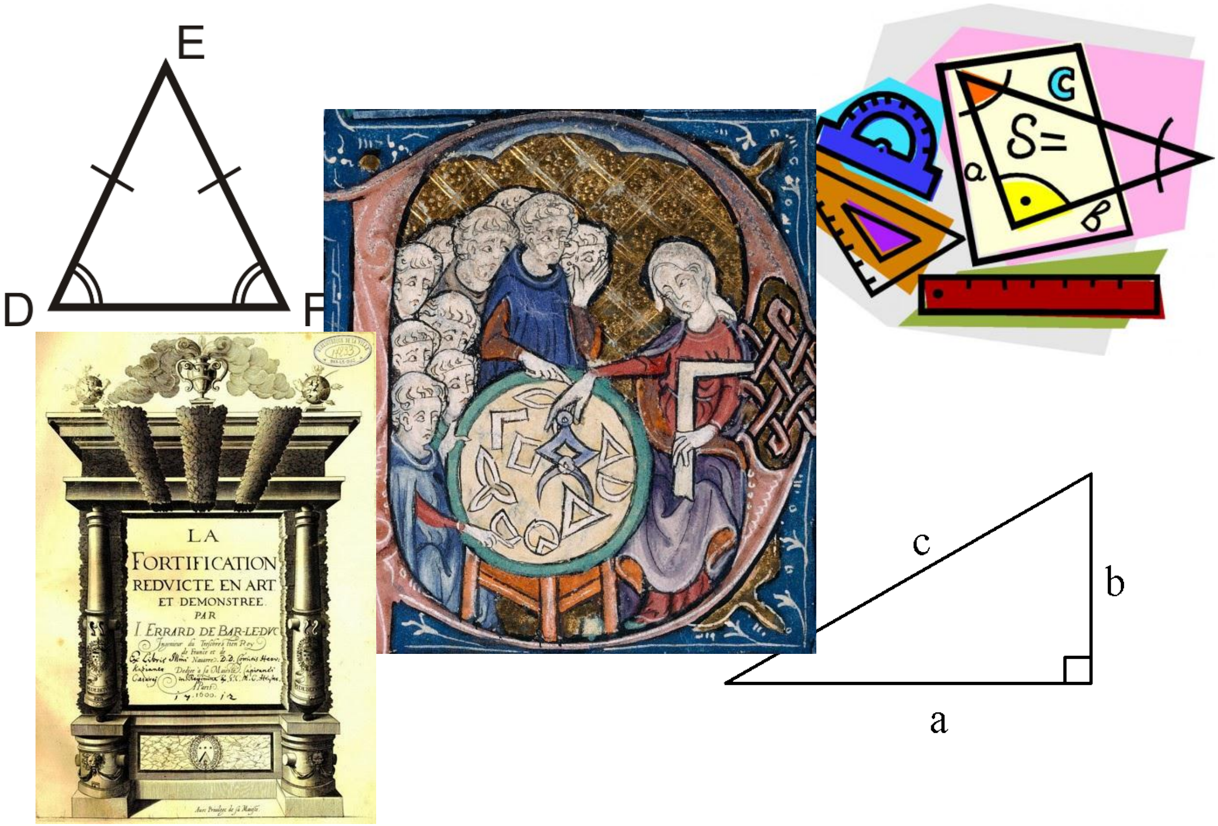
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

# Μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων και Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας: σχεδιασμός διδακτικής σειράς με αξιοποίηση ιστορικών πηγών




**Πτυχιακή εργασία**

**του Παπαδόπουλου Φώτη**

**Φλώρινα**

**Μάιος 2016**

## Φύλλο εξέτασης

**Επόπτης**

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………..

Βαθμίδα: …………………………………………………………………...

Ημερομηνία εξέτασης: ……………………………… Βαθμός: …………...

Υπογραφή:

**Μέλος Δ.Ε.Π. εξεταστική επιτροπή**

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………...

Βαθμίδα: ……………………………………………………………………

Ημερομηνία εξέτασης: …………………………….. Βαθμός: ……………..

Υπογραφή:

**Γενικός βαθμός: ……………………….**

Ο συγγραφέας ……………………………………………………...βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά σε εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Ημερομηνία: …………………………… Υπογραφή:

# Πίνακας περιεχομένων

**Περίληψη**

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η δημιουργία μιας σειράς πέντε ωριαίων μαθημάτων τα οποία περιλαμβάνουν δραστηριότητες που αφορούν τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων. Οι μετρήσεις αυτές γίνονται με τη χρήση ενός εργαλείου του $16^{ου}$ αιώνα, εφευρέτης του οποίου ήταν ο Γάλλος μηχανικός Jean Errard, και η λειτουργία του βασίζεται στις ιδιότητες των ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων. Έπειτα, με άξονα τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας, αναλύεται η γεωμετρική εργασία που συντελείται σε κάθε μάθημα.

Σκοπός της χρήσης αυτού του ιστορικού οργάνου στη διδασκαλία της γεωμετρίας είναι να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τον πραγματικό λόγο ύπαρξης της γεωμετρίας ως αναγκαίο εργαλείο για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αντιληφθούν τα μαθηματικά, όχι ως ανούσια και θεωρητική γνώση, αλλά, ως προσπάθεια του ανθρώπου να εξηγήσει τον κόσμο γύρω του και να λύσει προβλήματα της καθημερινής του ζωής. Η ανάλυση της γεωμετρικής εργασίας που ακολουθεί φιλοδοξεί να γίνει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών για την κατανόηση της διαδικασίας μάθησης και την οργάνωση της διδασκαλίας τους.

**Λέξεις κλειδιά:** Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας, Jean Errard, μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, γεωμετρική εργασία, ιστορία των μαθηματικών.

# Εισαγωγή

Ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να έχει το λιγότερο δύο καταστάσεις […] αναπαράσταση των στοιχείων μιας κατασκευασμένης πραγματικότητας […] αναπαράσταση των ιδεατών εννοιών μιας θεωρίας. Η πρώτη κατάσταση, αυτή του σχήματος, είναι συχνά αμελητέα στην εκπαίδευση και, σε κάθε περίπτωση, το πέρασμα από τη μία κατάσταση στην άλλη αγνοείται. Έτσι, αυτό το πέρασμα, που ανταποκρίνεται στο σχίσμα μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην κατασκευή της αίσθησης του γεωμετρικού σχήματος. Η απουσία αυτού του βήματος οδηγεί, στη μία από τις κυριότερες δυσκολίες από τις οποίες πάσχει η διδασκαλία της γεωμετρίας στο γυμνάσιο. Μια μάθηση των αποδείξεων σε αντικείμενα των οποίων η αίσθηση δεν έχει κατασκευαστεί δεν μπορεί παρά να παράξει ένα νόημα ακατανόητο στην πλειοψηφία των μαθητών… (Cerquetti & al., 1997).

Η περιγραφή της γεωμετρικής εργασίας που γίνεται από τους μαθητές σε μια διδασκαλία είναι ο στόχος του ΓΧΕ. Η γεωμετρική εργασία είναι στο κέντρο του μοντέλου και ενισχύει την αντανάκλαση στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας. Σε αυτή την προσέγγιση, η κυριότερη λειτουργία των διδασκαλιών και των εκπαιδευτικών είναι να αναπτύξουν ένα πλούσιο περιβάλλον το οποίο θα επιτρέπει στους μαθητές να επιλύουν γεωμετρικά προβλήματα με έναν επαρκή τρόπο. Για τη σχολική γεωμετρία έχουμε τρία γεωμετρικά παραδείγματα, ονομάζονται Γεωμετρία I, II και III. Εδώ, θα σταθούμε στις Γεωμετρίες I και II. Η Γεωμετρία I αναφέρεται σε ένα τομέα που έχει ως πηγή επικύρωσης τον πραγματικό και αισθητό κόσμο. Σε αυτή τη γεωμετρία, ένας ισχυρισμός στηρίζεται από επιχειρήματα βασισμένα στην εμπειρία και το συμπέρασμα. Τα πειράματα μπορούν να τεθούν πάνω στα σχήματα, ή επάνω στις παρατηρήσεις που γίνονται με τα ιστορικά εργαλεία-όργανα. Η ανάπτυξη αυτής της γεωμετρίας είχε ιστορικά ως κίνητρο τα πρακτικά προβλήματα. Το δεύτερο παράδειγμα της Γεωμετρίας II, που είναι ένα αρχέτυπο της Ευκλείδειας γεωμετρίας, είναι κατασκευασμένη σε ένα μοντέλο που προσεγγίζει την πραγματικότητα. Μόλις καθοριστούν τα αξιώματα, είναι επικυρωμένα μόνο τα πειράματα που αναπτύχθηκαν σε αυτό το σύστημα αξιωμάτων. Αυτές οι δύο γεωμετρίες βρίσκονται σε σχέση με τον πραγματικό κόσμο αλλά με διαφορετικούς τρόπους. Αυτές οι δύο γεωμετρίες δεν έχουν τις ίδιες λειτουργίες και τους ίδιους στόχους: πρακτική και τεχνολογική για τη Γεωμετρία I, προσανατολισμένη προς τη μοντελοποίηση και την αξιωματοποίηση για τη Γεωμετρία II (Kuzniak, 2015; Kuzniak & Nechache, 2012).

Σε αυτή την εργασία θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα δραστηριότητας (προερχόμενο από αποσπάσματα του Errard le Duc) στο οποίο η γεωμετρία ξαναβρίσκει μια αντίληψη κοντινή με αυτή της πρώτης ιστορικής εποχής (GI) και του περάσματος από την πρώτη στη δεύτερη (GII) από αυτές τις εποχές (πέρασμα το οποίο είναι η αφηρημένη γεωμετρική ύπαρξη που γεννιέται προοδευτικά από την αισθητή πραγματικότητα).

Αυτή η αντίληψη της γεωμετρικής δραστηριότητας παρουσιάζει το πλεονέκτημα της χρήσης τόσο των υλικών στοιχείων, πραγματικών, συγκεκριμένων (τα όργανα, τα αντικείμενα που μετράμε) όσο και τα αφηρημένα στοιχεία, ιδεατά (τις οπτικές ακτίνες). Επιτρέπει εξίσου και με ιδιαίτερο τρόπο τη σύνδεση μεταξύ των δύο τύπων των στοιχείων, αφού το σχέδιο της πραγματικότητας γίνεται γεωμετρικό σχήμα. Το σχέδιο, αναπαράσταση της πραγματικότητας, γίνεται αφαιρετικό γεωμετρικό σχήμα, απαραίτητο για την καλλιέργεια της σκέψης. Αυτές οι δραστηριότητες μπορούν να είναι ένα καλό βοήθημα για να κινητοποιήσει τους μαθητές να χαράξουν γεωμετρικές φιγούρες δίνοντάς τους νόημα: Οι οπτικές ακτίνες γίνονται ευθείες, οι θέσεις γίνονται σημεία, και με τη σειρά τους δημιουργούν τρίγωνα των οποίων η μελέτη των ιδιοτήτων είναι απαραίτητη. Επιλέχθηκε ένα όργανο του 16ου αιώνα του Errard de Bar-le-Duc προορισμένο να πραγματοποιεί σκοπεύσεις επιτρέποντας την οριοθέτηση των απρόσιτων αποστάσεων (πλάτος ενός ποταμού κ.λ.π), με τη βοήθεια ενός σκοινιού 20 μέτρων. Η χρήση του βασίζεται πάνω στις ιδιότητες των ισοσκελών και ορθογωνίων τριγώνων. Η παρουσία αυτών των πραγματικών τριγώνων πάνω στο όργανο δίνει υπόσταση στα υποθετικά τρίγωνα στο χώρο που όπως φαίνεται φυσικό από τη μια πλευρά διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών και από την άλλη τους κάνει να νοιώσουν την ανάγκη της ίδιας της έννοιας του τριγώνου (Cerquetti & al. 1997).

Στη GI κάποια τεχνουργήματα (προηγούμενο όργανο) χρησιμοποιούνται για τις κατασκευές, για τις μετρήσεις και για την αναπαράσταση της διαδικασίας που είναι συνδεδεμένη με τον τρόπο του μετρητή (Duval, 2005). Αυτός ο τρόπος προσέγγισης είναι η ιστορική εισαγωγή στη γεωμετρία και περιλαμβάνει τη μέτρηση με το όργανο-εργαλείο το οποίο είναι κατάλληλο για τον πραγματικό χώρο και για τις αναπαραστάσεις επάνω στο χαρτί. Οι μαθηματικές ιδιότητες κινητοποιούνται εάν έχουν το ρόλο των κριτηρίων της επιλογής του τρόπου μέτρησης. Οι μετρήσεις βρίσκονται σε σχέση με τα τεχνουργήματα μέσω της εργαλειακής γένεσης. Όταν ο χρήστης των ΓΧΕ έχει στο μυαλό του το σχήμα που πρέπει να μετρήσει, η εργαλειακή γένεση εμπλέκεται στην επιλογή των οργάνων και των κατάλληλων λειτουργιών αλλά επίσης στης κατασκευή και ανακατασκευή των οργάνων (εργαλειοποίηση)(Kuzniak, 2015). Η κατασκευή των γεωμετρικών μεγεθών και ο αριθμητικός υπολογισμός μπορούν να θεωρηθούν στο γενικό πλαίσιο των ΜΧΕ ως ειδικές περιπτώσεις μιας μακρύτερης διαδικασίας κατασκευής που θα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια ενέργεια που δημοσιοποιείται από τα όργανα. Σε αυτή την εργασία, θέτουμε κάποια στοιχεία που μπορούν να δώσουν στους μελλοντικούς Δασκάλους του δημοτικού σχολείου μια πιο σφαιρική οπτική της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Αναλύσαμε τις διδακτικές ακολουθίες από το μοντέλο των ΓΧΕ ως ένα εργαλείο για να αποσαφηνίσουμε και να χτίσουμε μια διδασκαλία πιο συναφή με τη γεωμετρία. Θα δοκιμάσουμε να προσδιορίσουμε τις διάφορες διαστάσεις για την είσοδο στη – σχηματική, εργαλειακή, λεκτική- εργασία, σχέδιο [Σχημ-Εργ], σχέδιο [Σχημ-Λεκτ], και σχέδιο [Εργ-Λεκτ]. Αυτός ο προσδιορισμός βγάζει στο φως τη δυναμική της γεωμετρικής εργασίας και επιτρέπει να κάνουμε χαρακτηρισμούς των ΓΧΕ.

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

# 1. Γεωμετρικοί χώροι εργασίας

Η περιγραφή της γεωμετρικής εργασίας που έχει γίνει από τους μαθητές στο σχολείο είναι ο κύριος στόχος των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (ΓΧΕ). Όπως φαίνεται και από το όνομά του, η γεωμετρική εργασία βρίσκεται στο κέντρο του μοντέλου και αντανακλάται στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας. Σε αυτή την προσέγγιση, η κύρια λειτουργία των διδακτικών μεθόδων και των δασκάλων είναι να αναπτύξουν ένα πλούσιο περιβάλλον το οποίο θα μπορεί να κάνει τους μαθητές ικανούς να λύσουν γεωμετρικά προβλήματα με κατάλληλο τρόπο.

Για να περιγράψει την ακριβή δραστηριότητα των μαθητών, οι ΓΧΕ είναι οργανωμένοι σε δύο επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο, το επιστημολογικό, καθορίζει a priori προσδοκίες για τη δραστηριότητα σύμφωνα με τις απαιτήσεις της μαθηματικής επιστήμης.

Σε ότι αφορά τη γεωμετρία, τρία συστατικά σε αλληλεπίδραση είναι χαρακτηριστικά για τη γεωμετρική δραστηριότητα στην καθαρά μαθηματική της διάσταση:

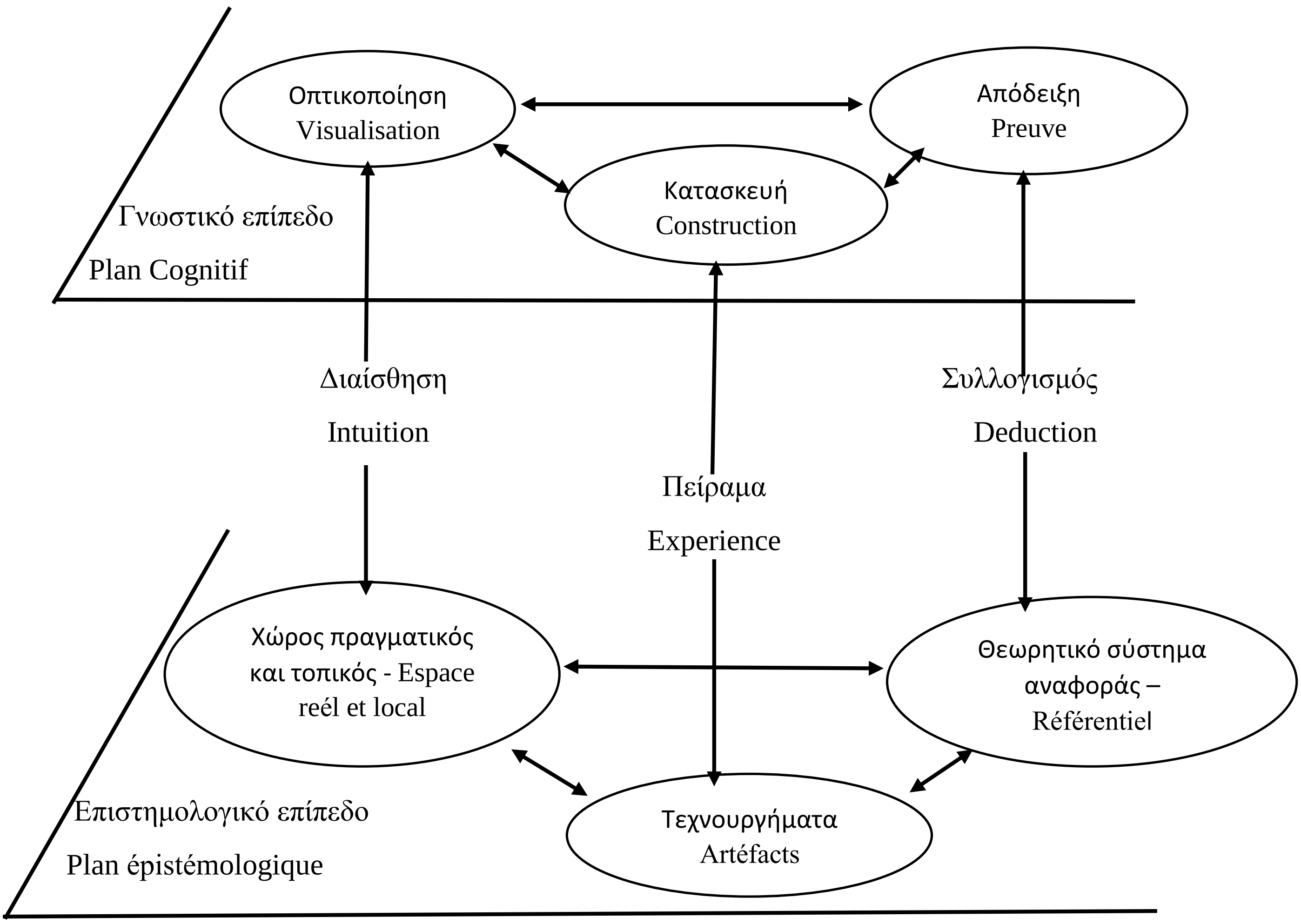
- Ένας πραγματικός και τοπικός χώρος στον οποίο ένα σύνολο αντικειμένων λαμβάνουν υλική υπόσταση.
- Ένα σύνολο από τεχνουργήματα που αποτελούν εργαλεία, εικονικά όργανα ή λογισμικό.
- Ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς βασισμένο σε ορισμούς και ιδιότητες.

Η γεωμετρία που διδάσκεται δεν είναι ένα ξεκομμένο σύνολο από ιδιότητες και αντικείμενα περιορισμένη σε έννοιες που μπορεί να χειριστεί από επίσημα συστήματα. Είναι πρώτα απ’ όλα και κατά κύριο λόγο μία ανθρώπινη ενέργεια. Έτσι λοιπόν, είναι ουσιώδες να καταλάβουμε πώς οι κοινότητες των ατόμων, όπως επίσης συγκεκριμένα άτομα, χρησιμοποιούν και εσωτερικεύουν τη γεωμετρική γνώση στην πρακτική τους. Αυτό συνεπάγεται ένα δεύτερο επίπεδο, το γνωστικό, που επικεντρώνεται στο θέμα υπό την οπτική της επίλυσης προβλήματος ως γνωστικό υποκείμενο.

Για τη γεωμετρική δραστηριότητα, αυτές οι διαδικασίες έχουν ως εξής:

- Μία διαδικασία οπτικοποίησης συνδεδεμένης με την αναπαράσταση του χώρου και την υλική υποστήριξη.
- Μία διαδικασία κατασκευής και λειτουργίας των χρησιμοποιούμενων οργάνων (χάρακες, διαβήτες κλπ.) και την σχετική γεωμετρική διαμόρφωση.
- Μία διαδικασία παραγωγής επιχειρημάτων και αποδείξεων.

Αυτό το σύνολο των σχέσεων θα μπορούσε να περιγραφεί από τα στοιχεία του ακόλουθου διαγράμματος που δείχνει τη σχέση μεταξύ των δύο επιπέδων με τις διαφορετικές διαστάσεις: σημειωτική, εργαλειακή, συλλογισμός.



- Η **σημειωτική** διάσταση έχει ως σημείο αναφοράς τη **διαίσθηση**.
- Η **εργαλειακή** έχει το **πείραμα**.
- Η **επαγωγική** τον **συλλογισμό-συμπέρασμα.**

Αυτός ήταν ο λόγος για τον οποίο οι Houdement και Kuzniak χρησιμοποιώντας κριτήρια επιστημολογικά, ιστορικά και διδακτικά έκαναν λόγο για 3 διαφορετικά παραδείγματα Στοιχειώδους Γεωμετρίας:

Το 1ο παράδειγμα ονομάστηκε Φυσική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 1 (GI), καθώς πηγή της επικύρωσης είναι ο πραγματικός κόσμος (Houdement & Kuzniak, 1999, 2004, 2006 Kuzniak, 2006, 2009a. 2012a). Μέσα πειραματισμού αποτελούν διάφορα εργαλεία κατασκευής και μέτρησης, όπως ο βαθμονομημένος χάρακας, το μοιρογνωμόνιο και ο διαβήτης, ενώ εργαλειακά χρησιμοποιείται και η δίπλωση του υλικού αντικειμένου ή του σχήματος, όπως και η αποκοπή-επικόλληση. Πρόκειται, έτσι, για Γεωμετρία με τεχνολογικό ορίζοντα, που σχετίζεται ιστορικά με πρακτικά προβλήματα.

