ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ ΚΑΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

PRIMARY AND SECONDARY EDUCATION MATHS TEACHERS' CONSEPTUAL UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION AND DIVISION OF FRACTIONS

Του

Νησιάγκα Σωτηρίου Α.Ε.Μ. 1024

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

Του ΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών – Κατεύθυνση Β΄ Ηλικιακός Κύκλος»

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος

Φλώρινα, Νοέμβριος 2022

Τίτλος Μεταπτυχιακής Εργασίας: Η εννοιολογική κατανόηση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων από δασκάλους και καθηγητές μαθηματικών.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος του ΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης και εγκρίθηκε στις …. / ….. / 2022 από τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Επιβλέπων Καθηγητής: ……

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας

Μέλος Επιτροπής:……..

Βαμβακούση Ξένια , Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μέλος Επιτροπής:……..

Χρήστου Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Υπεύθυνη Δήλωση

Η παρούσα διπλωματική εργασία υποβάλλεται ως συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή του Μεταπτυχιακού Διπλώματος του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Αποτελεί προϊόν πρωτότυπης εργασίας, αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Νησιάγκας Σωτήριος

Περιεχόμενα

Περίληψη σελ. 7

1.Θεωρητικό Πλαίσιο σελ. 9

1.1 Γιατί η γνώση των κλασμάτων είναι σημαντική. σελ. 9

1.2 Δυσκολίες των κλασμάτων σελ. 9

1.2.1 Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού-Natural number bias σελ. 10

1.2.2 Μέγεθος κλασμάτων-Θεωρία της Ενσωμάτωσης του Siegler σελ.11

1.2.3 Δυσκολίες στην αριθμητική των κλασμάτων σελ. 11

1.3 Διαδικαστική και εννοιολογική γνώση σελ.13

1.4 Εκπαιδευτικοί και ρητοί αριθμοί σελ.15

1.4.1 Υποψήφιοι και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί σελ.16

1.4.2 Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου σελ.17

1.4.3 Εκπαιδευτικοί και αριθμητική των κλασμάτων σελ.17

1.4.4 Εύχρηστα – μη εύχρηστα κλάσματα και εύχρηστες – μη εύχρηστες πράξεις σελ.19

2. Μεθοδολογία σελ.21

2.1 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα σελ.21

2.2 Συμμετέχοντες σελ.21

2.3 Μεθοδολογία – εργαλεία σελ.22

2.4 Διαδικασία σελ.23

3. Αποτελέσματα σελ.26

3.1 Απαντήσεις στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων σελ.34

3.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων σελ.34

3.1.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων στους εύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.34

3.1.1.2 Απαντήσεις των δασκάλων στους ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.36
3.1.1.3 Απαντήσεις των δασκάλων στους μη εύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.39
3.1.2 Απαντήσεις των μαθηματικών σελ.40
3.1.2.1 Απαντήσεις των μαθηματικών στους εύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.40

3.1.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών στους ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.42
3.1.2.3 Απαντήσεις των μαθηματικών στους μη εύχρηστους πολλαπλασιασμούς σελ.44

3.2 Απαντήσεις στην διαίρεση των κλασμάτων σελ.45
3.2.1 Απαντήσεις των δασκάλων σελ.45
3.2.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων στις εύχρηστες διαιρέσεις σελ.45
3.2.1.2 Απαντήσεις των δασκάλων στις ημιεύχρηστες διαιρέσεις σελ47
3.2.1.3 Απαντήσεις των δασκάλων στις μη εύχρηστες διαιρέσεις σελ49

3.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών σελ.50
3.2.2.1 Απαντήσεις των μαθηματικών στις εύχρηστες διαιρέσεις σελ51
3.2.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών στις ημιεύχρηστες διαιρέσεις…… σελ.52
3.2.2.3 Απαντήσεις των μαθηματικών στις μη εύχρηστες διαιρέσεις…… σελ.54

4. Συζήτηση - Συμπεράσματα σελ.55

5. Προτάσεις μελλοντικής έρευνας σελ.61

ΑΝΑΦΟΡΕΣ σελ.62

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ σελ.67

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 2.1. Στοιχεία για τους συμμετέχοντες στην έρευνα. Σελ.22

Πίνακας 3.1 Αποτελέσματα για τον πολλαπλασιασμό – διαίρεση των δασκάλων σελ. 26

Πίνακας 3.2 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των δασκάλων σελ. 28

Πίνακας 3.3 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία της διαίρεσης των δασκάλων σελ.29

Πίνακας 3.4 Αποτελέσματα για τον πολλαπλασιασμό–διαίρεση των μαθηματικών . σελ. 30

Πίνακας 3.5 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των μαθηματικών σελ.32

Πίνακας 3.6 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό–ερμηνεία της διαίρεσης των μαθηματικών σελ. 33

Πίνακας 3.7 Επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού σελ.34

Πίνακας 3.8 Επιτυχίες των μαθηματικών στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού σελ. 40

Πίνακας 3.9 : Επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία της διαίρεσης σελ.45

Πίνακας 3.10 : Επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία της διαίρεσης σελ.50

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα εξετάζεται η εννοιολογική γνώση δασκάλων και καθηγητών μαθηματικών στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Από τη βιβλιογραφία διαπιστώνεται ότι οι υποψήφιοι και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζουν ελλιπή εννοιολογική γνώση των κλασμάτων κάτι που επηρεάζει την κατανόηση των ρητών αριθμών από τους μαθητές. Δείγμα της έρευνας αποτελούν είκοσι δάσκαλοι και είκοσι εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών. Από την ανάλυση των δεδομένων παρατηρήθηκε μειωμένη κατανόηση της σημασίας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων με τους καθηγητές να υπερέχουν στις απαντήσεις τους σε σύγκριση με τους δασκάλους.

Λέξεις κλειδιά: Εννοιολογική Γνώση, εύχρηστα κλάσματα, εύχρηστες πράξεις, μη εύχρηστα κλάσματα, μη εύχρηστες πράξεις

ABSTRACT

This research paper focuses on the conceptual knowledge of primary and secondary education teachers on multiplication and division of fractions. It can be concluded from the relevant bibliography that both prospective and active teachers in primary and secondary education present deficient conceptual knowledge of fractions, which affects students' understanding of fractions. The survey was based on a sample of twenty primary education teachers and twenty secondary education math teachers. The data analysis revealed imperfect relational understanding of multiplication and division of fractions and a higher success rate of secondary education math teachers in comparison to primary school teachers.

Keywords: conceptual knowledge, handy fractions, handy arithmetic, non handy fractions, non handy arithmetic

1. Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Γιατί η γνώση των κλασμάτων είναι σημαντική

Τα κλάσματα είναι από τα πιο σημαντικά αντικείμενα διδασκαλίας που συναντώνται στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Ο λόγος είναι ότι η κατανόησή τους είναι σημαντική για την επιτυχία σε πιο προχωρημένα μαθηματικά σύμφωνα με τους Booth και Newton (2012) και τους Booth, Newton και Twiss-Garrity (2014) όπως αναφέρουν οι Braithwaite, Pyke, Siegler (2017). Η καλή γνώση μαθηματικών είναι σημαντικό εφόδιο για την επιτυχία στην εκπαίδευση, την οικονομία αλλά και την ατομική επιτυχία στην σημερινή εποχή. Η γνώση των κλασμάτων προάγει καθημερινές δεξιότητες, όπως η εκτέλεση υπολογισμών, ο υπολογισμός των επιτοκίων, το διάβασμα ενός χάρτη, η εκτέλεση μιας συνταγής κ.λπ. Ως εκ τούτου, οι δυσκολίες των μαθητών με τα κλάσματα πρέπει να αποτελούν προτεραιότητα για την εκπαιδευτική έρευνα (Hansen, Jordan, Rodrigues, 2017).

Ο Lamon (2007) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011) υποστηρίζει ότι από όλα τα θέματα του σχολικού προγράμματος σπουδών, η διδασκαλία των κλασμάτων είναι η πιο μαθηματικά περίπλοκη και δύσκολη. Εάν οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν επαρκή γνώση περιεχομένου για να διδάξουν κλάσματα και εάν οι μαθητές δεν μαθαίνουν κλάσματα, είναι πολύ πιθανό για τους μαθητές να συναντήσουν δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας, η οποία είναι ένα από τα βασικά μαθήματα για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

1.2 Δυσκολίες κλασμάτων

Το πεδίο των κλασμάτων δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές. Το θέμα είναι εννοιολογικά πλούσιο και δύσκολο, και το νόημά του απαιτεί εξήγηση μέσω συνδέσεων με άλλες μαθηματικές γνώσεις, διάφορες αναπαραστάσεις και πραγματικά προβλήματα. Πολλές είναι οι έρευνες που επισημαίνουν τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα (π.χ. Λεμονίδης, 2017; Lemonidis, 2016; Lemonidis, Kaiafa, 2014).

Η κατανόηση ότι ένας ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους, αλλά και ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις του (κλάσματα, δεκαδικοί,

ποσοστά) αναφέρονται στην ίδια μαθηματική οντότητα, απαιτεί από κάποιον ικανότητα και ευελιξία να κινείται μεταξύ των διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών (Lemonidis, & Pilianidis, 2020). Αυτό, αν και εύκολο για ένα άτομο με καλή γνώση των μαθηματικών, είναι πολύ δύσκολο και απαιτητικό για όσους έχουν λίγες γνώσεις μαθηματικών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

1.2.1 Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού-Natural number bias

Ένας από τους κυριότερους λόγους για τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές με τους ρητούς αριθμούς είναι η ασυμφωνία μεταξύ της βαθιά ριζωμένης προηγούμενης γνώσης των μαθητών σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και ορισμένων χαρακτηριστικών των ρητών αριθμών που διαφέρουν από εκείνα του συστήματος φυσικών αριθμών (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Οι δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές με την πολλαπλότητα των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών (κλάσμα – δεκαδικός – ποσοστά) είναι μια πτυχή της αλληλεπίδρασης μεταξύ της προηγούμενης γνώσης των μαθητών σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και της κατανόησής των ρητών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για τους ακέραιους αριθμούς, για να ερμηνεύσουν νέες πληροφορίες σχετικά με τους ρητούς αριθμούς (Moskal & Magone, 2000; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989). Αυτό δημιουργεί πολλές παρανοήσεις, που αφορούν τόσο τις διαδικαστικές όσο και τις εννοιολογικές ερμηνείες των πράξεων των κλασμάτων όπως αναφέρουν οι Vamvakoussi και Vosniadou (2004).

Η «προκατάληψη του φυσικού αριθμού»- “natural number bias”- ορισμένοι μελετητές την αναφέρουν και ως «προκατάληψη του ακέραιου αριθμού» “whole number bias”, όπως οι Ni και Zhou (2005) ή η «κυριαρχία του ακέραιου αριθμού», όπως οι Behr et al., (1984) - αναφέρεται σε αυτά τα συστηματικά σφάλματα που εμφανίζονται κατά την χρήση των ρητών αριθμών λόγω λανθασμένης γενίκευσης των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς (Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Janssen, Kelchtermans, Verschaffel, & Van Dooren, 2015). Οι στρατηγικές ακέραιου αριθμού (natural number bias) φαίνεται να παρεμβαίνουν συνεχώς στην ανάπτυξη των εννοιών του κλάσματος σύμφωνα με τους

Mack (1995), Ni (2001), Ni & Zhou (2005) και Streefland (1993) όπως αναφέρεται στους Lin, Becker, Byun, Yang, & Huang, (2013).

1.2.2 Μέγεθος κλασμάτων-Θεωρία της Ενσωμάτωσης του Siegler

Το μέγεθος των κλασμάτων είναι ένα άλλο δύσκολο σκαλοπάτι στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τους Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, και Reys, (1981) όταν μαθητές της 8^{ης} τάξης των ΗΠΑ κλήθηκαν σε εθνικές εξετάσεις να διαλέξουν αν 12/13 + 7/8 είναι πλησιέστερα στο 1, 2, 19 ή 21, το 2 επιλέχθηκε σαν απάντηση από λιγότερους μαθητές σε σχέση με το 19 ή το 21, κάτι που δείχνει την έλλειψη κατανόησης των μεγεθών των κλασμάτων. Η κατανόηση του μεγέθους είναι σημαντική για την κατανόηση των κλασμάτων, την αριθμητική τους και την γενική μαθηματική γνώση. Τα παιδιά που κατανοούν τα μεγέθη των κλασμάτων τείνουν να θυμούνται με μεγαλύτερη ακρίβεια τις διαδικασίες των πράξεων, να υπολογίζουν τα αποτελέσματα των πράξεων και να απορρίπτουν τις απίθανες λύσεις (Siegler, Thompson & Schneider, 2011)

Η Θεωρία της Ενσωμάτωσης, μια εναλλακτική θεωρία αριθμητικής ανάπτυξης, υποστηρίζει ότι υπάρχει συνέχεια σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Προτείνει μια αριθμογραμμή που περιλαμβάνει τους ακέραιους αριθμούς και τα κλάσματα με κριτήριο το μέγεθος τους οδηγώντας τον μαθητή σε σταδιακή δόμηση της γνώσης. Η θεωρία αυτή αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στην ουσιαστική γνώση των κλασμάτων και δεν τα θεωρεί δευτερεύουσας σημασίας δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι οι ιδιότητες τους διαφέρουν από αυτές των ακέραιων αριθμών (Siegler et.al., 2011).

1.2.3 Δυσκολίες στην αριθμητική των κλασμάτων

Η προσπάθεια κατάκτησης της αριθμητικής των κλασμάτων έχει αρκετές δυσκολίες. Στοιχεία διαφορετικών αριθμητικών διαδικασιών σχετίζονται μεταξύ τους πολύπλοκα. Η πρόσθεση και η αφαίρεση των κλασμάτων απαιτούν κοινούς παρονομαστές, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των κλασμάτων. Οι ασκήσεις του πολλαπλασιασμού κλασμάτων λύνονται κάνοντας πολλαπλασιασμό ανεξάρτητα στους αριθμητές και στους παρονομαστές, αλλά οι ασκήσεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων δεν μπορούν να λυθούν με αυτόν τον τρόπο. Στη διαίρεση των κλασμάτων, αλλά πουθενά αλλού παρόμοια, η απάντηση

βρίσκεται μέσω της διαδικασίας αντιστροφής και πολλαπλασιασμού (Siegler & Pyke, 2013). Οι μαθητές συχνά αφήνουν τον παρονομαστή αμετάβλητο σε προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων που έχουν ίσους παρονομαστές (π.χ. 2/3 × 1/3 = 2/3). Αυτό ίσως να συμβαίνει επειδή οι μαθητές συνήθως αντιμετωπίζουν περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων από προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Siegler, Carpenter, et.al. 2010a).

Στην ελλιπή εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων από μαθητές αλλά και από ενήλικες αναφέρονται στην εργασία τους οι Sidney, Thompson, & Rivera, (2019). Οι μαθητές συχνά εφαρμόζουν εσφαλμένα τη διαδικασία αντιστροφής και πολλαπλασιασμού στη διαίρεση κλασμάτων επειδή δεν κατανοούν εννοιολογικά τη διαδικασία. Ένα κοινό σφάλμα είναι η μη αντιστροφή κανενός κλάσματος. Για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να λύσει την διαίρεση 2/3 ÷ 4/5 πολλαπλασιάζοντας τα κλάσματα χωρίς προηγουμένως να έχει αντιστρέψει τους όρους του δευτέρου κλάσματος. Άλλο συνηθισμένο λάθος είναι να αντιστρέφουν το λάθος κλάσμα και μετά να κάνουν πολλαπλασιασμό (π.χ. 2/3 ÷ 4/5 = 3/2 × 4/5) ή να αντιστρέφουν και τα δυο κλάσματα (2/3 ÷ 4/5 = 3/2 × 5/4). Τέτοια σφάλματα γενικά αντικατοπτρίζουν την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης γιατί η διαδικασία αναστροφής και πολλαπλασιασμού παράγει το σωστό πηλίκο (Siegler et al., 2010a)

Το πρόβλημα που εμφανίζεται και δημιουργεί δυσκολίες στην αριθμητική των κλασμάτων είναι η παρανόηση ότι οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών είναι ιδιότητες όλων των αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί έχουν μοναδικούς επόμενους, μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα μόνο σύμβολο, ποτέ δεν μειώνονται με τον πολλαπλασιασμό, ποτέ δεν αυξάνονται με την διαίρεση κ.λπ. Καμία από αυτές τις ιδιότητες δεν ισχύει για τα κλάσματα, ωστόσο, και επομένως καμία δεν ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. (Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013)

Στο πλαίσιο των μαθηματικών πράξεων, υπάρχουν γνωστές παρανοήσεις, όπως ότι «ο πολλαπλασιασμός γίνεται πάντα μεγαλύτερος», που αντανακλά την επίδραση της προηγούμενης γνώσης σχετικά με τον πολλαπλασιασμό με φυσικούς αριθμούς (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Τέτοια αποτελέσματα είναι συμβατά με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, το οποίο προβλέπει δυσκολίες στη μάθηση όταν η νέα γνώση που θα αποκτηθεί έρχεται σε σύγκρουση με αυτό που είναι

ήδη γνωστό (Βοσνιάδου, 1994α) όπως αναφέρεται στις Vamvakoussi και Vosniadou (2004).

