απ' όλα. Θα μπορούσε να είναι.. Α όχι όχι, το μπέρδεψα. Είναι το β.
92. E: Το β λες, γιατί;
93. M4: Για τον λόγο, ότι άμα κάνουμε...σε σχέση με τα άλλα...εεμ μπορώ να μιλήσω για τα άλλα πρώτα;
94. E: Ναι ναι εννοείται, ξεκίνα από το α.
95. M4: Εμ.. άμα κάνω 50 μείον δέκα...αα όχι.. εε... θα μπορούσε να είναι δύο απαντήσεις;
96. E: Ναι μπορεί.
97. M4: Ναι, στην περίπτωση του α μου φαίνεται, για τον λόγο ότι 50-δέκα μας κάνει 40 και μετά μείον 20 μας βγάζει 20 που είναι το τελικό ποσό που μου απομένει.
98. E: Αχά
99. M4: Στο β είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα απλά πρώτα προσθέσαμε το δέκα με το 20 ώστε να βγάλουμε κατευθείαν το 30 απ' το 50.
100. E: Οκ και άρα η παρένθεση τι δηλώνει;
101. M4: Ότι το αποτέλεσμα της πράξης μέσα στην παρένθεση θα αφαιρεθεί από το 50.
102. E: Και για το πρόβλημα τι δηλώνει;
103. M4: Ααα, τις τιμές των αντικειμένων που αγοράσαμε.
104. E: Εντάξει, μετά.. γ.
105. M4: Εδώ τώρα, πρώτα θα κάνουμε την παρένθεση. Εε, και γι' αυτό τον λόγο άμα κάνουμε δέκα-20 θα βγει -δέκα και μείον*μείον είναι + οπότε θα βγει 60 τελικό αποτέλεσμα δεν γίνεται να βγούμε με περισσότερα χρήματα αφού ξοδέψαμε.
106. E: Αχά

107. M4: Και στο δ, απ' το 50 αφαιρούμε δέκα που μας κάνει 40 και μετά όπως και πριν προσθέτουμε 20 και μας βγάζει 60 που επίσης δεν γίνεται.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

α. $50 - 10 - 20$
β. $50 - (10 + 20)$

γ. $50 - (10 - 20)$
δ. $50 - 10 + 20$

- 108.
109. E: Εντάξει. Πάμε στο 7ο. Στην 7η θέλω να ελέγξεις αν οι ισότητες είναι αληθείς και αν όχι να βάλεις παρενθέσεις για να τις κάνεις αληθείς.
110. M4: Α, ναι.. δεκαπέντε-5 κάνει δέκα +5... όχι, η πρώτη δεν είναι.
111. E: Μπορείς να την κάνεις κάπως εσύ να είναι;
112. M4: Εεε, ναι. Άμα βάλουμε σε παρένθεση το 5+5 θα κάνουμε πρώτα την πρόσθεση και θα μας βγει δέκα και άμα το αφαιρέσουμε το δέκα απ' το δεκαπέντε θα μας βγει 5.
113. E: Εντάξει πάμε στο β
114. M4: 20-5 .. Δεκαπέντε, δεκαπέντε επί 3 θα κάνει 45, όχι δεν είναι.
115. E: Οκ μπορείς να βάλεις κάποια παρένθεση;
116. M4: E, ναι μπορούμε να βάλουμε σε παρένθεση το 5*3 με ακριβώς την ίδια λογική με πριν. Δηλαδή θα κάνουμε πρώτα 5*3 που θα βγει δεκαπέντε που θα το αφαιρέσουμε από το 20 και θα βγει 5
117. E: Ωραία, πάμε στο γ.
118. M4: 3+2 5 επί 3, δεκαπέντε ίσον 5*3 δεκαπέντε, ναι!
119. E: Σωστό;
120. M4: Ναι
121. E: Αχά, στο δ;
122. M4: Δώδεκα δια τέσσερα τρία ίσον δώδεκα δια 6 2 -2 0 όχι. Εεε, θα μπορούσαμε να βάλουμε σε παρένθεση το 6-2 ώστε να κάνουμε την πράξη μέσα στην παρένθεση και να μας βγει 4 που δώδεκα δια 4 είναι ίσο με δώδεκα δια 4 που κάνει 3.

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - (5 + 5) = 5$ Ναι / Όχι.
β. $20 - (5 \cdot 3) = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι.
δ. $12 : 4 = 12 : (6 - 2)$ Ναι / Όχι.

- 123.
124. E: Ωραία, πάμε στο 8. Στην 8 τώρα θα κάνεις το ίδιο απλά χωρίς να κάνεις πράξεις, χωρίς να κάνεις υπολογισμούς.
125. M4: Δηλαδή;

126. E: Όπως το κοιτάς θα πρέπει να καταλάβεις, θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα το πρώτο μέλος με το 2ο μέλος;
127. M4: Α έτσι όπως το κοιτάω; Για το α όχι, δεν θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα.
128. E: Γιατί;
129. M4: Για τον λόγο ότι πρώτα θα κάνουμε το $51 + 72$ ενώ στο 2ο μέλος πρώτα κάνουμε το $40 * 51$.
130. E: Οκ
131. M4: Στο β, είναι αληθής για τον λόγο ότι και στα δύο μέλη μπορούμε να.. όχι κάνουμε πρώτα την διαίρεση.
132. E: Επειδή βρίσκεται πρώτο στη σειρά;
133. M4: Ναι ναι. Στο γ, εμ...όχι. Δεν., δεν ξέρω τι να απαντήσω (γελάει). Αυτό είναι με κανονικές πράξεις (καταλαβαίνω ότι εννοεί μόνο πρόσθεση και αφαίρεση).
134. E: Προσπάθησε να μην κάνεις πράξεις.
135. M4: Δεν τις κάνω, προσπαθώ με τη λογική μου.
136. E: Ναι
137. M4: Εγώ τώρα έτσι όπως το βλέπω θα έλεγα...α όχι. Θα πω ναι για τον λόγο ότι δεν έχει κάποια πράξη που να αλλάζει τελείως το αποτέλεσμα όπως πολλαπλασιασμός και διαίρεση. Δηλαδή σε μία πράξη με μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις συνήθως έτσι κι αλλιώς θα μας βγει το ίδιο αποτέλεσμα.
138. E: Άρα ναι επιλέγεις ότι είναι αληθής.
139. M4; Ναι
140. E: Και εννοείς ότι δεν έχεις σημασία με ποια σειρά θα κάνεις τις πράξεις;
141. M4: Ναι ναι.
142. E: Ωραία πάμε στο δ.
143. M4: Εεε, για τον ίδιο λόγο θα πω ναι, επειδή όπως είπα, προσθέσεις και αφαιρέσεις είναι πιο απλές πράξεις και έτσι κι αλλιώς είτε βάλεις κάτι σε παρένθεση για να το προσθέσεις πρώτα είτε δεν το βάλεις σε παρένθεση έτσι κι αλλιώς εκείνο τον αριθμό που προσθέτεις θα τον προσθέσεις έτσι κι αλλιώς.
144. E: Ωραία, εδώ από το 27 τι αφαιρούμε χωρίς να κάνεις υπολογισμό. Στο 2ο μέλος.
145. M4: Το $5+3$.
146. E: Και στο 1ο μέλος, τι αφαιρούμε;
147. M4: Το 5. Α! Στο ένα αφαιρείς περισσότερο απ' ότι στο άλλο. Στο πρώτο αφαιρείς το 5 ενώ στο 2ο θα αφαιρέσεις το $5+3$ και στο πρώτο μέλος μετά θα προσθέσεις και 3. Δεν θα είναι το ίδιο όχι.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι / Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

