ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΛΑΘΗ ΚΑΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ»

της

Ευαγγελίας Κωνσταντινίδου

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρήστου Κωνσταντίνος

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Φλώρινα, Νοέμβριος, 2022

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι κοινώς αποδεκτό ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητάς μας. Οι ανισώσεις, όπως και οι εξισώσεις, συνιστούν ένα βασικό κομμάτι των μαθηματικών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έννοιες όπως οι ανισώσεις και η μεταβλητή σηματοδοτούν το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην κατανόηση των δυσκολιών και των λαθών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την επίλυση αλγεβρικών ανισώσεων. Συγκεκριμένα, στοχεύει στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών, η αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής με εστίαση στις τιμές που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές και η διαχείριση των μαθηματικών πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών, επιδρούν στην κατανόηση της έννοιας της ανίσωσης και στην ερμηνεία των λύσεων της.

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 57 μαθητές/τριες δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Α΄ και Β΄ τάξης ενιαίου Λυκείου. Εργαλείο της έρευνας αποτέλεσε ένα ερωτηματολόγιο 16 ερωτήσεων, το οποίο δόθηκε στους συμμετέχοντες προς συμπλήρωση. Τέλος, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πολλά λάθη στις ανισώσεις οφείλονταν σε δυσκολία κατανόησης της πυκνότητας των ρητών αριθμών, της έννοιας της μεταβλητής καθώς και του τρόπου επίλυσης των ανισώσεων.

Λέξεις - Κλειδιά: Ανισώσεις, ρητοί αριθμοί, μεταβλητή, παρανοήσεις, αριθμητική, άλγεβρα

ABSTRACT

Mathematics is an integral part of our daily lives. Inequalities, like equations, are a key part of high school math. Concepts such as inequalities and variables signal the transition from arithmetic to algebra.

The present work aims to understand the difficulties and mistakes faced by students in solving algebraic inequalities. Specifically, it aims to study how understanding the dense structure of rational numbers, understanding the meaning of the variable with a focus on the arithmetic values that variables can take, and results of operations between numbers and variables, affects there understanding the concept of inequality and the interpretation of its solutions.

The research sample consists of 57 students of secondary education of high school and the second grade of high school. The research tool was a questionnaire of 16 questions, which was given to the participants to complete. In the end, the results showed that many errors in inequalities were due to difficulty in understanding the density of explicit numbers, the meaning of the variable and how to solve inequalities.

Keywords: Inequalities, explicit numbers, variable, misconceptions

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι εξισώσεις και οι ανισώσεις αποτελώντας ένα ιδιαίτερα σημαντικό μέρος των μαθηματικών διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όλων των χωρών παγκοσμίως. Ωστόσο, στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί μεγάλες δυσκολίες των μαθητών ως προς την επίλυσή τους (Vassiliou, 2011; Sergei Abramovich, 2019). Πολλές έρευνες επικεντρώθηκαν στις δυσχέρειες και τα λάθη που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση εξισώσεων και συγκεκριμένα στη δυσκολία των μαθητών να ερμηνεύσουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς και να επιλύουν εξισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη.

Οι ανισώσεις διαδραματίζουν ένα καίριο ρόλο στα μαθηματικά καθώς εμπλέκονται σε πολλές θεματικές περιοχές, όπως είναι η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, ο γραμμικός προγραμματισμός και η μελέτη των συναρτήσεων (Bazzini & Tsamir, 2002a). Ωστόσο, σύμφωνα με τον Bagni (2005) η ιστορία των ανισώσεων δεν είναι τόσο πλούσια όσο αυτή των εξισώσεων, επειδή ο τρόπος επίλυσης των ανισώσεων βασίζεται στην μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων (Bagni, 2005).

Οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ως προς την επίλυση και κατανόηση των ανισώσεων εδράζονται στην απόδοση νέων νοημάτων σε έννοιες και μαθηματικές διαδικασίες που σχετίζονται με τις ανισότητες. Τα λάθη σε ανισώσεις δεν προκύπτουν τυχαία, αλλά μάλλον οι μαθητές έχουν ένα σταθερό εννοιολογικό πλαίσιο με βάση τις προηγούμενες γνώσεις που βασίζεται στην αριθμητική (Lorenzo J. Blanco, 2007).

Με αφετηρία τα παραπάνω η παρούσα εργασία αποβλέπει στην κατανόηση των δυσκολιών και των λαθών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την επίλυση αλγεβρικών ανισώσεων. Ειδικότερα, στοχεύει στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών, η αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής με εστίαση στις τιμές που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές καθώς και η διαχείριση των μαθηματικών πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών επιδρούν στην κατανόηση της ανίσωσης και στην ερμηνεία των λύσεών της.

Για να κατανοηθούν τόσο οι δυσκολίες όσο και τα λάθη των μαθητών λαμβάνει χώρα η ανάλυση κάποιων βασικών μαθηματικών εννοιών, ώστε να δειχθεί πώς αυτές οι μαθηματικές έννοιες προσεγγίζονται στην εκπαίδευση και που κυρίως διαπιστώνεται η δυσκολία της κατανόησης στην επίλυσή τους. Επίσης, θεμελιώδης κρίνεται και η ιστορική αναδρομή μελετών για τις ανισώσεις ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητές και να παρακολουθηθεί η εξέλιξή τους μέχρι και σήμερα.

Η παρούσα εργασία δομείται σε 6 κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται η ιστορική αναδρομή των εννοιών της άλγεβρας, όπως είναι η μεταβλητή, η εξίσωση και ειδικότερα οι αλγεβρικές ανισώσεις. Επίσης, γίνεται αναφορά και στον τρόπο που διδάσκονται οι παραπάνω έννοιες στα σχολεία. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα λάθη και οι δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την επίλυση των ανισώσεων στην άλγεβρα. Το Κεφάλαιο 3 αναφέρει τον σκοπό της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα που πρέπει να εξετασθούν. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας και στο Κεφάλαιο 5 καταγράφονται τα αποτελέσματα. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρατίθενται τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ: ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η άλγεβρα αποτελεί ένα από τα μεγάλο μέρος των μαθηματικών που δυσκολεύει τα παιδιά να κατανοήσουν τις βασικές της έννοιες παρόλο που διδάσκεται, τουλάχιστον στην Ελλάδα στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και κατά την είσοδο των παιδιών στο Γυμνάσιο.

Οι έρευνες δείχνουν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετίζονται με την κατανόηση της δομής της άλγεβρας ως προς τη μετατροπή των λεκτικών εκφράσεων σε εξισώσεις ώστε να καταλήγουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, να κατανοούν και να παρερμηνεύουν τα σύμβολα και τα γράμματα που χρησιμοποιούνται, καθώς και να εφαρμόζουν σωστά τις αλγεβρικές ιδιότητες. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι μαθητές δεν έχουν μάθει να χρησιμοποιούν την άλγεβρα ως εργαλείο για την απόδειξη μαθηματικών σχέσεων (Kieran C. , 1992).

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της άλγεβρας, όπως είναι η μεταβλητή και ο τρόπος που εμφανίζεται σε εξισώσεις και ανισώσεις, προκειμένου να κατανοηθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση των αλγεβρικών ανισώσεων.

1.1 Θεωρητικές επισημάνσεις της Άλγεβρας

Η άλγεβρα μπορεί να χαρακτηριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με την έννοια που της δίνεται. Σύμφωνα με τον Usiskin (1988), η άλγεβρα παρουσιάζεται με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους (Usiskin, 1988):

1. Ως η τέχνη του χειρισμού πράξεων των αριθμών που στηρίζεται σε κανόνες, όπου οι χειρισμοί αυτοί μπορεί να είναι και γράμματα και οι κανόνες ισχύουν και για διαφορετικά είδη αριθμών, καθώς και για πράγματα που δεν είναι αριθμοί. Υπό αυτή την έννοια η άλγεβρα είναι γενικευμένη αριθμητική.
2. Ως το σύνολο των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, οι οποίες διαφοροποιούνται από την αριθμητική.
3. Ως η έκφραση σχέσεων μεταξύ μεγεθών.
4. Ως η μελέτη των δομών.

Σύμφωνα με την Kieran (2007), η σχολική άλγεβρα μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε δυο δραστηριότητες:

1. Τις παραγωγικές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν το σχηματισμό εξισώσεων με έναν άγνωστο και απεικονίζουν περιπτώσεις προβλημάτων (Bell, 1995), διατυπώσεις τύπων από γεωμετρικά προβλήματα ή αριθμητικές ακολουθίες (Mason, 1996), και διατυπώσεις κανόνων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις (Lee & Wheeler, 1987).
2. Τις αλγεβρικές δραστηριότητες μετασχηματισμού/μετατροπής που περιλαμβάνουν την αναγωγή όμοιων όρων, την παραγοντοποίηση, την αντικατάσταση, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων, την εκθετική διατύπωση πολυωνύμων, την επίλυση εξισώσεων, την απλοποίηση παραστάσεων καθώς και άλλες δραστηριότητες που αφορούν στην μεταβολή του τύπου μιας έκφρασης ή εξίσωσης προκειμένου να διατηρηθεί η ισοδυναμία (Δεληφωτάκη, 2019).

Συνοψίζοντας, η άλγεβρα αφορά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας εξισώσεις. Εξετάζοντάς την από μια ελαφρώς διαφορετική οπτική γωνία, οι αριθμοί, οι μεταβλητές και οι τελεστές είναι τα βασικά δομικά στοιχεία από τα οποία κατασκευάζονται οι αλγεβρικές εκφράσεις, και ως εκ τούτου οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Οι ακόλουθες ενότητες θα εξηγήσουν δύο από αυτούς τους όρους, τη μεταβλητή και την εξίσωση (Technologyuk.net, n.d.).

1.2 Προβλήματα των μαθητών στη σχολική Άλγεβρα

Παρατηρήθηκε πως τα περισσότερα λάθη και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη σχολική άλγεβρα συνδέονται με τη μεταφορά κανόνων από την αριθμητική στην άλγεβρα, την εκτεταμένη χρήση συμβόλων και την ιδιαιτερότητα της φυσικής γλώσσας στην επεξεργασία αλγεβρικών ιδεών. Η άλγεβρα βοηθάει στη διαχείριση και την αναπαράσταση με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια μαθηματικών ιδεών καθώς και στην ανάπτυξη αποτελεσματικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων (Σακονίδης, 2011).

Οι αλλαγές που ο μαθητής καλείται να προβεί αφορούν έννοιες και πράξεις που διαχωρίζουν τον έναν τρόπο σκέψης από τον άλλο, της άλγεβρας από την αριθμητική (Δημητριάδου , 2009). Σύμφωνα με τον Σακονίδη (2011), η αριθμητική έχει αλγεβρικό χαρακτήρα διότι υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις και δομές που μπορούν να εκφραστούν αλγεβρικά. Με βάση τα παραπάνω οι Booth (1988) και Carraheretal (2006) θεωρούν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα πηγάζουν από περιορισμούς που διδάχθηκαν στην αριθμητική. Οι παράγοντες που την καθιστούν δύσκολη σύμφωνα με τον Thwaites (1982) είναι η αδυναμία οπτικοποίησης των αλγεβρικών ιδεών, η αυθαίρετη και πολύπλοκη φύση τους, και η σχέση μεταξύ αλγεβρικού συμβολισμού και πλαισίου αναφοράς (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006).

Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της άλγεβρας κατέχει εξίσου, η έννοια της μεταβλητής η οποία χρησιμοποιείται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους δημιουργώντας αντιλήψεις που συνυπάρχουν ταυτόχρονα ή ανεξάρτητα μεταξύ τους προξενώντας συγχύσεις κατά την εφαρμογή τους. Συχνά, όταν χρησιμοποιούνται γράμματα αντί για αριθμοί οι μαθητές δίνουν σε αυτά μια συγκεκριμένη τιμή ως λύση (Λεμονίδης, 1996).

Παράλληλα, οι γραμμικές εξισώσεις αποτελούν ένα κεντρικό κομμάτι των μαθηματικών και είναι σημαντικό να παρουσιαστούν τα λάθη που γίνονται (Hall, 2002). Πρώτο είναι το λάθος της διαγραφής (The Deletion Error), κατά το οποίο γίνεται απλοποίηση σε μία παράσταση. Για παράδειγμα η παράσταση 2xy-2y να είναι ίση με 2x. Στην περίπτωση αυτή το 2yx-2y λανθασμένα εξισώνεται με το 2y + x– 2y= x. Αυτό αποτελούσε το πιο διαδεδομένο από τα λάθη που έκαναν οι μαθητές όταν απλοποιούσαν εκφράσεις κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Επομένως, οι μαθητές γενικεύουν συγκεκριμένες μαθηματικές διαδικασίες φτάνοντας σε μία γενική διαδικασία απαλοιφής, η οποία συχνά παράγει λανθασμένα αποτελέσματα. Δεύτερο είναι το λάθος της αντίστροφης πράξης (the other inverse error) όταν λόγου χάρη η παράσταση 4x=1 γίνεται x=1-4. Μάλιστα, το λάθος της αντίστροφης πράξης είναι παρόμοιο με το λάθος της διαγραφής και ίσως και τα δύο παράγονται από τον ίδιο μηχανισμό. Τρίτο είναι το λάθος της αναδιανομής και λανθασμένης πρόσθεσης στην ισότητα (The redistribution and switching addends error). Το λάθος εντοπίζεται όταν οι μαθητές κρίνουν για παράδειγμα ότι οι εξισώσεις x+37=150 και x+37-10=150+10 έχουν την ίδια λύση, οπότε προβαίνουν σε λάθη. Τέταρτο είναι το λάθος της μετατόπισης (The transposing error). Σύμφωνα με αυτό υπάρχουν ενδείξεις που δείχνουν ότι πολλοί μαθητές που κάνουν μεταφορά από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο, δεν χειρίζονται την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο, αλλά εφαρμόζουν τελείως τυφλά τον κανόνα «όταν αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο». Αυτό το λάθος της μετατόπισης είναι το πιο συχνό λάθος κυρίως σε κλασματικές εξισώσεις όπως για παράδειγμα x/2+3=5 κάνει x+3=10, οι μαθητές βρίσκουν ευκολότερο να μεταθέσουν απ' ότι να κάνουν το ίδιο και στα δύο μέλη μιας ισότητας (Kieran C. , 1992). Η μέθοδος της μετάθεσης(από το ένα μέλος στο άλλο) δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται από τους διδασκόμενους για δύο κυρίως λόγους. Πρώτον, φαίνεται να μην κατανοούν που εφαρμόζουν τη μετάθεση σχετικά με τη δομή και το νόημα της εξίσωσης και δεύτερον, αυτή η έλλειψη κατανόησης, συνδέεται με την επιθυμία πολλών μαθητών να κάνουν τα πράγματα όσο το δυνατόν πιο απλά με αποτέλεσμα πολύ συχνά να υπεραπλουστεύουν τον κανόνα «όταν αλλάζω μέλος αλλάζω πρόσημο» (Hall, 2002). Πέμπτο είναι το λάθος της άντλησης (Exhaustion error) που παρατηρείται να συμβαίνει στο τέλος μιας άσκησης, έχοντας δηλαδή την εξίσωση 5x+x+2=3x+12 κάνοντας πράξεις καταλήγει ο μαθητής στην ισότητα 6x=3x+10 άρα 6x+3x=10. Το λάθος αυτό συμβαίνει τόσο συχνά που μπορεί να αποτελέσει από μόνο του μια κατηγορία. Έκτο λάθος συνιστά η λανθασμένη εφαρμογή της αντίστροφης πράξης (The misuse of additive inverse error) που εμφανίζεται αρκετά επίμονα, γιατί δεν προκαλεί τη σύγκρουση μεταξύ νέας και υπάρχουσας γνώσης, 5x+x+2=3x+12 δηλαδή 6x+2+2=3x+12+2. Προκειμένου λοιπόν ο μαθητής να αναγνωρίσει ότι αυτή τη σύγκρουση, θα πρέπει να αντιληφθεί ότι η μέθοδος που έπεται, παράγει αποτελέσματα που δεν ικανοποιούν την αρχική εξίσωση (Χαιρέτη, 2009). Έβδομο είναι το λάθος της παράλειψης (Omission error) 5x+x+2=3x+12 προκύπτει 6x+2-2=3x+12 και όγδοο αυτό της διαίρεσης (Division error) 3x=10 δίνει λύση x=3.1 που μπορεί να μοιάζει ασήμαντο για την επίλυση μιας γραμμικής εξίσωσης. Όμως, οι μαθητές αντιμάχονται συχνά τη δυσκολία να υπολογίσουν ένα πηλίκο που δεν είναι ακέραιος αριθμός. Τέλος, ένατο λάθος αποτελεί εκείνο της ανικανότητας απομόνωσης της μεταβλητής (Inability to isolate variable error). Παρατηρείται δηλαδή, μια αδυναμία των μαθητών να απομονώσουν τη μεταβλητή της εξίσωσης, δηλαδή στην εξίσωση 3x=10 έχει αποδοθεί ήδη η λύση. Το λάθος αυτό εμφανίζεται διότι:

1. Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να διαιρέσουν και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό. Οι μαθητές δεν βλέπουν ότι όπως μπορούν να προσθέσουν και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό, μπορούν και να διαιρέσουν.

2. Ακόμη, οι μαθητές δεν κατανοούν ότι για παράδειγμα το 3x σημαίνει 3 φορές το x. Αυτή η αδυναμία να αναγνωρίσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού εξηγεί και την αδυναμία των μαθητών να εφαρμόσουν την αντίστροφη πράξη, δηλαδή τη διαίρεση.

3. Επιπλέον, οι μαθητές ξέρουν ότι το 3x σημαίνει 3 φορές το x, αλλά δεν αντιλαμβάνονται ότι σε αυτό το σημείο, πρέπει να διαιρέσουν και τα δύο μέλη με το 3.

4. Οι μαθητές φοβούνται εξίσου μήπως κάνουν το λάθος στη διαίρεση και προτιμούν να αφήσουν την άσκηση σε αυτό το σημείο.

5. Μάλιστα, οι μαθητές μπερδεύονται αφού περιμένουν μια ακέραια λύση, γεγονός που έχουν συνηθίσει από άλλες εξισώσεις (Hall, 2002). Με βάση λοιπόν τις παραπάνω εξηγήσεις

μπορούμε να πούμε ότι το λάθος ανικανότητας της απομόνωσης της μεταβλητής σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το λάθος της διαίρεσης.

Οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών αλλά και της διάταξης των ρητών αριθμών και της πυκνότητάς τους. Αφενός δυσκολία εντοπίζεται στην απειρία των ενδιάμεσων αριθμών και οι διδασκόμενοι υποστηρίζουν ότι υπάρχει πεπερασμένο/μηδενικό πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς. Αφετέρου, δυσκολία παρουσιάζουν και στις διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις γιατί θεωρούν ότι αναφερόμαστε σε διαφορετικούς αριθμούς. Σημαντικό εξάλλου είναι και το γεγονός ότι οι ρητοί είναι «πυκνοί», δηλαδή ότι μεταξύ δύο ρητών αριθμών μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο πλήθος άλλων αριθμών (Moss, 2005). Παρόλο που οι μαθητές κάνουν λόγω για την ύπαρξη αριθμών μεταξύ του 0 και του 1 δεν γνωρίζουν απαραίτητα ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε αυτό το διάστημα (Smith, Solomon, & Carey, 2005). Κάποιοι μαθητές χωρίζουν σε ομάδες τους αριθμούς που έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Αυτός ο διαχωρισμός όμως είναι μια αρχή που υπάρχει στους φυσικούς αριθμούς. (Φωκάς, 2019).

