ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

« ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ »

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β’ Ηλικιακός κύκλος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

“ Διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της γωνίας με ιστορική προοπτική σε μαθητές Γυμνασίου”

Μαυρίδου Χρυσάνθη (Α.Μ.:1063)

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Καθηγητής

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

« ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ »

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β’ Ηλικιακός κύκλος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

“ Διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της γωνίας με ιστορική προοπτική σε μαθητές Γυμνασίου”

Μαυρίδου Χρυσάνθη (Α.Μ.:1063)

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος,
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Μαρτίου 2023.

…………………………	…………………………	…………………………
Κ. Νικολαντωνάκης	Χ. Σταθοπούλου	Δ. Δεσλή
Καθηγητής	Καθηγήτρια	Αν. Καθηγήτρια
Π.Τ.Δ.Ε.Φ. Παν. Δυτ.Μακ.	Π.Τ.Ε.Α. Παν. Θεσ.	Π.Τ.Δ.Ε Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2023

……………………………………………………….

Χρυσάνθη Κ. Μαυρίδου Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

………………. Στην μαμά μου

και στην μνήμη του μπαμπά μου και της γιαγιάς μου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για τη συμβουλευτική καθοδήγησή του και τη συνεχή επικοινωνία όλο αυτό το διάστημα. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού για τις γνώσεις που μας μετέδωσαν και τη φιλική τους συμπεριφορά. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συμφοιτητές μου για την άριστη συνεργασία που είχαμε και την αλληλοβοήθεια που δείξαμε μέχρι και την τελευταία στιγμή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την πολύ καλή μου φίλη, Ευαγγελία, για τις πολύτιμες γραφιστικές τις γνώσεις. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους για τη συμπαράσταση, την κατανόηση και την υπομονή τους σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας αλλά και των σπουδών μου γενικότερα.

Περίληψη

Η έννοια της γωνίας αποτελεί μια βασική έννοια που συντελεί σημαντικά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης των μαθητών και η μέτρηση της γωνίας είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών, των θετικών επιστημών και της τεχνολογίας αλλά και της καθημερινής ζωής. Επομένως, η κατανόηση σε βάθος των δύο παραπάνω εννοιών αλλά και η γνώση του τι προβλήματα λύνουν είναι πολύ σημαντικές για την πορεία των μαθητών στα μαθηματικά των μαθητικών τους χρόνων αλλά και στην μετέπειτα ζωή τους.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει μια διδακτική πρόταση για μαθητές Α’ Γυμνασίου, στην οποία γίνεται η προσπάθεια κατασκευής μιας αξιωματικής φυσικής γεωμετρίας. Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι η πραγματοποίηση κατάλληλων δραστηριοτήτων που βασίζονται σε μια χωρικό-γεωμετρική προβληματική η οποία είναι εμπνευσμένη από ιστορικά κείμενα από τα Elements de Géométrie του Clairaut (1753) με χρήση διαφόρων μέσων (χειραπτικών, ψηφιακών, ενσώματης και διδασκαλίας στον μεσοχώρο). Ο σκοπός της διδακτικής πρότασης είναι η κατανόηση της έννοιας της γωνίας, της σύγκρισης, της κατασκευής και της μέτρησης γωνιών και την ανακάλυψη της πρακτικής τους εφαρμογής στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Η διδακτική πρόταση πραγματοποιήθηκε σε 23 μαθητές της Α’ Γυμνασίου κατά το σχολικό έτος 2022 – 2023 και τα αποτελέσματα της αναλύθηκαν ποιοτικά και ποσοτικά ώστε να ελεγχθεί αν κατανοήθηκαν οι έννοιες που πραγματεύεται η διδακτική πρόταση, αν λύθηκαν τυχόν παρανοήσεις σχετικά με αυτές και αν κατανοήθηκε η σύνδεση των εννοιών αυτών με πρακτικές εφαρμογές.

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η εφαρμογή μιας διδασκαλίας με χρήση μη παραδοσιακών μεθόδων είχε θετικά αποτελέσματα στην εκμάθηση αλλά και την κατανόηση των εννοιών που πραγματεύεται δείχνοντας παράλληλα τον σκοπό που διδάσκονται.

Λέξεις Κλειδιά: Γωνίες, Ιστορία Μαθηματικών, Ιστορικά προβλήματα, Ιστορικό εργαλείο, Πρακτική Γεωμετρία, Χωρικό-γεωμετρική προβληματική, Απρόσιτη απόσταση.

Abstract

The concept of angle is a basic concept that contributes significantly to the development of students' geometric knowledge and the measurement of angle is an integral part of mathematics, science, technology, and everyday life. Therefore, an in-depth understanding of these two concepts and knowledge of what problems they solve are very important for students' progress in mathematics during their school years and in their later life.

The purpose of this project is to present a teaching proposal for seventh grade students in high school in which an attempt is made to construct an axiomatic physical geometry. The teaching method followed is the realization of appropriate activities based on a spatial-geometric problematic which is inspired by historical texts from Clairaut's Elements de Géométrie (1753) using different media (manual, digital, embodied and mesospatial teaching). The purpose of the teaching proposal is to understand the concept of angles, to compare, construct and measure angles and to discover their practical application in historical and contemporary problems of everyday life.

The teaching proposal was carried out on 23 students of the seventh grade during the school year 2022 - 2023 and its results were analyzed qualitatively and quantitatively in order to check whether the concepts dealt with in the teaching proposal were understood, whether any misconceptions about them were solved and whether the connection of these concepts with practical applications was understood.

The results showed that the implementation of a teaching proposal using non-traditional methods had positive effects on both learning and understanding of the concepts addressed while demonstrating the purpose for which they were taught.

Keywords: Angles**,** History of Mathematics, Historical problems, Historical tool, Practical Geometry, Spatial-geometric Problematic, Inaccessible distance

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή

Η γεωμετρία συνδέεται στην πρωταρχική της μορφή με την αντίληψη του χώρου, κάτι που μαρτυρά τόσο η ετυμολογία της λέξης όσο και η ιστορική πορεία των διαφόρων γεωμετρικών εννοιών. Εκκινώντας από πρακτικές δραστηριότητες και την ανάγκη του ανθρώπου να περιγράψει τον περιβάλλοντα χώρο, οι γεωμετρικές φόρμες έγιναν σταδιακά αντιληπτές αφαιρετικά και περιγράφησαν θεωρητικά με αξιωματικό τρόπο. Όταν όμως αναφερόμαστε στην εκπαίδευση των παιδιών, η γεωμετρία εξακολουθεί να αφορά πρωτίστως «την αντίληψη του χώρου στον οποίο τα παιδιά ζουν, αναπνέουν και κινούνται» (Freudenthal, 1983, p. 403 όπως αν. η Λάτση, 2011).

Στην παρούσα εργασία το ερευνητικό ενδιαφέρον στρέφεται γύρω από μια γεωμετρική έννοια, αυτή της γωνίας, η οποία μαζί με το μήκος αποτελεί πιθανότατα το πιο σημαντικό μαθηματικό εργαλείο (White & Mitchelmore, 2001a, όπως αν. η Λάτση, 2011) για την περιγραφή και ανάλυση του φυσικού χώρου (π.χ. στις κατασκευές, στη σχεδίαση, στον προσανατολισμό).

Η πλειοψηφία των ερευνών αφορά είτε μόνο στατικές πτυχές της έννοιας της γωνίας είτε μόνο δυναμικές και διάφορες δυσκολίες ή παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στην διδασκαλία της γωνίας σαν γεωμετρικό αντικείμενο. Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια να αναδειχθεί ο πολύπλευρος χαρακτήρας τις γωνίας, να γίνει αισθητή η διαφορά της έννοιας της γωνίας από το μέτρο της γωνίας, να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το αντικείμενο και τέλος να κατανοήσουν οι μαθητές τον λόγο (σκοπό) που διδάσκονται τις γωνίες μέσα από προβλήματα που λύνουν όπως ο υπολογισμός μιας απρόσιτης απόστασης και μέσα από πρακτικές εφαρμογές στην ναυσιπλοΐα και στις κατασκευές. Όλα τα παραπάνω δεν μπορούσαν να επιτευχθούν με παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας. Επομένως, η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθήθηκε ήταν η πραγματοποίηση κατάλληλων δραστηριοτήτων που βασίστηκαν σε μια χωρικό-γεωμετρική προβληματική η οποία ήταν εμπνευσμένη από ιστορικά κείμενα από τα Elements de Géométrie του Clairaut (1753).

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται σε τρία κεφάλαια (1^{o} -2^{o}- 3^{o}) το θεωρητικό πλαίσιο – ανασκόπηση βιβλιογραφίας και στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται σε επτά κεφάλαια (4^{o}- 5^{o}- 6^{o} -7^{o}- 8^{o}- 9^{o} -10^{o}) η έρευνα.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για την έννοια της γωνίας. Αναδεικνύεται ο ρόλος της γωνίας και της μέτρησης γωνιών στην γεωμετρία και γενικότερα στα μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες και στην καθημερινή ζωή. Επίσης, τονίζεται ότι είναι πολύπλευρη έννοια και αυτό δικαιολογεί την μη ύπαρξη ενός ορισμού που να καλύπτει όλες τις πτυχές της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γενικά για την διδασκαλία της γεωμετρίας αλλά και ειδικά για την διδασκαλία της γωνίας. Αρχικά γίνεται μια ανασκόπηση σχετικά με την επιλογή τρόπου διδασκαλίας της γεωμετρίας κατά την διάρκεια των αιώνων. Δίνεται έμφαση στην φυσική αξιωματική γεωμετρία (και σύγκριση της με την πρακτική αλλά και με άλλες γεωμετρίες) με ιδιαίτερη αναφορά στον Γάλλο μαθηματικό Clairaut, αφού είναι η γεωμετρία που έγινε προσπάθεια να κατασκευαστεί για την διδασκαλία της γωνίας στην παρούσα εργασία. Επιπρόσθετα, γίνεται ανάλυση των προβληματικών και δίνονται επιχειρήματα για την επιλογή της χωρικό-γεωμετρικής προβληματικής (μοντελοποίησης) που είναι η μέθοδος διδασκαλίας που επιλέχθηκε στην παρούσα εργασία. Έπειτα, γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την διδασκαλία της γωνίας με βάση το ελληνικό Α.Π.Σ., με έρευνες για την διδασκαλία της γωνίας και με παρανοήσεις που προκύπτουν κατά την διδασκαλία της γωνίας. Τονίζεται το πόσο σημαντική είναι η επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων που για την πραγματοποίηση τους χρησιμοποιούνται διάφορα μέσα (χειραπτικά, ψηφιακά, ενσώματη, δραστηριότητες στον μεσοχώρο).

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην χρήση της ιστορίας των μαθηματικών γενικά στην διδασκαλία και στην μάθηση και ειδικά στην διδακτική παρέμβαση της παρούσας εργασίας. Αναδεικνύεται η σημαντικότητα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών σε πολύπλοκα ζητήματα που αφορούν την διαδικασία της μάθησης και τη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Επιπρόσθετα, δίνονται επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της στην διδασκαλία και στην μάθηση καθώς και οι τρόποι ενσωμάτωσης της στην διδασκαλία. Ακόμη, γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην χρήση των ιστορικών εργαλείων στην διδασκαλία. Τέλος, αναλύεται η χρήση της ιστορίας μαθηματικών στο εννοιολογικό και στο διδακτικό πλαίσιο της παρούσας διδακτικής πρότασης αλλά και στις εφαρμογές της στην ναυσιπλοΐα και στην χωρομετρία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην χρησιμότητα της έρευνας της παρούσας εργασίας και στον διαφορετικό τρόπο προσέγγισης που προτείνεται στην διδακτική της πρόταση.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ο σκοπός και οι στόχοι της έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα, η μέθοδος που ακολουθήθηκε, το δείγμα που μελετήθηκε, η ερευνητική διαδικασία, τα εργαλεία συλλογής δεδομένων και η αξιοπιστία και η εγκυρότητα της έρευνας.

Στο έκτο κεφάλαιο αναπτύσσεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης. Αναλύεται ξεχωριστά καθεμία από τις επτά δραστηριότητες, αναφέρεται η πηγή έμπνευσης τους, εξηγείται ο λόγος επιλογής τους, οι στόχοι τους και οι παρανοήσεις που λύνουν.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναλύονται τα δεδομένα που συλλέγονται από τα ερευνητικά εργαλεία με βάση τον σκοπό και τους στόχους της έρευνας και με σκοπό να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο όγδοο κεφάλαιο, στα συμπεράσματα, δίνονται οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα με την απαραίτητη τεκμηρίωση.

Στο ένατο κεφάλαιο, γίνονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

Στο δέκατο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στους περιορισμούς της έρευνας.

Κατάλογος εικόνων - πινάκων

ΜΕΡΟΣ Α: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ - ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Κεφάλαιο 1

Βιβλιογραφική ανασκόπηση της έννοιας της γωνίας

Η έννοια της γωνίας αποτελεί μια βασική έννοια που συντελεί σημαντικά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης των μαθητών. Σύμφωνα με τους Alkan & Altun (1998, όπως αναφ. οι Biber, Tuna & Korkmaz, 2013), σχεδόν κάθε θέμα γεωμετρίας απαιτεί μια καλή γνώση της γωνίας. Οποιοσδήποτε μαθητής που δεν έχει κατανοήσει επαρκώς τις βασικές γεωμετρικές έννοιες δε θα καταλάβει ούτε θα επιτύχει στα επόμενα θέματα γεωμετρίας. Αυτό μπορεί να μειώσει τα επιτεύγματα ενός ατόμου τόσο στη σχολική όσο και στην καθημερινή ζωή.

Παράλληλα η μέτρηση της γωνίας είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών, των θετικών επιστημών και της τεχνολογίας αλλά και της καθημερινής ζωής. Το άρθρο στην «Εγκυκλοπαίδεια» του 1751 (Diderot & d'Alembert,1751, σελ. 461–464 όπως αναφ. ο Guichard, 2018) συνδέει τη σημασία των γωνιών και του προσδιορισμού του μεγέθους τους με πρακτικές εφαρμογές, όπως η τοπογραφία – χωρομέτρηση, η πλοήγηση, η γεωγραφία και η αστρονομία και αναφέρεται επίσης στα εργαλεία και τη χρήση τους.

Η γωνία είναι μια έννοια που έχει οριστεί διαφορετικά κατά τη διάρκεια των αιώνων και, ανάλογα με τη μαθηματική κατάσταση υπό την οποία εξετάζεται, μπορεί ακόμα και σήμερα να λάβει διαφορετικές σημασίες. Είναι, λοιπόν, μια πολύπλευρη έννοια που δικαιολογεί την ύπαρξη διαφόρων ορισμών, οι οποίοι διαφέρουν σημαντικά στην έμφαση που δίνουν (Keiser, 2004). Σύμφωνα με τους Henderson and Taimina (2005) κανένας επίσημος ορισμός δεν μπορεί να συλλάβει όλες τις πτυχές της εμπειρίας μας για το τι είναι μια γωνία.

Μια γωνία, λοιπόν, μπορεί να οριστεί με τουλάχιστον τρεις διαφορετικούς τρόπους: ως γωνία περιστροφής (στροφή), ως γωνία τομέα (η ποσότητα που μοιράζεται το σύνολο όλων των επάλληλων γωνιακών τομέων) και ως ένα ζεύγος ημιευθειών που εκτείνονται από μια κοινή κορυφή (άνοιγμα ή κλίση) (Devichi, C. & Munier, V. , 2013; Mitchelmore & White, 1998). Τρεις παρόμοιους τρόπους καθορισμού της γωνίας περιγράφουν και οι Henderson & Taimina (2005) που την ορίζουν ως γεωμετρικό σχήμα, ως δυναμική μορφή και ως μέτρο. Ομοίως, ο Freudenthal (1973, όπως αναφ. η Λάτση, 2011) θεωρεί τρεις έννοιες της γωνίας που είναι πρακτικά και διδακτικά σημαντικές, καθώς σχετίζονται άμεσα με τις καθημερινές μας εμπειρίες η βασική γεωμετρική γωνία (0^o-180^o), η γωνιομετρική γωνία (0-2π) και η αναλυτική γωνία (-∞,+∞).

Οι παραπάνω ορισμοί κατηγοριοποιούνται σε δυναμικούς και στατικούς. Οι ορισμοί που θεωρούνται ως δυναμικοί δίνουν έμφαση στην γωνία ως αποτέλεσμα κίνησης και στροφής, ενώ οι ορισμοί που θεωρούνται στατικοί δίνουν έμφαση στη γωνία ως σταθερό γεωμετρικό σχήμα (Keiser, 2004).

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η ποσοτικοποίηση της σχέσης μεταξύ των δυο στατικών πλευρών ενός γεωμετρικού σχήματος ή μεταξύ δύο διαδοχικών ενδείξεων/προσανατολισμών, το μέγεθος (μέτρο), δηλαδή της γωνίας, αποτελεί μια ιδιαίτερη πτυχή της εν λόγω έννοιας (Henderson & Taimina, 2005 όπως αναφ. η Λάτση, 2011).

Κεφάλαιο 2

Βιβλιογραφική ανασκόπηση γενικά για την διδασκαλία της γεωμετρίας και ειδικά για την διδασκαλία της γωνίας

2.1. Η Γεωμετρία του Clairaut (από την πρακτική στην φυσική αξιωματική Γεωμετρία)

Η Menghini (2015) αναφέρει πως έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για τη διδασκαλία της γεωμετρίας ακολουθώντας μια διαδρομή διαφορετική από αυτή που προτείνεται στα *Στοιχεία του Ευκλείδη* (Barbin & Menghini, 2013). Ο πιο διάχυτος τρόπος ήταν να αλλάζουν τη σειρά των θεωρημάτων και των προβλημάτων, ενώ δέχονται υποθετικές κατασκευές και περιορισμένη χρήση της αριθμητικής. Κύριος σκοπός, μερικών, δεν ήταν μια (νέα) λογική σειρά για γεωμετρική εξαγωγή, αλλά μια «εξερεύνηση» της γεωμετρίας που κράτησε έναν ισχυρό δεσμό με την πρακτική προέλευσή της και της οποίας τα περιεχόμενα και οι μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως εξέλιξη της μεσαιωνικής πρακτικής γεωμετρίας.

Η πρακτική γεωμετρία, δημιουργήθηκε για να προσφέρει συγκεκριμένη βοήθεια σε ανθρώπους που ασχολούνται με το εμπόριο, την γεωγραφία και ακόμη και την αστρονομία. Στην συνέχεια, υπέστη μια μεταμόρφωση που υπογράμμισε τη διδακτική της αξία και τη μετέτρεψε πρώτα σε έναν τρόπο διδασκαλίας μέσω επίλυσης προβλημάτων και έπειτα σε μια πειραματική-διαισθητική διδασκαλία που θα μπορούσε να είναι μια εναλλακτική στην επαγωγική-ορθολογική διδασκαλία της γεωμετρίας (Menghini, 2015).

Το 1741, πάλι στη Γαλλία, ο Alexis Clairaut έγραψε το *Elements de Géométrie*. Ο Clairaut δεν ενδιαφερόταν να διδάξει μια πρακτική γεωμετρία. Με τον Clairaut βλέπουμε μια μετατόπιση από τη μέτρηση ως στόχο στη μέτρηση ως ένα μέσο να διδάξει γεωμετρία μέσω προβλημάτων. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το μέρος που ασχολείται με την μέτρηση δεν περιέχει αριθμούς, υπάρχει μόνο μια υπόδειξη για την αναγκαιότητα σύγκρισης με ένα γνωστό μέτρο. Ο στόχος του Clairaut ήταν να λύσει ένα πρόβλημα «κατασκευάζοντας» τα στοιχεία που ήθελε να μετρήσει. Η εστίαση ήταν στη διαδικασία της κατασκευής και στην αφηγηματική μέθοδο (Menghini, 2015).

Ο Freudenthal τονίζει την στενή σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα κατά την διαδικασία της μάθησης και μνημονεύει τον Clairaut σαν ένα ξεχωριστό μαθηματικό που υπερασπίστηκε την στενή σχέση της διδασκαλίας της γεωμετρίας με την πραγματικότητα. Ο Freudenthal θεωρεί πως η γεωμετρία είναι μια από τις καλύτερες ευκαιρίες να μάθει κανείς να μαθηματικοποιεί την πραγματικότητα και να κάνει ανακαλύψεις. Θεωρεί επίσης, πως καμία άλλη προσέγγιση πέρα από την σύνδεση της γεωμετρίας με τον εμπειρικό χώρο, δεν μπορεί να εγγυηθεί μια συνεχή επιρροή των μαθηματικών πάνω στον μαθητή. Ό,τι είναι άσχετο με τη βιωμένη πραγματικότητα εξαφανίζεται από την μνήμη. Επομένως, αν ο εκπαιδευτικός αποφεύγει αυτό το καθήκον χαραμίζει μια ανεπανάληπτη ευκαιρία (Μιτσούλης, 2009). Το τελευταίο το αναφέρει ως πρόβλημα και ο Brousseau (1983), ο οποίος υπογραμμίζει πως η απουσία μοντελοποίησης οδηγεί σε απουσία ύπαρξης προβληματισμού αναφορικά με τις σχέσεις μεταξύ του φυσικού και του γεωμετρικού χώρου. Αυτό συμβάλλει στην εξήγηση της ρήξης ανάμεσα στην γεωμετρία της παρατήρησης και την γεωμετρία της απόδειξης (Νικολαντωνάκης, 2015).

Η Collette Laborde (1990), από την άλλη, υποδεικνύει ότι η διδασκαλία οφείλει να επιτρέπει στον μαθητή να διαχωρίζει τον φυσικό χώρο από τον γεωμετρικό χώρο διότι μόνο μέσω αυτής της διάκρισης ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει τις ερωτήσεις που τίθενται στην γεωμετρία και τις απαντήσεις που μπορούν να δοθούν. Η γεωμετρία έτσι διαχωρίζεται από την πρακτική και αποτελεί μια αξιωματική γεωμετρία.

Με βάση τον Guichard (2018), ο Clairaut επιχείρησε να κατασκευάσει μια φυσική γεωμετρία. Ξεκινώντας από την καθημερινή εμπειρία, οργάνωσε το σώμα της γεωμετρίας γύρω από δύο θεμελιώδη ερωτήματα: πώς μπορούμε να υπολογίσουμε εμβαδά και πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τους όγκους. Και σιγά σιγά μέσα από τα παραπάνω ο μαθητής συναντά τις κλασικές δηλώσεις της γεωμετρίας. Ο Clairaut, λοιπόν, εστιάζει στη δραστηριότητα, στην οποία στοχεύει κατασκευάζοντας τα προς μέτρηση γεωμετρικά στοιχεία. Όπως και στο Fibonacci, όχι μόνο η μέτρηση αυτή κάθε αυτή δεν είναι σημαντική, αλλά και τα αρχικά προβλήματα δεν είναι τόσο σημαντικά όσο η διαδικασία επίλυσής τους. Ο ρόλος της διαδικασίας κατασκευής είναι κυρίως εκπαιδευτικός.

Οι Houdement και Kuzniak (2003) ορίζουν την Φυσική Γεωμετρία ή Γεωμετρία Ι και την Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία ή Γεωμετρία ΙΙ. Στην Φυσική Γεωμετρία τα επιχειρήματα βασίζονται στο πείραμα, την διαίσθηση και στον συλλογισμό που ακολουθεί. Το σημαντικότερο είναι να βρεθούν επιχειρήματα που να πείθουν για την ορθότητά τους. Οι αποδείξεις μπορούν να στηριχτούν στα σχήματα ή στις παρατηρήσεις που γίνονται με εργαλεία όπως ο χάρακας, η πυξίδα ή το μοιρογνωμόνιο. Η εξέλιξη της Φυσικής Γεωμετρίας παρακινήθηκε ιστορικά από την προσπάθεια επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Η πηγή της επικύρωσής της είναι ο πραγματικός κόσμος. Στην Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία, της οποίας αρχέτυπο είναι η Ευκλείδεια γεωμετρία, η πηγή της επικύρωσής της είναι οι υποθετικοί, παραγωγικοί νόμοι μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα που δεν είναι τυπικό. Το μοντέλο αυτό πλησιάζει την πραγματικότητα καθώς τα σχήματα υπάρχουν μόνο μέσα από ορισμούς, οι οποίοι στηρίζονται σε χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων. Με βάση τα παραπάνω η γεωμετρία του Clairaut είναι Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία.

2.2. Προβληματικές

Αναφορικά με την σχέση ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο, λαμβάνουμε την διάκριση ανάμεσα σε τρεις προβληματικές που προτείνονται από Berthelot και Salin (2000, όπως αναφ. ο Νικολαντωνάκης, 2015) ανάλογα με τη φύση του προβλήματος :

1. Μια πρακτική προβληματική στην οποία τα αντικείμενα πάνω στα οποία εργαζόμαστε είναι τα φυσικά αντικείμενα (ιδιαίτερα τα σχέδια), στην οποία η πορεία επίλυσης είναι πρακτική και σε αυτή η επικύρωση γίνεται μένοντας στον αισθητό χώρο. Αυτή η προβληματική περιλαμβάνεται στην φυσική γεωμετρία με την έννοια του Kuzniak.
2. Μια γεωμετρική προβληματική στην οποία τα αντικείμενα είναι θεωρητικά, στην οποία η πορεία επίλυσης και η επικύρωση στηρίζονται αποκλειστικά στις γεωμετρικές γνώσεις. Αυτή η προβληματική περιλαμβάνεται στην αξιωματική γεωμετρία, υπό την έννοια του Kuzniak.
3. Μια χωρικό-γεωμετρική προβληματική (ή μοντελοποίησης) στην οποία εργαζόμαστε στα φυσικά αντικείμενα, στην οποία η πορεία επίλυσης στηρίζεται

στα γεωμετρικά αντικείμενα που εξιδανικεύουν τα φυσικά αντικείμενα και στις γεωμετρικές γνώσεις, αλλά στην οποία η επικύρωση γίνεται στον φυσικό χώρο, όπως στην πρακτική προβληματική, ακόμη και όταν αυτή δεν είναι σύμφωνη με την θεωρία. Αυτή η προβληματική έχει σχέση με την φυσική γεωμετρία στην οποία εγγράφονται το πρόβλημα και η λύση και με μια φυσική αξιωματική γεωμετρία στην οποία το πρόβλημα μοντελοποιείται και επιλύεται.

Σύμφωνα με την Sierpinska (2019), στα διαφορετικά σχολικά επίπεδα μπορεί κανείς να διακρίνει τρεις τύπους γεωμετρίας που διδάσκονται (Gonseth,1945-55; Houdement & Kuzniak, 2000):

1. την φυσική ρεαλιστική στο δημοτικό
2. την αξιωματική φυσική στο γυμνάσιο
3. την φορμαλιστική στο πανεπιστήμιο

Κάτι ανάλογο αναφέρει και ο Νικολαντωνάκης (2015), δηλαδή πως στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και στο Γυμνάσιο, οι δραστηριότητες των μαθητών δεν είναι πάντα εγγεγραμμένες στον φυσικό χώρο ή στον γεωμετρικό χώρο διότι ο στόχος είναι ακριβώς η μετάβαση μεταξύ του φυσικού χώρου και του γεωμετρικού χώρου. Αυτή η μετάβαση έχει προσδιοριστεί από ορισμένους ως πέρασμα «από μια γεωμετρία της παρατήρησης σε μια γεωμετρία της παραγωγής» και εκφράζεται στα προγράμματα ως «πέρασμα από την αντιληπτική αναγνώριση των σχημάτων στον χαρακτηρισμό τους από τις ιδιότητες». Συχνά γίνεται επίκληση του χώρου των γραφικών αναπαραστάσεων, ενός ενδιάμεσου χώρου ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο.

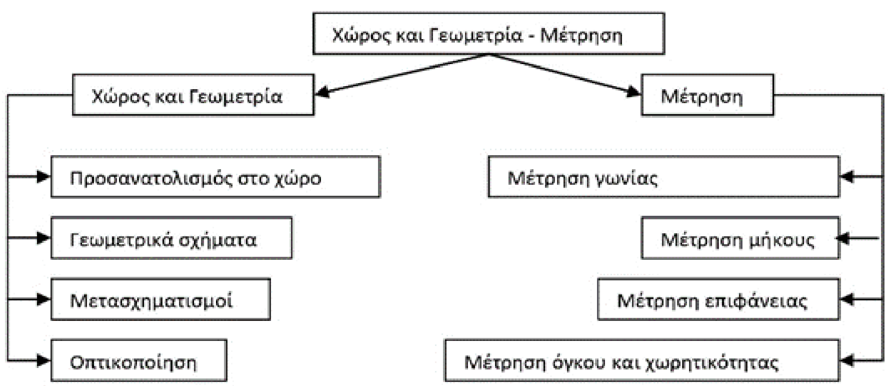
Στην παρούσα εργασία, η διδακτική πρόταση βασίζεται σε μια χωρικο-γεωμετρική προβληματική η οποία είναι βασισμένη σε ιστορικά κείμενα από τα *Elements de Géométrie* του Clairaut (1753).

2.3. Διδασκαλία της γωνίας

Εάν ένας μαθητής έχει λανθασμένη αντίληψη πριν από την εκμάθηση ενός θέματος, αυτό μπορεί να τον εμποδίσει να μάθει σωστά το νέο θέμα, οδηγώντας έτσι σε νέες παρανοήσεις. Η σχετική βιβλιογραφία αποκαλύπτει ότι οι μαθητές μαθαίνουν νέα θέματα συνδυάζοντας τη νέα γνώση με την προκαταρκτική τους γνώση. Έτσι, οι διδακτικές δραστηριότητες θα πρέπει να σχεδιάζονται λαμβάνοντας υπόψη τις γνώσεις και τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών. Για αυτό, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι υπάρχουσες γνώσεις και οι παρανοήσεις (εάν υπάρχουν) των μαθητών (Gilbert, Osborne και Fensham, 1982 όπως αναφ. οι Biber, Tuna & Korkmaz, 2013).

2.3.1. Διδασκαλία της γωνίας με βάση το ελληνικό Π.Σ. και τα σχολικά εγχειρίδια

Οι γωνίες με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) Μαθηματικών μελετώνται στους άξονες γνωστικού περιεχομένου «Γεωμετρία» και «Μετρήσεις» και με βάση το πρόγραμμα Σπουδών (Π.Σ.) στα μαθηματικά περιεχόμενα «Χώρος και Γεωμετρία» και «Μετρήσεις».



Εικόνα 1 Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

Επομένως, στο Π.Σ. (2011), είναι φανερή η διάκριση του χωρικού από τον γεωμετρικό συλλογισμό και στόχος είναι οι μαθητές να αναπτύξουν και τους δύο. Ο χωρικός συλλογισμός είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση πραγματικών ή θεωρητικών καταστάσεων. Ο γεωμετρικός συλλογισμός αφορά την οργάνωση και επεξεργασία του χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου. Σύμφωνα με τους Clements & Sarama (2000 όπως αν. στο Π.Σ. 2011) τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αντικαθιστούν τις απλοϊκές και χωρίς εμβάθυνση προσεγγίσεις με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται χωρικός, γεωμετρικός και οπτικοποιημένος συλλογισμός.

Επιπρόσθετα, ένας στόχος του Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2011) και του Π.Σ. (2011) είναι οι μαθητές να μελετήσουν ένα μέγεθος όπως είναι η γωνία, ξεχωριστά από την μέτρηση του. Οι μαθητές μελετούν την γωνία στις τέσσερεις διαφορετικές τροχιές «Χώρος», «Γεωμετρικά Σχήματα», «Μετασχηματισμοί» και «Οπτικοποιήσεις» του μαθηματικού περιεχομένου «Χώρος και Γεωμετρία» και στην τροχιά «Μέτρηση γωνίας» του μαθηματικού περιεχομένου «Μετρήσεις».

Σχετικά με την μέτρηση, οι Bragg & Outhred (2000 όπως αν. στο Π.Σ. 2011) αναφέρουν πως σήμερα η διδασκαλία της μέτρησης επιδιώκει να ασκήσει τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση και εφαρμογή της διαδικασίας μέτρησης (μαθηματικών μεγεθών) με τη χρήση τεχνικών και εργαλείων, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων για ακριβείς υπολογισμούς και υπολογισμούς κατά προσέγγιση.

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και συγκεκριμένα στο δημοτικό, το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται αποτελεί αυτό που θα ονομάζαμε μη τυπική Γεωμετρία. Συγκεκριμένα, για την γωνία γνωρίζουν την ορολογία έχοντας αναφερθεί σε αυτήν στην μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων (Γ΄ Δημοτικού) ή στον σχηματισμό της ορθής γωνίας από δύο κάθετες ευθείες (Δ΄ Δημοτικού). Στις τρεις τελευταίες τάξεις του δημοτικού μελετούν τις γωνίες κατά κύριο λόγο στην τροχιά της μέτρησης γωνίας. Πιο αναλυτικά μαθαίνουν τα είδη των γωνιών συγκρίνοντας τα με την ορθή, να μετρούν γωνίες με άτυπες και τυπικές μονάδες, να συγκρίνουν γωνίες με «επίθεση» και με σύγκριση του μέτρου τους, να κατασκευάζουν γωνίες με μοιρογνωμόνιο και τέλος να προσθέτουν και να αφαιρούν γωνίες.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η έννοια της γωνίας εισάγεται στο Β μέρος (Γεωμετρία) του σχολικού εγχειρίδιου της Α΄ Γυμνασίου στο κεφάλαιο 1.2 και η μέτρηση της στο κεφάλαιο 1.5 του ίδιου σχολικού εγχειριδίου.

Σύμφωνα με το Α.Π.Σ. (2011) οι μαθητές πρέπει:

1) Να κατανοήσουν την έννοια της γωνίας και να μπορούν να σχεδιάζουν, να συμβολίζουν και να διαβάζουν γωνίες.

2) Να γνωρίζουν ότι κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο το οποίο να μπορούν να υπολογίσουν.

3) Να γνωρίζουν ότι το μέτρο μιας γωνίας εξαρτάται από το «άνοιγμα και μόνο των πλευρών της.

4) Να γνωρίζουν τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών (και τις υποδιαιρέσεις της).

5) Να υπολογίζουν με μοιρογνωμόνιο το μέτρο μιας γωνίας.

6) Να γνωρίζουν ότι δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο.

7) Να σχεδιάζουν γωνίες όταν γνωρίζουν το μέτρο τους.

8) Να συγκρίνουν γωνίες με διαφανές χαρτί ή με μοιρογνωμόνιο.

Επιπλέον με τις ισχύουσες οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022), προτείνεται :

1) Να αναδειχθεί το γεγονός ότι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζουν δύο γωνίες.

2) Να τονιστεί ότι ως γωνίες πολυγώνου νοούνται οι γωνίες που ορίζουν οι ημιευθείες που περιέχουν δύο διαδοχικές πλευρές και έχουν αρχή την κοινή κορυφή.

3) Να γίνει αναφορά και σε μη κυρτές γωνίες.

4) Να γίνεται η σύγκριση γωνιών χρησιμοποιώντας και άτυπες μονάδες μέτρησης γωνιών (μικρότερες γωνίες).

5) Να δοθεί αρκετός χρόνος σε μετρήσεις και κατασκευές γωνιών.

2.3.2. Έρευνες σχετικά με τις παρανοήσεις και τα εμπόδια που δημιουργούνται στους μαθητές για την γωνία

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η Sierpinska (2019), διακρίνει τρεις τύπους γεωμετρίας που διδάσκονται σε διαφορετικά σχολικά επίπεδα. Και οι τρεις τύποι σχολικής γεωμετρίας χρησιμοποιούν τη διαίσθηση, το πείραμα και την επαγωγή αλλά με διαφορετικούς τρόπους στην επίλυση διαφορετικών προβλημάτων. Οι διαισθήσεις που αναπτύσσονται σε μια γεωμετρία μπορεί να μετατραπούν σε εμπόδια στην προσπάθεια εκμάθησης της επόμενης. Κάτι παρόμοιο αναφέρει και Νικολαντωνάκης (2015), δηλαδή ότι οι περισσότερες δυσκολίες των μαθητών στη Γεωμετρία εντοπίζονται κατά τη μετάβαση από τη λεγόμενη γεωμετρία παρατήρησης (όπου τα αντικείμενα είναι συγκεκριμένα και οι λόγοι πρακτικοί) και αποτελεί την πρώτη φάση εκμάθησης, στην παραγωγική γεωμετρία, (όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά και οι λόγοι είναι έγκυροι από τις εκφωνήσεις της θεωρίας και συνδέονται από τους κανόνες της λογικής) που αποτελεί και τη δεύτερη μαθησιακή φάση. Παρακάτω θα δούμε τις παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στην εκμάθηση της έννοιας της γωνίας και της μέτρησης της με βάση την βιβλιογραφία.

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία ως δύο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως ένα τμήμα του επιπέδου. Ο χώρος που περιβάλλει το σχήμα γίνεται αντιληπτός ως κενός και περιορισμένος από τις γραμμές των σχημάτων (Λάτση, 2011). Όμοια, στις οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022) αναφέρει την δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν τα σημεία του παρακάτω σχήματος (Εικόνα 2), ως σημεία της κυρτής γωνίας του ίδιου σχήματος.