Σύμφωνα με την Prediger, οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση με τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο των ακέραιων αριθμών. Αυτή όμως η εξήγηση δεν μπορεί να έχει εφαρμογή στους ρητούς αριθμούς: πώς θα μπορούσε να εξηγήσει κάποιος τι σημαίνει να πολλαπλασιάσει $\frac{1}{2} x \frac{1}{4}$. Αυτό συμβαίνει γιατί στον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων δεν υπάρχει επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Ένα άλλο παράδειγμα αφορά κλάσματα που μπορούν να ερμηνευθούν ως «μέρος ενός μέρους » τα οποία επίσης δεν έχουν αντιστοιχία όταν εργάζονται με ακέραιους αριθμούς. Την ίδια δυσκολία θα συναντούσαμε και στην διαίρεση των κλασμάτων. Πως θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε πώς γίνεται κάποιος να μοιράσει τα 3/4 ενός μήλου σε ¼ πιάτα ;

Για την Prediger (2008), αυτή είναι η βάση των λανθασμένων αντιλήψεων και των δυσκολιών των μαθητών στην εκμάθηση ρητών αριθμών. Ως εκ τούτου, για να μάθουν ρητούς αριθμούς, απαιτείται μια εννοιολογική αλλαγή σχετικά με τους ακέραιους αριθμούς, ώστε οι μαθητές να μπορούν να δημιουργήσουν νέες νοητικές αναπαραστάσεις (Carvalho, 2017) **.**

1.3 Διαδικαστική και εννοιολογική γνώση

Στη έρευνα αυτή εξετάζεται η εννοιολογική γνώση των εκπαιδευτικών στο πεδίο των κλασμάτων. Είναι λοιπόν ουσιαστική η διάκριση των δυο μορφών γνώσης, της εννοιολογικής και της διαδικαστικής. **Εννοιολογική Γνώση** (conceptual knowledge) είναι το είδος της γνώσης που αναπτύσσουμε καθώς δημιουργούμε νέες κατηγοριοποιήσεις (έννοιες) με τις οποίες περιγράφουμε τα φαινόμενα του κόσμου και παράλληλα συνδέουμε τις έννοιες μεταξύ τους με σχέσεις. **Διαδικαστική Γνώση** (procedural knowledge) ,από την άλλη μεριά, είναι η γνώση που αφορά την ικανότητά να εφαρμόζουμε διαδικασίες που οδηγούν στην επίτευξη κάποιου στόχου. Με άλλα λόγια, αφορά τις δεξιότητες (ικανότητες) που αφορούν τρόπους εφαρμογής γνώσης για επίλυση προβλημάτων του γνωστικού πεδίου.

Η εννοιολογική γνώση των κλασμάτων περιλαμβάνει τη γνώση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των κλασμάτων που αναφέρθηκαν και παραπάνω (π.χ. σχέση αριθμητή – παρονομαστή, πολλαπλές αναπαραστάσεις, πυκνότητα κ.λπ.) και τις δυνατότητές τους. Η διαδικαστική γνώση είναι η γνώση των «τυπικών» διαδικασιών, της εκτέλεσης αλγορίθμων σαν μια σειρά πράξεων με βήματα που γίνονται προκειμένου να επιτευχθεί ένας συγκεκριμένος σκοπός – αποτέλεσμα. (Lenz, 2020).

Στην περίπτωση των κλασμάτων έχει αποδειχθεί ότι ορισμένοι μαθητές έχουν την ικανότητα να εκτελούν κλασματικές διαδικασίες χωρίς να υπάρχει εννοιολογική κατανόηση ή χωρίς να είναι σε θέση να εξηγήσουν γιατί χρησιμοποιούν αυτές τις διαδικασίες (Kerslake, 1986; Lemonidis, 2016; Peck & Jencks, 1981) όπως αναφέρεται στις Bempeni και Vamvakoussi(2015). Από την άλλη μεριά, ο Resnick (1982) όπως αναφέρεται στις Bempeni και Vamvakoussi (2015) παρουσίασε στοιχεία που δείχνουν ότι ορισμένα παιδιά μπορεί να καταλαβαίνουν εννοιολογικά τις αρχές που διέπουν την αφαίρεση των κλασμάτων χωρίς να δείχνουν διαδικαστική ευχέρεια.

Η πράξη που απαιτεί ιδιαίτερα ισχυρό υπόβαθρο εννοιολογικής γνώσης είναι η διαίρεση. Η διαίρεση των κλασμάτων αιτιολογεί την ανάγκη διάκρισης μεταξύ της ικανότητας επιτυχούς εκτέλεσης μαθηματικών διαδικασιών και κατανόησης αυτών των εννοιών. Η σημασία της διάκρισης βασίζεται στον ισχυρισμό ότι κάποιοι μαθητές μπορούν να εκτελέσουν με επιτυχία μαθηματικές διαδικασίες χωρίς να καταλαβαίνουν πώς τις κάνουν σύμφωνα με τους Baroody και Ginsburg (1986)και Sophian (1995), όπως αναφέρεται στους Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, (2001) και ότι η κατανόησή τους δεν είναι πάντα εμφανής στις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, σύμφωνα με τους Gelman και Gallistel (1978),Siegler και Crowley (1994), όπως αναφέρεται στους Rittle-Johnson et al. (2001).

Σύμφωνα με τον Sowder ,όπως αναφέρει ο Yea Ling Tsao (2004), «οι σωστές απαντήσεις δεν είναι ασφαλής ένδειξη καλής σκέψης» και «οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξετάζουν πέρα από τις απαντήσεις και να απαιτούν κάτι περισσότερο από απαντήσεις». Μπορεί δηλαδή ένας μαθητής ή και ενήλικας να βρίσκει μηχανικά την σωστή απάντηση για μια πράξη, χωρίς να καταλαβαίνει τη σημασία των αριθμών ή της πράξης. Για παράδειγμα στη διαίρεση 1/2:1/4 όπου εκείνοι που βρίσκουν το σωστό αποτέλεσμα, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι καταλαβαίνουν πως το 1/4 χωράει δύο φορές στο 1/2.

Το συμπέρασμα από αυτές τις μελέτες υποστηρίζει την άποψη που οι Rittle-Johnson, Siegler, και Alibali, (2001) ονομάζουν «προσέγγιση concepts-first». Η θεωρητική υπόθεση στην οποία βασίζεται αυτή η άποψη είναι ότι η εννοιολογική κατανόηση είναι η κινητήρια δύναμη της ανάπτυξης. Μαθαίνουμε μόνο με την κατανόηση και η διαδικαστική γνώση, από αυτή την προοπτική, είναι μόνο το σύνολο των χρήσιμων εργαλείων που χρησιμοποιούμε όταν έχουμε εννοιολογική γνώση. Εάν οι διαδικασίες δεν κατανοηθούν εννοιολογικά, θα είναι επιρρεπείς στην ανάπτυξη «σφαλμάτων» (Brown & Van Lehn, 1982; Resnick, 1983; Van Lehn, 1983) όπως αναφέρουν οι Hallett, Nunes, και Bryant, (2010). Αυτή η σκέψη φανερώνει ότι η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση των κλασμάτων θα πρέπει να συσχετίζονται, γιατί χωρίς εννοιολογική κατανόηση, οι διαδικασίες συγχέονται και είναι δύσκολο να τις θυμόμαστε σύμφωνα με τους Hecht (1998), Hecht, Close, και Santisi (2003), Hecht και Vagi (2010) και Siegler, et al.(2011) όπως αναφέρεται στους Siegler, και Pyke, (2013).

Η ελλιπής διαδικαστική γνώση για τις πράξεις στα κλάσματα δείχνει βαθιά ριζωμένους μηχανισμούς που λειτουργούν δημιουργώντας παρανοήσεις και λάθος αντιλήψεις με αποτέλεσμα να γίνονται λάθη και να υπεραπλουστεύονται οι διαδικασίες. Επίσης η κακή εννοιολογική κατανόηση μπορεί να συμβάλλει στην κακή αριθμητική απόδοση, αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει όλα τα λάθη που κάνουν οι μαθητές, γιατί ορισμένα λάθη είναι πιο συχνά από άλλα ή γιατί οι συχνότητες των διαφορετικών σφαλμάτων ποικίλλουν συστηματικά σε διαφορετικούς τύπους των προβλημάτων (Braithwaite et al., 2017).

1.4 Εκπαιδευτικοί και ρητοί αριθμοί

Ο δάσκαλος είναι θεμελιώδης παράγοντας στην ανάπτυξη της κατανόησης και της ικανότητας των μαθητών να εργάζονται με κλάσματα. Η εργασία αυτή έχει στόχο να ερευνηθεί η εννοιολογική κατανόηση δασκάλων αλλά και καθηγητών των μαθηματικών στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Ένας κύριος στόχος της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά πρέπει να είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής και παιδαγωγικής γνώσης των υποψήφιων εκπαιδευτικών στον τομέα των ρητών αριθμών, καθώς και η αύξηση της εμπιστοσύνης στην ικανότητά τους να εργάζονται με κλάσματα σύμφωνα με τον Tirosh et al. (1998) όπως αναφέρεται

στους Young, και Zientek, (2011). Επίσης, η έρευνα για την εκπαίδευση στα μαθηματικά έχει αρχίσει να επικεντρώνεται στον ρόλο που μπορεί να έχει η περιορισμένη γνώση των εκπαιδευτικών στον τομέα αυτό και πόσο συμβάλλει στην περιορισμένη κατανόηση των κλασμάτων των μαθητών σύμφωνα με τον Wright (2008) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011). Πολλές έρευνες διαπίστωσαν ότι οι υποψήφιοι και εν ενεργεία δάσκαλοι πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζουν ελλείψεις στο θέμα των κλασμάτων (π.χ. Ball 1990; Ma 1999; Lin, Becker et al. 2013; Λεμονίδης, Ουζουνίδου, 2017; Lemonidis, Tsakiridou, & Meliopoulou, 2018).

1.4.1 Υποψήφιοι και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν ποικίλα επίπεδα ικανότητας διαχείρισης των κλασμάτων (Ball, 1990; Newton, 2009). Οι δάσκαλοι δείχνουν να έχουν λιγότερη αυτοπεποίθηση σε σχέση με τις μαθηματικές τους ικανότητες από τους καθηγητές της δευτεροβάθμιας σύμφωνα με την Ball (1990a) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011). Η Ball (1990) απέδειξε ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δεν έχουν επαρκή γνώση των κλασμάτων. Ο Marchionda (2006) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011) παρατήρησε ότι ορισμένοι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν κενά στη γνώση των κλασμάτων και διαθέτουν αδύναμη διαδικαστική γνώση των λειτουργιών του κλάσματος. Η μελέτη του Bloom (2001) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011) σε 225 υποψήφιους εκπαιδευτικούς διαπίστωσε ότι μόνο το 42% μπορούσε να λειτουργήσει με ρητούς αριθμούς χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής. Ο Newton (2008) διαπίστωσε ότι το 78% των μελλοντικών εκπαιδευτικών (n = 85) μπόρεσαν να υπολογίσουν σωστά τις κλασματικές πράξεις.

Όσον αφορά στους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, οι υπάρχουσες μελέτες δείχνουν ότι οι γνώσεις τους σχετικά με τα κλάσματα είναι περιορισμένες σύμφωνα με τους Newton (2008) και Zhou, Peverly και Xin (2006) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011). Παρουσιάζουν συχνά σφάλματα στις πράξεις των κλασμάτων παρόμοια με εκείνα των νεαρών μαθητών σύμφωνα με τους Silver (1983, 1986), Newton (2008), Tirosh (2000) Tirosh, Fischbein, Graeber και Wilson(1998) όπως αναφέρεται στους Young και Zientek, (2011).

1.4.2 Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου

Για να μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίζουν με επάρκεια τις δυσκολίες των μαθητών στους ρητούς αριθμούς, είναι πολύ σημαντικό να έχουν βαθιά γνώση περιεχομένου και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στους ρητούς αριθμούς.

Ο Shulman (1986) ορίζει την **Γνώση Περιεχομένου** ως τη γνώση του αντικειμένου που διδάσκει ο εκπαιδευτικός που δεν περιορίζεται σε στοιχεία και έννοιες αλλά περιλαμβάνει και τις οργανωτικές αρχές που διέπουν αυτό το γνωστικό αντικείμενο. Ως **Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου** ορίζεται από τον ίδιο ερευνητή η γνώση διαμόρφωσης και παρουσίασης του αντικειμένου διδασκαλίας με κατανοητό τρόπο, ο εντοπισμός των δυσκολιών και η ανάπτυξη στρατηγικών διαχείρισης των ιδεών και παρανοήσεων των μαθητών .

Η Ball (2008) εστιάζοντας στην μαθηματική γνώση προχωρά ένα βήμα παραπέρα και διαιρεί την Γνώση περιεχομένου του Shulman σε Κοινή Γνώση Περιεχομένου (γνώση μαθηματικών που δεν σχετίζεται με τη διδασκαλία), Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου(γνώση μαθηματικών άμεσα συνδεδεμένη με τη διδασκαλία) και τον Ορίζοντα Γνώσης Περιεχομένου (γνώση της κατανομής των μαθηματικών εννοιών στο αναλυτικό πρόγραμμα). Ανάλογα χωρίζει την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου σε Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών, Γνώση Περιεχομένου και Αναλυτικού προγράμματος και Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι τόσο η γνώση περιεχομένου όσο και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των υποψήφιων δασκάλων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τους ρητούς αριθμούς είναι περιορισμένη (Depaepe et al., 2015). Οι Ward και Thomas (2007), όπως αναφέρεται από την Κουνελάκη (2019), ερευνώντας τις γνώσεις των εκπαιδευτικών στα κλάσματα παρατήρησαν ότι εκπαιδευτικοί από δημοτικά σχολεία της Ιρλανδίας είχαν καλύτερες επιδόσεις σε ερωτήσεις σχετικές με τη Γνώση Περιεχομένου παρά σε αυτές που σχετίζονταν με την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου.

1.4.3 Εκπαιδευτικοί και αριθμητική των κλασμάτων

Τα επίπεδα ικανότητας των εκπαιδευτικών στη διαχείριση των κλασμάτων ποικίλλουν ανάλογα με τη πράξη που κάνουν μεταξύ κλασμάτων. Τα σφάλματα δεν

είναι τυχαία. Υπάρχουν γνωστά μοτίβα σφαλμάτων σε πράξεις με κλάσματα πού ανέκαθεν απασχολούσαν την μαθηματική κοινότητα. Ένα συχνό σφάλμα που εμφανίζεται στον πολλαπλασιασμό είναι η εύρεση ενός κοινού παρονομαστή και στη συνέχεια ο πολλαπλασιασμός των αριθμητών χωρίς πολλαπλασιασμό των παρονομαστών. Στην πραγματικότητα, οι μελλοντικοί δάσκαλοι τείνουν να βρίσκουν και να διατηρούν τους ίδιους παρονομαστές, ανεξάρτητα από την πράξη (Newton, 2008) όπως αναφέρεται στους Young και Zientek, (2011).

Η διαίρεση κλασμάτων είναι η πράξη στην οποία επικεντρώνονται οι περισσότεροι ερευνητές. Η Ball (1990b) όπως αναφέρεται στους Young και Zientek, (2011) σημείωσε ότι η γνώση των μελλοντικών εκπαιδευτικών στη διαίρεση κλασμάτων ήταν γενικά κατακερματισμένη. Ο Marchionda (2006) όπως αναφέρεται στους Young και Zientek, (2011) εξέτασε 94 δασκάλους δημοτικού και διαπίστωσε ότι απάντησαν σωστά μόνο στα μισά από τα προβλήματα διαίρεσης κλάσματος. Τα λάθη περιλάμβαναν την αντιστροφή του διαιρετέου αντί του διαιρέτη, και στη συνέχεια λανθασμένη εκτέλεση της πράξης. Ο Newton (2008) όπως αναφέρεται στους Young, και Zientek, (2011) υποστήριξε ότι το πιο συχνό σφάλμα στη διαίρεση των κλασμάτων ήταν η εύρεση ενός κοινού παρονομαστή και η διατήρησή του ως παρονομαστή.

Ο Ma (2010) έχει πραγματοποιήσει μια διαπολιτισμική σύγκριση μεταξύ έμπειρων δασκάλων των ΗΠΑ και της Κίνας εξετάζοντας την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση τους στην διαίρεση των κλασμάτων. Ζήτησε από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς να υπολογίσουν την διαίρεση $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ αλλά και να την ερμηνεύσουν. Μόνο το 43% από τους καθηγητές των ΗΠΑ πέτυχαν στους υπολογισμούς τους και κανένας δεν κατανοούσε ουσιαστικά τον αλγόριθμο. Αντιθέτως, όλοι οι Κινέζοι δάσκαλοι πέτυχαν στους υπολογισμούς τους. Δεν αρκέστηκαν μόνο σε αυτό αλλά προσπάθησαν να το δείξουν με διάφορους τρόπους κάτι που αποδεικνύει την εννοιολογική τους κατανόηση. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε διαφορές του πολιτισμικού περιβάλλοντος όπως προσδοκίες των γονέων, σχολική οργάνωση, χρόνος που αφιερώνεται στα μαθηματικά και σχέση γλώσσας με τα μαθηματικών. Για παράδειγμα η κινέζικη λέξη για τον αριθμό 20 σημαίνει 2 δεκάδες, το 30 τρεις δεκάδες και λοιπά. Η κινέζικη γλώσσα δείχνει την σχέση της λέξης με τον αριθμό πιο ξεκάθαρα από ότι η αγγλική.