Επίσης πολλοί διδασκόμενοι δυσχέρειες αντιμετωπίζουν και στην αριθμογραμμή, επειδή την βλέπουν ως μια σειρά από «βήματα προς τα μπροστά» με κενό μεταξύ τους καθώς επίσης και ότι το πλήθος των ενδιαμέσων αριθμών είναι πεπερασμένο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Επίσης, πρέπει να αναφερθεί για κάθε φυσικό αριθμό μπορεί να οριστεί ο αμέσως επόμενός του, αυτό ονομάζεται «αρχή του επόμενου». Ένα παιδί που κατανοεί πραγματικά τη λειτουργία του επόμενου θα πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n, θα υπάρχει ένας μοναδικός επόμενος, και αυτός θα είναι ο n+1, άρα δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος αριθμός από όλους (Cheung , Rubenson, & Barner, 2017). Οι μαθητές όμως, πολλές φορές δυσκολεύονται διότι δεν εφαρμόζουν κατάλληλα τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς αριθμούς (Van Dooren , Lehtinen, & Verschaffel, 2015). Στους φυσικούς αριθμούς είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ο επόμενος αριθμός οποιουδήποτε αριθμού, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τους ρητούς αριθμούς. Οι μαθητές πιστεύουν ότι και οι ρητοί αριθμοί είναι διακριτοί, όπως αυτό συμβαίνει με τους φυσικούς αριθμούς, ότι δηλαδή διαδέχονται ο ένας τον άλλο (Vamvakoussi, 2010). Στο σύνολο των ρητών αριθμών καταργείται η αρχή της διαδοχής, δηλαδή ανάμεσα σε δύο φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια των κλασμάτων, ενώ έχουν ήδη διαμορφώσει το σχήμα της καταμέτρησης και του επόμενου αριθμού. Οπότε ακόμα και για τα κλάσματα και τους δεκαδικούς, επομένως για τους ρητούς, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει πάντα ο επόμενος αριθμός (Hartnett & Gelman, 1998).

Αρκετές μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές οι οποίοι απαντούν σωστά στην απειρία των ενδιαμέσων, επιμένουν ότι υπάρχει ο αμέσως επόμενος αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι δεν κατανοούν ως ένα βαθμό ότι σε ένα διάστημα μεταξύ δύο αριθμών υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Σύμφωνα με Vamvakoussi και Vosniadou (2012), έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές τα πηγαίνουν καλύτερα στην απειρία των ενδιάμεσων αριθμών από ότι στην μη ύπαρξη του επόμενου. Αν κάποιος μαθητής αντιλαμβάνεται την απειρία μεταξύ δύο αριθμών αυτό δεν σημαίνει ότι θα γίνεται και παράλληλα κατανοητή η πυκνότητα των αριθμών σε σχέση με την έννοια ότι για κανέναν αριθμό δεν ορίζεται ο επόμενος αριθμός (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Μια εξήγηση για το γεγονός ότι ο «επόμενος» είναι πιο δύσκολα αντιληπτός από την απειρία των ενδιαμέσων είναι το δυνάμει και το ενεργεία άπειρο. Το δυνάμει άπειρο είναι πιο προσιτό στους μαθητές με την έννοια της χρήσης μια επαναλαμβανόμενης διαδικασίας. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε το δυνητικό άπειρο και το πραγματικό άπειρο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Σύμφωνα με έρευνες η έννοια του δυνητικού απείρου είναι πιο προσιτή στους μαθητές, ακόμα και σε μικρά παιδιά (Vamvakoussi, 2010) από ότι του πραγματικού απείρου (Vamvakoussi, 2010). Κατανοούν ότι μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός αλλά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών ρητών αριθμών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετωπίζουν οι μαθητές οφείλονται στη μεταφορά της ιδέας της διακριτότητας από τους φυσικούς στους ρητούς. Η διακριτότητα είναι βασική αρχή της αρχικής θεωρίας πλαισίου για τον αριθμό και αποδίδεται καταχρηστικά στους ρητούς (και στους πραγματικούς) αριθμούς από τους μαθητές. Η έρευνα των Vamvakoussi και Vosniadou(2007) ομαδοποίησε τους συμμετέχοντες σε τρεις κατηγορίες: Στην κατηγορία πεπερασμένο πλήθος τους χωρίζει σε δύο υποομάδες: Στην πρώτη είναι οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσος, ενώ στη δεύτερη απάντησαν ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Στην κατηγορία άπειρο πλήθος οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο υποομάδες. Στην πρώτη οι μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι της ίδιας συμβολικής αναπαράστασης, ενώ στη δεύτερη εκείνοι που απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανεξάρτητα από την συμβολική τους αναπαράσταση σε όλες τις ερωτήσεις. Τέλος, στην κατηγορία μεικτή ήταν οι μαθητές, οι οποίοι απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ορισμένες ερωτήσεις αλλά όχι σε όλες. Το συμπέρασμα ήταν, ότι πολλοί μαθητές, εκτός από την ιδέα της διακριτικότητας, επηρεάστηκαν και από την συμβολική αναπαράσταση των αριθμών και έδειξαν ότι είναι πιο επιρρεπείς στο να δεχτούν το άπειρο των ενδιαμέσων μεταξύ δύο φυσικών αριθμών από δύο μη φυσικούς αριθμούς και μεταξύ δύο δεκαδικών από ότι μεταξύ δύο κλασμάτων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Από τα παραπάνω είναι κατανοητό ότι οι μαθητές πρώτα αντιλαμβάνονται την απειρία των ενδιαμέσων σε δύο φυσικούς αριθμούς, μετά σε δύο δεκαδικούς και μετά σε δύο κλάσματα, θεωρώντας ότι μόνο οι δεκαδικοί έχουν άπειρους ενδιάμεσους και τα κλάσματα δεν έχουν ή το αντίστροφο (Βαμβακούση, 2019), ενώ κάποιοι άλλοι θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν κλάσματα και το αντίστροφο και αυτό μπορεί να συμβαίνει ακόμα και όταν θεωρούν ότι υπάρχουν άπειρα πολλοί ενδιάμεσοι αριθμοί (Vamvakoussi, 2010). Έτσι, διαπιστώνουμε ότι δεν αντιλαμβάνονται ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των ίδιων μαθηματικών αντικειμένων.

Παράλληλα, σημαντική παρατήρηση στην έρευνα των Vamvakoussi και Vosniadou (2012) αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές τα πηγαίνουν καλύτερα στην «απειρία των ενδιαμέσων» από ότι στην «μη ύπαρξη του επόμενου», παρά το γεγονός ότι είναι ισοδύναμες όψεις της πυκνότητας από μαθηματική άποψη. Έφτασαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει διαφορετική συνθετική αντίληψη των μαθητών για την πυκνή διάταξη των αριθμών. Μια πιθανή ερμηνεία αυτής της συνθετικής αντίληψης είναι η διάκριση ανάμεσα στο δυνάμει άπειρο και το ενεργεία άπειρο. Το δυνάμει άπειρο έχει την μορφή ατέρμονης διαδικασίας, η οποία είναι πιο προσιτή προς τους μαθητές. Αυτή η μορφή μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι φυσικοί δεν τελειώνουν ποτέ άρα το πλήθος τους είναι άπειρο, με την σκέψη ότι για κάθε φυσικό μπορούμε να βρούμε τον επόμενό του, προσθέτοντας μια μονάδα και να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο. Συνεπώς, δεν θα σταματήσει ποτέ αυτή η διαδικασία άρα το πλήθος είναι άπειρο. Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με την μορφή επαναληπτικής διαδικασίας, μπορούμε να παράγουμε ενδιάμεσους αριθμούς μεταξύ δύο δεκαδικών προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού τους μέρους ή μεταξύ δύο κλασμάτων μετατρέποντας τα σε ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους. Έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι οι ενδιάμεσοι αριθμοί είναι άπειροι εφόσον γίνει αντιληπτό ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται επ΄ άπειρο. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει και την πυκνότητα, δηλαδή ότι για κανέναν αριθμό δεν ορίζεται ο επόμενος αριθμός (Φωκάς, 2019).

1.3 Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού

Οι μαθητές κάνουν συστηματικά λάθη, όταν μια εργασία απαιτεί μια λογική που δεν είναι σύμφωνη με την προηγούμενη γνώση και εμπειρία που αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Από την άλλη οι μαθητές ανταποκρίνονται αποτελεσματικά σε εργασίες με ρητούς αριθμούς, όταν αυτές είναι συμβατές με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Σύμφωνα με τον Butterworth (2007) η συλλογιστική αυτή πορεία χαρακτηρίστηκε ως προτίμηση στους φυσικούς αριθμούς, ενώ οι Ni & Zhou (2005) είχαν χρησιμοποιήσει τον όρο προκατάληψη του ακέραιου αριθμού. Πρόκειται για ένα καλά τεκμηριωμένο φαινόμενο, το οποίο βοηθά στην ερμηνεία των λαθών που κάνουν οι μαθητές όταν συλλογίζονται με μη φυσικούς. Έχουν την τάση δηλαδή να αξιοποιούν και να εφαρμόζουν την προϋπάρχουσα εμπειρία και γνώση ακόμα και σε ασκήσεις και προβλήματα τα οποία απαιτούν μια λογική μη συμβατή με αυτή, όπως για παράδειγμα σε περιπτώσεις που εμπλέκονται κλάσματα ή δεκαδικοί (Moss, 2005). Οι προκατειλημμένες απαντήσεις των μαθητών συνήθως δίνονται ασυνείδητα και γρήγορα. Αναλυτικότερα, οι μαθητές δηλαδή δεν έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν και να επανεξετάσουν όλες τις υποθέσεις της αρχικής θεωρίας πλαισίου του φυσικού αριθμού, κυρίως επειδή δεν τις γνωρίζουν. Έτσι, δημιουργούνται πολλές φορές ασυνέπειες και παρανοήσεις.

Μια άποψη που βασίζεται στην προέλευση της τάσης των μαθητών να αξιοποιούν τη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς σε περιπτώσεις που δεν αντιστοιχούν είναι αυτή των Galistel & Gelman (1992), που υποστήριξαν ότι η προκατάληψη αυτή προέρχεται από τον γνωστικό μηχανισμό του ανθρώπου ο οποίος εστιάζει στην αριθμητική του ικανότητα, προκαλώντας μια δυσκολία στους ανθρώπους όταν επεξεργάζονται τους αριθμούς. Συγκεκριμένα, οι φυσικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από διακριτότητα, δεν υπάρχει δηλαδή άλλος φυσικός ανάμεσα σε δύο φυσικούς και πάντα υπάρχει προηγούμενος και επόμενος αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί από την άλλη, όπως αναφέραμε και παραπάνω, χαρακτηρίζονται από πυκνότητα, βάσει της οποίας ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί και δεν υπάρχει ένας και μοναδικός επόμενος ή προηγούμενος αριθμός. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, προκαλείται σύγχυση στα παιδιά και η προκατάληψη των φυσικών αριθμών είναι δύσκολο να αποφευχθεί ή να μειωθεί με εκπαιδευτικές παρεμβάσεις, μια και είναι ένα έμφυτο «γνωστικό εμπόδιο» (Μάρκου, 2020).

Τέλος, μια ακόμη προσέγγιση που επικεντρώνεται κυρίως στη μάθηση χαρακτηρίζει την προκατάληψη φυσικού αριθμού ως αποτέλεσμα δυσλειτουργικής μάθησης και διδασκαλίας (Cramer, 1993). Η αρχική κατανόηση του αριθμού η οποία αφορά κατά κύριο λόγο τους φυσικούς αριθμούς θεωρείται ότι επιδρά και καθορίζει την μετέπειτα αλληλεπίδραση των μαθητών και με άλλα είδη αριθμών. Εκτός από το να ορίσουν και να περιγράψουν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού οι ερευνητές, επεσήμαναν και τις πιθανές παρανοήσεις που μπορεί να προκαλέσει. Αρχικά στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, οι μαθητές σκέφτονται λανθασμένα ότι ένας αριθμός με περισσότερα δεκαδικά ψηφία από έναν άλλο είναι και μεγαλύτερος (Nesher & Peled, 1986). Με παρόμοιο τρόπο σκέφτονταν οι μαθητές και για τα κλάσματα. Επιπλέον οι μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι όλοι οι αριθμοί είναι διακριτοί ως προς την πυκνότητα όπως οι φυσικοί. Δεν αντιλαμβάνονται δηλαδή ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ρητών υπάρχουν άπειροι αριθμοί και θεωρούν ότι ο κάθε αριθμός έχει έναν και μοναδικό επόμενο και προηγούμενο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Αναφορικά με τη σχέση της μονάδας (1) και του κλάσματος, προκαλούνται και πάλι παρανοήσεις από τη μεριά των μαθητών. Ένα μέρος αυτών θεωρεί ότι το «1» είναι μεγαλύτερο από κάθε κλάσμα και οι υπόλοιποι ότι το «1» είναι μικρότερο από κάθε κλάσμα. Αυτή η σκέψη και η δυσκολία τους πηγάζει πιθανόν από την εισαγωγή τους στην ιδέα του μέρους - όλου όταν εισάγονται για πρώτη φορά στα κλάσματα. Πρόσφατες έρευνες έδειξαν τέλος ότι υπάρχει προκατάληψη και στον τρόπο που οι μαθητές ερμηνεύουν τα γράμματα όταν αυτά χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές γεγονός που θα αναλυθεί διεξοδικά και στο ερευνητικό μέρος παρακάτω. Σύμφωνα με τους Christou & Vosniadou (2012) οι μαθητές μέχρι και τις μεγάλες τάξεις έχουν την τάση να αντιμετωπίζουν τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς όταν αυτές εμπλέκονται σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Ενδιαφέρον σχετικά με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού παρουσιάζει η διερεύνηση του ποιος, πότε και πως την εμφανίζει. Πρώτα από όλα φαίνεται ότι όλοι εμφανίζουν μια μορφή προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Η προκατάληψη είναι εμφανής όχι μόνο σε διδασκόμενους που έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με ρητούς αριθμούς αλλά και σε άτομα που έχουν μεγάλη εξοικείωση με αυτούς, ωστόσο όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το πρότυπο των ασκήσεων που εμφανίζεται η προκατάληψη ποικίλει μεταξύ των συμμετεχόντων. Σε κάποιες περιπτώσεις η προκατάληψη εμφανίζεται στα λάθη που πράτουν, σε κάποιες άλλες στον χρόνο αντίδρασης και σε άλλες στις στρατηγικές που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν. Όσον αφορά το πότε εμφανίζεται η προτίμηση και η αξιοποίηση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών χωρίς αυτό να είναι αναγκαίο, ένα πρώτο παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον όποιο απαντούν όταν κληθούν να συγκρίνουν δύο κλάσματα. Βασισμένοι στη γνώση των μεγεθών των φυσικών αριθμών και όχι στα μεγέθη των ίδιων των κλασμάτων, οδηγούνται σε εσφαλμένες απαντήσεις (DeWolf & Vosniadou, 2015). Ακόμη όπως επισημάνθηκε και παραπάνω στις συνέπειες, αλλά και κατά τη σύγκριση των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να χρησιμοποιούν ιδιότητες των φυσικών αριθμών για να απαντήσουν. Υποστηρίζουν δηλαδή, πως όσο μακρύτερος τόσο μεγαλύτερος ή πως αν προσθέσουν ένα μηδενικό στο τέλος του αριθμού, αυξάνεται το μέγεθος του. Αυτό βέβαια δε συμβαίνει σε κάθε δοκιμασία που καλούνται να λύσουν. Ένα τρίτο και χαρακτηριστικό παράδειγμα σύμφωνα με μελέτες των τελευταίων χρόνων στο οποίο εμφανίζεται η προκατάληψη είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν πράξεις (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Αυτό που παρατηρείται ως προς τις πράξεις είναι ότι οι μαθητές χωρίς να δοκιμάσουν ή να λύσουν μια άσκηση, υποστηρίζουν ως κοινή αποδοχή ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δίνουν ένα αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τους αριθμούς που συμμετέχουν στην πράξη, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση δίνουν ένα αποτέλεσμα μικρότερο (Christou & Vamvakoussi, 2021).

Όπως προκύπτει από ευρήματα προηγούμενων ερευνών οι μαθητές τείνουν να αντικαθιστούν τα γράμματα που χρησιμοποιούνται για να αντιπροσωπεύσουν μεταβλητές μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις, μόνο με φυσικούς αριθμούς. Θεωρούν πως οι φυσικοί αριθμοί είναι μια εύκολη εναλλακτική λύση, καθώς συνεπάγεται ευκολότερους υπολογισμούς. Πέρα όμως από αυτό το πιο γενικό εύρημα, ο Christou (2021) μέσα από έρευνα του επιβεβαίωσε κάποιες επιμέρους παρανοήσεις. Συγκεκριμένα προέκυψαν εμπειρικές ενδείξεις ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού σχετίζεται με την τάση των μαθητών να ταυτίζουν το φαινομενικό πρόσημο της μεταβλητής με το πραγματικό πρόσημο της τιμής που αντιπροσωπεύει. Ακόμη σύμφωνα με την ίδια έρευνα φάνηκε πως οι μαθητές ήταν πιο εύκολο να επηρεαστούν όταν μια αλγεβρική παράσταση είχε αρνητικό πρόσημο συγκριτικά με μια αλγεβρική παράσταση που είχε θετικό πρόσημο. Σε προηγούμενη μελέτη των Christou & Vosniadou (2012), στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ποιες τιμές θα μπορούσαν να πάρουν κάποιες μεταβλητές ή κάποιες αλγεβρικές παραστάσεις, προέκυψε πως μόνο το ένα τρίτο των μαθητών απάντησε σωστά και επέλεξε δηλαδή την εξής απάντηση: «όλοι οι αριθμοί μπορούν να αντιστοιχούν σε κάθε αλγεβρική παράσταση». Ένα ακόμη εύρημα που αξίζει να αναφερθεί αποτελεί το ότι όταν ένα σύνολο μαθητών ερωτήθηκε για το τι τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή «α», το 66% απάντησε πως μπορεί να πάρει μόνο φυσικούς αριθμούς. Παράλληλα στο ίδιο ερωτηματολόγιο όταν οι ίδιοι μαθητές απάντησαν για τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή «-β», μεγάλος αριθμός μαθητών απάντησε μόνο αρνητικούς αριθμούς (Christou, Vosniadou, & Vamvakoussi, 2007).

Κάπως έτσι προκύπτουν και τα δύο βασικά είδη παρανοήσεων που προκύπτουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και αποτελούν βασικό αντικείμενο διερεύνησης της συγκεκριμένης μελέτης. Αφενός εμφανίζεται η παρανόηση που αφορά το να διατηρούν πολλές φορές την ακεραιότητα της μορφής μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, αποδίδοντας σε αυτές μόνο φυσικούς αριθμούς. Η παρανόηση αυτή απορρέει από την τάση των παιδιών να αξιοποιούν την ήδη υπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς όταν δίνουν αριθμητικές τιμές στις μεταβλητές. Αφετέρου το άλλο είδος της παρανόησης αφορά το πρόσημο της τιμής που θα επιλεχθεί για μια μεταβλητή, εάν δηλαδή οι μαθητές επιλέξουν μόνο αρνητικές τιμές για μια αλγεβρική παράσταση με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο και μόνο θετικές τιμές για μια μεταβλητή με θετικό φαινομενικό πρόσημο. Με τον όρο φαινομενικό πρόσημο, νοείται το πρόσημο το οποίο φαίνεται να έχει μια μεταβλητή, ως εξωτερικό χαρακτηριστικό της (Χρήστου, 2009). Όταν δηλαδή οι μαθητές συναντούν τη μεταβλητή «α», υποστηρίζουν ότι, όπως στους αριθμούς έτσι και στις μεταβλητές, η απουσία προσήμου σημαίνει θετικός αριθμός (π.χ. 3, 8, 12....). Ομοίως, όταν δίνουν πιθανές τιμές για τη μεταβλητή «-β», επιλέγουν μόνο αρνητικές (π.χ. -4, -7, -15…), λόγω της παρουσίας αρνητικού προσήμου μπροστά από τη μεταβλητή. Μέσω αυτής της παρανόησης φαίνεται και η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν ότι η κάθε μεταβλητή ανεξαρτήτου «φαινομενικού προσήμου» μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε αριθμό θετικό ή ακέραιο. Όπως στη μεταβλητή έτσι και οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση, η οποία περιέχει μεταβλητή, έχει ένα φαινομενικό πρόσημο το οποίο όμως δεν είναι το πραγματικό πρόσημο της τιμής που μπορεί να πάρει (Χρήστου, 2009).