- 148.
149. E: Συνεχίζουμε. Στην 9 θέλω να μου γράψεις ένα σενάριο που να περιγράφει αυτές τις δύο εκφράσεις. Θέλω να μου γράψεις ένα πρόβλημα που θα μπορούσε να εκφράζει το ένα και το άλλο. Ένα για το καθένα.
150. M4: Όπως πριν που είχαμε δει «έχεις αυτό και..»
151. E: Ναι όπως το πρόβλημα που είχες 50 ευρώ και ζόδεψες 10 και 20.
152. M4: Ναι...είναι διαφορετικά έτσι;
153. E: Ναι
154. M4: Να ρωτήσω κάτι;
155. E: Ναι
156. M4: Με ποια λογική θα αρχίσω το πρόβλημα; Για ένα πρόβλημα δεν χρειάζεται να έχεις κάποια αντικείμενα;
157. E: Ναι, μπορείς να βάλεις ό,τι αντικείμενα θες, βάλε ότι θες, δικό σου πρόβλημα είναι.
158. M4: Αχ
159. E: ό,τι σου έρχεται, βάλε ότι θες. Ας είναι κάτι απ' την καθημερινότητά σου.
160. M4: Ωραία, θα βάλω πορτοκάλια, εε. Θα πω ότι... όχι...εε. Έχεις 3 πορτοκάλια στα οποία προσθέτεις άλλα δύο και το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάσες επί 5.
161. E: Δοκίμασε να το κάνεις ένα πραγματικό πρόβλημα. Πως θα μπορούσες να δηλώσεις το *5 στο πρόβλημα;
162. M4: Μπορώ να το αλλάξω με την έννοια των πράξεων; Δηλαδή με την έννοια ότι...όχι όχι πάλι το ίδιο θα έλεγα αλλά με άλλα λόγια. (Σκέφτεται) Α! Ωραία ωραία. Βρήκα βρήκα βρήκα βρήκα. (Γελάει) Θα έβγαινε άμα έλεγα έχω 3 πορτοκάλια στο ψυγείο και 2 πάνω στον πάγκο και... όχι όχι πάλι δεν βγαίνει.
163. E: Θες να δοκιμάσεις μήπως το β σε βολέψει πιο πολύ;
164. M4: Δεν μπορώ να βγω αντικείμενο, άμα έβρισκα αντικείμενο θα ήταν όλα πιο εύκολα.
165. E: Αντικείμενο βάλε ό,τι θέλεις.
166. M4: Εεε, πώς γίνεται να κάνω το β όταν είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα;
167. E: Σωστό κι αυτό, άμα το σκεφτείς έτσι.

168. M4: Θα έλεγα στο προηγούμενο ότι από τα 3 πορτοκάλια που έχω στο ψυγείο και τα δύο που έχω στον πάγκο, εεε, θα έλεγα ότι πάω να αγοράσω τον 5πλάσιο αριθμό του αθροίσματός τους. Δεν ξέρω άμα βγάζει λογική αυτό...αλλά ναι.
169. E: Εντάξει, μια χαρά. Και για το 2ο θα έλεγες το ίδιο;
170. M4: Όχι.. βασικά δεν θα έλεγα του αθροίσματος των πορτοκαλιών. Για τον λόγο ότι όταν λέω άθροισμα εννοώ την πράξη που γίνεται μέσα στην παρένθεση.
171. E: Αχά
172. M4: Οπότε, ναι, θα έλεγα ότι έχω 3 πορτοκάλια στο ψυγείο και 2 στον πάγκο και πάω να αγοράσω τα 5πλάσια.
173. E: Ποιανού;
174. M4: Των πορτοκαλιών
175. E: Όλων;
176. M4: (Γελάει) Ναι.
177. E: Άρα έβγαλες τη λέξη άθροισμα.
178. M4: Ναι, με την έννοια ότι δεν τα μετράμε μαζί.
179. E: Το 5 πλάσιο όλων των πορτοκαλιών πας να αγοράσεις;
180. M4: Ναι ναι.
181. E: Εντάξει, πάμε στο άλλο. Το 10..
182. M4: (Γελάει) Αγχώθηκα...
183. E: Έλα αυτή και άλλες δύο έμειναν, κουράγιο. Εδώ θέλω να λύσεις την παράσταση.
184. M4: $9+6 = 15$
185. Θα κάνω την πράξη στην παρένθεση και θα βγει $*4$.
186. E: Άρα το γράφεις έτσι; $15*4$;
187. M4: Ναι για τον λόγο ότι άμα κάνω την πράξη μέσα στην παρένθεση είναι $11-7=4$.
188. E: Αχά
189. M4: $:4 (15*4/4)$ Και μετά θα κάνω τον πολλαπλασιασμό $15*4$ θα μου βγάλει 60 και $/4$ που μας κάνει 15.
10. $9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$

$$15 \times 4 : 4 = 60 : 4 = 15$$
- 190.
191. E: Εντάξει, πάμε στο 11. Η 11 λέει πάλι το ίδιο με πιο πάνω. Να διαγράψεις τις αγκύλες που δεν επηρεάζουν την παράσταση. Να μπορείς να τις βγάλεις δηλαδή και να μην αλλάξει το αποτέλεσμα.
192. M4: Ναι...Εε...Μπορώ να...Σ' αυτό μπορώ να κάνω πράξεις;