Στη διαπίστωση ότι η γνώση για τα κλάσματα των καθηγητών τείνει να είναι διαδικαστική και σχετικά άκαμπτη οδηγήθηκαν και άλλοι ερευνητές (Ball 1990; Lemonidis, 2016; Tirosh, 2000). Η Ball (1990) διερεύνησε τη γνώση των εκπαιδευτικών στη διαίρεση των κλασμάτων και διαπίστωσε ότι οι γνώσεις τους ήταν διαδικαστικές και όχι εννοιολογικές καθώς δεν μπόρεσαν να εξηγήσουν την έννοια της διαίρεσης κλασμάτων. Η Tirosh (2000) επεσήμανε ότι πολλοί καθηγητές δεν μπορούσαν να εξηγήσουν τη διαδικασία της διαίρεσης κλασμάτων παρόλο που ήξεραν πώς να διαιρούν τα κλάσματα όπως αναφέρεται στους Lin, Becker et al. (2013).

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι στη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, θα έπρεπε να αφιερώνεται χρόνος όχι μόνο για να εφαρμοστεί ο κανόνας της διαίρεσης , αλλά και για επεξηγηθεί ο αλγόριθμος «αναστροφή και πολλαπλασιασμός». Παρ ’όλα αυτά όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν έναν τύπο ή μια διαδικασία για να διευκολύνουν την επίλυση προβλημάτων, η υποκείμενη έννοια για βαθύτερη κατανόηση παραμελείτε σύμφωνα με τους Bowers και Doerr (2001), Hiebert και Carpenter (1992), Skemp (1978), Wilson και Goldenberg (1998) όπως αναφέρεται στους Lin, Becker et al. (2013). Επειδή οι δάσκαλοι γνωρίζουν τη διαδικαστική προσέγγιση σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων, πιστεύουν πως γνωρίζουν ό,τι είναι απαραίτητο για να τα διδάξουν. Αυτή όμως η διαδικαστική γνώση δεν τους επιτρέπει να απαντήσουν σε απορίες μαθητών σχετικά με το πώς και γιατί «δουλεύουν» οι αλγόριθμοι, δεν μπορούν να παρουσιάσουν διαφορετικές λύσεις, αλλά ούτε και προβλήματα τα οποία έχουν νόημα για τους μαθητές τους. Είναι εμφανές λοιπόν ότι είναι απαραίτητη η βαθιά και ουσιαστική γνώση του αντικειμένου των κλασμάτων από την πλευρά των εκπαιδευτικών πράγμα που καθιστά αναγκαία τη μελέτη του γνωστικού επιπέδου των εκπαιδευτικών σ ’αυτό το θέμα.

1.4.4 Εύχρηστα – μη εύχρηστα κλάσματα και εύχρηστες – μη εύχρηστες πράξεις

Ο όρος εύχρηστα κλάσματα αναφέρεται στα κλάσματα που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα και μπορούν εύκολα να νοηματοδοτηθούν (π.χ. τα $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4},$). Δύο μάλιστα από αυτά, τόσο στα αγγλικά, όσο και στα ελληνικά έχουν και τα δικά τους ιδιαίτερα ονόματα: μισό (half) και τέταρτο (quarter). Τα εύχρηστα κλάσματα, δεν είναι

μόνο τα κλάσματα που απλοποιούνται εύκολα, ή τα μοναδιαία κλάσματα. Δίνουν ευχέρεια τόσο σε δασκάλους όσο και σε μαθητές να χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία προβληματικές καταστάσεις γιατί τα συναντάμε πιο συχνά στην διδασκαλία αλλά παρέχουν και την ευκολία να μετατρέπονται σε δεκαδικούς και ποσοστά. Είναι τα κλάσματα που μπορούν να διευκολύνουν στην κατανόηση κάποιας έννοιας ανάλογα με την διδακτική κατάσταση που έχουν εμφανιστεί. Είναι ένα σύνολο κλασμάτων που δεν είναι κλειστό.

Μη εύχρηστα θεωρούνται τα κλάσματα που έχουν όρους οι οποίοι δεν διευκολύνουν την κατανόηση του μεγέθους τους και επομένως τη διαδικασία της κατανόησης της αριθμητικής που τα συνοδεύει. Τα μη εύχρηστα κλάσματα έχουν όρους που δεν μπορούν να απλοποιηθούν ή απλοποιούνται πιο δύσκολα ή πρώτους αριθμούς. Ακόμα, τα μη εύχρηστα κλάσματα είναι πιο δύσκολο να μετατραπούν στις άλλες μορφές των ρητών αριθμών με ακρίβεια ή για να μετατραπούν χρειάζεται περισσότερη προσπάθεια. (π.χ. $\frac{3}{7} = 0{,}4285 \ldots$)

Εύχρηστες πράξεις είναι οι πράξεις που μπορούν να γίνουν πιο εύκολα κατανοητές λόγω της φύσης των όρων τους και να νοηματοδοτήσουν πιο εύκολα μια αριθμητική πράξη κλασμάτων. Είναι οι πράξεις που έχουν ορούς ένα ζευγάρι εύχρηστων κλασμάτων ή και κάποια πράξη ακεραίου με εύχρηστο κλάσμα. Για παράδειγμα μια πράξη πολλαπλασιασμού κλασμάτων του τύπου $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ θεωρείται εύχρηστη, ενώ αντίθετα η πράξη $\frac{1}{11} \times \frac{1}{13}$ όχι. Το ίδιο ισχύει και για την διαίρεση των κλασμάτων.

Με τον όρο ημιεύχρηστη, χαρακτηρίζουμε την πράξη όπου ένας από τους όρους της πράξης είναι μη εύχρηστο κλάσμα. Σε αυτή την ομάδα των πράξεων έχουμε και μια κατηγορία που την ονομάζουμε 'πολλαπλασιασμό κλασμάτων χωρίς υποδιαιρέσεις'. Μη εύχρηστο x μη εύχρηστο = ημι-εύχρηστη πράξη πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα η πράξη (7/9 x1/7) ενώ μεμονωμένα αποτελείται από τα μη εύχρηστα κλάσματα 7/9 και 1/7 όταν βρίσκονται μαζί στην πράξη του πολλαπλασιασμού (μπορεί να απλοποιηθεί το 7).

Τέλος μη εύχρηστες πράξεις χαρακτηρίζουμε τις πράξεις που έχουν όρους ανάγωγα κλάσματα και οι 4 όροι των δύο κλασμάτων των πράξεων (α, β, γ, δ των α/β x γ/δ) είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.

Ωστόσο δεν είναι απαραίτητο δύο εύχρηστα κλάσματα να συνθέτουν μια εύχρηστη πράξη. Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{1}{4}$ είναι εύχρηστα και συνθέτουν στον πολλαπλασιασμό την πράξη: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ η οποία είναι εύκολο να εξηγηθεί σαν μέρους ενός μέρους , αλλά όχι τόσο εύκολο στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων

2. Μεθοδολογία

2.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός αυτής της έρευνας είναι να ερευνηθεί η εννοιολογική κατανόηση δάσκαλων και καθηγητών μαθηματικών στην ερμηνεία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων και η μεταβολή της όταν αυτές οι πράξεις από εύχρηστες μετατρέπονται προοδευτικά σε ημιεύχρηστες και καταλήγουν να γίνουν μη εύχρηστες.

Πιο συγκεκριμένα θα ερευνηθούν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα.

1. Υπάρχει μεταβολή στην επιτυχή ερμηνεία των πράξεων με την μεταβολή τους από εύχρηστες σε μη εύχρηστες;
2. Ποιοι είναι οι τρόποι ερμηνείας των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από τους συμμετέχοντες;
3. Ποια είναι τα λάθη στην ερμηνεία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων από δασκάλους και καθηγητές μαθηματικών.

2.2. Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 20 μαθηματικοί και 20 δάσκαλοι. Όλοι τους την χρονική στιγμή της έρευνας εργάζονταν σε δημόσια σχολεία. Οι συμμετέχοντες της έρευνας επιλέχθηκαν ως «βολικό» δείγμα, καθώς ήταν εκπαιδευτικοί διαθέσιμοι για την πραγματοποίηση της ερευνητικής διαδικασίας. Η πλειοψηφία τους ήταν εκπαιδευτικοί από την περιοχή των σχολείων του νομού Πέλλας, ενώ οκτώ από αυτούς ήταν εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε σχολεία του νομού Θεσσαλονίκης. Στον πίνακα 2.1 που ακολουθεί παρατίθενται στοιχεία για τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς όπως χρόνια προϋπηρεσίας, φύλλο, σπουδές και εργασιακή εμπειρία.

Πίνακας 2.1 Στοιχεία για τους συμμετέχοντες στην έρευνα

	Χρόνια Προϋπηρεσίας				Φύλλο		Σπουδές					Εμπειρία	
	1-10	11-20	21-30	31-38	Άνδρες	Γυναίκες	Διδακτορικό	Μεταπτυχιακό	2 πτυχία	2 μεταπτυχιακά	Μαράσλειος	Ε – ΣΤ Δημοτικού	Α Γυμνασίου
Δάσκαλοι	1	3	8	8	9	11	1	4			1	19	
Μαθηματικοί	5	6	6	3	13	7	1	8	1	2			12

Οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι η συλλογή δεδομένων έγινε για ερευνητικούς σκοπούς.

2.3 Μεθοδολογία - Εργαλεία

Το εργαλείο συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε για την έρευνα ήταν ένα ερωτηματολόγιο που επικεντρώθηκε στην εννοιολογική γνώση των συμμετεχόντων η οποία απαιτείται για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων (παρατίθεται στο παράρτημα).

Το ερωτηματολόγιο αποτελείτο από δεκαοκτώ έργα. Είχε εννέα έργα για την διερεύνηση των γνώσεων του πολλαπλασιασμού και εννέα έργα για την διαίρεση των κλασμάτων. Αυτά ήταν τρεις εύχρηστοι πολλαπλασιασμοί και τρεις εύχρηστες διαιρέσεις, τέσσερεις ημιεύχρηστοι πολλαπλασιασμοί και τέσσερεις ημιεύχρηστες διαιρέσεις και δυο μη εύχρηστοι πολλαπλασιασμοί και δυο μη εύχρηστες διαιρέσεις. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να υπολογίσουν νοερά και στην συνέχεια να εξηγήσουν πως έκαναν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων και τέλος να ερμηνεύσουν τι σημαίνει κάθε πράξη. Η ερευνητική διαδικασία ξεκίνησε με αφορμή μια προέρευνα που έγινε σε ένα τμήμα 21 μεταπτυχιακών καθηγητών μαθηματικών για να σκιαγραφηθεί η διαδικαστική και εννοιολογική τους γνώση στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Διαπιστώθηκε μεγάλη δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Αυτό ήταν και η αφορμή για την συνέχιση της έρευνας. Πριν την

οριστικοποίηση του ερωτηματολογίου, αυτό δόθηκε σε δυο δασκάλους και δυο καθηγητές μαθηματικών για να βγουν τα πρώτα συμπεράσματα και να γίνουν οι όποιες διορθώσεις.. Έτσι επαναλήφθηκε η έρευνα σε δυο ομάδες εκπαιδευτικών μια δασκάλων και μια μαθηματικών που κάθε μια αποτελείτο από 20 άτομα. Οι ομάδες είναι συγκρίσιμες αφού το ίδιο διδακτικό αντικείμενο υπάρχει στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού αλλά και στην πρώτη τάξη του Γυμνάσιου. Οι ερωτήσεις της έρευνας είναι οι ερωτήσεις που υπάρχουν στους πίνακες 2 και 5.

2.4 Διαδικασία

Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έγινε με ατομική συνέντευξη. Οι συνεντεύξεις έγιναν κατά την διάρκεια των μηνών Μαρτίου- Απριλίου 2022. Οι συνεντεύξεις έγιναν δια ζώσης και δια τηλεφώνου. Στους συμμετέχοντες δόθηκε ο απαραίτητος χρόνος για σκεφτούν και να απαντήσουν στις ερωτήσεις. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και στην συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν για να αναλυθούν σε συνδυασμό με τις σημειώσεις που κρατήθηκαν κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων. Για τον έλεγχο της εννοιολογικής γνώσης του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων η απάντηση θα μπορούσε να αντιπροσωπεύεται από τις ακόλουθες πιθανές απαντήσεις.

1.Είναι ένα κλάσμα ενός άλλου κλάσματος

2. Με την έννοια της περιοχής ενός ορθογωνίου

3. Με αναπαράσταση με κλασματικές λωρίδες

4. Ένα λεκτικό πρόβλημα.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του προβλήματος 3/4 x 2/3 = ?, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα κλάσμα ενός άλλου κλάσματος.

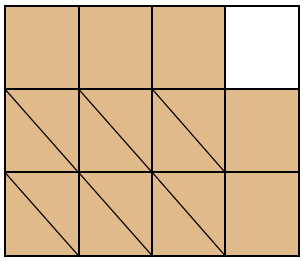
Με την έννοια της περιοχής ενός ορθογωνίου για να παρουσιάσουμε τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η διαδικασία βήμα προς βήμα είναι η εξής:

Σχεδιάζω ένα ορθογώνιο και στη συνέχεια

1. Δείχνω το κλάσμα 3/4 πάνω στη μια πλευρά του ορθογωνίου

2.Όμοια δείχνω το κλάσμα 2/3 χρησιμοποιώντας την άλλη πλευρά του ορθογωνίου.

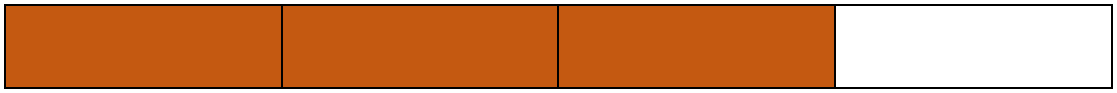
3. Βρίσκω την σκιά των 2/3 από 3/4 και βρίσκω τα επικαλυπτόμενα μέρη. Αυτό είναι και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.



Δεν είναι απόδειξη εννοιολογικής γνώσης η εκτέλεση του πολλαπλασιασμού επαναλαμβάνοντας τον διαδικαστικό υπολογισμό με αριθμούς (3/4 x 2/3 = 6/12 = 1/2) ή δείχνοντας απλώς την απάντηση με ένα συγκεκριμένο διάγραμμα όπως ο κύκλος , τετράγωνο κλπ.

Με την βοήθεια κλασματικών λωρίδων για να παρουσιάσουμε τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η διαδικασία βήμα προς βήμα είναι η εξής:

Αρχικά βρίσκουμε το ¾ πάνω στην λωρίδα και μετά παίρνουμε το 2/3 του ¾



Για τον έλεγχο της εννοιολογικής γνώσης της διαίρεσης των κλασμάτων η απάντηση θα μπορούσε:

1. Να είναι λεκτική

2. Να χρησιμοποιεί ένα διάγραμμα.

3. Να είναι συμβολική

4. Να παρουσιάζεται με ένα λεκτικό πρόβλημα

Για παράδειγμα στην ερώτηση «Πώς εξηγείται η διαίρεση $3\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$ »

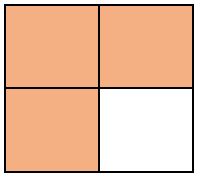
Μία ικανοποιητική λεκτική απάντηση θα ήταν «Η διαίρεση 3 2/5 : 1/5 αναζητά πόσα 1/5 εμπεριέχει ο αριθμός 3 2/5»

Για την χρησιμοποίηση διαγράμματος για να δείξουμε τον υπολογισμό π.χ. να διαιρέσετε το 3/4 με το 1/4 για να λάβετε την απάντηση 3, μια εξήγηση σαν αυτή που ακολουθεί θα ήταν πολύ ικανοποιητική:

Όπως φαίνεται στο σκιασμένο τετράγωνο

το εσωτερικό αντιπροσωπεύει το 3/4. Τότε υπάρχουν τρία 1/4 στα 3/4. Έτσι

$\frac{3}{4}:\frac{1}{4} = 3$



Μια συμβολική μορφή απάντησης θα μπορούσε να ήταν κάτι αντίστοιχο με την παρακάτω παρουσίαση

$$\frac{\alpha}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c}$$

3.Αποτελέσματα

Στον παρακάτω πίνακα 3.1 υπάρχουν οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου και παρουσιάζονται ο αριθμός των σωστών και λάθος απαντήσεων στον υπολογισμό των πράξεων του ερωτηματολογίου που θέσαμε στους δασκάλους, οι τρόποι επεξήγησης του υπολογισμού των πράξεων και οι τρόποι ερμηνείας μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά.