Το 2ο παράδειγμα είναι η Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 2 (GII) και έχει ως αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία (Houdement & Kuzniak, 2004, 2006 Kuzniak, 2009). Αξιωματική διότι πηγή της επικύρωσης είναι οι υποθετικο-απαγωγικοί νόμοι, στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος. Φυσική γιατί το αξιωματικό σύστημα δεν είναι αποκομμένο από την αισθητή πραγματικότητα. Σε αυτό το παράδειγμα είναι δυνατόν η αξιωματικοποίηση να μην έχει ολοκληρωθεί, αλλά να αποτελεί εξελισσόμενη εργασία με ορίζοντα τη μοντελοποίηση (Kuzniak, 2009a).

Το 3ο παράδειγμα ονομάστηκε Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία 3 (GIII), λόγω της έμφασης στην τυπική λογική και στη δομή (Houdement & Kuzniak, 2004 Kuzniak, 2012a). Εδώ, η γεωμετρική εργασία αφορά λογικά προβλήματα και το αξιωματικό σύστημα είναι αποκομμένο από την αντιληπτή πραγματικότητα και πλήρες, καθώς υπάρχει η τάση για συμπλήρωση ακόμα και διαισθητικών αξιωμάτων, όπως αυτό της κυρτότητας.

Η διάκριση αυτή των τριών παραδειγμάτων είχε ως σκοπό να προσδιοριστεί επιστημολογικά η φύση της γεωμετρικής εργασίας. Επειδή, όμως, η γεωμετρική εργασία είναι ταυτόχρονα και μια ανθρώπινη δραστηριότητα, υιοθετήθηκε η έννοια του Χώρου Εργασίας.

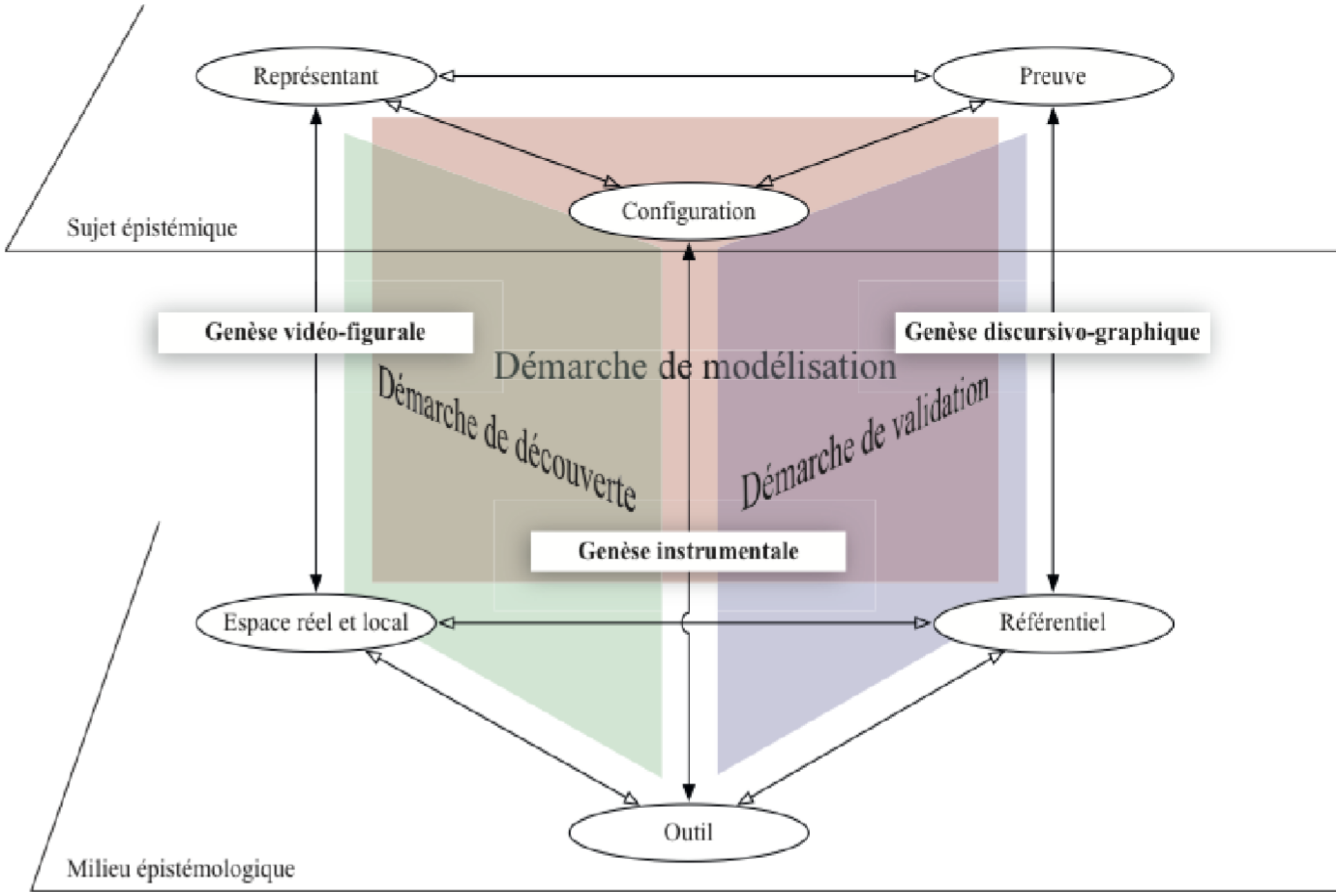
### 1.1.Οι γενέσεις που δημιουργούνται στους ΓΧΕ

Όπως είδαμε, η επιστημολογική και η γνωστική οπτική δημιουργούν τα δύο οριζόντια επίπεδα των ΓΧΕ και βοηθάνε στην κατανόηση της γεωμετρικής εργασίας. Είναι, λοιπόν, σημαντικό να στηριχθούμε στις τρεις θεμελιώδεις γενέσεις, ή αλλιώς κάθετα επίπεδα, που προκύπτουν από το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο:

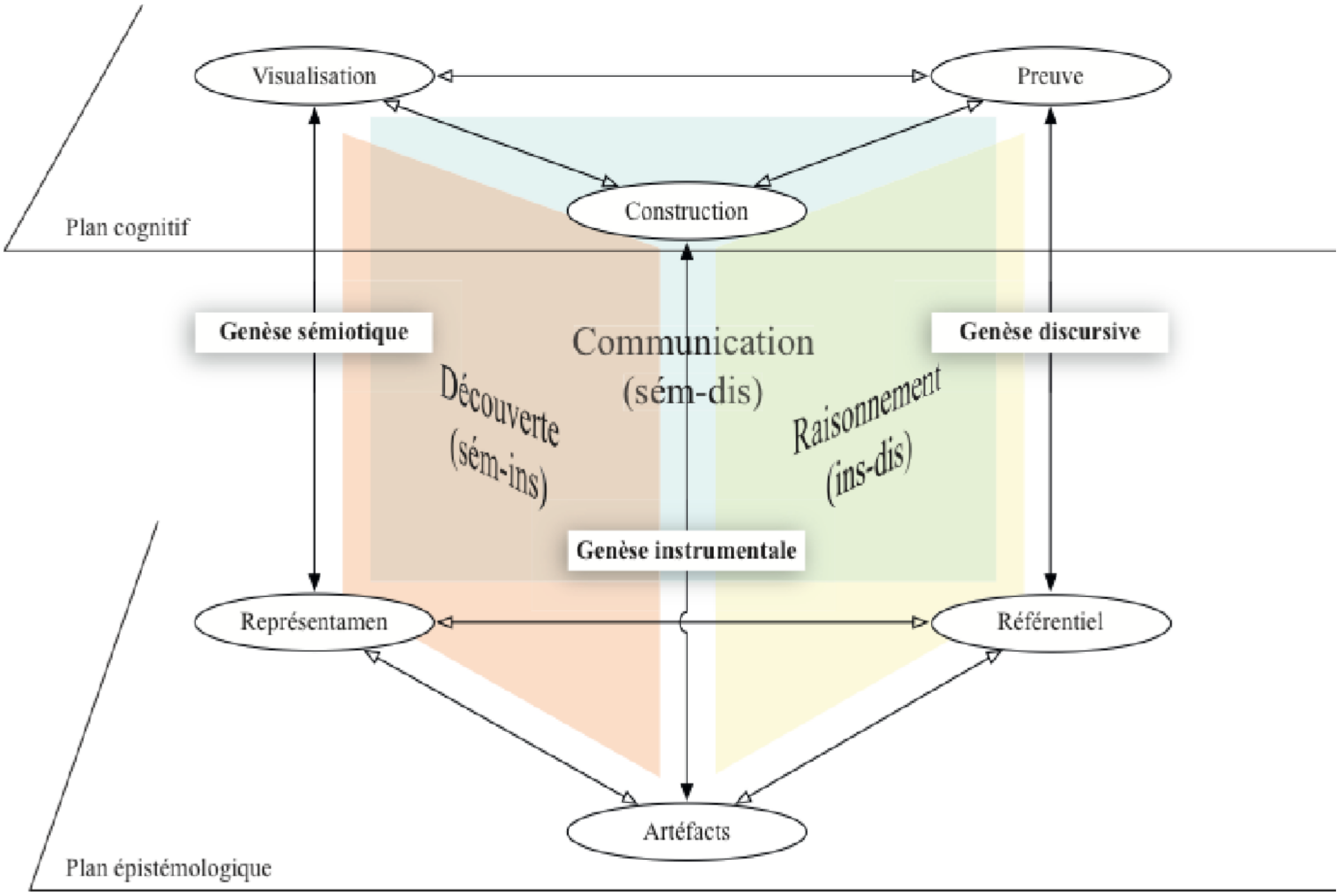
I. Μία γένεση σημειωτική βασισμένη κυρίως στην επικύρωση της σχηματικής αναπαράστασης, που δίνει μια αίσθηση στα αντικείμενα του ΓΧΕ και τους προσφέρει την υπόσταση του γεωμετρικού αντικειμένου.

II. Μία εργαλειακή γένεση που επιτρέπει να θέσουμε σε εφαρμογή, κατά τη γνωστική διαδικασία, τα τεχνουργήματα πράγμα το οποίο συμβάλει στην επίτευξη της γεωμετρικής εργασίας.

III. Μια γένεση συλλογισμού της απόδειξης που χρησιμοποιεί τα αξιώματα στο θεωρητικό πλαίσιο για να τα θέσει στην υπηρεσία της μαθηματικής απόδειξης και στην επικύρωση που δεν είναι αποκλειστικά εικονική, σχηματική ή εργαλειακή.



Για να καθορίσουμε τη γεωμετρική εργασία στο πλαίσιο των ΓΧΕ, οι Coutat και Richard (2011) περιέγραψαν τις συγκεκριμένες αλληλεπιδράσεις στη γεωμετρική διαδικασία χαρακτηρίζοντας τα τρία κάθετα επίπεδα που εμφανίζονται στο διάγραμμα των ΓΧΕ. Αυτά τα κάθετα επίπεδα μπορούν να ενωθούν στις διάφορες φάσεις της γεωμετρικής εργασίας που λαμβάνουν χώρα κατά την εκτέλεση μιας εργασίας: ανακάλυψη και εξερεύνηση, αιτιολόγηση και συλλογισμός, παρουσίαση και επικοινωνία.




## 2. Η θεωρία του Duval για τη Γεωμετρία

Για τον Duval (1999, 2006), η δυσκολία των Μαθηματικών έγκειται στις γνωστικές διαδικασίες που σχετίζονται με τις σημειωτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να μετασχηματιστούν με δύο τρόπους: ο μετασχηματισμός εντός του ίδιου σημειωτικού συστήματος ορίστηκε ως επεξεργασία ή χειρισμός (processing, treatment), ενώ ο μετασχηματισμός σε ένα άλλο σημειωτικό σύστημα ορίστηκε ως μετατροπή (conversion). Στη Γεωμετρία, ειδικότερα, συνδυάζονται δύο ή και τρία συστήματα: το ένα αφορά τα σχήματα και τα άλλα δύο τη λεκτική και την αριθμητική έκφραση, αντίστοιχα.

Όσον αφορά τα σχήματα, ο Duval (1995) χρησιμοποίησε τη λέξη κατανόηση, για να τονίσει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί κάποιος να τα δει. Συγκεκριμένα, υποστήριξε ότι υπάρχουν τέσσερα είδη κατανόησης: η αντιληπτική, η λεκτική, η σειριακή και η λειτουργική. Για να λειτουργήσει ένα σχήμα ως γεωμετρικό, πρέπει να υπάρχει η αντιληπτική κατανόηση και τουλάχιστον άλλο ένα από τα υπόλοιπα τρία είδη, τα οποία αποτελούν μαθηματικές μορφές κατανόησης (Duval, 1994). Η μαθηματική εργασία απαιτεί την αρμονική συνύπαρξη και αλληλεπίδραση όλων των παραπάνω ειδών κατανόησης, αλλά για να επιτευχθεί αυτό χρειάζεται η διδασκαλία να δώσει έμφαση στην ανάπτυξη της καθεμιάς ξεχωριστά (Duval, 1995).

Η αντιληπτική κατανόηση είναι αυτό που βλέπει κάποιος σε ένα σχήμα ή, γενικότερα, σε ένα αντικείμενο με μια πρώτη ματιά (Duval, 1994). Επιστημολογική της λειτουργία, επομένως, είναι η αναγνώριση και ταυτοποίηση ενός αντικειμένου στο επίπεδο ή στο χώρο. Η ταυτοποίηση αυτή βασίζεται στις αρχές που διέπουν την οργάνωση των μορφών (gestalts) και σε διαφορές μεγέθους και προσανατολισμού μεταξύ των επιμέρους δομικών μονάδων. Με αυτήν την κατανόηση, ένα απλό σχήμα γίνεται αντιληπτό ως μία ολότητα (Duval, 1998).

Για τις μαθηματικές ιδιότητες του σχήματος, η αντιληπτική κατανόηση μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές εκτιμήσεις: δύο ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να φαίνονται ότι είναι ή ότι δεν είναι παράλληλα ή ότι είναι περίπου παράλληλα (Duval, 1994). Το ίδιο ισχύει και για την ιδιότητα της ισότητας. Σε εξίσου αμφίσημα αποτελέσματα μπορεί να οδηγήσει και η μέτρηση. Επομένως, μπορεί να υπάρχει ένα χάσμα ανάμεσα σε αυτό που φαίνεται και σε αυτό που αναπαριστάται από το σχήμα (Duval, 1995). Για τις μαθηματικές ιδιότητες, λοιπόν, που αναπαριστώνται από το σχήμα απαιτείται μια άλλη μορφή κατανόησης: η λεκτική. Ονομάστηκε έτσι γιατί ορισμένες από τις μαθηματικές ιδιότητες απορρέουν από το κείμενο που συνοδεύει το σχήμα, ενώ άλλες προκύπτουν παραγωγικά από τις δοθείσες ιδιότητες και διατυπώνονται λεκτικά. Με τη λεκτική κατανόηση, ένα απλό σχήμα γίνεται αντιληπτό ως επιμέρους μορφές, που αναπαριστούν ευθύγραμμα τμήματα ή σημεία και έχουν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ τους (Duval, 1998). Συνεπώς, υπάρχει αλλαγή διάστασης: από τα δισδιάστατα σχήματα, στις γραμμές. Επιπλέον, οι μαθηματικές ιδιότητες μπορεί να αναπαριστώνται στο σχήμα με τη βοήθεια ειδικών συμβόλων. Επιστημολογική λειτουργία της λεκτικής κατανόησης είναι η απόδειξη (Duval, 1994).

Η σειριακή κατανόηση αφορά την κατασκευή ενός σχήματος ή την περιγραφή της κατασκευής του (Duval, 1995). Και στις δύο περιπτώσεις ακολουθείται μια σειρά, που προκύπτει από τις ιδιότητες του σχήματος και από τους τεχνικούς περιορισμούς των εργαλείων. Οι περιορισμοί αυτοί είναι διαφορετικοί για κάθε εργαλείο, ενώ στην περίπτωση του ελεύθερου σχεδίου απουσιάζουν εντελώς. Επιστημολογική λειτουργία αυτού του είδους κατανόησης είναι η κατασκευή ενός μοντέλου (Duval, 1994).

Η λειτουργική κατανόηση περιλαμβάνει τριών ειδών τροποποιήσεις του σχήματος (Duval, 1994, 1995). Η μερεολογική τροποποίηση είναι η ανάλυση ενός σχήματος σε διάφορα μέρη και, ενδεχομένως, η σύνθεση των μερών σε ένα νέο όλο, δηλαδή σε σχήμα ή σχήματα διαφορετικά από το αρχικό. Η οπτική τροποποίηση είναι η αλλαγή του μεγέθους (σμίκρυνση, μεγέθυνση) ή η αλλοίωση του σχήματος (λοξότητα). Η θεσιακή τροποποίηση, τέλος, είναι η μετατόπιση του σχήματος ή η αλλαγή προσανατολισμού. Οι παραπάνω τροποποιήσεις μπορούν να γίνουν και με υλικό τρόπο· μπορεί π.χ. να διπλωθεί ή να κοπεί το σχήμα και να ενωθούν τα επιμέρους κομμάτια σαν παζλ, προκειμένου να γίνει μια μερεολογική τροποποίηση. Σε κάθε περίπτωση, με τις τροποποιήσεις αυτές συντελείται επεξεργασία του σχήματος, δηλαδή μετασχηματισμός της αναπαράστασης εντός του ίδιου σημειωτικού συστήματος. Από επιστημολογικής άποψης, η λειτουργική κατανόηση έχει ευρετική λειτουργία, καθώς συμβάλλει στην εξεύρεση μιας λύσης στα πλαίσια ενός προβλήματος ή μιας απόδειξης.

Ως προς τις μερεολογικές τροποποιήσεις, ο Duval (1998) υποστήριξε ότι ορισμένες μπορεί να προϋποθέτουν συγκεκριμένες γεωμετρικές γνώσεις, ενώ άλλες δεν απαιτούν κάποια αντίστοιχη γεωμετρική γνώση. Επιπλέον, για κάθε σχήμα είναι δυνατές πολλές και διαφορετικές μερεολογικές τροποποιήσεις και, επομένως, τίθεται το ερώτημα κατά πόσο είναι ορατή η κατάλληλη τροποποίηση για ένα δεδομένο πρόβλημα (Duval, 1995). Οι πιο σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά σε αυτό είναι η διπλή χρήση ενός επιμέρους σχήματος και η ανυπαρξία στο αρχικό σχήμα των γραμμών που διαχωρίζουν τα επιμέρους σχήματα, ιδίως αν πρέπει να γίνουν πολλοί διαχωρισμοί. Επιπλέον, η τροποποίηση θα μπορούσε να είναι λιγότερο ορατή, αν το νέο σχήμα δε βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα του αρχικού σχήματος ή αν δεν είναι κυρτό ή αν τα επιμέρους σχήματα δεν είναι αντιληπτικώς συμπληρωματικά, δηλαδή δε συνδυάζονται για να δώσουν ένα οικείο σχήμα (ορθογώνιο, τετράγωνο, κύκλος).

Πέρα από τα παραπάνω, ο Duval (1998) διέκρινε τρεις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη Γεωμετρία. Αυτές είναι η οπτικοποίηση, που αφορά την αναπαράσταση του χώρου, η κατασκευή και ο συλλογισμός, που είναι στενά συνδεδεμένος με την εκφορά του λόγου και έχει σκοπό την απόδειξη, την εξήγηση και την επέκταση της γνώσης. Κατά την άποψή του, ισχύει για αυτές ό,τι και για τις μορφές κατανόησης του σχήματος: απαιτείται η συνέργεια και των τριών, αλλά για να συμβεί αυτό απαιτείται η ξεχωριστή ανάπτυξη καθεμιάς διαδικασίας μέσα από τη διδασκαλία. Επιπλέον, υποστήριξε πως δεν υπάρχει μεταξύ τους μια προδιαγεγραμμένη αναπτυξιακή πορεία, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, καθώς ακόμα και η οπτικοποίηση αφορά αφηρημένες αναπαραστάσεις.

## 3. Η θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Brousseau

Με βάση τη θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων, κεντρική θέση στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχουν τα προβλήματα, που πρέπει να επιλέγονται με τρόπο που οι μαθητές να κινητοποιούνται και, ακολούθως, να δρουν, να συζητούν και να σκέφτονται, προκειμένου να τα επιλύσουν (Brousseau, 2002). Η κατάσταση, κατά την οποία την πρωτοβουλία έχει ο κάθε μαθητής μόνος του ή οι ομάδες των μαθητών και η οποία εξελίσσεται από την αποδοχή του προβλήματος μέχρι την παραγωγή της απάντησης, ονομάστηκε αδιδακτική κατάσταση. Οι αδιδακτικές καταστάσεις μπορεί να είναι καταστάσεις δράσης, διατύπωσης ή επικύρωσης. Η διάκριση αυτή στην πράξη δεν είναι απόλυτη, καθώς μπορεί π.χ. στην επικύρωση να υπεισέρχονται και δράσεις και συζητήσεις και αντιστρόφως· ωστόσο, η βασική πρόθεση των μαθητών στην κατάσταση διατύπωσης είναι να επικοινωνήσουν κάποιο μήνυμα, ενώ στην κατάσταση επικύρωσης υπάρχει η σαφής πρόθεση για επικύρωση της ισχύος μιας πρότασης. Επιπλέον, η κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, η ύπαρξη μέτριας αβεβαιότητας και το ενδιαφέρον για το εξεταζόμενο θέμα αποτελούν παράγοντες που μπορούν να συμβάλουν στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες απόδειξης, στα πλαίσια καταστάσεων επικύρωσης (Balacheff, 1988).

Εκτός από τις αδιδακτικές, χρειάζονται και διδακτικές καταστάσεις, όπου την πρωτοβουλία έχει ο εκπαιδευτικός (Brousseau, 2002). Στην κατάσταση θεσμοποίησης/επισημοποίησης, άτυπες γνώσεις (διαδικασίες, μέθοδοι, λεξιλόγιο, ορισμοί, ιδιότητες), που προέκυψαν από προηγούμενες καταστάσεις, αποκτούν επίσημο χαρακτήρα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντικές περιπτώσεις, έξω από το συγκεκριμένο πλαίσιο, χωρίς να χρειάζεται να αποδειχτούν ή να συμφωνηθούν ξανά.

Όλες οι παραπάνω καταστάσεις σχετίζονται στενά με το διδακτικό συμβόλαιο, το οποίο είναι ένα σύστημα αμοιβαίων υποχρεώσεων, που καθορίζει ποιες ευθύνες αναλαμβάνει ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές και, συνεπώς, ποιες προσδοκίες υπάρχουν μεταξύ τους. Για παράδειγμα, στις μετρήσεις οι μαθητές μπορεί να προσδοκούν ότι όλες οι μετρήσεις θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα και, ενδεχομένως, ότι αυτό θα πρέπει να είναι ακέραιο. Έτσι, μπορεί να στρογγυλοποιούν τα αποτελέσματα ή να περιμένουν το ένα και σωστό αποτέλεσμα από την αυθεντία του εκπαιδευτικού. Έτσι, οι πραγματικές μετρήσεις συχνά οργανώνονται αυστηρά, ώστε να δίνουν ακέραια αποτελέσματα ή αποκλείονται εντελώς από την εκπαιδευτική διαδικασία.

