



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική εργασία

«Ανάλυση και οργάνωση προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια»

ΧΑΤΖΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ (ΑΜ 1080)

Επιβλέπουσα: Μαρία Καλδρυμίδου, καθηγήτρια

Εξεταστές: Χαράλαμπος Σακονίδης, καθηγητής

Ξανθή Βαμβακούση, καθηγήτρια

Θεσσαλονίκη, 2023

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων	4
Κατάλογος Εικόνων.....	7
Περίληψη.....	8
Abstract	9
Εισαγωγή	10
Κεφάλαιο 1 ^ο : Προσθετικές καταστάσεις.....	12
1.1: Τι είναι ένα λεκτικό αριθμητικό πρόβλημα και η σημασία του στην εκπαίδευση των μαθητών	12
1.2: Τα σχολικά εγχειρίδια ως μέρος τους εκπαιδευτικού συστήματος και η επίδραση τους όσον αφορά την επίδοση των μαθητών στην λύση προβλημάτων.....	14
1.3: Προσθετικά προβλήματα κατά Greeno.....	15
1.4: Προσθετικές κατηγορίες κατά Vergnaud	19
Προσθετικές κατηγορίες κατά Walle	23
1.5: Σύνδεση μεταξύ των διάφορων κατηγοριοποιήσεων των προσθετικών καταστάσεων	24
1.6: Έρευνες σχετικά με την κατηγοριοποίηση προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν σχολικά εγχειρίδια	28
Κεφάλαιο 2 ^ο : Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	34
2.1: Κατηγοριοποίηση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων	34
2.2: Έρευνες σχετικά με την κατηγοριοποίηση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια.....	37
Κεφάλαιο 3: Ερευνητικά ερωτήματα-Μέθοδος.....	42
3.1: Ερευνητικά ερωτήματα	42
3.2: Μέθοδος	42
3.2.1: Ερευνητικό Υλικό	42
3.2.2: Εργαλείο ανάλυσης	43
Κεφάλαιο 4 ^ο : Αποτελέσματα	48
4.1: Α' Δημοτικού	48
4.1.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	48
4.2.1: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	49
4.2: Β' Δημοτικού	51
4.2.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	51
4.2.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	53

4.3: Γ' Δημοτικού.....	54
4.3.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	54
4.3.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	56
4.4: Δ' Δημοτικού	57
4.4.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	57
4.4.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	59
4.5: Ε' Δημοτικού	61
4.5.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	61
4.5.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	63
4.6: Στ' Δημοτικού	65
4.6.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	65
4.6.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	67
4.7: Συνολικά αποτελέσματα.....	68
4.7.1: Προσθετικές καταστάσεις.....	68
4.7.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.....	72
Κεφάλαιο 5 ^ο : Συμπεράσματα-Συζήτηση	76
Βιβλιογραφία.....	82

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 1: Περιγραφή του επιπέδου δυσκολίας των διάφορων υποκατηγοριών, της κατηγοριοποίησης τους Greeno.	19
Πίνακας 2: Κύριες προσθετικές σχέσεις κατά Vergnaud	20
Πίνακας 3: Σύνδεση μεταξύ των διάφορων κατηγοριοποιήσεων των προσθετικών καταστάσεων.	24
Πίνακας 4: Δεδομένα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες από έρευνες στην βιβλιογραφία.	29
Πίνακας 5: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία αλλαγή στις έρευνες της βιβλιογραφίας. ...	30
Πίνακας 6: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία συνδυασμός στις έρευνες της βιβλιογραφίας.	31
Πίνακας 7: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία σύγκριση από έρευνες στην βιβλιογραφία που χρησιμοποίησαν την κατηγοριοποίηση του Greeno.	31
Πίνακας 8: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία σύγκριση από έρευνες της βιβλιογραφίας που χρησιμοποίησαν την κατηγοριοποίηση του Walle.....	32
Πίνακας 9: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία ισότητα από έρευνες της βιβλιογραφίας. .	32
Πίνακας 10: Περιγραφή του επιπέδου δυσκολίας των διάφορων υποκατηγοριών, της κατηγοριοποίησης των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων.....	37
Πίνακας 11: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στις κατηγορίες από έρευνες στην βιβλιογραφία.....	38
Πίνακας 12: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία αναλογία από έρευνες στην βιβλιογραφία.	38
Πίνακας 13: Δεδομένα σχετικά με την πολλαπλασιαστική κατηγορία σύγκριση από έρευνες στην βιβλιογραφία.....	39
Πίνακας 14: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο από έρευνες στην βιβλιογραφία.....	40
Πίνακας 15: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο από έρευνες στην βιβλιογραφία.....	40
Πίνακας 16: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις κατηγορίες.....	48
Πίνακας 17: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στην κατηγορία αλλαγή.	49
Πίνακας 18: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.	49
Πίνακας 19: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις κατηγορίες.	50
Πίνακας 20: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στην κατηγορία αναλογία.	50
Πίνακας 21: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις κατηγορίες.....	51
Πίνακας 22: Κατανομή καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.	51
Πίνακας 23: Κατανομή καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.	52

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1: Εργασία 1, του μαθήματος 14, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού.	43
Εικόνα 2: Εργασία 2, του μαθήματος 32, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού.	43
Εικόνα 3: Δεύτερο ερώτημα από την πρώτη τελεία της δραστηριότητας και αποκάλυψης, του μαθήματος 35, στο σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού.	44
Εικόνα 4: Δεύτερο βελάκι από την εργασία 1, του μαθήματος 17, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού.	44
Εικόνα 5: Τρίτη τελεία της εργασίας 2, του μαθήματος 18, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού.	44
Εικόνα 6: Πρώτο ερώτημα της εργασίας 4, του μαθήματος 27, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού.	45
Εικόνα 7: Διερεύνηση 1, του μαθήματος 12, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού.	45
Εικόνα 8: Πρώτη τελεία του μαθήματος 44, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού.	45
Εικόνα 9: Δεύτερο ερώτημα της εργασίας 2, του μαθήματος 7, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού.	46
Εικόνα 10: Πρόβλημα 1, της 2 ^{ης} επανάληψης, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού.	46
Εικόνα 11: Εφαρμογή, του κεφαλαίου 61, στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού.	46

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξεταστεί η ποικιλία και ο αριθμός των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, που περιέχουν τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα των σχολικών εγχειρίδιων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιήθηκαν κατηγοριοποιήσεις που υπάρχουν στην βιβλιογραφία οι οποίες χωρίζουν τις προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις σε διάφορες κατηγορίες και υποκατηγορίες με βάση την σημασιολογική και την μαθηματική δομή τους. Οι καταστάσεις που περιέχουν τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα των σχολικών εγχειρίδιων αρχικά εντοπίστηκαν και στην συνέχεια εντάχθηκαν στην υποκατηγορία των κατηγοριοποιήσεων που τις περιγράφει. Η ανάλυση έδειξε ότι οι καταστάσεις δεν είναι κατανεμημένες ομοιόμορφα στις διάφορες υποκατηγορίες, η πλειοψηφία των προσθετικών και των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων περιέχουν καταστάσεις οι οποίες ανήκουν σε υποκατηγορίες χαμηλής δυσκολίας. Στα προσθετικά προβλήματα κυριαρχούν οι καταστάσεις οι οποίες αφορούν την εύρεση του πληθάριθμου της ένωσης δύο συνόλων και στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα οι καταστάσεις οι οποίες αφορούν τις απλές αναλογίες. Ακόμα τα προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα αποτελούν την συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια.

Abstract

The purpose of this research is to study the variety and number of additive and multiplicative situations that are present in the school textbooks of the elementary Greek schools. In order to achieved that, we used categorizations that exist in the bibliography, which divide additive and multiplicative situations in various categories and subcategories using their semantic and mathematical structure. The situations that exist in the school books were included in the subcategory of the categorizations that describes them. The analysis showed that the situations are not evenly distributed among the different subcategories, the majority of additive and multiplicative problems contain situations that belong to subcategories of low difficulty. Additive problems are dominated by situations belonging to the subcategory that was named combination 1 and multiplicative problems were dominated by situations belonging to the subcategory that was named rate 2. Also, the problems that can be solved in one step make up the vast majority of the problems contained in the school textbook.

Εισαγωγή

Τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της εκπαίδευσης των μαθητών. Αποτελούν απαραίτητο εργαλείο για την απόκτηση της ικανότητας χρήσης των μαθηματικών σε καταστάσεις που συναντώνται στην καθημερινή ζωή από τους μαθητές (Vicente et al., 2022). Οι Vicente et al. (2022) αναφέρουν ότι είναι γενικά αποδεκτό πως ο βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης θα έπρεπε να είναι να πετυχαίνει οι μαθητές να γίνονται λύτες προβλημάτων. Τα λεκτικά προβλήματα είναι μεγάλο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης από την αρχαιότητα, υπάρχουν αιγυπτιακοί πάπυροι που είναι σχεδόν 4000 χρονών οι οποίοι περιέχουν λεκτικά προβλήματα (Verschaffel et al., 2020). Λόγω της σημασίας τους στην εκπαίδευση έχουν προσελκύσει την προσοχή από ερευνητές της ψυχολογίας και των μαθηματικών εδώ και πάνω από πενήντα χρόνια (Verschaffel et al., 2020).

Όλα τα λεκτικά προβλήματα δεν λύνονται με την ίδια πολυπλοκότητα, κάποια μπορούν να λυθούν εύκολα, ενώ άλλα απαιτούν ένα βαθύτερο επίπεδο κατανόησης (Vicente, Markano & Verschaffel, 2018). Η ικανότητα λύσης λεκτικών προβλημάτων αναπτύσσεται κυρίως στο σχολείο (Vicente, Markano & Verschaffel, 2018). Για να αναπτυχθεί οι μαθητές είναι απαραίτητο να έρθουν σε επαφή με ένα μεγάλο εύρος λεκτικών προβλημάτων, τα οποία είναι πολύπλοκα, ρεαλιστικά και περιλαμβάνουν την πολυπλοκότητα των αυθεντικών μαθηματικών εφαρμογών (Vicente et al., 2022).

Το διδακτικό υλικό και πιο συγκεκριμένα τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της διδακτικής πρακτικής στα σχολεία, σε τέτοιο βαθμό που φαίνεται απίθανο να εκτελεστεί οποιαδήποτε σχολική δραστηριότητα χωρίς την βοήθεια κάποιου διδακτικού υλικού (Tarraga-Minguez et al., 2021). Μπορεί να θεωρηθεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια καθορίζουν αυτά που διδάσκονται οι μαθητές και κατ' επέκταση τις ικανότητες που αποκτούν (Vicente et al., 2022). Για αυτό το λόγο η ποικιλία και ο αριθμός των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια που διδάσκονται οι μαθητές, έχουν μεγάλη επιρροή στην ανάπτυξη της ικανότητας λύσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων και κατ' επέκταση προβλημάτων από την πραγματική ζωή από αυτούς τους μαθητές.

Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων μπορεί να καθοριστεί σε μεγάλο βαθμό από την σημασιολογική δομή τους. Πολλές εμπειρικές μελέτες που έγιναν σε παιδιά από 5 έως 8 ετών, έχουν δείξει ότι λεκτικά προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν με την χρήση της ίδιας αριθμητικής πράξης, αλλά ανήκουν σε διαφορετικούς τύπους σημασιολογικής δομής, έχουν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας (Verschaffel et al., 2020). Στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται τρεις κατηγοριοποιήσεις οι οποίες μπορούν να ταξινομήσουν τα προσθετικά λεκτικά προβλήματα που μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα, με βάση την σημασιολογική δομή τους. Η πρώτη κατηγοριοποίηση προτάθηκε από τους Heller & Greeno (1978) και Carpenter & Moser (1984), η δεύτερη προτάθηκε από τον Vergnaud (1982) και η τρίτη προτάθηκε από τους Walle, Karp & Bay-Williams (1998). Για την περιγραφή των πολλαπλασιαστικών λεκτικών προβλημάτων ενός βήματος με βάση την σημασιολογική δομή τους, υπάρχει μία κατηγοριοποίηση η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στις έρευνες στην βιβλιογραφία και προτάθηκε από τους Vergnaud (1991) και Greer (1992). Αυτές οι προσθετικές και οι

πολλαπλασιαστικές κατηγοριοποιήσεις έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές, με στόχο την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση διαφορών χωρών, σχετικά με την ποικιλία και την πολυπλοκότητα των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων που περιέχουν.

Κεφάλαιο 1^ο: Προσθετικές καταστάσεις

Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα δοθεί αρχικά ένας ορισμός για τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα και θα παρουσιαστεί η σημασία τους στην μαθηματική εκπαίδευση. Στην συνέχεια θα γίνει μια παρουσίαση της σημασίας του σχολικού εγχειριδίου γενικά στην εκπαιδευτική διαδικασία και πιο συγκεκριμένα στην λύση προβλημάτων με την χρήση αριθμητικών πράξεων. Έπειτα θα γίνει περιγραφή κατηγοριοποιήσεων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία και χρησιμοποιούνται για την ανάλυση προσθετικών καταστάσεων, δηλαδή των καταστάσεων που για την λύση τους απαιτείται να γίνει πρόσθεση ή αφαίρεση και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, δηλαδή των καταστάσεων που για την λύση τους απαιτείται να γίνει πολλαπλασιασμός ή διαίρεση, οι οποίες μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα. Ακόμα θα παρουσιαστούν τα ευρήματα που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία από τις έρευνες που επικεντρώθηκαν στην ταξινόμηση των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια διαφόρων χωρών. Οι περισσότερες από αυτές τις αναλύσεις δεν περιορίστηκαν στα προβλήματα μόνο ενός βήματος αλλά στις περιπτώσεις που ένα πρόβλημα χρειαζόταν παραπάνω από δύο βήματα για να λυθεί θεωρούσαν το κάθε ένα βήμα μία ξεχωριστή κατάσταση την οποία ανέλυαν.

Οι προσθετικές καταστάσεις που συναντώνται έχουν την μαθηματική δομή $\alpha \pm \beta = \gamma$ και χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με την σημασιολογική δομή τους. Έπειτα η κάθε κατηγορία χωρίζεται σε υποκατηγορίες ανάλογα με το ποιο από τα α , β ή γ είναι ο άγνωστος και ποια πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) έχουν ανάμεσα τους τα α και β .

Στην παρούσα εργασία θα αναλυθούν τρεις κατηγοριοποιήσεις για την ανάλυση των προσθετικών καταστάσεων σύμφωνα με την σημασιολογική δομή τους που αναφέρονται στην βιβλιογραφία, του Greeno, του Vergnaud και του Walle. Η πρώτη δημιουργήθηκε από τους Heller & Greeno (1978) και Carpenter & Moser (1984), είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη στις έρευνες και για συντομογραφία θα αναφέρεται στη συνέχεια ως κατηγοριοποίηση του Greeno. Η δεύτερη προτάθηκε από τον Vergnaud (Vergnaud, 1982). Δεν χρησιμοποιείται ευρέως στις έρευνες αλλά περιγράφει διαφορετικό εύρος καταστάσεων από αυτή του Greeno. Η τρίτη δημιουργήθηκε από τους Walle, Karp και Bay-Williams (Walle, Karp & Bay-Williams, 1998), για συντομογραφία θα ονομαστεί στο πλαίσιο της εργασίας κατηγοριοποίηση του Walle. Περιγράφει μικρότερο εύρος καταστάσεων από τις άλλες δύο κατηγοριοποιήσεις και έχει κάποιες διαφορές στην κατηγοριοποίηση των καταστάσεων από αυτές. Τέλος, θα γίνει μία παρουσίαση των κοινών στοιχείων και των διαφορών που έχουν αυτές οι τρεις κατηγοριοποιήσεις. Για την παρουσίαση της κάθε κατηγοριοποίησης θα χρησιμοποιηθεί η ορολογία που προτάθηκε στα άρθρα που παρουσιάστηκαν, για αυτό σημειώνουμε ότι οι όροι ποσό και μέτρο που χρησιμοποιούνται στις δύο πρώτες προαναφερθείσες κατηγοριοποιήσεις αναφέρονται ουσιαστικά στον πληθικό αριθμό ενός συνόλου.

1.1: Τι είναι ένα λεκτικό αριθμητικό πρόβλημα και η σημασία του στην εκπαίδευση των μαθητών

Ένα λεκτικό αριθμητικό πρόβλημα ορίζεται από τους Vicente et al. (2022) ως μία γραπτή περιγραφή μίας προβληματικής κατάστασης, που παρουσιάζεται σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο, όπου τίθενται μία ή περισσότερες ερωτήσεις, οι απαντήσεις για τις οποίες μπορούν

να αποκτηθούν με την εφαρμογή μαθηματικών πράξεων σε αριθμητικά δεδομένα τα οποία παρέχονται από την εκφώνηση του προβλήματος ή σε αριθμητικά δεδομένα τα οποία προέρχονται από αυτά. Διαφέρουν από απλές πράξεις οι οποίες παρουσιάζονται σε γραπτή μορφή (όπως $3+4=$;) ή προφορική μορφή (όπως πόσο κάνει 20 δια 5;). Όλα τα λεκτικά προβλήματα δεν εμφανίζουν το ίδιο επίπεδο πολυπλοκότητας, τα πιο απλά μπορούν να λυθούν χωρίς βαθιά κατανόηση της σημασιολογικής και μαθηματικής δομής του προβλήματος, ενώ τα πιο περίπλοκα απαιτούν ένα υψηλό επίπεδο κατανόησης αυτών για την λύση τους (Vicente, Markano & Verschaffel, 2018).

Οι Verschaffel et al. (2020) αναφέρουν ότι τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα διαφέρουν από τα αυθεντικά προβλήματα που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή. Αυτά τα προβλήματα μπορούν επίσης να λυθούν με μαθηματικά, αλλά υπάρχει συνήθως λιγότερη σαφήνεια σχετικά με τα ερωτήματα, τα αριθμητικά δεδομένα, τις πράξεις που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την λύση τους και την σωστή απάντηση. Τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα μπορεί να θεωρηθεί ότι απαιτούν μία μορφή απλουστευμένης μαθηματικής μοντελοποίησης για την λύση τους (Verschaffel et al., 2020). Σύμφωνα με αυτή την άποψη, παρότι υπάρχουν διαφορές ανάμεσα σε ένα λεκτικό πρόβλημα που παρουσιάζεται στο σχολείο και ένα αυθεντικό πρόβλημα από την πραγματική ζωή, τα λεκτικά προβλήματα αν σχεδιαστούν κατάλληλα στο εκπαιδευτικό πλαίσιο, μπορούν να αποτελέσουν προσομοιώσεις αυθεντικών προβλημάτων από την πραγματική ζωή.

Τα λεκτικά προβλήματα έχουν πολύ μεγάλη σημασία για την μαθηματική εκπαίδευση. Ο πιο σημαντικός τους στόχος είναι να προσφέρουν πρακτική για καταστάσεις προβλημάτων από την πραγματική ζωή, στις οποίες οι μαθητές θα χρειαστούν τα μαθηματικά που έχουν μάθει στο σχολείο (Verschaffel et al., 2020). Ακόμα τα λεκτικά προβλήματα μπορούν να ωθήσουν τους μαθητές να μελετήσουν τα μαθηματικά, μπορούν να τους εκπαιδεύσουν να σκέφτονται δημιουργικά και μπορούν να τους βοηθήσουν στην εκμάθηση νέων μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη απαραίτητων ικανοτήτων στο σχολείο. Οι μαθητές που λύνουν με επιτυχία λεκτικά προβλήματα έχουν ανώτερες λεκτικές και γενικά συλλογιστικές ικανότητες, από τους ανεπιτυχείς λύτες προβλημάτων (Xin, 2007). Η λύση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων θεωρείται από πολλούς σαν μέτρο επιτυχίας για τα μαθηματικά, για αυτό πολλά τεστ νοημοσύνης περιλαμβάνουν ενότητα που περιέχει αριθμητικά λεκτικά προβλήματα (Verschaffel et al., 2020).

Οι Vicente et al. (2022) αναφέρουν ότι υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την λύση ενός αριθμητικού λεκτικού προβλήματος, η γνήσια και η επιφανειακή. Η γνήσια προσέγγιση επιτρέπει τους μαθητές να λύσουν οποιοδήποτε πρόβλημα ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητά του και περιλαμβάνει κατανόηση της μαθηματικής δομής του προβλήματος με την χρήση μαθηματικής λογικής. Η επιφανειακή προσέγγιση περιλαμβάνει ένα απευθείας άλμα από τα δεδομένα, στην πράξη που θα χρησιμοποιηθεί και στο αποτέλεσμα. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν απευθείας με την χρήση λίγης ή καθόλου μαθηματική λογικής, αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην λύση προβλημάτων τα οποία είναι περίπλοκα και απαιτούν την χρήση διαφορετικών τύπων μαθηματικών λογικών για την λύση τους.

1.2: Τα σχολικά εγχειρίδια ως μέρος τους εκπαιδευτικού συστήματος και η επίδραση τους όσον αφορά την επίδοση των μαθητών στην λύση προβλημάτων

Ο σημαντικός ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην τάξη των μαθηματικών έχει τονιστεί από πολλούς. Οι μεν Vicente et al. (2022) αναφέρουν ότι αυτά καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τι διδάσκεται μέσα σε μια τάξη. Ακόμα ο Törnroos (2015) συνδέει τα σχολικά εγχειρίδια άμεσα με το μοντέλο των τριών επιπέδων του προγράμματος σπουδών που αναφέρει. Σε αυτό το μοντέλο το εκπαιδευτικό σύστημα περιγράφεται μέσω της εκδήλωσης των τριών επιπέδων του προγράμματος σπουδών, το προοριζόμενο, το εφαρμοζόμενο και το επιτευχθέν. Το προοριζόμενο πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών όπως υπάρχει στο συστημικό επίπεδο και καλύπτει τους στόχους οι οποίοι υπάρχουν στα επίσημα έγγραφα. Το εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών είναι αυτό που πραγματώνεται μέσα στα σχολεία και στις τάξεις, δηλαδή είναι οι μαθηματικές οδηγίες τις οποίες λαμβάνουν οι μαθητές μέσα στην τάξη. Το επιτευχθέν πρόγραμμα σπουδών είναι τα αποτελέσματα της διδασκαλίας μέσα στην τάξη. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι η πιο σημαντική πηγή για τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά, σχετικά με την διδασκαλία τους μέσα στο μάθημα (Sievert et al., 2019). Λόγω της σημαντικότητας των σχολικών εγχειριδίων ο Törnroos (2015) αναφέρει ότι είναι λογικό να επεκταθεί το μοντέλο των τριών επιπέδων του προγράμματος σπουδών ώστε να συμπεριληφθούν τα σχολικά εγχειρίδια. Αυτό επιτυγχάνεται με την ένταξη ενός ενδιάμεσου επιπέδου στο μοντέλο ανάμεσα στο προοριζόμενο και το εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών. Αυτό το ενδιάμεσο στάδιο ονομάζεται το πιθανός εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών και περιλαμβάνει τα σχολικά εγχειρίδια και κάθε πιθανό γραπτό εκπαιδευτικό υλικό που μπορεί να δοθεί μέσα στην τάξη. Αυτό το επίπεδο αντανακλά αρχικά το προοριζόμενο πρόγραμμα σπουδών, αλλά επηρεάζει και το εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών καθώς καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τα αντικείμενα που πραγματεύονται μέσα στην τάξη των μαθηματικών.

Τα σχολικά εγχειρίδια παρέχονται στους μαθητές με σκοπό να υποστηρίξουν την μάθησή τους με κατάλληλο διδακτικό υλικό και δραστηριότητες μέσα στην τάξη (Chang et al., 2017). Με αυτή την έννοια τα σχολικά εγχειρίδια βοηθούν και τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Τα σχολικά εγχειρίδια όμως είναι σε πολλές περιπτώσεις κάτι παραπάνω από υποστηρικτικό υλικό. Για αυτό το λόγο τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να αποτελέσουν πρόβλημα στην διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Oates (2014) αναφέρεται σε αυτά σαν ένα πρόβλημα της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Αγγλία, καθώς θεωρεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια της Αγγλίας δεν παρέχουν μία συνεκτική προσέγγιση των μαθηματικών και καλή καθοδήγηση στην εκπαιδευτικούς.

Οι στρατηγικές επίλυσης είναι ένα από τα ζητήματα στα οποία επιδρούν τα σχολικά εγχειρίδια. Αυτό συμβαίνει καθώς οι στρατηγικές υπολογισμών που παρουσιάζονται σε αυτά, επηρεάζουν την διδασκαλία τους μέσα στην τάξη από τους εκπαιδευτικούς και με αποτέλεσμα να επηρεάζουν αυτά που μαθαίνουν οι μαθητές (Sievert et al., 2021). Υπάρχει σύνδεση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών που διδάσκονται οι μαθητές και των στρατηγικών που εφαρμόζουν αυτοί οι μαθητές για την λύση ανώτερου επιπέδου αριθμητικών προβλημάτων (Sievert et al., 2019). Οι Sievert et al. (2019) μελέτησαν τις στρατηγικές λύσης αριθμητικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης τεσσάρων σχολικών εγχειριδίων της πρώτης δημοτικού. Παρατήρησαν ότι αυτά διαφέρουν σχετικά με

τον αριθμό προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης με πολυψήφιους αριθμούς που περιέχουν και στην ποικιλία διαφορετικών στρατηγικών που παρουσιάζουν. Αυτές οι διαφορές στα σχολικά εγχειρίδια είχαν σαν αποτέλεσμα να επηρεαστεί η απόδοσή των μαθητών στα προβλήματα με αριθμητικές πράξεις. Παρόμοια αποτέλεσμα βρήκε και ο Törnroos (2015) στην έρευνά του, όπου έδειξε συσχέτιση μεταξύ της ποικιλίας και του αριθμού αριθμητικών προβλημάτων που παρείχαν τα σχολικά εγχειρίδια και της απόδοσης των μαθητών. Οι Sievert et al. (2019) αναφέρουν ότι σύμφωνα με την έρευνά τους τα περισσότερα αριθμητικά προβλήματα που διδάσκονται οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών προέρχονται από κάποιο σχολικό εγχειρίδιο. Για αυτό αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν την παιδαγωγική γνώση να μπορούν να αναγνωρίσουν όταν ένα μαθηματικό αντικείμενο παρουσιάζεται με χαμηλή ποιότητα από ένα σχολικό εγχειρίδιο, ώστε να χρησιμοποιήσουν κάποιο άλλο σχολικό εγχειρίδιο για την διδασκαλία αυτού του αντικειμένου. Ακόμα οι Fagginger et al. (2016) στην έρευνά τους βρήκαν ότι τα σχολικά εγχειρίδια που διδάσκονται οι μαθητές, επηρεάζουν τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούν για την λύση ενός αριθμητικού προβλήματος με πράξεις.

