



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΤΜ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός Κύκλος

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

«Διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα για τη διόρθωση  
παρανοήσεων στις δυνάμεις»

Καρανάσιου Σοφία

A.M. 1039

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του  
Διδρυματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών:

**«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»**

Και εγκρίθηκε στις ...../ 10 / 2022 από την εξεταστική επιτροπή  
αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο		Υπογραφή
1. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου (επιβλέπων καθηγητής)	Επίκουρο Καθηγητή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	.....
2. Βαμβακούση Ξένια	Επίκουρη Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	.....
3. Λεμονίδα Χαράλαμπο	Καθηγητή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	.....

## *Ευχαριστίες*

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας θα ήταν ανέφικτη χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και υποστήριξη του επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου. Του εκφράζω μέσα από καρδιάς ένα βαθύ ευχαριστώ για την κατανόηση και την υπομονή του καθ' όλη την διάρκεια της συγγραφής. Οι συμβουλές και οι προτάσεις του ήταν πάντα ουσιαστικές και ακριβείς. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κυρία Ξένια Βαμβακούση και κύριο Χαράλαμπο Λεμονίδη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διευθυντή και τον υποδιευθυντή του σχολείου για τη δυνατότητα που μου έδωσαν να πραγματοποιήσω την έρευνά μου στο σχολείο τους. Ακόμη, ευχαριστώ τους γονείς των μαθητών, αλλά και τους ίδιους τους μαθητές για τη συμμετοχή τους στην έρευνα.

Τέλος, οφείλω να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, που με στηρίζει σε κάθε μου προσπάθεια και απόφαση, καθώς και τους/τις φίλους/ες μου Ελένη, Ευσταθία και Μιλτιάδη.

## Περιεχόμενα

<i>Ευχαριστίες</i> .....	iii
Ευρετήριο Εικόνων – Πινάκων.....	vi
Περίληψη .....	2
Abstract.....	3
1. Εισαγωγή .....	4
2. Επισκόπηση βιβλιογραφίας.....	6
2.1 Η έννοια των Δυνάμεων .....	6
2.2 Η σημασία των δυνάμεων.....	8
2.3 Η έννοια των δυνάμεων στα σχολικά Μαθηματικά .....	9
2.4 Λάθη και παρανοήσεις στις δυνάμεις.....	11
2.5 Λανθασμένα παραδείγματα.....	17
3. Στόχος, Μεθοδολογία της έρευνας .....	21
3.1 Στόχος της έρευνας .....	21
3.2 Διδακτική πρόταση .....	22
3.3 Μεθοδολογία.....	23
3.3.1 Συμμετέχοντες .....	23
3.3.2 Υλικό.....	23
3.3.3 Διδακτική Παρέμβαση .....	26
3.3.4 Διαδικασία .....	28
3.3.5 Εγκυρότητα της Έρευνας .....	29
4. Αποτελέσματα.....	29
5. Συμπεράσματα .....	52
5.1 Συζήτηση.....	52
5.2 Περιορισμοί της έρευνας.....	55
5.3 Γενικά Συμπεράσματα.....	56

5.4 Μελλοντικές έρευνες.....	57
Βιβλιογραφία .....	59
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	63
Ερωτηματολόγιο Α΄ και Γ΄ Φάσης.....	63
Ερωτηματολόγιο Β΄ Φάσης.....	66
Υλικό Διδακτικής Παρέμβασης .....	69

## **Ευρετήριο Εικόνων – Πινάκων**

<b>Εικόνα 1.</b> Ορισμός της δύναμης φυσικού αριθμού στη Στ΄ Δημοτικού.....	10
<b>Εικόνα 2.</b> Ορισμός της δύναμης φυσικού αριθμού στην Α΄ Γυμνασίου.....	10
<b>Εικόνα 3.</b> Ενδεικτικό παράδειγμα Ερώτησης 1 του Ερωτηματολογίου της Α΄ Φάσης .....	24
<b>Εικόνα 4.</b> Ενδεικτικό παράδειγμα Ερώτησης 1 του Ερωτηματολογίου της Β΄ Φάσης .....	26
<b>Πίνακας 1.</b> Ερωτήσεις Ερωτηματολογίου Α΄ Φάσης ανά κατηγορία παρανόησης....	25
<b>Πίνακας 10.1</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στα ερωτηματολόγια της Γ΄ Φάσης .....	47
<b>Πίνακας 10.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων της ομάδας ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ φάσης.....	48
<b>Πίνακας 11.</b> Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης...	49
<b>Πίνακας 12.</b> Συγκεντρωτικός πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στα ερωτηματολόγια και των τριών φάσεων.....	49
<b>Πίνακας 13.</b> Μέσες βαθμολογίες συνολικά για όλες τις φάσεις.....	50
<b>Πίνακας 2.</b> Ερωτήσεις Ερωτηματολογίου Β΄ Φάσης ανά κατηγορία παρανόησης ...	26
<b>Πίνακας 3.</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των απαντήσεων της Ομάδας Παρέμβασης (N= 35) και της Ομάδας Ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης.....	31
<b>Πίνακας 3.1.</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της ομάδας παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης .....	33
<b>Πίνακας 3.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων ομάδας παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης.....	34
<b>Πίνακας 4.1.</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων της ομάδας ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης.....	35
<b>Πίνακας 4.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων ομάδας ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης.....	36

<b>Πίνακας 5.</b> Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης ..	37
<b>Πίνακας 6.</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Β΄ φάσης .....	37
<b>Πίνακας 6.1</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης(N= 35) στα ερωτηματολόγια της Β΄ Φάσης.....	39
<b>Πίνακας 6.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων ομάδας παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Β΄ φάσης.....	40
<b>Πίνακας 7.1</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου (N=36) στα ερωτηματολόγια της Β΄ Φάσης.....	41
<b>Πίνακας 7.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Β΄ φάσης.....	42
<b>Πίνακας 8.</b> Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Β΄ Φάσης...	43
<b>Πίνακας 9.</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων της Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης.....	43
<b>Πίνακας 9.1</b> Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης στα ερωτηματολόγια της Γ΄ Φάσης.....	45
<b>Πίνακας 9.2</b> Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων ομάδας παρέμβασης (N=35) στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ φάσης .....	46

## Περίληψη

Οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίκεντρο των ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης, αφού πολλοί τομείς των μαθηματικών και των θετικών επιστημών τις χρησιμοποιούν. Ωστόσο, η κατανόηση των δυνάμεων παραμένει μια πρόκληση. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές κάνουν λάθη που προέρχονται από λανθασμένες αντιλήψεις και παρανοήσεις κατά την επίλυση εργασιών που τις περιλαμβάνουν. Έρευνες δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προσαρμόσουν τη διδασκαλία τους χρησιμοποιώντας κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις που θα έχουν ως στόχο την μείωση αυτών των λαθών. Μια από τις διδακτικές παρεμβάσεις που μπορούν να υιοθετήσουν οι εκπαιδευτικοί είναι τα λανθασμένα παραδείγματα. Τα λανθασμένα παραδείγματα, αποτελούν ασκήσεις που παρουσιάζουν λάθη στα βήματα επίλυσής τους και ζητούν από τους μαθητές να βρουν και να διορθώσουν αυτά τα λάθη. Η παρούσα εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει ποσοτικά δεδομένα από μια μελέτη στην οποία μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε μια σειρά από ερωτήσεις που αφορούσαν κάποιες από τις παρανοήσεις των δυνάμεων με εκθέτες φυσικούς αριθμούς. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 71 μαθητές, οι οποίοι απάντησαν σε ερωτηματολόγια με 16 ερωτήσεις το καθένα που αφορούσαν τις πιο συνηθισμένες παρανοήσεις στις δυνάμεις, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δυο ομάδες, την ομάδα ελέγχου, στην οποία χορηγήθηκαν ορθά λυμένα παραδείγματα, και στην ομάδα παρέμβασης, στην οποία χορηγήθηκαν λανθασμένα παραδείγματα. Η διδακτική παρέμβαση φάνηκε να βοηθά την πλειοψηφία των μαθητών να ξεπεράσουν κάποιες από τις βασικές τους παρανοήσεις, έστω κι αν οι επιδόσεις τους στον έλεγχο διατήρησης έδειξε ότι οι ψηλές τους επιδόσεις αμέσως μετά την παρέμβαση δεν διατηρήθηκαν τόσο υψηλές ένα μήνα αργότερα. Ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι η διδακτική παρέμβαση με τα λανθασμένα παραδείγματα είχε την ίδια επίδραση στους μαθητές όσο είχε και η παρέμβαση με τα σωστά λυμένα παραδείγματα.

Λέξεις – κλειδιά: δυνάμεις, παρανοήσεις, υπολογισμός δυνάμεων, λανθασμένα παραδείγματα, διδακτική παρέμβαση



## Abstract

Exponents are at the center of research, since many areas of mathematics and science use them. However, understanding the exponents remains a challenge. As a result, students make mistakes stemming from misconceptions during the tasks that they have to solve and the exercises that include them. These misconceptions at exponents can be reduced, as teachers can adjust their teaching by using appropriate teaching interventions aimed at reducing these errors. One of the teaching interventions that the teachers can adopt is erroneous examples. Erroneous examples are a learning material that can lead students to a deeper learning and more meaningful understanding of exponents. These examples are exercises that present errors at every step of their solution and ask students to find and correct them. This research attempts to present quantitative data from a study in which students were asked to answer a series of questions related to some of the most common misconceptions at exponents. The participants in the research were 71 students, who answered 16 questions according to the literature, concerning the most common misconceptions at the exponents. The students were divided in to two groups, the control group, which was given correctly solved examples, and the intervention group, which was given erroneous examples. The results showed that the majority of the students overcame some of their basic misconceptions, even though their retention test showed that their high performance immediately after the intervention was not maintained as high a month later. An interesting finding is that the didactic intervention with the erroneous examples had the same effect with the intervention with the correctly solved examples.

Keywords: exponents, misconceptions, calculation of exponents, erroneous examples, didactic intervention

## 1. Εισαγωγή

Η άλγεβρα παρέχει τη βάση για προηγμένη μαθηματική σκέψη και η επάρκεια σε αλγεβρικούς χειρισμούς θεωρείται απαραίτητη για τους μαθητές που θέλουν να ακολουθήσουν τη σταδιοδρομία της επιστήμης, της τεχνολογίας, της μηχανικής και των μαθηματικών (Cangelosi et al, 2013). Κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων, οι έννοιες στα μαθηματικά αρχίζουν να γίνονται σταδιακά πιο αφηρημένες. Διάφορες ερευνητικές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στο να βοηθήσουν του μαθητές να κατανοήσουν αυτές τις έννοιες με πιο ελκυστικές στρατηγικές. Οι περισσότερες από αυτές τις μελέτες εστιάζουν στις συναρτήσεις ή την επίλυση γραμμικών εξισώσεων (Cangelosi et al, 2013). Αντιθέτως, λίγες είναι οι μελέτες που επικεντρώνονται στην κατανόηση των δυνάμεων και των λογαριθμικών και εκθετικών εκφράσεων, οι οποίες θεωρούνται έννοιες βασικές για διαφορικές εξισώσεις (Khan & Loi, 2020). Αυτό που εκλείπει σχετικά με τη διδασκαλία των δυνάμεων είναι ο τρόπος για την κατανόηση των πράξεων που αντιστοιχούν σε αυτές και ο τρόπος σύνδεσης των δυνάμεων με αντικείμενα της καθημερινότητας (Herold et al, 2019).

Η έννοια των δυνάμεων είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή από τους μαθητές γιατί απαιτεί τον συνδυασμό μεταξύ συμβόλων, σημασιών και αλγοριθμικών ιδιοτήτων (Ulusoy, 2019). Αποτελεί μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια για την κατανόηση προηγμένων μαθηματικών εννοιών, όπως οι συναρτήσεις, οι λογάριθμοι και ο λογισμός. Επιπλέον, η ικανότητα επίλυσης των δυνάμεων έχει μεγάλη σημασία σε διάφορα πεδία εφαρμογής της, όπως ο έλεγχος του πληθυσμού, η ραδιενεργή αποσύνθεση, τα προβλήματα πληθωρισμού, οι μουσικές κλίμακες, η άλγεβρα, η σύνθετη ανάλυση καθώς και η επιστήμη των υπολογιστών. Αν και οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις δυνάμεις ως ένα νέο σύνολο αριθμών, αυτή η έννοια αντιπροσωπεύει τη συντομευμένη μορφή του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εκμάθηση των δυνάμεων, καθώς θεωρούν ότι είναι έννοια περίπλοκη και αφηρημένη, η οποία δεν συμβαδίζει με την πραγματική ζωή, αφού δεν τις χρησιμοποιούν στην καθημερινότητά τους. Κατά τη διδασκαλία των δυνάμεων, οι εκπαιδευτικοί δίνουν περισσότερο έμφαση στην διαδικαστική γνώση της έννοιας των δυνάμεων, παρά στην εννοιολογική τους προσέγγιση (Ramazan, 2010).

Με άλλα λόγια, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, κατά τη μάθηση να εντοπίζονται και να μελετούνται τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών. Θα ήταν ωφέλιμο να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή και σημασία σε αυτές τις παρανοήσεις των μαθητών ώστε να αναλύονται στην τάξη με σκοπό να τις διορθώσουν (Melis, 2004; Rushton, 2018). Για δεκαετίες, η μαθηματική εκπαίδευση στηρίζεται περισσότερο στην επίδειξη των σωστά δουλευμένων παραδειγμάτων ως πρότυπα για να ακολουθήσουν οι μαθητές. Τα σωστά επεξεργασμένα παραδείγματα, έχει αποδειχθεί ότι είναι αποτελεσματικά στην ενίσχυση της μάθησης (Yang et al, 2016). Τα τελευταία χρόνια, όμως, τα λανθασμένα παραδείγματα έχουν εισαχθεί με σκοπό να διευκολύνουν τους μαθητές να αναλογιστούν τα λάθη, τα σφάλματα και τις παρανοήσεις τους (Yang et al, 2016; Rushton, 2018).

Τα λανθασμένα παραδείγματα είναι ασκήσεις που παρουσιάζουν διάφορα λάθη κατά την επίλυσή τους και ζητούν από τους μαθητές να τα βρουν, να τα εξηγήσουν και να τα διορθώσουν. Είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά για την αντιμετώπιση λανθασμένων αντιλήψεων και παρανοήσεων των μαθητών (Richey et al, 2019). Επιπλέον, ενισχύουν τη μεταγνώση, προσφέροντας την ευκαιρία στους μαθητές να μάθουν σε βάθος και έτσι βελτιώνουν την απόδοσή τους και να διορθώνουν τα λάθη τους (Zhao & Acosta-Tello, 2016). Εντούτοις, δεν υπάρχουν έρευνες στη βιβλιογραφία που να μελετούν την εφαρμογή των λανθασμένων παραδειγμάτων στη διδασκαλία των δυνάμεων.

Η συγκεκριμένη ερευνητική εργασία εστιάζει στην διερεύνηση των λαθών και των πιο συχνών παρανοήσεων των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου σχετικά με τις δυνάμεις με εκθέτες φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, ερευνάται αν μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα μπορεί να βελτιώσει τις επιδόσεις των μαθητών συγκριτικά με την παραδοσιακή διδασκαλία των δυνάμεων. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει αν οι μαθητές της Β΄ τάξης του Γυμνασίου μπορούν να διορθώσουν τις παρανοήσεις που εμφανίζουν στις δυνάμεις μέσα από τη χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων συγκριτικά με τη χρήση των σωστά επεξεργασμένων παραδειγμάτων από την παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση στη διδασκαλία και την κατανόηση των δυνάμεων.

Για τη μελέτη του παραπάνω στόχου, χρησιμοποιήθηκαν τρία ερωτηματολόγια που δόθηκαν πριν από την παρέμβαση, αμέσως μετά την παρέμβαση

και ένα μήνα μετά την παρέμβαση. Ήταν παρόμοια μεταξύ τους, με 16 ερωτήσεις το κάθε ένα, στις οποίες οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν τη σωστή απάντηση μέσα από 4 πιθανές επιλογές. Εφαρμόστηκε μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα στα δυο τμήματα της Β΄ Γυμνασίου και μια παραδοσιακή διδασκαλία με σωστά παραδείγματα στα άλλα δυο τμήματα της ίδιας τάξης. Έτσι, οι μαθητές χωρίστηκαν σε δυο ομάδες, την ομάδα Παρέμβασης και την ομάδα Ελέγχου. Στην ομάδα Παρέμβασης εφαρμόστηκε η διδασκαλία με λανθασμένα παραδείγματα και στην ομάδα Ελέγχου η διδασκαλία με ορθά λυμένα παραδείγματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο της ερευνητικής αυτής εργασίας, παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια και τη σημαντικότητα των δυνάμεων, τον τρόπο που προσεγγίζονται στο σχολείο, τα λάθη και τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές στις δυνάμεις, αλλά και τη σημασία των λανθασμένων παραδειγμάτων στη διδασκαλία. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται ο στόχος, τα ερευνητικά ερωτήματα καθώς και η μεθοδολογία της συγκεκριμένης έρευνας. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα ευρήματα των αποτελεσμάτων και συζητούνται προτάσεις για επόμενες έρευνες. Τέλος, δίνεται παράρτημα με τα εργαλεία και τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν.

## **2. Επισκόπηση βιβλιογραφίας**

### **2.1 Η έννοια των Δυνάμεων**

Οι δυνάμεις είναι μια σημαντική έννοια των Μαθηματικών, αφού παρέχει στους μαθητές βασικό υπόβαθρο για την κατανόηση πιο περίπλοκων ιδεών (Ulusoy, 2019). Τα τελευταία χρόνια, παρατηρήθηκε ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις προηγμένες μαθηματικές έννοιες, όπως οι εκθετικές συναρτήσεις και οι λογάριθμοι (Cangelossi et al., 2013). Αν και το θέμα των δυνάμεων είναι κεντρικό για αυτές τις μαθηματικές έννοιες, υπάρχει σχετικά μικρή έρευνα που επικεντρώθηκε στην μάθηση και την κατανόηση των δυνάμεων (Avcu, 2010; Ramazan, 2010; Ellis et al., 2016 οπ. αναφ. στο Ulusoy, 2019).

Πράγματι, οι δυνάμεις είναι ένα από τα κεφάλαια των Μαθηματικών, στο οποίο οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες (Ozkan E. M. & Ozkan A., 2012). Η έννοια των δυνάμεων είναι δύσκολο να αποκτηθεί αφού απαιτεί τη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ συμβόλων, σημασιών και αλγοριθμικών ιδιοτήτων (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Δεν επαρκεί η διαδικαστική γνώση ώστε να εκτελέσουν τους κατάλληλους υπολογισμούς οι μαθητές, προκειμένου να βρουν την τιμή των παραστάσεων με δυνάμεις, αλλά πρέπει να έχουν κατανοήσει τη λογική πίσω από τον αλγόριθμο επίλυσης των δυνάμεων (Ulusoy, 2019). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τρεις τύποι μελέτης έχουν επικεντρωθεί στην κατανόηση των δυνάμεων από τους μαθητές (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Ένας τύπος μελέτης είναι αυτός που επικεντρώνεται στην αντίληψη της δύναμης από τους μαθητές. Άλλος ένας τύπος αφορά την ανάπτυξη της διαισθητικής ικανότητας για την κατανόηση των δυνάμεων. Αρκετοί μαθητές χρησιμοποιούν δυο τρόπους στρατηγικής για την επίλυση των δυνάμεων, είτε με πρόσθεση είτε με πολλαπλασιασμό. Πολλές έρευνες έχουν επικεντρωθεί στην αντίληψη των μαθητών για τις δυνάμεις αλλά δεν ασχολούνται με την πηγή του προβλήματος (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Τέλος, άλλος ένας τύπος μελέτης είναι αυτός που ασχολείται με τη διδασκαλία των δυνάμεων. Πολύ λίγες μελέτες στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν ασχοληθεί με τη διδασκαλία και τη μάθηση των δυνάμεων (Barnes, 2006 & Chua, 2006, οπ αναφ στο Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007).