193. E: Ναι άμα σε βοηθάει.
194. M4: $3-3=0$. Α θα μπορούσα να βγάλω οποιαδήποτε αγκύλη;
195. E: Ναι μπορείς να βγάλεις όποια θέλεις. Άμα θεωρείς ότι δεν αλλάζει το αποτέλεσμα.
196. M4: Ναι, εεε. (Σκέφτεται φωναχτά) $3-3=0$. $7-...=7$.
197. E: Στο α' ποια πράξη κάνεις πρώτα;
198. M4: Το $3-3$
199. E: Ενώ άμα βγάλεις την παρένθεση τι θα συμβεί;
200. M4: Εεε, θα κάνω πρώτα $7-3$ και μετά από το 4 που θα είναι το αποτέλεσμα θα έβγαζα 3 και θα μου έμεινε 1. Ενώ το αποτέλεσμα είναι -7 αν δεν κάνω λάθος.
201. E: Αχά
202. M4: Εεε, νομίζω, η εξωτερική παρένθεση είναι αυτή που μπορώ να βγάλω χωρίς πρόβλημα.
203. E: Άρα, αν είχες $-7-(3-3)$, θα ήταν ίδιο.
204. M4: Ναι ναι. Για το λόγο ότι αν βγαίνει -7 το αποτέλεσμα αν τα υπολόγισα σωστά $3-3=0$, $-7-0=-7$.
205. E: Οκ.
206. M4: Εε, θα πάμε στο β τώρα;
207. E: Ναι
208. M4: Σίγουρα δεν χρειάζεται αυτή η παρένθεση που είναι στο 7.
209. E: Εννοείς και μπροστά και πίσω;
210. M4: Ναι ναι. Εεε... $3*2=6$ $7-6=1$ $7-3=4$. Ναι, την παρένθεση στο $3*2$ δεν τη βγάλω σίγουρα. Και την εξωτερικά θα έβγαζα εγώ για τον λόγο ότι εφόσον δεν έχει κάποιους άλλους αριθμούς ή πράξη δεν είναι αναγκαστική.
211. E: Στο $3*2$ δεν τη βγάζεις γιατί αλλιώς θα κάνεις $7-3$;
212. M4: Ναι ναι.
213. E: Οκ, πάμε στο γ.
214. M4: Απλά δεν χρειάζεται η μία παρένθεση από τις δύο που είναι στο $3*2$.
215. E: Οκ έχεις προτίμηση αν θα είναι η μέσα ή η έξω;
216. M4: Εγώ την έξω θα έβγαζα.
217. E: Οκ, και την άλλη την κρατάς για ποιον λόγο;
218. M4: Για τον λόγο ότι άμα κάνω $3:2$ είναι 1,5 $7-1,5$ θα βγει 5,5. Ενώ άμα βγάλουμε κι εκείνη την παρένθεση θα κάνουμε $7-3$ που θα βγει $4:2=2$.
219. E: Εντάξει πάμε στο δ.
220. M4: Εμ.. $3+2=5$ (σκέφτεται φωναχτά) Έχω μπερδευτεί λίγο. Κυρίως πρώτα από όλα θα έβγαζα την εξωτερική την παρένθεση και μετά, τώρα την άλλη.. νομίζω θα την κρατούσα για τον λόγο ότι $3+2$ θα μας έκανε $7:5$ ενώ άμα βγάλαμε τις παρενθέσεις θα είχαμε $7:3$ και μετά αυτό που βγάλαμε θα το προσθέταμε άλλα δύο.

221. E: Άρα όπως είναι θα έκανες πρώτα το 3+2 ενώ αλλιώς θα έκανες πρώτα το 7:3.

222. M4: Ναι

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $\cancel{7} - (3-3)$ β. $\cancel{(7)} - (3-2)$

γ. $7 - \cancel{(3:2)}$ δ. $\cancel{7} : (3+2)$

223.

224. E: Εντάξει πάμε στο τελευταίο έργο. Εδώ πέρα, διαβάζω το πρόβλημα. Λέει: «Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. » Έχω δύο λύσεις, τη μία λύσει την έδωσε ο Κώστας και την άλλη ο Γιώργος. Θέλω να τις δεις και να μου πεις πως σκέφτηκε ο καθένας. Και οι δύο είναι σωστές. Μπορείς να ξαναδιαβάσεις το πρόβλημα άμα χρειάζεσαι.

225. M4: Εμ... (διαβάζει φωναχτά το πρόβλημα) Οπότε...Το ποσό που έδωσε...Όταν λέει το ποσό εννοεί συνολικά αυτά που έδωσε;

226. E: Ναι

227. M4: Εμ..

228. E: Μελέτησε τις απαντήσεις τους και δες γιατί απάντησε έτσι;

229. M4: Εγώ δεν καταλαβαίνω ακριβώς τι προσπαθούμε να βρούμε σε αυτό το πρόβλημα.

230. E: Στην ουσία, αυτές οι σχέσεις κάτω, περιγράφουν το παραπάνω πρόβλημα. Εσύ πρέπει να δεις πως επέλεξε να το λύσει ο καθένας. Τι έχει βάλει ο καθένας μέσα στην παρένθεση;

231. M4: Μμμ, ναι. Δεν γίνεται να είναι λάθος;

232. E: Είναι σωστά και τα 2.

233. M4: Πως γίνεται αυτό; 120.. Α ναι! Όντως ναι. Εεε, να πω δηλαδή πως σκέφτηκε ο καθένας;

234. E: Ναι

235. M4: Ο Κώστας έκανε.. πολλαπλασίασε τα 20 ευρώ που κάνει η κάθε μπάλα μπάσκετ με τον αριθμό που θα είχε συνολικά από τις μπάλες που θα μπορούσε να αγοράσει και μετά από αυτό τον αριθμό.

236. E: Αυτός ο αριθμός τι σημαίνει; Γιατί το έκανε αυτό;

237. M4: Να πω την αλήθεια εγώ με το β...εε...άμα έλυνα εγώ το πρόβλημα θα πήγαινα με το β μόνο και μόνο για ακριβώς αυτό τον λόγο. Δεν έχω καταλάβει ακριβώς γιατί 11*20 κάνει 220 μείον 120 κάνει 100. 100:20 = 5. Ειλικρινά δεν ξέρω που εξυπηρετεί αυτό.

238. E: Θες να δεις το β;
239. M4: Ναι, στο β...εε...ναι. Ένα λεπτό. (Σκέφτεται) Εγώ αυτό που έχω καταλάβει από το β είναι ότι στην ουσία με τα χρήματα που ξόδεψε σε μπάλες ποδοσφαίρου τα έκανε : 20 ευρώ που κάνει μία μπάλα μπάσκει για να δει πόσες θα μπορούσε να πάρει με τα ίδια χρήματα που ξόδεψε για μπάλες ποδοσφαίρου. Και μετά από τις...έβγαλε ότι θα μπορούσε να πάρει 6 μπάλες από εκείνο το ποσό και γι' αυτό από τις 11 μπάλες που θα μπορούσε να αγοράσει από τα 220 ευρώ που είχε...
240. E: Πόσες δεν μπορούσε να αγοράσει;
241. M4: 6.
242. E: Αχά.
243. M4: Τώρα για το α ειλικρινά, δεν...δεν ξέρω.
244. E: Δεν πειράζει. Οπότε τελειώσαμε. Ευχαριστώ πάρα πολύ!

M5 - Γ΄ Γυμνασίου

1. E: Λοιπόν, θα σου πω πρώτα κάποιες οδηγίες στην αρχή. Εγώ θα διαβάζω τις ερωτήσεις κι εσύ θα μου απαντάς φωναχτά τη σκέψη σου. Να σου πω ότι είναι 12 ερωτήσεις και δεν θα σου λέω αν είναι σωστό ή λάθος, θέλω απλά να μου λες τι σκέφτεσαι.
2. Επίσης δεν έχει χρόνο, οπότε δεν έχουμε άγχος για αυτό. Είσαι έτοιμη; Έχεις κάποια απορία;
3. M5: Όχι, μια χαρά είμαστε.
4. E: Ωραία. Η πρώτη ερώτηση είναι «Τι είναι οι παρενθέσεις για σένα;»
5. M5: Στα μαθηματικά ή γενικά;
6. E: Ναι στα μαθηματικά.
7. M5: Εεε, τις χρησιμοποιούμε... για να ομαδοποιήσουμε πράξεις εε, και να ξεχωρίσουμε κάπως.
8. E: Αχά
9. M5: Αυτό.
10. E: Και σε βοηθάει κάπως αυτό;
11. M5: Ε ναι γιατί...ας πούμε, σε μια...πράξη που να έχει πολλές πράξεις μαζί ή πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ξέρω τι πρέπει να κάνω με τι οπότε...είναι πιο βοηθητικό.
12. E: Οκ, και άμα ήθελες να το εξηγήσεις σε ένα παιδί Δημοτικού το τι είναι οι παρενθέσεις, τι θα έλεγες;