Συνοψίζοντας αυτά που λέγονται παραπάνω, μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι ο αριθμός και η ποικιλία των προβλημάτων που περιέχει ένα σχολικό εγχειρίδιο καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό αυτά που μαθαίνουν οι μαθητές. Για αυτό η ποικιλία και αριθμός των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών λεκτικών προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των κατάλληλων ικανοτήτων από τους μαθητές για την λύση τους.

1.3: Προσθετικά προβλήματα κατά Greeno

Η κατηγοριοποίηση του Greeno χωρίζει τα προσθετικά προβλήματα σε τέσσερις κατηγορίες σύμφωνα με την σημασιολογική δομή τους, την αλλαγή, τον συνδυασμό, την σύγκριση και την ισότητα. Ο λόγος που επιλέχθηκε η σημασιολογική δομή και όχι η συντακτική δομή των προβλημάτων, είναι το γεγονός ότι η σημασιολογική δομή είναι πολύ πιο σημαντική για την επιλογή της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος από τους μαθητές (Carpenter & Moser, 1984). Αναφέρεται από τους Tarraga-Minguez et al. (2021) ότι οι κατηγορίες αλλαγή, συνδυασμός και σύγκριση προτάθηκαν από τους Heller & Greeno (1978) και η κατηγορία ισότητα από τους Carpenter & Moser (1984).

Η κατηγορία αλλαγή περιλαμβάνει μία ενέργεια ή αλλαγή, η οποία εκτελείται πάνω σε ένα αρχικό ποσό με αποτέλεσμα αυτό να αυξηθεί ή να μειωθεί. Οι κατηγορίες συνδυασμός και σύγκριση περιλαμβάνουν μόνο στατικές σχέσεις, χωρίς να εκτελείται κάποια ενέργεια. Η κατηγορία συνδυασμός αφορά την υπάρχουσα σχέση ενός συνόλου (σύνολο ένωσης) και των δύο ασύνδετων υποσυνόλων του. Η κατηγορία σύγκριση περιλαμβάνει την σύγκριση δύο διαφορετικών και ασύνδετων συνόλων. Επειδή το ένα σύνολο συγκρίνεται με το άλλο, ονομάζουμε το ένα σύνολο σύγκρισης και το άλλο σύνολο αναφοράς. Η κατηγορία ισότητα είναι συνδυασμός των κατηγοριών σύγκριση και αλλαγή. Αυτό συμβαίνει επειδή η κατηγορία περιλαμβάνει μία ενέργεια όπως η κατηγορία αλλαγή, αλλά αυτή η ενέργεια βασίζεται στην σύγκριση δύο ασύνδετων συνόλων (Carpenter & Moser, 1984). Όπως και στην κατηγορία σύγκριση υπάρχει και στην κατηγορία ισότητα ένα σύνολο σύγκρισης και ένα σύνολο αναφοράς.

Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες χωρίζεται σε υποκατηγορίες οι οποίες θα αναλυθούν παρακάτω. Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται είναι των Vicente et al. (2022) και η ανάλυση των υποκατηγοριών που χρησιμοποιείται προτάθηκε από τους Tarraga-Minguez et al. (2021).

Όπως αναφέρεται στην εισαγωγή του θεωρητικού μέρους, οι προσθετικές σχέσεις καταστάσεις που συναντώνται έχουν την μαθηματική δομή $a \pm b = c$. Στις υποκατηγορίες αλλαγή 1 και αλλαγή 2 άγνωστος είναι το c , δηλαδή το τελικό ποσό, στις υποκατηγορίες αλλαγή 3 και 4 άγνωστος είναι το b , δηλαδή η αλλαγή και στις υποκατηγορίες αλλαγή 5 και 6 άγνωστος είναι το a , δηλαδή το αρχικό ποσό (Vicente et al., 2022).

- Αλλαγή 1: Αυτά τα προβλήματα ξεκινάνε με ένα αρχικό ποσό το οποίο αυξάνεται μέσω μιας ενέργειας που σχετίζεται με άθροιση. Η ερώτηση αφορά το τελικό ποσό. Παράδειγμα: Ο Γιάννης είχε 3 μπίλιες, σε ένα παιχνίδι κέρδισε άλλες 4. Πόσες μπίλιες έχει τώρα;
- Αλλαγή 2: Τα προβλήματα σε αυτήν την υποκατηγορία ξεκινάνε με ένα αρχικό ποσό το οποίο υφίσταται μείωση. Η ερώτηση αφορά το τελικό ποσό. Παράδειγμα: Ο Γιάννης είχε 7 μπίλιες, σε ένα παιχνίδι έχασε τις 4. Πόσες μπίλιες έχει τώρα;
- Αλλαγή 3: Αυτά ξεκινάνε με ένα αρχικό ποσό το οποίο υφίσταται μία άγνωστη αλλαγή, αυτή έχει ως αποτέλεσμα το τελικό ποσό να αυξηθεί. Η ερώτηση αφορά την αλλαγή. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 3 μπίλιες. Σε ένα παιχνίδι κέρδισε κάποιες μπίλιες. Τώρα έχει 7 μπίλιες. Πόσες μπίλιες κέρδισε στο παιχνίδι;
- Αλλαγή 4: Αυτά τα προβλήματα ξεκινάνε με ένα αρχικό ποσό το οποίο υφίσταται μία άγνωστη αλλαγή. Αυτή η αλλαγή έχει ως αποτέλεσμα το τελικό ποσό να μειωθεί. Η ερώτηση αφορά την αλλαγή. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες. Σε ένα παιχνίδι έχασε κάποιες μπίλιες. Τώρα έχει 3 μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχασε στο παιχνίδι;
- Αλλαγή 5: Τα προβλήματα στην υποκατηγορία ξεκινάνε με ένα άγνωστο αρχικό ποσό, το οποίο αυξάνεται μέσω κάποιας ενέργειας κατά μία γνωστή ποσότητα. Η αλλαγή έχει σαν αποτέλεσμα ένα γνωστό τελικό ποσό. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει κάποιες μπίλιες. Σε ένα παιχνίδι κέρδισε άλλες 4 και τώρα έχει 7 μπίλιες. Πόσες μπίλιες είχε ο Γιάννης αρχικά;
- Αλλαγή 6: Αυτά τα προβλήματα ξεκινάνε με ένα άγνωστο αρχικό ποσό, το οποίο μειώνεται μέσω κάποιας ενέργειας κατά μία γνωστή ποσότητα. Η αλλαγή έχει σαν αποτέλεσμα ένα γνωστό τελικό ποσό. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει κάποιες μπίλιες. Σε ένα παιχνίδι έχασε 4 μπίλιες και τώρα έχει 3. Πόσες μπίλιες είχε ο Γιάννης αρχικά;

Η κατηγορία συνδυασμός αφορά τον πληθάρημο της ένωσης δύο ασύνδετων συνόλων, για αυτό τον λόγο περιγράφεται από την μαθηματική δομή $a + b = c$ και χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες. Στην υποκατηγορία συνδυασμός 1 ο άγνωστος είναι το c , δηλαδή ο πληθάρημος του συνόλου ένωσης και στην υποκατηγορία συνδυασμός 2 ο άγνωστος είναι το a ή το b , δηλαδή ο πληθάρημος από ένα από τα αρχικά σύνολα.

- Συνδυασμός 1: Σε αυτά τα προβλήματα δύο γνωστά μέρη ενώνονται και σχηματίζουν ένα σύνολο ένωσης. Η ερώτηση αφορά το σύνολο ένωσης. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 3 μπίλιες και ο Τάσος έχει 4. Πόσες μπίλιες έχουν και οι δύο μαζί;

- Συνδυασμός 2: Σε αυτά το σύνολο ένωσης και το ένα μέρος είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το άλλο μέρος. Παράδειγμα: Ο Γιάννης και ο Τάσος έχουν μαζί 7 μπίλιες. Ο Γιάννης έχει 3 μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;

Η κατηγορία της σύγκρισης περιγράφεται από την δομή μαθηματική $a \pm b = \gamma$ και έχει έξι υποκατηγορίες. Οι υποκατηγορίες σύγκριση 1 και σύγκριση 2 αφορούν την εύρεση του β , δηλαδή της διαφοράς στον πληθάρημο των δύο συνόλων, οι υποκατηγορίες σύγκριση 3 και σύγκριση 4 αφορούν την εύρεση του γ , δηλαδή τον πληθάρημο του συγκρινόμενου συνόλου και οι υποκατηγορίες σύγκριση 5 και σύγκριση 6 αφορούν την εύρεση του α , δηλαδή του πληθάρημου του συνόλου αναφοράς (Vicente et al., 2022).

- Σύγκριση 1: Το σύνολο αναφοράς και το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά την διαφορά των δύο συνόλων από την άποψη του πόσα περισσότερα στοιχεία έχει το σύνολο σύγκρισης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες και ο Τάσος έχει 3. Πόσες περισσότερες μπίλιες έχει ο Γιάννης σε σχέση με τον Τάσο;
- Σύγκριση 2: Σε αυτά τα προβλήματα το σύνολο αναφοράς και το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, η ερώτηση αφορά την διαφορά των δύο συνόλων από την άποψη του πόσα λιγότερα στοιχεία έχει το σύνολο σύγκρισης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες και ο Τάσος έχει 3. Πόσες λιγότερες μπίλιες έχει ο Τάσος σε σχέση με τον Γιάννη;
- Σύγκριση 3: Εδώ το σύνολο αναφοράς όπως και η διαφορά του με το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσα περισσότερα αντικείμενα έχει. Η ερώτηση αφορά το σύνολο σύγκρισης. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 4 μπίλιες. Ο Τάσος έχει 3 μπίλιες παραπάνω από τον Γιάννη. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;
- Σύγκριση 4: Το σύνολο αναφοράς όπως και η διαφορά του με το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσα λιγότερα αντικείμενα έχει. Η ερώτηση αφορά το σύνολο σύγκρισης. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες. Ο Τάσος έχει 3 μπίλιες λιγότερες από τον Γιάννη. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;
- Σύγκριση 5: Εδώ το σύνολο σύγκρισης και η διαφορά του με το σύνολο αναφοράς είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσα περισσότερα αντικείμενα έχει το σύνολο αναφοράς. Η ερώτηση αφορά το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες. Ο Γιάννης έχει 3 περισσότερες μπίλιες από τον Τάσο. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;
- Σύγκριση 6: Εδώ το σύνολο σύγκρισης και η διαφορά του με το σύνολο αναφοράς είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσα λιγότερα αντικείμενα έχει το σύνολο αναφοράς. Η ερώτηση αφορά το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 4 μπίλιες. Ο Γιάννης έχει 3 λιγότερες μπίλιες από τον Τάσο. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;

Η κατηγορία της ισότητας περιγράφεται και αυτή από την μαθηματική δομή $a \pm b = \gamma$ και έχει έξι υποκατηγορίες. Ο χωρισμός της σε υποκατηγορίες είναι παρόμοιος με αυτού της κατηγορίας σύγκρισης, οι υποκατηγορίες ισότητα 1 και ισότητα 2 αφορούν την εύρεση του β , οι υποκατηγορίες ισότητα 3 και 4 αφορούν την εύρεση του γ και οι υποκατηγορίες ισότητα 5 και 6 αφορούν την εύρεση του α .

- Ισότητα 1: Το μεγαλύτερο και το μικρότερο σύνολο είναι γνωστά. Η διαφορά τους ζητείται από την άποψη του πόσα αντικείμενα πρέπει να προστεθούν στο σύνολο σύγκρισης ώστε τα δύο σύνολα να γίνουν ίσα. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες και ο Τάσος 4. Πόσες μπίλιες πρέπει να δοθούν στον Τάσο, ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό με τον Γιάννη;
- Ισότητα 2: Το μεγαλύτερο και το μικρότερο σύνολο είναι γνωστά. Η διαφορά τους ζητείται από την άποψη του πόσα αντικείμενα πρέπει να αφαιρεθούν από το μεγαλύτερο σύνολο ώστε τα δύο σύνολα να γίνουν ίσα. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες και ο Τάσος 4. Πόσες μπίλιες πρέπει να παρθούν από τον Γιάννη ώστε και να έχει τον ίδιο αριθμό με τον Τάσο;
- Ισότητα 3: Το μικρότερο σύνολο και η διαφορά που πρέπει να προστεθεί σε αυτό ώστε να γίνει ίσο με το μεγαλύτερο σύνολο είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το μεγαλύτερο σύνολο. Παράδειγμα: Ο Τάσος έχει 3 μπίλιες. Αν του δοθούν άλλες 4, θα έχει τον ίδιο αριθμό μπιλιών με τον Γιάννη. Πόσες μπίλιες έχει ο Γιάννης;
- Ισότητα 4: Το μεγαλύτερο σύνολο και η διαφορά που πρέπει να αφαιρεθεί από αυτό ώστε να γίνει ίσο με το μικρότερο σύνολο είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το μικρότερο σύνολο. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες. Αν του αφαιρεθούν άλλες 4, θα έχει τον ίδιο αριθμό μπιλιών με τον Τάσο. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;
- Ισότητα 5: Το μεγαλύτερο σύνολο και η διαφορά που πρέπει να προστεθεί στο μικρότερο σύνολο, ώστε να γίνει ίσο με το μεγαλύτερο σύνολο είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το μικρότερο σύνολο. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 7 μπίλιες. Αν ο Τάσος είχε 4 παραπάνω μπίλιες θα είχε όσες μπίλιες έχει ο Γιάννης. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;
- Ισότητα 6: Το μικρότερο σύνολο και η διαφορά που πρέπει να αφαιρεθεί από το μεγαλύτερο σύνολο, ώστε να γίνει ίσο με το μικρότερο σύνολο είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το μεγαλύτερο σύνολο. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 4 μπίλιες. Αν ο Τάσος είχε 3 μπίλιες λιγότερες, θα είχε όσες μπίλιες έχει ο Γιάννης. Πόσες μπίλιες έχει ο Τάσος;

Οι Vicente, Markano & Verschaffel (2018) αναφέρουν ότι αυτές οι υποκατηγορίες χωρίζονται σε τρία επίπεδα πολυπλοκότητας, σύμφωνα με το μοντέλο από στρατηγικές για την λύση προβλημάτων που έχει προταθεί από τους Riley & Greeno (1988). Το μοντέλο βασίζεται στις επιδόσεις των μαθητών σχετικά με την λύση προβλημάτων που περιγράφονται από αυτές τις υποκατηγορίες. Το πρώτο επίπεδο είναι αυτό της χαμηλής δυσκολίας, σε αυτό ανήκουν τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν χωρίς νοητική αναπαράσταση. Εκεί ανήκουν τα προβλήματα των υποκατηγοριών αλλαγή, σύγκριση και ισότητα 1 και 2 και συνδυασμός 1. Το δεύτερο επίπεδο είναι αυτό της μεσαίας δυσκολίας, εκεί ανήκουν τα προβλήματα που απαιτούν για την λύση τους νοητική αναπαράσταση, η οποία περιλαμβάνει σύνολα τα οποία είναι άγνωστα αλλά μπορούν να υπολογιστούν εκτελώντας κάποιες ενέργειες με βάση τις σχέσεις μεταξύ των συνόλων. Σε αυτό ανήκουν τα προβλήματα των υποκατηγοριών αλλαγή, σύγκριση και ισότητα 3 και 4. Το τρίτο επίπεδο είναι αυτό της υψηλής δυσκολίας, εκεί ανήκουν τα προβλήματα που για την λύση τους απαιτούν μετατροπή της αρχικής νοητικής αναπαράστασης του προβλήματος με την εφαρμογή εν μέρη γνωστής εννοιολογικής γνώσης. Για παράδειγμα στο πρόβλημα που δίνεται από την υποκατηγορία σύγκριση 6 οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι οι μπίλιες του Τάσου είναι το ολόκληρο, οι μπίλιες του Γιάννη είναι

ένα μέρος και το άλλο μέρος είναι η διαφορά. Εκεί ανήκουν τα προβλήματα των υποκατηγοριών αλλαγή, σύγκριση και ισότητα 5 και 6 και συνδυασμός 2.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα επίπεδα δυσκολίας των διαφόρων υποκατηγοριών. Το σύμβολο + τοποθετείται στην στήλη του επιπέδου δυσκολίας που ανήκει η υποκατηγορία.

Πίνακας 1: Περιγραφή του επιπέδου δυσκολίας των διάφορων υποκατηγοριών, της κατηγοριοποίησης τους Greeno.

Υποκατηγορία	Επίπεδο δυσκολίας			
	Χαμηλό	Μεσαίο	Υψηλό	
Αλλαγή	1	+		
	2	+		
	3		+	
	4		+	
	5			+
	6			+
Συνδυασμός 2	1	+		
	2			+
Σύγκριση	1	+		
	2	+		
	3		+	
	4		+	
	5			+
	6			+
Ισότητα	1	+		
	2	+		
	3		+	
	4		+	
	5			+
	6			+

1.4: Προσθετικές κατηγορίες κατά Vergnaud

Ο Vergnaud (1982) ανέλυσε και αυτός τις βασικές κατηγορίες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των προσθετικών καταστάσεων με βάση την σημασιολογική δομή τους. Η παρουσίαση των κατηγοριών θα γίνει με την χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων στον πίνακα 2, δεν επιλέχθηκε η χρήση των αλγεβρικών εκφράσεων καθώς μέσω της χρήσης τους κάποιες πληροφορίες θα χανόταν. Όλες οι σχέσεις και τα προβλήματα μπορούν να αναπαρασταθούν με εξισώσεις στο Z ή στο R αλλά με το κόστος της ταυτοποίησης διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων το ένα με το άλλο.

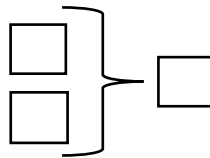
Ο όρος μέτρο που χρησιμοποιείται είναι ισοδύναμος με τον όρο ποσότητα που χρησιμοποιήθηκε στην παρουσίαση της κατηγοριοποίησης του Greeno και αναφέρεται στον πληθάρημο ενός συνόλου. Ακόμα ο όρος μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται είναι ισοδύναμος με τον όρο αλλαγή που χρησιμοποιήθηκε στην παρουσίαση της κατηγοριοποίησης του Greeno και αναφέρεται στην αλλαγή που υφίσταται ένα σύνολο με αποτέλεσμα να αλλάξει ο πληθάρημος του. Τέλος, ο όρος σύνθεση είναι ισοδύναμος με τον

όρο συνδυασμός που χρησιμοποιήθηκε στην παρουσίαση της κατηγοριοποίησης του Greeno και αναφέρεται στην ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων, με αποτέλεσμα ο πληθάριθμος του συνόλου ένωσης να είναι το άθροισμα των πληθαρίσμων των δύο συνόλων.

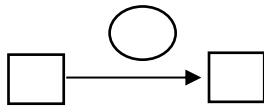
Μέσω της χρήσης διαφορετικών συμβόλων αναπαρίστανται τα μέτρα, ο μετασχηματισμός ενός μέτρου, η σύγκριση διαφορετικών μέτρων κ.α.. Τα μέτρα θεωρούνται ότι είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ενώ οι μετασχηματισμοί, οι συγκρίσεις και οι σχέσεις θεωρούνται ότι είναι πραγματικοί αριθμοί.

Πίνακας 2: Κύριες προσθετικές σχέσεις κατά Vergnaud

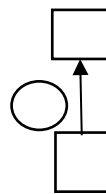
1. Σύνθεση μέτρων



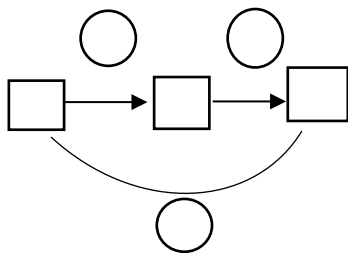
2. Μετασχηματισμός ενός μέτρου



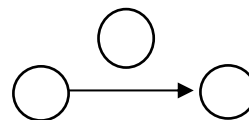
3. Σύγκριση μέτρων



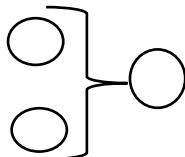
4. Σύνθεση μετασχηματισμών



5. Μετασχηματισμός μίας σχέσης



6. Σύνθεση σχέσεων

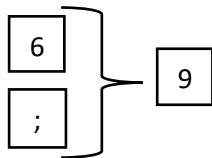


Αυτές οι κατηγορίες μπορούν να χωριστούν σε υποκατηγορίες όπως αναφέρει ο Vergnaud (2009), δεν έχει όμως δοθεί στην βιβλιογραφία ξεχωριστό όνομα για την κάθε υποκατηγορία όπως έχει γίνει στην κατηγοριοποίηση του Greeno. Για παράδειγμα από την κατηγορία της σύνθεσης των μέτρων μπορούν να παραχθούν δύο υποκατηγορίες. Στην πρώτη είναι γνωστά τα δύο μέτρα και ζητείται να βρεθεί ο πληθάριθμος της σύνθεσής τους. Στην άλλη είναι γνωστό το ένα μέτρο και η σύνθεση των δύο και ζητείται να βρεθεί το άγνωστο μέτρο.

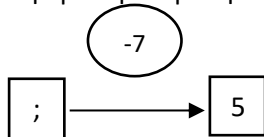
Η κατηγορία της μετασχηματισμός ενός μέτρου χωρίζεται σε έξι υποκατηγορίες (Vergnaud, 2009). Στην πρώτη υποκατηγορία είναι γνωστά το αρχικό μέτρο και ο μετασχηματισμός, ο οποίος είναι θετικός και ζητείται να βρεθεί το τελικό μέτρο. Στην δεύτερη υποκατηγορία είναι γνωστά το αρχικό μέτρο και ο μετασχηματισμός, ο οποίος είναι αρνητικός και ζητείται να βρεθεί το τελικό μέτρο. Στην τρίτη και στην τέταρτη υποκατηγορία είναι γνωστά το αρχικό και το τελικό μέτρο και ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός, στην τρίτη υποκατηγορία το τελικό μέτρο είναι μεγαλύτερο από το αρχικό και στην τέταρτη το τελικό μέτρο είναι μικρότερο από το αρχικό. Στην πέμπτη και στην έκτη υποκατηγορία είναι γνωστά το τελικό μέτρο και ο μετασχηματισμός και ζητείται το αρχικό μέτρο, στην πέμπτη το τελικό μέτρο είναι μεγαλύτερο από το αρχικό και στην έκτη το τελικό μέτρο είναι μικρότερο από το αρχικό. Για την λύση τους οι τέσσερις υποκατηγορίες απαιτούν αφαίρεση και οι δύο πρόσθεση.

Τώρα θα παρουσιαστούν κάποια παραδείγματα προβλημάτων από τον Vergnaud (1982) που ανήκουν σε αυτές τις κατηγορίες και η συμβολική αναπαράστασή τους.

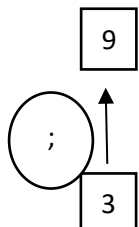
Παράδειγμα 1: Υπάρχουν 9 παιδιά σε ένα τραπέζι. Τα έξι από αυτά είναι κορίτσια, πόσα είναι τα αγόρια; Αυτό το παράδειγμα ανήκει στην κατηγορία της σύνθεση των μέτρων μιας και μιλάει για τον συνδυασμό δύο διαφορετικών μέτρων. Πιο συγκεκριμένα ανήκει στην δεύτερη υποκατηγορία της.



Παράδειγμα 2: Ο Γιάννης έχασε σε ένα παιχνίδι 7 μπίλιες. Μετράει τις μπίλιες του και βλέπει ότι έχει 5. Πόσες μπίλιες είχε αρχικά; Αυτό είναι ένα παράδειγμα της κατηγορίας μετασχηματισμού ενός μέτρου. Ανήκει στην έκτη υποκατηγορία της, καθώς το πρόβλημα αφορά την εύρεση του αρχικού μέτρου, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το τελικό.

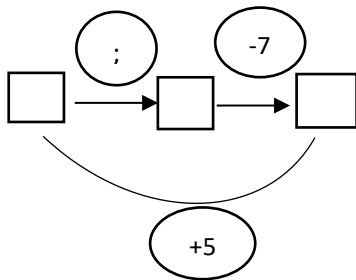


Παράδειγμα 3: Ο Γιάννης έχει 3 μπίλιες και ο Τάσος έχει 9. Πόσες περισσότερες μπίλιες έχει ο Τάσος από τον Γιάννη; Αυτό είναι ένα πρόβλημα που ανήκει στην κατηγορία της σύγκρισης των μέτρων.

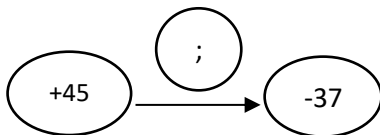


Παράδειγμα 4: Ο Γιάννης έπαιξε δύο παιχνίδια με μπίλιες. Στο δεύτερο παιχνίδι έχασε 7 μπίλιες. Όταν μέτρησε τις μπίλιες του στο τέλος, είδε ότι κέρδισε συνολικά από τα δύο παιχνίδια 5 μπίλιες. Τι συνέβη στο πρώτο παιχνίδι; Αυτό το πρόβλημα όπως φαίνεται ανήκει

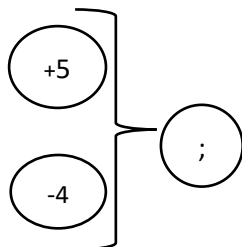
στην κατηγορία της σύνθεσης μετασχηματισμών. Είναι γνωστές η δεύτερη και η συνολική μετατροπή, ζητείται να βρεθεί η αρχική μετατροπή.



Παράδειγμα 5: Ο Γιάννης έλαβε 45 ευρώ από την γιαγιά του. Μετά πήγε στο κατάστημα και αγόρασε διάφορα πράγματα. Όταν μέτρησε τα χρήματα που έχει, είδε ότι έχει 37 ευρώ λιγότερα από αυτά που είχε πριν του δώσει τα χρήματα η γιαγιά του. Πόσα ευρώ ξόδεψε; Αυτό είναι ένα πρόβλημα της κατηγορίας μετασχηματισμού μίας σχέσης. Είναι γνωστές η αρχική και η τελική σχέση και ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός των σχέσεων.