1.4 Η σημασία της μεταβλητής στην Άλγεβρα

Μια εξίσωση, στο πλαίσιο της άλγεβρας, είναι μια δήλωση που λέει ότι δύο εκφράσεις είναι ίσες μεταξύ τους σε αξία. Είναι μια μαθηματική συμβολοσειρά που μπορεί να αποτελείται από έναν μόνο αριθμό ή μεταβλητή ή μια συλλογή αριθμών, μεταβλητών και μαθηματικών τελεστών διατεταγμένων με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να αξιολογηθεί αν παράγουν κάποιο αποτέλεσμα (Technologyuk.net, n.d.).

Μια μεταβλητή είναι κάτι που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει μια άγνωστη ποσότητα σε μια εξίσωση ή μία ανίσωση. Στην άλγεβρα, τα γράμματα x και y είναι αυτά που συνήθως χρησιμοποιούνται ως ονόματα μεταβλητών, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε χαρακτήρας ή σύμβολο. Από την άλλη, το όνομα που επιλέγεται για μια μεταβλητή εξαρτάται συχνά από τον τύπο του προβλήματος που πρέπει να λυθεί. Για παράδειγμα, σε μια εξίσωση που περιγράφει μια διαδικασία που συμβαίνει σε κάποια άγνωστη χρονική περίοδο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το γράμμα t για να αναπαραστήσει την τιμή του χρόνου που πέρασε σε δευτερόλεπτα. Σε πιο σύνθετες εξισώσεις, μπορεί κάλλιστα να υπάρχουν δύο ή περισσότερες μεταβλητές του ίδιου τύπου (Curle, 1971; Technologyuk.net, n.d.).

Ως εκ τούτου, μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της Άλγεβρας είναι η μεταβλητή και η κατανόησή της αποτελεί βασική προϋπόθεση για μια επιτυχημένη πορεία σ' αυτήν (Philipp, 1992). Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής συνδέεται με την αλγεβρική σκέψη και βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Lee, 1996).

Όσον αφορά τη σχολική άλγεβρα, αυτή βασίζεται στην χρήση των μεταβλητών, η κατανόηση των οποίων αποτελεί μια διαδικασία εξαιρετικά δύσκολη ειδικότερα κατά το στάδιο της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα (Küchemann, 1978). Η ύπαρξη μεγάλου πλήθους διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων της μεταβλητής, όπως το x και το y ή άλλα γράμματα, σύμβολα και χαρακτήρες, προσθέτουν επιπλέον δυσκολίες στην κατανόησή της τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία υπάρχει έντονη δυσκολία των μαθητών με τα γράμματα, ενώ πολλά από τα λάθη και τις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συνδέονται συχνά με τις δυσκολίες αυτές (Küchemann, 1978).

Σχετικά με τη διδαχή της έννοιας της μεταβλητής στην Ελλάδα, διδάσκεται στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και αναπτύσσεται σαν έννοια για τους μαθητές μέχρι το Λύκειο. Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται στην αριθμητική διαφέρει από αυτόν της άλγεβρας. Στην αριθμητική, η έννοια της μεταβλητής χρησιμοποιείται ως άγνωστος αριθμός σε απλής μορφής εξισώσεις, όπως είναι για παράδειγμα η $2+x=7$. Οι μαθητές με αυτόν τον τρόπο σχηματίζουν την αντίληψη ότι η μεταβλητή εκφράζει μόνο έναν άγνωστο αλλά συγκεκριμένο αριθμό. Άλλη μια χρήση των μεταβλητών είναι σε τύπους που διδάσκονται οι μαθητές στα μαθηματικά ή στην φυσική, όπου και εκεί εκφράζει κάποιο συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος. Τέλος, οι μεταβλητές εμφανίζονται και σε γενικευμένους κανόνες της αριθμητικής ή αλγεβρικές σχέσεις, όπως είναι η ταυτότητα και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών (Lumenlearning.com, n.d.).

Η μεταβλητή χρησιμοποιείται με διάφορους τρόπους στην αριθμητική και στην άλγεβρα καθιστώντας τους μαθητές να σχηματίζουν διαφορετικές αντιλήψεις για τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να την ερμηνεύσουν (Λεμονίδης, 1996). Οι αντιλήψεις αυτές συνυπάρχουν ταυτόχρονα ή ανεξάρτητα η μια από την άλλη μέσα σε αντιφατικά συμπλέγματα (Ε. Δεμίρη, 1994).

Η αρχική κατανόηση των αριθμών από τους μαθητές, καθώς οργανώνεται στο πλαίσιο της αριθμητικής και κρατά μια ειδική θέση για τους φυσικούς αριθμούς, εμποδίζει την κατανόηση της σημασίας των μεταβλητών ως συμβόλων για πραγματικούς αριθμούς. Έτσι, ορισμένοι μαθητές κατανοούν τις μεταβλητές στο πλαίσιο της εναλλακτικής μορφής σχετικά με τους αριθμούς, μια μορφή είναι οργανωμένη γύρω από τους φυσικούς αριθμούς. Σε αυτή την περίπτωση, ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, δίνοντάς τους ιδιότητες φυσικών αριθμών, που μπορεί να οδηγήσουν σε συγκεκριμένα λάθη και παρεξηγήσεις σε διάφορα αλγεβρικά πλαίσια, όπως η κατανόηση των τιμών που μπορούν να ληφθούν από αλγεβρικές εκφράσεις και περιλαμβάνουν μεταβλητές (Χρήστου, 2009).

Το πέρασμα από τις απλές αριθμητικές πράξεις στις μεταβλητές έχει χαρακτηρισθεί ‘’εννοιολογικό κενό’’ (Herscovics & Linchevski, 1994) ή ‘’cut-point’’ (Filloy & Rojano, 1989) μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Οι Herscovics και Linchevski (1994) ισχυρίστηκαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν απλές διαδικασίες μέτρησης ή την αντίστροφη πράξη για να παράγουν ένα αποτέλεσμα σε προβλήματα που περιέχουν ένα άγνωστο. Οι Filloy και Rojano (1989) διαπίστωσαν ότι η αριθμητική σκέψη εξελίσσεται πολύ αργά από συγκεκριμένες διαδικασίες σε περισσότερη αφηρημένη αλγεβρική σκέψη και μίλησαν για την ύπαρξη ενός εννοιολογικού κενού που χωρίζει ένα είδος σκέψης από άλλο (Κυλάφης, 2009).

Επιπρόσθετα, η επίλυση μιας εξίσωσης στην οποία η μεταβλητή παρουσιάζεται μόνο μια φορά δεν αποτελεί αλγεβρική διαδικασία, όταν κάθε στάδιο επίλυσης περιέχει μόνο υπολογισμούς με γνωστούς αριθμούς. Συνεπώς, θεωρείται ότι η πραγματική αλγεβρική διαδικασία επίλυσης με χρήση του αγνώστου είναι απαραίτητη στις εξισώσεις που η μεταβλητή παρουσιάζεται και στα δύο μέλη (Αραμπάτζης, 2010).

Χρειάζεται σε αυτό το σημείο να επισημανθεί ότι ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα γράμματα ως μεταβλητές στην άλγεβρα γίνεται με ποικίλους τρόπους. Οι διαφορετικές χρήσεις των μεταβλητών μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τον Usiskin (1988) ως:

- Γενικευμένη αριθμητική: οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί για να εκφράσουν σχέσεις, όπως είναι για παράδειγμα στην αντιμεταθετική ιδιότητα $α+β=β+α$.
- Μελέτη των διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων: οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τον άγνωστο μιας εξίσωσης που λαμβάνει

συγκεκριμένη τιμή μετά την επίλυση της (μια ή δυο τιμές ανάλογα το βαθμό της εξίσωσης), αλλά που προς το παρόν παραμένει άγνωστος, όπως για παράδειγμα στην εξίσωση 3x+5=17, όπου ο x λαμβάνει την τιμή.

- Μελέτη των σχέσεων διαφόρων ποσοτήτων: οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν συναρτησιακές σχέσεις όπως για παράδειγμα στη σχέση y=3x+4, όπου x η ανεξάρτητη μεταβλητή, που μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και y η εξαρτημένη μεταβλητή.
- Μελέτη των δομών: οι μεταβλητές είναι αυθαίρετα αντικείμενα σε μια δομή όπως οι ομάδες, τα σώματα, οι δακτύλιοι που η καθεμιά συγκροτείται γύρω από συγκεκριμένους κανόνες και αρχές όπως για παράδειγμα στη σχέση $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Στέλλα Δημητρακοπούλου, 2018).

Ο Küchemann (1978), ταυτοποίησε έξι στάδια κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής κατηγοριοποιώντας τις διαφορετικές χρήσεις της από τους μαθητές σύμφωνα με τα ιεραρχημένα στάδια ανάπτυξης του Piaget. Σύμφωνα με τον Küchemann (1978), στα τρία πρώτα στάδια καταδεικνύεται ένας χαμηλός βαθμός κατανόησης από την πλευρά των μαθητών, στο τέταρτο στάδιο αποκρίνεται ένα μικρό ποσοστό μαθητών, στο πέμπτο στάδιο η κατανόηση της μεταβλητής ως ένας γενικευμένος αριθμός αποτελεί ένα από τα ανώτερα επίπεδα, το οποίο κατακτούν μόνον όσοι μαθητές είναι ήδη ικανοί στο χειρισμό του τυπικού διαδικαστικού επιπέδου (Küchemann, 1978).

Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής σύμφωνα με τον Küchemann (1978) είναι τα εξής:

1. Μεταβλητή αξιολογούμενη: οι μαθητές αποδίδουν μια τυχαία τιμή στη μεταβλητή, π.χ. θέτουν x=2 στην παράσταση 3x+1 και στην συνέχεια χρησιμοποιούν το αποτέλεσμα.
2. Μεταβλητή παραλειπόμενη: όταν παραλείπεται η χρήση της από τους μαθητές, για παράδειγμα η αλγεβρική έκφραση 2x+3y+7x μετατρέπεται στην 12xy, γιατί οι διαφορετικές μεταβλητές θεωρούνται από τους μαθητές ως μια.
3. Μεταβλητή-αντικείμενο: όταν η μεταβλητή αναγνωρίζεται ως συντομογραφία ενός αντικειμένου για παράδειγμα η έκφραση 2τ+3β συμβολίζει 2 τετράδια και 3 βιβλία.
4. Μεταβλητή ως συγκεκριμένος άγνωστος ή σταθερά: όταν η μεταβλητή αναγνωρίζεται ως ένας συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός, όπου μάλιστα διαφορετικές μεταβλητές αναπαριστούν οπωσδήποτε διαφορετικούς αριθμούς, π.χ. στις παραστάσεις x+y+z και x+v+z οι μαθητές θεωρούν ότι το y δεν μπορεί να ισούται με το v.

5. Μεταβλητή ως γενικευμένος αριθμός: όταν η μεταβλητή μπορεί να λάβει περισσότερες της μιας τιμές, π.χ., στην παράσταση α+β=7 οι μαθητές μπορούν να παραθέσουν παραπάνω από έναν συνδυασμούς που δίνουν το συγκεκριμένο αποτέλεσμα (π.χ. 3+4, 5+2, 6+1).
6. Μεταβλητή ως μεταβαλλόμενη ποσότητα: όταν οι μαθητές αναγνωρίζουν συμμεταβολές μεταξύ των μεταβλητών για παράδειγμα σε εκφράσεις του τύπου y=2x+3 (Στέλλα Δημητρακοπούλου, 2018).

Σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, ο Philipp (1992) σε έρευνά του διαπίστωσε παρανοήσεις από την πλευρά των μαθητών που αφορούσαν την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και πρότεινε τρόπους αντιμετώπισης, κατηγοριοποιώντας τις χρήσεις των γραμμάτων ως μεταβλητές από τους μαθητές σε επτά κατηγορίες:

1. Ετικέτα: αν η μεταβλητή απεικόνιζε ένα μέγεθος, π.χ. β το βάρος ή ήταν συντομογραφία ενός αντικειμένου π.χ. 2μ συμβολίζει 2 μολύβια
2. Σταθερά: αν η μεταβλητή απεικόνιζε μια σταθερά, π.χ. π ή e.
3. Παράμετρος: αν η μεταβλητή εμφανιζόταν ως παράμετρος σε μια εξίσωση π.χ. (λ-1)x=λ+1.
4. Άγνωστος αριθμός: αν η μεταβλητή ήταν ο ζητούμενος άγνωστος σε μια πρωτοβάθμια εξίσωση, π.χ. στην 2x+3=9.
5. Γενικευμένος αριθμός: αν μπορούσε να λάβει περισσότερες της μιας τιμές, π.χ. στην σχέση: (a+b)+c=a+(b+c).
6. Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες: αν η μεταβλητή εξέφραζε μια σχέση συμμεταβολής δυο ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα στη σχέση y=3x+7.
7. Αφηρημένο σύμβολο: αν είχε τη θέση συμβόλου χωρίς αριθμητική αναφορά, π.χ. $x \cdot x' = e$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι η κατηγοριοποίηση αυτή αφορούσε την χρήση μόνο των γραμμάτων ως μεταβλητών χωρίς να λαμβάνει *υπόψη* τη χρήση άλλων συμβόλων στα μαθηματικά, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιούνταν για να εκφράσουν την έννοια της μεταβλητής (Philipp, 1992).

Επιπρόσθετα, όσον αφορά την κατανόηση των μεταβλητών από τους διδασκόμενους πρέπει να επαναληφθεί ότι οι μαθητές τείνουν να θεωρούν τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς. Σε αυτή τη μελέτη πραγματοποιήθηκαν δύο έρευνες σχετικά με την έννοια της μεταβλητής στα σχολικά μαθηματικά. Συγκεκριμένα, διερευνώνται οι τρόποι κατανόησης των μαθητών του

Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου σχετικά με τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στις αλγεβρικές παραστάσεις, τις τιμές που μπορούν να πάρουν, με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου και τι αριθμητικές τιμές τους αποδίδονται. Έτσι, αυτό που διαπιστώθηκε από τις δύο αυτές έρευνές τους ήταν ότι οι μαθητές αναγνώριζαν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούσαν περισσότερους του ενός αριθμούς, αλλά ότι οι αριθμοί αυτοί ήταν κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί, και ότι στην πλειοψηφία τους τα γράμματα εμφανίζονταν ως σύμβολα που αναπαριστούσαν περισσότερους του ενός αριθμούς και ότι οι τιμές που τους αποδίδονταν ήταν μη-φυσικοί και φυσικοί αριθμοί σε ίδιο περίπου ποσοστό. (Στέλλα Δημητρακοπούλου, 2018)

1.5 Η σημασία της εξίσωσης στην Άλγεβρα

Αξιοσημείωτη εξίσου, αποτελεί η δυσκολία των μαθητών κατά τον χειρισμό και την ερμηνεία των αλγεβρικών παραστάσεων. Οι Kieran και Chalouh (1993), διαπίστωσαν την δυσκολία των μαθητών στο να επιλύουν λεκτικά προβλήματα μέσω της αλγεβρικής επίλυσής τους. Προτιμούσαν δηλαδή τον αριθμητικό τρόπο επίλυσης από το να δημιουργήσουν εξισώσεις, γιατί η αλγεβρική επίλυση απαιτεί έναν αναλυτικό και πιο αφαιρετικό τρόπο σκέψης. Επίσης, η Warren (1998), διαπίστωσε ανεπαρκή την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύσουν τη σημασία των γραμμάτων και να εκτελέσουν τις πράξεις μη γνωρίζοντας την αξία τους.

Έτσι, μία εξίσωση αναφέρεται σε μια δήλωση που περιγράφει την ισότητα δύο μαθηματικών εκφράσεων (Καραγεώργος, Ντιντάκης, & Ράπτη, 2015). Επίσης, μια εξίσωση συνδέει γνωστές με άγνωστες ποσότητες τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε, ώστε η ισότητα να επαληθεύεται. Η λύση μιας εξίσωσης με ν αγνώστους είναι μία ν-άδα αριθμών ή συναρτήσεων που επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε τους αγνώστους στην εξίσωση με το αντίστοιχο στοιχείο της ν-άδας, η ισότητα θα πρέπει να γίνεται αληθής. Οι άγνωστες ποσότητες δηλώνονται κυρίως με τα τελευταία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, x, y, z, w και τα αρχικά γράμματα της αλφαβήτου, όπως τα α, β, γ, χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις σταθερές που περιλαμβάνονται στην εξίσωση. Ο άγνωστος για τον οποίο η εξίσωση είναι αληθής ονομάζεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης (Gelman, 2000). Επιπρόσθετα, μια εξίσωση που δεν έχει καμία λύση λέγεται αδύνατη και μια εξίσωση που έχει άπειρες λύσεις λέγεται ταυτότητα.

Εκτός των παραπάνω, η εξίσωση συνιστά μια μαθηματική δήλωση που βεβαιώνει την ισότητα δύο εκφράσεων και πιο συγκεκριμένα κάθε ισότητα $p(x_1 ,x_2 ,\ldots x_n)=0$, όπου το $p(x_1 ,x_2 ,\ldots x_k)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού με κ μεταβλητές. Επιπλέον, το σύμβολο της ισότητας εκφράζει ισοδυναμία μεταξύ των εκφράσεων που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτού. Μια χρήση των εξισώσεων είναι στις μαθηματικές ταυτότητες, σχέσεις οι οποίες ισχύουν ανεξάρτητα από τις τιμές που είναι δυνατό να λάβουν οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται σε αυτές. Εντούτοις, κάποιες εξισώσεις είναι δυνατό να επαληθεύονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξισώσεις πρέπει να λυθούν έτσι ώστε να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι επαληθεύουν την ισότητα και αποτελούν τις λύσεις της εξίσωσης.

Εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής θεωρούνται οι ισότητες της μορφής $αx=β$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Στα μαθηματικά, οι εξισώσεις πρώτου βαθμού έχουν την μορφή $αx+β=γ$, $αx+β=γx$ και $αx+β=γx+δ$ με α, β, γ, δ να είναι πραγματικοί αριθμοί. Η μεταβλητή x αποτελεί το σύμβολο του γενικευμένου αριθμού, που παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στην άλγεβρα, οι τιμές που παίρνουν οι α και β στην εξίσωση $αx=β$ είναι από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ η μεταβλητή x εμφανίζεται συχνά παραπάνω από μια φορά. Οι πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x είναι:

- Αν $α=0$ και $β=0$ η μεταβλητή x είναι δυνατό να λάβει τιμές από όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Ενώ αν $α=0$ και $β \neq 0$ τότε η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως αδύνατη και δεν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός που να την επαληθεύει.
- Τέλος, αν $α \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον πραγματικό αριθμό $–β/α$ (Αραμπάτζης, 2010).

Συνακόλουθα, στις εξισώσεις ουσιώδεις είναι και οι στρατηγικές επίλυσής τους, με τις οποίες οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού, αφού οι μαθητές από την ηλικία των 10 έως και 14 ετών συχνά επιλύουν τις εξισώσεις με μεθόδους που δε διδάσκονται στο σχολείο (Kieran C. , 1992). Οι εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής αποτελούν μαθηματικά προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν και με χρήση άτυπων μεθόδων που υποστηρίζονται από την ανθρώπινη καθημερινή λογική και έχουν ελάχιστη σχέση με τις διαδικασίες επίλυσης που διδάσκονται στο σχολείο. Έτσι, οι στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων, τις οποίες χρησιμοποιούν οι μαθητές επηρεαζόμενοι από την καθημερινή τους εμπειρία ή την πρώιμη αριθμητική γνώση τους, είναι οι εξής (Kieran C. , 1992):

α) χρήση γνωστών πράξεων, για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής x+4=10, γνωρίζουμε ότι 4+6=10, άρα το x=6.

β) τεχνικές μέτρησης, για παράδειγμα, έχουμε και πάλι την εξίσωση x+4=10, μετράμε από το 4 έως το 10 οπότε το x=6.

γ) cover-up, έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής 2x+10=7x, επειδή 7x=2x+5x συμπεραίνω ότι 10=5x, επομένως x=2.