Πίνακας 3.1 Αποτελέσματα για τον πολλαπλασιασμό – διαίρεση των δασκάλων

Ερωτήσεις		**1. Υπολογισμός**	**2. Επεξήγηση Υπολογισμός**	**3. Ερμηνεία**
Ε1	$\frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 19(95%) ΑΠ: 1(5%)
Ε2	$\frac{1}{3} x \frac{1}{4}$	Σ: 19 (95%) Λ: 1 (5%)	Α : 20 (100%)	Σ: 15(75%) Λ: 1(5%)
Ε3	$\frac{1}{2} x \frac{3}{4}$	Σ :19 (95%) Λ :1 (5%)	Α :20 (100%)	Σ: 15(75%) Λ: 2(10%)
Ε4	$\frac{18}{7} x \frac{1}{2}$	Σ : 20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 11 (55%) Λ: 3(15%) ΑΠ: 4(20%)
Ε5	$\frac{4}{3} x \frac{1}{4}$	Σ :19 (95%) Λ :1 (5%)	Α: 20 (100%)	Σ: 9 (45%) Λ: 5 (25%) ΑΠ: 2(10%)
Ε6	$\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 8 (40%) Λ: 3 (15%) ΑΠ: 2(10%) ΑΠ-1: 7(35%)
Ε7	$\frac{7}{9} x \frac{1}{7}$	Σ: 20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 11(55%) Λ: 2(10%) ΑΠ: 1(5%)
Ε8	$\frac{4}{5} x \frac{1}{7}$	Σ: 20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 9(45%) Λ: 2(10%) ΑΠ: 4(20%)
Ε9	$\frac{1}{11} x \frac{1}{13}$	Σ : 15 (75%) Λ :5 (25%)	Α: 20 (100%)	Σ: 9(45%) Λ: 4(20%)

Πίνακας 3.1

Συνέχεια

Δ1	$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 8(40%) Λ: 4(20%) Δ: 6(30%)
Δ2	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$	Σ:20 (100%)	Α: 19 (95%) Β: 1 (5%)	Σ: 3(15%) Λ: 7(35%) ΑΠ: 1(5%) Δ : 2(10%)
Δ3	$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	Σ: 20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 5(25%) Λ: 4(20%) Δ : 8(40%)
Δ4	$\frac{6}{9}:\frac{1}{9}$	Σ :19 (95%) Λ: 1 (5%)	Α: 17 (85%) Β: 3 (15%)	Σ: 7(35%) Λ: 4(20%) Δ: 6(30%)
Δ5	$\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$	Σ: 19 (95%) Λ:1 (5%)	Α: 20 (100%)	Σ: 7(35%) Λ: 4(20%) Δ: 5(25%)
Δ6	$3\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$	Σ: 18 (90%) Λ:2 (10%)	Α: 14 (70%) Β: 5 (25%)	Σ: 9(45%) Λ: 3(15%) Δ: 5(25%)
Δ7	$\frac{1}{24}:\frac{1}{8}$	Σ:19 (95%) Λ:1 (5%)	Α: 19 (95%)	Σ: 8 (40%) Λ: 3(15%) ΑΠ : 1(5%) Δ: 5(25%)
Δ8	$\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$	Σ:20 (100%)	Α:20 (100%)	Σ: 4(20%) Λ: 4(20%) ΑΠ : 3(15%) Δ: 4(20%)
Δ9	$\frac{2}{11}:\frac{5}{7}$	Σ:20 (100%)	Α:20 (100%)	Σ: 2(10%) Λ: 5(25%) ΑΠ: 1(5%) Δ: 2(10%)

Α: Εφαρμογή κανόνα πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης., Β: Μετατροπή σε ομώνυμα και υπολογισμός με διαίρεση των αριθμητών, Γ: Μετατρέπει την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα, Δ: Ερμηνεύουν με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού, Λ: Λάθος ΑΠ: Ερμηνεύει την απάντηση, ΑΠ-1: Ερμηνεύει την απάντηση με την ιδιότητα των αντίστροφων

Ο πίνακας 3.2 περιλαμβάνει τις επιτυχίες στον υπολογισμό και την ερμηνεία του πολλαπλασιασμού στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου από την πλευρά των δασκάλων.

Πίνακας 3.2 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των δασκάλων

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ		95,5%	58,8%
		Υπολογισμός	Ερμηνεία
ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	97,5%	81,6%
Ε1	$\frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:19 (95%)
Ε2	$\frac{1}{3} x \frac{1}{4}$	Σ : 19 (95%)	Σ:15(75%)
Ε3	$\frac{1}{2} x \frac{3}{4}$	Σ :19 (95%)	Σ:15 (75%)
ΗΜΙ-ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	98%	48,75%
Ε4	$\frac{18}{7} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:11 (55%)
Ε5	$\frac{4}{3} x \frac{1}{4}$	Σ :19(95%)	Σ: 9(45%)
Ε6	$\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:8 (40%)
Ε7	$\frac{7}{9} x \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:11 (55%)
ΜΗ-ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	87,5%	45%
Ε8	$\frac{4}{5} \mathrm{x} \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ: 9(45%)
Ε9	$\frac{1}{11} x \frac{1}{13}$	Σ :15(75%)	Σ:9 (45%)

Ο πίνακας 3.3 περιλαμβάνει τις επιτυχίες στον υπολογισμό και την ερμηνεία της διαίρεσης στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου από την πλευρά των δασκάλων.

Πίνακας 3.3 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία της διαίρεσης των δασκάλων

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ		97,2%	29.4%
		Υπολογισμός	Ερμηνεία
ΕΥΧΡΗΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	98,3%	26,6%
Δ1	$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Σ: 8(40%)
Δ2	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$	Σ :19 (95%)	Σ:3 (15%)
Δ3	$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:5 (25%)
ΗΜΙ-ΕΥΧΡΗΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	95%	38,75%
Δ4	$\frac{6}{9}:\frac{1}{9}$	Σ :19 (95%)	Σ:7 (35%)
Δ5	$\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$	Σ :20 (100%)	Σ:7 (35%)
Δ6	$3\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$	Σ :18 (90%)	Σ: 9(45%)
Δ7	$\frac{1}{24}:\frac{1}{8}$	Σ :19 (95%)	Σ: 8(40%)
ΜΗ-ΕΥΧΡΗΣΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	100%	15%
Δ8	$\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:4 (20%)
Δ9	$\frac{2}{11}:\frac{5}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:2 (10%)

Ο επόμενος πίνακας 3.4 περιλαμβάνει τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, τον αριθμό των σωστών και λάθος απαντήσεων στον υπολογισμό των πράξεων του ερωτηματολογίου που δόθηκαν στους μαθηματικούς, τους τρόπους επεξήγησης του υπολογισμού των πράξεων και τους τρόπους ερμηνείας μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά

Πίνακας 3.4 Αποτελέσματα για τον πολλαπλασιασμό – διαίρεση των μαθηματικών

	Ερωτήσεις	1. Υπολογισμός	2. Επεξήγηση Υπολογισμός	3. Ερμηνεία
Ε1	$\frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	Σ : 20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 20(100%)
Ε2	$\frac{1}{3} x \frac{1}{4}$	Σ : 20 (100%)	Α : 20 (100%)	Σ: 19(95%)
Ε3	$\frac{1}{2} x \frac{3}{4}$	Σ: 19 (95%) Λ : 1 (5%)	Α :20 (100%)	Σ: 19(95%) ΑΠ: 1(5%)
Ε4	$\frac{18}{7} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 17(85%) Λ: 2(10%) ΑΠ: 1(5%)
Ε5	$\frac{4}{3} x \frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 16(80%) Λ: 1(5%) ΑΠ: 3(15%)
Ε6	$\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 12(60%) ΑΠ-1: 6(30%)
Ε7	$\frac{7}{9} x \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 16(80%) Λ: 1(5%) ΑΠ: 1(5%)
Ε8	$\frac{4}{5} \mathrm{x} \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Α: 20 (100%)	Σ: 14(70%) ΑΠ: 3(15%)
Ε9	$\frac{1}{11} x \frac{1}{13}$	Σ :18 (90%) Λ :2 (10%)	Α: 20 (100%)	Σ: 15(75%) Λ: 1(5%) ΑΠ: 2(10%)

Πίνακας 3.4

Συνέχεια

Δ1	$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$	Σ: 20 (100%)	Α: 15 (75%) Β: 2 (10%) Γ : 3 (15%)	Σ: 8(40%) Λ: 1(5%) Δ: 9(45%)
Δ2	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$	Σ:20 (100%)	Α: 15(75%) Β: 2 (10%) Γ : 3 (15%)	Σ: 7(35%) Λ: 4(20%) Δ: 6(30%)
Δ3	$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	Σ : 20(100%)	Α: 17 (85%) Γ : 3 (15%)	Σ: 5(25%) Λ: 4(20%) Δ: 11(55%)
Δ4	$\frac{6}{9}:\frac{1}{9}$	Σ :20 (100%)	Α: 13 (65%) Β: 5 (25%) Γ: 2 (10%)	Σ: 9(45%) Λ: 1(5%) Δ: 8(40%)
Δ5	$\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$	Σ : 20 (100%)	Α: 17 (85%) Γ :3 (15%)	Σ: 6(30%) Λ: 3(15%) Δ: 10(50%)
Δ6	$3\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$	Σ: 19 (95%) Λ : 1 (5%)	Α: 13 (65%) Β: 5 (25%) Γ:1 (5%)	Σ: 7(35%) Λ: 2(10%) Δ: 9(45%)
Δ7	$\frac{1}{24}:\frac{1}{8}$	Σ:20 (100%)	Α:17 (85%) Γ:3 (15%)	Σ: 8(40%) Λ: 1(5%) ΑΠ: 1(5%) Δ: 8(40%)
Δ8	$\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$	Σ: 20 (100%)	Α:15 (75%) Β:1 (5%) Γ:4 (20%)	Σ: 5(25%) Λ: 1(5%) ΑΠ: 3(15%) Δ: 9(45%)
Δ9	$\frac{2}{11}:\frac{5}{7}$	Σ:20 (100%)	Α:16 (80%) Γ : 4 (20%)	Σ: 5(25%) Λ: 1(5%) Δ: 10(50%)

Α: Εφαρμογή κανόνα πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης., Β: Μετατροπή σε ομώνυμα και υπολογισμός με διαίρεση των αριθμητών, Γ: Μετατρέπει την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα, Δ: Ερμηνεύουν με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού, Λ: Λάθος ΑΠ: Ερμηνεύει την απάντηση, ΑΠ-1: Ερμηνεύει την απάντηση με την ιδιότητα των αντίστροφων

Ο πίνακας 3.5 περιλαμβάνει τις επιτυχίες στον υπολογισμό και την ερμηνεία του πολλαπλασιασμού στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου από την πλευρά των μαθηματικών.

Πίνακας 3.5 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό –ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των μαθηματικών

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ		99,4%	82,2%
		Υπολογισμός	Ερμηνεία
ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	97,5%	96,6%
Ε1	$\frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:20 (100%)
Ε2	$\frac{1}{3} x \frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Σ:19 (95%)
Ε3	$\frac{1}{2} x \frac{3}{4}$	Σ :19 (95%)	Σ:19 (95%)
ΗΜΙ-ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	100%	76,25%
Ε4	$\frac{18}{7} x \frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:17 (85%)
Ε5	$\frac{4}{3} x \frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Σ: 16 (80%)
Ε6	$\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:12 (60%)
Ε7	$\frac{7}{9} x \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:16 (80%)
ΜΗ-ΕΥΧΡΗΣΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	Συνολική Επιτυχία	100%	72,5%
Ε8	$\frac{4}{5} \mathrm{x} \frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:14(70%)
Ε9	$\frac{1}{11} x \frac{1}{13}$	Σ :20 (100%)	Σ:15 (75%)

Ο πίνακας 3.6 περιλαμβάνει τις επιτυχίες στον υπολογισμό και την ερμηνεία της διαίρεσης στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου από την πλευρά των μαθηματικών.

Πίνακας 3.6 Πίνακας επιτυχίας στον υπολογισμό – ερμηνεία της διαίρεσης των μαθηματικών

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ		98,8%	33,3%
		Υπολογισμός	Ερμηνεία
ΕΥΧΡΗΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	96,25%	33,3%
Δ1	$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$	Σ :20 (100%)	Σ: 8(40%)
Δ2	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$	Σ :20 (100%)	Σ:7 (35%)
Δ3	$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	Σ :20 (100%)	Σ:5 (25%)
ΗΜΙ-ΕΥΧΡΗΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	96,6%	37,5%
Δ4	$\frac{6}{9}:\frac{1}{9}$	Σ :20(100%)	Σ:9 (45%)
Δ5	$\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$	Σ :20 (100%)	Σ: 6(30%)
Δ6	$3\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$	Σ : 19 (95%)	Σ:7(35%)
Δ7	$\frac{1}{24}:\frac{1}{8}$	Σ :19 (95%)	Σ: 8(40%)
ΜΗ-ΕΥΧΡΗΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Συνολική Επιτυχία	100%	25%
Δ8	$\frac{1}{3}:\frac{1}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ:5 (25%)
Δ9	$\frac{2}{11}:\frac{5}{7}$	Σ :20 (100%)	Σ: 5(25%)

3.1 Απαντήσεις στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων

3.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού.

Πίνακας 3.7 Επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού

Είδος πολ.	**Εύχρηστοι πολλαπλασιασμοί**			**Ημιεύχρηστοι πολλαπλασιασμοί**			**Μη εύχρηστοι πολλαπλασ.**		
	E1 ½ x ½	E2 1/3 x ¼	E3 ½ x ¾	E4 18/7x½	E5 4/3x1/4	E6 2/3x3/2	E7 7/9x1/7	E8 4/5x1/7	E9 1/11x1/13
	19 (95%)	15 (75%)	15 (75%)	11 (55%)	9 (45%)	8 (40%)	11 (55%)	9 (45%)	9 (45%)

Εξετάζοντας συνολικά τις επιτυχίες στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων βλέπουμε από τα στοιχεία του πίνακα 3.2 ότι στον πολλαπλασιασμό οι δάσκαλοι είχαν επιτυχία στην ερμηνεία με ποσοστό 58,8%.

3.1.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων στους εύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.2 στους τρεις εύχρηστους πολλαπλασιασμούς που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο η συνολική επιτυχία στην ερμηνεία τους ήταν 81,6%.

Πολλαπλασιασμός E1 (½ x ½)

Σωστές ερμηνείες

Οι 19 στους 20 (95%) κατάφεραν να δώσουν ερμηνεία. Δεκατρείς 13(65%) ερμήνευσαν την πράξη σαν «το μισό του μισού». Χωρίζω ένα κύκλο, ένα μέρος μια σοκολάτα ένα κομμάτι στη μέση και παίρνω το μισό από το μισό, ήταν η ερμηνεία που έδωσαν οι υπόλοιποι 6(30%) δάσκαλοι. Η χρήση γεωμετρικών σχημάτων είναι κάτι που μπορεί να βοηθήσει στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων και ο συγκεκριμένος πολλαπλασιασμός είναι η καλύτερη αφορμή για να χρησιμοποιηθούν για την ερμηνεία του.

Λάθη

Δεν υπήρξαν λάθος ερμηνείες παρά μόνο ένας από τους συμμετέχοντες ερμήνευσε το αποτέλεσμα.

Αυτό ήταν και το καλύτερο ποσοστό ερμηνείας που επετεύχθη σε όλους τους πολλαπλασιασμούς του ερωτηματολογίου. Φαίνεται πως το ½ είναι ένα ειδικό κλάσμα που μπορούν διαχειριστούν με μεγάλη ευκολία οι εκπαιδευτικοί. Στο ½ αλλά και τα ισοδύναμα κλάσματα του, είναι ευκολότερη η εννοιολογική τους κατανόηση σύμφωνα με τους Mazzocco et al, (2013) όπως αναφέρουν οι Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey, & Content, (2013)

Πολλαπλασιασμός Ε2 (1/3 x ¼)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 15 (75%) σωστές ερμηνείες. Τέσσερεις 4 (20%) έδωσαν ερμήνευσαν τον πολλαπλασιασμό σαν το ¼ του 1/3 και άλλοι τρεις 3 (15%) ερμήνευσαν τον πολλαπλασιασμό σαν το 1/3 του ¼. Οι περισσότερες 7 (35%) ήταν με την βοήθεια γεωμετρικής αναπαράστασης. Χωρίζω ένα κύκλο, ορθογώνιο σε 4 κομμάτια και μετά κάθε κομμάτι σε 3 ή αντίστροφα. Ένας δάσκαλος 1 (5%) ερμήνευσε την πράξη με την έννοια της περιοχής του ορθογωνίου «Κάνω ένα ορθογώνιο με 3 στήλες και 4 γραμμές Παίρνω 1 γραμμή και μια στήλη. Βρίσκω εκεί που ταυτίζονται.»

Λάθη

Όσον αφορά τα λάθη, υπήρξε μια 1 (5%) λάθος ερμηνεία που ήταν απόπειρα ερμηνείας του αποτελέσματος, αλλά και αυτή βασιζόταν σε γεωμετρική αναπαράσταση. «Δυο κύκλους τους χωρίζω, δείχνω το 1/3 και το ¼ και θα έκανα 3x4=12 γιατί πολλαπλασιάζω τους παρονομαστές». Τέσσερεις 4 (20%) δάσκαλοι δεν έδωσαν ερμηνεία.

Πολλαπλασιασμός Ε3 (1/2 x ¾)

Σωστές ερμηνείες

Δεκαπέντε 15 (75%) δάσκαλοι έδωσαν σωστή ερμηνεία. Τα ¾ του ½ ήταν η ερμηνεία που έδωσαν 4 (20%) από αυτούς ενώ άλλοι 4 (20%) ερμήνευσαν τον πολλαπλασιασμό σαν το ½ του ¾. Πέντε 5 (25%) ερμήνευσαν την πράξη γεωμετρικά αφού χρησιμοποίησαν κύκλο, ορθογώνιο ή γραμμή για να την εξηγήσουν και 2 (10%) ερμήνευσαν με την βοήθεια της περιοχής του ορθογωνίου.