Παράδειγμα 6: Τα αγόρια σε μία τάξη αυξήθηκαν κατά 5 και τα κορίτσια στην τάξη μειώθηκαν κατά 4. Πόσα παραπάνω παιδιά έχει η τάξη; Αυτό είναι ένα πρόβλημα της κατηγορίας σύνθεση σχέσεων. Είναι γνωστές οι δύο αρχικές σχέσεις και ζητείται να βρεθεί η σύνθεσή τους.



Ο Vergnaud (1982) αναφέρει ότι τα προβλήματα της κατηγορίας του μετασχηματισμού των μέτρων, όπως το παράδειγμα 2, χρησιμοποιούνται σαν τα πρωταρχικά μοντέλα για την εκμάθηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε μαθητές. Αυτό συμβαίνει επειδή αναμένονται κάποιες παρανοήσεις και δυσκολίες στην αντιμετώπιση προβλημάτων των άλλων κατηγοριών. Ακόμα οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες στην λύση των προβλημάτων στις κατηγορίες τέσσερα και πέντε, καθώς αναφέρει ο Vergnaud (1982) ότι το 75% των μαθητών ηλικίας 11 με 12 χρονών αποτυγχάνει να λύσει προβλήματα όπως το παράδειγμα 4, ενώ το 75% των μαθητών ηλικίας 15 ετών δεν μπορεί να λύσει προβλήματα όπως το παράδειγμα 5. Αυτά τα αποτελέσματα τονίζουν την ανάγκη οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με όλες τις κατηγορίες προβλημάτων σε βάθος αρκετών ετών. Πιθανή ερμηνεία για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην λύση προβλημάτων που ανήκουν στις κατηγορίες 4, 5 και 6 είναι η δυσκολία στην δημιουργία αναπαράστασης της κατάστασης που περιέχει το πρόβλημα λόγω της εμπλοκής των αρνητικών αριθμών. Για αυτό το λόγο οι καταστάσεις που ανήκουν στις κατηγορίες 4, 5 και 6 συμπεριλήφθηκαν στο τρίτο επίπεδο της

υψηλής δυσκολίας στην ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας (δες πίνακα 1, σελίδα 19).

Προσθετικές κατηγορίες κατά Walle

Οι Walle, Karp & Bay-Williams (1998) στο βιβλίο τους χώρισαν τις προσθετικές καταστάσεις σε τέσσερεις κατηγορίες, την ένωση, τον διαχωρισμό, το μέρος-μέρος-όλο και την σύγκριση. Για συντομία αυτή η κατηγοριοποίηση στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα ονομάζεται κατηγοριοποίηση του Walle.

Για την περιγραφή των κατηγοριών και των υποκατηγοριών χρησιμοποιήθηκε η ορολογία των συγγραφέων του βιβλίου. Κάτι που πρέπει να τονιστεί είναι ότι με ο όρος ποσότητα που χρησιμοποιήθηκε δεν είναι ισοδύναμος με τον όρο ποσό που χρησιμοποιήθηκε στην περιγραφή της κατηγοριοποίησης του Greeno και με τον όρο μέτρο που χρησιμοποιήθηκε στην περιγραφή της κατηγοριοποίησης του Vergnaud. Αυτό συμβαίνει επειδή ο όρος ποσότητα χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ποσού ή του μέτρου, αλλά επίσης χρησιμοποιείται και για την περιγραφή της αλλαγής σύμφωνα με τον Greeno ή του μετασχηματισμού σύμφωνα με τον Vergnaud. Οπότε ο όρος ποσότητα σύμφωνα με τον Walle είναι ισοδύναμος με τον συνδυασμό των όρων ποσό και αλλαγή που χρησιμοποιήθηκαν στην περιγραφή της κατηγοριοποίησης του Greeno και με τον συνδυασμό των όρων μέτρο και μετασχηματισμός που χρησιμοποιήθηκαν στην περιγραφή της κατηγοριοποίησης του Vergnaud.

Οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία ένωση περιλαμβάνουν τρεις ποσότητες, η αρχική ποσότητα, η ποσότητα αλλαγής (η οποία προστίθεται στην αρχική ποσότητα) και η τελική ποσότητα μετά την αλλαγή. Αυτή η κατηγορία χωρίζεται σε τρεις υποκατηγορίες στην πρώτη το ζητούμενο είναι η τελική ποσότητα, στην δεύτερη το ζητούμενο είναι η ποσότητα αλλαγής και στην τρίτη το ζητούμενο είναι η αρχική ποσότητα.

Η κατηγορία διαχωρισμός περιλαμβάνει τις ίδιες τρεις ποσότητες όπως η κατηγορία ένωση. Η διαφορά εδώ είναι ότι η τελική ποσότητα μετά την αλλαγή είναι μικρότερη από την αρχική ποσότητα, δηλαδή η ποσότητα αλλαγής αφαιρείται από την αρχική ποσότητα. Η κατηγορία διαχωρισμός χωρίζεται σε τρεις υποκατηγορίες στην πρώτη το ζητούμενο είναι η τελική ποσότητα, στην δεύτερη το ζητούμενο είναι η ποσότητα αλλαγής και στην τρίτη το ζητούμενο είναι η αρχική ποσότητα.

Η κατηγορία μέρος-μέρος-όλο περιλαμβάνει δύο σύνολα τα οποία συνδυάζονται σε ένα σύνολο ένωσης. Ο συνδυασμός μπορεί να είναι μία φυσική ενέργεια ή μπορεί να είναι ένας διανοητικός συνδυασμός όπου τα μέρη δεν ενώνονται φυσικά. Υπάρχουν δύο υποκατηγορίες σε αυτήν την κατηγορία στην πρώτη το ζητούμενο είναι ο πληθάρθμος του συνόλου ένωσης και στην δεύτερη το ζητούμενο είναι ο πληθάρθμος από ένα από τα δύο αρχικά σύνολα.

Η κατηγορία της σύγκρισης περιλαμβάνει την σύγκριση δύο ποσοτήτων, η τρίτη ποσότητα δεν υπάρχει αλλά είναι η διαφορά των δύο. Αυτή η κατηγορία χωρίζεται σε τρεις υποκατηγορίες στην πρώτη το ζητούμενο είναι η διαφορά, στην δεύτερη το ζητούμενο είναι η μεγαλύτερη από τις δύο αρχικές ποσότητες και στην τρίτη το ζητούμενο είναι η μικρότερη από αυτές.

1.5: Σύνδεση μεταξύ των διάφορων κατηγοριοποιήσεων των προσθετικών καταστάσεων

Οι τρεις προαναφερθείς κατηγοριοποιήσεις που περιεγράφηκαν χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση των προσθετικών καταστάσεων, οπότε είναι αναμενόμενο να έχουν αρκετά κοινά μεταξύ τους στην κατηγοριοποίηση των καταστάσεων αλλά και κάποιες διαφορές.

Πιο συγκεκριμένα, οι κατηγορίες αλλαγή του Greeno, μετασχηματισμός ενός μέτρου του Vergnaud, ένωση και διαχωρισμός του Walle αφορούν τον μετασχηματισμό ενός συνόλου με αποτέλεσμα να αλλάξει ο πληθάρηθμός του. Οι κατηγορίες συνδυασμός του Greeno, σύνθεση μέτρων του Vergnaud και μέρος-μέρος-όλο του Walle αφορούν τον πληθάρηθμο του συνόλου ένωσης δύο ασύνδετων συνόλων. Οι κατηγορίες σύγκριση του Greeno, σύγκριση μέτρων του Vergnaud και σύγκριση του Walle αφορούν την σύγκριση των πληθάρηθμων δύο συνόλων. Η κατηγορία ισότητα του Greeno αφορά τον μετασχηματισμό ενός συνόλου, με σκοπό ο πληθάρηθμός του να γίνει ίσος με αυτόν ενός διαφορετικού συνόλου, οπότε αφορά και τον μετασχηματισμό ενός συνόλου και την σύγκριση συνόλων. Η κατηγορία σύνθεση των μετασχηματισμών του Vergnaud αφορά την σύνθεση δύο μετασχηματισμών οι οποίοι εφαρμόζονται σε ένα σύνολο, δεν δίνεται η αρχική και η τελική κατάσταση αυτού του συνόλου, αλλά δίνονται κάποιες από τις επιπτώσεις αυτών των μετασχηματισμών στο σύνολο. Η κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης του Vergnaud αφορά τον μετασχηματισμό ενός συνόλου του οποίου η αρχική και η τελική κατάσταση περιγράφονται από πραγματικούς αριθμούς. Η κατηγορία σύνθεση σχέσεων του Vergnaud αφορά την ένωση δύο συνόλων τα οποία περιγράφονται από πραγματικούς αριθμούς.

Στον πίνακα 3 περιγράφεται η σύνδεση μεταξύ των διάφορων κατηγοριοποιήσεων. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει παραδείγματα κάποιων προσθετικών καταστάσεων. Η δεύτερη στήλη περιέχει την υποκατηγορία που περιγράφει την κατάσταση που βρίσκεται στην πρώτη στήλη αυτής της γραμμής, αν αυτή περιγράφεται από την κατηγοριοποίηση του Greeno, δηλαδή την κατηγοριοποίηση που δημιουργήθηκε από τους από τους Heller & Greeno (1978), αλλιώς υπάρχει το σύμβολο “-“. Παρόμοια στην Τρίτη στήλη ελέγχεται αν η κατάσταση περιγράφεται από την κατηγοριοποίηση του Vergnaud και στην τέταρτη ελέγχεται αν η κατάσταση περιγράφεται από την κατηγοριοποίηση του Walle. Η μόνο διαφορά σχετικά με την Τρίτη στήλη είναι ότι οι υποκατηγορίες από τις κατηγορίες που περιέχει η κατηγοριοποίηση Vergnaud δεν έχουν ονομαστεί, οπότε αναγράφεται το όνομα της κατηγορίας που ανήκει η κατάσταση.

Πίνακας 3: Σύνδεση μεταξύ των διάφορων κατηγοριοποιήσεων των προσθετικών καταστάσεων.

	Greeno	Vergnaud	Walle
Ο Γιάννης είχε 3 ευρώ. Πήγε στην Γιαγιά του και του έδωσε άλλα 6 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα;	ΑΛΛΑΓΗ (1)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΕΝΩΣΗ (1)
Ο Γιάννης είχε 6 ευρώ. Πήγε αγόρασε γλυκά που έκαναν 4 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα;	ΑΛΛΑΓΗ (2)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ (1)
Ο Γιάννης είχε 3 ευρώ. Πήγε στην Γιαγιά του, η οποία του έδωσε	ΑΛΛΑΓΗ (3)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΕΝΩΣΗ (2)

κάποια ευρώ. Όταν μέτρησε μετά τα χρήματα του είχε 9 ευρώ. Πόσα ευρώ του έδωσε η Γιαγιά του;			
Ο Γιάννης είχε 9 ευρώ. Πήγε αγόρασε γλυκά, όταν μέτρησε μετά τα χρήματα του είχε 3 ευρώ. Πόσα ευρώ ξόδεψε στα γλυκά;	ΑΛΛΑΓΗ (4)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ (2)
Ο Γιάννης είχε κάποια ευρώ. Πήγε στην Γιαγιά του και του έδωσε άλλα 6 ευρώ. Όταν μέτρησε μετά τα χρήματα του είχε 9 ευρώ. Πόσα ευρώ είχε αρχικά;	ΑΛΛΑΓΗ (5)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΕΝΩΣΗ (3)
Ο Γιάννης είχε κάποια ευρώ. Πήγε αγόρασε γλυκά που έκαναν 4 ευρώ. Όταν μέτρησε μετά τα χρήματα του είχε 3 ευρώ. Πόσα ευρώ είχε αρχικά;	ΑΛΛΑΓΗ (6)	Μετασχηματισμός ενός μέτρου	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ (3)
Ο Γιάννης έχει 4 ευρώ και ο Τάσος έχει 3. Πόσα ευρώ έχουν και οι δύο μαζί;	ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ (1)	Σύνθεση μέτρων	Μέρος-μέρος-όλο (1)
Ο Γιάννης έχει 4 ευρώ. Ο Γιάννης και ο Τάσος μαζί έχουν 7 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει ο Τάσος;	ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ (1)	Σύνθεση μέτρων	Μέρος-μέρος-όλο (2)
Ένα εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 10 ευρώ, ενώ ένα εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 15 ευρώ. Πόσα περισσότερα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα ποδοσφαίρου από αυτό για τον αγώνα μπάσκετ;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (1)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (1)
Ένα εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 10 ευρώ, ενώ ένα εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 15 ευρώ. Πόσα λιγότερα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα μπάσκετ από αυτό για τον αγώνα ποδοσφαίρου;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (2)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (1)
Ένα εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 10 ευρώ. Το εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 5 ευρώ περισσότερα. Πόσα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα ποδοσφαίρου;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (3)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (2)
Ένα εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 15 ευρώ. Το εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 5 ευρώ λιγότερα. Πόσα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα μπάσκετ;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (4)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (3)

Ένα εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 15 ευρώ. Το εισιτήριο για αγώνα ποδοσφαίρου κοστίζει 5 ευρώ περισσότερα από αυτά ενός αγώνα μπάσκετ. Πόσα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα μπάσκετ;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (5)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (2)
Ένα εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 10 ευρώ. Το εισιτήριο για αγώνα μπάσκετ κοστίζει 5 ευρώ λιγότερα από αυτά ενός αγώνα ποδοσφαίρου. Πόσα ευρώ κοστίζει το εισιτήριο για τον αγώνα ποδοσφαίρου;	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (6)	Σύγκριση μέτρων	ΣΥΓΚΡΙΣΗ (3)
Έχω 3 ευρώ και ο αδερφός μου έχει 7 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να μου δώσει η Γιαγιά ώστε να έχω τον ίδιο αριθμό με τον αδερφό μου;	ΙΣΟΤΗΤΑ (1)	-	-
Έχω 3 ευρώ και ο αδερφός μου έχει 7 ευρώ. Πόσα ευρώ πρέπει να ξοδέψει ο αδερφός μου ώστε να έχουμε τον ίδιο αριθμό;	ΙΣΟΤΗΤΑ (2)	-	-
Έχω 3 ευρώ. Αν η Γιαγιά μου δώσει άλλα 4 ευρώ θα έχω τον ίδιο αριθμό με τον αδερφό μου. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός μου;	ΙΣΟΤΗΤΑ (3)	-	-
Ο αδερφός μου έχει 7 ευρώ. Αν ξοδέψει 4 ευρώ θα έχει τον ίδιο αριθμό με εμένα. Πόσα ευρώ έχω;	ΙΣΟΤΗΤΑ (4)	-	-
Ο αδερφός μου έχει 7 ευρώ. Αν μου δώσουν 4 ευρώ θα έχω όσα έχει ο αδερφός μου. Πόσα ευρώ έχω;	ΙΣΟΤΗΤΑ (5)	-	-
Έχω 3 ευρώ. Αν ο αδερφός μου ξοδέψει 4 ευρώ, θα έχει όσα έχω και εγώ. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός μου;	ΙΣΟΤΗΤΑ (6)	-	-
Είχα κάποια χρήματα. Η μαμά μου έδωσε 5 ευρώ. Μετά εγώ πήγα στο κατάστημα και ξόδεψα 8 ευρώ. Πόσα ευρώ έχω λιγότερα σε σχέση με αυτά που είχα στην αρχή;	-	Σύνθεση μετασχηματισμών	-
Είχα κάποια χρήματα. Η μαμά μου έδωσε 5 ευρώ. Μετά εγώ πήγα στο κατάστημα και ξόδεψα κάποια ευρώ. Στο τέλος είχα 2 ευρώ λιγότερα σε σχέση με τα	-	Σύνθεση μετασχηματισμών	-

αρχικά. Πόσα ευρώ ξόδεψα στο κατάστημα;		
Είχα κάποια χρήματα. Η μαμά μου έδωσε κάποια ευρώ. Μετά εγώ πήγα στο κατάστημα και ξόδεψα 7 ευρώ. Στο τέλος είχα 2 ευρώ λιγότερα σε σχέση με τα αρχικά. Πόσα ευρώ μου έδωσε η μαμά;	-	Σύνθεση μετασχηματισμών -
Ο Γιάννης είχε σε ένα λογαριασμό του στην τράπεζα κάποια χρήματα. Σε αυτά χθες πρόσθεσε άλλα 100 ευρώ. Σήμερα αγόρασε μία τηλεόραση. Στον λογαριασμό του τώρα ο Γιάννης έχει 200 λιγότερα από αυτά που είχε αρχικά. Πόσα ευρώ ξόδεψε για την τηλεόραση;	-	Μετασχηματισμός μίας σχέσης -
Ο Γιάννης είχε σε ένα λογαριασμό του στην τράπεζα κάποια χρήματα. Σε αυτά χθες πρόσθεσε άλλα 100 ευρώ. Σήμερα αγόρασε μία τηλεόραση η οποία κοστίζει 300 ευρώ. Πόσα ευρώ λιγότερα έχει τώρα στον λογαριασμό του σε σχέση με αυτά που είχε αρχικά;	-	Μετασχηματισμός μίας σχέσης -
Ο Γιάννης είχε σε ένα λογαριασμό του στην τράπεζα κάποια χρήματα. Σε αυτά χθες πρόσθεσε κάποια ευρώ. Σήμερα αγόρασε μία τηλεόραση η οποία κοστίζει 300 ευρώ. Στον λογαριασμό του τώρα ο Γιάννης έχει 200 λιγότερα από αυτά που είχε αρχικά. Πόσα ευρώ πρόσθεσε χθες;	-	Μετασχηματισμός μίας σχέσης -
Τα αγόρια σε μία τάξη αυξήθηκαν κατά 5 και τα κορίτσια στην τάξη μειώθηκαν κατά 4. Πόσα παραπάνω παιδιά έχει η τάξη;	-	Σύνθεση σχέσεων -
Τα αγόρια σε μια τάξη αυξήθηκαν κατά 5, έγινε και μια αλλαγή στον αριθμό των κοριτσιών. Συνολικά η τάξη έχει 1 παιδί περισσότερο. Κατά πόσο μειώθηκε ο αριθμός των κοριτσιών;	-	Σύνθεση σχέσεων -

Σύμφωνα με τον πίνακα 3, οι κατηγορίες αλλαγή του Greeno και μετασχηματισμός ενός μέτρου του Vergnaud περιγράφουν τις ίδιες προσθετικές καταστάσεις, ακόμα αυτές οι κατηγορίες περιγράφουν το ίδιο εύρος καταστάσεων με τον συνδυασμό των κατηγοριών ένωση και διαχωρισμός του Walle. Οι κατηγορίες συνδυασμός του Greeno, σύνθεση μέτρων του Vergnaud και μέρος-μέρος-όλο του Walle περιγράφουν το ίδιο εύρος καταστάσεων. Το

ίδιο ισχύει για τις κατηγορίες σύγκριση του Greeno, σύγκριση των μέτρων του Vergnaud και σύγκριση του Walle. Οι καταστάσεις που περιγράφει η κατηγορία ισότητα του Greeno δεν μπορούν να περιγραφούν από κάποια κατηγορία της κατηγοριοποίησης του Vergnaud ή του Walle. Αυτό ισχύει επειδή η κατηγορία ισότητα αφορά τον μετασχηματισμό ενός συνόλου σε σύγκριση με ένα διαφορετικό σύνολο, αν ο μετασχηματισμός δεν γινόταν με βάση ένα άλλο σύνολο τότε οι κατηγορίες μετασχηματισμός ενός μέτρου, ένωση και διαχωρισμός θα μπορούσαν να περιγράψουν τις καταστάσεις που ανήκουν στην κατηγορία ισότητα. Οι καταστάσεις που ανήκουν στις κατηγορίες σύνθεση μετασχηματισμών, μετασχηματισμός μιας σχέσης και σύνθεση σχέσεων της κατηγοριοποίησης του Vergnaud δεν μπορούν να περιγραφούν από κάποια κατηγορία των κατηγοριοποιήσεων του Greeno ή του Walle. Αυτό ισχύει για τις κατηγορίες μετατροπή μιας σχέσης και συνδυασμός των σχέσεων επειδή οι αρχικές και οι τελικές καταστάσεις τους περιγράφονται από αρνητικούς αριθμούς, κάτι που δεν ισχύει για καμία κατηγορία των κατηγοριοποιήσεων του Greeno ή του Walle. Ακόμα, η σημασιολογία της κατηγορίας συνδυασμός των μετατροπών είναι διαφορετική από κάθε κατηγορία που περιέχουν οι κατηγοριοποιήσεις του Greeno και του Walle, για αυτό οι καταστάσεις που περιγράφει δεν μπορούν να περιγραφούν από αυτές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η κατηγοριοποίηση του Greeno και η κατηγοριοποίηση του Vergnaud περιγράφουν διαφορετικά εύρη καταστάσεων, με το ένα να περιγράφει κάποιες καταστάσεις οι οποίες δεν μπορούν να περιγραφούν από το άλλο και αντίστροφα. Και οι δύο αυτές κατηγοριοποιήσεις περιγράφουν όλο το εύρος των καταστάσεων που περιγράφει η κατηγοριοποίηση του Walle, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο. Άρα η κατηγοριοποίηση του Greeno και αυτή του Vergnaud περιγράφουν μεγαλύτερο εύρος καταστάσεων από την κατηγοριοποίηση του Walle.

1.6: Έρευνες σχετικά με την κατηγοριοποίηση προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν σχολικά εγχειρίδια

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει παρουσίαση ερευνών οι οποίες χρησιμοποίησαν την κατηγοριοποίηση του Greeno, δηλαδή την κατηγοριοποίηση που δημιουργήθηκε από τους από τους Heller & Greeno (1978) και Carpenter & Moser (1984) ή την κατηγοριοποίηση του Walle, δηλαδή την κατηγοριοποίηση που δημιουργήθηκε από τους Walle, Karp & Bay-Williams (1998) για να αναλύσουν την κατανομή των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια διαφόρων χωρών. Στην παρουσίαση των ερευνών θα γίνει χρήση της ορολογίας που χρησιμοποιείται από την κατηγοριοποίηση του Greeno, επειδή αυτή η κατηγοριοποίηση χρησιμοποιείται από την συντριπτική πλειοψηφία των ερευνών.

Αρχικά θα αναφερθούν οι χώρες στις οποίες ανήκουν τα σχολικά εγχειρίδια που αναλύθηκαν από τους ερευνητές. Έχουν αναλυθεί τα σχολικά εγχειρίδια από εκδοτικούς οίκους της Ισπανίας (Vicente, Markano & Verschaffel, 2018; Tarraga-Minguez et al., 2021; Vicente et al., 2022), της Λιθουανίας (Kiliene, 2021), της Σιγκαπούρης (Vicente et al., 2022), των ΗΠΑ (Stigler, 1986), της Σοβιετικής Ένωσης (Stigler, 1986), της Ελλάδας (Desli & Loukidou, 2014), της Μαλαισίας (Singh, 2006), της Τουρκίας (Olkun & Toluk, 2004), της Φινλανδίας (Pongsakdi et al., 2016) και της Ταϊλάνδης (Pongsakdi et al., 2016).

Επειδή τα δεδομένα από όλες τις έρευνες που ανέλυσαν σχολικά εγχειρίδια από Ισπανικούς εκδοτικούς οίκους είναι παρόμοια, σε όλη την υπόλοιπη ενότητα όσον αφορά τον καταμερισμό των καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες, θα παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα από την ανάλυση των Vicente et al. (2022), η οποία είναι η πιο πρόσφατη.

Στον πίνακα 4 θα παρουσιαστούν τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων σε κατηγορίες από όσες έρευνες δόθηκαν. Οι έρευνες στα σχολικά εγχειρίδια της Μαλαισίας και της Τουρκίας έγιναν με χρήση της κατηγοριοποίησης του Walle και δεν υπάρχει ισοδύναμη κατηγορία με την κατηγορία ισότητα σε αυτήν.

Πίνακας 4: Δεδομένα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Κατηγορία	Χώρα					
	Ισπανία	Σιγκαπούρη	Σ.Ε.	ΗΠΑ	Μαλαισία	Τουρκία
	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(4)
	Τάξεις					
	Όλες	Όλες	Α'-Γ'	Α'-Γ'	Α'-Γ'	Α'-Ε'
	%	%	%	%	%	%
Αλλαγή	27.8	28.9	22.5	34.5	78.9	86.8
Συνδυασμός	52.4	49.1	40.5	45	14.9	11.3
Σύγκριση	19.5	20.7	36.8	20.3	6.4	1.9
Ισότητα	0.2	1.2	0.2	0.2	-	-
Σύνολο	100	100	100	100	100	100

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στον Stigler, (1986), (3) αναφέρεται στον Singh, (2006), (4): αναφέρεται στους Oikun & Toluk, (2004)

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες από δύο έρευνες, οι οποίες τα παρουσίασαν ποιοτικά. Η Kiliene (2021) στην έρευνα της πάνω σε σχολικά εγχειρίδια της πρώτης δημοτικού από εκδοτικού οίκους της Λιθουανίας βρήκε ότι κυριαρχεί η κατηγορία αλλαγή, δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση, τρίτη πιο συχνή αλλά με μεγάλη διαφορά στην συχνότητα από τις δύο πρώτες είναι η κατηγορία συνδυασμός και τέταρτη πιο συχνή είναι η κατηγορία ισότητα η οποία εμφανίζεται ελάχιστα. Οι Desli & Loukidou (2014) στην έρευνά τους πάνω στα σχολικά εγχειρίδια των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού της Ελλάδας, βρήκαν ότι κυριαρχεί η κατηγορία αλλαγή στην οποία ανήκουν πάνω από το 70% των καταστάσεων, δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία συνδυασμός με πολύ μεγάλη διαφορά στην συχνότητα από την κατηγορία αλλαγή και τρίτη σε συχνότητα είναι η κατηγορία σύγκριση. Η έρευνα έγινε με χρήση της κατηγοριοποίησης του Walle για αυτό δεν συμπεριλήφθηκε στην έρευνα η κατηγορία ισότητα.