δ) «δουλεύω προς τα πίσω», για παράδειγμα έχουμε την εξίσωση 2x+4=10. Το αποτέλεσμα δεξιά είναι το 10, οπότε αν μειωθεί κατά 4 προκύπτει τι 6, το οποίο με τη σειρά του προκύπτει αν πολλαπλασιαστεί το 2 με το 3, άρα το x=3.

ε) δοκιμές αριθμών και επαλήθευση, έστω ότι έχουμε και πάλι την εξίσωση 2x+4=10.Αντικαθιστούμε την μεταβλητή με διάφορες τιμές μέχρι να διαπιστώσουμε ότι το x=3 την επαληθεύει.

Όσον αφορά τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, οι μαθητές μαθαίνουν να λύνουν τις εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής χρησιμοποιώντας τις στρατηγικές (γ), (δ) και (ε) προκειμένου να λειτουργήσουν αυτές ως ένας «ενισχυτής των διεργασιών της σκέψης» των μαθηματικών και της λογικής (Bruner, 1972). Ωστόσο, η χρήση μόνο αυτών των μεθόδων για επίλυση εξισώσεων δεν βοηθά τον μαθητή να γενικεύει τα συμπεράσματά του (Petitto, 1979) και να συνειδητοποιεί τον ρόλο του συμβόλου της ισότητας ως προς την ισοδυναμία.

Έπειτα, στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, οι μαθητές διδάσκονται τις πρώτες έννοιες της άλγεβρας και τις εξισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη της σχέσης ή με λύσεις και μη ακέραιους αριθμούς, διδάσκοντας και καινούριες στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων κατάλληλες για την επίλυση αυτών. Δύο είναι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται:

α) κάνω την ίδια πράξη και στα δύο μέλη, για παράδειγμα από την εξίσωση 3x+4=10, αφαιρείται και από τα δυο μέλη το 4, οπότε προκύπτει 3x=6 και διαιρούνται και τα δύο μέλη με το 3, άρα το x=2.

β) αλλαγή μέλους-αλλαγή πρόσημου, έστω η εξίσωση 3x+4=10-3x. Συλλέγονται όλες οι μεταβλητές στα αριστερά και όλοι οι αριθμοί στα δεξιά αλλάζοντας πρόσημο σε όποιον όρο της εξίσωσης αλλάζει μέλος. Έτσι, προκύπτει 6x=6 και διαιρούνται και τα δύο μέλη με το 6, οπότε η λύση είναι x=1.

Οι δύο παραπάνω τρόποι επίλυσης γίνονται αντιληπτοί διαφορετικά από μαθητές οι οποίοι διαπραγματεύονται για πρώτη φορά αλγεβρικές εξισώσεις (Kieran C. , 1988). Εκείνοι που εφαρμόζουν την μέθοδο επίλυσης «ίδια πράξη και στα δύο μέλη της εξίσωσης» συνειδητοποιούν πιο εύκολα την συμμετρία μιας εξίσωσης, γεγονός το οποίο δεν ισχύει για εκείνους που επιλέγουν ως τρόπο λύσης αλγεβρικών εξισώσεων την «αλλαγή μέλους-αλλαγή πρόσημου». Οι διδασκόμενοι που αλλάζουν μέλος στους όρους της εξίσωσης, αλλάζοντας συγχρόνως το πρόσημο τους, δεν αντιμετωπίζουν συνήθως την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο, αλλά εφαρμόζουν την μέθοδο την οποία έχουν διδαχτεί (Kieran C. , 1992).

Σύμφωνα με την Kieran (1990) αρκετές έρευνες που βασίστηκαν στη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας προσδιόρισαν τρεις τρόπους με τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν την επίλυση των εξισώσεων:

1) το διαισθητικό,
2) τη δοκιμαστική αντικατάσταση και
3) το τυπικό τρόπο.

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το διαισθητικό τρόπο προσπαθούν να προσδιορίσουν την τιμή του αγνώστου αναλύοντας τις αριθμητικές σχέσεις που υπάρχουν στην εξίσωση χωρίς να χρησιμοποιούν τα βήματα του τυπικού αλγόριθμου επίλυσης (μεταφορά όρων στο άλλο μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις κλπ). Στη δοκιμαστική αντικατάσταση μάλιστα οι μαθητές καλούνται για να επιλύσουν μια εξίσωση και να δώσουν διάφορες τιμές για το x ώσπου να βρεθεί η σωστή απάντηση, η οποία αποτελεί μία πολύ χρονοβόρα μέθοδο επίλυσης. Ο τυπικός τρόπος επίλυσης είναι ο αλγόριθμος που διδάσκεται για την επίλυση των εξισώσεων. Πρόκειται για κατάλληλους αλγεβρικοί μετασχηματισμοί στα δύο μέλη της εξίσωσης που οδηγούν σε ισοδύναμες εξισώσεις μέχρι να απομονωθεί και να βρεθεί η τιμή του αγνώστου (Λεμονίδης, 1996).

Συνήθως, οι δύο πρώτοι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές δε διδάσκονται ειδικά για την επίλυση των εξισώσεων αλλά μεταφέρονται από τους μαθητές σαν συνήθειες από προηγούμενες γνώσεις τους, όπως για παράδειγμα οι ισότητες με κενά που διδάσκονται στο δημοτικό για την εκμάθηση των πράξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

2.1 Λάθη και δυσκολίες με τις αλγεβρικές ανισώσεις

Η ανισότητα αποτελεί βασική μαθηματική έννοια της Άλγεβρας και της Ανάλυσης και τη συναντάμε σε πολλές μαθηματικές περιοχές, από τη σύγκριση των αριθμών μέχρι και τα Ανώτερα Μαθηματικά. Επίσης, η ανισότητα αποτελεί μέρος διάφορων μαθηματικών ενοτήτων, όπως της τριγωνομετρίας, της θεωρίας συνόλων, των συναρτήσεων και του γραμμικού προγραμματισμού (A. Chakrabarti, 1997). Σύμφωνα με την Μπαλωμένου (2017) η έννοια της ανισότητας ορίζεται από επιμέρους έννοιες όπως της σύγκρισης μεγεθών ή ποσοτήτων, της διάταξης στοιχείων και αριθμών και του «περιέχεσθαι».

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι ανισώσεις δεν έχουν τόσο πλούσια ιστορία όπως οι εξισώσεις (Bagni, 2005) και στην επιστήμη των μαθηματικών στα αρχαία χρόνια οι ανισώσεις παρουσιάζονται μέσα από τον προφορικό κυρίως λόγο. Οι ανισώσεις συσχετίζονται με την ανάπτυξη του λογισμού των συναρτήσεων, όπως είναι για παράδειγμα τα προβλήματα μεγιστοποίησης ελαχιστοποίησης (Παπακωστόπουλος Σ. , 2010). Η λύση μιας ανίσωσης συνήθως προέκυπτε μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης που πρακτικά υποκαθιστούσε την ανίσωση. Παρόλο που σήμερα ο αυτόνομος ρόλος των ανισώσεων είναι εκπαιδευτικά αναγνωρισμένος, στην πρακτική της τάξης υφίσταται ακόμα μια λειτουργική εξάρτηση (Bagni, 2005). Λόγου χάρη, το σύνολο λύσεων μιας ανίσωσης προσδιορίζεται ως ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που είναι συνήθως απειροσύνολο, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα ή μια ημιευθεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτού του υποσυνόλου, είναι συνήθως τα «οριακά του σημεία», για παράδειγμα τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και αυτά τα σημεία είναι που μπορούν να προσδιοριστούν λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει με αντικατάσταση του συμβόλου της ανισότητας με το σύμβολο της ισότητας στη δοσμένη ανίσωση. Κάποιες φορές αυτό είναι και το μόνο βήμα που επιτελείται προκειμένου να επιλυθεί μια αλγεβρική ανίσωση (Παπακωστόπουλος Σ. , 2010).

Στα Μαθηματικά η έννοια της ανίσωσης αναφέρεται στην ανισότητα που συνδέει γνωστές ποσότητες με άγνωστες, τις οποίες και θέλουμε να προσδιορίσουμε. Για τις ανισώσεις ισχύουν κάποιες ιδιότητες που ισχύουν και στις εξισώσεις (Gallistel & Gelman, 1992). Πιο συγκεκριμένα: Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό προκύπτει ανίσωση με την ίδια φορά. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με θετικό αριθμό επίσης προκύπτει ανίσωση με την ίδια φορά. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό προκύπτει ανίσωση με αντίθετη φορά. Υπενθυμίζεται πως οι ανισώσεις πρώτου βαθμού έχουν τη μορφή $\alpha x+\beta>0$και $\alpha x+\beta<0$.

Η διδασκαλία των ανισώσεων λαμβάνει χώρα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο μάθημα της άλγεβρας. Στο πλαίσιο της αριθμητικής, οι μαθητές διδάσκονται ανισοτικές σχέσεις της μορφής $\alpha<\beta$, με α,β πραγματικούς αριθμούς με μοναδικό σκοπό την σύγκριση αριθμών. Στη Β' και Γ' Γυμνασίου στο μάθημα της άλγεβρας οι μαθητές διδάσκονται την επίλυση ανισώσεων μιας μεταβλητής πρώτου βαθμού. Το ζητούμενο για την λύση της ανίσωσης $\alpha x<\beta$ είναι οι πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x: Αν $\alpha \neq 0$ τότε η ανίσωση έχει ως λύση το σύνολο των πραγματικών αριθμών με άκρα τον αριθμό β/α και το $+\infty$ ή το $-\infty$ ανάλογα με την φορά της ανισότητας. Αν $\alpha=0$ και $\beta \neq 0$ τότε προκύπτει ότι $0x<\beta$ η οποία αν $\beta>0$ επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό ενώ αν $\beta<0$ δεν υπάρχουν λύσεις για την ανίσωση. Τέλος, αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ τότε η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως αδύνατη και δεν επαληθεύεται από κάποιον πραγματικό αριθμό.

Οι «αριθμητικές» εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής είναι αυτές όπου η μεταβλητή παρουσιάζεται μόνο στο ένα μέλος της ισότητας ή της ανισοτικής σχέσης αντίστοιχα. Από την άλλη, «αλγεβρικές» είναι οι εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής στις οποίες η μεταβλητή παρουσιάζεται και στα δύο μέλη της ισότητας ή της ανισοτικής σχέσης αντίστοιχα (Filloy & Rojano, 1989). «Αλγεβρικές» θεωρούνται οι εξισώσεις και οι ανισώσεις που έχουν μεταβλητή στο ένα μέλος και τουλάχιστον δύο κλασματικούς αριθμούς με διαφορετικούς μεταξύ τους παρανομαστείς.

Οι αλγεβρικοί τρόποι επίλυσης ενδείκνυνται για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων με μεταβλητή και στα δύο μέλη της ισότητας ή με συντελεστές ρητούς αριθμούς, ωθώντας τους μαθητές να μην στηρίζονται μόνο στη διαίσθησή τους, αλλά και να αντιμετωπίζουν την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο και όχι ως μια διαδικασία εκτέλεσης πράξεων (Αραμπατζής, 2010).

Πράγματι, ο μαθητής κατά την εισαγωγή του στη άλγεβρα θα αντιμετωπίσει κάποια εμπόδια τα οποία οι Tall & Thomas (1991) χαρακτήρισαν ως εννοιολογικές δυσκολίες. Αυτές οι δυσκολίες σχετίζονται με την πολυπλοκότητα των αλγεβρικών αντικειμένων, διαδικασίες σκέψης, διαδικασίες διδασκαλίας, δυσκολίες σχετικά με τις διαδικασίες ανάπτυξης των μαθητών και τέλος, δυσκολίες που σχετίζονται με τις στάσεις και τα συναισθήματα των μαθητών απέναντι στην άλγεβρα (Blanco & Garrote, 2007).

Η σχέση μεταξύ λάθους και παρανόησης γράφθηκε από την Perso (1991) ως :«τα λάθη δεν είναι απλώς αποτυχίες των μαθητών, αλλά συμπτώματα του συνόλου των ιδεών που βρίσκονται κάτω από τις μαθηματικές ενέργειες των μαθητών».

Είναι κοινή παραδοχή πως οι μαθητές δέχονται πολλές πληροφοριών στα σχολεία, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν αδυναμίες ως προς την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων με αποτέλεσμα αρκετά συχνά να δυσκολεύονται στην σωστή επίλυση των μαθηματικών ασκήσεων. Οι δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν σχετίζονται κυρίως με την άλγεβρα και συγκεκριμένα στην έννοια της μεταβλητής. Μια πρώτη παρερμηνεία των μαθητών είναι ότι αντιμετωπίζουν τα γράμματα των μεταβλητών ως ετικέτες για κάποια αντικείμενα ή ονόματα, ή ακόμα και να θεωρήσουν ότι τα γράμματα αντιστοιχούν σε αριθμούς, πιστεύοντας ότι αφορούν μόνο έναν συγκεκριμένο αριθμό. Ένα άλλο πρόβλημα που δυσχεραίνει τα παιδιά όταν καλούνται να λύσουν αλγεβρικές παραστάσεις αφορά το ότι έχουν μάθει στην αριθμητική να συνδέουν και να ενώνουν αριθμούς κι αυτό να αφορά ουσιαστικά την πρόσθεση ενώ στην άλγεβρα όταν συνδέεται ένα γράμμα - μεταβλητή με έναν αριθμό, πρόκειται για ένα είδος πολλαπλασιασμού (Μάρκου, 2020)

Ο Usiskin (1988) υποστηρίζει ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται επειδή θεωρούν ότι οι μεταβλητές είναι γράμματα που αντιστοιχούν μόνο σε αριθμούς, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να ξεχωρίσουν περιπτώσεις όπου η μεταβλητή δεν αντιπροσωπεύει αριθμητική τιμή και αφορά κάποια έννοια ή κάποια συγκεκριμένη ορολογία. Παρόμοιες αναφορές σχετικά με τις παρερμηνείες που γίνονται με τις μεταβλητές εμφανίζονται και στη μελέτη του Switzer (2017). Ο Fujii (2003) υποστήριξε ότι οι μαθητές των μεσαίων τάξεων κι όχι μόνο, συχνά πιστεύουν ότι τα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν και σε διαφορετικούς αριθμούς. Τέλος, μια δυσκολία σύμφωνα με τον Booth (1984) είναι το ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δεν μπορεί να δεχτεί πως το τελικό αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής παράστασης γίνεται να περιέχει γράμματα. Ήταν δύσκολο δηλαδή να συλλάβουν ως ιδέα το ότι μια σειρά πράξεων ολοκληρώνεται, ενώ δεν έχει βρεθεί ουσιαστικά ένα τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα και αυτό ήταν που τους οδήγησε στο να χαρακτηρίσουν τη δυσκολία αυτή ως «αποδοχή μη περάτωσης».

Συνηθισμένα λάθη μαθητών κατά την επίλυση ανισώσεων έχουν καταγραφεί από τους Blanco και Garrote (2007), Tsamir, Almog και Tirosh (1998), Parish (1992) και Sackur (2004) και αφορούν στο πέρασμα από την καθημερινή γλώσσα στην αλγεβρική γλώσσα με όρους ανισοτήτων, στη χρήση και το νόημα που οι μαθητές αποδίδουν στα γράμματα και τις αλγεβρικές εκφράσεις, στο ότι οι μαθητές περιορίζονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, στην κατανόηση της έννοιας του διαστήματος, στην κατανόηση των συμβόλων «μεγαλύτερο από» και «μικρότερο από», στην ερμηνεία του αποτελέσματος μιας ανίσωσης. Σημαντική είναι άλλωστε και η πεποίθηση που δημιουργείται στους μαθητές σύμφωνα με τους Tsamir και Bazzini (2004), Tsamir και Almog (1999) ότι η επίλυση των ανισώσεων δίνει ως αποτέλεσμα ανισώσεις. Βέβαια, αυτό επιφέρει οι διδασκόμενοι να δυσκολεύονται να δεχθούν ότι ένας αριθμός μπορεί να αποτελεί τη μοναδική λύση μιας ανίσωσης, όπως επίσης να αποδεχθούν ως σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή ότι δεν υπάρχουν λύσεις.

Για να κατανοήσουμε τα λάθη και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση αλγεβρικών ανισώσεων αρμόζει να γίνουν ορατά τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν γενικά στην άλγεβρα.

2.2 Δυσκολίες των μαθητών στις ανισώσεις

Οι περισσότερες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση των εξισώσεων και όχι τόσο των ανισώσεων. Σημαντική είναι η έρευνα των Bazzini & Tsamir (2002a) σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης ανισώσεων από τα παιδιά δίνοντας βάση στη διάκριση μεταξύ τυπικής, διαισθητικής και αλγοριθμικής γνώσης. Η τυπική γνώση είναι βασισμένη στον προτασιακό λογισμό και συσχετίζει με αυστηρότητα και συνέπεια τα μαθηματικά αντικείμενα σε μια παραγωγικού τύπου κατασκευή. Η διαισθητική γνώση είναι ένα είδος αντίληψης, η οποία γίνεται άμεσα αποδεκτή ως προφανής, δίνοντας την εντύπωση ότι καμία αιτιολόγηση δεν απαιτείται (Παπακωστόπουλος & Ζαχάρος, 2010). Η αλγοριθμική γνώση είναι η ικανότητα να χρησιμοποιεί κανείς θεωρητικά αιτιολογημένες διαδικασίες. Ο ισχυρισμός του Fischbein (1993), αφορά τη σύγκρουση ανάμεσα στην παραγωγική, τυπική φύση των μαθηματικών και στην ανθρώπινη τάση να ικανοποιείται με εμπειρικές ενδείξεις. Για την αντιμετώπισή του δημιουργούμε διαισθητικά μοντέλα των εννοιών και των τυπικών λειτουργιών, τα οποία αντικαθιστούν έννοιες και λειτουργίες στην διαδικασία του συλλογισμού και τα οποία αποκαλούνται αλγοριθμικά μοντέλα (Fischbein&Barash, 1993). Αυτά τα μοντέλα γίνονται αντιληπτά όταν οι διαισθητικές ιδέες των μαθητών κατευθύνουν τον τυπικό συλλογισμό και τη χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών.

Η έρευνα των Bazzini & Tsamir (2002b) κατέληξε στο ότι οι μαθητές διαισθητικά χρησιμοποιούν την επίλυση των εξισώσεων για να επιλύσουν ανισώσεις. Η επίλυση γίνεται μέσω ενός αλγοριθμικού μοντέλου εξίσωσης, το οποίο εκφράζεται κυρίως ως «το να κάνω την ίδια πράξη, με τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη, είναι έγκυρο για κάθε πράξη και για κάθε αριθμό» (Tsamir & Bazzini, 2002b). Αυτή αποτελεί μια λανθασμένη γενίκευση του μοντέλου της ζυγαριάς (balance model).

Συγκεκριμένα στην αντιμετώπιση ανισοτικών σχέσεων και την επίλυση ανισώσεων, τα πιο συνηθισμένα λάθη μαθητών, όπως καταγράφονται στη βιβλιογραφία συνοψίζονται στα εξής σημεία (Blanco & Garrote, 2007):

- Στο πέρασμα από την καθημερινή γλώσσα στην αλγεβρική γλώσσα με όρους ανισοτήτων.
- Στη χρήση και το νόημα που οι μαθητές αποδίδουν στα γράμματα και τις αλγεβρικές εκφράσεις.
- Οι μαθητές δεν παίρνουν ως σύνολο αναφοράς στις πράξεις τους το σύνολο των πραγματικών, αλλά περιορίζονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Στο χειρισμό εκφράσεων που περιέχουν σχέσεις διάταξης πραγματικών αριθμών.
- Στην κατανόηση της έννοιας του διαστήματος.
- Στην κατανόηση των συμβόλων «μεγαλύτερο από» και «μικρότερο από».
- Στην ερμηνεία του αποτελέσματος μιας ανίσωσης.
- Στα λειτουργικά λάθη (στη χρήση παρενθέσεων, στα σύμβολα «<», «>», «-», «$\leq$», «$\geq$», στην επιμεριστική ιδιότητα, στις πράξεις μεταξύ ακεραίων, στο πέρασμα από μια ανισότητα σε άλλη ισοδύναμή της).
- Δεν αποδίδουν σημασιολογικό περιεχόμενο στις ανισώσεις. Δεν κάνουν καμιά εννοιολογική διάκριση μεταξύ εξισώσεων και ανισώσεων.
- Στη σύνδεση μεταξύ της οπτικής-γεωμετρικής και αλγεβρικής γλώσσας. (Παπακωστόπουλος & Ζαχάρος, 2010).