Αν και οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τις δυνάμεις ως ένα νέο σύνολο αριθμών, η έννοια των δυνάμεων στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει μια μορφή ενός επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού (Ramazan, 2010). Ο Weber (2002) ερμηνεύει την έκφραση  $a^2$  ως μια εντολή στην οποία το  $a$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δυο φορές. Ο ίδιος ορίζει τις δυνάμεις με διαφορετικούς τρόπους. Αρχικά, ορίζει την δύναμη ως πράξη ενός επαναλαμβανόμενου μετασχηματισμού ενός αριθμού. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση όπου σε μια δύναμη  $a^b$ , οι εκθέτες είναι ακέραιοι αριθμοί, ο αριθμός  $b$  δηλώνει επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό του  $a$  με  $b$  φορές. Δεύτερον, ο Weber (2002) ορίζει τη δύναμη ως μια διαδικασία, αφού οι μαθητές επαναλαμβάνουν μια πράξη. Οι μαθητές που κατανοούν τη διαδικασία  $a^b$ , μπορούν να βρουν το αποτέλεσμα δίχως να εκτελέσουν την αντίστοιχη πράξη (Weber, 2002).

Οι μαθητές, λοιπόν, θα πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζουν τους κανόνες και τις ιδιότητες των δυνάμεων για την επίλυση απλών και βασικών εκθετικών εκφράσεων (Matlala, 2021). Επιπλέον, οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν τους διαφορετικούς αριθμούς στη βάση και τον εκθέτη, ιδιαίτερα όταν υπάρχει στην έκφραση ο αριθμός  $e$  του Euler και να έχουν την ικανότητα να απλοποιούν παραστάσεις με δυνάμεις (Matlala, 2021).

## 2.2 Η σημασία των δυνάμεων

Η Άλγεβρα αποτελεί τη βάση για την απόκτηση προηγμένης μαθηματικής σκέψης. Η επάρκεια στους αλγεβρικούς χειρισμούς είναι απαραίτητη για τους μαθητές που θέλουν να εισέλθουν στην επιστήμη των Μαθηματικών (Cangelossi et al, 2013). Οι δυνάμεις είναι ένα από τα θέματα της Άλγεβρας που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν, γι' αυτό οι Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης (2007) υπογραμμίζουν την ανάγκη απόκτησης γνώσεων των δυνάμεων στο Γυμνάσιο. Η ικανότητα επίλυσης των δυνάμεων είναι σημαντική σε αυτό το στάδιο των μαθητών, αφού για την κατανόηση προηγμένων μαθηματικών εννοιών όπως οι εκθετικές συναρτήσεις και οι λογάριθμοι, απαιτούνται οι γνώσεις πιο απλών και βασικών δυνάμεων, με φυσικούς αριθμούς (Ulusoy, 2019). Επιπλέον, η κατανόηση της έννοιας των δυνάμεων απαιτείται για την ερμηνεία διαφορετικών πεδίων, όπως τη φυσική και την οικονομία (Weber, 2002).

Η διδασκαλία των δυνάμεων θεωρείται αναγκαία ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές τα εφόδια για να μπορέσουν να διαχειριστούν τις εκθετικές συναρτήσεις στο λύκειο (Nguyen et al, 2020). Σύμφωνα με τον Nguyen (2020) η κατανόηση των δυνάμεων και αργότερα, των εκθετικών συναρτήσεων έχει ουσιαστικό νόημα και αντίκτυπο στα μαθηματικά αλλά και στην επιστήμη και την τεχνολογία. Στην επιστήμη της μηχανικής και της φυσικής, οι εκθετικές συναρτήσεις θεωρούνται στο επίκεντρο, αφού χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση των συναρτήσεων. Σύμφωνα με αυτές, μελετάται η αύξηση του πληθυσμού, η αποσύνθεση, η θερμότητα (Nguyen et al, 2020). Σύμφωνα με τους Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης (2007), είναι

αρκετά σημαντικό να μελετηθεί η έννοια των δυνάμεων και των εκθετών με σκοπό να αποκτηθούν γνώσεις για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αδιαμφισβήτητα, οι δυνάμεις θεωρούνται θεμελιώδεις και κεντρικές μαθηματικές έννοιες για πολλά πανεπιστημιακά μαθήματα, καθώς αποτελούν βασικές έννοιες για την άλγεβρα, τον λογισμό, τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, τις διαφορικές εξισώσεις και την ανάλυση (Weber, 2002 & Matlala, 2021). Δυστυχώς, έρευνες έχουν δείξει πως η κατανόηση αυτών των εννοιών από τους μαθητές είναι αρκετά περιορισμένη (Confrey & Smith, 1995 οπ αναφ στο Weber, 2002). Από αυτή την άποψη είναι σημαντικό να δημιουργηθούν ισχυρές βάσεις για την κατανόηση των δυνάμεων από τους μαθητές του Γυμνασίου ώστε να αποφευχθούν εμπόδια και δυσκολίες τα επόμενα χρόνια. Για το λόγο αυτό, διεξάγονται περισσότερες έρευνες και μελέτες σχετικά με τις δυνάμεις όσων αφορά την αντίληψη των μαθητών πάνω σε αυτές (Ulusoy, 2019).

### 2.3 Η έννοια των δυνάμεων στα σχολικά Μαθηματικά

Η έννοια των δυνάμεων εντάσσεται στα σχολικά μαθηματικά, αρχικά, στη Στ' τάξη του Δημοτικού σχολείου και αργότερα στην Α' Γυμνασίου. Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο της Στ' Δημοτικού, «ως δύναμη μπορεί να γραφεί ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες» (βλ. Εικόνα 1). Η δύναμη αποτελείται από δυο αριθμούς, τη βάση που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον εκθέτη που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας (Κασώτη, Κλιάπη & Οικονόμου, 2016). Σύμφωνα με το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τους μαθητές της Στ' Δημοτικού, σχετικά με τις δυνάμεις είναι να εκτιμούν το αποτέλεσμα της πράξης και να υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης χρησιμοποιώντας την προτεραιότητα των πράξεων (Πρόγραμμα Σπουδών – Μαθηματικά – Γυμνάσιο, 2011). Ακόμη, οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη μέχρι 4 και να μπορούν να γράψουν τους αριθμούς 10, 100, 1000 κλπ με τη μορφή δυνάμεων του 10.

### Δύναμη φυσικού αριθμού

Ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες μπορεί να γραφεί ως **δύναμη**. Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς: τη **βάση** που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας.

### Παραδείγματα

Παράγοντες γινομένου - δύναμη

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$2^5$

2: βάση

5: εκθέτης

**Εικόνα 1.** Ορισμός της δύναμης φυσικού αριθμού στη Στ' Δημοτικού

Στο σχολικό βιβλίο της Α' Γυμνασίου, για τον ορισμό της δύναμης δίνεται η πρόταση: «το γινόμενο  $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  με  $n$  παράγοντες (είτε ο  $a$  είναι θετικός, είτε είναι αρνητικός αριθμός) συμβολίζεται με το  $a^n$  και λέγεται δύναμη με βάση το  $a$  και εκθέτη το φυσικό  $n > 1$ » (Βανδουλάκης, Καλλιγιάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος, 2011) (βλ. Εικόνα 2). Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, διδακτικός στόχος για τους μαθητές της Α' Γυμνασίου είναι να κατανοούν την έννοια της δύναμης και να μπορούν να τις διαβάζουν. Επιπλέον στόχος είναι να μπορούν να υπολογίσουν δυνάμεις με μεγάλους αριθμούς ή και με δεκαδικό αριθμό στη βάση χρησιμοποιώντας ή όχι υπολογιστή τσέπης. Οι μαθητές της Α' Γυμνασίου θα πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζουν την προτεραιότητα των πράξεων σε αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις και παρενθέσεις. Τέλος, στόχος είναι να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες των τετραγώνων και των κυβικών αριθμών (Τζεκάκη κ.α., 2011).

● Το γινόμενο  $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , που έχει  $n$  παράγοντες ίσους με το  $a$ , λέγεται **δύναμη του  $a$  στη  $n$**  ή **νιοστή δύναμη του  $a$**  και συμβολίζεται με  $a^n$ .

● Ο αριθμός  $a$  λέγεται **βάση της δύναμης** και ο  $n$  λέγεται **εκθέτης**.

● Η **δύναμη** του αριθμού στη **δεύτερα**, δηλαδή το  $a^2$ , λέγεται και **τετράγωνο του  $a$** .

● Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το  $a^3$ , λέγεται και **κύβος του  $a$** .

▶ Το  $a^1$ , δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού  $a$  είναι ο **ίδιος ο αριθμός  $a$** .

◆ Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το  $1^n$ , είναι **όλες ίσες με 1**.

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$   
n παράγοντες

$a^2$

$a^3$

$a^1 = a$

$1^n = 1$

**Εικόνα 2.** Ορισμός της δύναμης φυσικού αριθμού στην Α' Γυμνασίου

Στα σχολικά βιβλία οι δυνάμεις παρουσιάζονται με την προσέγγιση του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού (Ellis et al., 2015, οπ. Αναφ. στο Ulusoy, 2019). Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, οι μαθητές πρέπει να εξετάσουν και να συνδέσουν την πράξη με τον συμβολισμό της δύναμης (Ulusoy, 2019). Δυνάμεις που περιλαμβάνουν θετικούς ακέραιους αριθμούς στις βάσεις και τους εκθέτες,



εισάγονται για πρώτη φορά στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Αργότερα, στο Γυμνάσιο, οι δυνάμεις επεκτείνονται και συμπεριλαμβάνουν τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, αλλά και τους ρητούς αριθμούς (Ulusoy, 2019). Αυτή η κατάσταση απαιτεί από τους μαθητές να ξανασκεφτούν τον διαισθητικό ορισμό της δύναμης ως επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό (Levenson, 2012 οπ αναφ στο Ulusoy, 2019).

## 2.4 Λάθη και παρανοήσεις στις δυνάμεις

Η εκμάθηση της Άλγεβρας είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους μαθητές του Γυμνασίου. Παρόλα αυτά, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με δυσκολίες που αφορούν μαθηματικούς τύπους, την κατανόηση αλγεβρικών εξισώσεων και αριθμητικών πράξεων, την κατανόηση της σημασίας των συμβόλων και των μεταβλητών (Pramesti & Retnawati, 2019). Η κατανόηση των αλγεβρικών εξισώσεων και των αριθμητικών πράξεων ανήκουν στις μετασχηματιστικές δραστηριότητες, οι οποίες περιλαμβάνουν διαδικαστικές δραστηριότητες (Pramesti & Retnawati, 2019). Αν και οι δυνάμεις χρησιμοποιούνται σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών, οι μαθητές τις θεωρούν ως πράξεις περιττές και με περίπλοκη έννοια, η οποία δεν σχετίζεται με την πραγματική ζωή και συνεπώς παραμένουν ως μια αφηρημένη έννοια (Ramazan, 2010; Ozkan, 2012). Οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν τη συμβολική μορφή των δυνάμεων, ως ένα πιο σύντομο τρόπο αναγραφής του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού (Τζεκάκη κ.α., 2011).

Τις τελευταίες δεκαετίες, έρευνες έχουν διαπιστώσει μια φθίνουσα επίδοση των μαθητών σε διάφορα πεδία των Μαθηματικών (Ycong et al, 2019). Αρκετές από αυτές τις έρευνες έχουν εστιάσει στην απαρίθμηση των κοινών λαθών που κάνουν οι μαθητές όταν απλοποιούν δυνάμεις (Barnes, 2006; Chiu, Ibello, Kastner & Wooldrige, 2009 οπ αναφ στο Cangelossi et al, 2013). Παρόλα αυτά λίγες είναι οι έρευνες που επιχειρούν να προσδιορίσουν τα επίμονα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών και ακόμα πιο λίγες προσπαθούν να καταλάβουν τις αιτίες αυτών των παρανοήσεων στις δυνάμεις (Cangelossi et al, 2013).

Ειδικότερα, λανθασμένες αντιλήψεις ή παρανοήσεις, σύμφωνα με τον Ozkan (2012) μπορούν να οριστούν ως οι λανθασμένες έννοιες και απόψεις που έχουν οι μαθητές τις οποίες θεωρούν σωστές και τις χρησιμοποιούν συστηματικά. Οι παρανοήσεις μπορούν, επίσης, να οριστούν ως τις λανθασμένες απόψεις που έχουν οι μαθητές, τις οποίες θεωρεί σωστές και τις χρησιμοποιεί από συνήθεια (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Οι παρανοήσεις, αυτές, έχουν διαφορετικές ιδιότητες και διαφέρουν από τα τυχαία λάθη και στα μαθηματικά δεν σχετίζονται με λάθη αμέλειας ή απροσεξίας, αλλά είναι πιο ουσιαστικά, επαναλαμβανόμενα και επίμονα λάθη (Σκουμπουρδή, 2002). Ενώ οι παρανοήσεις προέρχονται από προβλήματα που οφείλονται σε εννοιολογικές παρερμηνείες, τα λάθη - σφάλματα προέρχονται από τυχαία υπολογιστική συγκυρία (Holmes et al, 2013). Τα σφάλματα, αυτά, είναι υπολογιστικής φύσης, και προέρχονται συνήθως από λανθασμένη τυπογραφική δήλωση (Holmes et al, 2013). Οι μαθητές μπορεί να συνειδητοποιήσουν το λάθος τους και να το διορθώσουν αλλά όταν έχουν μια συγκεκριμένη παρανόηση έχουν την τάση να δικαιολογούν τον εαυτό τους για τα λάθη τους (Cankoy, 2000 οπ αναφ στο Ozkan, 2012). Επιπλέον, οι παρανοήσεις στα μαθηματικά προκύπτουν από τον λανθασμένο τρόπο σκέψης των μαθητών (Yasin, 2017).

Ως παρανοήσεις, επομένως, στα μαθηματικά ορίζονται οι παρερμηνείες οι οποίες βασίζονται σε λανθασμένα νοήματα και οφείλονται σε σκέψεις των μαθητών που εμποδίζουν τον ορθό συλλογισμό τους (Ojose, 2015). Σύμφωνα με τον Ojose (2015), οι λανθασμένες αντιλήψεις και οι παρανοήσεις υπάρχουν εξαιτίας της επιτακτικής ανάγκης των μαθητών να πραγματοποιήσουν και να ολοκληρώσουν τις ασκήσεις που τους ζητούνται. Ένα από τα θέματα των μαθηματικών στα οποία οι μαθητές έχουν λανθασμένες αντιλήψεις και δυσκολεύονται να κατανοήσουν, είναι και οι δυνάμεις (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Στη μελέτη του ο Ramazan (2010) διαπίστωσε πως οι μαθητές εφαρμόζουν τυφλά τους κανόνες των δυνάμεων με φυσικούς αριθμούς και σε άλλα σύνολα αριθμών και έτσι μετατρέπουν τη διαδικασία σε αλγόριθμο. Σύμφωνα με τον ίδιο, η βασική αιτία των λαθών και των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών είναι το γεγονός ότι δεν κατανοούν τους κανόνες των δυνάμεων που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει επειδή χρησιμοποιούνται παραδείγματα από φυσικούς αριθμούς για να γίνει επεξήγηση του τρόπου επίλυσης των δυνάμεων (Ramazan, 2010 & Pitta- Pantazi, Christou & Zaxariades, 2007). Ο Ulusoy (2019),

στα ευρήματά του, έδειξε πως η επίδοση των μαθητών στις δυνάμεις ήταν χαμηλή, ιδιαίτερα όταν εκθέτης ήταν το 0 ή όταν παρουσιαζόταν το αρνητικό πρόσημο στη δύναμη. Επιπλέον, πρόσθεσε ότι οι μαθητές εμφάνιζαν συστηματικά λάθη στον επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό και λανθασμένες αντιλήψεις που προήλθαν από τον ορισμό των δυνάμεων (Ycong et al, 2019). Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές εφάρμοζαν τους κανόνες που ισχύουν στις δυνάμεις με φυσικούς αριθμούς και στις δυνάμεις με ακεραίους αριθμούς (Ycong et al, 2019). Επιπρόσθετα, οι μαθητές έκαναν διάφορα λάθη στον υπολογισμό μιας δύναμης, επειδή συγχέουν προσθετικές και πολλαπλασιαστικές πράξεις. Αυτή η επαναλαμβανόμενη σύγχυση οδηγεί τους μαθητές σε συστηματικά και επίμονα λάθη κατά την επίλυση μιας δύναμης (Ycong et al, 2019).

Πράγματι, οι πιο συνηθισμένες παρανοήσεις, που εμφανίζουν οι μαθητές στις δυνάμεις αφορούν την αξία των δυνάμεων (Ulysoy, 2019). Σύμφωνα με τον ορισμό, η δύναμη αντιπροσωπεύει τον επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό και ο εκθέτης δείχνει πόσες φορές χρησιμοποιείται η βάση ως παράγοντας. Ωστόσο, κάποιοι μαθητές πολλαπλασιάζουν τη βάση με τον εκθέτη (Schwarzenberger, 1984 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Πολύ συχνά, οι μαθητές συγχέουν τις δυνάμεις  $x^n$  και  $n^x$ , για παράδειγμα, θεωρούν ότι η δύναμη  $2^3$  είναι ίση με τη δύναμη  $3^2$  (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Μια ακόμη παρανόηση των μαθητών εμφανίζεται όταν συναντούν μια παράσταση η οποία περιέχει δυνάμεις, οι οποίες είναι όμοιες, δηλαδή έχουν ίδια βάση αλλά διαφορετικούς εκθέτες, για παράδειγμα  $\frac{(-1)^{2001} + (-1)^{2010} + (-1)^{102}}{(-1)^{2008} - (-1)^{2003}}$  (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Παρανοήσεις εμφανίζουν όταν καλούνται να κάνουν πράξεις μεταξύ δυνάμεων, κατά την πρόσθεση και την αφαίρεση για παράδειγμα  $2^4 + 3^2$ , και κατά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση για παράδειγμα  $10^2 \cdot 9^3$  (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Επιπλέον, κάποιοι μαθητές εμφανίζουν την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, για παράδειγμα  $(-2)^4 = -16$  (Ulysoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Οι μαθητές δεν μπορούν να διακρίνουν την έκφραση  $(-a)^n$  και  $-a^n$ . Επίσης, εμφανίζουν παρανοήσεις όταν πρέπει να υπολογίσουν μια δύναμη με αρνητικό εκθέτη, για παράδειγμα  $3^{-4}$  (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Ακόμη, αρκετοί μαθητές εμφανίζουν παρανοήσεις όταν μια δύναμη είναι υψωμένη σε άλλη δύναμη, δηλαδή για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, για παράδειγμα  $(2^2)^3 = 2^{2+3}$

(Ozkan E. M. & Ozkan A., 2012). Τέλος, υπάρχουν μαθητές που εμφανίζουν παρανοήσεις για την κατανόηση των δυνάμεων με εκθέτη το 0, δηλαδή για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, θα πρέπει το αποτέλεσμα της δύναμης με εκθέτη το 0 να παραμένει ίδιο με τη βάση, για παράδειγμα  $3^0 = 3$  (Cengiz, 2006, Ulusoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, αναφέρονται οι παρακάτω παρανοήσεις:

- Πολλαπλασιασμός της βάση με τον εκθέτη (Schwarzenberger, 1984 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Σύγκριση των δυνάμεων  $x^n$  και  $n^x$ , (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Σύγκριση δυνάμεων που είναι ομοιόμορφες, για παράδειγμα  $\frac{(-1)^{2001} + (-1)^{2010} + (-1)^{102}}{(-1)^{2008} - (-1)^{2003}}$  (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Παρανοήσεις κατά τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των δυνάμεων (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Διατήρηση αρνητικού πρόσημου όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός (Ulusoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Παράβλεψη του αρνητικού πρόσημου του εκθέτη σε μια δύναμης (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).
- Πρόσθεση δυνάμεων όταν μια δύναμη είναι υψωμένη σε άλλη δύναμη (Ozkan E. M. & Ozkan A., 2012).
- Αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη μιας δύναμης (Cengiz, 2006, Ulusoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Η έννοια των δυνάμεων, όπως διαπιστώνεται, περιλαμβάνει ορισμένους κανόνες που σχετίζονται με τη βάση και τον εκθέτη. Ωστόσο, πολύ συχνά οι μαθητές μπερδεύονται και ξεχνούν αυτούς τους κανόνες με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθη και παρανοήσεις (Cengiz, 2006). Οι αιτίες των παρανοήσεων μπορεί να ποικίλουν. Μπορεί να σχετίζονται με την προσέγγιση από τους εκπαιδευτικούς ή με την αντιμετώπισή τους από τους μαθητές (Ycong et al, 2019). Αρχικά, οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν τον συμβολισμό των δυνάμεων, με αποτέλεσμα την λάθος ερμηνεία τους (Weber, 2002; Ulusoy, 2019). Έτσι, συχνά λάθη και παρανοήσεις

εμφανίζονται κατά τον τρόπο επίλυσης των δυνάμεων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι μαθητές απομνημονεύουν τους κανόνες των δυνάμεων χωρίς να τους κατανοούν (Ozkan, 2019; Ycong et al, 2019). Στο στάδιο της διαδικασίας υπολογισμού των δυνάμεων, οι μαθητές περιορίζονται μόνο στους φυσικούς αριθμούς, σύμφωνα με την έννοια του πρωτοτύπου (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Επιπλέον, η έλλειψη της αίσθησης της έννοιας των δυνάμεων και η γενίκευση όλων των κανόνων που ισχύουν για τους φυσικούς αριθμούς, στους ακεραίους και τους ρητούς οδηγεί σε παρανοήσεις και λανθασμένες αντιλήψεις (Duatepe Paksu, 2008 οπ αναφ στο Ramazan, 2010).