13. M5: Εεε, ότι οι παρενθέσεις είναι στην ουσία σαν δύο καμπύλες που ανοίγουν και κλείνουνε και μέσα σ' αυτές μπορούμε να βάζουμε πολλές πράξεις για να τις κάνουμε όλες μαζί.
14. E: Οκ. Και για ποιόν λόγο τις έχουμε; Για ποιόν λόγο υπάρχουνε;
15. M5: Εμ, για να ξεχωρίζουμε τις πράξεις που θέλουμε να κάνουμε μαζί. Ποιες θέλουμε να κάνουμε μαζί, ποιες θέλουμε να κάνουμε ξεχωριστά.
16. E: Οκ, εντάξει. Η δεύτερη ερώτηση είναι «Ποιο από τα παρακάτω, για σένα, δείχνει παράδειγμα παρενθέσεων;»
17. M5: Α, ε, το α το β και το γ.
18. E: Γιατί;
19. M5: Ε, γιατί στην ουσία το...α είναι αυτή που ανοίγει και το β είναι αυτή που κλείνει, είναι δύο ξεχωριστές και μετά στο γ είναι οι παρενθέσεις όπως τις κάνουμε συνήθως και αυτό που έχει μέσα μετά, δεν βάζουμε αυτό που έχει μέσα.
20. E: Στο δ ποια είναι η διαφορά; Τι σε ενοχλεί;
21. M5: Στο δ είναι που έχει και τον αριθμό οπότε δεν είναι τελείως παρενθέσεις είναι σαν να είναι κανονική πράξη που απλά να έχει και παρενθέσεις.
22. E: Και άρα αν εσύ έβλεπες κάπου αυτό το σύμβολο (γράφω στην οθόνη) «(» «)» θα έλεγες αυτά είναι παρενθέσεις;
23. M5: Ναι.
24. E: Εντάξει, έχεις να πεις κάτι άλλο πάνω σε αυτό;
25. M5: Όχι, νομίζω ότι δεν...

2. Ποιο/ποια από τα παρακάτω δείχνει/δείχνουν παραδείγματα παρενθέσεων;



- 26.
27. E: Εντάξει, ωραία. Λοιπόν, στο τρίτο έργο θέλω να γράψεις για το καθένα μια παράσταση, πως θα έγραφε αυτό που σου ζητάει. Σου το λέει με λόγια εσύ πρέπει να γράψεις την αριθμητική παράσταση.
28. M5: Αχά. Ωραία, εμ...Για το πρώτο, θα γράψουμε απλά $5+2+4$ γιατί δεν νομίζω ότι είναι αναγκαία εδώ η παρένθεση.
29. E: Γιατί όχι;
30. M5: Γιατί είναι πρόσθεση! Οπότε είτε προσθέσουμε πρώτα το 5 με το 4 είτε προσθέσουμε το 4 με το 2 δεν θα κάνει διαφορά.
31. E: Αχά, οκ. Στο β;
32. M5: Στο β θα κάνουμε $4:2$ σε παρένθεση και μετά θα προσθέσουμε 3. Γιατί άμα δεν το κάναμε αυτό μπορεί να είχαμε διαφορετικό αποτέλεσμα.
33. E: Γιατί τι μπορεί να έκανες άμα ήταν χωρίς παρένθεση;

34. M5: Εεε, μπορεί να έκανα 4:5, να πρόσθετα πρώτα το 2 και το 3 και... αυτό.
35. E: Οκ. Πως επιλέγεις τι θα κάνεις πρώτα όταν δεν έχεις παρενθέσεις;
36. M5: Είναι προτεραιότητα των πράξεων, που κάνεις πρώτα διαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς αλλά νομίζω οι παρενθέσεις το κάνουν πιο εύκολο γενικά.
37. E: Οκ. Και που είπες ότι μπορεί να έκανες 4:5 εδώ, πώς θα το έκανες;
38. M5: Εεε, αυτό θα το έκανα άμα έκανα πρώτα την πρόσθεση αλλά κανονικά θα ήτανε...άμα κάναμε πρώτα την διαίρεση, από την προτεραιότητα, θα ήτανε 2+3.
39. E: Αχά. Οκ. Εσύ προτιμάς να υπάρχει παρένθεση;
40. M5: Προτιμάω ναι. Εεε, νομίζω βοηθάει πιο πολύ και δεν χρειάζεται να σκέφτεσαι κάθε φορά την προτεραιότητα.
41. E: Οκ. Πάμε στο γ.
42. M5: Ωραία, και πάλι, το 2+5 σε παρένθεση εμμ, μετά επί 4.
43. E: Ναι
44. M5: Και πάλι για τον ίδιο λόγο και επίσης εεε, αντί να κάνουμε 2*4 και μετά συν 5*4, γιατί στην ουσία πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο με το 4 απλά πολλαπλασιάζουμε 7*4.
45. E: Οκ, εντάξει. Και το δ;
46. M5: Εμμ, μισό να το γράψω να δω. (ψιθυρίζει αυτά που γράφει) Εμ, εεε και χωρίς παρένθεση μπορούμε να το γράψουμε αυτό, νομίζω. 6 συν 7 μείον 9 συν 1. Γιατί, εε, η πρόσθεση με την αφαίρεση, όχι είναι παρόμοιες πράξεις, είναι αντίθετες πράξεις. Οπότε δεν είναι ότι θα αλλάξει το αποτέλεσμα είτε τα αφαιρέσουμε πρώτα είτε τα προσθέσουμε πρώτα.
47. E: Άρα έτσι θα το έγραφες; (Γράφω 6+7-9+1)
48. M5: Ναι.
49. E: Οκ. Άρα όπως το βλέπεις έτσι αφαιρείς από το 6+7 το 9+1;
50. M5: Εεε, ναι αλλά μπορούμε να προσθέσουμε πρώτα όλα, 6 και 7 συν 1 και μετά να αφαιρέσουμε και το 9. Με όποιον τρόπο και αν το κάνουμε δεν θα κάνει διαφορά, γι' αυτό δεν χρειάζεται και η παρένθεση.

3. Γράψε μια παράσταση για τα ακόλουθα (χωρίς να υπολογίσεις κάποιο μέρος του αριθμού):

α. Έχεις 2 + 5 και πρέπει να προσθέσεις 4. 2+5+4

β. Έχεις 4 : 2 και πρέπει να προσθέσεις 3. (4:2)+3

γ. Έχεις 2 + 5 και πρέπει να το πολλαπλασιάσεις με 4. (2+5) · 4

δ. Έχεις 6 + 7 και πρέπει να αφαιρέσεις 9 + 1. 6+7 - 9+1

51.