Λάθη

Δυο δάσκαλοι 2 (10%) έκαναν απόπειρα να ερμηνεύσουν την πράξη με την βοήθεια γεωμετρικής αναπαράστασης (κύκλος, ορθογώνιο) χωρίς όμως να μπορέσουν να ολοκληρώσουν την απάντηση. Ένας 1 (5%) ερμήνευσε το αποτέλεσμα λέγοντας ότι το 3/8 πλησιάζει στο μισό. Θέλοντας να δώσει μια ερμηνεία του αποτελέσματος και έχοντας το 3/8 που είναι μη εύχρηστο κλάσμα χρησιμοποιεί το ½ που είναι ένα σημείο αναφοράς στα κλάσματα. Τέλος δυο 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

3.1.1.2 Απαντήσεις των δασκάλων στους ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Τέσσερεις ήταν οι ημιεύχρηστοι πολλαπλασιασμοί που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο. Όπως φαίνεται στον πίνακα 3.2 η συνολική επιτυχία στην ερμηνεία τους ήταν 48,75% αρκετά χαμηλότερη από την προηγουμένη κατηγορία.

Πολλαπλασιασμός Ε4 (18/7 x ½)

Σωστές ερμηνείες

Το ποσοστό επιτυχίας στην ερμηνεία του ήταν 55% παρόλο που ο ένας από τους όρους του γινομένου ήταν το 1/2 . Από τις 11 σωστές απαντήσεις οι 7 (35%) ερμήνευσαν την πράξη σαν το μισό του 18/7. Τέσσερεις 4 (20%) δάσκαλοι μετέτρεψαν πρώτα το 18/7 σε μεικτό αριθμό και μετά πήραν το μισό του.

Λάθη

Ένας δάσκαλος ερμηνεύει λάθος την πράξη λέγοντας « Χωρίζω στο μισό. Το μισό σε 18 και παίρνω 7». Ένας δεύτερος λέει ότι η αξία του κλάσματος μικραίνει χωρίς όμως να έχει λάβει υπόψιν του την αντίστροφη περίπτωση που θα μπορούσε να μεγαλώνει. Τέλος υπήρξε και μια λάθος απόπειρα ερμηνείας με τη βοήθεια ορθογωνίου.

Τέσσερεις 4 (20%) δάσκαλοι ερμήνευσαν το αποτέλεσμα οι τρεις σωστά ενώ ο τέταρτος λόγω του καταχρηστικού κλάσματος 18/14 εξέφρασε την δυσκολία του πώς από ένα ορθογώνιο που θα το χωρίζω σε 14 ίσα μέρη θα πάρω 18.

Δυο 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία με τον ένα από τους δυο να λέει «η ερμηνεία στα καταχρηστικά κλάσματα δυσκολεύει»

Πολλαπλασιασμός Ε5 (4/3x1/4)

Σωστές ερμηνείες

Οι σωστές ερμηνείες ήταν 9 (45%). Οι 4 (20%) περιέγραφαν την πράξη σαν το ¼ του 4/3. Ένας δάσκαλος μετέτρεψε το καταχρηστικό 4/3 σε μεικτό λέγοντας ότι είναι μονάδα και το 1/3 της μονάδας και στη συνέχεια αφού το χωρίσω σε τέσσερα ίσα μέρη παίρνω ένα. Δυο 2 (10%) δάσκαλοι διάβασαν την πράξη σαν το μισό του μισού του 4/3. Υπήρξαν δυο 2 (10%) ερμηνείες με την βοήθεια ορθογωνίου. Δυο ορθογώνια χωρισμένα σε 3 ίσα κομμάτια. Χρωματίζω τα 4 κομμάτια. Παίρνω τι 1 από τα χρωματισμένα.

Λάθη

Οι 5 (25%) λάθος ερμηνείες που υπήρξαν οι τέσσερεις ήταν ερμηνείες που προσπάθησαν να δώσουν οι συμμετέχοντες με την βοήθεια γεωμετρικής αναπαράστασης αλλά αυτό που τους δυσκόλεψε ήταν το καταχρηστικό κλάσμα 4/3. Η πέμπτη λάθος ερμηνεία ήταν γιατί στο κλάσμα 4/3 δινόταν λάθος ερμηνεία. «Χωρίζω σε 4 παίρνω τα 3». Δυο 2 (10%) δάσκαλοι ερμήνευσαν το αποτέλεσμα και άλλοι δυο 2(10%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

Πολλαπλασιασμός Ε6 (2/3x3/2)

Σωστές ερμηνείες

Οκτώ 8 (40%) δάσκαλοι ερμήνευσαν σωστά την πράξη. Μόνο μια 1 (5%) από τις ερμηνείες ήταν τα 3/2 του 2/3. Δυο 2 (10%) απαντήσεις μετέτρεψαν το 3/2 σε μεικτό σε μονάδα και το μισό της μονάδας. Στη συνέχεια αυτό χωρίζετε σε τρία κομμάτια και παίρνω τα 2. Ένας άλλος δάσκαλος το 3/2 το σκέφτεται σαν 1,5 άρα τα 2/3 του 1,5 είναι 2 μισά άρα μονάδα. Άλλος ένας σκέφτεται το ερμηνεύει το 3/2 σαν 1,5 και έτσι παίρνει ολόκληρο το 2/3 και το μισό του. Τρεις 3 (15%) ακόμα ερμηνείες δίνονται με την βοήθεια κύκλου και ορθογωνίου Επτά 7 (35%) έδωσαν ερμηνεία με την ιδιότητα των αντίστροφων. Επτά 7 (35%) έδωσαν ερμηνεία με την ιδιότητα των αντίστροφων.

Λάθη

Τρείς 3 (15%) λάθος ερμηνείες ήταν απόπειρες ερμηνείας με γεωμετρικό τρόπο. Κατασκεύασαν γεωμετρικά το κλάσμα 2/3 αλλά το καταχρηστικό 3/2 ήταν αυτό που προκάλεσε την δυσκολία και το λάθος στην ερμηνεία. Υπήρξαν δυο 2 (10%) ερμηνείες του αποτελέσματος. Αφού έκαναν διαδικαστικά την πράξη προέκυψε κλάσμα με ίσους όρους άρα αποτέλεσμα μονάδα.

Πολλαπλασιασμός Ε7 (7/9x1/7)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 11 (55%) σωστές ερμηνείες. Φαίνεται ότι ο πολλαπλασιασμός χωρίς υποδιαίρεση διευκολύνει περισσότερο την ερμηνεία λόγω της σχέσης διαιρετότητας του αριθμητή του πρώτου κλάσματος με τον παρονομαστή του δευτέρου όπως επίσης και η ύπαρξη του μοναδιαίου κλάσματος. Οι 9 (45%) απαντήσεις χρησιμοποίησαν γεωμετρική ερμηνεία και μόνο 2(10%) έδωσαν ερμηνεία λέγοντας «το 1/7 του 7/9»

Λάθη

Υπήρξαν δύο 2 (10%) λάθος ερμηνείες που και πάλι ήταν προσπάθεια ερμηνείας με γεωμετρική αναπαράσταση. Έξι 6 (30%) ήταν αυτοί που δεν έδωσαν ερμηνεία

3.1.1.3 Απαντήσεις των δασκάλων στους μη εύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Δυο ήταν οι μη εύχρηστοι πολλαπλασιασμοί που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο και σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 3.2 το ποσοστό ερμηνείας τους ήταν 45%. Οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες δεν έδωσαν ερμηνεία.

Πολλαπλασιασμός Ε8 (4/5x1/7)

Σωστές ερμηνείες

Εννέα 9 (45%) δάσκαλοι έδωσαν σωστή ερμηνεία. Οι τρεις 3 (15%) ήταν «το 1/7 του 4/5» Οι πέντε 5 (25%) υπόλοιπες χρησιμοποίησαν κύκλο, ορθογώνιο ή κλασματική λωρίδα για να ερμηνεύσουν την πράξη. Μια από τις απαντήσεις είναι και η ακόλουθη «Χωρίζω την μονάδα σε 5 κομμάτια και παίρνω τα 4 Αυτά τα 4 τα χωρίζω σε 7 και παίρνω το 1» Μια σωστή ερμηνεία υπήρξε με την βοήθεια της περιοχής του ορθογωνίου.

Λάθη

Υπήρξαν δυο 2 (10%) λάθος ερμηνείες. Η μια λάθος ερμηνεία ήταν απόπειρα ερμηνείας με την βοήθεια ορθογωνίου όμως κατέληξε σε λάθος γιατί επηρεάστηκε από το αποτέλεσμα της πράξης. Η δεύτερη ερμήνευε την πράξη λέγοντας ότι «Το 1/7 είναι ένα πολύ μικρό κομμάτι από το 4/5». Δεν έδωσαν ερμηνεία 5 (25%) ενώ 4 (20%) ερμηνεύσαν το αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμός Ε9 (1/11x1/13)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 9 (45%) σωστές ερμηνείες. Οι δυο 2 (10%) ήταν «το 1/11 του 1/13» Τρεις ήταν με την έννοια της περιοχής του ορθογωνίου «Χωρίζω σε 11 γραμμές και σε 13 στήλες. Παίρνω 1 γραμμή και 1 στήλη που συναντιούνται σε 1 από τα 143.» αλλά και οι υπόλοιπες ερμηνείες ήταν γεωμετρικές.

Λάθη

Τέσσερεις ήταν οι 4 (20%) λάθος ερμηνείες. Εδώ οι λάθος ερμηνείες επηρεάστηκαν από το γεγονός ότι το αποτέλεσμα της πράξης το 1/143 είναι ένα κλάσμα μικρό σε αξία και αυτό οδήγησε στο να μη μπορέσουν να ολοκληρώσουν την ερμηνεία που προσπάθησαν να δώσουν γεωμετρικά. Επτά 7(35%) δεν έδωσαν καμία ερμηνεία.

3.1.2 Απαντήσεις των μαθηματικών

Στον πίνακα 3.8 παρουσιάζονται οι επιτυχίες των μαθηματικών στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού.

Πίνακας 3.8 Επιτυχίες των μαθηματικών στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού

Είδος πολ.	**Εύχρηστοι πολλαπλασιασμοί**			**Ημιεύχρηστοι πολλαπλασιασμοί**				**Μη εύχρηστοι πολλαπλασ.**	
	E1 ½ x ½	E2 1/3 x ¼	E3 ½ x ¾	E4 18/7x½	E5 4/3x1/4	E6 2/3x3/2	E7 7/9x1/7	E8 4/5x1/7	E9 1/11x1/13
	20 (100%)	19 (95%)	19 (95%)	17 (85%)	16 (80%)	12 (60%)	16 (80%)	14 (70%)	15 (75%)

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.5 η επιτυχία στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων από τους μαθηματικούς έφτασε σε ποσοστό 82,2%.

3.1.2.1 Απαντήσεις των μαθηματικών στους εύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Από τα δεδομένα του πίνακα 3.5 παρατηρούμε ότι η επιτυχία στην ερμηνεία στους τρεις εύχρηστους πολλαπλασιασμούς από τους μαθηματικούς έφτασε στο 96,6%. Όπως με τους δασκάλους έτσι και εδώ το ½ που ήταν όρος του γινομένου και στους δυο πολλαπλασιασμούς, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην επιτυχία. Όπως βλέπουμε και στον πίνακα 3.8 το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχούς ερμηνείας (100%) το είχαμε στην ερώτηση E1(½ x ½) που το εύχρηστο κλάσμα 1/2 βοηθάει στο να ερμηνεύεται η πράξη σαν το μισό του μισού. Πολλές ερμηνείες στον πολλαπλασιασμό στους

μαθηματικούς όπως και στους δάσκαλους ήταν το μέρος ενός μέρους. Ερμηνεύουν με αυτό το τρόπο τον πολλαπλασιασμό αλλά δυσκολεύονται να τον ερμηνεύσουν και με εναλλακτικούς τρόπους για να πείσουν τους μαθητές για το αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμός Ε1(½ x ½)

Σωστές ερμηνείες

Και οι 20 (100%) μαθηματικοί έδωσαν σωστή ερμηνεία. Το μισό του μισού ήταν η απάντηση που δόθηκε από όλους. Ένας μαθηματικός δικαιολόγησε το αποτέλεσμα λέγοντας «Το μισό του ½ είναι το ¼ αφού 2/4 κάνουν μισό» ενώ άλλοι έξι 6 (30%) συμπλήρωσαν την ερμηνεία τους με την βοήθεια κύκλου, πίτσας, ορθογωνίου ή μιας ποσότητας.

Πολλαπλασιασμός Ε2 (1/3 x ¼)

Σωστές ερμηνείες

Ερμήνευσαν 19 (95%) από τους μαθηματικούς. Ενώ στον προηγούμενο πολλαπλασιασμό (½ x ½) οι περισσότεροι αρκέστηκαν σε μια ερμηνεία το … του …, εδώ με μια μόνο εξαίρεση όλοι οι υπόλοιποι χρησιμοποίησαν γεωμετρικές ερμηνείες για να εξηγήσουν την πράξη.

Λάθη

Ένας μαθηματικός 1(5%) μόνο δεν έδωσε ερμηνεία.

Πολλαπλασιασμός Ε3 (1/2 x ¾)

Σωστές ερμηνείες

Σωστή ερμηνεία έδωσαν 19 (95%) μαθηματικοί. Όλες οι ερμηνείες βασίζονταν στον ίδιο τρόπο σκέψης. Το μισό του ¾ ήταν η ερμηνεία που έδωσαν οι 11 (55%) από τους μαθηματικούς ενώ άλλοι 8 (40%) την ερμήνευσαν σαν τα ¾ του ½. Τέσσερεις 4 (20%) συμπλήρωσαν την ερμηνεία τους χρησιμοποιώντας κύκλο που τον χώρισαν αρχικά είτε σε 2 είτε σε τέσσερα μέρη.

Λάθη

Ένας μαθηματικός 1(5%) δεν ερμήνευσε την πράξη, αλλά το αποτέλεσμα.

3.1.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών στους ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Από τον πίνακα 3.5 βλέπουμε ότι στους 4 ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο η συνολική επιτυχία στην ερμηνεία τους ήταν 76,25%.

Πολλαπλασιασμός Ε4 (18/7 x ½)

Σωστές ερμηνείες

Η επιτυχία στην ερμηνεία έφτασε το 85%. Δεκαεπτά από τους μαθηματικούς ερμήνευσαν σωστά την πράξη. Οι 15 (75%) από αυτές ερμηνεύονταν σαν το μισό του 18/7 ενώ μόνο σε 2 (10%) συνέβη το αντίστροφο, να ερμηνευτεί η πράξη σαν τα 18/7 του μισού.

Λάθη

Οι 2 (10%) λάθος ερμηνείες που προσπάθησαν να χωρίσουν ένα ορθογώνιο σε 14 ερμηνεύοντας καταρχήν το αποτέλεσμα και που αυτό τους οδήγησε στο λάθος. Ένας 1(5%) μαθηματικός ερμήνευσε το αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμός Ε5 (4/3x1/4)

Σωστές ερμηνείες

Ερμήνευσαν τον πολλαπλασιασμό με επιτυχία 16 (80%) μαθηματικοί. Αν και σε αυτόν τον πολλαπλασιασμό υπήρχε καταχρηστικό κλάσμα το 4/3 φαίνεται ότι το μοναδιαίο κλάσμα διευκολύνει την ερμηνεία. Δυο μαθηματικοί χρησιμοποίησαν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση λέγοντας: Το 4/3 έχει 1/3 και1/3 και 1/3 και 1/3 τέσσερεις φορές και παίρνω το ένα από αυτά. Δυο παρόμοιες ερμηνείες βασισμένες στις ιδιότητες των πράξεων έλεγαν: Το 4 επι ¼ είναι η μονάδα. Άρα είναι σαν να πολλαπλασιάζω το 1/3 με την μονάδα. Δεν υπήρξε ερμηνεία της μορφής τα… του … αλλά όλες σε όλες τις υπόλοιπες επικράτησε η απάντηση χωρίζω σε 4 και παίρνω 1.

Λάθη

Μια 1 (5%) λάθος απάντηση υπήρξε και μάλλον οφείλεται σε απροσεξία αφού ερμηνεύει την πράξη λέγοντας ότι «το 1/3 το χωρίζω σε 3 μέρη και παίρνω 4 από αυτά». Τρεις μαθηματικοί (15%) ερμήνευσαν το αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμός Ε6 (2/3x3/2)

Σωστές ερμηνείες

Ερμηνεύτηκε σωστά από 12 (60%) μαθηματικούς. Το κλάσμα 3/2 δείχνει να είναι οικείο στον χειρισμό του γιατί είναι από το τρίτο κλάσμα μετά το ½ και το ¼ που μεταφράστηκε και μετασχηματίστηκε στον δεκαδικό 1,5 από τέσσερεις 4 (20%) μαθηματικούς. Μια ερμηνεία υπήρξε με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων «: Ανταλλάσσω αριθμητή του πρώτου με αριθμητή του δεύτερου κλάσματος οπότε προκύπτουν δυο κλάσματα ίσα με την μονάδα.» Τα 2/3 του 3/2 και πως αυτό βρίσκετε είναι συχνότερη απάντηση σε σχέση με το αντίστροφο. Οκτώ 8(40%) ερμήνευσαν την πράξη χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των αντίστροφων αριθμών.