Οι ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών θεωρούνται η βάση για την απόκτηση της νέας γνώσης και αν αυτές δεν είναι επαρκείς τότε δημιουργούνται κενά στους μαθητές και δεν τους επιτρέπουν να αποκτήσουν τη νέα γνώση (Χρήστου, 2009). Ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρά η νέα γνώση με την προϋπάρχουσα, έχει διερευνηθεί με θεωρητικά πλαίσια όπως αυτό της εννοιολογικής αλλαγής (Christou & Vosniadou, 2012). Σύμφωνα με το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, είναι αναγκαία η αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης για τη μάθηση (Christou & Vosniadou, 2012). Η εννοιολογική αλλαγή ως διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές επεκτείνονται και αλλάζουν τις υπάρχουσες γνώσεις τους, παρέχει τα μέσα για να μπορέσουν οι μαθητές από τον υπολογισμό δυνάμεων με φυσικούς αριθμούς να επεκταθούν στους ρητούς και τους άρρητους (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Οι μαθητές για να υπολογίσουν τις δυνάμεις, χρησιμοποιούν ορισμένους κανόνες και αλγορίθμους. Για την εκμάθηση αυτών των κανόνων απαιτείται να καθιερωθεί μια σχέση ανάμεσα στην ήδη υπάρχουσα γνώση, που είναι ο πολλαπλασιασμός, με τη νέα γνώση, τον επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό (Ozkan, 2019). Ο επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός στην έννοια της δύναμης, συνδέεται με βαθύτερες εννοιολογικές παρανοήσεις (Jordan, 2014). Οι μαθητές θεωρούν σωστό να πολλαπλασιάσουν τη βάση με τον εκθέτη σε μια δύναμη, αφού γνωρίζουν τον κανόνα του πολλαπλασιασμού (Cangelossi et al, 2013).

Για πολλούς μαθητές, η ορολογία και οι κανόνες των ιδιοτήτων των δυνάμεων, δεν έχουν νόημα, καθώς απομνημονεύονται με ελάχιστη ή καθόλου εννοιολογική κατανόηση, με αποτέλεσμα να μην τους εφαρμόζουν σωστά (Cangelossi et al, 2013). Συνεπώς, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και παρανοήσεις όταν προσπαθούν να μεταβούν από τη διαδικαστική - λειτουργική

αντίληψη στην δομική αντίληψη για τις δυνάμεις (Kieran, 1992 οπ αναφ στο Ramazan, 2010). Η μετάβαση από τη διαδικαστική στη δομική κατανόηση θεωρείται δύσκολο να αποκτηθεί, δεδομένου ότι η δομική κατανόηση περιπλέκεται από το γεγονός ότι οι εκθέτες σε μια δύναμη θεωρούνται ως νέοι συμβολισμοί που έχουν δικό τους τρόπο σκέψης (Πίττα- Πανταζή, Χρήστου & Ζαχαριάδης, 2007). Οι δυνάμεις θεωρούνται μετασχηματιστικές δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να συνδυάσουν την κατανόηση πληροφοριών και αναπαραστάσεων με τους υπολογισμούς.

Συμπληρωματικά, η εγγενής ασάφεια της προφορικής γλώσσας έχει τη δυνατότητα να παρεμβαίνει στην ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένων και των δυνάμεων (Cangelossi et al, 2013). Μια πιθανή πηγή σύγχυσης κατά την ανάγνωση εκθετικών εκφράσεων είναι μια προφορική ομοιότητα. Παραδείγματος χάρη, σε μελέτη, οι μαθητές παρερμήνευσαν την έκφραση  $-9^3$  με την έκφραση  $(-9)^3$ , και δεν έκαναν καμία διάκριση μεταξύ αυτών, καθώς διάβασαν και τις δυο δυνάμεις με τον ίδιο τρόπο (Cangelossi et al, 2013). Συνεπώς, οι μαθητές θεωρούν ότι οι δυο αυτές δυνάμεις ότι είναι ίσες.

Σύμφωνα με τους Iymen & Duatepe (2015), οι επιδόσεις των μαθητών κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων ήταν καλύτερες σχετικά με την αίσθηση των αριθμών. Παρόλα αυτά, αυτή η υψηλότερη επίδοση δεν συνοδεύεται από ουσιαστική μάθηση. Αποκαλύφθηκε πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κατά τη σύγκριση δυνάμεων καθώς και κατά τον υπολογισμό δυνάμεων, όπου η βάση είναι ακέραιος αρνητικός αριθμός (Iymen & Duatepe, 2015). Εντούτοις, οι μαθητές είχαν καλύτερα αποτελέσματα όταν η βάση και ο εκθέτης ήταν φυσικοί αριθμοί. Η αιτία για την ύπαρξη αυτών των δυσκολιών έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές αδυνατούν να προσδιορίσουν την τιμή των δυνάμεων, δεν αντιλαμβάνονται το νόημα της ύπαρξης του μηδενός ως εκθέτη και δεν διαφοροποιούν την έκφραση  $(-a)^n$  και  $-a^n$  (Iymen & Duatepe, 2015). Για να αποφευχθούν αυτές οι παρανοήσεις στις δυνάμεις, είναι σημαντικός ο προσδιορισμός της αίσθησης των δυνάμεων και όχι η μίμηση και απομνημόνευση, χωρίς την κατανόηση της έννοιας των δυνάμεων (Muslim et al, 2021).

Στην πραγματικότητα, τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών που αφορούν τις δυνάμεις, μπορεί να είναι είτε εννοιολογικής φύσης, είτε οφείλονται στον ορισμό,

είτε στο λεξιλόγιο (Holmes et al, 2013). Ωστόσο, τα λάθη που οφείλονται σε λεξιλόγιο ή στον ορισμό μπορούν να αντιμετωπιστούν εστιάζοντας στο κομμάτι που παρερμηνεύεται η έννοια που δυσκολεύει τους μαθητές. Ενώ είναι φαινομενικά εύκολο να εντοπιστούν τα υπολογιστικά λάθη των μαθητών, δεν είναι εύκολο να εντοπιστεί από τον εκπαιδευτικό αν είναι τυχαίο λάθος ή μια παρανόηση. Επιπλέον, αν τα υπολογιστικά λάθη οφείλονται σε λανθασμένες πεποιθήσεις και παρανοήσεις, θα πρέπει να εξεταστούν σε βάθος από τους εκπαιδευτικούς (Holmes et al, 2013).

Συνεπώς, για μια πιο ουσιαστική διδασκαλία στις δυνάμεις, με σκοπό να διορθωθούν οι λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών, ωφέλιμο θα ήταν πριν από τον προσδιορισμό της έννοιας των δυνάμεων, να λυθούν προβλήματα και λανθασμένες αντιλήψεις στα σύνολα των ακεραίων και ρητών αριθμών, αλλά και στις πράξεις μεταξύ τους. Όταν συμβεί αυτό, οι μαθητές θα είναι πιο συνειδητοποιημένοι για να εφαρμόσουν τους κανόνες των δυνάμεων (Ozkan, 2019). Εν κατακλείδι, θα ήταν πιο αποτελεσματικό να μην χρησιμοποιούνται και εφαρμόζονται μόνο οι παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, αλλά ίσως και μέθοδοι όπως τα λανθασμένα παραδείγματα.

## **2.5 Λανθασμένα παραδείγματα**

Για δεκαετίες, η μαθηματική εκπαίδευση στηρίζεται περισσότερο στην επίδειξη των σωστά δουλεμένων παραδειγμάτων ως πρότυπα για να ακολουθήσουν οι μαθητές (Rushton, 2018). Συνήθως, ζητείται από τους μαθητές να μελετήσουν, να εξηγήσουν και να λύσουν μια άσκηση (Barbieri & Booth, 2019). Ένας μεγάλος όγκος ερευνών σχετικά με τα σωστά επεξεργασμένα παραδείγματα, καταδεικνύει τα οφέλη στη μάθηση των μαθηματικών, τα οποία περιλαμβάνουν μείωση στο χρόνο μάθησης και μελέτης καθώς και μείωση στα λάθη των μαθητών (Carroll, 1994, Sweller & Cooper, 1985 οπ αναφ στο Barbieri & Booth, 2019). Οι μαθητές όταν παρατηρούν ένα σωστό παράδειγμα, το μελετούν μέχρι να αισθανθούν ότι αντιλαμβάνονται τα βήματα της λύσης και στη συνέχεια προχωρούν σε επίλυση παρόμοιων ασκήσεων (Barbieri & Booth, 2019).

Τα τελευταία χρόνια, όμως, τα λανθασμένα παραδείγματα έχουν εισαχθεί με σκοπό την ανάλυση των σφαλμάτων και των παρανοήσεων των μαθητών (Rushton, 2018). Τα λανθασμένα παραδείγματα αποτελούν ασκήσεις που παρουσιάζουν λάθη και ζητούν από τους μαθητές να βρουν και να διορθώσουν αυτά τα λάθη (Melis, 2004). Αποτελούν μια περιγραφή βήμα προς βήμα του τρόπου επίλυσης μιας άσκησης κατά τον οποίο, ένα ή περισσότερα βήματα είναι λανθασμένο (Adams et al, 2013; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Επιπλέον, τα λανθασμένα παραδείγματα προσφέρουν πρόσθετες ευκαιρίες για μάθηση εις βάθος (Melis, 2004). Η εφαρμογή αυτών των παραδειγμάτων μπορεί να δείχνει ότι υπάρχει ο κίνδυνος να ενισχυθούν οι παρανοήσεις των μαθητών ή και η ανακριβή κατανόηση των μαθηματικών (Richey et al 2019). Ειδικότερα, όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τα λανθασμένα παραδείγματα και προσπαθούν να το αιτιολογήσουν και να το εξηγήσουν, εγκυμονεί ο κίνδυνος να προκληθεί σύγχυση ή ακόμα και απογοήτευση (Richey et al 2019). Ωστόσο, η διερεύνηση των λαθών μπορεί να διαδραματίσει πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η παρουσίαση των λανθασμένων παραδειγμάτων στους μαθητές ενθαρρύνει τον προβληματισμό τους, βοηθώντας τους να διορθώσουν τα λάθη τους και να οδηγηθούν στην επιτυχία (Richey et al 2019). Η μελέτη του λάθους, λοιπόν, κατά την επίλυση ασκήσεων οδηγεί στην πρόοδο και την εξέλιξη των μαθητών και όχι την αποτυχία στα μαθηματικά (Σκουμπουρδή, 2002).

Αδιαμφισβήτητα, τα λανθασμένα παραδείγματα θεωρούνται ως ένα ασυνήθιστο και προκλητικό υλικό μάθησης, που όμως μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερη μάθηση (Adams et al, 2013). Επιφέρουν μακροπρόθεσμα οφέλη όταν η διδασκαλία σχεδιάζεται και τροποποιείται ενσωματώνοντάς τα μέσα σε αυτή (Adams et al, 2013). Η ιδέα πίσω από την εφαρμογή των λανθασμένων παραδειγμάτων σε μια διδασκαλία είναι να ενισχύσουν την μνήμη, μέσα από την οποία οι μαθητές θα υποστηρίξουν την νέα γνώση που θα αποκτήσουν, και θα ενθαρρύνουν την κριτική τους σκέψη (Adams et al, 2013; Zhao & Acosta-Tello, 2016). Οι μαθητές βελτιώνονται στην αξιολόγηση και την αιτιολόγηση των απαντήσεών τους με θετικότερα αποτελέσματα στην επίδοσή τους. Συνεπώς, ενισχύουν τη μεταγνωστική τους επίδοση εξαιτίας της γνωστικής σύγκρουσης με την προηγούμενη γνώση επειδή για την κατανόηση των λανθασμένων παραδειγμάτων απαιτείται μια σταθερή μαθηματική βάση (Zhao & Acosta-Tello, 2016). Έτσι, οι μαθητές βελτιώνουν τόσο



τις γνωστικές όσο και τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες (Zhao & Acosta-Tello, 2016).

Σύμφωνα με την Melis (2004) για τον σχεδιασμό λανθασμένων παραδειγμάτων για ένα μαθησιακό περιβάλλον, θα πρέπει να διερευνηθούν οι τύποι των λαθών που εμφανίζονται πιο συχνά σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό τομέα, όπως οι δυνάμεις. Οι μαθητές του γυμνασίου καλούνται να βρουν, να εξηγήσουν και να διορθώσουν το λάθος σε ένα βήμα μιας άσκησης (Adams et al, 2013). Για την ακρίβεια, τα λανθασμένα παραδείγματα θεωρούνται ως επιθυμητά για την εξάλειψη των δυσκολιών των μαθητών στα μαθηματικά με δυο τρόπους. Αρχικά, αυτά τα παραδείγματα χαρακτηρίζονται ως μια πρωτότυπη ιδέα, στην οποία οι μαθητές αναζητούν το λάθος, σε αντίθεση με την τυπική πρακτική επίλυσης μιας άσκησης (Adams et al, 2013). Δεύτερον, η διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα παρέχει μια ποικιλία από εργασίες, οι οποίες διαφέρουν και ως προς τη δυσκολία τους (Adams et al, 2013).

Είναι αλήθεια ότι τα λανθασμένα παραδείγματα χρησιμοποιούνται συχνά σε συνδυασμό με τα σωστά παραδείγματα (Barbieri & Booth, 2019). Οι Grosse και Renkl (2007) μελέτησαν τα αποτελέσματα μιας έρευνας που σύγκρινε τα σωστά και τα λανθασμένα παραδείγματα για τη διόρθωση παρανοήσεων στην άλγεβρα και διαπίστωσαν πως οι μαθητές επωφελήθηκαν περισσότερο από τον συνδυασμό τους, καθώς βελτίωσαν τις διαδικαστικές και εννοιολογικές τους δεξιότητες (Barbieri & Booth, 2019). Παρόλα αυτά, ο Durkin (2009) έδειξε ότι η εφαρμογή λανθασμένων παραδειγμάτων αποτελεί μια δύσκολη μέθοδο για τους μαθητές με χαμηλές επιδόσεις και με χαμηλή γνώση περιεχομένου σε θέματα της άλγεβρας (Barbieri & Booth, 2019). Με το να σκεφτούν οι μαθητές πιθανά σφάλματα αφού μελετήσουν ένα σωστό παράδειγμα, τους παρέχονται τόσο σωστές πληροφορίες για την επίλυση της άσκησης, όσο και ευκαιρία για ανίχνευση πιθανών εσφαλμένων βημάτων (Barbieri & Booth, 2019).

Η παρουσίαση των λανθασμένων παραδειγμάτων γίνεται αναλογικά με την ικανότητα των μαθητών (Melis, 2004). Πιο συγκεκριμένα, στους λιγότερο ικανούς μαθητές επισημαίνονται τα λανθασμένα μέρη της άσκησης και τους ζητούνται να τα διορθώσουν. Αντίθετα, στους πιο ικανούς μαθητές τους δίνεται το λανθασμένο παράδειγμα, τους ζητείται να βρουν το λάθος και στη συνέχεια να το διορθώσουν

(Melis, 2004). Ως κατευθυντήρια γραμμή, οι μέθοδοι για τον εντοπισμό των σφαλμάτων θα πρέπει να διδαχθούν πριν έρθουν αντιμέτωποι οι μαθητές με τα λανθασμένα παραδείγματα. Διαφορετικά, μπορεί να καταστεί δύσκολη διαδικασία για πολλούς μαθητές, ακόμα και η διόρθωση των σφαλμάτων αυτών (Melis, 2004).

Καθώς, οι παρανοήσεις των μαθητών καθίστανται δύσκολο στο να αλλάξουν και να ξεπεραστούν, διαταράσσουν τη μάθηση μειώνοντας την πρόοδο των μαθητών (Richey et al 2019). Τα λανθασμένα παραδείγματα μπορεί να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών (Durkin & Rittle- Johnson, 2012 οπ αναφ στο Richey et al 2019). Η διδασκαλία των μαθηματικών θα μπορούσε να επωφεληθεί από την εφαρμογή λανθασμένων παραδειγμάτων, αφού ενθαρρύνουν την κριτική σκέψη και τον προβληματισμό των μαθητών (Zhao & Acosta- Tello, 2016). Όπως γίνεται σαφές, μέσα από τα λανθασμένα παραδείγματα, οι μαθητές ανακαλύπτουν διαφορετικούς τύπους σφαλμάτων, που απαιτούν διαφορετικές δεξιότητες για την ανίχνευσή τους και τέλος την διόρθωσή τους (Melis, 2004). Για παράδειγμα, πολλά λάθη μπορούν να βρεθούν μέσα από την παρατήρηση μεμονωμένων βημάτων σε ένα παράδειγμα και αυτά τα λάθη είναι πιο εύκολο να εντοπιστούν από τους μαθητές. Ορισμένα λάθη, όμως, απαιτούν την ανάλυση του παραδείγματος, και μπορεί να απαιτούνται μεταγνωστικές δραστηριότητες (Melis, 2004).

Οι τεχνικές διδασκαλίας των εκπαιδευτικών επηρεάζουν τα επίπεδα ενδιαφέροντος των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί, σύμφωνα με τους Ozkan A. & Ozkan M. (2012), δεν πρέπει να χρησιμοποιούν μια σταθερή μέθοδο διδασκαλίας, αλλά θα πρέπει να παρακινούν τους μαθητές να συμμετέχουν στο μάθημα με διάφορες τεχνικές, όπως ο συνδυασμός των λανθασμένων και σωστών παραδειγμάτων για τις δυνάμεις (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Αρκετές έρευνες υποδηλώνουν ότι τα λανθασμένα παραδείγματα βελτιώνουν τις συνθήκες μάθησης στα σχολεία και την επίδοση των μαθητών. Επί παραδείγματι, τα λανθασμένα παραδείγματα μπορούν να μειώσουν το άγχος των μαθητών, να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητά τους με στόχο την απόδοση επιτυχίας στα μαθηματικά, να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη, διαφορετικές στρατηγικές συλλογισμού και να διεγείρουν τον προβληματισμό τους (Melis, 2004). Επιπλέον, αυτή η μέθοδος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να βελτιώσουν τόσο τις γνωστικές όσο και τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες (Zhao &

Acosta-Tello, 2016). Δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να μάθουν σε βάθος και να γίνουν καλύτεροι στην αιτιολόγηση των διαδικασιών λύσης (Adams et al, 2013).

Σύμφωνα με τον Ohlsson (1996), η προηγούμενη γνώση είναι εκείνη που επιτρέπει στους μαθητές να ανιχνεύσουν ποια μπορεί να είναι τα πιθανά λάθη κατά την επίλυση μιας άσκησης (Barbieri & Booth, 2019). Η μελέτη και η εξήγηση των λαθών και των σφαλμάτων βοηθά τους μαθητές να προσδιορίσουν ποια είναι τα χαρακτηριστικά που δηλώνουν ότι σε κάποιο βήμα της άσκησης υπάρχει λάθος και έτσι, να διορθώσουν τις λανθασμένες γνώσεις τους (Barbieri & Booth, 2019). Ωστόσο, η αδύναμη και ελλιπής προηγούμενη γνώση των μαθητών καθιστά τον εντοπισμό των λαθών μια δύσκολη υπόθεση (Barbieri & Booth, 2019).

### 3. Στόχος, Μεθοδολογία της έρευνας

#### 3.1 Στόχος της έρευνας

Οι μαθητές, λοιπόν, έρχονται αντιμέτωποι αδιαμφισβήτητα με παρανοήσεις κατά την διδασκαλία των δυνάμεων. Η έρευνα αυτή εστίασε στη μελέτη των πιο συνηθισμένων παρανοήσεων όπως φάνηκε από τη βιβλιογραφία, και είναι αυτές που προκαλούν τα περισσότερα λάθη των μαθητών με τις δυνάμεις είναι:

A. Η παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, για παράδειγμα  $2^3 = 2 \cdot 3$  (Schwarzenberger, 1984 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012) .

B. Η παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, για παράδειγμα  $(-3)^2 = -9$  (Ulusoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Γ. Η παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, για παράδειγμα  $(2^3)^4 = 2^{3+4} = 2^7$  (Ozkan E. M. & Ozkan A., 2012).