Εικόνα 2 Σχήμα για την παρανόηση «σημεία που ανήκουν σε κυρτή γωνία»

Η γωνία, λοιπόν, ταυτίζεται με τις πλευρές της και κατά συνέπεια οι μαθητές θεωρούν ότι το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μήκος αυτών των πλευρών ή ότι εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της (από σημεία που ισαπέχουν συνήθως από την κορυφή της (Clements & Battista, 1989). Με το παραπάνω συμπέρασμα συμφωνεί και ο Mitchelmore (2009) ότι δηλαδή οι μαθητές πιστεύουν πως το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνοντας δύο γωνίες με ίδιο μέτρο θεωρούν ότι μεγαλύτερη γωνία είναι εκείνη που έχει μεγαλύτερες πλευρές, ενώ μικρότερη είναι αυτή με τις μικρότερες πλευρές (Bütüner & Filiz 2016). Η παρανόηση αυτή αναφέρεται και στο Α.Π.Σ (2013).

Κάποιοι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι η μία πλευρά της γωνίας πρέπει να είναι οριζόντια και η κατεύθυνσή της πάντα αριστερόστροφη (Mitchelmore, 2009). Επιπλέον, αδυνατούν να αναγνωρίσουν ότι δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο εάν προσανατολίζονται σε μη τυποποιημένες κατευθύνσεις (Smithetal, 2004). Επιπρόσθετα, δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν δύο ίσες γωνίες με διαφορετικούς προσανατολισμούς (Keizer, 2004; Kaur, 2017).

Ακόμη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην προσαρμογή της γωνιακής αντίληψης στην πραγματική ζωή (Bütüner & Filiz, 2016). Η Λάτση (2011) αναφέρει πως ο Keiser (2004) παρατήρησε ότι πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία ως ποιότητα (με την Αριστοτελική έννοια του όρου). Έτσι κάποιο σχήμα μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο γωνία. Όσο πιο αιχμηρή είναι μια γωνία, τόσο πιο γωνία θεωρείται. Μια τέτοια αντίληψη δημιουργεί δυσκολίες στην προσέγγιση του μεγέθους των γωνιών, καθώς αφενός δεν αναδεικνύει την ανάγκη μέτρησης, αφετέρου δημιουργείται 'σύγκρουση' μεταξύ των οξειών γωνιών που θεωρούνται πιο 'γωνίες' και των αμβλειών που έχουν μεγαλύτερο μέγεθος. Ενισχύεται το παραπάνω συμπέρασμα αφού οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν τις ευθείες γωνίες (Deniz & Ömer, 2021).

Τέλος, οι μαθητές ταυτίζουν το γεωμετρικό αντικείμενο (γωνία) με την μέτρησή του (μέτρο της γωνίας) (Α.Π.Σ., 2013). Η Barbin (2007 όπως αν. ο Guichard 2018) έχει καταγγείλει την παραπάνω παρανόηση με την οποία ερχόμαστε αντιμέτωποι την, ως «αριθμητισμό» όλων τον μεγεθών.

2.3.3. Έρευνες σχετικά με την διδασκαλία της γωνίας

Σύμφωνα με τον Van Hiele (1986), η μάθηση μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εάν οι μαθητές χειρίζονται ενεργά και πειραματίζονται με γεωμετρικά αντικείμενα σε σχετικά, κατάλληλα περιβάλλοντα, και επίσης συμμετέχουν σε «χρήσιμες» συζητήσεις και σκέψεις. Ειδικά για τις γωνίες, οι Wilson and Adams (1992) ανέφεραν ότι «η έρευνα του van Hiele οδηγεί σε ένα σημαντικό σημείο: οι μαθητές χρειάζονται καλές δραστηριότητες σχεδιασμένες για να τους βοηθήσουν να εξερευνήσουν τις γωνίες και τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους» (Wilson & Adams, 1992, Π. 7) (Devichi & Munier, 2013).

Στις έρευνες που έχουν να κάνουν σχετικά με τη διδασκαλία της γωνίας συναντάμε τέσσερις βασικές κατηγορίες δραστηριοτήτων οι οποίες είναι :

1. Δραστηριότητες με χειραπτικό υλικό
2. Δραστηριότητες με ψηφιακό υλικό
3. Ενσώματες δραστηριότητες
4. Δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στο μεσοχώρο.

Η χρήση του χειραπτικού υλικού, βοηθά στο να αποφεύγονται οι παρανοήσεις στον στατικό ορισμό της γωνίας που είναι από τις πρώτες προσεγγίσεις των γωνιών (Bütüner & Filiz, 2017) και του ψηφιακού υλικού, για να μην δημιουργούνται παρανοήσεις σχετικά με τους δυναμικούς ορισμούς της γωνίας. Σύμφωνα με τους Devichi, & Munier (2013) τα δυναμικά περιβάλλοντα μάθησης παρέχουν μια κατάλληλη απεικόνιση για την αναπαράσταση της γωνίας ως ποσότητα στροφής (Browning et al., 2007; Clements & Burns, 2000; Hoyles & Noss, 1992; Κυνηγός, Ψυχάρης και Λάτση, 2009), επειδή η εναλλαγή είναι πολύ δύσκολο –αν όχι αδύνατο– να αναπαρασταθεί σε μια κατάσταση με χαρτί και μολύβι (Devichi & Munier, 2013). Επιπλέον, οι ενσώματες δραστηριότητες (Smith et al., 2014) βοηθούν στην καλύτερη αισθητοποίηση της έννοιας της γωνίας. Τέλος, οι δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στο μεσοχώρο (Berthelot & Salin, 1998; Fyhn, 2008; Munier and Merle, 2009) βοηθούν τους μαθητές να προβληματίζονται αναφορικά με τις σχέσεις μεταξύ του φυσικού και του γεωμετρικού χώρου και να περνούν από την γεωμετρία της παρατήρησης και την γεωμετρία της απόδειξης (Brousseau, 1983 όπως αν. ο Νικολαντωνάκης, 2015). Συγκεκριμένα η επίλυση ενός τοπογραφικού προβλήματος στο μεσοχώρο βοηθά τους μαθητές να καταλάβουν πως προέκυψε η έννοια της γωνίας (Clairaut 1753 όπως αν. ο Guichard, 2018).

Στην βιβλιογραφική ανασκόπηση κάποιες διδασκαλίες βασίζονται σε μία κατηγορία δραστηριοτήτων και κάποιες σε παραπάνω. Ο Freudenthal (1973) θεωρεί ότι οι τρεις πτυχές της έννοιας της γωνίας που αναφέρθηκαν νωρίτερα πρέπει να γίνουν αντικείμενο διδασκαλίας ταυτόχρονα και νωρίς πράγμα το οποίο θα ακολουθήσουμε και στην παρούσα εργασία (Λάτση, 2011). Με βάση τα παραπάνω, μια ιδανική διδασκαλία για την έννοια και τη μέτρηση της γωνίας είναι καλό να περιέχει δραστηριότητες από όλες τις κατηγορίες.

Επιπρόσθετα, στις σχετικές έρευνες για την διδασκαλία της γωνίας τονίζεται η σύγκριση των γωνιών να γίνει (αρχικά) χωρίς την χρήση μοιρογνωμονίου. Ενδεικτικά, ο

Freudenthal τονίζει πως είναι σημαντικό να αποφύγουμε την πρώιμη μαθηματικοποίηση της μέτρησης των γωνιών (Μιτσούλης, 2009) και η Barbin (2007 όπως αν. ο Guichard 2018) υποστηρίζει το ίδιο έχοντας ονομάσει το φαινόμενο ως «αριθμητισμό» όλων τον μεγεθών. Η σύγκριση, λοιπόν, των γωνιών προτείνεται να γίνει με την χρήση συγκεκριμένων υλικών και εργαλείων όπως γωνίες από χαρτόνι, σουγιαδάκια, ψαλίδια, εργαλείο κινούμενης λοξότμησης, διαβήτες κ.ά. (Μιτσούλης, 2009; Guichard, 2018) .

Τέλος, με βάση την σχετική βιβλιογραφία για την μέτρηση γωνιών καλό είναι οι μαθητές για να μάθουν να μετρούν γωνίες προηγουμένως να μάθουν να υποδιαιρούν μια γωνία. Οι δραστηριότητες που προτείνονται είναι η κατασκευή μιας κλίμακας μέτρησης ή μιας πυξίδας (υποδιαιρώντας μια πλήρη γωνία με συνεχόμενες διπλώσεις ενός χαρτιού) (Μιτσούλης, 2009; Guichard, 2018).

Κεφάλαιο 3

Χρήση της ιστορίας των μαθηματικών

3.1. Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και στην μάθηση

Το ότι η ιστορία των μαθηματικών πρέπει να έχει μια θέση στην τάξη των μαθηματικών δεν είναι μια νέα ιδέα. Ακόμη και όταν ήταν νέα, ας πούμε στις δεκαετίες του 1960 και του 1970, δεν ήταν εντελώς ανήκουστη – ήδη στις αρχές του αιώνα, και πριν από αυτό, οι εκπαιδευτικοί λάμβαναν υπόψη τους την αξία της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία (βλ. για παράδειγμα Barwell, 1913) (Fried, 2001).

Εκτός από τις αναζητήσεις για άμεση διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών, τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια διαρκώς αυξανόμενη διείσδυση της τελευταίας στις έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών. Η ιστορική ανάγνωση παρουσιάζεται και ως πηγή ενόρασης για τα πολύπλοκα ζητήματα που αφορούν τη διαδικασία της μάθησης και τη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές. Σε αυτό το πλαίσιο μπορούμε να διακρίνουμε τρεις βασικές θεωρίες μάθησης που οριοθετούν η καθεμία έναν συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία οι οποίες είναι:

α. Jean Piaget & Ronaldo Carcia: Νοητική ανάπτυξη και ιστορική εξέλιξη,
β. Hans Freudenthal: Εκ νέου επινόηση των μαθηματικών εννοιών και
γ. Gaston Bachelard & Guy Brousseau: Επιστημολογικά εμπόδια (Θωμαδης, 2014).

3.2. Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας μαθηματικών στην διδασκαλία και στη μάθηση

Την δεκαετία 1990-2000 πολλοί ερευνητές ερεύνησαν τη χρήση και την αξία της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση που κορυφώθηκε με τη μελέτη ICMI (International Commission on Mathematics Instruction) σχετικά με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Η μελέτη ξεκίνησε το

1997 με ένα έγγραφο συζήτησης από τους Fauvel και Van Maanen (1997) και κατέληξε στη συνολική έκθεση History in mathematics Education: the ICMI study, Fauvel/Van Maanen (2000) (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Fauvel (1991) ακόμη νωρίτερα στο Using History in Mathematics Education υποστήριξε πως η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί βασικό στοιχείο στην διδασκαλία των μαθηματικών και απαρίθμησε δεκαπέντε λόγους για να αποδείξει την στάση του, οι οποίοι είναι οι παρακάτω:

1. Βοηθά στην αύξηση των κινήτρων για μάθηση.
2. Δίνει στα μαθηματικά ένα ανθρώπινο πρόσωπο.
3. Η ιστορική εξέλιξη βοηθά στη σειρά της παρουσίασης των εννοιών στο πρόγραμμα σπουδών.
4. Το να δείξετε στους μαθητές πώς έχουν αναπτυχθεί οι έννοιες τους βοηθά στην κατανόηση των εννοιών αυτών.
5. Αλλάζει τις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά.
6. Η σύγκριση αρχαίου και σύγχρονου καθιερώνει την αξία των σύγχρονων τεχνικών.
7. Βοηθά στην ανάπτυξη μιας πολυπολιτισμικής προσέγγισης.
8. Παρέχει ευκαιρίες για διερεύνηση.
9. Τα εμπόδια του παρελθόντος στην ανάπτυξη των εννοιών βοηθούν στην κατανόηση δυσκολιών που συναντούν οι σημερινοί μαθητές.
10. Οι μαθητές αντλούν άνεση όταν συνειδητοποιούν ότι δεν έχουν μόνο αυτοί προβλήματα.
11. Ενθαρρύνει τους πιο γρήγορους μαθητές να ψάξουν περισσότερο.
12. Βοηθά στην εξήγηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία.
13. Κάνει τα μαθηματικά λιγότερο τρομακτικά.
14. Η διερεύνηση της ιστορίας συμβάλλει στην διατήρηση του ενθουσιασμού και του ενδιαφέροντος για την επιστήμη των μαθηματικών από τους δασκάλους.
15. Παρέχει την ευκαιρία και τη δυνατότητα για διαθεματικές εργασίες.

Ο Fried (2001) χώρισε αυτούς τους λόγους σε τρία γενικά θέματα:

α. ότι η ιστορία των μαθηματικών εξανθρωπίζει τα μαθηματικά,

β. ότι κάνει τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, πιο κατανοητά και πιο προσιτά,

γ. ότι δίνει μια εικόνα για έννοιες, προβλήματα και επίλυση προβλημάτων.

Στο πρώτο θέμα βλέπει κανείς την ιστορία των μαθηματικών ως ενθαρρυντικές πολυπολιτισμικές προσεγγίσεις, δίνοντας στους μαθητές ιστορικά πρότυπα ρόλων, συνδέοντας τη μελέτη των μαθηματικών με ανθρώπινα συναισθήματα και κίνητρα (π.χ. Swetz ,1995; Avital, 1995; Brown, 1993).

Το δεύτερο, φυσικά το ευρύτερο από αυτά τα ευρύτερα θέματα, περιλαμβάνει ισχυρισμούς ότι η ιστορία των μαθηματικών προσθέτει ποικιλία στη διδασκαλία, μειώνει τον φόβο των μαθητών για τα μαθηματικά, δίνει κάποια αίσθηση της θέσης των μαθηματικών στην κοινωνία (π.χ. Ness, 1993; Rickey, 1995).

Το τελευταίο θέμα είναι κάπως διαφορετικό όταν μιλάμε για τη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών για τους δασκάλους και όταν μιλάμε για τη σημασία της για τους μαθητές. Στην περίπτωση των δασκάλων, υπάρχει εδώ, για παράδειγμα, ότι η «οντογένεση ανακεφαλαιώνει το επιχείρημα της φυλογένεσης» στο οποίο υποστηρίζεται ότι η εκμάθηση κάποιου θέματος στα μαθηματικά ακολουθεί μια πορεία παράλληλη με την ιστορία του μαθήματος (π.χ. Fauvel, 1991; Sfard, 1995; Garner, 1996· Θωμαΐδης, 1993). Στην περίπτωση των μαθητών, αυτό το θέμα επισημαίνει ότι η ιστορία παρέχει ένα πλαίσιο για προβλήματα και ιδέες, προτείνοντας εναλλακτικές προσεγγίσεις για την επίλυση προβλημάτων, δείχνοντας τις σχέσεις μεταξύ ιδεών, ορισμών και εφαρμογών (π.χ. Katz, 1993; Kleiner, 1993; Avital, 1995).

Αργότερα, ο Jankvist (2009) προτείνει έναν τρόπο οργάνωσης και δόμησης των επιχειρημάτων για το γιατί και πώς να χρησιμοποιήσουμε την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία και στην εκμάθηση των μαθηματικών, καθώς και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ αυτών για τη χρήση της ιστορίας. Χωρίζει, λοιπόν, τα επιχειρήματα σε δύο κατηγορίες:

α. η ιστορία ως εργαλείο και

β. η ιστορία ως σκοπός.

Η κατηγορία των επιχειρημάτων της ιστορίας ως εργαλείου περιέχει τα επιχειρήματα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν τα μαθηματικά. Ένα τυπικό επιχείρημα εδώ είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει κίνητρο για τους μαθητές στη μάθηση. Ένα ακόμη που δεν έχει να κάνει με τα συναισθηματικά αποτελέσματα είναι πως η ιστορία μπορεί να παίξει το ρόλο ενός γνωστικού εργαλείου για την υποστήριξη της πραγματικής εκμάθησης των μαθηματικών. Τέλος, ότι η ιστορία μπορεί να προετοιμάσει την ανάπτυξη μιας υποθετικής μαθησιακής τροχιάς ή ότι η ιστορία «μπορεί να μας βοηθήσει να κοιτάξουμε μέσα από τα μάτια των μαθητών».

Η κατηγορία των επιχειρημάτων της ιστορίας ως σκοπό περιέχει τα επιχειρήματα που ισχυρίζονται ότι η εκμάθηση πτυχών της ιστορίας των μαθηματικών εξυπηρετεί έναν σκοπό από μόνη της. Η εστίαση είναι στις αναπτυξιακές και εξελικτικές πτυχές των μαθηματικών ως κλάδου. Κάποια παραδείγματα, είναι να δείξουμε στους μαθητές ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χρόνο και στο χώρο, ότι είναι μια πειθαρχία που έχει υποστεί μια εξέλιξη και ότι τα ανθρώπινα όντα έχουν συμμετάσχει σε αυτή την εξέλιξη.

3.3. Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία

Το πως μπορεί να εφαρμοστεί η ιστορία των μαθηματικών στην διδασκαλία είναι ένα εντελώς διαφορετικό πράγμα από το γιατί. Οι εμπνευσμένες σκέψεις δεν βοηθούν τους εκπαιδευτικούς στο πρακτικό πρόβλημα του τρόπου δημιουργίας εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Κάποιος πρέπει να κάνει επιλογές σχετικά με τους μαθηματικούς εκπαιδευτικούς σκοπούς, την ενδεικτική περίοδο της ιστορίας, τους μη μαθηματικούς στόχους που πρέπει να επιτευχθούν, τα διδακτικά εργαλεία και ούτω καθεξής (Gulikers & Blom, 2001).

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία (Tzanakis & Thomaidis, 2000; Furinghetti, 1997 όπως αναφ. οι Gulikers, & Blom, 2001) διακρίνονται τρεις τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι παρακάτω τρόποι αν και είναι διαφορετικοί αλληλοσυμπληρώνονται καθώς ο καθένας από μόνος του δεν καλύπτει την πολύπλοκη επίδραση της Ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση.

1. Παρέχοντας άμεσα ιστορικές πληροφορίες (για ενημέρωση για μια ιστορική περίοδο ή ένα μαθηματικό θέμα).

2. Χρησιμοποιώντας αυθεντικές ή δευτερεύουσες πηγές.
3. Ακολουθώντας μια προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία.

Στον πρώτο τρόπο ο ρόλος της ιστορίας είναι να δώσει στους μαθητές πληροφορίες για ονόματα, ημερομηνίες, γεγονότα, την ιστορική σειρά εμφάνισης των εννοιών και προβλημάτων. Για παράδειγμα, δευτερεύουσες πηγές, όπως τα σχολικά βιβλία με ιστορικές αφηγήσεις, μπορούν να παρέχουν μια εισαγωγή σε έννοιες που είναι νέες για τους μαθητές. Μπορεί να αναπτυχθεί βαθύτερη επίγνωση των κοινωνικών και πολιτιστικών πλαισίων στα οποία έχουν γίνει τα μαθηματικά. Το δευτερεύον υλικό μιας πηγής μας λέει επίσης ιστορίες για προηγούμενους μαθηματικούς. Μια βιογραφία για παράδειγμα δίνει το όνομα διάσημων μαθηματικών, ημερομηνίες σημαντικών γεγονότων και λέει για διάσημα έργα. Είναι μια προσέγγιση που από τη μια παρουσιάζει τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα αλλά από την άλλη δίνει περισσότερο έμφαση στα ιστορικά γεγονότα παρά στην ίδια την επιστήμη. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συναισθηματικά και πολύ-πολιτισμικά επιχειρήματα.

Στον δεύτερο τρόπο ένα θέμα μπορεί να διδαχθεί αποκλειστικά βασισμένο σε ιστορικές πηγές ή συμπεριλαμβάνοντας μικρά ιστορικά αποσπάσματα στα φύλλα εργασίας των μαθητών. Χρησιμοποιώντας αυτές τις πηγές οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν τα προβλήματα και τα ερωτήματα που οδήγησαν στην εξέλιξη ενός συγκεκριμένου μαθηματικού πεδίου. Μπορούν επίσης να κατανοήσουν την εξέλιξη της επιστήμης ως προς τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται, την μεθοδολογία και να τις συγκρίνουν με τις σύγχρονες. Έτσι οι μαθητές είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως μια επιστήμη που εξελίσσεται αναγνωρίζοντας τους παράγοντες που συμβάλλουν στην εξέλιξη αυτή. Ο τρόπος αυτός, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συναισθηματικά, εννοιολογικά και πολύ-πολιτισμικά επιχειρήματα.

Στον τρίτο τρόπο η προσέγγιση δεν είναι αμιγώς επαγωγική αλλά ούτε και αμιγώς ιστορική. Βασική προϋπόθεση αυτής της προσέγγισης είναι ο μαθητής να έχει κινητοποιηθεί αρχικά πριν γίνει οποιαδήποτε μελέτη ενός θέματος. Αυτό σημαίνει ότι τα προβλήματα και τα ερωτηματικά με τα οποία αναμετρήθηκε το συγκεκριμένο θέμα που θα παρουσιαστεί θα πρέπει να έχουν πλήρως αποσαφηνιστεί. Ο τρόπος αυτός, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συναισθηματικά και εννοιολογικά επιχειρήματα.

Σύμφωνα με τους Faveul & Maanen (2000, όπως αναφ. Gulikers & Blom, 2001) η εισαγωγή της ιστορίας στην διδασκαλία δεν περιορίζεται μόνο σε διδασκαλία με παραδοσιακές μεθόδους αλλά μπορεί να γίνει και με άλλα μέσα. Ως παραδείγματα μη παραδοσιακών μέσων αναφέρει, ανάμεσα σε άλλα, τα ιστορικά αποσπάσματα, τα φύλλα εργασίας, λογισμικά, ιστορικά εργαλεία (όπως για παράδειγμα εργαλεία για τη σχεδίαση κωνικών τομών και οι πυξίδες για την επίλυση αρχαίων ελληνικών γεωμετρικών προβλημάτων), βιωματικές μαθηματικές δραστηριότητες και εμπειρίες σε εξωτερικούς χώρους.

3.4. Τα ιστορικά όργανα και ο ρόλος τους στην διδασκαλία

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι Faveul & Maanen (2000, όπως αναφ. Gulikers & Blom, 2001) προτείνουν τα ιστορικά εργαλεία σαν χρήση μη παραδοσιακών μέσων στην διδασκαλία. Η λέξη εργαλείο στα μαθηματικά χρησιμοποιείται στην βιβλιογραφία για να εξυπηρετήσει τελείως διαφορετικούς σκοπούς. Σε διάφορες έρευνες τα ιστορικά εργαλεία αναφέρονται σαν όργανα ή τεχνουργήματα.

Οι Kuzniak et al. (2016) δίνουν κάποιους ορισμούς για το πως χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών οι λέξεις

- εργαλείο (tool),
- τεχνούργημα (artifact) και
- όργανο (instrument).

Η λέξη εργαλείο χρησιμοποιείται με μια γενικότερη έννοια. Σαν εργαλεία λαμβάνονται υπόψη όχι μόνο τα υλικά εργαλεία αλλά και τα εννοιολογικά εργαλεία, όπως τα θεωρήματα, οι αλγόριθμοι ή και οι συλλογές σημείων.

Η λέξη τεχνούργημα, σύμφωνα με την κοινή χρήση των αρχαιολόγων, είναι ένα υλικό αντικείμενο που μετασχηματίζεται από τον άνθρωπο για κάποιο σκοπό. Μιλώντας για ένα τεχνούργημα δεν λέει τίποτα για το ποιος θα μπορούσε ή θα έπρεπε να είναι ο σκοπός του. Στην πραγματικότητα, δεν είναι όλα τα τεχνουργήματα εργαλεία. Ωστόσο, θα υποθέσουμε ότι κάθε τεχνούργημα, που χρησιμοποιείται στο μαθηματικό έργο μπορεί να είναι εργαλείο. Τα τεχνουργήματα είναι γενικά υλικής φύσης ή μπορεί να αναπαράγουν, σε ένα ηλεκτρονικό περιβάλλον, ενέργειες παρόμοιες με αυτές που κάνουν τα υλικά εργαλεία.

Η λέξη όργανο έχει διάφορες έννοιες, αλλά χρησιμοποιείται κυρίως στην επιστήμη για να αναφερθεί σε ένα αντικείμενο που κατασκευάστηκε για να εκτελέσει κάποια τεχνική εργασία ή να εκτελέσει μια λειτουργία (π.χ. παρατήρηση ή μέτρηση) που δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς αυτό το όργανο. Ένα τηλεσκόπιο είναι ένα όργανο, όπως και ένα νυστέρι λέιζερ κ.λπ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι λέξεις τεχνούργημα και όργανο είναι πολύ κοντινές στην μαθηματική εκπαίδευση. Στην παρούσα θα χρησιμοποιούμε τον όρο όργανα αναφερόμενοι στο γραφόμετρο, στο εργαλείο κινούμενης λοξότμησης, στο ανεμολόγιο, στο μοιρογνωμόνιο κ.ά.

Ένα όργανο είναι πάντα το αποτέλεσμα μιας πολιτισμικής εξέλιξης, κάτι το οποίο έχει μεγάλη σημασία για την χρήση του στην διδακτική πρακτική καθώς έχει να κάνει με τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε.

Οι λόγοι που ενδείκνυνται η χρήση ή και η κατασκευή των ιστορικών οργάνων στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι:

- η ανάπτυξη συνείδησης της κοινωνικοπολιτισμικής διάστασης των μαθηματικών
- η δόμηση σε εμπειρική βάση αποδείξεων και εννοιών, καθώς φτιάχτηκαν για το σκοπό αυτό
- η ενίσχυση της διασύνδεσης των σχολικών μαθηματικών με την γνώση της καθημερινής ζωής (Bussi at all, 2004; Bussi, 2000).

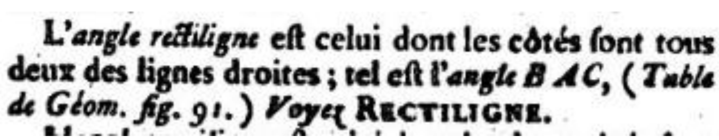
Ο τελευταίος λόγος αποτελεί και κίνητρο και για τους μαθητές που δεν αγαπούν τα μαθηματικά. Η επαφή τους με τα φυσικά αντικείμενα, είναι πιο κοντά στις καθημερινές τους εμπειρίες από ότι τα αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα κάτι που ενισχύει το ενδιαφέρον τους (Bussi, 2000).

3.5. Η χρήση της ιστορίας μαθηματικών στην παρούσα εργασία

3.5.1. Η ιστορία μαθηματικών στο εννοιολογικό πλαίσιο

Για τον ορισμό της γωνίας και του μέτρου της χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο λήμμα στην Εγκυκλοπαίδεια των Diderot & d'Alembert, (1751, σελ. 461–464 όπως αναφ. ο Guichard, 2018):

Γωνία είναι το άνοιγμα που δημιουργείται από δύο γραμμές ή δύο επίπεδα, ή τρία τεμνόμενα επίπεδα, όπως η γωνία BAC που σχηματίζεται από τις γραμμές AB, AC που τέμνονται σε ένα σημείο A. Οι γραμμές AB, AC ονομάζονται πόδες ή πλευρές της γωνίας, και το σημείο της τομής A ονομάζεται κορυφή. Όταν η γωνία σχηματίζεται από τρία επίπεδα, ονομάζεται σταθερή γωνία.


L'*angle rectiligne* eſt celui dont les côtés ſont tous deux des lignes droites ; tel eſt l'*angle B A C*, (*Table de Géom. fig. 91.*) *Voyez* RECTILIGNE.

Εικόνα 3 Απόσπασμα από το πρωτότυπο της Εγκυκλοπαίδεια των Diderot & d'Alembert

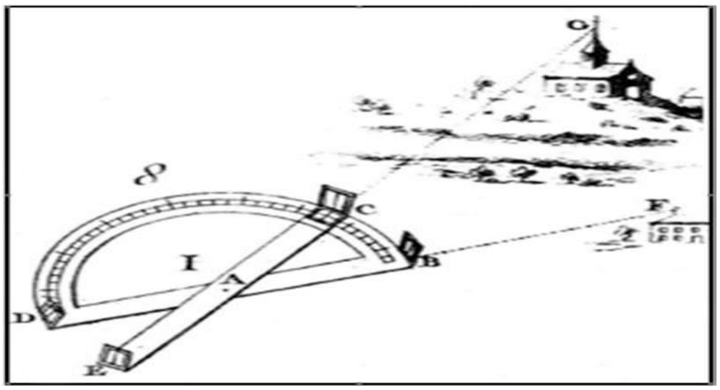
Το μέτρο μιας γωνίας, που μπορεί να ονομαστεί το μέγεθός της, είναι ένα τόξο όπως για παράδειγμα το DE και περιγράφεται από την κορυφή A μεταξύ των πλευρών AC, AB, με οποιαδήποτε επιλεγμένη ακτίνα (Εικόνα 4). Από το οποίο προκύπτει ότι οι γωνίες μπορούν να προσδιοριστούν από την αναλογία των τόξων τους προς την περιφέρεια όλου του κύκλου. Έτσι λέμε ότι το μέγεθος μιας γωνίας είναι η ποσότητα των βαθμών που περιέχονται από το τόξο DE το οποίο μετράει.

Δύο **γωνίες είναι ίσες** όταν τα μέτρα των γωνιών τους είναι ίσα. Έστω οι γωνίες ACB, DCE και τα αντίστοιχα τόξα τους AB, DE. Αν τα τόξα έχουν τις ίδιες αναλογίες προς τις περιφέρειες τους και αν η κάθε περιφέρεια περιέχει τον ίδιο αριθμό μοιρών τότε τα τόξα AB και DE είναι ίσα άρα και οι γωνίες ACB και DCE είναι ίσες.

Για τον Guichard (2018) ο παραπάνω ορισμός για τη γωνία:

- μας παρουσιάζει τη γωνία ως μέγεθος ενός ανοίγματος, και όχι ως μαθηματικό αντικείμενο.

- μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε το πρόβλημα του μέτρου της με τη χρήση τόξων.
- μας παρέχει ταυτόχρονα ένα μέσο σύγκρισης των γωνιών και εύρεσης μέτρησης.
- καθιερώνει επίσης την ανεξαρτησία μεταξύ της ισότητας των γωνιών και των μηκών των πλευρών τους.



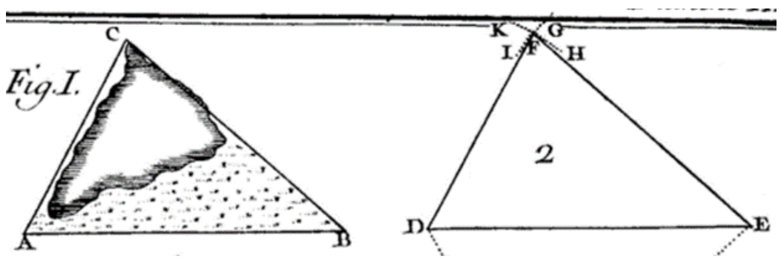
Εικόνα 4 Η χρήση του γραφόμετρου (Clairaut, 1753, Plate V)

3.5.2. Η ιστορία μαθηματικών στο διδακτικό πλαίσιο

Για τη σύγκριση, την αντιγραφή και τη μέτρηση των γωνιών χρησιμοποιούμε τη πραγματεία του Clairaut (1753), στην οποία γίνεται προσπάθεια να αναπτυχθούν οι αρχές της Γεωμετρίας με μια φυσική μέθοδο παρόμοια με αυτή των πρώτων εφευρετών της. Το κείμενο είχε σημαντική επιρροή στη διδασκαλία της γεωμετρίας στο 19ο αιώνα, φθάνοντας στις 11 εκδόσεις στη Γαλλία και μεταφρασμένο σε σουηδικά, γερμανικά και αγγλικά (Katz, 2018).

Ο Clairaut βασίζεται στη χρήση δύο οργάνων μέτρησης και αντιγραφής γωνιών, του εργαλείου κινούμενης λοξότμησης και του γραφόμετρου. Ξεκινώντας με τη χρήση του εργαλείου κινούμενης λοξότμησης, ο συγγραφέας αναγνωρίζει ότι ο τρόπος αυτός συχνά έχει μειονεκτήματα. Πιο συγκεκριμένα, το άνοιγμα αλλάζει κατά τη μεταφορά και το σχήμα του οργάνου που είναι απαραίτητο για την εργασία το καθιστά δύσκολο για να αντιγραφεί στο χαρτί. Τονίζει δε ότι η μόνη ασφαλής μέθοδος σύγκρισης- αντιγραφής δυο γωνιών είναι η τοποθέτηση της μιας πάνω στην άλλη. Επομένως, καθιστά απαραίτητη την κατασκευή και την χρήση του γραφόμετρου. Για την κατασκευή του χρησιμοποιεί έναν ορισμό για την γωνία όμοιο με αυτόν που αναφέραμε πιο πάνω. Η άκρη του γραφόμετρου χωρίζεται σε 180 διαιρέσεις, όπως ένα μοιρογνωμόνιο, το οποίο παραμένει το όργανο για την αντιγραφή της γωνίας σε χαρτί. Τέλος, παραθέτει δυο τρόπους ως μεθόδους κατασκευής ίσων γωνιών και έναν τρίτο ως μέτρησης (Guichard, 2018):

<u>**Α’ Τρόπος**</u> Στην πρώτη μέθοδο ο Clairaut αναγνωρίζει τη δυσκολία πως η ισότητα δυο αντίστοιχων πλευρών δυο τριγώνων δεν αρκούν για την ισότητα δυο γωνιών τους. *Αν στα τρίγωνα ABC και HDE (Εικόνα 5) ισχύουν DE=BC και DF=BA δεν θα ξέρουμε πού να τοποθετήσουμε το πρώτο σε σχέση με το δεύτερο.*



Εικόνα 5 Ισότητα τριγώνων (Clairaut, 1753, Plate III)

Για το λόγο αυτό, προτείνει ένα απλό πρακτικό τρόπο (Εικόνα 5), το οποίο προϋποθέτει ως προφανές ότι ένα τρίγωνο καθορίζεται από το μήκος δύο πλευρών του και από το άνοιγμά τους ή αντίστοιχα ότι το ένα τρίγωνο είναι ίσο με το άλλο όταν οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ίσες και η γωνία μεταξύ αυτών των πλευρών είναι εξίσου ανοιχτή (με τα σημερινά δεδομένα το κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Γ-Π) .

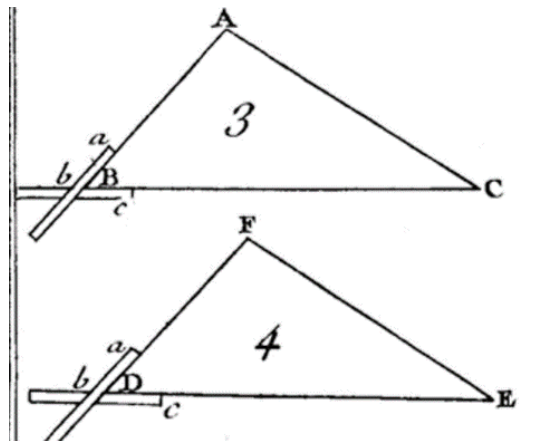
Προτείνει τα εξής βήματα:

<u>1ο βήμα</u> Πάρτε ένα όργανο, όπως το abc (εργαλείο κινούμενης λοξότμησης), που αποτελείται από δύο ευθείες άκρες.

<u>2ο βήμα</u> Γυρίστε το b, και τοποθετήσετε αυτές τις άκρες στις πλευρές AB και BC. Τώρα σχηματίζουν την ίδια γωνία μεταξύ τους με τη γωνία μεταξύ των AB και BC.

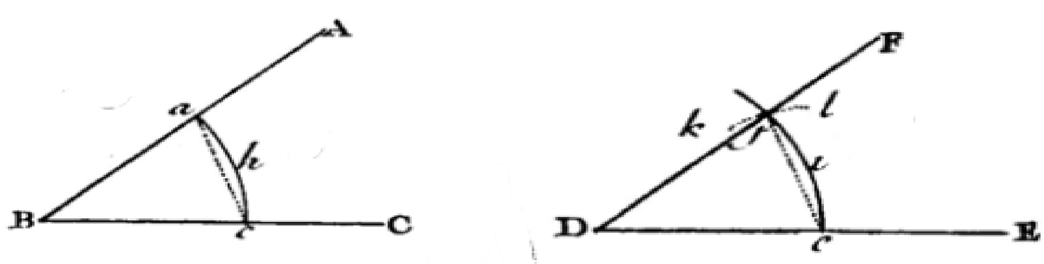
<u>3ο βήμα</u> Θέτοντας το άκρο bc στη βάση DE, έτσι ώστε το κέντρο b να αντιστοιχεί στο σημείο D, διατηρώντας πάντα το ίδιο άνοιγμα, η άκρη ab θα δώσει τη θέση της γραμμής DF, που θα κάνει, με τη γραμμή DE, τη γωνία FDE, ίση με τη γωνία ABC. Επιπλέον DF = BA.

<u>4ο βήμα</u> Σχεδιάστε την FE από το F έως το E για να είναι το τρίγωνο FED ακριβώς παρόμοιο και ίσο με το τρίγωνο ABC.



Εικόνα 6 Κατασκευή ίσων τριγώνων (Clairaut, 1753, Plate III)

<u>B’ τρόπος</u> Στην δεύτερη μέθοδο ο Clairaut χρησιμοποιεί κανόνα και διαβήτη. Στην Εικόνα 7 στο αριστερό σχήμα δίνεται η γωνία πρότυπο και στο δεξί η γωνία αντίγραφο.