52. E: Αχά, εντάξει, οκ. Πάμε στο 4. Στην 4 θέλω να διαγράψεις τις αγκύλες όπου δεν είναι απαραίτητες. Που δεν αλλάζουν το αποτέλεσμα δηλαδή αν δεν υπάρχουν.
53. M5: Αχά. Εε, στο α θα τις αφήσουμε γιατί πάλι είναι πρόσθεση με διαίρεση οπότε μετά θα είναι διαφορετικό αποτέλεσμα.
54. E: Εννοείς ότι άμα είχες $7+3:2$, τι θα έκανες πρώτα;
55. M5: Εεε, πάλι μπορεί να κάναμε κιάλας $10:2$ και να έβγαине 5.
56. E: Γιατί να το έκανες αυτό;
57. M5: Γιατί, ας πούμε, όταν κοιτάμε μια πράξη δεν σκεφτόμαστε «Αα προτεραιότητα των πράξεων, πρέπει να κάνουμε αυτό κι εκείνο.» Βλέπουμε 7 και 3 είναι πιο εύκολο, γιατί κιάλας η πρόσθεση είναι και πολύ πιο εύκολη οπότε μπορεί να μπερδευόμασταν και να κάναμε 10 δια 2 .
58. E: Άρα την κρατάς για να μην παρασυρθείς κυρίως;
59. M5: Ναι
60. E: Αχά
61. M5: Ωραία, στο β. Μισό να το σκεφτώ...Και πάλι θα τις κρατήσω γιατί είναι πολλαπλασιασμός με αφαίρεση. Άμα δεν ήτανε (οι παρενθέσεις) θα είναι $7-3$ επί 3 12 ενώ τώρα θα γίνει 7 μείον 9 .
62. E: Οκ
63. M5: Στο γ τώρα...Εεε...(γελάει) δεν ξέρω κι εδώ θέλω να την κρατήσω.
64. E: Μπορείς να την κρατήσεις, ό,τι θες εσύ θα κάνεις, ό,τι θεωρείς ότι χρειάζεται.
65. M5: Εμμ, και πάλι θα την κρατήσω γιατί...γιατί πρόσθεση με πολλαπλασιασμό ή αφαίρεση με διαίρεση ή αφαίρεση με πολλαπλασιασμό λίγο...με μπερδεύουν άμα τα έχω έτσι χωρίς να τα διαχωρίζω.
66. E: Αχά. Πιστεύεις ότι σε αυτά τα τρία που τις κρατάς, άμα δεν υπήρχαν οι παρενθέσεις θα άλλαζε το αποτέλεσμα;
67. M5: Μμμ, στο α σίγουρα θα άλλαζε. Στο β τώρα...αυτό εε...άμα το κάναμε, ξέρω γω, και πάλι θα άλλαζε γιατί θα ήταν...άμα το κάνουμε πρώτα $7-3$, βασικά άμα κρατούσαμε την προτεραιότητα των πράξεων δεν θα άλλαζε, αλλά τώρα έχοντας τις παρενθέσεις έχουμε 100% πιθανότητα να πετύχουμε το σωστό.
68. E: Οκ. Πάμε στο δ.
69. M5: Και πάλι θα το κρατήσω, είναι αυτό ότι μπορεί να υπάρχει η προτεραιότητα των πράξεων αλλά άμα δεν υπάρχουν οι παρενθέσεις για να τα διαχωρίσω μπορεί να μην σκεφτώ κατευθείαν ότι πρέπει να κάνω την προτεραιότητα οπότε θα την κρατήσω.
70. E: Οκ. Άρα αν δεν υπήρχανε τι θα έκανες πρώτα;
71. M5: Εεμ, άμα δεν σκεφτόμουν την προτεραιότητα, θα έκανα 10 ...Α! Εδώ είναι τώρα όττι, άμα δεν υπήρχε και το κάναμε με την προτεραιότητα τότε θα

έβγαινε διαφορετικό γιατί θα κάναμε πρώτα τον πολλαπλασιασμό και θα έβγαινε $7+6$. Οπότε είναι αυτό...τόρα θα ήτανε διαφορετικό ότι πρέπει να μην την κάνουμε την προτεραιότητα, να μην το σκεφτούμε άμα δεν έχουμε τις παρενθέσεις για να βγει σωστό. Οπότε γι' αυτό κιόλας διαλέγω και τις παρενθέσεις. Πρέπει να σκέφτεσαι άμα είναι προτεραιότητα δεν είναι προτεραιότητα, την χρησιμοποιώ δεν την χρησιμοποιώ. Είναι πολύ μπερδευτικό.

72. E: Θεωρείς ότι έχεις επιλογή στο να χρησιμοποιήσεις ή να μην χρησιμοποιήσεις την προτεραιότητα;
73. M5: Eεε, φφφ.
74. E: Κάνεις όπως σε βολεύει;
75. M5: Πρέπει να την χρησιμοποιείς. Eεε, αλλά πάλι είναι αυτό ότι καμιά φορά δεν τη σκέφτεσαι κατευθείαν και μπορεί να σου ξεφύγει έτσι.

4. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $7 + (3 : 2)$ β. $7 - (3 \cdot 3)$ γ. $(7 \cdot 3) - 3$ δ. $(7+3) \cdot 2$

- 76.
77. E: Οκ. Εντάξει ας προχωρήσουμε. Λοιπόν, η 5 λέει «Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 * 3$ ισούται και με 18 και με 14, εσένα ποια είναι η γνώμη σου;»
78. M5: Ωραία. Eεε, αυτός στην ουσία το έκανε...εεε, στην αρχή υπολόγισε, μάλλον, το $2+4$ και έκανε την πρόσθεση πρώτα και μετά το έκανε επί 3 και γι' αυτό του βγήκε 18, αλλά άμα κάνεις πρώτα τον πολλαπλασιασμό και κοιτάς και την προτεραιότητα κιόλας θα σου βγει 14.
79. E: Εσύ τι θα απαντούσες σ αυτό;
80. M5: Ότι κανονικά είναι 14 αλλά θα έπρεπε ίσως να υπάρχουν παρενθέσεις ώστε να το κατανοήσει και το παιδί ότι...εδώ σ αυτή την περίπτωση δεν σκέφτεται ότι πρέπει να κάνουμε προτεραιότητα.

5. Ένας μαθητής μου απάντησε ότι το $2 + 4 \cdot 3$ ισούται και με 18 και με 14. Ποια είναι η γνώμη σου;

- 81.
82. E: Αχά. Εντάξει. Πάμε στο 6. Στην 6 θέλω, να δεις αυτές τις εκφράσεις, η ερώτηση είναι: «Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ;».
83. M5: Ωραία. Eεε, η α σίγουρα γιατί έχουμε στην ουσία τα 50 και μετά βγάζουμε $-10 -20$, οπότε είτε βγάλουμε πρώτα τα 10 είτε τα προσθέσουμε τα $- 10$ και τα $- 20$ δεν θα αλλάξει κάτι.
84. E: Αχά

85. M5: Μμμ, όπως και στην β γιατί, εε, στην ουσία προσθέτουμε το κόστος και το αφαιρούμε από όλο, οπότε και η β μπορεί να το περιγράψει.
86. E: Αχά
87. M5: Τώρα, η γ όχι, γιατί έχει...όταν έχουμε πλην έξω από την παρένθεση αλλάζουνε τα πρόσημα. Οπότε μετά θα γινότανε $-10+20$. Οπότε, δεν πήραμε 20 ευρώ. Οπότε δεν το περιγράφει αυτό. Και για ακριβώς τον ίδιο λόγο και η δ γιατί λέει $-10+20$. Δεν μας δίνουν 20 ευρώ, αφαιρούνται.