Δ. Η παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση, για παράδειγμα  $3^0 = 3$ . (Cengiz, 2006; Ulusoy, 2019 & Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει αν οι μαθητές της Β΄ τάξης του Γυμνασίου μπορούν να διορθώσουν τις παραπάνω παρανοήσεις μέσα από τη χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων παρά από τη χρήση των σωστά επεξεργασμένων παραδειγμάτων από την παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση στη διδασκαλία και την κατανόηση των δυνάμεων. Πιο συγκεκριμένα, τίθενται προς διερεύνηση τα εξής ερωτήματα:

- 1) Ποιες παρανοήσεις εμφανίζουν οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου κατά την εκμάθηση των δυνάμεων με εκθέτες φυσικούς αριθμούς;
- 2) Μπορεί μια διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα να βοηθήσει στη διόρθωση αυτών των παρανοήσεων, συγκριτικά με την παραδοσιακή διδασκαλία με ορθά λυμένα παραδείγματα;

### 3.2 Διδακτική πρόταση

Η διδακτική πρόταση που προτείνεται, σχεδιάστηκε για μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Προτείνεται με σκοπό την εξάλειψη των πιο συχνών παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με τις δυνάμεις των αριθμών με εκθέτες φυσικούς αριθμούς, όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως. Οι γνώσεις των μαθητών σχετικά με τις δυνάμεις των αριθμών θεωρούνται γνωστές από την προηγούμενη τάξη και σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, στις αρχές της Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές τις διδάσκονται. Για το λόγο αυτό, η διδακτική παρέμβαση που ακολουθεί θεωρείται χρήσιμη για τη διδασκαλία των δυνάμεων.

## 3.3 Μεθοδολογία

### 3.3.1 Συμμετέχοντες

Σε αυτή την έρευνα συμμετείχαν 71 μαθητές της Β΄ τάξης ενός δημόσιου Γυμνασίου στην περιοχή της Θεσσαλονίκης. Οι μαθητές αποτελούνταν από 43 αγόρια και 28 κορίτσια. Αυτή η τάξη ήταν χωρισμένη σε 4 τμήματα. Συνεπώς, δυο τμήματα από αυτή την τάξη αποτελούνταν από 35 μαθητές (22 αγόρια 13 κορίτσια) και ανήκαν στην ομάδα παρέμβασης και τα άλλα δυο αποτελούνταν από 36 παιδιά (21 αγόρια και 15 κορίτσια) και ανήκαν στην ομάδα ελέγχου.

Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου είχαν διδαχθεί τον ορισμό και τις ιδιότητες των δυνάμεων από το τέλος της Α΄ Γυμνασίου. Επιπλέον, στην αρχή της σχολικής χρονιάς διδάσκονται ξανά τις δυνάμεις και επιλύουν αριθμητικές παραστάσεις που τις περιλαμβάνουν. Σαφώς, οι μαθητές και οι μαθήτριες ήταν σε θέση να απαντήσουν τα ερωτηματολόγια.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που σχετίζονταν με παρανοήσεις στις δυνάμεις σχετικά με τον πολλαπλασιασμό της βάσης με την δύναμη, σχετικά με τη διατήρηση του αρνητικού πρόσημου με δύναμη άρτιο αριθμό, σχετικά με την πρόσθεση των δυνάμεων, όταν μια δύναμη βρίσκεται σε άλλη δύναμη και τέλος, σχετικά με το αποτέλεσμα όταν η δύναμη είναι ο αριθμός 0. Έτσι, λοιπόν, ο σχεδιασμός των ερωτηματολογίων βασίστηκε σε αυτές τις παρανοήσεις.

### 3.3.2 Υλικό

Στην αρχή, δόθηκαν στους μαθητές και τις μαθήτριες δύο ερωτηματολόγια που το καθένα αποτελούνταν από 16 ερωτήσεις σχετικές με τις δυνάμεις. Στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στην πρώτη φάση (EP\_A), οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν τη σωστή απάντηση μέσα από τέσσερις πιθανές επιλογές *«Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις»*. Το ερωτηματολόγιο της δεύτερης φάσης (EP\_B) αποτελούνταν από τις ίδιες ερωτήσεις δοσμένες με διαφορετικούς

αριθμούς. Τέλος, το ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης (EP\_Γ) ήταν το ίδιο με το ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης.

Τα ερωτηματολόγια σχεδιάστηκαν με βάση τις γνώσεις των μαθητών και επικεντρώθηκαν στις τέσσερις κατηγορίες παρανοήσεων που εμφανίζονται, σύμφωνα με την βιβλιογραφία όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η δομή των ερωτηματολογίων περιλαμβάνει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με τέσσερις πιθανές απαντήσεις, που περιλαμβάνουν τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές. Η πρώτη κατηγορία ερωτήσεων αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, η δεύτερη κατηγορία ερωτήσεων αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, η τρίτη κατηγορία ερωτήσεων αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν και τέλος, η τέταρτη κατηγορία ερωτήσεων αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση.

Οι 16 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου της Α΄ Φάσης (EP\_A) ζητούσαν από τους μαθητές να κυκλώσουν τη σωστή απάντηση (π.χ. Η δύναμη  $2^3$  είναι ίση με: ) με 4 πιθανές εναλλακτικές επιλογές ( i)  $2 \cdot 3$ , ii)  $2 \cdot 2 \cdot 2$ , iii)  $3 \cdot 3$ , iv)  $2+3$  ) (βλ. Εικόνα 3 για ένα παράδειγμα).

---

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις.

Υπάρχει μια μόνο σωστή απάντηση!

1) Η δύναμη  $2^3$  είναι ίση με:

i)  $2 \cdot 3$

ii)  $2 \cdot 2 \cdot 2$

iii)  $3 \cdot 3$

iv)  $2+3$

---

**Εικόνα 3.** Ενδεικτικό παράδειγμα Ερώτησης 1 του Ερωτηματολογίου της Α΄ Φάσης

Όπως είναι φανερό, οι πιθανές επιλογές περιλαμβάνουν απαντήσεις από τις παρανοήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη κατηγορία (Κ.Α), η οποία αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, εντάχθηκαν οι ερωτήσεις E.1, E.11, E.13 και E.15 και εξέταζαν τις δυνάμεις  $2^3$ ,  $5^2$ ,  $3^5$  και  $1^2$  αντίστοιχα. Στη δεύτερη κατηγορία (Κ.Β) ερωτήσεων, η οποία αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, δόθηκαν οι ερωτήσεις E.3, E.6, E.10 και E.12 και εξέταζαν τις δυνάμεις  $(-3)^2$ ,  $(-1)^6$ ,  $(-2)^4$  και  $(-4)^2$  αντίστοιχα. Στην τρίτη κατηγορία ερωτήσεων (Κ.Γ), η οποία αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, ενσωματώθηκαν οι ερωτήσεις E.2, E.5, E.7 και E.9 και εξέταζαν τις δυνάμεις  $(5^2)^3$ ,  $(2^2)^3$ ,  $(3^4)^2$  και  $(3^2)^3$  αντίστοιχα. Τέλος, στην τέταρτη κατηγορία ερωτήσεων (Κ.Δ), η οποία αφορά την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση εντάχθηκαν οι ερωτήσεις E.4, E.8, E.14 και E.16 και εξέταζαν τις δυνάμεις  $4^0$ ,  $7^0$ ,  $11^0$  και  $5^0$  αντίστοιχα (βλ. Πίνακα 1).

**Πίνακας 1.** Ερωτήσεις Ερωτηματολογίου Ά Φάσης ανά κατηγορία παρανόησης

Α΄ Φάση	Κ.Α	Κ.Β	Κ.Γ	Κ.Δ
Ερωτήσεις	E.1: $2^3$	E.3: $(-3)^2$	E.2: $(5^2)^3$	E.4: $4^0$
	E.11: $5^2$	E.6: $(-1)^6$	E.5: $(2^2)^3$	E.8: $7^0$
	E.13: $3^5$	E.10: $(-2)^4$	E.7: $(3^4)^2$	E.14: $11^0$
	E.15: $1^2$	E.12: $(-4)^2$	E.9: $(3^2)^3$	E.16: $5^0$

Το ερωτηματολόγιο της δεύτερης φάσης (EP\_B) αποτελούνταν από 16 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με πιθανές απαντήσεις δυνάμεων που σχετίζονταν με κάθε μια από τις τέσσερις παρανοήσεις. Οι ερωτήσεις ήταν παρόμοιες με αυτές του Ερωτηματολογίου Α. Ένα παράδειγμα φαίνεται στην Εικόνα 4.

---

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις.

Υπάρχει μια μόνο σωστή απάντηση!

1) Η δύναμη  $(-7)^2$  είναι ίση με:

i) - 49

ii) 49

iii) -7·2

iv) 7·2

---

**Εικόνα 4.** Ενδεικτικό παράδειγμα Ερώτησης 1 του Ερωτηματολογίου της Β΄ Φάσης

Πιο αναλυτικά, για την πρώτη κατηγορία (Κ.Α), δόθηκαν οι ερωτήσεις Ε.2, Ε.9, Ε.12 και Ε.14 και εξετάζαν τις δυνάμεις  $4^2$ ,  $3^2$ ,  $1^5$  και  $2^5$  αντίστοιχα. Για τη δεύτερη κατηγορία ερωτήσεων (Κ.Β), δόθηκαν οι ερωτήσεις Ε.1, Ε.3, Ε.7 και Ε.11 και εξετάζαν τις δυνάμεις  $(-7)^2$ ,  $(-1)^2$ ,  $(-5)^2$  και  $(-2)^6$  αντίστοιχα. Για την τρίτη κατηγορία (Κ.Γ), δόθηκαν οι ερωτήσεις Ε.5, Ε.8, Ε.13 και Ε.16 που εξετάζαν τις δυνάμεις  $(3^5)^2$ ,  $(3^8)^2$ ,  $(5^6)^3$  και  $(2^4)^2$  αντίστοιχα. Τέλος, για την τέταρτη κατηγορία (Κ.Δ), δόθηκαν οι ερωτήσεις Ε.4, Ε.6, Ε.10 και Ε.15 που εξετάζαν τις δυνάμεις  $5^0$ ,  $4^0$ ,  $2^0$  και  $3^0$  αντίστοιχα (βλ. Πίνακα 2). Τα ερωτηματολόγια της έρευνας παρατίθενται στο Παράρτημα (βλ. Παράρτημα).

**Πίνακας 2.** Ερωτήσεις Ερωτηματολογίου Β΄ Φάσης ανά κατηγορία παρανόησης

Β΄ Φάση	Κ.Α	Κ.Β	Κ.Γ	Κ.Δ
Ερωτήσεις	Ε.2: $4^2$	Ε.1: $(-7)^2$	Ε.5: $(3^5)^2$	Ε.4: $5^0$
	Ε.9: $3^2$	Ε.3: $(-1)^2$	Ε.8: $(3^8)^2$	Ε.6: $4^0$
	Ε.12: $1^5$	Ε.7: $(-5)^2$	Ε.13: $(5^6)^3$	Ε.10: $2^0$
	Ε.14: $2^5$	Ε.11: $(-2)^6$	Ε.16: $(2^4)^2$	Ε.15: $3^0$

### 3.3.3 Διδακτική Παρέμβαση

Στους μαθητές της ομάδας παρέμβασης (Ο.Π.) παρουσιάστηκαν στον πίνακα ενδεικτικά λανθασμένα παραδείγματα από κάθε κατηγορία παρανοήσεων όπως



αναφέρθηκε παραπάνω, με τις λάθος απαντήσεις των μαθητών. Για το κάθε ένα λανθασμένο παράδειγμα τονίστηκαν οι παρανοήσεις των μαθητών που τους οδήγησαν σε αυτές τις λανθασμένες απαντήσεις και συζητήθηκαν μέσα στην τάξη.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο λανθασμένο παράδειγμα ήταν από την ερώτηση E.1:  $2^3$  (βλ. Παράρτημα). Η συγκεκριμένη ερώτηση περιελάμβανε την πρώτη κατηγορία παρανόησης, δηλαδή ότι πολλαπλασιάζεται ο εκθέτης με τη βάση. Για αυτή την παρανόηση παρουσιάστηκε μια απάντηση ενός/μιας υποθετικού μαθητή/μαθήτριας, που απάντησε ότι πρέπει να πολλαπλασιαστεί η βάση 2 με τον εκθέτη 3 και το αποτέλεσμα να είναι 6. Πιο συγκεκριμένα γράφτηκε στον πίνακα η ισότητα:  $2^3 = 2 \cdot 3 = 6$ . Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν το λάθος. Έπειτα, εξηγήθηκε η λάθος σκέψη του υποθετικού μαθητή και συζητήθηκε στην τάξη αυτή η παρανόηση, ώστε οδηγήθηκαν οι μαθητές στη σωστή απάντηση. Έπειτα, οι μαθητές έλεγαν στην τάξη ένα δικό τους λανθασμένο παράδειγμα, παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε, το εξηγούσαν στους συμμαθητές τους και τέλος, έδιναν τη σωστή απάντηση.

Το δεύτερο λανθασμένο παράδειγμα ήταν από την ερώτηση E.3:  $(-3)^2$  (βλ. Παράρτημα). Αυτή η ερώτηση περιλάμβανε την δεύτερη κατηγορία παρανοήσεων, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο. Παρουσιάστηκε στον πίνακα της τάξης μια λανθασμένη απάντηση με βάση τη συγκεκριμένη παρανόηση και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία που προαναφέρθηκε.

Το τρίτο λανθασμένο παράδειγμα ήταν από την ερώτηση E.2:  $(5^2)^3$  (βλ. Παράρτημα). Αυτή η ερώτηση εξέταζε την τρίτη κατηγορία παρανοήσεων, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν. Και σε αυτή την περίπτωση παρουσιάστηκε στον πίνακα της τάξης μια λανθασμένη απάντηση με βάση τη συγκεκριμένη παρανόηση και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία.

Το τέταρτο λανθασμένο παράδειγμα ήταν από την ερώτηση E.4:  $4^0$  (βλ. Παράρτημα). Σε αυτή την ερώτηση εξετάστηκε η τέταρτη παρανόηση, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση. Στον πίνακα της τάξης παρουσιάστηκε μια λανθασμένη απάντηση με

βάση τη συγκεκριμένη παρανόηση και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με παραπάνω.

Σχετικά με την ομάδα ελέγχου (Ο.Ε), παρουσιάστηκαν στον πίνακα ορθά λυμένα παραδείγματα από κάθε κατηγορία παρανοήσεων, δηλαδή οι ίδιες ερωτήσεις όπως προηγουμένως. Επισημάνθηκαν οι ιδιότητες των δυνάμεων για κάθε μια κατηγορία. Για παράδειγμα, γράφτηκε στον πίνακα η δύναμη  $2^3$  και σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης δόθηκε η σωστή απάντηση 8 (βλ. Παράρτημα). Στη συνέχεια, οι μαθητές έγραφαν στον πίνακα της τάξης δικά τους ορθά λυμένα παραδείγματα. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και στα επόμενα παραδείγματα. Έπειτα, δόθηκε το ερωτηματολόγιο της Β' φάσης σε όλους τους μαθητές και των δυο ομάδων για να ελεγχθεί και να εξεταστεί το αποτέλεσμα της παρέμβασης.

### 3.3.4 Διαδικασία

Τα ερωτηματολόγια χορηγήθηκαν από την ίδια την ερευνήτρια στους μαθητές. Κατά τη χορήγηση των ερωτηματολογίων δόθηκαν σαφείς προφορικές και γραπτές διευκρινιστικές οδηγίες στους μαθητές για τη συμπλήρωσής τους.

Η διαδικασία της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις. Αρχικά, σε διάρκεια μιας διδακτικής ώρας (45-50 λεπτά) στο μάθημα των Μαθηματικών δόθηκαν τα ερωτηματολόγια Α' φάσης (EP\_A) (προ-έλεγχος) στους μαθητές και των δυο ομάδων, παρέμβασης και ελέγχου, με την παρουσία του εκπαιδευτικού της τάξης και της ερευνήτριας. Δόθηκαν προφορικές οδηγίες για τη συμπλήρωσής του ερωτηματολογίου, όπως παρακάτω: *«Στο ερωτηματολόγιο που σας δίνεται θα πρέπει να συμπληρώσετε τα στοιχεία σας, και στη συνέχεια να επιλέξετε μόνο μια σωστή απάντηση από τις επιλογές που δίνονται»*. Ο χρόνος για την επίλυση των ερωτηματολογίων υπολογίστηκε στα 10 λεπτά.

Στη συνέχεια, στους μαθητές της ομάδας παρέμβασης έγινε διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα που υπολογίστηκε περίπου στα 20 λεπτά. Ενώ στους μαθητές της ομάδας ελέγχου δόθηκαν ορθά παραδείγματα για να διαπιστωθεί αν η διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα επιφέρει αποτελέσματα.

Σε επόμενο χρόνο, δόθηκαν τα ερωτηματολόγια της Β΄ φάσης (EP\_B) (μετά-έλεγχος) σε όλους τους μαθητές με χρόνο συμπλήρωσης περίπου 10 λεπτά. Ένα μήνα αργότερα δόθηκε το ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης (EP\_Γ) στους μαθητές (μεταγενέστερος έλεγχος - Γ΄ φάση) το οποίο ήταν το ίδιο με το ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης.

### 3.3.5 Εγκυρότητα της Έρευνας

Για την εξασφάλιση της εγκυρότητας των ερωτηματολογίων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα, επιλέχθηκαν ερωτήσεις που ήταν αντιπροσωπευτικές των πιο συχνών παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων, όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως. Επιπλέον, οι ερωτήσεις εξυπηρετούσαν το σκοπό της έρευνας και ήταν διατυπωμένες με σαφήνεια. Ακόμη, για τη διεκπεραίωση της έρευνας ζητήθηκε η συγκατάθεση των γονέων, του συλλόγου διδασκόντων του σχολείου, καθώς και η έγγραφη συμφωνία του διευθυντή. Διατηρήθηκε πλήρως η ανωνυμία των μαθητών και η συμμετοχή τους ήταν προαιρετική.

## 4. Αποτελέσματα

Για τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα έγινε, αρχικά, περιγραφική στατιστική ανάλυση. Οι απαντήσεις τους κατηγοριοποιήθηκαν αρχικά σε ορθές και λανθασμένες. Ως λανθασμένες καταχωρήθηκαν οι ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές δεν επέλεξαν τη σωστή απάντηση από τις τέσσερις πιθανές επιλογές. Στη συνέχεια, εξετάστηκαν ποια είναι τα λάθη των μαθητών ανά κατηγορία λαθών εξαιτίας τις παρανοήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι ερωτήσεις των ερωτηματολογίων σχεδιάστηκαν με βάση τις τέσσερις κατηγορίες παρανοήσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διδασκαλία των δυνάμεων. Η Κατηγορία Α (Κ.Α) περιλαμβάνει τις ερωτήσεις που αφορούν την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα

πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη. Η Κατηγορία Β (Κ.Β) περιλαμβάνει τις ερωτήσεις σχετικά με την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός, το αρνητικό πρόσημο διατηρείται. Η Κατηγορία Γ (Κ.Γ) περιλαμβάνει τις ερωτήσεις που σχετίζονται με την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν. Τέλος, η Κατηγορία Δ (Κ.Δ) περιλαμβάνει τις ερωτήσεις που αφορούν την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση.

Οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με τα λάθη που εμφάνισαν σε κάθε κατηγορία παρανοήσεων όπως αναφέρθηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σε λάθη εξαιτίας της Κατηγορίας Α των παρανοήσεων (Λ.Π1), ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, σε λάθη λόγω της Κατηγορίας Β των παρανοήσεων (Λ.Π2), ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, σε λάθη λόγω της Κατηγορίας Γ των παρανοήσεων (Λ.Π3), ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, σε λάθη εξαιτίας της Κατηγορίας Δ των παρανοήσεων (Λ.Π4), ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση και σε λάθη από άλλες αιτίες που δεν ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες παρανοήσεων (Λ.Α.), για παράδειγμα πρόσθεση της βάσης με τις δυνάμεις, ή σε κάποιον αριθμό που δεν σχετίζεται με τη δύναμη τα οποία προκύπτουν από ενέργειες που γίνονται χωρίς την απαιτούμενη προσοχή.