Εικόνα 7 Κατασκευή ίσων γωνιών (Clairaut, 1753, Plate III)

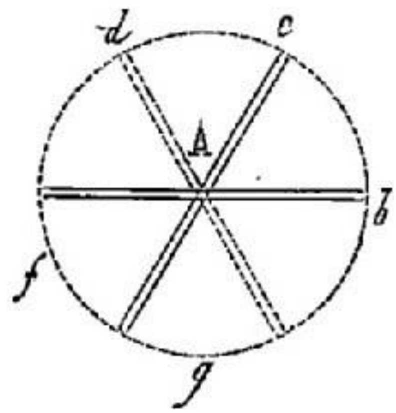
<u>1ο βήμα</u> Από το κέντρο B, χρησιμοποιώντας μια αυθαίρετη απόσταση Ba, σχεδιάστε με τον διαβήτη ένα τόξο ahc, στη συνέχεια από το κέντρο D και χρησιμοποιώντας την ίδια απόσταση διαγράψτε το τόξο ei.

<u>2ο βήμα</u> Με άνοιγμα του διαβήτη να είναι ίσο με ca σχεδιάστε το τόξο kl. Βρείτε το σημείο τομής των τόξων kl και ei και ονομάστε το f. Το τόξο eif είναι ίσο με το cha.

3ο βήμα Σχεδιάστε μέσω D και f τη γραμμή DfF και θα έχετε τη γωνία FDE ίση με τη γωνία ABC. Αυτό είναι προφανές δεδομένου ότι τα τρίγωνα Bac και Dfe είναι εντελώς παρόμοια και ίσα.

Γ' Τρόπος Η τρίτη μέθοδος αφορά την μέτρηση γωνιών με βάση τον Clairaut.

Fig. 45.



Εικόνα 8 Μέτρηση γωνιών (Clairaut, 1753, Plate V)

1ο βήμα : Κρατήστε το βραχίονα Ab σταθερό και εφαρμόστε για πρώτη φορά το γραφόμετρο στην πλευρά Ac.

2ο βήμα : Προσαρμόστε στο άκρο του βραχίονα Ac ένα στυλό ή ένα μολύβι.

3ο βήμα : Περιστρέψτε την πλευρά Ac γύρω από το A.

Το ορατό ίχνος του σημείου c, σχηματίζει ένα τόξο ενός κύκλου, το οποίο δίνει ακριβώς το μέτρο της γωνίας για κάθε συγκεκριμένο άνοιγμα των πλευρών AB, AC ως μέρος της περιφέρειας του κύκλου.

Σχόλια: 1) Ως συνέπεια της ομοιομορφίας της καμπυλότητας του κύκλου, πρέπει ένα διπλάσιο, τριπλάσιο ή τετραπλάσιο άνοιγμα του cAb θα αντιστοιχεί σε τόξο διπλάσιο, τριπλάσιο ή τετραπλάσιο από αυτό του cb.

2) Έστω bcdfg η περιφέρεια, που περιγράφεται από μια πλήρη περιστροφή γύρω από το σημείο c, θα πρέπει να χωριστεί σε οποιοδήποτε αριθμό ίσων μερών, τον αριθμό των τμημάτων που περιέχονται στο τόξο παραλείποντας τις γραμμές Ac και Ab μετρά ακριβώς το άνοιγμα των γραμμών ή της γωνίας cab που διαγράφουν. Οι Γεωμέτρες συνήθως

διαιρούν τον κύκλο σε 360 μέρη, τα οποία ονομάζονται μοίρες, η καθεμία περιέχει 60 λεπτά και κάθε λεπτό που περιέχει 60 δευτερόλεπτα .

3.5.3. Εφαρμογές στην χωρομετρία και στην ναυσιπλοΐα

Ο Clairaut πίστευε ότι η μέτρηση των πεδίων ήταν η αρχή της γεωμετρίας, άλλωστε το ίδιο το όνομα έχει να κάνει με τη μέτρηση της γης (Katz, 2018). Περίπου 50 χρόνια πριν, ο Manesson Mallet, A. (1702) χρησιμοποιεί το γραφόμετρο για να μετρήσει μεγάλες μη προσβάσιμες αποστάσεις.

Εικόνα 9 Μέτρηση του πλάτους του λιμανιού (Manesson Mallet, 1702, Plate XIX, p. 45)

Για τον υπολογισμό της απόστασης τελικά την απόσταση CA από την είσοδο της πόλης A σε εκείνη του κάστρου C αναπτύσσει μια μέθοδο (που στηρίζεται στην ομοιότητα των τριγώνων) όπως η εξής :

<u>1ο βήμα</u> : Μετρήστε τη γωνία ABC (ABC=102 μοίρες).

<u>2ο βήμα</u> : Μετρήστε με μεζούρα (εργαλείο μέτρησης μήκους) τις αποστάσεις AB και BC (AB = 53 μονάδες και BC = 50 μονάδες).

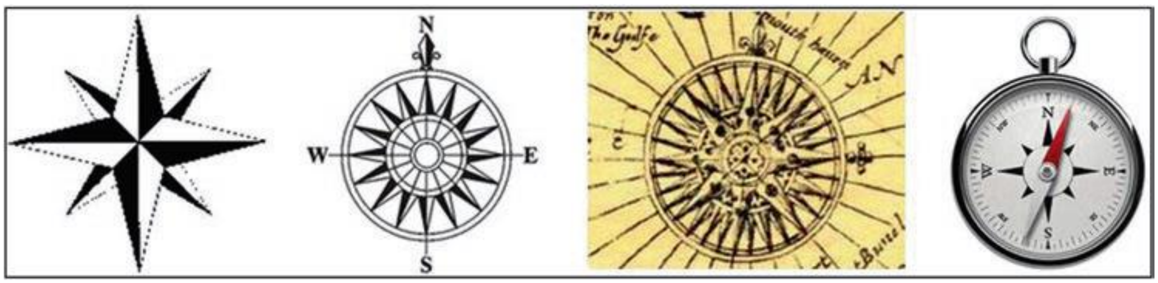
<u>3ο βήμα</u> Κατασκευάστε μια κλίμακα όπως στο D που μπορείτε να διαιρέσετε σε όσα ίσα μέρη επιθυμείτε.

4ο βήμα Σχεδιάστε με μοιρογνωμόνιο τη γωνία FEG = ABC και EG = 5 μονάδες στην κλίμακα και FE = 5,3 μονάδες στην κλίμακα.

5ο βήμα Βρίσκουμε με την κλίμακα ότι FG = 8 μονάδες και τελικά την απόσταση

CA = 80 μονάδες.

Στη ναυσιπλοΐα η πορεία ενός σκάφους εξαρτάται από τη θέση του που σχετίζεται με την κατεύθυνση του ανέμου. Οι ναυτικοί βρίσκουν την επικρατούσα κατεύθυνση του ανέμου στη θάλασσα και στη συνέχεια συσχετίζουν την πορεία τους με αυτήν.



Εικόνα 10 Το τριαντάφυλλο του ανέμου

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούν όργανα μέτρησης που απαιτούν γωνίες. Το «τριαντάφυλλο του ανέμου» είναι το πιο χαρακτηριστικό από αυτά, το οποίο μοιάζει με ένα αστέρι με πολλές διακλαδώσεις που υποδεικνύουν τα βασικά σημεία. Για να προσδιοριστούν οι κατευθύνσεις του ανέμου σχεδιάζεται ένα είδος τριαντάφυλλου του οποίου τα βέλη είναι τοποθετημένα γύρω από το κέντρο σαν πέταλα ενός τριαντάφυλλου. Η κατασκευή του μπορεί να γίνει είτε με βάση τον Γ’ τρόπο (Clairaut, 1753) που περιγράψαμε παραπάνω είτε με επαναλαμβανόμενες διχοτομήσεις (Guichard, 2018).

ΜΕΡΟΣ Β: ΕΡΕΥΝΑ

Κεφάλαιο 4

Χρησιμότητα της έρευνας

Όπως αναφέρθηκε στο 1^{ο} κεφάλαιο :

α. η έννοια της γωνίας αποτελεί μια βασική έννοια που συντελεί σημαντικά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης των μαθητών και

β. η μέτρηση της γωνίας είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών, των θετικών επιστημών και της τεχνολογίας αλλά και της καθημερινής ζωής.

Επομένως, η κατανόηση σε βάθος των δύο παραπάνω εννοιών αλλά και η γνώση του τι προβλήματα λύνουν είναι πολύ σημαντικές για την πορεία των μαθητών στα μαθηματικά των μαθητικών τους χρόνων αλλά και στην μετέπειτα ζωή τους.

Επιπλέον, οι παραπάνω έννοιες αποτελούν τμήμα της διδακτέας ύλης των μαθηματικών της Α΄ γυμνασίου. Με βάση το Π.Σ. (2011), όπως αναφέρθηκε στο 2^{ο} κεφάλαιο, πρέπει οι μαθητές στη θεματική περιοχή «Χώρος και Γεωμετρία», στον οποίο ανήκει η γωνία, να αναπτύξουν δύο είδη συλλογισμών τον χωρικό και τον γεωμετρικό. Επιπρόσθετα, με βάση το ΔΕΠΠΣ., & ΑΠΣ. Μ. (2003), σκοπός του αναλυτικού προγράμματος για την διδασκαλία των μαθηματικών, είναι η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και της πρακτικής χρήσης των μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας και της σημασίας τους ως απαραίτητου εργαλείου των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Τέλος, με βάση το Α.Π.Σ. (2011), τις οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022) αλλά και πρωτίστως με βάση την βιβλιογραφική ανασκόπηση που αναφέρεται στο 2^{ο} κεφάλαιο της παρούσας εργασίας για την διδασκαλία της γωνίας πρέπει να επιτευχθούν κάποιοι στόχοι και να λυθούν ή να μην δημιουργηθούν κάποιες παρανοήσεις.

Όλα τα παραπάνω, δεν μπορούν να καλυφθούν μόνο με τις δραστηριότητες που προτείνονται στο σχολικό εγχειρίδιο και μόνο στο χώρο της σχολικής τάξης. Η συγκεκριμένη έρευνα, λοιπόν, εξετάζει αν η διδακτική πρόταση που προτείνεται στην παρούσα εργασία ανταποκρίνεται στους παραπάνω στόχους για την επίτευξη των οποίων προτείνονται δραστηριότητες εμπνευσμένες κατά βάση από την ιστορία των μαθηματικών (βλ. 3ο κεφάλαιο) με χρήση διαφόρων μέσων (χειραπτικών, ψηφιακών, ενσώματης και διδασκαλίας στον μεσοχώρο).

Κεφάλαιο 5

Μεθοδολογία της έρευνας

5.1. Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι η προσπάθεια κατασκευής μιας φυσικής αξιωματικής γεωμετρίας, βασισμένη σε δραστηριότητες που χρησιμοποιούν την ιστορία των μαθηματικών, με σκοπό την κατανόηση της έννοιας της γωνίας, της σύγκρισης, της κατασκευής και της μέτρησης γωνιών και την ανακάλυψη της πρακτικής τους εφαρμογής στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Σε όλα τα παραπάνω βασικοί στόχοι είναι :

- να κατανοηθεί ότι η γωνία είναι μια πολύπλευρη έννοια,
- να αποφευχθεί η δημιουργία παρανοήσεων,
- να λυθούν ήδη υπάρχουσες παρανοήσεις,
- να μάθουν οι μαθητές να συλλογίζονται μαθηματικά (και όχι να εκτελούν απλά διαδικασίες που δεν κατανοούν) και
- να αποκτήσουν κίνητρα ώστε να ασχοληθούν (περισσότερο) με τα μαθηματικά.

5.2. Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας της παρούσας εργασίας είναι:

1) Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός επιδρά στην κατανόηση τις πολύπλευρης έννοιας της γωνίας της σύγκρισης, της κατασκευής και της μέτρησης γωνιών;
2) Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός επιδρά στην επίλυση των παρανοήσεων και των λαθών των μαθητών σε σχέση με τις γωνίες;
3) Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό η χρήση της Ιστορίας Μαθηματικών επιδρά στην κατανόηση της χρήσης των γωνιών στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής;

5.3. Μέθοδος

Η έρευνα αποτελεί διδακτικό πείραμα και περιλαμβάνει διδακτική παρέμβαση με χρήση της ιστορίας των μαθηματικών με αρχική και τελική διερεύνηση (προ τεστ και μετά τεστ) για να ελεγχθεί αν κατανοήθηκαν οι έννοιες που πραγματεύεται η διδασκαλία, αν λύθηκαν τυχόν παρανοήσεις σχετικά με αυτές και αν κατανοήθηκε η σύνδεση των εννοιών αυτών με πρακτικές εφαρμογές.

5.4. Δείγμα έρευνας

Το δείγμα που εξετάστηκε στην παρούσα έρευνα είναι είκοσι τρείς μαθητές της Α΄ γυμνασίου ενός τυπικού δημόσιου σχολείου του Βαθύλακκου Θεσσαλονίκης. Από αυτούς οι έντεκα είναι κορίτσια και οι δώδεκα αγόρια. Η σχολική επίδοση των μαθητών του δείγματος στα μαθηματικά ποικίλει (υψηλή, μεσαία ή και χαμηλή επίδοση). Οι μαθητές προέρχονται από διάφορα κοινωνικοοικονομικά στρώματα. Η επιλογή τους δεν έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας, καθώς πρόκειται για βολικό δείγμα αφού αποτελεί τμήμα στο οποίο διδάσκει η ερευνήτρια.

5.5. Ερευνητική διαδικασία

Το προ τεστ (Παράρτημα Α) χωρίστηκε σε δύο μέρη και μοιράστηκε ταυτόχρονα σε ολόκληρη την τάξη κατά την διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος σε δύο συναντήσεις των οποίων η διάρκεια ήταν δύο διδακτικές ώρες. Ο λόγος που χωρίστηκε σε δύο μέρη ήταν λόγω του πλήθους των ερωτήσεων έτσι ώστε οι μαθητές να μην φοβηθούν ότι δεν θα προλάβουν να το ολοκληρώσουν και να μην απαντήσουν βιαστικά σε κάποιες από αυτές λόγω άγχους ή και κούρασης. Διευκρινίστηκε στους μαθητές ότι θα είναι ένα ατομικό διαγνωστικό τεστ για να ελέγξει τις γνώσεις που έχουν λάβει σε σχέση με τις γωνίες από το δημοτικό και πως σε καμία περίπτωση δεν θα αξιολογηθούν. Επίσης πάνω στο τεστ υπήρχε η παρακάτω παραίνεση «*Γράψε ελεύθερα ότι νομίζεις στα παρακάτω. Μην αφήσεις κάποιο ερώτημα κενό. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις και την φαντασία σου.*». Αφού δόθηκαν κάποιες διευκρινήσεις και οδηγίες στους μαθητές συνέχισαν μόνοι τους στη συμπλήρωση του τεστ χωρίς να δοθεί καμία βοήθεια.

Στη συνέχεια μεσολάβησε η διδακτική παρέμβαση η οποία θα αναλυθεί στο κεφάλαιο 6 της παρούσας εργασίας. Η διδακτική παρέμβαση περιλάμβανε επτά διαφορετικές δραστηριότητες οι οποίες υλοποιήθηκαν κατά την διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος εντός ή εκτός της σχολικής αίθουσας. Σε κάποιες από αυτές οι μαθητές ενεργούσαν ατομικά και σε κάποιες συνεργατικά σε ομάδες δύο ή περισσότερων ατόμων ή και στο σύνολο της τάξης. Όλες οι δραστηριότητες περιλάμβαναν φύλλα εργασίας τα οποία συνέλλεξε η διδάσκουσα. Επίσης, η διδάσκουσα κρατούσε σημειώσεις με αξιοσημείωτες παρατηρήσεις, ερωτήσεις ή και σχόλια των μαθητών κατά την διάρκεια της παρέμβασης.

Έπειτα, αφού ολοκληρώθηκε η διδακτική παρέμβαση χορηγήθηκε ένα μετά τεστ (Παράρτημα Ι) παρόμοιο με το προ τεστ ώστε να βγουν τα συμπεράσματα σχετικά με την επίδραση που τυχόν είχε το πρόγραμμα παρέμβασης στους μαθητές σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα. Ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία με το προ τεστ. Κάθε παιδί εργάστηκε ατομικά και μέσα σε μία διδακτική ώρα. Η διαφορά ήταν πως σε αυτό το τεστ δόθηκε η διευκρίνηση πως θα αποτελέσει μέρος της αξιολόγησης τους.

Τέλος, έγινε ποιοτική και ποσοτική ανάλυση των δεδομένων του προ τεστ, των φύλλων αξιολόγησης των δραστηριοτήτων, των σημειώσεων της διδάσκουσας και του μετά τεστ έτσι ώστε να δοθούν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα.

5.6. Εργαλεία συλλογής δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα η συλλογή των δεδομένων έγινε με τρεις διαφορετικούς τρόπους οι οποίοι είναι :

- ένα προ και ένα μετά τεστ,
- επτά φύλλα εργασίας,
- καταγραφή παρατηρήσεων από την διδάσκουσα-ερευνήτρια κατά την διάρκεια της παρέμβασης.

Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε την κατασκευή του προ τεστ και του μετά τεστ. Τα φύλλα εργασίας θα αναλυθούν στο σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης και η καταγραφή των παρατηρήσεων στα αποτελέσματα.

Το προ τεστ (Παράρτημα Α) αποτελείται από δέκα ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις έχουν επιλεγεί από αντίστοιχες έρευνες της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε ή από τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών των τελευταίων τάξεων του δημοτικού αφού ο στόχος του τεστ είναι να ελέγξει τις πρότερες γνώσεις των μαθητών.

Οι πρώτες τρεις ερωτήσεις (1-2-3) έχουν στόχο να ελέγξουν τις γνώσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της γωνίας. Η πρώτη ερώτηση συγκεκριμένα ελέγχει τι αντιλαμβάνονται οι μαθητές όταν ακούν τον όρο γωνία και κατά πόσο ισχύει το φαινόμενο του «αριθμητισμού». Η δεύτερη, ελέγχει την αντίληψη των μαθητών σε σχέση με την γωνία ως τομέα, ως άνοιγμα και ως στροφή και με τις γωνίες στην πραγματική ζωή. Ταυτόχρονα ελέγχονται οι παρανοήσεις σε σχέση με το αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την γωνία σαν ποιότητα και αν θεωρούν γωνίες την ευθεία γωνία και την πλήρης γωνία. Η τρίτη ερώτηση ελέγχει την δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν την γωνία σαν τμήμα του επιπέδου.

Οι επόμενες δύο ερωτήσεις (4-5) ελέγχουν τις γνώσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με το μέτρο της γωνίας. Πιο αναλυτικά, ελέγχουν αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται το μέτρο της γωνίας σαν άνοιγμα και τις σχετικές παρανοήσεις. Κάποιες από αυτές είναι ότι το μέτρο της γωνίας εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της, από την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της (από σημεία που ισαπέχουν από την κορυφή) ή από το πόσο αιχμηρή είναι η γωνία.

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις (6-7-8) ελέγχουν αν οι μαθητές μπορούν να διαιρέσουν, να συγκρίνουν ή να κατασκευάσουν δυο γωνίες και με ποια μέθοδο. Ο βασικός στόχος των ερωτήσεων είναι να ελεγχθεί αν οι μαθητές γνωρίζουν ή μπορούν να σκεφτούν μεθόδους χωρίς την χρήση του μοιρογνωμονίου.

Η ερώτηση που ακολουθεί (9) ελέγχει την ορθή χρήση του μοιρογνωμονίου σε γωνίες διαφορετικού προσανατολισμού.

Η τελευταία ερώτηση (10) ελέγχει τις γνώσεις των μαθηματικών σχετικά με την χρήση των γωνιών στα μαθηματικά ή στην καθημερινότητα τους.

Η κατασκευή του μετά τεστ (Παράρτημα Ι) βασίστηκε στην ίδια λογική. Επιλέχθηκαν επτά παραπλήσιες ερωτήσεις με αυτές του προ τεστ για την αμεροληψία της διαδικασίας (αν και οι ερωτήσεις του προ τεστ δεν απαντήθηκαν μέσα στην τάξη). Επίσης μειώθηκε ο αριθμός τους ελάχιστα για να μπορέσουν να απαντηθούν σε μία διδακτική ώρα (γιατί αποτέλεσε για τους μαθητές μέρος της αξιολόγησης τους όπως αναφέρθηκε παραπάνω).

5.7. Αξιοπιστία και εγκυρότητα έρευνας

Στην παρούσα έρευνα η συλλογή των δεδομένων, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έγινε με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επιπρόσθετα, τα τεστ και τα φύλλα εργασίας συμπληρώθηκαν από τους μαθητές παρουσία της διδάσκουσας είτε ατομικά είτε συνεργατικά. Επίσης, στα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν υπάρχει άμεση σύνδεση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην έρευνα.

Τέλος, το προ και το μετά τεστ σχεδιάστηκαν με ερωτήσεις που έγιναν σε αντίστοιχες έρευνες της ίδιας ηλικιακής ομάδας στην βιβλιογραφία, των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών του δημοτικού και του Α.Π.Σ. .

Κεφάλαιο 6

Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης

Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης έγινε με βάση όσα αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.3.3 οι μαθητές χρειάζονται καλές δραστηριότητες σχεδιασμένες για να τους βοηθήσουν να εξερευνήσουν τις γωνίες, τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους. Η μάθηση μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εάν οι μαθητές χειρίζονται ενεργά και πειραματίζονται με γεωμετρικά αντικείμενα σε σχετικά, κατάλληλα περιβάλλοντα, και επίσης συμμετέχουν σε «χρήσιμες» συζητήσεις και σκέψεις.

Η διδακτική παρέμβαση, λοιπόν, αποτελείται από επτά δραστηριότητες οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε διαφορετικά περιβάλλοντα (σχολική αίθουσα, αυλή) και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (χειραπτικά, ψηφιακά κ.ά.). Είναι σχεδιασμένες για να καλύψουν την ύλη και τους στόχους του ελληνικού Α.Π.Σ. χωρίς την αποκλειστική χρήση του σχολικού εγχειρίδιου. Επιπρόσθετα, σχεδιάστηκαν για να καλύψουν τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας. Τέλος, έχουν σχεδιαστεί για την ηλικιακή ομάδα 10-13 ετών.

Το ιδιαίτερο στοιχείο της διδακτικής πρότασης είναι πως με τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων αυτών έγινε προσπάθεια κατασκευής μιας φυσικής αξιωματικής γεωμετρίας και με τον τρόπο υλοποίησης τους η προσπάθεια χρήσης μιας χωρικό-γεωμετρικής προβληματικής η οποία είναι βασισμένη σε ιστορικά κείμενα.

Παρακάτω, γίνεται αναφορά στον σχεδιασμό της κάθε δραστηριότητας ξεχωριστά. Αναφέρεται ο βασικός στόχος της κάθε δραστηριότητας αλλά και οι επιμέρους που κατά κύριο λόγο είναι οι παρανοήσεις που θέλει να λύσει. Επίσης, γίνεται αναφορά στον λόγο επιλογής της καθώς επίσης και στον τρόπο που σχεδιάστηκε να διδαχθεί.

6.1. 1η Δραστηριότητα (Γωνία ως τομέας)

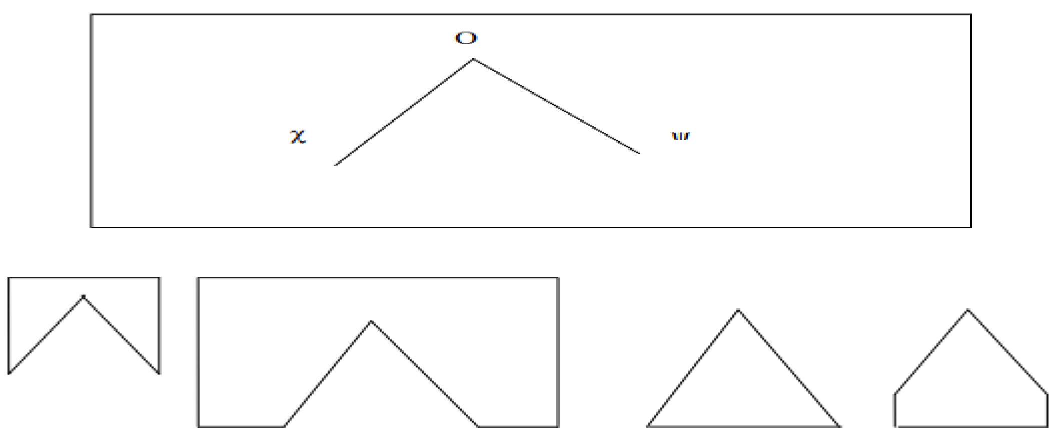
Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να οδηγηθούν στον τυπικό ορισμό της γωνίας όπως ορίζει το σχολικό εγχειρίδιο, δηλαδή να ορίσουν την γωνία ως τομέα.

Επιπρόσθετα, θα αναδειχθεί το γεγονός ότι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζουν δύο γωνίες και θα αναφερθούμε στη μη κυρτή γωνία όπως προτείνεται στις οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022). Επιπλέον, στην δραστηριότητα αυτή θα αντιμετωπίσουμε την παρανόηση σύμφωνα με την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία ως δύο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως ένα τμήμα του επιπέδου καθώς και την παρανόηση πως οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν την ευθεία γωνία ως γωνία.

Ο ορισμός της γωνίας με αυτόν τον τρόπο είναι στατικός. Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι χειραπτικά και η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα στην σχολική αίθουσα.

Η ιδέα της συγκεκριμένης δραστηριότητας υπάρχει (χωρίς να αναπτυχθεί) στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' Γυμνασίου και αναπτύσσεται σαν δραστηριότητα στην εργασία του Μιτσούλη (2009). Η μορφή που απέκτησε η τελική δραστηριότητα από τον Μιτσούλη έχει ως στόχο πέρα από το να ορίσει την γωνία ως τμήμα επιπέδου να κάνει διάκριση μεταξύ της υλικής αναπαράστασης σχήματος (π.χ σχέδιο σχήματος, χαρτόνι) και του σχήματος ως ιδεατό νοητικό αντικείμενο.

Ο δάσκαλος μοιράζει ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Β) το οποίο θα συμπληρωθεί από τους μαθητές σε ομάδες των 2 ή 3 ατόμων. Ζητάει από τους μαθητές να χαράξουν δύο ημιευθείες με κοινή αρχή πάνω σε ένα λευκό χαρτί που τους έχει μοιράσει (Εικόνα 11 πάνω). Τους ζητάει να παρατηρήσουν σε τι σχήματα χωρίστηκε το χαρτόνι.



Εικόνα 11 Το αποτέλεσμα που αναμένουμε πριν και μετά από δύο διαφορετικούς τρόπους κοψίματος

Έπειτα τους ζητάει να κόψουν το χαρτόνι πάνω στις ημιευθείες και τους ρωτάει τι σχήματα παρατηρούν τώρα (Εικόνα 11 κάτω). Η δραστηριότητα επαναλαμβάνεται με τις ημιευθείες αυτήν την φορά να είναι αντικείμενες. Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας, ο δάσκαλος όπου κρίνει απαραίτητο υπενθυμίζει χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία, τις επιστημολογικές συμβάσεις που συνδέονται με την φύση των μαθηματικών και με το ρόλο των χειραπτικών αντικειμένων.

6.2. 2η Δραστηριότητα (Γωνία ως άνοιγμα)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να αισθητοποιήσουν την έννοια της γωνίας σχηματίζοντας μια γωνία με το σώμα τους και να ορίσουν την γωνία ως ζεύγος ημιευθειών ή ευθυγράμμων τμημάτων με κοινή αρχή δηλαδή ως άνοιγμα (Diderot & d'Alembert 1751, βλ. κεφ. 3.5.1). Επιπλέον, θα συγκρίνουν γωνίες μόνο με βάση το άνοιγμά τους. Επιπρόσθετα με την δραστηριότητα αυτή θα αντιμετωπιστεί η παρανόηση πως το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της. Ακόμη, θα αντιμετωπίσουμε την παρανόηση ότι ο χώρος που περιβάλλει το σχήμα γίνεται αντιληπτός ως κενός και περιορισμένος από τις γραμμές των σχημάτων.

Ο ορισμός της γωνίας με αυτόν τον τρόπο είναι παράλληλα στατικός και δυναμικός. Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι η ενσώματη διδασκαλία. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το εννοιολογικό περιεχόμενο της δραστηριότητας όπως αναφέρεται παραπάνω. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα ιδανικά στον μεσοχώρο (σχολική αυλή ή γυμναστήριο) ή εναλλακτικά στην σχολική αίθουσα.

Η ιδέα της συγκεκριμένης δραστηριότητας βασίζεται στο δεύτερο μέρος μιας πειραματικής δραστηριότητα των Devichi & Munier (2013) που έλαβε χώρα σε μια παιδική χαρά. Έχει γίνει παραλλαγή της δραστηριότητας ώστε να εφαρμοστεί μέσα στην σχολική τάξη. Ο σκοπός είναι οι μαθητές να σχηματίσουν με τα χέρια τους τη γωνία που οριοθετεί μια περιοχή του οπτικού τους πεδίου. Ο στόχος δεν είναι να δούμε ότι τα όρια της περιοχής σχηματίζουν μια γωνία, αλλά να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα όρια της ορατής περιοχής ήταν δύο ημιευθείες που περνούσαν από τα άκρα του παρατηρητή, και ότι οι ημιευθείες μπορούν να επεκταθούν όσο πίσω επιθυμούμε.

Η δραστηριότητα αυτή γίνεται σε δύο φάσεις στις οποίες υπάρχουν και εναλλαγές αν χρειαστεί. Στην πρώτη φάση χρησιμοποιούμε μαθητές και σχοινιά (χρωματιστό σπάγκο) ενώ στην δεύτερη μόνο το σώμα των μαθητών.

Εικόνα 12 Σχηματισμός γωνίας με σχοινιά

Αρχικά, ο δάσκαλος συζητάει με τους μαθητές για το ραντάρ και το γεγονός ότι ελέγχει μια περιοχή. Έπειτα, στην πρώτη φάση του πειράματος τρεις μαθητές με την βοήθεια σχοινιών ορίζουν την περιοχή που εποπτεύει το δικό τους ραντάρ δηλαδή σχηματίζουν μια γωνία. Στην δεύτερη φάση ένας μαθητής όρθιος παριστάνει το ραντάρ και με το άνοιγμα των χεριών του δείχνει την περιοχή που εποπτεύει.

Εικόνα 13 Σχηματισμός γωνίας με σώμα

Σε κάθε μια φάση ζητείται από τους μαθητές να σχηματίσουν περισσότερες από μία γωνίες και τίθεται το ερώτημα πότε η γωνία είναι μεγαλύτερη. Επιπρόσθετα γίνεται εναλλαγή των φάσεων ώστε να καταλάβουν οι μαθητές ότι το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται από το άνοιγμα και όχι από το μήκος των πλευρών της. Πιο συγκεκριμένα οι τρεις μαθητές σχηματίζουν μια γωνία με την βοήθεια των σχοινιών και με υπόδειξη του δασκάλου ο μαθητής που βρίσκεται στην κορυφή αφήνει τα σχοινιά αλλά διατηρεί το άνοιγμα των χεριών του οπότε σχηματίζει μια γωνία ίση με την προηγούμενη.

Επιπλέον, και στις δύο φάσεις ένας άλλος συμμαθητής του (ή και περισσότεροι) παριστάνουν το αεροπλανάκι που κινείται στο χώρο όπου επιθυμεί. Το αεροπλανάκι ακινητοποιείται κάποιες στιγμές. Οι μαθητές λοιπόν απαντούν με επιχειρήματα σε κάθε περίπτωση, αν το ραντάρ εντοπίζει το αεροπλανάκι. Ο δάσκαλος, αν χρειαστεί καθοδηγεί το αεροπλανάκι να πάρει τις κατάλληλες θέσεις. Επιπρόσθετα, για να γίνει σύνδεση με την αναπαράσταση της τυπικής γωνίας στο επίπεδο, ο δάσκαλος αφού βάλει τον περιορισμό πως το ραντάρ ελέγχει μόνο την περιοχή που βρίσκεται στο ύψος των χεριών του μαθητή-ραντάρ (ορίζει επίπεδο) μπορεί να ρωτήσει τους μαθητές τι θα γινόταν αν το αεροπλανάκι άλλαζε επιπλέον και ύψος.

Παράλληλα με την δραστηριότητα ο δάσκαλος δίνει στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Γ) προκειμένου να μοντελοποιήσουν το πείραμα που λαμβάνει χώρα. Το φύλλο εργασίας το συμπληρώνει ατομικά ο κάθε μαθητής έχοντας ένα-δυο λεπτά μετά από κάθε εναλλαγή στην δραστηριότητα κατόπιν υπόδειξης του δασκάλου.

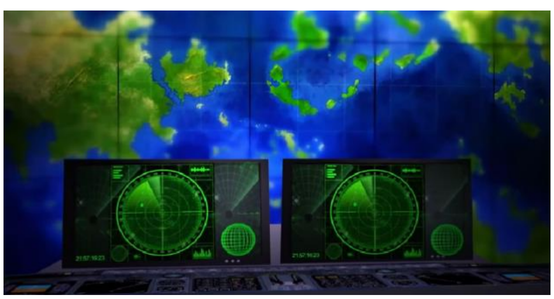
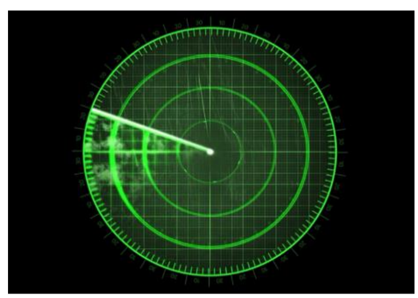
6.3. 3η Δραστηριότητα (Γωνία ως στροφή)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν μια γωνία με περιστροφή μιας ημιευθείας γύρω από την αρχή της να ορίσουν τη γωνία ως στροφή. Επίσης να αισθητοποιήσουν το μέτρο της γωνίας ως το τόξο ενός κύκλου (βλ. κεφ. 3.5.2 Γ’ Τρόπος). Επιπλέον, στην δραστηριότητα αυτή θα αντιμετωπίσουμε την παρανόηση σύμφωνα με την οποία το άνοιγμα (μέγεθος) της γωνίας εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της. Επιπρόσθετα, θα αντιμετωπιστεί η παρανόηση ότι η μία πλευρά της γωνίας είναι οριζόντια και η κατεύθυνση της πάντα αριστερόστροφη. Τέλος, θα έρθουν πιο κοντά στην έννοια της πλήρους γωνίας.

Ο ορισμός της γωνίας με αυτόν τον τρόπο είναι δυναμικός. Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι ΤΠΕ. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το εννοιολογικό αλλά και το διδακτικό περιεχόμενο της δραστηριότητας. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα ιδανικά σε εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών ή εναλλακτικά στην σχολική αίθουσα με την χρήση βιντεοπροβολέα.

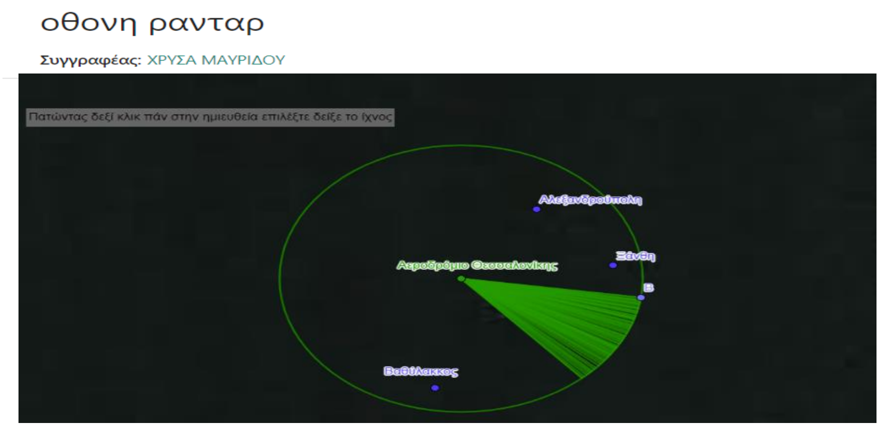
Η συγκεκριμένη δραστηριότητα κατασκευάστηκε με εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας και χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων (Geogebra). Παρόμοια δραστηριότητα υπάρχει στο ηλεκτρονικό εγχειρίδιο μαθηματικών της Α’ Γυμνασίου («Έλεγχος με ραντάρ») και προτείνεται να εφαρμοστεί στην τάξη με βάση της οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022). Η πρόσθετη αξία της δραστηριότητας προέρχεται από το γεγονός ότι οι ίδιοι οι μαθητές προσεγγίζουν την έννοια της γωνίας μέσω των πειραμάτων περιστροφής της ημιευθείας και την οποία καλούνται να περιγράψουν. Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων (Παράστημα Δ).

Ο δάσκαλος κάνει μια συζήτηση για τα ραντάρ στα υποβρύχια ή στους πύργους ελέγχου των αεροδρομίων και δείχνει ένα σχετικό βίντεο μικρής διάρκειας στο οποίο φαίνεται η οθόνη ανίχνευσης ενός ραντάρ (Εικόνα 14). Έπειτα, ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν στην ερώτηση «τι βλέπουν στην οθόνη ενός ραντάρ» με όσο πιο μαθηματικό τρόπο μπορούν.