Μια άλλη έννοια είναι αυτή του εμποδίου (Brousseau, 1989, 2002). Ένα εμπόδιο αποτελεί την κοινή βάση επαναλαμβανόμενων λαθών, που αντιστέκονται στη διδασκαλία και επανέρχονται. Τα εμπόδια διακρίνονται σε οντογενετικά, αν σχετίζονται με περιορισμούς που θέτει η αναπτυξιακή πορεία του ατόμου, διδακτικά, αν σχετίζονται με κάποιο διδακτικό μετασχηματισμό ή άλλη διδακτική επιλογή, πολιτιστικά, αν διαμεσολαβεί ο πολιτισμός και, τέλος, επιστημολογικά. Για τα τελευταία, έχουν διατυπωθεί και απόψεις που τα θεωρούν ευρύτερα ως δυσκολίες που απαντώνται στην ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας (Glaiser, στο Brousseau, 2002). Ωστόσο, οι Duroux (στο Brousseau, 2002) και Brousseau (2002) έθεσαν συγκεκριμένα κριτήρια: το επιστημολογικό εμπόδιο είναι μια γνώση ή αντίληψη και όχι μια έλλειψη γνώσης ή δυσκολία. Η γνώση αυτή είναι αποτελεσματική σε ένα πλαίσιο, αλλά έξω από αυτό είναι αναποτελεσματική και προκαλεί λάθη. Ακόμη, ανθίσταται στην αντικατάστασή της και επανεμφανίζεται μετά από αυτήν. Συνεπώς, για την ταυτοποίηση ενός επιστημολογικού εμποδίου απαιτείται εκτενής ιστορική έρευνα και σύγκριση των ευρημάτων με αυτά που προκύπτουν από την εξέταση των αντιλήψεων των μαθητών.

Είναι, επίσης, σημαντικό ότι η ταυτοποίηση ενός εμποδίου δεν είναι εύκολη και δυσχεραίνεται περισσότερο από το γεγονός ότι διαφορετικά εμπόδια μπορεί να συνυπάρχουν και να αλληλεπιδρούν (Brousseau, 2002). Η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση επιλεγμένων προβλημάτων, μέσω των οποίων οι μαθητές θα διαπιστώσουν την αναποτελεσματικότητα μιας γνώσης ή αντίληψης. Χρήσιμο είναι, επίσης, κάθε είδος διδακτικών και αδιδακτικών καταστάσεων, καθώς και το παιχνίδι μεταξύ των πλαισίων. Μια διαδικασία που μπορεί να βοηθήσει, τέλος, είναι η κοινωνικο-γνωστική σύγκρουση, κατά την οποία οι μαθητές συζητούν, αντιπαραθέτουν επιχειρήματα και συνεργάζονται για την επικύρωση της κοινής αλήθειας (Brousseau, 1989). Πρόκειται, ωστόσο, για διαδικασία απαιτητική και χρονοβόρα, που προϋποθέτει κατάλληλο διδακτικό συμβόλαιο και κανόνες και που είναι δύσκολο να εφαρμοστεί σε μια τάξη αποτελεσματικά από την πρώτη φορά.

# 4. Χρήση ιστορικών πηγών και η αξία τους

## 4.1.Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση

Σύμφωνα με τους Νικολαντωνάκη και Αναστασιάδη (2014), στο άρθρο με θέμα «Ισοπεριμετρικά σχήματα στο δημοτικό σχολείο: διδασκαλία με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών», του περιοδικού «Επιστήμες Αγωγής» του παιδαγωγικού τμήματος του πανεπιστημίου Κρήτης, για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών υπάρχουν, από τη μια πλευρά, θεωρητικές αντιρρήσεις και πρακτικές δυσκολίες: π.χ. υποστηρίζεται ότι οι μαθητές δεν αγαπούν την Ιστορία ή ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα μπορούσε να μπερδέψει τους μαθητές (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Πρακτικές δυσκολίες είναι η έλλειψη διδακτικού χρόνου και υλικού και η έλλειψη γνώσεων από πλευράς των εκπαιδευτικών. Επιπλέον, μια τέτοια αξιοποίηση είναι δύσκολο να αξιολογηθεί, οπότε δε θα κέρδιζε την προσοχή των μαθητών.

Από την άλλη, προβάλλεται ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές, συντελώντας ταυτόχρονα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών περιεχομένων (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Επιπλέον, πληροφορούμενοι για δυσκολίες, σφάλματα και παρανοήσεις του παρελθόντος, οι μεν μαθητές μπορούν να έχουν οφέλη σε επίπεδο συναισθημάτων και στάσεων, ενώ οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν εκτιμήσεις για πιθανές δυσκολίες των μαθητών και να εμπνευστούν προβλήματα και άλλο υλικό που θα μπορούσε να συμβάλει στην υπέρβαση αυτών των δυσκολιών. Παράλληλα, η Ιστορία των Μαθηματικών βοηθά στην αλλαγή των πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά, τονίζει το ρόλο των ανθρώπων και των πολιτισμών στην εξέλιξή τους και διδάσκει ότι οι μαθηματικές έννοιες αναπτύχθηκαν ως εργαλεία για την οργάνωση του κόσμου. Τέλος, μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών συνδέονται τα Μαθηματικά με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Αναφορικά με τη σχέση των δυσκολιών των μαθητών με τις δυσκολίες που εμφανίζονται στην Ιστορία των Μαθηματικών, υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις. Ο Brousseau (2002), με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου, τόνισε το ρόλο μιας δεδομένης γνώσης, που με τα χαρακτηριστικά της συνεπάγεται συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, αλλά οδηγεί εκ των πραγμάτων και σε συγκεκριμένα σφάλματα. Αντίθετα, οι Furinghetti και Radford (2008) τόνισαν το ρόλο του πολιτισμού και υποστήριξαν ότι μέσω του σχολείου προετοιμάζεται το «ξεπακετάρισμα» μιας συμπυκνωμένης παράδοσης αιώνων. Τέλος, στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, θεωρείται ότι οι ιδέες των μαθητών μπορεί να προέρχονται από την αλληλεπίδρασή τους με το φυσικό περιβάλλον και τα εργαλεία του πολιτισμού (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006). Συνεπώς, τυχόν ομοιότητες θα μπορούσαν να συνδέονται π.χ. με την αντίληψη που παρέχουν οι αισθήσεις ή με τη χρήση παρόμοιων εργαλείων.

Σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, ο συνηθέστερος είναι η χρήση ιστορικών σημειωμάτων, δηλαδή κειμένων που κατασκευάζονται για διδακτικούς σκοπούς και μπορεί να περιλαμβάνουν ονόματα, χρονολογίες, βιογραφίες, ανέκδοτα ή και αφηγήσεις (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Άλλοι τρόποι είναι τα φύλλα εργασίας, τα ιστορικά προβλήματα και οι πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές. Οι παραπάνω τρόποι μπορούν να συνδυαστούν για το σχεδιασμό διδακτικών-μαθησιακών σειρών (πακέτων) και projects, σύντομων ή εκτενέστερων και με μικρότερη ή μεγαλύτερη συνάφεια με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών. Η χρήση πρωτογενών πηγών είναι ο πιο απαιτητικός και χρονοβόρος τρόπος, ενώ συχνά είναι δύσκολη και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (Jahnke et al., 2000). Ο εκπαιδευτικός ενδέχεται να πρέπει να μεταφράσει ή να τροποποιήσει το κείμενο, αλλά συστήνεται να μην απομακρύνεται πολύ από το αυθεντικό κείμενο. Η εισαγωγή της πηγής μπορεί να γίνει άμεσα, χωρίς προηγούμενη προετοιμασία, ή έμμεσα, π.χ. μετά από επίλυση προβλημάτων. Γενικότερα, για την αξιοποίηση των πρωτογενών πηγών δεν υπάρχει μόνο μία διδακτική στρατηγική συνεπώς, θα πρέπει να επιλέγεται η καταλληλότερη.

## 4.2.Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών

Τα μαθηματικά είναι ανθρώπινο επίτευγμα με ιστορία τεσσάρων χιλιάδων χρόνων, κομμάτι της ανθρώπινης πολιτιστικής κληρονομιάς. Έχουν ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό να είναι τόσο στενά συνδεδεμένα το παρελθόν, το παρόν και το μέλλον τους όσο σε καμία άλλη επιστήμη. *«Κανένα άλλο αντικείμενο εκτός από τα μαθηματικά, δεν έχει τόσες απώλειες όταν επιχειρεί κάποιος να το διαχωρίσει από την ιστορία του»* (Glaisher, 1848-1928).

Οι μαθηματικοί και οι ιστορικοί πολλών χωρών επί μακρόν έχουν σκεφτεί αν η ιστορία των μαθηματικών είναι σε θέση να βελτιώσει και να εμπλουτίσει τη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό σαν σκέψη προκύπτει από το γεγονός ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν πετυχαίνει πάντα τους σκοπούς της σε μαθητές που δεν κατανοούν σε ικανοποιητικό βαθμό τις μαθηματικές έννοιες ή αναπτύσσουν φοβία απέναντι στα μαθηματικά. Επομένως θα άξιζε τον κόπο η εξερεύνηση πιθανών δρόμων βελτίωσης της διδακτικής διαδικασίας. Από τις μέχρι τώρα παιδαγωγικές δυνατότητες έχει προκύψει μεγάλο εύρος οπτικών και εμπειριών για το πώς η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει σε αυτή την κατεύθυνση.

Ο Charles Henry Edwards, Jr. για να τονίσει την κύρια πρόκληση που αντιμετωπίζει η ιστορία των μαθηματικών στις αίθουσες διδασκαλίας λέει: *«Αν και η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών έλκει για χάρη της ίδιας, ο κύριος λόγος ύπαρξής της είναι σίγουρα η κατανόηση των μαθηματικών»*.

Σύμφωνα με τους Tzanakis C. και Arcavi A. (2000), σε ότι αφορά την ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.

Α) Για τη μάθηση των μαθηματικών: I. Αναδεικνύεται η ιστορική ανάπτυξη τους και έτσι δεν τα βλέπουν οι μαθητές σαν μια επιστήμη τελειοποιημένη από πάντα. II. Η ιστορία γίνεται πηγή προβλημάτων, μεθόδων, ερωτημάτων του παρελθόντος που είναι σημαντικά για το περιεχόμενο τους και για τη δυναμική τους να κινητοποιούν το ενδιαφέρον. Έτσι πλευρές της ιστορικής ανάπτυξης ενός θέματος γίνεται ενεργή γνώση. III. Γεφυρώνονται τα μαθηματικά με άλλα μαθήματα /τομείς γνώσης ή διαφαίνεται η διασύνδεση μαθηματικών περιοχών μεταξύ τους. IV. Η ιστορία προσφέρει γενική εκπαιδευτική αξία: Εξάσκηση σε ανάγνωση, γραφή, αναζήτηση πηγών, συζήτηση για τα μαθηματικά, ανάλυση, τεκμηρίωση κ.λπ.

Β) Για την ανάπτυξη αντιλήψεων-οπτικών σχετικά με τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας: Ι. Σχετικά με το περιεχόμενό τους. Τα ευρετικά ή διαισθητικά επιχειρήματα, οι εναλλακτικές προσεγγίσεις, λάθη, διαμάχες του παρελθόντος κ.λπ. γίνονται αντιληπτά ως εσωτερικό οργανικό κομμάτι των μαθηματικών. Έμμεσα ενθαρρύνονται να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα, υποθέσεις και να τα ερευνούν. Επίσης γίνεται αντιληπτή η εξελικτική φύση της μαθηματικής γνώσης και η διαφορετική μέσα στο χρόνο αντίληψη βασικών μετα-εννοιών όπως η απόδειξη, ο αυστηρός συλλογισμός, το λάθος, κ.λπ. ΙΙ. Σχετικά με τη μορφή. Τα μαθηματικά εξελίσσονται σε συμβολισμούς, ορολογία, μεθόδους υπολογισμών, τρόπους έκφρασης και αναπαράστασης. Η ιστορία βοηθά στο να επανεκτιμήσουν το ρόλο οπτικών, διαισθητικών και μη-τυπικών προσεγγίσεων του παρελθόντος. Με τη βοήθεια του ιστορικού υλικού δάσκαλοι και μαθητές ανακαλύπτουν τα πλεονεκτήματα ή/και μειονεκτήματα της σημερινής μορφής των μαθηματικών.

Γ) Για τη θετική προδιάθεση απέναντι στα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα:

Ι. Τα μαθηματικά είναι εξελισσόμενο και ανθρώπινο ζήτημα και όχι σύνολο αυστηρών αληθειών φτιαγμένο για αποστήθιση. Η εξέλιξή τους προσδιορίστηκε τόσο από λόγους εγγενείς των μαθηματικών όσο και εξωτερικής φύσης. Έτσι δεν αναγνωρίζονται ως κάτι άκαμπτο. ΙΙ. Αναγνωρίζεται η αξία της έρευνας, των ερωτημάτων, της ανάπτυξης δημιουργικών τρόπων σκέψης. ΙΙΙ. Δεν αποθαρρύνονται οι μαθητές από δυσκολίες και αποτυχίες αφού αυτές υπήρξαν το δομικό υλικό των πιο διακεκριμένων μαθηματικών τομέων.

Δ) Αναγνώριση ότι τα μαθηματικά είναι πολιτισμικό προϊόν:

Ι. Δεν αναπτύχθηκαν μόνο για λόγους χρησιμότητας αλλά και για χάρη των ίδιων των μαθηματικών με κίνητρο την ψυχαγωγία, τη διανοητική περιέργεια, την ευχαρίστηση. ΙΙ. Επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. ΙΙΙ. Τα μαθηματικά στη σημερινή τους μορφή είναι προϊόν πολλών πολιτισμών κατά διάρκεια των αιώνων και όχι μόνο της δυτικής κουλτούρας. Η ανάδειξη μέσα στην τάξη των διαφορετικών προσεγγίσεων άλλων πολιτισμών οδηγεί σε επαναξιολόγηση, αποδοχή και σεβασμό προς αυτούς.

### 4.3.Μη παραδοσιακά μέσα και διδασκαλία μαθηματικών εννοιών

Σύμφωνα με τον Maanen (2000) η εισαγωγή της ιστορίας δεν περιορίζεται μόνο σε διδασκαλία με παραδοσιακές μεθόδους αλλά μπορεί να γίνει και με άλλα μέσα. Ως παραδείγματα μη παραδοσιακών μέσων αναφέρει, ανάμεσα σε άλλα, τα ιστορικά αποσπάσματα, τα φύλλα εργασίας, τη δραματοποίηση, τα μηχανικά όργανα και εργαλεία, τα λογισμικά.

### 4.4.Μηχανικά όργανα και εργαλεία

Κάποια από τα προτεινόμενα μη παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας είναι και τα ιστορικά όργανα και εργαλεία. Οι λόγοι που ενδείκνυνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών σχετίζεται με δυο αλληλένδετα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης: την ανάπτυξη συνείδησης της κοινωνικοπολιτισμικής διάστασης των μαθηματικών και τη δόμηση σε εμπειρική βάση αποδείξεων και εννοιών, καθώς φτιάχτηκαν για το σκοπό αυτό.

Η Bussi (2000) προτείνει τομείς για να εισάγουμε την ιστορία των μαθηματικών μέσω των ιστορικών οργάνων και εργαλείων όπως η αριθμητική, η άλγεβρα η γεωμετρία. Οι μαθητές εξερευνούν αρχαία όργανα και άλλα εργαλεία, τα κατασκευάζουν και τα χρησιμοποιήσουν ως ιστορικές πηγές. Η απτική διάσταση προσθέτει κάτι το ιδιαίτερο στην ιστορική διάσταση των δραστηριοτήτων με όργανα και εργαλεία, σημαντική τόσο για μικρούς και μεγαλύτερους μαθητές όσο και για τους ενήλικες. Πετυχαίνουμε αρχικά κινητοποίηση. Ιδιαίτερα οι μαθητές που δεν αγαπούν τα μαθηματικά, απολαμβάνουν την ενασχόληση με φυσικά αντικείμενα, αφού είναι πιο κοντά στις καθημερινές τους εμπειρίες, σε σχέση με τα συμβολικά μαθηματικά αντικείμενα που γεμίζει καθημερινά ο πίνακας. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι στην απτική εμπειρία βρίσκεται ένα σημαντικό κομμάτι των γνωστικών βάσεων κάθε μαθηματικής δραστηριότητας. Ως δραστηριότητες με ιστορικά όργανα και εργαλεία προτείνει επισκέψεις σε μουσεία ή εικονικές επισκέψεις (βίντεο, προσομοιώσεις, ιστοσελίδες) όπως και δραστηριότητες μέσα στην τάξη για να κατανοήσουν οι μαθητές κάποια συγκεκριμένη μαθηματική γνώση.

## 5. Ένα ζήτημα για την εκπαίδευση και τη διδασκαλία

Σύμφωνα με τους Bernard A., Chambon G., και Ehrhard C. (2010), ένα από τα προβλήματα που θέτει η σύγχρονη πραγματικότητα είναι αυτό της διαμόρφωσης των μελλοντικών γενεών στον κόσμο τον οποίο εισέρχονται. Για να απαντήσουμε σ'αυτό το στοίχημα, αυτή η διαμόρφωση δεν πρέπει να κατανοεί μόνο τις τεχνολογικές και επιστημονικές όψεις, αλλά και τις πολιτισμικές, πολιτικές και ηθικές. Είδαμε, πραγματικά, τη χρήση και την αίσθηση των αριθμών να μην αποτελεί πλέον αποκλειστικά μια τεχνική έξω από την καθημερινή, επαγγελματική ή πολιτική ζωή, αλλά ως ένα κομμάτι που διακατέχει τον κόσμο μας. Είμαστε βυθισμένοι, πριν καν το σκεφτούμε, μέσα σε ένα κόσμο τέτοιο όπου τίθεται ένα πρόβλημα πολύ απλό: ποια είναι τα διαθέσιμα μέσα ενός καλλιεργημένου πνεύματος για να έχει μια κριτική απόσταση από αυτό το οποίο θεωρείται ήδη δεδομένο; Πώς να σκεφτεί τη διαδρομή; Για παράδειγμα, κάθε μαθητής ή φοιτητής σήμερα είναι αντιμέτωπος, στην Ελλάδα σχεδόν μόνιμα, με τον αριθμητικό υπολογισμό των σχολικών ή πανεπιστημιακών του επιδόσεων. Γνωρίζουμε καλά ότι η ίδια η ύπαρξη αυτού του υπολογισμού και της αυθαίρετης βαθμονόμησης είναι για την πλειοψηφία αυτών ένα μελανό σημείο. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ένας μαθητής ή ένας φοιτητής θα μπορέσει να βελτιώσει τις επιδόσεις του από την στιγμή που θα σταματήσει να επιδιώκει αυτή τη βαθμολόγηση. Αλλά πώς θα το μπορέσει; Πώς βοηθιέται ώστε να το κάνει;

Αυτό το πρόβλημα είναι λεπτό διότι δεν έρχεται μόνο για να προστατέψει τις νέες γενιές από έναν κόσμο σύγχρονο ο οποίος τους έχει παρουσιαστεί ως δυνητικά εχθρικός. Είναι πολύ εύκολο πράγματι να μας ονομάσουν "θύματα" μιας πληθώρας πληροφοριών, μιας κυριαρχίας από τις τεχνολογίες της πληροφορίας, ή ακόμα μιας «χειραγώγησης από τους αριθμούς». Αυτή η ρητορική θυματοποίηση μας κάνει να ξεχνάμε από την άλλη πλευρά ότι είμαστε επίσης οι ενεργούντες αυτής της «χειραγώγησης» κάθε φορά που οφείλουμε για παράδειγμα να επιχειρηματολογήσουμε, να πάρουμε μια απόφαση με τη βοήθειά τους, ή να προσαρμόσουμε ένα τεχνολογικό μέσο στις ανάγκες μας. Είμαστε εμείς λοιπόν αυτοί που κάνουν τα θύματα και που οφείλουν να τα κάνουν. Ξεχνάμε επίσης ότι η ψηφιακή πληροφορία δεν είναι πλέον από δω και στο εξής ένα δεδομένο έξω από τον κόσμο μας αλλά το ένα από τα συστατικά του από τα οποία διακατέχεται, όποιος και αν είναι ο τομέας δραστηριότητας. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε, ακολουθώντας τον Pascal, ότι είμαστε υποχρεωμένοι σ'αυτή τη χρήση. Αφορά, πολύ απλά, τον κόσμο μας.

Για να καταφέρουμε να μπούμε σ' αυτόν τον κόσμο, τον δικό μας, διατηρώντας παράλληλα όμως μια συγκεκριμένη κριτική απόσταση, η μία επιθυμητή και φυσική προσέγγιση είναι η πολιτιστική και ιστορική προσέγγιση. Πράγματι, μελετάω την ιστορία γενικά σημαίνει κυρίως ταξιδεύω, μπαίνω μέσα σε ένα κόσμο γνώριμο αλλά ταυτόχρονα άγνωστο όπου ο Φρόϋντ, μιλώντας επιδέξια με τις ασάφειες τις γερμανικής γλώσσας, ονόμαζε Unheimlichkeit, το οικείο-ξένο (ή «ανήσυχη παραδοξότητα» όπως το μεταφράζουμε κάποιες φορές). Ορίστε ένα παράδοξο γεγονός: Οι άνθρωποι δεν σκέφτονταν πάντα την πραγματικότητα με αριθμητικούς όρους. Επιπλέον, από τότε που έμαθαν να το κάνουν, αυτό δεν ήταν χωρίς να τίθενται δυσκολίες και προβλήματα πολλών ειδών, τα οποία ήταν τεχνικά, πρακτικά, ηθικά, φιλοσοφικά. Αυτά είναι τα ερωτήματα που πρέπει να δίνονται προς ανακάλυψη στις νέες γενιές, για να γνωρίσουν τελικά σε ποιο κόσμο ζουν, διότι, πολύ καιρό πριν από αυτούς, εισήλθαμε σ'αυτόν και όχι χωρίς δυσκολίες ή ερωτήματα πάσης φύσεως. Αυτό που κάνει απαραίτητη αυτή την προσέγγιση είναι το γεγονός ότι το παρελθόν, ενώ είναι και όφειλε να είναι ταραγμένο, είναι πραγματικά πάντα κάτι το οικείο, το κοντινό, κάτι το οποίο παραμένει παρόν ακόμα και όταν αυτή η φαντοματική παρουσία δεν έχει αναγγελθεί. Ξαναφτιάχνοντας το κοινό παρελθόν της ανθρωπότητας ένα προϊόν με αντίκτυπο στο σήμερα είναι ένα από τα παραδοσιακά μέσα με τα οποία μπορούμε να «υποδεχτούμε» τους νέους σε ένα κοινόχρηστο χώρο που τον μοιραζόμαστε, ο οποίος αποτελεί κοινή κληρονομιά που ούτε εκείνοι ούτε εμείς έχουμε διαλέξει, αλλά στην οποία είμαστε ελεύθεροι στο να σκεφτούμε.