### Α΄ Φάση

Αρχικά, έγινε ανάλυση των αποτελεσμάτων ως προς τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις στην Α΄ Φάση (προέλεγχος). Τα ποσοτικά αποτελέσματα για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας, σε αυτή τη φάση, δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 3. Το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων φαίνεται να είναι αρκετά μεγάλο 50,4% έναντι των σωστών που κυμαίνεται στο 49,6%. Στην ομάδα ελέγχου εμφανίζεται αρκετά μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (40,7%). Αντίθετα, οι σωστές απαντήσεις είναι ελάχιστα περισσότερες με ποσοστό 59,3%

**Πίνακας 3.** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των απαντήσεων της Ομάδας Παρέμβασης (N= 35) και της Ομάδας Ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης

Ερωτήσεις	Ο.Π. (N=35)		Ο.Ε. (N=36)	
	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος
E. 1 (2 <sup>3</sup> )	35 (100%)	-	36 (100%)	-
E. 2 (5 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	9 (25,7%)	26 (74,3%)	14 (38,9%)	22 (61,1%)
E. 3 (-3) <sup>2</sup>	18 (51,4%)	17 (48,6%)	21 (58,3%)	15 (41,7%)
E. 4 (4 <sup>0</sup> )	12 (34,3%)	23 (65,7%)	18 (50%)	18 (50%)
E. 5 (2 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	10 (28,6%)	25 (71,4%)	17 (47,2%)	19 (52,8%)
E. 6 (-1) <sup>6</sup>	13 (37,1%)	22 (62,9%)	18 (50%)	18 (50%)
E. 7 (3 <sup>4</sup> ) <sup>2</sup>	9 (25,7%)	26 (74,3%)	16 (44,4%)	20 (5,6%)
E. 8 (7 <sup>0</sup> )	12 (34,3%)	23 (65,7%)	19 (52,8%)	17 (47,2%)
E. 9 (3 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	11 (31,4%)	24 (68,6%)	15 (41,7%)	21 (58,3%)
E.10 (-2) <sup>4</sup>	19 (54,3%)	16 (45,7%)	22 (61,1%)	14 (38,9%)
E. 11 (5 <sup>2</sup> )	33 (94,3%)	2 (5,7%)	30 (83,3%)	6 (16,7%)
E.12 (-4) <sup>2</sup>	18 (51,4%)	17 (48,6%)	23 (63,9%)	13 (36,1%)
E. 13 (3 <sup>5</sup> )	33 (94,3%)	2 (5,7%)	31 (86,1%)	5 (13,9%)
E.14 (11 <sup>0</sup> )	12 (34,3%)	23 (65,7%)	17 (47,2%)	19 (52,8%)
E. 15 (1 <sup>2</sup> )	24 (68,6%)	11 (31,4%)	27 (75%)	9 (25%)
E. 16 (5 <sup>0</sup> )	10 (28,6%)	25 (71,4%)	18 (50%)	18 (50%)
Σύνολο	278 (49,6%)	282 (50,4%)	342 (59,3%)	234 (40,7%)

Στη συνέχεια, δίνονται αναλυτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της ομάδας παρέμβασης (Ο.Π.) στην Α΄ Φάση της έρευνας σε κάθε ερώτηση, όπως κατηγοριοποιήθηκαν παραπάνω. Τα περισσότερα λάθη οφείλονταν σε λάθη λόγω της πρώτης παρανόησης (Λ.Π1), δηλαδή οι μαθητές πολλαπλασίαζαν τη βάση με τη δύναμη σε αρκετά μεγάλο ποσοστό (17,3%). Για παράδειγμα, οι μαθητές για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της δύναμης  $2^3$ , πολλαπλασίαζαν τη βάση με τη δύναμη  $2 \cdot 3 = 6$ . Αξιοσημείωτα είναι και τα λάθη εξαιτίας της τρίτης παρανόησης (Λ.Π3), όπου οι μαθητές για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, πρόσθεταν τις δυο δυνάμεις (15,5%). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $(5^2)^3$ , οι μαθητές πρόσθεταν τις δυο δυνάμεις δηλαδή  $5^{2+3} = 5^5$ . Αντιθέτως, λιγότεροι μαθητές εμφανίζουν λάθη λόγω της δεύτερης παρανόησης (Λ.Π2) (6,9%), δηλαδή ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός διατηρούν το αρνητικό πρόσημο. Για παράδειγμα, για το υπολογισμό της δύναμης  $(-3)^2$ , οι μαθητές διατηρούσαν το αρνητικό πρόσημο δηλαδή,  $-9$ . Τέλος, λιγότεροι μαθητές κάνουν λάθη εξαιτίας της τέταρτης κατηγορίας παρανοήσεων (Λ.Π4) και θεωρούν ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης με εκθέτη το 0 παραμένει ίδιο με τη βάση (5%). Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της δύναμης  $4^0$  οι μαθητές αγνοούσαν τη δύναμη και έδιναν το αποτέλεσμα 4. Ένα μικρότερο ποσοστό μαθητών απάντησαν λάθος χωρίς να ανήκει το λάθος σε κάποια κατηγορία (Λ.Α) (5%) (βλ. Πίνακας 3.1). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $(5^2)^3$ , κάποιοι μαθητές έδωσαν την απάντηση  $5+2+3$ .

Παρά το διαχωρισμό αυτό σε κατηγορίες, υπήρχαν λάθη κατά τα οποία οι μαθητές συγχέουν τις απαντήσεις τους. Δηλαδή αρκετά λάθη των μαθητών εξαιτίας των κατηγοριών παρανοήσεων 2, 3 και 4, συνυπήρχαν με την κατηγορία παρανόησης 1, όπως διαπιστώθηκε. Παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώσαμε τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 3.1.** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Ερωτήσεις	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.1 (2 <sup>3</sup> )	-	-	-	-	-
	E.11 (5 <sup>2</sup> )	1 (2,9%)	-	-	-	-
	E.13 (3 <sup>5</sup> )	1 (2,9%)	-	-	-	1 (2,9%)
	E.15 (1 <sup>2</sup> )	9 (25,7%)	-	-	-	2 (5,7%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.3 (-3) <sup>2</sup>	5 (14,3%)	12 (34,3%)	-	-	-
	E.6 (-1) <sup>6</sup>	11 (31,4%)	6 (17,1%)	-	-	5 (14,3%)
	E.10 (-2) <sup>4</sup>	4 (11,4%)	8 (22,8%)	-	-	4 (11,4%)
	E.12 (-4) <sup>2</sup>	2 (5,7%)	13 (37,1%)	-	-	2 (5,7%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.2 (5 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	-	-	23 (65,7%)	-	3 (8,6%)
	E.5 (2 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	-	-	21 (60%)	-	3 (8,6%)
	E.7 (3 <sup>4</sup> ) <sup>2</sup>	3 (8,6%)	-	21 (60%)	-	2 (5,7%)
	E.9 (3 <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	1 (2,9%)	-	22 (62,9%)	-	1 (2,9%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.4 (4 <sup>0</sup> )	15 (42,9%)	-	-	7 (20%)	1 (2,9%)
	E.8 (7 <sup>0</sup> )	16 (45,7%)	-	-	6 (17,1%)	1 (2,9%)
	E.14(11 <sup>0</sup> )	13 (37,1%)	-	-	8 (22,9%)	2 (5,8%)
	E.16 (5 <sup>0</sup> )	16 (45,7%)	-	-	7 (20%)	1 (2,9%)
Σύνολο		97 (17,3%)	39 (6,9%)	87 (15,5%)	28 (5%)	28 (5%)

Στη συνέχεια, δίνονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης ανά κατηγορία λαθών (βλ. Πίνακας 3.2). Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει. Παρόλα αυτά, τα λάθη της πρώτης κατηγορίας είναι έντονα παντού.

**Πίνακας 3.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	11 (1,9%)	-	-	-	3 (0,6%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	22 (3,9%)	39 (6,9%)	-	-	11 (1,9%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	4 (0,8%)	-	87 (15,5%)	-	9 (1,7%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	60 (10,7%)	-	-	28 (5%)	5 (0,8%)
Σύνολο	97 (17,3%)	39 (6,9%)	87 (15,5%)	28 (5%)	28 (5%)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 4.1, οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών που ανήκουν στην Ομάδα Ελέγχου στην Α΄ Φάση της έρευνας για κάθε ερώτηση, όπως έχουν κατηγοριοποιηθεί παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, οι περισσότεροι μαθητές θεώρησαν ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης, έπρεπε η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη (13,3%). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $2^5$ , οι μαθητές υπολόγισαν  $2 \cdot 5$ . Αρκετοί μαθητές, επίσης, πίστευαν πως για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, έπρεπε να προσθέσουν τις δυο δυνάμεις (12,3%). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $(3^4)^2$ , οι μαθητές έδωσαν την απάντηση  $3^{4+2} = 3^6$ . Λάθη παρατηρήθηκαν και εξαιτίας της δεύτερης παρανόησης, δηλαδή ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός, κάποιοι μαθητές διατήρησαν το αρνητικό πρόσημο (6,7%). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $(-2)^4$  οι μαθητές έδωσαν την απάντηση  $-16$ . Επιπλέον, λάθη συγκέντρωσαν εξαιτίας της τέταρτης παρανόησης ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης με εκθέτη το 0 παραμένει ίδιο με τη βάση (4,1%). Για



παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $11^0$ , οι μαθητές έδωσαν την απάντηση 11. Τέλος, κάποιοι μαθητές συγκέντρωσαν λάθη που δεν οφείλονταν σε κάποια από τις κατηγορίες παρανοήσεων (4,3%) (βλ. Πίνακας 4.1). Για παράδειγμα, για το αποτέλεσμα της δύναμης  $3^5$ , κάποιοι μαθητές έδωσαν την απάντηση 3+5. Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 4.1.** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης

Κατηγορία		Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Παρανοήσεων	Ερωτήσεις					
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.1 ( $2^3$ )	-	-	-	-	-
	E.11 ( $5^2$ )	2 (5,6%)	-	-	-	2 (5,6%)
	E.13 ( $3^5$ )	-	-	-	-	4 (11,1%)
	E.15 ( $1^2$ )	6 (16,7%)	-	-	-	2 (5,6%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.3 ( $-3^2$ )	1 (2,8%)	12 (33,3%)	-	-	1 (2,8%)
	E.6 ( $-1^6$ )	9 (25%)	6 (16,7%)	-	-	5 (13,9%)
	E.10 ( $-2^4$ )	2 (5,6%)	11 (30,6%)	-	-	2 (5,6%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.12 ( $-4^2$ )	3 (8,3%)	10 (27,8%)	-	-	1 (2,8%)
	E.2 ( $5^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	18 (50%)	-	4 (11,1%)
	E.5 ( $2^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	17 (47,2%)	-	2 (5,6%)
	E.7 ( $3^4$ ) <sup>2</sup>	1 (2,8%)	-	18 (50%)	-	1 (2,8%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.9 ( $3^2$ ) <sup>3</sup>	3 (8,3%)	-	18 (50%)	-	-
	E.4 ( $4^0$ )	13 (36,1%)	-	-	4 (11,1%)	1 (2,8%)
	E.8 ( $7^0$ )	11 (30,6%)	-	-	7 (19,4%)	-
	E.14 ( $11^0$ )	12 (33,3%)	-	-	8 (22,2%)	-
	E.16 ( $5^0$ )	14 (38,9%)	-	-	5 (13,9%)	-
	Σύνολο	77 (13,3%)	39 (6,7%)	71 (12,3%)	24 (4,1%)	25 (4,3%)

Έπειτα, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης ανά κατηγορία λαθών (βλ. Πίνακας 4.2). Σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει. Παρόλα αυτά, τα λάθη της πρώτης κατηγορίας είναι έντονα παντού.

**Πίνακας 4.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	8 (1,2%)	-	-	-	8 (1,2%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	15 (2,6%)	39 (6,7%)	-	-	13 (2%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	4 (0,7%)	-	71 (12,3%)	-	7 (1%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	50 (8,8%)	-	-	24 (4,1%)	1 (0,1%)
Σύνολο	77 (13,3%)	39 (6,7%)	71 (12,3%)	24 (4,1%)	25 (4,3%)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και των δυο ομάδων, στα ερωτηματολόγια της Α΄ Φάσης σε όλες τις κατηγορίες (βλ. Πίνακας 5). Πιο αναλυτικά, σχετικά με τα λάθη εξαιτίας της πρώτης παρανόησης (Λ.Π1), φαίνεται πως οι μαθητές της ομάδας ελέγχου συγκέντρωσαν ελάχιστα λιγότερα λάθη (13,3%), σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας παρέμβασης (17,3%). Σχετικά με τα λάθη εξαιτίας των υπόλοιπων παρανοήσεων (ΛΠ.2, Λ.Π3,

Λ.Π4 και Λ.Α), οι μαθητές και των δυο ομάδων συγκέντρωσαν παρόμοια ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων.

**Πίνακας 5.** Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Α΄ Φάσης

Κατηγορίες Λαθών	Ομάδα	Κ.Α	Κ.Β	Κ.Γ	Κ.Δ	Σύνολο
Λ.Π1	Ο.Π	11 (1,9%)	22 (3,9%)	4 (0,8%)	60 (10,7%)	97 (17,3%)
	Ο.Ε	8 (1,2%)	15 (2,6%)	4 (0,7%)	50 (8,8%)	77 (13,3%)
Λ.Π2	Ο.Π	-	39 (6,9%)	-	-	39 (6,9%)
	Ο.Ε	-	39 (6,7%)	-	-	39 (6,7%)
Λ.Π3	Ο.Π	-	-	87 (15,5%)	-	87 (15,5%)
	Ο.Ε	-	-	71 (12,3%)	-	71 (12,3%)
Λ.Π4	Ο.Π	-	-	-	28 (5%)	28 (5%)
	Ο.Ε	-	-	-	24 (4,1%)	24 (4,1%)
Λ.Α	Ο.Π	3 (0,6%)	11 (1,9%)	9 (1,7%)	5 (0,8%)	28 (5%)
	Ο.Ε	8 (1,2%)	13 (2%)	7 (1%)	1 (0,1%)	25 (4,3%)

### Β΄ Φάση

Τα ποσοτικά αποτελέσματα για τους μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης, από το στάδιο της Β΄ φάσης, δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 6 και για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου στον Πίνακα 7. Στη δεύτερη φάση της έρευνας, διαπιστώνεται πως οι μαθητές που ανήκαν στην Ομάδα Παρέμβασης, απάντησαν λανθασμένα σε μικρό ποσοστό (14,3%) (βλ. Πίνακας 6). Οι μαθητές της Ομάδας Ελέγχου σημείωσαν παρόμοια απόδοση στις λανθασμένες απαντήσεις (13,1%) στα ερωτηματολόγια της δεύτερης φάσης της έρευνας.

**Πίνακας 6.** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Β΄ φάσης

Ερωτήσεις	Ο.Π. (N=35)		Ο.Ε. (N=36)	
	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος
E. 1 (-7) <sup>2</sup>	32 (91,4%)	3 (8,6%)	30 (83,3%)	6 (16,7%)
E. 2 (4 <sup>2</sup> )	32 (91,4%)	3 (8,6%)	34 (94,4%)	2 (5,6%)
E. 3 (-1) <sup>2</sup>	23 (65,7%)	12 (34,3%)	29 (80,6%)	7 (19,4%)
E. 4 (5 <sup>0</sup> )	33 (94,3%)	2 (5,7%)	34 (94,4%)	2 (5,6%)
E. 5 (3 <sup>5</sup> ) <sup>2</sup>	28 (80%)	7 (20%)	33 (91,7%)	3 (8,3%)
E. 6 (4 <sup>0</sup> )	31 (88,6%)	4 (11,4%)	33 (91,7%)	3 (8,3%)
E. 7 (-5) <sup>2</sup>	31 (88,6%)	4 (11,4%)	29 (80,6%)	7 (19,4%)
E. 8 (3 <sup>8</sup> ) <sup>2</sup>	28 (80%)	7 (20%)	31 (86,1%)	5 (13,9%)
E. 9 (3 <sup>2</sup> )	34 (97,1%)	1 (2,9%)	31 (86,1%)	5 (13,9%)
E. 10 (2 <sup>0</sup> )	34 (97,1%)	1 (2,9%)	35 (97,2%)	1 (2,8%)
E. 11 (-2) <sup>6</sup>	27 (77,1%)	8 (22,9%)	30 (83,3%)	6 (16,7%)
E. 12 (1 <sup>5</sup> )	24 (68,6%)	11 (31,4%)	28 (77,8%)	8 (22,2%)
E. 13 (5 <sup>6</sup> ) <sup>3</sup>	29 (82,9%)	6 (17,1%)	27 (75%)	9 (25%)
E. 14 (2 <sup>5</sup> )	33 (94,3%)	2 (5,7%)	31 (86,1%)	5 (13,9%)
E. 15 (3 <sup>0</sup> )	33 (94,3%)	2 (5,7%)	34 (94,4%)	2 (5,6%)
E. 16 (2 <sup>4</sup> ) <sup>2</sup>	28 (80%)	7 (20%)	32 (88,9%)	4 (11,1%)
Σύνολο	480 (85,7%)	80 (14,3%)	501 (86,9%)	75 (13,1%)

Παρακάτω, παρουσιάζονται αναλυτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις από καθεμία παρανόηση των ερωτηματολογίων της Β' Φάσης, όπως κατηγοριοποιήθηκαν παραπάνω. Διαπιστώνεται πως τα λάθη των μαθητών έχουν μειωθεί και οι σωστές απαντήσεις είναι περισσότερες. Ελάχιστοι μαθητές έκαναν λάθη εξαιτίας της πρώτης παρανόησης (ΛΠ.1) (2,3%), για παράδειγμα, λίγοι μαθητές για το αποτέλεσμα της δύναμης  $1^5$  υπολόγισαν 1·5. Ενώ ακόμα πιο λίγα ήταν τα λάθη εξαιτίας της δεύτερης παρανόησης (ΛΠ.2) (0,9%), για παράδειγμα, λίγοι μαθητές συνέχισαν να διατηρούν το αρνητικό πρόσημο στη δύναμη (-2)<sup>6</sup>. Πολύ λίγα λάθη σημειώθηκαν εξαιτίας της τρίτης παρανόησης (ΛΠ.3) (3,4%), όπως για παράδειγμα για το αποτέλεσμα της δύναμης  $(3^8)^2$  λίγοι μαθητές έδωσαν την

απάντηση  $3^{8+2}$ . Ακόμα λιγότερα λάθη σημειώθηκαν εξαιτίας της τέταρτης παρανόησης (ΛΠ.4) (0,8%), όπου για παράδειγμα για τον υπολογισμό της δύναμης  $4^0$  ένας μαθητής έδωσε την απάντηση 4. Τέλος, λιγότερα λάθη σημειώθηκαν και εξαιτίας άλλων αιτιών (Λ.Α) (5%), όπως για παράδειγμα για τον υπολογισμό της δύναμης  $(5^6)^3$ , λίγοι μαθητές έδωσαν την απάντηση  $5+6+3$  (βλ. Πίνακας 6.1). Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 6.1** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης (N= 35) στα ερωτηματολόγια της Β΄ Φάσης

Κατηγορία		Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Παρανοήσεων	Ερωτήσεις					
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.2 ( $4^2$ )	-	-	-	-	2 (0,3%)
	E.9 ( $3^2$ )	-	-	-	-	-
	E.12 ( $1^5$ )	10 (1,7%)	-	-	-	-
	E.14 ( $2^5$ )	-	-	-	-	2 (0,3%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.1 ( $-7^2$ )	1 (0,2%)	1 (0,2%)	-	-	1 (0,2%)
	E.3 ( $-1^2$ )	1 (0,2%)	1 (0,2%)	-	-	10 (1,7%)
	E.7 ( $-5^2$ )	1 (0,2%)	1 (0,2%)	-	-	1 (0,2%)
	E.11 ( $-2^6$ )	-	2 (0,3%)	-	-	5 (0,9%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.5 ( $3^5^2$ )	-	-	4 (0,8%)	-	2 (0,3%)
	E.8 ( $3^8^2$ )	-	-	5 (0,9%)	-	2 (0,3%)
	E.13 ( $5^6^3$ )	-	-	4 (0,8%)	-	3 (0,6%)
	E.16 ( $2^4^2$ )	-	-	5 (0,9%)	-	1 (0,2%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.4 ( $5^0$ )	-	-	-	1 (0,2%)	-
	E.6 ( $4^0$ )	-	-	-	1 (0,2%)	-
	E.10 ( $2^0$ )	-	-	-	1 (0,2%)	-
	E.15 ( $3^0$ )	-	-	-	1 (0,2%)	-
Σύνολο		13 (2,3%)	5 (0,9%)	18 (3,4%)	4 (0,8%)	29 (5%)

Συγκεντρωτικά, τα περισσότερα λάθη σχετίζονταν με την τρίτη παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, οι μαθητές πρόσθεταν τις δυο δυνάμεις (3,2%) αλλά και σε άλλες αιτίες, δηλαδή απαντούσαν ως σωστή κάποια άσχετη επιλογή (5,1%) (βλ. Πίνακας 6.2). Παρατηρείται και σε αυτόν τον πίνακα, το φαινόμενο της διαγωνίου, αν και λάθη χωρίς να ανήκουν σε κάποια κατηγορία παρανοήσεων εμφανίζονται έντονα.