Οι κατηγορίες αλλαγή, συνδυασμός και σύγκριση εμφανίζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στην συχνότητα εμφάνισης τους στις διάφορες έρευνες. Στα σχολικά εγχειρίδια από την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986) η κατηγορία αλλαγή εμφανίζεται με συχνότητα 22.5%, ενώ σε αυτά από την Τουρκία (Oikun & Toluk, 2004) εμφανίζεται με συχνότητα 86.8%. Η κατηγορία συνδυασμός εμφανίζεται με μικρή συχνότητα (11.3%) στα σχολικά εγχειρίδια από την Τουρκία (Oikun & Toluk, 2004), ενώ εμφανίζεται με συχνότητα 52.4% σε αυτά από την Ισπανία (Vicente et al., 2022). Η κατηγορία σύγκριση εμφανίζεται ελάχιστα (1.9%) στα

σχολικά εγχειρίδια από την Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004), ενώ εμφανίζεται με συχνότητα 36.8% σε αυτά από την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986). Η κατηγορία ισότητα εμφανίζεται ελάχιστα στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών στις έρευνες που παρουσιάζονται. Τα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente et al., 2022), Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022) και ΗΠΑ (Stigler, 1986) έχουν παρομοιότυπη κατανομή. Η κατηγορία συνδυασμός είναι η πιο συχνά εμφανιζόμενη, με συχνότητα γύρω στο 50%, η δεύτερη πιο συχνή είναι κατηγορία η κατηγορία αλλαγή και έχει συχνότητα γύρω στο 30% και η τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση και έχει συχνότητα εμφάνισης γύρω στο 20%. Τα σχολικά εγχειρίδια από την Μαλαισία (Singh, 2006), Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004) και Ελλάδα (Desli & Loukidou, 2014) έχουν και αυτά παρομοιότυπη κατανομή. Κυριαρχεί η κατηγορία αλλαγή με συχνότητα πάνω από 70%, δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία συνδυασμός με συχνότητα γύρω στο 13% και τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση.

Στον πίνακα 5 θα παρουσιαστούν τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή από τις έρευνες που δόθηκαν.

Πίνακας 5: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία αλλαγή στις έρευνες της βιβλιογραφίας.

Υποκατηγορία	Χώρα					
	Ισπανία (1)	Σιγκαπούρη (1)	Σ.Ε. (2)	ΗΠΑ (2)	Μαλαισία (3)	Τουρκία (4)
	Τάξεις					
	Όλες %	Όλες %	Α'-Γ' %	Α'-Γ' %	Α'-Γ' %	Α'-Ε' %
1	6.5	6.9	3.9	10.3	25.2	42.1
2	17.6	12.7	11.1	22.2	43	39.5
Αλλαγή 3	1.7	4	0.7	0.2	3.8	3.3
4	1.2	2.1	2.6	0.9	1.7	0.3
5	0.3	1.6	0.3	0.6	3	1
6	0.5	1.6	3.9	0.3	2.2	0.6
Σύνολο	27.8	28.9	22.5	34.5	78.9	86.8

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στον Stigler, (1986), (3) αναφέρεται στον Singh, (2006), (4): αναφέρεται στους Olkun & Toluk, (2004)

Οι δύο πιο συχνές υποκατηγορίες στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών είναι η αλλαγή 1 και η αλλαγή 2. Σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια εκτός από αυτά από την Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004) η κατηγορία αλλαγή 2 είναι η πιο συχνή. Υπάρχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στην συχνότητα εμφάνισης αυτών των δύο υποκατηγοριών στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια. Η κατηγορία αλλαγή 1 εμφανίζεται με συχνότητα 3.9% στα σχολικά εγχειρίδια από την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986), ενώ εμφανίζεται με συχνότητα 42.1% σε αυτά από την Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004). Η κατηγορία αλλαγή 2 εμφανίζεται με συχνότητα 11.1% στα σχολικά εγχειρίδια από την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986), ενώ εμφανίζεται με συχνότητα 43% σε αυτά από τις ΗΠΑ (Stigler, 1986). Οι υποκατηγορίες αλλαγή 3, αλλαγή 4, αλλαγή 5 και αλλαγή 6 εμφανίζονται σε όλα σχολικά εγχειρίδια με συχνότητα μικρότερη του 4.1%. Τα σχολικά εγχειρίδια από την Μαλαισία (Singh, 2006) και αυτά από την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022) είναι τα μόνα στα οποία και οι τέσσερις αυτές υποκατηγορίες εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 1%, ενώ τα σχολικά εγχειρίδια από τις ΗΠΑ (Stigler, 1986) είναι

τα μόνα που και οι τέσσερεις αυτές υποκατηγορίες εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 1%.

Στον πίνακα 6 θα παρουσιαστούν η κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός από τις έρευνες που δόθηκαν.

Πίνακας 6: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία "συνδυασμός στις έρευνες της βιβλιογραφίας.

Υποκατηγορία	Χώρα					
	Ισπανία (1)	Σιγκαπούρη (1)	Σ.Ε. (2)	ΗΠΑ (2)	Μαλαισία (3)	Τουρκία (4)
	Τάξεις					
	Όλες %	Όλες %	Α'-Γ' %	Α'-Γ' %	Α'-Γ' %	Α'-Ε' %
1	39.3	32.1	33.8	38.7	12.8	8.1
Συνδυασμός 2	13.1	17	6.7	6.3	2.1	3.2
Σύνολο	52.4	49.1	40.5	45	14.9	11.3

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στον Stigler, (1986), (3) αναφέρεται στον Singh, (2006), (4): αναφέρεται στους Olkun & Toluk, (2004)

Στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών η υποκατηγορία συνδυασμός 1 εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα από την υποκατηγορία συνδυασμός 2. Και οι δύο αυτές κατηγορίες εμφανίζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στην συχνότητα εμφάνισης του στα σχολικά εγχειρίδια των διαφόρων χωρών. Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 εμφανίζεται με συχνότητα γύρω στο 35% στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente et al., 2022), την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022), την Σοβιετική ένωση (Singh, 2006) και των ΗΠΑ (Singh, 2006), ενώ εμφανίζεται με συχνότητα γύρω στο 10% σε αυτά από την Μαλαισία (Singh, 2006) και την Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004). Η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με συχνότητα γύρω στο 15% στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente et al., 2022) και την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022), με συχνότητα γύρω στο 6.5% σε αυτά από την Σοβιετική ένωση (Singh, 2006) και των ΗΠΑ (Singh, 2006) την Σοβιετική ένωση (Singh, 2006) και των ΗΠΑ (Singh, 2006) και με συχνότητα γύρω στο 2.5% σε αυτά από την Μαλαισία (Singh, 2006) και την Τουρκία (Olkun & Toluk, 2004).

Στους πίνακες 7 και 8 παρουσιάζονται τα δεδομένα από την κατηγορία σύγκριση που υπάρχουν στην βιβλιογραφία. Ο λόγος που δίνονται δύο πίνακες είναι ότι η κατηγοριοποίηση του Walle χωρίζει σε υποκατηγορίες την κατηγορία σύγκριση με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με την κατηγοριοποίηση του Greeno, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα λόγω του τρόπου που χωρίζονται να μετατραπούν τα δεδομένα στην ισοδύναμη υποκατηγορία στην κατηγοριοποίηση του Greeno. Υπενθυμίζουμε ότι η κατηγορία σύγκριση 1 του Walle είναι ισοδύναμη με τις κατηγορίες σύγκριση 1 και σύγκριση 2 του Greeno, η κατηγορία σύγκριση 2 του Walle είναι ισοδύναμη με τις κατηγορίες σύγκριση 3 και σύγκριση 5 του Greeno και η κατηγορία σύγκριση 3 του Walle είναι ισοδύναμη με τις κατηγορίες σύγκριση 4 και σύγκριση 6 του Greeno.

Πίνακας 7: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία σύγκριση από έρευνες στην βιβλιογραφία που χρησιμοποίησαν την κατηγοριοποίηση του Greeno.

Υποκατηγορία	Χώρα			
	Ισπανία	Σιγκαπούρη	Σ.Ε.	ΗΠΑ
	(1)	(1)	(2)	(2)
	Τάξεις			
	Όλες	Όλες	Α'-Γ'	Α'-Γ'
	%	%	%	%
1	7.9	5.4	4.7	16.8
2	5.5	3.7	3.5	1.1
Σύγκριση 3	3.6	4.5	10.5	2.2
4	2.3	4	4.1	0
5	0.1	1.6	3.2	0.1
6	0.1	1.5	10.8	0.1
Σύνολο	19.5	20.7	36.8	20.3

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στον Stigler, (1986)

Πίνακας 8: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία σύγκριση από έρευνες της βιβλιογραφίας που χρησιμοποίησαν την κατηγοριοποίηση του Walle.

Υποκατηγορία	Χώρα	
	Μαλαισία	Τουρκία
	(3)	(4)
	Τάξεις	
	Α'-Γ'	Α'-Ε'
	%	%
1	3	1.6
Σύγκριση 2	3.4	0
3	0	0.3
Σύνολο	6.4	1.9

(3) αναφέρεται στον Singh, (2006), (4): αναφέρεται στους Olkun & Toluk, (2004)

Η κατηγορία σύγκριση 1 (ή η ανάλογή της όταν χρησιμοποιήθηκε κατηγοριοποίηση του Walle) είναι η πιο συχνά εμφανιζόμενη στα σχολικά εγχειρίδια των περισσότερων χωρών. Στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente et al., 2022), την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022) και την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986), οι υποκατηγορίες σύγκριση 2, σύγκριση 3 και σύγκριση 4 εμφανίζονται όλες με συχνότητα μεγαλύτερη του 2.2%, κάτι που δεν ισχύει για τα σχολικά εγχειρίδια των υπόλοιπων χωρών. Τα σχολικά εγχειρίδια από την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022) και την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986) είναι τα μόνα που όλες οι υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 1.4%. Αξιοσημείωτο είναι ότι στο σχολικό εγχειρίδιο από την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986) όλες οι υποκατηγορίες με συχνότητα μεγαλύτερη του 3.2%, με τις κατηγορίες σύγκριση 3 και σύγκριση 6 να εμφανίζονται με συχνότητες 10.3% και 10.6% αντίστοιχα, στα σχολικά εγχειρίδια καμίας άλλης χώρας δεν εμφανίζεται η υποκατηγορία σύγκριση 3 με συχνότητα μεγαλύτερη του 4.6% και η κατηγορία σύγκριση 6 με συχνότητα μεγαλύτερη του 1.6%.

Στον πίνακα 9 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.

Πίνακας 9: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία ισότητα από έρευνες της βιβλιογραφίας.

Υποκατηγορία	Χώρα			
	Ισπανία	Σιγκαπούρη	Σ.Ε.	ΗΠΑ
	(1)	(1)	(2)	(2)
	Τάξεις			
	Όλες	Όλες	Α'-Γ'	Α'-Γ'
	%	%	%	%
1	0.2	1	0.2	0
2	0	0.1	0	0
Ισότητα	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0.1
6	0	0.1	0	0.1
Σύνολο	0.2	1.2	0.2	0.2

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στον Stigler, (1986)

Όλες η υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 0.3% ή καθόλου στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών, εκτός από αυτά από την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022), όπου η υποκατηγορία ισότητα 1 εμφανίζεται με συχνότητα 1%.

Όπως φαίνεται στην παραπάνω ανάλυση κυρίαρχες στην πλειοψηφία των σχολικών εγχειρίδιων είναι οι υποκατηγορίες αλλαγή 1, αλλαγή 2, συνδυασμός 1 και σύγκριση 1. Όλες αυτές σύμφωνα με την ανάλυση των Vicente, Markano & Verschtaffel (2018) (πίνακας 1, σελίδα 20) ανήκουν στο πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας. Καταστάσεις που ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας και στο τρίτο της υψηλής δυσκολίας στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια εμφανίζονται με πολύ μικρότερη συχνότητα, από αυτές που ανήκουν πρώτο επίπεδο.

Αναφερόμενοι στον αριθμό βημάτων που χρειάζεται για να λυθεί ένα προσθετικό πρόβλημα στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια οι πλειοψηφία των προβλημάτων λύνονται σε ένα βήμα. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η πλειοψηφία είναι συντριπτική, το 85.5% των προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία λύνονται σε ένα βήμα (Tarraga-Minguez et al., 2021) και το 93% των προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια από τις ΗΠΑ είναι ενός βήματος (Stigler, 1986). Λιγότερο από το 30% των προβλημάτων είναι δύο ή παραπάνω βημάτων στα σχολικά εγχειρίδια από την Ταϊλάνδη (Pongsakdi et al., 2016). Κάποια ισορροπία ανάμεσα στα προβλήματα που λύνονται σε ένα βήμα και αυτά περισσότερων βημάτων αναφέρουν οι Pongsakdi et al. (2016) για το σχολικό εγχειρίδιο από την Φινλανδία όπου περισσότερο από το 50% των προβλημάτων είναι δύο ή παραπάνω βημάτων και ο Stigler (1986) για το σχολικό εγχειρίδιο από την Σοβιετική Ένωση όπου το 44% είναι δύο-βημάτων.

Κεφάλαιο 2^ο : Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα αναλυθεί μία κατηγοριοποίηση για την περιγραφή πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που υπάρχει στην βιβλιογραφία. Η δημιουργία μιας τέτοιας κατηγοριοποίησης είναι, σύμφωνα με τους Vicente et al. (2022), μια από την φύση της πιο περίπλοκη διαδικασία, από την δημιουργία μιας κατηγοριοποίησης για την περιγραφή των προσθετικών καταστάσεων. Για αυτό στην βιβλιογραφία συναντάμε κυρίως την κατηγοριοποίηση που προτάθηκε από τους Vergnaud (1991) και Greer (1992) για την περιγραφή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, η οποία θα αναλυθεί στο πλαίσιο αυτής της εργασίας.

2.1: Κατηγοριοποίηση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων

Οι κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται σε αυτή την κατηγοριοποίηση οι απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα, βασίζεται στην σημασιολογική δομή τους (Vergnaud, 1994).

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πολλαπλασιαστικών καταστάσεων ο οποίος μπορεί να αναλυθεί και να μπει σε κατηγορίες, με τέτοιο τρόπο ώστε να περιγράψει μία ιεραρχία πιθανών γνώσεων οι οποίες θα αναπτυχθούν από τους μαθητές μέσα και έξω από το σχολείο (Vergnaud, 1994). Σύμφωνα με την σημασιολογική δομή τους οι κύριες κατηγορίες που χωρίζονται οι πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που συναντούν οι μαθητές του δημοτικού είναι η αναλογία, η σύγκριση, το καρτεσιανό γινόμενο και το ορθογώνιο. Οι Vicente, Markano & Verschtffel (2018) αναφέρουν ότι αυτή η κατηγοριοποίηση προτάθηκε από τους Vergnaud (1991) και Greer (1992).

Οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία αναλογία περιλαμβάνουν δύο σύνολα, των οποίων οι πληθάρημοι συνδέονται με σχέση άμεσης αναλογικότητας, δηλαδή όταν ο ένας πληθάρημος ή και οι δύο αυξάνονται ή μειώνονται, το γινόμενο των πληθάρημων αλλάζει με την ίδια αναλογία. Οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία σύγκριση περιλαμβάνουν δύο σύνολα, των οποίων οι πληθάρημοι συγκρίνονται μεταξύ τους, από την άποψη του πόσες φορές μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο. Οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο αφορούν δύο σύνολα και τον αριθμό των συνόλων δύο αντικειμένων, όπου κάθε σύνολο δύο αντικειμένων περιέχει ένα αντικείμενο από το πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από το δεύτερο σύνολο, που μπορούν να δημιουργηθούν. Οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία ορθογώνιο αφορούν τον συνδυασμό δύο ποσών, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με σκοπό την εύρεση του εμβαδού του.

Όπως και στα προσθετικά πλαίσια η κάθε κατηγορία χωρίζεται σε υποκατηγορίες. Τα παραδείγματα βασίζονται σε αυτά των Vicente et al. (2022).

Η κατηγορία αναλογία χωρίζεται σε τέσσερις υποκατηγορίες, όπως αναφέρουν οι Vicente et al. (2022) η πρώτη αφορά τα πολλαπλά προβλήματα και οι επόμενες τρεις τα απλά.

- Αναλογία 1: Σε αυτά τα προβλήματα δίνονται αρχικά δύο σύνολα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, στην συνέχεια δίνεται ένα τρίτο σύνολο το οποίο σχετίζεται με ένα από τα δύο αρχικά σύνολα. Η ερώτηση αφορά ένα τέταρτο σύνολο για το οποίο ισχύει ότι, η σχέση που συνδέει τον πληθάνριθμο του πρώτου συνόλου με τον πληθάνριθμο του δεύτερου συνόλου, είναι ανάλογη με αυτήν που συνδέει τον πληθάνριθμο του τρίτου συνόλου με τον πληθάνριθμο του τέταρτου συνόλου. Παράδειγμα: Ο Τάσος σε 10 μέρες ξόδεψε 20 ευρώ. Πόσα ευρώ θα ξοδέψει σε 5 μέρες αν ο ρυθμός που ξοδεύει παραμένει ο ίδιος;

Στις επόμενες τρεις υποκατηγορίες υπάρχουν τρία διαφορετικά ποσά, το πρώτο είναι το πολλαπλασιαζόμενο ποσό, το δεύτερο είναι ο πολλαπλασιαστής και το τρίτη είναι το γινόμενο των πρώτων ποσών. Σε κάθε υποκατηγορία ένα από αυτά τα ποσά είναι το ζητούμενο.

- Αναλογία 2: Σε αυτήν την υποκατηγορία προβλημάτων δίνεται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό και ο πολλαπλασιαστής. Η ερώτηση αφορά το γινόμενο. Παράδειγμα: Ο Γιάννης αγόρασε 4 σοκολάτες οι οποίες κόστιζαν από 2 ευρώ η κάθε μία. Πόσα ευρώ πλήρωσε;
- Αναλογία 3: Εδώ ο πολλαπλασιαστής και το γινόμενο είναι γνωστά, η ερώτηση αφορά το πολλαπλασιαζόμενο ποσό. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έδωσε 8 ευρώ για να αγοράσει 4 σοκολάτες. Πόσα ευρώ κοστίζει η μία σοκολάτα;
- Αναλογία 4: Σε αυτή την υποκατηγορία το πολλαπλασιαζόμενο ποσό και το γινόμενο είναι γνωστά, η ερώτηση αφορά τον πολλαπλασιαστή. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έδωσε 8 ευρώ για να αγοράσει σοκολάτες. Η κάθε μία κοστίζει 2 ευρώ. Πόσες σοκολάτες αγόρασε;

Η κατηγορία της σύγκρισης έχει έξι υποκατηγορίες οι δύο πρώτες αφορούν την διαφορά, οι δύο επόμενες το σύνολο σύγκρισης και οι δύο τελευταίες το σύνολο αναφοράς.

- Σύγκριση 1: Εδώ το σύνολο αναφοράς και το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, η ερώτηση αφορά την διαφορά των δύο συνόλων από την άποψη του πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το σύνολο σύγκρισης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 8 ευρώ και ο Τάσος έχει 4 ευρώ. Πόσες φορές περισσότερα είναι τα χρήματα του Γιάννη σε σχέση με αυτά του Τάσου;
- Σύγκριση 2: Το σύνολο αναφοράς και το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, η ερώτηση αφορά την διαφορά των δύο συνόλων από την άποψη του πόσες φορές μικρότερο είναι το σύνολο σύγκρισης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 8 ευρώ και ο Τάσος έχει 4 ευρώ. Πόσες φορές λιγότερα είναι τα χρήματα του Τάσου σε σχέση με αυτά του Γιάννη;
- Σύγκριση 3: Εδώ το σύνολο αναφοράς όπως και η διαφορά του με το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσες φορές περισσότερα αντικείμενα έχει το σύνολο σύγκρισης. Η ερώτηση αφορά το σύνολο σύγκρισης. Παράδειγμα: Ο Τάσος έχει 2 ευρώ. Ο Γιάννης έχει 4 φορές περισσότερα ευρώ από αυτά που έχει ο Τάσος. Πόσα χρήματα έχει ο Γιάννης;
- Σύγκριση 4: Εδώ το σύνολο αναφοράς όπως και η διαφορά του με το σύνολο σύγκρισης είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσες φορές λιγότερα αντικείμενα έχει το

σύνολο σύγκρισης. Η ερώτηση αφορά το σύνολο σύγκρισης. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 8 ευρώ. Ο Τάσος έχει 4 φορές λιγότερα ευρώ από αυτά που έχει ο Γιάννης. Πόσα χρήματα έχει ο Τάσος;

- Σύγκριση 5: Σε αυτή την κατηγορία το σύνολο σύγκρισης και η διαφορά του με το σύνολο αναφοράς είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσες φορές περισσότερα αντικείμενα έχει το σύνολο αναφοράς. Η ερώτηση αφορά το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Τάσος έχει 8 ευρώ. Ο Τάσος έχει τέσσερις φορές περισσότερα ευρώ από τον Γιάννη. Πόσα ευρώ έχει ο Γιάννης;
- Σύγκριση 6: Σε αυτή την κατηγορία το σύνολο σύγκρισης και η διαφορά του με το σύνολο αναφοράς είναι γνωστά, υποδεικνύοντας πόσες φορές λιγότερα αντικείμενα έχει το σύνολο αναφοράς. Η ερώτηση αφορά το σύνολο αναφοράς. Παράδειγμα: Ο Τάσος έχει 2 ευρώ. Ο Τάσος έχει τέσσερις φορές λιγότερα ευρώ από τον Γιάννη. Πόσα ευρώ έχει ο Γιάννης;

Η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο έχει δύο υποκατηγορίες η πρώτη αφορά το γινόμενο και η δεύτερη την μέτρηση.

- Καρτεσιανό γινόμενο 1: Εδώ δίνονται δύο σύνολα. Η ερώτηση αφορά πόσα σύνολα δύο αντικειμένων, τα οποία περιέχουν ένα αντικείμενο από το πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από το δεύτερο σύνολο μπορούν να δημιουργηθούν. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 3 παντελόνια και 8 μπλούζες. Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς μπορεί να δημιουργήσει με αυτά τα ρούχα;
- Καρτεσιανό γινόμενο 2: Εδώ υπάρχουν δύο σύνολα, το ένα είναι γνωστό και το άλλο άγνωστο. Δίνεται ο αριθμός των συνόλων δύο αντικειμένων, τα οποία περιέχουν ένα αντικείμενο από το πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από το δεύτερο σύνολο που μπορούν να δημιουργηθούν. Η ερώτηση αφορά το άγνωστο σύνολο. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει 3 παντελόνια και κάποιες μπλούζες. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί που μπορεί να δημιουργήσει με αυτά τα ρούχα είναι 18. Πόσες μπλούζες έχει;

Η κατηγορία ορθογώνιο έχει δύο υποκατηγορίες, η πρώτη αφορά το γινόμενο και η δεύτερη μία από τις πλευρές του.

- Ορθογώνιο 1: Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι γνωστά. Η ερώτηση αφορά το εμβαδόν του. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει ένα κτήριο που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 10 μέτρα και πλάτος 100 μέτρα. Ποιο είναι το εμβαδόν του;
- Ορθογώνιο 2: Μια από τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι γνωστό. Το ίδιο ισχύει και για τον εμβαδόν του. Η ερώτηση αφορά την άγνωστη πλευρά του. Παράδειγμα: Ο Γιάννης έχει ένα κτήριο που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 10 μέτρα και εμβαδόν 1000 τετραγωνικά μέτρα. Ποιο είναι το πλάτος του;

Οι Vicente, Markano & Verschtffel (2018) χώρισαν τις παραπάνω υποκατηγορίες με βάση την σημασιολογική δομή τους και υπάρχοντα εμπειρικά δεδομένα σε τρία επίπεδα πολυπλοκότητας. Τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα με απλές αναλογίες (αναλογία 2, αναλογία 3 και αναλογία 4) επειδή συνδέονται άμεσα με τα προσθετικά προβλήματα και

ακόμα μπορούν να λυθούν με την χρήση προσθετικών πράξεων, ανήκουν στο πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας. Τα προβλήματα που περιέχουν πολλαπλές αναλογίες (αναλογία 1), επειδή οι αναλογίες αυτού του είδους δεν είναι τόσο ξεκάθαρες στους μαθητές όσο είναι οι απλές αναλογίες, ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας. Ακόμα στο δεύτερο επίπεδο πολυπλοκότητας ανήκουν οι υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση που περιέχουν προβλήματα που είναι συνεπή, δηλαδή αυτά που η φράση κλειδί 'φορές περισσότερο' ή 'φορές λιγότερο' ταιριάζει με την πράξη που πρέπει να εκτελεστεί (δηλαδή οι υποκατηγορίες σύγκριση 2, σύγκριση 3 και σύγκριση 4). Στην τρίτη κατηγορία είναι της υψηλής δυσκολίας, ανήκουν τα μη συνεπή προβλήματα σύγκρισης (δηλαδή οι υποκατηγορίες σύγκριση 1, σύγκριση 5 και σύγκριση 6) και όλα τα προβλήματα από τις κατηγορίες καρτεσιανό γινόμενο και ορθογώνιο.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα επίπεδα δυσκολίας των διαφόρων πολλαπλασιαστικών υποκατηγοριών. Το σύμβολο + τοποθετείται στην στήλη του επιπέδου δυσκολίας που ανήκει η υποκατηγορία.

Πίνακας 10: Περιγραφή του επιπέδου δυσκολίας των διάφορων υποκατηγοριών, της κατηγοριοποίησης των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων.

Υποκατηγορία	Επίπεδο δυσκολίας		
	Χαμηλό	Μεσαίο	Υψηλό
Αναλογία	1	+	
	2	+	
	3	+	
	4	+	
Σύγκριση	1		+
	2	+	
	3	+	
	4	+	
	5		+
	6		+
Καρτεσιανό γινόμενο	1		+
	2		+
Ορθογώνιο	1		+
	2		+

2.2: Έρευνες σχετικά με την κατηγοριοποίηση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει παρουσίαση ερευνών που εμφανίζονται βιβλιογραφία, οι οποίες ανέλυαν σχολικά εγχειρίδια διαφόρων χωρών σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν στις διάφορες κατηγορίες. Ο αριθμός αυτών των ερευνών είναι πολύ μικρότερος, σε σχέση με τον αριθμό των ερευνών που έχουν γίνει για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν.