6. Ποια έκφραση ή εκφράσεις περιγράφουν τα χρήματα που μου έχουν απομείνει αν έχω 50 ευρώ από την αρχή και αγοράζω γλυκά για 10 ευρώ και κέικ για 20 ευρώ.

$\alpha. 50 - 10 - 20$	$\beta. 50 - (10 + 20)$
$\gamma. 50 - (10 - 20)$	$\delta. 50 - 10 + 20$

- 88.
89. E: Αχά, εντάξει. Πάμε στο 7. Η 7 λέει «Είναι αληθείς οι ισότητες; Αν όχι να χρησιμοποιήσεις παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.»
90. M5: Ωραία...Εεε, στα α είναι... $15-5+5$ (ψιθυρίζει) Εεε, εδώ δεν είναι αληθής. Γιατί άμα κάνουμε $15 - 5$ είναι $10 + 5$ οπότε πάλι βγαίνει 15. Οπότε για να έβγαινε θα έπρεπε να κάνουμε εεε...μμ μισό. Ωραία, θα έπρεπε να βάλουμε, 15 μείον παρένθεση $5+5$ παρένθεση.
91. E: Αχά
92. M5: Για να γινότανε $15-10$.
93. E: Οκ, β.
94. M5: Ωραία, 20 μείον...θα πω ότι είναι αληθής η ισότητες, γιατί άμα χρησιμοποιήσουμε την προτεραιότητα, που συνήθως αυτό είναι το σωστό πράγμα να κάνουμε, θα βγει. Οπότε θα πω ότι είναι σωστή, ναι.
95. E: Αχά
96. M5: Ωραία, εεε, $3 + 2 * 3$ (διάβασε φωναχτά το πρώτο μέλος) Ωραία, εεεδώ θα πω ότι δεν είναι αληθής γιατί άμα το κάνουμε πρώτα τον πολλαπλασιασμό θα βγει εεε, $3+6$. 8, οπότε δεν είναι ίσο με 15.
97. E: $3+6$
98. M5: E, ναι, οπότε...που αυτό είναι 9 σόρρυ. Εεε και δεν είναι ίσο αυτό με 15, οπότε θα έβαζα την παρένθεση στο $3+2$. Οπότε 3 συν 2 (μικρή παύση) επί 3, 15. Για να βγει πάλι $5*3$.
99. E: Οκ, και δ.
100. M5: (Ψιθυρίζει κάποια από τα νούμερα όσο σκέφτεται φωναχτά.) Εεε, όχι εδώ δεν είναι γιατί στην ουσία $12:4$ είναι 3, άμα κάνεις όμως μετά $12:6$ πρώτα που είναι προτεραιότητα, θα βγει 2 μετά μείον δύο θα βγει μηδέν. Οπότε θα έπρεπε να το κάνουμε, εεε, 12 δια μισό...ώπα κάτσε...ναι θα έπρεπε να κάνουμε 12 δια παρένθεση $6-2$ παρένθεση.

101. E: Αχά, οκ. Εντάξει είναι τώρα;

102. M5: Αχά!

7. Είναι αληθείς οι ισότητες; Εάν όχι, χρησιμοποίησε παρενθέσεις για να διορθώσεις τη σχέση.

α. $15 - (5 + 5) = 5$ Ναι / Όχι. β. $20 - 5 \cdot 3 = 5$ Ναι / Όχι.

γ. $(3 + 2) \cdot 3 = 5 \cdot 3$ Ναι / Όχι. δ. $12 : 4 = 12 : (6 - 2)$ Ναι / Όχι.

103.

104. E: Ωραία. Πάμε στο 8. Στην 8, θέλω να ελέγξεις αν είναι οι ισότητες αληθείς, χωρίς όμως να κάνεις υπολογισμούς.

105. M5: Ωραία. Εεε, στο α δεν είναι γιατί άμα έχουμε παρένθεση σημαίνει ότι το 40 θα το πολλαπλασιάσαμε και με το 51 και με το 72. Οπότε, για να ήταν σωστά θα έπρεπε να είναι 40 επί 51 επί 72. Βασικά, συγγνώμη, εε, $40 * 51 + 40 * 72$.

106. E: Οκ. Το β;

107. M5: Ναι είναι αληθής γιατί πάλι προτεραιότητα των πράξεων και άμα το κάνουμε έτσι μια χαρά μπορεί να βγει.

108. E: Άρα θα έκανες το ίδιο και στα δύο μέλη;

109. M5: Εεε, ναι. Πρώτα...άμα το κάνεις με τον σωστό τρόπο και σκεφτείς για την προτεραιότητα πάλι, η παρένθεση βοηθάει αλλά άμα το κάνεις με τον σωστό τρόπο δεν χρειάζεται κιόλας.

110. E: Αχά, οκ. γ;

111. M5: Εεε, $12 + \dots$ εεε. Ναι ισχύει εδώ πέρα γιατί πάλι είναι πρόσθεση κι αφαίρεση οπότε είτε τα προσθέσεις πρώτα και μετά αφαιρέσεις είτε αφαιρέσεις πρώτα, ό,τι και κάνεις θα σου βγει το ίδιο αποτέλεσμα.

112. E: Αχά, για πες και στο δ.

113. M5: Ωραία...(ψιθυρίζει νούμερα, διαβάζει την ισότητα)

114. E: Χωρίς να κάνεις πράξεις, θυμίζω.

115. M5: Ναι, εεε, θα λεγα...Μου φαίνεται...όχι μισό. Προσπαθώ να μην κάνω πράξεις. Εεεεμ, εε θα έλεγα όχι, γιατί στο 2ο μέλος είναι σαν να αφαιρείς απ' το 27 όλο, και το... το $5+3$. Θα άλλαζαν πάλι τα πρόσημα, με την παρένθεση, επειδή είναι πριν.

116. E: Εννοείς αν έβγαζες την παρένθεση;

117. M5: Εεε, ναι άμα έβγαζα την παρένθεση επειδή έχει πλην απ' έξω θα γινόταν $27-5-3$ ενώ εμείς θέλουμε $+3$.

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, έλεγξε αν οι παρακάτω ισότητες είναι αληθείς:

α. $40 \cdot (51 + 72) = 40 \cdot 51 + 72$ Ναι / Όχι β. $120 : 3 + 64 = (120 : 3) + 64$ Ναι / Όχι.

γ. $18 + (9 - 4) = 18 + 9 - 4$ Ναι / Όχι. δ. $27 - 5 + 3 = 27 - (5 + 3)$ Ναι / Όχι.

118.

119. Ε: Αχά, οκ. Πάμε στο 9. Στην 9 θέλω για την καθεμία, έχεις δύο αριθμητικές παραστάσεις, για την κάθε μια να μου πεις ένα προβληματάκι, δικό σου, που την εκφράζει.