**Πίνακας 6.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της Β΄ φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	10 (1,7%)	-	-	-	4 (0,8%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	3 (0,6%)	5 (0,9%)	-	-	17 (2,8%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	-	-	18 (3,4%)	-	8 (1,4%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	-	-	-	4 (0,8%)	-
Σύνολο	13 (2,3%)	5 (0,9%)	18 (3,4%)	4 (0,8%)	29 (5%)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου σε καθεμία από τις κατηγορίες λαθών στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου της Β΄ Φάσης, όπως κατηγοριοποιήθηκαν παραπάνω (βλ. Πίνακας 7.1). Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με τα λάθη που οφείλονταν στην Κατηγορία Α των

παρανοήσεων, λίγοι μαθητές απάντησαν ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης έπρεπε η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη (2,9%), όπως για παράδειγμα,  $2^5 = 2 \cdot 5$ . Λίγα ήταν και τα λάθη λόγω της δεύτερης παρανόησης (2,2%), για παράδειγμα  $(-7)^2 = -49$ , καθώς και της τρίτης παρανόησης (2,8%) για παράδειγμα,  $(3^8)^2 = 3^{8+2}$ . Ενώ, μόνο 6 ήταν τα λάθη εξαιτίας της τέταρτης παρανόησης (1%), για παράδειγμα,  $5^0 = 5$ . Τέλος, σημειώθηκαν κάποια λίγα λάθη εξαιτίας άλλων αιτιών (3,9%), για παράδειγμα  $3^2 = 3+2$ . Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 7.1** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου (N=36) στα ερωτηματολόγια της Β' Φάσης

Κατηγορία		Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Παρανοήσεων	Ερωτήσεις					
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.2 ( $4^2$ )	1 (0,2%)	-	-	-	2 (0,3%)
	E.9 ( $3^2$ )	2 (0,3%)	-	-	-	3 (0,6%)
	E.12 ( $1^5$ )	6 (1%)	-	-	-	1 (0,2%)
	E.14 ( $2^5$ )	2 (0,3%)	-	-	-	4 (0,7%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.1 $(-7)^2$	-	5 (0,9%)	-	-	1 (0,2%)
	E.3 $(-1)^2$	3 (0,6%)	2 (0,3%)	-	-	2 (0,3%)
	E.7 $(-5)^2$	-	4 (0,7%)	-	-	2 (0,3%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.11 $(-2)^6$	2 (0,3%)	2 (0,3%)	-	-	2 (0,3%)
	E.5 ( $3^5$ ) <sup>2</sup>	-	-	3 (0,6%)	-	-
	E.8 ( $3^8$ ) <sup>2</sup>	-	-	3 (0,6%)	-	2 (0,3%)
	E.13 ( $5^6$ ) <sup>3</sup>	-	-	6 (1%)	-	2 (0,3%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.16 ( $2^4$ ) <sup>2</sup>	-	-	3 (0,6%)	-	1 (0,2%)
	E.4 ( $5^0$ )	-	-	-	2 (0,3%)	-
	E.6 ( $4^0$ )	-	-	-	2 (0,3%)	1 (0,2%)
	E.10 ( $2^0$ )	-	-	-	1 (0,2%)	-
	E.15 ( $3^0$ )	1 (0,2%)	-	-	1 (0,2%)	-
Σύνολο		17 (2,9%)	13 (2,2%)	15 (2,8%)	6 (1%)	23 (3,9%)

Παρακάτω, δίνονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στα ερωτηματολόγια της δεύτερης φάσης της έρευνας (βλ. Πίνακας 7.2). Παρατηρείται και σε αυτόν τον πίνακα, το φαινόμενο της διαγωνίου, αν και λάθη εξαιτίας της Κατηγορίας Α (Λ.Π1) καθώς και λάθη χωρίς να ανήκουν σε κάποια κατηγορία παρανοήσεων (Λ.Α) εμφανίζονται έντονα.

**Πίνακας 7.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Β' φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	11 (1,8%)	-	-	-	10 (1,7%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	5 (0,9%)	13 (2,2%)	-	-	7 (1,1%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	-	-	15 (2,8%)	-	5 (0,9%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	1 (0,2%)	-	-	6 (1%)	1 (0,2%)
Σύνολο	17 (2,9%)	13 (2,2%)	15 (2,8%)	6 (1%)	23 (3,9%)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και των δυο ομάδων, στα ερωτηματολόγια της Β' Φάσης σε όλες τις κατηγορίες (βλ. Πίνακας 8). Πιο αναλυτικά, σχετικά με τα λάθη που οφείλονται στην πρώτη παρανόηση, οι μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης εμφανίζουν ελάχιστα λιγότερα λάθη (2,3%) σε σχέση με τους μαθητές της ομάδα ελέγχου (2,9%). Σχετικά



με τα λάθη που οφείλονται στη δεύτερη παρανόηση (Λ.Π2), οι μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης εμφανίζουν αρκετά λιγότερα λάθη (0,9%) συγκριτικά με τους μαθητές της Ομάδας Ελέγχου (2,2%). Σχετικά με τα λάθη εξαιτίας της τρίτης (Λ.Π3), της τέταρτης παρανόησης (Λ.Π4) αλλά και στα λάθη λόγω άλλων αιτιών (Λ.Α), οι μαθητές και των δυο ομάδων εμφανίζουν παρόμοια αποτελέσματα.

**Πίνακας 8.** Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Β΄ Φάσης

Κατηγορίες Λαθών	Ομάδα	Κ.Α	Κ.Β	Κ.Γ	Κ.Δ	Σύνολο
Λ.Π1	Ο.Π	10 (1,7%)	3 (0,6%)	-	-	13 (2,3%)
	Ο.Ε	11 (1,8%)	5 (0,9%)	-	1 (0,2%)	17 (2,9%)
Λ.Π2	Ο.Π	-	5 (0,9%)	-	-	5 (0,9%)
	Ο.Ε	-	13 (2,2%)	-	-	13 (2,2%)
Λ.Π3	Ο.Π	-	-	18 (3,4%)	-	18 (3,4%)
	Ο.Ε	-	-	15 (2,8%)	-	15 (2,8%)
Λ.Π4	Ο.Π	-	-	-	4 (0,8%)	4 (0,8%)
	Ο.Ε	-	-	-	6 (1%)	6 (1%)
Λ.Α	Ο.Π	4 (0,8%)	17 (2,8%)	8 (1,4%)	-	29 (5%)
	Ο.Ε	10 (1,7%)	7 (1,1%)	5 (0,9%)	1 (0,2%)	23 (3,9%)

### Γ΄ Φάση

Τα ποσοτικά αποτελέσματα για τους μαθητές, από το στάδιο της Γ΄ φάσης δίνονται παρακάτω. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης, φαίνεται να απαντούν ορθά σε ποσοστό 71,1% στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ φάσης. Οι μαθητές της Ομάδας Ελέγχου απάντησαν σωστά σε ποσοστό 70,6% ενώ λιγότερα ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις τους (29,4%) (βλ. Πίνακας 9).

**Πίνακας 9.** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων της Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης

Ερωτήσεις	Ο.Π.		Ο.Ε.	
	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος
E. 1	34 (97,1%)	1 (2,9%)	35 (97,2%)	1 (2,8%)
E. 2	21 (60%)	14 (40%)	19 (52,8%)	17 (47,2%)
E. 3	27 (77,1%)	8 (22,9%)	29 (80,6%)	7 (19,4%)
E. 4	26 (74,3%)	9 (25,7%)	29 (80,6%)	7 (19,4%)
E. 5	18 (51,4%)	17 (48,6%)	17 (47,2%)	19 (52,8%)
E. 6	21 (60%)	14 (40%)	21 (58,3%)	15 (41,7%)
E. 7	20 (57,1%)	15 (42,9%)	18 (50%)	18 (50%)
E. 8	25 (71,4%)	10 (28,6%)	27 (75%)	9 (25%)
E. 9	18 (51,4%)	17 (48,6%)	13 (36,1%)	23 (63,9%)
E. 10	21 (60%)	14 (40%)	24 (66,7%)	12 (33,3%)
E. 11	32 (91,4%)	3 (8,6%)	33 (91,7%)	3 (8,3%)
E. 12	27 (77,1%)	8 (22,9%)	27 (75%)	9 (25%)
E. 13	31 (88,6%)	4 (11,4%)	34 (94,4%)	2 (5,6%)
E. 14	26 (74,3%)	9 (25,7%)	25 (69,4%)	11 (30,6%)
E. 15	28 (80%)	7 (20%)	31 (86,1%)	5 (13,9%)
E. 16	23 (65,7%)	12 (34,3%)	25 (69,4%)	11 (30,6%)
Σύνολο	398 (71,1%)	162 (28,9%)	407 (70,6%)	169 (29,4%)

Παρακάτω, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης σε καθεμία από τις κατηγορίες παρανοήσεων, στα ερωτηματολόγια της Γ΄ Φάσης, όπως αυτές κατηγοριοποιήθηκαν παραπάνω (βλ. Πίνακας 9.1). Πιο συγκεκριμένα, σε αυτή τη φάση της έρευνας οι μαθητές σημείωσαν αρκετά λάθη λόγω της πρώτης παρανόησης (Λ.Π1) (10%) για παράδειγμα  $5^2 = 5 \cdot 2$ , καθώς και λάθη λόγω της τρίτης παρανόησης (8,5%), όπως για παράδειγμα,  $(-4)^2 = -16$ . Λιγότερα λάθη σημειώθηκαν λόγω της δεύτερης παρανόησης (Λ.Π2) (1,9%), όπως για παράδειγμα,  $(2^2)^3 = 2^{2+3}$  και της τέταρτης παρανόησης (Λ.Π4) (1,2%), για παράδειγμα,  $11^0 = 11$ . Λάθη σημειώθηκαν και εξαιτίας άλλων αιτιών (6,7%), για παράδειγμα  $(-4)^2 = -6$ . Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 9.1** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης στα ερωτηματολόγια της Γ΄ Φάσης

Κατηγορία		Ερωτήσεις	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.1 ( $2^3$ )	-	-	-	-	-	1 (2,9%)
	E.11 ( $5^2$ )	2 (5,7%)	-	-	-	-	1 (2,9%)
	E.13 ( $3^5$ )	1 (2,9%)	-	-	-	-	3 (8,6%)
	E.15 ( $1^2$ )	5 (14,3%)	-	-	-	-	2 (5,7%)
Κ.Β(διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.3 ( $-3$ ) <sup>2</sup>	3 (8,6%)	4 (11,4%)	-	-	-	1 (2,9%)
	E.6 ( $-1$ ) <sup>6</sup>	5 (14,3%)	1 (2,9%)	-	-	-	9 (25,7%)
	E.10 ( $-2$ ) <sup>4</sup>	6 (17,1%)	2 (5,7%)	-	-	-	6 (17,1%)
	E.12 ( $-4$ ) <sup>2</sup>	1 (2,9%)	4 (11,4%)	-	-	-	3 (8,6%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.2 ( $5^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	11 (31,4%)	-	-	3 (8,6%)
	E.5 ( $2^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	15 (42,9%)	-	-	2 (5,7%)
	E.7 ( $3^4$ ) <sup>2</sup>	2 (5,7%)	-	11 (31,4%)	-	-	2 (5,7%)
	E.9 ( $3^2$ ) <sup>3</sup>	4 (11,4%)	-	11 (31,4%)	-	-	2 (5,7%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.4 ( $4^0$ )	8 (22,9%)	-	-	2 (5,7%)	-	-
	E.8 ( $7^0$ )	8 (22,9%)	-	-	1 (2,9%)	-	1 (2,9%)
	E.14 ( $11^0$ )	5 (14,3%)	-	-	2 (5,7%)	-	2 (5,7%)
	E.16 ( $5^0$ )	10 (28,6%)	-	-	2 (5,7%)	-	-
Σύνολο			60 (10,1%)	11 (1,9%)	48 (8,5%)	7 (1,2%)	38 (6,7%)

Παρακάτω, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις της Ομάδας Παρέμβασης στο ερωτηματολόγιο της τρίτης φάσης ανά κατηγορία λαθών (βλ. Πίνακας 9.2). Παρατηρείται και σε αυτόν τον πίνακα, το φαινόμενο της διαγωνίου, αν και λάθη εξαιτίας της Κατηγορίας Α (Λ.Π1) καθώς και λάθη χωρίς να ανήκουν σε κάποια κατηγορία παρανοήσεων (Λ.Α) εμφανίζονται έντονα.

**Πίνακας 9.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης (N=35) στο ερωτηματολόγιο της Γ' φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	8 (1,4%)	-	-	-	7 (1,2%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	15 (2,6%)	11 (1,9%)	-	-	19 (3,4%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	6 (1%)	-	48 (8,5%)	-	9 (1,6%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	31 (5,5%)	-		7 (1,2%)	3 (0,5%)
Σύνολο	60 (10,1%)	11 (1,9%)	48 (8,5%)	7 (1,2%)	38 (6,7%)

Έπειτα, παρατίθενται οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, σύμφωνα με τις κατηγορίες λαθών όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω (βλ. Πίνακας 10.1). Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία λαθών εξαιτίας της τρίτης παρανόησης (Λ.Π3) σε ποσοστό 11,2%, δηλαδή οι μαθητές για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, πρόσθεταν τις δυο δυνάμεις, για παράδειγμα  $(3^2)^3 = 3^{2+3}$ . Ακολουθούν τα λάθη λόγω της πρώτης παρανόησης (Λ.Π1) σε ποσοστό 7,6%, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης οι μαθητές πολλαπλασίαζαν τη βάση με τον εκθέτη, για παράδειγμα,  $1^2 = 2$ . Λιγότερα λάθη διαπιστώθηκαν εξαιτίας της δεύτερης παρανόησης (Λ.Π2), ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός, οι μαθητές διατηρούσαν το αρνητικό πρόσημο (3,4%), για παράδειγμα  $(-3)^2 = -9$  και ακόμη λιγότερα λάθη λόγω της τέταρτης παρανόησης (Λ.Π4) ότι για τον υπολογισμό μιας

δύναμης με εκθέτη το 0, οι μαθητές άφηναν το ίδιο αποτέλεσμα με τη βάση (1,7%), για παράδειγμα  $11^0 = 11$ . Υπήρξαν και κάποια λάθη που δεν οφείλονταν σε καμία από αυτές τις κατηγορίες (Λ.Α) σε ποσοστό 4,5%, όπως για παράδειγμα,  $(2^2)^3 = 2+2+3$ . Και σε αυτόν τον πίνακα, παρατηρείται το φαινόμενο της διαγωνίου, αφού διαπιστώθηκαν τα λάθη που είχαμε προϋποθέσει.

**Πίνακας 10.1** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στα ερωτηματολόγια της Γ΄ Φάσης

Κατηγορία		Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α
Παρανοήσεων	Ερωτήσεις					
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	E.1 ( $2^3$ )	-	-	-	-	1 (2,9%)
	E.11 ( $5^2$ )	1 (2,8%)	-	-	-	2 (5,6%)
	E.13 ( $3^5$ )	-	-	-	-	2 (5,6%)
	E.15 ( $1^2$ )	4 (11,1%)	-	-	-	1 (2,8%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	E.3 ( $-3^2$ )	1 (2,8%)	4 (11,1%)	-	-	2 (5,6%)
	E.6 ( $-1^6$ )	6 (16,7%)	4 (11,1%)	-	-	5 (13,9%)
	E.10 ( $-2^4$ )	3 (8,3%)	5 (13,9%)	-	-	4 (11,1%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	E.12 ( $-4^2$ )	1 (2,8%)	7 (19,4%)	-	-	1 (2,8%)
	E.2 ( $5^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	15 (41,7%)	-	1 (2,8%)
	E.5 ( $2^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	14 (38,9%)	-	3 (8,3%)
	E.7 ( $3^4$ ) <sup>2</sup>	1 (2,8%)	-	15 (41,7%)	-	1 (2,8%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	E.9 ( $3^2$ ) <sup>3</sup>	-	-	21 (58,3%)	-	2 (5,6%)
	E.4 ( $4^0$ )	6 (16,7%)	-	-	1 (2,8%)	-
	E.8 ( $7^0$ )	7 (19,4%)	-	-	2 (5,6%)	-
	E.14 ( $11^0$ )	6 (16,7%)	-	-	4 (11,1%)	1 (2,8%)
	E.16 ( $5^0$ )	8 (22,3%)	-	-	3 (8,3%)	-
Σύνολο		44 (7,6%)	20 (3,4%)	65 (11,2%)	10 (1,7%)	26 (4,5%)

Έπειτα, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα λάθη των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου στην τρίτη φάση της έρευνας (βλ. Πίνακας 10.2). Παρατηρείται και σε αυτόν

τον πίνακα, το φαινόμενο της διαγωνίου, αν και λάθη εξαιτίας της Κατηγορίας Α (Λ.Π1) καθώς και λάθη χωρίς να ανήκουν σε κάποια κατηγορία παρανοήσεων (Λ.Α) εμφανίζονται έντονα.

**Πίνακας 10.2** Συχνότητες λανθασμένων απαντήσεων της Ομάδας Ελέγχου (N=36) στο ερωτηματολόγιο της Γ' φάσης

Κατηγορία Παρανοήσεων	Λ.Π1	Λ.Π2	Λ.Π3	Λ.Π4	Λ.Α.
Κ.Α (πολ/μος βάσης με εκθέτη)	5 (0,9%)	-	-	-	6 (1%)
Κ.Β (διατήρηση αρνητικού πρόσημου)	11 (1,9%)	20 (3,4%)	-	-	12 (2,2%)
Κ.Γ (πρόσθεση δυνάμεων)	1 (0,2%)	-	65 (11,2%)	-	7 (1,1%)
Κ.Δ (αγνόηση του μηδενός ως εκθέτη)	27 (4,6%)	-	-	10 (1,7%)	1 (0,2%)
Σύνολο	44 (7,6%)	20 (3,4%)	65 (11,2%)	10 (1,7%)	26 (4,5%)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και των δυο ομάδων, στα ερωτηματολόγια της Γ' Φάσης ανά κατηγορία παρανοήσεων (βλ. Πίνακας 11). Πιο αναλυτικά, σχετικά με τα λάθη που οφείλονταν στην πρώτη παρανόηση (Λ.Π1), οι μαθητές της Ομάδας Ελέγχου εμφανίζουν λιγότερα λάθη (7,6%) σε σχέση με τους μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης (10,7%). Στη δεύτερη και την τέταρτη κατηγορία λαθών (Λ.Π2) οι μαθητές και των δυο ομάδων εμφανίζουν σχετικά τον ίδιο αριθμό λανθασμένων απαντήσεων. Ενώ σχετικά με την τρίτη κατηγορία λαθών (Λ.Π3) οι μαθητές της Ομάδας Ελέγχου

συγκέντρωσαν τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (11,2%), συγκριτικά με τους μαθητές της Ομάδας Παρέμβασης (8,5%).

**Πίνακας 11.** Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στο ερωτηματολόγιο της Γ΄ Φάσης

Κατηγορίες		Ομάδα	Κ.Α	Κ.Β	Κ.Γ	Κ.Δ	Σύνολο
Λαθών							
Λ.Π1	Ο.Π		8 (1,4%)	15 (2,6%)	6 (1%)	31(5,5%)	60 (10%)
	Ο.Ε		5 (0,9%)	11 (1,9%)	1 (0,2%)	27(4,6%)	44 (7,6%)
Λ.Π2	Ο.Π		-	11 (1,9%)	-	-	11 (1,9%)
	Ο.Ε		-	20 (3,4%)	-	-	20 (3,4%)
Λ.Π3	Ο.Π		-	-	48 (8,5%)	-	48 (8,5%)
	Ο.Ε		-	-	65 (11,2%)	-	65 (11,2%)
Λ.Π4	Ο.Π		-	-	-	7(1,2%)	7 (1,2%)
	Ο.Ε		-	-	-	10(1,7%)	10 (1,7%)
Λ.Α	Ο.Π		7 (1,2%)	19 (3,4%)	9 (1,6%)	3(0,5%)	38 (6,7%)
	Ο.Ε		6 (1%)	12 (2,2%)	7 (1,1%)	1(0,2%)	26 (4,5%)

Ακολουθεί ένας συγκεντρωτικός πίνακας των λανθασμένων απαντήσεων ανά κατηγορία παρανοήσεων και των δυο ομάδων σε όλες τις φάσεις της έρευνας (βλ. Πίνακας 12).