Λάθη

Δεν έδωσαν ερμηνεία 2 (10%)

Πολλαπλασιασμός Ε7 (7/9x1/7)

Σωστές ερμηνείες

Έχουμε σωστή ερμηνεία από 16 (80%) μαθηματικούς. Το ποσοστό αυτό είναι ίδιο με το ποσοστό επιτυχίας στον πολλαπλασιασμό Ε5 (4/3x1/4) όπου και αυτός είναι πολλαπλασιασμός χωρίς υποδιαίρεση με έναν από τους όρους του πολλαπλασιασμού να είναι μοναδιαίο κλάσμα. Ένας μαθηματικός ερμηνεύει τον πολλαπλασιασμό σαν το 1/7 του 7/9 και ένας σαν τα 7/9 του 1/7 χωρίς να επεκτείνουν περισσότερο την ερμηνεία τους. Ένας χρησιμοποιεί για την ερμηνεία τις ιδιότητες των πράξεων λέγοντας «Το 7 πολλαπλασιάζετε με τον αντίστροφο του, δίνει 1 άρα είναι σαν να κάνεις 1/9 επι 1». Οι υπόλοιποι 13 (65%) ερμηνεύουν αναλυτικότερα πως το 1/7 του 7/9 είναι 1/9 λέγοντας οι περισσότεροι ότι αν χωρίσω το 1/9 σε 7 ίσα μέρη παίρνω 1/9.

Λάθη

Μια 1 (5%) λάθος ερμηνεία οφείλετε σε απροσεξία αφού λέει ότι «χωρίζω ένα ποσό σε 9 ίσα μέρη παίρνω 7 ίσα και το διαιρω σε 9 ίσα μέρη». Ένας μαθηματικός ερμήνευσε το αποτέλεσμα 1 (5%) και 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

3.1.2.3 Απαντήσεις των μαθηματικών στους μη εύχρηστους πολλαπλασιασμούς

Το ποσοστό σωστής ερμηνείας των 2 μη-εύχρηστων πολλαπλασιασμών που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο ήταν παρόμοιο με αυτό που πέτυχαν οι μαθηματικοί στους ημιεύχρηστους πολλαπλασιασμούς. Όπως φαίνεται στον πίνακα 3.5 αυτό έφτασε στο 72,5%.

Πολλαπλασιασμός Ε8 (4/5x1/7)

Σωστές ερμηνείες

Σωστή ερμηνεία έδωσαν 14 (70%) μαθηματικοί. Χωρίζω το 4/5 σε 7 κομμάτια και παίρνω 1 και το αντίστροφο ήταν η απάντηση. Δυο 2 (10%) για να δείξουν και πως θα χωρίσουν το 4/5 σε 7 κομμάτια το μετέτρεψαν σε ισοδύναμο 28/35.

Λάθη

Τέσσερεις 4 (20%) δεν μπορέσαν να δώσουν καμμιά ερμηνεία ενώ 2 (10%) ερμήνευσαν το αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμό Ε9 (1/11x1/13)

Σωστές ερμηνείες

Τον πολλαπλασιασμό ερμήνευσαν σωστά 15 (75%) μαθηματικοί. Το μέρος ενός μέρους ήταν η ερμηνεία που δόθηκε από τους 12 (60%). Τέσσερεις για ερμηνεύσουν πως θα χωρίσουν το 1/11 ή 1/13 σε 13 ή σε 11 μέρη αντίστοιχα μετέτρεψαν το ένα από τα κλάσματα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 143. Άλλοι τρεις 3 (15%) χρησιμοποίησαν ορθογώνιο για να ερμηνεύσουν τον πολλαπλασιασμό.

Λάθη

Ένας 1 (5%) ερμήνευσε λάθος την πράξη λέγοντας: «παίρνω μια ποσότητα και την χωρίζω σε 11 μέρη. Κάθε μέρος το χωρίζω σε 13 και παίρνω το ένα από όλα». Δυο 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία, ενώ δυο 2 (10%) ερμηνεύσαν το αποτέλεσμα

3.2Απαντήσεις στην διαίρεση των κλασμάτων

Η ερμηνεία της διαίρεσης των κλασμάτων δείχνει να δυσκολεύει πολύ περισσότερο τους συμμετέχοντες αφού τα ποσοστά σωστής ερμηνείας είναι πολύ χαμηλότερα σε σχέση με αυτά του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων.

3.2.1 Απαντήσεις των δασκάλων

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία της διαίρεσης.

Πίνακας 3.9 Επιτυχίες των δασκάλων στην ερμηνεία της διαίρεσης

Είδος διαίρ.	**Εύχρηστες διαιρέσεις**			**Ημιεύχρηστες διαιρέσεις**				**Μη εύχρηστες διαιρέσεις**	
	Δ1 ¾ :1/4	Δ2 1/3:2/3	Δ3 3/4:1/2	Δ4 6/9:1/9	Δ5 ½:1/8	Δ6 3 2/5:1/5	Δ7 1/24:1/8	Δ8 1/3:1/7	Δ9 2/11:5/7
	8 (40%)	3 (15%)	5 (25%)	7 (35%)	7 (35%)	9 (45%)	8 (40%)	4 (20%)	2 (10%)

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.3 στην διαίρεση των κλασμάτων το συνολικό ποσοστό επιτυχίας για τους δασκάλους ήταν 29,4%.

3.2.1.1 Απαντήσεις των δασκάλων στις εύχρηστες διαιρέσεις

Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 3.3 τις τρεις εύχρηστες διαιρέσεις του ερωτηματολογίου μπόρεσε να τις ερμηνεύσει σωστά το 26,6% των δασκάλων.

Διαίρεση Δ1 (¾ : 1/4)

Σωστές ερμηνείες

Την πρώτη διαίρεση ερμήνευσαν σωστά 8 (40%) δάσκαλοι. Η διαίρεση μέτρησης ήταν ο τρόπος ερμηνείας που χρησιμοποίησαν οι πέντε 5 (25%). «Πόσες φορές χωράει τι ¼ στα ¾» ήταν η ερμηνεία που έδωσαν. Μια απάντηση υπήρξε σαν διαίρεση μερισμού « Το ¾ το μοιράζω σε ¼ . Όμως αξίζει 3. Η διαίρεση σημαίνει μοιράζω.» Έξι 6 (30%) ερμήνευσαν την πράξη με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού αισθητά λιγότεροι από ότι οι μαθηματικοί που ήταν εννέα 9 (45%).

Λάθη

Υπήρξαν τέσσερεις 4 (20%) λάθος απαντήσεις. Στις δυο από αυτές η διαίρεση με το ¼ ερμηνεύτηκε σαν διαίρεση με το 4. Η τρίτη λάθος ερμηνεία ήταν λάθος ανάγνωση του αποτελέσματος : «από τα 12 τα 4». Η τέταρτη λάθος ερμηνεία ήταν μια ατελής προσπάθεια με κύκλο «Ένα κύκλο τον χωρίζω σε τεταρτημόρια …». Δυο 2 (10%) δάσκαλοι δεν έδωσαν ερμηνεία.

Διαίρεση Δ2 (1/3:2/3)

Σωστές ερμηνείες

Σωστή ερμηνεία πήραμε από 3 (15%) δασκάλους. Ερμηνεία με διαίρεση μέτρησης και στις τρεις.

Λάθη

Υπήρξαν 7 (35%) λάθος απαντήσεις. Όλες ήταν απόπειρες ερμηνείας με γεωμετρικό τρόπο (ορθογώνιο, γραμμή, …) αλλά καμία από αυτές δεν μπόρεσε να προσεγγίσει την σωστή απάντηση. Επτά 7 (35%) δεν έδωσαν ερμηνεία. Τέλος δυο 2 (10%) ερμηνεύουν την πράξη με πολλαπλασιασμό.

Διαίρεση Δ3 (3/4:1/2)

Σωστές ερμηνείες

Οι σωστές ερμηνείες ήταν 5 (25%). Οι ερμηνείες που δόθηκαν ήταν ερμηνείες με την βοήθεια της διαίρεσης μέτρησης. Μια από αυτές ήταν διαίρεση μέτρησης αφού όμως τα κλάσματα έγιναν δεκαδικοί. Ερμηνείες με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού ήταν 8 (40%).

Λάθη

Στις 4 (20%) λάθος ερμηνείες που υπήρξαν οι τρεις 3 (15%) ερμήνευσαν την διαίρεση σαν διαίρεση με το 2.

3.2.1.2 Απαντήσεις των δασκάλων στις ημιεύχρηστες διαιρέσεις

Από τον πίνακα 3.3 βλέπουμε ότι στις 4 ημιεύχρηστες διαιρέσεις η επιτυχία στην ερμηνεία τους έφτασε το 38,75%. Το ποσοστό αυτό ήταν μεγαλύτερο από το ποσοστό ερμηνείας στις εύχρηστες διαιρέσεις.

Διαίρεση Δ4 (6/9:1/9)

Σωστές ερμηνείες

Υπάρχουν 7 (35%) σωστές ερμηνείες. Με την βοήθεια της διαίρεσης μέτρησης υπήρξαν 5 (25%) σωστές ερμηνείες. Την ερμηνεία διευκόλυνε η ύπαρξη του μοναδιαίου κλάσματος 1/9 αλλά και το ότι τα κλάσματα ήταν ομώνυμα. Ένας 1 (5%) δάσκαλος πρώτα χρησιμοποίησε ιδιότητες των κλασμάτων και στη συνέχεια ερμήνευσε την διαίρεση σαν διαίρεση με το 1. Ένας 1 (5%) ερμήνευσε την διαίρεση σαν διαίρεση μέτρησης των αριθμητών, «αφού τα κλάσματα είναι ομώνυμα.». Έξι 6 (30%) ερμηνεύουν με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού

Λάθη

Στις 4 (20%) λάθος ερμηνείες υπάρχει η σκέψη της μοιρασιάς. Η παρανόηση ότι η διαίρεση μικραίνει εμφανίζεται στα λόγια ενός δάσκαλου που λέει: «χωρίζω το 6/9 σε μικρά κομμάτια και βγαίνει μεγάλος αριθμός. Δύσκολα».

Διαίρεση Δ5 (1/2:1/8)

Σωστές ερμηνείες

Επτά 7 (35%) ήταν οι σωστές ερμηνείες. Εδώ τα κλάσματα ήταν ετερώνυμα και αυτό φαίνεται να αλλάζει την στρατηγική των ερμηνειών. Το «πόσες φορές χωράει το 1/8 στο μισό» υπάρχει στις 4 (20%) ερμηνείες. Τρεις 3 (15%) για να ερμηνεύσουν την διαίρεση σαν διαίρεση μέτρησης πρώτα μετέτρεψαν τα κλάσματα σε ομώνυμα. Πέντε 5 (25%) δάσκαλοι ερμήνευσαν με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

Λάθη

Από τις 4 (20%) λάθος απαντήσεις οι 2 μετέτρεψαν την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό με το 1/8 ενώ στις άλλες 2 (10%) η διαίρεση με το 1/8 ερμηνεύτηκε σαν διαίρεση με το 8.

Διαίρεση Δ6 (3 2/5:1/5)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 9 (45%) σωστές ερμηνείες. Οι 8 (40%) σωστές ερμηνείες ήταν με διαίρεση μέτρησης. Μια μόνο ήταν ερμηνεία με διαίρεση μερισμού. «Έχω 3 ολόκληρα και 2/5 και πρέπει να τα μοιράσω σε 1/5». Πέντε 5 (25%) ερμηνεύουν την πράξη με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

Λάθη

Υπήρξαν 3 (15%) λάθος απαντήσεις. Σε δυο 2 (10%) δόθηκε ερμηνεία με πολλαπλασιασμό αλλά έγιναν λάθος πράξεις ενώ στην τρίτη λάθος απάντηση έγινε λάθος μετατροπή του μικτού σε δεκαδικό και δεν μπόρεσε να ολοκληρωθεί σωστά η ερμηνεία.

Διαίρεση Δ7 (1/24:1/8)

Σωστές ερμηνείες

Σωστές ερμηνείες ήταν 8 (40%). Ένας μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα και ερμηνεύει την διαίρεση σαν διαίρεση αριθμητών. Δυο 2 (10%) είναι ερμηνείες με διαίρεση μέτρησης ενώ οι υπόλοιπες πέντε 5 (25%) είναι επηρεασμένες από την σχέση αναλογίας των παρονομαστών λέγοντας ότι το 24 είναι τριπλάσιο του 8 είτε ότι το 8 είναι το 1/3 του 24. Πέντε 5 (25%) ερμηνείες ήταν με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

Λάθη

Δόθηκαν τρεις 3 (15%) λάθος ερμηνείες. Ένας μετατρέπει την διαίρεση σε διαίρεση μεταξύ των παρονομαστών λέγοντας « Έχουν ίδιους αριθμητές άρα διαιρω τους παρονομαστές». Ένας δεύτερος αφού ερμηνεύει την πράξη λέγοντας «Πόσες φορές χωράει το 1/8 στο 1/24» στην συνέχεια εξηγεί λέγοντας «δηλαδή να πάρω το 1/8 του 1/24». Η τρίτη λάθος ερμηνεία ήταν με την χρήση ορθογωνίου. Τρεις 3 (15%) δεν έδωσαν ερμηνεία, ενώ ένας 1 (5%) ερμήνευσε το αποτέλεσμα.

3.2.1.3 Απαντήσεις των δασκάλων στις μη εύχρηστες διαιρέσεις

Τέλος σύμφωνα με τον πίνακα 3.3 το ποσοστό επιτυχούς ερμηνείας των διαιρέσεων αυτών είναι λιγότερο από το μισό σε σχέση με τις προηγούμενες ημιεύχρηστες διαιρέσεις και έφτασε το 15%.

Διαίρεση Δ8 (1/3:1/7)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 4(20%) σωστές ερμηνείες. Δυο 2 (10%) δάσκαλοι έδωσαν ερμηνεία με την βοήθεια της διαίρεσης μερισμού ενώ οι άλλοι δυο 2 (10%) πρώτα μετέτρεψαν τα κλάσματα σε ομώνυμα και στην συνέχεια ερμήνευσαν την πράξη σαν διαίρεση μερισμού των αριθμητών.

Με πολλαπλασιασμό ερμήνευσαν την διαίρεση τέσσερεις 4 (20%) δάσκαλοι

Λάθη

Υπήρξαν 4 (20%) λάθος απαντήσεις. Μια ήταν προσεγγιστική ερμηνεία του αποτελέσματος. Μια άλλη ερμηνεία είναι διαίρεση των παρονομαστών με την δικαιολογία ότι οι αριθμητές είναι ίσοι. Οι άλλες δυο ήταν αποτυχημένες απόπειρες ερμηνείας με την βοήθεια ορθογωνίου. Το αποτέλεσμα το ερμήνευσαν 3(15%) δάσκαλοι.

Διαίρεση Δ9 (2/11:5/7)

Σωστές ερμηνείες

Μόνο δυο 2 (10%) έδωσαν σωστή ερμηνεία. Και οι δυο μετατρέπουν τα κλάσματα σε ομώνυμα και ερμηνεύουν την διαίρεση σαν διαίρεση μέτρησης των αριθμητών

Λάθη

Τρεις 3 (15%) από τις λάθος ερμηνείες ήταν αποτυχημένες προσπάθειες με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού, ενώ ένας δάσκαλος μετέτρεψε τα κλάσματα σε ομώνυμα αλλά δεν μπόρεσε να δώσει συνέχεια. Οι μισοί 10 (50%) δεν έκαναν καμία απόπειρα να ερμηνεύσουν την πράξη.

3.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι επιτυχίες των μαθηματικών στην ερμηνεία της διαίρεσης.

Πίνακας 3.10 Επιτυχίες των μαθηματικών στην ερμηνεία της διαίρεσης

Είδος διαίρ	**Εύχρηστες διαιρέσεις**			**Ημιεύχρηστες διαιρέσεις**				**Μη εύχρηστες διαιρέσεις**	
	Δ1 ¾ :1/4	Δ2 1/3:2/3	Δ3 3/4:1/2	Δ4 6/9:1/9	Δ5 ½:1/8	Δ6 3 2/5:1/5	Δ7 1/24:1/8	Δ8 1/3:1/7	Δ9 2/11:5/7
	8 (40%)	7 (35%)	5 (25%)	9 (45%)	6 (30%)	7 (35%)	8 (40%)	5 (25%)	5 (25%)

Από τον πίνακα 3.6 προκύπτει ότι στην διαίρεση των κλασμάτων το συνολικό ποσοστό επιτυχούς ερμηνείας ήταν 33,3% για τους καθηγητές των μαθηματικών.

3.2.2.1 Απαντήσεις των μαθηματικών στις εύχρηστες διαιρέσεις

Από τον πίνακα 3.6 βλέπουμε ότι τις τρεις εύχρηστες διαιρέσεις του ερωτηματολογίου μπόρεσε να τις ερμηνεύσει σωστά το 33,3% των μαθηματικών.