Τέλος, σημαντική είναι η πεποίθηση που δημιουργείται στους μαθητές ότι η επίλυση ανισώσεων δίνει ως αποτέλεσμα ανισώσεις (Tsamir & Bazzini, 2004). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να δεχθούν ότι ένας αριθμός μπορεί να αποτελεί την μοναδική λύση μιας ανίσωσης, όπως επίσης να αποδεχθούν ως σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή το κενό σύνολο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΈΡΕΥΝΑΣ

3.1 Η έρευνα και η σημασία της

Αρκετές έρευνες έχουν γίνει σχετικά με τα λάθη και τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές γύρω από την άλγεβρα. Σχετική έρευνα έχει γίνει για τη διερεύνηση των γνώσεων των μαθητών Β', Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου που σχετίζονται με ανισότητες και ανισώσεις α' βαθμού με ένα άγνωστο.

Οι μαθητές συχνά, δεν κατανοούν τη διαφορά εξίσωσης και ανίσωσης, θεωρώντας ως τη μόνη μεταξύ τους διάκριση, το διαφορετικό σύμβολο που συνδέει τα δύο μέλη της εξίσωσης ή της ανίσωσης αντίστοιχα. Η σύγχυση μεταξύ εξισώσεων και ανισώσεων που παρατηρείται στο σημείο αυτό, αναδεικνύει τη λειτουργική εξάρτηση (Bagni, 2005) των ανισώσεων από τις εξισώσεις, γεγονός που ενδεχομένως οφείλεται στις κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές. Η απουσία νοήματος φαίνεται να είναι το κατεξοχήν χαρακτηριστικό της ενασχόλησης των μαθητών με τις ανισοτικές σχέσεις και τις ανισώσεις. Μεγάλες δυσκολίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν στη μετάφραση από την καθημερινή γλώσσα στην μαθηματική συμβολική γραφή και αντιστρόφως, με αιχμή τις ερωτήσεις που σχετίζονταν με την διατύπωση διπλών ανισοτήτων και που συνιστούν στοιχείο μη ισοδυναμίας (non congruence) μεταξύ των πρωτοκόλλων λεκτικής έκφρασης και συμβολικής γραφής, κυρίως κατά την κατεύθυνση της μετατροπής από το πρώτο στο δεύτερο (Duval, 2000).

Η έρευνα αυτή έχει ως στόχο να ερευνήσει μέσα από το πρίσμα των δυσκολιών και των λαθών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές Λυκείου στις μεταβλητές και στη δομή των αριθμών, αν ερμηνεύουν κάποια από τα λάθη που γίνονται στις ανισώσεις.

3.2 Ο σκοπός της έρευνας

Η έρευνα αυτή αποσκοπεί στην κατανόηση των δυσκολιών και των λαθών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές Λυκείου στην επίλυση των αλγεβρικών ανισώσεων. Η έρευνα μελετά, πιο συγκεκριμένα, την κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών, την αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής με εστίαση στις τιμές που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές και τη διαχείριση των μαθηματικών πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών, την κατανόηση της έννοιας μιας ανίσωσης και η ερμηνεία των λύσεων της και τέλος, στον ελεύθερο τρόπο σκέψης των μαθητών.

3.3 Η ερευνητική υπόθεση της έρευνας

Η υπόθεση της έρευνας στόχο έχει να μελετήσει τις παρανοήσεις που σχηματίζονται όσον αφορά α) την πυκνή δομή των αριθμών και β) οι μεταβλητές που παίρνουν αριθμητικές τιμές γιατί οδηγούν τους μαθητές σε λάθη κατά την επίλυση ανισώσεων και επίσης σε λάθη στην ερμηνεία των λύσεων τους.

3.4 Ερευνητικά ερωτήματα

1. Πως επιδρά η κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών αριθμών στην κατανόηση των ανισώσεων;
2. Πως επιδρούν οι αντιλήψεις των μαθητών για τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές στην κατανόηση των ανισώσεων;
3. Ποια λάθη στις ανισώσεις ερμηνεύονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΈΡΕΥΝΑΣ

4.1 Το δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 57 μαθητές δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (Πίνακας 1) και συγκεκριμένα από 25 κορίτσια (43,9%) και 32 αγόρια (56,1%). Από το σύνολο των 57 ατόμων οι 33 ήταν μαθητές της Α΄ Λυκείου (57,9%) και οι υπόλοιποι 24 της Β΄ τάξης Λυκείου (42,1%) (Πίνακας 2).

Φύλλο	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
Αγόρι	32	56,1%
Κορίτσι	25	43,9%
Σύνολο	57	100%

Πίνακας 1: Συμμετέχοντες ανά φύλλο

Τάξη	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
Α΄ Λυκείου	33	57,9%
Β΄ Λυκείου	24	42,1%
Σύνολο	57	100%

Πίνακας 2: Συμμετέχοντες ανά τάξη φοίτησης

Όλοι οι συμμετέχοντες είναι μόνιμοι κάτοικοι του νομού Λάρισας και συμμετείχαν στην έρευνα εθελοντικά. Η δε επιλογή τους βασίστηκε στο γεγονός πως είχαν ήδη έρθει σε επαφή με τις έννοιες της μεταβλητής, της πυκνότητας των αριθμών και της ανίσωσης όπως όριζε η διδακτέα ύλη μαθηματικών σε προηγούμενες τάξεις.

4.2 Ερευνητικό εργαλείο

Εργαλείο της έρευνας αποτέλεσε ένα ερωτηματολόγιο 16 ερωτήσεων, το οποίο δόθηκε στους συμμετέχοντες προς συμπλήρωση. Από τις συνολικά 16 ερωτήσεις, οι οκτώ είναι κλειστού τύπου και οι υπόλοιπες οκτώ ανοιχτού. Όλες οι ερωτήσεις κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες. Σκοπός των ερωτήσεων κλειστού τύπου ήταν η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών (πρώτη κατηγορία), η αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής με εστίαση στις τιμές που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές και η διαχείριση μαθηματικών πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών (δεύτερη κατηγορία), και η κατανόηση της έννοιας μιας ανίσωσης και η ερμηνεία των λύσεων της (τρίτη κατηγορία). Συγκεκριμένα, σε κάποια ερωτήματα ζητήθηκε από τους μαθητές να δηλώσουν εάν συμφωνούν ή διαφωνούν με την αντίστοιχη δήλωση που τους δόθηκε και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν την επιλογή τους, ενώ σε άλλα ζητήθηκε να απαντήσουν δίνοντας μαθηματική λύση.

Οι ερωτήσεις ανοιχτού τύπου αποσκοπούσαν στο να εκφράσουν οι μαθητές πιο ελεύθερα τον τρόπο σκέψης τους και έτσι ήταν επιδιωκόμενο να εξασφαλιστεί μεγαλύτερο ποσοστό ανόμοιων απαντήσεων από τους συμμετέχοντες. Επιπλέον, σε ορισμένες ερωτήσεις γινόταν προτροπή προς αποτύπωση της λύσης πάνω σε αριθμογραμμή ώστε να διευκολυνθούν οι μαθητές στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων μέσω της οπτικοποίησης. Όλες οι ερωτήσεις παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω μαζί με τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων. Να σημειωθεί πως τα ερωτήματα δόθηκαν με τυχαία σειρά και γι’ αυτό παρουσιάζονται παρακάτω με μη-συνεχιζόμενη αρίθμηση.

4.3 Παρουσίαση ερωτηματολογίου

Ερωτήσεις κατανόησης ρητών αριθμών

Σχετικά με την κατανόηση των ρητών αριθμών, δόθηκαν οι τέσσερις ερωτήσεις που φαίνονται στην Εικόνα 1 και αποτελούν την πρώτη κατηγορία. Με βάση αυτές εξετάστηκε η κατανόηση της πυκνότητας ανάμεσα σε φυσικούς, δεκαδικούς και άρρητους αριθμούς. Οι εναλλακτικές απαντήσεις αντανακλούν τρία βασικά επίπεδα κατανόησης της δομής των ρητών: α) Μια λανθασμένη κατανόηση κατά την οποία αποδίδεται στους ρητούς, η ιδιότητα της διακριτότητας των φυσικών αριθμών, β) ένα επίπεδο ενδιάμεσο ως προς την λανθασμένη και ορθή κατανόηση των ρητών που χαρακτηρίζεται από μια εκλεπτυσμένη διακριτότητα, γ) η ορθή κατανόηση της πυκνότητας των ρητών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

11. Ποιοι ακέραιοι (ολόκληροι) αριθμοί επαληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq 2$;

12. Στην προηγούμενη σχέση, εκτός από τους ακέραιους αριθμούς που βρήκες, υπάρχουν και άλλοι αριθμοί που επαληθεύουν τη σχέση; Αν ναι, θα μπορούσατε να δείξετε τους αριθμούς αυτούς πάνω στην αριθμογραμμή;

15. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 99 και 100; Αν ναι, μπορείτε να τους γράψετε όλους;

16. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 3,123 και 3,126; Αν ναι, μπορείτε να τους γράψετε όλους;

Εικόνα 1: Ερωτήσεις για την κατανόηση των ρητών

Οι ερωτήσεις Ερ.11 και Ερ.12 προέρχονται από την διατριβή της Μπαλωμένου (2017) και αποσκοπούν στην εξέταση της δυνατότητας των συμμετεχόντων να προσδιορίσουν το πλήθος λύσεων μιας ανίσωσης και να τις απεικονίσουν σε αριθμογραμμή. Εν ολίγοις, οι ερωτήσεις 11 και 12 συνδέονται, μιας και απευθύνουν το ίδιο ερώτημα διαφοροποιώντας τα σύνολα απαντήσεων που ζητούνται. Με αυτόν τον τρόπο, οι απαντήσεις αναδεικνύουν την αντίληψη των μαθητών σχετικά με τη διάκριση ακεραίων από ρητούς αριθμούς. Οι ερωτήσεις Ερ.15 και Ερ.16 προέρχονται από την έρευνα των (Vamvakoussi, Christou, & Van Dooren, 2010) και τέθηκαν με σκοπό να εξετασθεί η κατανόηση των συμμετεχόντων για την πυκνότητα ανάμεσα σε ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς.

Ερωτήσεις κατανόησης μεταβλητής

Η αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής, όπως επίσης η διαχείριση πράξεων μεταξύ αριθμών και μεταβλητών εξετάζονται μέσω των εφτά ερωτήσεων που φαίνονται στην Εικόνα 2 και αποτελούν τη δεύτερη κατηγορία ερωτήσεων.

1. Υπάρχουν τιμές που μπορεί να πάρει το α ώστε να είναι μικρότερο από το –α ;

4.Τι τιμές πιστεύετε ότι παίρνει το 3x; Γράψτε όσες περισσότερες και διαφορετικές τιμές θα μπορούσε να πάρει η τιμή 3x.

Μπορείτε να τις αναπαραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή αυτές τις τιμές;

5. Τι τιμές πιστεύετε ότι παίρνει το -4x; Γράψτε όσες περισσότερες και διαφορετικές τιμές θα μπορούσε να πάρει η τιμή -4x.

Μπορείτε να τις αναπαραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή αυτές τις τιμές;

6. Ισχύει για κάθε α πραγματικό αριθμό εκτός από το 0, ότι $7\alpha < \frac{6}{\alpha}$.

10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

13. Το x^2 είναι πάντα μεγαλύτερο από το x.

14. Ποιες τιμές πιστεύετε ότι παίρνουν οι μεταβλητές στις παρακάτω περιπτώσεις; Γράψτε όσο πιο πολλές και διαφορετικές μπορείτε. ($\alpha, -\beta, 4\kappa$, α/β, $\beta + \beta + \beta$, κ+3) .

Εικόνα 2: Ερωτήσεις για την κατανόηση της μεταβλητής

Οι ερωτήσεις Ερ.1, Ερ.4, Ερ.5 και Ερ.10 δημιουργήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας και τέθηκαν με σκοπό να εξεταστεί η δυνατότητα των συμμετεχόντων να διαχειρίζονται πρόσημα και μεταβλητές, ενώ στις περιπτώσεις των Ερ.4 και Ερ.5 ζητήθηκε επιπλέον η αποτύπωση των λύσεων σε αριθμογραμμή.

Για τις ερωτήσεις Ερ.4 και Ερ.5 αξίζει εδώ να αναφερθεί πως οι συμβολισμοί 3x και -4x, αντίστοιχα, είναι ουσιαστικά μεταβλητές οι οποίες πολλαπλασιάζονται με έναν συντελεστή, οπότε αφού δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε αρνητική ή θετική τιμή, ακόμα και 0. Συνεπώς οι απαντήσεις των μαθητών θα αποτελούσαν σημαντική ένδειξη για το κατά πόσο είναι εξοικειωμένοι με τα πρόσημα που προηγούνται μιας μεταβλητής. Επίσης, οι απαντήσεις τους θα έδειχναν αν προκαταβάλλονται από το πρόσημο. Αναφορικά με τις ερωτήσεις Ερ.6 και Ερ.13, αμφότερες αποσκοπούσαν στην εξέταση και στην αποτύπωση της δυσκολίας που φαίνεται να έχουν οι μαθητές στο να διαχειρίζονται τις ανισοτικές σχέσεις με μεταβλητές, παρότι έχουν μάθει να συγκρίνουν σωστά τους αριθμούς ήδη από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Τέλος, η Ερ.14 προέρχεται από την έρευνα του (Christou&Vosniadou, 2012) και στόχευε στην διερεύνηση της δυνατότητας των συμμετεχόντων να βρίσκουν τις διαφορετικές τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές καθώς και οι πράξεις μεταξύ αυτών.

Ερωτήσεις κατανόησης ανισώσεων

Η κατανόηση της έννοιας μιας ανίσωσης και η ερμηνεία του αποτελέσματός της εξετάσθηκαν μέσω των παρακάτω πέντε ερωτήσεων που φαίνονται στην Εικόνα 3 και αποτελούν την τρίτη κατηγορία.

2. Υπάρχουν τιμές του x που να ικανοποιούν την ανισοτική σχέση $x > 3 \ \textit{και} \ x < 4$;

3. Πώς θα μπορούσατε να παραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις; α) $x \leq 0$ και β) $x^2 \leq 0$

7. Ισχύει για κάθε α πραγματικό αριθμό εκτός από το 0, ότι $\alpha \cdot x < 5 \Rightarrow x < 5/\alpha$.

8. Η ανίσωση $5x^4 \leq 0$ έχει ως μοναδική λύση το $x = 0$.

9. Η ανισότητα $14 > x$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $x > 14$;

Εικόνα 3: Ερωτήσεις για την κατανόηση της ανίσωσης

Η Ερ.2 τέθηκε με σκοπό θα διερευνηθεί το κατά πόσο δυσκολεύονται να διαχειριστούν τις λύσεις μιας ανίσωσης ως διάστημα.

Η Ερ.3 προέρχεται από την έρευνα της Μπαλωμένου (2017) και τέθηκε στοχεύοντας στη διερεύνηση της δυνατότητας των μαθητών να αναπαραστήσουν επί μιας αριθμογραμμής τις λύσεις για μια ανίσωση που περιέχει μεταβλητή. Μέσω των απαντήσεων μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για το κατά πόσο ο μαθηματικός συλλογισμός των συμμετεχόντων αναπτύσσεται σε αλγεβρικό ή περιορίζεται σε αριθμητικό, ανάλογα με το αν μπορούν να διαχειριστούν ανισωτικές σχέσεις με μεταβλητές ή όχι.

Οι ερωτήσεις Ερ.7, Ερ.8 καιΕρ.9 προέρχονται από την έρευνα των Tsamir και Bazzini(2004). Η Ερ.7 τέθηκε με σκοπό να διαπιστωθεί το κατά πόσο οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία κατά την επίλυση μιας παραμετρικής ανίσωσης (Tsamir & Bazzini, 2004), όπως επίσης και το αν είναι σε θέση να εφαρμόζουν την ιδιότητα αντιστροφής της ανίσωσης όταν γίνεται πολλαπλασιασμός και των δύο μελών με αρνητικό πρόσημο.

Η Ερ.8 τέθηκε με σκοπό να διερευνηθεί η επίδραση που έχει η προϋπάρχουσα γνώση ως προς τον τρόπο επίλυσης μια ανίσωσης με την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Επίσης, από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων θα διερευνηθεί και τυχόν παρανόηση του άρτιου εκθέτη στις ανισώσεις, δηλαδή αν θα αποδεχτούν την λύση $x = 0$ ή αν θα θεωρήσουν πως μπορεί να είναι μόνο θετικός αριθμός.

Τέλος, η Ερ.9 αποσκοπούσε στο να ελεγχθεί η κατανόηση του συμβόλου της ανίσωσης από τους συμμετέχοντες, μιας και κλήθηκαν να κρίνουν το αν είναι ισοδύναμες δύο εντελώς διαφορετικές ανισώσεις.

4.4 Η ερευνητική διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε

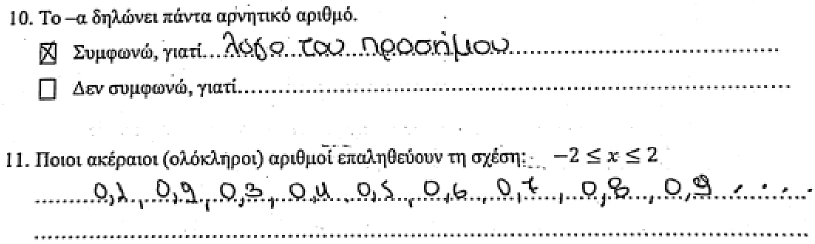
Τα ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας, παρουσία του διδάσκοντα και της ερευνήτριας. Πραγματοποιήθηκαν μόνο διευκρινιστικές ερωτήσεις, οι οποίες και απαντήθηκαν. Στην διάθεση τους οι μαθητές είχαν μια ολόκληρη διδακτική ώρα διάρκειας 45 λεπτών. Η διαδικασία για την συλλογή των δεδομένων ήταν ίδια κατά τη διάρκεια όλης της έρευνας.

4.5 Ανάλυση ερωτηματολογίου

Η βαθμολόγηση των απαντήσεων που έδωσαν οι συμμετέχοντες για κάθε ερώτηση βασίστηκε στην κατάταξή τους σε πέντε κατηγορίες με την εξής κωδικοποίηση: Δεν έλαβαν απάντηση (0), Λάθος (1), Λιγότερο Εκλεπτυσμένες (2), Περισσότερο

Εκλεπτυσμένες (3) και Σωστές (4). Να επισημανθεί εδώ πως οι 5 κατηγορίες των απαντήσεων δεν πρέπει να συγχέονται με τις 3 εξεταζόμενες κατηγορίες ερωτήσεων που αναλύθηκαν παραπάνω ερωτήσεις κατανόησης ρητών (πρώτη κατηγορία ερωτήσεων), ερωτήσεις κατανόησης μεταβλητής (δεύτερη) και ερωτήσεις κατανόησης ανισώσεων (τρίτη). Αναλυτικότερα, οι κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

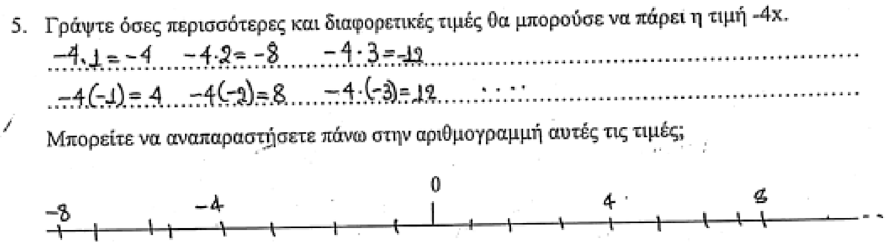
- Στην κατηγορία των «Λάθος» απαντήσεων συμπεριλήφθηκαν εκείνες όπου οι συμμετέχοντες απάντησαν λάθος στο αντίστοιχο ερώτημα. Κάθε λανθασμένη απάντηση αποτελεί ένδειξη πως ο μαθητής δεν έχει κατανοήσει επαρκώς το αντικείμενο της αντίστοιχης κατηγορίας ερωτήσεων, ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.