## 6. Ο *Jean Errard de Bar-le-Duc:* για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων

Jean Errard de Bar-le-Duc: Απόσπασμα από το έργο του *"Géométrie et Pratique générale d'icelle"* του 1594.

*Αφοσίωση στο Βασιλιά*

*Πιστεύω πως δε θα ήταν άσχημη η πρόθεση του να αφιερώσω τώρα στο Βασιλιά αυτό το έργο, όσο μικρό και αν είναι, καταλαβαίνοντας ωστόσο αυτό που είναι το πιο ωραίο και* *το πιο εξαιρετικό στη γεωμετρία: ελπίζοντας ότι κάτω από την προστασία και την εύνοια της μεγαλειότητάς σας θα το δει και θα το αποδεχτεί το κοινό και (με τη βοήθεια του θεού) θα υποκινήσει, με την ευκολία και τη συντομία του, την αριστοκρατία να ερευνήσει τα μαθηματικά, τις πραγματικές και μοναδικές επιστήμες, που δεν ωφελούν μόνο κατά τη διάρκεια της ειρήνης αλλά παράγουν τα καλύτερα αποτελέσματά τους κατά την περίοδο του πολέμου…*

*Στους αναγνώστες*

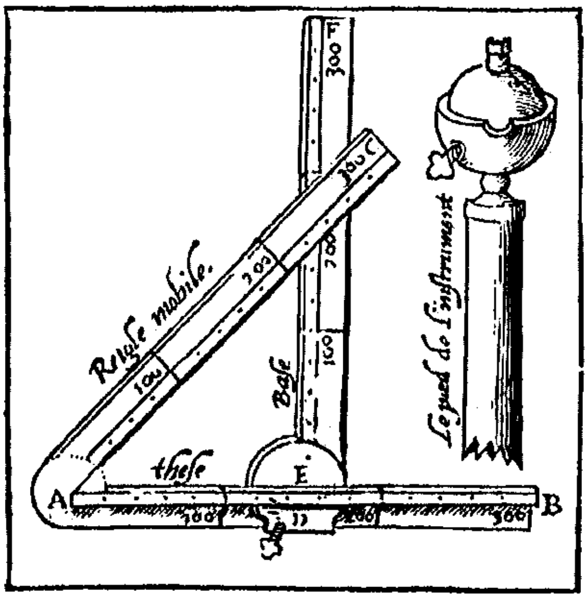
*Σε αυτή την πραγματεία θέτω πρώτα τον προσδιορισμό των λέξεων, και της ορολογίας για τον καθησυχασμό των ανεκπαίδευτων, και των λιγότερο εξοικειωμένων στα μαθηματικά: η γνώστες δε θα του βρουν καθόλου δύσκολο, ούτε τη διάταξη των κεφαλαίων και των συμπερασμάτων, σύμφωνα με την επιδεξιότητά τους για το λόγο ότι διευθέτησα την έκφρασή μου με τρόπο που να καταλήγει στο ίδιο συμπέρασμα. Περιέπλεξα μέσα στο έργο αποδείξεις από τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη […]. Γι' αυτό παρακαλώ όλους του φίλους των καλών επιστημών, να κατακτήσουν σε μεγάλο βαθμό την άνεση κάποιου όταν κάποιος άλλος τα πηγαίνει καλύτερα.*

*Ορισμοί*

*Μετράω ένα μέγεθος, σημαίνει ψάχνω πόσες φορές χωράει σ' αυτό κάθε κοινό μέτρο. Το μέτρο, είναι ένα πεπερασμένο μέγεθος, από το οποίο μετρούνται όλα τα μεγέθη αυτού του είδους, όπως το πόδι, το πάτημα, η σημύδα, η οργιά κ.ο.κ. που είναι γνωστά μέτρα, στα οποία όλα τα υπόλοιπα είδη αναφέρονται: αλλά με τέτοιο τρόπο που το πιο μικρό να μετράει ένα ίσο με αυτό και ένα μακρύτερο από αυτό, αλλά το πιο μακρύ να μη μπορεί να μετρήσει το πιο κοντό: διότι οι πιο κοντές γραμμές ονομάζονται μισά, τρίτα, τέταρτα κ.ο.κ των μακρύτερων. Συμμετρικά μήκη είναι αυτά που μπορούν να μετρηθούν από το ίδιο μέτρο. Ασύμμετρα μήκη, αυτά που δεν μπορούν να μετρηθούν από το ίδιο μέτρο […]. Μετράω κάποια επιφάνεια, σημαίνει ψάχνω πόσες φορές κάποια άλλη μικρότερη επιφάνεια περιέχεται σε αυτήν. Και αυτές οι μικρότερες επιφάνειες, ονομάζονται τετραγωνική ίντσα, τετραγωνικό πόδι, τετραγωνικό πάτημα, τετραγωνική σημύδα, τετραγωνική οργιά κ.ο.κ που είναι τα πιο γνωστά μέτρα με τα οποία συνηθίσαμε να* *χρησιμοποιούμε τα μεγαλύτερα μέτρα επιφάνειας. Μετράω ένα σώμα, σημαίνει ψάχνω πόσες φορές κάποιο άλλο μικρότερο σώμα μπορεί να περιέχεται σε αυτό.*

*Κεφάλαιο I: Από τη μέτρηση ευθείων γραμμών. Και εισαγωγή στη σύνθεση του οργάνου.*

*Δεδομένου ότι οποιαδήποτε διάσταση αποτελείται από μήκος, ή από μήκος και πλάτος, ή από μήκος, πλάτος και βάθος: θα ξεκινήσουμε από τη διάσταση του μήκους μόνο, και κυρίως των ευθείων γραμμών που είναι το πρώτο, πιο απλό, και από το οποίο εξαρτώνται τα δύο άλλα είδη μέτρησης: και μου φαίνεται ότι είναι κατάλληλο να θέσω πρώτα κάποιο είδος οργάνου, με το οποίο θα μπορούσαμε να έχουμε πιο εύκολα την εισαγωγή στη μέτρηση ευθείων απρόσιτων γραμμών: όχι ότι θέλω να αναγκάσω κανέναν να σταματήσει σ' αυτό (δεδομένου ότι το επινοήσαμε ή μπορούμε να το επινοήσουμε, το οποίο μπορεί να είναι πιο ευχάριστο και άνετο, ανάλογα με την ποικιλία των αντιλήψεων), αλλά έτσι θα βοηθήσω μόνο τον Αναγνώστη (τον υπομονετικό) να δει με το μάτι, και να αντιληφθεί τους λόγους πάνω στους οποίους οι ακόλουθες αποδείξεις στηρίχθηκαν.*




*Έτσι θα επιθυμούσα η σύνθεση να έχει ως εξής: δύο μπρούτζινοι ράβδοι εντελώς ευθείες να είναι συνδεδεμένοι σε σχήμα διαβήτη ως AB, AC, και με μήκος ο καθένας ενάμιση πόδι περίπου, και με πλάτος μία ίντσα, κινούμενοι και περιστρεφόμενοι στο κέντρο A.*

*Έπειτα στη ράβδο AB (που θα την ονομάζουμε θέση) να υπάρχει μία χάραξη στην οποία θα εφαρμόσει ένας ημιδακτύλιος σημειωμένο εδώ ως D, στον οποίο θα στηρίζεται μια άλλη ράβδος EF (ονομαζόμενη βάση) η οποία θα είναι παρόμοιου μήκους αλλά ίσου πλάτους με τις άλλες, ή λίγο πιο στενή, και η οποία εφαρμόζεται με τον ημιδακτύλιο κατά μήκος της AB, και με τρόπο που στο κέντρο της E (που θα είναι ακριβώς πάνω στην ευθεία γραμμή AB), θα μπορεί να κλείνει και να κάνει την γωνία που θα θέλουμε με τη ράβδο AB, κατά μήκος και ενώνοντας τις επιφάνειες των ράβδων της θέσης και της κινητής ράβδου AC, και στην οποία ωστόσο θα μπορεί να είναι σταθεροποιημένη μέσω κάποιας βίδας εφαρμοσμένης στον λεγόμενο ημιδακτύλιο. Όντας λοιπόν έτσι κατασκευασμένο, και οι διόπτρες όντας εστιασμένες στα σημεία ABC (όπως συνηθίζουμε να κάνουμε σε όλα τα όργανα) κάθε μία από τις ονομαζόμενες τρεις ράβδους θα είναι χωρισμένη σε 300 ίσα μέρη ή σε άλλο αριθμό που θα θέλαμε.*

*Κεφάλαιο ΙΙ: Πως μετρούνται οι μακρινές ευθείες γραμμές σε μια επίπεδη επιφάνεια.*

*Για να εισέλθουμε λοιπόν στη μέτρηση των ευθείων γραμμών πρέπει να είναι δεδομένο ότι κάποιες είναι ολοκληρωτικά προσβάσιμες, όπως αυτές τις οποίες μπορούμε να μετρήσουμε ολόκληρες και κατά μήκος μηχανικά και χωρίς κανένα εμπόδιο. Άλλες είναι προσβάσιμες μόνο κατά ένα μέρος, όπως όταν αγγίζουμε το ένα άκρο αυτής, και δεν μας επιτρέπεται να περάσουμε στην άλλη. Και άλλες είναι μη προσβάσιμες ολοκληρωτικά, όπως όταν είναι απομακρυσμένες από εμάς με τρόπο που να μη μας είναι δυνατό να τις φτάσουμε ή να προσεγγίσουμε.*

*Έτσι η μέτρηση των τελευταίων εξαρτάται από τη μέτρηση των ημι-προσβάσιμων, και η μέτρηση των ημι-προσβάσιμων εξαρτάται από τη μέτρηση των ολοκληρωτικά προσβάσιμων. […]. Και αυτό είναι που θα παρουσιαστεί εύκολα από εδώ και πέρα.*

*Έχουμε λοιπόν τη γραμμή AB, προτεινόμενη προς μέτρηση, στο άκρο A της οποίας, τραβάω κάθετα, και με ορθή γωνία τη γραμμή AC, την οποία μετράω και περιλαμβάνει 5 πόδια, στην οποία και κατά μήκος αυτής θέτω τη ράβδο της βάσης (όπως η DE) η οποία βάση θα είναι παράλληλη στην AB, σύμφωνα με την 28 p. του 1. Αλλά πρέπει το όργανο να είναι τοποθετημένο με τέτοιο τρόπο που να έχει από το C έως το D, τόσες υποδιαιρέσεις μέτρησης του οργάνου όσα θα είναι τα πόδια από το C μέχρι το A. Έτσι, πρέπει να κινηθεί η κινούμενη ράβδος CE, μέχρι εκείνο το οπτικό πεδίο στο οποίο να μπορούμε να δούμε από εκείνες τις διόπτρες το άκρο B: έτσι λοιπόν λέω ότι το μικρό* *τρίγωνο CDE, είναι ισογώνιο και ανάλογο με το μεγάλο ABC, σύμφωνα με το 4 [p.] του 6. Η γραμμή λοιπόν DE, που κόβει τις πλευρές του μεγάλου τριγώνου CA και CB, στα σημεία D, E τις κόβει αναλογικά σύμφωνα με το 2 του 6. Γι' αυτό το λόγο λοιπόν CD, ως προς DE είναι παρόμοιο με την CA, ως προς AB.*


*Έτσι λοιπόν αν στη CD περιέχονται 5 υποδιαιρέσεις μέτρου και βαθμίδων, και βρίσκω ότι στην DE περιέχονται 10, θα καταλήξω ότι στη CA περιέχονται 5 πόδια, και η γραμμή AB θα περιέχει 10 πόδια. Και αν θα ήθελες επιπλέον να γνωρίσεις το μήκος της CB, κοίταξε πόσες βαθμίδες θα έχει η CE, και τόσα πόδια θα έχει η CB, για τους ίδιους λόγους. Αλλά αν πιο άνετα ήθελες να πάρεις την προς μέτρηση γραμμή διαγώνια, όπως η AX, βάλε με τέτοιο τρόπο το όργανο ώστε η ράβδος της θέσης να είναι κατευθείαν επάνω στη γραμμή XA, και από τη X μέχρι τη βάση N, να είναι τόσες βαθμίδες όσα τα πόδια που περιέχονται στη XA, και θεωρούμε ότι έχει τέσσερα από αυτά. Έπειτα, το κάνουμε έτσι ώστε η βάση NT να είναι παράλληλη στην AB, και ανυψώνουμε την κινητή στο σημείο και άκρο B, έτσι λοιπόν το σημείο που αυτή θα κόψει τη βάση (γνωστό ως T) θα δείξει το πραγματικό μήκος της AB: διότι όσες υποδιαιρέσεις μέτρου περιέχονται στην NT τόσα πόδια θα περιέχονται στην AB (το τρίγωνο XNT είναι ισογώνιο και ανάλογο με το τρίγωνο XAB) σύμφωνα με τα προκείμενα.*

## 6.1.Ιστορική παρατήρηση

Ο Jean Errard de Bar-le-Duc (1554-1610) είναι ένας Γάλλος μηχανικός που πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της καριέρας του στην υπηρεσία του Henri IV. Γεννημένος στο Bar le Duc σε μια σημαντική οικογένεια, δε γνωρίζουμε τίποτα για την αρχική του εκπαίδευση εκτός από το ότι πρέπει να ήταν άριστου επιπέδου, κρίνοντας από τα πρώτα του γραπτά. Γνωρίζουμε ότι σπούδασε στη Χαϊδεβέργη κοντά στα 1573 (προσηλυτίστηκε στον προτεσταντισμό την ίδια εποχή), ότι δούλεψε και σπούδασε στην αυλή του καθολικού δούκα της Λοραίνης, Κάρολο III, κοντά σε μηχανικούς από τους οποίους πολλοί προέρχονταν από την Ιταλία, και τέλος ότι ταξίδεψε ο ίδιος στην Ιταλία. Πραγματικά, ένα μέρος της δουλειάς του πάνω στα μαθηματικά όργανα, που δημοσιεύτηκε στα 1584, εμπνεύστηκε από δουλειές Ιταλών, όπως επίσης και η πραγματεία του με τα οχυρωματικά έργα, La fortification démontrée et réduite en art, που δημοσιεύτηκε στα 1600. Από την άλλη γνώριζε τα αρχαία κείμενα, μιας και δημοσίευσε πολλές γαλλικές μεταφράσεις του Ευκλείδη (τα έξι πρώτα βιβλία δημοσιεύτηκαν στα 1588, τα εννιά πρώτα μετά το θάνατό του). Γενικά, η πρόλογοί του αφθονούν από κλασικές καταστάσεις και είναι σίγουρα μέσα στο πνεύμα του γαλλικού ανθρωπισμού της εποχής, όπως θα τον δούμε πιο μετά. Στις αρχές του 1588, εγκατέλειψε την υπηρεσία του δούκα (του καθολικού) της Λοραίνης και πήγε στο δούκα της Μπουγιόν, πρίγκηπα (προτεστάντης) του Σεντάν. Ο Errard πήρε μέρος έτσι στην άμυνα του οχυρού του Jametz, που πολιορκούνταν από τα στρατεύματα της Λίγκας. Μολονότι το οχυρό καταστράφηκε το 1589, οι ταλαντούχοι μηχανικοί που επέδειξε ο Errard κατά τη διάρκεια της πολιορκίας ακολούθησαν τον Henri τον IV, που ανέβηκε στο θρόνο, στο να καταταγούν στην υπηρεσία του. Ο βασιλιάς έχει λοιπόν ανάγκη τις ικανότητές τους για να ελέγχει τα εδάφη του: όπως το υπενθυμίζει ο Errard στον πρόλογο της Γεωμετρίας του, «*οι Γάλλοι ευγενείς ήταν αναγκασμένοι να ψάξουν και να ζητιανέψουν "τις επιστήμες" σε ξένα μέρη*», κάνοντας εδώ υπαινιγμό στην πρακτική του να ακολουθούν προσφερόμενη εκπαίδευση στα ιδιαίτερα μαθήματα ή στα πανεπιστήμια που το βρίσκουμε πραγματικά στην Ιταλία όπως τα μαθήματα που παραδίδει ο Γαλιλαίος στην "στρατιωτική πυξίδα" του. Πραγματικά, οι βασιλιάδες και οι πρίγκιπες βοηθήθηκαν πολύ συχνά από Ιταλούς μηχανικούς (περίπου αποκλειστικά το $16^{ο}$ αιώνα) ή Γερμανούς. Ο Errard θα υπηρετήσει τον Henri IV σε μεγάλο αριθμό των εδαφών του και θα του το ανταμείψει: χρήστηκε, το 1599 «*τακτικός μηχανικός οχυρώσεων της περιφέρειας Picardie και της Ile de France*», αυτό σημαίνει υπεύθυνος στο σύνολο των αμυντικών έργων αυτής της περιφέρειας, και ο βασιλιάς τον έχρισε ευγενή την ίδια χρονιά. Οι μαρτυρίες επιβεβαιώνουν τη διατήρηση του θαυμασμού και του δεσμού στο βασιλιά ώστε ο Errard το άφησε να διαφαίνεται σε πολλούς από τους προλόγους του, δέσιμο εξάλλου αμοιβαίο. Είναι άλλωστε ο βασιλιάς αυτός που θα ζητήσει στον Errard να δημοσιεύσει το έργο του για τις οχυρώσεις και θα συμβάλει στη χρηματοδότησή του. Αυτό το βιβλίο, που προμηνύει τα έργα του Vauban, είναι ένας σημαντικός σταθμός στην ιστορία των μοντέρνων οχυρωματικών έργων και παραμένει η σπουδαιότερη παραγωγή του Errard. Με τη δομή του και το υποκείμενο σχέδιο, αντιπροσωπεύει εξίσου ένα σημαντικό σταθμό στη σταδιακή συγκρότηση της «*επιστήμης της μοντέρνας μηχανικής*» και δεν είναι αποκομμένο από αυτό της Γεωμετρίας που δημοσιεύτηκε έξι χρόνια νωρίτερα.

Αυτή η “*Γεωμετρία και η γενική πρακτική της*”, που εκδόθηκε το 1594, δεν είναι το πρώτο έργο του Errard καθότι βλέπουμε πως δέκα χρόνια νωρίτερα εξέδωσε το έργο του “*πρώτο βιβλίο για τα μαθηματικά όργανα*”. Το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά όργανα, κυρίως τα όργανα μέτρησης, είναι ένα κοινό σημείο σε όλα τα έργα του Errard, όπως το βλέπουμε στο απόσπασμα που προτείνεται εδώ. Αλλά είναι κυρίως με την πραγματεία του για τις οχυρώσεις, δημοσιευμένο το 1600, που η “Γεωμετρία” του 1594 έχει τα περισσότερα κοινά σημεία. Διακρίνουμε πραγματικά ότι ο Errard είχε αντιληφθεί το έργο του ως μια εισαγωγή στην πραγματεία των οχυρώσεων. Τα δύο κείμενα απευθύνονται όλα ειδικά στη «γαλλική αριστοκρατία», για την υπηρεσία του στο βασιλιά κατά τη διάρκεια του πολέμου. Στις εισαγωγικές προθέσεις στο κείμενό του 1600 που τους έγραψε, ανακοινώνει άτακτα ότι «*η παρούσα ειρηνική ανάπαυλα, δε μπορεί πλέον να χρησιμοποιείται αξιέπαινα από αυτούς που είναι οι δυνάμεις του πολέμου, που αγόρασαν μια βέβαιη και σίγουρη αναγνώριση γι΄αυτό που θα έπρεπε να θέσουν σε εφαρμογή με την πρώτη ανατροπή: η Πρακτική είναι τόσο τυφλή χωρίς τη Θεωρία, όσο και η Θεωρία είναι μονόχειρας χωρίς την Πρακτική*». Αυτή η αλληλεξάρτηση της θεωρίας (Γεωμετρία) με τη μηχανική πρακτική είναι στην καρδιά της σκέψης του Jean Errard, σε ένα διπλό νόημα. Από τη μια πλευρά, η γεωμετρία οικοδομεί το στρατηγικό σκεπτικό της, όπως το αποδεικνύει περίτρανα η πραγματεία των οχυρώσεων: αυτή η τελευταία είναι σε μεγάλο μέρος καθοδηγούμενη, κυρίως για τα κεφάλαια που αφιερώνονται στην κατασκευή οχυρών θέσεων, από την κατασκευή εικονικών σχεδίων που χρησιμεύουν από την επιφάνεια ως τα φρούριά τους. Ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων είναι καταρχήν γεωμετρικός, βασισμένος κατά ένα μέρος στις βασικές αρχές της οχύρωσης που το εκφράζει στο πρώτο μέρος, και κατά ένα άλλο μέρος στην κατανόηση των "*Στοιχείων*" του Ευκλείδη στο οποίο ο Errard παραπέμπει συνεχώς, όπως το κάνει ήδη στη "*Γεωμετρία*" του 1594.

Από την άλλη πλευρά, χτίζει επίσης την προσέγγισή της με τη θεωρία, απ' όπου η έκθεση απευθύνεται κυρίως σε ανθρώπους του πολέμου: ο Errard τους θεωρεί βασική προϋπόθεση για πολλούς λόγους, άσχετους από τη μαθηματική θεωρία: πρέπει λοιπόν να τους επιδείξει τη χρησιμότητά της. Επίσης η θεωρητική έκθεση είναι απευθείας δομημένη από μία συγκεκριμένη ακολουθία δοκιμασιών κλιμακούμενης δυσκολίας, όπου, στη "*Γεωμετρία*", το αποδεδειγμένο όφελος είναι να «*δούμε με το μάτι, και να αντιληφθούμε τους λόγους στους οποίους στηρίχθηκαν οι ακόλουθες αποδείξεις*». Όπως το βλέπουμε ο αναγνώστης είναι πραγματικά κατάλληλος στο να αναφέρεται στις υποδείξεις του Ευκλείδη. Είναι αυτή η ίδια ανησυχία, εύκολα αντιληπτή στον πρόλογο, που οδηγεί τον Errard να συντάξει τα κείμενά του στα γαλλικά έτσι ώστε να "*μελετηθεί*", όπως εξηγεί στην πραγματεία των οχυρώσεων, «να γνωστοποιήσει σύντομα και με σαφήνεια», αναγνωρίζοντας ότι «το πλήθος των τόσο πολλών και διαφορετικών πραγμάτων κάνει <τους Μεγάλους> ανυπόμονους να ακούσουν αυτό που πολύ συχνά τους είναι απολύτως απαραίτητο να γνωρίζουν για την ίδια την υπηρεσία τους».