Διαίρεση Δ1 (3/4:1/4)

Σωστές ερμηνείες

Ερμήνευσαν με επιτυχία την πράξη 8 (40%) μαθηματικοί. Οι πέντε 5 (25%) έδωσαν ερμηνεία με την βοήθεια της διαίρεσης μέτρησης. Ένας ερμηνεύει με διαίρεση μέτρησης αλλά αφού πρώτα έχει μετατρέψει τα κλάσματα σε δεκαδικούς. Δυο 2 (10%) μαθηματικοί σκέφτηκαν ότι το ¾ είναι ¼ και ¼ και ¼ και έτσι με διαίρεση μέτρησης βρήκαν το αποτέλεσμα. Εννέα 9 (45%) μαθηματικοί ερμήνευσαν την διαίρεση με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού

Λάθη

Υπήρξε μια 1 (5%) λάθος απάντηση που ερμηνεύει την διαίρεση σαν διαίρεση μερισμού του ¾ με το 4. «Μοιράζω το ¾ σε 4 μέρη και παίρνω το 1». Δυο 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

Διαίρεση Δ2 (1/3:2/3)

Σωστές ερμηνείες

Σωστά ερμήνευσαν 7 (35%) μαθηματικοί. Πέντε 5 (25%) με διαίρεση μέτρησης. Ένας ερμηνεύει την πράξη σαν διαίρεση των αριθμητών αφού είναι ομώνυμα και ένας αφού μετατρέψει το 2/3 σε 2x1/3 την ερμηνεύει σαν διαίρεση του 1 με το 2. Σαν πολλαπλασιασμό ερμηνεύουν την πράξη 6 (30%).

Λάθη

Οι λάθος απαντήσεις ήταν 4 (20%). Εδώ ένας μαθηματικός προβληματίζετε πως θα μοιράσει το 1/3 στα 2/3 θέλοντας να κάνει διαίρεση μερισμού. Υπάρχει μια λάθος ερμηνεία βασισμένη στον πολλαπλασιασμό «Χωρίζω το 1/3 σε 3 μέρη και παίρνω το

2», ενώ οι υπόλοιπες λάθος απαντήσεις είναι προσπάθειες ερμηνείας όπου μπερδεύονται οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Διαίρεση Δ3 (3/4:1/2)

Σωστές ερμηνείες

Σωστή ερμηνεία έδωσαν 5 (25%) μαθηματικοί. Οι τέσσερεις λέγοντας «Το μισό πόσες φορές χωράει στα ¾» ενώ στην πέμπτη ο ίδιος μαθηματικός όπως και στην προηγουμένη διαίρεση αφού έκανε ομώνυμα ερμήνευσε την πράξη σαν διαίρεση μέτρησης των αριθμητών. Ερμηνεία με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού έδωσαν οι 11 (55%)

Λάθη

Υπήρξαν 4(20%) λάθος ερμηνείες. Οι τρεις 3 (15%) λάθος απαντήσεις είχαν ένα κοινό λάθος. Την διαίρεση με το ½ την ερμήνευαν σαν διαίρεση με το 2. Μια 1 (5%) λάθος απάντηση ήταν η εξής: «δεν ξέρω πως μοιράζεται το ¾ σε αριθμό μικρότερο της μονάδας».

3.2.2.2 Απαντήσεις των μαθηματικών στις ημιεύχρηστες διαιρέσεις

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.6 στις τέσσερεις ημιεύχρηστες διαιρέσεις του ερωτηματολογίου η συνολική επιτυχία στην ερμηνεία τους ήταν 37,5%.

Διαίρεση Δ4 (6/9:1/9)

Σωστές ερμηνείες

Σωστή ερμηνεία της διαίρεσης δόθηκε από 9 (45%) μαθηματικούς. Έξι 6 (30%) ερμηνεύουν σαν διαίρεση μέτρησης, ένας 1 (5%) με τον ίδιο τρόπο αφού έκανε ομώνυμα, ένας 1 (5%) χρησιμοποιώντας διαίρεση μέτρησης και εξηγώντας την με την βοήθεια ορθογωνίου και μια μαθηματικός που κάνει μαθήματα μουσικής ερμήνευσε την πράξη με κομμάτια ρυθμού και χρόνους κάθε νότας. «Έχω ένα κομμάτι ρυθμού 6/9 και κάθε νότα που αντιστοιχεί σε χρόνο 1/9 υποπολλαπλασιάζετε επί 9 τότε καταλήγει να έχει μεγαλύτερη χρονική αξία οπότε το 1/9 που υποπολλαπλασιάζετε με

το 9 καταλήγει να έχει χρονική αξία ενός ολόκληρου . Άρα τα 6/9 θα γίνουν 6 μονάδες» Οκτώ 8 (40%) ερμήνευσαν την διαίρεση σαν πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο

Λάθη

Ένας μαθηματικός 1 (5%) ερμήνευσε λάθος την διαίρεση σαν διαίρεση με το 9 και όχι το 1/9. Δυο 2 (10%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

Διαίρεση Δ5 (1/2:1/8)

Σωστές ερμηνείες

Το ποσοστό επιτυχίας ήταν 30%. Το ποσοστό επιτυχίας μειώθηκε σημαντικά σε σχέση με την Δ4 (6/9:1/9) όπου τα κλάσματα ήταν ομώνυμα ενώ εδώ υπάρχει σχέση διαιρετότητας των παρονομαστών. Οι τέσσερεις 4 (20%) πρώτα μετέτρεψαν το ½ σε 4/8 και μετά ερμήνευσαν την πράξη σαν διαίρεση μέτρησης. Μια μαθηματικός όπως και στην προηγούμενη διαίρεση έδωσε ερμηνεία με μέτρα και χρόνους ενός ρυθμικού κομματιού μουσικής. Ερμηνεία με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού υπήρξε από 10 (50%) μαθηματικούς.

Λάθη

Υπήρξαν 3 (15%) λάθος απαντήσεις που οι δυο ερμηνεύουν την διαίρεση με το 1/8 σαν διαίρεση με το 8 «χωρίζω σε 8 κομμάτια» ενώ ένας τρίτος μαθηματικός την ερμηνεύει με πολλαπλασιασμό σαν το 4-πλασιο του ½ επηρεασμένος προφανώς από το αποτέλεσμα της πράξης.

Διαίρεση Δ6 (3 2/5:1/5)

Σωστές ερμηνείες

Η διαίρεση ερμηνεύετε σωστά από 7 (35%) μαθηματικούς. Πόσες φορές χωράει το 1/5 στο 17/5 είναι η ερμηνεία των 6 (30%) και μόνο ένας την ερμηνεύει σαν διαίρεση των αριθμητών με την δικαιολογία ότι «έχω ομώνυμα κλάσματα». Άλλοι οκτώ 9 (45%) την ερμηνεύουν σαν πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο.

Λάθη

Υπήρξαν 2 (10%) λάθος ερμηνείες. Ένας 1 (5%) μαθηματικός ερμηνεύει λάθος σαν διαίρεση με το 5 ενώ ένας δεύτερος μαθηματικός δηλώνει «Δεν ξέρω τους μεικτούς».

Διαίρεση Δ7 (1/24:1/8)

Σωστές ερμηνείες

Έδωσαν 8 (40%) από τους συμμετέχοντες. Εδώ ο διαιρέτης ήταν μεγαλύτερος από τον διαιρετέο. Έτσι 8 (40%) ερμηνείες της πράξης με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού. Δυο 2 (10%) την ερμήνευσαν σαν διαίρεση μερισμού αφού είπαν ότι : Το 1/24 το χωρίζω σε όγδοα. Οι υπόλοιποι έξι 6 (30%) πρώτα βρήκαν την σχέση των όρων της διαίρεσης (το 1/8 είναι 3-πλασιο του 1/24 ή αντίστροφα) και στην συνέχεια έδωσαν ερμηνεία

Λάθη

Υπήρξε μια 1 (5%) λάθος απάντηση στην οποία ο μαθηματικός προσπάθησε να εξηγήσει το αποτέλεσμα λέγοντας : «διαιρώ παρονομαστές» αφού ήταν εύκολη η διαίρεση λόγω της σχέσης τους.

3.2.2.3 Απαντήσεις των μαθηματικών στις μη εύχρηστες διαιρέσεις

Το ποσοστό επιτυχίας στις δυο μη εύχρηστες διαιρέσεις του ερωτηματολογίου σύμφωνα με τον πίνακα 3.6 ήταν 25%.

Διαίρεση Δ8 (1/3:1/7)

Σωστές ερμηνείες

Έδωσαν σωστή ερμηνεία 5 (25%) μαθηματικοί όλοι σαν διαίρεση μέτρησης Τρεις από αυτούς ερμήνευσαν την διαίρεση αφού όμως πρώτα έκαναν ομώνυμα. Με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού ερμηνεύουν την πράξη 9 (45%),

Λάθη

Ένας 1 (5%) δίνει λάθος ερμηνεία ερμηνεύοντας την πράξη σαν μοίρασμα σε έβδομα (επτά ίσα μέρη). Τρεις 3 (15%) μαθηματικοί σαν ερμηνεία περιγράφουν τον αλγόριθμο της πράξης ή ερμηνεύουν το αποτέλεσμα.

Διαίρεση Δ9 (2/11:5/7)

Σωστές ερμηνείες

Υπήρξαν 5 (25%) σωστές ερμηνείες. Όλοι μετέτρεψαν τα κλάσματα σε ομώνυμα και μετά ερμήνευσαν την πράξη σαν διαίρεση των αριθμητών. Οι μισοί 10 (50%) βρήκαν διέξοδο για ερμηνεία με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

Λάθη

Μία 1 (5%) λάθος απάντηση ήταν ένας λάθος συνδυασμός διαίρεσης και πολλαπλασιασμού «Το 2/11 το χωρίζω σε έβδομα και παίρνω 5». Τέσσερεις 4 (20%) δεν έδωσαν ερμηνεία.

4. Συζήτηση – Συμπεράσματα

Σκοπός αυτής της έρευνας είναι να ερευνηθεί η εννοιολογική κατανόηση δάσκαλων και καθηγητών μαθηματικών στην ερμηνεία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων όταν αυτές οι πράξεις από εύχρηστες μετατρέπονται προοδευτικά σε ημιεύχρηστες και καταλήγουν να γίνουν μη εύχρηστες.

Πριν απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα ένα προς ένα, θα μπορούσαμε να εξάγουμε ως γενικό συμπέρασμα της έρευνας ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν έχει κατακτήσει τη εννοιολογική γνώση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Είναι σε θέση να εκτελούν τις δύο πράξεις με μεγάλη ευκολία, γνωρίζοντας και χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους αλγόριθμους. Ωστόσο, είναι φανερό ότι υπάρχει μεγάλο κενό στην εννοιολογική κατανόηση και γνώση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων αφού η πλειοψηφία των συμμετεχόντων συνάντησε δυσκολία. Αν και σχεδόν όλοι από τους εκπαιδευτικούς μπορούν να δώσουν σωστές απαντήσεις, λίγοι είναι σε θέση να εξηγήσουν εννοιολογικά τις πράξεις Ball (1990).

Πολύ λίγοι από όσους έδωσαν ερμηνεία στις πράξεις του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης έδωσαν ερμηνεία με δυο ή περισσότερους τρόπους. Γενικά λείπει η ποικιλία λύσεων. Γεωμετρικά σχήματα όπως κύκλοι, τετράγωνα, σχήματα με εμβαδό, λωρίδες αριθμογραμμές αλλά και απάντηση με την κατασκευή ενός ρεαλιστικού προβλήματος θα μπορούσαν να παίξουν σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία και την κατανόηση των

πράξεων. Αυτό μάλλον οφείλεται στο ότι και στην τάξη αλλά και στα σχολικά βιβλία δεν επιχειρείται λύση προβλημάτων αλλά και ασκήσεων με ποικιλία τρόπων. Αυτό βέβαια εμπεριέχει τον κίνδυνο να οδηγήσει την διδασκαλία σε γνωστική σύγχυση αφού οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν μια έννοια χωρίς συγκρίσεις ή συνδέσεις.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει την μεταβολή στην επιτυχή ερμηνεία των πράξεων με την μεταβολή τους από εύχρηστες σε μη εύχρηστες. Από την εξέταση των αποτελεσμάτων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Υπάρχει διαφορά στην επιτυχή ερμηνεία των πράξεων ανάμεσα σε δασκάλους και καθηγητές μαθηματικών, αλλά και μεταβολή στην επιτυχή ερμηνεία των πράξεων όταν οι πράξεις τόσο του πολλαπλασιασμού όσο και της διαίρεσης προοδευτικά μετατρέπονταν από εύχρηστες σε ημιεύχρηστες και κατέληγαν σε μη εύχρηστες.

Με μια πρώτη ματιά βλέπουμε ότι η διαίρεση είναι η πράξη που δυσκολεύει πολύ περισσότερο στην ερμηνεία σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό και τις δυο ομάδες των εκπαιδευτικών. Αυτό το συμπέρασμα υποστηρίζετε εξάλλου και από την βιβλιογραφία. Η διαίρεση είναι η πιο δύσκολη από τις τέσσερις πράξεις. Τα κλάσματα θεωρούνται οι πιο σύνθετοι αριθμοί στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου. Η διαίρεση με κλάσματα, είναι η πιο περίπλοκη πράξη με τους πιο σύνθετους αριθμούς, και αυτό μπορεί να θεωρηθεί το κορυφαίο θέμα της αριθμητικής Ma (2010).

Αναλυτικότερα:

Στους εύχρηστους πολλαπλασιασμούς τα ποσοστά επιτυχίας στην ερμηνεία ήταν ιδιαίτερα υψηλά. Τα μοναδιαία κλάσματα που υπήρχαν, η ευκολία στην νοηματοδότηση τους και ιδίως το ½ που είναι και ευκολότερο στην κατανόηση και την γεωμετρική του αναπαράσταση φαίνεται να ήταν και ο λόγος των υψηλών ποσοστών επιτυχίας στην ερμηνεία των πράξεων.

Τα ποσοστά επιτυχούς ερμηνείας άρχισαν να μειώνονται καθώς οι πολλαπλασιασμοί μετατράπηκαν σε ημιεύχρηστους. Στον **Ε4 (18/7 x ½)** το ποσοστό επιτυχίας στην ερμηνεία του από τους δασκάλους ήταν 55% παρόλο που ο ένας από τους όρους του γινομένου ήταν το 1/2 . Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι ένας όρος του γινομένου ήταν το καταχρηστικό κλάσμα 18/7. Τα καταχρηστικά κλάσματα είναι κλάσματα που δυσκολεύουν τους μαθητές στο δημοτικό σχολείο σύμφωνα με τους

(Bright et al., 1988; Tzur, 1999) όπως αναφέρουν οι Gabriel, et al. (2013). Αυτό δεν δείχνει να επηρέασε τους μαθηματικούς που είχαν ποσοστό επιτυχίας 85%.

Το ίδιο συνέβη και στον πολλαπλασιασμό Ε5 ($\frac{4}{3}\ x\frac{1}{4}$) όπου ερμήνευσαν με επιτυχία 16 (80%) μαθηματικοί σε αντίθεση με τους δασκάλους που είχαν σωστή ερμηνεία σε ποσοστό 40%. Και σε αυτόν τον πολλαπλασιασμό υπήρχε καταχρηστικό κλάσμα το 4/3. Αυτός όμως είναι πολλαπλασιασμός χωρίς υποδιαίρεση που δίνει δίοδο στην επιτυχία κάτι που δεν επαληθεύτηκε στην περίπτωση των δασκάλων ίσως λόγω του καταχρηστικού κλάσματος.

Δεν φαίνεται να ίσχυσαν τα παραπάνω στον επόμενο πολλαπλασιασμό Ε7 ($\frac{7}{9}\ x\frac{1}{7}$) που είναι και αυτός πολλαπλασιασμός χωρίς υποδιαίρεση. Αυτό επαληθεύετε από τα ποσοστά επιτυχούς ερμηνείας που είναι από τα μεγαλύτερα σε αυτή την ομάδα των πράξεων από δασκάλους και μαθηματικούς.

Τα ποσοστά επιτυχίας συνεχίζουν να μειώνονται και στις δυο ομάδες των εκπαιδευτικών όσο οι πράξεις μεταβάλλονται από εύχρηστες σε μη εύχρηστες όπου από 81,6% πέφτουν στο 45% στους δασκάλους και από 96,6% πέφτουν στο 72,5% στους μαθηματικούς.

Μεγάλη διαφορά στην επιτυχή ερμηνεία των δυο μη εύχρηστων πολλαπλασιασμών παρουσιάστηκε μεταξύ δασκάλων και καθηγητών μαθηματικών αφού οι πρώτοι είχαν ποσοστό επιτυχίας 45% και οι δεύτεροι 72,5%.

Η ερμηνεία της διαίρεσης δυσκόλεψε πολύ περισσότερο τους δάσκαλους αλλά και τους μαθηματικούς σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Πολλές ήταν οι παρανοήσεις που εμφανίστηκαν γύρω από την ερμηνεία της διαίρεσης. Η διαίρεση μερισμού επειδή είναι εύκολο να εφαρμοστεί στους φυσικούς αριθμούς, φαίνεται να επηρεάζει αρνητικά στην περίπτωση της διαίρεσης των κλασμάτων με διαιρέτη κλάσμα προκαλώντας λάθος ερμηνείες.