Εικόνα 14 Οθόνη ανίχνευσης ραντάρ από στιγμιότυπα βίντεο

Στη συνέχεια, οι μαθητές με την βοήθεια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή ανοίγουν την εφαρμογή «Οθόνη ραντάρ». Έπειτα, ακολουθώντας τις οδηγίες της εφαρμογής οι μαθητές έχουν σχηματίσει μια γωνία περιστρέφοντας μια ημιευθεία (Εικόνα 15). Σε αυτό το σημείο καλούνται να απαντήσουν σχετικά με τον τρόπο που σχηματίστηκε η γωνία και τον γεωμετρικό τόπο τον οποίο ορίζει. Έπειτα, ακολουθώντας νέες οδηγίες οι μαθητές σχηματίζουν δύο γωνίες τις οποίες τους ζητάμε να συγκρίνουν ουσιαστικά συγκρίνοντας το μέγεθος του ανοίγματος των γωνιών ή τα τόξα που σχηματίστηκαν.



Εικόνα 15 Στιγμιότυπο εφαρμογής GeoGebra "Οθόνη ραντάρ"

6.4. 4^{η} Δραστηριότητα (Κατασκευή γωνίας και σύγκριση γωνιών χωρίς την χρήση μοιρογνωμόνιου – 1^{η} Πρακτική εφαρμογή Κατασκευές Ξυλουργικής)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν γωνία ίση με μια δοσμένη γωνία καθώς και να συγκρίνουν δύο γωνίες χωρίς την χρήση μοιρογνωμόνιου. Επιπρόσθετος στόχος, λοιπόν, είναι η ανάγκη κατασκευής ενός οργάνου ή εύρεσης κάποιας μεθόδου για σύγκριση και κατασκευή γωνιών. Ένας ακόμη στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κατανοήσουν την χρήση των γωνιών στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής και μέσα από αυτό να προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως εξελισσόμενο πολιτισμικό προϊόν.

Επιπλέον, στην δραστηριότητα αυτή θα αντιμετωπίσουμε την παρανόηση σύμφωνα με την οποία το άνοιγμα (μέγεθος) της γωνίας εξαρτάται από το μήκος καθώς και τις παρανοήσεις που έχουν να κάνουν με τον προσανατολισμό μιας γωνίας. Δηλαδή, πως δυο γωνίες που προσανατολίζονται σε μη τυποποιημένες κατευθύνσεις ή με διαφορετικούς προσανατολισμούς είναι ίσες. Ακόμη, στην δραστηριότητα αυτή θα γίνει διαπραγμάτευση των δυσκολιών των μαθητών στην προσαρμογή της γωνιακής αντίληψης στην πραγματική ζωή και πιο συγκεκριμένα στο ότι μια γωνία για να είναι γωνία πρέπει να είναι αιχμηρή. Επιπρόσθετα, θα αναδειχθεί το γεγονός ότι δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο όπως προτείνει το Α.Π.Σ (2013). Τέλος, οι μαθητές θα συγκρίνουν γωνίες με διαφανές χαρτί όπως προτείνει το Α.Π.Σ (2013) και θα γίνει σύγκριση γωνιών χρησιμοποιώντας και άτυπες μονάδες μέτρησης γωνιών σύμφωνα και με τις οδηγίες διδασκαλίας (2021-2022).

Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι χειραπτικά. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το εννοιολογικό αλλά και το διδακτικό περιεχόμενο της δραστηριότητας. Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι χωρικό-γεωμετρική προβληματική. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα στην σχολική αίθουσα.

Η ιδέα της παρούσας δραστηριότητας αναπτύσσεται από τον Guichard (2018). Χρησιμοποιεί τη πραγματεία του Clairaut (1753), στην οποία γίνεται προσπάθεια να αναπτυχθούν οι αρχές της Γεωμετρίας με μια φυσική μέθοδο παρόμοια με αυτή των πρώτων εφευρετών της. Παρατηρούμε πως η πραγματεία του Clairaut χρησιμοποιεί πρακτικές παρόμοιες με αυτές που ορίζει ο Freudenthal (βλ. κεφ. 2.1).

Στην αρχή της δραστηριότητας ο δάσκαλος μοιράζει ένα φύλλο εργασίας (Παράτημα Ε) του οποίου η πρώτη σελίδα αναφέρει μια σύντομη βιογραφία της ζωής και του έργου του Clairaut. Γίνεται αναφορά στην χρονική περίοδο που έζησε και στον πατέρα του που ήταν επίσης Μαθηματικός. Επίσης, γίνεται αναφορά στα *Στοιχεία του Ευκλείδη* τα οποία μελέτησε ο Clairaut κατόπιν προτροπής του πατέρα του. Επιπλέον, δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι ο Clairaut στην ηλικία των μαθητών έκανε σημαντικές ανακαλύψεις σε σχέση με τα μαθηματικά. Τέλος, αναφέρεται πως μεταγενέστερα έγραψε το βιβλίο *Στοιχεία της Γεωμετρίας* μέσω του οποίου είχε στόχο να διδάξει γεωμετρία μέσω προβλημάτων και τονίζεται το γεγονός πως για τον σκοπό αυτό έκανε μετρήσεις εδαφών προσπαθώντας να μην χρησιμοποιεί αριθμούς αλλά απλές φυσικές μαθηματικές μεθόδους.

Στη συνέχεια, στο φύλλο εργασίας εξετάζονται παραδείγματα σύγκρισης ή και κατασκευής γωνιών, που προέρχονται κυρίως από πρακτικές καταστάσεις, και σχεδίασης μορφών ώστε να κινήσει το ενδιαφέρον για την κατασκευή ενός κατάλληλου οργάνου για την αντιγραφή και την σύγκριση γωνιών, όπως η κινούμενη λοξότμηση του Clairaut (Εικόνα 16) ή το φαλτσόμετρο (Εικόνα 17), που δείχνει την ιδέα του ανοίγματος ή μιας κατάλληλης μεθόδου όπως είναι η επίθεση, δηλαδή η τοποθέτησης της μίας γωνίας πάνω στην άλλη (Εικόνα 19).

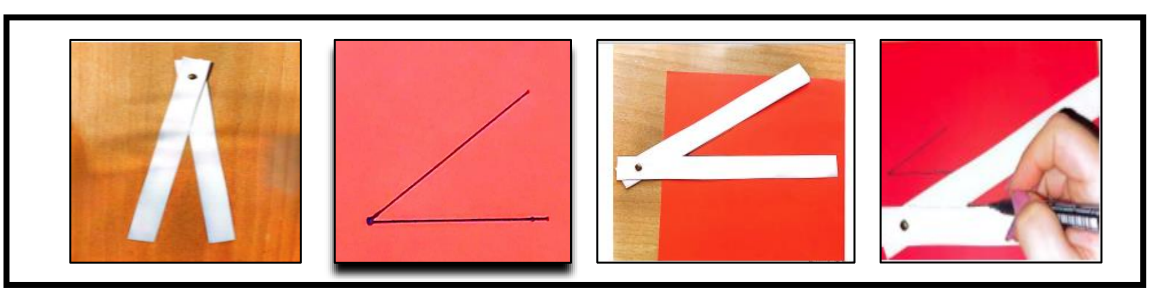
Πιο συγκεκριμένα, αρχικά παρουσιάζεται ένα πρόβλημα που αντιμετώπισε ο Clairaut (βλ. Κεφ. 3.5.2 Α’ Τρόπος) καθώς και ο τρόπος λύσης του σε μια εικόνα. Το αρχικό πρόβλημα είναι η κατασκευή ενός τριγώνου ίσου με ένα άλλο δοσμένο τρίγωνο το οποίο οδηγεί στο πρόβλημα κατασκευής γωνίας ίσης με μια άλλη δοσμένη γωνία. Ο τρόπος επίλυσης έρχεται μέσα από το εργαλείο κινούμενης λοξότμησης του Clairaut.

Αφού ερωτηθούν οι μαθητές για το πως μπορούμε να φτιάξουμε ένα εργαλείο παρόμοιο με του Clairaut, κάθε μαθητής φτιάχνει το δικό του εργαλείο που αποτελείται από δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα φτιαγμένα από χαρτόνι τα οποία τα ενώνει κατάλληλα με ένα διπλόκαρφο (Εικόνα 16). Έναλλακτικά μπορεί ο δάσκαλος να μοιράσει έτοιμα εργαλεία κινούμενης λοξότμησης των οποίων όμως οι πλευρές (ορθογώνια) να έχουν διαφορετικά μήκη και πλάτη και να είναι ενωμένες σε διαφορετικά σημεία.

Εικόνα 16 Αντίγραφο εργαλείου κινούμενης λοξότμησης του Clairaut

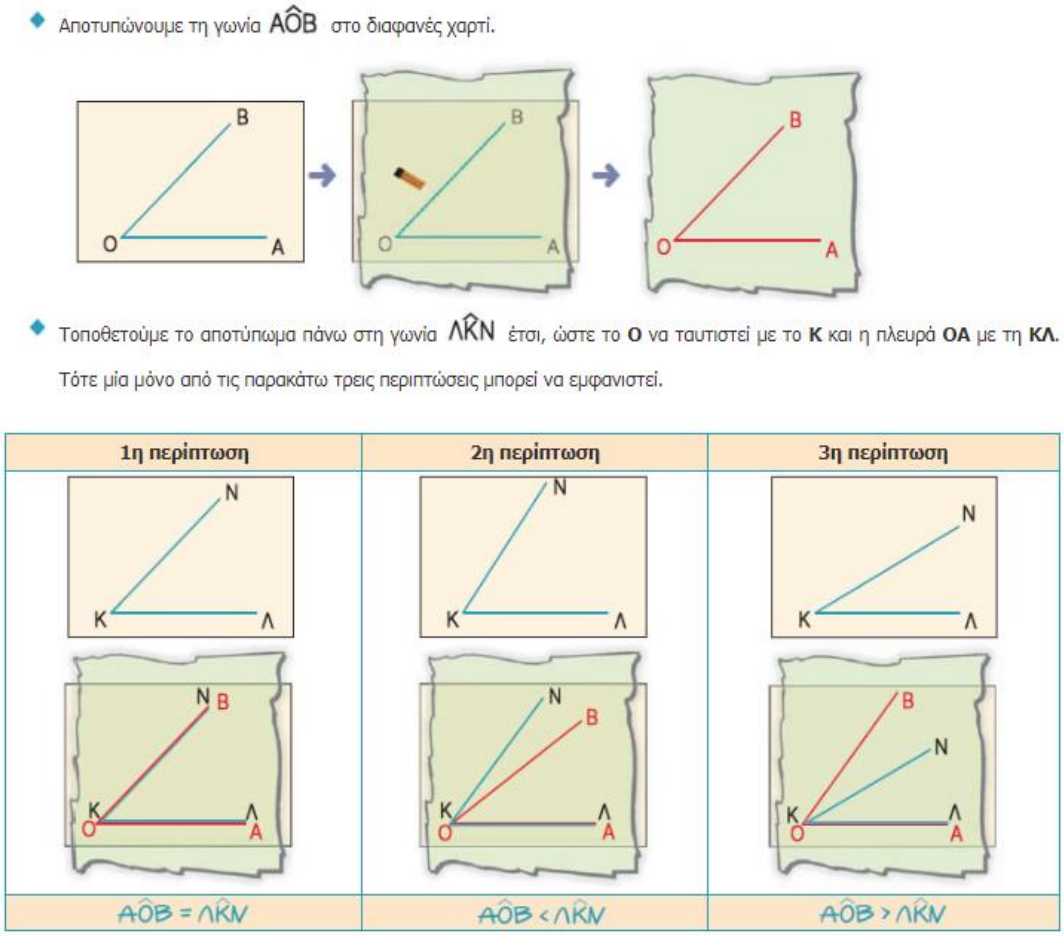
Εικόνα 17 Φαλτομετρο

Στη συνέχεια της δραστηριότητας, οι μαθητές με τη βοήθεια του “εργαλείου” κατασκευάζουν (Εικόνα 18) μια γωνία ίση με την γωνία που φαίνεται στην εικόνα του τρόπου επίλυσης του προβλήματος του Clairaut και έπειτα συγκρίνουν αν οι τρεις γωνίες είναι ίσες (η δική τους και οι δύο της εικόνας).



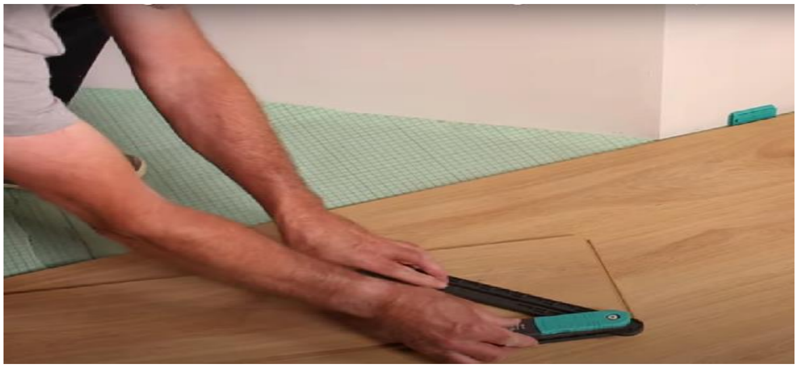
Εικόνα 18 Κατασκευή ίσης γωνίας με το εργαλείο λοξότμησης του Clairaut

Στην πορεία αναφέρεται το πρόβλημα της ακρίβειας του εργαλείου που προβλημάτιζε τον Clairaut και οδηγούμαστε στην μέθοδο σύγκρισης γωνιών με επίθεση με τη βοήθεια διάφανου χαρτιού στην οποία εξασκούνται οι μαθητές.



Εικόνα 19 Περιγραφή διαδικασίας επίθεσις από το σχολικό εγχειρίδιο

Ακολουθεί, ένα μικρής διάρκειας βίντεο (Εικόνα 20) στο οποίο φαίνεται ένα πρόβλημα κατασκευής γωνία της σύγχρονης ζωής του οποίου η λύση δίνεται με ένα όργανο που λέγεται «φαλτσόμετρο» (Εικόνα 17) ή «γωνία φάλτσου» και είναι παρόμοιο με το εργαλείο κινούμενης λοξότμησης του Clairaut. Η διαφορά του είναι πως «κλειδώνει» σε μια θέση για να αποφευχθεί το πρόβλημα της ακρίβειας που υπήρχε στα χρόνια του Clairaut. Μετά την προβολή του βίντεο, ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γωνία του θρανίου τους με την βοήθεια του δικού τους εργαλείου.



Εικόνα 20 Στιγμιότυπο από βίντεο για την χρήση του φαλτσόμετρου στην σύγχρονη καθημερινή ζωή

Η δραστηριότητα τελειώνει ζητώντας από τους μαθητές να απαντήσουν στην ερώτηση «τι σημαίνει τελικά ότι δύο γωνίες είναι ίσες;».

6.5. 5η Δραστηριότητα (Κατασκευή πυξίδας)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να ορίσουν το μέτρο της γωνίας ως μέρος του τόξου ενός κύκλου (Diderot & d'Alembert 1751, βλ. κεφ. 3.5.1). Ταυτόχρονα, εισάγονται στον διπλασιασμό και στην διχοτόμηση μιας γωνίας. Επιπρόσθετα, στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κατανοήσουν την μοίρα ως γωνία (ομοειδές μέγεθος) και ως μονάδα μέτρησης άλλων γωνιών (μεγεθών). Επιτυγχάνεται παράλληλα και ο στόχος του Α.Π.Σ.(2013) σύμφωνα με τον οποίο οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών (και τις υποδιαιρέσεις της).

Επιπρόσθετος στόχος, είναι η κατανόηση της ανάγκης κατασκευής οργάνων για την μέτρηση γωνιών όπως είναι η πυξίδα και το μοιρογνωμόνιο αλλά και η κατανόηση του τρόπου κατασκευής τους. Επιπλέον οι μαθητές θα κατανοήσουν την χρήση των γωνιών στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής και μέσα από αυτό να προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως εξελισσόμενο πολιτισμικό προϊόν.

Η ιδέα της παρούσας δραστηριότητας αναπτύσσεται από τον Guichard (2018). Παρόμοια δραστηριότητα ανέπτυξε ο Μιτσούλης (2009) ο οποίος αναφέρει πως ο Freudenthal θεωρεί πως για να μετρήσει κάποιος γωνίες θα πρέπει προηγουμένως να μπορεί να υποδιαιρεί γωνίες.

Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι χειραπτικά. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το εννοιολογικό αλλά και το διδακτικό περιεχόμενο της δραστηριότητας. Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι χωρικογεωμετρική-προβληματική. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα στην σχολική αίθουσα.

Στην αρχή της δραστηριότητας ο δάσκαλος μοιράζει ένα φύλλο εργασίας (Παράτημα ΣΤ). Στην αρχή του φύλλου υπάρχει ένα κείμενο για την ιστορία και την χρήση του «τριαντάφυλλου του ανέμου» δηλαδή του γνωστού οργάνου μέτρησης γωνιών που σήμερα ονομάζουμε πυξίδα.

Έπειτα ο δάσκαλος μοιράζει ένα χάρτινο κυκλικό δίσκο (τυχαίας ακτίνας) φτιαγμένο από χαρτί και οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν την δική τους πυξίδα. Το πρόβλημα της κατασκευής της πυξίδας χωρίζεται σε μικρότερα προβλήματα ως εξής:

- Ο κύκλος είναι μια πλήρης γωνία.
- Σκέψου πρώτα πως θα διαιρούσες (χώριζες) μια γωνία σε δύο μέρη (στη μέση).
- Έπειτα πως θα διαιρούσες μια γωνία σε τέσσερα μέρη.
- Και τέλος πως θα διαιρούσες μια γωνία σε οχτώ μέρη.

Αφού οι μαθητές έχουν σχεδιάσει την δική τους πυξίδα, καλούνται να απαντήσουν στην ερώτηση «πώς φτιάχνουμε ένα μοιρογνωμόνιο». Αφού οι μαθητές πουν τις σκέψεις τους, ο δάσκαλος για να εξηγήσει την επιλογή του αριθμού 360 αναφέρει πως επειδή σε αρχαίους πολιτισμούς, όπως αυτών των Βαβυλώνιων και των Σουμέριων ίσχυε το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης ο κύκλος χωρίστηκε σε 360 μέρη (πολλαπλάσιο του 60) και το καθένα τόξο από αυτά είναι 1 μοίρα. Για να μετατρέψουν το ανεμολόγιο που κατασκεύασαν οι μαθητές στο ημικυκλικό μας μοιρογνωμόνιο, η "μονάδα" της γωνίας του ενός όγδοου μιας ολόκληρης γωνίας πρέπει να διαιρεθεί με τρία και πάλι με τρία και μετά με πέντε.

Στο τέλος της δραστηριότητας, ο δάσκαλος εξηγεί στους μαθητές πως ο κύκλος (σαν τόξο) ισούται με το μέτρο μιας πλήρους γωνίας που είναι οι 360^o. Επομένως αν χωρίσουμε τον κύκλο σε 2 μέρη, το 1/2 του κύκλου που είναι μια ευθεία γωνία ισούται με $360^o / 2=180^o$ και αν τον χωρίσουμε σε 4 μέρη, τότε το 1/4 του κύκλου που είναι μια ορθή γωνία ισούται με $360^o / 4= 90^o$ κ.ο.κ.

6.6. 6^{η} Δραστηριότητα (2^{η} Πρακτική εφαρμογή - Τοπογραφία)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να εφαρμόσουν όσα έχουν μάθει σε ένα πρόβλημα ιστορικό αλλά και σύγχρονο το οποίο είναι η μέτρηση μιας απρόσιτης απόστασης, με μοναδικό εργαλείο ένα γραφόμετρο. Οι μαθητές σε αυτό το πρόβλημα θα κατασκευάσουν τρία τρίγωνα εκ των οποίων το ένα θα είναι πραγματικό (τρίγωνο που οι κορυφές του είναι τρία σημεία στο χώρο) και τα άλλα δύο αναπαραστάσεις του αρχικού (σχέδιο και αντίγραφο με κλίμακα). Οι επιμέρους στόχοι είναι η αισθητοποίηση της έννοιας της γωνίας ως άνοιγμα στον πραγματικό κόσμο, η μέτρηση γωνίας (με γραφόμετρο και μοιρογνωμόνιο) και η κατασκευή γωνίας ίσης με μιας δοσμένης (με μοιρογνωμόνιο) και τέλος να κατανοήσουν τι είναι η γωνία ενός ευθύγραμμου σχήματος (συγκεκριμένα του τριγώνου).

Επιπρόσθετος στόχος, είναι η κατανόηση της ανάγκης κατασκευής οργάνων για την μέτρηση γωνιών όπως είναι το γραφόμετρο και το μοιρογνωμόνιο αλλά και η κατανόηση του τρόπου χρήσης τους. Επιπλέον οι μαθητές θα κατανοήσουν την χρήση των γωνιών ως «εργαλεία» επίλυσης ιστορικών αλλά και σύγχρονων προβλημάτων στον τομέα της τοπογραφίας (γεωδαισίας) και της χαρτογραφίας.

Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι χειραπτικά. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το εννοιολογικό αλλά κυρίως το διδακτικό περιεχόμενο της δραστηριότητας. Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι χωρικογεωμετρική-προβληματική. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα αρχικά στην σχολική αίθουσα και έπειτα στο μεσοχώρο (σχολική αυλή ή μια μεγάλη αίθουσα π.χ. γυμναστήριο ή αίθουσα εκδηλώσεων-πολλαπλών χρήσεων).

Η ιδέα της παρούσας δραστηριότητας αναπτύσσεται από τον Guichard (2018) και η αρχική ιδέα έχει δοθεί από τον τοπογράφο Manesson Mallet (1702) στο βιβλίο του *Πρακτική Γεωμετρία* (βλ. κεφ. 3.5.3).

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα χωρίζεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, η οποία λαμβάνει χώρα μέσα στην τάξη ο δάσκαλος μοιράζει ένα φύλλο εργασίας (Παράστημα Ζ). Στο φύλλο εργασίας παρουσιάζεται μέσω εικόνων το πρόβλημα της μέτρησης δύο απρόσιτων αποστάσεων (του πλάτους ενός λιμανιού και με την βοήθεια γραφόμετρου η λύση που δόθηκε από τον τοπογράφο Mallet η οποία είναι βασισμένη σε μέθοδο του Clairaut. Με αφορμή το πρόβλημα αυτό θα συζητήσουμε για την χρήση των γωνιών στην μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων στην στεριά, στην θάλασσα και στον αέρα δηλαδή στην τοπογραφία, στην ναυσιπλοΐα και στην αεροναυτιλία αλλά και στην χαρτογραφία.

Έπειτα, οι μαθητές σε ομάδες των δύο ατόμων, καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως «Πού στέκεται ο τοπογράφος; Γιατί; Τι μετρά;», «Πώς λειτουργεί το όργανο που χρησιμοποιεί;» και άλλες παρόμοιες έτσι ώστε να ανακαλύψει σταδιακά την λύση του προβλήματος.

Στην δεύτερη φάση, που λαμβάνει χώρα στον μεσοχώρο, οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες που αποτελούνται από 7 ή 8 μέλη, θα μετρήσουν με την βοήθεια ενός ξύλινου «γραφόμετρου» που έχουμε κατασκευάσει μόνοι μας μια «απρόσιτη» απόσταση. Για την κατασκευή του δικού μας γραφόμετρου χρειάζεται ένα μοιρογνωμόνιο στου οποίου το κέντρο θα δέσουμε 2 κομμάτια σπάγκο τυχαίου μήκους. Επίσης, στην κάθε ομάδα μοιράζεται ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Η) στην αρχή του οποίου περιγράφονται οι ρόλοι που χρειάζεται να αναλάβουν οι μαθητές σε κάθε ομάδα και τα υλικά που θα χρειαστούν.

Εικόνα 21 Γραφόμετρο Diderot & d'Alembert, 1751, Plate II

Εικόνα 21 Γραφόμετρο για διδασκαλία

Ο δάσκαλος έχει τοποθετήσει 2 κώνους (A και C) για κάθε ομάδα και η κάθε ομάδα καλείται να μετρήσει την απόσταση μεταξύ των 2 κώνων συμπληρώνοντας παράλληλα το φύλλο εργασίας.

Ο μαθητής που κρατάει γραφόμετρο θα πρέπει να το στρέψει έτσι ώστε η μια του άκρη (ο σπάγκος που δείχνει στις 0^o) να δείχνει στο σημείο A και ο άλλος σπάγκος να δείχνει στο σημείο C. Έπειτα τα βήματα που θα ακολουθήσουν είναι :

- Καταγραφή μετρήσεων σε ένα πρόχειρο σχέδιο.
- Μετατροπή μηκών στην ζητούμενη κλίμακα(1:10 ή 1:100).
- Κατασκευή αντιγράφου.
- Μέτρηση ζητούμενης απόστασης στο αντίγραφο.
- Μετατροπή ζητούμενου μήκους στην αρχική μονάδα μέτρησης.

Εικόνα 22 Μέτρηση απρόσιτης απόστασης

6.7. 7η Δραστηριότητα (3η Πρακτική εφαρμογή- Ναυσιπλοΐα)

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να μάθουν να βρίσκουν την πορεία τους σε έναν ναυτικό χάρτη χρησιμοποιώντας ένα ανεμολόγιο (σχεδόν ίδιο με το τριαντάφυλλο του ανέμου) και να μετρούν την απόσταση που διανύουν. Με αυτόν τον τρόπο θα δουν ακόμη μία πρακτική εφαρμογή των γωνιών.

Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι χειραπτικά. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αφορά το διδακτικό περιεχόμενο της δραστηριότητας. Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι χωρικογεωμετρική-προβληματική. Η δραστηριότητα λαμβάνει χώρα στην σχολική αίθουσα.

Η ιδέα της παρούσας δραστηριότητας για την σχολική αίθουσα αναπτύσσεται από τον Guichard (2018), όμως η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μέχρι και σήμερα όπως θα την περιγράψουμε για την πλοήγηση των ιστιοπλόων.

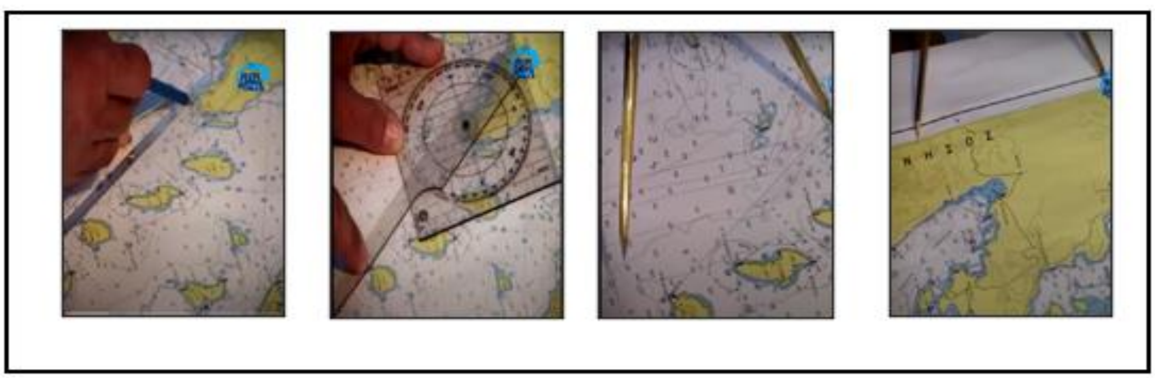
Εικόνα 23 Ο χάρτης του Κολόμβου, χρονολογίας 1490

Αρχικά ο δάσκαλος δείχνει στους μαθητές έναν ναυτικό χάρτη του Χριστόφορου Κολόμβου που χρονολογείται το 1490 (Εικόνα 24). Πάνω στο χάρτη απεικονίζεται το τριαντάφυλλο του ανέμου οπότε γίνεται συζήτηση σχετικά με την χρήση του. Σε αυτό το σημείο, μπορεί να γίνει αναφορά σε ιστορικά προβλήματα υπολογισμού του γεωγραφικού μήκους. Ένα παράδειγμα είναι το σφάλμα 18 μοιρών που έκανε ο Κολόμβος στον προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους βάση της σεληνιακής έκλειψης κατά το δεύτερο του ταξίδι στην Αμερική. Επιπλέον, ο λανθασμένος υπολογισμός του γεωγραφικού μήκους που προκάλεσε ανθρώπινες απώλειες το 1707 από την προσάραξη βρετανικών πολεμικών πλοίων οδήγησε την Αγγλική κυβέρνηση να προσφέρει υψηλή αμοιβή για την επινόηση μιας ακριβούς μεθόδου προσδιορισμού του (Katz, 2010).

Έπειτα ο δάσκαλος δείχνει στους μαθητές ένα βίντεο με τον τρόπο υπολογισμού της πορείας ενός σκάφους στον ναυτικό χάρτη με την βοήθεια ενός πλαστικού ανεμολόγιου. Ακολουθεί συζήτηση για την κατασκευή ενός ανεμολόγιου και για τον τρόπο χρήσης του.

Στη συνέχεια, ο δάσκαλος μοιράζει το φύλλο εργασίας (Παράρτημα Θ) το οποίο περιέχει ένα πρόβλημα πλοήγησης ενός σκάφους και έναν ναυτικό χάρτη της αντίστοιχης περιοχής. Επίσης στους μαθητές δίνεται ένα χειροποίητο ανεμολόγιο.

Το ανεμολόγιο κατασκευάστηκε με διάφανο χαρτί πάνω στο οποίο μπορούμε να τυπώσουμε και με ένα διπλόκαρφο. Η πυξίδα που έχει τυπωθεί σε ένα διαφανές χαρτί σε σχήμα τετραγώνου και ο χάρακας του είναι φτιαγμένος από ένα διάφανο χαρτί σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου και έχει στερεωθεί στην πυξίδα με ένα διπλόκαρφο για να μπορεί να περιστρέφεται.



Εικόνα 24 Μέτρηση απόστασης σε ναυτικό χάρτη με την χρήση ανεμολόγιου

Η διαδικασία που περιγράφεται στο βίντεο και που καλούνται να εφαρμόσουν οι μαθητές είναι η παρακάτω (Εικόνα 25):

- Χαράσσουμε την πορεία που θέλουμε από το μέρος Α στο μέρος Β με ένα μολύβι πάνω στο χάρτη.
- Τοποθετούμε το κέντρο του πλαστικού ανεμολόγιου στο σημείο Α προσέχοντας η φορά να είναι ίδια με το ανεμολόγιο του χάρτη.

- Κινούμε το χάρακα (του ανεμολόγιου) μέχρι να δείχνει το σημείο Β και διαβάζουμε τις μοίρες που μας δίνει το ανεμολόγιο.

Μέχρι αυτή τη στιγμή, λοιπόν, η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτήν που κάναμε στην $6^{η}$ δραστηριότητα με το γραφόμετρο. Αυτό που αλλάζει είναι ότι η κλίμακα που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την απόσταση ΑΒ βρίσκεται στο πλάι του χάρτη, στην κατακόρυφη του μεριά. Επομένως με τη βοήθεια του διαβήτη θα κάνουμε μεταφορά του ανοίγματος της γωνίας πάνω στην κλίμακα του χάρτη.

- Τοποθετούμε το ένα άκρο του διαβήτη στο σημείο Α και το άλλο στο σημείο Β.
- Κρατώντας τον διαβήτη σταθερά ανοιχτό, τον μεταφέρουμε την κλίμακα του χάρτη.
- Βρίσκουμε την διαφορά σε μοίρες των μεσημβρινών και μετατρέπουμε την απόσταση σε ναυτικά μίλια (1 μοίρα = 1 ναυτικό μίλι).

Κεφάλαιο 7

Αποτελέσματα

7.1. Ανάλυση αποτελεσμάτων προ τεστ

Το προ τεστ το συμπλήρωσε κάθε μαθητής ατομικά. Στην πρώτη ερώτηση του προ τεστ «Μπορείς να πεις ή να περιγράψεις με λόγια τι ονομάζουμε γωνία?», δόθηκαν 5 διαφορετικές απαντήσεις:

- Η επικρατέστερη απάντηση που έδωσαν δώδεκα μαθητές, ήταν ότι η γωνία είναι η κορυφή της γωνίας. Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως οι λέξεις που χρησιμοποίησαν στην περιγραφή τους ήταν το σημείο, το άκρο, η άκρη, η κορυφή, η μύτη κορυφή που ενώνονται/συναντιούνται δύο γραμμές/ ευθείες/ ευθύγραμμα τμήματα.
- Πέντε μαθητές απάντησαν πως γωνία είναι δύο γραμμές/ ευθείες/ ευθύγραμμα τμήματα που συναντιούνται/ ενώνονται/ τέμνονται.
- Τρεις μαθητές απάντησαν πως η γωνία είναι ένα σχήμα που έχει μια κορυφή/ μύτη και δυο γραμμές/ ευθύγραμμα τμήματα που συναντιούνται/ τέμνονται.
- Ένας μαθητής απάντησε «μια γωνία που σχηματίζει οξεία, αμβλεία, ορθή γωνία», ένας άλλος «μια γραμμή κομμένη στην μέση» και ένας μαθητής δεν έδωσε απάντηση.

Αξίζει να σημειωθεί πως επτά μαθητές έκαναν και σχήμα πέρα από την περιγραφή. Πρέπει να τονισθεί πως η γωνία που σχεδίασαν οι πέντε από αυτούς δεν ήταν αυτή του πρωτοτυπικού σχήματος όπου η μία πλευρά είναι οριζόντια. Ο έκτος μαθητής σχεδίασε μια ορθή γωνία και ο έβδομος σχεδίασε σχήματα και έδειξε τις γωνίες με βέλη. Η απάντηση του συγκεκριμένου μαθητή κρύβει αρκετή σύγχυση οπότε και παρουσιάζεται παρακάτω. Σε αυτήν την απάντηση εμφανίζεται και η παρανόηση ότι η ευθεία γωνία δεν είναι γωνία.

Στην δεύτερη ερώτηση (στις περιπτώσεις Α, Β και Γ) κανένας μαθητής δεν αναγνώρισε την μη κυρτή γωνία σαν γωνία. Αντίθετα, στις περιπτώσεις Α και Β όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν την κυρτή γωνία ενώ στην Γ περίπτωση που ήταν γραμμοσκιασμένη οκτώ μαθητές δεν την αναγνώρισαν. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι πως στην Δ περίπτωση όπου η γραμμοσκίαση παραπέμπει στο σύμβολο που σημειώνουμε στις γωνίες (τόξο κύκλου) όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν την γωνία.

Στις περιπτώσεις Β, Γ και Δ που υπήρχε περίγραμμα, παρόλο που τους τονίσθηκε προφορικά αρκετές φορές πως δεν πρέπει να το λάβουν υπόψη στην απάντηση τους οι πλειοψηφία το έλαβε υπόψη. Εδώ φαίνεται καθαρά η ευκολία των μαθητών να διακρίνουν γωνίες μέσα σε σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο και ορθογώνιο).

Επιπρόσθετα στην περίπτωση Ε όλοι οι μαθητές εκτός από έναν δεν αναγνώρισαν την ευθεία γωνία σαν γωνία. Ο μαθητής αυτός απάντησε δύο γωνίες όπως φαίνεται παρακάτω αλλά και πίσω από αυτήν την απάντηση υπάρχει λάθος. Ακόμη, στην περίπτωση ΣΤ κανένας δεν αναγνώρισε την πλήρη γωνία.

Στην περίπτωση Η με τον πύργο της Πίζας παρόλο που και πάλι δόθηκε η διευκρίνηση πως το κάδρο δεν μετράει στις απαντήσεις των μαθητών αρκετοί διέκριναν τις 4 ορθές γωνίες αλλά δεν θα τις λάβουμε υπόψη στην ανάλυση μας. Έντεκα μαθητές δεν διέκριναν καμία γωνία. Δώδεκα μαθητές αντιλήφθηκαν την κλίση του Πύργου σαν γωνία. Από αυτούς οι έξι σημείωσαν μόνο τις 2 γωνίες που σχηματίζει ο Πύργος με το έδαφος. Οι υπόλοιποι έξι σχημάτιζαν γωνία σε κάθε όροφο.

Τέλος, στην περίπτωση Θ είκοσι δύο μαθητές αναγνώρισαν τις γωνίες που σχηματίζονται από τους δείκτες τους ρολογιού ενώ ένας όχι. Κανείς δεν είδε το ρολόι σαν πλήρη γωνία. Από αυτούς, οι δεκαπέντε αναγνώρισαν 4 γωνίες, οι πέντε 2 γωνίες, ένας τρεις γωνίες και ένας 1 γωνία.

Στην τρίτη ερώτηση, που έπρεπε οι μαθητές να κυκλώσουν όσα σημεία είναι σημεία της γωνίας, αρχικά πρέπει να τονισθεί ότι οι μαθητές είχαν δυσκολία στην κατανόηση και έκαναν επανειλημμένα ερωτήσεις. Δεν δόθηκαν διευκρινήσεις γιατί θα επηρέαζαν τις απαντήσεις. Να σημειωθεί πως κανένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε αυτήν την ερώτηση. Δεκατρείς μαθητές κύκλωσαν μόνο την κορυφή της γωνίας, δύο μαθητές κύκλωσαν την κορυφή και το σημείο που βρισκόταν πάνω στην μία πλευρά, ένας μαθητής κύκλωσε την κορυφή, το σημείο που βρισκόταν πάνω στην μία πλευρά και το σημείο που βρισκόταν στην κυρτή γωνία αλλά και ανάμεσα στα όρια των ημιευθειών που ήταν ορατά. Οι υπόλοιποι επτά κύκλωσαν είτε τυχαία σημεία ή δεν απάντησαν τίποτα.

Στην τέταρτη ερώτηση σχετικά με το μέτρο της γωνίας αρχικά να διευκρινιστεί ότι αρκετοί μαθητές ήθελαν να μετρήσουν με μοιρογνωμόνιο αλλά δεν τους επιτράπηκε η χρήση του.