Σε όλα αυτά φαίνεται ότι ο Errard είναι ένας άξιος κληρονόμος της ανθρωπιστικής παράδοσης που ήξερε να ενσαρκώνει τα μαθηματικά στον κύκλο της εγκυκλοπαιδικής γνώσης και να τα κάνει ένα δομικό εργαλείο για ένα κύκλο πιο μεγάλο από εκείνο των λόγιων, των «*σοφών*» για τους οποίους μιλάει επίσης ο πρόλογος του Errard. Αυτή η παιδαγωγική και ανθρωπιστική ανησυχία καταγράφεται στο έργο του για τη μεγάλη ιστορία των πραγματειών της γεωμετρίας που θα προτείνει τελικά μια νέα προσέγγιση της γεωμετρίας, στο παράδειγμα των "*Στοιχείων της Γεωμετρίας*" του Clairaut ο οποίος, ενάμιση αιώνα αργότερα, θα παραμερίσει την ευκλείδεια γεωμετρία προτείνοντας μια προσέγγιση η οποία είναι των «αρχαρίων», με μια αίσθηση περισσότερο ιστορική παρά παιδαγωγική. Αλλά το έργο του Errard δεν αντιλαμβάνεται ανταγωνιστικά τον Ευκλείδη αλλά προτρέπει στην ανάγνωσή του, με μια οπτική η οποία παραμένει εγκυκλοπαιδική και γυρίζει γύρω από την πρακτική εφαρμογή.

Γι’ αυτούς τους ίδιους λόγους, το κείμενο δεν είναι εξολοκλήρου κατανοητό, αν δεν συμβουλευτεί κάποιος τα “*Στοιχεία*” του Ευκλείδη, στα οποία, το ίδιο το κείμενο μας παραπέμπει.

### 6.2.Παιδαγωγική παρατήρηση

Το ουσιαστικό ενδιαφέρον του κειμένου του Errard απορρέει από την ίδια του τη φύση: είναι ένα κείμενο το οποίο σκοπεύει να μας εισάγει στην επιστημονική γεωμετρία με μια πρακτική προσέγγιση και επικεντρωμένη σε μια εφαρμογή με όργανα και σε προβλήματα.

Αυτά τα όργανα, που είδαμε εδώ ή άλλα, δεν είναι δύσκολα για να πραγματοποιηθούν: μπορούμε λοιπόν να εμπνευστούμε από το κείμενο για να προτείνουμε στους μαθητές να πραγματοποιήσουν αληθινές μετρήσεις συνδυάζοντας αυτές τις πρακτικές δραστηριότητες με τη θεωρία αυτού του κειμένου.

Παρουσιάζει πραγματικά ένα πολιτιστικό ενδιαφέρον πολύ ισχυρό, διότι υπό αυτές τις δραματικές συνθήκες και το θρήσκευμα του συγγραφέα του όλα τα πράγματα που αντανακλώνται μέσα από τα αφιερώματα και τον πρόλογό του, μας τοποθετούν κατευθείαν στην καρδιά της γαλλικής αναγέννησης και πιο συγκεκριμένα στους θρησκευτικούς πολέμους. Ειδικότερα, τοποθετεί επίσης τον αναγνώστη στο πνεύμα του προ-κλασικού ανθρωπισμού, ολοκληρωτικά κατευθυνόμενο προς μια μείξη πρακτικής χρησιμότητας και κοινωνίας: είναι ένας τρόπος να κάνεις τους μαθητές να σκεφτούν πάνω σε αυτά που είναι (ή που θα έπρεπε να είναι) η γνώση και η γενική κουλτούρα και την πιθανότητα να υποστηριχθεί μια οπτική η οποία είναι ταυτοχρόνως «χρήσιμη» και «επιθυμητή» (ερευνώντας γι’ αυτή την ίδια) για τη σχολική γνώση. Αυτό είναι εξίσου ένα αποτελεσματικό μέσο για να μυήσουμε τους μαθητές στο ακριβές πεδίο αυτού που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε «τεχνολογική σκέψη», που εγκαθιστά ένα συμβιβασμό ανάμεσα στην κυριαρχία του υπολογισμού των περιορισμένων δεδομένων μιας πραγματικής κατάστασης και την κυριαρχία των αποφάσεων σε ένα χώρο πολιτικό και οικονομικό.

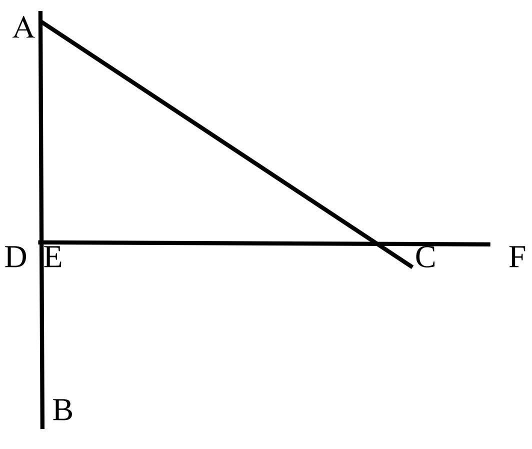
Ένα συμπληρωματικό ενδιαφέρον είναι συνδεδεμένο με τις αποδείξεις του Errard, που επέτρεψαν πολύ συχνά υπολογισμούς τους οποίους θα μπορούσαμε να περιμένουμε και οι οποίοι είναι πραγματικά παρόντες σε άλλες γεωμετρικές πρακτικές.

Η επιλογή των ενοτήτων και των διαβαθμίσεων είναι ξεκάθαροι και επιτρέπει την απευθείας ανάγνωση της υπό ερεύνηση μέτρησης πάνω στη συσκευή: έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι η παράκαμψη για μια μέτρηση δεν είναι πάντα απαραίτητη και ότι υπάρχουν άλλοι τρόποι σκέψης για την επίτευξη μιας μέτρησης. Αυτό το «εργαλειακό πλεονέκτημα» είναι εξάλλου πολύ πιθανό η επιθυμία του Errard: τα μαθηματικά όργανα αντιπροσωπεύουν κατά κάποιο τρόπο τους «πραγματοποιούμενους υπολογισμούς» πάνω σε υλικά αντικείμενα: κάποιοι απλοί χειρισμοί επιτρέπουν να αποφύγουμε τους υπολογισμούς και τις αριθμητικές πράξεις, και ιδιαίτερα, για ορισμένους από τους σύγχρονούς τους, την τραγική μέθοδο των τριών (Bernard A., Chambon G., και Ehrhard C., 2010).

## 7. Όργανο μέτρησης οριζόντιων αποστάσεων: το παράδειγμα του Errard.

Υπάρχουν ποικίλα εργαλεία και δραστηριότητες στην ιστορία της πειραματικής γεωμετρίας με τα οποία μπορεί να ασχοληθεί κάποιος, όπως είναι αυτό του Errard το οποίο θα μας απασχολήσει εδώ. Αυτό χρησιμοποιούνταν για να πραγματοποιούνται σκοπεύσεις που επέτρεπαν τον προσδιορισμό απρόσιτων αποστάσεων: πλάτος ενός ποταμού, απομάκρυνση ενός πλοίου κλπ. Η χρήση αυτού του εργαλείου βασίζεται στις ιδιότητες των ισοσκελών και των ορθογωνίων τριγώνων. Η ύπαρξη αυτών των τριγώνων πάνω στο εργαλείο δίνει ύπαρξη σε οπτικά τρίγωνα στο χώρο και αναδύει την αναγκαιότητα της κατανόησης της έννοιας του τριγώνου.

Έχουμε ένα όργανο το οποίο έχει την εξής διαμόρφωση:



Η ράβδος AB είναι σταθερή και την ονομάζουμε θέση, ενώ η ράβδος AC είναι κινητή. Κάθετα στην AB προεξέχει μία ακόμα ράβδος, η EF, που την ονομάζουμε βάση. Η EF ενώνεται με την AB στο σημείο D και μπορεί να μετακινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω στην AB ώστε να μπορούμε να κάνουνε τη γωνία που θέλουμε με την AC. Όλες οι ράβδοι είναι αριθμημένες. Στο σημείο A βρίσκεται δακτύλιος σκόπευσης.

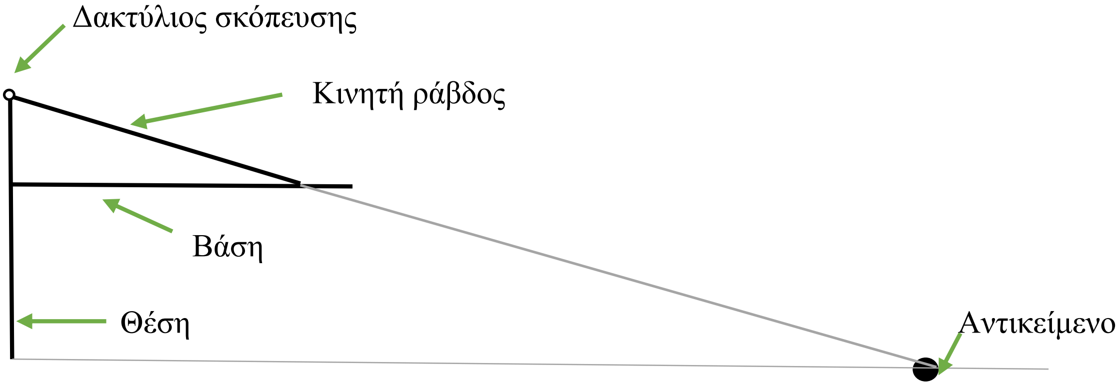
Η λειτουργία του έχει ως εξής:

Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ του οργάνου και του αντικειμένου.

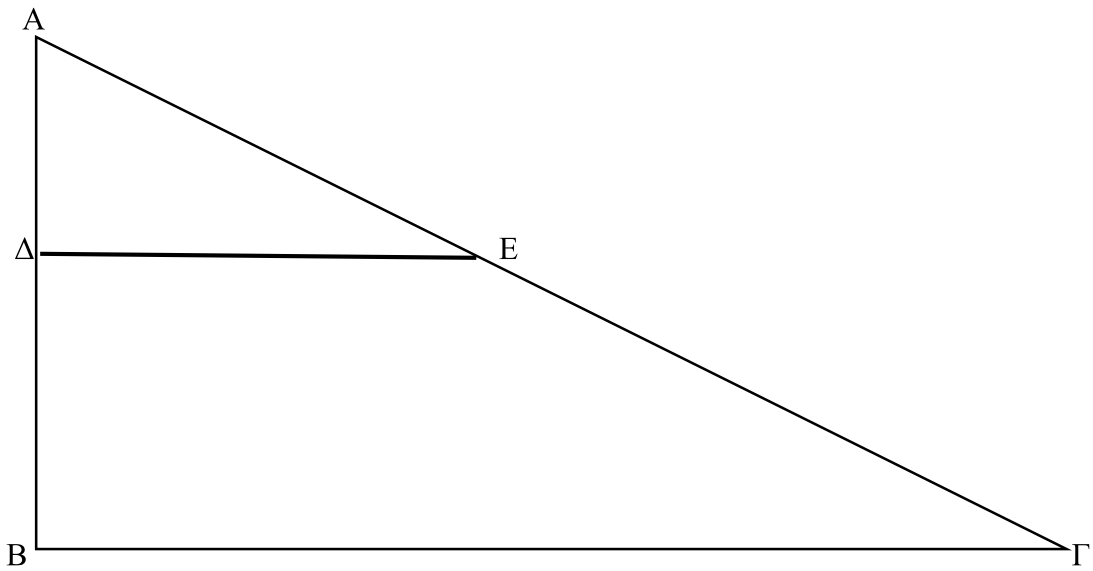
α) θα στερεώσουμε τη Θέση στο έδαφος ώστε να κάνει ορθή γωνία.

β) θα τοποθετήσουμε το μάτι μας στο δακτύλιο και θα στοχεύσουμε με την κινητή ράβδο το αντικείμενο.

γ) θα σύρουμε τη Βάση ώστε να συναντήσει την κινητή ράβδο και να σχηματίσουν, μαζί με το επάνω τμήμα της Θέσης, ένα ορθογώνιο τρίγωνο.




Έτσι θα έχουμε τον παρακάτω γεωμετρικό σχηματισμό:



Παρατηρούμε ότι:

1) Έχουμε δύο τρίγωνα, ένα μικρό (ΑΔΕ) και ένα μεγάλο (ΑΒΓ).
2) Η ΔΕ είναι κάθετη στην ΑΒ, άρα ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες.
3) Η Α είναι κοινή γωνία.
4) Τα δύο τρίγωνα είναι ισογώνια και όμοια.

Άρα η σχέση ΑΔ προς ΑΒ είναι ανάλογη με τη σχέση ΑΕ προς ΑΓ και με τη σχέση ΔΕ προς ΒΓ. Δηλαδή, ΑΔ/ΑΒ = ΑΕ/ΑΓ = ΔΕ/ΒΓ.

Δεδομένου ότι όλες οι ράβδοι είναι αριθμημένες κατανοούμε την ευκολία του υπολογισμού της άγνωστης απόστασης ΒΓ.

Έτσι, αν έχουμε για παράδειγμα:

ΑΒ= 1,5 μέτρα

ΑΔ= 50 εκατοστά

Αναλογία

ένα προς τρία

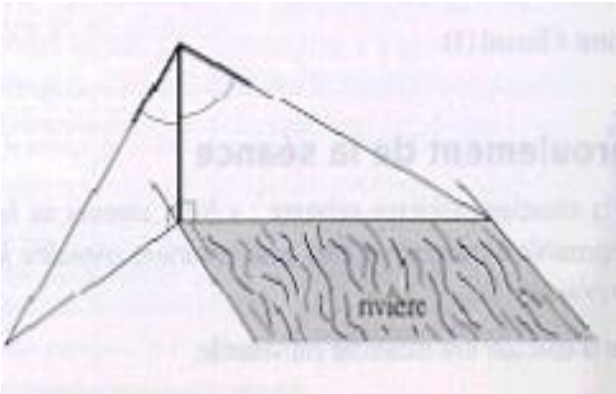
Τότε, θα έχουμε:

ΑΕ είναι ίση με το 1/3 της ΑΓ και

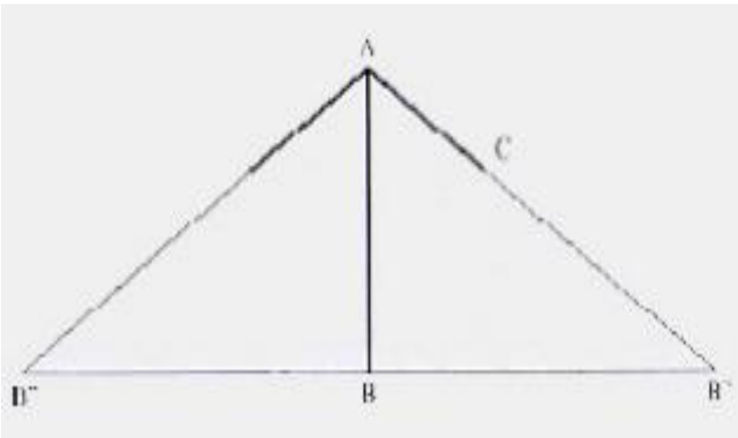
ΒΓ είναι τριπλάσια από τη ΔΕ.

Συνεπώς, μετράμε την ΔΕ και υπολογίζουμε την άγνωστη απόσταση ΒΓ.

Η άλλη εναλλακτική λειτουργεία του εργαλείου του Errard βασίζεται στις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου. Στοχεύουμε πάλι με το δακτύλιο σκόπευσης, π.χ. το απρόσιτο σημείο που θέλουμε να μετρήσουμε, και μετακινούμε την κινητή ράβδο. Αφού τοποθετήσουμε την κινητή ράβδο στη σωστή θέση, περιστρέφουμε ολόκληρο το όργανο προς κάτι το προσιτό που μπορούμε να μετρήσουμε όπως εικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.



Με αυτό τον τρόπο το απρόσιτο σημείο που θέλουμε να μετρήσουμε έχει την ίδια απόσταση με κάποιο άλλο σημείο στο οποίο έχουμε πρόσβαση και μπορούμε εύκολα να το μετρήσουμε με το μέτρο. Έτσι καταλήγουμε να έχουμε το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα:



# ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

# 1. Γενικά

Στην παρούσα εργασία οι έννοιες της απόστασης και των τριγώνων εξετάστηκαν από τη σκοπιά της Γεωμετρίας, για αυτό και χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006, 2012). Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) είναι ο χώρος που έχει οργανωθεί με τρόπο που να καθίσταται εφικτή για το χρήστη του χώρου – μαθηματικό, φοιτητή ή μαθητή – η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Συνεπώς, τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ. Διακρίνονται τρία επίπεδα: ο ΓΧΕ αναφοράς, που καθορίζεται από μια κοινότητα μαθηματικών ή στην εκπαίδευση από το πρόγραμμα σπουδών, ο κατάλληλος ΓΧΕ, που σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα για μια δεδομένη τάξη, και ο προσωπικός ΓΧΕ, που αναπτύσσεται στην πράξη από τον τελικό χρήστη, εν προκειμένω τον κάθε μαθητή. Διακρίνονται, επίσης, διαφορετικά επιστημολογικά παραδείγματα. Εδώ, μας ενδιαφέρει η Γεωμετρία 1 (GI) – όπου κυριαρχεί ο πειραματισμός και επιτρέπονται οι πρακτικές αποδείξεις, οι μετρήσεις, η χρήση αριθμών και οι κατά προσέγγιση απαντήσεις – και η Γεωμετρία 2 (GII), με αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο ΓΧΕ περιλαμβάνει τρία συστατικά: α) το χώρο με τα σχήματα, β) τα τεχνουργήματα-εργαλεία και γ) το θεωρητικό σύστημα αναφοράς, με τους ορισμούς και τις ιδιότητες. Σε ένα δεύτερο, γνωστικό επίπεδο εντάσσονται τρία είδη διαδικασιών: η οπτικοποίηση, η κατασκευή και η απόδειξη. Στην οπτικοποίηση περιλαμβάνεται και η ανασύνθεση των σχημάτων με υλικό τρόπο ή με ανα-οργανωτικές γραμμές ή μόνο με το βλέμμα (Duval, 2005).

Όσον αφορά τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών, ο Brousseau (2002) έχει υποστηρίξει ότι η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση επιλεγμένων προβλημάτων, μέσω των οποίων οι μαθητές θα διαπιστώσουν την αναποτελεσματικότητα μιας γνώσης ή αντίληψης. Σημείωσε, όμως, ότι τα προβλήματα πρέπει να επιλέγονται με τρόπο που οι μαθητές να κινητοποιούνται και, ακολούθως, να δρουν, να συζητούν και να σκέφτονται, προκειμένου να τα επιλύσουν.

Επιπλέον, τα λεγόμενα εποικοδομητικά μοντέλα διδασκαλίας έχουν τονίσει την ανάγκη η διδασκαλία να κλείνει με μια μεταγνωστική φάση, στην οποία «ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να του περιγράψουν την παλιά και τη νέα τους γνώση και να αντιληφθούν τις διαφορές της» (Καριώτογλου, 2006: 36). Μια πρακτική που μπορεί να βοηθήσει στην αλλαγή των ιδεών των μαθητών είναι και η χρήση κειμένων αντιπαράθεσης (refutation texts) (Tippett, 2010). Σε αντίθεση με τα παραδοσιακά κείμενα, που απλώς εκθέτουν και επεξηγούν την ισχύουσα επιστημονική άποψη, τα κείμενα αντιπαράθεσης παραθέτουν επιπλέον και κάποια διαδεδομένη εναλλακτική ιδέα, αναφέροντας ότι είναι εσφαλμένη. Για την αξιοποίηση αυτών των κειμένων προτείνεται ο συνδυασμός τους με συζητήσεις και άλλες δραστηριότητες, καθώς η αλλαγή των απόψεων είναι δύσκολη υπόθεση και κανένα κείμενο από μόνο του δεν επαρκεί για να επιτευχθεί αυτό με όλους τους μαθητές.

Αναφέρθηκε παραπάνω η αξία της κινητοποίησης των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και επισημάνθηκε ότι η κινητοποίηση αποτελεί ένα συνήθη στόχο κατά την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Εξάλλου, από τη σκοπιά της ψυχολογίας των κινήτρων, οι Schunk et al. (2010) σύστησαν μεταξύ άλλων να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές. Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των κειμένων που προκαλούν το ενδιαφέρον, οι Schraw et al. (1995) επεσήμαναν το ρόλο της ευκολίας κατανόησης και της ζωντάνιας και παραστατικότητας του κειμένου. Επιπλέον, έχει βρεθεί πως μαθητές και εκπαιδευτικοί έκριναν ότι η μεγαλόφωνη ανάγνωση ενός κειμένου από τον εκπαιδευτικό το κάνει πιο ενδιαφέρον και ενισχύει την κατανόηση (Ivey & Broaddus, 2001). Άλλοι παράγοντες που έχει επισημανθεί ότι μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον είναι οι νεωτερισμοί, η ομαδική εργασία, οι πρακτικές δραστηριότητες, ορισμένα θέματα που σχετίζονται με τη φύση, η απόδοση νοήματος στη δραστηριότητα και η ισορροπία ανάμεσα στο βαθμό πρόκλησης και στο επίπεδο των γνώσεων και ικανοτήτων ενός ατόμου (Bergin, 1999, Mitchell, 1993, Schunk et al., 2010).

## 2. Δραστηριότητες στο δημοτικό σχολείο

Στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου οι μαθητές εισάγονται στις βασικές έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους. Στις τελευταίες τάξεις επεξεργάζονται τα είδη των τριγώνων και μελετούν τις γωνίες και τις πλευρές τους. Σε αυτή τη φάση της γνωριμίας τους με τη γεωμετρία θα πρέπει να γίνει αντιληπτό από τους μαθητές ο πραγματικός λόγος ύπαρξης αυτού του τομέα των μαθηματικών και τις λειτουργικές ανάγκες που οδήγησαν στη δημιουργία του. Κατανοώντας τη χρησιμότητα αυτή θα μπορέσουν να εισαχθούν στη γεωμετρία του γυμνασίου προσεγγίζοντάς την με μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Στην παραπάνω ανάγκη για πρακτική και βιωματική εκμάθηση της γεωμετρίας συμβάλει καθοριστικά η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας. Απώτερος στόχος μας είναι, μετά τον σχεδιασμό και την κατασκευή των εργαλείων, να οδηγήσουμε τους μαθητές να το χειριστούν στην πραγματικότητα. Το παρουσιάζουμε μέσω καταστάσεων-προβλημάτων οι οποίες κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους και τους οδηγούμε μέσω πραγματικών μετρήσεων και σχεδιασμού να κατανοήσουν την αναγκαιότητα απόκτησης δεξιοτήτων και ικανοτήτων στο σχεδιασμό των σχημάτων και γνώσης των ιδιοτήτων των τριγώνων.