**Πίνακας 12.** Συγκεντρωτικός πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των λανθασμένων απαντήσεων Ομάδας Παρέμβασης και Ομάδας Ελέγχου στα ερωτηματολόγια και των τριών φάσεων

Κατηγορίες				
Λαθών	Ομάδες	Α΄ Φάση	Β΄ Φάση	Γ΄ Φάση
Λ.Π1	Ο.Π	97 (17,3%)	13 (2,3%)	60 (10%)
	Ο.Ε	77 (13,3%)	17 (2,9%)	44 (7,6%)
Λ.Π2	Ο.Π	39 (6,9%)	5 (0,8%)	11 (1,9%)
	Ο.Ε	39 (6,7%)	13 (2,2%)	20 (3,4%)
Λ.Π3	Ο.Π	87 (15,5%)	18 (3,2%)	48 (8,5%)
	Ο.Ε	71 (12,3%)	15 (2,6%)	65 (11,2%)
Λ.Π4	Ο.Π	28 (5%)	4 (0,7%)	7 (1,2%)
	Ο.Ε	24 (4,1%)	6 (1%)	10 (1,7%)
Λ.Α	Ο.Π	28 (5%)	29 (5,1%)	38 (6,7%)
	Ο.Ε	25 (4,3%)	23 (3,9%)	26 (4,5%)

### Μέσες επιδόσεις

Για τη σύγκριση των μέσων επιδόσεων των δυο ομάδων σε κάθε φάση της έρευνας, υπολογίστηκε η μέση βαθμολογία τους (βλ. Πίνακας 13). Για κάθε σωστή απάντηση, οι μαθητές βαθμολογούνταν με 1 βαθμό και για κάθε λάθος με 0. Η πιο υψηλή μέση βαθμολογία υποδεικνύει και καλύτερη επίδοση των μαθητών.

**Πίνακας 13.** Μέσες βαθμολογίες συνολικά για όλες τις φάσεις

Ομάδες	Α΄ Φάση		Β΄ Φάση		Γ΄ Φάση	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Ο.Π.	7,94	4,35	13,8	3,16	11,3	4,63
Ο.Ε.	9,5	4,39	13,91	3,12	11,3	3,47



Το κριτήριο του Levene (Levene's test) έδειξε την ομοιογένεια του δείγματος και οδήγησε σε μη στατιστικώς σημαντικό αποτέλεσμα ( $p = .858$ ).

Αρχικά, εφαρμόστηκε Paired samples T-test για να διερευνηθεί αν οι συμμετέχοντες διαφέρουν στην επίδοσή τους στους μέσους όρους, ανά φάση έρευνας. Σημειώθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών, ανά φάση της έρευνας. Δηλαδή και οι δυο ομάδες εμφάνισαν βελτίωση από την Α' Φάση (προέλεγχος) στη Β' Φάση (μετά - έλεγχος), και μια πτώση της απόδοσής τους στη Γ' Φάση (μεταγενέστερος έλεγχος). Η ανάλυση κατέδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά για την ομάδα παρέμβασης από την Α' Φάση στη Β' Φάση,  $t(35) = 7.96$ ,  $p < 0.05$  και από τη Β' Φάση στη Γ' Φάση  $t(35) = 2.87$ ,  $p < 0.05$ . Επίσης, στατιστικά σημαντική ήταν και η διαφορά για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου από την Α' Φάση στη Β' Φάση,  $t(36) = 6.87$ ,  $p < 0.05$  και από την Β' Φάση στη Γ' Φάση,  $t(36) = 5.34$ ,  $p < 0.05$ .

Στη συνέχεια, έγινε Independent sample T-test για να εξεταστεί αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των δυο ομάδων στις 3 φάσεις της έρευνας. Οι δυο ομάδες, όμως, δεν διέφεραν σημαντικά μεταξύ τους στις επιδόσεις τους, σε καμία από τις τρεις μετρήσεις. Η ανάλυση εδώ δεν έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά στην Α' Φάση της έρευνας,  $t(71) = -1.49$ ,  $p = .858$ , στη Β' Φάση της έρευνας  $t(71) = -.15$ ,  $p = .847$  και τη Γ' Φάση της έρευνας  $t(71) = .068$ ,  $p = 0.15$ .

Εφαρμόστηκε, επιπλέον, μικτή ανάλυση διακύμανσης με επαναλαμβανόμενο παράγοντα (MixedANOVA), για να ελεγχθεί αν οι μέσες επιδόσεις των δυο ομάδων παρουσίασαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές ανά φάση έρευνας και ανά ομάδα. Το κριτήριο Mauchly's Test of Sphericity έδειξε πως δεν υπήρχαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές ( $p = .706$ ), άρα οι συσχετίσεις μεταξύ των μέσων επιδόσεων δεν έχουν διαφορές.

Φάνηκε ότι και οι δυο ομάδες είχαν βελτίωση στην επίδοση από τον προ-έλεγχος ως τον μετά-έλεγχος και έπειτα είχαν μείωση στην επίδοσή τους, χωρίς όμως να φτάνουν τα αρχικά επίπεδα. Ενώ, μεταξύ των τριών φάσεων του πειράματος υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών ( $F=58.714$ ,  $p < 0.00$ ,  $\text{partial } \eta^2 = .46$ ), διαπιστώθηκε ότι ανάμεσα στις ομάδες δεν υπήρχαν διαφορές ως προς την απόδοσή τους ( $F=1.758$ ,  $p = .176$ ,  $\text{partial } \eta^2 = 0.025$ ).

## 5. Συμπεράσματα

### 5.1 Συζήτηση

Η εργασία αυτή είχε ως σκοπό να μελετήσει τις πιο συνηθισμένες παρανοήσεις των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου, οι οποίες προκαλούν τα περισσότερα λάθη, σχετικά με τις δυνάμεις. Οι πιο συνηθισμένες, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, είναι οι παρανοήσεις ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο, ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, και ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση (Cengiz, 2006; Ozkan A. & Ozkan M., 2012; Ulusoy, 2019). Διερευνήθηκε, επίσης, αν αυτές οι παρανοήσεις ήταν δυνατόν να διορθωθούν μέσα από τη χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων συγκριτικά με τη χρήση των σωστά επεξεργασμένων παραδειγμάτων.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα υποστήριξαν τα ήδη υπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Οι μαθητές εμφάνισαν παρανοήσεις κατά την επίλυση και τον υπολογισμό των δυνάμεων. Διαπιστώθηκε, λοιπόν, ότι οι απαντήσεις των μαθητών και των δυο ομάδων, Παρέμβασης και Ελέγχου, στην Α΄ Φάση της έρευνας, ήταν λανθασμένες σε μεγάλα ποσοστά. Η έρευνα αυτή, εντόπισε τις παρανοήσεις των μαθητών που εμφανίστηκαν με τη μορφή σφαλμάτων στις ερωτήσεις που τους δόθηκαν. Πιο αναλυτικά, οι απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές συγκέντρωσαν τα περισσότερα λάθη εντοπίστηκαν στα λάθη λόγω της παρανόησης 1 (Α.Π1), δηλαδή οι περισσότεροι μαθητές κατά τον υπολογισμό μιας δύναμης, πολλαπλασίαζαν τη βάση με τον εκθέτη. Οι μαθητές νιώθουν σύγχυση με τον υπολογισμό των δυνάμεων, γιατί συγχέουν τον επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό με τον πολλαπλασιασμό της βάσης με τον εκθέτη. Θεωρούν δηλαδή, πως ο συμβολισμός της δύναμης ερμηνεύεται ως πολλαπλασιασμός (Cengiz, 2006; Ozkan A. & Ozkan M., 2012; Ulusoy, 2019). Παραδείγματος χάρη, η πλειοψηφία των μαθητών για τον υπολογισμό της δύναμης  $2^3$  έδωσε την απάντηση  $2 \cdot 3$ . Αυτό συνεπάγεται ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια της δύναμης ως έννοια επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού και

τον συμβολισμό του. Επιπροσθέτως, οι μαθητές θεωρούν πως πρέπει να διατηρήσουν το αρνητικό πρόσημο παρά τον άρτιο αριθμό της δύναμης. Συγγέουν την περίπτωση που ένας αρνητικός που βρίσκεται σε παρένθεση και σε άρτια δύναμη, με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει παρένθεση στη δύναμη και διατηρείται το αρνητικό πρόσημο (Cangelosi et.al., 2012). Επιπλέον, και σε αυτή την κατηγορία φάνηκε πως αρκετοί μαθητές πέρα από την διατήρηση του αρνητικού πρόσημου, πολλαπλασίαζαν και τη βάση με τη δύναμη. Συνεπώς, οι μαθητές παρερμηνεύουν την ύπαρξη του αρνητικού πρόσημου κατά τον υπολογισμό δυνάμεων που το περιλαμβάνουν, αγνοώντας την άρτια δύναμη (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Συμπληρωματικά, πολλά λάθη συγκέντρωσαν οι μαθητές και στον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, υποστηρίζοντας ότι οι δυο δυνάμεις θα πρέπει να προστεθούν και όχι να πολλαπλασιαστούν (Ozkan, 2012). Για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό της δύναμης  $(5^2)^3$ , η πλειοψηφία των μαθητών υποστήριξε πως η σωστή απάντηση είναι ο αριθμός  $5^5$ . Οι μαθητές μπερδεύουν τους κανόνες για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη. Τέλος, όταν μια δύναμη έχει εκθέτη το 0, οι μαθητές το αγνοούσαν και έδιναν αποτέλεσμα το ίδιο με τη βάση ή πολλαπλασιάζουν τη βάση με τη δύναμη και δίνουν αποτέλεσμα 0. Οι μαθητές φαίνεται να πιστεύουν πως ο αριθμός 0 δεν έχει κάποια αξία σαν δύναμη (Ulusoy, 2019). Αυτά τα ευρήματα συμφωνούν με όσα μελετήθηκαν στη βιβλιογραφία, όπου οι μαθητές γενικεύουν τους κανόνες από τους φυσικούς και τους ακέραιους στους ρητούς και συνδέουν την καινούρια γνώση με την προηγούμενη γνώση τους (Christou & Vosniadou, 2012; Yasin, 2017).

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με τη βιβλιογραφία ότι η χρήση παραδειγμάτων στη διδασκαλία και τη μάθηση ως εργαλείο επικοινωνίας μεταξύ μαθητών και δασκάλων είναι πολύ χρήσιμη για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Watson & Mason, 2005). Ωστόσο, τα εσφαλμένα παραδείγματα δεν έφεραν ως αποτέλεσμα υψηλότερα μαθησιακά οφέλη συγκριτικά με τα ορθά λυμένα παραδείγματα.

Πιο αναλυτικά, κατά τη Β΄ Φάση της έρευνας, δόθηκαν στην Ομάδα Παρέμβασης λανθασμένα παραδείγματα και στην Ομάδα Ελέγχου ορθά λυμένα παραδείγματα για να διαπιστωθεί ποιος τρόπος διδασκαλίας επηρεάζει θετικά τους μαθητές στη εκμάθηση των δυνάμεων. Αρχικά, διαπιστώθηκε και στις δυο ομάδες πρόοδος στην επίδοσή των μαθητών, αφού μειώθηκαν σημαντικά τα λάθη τους. Συνεπώς, μελετώντας τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής, η διδασκαλία με

λανθασμένα παραδείγματα βελτίωσε αρκετά τα λάθη των μαθητών στις κατηγορίες που αφορούν την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης θα πρέπει η βάση να πολλαπλασιαστεί με τον εκθέτη, καθώς και την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός και η βάση αρνητικός αριθμός θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο. Σχετικά με την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν, οι μαθητές, στους οποίους δόθηκαν ορθά λυμένα παραδείγματα, είχαν καλύτερη επίδοση. Σε σχέση με την παρανόηση ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της δύναμης παραμένει ίδιο με τη βάση, οι μαθητές και των δυο ομάδων είχαν παρόμοια επίδοση. Σε όλες τις περιπτώσεις, όμως, δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Όπως διαπιστώθηκε στην έρευνα αυτή, οι επιδόσεις και στις δυο ομάδες δεν είχαν μεγάλες διαφορές στη διδασκαλία και είναι αρκετή μια υπενθύμιση είτε με λανθασμένα ή ορθά παραδείγματα στις δυνάμεις. Αυτό, όμως, δεν μπορεί να γενικευτεί και μακροπρόθεσμα, αφού οι μαθητές στην Γ΄ Φάση της έρευνας σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις από αυτές της Α΄ Φάσης, αλλά όχι στα ίδια επίπεδα με τις επιδόσεις της Β΄ Φάσης. Δηλαδή, οι πιο ψηλές επιδόσεις των μαθητών παρατηρήθηκαν στη Β΄ Φάση της έρευνας, αμέσως μετά την παρέμβαση με λανθασμένα και ορθά παραδείγματα. Έτσι, διαπιστώθηκε πως κάποια από τα λάθη των μαθητών επανήλθαν. Συμπερασματικά, μια σύντομη παρέμβαση στη διδασκαλία των δυνάμεων με ορθά και λανθασμένα παραδείγματα, δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι θα εξαλειφθούν οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση των δυνάμεων. Ωστόσο, οι μαθητές φαίνεται πως ωφελήθηκαν από τις διδακτικές παρεμβάσεις είτε με ορθά είτε με λανθασμένα παραδείγματα.

Κατά συνέπεια, για τη διδασκαλία των δυνάμεων και για τη διόρθωση των παρανοήσεων και των λαθών των μαθητών, φάνηκε πως και τα λανθασμένα παραδείγματα και τα ορθά λυμένα παραδείγματα αποτελούν αποδοτικά και απαραίτητα βοηθήματα, αφού και στις δυο παρεμβάσεις με ορθά και λανθασμένα παραδείγματα οι μαθητές σημείωσαν επιδόσεις που δεν είχαν διαφορές. Φαίνεται, λοιπόν, πως μια διδασκαλία με υπενθύμιση στις ιδιότητες των δυνάμεων βοηθά τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα λάθη τους, είτε αυτή περιλαμβάνει σωστά παραδείγματα, είτε λανθασμένα. Ωστόσο, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τι θα γινόταν

αν ο μετά- έλεγχος (Γ΄ Φάση) λάμβανε χώρα σε μεγαλύτερο διάστημα του ενός μήνα, ίσως σε έξι μήνες ή και παραπάνω.

Τα παραπάνω αποτελέσματα, συμφωνούν με τη βιβλιογραφία και δείχνουν πως μια διδακτική παρέμβαση είτε με σωστά είτε με λανθασμένα παραδείγματα, θα μπορούσε να μειώσει σημαντικά τις παρανοήσεις των μαθητών στις δυνάμεις, αν βασιστεί στους λόγους που τις προκαλούν (Barbieri & Booth, 2019). Για την εξάλειψη των παρανοήσεων των μαθητών στις δυνάμεις μακροχρόνια, θα πρέπει αρχικά, να γίνει κατανοητό από τους μαθητές η σημασία των δυνάμεων και ο ορισμός τους (Ycong et al, 2019). Δηλαδή, θα πρέπει να γίνει αντιληπτό στους μαθητές ο επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός ως ερμηνεία των δυνάμεων. Οι εκπαιδευτικοί, και στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού αλλά και εν συνεχεία, στην Α΄ και Β΄ τάξη του Γυμνασίου, θα πρέπει να περιλαμβάνουν στη διδασκαλία των δυνάμεων και ορθά και λανθασμένα παραδείγματα συνδυαστικά για να αποφύγουν τις παρανοήσεις (Ozkan A. & Ozkan M., 2012). Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιούνται θα πρέπει να είναι κατανοητά στους μαθητές ώστε να βοηθηθούν και να αντιληφθούν την ερμηνεία των δυνάμεων.

## 5.2 Περιορισμοί της έρευνας

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε σε μαθητές που φοιτούσαν σε ένα δημόσιο σχολείο σε μια περιοχή της Θεσσαλονίκης. Αυτό συνεπάγεται ότι τα αποτελέσματα που ερμηνεύθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα περιορίζονται σε μια μικρή περιοχή και σε ένα συγκεκριμένο σχολείο. Επιπλέον, ένας ακόμη περιορισμός της έρευνας, είναι το γεγονός ότι στην έρευνα συμμετείχαν μόνο οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου του συγκεκριμένου σχολείου. Αυτό σημαίνει πως το δείγμα της έρευνας είναι αρκετά περιορισμένο και δεν είναι αντιπροσωπευτικό του συνόλου των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκονται τις δυνάμεις.

Επίσης, το ερευνητικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιήθηκε, παρότι είναι βασισμένο στην βιβλιογραφία, περιλαμβάνει μόνο ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Παρόλο που οι πιθανές επιλογές που δόθηκαν στους μαθητές περιλαμβάνουν τις παρανοήσεις που μπορεί να εμφανίζουν οι μαθητές, δεν δίνεται η δυνατότητα στους

μαθητές να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Τα αποτελέσματα ερμηνεύτηκαν ποσοτικά και δεν υπήρχε η δυνατότητα για τον ποιοτικό έλεγχο τους, παρά των πιθανών επιλογών που υπήρχαν για να διαπιστωθούν οι παρανοήσεις τους. Παρόλα αυτά, η δυνατότητα για συνεντεύξεις στους μαθητές ήταν αδύνατη, εξαιτίας της έλλειψης χρόνου αλλά και της ύπαρξης της πανδημίας του Covid-19, η οποία δεν επέτρεπε τις στενές επαφές με τους μαθητές.

Όλοι αυτοί οι περιορισμοί δεν ακυρώνουν την έρευνα και την πρωτοτυπία της. Αντιθέτως, παραθέτει σκέψεις και σημεία που χρήζουν μελέτη για μελλοντικές παρόμοιες έρευνες. Για την εξάλειψη των παρανοήσεων των μαθητών στις δυνάμεις μακροχρόνια, θα πρέπει αρχικά, να γίνει κατανοητό από τους μαθητές η σημασία των δυνάμεων και ο ορισμός τους. Δηλαδή, θα πρέπει να γίνει αντιληπτό στους μαθητές ο επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός ως ερμηνεία των δυνάμεων. Αυτό για να επιτευχθεί, θα πρέπει να επεξεργάζεται από την πρώτη επαφή των μαθητών με τις δυνάμεις, η οποία συμβαίνει στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Οι εκπαιδευτικοί, και στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού αλλά και εν συνεχεία, στην Α' και Β' τάξη του Γυμνασίου, θα πρέπει να περιλαμβάνουν στη διδασκαλία των δυνάμεων και ορθά και λανθασμένα παραδείγματα συνδυαστικά για να αποφύγουν τις παρανοήσεις. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιούνται θα πρέπει να είναι κατανοητά στους μαθητές ώστε να βοηθηθούν και να αντιληφθούν την ερμηνεία των δυνάμεων.

### **5.3 Γενικά Συμπεράσματα**

Η Άλγεβρα περιλαμβάνει τη μελέτη πολλών συμβόλων, κανόνων αλλά και συμβολισμών. Οι δυνάμεις έχουν μεγάλη σημασία για τη μαθηματική εκπαίδευση καθώς αποτελούν ένα κομμάτι της Άλγεβρας, το οποίο περιλαμβάνει κανόνες, συμβολισμούς και αλγορίθμους. Είναι αλήθεια ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να μάθουν και να κατανοήσουν την έννοια των δυνάμεων. Η έννοια των δυνάμεων συναντάται αρχικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και όταν παρουσιάζονται δυσκολίες και παρανοήσεις στις τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αυτές μεταφέρονται στο Γυμνάσιο, ακόμα και στο Λύκειο. Κατά μια ευρεία έννοια, αυτές οι

παρανοήσεις σηματοδοτούν τη μη κατανόηση της γνώσης και διαφέρουν από τα τυχαία λάθη που μπορεί να συμβαίνουν.

Σκοπός, λοιπόν, των εκπαιδευτικών θα πρέπει να είναι η κατανόηση και διόρθωση των παρανοήσεων των μαθητών που διδάσκονται τις δυνάμεις είτε στην πρωτοβάθμια είτε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Barbieri & Booth (2019), βοηθητικό για την εξάλειψη των παρανοήσεων των μαθητών στις δυνάμεις θα ήταν να μη χρησιμοποιείται μια σταθερή μέθοδος αλλά να γίνεται μια συνδυαστική διδασκαλία με ορθά και λανθασμένα παραδείγματα, ώστε και οι μαθητές να συμμετέχουν πιο ενεργά στο μάθημα. Συνεπώς, οι μαθητές δεν θα απομνημονεύουν τους τύπους, αλλά θα επεξεργάζονται την κάθε περίπτωση δυνάμεων και έτσι θα μειώνονται οι παρανοήσεις, καθώς θα ενισχύεται το ενδιαφέρον τους για μάθηση. Όταν συμβεί αυτό, οι μαθητές θα είναι πιο συνειδητοποιημένοι να εφαρμόσουν τους κανόνες στις δυνάμεις (Ozkan A. & Ozkan M., 2012).