- Στην πρώτη περίπτωση που η γωνία εμφανίζεται (ως κλίση) στο πρωτοτυπικό της σχήμα (η μία πλευρά οριζόντια), είκοσι μαθητές έχουν απαντήσει σωστά και τρεις πως «δεν μπορώ να ξέρω».
- Στην δεύτερη περίπτωση όπου η μικρότερη σε μέγεθος γωνία έχει μεγαλύτερες σε μήκος πλευρές αλλά και οι δύο είναι σκεπές σε ίσα σπιτάκια, οκτώ μαθητές απάντησαν σωστά, επτά μαθητές απάντησαν ότι οι γωνίες είναι ίσες, έξι μαθητές πως αυτή με τις μεγαλύτερες σε μήκος πλευρές είναι πιο μεγάλη και δύο μαθητές απάντησαν πως «δεν μπορώ να ξέρω».
- Στην τρίτη περίπτωση οι γωνίες είναι ίσες αλλά υπάρχει ένα βέλος σε καθεμία που δείχνει την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της (από σημεία που ισαπέχουν από την κορυφή της) πιο κοντά ή πιο μακριά από την κορυφή της. Δέκα μαθητές απάντησαν σωστά, δέκα μαθητές απάντησαν πως η γωνία που είχε το μεγαλύτερο βέλος για την απόσταση των πλευρών της είναι και μεγαλύτερη σε μέγεθος και τρεις απάντησαν «δεν μπορώ να ξέρω».

Στην πέμπτη ερώτηση που είχε να κάνει με γωνίες που δημιουργούνται από την περιστροφή μιας ακτίνας, είκοσι ένας μαθητές απάντησαν αιτιολογώντας την απάντηση τους και δύο μαθητές απάντησαν «δεν ξέρω». Δεν υπάρχει μόνο μια σωστή απάντηση οπότε θα αξιολογήσουμε την ποιότητα των απαντήσεων τους και τον τρόπο σκέψης τους για να εξάγουμε συμπεράσματα. Έξι μαθητές έδωσαν δύο απαντήσεις που είχαν να κάνουν με το αν η ακτίνα κινείται αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα, οι υπόλοιποι θεώρησαν ότι κινείται αριστερόστροφα. Παρόλο που η ερώτηση χρησιμοποιούσε την λέξη περιοχή οι μαθητές αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις λέξεις απόσταση, μακριά, περιοχή και ώρα / χρόνο. Να σημειωθεί ότι από τις απαντήσεις φαίνεται ότι η πλειοψηφία χρησιμοποιεί την λέξη απόσταση θέλοντας να δείξει το μήκος του τόξου που σχηματίζει η ακτίνα κατά την περιστροφή της. Σε κάποιες απαντήσεις δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για αυτόν ισχυρισμό γιατί οι μαθητές δεν ανέπτυξαν τον τρόπο σκέψη τους. Επίσης, ένας μόνο μαθητής σύνδεσε την λέξη περιοχή με την λέξη γωνία. Αξιοσημείωτες είναι οι απαντήσεις δύο μαθητών που φαίνεται να αναγνωρίζουν τον κύκλο σαν πλήρη γωνία, θεωρώντας ότι όλα τα ραντάρ εκτελούν πλήρη περιστροφή. Ο ένας κατέληξε ότι οι δυο γωνίες είναι ίσες ενώ ο άλλος κατέληξε ότι ο μεγαλύτερος κύκλος είναι μεγαλύτερη γωνία εμφάνισε δηλαδή την παρανόηση ότι το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της. Την τελευταία παρανόηση την εμφανίζουν άλλοι τρεις μαθητές. Με βάση τα παραπάνω σωστά απάντησαν δεκαεπτά μαθητές, λάθος τέσσερις και δύο «δεν ξέρω». Υπάρχει αβεβαιότητα στην ανάλυση των σωστών απαντήσεων γιατί υπάρχει ασάφεια στον τρόπο χρήσης κάποιων λέξεων από τους μαθητές.

Στην έκτη ερώτηση που έχει να κάνει με τον τρόπο που χωρίζουμε μια γωνία στη μέση, δεκατρείς μαθητές είπαν πως θα σχεδίαζαν μια γραμμή (περίπου) στην μέση, οκτώ μαθητές θα έκαναν χρήση μοιρογνωμονίου και τρεις μαθητές κατανόησαν λάθος την ερώτηση (σχεδίασαν ένα τετράγωνο και το χώρισαν στην μέση σχεδιάζοντας έναν άξονα συμμετρίας). Αξίζει να σημειωθεί, πως τρεις από τους δεκατρείς που σχεδίασαν μια γραμμή στην μέση της γωνίας, σχεδίασαν ευθύγραμμα σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο και ρόμβο) και χώρισαν μία ή δύο γωνίες στην μέση. Επιπλέον, δύο από τους δεκατρείς σχεδίασαν μια ευθεία γωνία και την χώρισαν στην μέση. Ο ένας από τους δύο φαίνεται σαν να έχει σχεδιάσει μοιρογνωμόνιο και περίπου στις 90 μοίρες να έχει σχεδιάσει μια γραμμή. Ο τελευταίος μαθητής στον οποίο αναφερθήκαμε είναι αυτός που έχει δώσει δύο απαντήσεις με τον χάρακα (που μάλλον εννοεί το μοιρογνωμόνιο) και με το μάτι. Για αυτό και ενώ το δείγμα είναι 23 άτομα στα αποτελέσματα έχουμε 24 απαντήσεις. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως εννέα μαθητές έχουν κάνει αναφορά (με λόγια ή σχήμα) στην ορθή γωνία.

Στην έβδομη ερώτηση σχετικά με τους τρόπους σύγκρισης δύο γωνιών όλοι οι μαθητές, εκτός από έναν που άφησε κενή την απάντηση του, απάντησαν με την χρήση μοιρογνωμονίου. Τρεις μαθητές ανέφεραν σαν δεύτερο τρόπο την σύγκριση με το μάτι, με έναν από αυτούς να χρησιμοποιεί την φράση «θα έβλεπα το άνοιγμα αν έχει μεγάλη διαφορά». Τέλος, ένας μαθητής ανέφερε σαν τρίτο τρόπο την σύγκριση με χάρακα χωρίς να διευκρινίζει αν εννοεί τον κανόνα ή τον γνώμονα και ένας άλλος σύγκρινε τις γωνίες με την ορθή χωρίς χρήση γνώμονα ή μοιρογνωμονίου.

Στην όγδοη ερώτηση σχετικά με την κατασκευή μια γωνίας ίσης με μία δοσμένη, είκοσι ένας μαθητές απάντησαν με την χρήση μοιρογνωμονίου, ένας με χάρακα και ένας δεν απάντησε κάτι. Το αξιοσημείωτο είναι πως όσοι μαθητές έκαναν σχέδιο, σχεδίασαν την γωνία στον ίδιο προσανατολισμό με την αρχική με εξαίρεση δύο. Ο ένας από τους δύο ήταν αυτός που απάντησε με χάρακα, ο οποίος σχεδίασε δύο τυχαίες γωνίες. Να σημειωθεί πως αρκετοί την οριζόντια πλευρά της γωνίας την σχεδίασαν στο ίδιο ύψος με την αρχική και ένας την χαρακτήρισε γωνία αντίγραφο.

Στην ένατη ερώτηση σχετικά με την μέτρηση γωνιών δέκα μαθητές έκαναν σωστές μετρήσεις, εννέα μαθητές έκαναν λάθος μετρήσεις και τέσσερις μαθητές δεν απάντησαν στην ερώτηση γιατί δεν είχαν μοιρογνωμόνιο (και δεν πρόλαβαν να δανειστούν). Τα λάθη των επτά μαθητών είχαν να κάνουν με λάθος ανάγνωση της μέτρησης και όχι λάθος τοποθέτησης του μοιρογνωμονίου. Δεν φάνηκε να υπάρχει δυσκολία στην μέτρηση γωνίας με διαφορετικό προσανατολισμό από αυτόν του πρωτοτυπικού σχήματος της γωνίας. Τέλος, δύο μαθητές είχαν αδυναμία στην χρήση του μοιρογνωμονίου.

Στην δέκατη ερώτηση σχετικά με την χρήση των γωνιών στα μαθηματικά ή στην καθημερινότητα δέκα μαθητές απάντησαν «δεν ξέρω» και ένας πουθενά. Οι υπόλοιποι έδωσαν κάποιες απαντήσεις που τις κατηγοριοποιήσαμε ως εξής:

- Στα μαθηματικά, στην γεωμετρία ή στις ασκήσεις για να μετρήσουμε τις γωνίες ενός σχήματος (οκτώ μαθητές).
- Στα εικαστικά (τρεις μαθητές).
- Στις μετρήσεις ή τις κατασκευές αντικειμένων π.χ ενός πίνακα, ενός θρανίου, μιας πόρτας, ενός κτιρίου (επτά μαθητές).

Να σχολιαστεί πως κατά κύριο λόγο οι απαντήσεις είχαν να κάνουμε με μετρήσεις γωνιών γεωμετρικών σχημάτων ή αντικειμένων. Σε σχέση με τα αντικείμενα της καθημερινότητας οι αναπαραστάσεις αυτών είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα οπότε και οι μαθητές αναφέρονται σε ορθές γωνίες.

7.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων 1ης δραστηριότητας

Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές χωρίστηκαν σε δέκα ομάδες των δύο ατόμων και μία ομάδα των τριών ατόμων. Στην αρχή του μαθήματος ζητήθηκε από τις ομάδες να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας χωρίς βοήθεια και μετά ακολούθησε συζήτηση για τις απαντήσεις.

Σαν γενικό σχόλιο να αναφερθεί πως όλες οι ομάδες αγχώθηκαν στο άκουσμα πως πρέπει να συμπληρώσουν μόνες τους το φύλλο εργασίας και είχαν δυσκολίες στο να ακολουθήσουν τις οδηγίες. Ο ρόλος του δασκάλου ήταν εμψυχωτικός και καθοδηγητικός. Πολλές φορές χρειαζόταν από το δάσκαλο να κάνει απλά ανάγνωση μιας οδηγίας χωρίς κάποιο επιπλέον σχόλιο και έτσι η ομάδα συνέχιζε να εργάζεται. Επιπρόσθετα, κάποιες ομάδες ζητούσαν επιβεβαίωση από τον δάσκαλο για τα αποτελέσματά τους για να συνεχίσουν. Σίγουρα υπήρχε και το άγχος της αξιολόγησης των απαντήσεων τους αλλά ήταν ελάχιστο. Εδώ, λοιπόν, συναντάμε την αδυναμία των μαθητών να εκτελέσουν μόνοι τους μαθηματικές διεργασίες, να τεκμηριώνουν γραπτώς τις απαντήσεις τους και να διατυπώνουν γραπτώς το συλλογισμό τους.

Στην πρώτη οδηγία οι ομάδες καλέστηκαν να σχεδιάσουν δύο ευθείες με κοινή αρχή. Να σημειωθεί πως όλες οι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν σωστά την οδηγία. Έπειτα τους έγινε ερώτηση σχετικά με τα σχήματα που παρατηρούν.

- Πέντε ομάδες παρατήρησαν διάφορα ευθύγραμμα σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, τραπέζιο, μισό τετράγωνο).
- Τρεις ομάδες παρατήρησαν γωνία (οι δύο εκ των οποίων ορθή γωνία).
- Τρεις ομάδες παρατήρησαν δύο γραμμές.

Στην δεύτερη οδηγία οι ομάδες καλέστηκαν να κόψουν το χαρτί πάνω στις ημιευθείες. Όλες οι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν σωστά την οδηγία όμως αρκετές ζήτησαν την βοήθεια του δασκάλου ή την επιβεβαίωση του. Έπειτα τους γίνεται ερώτηση σχετικά με τα σχήματα που παρατηρούν.

- Οκτώ ομάδες παρατήρησαν ευθύγραμμα σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, τραπέζιο, εξάγωνο, τετράπλευρο ή σχήμα που δεν γνωρίζω).

- Δύο ομάδες παρατήρησαν ένα ευθύγραμμο σχήμα και μία «φιγούρα» (ψηλό σκαλί και κεφάλι δεινόσαυρου).
- Μία ομάδα παρατήρησε ένα ευθύγραμμο σχήμα (ορθογώνιο) και μία ορθή γωνία.

Στην τρίτη οδηγία οι ομάδες καλέστηκαν να σχεδιάσουν δύο αντικείμενες ημιευθείες. Να σημειωθεί πως όλες οι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν σωστά την οδηγία. Έπειτα τους έγινε ερώτηση σχετικά με τα σχήματα που παρατηρούν.

- Πέντε ομάδες παρατήρησαν μία ευθεία.
- Τρεις ομάδες παρατήρησαν δυο αντικείμενες ημιευθείες.
- Μία ομάδα παρατήρησε μία φιγούρα (Γράμμα Ι).
- Μία ομάδα παρατήρησε μία γωνία 180^o.
- Μία ομάδα παρατήρησε δύο ορθογώνια ή μία ευθεία γραμμή.

Στην τέταρτη οδηγία οι ομάδες καλέστηκαν να κόψουν το χαρτί πάνω στις ημιευθείες. Να σημειωθεί πως όλες οι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν σωστά την οδηγία. Έπειτα τους έγινε ερώτηση σχετικά με τα σχήματα που παρατηρούν.

- Οκτώ ομάδες παρατήρησαν δύο ορθογώνια.
- Μία ομάδα παρατήρησε ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο.
- Μία ομάδα παρατήρησε ένα ορθογώνιο και μία λωρίδα.
- Μία ομάδα παρατήρησε ένα ορθογώνιο και μία ευθεία.

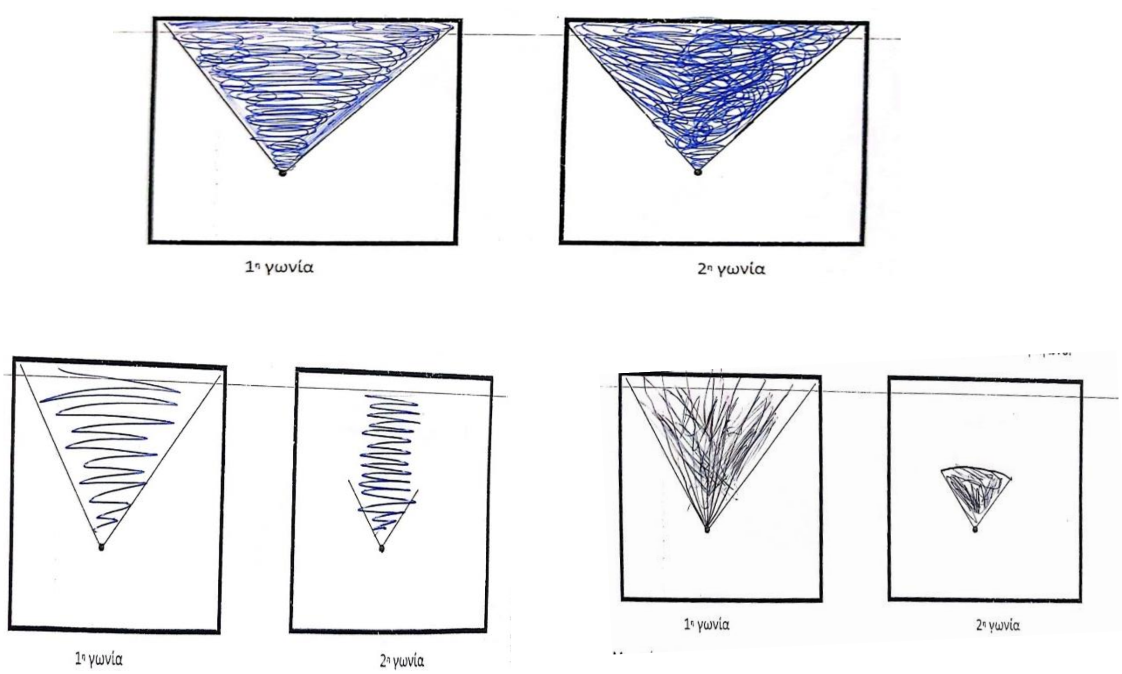
Μετά από συζήτηση που ακολούθησε στην τάξη αλλά και με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φάνηκε η δυσκολία των μαθητών να αντιμετωπίσουν την γωνία σαν σχήμα. Έπειτα, υπήρξε η δυσκολία να κατανοήσουν πως ο χώρος ανάμεσα στις ημιευθείες ανήκει στο σχήμα και δεν είναι κενός. Επιπρόσθετα, υπήρχε δυσπιστία στο ότι η ευθεία γωνία είναι γωνία παρόλο που κάποιοι ανέφεραν πως την είχαν συναντήσει στο δημοτικό. Γνώριζαν μόνο το μέγεθος της (180^o) αλλά και πάλι δεν την θεωρούσαν γωνία. Τέλος, χρειάστηκε αρκετή συζήτηση για να κατανοήσουν την μη κυρτή γωνία καθώς και το γεγονός ότι η περιοχή της γωνίας δεν εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της.

7.3. Ανάλυση αποτελεσμάτων 2ης δραστηριότητας

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα όπως αναφέρθηκε στον σχεδιασμό της ήταν ομαδική όμως το φύλλο εργασίας που μοντελοποιούσε το πρόβλημα συμπληρωνόταν ατομικά από καθέναν από τους είκοσι τρεις μαθητές του δείγματος.

Στην πρώτη ερώτηση που είχε δυο γωνίες διαφορετικού ανοίγματος σε προσανατολισμό διαφορετικό από αυτό του πρωτοτυπικού σχήματος (οριζόντια η μία πλευρά) όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά. Να σημειωθεί πως οι μαθητές δεν παρουσίασαν καμία δυσκολία σε αυτό το κομμάτι της ομαδικής δραστηριότητας ούτε με τα σχοινιά ούτε με το σώμα και τους φάνηκε κάτι το πολύ οικείο.

Στην δεύτερη ερώτηση που έπρεπε να ορίσουν την περιοχή της γωνίας δεκαεπτά μαθητές ζωγράφισαν σωστά την περιοχή (Εικόνα 26 πάνω), τέσσερις μαθητές ζωγράφισαν την περιοχή και εκτός της ορατής περιοχής της κυρτής γωνίας αλλά με τον τρόπο που βλέπουμε στην Εικόνα 26 (κάτω αριστερά) και ένας μαθητής ζωγράφισε την περιοχή εντός της ορατής περιοχής της κυρτής γωνίας με τον τρόπο που βλέπουμε στην Εικόνα 26 (κάτω δεξιά). Όλοι οι μαθητές με εξαίρεση έναν απάντησαν σωστά στο ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες. Ο μαθητής που απάντησε λάθος είναι ένας από τους τέσσερις προαναφερθέντες.

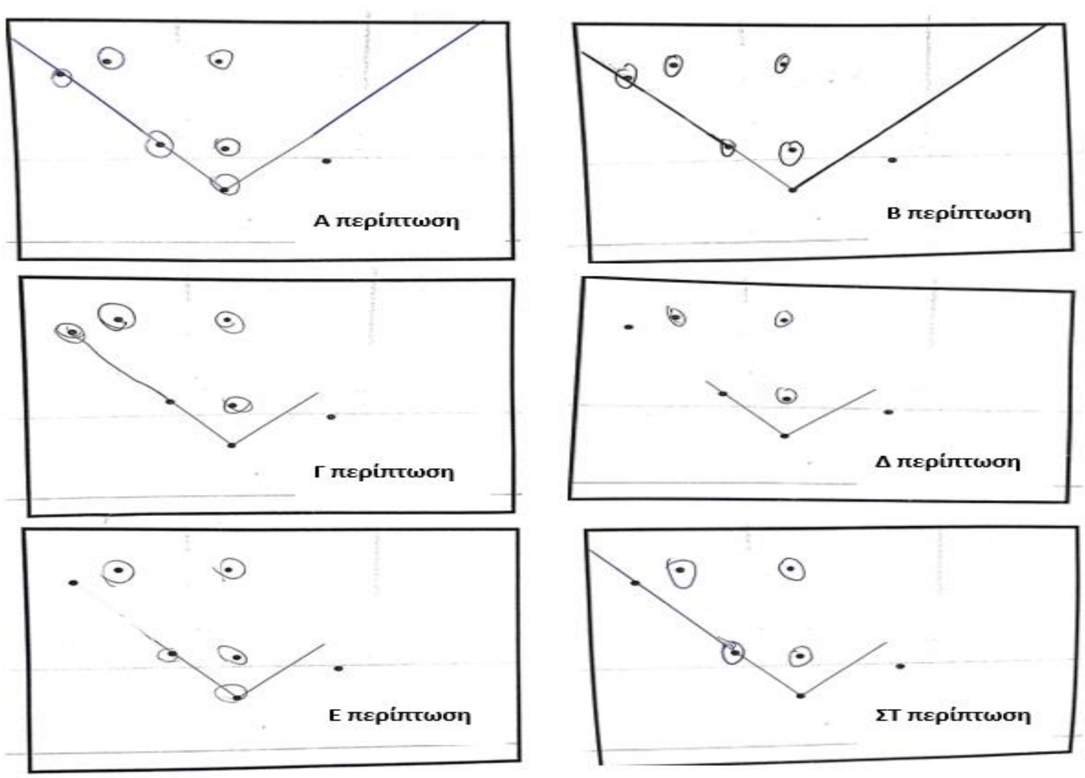


Εικόνα 25 Απαντήσεις μαθητών

Στην τρίτη ερώτηση είκοσι ένας μαθητές απάντησαν σωστά δηλαδή πως «όσο πιο μεγάλο άνοιγμα σχηματίζουν οι πλευρές μιας γωνίας τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνία», ενώ δύο απάντησαν λάθος δηλαδή πως «όσο πιο μεγάλο άνοιγμα σχηματίζουν οι πλευρές μιας γωνίας τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνία». Αξίζει να αναφερθεί πως οι δύο μαθητές που απάντησαν λάθος είχαν ζωγραφίσει και λάθος την περιοχή στην ερώτηση 2.

Στην τέταρτη ερώτηση σχετικά με τα σημεία που ανήκουν στην γωνία οι απαντήσεις είναι έξι διαφορετικές και φαίνονται στην Εικόνα 27.

- Α Περίπτωση: Απάντησαν επτά μαθητές.
- Β Περίπτωση: Απάντησαν έξι μαθητές.
- Γ Περίπτωση: Απάντησαν πέντε μαθητές.
- Δ Περίπτωση: Απάντησαν τρεις μαθητές.
- Ε Περίπτωση: Απάντησε ένας μαθητής.
- ΣΤ Περίπτωση: Απάντησε ένας μαθητής.



Εικόνα 26 Απαντήσεις μαθητών

Κανένας μαθητής δεν κύκλωσε το σημείο που ανήκει στην μη κυρτή γωνία. Όλοι οι μαθητές κύκλωσαν τα σημεία που είναι εντός της περιοχής που ορίζει η κυρτή γωνία. Δεκαπέντε μαθητές δεν κύκλωσαν την κορυφή σαν σημείο της γωνίας. Επίσης, το σημείο που ήταν (ορατά) πάνω στην ημιευθεία δεν το κύκλωσαν οκτώ άτομα, ενώ αυτό που ήταν (νοητά) πάνω στην ημιευθεία δεν το κύκλωσαν τέσσερα άτομα.

Φαίνεται ότι η παρανόηση με την περιοχή σχετικά με το αν ο χώρος ανάμεσα στις πλευρές της γωνίας έχει λυθεί. Τα λάθη που έγιναν σχετικά με την κορυφή φαίνεται πως έχουν να κάνουν πιο πολύ με την φύση του προβλήματος που μοντελοποιήθηκε όπου η κορυφή ήταν το ραντάρ επομένως δεν συζητήθηκε καθόλου στην δραστηριότητα. Τα λάθη που έγιναν σχετικά με τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ημιευθεία (ορατά ή νοητά) ίσως σχετίζονται με την παρανόηση με το μήκος των πλευρών ίσως όμως και πάλι με την φύση του προβλήματος γιατί τα χέρια του μαθητή στην δραστηριότητα ήταν το ίδιο το ραντάρ και αντίστοιχα τα σχοινιά δεν ακουμπούσαν πάνω σε κάποιο μαθητή.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές ήταν ενθουσιασμένοι με την δραστηριότητα, τους φάνηκε διασκεδαστική και ήθελαν να συμμετέχουν όλοι. Επίσης, δεν δυσανασχέτησαν με την συμπλήρωση του φύλλου εργασίας όπως την προηγούμενη φορά και απαντούσαν αρκετά γρήγορα στις ερωτήσεις και χωρίς να ζητήσουν βοήθεια.

7.4. Ανάλυση αποτελεσμάτων 3ης δραστηριότητας

Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές χωρίστηκαν σε δέκα ομάδες των δύο ατόμων και μία ομάδα των τριών ατόμων. Η δραστηριότητα έλαβε χώρα στην σχολική αίθουσα με την χρήση βιντεοπροβολέα οπότε ο δάσκαλος έκανε χρήση της εφαρμογής Geogebra και οι ομάδες απαντούσαν στο φύλλο εργασίας.

Οι μαθητές αρχικά παρακολούθησαν το βίντεο (μικρής διάρκειας) με την λειτουργία ενός ραντάρ ενός υποβρυχίου και κάποια στιγμή είδαν την οθόνη ανίχνευσης του ραντάρ. Έπειτα, ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν στην πρώτη ερώτηση «τι βλέπουν στην οθόνη ενός ραντάρ». Προφορικά δόθηκε η οδηγία να απαντήσουν με όσο πιο μαθηματικό τρόπο μπορούν. Όλες οι ομάδες απάντησαν σε αυτήν την ερώτηση. Αναφέρθηκαν σε κύκλο, σε ημιευθεία, στην περιστροφή και μία ομάδα αναφέρθηκε στις μοίρες. Πέντε ομάδες χρησιμοποίησαν την λέξη ημιευθεία, μία την λέξη ευθεία, μία την λέξη ακτίνα, τρεις την λέξη γραμμή και μία δεν έκανε σχετική αναφορά. Εννέα ομάδες αναφέρθηκαν στην κίνηση της ημιευθείας. Πιο συγκεκριμένα πέντε ομάδες χρησιμοποίησαν το ρήμα περιστρέφεται, μία ομάδα το ρήμα περιτριγυρίζει, δύο ομάδες την φράση κάνει κύκλους και μία ομάδα το ρήμα γυρνά. Έξι ομάδες αναφέρθηκαν και στην λειτουργία του ραντάρ.

Στην δεύτερη ερώτηση σχετικά με το τι σχήμα μπορεί να περιγράψει την περιοχή που καλύπτει το ραντάρ :

- εννέα ομάδες απάντησαν γωνία
- μία ομάδα απάντησε γωνία μαζί με την περιοχή της
- μία ομάδα απάντησε γωνία ή τρίγωνο.

Είναι εμφανές πλέον ότι οι μαθητές έχουν καταλάβει πως η γωνία είναι ένα σχήμα και μάλιστα ένας γωνιακός τομέας και όχι δύο ημιευθείες με κοινή γραμμή.

Στην τρίτη ερώτηση σχετικά με το πως προέκυψε το σχήμα στο οποίο αναφερόμαστε στην ερώτηση δύο :

- Τέσσερις ομάδες απάντησαν με περιστροφή της ημιευθείας.
- Έξι ομάδες απάντησαν με κίνηση ή μετακίνηση της ευθείας/ ημιευθείας/ ευθ.τμήματος/ γραμμής/ ραντάρ.
- Μία ομάδα απάντησε από το ραντάρ.

Στην τέταρτη, στην πέμπτη και στην έκτη ερώτηση όλες οι ομάδες απάντησαν σωστά και μάλιστα πολύ γρήγορα. Αντιλήφθηκαν ότι τα σχήματα που περιγράφουν οι περιοχές είναι γωνίες και τις σύγκριναν σωστά. Τρεις ομάδες αιτιολόγησαν την σύγκριση που έκαναν. Η μία είπε πως η περιοχή Βαθύλακκος- Αλεξανδρούπολη είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μεγαλύτερη κυρτή γωνία, η δεύτερη γιατί η περιστροφή είναι μεγαλύτερη και η τρίτη γιατί έχει μεγαλύτερο άνοιγμα.

Παρατηρούμε πως οι μαθητές σε αυτό το σημείο άρχισαν να αισθητοποιούν την έννοια της γωνίας και τον πολύπλευρο χαρακτήρα της. Επίσης, διακρίνουν γωνίες σε διαφορετικούς προσανατολισμούς. Ακόμη, το μήκος των πλευρών φαίνεται να μην τους επηρεάζει και τόσο. Επίσης, σε αυτήν την εφαρμογή άρχισαν να αποκτούν την αίσθηση πως το μέτρο της γωνίας πέρα από άνοιγμα είναι και μήκος τόξου. Τέλος, έχουν αρχίσει να συλλογίζονται πιο μαθηματικά και να μπορούν να διατυπώσουν τα επιχειρήματα τους προφορικά και γραπτά.

7.5. Ανάλυση αποτελεσμάτων 4ης δραστηριότητας

Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές αρχικά είδαν μια σύντομη βιογραφία της ζωής και του έργου του Clairaut. Έδειξαν αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον και φάνηκε από τις ερωτήσεις που έκαναν. Τους έκανε εντύπωση το γεγονός ότι στην ίδια ηλικία με αυτούς κατάφερε να κάνει σημαντικές ανακαλύψεις σε σχέση με τα μαθηματικά αλλά και το γεγονός ότι είχε είκοσι αδέρφια. Έγινε μια μικρή αναφορά και στον Ευκλείδη του οποίου το όνομα οι περισσότεροι το είχαν ακούσει. Επίσης, μέσα στην βιογραφία τονίστηκε ότι ο Clairaut έγραψε το βιβλίο του για να διδάξει γεωμετρία μέσω προβλημάτων όπως για παράδειγμα μέσα από την προσπάθεια μέτρησης της γης. Εκεί έγινε αναφορά στο επάγγελμα των τοπογράφων που στην αρχαιότητα λεγόντουσαν γεωδαίτες και έγινε συζήτηση για το επάγγελμα αυτό γιατί κάποιοι μαθητές δεν γνώριζαν.

Στην συνέχεια τους παρουσιάστηκε το πρόβλημα κατασκευής ίσης γωνίας με μία δοσμένη αρχική και η λύση του δινόταν μέσα από μια φωτογραφία. Σε αυτό το σημείο οι μαθητές ερωτήθηκαν πως θα μπορούσαν να φτιάξουν το εργαλείο κινούμενης λοξότμησης και γρήγορα κάποιοι από αυτούς απάντησαν αν ενώσουμε δυο χάρακες ή δύο ορθογώνια. Έπειτα τους μοιράστηκε ένα εργαλείο κινούμενης λοξότμησης φτιαγμένο από χαρτόνι και διπλόκαρφο και τους ζητήθηκε να το χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν μια δική τους γωνία ίση με τη γωνία στο σχήμα που παρουσίαζε το πρόβλημα του Clairaut. Αξίζει να σημειωθεί πως ελάχιστοι μαθητές ρώτησαν πως να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο. Φάνηκε πως για αυτούς ήταν μια διαδικασία πολύ εύκολη. Το ίδιο εύκολο ήταν να συγκρίνουν γωνίες με το εργαλείο λοξότμησης.

Η παρατήρηση που πρέπει να γίνει με βάση την γωνία που κατασκεύασαν οι μαθητές, είναι πως στην πλειοψηφία τους (δεκατέσσερις από τους είκοσι τρεις) σχεδίασαν με το εργαλείο λοξότμησης γωνία ίση σε μέτρο χωρίς να έχουν σχεδιάσει ίσες πλευρές κάτι που δεν είχε παρατηρηθεί σε τέτοιο ποσοστό μέχρι τώρα. Μάλιστα τέσσερις από αυτούς σχεδίασαν την ίση γωνία σε διαφορετικό προσανατολισμό από εκείνον της αρχικής.

Στην πορεία συζητήθηκε το πρόβλημα ακρίβειας που υπάρχει στην χρήση του εργαλείου που ήταν εύκολα κατανοητή από όλους και έτσι προχωρήσαμε στην άλλη μέθοδο σύγκρισης που είναι αυτή με την χρήση διάφανου χαρτιού. Το εντυπωσιακό ήταν πως και εδώ οι μαθητές δεν ζήτησαν κάποια διευκρίνηση.

Στην επόμενη ερώτηση που έπρεπε να συγκρίνουν δύο γωνίες διαφορετικού προσανατολισμού με όποιο τρόπο θέλουν, όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά. Έντεκα μαθητές επέλεξαν χαρτί, εννέα μαθητές το εργαλείο και τρεις δεν έγραψαν τον τρόπο που επέλεξαν. Τέσσερις μαθητές που διάλεξαν χαρτί αιτιολόγησαν πως επέλεξαν αυτή την μέθοδο για μεγαλύτερη ακρίβεια. Να σημειωθεί πως σε διάλογο με τρεις από αυτούς παραδέχθηκαν πως η μέθοδος με το εργαλείο είναι πολύ ευκολότερη αλλά ήθελαν να είναι σίγουροι πως δεν θα κάνουν λάθος. Επιπλέον, πρέπει να αναφερθεί πως ένας μαθητής που επέλεξε εργαλείο είχε στο φύλλο εργαλείο σημειωμένες και τις μοίρες της γωνίας που σημαίνει ότι έκανε και χρήση μοιρογνωμονίου. Επιπρόσθετα να αναφερθεί πως ένας μαθητής προς στο τέλος του μαθήματος ρώτησε τον δάσκαλο γιατί δεν χρησιμοποιούμε μοιρογνωμόνιο. Η απάντηση του δασκάλου ήταν για να γνωρίσουμε και άλλες μεθόδους και επίσης πως όπως αναφέρθηκε και στην βιογραφία του Clairaut τα μαθηματικά δεν είναι μόνο μετρήσεις και αριθμοί αλλά και άλλες μέθοδοι και τρόποι συλλογισμού.

Στην πορεία έγινε σύνδεση του εργαλείου κινούμενης λοξότμησης με γωνιόμετρα όπως το «φαλτσόμετρο» που χρησιμοποιείται σε διάφορες κατασκευές και σε επαγγέλματα όπως οι ξυλουργοί, οι αλουμινάδες κλπ. Οι μαθητές ρωτήθηκαν για την διαφορά του εργαλείου κινούμενης λοξότμησης από το «φαλτσόμετρο» που είδαν στο βίντεο. Απάντησαν πως η διαφορά στο συγκεκριμένο «φαλτσόμετρο» είναι πως είχε ένα «πράγμα για να κλειδώνει» και έτσι να υπάρχει ακρίβεια στις κατασκευές. Μέσα από αυτό, λοιπόν, είδαμε την εξέλιξη στα εργαλεία και στις μεθόδους.

Ένας διάλογος ο οποίος αξίζει να αναφερθεί είναι πως αρχικά ένας μαθητής ξαναρώτησε το όνομα του καινούριου εργαλείου δηλαδή του φαλτσόμετρου και στο άκουσμα του για δεύτερη φορά αναφέρθηκε στο φάλτσο που κάνει η μπάλα στο ποδόσφαιρο. Ο δάσκαλος είπε πως και το φάλτσο είναι μια γωνία και εκεί πάνω κάποιοι μαθητές είπαν πως όχι αφού δεν κάνει κάποια μύτη ή δεν έχει σχήμα με γραμμές. Ήταν μια ωραία αφορμή για να συζητηθεί πως οι γωνίες στην «πραγματική» ζωή δεν μπορεί να είναι οπτικά όπως οι αναπαραστάσεις γωνιών στα μαθηματικά και πως στην προκειμένη η στροφή της μπάλας είναι μια γωνία.

Στην πορεία ακολούθησε η κατασκευή της γωνίας του θρανίου τους με το εργαλείο κινούμενης λοξότμησης. Η ερώτηση που έκαναν αρκετοί μαθητές είναι ποια γωνία να επιλέξουν και η απάντηση που τους δόθηκε είναι όποια θέλουν. Έτσι σχεδίασαν ορθές γωνίες σε διάφορους προσανατολισμούς. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές είπαν πως το θρανίο δεν έχει γωνία γιατί οι άκρες του κάνουν μια καμπύλη την οποία και έδειχναν με το χέρι. Η ερώτηση αυτή ήταν μια ακόμη αφορμή για να συζητηθεί πως είναι οι γωνίες στην «πραγματική» ζωή.

Τέλος, οι μαθητές καλέστηκαν να απαντήσουν τι σημαίνει τελικά ότι δυο γωνίες είναι ίσες. Οι απαντήσεις που έδωσαν είναι οι εξής:

- Έντεκα μαθητές απάντησαν ότι έχουν το ίδιο άνοιγμα.
- Τρεις μαθητές απάντησαν ότι το άνοιγμα των πλευρών τους είναι ίσο.
- Τέσσερις μαθητές απάντησαν ότι έχουν τον ίδιο/ίσο αριθμό μοιρών.
- Ένας μαθητής απάντησε ότι οι δύο γωνίες καλύπτουν την ίδια επιφάνεια.
- Τέσσερις μαθητές δεν απάντησαν κάτι.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως τέσσερις μαθητές από τους έντεκα που μίλησαν για ίδιο άνοιγμα ανέφεραν δηλαδή ίδιες μοίρες ή είχαν την λέξη μοίρες μέσα σε παρένθεση. Συνεπώς, αρκετοί μαθητές κατανόησαν μετά από αυτή την δραστηριότητα πως το μέγεθος μια γωνίας είναι το άνοιγμα της αλλά το έχουν ήδη ταυτίσει με την μονάδα μέτρησης της γωνίας που είναι οι μοίρες και παρόλο που δεν έχει γίνει αναφορά από τον δάσκαλο φέτος κάνουν χρήση του πολύ εύκολα.