Η συγκεκριμένη προτεινόμενη σειρά διδασκαλιών θεωρεί ως προϋπόθεση ότι έχουν διδαχθεί οι μαθητές την παρακάτω ύλη του αναλυτικού προγράμματος:

**Β' δημοτικού:** Ενότητα 2

- Μάθημα 14. Φτιάχνω γεωμετρικά σχήματα

Ενότητα 9

- Μάθημα 51. Αναγνωρίζω τις κάθετες ευθείες
- Μάθημα 52. Αναγνωρίζω τις παράλληλες ευθείες

**Γ' δημοτικού:** Ενότητα 2

- Μάθημα 8. Μέτρηση μηκών με εκατοστά και χιλιοστά

Ενότητα 3

- Μάθημα 16. Χαράξεις με διαβήτη και χάρακα. Ορθές γωνίες

**Δ' δημοτικού:** Β' περίοδος

- Μάθημα 28. Σχεδιάζω κάθετες μεταξύ τους ευθείες
- Μάθημα 29. Σχεδιάζω παράλληλες μεταξύ τους ευθείες

**Ε' δημοτικού:** Ενότητα 5

- Μάθημα 30. Μονάδες μέτρησης μήκους: μετατροπές (α)
- Μάθημα 31. Μονάδες μέτρησης μήκους: μετατροπές (β)

Ενότητα 7

- Μάθημα 42. Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες
- Μάθημα 43. Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές
- Μάθημα 45. Διαχείριση γεωμετρικών σχημάτων – Συμμετρία

**Στ' δημοτικού:** Ενότητα 3

- Μάθημα 31. Από τους λόγους στις αναλογίες

Ενότητα 5

- Μάθημα 49. Μετρώ το μήκος

Ενότητα 6

- Μάθημα 57. Γωνίες

Η προτεινόμενη σειρά διδασκαλιών περιλαμβάνει 5 μαθήματα, διάρκειας μίας ώρας το καθένα, και είναι σχεδιασμένη για 20-25 μαθητές.

## 2.1.Μάθημα 1

**Στόχοι**

- Να αντιληφθούν οι μαθητές το πρόβλημα της μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων.
- Να εμπλακούν οι μαθητές κατασκευάζοντας το εργαλείο.

**Δράση των μαθητών**

Αφού θέσουμε πρακτικά προβλήματα και υποκινηθεί το ενδιαφέρον τους, θα κατασκευάσουν οι ίδιοι το εργαλείο του Errard ακολουθώντας οδηγίες.

**Υλικά**

- Δύο εικόνες που απεικονίζουν απρόσιτες αποστάσεις.

- Φωτοτυπίες με το όργανο (μία για κάθε μαθητή).
- Τρεις αριθμημένες ράβδοι ενός μέτρου.
- Ένας κινητός σύνδεσμος για την κάθετη ράβδο.
- Ένας πτυσσόμενος σύνδεσμος με σκοπευτήρα για την κινούμενη ράβδο.

**Οργάνωση**

Εναλλαγή μεταξύ ατομικής και ομαδικής εργασίας.

**Ανάλυση δραστηριοτήτων**

**Φάση 1:** Παρουσίαση καταστάσεων απρόσιτων αποστάσεων στους μαθητές.

Δείχνουμε στον προτζέκτορα (αν έχουμε τη δυνατότητα, εναλλακτικά σχεδιάζουμε στον πίνακα) την παρακάτω εικόνα:

- Ερώτηση: Πως θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την απόσταση του καραβιού από την ακτή;

Έπειτα δείχνουμε την παρακάτω εικόνα:

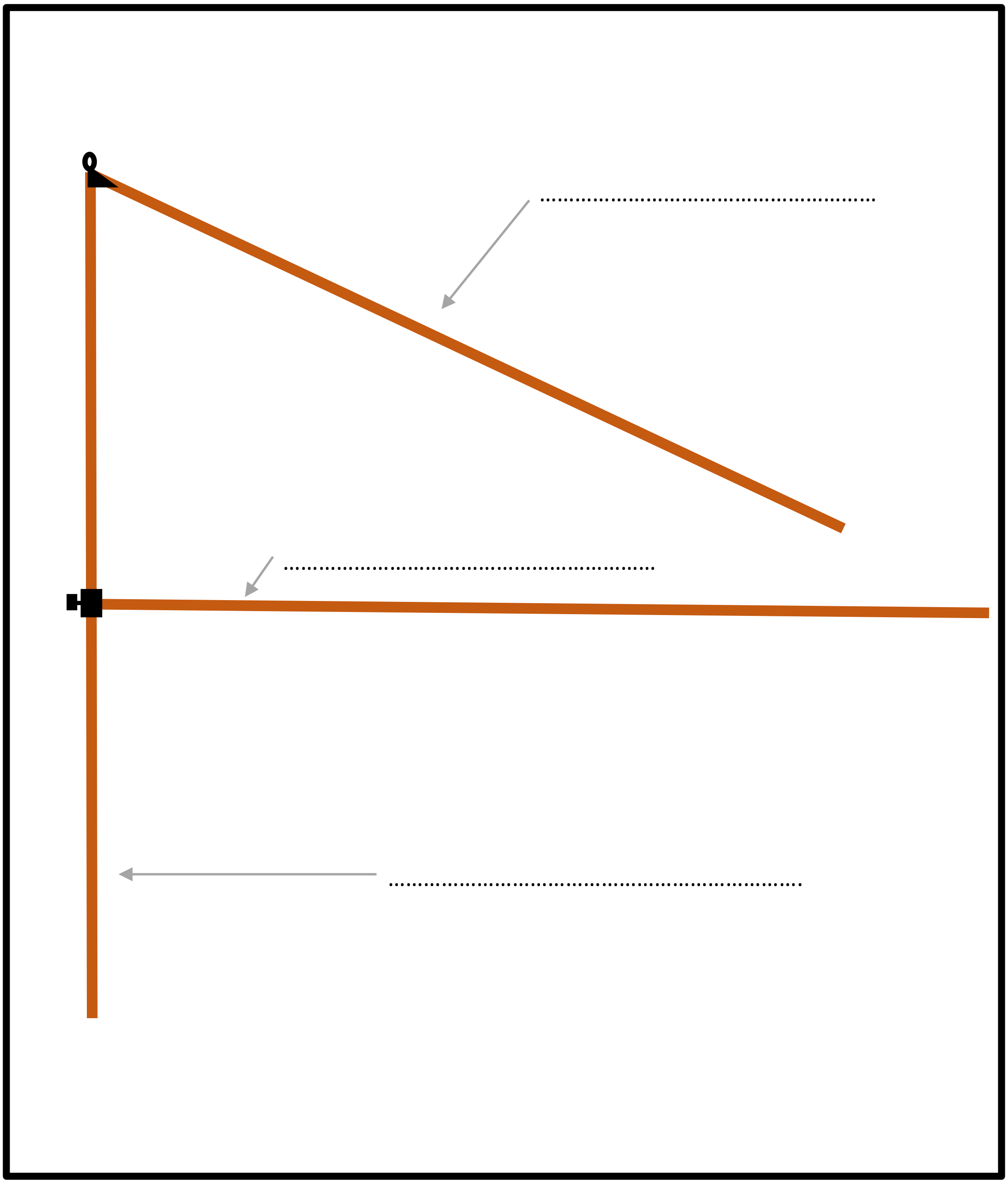
- Ερώτηση: Πως μπορούμε να μάθουμε το πλάτος του ποταμού μέχρι την απέναντι όχθη;

**Φάση 2:** Εμφάνιση του εργαλείου.

Αφού έχουμε κερδίσει το ενδιαφέρον και της περιέργεια των μαθητών στη φάση 1, τώρα παρουσιάζουμε το εργαλείο του Errard.

«Αυτό που αναρωτιέστε εσείς τώρα, ήταν και παλιά η απορία των ανθρώπων. Το πώς, δηλαδή, θα μπορούσαν να μετρήσουν μια απόσταση στην οποία δεν είχαν τη δυνατότητα πρόσβασης».

Δίνουμε το παρακάτω φύλλο εργασίας που απεικονίζει το όργανο του Errard. (ένα σε κάθε μαθητή)



«Αυτό είναι ένα όργανο το οποίο κατασκεύασε ένας μηχανικός του $16^{ου}$ αιώνα για να κάνει μετρήσεις».

Συζητάμε και πληροφορούμε τους μαθητές για οποιαδήποτε απορία τους.

**Φάση 3:** Κατασκευή του οργάνου. (ομαδική εργασία)

«Τι θα λέγατε να φτιάξουμε αυτό το όργανο για να δούμε όλοι μαζί πως λειτουργεί;»

Βγάζουμε τα υλικά και μαζεύουμε όλους τους μαθητές τριγύρω. Διαβάζουμε τις οδηγίες και αφήνουμε τους μαθητές να σκεφτούν και να ενεργήσουν μόνοι τους κατευθύνοντας όπου και όταν χρειαστεί.

Οδηγίες:

Βήμα $1^{ο}$: «Συνδέουμε τις δύο ράβδους με τον πτυσσόμενο σύνδεσμο».

Βήμα $2^{ο}$: «Βάζουμε τον κινητό σύνδεσμο στην μία κάθετη ράβδο».

Βήμα $3^{ο}$: «Στερεώνουμε την Τρίτη ράβδο επάνω στον κινητό σύνδεσμο».

Εκτελούμε ένα-ένα τα βήματα και ενισχύουμε τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών. Κάνουμε μια σύντομη περιγραφή του οργάνου και των μερών του όλοι μαζί.

**Φάση 4:** Συμπλήρωση των ονομάτων στο φύλλο εργασίας. (ατομική εργασία)

Αφού κατασκευάσαμε το όργανο θα γράψει ο δάσκαλος στον πίνακα τους παρακάτω όρους:

- Κάθετη ράβδος (στο έδαφος)
- Κινητή ράβδος (σκόπευσης)
- Βάση (του τριγώνου)

«Συμπληρώστε, ο καθένας στο φύλλο εργασίας του, τα παραπάνω ονόματα των ράβδων».

Η συμπλήρωση των ονομάτων στο σχέδιο θα βοηθήσει τους μαθητές από τη μία να κατανοήσουν και να θυμούνται καλύτερα τα μέρη του οργάνου και από την άλλη να περάσουν στο χαρτί αυτά που έκαναν στην πραγματικότητα.

### 2.2.Μάθημα 2

**Στόχοι**

- Να αντιληφθούν οι μαθητές την ύπαρξη των δύο τριγώνων.
- Η διαπίστωση ότι τα δύο τρίγωνα είναι ορθογώνια.

**Δράση των μαθητών**

Πραγματοποιούν σκόπευση με το όργανο και σχεδιάζουν στο χαρτί το γεωμετρικό της σχήμα.

**Υλικά**

- Εργαλείο του Errard.
- Φύλλο εργασίας
- Ξυλομπογιές

**Οργάνωση**

Ατομική παρατήρηση και εργασία.

**Ανάλυση δραστηριοτήτων**

**Φάση 1:** Ανακάλυψη λειτουργίας του εργαλείου και σκόπευση αντικειμένων.

Ο κάθε μαθητής τοποθετεί ένα αντικείμενο στο πάτωμα της αίθουσας και με τη βοήθεια του δασκάλου στοχεύει το αντικείμενο, κοιτώντας μέσα από τον δακτύλιο, και μετακινεί την κινητή ράβδο. Έπειτα ανεβάζουν τη βάση μέχρι να ακουμπήσει την κινητή ράβδο και να σχηματιστεί το μικρό τρίγωνο. Καλό θα ήταν η βάση να απέχει στρογγυλό αριθμό από την αρχή της κάθετης ράβδου για ευκολία μέτρησης.

**Φάση 2:** Σχεδιασμός της λειτουργία του οργάνου στο χαρτί. Παρατήρηση των τριγώνων στο σχήμα.

Θα ζητήσουμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν στο χαρτί αυτό που έκαναν στην πράξη με το εργαλείο, για να ερευνήσουμε τις αρχικές εντυπώσεις τους χωρίς να κατευθύνουμε.

«Αν σας ζητούσα να σχεδιάσετε σε ένα φύλλο χαρτί αυτή τη σκόπευση που κάνατε, πώς θα το αποτυπώνατε; Περιμένω να δω τις απόψεις σας».

Τα παιδιά προσπαθούν να αποτυπώσουν στο χαρτί αυτό που βίωσαν. Δεχόμαστε όλα τα σχέδια χωρίς να υπάρχει σωστή και λάθος απεικόνιση.

Έπειτα θα προσπαθήσουμε αυτό το σχέδιο να το κάνουμε γεωμετρικό σχήμα. Μοιράζουμε το φύλλο εργασίας στα παιδιά. Η διαμόρφωσή του έχει ως εξής:

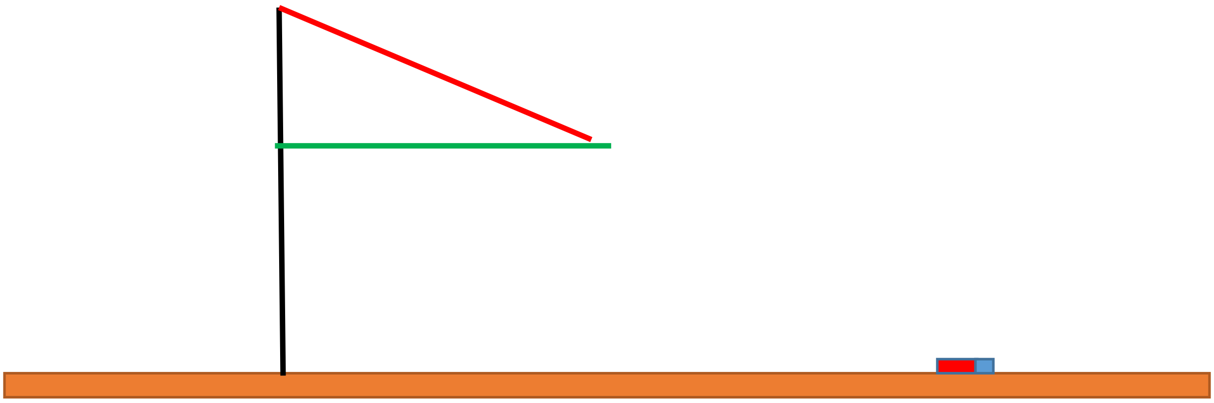
- Θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση της σβύστρας από το σημείο του οργάνου.

Σημείο τοποθέτησης οργάνου Σβύστρα

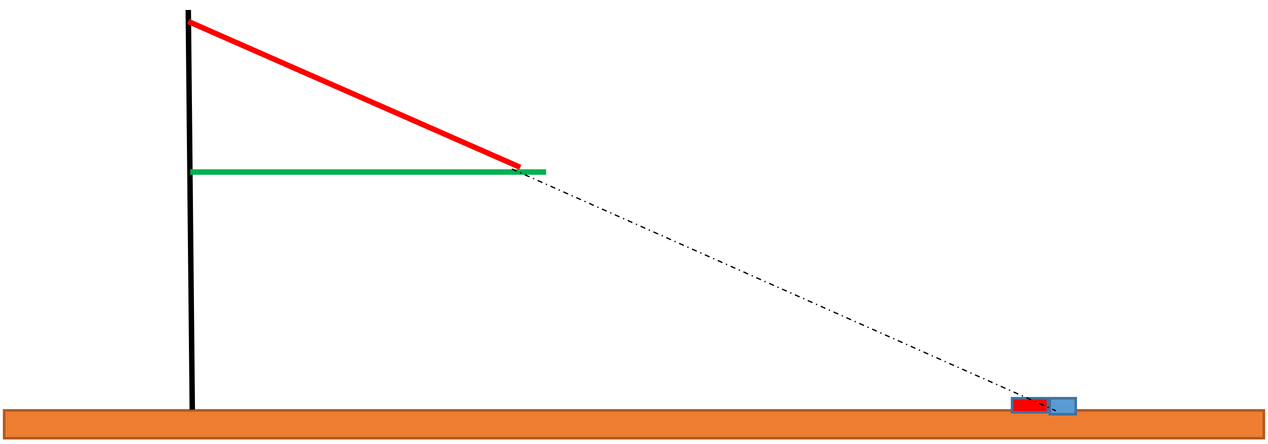
- Με τη βοήθεια του χάρακα και του τριγώνου σχεδιάστε τα παρακάτω με τη σειρά:

  Βήμα 1ο: Την κάθετη ράβδο του οργάνου με μαύρη ξυλομπογιά.
  Βήμα 2ο: Την κινητή ράβδο του οργάνου, που στοχεύει τη σβύστρα, με κόκκινη ξυλομπογιά.
  Βήμα 3ο: Τη βάση με πράσινη ξυλομπογιά.

Παράλληλα σχεδιάζει και ο δάσκαλος στον πίνακα. Έτσι θα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα από τους μαθητές.



- Επεκτείνετε το μήκος της κινητής ράβδου με το χάρακα και το μολύβι σας.



Αυτή η προέκταση της γραμμής μέχρι τη σβύστρα είναι η νοητή γραμμή του ματιού.

**Φάση 3:** Εξαγωγή συμπεράσματος.

Ερώτηση: Πόσα τρίγωνα έχουμε συνολικά στο σχέδιο;

Ερώτηση: Τι τρίγωνα είναι;

- Αμβλυγώνια
- Ορθογώνια
- Οξυγώνια

Γιατί;

Συμπέρασμα: Το γεωμετρικό σχήμα αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα.

### 2.3.Μάθημα 3

**Στόχοι**

- Να ονομάσουν τις πλευρές των τριγώνων.
- Η κατανόηση της σχέσης αναλογίας μεταξύ των δύο τριγώνων.

**Δράση των μαθητών**

Θα κατασκευάσουν ορθογώνια τρίγωνα και θα τα ονομάσουν.

**Υλικά**

- Φύλλο εργασίας
- Γεωμετρικά όργανα

**Οργάνωση**

Εργασία ανά δυάδες.

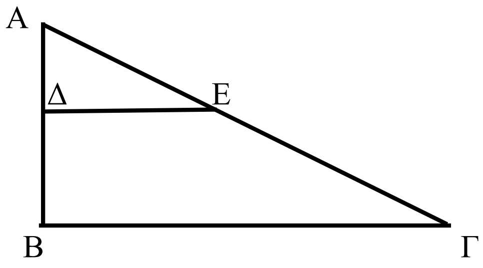
**Ανάλυση δραστηριοτήτων**

**Φάση 1:** Ονομασία τριγώνου.

- Στο παρακάτω σχέδιο σας δίνεται η κάθετη ράβδος και η βάση του εργαλείου του Errard. Συμπληρώστε ότι χρειάζεται για να εμφανιστούν τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται αν στοχεύσουμε το αντικείμενο.

- Αφού το σχεδιάσετε ονομάστε το, έτσι ώστε το μεγάλο τρίγωνο να λέγεται ΑΒΓ και το μικρό ΑΔΕ με Β και Δ να είναι οι ορθές γωνίες.

Το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι το εξής:




**Φάση 2:** Ανακάλυψη της σχέσης αναλογίας μεταξύ των δύο τριγώνων.

Στις παρακάτω δύο περιπτώσεις σχηματίστε τα τρίγωνα με τη βοήθεια των γεωμετρικών σας οργάνων. Αφού τα σχεδιάσετε ονομάστε τα με τον παραπάνω τρόπο. Το μήκος της κάθε ράβδου του εργαλείου είναι 5 εκατοστά στο χαρτί.

Σημείο τοποθέτησης οργάνου

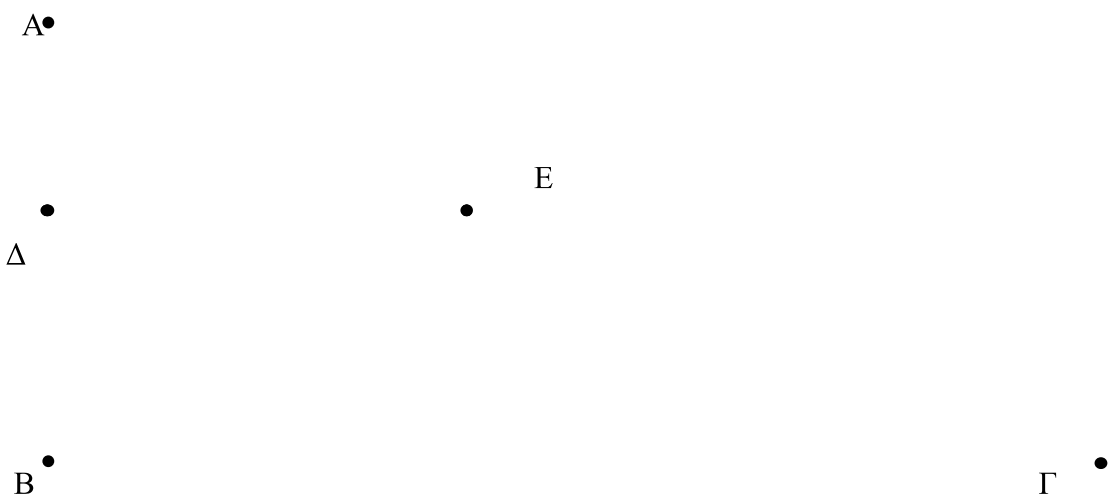
«Τι παρατηρείτε; Όσο μεγαλώνει το ένα τρίγωνο τι κάνει το άλλο; Όσο μικραίνει το ένα τρίγωνο τι κάνει το άλλο;»

Διαπιστώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση το μικρό τρίγωνο είναι σμίκρυνση του μεγάλου.

**Φάση 3:** Κατανόηση της θεωρίας στην οποία βασίζεται η λειτουργία του οργάνου του Errard.

Παρατηρούμε ότι αν ξέρουμε τις πλευρές του μικρού τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις πλευρές του μεγάλου τριγώνου.

- Χρησιμοποιείστε τα γεωμετρικά σας όργανα και σχεδιάστε στο παρακάτω σχήμα το μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, και το μικρό ΑΔΕ.




- Αν ΑΒ=30 εκατοστά και η ΑΔ=10 εκατοστά, πόσες φορές μικρότερη είναι η ΑΔ από την ΑΒ;
- Αν η ΑΕ=20 εκατοστά, πόσο θα είναι η ΑΓ;
- Αν η ΔΕ=15 εκατοστά, πόσο θα είναι η ΔΕ;

Ερώτηση: Σε μια μέτρηση με το εργαλείο του Errard το μήκος ποιας πλευρά ψάχνουμε να βρούμε;

Άρα αν ξέρουμε τις πλευρές του μικρού τριγώνου και πόσες φορές μικρότερο είναι, μπορούμε να βρούμε και τις πλευρές του μεγαλύτερου τριγώνου γιατί είναι ισογώνια και ανάλογα.