10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.
☒ Συμφωνώ, γιατί... λόγο του προσήμου
☐ Δεν συμφωνώ, γιατί...

11. Ποιοι ακέραιοι (ολόκληροι) αριθμοί επαληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq 2$
0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9 ...

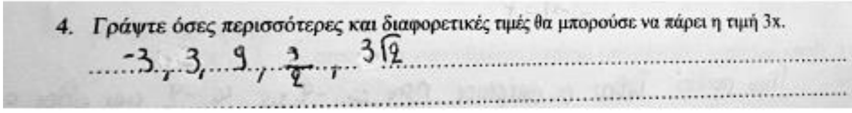
Εικόνα 4: Παράδειγμα απάντησης μαθητή

- Οι «Λιγότερο Εκλεπτυσμένες» μπορεί να υστερούν σε τεκμηρίωση αλλά να περιέχουν το σωστό αποτέλεσμα, ενώ τυχόν ζητούμενη απεικόνιση των λύσεων σε αριθμογραμμή μπορεί να απουσιάζει ή να είναι λάθος για αυτόν τον λόγο δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ούτε λανθασμένες ούτε σωστές, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.


5. Γράψτε όσες περισσότερες και διαφορετικές τιμές θα μπορούσε να πάρει η τιμή -4x.
$-4\cdot1=-4$ $-4\cdot2=-8$ $-4\cdot3=-12$
$-4(-1)=4$ $-4(-2)=8$ $-4\cdot(-3)=12$ ...
Μπορείτε να αναπαραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή αυτές τις τιμές;

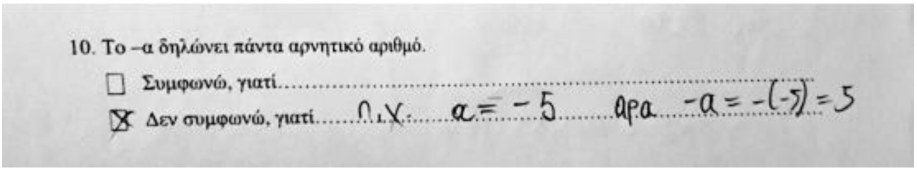
Εικόνα 5: Παράδειγμα απάντησης μαθητή

- «Περισσότερο Εκλεπτυσμένες» απαντήσεις μπορούν να είναι όσες περιέχουν το σωστό αποτέλεσμα και μια τεκμηρίωση, η οποία όμως να μην ακολουθεί την πλήρη και σωστή στρατηγική επίλυσης που διδάχθηκε ο μαθητής. Επίσης, τυχόν απεικονίσεις λύσεων σε αριθμογραμμές ενδεχομένως να είναι εν μέρει σωστές ή να περιέχεται σε αυτές. Τα παραπάνω απεικονίζονται στην Εικόνα 6.



Εικόνα 6: Παράδειγμα απάντησης μαθητή

- Στην κατηγορία των «Σωστών» απαντήσεων συμπεριλήφθηκαν εκείνες όπου οι μαθητές απάντησαν σωστά στο αντίστοιχο ερώτημα, αιτιολογώντας επαρκώς την απάντησή τους όπου αυτό απαιτούνταν και εφαρμόζοντας τις ενδεδειγμένες στρατηγικές επίλυσης που διδάχθηκαν σε μικρότερες τάξεις. Επομένως, κάθε σωστή απάντηση αποτελεί ένδειξη πως ο μαθητής έχει κατανοήσει επαρκώς το αντικείμενο της αντίστοιχης κατηγορίας ερωτήσεων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 7.



Εικόνα 7: Παράδειγμα απάντησης μαθητή

4.6 Αξιοπιστία δεδομένων ερωτηματολογίου

Ο έλεγχος αξιοπιστίας Cronbach'salpha (Cronbach, 1951)μετράει την εσωτερική συνέπεια μιας ερώτησης. Τιμές του δείκτη μεγαλύτερες του 0,7 συνήθως θεωρούνται ικανοποιητικές. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι ο δείκτης alpha έχει δεχθεί αυστηρή κριτική, διότι η εφαρμογή του έχει αυστηρές προϋποθέσεις, οι οποίες, στην πράξη, δύσκολα τηρούνται ή αξιολογούνται. Ο έλεγχος του ερωτηματολογίου της παρούσας μελέτης έδειξε ότι, ο δείκτης είναι 0,9164 , δηλαδή έχουμε πολύ αξιόπιστα δεδομένα, κάτι που μας εξασφαλίζει ακρίβεια στην ανάλυση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχετικές και απόλυτες συχνότητες των απαντήσεων που αντιστοιχούν στην κάθε κατηγορία ερωτήσεων ξεχωριστά. Στην ανάλυση που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών από τις δύο τάξεις μαζί, γιατί, όπως θα φανεί παρακάτω, η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπήρχαν σημαντικές διαφοροποιήσεις ανά τάξη, κι έτσι επιλέχθηκε η ανάλυση να γίνει για το ενοποιημένο δείγμα, ώστε να ενισχυθεί η εγκυρότητα των στατιστικών κριτηρίων που θα χρησιμοποιηθούν.

5.1 Ανάλυση των απαντήσεων του ερωτηματολογίου

Απαντήσεις για την κατανόηση των ρητών αριθμών

Στον Πίνακα 3, παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των ερωτήσεων πάνω στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3, οι Ερ.15και Ερ.16, απαντήθηκαν σωστά με ποσοστά 64,9% και 66,7% αντίστοιχα, γράφοντας ότι ανάμεσα στους αριθμούς 99 και 100 υπάρχουν άπειροι αριθμοί, η ίδια απάντηση δόθηκε και για τους αριθμούς που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 3.123 και 3.126. Παρά το υψηλό ποσοστό επιτυχίας παρατηρήθηκε ότι περίπου μια στις τρεις απαντήσεις ήταν λανθασμένη, ποσοστό αποτυχίας που θα μπορούσε να θεωρηθεί μεγάλο αν σκεφτεί κανείς ότι πρόκειται για μαθητές Α’ και Β’ Λυκείου.
Το ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων στην Ερ.11(βλ. Πίνακας 3) ήταν 38,6% κάτι που αναδεικνύει την δυσκολία στην εύρεση συγκεκριμένου παραδείγματος αριθμών μεταξύ δύο ακεραίων.
Στην Ερ.12 (βλ. Πίνακας 3) που συνδέεται με την Ερ.11, παρατηρούμε ότι το ποσοστό σωστών απαντήσεων αυξάνει σε 42,1%. Μία εξήγηση αυτής της αύξησης των σωστών απαντήσεων είναι η εξοικείωση των μαθητών με την αριθμογραμμή. Παρ ’όλα αυτά, περίπου δύο στις τρείς απαντήσεις ήταν λανθασμένες, οι οποίες οφείλονται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Έργο	Δεν απάντησε (0)	Λάθος (1)	Λιγότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (2)	Περισσότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (3)	Σωστό (4)
	N(%)	**N(%)**	**N(%)**	**N(%)**	**N(%)**
Ερ.11(Ακέραιοι που επαληθεύουν τη: -	11(19,3)	5(8,8)	10(17,5)	9(15,8)	22(38,6)
Ερ.12(Λύσεις της 2≤x≤2;)πάνω στην αριθμογραμμή)	12(21,1)	14(24,6)	1(1,8)	6(10,5)	24(42,1)
Ερ.15(αριθμοί ανάμεσα σε 99 και 100)	-	-	17(29,8)	3(5,3)	37(64,9)
Ερ.16(αριθμοί ανάμεσα στους3,123 και 3,126)	-	-	17(29,8)	2(3,5)	38(66,7)
Σύνολο	23(10,0)	19(8,3)	45(19,8)	20(8,8)	121(53,1)

Πίνακας 3: Σχετικές συχνότητες ερωτήσεων κατανόησης των ρητών αριθμών

Απαντήσεις για την κατανόηση της μεταβλητής

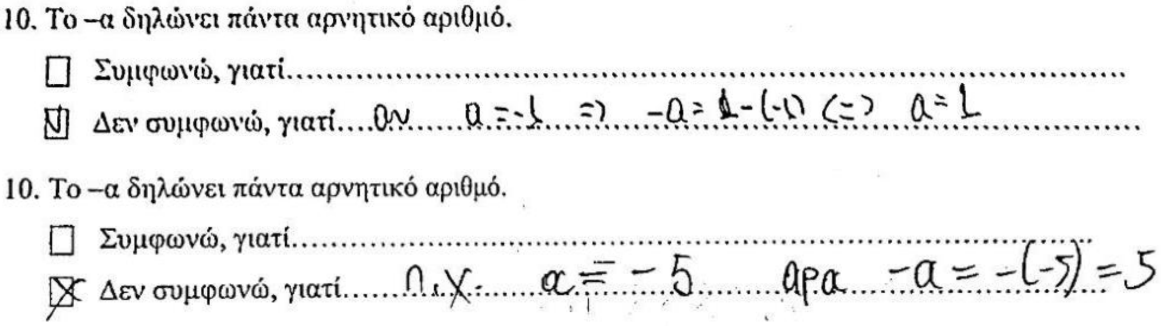
Στον Πίνακα 4, παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες και τα ποσοστά των ερωτήσεων πάνω στην κατανόηση της μεταβλητής. Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 4, στην Ερ.4 και στην Ερ.5 σωστά απαντήθηκαν περίπου οι μισές ερωτήσεις μιας και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 54,4%και 52,6%, αντίστοιχα.

Όσον αφορά τις υπόλοιπες απαντήσεις, αυτές κατηγοριοποιήθηκαν ως λιγότερο ή περισσότερο εκλεπτυσμένες, ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών. Συγκεκριμένα, οι απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές έλαβαν ως δεδομένο ότι το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μόνο φυσικός αριθμός συμπεριλήφθηκαν στην κατηγορία «Λιγότερο εκλεπτυσμένες». Ενώ οι απαντήσεις που περιείχαν τουλάχιστον δύο υποσύνολα αριθμών, π.χ. ακέραιους και ρητούς, εντάχθηκαν στην κατηγορία «Περισσότερο εκλεπτυσμένες», η κατηγοριοποίηση αυτή γίνεται λόγω του ότι, από την ποιότητα των απαντήσεων τους μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι μαθητές αυτοί παρουσιάζουν λιγότερη προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Από τα αποτελέσματα στις ερωτήσεις Ερ.4 και Ερ.5 συμπεραίνουμε ότι η παρουσία αρνητικού πρόσημου στην Ερ.5 δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά τις απαντήσεις.

Έργο	**Δεν απάντησε (0)** N(%)	**Λάθος (1)** N(%)	**Λιγότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (2)** N(%)	**Περισσότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (3)** N(%)	**Σωστό (4)** N(%)
Ερ.1(Τιμές του α ώστε να είναι μικρότερο από το –α;)	1(1,8)	21(36,8)	1(1,8)	-	34(59,6)
Ερ.4(Τιμές του 3x)	5(8,8)	3(5,3)	10(17,5)	8(14,0)	31(54,4)
Ερ.5(Τιμές-4x)	6(10,5)	4(7,0)	8(14,0)	9(15,8)	30(52,6)
Ερ.6(Ισχύει πάντα ότι 7α<6/α)	1(1,8)	20(35,1)	-	-	36(63,2)
Ερ.10(Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό)	1(1,8)	17(29,8)	-	-	39(68,4)
Ερ.13(Το x^2 είναι πάντα μεγαλύτερο από το x)	2(3,5)	25(43,9)	1(1,8)	3(5,3)	26(45,6)
Ερ.14α(Τιμές μπορεί που να πάρει το α)	8(14,0)	1(1,8)	7(12,3)	5(8,8)	36(63,2)
Ερ.14β(Τιμές που μπορεί να πάρει το -β)	8(14,0)	-	7(12,3)	4(7,0)	38(66,7)
Ερ.14γ(Τιμές που μπορεί να πάρει το 4κ)	8(14,0)	-	7(12,3)	4(7,0)	38(66,7)
Ερ.14δ(Τιμές που μπορεί να πάρει το α/β)	8(14,0)	-	7(12,3)	4(7,0)	38(66,7)
Ερ.14ε(Τιμές που μπορεί να πάρει το β+β+β)	8(14,0)	-	7(12,3)	4(7,0)	38(66,7)
Ερ.14στ(Τιμές που μπορεί να πάρει το κ+3)	8(14,0)	-	7(12,3)	4(7,0)	38(66,7)
Σύνολο	64(9,4)	91(13,3)	62(9,0)	45(6,6)	422(61,7)

Πίνακας 4: Σχετικές συχνότητες και ποσοστά επίδοσης στις ερωτήσεων κατανόησης της μεταβλητής.

Στην Ερ.10(βλ. Εικόνα 8) σε ποσοστό 68,4% οι μαθητές διαφώνησαν τεκμηριώνοντας την απάντησή τους. Ωστόσο, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων δεν ήταν το αναμενόμενο από μαθητές Α’ και Β’ Λυκείου και αυτό γιατί μπορούμε να συμπεράνουμε πως παρόλο που οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν ότι το αρνητικό πρόσημο μπροστά από μια μεταβλητή δεν συνεπάγεται πάντα αρνητικό αριθμό, με χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό που παρουσιάζεται στην Εικόνα 8, υπήρχε ένα ποσοστό 31,6% που δεν το απάντησε.


10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

☐ Συμφωνώ, γιατί……

☒ Δεν συμφωνώ, γιατί…ον $a=-1 \Rightarrow -a=1-(-1) \Leftrightarrow a=1$

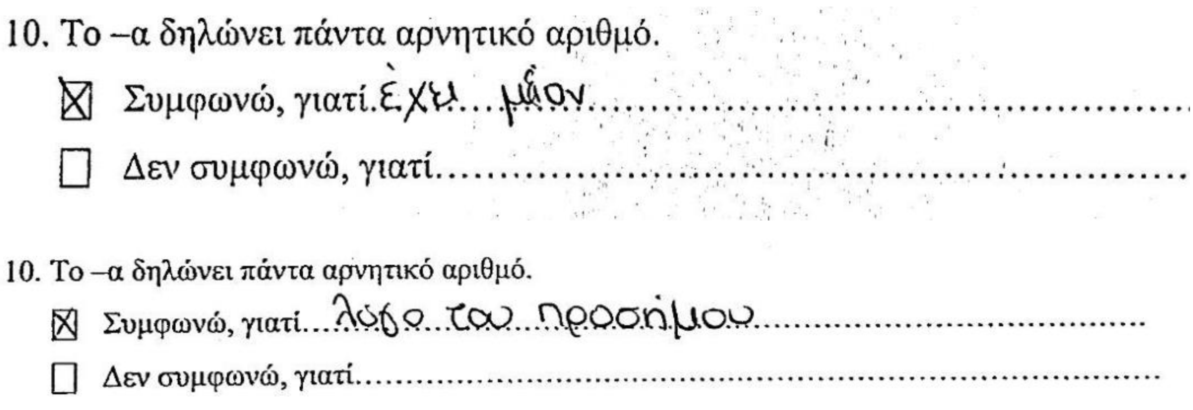
10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

☐ Συμφωνώ, γιατί……

☒ Δεν συμφωνώ, γιατί……π.χ. $a=-5$ άρα $-a=-(-5)=5$

Εικόνα 8: Παράδειγμα σωστών απαντήσεων μαθητών στην ερώτηση 10

Το πλήθος των μαθητών που εντάχθηκαν στην κατηγορία με τις λάθος απαντήσεις ήταν αυτοί που θεωρούσαν ότι το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό λόγω του πρόσημου (βλ. Εικόνα 9).


10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

☒ Συμφωνώ, γιατί.έχει…μείον……

☐ Δεν συμφωνώ, γιατί……

10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

☒ Συμφωνώ, γιατί…λόγο του προσήμου……

☐ Δεν συμφωνώ, γιατί……

Εικόνα 9: Παράδειγμα λανθασμένων απαντήσεων μαθητών στην ερώτηση 10

Για τα υποερωτήματα της Ερ.14(βλ Πίνακας 4) τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές σε ποσοστό 66,7% πιστεύουν ότι η μεταβλητή «α» μπορεί να πάρει άπειρες τιμές, όπως και οι άλλες μεταβλητές, στις υπόλοιπες παραστάσεις. Συγκεκριμένα, για την κάθε μεταβλητή απάντησαν ότι παίρνει άπειρες τιμές χωρίς να τις προσδιορίζουν. Ακόμη, παρατηρείται ότι περίπου το 20% των μαθητών αντικαθιστά με φυσικούς αριθμούς τις μεταβλητές των παραστάσεων ενώ πολύ σπανιότερα χρησιμοποιεί κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς.

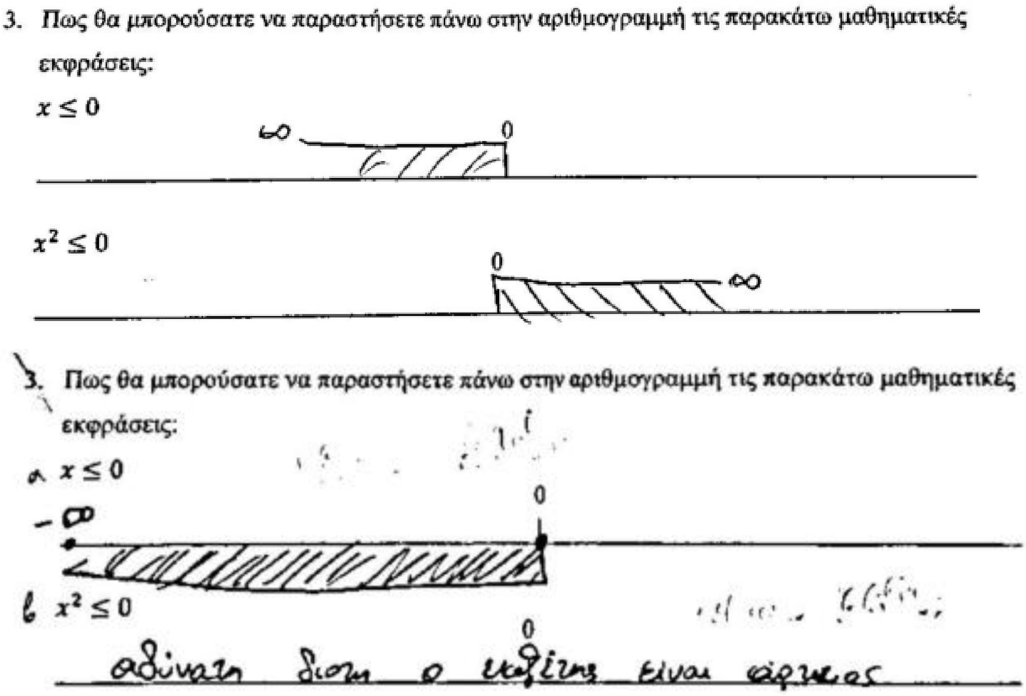
Απαντήσεις κατανόησης της ανίσωσης

Το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων προήλθε από τις ερωτήσεις Ερ.3α (βλ. Πίνακας 5), ενώ η ερώτηση που παρουσίασε το υψηλότερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων είναι η Ερ.3β στις απαντήσεις της οποίας, οι μαθητές δεν κατάφεραν να απεικονίσουν σωστά την μαθηματική έκφραση «$x^2 \leq 0$» που τους ζητήθηκε.