120. Μ5: Ωραία. Αααμ. Εεε, ωραία. Για το πρώτο μπορούμε να πούμε ότι, ένα παιδί εε πήγε στο βιβλιοπωλείο και αγόρασε 5 πακέτα από τα οποία το καθένα είχε 3 μολύβια και 2 σβήστρες. Και οπότε πόσα μολύβια και σβήστρες είχε στο τέλος;

121. Ε: Αχά

122. Μ5: Γιατί στο καθένα βασικά θα έχει απ' όλα οπότε θα πολλαπλασιάσουμε και το 3 με το 5 αλλά και το 2 με το 5 και μετά θα τα προσθέσουμε οπότε θα βγει ίσο το πρώτο. Ενώ στο 2ο θα είναι...Τρία συν δύο...Εεεμμμ. Ωραία, θα το χρησιμοποιήσω το ίδιο απλά θα το διατυπώσω αλλιώς, ότι αυτό το παιδί πήγε σε άλλο βιβλιοπωλείο εεε, και πήρε εεε 5 σβήστρες που έκαναν 2 ευρώ η καθεμία και ένα στυλό που έκανε 3 ευρώ. Πόσα λεφτά ξόδεψε.

123. Ε: Ωραία, εντάξει προχωράμε. Εδώ θέλω να λύσεις την 10, την παράσταση δηλαδή.

124. Μ5: Ωραία, εδώ μπορώ να γράψω ε;

125. Ε: Εδώ γράψε και μετά να μου το στείλεις και φωτογραφία ό,τι γράφεις.

126. Μ5: Ωραία. (παύση) Μισό...Ωραία, το έκανα. Να σου πω το αποτέλεσμα ή όλο πώς το έκανα;

127. Ε: Πες μου όλο πώς το έκανες.

128. Μ5: Ωραία. Εεε, $9+6$ επί $11-7$ θα γίνει $9+6$ ή βασικά μπορούμε να το υπολογίσουμε κατευθείαν, οπότε θα πούμε 15 εε επί $4 = 60$

129. Ε: Για ξαναπές λίγο τι έκανες;

130. Μ5: Ααα δια 4, ξέχασα το 4. Μισό.

131. Ε: Θεε να μου το ξαναπείς από την αρχή;

132. Μ5: Ναι, μισό να το ξανακάνω λίγο. (μικρή παύση) Ωραία, οπότε θα γίνει, εε, 15 α ναι $15 * 4 : 4$ και μπορούμε εε επειδή είναι $*4:4$ και είναι αντίθετα μπορούμε νομίζω να τα απλοποιήσουμε οπότε να τα σβήσουμε και απλά να μείνει 15 .

133. Ε: (Γράφω εγώ $15*4:4=15$) Έτσι;

134. M5: Εε ναι, αλλιώς μισό να κάνω και την πράξη για να είμαστε σίγουροι, καλύτερα να κάνω την πράξη. Εεε, $15 \times 4 = 60$ δια 4 ναι 15 οπότε μπορούμε να κάνουμε την πράξη πρώτα για να είμαστε σίγουροι.
135. E: Αχά, οκ. Άρα έτσι ($60:4=15$) λες.
136. M5: Ναι
137. E: Πώς επέλεξες με ποια σειρά να κάνεις τις πράξεις;
138. M5: Είχα την παρένθεση, οπότε...ε βασικά στην αρχή έκανα την πρόσθεση γιατί δεν θα επηρέαζε το αποτέλεσμα, οπότε το έκανα για να φεύγει γρήγορα αυτό και μετά έκανα την πράξη που είχα μέσα στην παρένθεση πριν κάνω οτιδήποτε άλλο, πριν κάνω τη διαίρεση ή κάτι γιατί πρώτα κάνουμε αυτό που έχουμε στην παρένθεση και μετά έκανα την διαίρεση.

10.	$9 + 6 \times (11 - 7) \div 4 = ?$
	$15 \times 4 : 4 = 15$
	ή
	$60 : 4 = 15$

139. E: Οκ, εντάξει. Πάμε και στο 11. Στην 11 θέλω να διαγράψεις τις αγκύλες που θεωρείς περιττές, που δεν θα άλλαζαν το αποτέλεσμα αν δεν υπήρχαν.
141. M5: Αχά. Ωραία, στην α θα διαγράψουμε τις έξω, δηλαδή αυτή που είναι πριν το 7 και μετά την αυτή που είναι μετά την παρένθεση, τη 2η δηλαδή, γιατί δεν τα χρειαζόμαστε, δεν είναι ότι έχουνε να κάνουν με ένα άλλο μέλος (όρο εννοεί) αυτή είναι όλη η πράξη.
142. E: Αχά
143. M5: Τώρα, στη β θα...ας διαγράψουμε πρώτα πάλι τις έξω και θα...θα διαγράψω και αυτή που έχει το 7, γιατί το 7 είναι μόνο του, οπότε δεν...αυτές που έχει το 7. Αυτήν και αυτήν. (έβλεπε τον κέρσορα πού βρίσκεται στην οθόνη) Αυτό νομίζω είναι εντάξει καλά. Εεε, μετά εεε, θα διαγράψω στο γ αυτές που είναι πάλι έξω, οπότε αυτή και αυτή στο τέλος τέλος γιατί πάλι δεν χρειάζεται να έχουμε και 2η και μετά, στο δ...μμμ και πάλι τις έξω μόνο, γιατί φοβάμαι ότι άμα διαγράψουμε τις άλλες μπορεί να αλλάξει το αποτέλεσμα άμα τις διαγράψουμε όλες όλες.
144. E: Δεν είσαι σίγουρη;
145. M5: Μμμ, θα μπορούσα να το γράψω για να σιγουρευτώ. Μισό. Ναι όχι θα τις κρατήσουμε, θα τις κρατήσουμε αυτές που έμειναν.
146. E: Δες άμα θες μια φορά ξανά τώρα και αυτές που κράτησες αν σου χρειάζονται. Αν έλειπαν, θα άλλαζε το αποτέλεσμα;
147. M5: Εεε, στο α βασικά είναι μείον στην παρένθεση;

148. E: Μέσα;
149. M5: Αχά
150. E: Γενικά έχεις $-(7-(3-3))$
151. M5: Ου. Ωραία, στην α βασικά μήπως δεν θα έπρεπε να τις σβήσουμε. Εμμ, άμα τις σβήσουμε θα αλλάξει το αποτέλεσμα γιατί τώρα που έχουμε μείον έξω από την παρένθεση θα αλλάξουν όλα μέσα οπότε καλό είναι να τις κρατήσουμε. Δεν το είδα. Τώρα, το β κρατάω την απόφασή μου, νομίζω, ναι! Εεε, ου στο γ. Θα ήτανε μετά 7 μείον...εεε άμα τις κρατήσουμε στο γ θα γίνει ε, μήπως θα αλλάξει κι εδώ, μισό. (ψιθυρίζει) Εεε, όχι ότι, θα τις αφήσω έτσι, θα τις έχω σβήσει αυτές που έχουμε σβήσει γιατί και να κάνεις...και να αλλάξουν τα πρόσημα και να γίνει - 3 δια -2, άμα διαιρείς αρνητικό με αρνητικό είναι σαν να διαιρείς θετικό με θετικό, δεν...θα γίνει το πρόσημο πάλι + οπότε δεν θα έχουμε θέμα. Οπότε σβησμένες.
152. E: Τις πρώτες που έσβησες ή σβήνεις και τις άλλες, δεν κατάλαβα.
153. M5: Εεε, όχι έτσι όπως το έχουμε, δεν σβήνω τίποτα παραπάνω.