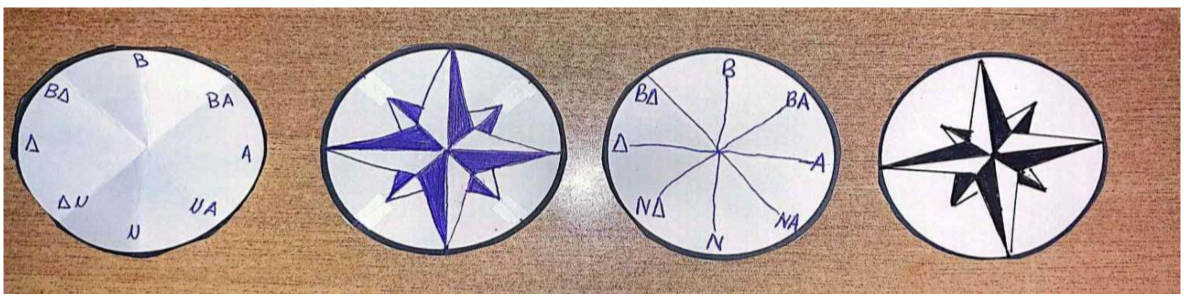
Αυτό που αξίζει να αναφερθεί είναι πως αρκετοί μαθητές ρώτησαν αν μπορούσαν να κρατήσουν τα εργαλεία λοξότμησης και πως θα τα έφερναν και σε άλλα μαθήματα μαζί τους.

7.6. Ανάλυση αποτελεσμάτων 5ης δραστηριότητας

Σε αυτήν την δραστηριότητα οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά. Τους δόθηκε το φύλλο εργασίας και ένα χάρτινος κυκλικός δίσκος τυχαίας ακτίνας.

Αρχικά διάβασε το κείμενο ένας μαθητής δυνατά στην τάξη και πολύ γρήγορα κατάλαβαν ότι το τριαντάφυλλο του ανέμου είναι μια πυξίδα. Θυμήθηκαν μαζί με τον δάσκαλο ποια είναι τα σημεία του ορίζοντα που είχαν συναντήσει και στο μάθημα της γεωγραφίας.

Έπειτα ακολούθησε η κατασκευή της πυξίδας. Δεν αντιμετώπισε κάποιος μαθητής δυσκολία στην κατασκευή της πυξίδας. Κάποιοι ζωγράφισαν και το τριαντάφυλλο του ανέμου. Επίσης, κάποιοι μαθητές ανέφεραν πως δεν μπορούμε να διπλώσουμε ένα χαρτί πάνω από επτά φορές οπότε ελάχιστοι δίπλωσαν παραπάνω φορές μήπως το πετύχουν.



Εικόνα 27 Πυξίδες μαθητών

Στην πορεία ακολούθησε η ερώτηση για τον τρόπο κατασκευής μοιρογνωμονίου. Εδώ βοήθησε η πρότερη γνώση που είχαν κάποιοι πως η πλήρης γωνία είναι 360^o και η γνώση του τι είναι το μοιρογνωμόνιο. Οπότε οι απαντήσεις ήταν οι εξής :

- Δεκατρείς μαθητές απάντησαν πως συνεχίζουν το δίπλωμα μέχρι να χωριστεί ο κύκλος σε 360 μέρη.
- Έξι μαθητές είπαν πως θα χώριζαν/ δίπλωναν/ έκοβαν τον κύκλο στην μέση (ημικύκλιο) και έπειτα θα τον χώριζαν σε 180 μέρη.
- Τέσσερις μαθητές είπαν πως θα χώριζαν/ δίπλωναν τον κύκλο σε 360 μέρη και θα τον έκοβαν στην μέση (ημικύκλιο).
- Τρεις μαθητές δεν απάντησαν.

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα παρατηρούμε πως ενώ την πλήρη γωνία δεν την αναγνώριζαν οι μαθητές σαν γωνία, όταν ήρθε η ώρα να αναφερθούμε στις μοίρες γνώριζαν πως είναι 360^o. Να τονιστεί εδώ πως έλεγαν πως ο κύκλος έχει 360^o.

Συζητώντας τις απαντήσεις κάποιοι θεώρησαν πως συνεχίζουμε το δίπλωμα μέχρι να χωριστεί σε 360 μέρη. Ένας μαθητής τους απάντησε πως δεν γίνεται και του το εξήγησε ως εξής :

- 1 δίπλωμα 2 μέρη.
- 2 διπλώματα 4 μέρη.
- 3 διπλώματα 8 μέρη.
- 4 διπλώματα 16 μέρη.
- 5 διπλώματα 32 μέρη.
- 6 διπλώματα 64 μέρη.
- 7 διπλώματα 128 μέρη.
- 8 διπλώματα 256 μέρη.
- 9 διπλώματα 512 μέρη.

Πάνω σε αυτόν τον συλλογισμό έγινε μια σχετική συζήτηση. Βέβαια κάποιοι άλλοι απάντησαν πως δεν γίνεται με βάση αυτό που αναφέρθηκε και παραπάνω για το δίπλωμα του χαρτιού και όχι με κάποιο μαθηματικό συλλογισμό.

Δεν υπήρξε η απορία από κάποιον μαθητή γιατί το μοιρογνωμόνιο έχει 180^o, οπότε ο δάσκαλος τους έθεσε αυτό το ερώτημα στο οποίο η μοναδική απάντηση ήταν γιατί ο κύκλος είναι 360^o άρα το ημικύκλιο θα είναι 180^o. Τότε ο δάσκαλος ρώτησε γιατί επιλέξαμε όμως να χωρίσουμε τον κύκλο σε 360 μέρη και όχι σε κάποιον άλλο αριθμό. Δεν υπήρξε κάποια απάντηση οπότε και έγινε αναφορά στο εξηκονταδικό σύστημα.

Έπειτα, έγινε συσχέτιση της πλήρους γωνίας, της ευθείας γωνιάς, της ορθής γωνίας και της μηδενικής γωνίας με το μέτρο τους σε μοίρες. Οι μαθητές δεν παρουσίασαν καμία δυσκολία. Η μόνη ερώτηση που έγινε ήταν σχετικά με το πως θα τις ξεχωρίσουν σε ένα σχήμα σε ένα τυχόν τεστ.

7.7. Ανάλυση αποτελεσμάτων 6ης δραστηριότητας

Ανάλυση πρώτης φάσης (συμπλήρωση «φύλλου εργασίας μέρος Α» στην σχολική αίθουσα)

Στην πρώτη φάση οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες δύο ατόμων. Αφού ο δάσκαλος έθεσε στους μαθητές το πρόβλημα μέτρησης της απρόσιτης απόστασης που είχε αντιμετωπίσει ο τοπογράφος Mallet, τους ζήτησε με την βοήθεια των εικόνων να προσπαθήσουν να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας που οδηγεί στην λύση του προβλήματος.

Σε όλη την διάρκεια της διαδικασίας η μόνη βοήθεια που ζήτησαν οι ομάδες ήταν σε σχέση με κάποια πράγματα που δεν φαινόντουσαν καλά στις εικόνες. Επίσης, κάποιοι μαθητές ρώτησαν το όνομα του οργάνου μέτρησης, δηλαδή του γραφόμετρου για να το χρησιμοποιήσουν στις απαντήσεις τους.

Στις ερωτήσεις σε σχέση με τις μετρήσεις όλες οι ομάδες τα πήγαν αρκετά καλά. Με εξαίρεση μία ομάδα που έγραψαν ότι ο τοπογράφος στέκεται απέναντι από το λιμάνι, οι υπόλοιπες ομάδες προσπάθησαν να εξηγήσουν τη θέση του τοπογράφου διατυπώνοντας μαθηματικούς συλλογισμούς. Οι απαντήσεις είναι αρκετά διαφορετικές για να κατηγοριοποιηθούν. Οι περισσότεροι απάντησαν πως στέκεται στο σημείο Β ή στην κορυφή μιας γωνίας. Κάποιοι είπαν σε μια απόσταση από τα δύο κάστρα περίπου στο κέντρο. Επιπρόσθετα, σε σχέση με το τι μετρά οι απαντήσεις ήταν ποικίλες όπως την απόσταση AC, δύο αποστάσεις, το εμβαδόν ενός οικοπέδου, στεριά και θάλασσα και ένα λιμάνι.

Το γραφόμετρο το παρομοίασαν όλες οι ομάδες με μοιρογνωμόνιο. Επίσης, όλες οι ομάδες ανέφεραν τον λόγο χρήσης του αλλά τον τρόπο χρήσης του, που ζητούσε η ερώτηση, τον ανέφεραν μόνο τέσσερις ομάδες. Στον λόγο χρήσης του γράφουν για να μετρήσουμε αποστάσεις, για να μετρήσουμε γωνίες ή για να μετρήσουμε μοίρες. Σχετικά με τον τρόπο η μία ομάδα απάντησε πως «φαίνεται να είναι σχεδιασμένο ώστε να δημιουργεί μια γωνία με το μέταλλο», η δεύτερη πως «έχει ένα μοιρογνωμόνιο που το κινεί και ένα ξύλο που βρίσκει τις μοίρες », η τρίτη «πως λειτουργεί σαν μοιρογνωμόνιο, διότι υπάρχουν δυο νοητές γραμμές στις οποίες τοποθετείται το όργανο και μας δείχνει την απόσταση με το να κινούμε την ημιευθεία (τρίτη εικόνα)» και η τέταρτη μοιάζει με μοιρογνωμόνιο που για να μετρήσεις πρέπει να ανοίξεις τις ημιευθείες ώστε να έχουν τις ίδιες μοίρες.

Στο ρολό χαρτιού του τοπογράφου κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις είναι «καταγράφει την γωνία με κλίμακα οπότε μοιάζει με χάρτη», «καταγράφει την γωνία $C\hat{B}A$ και το άνοιγμα της» και «περιγράφει την περιοχή αλλά και τη γωνία που μετράει ο τοπογράφος».

Στις ερωτήσεις σε σχέση με τη γωνία αντίγραφο αυτό που αξίζει να σχολιαστεί είναι πως έξι ομάδες κατάφεραν να γράψουν την σειρά των βημάτων για τον σχεδιασμό της γωνίας αντίγραφο. Οι ομάδες αυτές σίγουρα έχουν καταλάβει πως δύο γωνίες είναι ίσες επειδή έχουν ίσο μέτρο και όχι ίσες πλευρές.

Στην ερώτηση σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος δύο ομάδες μόνο κατάφεραν να δώσουν την σωστή απάντηση. Αυτό ήταν και αναμενόμενο γιατί αυτό είναι και το ζητούμενο της δραστηριότητας.

Ανάλυση δεύτερης φάσης (μέτρηση απρόσιτης απόστασης στον μεσοχώρο και συμπλήρωση «φύλλου εργασίας μέρος Α»)

Στην δεύτερη φάση οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες των επτά ατόμων και σε μία ομάδα των οκτώ ατόμων. Τους μοιράστηκε το φύλλο εργασίας όπου υπήρχε το πρόβλημα μέτρησης μιας «υποτιθέμενης» απρόσιτης απόστασης.

Στην αρχή της δραστηριότητας μοιράστηκαν κάποιοι ρόλοι με την βοήθεια του δασκάλου γιατί ξεκίνησαν να υπάρχουν διαφωνίες. Βέβαια το γεγονός ότι τονίστηκε ιδιαίτερα πως όλοι οι ρόλοι ήταν εξίσου σημαντικοί ώστε να υπάρχει ακρίβεια στην μέτρηση έκανε τους μαθητές να μην παραπονιούνται για τον ρόλο που τους ανατέθηκε.

Κάποιες παρατηρήσεις σε σχέση με την εκτέλεση της δραστηριότητας είναι οι παρακάτω:

- Και στις τρεις ομάδες οι μαθητές αντιμετώπισαν πιο πολλά προβλήματα σε σχέση με την συνεργασία τους παρά με την εκτέλεση της διαδικασίας όμως τελικά κατάφεραν να συνεργαστούν και σε αυτό βοήθησε ιδιαίτερα η διάκριση των ρόλων τους.

- Και οι τρεις ομάδες σχημάτισαν πολύ γρήγορα την ζητούμενη γωνία με την βοήθεια του γραφόμετρου. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα πως είχαν καταλάβει από την προηγούμενη φάση την διαδικασία αλλά και πως έχουν αισθητοποιήσει την έννοια της γωνίας.

- Και οι τρεις ομάδες κράτησαν αρχικά το γραφόμετρο «λάθος», με την οδηγία του δασκάλου πως η μία άκρη του γραφόμετρου πρέπει να στοχεύει σε ένα από τα άκρα της απόστασης που ήθελαν να μετρήσουν βρήκαν σε ικανοποιητικό χρόνο το πως θα σταθούν. Αυτό το «λάθος» πιθανότητα να οφείλεται στην κατασκευή του συγκεκριμένου γραφόμετρου που έχει δύο κινητά μέρη και όχι ένα όπως το γραφόμετρο των Diderot & d'Alembert.

- Η μία ομάδα δεν έκανε πρόχειρο σχέδιο αλλά σημείωσε τις μετρήσεις της στην αντίστοιχη θέση του φύλλου εργασίας. Η δεύτερη ομάδα έκανε πρόχειρο σχέδιο όπου η γωνία είχε ίδιο προσανατολισμό με την πραγματική γωνία (όπως και ο τοπογράφος στο φύλλο εργασίας μέρος Α). Η τρίτη ομάδα έκανε δύο σχέδια αντίγραφα. Η μία γωνία είχε ίδιο προσανατολισμό με την πραγματική και η άλλη είχε ίδιο προσανατολισμό με την πρωτοτυπική. Επομένως, κάποιοι μαθητές πιθανότατα έχουν καταλάβει ότι η ισότητα γωνιών δεν έχει να κάνει με τον προσανατολισμό τους.

- Οι δύο ομάδες είχαν μια σχετική δυσκολία στην μέτρηση με την μετροταινία γιατί είχαν σχηματίσει πλευρές γύρω στα 300 εκατοστά ενώ η μετροταινία ήταν 150 εκατοστά.

- Και οι τρεις ομάδες δεν δυσκολεύτηκαν να κάνουν τις μετατροπές για το τρίγωνο αντίγραφο με βάση την κλίμακα που τους είχε δοθεί (1:10). Απλά, σε συνεννόηση με τον δάσκαλο στις δύο ομάδες άλλαξε η κλίμακα των δύο ομάδων (1:100) για να χωράει το σχήμα στο χαρτί.

- Και οι τρεις ομάδες κατάφεραν να μετρήσουν την ζητούμενη απόσταση. Στην μέτρηση της τρίτης πλευράς και στην μετατροπή της με βάση την κλίμακα ώστε να βρεθεί η ζητούμενη απρόσιτη απόσταση, υπήρξαν μαθητές που δεν είχαν κατανοήσει τι έπρεπε να κάνουν αλλά υπήρξαν κάποιοι άλλοι μαθητές μέσα στην ομάδα τους που έδωσαν την λύση στο πρόβλημα.

- Επίσης και στις τρεις ομάδες υπήρχαν μαθητές που δεν μπορούσαν να σχεδιάσουν γωνία με δοσμένο μέτρο με το μοιρογνωμόνιο. Τα ποσοστά των μαθητών που είχαν αυτήν την ικανότητα ήταν μεγαλύτερα από την χρήση του εργαλείου κινούμενης λοξότμησης σε αντίστοιχη δραστηριότητα παρόλο που το δεύτερο το χρησιμοποιούσαν για πρώτη φορά οι μαθητές.
- Στο τέλος, έγινε μέτρηση των «υποτιθέμενων» απρόσιτων αποστάσεων για επαλήθευση του αποτελέσματος. Δύο ομάδες βρήκαν με ακρίβεια το αποτέλεσμα ενώ η τρίτη ομάδα είχε απόκλιση έντεκα εκατοστών.

Εικόνα 28 Στιγμιότυπα από μέτρηση απρόσιτης απόστασης

7.8. Ανάλυση αποτελεσμάτων 7ης δραστηριότητας

Σε αυτήν την δραστηριότητα οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά για την συμπλήρωση του φύλλου εργασίας. Αρχικά με αφορμή τον ιστορικό ναυτικό χάρτη έγιναν συζητήσεις για τις κατασκευές και την χρήση χαρτών και για ιστορικά προβλήματα που προέκυψαν από σφάλματα υπολογισμού του γεωγραφικού μήκους. Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον. Επίσης, σχετικά γρήγορα παρατήρησαν το τριαντάφυλλο του ανέμου πάνω στον ιστορικό ναυτικό χάρτη το οποίο είχαν κατασκευάσει σε προηγούμενη δραστηριότητα.

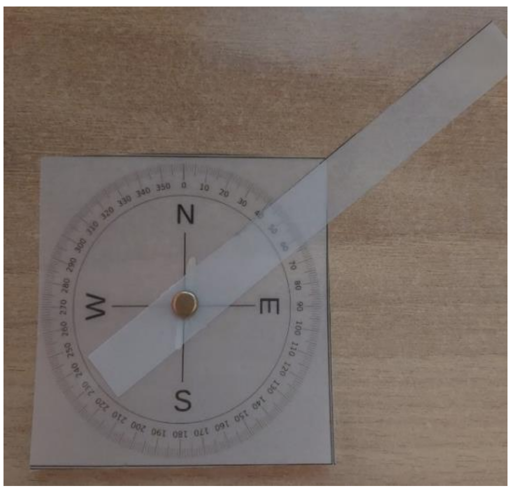
Έπειτα, έγινε σύνδεση με την σύγχρονη ζωή με το βίντεο που ένας ιστιοπλόος λέει πως σχεδιάζουμε και υπολογίζουμε την πορεία ενός σκάφους σε έναν ναυτικό χάρτη. Είδαν τα όργανα που χρησιμοποιεί (διπαράλληλο, ανεμολόγιο και κουμπάσο) και συζήτησαν με τον δάσκαλο για την κατασκευή τους. Για τον διπαράλληλο ανέφεραν πως είναι δύο χάρακες ενωμένοι στις άκρες τους, για το κουμπάσο ένας διαβήτης και για το ανεμολόγιο μια πυξίδα πάνω σε τετράγωνο με έναν χάρακα καρφωμένο στην μέση.

Στην πορεία τους μοιράστηκε το φύλλο εργασίας (που περιλάμβανε τον σύγχρονο ναυτικό χάρτη) και ένα «χάρτινο» ανεμολόγιο (Εικόνα 30). Οι μαθητές άρχισαν να περιστρέφουν τον χάρακα του ανεμολόγιου και γενικά να το επεξεργάζονται. Οι ερωτήσεις που έγιναν ήταν σχετικά με τα σημεία του ορίζοντα που ήταν στα λατινικά οπότε και δόθηκε βοήθεια από τον δάσκαλο και τους συμμαθητές τους για την ερμηνεία τους και με το αν το χαρτί που κατασκευάστηκε το ανεμολόγιο είναι το διάφανο χαρτί που χρησιμοποίησαν σε προηγούμενη δραστηριότητα. Επίσης στην χάραξη της πορείας (Εικόνα 31) φάνηκε να καταλαβαίνουν πλήρως τι κάνουν γιατί κάποιοι ρωτούσαν αν γίνεται η γραμμή που θα χαράξουν να ακουμπάει στην στεριά σχολιάζοντας πως τότε το πλοίο θα βουλιάξει.

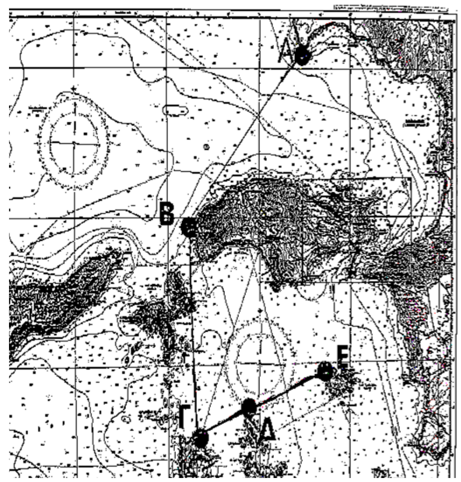
Η δυσκολία που παρατηρήθηκε από κάποιους ήταν σχετικά με την τοποθέτηση του ανεμολόγιου κάθετα. Σχετικά με την ανάγνωση των μοιρών στο ανεμολόγιο και την κατεύθυνση δεν αντιμετωπίστηκε κάποιο πρόβλημα. Έτσι, όλοι οι μαθητές κατάφεραν να συμπληρώσουν σωστά το φύλλο εργασίας με μικρές αποκλίσεις που ίσως οφείλονται και στην κατασκευή του χάρακα του ανεμολόγιου αλλά και στο μέγεθος της τελείας (σημείου) πάνω στον χάρτη.

Τέλος, η εύρεση της απόστασης έγινε ομαδικά, λόγω της κακής ανάλυσης της φωτογραφίας στην φωτοτυπία και λόγω του ότι αρκετοί μαθητές δεν είχαν μαζί τους διαβήτη. Οπότε η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε με την χρήση του διαβήτη του σχολείου και τον χάρτη που προβαλλόταν πάνω στον πίνακα με βιντεοπροβολέα. Δεν παρουσιάστηκε και εδώ κάποιο πρόβλημα.

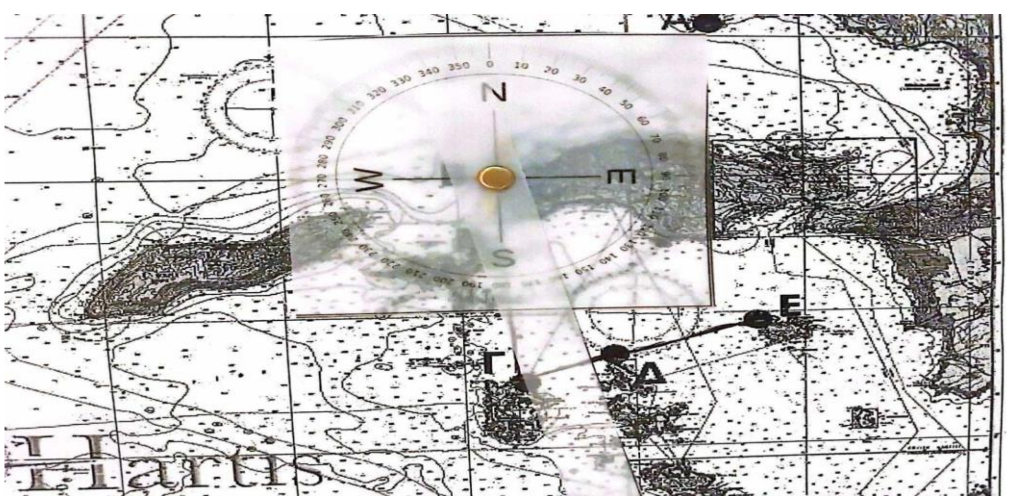
Αξίζει να αναφερθεί πως οι μαθητές ρώτησαν αν μπορούν να κρατήσουν το ανεμολόγιο και πως το κλίμα που επικρατούσε καθ’ όλη την διάρκεια της δραστηριότητας ήταν πολύ ευχάριστο.



Εικόνα 30 Ανεμολόγιο



Εικόνα 29 Χάραξη πορείας



Εικόνα 31 Υπολογισμός πορείας σε μοίρες και κατεύθυνσης

7.9. Ανάλυση αποτελεσμάτων μετά τεστ

Το μετά τεστ το συμπλήρωσε κάθε μαθητής ατομικά. Στην πρώτη ερώτηση (α μέρος) σχετικά με το τι ονομάζουμε γωνία :

- Έντεκα μαθητές απάντησαν πως η γωνία είναι μια περιοχή που σχηματίζεται από δύο ημιευθείες/γραμμές με κοινή αρχή.
- Δέκα μαθητές απάντησαν πως η γωνία είναι δύο ημιευθείες/γραμμές με κοινή αρχή.
- Ένας μαθητής απάντησε πως η γωνία είναι ένα σχήμα που έχει δύο ευθείες γραμμές που μπορούν να πάρουν πολλά σχήματα.
- Ένας μαθητής απάντησε πως η γωνία είναι μια μύτη από ένα σχήμα.

Από τα παραπάνω φαίνεται πως η παρανόηση πως η γωνία είναι μόνο μια μύτη ή μια κορυφή έχει εξαλειφθεί. Η παρανόηση πως η ευθεία είναι δύο ημιευθείες παραμένει περίπου στους μισούς αλλά οι άλλοι μισοί έχουν καταλάβει ότι πρόκειται για περιοχή.

Στην πρώτη ερώτηση (β μέρος) σχετικά με το πως σχηματίζουμε μια γωνία υπήρξε θέμα με την κατανόηση της ερώτησης για αυτό και δεν κάναμε ποσοτική ανάλυση. Οι πλειοψηφία των μαθητών κατάλαβε πως η ερώτηση ζητούσε πως να σχεδιάζουν μια γωνία στο χαρτί επομένως ξεκίνησαν να κάνουν αυτήν την περιγραφή. Όταν ο δάσκαλος διαπίστωσε την λάθος ερμηνεία τους είπε να θυμηθούν τις δραστηριότητες και να αναφέρουν (όσοι προλάβουν στο ζητούμενο χρόνο) τρόπους που μπορεί να σχηματιστεί μια γωνία. Κάποιοι μαθητές ανέφεραν με άνοιγμα των χεριών μας, με περιστροφή μιας ακτίνας/ημιευθείας και κάποιοι με σχοινιά. Φαίνεται, λοιπόν, πως ένας μέρος των μαθητών αντιλαμβάνεται την γωνία σαν πολύπλευρη έννοια (τομέα, περιστροφή, άνοιγμα).

Στην δεύτερη ερώτηση σχετικά με το να ονομάσουν την γωνία που ανήκουν δύο σημεία όλοι οι μαθητές εκτός από δύο βρήκαν ότι το σημείο Γ ανήκει στην κυρτή γωνία. Δεκαεπτά μαθητές βρήκαν ότι το σημείο Ε ανήκει στην μη κυρτή γωνία. Επομένως, η πλειοψηφία των μαθητών αναγνωρίζει ότι υπάρχει μη κυρτή γωνία καθώς επίσης και δεν αντιλαμβάνονται τον χώρο ανάμεσα στην γωνία σαν κενό.

Στην τρίτη ερώτηση σχετικά με το αν ο μοναδικός τρόπος σύγκρισης γωνιών είναι το μοιρογνωμόνιο ένας μαθητής δεν απάντησε κάτι. Οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν σωστά, δηλαδή πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι. Από αυτούς δύο ανέφεραν παραδείγματα από δραστηριότητες αλλά λανθασμένα και οι υπόλοιποι είκοσι ανέφεραν το διάφανο χαρτί, το εργαλείο λοξότμησης, γωνιόμετρα, ανεμολόγιο, πυξίδα κλπ.

Στην τέταρτη ερώτηση σχετικά με το μέτρο της γωνίας αρχικά να διευκρινιστεί ότι αρκετοί μαθητές ήθελαν να μετρήσουν με μοιρογνωμόνιο αλλά δεν τους επιτράπηκε η χρήση του.

- Στην πρώτη περίπτωση που η γωνία εμφανίζεται (ως κλίση) στο πρωτοτυπικό της σχήμα (η μία πλευρά οριζόντια), δεκαεννέα μαθητές έχουν απαντήσει σωστά ($\hat{A}>\hat{B}$), δύο πως οι γωνίες είναι ίσες ($\hat{A}=\hat{B}$), ένας πως η μικρότερη στην πραγματικότητα γωνία είναι μεγαλύτερη ($\hat{A}<\hat{B}$) και ένας πως «δεν μπορώ να ξέρω».
- Στην δεύτερη περίπτωση όπου η μικρότερη σε μέγεθος γωνία έχει μεγαλύτερες σε μήκος πλευρές αλλά και οι δύο είναι σκεπές σε ίσα σπιτάκια, έντεκα μαθητές απάντησαν σωστά, τρεις μαθητές απάντησαν ότι οι γωνίες είναι ίσες, επτά μαθητές πως αυτή με τις μεγαλύτερες σε μήκος πλευρές είναι πιο μεγάλη και ένας μαθητής απάντησε πως «δεν μπορώ να ξέρω».
- Στην τρίτη περίπτωση οι γωνίες είναι ίσες αλλά υπάρχει ένα βέλος σε καθεμία που δείχνει την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της (από σημεία που ισαπέχουν από την κορυφή της) πιο κοντά ή πιο μακριά από την κορυφή της. Δεκαεννέα μαθητές απάντησαν σωστά, τρεις μαθητές απάντησαν πως η γωνία που είχε το μεγαλύτερο βέλος για την απόσταση των πλευρών της είναι και μεγαλύτερη σε μέγεθος και ένας απάντησε «δεν μπορώ να ξέρω».

Από τα παραπάνω φαίνεται πως περίπου στο 1/3 των μαθητών παρέμεινε η παρανόηση πως το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μέγεθος των πλευρών. Η παρανόηση που φαίνεται σε μεγάλο ποσοστό να έχει λυθεί είναι πως η γωνία εξαρτάται από την απόσταση των πλευρών της ίσως γιατί έχουν κατανοήσει σε ικανοποιητικό βαθμό πως το μέτρο της γωνίας είναι το άνοιγμά της.

Στην πέμπτη ερώτηση που έχει να κάνει με τον τρόπο που χωρίζουμε μια γωνία στη μέση, οκτώ μαθητές είπαν πως θα σχεδίαζαν μια γραμμή (περίπου) στην μέση, οκτώ μαθητές θα έκαναν χρήση μοιρογνωμονίου, έξι μαθητές με το να διπλώσουμε το χαρτί στην μέση και τρεις δεν απάντησαν. Στα παραπάνω αποτελέσματα τέσσερις μαθητές έδωσαν δύο απαντήσεις (μοιρογνωμόνιο και δίπλωμα). Επομένως περίπου το 1/4 των μαθητών ανέφερε άλλον τρόπο πέραν αυτών που είχαν ως πρότερη γνώση.

Στην έκτη ερώτηση που έχει να κάνει με το ποια σχήματα πιστεύουν ότι είναι γωνίες και αν μπορούν να τις μετρήσουν

- Δεκατέσσερις μαθητές αναγνώρισαν σωστά όλα τα σχήματα σαν γωνίες και τις μέτρησαν.
- Ένας μαθητής τις μέτρησε όλες σωστά αλλά δεν αναγνώρισε την πλήρη, την ευθεία και την μηδενική σαν γωνίες.
- Ένας μαθητής τις μέτρησε όλες σωστά αλλά δεν αναγνώρισε την πλήρη και την μηδενική σαν γωνίες.
- Δύο μαθητές τις μέτρησαν όλες σωστά αλλά δεν αναγνώρισαν την μηδενική σαν γωνία.
- Ένας μαθητής δεν μέτρησε καμία γωνία αλλά τις αναγνώρισε όλες σαν γωνίες.
- Ένας μαθητής μέτρησε τα σχήματα που αναγνώρισε σαν γωνίες σωστά αλλά δεν αναγνώρισε την πλήρη και την μηδενική σαν γωνίες.
- Ένας μαθητής δεν μέτρησε την πλήρη και την μηδενική αλλά αναγνώρισε σωστά όλα τα σχήματα σαν γωνίες.
- Ένας μαθητής δεν μέτρησε την ευθεία, την πλήρη και την μηδενική αλλά δεν αναγνώρισε μόνο την πλήρη σαν γωνία.
- Ένας μαθητής μέτρησε μόνο την ορθή γωνία σωστά, στις δύο οξείες έκανε λάθος μετρήσεις, την ευθεία γωνία δεν την μέτρησε και δεν αναγνώρισε την πλήρη και την μηδενική σαν γωνίες.

Συνεπώς όλοι οι μαθητές με εξαίρεση έναν αναγνωρίσαν την ευθεία γωνία σαν γωνία και όλοι με εξαίρεση τρεις γνώριζαν το μέτρο της. Την πλήρη γωνία δεν την αναγνώρισαν σαν γωνία οκτώ μαθητές όμως παραδόξως τέσσερις από αυτούς γνώριζαν το μέτρο της. Τέλος την μηδενική γωνία δεν την αναγνώρισαν σαν γωνία έξι μαθητές όμως από αυτούς οι τέσσερις γνώριζαν το μέτρο της. Σε αυτήν την ερώτηση συναντάμε έντονα το φαινόμενο του αριθμητισμού του μεγέθους. Παρόλο που οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν κάποιες γωνίες σαν γωνίες υπολογίζουν (ή κατά βάση γνωρίζουν απ' έξω) το μέγεθος τους.

Στην έβδομη και τελευταία ερώτηση δεκαοχτώ μαθητές ανέφεραν παραδείγματα χρήσης γωνιών, ένας μαθητής έγραψε στην καθημερινή μας ζωή και τέσσερις μαθητές δεν απάντησαν καθόλου. Οι μαθητές στα παραδείγματα τους ανέφεραν «αντικείμενα» που συναντάμε τις γωνίες όπως στις σκεπές, στα τρίγωνα, στους πίνακες, στις καρέκλες, στους χάρτες. Κάποιοι μαθητές στα παραδείγματα τους ανέφεραν επαγγέλματα όπως ξυλουργοί, αλουμινάδες, μάστορες, οικοδόμοι, τοπογράφοι, ναυτικοί και πιλότοι. Άλλοι ανέφεραν στις κατασκευές αντικειμένων (πόρτα, θρανίο κλπ), στην μέτρηση (απρόσιτων) αποστάσεων, στις γεωμετρήσεις, στην μέτρηση οικοπέδων, στις κατασκευές κτιρίων, στο τριαντάφυλλο του ανέμου κ.α. Άλλοι έκαναν σύνδεση εργαλείου με επάγγελμα όπως για παράδειγμα οι ξυλουργοί το εργαλείο λοξότμησης, οι ξυλουργοί το φαλτσόμετρο, την πυξίδα ή το τριαντάφυλλο του ανέμου οι ναυτικοί και οι πιλότοι για να προσανατολίζονται κ.α. Στην συγκεκριμένη ερώτηση οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ καλά. Πάνω από τα 3/4 των μαθητών μπορούν να αναφέρουν ιστορικά ή σύγχρονα παραδείγματα χρήσης των γωνιών.

7.10. Σύγκριση αποτελεσμάτων προ και μετά τεστ

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας όπου γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της ποσοτικής ανάλυσης του προ τεστ και του μετά τεστ ως προς την έννοια της γωνίας, κάποιων παρανοήσεων σχετικά με την γωνία, μεθόδους κατασκευής, σύγκρισης και διχοτόμησης γωνιών και τέλος σχετικά με τη σύνδεση των γωνιών με πρακτικές εφαρμογές.

Πίνακας 2 Σύγκριση αποτελεσμάτων προ και μετά τεστ

	Προ τεστ	**Μετά τεστ**
Έννοια γωνίας	12/23 Κορυφή Γωνίας 5/23 Δυο γραμμές που ενώνονται 3/23 Σχήμα 3/23 Άλλες απαντήσεις	11/23 Γωνία είναι μια περιοχή που σχηματίζεται από δύο ημιευθείες/γραμμές με κοινή αρχή. 10/23 Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή. 1/23 Σχήμα 1/23 Κορυφή Γωνίας
Μη κυρτή γωνία	0/23 την αναγνώρισε	17/23 την αναγνώρισε
Περιοχή κυρτής γωνίας σαν κενός χώρος	1/23 όχι δεν είναι κενός	21/23 όχι δεν είναι κενός
Μεγαλύτερο άνοιγμα – μεγαλύτερο μέτρο γωνίας	20/23 σωστά	19/23 σωστά
Μεγαλύτερες πλευρές σε μήκος – μεγαλύτερο μέτρο γωνίας	8/23 σωστά	11/23 σωστά
Μεγαλύτερη απόσταση πλευρών – μεγαλύτερο μέτρο γωνίας	10/23 σωστά	19/23 σωστά
Μέθοδοι κατασκευής και σύγκρισης γωνιών χωρίς μοιρογνωμόνιο	0/23 ανέφεραν κάποια	22/23 ανέφεραν κάποια/ες
Μέθοδος διαίρεσης (διχοτόμησης) γωνίας χωρίς μοιρογνωμόνιο	0/23 ανέφεραν κάποια	6/23 ανέφεραν κάποια
Αναγνώριση ευθείας γωνίας	22/23 την αναγνώρισαν	23/23 την αναγνώρισαν
Αναγνώριση πλήρους γωνίας	0/23 την αναγνώρισαν	15/23 την αναγνώρισαν*
Παραδείγματα χρήσης γωνιών στην καθημερινή ζωή	8/23**	18/23

*Από τους 8 που δεν την αναγνώρισαν οι 4 ήξεραν το μέτρο της (αριθμητισμός μεγέθους)

** Δεν μετρήθηκε η απάντηση «στα μαθηματικά, στην γεωμετρία ή σε ασκήσεις»

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο οδηγηθήκαμε σε κάποια συμπεράσματα ώστε να δοθούν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα ήταν το εξής: "*Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός επιδρά στην κατανόηση τις πολύπλευρης έννοιας της γωνίας της σύγκρισης, της κατασκευής και της μέτρησης γωνιών;*".