Έργο	**Δεν απάντησε (0)** **N(%)**	**Λάθος (1)** **N(%)**	**Λιγότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (2)** **N(%)**	**Περισσότερο εκλεπτυσμένη απάντηση (3)** **N(%)**	**Σωστό (4)** **N(%)**
Ερ.2(Τιμές του x που να ικανοποιούν x>3 και x< 4;)	1(1,8)	22(38,6)	1(1,8)	1(1,8)	32(56,1)
Ερ.3α(Παραστήσατεστην αριθμογραμμή την x≤ 0)	7(12,3)	6(10,5)	-	2(3,5)	42(73,7)
Ερ.3β(Παραστήσατεστην αριθμογραμμή την x^2≤ 0)	10(17,5)	30(52,6)	-	-	17(29,8)
Ερ.7(Ισχύει για κάθε α πραγματικό αριθμό εκτός από το 0, ότια·x< 5 =>x< 5/α)	3(5,3)	26(45,6)	1(1,8)	1(1,8)	26(45,6)
Ερ.8(Η ανίσωση $5x^4$≤ 0 έχει ως μοναδική λύση το x=0)	3(5,3)	18(31,6)	1(1,8)	-	35(61,4)
Ερ.9(Η ανισότητα 14 >x είναι ισοδύναμη με την ανισότητα x>14;)	1(1,8)	8(14,0)	1(1,8)	-	47(82,5)
Σύνολο	25(7,2)	110(32,2)	4(1,2)	4(1,2)	199(58,2)

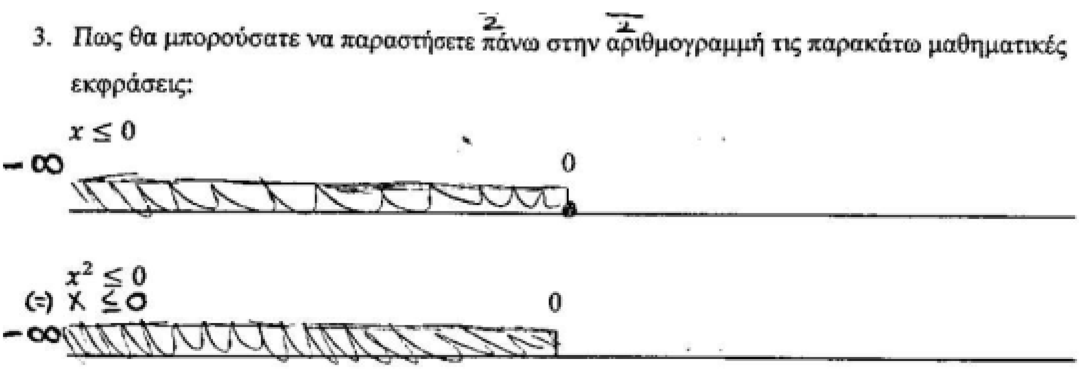
Πίνακας 5: Σχετικές συχνότητες ερωτήσεων κατανόησης ανίσωσης

Στο υποερώτημα α της Ερ.3(βλ. Πίνακας 3),το 73,7% των συμμετεχόντων απάντησαν σωστά, απεικονίζοντας την μαθηματική έκφραση εύστοχα. Στο υποερώτημα Ερ. 3β το 52,6% των συμμετεχόντων δεν κατάφεραν να απεικονίσουν σωστά την έκφραση που τους ζητήθηκε. Συγκεκριμένα, κάποιοι μαθητές απάντησαν σωστά στο υποερώτημα Ερ. 3α ενώ, απάντησαν λανθασμένα στο υποερώτημα Ερ. 3β (βλ. Εικόνα 10).Μόνο το 29,8% ανταποκρίθηκε σωστά σε αυτή την ερώτηση βρίσκοντας ως μοναδική λύση της ανίσωσης το μηδέν. Για παράδειγμα, για την έκφραση «$x^2 \leq 0$» ένας μαθητής δήλωσε «είναι αδύνατη η αναπαράσταση, διότι ο εκθέτης είναι άρτιος (βλ. Εικόνα 10).



Εικόνα 10 : Παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στην ερώτηση 3α και 3β

Αντίθετα ένας σημαντικός αριθμός συμμετεχόντων ισχυρίστηκε ότι το σύνολο των λύσεων είναι όλοι οι αρνητικοί αριθμοί (βλ. Εικόνα 11). Επιπλέον, κάποιοι μαθητές, με αφορμή τον άρτιο εκθέτη, έκαναν την αναπαράσταση στον θετικό ημιάξονα αγνοώντας το σύμβολο της ανίσωσης ή θεώρησαν ότι η έκφραση «$x \leq 0$» είναι ισοδύναμη με την έκφραση «$x^2 \leq 0$».



Εικόνα 11: Παράδειγμα απάντησης μαθητή στην ερώτηση 3α και 3β

Στην Ερ.9(βλ. Πίνακας 5), σε ποσοστό 82,5% οι συμμετέχοντες απάντησαν σωστά χρησιμοποιώντας ορθά το σύμβολο της ανίσωσης. Ενώ σε ποσοστό 14% οι συμμετέχοντες απάντησαν λανθασμένα κάτι που ενδεχομένως οφείλεται στην αδυναμία τους να διακρίνουν τη διαφορά στα σύμβολα «<» και «>». Επιπλέον, δεν δόθηκε κάποια εξήγηση για την απάντησή τους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η Ερ.7(βλ. Πίνακας 5), καθότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων (45,6%) είναι ίδιο με το πλήθος των λανθασμένων (45,6%).

5.2 Στατιστική Ανάλυση δεδομένων έρευνας

Στην ανάλυση που ακολουθεί, χρησιμοποιήθηκε Ανάλυση διακύμανσης για να γίνει έλεγχος υποθέσεων.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται δημιουργήθηκαν από υποσύνολα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου τα οποία περιγράφουν την συνολική επίδοση ως προς την κατανόηση των ρητών, την κατανόηση των μεταβλητών και την κατανόηση των ανισώσεων.

Η Ανάλυση διακύμανσης έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά όσον αφορά την κατανόηση των ανισώσεων από τους μαθητές Α’ και Β’ Λυκείου (F=0,107, p=0,744). Επίσης, συμπεραίνουμε (βλ. Πίνακας 8, Παράρτημα) ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των μαθητών Α’ και Β’ Λυκείου όσον αφορά την κατανόηση των ρητών (F=0,169 , p=0,683). Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούνται και όσον αφορά την κατανόηση των μεταβλητών, καθώς οι μαθητές Α’ και Β’ Λυκείου δεν διαφοροποιήθηκαν ως προς τους μέσους όρους επίδοσης (F=0,001, p=0,980).

Τα διασταυρωμένα αποτελέσματα της κατανόησης των ανισώσεων και της κατανόησης των μεταβλητών παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα στο Παράρτημα (βλ. Πίνακας 9). Από την ανάλυση διακύμανσης, με εξαρτημένη μεταβλητή την Κατανόηση Ανισώσεων και παράγοντα την κατανόηση Ρητών, βλέπουμε ότι η κατανόηση των ρητών αποτελεί παράγοντα που επιδρά με στατιστικά σημαντικό τρόπο στην κατανόηση των ανισώσεων (F=6,52, p=0.00). Επίσης, από την ανάλυση διακύμανσης με εξαρτημένη μεταβλητή την Κατανόηση Ανισώσεων και παράγοντα την κατανόηση Μεταβλητών βλέπουμε ότι η κατανόηση των μεταβλητών αποτελούν παράγοντα που επιδρά με στατιστικά σημαντικό τρόπο στην κατανόηση των ανισώσεων(F=3,33, p=0.001).

Μέσα από την ανάλυση συσχέτισης μελετήθηκαν οι συσχετίσεις ανάμεσα στις μεταβλητές: κατανόηση ρητών, κατανόηση μεταβλητών και κατανόηση ανισώσεων με στους συντελεστές Pearson και Spearman. Παρότι αναλύονται οι δύο τρόποι (Πίνακας 6 & Πίνακας 7), προτιμάται η ανάλυση συσχέτισης με τον συντελεστή Spearman λόγω του ότι ο συντελεστής Pearson αφορά μόνο γραμμικές σχέσεις. Τα αποτελέσματα των συσχετίσεων παρατίθενται στον Πίνακα 6, όπου φαίνεται ότι η υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβλητές της κατανόησης ανισώσεων και της κατανόησης μεταβλητών,(r_s=0,689). Επίσης, υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβλητές της κατανόησης ανισώσεων και της κατανόησης των ρητών,(r_s=0,635).

		Correlations		
		Κατανόηση Ρητών	**Κατανόηση Μεταβλητών**	**Κατανόηση Ανισώσεων**
Κατανόηση Ρητών	Pearson Correlation	1		
Κατανόηση Μεταβλητών	Pearson Correlation	0.636**	1	
Κατανόηση Ανισώσεων	Pearson Correlation	0.635**	0.689**	1

Πίνακας 6 Ανάλυση συσχετίσεων μεταβλητών έρευνας(Pearson)

Από τον πίνακα 7, όπου περιέχονται οι συσχετίσεις Spearman, βεβαιώνεται η παραδοχή ότι η κατανόηση ανισώσεων σχετίζεται υψηλότερα από την κατανόηση μεταβλητών (r=0,6972) όπως και με την κατανόηση των ρητών (r=0,6123) γιατί η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών σπάνια μπορεί να περιγράφει από μια γραμμική σχέση.

		Correlations		
		Κατανόηση Ρητών	**Κατανόηση Μεταβλητών**	**Κατανόηση Ανισώσεων**
Κατανόηση Ρητών	Spearman Correlation	1		
Κατανόηση Μεταβλητών	Spearman Correlation	0.6123***	1	
Κατανόηση Ανισώσεων	Spearman Correlation	0.6554***	0.6972***	1

Πίνακας 7 Ανάλυση συσχετίσεων (Spearman)

Σκοπός της ανάλυσης παλινδρόμησης είναι να ελέγξει κατά πόσον η διακύμανση των τιμών της μεταβλητής που αφορά την κατανόηση των ανισώσεων, μπορεί να ερμηνευτεί από τις δυο άλλες μεταβλητές και ερμηνεύσει την κατά μέσο όρο συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής από τις ανεξάρτητες και οποιαδήποτε απόκλιση να οφείλεται στον τυχαίο όρο. Η παλινδρόμηση έρχεται να συμπληρώσει το κενό που αναφέραμε παραπάνω στο συντελεστή συσχέτισης. Δηλαδή μπορεί να εξετάζει την ταυτόχρονη επίδραση πολλών μεταβλητών στην εξαρτημένη μεταβλητή (Αγιακλόγλου & Μπένος, 2014).

Στον πίνακα 10 (Παράρτημα) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση παλινδρόμησης και συγκεκριμένα, εξειδικεύονται τρία υποδείγματα. Από αυτά θα εστιάσουμε στο υπόδειγμα 3, το οποίο επιλέγουμε γιατί παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή. Από αυτό προκύπτει ότι τόσο η μεταβλητή κατανόηση των ρητών (p=0.00,β_1=0.314631,*Τ.Σ.*=0.11378) όσο και η κατανόηση των μεταβλητών (p=0.001, β_2=0.45301, *Τ.Σ.*=0.1131)επηρεάζουν με στατιστικά σημαντικό τρόπο την κατανόηση των ανισώσεων και φαίνεται πως η κατανόηση των μεταβλητών επηρεάζει περισσότερο την κατανόηση ανισώσεων σε σχέση με την κατανόηση των ρητών σύμφωνα με τους εκτιμητές. Ο σταθερός όρος (β_0=0.45672, *Τ.Σ.*=0.29564) δείχνει την κατά μέσο όρο συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής όταν οι μεταβλητές γίνουν 0. Αυτό σημαίνει ότι οσυντελεστής προσδιορισμού R^2δείχνει το ποσοστό της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής που ερμηνεύεται από τις ανεξάρτητες. Επομένως, οι ανεξάρτητες μεταβλητές που είναι η κατανόηση των ρητών και η κατανόηση των μεταβλητών ερμηνεύουν το 54% της διακύμανσης της μεταβλητής κατανόηση ανισώσεων. Συνεπώς, θέτοντας ως κριτήριο καλύτερης εξειδίκευσης τον συντελεστή προσδιορισμού, το υπόδειγμα 3, έχει την καλύτερη προσαρμογή από τα άλλα 2 υποδείγματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 10 του παραρτήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ –ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορα μαθηματικά θέματα όπως η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, ο γραμμικός προγραμματισμός και ο λογισμός. Όλοι οι μαθητές των τάξεων θα πρέπει να μάθουν να εκπροσωπούν καταστάσεις που περιλαμβάνουν εξισώσεις και ανισώσεις, και να κατανοήσουν την έννοια των ισοδύναμων μορφών εκφράσεων, εξισώσεων και ανισώσεων. Η εφαρμογή αυτών είναι ζωτικής σημασίας για την ανάλυση του τρόπου σκέψης των μαθητών σχετικά με τις ανισώσεις (Luciana Bazzini, 2004).

Με βάση τη μελέτη που έγινε και τη σχετική βιβλιογραφία διαπιστώνουμε ότι παρόλο που υπήρχε ένα μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων, υπήρχαν και οι μαθητές που για διαφόρους λόγους απάντησαν λάθος σε κάποιες ερωτήσεις.

Συγκεκριμένα στις ερωτήσεις που έγιναν για την κατανόηση των ρητών αριθμών ένα μεγάλο ποσοστό απάντησε σωστά ότι ανάμεσα στους αριθμούς 99 και 100 υπάρχουν άπειροι αριθμοί, καθώς και ότι το ίδιο συμβαίνει ανάμεσα στους αριθμούς 3.123 και 3.126. Παρατηρήθηκε όμως, ότι μια στις τρεις απαντήσεις ήταν λανθασμένη, ποσοστό αποτυχίας που θα μπορούσε να θεωρηθεί μεγάλο αν σκεφτεί κανείς ότι πρόκειται για μαθητές Α' και Β' Λυκείου. Αυτό εξηγείται από τη βιβλιογραφία και συγκεκριμένα από την έρευνα της Vamvakoussi & Vosniadou (2012) που διαπιστώνουν ότι οι μαθητές δεν κατανοούν την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Επίσης το ποσοστό 38,6% δηλώνει την δυσκολία στην εύρεση συγκεκριμένου παραδείγματος αριθμών μεταξύ δύο ακεραίων και αυτό συμβαίνει διότι θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν κλάσματα και το αντίστροφο και αυτό μπορεί να συμβαίνει ακόμα και όταν θεωρούν ότι υπάρχουν άπειρα πολλοί ενδιάμεσοι αριθμοί (Vamvakoussi, 2010).

Στις ερωτήσεις που αφορούσαν την κατανόηση της μεταβλητής διαπιστώθηκε ότι περίπου οι μισοί απάντησαν σωστά ενώ το πλήθος των μαθητών που εντάχθηκαν στην κατηγορία με τις λάθος απαντήσεις ήταν κυρίως αυτοί που θεωρούσαν ότι το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό λόγω του πρόσημου. Ακόμη, παρατηρείται ότι περίπου το 20% των μαθητών αντικαθιστά με φυσικούς αριθμούς τις μεταβλητές των παραστάσεων ενώ πολύ σπανιότερα χρησιμοποιεί κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς.

Οι ερωτήσεις που αφορούσαν στην κατανόηση των ανισώσεων έδειξαν ότι αρκετοί μαθητές δυσκολεύονταν στην σωστή απεικόνιση της έκφρασης που τους ζητήθηκε και ένας σημαντικός αριθμός συμμετεχόντων ισχυρίστηκε ότι το σύνολο των λύσεων είναι όλοι οι αρνητικοί αριθμοί. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές, με αφορμή τον άρτιο εκθέτη, έκαναν την αναπαράσταση στον θετικό ημιάξονα αγνοώντας το σύμβολο της ανίσωσης ή θεώρησαν ότι η έκφραση «$x \leq 0$» είναι ισοδύναμη με την έκφραση «$x^2 \leq 0$».Ένα μικρό ποσοστό επίσης απάντησε λανθασμένα κάτι που ενδεχομένως οφείλεται στην αδυναμία τους να διακρίνουν τη διαφορά στα σύμβολα «$<$» και «$>$». Αυτό εντάσσεται στα λειτουργικά λάθη όπως τα παρουσίασαν οι Παπακωστόπουλος & Ζαχάρος (2010).

Με βάση τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι αρκετοί μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν την πυκνότητα των ρητών αριθμών, τη έννοια της μεταβλητής καθώς και τον τρόπο επίλυσης των ανισώσεων. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες που μπορεί να αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας, την προσοχή που δίνει ο μαθητής καθώς και την κλίση που μπορεί να έχει κάποιος μαθητής. Για να μπορέσουν να αποτραπούν αυτές οι δυσκολίες πρέπει να γίνουν προσπάθειες και από την πλευρά των μαθητών αλλά και τον καθηγητών ώστε τυχόν απορίες και δυσερμηνείες να εξηγούνται χωρίς να δημιουργούνται επιπρόσθετες.

Τέλος, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να βρουν τον τρόπο με τον οποίο η κατανόηση των ρητών, της μεταβλητής και των ανισώσεων να γίνει ξεκάθαρη από τους μαθητές. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί δίνοντας στους μαθητές επιπλέον υλικό για μελέτη ώστε να εξασκηθούν και να αφομοιώσουν καλύτερα αυτές τις έννοιες. Επίσης μιας και το διαδίκτυο αποτελεί καθημερινή ασχολία, ιδιαίτερα για τα παιδιά αυτής της ηλικίας, θα μπορούσαν να ψάξουν πληροφορίες και να φέρουν στην τάξη υλικό σχετικό με το μάθημα.

6.1 Περιορισμοί της Έρευνας

Αρχικά το θέμα της έρευνας είναι περιοριστικό γιατί δεν υπάρχουν πολλές έρευνες γύρω από τις ανισώσεις. Επίσης, τα αποτελέσματα της μελέτης είναι περιοριστικά διότι το δείγμα αν και ικανοποιητικό δεν είναι αντιπροσωπευτικό λόγω του μεγέθους του και έτσι δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε γενικεύσεις.

Τέλος, οι περιορισμοί που αφορούσαν το ερευνητικό εργαλείο ήταν ο μικρός αριθμός των πράξεων που κλήθηκαν να εκτελέσουν οι μαθητές, καθώς και η έλλειψη ρεαλιστικού πλαισίου σχετικά με τις πράξεις που πραγματοποίησαν οι μαθητές.

6.2 Προτάσεις για περεταίρω έρευνα

Οι ανισώσεις δεν έχουν διερευνηθεί όπως οι εξισώσεις και αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρων κομμάτι μελέτης μιας και όλες οι έρευνες που γίνονται σχετικά με αυτές είναι πρωτοποριακές

Η παρούσα έρευνα ανοίγει πολλούς δρόμους για μελλοντικές έρευνες μιας και θα μπορούσε να γενικευτεί σε ένα μεγαλύτερο δείγμα που θα αφορούσε μαθητές της Ά και Β΄ λυκείου όλων των σχολείων της Ελλάδας αλλά και μικρότερες έρευνες που θα αφορούσε μαθητές ενός νομού ή μιας περιφέρειας. Ακόμη θα μπορούσαν να γίνουν συγκρίσεις των λαθών και των δυσκολιών στην επίλυση των ανισώσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές των ελληνικών σχολείων με τους αντίστοιχους μαθητές των σχολείων μιας Ευρωπαϊκής χώρας.