Διέξοδο για ερμηνεία της διαίρεσης βρήκε ένα μεγάλο ποσοστό των εκπαιδευτικών στην ερμηνεία μέσω του πολλαπλασιασμού. Αυτό το ποσοστό στους δασκάλους ήταν 23,8% ενώ στους μαθηματικούς 42,7%

Στις εύχρηστες διαιρέσεις τα ποσοστά επιτυχούς ερμηνείας μεταξύ των δυο ομάδων ήταν μικρά, δεν διέφεραν όμως σημαντικά. Μικρά ποσοστά επιτυχούς ερμηνείας

έχουμε από τους δασκάλους στην διαίρεση Δ2(1/3:2/3) όπου ο διαιρετέος είναι μικρότερος από τον διαιρέτη και αυτό μάλλον είναι ο λόγος της αποτυχίας. Και στην διαίρεση Δ3(3/4:1/2) υπάρχουν επίσης χαμηλά ποσοστά (25%) σωστής ερμηνείας. Φαίνεται ότι αν και τα κλάσματα ήταν εύχρηστα η διαίρεση αποδείχθηκε μη εύχρηστη για τους εκπαιδευτικούς.

Στις τέσσερεις ημιεύχρηστες διαιρέσεις του ερωτηματολογίου η επιτυχία των δασκάλων ήταν 38,75% ενώ των μαθηματικών ήταν 37,5%. Εδώ τα ποσοστά επιτυχίας στην ερμηνεία ήταν μεγαλύτερα από τα ποσοστά σωστής ερμηνείας στις εύχρηστες διαιρέσεις. Καλό θα ήταν να αναφερθεί ότι οι τρεις από τις τέσσερεις διαιρέσεις ήταν διαιρέσεις όπου ο διαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τον διαιρέτη . Επίσης οι δυο από τις τέσσερεις διαιρέσεις ήταν διαιρέσεις με ομώνυμα κλάσματα.

Τα ποσοστά επιτυχίας στις μη εύχρηστες διαιρέσεις είναι και τα μικρότερα που συναντήσαμε με 15% στους δασκάλους και 25% στους μαθηματικούς. Η ερμηνεία με την βοήθεια της διαίρεσης μέτρησης δυσκολεύει τους εκπαιδευτικούς ίσως γιατί οι όροι των κλασμάτων δεν έχουν μεταξύ τους καμμιά σχέση διαιρετότητας. Αυτό μάλλον οδήγησε τους ερωτηθέντες στην εύκολη απάντηση της ερμηνείας μέσω του πολλαπλασιασμού ή της μη ερμηνείας.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει τους τρόπους ερμηνείας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων.

Οι τρόποι ερμηνείας του πολλαπλασιασμού ήταν διάφοροι. Το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε την βοήθεια κάποιας γεωμετρικής αναπαράστασης (κύκλος, ορθογώνιο, γραμμή) για την ερμηνεία και ακολούθησε η ερμηνεία του πολλαπλασιασμού σαν μέρος ενός μέρους. ενώ μόνο 5,27% έδωσε απάντηση και με τους δυο τρόπους. Σημαντική διαφορά παρατηρήθηκε στην ερμηνεία με γεωμετρικό τρόπο με 27,87% περισσοτέρους μαθηματικούς να τον χρησιμοποιούν. Το μοντέλο του εμβαδού για την ερμηνεία του πολλαπλασιασμού ελάχιστα χρησιμοποιήθηκε από τους δασκάλους αν και το έχουν διδαχθεί.

Στην ερμηνεία της διαίρεσης επικράτησε η ερμηνεία με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού και ακολουθήσε σε μεγάλη απόσταση ερμηνεία με την βοήθεια της διαίρεσης μέτρησης. Έτσι επαληθεύεται ότι η διαίρεση μέτρησης στη περίπτωση των κλασμάτων είναι αρκετά δυσνόητη. Χρησιμοποιήθηκε σε διαιρέσεις με εύχρηστα κλάσματα αλλά δεν συνέβη το ίδιο στις μη εύχρηστες διαιρέσεις. Αρκετοί δάσκαλοι

ερμήνευσαν τις πράξεις σαν διαίρεση αριθμητών σε διαιρέσεις που τα κλάσματα ήταν ομώνυμα, ελάχιστες ερμηνείες δοθήκαν αφού τα κλάσματα μετατράπηκαν σε δεκαδικούς κάτι που δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους στην διδασκαλία τους. Σε κάποιες διαιρέσεις που τα κλάσματα ήταν ομώνυμα, τα κλάσματα αναλύθηκαν πρώτα σε μοναδιαία και χρησιμοποιήθηκε η λογική της διαίρεσης μέτρησης, ενώ από μια μαθηματικό δυο διαιρέσεις, η Δ4 και η Δ5 ερμηνεύτηκαν με μέτρα και χρόνους ενός ρυθμικού κομματιού μουσικής και αυτό θα ήταν μια καλή αφορμή για μια διαθεματική διδασκαλία των μαθηματικών και της μουσικής.

Δεν υπήρξε ερμηνεία κάποιου πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης με την παρουσίαση κάποιου προβλήματος. Αυτό δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι εκπαιδευμένοι σε τέτοιους τρόπους διδασκαλίας. Εξάλλου και τα σχολικά βιβλία έχουν πολύ περισσότερες ασκήσεις υπολογισμού πράξεων παρά επίλυσης προβλημάτων.

Παρατηρούμε μεγάλη διαφορά στην ερμηνεία της διαίρεσης με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού μεταξύ των δυο ομάδων όπου σχεδόν διπλάσιοι ήταν οι μαθηματικοί που την χρησιμοποίησαν σε σχέση με τους δασκάλους. Τα ποσοστά ερμηνείας με πολλαπλασιασμό δεν άλλαξαν και στις δυο ομάδες όσο οι πράξεις μεταβάλλονταν από εύχρηστες σε μη εύχρηστες. Πολύ μικρή ήταν η διαφορά στην ερμηνεία σαν διαίρεση μέτρησης μεταξύ των δυο ομάδων. Το ίδιο μικρή ήταν και η διαφορά ανάμεσα σε άλλους τρόπους ερμηνείας.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει τα λάθη στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της έρευνας βλέπουμε ότι στην ερμηνεία των πράξεων μεγαλύτερη επιτυχία έχουν οι μαθηματικοί.

Στην ερμηνεία του πολλαπλασιασμού τετραπλάσια ήταν τα λάθη των δασκάλων σε σχέση με αυτά των μαθηματικών. Από τους μαθηματικούς πολύ περισσότεροι από αυτούς που έκαναν λάθος απόπειρα ερμηνείας ήταν αυτοί που δεν έδωσαν ερμηνεία ή ερμήνευσαν το αποτέλεσμα 21/180 (11,6%). Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην πράξη Ε6 ($\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$) 6 μαθηματικοί την ερμηνεύουν λέγοντας ότι είναι ο ορισμός των αντίστροφων κλασμάτων. Δύο δεν ερμήνευσαν την πράξη αλλά ερμήνευσαν λάθος το αποτέλεσμα ενώ τα υπόλοιπα λάθη ίσως να οφείλονται και σε απροσεξία αφού

κατάφερναν να κατασκευάσουν το ένα από τα δυο κλάσματα του γινόμενου και έκαναν λάθος στην συνέχεια.

Στους δασκάλους ένας στους τέσσερεις δεν έδωσε ερμηνεία ή ερμήνευσε το αποτέλεσμα . Την πράξη Ε6 ($\frac{2}{3}\ x\frac{3}{2}$) 7 δάσκαλοι την ερμηνεύουν λέγοντας ότι είναι ο ορισμός των αντίστροφων κλασμάτων. Από τις λάθος ερμηνείες τέσσερεις περιγράφουν το αποτέλεσμα της πράξης λέγοντας ότι παίρνουμε ένα μικρότερο μέρος του δευτέρου κλάσματος, ενώ οι υπόλοιπες ήταν αποτυχημένες απόπειρες ερμηνείας με γεωμετρικό τρόπο. Κατασκευάζουν γεωμετρικά τον ένα ή και τους δυο όρους του γινομένου αλλά δεν μπορούν να δώσουν συνέχεια στην ερμηνεία.

Πολύ μεγαλύτερα ήταν τα ποσοστά των λαθών στην ερμηνεία της διαίρεσης με τους δασκάλους να έχουν δώσει λάθος ερμηνεία σε ποσοστό διπλάσιο από τους και μαθηματικούς σε λάθος ερμηνείες της διαίρεσης.

Πολλές από τις λάθος ερμηνείες υπήρξαν γιατί οι εκπαιδευτικοί είναι επηρεασμένοι από την διαίρεση μερισμού και το «μοιράζω» ήταν μέσα στην απάντηση τους. Αυτό έρχεται και σε συμφωνία με την βιβλιογραφία όπου η κατανόηση της διαίρεσης των περισσότερων από τους δασκάλους των ΗΠΑ υποστηρίχθηκε από μία μόνο ιδέα - το μοντέλο της διαίρεσης των ακέραιων αριθμών Ma (2010).

Κάποιες άλλες ερμηνείες που δόθηκαν δείχνουν να συγχέουν την διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό αφού έλεγαν ότι χωρίζω το πρώτο κλάσμα σε όσα μέρη είναι ο παρονομαστής του διαιρέτη και παίρνω τόσα μέρη όσα ο αριθμητής του διαιρέτη.

Σε διαιρέσεις που ο διαιρέτης ήταν μοναδιαίο κλάσμα όπως για παράδειγμα στην διαίρεση ¾ : ½ υπάρχει πραγματική σύγχυση αφού συγχέουν την διαίρεση με το ½ με την διαίρεση με το 2 και ερμηνεύουν λέγοντας μοιράζω το ¾ σε 2 ή το 6/9 σε 9 στην διαίρεση 6/9:1/9 ή σε 8 το ½ στην διαίρεση ½:1/8.

Άλλα λάθη που υπήρξαν ήταν λάθη στην προσπάθεια ερμηνείας με γεωμετρικό τρόπο όπου αφού κατασκεύαζαν γεωμετρικά με την βοήθεια ορθογωνίου, κύκλου ή ευθύγραμμου τμήματος τον διαιρετέο δεν μπορούσαν να δώσουν συνέχεια στην ερμηνεία. Ένα επίσης λάθος που εμφανίστηκε μόνο σε τρείς απαντήσεις σε δυο διαιρέσεις με αριθμητές την μονάδα ήταν ότι όταν έχω ίδιους αριθμητές διαιρω τους παρονομαστές.

5. Προτάσεις μελλοντικής έρευνας

Η μελέτη που έγινε θα είχε ενδιαφέρον να επαναληφθεί στο μέλλον σε νέες ερευνητικές προσπάθειες. Εκτός από την επανάληψη της για να συγκριθούν τα νέα ερευνητικά ευρήματα που θα προκύψουν με τα υπάρχοντα θα είχε ενδιαφέρον να υπάρξει κάποια ενδοσχολική επιμόρφωση στους συμμετέχοντες στην έρευνα για μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των πράξεων ώστε να μπορούν να αντιμετωπίζουν κατάλληλα όποιες παρανοήσεις ή δυσκολίες έχουν στην διδασκαλία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Στην συνέχεια να υπάρξει παρατήρηση της πορείας διδασκαλίας των πράξεων από τους συμμετέχοντες για να παρατηρηθεί αν υπάρχει αλλαγή στην συμπεριφορά τους ως προς τον τρόπο διδασκαλίας των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Η πρόταση αυτή έρχεται με αφορμή τα σχόλια πολλών κυρίως δασκάλων από τους συμμετέχοντες στην παρούσα έρευνα οι οποίοι μετά την πραγματοποίηση της και την συζήτηση των ερευνητικών ερωτημάτων με τον ερευνητή δήλωσαν πως όλη η διαδικασία τους προξένησε μεγάλο προβληματισμό και τους οδήγησε να αλλάξουν τον τρόπο διδασκαλίας τους στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Κουνελάκη Άρτεμις (2019). Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη Γεωμετρία (Μεταπτυχιακή εργασία). Ανακτήθηκε από: http://ikee.lib.auth.gr/record/312179

Λεμονίδης, Χ. (2017). Στην τροχιά των ρητών. Εκδόσεις Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη. ISBN 9789605990688.

Λεμονίδης, Χ. Ουζουνίδου, Κ. (2017). Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των μελλοντικών δασκάλων στους ρητούς αριθμούς. Πρακτικά 7ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Ε.ΝΕ.ΔΙ.Μ) Αθήνα, σελ. 845-856.

Μπαλαμπανίδου, Ζ., Μέμπτσας, Δ., Λεμονίδης, Χ., (2020). Εφαρμογή βιωματικών εργαστηρίων και κοινοτήτων πρακτικής και διερεύνησης για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς. 6ο Διεθνές Συνέδριο για την Προώθηση της Εκπαιδευτικής Καινοτομίας, Λάρισα 16-18 Οκτωβρίου, ΕΕΠΕΚ.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, 132-144. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.2.0132

Ball, D. L., Thames, M. P., & Geoffrey, P. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59, 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. Frontline Learning Research, 3(1) 18 – 35. https://doi.org/10.14786/flr.v3i1.132

Braithwaite, D. W., Pyke, A.A., & Siegler, R. S. (2017). A computational model of fraction arithmetic. Psychological Review, 124(5), 603–625. https://doi.org/10.1037/rev0000072

Carvalho, R. (2017). Mental Computation with Rational Numbers: Students' Mental Representations. Journal of Mathematics Education, 10(2), 17-29. https://doi.org/10.26711/007577152790010

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., … Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. Teaching and Teacher Education, 47, 82–92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. Frontiers in Psychology. Retrieved from: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual Differences in Conceptual and Procedural Knowledge When Learning Fractions Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. Journal of Educational Psychology, 102(2), 395–406. https://doi.org/10.1037/a0017486

Hansen, N., Jordan, N. C., & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. Contemporary Educational Psychology, 50, 45–59. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

Lemonidis, Ch. (2016). Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning. Routledge. P.244. https://doi.org/10.4324/9781315675664

Lemonidis, Ch., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. MENON: Journal Of Educational Research. 1st Thematic Issue, 61-74.

Lemonidis, C., & Pilianidis, N. (2020). The 8th Grade Students' Competencies in Alternating Different Symbolic Representations of Rational Numbers. International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(3), em0587. https://doi.org/10.29333/iejme/7865

Lemonidis, C., Tsakiridou, H., & Meliopoulou, I. (2018). In-Service Teachers' Content and Pedagogical Content Knowledge in Mental Calculations with Rational Numbers. International Journal of Science and Mathematics Education, 16(6), 1127-1145. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9822-6

Lenz, K., & Wittmann. G. (2021). Individual Differences in Conceptual and Procedural Fraction Knowledge : What Makes the Difference and What Does it Look Like ? International Electronic Journal of Mathematics Education,16(1) , em0615. https://doi.org/10.29333/iejme/9282

Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: the case of fraction division. ZDM Mathematics Education, 40, 845–859. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0134-8

Lin, C.-Y., Becker, J., Byun, M.-R., Yang, D.-C., & Huang, T.-W. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. School Science and Mathematics, 113(1), 41–51. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x

Ma, L. (2010) Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States Anniversary Edition. Retrieved from: https://doi.org/10.4324/9780203856345

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93(2), 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Shulman, S. L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher,15(2)2, 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sidney, P. G., Thompson, C. A., & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. Contemporary Educational Psychology, 58, 288–298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., … Wray, J. (2010). Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: IES practice guide. NCEE 2010-4039. http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=ED512043

Siegler, S. R., Fazio, K. L., Bailey, H. D., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. Trends in Cognitive Sciences, 17(1), 13–19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. Developmental Psychology, 49(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, S.R., Thompson, A.C., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62(4) , 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. Learning and Instruction, 14(5), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/252215079

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. Cognition and Instruction, 28(2), 181–209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior 31(3), 344–355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Yea-Ling, T. (2004) Exploring The Connections Among Number Sense, Mental Computation Performance, And The Written Computation Performance of Elementary Preservice School Teachers. Journal of College Teaching & Learning, 1(12), 71-90. https://doi.org/10.19030/tlc.v1i12.2022

Young, E., & Zientek, L. R. (2011). Fraction operations: An examination of prospective teachers' errors, confidence, and bias. Investigations in Mathematics Learning, 4(1),1–23. https://doi.org/10.1080/24727466.2011.11790307

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

	Ονοματεπώνυμο:	
	Έργα	Υπολογίζω με το μυαλό. Γράφω πως υπολόγισα. Ερμηνεύω τι σημαίνει η πράξη.
Ε1	$\frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	
Ε2	$\frac{1}{3} x \frac{1}{4}$	
Ε3	$\frac{1}{2} x \frac{3}{4}$	
Ε4	$\frac{18}{7} x \frac{1}{2}$	
Ε5	$\frac{4}{3} x \frac{1}{4}$	
Ε6	$\frac{2}{3} x \frac{3}{2}$	
Ε7	$\frac{7}{9} x \frac{1}{7}$	
Ε8	$\frac{4}{5} \mathrm{x} \frac{1}{7}$	
Ε9	$\frac{1}{11} x \frac{1}{13}$	
Δ1	$\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$	
Δ2	$\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$	
Δ3	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	
Δ4	$\frac{6}{9} : \frac{1}{9}$	
Δ5	$\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$	
Δ6	$3\frac{2}{5} : \frac{1}{5}$	
Δ7	$\frac{1}{24} : \frac{1}{8}$	
Δ8	$\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$	
Δ9	$\frac{2}{11} : \frac{5}{7}$	