Αναφορικά με τον τρόπο που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός στα ζητούμενα, τα συμπεράσματα είναι τα παρακάτω. Η επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων φαίνεται να είναι μονόδρομος για την κατανόηση όλων των πτυχών της πολύπλευρης έννοιας που ονομάζεται γωνία. Οι δραστηριότητες αυτές είναι καλό να περιλαμβάνουν διαφορετικά μέσα είτε χειραπτικά, είτε ψηφιακά, είτε ενσώματη διδασκαλία, είτε διδασκαλία στον μεσοχώρο ώστε να αναδειχθούν και οι στατικοί και οι δυναμικοί ορισμοί της γωνίας. Η προσπάθεια κατασκευής μιας φυσικής αξιωματικής γεωμετρίας βασισμένη σε ιστορικά κείμενα είναι κατάλληλη ώστε οι μαθητές να γνωρίσουν άλλους τρόπους σύγκρισης, κατασκευής και μέτρησης γωνιών πέρα από αυτούς με την χρήση μοιρογνωμονίου που ήδη γνωρίζουν από το δημοτικό. Επιπρόσθετα, η επιλογή της χωρικό-γεωμετρικής προβληματικής που επιλέχθηκε ως μέθοδος διδασκαλίας είναι κατάλληλη -και με βάση την βιβλιογραφία απαραίτητη- για την διδασκαλία γεωμετρίας σε μαθητές αυτής της ηλικιακής ομάδας. Ο λόγος είναι ότι συνδυάζει την φυσική γεωμετρία με την φυσική αξιωματική γεωμετρία επομένως οι μαθητές κατανοούν διαισθητικά τις έννοιες που πραγματεύεται η διδασκαλία και καταλήγουν σε συμπεράσματα στον πραγματικό κόσμο αλλά έπειτα μοντελοποιούν το πρόβλημα και με αυτόν τον τρόπο επισημοποιούν τις έννοιες δίνοντας τους κατάλληλους ορισμούς και κάνουν χρήση των συλλογισμών τους και των μαθηματικών μεθόδων.

Στην έρευνα του, ο Μιτσούλης (2009) καταλήγει επίσης στο συμπέρασμα πως τα χειραπτικά μέσα (χαρτόνι) βοηθούν στην κατανόηση της έννοιας της γωνίας ως μέγεθος γωνιακού τομέα. Στην έρευνα τους, οι Devichi & Munier (2013) καταλήγουν όπως και στην παρούσα έρευνα, στο συμπέρασμα πως τα χειραπτικά μέσα (σχοινιά) αλλά και η ενσώματη διδασκαλία (σχηματισμός γωνίας με το σώμα) βοηθούν στην κατανόηση της γωνίας ως άνοιγμα. Σχετικά με τον τρόπο που κατανοούν οι μαθητές την γωνίας ως στροφή η Λάτση (2011) στην εργασία της χρησιμοποίησε το δισδιάστατο υπολογιστικό περιβάλλον και συμπέρανε όπως και στην παρούσα εργασία πως αυτό βοήθησε ώστε η έννοια της γωνίας να γίνει αντιληπτή ως αποτέλεσμα στροφής. Διαφορετικούς τρόπους σύγκρισης και κατασκευής γωνιών αναφέρει ο Guichard (2018) στην εργασία του, χωρίς να κάνει έρευνα για τα αποτελέσματα αυτών στους μαθητές.

Αναφορικά με τον βαθμό που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός σε σχέση με την κατανόηση της γωνίας ως πολύπλευρη έννοια αναλύοντας τις δραστηριότητες θεωρούμε ότι είναι υψηλός. Σχετικά με την κατανόηση της έννοια της γωνίας ως άνοιγμα, οι μαθητές εύκολα διαπίστωναν στην δεύτερη δραστηριότητα ότι ο συμμαθητής τους ανοίγοντας τα χέρια σχηματίζει μια γωνία η οποία δείχνει μια περιοχή. Σχετικά με την κατανόηση της έννοια της γωνίας ως περιστροφή στην τρίτη δραστηριότητα πως καθώς περιστρέφεται η ακτίνα στην οθόνη ενός ραντάρ περιγράφει μια περιοχή η οποία σαν σχήμα είναι μια γωνία. Με βάση τα αποτελέσματα του μετά τεστ υπάρχει μια αβεβαιότητα γιατί δεν κατανοήθηκε σωστά η πρώτη ερώτηση (μέρος β) αλλά και πάλι τα αποτελέσματα θεωρούνται ικανοποιητικά. Επίσης στο μετά τεστ φαίνεται πως έχουν κατανοήσει σε μεγάλο βαθμό την ύπαρξη κυρτής και μη κυρτής γωνίας δηλαδή δύο τομέων αλλά συνάμα ο βαθμός κατανόησης της γωνίας σαν περιοχή είναι μέτριος μιας και οι μισοί μαθητές έγραψαν πως η γωνία είναι δύο γραμμές/ημιευθείες με κοινή αρχή. Μια προσωπική άποψη που θα ήθελα να καταθέσω είναι πως ο ορισμός της γωνίας ως μέγεθος ενός ανοίγματος που είναι και αυτός που προτείνεται στην ιστορία μαθηματικών (βλ. κεφ. 3.5.1) είναι αυτός που έχουν κατανοήσει καλύτερα. Ίσως είναι πιο κοντά στην ηλικιακή τους ομάδα ή ίσως συνδέεται πιο εύκολα με το μέτρο της γωνίας που έχουν σαν πρότερη γνώση. Επιπλέον, τα ποσοστά επιτυχίας είναι τα μέγιστα σε σχέση με αυτό που πίστευαν αρχικά οι μαθητές για τη γωνία πως είναι μια κορυφή ή μια μύτη.

Ο βαθμός που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός σε σχέση με την σύγκριση και την κατασκευή γωνιών είναι υψηλός. Οι μαθητές φάνηκε κατά την διάρκεια των δραστηριοτήτων αλλά και στο μετά τεστ πως έχουν κατανοήσει παραπάνω από έναν τρόπους στην κάθε περίπτωση.

Ο βαθμός που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός σε σχέση με την μέτρηση γωνιών είναι μέτριος. Όταν ακούν μέτρηση γωνιών η σύνδεση που κάνουν αυτόματα είναι οι μοίρες και το μοιρογνωμόνιο. Σίγουρα η μέτρηση με μοιρογνωμόνιο είναι μια σημαντική γνώση αλλά οι μαθητές την είχαν σαν πρότερη γνώση. Αυτό, πιστεύω πως τους εμπόδισε στο να κατανοήσουν το τρόπο μέτρησης γωνιών με ομοειδή μεγέθη και παράλληλα να καταλήξουν στο συμπέρασμα πως η μοίρα είναι ένα από αυτά. Αξίζει αναφερθεί πως στην 3η και στην 5η δραστηριότητα σύνδεσαν την μέτρηση της γωνίας (έστω και διαισθητικά) με το μήκος ενός τόξου με σχετική ευκολία αλλά δεν το ανακαλούν σε εργασίες μετρήσεις.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα ήταν το εξής: "*Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός επιδρά στην επίλυση των παρανοήσεων και των λαθών των μαθητών σε σχέση με τις γωνίες;*".

Ο τρόπος που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός στην επίλυση των παρανοήσεων και λαθών των μαθητών σε σχέση με τις γωνίες είναι αυτός που αναφέρθηκε και στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή η επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων, η προσπάθεια κατασκευής μιας φυσικής (αξιωματικής) γεωμετρίας και η επιλογή της χωρικό-γεωμετρικής προβληματικής. Αξίζει να τονισθεί πως η προσπάθεια κατασκευής μιας φυσικής (αξιωματικής) γεωμετρίας βοηθάει ιδιαίτερα στη επίλυσης της παρανόησης που έχει να κάνει με τον αριθμητισμό του μεγέθους της γωνίας και δεν παρουσιάζεται (ούτε επιλύνεται) σε αντίστοιχες έρευνες.

Ο βαθμός που επιδρά ο διδακτικός σχεδιασμός στην επίλυση των παρανοήσεων και λαθών των μαθητών σε σχέση με τις γωνίες είναι μέτριος προς υψηλός και το συμπέρασμα αυτό θα τεκμηριωθεί παρακάτω.

Η παρανόηση όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία ως δύο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως ένα τμήμα του επιπέδου αντιμετωπίσθηκε σε μέτριο βαθμό. Με βάση τα αποτελέσματα του μετά τεστ παρέμεινε σε λίγο λιγότερο από τους μισούς μαθητές. Να σημειωθεί πως κατά την διάρκεια της πρώτης δραστηριότητας τα αποτελέσματα ήταν μέτρια γιατί φαινόταν η δυσπιστία αρκετών μαθητών πως τα σχήματα που είχαν κόψει ήταν γωνίες.

Η παρανόηση ότι ο χώρος που περιβάλλει το σχήμα γίνεται αντιληπτός ως κενός και περιορισμένος από τις γραμμές των σχημάτων αντιμετωπίσθηκε σε υψηλό βαθμό. Και κατά την διάρκεια της δεύτερης δραστηριότητας και της μοντελοποίησης του προβλήματος και στο μετά τεστ φάνηκε πως σχεδόν όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν την παρανόηση.

Η παρανόηση πως το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της αντιμετωπίσθηκε σε μέτριο προς υψηλό βαθμό. Κατά την διάρκεια δεύτερης δραστηριότητας και της μοντελοποίησης του προβλήματος φάνηκε πως είχε λυθεί σε υψηλό βαθμό. Με βάση τα αποτελέσματα όμως του μετά τεστ το 1/3 των μαθητών εμφάνισε την παρανόηση κάτι που ίσως έχει να κάνει με την φύση και την διατύπωση της ερώτησης του μετά τεστ (βλ. Παράρτημα I ερώτηση 4). Κάτι αντίστοιχο έδειξαν και τα αποτελέσματα της έρευνας των Devichi & Munier (2013) στην οποία αναφέρουν πως η παρατηρούμενη πρόοδος των μαθητών υποδηλώνει ότι η έναρξη από μια συγκεκριμένη κατάσταση μέχρι το μοντέλο πειραματισμού στον μεσοχώρο –όπου η γωνία εμφανίζεται μεταξύ δύο άπειρων κατευθύνσεων– είναι αποτελεσματική και πως πράγματι, ορισμένοι μαθητές ξεπερνούν το εμπόδιο του μήκους των πλευρών.

Η παρανόηση πως το άνοιγμα (μέγεθος) της γωνίας εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών της με βάση τα αποτελέσματα του μετά τεστ αντιμετωπίσθηκε από τα 4/5 της τάξης δηλαδή σε υψηλό βαθμό.

Η παρανόηση ότι η μία πλευρά της γωνίας είναι οριζόντια και η κατεύθυνση της πάντα αριστερόστροφη αντιμετωπίσθηκε σε υψηλό βαθμό. Αυτό φάνηκε κατά την διάρκεια πολλών δραστηριοτήτων αλλά και του μετά τεστ που όλοι οι μαθητές αναγνώριζαν και άλλες γωνίες πέραν της γωνίας του πρωτοτυπικού σχήματος και επιπλέον σχεδίασαν οι ίδιοι ή αναγνώρισαν γωνίες διαφορετικού προσανατολισμού. Σε αντίστοιχη έρευνα (Λάτση, 2009) που χρησιμοποιήθηκε η μεταφορά της μέτρησης της ώρας σε ένα αναλογικό ρολόι, για την σύνδεση της έννοιας της γωνίας ως στροφής έθεσε περιορισμούς της στον τρόπο που γίνεται αντιληπτή η έννοια της γωνίας κυρίως όσον αφορά στον προσανατολισμό της στροφής κάτι το οποίο δεν συνέβη στην παρούσα έρευνα αφού το ραντάρ για παράδειγμα κινείται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

Σε σχέση με τις δυσκολίες των μαθητών στην προσαρμογή της γωνιακής αντίληψης στην πραγματική ζωή και συγκεκριμένα πως μια γωνία για να είναι γωνία πρέπει να είναι αιχμηρή τα αποτελέσματα ήταν μέτρια. Στην τέταρτη δραστηριότητα φάνηκε να ξεπερνούν την δυσκολία αφού αναπαρίσταναν την γωνία τους θρανίου τους (που είχε μια καμπύλη) στο χαρτί. Παρόλα αυτά στην συζήτηση που έγινε στην τάξη με αφορμή το φαλτσόμετρο (εργαλείο) για το φάλτσο που κάνει η μπάλα ήταν δύσπιστοι στο να πιστέψουν πως το φάλτσο της μπάλας ήταν μια γωνία. Παρόμοια αποτελέσματα υπήρχαν και σε σχέση με την ευθεία και την πλήρη γωνία. Την πρώτη την αντιμετωπίζουν πλέον όλοι σαν γωνία ενώ την δεύτερη το 1/3 των μαθητών δεν την αναγνωρίζει σαν γωνία παρόλο που οι μισοί από αυτούς γνωρίζουν το μέτρο της.

Η παρανόηση πως δυο γωνίες που προσανατολίζονται σε μη τυποποιημένες κατευθύνσεις ή με διαφορετικούς προσανατολισμούς είναι ίσες έχει αντιμετωπισθεί σε μέτριο προς υψηλό βαθμό. Αυτό φάνηκε σε αρκετές δραστηριότητες κατασκευής ίσων γωνιών ή σύγκρισης γωνιών όπου οι μαθητές κατασκεύαζαν γωνίες σε διαφορετικό προσανατολισμό από τον αρχικό ή σύγκριναν γωνίες με βάση μόνο το άνοιγμα/μέτρο τους (διαισθητικά ή σε μοίρες).

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα ήταν το εξής: "*Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό η χρήση της Ιστορίας Μαθηματικών επιδρά στην κατανόηση της χρήσης των γωνιών στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής;*".

Η χρήση της Ιστορίας Μαθηματικών στην διδακτική πρόταση είναι φανερό πως έχει μεγάλη επίδραση στην κατανόηση της χρήσης των γωνιών στα ιστορικά αλλά και στα σύγχρονα προβλήματα της καθημερινής ζωής και έμμεσα στην κατανόηση από μεριάς των μαθητών του λόγου που διδάσκονται τις γωνίες.

Ο τρόπος που χρησιμοποιείται η Ιστορία Μαθηματικών για να εξυπηρετήσει τον σκοπό αυτό είναι κατά κύριο λόγο μέσα από δραστηριότητες της διδασκαλίας που περιλαμβάνουν πρακτικές εφαρμογές εμπνευσμένες από αυτήν. Επίσης, σημαντικό ρόλο κατέχει και η χρήση και η κατασκευή ιστορικών οργάνων όπως το γραφόμετρο, το κινούμενο εργαλείο λοξότμησης, η πυξίδα και το ανεμολόγιο και η αναφορά στην εξέλιξη των δύο πρώτων στον θεοδόλιχο και στο φαλτσόμετρο αντίστοιχα αλλά και την χρήση των δύο τελευταίων όπως ακριβώς είναι στη σύγχρονη ζωή. Η διδασκαλία έχει βιωματικό χαρακτήρα αφού οι μαθητές κάνουν χρήση των ιστορικών μεθόδων (για παράδειγμα μετρούν μια απρόσιτη απόσταση όπως ο Mallet). Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές βλέπουν την χρήση των γωνιών στο παρελθόν και στο παρόν και κατανοούν πως τα μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο πολιτισμικό προϊόν.

Ο βαθμός επίδρασης θεωρείται υψηλός. Η τεκμηρίωση αυτής της απάντησης κατά κύριο λόγο δίνεται μέσα από την σύγκριση των ποσοτικών αποτελεσμάτων του προ και του μετά τεστ. Σε σχετική ερώτηση στο προ τεστ οι μισοί περίπου μαθητές δεν απάντησαν καθόλου, και οι υπόλοιποι έδωσαν απάντηση σχετική με τα σχολικά μαθηματικά και τις μετρήσεις ή τις κατασκευές αντικειμένων. Αντίθετα, στο μετά τεστ πάνω από τα ¾ των μαθητών αναφέραν ιστορικά ή σύγχρονα παραδείγματα χρήσης των γωνιών και μάλιστα η πλειοψηφία έδινε περισσότερα από ένα. Πέρα από την ποσοτική ανάλυση, η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδινε την εντύπωση πως καταλαβαίνουν σε μεγάλο βαθμό την χρήση των γωνιών σε πρακτικά προβλήματα αλλά και την σημαντικότητα της ύπαρξης τους και της κατανόησης τους. Αυτό βέβαια ήταν σαφές και κατά την διάρκεια της διδασκαλίας που δεν ρώτησε κανένας μαθητής «γιατί το μαθαίνουμε τώρα αυτό» όπως συμβαίνει στις περισσότερες έννοιες που διδάσκονται.

Ο Guichard (2018) αναφέρει παρόμοια συμπεράσματα με τα παραπάνω χωρίς να ερευνά όμως τα αποτελέσματα σε μαθητές. Προτείνει μια σειρά δραστηριοτήτων με χρήση της ιστορίας μαθηματικών και πρακτικών εφαρμογών ώστε να κατανοηθεί και από τους μαθητές και από τους δασκάλους ο λόγος που διδάσκονται οι γωνίες.

Κεφάλαιο 9

Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια πιλοτική εφαρμογή ενός διδακτικού πειράματος. Κρίνεται σκόπιμο, επομένως, προκειμένου τα αποτελέσματα να μπορούν να γενικευθούν και να είναι ισχυρά, να πραγματοποιηθεί με μεγαλύτερο δείγμα.

Επίσης, η διδακτική πρόταση μπορεί να διασπαστεί και να εμπλουτιστεί και να αποτελέσει διδακτικό πείραμα με δείγμα μία τάξη μαθητών από το δημοτικό μέχρι το γυμνάσιο. Για παράδειγμα οι πρώτες τρεις δραστηριότητες θα μπορούσαν να αποτελούν διδασκαλίες για την γωνία στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και οι επόμενες στο γυμνάσιο. Η σημασία αυτής της πρότασης είναι η πιο σημαντική γιατί με αυτόν τον τρόπο θα χτιστεί η έννοια της γωνίας στους μαθητές χωρίς να παρατηρείται το φαινόμενο του αριθμητισμού του μεγέθους όπως συνέβη στην παρούσα έρευνα αφού οι μαθητές είχαν πρότερες γνώσεις. Επιπλέον, οι μαθητές θα περάσουν σταδιακά από την φυσική γεωμετρία στην αξιωματική φυσική γεωμετρία όπως προτείνει η βιβλιογραφία. Επίσης, ο μη παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας, ο οποίος είναι αυτός τις χωρικό-γεωμετρικής προβληματικής που προτάθηκε στην παρούσα έρευνα θα γίνει κτήμα των μαθητών οπότε θα διεξαχθούν πιο σίγουρα συμπεράσματα σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο της διδασκαλίας της έρευνας. Σε όλα τα παραπάνω η ενσωμάτωση της ιστορίας μαθηματικών θα βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν τον σκοπό που διδάσκονται την παρούσα έννοια αλλά και γενικότερα τα μαθηματικά.

Στην παραπάνω πρόταση για έρευνα αλλά και σε άλλη έρευνα παρόμοια με την παρούσα θα μπορούσαν να γίνουν μικρές προσθήκες για την εκμάθηση και την κατανόηση και της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού γωνιών στην Α’ Γυμνασίου. Η 4^{η} δραστηριότητα εμπλουτισμένη θα μπορούσε να αποτελέσει μέρος της διδασκαλίας για αναπαραγωγή και κατασκευή πολυγωνικών μορφών στην Α’ ή στην Β’ Γυμνασίου. Η 2^{η} και η 5^{η} δραστηριότητα εμπλουτισμένες θα μπορούσαν να αποτελέσουν μέρος τη διδασκαλίας των επίκεντρων γωνιών στην Β’ Γυμνασίου. Τέλος, η 4^{η} και η 7^{η}

δραστηριότητα με ελάχιστες αλλαγές θα μπορούσαν να αποτελέσουν μέρος τη διδασκαλίας για την κατασκευή ίσων ή όμοιων τριγώνων στην Γ' Γυμνασίου.

Τέλος, η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να δώσει απάντηση σε άλλα ερευνητικά ερωτήματα όπως για παράδειγμα ερωτήματα σχετικά με την διδασκαλία προβλημάτων στον μεσοχώρο, με τις μεθόδους διδασκαλίας της γεωμετρίας ή με τον βαθμό που η παρούσα διδακτική πρόταση επηρέασε τις στάσεις και το επίπεδο ενδιαφέροντος και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών στο μάθημα.

Κεφάλαιο 10

Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα έρευνα αποτελεί ένα διδακτικό πείραμα και περιλαμβάνει διδακτική παρέμβαση με χρήση της ιστορίας των για να ελεγχθεί αν κατανοήθηκαν οι έννοιες που πραγματεύεται η διδασκαλία, αν λύθηκαν τυχόν παρανοήσεις σχετικά με αυτές και αν κατανοήθηκε η σύνδεση των εννοιών αυτών με πρακτικές εφαρμογές.

Ένας περιορισμός ήταν πως η έρευνα έπρεπε να διεξαχθεί σε περιορισμένο χρόνο λόγω της φύσης της εργασίας. Για τον παραπάνω λόγο, το δείγμα που επιλέχθηκε ήταν δείγμα ευκολίας και όχι τυχαίο όπως ιδανικά θα έπρεπε να είναι. Επίσης, οι 23 μαθητές είναι ένα μικρό δείγμα ώστε να γενικευθούν τα συμπεράσματα της έρευνας.

Επιπλέον, ένας βασικός περιορισμός ήταν η πίεση χρόνου ώστε να ολοκληρωθεί η διδακτέα ύλη, η οποία περιόρισε αρκετά την ευελιξία στην διαχείριση των απαιτούμενων διδακτικών ωρών για την διδακτική παρέμβαση. Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών οι ώρες που προτείνονται για την διδασκαλία της ενότητας είναι περίπου έξι και δεν θα μπορούσε η παρέμβαση να υπερβεί κατά πολύ το όριο αυτό.

Τον τελευταίο περιορισμό ενίσχυε το γεγονός ότι οι μαθητές αλλά και η διδάσκουσα δεν έχουν συνηθίσει στον τρόπο διδασκαλίας- μάθησης με φύλλα εργασίας αλλά και στην ομαδοσυνεργατική. Επομένως, δαπανήθηκε παραπάνω χρόνος ώστε να συνηθίσουν και οι δύο πλευρές και ειδικά οι μαθητές οι οποίοι αντιμετώπιζαν ιδιαίτερες δυσκολίας στο να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τις οδηγίες ενός φύλλου εργασίας. Επίσης, δαπανήθηκε χρόνος στο να συνηθίσουν οι μαθητές να συνεργάζονται αρμονικά χωρίς την παρουσία διδακτικού θορύβου και επιχειρηματολογώντας ώστε να πείσουν για τους ισχυρισμούς τους τα μέλη της ομάδας τους. Βέβαια, τα οφέλη ήταν πολλαπλά και φάνηκαν πολύ σύντομα.

Ένας τελευταίος αλλά και όχι τόσο σημαντικός περιορισμός για την διεξαγωγή της έρευνας, ήταν ότι δεν υπήρξε δυνατότητα να εργαστούν οι μαθητές στο εργαστήριο υπολογιστών, οπότε η ερευνήτρια στην αντίστοιχη δραστηριότητα χειρίστηκε το αρχείο εργασίας. Έτσι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να αξιοποιήσουν στο μέγιστο βαθμό τις δυνατότητες του ψηφιακού εργαλείου ώστε να συμπληρώσουν ένα από τα φύλλα εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

Barbin, É., Guichard, J. P., Moyon, M., Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F., ...& Hamon, G. (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer international publishing.

Biber, C., Tuna, A., & Korkmaz, S. (2013). The Mistakes and the Misconceptions of the Eighth Grade Students on the Subject of Angles. *European Journal of science and mathematics education*, *1*(2), 50-59.

Bussi Bartolini, M. G. (2000). The Theoretical Dimension of Mathematics: A Challenge for Didactitians. Italy: University of Modena and Reggio Emilia.

Bussi, M. B., Chiappini, G., Paola, D., Reggiani, M., & Robbuti, O. (2004). Learning Mathematics with tools. In *10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10), Copenhagen, Denmark*.

Clairaut, A. C. (1753). *Éléments de Géométrie*. Paris, France: David.

Diderot, D., & d'Alembert, J. L. R. (1776). *Encyclopédie, ou, Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (Vol. 1). Pergamon Press.

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. The Journal of Mathematical Behavior, 32(1), 1-19.

ΔΕΠΠ, Σ., & ΑΠ, Σ. Μ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. *ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε στις*, *27*(11), 2013.

Έλεγχος με ραντάρ (2013). Αθήνα: ΙΤΥΕ. Ανακτήθηκε από https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2233

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, *10*(4), 391-408.

Guichard, J. P. (2018). Angles in secondary school: surveying and navigation. In *Let History into the Mathematics Classroom* (pp. 1-15). Springer, Cham.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in mathematics*, *47*(2), 223-258.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003, February). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME* (Vol. 3, No. 1-9).

Θωμαΐδης Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους. Επιστήμες Αγωγής : Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση, σ. 16.

Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical thinking and learning*, *6*(3), 285-306.

Katz, V. J. (2018). *History of mathematics*. New York: Pearson.

Λάτση, Μ. (2012). *Λογικομαθηματικές έννοιες που αναπτύσσονται σε περιβάλλοντα συνεργατικής μάθησης, τα οποία υποστηρίζονται από εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Φιλοσοφική. Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας. Τομέας Παιδαγωγικής).

Manesson Mallet, A. (1702). La géométrie pratique (Vol. II). Paris, France: Anisson.

Menghini, M. (2015). From practical geometry to the laboratory method: The search for an alternative to Euclid in the history of teaching geometry. In *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 561-587). Springer, Cham.

Mithcelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 265-284.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238.

Νικολαντωνάκης,Κ. (2015). Γεωμετρικός χώρος και Φυσικός χώρος : μια διαχρονική σχέση . Χασάπης.Δ.(επιμ.) ,13ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών ‘’ΧΩΡΟΣ & ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ’’ (σ.43-79). ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ : Ομάδα Έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Sierpinska, A. (2019). Materials for teaching a course on research in mathematics education about students' difficulties in mathematics. *Retrieved from Academia. edu: https://www.academia.edu/39941494/Materials_for_teaching_a_course_on_research_in_mathematics_education_about_students_difficulties_in_mathematics*.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 44-55.

ΥΠΑΙΘ (2021) Ύλη και Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών της Α΄ τάξης Ημερησίου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχολικό έτος 2021–2022 Ανακτήθηκε από http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2021-2022/gymnasio

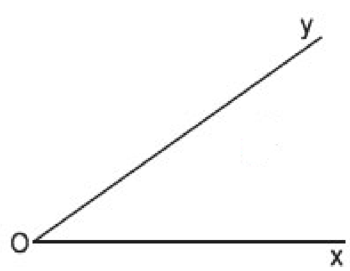
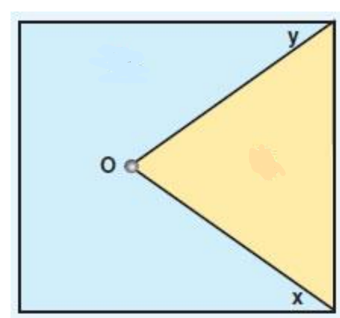
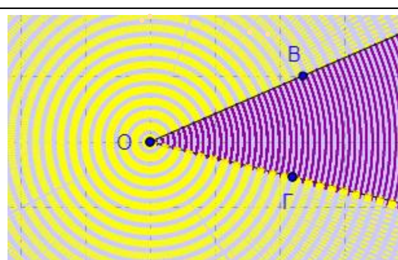
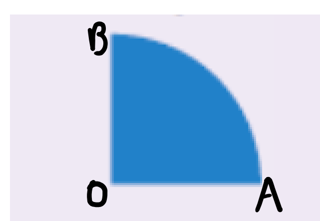
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – Προ Τεστ (Pre test)

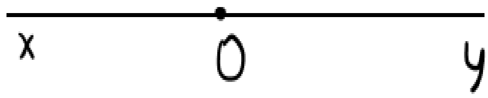
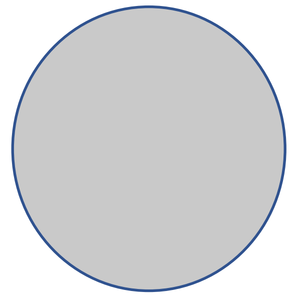
Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………..

Γράψε ελεύθερα ότι νομίζεις στα παρακάτω. Μην αφήσεις κάποιο ερώτημα κενό. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις και την φαντασία σου.

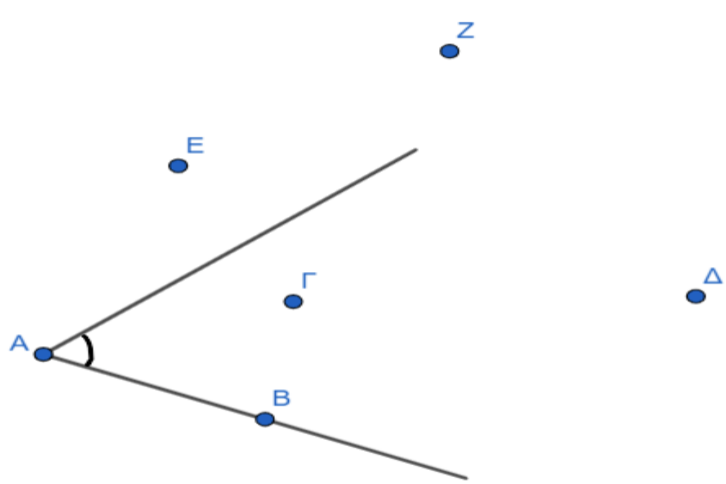
1) Μπορείς να πεις ή να περιγράψεις με λόγια τι ονομάζουμε γωνία?

2) Σημείωσε κάτω από κάθε σχήμα πόσες γωνίες βλέπεις (καμία, μία, δύο ή περισσότερες);

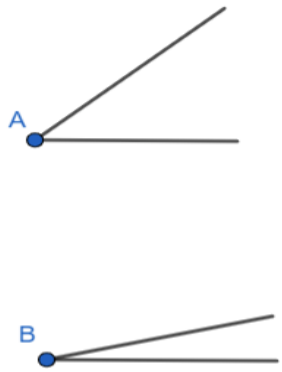
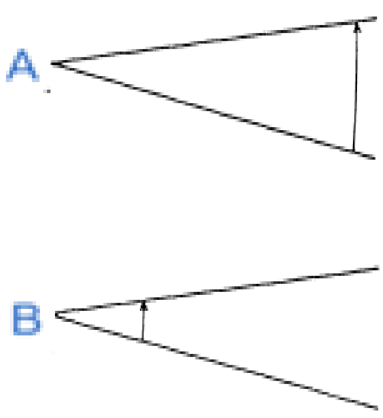
Α)  	Β) 
Γ)  	Δ) 

Ε) 	ΣΤ) 
Η) 	Θ) 

3) Κύκλωσε πάνω στο σχήμα όποια από τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε και Ζ θεωρείς ότι είναι σημεία της γωνίας.



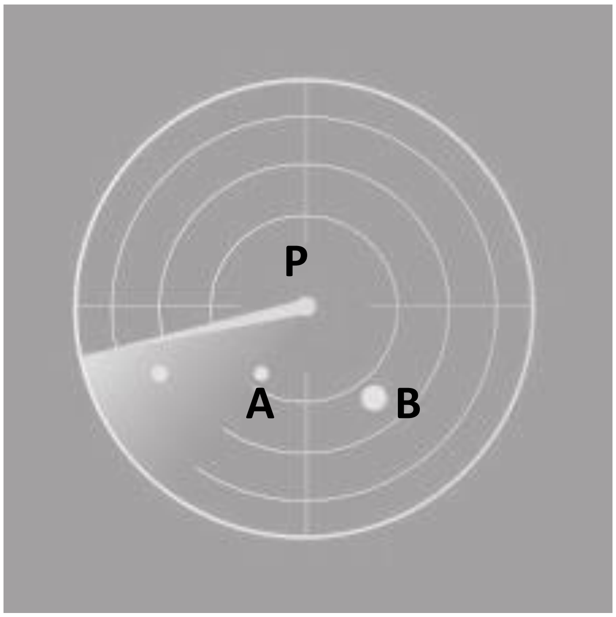
4) Σε καθένα από τα παρακάτω κύκλωσε την σωστή απάντηση κατά την γνώμη σου.

	i. Η Α γωνία είναι **ίση** με την Β γωνία. ii. Η Α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την Β γωνία. iii. Η Α γωνία είναι **μικρότερη** από η την Β γωνία. iv. Δεν μπορώ να ξέρω.
	i. Η α γωνία είναι **ίση** με την β γωνία. ii. Η α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την β γωνία. iii. Η α γωνία είναι **μικρότερη** από η την β γωνία. iv. Δεν μπορώ να ξέρω.
	i. Η Α γωνία είναι **ίση** με την Β γωνία. ii. Η Α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την Β γωνία. iii. Η Α γωνία είναι **μικρότερη** από η την Β γωνία. iv. Δεν μπορώ να ξέρω.

5) Η ακτίνα ενός ραντάρ που έχει όνομα "PA" περιστρέφεται από την θέση που δείχνει η μέχρι το σημείο A.

Η ακτίνα ενός άλλου ραντάρ που έχει όνομα "PB" περιστρέφεται από την θέση που δείχνει η εικόνα μέχρι το σημείο B.

Ποιο ραντάρ καλύπτει μεγαλύτερη περιοχή το "PA" ή το "PB" και γιατί;

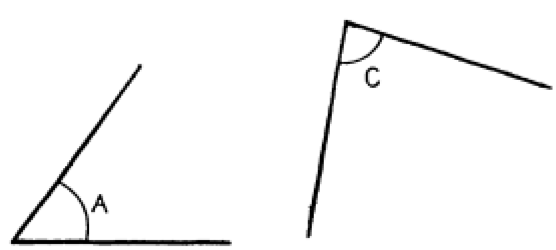


Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………..

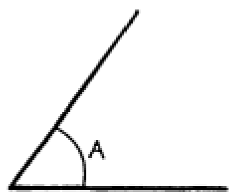
Γράψε ελεύθερα ότι νομίζεις στα παρακάτω. Μην αφήσεις κάποιο ερώτημα κενό. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις και την φαντασία σου.

6)Με ποιο τρόπο θα χώριζες μια γωνία στην μέση; Περιέγραψε την διαδικασία που θα ακολουθούσες. Αν χρειαστεί κάνε και σχήμα.

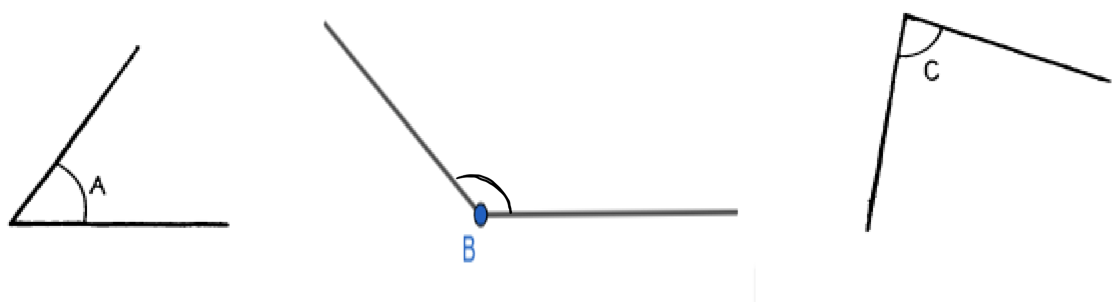
7) Πώς μπορείς να συγκρίνεις τις γωνίες A και C; Περιέγραψε την διαδικασία που θα ακολουθούσες. Μπορείς να αναφέρεις και περισσότερους από ένα τρόπους.



8) Μπορείς να κατασκευάσεις μια γωνία ίση (ίδια) με την Α; Αν ναι με ποιο τρόπο; Περιέγραψε την διαδικασία που θα ακολουθούσες. Μπορείς να αναφέρεις και περισσότερους από ένα τρόπους.



9) Μπορείς να μετρήσεις τις παρακάτω γωνίες;



10) Που χρησιμοποιούμε τις γωνίες; Σε τι μας χρησιμεύουν; Μπορείς να αναφέρεις παραδείγματα από τα μαθηματικά ή την καθημερινότητα σου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β – 1ο Φύλλο εργασίας

1ο Φύλλο εργασίας

Ονοματεπώνυμο 1ου μαθητή: ……………………………………………………………..

Ονοματεπώνυμο 2ου μαθητή:……………………………………………………………

1) Σχεδιάστε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο ημιευθείες Οx και Oy, με κοινή αρχή το σημείο Ο.

Τι σχήματα παρατηρείτε πάνω στο χαρτί;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:……

……….

2) Κόψτε το χαρτόνι πάνω στις ημιευθείες ώστε το χαρτί να χωριστεί σε δύο κομμάτια. Συμβολίστε (δηλαδή ονομάστε) το ένα κομμάτι Τ1 και το άλλο Τ2.

Τί σχήμα είναι το κάθε κομμάτι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:……

……….

3) Σχεδιάστε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο αντικείμενες ημιευθείες Οx και Oy.

Τι σχήματα παρατηρείτε πάνω στο χαρτί;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:……

……….

4) Κόψτε το χαρτόνι πάνω στις ημιευθείες ώστε το χαρτί να χωριστεί σε δύο κομμάτια. Συμβολίστε (δηλαδή ονομάστε) το ένα κομμάτι Τ1 και το άλλο Τ2.

Τί σχήμα είναι το κάθε κομμάτι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:……

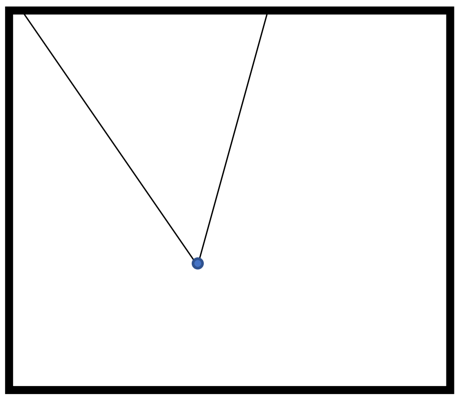
……….