### 2.4.Μάθημα 4

**Στόχοι**

- Να συνεργαστούν οι μαθητές με σκοπό της επίλυση ενός πρακτικού προβλήματος.
- Να μετρήσουν μια απόσταση με τη χρήση του οργάνου του Errard.
- Ο σχεδιασμός στο χαρτί με κλίμακα αυτού που έκαναν στην πραγματικότητα.

**Δράση των μαθητών**

Πραγματοποιούν μέτρηση σε εξωτερικό χώρο και το αποτυπώνουν σε χαρτί.

**Υλικά**

- Εργαλείο του Errard
- Μεζούρα 20 μέτρων
- Φύλλο εργασίας

**Οργάνωση**

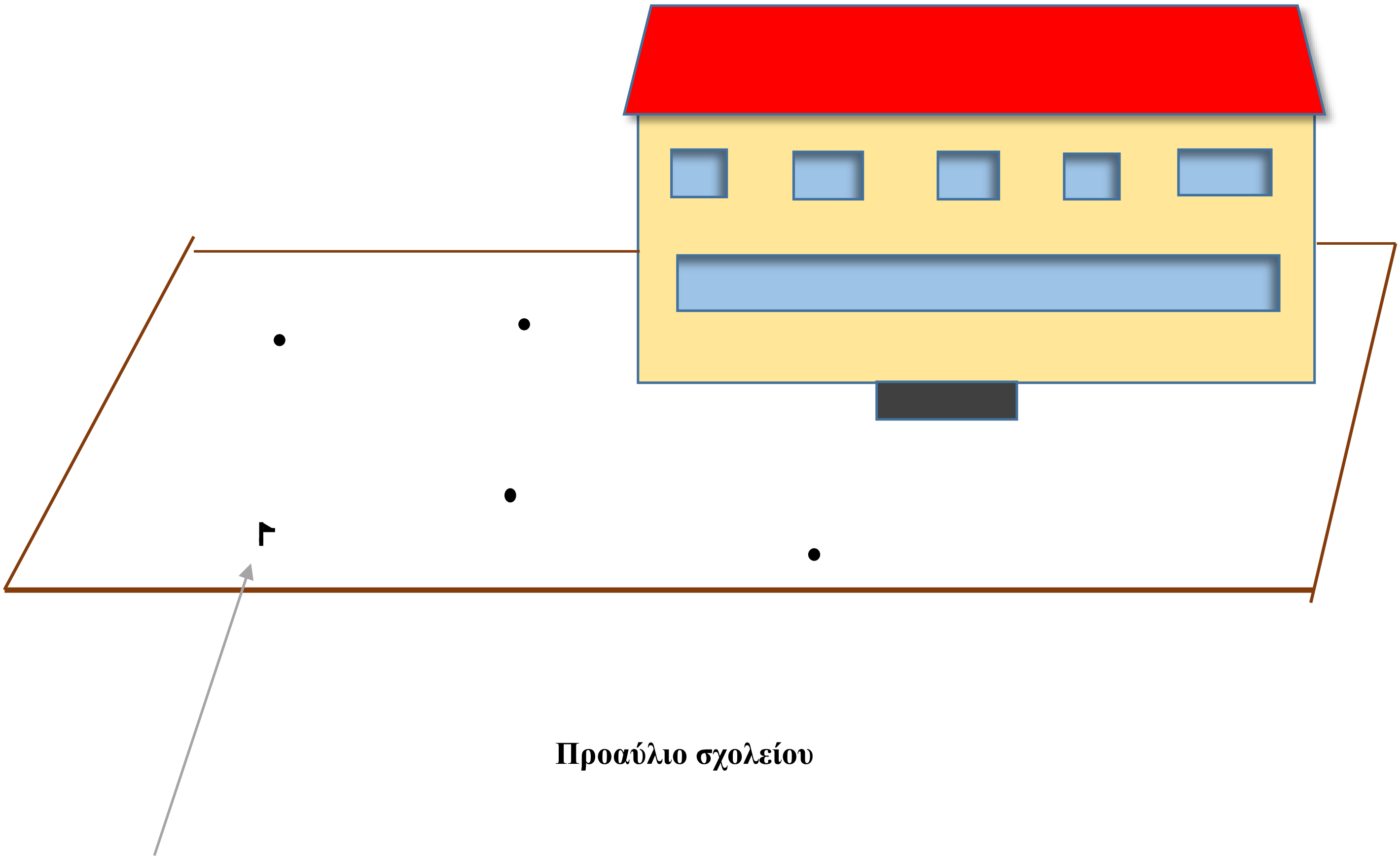
Ομαδική δραστηριότητα και κλείσιμο με ατομική εξάσκηση στο χαρτί.

**Ανάλυση δραστηριοτήτων**

**Φάση 1:** Σκόπευση αντικειμένου σε μεγάλη απόσταση.

Οι μαθητές βγαίνουν στον προαύλιο χώρο του σχολείου και χωρίζονται σε ομάδες των 4-5 ατόμων. Έχουμε τοποθετήσει κάποια αντικείμενα, ένα για κάθε ομάδα, το πολύ 20 μέτρα μακριά από το εργαλείο. Η κάθε ομάδα αναλαμβάνει τη μέτρηση ενός αντικειμένου και πραγματοποιεί σκόπευση με τη βοήθεια του δασκάλου όπου χρειάζεται.

Η διαμόρφωση της δραστηριότητας θα έχει περίπου την παρακάτω διάταξη:



**Προαύλιο σχολείου**

Εργαλείο ● Αντικείμενα

**Φάση 2:** Υπολογισμός της απόστασης και σχεδιασμός στο χαρτί.

Η κάθε ομάδα παίρνει το παρακάτω φύλλο εργασίας:

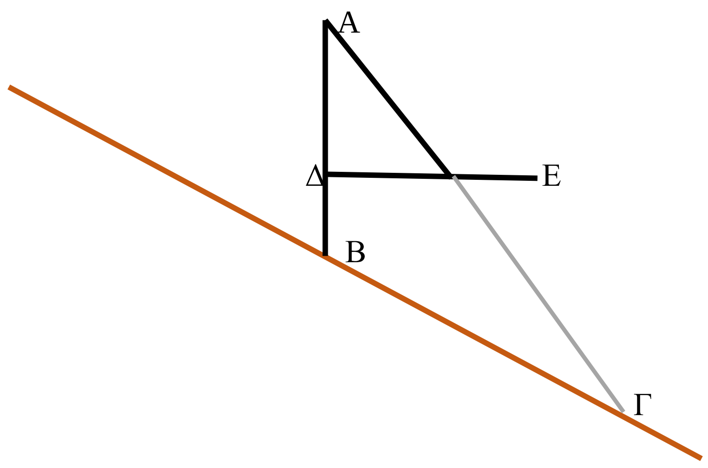
- Αποτυπώστε στο παρακάτω πλαίσιο το σχεδιάγραμμα της σκόπευσης που κάνατε.

- Υπολογίστε με τον τρόπο που μάθαμε την απόσταση του αντικειμένου.

Έπειτα τους δίνουμε το φύλλο επαλήθευσης για αυτοαξιολόγηση.

- Ονομάστε τα τρίγωνα Α^Β^Γ το μεγάλο και Α^Δ^Ε το μικρό
- Ποιας πλευράς το μήκος θέλουμε να μετρήσουμε; …………………..
- Το μήκος της ΑΒ είναι 1 μέτρο. Το μήκος της ΑΔ είναι; ……………………..
- Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ΑΒ από την ΑΔ; ………………………..
- Το μήκος της ΔΕ είναι …………………………
- Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ΔΕ από τη ΒΓ; ………………………….
- Άρα ΒΓ=…………
- Επαληθεύστε με τη μεζούρα. Είναι το ίδιο με τη μέτρηση που κάνατε;……………………… Αν όχι, γιατί;………………………………..
- Χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά σας εργαλεία, σχεδιάστε παρακάτω το μεγάλο τρίγωνο της σκόπευσης που κάνατε, με κλίμακα, ώστε το 1 μέτρο της πραγματικότητας να είναι 1 εκατοστό στο χαρτί, τα 2 μέτρα να είναι 2 εκατοστά κλπ.

- Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια μέτρηση όχι σε ευθεία επιφάνεια αλλά σε έδαφος με κλίση. Ισχύουν σ' αυτή την περίπτωση αυτά που μάθαμε; Γιατί;



**Φάση 3:** Αξιολόγηση της κατανόησης

- Ο άνθρωπος της παρακάτω εικόνας θέλει να μετρήσει την απόσταση που τον χωρίζει από την άλλη πλευρά του γκρεμού. Σκέφτηκε ότι αν σχηματίσει διαγώνια τη μέτρηση είναι το ίδιο με το να τη σχηματίσει όρθια.


- Είναι μια απρόσιτη απόσταση;
- Ποια τρίγωνα βλέπετε να σχηματίζονται;
- Είναι ίσα αυτά τα τρίγωνα ή έχει κάνει λάθος;

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας

## 2.5.Μάθημα 5

**Στόχοι**

- Να ασκηθούν οι μαθητές στην πρακτική γεωμετρία με έννοιες καθετότητας και μετρήσεις στο έδαφος.
- Να οδηγηθούν οι μαθητές να μελετήσουν ένα ισοσκελές τρίγωνο ή να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

**Δράση των μαθητών**

Δημιουργούν μια παραλλαγή του οργάνου του Errard και λύνουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

**Υλικά**

- Εργαλείο του Errard
- Χαρτί με τετραγωνάκια

**Οργάνωση**

Εναλλαγή ομαδικής με ατομική εργασία και συζήτηση.

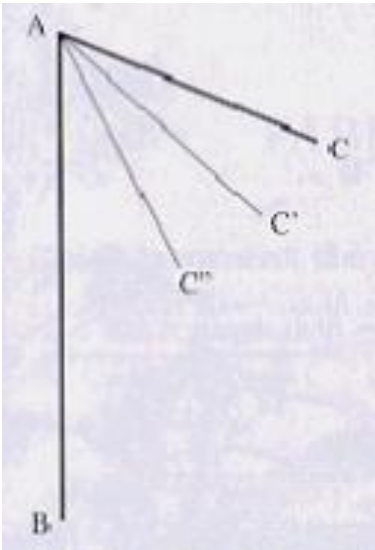
**Ανάλυση δραστηριοτήτων**

**Φάση 1:** Προσαρμογή του εργαλείου του Errard.

Θέτουμε τους μαθητές πάλι σε μια κατάσταση προβλήματος, όπου τους ελκύουμε το ενδιαφέρον.

- Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το πλάτος ενός δρόμου και δε μπορούμε να τον διασχίσουμε.

Έχουμε το όργανο του Errard του οποίου αφαιρούμε τη βάση. Περιλαμβάνει πλέον μόνο την κάθετη και την κινητή ράβδο όπως εικονίζεται παρακάτω:




- Πως πιστεύετε ότι μπορεί να μας χρησιμεύσει με αυτή τη νέα του μορφή;

Καταλήγουμε ότι το πρώτο βήμα και πάλι είναι να πραγματοποιήσουμε σκόπευση.

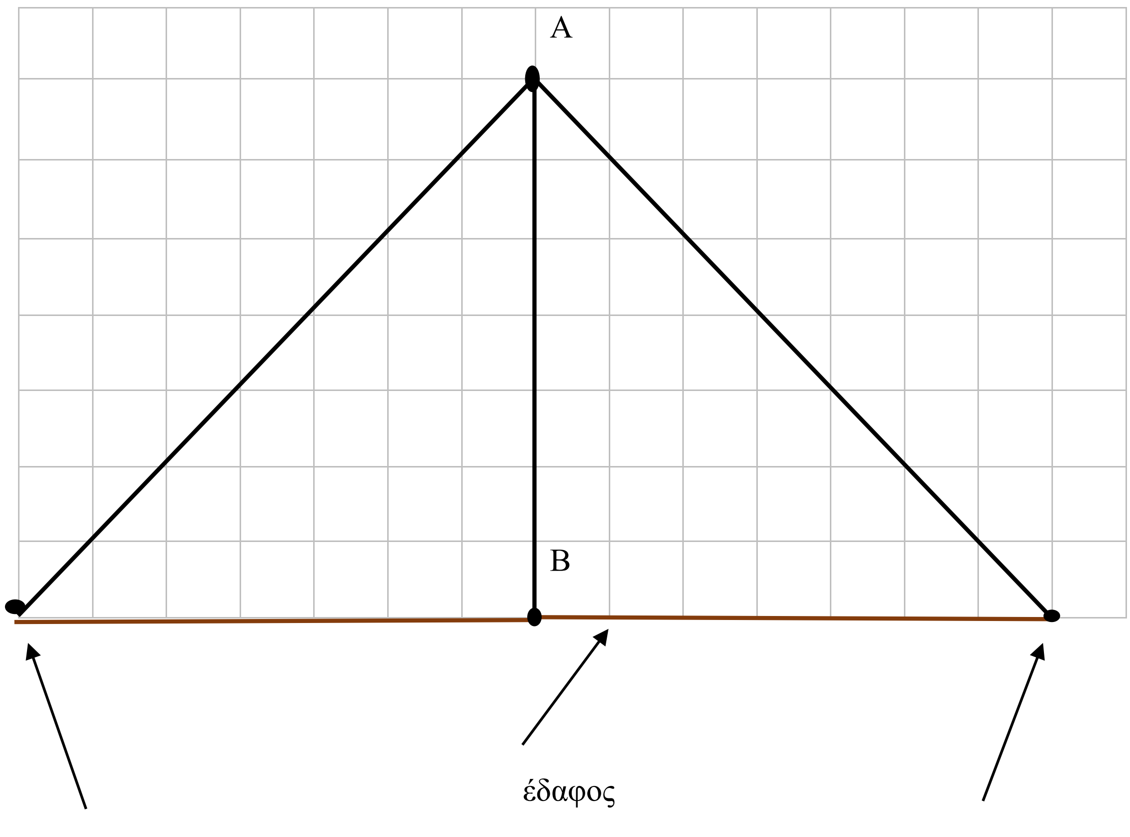
**Φάση 2:** Υπολογισμός απόστασης από τους μαθητές με τη χρήση των ισοσκελών τριγώνων.

- Εάν στοχεύσουμε στο σημείο που θέλουμε να μετρήσουμε και μετά στρέψουμε το εργαλείο προς τη μεριά που έχουμε πρόσβαση και μπορούμε να μετρήσουμε;

Σταδιακά αναδύεται η ιδέα ότι με αυτό τον τρόπο η απρόσιτη απόσταση γίνεται προσβάσιμη. Οι μαθητές δουλεύουν ομαδικά και πραγματοποιούν υπολογισμούς.

**Φάση 3:** Αποτύπωση της παραπάνω μέτρησης στο χαρτί.

Οδηγούμε τους μαθητές να αναπαραστήσουν την κατάσταση που έζησαν και να μετασχηματίσουν ένα σχέδιο σε γεωμετρικό σχήμα χρησιμοποιώντας φύλλα χαρτιού με τετραγωνάκια. Έτσι, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την κατάσταση πειραματισμού και μετρήσεων για να βρουν το πλάτος του δρόμου στο χαρτί με τα τετραγωνάκια. Σταδιακά εμφανίζεται η ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε τις γραμμές για να αναπαραστήσουμε το έδαφος, το εργαλείο, τον δρόμο και να ευθυγραμμίσουμε τα σημεία ΑΒ του εργαλείου με το άκρο του δρόμου.




Προσβάσιμο αντικείμενο

Μη προσβάσιμο αντικείμενο

- Πόσα τρίγωνα βλέπετε;
- Τι τρίγωνα είναι;

| |
|---|
| Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο. Όσο καλύτερο το σχήμα τόσο ευκολότερα θα οδηγηθούμε στα σωστά συμπεράσματα. |

## 3. Ανάλυση της διδακτικής σειράς υπό την οπτική των ΓΧΕ

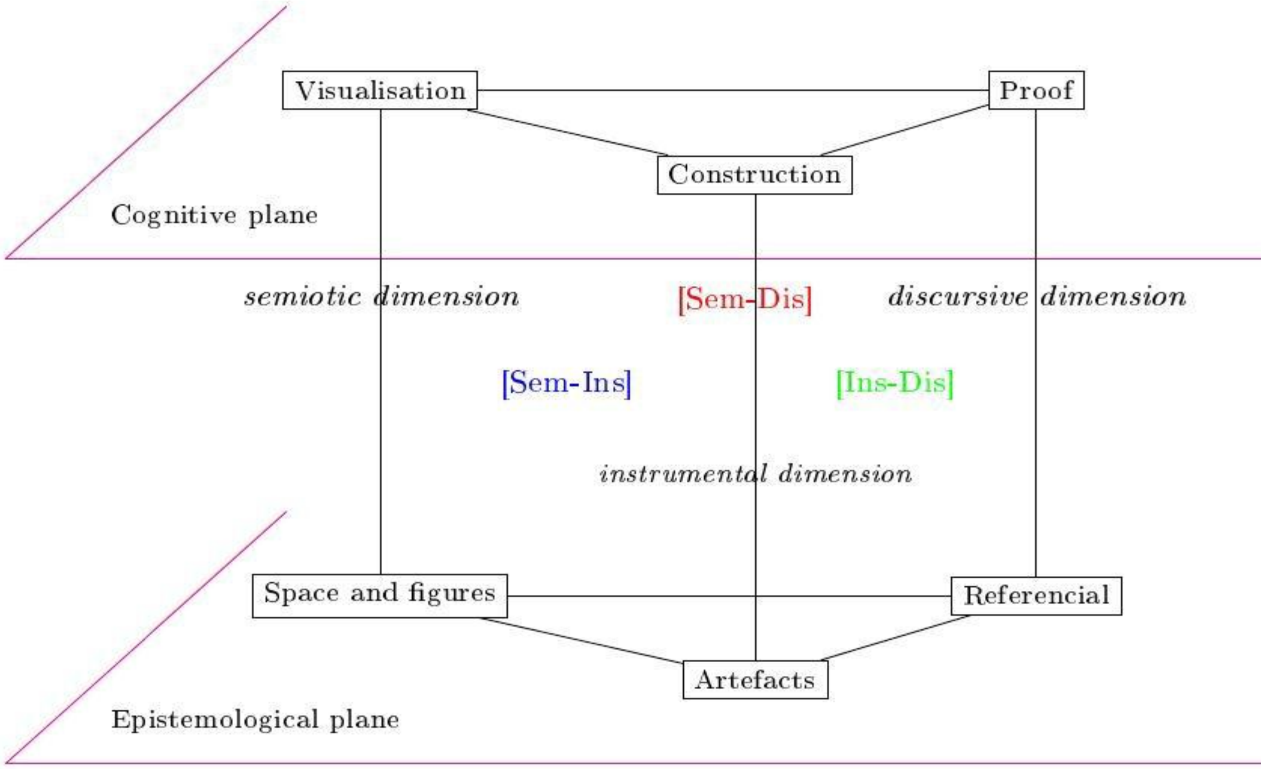
Η ανάλυση της σειράς διδασκαλιών έχει ως βάση και αναφορά τους ΓΧΕ και το μοντέλο του γεωμετρικού παραδείγματος. Οι εφαρμοσμένοι ΓΧΕ θα χαρακτηριστούν και θα χρησιμοποιηθούν για να σκεφτούμε πάνω στο γενικό ερώτημα της οργάνωσης της διδασκαλίας της γεωμετρίας.

Η συγκεκριμένη διδακτική σειρά της «Μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων» που θα αναλύσουμε, αναφέρεται σε έναν αριθμό μαθητών που δεν ξεπερνάει τα 20-25 άτομα. Το όλο πρόγραμμα είναι αρκετά φιλόδοξο και περιλαμβάνει 5 μαθήματα – διάρκειας 45' λεπτών το καθένα- με χρονικό ορίζοντα τις πέντε συνεχόμενες μέρες της εβδομάδας, δηλαδή ένα μάθημα την ημέρα από τη Δευτέρα μέχρι την Παρασκευή ή ένα μάθημα την εβδομάδα για πέντε εβδομάδες. Το κύριο αντικείμενο της διδακτικής σειράς είναι να εισάγει τη σφαιρική έννοια της απόστασης μέσα στο χώρο ως κομμάτι ενός ευρύτερου γεωμετρικού σχηματισμού, να χρησιμοποιηθεί αυτό το σχήμα για να επιλυθούν προβλήματα απόστασης και να συνδεθεί με τις ιδιότητες των τριγώνων ώστε να επιλυθούν τα προβλήματα. Σύμφωνα με το επιστημολογικό επίπεδο, "η απόσταση" θεωρείται ως ένα τρίπτυχο (χώρος πραγματικός και τοπικός, τεχνουργήματα, θεωρητικό σύστημα αναφοράς) και σε αυτή την περίπτωση το ακόλουθο σχήμα (απόσταση πραγματική, εργαλείο του Errard, ιδιότητες του ισοσκελούς και του ορθογωνίου τριγώνου) είναι το γεωμετρικό εργαλείο στο οποίο προορίζεται η σειρά των μαθημάτων.

Για εμάς, η Γεωμετρία Ι είναι το παράδειγμα που προορίζεται για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο και αυτή η διδασκαλία οφείλει να παρέχει το θεμέλιο αυτής της πρώτης γεωμετρίας που βασίζεται στη μελέτη των απτών και οικοδομήσιμων αντικειμένων που χρειάζονται τη συντονισμένη χρήση των γνωστικών συστατικών των ΓΧΕ, αποκαλούμενα οπτικοποίηση, κατασκευή και λογική επεξήγηση. Υπό αυτή την οπτική, οι στόχοι αυτής της σειράς διδασκαλιών συμφωνούν με την αντίληψη του πώς θα έπρεπε να είναι η γεωμετρική εργασία σε αυτό το σχολικό επίπεδο για να θεωρείται πλήρης. Πρώτα παίζει στην οπτική αναγνώρισης και έπειτα τα τεχνουργήματα χρησιμοποιούνται για να φέρουν τη μαθηματική έννοια του τριγώνου ως θεωρητικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με την απόσταση.

### 3.1.Τα κάθετα επίπεδα των ΓΧΕ

Το παρακάτω διάγραμμα, σύμφωνα με το οποίο έχουν γίνει οι αναλύσεις του κάθε μαθήματος, δείχνει τις τρεις γενέσεις των ΓΧΕ και τις τρεις διαστάσεις της γεωμετρικής εργασίας που δημιουργούνται.



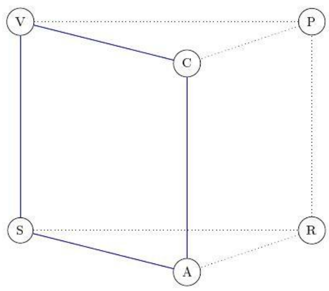

I. Τη σχηματική και σημειωτική γένεση η οποία παρέχει στα απτά αντικείμενα την υπόστασή τους ως λειτουργικά μαθηματικά αντικείμενα.