Αρχικά θα αναφερθούν οι χώρες στις οποίες ανήκουν τα σχολικά εγχειρίδια που αναλύθηκαν από τους ερευνητές. Έχουν αναλυθεί τα σχολικά εγχειρίδια από εκδοτικούς οίκους της Ισπανίας (Vicente, Markano & Verschtffel, 2018; Vicente et al., 2022), της Φινλανδίας (Pongsakdi et al., 2016) και της Ταϊλάνδης (Pongsakdi et al., 2016).

Στην υπόλοιπη ενότητα παρουσιάζονται τα δεδομένα από δύο διαφορετικές έρευνες που έγιναν σε σχολικά εγχειρίδια από εκδοτικούς οίκους της Ισπανίας. Αυτή η επιλογή έγινε επειδή η έρευνα των Vicente, Markano & Verschtffel (2018) πραγματοποιήθηκε σε σχολικά εγχειρίδια που έχουν εκδοθεί το 2009-2010 και η έρευνα των Vicente et al. (2022) πραγματοποιήθηκε σε σχολικά εγχειρίδια που έχουν εκδοθεί το 2015.

Στον πίνακες 11 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια στις κατηγορίες, από όσες έρευνες δόθηκαν.

Πίνακας 11: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στις κατηγορίες από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Κατηγορία	Χώρα		
	Ισπανία	Σιγκαπούρη	Ισπανία
	(1)	(1)	(2)
	Τάξεις		
	Όλες	Όλες	Όλες
	%	%	%
Αναλογία	91.5	89.7	89.2
Σύγκριση	3.9	5.9	6.1
Καρτεσιανό γινόμενο	0.1	0	0.1
Ορθογώνιο	4.6	4.4	4.6
Σύνολο	100	100	100

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στους Vicente, Markano & Verschtffel (2018)

Στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών παρουσιάζεται παρόμοια κατανομή. Η κατηγορία αναλογία κυριαρχεί με ποσοστό μεγαλύτερο του 89% στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών, η κατηγορία σύγκριση εμφανίζεται με ποσοστό γύρω στο 5%, η κατηγορία ορθογώνιο εμφανίζεται με ποσοστό γύρω στο 4.5% και η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο εμφανίζεται με ποσοστό 0.1% ή καθόλου.

Στον πίνακα 12 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας, από τις έρευνες στην βιβλιογραφία που δόθηκαν.

Πίνακας 12: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία αναλογία από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Υποκατηγορία		Χώρα		
		Ισπανία	Σιγκαπούρη	Ισπανία
		(1)	(1)	(2)
		Τάξεις		
		Όλες	Όλες	Όλες
		%	%	%
Αναλογία	1	3.9	16.9	8.1
	2	58	38.1	53.1

	3	14.2	19.4	13.7
	4	15.4	15.3	14.3
Σύνολο		91.5	89.7	89.2

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στους Vicente, Markano & Verschtaffel (2018)

Η υποκατηγορία αναλογία 2 είναι αυτή που εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα σε όλες τις έρευνες, στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente, Markano & Verschtaffel, 2018; Vicente et al., 2022) εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα (γύρω στο 55%), σε σχέση με αυτά από την Σιγκαπούρη (38.1%) (Vicente et al., 2022). Η υποκατηγορία αναλογία 1 εμφανίζει μεγάλο εύρος στην συχνότητα εμφάνισης της στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια, στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία έκδοσης 2015 (Vicente et al., 2022) εμφανίζεται με συχνότητα 3.9%, ενώ σε αυτά από την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022) με συχνότητα 16.9%. Η υποκατηγορία αναλογία 3 εμφανίζεται με παρόμοια συχνότητα (γύρω στο 14%) στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente, Markano & Verschtaffel, 2018; Vicente et al., 2022) και εμφανίζεται με λίγο μεγαλύτερη συχνότητα (19.4%) σε αυτά από την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022). Η υποκατηγορία 4 εμφανίζεται με παρόμοια συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών (γύρω στο 15%).

Στον πίνακα 13 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή την καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση, από έρευνες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.

Πίνακας 13: Δεδομένα σχετικά με την πολλαπλασιαστική κατηγορία σύγκριση από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Υποκατηγορία	Χώρα		
	Ισπανία	Σιγκαπούρη	Ισπανία
	(1)	(1)	(2)
	Τάξεις		
	Όλες	Όλες	Όλες
	%	%	%
1	0	0.2	0
2	0	0	0
Σύγκριση 3	2.7	3.5	2.4
4	0.1	0.4	3.4
5	0.1	1.7	0.2
6	0.1	0.1	0.1
Σύνολο	3.9	5.9	6.1

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στους Vicente, Markano & Verschtaffel (2018)

Οι υποκατηγορίες σύγκριση 1 , σύγκριση 2 και σύγκριση 6 εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο ή ίσο του 0.2% ή καθόλου στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών. Η υποκατηγορία σύγκριση 3 εμφανίζεται με ποσοστό γύρω στο 3% στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών. Ακόμα η υποκατηγορία σύγκριση 4 εμφανίζεται με ποσοστό μεγαλύτερο του 0.4% μόνο στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία έκδοσης 2009-2010 (3.4%) (Vicente, Markano & Verschtaffel, 2018) και η υποκατηγορία σύγκριση 5 εμφανίζεται με ποσοστό

μεγαλύτερο του 0.2% μόνο στα σχολικά εγχειρίδια από την Σιγκαπούρη (1.7%) (Vicente et al., 2022).

Στον πίνακα 14 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας καρτεσιανό γινόμενο, από έρευνες της βιβλιογραφίας.

Πίνακας 14: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Υποκατηγορία	Χώρα		
	Ισπανία (1)	Σιγκαπούρη (1)	Ισπανία (2)
	Τάξεις		
	Όλες %	Όλες %	Όλες %
Καρτεσιανό γινόμενο 1	0.1	0	0.1
2	0	0	0
Σύνολο	0.1	0	0.1

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στους Vicente, Markano & Verschtffel (2018)

Η μόνη υποκατηγορία της κατηγορίας καρτεσιανό γινόμενο που εμφανίζεται είναι η καρτεσιανό γινόμενο 1, στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente, Markano & Verschtffel, 2018; Vicente et al., 2022) με πολύ μικρή συχνότητα (0.1%).

Στον πίνακα 15 παρουσιάζονται τα δεδομένα όσον αφορά την κατανομή των καταστάσεων στις δύο υποκατηγορίες της κατηγορίας ορθογώνιο, που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.

Πίνακας 15: Δεδομένα σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο από έρευνες στην βιβλιογραφία.

Υποκατηγορία	Χώρα		
	Ισπανία (1)	Σιγκαπούρη (1)	Ισπανία (2)
	Τάξεις		
	Όλες %	Όλες %	Όλες %
Ορθογώνιο 1	3.9	3.8	3.7
2	0.7	0.6	0.9
Σύνολο	4.6	4.4	4.7

(1): αναφέρεται στους Vicente et al., (2022), (2): αναφέρεται στους Vicente, Markano & Verschtffel (2018)

Η κατανομή της κατηγορίας ορθογώνιο στις δύο υποκατηγορίες της είναι παρόμοια στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών, η υποκατηγορία ορθογώνιο 1 εμφανίζεται με ποσοστό γύρω στο 3.8% και η υποκατηγορία ορθογώνιο 2 εμφανίζεται με ποσοστό γύρω στο 0.7%.

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, οι υποκατηγορίες αναλογία 2, αναλογία 3 και αναλογία 4 που ανήκουν στο πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας (δες πίνακα 10, σελίδα 37), εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών με ποσοστό μεγαλύτερο του 72%. Οι υποκατηγορίες που ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας και στο τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας εμφανίζονται με πολύ μικρότερη συχνότητα από αυτές που ανήκουν στο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας.

Οι Pongsakdi et al. (2016) βρήκαν στα αποτελέσματα τους ότι η πλειοψηφία των προβλημάτων λύνονται σε παραπάνω από ένα βήμα στα σχολικά εγχειρίδια από την Φινλανδία, κάτι που δεν ισχύει για αυτά από την Ταϊλάνδη όπου γύρω στο 30% λύνονται σε παραπάνω από ένα βήμα. Ακόμα το 46.6% των προβλημάτων που ανήκουν στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία (Vicente, Markano & Verschtaffel, 2018) λύνονται σε παραπάνω από ένα βήμα.

Κεφάλαιο 3: Ερευνητικά ερωτήματα-Μέθοδος

3.1: Ερευνητικά ερωτήματα

- 1^ο ερώτημα: Ποιες καταστάσεις προσθετικών και πολλαπλασιαστικών προβλημάτων υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων;
- 2^ο ερώτημα: Ποια είναι η κατανομή αυτών των καταστάσεων ανά τάξη.

3.2: Μέθοδος

3.2.1: Ερευνητικό Υλικό

Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων όλων των τάξεων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων, σχετικά με την κατανομή των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες. Αυτά τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται από τους μαθητές των δημοτικών σχολείων όλης της Ελλάδας. Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια των σχολικών εγχειριδίων πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του ΙΕΠ. Ακόμα αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια ότι γράφτηκαν με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.). Πιο συγκεκριμένα τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων είναι τα

- <<Μαθηματικά Α' Δημοτικού: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής>>, οι συγγραφείς του οποίου είναι οι Χ. Λεμονίδης, Α. Θεοδώρου, Α. Καψάλης και Δ. Πνευματικός.
- <<Μαθηματικά Β' Δημοτικού>>, με συγγραφείς τους Γ. Καργιωτάκης, Α. Μαραγκού, Ν. Μπελίτσου και Β. Σοφού.
- <<Μαθηματικά Γ' Δημοτικού>>: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής>>, το οποίο έχει συγγραφεί από τους Χ. Λεμονίδης, Ε. Θεοδώρου, Κ. Νικολαντωνάκης, Ι. Παναγάκος και Α. Σπανακά.
- <<Μαθηματικά Δ' Δημοτικού>>, με συγγραφείς Ξ. Βαμβακούση, Γ. Καργιωτάκης, Α.-Δ. Μπομποτίνου και Α. Σαϊτης.
- <<Μαθηματικά Ε' Δημοτικού>>, οι συγγραφείς του είναι οι Κ. Βρύωνας, Σ. Δουκάκης, Β. Καρακώστα, Γ. Μπαραλής και Ι. Σταύρου.
- <<Μαθηματικά Στ' Δημοτικού>>, που έχει συγγραφεί από τους Ο. Κασώτη, Π. Κλιάπης και Θ. Οικονόμου.

Στην έρευνα αναλύθηκαν τα λεκτικά προβλήματα που περιλάμβαναν αρχικά μία γραπτή περιγραφή μίας αληθινής ή φανταστικής κατάστασης, όπου δινόταν ένα μαθηματικό ερώτημα που για την λύση του απαιτούσε μία ή περισσότερες από τις τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις. Συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση αυτή, όλες οι καταστάσεις που αναφέρονται σε πληθικούς αριθμούς συνόλων, σε στατιστικά μεγέθη και στο εμβαδόν ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Δεν συμπεριλήφθηκαν οι καταστάσεις οι οποίες έχουν να κάνουν με το μέτρηση του χρόνου με ρολόι, την ανάλυση χρημάτων, την μετατροπή μονάδων, την σύνθεση και ανάλυση ενός αριθμού και το υπολογισμού εμβαδού ή όγκου σχημάτων εκτός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου.

3.2.2: Εργαλείο ανάλυσης

Οι κατηγορίες που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή των προσθετικών καταστάσεων ήταν ένας συνδυασμός της κατηγοριοποίησης του Greeno και του Vergnaud. Πιο συγκεκριμένα για τις τρεις πρώτες κατηγορίες χρησιμοποιήθηκε η ορολογία των κατηγοριών του Greeno και πιο συγκεκριμένα οι κατηγορίες **αλλαγή**, **συνδυασμός** και **σύγκριση**. Οι κατηγοριοποιήσεις του Vergnaud και του Walle περιέχουν κατηγορίες που μπορούν να περιγράψουν πλήρως τις καταστάσεις που ανήκουν σε αυτές τις τρεις κατηγορίες όπως φαίνεται από τον πίνακα 3 (σελίδα 25). Στην συνέχεια προστέθηκαν οι κατηγορίες **ισότητα** της κατηγοριοποίησης του Greeno και οι κατηγορίες **σύνθεση μετασχηματισμών**, **μετασχηματισμός μιας σχέσης** και **σύνθεση σχέσεων** της κατηγοριοποίησης του Vergnaud. Αυτή η επιλογή έγινε ώστε να αποτελέσματα να είναι πιο εύκολα συγκρίσιμα με αυτά προηγούμενων ερευνών, μιας και η κατηγοριοποίηση του Greeno είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη στις έρευνες και ταυτόχρονα να καλύπτεται ένα μεγαλύτερο εύρος καταστάσεων.


Για τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα χρησιμοποιήθηκε η κατηγοριοποίηση που αναλύθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο για την περιγραφή των καταστάσεων τους.

Όταν τα προβλήματα χρειαζόταν παραπάνω από ένα βήμα για να λυθούν, το κάθε ένα βήμα αναλυόταν σαν μία ξεχωριστή κατάσταση στην περίπτωση που οι καταστάσεις ανήκαν σε διαφορετικές υποκατηγορίες. Όταν επαναλαμβανόταν η ίδια υποκατηγορία το πρόβλημα θεωρούνταν ενός βήματος. Δηλαδή ο αριθμός των καταστάσεων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων.

Έγινε επίσης διαχωρισμός των πολλαπλασιαστικών και προσθετικών καταστάσεων στα τρία επίπεδα πολυπλοκότητας τα οποία έχουν ορίσει οι Vicente, Markano & Verschaffel (2018) (δες πίνακα 1 σελίδα 19 και πίνακα 10 σελίδα 37). Ακόμα υπολογιστικό το ποσοστό των αριθμητικών προβλημάτων τα οποία περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια που λύνονται σε ένα βήμα και το ποσοστό των προβλημάτων που λύνονται σε δύο βήματα ή παραπάνω βήματα.

Παρακάτω αναλύονται κάποια παραδείγματα προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια, στα οποία η κατάσταση που περιέχουν ανήκει στην κατηγορία αλλαγή.

Εικόνα 1: Εργασία 1, του μαθήματος 14, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού. **Εικόνα 2:** Εργασία 2, του μαθήματος 32, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού.

<p><i>Ένας λογοτέχνης έγραψε:</i> Κρατάς τρία λουλούδια και σου προσφέρω ακόμη δύο. Πόσα λουλούδια θα έχεις;</p>	 <p>Στις 29 Μαρτίου του 1896, ο Σπύρος Λούης τερμάτισε πρώτος στον Μαραθώνιο Δρόμο των πρώτων σύγχρονων Ολυμπιακών Αγώνων που έγιναν στην Αθήνα. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από τότε μέχρι σήμερα;</p>
--	--

Η κατάσταση η οποία περιγράφεται στην εικόνα 1 αφορά ένα αρχικό σύνολο, τα λουλούδια, το οποίο υφίσταται μία αλλαγή και αυξάνεται ο πληθάρειθμός του. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αλλαγή 1.

Η κατάσταση που περιγράφεται στην εικόνα 2 αφορά μία αρχική ποσότητα, την αρχική χρονολογία, η οποία αλλάζει με το πέρασμα των χρόνων και γίνεται η σημερινή ημερομηνία,

ζητείται η διαφορά των δύο χρονολογιών. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αλλαγή 3.

Εικόνα 3: Δεύτερο ερώτημα από την πρώτη τελεία της δραστηριότητας και αποκάλυψης, του μαθήματος 35, στο σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού.

Ο Μιχάλης ζήτησε από τους γονείς του ως δώρο για τα γενέθλιά του ψαράκια. Πήγαν μαζί να τα αγοράσουν στο κατάστημα με τα κατοικίδια ζώα.

Πόσα κόκκινα ψαράκια ήταν στην αρχή στη γυάλα;
Πόσα κόκκινα ψαράκια έμειναν μετά; Δείχνω στον άβακα.

Η κατάσταση που περιέχει το πρόβλημα της εικόνας 3 αφορά ένα αρχικό σύνολο, αυτό των κόκκινων ψαριών, το οποίο υφίσταται μία αλλαγή με αποτέλεσμα να μειωθεί ο πληθάρθιμός του. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αλλαγή 2.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο παραδείγματα προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων, στα οποία η κατάσταση που περιέχουν ανήκει στην κατηγορία συνδυασμός.

Εικόνα 4: Δεύτερο βελάκι από την εργασία 1, του μαθήματος 17, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού



- ▶ Πόσα είναι τα κορίτσια στην τάξη μου;
.....
- ▶ Πόσα είναι τα κορίτσια μαζί με τη δασκάλα;
.....

Η κατάσταση που περιέχει το πρόβλημα της εικόνας 4, αφορά ένα αρχικό σύνολο, τα κορίτσια, το οποίο ενώνεται με ένα άλλο σύνολο, την δασκάλα. Άρα η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία συνδυασμός 1.

Η κατάσταση που περιγράφεται στην εικόνα 5 αφορά δύο αρχικά σύνολα, το καθαρό βάρος και το απόβαρα, τα οποία ενώνονται και δημιουργούν το μεικτό βάρος, ζητείται να βρεθεί

Εικόνα 5: Τρίτη τελεία της εργασίας 2, του μαθήματος 18, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού.

2) Αντιστοικίζω αυτά που ταιριάζουν και συμπληρώνω:

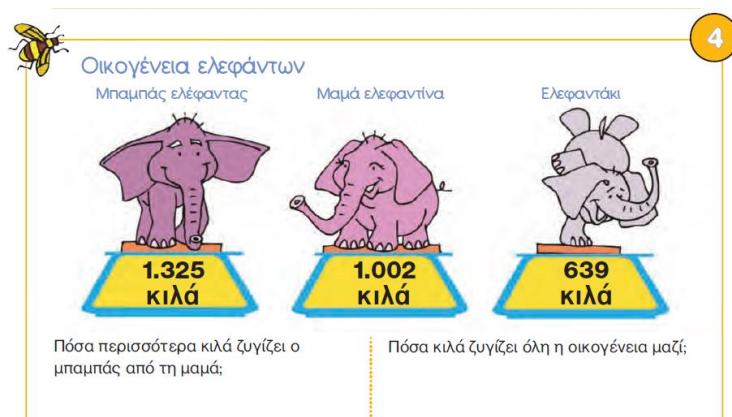
περιεχόμενο	•	• Μεικτό Βάρος: κ.
συσκευασία	•	• Καθαρό Βάρος: κ.
περιεχόμενο και συσκευασία	•	• Απόβαρα: κ.

• Γιατί η ζυγαριά δείχνει παραπάνω από 2 κιλά;

ένα από τα αρχικά σύνολα. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία συνδυασμός 2.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα προβλήματος, το οποίο περιέχει κατάσταση που ανήκει στην κατηγορία της προσθετικής σύγκρισης.

Εικόνα 6: Πρώτο ερώτημα της εργασίας 4, του μαθήματος 27, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού



Η κατάσταση που περιέχει το πρόβλημα της εικόνας 6 αφορά μία αρχική ποσότητα, τα κιλά του μπαμπά, η οποία συγκρίνεται με μία άλλη ποσότητα, τα κιλά της μαμάς, με σκοπό να βρεθεί πόσο μεγαλύτερη είναι η πρώτη ποσότητα. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία σύγκριση 1.

Στην συνέχεια θα αναλυθούν τρία παραδείγματα προβλημάτων τα οποία περιέχουν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που ανήκουν στην κατηγορία αναλογία.

Εικόνα 7: Διερεύνηση 1, του μαθήματος 12, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού



1. Ένας χώρος στάθμευσης έχει 21 σειρές, καθεμιά από τις οποίες έχει 8 θέσεις. Πόσες θέσεις έχει συνολικά ο χώρος στάθμευσης; Λύνουμε το παραπάνω πρόβλημα και, με βάση αυτό, διατυπώνουμε προβλήματα διαίρεσης.

Εικόνα 8: Πρώτη τελεία του μαθήματος 44, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού.

- Η μητέρα του Νικίτα αγόρασε 8 κιλά κυδώνια για να φτιάξει γλυκό κουταλιού. Πλήρωσε 16 €. Επειδή το γλυκό της αρέσει σε όλους, αποφάσισε να φτιάξει περισσότερο. Ζήτησε από τον Νικίτα να της αγοράσει 5 κιλά κυδώνια ακόμα. Ο Νικίτας υπολογίζει πόσα χρήματα θα χρειαστεί.

Η κατάσταση που περιέχει το πρόβλημα της εικόνας 7 είναι πολλαπλασιαστική, δίνεται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό, ο αριθμός των αυτοκινήτων σε κάθε σειρά και ο πολλαπλασιαστής, ο αριθμός των σειρών και ζητείται να βρεθεί το γινόμενο. Οπότε η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αναλογία 2.

Το πρόβλημα της εικόνας 8 περιέχει μία πολλαπλασιαστική κατάσταση και απαιτεί για την λύση του να γίνει αναγωγή στην μονάδα, δηλαδή να υπολογιστεί η τιμή πώλησης του ενός

κιλού κυδώνια, ώστε μετά να βρεθεί η τιμή των πέντε κιλών. Για αυτό τον λόγο η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία της πολλαπλής αναλογίας, αναλογία 1.

Εικόνα 9: Δεύτερο ερώτημα της εργασίας 2, του μαθήματος 7, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού.

20 δελφίνια χωρισμένα σε τετράδες

$$20 : 4 = \square$$

Η κατάσταση που περιέχει το πρόβλημα της εικόνας 9 είναι πολλαπλασιαστική, δίνεται ο πολλαπλασιαστής, δηλαδή ο αριθμός από τα δελφίνια σε κάθε ομάδα και το γινόμενο, αριθμός από τα δελφίνια και ζητείται να βρεθεί το πολλαπλασιαζόμενο ποσό, πόσα δελφίνια έχει η κάθε ομάδα. Οπότε η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αναλογία 3.

Τέλος θα αναλυθούν κάποια προβλήματα τα οποία χρειάζονται για την λύση τους δύο ή παραπάνω βήματα και άρα περιέχουν δύο ή παραπάνω καταστάσεις.

Εικόνα 10: Πρόβλημα 1, της 2^{ης} επανάληψης, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού.

1ο Πρόβλημα



Ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής έφτιαξε τη μια ημέρα 684 σοκολατάκια και την άλλη 536. Θέλει να τα συσκευάσει σε κουτιά που καθένα χωράει 20 σοκολατάκια. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Καταρχήν όπως φαίνεται το πρόβλημα που περιέχει η εικόνα 10 είναι δύο βημάτων, οπότε περιέχει δύο καταστάσεις από διαφορετικές υποκατηγορίες. Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί ο αριθμός που είναι συνολικά τα σοκολατάκια, αυτή η κατάσταση αφορά την ένωση δύο ποσοτήτων οι οποίες δημιουργούν ένα σύνολο, για αυτό τον λόγο ανήκει στην υποκατηγορία συνδυασμός 1. Στην συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί ο αριθμός από τα κουτιά, καταρχήν κατάσταση είναι πολλαπλασιαστική, δίνεται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό, δηλαδή ο αριθμός από τα σοκολατάκια σε κάθε κουτί και το γινόμενο, ο αριθμός από τα σοκολατάκια και ζητείται να βρεθεί ο πολλαπλασιαστής. Άρα η κατάσταση ανήκει στην κατηγορία αναλογία 4.

Εικόνα 11: Εφαρμογή, του κεφαλαίου 61, στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού.

Εφαρμογή

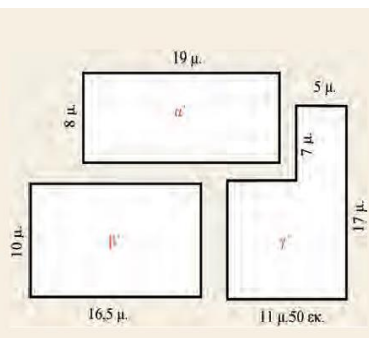
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρία γειτονικά οικόπεδα που πουλιούνται. Να βρείτε ποιο είναι το μεγαλύτερο και πόσο θα πουληθεί, αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 250 €.

Λύση:

Για να βρούμε ποιο είναι το πιο μεγάλο από τα τρία οικόπεδα, πρέπει να βρούμε την επιφάνεια που καλύπτει το καθένα απ' αυτά.

α' οικόπεδο: $19 \cdot 8 = \dots\dots\dots$ τ.μ.

β' οικόπεδο: $10 \cdot 16,5 = \dots\dots\dots$ τ.μ.



Το πρόβλημα που περιέχει η εικόνα 11 είναι τριών βημάτων, οπότε περιέχει τρεις καταστάσεις από διαφορετικές υποκατηγορίες. Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί το εμβαδόν του κάθε οικοπέδου, οπότε η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία ορθογώνιο 1. Ο υπολογισμών και των τριών εμβαδών μετριέται σαν μία κατάσταση επειδή υπάρχει επανάληψη της ίδιας υποκατηγορίας. Στην συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί το συνολικό εμβαδόν το οποίο απαιτεί τον συνδυασμό τριών διαφορετικών ποσοτήτων, οι οποίες δημιουργούν ένα σύνολο. Άρα η κατάσταση ανήκει στην κατηγορία συνδυασμός 1. Στην τρίτη κατάσταση, η οποία είναι πολλαπλασιαστική, υπολογίζεται η τιμή πώλησης. Δίνεται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό, ο αριθμός των τετραγωνικών που είναι το οικόπεδο και ο πολλαπλασιαστής, η τιμή πώλησης του κάθε τετραγωνικού και ζητείται να βρεθεί το γινόμενο. Άρα η κατάσταση ανήκει στην υποκατηγορία αναλογία 2.

Κεφάλαιο 4^ο: Αποτελέσματα

Σε αυτό το μέρος της εργασίας γίνεται αρχικά για κάθε τάξη ξεχωριστά παρουσίαση των αποτελεσμάτων από την ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου της τάξης, σχετικά με την κατανομή των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες και υποκατηγορίες. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα συνολικά αποτελέσματα από όλες τις τάξεις μαζί σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες και υποκατηγορίες.