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ – $2^{ο}$ Φύλλο εργασίας

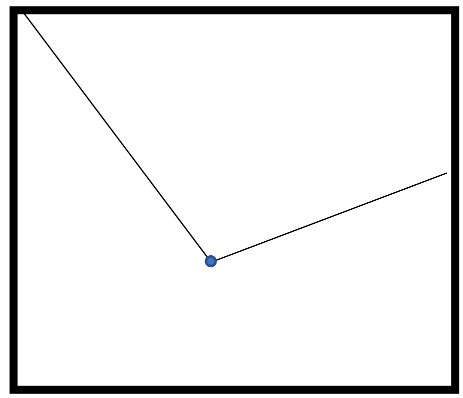
$2^{ο}$ Φύλλο εργασίας

Ονοματεπώνυμο……

1) Μπορείς να συγκρίνεις τις δύο γωνίες ; Βάλε Σ δίπλα στην απάντηση που κατά τη γνώμη σου είναι σωστή.



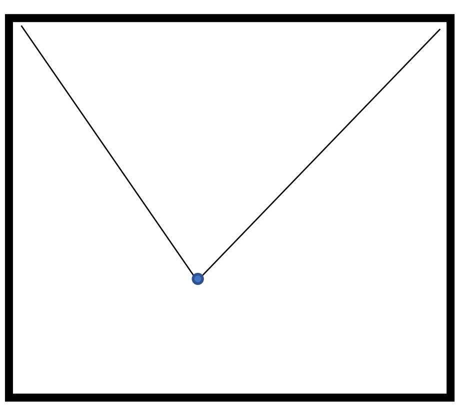
$1^{η}$ γωνία



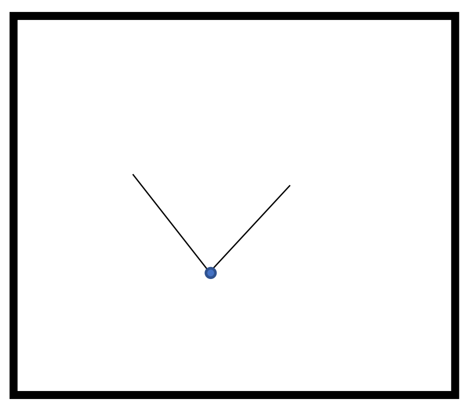
$2^{η}$ γωνία

- Η $1^{η}$ γωνία είναι μικρότερη από τη $2^{η}$ γωνία
- Η $1^{η}$ γωνία είναι μεγαλύτερη από τη $2^{η}$ γωνία
- Οι γωνίες είναι ίσες.

2) Ζωγράφισε την περιοχή που ορίζει (δείχνει) η γωνία. Περιορίσου μέσα στο τετράγωνο.



$1^{η}$ γωνία



$2^{η}$ γωνία

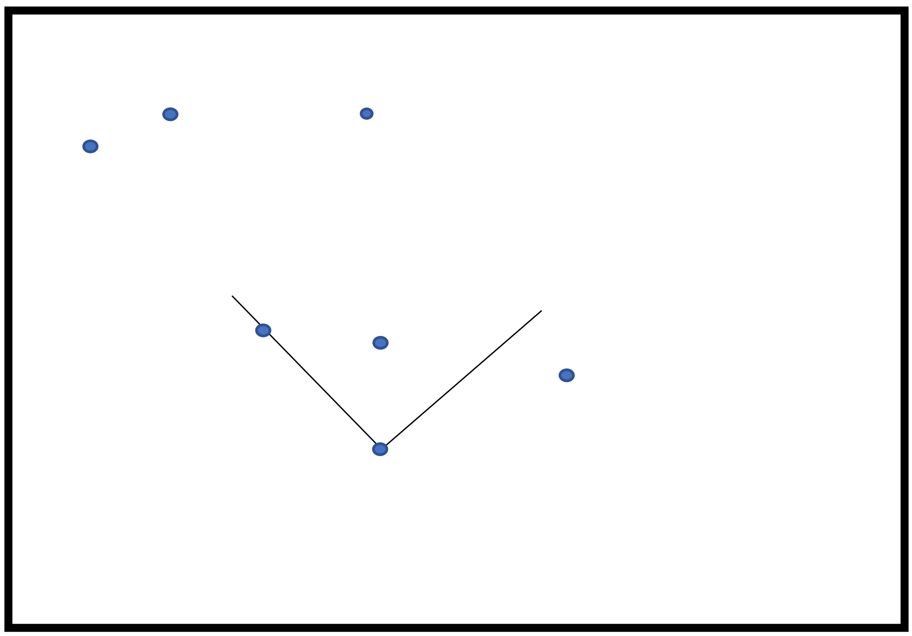
Μπορείς να συγκρίνεις τις δύο γωνίες; ; Βάλε Σ δίπλα στην απάντηση που κατά τη γνώμη σου είναι σωστή.

- Η $1^{η}$ γωνία είναι μικρότερη από τη $2^{η}$ γωνία
- Η $1^{η}$ γωνία είναι μεγαλύτερη από τη $2^{η}$ γωνία
- Οι γωνίες είναι ίσες.

3) Βάλε ένα Σ δίπλα σε όποια από τις παρακάτω προτάσεις πιστεύεις ότι είναι σωστή;

- Όσο πιο μεγάλες είναι οι πλευρές μιας γωνίας τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνία.
- Όσο πιο μεγάλο άνοιγμα σχηματίζουν οι πλευρές μιας γωνίας τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνία.

4) Ποια σημεία ανήκουν στην γωνία (κύκλωσε τα);
(Σκέψου ποια αεροπλάνα θα έπιανε το ραντάρ!)



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ – 3ο Φύλλο εργασίας

3ο Φύλλο εργασίας

Ονοματεπώνυμο 1ου μαθητή: ……………………………………………………………..

Ονοματεπώνυμο 2ου μαθητή:………………………………………………………………

1) Τι βλέπουμε στην οθόνη ενός ραντάρ;

2) Τι σχήμα μπορεί να περιγράψει την περιοχή που καλύπτει το ραντάρ;

3) Πώς προέκυψε αυτό το σχήμα;

4) Μπορείτε να περιγράψετε την περιοχή που καλύπτει το ραντάρ από την Αλεξανδρούπολη μέχρι την Ξάνθη;

5) Μπορείτε να περιγράψετε την περιοχή που καλύπτει το ραντάρ από την Αλεξανδρούπολη μέχρι τον Βαθύλλακο;

6) Ποια από τις δύο περιοχές είναι μεγαλύτερη;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε – 4ο Φύλλο εργασίας

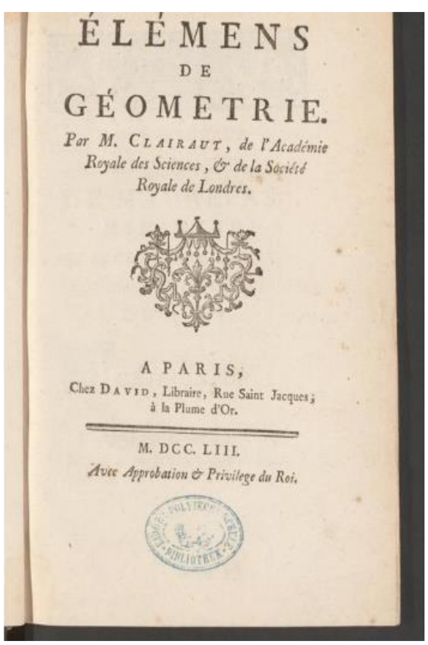
Alexis Claude Clairault (1713–1765) Γάλλος Μαθηματικός

Είναι ο δεύτερος από μια οικογένεια 21 παιδιών.

Ο πατέρας του, Jean-Baptiste Clairaut (1680-1766), δίδασκε μαθηματικά.

Έχει οδηγίες από αυτόν σε αυτό το θέμα, μαθαίνοντας να διαβάζει στα *Στοιχεία του Ευκλείδη* .

Έδειξε τόση πρωιμότητα που σε ηλικία **δώδεκα ετών** έγραψε ένα απομνημόνευμα πάνω σε τέσσερις γεωμετρικές καμπύλες. **Στα δεκατρία,** διάβασε ενώπιον της Ακαδημίας Επιστημών μια περιγραφή των ιδιοτήτων τεσσάρων καμπυλών που είχε ανακαλύψει. Μόλις **στα δεκαέξι του**, ολοκλήρωσε μια πραγματεία με τίτλο *«Έρευνα για τις καμπύλες διπλής καμπυλότητας»* , η οποία, όταν δημοσιεύτηκε το 1731, **οδήγησε στην εισαγωγή του στην Ακαδημία Επιστημών όταν δεν ήταν σε νόμιμη ηλικία.**



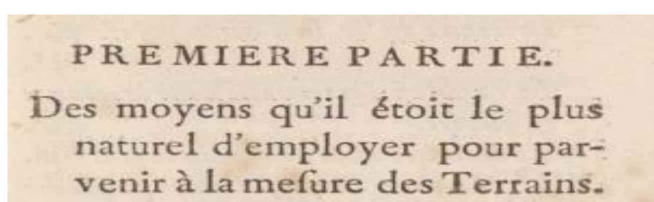
ÉLÉMENS
DE
GÉOMETRIE.
Par M. Clairaut, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,
Chez David, Libraire, Rue Saint Jacques; à la Plume d'Or.

M. DCC. LIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Το 1753 έγραψε τα **«Στοιχεία της Γεωμετρίας»** από τον Clairaut.

Με αυτό το βιβλίο είχε **στόχο να διδάξει γεωμετρία μέσω προβλημάτων** όπως για παράδειγμα μέσα από την προσπάθεια μέτρησης της γης.



PREMIERE PARTIE.
Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la meſure des Terrains.

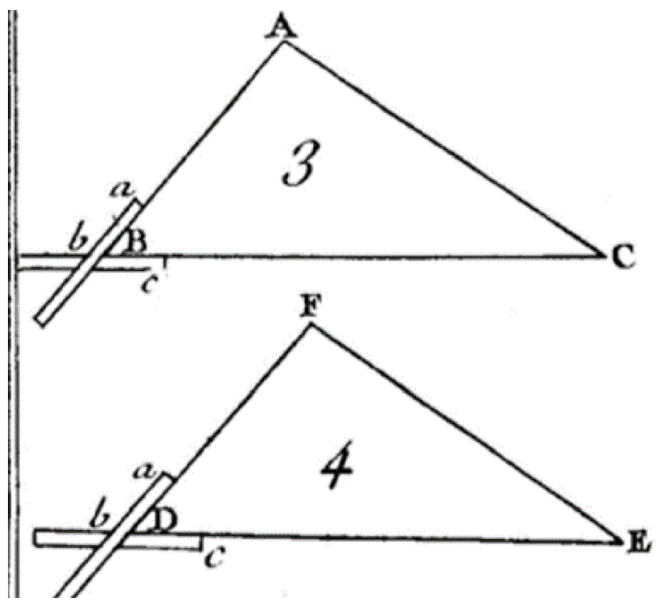
Οι πιο φυσικοί τρόποι για να χρησιμοποιήσει κάποιος για να μετρήσει τα εδάφη.

4ο Φύλλο εργασίας

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………………….

Ο Clairaut, λοιπόν, δεν χρησιμοποιούσε αριθμούς στις μετρήσεις τους αλλά προσπαθούσε να κατασκευάσει αυτά που ήθελε να μετρήσει.

Για να κατασκευάσει δύο ίσα τρίγωνα σαν αυτά τις παρακάτω εικόνας χρειάζεται να κατασκευάσει δύο ίσες γωνίες. Για να το πετύχει αυτό χρησιμοποιεί ένα εργαλείο που φαίνεται στη φωτογραφία και το ονομάζουμε **εργαλείο λοξότμησης του Clairaut.**



Μπορείς **να κατασκευάσεις** και εσύ μια **ίση γωνία** με την $A\hat{B}C$ με το εργαλείο **λοξότμησης** του Clairaut;

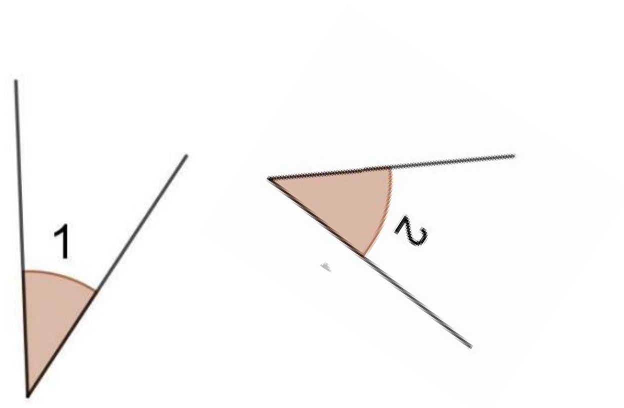
Μπορείς με το δικό σου εργαλείο να ελέγξεις αν οι τρεις παραπάνω γωνίες είναι ίσες;

Ο ίδιος ο Clairaut παραδέχεται πως αυτός ο τρόπος κρύβει έναν **κίνδυνο** :

"Να **μετακινηθεί** το εργαλείο και να χαθεί η **ακρίβεια**".

Ο μοναδικός τρόπος που δεν περιέχει σφάλμα είναι **να τοποθετήσεις την μία γωνία πάνω στην άλλη**. Μπορείς να το κάνεις αυτό με τη βοήθεια ενός **διάφανου χαρτιού**;

Αφού τελειώσεις με τις γωνίες του Clairaut δοκίμασε να συγκρίνεις και τις παρακάτω.



Ποια είναι μεγαλύτερη; Ποιο τρόπο διάλεξες για να τις συγκρίνεις;

Στη σύγχρονη εποχή όπως είδαμε στο βίντεο χρησιμοποιούμε σε διάφορες τεχνικές εργασίες το «φαλτσόμετρο» που είναι ίδιο με το εργαλείο **λοξότμησης** του Clairaut . Μπορείς να σχεδιάσεις στο χαρτί τη γωνία του θρανίου σου με τη βοήθεια του δικού σου εργαλείου;

Τι σημαίνει τελικά ότι δύο γωνίες είναι ίσες;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ – 5ο Φύλλο εργασίας

5ο Φύλλο εργασίας

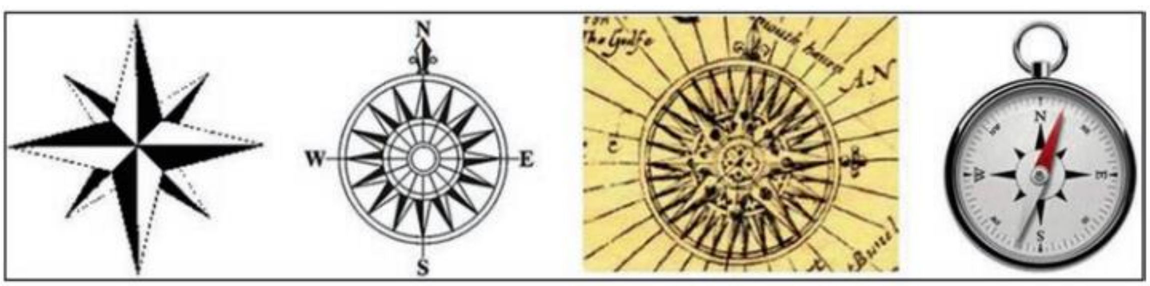
Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………….

Το τριαντάφυλλο του ανέμου (Πυξίδα)

Πολλά όργανα μέτρησης χρειάζονται γωνίες μέτρησης και το τριαντάφυλλο του ανέμου είναι ένα από αυτά.

Το τριαντάφυλλο του ανέμου δεν είναι λουλούδι: είναι ένα αστέρι με πολλά κλαδιά που δείχνουν τα σημεία του ορίζοντα.

Οι ναυτικοί το χρησιμοποιούν για να βρουν κατεύθυνση στη θάλασσα. Η πορεία ενός σκάφους εξαρτάται από τη θέση του σε σχέση με την κατεύθυνση του ανέμου**. Οι ναυτικοί βρίσκουν την κατεύθυνση του ανέμου που επικρατεί και μετά ορίζουν την πορεία τους που σχετίζεται με αυτήν.** Για να βρείτε τις κατευθύνσεις του ανέμου σχεδιάζεται ένα είδος τριαντάφυλλου του οποίου τα βέλη είναι τοποθετημένα γύρω από το κέντρο σαν πέταλα τριαντάφυλλου. Αλλά το σχέδιο δεν μοιάζει με αληθινό τριαντάφυλλο.



Με τον κύκλο που έχετε στα χέρια σας κατασκευάστε το δικό σας τριαντάφυλλο ανέμου με οκτώ κατευθύνσεις.

Μια μικρή βοήθεια….

- Ο κύκλος είναι μια πλήρης γωνία.
- Σκέψου πρώτα πως θα διαιρούσες (χώριζες) μια γωνία σε δύο μέρη (στη μέση);
- Έπειτα πως θα διαιρούσες μια γωνία σε τέσσερα μέρη;
- Και τέλος πως θα διαιρούσες μια γωνία σε οχτώ μέρη;

Αφού καταφέρεις να διαιρέσεις την πλήρη γωνία (τον κύκλο) σε 8 μέρη σημείωσε πάνω τα σημεία του ορίζοντα (**Β**ορράς , **Ν**ότος, **Α**νατολή, **Δ**ύση).

Μπορείς να σκεφτείς πως φτιάχνουμε ένα μοιρογνωμόνιο;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ – 6ο Φύλλο εργασίας (ΜΕΡΟΣ Α)

6ο Φύλλο εργασίας (ΜΕΡΟΣ Α)

Ονοματεπώνυμο 1ου μαθητή:……………………………………………..

Ονοματεπώνυμο 2ου μαθητή:……………………………………………..

Μέτρηση του πλάτους ενός όρμου (φυσικού λιμανιού)

Πρέπει να βρούμε την απόσταση μεταξύ της πύλης A και της πύλης C, η οποία δεν μπορεί να μετρηθεί απευθείας (Εικόνα 1).

1) Μετρήσεις που έγιναν στο χώρο

- Πού στέκεται ο τοπογράφος; Γιατί; Τι μετρά; (Εικόνα 1)

- Πώς λειτουργεί το όργανο που χρησιμοποιεί; (Δες επιπλέον Εικόνες 2-3-4)

- Στο σημείο H πάνω στην Εικόνα 1 θα δείτε το ρολό χαρτιού του τοπογράφου. Τι καταγράφει;

(Σε παρόμοια μέτρηση που έγινε και φαίνεται στην Εικόνα 5, το ρολό χαρτιού του τοπογράφου φαίνεται στην Εικόνα 6 και είναι αυτό που κρατάει ο «πάνω» τοπογράφος στην θέση O)

2) Κατασκευάζοντας το τρίγωνο της αναγωγής

- Χρησιμοποιώντας το σκίτσο του και τις μετρήσεις του, ο τοπογράφος μπορεί να σχεδιάσει ένα μειωμένο (μικρότερο) **αντίγραφο** του τρίγωνου ABC στο έδαφος ή στο χαρτί. Αυτό είναι το τρίγωνο EFG που μπορείτε να δείτε στην Εικόνα 1.

(Στην άλλη μέτρηση *που έγινε και φαίνεται στην Εικόνα 5, το αντίγραφο βρίσκεται στην Εικόνα 6 και είναι αυτό που σχεδιάζει ο «κάτω» τοπογράφος*)

3) Σχεδιάζοντας το δικό σας αντίγραφο

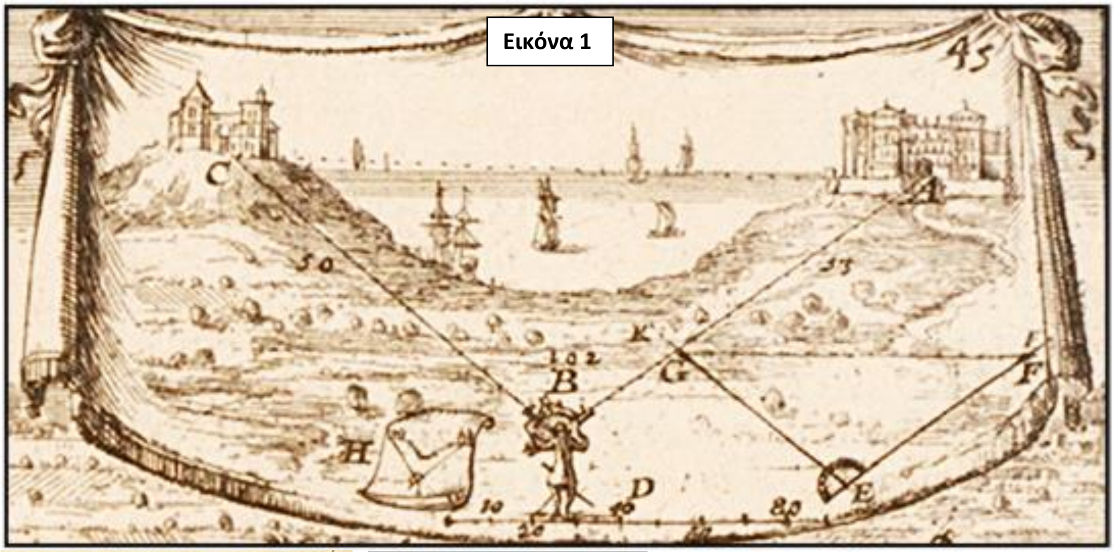
- Ο τοπογράφος έχει σχεδιάσει μια κλίμακα ίσων διαιρέσεων, που φαίνεται στο σημείο D στο κάτω μέρος της εικόνας 1. Σε πόσα μέρη διαίρεσε την κλίμακα;

- Ο τοπογράφος σχεδίασε το τρίγωνο EFG. Γράψτε τη σειρά των βημάτων που πιστεύεις ότι έκανε και αιτιολογήστε τα.

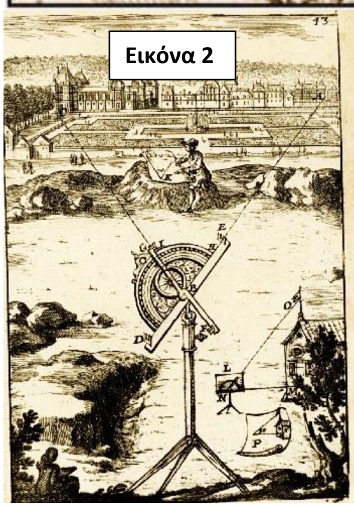
- Για να αντιγράψει τη γωνία FEG τι έκανε? Κοιτάξτε το όργανο που εμφανίζεται στο σημείο E (Εικόνα 1).

4) Επίλυση του προβλήματος

- Χρησιμοποιώντας το τρίγωνό του EFG πώς μπορεί ο τοπογράφος να βρει την απόσταση το A στο C ? Τι απάντηση πήρε;

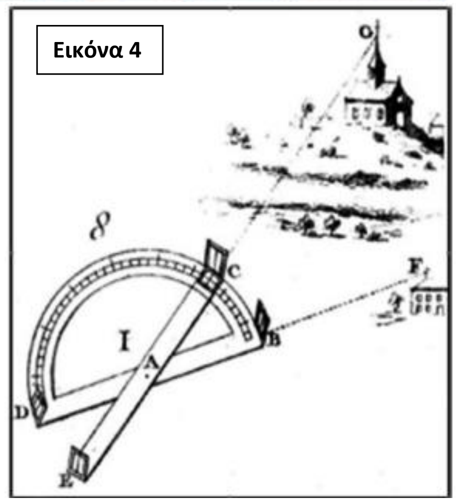


Εικόνα 1

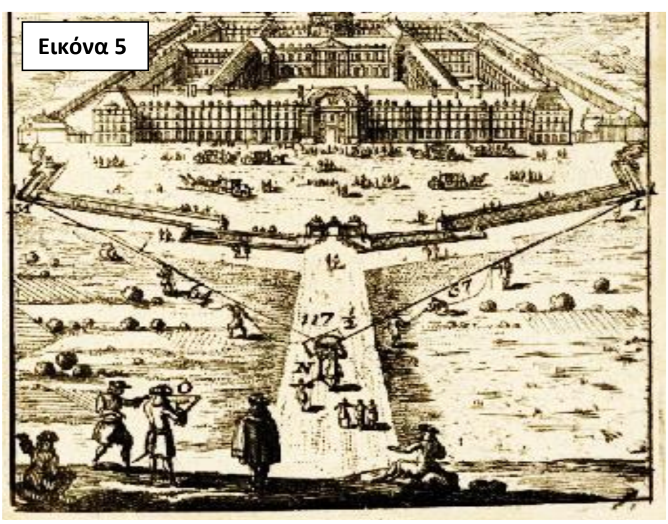


Εικόνα 2

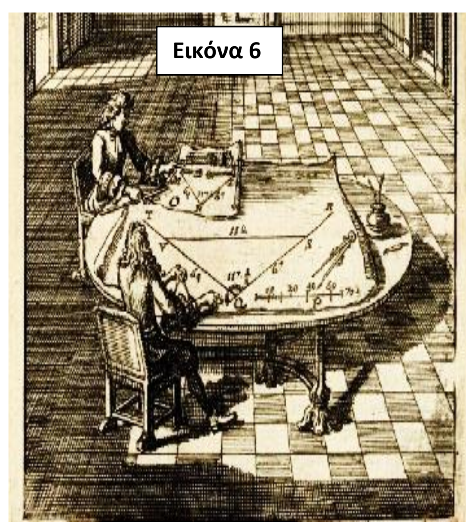
Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η – 6ο Φύλλο εργασίας (ΜΕΡΟΣ Β)

6ο Φύλλο εργασίας (Β ΜΕΡΟΣ)

Μέτρηση απρόσιτης απόστασης

Είμαστε έτοιμοι να μετρήσουμε απρόσιτες αποστάσεις όπως μάθαμε από τον μαθηματικό Clairaut και όπως είδαμε να εφαρμόζει ο τοπογράφος Mallet.

Η κάθε ομάδα θα μετρήσει την απόσταση μεταξύ των κώνων A και C.

Αρχικά κάθε μέλος της ομάδας θα πρέπει να αναλάβει έναν από τους παρακάτω ρόλους:

3 μέλη θα σχηματίσουν την γωνία

2 μέλη θα κάνουν τις μετρήσεις με την μετροταινία

2 μέλη θα καταγράφουν τα δεδομένα στο φύλλο εργασίας και θα κάνουν τους υπολογισμούς

(Στις ομάδες των 8 μελών, ένας θα είναι ο υπεύθυνος της ομάδας άρα και βοηθός όπου χρειάζεται)

<u>ΥΛΙΚΑ</u>

- «Γραφόμετρο»
- Μετροταινία
- Μοιρογνωμόνιο
- Μολύβι – Στυλό

1ο βήμα ***(Ρολό τοπογράφου)***

Κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα και να τοποθετήσετε σε αυτό τα δεδομένα από τις μετρήσεις σας. (Οι μετρήσεις να γίνουν σε εκατοστά.)

BA=

BC=

$\widehat{ABC}$=

2ο βήμα (Κατασκευάζοντας το τρίγωνο της αναγωγής ή αλλιώς το τρίγωνο αντίγραφο GEF)

Η κλίμακα που θα δουλέψετε θα είναι 1:10

- Αναγωγή πρώτης πλευράς EF= BA:10 =
- Αναγωγή δεύτερης πλευράς EG = BC:10 =

Σχεδιάζω το τρίγωνο αντίγραφο

Μετράω την GF.

3ο βήμα (Εύρεση απρόσιτης απόστασης)

AC = GF·10 =

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Θ – 7ο Φύλλο εργασίας

7ο Φύλλο εργασίας

Χρήση Ναυτικού Χάρτη

Ένας ναυτικός θέλει να κάνει με το σκάφος του την διαδρομή Σμύρνη – Σάμος - Πάτμος – Αρκοί- Αγαθονήσι (Α-Β-Γ-Δ-Ε).

<u>1Ο βήμα</u> Βοήθησε τον να σχεδιάσει την διαδρομή πάνω στον χάρτη με ένα χάρακα και ένα μολύβι.

<u>2ο βήμα</u> Με τη βοήθεια του **ανεμολόγιου** βρες και έπειτα σημείωσε την **πορεία (σε μοίρες) και την κατεύθυνση (της πυξίδας)** που πρέπει να ακολουθεί κάθε φορά για να φτάσει από το ένα μέρος στο άλλο.

(π.χ. 28^{o} ΒΔ δηλαδή να στρίψει 28 μοίρες με κατεύθυνση ΒορειοΔυτικά)

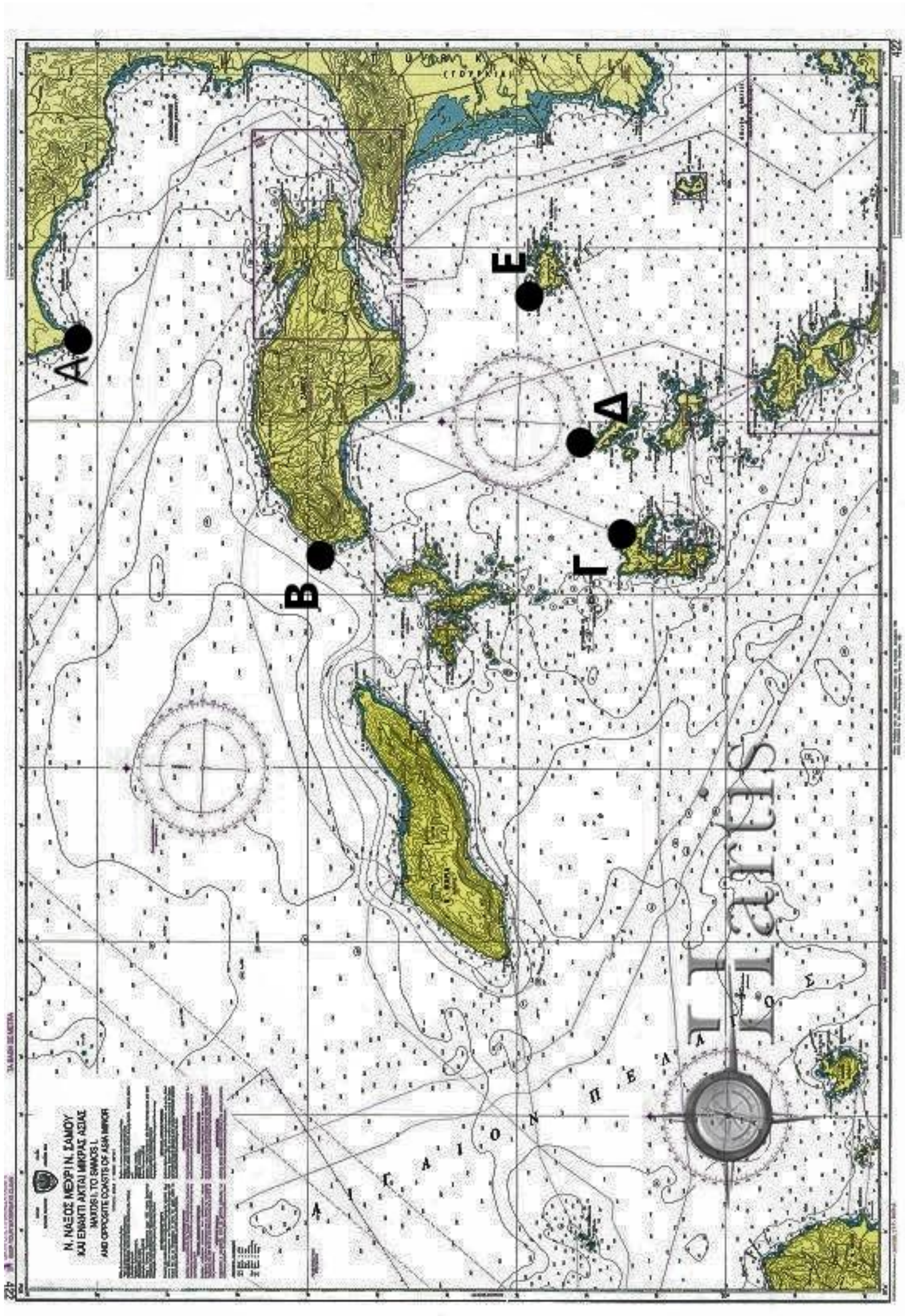
Α $\rightarrow B$

Β $\rightarrow \Gamma$

Γ $\rightarrow \Delta$

Δ$\rightarrow E$

<u>3ο βήμα</u> Με την βοήθεια ενός **διαβήτη** υπολόγισε την **απόσταση** που θα διανύσει σε ναυτικά μίλια.


Α
Β
Γ
Δ
Ε

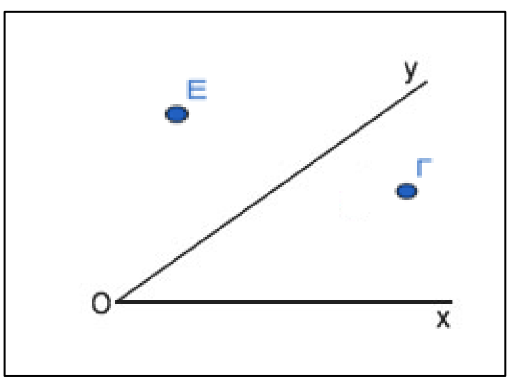
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι – Μετά Τεστ (Post test)

Γυμνάσιο Βαθύλακκου	**Μαθηματικά**	Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα
	Γραπτή δοκιμασία	
Όνομα:		**Τμήμα : Α**
Βαθμολογία:		**/100=**

1α) Τι ονομάζουμε γωνία;

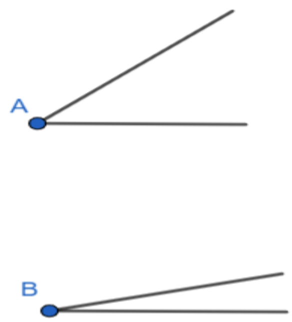
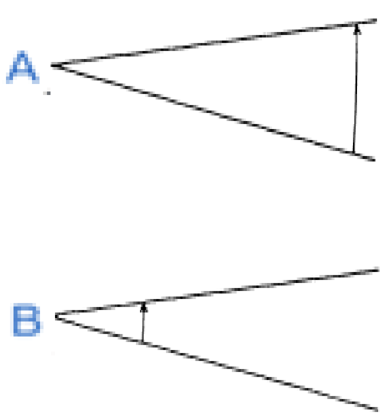
1β) Πως μπορώ να σχηματίσω μια γωνία; Ανέφερε παραδείγματα.

2) Ονόμασε τη γωνία που ανήκει το σημείο Γ και τη γωνία που ανήκει το σημείο Ε.



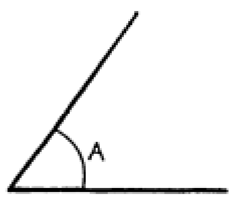
3) Ο Πυθαγόρας είπε στο διάλειμμα στην Υπατία πως ο μόνος τρόπος για να συγκρίνεις 2 γωνίες είναι να τις μετρήσεις με μοιρογνωμόνιο. Η Υπατία του απάντησε πως κάνει λάθος. Με ποιον από τους δύο συμφωνείς και γιατί;

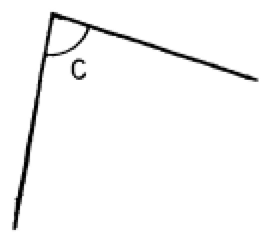
4) Σε καθένα από τα παρακάτω κύκλωσε την σωστή απάντηση.

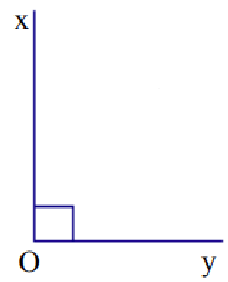
	i. Η Α γωνία είναι **ίση** με την Β γωνία. ii. Η Α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την Β γωνία. iii. Η Α γωνία είναι **μικρότερη** από η την Β γωνία. iv. Δεν μπορώ να ξέρω.
	i. Η α γωνία είναι **ίση** με την β γωνία γιατί σκεπάζουν ίσα κτίρια. ii. Η α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την β γωνία γιατί έχει μεγαλύτερο άνοιγμα. iii. Η α γωνία είναι **μικρότερη** από η την β γωνία γιατί έχει μικρότερες πλευρές. iv. Η β γωνία είναι μεγαλύτερη γιατί είναι πιο μυτερή.
	i. Η Α γωνία είναι **ίση** με την Β γωνία. ii. Η Α γωνία είναι **μεγαλύτερη** από η την Β γωνία. iii. Η Α γωνία είναι **μικρότερη** από η την Β γωνία. iv. Δεν μπορώ να ξέρω.

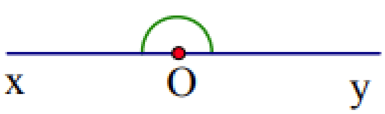
5) Με ποιο τρόπο θα χώριζες μια γωνία στην μέση; Περιέγραψε με λίγες λέξεις την διαδικασία (ή τις διαδικασίες) που θα ακολουθούσες.

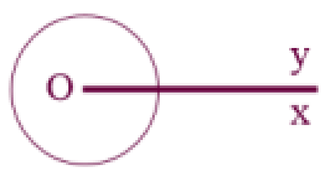
6) Βάλε ένα ναι σε όποια σχήματα από τα παρακάτω πιστεύεις ότι είναι γωνίες και μέτρησε τα.











7) Που χρησιμοποιούμε τις γωνίες; Σε τι μας χρησιμεύουν; Μπορείς να αναφέρεις παραδείγματα από την ιστορία ή τη σύγχρονη ζωή;