Η χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία για μαθητές με καλή θεμελιώδη κατανόηση και προηγούμενη γνώση μπορεί να εμπλουτίσει και να ενισχύσει τη μαθηματική τους εκπαίδευση. Η συνύπαρξη λανθασμένων παραδειγμάτων με σωστά παραδείγματα μπορεί να επιστήσει την προσοχή των μαθητών και μπορεί στη συνέχεια να τους βοηθήσει να αντικαταστήσουν την εσφαλμένη εννοιολογική γνώση με την ορθή εννοιολογική γνώση για τις δυνάμεις. Ο συνδυασμός ενός σωστού και ενός λανθασμένου παραδείγματος μαζί θα υποστηρίξει αποτελεσματικά τη μάθηση των δυνάμεων (Cangelosi et al., 2012).

#### 5.4 Μελλοντικές έρευνες

Στην ερευνητική αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε μια σύγκριση μιας διδακτικής παρέμβασης με λανθασμένα παραδείγματα και μιας παρέμβασης με ορθά λυμένα παραδείγματα. Από τα αποτελέσματα αναδείχθηκε πως και οι δυο περιπτώσεις ήταν κερδοφόρες και αρκετά βοηθητικές για τους μαθητές. Παρόλα αυτά, οι επιδόσεις των μαθητών και των δυο αυτών ομάδων δεν διέφεραν πολύ, παρά μόνο κατά τις φάσεις της έρευνας. Ωστόσο, παρόλο που και οι δυο παρεμβάσεις

έφεραν θετικά αποτελέσματα, δεν είχαν την ίδια κατάληξη μακροπρόθεσμα στο τελευταίο στάδιο της έρευνας.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς της έρευνας αλλά και τις προτάσεις που αναδείχθηκαν για τους εκπαιδευτικούς, προτείνονται:

- Μια πρόσθετη έρευνα για να διερευνηθεί ποιοι λόγοι οδηγούν σε παρανοήσεις στις δυνάμεις, αλλά και ο τρόπος σκέψης των μαθητών μέσα από συνεντεύξεις
- Μια μελλοντική συναφή έρευνα σε μαθητές στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στο γυμνάσιο αλλά και στο λύκειο.
- Περαιτέρω έρευνα σχετικά με την κατανόηση των εκθετών από τους μαθητές δεδομένου ότι η σημασία αυτών των λειτουργιών θεωρείται απαραίτητη για την πορεία στο μάθημα των μαθηματικών
- Μια έρευνα κατά την οποία ο μετά- έλεγχος (Γ΄ Φάση) θα διεξαχθεί σε μεγαλύτερο διάστημα του ενός μήνα, ίσως σε έξι μήνες ή και παραπάνω και να διαπιστωθεί αν αλλάζει κάποια παρανόηση πιο πολύ ανάλογα με την παρέμβαση με λανθασμένα ή με ορθά παραδείγματα.



## Βιβλιογραφία

- Adams, D. M., McLaren, B. M., Mayer, R. E., Gogvadze, G., & Isotani, S. (2013, July). Erroneous examples as desirable difficulty. In *International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 803-806). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φρεντίνο, Σ. (2011). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος
- Barbieri, C. A., & Booth, J. L. (2020). Mistakes on display: Incorrect examples refine equation solving and algebraic feature knowledge. *Applied Cognitive Psychology*, 34(4), 862-878.
- Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J., & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 69-82.
- Cengiz, Ö. M. (2006). *Reel sayıların öğretiminde bir kısım ortaöğretim öğrencilerinin yanlışları ve yanıřları üzerine bir çalışma* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1-27.
- Herold, P. C., Dasgupta, C., Murthy, S., & Joshi, A. (2019, July). MathReality: A Bridge from Concrete to Abstract via an AR app for Mathematics Concept of Exponents. In *2019 IEEE 19th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (Vol. 2161, pp. 282-286). IEEE.
- Holmes, V. L., Miedema, C., Nieuwkoop, L., & Haugen, N. (2013). Data-driven intervention: correcting mathematics students' misconceptions, not mistakes. *The Mathematics Educator*, 23(1).
- İymen, E., & Duatepe-Paksu, A. (2015). Analysis of 8th Grade Students' Number Sense Related to the Exponents in Terms of Number Sense Components. *Education & Science/Egitim ve Bilim*, 40(177).

Jordan, S. (2014). Adult Science Learners' Mathematical Mistakes: An Analysis of Responses to Computer-Marked Questions. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2(2), 63-86.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2009). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος

Khanh, T. L. C., & Loi, N. H. (2020). An Analysis Of The Concept Of Exponential Functions In History And Textbooks In Vietnam. *The International Journal of Engineering and Science*, 9(11), 23-28.

Loi, N. H., & Khanh, T. L. C. (2020). Connecting mathematics and practice: a case study of teaching exponential functions. *European Journal of Education Studies*, 7(12).

Matlala, S. J. (2021). *Errors Displayed when Solving Problems Involving Exponential Expressions* (Doctoral dissertation, University of Johannesburg (South Africa)).

Melis, E. (2004). Erroneous Examples as a Source of Learning in Mathematics. *CELDA, 2004*, 311-318.

Muslim, R. I., Usodo, B., & Pratiwi, H. (2021, March). Pseudo Thinking Process in Understanding the Concept of Exponential Equations. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1808, No. 1, p. 012043). IOP Publishing.

Ozkan, E. M., & Ozkan, A. (2012). Misconception in exponential numbers in IST and IIND level primary school mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 65-69.

Ozkan, A. (2019). Misconceptions in radical numbers in secondary school mathematics. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, 6(1), 205-212.

Ojose, B. (2015). Students' Misconceptions in Mathematics: Analysis of Remedies and What Research Says. *Ohio Journal of School Mathematics*, (72).

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 301-311.

Pramesti, T. I., & Retnawati, H. (2019, October). Difficulties in learning algebra: An analysis of students' errors. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1320, No. 1, p. 012061). IOP Publishing.

Ramazan, A. (2010). Eight graders' capabilities in exponents: making mental comparisons. *Practice and Theory in Systems of Education*, 5(1), 39-48.

Richey, J. E., Andres-Bray, J. M. L., Mogessie, M., Scruggs, R., Andres, J. M., Star, J. R., ... & McLaren, B. M. (2019). More confusion and frustration, better learning: The impact of erroneous examples. *Computers & Education*, 139, 173-190.

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal*, 3(1), 1-12.

Schwarzenberger, R. L. E. (1984). The importance of mistakes: The 1984 presidential address. *The Mathematical Gazette*, 68(445), 159-172.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαράλός, Γ. (2011). Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (τεύχος Α').

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. Online: <http://ebooks.edu.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf>

Türkdoğan, A., Baki, A., & Çepni, S. (2009). The Anatomy of Mistakes: Categorizing Students' Mistakes in Mathematics within Learning Theories. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 1(1).

Ulusoy, F. (2019). Serious Obstacles Hindering Middle School Students' Understanding of Integer Exponents. *International Journal of Research in Education and Science*, 5(1), 52-69.

Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. Crete, Greece: University of Crete.

Φραγκίσκος, Κ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2002). Ένα διδακτικό εργαλείο για τη μάθηση της Θεωρίας Πιθανοτήτων με χρήση ιστορικών προβλημάτων. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (19), 141-150.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης).

Yang, Z. K., Wang, M., Cheng, H. N., Liu, S. Y., Liu, L., & Chan, T. W. (2016). The Effects of learning from correct and erroneous examples in individual and collaborative settings. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 25(2), 219-227.

Yasin, Y. (2017). A Review of The Misconceptions in Mathematics Education. *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology*, 1(1), 21-32.

Ycong, H. G., Barredo, B. S., & Mamolo, L. A. (2021). Effects of Peer Tutoring to The Learning Outcomes in Exponential Expressions of Grade 8 Students. *IndoMath: Indonesia Mathematics Education*, 4(2), 107-118.

Zhao, H., & Acosta-Tello, E. (2016). The impact of erroneous examples on students' learning of equation solving. *Journal of Mathematics Education*, 9(1), 57-68.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Ερωτηματολόγιο Α' και Γ' Φάσης

Τάξη:.....

Τμήμα:.....

Αρχικά ονόματος:.....

Φύλο: αγόρι / κορίτσι

Ημερομηνία γέννησης:.....

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις.

Υπάρχει μια μόνο σωστή απάντηση!

1) Η δύναμη  $2^3$  είναι ίση με:

i)  $2 \cdot 3$

ii)  $2 \cdot 2 \cdot 2$

iii)  $3 \cdot 3$

iv)  $2+3$

2) Η δύναμη  $(5^2)^3$  είναι ίση με:

i)  $5^6$

ii)  $5^5$

iii)  $5 \cdot 2 \cdot 3$

iv)  $5+2+3$

3) Η δύναμη  $(-3)^2$  είναι ίση με:

i)  $-9$

ii)  $9$

iii)  $-6$

iv)  $6$

4) Η δύναμη  $4^0$  είναι ίση με:

i)  $1$

ii)  $4$

iii)  $0$

iv)  $3$

5) Η δύναμη  $(2^2)^3$  είναι ίση με:

i)  $2^5$

ii)  $3 \cdot 2 \cdot 2$

iii)  $2^6$

iv)  $2+2+3$

6) Η δύναμη  $(-1)^6$  είναι ίση με:

i)  $-6$

ii)  $6$

iii)  $1$

iv)  $-1$

7) Η δύναμη  $(3^4)^2$  είναι ίση με:

- i)  $3^6$                       ii)  $3^8$                       iii)  $3 \cdot 4 \cdot 2$                       iv)  $12^2$

8) Η δύναμη  $7^0$  είναι ίση με:

- i) 6                      ii) 1                      iii) 0                      iv) 7

9) Η δύναμη  $(3^2)^3$  είναι ίση με:

- i)  $3 \cdot 2 \cdot 3$                       ii)  $3^5$                       iii)  $6^3$                       iv)  $3^6$

10) Η δύναμη  $(-2)^4$  είναι ίση με:

- i) - 16                      ii) -8                      iii) 8                      iv) 16

11) Η δύναμη  $5^2$  είναι ίση με:

- i)  $5 \cdot 2$                       ii)  $5 \cdot 5$                       iii)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$                       iv)  $5+2$

12) Η δύναμη  $(-4)^2$  είναι ίση με:

- i) - 6                      ii) - 16                      iii)  $-4 \cdot 2$                       iv) 16

13) Η δύναμη  $3^5$  είναι ίση με:

- i)  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$                       ii)  $5 \cdot 5 \cdot 5$                       iii)  $3 \cdot 5$                       iv)  $3+5$

14) Η δύναμη  $11^0$  είναι ίση με:

- i) 0                      ii) 11                      iii) 1                      iv) 10

15) Η δύναμη  $1^2$  είναι ίση με:

- i) 1                      ii) 2                      iii) 3                      iv) 0

16) Η δύναμη  $5^0$  είναι ίση με:

i) 5

ii) 0

iii) 4

iv) 1

Σας ευχαριστώ!

## Ερωτηματολόγιο Β΄ Φάσης

Τάξη:.....

Τμήμα:.....

Αρχικά ονόματος:.....

Φύλο: αγόρι / κορίτσι

Ημερομηνία γέννησης:.....

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις.

Υπάρχει μια μόνο σωστή απάντηση!

1) Η δύναμη  $(-7)^2$  είναι ίση με:

i) -49

ii) 49

iii)  $-7 \cdot 2$

iv)  $7 \cdot 2$

2) Η δύναμη  $4^2$  είναι ίση με:

i)  $4+2$

ii)  $4 \cdot 4$

iii)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

iv)  $2 \cdot 4$

3) Η δύναμη  $(-1)^2$  είναι ίση με:

i) 1

ii) -1

iii) -2

iv) 2

4) Η δύναμη  $5^0$  είναι ίση με:

i) 0

ii) 1

iii) 5

iv) 4

5) Η δύναμη  $(3^5)^2$  είναι ίση με:

i)  $3^{10}$

ii)  $3^7$

iii)  $3 \cdot 5 \cdot 2$

iv)  $3+5+2$

6) Η δύναμη  $4^0$  είναι ίση με:

i) 4

ii) 0

iii) 3

iv) 1



7) Η δύναμη  $(-5)^2$  είναι ίση με:

- i) -10                      ii) - 25                      iii) 25                      iv) 10

8) Η δύναμη  $(3^8)^2$  είναι ίση με:

- i)  $3^{10}$                       ii)  $3^{16}$                       iii)  $3 \cdot 8 \cdot 2$                       iv)  $3+8+2$

9) Η δύναμη  $3^2$  είναι ίση με:

- i)  $2 \cdot 2 \cdot 2$                       ii)  $2 \cdot 3$                       iii)  $3 \cdot 3$                       iv)  $3+2$

10) Η δύναμη  $2^0$  είναι ίση με:

- i) 2                      ii) 3                      iii) 0                      iv) 1

11) Η δύναμη  $(-2)^6$  είναι ίση με:

- i) -12                      ii) -64                      iii) 64                      iv) 12

12) Η δύναμη  $1^5$  είναι ίση με:

- i) 1                      ii)  $1 \cdot 5$                       iii)  $5+1$                       iv) 4

13) Η δύναμη  $(5^6)^3$  είναι ίση με:

- i)  $5+6+3$                       ii)  $5^{18}$                       iii)  $5 \cdot 6 \cdot 3$                       iv)  $5^9$

14) Η δύναμη  $2^5$  είναι ίση με:

- i)  $2 \cdot 5$                       ii)  $5 \cdot 5$                       iii)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$                       iv)  $5+2$

15) Η δύναμη  $3^0$  είναι ίση με:

- i) 0                      ii) 3                      iii) 1                      iv) 2

16) Η δύναμη  $(2^4)^2$  είναι ίση με:

i)  $2^6$

ii)  $2^8$

iii)  $2 \cdot 4 \cdot 2$

iv)  $2+4+2$

Σας ευχαριστώ!

## Υλικό Διδακτικής Παρέμβασης

### Λανθασμένα Παραδείγματα (Ομάδα Παρέμβασης)

#### 1<sup>ο</sup> Λανθασμένο Παράδειγμα: Η δύναμη $2^3$ είναι ίση με:

- Ένας υποθετικός μαθητής απάντησε ότι για τον υπολογισμό αυτής της δύναμης θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί η βάση 2 με τον εκθέτη 3 και το αποτέλεσμα να είναι 6.
- Γράφτηκε στον πίνακα η ισότητα  $2^3 = 2 \cdot 3 = 6$ .
- Ωστόσο, αυτή η σχέση δεν ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης και θεωρείται λανθασμένη η απάντησή του.
- Συζητήθηκε στην τάξη αυτή η παρανόηση και οδηγήθηκαν οι μαθητές στη σωστή απάντηση.
- Τέλος, έδιναν οι μαθητές ένα δικό τους λανθασμένο παράδειγμα παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε, το εξηγούσαν στους συμμαθητές τους και έδιναν τη σωστή απάντηση.

#### 2<sup>ο</sup> Λανθασμένο Παράδειγμα: Η δύναμη $(-3)^2$ είναι ίση με:

- Ένας υποθετικός μαθητής απάντησε ότι για τον υπολογισμό αυτής της δύναμης θα πρέπει να διατηρηθεί το αρνητικό πρόσημο και η λύση της δύναμης να είναι -9.
- Γράφτηκε στον πίνακα η ισότητα  $(-3)^2 = -9$ .
- Ωστόσο, η σχέση αυτή δεν ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης και θεωρείται λανθασμένη η απάντησή του.
- Συζητήθηκε στην τάξη αυτή η παρανόηση και οδηγήθηκαν οι μαθητές στη σωστή απάντηση.
- Τέλος, έδιναν οι μαθητές ένα δικό τους λανθασμένο παράδειγμα παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε, το εξηγούσαν στους συμμαθητές τους και έδιναν τη σωστή απάντηση.

### 3<sup>ο</sup> Λανθασμένο Παράδειγμα: Η δύναμη $(5^2)^3$ είναι ίση με:

- Ένας υποθετικός μαθητής απάντησε ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης υψωμένη σε άλλη δύναμη, θα πρέπει οι δυο δυνάμεις να προστεθούν.
- Γράφτηκε στον πίνακα η ισότητα  $(5^2)^3 = 5^{2+3} = 5^5$ .
- Ωστόσο, η σχέση αυτή δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες των δυνάμεων και θεωρείται λανθασμένη η απάντησή του.
- Συζητήθηκε στην τάξη αυτή η παρανόηση και οδηγήθηκαν οι μαθητές στη σωστή απάντηση.
- Τέλος, έδιναν οι μαθητές ένα δικό τους λανθασμένο παράδειγμα παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε, το εξηγούσαν στους συμμαθητές τους και έδιναν τη σωστή απάντηση.

### 4<sup>ο</sup> Λανθασμένο Παράδειγμα: Η δύναμη $4^0$ είναι ίση με:

- Ένας υποθετικός μαθητής απάντησε ότι για τον υπολογισμό μιας δύναμης με εκθέτη το 0, το αποτέλεσμα της θα παραμείνει ίδιο με τη βάση. Δηλαδή, το 0 δεν λαμβάνεται υπόψη σαν δύναμη.
- Γράφτηκε στον πίνακα η ισότητα  $4^0 = 4$ .
- Ωστόσο, η σχέση αυτή δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες των δυνάμεων και θεωρείται λανθασμένη η απάντησή του.
- Συζητήθηκε στην τάξη αυτή η παρανόηση και οδηγήθηκαν οι μαθητές στη σωστή απάντηση.
- Τέλος, έδιναν οι μαθητές ένα δικό τους λανθασμένο παράδειγμα παρόμοιο με αυτό που εξετάστηκε, το εξηγούσαν στους συμμαθητές τους και έδιναν τη σωστή απάντηση.

### Ορθά Λυμένα Παραδείγματα (Ομάδα Ελέγχου)

Θα σας παρουσιάσω στον πίνακα τον ορισμό της δύναμης, που ήδη γνωρίζετε από την Α΄ Γυμνασίου και θα επισημάνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.

**Παράδειγμα 1:** Η δύναμη  $2^3$  είναι ίση με  $2 \cdot 2 \cdot 2$  δηλαδή ίση με 8.

- Θυμόμαστε πως η δύναμη ορίζεται ως ο επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός της βάσης, όσες φορές μας δείχνει ο εκθέτης.
- Στη συνέχεια, οι μαθητές έδιναν ένα δικό τους παράδειγμα στον πίνακα της τάξης, παρόμοιο με αυτό που τους παρουσιάστηκε.

**Παράδειγμα 2:** Η δύναμη  $(-3)^2$  είναι ίση με  $(-3) \cdot (-3)$  δηλαδή ίση με  $+9$ .

- Θυμόμαστε πως από τον ορισμό της δύναμης θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον  $-3$  με τον εαυτό του. Προσέχουμε στον πολλαπλασιασμό  $(-3) \cdot (-3)$  να βρούμε πρώτα το αποτέλεσμα του πρόσημου, δηλαδή  $(-) \cdot (-) = +$  και έπειτα τον πολλαπλασιασμό  $3 \cdot 3 = 9$ .
- Στη συνέχεια, οι μαθητές έδιναν ένα δικό τους παράδειγμα στον πίνακα της τάξης, παρόμοιο με αυτό που τους παρουσιάστηκε.

**Παράδειγμα 3:** Η δύναμη  $(5^2)^3$  είναι ίση με  $5^{2 \cdot 3}$ , δηλαδή ίση με  $5^6$ .

- Θυμόμαστε από τις ιδιότητες των δυνάμεων, πως όταν μια δύναμη είναι υψωμένη σε άλλη δύναμη, τότε θα πρέπει αυτές οι δυο δυνάμεις να πολλαπλασιαστούν. Πιο συγκεκριμένα, για τη δύναμη  $(5^2)^3$  θα πρέπει στον εκθέτη να πολλαπλασιάσουμε  $2 \cdot 3$  και να γράψουμε  $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ .
- Στη συνέχεια, οι μαθητές έδιναν ένα δικό τους παράδειγμα στον πίνακα της τάξης, παρόμοιο με αυτό που τους παρουσιάστηκε.

**Παράδειγμα 4:** Η δύναμη  $4^0$  είναι ίση με  $1$ .

- Θυμόμαστε από τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με ίδια βάση ότι θα είναι για παράδειγμα,  $\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0$ . Όμως γνωρίζουμε ότι  $\frac{4^3}{4^3} = 1$ . Άρα,  $4^0 = 1$ .
- Στη συνέχεια, οι μαθητές έδιναν ένα δικό τους παράδειγμα στον πίνακα της τάξης, παρόμοιο με αυτό που τους παρουσιάστηκε.