4.1: Α' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού των ελληνικών σχολείων υπάρχουν 125 λεκτικά προβλήματα που τηρούν τις προϋποθέσεις που έχουν δοθεί και αναλύθηκαν περαιτέρω. Τα 110 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 13 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ενώ τα 2 είναι προβλήματα δύο βημάτων και περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

4.1.1: Προσθετικές καταστάσεις

Υπάρχουν 110 λεκτικά προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, από αυτά τα 109 είναι ενός βήματος και το 1 είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν όπως αναφέρεται παραπάνω 2 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο είναι 113.

Στον πίνακα 16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 16: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	62	54.9
Συνδυασμός	48	42.4
Σύγκριση	0	0
Ισότητα	3	2.7
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0
Σύνολο	113	100

Οι δύο πιο συχνές κατηγορίες είναι η αλλαγή (μετασχηματισμός πληθικού αριθμού συνόλου) και ο συνδυασμός (ένωση συνόλων), οι οποίες εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα. Η κατηγορία ισότητα (μετασχηματισμός συνόλου με βάση τον πληθάρημο ενός άλλου συνόλου), εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τις δύο πιο συχνές κατηγορίες και οι κατηγορίες σύγκριση (σύγκριση πληθάρημων δύο συνόλων), μετασχηματισμός μιας σχέσης (μετασχηματισμός συνόλου που περιγράφεται από αρνητικούς αριθμούς), σύνθεση μετασχηματισμών και σύνθεση σχέσεων (ένωση συνόλων που περιγράφονται από αρνητικούς αριθμούς) δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 17: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στην κατηγορία αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
23	22	0	15	0	2	62

Οι δύο πιο συχνά εμφανιζόμενες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή είναι η αλλαγή 1 και η αλλαγή 2 (ζητείται και στις δύο ο τελικός πληθικός αριθμός), οι οποίες εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα (20.3% και 19.5% αντίστοιχα, ως προς το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων). Τρίτη πιο συχνή υποκατηγορία είναι η αλλαγή 4 (ζητείται ο μετασχηματισμός) η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 13.3%, όλες οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 1.8% ή καθόλου.

Στο πίνακα 18 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στην κατηγορία συνδυασμός.

Πίνακας 18: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
36	12	48

Ο συνδυασμός 1 (ζητείται το σύνολο της ένωσης) είναι η υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός που εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα (31.9%). Η υποκατηγορία συνδυασμός 2 (ζητείται ένα από τα αρχικά σύνολο) εμφανίζεται με αρκετά μικρότερη συχνότητα (10.5%) σε σχέση με την υποκατηγορία συνδυασμός 1.

Όσον αφορά την κατηγορία ισότητα, η υποκατηγορία ισότητα 1 (ζητείται η διαφορά) είναι η μόνη που εμφανίζεται, οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της δεν εμφανίζονται καθόλου.

Τα λεκτικά προβλήματα που μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα είναι κυρίαρχα, καθώς αποτελούν το 97.3% του συνόλου των προβλημάτων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο. Τα υπόλοιπα προβλήματα είναι δύο βημάτων, προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων δεν εμφανίζονται.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητας, το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας είναι κυρίαρχο, εκεί ανήκουν το 74.4% των καταστάσεων. Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 13.3% των καταστάσεων και στο τρίτο της υψηλής δυσκολίας το 12.3% των καταστάσεων.

4.2.1: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Το σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού περιλαμβάνει 13 λεκτικά προβλήματα, τα οποία περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, όλα εκ των οποίων είναι ενός βήματος.

Ακόμα υπάρχουν 2 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία πολλαπλασιαστική και μία προσθετική κατάσταση. Όποτε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι 15.

Στον πίνακα 19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο.

Πίνακας 19: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	15	0	0	0	15
Ποσοστά (%)	100	0	0	0	100

Η μόνη κατηγορία που εμφανίζεται είναι η αναλογία (σύνολα που οι πληθάρημοι τους συνδέονται με σχέσεις αναλογικότητας). Οι κατηγορίες σύγκριση (σύγκριση των πληθάρημων δύο συνόλων της μορφής πόσες φορές μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο), καρτεσιανό γινόμενο (αριθμός από σύνολα που περιέχουν ένα αντικείμενο από ένα πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από ένα δεύτερο σύνολο) και ορθογώνιο (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου) δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 20 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 20: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Α' δημοτικού στην κατηγορία αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
0	8	4	3	15

Η υποκατηγορία αναλογία 2 (ζητείται το γινόμενο) είναι κυρίαρχη, σε αυτήν ανήκουν το 53.3% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων. Οι υποκατηγορίες αναλογία 3 (ζητείται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό) και αναλογία 4 (ζητείται ο πολλαπλασιαστής) εμφανίζονται με περίπου την ίδιο συχνότητα, ενώ η υποκατηγορία αναλογία 1 (πολλαπλή αναλογία) δεν εμφανίζεται καθόλου.

Τα προβλήματα ενός βήματος αποτελούν το 86.7% των λεκτικών προβλημάτων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο. Τα υπόλοιπα προβλήματα είναι δύο βημάτων, προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων δεν εμφανίζονται.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητας, όλες οι καταστάσεις ανήκουν στο πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας. Το δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας και το τρίτο της υψηλής δυσκολίας δεν εμφανίζονται καθόλου.

4.2: Β' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού υπάρχουν συνολικά 210 λεκτικά προβλήματα που τηρούν τις προϋποθέσεις και αναλύθηκαν περαιτέρω. Από αυτά τα 210 προβλήματα τα 122 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 74 μόνο πολλαπλασιαστικές και τα 14 είναι προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

4.2.1: Προσθετικές καταστάσεις

Όπως αναφέρεται παραπάνω, υπάρχουν 122 προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, από αυτά τα 110 είναι ενός βήματος και τα 12 είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 14 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο είναι 148.

Στον πίνακα 21 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες στο σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού.

Πίνακας 21: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	50	33.8
Συνδυασμός	68	46
Σύγκριση	16	10.8
Ισότητα	14	9.4
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0
Σύνολο	148	100

Η κατηγορία συνδυασμός είναι πρώτη σε συχνότητα με ποσοστό 46%, δεύτερη σε συχνότητα είναι η κατηγορία αλλαγή με ποσοστό 33.8%. Οι κατηγορίες σύγκριση και ισότητα εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα. Ακόμα οι κατηγορίες μετασχηματισμός μιας σχέσης, σύνθεση μετασχηματισμών και σύνθεση σχέσεων δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 22 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 22: Κατανομή καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
6	32	6	2	0	4	50

Η υποκατηγορία αλλαγή 2 είναι η κυρίαρχη υποκατηγορία της κατηγορίας αλλαγή, σε αυτήν ανήκουν το 21.6% των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου. Επόμενες σε συχνότητα είναι οι υποκατηγορίες αλλαγή 1 και αλλαγή 3 με πολύ μικρότερη συχνότητα σε

σχέση με την υποκατηγορία αλλαγή 2 (4.1%). Η υποκατηγορία αλλαγή 6 εμφανίζεται με συχνότητα 2.7%, ενώ οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 1.4% ή καθόλου.

Στον πίνακα 23 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 23: Κατανομή καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
59	9	68

Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός (39%), η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα από αυτήν (6.1%).

Στον πίνακα 22 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 24: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
8	3	3	2	0	0	16

Η σύγκριση 1 είναι κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας σύγκριση, οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 2.1% ή καθόλου.

Στον πίνακα 25 αναλύονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα.

Πίνακας 25: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα.

Ισότητα 1	Ισότητα 2	Ισότητα 3	Ισότητα 4	Ισότητα 5	Ισότητα 6	Σύνολο
9	1	3	1	0	0	14

Η υποκατηγορία ισότητα 1 εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα, οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 2.1% ή καθόλου.

Τα προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα είναι κυρίαρχα, καθώς αποτελούν το 80.9% των προβλημάτων. Τα υπόλοιπα προβλήματα λύνονται σε δύο βήματα, δεν υπάρχουν προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων.

Το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας είναι κυρίαρχο, το 79.8% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτό. Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 11.4% των καταστάσεων και στο τρίτο της υψηλής δυσκολίας το 8.8% των καταστάσεων.

4.2.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Τα λεκτικά προβλήματα που περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις είναι 74, από αυτά τα 73 είναι ενός βήματος και το 1 είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 14 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού είναι 89.

Στον πίνακα 26 αναλύονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 26: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	87	2	0	0	89
Ποσοστά (%)	97.8	2.2	0	0	100

Η συντριπτική πλειοψηφία των καταστάσεων ανήκει στην κατηγορία αναλογία (97.8%). Η κατηγορία σύγκριση εμφανίζεται ελάχιστα (2.2%) και οι κατηγορίες ορθογώνιο και καρτεσιανό γινόμενο δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 27 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της κατανομής των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού στην κατηγορία αναλογία.

Πίνακας 27: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Β' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
19	51	8	9	87

Η υποκατηγορία αναλογία 2 είναι κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας αναλογία (57.3%, ως προς το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων). Δεύτερη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 1, με ποσοστό πολύ μικρότερο από αυτό της υποκατηγορίας αναλογίας 2 (21.4%). Ακόμα οι υποκατηγορίες αναλογία 3 και 4 εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα (8.9% και 10.2%, αντίστοιχα).

Όσον αφορά την κατηγορία σύγκριση, η μόνο υποκατηγορία της που εμφανίζεται είναι η σύγκριση 3, οι υπόλοιπες δεν εμφανίζονται καθόλου.

Η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που περιέχουν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις είναι ενός βήματος. Μόλις το 16% των προβλημάτων είναι δύο βημάτων, ενώ δεν υπάρχουν προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων.

Όσον αφορά την πολυπλοκότητα, το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας είναι κυρίαρχο με το 77.5% των καταστάσεων να ανήκουν σε αυτό. Οι υπόλοιπες καταστάσεις ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας, το τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας δεν εμφανίζεται καθόλου.

4.3: Γ' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ' δημοτικού υπάρχουν 137 λεκτικά προβλήματα που τηρούν τις προϋποθέσεις που προαναφέρθηκαν. Από αυτά τα 51 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 80 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές, ενώ τα 6 προβλήματα είναι δύο-βημάτων και περιλαμβάνουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

4.3.1: Προσθετικές καταστάσεις

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού υπάρχουν 51 προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, από αυτά τα 48 λύνονται σε ένα βήμα και τα 3 σε δύο βήματα. Υπάρχουν επίσης 6 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε συνολικά το σχολικό εγχειρίδιο περιέχει 60 προσθετικές καταστάσεις.

Στον πίνακα 28 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 28: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	14	23.3
Συνδυασμός	33	55
Σύγκριση	13	21.7
Ισότητα	0	0
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0
Σύνολο	60	100

Η κατηγορία συνδυασμός είναι κυρίαρχη, καθώς το 55% των καταστάσεων να ανήκουν σε αυτήν. Οι κατηγορίες αλλαγή και σύγκριση εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα (γύρω στο 22%), ενώ οι κατηγορίες ισότητα, μετασχηματισμός μιας σχέσης, σύνθεση μετασχηματισμών και σύνθεση σχέσεων δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 29 αναλύεται η κατανομή των καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 29: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
6	5	2	1	0	0	14

Σχετικά με την κατηγορία αλλαγή, οι υποκατηγορίες αλλαγή 1 και αλλαγή 2 εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα (γύρω στο 9%), οι υποκατηγορίες αλλαγή 3 και αλλαγή 4 εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 3.4% και οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και 6 δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 30 παρουσιάζεται η κατανομή των καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 30: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
32	1	33

Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός και εμφανίζεται με ποσοστό 53.3%, η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα από αυτήν (1.7%).

Στον πίνακα 31 παρουσιάζεται η κατανομή των καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 31: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
10	1	1	1	0	0	13

Όσον αφορά την κατανομή των καταστάσεων στην κατηγορία σύγκριση, κυρίαρχη είναι η υποκατηγορία σύγκριση 1 που εμφανίζεται με ποσοστό 16.6%, στις υποκατηγορίες σύγκριση 2, σύγκριση 3 και σύγκριση 5 ανήκει μόλις μία κατάσταση στην κάθε μία (1.7%), ενώ οι υποκατηγορίες σύγκριση 5 και σύγκριση 6 δεν εμφανίζονται καθόλου.

Τα προβλήματα τα οποία λύνονται σε ένα βήμα είναι το 84.2% των προβλημάτων τα οποία περιλαμβάνουν προσθετικές καταστάσεις, τα υπόλοιπα προβλήματα είναι δύο βημάτων. Προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων δεν εμφανίστηκαν.

Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυριαρχούν οι καταστάσεις που ανήκουν στο πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας, όπου ανήκουν το 90% των καταστάσεων. Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 8.3% των καταστάσεων και στο τρίτο της υψηλής δυσκολίας ανήκουν το 1.7% των καταστάσεων.

4.3.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Υπάρχουν 80 προβλήματα που περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στο σχολικό εγχειρίδιο, από αυτά τα 79 είναι ενός βήματος και το ένα είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 6 προβλήματα που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο είναι 87.

Στον πίνακα 32 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 32: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	75	8	0	4	87
Ποσοστά (%)	86.2	9.2	0	4.6	100

Η κατηγορία αναλογία είναι κυρίαρχη, με το 86.2% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων να ανήκουν σε αυτήν. Δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση στην οποία ανήκουν το 9.2% των καταστάσεων και τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία ορθογώνιο στην οποία ανήκουν το 4.6% των καταστάσεων. Η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 33 αναλύονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 33: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
0	47	13	15	75

Η υποκατηγορία αναλογία 2 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας αναλογία(54%). Οι υποκατηγορίες αναλογία 3 και αναλογία 4 εμφανίζονται με παρόμοια ποσοστά (15% και 17.2% , αντίστοιχα), ενώ η υποκατηγορία αναλογία 1 δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 34 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 34: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Γ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
0	0	4	4	0	0	8

Όσον αφορά την κατηγορία σύγκριση, οι μόνες υποκατηγορίες της που εμφανίζονται είναι η σύγκριση 3 και η σύγκριση 4 με την ίδια συχνότητα.

Σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο, η μόνο υποκατηγορία της που εμφανίζεται είναι η ορθογώνιο 1.

Κυρίαρχα όπως και στα προβλήματα που αφορούν προσθετικές καταστάσεις, είναι και εδώ τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα (88.8%). Τα προβλήματα τα οποία λύνονται σε δύο βήματα αποτελούν το 11.2% των προβλημάτων, ενώ προβλήματα τριών ή παραπάνω βημάτων δεν υπάρχουν.

Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο πολυπλοκότητας της χαμηλής δυσκολίας με ποσοστό 86.2%. Το δεύτερο επίπεδο πολυπλοκότητας της μεσαίας δυσκολίας εμφανίστηκε με ποσοστό 9.2% και το τρίτο της υψηλής δυσκολίας εμφανίστηκε με ποσοστό 4.6%.

4.4: Δ' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού των ελληνικών σχολείων υπάρχουν 143 λεκτικά προβλήματα που τηρούν τις προϋποθέσεις που δόθηκαν. Από αυτά τα 143 προβλήματα, τα 140 ανήκουν σε κάποια από τις κατηγορίες που περιεγράφηκαν και τα 3 έχουν ελλιπείς πληροφορίες και για αυτό δεν αναλύθηκαν περαιτέρω. Από τα 140 προβλήματα που ανήκουν σε κάποια κατηγορία τα 77 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 42 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τα 21 προβλήματα είναι δύο ή τριών βημάτων και περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

4.4.1: Προσθετικές καταστάσεις

Υπάρχουν 77 προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού, τα 68 είναι ενός βήματος, τα 8 είναι δύο βημάτων και το ένα είναι τριών βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 21 προβλήματα που περιλαμβάνουν και προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 19 είναι δύο βημάτων, οπότε περιλαμβάνουν 19 προσθετικές καταστάσεις και τα 2 είναι τριών βημάτων. Το ένα από τα προβλήματα τριών βημάτων περιέχει δύο προσθετικές καταστάσεις και μία πολλαπλασιαστική και το άλλο περιέχει μία προσθετική κατάσταση και δύο πολλαπλασιαστικές. Οπότε το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο είναι 109.

Στον πίνακα 35 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 35: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	31	28.5
Συνδυασμός	60	55
Σύγκριση	16	14.7
Ισότητα	0	0
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	2	1.8
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0
Σύνολο	109	100

Ανάμεσα στις κατηγορίες προσθετικών καταστάσεων κυριαρχεί η κατηγορία συνδυασμός (ένωση συνόλων), στην οποία ανήκουν το 55% των καταστάσεων, δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία αλλαγή (μετασχηματισμός πληθικού αριθμού συνόλου) με ποσοστό 28.5%. Τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση (σύγκριση πληθάρθιμων δύο συνόλων) όπου ανήκει το 14.7% των καταστάσεων και τέταρτη πιο συχνή είναι η κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης (μετασχηματισμός συνόλου που περιγράφεται από αρνητικούς αριθμούς) όπου εκεί ανήκουν δύο καταστάσεις (1.8%). Οι κατηγορίες ισότητα (μετασχηματισμός συνόλου με βάση τον πληθάρθιμο ενός άλλου συνόλου), σύνθεση μετασχηματισμών και σύνθεση σχέσεων (ένωση συνόλων που περιγράφονται από αρνητικούς αριθμούς) δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 36 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 36: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
9	8	11	2	1	0	31

Όσον αφορά την κατηγορία αλλαγή, οι υποκατηγορίες αλλαγή 1, αλλαγή 2 (ζητείται και στις δύο ο τελικός πληθικός αριθμός) και αλλαγή 3 (ζητείται ο μετασχηματισμός) εμφανίζονται με παρόμοια συχνότητα (γύρω στο 8.5%), οι υποκατηγορίες αλλαγή 4 (ζητείται ο μετασχηματισμός) και αλλαγή 5 (ζητείται ο αρχικός πληθικός αριθμός) εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 1.9% και η υποκατηγορία αλλαγή 6 (ζητείται ο αρχικός πληθικός αριθμός) δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 37 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 37: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
48	12	60

Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 (ζητείται το σύνολο της ένωσης) είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός, σε αυτήν ανήκουν το 44% των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου. Η υποκατηγορία συνδυασμός 2 (ζητείται ένα από τα αρχικά σύνολο) εμφανίζεται και αυτή συχνά, αν και με ποσοστό πολύ μικρότερο από αυτό της υποκατηγορίας συνδυασμός 1 (11%).

Στον πίνακα 38 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 38: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
10	1	1	1	1	2	16

Όσον αφορά την κατηγορία σύγκριση, η υποκατηγορία σύγκριση 1 (ζητείται η διαφορά) είναι κυρίαρχη, με το 9.3% των καταστάσεων να ανήκουν σε αυτήν. Οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας εμφανίστηκαν όλες με συχνότητα μικρότερη του 1.9%.

Οι δύο καταστάσεις που ανήκουν στην κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης αφορούν την εύρεση του μετασχηματισμού, δεν υπάρχουν προβλήματα που αφορούν την εύρεση της αρχικής ή της τελικής σχέσης.

Τα προσθετικά προβλήματα που λύνονται σε ένα βήμα κυριάρχησαν, καθώς αποτελούν το 70.1% των συνολικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν προσθετικές καταστάσεις. Τα υπόλοιπα προβλήματα ήταν δύο ή τριών βημάτων.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας, εκεί ανήκουν το 69.7% των καταστάσεων. Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 13.7% των καταστάσεων, ενώ στο τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας ανήκουν το 16.6% των προβλημάτων.

4.4.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού περιέχει 42 λεκτικά προβλήματα που περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 40 είναι ενός βήματος, το 1 είναι δύο βημάτων και το 1 είναι τριών βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 19 προβλήματα δύο βημάτων που περιλαμβάνουν μία πολλαπλασιαστική και μία προσθετική κατάσταση, 1 πρόβλημα τριών βημάτων που περιλαμβάνει δύο προσθετικές και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση και 1 πρόβλημα τριών βημάτων που περιέχει μία προσθετική και δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Όποτε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι 67.

Στον πίνακα 39 παρουσιάζονται τα δεδομένα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 39: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	64	3	0	0	67
Ποσοστά (%)	95.5	4.5	0	0	100

Η συντριπτική πλειοψηφία των καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο ανήκουν στην κατηγορία αναλογία (σύνολα που οι πληθάρημοι τους συνδέονται με σχέσεις αναλογικότητας) (95.5%). Η κατηγορία σύγκριση (σύγκριση των πληθάρημων δύο συνόλων της μορφής πόσες φορές μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο) είναι η μόνη άλλη κατηγορία που εμφανίζεται, οι κατηγορίες ορθογώνιο (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου) και καρτεσιανό γινόμενο (αριθμός από σύνολα που περιέχουν ένα αντικείμενο από ένα πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από ένα δεύτερο σύνολο) δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 40 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 40: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
10	28	12	14	66

Σχετικά με την κατηγορία αναλογία, η πιο συχνή υποκατηγορία της είναι η αναλογία 2 (ζητείται το γινόμενο) στην οποία ανήκουν το 41.7% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο. Δεύτερη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 4 (ζητείται ο πολλαπλασιαστής) με ποσοστό 20.8%, τρίτη πιο συχνή είναι η αναλογία 3 (ζητείται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό) με ποσοστό 18% και λιγότερο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 1 (πολλαπλή αναλογία) που εμφανίζεται με ποσοστό 15%.

Στον πίνακα 41 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 41: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Δ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
0	0	2	1	0	0	3

Όσον αφορά την κατηγορία σύγκριση οι μόνες υποκατηγορίες της που εμφανίζονται είναι η σύγκριση 3 και η σύγκριση 4 (και στις δύο ζητείται το σύνολο σύγκρισης), με ποσοστά 3% και 1.5%, αντίστοιχα.

Τα πολλαπλασιαστικά λεκτικά προβλήματα που λύνονται σε ένα βήμα είναι το 63.5% των συνολικών προβλημάτων που περιέχουν τουλάχιστον μία πολλαπλασιαστική κατάσταση, το 31.7% λύνονται σε δύο βήματα και το 4.8% λύνονται σε τρία.

Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας, το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας κυριάρχησε (80.6%). Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 19.4% των καταστάσεων, ενώ στο τρίτο της υψηλής δυσκολίας δεν ανήκει καμία κατάσταση.

4.5: Ε' Δημοτικού

Το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού περιλαμβάνει 97 λεκτικά προβλήματα που τηρούν τις προϋποθέσεις που δόθηκαν. Από αυτά τα 97 προβλήματα, τα 32 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 48 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τα 17 προβλήματα είναι δύο ή παραπάνω βημάτων και περιέχουν τουλάχιστον μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

5.4.1: Προσθετικές καταστάσεις

Το σχολικό εγχειρίδιο περιλαμβάνει 32 λεκτικά προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, από αυτά τα 28 είναι ενός βήματος και τα 4 είναι δύο βημάτων. Υπάρχουν όπως αναφέρεται παραπάνω 17 προβλήματα δύο ή παραπάνω βημάτων που περιλαμβάνουν και προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 14 είναι δύο βημάτων, τα 3 είναι τεσσάρων βημάτων. Όλα τα προβλήματα τεσσάρων βημάτων περιέχουν δύο πολλαπλασιαστικές και δύο προσθετικές καταστάσεις. Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων είναι 56.

Στον πίνακα 42 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 42: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	11	19.6
Συνδυασμός	31	55.4
Σύγκριση	4	7.2
Ισότητα	1	1.8
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	6	10.7
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	3	5.3
Σύνολο	56	100

Η κατηγορία συνδυασμός είναι κυρίαρχη, το 55.4% των καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο ανήκουν σε αυτήν. Δεύτερη σε συχνότητα είναι η κατηγορία αλλαγή (19.6%), η οποία έχει πολύ μεγάλη διαφορά στην συχνότητα εμφάνισής της από την κατηγορία συνδυασμός. Τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης, με συχνότητα 10.7%, μετά από αυτήν είναι οι κατηγορίες σύγκριση και σύνθεση σχέσεων με συχνότητες 7.2% και 5.4%, αντίστοιχα. Τελευταία σε συχνότητα από τις κατηγορίες που εμφανίστηκαν είναι η ισότητα, στην οποία ανήκουν μόλις μία κατάσταση (1.8%). Η κατηγορία σύνθεση μετασχηματισμών δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 43 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 43: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
3	5	2	1	0	0	11

Όσον αφορά την κατηγορία αλλαγή, η πιο συχνή της υποκατηγορία είναι αλλαγή 2 με ποσοστό 8.9%, ως προς το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων. Οι υποκατηγορίες αλλαγή 1, αλλαγή 2 και αλλαγή 4 εμφανίζονται όλες με ποσοστό μικρότερο του 5.4%, ενώ οι υποκατηγορίες 5 και αλλαγή 6 δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 44 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 44: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
28	3	31

Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός, η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα από την υποκατηγορία συνδυασμός 1.

Στον πίνακα 45 παρουσιάζεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 45: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
2	0	2	0	0	0	4

Σχετικά με την κατηγορία σύγκριση οι υποκατηγορίες της που εμφανίζονται είναι η σύγκριση 1 και η σύγκριση 3, και οι δύο υποκατηγορίες παρουσιάζονται με την ίδια συχνότητα (3.6%).

Η μόνη υποκατηγορία της κατηγορίας ισότητα που εμφανίζεται είναι η ισότητα 3. Ακόμα όλες οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης αφορούν την εύρεση του μετασχηματισμού. Υπάρχουν 3 καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία σύνθεση σχέσεων, από αυτές οι 2 αφορούν την εύρεση της τελικής σχέσης και η 1 αφορά την εύρεση μίας από τις αρχικές σχέσεις.

Υπάρχει μία σχετική ισορροπία ανάμεσα στα προβλήματα που περιέχουν προσθετικές καταστάσεις και λύνονται σε ένα βήμα, με αυτά που λύνονται σε παραπάνω από ένα βήματα. Το 57.1% λύνονται σε ένα βήμα και τα υπόλοιπα λύνονται σε δύο ή τέσσερα βήματα.

Κυρίαρχο είναι όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας, το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας, στο οποίο ανήκουν το 69.6% των καταστάσεων. Δεύτερο πιο συχνό είναι το τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας με ποσοστό 37.5%, ενώ τρίτο πιο συχνό είναι αυτό της μεσαίας δυσκολίας με ποσοστό 7.1%.