11. Να διαγράψεις όλες τις αγκύλες που δεν είναι απαραίτητες και δεν επηρεάζουν την απάντηση στις ακόλουθες εκφράσεις:

α. $-(7-(3-3))$ β. $\cancel{\{7-(3-2)\}}$

γ. $7-\cancel{\{3:2\}}$ δ. $\cancel{\{7:(3+2)\}}$

- 154.
155. E: Οκ εντάξει, ωραία. Πάμε στο τελευταίο έργο. Εντάξει;
156. M5: Ναι.
157. E: Λοιπόν, το τελευταίο έργο λέει «Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και 5 μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες μπάσκετ. Για να εκφράσουν το παραπάνω πρόβλημα ο Κώστας έδωσε τη λύση α και ο Γιώργος τη λύση β.» Θέλω να τις μελετήσεις και να μου πεις πώς απάντησε ο καθένας; Πώς το εξέφρασε;
158. M5: Ωραία, στο α, βλέπουμε ότι εε, ο Κώστας καταρχήν...μισό. Λέει, επειδή δεν κατάλαβα πολύ καλά το πρόβλημα, λέει ότι αγόρασε 5 μπάλες μπάσκετ αλλά θα μπορούσε να έχει αγοράσει 11;
159. E: Εσύ θα μου πεις τι καταλαβαίνεις.
160. M5: Έτσι όπως το διαβάζω είναι σαν...ε νομίζω ότι λέει ότι εεε, το κόστος απ' όλα που πήρε, και τις μπάλες ποδοσφαίρου και τις μπάλες μπάσκετ, εεε, άμα δεν...μ αυτό θα μπορούσε να πάρει 11 μπάλες μπάσκετ.
161. E: Αχά

162. M5: Οπότε, στο πρώτο, ο Κώστας εδώ σκέφτηκε ότι...πολλαπλασίασε το ποσό οπότε 11 μπάλες μπάσκετ επί 20 και μετά αφαίρεσε και τις μπάλες ποδοσφαίρου και το διαίρεσε πάλι με το 20. Οπότε, γιατί το 'κανε; Μμμ, στην ουσία...προσπαθώ να δω γιατί το έκανε αυτό.
163. E: Αχά, αυτό θέλω.
164. M5: (Σκέφτεται) Εεε, αχ δεν ξέρω. Εεε...
165. E: Τι έχει βάλει μέσα στην παρένθεση στην ουσία;
166. M5: Εεε, έχει βάλει τοοο, τις 11 μπ.. πόσο θα κόστιζαν οι 11 μπάλες μπάσκετ άμα τις έπαιρνε αλλά έχει αφαιρέσει και το -120 εεε και μετά πάλι το διαίρεσε με τις μπάλες του μπάσκετ και είπε ότι του έμειναν 5. Εεμμ...φφφ...
167. E: Το 5 τι δηλώνει για το πρόβλημα;
168. M5: Το 5 είναι πόσες αγόρασε στην πραγματικότητα, α ναι. Οπότε αφαίρεσε στην ουσία το κόστος που θα ήταν κανονικά άμα αγόραζε μόνο μπάλες μπάσκετ και το αφαίρεσε με το πόσο έκαναν, πόσο κόστισαν οι μπάλες ποδοσφαίρου και ότι άμα τα αφαιρείς αυτά και μετά άμα το διαιρέσεις με το 20 που είναι πόσο κάνει η καθεμία θα του έμειναν, εε, θα μπορούσε να πάρει 5 μπάλες μπάσκετ.
169. E: Οκ
170. M5: Και στο 2ο...το έκανε...11...Εεε, στο 2ο στην ουσία διαίρεσε το κόστος από τις μπάλες του ποδοσφαίρου, ε με το κόστος από τις μπάλες του μπάσκετ. Και βρήκε ότι θα ισούται με 5.
171. Οπότε στην ουσία αφαίρεσε, εε από τις μπάλες μπάσκετ, αφαίρεσε τα ποσά. Και, ίσως πίστεψε ότι άμα διαιρούσε, στην ουσία, τα δύο κόστη μαζί, να του έμενε ένα χρηματικό ποσό και μετά θα του έμειναν 5 μπάλες; Εεε, θα μπορούσε να πάρει 5 μπάλες κάπως έτσι.
172. E: Η παρένθεση εδώ τι εκφράζει;
173. M5: Ότι, ότι σαν να αγόρασε 120 μπάλες και η καθεμία να έκανε 20 ευρώ ίσως και, και οπότε στο πόσο θα κάνει η καθεμία.
174. E: Ξαναδιάβασε το πρόβλημα άμα το ξέχασες.
175. M5: (μικρή παύση) Οπότε εδώ εκφράζει ότι, εε, πάλι αφαίρεσε τις μπάλες μπάσκετ και μετά διαίρεσε ότι...διαιρεί το κόστος από τις μπάλες ποδοσφαίρου με το κόστος από την κάθε μπάλα του μπάσκετ. Οπότε, σκέφτηκε ότι άμα αφαιρούσε εε, το κόστος από τι...Βασικά, άμα διαιρούσε πρώτα το κόστος από τις μπάλες ποδοσφαίρου και το διαιρούσε αυτό με το πόσο κάνει η καθεμία, οπότε για να έβρισκεε...
176. E: Τι θα έβρισκε;
177. M5: Εεε, θα έβρισκε ότι, ίσως ότι μπορούσε να πάρει 6, στην ουσία, για να βρεις πόσες μπάλες μπορεί να πάρει και μετά αυτό θα το αφαιρούσε από τις 11

και θα του έβγαινε 5. Αλλά, άμα την κάνεις την πράξη δεν θα έβγαινε έτσι. Αλλά αυτή ίσως να είναι η σκέψη του, έτσι;

178. E: Δεν θα έβγαινε έτσι, πιστεύεις;
179. M5: Όχι λογικά γιατί θα έβγαινε 11-60
180. E: 120:20
181. M5: Αχά, αα 120:20 ώπα. Α! Θα ήταν 6...Οπότε θα έβγαινε.
182. E: Εντάξει. Έχεις να σχολιάσεις κάτι άλλο;
183. M5: Εεε, για το πρόβλημα αυτό συγκεκριμένα;
184. E: Ναι
185. M5: Εεε, ότι νομίζω ο Γιώργος το έκανε πιο περίπλοκο απ' ότι χρειαζόταν για τον εαυτό του, γιατί απλά τα έμπλεξε λίγο όλα μαζί. Ενώ, ο Κώστας απλά σκέφτηκε, τέτοιο, μεεε το κόστος.
186. E: Το πρώτο σου φαίνεται πιο απλό λες ε;
187. M5: Ναι.
188. E: Οκ, εντάξει. Ευχαριστώ πάρα πολύ!!