6.3 Εκπαιδευτικές εφαρμογές

Κάθε φορά που οι μαθητές εισάγονται σε νέες μαθηματικές γνώσεις, υπάρχει η ανάγκη αυτό να γίνεται στα πλαίσια μιας κατάλληλα διαμορφωμένης και συστηματοποιημένης διδασκαλίας. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουν τη δυνατότητα, αξιοποιώντας την ήδη υπάρχουσα γνώση τους να την εμπλουτίζουν και να την αναδιοργανώνουν στον βαθμό που μπορούν. Η επίτευξη αυτής της εννοιολογικής αλλαγής δεν είναι μια εύκολη διαδικασία και δεν έχει τις περισσότερες φορές τα επιθυμητά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα όπως έχει υποστηρίξει ο Χρήστου (2009), οι μαθητές συναντούν εμπόδια στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν ότι μια μεταβλητή μπορεί να αντικατασταθεί από έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό και όχι μόνο από φυσικούς αριθμούς. Γι’ αυτό είναι σημαντικό ένα σύνολο διδακτικών παρεμβάσεων οι οποίες θα έχουν ως βασικό στόχο να αντιμετωπίσουν σε βάθος τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών. Όπως φάνηκε και από τη συγκεκριμένη έρευνα, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Α΄ και Β΄ Λυκείου, εμφανίζει την τάση να απαντά λανθασμένα όταν καλείται να επιλέξει ή να απορρίψει τιμές για μια μεταβλητή ή για μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητή, δυσκολεύεται επίσης στην κατανόηση της πυκνότητας των αριθμών και τέλος στην σωστή απεικόνιση των εκφράσεων των ανισώσεων. Οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν δύο επιμέρους παρανοήσεις με την πρώτη να αφορά το φαινομενικό πρόσημο και τη δεύτερη να σχετίζεται με τη διατήρηση της ακεραιότητας της μεταβλητής. Οι παρανοήσεις αυτές προκύπτουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και αυτό είναι που καθιστά ξεκάθαρο ότι η πρώτη και κύρια διδακτική παρέμβαση θα πρέπει να εστιάσει στην αναδιοργάνωση του αρχικού εννοιολογικού πλαισίου των μαθητών για τον αριθμό, που είναι διαμορφωμένο βάσει του φυσικού αριθμού. Έτσι κρίνεται απαραίτητη, η αντικατάσταση των ασκήσεων αυτών στα σχολικά εγχειρίδια αλλά και στις καθημερινές ασκήσεις που ανατίθενται στους μαθητές, εμπλουτίζοντας τα με περισσότερα παραδείγματα. Με τον τρόπο αυτό, θα δημιουργηθεί τριβή των μαθητών αμβλύνοντας έτσι τυχόν παρανοήσεις. Σύμφωνα με τους Δημητρακοπούλου & Χρήστου (2018) τα σχολικά βιβλία αποτελούν βασικό συνδετικό κρίκο μεταξύ μαθητή και εκπαιδευτικού και ο ρόλος τους στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα είναι καθοριστικός. Για αυτό θα ήταν ιδιαίτερα βοηθητικό αν στα σχολικά εγχειρίδια η ανάλυση και η περιγραφή της μεταβλητής, όπως επίσης και των χρήσεων ή των τιμών που μπορεί αυτή να πάρει, ήταν πιο αναλυτικός και ξεκάθαρος από τις πρώτες κιόλας τάξεις. Επιπρόσθετα, επειδή οι περισσότεροι μαθηματικοί κανόνες και οι περισσότερες εργασίες που λύνουν οι μαθητές εμπεριέχουν και βασίζονται κατά κύριο λόγο σε φυσικούς, ακέραιους και θετικούς αριθμούς, θεωρώντας τους πιο προσιτούς και οικείους για τους μαθητές, κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή κάθε νέας γνώσης στα Μαθηματικά και σε άλλα είδη πραγματικών αριθμών. Πέρα από την παρακίνηση των μαθητών να εμπλακούν στην μαθησιακή διαδικασία, είναι σημαντικό οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να είναι ενήμεροι για τις παρανοήσεις που δημιουργούνται στους μαθητές όταν δίνουν τιμές σε μια μεταβλητή. Μόνο έτσι θα μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη τους και να την αντιμετωπίσουν στοχευμένα, προσαρμόζοντας κατάλληλα τη διδασκαλία τους και το υλικό τους. Μια τελευταία προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση η οποία θα διευκόλυνε την εξοικείωση των μαθητών με την άλγεβρα και την έννοια της μεταβλητής καθώς και με τους ρητούς αριθμούς και φυσικά με τις ανισώσεις , θα μπορούσε να γίνει μέσα από έναν πρόλογο κατά την εισαγωγή των μαθητών σε αυτές τις έννοιες. Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες έρευνες η εννοιολογική αλλαγή απαιτεί πολύ χρόνο και τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές χρειάζεται με τον τρόπο τους να προσπαθήσουν πολύ. Κάθε διδακτική παρέμβαση μπορεί να αποδειχθεί ωφέλιμη, ωστόσο πρέπει να αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης και συστηματικής διδακτικής στρατηγικής (Μάρκου, 2020).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ANOVA		
Τάξη	**F**	**P-value**
Κατανόηση Ανισώσεων	0,107	0,744
Κατανόηση Ρητών	0,169	0,683
Κατανόηση Μεταβλητών	0,001	0,980

Πίνακας 8 Ανάλυση διακύμανσης για την κατανόηση ανισώσεων, την κατανόηση των ρητών και την κατανόηση των μεταβλητών σε σχέση με την τάξη.

ANOVA		
Κατανόηση Ανισώσεων	**F**	**P-value**
Κατανόηση Ρητών	6,52	0,0000
Κατανόηση Μεταβλητών	3,33	0,0010

Πίνακας 9 Ανάλυση διακύμανσης για την κατανόηση ανισώσεων σε σχέση με την κατανόηση των ρητών και την κατανόηση των μεταβλητών

Παλινδρομήσεις			
	Υπόδειγμα 1	**Υπόδειγμα 2**	**Υπόδειγμα 3**
Μεταβλητές	**Εξαρτημένη μεταβλητή: Κατανόηση Ανισώσεων**		
Κατανόηση Ρητών		0.60439*** (0.0991)	0.314631*** (0.11378)
Κατανόηση Μεταβλητών	0.65187*** (0.0924)		0.45301* (0.1131)
Σταθερός όρος	0.76532* (0.2898)	0.97658** (0.29975)	0.45672 (0.29564)
Αριθμός Παρατηρήσεων	57	57	57
R^2	0.4749	0.4034	0.5400

*Σημείωση: τυπικά σφάλματα στις παρενθέσεις. Τα αστεράκια δηλώνουν το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας. * 10%, ** 5% και *** 1%.

Πίνακας 10 Ανάλυση Παλινδρόμησης

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Φύλο: Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐

Ημερομηνία Γέννησης: ……………………………………………………………………….

Τάξη: …………………………………………………… **Τμήμα:**…………………………….

Διαβάστε τις οδηγίες και απαντήστε προσεκτικά στις ερωτήσεις.
Στις ερωτήσεις Συμφωνώ/Διαφωνώ, επιλέξτε την απάντηση που θεωρείτε σωστή και δικαιολογήστε την. Αν θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και παραδείγματα.
Σας ευχαριστούμε για τη συμμετοχή σας!

1. Υπάρχουν τιμές που μπορεί να πάρει το α ώστε να είναι μικρότερο από το –α.

   ☐ Συμφωνώ, γιατί………………………………………………………………………………

   ☐ Διαφωνώ, γιατί………………………………………………………………………………

2. Υπάρχουν τιμές του x που να ικανοποιούν την ανισοτική σχέση: $\begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases}$

   ☐ Συμφωνώ, γιατί………………………………………………………………………………

   ☐ Διαφωνώ, γιατί ………………………………………………………………………………

   Αν απαντήσατε ότι συμφωνείται, θα μπορούσατε να παραστήσετε την λύση ή τις λύσεις στην αριθμογραμμή;

   0

3. Πως θα μπορούσατε να παραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

   $x \leq 0$

   0

   $x^2 \leq 0$

   0

4. Γράψτε όσες περισσότερες και διαφορετικές τιμές θα μπορούσε να πάρει η τιμή 3x.

   ………………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………………

   Μπορείτε να αναπαραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή αυτές τις τιμές;

   0

5. Γράψτε όσες περισσότερες και διαφορετικές τιμές θα μπορούσε να πάρει η τιμή -4x.

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   Μπορείτε να αναπαραστήσετε πάνω στην αριθμογραμμή αυτές τις τιμές;

   0

6. Ισχύει για κάθε α πραγματικό αριθμό εκτός από το 0, ότι $7\alpha < 6/\alpha$. (Πραγματικοί είναι όλοι οι αριθμοί που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά)

   ☐ Συμφωνώ, γιατί……………………………………………………………………………

   ☐ Διαφωνώ , γιατί………………………………………………………………………

7. Ισχύει για κάθε α πραγματικό αριθμό εκτός από το 0, ότι $\alpha \cdot x < 5 \Rightarrow x < 5/\alpha$.

   ☐ Συμφωνώ, γιατί……………………………………………………………………….

   ☐ Διαφωνώ, γιατί………………………………………………………………………

8. Η ανίσωση $5x^4 \leq 0$ έχει ως μοναδική λύση το $\chi = 0$

   ☐ Συμφωνώ, γιατί……………………………………………………………………….

   ☐ Διαφωνώ, γιατί………………………………………………………………………

9. Η ανισότητα $14 > x$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $x > 14$;

   ☐ Συμφωνώ, γιατί……………………………………………………………………….

   ☐ Διαφωνώ, γιατί………………………………………………………………………

10. Το –α δηλώνει πάντα αρνητικό αριθμό.

   ☐ Συμφωνώ, γιατί……………………………………………………………………….

   ☐ Διαφωνώ , γιατί………………………………………………………………………

11. Ποιοι ακέραιοι (ολόκληροι) αριθμοί επαληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq 2$

   …………………………………………………………………………………………………….

   …………………………………………………………………………………………………….

12. Στην προηγούμενη σχέση $-2 \leq x \leq 2$, εκτός από τους ακέραιους αριθμούς που βρήκες, υπάρχουν και άλλοι αριθμοί που επαληθεύουν τη σχέση;

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Αν ναι, θα μπορούσατε να δείξετε τους αριθμούς αυτούς πάνω στην αριθμογραμμή;

0

13. Το x^2 είναι πάντα μεγαλύτερο από το x.

☐ Συμφωνώ, γιατί…………………………………………………………………………….

☐ Διαφωνώ, γιατί…………………………………………………………………………

14. Ποιες τιμές πιστεύετε ότι παίρνουν οι μεταβλητές, στις εξής περιπτώσεις. Γράψτε όσο πιο πολλές και διαφορετικές μπορείτε.

α ……………………………………………………………………………………..

$-\beta$ ……………………………………………………………………………………

4κ ……………………………………………………………………………………..

$\frac{\alpha}{\beta}$ ……………………………………………………………………………………...

$\beta + \beta + \beta$ ……………………………………………………………………………..

$\kappa + 3$ ……………………………………………………………………………………..

15. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 99 και 100; Αν ναι, μπορείτε να τους γράψετε όλους;……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

16. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 3.123 και 3.126; Αν ναι, μπορείτε να τους γράψετε όλους;………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

A. Chakrabarti, A. H. (1997). On corrected summation of alternating series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, σσ. 565-582.

Alibali, M. W., & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction*, σσ. 56-61.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2001). From body motion to algebra through graphing. *In The future of the teaching and learning of algebra*, σσ. 33-40.

Bagni, G. (2005). Inequalities and equations: History and didactics. *In Proceedings of CERME*, σσ. 652-663.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002a). Connections between theory and research findings: the case of inequalities. *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria: ERME.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, σσ. 41-73.

Blanco, L., & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* , σσ. 221-229.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. Στο *In Perspectives on school algebra* (σσ. 99-119). Dordrecht: Springer.

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. .

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra*, σσ. 20-32.

Bruner, J. (1972). Relevance of education. London: Penquin.

Butterworth, D. S. (2007). Why a management procedure approach? Some positives and negatives . *ICES Journal of Marine Science*, σσ. 613-617.

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, σσ. 69-86.

Cane, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*.

Carpenter, T. P. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress.* National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, σσ. 87-115.

Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? (σσ. 1-130). PME CONFERENCE.

Cheung , P., Rubenson, M., & Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Counting procedures precede learning the logic of the natural numbers. *Cognitive Psychology*, σσ. 22-36.

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra . *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, σσ. 283-297.

Christou, K. P., & Vamvakoussi, X. (2021). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: the role of the type of numbers. *Mathematics Education Research Journal*, σσ. 1-17.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society.*

Christou, K., & Vamvakoussi, X. (2021, September 28). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: the role of the type of numbers. *Mathematics Education Research Journal*, σσ. 1-17.

Christou, K., & Vosniadou, S. (2012, January 9). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, σσ. 1-27.

Cramer. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. *Rational numbers: An integration of research*, σ. 327.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *psychometrika*, σσ. 297-334.

Curle, N. (1971). *Applied differential equations.* Van Nostrand Reinhold.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction* , σσ. 39-49.

Dogbey, J., & Kersaint, G. (2012). Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. *PME*, σσ. 1-16.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics,*, σσ. 19-25.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, σσ. 231-245.

Fischbein, E., & Barash, A. (1993). Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems. *In Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (σσ. 162-172).

Fujii, T. (2003). Probing Students Understanding Of Variables Through Cognitive Conflict: Is The Concept Of A Variable So Difficult For Students To Understand. *PME CONFERENCE.*

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, σσ. 43-74.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, σσ. 43-47.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of applied developmental psychology*, σσ. 27-37.

Hall, R. D. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of mathematics education journal* , σσ. 1-67.

Hart, K. M. (1981). Algebra. *Children's understanding of mathematics*, σσ. 88-101.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and instruction*, σσ. 341-374.

Herscovics , N., & Chalouh, L. (1985). Conflicting frames of reference in the learning of algebra. *Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, (σσ. 123-131).

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, σσ. 59-78.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its kin.* New York: Springer.

Kieran , C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Στο D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (σσ. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. *The ideas of algebra*, σσ. 91-96.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, σσ. 33-56.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. Στο *Second handbook of research on mathematics teaching and learning 2* (σσ. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra . Στο Owens, *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics* (σσ. 179-198). National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, σσ. 68-76.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, σσ. 68-76.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables . *Mathematics in school*, σσ. 23-26.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Στο *Approaches to algebra.* (σσ. 87-106). Dordrecht: Springer.

Lee, L., & Wheeler, D. (1987). Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification. *Mathematics Department*. Montreal: Concordia University.

Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects-the case of equations and inequalities. *THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.* (σσ. 317-324). PME CONFERENCE .

Lins, R. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of Semantic Fields. Στο *In Perspectives on school algebra* (σσ. 37-60). Dordrecht: Springer.

Lorenzo J. Blanco, M. G. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, σσ. 221-229.

Luciana Bazzini, P. T. (2004). Algebraic Equations and Inequalities: Issues for Research and Teaching. Research Forum. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, σσ. 137-139.

Lumenlearning.com. (n.d.). Ανάκτηση από https://courses.lumenlearning.com/boundless-algebra/chapter/variables-and-expressions/

Martzloff, J.-C. (2007). *A history of Chinese mathematics.* Berlin: Springer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Στο *Approaches to algebra* (σσ. 65-86). Dordrecht: Springer.

McNeil, N., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A., Asquith, P., Knuth, E., & Alibali, M. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, σ. 625.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. . *How students learn: Mathematics in the classroom*, σσ. 121-162.

Nathan , M. J., & Koellner, K. (2007). A framework for understanding and cultivating the transition from arithmetic to algebraic reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, σσ. 179-192.

Nesher , P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning . *Educational studies in mathematics*, σσ. 67-79.

Ni , Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, σσ. 27-52.

Ontario. (2013). *Paying attention to Algebraic Reasoning.* Queen's Printer for Ontario,.

Parish, C. R. (1992). Inequalities, absolute value, and logical connectives. *The Mathematics Teacher*, σσ. 756-757.

Perso, T. (1991). *Misconceptions in Algebra.* In Unpublished paper presented at the Fourteenth Annual Conference of ME.

Petitto, A. (1979). The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. *Journal of Children's mathematical Behavior* , σσ. 69-82.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher* , σσ. 557-561.

Puig , L. (2004, July). History of algebraic ideas and research on educational algebra. *ICME-10*, (σσ. 4-11). Copenhagen.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. *PME CONFERENCE*, σ. 1.

Sergei Abramovich, A. Z. (2019). Teaching Mathematics through Concept Motivation and Action Learning. *Research Article*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, σσ. 1-36.

Smith, C. L., Solomon, G. E., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, σσ. 101-140.

Switzer, M. J. (2017). What Conceptions have US Grade 4-6 Students' Generalized for Formal and Informal Common Representations of Unknown Addends? . *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, σσ. 125-147.

Thwaites, G. N. (1982). Why do children find algebra difficult. *Mathematics in school* , σσ. 16-17.

Tsamir , P., Almog, N., & Tirosh, D. (1998). Students' solutions of inequalities. *PME*, σσ. 129-136.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002b). Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. *In Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics.* Crete, Greece: ICTM.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value'inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, σσ. 793-812.

Tsamir, P., & Almog, N. (1999). No Answer" as a problematic response: The case of inequalities. *Proceedings of the Conference of the International Group for*, σ. 354.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. (σσ. 4-327). In PME CONFERENCE.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra*, σσ. K-12, 8, 19.

Vamvakoussi , X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, σσ. 265-282.

Vamvakoussi, X. (2010). The 'numbers are points on the line'analogy: Does it have an instructional value? *Use of Representations in Reasoning and Problem Solving*, σσ. 219-234.

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics. *ZDM Mathematics Education.*

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, σσ. 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, σσ. 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students’ understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction* , σσ. 181-209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the “rubber line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, σσ. 265-284.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Van Dooren, W. (2010). Greek and Flemish students’ understanding of the density of rational numbers: More similar, than different. *Proceedings of PME*, σσ. 249-256.

Van Dooren , W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, σσ. 1-4.

Vassiliou, A. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies.* Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International handbook of research on conceptual change*, σσ. 3-34.

Warren , E. (1998). Students’ understanding of the concept of variable. Australian: Catholic University.

Αγιακλόγλου, Χ., & Μπένος, Θ. (2014). *Αρχές Οικονομετρικής Ανάλυσης.* Αθήνα: Μπένου.

Αραμπατζής, Κ. (2010). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.* Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Αραμπάτζης, Κ. (2010). Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά: Το Πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα.

Βαμβακούση, Ξ. (2019). Μάθηση και διδασκαλία. . σσ. 1-8.

Δεληφωτάκη, Ζ. (2019). Νοερά Μαθηματικά στο Λύκειο, η περίπτωση επίλυσης των εξισώσεων. Φλώρινα, Ελλάδα.

Δημητριάδου , Ε. (2009). Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές. *ΕΝΕΔΙΜ*. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Δραμαλίδης, Α., & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. . *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών θεμάτων*, σσ. 100-114.

Ε. Δεμίρη, Α. Μ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α’ Γυμνασίου για την μεταβλητή. *Ε.Μ.Ε.* Θεσσαλονίκη.

Καραγεώργος, Α., Ντιντάκης, Ι., & Ράπτη, Ε. (2015). Εξισώσεις, Ανισώσεις και Συναρτήσεις.

Κυλάφης, Π. (2009). Ο ρόλος των patterns στην μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. . ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ',.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών 1*. Θεσσαλονίκη.

Μάρκου, Α. (2020). Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Έννοια της Μεταβλητής στην Άλγεβρα.

Μπαλωμένου, Α. (2017). Οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών σε υπολογιστικά περιβάλλοντα πολλαπλών αναπαραστάσεων: η περίπτωση της ανισότητας. Πανεπιστήμιο Πατρών. Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών. Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία.

Παπακωστόπουλος, Σ. (2010). Η συνεισφορά της διδασκαλίας μέσω επίλυσης προβλήματος στην κατανόηση των ανισώσεων και στην ανάπτυξη της ικανότητας μοντελοποίησης από μαθητές της β΄ γυμνασίου.

Παπακωστόπουλος, Σ., & Ζαχάρος, Κ. (2010). Δυσκολίες Μαθητών Γυμνασίου & Λυκείου Στην Αντιμετώπιση Ανισώσεων Α΄ Βαθμού. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, σσ. 11-39.

Σακονίδης, Χ. (2011). Σχολική Άλγεβρα: Επιστημολογικές, γνωστικές και διδακτικές αναζητήσεις. Στο *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη σύγχρονη εκπαίδευση* (σσ. 281-299). Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Στέλλα Δημητρακοπούλου, Κ. Χ. (2018). ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, σσ. 31-52.

Technologyuk.net. (n.d.). Ανάκτηση από https://www.technologyuk.net/mathematics/algebra/variables-expressions-and-equations.shtml

Φωκάς, Δ. (2019). Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών: Μια μελέτη περίπτωσης.

Χαιρέτη, Μ. (2009). Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους.

Χρήστου, Κ. (2009). Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας. *Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ)Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης*.