4.5.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' δημοτικού περιέχει 48 λεκτικά προβλήματα που αφορούν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 45 είναι ενός βήματος και τα 3 είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 17 προβλήματα δύο ή παραπάνω βημάτων που περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση, από αυτά τα 14 είναι δύο βημάτων και τα 3 είναι τεσσάρων βημάτων. Αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν συνολικά 71 πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.

Στον πίνακα 46 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 46: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	64	1	0	6	71
Ποσοστά (%)	90.1	1.4	0	8.5	100

Η συντριπτική πλειοψηφία των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων ανήκει στην κατηγορία αναλογία (90.1%). Στην κατηγορία ορθογώνιο ανήκει το 8.5% των καταστάσεων και στην κατηγορία σύγκριση ανήκει μόλις μία κατάσταση (1.4%). Η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 47 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειριδίου της Ε' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 47: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
14	22	19	9	64

Όσον αφορά την κατηγορία αναλογία πρώτη σε συχνότητα είναι η υποκατηγορία αναλογία 2 η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 31%, ως προς το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο. Δεύτερη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 3 με συχνότητα κοντά σε αυτήν την υποκατηγορίας αναλογία 2 (26.8%). Τρίτη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 1 η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 19.6% και τέταρτη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 4 με ποσοστό 12.7%.

Στον πίνακα 48 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας ορθογώνιο.

Πίνακας 48: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Ε' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας ορθογώνιο.

Ορθογώνιο 1	Ορθογώνιο 2	Σύνολο
5	1	6

Σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο, κυρίαρχη είναι η υποκατηγορία ορθογώνιο 1 στην οποία ανήκουν το 7.1% των καταστάσεων, στην υποκατηγορία ορθογώνιο 2 ανήκει μόλις μία κατάσταση (1.4%).

Η μόνη υποκατηγορία της κατηγορίας σύγκρισης που εμφανίζεται είναι η σύγκριση 3.

Κυρίαρχα είναι τα προβλήματα τα οποία λύνονται σε ένα βήμα, αποτελούν το 69.2% των συνολικών προβλημάτων τα οποία περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Το 26.2% των προβλημάτων είναι δύο βημάτων και το 4.6% τεσσάρων βημάτων.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυριάρχησε το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας το οποίο εμφανίζεται με ποσοστό 70.4%. Επόμενο πιο συχνό είναι το δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας με ποσοστό 21.1%, ενώ τρίτο πιο συχνό είναι το τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας που εμφανίζεται με ποσοστό 8.5%.

4.6: Στ' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού των ελληνικών σχολείων υπάρχουν 152 λεκτικά προβλήματα τα οποία τηρούν τις προϋποθέσεις και ανήκουν σε κάποια κατηγορία. Από αυτά τα 152 προβλήματα, τα 43 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 88 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τα 21 είναι προβλήματα δύο ή παραπάνω βημάτων και περιέχουν τουλάχιστον μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση.

4.6.1: Προσθετικές καταστάσεις

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού υπάρχουν 43 λεκτικά προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, από αυτά τα 38 είναι ενός βήματος και τα 5 είναι δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 21 προβλήματα που περιέχουν και προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 18 είναι δύο βημάτων και τα 3 είναι τριών βημάτων. Από τα 3 προβλήματα που είναι τριών βημάτων τα 2 έχουν μία προσθετική κατάσταση και δύο πολλαπλασιαστικές και το ένα δύο προσθετικές και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Οπότε το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων είναι 70.

Στον πίνακα 49 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 49: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	31	44.3
Συνδυασμός	28	40
Σύγκριση	8	11.4
Ισότητα	3	4.3
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0
Σύνολο	70	100

Οι κατηγορίες αλλαγή και συνδυασμός είναι οι δύο πιο συχνές κατηγορίες και εμφανίζονται με παρόμοιες συχνότητες. Τρίτη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση με ποσοστό πολύ μικρότερο σε σχέση με τις δύο πιο συχνές κατηγορίες (11.4%), ενώ τέταρτη πιο συχνή είναι η κατηγορία ισότητα με ποσοστό 4.3%. Οι κατηγορίες μετασχηματισμός μιας σχέσης, σύνθεση μετασχηματισμών και σύνθεση σχέσεων δεν εμφανίζονται καθόλου.

Στον πίνακα 50 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιου της Στ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 50: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
7	6	11	5	1	1	31

Η υποκατηγορία αλλαγή 3 είναι η υποκατηγορία της κατηγορίας αλλαγή που εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα (15.7%, ως προς το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων). Οι υποκατηγορίες αλλαγή 1, αλλαγή 2 και αλλαγή 4 εμφανίζονται με παρόμοια ποσοστά (από 7.2% έως 10%), ενώ οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και αλλαγή 6 εμφανίζονται ελάχιστα με ποσοστό 1.4% η κάθε μία.

Στον πίνακα 51 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 51: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
25	3	28

Όσον αφορά την κατηγορία συνδυασμός, κυρίαρχη είναι η υποκατηγορία συνδυασμός 1 με ποσοστό 35.7%, η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα σε σχέση με την υποκατηγορία συνδυασμός 1 (4.3%).

Στον πίνακα 52 παρουσιάζεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιου της Στ' δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 52: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
7	0	0	1	0	0	8

Η υποκατηγορία σύγκριση 1 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας σύγκριση, οι υπόλοιπες υποκατηγορίες της εμφανίζονται με ποσοστό μικρότερο του 1.5% ή καθόλου.

Όσον αφορά την κατηγορία ισότητα, η μόνη υποκατηγορία της που εμφανίζεται είναι η ισότητα 1, με τις υπόλοιπες υποκατηγορίες της να μην εμφανίζονται καθόλου.

Τα λεκτικά προβλήματα που λύνονται σε ένα βήμα αποτελούν το 62.3% των προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου που περιέχουν τουλάχιστον μία προσθετική κατάσταση, ενώ το 37.7% είναι δύο ή τριών βημάτων.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητα, κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας το οποίο εμφανίστηκε με ποσοστό 68.6%. Δεύτερο πιο συχνό είναι το δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας με ποσοστό 22.9% και τρίτο πιο συχνό το τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας με ποσοστό 8.5%.

4.6.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχουν 88 λεκτικά προβλήματα τα οποία περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 84 είναι προβλήματα ενός βήματος και τα 4 είναι προβλήματα δύο βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 18 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση, 2 προβλήματα τριών βημάτων που περιέχουν μια προσθετική κατάσταση και δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και ένα πρόβλημα τριών βημάτων που περιέχουν δύο προσθετικές καταστάσεις και μία πολλαπλασιαστική. Οπότε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο είναι 115.

Στον πίνακα 43 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 53: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	111	2	0	2	115
Ποσοστά (%)	96.4	1.8	0	1.8	100

Σχετικά με τις κατηγορίες, κυρίαρχη είναι η αναλογία στην οποία ανήκει η συντριπτική πλειοψηφία των καταστάσεων (96.4%). Επόμενες σε συχνότητα αλλά με πολύ μεγάλη διαφορά σε σχέση κατηγορία αναλογία είναι οι κατηγορίες ορθογώνιο και σύγκριση, στις οποίες ανήκουν μόλις δύο καταστάσεις στην κάθε μία (1.8%). Η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 54 αναλύονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού στις διάφορες κατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 54: Κατανομή των καταστάσεων του σχολικού εγχειριδίου της Στ' δημοτικού στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
32	49	19	11	111

Όσον αφορά την κατηγορία αναλογία, η πιο συχνή υποκατηγορία της είναι η αναλογία 2 που εμφανίζεται με ποσοστό 42.6%, ως προς το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο. Δεύτερη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 1 η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 27.8%, τρίτη πιο συχνή είναι η υποκατηγορία αναλογία 3 με ποσοστό 16.5% και τέταρτη πιο συχνή είναι η αναλογία 4 με ποσοστό 9.5%.

Σχετικά με την κατηγορία σύγκριση οι μόνες υποκατηγορίες της που εμφανίζονται είναι η σύγκριση 1 και η σύγκριση 4, με μία κατάσταση να ανήκει σε κάθε υποκατηγορία. Ακόμα η μόνη υποκατηγορία της κατηγορίας ορθογώνιο που εμφανίζεται είναι η ορθογώνιο 1.

Τα λεκτικά προβλήματα ενός βήματος αποτελούν το 77.1% των προβλημάτων τα οποία περιέχουν τουλάχιστον μία πολλαπλασιαστική κατάσταση στο σχολικό εγχειρίδιο. Το 20.2% των προβλημάτων είναι δύο βημάτων, ενώ τα υπόλοιπα είναι τριών βημάτων.

Σχετικά με τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας στο οποίο ανήκουν το 68.7% των καταστάσεων. Στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας ανήκουν το 28.7% των καταστάσεων και στο τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας ανήκουν το 2.6% των καταστάσεων.

4.7: Συνολικά αποτελέσματα

Συνολικά σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια των τάξεων του δημοτικού υπάρχουν 864 λεκτικά προβλήματα, από αυτά τα 861 τηρούν τις προϋποθέσεις και περιγράφονται από κάποια από τις κατηγορίες που αναλύθηκαν, ενώ τα 3 έχουν ελλιπείς πληροφορίες και για αυτό δεν αναλύθηκαν περαιτέρω. Από τα 861 τα προβλήματα που ανήκουν σε κάποια κατηγορία τα 435 περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις, τα 345 περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τα 81 είναι δύο ή παραπάνω βημάτων και περιέχουν τουλάχιστον μία πολλαπλασιαστική και μία προσθετική κατάσταση.

4.7.1: Προσθετικές καταστάσεις

Υπάρχουν 435 προβλήματα που περιέχουν μόνο προσθετικές καταστάσεις σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια, από αυτά τα 401 είναι ενός βήματος, τα 33 είναι δύο βημάτων και το 1 είναι τριών βημάτων. Υπάρχουν 81 λεκτικά προβλήματα δύο ή παραπάνω βημάτων που περιέχουν τουλάχιστον μία προσθετική και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση, από αυτά τα 73 είναι δύο βημάτων, τα 2 είναι τριών βημάτων και περιέχουν δύο προσθετικές και μία πολλαπλασιαστική κατάσταση, τα 3 είναι τριών βημάτων και περιέχουν δύο πολλαπλασιαστικές και μία προσθετική κατάσταση και τα 3 είναι τεσσάρων βημάτων και περιέχουν δύο προσθετικές και δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Άρα το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια είναι 556.

Στον πίνακα 55 παρουσιάζεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 55: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αριθμός καταστάσεων	Ποσοστά (%)
Αλλαγή	199	48.2
Συνδυασμός	268	35.8
Σύγκριση	57	10.2
Ισότητα	21	3.8
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	8	1.4
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0
Σύνθεση σχέσεων	3	0.5
Σύνολο	556	100

Η κατηγορία που εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα είναι η κατηγορία συνδυασμός (ένωση συνόλων), στην οποία ανήκουν το 48.2% των προσθετικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια. Δεύτερη σε συχνότητα είναι η κατηγορία αλλαγή (μετασχηματισμός πληθικού αριθμού συνόλου) με ποσοστό 35.8%, Τρίτη σε συχνότητα αλλά με πολύ μεγάλη διαφορά στην συχνότητα εμφάνισης από τις δύο πιο συχνές, είναι η κατηγορία σύγκριση (σύγκριση πληθάριμων δύο συνόλων) η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 10.2%. Τέταρτη πιο συχνή είναι η κατηγορία ισότητα (μετασχηματισμός συνόλου με βάση τον πληθάριμο ενός άλλου συνόλου) στην οποία ανήκουν το 3.8% των καταστάσεων, ακόμα επόμενες σε συχνότητα είναι οι κατηγορίες μετασχηματισμός μιας σχέσης (μετασχηματισμός συνόλου που περιγράφεται από αρνητικούς αριθμούς) και σύνθεση σχέσεων (ένωση συνόλων που περιγράφονται από αρνητικούς αριθμούς), οι οποίες εμφανίζονται ελάχιστα (με ποσοστά 1.4% και 0.5%, αντίστοιχα). Η κατηγορία σύνθεση μετασχηματισμών δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 56 παρουσιάζονται τα δεδομένα από την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Πίνακας 56: Κατανομή των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή.

Αλλαγή 1	Αλλαγή 2	Αλλαγή 3	Αλλαγή 4	Αλλαγή 5	Αλλαγή 6	Σύνολο
54	78	32	26	2	7	199

Όσον αφορά την κατηγορία αλλαγή, η συχνότερή της υποκατηγορία είναι η αλλαγή 2 (ζητείται ο τελικός πληθικός αριθμός), στην οποία ανήκουν το 14% των συνολικών προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια. Επόμενη σε συχνότητα είναι η υποκατηγορία αλλαγή 1 (ζητείται ο τελικός πληθικός αριθμός) με ποσοστό 9.6%, στην συνέχεια είναι οι υποκατηγορίες αλλαγή 3 και αλλαγή 4 (ζητείται και στις δύο ο μετασχηματισμός) οι οποίες εμφανίζονται με παρόμοιες συχνότητες (5.8% και 4.7%, αντίστοιχα), ενώ οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και αλλαγή 6 (ζητείται και στις δύο ο αρχικός πληθικός αριθμός) εμφανίζονται ελάχιστα (με ποσοστά 0.4% και 1.3% αντίστοιχα).

Στον πίνακα 57 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις δυο υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Πίνακας 57: Κατανομή των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας συνδυασμός.

Συνδυασμός 1	Συνδυασμός 2	Σύνολο
228	40	268

Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 (ζητείται το σύνολο της ένωσης) είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας συνδυασμός (41%), η υποκατηγορία συνδυασμός 2 (ζητείται ένα από τα αρχικά σύνολο) εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα σε σχέση με την υποκατηγορία συνδυασμός 1 (7.2%).

Στον πίνακα 58 αναλύεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιλαμβάνουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 58: Κατανομή των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
37	5	7	5	1	2	57

Σχετικά με την κατηγορία σύγκριση, η υποκατηγορία σύγκριση 1 (ζητείται η διαφορά) είναι κυρίαρχη και εμφανίζεται με ποσοστό 6.7%, οι υπόλοιπες υποκατηγορίες εμφανίζονται ελάχιστα, όλες με ποσοστό μικρότερο του 1.3%.

Στον πίνακα 56 παρουσιάζονται τα δεδομένα από την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις έξι υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα.

Πίνακας 59: Κατανομή των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας ισότητα.

Ισότητα 1	Ισότητα 2	Ισότητα 3	Ισότητα 4	Ισότητα 5	Ισότητα 6	Σύνολο
15	2	3	1	0	0	21

Όσον αφορά την κατηγορία ισότητα κυρίαρχη, είναι η υποκατηγορία ισότητα 1 (ζητείται η διαφορά) στην οποία ανήκουν το 2.7% των καταστάσεων, οι υποκατηγορίες ισότητα 2 (ζητείται η διαφορά), ισότητα 3 (ζητείται ο πληθάρθιμος του συγκρινόμενου συνόλου) και ισότητα 4 (ζητείται ο πληθάρθιμος του συγκρινόμενου συνόλου) εμφανίζονται ελάχιστα (με ποσοστά μικρότερα του 0.6%), ενώ οι υποκατηγορίες ισότητα 5 και ισότητα 6 (ζητείται και στις δύο ο πληθάρθιμος του συνόλου αναφοράς) δεν εμφανίζονται καθόλου.

Οι 8 καταστάσεις που ανήκουν στην κατηγορία μετασχηματισμός μιας σχέσης αφορούν την εύρεση του μετασχηματισμού, χωρίς να υπάρχει κάποια κατάσταση στην οποία ζητείται να

βρεθεί η αρχική και η τελική σχέση. Ακόμα, από τις 3 καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία σύνθεση σχέσεων, οι δύο αφορούν την εύρεση της τελικής σχέσης και η μία αφορά την εύρεση μίας από τις αρχικές σχέσεις.

Στον πίνακα 60 παρουσιάζεται η κατανομή των καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των δημοτικών σχολείων της Ελλάδας στις διάφορες κατηγορίες ανά τάξη.

Πίνακας 60: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις κατηγορίες ανά τάξη.

Κατηγορία	Τάξη					
	A	B	Γ	Δ	Ε	Στ
	%	%	%	%	%	%
Αλλαγή	54.9	33.8	23.3	28.5	19.6	44.3
Συνδυασμός	42.4	46	55	55	55.4	40
Σύγκριση	0	10.8	21.7	14.7	7.2	11.4
Ισότητα	2.7	9.4	0	0	1.8	4.3
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0	0	1.8	10.7	0
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0	0	0	0	0
Σύνθεση σχέσεων	0	0	0	0	5.3	0
Σύνολο	100	100	100	100	100	100

Στον πίνακα 61 παρουσιάζεται η κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις διάφορες υποκατηγορίες όλων των κατηγοριών ανά τάξη.

Πίνακας 61: Κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγοριών όλων των κατηγοριών ανά τάξη.

Υποκατηγορία		Τάξη					
		A	B	Γ	Δ	Ε	Στ
		%	%	%	%	%	%
Αλλαγή	1	20.3	4.1	10	8.4	5.3	10
	2	19.5	21.6	8.3	7.3	8.9	8.6
	3	0	4.1	3.3	10.1	3.6	15.7
	4	13.3	1.3	1.7	1.8	1.8	7.2
	5	0	0	0	0.9	0	1.4
	6	1.7	2.7	0	0	0	1.4
Συνδυασμός	1	31.9	39.9	53.3	44	50.1	35.7
	2	10.5	6.1	1.7	11	5.3	4.3
Σύγκριση	1	0	5.4	16.6	9.3	3.6	10
	2	0	2	1.7	0.9	0	0
	3	0	2	1.7	0.9	3.6	0
	4	0	1.4	1.7	0.9	0	1.4
	5	0	0	0	0.9	0	0
	6	0	0	0	1.8	0	0
Ισότητα	1	2.7	6	0	0	0	4.3
	2	0	0.7	0	0	0	0
	3	0	2	0	0	1.8	0
	4	0	0.7	0	0	0	0

	5	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0
Μετασχηματισμός μιας σχέσης	0	0	0	1.8	10.7	0	
Σύνθεση μετασχηματισμών	0	0	0	0	0	0	
Σύνθεση σχέσεων	0	0	0	0	5.3	0	
Σύνολο	100	100	100	100	100	100	

Κυρίαρχα είναι τα λεκτικά προβλήματα ενός βήματος, αποτελούν το 77.7% των προβλημάτων τα οποία περιέχουν τουλάχιστον μία προσθετική κατάσταση. Το 20.5% των προβλημάτων είναι δύο βημάτων, το 1.2% είναι τριών βημάτων και το 0.6% είναι τεσσάρων βημάτων.

Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας, κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας στο οποίο ανήκουν το 75.4% των προσθετικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια. Δεύτερο σε συχνότητα είναι το δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας στο οποίο ανήκουν το 13.3% των καταστάσεων και τρίτο σε συχνότητα είναι το τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας στον οποίο ανήκουν το 11.3% των καταστάσεων.

4.7.2: Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Υπάρχουν συνολικά 345 λεκτικά προβλήματα στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων τα οποία περιέχουν μόνο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, από αυτά τα 334 είναι ενός βήματος, τα 10 είναι δύο βημάτων και το 1 είναι τριών βημάτων. Ακόμα υπάρχουν 73 προβλήματα δύο βημάτων που περιέχουν μία πολλαπλασιαστική και μία προσθετική κατάσταση, 2 προβλήματα τριών βημάτων που περιέχουν δύο προσθετικές καταστάσεις και μία πολλαπλασιαστική, 3 προβλήματα τριών βημάτων που περιέχουν δύο πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και μία προσθετική και 3 προβλήματα τεσσάρων βημάτων που περιέχουν δύο προσθετικές καταστάσεις και δύο πολλαπλασιαστικές. Οπότε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια είναι 444.

Στον πίνακα 65 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις διάφορες κατηγορίες.

Πίνακας 62: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις κατηγορίες.

Κατηγορία	Αναλογία	Σύγκριση	Καρτεσιανό γινόμενο	Ορθογώνιο	Σύνολο
Αριθμός καταστάσεων	416	16	0	12	444
Ποσοστά (%)	93.7	3.6	0	2.7	100

Όσον αφορά τις κατηγορίες, κυρίαρχη σε συχνότητα είναι η κατηγορία αναλογία (σύνολα που οι πληθάρημοι τους συνδέονται με σχέσεις αναλογικότητας), καθώς το 93.7% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια ανήκουν σε αυτήν. Οι κατηγορίες

σύγκριση (σύγκριση των πληθάρθμων δύο συνόλων της μορφής πόσες φορές μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο) και ορθογώνιο (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου) παρουσιάζονται με παρόμοια συχνότητα, πολύ μικρότερη σε σχέση με την κατηγορία αναλογία (γύρω στο 3.3%), ενώ η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο (αριθμός από σύνολα που περιέχουν ένα αντικείμενο από ένα πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από ένα δεύτερο σύνολο) δεν εμφανίζεται καθόλου.

Στον πίνακα 63 αναλύεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιλαμβάνουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις τέσσερις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Πίνακας 63: Κατανομή των καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία.

Αναλογία 1	Αναλογία 2	Αναλογία 3	Αναλογία 4	Σύνολο
75	205	75	61	416

Σχετικά με την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία, κυρίαρχη σε συχνότητα είναι η αναλογία 2 (ζητείται το γινόμενο), στην οποία ανήκουν το 46.2% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια. Επόμενες σε συχνότητα εμφάνισης είναι οι υποκατηγορίες αναλογία 3 (ζητείται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό) και αναλογία 1 (πολλαπλή αναλογία) οι οποίες εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα (16.9%). Λιγότερη συχνή υποκατηγορία της κατηγορίας είναι η αναλογία 4 (ζητείται ο πολλαπλασιαστής), στην οποία ανήκουν το 13.7% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων.

Στον πίνακα 64 παρουσιάζονται τα δεδομένα από την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις έξι υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Πίνακας 64: Κατανομή των καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση.

Σύγκριση 1	Σύγκριση 2	Σύγκριση 3	Σύγκριση 4	Σύγκριση 5	Σύγκριση 6	Σύνολο
1	0	8	7	0	0	16

Σχετικά με την κατηγορία σύγκριση, οι υποκατηγορίες σύγκριση 3 και σύγκριση 4 (και στις δύο ζητείται το σύνολο σύγκρισης) εμφανίζονται με παρόμοια ποσοστό (1.8% και 1.6%, αντίστοιχα), ενώ στην υποκατηγορία σύγκριση 1 (ζητείται η διαφορά) ανήκει μόλις μία κατάσταση.

Στον πίνακα 65 παρουσιάζονται τα δεδομένα από την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού στις δύο υποκατηγορίες της κατηγορίας ορθογώνιο.

Πίνακας 65: Κατανομή των καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας ορθογώνιο.

Ορθογώνιο 1 11	Ορθογώνιο 2 1	Σύνολο 12
-------------------	------------------	--------------

Η υποκατηγορία ορθογώνιο 1 (ζητείται το εμβαδόν) είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας ορθογώνιο, εκεί ανήκουν 2.5% των καταστάσεων. Στην υποκατηγορία ορθογώνιο 2 (ζητείται μία από τις πλευρές) ανήκει μόλις μία κατάσταση.

Στον πίνακα 66 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των δημοτικών σχολείων της Ελλάδας στις διάφορες κατηγορίες ανά τάξη.

Πίνακας 66: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις κατηγορίες ανά τάξη.

Κατηγορία	Τάξη					
	A	B	Γ	Δ	Ε	Στ
	%	%	%	%	%	%
Αναλογία	100	97.8	86.2	95.5	90.1	96.4
Σύγκριση	0	2.2	9.2	4.5	1.4	1.8
Καρτεσιανό γινόμενο	0	0	0	0	0	0
Ορθογώνιο	0	0	4.6	0	8.5	1.8
Σύνολο	100	100	100	100	100	100

Στον πίνακα 67 παρουσιάζεται η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις διάφορες υποκατηγορίες όλων των κατηγοριών ανά τάξη.

Πίνακας 67: Κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ελληνικών σχολείων στις υποκατηγοριών όλων των κατηγοριών ανά τάξη.

Υποκατηγορία		Τάξη					
		A	B	Γ	Δ	Ε	Στ
		%	%	%	%	%	%
Αναλογία	1	0	21.4	0	15	19.6	27.8
	2	53.3	57.3	54	41.7	31	42.6
	3	26.7	8.9	15	18	26.8	16.5
	4	20	10.2	17.2	20.8	12.7	9.5
Σύγκριση	1	0	0	0	0	0	0.9
	2	0	0	0	0	0	0
	3	0	2.2	4.6	3	1.4	0
	4	0	0	4.6	1.5	0	0.9
	5	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0
Καρτεσιανό γινόμενο	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0

Ορθογώνιο	1	0	0	4.6	0	7.1	1.8
	2	0	0	0	0	1.4	0
Σύνολο		100	100	100	100	100	100

Τα λεκτικά προβλήματα τα λύνονται σε ένα βήμα είναι κυρίαρχα, αποτελούν το 78.4% αυτών των προβλημάτων που περιέχουν τουλάχιστον μία πολλαπλασιαστική κατάσταση. Τα προβλήματα των δύο βημάτων αποτελούν το 19.5% των προβλημάτων, τα προβλήματα των τριών βημάτων το 1.4% και αυτά των τεσσάρων βημάτων αποτελούν το 0.7% των προβλημάτων.

Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας κυρίαρχο είναι το πρώτο επίπεδο της χαμηλής δυσκολίας στο οποίο ανήκουν το 76.8% των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων. Το 20.3% των καταστάσεων ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο της μεσαίας δυσκολίας και το 2.9% ανήκουν στο τρίτο επίπεδο της υψηλής δυσκολίας.

Κεφάλαιο 5^ο: Συμπεράσματα-Συζήτηση

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης που προηγήθηκε, παρατηρούνται ανομοιογένειες στον καταμερισμό των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, που περιέχουν συνολικά όλα τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού, στις διάφορες κατηγορίες και υποκατηγορίες. Ακόμα παρατηρούνται πολλές διαφορές στην κατανομή των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών στις διάφορες κατηγορίες και υποκατηγορίες ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των διαφόρων τάξεων.