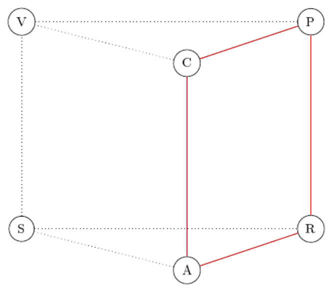
II. Την εργαλειακή γένεση η οποία μετατρέπει τα τεχνουργήματα σε εργαλεία μέσω της διαδικασίας κατασκευής που είναι κομβική στην περίπτωση της γεωμετρίας

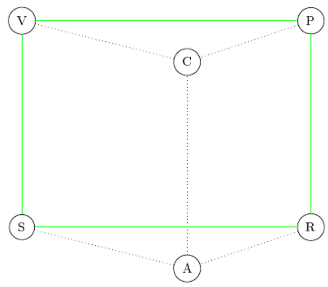
III. Την λεκτική και συλλογιστική γένεση της απόδειξης η οποία δίνει ένα νόημα στα αξιώματα που χρησιμοποιούνται κατά τη μαθηματική αιτιολόγηση.

Η παρατήρηση των δεδομένων κατά τη γεωμετρική εργασία είναι ιδιαίτερα σημαντική για να περιγράψουμε και να οργανώσουμε τη διδασκαλία της γεωμετρίας συνολικά.

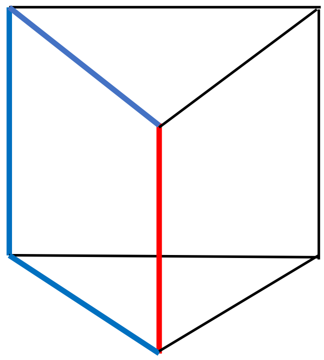
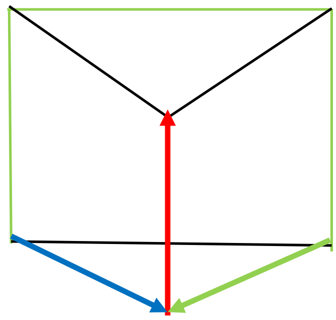
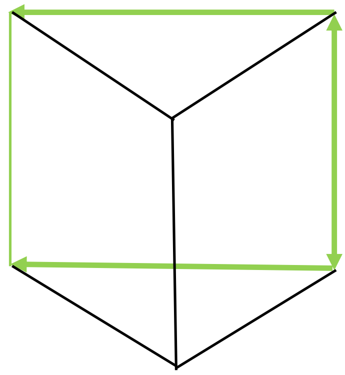
Όπως αναφέρεται παραπάνω, οι δραστηριότητες είναι κατανεμημένες σε 5 μαθήματα. Κάθε μία από αυτές τις διδακτικές ενότητες έχει αναλυθεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ΓΧΕ. Ειδικότερα, οι συμμετέχοντες σε αυτές τις διδασκαλίες θα πρέπει να αναγνωρίσουν, αν είναι δυνατό, την εισαγωγή στις διάφορες διαστάσεις της εργασίας –σχηματική, εργαλειακή, λεκτική- και τα επιθυμητά επίπεδα –επίπεδο [σχηματικό-εργαλειακό](μπλε), επίπεδο [σχηματικό-λεκτικό](πράσινο) και επίπεδο [εργαλειακό-λεκτικό](κόκκινο)-. Αυτή η αναγνώριση δίνει έμφαση στη δυναμική της γεωμετρικής εργασίας κατά τη διάρκεια του κάθε μαθήματος και επιτρέπει τον χαρακτηρισμό της εξολοκλήρου εφαρμογής των ΓΧΕ.

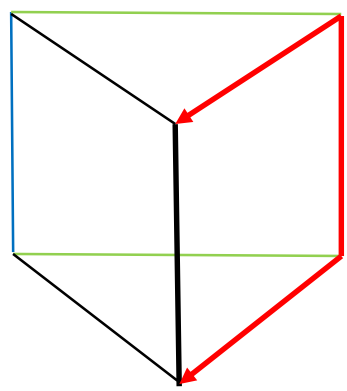
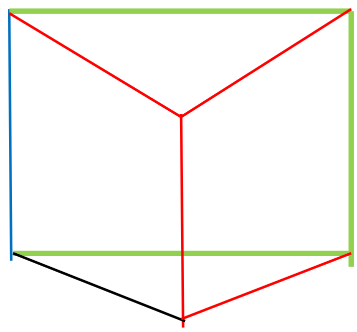



Οι διάφορες μορφές της γεωμετρικής εργασίας που αναγνωρίστηκε στα πέντε μαθήματα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα και συνδέεται με ένα διάγραμμα ΓΧΕ.

| **Μαθήματα** | **Εισαγωγή στη Γεωμετρική εργασία** | **Διαγράμματα ΓΧΕ** |
|---|---|---|
| Μάθημα 1 | Η γεωμετρική εργασία ξεκινάει με το επίπεδο [Σχηματικό-Εργαλειακό] με την παρουσίαση πραγματικών καταστάσεων απρόσιτων αποστάσεων και έπειτα την κατασκευή του εργαλείου του Errard. |  |
| Μάθημα 2 | Με την εμπλοκή των μαθητών στη μέτρηση και το πέρασμα αυτής στο χαρτί, η γεωμετρική εργασία βρίσκεται στο επίπεδο [Σχηματικό-Λεκτικό] στο οποίο δε θα μπορούσε να λείπει η χρήση της εργαλειακής διάστασης. Το γεγονός της χρήσης του οργάνου συνδέεται με το θεωρητικό πλαίσιο και το σχήμα "τρίγωνο". |  |
| Μάθημα 3 | Σε αυτό το σημείο η γεωμετρική εργασία βρίσκεται στο επίπεδο [Σχηματικό-Λεκτικό] αλλά με μία καθαρή εισαγωγή του συλλογιστικού θεωρητικού πλαισίου λόγω του ότι η ελεύθερη σχεδίαση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μπορεί να θεωρηθεί ως συμβολικό σχήμα. Η χρήση του οργάνου σχεδόν παραμερίζεται και ο μόνος αποδεκτός τρόπος για μια έγκυρη επίλυση περνάει μέσα από την παραγωγική διάσταση. Η ουσία είναι να φανεί ότι το "τρίγωνο" και η "απόσταση" είναι ένα θεωρητικό αντικείμενο που βασίζεται σε ένα χαρακτηριστικό θεώρημα και όχι μόνο ένα εμπειρικό αντικείμενο συνδεδεμένο, αισθητικά και οργανικά, με το σχέδιο. Η επικύρωση βασίζεται στην παραγωγική απόδειξη μέσω της Γεωμετρίας Ι και κατάλληλη για το επίπεδο του δημοτικού σχολείου, αλλά προετοιμάζει τη |  |

| | | |
|---|---|---|
| | Γεωμετρία ΙΙ η οποία θα είναι η πρόκληση για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ωστόσο αφήνεται ανοιχτή η πιθανότητα να επιστρέψουν οι μαθητές στην εμπειρική επικύρωση εάν είναι απαραίτητο για την κατανόησή τους. | |
| Μάθημα 4 | Σε αυτή τη φάση, η δραστηριότητα προϋποθέτει την κατασκευή πριν τη διευθέτηση του προβλήματος. Αφού αυτό έγινε κατανοητό, η γεωμετρική εργασία τοποθετείται κυρίως στο επίπεδο [Λεκτικό-Εργαλειακό] χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο. Οι ιδιότητες των τριγώνων εμφανίζονται ως θεωρητικό εργαλείο για την επίλυση. Τα δεδομένα παρέχονται από τη σημειωτική διάσταση και οι ιδιότητες των τριγώνων διασφαλίζουν την εγκυρότητα της επίλυσης. |  |
| Μάθημα 5 | Το νέο θεωρητικό πλαίσιο πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ενός προβλήματος. Η εισαγωγή στην εργασία είναι πρώτα σημειωτική αλλά η χρήση της παραγωγικής απόδειξης είναι απαραίτητη για την εγκυρότητα της επίλυσης. Η χρήση του εργαλείου και του σχεδίου εξαρτάται από την αναγνώριση των κατάλληλων θεωρημάτων των τριγώνων τα οποία, οι μαθητές, έχουν διδαχθεί σε προγενέστερο χρόνο. Το όργανο, σε αυτή την περίπτωση, προτείνεται ως εργαλείο επικύρωσης αφού έχει δοθεί σημασία πρωτίστως στο επίπεδο [Σχηματικό-Λεκτικό]. |  |

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η γεωμετρική εργασία είναι επικεντρωμένη στην ανάπτυξη της έννοιας της “απόστασης” ως μία πλευρά ενός ορθογωνίου ή ισοσκελούς τριγώνου που συνδέεται με τις ιδιότητες αυτών. Το επιστημολογικό επίπεδο των ΓΧΕ μπορεί να περιγραφεί από το τρίπτυχο [απόσταση πραγματική, εργαλείο του Errard, ιδιότητες του ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου]. Η γεωμετρική εργασία αυτής της διδακτικής σειράς είναι βασισμένη, πρωτίστως, στο υλικό τεχνούργημα για να φέρει στην επιφάνεια ένα θεώρημα και να εμπλουτίσει το σύστημα των θεωρητικών εργαλείων. Έπειτα, το υλικό τεχνούργημα παραμερίζεται για να προωθηθεί μια παραγωγική απόδειξη χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της έννοιας του τριγώνου σε συνδυασμό με την έννοια της απόστασης. Προς το τέλος της σειράς διδασκαλιών, η επιστροφή στο υλικό τεχνούργημα γίνεται για να εισάγει μια νέα χρήση του οργάνου και των τριγώνων και ξεκινάει ξανά η ανακύκλωση της γεωμετρικής εργασίας μέσα από διαφορετικά επίπεδα. Ολόκληρη η εργασία παραμένει στη Γεωμετρία Ι αλλά θέτει ξεκάθαρα κάποιες βάσεις για μια προσδοκώμενη εργασία στη Γεωμετρία ΙΙ κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

### 3.2.Η σύνδεση του ΓΧΕ με τη σχολική πραγματικότητα

Στο αναλυτικό πρόγραμμα για το δημοτικό σχολείο, η γεωμετρική εργασία είναι παραδοσιακά δομημένη γύρω από τη μελέτη κάποιων συγκεκριμένων γεωμετρικών αντικειμένων και κάποιων σχέσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων. Υπάρχει επίσης σύνδεση με το ζήτημα “μέγεθος και μέτρηση”. Επιπλέον, η εστιασμένη και προσεκτική χρήση εργαλείων σχεδίασης παραπέμπει στο αντικείμενο της γεωμετρικής εργασία που προσανατολίζεται στην κατασκευή απτών αντικειμένων (Γεωμετρία Ι). Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τη διαδικασία του κατ’ εκτίμηση υπολογισμού ως μέρος του αναλυτικού προγράμματος για τη γεωμετρία. Στο δημοτικό σχολείο, η γεωμετρική εκτίμηση θεωρείται γενικά ως μια εφαρμογή συνδεδεμένη με τα γεωμετρικά όργανα (εκτίμηση με υλικά εργαλεία) ή απλά ελεγχόμενη με τα χέρια και τα μάτια (οπτική εκτίμηση).

Σε αυτό το σημείο, θα συνδέσουμε την ανάλυση υπό το πρίσμα των ΓΧΕ αυτής της διδακτικής σειράς που επικεντρώνεται στο τρίπτυχο (απόσταση πραγματική, εργαλείο του Errard, ιδιότητες ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου) με το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα. Η εργασία γύρω από το σχήμα [απόσταση πραγματική, εργαλείο του Errard, ιδιότητες ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου] συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

| Αναλυτικό πρόγραμμα | Διαστάσεις γεωμετρικής εργασίας | | |
|---|---|---|---|
| | **Σημειωτική** | **Εργαλειακή** | **Συλλογισμός** |
| Γεωμετρικό αντικείμενο | Η απόσταση ως μία πραγματική ευθεία | Το εργαλείο του Errard το οποίο με τη στόχευση δημιουργεί νοητά τρίγωνα στο χώρο | Η απόσταση είναι η βάση του μεγάλου ορθογώνιου τριγώνου |
| Σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων | Η ευθεία μέχρι το σημείο που θέλουμε να μετρήσουμε είναι η μία πλευρά του τριγώνου | Το όργανο έχει δημιουργήσει δύο ορθογώνια και όμοια τρίγωνα | Αφού γνωρίζουμε κάποιες πλευρές και γωνίες των τριγώνων μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες |
| Σύνδεση με το μέγεθος | Όσο μεγαλώνει η απόσταση τόσο μεγαλώνει το μήκος της βάσης του τριγώνου | Το εργαλείο του Errard έχει δημιουργήσει δύο ορθογώνια τρίγωνα στο χώρο με σχέση αναλογίας μεταξύ τους | Τα τρίγωνα είναι ανάλογα άρα ο λόγος της αναλογίας ισχύει για όλες τις πλευρές του τριγώνου |
| Εκτίμηση-Υπολογισμός | Εφαρμογή<br>Οπτική και οργανική εκτίμηση | | Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αναλογίας και εκτελώντας αριθμητικές πράξεις φτάνουμε στον υπολογισμό |

Αναφέρουμε ως αξίωμα ότι μία γεωμετρική εργασία μπορεί να θεωρείται πλήρης όταν το γεωμετρικό σχήμα [χώρος πραγματικός και τοπικός, τεχνουργήματα, θεωρητικό σύστημα αναφοράς] είναι οργανωμένο και διαμορφωμένο μέσα από την εισαγωγή στις τρεις διαστάσεις, σημειωτική, εργαλειακή και συλλογισμός. Το αποτέλεσμα είναι ότι, για να οικοδομήσουμε μια πρόοδο στη γεωμετρία, προϋπόθεση είναι η αναγνώριση και ταυτοποίηση των κυριότερων γεωμετρικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος και μετά μια ανάλυση της εργασίας που συνδέεται με αυτά τα σχήματα υπό τους όρους των επιπέδων των ΓΧΕ. Σε ένα βαθμό, αυτή η οπτική αναφέρεται στην ανάπτυξη του εννοιολογικού πεδίου γύρω από αυτά τα σχήματα, σύμφωνα με τον Vergnaud (1990). Κάποιες από τις κυριότερες γεωμετρικές έννοιες του ελληνικού αναλυτικού προγράμματος είναι οι εξής: [ευθείες γραμμές, χάραξη και μέτρηση, ορθογωνιότητα και ορθή γωνία, σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, τετράπλευρο, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, διαβήτης, παράλληλες, γωνίες και μήκη].

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μετασχηματισμοί ως γεωμετρική έννοια έχουν εξαφανιστεί από το αναλυτικό πρόγραμμα.

## 4. Συμπεράσματα-Συζήτηση

Στο επίπεδο της στοιχειώδους γεωμετρίας, συνδέεται ο ιδεατός κόσμος με τον υλικό κόσμο, μέσω των γεωμετρικών αντικειμένων. Η γεωμετρική εργασία μπορεί, λοιπόν, να γίνει αντιληπτή ως μια εργασία που θα συνδέσει ένα θεωρητικό πλαίσιο και μια υλική υπόσταση σε ένα πραγματικό χώρο, χάρη σε ένα σύνολο συγκεκριμένων εργαλείων. Αυτή η προσέγγιση μας οδήγησε στο να εισάγουμε την έννοια των ΓΧΕ βασισμένη στη σύνδεση των τριών στοιχείων: χώρος πραγματικός και τοπικός, θεωρητικό πλαίσιο και, τέλος, ένα σύνολο τεχνουργημάτων.

Σε αυτήν την εργασία εστιάσαμε στη δημιουργία και ανάλυση μιας σειράς μαθημάτων-δραστηριοτήτων για την «απρόσιτη απόσταση», με στόχο να αναγνωρίσουμε τις διάφορες διαστάσεις των ΓΧΕ. Οι ΓΧΕ που εμφανίζονται στη διδακτική σειρά είναι δομημένοι γύρω από ένα σύνολο δραστηριοτήτων που σχετίζονται με το τρίπτυχο (απόσταση πραγματική, εργαλείο του Errard, ιδιότητες τριγώνων). Αυτό το σύνολο δραστηριοτήτων δημιουργεί διάφορες ενώσεις μεταξύ των τριών κάθετων επιπέδων στο διάγραμμα των ΓΧΕ και γεννά μια πραγματική και ολοκληρωμένη ανάλυση της γεωμετρικής εργασίας. Η ίδια δουλειά θα έπρεπε να γίνεται σε όλες τις κύριες έννοιες του Αναλυτικού Προγράμματος.

Παράλληλα, η παρούσα διδακτική σειρά, είναι σχεδιασμένη ώστε να προωθεί την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην διαδικασία της μάθησης και να καλλιεργεί τη συνεργατικότητα. Οι δραστηριότητες, έχοντας ως κύριο στόχο την ομαδική εργασία και την αυτενέργεια, βοηθάνε τους μαθητές να εμπλακούν και να χτίσουν οι ίδιοι τη γνώση. Σε κάποια σημεία πραγματοποιείται γνωστική σύγκρουση με αποτέλεσμα τη σφαιρική και βαθύτερη κατανόηση του περιεχομένου. Επιπλέον, επιχειρείται το ομαλό πέρασμα από την πράξη στην αφαιρετική σκέψη, συμβαδίζοντας με τη μετάβαση των μαθητών από το δημοτικό στο γυμνάσιο. Έτσι, καθίσταται κομβικός ο ρόλος του δασκάλου ως συντονιστής και καθοδηγητής, με την εφαρμογή ενός μαθητοκεντρικού μοντέλου διδασκαλίας.

Δεδομένου ότι η επιδίωξή μας είναι μια συνολική βελτίωση στη διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο, η ανάλυση των γεωμετρικών εννοιών φαίνεται χρήσιμη στο να βοηθήσει τους δασκάλους να στηρίξουν τη διδασκαλία της στην οργάνωση ενός συνόλου από γεωμετρικές δραστηριότητες, και να προωθήσει μια ολοκληρωμένη γεωμετρική εργασία βασισμένη στις τρεις διαστάσεις των ΓΧΕ.

# Βιβλιογραφία


Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. *Mathematics, Teachers and Children* (σσ. 216-236). Great Britain: Hodder and Stoughton Educational.

Bergin, D. A. (1999). Influences on Classroom Interest. *EDUCATIONAL PSYCHOLOGIST* (σσ. 87-98). University of Toledo.

Bernard, A., Chambon, G. & Ehrhardt, C. (2010). *Le Sens des Nombres. Mesures, Valeurs et Informationes Chiffrées: une approche historique.* Paris: Vuibrt & Adapt-Snes.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs* (σσ. 41-63). Cirade, Canada: Agence d'arc.

Brousseau, G. (2002). Cadres, jeux de cadres et théories des situations. *Actes de la journée Douady* (pp. 73-82). Université Paris-Diderot: IREM.

Bussi Bartolini, M. G. (2000). *The Theoretical Dimension of Mathematics: A Challenge for Didactitians.* Italy: University of Modena and Reggio Emilia.

Cerqueti-Aberkane, F., Rodriguez, A. & Jojan, P.. (1997). *Les maths ont une histoire, activités pour la cycle 3.* Hachette.

Chacon, I. &. Kuzniak, A. (2014). Spaces for Geometric Work: Figural, Intrumental and Discursive Geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, σσ. 97-126.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education., (σσ. 142-157).

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (σσ. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Conversion et articulation des représentations analogiques. *SÉminaire I.U.F.M.* Nord Pas de Calais: D.R.E.D.

Duval, R. (2005). Les condition cognitives de l'apprentissage de la géometrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnement et Coordination de leurs Foctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (σσ. 5-54).

*Educational Psychology Review*. (2010). USA: Springer.

Edwars, C. H. Jr. (1994). Advanced Calculus of Several Variables. University of Georgia : DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. *Handbook of international research in mathematics education*, (σσ. 626-655).

Glaisher, J. W. L. (1883). *A theorem in partitions. Messenger of Math.*

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'etude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* .

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different paradigms. *Proceedings of CERME.* Bellaria, Italy.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géometriques et enseignement de la géometrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnement et Coordination de leurs Foctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (pp. 175-193).

Ivey, G. & Broaddus, K. (2001). *Reading Research Quarterly, "Just plain reading": A survey of what makes students want to read in middle school classrooms.* International Reading Association.

Jahnke, J. H. & Walenstein, A.. (2000). Reverse engineering tools as media for imperfect knowledge. *Reverse Engineering, 2000. Proceedings. Seventh Working Conference* (σσ. 22-31). IEEE.

Jankvist, T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (σσ. 235-261). Springer Science + Business Media B.V.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2010, Diciembre). Espaces de travail mathématique. Points de vue et parspectives. *Relime*, σσ. 13(4-I).

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2012). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. *Cerme 8.* Paris, France: Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Paris: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathémaques, Paris VII.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géometriques. Élements d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, σσ. 167, 188.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (pp. 9-24). IREM de STRASBOURG.

Kuzniak, A. (2014). Understanding Geometric Work through its Development and its Transformations.

Kuzniak, A. (2015). Understanding Geometric Work through its Development and its Transformations. *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (σσ. 1-15). Cham: Springer.

Kuzniak, A., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I. M. & Escribano, J. (2014). Espace de travail Mathématique. *Actes Quatrième Symposium ETM.* San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España: Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Maanen, J. V. & Yates, J. A. (2000). INformation Technology and Organizational Transformation: History, Rhetoric and Practise. *International Educational and Professional Publisher.* Thousand Oaks - London - New Delhi: Sage Publications, Inc.

Mitchell, M. (1993). Situational interest: Its multifaceted structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of educational psychology*, σσ. 85(3), 424.

Schraw, G., Dunkle, M. E. & Bendixen, D. (1995). Cognitive processes in well-defined and ill-defined problem solving. *Applied Cognitive Psychology* (σσ. 523-538). University of Nebraska-Lincoln, USA: John Wiley and Sons, Ltd.

Schunk, E., Quevedo, K., Smith, T., Donzella, B. & Gunnar, M. (2010). The startle response: Developmental effects and a paradigm for children and adults. *Developmental psychology*, σσ. 78-89.

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: a review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education* (σσ. 951-970). Taiwan: National Science Council.

Tzanakis, C., Arcavi, A., C. C. de Sa, Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M. & Siu, M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. *History in mathematics education. The ICMI study* (σσ. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques.* 10(2-3), 133-170.

Vosniadou, S. & Vamvakousi, X. (2006). Examining Mathematics Learning from a Conceptual Change Point of view: Implications for the Design of Learning Environments. *Running Head: Mathematics and Conceptual Change.* Cognitive Science Laboratory.

Αναστασιάδης, Μ. & Νικολαντωνάκης, Κ. (2014). Ισοπεριμετρικά Σχήματα στο Δημοτικό Σχολείο: Διδασκαλία με την Αξιοποίηση Ιστορικών Πηγών. *Επιστήμες Αγωγής: Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση*, σ. 69-89.

Καριώτογλου, Π. (2006). *Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου Φυσικών Επιστημών.* Θεσσαλονίκη: Γράφημα.