Πιο συγκεκριμένα, ως προς τις προσθετικές καταστάσεις διαπιστώνεται αρχικά ότι κυριαρχούν οι κατηγορίες του συνδυασμού (ένωση συνόλων) και της αλλαγής (μετασχηματισμός πληθικού αριθμού συνόλου) στις οποίες ανήκουν το 84% των προσθετικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια. Η κατηγορία σύγκριση (σύγκριση πληθάριθμων δύο συνόλων) εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τις δύο πιο συχνές κατηγορίες (10.2%), οι κατηγορίες ισότητα (μετασχηματισμός συνόλου με βάση τον πληθάριθμο ενός άλλου συνόλου), μετασχηματισμός μιας σχέσης (μετασχηματισμός συνόλου που περιγράφεται από αρνητικούς αριθμούς) και σύνθεση σχέσεων (ένωση συνόλων που περιγράφονται από αρνητικούς αριθμούς) εμφανίζονται όλες με ποσοστά μικρότερα του 4%, ενώ η κατηγορία σύνθεση μετασχηματισμών δεν εμφανίζεται καθόλου.

Η ίδια ανισοκατανομή υπάρχει και στην εμφάνιση των διαφόρων υποκατηγοριών αυτών των καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με την κατηγορία αλλαγή, οι υποκατηγορίες αλλαγή 1 και αλλαγή 2 (ζητείται και στις δύο ο τελικός πληθικός αριθμός) εμφανίζονται με αρκετά μεγαλύτερη συχνότητα από τις υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας (γύρω στο 12%), οι υποκατηγορίες αλλαγή 3 και αλλαγή 4 (ζητείται και στις δύο ο μετασχηματισμός) εμφανίζονται με συχνότητα γύρω στο 5.5%, ενώ οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και αλλαγή 6 (ζητείται και στις δύο ο αρχικός πληθικός αριθμός) εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 1.4%. Στην κατηγορία συνδυασμός κυριαρχεί η υποκατηγορία συνδυασμός 1 (ζητείται το σύνολο της ένωσης) (41%), με την υποκατηγορία συνδυασμός 2 (ζητείται ένα από τα αρχικά σύνολα) να εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα από αυτήν (7.2%). Όσον αφορά τις κατηγορίες σύγκριση και ισότητα, οι υποκατηγορίες σύγκριση 1 και ισότητα 1 (ζητείται και στις δύο η διαφορά) εμφανίζονται με λίγο μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με τις υπόλοιπες υποκατηγορίες αυτών των κατηγοριών, οι οποίες εμφανίζονται όλες με συχνότητα μικρότερη του 1% ή καθόλου.

Σχετικά με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια, παρατηρείται επίσης μεγάλη ανομοιομορφία στη συνολική κατανομή τους στις διάφορες κατηγορίες. Κυριαρχεί η κατηγορία αναλογία (σύνολα που οι πληθάριθμοι τους συνδέονται με σχέσεις αναλογικότητας), με τις κατηγορίες σύγκριση (σύγκριση των πληθάριθμων δύο της μορφής πόσες φορές μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο) και ορθογώνιο (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου) να εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 4% και την κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο (αριθμός από σύνολα που περιέχουν ένα αντικείμενο από ένα πρώτο σύνολο και ένα αντικείμενο από ένα δεύτερο σύνολο) να μην εμφανίζεται καθόλου.

Παρατηρείται η ίδια ανισοκατανομή στην συχνότητα εμφάνισης των διάφορων υποκατηγοριών των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων. Σχετικά με την κατηγορία αναλογία, κυριαρχεί η υποκατηγορία αναλογία 2 (ζητείται το γινόμενο), με τις υποκατηγορίες αναλογία 1 (πολλαπλή αναλογία), αναλογία 3 (ζητείται το πολλαπλασιαζόμενο ποσό) και αναλογία 4 (ζητείται ο πολλαπλασιαστής) να εμφανίζονται με συχνότητα πολύ μικρότερη από αυτήν της αναλογίας 2. Οι υποκατηγορίες ορθογώνιο 1 (ζητείται το εμβαδόν), σύγκριση 3 και σύγκριση 4 (και στις δύο ζητείται το σύνολο σύγκρισης) εμφανίζονται με μικρή συχνότητα, ενώ οι υπόλοιπες υποκατηγορίες των κατηγοριών σύγκριση και ορθογώνιο εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 0.3% ή καθόλου.

Όλες αυτές οι κατηγορίες καταστάσεων είναι σύμφωνα με τους Vicente, Markano & Verschtffel (2018) χαμηλού επιπέδου δυσκολίας, οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια κυριαρχούν οι προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που ανήκουν σε υποκατηγορίες χαμηλού επιπέδου δυσκολίας. Ακόμα επισημαίνεται ότι τα λεκτικά προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν σε ένα βήμα αποτελούν την συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων.

Ακόμη είναι σημαντικό να τονιστεί ότι υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στο πλήθος των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια των διάφορων τάξεων. Έτσι, π.χ. το σχολικό εγχειρίδιο της Β' δημοτικού περιέχει τις περισσότερες καταστάσεις με 237, ενώ το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού περιέχει τις λιγότερες καταστάσεις με 127. Υπάρχουν επίσης μεγάλες διαφορές στο ποσοστό των καταστάσεων που περιέχει η κάθε τάξη που είναι προσθετικές, σε σχέση με το ποσοστό των καταστάσεων που είναι πολλαπλασιαστικές. Το σχολικό εγχειρίδιο με το μεγαλύτερο ποσοστό προσθετικών καταστάσεων είναι αυτό της Α' δημοτικού, στο οποίο το 88.2% των καταστάσεων είναι προσθετικές, ενώ το σχολικό εγχειρίδιο με το μεγαλύτερο ποσοστό πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι αυτό της Στ' δημοτικού όπου το 62.2% των καταστάσεων είναι πολλαπλασιαστικές. Αυτό ενδεχομένως μπορεί να ερμηνευθεί με βάση το ΑΠ και το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός είναι εκ φύσεως πιο περίπλοκος από την πρόσθεση, οπότε διδάσκεται με αυξημένη συχνότητα στις μεγαλύτερες τάξεις.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει οι κατηγορίες αλλαγή και συνδυασμός είναι αυτές που εμφανίζονται με την μεγαλύτερη συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια όλων των τάξεων. Πιο συγκεκριμένα. Η κατηγορία συνδυασμός εμφανίζεται με σταθερά μεγάλη συχνότητα σε όλες τις τάξεις, την μεγαλύτερη της συχνότητας σε σχέση με το σύνολο των προσθετικών καταστάσεων την έχει στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού στο οποίο το 55.4% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτήν, ενώ την μικρότερη συχνότητα της την έχει στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού όπου το 40% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτήν. Η κατηγορία αλλαγή δεν παρουσιάζει την ίδια σταθερότητα στην συχνότητά της, την μεγαλύτερη συχνότητα της την έχει στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού όπου το 54.9% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτήν, ενώ η μικρότερη συχνότητα εμφάνισης της είναι στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού όπου εμφανίζεται με συχνότητα 19.6%.

Οι κατηγορίες σύγκριση και ισότητα δεν παρουσιάζουν και αυτές σταθερότητα στην συχνότητα εμφάνισης τους ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των διάφορων τάξεων. Η κατηγορία σύγκριση δεν εμφανίζεται καθόλου στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού, ενώ

εμφανίζει την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης της στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού, όπου το 21.7% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτήν. Ακόμα η κατηγορία ισότητα δεν εμφανίζεται καθόλου στην Γ' δημοτικού και εμφανίζει την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης της στην Β' δημοτικού όπου το 9.4% των καταστάσεων ανήκουν σε αυτήν.

Η κατηγορία μετασηματισμός μιας σχέσης εμφανίζεται μόνο στις τάξεις Δ' και Ε' δημοτικού και η κατηγορία σύνθεση σχέσεων εμφανίζεται μόνο στην Ε' δημοτικού.

Οι υποκατηγορίες αλλαγή 1, 2, 3 και 4 εμφανίζουν μεγάλη απόκλιση στην συχνότητα εμφάνισης τους στα σχολικά εγχειρίδια των διάφορων τάξεων. Για παράδειγμα η υποκατηγορία αλλαγή 1 εμφανίζεται με συχνότητα 20.3% στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού και με συχνότητα 4.1% σε αυτό της Β' δημοτικού. Οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και 6 εμφανίζονται σταθερά σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια με μικρή συχνότητα ή καθόλου. Η υποκατηγορία συνδυασμός 1 εμφανίζεται με σταθερά υψηλή συχνότητα, κάτι που δεν ισχύει για την υποκατηγορία συνδυασμός 2 η οποία στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού εμφανίζεται με συχνότητα 10.5%, ενώ σε αυτό της Γ' δημοτικού εμφανίζεται με συχνότητα 1.7%. Οι υποκατηγορίες σύγκριση 1 και ισότητα 1 εμφανίζουν μεγάλες αποκλίσεις στις συχνότητες εμφάνισής τους στα σχολικά εγχειρίδια των διαφόρων τάξεων, ενώ οι υπόλοιπες υποκατηγορίες των κατηγοριών σύγκριση και ισότητα εμφανίζονται με σταθερά χαμηλή συχνότητα.

Σχετικά με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, η κατηγορία αναλογία κυριαρχεί στα σχολικά εγχειρίδια όλων των τάξεων του δημοτικού με συχνότητα εμφάνισης 93.7% στο σύνολο των λεκτικών προβλημάτων. Η μικρότερη συχνότητα εμφάνισης της κατηγορίας είναι 86.2% στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού, ενώ η μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης της είναι 100%, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού. Οι κατηγορίες σύγκριση και ορθογώνιο δεν παρουσιάζουν την ίδια σταθερότητα στην συχνότητα εμφάνισης τους στις διάφορες τάξεις. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' δημοτικού και οι δύο δεν εμφανίζονται καθόλου, ενώ σε αυτό της Γ' δημοτικού η κατηγορία σύγκριση εμφανίζεται με συχνότητα 9.2% και σε αυτό της Ε' δημοτικού η κατηγορία ορθογώνιο εμφανίζεται με συχνότητα 8.5%.

Σχετικά με τις υποκατηγορίες της κατηγορίας αναλογία, η αναλογία 2 εμφανίζεται με σταθερά υψηλή συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια όλων των τάξεων, η αναλογία 3 εμφανίζεται με σταθερά υψηλή συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια όλων των τάξεων εκτός από αυτό της Β' δημοτικού. Οι υποκατηγορίες αναλογία 1 και αναλογία 4 δεν εμφανίζονται με σταθερή συχνότητα, για παράδειγμα η αναλογία 1 στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' δημοτικού δεν εμφανίζεται καθόλου, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού εμφανίζεται με συχνότητα 27.8%. Η υποκατηγορία σύγκριση 6 (ζητείται το σύνολο αναφοράς) εμφανίζεται μόνο στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' δημοτικού, ενώ οι υποκατηγορίες σύγκριση 3 και σύγκριση 4 εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια των περισσότερων τάξεων αλλά με σταθερά χαμηλή συχνότητα. Σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο, η υποκατηγορία ορθογώνιο 1 εμφανίζει μεγάλη απόκλιση στην συχνότητα εμφάνισης της στα σχολικά εγχειρίδια, σε αυτό της Ε' δημοτικού εμφανίζεται με συχνότητα 7.1% και σε αυτό της Δ' δημοτικού δεν εμφανίζεται καθόλου. Τέλος η υποκατηγορία ορθογώνιο 2 (ζητείται μία από τις πλευρές του ορθογωνίου) εμφανίζεται μόνο στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις στις συχνότητες εμφάνισης των περισσότερων κατηγοριών και υποκατηγοριών, στο σύνολο των τάξεων αλλά και σε κάθε τάξη ξεχωριστά. Η μόνη κατηγορία προσθετικών καταστάσεων που εμφανίζεται με σταθερά υψηλή συχνότητα είναι ο συνδυασμός και η μόνη υποκατηγορία προσθετικών καταστάσεων που εμφανίζεται με σταθερά μεγάλη συχνότητα είναι ο συνδυασμός 1. Σχετικά με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, η μόνη κατηγορία που εμφανίζεται με σταθερά υψηλή συχνότητα είναι η αναλογία και η μόνη υποκατηγορία που εμφανίζεται με σταθερά μεγάλη συχνότητα είναι η αναλογία 2.

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω οι κατηγορίες συνδυασμός και αλλαγή της κατηγοριοποίησης των προσθετικών καταστάσεων είναι οι δύο πιο συχνά εμφανιζόμενες, τόσο στο σύνολο των τάξεων όσο και σε κάθε τάξη χωριστά, γεγονός που αν ισχύει συμφωνεί με τα αποτελέσματα από τις περισσότερες έρευνες που αναλύθηκαν. Ο καταμερισμός των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού της Ελλάδας, σε αυτές τις δύο κατηγορίες (συνδυασμός γύρω στο 45% και αλλαγή γύρω στο 30%) σε αυτό το κομμάτι είναι ανάλογος με τον καταμερισμό των προσθετικών καταστάσεων των σχολικών εγχειριδίων από τους εκδοτικούς οίκους από την Ισπανία (Tarraga-Minguez et al., 2021, Vicente, Markano & Verschtffel, 2018 και Vicente et al., 2022), την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022), την Σοβιετική Ένωση (Stigler, 1986) και των ΗΠΑ (Stigler, 1986). Η κατηγορία σύγκριση είναι η τρίτη πιο συχνή και η κατηγορία ισότητα εμφανίζεται ελάχιστα (με ποσοστό μικρότερο του 4%), αυτά τα αποτελέσματα επίσης συμφωνούν με τα αποτελέσματα της πλειοψηφίας των ανάλογων ερευνών σε σχολικά εγχειρίδια άλλων χωρών, που συναντήθηκαν στην βιβλιογραφία.

Ός προς την κατανομή των προσθετικών καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες της κατηγορίας αλλαγή, οι υποκατηγορίες αλλαγή 1 και αλλαγή 2 εμφανίζονται με την μεγαλύτερη συχνότητα, αν ισχύει το αποτέλεσμα αυτό είναι ανάλογο με τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών που συναντήθηκαν στην βιβλιογραφία. Η συχνότητα εμφάνισης αυτών των δύο υποκατηγοριών στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια (αλλαγή 1 γύρω στο 8% και αλλαγή 2 γύρω στο 15%) είναι ανάλογη με αυτήν που παρατηρήθηκε στα σχολικά εγχειρίδια από τους εκδοτικούς οίκους από την Ισπανία (Tarraga-Minguez et al., 2021, Vicente, Markano & Verschtffel, 2018 και Vicente et al., 2022) και την Σιγκαπούρη (Vicente et al., 2022). Κάτι το οποίο διαφέρει από την πλειοψηφία των ανάλογων ερευνών που συναντήθηκαν στην βιβλιογραφία, είναι η συχνότητα εμφάνισης των υποκατηγοριών αλλαγή 3 και αλλαγή 4, στις περισσότερες έρευνες αναφέρεται ότι αυτές εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 4.1% κάτι που δεν συμφωνεί με τα αποτελέσματα από την ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων, όπου εμφανίζονται με συχνότητα γύρω στο 12%. Οι υποκατηγορίες αλλαγή 5 και αλλαγή 6 εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 2%, κάτι που συμφωνεί με τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών που συναντήθηκαν στην βιβλιογραφία.

Σχετικά με την κατηγορία συνδυασμός, η υποκατηγορία συνδυασμός 1 είναι κυρίαρχη κάτι που συμφωνεί με τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών. Η υποκατηγορία συνδυασμός 2 εμφανίζεται με πολύ μικρότερη συχνότητα από την υποκατηγορία συνδυασμός 1 (γύρω στο 7%), αυτό το αποτέλεσμα είναι ανάλογο με αυτό που παρατηρήθηκε στα σχολικά εγχειρίδια από εκδοτικούς οίκους της Σοβιετικής Ένωσης (Stigler, 1986) και των ΗΠΑ (Stigler, 1986).

Όσον αφορά την κατηγορία σύγκριση, η υποκατηγορία σύγκριση 1 είναι κυρίαρχη, με τις υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας να εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 1.3%, αυτή η κατανομή είναι ανάλογη με την κατανομή των καταστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια από τις ΗΠΑ (Stigler, 1986). Η υποκατηγορία ισότητα 1 είναι η κυρίαρχη σε συχνότητα υποκατηγορία της κατηγορίας ισότητα, με τις υπόλοιπες υποκατηγορίες της κατηγορίας να εμφανίζονται με συχνότητα μικρότερη του 0.6%. Αυτή η κατανομή είναι ανάλογη με αυτές που συνάντησαν οι περισσότερες έρευνες στην βιβλιογραφία.

Ο καταμερισμός των προσθετικών καταστάσεων στις κατηγορίες συνάδει με τον καταμερισμό της πλειοψηφίας των σχολικών εγχειριδίων άλλων χωρών που συναντήθηκαν σε έρευνες στην βιβλιογραφία. Οι κατηγορίες αλλαγή και συνδυασμός είναι οι δύο πιο συχνές, η κατηγορία σύγκριση είναι η τρίτη πιο συχνή και η κατηγορία ισότητα εμφανίζεται με πολύ μικρή συχνότητα. Όσον αφορά την κατανομή των καταστάσεων στις διάφορες υποκατηγορίες πάλι είναι ανάλογος σε μεγάλο βαθμό με τις κατανομές ανάλογων ερευνών στην βιβλιογραφία. Η μόνη διαφορά που παρατηρήθηκε είναι η μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης των υποκατηγοριών αλλαγή 3 και αλλαγή 4 σε σχέση με τις ανάλογες έρευνες στην βιβλιογραφία.

Ως προς τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, τα αποτελέσματα από την κατανομή τους στα σχολικά εγχειρίδια των ελληνικών σχολείων συμφωνούν σε πολύ μεγάλο βαθμό με αυτά των ερευνών που αναλύθηκαν στο θεωρητικό μέρος. Στα σχολικά εγχειρίδια που αναλύθηκαν σε όλες τις έρευνες της βιβλιογραφίας, τουλάχιστον το 89% των καταστάσεων ανήκουν στην κατηγορία αναλογία, κάτι το οποίο συμφωνεί με την τα αποτελέσματα από την ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων (93.7%). Σύμφωνα με την ανάλυση από την παρούσα έρευνα στα σχολικά εγχειρίδια από την Ελλάδα η κατηγορία σύγκριση είναι η δεύτερη πιο συχνή πολλαπλασιαστική κατηγορία, η κατηγορία ορθογώνιο είναι η τρίτη πιο συχνή και η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο είναι πρακτικά ανύπαρκτη, αυτά τα αποτελέσματα συνάδουν με τα αποτελέσματα των περισσότερων ανάλογων ερευνών σε σχολικά εγχειρίδια διαφόρων χωρών.

Όσον αφορά την κατηγορία αναλογία, στα αποτελέσματα αναλύσεων σχολικών εγχειριδίων που συναντάμε στην βιβλιογραφία, η υποκατηγορία αναλογία 2 είναι κυρίαρχη με τις υποκατηγορίες αναλογία 1, αναλογία 3 και αναλογία 4 να εμφανίζονται με πολύ μικρότερη συχνότητα από την υποκατηγορία αναλογία 2. Αυτά τα αποτελέσματα είναι όμοια με τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων. Στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια οι μόνες υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκρισης που εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 0.3% είναι η σύγκριση 3 και η σύγκριση 4, κάτι το οποίο συμφωνεί μόνο με την ανάλυση των Vicente, Markano & Verschtffel (2018), των σχολικών εγχειριδίων από την Ισπανία. Στην ανάλυση των Vicente et al. (2022) σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια από εκδοτικό οίκο της Ισπανίας, μόνο υποκατηγορία σύγκριση 1 εμφανίζεται με συχνότητα μεγαλύτερη του 0.3%, ενώ στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων από τον εκδοτικό οίκο της Σιγκαπούρης μόνο οι υποκατηγορίες σύγκριση 1 και σύγκριση 3 εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 0.3% (Vicente et al., 2022). Σχετικά με την κατηγορία ορθογώνιο, σε όλες τις ανάλογες έρευνες στην βιβλιογραφία, η υποκατηγορία ορθογώνιο 1 είναι η μόνη που εμφανίζεται με συχνότητα μεγαλύτερη του 1%, με την υποκατηγορία ορθογώνιο 2 να

εμφανίζεται ελάχιστα, αυτά τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με τα αποτελέσματα από την ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων.

Η κατανομή των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στις διάφορες κατηγορίες συνάδει με τις κατανομές ανάλογων ερευνών σε σχολικά εγχειρίδια άλλων χωρών. Η κατηγορία αναλογία είναι κυρίαρχη, δεύτερη πιο συχνή είναι η κατηγορία σύγκριση και τρίτη η κατηγορία ορθογώνιο, ενώ η κατηγορία καρτεσιανό γινόμενο εμφανίζεται με ποσοστό μικρότερο του 0.2%. Ο καταμερισμός των καταστάσεων στις υποκατηγορίες είναι επίσης ανάλογος σε μεγάλο βαθμό στους καταμερισμούς από ανάλογες έρευνες στην βιβλιογραφία. Η μόνη διαφορά σε σχέση με τις έρευνες στην βιβλιογραφία είναι στην κατανομή των καταστάσεων στις υποκατηγορίες της κατηγορίας σύγκριση, η οποία είναι ανάλογη με την κατανομή που συνάντησαν οι Vicente, Markano & Verschtffel (2018) στην έρευνα τους πάνω στα σχολικά εγχειρίδια από την Ισπανία και διαφέρει από τις υπόλοιπες έρευνες στην βιβλιογραφία.

Η κατανομή των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων σε κατηγορίες και υποκατηγορίες δεν γίνεται ομοιόμορφα. Κάποιες κατηγορίες και υποκατηγορίες εμφανίζονται με πολύ μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με τις υπόλοιπες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έρχονται σε επαφή με μεγάλη ποικιλία αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων, πράγμα απαραίτητο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων λύσης προβλημάτων. Ακόμα όπως αναφέρεται παραπάνω οι καταστάσεις που εμφανίζονται με την υψηλότερη συχνότητα ανήκουν σε υποκατηγορίες χαμηλής δυσκολίας και η λύση τους σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να γίνει με την χρήση της επιφανειακής προσέγγισης, η οποία επιτρέπει στους μαθητές να λύνουν προβλήματα με την χρήση λίγης ή καθόλου μαθηματικής λογικής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν την μαθηματική τους λογική και την ικανότητα λύσης προβλημάτων τους.

Τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από την έρευνα εμπίπτουν σε περιορισμούς. Η ανάλυση δεν λαμβάνει υπόψιν λεκτικά προβλήματα τα οποία αφορούν ορισμένα βασικά στοιχεία των σχολικών εγχειριδίων, όπως την σύνθεση και την ανάλυση ενός αριθμού, την μετατροπή μονάδων και την ανάλυση χρημάτων.

Τέλος, θα άξιζε τον κόπο να εξεταστεί σε μελλοντικές έρευνες η επιρροή της περιορισμένης ποικιλίας προβλημάτων που έρχονται σε επαφή οι μαθητές μέσω των σχολικών εγχειριδίων, στην ανάπτυξη της ικανότητας λύσης προβλημάτων από αυτούς.

Βιβλιογραφία

- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202.
- Chang, C. C., & Silalahi, S. M. (2017). A review and content analysis of mathematics textbooks in educational research. *Problems of Education in the 21st Century*, 75(3), 235-251.
- Desli, D., & Loukidou, H. (2014). Addition and subtraction word problems in greek grade a and grade b mathematics textbooks: distribution and children's understanding. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 8, 340-354.
- De Corte, Erik, et al. "Teaching word problems in the first grade: A confrontation of educational practice with results of recent research." *Using research in the professional life of mathematics teachers*. (1985): 186-195.
- Fagginger Auer, M. F., Hickendorff, M., Van Putten, C. M., Béguin, A. A., & Heiser, W. J. (2016). Multilevel latent class analysis for large-scale educational assessment data: Exploring the relation between the curriculum and students' mathematical strategies. *Applied Measurement in Education*, 29(2), 144-159.
- Heller, J. I., & Greeno, J. G. (1978, May). Semantic processing in arithmetic word problem solving. In *annual meeting of the Midwestern Psychological Association, Chicago*.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276–295). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Kilienė, I. (2021). On a classification of word problems from the first grade Lithuanian textbooks. *Lietuvos matematikos rinkinys. Ser. A*, 61, 18-24.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics*, 13(4), 373-394.
- Olkun, S., & Toluk, Z. (2002). Textbooks, word problems, and student success on addition and subtraction. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 11(18), 162-170.
- Pongsakdi, N., Brezovszky, B., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). A comparative analysis of word problems in selected Thai and Finnish textbooks. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Szeged: Hungary.
- Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and instruction*, 5(1), 49-101.
- Sievert, H., van den Ham, A. K., & Heinze, A. (2021). Are first graders' arithmetic skills related to the quality of mathematics textbooks? A study on students' use of arithmetic principles. *Learning and Instruction*, 71, 101401.

- Sievert, H., van den Ham, A. K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 74, 101716, 1-13.
- Singh, P. (2006). An analysis of word problems in school mathematics texts: Operation of addition and subtraction. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 29(1), 41-61.
- Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., & Sook Kim, M. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and instruction*, 3(3), 153-171.
- Tárraga-Mínguez, R., Tarín-Ibáñez, J., & Lacruz-Pérez, I. (2021). Analysis of word problems in primary education mathematics textbooks in Spain. *Mathematics*, 9(17), 1-18.
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in educational evaluation*, 31(4), 315-327.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics*. London: Pearson Education UK.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the learning of mathematics*, 3(2), 31-41.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, 52(2), 83-94.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 41-59.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, 52(1), 1-16.
- Vicente, S., Manchado, E., & Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks/Resolución de problemas aritméticos verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, 30(1), 71-104.
- Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., & Múñez, D. (2022). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 111(3), 375-397.
- Vicente, S., Sánchez, R., & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: A comparison between Singapore and Spain. *European Journal of Psychology of Education*, 35(3), 567-587.
- Xin, Y. P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, 100(6), 347-360.
- Yeap, B. H., Ferrucci, B. J., & Carter, J. A. (2006). Comparative study of arithmetic problems in Singaporean and American mathematics textbooks. In *Mathematics education in different cultural traditions-A comparative study of east Asia and the West* (pp. 213-225). Springer, Boston, MA.